理 化 用 高 等 算 學

下 册

J. W. Mellor 著
徐 燮 均 譯

商務印書館發行

第五章　無限級數及其用途

(Infinite Series and its Uses)

『在抽象的算學定理中,對於眞理的近似法是完善的。……在物理科學中則不然,我們所研究者爲最小而可感覺的量』。—— V. Stanley Jevons.❶

§ 91. 何謂無限級數(What is an Infinite Series?)

截取距離 AB (圖一百二十二) 爲單位長。二等分 AB 於 O_1; 二等分 O_1B 於 O_2; 二等分 O_2B 於 O_3; 等等。

圖一百二十二

繼續這個運算, 我們可以儘量接近於 B。換言之, 我們若將下列一串的項數取得充分的多, 如

$$AO_1+O_1O_2+O_2O_3+\cdots\cdots,$$

我們可使牠與 AB 之差儘量的小。這是無限級數的項爲,

$$1=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots \qquad \text{於無限} \qquad (1)$$

的幾何意義。這樣的式子,其中逐　　　律者,稱爲級數

---

❶ In abstract mathematical theore　　　...ation to truth is perfect. ......In physical science, on the contrary, we treat of the least quantities which are perceptible." W. Stanley Jevons.

(Series)。

例　我在此時複述 Achilles 與龜的故事或許可告無罪。Achilles 行路時快於龜十倍,但出發時龜在他前面十呎。當 Achilles 走前十呎時，則龜在他前面一呎；當 Achilles 再走前一呎時，則龜在他前面 $\frac{1}{10}$ 呎；當 Achilles 再走前 $\frac{1}{10}$ 呎時，則龜在他前面 $\frac{1}{100}$ 呎；如此繼續進行無有盡期；故 Achilles 永遠追不到龜。這然有些謬誤存在,但謬誤在什麼地方?

當項數無限增加而此無限級數之和漸漸接近於某個一定的有限值者，此級數稱爲**斂級數** (convergent series)。斂級數之和卽爲其極限值(第 6 節)。反之,若一個無限級數之和,當項數取得充分的多時,可以變得比任何大的一定的有限值更大者，此級數稱爲**散級數** (divergent series)。例如,

$$1+2+3+4+\cdots\cdots \text{至於無限。} \tag{2}$$

散級性而物理工作中不甚用到,而斂級數是常常應用。❶

讀者對於斂級數與散級數應該能夠區別。不久我將講到試驗之法。爲求簡便起見，可以作爲本書所研究的級數都適合於應用斂性試驗法的。這須常存在心,否則會得到謬誤的結論。E. W. Hobson 所著 On the Infinite and Infinitesimal in Mathematical Analysis, London, 1902，是一本小册子，此時閱讀最有趣味。

設 S 爲斂級數的極限值或斂級數之和，

---

❶ 在法國有一個時候,曾經懸獎徵求關於散級數在物理算學上的用途的論文。

$$S=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^n+ar^{n+1}+\cdots\cdots\text{至於無限。} \tag{3}$$

設 r 小於 1。我們割取最初的 n 項，即 ar^{n-1} 以後統統割去。以 s_n 表示最初 n 項之和，σ_n 表示割去各項之和。則

$$s_n=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1} \tag{4}$$

兩邊乘以 r，

$$rs_n=ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^n\text{。}$$

從(4)減去此式得，

$$s_n(1-r)=a(1-r^n)\text{；或}\quad s_n=a\frac{1-r^n}{1-r}\text{。} \tag{5}$$

顯然級數(3)可寫爲，

$$S=s_n+\sigma_n \tag{6}$$

若取最初 n 項之和代表 S 則所生差誤爲下列所示，

$$\sigma_n=S-s_n\text{。}$$

這個差誤當項數取得無限多時可使消去，即 $\mathrm{Lt}_{n=\infty}\sigma_n=0$。但

$$s_n=a\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}\text{。}$$

當 n 爲無限大時，最後一項消去，

$$\text{即}\quad \mathrm{Lt}_{n=\infty}\frac{ar^n}{1-r}=0\text{。}$$

故級數(3)的各項之和爲

$$S=\frac{a}{1-r}\text{。} \tag{7}$$

級數(3)普通稱爲幾何級數(geometrical series)。若 r 等於或大於 1，則當 $n=\infty$ 時 S 爲無限大，此級數爲散級數。

一個無限級數，只取其有限個項來表示，其所生的差誤之數量可如下決定之。一個無限級數

$$S=\frac{1}{1-r}=1+r+r^2+\cdots\cdots+r^{n-1}+\frac{r^n}{1-r^n} \quad (8)$$

由於略去第 n 項以後的部份而 S 中所生的差誤，爲

$$\sigma_n=\frac{r^n}{1-r}。 \quad (9)$$

當 r 爲正時，σ_n 爲正，故結果比 S 應有的值略小；但若 r 爲負，

$$\sigma_n=\pm\frac{r^n}{1-r}。 \quad (10)$$

這是說結果比 S 應有的值略大或略小，要視 n 的爲奇數或偶數而定。

例一 設欲測定有機酸在各種濃度時的導電性；最初量測 50 c.c. 濃度爲 c 的溶液。然後取去 25 c.c 加入 25 c.c. 的蒸餾水，再量測之。如此再重複五次。最後電池內此酸的濃度爲何？顯然我們需欲級數 $c\left\{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots\right\}$的第 7 項。但此級數的第 n 項爲 $c\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，故所求解答爲 $\left(\frac{1}{2}\right)^6 c$。

例二 盛氣器及附件共有容積 a，其上裝有抽氣機，其圓筒中活塞在頂上時，圓筒容積爲 b。抽氣機作第一個動程時排出空氣 b，證明在完畢第三個動程時器中空氣的密度爲原來的 0.75，已知 $a=1000$ c.c.，$b=100$ c.c.

示意： 設原有的密度爲 ρ_0。在第一個動完畢時空氣的密度爲 ρ_1，則 $\rho_1(a+b)=\rho_0 a$；在第二個動程完畢時空氣的密度爲 ρ_2，則

$\rho_2(a+b)=\rho_1 a$;　$\therefore\ \rho_2(a+b)^2=\rho_0 a$。在第 n 個動程完畢時 $\rho_n(a+b)^n=\rho_0 a^n$;　$\therefore\ \rho_3(1000+100)^3=1000^3$;　$\therefore\ \rho_3=0.75$。

§ 92. 洗滌沉澱(Washing Precipitates)

級數顯然應用於下列各種的計算：用醚(Ether) 洗滌有機物質；沉澱的洗滌；Mallet 氏用水搖蕩空氣而分離出氧的方法等等。我們可以想像放在濾紙上的沉澱；假定 c_0 代表從沉澱上洗下來的母液(Mother liquid) 的濃度；　為沉澱取盡後留下的液體的體積；v_1 為傾倒在濾紙上洗滌沉澱用的液體的體積。

例一　停留於燒杯底的沉澱含有母液 v c.c.，用緩傾法 (decantation) 洗滌之，即重複用蒸餾水注入至 v_1 c.c. 再傾盡之。設每次傾倒，沉澱與容器終是留持 v c.c. 的液體在內，在第 n 次傾倒後，求沉澱中所含母液的體積百分數，設沉澱的體積為很小，可以略去不計。

答：　$100\left(\dfrac{v}{v_1}\right)^{n-1}$。

示意：　燒杯內的溶液，在第一次注滿時，含有母液的 $\dfrac{v}{v_1}$，傾倒後尚有 $\dfrac{v}{v_1}$ 的 v c.c. 留在沉澱之內。再注滿時，燒杯內的溶液含有 $\left(\dfrac{v^2}{v_1}\right)\dfrac{1}{v_1}$ 的母液，這樣我們建立出一個級數如下：

$$v\left\{1+\frac{v}{v_1}+\left(\frac{v}{v_1}\right)^2+\left(\frac{v}{v_1}\right)^3+\cdots\cdots\right\}。$$

例二　證明在第一，第二，……第 n 次洗滌後，沉澱中的剩餘母

液各為

$$vc_1=\frac{v}{v+v_1}vc_0;\quad vc_2=\left(\frac{v}{v+v_1}\right)^2vc_0;\cdots\cdots vc_n=\left(\frac{v}{v+v_1}\right)^n vc_0。$$

這是很易見到的，如雜質一樣沾染在沉澱內的剩餘母液 vc_n，當 $\frac{v}{v+v_1}$ 的值愈小時則愈少；而此分數的值又須當 v 的值愈小而 v_1 的值愈大時，則愈小。故此推論得 (i) 沉澱愈能沖得周到——減小 v 的值；(ii)洗滌液體的體積愈大——增大 v_1 的值——，則沉澱的洗滌更為有效。

例 設注在濾紙上的沉澱之上的液體之量為存在沉澱中的剩餘液體之量九倍，若沾染在沉澱中的雜質為一克，證明在第四次洗滌後還 0.0001 克的雜質留存在沉澱中。

在這討論中用着什麼簡化的假定呢？我們假定濾紙上的雜質，當 v_1 體積的洗液注於沉澱上而沖洗時，亦減去 v_1 分之一。由於表面收縮或吸收的作用而堅黏的雜質之量，我們略去不計。結果，事實上不會如理論假定的那樣洗得周全。這裏是可供研究之處。我們是否可以作一更好的假定：說吸收的雜質之量比例於溶液的濃度？且看根據這樣的假定在第 n 次洗滌後沾在沉澱中的雜質之量如何。

設 a 為由於表面收縮而留存在雜質中的溶液之量；b 為溶液之濃度。若用上述假定則

$$b=ka,$$

此中 k 為比例常數。設 v c.c. 的洗液加於吸收着 a c.c. 母液的沉澱上。雜質中有 a_0-a_1 c.c. 入於溶液，但溶劑為 v c.c.，故溶液濃

度$\frac{a_0-a_1}{v}$；於是留於沉澱中雜質之量爲 a_1，則

$$\frac{a_0-a_1}{v}=ka_1。\tag{11}$$

傾盡溶液再加 v c.c. 的洗液，留於沉澱中的雜質將爲 a_2，則

$$\frac{a_1-a_2}{v}=ka_2。\tag{12}$$

從(11)(12)消去 a_1，得第二次洗滌後，

$$a_2=\frac{a_0}{kv+1}$$

第 n 次洗滌後，

$$a_n=\frac{a_0}{kv+1}。$$

但這些都根據於一個未經覆證的假定，即 k 爲常數，此問題的解決只有求之於實驗。參閱 R. Bunsen, Liebig's Ann., **148**, 269, 1868。

§ 93. 斂級數試驗法 (Tests for Convergent Series)

算學家在研究無限數級的性質時發見幾個很有趣味的事實。這些結果，許多可用以試驗已知級數的斂性。這些不過舉出三種試驗法。

1. 若級數各項，正負相間，且絕對值逐項減小，則此級數是斂級數。例如，級數

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots$$

這可改寫爲下列形式之一：

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots\cdots;$$

$$1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)-\cdots\cdots$$

括號內都是正數。前者之和大於 $1-\frac{1}{2}$,而後者之和小於 1,結此級數之和必為 1 與$\frac{1}{2}$之間的某數。故此級數為斂級數。若各項為正的級數是斂級數,則其中幾項改為負號或各項都改為負號後仍是斂級數。換言之,若使一個級數的各數都改為正號後是斂級數,則此原來含有正負號的級數是斂級數。

II. 若兩個無限級數

$$u_0+u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots;$$

$$與\ v_0+v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots;$$

已知前者為斂級數,且後者各項不大於前者相當的各項,則後者亦為斂級數。若前者為散級數,而後者各項又不小於前者相當的各項,則後者亦為散級數。這稱為比較試驗法(comparison test)。比較時用得最多的是幾何級數

$$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^n+\cdots\cdots$$

此中 r 小於 1,已知其為斂級數,r 等於或大於 1 已知其為散級數;又如

$$1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\cdots\cdots$$

當 m 大於 1,知為斂級數,m 等於或小於 1,知為散級數。

例 證明 $1+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{66}+\cdots\cdots$ 為斂級數,可與幾何級數

$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots\cdots$ 相比較。

III. 若無限級數中從某個一定的項起，其每項與前一項之比的絕對值比小於 1 的某數量還小，則此級數為斂級數。例如，有一個級數從一定的項起為

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots$$

設 s_n 為這裏最初 n 項之和。我們可寫為

$$s_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots$$

重行排列各項，可得

$$s_n=a_1\left(1+\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_4}{a_3}\cdot\frac{a_3}{a_1}+\cdots\cdots\right)。$$

分數$\frac{a_{n+1}}{a_n}$稱為試驗比值(ratio test)。假使試驗比值

$$\frac{a_2}{a_1}<r;\quad \frac{a_3}{a_2}<r;\quad \frac{a_4}{a_3}<r;\cdots\cdots$$

從第 91 節(3)與(5)知

$$s_n<a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

故依同節(7)，若 $r<1$，則

$$s_n<\frac{a_1}{1-r}。$$

故項數儘量多取時，從 a_1 起的各項之和還是小於一個有限數，卽 a_1 起的級數為斂級數。

例一　級數 $1+\frac{1}{\underline{|1}}x+\frac{1}{\underline{|2}}x^2+\frac{1}{\underline{|3}}x^3+\cdots\cdots$為斂級數，因為當 $n=\infty$

時試驗比值$\frac{x}{n}=0$。

例二　級數 $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^3+\cdots\cdots$爲斂級數，設 x 小於 1。

一個級數很可以最初逐項增大，到了某項方始逐項減小。在下列級數中

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots+nx^{n-1}+\cdots\cdots$$

其試驗比值，

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{nx}{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)x。$$

若 n 變爲充分的大，則此試驗比值可以儘量與 x 接近。故 x 若小於 1，則此級數爲斂級數。此比值欲小於 1，卽欲

$$\frac{nx}{n-1}<1,\quad 卽\ n>\frac{1}{1-x};$$

故必須 n 大於 $\frac{1}{1-x}$時試驗比值小於 1。設 $x=\frac{9}{10}$，則 $\frac{1}{1-x}=10$，故第 10 項後各項方才開始減小。

這裏幾個試驗用之於學者普通情形下所遇見的級數已很夠了。若試驗比值大於 1，則級數爲散級數；若等於 1，則此試無效。

§ 94. 科學工作中的近似計算 (Approximate Calculations in Scientific Work)

在化簡實驗結果爲最後的形式時，往往遇到許多使人厭煩的計算工作，若能注意於研究中所用量測法的準確度，或可免去此種麻煩。這

是一個最最普通的錯誤，將算術計算工作求到出於實際工作的精確度以外。如 Dulong 計算折光率至八位數字，而其實只能符合到三位。問他『爲什麼』？Dulong 反給以譏諷的回覆！『我看不出理由來捨去後面幾位數字，因爲，若前面的錯了，後面也許會對的』！

有一本記錄『論鋁的原子量』現在正在我的面前，我讀到『0.646 克的氯化鋁可以得出 2.0549731 克的氯化銀……』。我不能明白著者如何能求到這七位小數，在這論文之初，明明他表示過他所用的天平的靈敏度不能超出 0.0001 克。有本通行的『氣體分析』的著作告訴我們說 1 c.c. 的二氧化碳重 0.00196633 克。這個數目是假定二氧化碳爲理想氣體而算出的，但這個氣體是有名的例外。緯度的不同也能使得有 ±0.000003 克的差異了。故此這個數目的最後三位是沒有用處的。R. Bacon 說『不必要的過多是很有妨礙的，…… 徒使工作討厭而已』。

雖然 Stas, Whitworth 之類的量測或者需求六位或八位的小數，但很少觀測能夠正確至多於四位或五位的。就是這種正確度，只有精密的人在特別的境況之下可以求得。在化學中觀測的結果能夠符合到小數第二位或第三位已經比較的少見了。

再者，最好的計算多少終有些不徹底的近似，因爲公式得出時用着『簡化的假定』而實驗的結使參照這些公式的。故此若計算結果至出於實驗所能覆證之範圍以外是無甚好處的。『計算值的精確度求到比觀測值的還大是沒有益處的，不過前者也不應小於後者』。(H. Poincaré 著 Mécanique Céleste, Paris, 1892.)

在科學上的計算中，通常的規則終是比材料的準確度多算一位小數。換言之，在第一位不能確信的數字後所有的小數統統捨去。剩下的數字稱爲有效數字 (significant figures)。

例 在 1.540 一數中共有四位有效數字，末位附有一個 0，則共有三位小數，表示量測時精確到千分之一；在 0.00151 中亦有三個有效數字，其前所附的 0 是確定小數點的位置；而在 15,400 中並未表明末尾兩個 0 是有效數字與否，故此有效數字可爲三位，四位，或五位不定。

在略去無用的小數時，被略去的第一位適用『四捨五入』的規定。故此 9.2 這個數目是恰恰代表 9.2 呢還是代表 9.15 與 9.24 間的任何數，我們必須辨別清楚。在所謂正確科學 (exact science) 中採用後面一種解釋：即 9.2 代表 9.15 與 9.24 間的任何數。兩個數量相差在實驗差誤的範圍之內，作爲是相等的。

對數——在實際工作中很少的計算是在四位或五位對數的範圍之外的。所以更精詳的對數表可以說用不到。市上銷行的對數表小册，種類很多，但實用上無甚分別。

加法與減法——如 9.2 與 0.4913 相加時，須捨去最後的 3 與 1 而寫其答數爲 9.69，不應該寫爲 9.6913. 說明 $5.60+20.7+103.193=129.5$ 含有差誤約爲 0.01，即約爲百分之 0.08.

乘法與除法——2.25π 這乘積代表直徑爲 2.25 單位的圓周之長；π 是圓周率，其數値 Shanks 氏 (Proc. Roy. Soc., **22**, 45, 1873) 已經算到七百位小數以上，即 $\pi=3.14159265358979 3\cdots\cdots$ 這兩個數字中

2.25 當然要靠不住些。答數我們不寫爲可笑的 7.0685808625……；而寫爲 7.07。再如 W. H. Colvill 雖然將$\sqrt{2}$算至一百十位小數，但我們很少需要半打以上的有效數字。

無疑的，這裏可以不必提醒讀者的了，在科學的計算上乘法與除法可以採用簡法，以免寫出在精確度以內，所不需要的數字。下列者爲乘法與除法的簡法(shortened multiplication and division)不必解釋即能明瞭：

簡　乘　法	簡　除　法
9.774	365.4)3571.3(9.774
365.4	3288.6
2932.2	282.7
586.4	255.8
48.$\bar{9}$	26.9
3.9	25.5
3571.$\bar{4}$	1.4

乘數從最左的數位乘起，逐位向右，與普通的乘法方向恰相反。在除法中每除一步，除數捨去最後的一位。商數的最後一位可用心算求之。用『四捨五入』法，凡『五入』之處，通常在此數字之頂加一短劃，表示結果中亦許過大或過一些。

W. Ostwald 在他著的 Hand-und Hilfsbuch zur Ausführung Physikochemiker Messungen. Leipzig. 1893，曾經說過，『這些方法的用途的重要終歸不會過分的。乘與除的普通方法反須稱爲不合科學』。詳細的情形，見於 E. M. Langley 所著小册名 A Treatise on Computation, London, 1895。

在近似計算中因捨去小數而導入的差誤。捨去小數時欲不使數字的『抱進抱出』而發過大或過小，必須相當注意，使最後結果中正的差誤與負的差誤相抵銷。在一串數字計算中最後一位的5字之捨去或進位須視其前一位之為奇或偶而定，最好於捨去或進位後，前一位恆為偶數。例如 3.75 則寫 3.8 而 3.85 則寫 3.8。

兩個近似數之積的差誤百分數很近於各個差誤百分數的代數和。若一個近似數的差誤是正的，另一個的差誤是負的，兩者之積幾乎是正確的，因差誤恰能互相抵銷。

例 19.8×3.18。第一個因數可以寫為 20 而含着 1% 的正差誤，故 $20\times3.18=63.6$ 中含有正差誤 1%。從 63.6 中除去這差誤，則得 62.95。實在的結果為 62.964。

兩個近似數之商的差誤百分數是從除數的差誤百分數中減去被除數的差誤百分數而求得之。若被除數的正誤差與除數的正誤差相等，商數中的差誤在實用上可以作為抵銷的了。

下列兩種近似值間有很清楚的分別：一種是物理常數的近似值，這些很少能有三位或四位有效數字的；另一種是不可公約數如 $\pi, e, \sqrt{2}$，……等的近似值，這些可以計算到任何需要的精確程度。π 之值我們若取 $\frac{22}{7}$ 而不取 3.1416，則**絕對誤差** (Absolute error) 大於或等於 (3.1428——3.1816) 而小於或等於 (3.1429——3.1416) 卽在 .0013 與 .0012 之間。在科學的工作中很少講到絕對誤差。

§ 95. 用無限級數作近似計算 (Approximate Calculations by Means of Infinite Series)

讀者或許已有印象，在物理或化學的教本中常常見到將實驗結果參照下列級數公式：

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots\cdots \tag{1}$$

例如在 Mendeléeff 的 The Principles of Chemistry 的第一卷與 J. W. Mellor 的 Chemical Statics and Dynamics 中，我已數過三十多個例題，發見一切公式設計出來代表溫度與化學反應速度間的關係者都是從同一公式捨去某幾項而求得。此公式並無何種理論上的意義；也並不想很正確的代表任何自然現象的整個過程。牠所作爲公設(postulate)，只是所論的現象是連續進行的。對於結合兩個變數的定律的正當配置並不知道時用此公式而表示兩個現象間的關係，近似值可以求到任何需要的程度。只能看作任意的工具用以計算直接量測所尚未達到處兩個變數的相當值。$A, B, C\cdots\cdots$爲常數，其值尙待用後述的方法從實驗所得的材料中決定之。這個式子有幾種有趣的形式。

I. 當任何物理變化的過程用上述公式(1)代表時，計算中項數用得愈多，則近似值愈與實情接近。最好用一個例來說明。氯化氫的水溶液的比重 s 是此氣體溶於水中之量，百分之 p 的未知函數。(單位：溫度 4°時的水$=10000$)

下表中最左兩行是 Mendeléeff 所決定的 p，與 v 的相當值。今欲求一個算學公式代表這結果，至於很好的近似程度；欲使已知 s，可計算 p；知 p，可計算 s。設從上述級數中取最初兩項而捨去其餘的項，即得

成份百分數 p	比重 s		
	觀測值	計算值	
		第一近似值	第二近似值
5	10242	10244	10240
10	10490	10497	10492
15	10741	10749	10746
20	11001	11002	11003
25	11266	11254	11263

$$s=A+Bp,$$

此中 A 與 B 爲常數,從後述方法而決定之,爲 $A=9991.6$; $B=50.5$。今從 p 的已知值而用公式,

$$s=9991.6+50.5p \tag{2}$$

而計算 s, 與實驗結果相比較。看上表中第二第三兩行。

公式 (2) 可供大規模的工業製造時計算之用。但欲將比重與成份百分數的關係表示得更爲精確,在計算中須多取一項,如

$$s=A+Bp+Cp^2,$$

此中 B 求得爲 49.43; C 爲 0.0571。從公式

$$s=9991.6+49.43p+0.0571p^2, \tag{3}$$

計算而得的結果,與實驗中所實際求得的結果現在很相符合。比較上表的第二第四項卽能知道。$0.057p^2$ 這項作爲**校正項** (correction term) 看。與前項比較時其值很小。

若還要求得精確,則計算再須多取一個校正項,我們可得

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3。$$

這樣的式子，T. E. Thorpe 與 A. W. Rücker (Phil. Trans., **166**, ii, 1, 1877) 曾用以表示海水的體積與溫度的關係；T. E. Thorpe 與 A. E. Tutton (Journ. Chem. Soc., **57**, 545, 1890) 曾用以表示氧化磷的溫度與體積的關係；Rapp 用以表示 0° 與 100 間水的比熱 σ。Rapp 得出

$$\sigma=1.039935-0.0070680\theta+0.0002125\theta^2-0.0000154\theta^3.$$

Hirn (Ann. Chim. Phys. [4], **10**, 32, 1867) 更用到第五項，如

$$v=A+B\theta+C\theta^2+D\theta^3+E\theta^4,$$

形式的公式表示 100° 與 200° 間水的體積。

這個推理的論理結果即爲，若將所有可能的項統統包括在近似公式以內，用無限斂級數：

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\cdots\cdots\text{至於無限} \qquad (4)$$

的方法可以求到絕對正確的結果。這是**馬氏定理** (Maclaurin's theorem) 的目的，欲決定此中 $A, B, C, D\cdots\cdots$ 的值，而使此級數成立

II. 級數收斂的快慢可以決定，欲得若何近相程度時，在計算中所必取的項數。這是很顯然的，上級數中校正項的數值愈小，則影響於計算結果者亦愈少。若每個校正項與其前一項相較爲很小，則用較簡的公式含有二項，多至三項如第 30 節中的公式(6)，即求得很好的近似值。反之，若校正項的數值很大，此級數就變得無法處置，在實用上即爲無用。

方程式(1)可寫爲下列形式，

$$y=A(1+bx+cx^2+\cdots\cdots),$$

此中 $A,b,c,$ 一為常數；A 為 $x=0$ 時 y 的值。

通例，物質受熱，則體積 v 增加，而質量 m 不變，故密度 ρ 必須減小。但

$$\text{質量}=\text{密度}\times\text{體積}; \quad \text{或} \quad m=\rho v。$$

在 $\theta°$ 時物質的體積可用下式表之，

$$v=v_0(1+\alpha\theta),$$

此中 v_0 代表物質在 $\theta°=0°$ C. 時的體積，α 為立體膨脹係數。故

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\frac{v}{v_0}=\frac{v_0(1+\alpha\theta)}{v_0}=1+\alpha\theta; \quad \therefore \rho=\frac{\rho_0}{1+\alpha\theta}$$

對於固體，液體，氣體都成立的。為簡單計，分 $\rho_0=1$。用除法，得

$$\rho=1-\alpha\theta+(\alpha\theta)^2-(\alpha\theta)^3+\cdots\cdots$$

若為固體，或有幾種液體，α 與 1 相比時是很小。例如水銀的 $\alpha=0.00018$。設 θ 是相當的小

$$\rho=1-0.00018\theta+(0.00018\theta)^2-\cdots\cdots$$

$$\therefore \quad \rho=1-0.00018\theta+0.0000000324\theta^2-\cdots\cdots$$

若結果須正確至小數第二位（百分之一），則小於 0.01 的項都可略去；若須正確至小數第三位（千分之一），則略去一切小於 0.001 的項，餘類推。當然，計算中所取的小數位必須比近似程度所需要者略多一些。究竟取幾項，這自然隨級數收斂的快慢而定。所以我們若要水銀的密度求至六位小數，則略去式中第三項在結果上不會有可以覺察得到的相差了。

例一　設 h_0 為 0°C. 時氣壓計上的高；h 為 $\theta°$ 時的高，欲以

20° 時的讀數(Reading)化至標準溫度(Standard temperature)而正確至 100000 分之 1，在近似公式，$h=h_0(1+0.00016\theta)$ 中應該包含些什麼項進去?

例二　在精確的稱衡中，化『空氣觀測得的重量』爲『眞空中的重量』，❶ 爲了空氣的浮力，必須加以校正。設 W 爲物體在眞空中的實在重量，w 爲其在空氣中觀測所得的重量，ρ 爲物體的比重，ρ_1 爲砝碼的比重，ρ_2 爲空氣當稱衡時的比重。從此證明，若

$$W\left(1-\frac{\rho_2}{\rho}\right)=w\left(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right),$$

則

$$W=w\frac{1-\dfrac{\rho_2}{\rho_1}}{1-\dfrac{\rho_2}{\rho}}=w\left(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}+\frac{\rho_2}{\rho}\right)=w+0.0012\,w\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}\right);$$

這是以空氣中稱得之重量化爲眞空中稱得之重量的標準公式。數字因數代表溼度適中的空氣，在室溫時正常情形下的密度。

例三　設 α 爲一個固體的立方膨脹係數，在溫度 θ 時此固體的體積 $v=v_0(1+\alpha\theta)$，此 v_0 爲 0° 時的體積。從此證明溫度各爲 θ_1 與 θ_2 時的體積 v_1 與 v_2 的關係爲 $v_1=v_2(1+\alpha\theta_1-\alpha\theta_2)$。何以此公式對於氣體是不適用的?

例四　因爲 $\dfrac{1}{x-a}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{a^2}{x^3}+\cdots\cdots$，

❶ 在一個有機物的燃燒分析中，氣壓計上的高每差 45 毫米，決定 CO_2 時有 0.6% 的差誤，決定 H_2O 時有 0.4% 的差誤。參閱 W. Crookes, "The Determination of the Atomic Weight of Thallium," Phil. Trans., 163, 277, 1874。

故很多數目的倒數之値很易從此求得，且正確至不少小數位。如 $\frac{1}{97}=$

$$\frac{1}{100-3}=\frac{1}{100}+\frac{3}{10000}+\frac{9}{1000000}+\cdots\cdots=0.01+0.0003+0.000009+\cdots\cdots$$

例五 我們需要精確至1000分之1。在近似公式$(1+x)^3=1+3x$中，x 的值，最大可以取什麽？在附錄 I，第 189 節中有一組近似公式。

例六 用公式$(1\pm x)^n=1\pm nx$，其中 n 可正可負，可整數亦可分數，心算下列各式的近似值：

$$\sqrt{999}；\quad \frac{1}{\sqrt{1.02}}；\quad (1.001)^3,\quad \sqrt{1.05}。$$

示意：第一個中，$n=\frac{1}{2}$；第二，$n=-\frac{1}{2}$；第三 $n=3$……。又第一個中 $x=-1$；第二，$x=0.02$；第三，$x=0.001$，等等。

§ 96. 馬氏定理 (Maclaurin's Theorem)

馬氏定理決定以一個變數的函數展開爲此變數的昇冪級數的定律。設 x 爲變數，則

$$u=f(x)。$$

假定 $f(x)$ 可以展開爲 x 的昇冪，如上節中所用的級數。

$$u=f(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots\cdots \tag{1}$$

此中 $A,B,C,D,\cdots\cdots$爲常數，與 x 無關，但視原函數中的常數而定。欲使上述的假定能適用於 x 的一切値，須決定這些常數的值。

有幾種方法可以展開一個函數爲級數，視所用的方法爲代數的，三

的，或其他的而定。最最有用的一種稱爲**戴氏定理**(Taylor's theorem)。馬氏定理❶不過是戴氏定理的一個特例。我們現在從特殊的而至普遍的。

累次求(1)的微分，

$$\frac{du}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=B+2Cx+3Dx^2+\cdots\cdots; \tag{2}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{df'(x)}{dx}=2C+2\cdot 3Dx+\cdots\cdots\cdots; \tag{3}$$

$$\frac{d^3u}{dx^3}=\frac{df''(x)}{dx}=2\cdot 3\cdot D+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \tag{4}$$

按假設，x 爲任何值(1)恆能成立，故 $A,B,C,D\cdots\cdots$ 不問 x 爲何值時都是相同的。今以 $x=0$ 代入方程式 (2)，(3)，(4)。設 v 爲當 $x=0$ 時 u 的值。於是從(1)，

$$\left.\begin{array}{lll} & v=f(0)=A, & \therefore\ A=v; \\ \text{從(2)，} & \dfrac{dv}{ds}=f'(0)=1\cdot B, & \therefore\ B=\dfrac{dv}{dx}; \\ \text{從(3)，} & \dfrac{d^2v}{dx^2}=f''(0)=1\cdot 2C, & \therefore\ C=\dfrac{1}{2!}\ \dfrac{d^2v}{dx^2}; \\ \text{從(4)，} & \dfrac{d^3v}{dx^3}=f'''(0)=1\cdot 2\cdot 3D, & \therefore\ D=\dfrac{1}{3!}\ \dfrac{d^3v}{dx^3}。 \end{array}\right\} \tag{5}$$

以這些值代入(1)中的 $A,B,C,D,\cdots\cdots$ 可得

❶ 這個名稱是歷史上的誤稱。Taylor 於 1715 年發表他的級數。1717 年 Stirling 證明我們現在所討論的級數是戴氏級數的特例。二十五年以後，Maclaurin 又獨立發表 Stirling 所曾證過的級數。不過 De Morgan 說『要是那時 Maclaurin 與 Stirling 若會知道，一個戴氏級數的特例後世竟以他們之名稱之，大家都要驚奇的』。

$$u=v+\frac{dv}{dx}\cdot\frac{x}{1}+\frac{d^2v}{dx^2}\cdot\frac{x^2}{2!}+\frac{d^3v}{dx^3}\cdot\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots \tag{6}$$

右邊的級數稱爲馬氏級數 (Maclaurin's series)。第一項爲 $x=0$ 時原函數的值；第二項爲 $x=0$ 時原函數的一級微係數，乘以 x；第三項爲 $x=0$ 時原函數的二級微係數，乘以 x^2，除以 2 的階乘，……

『$f^n(0)$』代表 $f(x)$的 n 級微係數，而以 $x=0$ 代入後之結果。用這記法，此級數可寫爲下列形式，

$$u=f(0)+f'(0)\frac{x}{1}+f''(0)\frac{x^2}{\lfloor 2}$$

$$+f'''(0)\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots+f^n(0)\frac{x^n}{\lfloor n}。 \tag{7}$$

§ 97. 從馬氏定理所得的有用的推論

(Useful Deductions from Maclaurin's Theorem)

下列各節可以作爲前節所得公式的例題看。許多現在所求得的結果，本書後部要應用之。

I. 二項級數

欲用馬氏定理展開任何函數，須累次求 u 的微係數，而令其中 x 等於 0。這樣可以決定各個常數的值。

設 $$u=(a+x)^n,$$

則得 $$\frac{du}{dx}=n(a+x)^{n-1}, \qquad \therefore f'(0)=na^{n-1};$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=n(n-1)(a+x)^{n-2} \qquad \therefore f''(0)=n(n-1)a^{n-2};$$

$$\frac{d^3u}{dx^3}=n(n-1)(n-2)(a+x)^{n-3}, \qquad \therefore f'''(0)=n(n-1)(n-2)a^{n-3},$$

餘類推。以這些代入馬氏級數(6)中。得

$$(a+x)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}x^2+\cdots\cdots \tag{1}$$

此結果稱爲二項級數 (binomial series)，其 n 爲正或負，整數或分數,都能成立。

例一 證

$$(a-x)^n=a^n-\frac{n}{1}a^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}x^2-\cdots\cdots \tag{2}$$

當 n 爲正整數,於 $n=m$ 時此無限級數在 $n-m=0$ 處中止。於是項數爲有限。

例二 證明 $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{16}-\cdots\cdots$

例三 證明 $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}+\frac{5x^6}{16}+\cdots\cdots$

例四 證明 $(1+x^2)^{-1}=1-x^2+x^4-\cdots\cdots$、用實際的除法覆證此結果。

II. 三角級數

假使 $u=f(x)=\sin x$。注意 $\frac{du}{dx}=\frac{d(\sin x)}{dx}=\cos x$; $\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2(\sin x)}{dx^2}=\frac{d(\cos x)}{dx}=-\sin x$，等; 又 $\sin 0=0$; $-\sin 0=0$; $\cos 0=1$; $-\cos 0=-1$。於是我們可得正弦級數(sine series),

$$\sin x=\frac{x}{\lfloor 1}-\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^5}{\lfloor 5}-\frac{x^7}{\lfloor 7}+\cdots\cdots \tag{3}$$

同理可求餘弦級數(cosine series)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} - \frac{x^6}{\underline{|6}} + \cdots\cdots \tag{4}$$

這些級數是用以計算 0 與 $\frac{\pi}{4}$ 間各角的三角函數值。三角函數表上其餘各角的正弦與餘弦之值，可用下面公式決定之；

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x。$$

今令 $u = f(x) = \tan x$, $\therefore u \cos x = \sin x$。從此累次求微係數，再用第 8 節的記法，$u_1 = \frac{du}{dx}$, $u_2 = \frac{d^2u}{dx^2}$, ……

$$\therefore \quad u_1 \cos x - u \sin x = \cos x;$$

$$\therefore \quad u_2 \cos x - 2u_1 \sin x - u \cos x = -\sin x;$$

$$\therefore \quad u_3 \cos x - 3u_2 \sin x - 3u_1 \cos x + u \sin x = -\cos x。$$

與二項式的展開式中的係數很類似，用第 21 節**萊氏定理** (Leibnitz theorem)，

$$u_n \cos x - \frac{n}{1} u_{n-1} \sin x - \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} u_{n-2} \cos x + \cdots\cdots = \sin x$$

的 n 級微係數。

今令上列各式中 $x=0$，則可求 u, u_1, u_2, u_3,……得

$$f(0) = f''(0) = \cdots\cdots = 0; \ f'(0) = 1, \ f'''(0) = 2, \cdots\cdots$$

代入馬氏級數(7)中，則

$$\tan x = \frac{x}{1} + \frac{2x^3}{\underline{|3}} + \frac{16x^5}{\underline{|5}} + \cdots\cdots,$$

或 $$\tan x = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots\cdots \tag{5}$$

此結果爲**正切級數**(tangent series)。

III.　反三角級數

設 $\theta=\tan^{-1}x$。從第 17 節(3)與上節例四，

$$\therefore\quad \frac{d\theta}{dx}=(1+x)^{-1}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots$$

累次求微係數，照通常的方法代入，可得

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{3}-\cdots\cdots\cdots \tag{6}$$

從原方程式，或可寫爲

$$\theta=\tan\theta-\frac{1}{3}\tan^3\theta+\frac{1}{5}\tan^5\theta-\cdots\cdots \tag{7}$$

此稱**葛氏級數**(Gregory's series)。當 θ 在 $-\frac{\pi}{4}$ 與 $\frac{\pi}{4}$ 之間時這級數是斂級數；這曾用以計算 π 的數值。設 $\theta=45^0=\frac{\pi}{4}$，$\therefore\ x=1$。代入(6)，

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\cdots\cdots$$

卽所謂**萊氏級數**(Leibnitz series)。同樣方法我們更可得反正弦級數，

$$\sin^{-1}x=x+\frac{1}{2}\ \frac{x^3}{3}+\frac{3}{8}\ \frac{x^5}{5}+\frac{5}{16}\ \frac{x^7}{7}+\cdots\cdots \tag{8}$$

今寫 $x=\frac{1}{2}$，則 $\sin^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$。代入(8)。結果所得的級數是 Newton 用以計算 π 的。

IV.　π 的數値

收斂得慢的級數是很不實用的，這裏是最好的機會，可以鄭重說

明之。若用萊氏級數的原形而計算 π 之值則是極費事的。稍用技巧卽能使方法簡單，如

$$\frac{\pi}{4}=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\cdots\cdots;$$

$$\frac{\pi}{4}=\frac{2}{1\cdot3}+\frac{2}{5\cdot7}+\frac{2}{9\cdot11}+\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \frac{\pi}{8}=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{5\cdot7}+\frac{1}{9\cdot11}+\cdots\cdots,$$

應用此式就不很費事了。這裏 x 代表角，其單位不用度分秒制而用弧度制。設 $x=\sqrt{\frac{1}{3}}$，則 $\tan^{-1}x=30^\circ=\frac{\pi}{6}$。代入(6)以正負項歸入兩個括號內，得

$$\frac{\pi}{6}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{3^5}}+\cdots\cdots\right)-\left(\frac{1}{3\sqrt{3^3}}+\frac{1}{7\sqrt{3^7}}+\cdots\cdots\right)。$$

進一步我們來求 π 之值正確至五位小數。顯然，第一，我們須在每項中比最後結所需要的小數多取兩三位；第二，我們須求至以後各項不致影響於所需要的結果爲止。於是

第一括號內各項	第二括號內各項
0.57735 03	0.06415 01
0.01283 00	0.00305 48
0.00079 20	0.00021 60
0.00006 09	0.00001 76
0.00000 52	0.00000 15
0.00000 05	0.00000 02
0.59103 89	0.06744 02

$$\therefore\quad \pi=6(0.5910389-0.0674402)=3.1415922。$$

末尾不可靠的位數之多少顯然隨級數收斂的快慢而定。這裏最後

兩位是不可靠的，但注意正的差誤，一部份是怎樣的與負的差誤相抵銷。七位小數的 π 正確值爲 3.1415926。有幾種求 π 之值的捷法。可參閱 Encyc. Brit., Art. "Squaring the Circle"

V.　指數級數

用馬氏級數證明

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots,$$

$$e=1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\cdots \tag{9}$$

一個指數級數(exponential series)表示以 e^x，a^x 或其他指數函數展開成 x 的昇冪的級數，而其係數與 x 無關。

例一　證，若 $k=\log a$，

$$a^x=1+kx+\frac{k^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{k^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots \tag{10}$$

例二　第 31 節 V 的附註❶中講起 Dalton 定律與 Gay Lussac 定律。用算學推理法證明若 $\alpha\theta$ 的二次方與高次方是出於量測範圍之外，在普通氣體計算所假定的，則 Dalton 定律 $v=v_0e^{\alpha\theta}$，是與 Gay Lussac 定律 $v=v_0(1+\alpha\theta)$同値的。

例三　證 $e^{-x}=1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}-\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^4}{\lfloor 4}-\cdots\cdots$　(11)

VI.　尤氏正弦與餘弦函數(Euler's Sine and Cosine Series)

我們若以$\sqrt{-1}x$ 或 ix 代替 x，可得

$$e^{ix}=1+\frac{ix}{1}-\frac{x^2}{\lfloor 2}-\frac{ix^3}{\lfloor 3}+\frac{x^4}{\lfloor 4}+\frac{ix^5}{\lfloor 5}-\cdots\cdots;$$

$$\therefore\quad e^{ix}=\left(1-\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^4}{\lfloor 4}-\cdots\cdots\right)+i\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^5}{\lfloor 5}-\cdots\cdots\right)。\quad(12)$$

從(3),(4)知第一括號內爲餘弦函數,第二括號內爲正弦函數。故

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x。\quad(13)$$

同樣可證

$$e^{-ix}=1-\frac{ix}{\lfloor 1}-\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{ix^3}{\lfloor 3}+\frac{x^4}{\lfloor 4}-\frac{ix^5}{\lfloor 5}-\cdots\cdots;$$

$$\therefore\quad e^{-ix}=\left(1-\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^4}{\lfloor 4}-\cdots\cdots\right)-i\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^5}{\lfloor 5}-\cdots\cdots\right)\quad(14)$$

$$\therefore\quad e^{-ix}=\cos x-i\sin x。\quad(15)$$

結合(13)與(15)得

$$\frac{1}{2}(e^{ix}-e^{-ix})=i\sin x;\qquad \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})=\cos x。\quad(16)$$

若一個函數或其任何級微係數當 $x=0$ 時而變爲無限大，即在此不連續,則不能用馬氏定理展開。例如 $f(x)=\sqrt{x}$ 其一級微係數爲 $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$，當 $x=0$ 時其値爲無限大；換言之此級數不復是斂級數。$\log x$; $\cot x$; $\frac{1}{x}$; $a^{\frac{1}{x}}$; $\sec^{-1}x$ 等函數都有同樣的情形。但這些中有幾個可以展開爲 x 的分數函數或其簡單函數;或者我們可用戴氏定理。

§ 98. 戴氏定理(Taylor's Theorem)

戴氏定理決定兩個變數之和或差的函數展開爲二者之一的昇冪級數的定律。今設

$$u_1=f(x+y)。$$

假定展開後得

$$v_1=f(x+y)=A+By+Cy^2+Dy^3+\cdots\cdots \qquad (1)$$

此中 $A,B,C,D,\cdots\cdots$為常數與 y 無關,但為 x 與原方程式中常數的函數。今欲求 $A,B,C,D\cdots\cdots$ 的值之能使此級數成立者，因為 x 與 y 取一切值時此展開式假定其為成立,故 x 為任何已知值 a 時亦能成立。當 $x=a$ 時,設 (1) 中 $A,B,C,D\cdots\cdots$的值各為 $A',B',C'\cdots\cdots$於是我們從假定

$$u'=f(a+y)=A'+B'y+C'y^2+D'y^3+\cdots\cdots \qquad (2)$$

出發，令 $z=a+y$， 故 $y=z-a$,

$$u'=f(z)=A'+B'(z-a)+C'(z-a)^2+D'(z-a)^3+\cdots\cdots$$

今關於 z 求各級的微係數。

$$\frac{du'}{dz}=f'(z)=B'+2C'(z-a)+3D'(z-a)^2+\cdots\cdots$$

$$\frac{d^2u'}{dz^2}=f''(z)=2C'+2\cdot3D'(z-a)+3\cdot4E(z-a)^2+\cdots\cdots$$

$$\frac{d^3u'}{dz^3}=f'''(z)=2\cdot3D'+2\cdot3\cdot4E'(z-a)+\cdots\cdots$$

在用馬氏定理求級數時令變數等於 0，現在用戴氏定理是求 $x=a$ 時此級數的值。

令 $z=a$, 則 $y=0$, 可得

$$f(a)=A';\quad f'(a)=B';\quad f''(a)=2C'\quad \therefore\ C'=\frac{1}{\underline{|2}}f''(a);$$

$$f'''(a)=2\cdot3D'\quad \therefore\ D'=\frac{1}{\underline{|3}}f'''(a)。$$

代入方程式(2)中 $A',B',C',\cdots\cdots$得

$$u'=f(a+y)$$

$$=f(a)+f'(a)\frac{y}{1}+f''(a)\frac{y^2}{\lfloor 2}+f'''(a)\frac{y^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots \quad (3)$$

這是 $x=a$ 時的展開式。但 a 為 x 的任何值；故若

$$u=f(x) \quad (4)$$

代入原方程式中的 A,B,C,D ……,則得

$$u_1=f(x+y)=u+\frac{du}{dx}\frac{y}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{y^2}{\lfloor 2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{y^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots(5)$$

上式的右邊稱為戴氏級數 (Taylor's series)。第一項是 $y=0$ 時原函數之值；第二項為 $y=0$ 時原函數的一級微係數，乘以 y；第三項為 $y=0$ 時原函數的二級微係數,乘以 y^2，除以 2 的階乘；…… 在(5)式中，$u=f(x)$ 是從原函數令 $y=0$ 而得到的。例如用戴氏定理展開 $(x+y)^5$,則為

$$u=f(x)=x^5;\ \frac{du}{dx}=f'(x)=5x^4;\ \frac{d^2u}{dx^2}=f''(x)=4\cdot 5x^3,\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad (x+y)^5=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5。$$

戴氏函數亦可寫為下列形式：

$$u_1=f(x+y)=f(x)+f'(x)\frac{y}{1}+f''(x)\frac{y^2}{\lfloor 2}$$

$$+f'''(x)\frac{y^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots \quad (6)$$

或交換變數，得

$$u_1=f(x+y)=f(y)+f'(y)\frac{x}{1}+f''(y)\frac{x^2}{\lfloor 2}$$

$$+f'''(y)\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots \tag{7}$$

讀者自行證明

$$f(x-y)=f(x)-f'(x)\frac{y}{1}+f''(x)\frac{y^2}{\lfloor 2}-f'''(x)\frac{y^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots \tag{8}$$

馬氏級數與戴氏級數只是同一事物的兩種稍有不同的表示方法而已。一種形式可以轉變爲另一種形式，在馬氏定理中以 $f(x+y)$ 代 $f(x)$ 卽得戴氏定理；在戴氏定理(7)中以 $y=0$ 卽得馬氏定理。

例一　用戴氏定理展開 $u_1=(x+y)^n$。令 $y=0$，$u=x^n$ 如前所示，

$$\therefore\quad \frac{du}{dx}=nx^{n-1};\quad \frac{d^2u}{dx^2}=n(n-1)x^{n-2};\ 等等$$

以這些微係數代入(7)，得

$$\therefore\quad u_1=(x+y)^n=x^n+nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2+\cdots\cdots$$

例二　若 $k=\log\ a$;

則　$u_1=a^{x+y}=a^x(1+ky+\frac{1}{2}k^2y^2+\frac{1}{6}k^3y^3+\cdots\cdots)$。

例三　證明 $(x+y+a)^{\frac{1}{2}}=(x+a)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}y(x+a)^{-\frac{1}{2}}-\cdots\cdots\cdots\cdots$；若 $x=-a$，則展開式不能成立。

例四　證 $\sin(x+y)$

$$=\sin x\left(1-\frac{y^2}{\lfloor 2}+\frac{y^4}{\lfloor 4}-\cdots\cdots\right)+\cos x\left(y-\frac{y^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\right)$$

例五　三角函數表是用戴氏定理或馬氏定理計算的。如用馬氏定理，

$$\sin x = x - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} - \cdots\cdots; \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^2}{\lfloor 4} - \cdots\cdots$$

但 $35^\circ = .610865$ 弧度，故 $\sin 35^\circ = \sin 0.610865$，結果

$$\therefore \quad \sin 35^\circ \doteq \sin .610865 = .610865 - \frac{1}{6}(.610865)^3$$

$$+ \frac{1}{120}(.610865)^5 - \cdots\cdots = .57357\cdots\cdots$$

同理可求 $\cos 35^\circ = .81915\cdots\cdots$ 再用戴氏定理，$\sin 36^\circ = \sin(35^\circ + 1^\circ)$；

$$\therefore \quad \sin 36^\circ = \sin 35^\circ + \frac{\cos 35^\circ}{\lfloor 1}(.017453) - \frac{\sin 35^\circ}{\lfloor 2}(.017453)^2$$

$$- \cdots\cdots = .58778。$$

例六　戴氏定理可用以製表，列出一個函數相當於其變數各值時的值。假使我們欲求 x 的值從 2.7 至 3.3 時 $y = x(24 - x^2)$ 的值。第一求 y 的各級微係數。

$$f(x) = f(3) = x(24 - x^2) = 45;$$

$$f'(x) = f'(3) = 24 - 3x^2 = -3;$$

$$f''(x) = f''(3) = -6x = -18;$$

$$f'''(x) = f'''(3) = -6。$$

按戴氏定理，

$$f(3 \pm h) = f(3) \pm f'(3)h + \frac{1}{2}f''(3)h^2 \pm \frac{1}{6}f'''(3)h^3$$

$$= 45 \mp 3h - 9h^2 \mp h^3。$$

但 $2.7=3-0.3$；$2.8=3-0.2$；……$3.3=3+0.3$。於是

$$f(2.7)=45+0.9-0.81+0.027=45.117。$$

$$f(2.8)=45+0.6-0.36+0.008=45.148$$

$$f(2.9)=45+0.3-0.09+0.001=45.211$$

$$f(3.0)=45 \qquad\qquad =45.000$$

$$f(3.1)=45-0.3-0.09-0.001=44.609$$

$$f(3.2)=45-0.6-0.36-0.008=44.032$$

$$f(3.3)=45-0.9-0.81-0.027=43.263。$$

例七　證 $\log(x+y)=\log x+\frac{y}{x}-\frac{y^2}{2x^2}+\frac{y^3}{3x^3}-\cdots\cdots$

例八　展開 $\log(n+h)$ 與 $\log(n+1)$。注意若 h 小於 1，而 n 很大，則含有 h 二次方以上的各項都可略去。設 $h<1$，而 n 爲 10000，則 $\frac{h}{n}<0.0001$；在展開式中更後一項將小於 0.000000005；此後的項將更小。兩個展開式相除得重要的結果，

$$\frac{\log(n+h)-\log n}{\log(n+1)-\log n}=\frac{h}{1}。\tag{9}$$

卽（$\log n$ 變爲 $\log(n+h)$ 時的增加量）:（$\log n$ 變爲 $\log(n+1)$ 時的增加量）$=h:1$，惟 h 須小於 1，而 n 須屬於 10000 的等級。這公式稱爲**比例部份的規則** (Rule of proportional parts)，用以求數位多於對數表中所載者之數的對數，或求對數並不恰恰合於表中所載者之相數數。下列的例可以說明這個意思：

例九　已知 $\log 46501=4.6674623$；$\log 46502=4.6674716$；其

差爲 0.0000093，求 46502.32 的對數。

設所求之對數應等於兩個已知對數之較小者上加以 x。則可寫之如下，

$$\log n \quad = \log 46501 \qquad = 4.6674623;$$

$$\log(n+1) = \log(46501+1) \qquad = 4.6674623 + 0.0000093;$$

$$\log(n+h) = \log(46501+.32) \quad = 4.6674623 + x。$$

從(9)卽得簡單的規則；若數目中相差 1 則相當的對數中相差0.0000093，若數目增大 0.32，則對數中的差數是什麼？

$$\therefore \quad 1:0.32 = 0.0000093:x; \quad \therefore \ x = 0.00000298\cdots\cdots$$

故所求的對數爲 4.6674653。

又如已知 log 48042=4.6816211；log 48043=4.6816301，今有對數 4.6816223 則相當於何數？

因數目中差 1，則相當的對數中差 0.0000090，當對數中差 0.0000012 時相當的數目中應差多少？

$$1:h = 0.0000090:0.0000012; \quad \therefore \ h = 0.13。$$

故此求之數爲 48042.13。

例十 證 $\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \cdots\cdots$

此級數可以用來求 2 的對數之值，但因大於 2 之數，此級數將爲散級數，故小於 2 時收斂極慢，不合於普遍計算之用。

例十一 證 $\log(1-y) = -\left(y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 + \cdots\cdots\right)$。

若 $y=4$，則展開式爲發級數，此定理卽空爲無效。以上四個例題稱爲

對數級數(Logarithmic series)。

合於求對數之值的級數，因為一般趣味所在，可以述之於此；不過特殊的用處很少，因為所費無幾即能購備一份適用的對數表了。但此中所含的原理是很有實用的。

從例十中的級數減去例十一中的級數即得

$$\log\frac{1+y}{1-y}=2\left(y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\frac{y^7}{7}+\cdots\cdots\right)$$

當 y 小於 1 時，此級數收斂得很慢。令

$$\frac{n+1}{n}=\frac{1+y}{1-y}\quad 故\quad y=\frac{1}{2n+1}。$$

於是當 n 大於 1 時，y 即小於 1，代入，得

$$\log(n+1)=\log\ n+2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\cdots\cdots\right)。$$

此級數收斂得很快。當 $\log n$ 為已知時，我們即能計算 $\log(n+1)$之值。故從 $n=1$ 即 $\log n=0$ 出發，可求 $\log 2$ 的值；從此更可求 $\log 3$, $\log 4$ 等值。

例十二　在戴氏展開式中令 $y=-x$，證

$$f(x)=f(0)+f'(x)x-\frac{1}{2}f''(x)x^2+\cdots\cdots,$$

稱為布氏級數(Bernoulli's series)，發表於 1694 年，在歷史上很有意味。

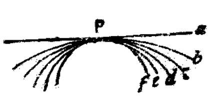
算學教本，在這種階段，要進而研究戴氏級數各項之和確是等於 $f(x+y)$的條件。已知函數 $f(x+y)$為有限時則其相當級數各項之和亦為有限；換言之，此級數或為有限或為收斂。當此級數為發散時則其展

開爲無效。

這裏並不想示明算學家已經建立戴氏級數於滿意的基礎之上。那種問題是屬於純粹算學的領域。❶ 讀者可運用自身不能經驗而根據適當證據的信仰，亦可稱之爲信念。這種信念，在一部份物理科學的學生，可不費心力而獲得的。對於這些科學的基本原理——難於理解的事物，他們必須有高度的信念：如原子，立體化學，親和力的理論，星球間以太的存在與性質，能的來源等等。更有進者，『研究者的姓名儘可不知而對於其記錄下的材料之信賴實爲物理科學之基；沒有這種對於權威的信念，全部結構卽將崩潰；所謂信念並非是盛行於中世紀的那種對於無理的權威作盲目的信念，而是對於各個人共同的證實作合理的信仰，他們記錄着實驗或量測的結果，而他們的陳述是可以覆證的。』❷

本章其餘的部份將專論收斂的無限級的直接或間接的應用。

§ 99. 曲線的相切 (The Contact of Curves)



圖一百二十三

以下是戴氏展開式各項的一種意義，用幾何說明之。設有四個曲線 Pa，Pb，Pc，Pd,（圖一百二十三）有一個公共點 P，任何曲線，如 Pc，通過其他二者 Pb，Pd 之間，則 Pc 稱爲與 Pb 相切得較 Pd 爲緊。今設兩個曲線 P_0P 與 P_0P_1（圖一百二十四）參照同一組坐標軸，其

❶ 讀者若有好奇之心，則 Todhunter 或 Williamson 所著 "Legrange's Theorem on the Limits of Taylor's Series" 很可讀到的。

❷ 摘自 Dr. Carrington 對 Washington Chemical Society 所作的會長就任演說，載於 English Mechanic, 1901 年四月五日。

方程式爲

$$y=f(x);\qquad y_1=f_1(x_1)。\tag{1}$$

設每個曲線在任何已知點的橫坐標增加一個小數量 h，則按戴氏定理，

$$f(x+h)=y+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots;$$

$$f_1(x_1+h)=y_1+\frac{dy_1}{dx_1}h+\frac{d^2y_1}{dx_1^2}\frac{h^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots\tag{2}$$

若曲線相切於 P_0 點，則在切點 $x=x_1$，$y=y_1$。因一級微係數代表切線的斜度，若在 P_0 點，

$$x=x_1,\quad y=y_1,\quad 又\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx_1},$$

故兩個曲線在 P_0 點公有一個切線。這稱爲第一級的相切(A contact of the first order)。但若

$$x=x_1,\quad y=y_1,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx_1},\quad 又\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y_1}{dx_1^2},$$

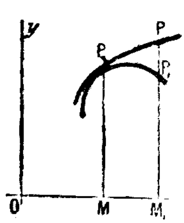
則這些曲線稱爲有第二級的相切；高級的相切可以從此類推。

若兩個方程的所有各項都相等則兩個曲線重合；兩個級數中若相等的項數愈多，則兩個曲線相切的級數愈高。若相切的級數爲偶，則曲線在其公共點相交；若相切的級數爲奇，則曲線不在切點相交。

例一　證明曲線 $y=-x^2$，與 $y=3x-x^2$ 於 $x=0$，$y=0$ 點相交。

示意　在 $x=0$ 時兩者的一級微係數不相等的。

例二　證明在迴折點切線與曲線相交。設曲線方程式爲 $y=f(x)$；切線的方程式爲 $Ax+By+C$



圖一百二十四

$=0$。曲線 $y=f(x)$ 上的迴折點的必要條件爲 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$。但就切線方程式言，$\frac{d^2y}{dx^2}=0$。故在迴折點有一個第二級的相切，而切線與曲線相交。

§ 100. **戴氏定理的推廣**(Extension of Taylor's Theorem)

戴氏定理可以推廣之而用以展開二個或多個自變數的函數。設

$$u=f(x,y),\tag{1}$$

此中 x 與 y 是互相獨立的。假使每個變數獨立變化，如 x 變爲 $x+h$，又 y 變爲 $y+k$。第一，設 $f(x,y)$變爲 $f(x+h,y)$。按戴氏定理

$$f(x+h,y)=u+\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{h^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots\tag{2}$$

現在再設 y 變爲 $y+k$，則(2)中每項都生變化，按戴氏定理，

$$u\text{ 變爲 }u+\frac{\partial u}{\partial y}k+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{k^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\text{變爲}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}k+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\text{變爲}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 x}{\partial x^2\partial y}k+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots。$$

今以這些代入(2)；若以 u' 代表當 x 變爲 $x+h$，y 變爲 $y+k$ 時 u 的值，可得

$$u'=f(x+h,\ y+k);$$

$$u'=u+\frac{\partial u}{\partial y}k+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{k^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}hk+\cdots\cdots$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{h^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots$$

$$\delta u = u' - u = f(x+h,\ y+k) - f(x,\ y);$$

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} k^2\right) + \cdots\cdots \tag{3}$$

若先就 y 展開所得最後結果與此完全一樣。

先就 h 展開，與先就 k 展開所得的兩個全同結果中，hk 這項的係數應該相等，故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

此式在第 24 節中用另一方法已求得過。這裏的討論可以推廣而用之於含有任意幾個變數的函數。

§ 101. 用戴氏級數決定函數的極大值與極小值

(The Determination of Maximum and Minimum Values of a Function by Means of Taylor's Series)

I. 一個變數的函數

戴氏定理，在求函數的極大值與極小值時，有時很有用處，設函數爲

$$u = f(x)$$

今欲求 x 的特殊值使 u 的值可爲極大或極小。設 x 有一個小數量 h，的變化，按戴氏定理則

$$f(x \pm h) - f(x) = \pm \frac{du}{dx} h + \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dx^2} h^2 \pm \frac{1}{6} \frac{d^3 u}{dx^3} h^3 + \cdots\cdots \tag{1}$$

第一，必須證明 h 可以小得使 $\frac{dy}{dx}h$ 一項大於以後各項之和。假定戴氏級數可寫爲

$$f(x+h)=u+Ah+Bh^2+Ch^3+\cdots\cdots,$$

此中 $A,B,C,\cdots\cdots$ 與 h 無關，但隨 x 而定。於是，設

$$Rh=Bh+Ch^2+\cdots\cdots=(B+Ch+\cdots\cdots)h,$$

則

$$f(x+h)=u+h(A+Rh)。\tag{2}$$

結果 h 的值只要取得充分的小，顯然 Rh 必可小於 A。

我們令

$$\delta u=f(x\pm h)-f(x)。$$

若 u 果眞爲極大時，x 的值只須小小變化——無論增加或減少——終要使 u 的值減少；而 $f(x)$ 必須大於 $f(x\pm h)$。故此，u 爲極大時，

$$\delta u=f(x\pm h)-f(x)\text{必須爲負數。}$$

再者，若 u 果眞爲極小時，當 x 增加或減少 h 時，u 的值終要增加。換言之，若 u 爲極小，則

$$\delta u=f(x\pm h)-f(x)\text{必須爲正數。}$$

說明：一　函數 $u=4x^3-3x^2-18x$，當 $x=-1$ 時，其值極大。此時 $f(x)=11$；若令 h 爲 $\frac{1}{2}$ 則 $f(x+h)=+\frac{31}{4}$；$f(x-h)=+\frac{27}{4}$。故 $f(x\pm h)-f(x)$ 或爲 $-\frac{13}{4}$ 或爲 $-\frac{17}{4}$。可用同樣方法說明，u 當 $x=\frac{3}{2}$ 時爲極小。

今若使 h 充分的小，我們前已證明方程式(1)中從二級以上的微係數小得幾近於零而可略去；故 $\frac{du}{dx}$ 爲有限數時則因

$$\delta u=\frac{du}{dx}h$$

而 δu 的正負號與 $\frac{du}{dx}h$ 相同。在轉向點——無論極大或極小——如以前所述，

$$\frac{du}{dx}=0。$$

以此代入級數(1)中，則爲

$$\delta u=\frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}h^2\pm\frac{1}{6}\frac{d^3u}{dx^3}h^3+\cdots\cdots$$

現在可使 h 很小以致從三級以上的微係數幾近於零而可略去；只要 $\frac{d^2u}{dx^2}$ 爲有限數時，因

$$\delta u=\frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}h^2,$$

而 δu 的正負號與 $\frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}h^2$ 相同。但 h^2 爲平方，恆爲正數。於是二級微係數結果與 δu 同號。但 $u=f(x)$ 的極大或極小視 δu 的正負而定。這是說當 $\frac{dy}{dx}=0$，$\frac{d^2y}{dx^2}$ 爲負數時 y 爲極大；又當 $\frac{dy}{dx}=0$，$\frac{d^2y}{dx^2}$ 爲正數時，y 爲極小。

但若二級微係數亦爲零，對於一級微係數所用的推理須應用於三級微係數。若三級微係數亦爲零時，則四級微係數的地位與前述的二

級微係數相同。閱第 63 節，表一。從此可得規則:

(1) x 取一個已知值，而 y 有極大值或極小值，只有當第一個取此值而不變爲零的微係數爲偶級時。

(2) y 之爲極大值或極小值須視此偶級微係數之爲正或負而定。

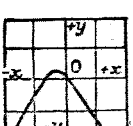
在實用上若二級微係數爲零，還是用代入法看$\frac{dy}{dx}$是否從正變負或從負變正而試驗之較爲便利。若不變號則旣無極大又無極小。例如，在函數 $y=x^3-3x^2+3x+7$ 中，

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-6x+3,$$

欲求極大或極小必須令此爲零，而求 x 的值，

$$3x^2-6x+3=0, \quad 則\ x=1。$$

然 $x=1$ 時，$\frac{d^2y}{dx^2}=6x-6$ 亦爲零，故此極大或極小之存在無從決定。但以 $x=0$ 代入$\frac{dy}{dx}$得 $+3$；又以 $x=2$ 代入$\frac{dy}{dx}$得 $+3$，其號不變。於是知 $x=1$ 時不能使此函數有極大值或極小值。



圖一百二十五

例一 求 $y=x^3-12x^2-60x$ 的極大值或極小值。

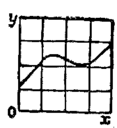
$\frac{dy}{dx}=3x^2-24x-60$； $\therefore\ x^2-8x-20=0$，卽 $x=-2$ 或 $+10$。$\frac{d^2y}{dx^2}=6x-24$。當 $x=10$ 代入時$\frac{d^2y}{dx^2}$爲正故 $x=10$ 使 y 爲極大。當 $x=-2$ 代入時$\frac{d^2y}{dx^2}$爲負，故 $x=-2$ 使 y 爲極小。此可繪圖而覆證之（圖一百二十五）。

當 $x=-3,\ -2,\ -1,\cdots+9,\ +10,\ +11,\cdots$

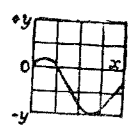
則 $y=+45,\ +64$(極大)，$+48,\cdots-783,\ -800$(極小)，$-781,\cdots$

例二　x 取何值時可使 y 爲極大或極小，$y=x^3-6x^2+11x+6$?

$\dfrac{dy}{dx}=3x^2-12x+11$；　$\therefore\ 3x^2-12x+11=0$，卽 $x=2\pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}$；又 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=6x-12$；若 $x=2+\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ 則 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=6\sqrt{\dfrac{1}{3}}=+2\sqrt{3}$；若 $x=2-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$，則 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-2\sqrt{3}$。故 $2+\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ 使 y 有極小值，$2-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ 使 y 有極小值。(參閱圖一百二十六)。



圖一百二十六



圖一百二十七

例三　證明 $x^3-9x^2+15x-3$ 當 $x=1$ 時有極大值，當 $x=5$ 時有極小值。

圖見一百二十七。可用與前述例一例二相仿之法解之。

II.　兩個變數的函數

欲求 x 與 y 的特殊值使

$$u=f(x,\ y)$$

爲極大或極小。如前，當 x 有一個數量的變化 h，又 y 有一個小數量的變化 k 時，若 $f(x,\ y)$ 的值恆大於 $f(x\pm h,\ y\pm k)$，則此時 $f(x,\ y)$ 爲極大；反之，若 $f(x,\ y)$ 的值恆小於 $f(x\pm h,\ y\pm k)$，則此

時 $f(x, y)$ 爲極小；故得

$$\delta u = f(x \pm h,\ y \pm k)\text{爲負時，}$$

u 有極大值；

$$\delta u = f(x \pm h,\ y \pm k)\text{爲正時，}$$

u 有極小值。

說明：　函數 $u = x^2y + xy^2 - 3xy$ 當 $x=1$，$y=1$ 時有極小值。此時 $f(x, y)=1$。若取 $h=\frac{1}{2}$，$k=\frac{1}{2}$（其他任何小數量都可以的），則

$f(x+h,\ y+k)=0$；　又 $f(x-h,\ y-k)=-\frac{1}{2}$。於是

$$f(x \pm h,\ y \pm k) = +1 \text{ 或 } +\frac{1}{2}\text{。}$$

再者，令

$$\delta u = f(x+h,\ y+k) - f(x,\ y)\text{。}$$

用上節的方法展開此函數，得

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}k^2\right) + \cdots \tag{3}$$

使 h，k 的值爲充分的小，則高級微係數變爲零。但當 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 爲有限數時，δu 的正負號同於

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y h + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x k\text{。}$$

在轉向點——無論極大或極小——可得

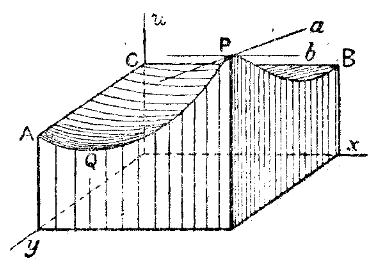
$$\frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k = 0, \tag{4}$$

因 h 與 k 是互相獨立的，而 u 有極大值或極小值時，δu 的正負不隨 h 與 k 而定，故此只有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y=0; \quad 與 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x=0 \tag{5}$$

時，(4)方能成立，卽欲 u 有極大值或極小值必須$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y=0$，$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x=0$。

我們若想像在 xy 平面的上方有一個起伏不平的面，或者對於上述的話在腦筋中可以得到一個更清楚的圖像。在孤峯之巔 P（圖一百二十八），u 爲極大值；在深谷之底 Q，則 u 爲極小值。面的切面只有在$\frac{\partial u}{\partial x}$與$\frac{\partial u}{\partial y}$同時的零的一點方能與 xy 平面平行。在此點 u 將爲極大或極小。這是很易見到的，設 $APBC$ 爲 $u=f(x, y)$ 所代表的面，則$\frac{\partial u}{\partial x}$爲面上沿曲線 AP 的切線的斜度，又$\frac{\partial u}{\partial y}$爲曲線 BP 的切線的斜度。故在 P 點，Pb 的斜度爲$\frac{\partial u}{\partial x}$；$Pa$ 的斜度爲$\frac{\partial u}{\partial y}$。



圖一百二十八

若 u 果眞是極大值時，從第 60 節卽知$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$與$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$必須爲負；正像 P 果眞是山峯之巔，於 Pb 或 Pa 的方向中進行，必然是下山，一樣的確實。同理，我們果眞在深谷之底時，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$與$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$必須爲正。

現在考察當$\frac{\partial u}{\partial x}$與$\frac{\partial u}{\partial y}$為零時(3)中 δu 的正負號；h, k 可使小得在(3)中只剩

$$\delta u=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}hk+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{6}$$

為簡便計，(6)中括號內 h, k 的二次齊次式可寫為

$$ah^2+2bhk+ck^2。 \tag{7}$$

同時加減$\frac{b^2k^2}{a}$，而整理之，可得相等的式子

$$\frac{1}{a}\{(ah+bk)^2+(ac-b^2)k^2\}, \tag{8}$$

從此式一望而知，當 h, k 取很小的值時，只有 $ac-b^2$ 為正或零，方才 δu 的正負可與 h, k 無關；若 $ac-b^2$ 為負則 δu 的正負將隨 h, k 而定；設 $k=0$ 時 δu 為正，則 $ah+bk=0$ 時 δu 將為負。

結果，我們欲有極大值或極小值，ac 必大於 b^2；即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\text{必須大於}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2。 \tag{9}$$

此式稱為二變數函數極大與極小之賴氏準則 (Lagrange's criterion for maximum and minimum values of a function of two variables)。$f(x, y)$若能適合此判別式則有極大值或極小值。總括言之，欲 $f(x, y)$ 有極大值或極小值，必須

(1) $\frac{\partial u}{\partial x}=0$; $\frac{\partial u}{\partial y}=0$;

(2) 若極大則$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$為負；若極小則$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$為正。

(3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$必須大於$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2$。

若有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\text{小於}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2, \tag{10}$$

即$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$與$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$不是同號，則此函數 u 既無極大亦無極小。若旅行者行經山地在其所走的方向中到了最高之處，然而轉換方向很可達更高之處。故此前之所謂最高者未必是最高。同樣，若以一個方向而行經深谷之最低處，未必即深谷之底。

若有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2, \tag{11}$$

則或許有極大值或極小值，但欲決定此疑問，我們必須先考察更高級的微係數。

例一　證明二分子的化學反應的速度 $V=k(a-x)(b-x)$ 中當 $a=b$ 時 V 有極大值。

此中$\frac{\partial V}{\partial a} = -k(b-x)$；　$\frac{\partial V}{\partial b} = -k(a-x)$。　故此 $k(b-x)=0$；$k(a-x)=0$ 時即 $a=b$，等等。

例二　試驗函數 $u=x^3+y^3-3axy$ 的極大值與極小值。

此中$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2-3ay=0$，　$\therefore\ y=\frac{x^2}{a}$；　$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2-3ax=0$，

$\therefore\ y^2-ax=\frac{x^4}{a^2}-ax=0$；　$\therefore\ x=0$，$x^3-a^3=0$，或 $x=a$，其餘的

根,因是虛數故可略去; $\therefore y=\frac{x^2}{a}=0$ 或 $y=a$;

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-3a;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y。$$

設 $x=0,\ y=0$; $\therefore \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-3a$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$;

設 $x=a,\ y=a$; $\therefore \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6a$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-3a$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6a$;

於是 $x=0,\ y=0$ 時, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=0\times 0-9a^2<0$; 卽此時函數旣非極大又非極小; 又 $x=a,\ y=a$ 時

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial u}{\partial x\partial y}\right)^2=6a\times 6a-9a^2=25a^2>0,$$

故此時函數有極小值。

例三 體積 v^3, 三邊各爲 $x,\ y,\ z$ 的長方體求其全面積 u 爲極小的條件。

因 $v^3=xyz,\ u=2(xy+yz+zx)=2\ \left(xy+\frac{v^3}{x}+\frac{v^3}{y}\right)$。令 $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ 時 $x^2y=v^3$; 令 $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ 時 $xy^2=v^3$。此二方程式的解爲 $x=y=v$, 故 $z=v$。故各邊等長時,定體積的長方體的全面積爲極小。

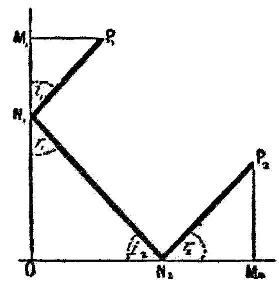
例四 證 $u=x^3y^2(1-x-y)$ 在 $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{3}$ 時有極大值。

例五 求 $u=x^3-3ax^2-4ay^2$ 的極大值。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x(x-2a);\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-8ay;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6(x-a);\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0;$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-8a$。$x=0$，$y=0$ 與 $x=2a$，$y=0$ 都能適合 (5) 式的條件；但只有前者適合賴氏準則，後者爲(10)的形式。

例六　圖一百二十九中，設 P_1 爲發光點；OM_1，OM_2 爲互相垂直的兩個平面鏡。P_1 的影子在 N_1 與 N_2 是這樣的反射：(i) 入射角與反射角相等，(ii)路程 $P_1\,N_1\,N_2\,P_2$ 爲最短。(Fermat 氏原理：『光線從一點到別一點所走的路是取所歷時間爲極小者』)。設 $i_1=r_1$，$i_2=r_2$，如圖中所示的入射角與反射角。求 N_1 與 N_2 的位置：



圖一百二十九

設 $ON_2=x$；$ON_1=y$；$OM_2=a_1$；$M_1P_1=a_2$；$M_2P_2=b_2$；$OM_1=b_1$。

設　$S=P_1N_1+N_1N_2+N_2P_2=\sqrt{a_2{}^2+(b_1-y)^2}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(a_1-x)^2+b_2{}^2}$。

求 $\frac{\partial s}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial s}{\partial y}$。使等於零等等。最後結果爲

$$x=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{b_1+b_2};\quad y=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1+a_2}。$$

注意 $\frac{x}{y}=\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}$。設 $\angle M_2OM_1=\alpha$，解此問題。

例七　郵包的規定『長度與周圍之和不得超過六呎』，今欲求長方體箱使體積爲極大而合於郵包規定。

答：　1 呎 ×1 呎 ×2 呎 =2 立方呎。

示意：　當 $x+2(y+z)=6$ 時 $V=xyz$ 爲極大。　但顯然 $y=z$，

$\therefore\ V=xy^2$ 爲極大等等。

例八 依照上例的規定求極大的圓柱體匣子。

答: 長 2 呎，直徑爲$\frac{4}{\pi}$呎,容積爲 2.55 立方呎。

示意: 圓柱體積=底面積×高,即爲 $\frac{1}{4}\pi lD^2$，今欲於高與底的周圍爲 6 呎時,即 $l+\pi D=6$ 時求其極大值。顯然此中 l 爲圓柱的高，D 爲其底的直徑。

例九 證明三個正數 x，y，z，其積爲常數,當三數相等時其和爲極小。

示意: 設 $xyz=a$; $x+y+z=u$。 故 $u=\frac{a}{yz}+y+z$;

$\therefore\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{a}{y^2z}+1=0;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{a}{yz^2}+1=0;\quad \therefore\ y=x,\ u=x;$

$\therefore\quad x=y=z=\sqrt[3]{a}$。欲證 u 爲極小,注意 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=+\frac{3a}{x^4}$。

III. 三個變數的函數

不求其詳，我在這裏略述如何處理三個變數 x，y，z 的函數,如

$$u=f(x,\ y,\ z) \tag{12}$$

而求其極大值與極小值。當 u 爲極大或極小時,須關於每個變數的級偏微係數都等於零；並能適合賴氏準則 $u_{xx}\,u_{yy}>(u_{xy})^2$，且

$$u_{xx}(u_{xx}u_{yy}u_{zz}+2u_{yz}u_{xz}u_{xy}-u_{xx}u^2_{yz}-u_{yy}u^2_{xz}-u_{zz}u^2_{xy})>0。 \tag{13}$$

u_{xx} 爲負，有極大值，u_{xx} 爲正，有極小值。此中 $u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u_{xy}=$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$；餘類推。

例一　設 $u=x^2+y^2+z^2+x-2z-xy$，　則 $u_x=2x-y+1=0$；$u_y=2y-x$；$u_z=2z-2=0$；$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$，$y=-\frac{1}{3}$；$z=1$；$\therefore\ u=-\frac{4}{3}$。$u_{xx}=2$；$u_{yy}=2$；$u_{zz}=2$；$u_{xy}=-1$；$u_{xz}=0$；$u_{yz}=0$。因 $u_{xx}u_{yy}-u^2_{xy}=+3$，故適合於賴氏準則；代入(13)中得 $2(8+0-0-0-2)=12$，亦能適合。而 u_{xx} 爲正，所以 $-\frac{4}{3}$爲 u 的極小值。

例二　設三個變數的隱函數(Implicit function)，而求其極大值，如求 $u=2x^2+5y^2+z^2-4xy-2x-4y-\frac{1}{2}=0$ 中 z 的極大值；可如下法：$u_x=4x-4y-2=0$；$u_y=10y-4x-4=0$；　$\therefore$　$x=\frac{3}{2}$；　$y=1$；$z=\pm 2$。$u_z=2z=\pm 4$；　$u_{xx}=4$；　$u_{yy}=10$；　$u_{xy}=-4$。賴氏準則得 $40-16=24$。故 $x=-\frac{3}{2}$，$y=1$ 時 z 爲極大值。

IV.　有條件的極大值與極小值

設在函數

$$u=f(x,\ y,\ z) \tag{14}$$

中的變數，又受下列條件

$$v=\phi(x,\ y,\ z)=0 \tag{15}$$

的結合；求極大或極小時，必使

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=0 \tag{16}$$

再從(15)，求全微分得，

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz=0。\tag{17}$$

(17)乘以任意常數 λ，稱爲**不定乘數**(An undetermined multiplier)，與(16)相加，得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\lambda\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\lambda\frac{\partial v}{\partial z}\right)dz=0。\tag{18}$$

但 λ 爲任意常數，我們可以選取使

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

者，即以此代入(18)，則得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\lambda\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\lambda\frac{\partial v}{\partial z}\right)dz=0。$$

但 y 與 z 是獨立的，又可得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\lambda\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy=0;\quad\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\lambda\frac{\partial v}{\partial z}\right)dz=0。$$

於是，我們共得三個方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial v}{\partial x}=0;\quad\frac{\partial u}{\partial y}+\lambda\frac{\partial v}{\partial y}=0;\quad\frac{\partial u}{\partial z}+\lambda\frac{\partial v}{\partial z}=0,$$

與 $\phi(x, y, z)=0$ 在一起可以求 x, y, z, λ 的值。此法稱爲**賴氏不定乘數法** (Lagrange's method of undetermined multiplier)。在下列例題說明此法如何應於求極大或極小的值。

例一 在 $x^2+y^2+z^2=1$ 的條件下，求 $V=8xyz$ 的極大值。

求前式的微分得 $x\,dx+y\,dy+z\,dz=0$; 欲 V 爲極，必使 $yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz=0$; 且 $yz+\lambda x=0$; $xz+\lambda y=0$; $xy+\lambda z=0$。各以 x,

y, z 乘之，得

$$xyz+\lambda x^2=0;\quad xyz+\lambda y^2=0;\quad xyz+\lambda z^2=0. \tag{19}$$

相加得 $3xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2)=0$，　$\therefore\ \frac{3}{8}V+1=0$；　即 $\lambda=-\frac{3}{8}V$。

代入(19)即得

$$x=\sqrt{\frac{8}{3}};\quad y=\sqrt{\frac{8}{3}};\quad z=\sqrt{\frac{8}{3}};\quad \therefore\ V=\frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}}。$$

例二　求內接於球 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 中而有極大表面積的長方體。長方體的表面積爲 $s=8(xy+yz+zx)$，此中 $2x$, $2y$, $2z$ 爲其各邊的長。求微分，$xdx+ydy+zdz=0$；又 $(y+z)dx+(x+z)dy+(y+x)dz=0$。欲有極大值，必須 $y+z+\lambda x=0$；$x+z+\lambda y=0$；$x+y+\lambda z=0$。如前例的方法進行，最後可求得 $x=y=z$。

答：　每邊爲 $2x=2r\sqrt{\frac{1}{3}}$ 的立方體。

例三　以 300 方呎的鐵皮製成無蓋長方體的水槽，其長，寬，高各須若何方能容量最大？

設 x, y, z 各爲長，寬，高。則 $xy+2xz+2yz=300$；$u=xyz$ 欲其極大。照前例進行，可得 $x=y=2z$。代入第一個方程式，求得 $x=y=10$, $z=5$。故水槽須 10 呎長，10 呎寬，5 呎高。

§ 102. 賴氏定理 (Lagrange's Theorem)

正像馬氏定理爲戴氏定理的特例一樣，戴氏定理爲更普遍些的賴氏定理的特例，而按次，賴氏定理又爲拉氏定理 (Laplace theorem) 的特例。這裏無深入其詳的必要，但於賴氏定理須略爲敍述一些。

設有三個變數的隱函數，

$$z=y+x\phi(z), \tag{1}$$

且 x，y 除 (1) 中所示的關係並無別的，互相很是獨立的。今欲將另一個 z 的函數如 $f(z)$ 展開成 x 的昇冪級數。設

$$u=f(z);$$

則從馬氏定理，

$$u=u_0+\left(\frac{du}{dx}\right)_0\frac{x}{1}+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\frac{x^2}{\lfloor 2}+\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$$

這裏不欲詳述，總之從(1)而求此級數所含各級微係數之值，最後的結果為

$$f(z)=f(y)+\frac{df(y)}{dy}\ \phi(y)\frac{x}{1}$$

$$+\frac{d}{dy}\left[\frac{df(y)}{dy}\ \{\phi(y)\}^2\right]\frac{x^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots \tag{2}$$

此式稱為賴氏定理。此級數在特殊問題上的應用可從下列數例中說明之。

例一　已知 $a-by+cy^2=0$，求y。

排列上方程式為 $y=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}y^2$ (3)

與標準方程式(1)與(2)相比較，得

$f(z)=y$，　$\therefore$ $f(y)=z$；　$\phi(z)=y^2$，$\phi(y)=z^2$；　$z=\frac{a}{b}$；　$x=\frac{c}{b}$。從(2)，$\frac{df(y)}{dy}=1$；$\frac{dz}{dz}=1$，等等，(1)中的 z 即為(3)中的 y，故

$$y=z+z^2\frac{x}{1}+\frac{d(z^4)}{dz}\ \frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{d^2(z^6)}{dz^2}\ \frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots;$$

$$\therefore\quad y=z+z^2\frac{x}{1}+4z^3\ \frac{x^2}{\underline{|2}}+6.5z^4\ \frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots,$$

$$\therefore\quad y=\frac{a}{b}+\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{c}{b}+\frac{4}{\underline{|2}}\cdot\frac{a^3}{b^3}\cdot\frac{c^2}{b^2}+\frac{6\cdot5}{\underline{|3}}\cdot\frac{a^4}{b^4}\cdot\frac{c^3}{b^3}+\cdots\cdots;$$

$$\therefore\quad y=\frac{a}{b}\left(1+\frac{ac}{b^2}+\frac{4}{\underline{|2}}\cdot\frac{a^2c^2}{b^4}+\frac{6\cdot5}{\underline{|3}}\cdot\frac{a^3b^3}{b^6}+\cdots\cdots\right),$$

此級數相符於方程式(3)的兩根的較小者用戴氏定理展開而得者。

例二　已知 $y^3-ay+b=0$，求 y^n。

化此方程式爲 $y=\frac{b}{a}+\frac{1}{a}y^3$,

與標準形式相比較，可得

$$f(z)=y^n,\ \therefore f(y)=z^n;\ \phi(z)=y^3,\ \therefore\phi(y)=z^3;\ z=\frac{b}{a};\ x=\frac{1}{a}。$$

$$\therefore\quad y^n=z^n+nz^{n-1}z^3\frac{x}{1}+\frac{d(nz^{n-1}z^6)}{dz}\cdot\frac{x^2}{\underline{|2}}+\cdots\cdots;$$

$$\therefore\quad y^n=\frac{b^n}{a^n}\left(1+n\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{a}+\frac{n(n+5)}{\underline{|2}}\cdot\frac{b^4}{a^4}\cdot\frac{1}{a^2}+\cdots\cdots\right)。$$

例三　在碘丙烷(Propyl iodide)與乙醇鈉(Sodium ethylate)的化學反應中其速度方程式爲

$$\frac{dx}{dt}=k_1(a-x)(a-x-\xi);\ \frac{d\xi}{dt}=k_2(a-\xi)(a-x-\xi)。$$

W. Hecht, M. Conrad, C. Brückner(Zeit. Phys. Chem., **4**, 273, 1889)以兩個方程式相除，而求積分，求得

$$1-\frac{x}{a}=\left(1-\frac{\xi}{a}\right)^K,$$

此中 a 反應開始時物質的量；x 與 ξ 爲在時間 t 分解之量；$K=\frac{k_1}{k_2}$；當 $t=0$ 時 $x=0$，$\xi=0$。若 K 是很小，由馬氏定理可得

$$1-\frac{x}{a}=\left(1-\frac{\xi}{a}\right)^K=1-K\frac{\xi}{a};\quad \text{或 } x=K\xi。\tag{4}$$

若令 $x+\xi=y$，我們可以得到 y 與 t 的直接關係；因

$$K\xi+\xi=y;\quad (1+K)\xi=y;\quad \therefore\ (1+K)d\xi=dy;$$

$$\therefore\ \frac{d\xi}{dt}=k_2(a-\xi)(a-x-\xi)\ \text{變爲}\frac{dy}{dt}=k_2(aK+a-y)(a-y),$$

此式可以用普通的積分法。但通常 K 總是太大不宜於用(4)中的近似算法。故此我們須用下法解此問題：

$$\text{已知 } 1-\frac{x}{a}=1-\frac{y}{a}+\frac{\xi}{a}=\left(1-\frac{\xi}{a}\right)^K,\ \text{求}\frac{\xi}{a}。$$

爲簡單計，我們寫此式爲

$$1-X+Z=(1-Z)^K$$

即令 $\frac{y}{a}=X$，$\frac{\xi}{a}=Z$，於是

$$1-X+Z=1-KZ+\frac{1}{2}K(K-1)Z^2-\cdots\cdots;$$

$$\therefore\quad X=(K+1)Z-\frac{1}{2}K(K-1)Z^2+\cdots\cdots=f_1(Z)。\tag{5}$$

$$\therefore\quad ZX=Zf_1(Z);\quad \therefore\ Z=X\frac{Z}{f_1(Z)}=X\phi(Z)。\tag{6}$$

參照標準形式(1)與(2)，可見 $z=Z$，$x=X$，$y=0$(但我們先寫 $y=y_0$，然後求 $y_0=0$ 的極限。)

$$f(z)=Z, \quad \therefore\ f(y)=y_0; \quad \phi(z)=\phi(Z)=\frac{Z}{f_1(Z)},$$

$$\therefore\ \phi(y)=\frac{y_0}{f_1(y_0)};$$

$$\therefore\quad Z=y_0+\frac{dy_0}{dy_0}\cdot\frac{y_0}{f_1(y_0)}\cdot\frac{X}{1}$$

$$+\frac{d}{dy_0}\left[\frac{d(y_0)}{dy_0}\left\{\frac{y_0}{f_1(y_0)}\right\}^2\right]\frac{X^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots \tag{7}$$

今逐項考察之，$y_0=0$ 時，第一項 y_0 爲零；

第二項中，$\dfrac{dy_0}{dy_0}=1$；　$\dfrac{y_0}{f_1(y_0)}=\dfrac{y_0}{(K+1)y_0-\frac{1}{2}K(K-1)y_0{}^2+\cdots\cdots}$

$=\dfrac{1}{(K+1)-\frac{1}{2}K(K-1)y_0+\cdots}$；$y_0=0$ 時，得第二項爲 $\dfrac{1}{K+1}\ \dfrac{X}{\lfloor 1}$。

第三項中 $\dfrac{d}{dy_0}\left[\dfrac{dy_0}{dy_0}\left\{\dfrac{y_0}{f_1(y_0)}\right\}^2\right]=\dfrac{d}{dy_0}\left[\dfrac{y_0}{f_1(y_0)}\right]^2$

$=\dfrac{d}{dy_0}\left[\dfrac{1}{(K+1)-\frac{1}{2}K(K-1)y_0+\cdots}\right]^2=\dfrac{K(K-1)}{[(K+1)-\frac{1}{2}K(K-1)y_0+\cdots]^3}$；

$y_0=0$ 時，上式爲 $\dfrac{K(K-1)}{(K+1)^3}$，故第三項爲 $\dfrac{K(K-1)}{(K+1)^2}\ \dfrac{X^3}{\lfloor 2}$。

故(7)式中所求的展開式爲

$$Z=\frac{1}{K+1}\ \frac{X}{\lfloor 1}+\frac{K(K-1)}{(K+1)^3}\ \frac{X^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots$$

以 $Z=\dfrac{\xi}{2}$，$X=\dfrac{y}{2}$代入，卽得以 y 表示 ξ 的式子；代入原來的兩個速度方程式，同時利用 $x+\xi=y$ 的關係，而再用積分法可以決定 y，t 與常數的關係。

§ 103. 有些函數在代入數字之前需要特別的處理

(Functions Requiring Special Treatment before Substituting Numbers)

在研究第二級的化學反應的速度時，發見若兩積反應分子的濃度相同，則下式

$$kt=\frac{1}{a-b}\log\frac{a-x}{b-x}\cdot\frac{a}{b}$$

以 $a=b$ 代入時須得不定形式

$$kt=\infty\times 0。$$

在研究其他的函數時，我們常會到這類相彷的情形，這些情形終能化成下列形式之一：

$$0\cdot\infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ \infty^{0},\ 0^{0},\ \cdots\cdots$$

關於這些式子的值，我們說不出一些什麼來，故此必須從另一個途徑設法使得牠們表示一些什麼來。牠們曾經得到過虛幻形式，不定形式，奇異形式 (Illusory forms, indeterminate forms, singular forms) 等名目。在某一意義上說，『不定』這名稱是誤稱的，因為本節的目的就在說明怎樣可以決定這些函數的值。

有時一個簡單的代入法卽能使其值一望而知。例如分數$\frac{x+a}{x+b}$當 x 為無限大時卽取不定形式$\frac{\infty}{\infty}$。今令 $x=\frac{1}{y}$，則 x 為無限大時，y 為零，結果

$$\mathrm{Lt}_{x=\infty}\frac{x+a}{x+b}=\mathrm{Lt}_{y=0}\frac{1+ay}{1+by}=1。$$

分數而有$\frac{0}{0}$的形式者稱爲消失的分數，如$\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}$，當 $x=1$ 時卽爲$\frac{0}{0}$。此中的糾纏只因分子與分母，同有一個因數 $(x-1)$。若此因數於數字代入前卽行約去，則此分數當 $x=1$ 時實在的值可以求得。如

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x-3}{x+1}=\frac{-2}{2}=-1。$$

這些不定函數常是可以用代數的或三角的方法而求其值，但並非永是可以的。許多這類的函數用戴氏定理處理之很爲便利。最爲重要而很需研究者爲$\frac{0}{0}$，因爲這種形式最爲常見，而其他形式，大多可以用特殊的技巧而參照$\frac{0}{0}$求之。

I.　函數之爲$\frac{0}{0}$形式者

此形式稱爲消失的分數（Vanishing fraction）。前已指出，此分數的分子與分母含公共因數，當其中變數如 x，取某些特殊值如 a 時，則同變爲零。這些公共因數必須約去。若不易分解因數時，最好的方法以 $a+h$ 代分子分母中的 x 而化之爲最簡形式。這樣必能發見有 h 的某次羃爲公共因數。約簡之，令 $h=0$，則所得結果，卽爲當 $x=a$ 時分數的值。

若求 $x=0$ 時之值，則不必用代入法，可直接用馬氏定理展開分子

與分母。例當 x 漸近於零時三角函數 $\frac{\sin x}{x}$ 漸近於 1。此可直接見到。用戴氏或馬氏定理展開 $\sin x$ 爲 x 的昇冪級數。可得

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{\left(\frac{x}{\underline{|1}}-\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^5}{\underline{|5}}-\frac{x^7}{\underline{|7}}+\cdots\cdots\right)}{x}=1-\frac{x^2}{\underline{|3}}+\frac{x^4}{\underline{|5}}-\frac{x^6}{\underline{|7}}+\cdots$$

當 $x=0$ 時第二項起都被消去，故

$$\mathrm{Lt}_{x=0}\frac{\sin x}{x}=1。$$

例一　證 $\mathrm{Lt}_{x=0}(a^x-b^x)\frac{1}{x}=\log\frac{a}{b}$。

例二　證 $\mathrm{Lt}_{x=0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$。

例三　當 $x=a$ 時，分數 $\frac{x^n-a^n}{x-a}$ 變爲 $\frac{0}{0}$。令 $x=a+h$，用戴氏定理展開之，可得

$$\mathrm{Lt}_{x=a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\mathrm{Lt}_{h=0}\frac{(a+h)^n-a^n}{h}=na^{n-1}。$$

很少需要展至 h 的二次或三次冪以上的。上式中間未曾寫出的一步爲

$$\mathrm{Lt}_{h=0}\frac{(a^n+na^{n-1}h+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}h^2+\cdots\cdots)-a^n}{a+h-a}。$$

分子中 a^n 可以消去，分母中 a 可以消去，再約去 h，而令 $h=0$ 故得結果爲 na^{n-1}。

例四　一個物體在有抵抗的介質下落經過時間 t，其速度 V 爲

$$V=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{e^{2g\beta t}-1}{e^{2g\beta t}+1};$$

此中 β 爲抵抗係數，當 $\beta=0$ 時，

$$V=gt_{\circ}$$

示意： 在 $\beta=0$ 代入前，單獨展開分子。

例五 證明 $\mathrm{Lt}_{h=0}\dfrac{1}{h}\log\left(1+\dfrac{h}{x}\right)=\dfrac{1}{x}$，此式已在第 18 節中見過。

例六 一個物體下落欲得速度 V 必須經過路程 H，則

$$H=\frac{1}{2gk^2}\log\frac{1}{1-k^2V^2},$$

$$\therefore\quad H=\frac{V^2}{2g}\left(1+\frac{(kV)^2}{2}+\frac{(kV)^4}{4}+\cdots\cdots\right),$$

此中 k 爲抵抗係數。若 $k=0$，證 $H=\dfrac{1}{2}\dfrac{V^2}{g}$。

我們可以擴充以上的討論而得普遍的結論。設

$$\mathrm{Lt}_{x=a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{f_1(a)}{f_2(a)}=\frac{0}{0}。\tag{1}$$

顯然是

$$f_1(a)=f_2(a)=0_{\circ}\tag{2}$$

用戴氏定理展開之得

$$\frac{f_1(x+h)}{f_2(x+h)}=\frac{f_1(x)+f_1'(x)h+\frac{1}{2}f_1''(x)h^2+\cdots\cdots}{f_2(x)+f_2'(x)h+\frac{1}{2}f_2''(x)h^2+\cdots\cdots}\tag{3}$$

今以 $x=a$ 代入，又 $f_1(a)=f_2(a)=0$；故約去 h 後可得

$$\frac{f_1(a+h)}{f_2(a+h)}=\frac{f'_1(a)+\frac{1}{2}f_1''(a)h+\cdots\cdots}{f'_2(a)+\frac{1}{2}f_2''(a)h+\cdots\cdots}。\tag{4}$$

$$\therefore\quad \mathrm{Lt}_{h=0}\frac{f_1(a+h)}{f_2(a+h)}=\mathrm{Lt}_{h=0}\frac{f_1'(a)+\frac{1}{2}f_1''(a)h+\cdots\cdots}{f_2'(a)+\frac{1}{2}f_2''(a)h+\cdots\cdots}。\tag{5}$$

$$\therefore\quad \frac{f_1(a)}{f_2(a)}=\frac{f_1'(a)}{f_2'(a)};$$

故

$$\mathrm{Lt}_{x=a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\mathrm{Lt}_{x=a}\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}。\tag{6}$$

以言語表之，若 $x=a$ 時，分數$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$變為$\frac{0}{0}$，則此分數的值可以用分子的一級微係數除以分母的一級微係數，然後代入 $x=a$ 而求之。於是我們求消失分數的值共有三種方法：

1) 相除法——卽以公共因數除分子與分母。

2) 展開法——卽以 $a+h$ 代 x，等等。

3) 微係數法——卽剛才所述的方法。

例一 從普遍的公式$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$證明$\int\frac{dx}{x}=\log x$。

示意： 分別求分子分母關於 n 的一級微係數，再以 $n=-1$ 代入，得

$$\mathrm{Lt}_{n=-1}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\mathrm{Lt}_{n=-1}\frac{x^{n+1}\log\,x\,dn}{dn}=\mathrm{Lt}_{n=-1}\,x^{n+1}\,\log\,x=\log\,x。$$

例二 證明 $\mathrm{Lt}_{\gamma=1}\frac{c}{\gamma-1}\left(\frac{1}{v_2^{\gamma-1}}-\frac{1}{v_1^{\gamma-1}}\right)=c\log\frac{v_1}{v_2}$。參閱第 89 節(10)第 88 節(3)。

II. 函數之為 $\frac{\infty}{\infty}$ 形式者

這種形式的函數可以化為前一種形式 $\frac{0}{0}$， 因為 $\frac{\infty}{\infty}=\frac{1}{\infty}\times\infty$

$$=\frac{1}{\infty}\div\frac{1}{\infty}=\frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0};$$ 但欲證明 (6) 可以同時應用於 $\frac{0}{0}$ 與 $\frac{\infty}{\infty}$ 亦無什麼困難；普遍的說若一級微係數都爲零時，則用二級微係數；二級微係數都爲零時則用三級微係數，……用記號表之則爲

$$\mathrm{Lt}_{x=a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\mathrm{Lt}_{x=a}\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}=\mathrm{Lt}_{x=a}\frac{f_1''(x)}{f_2''(x)}$$

$$=\mathrm{Lt}_{x=a}\frac{f_1'''(x)}{f_2'''(x)}=\cdots\cdots \tag{7}$$

此稱爲**霍氏規則**(Rule of l'Hopital)。

例一　證明 $\mathrm{Lt}_{x=0}\dfrac{\log x}{x^{-1}}=\mathrm{Lt}_{x=0}\dfrac{x^{-1}}{-x^{-2}}=\mathrm{Lt}_{x=0}-x=0$。

例二　當 n 爲正數時從萊氏定理 (Leibnitz' theorem) 知 x^n 的 n 級微係數爲 $\lfloor n$，又 e^x 的 n 級微係數爲 e^x。證明

$$\mathrm{Lt}_{x=\infty}\frac{e^x}{x^n}=\mathrm{Lt}_{x=\infty}\frac{e^x}{\lfloor n}=\infty。$$

III.　函數之爲 $\infty\times 0$ 形式者

這種分數，若以無限大化到分母上去卽爲 $\frac{0}{0}$，或以零化到分母上去卽爲 $\frac{\infty}{\infty}$，如下例中所示。

例一　讀者曾經遇到過這種問題了：卽當 $x=0$ 時，$x\log x$ 爲什麼？此種形式顯然是 $0\times\infty$ 的形式。如前例一，

$$\mathrm{Lt}_{x=0}\ x\log x=\mathrm{Lt}_{x=0}\frac{\log x}{x^{-1}}=0.$$

例二 證 $\mathrm{Lt}_{a=b}\frac{1}{a-b}\log\frac{(a-x)b}{(b-x)a}=\frac{x}{a(a-x)}$，如第 77 節(II)所示。

例三 證 $\mathrm{Lt}_{x=\infty}\ e^{-x}\log x=0\times\infty=0$。

IV. 函數之為 $\infty-\infty$ 形式者

先化成一個分數式，然後以上法處理之。

例一 求二級微係數，證

$$\mathrm{Lt}_{x=1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)=\mathrm{Lt}_{x=1}\frac{x\log x-x+1}{(x-1)\log x}$$

$$=\mathrm{Lt}_{x=1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}。$$

例二 證 $\mathrm{Lt}_{x=1}\left(\frac{x}{\log x}-\frac{1}{\log x}\right)=1$。

例三 W. Hecht, M. Conrad 與 C. Brückner (Zeit. Phys. Chem., **4**, 273, 1889) 在其化學動力學的著作中需求下式的極限值：

$$\mathrm{Lt}_{n=1}\frac{1}{n-1}\left(\log\frac{na-x}{a-x}-\log n\right)。$$

答：$\frac{x}{a-x}$。

V. 函數之為 1^∞ 或 ∞^0 或 0^0 之形式者

求對數，然後用前述幾種方法之一處理之。

例一 $\mathrm{Lt}_{x=0}\,x^x=0^0$。求對數，注意 $y=x^x$ 時 $\log y=x\log x$。但我們已知當 $x=0$ 時 $x\log x=0$。∴ 當 $x=0$ 時 $\log y=0$；∴ $y=1$。故 $\mathrm{Lt}_{x=0}\,x^x=1$。

例二　證明 $\mathrm{Lt}_{x=0}(1+mx)^{\frac{1}{x}}=1^{\infty}=e^m$。

這裏 $\log y=x^{-1}\log(1+mx)$。但當 $x=0$ 時 $\log y=\frac{0}{0}$；用微係數法，我們求得 $x^{-1}\log(1+mx)$，當 $x=0$ 時其值爲 m，故 $\log y=m$，卽當 $x=0$ 時 $y=e^m$。

§ 104. 有限差數的算法 (The Calculus of Finite Differences)

有限差數的算法，研究自變數受有限的變化時，函數值中所發生的變化。如 x 若增加一個有限量 h，則函數 x^2 增加爲 $(x+h)^2$，故函數中的增加量爲 $(x+h)^2-x^2=2xh+h^2$。在微分法中自變數的變化只假定其爲無限小。在以下兩節中我們見到從有限差數得出的幾種有用的結果；同時可以見到所用的記法。

在級數

$$1^3,\quad 2^3,\quad 3^3,\quad 4^3,\quad 5^3,\cdots\cdots$$

中，從第二項減去第一項，從第三項減去第二項，從第四項減去第三項，餘類推。結果得到一個新的級數

$$7,\quad 19,\quad 37,\quad 61,\quad 91\cdots\cdots$$

稱爲**第一級差數** (First order of differences)。用同樣對付這新的級數，我們可得第三個級數

$$12,\quad 18,\quad 24,\quad 30,\cdots\cdots$$

稱爲**第二級差數** (Second order of differences)。這樣我們可以儘量重複下去，除非此級數到了終點或其差數變爲極不規則。

各級差數通常列成一個差數表的形式。欲構成此表，我從級數的

第一項起；設一個變數的值爲 x_0，x_1，x_2，……另一個變數的相當值爲 y_0，y_1，y_2……，因變數或函數各值的差數以記號 Δ 表之，右上角註以差數的等級，右下角註其與自變數的關係。普遍的記號如下表：

自變數	函數	差數等級			
		第一級	第二級	第三級	第四級
x_a	y_a				
		$\Delta^1{}_a$			
x_{a+h}	y_{a+h}		$\Delta^2{}_a$		
		$\Delta^1{}_{a+h}$		$\Delta^3{}_a$	
x_{a+2h}	y_{a+2h}		$\Delta^2{}_{a+h}$		$\Delta^4{}_a$
		$\Delta^1{}_{a+2h}$		$\Delta^3{}_{a+h}$	
x_{a+3h}	y_{a+3h}		$\Delta^2{}_{a+2h}$		
		$\Delta^1{}_{a+3h}$			
x_{a+4h}	y_{a+4h}				

我們若應用之於函數 $y=x^3$，可得差數表：

x	y	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
1	$(1)_0$				
		$(7)_0$			
2	$(8)_1$		$(12)_0$		
		$(19)_1$		$(6)_0$	
3	$(27)_2$		$(18)_1$		0
		$(37)_2$		$(6)_1$	
4	$(64)^3$		$(24)_2$		
		$(61)_3$			
5	$(125)_4$				

欲以實驗結果表示爲一個經驗公式或補插公式，關於變數相對值中所發現的突然變化，這樣的表常能提供一種很好的見解。差數欄內異常不規則的姿態常能正確的顯示出量測的錯誤與觀測上計算上其他的錯誤。當然這些不規則的情形也很可由於被考察的現象本身的不連續性所致。

§ 105. 補插法 (Interpolation)

在決定化學反應的等級的一種方法中，必須求出在兩個分別的體系中一種已知物質的相等部份轉變時所需的時間。設 x 爲此反應物質在時間 t 的濃度；a 爲其最初的濃度；假定我們得到下表中的數字：

體 系 I; $a=0.1$		體 系 II; $a=0.0625$	
t	x	t	x
1.0	0.0581	1	0.04816
1.5	0.0490	3	0.03564
2.5	0.0382	7	0.02638
4.0	0.0300	17	0.01748

在一個體系中，四分鐘內$\frac{3}{10}$的物質轉變了，欲求在第二個體系中轉變此物質的$\frac{3}{10}$所需的時間。

普遍的說，即已知一定個數的觀測值欲計算任何兩個中間的值。這種問題，實際工作的人常會遇到，特別從事於不連續的觀察與量測，其中以時間爲一個變數者。在實際由觀測決定的兩值間計算兩個變數的數值之方法稱爲**補插法** (Interpolation)。我們若欲計算實際觀測值範圍以外的數值，所用之方法稱爲**外插法** (Extrapolation)。但兩種方法也可統稱爲補插法。參閱第 31 節。

顯然在確切的補插法舉行之前必須已知結合兩個變數的正確公式。設有一種物質的質量 m 與體積 v 的關係可用 $m=\frac{1}{2}v$ 代表之，我們很易計算出相當於 v 的任何值時 m 的值。又試驗假擬公式的方

法可用實驗值與補插法所得者相比較。所以補插法所根據的假定是當一個定律知道得相當確實時我們可依連續原理，預測未來量測的結果。

若能已知結合兩個變數的函數形式，欲決定一個變數關於另一變數的定值之相當值，不過是算術的方法。若此函數的形式完全不知而只知表中所列的值，則此問題失去確定的性質，我們必須借助於現在所欲敍述的方法。

I 用比例部份的補插法

若逐對的值之差很小而有規則，任何中間的值可用一個簡單的比例求之，這裏所根據的假定是函數的值之變化比例於變數的值之變化。此法不過是第 98 節例八中所說的比例規則，當 $\log n$ 與 $\log(n+1)$ 爲已知時，$\log(n+h)$ 的補插法。這規則用得很普通。例如用振動法 (Method of vibrations) 稱衡重量爲補插法的一例。設有一個物體，今欲量測其重量 w_0，放入天平的一邊，則使其上指針離開零點偏轉至 x_0。若已知兩個重量 w_1 與 w_2 各得偏轉爲 x_1 與 x_2。假定偏轉很小時，指針兩個位置之差比例於重量之差，則 w_0 可從一個簡單的比例式求之如下：

$$(w_0-w_1):(x_0-x_1)=(w_2-w_1):(x_2-x_1)$$

當兩項間相隔甚大或逐項的差減小得很快，用比例求法就不能相任了。在不定值的決定方法中，除去那些任意的選擇不計外，普通假定此函數可以用一個變數的有限冪級數表示之。我們故有牛氏 (Newton) 白氏 (Bessel) 史氏 (Stirling) 賴氏 (Lagrange) 果氏 (Gauss) 等補插公式。

I.　牛氏補插公式

我們回到基本所在。設 y_x 爲 x 的函數，如

$$y_x=f(x),$$

則若 x 增加 h，

$$y_{x+h}=f(x+h),$$

結果得

$$y_x \text{ 的增加量 } =y_{x+h}-y_x=f(x+h)-f(x)=\Delta^1{}_x。\tag{1}$$

同樣，增加量

$$\Delta^1y_x=\Delta^1{}_{x+h}-\Delta^1{}_x=\Delta^1(\Delta^1{}_x)=\Delta^2{}_x,\tag{2}$$

此中 $\Delta^1{}_x$ 是當 x 增加爲 $x+h$ 時 y_x 的值的第一級差數；$\Delta^2{}_x$ 爲 x 增加爲 $x+h$ 時 y_x 的第一級差數之第一級差數。現在可以明白 Δ^1 是一個運算的記號，即表示當變數 x 增加爲 $x+h$ 時取 $f(x)$ 的值的增加量。爲簡便計，我們普遍的寫 Δy_x 爲 Δ_x。從(1)與(2)，可得

$$y_{x+h}=y_x+\Delta^1y_x\tag{3}$$

$$y_{x+2h}=y_{x+h}+\Delta^1y_{x+h}=y_x+\Delta^1y_x+\Delta^1(y_x+\Delta^1y_x),$$

$$\therefore\quad y_{x+2h}=y_x+2\Delta^1y_x+\Delta^2y_x。\tag{4}$$

同樣，

$$y_{x+3h}=y_x+3\Delta^1y_x+3\Delta^2y_x+\Delta^3y_x。\tag{5}$$

們見到各級差數的數字係數依照二項定理的（參閱第 14 節）。設爲正整數，則 y_{x+nh} 時亦必成立，結果得

$$y_{x+nh}=y_x+n\Delta^1y_x+\frac{1}{2}n(n-1)\Delta^2y_x+\cdots\cdots$$

此式稱爲牛氏補插公式 (Newton's Principia, 3, lem. 5, 1687) 用以求出或補插一項或幾項的，當函數的 n 個值爲已知時。第一項 y_x 設寫爲 y_0，則

$$y_{nh}=y_0+n\Delta_0^1+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\Delta^2_0+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\Delta^3_0+\cdots\cdots \qquad (6)$$

此式逐項繼續下去直到最後是小至可以略去或很不規則。若我們寫 $nh=x$ 則 $n=\frac{x}{h}$，(6)式將爲下列形式，

$$y_x=y_0+\frac{x}{h}\ \frac{\Delta^1_0}{1}+\frac{x(x-h)}{h^2}\ \frac{\Delta_0^2}{\underline{|2}}$$

$$+\frac{x(x-h)(x-2h)}{h^3}\ \frac{\Delta_0^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots \qquad (7)$$

此中 h 爲逐個自變數的值的增加量；x 爲補插項的總增加量。應用最好以例題說明之。

例一　設 $y_0=2884$；　$y_1=2705$；$y_2=2501$；$y_3=2236$，求 $y_{\frac{1}{5}}$。(Inst. of Actuaries Exam., 1889)。第一列出差數表，特別注意於差數的正負號。

x	y	Δ^1	Δ^2	Δ^3
0	2844			
		$(-139)_0$		
1	2705		$(-65)_0$	
		$(-204)_1$		$(+4)_0$
2	2501		$(-61)_1$	
		$(-265)_2$		
3	2236			

今以這些數值代入 (6) 或 (7)，$h=1$，若 $n=\frac{1}{5}$，則 $x=\frac{1}{5}$。

$$\therefore \quad y_{\frac{1}{5}}=y_0+\frac{1}{5}\Delta_0{}^1+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{\underline{|2}}\Delta^2{}_0+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)}{\underline{|3}}\Delta^3{}_0$$

$$\therefore \quad y_{\frac{1}{5}}=2844-\frac{1}{5}\times 139+\frac{2}{25}\times 65+\frac{6}{125}\times 4=2821.592。$$

例二 50 年後 1 鎊的本利和，若週息 $2\frac{1}{2}\%$ 時為 3.4371090；週息 3% 時為 4.3839061； 週息 $3\frac{1}{2}\%$ 時為 5.5849264；週息 4% 時為 7.1066845。求週息為 $3\frac{3}{4}\%$ 時的本利和。(Inst. Actuaries Exam., 1888)

此中 $\Delta_0{}^1=0.9467971$； $\Delta_0{}^2=0.2542232$； $\Delta_0{}^3=0.0665146$；$y_0=3.4371090$；設以 y_0，y_2，y_4，y_6 代表已知的 y 各值；$h=2$。今求 y_5。

$$\therefore \quad y_5=y_0+\frac{5}{2}\Delta_0{}^1+\frac{5\cdot 3}{8}\Delta_0{}^2+\frac{5\cdot 3\cdot 1}{48}\Delta_0{}^3,$$

$$\therefore \quad y_5=3.4371090+2.3669928+0.4766685+0.0207858$$
$$=6.3015561$$

正確的值應為 6.30094。這個差異由於略去第三級以上的差數而發生的。不過我們從 n 個連接的項或函數的等距各項的值，只能求得 $n-1$ 級差數。本例中只有四項，故只能求至第三級差數為止，若能多知幾項則結果必更為正確。

例三 已知 $y_0=89685$；$y_1=88994$；$y_2=88294$；$y_3=87585$，求 y_9(Inst. Actuaries Exam., 1902)。

此中 $\Delta_0^1=-691$；$\Delta_0^2=-9$；以後各級差都等於零。用(6)得

$$y_9=y_0+9\Delta_0^1+36\Delta_0^2=89685-6219-324=83142。$$

例四　已知 $\log 4.22=0.6253125$；　$\log 4.23=0.6263404$；$\log 4.24=0.6273659$；$\log 4.25=0.6283889$，求 $\log 4.21684$。

以 y_0，y_1，y_2，y_3 表示已知數量，我們所求者爲 $y_x=y-0.00316$；$h=0.01$。故從(7)得

$$y-0.00316=y_0-\frac{0.00316}{0.01}\cdot\frac{\Delta_0^1}{1}-\frac{0.00316(-0.00316-1)}{0.0001}\cdot\frac{\Delta_0^2}{\underline{|2}}$$

$$=0.6253125-0.0003248-0.0000005=0.6249872。$$

例五　已知 $\sqrt[3]{60}=3.914868$；$\sqrt[3]{61}=3.936497$；$\sqrt[3]{62}=3.957891$；$\sqrt[3]{63}=3.979057$；$\sqrt[3]{64}=4.000000$，求 $\sqrt[3]{60.25}$。

這裏 $\Delta_0^1=+0.021629$；$\Delta_0^2=-0.000235$；$x=\frac{1}{4}$；$h=1$；

$$\therefore\quad y_{\frac{1}{4}}=y_0+\frac{1}{4}\Delta_0^1-\frac{3}{32}\Delta_0^2=3.914868+0.005407+0.000022$$

$$=3.920297。$$

用簡單的比例法所求得者爲 3.920295。而 $\sqrt[3]{60.25}$ 的正確值比 3.920297 還稍大些。

III.　賴氏補插公式

我們剛才假定 n 個已知值都是等距的。但這是不必定的。現在提到一個新的問題：已知函數的 n 個連接的值，彼此並不等距，欲求任何中間的值。

當 x 變爲 a，b，c，d，……n 時設 y 變爲 y_a，y_b，y_c，y_d……

y_n。賴氏曾經證明對於 x 的任何已知值，y 的相當值可從下列公式決定之：

$$y_x=\frac{(x-b)(x-c)\cdots\cdots(x-n)}{(a-b)(a-c)\cdots\cdots(a-n)}y_a$$

$$+\frac{(x-a)(x-c)\cdots\cdots(x-n)}{(b-a)(b-c)\cdots\cdots(b-n)}y_b+\cdots\cdots, \tag{8}$$

此中每項都是 x 的 n 次。此式普通稱爲賴氏補插公式，據說實爲 Euler 所發明。

例一 已知 50 歲的人再活一年的或然率(Probability)爲 0.98428；若爲 51 歲則或然率爲 0.98335；若爲 54 歲則或然率爲 0.98008；若爲 55 歲則或然率爲 0.97877，試求 53 歲的人再活一年的或然率。(Inst. Actuaries Exam., 1890)

這裏 $y_a=0.98428$； $a=0$； $y_b=0.98335$， $b=1$； $y_c=0.98008$， $c=4$； $y_d=0.97877$， $d=5$； $\therefore x=3$。

$$(x-b)(x-c)(x-d)=(3-1)(3-4)(3-5)=+4;$$

$$(x-a)(x-c)(x-d)=(3-0)(3-4)(3-5)=+6;$$

$$(x-a)(x-b)(x-d)=(3-0)(3-1)(3-5)=-12;$$

$$(x-a)(x-b)(x-c)=(3-0)(3-1)(3-4)=-6;$$

$$(a-b)(a-c)(a-d)=(0-1)(0-4)(0-5)=-20;$$

$$(b-a)(b-c)(b-d)=(1-0)(1-4)(1-5)=+20;$$

$$(c-a)(c-b)(c-d)=(4-0)(4-1)(4-5)=-12;$$

$$(d-a)(d-b)(d-c)=(5-0)(5-1)(5-4)=+20;$$

$$y_x=-\frac{4}{20}y_a+\frac{6}{12}y_b+\frac{12}{12}y_c-\frac{6}{20}y_d$$

$$=-\frac{0.98428}{5}+\frac{0.98335}{2}+\frac{0.98008}{1}-\frac{3\times0.97877}{10};$$

$$y_x=-0.196856+0.491675+0.98008-0.29361=0.98127。$$

例二 已知 log 280=2.4472; log 281=2.4487; log 283=2.4518; log 286=2.4564，用賴氏公式求 log 2 2 (Inst. Actuaries Exam., 1890)。

此中 $x=2$，$a=0$，$b=1$，$c=3$，$d=6$。從此求得

$$y_x=-\frac{2}{9}y_a+\frac{4}{5}y_b+\frac{4}{9}y_c-\frac{1}{45}y_d=2.4502。$$

例三 已知 log 200=2.30103; log 210=2.32222; log 220=2.34242; log 230=2.36173，用賴氏公式求 log $x=2\frac{1}{3}$。

此中 $a=0$，$b=1$，$c=2$，$d=3$。代入賴氏公式得

$$y_x=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}y_a+\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}y_b+\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad y_x=-\frac{x^3-6x^2+11x-6}{6}y_a+\frac{x^3-5x^2+6x}{2}y_b+\cdots\cdots;$$

以 y_x，y_a，y_b……等值代入，而集合 x，x^2，x^3，等項得

$$2.33333=2.30103+0.02171x-0.00055x^2+0.00001x^3。$$

用下章中的近似法解此方程式，求得 $x=215.462$。

例四 硫酸銨溶液的濃度每升爲 0.778，1.601，3.377 克分子量時，其導電性各爲 552，1010，1779 單位。計算每升含有一個克分子量時的導電性。

答： 約爲 684.5 單位。

示意： 用賴氏公式(8)

$$x=\frac{(1-1.601)(1-3.377)}{(0.778-1.601)(0.778-3.377)}552$$

$$+\frac{(1-0.778)(1-3.377)}{(1.601-0.778)(1.601-3.377)}1010+\cdots\cdots$$

$$=\frac{0.601\times2.377}{0.823\times2.599}552+\frac{0.222\times2.377}{0.823\times1.776}1010$$

$$-\frac{0.222\times0.601}{2.599\times1.776}1779=684.5。單位。$$

用簡單的比例法得 680 單位。這裏不過選用三個觀測值，若用所有的已知材料，而求此導電性，則所得結果將與用簡單的比例法求出者差異更大。

例五 在某種量測中知道 $x=618$ 時，$y=3.927$； $x=588$ 時 $y=3.1416$； $x=452$ 時 $y=1.5708$。用賴氏公式求 $x=617$ 時 y 的值。

答： 3.898。

若函數是週期的，果氏補插公式可以採用。在形式上此式很與賴氏的類似。[1]

$$y_x=\frac{\sin\frac{1}{2}(x-b)\sin\frac{1}{2}(x-c)\cdots\cdots\sin\frac{1}{2}(x-n)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)\sin\frac{1}{2}(a-c)\cdots\cdots\sin\frac{1}{2}(a-n)}y_a+\cdots \quad (9)$$

IV. 中央差數補插法

[1] 欲知這些公式的理論基礎，讀者必須參考 Bool 氏著 A Treatise on the Calculus of Finite Differences, London, 38, 1880。

以第 104 節中的差數表與牛氏公式相比較卽能發見補插項 y_x 是從已知各項每項取其若干部份求其代數和而得。已知各項中，在中央的項被取的部份最大，愈到兩端所被取的部分愈小。故此我們的補插項若佔有已知各項的中央的位置則所得結果將比在兩端時更爲準確。

設我們取一組 y_0，y_1，y_2，y_3，y_4 使要補插的項 y_x 近於中央項 y_2。用上述的記法，牛氏公式將爲下列形式，

$$y_{2+x}=y_0+(2+x)\Delta^1 y_0+\frac{(2+x)(1+x)}{\lfloor 2}\Delta^2 y_0+\cdots\cdots \tag{10}$$

y_0，y_1，y_2，y_3，y_4 等右下角所註之字換成 y_{-2}，y_{-1}，y_0，y_1，y_2 時較爲便利。於是差數表的形式爲

$$\begin{array}{cccccc}
x_{-2} & y_{-2} & & & & \\
 & & \Delta^1{}_{-2} & & & \\
x_{-1} & y_{-1} & & \Delta^2{}_{-2} & & \\
 & & (\Delta^1{}_{-1}) & & (\Delta^3{}_{-2}) & \\
(x_0) & (y_0) & & (\Delta^2{}_{-1}) & & (\Delta^4{}_{-2}) \\
 & & (\Delta^1{}_0) & & (\Delta^3{}_{-1}) & \\
x_1 & y_1 & & \Delta^2{}_0 & & \\
 & & \Delta^1{}_1 & & & \\
x_2 & y_2 & & & &
\end{array}$$

方程式(10)現在須寫爲 $y_x=y_{-2}+(2+x)\Delta^1{}_{-2}$

$$+\frac{(2+x)(1+x)}{\lfloor 2}\Delta^2{}_{-2}+\cdots\cdots \tag{11}$$

今欲轉變此公式使其中只有中央的差數，卽上列差數表中附有括號者。這是處理各行差數最好的辦法；第一假定

$$\Delta^1=\frac{1}{2}(\Delta^1{}_{-1}+\Delta^1{}_0);\qquad \Delta^3=\frac{1}{2}(\Delta^3{}_{-2}+\Delta^3{}_{-1}), \tag{12}$$

$$\therefore\quad \Delta^3{}_{-2}=2\Delta^3-\Delta^3{}_{-1} \tag{13}$$

再從差數表，

$$\Delta^4{}_{-2}=\Delta^3{}_{-1}-\Delta^3{}_{-2};\qquad \therefore\ \Delta^3{}_{-2}=\Delta^3{}_{-1}-\Delta^4{}_{-2}。\tag{14}$$

(13)與(14)相加，得

$$\Delta^3{}_{-2}=\Delta^3-\frac{1}{2}\Delta^4{}_{-2}。\tag{15}$$

同理，從差數表與(15)，可得

$$\Delta^2{}_{-2}=\Delta^2{}_{-1}-\Delta^3{}_{-2}=\Delta^2{}_{-1}-\Delta^3+\frac{1}{2}\Delta^4{}_{-2}。\tag{16}$$

又從(12)的第一式與 $\Delta^2{}_{-1}=\Delta_0{}^1-\Delta^1{}_{-1}$； $\Delta^1{}_{-1}=\Delta^1-\frac{1}{2}\Delta^2{}_{-1}$，可得

$$\Delta^1{}_{-2}=\Delta^1{}_{-1}-\Delta^2{}_{-2}=\left(\Delta^1-\frac{1}{2}\Delta^2{}_{-1}\right)-\left(\Delta^2{}_{-1}-\Delta^3+\frac{1}{2}\Delta^4{}_{-2}\right);$$

$$\therefore\quad \Delta^1{}_{-2}=\Delta^1-\frac{3}{2}\Delta^2{}_{-1}+\Delta^3-\frac{1}{2}\Delta^4{}_{-2}。\tag{17}$$

更從差數表，與(16)與 $\Delta^1{}_{-1}=y_0-y_{-1}$，可得

$$y_2=y_{-1}-\Delta^1{}_2=(y_0-\Delta^1{}_{-1})-\Delta^1{}_{-2};$$

$$=(y_0-\Delta^1{}_{-1})-\left(\Delta^1-\frac{3}{2}\Delta^2{}_{-1}+\Delta^3-\frac{1}{2}\Delta^4{}_{-2}\right)。$$

但 $\Delta^1{}_{-1}=\Delta^1-\frac{1}{2}\Delta^2{}_{-1}$，故

$$y_{-2}=y_0-2\Delta^1+2\Delta^2{}_{-1}-\Delta^3+\frac{1}{2}\Delta^4{}_{-2}。\tag{18}$$

今以從(15)，(16)，(17)，(18) 所得的 y_{-2}，$\Delta^1{}_{-2}$，$\Delta^2{}_{-2}$，$\Delta^3{}_{-2}$ 的值代入(11)即得新的公式，

$$y=y_0+\frac{x}{1}\cdot\frac{\Delta_0{}^1+\Delta^1{}_{-1}}{2}+\frac{x^2}{\underline{|2}}\Delta^2{}_{-1}$$

$$+\frac{x(x^2-1)}{\underline{|3}}\cdot\frac{\Delta^3{}_{-1}+\Delta^3{}_{-2}}{2}+\cdots\cdots \qquad (19)$$

此式稱爲史氏補插公式(J. Stirling, Methodus Differentialis, London, 1730)。已知一組 x 與 y 的相當值時，我們可計算在 x_0 與 x_1 間 x 的任何定值所相當的 y 的值。史氏公式中假定 x_1-x_0，x_0-x_{-1} ……等都爲 1。若 x_1-x_0，x_0-x_{-1}……爲 h，則史氏公式變爲

$$\left.\begin{aligned}y=y_0&+\frac{x}{h}\cdot\frac{\Delta_0{}^1+\Delta^1{}_{-1}}{2}+\frac{x^2}{\underline{|2}\,h^2}\Delta^2{}_{-1}\\&+\frac{(x+h)x(x-h)}{\underline{|3}\,h^3}\cdot\frac{\Delta^3{}_{-1}+\Delta^3{}_{-2}}{2}+\frac{(x+h)x^2(x-h)}{\underline{|4}\,h^4}\Delta^4{}_{-2}\\&+\frac{(x+2h)(x+h)x(x-h)(x-2h)}{\underline{|5}\,h^5}\cdot\frac{\Delta^5{}_{-2}+\Delta^5{}_{-3}}{2}+\cdots,\end{aligned}\right\}(20)$$

例　週息 3% 的終生年金，21 歲，25 歲，29 歲，33 歲，37 歲的人各爲 21.857，21.025，20.132，19.145，18.057。求 30 歲的人的年金。

作差數表，$h=4$。

x	y	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
21	$(21.857)_{-2}$				
		$(-0.832)_{-2}$			
26	$(21.025)_{-1}$		$(-0.061)_{-2}$		
		$((-0.893))_{-1}$		$((-0.033))_{-2}$	
((29))	$((20.132))_0$		$((-0.094))_{-1}$		$((+0.026))_{-2}$。
		$((-0.987))_0$		$((-0.007))_{-1}$	
33	$(19.145)_1$		$(-0.101)_0$		
		$(-1.088)_1$			
37	$(18.057)_2$				

$$\therefore\quad y=20.132-\frac{0.940}{4}-\frac{0.094}{\underline{|2}\times 4^2}+\frac{15\times 0.02}{\underline{|3}\times 4^3}-\frac{15\times 0.026}{\underline{|4}\times 4^4},$$

$$=20.132-0.235-0.003+0.0008-0.0001=19.895。$$

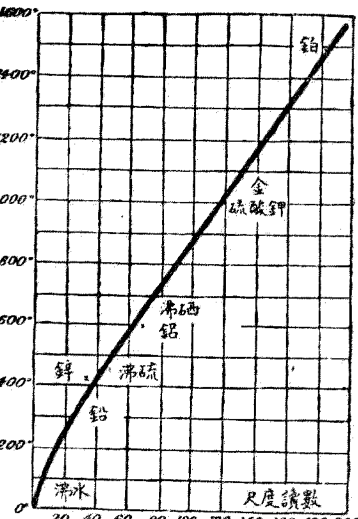
用牛氏公式亦得 19.895。

這裏史氏公式與牛氏公式所得結果相同。但若略去高級差數則兩者結果相異。例如略去公式(7)與(20)中的第二級差數，則史氏公式較爲正確，因爲我們以 $\Delta^1{}_{-1}=\Delta^1-\frac{1}{2}\Delta^2{}_{-1}$ 代入時我實在已經留下第二級差數的一部份。所以公式中若取到第一級或第三級或任何奇數級的差數爲止，則兩者的結果終是不同的。若用中央差數法，欲求奇數級的差數必須比普通的差級多用一個已知項；前者求至第三級差數須有五個已知項，而後者只須四個。在實用的目的上，採用中央差數法未見有多大利益。

V.　圖形補插法

中間值亦可從圖形的曲線上求之，卽量出已知橫坐標所相當的縱坐標；或已知縱坐標所相當的橫坐標。

用 Le Chatelier-Austin 高温計量測高温度時，電流計的指針在毫米尺上的偏轉，是由於計內電流中熱電偶 (Thermo-couple) 發熱而生之電動勢所致。指針的位移幾乎



圖一百三十

比例於溫度。尺度以精定的溫度加熱於接頭處而校準的，描圖時以溫度爲縱坐標，以尺度的讀數爲橫坐標。結果所得的圖形稱爲**校準曲線**(Calibration curve)，如圖一百三十所示。在曲線上任何尺度讀數的相當縱坐標即爲所求的溫度。例如尺度讀數 160 相當於溫度 1300°。

§ 106. 從數值觀測而得的微係數(Differential Coefficients from Numerical Observations)

有時必須從 $y=f(x)$ 的關係而計算 $\frac{dy}{dx}$ 與 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 的值。有三種方法可用：

I. 求已知函數的微係數

若兩個變數的相當值可用算學上的方程式的形式表示之，則一個變數關於另一變數的微係數是很易求得的。例如 A. Horstmann (Liebig's Ann. Ergbd., **8**, 112, 1872)，欲比較氯化銨的蒸氣熱 Q 的實驗值與其從熱力學原理所得 $Q=T\left(\frac{dp}{dT}\right)dv$ 的計算值。他發見在各溫度 θ 所測出的蒸氣壓力 p 很可用 Biot 公式：$\log_{10}p=a+b\alpha^{\theta-258.5}$ 代表之。故此在任何特殊溫度蒸氣壓力的 $\frac{dp}{d\theta}$ 即 $\frac{dp}{dT}$ 的值，可以求此公式的微係數而以 p 與 t 的觀測值代入求得之。當然這裏假定 a, b, α 爲已知。用 Horstmann 的，$a=5.15790$，$b=-3.34598$，$\log_{10}\alpha=0.9979266-1$。設欲求 300° 時 $\frac{dp}{d\theta}$ 的值。$\theta=300$ 時，$\theta-258.5=41.5$；又因 $\log_{10}\alpha^{41.5}=41.5\log_{10}\alpha=41.5\times-0.0020734=$

-0.086046，$\therefore 0.086046=-41.5\log_{10}a=\log a^{-41\cdot 5}=\log_{10}1.221$，即 $a^{-41\cdot 5}=1.221$，故 $a^{41\cdot 5}=0.819$；$ba^{41\cdot 5}=-3.34598\times 0.8192=-2.74036$。從此 $\log_{10}p=5.1579-2.7403$；即 $\log_{10}p=2.4175=\log_{10}261.5$，即 $p=261.5$。求 $\log_{10}p=a+ba^{\theta-258\cdot 5}$ 的微係數，得

$$\frac{dp}{d\theta}=pba^{41\cdot 5}\log_{10}a=261.5\times-2.74035\times-0.0020734=1.5。$$

例一　假定在 $\theta°$C. 時水汽的壓力每方呎 p 磅，合於下列定律

$$\theta=29.77p^{\frac{1}{5}}-37.6。$$

證當 $p=290$ 時，$\dfrac{dp}{d\theta}=15.67$。

示意：$\dfrac{d\theta}{dp}=-\dfrac{1}{5}(29.77)p^{-\frac{4}{5}}$；　$\therefore\ \dfrac{dp}{d\theta}=0.168p^{\frac{4}{5}}$；

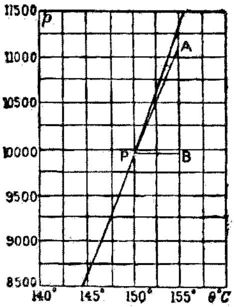
$\therefore\ \dfrac{dp}{d\theta}=0.168\times 290^{\frac{4}{5}}$ 磅，每方呎，每 °C.

例二　絕對溫度 $T°$ 時飽和蒸汽的體積 v_s 合於公式

$$L=T(v_s+v_w)\frac{dp}{dT},$$

此中 v_w 為一磅水的體積與 v_s 相比較時可以作為很小而略去；L 為一磅蒸氣的潛熱，用力學的單位即 740710 呎磅。若上例的公式亦為已知，求證當 $\theta=127°$ C. 時 $p=\left\{(127+37.6)\dfrac{1}{29.77}\right\}^5$；即 $\log p=3.71365$；　$\therefore\ \dfrac{dp}{d\theta}$ 即 $\dfrac{dp}{dT}=0.168\times 935=157$ 磅，每方呎，絕對溫度每一度。於是 $740710=157\times v_s\times 400$，$\therefore\ v_s=11.8$。

II. 圖形補插法



圖一百三十一

在前述的研究工作中 Horstmann 曾經求出各温度時水汽從晶狀第二磷酸鈉的分離壓力的 $\frac{dp}{dT}$ 之值。此時並不知道 $p=f(T)$ 的形式，必須從觀測的數值直接設法，或用曲線來表示這些數值。以後，在方格紙上描繪 p 與 T 的相當值而得光滑或匀正的曲線的切線，有時可以給我們所求的微係數。例如，設欲求 150° 時 $\frac{dp}{d\theta}$ 的數值，而已知當 $p=8.698$, 9.966, 11.380。磅,每方呎; 則 $\theta=145°$, $150°$, $155°$ C. 描繪這些數字得圖一百三十一。P 點相當於 150° 與 9.966 磅每方呎，求此時的 $\frac{dp}{d\theta}$，第一引切線 PA; 再引 PB 平行於 θ 軸。於是 $\frac{dp}{d\theta}$ 等於 PA 的斜度卽等於 $\angle APB$ 的正切,從圖可見 $PB=155-150=5$ 而 BA 約爲 1300，故 $\tan \angle APB=\frac{1300}{5}$ $=260$。卽 $\frac{dp}{d\theta}=260$。

若要極正確的結果,圖形求微係數法是不能用的,因實驗所得曲線上的差誤在引切線將被過分的擴大。量測得好,則結果較好,因曲線可以不必再爲弄光。但在 Horstmann 的工作中用圖解法已很够正確。欲觀其他的例,可參閱 O. W. Richardson, J. Nicol 與 T. Parnell 在 Phil. Mag. [6], **8**, **1**, 1904 上所發表的論文。

我們現在求一個更爲正確的方法來從實際量測所得 x 與 y 的相

當值而求一個變數如 y 關於另一個變數如 x 的微係數。

III. 從差數公式

我們現在回到史氏補插公式。求第 105 節中(19)式關於 x 的微係數，我們若取 y_0 與 y_x 之差爲無限之小，在結果中必令 $x=0$。這樣我們可以求得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{h}\left(\frac{\Delta^1{}_0+\Delta^1{}_{-1}}{2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{\Delta^3{}_{-1}+\Delta^3{}_{-2}}{2}+\frac{1}{30}\cdot\frac{\Delta^5{}_{-2}+\Delta^5{}_{-3}}{2}-\cdots\cdots\right) \tag{1}$$

此式又可寫作下列形式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{h}\left(\frac{\Delta^1{}_0+\Delta^1{}_{-1}}{2}-\frac{1^2}{\underline{|3}}\cdot\frac{\Delta^3{}_{-1}+\Delta^3{}_{-2}}{2}+\frac{1^2\cdot 2^2}{\underline{|5}}\cdot\frac{\Delta^5{}_{-2}+\Delta^5{}_{-3}}{2}+\cdots\cdots\right) \tag{2}$$

說明公式(2)的用處，先設下表中 x 與 y 的值是由實驗室中量測而得。今欲求相當於 $x=5.2$ 的 $\frac{dy}{dx}$ 之值。列中央差數表。

x	y	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
4.9	$(134.290)_{-3}$					
		$(14.123)_{-3}$				
5.0	$(148.413)_{-2}$		$(1.486)_{-3}$			
		$(15.609)_{-2}$		$(0.155)_{-3}$		
5.1	$(164.022)_{-1}$		$(1.641)_{-2}$		$(0.019)_{-3}$	
		$((17.250))_{-1}$		$((0.174))_{-2}$		$((-0.004))_{-3}$
((5.2))	$((181.272))_0$		$((1.815))_{-1}$		$((0.015))_{-2}$	
		$((19.065))_0$		$((0.189))_{-1}$		$((+0.009))_{-2}$
5.3	$(200.337)_{-1}$		$(2.004)_0$		$(0.024)_{-1}$	
		$(21.069)_1$		$(0.213)_0$		
5.4	$(221.406)_{-2}$		$(2.2.7)_1$			
		$(23.286)_2$				
5.5	$(244.692)_3$					

以適當的值代入公式(2)，求 $x=5.2$ 時的情形，只須將差數表中雙括

號的各項代入卽可。

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{0.1}\left(\frac{17.250+19.065}{2}-\frac{1}{6}\frac{0.174+0.189}{2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{30}\cdot\frac{0.009-0.004}{2}\right)。$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=181.273。$$

讀者可自己證明求史氏公式的微係數二次，令結果中 $x=0$，可得二級微係數

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{h^2}\left(\Delta^2{}_{-1}-\frac{1}{12}\Delta^4{}_{-2}+\frac{1}{19}\Delta^6{}_{-3}-\cdots\cdots\right), \tag{3}$$

此式又可寫爲

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{h^2}\left(\frac{2}{\underline{|2}}\Delta^2{}_{1}-\frac{2}{\underline{|4}}\Delta^4{}_{-2}+\frac{2\cdot 2^2}{\underline{|6}}\Delta^6{}_{-3}\right.$$
$$\left.-\frac{2\cdot 2^2\cdot 3^2}{\underline{|8}}\Delta^8{}_{-4}+\cdots\cdots\right)。 \tag{4}$$

差數的等級不必求得過高，因爲較高級的近似不及最初幾級正確，故過高易與材料的正確性不一致。在發現不規則的情形時卽應停止。如上表中 Δ^5 卽已越出範圍。普通在實用上，最初二級已很够用。

例一　Horstmann 觀察各溫度 θ 氯化銀銨的分離壓力 p 之結果爲

$\theta=8$,	12,	16,……………°C.
$p=43.2$	52.0,	65.3,厘米(水銀柱)。

證明溫度 12° 時，$\frac{dp}{d\theta}=2.76$。

例二　從下列材料證溫度 0° C 時，$\frac{ds}{d\theta}=-4.7\times10^{-6}$，

$$\theta=\quad 1,\quad 0.5,\quad 0,\quad -0.5,\quad -1.0,\cdots\cdots;$$

$$10^6\times s=1288.3,\ 1290.7,\ 1293.1,\ 1295.4,\ 1297.8,\cdots\cdots。$$

例三　從上文的差數表中，求 $y=5.2$ 時$\frac{d^2y}{dx^2}$的值。

例四　飽和蒸汽的壓力 p 隨溫度 θ 的變化如下表：

$$\theta=\quad 90,\quad 95,\quad 100,\quad 105,\quad 110,\quad 115,\quad 120,\cdots\cdots;$$

$$p=1463,\ 1765,\ 2116,\ 2524,\ 2994,\ 3534,\ 4152,\cdots\cdots。$$

從此證溫度 105° 時 $\frac{dp}{d\theta}=87.58$；　$\frac{d^2p}{d\theta^2}=2.48$。

示意：
$$\frac{dp}{d\theta}=\frac{1}{5}\left\{\frac{1}{2}(408+470)-\frac{1}{12}(5+8)\right\}$$

$$=\frac{1}{5}(437.917)=87.583。$$

§ 107. 如何用公式代表一組觀測值 (How to Represent a set of Observations by Me ns of a Formula)

在實驗室中對於兩個變數作一組量測以後，必然會追求是否有簡單的關係存在其間；換言之，即是否可以得一個式子以一個變數來表示另一變數，於是全部的觀測可以縮寫於一個簡單的公式之中，雖然其餘的值並未實在量測。

求一個公式來表示任何一組量測中兩個變數的關係，其最爲滿意的方法是從已知的原理或定理化出一個含有變數與常數的算式於是從實驗結果本身決定此常數的值。這種算式稱爲理論公式 (Theoretical formula)，與經驗公式(Empirical formula)須分別清楚，那是與已知原理或定律無確定的關係的。

『公式』與『函數』並非同義的名詞。函數是變化中所含的關係或定律。這關係在公式中可以用代表數字的記號表示之。公式並非函數本身，而不過是其外衣。是否貼身還是問題。若以記號的形式關係表示有些物理變化或具體事物時，必須牢記這個區別。

單從實驗所得的材料，當然不能決定函數的正確形式。適合於數值材料的公式可以有無限個，正像經過一組的點，可有無數個曲線一樣意義。例如表示飽和蒸汽的壓力與溫度的關係，曾經提議過的經驗公式就有三十個以上。

事實上，經驗公式常是從幸運的猜度而創造出來的。優良的猜度是一種精美的藝術。函數的最可讚賞的形式有時從描繪實驗所得的材料時得到暗示。這是很有用的，可以記着；若曲線很有規則的增或減，則其方程式大概是代數方程式；若曲線交互的增減則此曲線大概可用些三角函數表示之。

若曲線是一個直線，則方程式的形式爲 $y=mx+b$。若非直線，則可以 $y=ax^n$ 或 $y=\dfrac{ax}{1+bx}$ 試之。若函數的增加(或減少)率比例於此函數的本身，即得複利定律。換言之，若 $\dfrac{dy}{dx}$ 比例於 y，則爲 $y=be^{-ax}$ 或 be^{ax}。若 $\dfrac{dy}{dx}$ 比例於 $\dfrac{x}{y}$ 而變化，則以 $y=bx^a$ 試之。若 $\dfrac{dy}{dx}$ 隨 x 而正變，則以 $y=a+bx^2$ 試之。這些若證明爲都不適合，則可試驗其他普

遍的公式，如

$y=\frac{a+x}{b-x}$; $y=10^{a+bx}$; $y=a+b\log x$; $y=a+bc^x$ 等等。否則我們就退守馬氏的展開式依 x 的昇冪展開，常數爲正，負，或零。當各收斂得很快時，此級數特別有用。

當結果顯出週期性時，如潮水的進退，大氣的溫度與壓力在每年中的變遷，磁偏角 (Magnetic declination) 的循環變化等類，我們都可將結果參照到三角函數如傅氏級數一章所示。

經驗公式，無論與事實符合得如何接近，不要以爲可以代表所論變數間的眞實關係。牠們只會在一定的限度內遵循着代表變數間圖形上的曲線，此外就無所用之。故如表示 $-32°$F. 至 $230°$F. 間水的蒸氣壓力，Regnault 曾用三個補插公式。[1] 例如，從 $-32°$F. 至 $0°$F. 他用 $p=a+b\alpha^\theta$；從 $0°$ 至 $100°$F. 他用 $\log p=a+b\alpha^\theta+c\beta^\theta$；從 $100°$F. 至 $230°$F. 他用 $\log p=a+b\alpha^\theta-c\beta^\theta$。Kopp 須用四個公式來代表 0 至 $100°$C. 間水的熱膨脹的量測值。每個 Kopp 的公式只能於每 $25°$C 範圍之內。

若求得或猜出滿意的公式統歸絕望，則以結果簡單的列成一表或描繪之於方格紙上，因爲這樣可使『事物本身呈現於目前而不用其數字的記號了』。

§ 108. 求經驗公式或理論公式內常數的值 (To Evaluate the Constants in Empirical or Theoretical Formulae)

[1] Rankine 很幸運後來求到以 $\log p=a-\beta\theta^{-1}-\gamma\theta^{-2}$，代表 Regnault 的結果可以用之於 $-32°$F. 至 $230°$F. 全部。

在一個含有常數的公式可以用之於任何特殊的變化上之前，這些常數的數值必須正確知道。例如，單位體積的任何氣體加熱至 θ° 時膨脹至體積 v，可用下式表之，

$$v=1+\alpha\theta,$$

此中 α 爲常數。此方程式所具體表現的定律，只有當 α 採取一種氣體所特具的數值時方能應用於此氣體。若爲氫則 $\alpha=0.00366$；若爲二氧化碳則 $\alpha=0.00371$；若爲二氧化硫則 $\alpha=0.00385$。

再如，我們欲應用**定比例定律** (Law of definite proportion)，必先確切知道是此定比例是什麽，然後可以決定某種特殊化合是否包含在此定律之內。用算學上的語言述之，即一個函數在可以實際應用之前我們必須知道：

(i) 此函數的形式；

(ii) 其中常數的數值。

函數形式的決定法在上節中已經述過，現在考察常數的求值法。

從實驗本身求這些常數的數值是否合理？回答是這樣的。這些數值材料是從實驗決定的，而這些實驗是受人支配用各種方法在各種情形下舉行的。若結果都不約而同，則實驗數字中很可作爲是包括我們所研究的常數之值在內。[1]

在各種溫度 θ° 下決定溶解於一體積水內的二氧化碳的體積 v，得下列各對的值：

---

[1] J. F. W. Herschel's A Preliminary Discourse on the Study of Natural Philosophy, London, 1831，在這裏是值得一讀的。

$$\theta = \quad 0, \qquad 5, \qquad 10, \qquad 15;$$

$$v = 1.80, \quad 1.45, \quad 1.18, \quad 1.00。$$

如 Herschel 所說，在所有『直接無阻的作用中』我們可以希望兩數是以簡單比例而變化，如服從直線方程式

$$y = a + bx;$$

我們這裏可寫為

$$v = a + b\theta, \tag{1}$$

此式為馬氏級數留下最初二項而捨去其餘的項，這是一望而知的。

今欲從觀測值而求常數 a 與 b 的值且須牠們在最可能的情形中代表實驗材料。上列各對的值代入所擬的公式得：

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & 1.80 = a, \\ \text{(ii)} & 1.45 = a + 5b, \\ \text{(iii)} & 1.18 = a + 10b, \\ \text{(iv)} & 1.00 = a + 15b, \end{array}\right\} \tag{2}$$

這些稱為一組觀測方程式(Observation equations)。我們從

(i)與(ii)可以解得 $a = 1.80$，$b = -0.07$，

(ii)與(iii)可以解得 $a = 1.62$，$b = -0.054$；

(iii)與(iv)可以解得 $a = 1.54$，$b = -0.036$，等等。

每二個方程式所解得的常數之值不相一致是由於觀測上的差誤，當然還由於所擬定的函數形式不與實驗結果相配合。這樣去計算常數，幾乎沒有不是如此的。

從任意一組觀測方程式而求常數的數值，只有當量測完全準確時，

才能絕對無誤。現在的問題是要從實驗數字中揀選常數的最好代表值。有幾種方法可用。

I. 用代數的方法解方程式

欲求幾個常數的值，卽選取幾個觀測方程式，用普通的代數方法解之，而得各常數的值。由別種選取方法而得這些常數之不同的值，此處置之不理。

例　兩個變數 x 與 y 已知其相當值爲 x_1，y_1；x_2，y_2；x_3，y_3；……計算補插公式

$$y=a\cdot 10^{\frac{bx}{1+cx}}$$

中常數 a，b，c 的值。

當 $x_1=0$ 時 $y_1=a$。故此只須決定 b，c 之值卽可。先求此式的對數，再以 x_2，y_2；與 x_3，y_3 代入而解之可得

$$b=\frac{\log_{10}\frac{y_3}{a}\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}\right)\log_{10}\frac{y_2}{a}}{\log_{10}\frac{y_3}{a}-\frac{1}{x_3}\log_{10}\frac{y_2}{a}};$$

$$c=\frac{\frac{1}{x_2}\log_{10}\frac{y_2}{a}-\frac{1}{x_3}\log_{10}\frac{y_3}{a}}{\log_{10}\frac{y_3}{a}-\log_{10}\frac{y_3}{a}}。$$

當常數的確切的決定並不特殊重要，當觀測差誤是相當的小，如上述一類的公式可用這個方法。V. H. Regnault 在他著名的論文 "Mémoire sur les forces élastiques de la vapeur d'eau" (Ann. Chim. Phys., [3], **11**, 273, 1844) 中曾用此法求第 107 節內所述

的公式中常數的值；G. C. Schmidt (Zeit. Phys. Chem., **7**, 433, 1891)；A. Horstmann (Liebig's Ann. Ergbd. **8**, 112, 1872.) 亦用過此法。

II. 最小平方法

這些常數必須適合於下列準則：觀測值與計算值之差(或正或負)必須最小。在任何公式中決定常數的最好方法是用所謂**最小平方法** (Method of least squares)。這規則是從下述假定而來，即最可能的常數之值能使觀測值與計算值之差的總和爲最小。我們應用這規則來計算函數的極大值與極小值。

本書常從特殊的而敍述到普遍的。這裏我們要變換方法，先述普遍的情形。設觀測的數量 y 隨 x 的變化依據下式，

$$y=a+bx。\tag{3}$$

今欲求 a 與 b 的最最可能的值。若爲完全準確，應有下列的觀測方程式；

$$a+bx_1-y_1=0;\ a+bx_2-y_2=0;\cdots\cdots a+bx_n-y_n=0。$$

在實際問題中，這些情形是不會達到的。設 v_1, v_2,……v_n 爲實在的差異，則

$$a+bx_1-y_1=v_1;\ a+bx_2-y_2=v_2;\cdots\cdots a+bx_n-y_n=v_n。$$

今欲決定常數的值而使

$$\Sigma(v^2)=v_1^2+v_2^2+\cdots\cdots+v^2_n$$

爲最小。在附有誤差的觀測中 v^2 的最小值普通不會等於零的；故 $\Sigma(v^2)$ 總是一個正數。所以我們必須使 a 與 b 選取這樣的值，可令

$$\sum_{n=1}^{n=n}(a+bx_n-y_n)^2$$

爲最小者。使 $\Sigma(v^2)$ 關於 a 與關於 b 的偏微係數各等於零卽適合這個條件。這樣我們可得

$$\frac{\partial}{\partial a}\Sigma(a+bx-y)^2=0;\ \text{故}\ \Sigma(a+bx-y)=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\Sigma(a+bx-y)^2=0;\ \text{故}\ \Sigma x(a+bx-y)=0。$$

若 n 個觀測方程式,卽有 n 個 a 卽 $\Sigma(a)=na$, 所以

$$na+b\Sigma(x)-\Sigma(y)=0;\ a\Sigma(x)+b\Sigma(x^2)-\Sigma(xy)=0。$$

今解此聯立方程式求 a 與 b, 得

$$a=\frac{\Sigma(x)\Sigma(xy)-\Sigma(x^2)\Sigma(y)}{[\Sigma(x)]^2-n\Sigma(x^2)};$$

$$b=\frac{\Sigma(x)\Sigma(y)-n\Sigma(xy)}{[\Sigma(x)]^2-n\Sigma(x^2)} \tag{4}$$

此二式決定常數的值。

回到本節開始的特例,求公式(1)中 a 與 b 的最好代表值。在代入(4)以前最好將材料排列如下表:

θ	v	θ^2	θv
0	1.80	0	0
5	1.45	25	7.25
10	1.18	100	11.80
15	1.00	225	15.00
$\Sigma(\theta)=30$	$\Sigma(v)=5.43$	$\Sigma(\theta^2)=350$	$\Sigma(\theta v)=34.05$

以這些數值代入方程式(4),又 $n=4$, 故得

$$a=1.758;\quad b=-0.0534。$$

在溫度 $\theta°$ 所溶氣體之量 v，可立爲公式

$$v=1.758-0.0534\theta。$$

說明在可能範圍內這是最好的公式，先列下表：

溫　度 θ	體　積　v		計算值與觀測值之差	計算值與觀測值之差的平方
	計　算　值	觀　測　值		
0	1.758	1.80	−0.042	0.00176
5	1.491	1.45	+0.041	0.00168
10	1.224	1.18	+0.044	0.00194
15	0.957	1.00	−0.043	0.00185
				0.00723

觀測值與計算值之差的平方總和，0.00723 是最小。a 或 b 的值稍有變動卽使此數增加。這是很易覆證的。例如，若取 $a=1.80$，$b=-0.065$，則此數將爲 0.039；若 $a=1.772$，$b=-0.056$，則此數將爲 0.0082，等是。

例一　在 0° 時長一米的棒隨溫度增加而伸長，如下表所示，試求定律代表棒長 l 與溫度 θ 的關係。

$$\theta=20°\quad,\quad 48°,\quad 50°,\quad 60°\quad C.$$

$$l=1000.22,\ 1000.65,\ 1000.90,\ 1001.05\ \text{毫米}。$$

(F. Kohlrausch's Leitfaden der praktischen Physik., Leipzig, 12, 1896.) 爲簡便計在計算中可用 $l'=.22,\ .65,\ .9,\ 1.05$。假定 $=a+b\theta$，可求得 $a=999.804$，$b=0.0212$，故 $l=999.804+0.01212\theta$。

例二　依照 G. J. W. Bremer 氏的量測 (Zeit. Phys. Chem.,

3, 423, 1889)碳酸鈉的水溶液中含有此鹽類 $p\%$ 則膨脹量爲 v，如下表：

$$p=3.2420,\ 4.8122,\ 7.4587,\ 10.1400;$$

$$10^4\times v=1.766\ ,\ 2.046\ ,\ 2.342\ ,\ 2.732\ 。$$

從此證明 $v=0.0001354+0.00001360p$。

假使我們不用普遍公式(3)，而從

$$y=a+bx+cx^2 \tag{5}$$

出發，其中 a, b, c 爲必須決定之常數。a 的值可以從實驗中使 $x=0$ 而求得其爲 $a=y_0$。求 b 與 c 的公式相似於(4)，得

$$b=\frac{\Sigma(x^4)\Sigma(xy)-\Sigma(x^3)\Sigma(x^2y)}{\Sigma(x^2)\Sigma(x^4)-[\Sigma(x^3)]^2};$$

$$c=\frac{\Sigma(x^2)\Sigma(x^2y)-\Sigma(x^3)\Sigma(xy)}{\Sigma(x^2)\Sigma(x^4)-[\Sigma(x^3)]^2}。\tag{6}$$

這兩式公式可用與前相同的方法求得之。

例一 在法國 Grenelle 地方，量測一個自流井中各種深度 x 處的溫度 θ 爲

$$x=\ 28,\ 66,\ 173,\ 248,\ 298,\ 400,\ 505,\ 548;$$

$$\theta=11.71,\ 12.90,\ 16.40,\ 20.00,\ 22.20,\ 23.75,\ 26.45,\ 27.70。$$

地面上卽 $x=0$ 時平均溫度爲 $10.6°$。從此證明深度 x 處

$$\theta=10.6+0.042096x-0.00020558x^2$$

例二 若 $x=0$ 時 $y=1$，又

$$x=\ 8.97,\ 20.56,\ 36.10,\ 49.96,\ 62.30,\ 83.72;$$

$$y=1.0078,\ 1.0184,\ 1.0317,\ 1.0443,\ 1.0563,\ 1.0759,$$

從此證明 $y=1+0.00084x+0.0000009x^2$。

Thomson(Wied. Ann., **44**, 553, 1891)用另一種普遍的公式

$$y=ax+bx^2+cx^3 \tag{7}$$

而求其中的常數 a, b, c 的值。說明須參閱其原文。

若研究三個變數,我們可用普遍公式

$$z=ax+y。 \tag{8}$$

取上述的路線, 讀者或能自行證得

$$a=\frac{\Sigma(x^2)\Sigma(xy)-\Sigma(xy)\Sigma(yz)}{\Sigma(x^2)\Sigma(y^2)-[\Sigma(xy)]^2};$$

$$b=\frac{\Sigma(x^2)\Sigma(yz)-\Sigma(xy)\Sigma(xz)}{\Sigma(x^2)\Sigma(y^2)-[\Sigma(xy)]^2}。 \tag{9}$$

M. Centnerszwer (Zeit. Phys. Chem., **26**, 1, 1896)觀測磷在各種氣體與蒸汽中氧化,氧的分壓力(Partial pressure)可參照經驗公式

$$p_x=p_0-a\ \log(1+bx);\quad 或\quad p_0-p_x=a\ \log(1+bx),$$

此中 p_0 爲純氧的壓力, p_x 爲氧混合着 $x\%$ 的其他氣體或蒸汽時的分壓力。從 Centnerszwer 所擬公式, 設 $p_0-p_x=y$, 證

$$a=\frac{\Sigma(xy)\Sigma(x^4)-\Sigma(x^2y)\Sigma(x^3)}{\Sigma(x^2)\Sigma(x^4)-[\Sigma(x^3)]^2};$$

$$b=\frac{\Sigma(xy)\Sigma(x^3)-\Sigma(x^2y)\Sigma(x^2)}{\Sigma(x^2)\Sigma(x^4)-[\Sigma(x^3)]^2}。 \tag{10}$$

例 Centnerszwer 所擬公式若用於氯苯時觀測值爲

$$p_x=561,\quad 549,\quad 536,\quad 523,\quad 509,\quad 485;$$

$$x=\quad 0,\ 0.054,\ 0.108,\ 0.215,\ 0.430,\ 0.858。$$

證 $a=184$, $b=113$。

最小平方法假定所有觀測值都是一樣的可靠。讀者可以注意我們假定一個變數是完全沒有差誤的，很多的情形我們可以安心的這樣假定，尤其當一個變數可以比另一個量測時的準確度高了許多時。要是不能如此，我們在後面可以見應得如何辦法。

III. 圖形解法

回到本節之初，可溶性的決定，在方格紙上描繪各對 x 與 y 之值的相當點。各點的位置近似於一直線上。引張一條黑絲在各點之間使與各點最相接近。取黑絲上的兩點得 $v=1.0$, $\theta=14.5$; $v=1.7$, $\theta=1.5$。

$$\therefore \quad a+14.5b=1;\quad a+1.5b=1.7。$$

相減得 $b=-0.54$, $\therefore$ $a=1.78$。這裏假定與各點最相接近的線可代表正確的定律，參閱第 54 節。不過這例中的觀測值不多還不足以顯示此方法的利益。試從下列各對：

$$p= \quad 2,\quad 4,\quad 6,\quad 8,\quad 10,\quad 20,\quad 25,\quad 30,\quad 35,\quad 40;$$

$$s=1.02,\ 1.03,\ 1.06,\ 1.07,\ 1.09,\ 1.18,\ 1.23,\ 1.29,\ 1.34,\ 1.40;$$

此中 s 爲温度 15°C. 時含有 $p\%$ 氯化鈣的水溶液之密度。量測時觀測的差誤愈大，普通則最好的黑絲的位置愈難選得一定。所求常數的值將因人而小有差異，卽一人於幾個時間所得亦會不同。留心一些且用準確精印的紙，所得結果在多數實用的需要上已够確切。

當最接近於各點的曲線若爲空手所繪，結果將更不一定。例如二氧化氫溶入稀硫酸內所成的溶液中作用的氧的量 y，於隔了 t 日後，求得爲

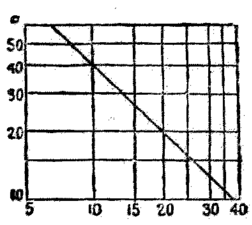
$t=\ 6,\ \ 9,\ 10,\ 14,\ 18,\ 27,\ 34,\ 38,\ 41,\ 54,\ 87,$

$y=3.4, 3.1, 3.1, 2.6, 2.2, 1.3, 0.9, 0.7, 0.6, 0.4, 0.2,$

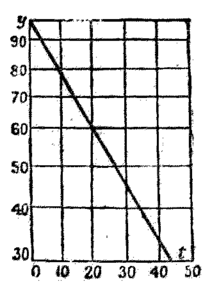
又當 $t=0$ 時 $y=3.9$。讀者可用這些量測值作爲一個練習。

在 J. Perry 氏所著 Practical Mathematics, London, 1899, 中，在某種情形時他勸人試用**對數格紙** (Logarithmic paper) 描繪。在方格紙上縱橫線的分格依照自然數的，如普通所用的尺上的刻度。在對數格紙上兩線間的距離，與**計算尺**(Sliding rule)上的刻度一樣，牠們是比例於自然數的對數。故此若實驗所得數字遵照定律，如 $\log_{10} x+a\log_{10} y=$ 常數，或者用對數格紙描繪函數，如在方格紙上一樣的容易。若結果所得的圖爲直線，我們的定律即爲 $xy^a=$ 常數，或 $(x+a)(y+b)^a=$ 常數之一類。

例　飽和蒸汽的體積每磅爲 v 立方呎時每平呎的壓力爲 p 磅：



圖一百三十二



圖一百三十三

$p=\ \ 10,\ \ 20,\ \ 30,\ \ 40,\ \ 50,\ \ 60,$

$v=37.80, 19.72, 13.48, 10.29, 8.34, 6.62$。

從此描圖於對數格紙上，得直線

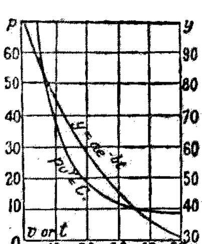
$$\log_{10} p+\gamma \log_{10} v=\log_{10} b;$$

故
$$pv^{1.065}=382,$$

因 $\log_{10} b=2.5811$, $\therefore$ $b=382$, $\gamma=1.065$。其圖在對數格紙上為圖一百三十二而在普通方格紙上為圖一百三十四。

半對數格紙 (Semi-logarithmic paper) 如圖一百三十三,其橫軸依照自然數而分格,其縱軸依照自然數的對數而分格。服從複利律的函數描在這種紙上,圖為直線。對數格紙的益卽使人不必空手描繪曲線,因為空手而能繪出一個準確的曲線是不很容易的。這裏只要引張一條黑絲就够了。用半對數格紙,$x+\log_{10} y=$ 常數;或 $y+\log_{10} x=$ 常數,都可作出一個直線的圖。

據 C. Runge 與 Paschen 氏定律,若以原子量的對數為縱坐標而以磁場內最亮光譜線 (Spectra lines) 間的距離為橫坐標,描繪圖形時,化學有關係的元素在同一直線上。例如鎂、鈣、鍶、鋇是合於這個情形的。鐳也是這直線上,故 C. Runge 與 J. Precht(Ber. den Phys. Ges. 613, 1903)推論鐳的原子量為 257.8。顯然我們可以直接在對數格紙上描繪原子量與別的材料。另一個例,可在 W. N. Hartley 與 E. P. Hedley(Journ. Chem. Soc., **91**, 1010, 1907)關於某些有機化合物的吸收光譜溶液之研究中見之,這裏是以振動頻率與溶液濃度的對數描繪的。



圖一百三十四

例一 在半對數紙上描繪 Harcourt 與 Esson 的數字:

$t=$ 2, 5, 8, 11, 14, 17, 27, 31, 35, 44;

$y=$94.8, 87.9, 81.3, 74.9, 68.7, 64.0, 49.3, 44.0, 39.1, 31.6,

此中 y 爲一個反應體系中隔了時間 t 後所剩物質的量。從此決定

$$y=ae^{-bt}$$

中 a 與 b 的值；上式可寫爲

$$\log_{10} y+bt=\log_{10} a,$$

此在半對數格紙上是一個直線。其在半對數格紙上的圖爲圖一百三十三,在普通方格紙上的圖爲圖一百三十四。

例二 在 J. Perry (Proc. Roy. Soc., **23**, 472, 1875) 所得玻璃在温度 $\theta°$F. 時的導電性 C 的數字中;

$\theta=$58, 86, 148, 166, 188, 202, 210,

$C=$0 , .004, .018, .029, .051, .073, .090,

我們可以求得什麼定律?

例三 安息香酸鈉的水溶液濃度爲 x, 則粘滯性爲 η, 試求 S. Arrhenius 公式 $\eta=a^x$ 中的常數 a 之值;已知

$\eta=$1.6498, 1.2780, 1.1303, 1.0623,

$x=$ 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$。

還有幾種別的方法,有人提出過。Gauss 的方法後面要講到的。參閱 Hopkinson, Messenger of Mathematics, **2**, 65, 1872; 或 S. Lupton 的 Notes on Observations, London, 104, 1898。

§ **109. 積分法的代用法** (Substitutes for Integration)

求微分方程式的積分並非恆是易於得到，有時甚至無法可求；在這些情形中必須採取較不確切的方法來覆證方程式所代表的理論。爲說明計，取方程式

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x); \tag{1}$$

此式常是用以代表化學反應的速度，x 爲時間 t 內物質轉變的量；a 爲最初的濃度。設 dt 爲單位時間，Δx 爲單位時間內物質的最初轉變量與最後轉變量之差，於是$\frac{1}{2}\Delta x$ 爲此時間內物質轉變的平均量。故第一個單位時間內，可寫爲

$$\Delta x=k_1\left(a-\frac{1}{2}\Delta x\right),$$

依代數學的轉換，又可寫爲

$$\Delta x=\frac{k_1 a}{1+\frac{1}{2}k_1}。 \tag{2}$$

在第二個單位時間內，則爲

$$\Delta x=k_1\left(a-x-\frac{1}{2}\Delta x\right),\quad \Delta x=\frac{k_1(a-x)}{1+\frac{1}{2}k_1},$$

餘類推。在覆證(1)時，這些式子可代(1)的積分

$$k=\frac{1}{t}\log\frac{a}{a-x}, \tag{3}$$

之用。

至於第二級反應的方程式，如

$$\frac{dx}{dt}=k_2(a-x)^2 \tag{4}$$

我們可以同樣方法得出

$$\Delta x=\frac{k_2a^2}{1+k_2a};\qquad \Delta x=\frac{k_2(a-x)^2}{1+k_2(a-x)}，\text{等等}, \tag{5}$$

只須如前的方法以 Δx 代 dx，令 $dt=1$，$x=\frac{1}{2}\Delta x$，並記着 Δx 的二次冪是很小可以略去。(4)的積分，照理是

$$k_2=\frac{1}{at}\cdot\frac{x}{a-x} \tag{6}$$

數值的說明。設我們假定 k_1 與 k_2 都等於 0.1，且 $a=100$。從(2)得

$$\Delta x=\frac{0.1\times100}{1.05}=9.52;\quad \therefore\ a-x=100-9.52=90.48;$$

$$\Delta x=\frac{0.1\times90.48}{1.05}=8.62;\quad \therefore\ a-x=90.48-8.62=81.87。$$

若爲第二級的反應則從(5)得

$$\Delta x=\frac{0.1\times10000}{1+0.1\times100}=90.99;\quad \therefore\ a-x=100-90.99=9.09;$$

$$\Delta x=\frac{0.1\times(9.09)^2}{1+0.1\times9.09}=4.33;\quad \therefore\ a-x=9.09-4.33=4.76。$$

下表很可將這個近似法所得的結果與通常的積分 (3) 與 (6) 所得的結果作一比較。當然有小小的差誤，但普通總是實驗差誤範圍以內的。

t	第一級反應 $a-x$ 從 (2)	第一級反應 $a-x$ 從 (3)	t	第二級反應 $a-x$ 從 (5)	第二級反應 $a-x$ 從 (6)
0	100	100	0	100	100
1	90.48	90.48	1	9.09	9.09
2	81.86	81.86	2	4.76	4.76
3	74.08	74.06	3	3.23	3.23
4	67.03	67.01	4	2.44	2.44
5	60.65	60.63	5	1.96	1.96
6	54.88	54.86	6	1.64	1.64
7	49.66	49.64	7	1.41	1.41
8	44.93	44.91	8	1.23	1.24

這個積分法 W. Federlin (Zeit. Phys. Chem., **41**, 565, 1902) 在研究磷酸，碘化鉀，與過硫酸鉀間的反應時用之；R. Wegscheider (Zeit. Phys. Chem., **41**, 52, 1902) 在研究磺酸酯 (Sulphonic ester) 的鹼化時亦用之。

讀者應該常常找求捷徑與簡化的方法。如於用相似法求值之前，積分有時可以化爲較簡的形式。設積分爲

$$u=\int y\ dx。$$

在 R. A. Lehfeldt (Phil. Mag. [5], **46**, 42, 1898; [6], **1**, 377, 403, 1901) 的溶液研究中，y 代表濃度，x 代表電動勢，u 滲透壓力，y 爲已知函數，故 dy 很易計算。用分部積分法，得

$$u=xy-\int x\ dy,$$

此中積分可用面積計或其他方法求之。

又如下式

$$x\frac{\partial \log p_1}{\partial x}+(1-x)\frac{\partial \log p_2}{\partial x}=0$$

中，p_1 與 p_2 爲混合物內兩種成份的蒸氣壓力；x 爲混合成份的分數，設 p_1 與 x 爲已知，今欲求 p_2 的值。這裏也用分部積分法，

$$\log p_2=-\int\frac{x}{1-x}\cdot\frac{\partial \log p_1}{\partial x}dx=-\frac{x \log p_1}{1-x}+\int\frac{\log p_1}{(1-x)^2}dx_{\circ}$$

最後的積分是很適合於數值計算。

§ 110. 近似積分法(Approximate Integration)

我們已經見過，曲線所包圍的面積可求定積分的值而計算之。這個可倒轉來做。一個定積分的值可從曲線所包圍的面積決定之。例如，若積分$\int f(x)dx$ 爲未知，$\int_b^a f(x)dx$ 的值可由描繪 $y=f(x)$而求之；在 $x=a$，$x=b$ 之處作縱坐標至曲線；於是量測 x 軸，與所作之兩個縱坐標，與曲線本身，所圍之面積。

這個面積可用面積計去量測，面積計是一個器具當其上的追跡器沿面積的周圍經過一周時即能自動記錄出此平面圖形的面積。O. Henrici 對於這些器具曾有很好的敍述，見於 British Association's Reports, 496, 1894。

另一種方法就是以紙片或均勻的材料雕成這個圖形。設已知面積 a 的重量爲 w_1，此雕出的圖形的重量爲 w。則用簡單的比例可以求此圖形的面積 x，如

$$w_1 : a = w : x。$$

其他的方法可以用來求某些上下限間積分的近似值。先描出曲線。分此曲線爲 n 部份，用 $n+1$ 個等距縱坐標 y_0，y_1，……y_n 分隔之，其公共距離，與各縱坐標之長爲已知，而求一個近似公式表示這樣分割的面積，卽求積分

$$\int_0^n f(x)dx$$

的值。

假定用牛氏補插公式

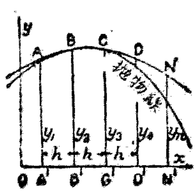
$$f(x) = y_0 + x\Delta^1{}_0 + \frac{1}{\lfloor 2}x(x-1)\Delta^2{}_0 + \cdots\cdots \tag{1}$$

可寫爲

$$\int_0^n f(x)dx = y_0\int_0^n dx + \Delta^1{}_0\int_0^n x\ dx + \frac{\Delta^2}{\lfloor 2}\int_0^n x(x-1)dx + \cdots\cdots, \tag{2}$$

此式稱爲**牛古二氏積分公式** (Newton-Cotes integration formula)。我們現在可以應用之於特例，如從一組實驗的量測值等，求定積分的值。

I. 拋物線公式



圖一百三十五

取三個縱坐標，則有兩個間距。捨去 $\Delta^2{}_0$ 以後所有的各項，我們記得 $\Delta^1{}_0 = y_1 - y_0$； $\Delta^2{}_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$。設公共的距離爲 1，卽得

$$\int_0^2 f(x)dx = 2y_0 + 2\Delta^1{}_0 + \frac{1}{3}\Delta^2{}_0$$

$$=\frac{1}{3}(y_0+4y_1+y_2)。\tag{3}$$

若公共距離爲 h，則所得結果爲

$$\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{3}h(y_0+4y_1+y_2),\tag{4}$$

此稱爲辛氏三分之一規則 (Simpson's one-third rule)。一個圖形表示或者可使此公式所含的假定更爲顯明。作圖如圖一百三十五。我們求 $ANN'A'$ 這部份的面積卽相當於上下限 $x=x_0$ 與 $x=x_n$ 間的 $f(x)dx$ 的積分，此中 $y=f(x)$ 爲曲線 $ABCDN$ 的方程式。此面積被 AA', CC', NN' 分爲兩條，每的頂上之曲線合於一個拋物線。於是

面積 $ABCC'A=$ 面積(梯形)$ACC'A+$ 面積(拋物線弓形)$ABCA$,

從第 191 節(16)量法的公式，得

$$\text{面積 } ABCC'A=A'C'\left[\frac{1}{2}(A'A+C'C)+\frac{2}{3}\left\{B'B-\frac{1}{2}(A'A+C'C)\right\}\right]$$

$$=2h\left(\frac{1}{6}A'A+\frac{2}{3}B'B+\frac{1}{6}C'C\right)$$

$$=\frac{1}{3}h(A'A+4B'B+C'C)。\tag{5}$$

推廣此討論使包括整個圖形在內，得

$$\text{面積 } ANN'A'=\frac{1}{3}h(1+4+2+4+\cdots\cdots+2+4+1)\tag{6}$$

此式括號中僅列 AA', $BB'\cdots\cdots$ 等的係數；h 爲每條的闊。此面積分成等闊的條子愈多，則計算所得的面積愈與實際接近。

令 $OA'=x_0$; $ON=x_n$; $A'N'=x_n-x_0$; 將此面積分爲 n 條；h 卽

爲$\frac{x_n-x_0}{n}$。設 y_0, y_1, y_2, y_3,……y_n 爲其各個縱坐標,則方程式(6)可寫爲形式,

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx=\frac{1}{3}h\{(y_0+y_n)+4(y_1+y_3+\cdots\cdots+y_{n-1})$$
$$+2(y_2+y_4+\cdots\cdots+y_{n-2})\}。\quad (7)$$

在實際的工作上,以相等間距 x_1-x_0, x_2-x_1,……x_n-x_{n-1} 量測可以免去許多困難。R. Wegscheider (Zeit. Phys. Chem., **41**, 52, 1902)曾應用辛氏規則求磺酸酯水解作用的速度方程式; G. Bredig 與 F. Epstein(Zeit. anorg. Chem., **42**, 341, 1904)在絕熱反應的速度研究中亦用之。

例一 用公式(6)求上下限 1 與 11 之間積分$\int x^3\,dx$ 的值,已知 $h=1$ 且 y_0, y_1, y_2, y_3,……y_8, y_9, y_{10} 各爲 1, 8, 27, 64,……1000, 1331。與絕對正確的值相比較。從公式(6)

$$\int_1^{11} x^3\,dx=\frac{1}{3}(10980)=3660;$$

而實際用積分法所得完全的結果爲

$$\int_1^{11} x^3\,dx=\frac{1}{4}(11)^4-\frac{1}{4}(1)^4=3660。$$

例二 用氫伏特計(Hydrogen voltmeter)量測一個電流的量,設 C_0, C_1, C_2,…… 爲時間在 t_0, t_1, t_2…… 分鐘通過電流計的電流。所發出的氫的體積 v 等於電流 C 安培,與時間 t 與氫的電化當量(Electrochemical equivalent), x 的連乘積,卽 $v=xCt$。我們經過相

等的時間去觀測電流計一次。故可得 $t_1-t_0=t_2-t_1=t_3-t_2=\cdots\cdots=h$。從(7)

$$\int_{t_0}^{t_n} C\ dt=\frac{1}{3}h\{(C_0+C_n)+4(C_1+C_3+\cdots\cdots+C_{n-1})$$
$$+2(C_2+C_4+\cdots\cdots+C_{n-2})\}。$$

在某一個實驗中當 $t=3$ 時 $v=0.22$，又

$$t=1.0\ ,\ 1.5\ ,\ 2.0\ ,\ 2.5\ ,\ 3.0\ ,\cdots\cdots;$$

$$C=1.53,\ 1.03,\ 0.90,\ 0.84,\ 0.57,\cdots\cdots。$$

$$\therefore\quad \int_0^4 C\ dt=\frac{0.5}{3}\{(1.53+0.57)+4(1.03+0.84)$$
$$+2(0.90)\}=1.897。$$

$$\therefore\quad x=\frac{0.22}{1.897}=0.1159。$$

此例亦可說明如何從一張量測值的表可以求得積分。還有一個求法，初看時似更正確，卽

$$\int_0^4 C\ dt=(t_1-t_0)\frac{C_0+C_1}{2}+(t_2-t_1)\frac{C_1+C_2}{2}+\cdots\cdots=1.91$$

而 $x=\dfrac{0.22}{1.91}=0.1152$，但此結果不及辛氏規則所得之 0.1159 爲正確，因氫的電化當量的正確值約爲 0.116。

例三　若 $\int dz=\int e^{\frac{a}{x}}(b-x)^{-1}\ dx$，其中 b 爲 x 的末尾值，則在 z_2-z_1 間距證明積分於上下限 x_1 與 x_2 間有下列形式，

$$z_2-z_1=\frac{x_2-x_1}{6}\left(\frac{e^{\frac{a}{x_1}}}{b-x_1}+4\frac{e^{\frac{a}{\frac{1}{2}(x_1+x_2)}}}{b-\frac{1}{2}(x_1+x_2)}+\frac{e^{\frac{a}{x_2}}}{b-x_2}\right)。$$

示意： 用 (4)； $h=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$。

我們若取四個縱坐標，(4)中三個積分所取形式將爲

$$\int_0^3 f(x)dx=\frac{3}{8}\{y_0+3(y_1+y_2)+y_3\};\tag{8}$$

此中各個縱坐標爲 y_0，y_1，…… 其間距離爲 h，如前圖。此公式稱爲**辛氏八分之三規則** (Simpson's three-eights rule)。我們若取七個縱坐標而略去某些小的差數，可得

$$\int_0^6 f(x)dx=\frac{3}{10}h(y_0+5y_1+y_2+6y_3+y_4+5y_5+y_6),\tag{9}$$

此稱爲**韋氏規則**(Weddle's rule) 見 Math. Journ., **11**, 79, 1854, J. E. H. Gordon (Proc. Roy. Soc., **25**, 144, 1876; 或 Phil. Trans., **167**, i, 1, 1877)用韋氏規則求電流通過螺旋線時其軸上的磁場強度。磁場的強度沿軸上等距的七點用測力計 (Dynamometer) 量測之，總力從(9)計算而得。

例一　比較辛氏三分之一及八分之一規則與實際積分的結果；設 $h=1$；又實際的積分爲

$$\int_{-3}^{+3} x^4\,dx=\frac{1}{5}\{(+3)^5-(-3)^5\}=97.2。$$

辛氏三分之一規則得

$$\frac{1}{3}[(+3)^4+(-3)^4+4\{(+2)^4+0^4+(-2)^4\}+2(1+1)]=98。$$

辛氏八分之三規則，$\int_{-3}^{+3} f(x)dx=\frac{3}{8}h(y_0+3y_1+3y_2+2y_3+3y_4+3y_5+y_6)$，

$$\therefore \frac{3}{8}[(+3)^4+(-3)^4+3\{(+2)^4+1^4+(-1)^4+(-2)^4\}+2\times 0]=99。$$

差誤爲 8 : 18 卽 4 : 9。許多例子已經試驗過，下列結論是普遍符合的：在拋物線公式中取奇數個縱坐標所得結果反比再多取一個縱坐標時之結果爲好。故此辛氏規則若取五個縱坐標比用六個縱坐標時所得之結果爲佳。

例二　在描繪$\int f(x)dx$ 中 $f(x)$ 的曲線，求得每隔 3 厘米處的縱坐標的長爲：14.2，14.9，15.3，15.1，14.5，14.1，13.7 厘米。求此積分的數值。

答：　用辛氏三分之一規則結果爲 263.9 平方厘米。

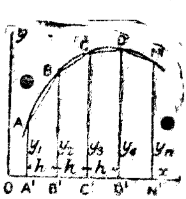
示意：　從(7)

$$\int_0^{x_n} f(x)dx=(14.2+13.7)+4(14.9+15.1+14.1)+2(15.3+14.5)。$$

這些規則可批駁的所在卽一部量測值比其餘的較爲重用。例如辛氏規則中，y_1，y_3，y_5 的比重較 y_2，y_4 爲大。

II. 梯形公式

若不假定每條的面積等於梯形與拋物線弓形之和，我們可以假定每條爲一個完全梯形，在圖一百三十六中設 AN 爲曲線，其方程式爲 $y=f(x)$；AA'，BB'，……爲 x 軸至曲線的垂線。今欲決定 $ANN'A'$ 的面積。設 $OB'-OA'=OC'-OB'=\cdots\cdots=h$。從第 191 節公式(11)，



圖一百三十六

$$面積\ ANN'A' = \frac{1}{2}h(AA'+BB') + \frac{1}{2}h(B'B+C'C) + \cdots\cdots;$$

$$= \frac{1}{2}h(AA'+2BB'+2CC'+\cdots\cdots+2MM'+NN');$$

$$= h\left(\frac{1}{2}+1+1+\cdots\cdots+1+1+\frac{1}{2}\right)。\qquad (10)$$

此式最後一節的括號中僅寫逐個縱坐標的係數。此結果稱爲梯形規則(Trapezoidal rule)。

設 x_0, x_1, x_2, $\cdots\cdots x_n$, 爲橫坐標的值相當於縱坐標 y_0, y_1, y_2, $\cdots\cdots y_n$, 則

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{1}{2}(x_1-x_0)(y_0-y_1)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1})(y_{n-1}+y_n)。\qquad (11)$$

若 $x_1-x_0=x_2-x_1=\cdots\cdots=h$, 即可得

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = h\left\{\frac{1}{2}(y_0+y_n)+y_2+y_3+\cdots\cdots+y_{n-1}\right\}。\qquad (12)$$

梯形規則雖然較易處理，但並不及根據於牛古二氏拋物線公式所得的那些規則正確。

下式

$$面積\ ANN'A' = h\left(\frac{5}{12}+\frac{13}{12}+1+1+\cdots\cdots+1+1+\frac{13}{12}+\frac{5}{12}\right)。\qquad (13)$$

或

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = h\{0.4(y_0+y_n)+1.1(y_1+y_{n-1})$$

$$+y_2+y_3+\cdots+y_{n-1}\}。\qquad (14)$$

稱爲既有拋物線規則的正確又有梯形規則的簡明。此式名爲杜氏規則(Durand's rule)。

例一　假定 $h=1$, $n=8$, 用近似公式(7),(10),(13)求積分 $\int_2^{10}\frac{dx}{x}$ 的值。求其正確值，與各個公式所得之結果作一比較，證明 h 愈小則結果愈正確。答從(7)者爲 1.611; 從(10)者爲 1.629; 從(13)者爲 1.616。此式正確值應爲 1.610。

例二　前例二中的積分若用梯形公式求之，其值爲何?

答：　其值爲 263.55。

示意：　從(12)

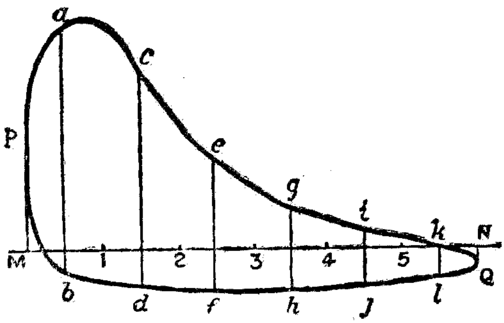
$$3\left\{\frac{1}{2}(14.2+13.7)+14.9+15.3+15.1+14.5+14.1\right\}。$$

G. Lemoine (Ann. Chim. Phys., [4], **27**, 289, 1872) 在研究熱對於赤磷的作用時遇到幾個不能積分的方程式。結果，他採用這些近似的方法。所得計算值與觀測值的表很爲滿意。

計算體積的雙重積分可應用這公式兩次而求得其值。欲得說明，可參閱 C. W. Merrifield 的報告『論我們所知應用求面積法與補插法於實際計算的現狀』, B. A. Reports, 321, 1880。

III.　中分公式

有時用一種簡法。假定圖一百三十七所示爲欲研究的圖形。作一基線 MN, 從圖形兩極端作 PM, QN 垂直於 MN, 垂足各爲 M 與 N, 分 MN 爲 n 個相等部份(圖中 $n=6$), 設每部份的長爲 s。從每



圖一百三十七

部份中點作 MN 的垂線如 ab, cd, ef……，量測其長，總加之除以 n，再以 s 乘之卽得所求的面積。設 $ab=y_1$; $cd=y_3$; $ef=y_5$; ……則

$$總面積=\frac{s}{n}(y_1+y_3+y_5+\cdots\cdots)。\tag{15}$$

§ 111. 用無限級數求積分法 (Integration by Infinite Series)

有些積分使得專家很擔心，甚至簡直沒有辦法。眞的，用我們所能指揮的方法而不能求得一個式子的積分，是極平常的事。於是我們必須借助於上二節中所述的近似法，或者若積分可以展開爲 x 的昇冪或降冪的斂級數，我們還可分別，求此展開式各項的積分，然後取有限個項數之和而得達於任何需要的正確度。

設 $f(x)$ 可展開爲 x 的昇冪斂級數，卽設

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots \tag{1}$$

求各項的積分，可得

$$\int f(x)dx=\int(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots)dx;$$

$$=\int a_0dx+\int a_1xdx+\int a_2x^2dx+\cdots\cdots;$$

$$=a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2+\frac{1}{3}a_2x^3+\cdots\cdots;$$

$$=x\left(a_0+\frac{1}{2}a_1x+\frac{1}{3}a_2x^2+\cdots\cdots\right)+C。\qquad(2)$$

再者，若 $f(x)$ 是斂級數，則 $\int f(x)dx$ 亦爲斂級數。故若

$$f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^{n-1}+x^n+\cdots\cdots,\qquad(3)$$

$$\int f(x)dx=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots\cdots+\frac{1}{n}x^n+\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\cdots\cdots\qquad(4)$$

當 x 小於 1 時，n 爲任何正整數，級數(3)是斂級數。當 $\frac{n}{x+1}x$ 小於 1 時，級數(4)爲斂級數，當 x 小於 1 時當然亦爲斂級數。故此兩個級數的收斂都隨同一條件 $x<1$ 而定。若一個級數爲斂級數，則另一個級數亦爲斂級數。

讀者已能展開一個函數爲戴氏級數時，這裏的積分法只須略加說明就够了。今舉一例。從除法或戴氏定理，

$$(1+x)^{-1}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots$$

結果故得

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\int dx-\int x^2dx+\int x^4dx-\int x^6dx+\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad\int(1+x^2)^{-1}dx=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots\cdots=\tan^{-1}x+C,$$

這是根據第 97 節(6)。

例一 證$\int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=x+\frac{x^3}{2\cdot3}+\frac{1\cdot3x^5}{2\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots=\sin^{-1}x+C$。

例二 證$\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}=2\sqrt{\sin x}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 x}{5}\right.$

$$\left.+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{\sin^4 x}{9}+\cdots\cdots\right)+C。$$

例三 證$\int e^{-x^2}\,dx=x-\frac{x^3}{1\cdot3}+\frac{x^5}{1\cdot2\cdot5}-\frac{x^7}{1\cdot2\cdot3\cdot7}+\cdots\cdots+C$。

以下二積分以後要用到的,其中 k 小於 1。

例四 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}k\right)^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^2\right)^2\right.$

$$\left.+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}k^3\right)^2+\cdots\cdots\right\}。$$

例五 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\phi)\Big)^{\frac{1}{2}}d\phi=\frac{\pi}{2}\left\{1-\frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}k\right)^2\right.$

$$\left.+\frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^2\right)^2+\cdots\cdots\right\}。$$

例六 怎樣可以求出積分$\int_0^1(1-x)^{-1}\log x\,dx$ 爲一個級數?

示意: 展開$(1-x)^{-1}$爲級數。各項乘以 $\log x\,dx$。然後逐項求積分。最快的辦法在積分時先求$\int x^n\log x\,dx$,這裏可用分部積分法,得

$$\int x^n \log x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\log x - \frac{1}{n+1}\right),$$

$$\therefore \quad \int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx = -\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots\right)。$$

例七 證 $\dfrac{1}{\sin\dfrac{x}{2}} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{\lfloor 3} \cdot \dfrac{x}{2} + \dfrac{14}{\lfloor 6}\left(\dfrac{x}{2}\right)^3 + \cdots\cdots$ 然後用 $2\sin^2\dfrac{x}{2}$

$$=1-\cos x,$$

證 $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2x + \frac{x^3}{36} + \frac{7x^5}{14400} + \cdots\cdots\right) + C$。

例八 證 $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{\pi x^2}{2} dx = \left[\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\frac{x^7}{7} + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5\frac{x^{11}}{11} - \cdots\right]_0^1;$

$$=0.5236-0.0875+0.0069-0.0003+\cdots\cdots$$

$$=0.446。$$

以積分表示爲有限形式較爲簡單時，我們有時還將函數展爲級數而求其積分。此時或因有限形式的積分不合於數值計算之用。例如

$$-\frac{dC}{dt} = kC(C+x);$$

$$\therefore \quad kt = \int_{C_1}^{C_n} -\frac{dC}{C(C+x)} = \frac{1}{x}\left[\log\frac{C+x}{C}\right]_{C_1}^{C_n} \qquad (5)$$

但 S. Arrhenius (Zeit. Phys. Chem., **1**, 110, 1887) 不用上式而用

$$kt = \frac{1}{C_n} - \frac{1}{C_1} - \frac{x}{2}\left(\frac{1}{C_n^2} - \frac{1}{C_1^2}\right) \qquad (6)$$

因爲 x 比了 C 爲很小，(5) 中有 $\frac{1}{x}$ 這因數，在數值計算時不會得出正確的結果；在 (6) 中高次項變得很小可以略去。又如普通求下式

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x)^2$$

的積分，爲

$$kt=\frac{1}{(a-b)^2}\left\{\frac{(a-b)x}{b(b-x)}+\log\frac{a(b-x)}{b(a-x)}\right\},$$

這是第 77 節(8)，但當 a 幾乎等於 b 的時候，結果不會正確，因爲那時的因數 $(a-b)^{-2}$ 爲很大。若展爲級數而求積即可免去這種困難。

於 $\dfrac{1}{(a-x)(b-x)^2}$ 上同時加減 $(b-x)^{-3}$，得

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)^2}=\left[\frac{1}{(b-x)^3}+\frac{1}{(a-x)(b-x)^2}-\frac{1}{(b-x)^3}\right]dx;$$

$$=\left[\frac{1}{(b-x)^3}-\frac{a-b}{b-x}\left\{\frac{1}{(a-x)(b-x)^2}\right\}\right]dx。$$

$$=\left[\frac{1}{(b-x)^3}-\frac{a-b}{b-x}\left\{\frac{1}{(b-x)^3}-\frac{a-b}{b-x}\cdot\frac{1}{(a-x)(b-x)^2}\right\}\right]dx;$$

$$=\left[\frac{1}{(b-x)^3}-\frac{a-b}{(b-x)^4}+\frac{(a-b)^2}{(b-x)^5}-\frac{(a-b)^3}{(b-x)^6}+\cdots\right]dx;$$

此爲幾何級數，連接的兩項間絕對值之比爲 $\dfrac{a-b}{b-x}$；當 $(a-b)<(b-x)$ 時此級數爲斂級數；即當 $a<b$ 或 a 略大於 b 時爲斂級數。逐項求積分，且用 $x=0$ 時 $t=0$ 決定常數；可得

$$k=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(b-x)^2}-\frac{1}{b^2}\right\}-\frac{a-b}{3}\left\{\frac{1}{(b-x)^3}-\frac{1}{b^3}+\cdots\cdots\right\}\right]。$$

第一項中不含 $(a-b)$，在實際工作中已很够用。

下列形式的積分

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx;\ \text{或}\ \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx。\tag{7}$$

在求解物理問題中用得很廣。例如研究光線經過大氣的路程(Kramp);熱的傳導(Fourior);地球的長期冷卻(Kelvin)等等。重要微分方程式

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}。$$

的一個解卽由此積分表示之。觀測誤差也可用相似的積分來代表。Glaisher 稱 (7) 中第一式爲**誤差函數餘式** (Error function complement) 寫爲 "erfc x"; 稱第二式爲誤差函數 (Error function) 寫爲 "erf x"。J. W. L. Glaisher(Phil. Mag. [4], **42**, 294, 421, 1871) 與 R. Pendlebury (同書 437 頁) 列有一張可用誤差函數所表示的積分表。任何積分能化爲誤差函數者，其數值可直接從已知的表上查得。又須參閱 J. Burgess 發表於 Trans. Roy. Soc. Edin., **39**, 257, 1898。

我們在第 83 節中已得這個事實卽同一形式的函數，當求相同的上下限間的積分時，得同一的數值。故此，我們可寫

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy;$$

$$\therefore\quad \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\left[\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right]^2。\tag{8}$$

今令

$$y=vx;\quad \text{卽}\ dy=x\,dv。$$

我們的積分，變爲

$$\int_0^\infty\int_0^\infty x\ e^{-x^2(1+v^2)}\ dx\ dv。\tag{9}$$

這是一個常用的方法，當求指數函數的積分時，先求其相似者的微分。故求 $\int x\ e^{-ax^2}\ dx$ 時先求 e^{-ax^2} 的微分；我們求得 $d(e^{-ax^2})=-2ax\ e^{-ax^2}\ dx$。從此可以推論到

$$\int d(e^{-ax^2})=-2a\int x\ e^{-ax^2}\ dx;\ \text{或}\int x\ e^{-ax^2}\ dx=-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}+C。$$

應用此結果於(9)式關於 dx 的積分，得

$$\int_0^\infty x\ e^{-x^2(1+v^2)}dx=\left[\frac{-e^{-x^2(1+v^2)}}{2(1+v^2)}\right]_0^\infty=\frac{1}{2(1+v^2)};$$

因 $x=\infty$ 時此函數爲 0。再以此結果求關於 dv 的積分，得

$$\int_0^\infty\frac{dv}{2(1+v^2)}=\left[\frac{1}{2}\tan^{-1}v\right]_0^\infty=\frac{\pi}{4}。$$

故此(8)式的最後結果爲

$$\left[\int_0^\infty e^{-x^2}\ dx\right]^2=\frac{\pi}{4};\ \text{即}\int_0^\infty e^{-x^2}\ dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}。\tag{10}$$

這事實好像 Euler 大約在 1730 年已經發明。Gauss 另外還有一個極靈巧的積分方法，他以(8)式第二節的積分轉換爲極坐標，使上下限包含一個象限。

$$\therefore\ \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\ dx\ dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}\ r\ d\theta\ dr$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}\ r\ dr=\frac{\pi}{4},\ \text{等等。}$$

這重要的結果可使我們能逐次簡化法而求積分 $\int e^{-x^2}\ x^n\ dx$，如 n

爲奇數，則用

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^n\,dx=\frac{(n-1)(n-3)\cdots\cdots 2}{2^{\frac{n-1}{2}}}\int_0^\infty e^{-x^2}x\,dx, \tag{11}$$

如 n 爲偶數，則用

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^n\,dx=\frac{(n-1)(n-3)\cdots\cdots 1}{2^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx。 \tag{12}$$

這些積分在氣體動力論與機率論中極其重要。在氣體動力論中會遇到，如下的積分

$$\frac{2Nm\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}x^4\,dx;\ 與\ \frac{2N\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}x^3\,dx。 \tag{13}$$

從(12)第一個積分可寫爲$\frac{3}{4}Nm\alpha^2$；第二個爲 $\frac{2N\alpha}{\sqrt{\pi}}$。

若上下限爲有限數，例如，在機率積分中，

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hx}e^{-h^2x^2}\,d(hx);$$

令 $hx=t$，

$$\therefore\quad P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt。$$

用馬氏定理展開 e^{-t^2} 爲級數，如上列例三。結果爲

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(t-\frac{t^3}{1\cdot 3}+\frac{t^5}{1\cdot 2\cdot 5}-\cdots\cdots\right) \tag{14}$$

可用於 t 值爲很小時。若爲很大的值，用分部積分法，

$$\int e^{-t^2}\,dt=-\frac{1}{2t}e^{-t^2}-\frac{1}{2}\int\frac{e^{-t^2}}{t^2}\,dt$$

$$=-\frac{1}{2t}e^{-t^2}+\frac{1}{2^2t^3}e^{-t^2}+\frac{3}{2^3}\int\frac{e^{-t^2}}{t^4}\,dt,$$

$$\therefore \quad -\int e^{-t^2}\,dt = e^{-t^2}\left(\frac{1}{2t} - \frac{1}{4t^3} + \frac{3}{8t^5} - \frac{15}{16t^7} + \cdots\cdots\right)$$

分解上下限(第 83 節 4)得

$$\int_0^t e^{-t^2}\,dt = \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt - \int_t^\infty e^{-t^2}\,dt,$$

右邊的第一個積分爲$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$。再求第二個積分，最後結果，

$$P = 1 - \frac{e^{-t^2}}{t\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1\cdot3}{(2t^2)^2} - \frac{1\cdot3\cdot5}{(2t^2)^3} + \cdots\cdots\right)。\tag{15}$$

t 的值很大時這級數收斂得很快。從此式 P 的值可求至任何需要的正確度。這些結果以後要用到的。

§ 112. 雙曲線函數(The Hyperbolic Functions)

現在預備解釋一類新的函數並且顯示牠們怎樣可以用作算學推理的工具。大家知道圓周每點與中心的距離是相等的；任何已知圓的半徑爲常數，無論取其圓弧的那一部份。在平面三角法中一個角很容易作爲圓弧的函數而量度之。如 l' 爲中心角 θ 所對的圓弧之長，r' 爲半徑，則

$$\theta = \frac{\text{圓弧之長}}{\text{半徑之長}} = \frac{l'}{r'}。$$

此稱爲一個角的圓弧量法，因此三角函數有時稱爲圓函數（Circular functions)。這個性質除了圓以外的平面曲線所沒有的。例如雙曲線，雖然關於中心是對稱的，但其上每點並不與中心等距。橢圓亦然。拋物線則無中心。

設有雙曲線交 x 軸於離中心爲 r 之處，其弧的長爲 l，則比值

$$u=\frac{l}{r}$$

稱爲 u 的雙曲線函數,正像比值$\frac{l'}{r'}$爲 θ 的圓函數。若讀者參考第 84 節例五，即能知道若爲等邊雙曲線

$$x^2-y^2=a^2, \tag{1}$$

其弧在離 y 軸爲 a，與 x 之縱坐標間的長爲 l，

$$\frac{x}{a}=\frac{1}{2}(e^u+e^{-u})。$$

但這個關係實際上是第 97 節(16) 中的 $\cos x$，只是 ix 換 u。比值$\frac{x}{a}$是 u 的雙曲線餘弦 (The hyperbolic cosine of u)的定義。通常寫爲 "cosh u" 或 "hycos u"。故此

$$\cosh\ u=\frac{1}{2}(e^u+e^{-u})=1+\frac{u^2}{\underline{|2}}+\frac{u^4}{\underline{|4}}+\cdots\cdots \tag{2}$$

同樣,從(1)進行,可證

$$\frac{y}{a}=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}=\sqrt{\frac{e^{2u}+2+e^{-2u}}{4}-1}=\sqrt{\frac{e^{2u}-2+e^{-2u}}{4}}=\frac{1}{2}(e^u-e^{-u}),$$

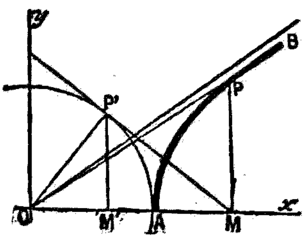
這是以前表示 $i\sin x$ 的關係。比值 $\frac{y}{a}$ 稱爲 u 的雙曲線正弦，寫 "sinh u" 或 "hysin u"。故

$$\sinh\ u=\frac{1}{2}(e^u-e^{-u})=u+\frac{u^3}{\underline{|3}}+\frac{u^5}{\underline{|5}}+\cdots\cdots \tag{3}$$

其餘四個雙曲線函數，與其餘的四個三角函數相仿，爲 tanh u, cosech u, sech u, coth u。這些函數的值可從其與 sinh u 與 cosh u 的關係而求之。如

$$\left.\begin{aligned} \tanh u=\frac{\sinh u}{\cosh u}; \quad \operatorname{sech} u=\frac{1}{\cosh u}; \\ \coth u=\frac{1}{\tanh u}; \operatorname{cosech} u=\frac{1}{\sinh u}。 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

與圓函數不同，比值$\frac{x}{a}$，$\frac{y}{a}$在雙曲線的情形中代表的並非是角。



圖一百三十八

一個雙曲線函數表示等邊雙曲線弧的已知部份的坐標關係。

設 O(圖一百三十八)為雙曲線 APB 的中心，Ox，Oy 為坐標軸。從曲線上一點 $P(x, y)$向 x 軸作垂線 PM。設 $OM=x$，$MP=y$。$OA=a$。

$$\therefore \quad \cosh u=\frac{x}{a}; \quad \sinh u=\frac{y}{a}。$$

因為等邊雙曲線，$x^2-y^2=a^2$，即得

$$a^2 \cosh^2 u-a^2 \sinh^2 u=a^2，或 \cosh^2 u-\sinh^2 u=1。 \tag{5}$$

此公式極像有名的三角公式 $\cos^2 x+\sin^2 x=1$。引 MP' 切圓 AP' 於 P'。作 $P'M'$ 垂直於 x 軸。設 $\angle M'OP'=\theta$。

$$\therefore \quad \frac{x}{a}=\sec \theta=\cosh u; \quad \frac{y}{a}=\tan \theta=\sinh u。 \tag{6}$$

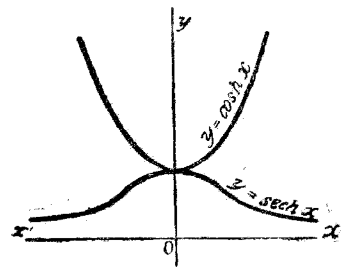
I. 換算公式： 相當於三角公式，雙曲線函數間有許多關係，像上列(5)式，如

$$\cosh 2x=1+2 \sinh^2 x=2 \cosh^2 x+1 \tag{7}$$

$$\sinh x-\sinh y=2 \cosh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2} \tag{8}$$

等等。總共收集在附錄中參考公式集內。

II. 雙曲線函數的圖形表示：　我們已經見到三角函數中正弦，餘弦等，爲週期函數。雙曲線函數卻是指數函數而非週期函數。讀者若在方格紙上描繪此六個函數卽可明瞭這事實；x 與 y 的數值見附錄中第 IV 表。圖一百三十九中所示爲 $y=\cosh x$ 與 $y=\operatorname{sech} x$。$y=\cosh x$ 的圖在靜力學中稱爲**雙垂曲線**(Catenary)。



圖一百三十九

III. 求雙曲線函數的微係數：　這是很易見到

$$\frac{d(\sinh x)}{dx}=\frac{d\{\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\}}{dx}=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\cosh x。$$

若用處理 $\sin x$ 的辦法（第 16 節）應用第 193 節的公式而求之，所得結果相同。

至於反雙曲線函數，設

$$y=\sinh^{-1} x; \quad \therefore \quad \frac{dx}{dy}=\cosh y。$$

從上(5)，可得

$$\operatorname{soch} y=\sqrt{\sinh^2 y+1}\,; \quad \therefore \quad \cosh y=\sqrt{x^2+1}\,;$$

再從原函數，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}。$$

IV. 求雙曲線函數的積分：　求雙曲線函數的微分與積分的標準

公式列成下表：

表 III. 標準積分表（雙曲線函數）

函數	微分法	積分法	
$y=\sinh x$	$\frac{dy}{dx}=\cosh x$	$\int \cosh x\, dx=\sinh x$	(9)
$y=\cosh x$	$\frac{dy}{dx}=\sinh x$	$\int \sinh x\, dx=\cosh x$	(10)
$y=\tanh x$	$\frac{dy}{dx}=\text{sech}^2 x$	$\int \text{sech}\, x\, dx=\tan x$	(11)
$y=\coth x$	$\frac{dy}{dx}=-\text{cosech}^2 x$	$\int \text{cosech}^2 x\, dx=-\coth x$	(12)
$y=\text{sech}\, x$	$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sinh x}{\cosh^2 x}$	$\int \frac{\sinh x}{\cosh^2 x} dx=-\text{sech}\, x$	(13)
$y=\text{cosech}\, x$	$\frac{dy}{dx}=-\frac{\cosh x}{\sinh^2 x}$	$\int \frac{\cosh d}{\sinh^2 x} dx=-\text{cosech}\, x$	(14)
$y=\sinh^{-1} x$	$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\sinh^{-1} x$	(15)
$y=\cosh^{-1} x$	$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\cosh^{-1} x$	(16)
$y=\tanh^{-1} x$	$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-x^2},\ x<1$	$\int \frac{dx}{1-x^2}=\tanh^{-1} x$	(17)
$y=\coth^{-1} x$	$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2-1},\ x>1$	$\int \frac{dx}{x^2-1}=\coth^{-1} x$	(18)
$y=\text{sech}^{-1} x$	$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=-\text{sech}^{-1} x$	(19)
$y=\text{cosech}^{-1} x$	$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}=-\text{cosech}^{-1} x$	(20)

含有二次式的平方根之代數式，當求其積分，常可用雙曲線函數代其自變數。這種方程式電工學上是極普通的。這是易於記憶的，在 a^2-x^2 或 $1-x^2$ 處可令 $x=a \tanh u$ 或 $x=\tanh u$；在 $\sqrt{x^2-a^2}$ 處可令 $x=a \cosh u$；又在 $\sqrt{x^2+a^2}$，可令 $x=\sinh u$。

例一　求$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$ 的值。以 $x=\sinh u$ 代入 $\sqrt{x^2+a^2}$，$dx=a\cosh u\,du$。從上(5)與第 193 節(22)與(24)，

$$\therefore\quad \int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\int\sqrt{a^2(1+\sinh^2 u)}\cdot a\cosh u\,du;$$

$$=a^2\int\cosh^2 u\,du=\frac{1}{2}a^2\int(\cosh 2u+1)du;$$

$$=\frac{1}{4}a^2\sinh 2u+\frac{1}{2}a^2 u$$

$$=\frac{1}{2}a\sinh u\cdot a\cosh u+\frac{1}{2}a^2 u,$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{1}{2}a^2\sinh^{-1}\frac{x}{a}。$$

又因第 193 節 (31) $\sinh^{-1} y=\log\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$，

$$\therefore\quad \int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}+C。$$

例二　證明若以 $x=a\cosh u$ 代入而求 $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ 可得結果 $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{1}{2}a^2\log(x+\sqrt{x^2-a^2})\frac{1}{a}+C$。

例三　求等邊雙曲線 $x^2-y^2=1$ 的 OPA 部份之面積(圖一百三十八)。令 $x=\cosh u$; $y=\sinh u$。從(6)，

$$\therefore\quad 面積\ APM=\int_1^x y\,dx=\int_0^u\sinh^2 u\,du=\frac{1}{2}\int_0^u(\cosh 2u-1)du。$$

面積 $APM=\frac{1}{4}\sinh 2u-\frac{1}{2}u$。 $\therefore$ 面積 $OPA=\frac{1}{2}$ 面積 $PM\cdot OM-$

面積 $APM=\frac{1}{2}u$。注意圖中圓的扇形 $OP'A=\frac{1}{2}\theta$,此中 $\theta=\angle AOP'$。

例四 從雙垂曲線 $y=C\cosh\frac{x}{c}$ 的最低點量起,求其長。

答: $l=c\sinh\frac{x}{c}$。注意 $x=0$ 時 $l=0$, $\therefore C=0$。可用第 193 節 (26)。

例五 求曲線 $y^2=4ax$(參閱第 84 節例一)的長。這裏必須遇到求 $\sqrt{1+\frac{a}{x}}dx$ 的積分。

示意: 以 $x=a\sinh^2 u$ 代入可得 $2a\int\cosh^2 u\,du$。

答: $a\int(1+\cosh 2u)du$ 即 $a(u+\frac{1}{2}\sinh 2u)$。

在頂點則 $x=0$, $\sinh u=0$, $C=0$。

再證,至通過焦點的縱坐標為止, $l=2.296a$。

示意: 圖形在固定的上下限時是極有幫助的。注意 $x=a$, $\therefore$ $\sinh u=1$, $\cosh u=\sqrt{2}$。從第 193 節 (31) $\sinh^{-1}1=u=\log(1+\sqrt{2})$。從同節(20) $\sin 2u=2\sinh u\cosh u$。

$$l=a\left[u+\frac{1}{2}\sinh 2u\right]_0^u=a(u+\sinh\cosh u)$$

$$=a[\log(1+\sqrt{2})+\sqrt{2})$$ 用附錄二自然對數表。

答: $2.296a$。

例六 證 $y=A\cosh mx+B\sinh mx$ 適合於方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}=m^2y$,其中 m, A, B 為不定常數。

示意：　求二級微係數，等等。注意此結果與 $y=A\cos nx+B\sin nx$ 很相似，以同法處理所得爲 $\frac{d^2y}{dx^2}=-n^2y$。

例七　在煤氣製造器中的一氧化碳，其生成的速度，J. K. Clement 與 C. N. Haskins(1909)研究得方程式

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\alpha}{\beta}(\beta^2-x^2)$$

其最初條件爲 $t=0$ 時 $x=0$。求積分得

$$\log\frac{\beta+x}{\beta-x}=2\alpha t。$$

解之，求 x 得

$$x=\beta\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}=\beta\ \tanh\ \alpha t。$$

V.　雙曲線函數的數值：附錄中表 IV 含有雙曲線正弦與餘弦的數值，x 從 0 至 5，間距爲 0.01。曾與 Hütt Academy, Berlin, 1877，出版的 Des Ingeniers Taschenbuch 比較而校對過。這些表的用法與普通對數表相同。其餘四個函數的數值可用方程式(4)從 $\sinh x$ 與 $\cosh x$ 而計算之，很易求得。

例　長爲 l 的彈簧，懸兩端於相距 s 的兩點，當其地平張力等於其 x 長之部份時，卽有方程式

$$l=x\left(e^{\frac{s}{2x}}-e^{-\frac{s}{2x}}\right)。$$

若寫 $u=\frac{10}{x}$，藉表 IV 而解之，證明此方程式可寫爲 $11u-10\sinh u=0$。已知 $l=22$，$s=20$，故 $x=13.16$。

示意： 以 $s=20$, $l=22$, $u=\frac{10}{x}$代入，可得 $22u-10(e^u-e^{-u})=0$;

$\therefore\ 11u-10\times\frac{1}{2}(e^u-e^{-u})=0$; 等等。$u$ 用前章所述的方法求之得

$u=0.76$; 但 $x=\frac{10}{u}$, 等等。

VI. **棣美維定理** (Demoivre's theorem)：我們見到

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix});\quad i\sin x=\frac{1}{2}(e^{ix}-e^{-ix}),$$

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x;\quad e^{-ix}=\cos x-i\sin x。$$

設以 nx 代 x 得

$$\cos nx=\frac{1}{2}(e^{inx}+e^{-inx});\quad i\sin nx=\frac{1}{2}(e^{inx}-e^{-inx}),$$

其中 n 爲任何實數，無論正或負，整數或分數。相加與相減，再與前式比較之，得

$$\left.\begin{aligned}\cos nx+i\sin nx&=e^{inx}=(\cos x+i\sin x)^n;\\ \cos nx-i\sin nx&=e^{-inx}=(\cos x-i\sin x)^n。\end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

此稱爲棣美維定理。當我們欲將一個虛數的指數函數表示爲三角級數的形式時，在求某些積分中，在解某些方程式時，這定理很有用處。

例一 覆證下列結果並與棣美維定理比較之：

$$(\cos x+i\sin x)^2=(\cos^2 x-\sin^2 x)+2i\sin x\cos x$$

$$=\cos 2x+i\sin 2x。$$

例二 證 $e^{\alpha+i\beta}=e^\alpha e^{i\beta}=e^\alpha(\cos\beta+i\sin\beta)$。

例三 證 $\int e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)dx=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)\frac{1}{\alpha+i\beta}$;

$$=e^{ax}\frac{(\cos\ \beta x+i\ \sin\ \beta x)(\alpha-i\beta)}{\alpha^2+\beta^2};$$

$$=e^{ax}\ \frac{(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x)+i(-\beta\cos\beta x+\alpha\sin\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}+C。$$

關於雙曲線函數的性質與用途的詳細討論須參考 G. Chrystal 所著 Algebra 第二册，London, 1890; 及 A. G. Greenhill 所著 A Chapter in the Integral Calculus, London, 1888。

第六章　數値方程式的解法

(How to Solve Numerical Equations)

『一切算術運算，目的無非省去直接的枚舉。一次得有總和，我們就設法保留以待後用；代數學也有這個目的，以關係代數值，凡同一規則下的運算，牠表之以記號，且確切決定之』。❶ —E. Mach.

§ 113. 方程式的根的幾種普遍性質(Some General Properties of the Roots of Equations)

算學方法在積分學中達了最高頂是給我們一個所研究的數量間的關係。例如第 20 節中我們求到物體的溫度與此物體冷卻中所歷時間的一種關係。用記號表示這關係卽爲 $\theta=be^{-at}$，此中 a 與 b 爲常數。我又說明過怎樣去求這些常數的值，牠們是一定不易的會影響代表自然現象的公式。現在留着要說的是當其餘的變數與常數的數値爲已知時怎樣去計算一個變數的值。已知 b，a，θ 而 t，或已知 b，a，t 而求 θ。求一個未知量的數値的運算稱爲**解方程式**(Solving the equation)。解方程式的目的是求出未知量取何值時可以適合此方程式，卽能使方

❶ "The objects of all arithmetical operations is to save direct enumeration. Having done a sum once, we seek to preserve the answer for future use; so too the purpose of algebra, which, by substituting relations for values, symbolizes and definitely fixes all numerical operations which follow the same rule."—E. Mach.

程式的一邊等於另一邊。未知量的這些值稱爲方程式的**根**(Root)或**解**(Solution)。

讀者必須分別清楚,**恆等方程式**(Identical equation)如

$$(x+1)^2=x^2+2x+1。$$

這是 x 爲一切値時都能成立的;而**條件方程式**(Conditional equation)如

$$x+1=8;\quad x^2+2x+1=0,$$

這些只有當 x 爲有些特殊値時方能成立，前者只有當 $x=7$ 的時候，後者只有當 $x=-1$ 的時候才能適合。

方程式如

$$x^2+2x+2=0$$

者,沒有實根,因爲沒有這樣的實數能够適合此方程式。作爲牠有實根而解之,虛數必然的出現,惹起我們的注意。這方程式的虛根是 $-1\pm\sqrt{-1}$ 卽 $-1\pm i$。係數爲實數的方程式,其虛根必一對一對的出現。例如,設 $a+\beta\sqrt{-1}$ 爲方程式的一個根,則有另一個根 $a-\beta\sqrt{-1}$。

n 次的普遍方程式爲

$$x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\cdots\cdots+qx+R=0。\tag{1}$$

R 這項稱爲**絕對項**（Absolute term）。若 $n=2$ 則爲二次方程式，$x^2+ax+R=0$；若 $n=3$，則稱三次方程式；$n=4$ 則稱四次方程式，餘類推。若 x^n 有任何係數時,我們可用此數除全式而化 (1) 的形式。當係數 a，b，…… 不是字母而是實數時，所表的已知關係稱爲**數值方程式**。每個 n 次的方程式有 n 個相等的或不等的根而不會多於 n 個

——這是 Gauss 定律。例如，$x^5+x^4+x+1=0$ 有五個根而不會多於五個。

一次，二次，三次方程式的普遍解法在通常的代數教本中都講到的；所以這是只要將牠們最顯著的性質扼要一述就够了。在實用的計算中求數值方程式的根我們幾乎常用相近法的。

經過適當的整理每個二次方程式都可化爲下列形式，

$$ax^2+bx+c=0;\quad 或\ x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0。\tag{2}$$

設 α 與 β 爲此方程式的根，x 必須等於 α 或 β 方能適合，此中

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\quad 與\ \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}。\tag{3}$$

(3)中兩根之和與積有下列關係，

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a};\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}。$$

$$故\ x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0;\quad 卽\ x^2-(根之和)x+(根之積)=0\tag{4}$$

若兩根之一爲已知，則另一根可直接求得。從(2)與(4)的第二方程式，可知兩根之和等於第二項的係數變號，兩根之積等於絕對項。若 α 爲方程式的一個根則 $x-\alpha$ 可以整除此方程式。若 $\beta,\gamma,$ ……爲方程式的根則$(x-\beta)(x-\gamma)$……可以整除此方程式。從 Gauss 定律 (2) 可寫爲

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0。\tag{5}$$

從(3)與(4)可以求得許多關於二次方程式根的重要性質。列成下表。❶

❶ 表中『相等』,『不等』指根的絕對值而說。

二次方程式係數與根的關係

係數		根	
b^2-4ac	正數	實數而不等	(6)
	零	實數而相等	(7)
	負數	虛數而不等	(8)
	完全平方	有理數而不等	(9)
	非完全平方	無理數而不等	(10)
a, b, c 同號		負數	(11)
a, b 不與 c 同號		一正一負	(12)
a, c 不與 b 同號		正數	(13)
$a=0$		一個根無限大	(14)
$b=0$		相等而號相反	(15)
$c=0$		一個根爲零	(16)
$c=0,\ b=0$		二個根都爲零	(17)

在決定根的性質時 b^2-4ac 的地位極佔重要，故此式稱爲二次方程式的**判別式**(Discriminate)。

例一　在理論化學書上常見的 Guldberg 與 Waage 的方程式

$$K(a-x)(b-x)=(c+x)(d+x)$$

中，證明

$$x=\frac{K(a+b)+d+c}{2(K-1)}\pm\sqrt{\left\{\frac{K(a+b)+d+c}{2(K-1)}\right\}^2+\frac{cd+Kab}{K-1}}。$$

示意：　展開已知方程式；整理各項爲 x 的降冪的次序；然後用根的公式。

例二　設 $v^2-516.17v+1852.6=0$，求 v。此方程式從後面第 117

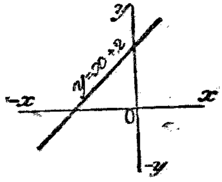
節例四中產生的。參照(2)，$a=1$；$b=-516.17$；$c=1852.6$。用(3)可得 $v=(516.17\pm508.94)^2$。

例三　氫與二氧化碳反應中熱的值 q；又 T 爲絕對溫度，則 $q=-10232+0.1685T+0.00101T^2$。證當 $q=0$ 時，$T=3100°$。

示意：負根須捨去。注意 $(0.1685)^2=0.02839$；$4\times10232\times0.00101=41.33728$；$\sqrt{41.36567}=6.432$。

§ 114. 數值方程式近似解的圖解法 (Graphic Methods for the Approximate Solution of Numerical Equations)

實際工作中，高於二次的方程式的實根普通以求其近似值最爲便利。解三次方程式的 Cardan 氏的普遍方法，通常教本都能見到，普通是因爲不易使用故此幾乎等於無用。三角解法比較好些。解實用上的數值方程式決定實根位置時最有用的方法之一是描出已知函數的圖。曲線與 x 軸的每個交點，代表方程式的一個根。方程式根的定位變爲方程式圖與 x 軸交點的決定。圖解法的正確性視圖幅的尺度與繪圖者的本領而定。尺度愈大則結果愈正確。



圖一百四十

例一　求方程式 $x+2=0$ 的根。一望即知其根爲 -2。但圖解的方法，可先令 x 爲 -3，-2，-1，0，1，2，3，而從曲線方程 $y=x+2$ 求 y 的相當值。描繪之。此曲線（圖一百四十）交 x 軸於 $x=-2$ 處。故 $x=-2$ 爲此方程式的根。

例二　定 $x^2-8x+9=0$ 的根的位置。如上題同樣進行。根在 6

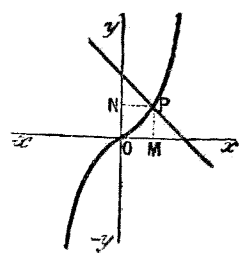
與 7; 1 與 2 之間。

例三　證 $x^3-6x^2+11x-6=0$ 有根在 1, 2, 3 的隣近。

例四　描圖證明,係數爲實數的奇次方程式,其實根不是一個卽是奇數個。若 x 取大的正數值時圖在 x 軸的一邊,則 x 取大的負數值時必在 x 軸另一邊。故至少與 x 軸有一交點; 若交兩次則必交第三次,等等。

例五　描圖證明,若以兩個數值所代得的兩個結果不是同號,則至少有一個根在這兩個數值之間。

例六　解 $x^3+x-2=0$。這裏 $x^3=-x+2$。令 $y=x^3$; $y=-x+2$。描繪這兩個方程式的圖, 可用立方表。所得兩個曲線交點的橫坐標卽爲已知方程式的一個根。$x=OM=$ 所求的根。見圖一百四十一。

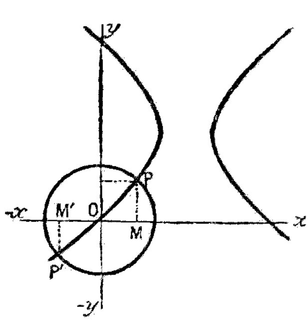


圖一百四十一

例七　描圖證明, 係數爲實數的偶次方程式,其根或爲偶數個或者沒有。

例八　描繪 $x^2-2x+1=0$。曲線與 x 軸相切而不相交。此切點代無限接近的兩點。卽是說至少有兩個等根。

例九　解 $x^2+y^2=1; x^2-4x=y^2-3y$。描出兩個曲線如圖一百四十二,故 $x=\pm OM$ 爲所求的根。



圖一百四十二

圖解法更可用以解超越方程式:

例十 設 $x+\cos x=0$，我們可以從兩個曲線 $y=-x$ 與 $y=\cos x$ 的交點而決定根的位置。

例十一 設 $x+e^x=0$，可描繪 $y=e^x$，$y=-x$。e^x 的值見附錄中表 IV。

J. J. van Laar 在其著作 Die Thermodynamik in der Chemie (Leipzig, 61, 1893) 中曾從

$$\log\frac{v_2-b}{v_1-b}-2=\frac{1.82}{v_1-b},$$

計算 v_1 與 v_2 的值所相當的 b 的值，列成一表。下列者為其一部份：

v_1	v_2	b
7754	1.0169	0.804
1688	1.0432	0.775
196.5	1.1268	0.700

像這種運算是最為厭煩。含有對數，正弦，餘弦等的方程式，沒有普遍的解法。除掉用累次近似法開發出所須的值外沒有別的方法。故代入 v_2 與 v_1，得

$$\log(196.5-b)-\log(1.1268-b)-2=\frac{18.2}{1.1268-b} \tag{1}$$

今與 b 以各種數值，代入方程式的左右兩邊，分別計算其結果，列成下表：

b	右邊	左邊
1.0	14.5	5.3
0.8	5.6	4.1
0.6	3.4	3.9
0.4	2.5	3.6

在第二對中卽 $b=0.8$ 時右邊大於左邊，在第三對中卽 $b=0.6$ 時左邊大於右邊。從此知道我們所求的 b 之值在 0.8 與 0.6 之間。只要計算的人有耐性，這樣決定的位置之後，更可作進一步的決定，於是可得更爲接近的近似值。若以表 b 的值爲縱坐標，右邊與左邊的值各爲橫坐標，描繪兩個曲線，由其交點決定適合(1)的根，這樣可以省去不少工作。常有的事，問題中的物理條件可以供給我們所求之根的近似意義。

例一 M. Planck(Wied. Ann., **40**, 561, 1890)在研究二元稀電解液之電位差時，有下列方程式

$$\frac{xU_2-U}{V_2-xV_1}=\frac{\log k-\log x}{\log k+\log x}\cdot\frac{xC_2-C_1}{C_2-xC_1}。$$

以 x 爲橫坐標，y 爲縱坐標，分成兩個方程式而描繪

$$y=\frac{xU-{}_2U_1}{V_2-xV_1};\quad y=\frac{\log k-\log x}{\log k+\log x}\cdot\frac{xC_2-C_1}{C_2-xC_1}$$

從這兩個曲線之交點，可以求得所要的 x 之值。在有一個實驗中 $U_1=5.2$; $U_2=272$; $V_1=5.4$; $V_2=54$; $C_1=0.1$; $C_2=1.0$。今欲求 x 的相當值。卽用上述之法可得 $x=0.1139$。

例二 W. Hecht, M. Conrad 與 C. Brüchner (Zeit. Phys. Chem., **4**, 273, 1889)研究親和力常數(Affinity constant)時，解方程式

$$0.3537=\log\frac{25}{25-x}-\log\frac{25}{20-x};$$

$$0.3537=\log\frac{25}{20-y}-\log\frac{25}{25-y},$$

求到所用單位的 0.01 之正確。

答： $x=36.78$; $y=8.217$。

§ 115. 數值方程式求近似解的 Newton 方法

(Newton's Method for the Approximate Solution of Numerical Equations)

依照上述方法，方程式

$$f(x)=y=x^3-7x+7, \tag{1}$$

在 -3 與 -4 之間可以決定有一個根。我們只要有耐性，可以繼續決定根的實在值所在的更小範圍。如 $x=-3$ 時 $y=+1$; $x=-3.2$ 時 $y=-3.3$。故所求的根又在 -3 與 -3.2 之間。我們暫可假定根的實在值爲 -3.1。欲從描圖而得更爲近似的值在手續上是很費事的。Newton 的方法根據於戴氏定理，可使手續簡短。

設 α 爲所求的根，則

$$f(\alpha)=\alpha^3-7\alpha+7。 \tag{2}$$

第一步近似法，假定 $\alpha=-3.1+h$。從(1)求微係數，

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-7; \quad \frac{d^2y}{dx^2}=6x; \quad \frac{d^3y}{dx^3}=6。 \tag{3}$$

以後各級的微係數爲零。依戴氏定理

$$f(x+h)=y+h\frac{dy}{dx}+\frac{h^2}{\underline{|2}}\,\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{h^3}{\underline{|3}}\,\frac{d^3y}{dx^3}。$$

令 $v=-3.1$，則 $\alpha=v+h$。

$$f(\alpha)=f(v+h)=f(v)+h\frac{dv}{dx}+\frac{h^2}{\underline{|2}}\,\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{h^3}{\underline{|3}}\,\frac{d^3v}{dx^3}。$$

略去 h 的高次冪，在第一步的近似法中，

$$f(v)+h\frac{dv}{dx}=0,\quad 卽\ h=-\frac{f(v)}{f'(v)} \tag{4}$$

此中 $f'(v)=\frac{dv}{dx}$。$f(v)$之值可以 -3.1 代入(2)而求之；$f'(v)$之值可以 -3.1 代(3)的第一式求之，於從(4)得

$$h=-\frac{f(v)}{f'(v)}=\frac{1.091}{21.83}=0.04999。$$

故此根的第一步的近似值爲 -3.05。

第二步近似法，可假定

$$\alpha=-3.05+h_1=v_1+h_1$$

如前一樣，

$$h_1=\frac{f(v_1)}{f'(v_1)}=+\frac{0.022625}{20.9081}=+0.001082。$$

故此根的第二步的近似值爲 -3.048918。用這方法，我們可得第三步或更高的近似值。普通在實用上第一步的近似值已經够用。

例一　用上述的方法證明 $x^3-4x^2-2x+4=0$ 的一個根，其第一步近似值爲 $\alpha=4.2491$，其第二步近似值爲 $\alpha=4.2491405\cdots\cdots$。

例二　若 $x^3+2x^2+3x-50=0$；則 $x=2.9022834$。

例三　此方法若照下列加以改變更有利益。解

$$\left(\frac{0.795}{1+x}\right)^x=0.398。 \tag{5}$$

令 $x=1$ 則左邊爲 0.3975，此數與 0.398 甚相近。因此我們令 x 爲 $1+\alpha$，此中 α 爲很小的數。設

$$f(\alpha)=\left(\frac{0.795}{2+\alpha}\right)^{1+\alpha}。\tag{6}$$

用馬氏定理，

$$f(\alpha)=f(0)+\alpha f'(0)+\text{其餘的項}。\tag{7}$$

第一步的近似法，略去(7)式其餘的項因其中都是很小數量 α 的高次冪。$f(0)=0.3975$；求(6)的左邊的微係數，$f'(0)=-0.5655$。於是

$$f(\alpha)=0.3975-0.5655\alpha。$$

但從假設，$f(\alpha)=0.398$。

$$\therefore\quad 0.398=0.3975-0.5655\alpha,\quad \text{卽}\ \alpha=-0.0008842。$$

因 $x=1+\alpha$，故得 $x=0.991158$。以此值代入（5）式的左邊，化為 0.39801，在實用的需要上，與 0.398 已很够接近了。若還不够，則以用於 $1+\alpha=x$ 的同樣方法，用之於 $0.991158+\rho=x$，可得更近似的結果。

§ 116. 如何從方程式分離等根 (How to Separate Equal Roots from an Equation)

這是用一種較前述的或許更簡的方法來決定根時的預備工作。從第 113 節 (5) 我們知道若 α，β，γ……為 n 次方程式的根，則方程式

$$x^n+ax^{n-1}+\cdots\cdots+sx+R=0,$$

可變為

$$(x-\alpha)(x-\beta)\cdots\cdots(x-\eta)=0。$$

若其中有兩個根相等，如$(x-\alpha)$與$(x-\beta)$全同，則方程式可被$(x-\alpha)^2$

除盡，若有三個等根，則方程式可被$(x-\alpha)^3$除盡，餘類推。若有n個等根，則方程式含有因數$(x-\alpha)^n$，而其一級微係數中將含因數$(x-\alpha)^{n-1}$，即$(x-\alpha)$將發現$n-1$次。於是原方程式與其一級微係數的最高公因數中含有$(x-\alpha)$，其發現的次數比原方程式中少一次。若無公因數，則無等根。

例一　$x\ -5x^2-8x+48=0$的一級微係數為$3x^2-10x-8$。公因數為$x-4$。這表示原方程式有兩個根等於$+4$。

例二　證明$x^4+7x^3-3x^2-55x+50=0$有兩個根都為-5。

§ 117. 用 Sturm 方法決定數值方程式不等實根的位置

(Sturm's Method of Locating the Real and Unequal Roots of a Numerical Equation)

Newton 的近似法當兩根之值很相近的時候，得不到滿意的結果。例如，曲線

$$y=x^3-7x+7$$

在 1 與 2 之間有兩個幾乎相等的根，我們若以x與y的相當值，如

$$x=0,\ 1,\ 2,\ 3\ ,\cdots\cdots$$

$$y=7,\ 1,\ 1,\ 13,\cdots\cdots$$

而作圖時，卽不易發覺在 1 與 2 之間有兩個根存在。

用所謂 Sturm 定理則分離數值方程式中實根的問題可以完全解決。這是很明顯的，若x從$+\infty$至$-\infty$取逐個可能的值，y每變號一次卽表示於其鄰近有一個實根。根的總數可從方程式的次數而知之，於虛根的個數可從根的總數與實根的個數之差而決定。

實根的個數＋虛根的個數＝根的總數。

Sturm 定理可使這種變號易於察出。其方法如下：

第一用前節的方法移去相等的實根，設留下者爲

$$y=x^3-7x+7=0_{\circ} \tag{1}$$

求一級微係數，

$$\dot{y}=3x^2-7_{\circ} \tag{2}$$

以 $\dot{y}$ 除 y 即

$$\frac{x^3-7x+7}{3x^2-7},$$

得 $\frac{1}{3}x$ 與餘數 $-\frac{1}{3}(14x-21)$。變餘數的號，乘以 $\frac{3}{7}$ 得

$$R=2x-3, \tag{3}$$

以 R 除 $\dot{y}$ 其餘數爲 $-\frac{1}{4}$。變餘數的乘以 4 得

$$R_1=1_{\circ} \tag{4}$$

(1),(2),(3),(4)的右邊爲

$$x^3-7x+7;\quad 3x^2-7;\quad 2x-3;\quad 1,$$

稱爲 Sturm 函數。

以 $-\infty$ 代(1)中 x，得結果爲負號；

以 $-\infty$ 代(2)中 x，得結果爲正號；

以 $-\infty$ 代(3)中 x，得結果爲負號；

以 $-\infty$ 代(4)中 x，得結果爲正號。

正負號的變化可寫爲，

$$-+-+。$$

注意最後(4)的結果不變，因其非 x 的函數。

同様，

x 的 值	Sturm 函數的正負號	變 號 的 次 數
$-\infty$	$-+-+$	3
-4	$-+-+$	3
-3	$++-+$	2
-2	$++-+$	2
-1	$+--+$	2
$+0$	$+--+$	2
$+1$	$+--+$	2
$+2$	$++++$	0
$+\infty$	$++++$	0

以小於 -4 或大於 $+2$ 的數值代 x 時，正負號不變，從 -4 至 -3 變號一次；從 1 至 2 變號兩次。故方程式於 -4 與 -3 之間有一個根；1 與 2 之間有兩個根。

現在還得決定充分的位數，並且分別開 1 與 2 之間的兩個根。第一使原方程式中 x 的值減小 1。此事只須以 $u+1$ 代 x 就是了；然後求所得方程式的 Sturm 函數。即爲

$$u^3+3u^2-4u+1;\quad 3u^2+6u-4;\quad 2u-1;\quad 1。$$

注意若 $x=+1.1$ 則 $u=+0.1$，如上法得

x 的值	Sturm 函數的正負號	變的次數
1.1	$+--+$	2
1.2	$+--+$	2
1.3	$+--+$	2
1.4	$---+$	1
1.5	$--++$	1
1.6	$-+++$	1
1.7	$++++$	0

故 1 與 2 之間的根的第二位數字各近於 3 與 6，於是已知方程式所求的三個根的近似值各爲 -3，1.3，1.6。

求下列各方程式的根的位置：

例一　$x^3-3x^2-4x+13=0$。

答：在 -3 與 -2；2 與 2.5；2.5 與 3 之間。

例二　$x^3-4x^2-6x+8=0$。

答：在 0 與 1；5 與 6；-1 與 -2 之間。

例三　$x^4+x^3-x^2-2x+4=0$。此方程式的 Sturm 函數共有五個。我們稱原方程式爲 ❶，其一級微係數 $4x^3+3x^2-2x-2$ 爲 ❷；❶ 除以 ❷ 得 x^2+2x-6 爲 ❸；❷ 除以 ❸ 得 $-x+1$ 爲 ❹；❸ 除以 ❹ 得 $+1$ 爲 ❺。令 $x=+\infty$ 與 $-\infty$ 可得

$+++-+$（變號 2 次）；　$+-+++$（變號 2 次）。

這是說沒有實根。所有的根都爲虛數。

例四　在溫度 0°C 與壓力每平方厘米一百萬達因(Megadyne)下的二氧化碳，計算其一克的體積，已知 Van der Waal 方程式，

$$\left(p+\frac{1852.6}{v^2}\right)(v-0.9565)=1.8824T_{\circ}$$

$0°C=273.7°T$; $p=1$。展開方程式而以 v 的降羃排列之。代入數值可化爲

$$v^3-516.17v^2+1852.6v-1772.0=0_{\circ}$$

此三次方程式只一個可用之根 512.5。在 Van der Waal 方程式中若$\frac{a}{v^2}$這爲很小而可略去，則解方程式時可以省去一些工夫。

例五　浮球的半徑爲 r，密度爲 ρ，求沒入水中的深度的問題中可以遇見方程式 $x^3-3rx^2+4r^3\rho=0$。設此球爲木質，半徑爲 1，比重爲 0.65，求解此方程式。從已知的條件方程式化爲 $x^3-3x^2+2.6=0$。依 Sturm 定理知此方程式的三個根中一個爲負根，一個正根在 1 與 2 之間；另一個正根大於 2。負根沒有物理上的眞實性。球沒入水中的深度不會大於其直徑 2。故此這兩個根必須從解答中除去。尙餘一根可用 Newton 的近似法求之得 $x=1.204$。

在最後一個例題，我們除去兩個根，因爲他們與所論問題的物理條件矛盾。這種事件常會遇到。方程式所有的根未必都是問題的解答。當然，每個根都有一些意義，但可以是問題中所不需要的。一個算學上的方程式總比自然所允許的表示得多一些。在物理世界中只有某一種類的變化會得發生。若落體的速度以 $v^2=64s$ 代表之，則我們欲求 $s=4$ 的速度可得 $v^2=256$；卽 $v=\pm16$。換言之，速度可以爲正或爲負。故此我們必須範圍住算學辭句的普遍性而除去那些物理上所不允許的變化。如問題中須要實數時則虛根可以除去；問題中只須要正數或整數

時則負數或分數可以除去。眞的，有時會得沒有一個根能適合問題所要求的條件，在這些情形問題就變爲無解答。算學方程式應用上所要求於特殊問題的限制引導我們到**極限條件** (Limiting condition) 的觀念，這在高等算學上是極其重要的。每個根的最後試驗是代入方程式看其是否適合。若不適合卽非解答。

例一　A 四十歲，B 二十歲。若干年後 A 爲 B 的三倍? 設 x 爲所需要的年數。

$$\therefore\quad 40+x=3(20+x)=60+3x \quad 卽\ x=-10。$$

但問題所需要者爲正數。故解答是 A 不會再有三倍於 B 的時候。(負號的意義是 A 於 10 年之前已經是三倍於 B 了)。

例二　一數 x 自乘後減去 7; 再開平方根; 加上 x 的二倍得 5。求此數 x。

$$\therefore\quad 2x+\sqrt{x^2-7}=5。$$

以普通方法解之，卽求 $5-2x=\sqrt{x^2-7}$ 的平方;整理之用第 113 節 (2)解得 $x=4$ 或 $\frac{8}{3}$。此兩根代入時無能適合原方程式者。這些都是增根 (Extraneous roots) 於平方時引入的。

§ 118. Horner 方法求數値方程式的近似實根

(Horner's Method for Approximating to the Real Roots of Numerical Equations).

當根的最初的一位或幾位有效數字如已用 Sturm 定理求得,則與幾乎相近的根可以分別開來，Horner 的方法是最簡而又最好的方法

用以求近似值可至任何需要的程度。單就實用上的需要說，Horner 方法是十全十美的了。開平方根與立方根的算術方法就是 Horner 方法的特例，因為 $\sqrt[2]{9}$ 或 $\sqrt[3]{9}$ 等於求 $x^2-9=0$ 與 $x^3-9=0$ 的根。

『鑒於這方法異常的優美，普遍，與簡明、但在通行的算學教本中沒有佔到更顯著的地位，這不能不大大的驚怪。雖然曾有幾個英國作家給牠好好的解釋……但在英國課程中尙無牠的地位。從五本標準的大陸教科書中終以為可找到牠的存在，豈知只有一本上提到，而那裏所用說明的方法不能深入到牠的眞實性格。這或者由於一種誤解而起，以為這方法裏終有些代數學上的深奧性。其實牠的精神純粹是算術的；而牠的美，只有在應用於特例上時才能欣賞到的美，是屬於不可形容的簡單的一種，卽是在十進小數記法中位置的用處，與算術的簡單規則的安排。總之，有些東西的發明是平凡的創造，牠就是其中之一』。——G. Chrystal 著 Textbook of Algebra (London, I, 346, 1898)。

擇要言之，其方法如下；用 Sturm 定理或其他方法求得一個根的整數部份；轉換此方程式為另一方程式，使其根比原方程式的小去已求得之數。我們假使從

$$x^3-7x+7=0, \tag{1}$$

出發，其一個實根的最初二位有效數字已經求得為 1.3。轉換此方程式為另一方程式使其根比(1)的根小 1.3。只要以 $u+1.3$ 代 x 就好了。這樣我們得

$$u+3.90u^2-1.93u^3+.097=0。 \tag{2}$$

這方程式的根的最初一位有效數字 0.05。再使(2)的根減小 0.05，卽以 $v+0.05$ 代入(2)中的 x。故

$$v^3+4.05v^2-1.5325v+.010375=0。 \tag{3}$$

從(3)求得根的下一位有效數字爲 0.006。我們可以這樣繼續下去，求到所需要的正確程度。

實際上，手續沒有上述的厭煩。設 a, b, c 爲已知方程式的係數，R 爲絕對項，

$$ax^3+bx^2+cx+R=0。$$

1)　以根的最初有效數字乘 a，加此積於 b。寫結果於 b 下。

2)　再以此有效數字乘 1) 的結果，加此積於 c. 寫結果於 c 下。

3)　再以此有效數字乘 2) 的結果，加此積於 R，所得結果稱爲**第一被除數**(First dividend)。

4)　再以此有效數字乘 a，加此積於 1) 的結果。寫結果於 b 下。

5)　再以此有效數字乘 4) 的結果，加此積於 2) 的結果。所得結果稱爲**第一試除數** (First trial divisor)。

6)　再以此有效數字乘 a，加此積於 4) 的結果。寫結果於 b 下。

7)　以第一試除數除第一被除數，所得商數的第一位有效數字變號即是根的下一位有效數字。(惟商數第二位有效數字須四捨五入)

例如從方程式(1)，其根已知爲略大於 1，

a	b	c	R	根
1	+0	−7	+7	(1.3
	1	**1**	−6	
	1	−6	**1** 第一被除數	
	1	2		
	2	**−4** 第一試除數		
	1			
	3			

$\dfrac{\text{第一被除數}}{\text{第一試除數}}=\dfrac{1}{-4}=-.25$，故根的下一位有效數字爲 .3。若用 .2 則太少，必使求更下一位的有效數字時不正確，卽目的求第二位小數而結果得第一位小數。又須注意被除數是永遠不會變號的，若有效數字取得過大時，例如 .4，則將使 9) 中的第二被除數變號，亦不正確。

8) 再剛才所求得的一位根的有效數字，卽 .3，如前述 1) 至 3) 的方法求第二被除數。如前述 4) 至 5) 的方法求第二試除數等。

9) 最後得下表之結果。注意第一表中的黑體數字卽爲第二表中的係數，卽原方程式的根減小 1.3 後所得新方程式的係數。

$$
\begin{array}{ccccl}
a' & b' & c' & R' & \text{根} \\
\mathbf{1} & 3 & -4 & 1 & (1.35 \\
 & \underline{0.3} & \underline{0.99} & \underline{-0.903} & \\
 & 3.3 & -3.01 & \mathbf{0.097} & \text{第二被除數} \\
 & \underline{0.3} & \underline{1.08} & & \\
 & 3.6 & \mathbf{-1.93} & \text{第二試除數} & \\
 & \underline{0.3} & & & \\
 & \mathbf{3.9} & & &
\end{array}
$$

$\dfrac{\text{第二被除數}}{\text{第二試除數}}=\dfrac{0.097}{-1.93}\doteq-0.0502\cdots\cdots$，故根的第二位小數是 5。

再將上述的方法全部重複一次，可得

$$
\begin{array}{ccccl}
a'' & b'' & c'' & R'' & \text{根} \\
\mathbf{1} & 3.9 & -1.93 & 0.097 & (1.356 \\
 & \underline{0.05} & \underline{0.1975} & \underline{-0.086625} & \\
 & 3.95 & -1.7325 & \mathbf{0.010375} & \text{第三被除數} \\
 & \underline{0.05} & \underline{0.2000} & & \\
 & 4.00 & \mathbf{-1.5325} & \text{第三試除數} & \\
 & \underline{0.05} & & & \\
 & \mathbf{4.05} & & &
\end{array}
$$

用這種方法求到五位或七位小數，以後的數字可單用除法求之，例如以第五試除數除第五被除數。故此我們求得 1.356895 即可求得 1.356895867………，這樣的正確程度已經超出實用上的需要。

方程式(1)既已求出一個根，我們可以因數 $x-1.3569$ 除全式得二次方程式，解之而求其餘的根。

若根爲有限小數，用 Horner 方法，最後終會得到一個被除數爲 0，如下例所示。

欲求方程式(1)中另一個略大於 1.6 的根，可用同樣的方法求之，結果爲 1.692 ………。

幾種很巧的簡法可以省去 Horner 方法應用時的手續與工夫，曾經有人設計過，但是當此方法不過偶一用到時，所謂簡法除了增加差誤的機會外，沒有什麼實益。Horner 方法通常取下例中的寫法，或可節省一些篇幅。

例一　求方程式 $4x^3-13x^2-31x=275$ 的一個根在 6 與 7 之間者。

4	−13	−31	−275	(6.25
	24	66	210	
	11	35	**−65**	
	24	210	51.392	
	35	**245**	**−13.608**	
	24	11.96	13.608	
	59	256.96	0	
	0.8	12.12		
	59.8	**269.08**		
	0.8	3.08		
	60.6	272.16		
	0.8			
	61.4			

每步用粗黑線隔開。黑體字卽爲逐個方程式的係數。

例二　方程式 $x^3+x^2+x-100=0$ 中 4 與 5 之間有一個根。求之。

答：　4.2644……

例三　求 $x^4+8x^2+16=440$ 正根與負根。

答：　$+3.976$……；-4.3504。求負根時一切照前進行，不過最初須先化原方程式爲根的符號相反的方程式，卽以 $-u$ 代 x。

例四　證明方程式(1)中 -3 與 -4 間的根爲 -3.0489173396…。

§ 119. Van der Waal 方程式

本章所謂方程式的根的關係與許多方面都有牽涉，爲說明計，今取 Van der Waal 方程式，牠是表氣體的壓力 p，體積 v，溫度 T 之間的關係的。

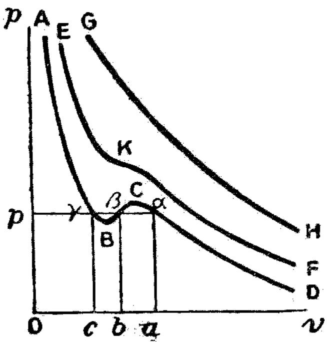
$$\left(p+\frac{a}{v_2}\right)(v-b)=RT;$$

$$\text{或}\quad v^3-\left(b+\frac{RT}{p}\right)v^2+\frac{a}{p}v-\frac{ab}{p}=0。\tag{1}$$

此方程式爲 v 的三次方程式必有三個根 α，β，γ，或相等或不等；或爲實數或爲虛數。無論如何，

$$(v-\alpha)(v-\beta)(v-\gamma)=0。\tag{2}$$

虛根無物理上的意義；我們故可專門注意實根。在三個根中，不是只有一個實根，便有三個實根。卽是說相當於每個壓力 p 的值與每個溫度 T 的值，可有一種體積或三種不同的體積。於是有下列三種很有趣味的情形：



圖一百四十三

(I) 只有一個實根時。這是說相當於壓力 p 與溫度 T 的每個指定的值有一個定體積 v。這可從某種物理條件下所有氣體的 pv 曲線而知道的；例如在 91° 的二氧化碳的圖相當於每個 p 的值只有一個 v 的值。參閱圖一百四十三，曲線 GH。

(II) 有三個不等的實根時。

溫度低於 32° 時二氧化碳的 pv 曲線爲波狀曲線 BC（圖一百四十三）。這是說在這種溫度，而在壓力 Op 時，二氧化碳應用三種不同的體積各相當於橫坐標 Oc，Ob，Oa。現在所見到的二氧化碳，只有這三種體積中的兩種，卽在 α 爲氣體的 CO_2；在 γ 爲液體的 CO_2；其第三種相當於 β 點尙不知道。曲線 $A\gamma\beta\alpha D$ 已經在實驗上實在得到。α 點的橫坐標代表一個定質量的氣體二氧化碳的體積；γ 點的橫坐標代表同質量的液體二氧化碳在同壓力下所佔的體積。

在特殊的條件下，凹凸曲線 $\gamma B\beta C\alpha$ 的一部實驗上已經得出。$A\gamma$ 稍爲伸張到 $\gamma\alpha$ 線下面些，$D\alpha$ 稍爲伸張到 $\gamma\alpha$ 線上面些。這是說液體能在低於其自己的蒸氣壓力時存在，而蒸氣能在高於其自己的蒸氣壓力時存在。

(III) 有三個相等實根時。 在 $\alpha=\beta=\gamma$ 的一點或此點以上相當於 p 的任何定值只能有一個 v 的值。此點 K（圖一百四十三）不過是氣體有名的臨界點。寫氣體的臨界壓力，臨界體積與臨界溫度爲

p_c, v_c, T_c。從(2),

$$(v-\alpha)^3=0; \quad 即 \ v=\alpha; \tag{3}$$

設 v_c 爲 v 在臨界點，即其時 $\alpha=v=v_c$ 的值。故若 p_c 爲相當於 $v=v_c$ 的壓力,從(1),與(3)的展開式,得

$$v^3-\left(b+\frac{RT_c}{p_c}\right)v^2+\frac{a}{p_c}v-\frac{ab}{p_c}=v^3-3v_cv^2+3v_c^2v-v_c^3。\tag{4}$$

此方程式爲恆等式,故從第 76 節,比較兩邊同次項的係數,

$$3v_cp_c=bp_c+RT_c; \quad 3v_c^2p_c=a; \quad v_c^3p_c=ab。\tag{5}$$

從最後二方程式,

$$v_c=3b。\tag{6}$$

從(6)與(5)的第二方程式,

$$p_c=\frac{1}{27}\cdot\frac{a}{b^2} \tag{7}$$

從(6),(7)與(5)的第一方程式,

$$T_c=\frac{8}{27}\cdot\frac{a}{bR} \tag{8}$$

從(6),(7),(8)三個關係，Van der Waal 曾經計算各種氣體的常數 a, b 的值。設 $\boldsymbol{p}=\frac{p}{p_c}$, $\boldsymbol{v}=\frac{v}{v_c}$, $\boldsymbol{T}=\frac{T}{T_c}$。從(1),(6),(7),(8),可得

$$\left(\boldsymbol{p}+\frac{3}{\boldsymbol{v}^2}\right)(3\boldsymbol{v}-1)=8\boldsymbol{T}, \tag{9}$$

此式爲 Van der Waal 方程式而不見含有任意常數。這個結果使 Van der Waal 相信所有的物質能存在於相當的壓力,體積，溫度爲等值的狀態中。他稱此爲**相當狀態**(uebereinstimmende Zustände)。這個推論只有關於醚,二氧化硫與幾種苯的鹵化物曾覆證過。

第七章　微分方程式的解法

(How to Solve Defferential Equations)

『理論恆是趨向於變得更爲抽象，因爲牠是通過了微分與消去的方法而從事實的混潮中很順利的浮露出來的，在那些方法中，精華及其連帶之物才會受人認識，而小的效果被看作是次要或無關緊要，暫時不加注意，用另外的方法解釋之』。❶——O. Heaviside.

§ 120. 用分離變數法求微分方程式的解

(The Solution of a Differential Equation by the Separation of the Variables)

本章可以作爲積分法的續編看待，不過性質上更高深些。已經敍述過的積分法用於大部份的物理化學變化上見得綽乎有餘，但現在常是需要更爲有力的方法。

我前已指出欲求現象間的關係須設法證明，若有限個假設已先訂定，則觀測的事實爲這些假設的必然結果。實施之法如下：——

用效用的假設去預測自然，這假設很可能只是一種方便的虛想。

A. W. Rücher 1901 年在 Glasgow 的學士會的主席演說中曾說：

---

❶ "Theory always tends to become more abstract as it emerges successfully from the chaos of facts by processes of differentiation and elimination, whereby the essentials and their connections becomes recognized, while minor effects are seen to be secondary or unessential, and are ignored temporarily, to be explained by additional means."—O. Heaviside.

『從實用的觀點，我們的理論與假定是否正確是次要的事，只要牠們能領導我們得到的結果與事實相符合。……得了牠們的幫助，我們能預見原因結合起來的結果，否則這結果會閃避過我們』。

2．從此求一個方程式來代表我們研究中的兩個變數片刻間的變化率。

3．然後求這個方程式的積分，使效用假設複製爲算學的形式而合於實驗上覆證之用。

我們以上所述卽是求積分的最後目的。求積分的方法我們稱爲方程式的解法。爲便利計，任何含有微分或微係數的方程式以後稱之爲**微分方程式**(A differential equation)。

I．變數可以直接分離者

這裏所考察的微分方程式在求積分之前幾乎用不到什麽整理的。例如代表化學反應速度的方程式普遍的形式爲：

$$\frac{dx}{dt}=kf(x)。\tag{1}$$

我們總之集合 x 的項於一邊，t 的項於另一邊，然後再進行積分。變數的這種分離法，在想別的方法來求解微分方程式以前，幾乎總得試試，因爲這樣求積分時比較簡單。

例一　求方程式 $ydx+xdy=0$ 的積分。以 xy 除各項得

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0;\quad 卽\quad \int\frac{dx}{x}+\int\frac{dy}{y}=C,$$

答：　$\log x+\log y=C$。兩種或多種外表不同的解答可以表示同一的東西。如這方程式的解又可寫爲 $\log xy=\log e^C$；卽 $xy=e^C$；或

$\log xy = \log C'$ 即 $xy = C'$。C, $\log C'$ 自然是任意的積分常數。

例二 F. A. H. Schreinemaker(Zeit. Phys. Chem., **36**, 413, 1901) 在他研究三種物質的混合物之蒸餾時用到方程式 $\frac{dy}{dx} = \frac{ay}{x}$。從此證明 $y = Cx^a$。他稱此方程式的圖爲『蒸餾曲線』。

例三 方程式 $v\frac{dv}{dx} + ax^{-2} = 0$ 可以代表一個質點受到從一個定點發出的引力之影響後的直線運動。$\therefore \frac{1}{2}v^2 = \frac{a}{x} + C$。

例四 由於不能完全絕緣之故，一個帶電物體的電荷散逸的速度比例於其電荷的量 E。設 a 爲常數隨物體的性質而定，E_0 爲時間 $t=0$ 時的電荷量，試證 $E = E_0e^{-at}$。

示意: 複利律。分離變數而求積分。以語言說明結果。

例五 解 $(1+x^2)\,dy = \sqrt{y}\,dx$。

答 $2\sqrt{y} - \tan^{-1} x = C$。

例六 解 $y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y + \frac{dy}{dx}\right)$。

答: $y = C(a+x)(1-a)$。

例七 液體的介質常數(Dielectric constant) D 與溫度 θ 的關係 Abegg 的公式表示之爲 $-\frac{dD}{d\theta} = \frac{1}{190}D$。從此證明 $D = Ce^{-\frac{\theta}{190}}$，此中 C 爲常數，其值可從實驗的條件決定之。試以語言表示此解答。

例八 什麼曲線的切線向 x 軸的斜度爲 $-\frac{y}{x}$? 答等邊雙曲線 $xy = C$。

示意　立適當的微分方程式而解之。

例九　在絕熱的條件下，氣體的壓力與體積間的小變化的關係爲 $\gamma p dv + v dp = 0$。從此證 $pv^{\gamma} =$ 常數。

例十　某教師討論在極低溫度下的物質的物理性質，說『此物質的比熱 σ 隨溫度 θ 的減小而減小，其速度比例於此物質之比熱本身』。立微分方程式表示這定律，改寫結果使爲適合於實驗覆正的形式。

答：　$(\log \sigma_0 - \log \sigma)\dfrac{1}{\theta} =$ 常數。

例十一　在時間 t 電流強度 C，Helmholtz 的方程式表示爲 $C = \dfrac{E}{R} - \dfrac{L}{R}\dfrac{dC}{dt}$，此中電流的電動勢爲 E，電阻爲 R，自感應爲 L。設 E, R, L 都爲常數，若 $t=0$ 時 $C=0$，則 $RC = E(1 - e^{-\frac{Rt}{L}})$。

例十二　厚壁金屬圓柱管的管壁離其軸爲 x 處，其內壓力 (Internal pressure) 爲 p，兩者關係爲方程式 $(2p-a)dx + x dp = 0$，其中 a 爲常數。證 $p = \dfrac{1}{2}a + Cx^{-2}$。

例十三　用代入法常可使一個方程式可以變爲用這簡單的方法解之。解 $(x - y^2)dx + 2xy\ dy = 0$。

答：　$xe^{\frac{y^2}{x}} = C$。

示意：　令 $y^2 = v$，以 x^2 除之，　$\therefore\ \dfrac{dx}{x} + d\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$，等等。

例十四　第 20 節所論到的 Dulong 與 Petit 方程式爲 $\dfrac{d\theta}{dt} =$

$b(c^\theta-1)$，解之。

可令 $c^\theta-1=x$，求微分 $d\theta$ 與 dx。得 $dx=c^\theta\log c\,d\theta$，$d\theta=\frac{dx}{c^\theta}\log c$；從第 76 節情形 (i)，

$$\int\frac{d\theta}{C^\theta-1}=\int\frac{dx}{x(x+1)\log c};\quad\therefore\ bt\log c=\log\frac{x}{x+1}+C，等等。$$

例十五 第 20 節中 Stefan 方程式 $\frac{d\theta}{dt}=a\{(273+\theta)^4-273^4\}$，解之。

令 $x=273+\theta$；$c=273$。於是上方程式可寫爲

$$\frac{dx}{dt}=a(x^4-c^4)=a(x+c)(x-c)(x^2+c^2)$$

此式如第 76 節情形(iii)，解之可得

$$at=\frac{1}{4c^3}\left\{\log\frac{x-c}{x+c}-2\tan^{-1}\frac{x}{c}\right\}+C；等等。$$

例十六 解 $\frac{du}{dr}-\frac{u}{r}=\frac{C_1}{r^2}-\frac{1}{4}ar^2$。以 $v=\frac{u}{r}$，代入得 $r\frac{dv}{dr}=\frac{du}{dr}-\frac{u}{r}$。$\therefore\ \frac{dv}{dr}=\frac{C_1}{r^3}-\frac{1}{4}ar$；$\therefore\ \frac{u}{r}=C_2-\frac{1}{2}\frac{C_1}{r^2}-\frac{1}{8}ar^2$。

例十七 按 Glasgow Herald 所載當引擎指示馬力爲 P 時，『藍寶石』號輪船的速度爲 V。則

$P=$ 5012，7281，10200，12650；

$V=$ 18.47，20.60，22.43，23.63。

這些數字是否合於定律 $\frac{dP}{dV}=aP$，此中 a 爲常數？

答：是的。

示意：　求積分，注意 $P=0$ 時 $V=0$，可得 $\log_{10}P-\log_{10}C=aV$，此中 C 爲常數。如第 108 節求常數的值，得 $C=181$，$a=0.07795$，等等。

II. 方程式中 x 與 y 爲齊次者

若方程式中 x 與 y 爲齊次者，卽每項中變數的指數其和相等者，先以 $x=ty$ 或 $y=tx$ 代入，視何者方便而定，總能分離變數。代入的規則恆用於含有項數較少的微分上。

例一　解 $x+y\dfrac{dy}{dx}-2y=0$。以 $y=zx$ 代入，或 $dy=xdz+zdx$ 代入，而整理之。可得 $(1-2z+z^2)dx+xz\,dz=0$；或 $(1-z)^2dx+xzdz=0$；故 $\int\dfrac{zdz}{(1-z)^2}+\int\dfrac{dx}{x}=C$；　$\therefore$　$\dfrac{1}{1-z}+\log(1-z)+\log x=C'$。

卽 $(x-y)e^{\frac{x}{x-y}}=C$。

例二　F. A. H. Schreinemaker(Zeit. Phys. Chem., **36**, 413, 1901)在研究三種物質的混合物之蒸汽壓力時用方程式 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{my}{x}+n$。當 $x=ty$ 代入後此方程式卽變爲齊次的。從此證明 $Cx^m-\dfrac{nx}{m-1}=y$，此中 C 爲積分常數。

例三　證明若 $(y-x)dy+ydx=0$；　則 $y=Ce^{-\frac{x}{y}}$。

例四　證明若 $x^2dy-y^2dx-xydx=0$；　則 $x=e^{-\frac{x}{y}}+C$。

例五　證明若 $(x^2+y^2)dx=2xydy$；　則 $x^2-y^2=Cx$。

III. 方程式中 x 與 y 不爲齊次者

非齊次方程式可用適當的代入使變爲齊次的。一次非齊次方程式的最普遍的形式爲,

$$(ax+by+c)dx+(a'x+b'y+c')dy=0, \tag{2}$$

此中 x 與 y 爲一次。轉變此方程式爲齊次方程式,可假定 $x=v+h$; $y=w+k$ 代入已知方程式(2)。於是得

$$\{av+bw+(ah+bk+c)\}dv+\{a'v+b'w+(a'h+b'k+c'\}dw=0。 \tag{3}$$

求 h 與 k 使 $ah+bk+c=0$; $a'h+b'k+c=0$。

$$\therefore \quad h=\frac{b'c-bc'}{a'b-ab'}; \quad k=\frac{ac'-a'c}{a'b-ab'}。 \tag{4}$$

以這數值代入(3)中的 h 與 k。結果得方程式

$$(av+bw)dv+(a'v+b'w)dw=0, \tag{5}$$

爲齊次方程式，可用上述的方法解之。

例一　解 $(3y-7x-7)dx+(7y-3x-3)dy=0$。

答: $(y-x-1)^2(y+x+1)^5=C$。

示意: 從(2), $a=-7$, $b=3$, $c=-7$; $a'=-3$, $b=7$, $c=-3$。從(4), $h=-1$, $k=0$。故從(3)得 $3wdv-7vdv+7wdw-3vdw=0$。以 $w=vt$ 代入, 分離變數,解此方程式得

$$\therefore \quad 7\frac{dv}{v}=\frac{3-7t}{t^2-1}dt; \quad \therefore \quad 7\int\frac{dv}{v}+\int\frac{2dt}{t-1}+\int\frac{5dt}{t+1}=C。$$

$\therefore$ $7\log v+2\log(t-1)+5\log(t+1)=C$; 卽 $v^7(t-1)^2(t+1)^5=C$。

但 $x=v+h$, $\therefore$ $v=x+1$; $y=w+k$, $\therefore$ $y=w$; $\therefore$ $t=\dfrac{w}{v}=\dfrac{y}{x+1}$,

等等。

例二　若$(2y-x-1)dy+(2x-y+1)dx=0$，則

$$x^2-xy+y^2+x-y=C。$$

IV.　非齊次方程式而其中常數有特殊關係 $ab'=a'b$ 者。

設 $a:b=a':b'=1:m$，則 h 與 k 不定，從(2)方程式變爲

$$(ax+by+c)dx+\{m(ax+by)+c'\}dy=0。$$

(4)式中的分母爲零。此時可令 $z=ax+by$，消去 y，可得

$$a-b\frac{z+c}{mz+c'}-\frac{dz}{dx}=0, \tag{6}$$

此方程式的變數可以分離。

例一　解$(2x+3y-5)dy+(2x+3y-1)dx=0$。

答：　$x+y-4\ \log(2x+3y+7)=C$。

例二　解$(3y+2x+4)dx-(4x+6y+5)dy=0$。

答：　$9\ \log(21y+14x+22)-21(2y-x)=C$。

當變數不能滿意的分離時特別技巧必須採用。採用慣常的方法以每種技巧歸之於牠所解得最好的一類特殊方程式，這是最簡單的辦法。這些特別技巧有時比上述的方法來得明快。我們追蹤着這習見的 x 與 y；將比前更進一步。此時讀者會得明瞭，他的 x 與 y；他的 p 與 v；他的 s 與 t 並不是緊閉在水滴不透的房間之內而無法接近的。關於所用的名稱，這裏亦許有普遍說明幾句之必要。

§ 121. 何謂微分方程式 (What is a Differential Equation?)

我們已經見到，直線

$$y=mx+b,\tag{1}$$

滿足兩個特殊的條件：(i) 牠交兩軸之一於離原點爲 b 之處；(ii)牠與 x 軸所成的角之正弦爲 m。求微係數得

$$\frac{dy}{dx}=m_{\circ}\tag{2}$$

此方程式全不說到常數 b。那個條件此時被消去了。故方程式 (2) 所代表的直線只滿足一個條件，即與 x 軸所成的角爲 $\tan^{-1} m$。今以(2)代入(1)，結果得方程式

$$y=\frac{dy}{dx}x+b\tag{3}$$

因爲常數只滿足一個條件，故(3)爲通過 b 的任何直線之方程式。而並沒說到 $\tan^{-1} m$ 角的大小。求(2)的微係數。結果所得之方程式爲

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0\tag{4}$$

代表任何直線。(1) 中常數 m 與 b 所給與的特殊條件現在完全消去了。方程式(4)是可能的最最普遍的直線方程式，因其可以代表在一個平面上所作的任何直線。

我們再求微分方程式的物理意義。在第7節我已經見到三級微係數 $\frac{d^3s}{dt^3}$ 代表『刻刻的加速度的變化率』。假使一個運動物體的加速度 $\frac{d^2s}{dt^2}$ 無論如何不變。顯然，等加速度的變化率必須是零。用算學的語言，可寫爲

$$\frac{d^3s}{dt^3}=0_{\circ}\tag{5}$$

求積分，可得

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\text{常數}=g。\tag{6}$$

方程式(6)非但告知我們加速度是常數，並且決定其值爲一個定數量 g 呎每秒。注意加速度是量度速度的增加率的，求(6)的積分，可得

$$\frac{ds}{dt}=gt+C_1。\tag{7}$$

從第 71 節，我們知道如何求 C_1 的意義。令 $t=0$ 則 $\frac{ds}{dt}=C_1$。這是說在開始記錄速度的時候，物體可以早已以一定的速度 C_1 在那裏運動。設 $C_1=v_0$ 呎每秒。自然，若物體從靜止的位置出發，則 $C_1=0$。今求(7)的積分，在結果中又有一常數 C_2，

$$s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+C_2\tag{8}$$

令 $t=0$，則 C_2 顯然代表在我們開始研究運動時此物體所已經過的距離。設 $C_2=s_0$ 呎。結果的方程式爲

$$s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0,\tag{9}$$

此式告訴我們當開始研究時關於此物體的三件不同的事實。

1)　牠已經過 s_0 呎的距離。用體育上的話句，若此物體從『出發線』發脚，則 $s_0=0$。

2)　此物體此時的速度爲 v_0 呎每秒。

3)　其速度以相等的增加率 g 呎每秒在那裏增加。

方程式(7)只告訴我們後二者；方程式(6)只告訴我們最後一件事

實；方程式 (5) 所告訴我們的不過是加速度爲常數。所以，只要物體是以等加速度運動(5)恆能成立。

例一　一個物體從靜止的位置下落。證明 5 秒鐘內可經過 400 呎。

示意：　用 $g=32$。

例二　一個物體最初的速度爲 20 呎每秒，照方程式(7)下落，6 秒鐘後的速度如何？

答：　212 呎。

例三　一個物體從氣球上落下到地時速度爲 384 呎每秒，問在空氣歷幾秒鐘？

答：　12 秒鐘。

例四　一個質點以速度 100 呎每秒垂直向上射出。求其所達的高度，及其所須的時間。

這裏　$\frac{d^2s}{dt^2}=-g$；　乘以 $2\frac{ds}{dt}$，得

$$2\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{dt}=-2g\frac{ds}{dt}$$

求積分得

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-v_0^2=-2gs。$$

當質點達最高處 $\frac{ds}{dt}=0$，　故　$s=\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}=\frac{10000}{64}$；　從 (7) 因 $C_1=100=v_0$，　$\therefore\ t=\frac{v_0}{g}=\frac{100}{32}$。

例五　設有一個物體在空氣中下落，從實驗所得，知空氣抵抗力所生的減速效果比例於運動物體的速度的平方。故此，我們不能用 g 而

須用 $g-bv^2$，此中 b 爲比例常數。爲簡單起見，令 $b=\frac{g}{a^2}$；證明

$$v=a\frac{e^{\frac{gt}{a}}-e^{-\frac{gt}{a}}}{e^{\frac{gt}{a}}+e^{-\frac{gt}{a}}};$$

$$s=\frac{a^2}{g}\log\frac{e^{\frac{gt}{a}}+e^{-\frac{gt}{a}}}{2}=\frac{a^2}{g}\log\cosh\frac{gt}{a}。$$

因 $t=0$ 時 $v=0$，$s=0$。

示意：運動方程式爲 $\frac{dv}{dt}=g-bv^2$。

我們無論從那一方面採取說明，同樣的推理方法終可適用。故此我們可以說，**一個不受常數拘束的微分方程式是自然定律最普遍的表示法**。

任何方程式可以從其常數下解放出來，只要求得此方程式的微分與原式結合之，有幾個常數即須求幾次微分。這個運算稱爲**消去法**(Elimination)。消去法可使我們剔去連帶在自然現象中的偶然情狀，而留存其主要的普遍的性質。所以這樣可以就理論的本身而作研究，不因實驗上瑣碎之點所分心。在一部偉大的理論著作中，如 Maxwell 的，如 Heaviside 的，無處不是微分方程式，但實驗則很少見到。這並不因爲實驗是不重要，只因，如 Heaviside 所說，牠們是根本，基礎恆是藏在優良構造的建築之下，人們不能見到的。

例一　從 $y=ax+bx^2$ 中消去任意常數 a 與 b。求兩次微係數；

求 a 與 b 的值;代入原方程式。結果爲

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0,$$

此完全不受原方程式中常數 a 與 b 所給與的拘束。

例二 從 $y^2=4mx$，消去 m。

答： $y=2x\frac{dy}{dx}$。

例三 從 $y=a\cos x+b\sin x$，消去 a 與 b。

答： $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$。

我們恆是假定每個微分方程式是從已知方程式消去常數而得來的，此已知方程式稱爲**原始方程式**(The primitive equation)。在實用上，從原始方程式消去常數而建立微分方程式的工作遠不及相反的運算，即從微分方程式而求其原始形式遇見得多。換言之，我們須求出一些變數的關係而能適合微分方程式者。已知一個含有 x，y，$\frac{dx}{dy}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$，……的方程式，而欲求含有 x，y 與常數的方程式，當此式消去常數時能還原到已知方程式。

這種能適合已知微分方程式的變數與常數間的關係稱爲此微分方程式的**普遍解**(General solution)或**完全解**(Complete solution)或**完全積分**(Complete integral)。完全解中的任意常數取特殊值而得的解稱爲**特殊解** (Particular solution)。故 $y=mx$ 爲 $y=x\frac{dy}{dx}$ 的完全解，而 $y=x\tan 45^\circ$ 爲其特殊解。

微分方程式中只含一個自變數者稱爲**普通微分方程式**(Ordinary differential equation)，含幾個自變數者稱爲**偏微分方程式**(Partial differential equation)。我們現在先述普遍微分方程式。上述的方程式(2)與(3)稱爲**一級微分方程式**(Differential equation of the first order)，因其中最高的微係數爲一級。同理(4)與(6)爲二級，(5)爲三級。故此微分方程式的級數依其中所含最高微係數而定。微分方程式的**次數**(Degree)是其中最高級微係數的最高次冪。下方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+\mu x^4=0$$

爲二級一次微分方程式。

這也不難知道**一個 n 級微分方程式的完全積分含有 n 個任意常數,而不會多於 n 個**。讀者在以微分方程式代表自然變化上得到一些經驗後，即知積分中所供給的常數的個數必然足够規定微分方程式所代表的自然變化之最初條件。完全解所供給的特殊解（其中不含不定常數）的個數必等於此問題所含的確定的條件的個數。例如，方程式(5)爲三級，其完全解即方程式(9)有三個最初條件 g，s_0，v_0 須待決定。同理,方程式(4)必須兩個最初條件 m 與 b，方能決定此直線。

§ 122. 一級完整微分方程式 (Exact Differential Equation of the First Order)

許多微分方程式難以求解的理由，因爲在消去常數而形成牠們的時候，一些公共因數也同時從原始方程式失去了。這種方程式故不實在代表已知方程式或原始方程式的完全微分。這類方程式故此稱爲不

完整。反之，一個完整微分方程式是只由求一個 x 與 y 的函數的微分，而不作含有 x 與 y 的其他運算，所得的微分方程式。

試驗微分方程式是否完整的方法，容易的已在第 25 節見過。那裏指出的是微分方程式。

$$M\,dx+N\,dy=0 \tag{1}$$

中，若

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}, \tag{2}$$

則爲由某個函數 u 求微分而得。(2) 稱爲『可求積分的準則』，因爲一個方程式若適合此準則，可以很易的用直接的方法求其積分。這意思並不是說只有這些適合於準則的方程式才能求得積分，因爲許多方程式雖不合於準則，但還可用别的方法求積分。

例一　試驗 $y\,dx+x\,dy=0$ 與 $y\,dx-x\,dy=0$。前者 $M=y$，$N=x$；$\therefore \dfrac{\partial M}{\partial y}=1$，$\dfrac{\partial N}{\partial x}=1$，$\therefore \dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$。此試驗是適合，故方程式是完整的。後者則 $M=y$，$N=-x$，$\therefore \dfrac{\partial M}{\partial y}=1, \dfrac{\partial N}{\partial y}=-1$。這是不合於準則。故這個方程式不能用完整微分方程式的方法解之。

例二　證 $(a^2y+x^2)dx+(b^3+a^2x)dy=0$ 是完整的。

例三　方程式 $(x+2y)x\,dx+(x^2-y^2)dy=0$ 是否完整?

$M=x(x+2y)$，$N=x^2-y^2$；$\therefore \dfrac{\partial M}{\partial y}=2x$，$\dfrac{\partial N}{\partial x}=2x$。適合於準則，故方程式是完整的。

例四　證 $(\sin y+y\cos x)dx+(\sin x+\cos y)dy=0$ 是完整

的。

I.　適合於可求積分之準則的方程式

我們必須記得 M 是，以 y 爲常數，u 關於 x 的微係數，N 是，以 x 爲常數，u 關於 y 的微係數。故此我們可假設 y 爲常數而求 Mdx 的積分，然後以 x 爲常數而求 Ndy 的積分。方程式的完全解即是這兩個積分之和等於一個不定常數。完全積分爲

$$u=C。\tag{3}$$

例　求 $x(x+2y)dx+(x^2-y^2)dy=0$ 的積分。

從上例三知此方程式是完整的，$M=x(x+2y)$；$N=x^2-y^2$；

$\therefore \int Mdx=\int x(x+2y)dx=\frac{1}{3}x^3+x^2y=Y$，此中 Y 爲積分常數，可含有 y，亦可不含 y，因爲 y 此時作爲常數的。今求 $\frac{1}{3}x^3+x^2y=Y$ 的微分應得原方程式。試求之得 $x^2dx+2xydx+x^2dy=dY$。與原方程式相比較，顯然 $dY=y^2dy$；　$\therefore$　$Y=\frac{1}{3}y^3+C$。代入，故得完全解爲 $\frac{1}{3}x^3+x^2y-\frac{1}{3}y^3=C$。本例所詳述的方法可寫爲更合實用的形式。

求一個完整微分方程式如

$$Mdx+Ndy=0$$

之形式者的積分，可先假定 y 爲常數而求 $\int Mdx$，以結果代入

$$\int Mdx+\int\left(N-\frac{\partial}{\partial y}\int Mdx\right)dy=C。\tag{4}$$

例如，在 $x(x+2y)dx+(x^2-y^2)dy=0$，顯然 $\int Mdx$ 爲 $\frac{1}{3}x^3+x^2y$，我們可以立刻寫爲

$$\frac{1}{3}x^3+x^2y+\int\left\{x^2-y^2-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{3}x^3+x^2y\right)\right\}dy=C。$$

$$\therefore\quad \frac{1}{3}x^3+x^2y+\int(x^2-y^2-x^2)dy=C;\quad 即\ \frac{1}{3}x^3+x^2y-\frac{1}{3}y^3=C。$$

若是我們願意，可用

$$\int Ndy+\int\left(M-\frac{\partial}{\partial x}\int Ndy\right)dx=C$$

代替(4)，再假設 x 爲常數而求 $\int Ndy$。

實用時常以變更這個手續爲便。若方程式是合於可求積分之準則，我們很易選出構成 $Mdx+Ndy=0$ 的各項而得

$$Mdx+Y;\quad 與\ Ndy+X,$$

此中 Y 不含有 x；X 不含有 y。從此我們若能求得 Mdy 與 Ndx，則函數 X 與 Y 可以決定。在上方程式中，含有 x 與 y 的項只有 $2xydx+x^2dy$，這個顯然從 x^2y 求微分而得來。故求這些項與其餘項的積分即得上述結果。

例一 解 $(x^2-4xy-2y^2)dx+(y^2-4xy-2x^2)dy=0$。選出含有 x 與 y 的各項，得 $-(4xy+2y^2)dx-(4xy+2x^2)dy=0$。求積分。$\therefore\ -2x^2y-2xy^2=$ 常數。再求其餘各項的積分，而得完全解，

$$\int x^2dx+\int y^2dy-2x^2y-2xy^2=C;$$

$$\therefore\quad x^3-6x^2y-6xy^2+y^3=常數。$$

例二　證$(a^2y+x^2)dx+(b^3+a^2x)dy=0$ 的解爲 $a^2xy+b^3y+\frac{1}{3}x^3=C$。

示意：用(4)。

例三　解$(x^2-y^2)dx-2xy\ dy=0$。

答：$\frac{1}{3}x^2-y^2=\frac{C}{x}$。

示意：用(4)。

II. 不適合於求積分之準則的方程式

如剛才所指明，有些微分方程式之所以不合於求積分之準則者，只因從原始方程式產生，那方程式消失了『積分因數』。所以若方程式

$$Mdx+Ndy=0$$

不適合於求積分之準則，苟將早先失去的因數歸還原主，卽成完整。故前方程式可使完整，只要全式乘以積分因數 μ。如

$$\mu(Mdx+Ndy)=0,$$

卽適合於完整的條件，其解可用上述之法求之。

§ 123. 如何求積分因數 (How to find Integrating Factors)

有的時候積分因數很是簡單，只用觀察法便看得出來。

例一　$ydx-xdy=0$ 是不完整的。但乘上 x^{-2}, x^{-1}, y^{-2}, y^{-1} 等中任何一個卽能使其完整。

例二　在$(y-x)dy+ydx=0$ 中含有 $ydx-xdy$ 是不完整的，但以上例同樣的辦法卽變爲完整，如

$$\frac{dy}{y}-\frac{xdy-ydx}{y^2}=0,\quad \text{卽}\ \log y-\frac{x}{y}=C。$$

我們在第 26 節中已經求得，使

$$Mdx+Ndy=0$$

爲完整微分的積分因數總是存在的。並且這樣的因數可有無限個，因爲若方程式當乘以 μ，而成完整，則乘以 μ 的任何函數時還是完整的。相當於方程式的解的各種形式，就有各種不同的積分因數。例如方程式 $y\,dx+x\,dy=0$，其積分因數 $x^{-1}y^{-1}$ 是相當於解 $\log x+\log y=C$ 的；其積分因數 y^{-2} 相當於解 $xy=C'$，的。所不幸者，但知每個微分方程式有無限個積分因數是無甚幫助的。沒有普遍實用的方法去求得牠們；讀者必須參考幾本專著而知關於積分因數的普遍定理。這裏所述者四條用於特殊情形的規則。

規則一　因

$$d(x^m y^n)=x^{m-1}y^{n-1}(m\,y\,dx+n\,x\,dy),$$

故屬於 $m\,y\,dx+n\,x\,dy=0$ 形式的方程式，其積分因數爲 $x^{m-1}y^{n-1}$，或可說

$$x^\alpha y^\beta(m\,y\,dx+n\,x\,dy)=0 \tag{1}$$

的積分因數爲

$$x^{m-1-\alpha}y^{n-1-\beta},$$

或者更普遍些，

$$x^{km-1-\alpha}y^{kn-1-\beta}, \tag{2}$$

此中 k 可取任何數值。

例　求 $ydx-xdy=0$ 的積分因數。

這裏 $\alpha=0$，$\beta=0$，$m=1$，$n=1$，　$\therefore$ y^{-2} 爲已知方程式的積分因數。

若方程式可寫爲

$$x^{\alpha}y^{\beta}(m\,y\,dx+n\,x\,dy)+x^{\alpha'}y^{\beta'}(m'y\,dx+n'\,x\,dy)=0。\qquad (3)$$

積分因數很易得到，其第一第二項的積分因數各爲，

$$x^{km-1-\alpha}y^{kn-1-\beta};\quad 與\quad x^{k'm'-1-\alpha'}y^{k'n'-1-\beta'}。$$

欲這些積分因數爲恆等，則必須

$$km-1-\alpha=k'm'-1-\alpha';\quad kn-1-\beta=k'n'-1-\beta'。$$

k 與 k' 可使適合於此二條件而求得之，解此二個方程式可得 k 與 k' 之値。

$$k=\frac{n'(\alpha-\alpha')-m'(\beta-\beta')}{mn'-m'n};\quad k'=\frac{n(\alpha-\alpha')-m(\beta-\beta')}{mn'-m'n}。\qquad (4)$$

例一　解 $y^3(ydx-2xdy)+x^4(2ydx+xdy)=0$。

示意：　此中 $\alpha=0$，$\beta=3$，$m=1$，$n=-2$；$\alpha'=4$，$\beta'=0$，$m'=2$，$n'=1$；　$\therefore$ $x^{k-1}y^{-2k-4}$ 爲第一項的積分因數，$x^{2k'-5}y^{k'-1}$ 爲第二項的積分因數。從(4)$k=-2$，$k'=1$，　$\therefore$　x^{-3} 爲全式的積分因數。以此乘之，求積分得 $2x^4y-y^4=Cx^2$。

例二　解 $(y^3-2yx^2)dx+(2xy^2-x^3)dy=0$。

答：　$x^2y^2(y^2-x^2)=C$。

整理方程式的各項後，求得積分因數爲 xy。

規則二　若爲齊次方程式而又屬於 $Mdx+Ndy=0$ 之形式者，則

其積分因數爲$(Mx+Ny)^{-1}$。

設方程式

$$Mdx+Ndy=0$$

中 x 與 y 爲 m 次，其積分因數 μ 爲 n 次，

$$\mu\, M\,dx+\mu\, N\,dy=du \tag{5}$$

爲 $m+n$ 次，積分 u 爲 $m+n+1$ 次。從第 23 節 Euler 定理得

$$\mu\, Mx+\mu\, Ny=(m+n+1)u。 \tag{6}$$

以(6)除(5)，

$$\frac{M\,dx+N\,dy}{Mx+Ny}=\frac{1}{m+n+1}\cdot\frac{du}{u}$$

此式右邊爲完全微分，結果左邊亦爲一個完全微分。故因數$(Mx+Ny)^{-1}$可使 $Mdx+Ndy=0$ 成爲完整的微分方程式。

例一 證 $(x^3y-xy^3)^{-1}$ 爲 $(x^2y+y^3)\,dx-2xy^2dy=0$ 的積分因數。

例二 證 $(x^2-nyx+y^2)^{-1}$ 爲 $ydy+(x-ny)dx=0$ 的積分因數。

若 $Mx+Ny$ 爲零，則此方法當然不能適用。此時我們可寫 $y=Cx$ 爲解。

規則三 若爲齊次方程式而又屬於

$$f_1(x,y)y\,dx+f_2(x,y)x\,dy=0,$$

則$(Mx-Ny)^{-1}$ 爲其積分因數。

例 解$(1+xy)y\,dx+(1-xy)x\,dy=0$。

示意：　先求得其積分因數爲 $\frac{1}{2x^2y^2}$。　$\therefore \int Mdx=-\frac{1}{xy}+\log x$

答：　$x=C\ ye^{\frac{2}{xy}}$。

若 $Mx-Ny=0$，這方法不能適用，則 $xy=C$ 爲此方程式之解。例如，$(1+xy)y\ dx+(1+xy)x\ dy=0$。

規則四　若 $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$只爲 x 的函數，則 $e^{\int f(x)dx}$ 爲積分因數。若 $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=f(y)$，則 $e^{\int f(y)dy}$ 爲積分因數。這些是極重要的。

例一　解$(x^2+y^2)dx-2xydy=0$。

答：　$x^2-y^2=Cx$。

示意：　證 $f(x)=-2x^{-1}$。積分因數爲 $e^{-\int 2x^{-1}dx}=e^{-2\log x}=x^{-2}$。

例二　解$(y^4+2y)dx+(xy^3+2y^4-4x)dy=0$。

答：　$xy^3+y^4+2x=Cy^2$。

我們現在就一個特例說明此規則，這結果以後要用到的。這裏步驟又要用到前幾章所建立的原理了。設

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q \tag{7}$$

其中 P 與 Q 或爲常數或爲 x 的函數。設 μ 爲積分因數可使

$$dy+(Py-Q)dx=0 \tag{8}$$

爲完整微分者。

$$\therefore\quad \mu dy+\mu(Py-Q)dx\equiv Ndy+Mdx。$$

$$\therefore\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial \mu}{\partial x};\quad \frac{\partial M}{\partial y}=(Py-Q)\frac{\partial \mu}{\partial y}+P\mu_{\circ}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial \mu}{\partial x}=(Py-Q)\frac{\partial \mu}{\partial y}+P\mu_{\circ}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial \mu}{\partial x}dx=(Py-Q)\frac{\partial \mu}{\partial y}dx+P\mu dx=-\frac{\partial \mu}{\partial y}dy+P\mu\ dx_{\circ}$$

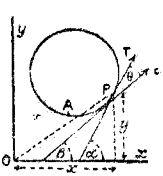
$$\therefore\quad \frac{\partial \mu}{\partial x}dx+\frac{\partial \mu}{\partial y}dy=d\mu=P\mu\,dx_{\circ}\qquad \therefore\quad P=\frac{1}{\mu}\ \frac{d\mu}{dx};$$

$\therefore\quad \int Pdx=\log\ \mu$； 更因 $\log\ e=1$，$\left(\int Pdx\right)\log\ e=\log\ \mu$，結果得

$$\mu=e^{\int P\,dx}_{\circ} \tag{9}$$

此為已知方程式(7)的積分因數。

§ 124. 完整微分的物理意義 (Physical Meaning of Exact Differentials)



圖一百四十四

設有一個質點受到力 F 的作用，所經的路為 AP(圖一百四十四)，此力與此曲線上 $P(x,y)$點的切線成 θ 角。此質點從定點 $A(a,b)$ 至現在位置 $P(x,y)$ 所作的功為 W。設 AP 的長為 s。此質點經過距離 ds 時所作之功為 dW，則

$$dW=F\cos\theta ds_{\circ} \tag{1}$$

設 PT; PF 與 x 軸的夾角各為 α 與 β。從第46節，$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha$；$\frac{dy}{ds}=\sin\ \alpha$； $\therefore\ \theta=\alpha-\beta$。依三角公式得

$$F\cos\theta=F\cos(\alpha-\beta)=F\cos\alpha\cos\beta+F\sin\alpha\sin\beta。$$

$$\therefore\quad F\cos\theta=F\cos\beta\frac{dx}{ds}+F\sin\beta\frac{dy}{ds}=X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}。\qquad (2$$

此中 X 爲 $F\cos\beta$，Y 爲 $F\sin\beta$；顯然 X 與 Y 爲平行於兩個坐標軸的分力。從(1)

$$dW=\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}\right)ds。\qquad (3)$$

I. 設 $X\,dx+Y\,dy$ 爲完全微分

我們假定 $X\,dx+Y\,dy$ 爲函數 $u=f(x,y)$ 的完全微分。故

$$dW=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right)ds=du。\qquad (4)$$

欲使我們的思想確定些，令 $u=\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$，圖一百四十四。從第16節例五

$$du=\frac{x}{r^2}dy-\frac{y}{r^2}dx,$$

此中 $r^2=x^2+y^2$。從(4)

$$\frac{dW}{ds}=\left(\frac{x}{r^2}\ \frac{dy}{ds}-\frac{y}{r^2}\ \frac{dx}{ds}\right)=\frac{du}{ds}。$$

質點所作的功的變化率 $\frac{dW}{ds}$ 隨其沿曲線運動而發生變化，其值等於函數 $f(x,y)$ 的變化率 $\frac{du}{ds}$。在 W 中有何變化，u 的值連帶的發生變化。故此當質點從 A 至 P，所作的功爲

$$dW=\frac{xdy-ydx}{r^2}=d\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=du;$$

求積分得

$$W=u+\text{常數}。$$

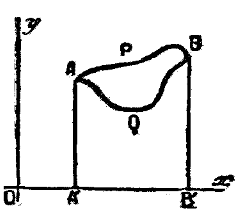
這是說質點從定點 A 至另一點 $P(x,y)$ 所作的功隨 u 的值而定，u 又爲 P 點坐標 x,y 的函數。

顯然的，若質點沿着封閉的曲線運動，則所作的功爲零。若原點在封閉曲線內，當 P 沿曲線環繞一次時，u 卽增加 2π。此時所作的功不爲零了。故此 u 是一個多値函數。

例 若 $X=y$，$Y=x$，$dW=(xdx+ydy)=d(xy)$； 求積分得 $W=xy+C$。我們不必知道所經的路的方程式。所作的功只是最後位置的坐標的函數。常數 C 可助我們決定最初位置 $A(a,b)$ 的。

熱力學第一定律說當一個熱量 dQ 加於物質上時，一部份用於變化物質內部的能 dU，而另一部份 dW 用於對抗外力所作的功。用記號表之，則

$$dQ=dU+dW。$$



圖一百四十五

特例，當所作的功爲對抗大氣壓力之膨脹時 $dW=pdv$。今設此物質從一個狀態 A 變爲另一個狀態 B(圖一百四十五)。在狀態 B 時物質內部的能完全從此點的坐標決定，因 U 與從 A 轉換至 B 的性質一些沒有關係的。從 APB 或 AQB 對於 U 的值不生影響的。這樣 U 完全由相當於已知狀態之點的坐標所規定。換言之 dU 爲完全微分。

另一方面，從一個狀態轉變爲另一狀態時所作外部的功，非但隨物

質的最初與最後狀態而定，並且與從狀態 A 至狀態所經的路的性質t有關係。例如，從狀態 A 至狀態 B，此物質所作的功可用面積 $AQBB'A$ 代表之亦可以面積 $APBB'A'$ 代表之。從 A 至 B 再回至 A，事實上所作的功的全部可以面積 $APBQ$ 代表之。欲從狀態 A 至狀態 B 所作的功非但須知由 A,B 兩點坐標所規定的此物質的最初與最後狀態並且須知從此至彼的路的性質。

同樣，從一個狀態至另一狀態時供給於物體的熱量，非但隨其最初與最後狀態而定，且與其轉變的性質有關係。所有這些可以包括在『dW 與 dQ 不是完全微分』一語之內。dW 與 dQ 可乘以積分因數 μ 而使之成為完全微分。在熱力學中此積分因數證明是等於所謂嘎爾諾(Carnot)函數。欲表示 dW 與 dQ 不是完全微分，有些作家於微分號的右上角加以一撇。於是上面的方程式寫為

$$d'Q=dU+d'W。$$

II. 設 $Xdx+Ydy$ 不是完全微分

現在假設 $X\,dx+Y\,dy$ 不是完全微分。此時我們不能寫 $X=\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$Y=\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 如(3)與(4)。但從(3)整理各項可得

$$dW=\left(X+Y\frac{dy}{dx}\right)dx。\tag{5}$$

現在欲求此質點從 A 至 P 所作的功，我們必須用路線的方程式而以 x 表示 y。設 $X=-y$，$Y=x$；設路線方程式為 $y=ax^2$，$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=2a$

從(5)

$$dW=(-y+2ax^2)dx=(-ax^2+2ax^2)dx=ax^2dx$$

$$\therefore \quad W=\frac{a}{3}x^3+C_{\circ}$$

這是很淸楚，若路線不同則 $X+Y\dfrac{dy}{dx}$ 的值也不同。例如，若$y=ax^3$，

$$dW=(ax^3+3ax^3)dx=4ax^3dx,$$

$$\therefore \quad W=ax^4+C_{\circ}$$

故所作的功隨 P 點的坐標，也隨路線方程式而定。

例　若 $dU=dQ-pdv$，而 dU 是完全微分，證明 dQ 不是完全微分。

示意：　我們從第 27 節知道

$$dQ=\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_v dT+\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_T dv;$$

$$\therefore \quad dU=\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_v dT+\left(\frac{\partial Q}{\partial v}-p\right)_T dv_{\circ} \tag{6}$$

若 dU 爲完全微分，則

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial Q}{\partial v}-p\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right);$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial T\partial v}=\frac{\partial^2 Q}{\partial v\partial T}+\frac{\partial p}{\partial T}\cdot \tag{7}$$

從(6)，若 dQ 爲完全微分，則

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial v\partial T}=\frac{\partial^2 Q}{\partial T\partial v}{\circ}$$

故(6)與(7)不能同時成立的。

此問題在雜志 Technic (1, 615, 1904) 中是從另一種觀點來研

究的。

§ 125. 一級線性微分方程式 (Linear Differential Equations of the First Order)

一級線性微分方程式中只含有因變數 y 的一次冪與其一級微係數的一次冪。有時亦稱 Leibnitz 方程式，普遍的形式爲

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q, \tag{1}$$

此中 P, Q 爲 x 的函數或常數而不含 y。我們在上面已經證過 $e^{\int Pdx}$ 爲(1)的積分因數，所以

$$e^{\int Pdx}(dy+Pydx)=e^{\int Pdx}Qdx,$$

爲完整微分方程式。因 $d\left(ye^{\int Pdx}\right)=e^{\int Pdx}dy+e^{\int Pdx}yPdx$，故普遍解爲

$$ye^{\int Pdx}=\int e^{\int Pdx}Qdx+C;$$

即
$$y=e^{-\int Pdx}\int e^{\int Pdx}Qdx+Ce^{-\int Pdx}。 \tag{2}$$

線性方程式在應用算學上是極爲重要。在特殊的情形中積分因數可以是很簡單的形式。

例一　解 $(1+x^2)dy=(m+xy)dx$。化此爲(1)的形式得

$$\frac{dy}{dx}-\frac{x}{1+x^2}y=\frac{m}{1+x^2}。$$

$$\therefore\quad \int Pdx=-\int\frac{xdx}{1+x^2}=-\frac{1}{2}\log(1+x^2)=-\log\sqrt{1+x^2}$$

$$\log\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}。$$

$$\therefore \quad e^{\int Pdx} = e^{\log \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

以此積分因數乘原式,用第 122 節(4)的方法解所得的完整方程式,或用本節 (2) 直接解之更好。其解為 $y=mx+C\sqrt{1+x^2}$。

例二　在自感應係數 L（亨利）,電阻 R（歐姆）,電流 C（安培),電動勢 E（伏特）的電路中關於變電流的 Ohm 定律為方程式 $E=RC+L\frac{dC}{dt}$。此式是一個標準的線性方程式(1)。若 E 為常數,試證其解為 $C=\frac{E}{R}+Be^{-\frac{Rt}{L}}$,此中 B 為任意的積分常數。證明當電流通行若干時間 t 後 C 近似於 $\frac{E}{R}$。

示意：　求解時積分因數為 $e^{\frac{Rt}{L}}$

例三　一個質點所受的阻力隨其速度與時間的已知函數之力而正變,則其運動方程式為 $\frac{dv}{dt}+kv=f(t)$。試證 $v=C\,e^{-kt}+e^{-kt}\int e^{kt}f(t)dt$。設此力為地心引力 g, 則 $v=Ce^{-kt}+\frac{g}{k}$。

例四　解 $xdy+ydx=x^3dx$。

積分因數為 x。

答：　$y=\frac{1}{4}x^3+\frac{C}{x}$。

例五　我們可以很快的求得 $\frac{dy}{dt}+k_2y=k_2a(1-e^{-k_1t})$。

其解如下,

$$y=Ce^{-\int k_2dt}-e^{-\int k_2dt}\int e^{\int k_2dt}\{-k_2a(1-e^{-k_1t})\}dt;$$

$$=Ce^{-k_2t}+e^{-k_2t}\{k_2a\int e^{k_2t}-\int e^{(k_2-k_1)t}\}dt;$$

$$=Ce^{-k_2t}+a-\frac{k_2a}{k_2-k_1}e^{-k_1t}$$

例六　欲解

$$\frac{dy}{dx}+\frac{Ky}{a-x}=\frac{Kx}{a-x};$$

此時 $e^{\int\frac{Kdx}{a-x}}=e^{-K\log(a-x)}=e^{-\log(a-x)^K}=\frac{1}{(a-x)^K}$。

$$\therefore\quad \frac{y}{(a-x)^K}=C+K\int\frac{xdx}{(a-x)^{K+1}}=C+\frac{x}{(a-x)^K}-K\int\frac{dx}{(a-x)^K}。$$

最後若 $y=0$ 時 $x=0$,

$$y=C(a-x)^K+a-\frac{K(a-x)}{K-1};\quad C=\frac{1}{(K-1)a^{K-1}}。$$

許多方程式可用變換變數的方法爲線性方程式的形式。如所謂布氏(Bernoulli)方程式,

$$\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n。\tag{3}$$

除以 y^n, 乘以 $(1-n)$, 再以 $y^{1-n}=v$ 代入, 得

$$\frac{1-n}{y^n}\frac{dy}{dx}+(1-n)Py^{1-n}=(1-n)Q,$$

$$\therefore\quad \frac{dv}{dx}+(1-n)Pv=(1-n)Q,$$

此爲關於 v 的線性方程式。故立刻可以得到解

$$ve^{(1-n)\int Pdx}=(1-n)\int Qe^{(1-n)\int Pdx}dx+C_{\circ}$$

$$\therefore\quad y^{1-n}e^{(1-n)\int Pdx}=(1-n)\int Qe^{(1-n)\int Pdx}dx+C_{\circ}$$

例一　解 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=y^2$。

以 $v=\dfrac{1}{y}$ 代入。積分因數爲 $e^{-\int\frac{dx}{x}}=e^{-\log x}=x^{-1}$。

答：　$Cxy-xy\log x=$　。

例二　解 $\dfrac{dy}{dx}+x\sin 2y=x^3\cos^2 y$。

除以 $\cos^2 y$。令 $\tan y=v$。積分因數 $e^{\int 2xdx}=e^{x^2}$。

答：　$e^{x^2}\left(\tan y-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}\right)=C$。

示意：　詳細的步驟是 $\sec^2 y\dfrac{dy}{dx}+2x\tan y=x^3$；$\dfrac{dv}{dx}+2xv=x^3$；解此方程式得解 $ve^{x^2}=\int x^3e^{x^2}dx+C$。令 $x^2=z$，$\therefore\ 2xdx=dz$，則此積分變爲 $\dfrac{1}{2}ze^zdz$；從第 73 節例四，可得 $\dfrac{1}{2}e^z(z-1)$等等。

例三　這裏是一個很實用的微分方程式，Harcourt 與 Esson 在 1866 年研究化學動力學時所遇到的；卽

$$\frac{1}{y^2}\ \frac{dy}{dx}+\frac{K}{y}-\frac{K}{x}=0_{\circ}$$

我在這裏預備將其全部解法寫出，可以給讀者一種複習。此方程式與 Bernoulli 的同一形式。故若以 $v=\dfrac{1}{y}$ 卽 $\dfrac{dv}{dx}=-\dfrac{1}{y^2}\ \dfrac{dy}{dx}$ 代入，

$$\therefore \quad \frac{dv}{dx}-Kv+\frac{K}{x}=0,$$

此爲關於 v 的線性方程式。積分因數爲 $e^{\int P dx}=e^{-Kx}$; $Q=-\frac{K}{x}$; 故從(2),

$$ve^{-Kx}=-\int\frac{K}{x}e^{-Kx}\,dx+C。$$

用第 111 節的方法,

$$ve^{-Kx}=-K\int\frac{1}{x}\left\{1-(Kx)+\frac{(Kx)^2}{1\cdot 2}-\frac{(Kx)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots\right\}dx+C。$$

$$\therefore \quad ve^{-Kx}=-K\int\left\{\frac{dx}{x}-K\,dx+\frac{K^2x\ dx}{1\cdot 2}-\frac{K^3x^2\ dx}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots\right\}+C。$$

但 $v=\frac{1}{y}$。以 ye^{Kx} 乘之,再求積分。

$$1=Ke^{Kx}\left\{c_1-\log\ x+Kx-\frac{(Kx)^2}{1\cdot 2^2}+\frac{(Kx)^3}{1\cdot 2\cdot 3^2}-\cdots\cdots\right\}y。$$

此結果在第 139 節 III 中須用到。

別的代入法可使一個方程式變爲線性方程式者,如下例:

例四 在研究化學反應,我曾經遇到過一個方程式,如 $\frac{dx}{dt}=k(a-x)(x-y)$,此中 $y=a(1-e^{-mt})$。令 $z=\frac{1}{k(a-x)}$; $\therefore\ dx=\frac{dz}{kz^2}$。得

$$\frac{dz}{dt}-akze^{-mt}=-1,$$

此爲關於 z 的線性方程式。解之。

例五 J. W. Mellor 與 L. Bradshaw(Zeit. Phys. Chem., **48**,

353, 1904)。關於蔗糖的水解作用，有方程式

$$\frac{du}{dt}+bu=Ab(1-e^{-kt});$$

解此，得

$$ue^{bt}=Ae^{bt}-\frac{b\ e^{(b-kt)}}{b-k}+C。$$

例六　太陽冷卻的定律，可用方程式

$$\frac{dT}{dt}=aT^3-bT$$

代表之。欲解此式，可用 T^3 除之；令 $T^{-2}=z$，　$\therefore\ T^{-3}dT=-\frac{1}{2}dz$；

於是原方程式變數

$$\frac{dz}{dt}-2bz=-2a。$$

此爲關於 z 的線性方程式，其解爲 $z=\frac{a}{b}+Ce^{2bt}$。代入 z 的值。再用普通的方法決定常數 C。

§ 126. 一級一次或高次微分方程式——微分的解法

(Differential Equations of the First Order and of the First or Higher Degree-Solution by Differentiation)

第一種情形　方程式可以分解因數者。若一個微分方程式若能分解爲 n 個一次因數，即得一組 n 個方程式同值於此方程式，於是分別解之。所得 n 個解中可由牠們各自分立，或可併合爲一。

例一　解 $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=y$。分解爲兩個一次因數得 $\frac{dx}{dy}=\pm\sqrt{\frac{y}{x}}$。分離變數而解之，$\int x^{-\frac{1}{2}}dx\pm\int y^{-\frac{1}{2}}dy=\pm\sqrt{C}$。此中$\sqrt{C}$ 爲積分常數。故$\sqrt{x}\pm\sqrt{y}=\pm C$，化成有理式得 $(x-y)^2-2C(x+y)+C^2=0$。在幾何上，此方程式代表一組拋物線，每個切軸於距原點爲 C 之處。上述解中之兩個方程式不過代表同一拋物線的兩個分枝罷了。

例二　解 $xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(x^2-y^2)\frac{dy}{dx}-xy=0$。

答：　$xy=C$，　或 $x^2-y^2=C$。

示意：　分解因數得$(xp+y)(yp-x)=0$，此中 $p=\frac{dy}{dx}$。得兩個方程式 $xp+y=0$，$yp-x=0$ 等等。

例三　解$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-7\left(\frac{dy}{dx}\right)+12=0$。

答：　$y=4x+C$，　或 $y=3x+C$。

第二種情形　方程式雖不能分解爲因數而可解得 x，或 y 爲其餘的變數與其微係數之函數者。可令 $p=\frac{dy}{dx}$。然後求 $\frac{dx}{dy}$ 或 $\frac{dy}{dx}$。解所得的微分方程式，求 p 的值。以 p 的值代入原方程式，得所求之解。

例一　解 $\frac{dy}{dx}+2xy=x^2+y^2$。

因 $\frac{dy}{dx}=x^2-2xy+y^2$，令 $\frac{dy}{dx}=p$　得　$p=(x-y)^2$，

$\therefore\quad \pm\sqrt{p}=x-y$，即 $y=x\pm\sqrt{p}$。求微係數得

$$\frac{dy}{dx}=1\pm\frac{1}{2\sqrt{p}}\cdot\frac{dp}{dx};\quad \therefore\ p=1\pm\frac{1}{2\sqrt{p}}\ \frac{dp}{dx}.$$

分離變數得

$$dx=\pm\frac{dp}{2\sqrt{p}\,(p-1)},$$

用部份分數積分法可得

$$x=\pm\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{p}-1}{\sqrt{p}+1}+\log C。$$

$$\therefore\quad \sqrt{p}=\frac{C+e^{\pm2x}}{C-e^{\pm2x}}$$

代入上之關係 $y=x\pm\sqrt{p}$ 中，得其解爲

$$y=x\pm\frac{C+e^{\pm2x}}{C-e^{\pm2x}}。$$

例二　解 $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2y\left(\frac{dy}{dx}\right)+ax=0$。

示意：令 $\frac{dy}{dx}=p$ 代入，解得 $y=\frac{x}{2p}(p^2+a)$，求其關於 x 的微係數。以 pdx 代 dy，去分母，化簡之，可分離變數而得

$$\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}。$$

求積分得 $p=Cx$。代入已知方程式得解爲 $y=\frac{1}{2}\left(Cx^2+\frac{a}{C}\right)$。

例三　解 $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x\left(\frac{dy}{dx}\right)-y=0$。

示意：解此式求 x，求其關於 y 的微係數。以 $\frac{dy}{p}$ 代 dx，以

例二的方法。可求得 $yp=C$ 等等。

第三種情形　方程式雖不能分解因數，但其缺去 x 或 y，若缺去 x 時，則解之求 $\frac{dy}{dx}$ 或 y 的值；缺去 y 時，則解之求 $\frac{dx}{dy}$ 或 x 的值。若需要時可以關於缺去的字母求微係數，然後以通常的方法解之。

例一　解 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x\left(\frac{dy}{dx}\right)+1=0$。

令 $\frac{dy}{dx}=p$，則得

$$-x=p+\frac{1}{p}。\tag{1}$$

求關於 y 的微係數得

$$-\frac{1}{p}=\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dy};\quad 或\quad -\frac{dy}{dp}=p-\frac{1}{p};$$

$$\therefore\qquad y=\log p-\frac{1}{2}p^2+C\tag{2}$$

從(1)與(2)消去 p 得所求之結果。

例二　解 $\frac{dy}{dx}=y+\frac{1}{y}$。

答：　$y^2=Ce^{2x}-1$。

例三　解 $\frac{dy}{dx}=x+\frac{1}{x}$。

答：　$y=\frac{1}{2}x^2+\log x+C$。

§ 127. 克氏方程式 (Clairaut's Equation)

此方程式的普遍形式爲

$$y=x\frac{dy}{dx}+f\left(\frac{dy}{dx}\right);\tag{1}$$

或寫 $\frac{dy}{dx}=p$，可較便利，得

$$y=px+f(p)。\tag{2}$$

許多 x 與 y 的一次方程式可多少變換變數而化爲此種形式，然後解之如下：求(2)關於 x 的微係數，得

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+f'(p)\frac{dp}{dx}; \quad 即 \ (x+f'(p))\frac{dp}{dx}=0。$$

故得 $x+f'(p)=0$，或 $\frac{dp}{dx}=0$。從後者，得 $p=C$，此中 C 爲任意常數。於是 $dy=Cdx$，原方程式的解爲

$$y=Cx+f(C)。$$

又 $x+f'(p)=0$ 中的 p 亦解得而代入原方程式 $y=px+f(p)$ 中。結果得 x,y 的方程亦爲已知方程式的解。故此 Clairaut 方程式可有兩種解。

例一 求 $y=px+p^2$ 的兩種解。

答：$Cx+C^2=y$；$x^2+4y=0$。

例二 若 $(y-px)(p-1)=p$； 證 $(y-Cx)(C-1)=C$；$\sqrt{y}+\sqrt{x}=1$。

例三 在第 125 節第一組例六的速度方程式中，若 $K=2$，令 $\frac{dy}{dx}=p$，解之求 y 得

$$y=x-\frac{a-x}{2}p。$$

求關於 x 的微係數得

$$\frac{dy}{dx}=p=1+\frac{p}{2}-\frac{a-x}{2}\cdot\frac{dp}{dx};\quad \therefore \frac{dx}{a-x}=-\frac{dp}{p-2}$$

求積分得 $-\log(a-x)=-\log(p-2)$; $a-x=p-2$, 故得 $y=2x-a-(a-x)^2$; 若令 $x=a+1+x_1$; $y=a+1-y_1$, 則得拋物線 $y_1=x_1^2$。

做了上列例題以後再將第 67 節複閱一遍。

§ 128. 奇異解(Singular Solutions)

克氏方程式引入一個新的觀念。以前我們總以為求得一個 x, y 的函數之能適方程式者,則此函數加一個任意常數卽能代表普遍解。現在我們發見可有一個 x, y 的函數能適合方程式而並不如特殊解之包含在普遍解以內。這樣的函數必須作為一種解,因其能適合方程式的緣故。不過這種解的存在確是偶然的性質,限於一些特別的方程式,故此牠們有奇異解的名稱。設如方程式

$$y=\frac{dy}{dx}x+\frac{a}{\dfrac{dy}{dx}};\quad 卽\quad y=px+\frac{a}{p},\tag{1}$$

此中 p 還是代表 $\frac{dy}{dx}$, 求關於 x 的微係數,略加整理後,可得

$$\left(x-\frac{a}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}=0$$

於是 $x-\frac{a}{p^2}=0$ 或 $\frac{dp}{dx}=0$。從後者

$$p=C;\quad 卽\quad y=Cx+\frac{a}{C};\tag{2}$$

從前者，$p=\sqrt{\dfrac{a}{x}}$，代入(1)時，得解

$$y^2=4ax。\tag{3}$$

此解並不包含在普遍解之內，但是適合於方程式的。故(3)爲(1)的奇異解。(2)爲(1)的普遍解，前曾證過，這是代表一組直線，各線僅差一個常數 C；(3) 並不含有任意常數是一個普通拋物線的方程式。一點在此拋物線上運動，任何時刻，$\dfrac{dy}{dx}$的值與在其切線上運動時相同，亦與在方程式 (2) 所代表的直線之一上運動時相同。**微分方程式的奇異解在幾何上等於普遍解所代表的一組曲線的包絡線。**奇異解與特殊解的分別，卽後者包含在普遍解內，而後者則否。

再參閱圖九十六，可以注意到相當於此包絡線上的任何點，p 或 $\dfrac{dy}{dx}$ 可有兩種值，一種相當於拋物線的；一種相當於直線的。

欲使二次方程式

$$ax^2+bx+c=0,$$

有相等的兩個根，必須其判別式

$$b^2=4ac;\quad 卽\ b^2-4ac=0。\tag{4}$$

從 (1)，因 $y=px+\dfrac{a}{p}$；

$$\therefore\quad xp^2-yp+a=0。\tag{5}$$

欲使方程式(5)可有等根，則須

$$y^2=4ax。$$

此關係爲 p 的兩個相等之點的軌跡，故又稱爲方程式(1)的 p 之判別

式。

同樣，若在普遍解(2)，

$$y = Cx + \frac{a}{C};\quad \text{即}\quad xC^2 - yC + a = 0,$$

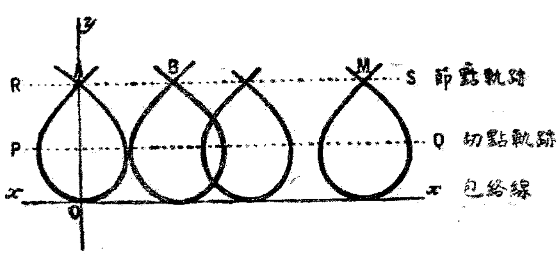
中的 C 作爲變數看待。兩根相等的條件爲

$$y^2 = 4ax,$$

這是 C 的值相等之點的軌跡。稱爲 C 之判別式。

我們在應用這些觀念到特例上去以前，可以注意到的是包絡線軌跡可爲一個曲線如圖九十六，亦可爲幾個曲線如圖九十七。這些判別式關係的性質之詳盡研究，讀者須參閱關於這些題目的教本或 M. J. M. Hill, "On the Locus of Singular Points and Lines, Phil. Trans., 1892。總扼的說，可如下列：

1. **包絡線軌跡**(Envelope locus)可以適合原方程式而並不包含在普遍解內（參閱圖一百四十六中 xx ）。

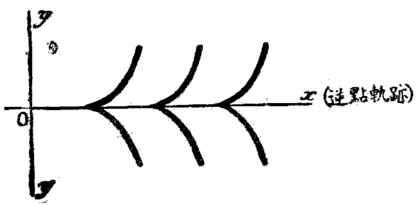


圖一百四十六

2. **切點軌跡** (Tac locus) 是一組曲線中不相連兩個相切之點的軌跡。這種軌跡如圖九十七中的 AB，圖一百四十六中的 PQ。切點

軌跡不能適合於原方程式，牠只見於 p 之判別式而不見於 C 之判別式。

3. **節點軌跡**(Node locus)是一組曲線中每個曲線自身交點的軌跡，此交點卽爲節點有單節點(Single node)雙節點(Double node)三節點(Triple node)………等之別。節點軌跡不能適合於原方程式，牠只見於 C 之判別式而不見於 p 之判別式。圖一百四十七中 RS 爲節點軌跡通過 A………，B………，C………，M………等節點。



圖一百四十七

4. **逆點軌跡**(Cusp locus)是一組曲線的逆點(見第 63 節)的軌跡。逆點軌跡不能適合原方程式的，雖然牠見於 p 之判別式亦見於 C 之判別式。這是圖一百四十七中 ox。有節點與逆點的軌跡會與包絡線軌跡合一。

求下列方程式的奇異解及其他軌跡的性質：

例一 $xp^2-2yp+ax=0$。

欲兩個根相等須 $y^2=ax^2$。這能適合原方程式而不包含在普遍解 $x^2-2Cy+C^2=0$ 內。故 $y^2=ax^2$ 爲奇異解。

例二 $4xp^2=(3x-a)^2$。

此式的普遍解爲 $(y+C)^2=x(x-a)^2$。欲兩個根 p 相等，須 $4x(3x-a)^2=0$ 卽 $x(3x-a)^2=0$。(此爲 p 之判別式)。欲兩個根 C 相等，可關於 C 而求普遍解中 y 的微係數，$(y+C)\dfrac{dy}{dC}=0$， 卽

$C=-y$，　$\therefore\ x(x-a)^2=0$，此 C 之判別式，欲 C 的兩個根相等，必須滿足此條件。$x=0$ 爲兩個判別式所公共有的，且能適合原方程式故爲奇異解。$x=a$ 能適合 C 之判別式而不能適合 p 之判別式，且非原方程式之解，故 $x=a$ 爲節點軌跡。$x=\frac{1}{3}a$ 適合於 p 之判別式，但不適合於 C 之判別式，又非原方程式之解，故 $x=\frac{1}{3}a$ 爲切點軌跡。

例三　$p^2+2xp-y=0$。

此式的普遍解爲 $(2x^3+3xy+C)^2=4(x^2+y)^3$；其 p 之判別式爲 $x^2+y=0$；其 C 之判別式爲 $(x^2+y)^3=0$。此兩個判別式都不適合於原方程式，故無奇異解。因 $x^2+y=0$ 見於兩判別式，故此爲逆點軌跡。

例四　證方程式 $y^2(p^2+1)=a^2$ 的普遍解爲 $y^2+(x-C)^2=a^2$；且有兩個奇異解 $y=\pm a$；及一個切點軌跡爲 $y=0$ 即 x 軸（見圖九十七中）。

交割曲線(Trajectory) 是以定角與一組曲線相交的一個或一組曲線。若定角爲 90° 則此曲線名爲**正交曲線**(Orthogonal trajectory)。

例一　設有一組等邊雙曲線 $xy=C$，欲求其正交曲線，先關於 x 的微係數而消去 C，而得 $x\frac{dy}{dx}+y=0$。若兩個曲線交於直角，則從第 32 節(17)知 $\alpha'-\alpha=\frac{\pi}{2}$，此中 α，α' 是從交點所作兩個曲線的切點與 x 軸的交角。但從公式 $\tan\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\tan\alpha'-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\alpha'}$；$\tan\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=\infty$；$\frac{1}{\infty}=0$；$\therefore\ \tan\alpha=-\cot\alpha'$；即 $\frac{dy}{dx}=-\frac{dx}{dy}$。

以$\frac{dy}{dx}$代$-\frac{dx}{dy}$，卽可從一組微分方程式得到別一組微分方程式。故此組等邊雙曲線的正交曲線方程式爲 $x\,dx-y\,dy=0$，卽 $x^2-y^2=C$，此亦爲等邊雙曲線，卽以已知一組等邊雙曲線的漸近線爲其兩軸。在極坐標中必須以 $-\left(\frac{dr}{r}\right)d\theta$ 代 $r\frac{d\theta}{dr}$。

例二 證明等位線 (Equipotential curves) $\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}=C$ 的正交曲線爲磁線 (Magnetic curves) $\cos\theta+\cos\theta'=C$。

§ 129. 運算的記號 (Symbols of Operation)

在第 21 節已經見到，用 D 代表運算記號 $\frac{d}{dx}$ 時較爲便利。D 雖是一個運算記號，然我們若暫時作爲一個數量看待，各以

$$Dy,\ D^2y,\ D^3y\cdots\cdots \text{代表}\ \frac{d}{dx}y,\quad \frac{d^2}{dx^2}y,\quad \frac{d^3}{dx^3}y,\cdots\cdots$$

則 D, D^2, $D^3\cdots\cdots$ 等運算記號，除了不能與變數交換（第 65 節附註）如 $Dxy=xDy$ 外，服從代數上的規則。當 m 與 n 爲正整數時，也適合於指數定律，如

$$D^mD^nu=D^{m+n}u。$$

若 $Du=v$；$u=D^{-1}v$，或 $u=\frac{1}{D}v$；則 $v=D(D^{-1})v$，卽 $DD^{-1}=1$；這是說，在 $D^{-1}v$ 上使行運算 D，其效果爲消去 D^{-1}。

用這些記法，方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}-(\alpha+\beta)\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y=0,$$

可寫爲

$$\{D^2-(\alpha+\beta)D+\alpha\beta\}y=0;$$

卽
$$(D-\alpha)(D-\beta)y=0。$$

今以原來的記號代 D，得

$$\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)\left(\frac{d}{dx}-\beta\right)y=0,$$

以一個因數運算於 y 上，得

$$\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)\left(\frac{dy}{dx}-\beta y\right)=0。$$

再以第一個因數，運算於第二個上，卽回復到原來的方程式。

§ 130. 振動方程式 (Equations of Oscillatory Motion)

按 Newton 第二定律，若有質量爲 m 的質點受彈力 F_0 的作用經過某個時間，則取適當的單位時我們得

$$F_0=\text{質量}\times\text{此質點的加速度}。$$

設此質點的運動受摩擦力的作用，我們可將摩擦力作爲由彈力而產生的對抗此運動的力。假定此力比例於此質點的速度 V，則此力等於速度與一個常數的積；此常數稱爲摩擦係數(Coefficient of friction)寫爲 μ。令 F_1 爲在運動方向中作用於此質點的力的全部，則

$$F_1=F_0-\mu V=m\frac{d^2s}{dt^2}。\tag{1}$$

若無摩擦力，就單位質量而言，則爲

$$F_0=\frac{d^2s}{dt^2}。\tag{2}$$

一個擺(Pendulum) 在無抵抗的介質中的運動是一個質點受着中

心引力 F 的作用而生的運動，此力的強度比例於質點與引力中心的距離。我們稱 F 爲有效的力，因爲由力而發生運動的。結果，可得

$$F=-q^2s, \tag{3}$$

此中 q^2 作爲一個正的常數，欲使此質點恢復於平衡位置者即所謂恢復係數 (Coefficient of restitution)。此處寫成平方的形式爲免以後在式中發生根號。負號表示引力 F 使此質點與引力中心的距離 s 減小。設 $s=1$，q^2 代表單位距離處引力的數值。從(2)，故

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-q^2s。 \tag{4}$$

此方程式的積分告訴我們，質點在力 F 的影響下的運動。我們無法直接從此方程式求得其解，但若乘以 $2\frac{ds}{dt}$，即可逐項求關於 s 的積分，

$$2\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}+2q^2s\frac{ds}{dt}=0, \quad 即 \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2+q^2s^2=C。$$

令積分常數 C 爲常數 q^2r^2；分離變數；再求積分；可得

$$\int\frac{ds}{\sqrt{r^2-s^2}}=\pm q\int dt; \quad 即 \quad \sin^{-1}\frac{s}{r}=\mp qt+\epsilon;$$

即 $s=\mp r\sin(qt+\epsilon)$；

此中 ϵ 爲新的積分常數。此時我們得到 s 爲 t 的顯函數 (Explicit function)，即可直接以 t 表示 s。我們已在第 21 節，第 49 節中研究過此方程式。事實上，這是振動的標準方程式。一個質點在直線上來回的運動着。正弦函數的值在極限值 $+1$ 與 -1 之間，隨時間而變化，結果即 s 在極限值 $+r$ 與 $-r$ 之間變化。故 r 是擺幅；ϵ 是相常數(Phase constant)，即第 49 節中的初相。當角增加 2π 或 2π

的倍數時，其正弦之值重複爲原有之值。設時間 t 取得，每間隔 T_0，此質點能以同速度同方向經過同一地位，則

$$qT_0=2\pi;\quad 即\ T_0=\frac{2\pi}{q}。\tag{5}$$

兩個不定常數 r 與 ϵ 可使下式

$$s=r\ \sin(qt+\epsilon)$$

採用最初條件 (Initial conditions)。我們若展開上式爲

$$s=r\ \sin\ qt\ \cos\ \epsilon+r\ \cos\ qt\ \sin\ \epsilon。$$

設以 C_1 與 C_2 各表不定常數 $r\sin\epsilon$ 與 $r\cos\epsilon$，則

$$r=\sqrt{C_1^2+C_2^2};\quad \epsilon=\tan^{-1}\frac{C_1}{C_2}。$$

今求
$$s=C_1\cos qt+C_2\sin qt,$$

的積分，得
$$\frac{ds}{dt}=-q\ C_1\ \sin\ qt+q\ C_2\ \cos\ qt。$$

設 $t=0$ 時此質點的位置爲 s_0，速度爲 V_0。正弦函數之值爲零，餘弦函數之值爲 1。故 $C_1=s_0$；$C_2=\frac{V_0}{q}$，常數 r 與 ϵ 可用最初條件表示之爲

$$r=\sqrt{s_0^2+\frac{V_0^2}{q^2}};\quad \epsilon=\tan^{-1}\frac{q\,s_0}{V_0}。$$

在正弦電流計中，欲使針恢復於平衡地位的力比例於針的偏轉角的正弦。設 J 爲磁針的轉動慣性，G 爲電流作用於磁針上的定向力，若無其減速力，則磁針運動方程式爲

$$J\frac{d^2\phi}{dt^2}=G\sin\phi。\tag{6}$$

小的角移 ϕ 與 $\sin\phi$ 幾乎相等。故

$$\frac{d^2\phi}{dt^2}=-\frac{G}{J}\phi。 \tag{7}$$

從(4)，$q=\sqrt{\frac{G}{J}}$，故從 (5)

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{J}{G}}, \tag{8}$$

這是一個有名的關係，說明若無阻尼作用加於磁針時，磁場內磁針的振動週期與磁針的轉動慣性的平方根成正比例，與電流作用於磁針上的定向力的平方根成反比例。

§ 131. 二級線性方程式 (Linear Equation of the Second Order)

通常，解一個高級微分方程式較一級微分方程式爲難。在這些方程式中以線性方程式最爲重要。一個 n 級**線性方程式**是一個方程式中所含因變數與其 n 級及以下各級的微係數都是一次，亦無兩種相乘在一起者。若有高次冪則方程式不是線性，其解普通是較難求得。高級線性方程式的標準形式爲

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots\cdots+Qy=R;$$

或用新的記法，爲

$$D^ny+X_1D^{n-1}y+\cdots\cdots+X_ny=X,$$

此中 $P,Q,\cdots\cdots R$ 或 $X_1,X_2,\cdots\cdots X_n,X$ 可爲常數，亦可爲 x 的函數。若最高級的微係數的係數不爲 1，則可用此係數除全式而化之爲 1。故方程式終能變爲標準形式。

I. 常數係數的線性方程式

我們先看二級線性方程式，其係數爲常數 P,Q 者的標準形式，

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0 \tag{1}$$

線性方程式有幾種特別的性質可使求普遍解時十分簡捷。

例如 $y=e^{mx}$ 可爲方程式(1)的解，只須 m 與 P,Q 間有某種一定的關係；今求此關係，可將 e^{mx} 代入 $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy$ 而得

$$\frac{d^2e^{mx}}{dx^2}+P\frac{de^{mx}}{dx}+Qy=(m^2+Pm+Q)e^{mx}$$

若
$$m^2+Pm+Q=0 \tag{2}$$

則 (1) 式左邊爲 0，即 $y=e^{mx}$ 爲方程式之解。(2)稱爲**輔方程式** (Auxiliary equation)；設其兩個根爲 m_1 及 m_2；則 $y=e^{m_1x}$；$y=e^{m_2x}$ 都能適合方程式(1)。

進一步論之，若已知一個線性方程式的兩個或多個解則各乘以常數後的總和亦爲原方程式的一個解。例如，設 u 與 v 各爲方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-q^2x \tag{3}$$

的解，每個稱爲**特殊積分** (Particular integral)，代入(3)得

$$\frac{d^2u}{dt^2}=-q^2u;\quad \frac{d^2v}{dt^2}=-q^2v。 \tag{4}$$

每個方程式各自乘以任意常數 C_1 與 C_2；總加之，

$$C_1\frac{d^2u}{dt^2}+C_2\frac{d^2v}{dt^2}=-C_1q^2u-C_2q^2v;$$

此即爲

$$\frac{d^2}{dt^2}(C_1u+C_2v)=-q(C_1u+C_2v) \tag{5}$$

故能適合方程式 (1)。這是線性方程式的一個很有價值的性質。就是說，若 u 與 v 是方程式(3)的兩個解，則其和 C_1u+C_2v 亦為此方程式之解。因已知方程式為二級，今解中含有兩個任意常數，故此方程式是完全解出了。這裏所扼要敘述的特殊積分的疊置原理 (The principle of superposition of particular integrals)是第 22 節中有名的物理現象的算學表示法；即所謂不同的作用的共存原則：如速度的合成，力的合成，小衝量的重疊等等。以後我們要用到這個原則，現在且回到輔方程式的問題。

1) **輔方程式有兩個不同的根 m_1 與 m_2 時，**方程式 (1) 的普遍解可以絕無困難的寫為

$$y=C_1e^{m_1x}+C_2e^{m_2x} \tag{6}$$

故此輔方程式若有兩個不同的根，我們可以一望而即寫出線性方程式的解。

例一　解$(D^2+14D-32)y=0$。

設 $y=Ce^{mx}$ 為一個解。輔方程式為 $m^2+14m-32=0$。其根為 $m=2$，或 -16。故所求之解為 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-16x}$。

例二　解 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}+3y=0$。

答：$y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-x}$。

例三　熱在圓柱棒中傳播的傅氏(Fourier)氏方程式為

$$\frac{d^2V}{dx^2}-\beta^2V=0,$$

試證 $V=C_1e^{\beta x}+Ce^{-\beta x}$。

2)　**輔方程式有兩個等根時**，設 $m_1=m_2$，如以解寫爲 $(C_1+C_2)e^{m_1x}$ 則有不妥，因爲 C_1+C_2 事實上僅爲一個常數。於是解中所含的任意常數將比普遍解所應有的少去一個。我們此時可用 $m_2=m_1+h$ 代入(6)而求別一個特殊積分，此中 h 爲某一有限量，最後可使等於零。$m_2=m_1+h$ 代入(6)以後，用馬氏定理展開，到極限當 $h=0$ 時得

$$y=e^{m_1x}(A+Bx)\tag{7}$$

此式可以一望而卽寫出所要的解。在高於二次的方程式中上式的結果須寫爲

$$y=e^{m_1x}(C_1+C_2x+C_3x^2+\cdots\cdots+C_{r-2}x^{r-1}),\tag{8}$$

此中 r 表示等根的個數。

例一　解 $\dfrac{d^3y}{dx^3}-\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}+y=0$。

假定 $y=Ce^{mx}$。輔方程式 $m^3-m^2-m+1=0$。其根爲 1, 1, −1, 故普遍解可以直接寫爲

$$y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)e^x。$$

例二　解 $D^3+3D^2-4)y=0$。

答：　$y=e^{-2x}(C_1+C_2x)+C_3e^x$。

示意：　根從 $x^3+3x^2-4=(x-2)(x-2)(x-1)$ 得之。

3)　**輔方程式有不等的虛根時**，注意係數爲實數的方程式其虛根是成對出現的，設兩個虛根爲

$$m_1=\alpha+i\beta;\quad m_2=\alpha-i\beta。$$

在(6)中我們必須以這些值代入，而得

$$y=C_1e^{(\alpha+i\beta)x}+C_2\ e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}(C_1e^{i\beta x}+C_2e^{-i\beta x});$$

此中 C_1 與 C_2 爲積分常數。從第 97 節(13),(15),

$$y=e^{\alpha x}C_1(\cos\ \beta x+i\ \sin\ \beta x)+e^{\alpha x}C_2(\cos\ \beta x-i\ \sin\ \beta x), \tag{9}$$

將實數部份與虛數部份分開，

$$\therefore\quad y=e^{\alpha x}\{(C_1+C_2)\cos\ \beta x+i(C_1-C_2)\sin\ \beta x\}。$$

若以 C_1+C_2 寫爲 A; $i(C_1-C_2)$ 寫爲 B，則當輔方程式有兩個不等虛根時線性方程式的解可寫爲實數形式，

$$y=e^{\alpha x}(A\ \cos\ \beta x+B\ \sin\ \beta x)。\tag{10}$$

欲 (10) 中常數 A 與 B 爲實數，則常數 C_1 與、C_2 必含有虛數部份。因

$$C_1+C_2=A;\quad i(C_1-C_2)=B;$$

則
$$C_1=\frac{A-iB}{2};\quad C_2=\frac{A+iB}{2}。$$

前在（5）式中見過，若已知方程式的兩個特別積分 u 與 v 則 C_1u+C_2v 亦爲方程式的一個解；但此兩個任意常數中有一爲虛數，如 $A'u+iB'v$，此理亦能成立。求一個這種性質的複數解，常較實數解爲易。我們若能求得已知方程式的一個解 $u+iv$，則 u，v 可分別各視爲已知方程式的一個特殊積分。

例一　從本節(10)與第 112 節(2)(3)證明可寫

$$y=(\cosh\ \alpha x+\sinh\ \alpha x)(A_1\cos\beta x+B\sin\beta x)。$$

例二　求 $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=0$ 的積分。

輔方程式的根 m_1 與 m_2 中 $\alpha=-\frac{1}{2}$，$\beta=\frac{1}{2}\sqrt{3}$；

$$\therefore\quad y=e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}\,x+B\sin\frac{1}{2}\sqrt{3}\,x\right)。$$

例三　一點受週期力的影響而振動，其方程式爲 $\frac{d^2x}{dt^2}+q^2x=0$，輔方程式的根可從 $(D+ia)(D-ia)=0$ 而求之。從 (10) 得 $y=A\cos ax+B\sin ax$。

例四　在電動力學的理論 (Encyc. Brit. **28**, 61, 1902)，聲學的理論與其他物理的各門中，我們會有求解下方程式的需要。

$$\frac{d^2\phi}{dr^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{d\phi}{dr}+k^2\phi=0。$$

注意：$\frac{d(r\phi)}{dr}=\phi\frac{dr}{dr}+r\frac{d\phi}{dr}=\phi+r\frac{d\phi}{dr}$；

$$\frac{d^2(r\phi)}{dr^2}=\frac{d\phi}{dr}+\frac{dr}{dr}\frac{d\phi}{dr}+r\frac{d^2\phi}{dr^2}。$$

$$\therefore\quad \frac{d^2\phi}{dr^2}+2\frac{d\phi}{dr}=\frac{d^2(r\phi)}{dr^2}$$

故若以 r 乘已知方程式得

$$r\frac{d^2\phi}{dr^2}+2\frac{d\phi}{dr}+k^2r\phi=0,$$

即
$$\frac{d^2(r\phi)}{dr^2}+k^2(r\phi)=0,$$

故可寫爲　$(D^2+k^2)\phi r=(D+ik)(D-ik)\phi r=0$。

$$\therefore \qquad \phi r = Ae^{ikr} + Be^{-ikr};$$

$$\therefore \qquad \phi = \frac{1}{r}(A \cos kr + B \sin kr)$$

4) **輔方程式的根有幾個是相等的虛根時**，若有四個虛根兩兩相等，則從 2) 知 $m_1 = m_2$ 時須以 $(A+Bx)e^{m_1x}$ 代 $C_1e^{m_1x}+C_2e^{m_2x}$；同樣 $m_3 = m_4$ 時須以 $(C+Dx)e^{m_3x}$ 代 $C_3e^{m_3x}+C_4e^{m_4x}$。故若

$$m_1 = m_2 = \alpha + i\beta; \quad m_3 = m_4 = \alpha - i\beta,$$

則其解爲

$$y = (C_1 + C_2x)e^{(\alpha+i\beta)x} + (C_3 + C_4x)e^{(\alpha-i\beta)x},$$

卽
$$y = e^{\alpha x}\{(A+Bx)\cos \beta x + (C+Dx)\sin \beta x\}。 \qquad (11)$$

例一　解 $(D^4 - 12D^3 + 62D^2 - 156D + 169)y = 0$

輔方程式的根爲 $3+2i$，$3+2i$，$3-2i$，$3-2i$。故其解爲 $y = e^{3x}\{(C_1+C_2x)\sin 2x + (C_3+C_4x)\cos 2x\}$。

例二　若 $(D^2+1)^2(D-1)^2y = 0$，　則　$y = (A+Bx)\sin x + (C+Dx)\cos x + (E+Fx)e^x$。

II. 變數係數的線性方程式

有變數係數的線性方程式，用

$$x = e^z; \quad 或 \quad z = \log x, \qquad (12)$$

代入可使化爲常數係數的線性方程式，在下例中說明之:——

例　解方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

用(12)式的代入法；並求其微係數，得

$$\frac{dx}{dz}=e^z;\quad \therefore\quad e^z\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz};\quad \therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}。$$

又

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dz^2}\frac{dz}{dx}$$

$$=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right)。$$

故原方程式化爲

$$\frac{d^2y}{dz^2}+3\frac{dy}{dz}+2y=0,$$

此式的係數爲常數。其解爲 $y=C_1e^{2z}+C_2e^z=C_1x^2+C_2x$。

若方程式爲所謂 Legendre 方程式之形式者，卽例如

$$(a+x)^2\frac{d^2y}{dx^2}-4(a+x)\frac{dy}{dx}+6y=0; \tag{13}$$

先以 $z=a+x$ 代入，可得

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}-4z\frac{dy}{dz}+6y=0;$$

再用 $z=e^t$ 代入，得

$$\frac{d^2y}{dt^2}-5\frac{dy}{dt}+6y=0;$$

$$\therefore\quad y=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}=C_1(a+x)^2+C_2(a+x)^3。$$

例　位(Potential)的理論中，我們可遇見方程式

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dV}{dr}=0;$$

$$r^2\frac{d^2V}{dr^2}+2r\frac{dV}{dr}=0。$$

其解爲 $V=C_1+C_2r^{-1}$。

§ 132. 阻尼振動(Damped Oscillations)

方程式 $\frac{d^2s}{dt^2}=-q^2s$ 中，沒有將質點經過抵抗介質如空氣，水等時所受的阻力計數在內。從經驗我們知道一切週期振動是漸漸減少其數量而趨向於靜止位置的。這種變化稱爲振動的阻尼。

當電流通過電流計中時指針開始偏轉，繼而振動於一個平衡新位置的左右。欲使此針停止得快些，可以即行觀測，須用反對方向的阻力加於此自由振動的針上，方法爲附些雲母或鋁的細片於針上以增大空氣的阻力，或於針的鄰近置一銅塊；由於磁針運動而在銅內感應出來的電流，依 Lenz 定律說，作用於針上，如是使其運動減速。這樣的電流計，我們說是阻尼的電流計。當阻尼大到使針不能振動時，此電流計稱爲**不擺**(Dead beat)，針的運動爲非週期的。在**衝擊電流計**(Ballistic galvanometer)中阻尼很大。

從觀測所得，阻尼作用所生的力，其方向恰其運動的相反；運動速度增加，則此力隨之增加。我們所有最好的假定是任何時刻的阻尼力比例於其時的速度，而爲負值。欲包括這個事實上節方程式(4)必須還要有一個負值的項。於是我們得一個標準形式爲二級方程式，

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-\mu\frac{ds}{dt}-q^2s,$$

此中 μ 爲摩擦係數。我們若寫 μ 爲 $2f$，則可便利得多，

$$\frac{d^2s}{dt^2}+2f\frac{ds}{dt}+q^2s=0。$$

爲更求明瞭起見，在向前進行之前，且以言語來敍述此微分方程式的意義。直到現在爲止，我們處理方程式的方法，不過運用些普通的代數原理。解題的精熟要從練習得來。比解題精熟更重要者是對於微分方程式所代表的物理變化要有構成一個清晰觀念的能力。自然界中有些最最重要的定律是在一個名副其實的微分方程式的外套中發現的。讀者須不惜痛苦而求解說技術的熟練；否則，僅爲一組微分方程式而會誤解爲自然定律。最近 Tait 教授曾經說過『一個算學公式，無論如何簡明而精美，只是向知識的一個階梯，在我們能完全讀出牠的意義來之前，不過是些無用的東西』。❶

Euler 有次懺悔着，他往往不能超脫於不快之感，即他的科學以筆來表演時會出於他理解之外。我敢說，初學的人，當他推求上列坦白的式子的意義時，也會遇到這種感覺。$\frac{d^2s}{dt^2}$ 從第 7 節即知是代表一個質點在單個時間內運動速度的相對變化；而 $2f\frac{ds}{dt}$ 表示此運動受一個力的對抗，欲使質點回復其靜止位置，速度愈大減速作用亦愈大；又 q^2s 代表欲使質點靜止的另一種力，隨質點與靜止位置的距離而變化，距離愈大，此力亦愈大。整個方程式表示各種效果的相互作用。更進一步的研究，必須求得此運動中 s 與 t 的關係。換言之，必須解此方程式。

❶ "A mathematical formula, however brief and elegant, is merely a step towards knowledge, and an all but useless one until we can thoroughly read its meaning."

方程式(1)寫爲記號的形式，

$$(D^2+2fD+q^2)s=0,$$

輔方程式的兩個根爲

$$\alpha=-f+\sqrt{f^2-q^2}; \quad \beta=-f-\sqrt{f^2-q^2} \tag{2}$$

於是(1)的解，隨 f 與 q 的相對數量而定。有兩種重要的情形，卽兩個根 α 與 β 可爲實數亦可爲虛數。二者都有物理上的意義，所代表的運用是兩種根本不同的形式。假設對於此運用體系有充分的知識，可以決定其積分常數。當 $t=0$ 時，令 $V=V_0$，$s=0$。

I. **輔方程式兩個根爲虛數，數值相等而符號相反。**此時(2)式中的 f 必等於零，兩根應爲 $\pm iq$。用上節(10)得到解爲

$$s=C_1\sin qt+C_2\cos qt。\tag{3}$$

欲求此式的意義，假設 $t=0$，$s=0$，$V_0=1$，$q=2$，$f=0$。求(3)的微分得

$$\frac{ds}{dt}=qC_1\cos qt-qC_2\sin qt。$$

故
$$1=2C_1\times 1-2\times C_2\times 0,$$

卽
$$\therefore\ C_1=\frac{1}{2};\qquad \therefore\ C_2=0。$$

故方程式爲

$$s=\frac{1}{2}\sin 2t。\tag{4}$$

曲線1（圖一百四十八）是從方程式(4)描繪而得；t 以弧度爲單位取其任意值，化爲度分秒制，查三角函數表，而計算 s 的相當值。

例如令 $2t=45°$，則 $\sin 45°=0.79$；$t=22.5°=0.39$ 弧度(從附錄 II. 表 XIII)；又如 $2t=630°$；$\sin 630°=\sin 270°=-1$；$t=315°=5.10$ 弧度。

表中左邊三行是計算第一個完全振動所得：——

$s=\frac{1}{2}\sin 2t$			$s=\frac{1}{2}e^{-0\cdot 1t}\sin 1.997t$			
t 弧度	$\sin 2t$	s	t	$\sin 1.997t$	$e^{-0\cdot 1t}$	s
0	0	0	0	0	1.00	0
0.39	+0.79	+0.39	0.46	+0.79	0.96	+3.84
0.78	+1.00	+0.50	0.92	+1.00	0.91	+4.55
1.18	+0.79	+0.39	1.38	+0.79	0.87	+3.84
1.57	0	0	1.80	0	0.84	0
1.96	−0.79	−0.39	2.30	−0.79	0.79	−3.84
2.44	−1.00	−0.50	2.77	−1.00	0.76	−4.55
2.69	−0.79	−0.39	3.20	−0.79	0.73	−3.84
3.14	0	0	3.70	0	0.69	0

II.　**輔方程式的根爲不等的虛數**，如 $-f\pm\sqrt{f^2-q^2}$，此中 f^2 必小於 q^2，亦可寫爲 $-a\pm bi$。此時其解爲

$$s=e^{-at}(C_1\sin bt+C_2\cos bt)。\tag{5}$$

設 $f=0.1$，$q=2$，$t=0$，$s=0$，$V_0=1$。則輔方程式的根爲

$$m=-0.1\pm\sqrt{0.01-4}=-0.1\pm\sqrt{-3.99}=-0.1\pm i\,1.997。$$

故 $a=0.1$，$b=1.997$。求(5)的微係數，得

$$\frac{ds}{dt}=-ae^{-at}(C_1\sin bt+C_2\cos bt)+be^{-at}(C_1\cos bt-C_2\sin bt)。$$

從(5)得 $C_2=0$；從上式得 $C_1=\frac{1}{b}=\frac{1}{1.997}=0.5$。故

$$s=0.5\ e^{-0.1t}\sin 1.997t, \tag{6}$$

此結果比無阻尼振動的式子多一個因數 $e^{-0.1t}$。上表中右邊的四行是計算方程式 (6) 第一個完全振動而得。此方程式的圖是圖一百四十八中曲線 2。

圖中簡諧曲線 1 表示一個質點的無阻尼振動。阻尼的效果在圖上曲線 2 表現出來很有趣味。阻尼振動消失的速度視介質抵抗力 $(2fv)$ 與振動數量(q^2s)而定。這種運動，如磁針或電流計的指針受了空氣黏滯性的作用與其運動時從鄰近金屬中感應出來的電流的電磁作用之結果；又如一個擺的自然振動搖蕩於抵抗力隨速度而正變的介質中。阻尼的效果有兩方面：——

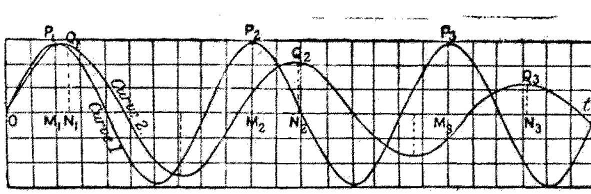


圖 一 百 四 十 八

1. **振動週期因阻尼而增大**，從 T_0 變爲 T。方程式(5)用第 49 節的方法可證明爲

$$s=e^{-at}A\sin bt。\tag{7}$$

此振動的振幅相當於 s 有極大或極小值時 t 的值。這些值普通令一級微係數等於零而求之，故

$$e^{-at}(b\cos bt-a\sin bt)=0。\tag{8}$$

我們若稱 $bt=\phi$ 角，卽

$$\tan\ \phi=\frac{b}{a}, \tag{9}$$

ϕ 介於 0 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間，當 a 的值愈大時，ϕ 的值愈小。剛才見過 f^2 小於 q^2 時則虛根 $-f\pm\sqrt{f^2-q^2}$ 爲 $-a\pm ib$，結果

$$(-f+\sqrt{f^2-q^2})(-f-\sqrt{f^2-q^2})=(-a+ib)(-a-ib);$$

$$\text{卽}\quad a^2+b^2=q^2。 \tag{10}$$

無阻尼振動的振動週期按第 130 節 (5) 爲 $T_0=\frac{2\pi}{q}$，同樣的理由，阻尼振動的振動週期爲 $T=\frac{2\pi}{b}$；

$$\therefore\quad \frac{T^2}{T_0^2}=\frac{q^2}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{b^2}=1+\frac{a^2}{b^2};\quad \therefore\ \frac{T}{T_0}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}, \tag{11}$$

這是表示阻尼振動與無阻尼振動的振動週期間的關係。結果 T 恆氏 T_0 大。

2. **一個振動與下一個振動的振幅之比爲常數**。無阻尼振動的振幅 M_1P_1，M_2P_2，……加以阻尼後變爲 N_1Q_1，N_2Q_2……。這是易於說明的，(9)中的 $\tan\ \phi$ 的週期函數，如

$$\tan\ \phi=\tan(\phi+\pi)=\tan(\phi+2\pi)=\cdots\cdots$$

此中 ϕ；$\phi+\pi$；$\phi+2\pi$；……都適合於上方程式。卽 bt_1；$bt_2+\pi$；$bt_3+2\pi$；……都適合於上方程式，此中 t_1，t_2，t_3……爲逐個時間的值。故 $bt_2=bt_1+\pi$；$bt_3=bt_1+2\pi$；……　$\therefore\ t_2=t_1+\frac{T}{2}$；$t_3=t_1+T$；

……以這些值代入(7)令 s 的相當值爲 s_1, s_2, s_3,……,

$$\therefore\quad s_1=Ae^{-at_1}\sin bt_1;\quad -s_2=Ae^{-at_2}\sin bt_2;\cdots\cdots$$

此中負號表示位移是在負的一邊。故振動的振幅依照複利律而減小,

$$\frac{s_1}{s_2}=e^{-a(t_1-t_2)}=e^{\frac{1}{2}aT};\quad \frac{s_2}{s_3}=\frac{s_3}{s_4}=\cdots\cdots=e^{\frac{1}{2}aT}\tag{12}$$

此比必須恆是眞分數。若 a 是很小,則連續的兩個振幅之比幾乎爲 1。振動的減小如公比爲 $e^{\frac{1}{2}aT}$ 的幾何級數之各項。求一個幾何級數各項的對數,結果得算術級數,其每項與其前一項之差爲常數。此差可求方程式(12)的對數而求之。

在方程式 (12) 中計算 s 與 t 的逐對的值,描繪之得圖一百四十九。一個振動與下一個振動的振幅之比, Kohlrauch 稱之爲**阻尼比值**(Damping ratio)。寫爲 k。阻尼比的自然對數卽 Gauss 的**對數減少量**(Logarithmic decrement)寫爲 λ。k 的常用對數, 寫爲 L。故

$$\lambda=\log k=\frac{1}{2}aT\log e=\frac{1}{2}aT=\frac{a\pi}{b},\tag{13}$$

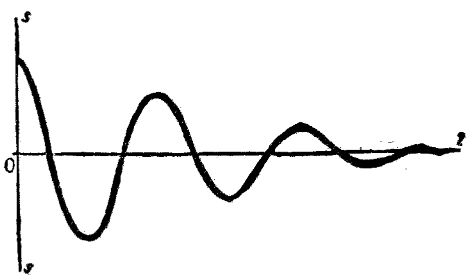
從(11)得

$$\frac{T^2}{T_0^{\,2}}=1+\frac{\lambda^2}{\pi^2}\quad 或\ T=T_0\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda^2}{\pi^2}+\cdots\cdots\right)\tag{14}$$

故此若阻尼很小, 則振動週期不過增加一個第二級的小數量。已知常數 a 及振動週期時, 阻尼常數或摩擦係數 (卽上述之 μ) 可用對數減少量決定之。所以不必等待指針靜止,卽能舉行觀測。下表所載爲一串阻尼振動中六個振幅的觀測值:

觀測所得之偏轉	k	λ	L
69	1.438	0.3633	0.1573
48	1.434	0.3604	0.1565
33.5	1.426	0.3548	0.1541
23.5	1.425	0.3542	0.1538
16.5	1.435	0.3612	0.1569
11.5	1.438	0.3638	0.1578
8			

觀測振動擺與振動針等為量測常數 q 所表之力時的重要部份，無論這個力是作用於擺上的地心引力或作用於磁石運動的磁場。從擺在黏滯介質中的小振動可以求出流體摩擦力或黏滯性的數值。



圖一百四十九

III. **輔方程式的根為不等的實數時**，設此兩根為 α 與 β，則牠們為實數的條件是 f^2 大於 q^2。此時方程式(1)的解為

$$s=C_1e^{\alpha t}+C_2e^{\beta t}。\tag{15}$$

欲求此式的意義，可假設 $f=3$，$q=2$，$t=0$，$s=0$，$V_0=1$。從(2)得

$$m=-3\pm\sqrt{9-4}=-3\pm2.24\quad 故\ \alpha=-5.24,\ \beta=-.76。$$

代入(15)，再求微係數而得 v，即 $\frac{ds}{dt}$。於是

$$s=C_1e^{-5\cdot 24t}+C_2e^{-\cdot 76t};$$

$$\frac{ds}{dt}=-5.24\ C_1e^{-5\cdot 24t}-0.76\ C_2e^{-0\cdot 76t}$$

$$\therefore\qquad -5.24\ C_1-.76\ C_2=1。$$

從(15) $t=0$, $s=0$; 得 $C_1+C_2=0$;

$$\therefore\qquad -C_1=C_2=0.223,$$

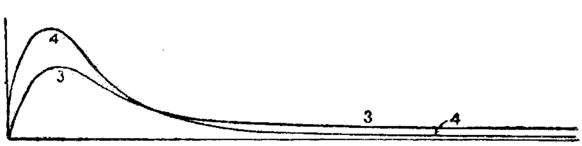
$$\therefore\qquad s=0.223(e^{-\cdot 76t}-e^{-5\cdot 24t})。\tag{16}$$

t 取各個特殊值，計算 s 的相當值而描繪之，得圖一百五十中曲線 3。此曲線已失去波狀的性質，不像圖一百四十八中所示的了。

V. **輔方程式的根爲相等的實數時**，我們知道必須合於 $f=q$ 的條件。

$$\therefore\qquad s=(C_1+C_2t)e^{ft}。\tag{17}$$

假設 $f=2$, $q=2$, $t=0$, $s=0$, $V_0=1$。輔方程式的根爲 -2 與 -2



圖一百五十

故 $s=(C_1+C_2t)e^{-2t}$; $\frac{ds}{dt}=C_2e^{-2t}-2(C_1+C_2t)\ e^{-2t}$; 從此可得

$C_2-2C_1=1$; $C_1=0$; $C_2=1$;

$$\therefore\qquad s=te^{-2t}。\tag{18}$$

描繪(18)的圖得圖一百五十中曲線 4。

以圖一百五十中曲線 3 與 4 比較圖一百四十八中曲線 1 與 2。曲線 3 與 4 所代表的運動所減速太大，使無發生振動的可能。針從其平衡的位置移開後，不生振動，無限的漸漸恢復到靜止狀態。這句話是什麼意義呢？E. du Bois Raymond 稱這種性質的運動爲**非週期運動** (Aperiodic motion)。

§ 133. 幾個簡約的形式 (Some Degenerates)

有幾個方程式是從普遍方程式省去一項或幾項而得。因變數或自變數可以不見。我們從第 87 節與第 131 節知道下列各式的解法：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=g;\quad \frac{d^2y}{dx^2}+q^2y=0;\quad \frac{d^2y}{dx^2}-q^2y=0, \tag{1}$$

此中 g 與 q 爲常數。

例　一個地平的樑，均勻載重且受支撐物的壓力，其偏轉的普遍方程式爲

$$a\frac{d^4y}{dx^4}=w;\quad 即\quad \frac{d^4y}{dx^4}=b。$$

此中 a, w, b 爲常數。設此樑的長爲 l，兩端支撐着，積分常數的決定可從當 $x=0$ 與 $x=l$ 時 $y=0$; $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ 而求之。從此證明積分常數 $C_1=-\frac{1}{2}bl$; $C_2=0$; $C_3=\frac{1}{24}bl^3$; $C_4=0$。其解爲 $y=\frac{1}{24}b(x^3-2lx+l_3)$。若夾住此樑的兩端則當 $x=0$ 與 $x=l$ 時 $y=0$; $\frac{dy}{dx}=0$。證明此時積分常數爲 $C_1=-\frac{1}{2}bl$; $C_2=\frac{1}{12}bl^2$; $C_3=0$; $C_4=0$。

$\therefore\ y=\frac{1}{24}bx^2(x^2-2lx+l^2)$。若夾住樑的一端而另一端任其自然，則當 $x=0$ 時 $y=0$；$\frac{dy}{dx}=0$；而當 $x=l$ 時 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$；$\frac{d^3y}{dx^3}=0$。證明此時積分常數爲，$C_1=-bl$；$C_2=\frac{1}{2}bl$；$C_3=0$；$C_4=0$。$\therefore\ y=bx^2(x^2-4lx+6l^2)$。

若彈簧秤在時間 t，伸長距離 x，其拉力爲 kx，則其運動方程式爲

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=g, \tag{2}$$

此中 m 爲伸長重量，g 爲地心引力常數。爲簡單計，令 $\frac{k}{m}=a^2$，我們可化(2)爲上述形式，只須用代入法

$$x=u+\frac{g}{a^2};\qquad \therefore\ \frac{d^2u}{dt^2}+a^2u=0。$$

解此可得

$$u=C_1\cos at+C_2\sin at;\quad \therefore\ x=C_2\cos at+C_1\sin at+\frac{g}{a^2};$$

或可令 $\frac{dx}{dt}=p$，$\therefore\ \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dp}{dt}=\frac{dp}{dx}\ \frac{dx}{dt}=p\frac{dp}{dx}$ 代入(2)而化之爲一級線性方程式

$$p\frac{dp}{dx}+\frac{k}{m}x=g,$$

解之。

又如流體在半徑爲 r_1，長爲 l 的圓柱形的管內的運動方程式爲

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{1}{r}\ \frac{dV}{dr}=-\frac{P}{l\mu},\tag{4}$$

此運動方向假定爲平行於管的軸，管長比較其半徑時爲很大。P 代表管的兩端壓力之差。若流體能潮溼管壁的，則在管的軸上速度極大，漸漸減小，到管壁時速度爲零。這是說速度是流體與管軸距離 r 的函數。μ 爲常數，視流體的性質而定。先以 $p=\dfrac{dV}{dr}$ 代入，

$$\therefore\quad \frac{dp}{dr}+\frac{p}{r}=-\frac{P}{l\mu};\quad rdp+pdr=-\frac{P}{l\mu}rdr;$$

$$\therefore\quad pr=-\frac{P}{2l\mu}r^2+C_1;\tag{5}$$

$$\therefore\quad \frac{dV}{dr}=-\frac{P}{2l\mu}r+\frac{C_1}{r};\quad V=-\frac{P}{4l\mu}r^2+C_1\log r+C_2。$$

在 (5) 中欲定 C_1 的值，可注意在軸上 $r=0$。這是說若 C_1 爲不是零的任何有限數或無限大時，速度將爲無限大。在物理上這是不可能的，故 C_1 必須等於零。欲定 C_2 的值，可注意 $r=r_1$ 時 V 爲零，故 $C_2=\dfrac{P}{4l\mu}r_1{}^2$；故方程式的解爲

$$V=\frac{P(r_1{}^2-r^2)}{4l\mu}$$

這是表示距離軸爲 r 之處此流體的速度。

例一　若 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=32$，一個質點靜止時開始下落，試證在六秒鐘之末其速度爲每秒 6×32 呎；所經過的距離爲 $\dfrac{1}{2}\times32\times36$ 呎。

例二　一個質點在介質運動，抗抵力隨速度的平方而正變，則運動

方程式爲 $\frac{d^2s}{dt^2}=-a\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$。解之。

示意：$\frac{dp}{dt}=-ap^2$， $\therefore\ \frac{dp}{p^2}+adt=0$； $\therefore\ p^{-1}=at+C_1$；

$\therefore\ s=\log(at+C_1)+C_2$；等等。

例三 解 $y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1$。

答： $y^2=x^2+C_1x+C_2$。

示意：$p\frac{dp}{dy}+\frac{p^2}{y}=\frac{1}{y}$； $\therefore\ py=x+C_1$；等等。

完整方程式可用累次化簡的方法而解之。一個質點受到隨距離而反變的**斥力**(Repulsive force)影響,其運動方程式爲

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{a}{s};\quad \frac{ds}{dt}=a\log\frac{t}{C_1};\quad \therefore\ y=as\left(\log\frac{t}{C_1}-1\right)+C_2,$$

此結果是用分部積分法求得。一個質點受到隨距離的 n 次冪而反變的引力影響，其運動方程式爲

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{a}{s^n};\quad \therefore\ \left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{2a}{n-1}\left(\frac{1}{s^{n-1}}-\frac{1}{a^{n-1}}\right)。\tag{5}$$

再求積分，得

$$t=a^{\frac{1}{2}(n-1)}\sqrt{\frac{n-1}{2a}}\int_a^s\frac{s^{\frac{1}{2}(n-1)}ds}{\sqrt{a^{n-1}-s^{n-1}}}。\tag{6}$$

按照第 75 節中的方法試驗之，知

$$n=\cdots\cdots\frac{5}{7},\ \frac{3}{5},\ \frac{1}{2},\ -1,\frac{3}{1},\ \frac{5}{3}\cdots\cdots,$$

$$\text{或}\quad n=\cdots\cdots\frac{3}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ 0,\ 2,\ \frac{3}{2}\cdots\cdots\tag{7}$$

時，(6) 式可求積分。

例一 若 $n=\frac{1}{2}$，即得方程式 $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=4a(a^{\frac{1}{2}}-s^{\frac{1}{2}})$； 結果是

$2\sqrt{a}\,dt=-(a^{\frac{1}{2}}-s^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}ds$。因 s 與 t 互為反函數，故取負號。同時加減 $\frac{2\sqrt{a}}{3\sqrt{s}\sqrt{a^{\frac{1}{2}}-s^{\frac{1}{2}}}}$。整理之，得

$$2\sqrt{a}\,dt=\left(\frac{-3\sqrt{s}+2\sqrt{a}}{3\sqrt{s}\sqrt{a^{\frac{1}{2}}-s^{\frac{1}{2}}}}-\frac{2\sqrt{a}}{3\sqrt{s}\sqrt{a^{\frac{1}{2}}-s^{\frac{1}{2}}}}\right)ds;$$

$$\therefore\quad t=\frac{2}{3\sqrt{a}}\left\{s^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}-s^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}+2\sqrt{a}\,(a^{\frac{1}{2}}-s^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=\frac{2}{3\sqrt{a}}(s^{\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-s^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}。$$

例二 若 $\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{dz}{dt}=0$；證 $C_1+z=(C_1-z)e^{C_1(t+C_2)}$。

示意： 我們可以 $p=\frac{dz}{dt}$； $\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{dp}{dt}=\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dp}{dz}$ 等代入解得 $p=\frac{1}{2}(z^2-C_1^2)$，……

例三 旋轉薄圓片的運動方程式為

$$r\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{du}{dr}-\frac{u}{r}+ar^2=0;$$

$$\therefore\quad \frac{u}{r}=C_2-\frac{C_1}{2r^2}-\frac{ar^2}{8}。$$

示意： 同時加減 $r\frac{du}{dr}$。

$$\left(r^2\frac{d^2u}{dr^2}+2r\frac{du}{dr}\right)-\left(r\frac{du}{dr}+u\right)+ar^3=0;$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)-\frac{d}{dr}(ru)+\frac{d}{dr}\left(\frac{ar^4}{2}\right)=0。$$

求積分可得一級普通方程式，於是可以 $vr=u$ 代入而解之，如第 120 節 I 例題十六。

§ 134. 强迫振動(Forced Oscillations)

我們剛才已經研究過一個質點受到有效的力 $\frac{d^2s}{dt^2}$，外加的恢復力 q^2s，抵抗力 $2fv$ 的作用而運動。這個質點還可受到一種週期的力，不使振動消失。這種力稱爲**外力**(External force)。通常加 $f(t)$ 一項於運動方程式的右邊而表示之爲

$$\frac{d^2s}{dt^2}+2f\frac{ds}{dt}+q^2s=f(t)。\tag{1}$$

一種有效的力與三種外加的力發生各自的效果，在運動方程式中每種力各有一個特別的項代表之。(1) 式右邊等於零時的完全解稱爲**補函數**(Complementary function)是 Liouville 於 1832 年所提出的。故(1)的補函數卽爲

$$\frac{d^2s}{dt^2}+2f\frac{ds}{dt}+q^2s=0\tag{2}$$

的完全解。補函數卽表示不受外力擾動時的振動體系。所以此積分是代表此體系的**自由振動或自然振動**(Free or natural oscillations)。特殊積分代表發生強迫振動時所加外力的效果。『自由』不過用來與『強迫』相對照。一個自由振動可以表示**主振動**(Principal oscillation)，也可以表示從補函數得來各項所代表的運動。

設方程式(1)代表，受到一個外力後擺的運動，此力是時間 t 的簡

諧函數，如

$$\frac{d^2s}{dt^2}+2f\frac{ds}{dt}+q^2s=k\cos nt。\tag{3}$$

在阻尼振動時我們已經研究過此方程式的補函數。任何特殊積分都可代表強迫振動的，不過有一個特殊積分比其他的更爲便利。設

$$s=A\cos nt+B\sin nt,\tag{4}$$

爲這個特別積分。補函數中含有兩個任意常數，牠們必可規定最初條件；故**特別積分中不必再有積分常數了**。我們現在必須決定受外力的作用而生的強迫運動，然後求(4)中 A,B 的值。

先以(4)代入(3)，結果得兩個恆同的方程式。比較 $\cos nt$ 與 $\sin nt$ 的係數，得

$$-An^2+2Bfn+q^2A=k;\quad -Bn^2-2Afn+q^2B=0。$$

解此二方程式求 A，B，得

$$A=\frac{k(q^2-n^2)}{(q^2-n^2)^2+4f^2n^2};\quad B=\frac{2kfn}{(q^2-n^2)^2+4f^2n^2}。\tag{5}$$

這裏用 $R_1\cos\epsilon$，$\sin\epsilon$ 等表示之更爲便利，若令

$$\left.\begin{aligned}q^2-n^2=\cos\epsilon;\ 2fn=\sin\epsilon;\ \epsilon=\tan^{-1}\frac{2fn}{q^2-n^2};\\ R=\frac{k}{\sqrt{(q^2-n^2)^2+4f^2n^2}};\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

$$\therefore\quad A=R\cos\epsilon;\quad B=R\sin\epsilon。\tag{7}$$

從(4)我們可寫特殊積分爲

$$s=R(\cos\epsilon\cos nt+\sin\epsilon\sin nt),\tag{8}$$

利用三角公式又可寫成

$$s=R\cos(nt-\epsilon)。\tag{9}$$

此式代表受到週期外力後此體系的強迫振動。強迫振動並不與由有效的力所生之主要振動有相同的相，牠要落後一個定量 ϵ。

(6) 中不論 n 與 q 為正為負，R 的符號恆是不變；$2f$ 是正號，故 $\sin\epsilon$ 是正號，ϵ 角在第一第二象限之中即在 0 至 π 的範圍內。而 $\cos\epsilon$ 與 n, q 的相對數量無關。若 q 大於 n，ϵ 在第一象限；若 q 小於 n，ϵ 在第二象限； 若 $q=n$，$\epsilon=\frac{\pi}{2}$。強迫振動的振幅比例於外力的強度 k。若 f 充分的小，我們可在根號內略去含有 f 之項，於是

$$R=\frac{k}{q^2-n^2}。$$

在這情形中 q 的數值更與 n 的數值接近些，則強迫振動的振幅 R 更大。最後當 $q=n$ 即有無限大的振幅。結果，當 $q=n$ 時我們不能略去 f^2 的數量，故須

$$R_{max}=\frac{k}{2nf}$$

故 R 的數量以阻尼常數為條件。設 $f=0$，如不受抵抗的擺的運動方程式

$$\frac{d^2s}{dt^2}+q^2s=k\cos nt,\tag{10}$$

通常假定其特殊積分為

$$s=\frac{k}{q^2-n^2}\cos nt$$

當 $n=q$ 時此式無定值。其物理的意義是當加於一個質點上的週期力與此點的振動相合拍，結果此強迫振動的振幅無限增大，方程式(10)不復代表擺的運動。參閱第 132 節。事實上方程式 (10) 只是略去小數量的二次冪後所得的第一步近似式,(參閱 E. J. Routh 著 Advanced Rigid Dynamics, London, 222, 1892)。我假定讀者已知 q 與 n 的意義,若猶不知,可閱第 49 第 130 節。

若質點的運動阻尼得很利害,極大的激發(Excitation)並不發生於 $n=q$ 之時而發生於根號內之式爲極小時。若 n 爲變數,當 $n^2=q^2-2f^2$ 時根號內之爲極小,如第 65 節例五所示;故在此條件下, R 爲極大。設 n 的變化爲漸漸接近於 q, 且 f 爲很小,則 R 在根號內之式接近於零以前,總是很小,強迫振動到達極大値很是突然。例如有一個音叉在距別一個音叉約一米處發音,空氣的微細運動掃擊到第二音叉,卽使之運動。

設 f 爲很大,根號內之式卽不會等於零,卽無突然的極大。自由振動的振幅隨 n 的値而漸漸變化。耳的鼓膜,電話與微音器(Microphone)的聽筒就是這方面的例。每只船有牠自身的自由振動,還有因波浪的振動所起強迫振動。若這兩種振動是同步的 (Synchronous), 雖然水是相當的平靜,但船的滾動很大。White 在他所著 Manual of Naval Architecture 中說“Achilles 的船在凶惡的氣候中異常平穩,但離了 Portland 在死寂一樣的平靜中卻大大滾動起來』。船的自然週期無疑的與滾滾長浪的週期相符合了。還有當許多士兵正步過橋,步伐若與橋的本身的自然振動週期相合時可使鐵橋折斷。雖然此橋在平時能擔當

更大的載重.

線性方程式的完全解是特殊積分與補函數之和。若後者用第 132 節 II 的方法求得,(3)的解必須寫爲

$$s=R\cos(nt-\epsilon)+e^{-at}(C_1\cos qt+C_2\sin qt)。$$

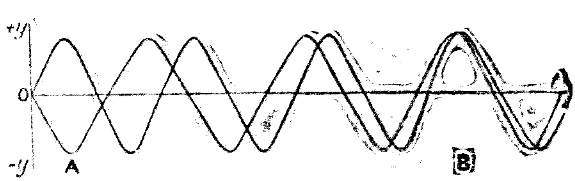
我們已道最初條件時兩個積分常數 C_1 與 C_2 的值很易求得, 方法 ϵ 已在上節說明。若外力開始作用時此質點是靜止的, 則

$$C_1=-R\cos\epsilon;\quad C_2=R\left(\frac{n}{q}\sin\epsilon+\frac{2f}{q}\cos\epsilon\right)。$$

所以在開始時,自由振動的振幅是與強迫振動的屬於同一等級的數量。若阻尼, $2f$ 是很小,又 n 幾乎等於 q, 則尼阻因數 e^{-at}, 是極近於 1; $\frac{2f}{q}$ 幾乎爲零; $\frac{n}{q}$ 幾乎爲 1; ϵ 幾乎爲 $\frac{\pi}{2}$。此時 $C_1=0$, $C_2=-R$. 此運動則相似於

$$s=R(\sin nt-\sin qt)。$$

兩個振動 $\sin nt$ 與 $-\sin qt$ 互相重疊。若分別描繪此兩個諧函數於一張圖上,如圖一百五十一,我們立刻可以見到牠們在開始時幾乎是互相抵消的,因爲牠們彼此相反。這是在 A 處可以見到。片刻以後 q 與 n 之差漸爲顯著,振幅漸漸增大,直到 B 處爲極大。這些現象經過一



圖一百五十一

定的時間重複發生，卽爲有名的光波，音波的**干涉**（Interference）與**拍**（Beats）等現象。

例一 關於定電流的歐姆定律是 $E=RC$；若爲變電流 C 安培通入電路中，自感應係數爲 L 亨利；電阻爲 R 歐姆；電動勢爲 E 伏特，則歐姆定律爲方程式

$$E=RC+L\frac{dC}{dt}, \tag{11}$$

此中 $\frac{dC}{dt}$ 顯然是每秒鐘電流的增加率，L 是欲使電流減速的電動勢的當量。

1） 當 E 爲常數，（11）的解在以前的例題中曾經求得爲 $C=\frac{E}{R}+Be^{-\frac{Rt}{L}}$，此中 B 爲積分常數。欲求 B 的值注意 $t=0$ 時 $C=0$。

故 $C=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$。括號內第二項卽所謂『暫時電流』。一個由最初條件而來的，瞬卽消失的因數。所以當 t 爲很大時電流卽入於穩定的情境；$C=\frac{E}{R}$。

2） 當 C 爲時間的諧函數時，如 $C=C_0\sin qt$；$\therefore\ \frac{dC}{dt}=C_0q\sin qt$。以這些數值代入(11)得 $E=RC_0\sin qt+LC_0q\cos qt$ 或 $E=C_0\sqrt{R^2+L^2q^2}\sin(qt+\epsilon)$； 此中 $\epsilon=\tan^{-1}\left(\frac{Lq}{R}\right)$卽所謂電動勢

之後的電流落後;❶ $\sqrt{R^2+L^2q^2}$，卽所謂**阻抗**(Impedence)。

3) 當 E 爲時間的函數，如 $f(t)$ 時，

$$C=Be^{-\frac{Rt}{L}}+\frac{e^{-\frac{Rt}{L}}}{L}\int e^{\frac{Rt}{L}}f(t)dt,$$

此中 B 爲積分常數,可用前述之法求其値。

4) 當 E 爲時間的諧函數時，如 $E=E_0\sin qt$，則

$$C=Be^{-\frac{Rt}{L}}+\frac{E(R\sin qt-Lq\cos qt)}{R^2+L^2q^2}。$$

當電流入於穩定狀態時，瞬卽消失的項 $e^{-\frac{Rt}{L}}$，可以略去。(何故?)

5) 當 E 爲零時，$C=Be^{-\frac{Rt}{L}}$。令 $t=0$, $C=C_0$，求積分常數 B。

例二 電容量 C 的電容器上兩板以電阻爲 R 的綫聯結之,其電荷 q 與電動勢 E 的關係爲 $E=R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}$。此時假定自感應爲零。解之求 q。證明若 E 爲零; $q=Q_0e^{-\frac{t}{RC}}$; (Q_0 爲 $t=0$ 時的電荷)。若 E 是常數; $q=CE+Be^{-\frac{t}{RC}}$。若 $E=f(t)$;

$$q=\frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\int e^{\frac{t}{RC}}f(t)dt+\frac{CE(\sin qt+RCq\cos qt)}{1+R^2C^2q^2}$$

§ 135. 特殊積分的求法(How to find Particular Integrals)

---

❶ 交流(週期)電流並不恆與沿電路而驅使電流的外加(電動)力同相(或同步)。若電流中有自感應作用,電流卽落在電動勢之後;若電路內有一個容電器，當電動勢從正值變爲負值變得最快時電容器內的電流最大,這是說，極大的電流在電動勢之前,稱爲電流的相的超前。

必須記得線性方程式

$$(D^2+PD+Q)y=f(x) \tag{1}$$

的特殊積分是此方程式較簡與較好的解。線性方程式的完全解是補函數與特殊積分之和。

完全解＝補函數＋特殊積分。

我們現在必須溫理求特殊積分的方法。設以 R 代 $f(x)$，可使(1)式寫爲 $f(D)=R$。結果可寫爲

$$y=f(D)^{-1}R;\quad 卽\ y=\frac{R}{f(D)} \tag{2}$$

上式的右邊都可作爲方程式(1)的特殊積分。(2)中所示的運算隨 $f(D)$ 的形式而定。我們研究幾種特例。

I. $f(D)^{-1}$ 可以分解成因數時

假設下列線性方程式可分解成因數

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=R。$$

補函數可依第(3)節的方法立刻寫出。

$$(D^2-5D+6)y=0;\quad 卽\ (D-3)(D-2)y=0。$$

從(2)，特殊積分 y_1 爲

$$y_1=\frac{1}{(D-3)(D-2)}R=\left(\frac{1}{D-3}-\frac{1}{D-2}\right)R;$$

在第 129 節中 $f(D)^{-1}R$ 的定義爲一個 x 的函數施行運算 $f(D)$ 後可得 R 者。結果，$D^{-1}x^2=\int x^2dx$。故 $D-3$ 施行於 $(D-3)^{-1}R$ 上必得 R。但$(D-3)^{-1}R$ 是方程式

$$\frac{dy}{dx}-3y=R$$

的特殊積分，故從第 125 節 (2)，$y=e^{-\int(-3)dx}\int e^{\int(-3)dx}Rdx=e^{3x}\int e^{-3x}Rdx$。

$$\therefore\quad y_1=e^{3x}\int e^{-3x}Rdx-e^{2x}\int e^{-2x}Rdx_{\circ}$$

例一　在上題中，令 $R=e^{4x}$，證明普遍解爲 $C_1e^{3x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}e^{4x}$。

例二　若 $(D^2-4D+3)y=2e^{3x}$；$y=C_1e^{x}+C_2e^{3x}+xe^{3x}$。

例三　解 $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=e^{3x}$。補函數爲 $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$。特殊積分爲

$$y_1=\frac{1}{(D-2)(D-1)}e^{3x}=\left(\frac{1}{D-2}-\frac{1}{D-1}\right)e^{3x}$$

$$=e^{2x}\int e^{-2x}e^{3x}dx-e^{x}\int e^{-x}e^{3x}dx=\frac{1}{2}e^{3x}{}_{\circ}$$

故完全解爲 $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}e^{3x}$。

II.　R 爲 x 的有理函數，如 x^n 時

這種情形比較少見。方法是以 $f(D)^{-1}$ 按 D 的昇冪展開，展至 R 中所含 x 的最高次冪爲止。求展開式時可用除法或其他便利的方法。

例一　解 $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=x^2$。補函數爲 $y=e^{2x}(A+Bx)$；特殊積分爲

$$\frac{1}{(2-D)^2}x^2=\frac{1}{4}\left(1+D+\frac{3}{4}D^2\right)x^2=\frac{1}{8}(2x^2+4x+3)_{\circ}$$

當然你還記得 $Dx^2=2x$；$D^2x^2=2$。

例二　若 $\frac{d^2y}{dx^2}-y=2+5x$； $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-5x-2$。

例三　$(D^3+3D^2+2D)y=x^2$ 的特殊積分爲 $\frac{1}{12}x(2x^2-9x+21)$；補函數爲 $C_1+C_2e^{-2x}+C_3e^{-x}$。求的步驟爲

$$\frac{1}{2D+3D^2+D^3}x^2=\frac{1}{2D}\left(\frac{1}{1+\frac{3}{2}D+\frac{1}{2}D^2}\right)x^2$$

$$=\frac{1}{2D}\left(1-\frac{3}{2}D+\frac{7}{4}D^2\right)x^2。$$

照例一用 Dx^2 與 D^2x^2 的方法。注意 $\frac{1}{D}x=\int xdx$； $\frac{1}{D}x^2=\int x^2dx$ 等……。

III. R 含有指數函數的因數如 $R=e^{ax}X$ 時

a 爲常數，視 X 是否爲 x 的函數而有兩種情形：

(i) X 爲 x 的函數時　因 $D^ne^{ax}=a^ne^{ax}$，其中 n 爲任何正整數，我們可有

$$D(e^{ax}X)=e^{ax}DX+ae^{ax}X=e^{ax}(D+a)X,$$

普遍的說，如第 21 節中 Leibnitz 定理所示，$D^ne^{ax}X=e^{ax}(D+a)^nX$；

$\therefore f(D)e^{ax}X=e^{ax}f(D+a)X$。令 $f(D+a)X=X_1$，則 $X=\frac{1}{f(D+a)}X_1$。

因 X 爲 x 的函數，故 X_1 亦爲 x 的函數，以此代入上式可得

$$f(D)e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}X_1=e^{ax}X_1;$$

$$\therefore\quad e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}X_1=\frac{1}{f(D)}e^{ax}X_1。$$

$$\therefore\quad \frac{1}{f(D)}e^{ax}X=e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}X。\tag{3}$$

結果，施行 $f(D)^{-1}e^{ax}X$ 運算，可將 e^{ax} 從運算記號 $f(D)^{-1}$ 的右邊移到左邊，再以 $D+a$ 代 D。看了下列例一例二卽能明白。

(ii)當 X 為常數時，運算(3)化為

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax}=\frac{1}{f(a)}e^{ax}。\tag{4}$$

故施行 $f(D)^{-1}e^{ax}$ 運算只須以 a 代 D。

例一　解 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+y=x^2e^{3x}$。

完全解為 $(C_1+C_2x)e^x+(D+2D+1)^{-1}x^2e^{3x}$。特殊積分為

$$\frac{1}{D^2-2D+1}x^2e^{3x}=\frac{1}{(D-1)(D-1)}x^2e^{3x}。$$

照規則，e^{3x} 從運算記號右邊移至左邊，同時 $(D-1+3)$ 代 $(D-1)$。

$$\therefore\quad y_1=e^{3x}\frac{1}{(D+2)^2}x^2。$$

從此可求得特別積分為 $e^{3x}\left(\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}\right)$。

例二　求 $(D-1)^{-1}e^x\log x$ 的值。

答：$e^x(x\log x-x)$；　或　$x\,e^x\log\dfrac{x}{e}$。可用分部積分法求 $\int\log x\,dx$。

例三　求 $(D^2-3D+2)y=e^{3x}$ 的特殊積分。

解：$$\frac{1}{D^2-3D+2}e^{3x}=\frac{1}{3^2-3\times3+2}e^{3x}=\frac{1}{2}e^{3x}。$$

例四　證 $\frac{1}{4}e^x$ 爲 $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=e^x$ 的特殊積分。

例五　用這裏的方法重演 1 中例一。

當 a 爲 $f(D)=0$ 的根時卽發生例外。若用(4)而求 $\frac{dy}{dx}-y=e^x$ 的特殊積分，則

$$\frac{1}{D-1}e^x=\frac{1}{1-1}e^x=\infty e^x。$$

然改用(3)的方法卽可免去這種困難。如

$$\frac{1}{D-1}e^x = e^x\frac{1}{D}\cdot 1=xe^x。$$

於是完全解爲 $y=C\,e^x+x\,e^x$。

還有一種處理的方法：若 a 爲 $f(D)=0$ 的根則 $f(D)$ 必有一個因數 $D-a$。結果，

$$f(D)=(D-a)f'(D);$$

特殊積分爲

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax}=\frac{1}{(D-a)}\cdot\frac{1}{f'(D)}e^{ax}=\frac{1}{(D-a)}\cdot\frac{1}{f'(a)}e^{ax}$$

$$=e^{ax}\frac{1}{f'(a)}\int dx。\tag{5}$$

若因數 $D-a$ 發現兩次，從同樣的規則可得

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax}=\frac{1}{(D-a)^2}\ \frac{1}{f'(D)}e^{ax}=\frac{1}{(D-a)^2}\ \frac{1}{f'(a)}e^{ax}$$

$$=e^{ax}\frac{1}{D^2}\ \frac{1}{f'(a)}=e^{ax}\frac{1}{f'(a)}\iint dx\,dx\tag{6}$$

餘可類推。

例一　求$(D+1)^3y=e^{-x}$的特殊積分。

答：$\frac{1}{6}x^3e^{-x}$。

示意：用(6)而推廣之；或可從$a=-1$。而求$e^{-x}D^{-3}$；即求$e^{-x}\iiint dx\,dx\,dx$。

例二　求$(D^3-1)y=x\,e^x$的特殊積分。

答：$e^x\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{3}x\right)$。

示意：用(3)的方法與 II 中例三，

$$\frac{1}{D^3-1}xe^x=e^x\frac{1}{(D+1)^3-1}x=e^x\frac{1}{D^3+3D^2+3D}x$$

$$=e^x\frac{1}{D}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}D\right)x=e^x\frac{1}{D}\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)。$$

IV. *R*中含有正弦或餘弦為因數時。

求$\sin nx$的各級微係數，得

$$D\sin nx=\frac{d(\sin nx)}{dx}=n\cos nx;$$

$$D^2\sin nx=\frac{d^2(\sin nx)}{dx^2}=-n^2\sin nx;\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad (D^2)^n\sin(nx+a)=(-n^2)^n\sin(nx+a),$$

此中n與a為常數。顯然，又可得

$$f(D^2)\sin(nx+a)=f(-n^2)\sin(nx+a)。$$

依照$f(D^2)^{-1}$的定義，又可得

$$\therefore\quad \frac{1}{f(D^2)}\sin(nx+a)=\frac{1}{f(-n^2)}\sin(nx+a)。\tag{7}$$

同樣可證

$$\frac{1}{f(D^2)}\cos(nx+a)=\frac{1}{f(-n^2)}\cos(nx+a)_\circ \tag{8}$$

例一　$\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=\sin\ 2x$。求其特殊積分。

$$\frac{R}{f(D)}=\frac{1}{D^3+D^2+D+1}\sin\ 2x=\frac{1}{(D^2+1)+D(D^2+1)}\sin\ 2x_\circ$$

如（7）以 -2^2 代 D^2。即得 $-\frac{1}{3}(D+1)^{-1}\sin 2x$。以 $D-1$ 同時乘除之，再以 $D^2=(-2^2)$ 代入。故得 $\frac{1}{15}(D-1)\sin\ 2x$ 即 $\frac{1}{15}(2\cos 2x-\sin 2x)$。

例二　解 $\frac{d^2y}{dx^2}-k^2y=\cos mx$。

答：$C_1\,e^{kx}+C_2\,e^{-kx}-\frac{\cos\ mx}{m^2+k^2}$。

例三　從音叉振動的 Helmholtz 方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2}+m\frac{dy}{dt}+n^2y=a\sin nt,$$

所得輔方程式的兩個根爲 α 與 β，試證

$$y=C_1\,e^{\alpha t}+C_2\,e^{\beta t}-\frac{a\ \cos\ nt}{mn}\text{爲其完全解。}$$

當 D^2+n^2 中 D^2 等 $-n^2$ 時即發生例外。例如，$\frac{d^2y}{dx^2}+n^2y=\frac{\cos}{\sin}nx$ 的特殊積分爲 $(D^2+n^2)^{-1}\frac{\cos}{\sin}nx$。欲以 $D^2=-n^2$ 代入而求其值即得 $\frac{\cos}{\sin}nx(-n^2+n^2)^{-1}=\infty\frac{\cos}{\sin}nx$。這裏的困難與 III 中相同。應

值之法，實際上也是相同。我們可令 $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nx$ 與 $-D^2$ 中的 n 爲 $n+h$，而求當 h 接近於 0 時 $(D^2+n^2)^{-1}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nx$ 的極限。這樣我們可得特殊積分爲下列形式：

若 $R=\cos nx$，則 $+\dfrac{x\sin nx}{2n}$；

若 $R=\sin nx$，則 $-\dfrac{x\cos nx}{2n}$。　　　　(9)

例一　求 $(D^2+4)^{-1}\cos 2x$ 的值。

答：$\dfrac{1}{4}x\sin 2x$。

例二　證 $-\dfrac{1}{2}x\cos x$ 爲 $(D^2+1)y=\sin x$ 的特殊積分。

例三　求 $(D^2+4)^{-1}\sin 2x$。

答：$-\dfrac{1}{4}x\cos 2x$。

V. R 中含有 x 的函數 X，如 $R=xX$ 時。

求兩個變數之積的各級微係數，其 n 級可按第 21 節寫爲

$$D^n xX = xD^nX + nD^{n-1}X = xD^nX + \frac{dD^n}{dD}X。$$

$$\therefore\quad f(D)xX = xf(D)X + f'(D)X。\qquad (10)$$

令 $f(D)X=X_1$，則 $X=\dfrac{1}{f(D)}X_1$ 代入(10)得

$$f(D)x\frac{1}{f(D)}X_1 = xX_1 + f'(D)\frac{1}{f(D)}X_1$$

$$\therefore\qquad x\frac{1}{f(D)}X_1 = \frac{1}{f(D)}xX_1 + \frac{1}{f(D)^2}f'(D)X_1;$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{f(D)}xX_1 = x\frac{1}{f(D)}X_1 - \frac{f'(D)}{f(D)^2}X_1$$

$$=\left\{x\frac{1}{f(D)}-\frac{f'(D)}{f(D)^2}\right\}X_1$$

$$=\left\{x-\frac{f'(D)}{f(D)}\right\}\frac{1}{f(D)}X_1。\tag{11}$$

例一　求 $\frac{d^3y}{dx^3}-y=x\,e^{2x}$ 的特殊積分。

注意：$f'(D)=\frac{d}{dD}(D^3-1)=3D^2$。　從(11)，特殊積分爲

$$\left\{x\frac{1}{D^3-1}-\frac{3D^2}{(D^3-1)^2}\right\}e^{2x}=\left\{x-\frac{1}{D^3-1}\cdot 3D^2\right\}\frac{1}{D^3-1}e^{2x}$$

$$=\left\{x-\frac{1}{7}\cdot 3\cdot 4\right\}\frac{1}{7}e^{2x}。$$

故爲 $\left(\frac{x}{7}-\frac{12}{49}\right)e^{2x}$。

例二　用這裏的方法求 $(D-1)y=x\sin x$ 的特殊積分。從(11)

$$x\frac{1}{D-1}\sin x-\frac{1}{(D-1)^2}\sin x=x\frac{D+1}{D^2-1}\sin x-\frac{(D+1)^2}{(D^2-1)^2}\sin x$$

$$=\frac{-1}{2}x(D+1)\sin x-\frac{1}{4}(D^2+2D+1)\sin x$$

$$=\frac{-1}{2}x(\cos x+\sin x)-\frac{1}{2}\cos x。$$

例三　若 $\frac{d^2y}{dx^2}-y=x^2\cos x$，　則　$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+x\sin x+\frac{1}{2}\cos x(1-x^2)$。

示意：以 xX 代(11)中的 X_1，特殊積分可化爲

$$\frac{1}{f(D)}x^2X=\left\{x-\frac{f'(D)}{f(D)}\right\}\frac{1}{f(D)}xX=\left\{x-\frac{f'(D)}{f(D)}\right\}$$

$$\left\{x-\frac{f'(D)}{f(D)}\right\}\frac{1}{f(D)}X=\left\{x-\frac{f'(D)}{f(D)}\right\}^2\frac{1}{f(D)}X$$

$$=\left\{x^2-2x\frac{f'(D)}{f(D)}+\frac{[f'(D)]^2}{f(D)^2}\right\}\frac{1}{f(D)}X。\tag{12}$$

同樣,若爲 x^nX 則特殊積分將爲

$$\frac{1}{f(D)}x^nX=\left\{x-\frac{f'(D)}{f(D)}\right\}^n\frac{1}{f(D)}X。\tag{13}$$

本例中 $f(D)=D^2-1$, $X=\cos x$, $n=2$, 故其特殊積分爲

$$\frac{1}{D^2-1}x^2\cos x=\left\{x^2-2x\frac{2D}{D^2-1}+\frac{4D^2}{(D^2-1)^2}\right\}\frac{1}{D^2-1}\cos x$$

$$=x^2\frac{1}{D^2-1}\cos x-4x\frac{D}{(D^2-1)^2}\cos x+4\frac{D^2}{(D^2-1)^3}\cos x$$

$$=x^2\left(\frac{1}{-2}\right)\cos x-4x\left(\frac{1}{4}\right)(-\sin x)+4\left(\frac{1}{-8}\right)(-\cos x)$$

$$=-\frac{x^2}{2}\cos x+x\sin x+\frac{1}{2}\cos x。$$

例四 解 $\frac{d^3y}{dx^3}-y=x\sin x$。

其特殊積分爲 $\frac{1}{2}\{(x-3)\cos x-x\sin x\}$。其補函數爲

$$C_1e^x+e^{-\frac{1}{2}x}\left\{C_2\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)+C_3\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right\}。$$

§ 136. 珈瑪函數 (The Gamma Function)

一個單位質量的質點受引力的作用而運動，此力的強度隨此點與引力中心之距離而反變，則運動方程式顯然是

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{a}{s},$$

此中 a 爲常數，負號表示時間漸久則作用於此點的力漸減。欲求此點經過一個距離從 $s=s$ 至 $s=s_0$ 所須的時間，必須求此方程式的積分。這裏以 $2\frac{ds}{dt}$ 乘全式，得

$$\int 2\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}=-2a\int\frac{1}{s}\ \frac{ds}{dt};\quad\therefore\ \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=-a\ \log s+C_{\circ}$$

設 $s=s_0$ 時 $v=0$，

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{2a\ \log\frac{s_0}{s}};\quad 即\quad t=\sqrt{\frac{1}{2a}}\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\sqrt{\log\frac{s_0}{s}}}。\qquad(1)$$

爲簡便計，我們寫 $\log\frac{s_0}{s}$ 爲 y。從對數的性質知 $s=s_0$ 時，$y=0$；$s=0$ 時，$y=\infty$。故 $\log\frac{s_0}{s}=y$；$\frac{s_0}{s}=e^y$；$s=s_0e^{-y}$；$ds=-s_0e^{-y}dy$；

$$\therefore\quad t=-\frac{s_0}{\sqrt{2a}}\int_0^\infty\frac{e^{-y}\,dy}{\sqrt{y}}=-\frac{s_0}{\sqrt{2a}}\int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}}e^{-y}\,dy。\qquad(2)$$

照此以物理問題的解表示爲一個定積分，且此定積分變數取某些值時的數值是已知其相當正確的；有時頗覺便利。例如 $\int_0^a(\log x)^{-1}dx$ 有 Soldner 的表；Fresnel 積分 $\int_0^v\cos\frac{1}{2}\pi v\ dv$ 或 $\int_0^v\sin\frac{1}{2}\pi v\,dv$ 有 Gilbert 的表；橢圓積分有 Legendre 的表；積分 $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ 有 Kramp 的表；積分 $\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$ 卽所謂珈瑪函數有 Legendre 的表。在本書中須論

到最後三種定積分。

依 Legendre 的辦法，珈瑪函數，亦稱尤氏第二積分 (Second Eulerian integral)，常用 $\Gamma(n)$ 記號表之。根據定義，故

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx。\tag{3}$$

用分部積分法，得

$$\int_0^\infty e^{-x}x^n=n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx-\Big[e^{-x}x^n\Big]_0^\infty\tag{4}$$

此式最後一項爲 0。故

$$\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx=n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx。\tag{5}$$

用上述的記法卽爲

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)。\tag{6}$$

若 n 的正整數，從(6)得

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1=\underline{|n}。\tag{7}$$

這個重要的關係對於任何 n 的函數都能成立，雖然只有在 n 爲正整數時才有實在意義。

n 取 1 與 2 之間的各值時珈瑪函數的數值已經有計算至十二位小數的表。利用這種表所有可以化爲珈瑪函數之定積分的值如普通的三角函數或對數等一樣易於計算。可分四種情形論之：

1) n 在 0 與 1 之間，用公式(16)。

2) n 在 1 與 2 之間，用下列第 V 表。

3) n 大於 2。用公式(6)使原式之值變爲可由 n 在 1 與 2 之間者求之。

4) $\Gamma(1)=1$; $\Gamma(2)=1$; $\Gamma(0)=\infty$; $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ ❶ (8)

I. 化定積分爲珈瑪函數

下列幾個例是化定積爲珈瑪函數的。更深的研究須參考專書。設 a 與 x 無關，

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^{m-1}\,dx=\frac{1}{a^m}\Gamma(m)。 \tag{9}$$

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx=\int_0^\infty\frac{x^{m-1}\,dx}{(1+x)^{m+n}}=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}。 \tag{10}$$

(10)式左邊有時稱爲尤氏第一積分 (First Eulerian integral)，亦稱倍他函數(Beta function)。寫作 $B(m,n)$。這裏的倍他函數是用珈瑪函數表示的。以 $x=\frac{ay}{b}$ 代入(10)式第二節得

$$\int_0^\infty\frac{y^{m-1}\,dy}{(ay+b)^{m+n}}=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{a^m b^n\Gamma(m+n)}。 \tag{11}$$

其他的關係，如

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^n x\,dx=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\Gamma[\frac{1}{2}(n+1)]}{2\Gamma(\frac{1}{2}n+1)}。 \tag{12}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^p x\cos^q x\,dx=\frac{\Gamma[\frac{1}{2}(p+1)]\Gamma[\frac{1}{2}(q+1)]}{2\Gamma[\frac{1}{2}(p+q)+1]}。 \tag{13}$$

$$\int_0^1 x^m\log\left(\frac{1}{x}\right)^n dx=\frac{\Gamma(n+1)}{(m+1)^{n+1}}\int_0^1 x^m\log x^n\,dx=\frac{(-1)^n\Gamma(n+1)}{(m+1)^{n+1}}。 \tag{14}$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx=\frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}};\quad \int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2a}=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}。 \tag{15}$$

現在我們可求(2)的值，得

❶ 此式證法可參閱熊慶來著高等算學分析第 356 頁，商務印書館出版。——譯者註。

$$t=-\frac{s_0}{\sqrt{2a}}\int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}}e^{-y}\,dy=-\frac{s_0}{\sqrt{2a}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{\frac{\pi}{2a}}s_0。$$

試以此結果與從第 111 節的積分方法所得者比較之。

例一　求 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{10}x\,dx$。

示意：　從(12)，$\dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}{2\Gamma(6)}$，

$$\therefore\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}。$$

例二　求 $\int_0^\infty e^{-ax}x^5\,dx$ 的值。

示意：　用(9)得解答為 $\dfrac{\Gamma(6)}{a^6}=\dfrac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{a^6}$。

例三　若 $\int_0^\infty\dfrac{x^{m-1}\,dx}{1+x}=\dfrac{\pi}{\sin m\pi}$，證 $\Gamma(m)\Gamma(1-m)=\dfrac{\pi}{\sin m\pi}$，

與 $\Gamma(1+m)\,\Gamma\,(1-m)=\dfrac{\pi}{\sin m\pi}$。本題可令 $m+1=1$ 從倍他函數求之。此二結果可用以求 n 在 0 與 1 之間時珈瑪函數的值。兩式相除，得

$$\Gamma(m)=\frac{\Gamma(1+m)}{m}。\tag{16}$$

設 $m=\frac{1}{4}$，$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=3.6254$；　$\log_{10}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=0.559\bar{4}$；　設 $m=\frac{1}{2}$，$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=1.772\bar{5}$；$\log_{10}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=0.248\bar{6}$；設 $m=\frac{3}{4}$，$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=1.2253$；$\log_{10}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=0.088\bar{3}$；數字末位頂上所加之短劃表示此數字由下一位

「四捨五入」進位所得。

II.　數值計算

表 V 中列載 $\log_{10}\Gamma(n)$ 的數值都取四位小數，n 的值從 1 至 2。這是從 Legendre 所著 Excercises de Calcul Intégral (Paris, 2, 18, 1817) 中十二位小數的表上採錄下來的。因 n 在 1 與 2 之間 $\log_{10}\Gamma(n)$ 的值都是負數。於是如普通的三角函數對數表一樣，表中所列的數值都於實際的數值上加以 10。故運用時必須減去此所加之數。

表 V. $\Gamma(n)$的常用對數，n 從 1 至 1.99。

n.	0·00.	0·01.	0·02.	0·03.	0·04.	0·05.	0·06.	0·07.	0·08.	0·09.
1·0	0·0000	$\bar{1}$·9975	$\bar{1}$·9951	$\bar{1}$·9928	$\bar{1}$·9905	$\bar{1}$·9883	$\bar{1}$·9862	$\bar{1}$·9841	$\bar{1}$·9821	$\bar{1}$·9802
1·1	$\bar{1}$·9783	$\bar{1}$·9765	$\bar{1}$·9748	$\bar{1}$·9731	$\bar{1}$·9715	$\bar{1}$·9699	$\bar{1}$·9684	$\bar{1}$·9669	$\bar{1}$·9655	$\bar{1}$·9642
1·2	$\bar{1}$·9629	$\bar{1}$·9617	$\bar{1}$·9685	$\bar{1}$·9594	$\bar{1}$·9583	$\bar{1}$·9573	$\bar{1}$·9564	$\bar{1}$·9554	$\bar{1}$·9546	$\bar{1}$·95[illegible]8
1·3	$\bar{1}$·9530	$\bar{1}$·9523	$\bar{1}$·9516	$\bar{1}$·9510	$\bar{1}$·9505	$\bar{1}$·9500	$\bar{1}$·9495	$\bar{1}$·9491	$\bar{1}$·9487	$\bar{1}$·9483
1·4	$\bar{1}$·9481	$\bar{1}$·9478	$\bar{1}$·9476	$\bar{1}$·9475	$\bar{1}$·9473	$\bar{1}$·9473	$\bar{1}$·9472	$\bar{1}$·9473	$\bar{1}$·9473	$\bar{1}$·9474
1·5	$\bar{1}$·9475	$\bar{1}$·9477	$\bar{1}$·9479	$\bar{1}$·9482	$\bar{1}$·9485	$\bar{1}$·9488	$\bar{1}$·9492	$\bar{1}$·9496	$\bar{1}$·9501	$\bar{1}$·9506
1·6	$\bar{1}$·9511	$\bar{1}$·9517	$\bar{1}$·9523	$\bar{1}$·9529	$\bar{1}$·9536	$\bar{1}$·9543	$\bar{1}$·9550	$\bar{1}$·9558	$\bar{1}$·9566	$\bar{1}$·9575
1·7	$\bar{1}$·9584	$\bar{1}$·9593	$\bar{1}$·9603	$\bar{1}$·9613	$\bar{1}$·9623	$\bar{1}$·9633	$\bar{1}$·9644	$\bar{1}$·9656	$\bar{1}$·9667	$\bar{1}$·9679
1·8	$\bar{1}$·9691	$\bar{1}$·9704	$\bar{1}$·9717	$\bar{1}$·9730	$\bar{1}$·9743	$\bar{1}$·9757	$\bar{1}$·9771	$\bar{1}$·9786	$\bar{1}$·9800	$\bar{1}$·9815
1·9	$\bar{1}$·9831	$\bar{1}$·9846	$\bar{1}$·9862	$\bar{1}$·9878	$\bar{1}$·9895	$\bar{1}$·9912	$\bar{1}$·9929	$\bar{1}$·9946	$\bar{1}$·9964	$\bar{1}$·9982

$$\log_{10}\sqrt{\pi} = 0{\cdot}24857493635 = \log_{10}\Gamma(\tfrac{1}{2}).$$

例　求$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\sin x}\,dx$ 之值。

答：　198。

示意　用(18)，$q=0$，$p=\frac{1}{2}$，故

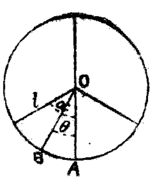
$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\sin x}\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)},$$

$$\log\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}=\log\ \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)+\log\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)-\log\ 2-\log\ \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$=0.0883+0.2485-0.3010-1.9573=0.0823$$

$$=\log\ 1.198。$$

§ 137. **橢圓積分** (Elliptic Integrals)



圖一百五十二

一個擺盪過 θ 角時其運動方程式爲

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\ \theta, \tag{1}$$

此中 θ 卽 $\angle BOA$ 爲在時間 t 擺與垂直位置所成的角；g 爲地心引力常數；l 爲線 AO 的長。求 (1) 的積分得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-\frac{g}{l}\cos\theta=c;$$

設 $\frac{d\theta}{dt}=0$ 時 $\theta=\alpha$；又 α 恆小於 $180°$。決定 c 的值爲

$$c=-\frac{g}{l}\cos\ \alpha;$$

$$\therefore\quad\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{2g}{l}(\cos\theta-\cos\alpha)。$$

用三角公式 $\cos\ \alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$；$\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$，又可化爲

$$\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta-\cos\alpha)}$$

$$=2\sqrt{\frac{g}{l}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}。\qquad(2)$$

$$\therefore\quad 2\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt=\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

欲使此式在形式化得較爲簡單，我們引入新的變數 ϕ，令

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\phi;\quad\therefore\quad\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\phi\,d\phi,$$

$$\therefore\quad d\theta=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\phi\,d\phi}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\phi\,d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\phi\,d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\phi}}$$

$$\therefore\quad\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\phi\,d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\phi}}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\sin^2\phi}}=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\phi\,d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\phi}}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\phi}$$

$$=\frac{2d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\phi}}。$$

$$\therefore\quad\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt=\frac{d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\phi}};$$

$$\therefore\quad t\sqrt{\frac{g}{l}}=\int_0^\phi\frac{d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\phi}}。$$

令 $k=\sin\frac{\alpha}{2}$，即得　$\therefore\ t\sqrt{\frac{g}{l}}=\int_0^{\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$。　(3)

設一個完全振動的週期爲 T，則 t 從 0 增加至 $\frac{T}{4}$ 時，θ 從 0 增加至 α；ϕ 從 0 增加至 $\frac{\pi}{2}$。故可寫(3)式爲

$$\frac{T}{4}\sqrt{\frac{g}{l}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}},\tag{4}$$

(3)式右邊的積分稱爲第一類橢圓積分(The elliptic integral of the first class)，常寫爲 $F(k,\phi)$。常數 k 即 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 稱爲此積分的模(Modulus)，其數值恆小於1，即爲眞分數。ϕ 稱爲此積分的幅(Amplitude)；寫爲 $\phi=am\sqrt{\frac{g}{l}}t$。此積分的上下限爲 $\frac{\pi}{2}$ 與0時，即如(4)式的右邊，稱爲第一類完全(Complete)橢圓積分，其值常以 F 表之。(3)與(4)中的形式稱爲第一類橢圓積分的 Legendre 式。

令 $\sin\frac{\theta}{2}=x\sin\frac{\alpha}{2}$，此中 x 爲眞分數，求積分得

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=\sin\frac{\alpha}{2}dx,\quad\therefore\quad d\theta=2\left(1-x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{\alpha}{2}dx;$$

則從(2)可得另一種形式爲

$$t\sqrt{\frac{g}{l}}=\int_0^{x}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\tag{5}$$

此中 $k=\sin\frac{\alpha}{2}$。(5)稱爲第一種橢圓積分的 Jacobi 式，亦稱爲法式(Normal form)，常寫爲 $F(k,x)$。相當於(4)，則有

$$\frac{T}{4}\sqrt{\frac{g}{l}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}。$$

從第 111 節例四,用級數可求這些積分的值。這樣在 (4) 式中可以求到振動周期,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}k\right)^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^2\right)^2+\cdots\cdots\right\}。\tag{6}$$

若擺振盪得很小,則振動週期 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 秒。若振盪的角增大，則第一步的近似值,須於其週期增加 $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 的 $\frac{1}{4}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$。

(3)式中的積分顯然是其上限 ϕ 的函數，故可將 $t\sqrt{\frac{g}{l}}$ 表示爲 ϕ 的函數。反之，ϕ 可以表示爲 $t\sqrt{\frac{g}{l}}$ 的函數。此卽所謂**橢圓函數**(Elliptic functions)。

$$\phi=am\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right);\qquad \operatorname{mod} k=\sin\frac{\alpha}{2}。$$

橢圓函數對於橢圓積分的關係正與三角函數之於反三角函數一樣。如我們所曾經知道的,若

$$y=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad 則\ y=\sin^{-1}x,\quad 卽\ x=\sin y。$$

從(3)與(5)可得

$$\phi=am\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right);\ x=\sin\phi;\quad \therefore\ x=\sin am\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right),$$

這是依照 Jacobi 的寫法,但現在都用 Gudermann 的寫法,爲

$$x=\operatorname{sn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)。$$

同樣,如質量爲 m 的擺垂,像上述的那樣的振動則離心力 F 可寫爲 $F=4m\,g\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{cn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$; 此中 $\mathrm{cn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$爲是$\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$的幅的餘弦。

橢圓函數與普通的三角函數間有很重要的相像之處。後者可以視爲橢圓函數,當其模爲零時之特例;有一組公式結合各個橢圓函數,多數在形式方面,類似三角函數間的關係。例如:

$$\mathrm{sn}^2u+\mathrm{cn}^2u=1;\quad x=\mathrm{sn}\,u;\quad \mathrm{cn}\,u=\sqrt{1-x^2};\ \text{等等。}$$

橢圓函數是週期的。週期的值視其模 k 而定。我們已經見到擺的振動週期是模的函數。代入時所用的方程式 $\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\phi$, 說明當 ϕ 從 0 均勻的增加至 2π 時 $\sin\frac{\theta}{2}$ 的變化。

當 ϕ 從 0 增加至 $\frac{\pi}{2}$ 時, $\frac{\theta}{2}$ 增加至 $+\frac{\alpha}{2}$;

當 ϕ 從 $\frac{\pi}{2}$ 增加至 π 時, $\frac{\theta}{2}$ 減小至 0;

當 ϕ 從 π 增加至 $\frac{3\pi}{2}$ 時, $\frac{\theta}{2}$ 減小至 $-\frac{\alpha}{2}$;

當 ϕ 從 $\frac{3\pi}{2}$ 增加至 2π 時, $\frac{\theta}{2}$ 增加至 0;

ϕ 的值繼續增加時, $\frac{\theta}{2}$ 的值來回於 $\pm\frac{\alpha}{2}$ 之間。

有許多曲線,欲求其長度時所得的式子,只能用近似的方法,如用級數等求積分。從雙紐線 (Lemniscate) 與雙曲線即得第一類橢圓積

分，只能用級數求其值。在橢圓中（圖二十二）比值$\frac{OF_1}{OP_2}$稱爲橢圓的離心率用 e 表之（參閱第42節例三）。故

$$c=ae;\ 但\ c^2=a^2-b^2;\quad \therefore\ \frac{b^2}{a^2}=1-e^2。$$

代入第 36 節(1)之橢圓方程式中。故得

$$y^2=(1-e^2)(a^2-x^2);\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{(1-e^2)x^2}{a^2-x^2}。$$

所以一個橢圓象限的弧的長 l 爲

$$l=\int_0^a\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx。\tag{7}$$

此式不能用普通的積分法求之。其值只能用近似法求得。方程式 (7) 中若寫 $x=a\sin\phi$，此中 ϕ 爲離心角 (Eccentric angle)θ 的餘角，見圖一百五十二。於是

$$l=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}\ d\phi。$$

上式右邊的積分上限改爲 ϕ，稱爲第二類的橢圓積分 (Elliptic integral of the second class)，常寫爲 $E(k,\phi)$，因爲式中的 e 常寫爲 k。適當的調換變數後，又可得

$$E(k,x)=\int_0^x\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\ dx。\tag{8}$$

第三類橢圓積分，我們也很熟悉，其形式爲

$$\Pi(n\,k,\ \phi)=\int_0^\phi\frac{d\phi}{(1+n\sin^2\phi)\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}};$$

或
$$\Pi(n, k, x)=\int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}。 \tag{9}$$

此中 n 是一個實數稱爲 **Legendre 參數** (Parameter)。

下列形式,可用代數函數,對數函數或三角函數等普通的方法求到積分;

$$\int\sqrt{a+bx+cx^2}\,X\,dx;\quad \int\frac{X\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}},$$

式中 X 爲 x 的有理函數,根號下是 x 的二次式。若根號下爲 x 的三次或四次式,如

$$\int\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}\,X\,dx,$$

求積分時卽無如此簡單。這種積分亦稱橢圓積分。若根號下爲高於四次的多項式,這種積分稱爲**超橢圓積分**(Ultra-elliptic integral)或**廣義橢圓積分** (Hyper elliptic integral)。橢圓積分不能用代數函數,對數函數,三角函數等表示的部份,恆可歸入上述三類之一。

Legendre 曾經計算第一、第二兩類橢圓積分的簡表;第三類有已知的公式可與這些發生關係。已知 k, ϕ 後,可以直接從表中查得 $F(k, \phi)$ 或 $E(k, \phi)$ 的值。從下列的摘錄可以見到表的一斑。

$F(k, \phi)$ 的數值;$\sin\alpha=k$

ϕ	$\alpha=0°$	$\alpha=5°$	$\alpha=10°$	$\alpha=15°$	$\alpha=20°$	$\alpha=25°$
41°	0.7156	0.7160	0.7173	0.7193	0.7222	0.7258
42°	0.7330	0.7335	0.7348	0.7370	0.7401	0.7440
43°	0.7505	0.7510	0.7524	0.7548	0.7581	0.7622

例　證明：若$\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}=\sin\phi$，則$\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$

$$=\sqrt{2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\phi}}。$$

示意：　第一步根據第 83 節(6)。第二步求微係數

$$\cos\frac{x}{2}dx=\sqrt{2}\cos\phi\, d\phi;\ 2\sin^2\frac{x}{2}=\sin^2\phi。$$

故　$$\int\frac{dx}{\sqrt{\cos x}}=\int\frac{\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}dx}{\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\sqrt{\cos x}}=\int\frac{\sqrt{2}\cos\phi\, d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{x}{2}}\sqrt{1-2\sin^2\frac{x}{2}}}$$

等等。

進一步的研究不是簡短篇幅中所能容許的。Mascart 與 Joubert 在他們所著 Electricity and Magnetism(**2**, 126, 1888)中有電流互感係數的表是從 E 與 F 計算出來的。A. G. Greenhill 著 The Applications of Elliptic Functions (London, 1892) 是關於這方面的教本。

§ 138. 完整線性微分方程式 (The Exact Linear Differential Equctions)

有一個很簡單的關係存在於完整微分方程式的係數之間，可以用來試驗方程式之是否完整。取方程式

$$X_0\frac{d^3y}{dx^3}+X_1\frac{d^2y}{dx^2}+X_2\frac{dy}{dx}+X_3y=R, \tag{1}$$

此中 X_0, X_1,……, R 爲 x 的函數。設以 X', X'',……表其各級微

係數。

因 $X_0\frac{d^3y}{dx^3}$ 是從求 $X_0\frac{d^2y}{dx^2}$ 的微係數而得，則後必需為(1)的積分的第一項。但

$$\frac{d}{dx}\left(X_0\frac{d^2y}{dx^2}\right)=X_0\frac{d^3y}{dx^3}+X'_0\frac{d^2y}{dx^2}。$$

從方程式(1)減去此式右邊,得

$$(X_1-X_0')\frac{d^2y}{dx^2}+X_2\frac{dy}{dx}+X_3y=R。\qquad(2)$$

又此式的第一項是 $(X_1-X'_0)\frac{dy}{dx}$ 的微係數。故此為(1)的積分的第二項。照前述的方法,求微係數而減之,得

$$(X_2-X'_1+X''_0)\frac{dy}{dx}+X_3y=R。\qquad(3)$$

若$(X_2-X'_1+X''_0)$關於 x 的微係數恰等於 X_3，即

$$X'_2-X''_1+X'''_0=X_3;\quad 即\ X_3-X'_2+X''_1-X'''_0=0,\qquad(4)$$

則方程式 (3) 可從求 $(X_2-X'_1+X''_0)y$ 的微係數而化得。但方程式(3)果真是這樣的來源,則原方程式(1)已化低一級而為

$$X_0\frac{d^2y}{dx^2}+(X_1-X'_0)\frac{dy}{dx}+(X_2-X'_1+X''_0)y=\int R\,dx+C_1。\qquad(5)$$

此方程式稱為(1)的**第一積分** (The first integral)，因為由於用一次積分法而使原方程式化低一級。(4) 所示的條件是**試驗微分方程式是否完整的方法**。

若第一積分又是一個完整方程式，我們用與上同樣的方法再可求到 (5) 的第一積分。這樣的化法可以重複下去直到發見不完整方程式

或 y 本身為止。故此，**一個 n 級完整方程式有 n 個獨立的第一積分。**

例一　$x^5\frac{d^3y}{dx^3}+15x^4\frac{d^2y}{dx^2}+60x^3\frac{dy}{dx}+60x^2y=e^x$ 是一個完整方程式麼？

用(4)試驗之，因 $X_3=60x^2$；$X'_2=180x^2$；$X''_1=180x^2$；$X'''_0=60x^2$，

故 $X_3-X'_2+X''_1-X'''_0=0$，即此方程式是完整的。

解此方程式可得其積分為 $x^5y=e^x+C_1x^2+C_2x+C_3$。

示意：　從(5)知原方程式的第一積分為 $(x^5D^2+10x^4D+20x^3)y=e^x+C_1$。再用(4)的方法試驗此第一積分，知亦完整，因此時 $X_2=20x^3$，$X'_1=40x^2$，$X''_0=20x^2$，　故 $X_2+X'_1+X''_0=0$。於是這裏的第一積分應為

$$X_0\frac{dy}{dx}+(X_1-X'_0)y=\int e^x\,dx+\int C_1\,dx+C_2。\tag{6}$$

故得 $(x^5D+5x^4)y=e^x+C_1x+C_2$。此式又是完整的，因此式中的 $X_1=5x^4$，$X'_0=5x^4$，　$\therefore\ X_1-X'_0=0$。所以最後一個第一積分為

$x^5y=\int e^x\,dx+\int C_1x\,dx+\int C_2\,dx+C_3=e^x+C'_1x^2+C'_2x+C_3$。

例二　解 $x\frac{d^3y}{dx^3}+(x^2-3)\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+2y=0$，儘量用本節所述的化法。此法可以用兩次，餘式是不完整的一級線性方程式。其完全解為 $x^{-5}e^{\frac{1}{2}x^2}y=C_1\int x^{-5}e^{\frac{1}{2}x^2}dx+C_2\int x^{-6}e^{\frac{1}{2}x^2}dx+C_3$。

試驗微分方程式是否完整，另有一個實用的捷法，Forsyth 所曾論

到的，惟沒有前法普遍。當 X 中的各項爲 ax^m 的形式或此形式之和，若 $m<n$ 時，$x^m\dfrac{d^ny}{dx^n}$ 爲完整微係數。不問 y 爲何，恆能求其積分。若 $m=n$ 或 $m>n$ 時，則不能用完整方程式的方法求其積分。此試驗法運用時，可將 $m<n$ 的各項移去，如所剩者爲完整微係數，則方程式是完整的，可以求得積分。

例一　試驗 $x^3\dfrac{d^4y}{dx^4}+x^2\dfrac{d^3y}{dx^3}+x\dfrac{dy}{dx}+y=0$。移去 $m<n$ 的各項後剩下 $x\dfrac{dy}{dx}+y=0$。此式顯從 $D(xy)$ 得來，故方程式是完整的。

例二　用此法試驗 $(x^3D^4+x^2D^3+x^2D+2x)y=\sin x$。此式剩下 $x^2\dfrac{dy}{dx}+2xy$ 是完整微係數從 $D(x^2y)$ 得來。故方程式是完整的。

§ 139. 連接的化學反應的速度(The Velocity of Consecutive Chemical Reactions)

在第 77 節末例八中研究磷化氫的分解時，曾經指出那種作用亦許分兩個階段發生：——

第一：　$PH_3=P+3H$；　第二：　$4P=P_4$；　$2H=H_2$。

前者單獨決定整個反應的速度。這件事實的物理意義是第二階段中反應的速度比起第一階段來是快得無法量測。實驗是無法顯示這完全反應的複雜性質了。J. Walker(Proc. Royal Soc. Edin., **22**, 22, 1898) 用下列的對比說明這點：『一個電信傳遞所佔的時間，隨着沿傳導線上的傳遞速度與電信送差的速度而定；不過後者比較很慢，在決定傳遞的時間中事實上有實在的重要性』。

例如，設一個物質 A 中途生成一個化合物 M，然後再從此而生成最後的產物 B，若 $A\to M$ 的反應速度爲每 $\frac{1}{100000}$ 秒一克，而 $M\to B$ 的反應速度爲每小時一克則完全反應

$$A\to B$$

的觀測所得的等級可由慢的反應 $M\to B$ 的等級而決定，因爲量測化學反應速度所用的方法不會敏感到可以覺察從 A 轉變成 M 的反應。只有這後一個反應 $M\to B$ 的等級可以量測得到。故若 $A\to B$ 是屬於第一，第二或第 n 級的反應，我們必須知道兩個輔反應 $A\to M$，或 $M\to B$ 中，一爲快至無從量測的反應，一爲較慢而可量測的第一，第二或第 n 級反應，其情形視所研究的特殊體系而定。

但若兩種反應速度是屬於同級數量的，則完全反應的等級不屬於第 76 節情形 (ii) 例題中所論的簡單形式，代表反應過程的微分方程式須稍加變更。且看下列的例。

I. 連積的兩個單分子反應

取物質 A 一克。設在某時間 t 之末，此體系中含有的 A 爲 x；含有的 M 爲 y，含有的 B 爲 z。反應是

$$A\to M;\quad M\to B_{\circ}$$

x 的減少率顯然是

$$-\frac{dx}{dt}=k_1x, \tag{1}$$

此中 k_1 表示從 A 轉變爲 M 的速度常數。B 的生成率是

$$\frac{dz}{dt}=k_2y, \tag{2}$$

此中 k_2 表示從 M 轉變爲 B 的速度常數。又 M 在體系中的積儲率顯然等於 x 的減少率與 z 的增加率之差，即

$$\frac{dy}{dt}=k_1x-k_2y。 \tag{3}$$

化學反應

$$A\to M\to B$$

的速度可由這一組微分方程式完全決定。當一組變數間的關係含有這樣性質的一組方程式，結果稱爲**一組聯立微分方程式**（A system of simultaneous differential equations）。

在許多物理問題中，變數間的相互關係是用這樣一組方程式來表示的。最最簡單的一類是每個因變數是自變數的函數。

解聯立方程式即須求得以自變數表示每個因變數；或求得一組含有各個變數而無其微係數的方程式。

解本例中的微分方程式，第一須求(2)的微分，得

$$\frac{d^2z}{dt^2}-k_2\frac{dy}{dt}=0;$$

同時加減 k_1k_2y，從(3)以 k_1x-k_2y 代 $\frac{dy}{dt}$；又從(2)以 $\frac{dz}{dt}$ 代 k_2y，結果爲

$$\frac{d^2z}{dt^2}+(k_1+k_2)\frac{dz}{dt}-k_1k_2(x+y)=0。$$

但從實驗的條件，$x+y+z=1$，　$\therefore\ z-1=-(x+y)$。故上方程式可

寫為

$$\frac{d^2(z-1)}{dt^2}+(k_1+k_2)\frac{d(z-1)}{dt}+k_1k_2(z-1)=0。\tag{4}$$

此常數係數的二級線性方程式，可用普通的方法(第131節)解得$z-1$。於是

$$z-1=C_1e^{-k_1t}+C_2e^{-k_2t}。\tag{5}$$

但 $t=0$ 時 $z=0$，

$$\therefore\quad C_1+C_2=-1。\tag{6}$$

求(5)的微分，從(2)，$t=0$ 時 $\frac{dz}{dt}=0$。故經過必要的代入後，得

$$-C_1k_1-C_2k_2=0。\tag{7}$$

解(6)與(7)得

$$C_1=\frac{k_2}{k_1-k_2}；\; C_2=-\frac{k_1}{k_1-k_2}。$$

最後結果是

$$z-1=\frac{k_2}{k_1-k_2}e^{-k_1t}-\frac{k_1}{k_1-k_2}e^{-k_2t}。\tag{8}$$

Harcourt 與 Esson 曾經研究用草酸還原高錳酸鉀的速度；

$$2KMnO_4+3MnSO_4+2H_2O\rightarrow K_2SO_4+2H_2SO_4+5MnO_2;$$

$$MnO_2+H_2SO_4+H_2C_2O_2\rightarrow MnSO_4+2H_2O+2CO_2。$$

實驗條件用適當的佈置，此反應可用以試驗方程式(5)或(8)，

設 x, y, z 各表此體系中 Mn_2O_7；MnO_2；MnO 的量。他們求得 $C_1=28.5$；$C_2=2.7$；$e^{-k_1}=0.82$；$e^{-k_2}=0.98$。下表結果可使上述假設不生疑問：

t 分	$z-1$		t 分	$z-1$	
	觀測值	計算值		觀測值	計算值
0.5	25.85	25.9	3.0	10.45	10.4
1.0	21.55	21.4	3.5	8.95	9.0
1.5	17.9	17.8	4.0	7.7	7.8
2.0	14.9	14.9	4.5	6.65	6.6
2.5	12.55	12.5	5.0	5.7	5.8

例　我們可從另一種推理方式求得方程式(8)。設 y 爲時間 t 內 A 轉變爲 M 的量，z 爲時間 t 內 M 轉變爲 B 的量；又實驗開始時 A 的量爲 a，

$$\frac{dy}{dt}=k_1(a-y);\quad \frac{dz}{dt}=k_2(y-z) \tag{9}$$

從第一方程式，得 $y=a(1-e^{-k_1t})$。以此代入第二方程式得

$$\frac{dz}{dt}+k_2z-k_2a(1-e^{-k_1t})=0。$$

從第 125 節例五，若 $t=0$ 時 $z=0$，則

$$z=Ce^{-k_2t}+a-\frac{k_2a}{k_2-k_1}e^{-k_1t};\quad C=\frac{k_2a}{k_2-k_1}-a;$$

此式與(8)相似。方程式(8)也用於表示暴露在鐳或釷射氣內物體被激敏射性的衰變。

II. 連接的兩個雙分子反應

在琥珀酸乙酯(Ethyl succinate)遇到氫氧化鈉而起鹼化作用時，

$$C_2H_4(COOC_2H)_2+NaOH\rightarrow C_2H_5OH+C_2H_4\cdot COONa\cdot COOC_2H_5;$$

$$C_2H_4\cdot COONa\cdot COOH+NaOH\rightarrow C_2H_5OH+C_2H_4(COONa)_2。$$

或

$$A+B \to C+M;\quad M+B \to C+D。$$

設琥珀酸，A，於時間 t 内轉變去的量爲 x，則 $a-x$ 爲此時溶液中所留剩的量。同樣設此體系内於開始時含有氫氧化鈉 B 的量爲 b，則在時間 t，將有 x 因產生琥珀酸乙酯鈉，M，而消去，又 y 因產生琥珀酸鈉 D 而消去，故在時間 t，此體系内尚有氫氧化鈉 $b-x-y$ 與琥珀酸乙酯鈉 $x-y$。於是琥珀酸乙酯鈉 M 的生成率爲

$$\frac{dx}{dt}=k_1(a-x)(b-x-y); \tag{11}$$

琥珀酸鈉 D 的生成率爲

$$\frac{dy}{dt}=k_2(x-y)(b-x-y)。 \tag{12}$$

兩式相除，設 $\frac{k_2}{k_1}=K$，

$$\frac{dy}{dx}+\frac{K}{a-x}y=\frac{Kx}{a-x}。$$

此方程式在第 125 節例六中已經求得積分爲

$$y=\frac{1}{K-1}\left\{\frac{(a-x)^K}{a^{K-1}}-a+Kx\right\}。 \tag{13}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=k_1(a-x)\left\{b-x-\frac{(a-x)^K}{(K-1)a^{K-1}}+\frac{a}{K-1}-\frac{Kx}{K-1}\right\}。 \tag{14}$$

此式只能當 K 的數值已知時求其積分。通例，論述實驗室的量測值時以用近似法求積分爲最便，因爲即使能知 K 的數值求 (14) 的積分，通常也不很實用。

III. 一個單分子反應後連接着一個雙分子反應

設 x 爲 A 經過時間 t 後留存着尙未轉變的量，y 與 z 各 M 與 B 經過此相同時間 t 後存在於體系中的量。反應爲

$$A\to M;\quad M+B\to C。$$

從此可證 A 的減少率與 M(或 B)的減少率各爲

$$-\frac{dx}{dt}=k_2x;\qquad -\frac{dz}{dt}=k_2yz, \tag{15}$$

M 的生成率爲 A 轉變爲 M 的速度減去 M 轉變爲 C 的速度，故

$$\frac{dy}{dt}=k_1x-k_2yz。 \tag{16}$$

若 x, y, z 可以獨立的量測則可用 I 中的方法已够解此方程式；但 x 與 y 若在一起決定的則方法小有不同。設 A 與 B 原有的量爲 a，在時間 t 將爲 $a-x=a-z+y$，卽 $y=z-x$。以 (15) 的第一方程式除(6)；以 $dy=dz-dx$ 代入；令 $y=z-x$；除以 z^2、可得

$$\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}+\frac{K}{z}-\frac{K}{x}=0, \tag{17}$$

此 $K=\frac{k_2}{k_1}$。此方程式的解前在第 125 節例三中求得爲

$$Ke^{-Kx}\{C_1-\log x+Kx-\frac{1}{1\cdot 2^2}(Kx)^2+\cdots\cdots\}z=1, \tag{18}$$

在 Harcourt 與 Esson 的幾個實驗中 $C_1=4.68$；$k_1=0.69$；$k_2=0.006364$。從(9) 中第一方程式，很易證得 $x=ae^{-k_1t}$。此處的 a 從何來的？這 a 是什麼意義？顯然 $t=0$ 時的 x 的值。覆證下表第三行的數值：——

t 分	z	
	觀測值	計算值
2	51.9	51.6
3	42.4	42.7
4	35.4	35.4
5	29.8	29.7

六分鐘之後，x 的值發見是很小可以略去不計。(18)中 $\log x$ 以後的各項雖然略去也不會發生可感覺的差誤。以 $x=ae^{-k_1t}$ 代入餘式，

$$\frac{k_2}{k_1}(C_1-\log a+k_1t)z=1;\quad 或\quad (C'_1+t)z=\frac{1}{k_2},$$

此中 $C'_1=\frac{C_1}{k_1}-\frac{\log a}{k_1}$。Harcourt 與 Esson 求得 $C'_1=0.1$；$\frac{1}{k_2}=157$。故此接續上表，他們以所得結果列成下表。理論值與實驗值之符合是很顯著。

t 分	z		t 分		
	觀測值	計算值		觀測值	計算值
6	25.7	25.7	10	15.5	15.5
7	22.1	22.1	11	10.4	10.4
8	19.4	19.4	12	7.8	7.8
9	17.3	17.3	13	5.5	5.2

理論值是根據假定得來，即假定這化學變化中包含一個物質的漸漸生成，但同時因其與另一物質的反應而慢慢的消失。

實在就是說：所謂化學反應的最初擾動(Initial disturbances)是由於反應中一個階段的速度快於另一階段的速度。初最擾動的大小，視

k_1 與 k_2 的相對的數量而定。觀測到入於穩定狀態的速度是由於不變的減少 $-\frac{dx}{dt}$ 與不變的增加 $\frac{dz}{dt}$ 之差。k_2 與 k_1 相較時若爲無限之大，則(8)化爲

$$z=a(1-e^{-k_1t}),$$

這是立刻可以見到是很熟悉的方程式

$$k_1=\frac{1}{t}\log\frac{a}{a-z}$$

之另一種寫法。

從事於實際的工作時微分方程式的解必須不十分複雜以確實驗上覆證之可能。

IV. 連接的三個雙分子反應

三木酮(Triaceton)的水解作用，

$$C_3H_5\cdot\bar{A}_3+H\cdot OH\rightarrow 3\bar{A}\cdot H+C_3H_5(OH)_3,$$

此中 $\bar{A}$ 表示 CH_3COO，有充分理由相信此反應是由三個階段發生的：

$$C_3H_5\cdot\bar{A}_3+H\cdot OH\rightarrow\bar{A}\cdot H+C_3H_5\cdot\bar{A}_2\cdot OH,\qquad\text{(二木酮)}$$

$$C_3H_5\cdot\bar{A}_2\cdot OH+H\cdot OH\rightarrow\bar{A}\cdot H+C_3H_5\cdot\bar{A}(OH)_2,\qquad\text{(一木酮)}$$

$$C_3H_5\cdot\bar{A}\cdot(OH)_2+H\cdot OH\rightarrow\bar{A}\cdot H+C_3H_5(OH)_3。\qquad\text{(甘油)}$$

這些反應是互有關係的。甘油的生成率是隨一木酮的生成率而定；而一木酮的生成率又隨二木酮的生成率而定。故在此體系中發生三個聯立的二級反應。

設 a 爲三木酮最初的濃度（每單位體積的克分子），b 爲水的濃

度；設 x, y, z 各爲在時間 t 分之末一木酮，二木酮，三木酮水解的分子數。故此時這體系中含有 $a-z$ 分子的三木酮，$z-y$ 分的二木酮，$y-x$ 分子的一木酮，與 $b-(x+y+z)$ 分子的水。水解的速度可完全從下列方程式決定之：

$$\frac{dx}{dt}=k_1(y-x)(b-x-y-z); \tag{19}$$

$$\frac{dy}{dt}=k_2(z-y)(b-x-y-z); \tag{20}$$

$$\frac{dz}{dt}=k_3(a-z)(b-x-y-z); \tag{21}$$

此中 k_1, k_2, k_3 代表各反應的速度係數（見第 20 節說明五）。

Geited 試驗過，$k_1=k_2=k_3$ 的假定。以(19)除(21)；(19)除(20)他得到

$$\frac{dz}{dy}=\frac{a-z}{z-y};\quad \frac{dz}{dx}=\frac{a-z}{y-x}。 \tag{22}$$

從第一個方程式，

$$\frac{dy}{dz}+y\frac{1}{a-z}=\frac{z}{a-z},$$

這可用一級線性方程式的方法求積分。注意 $a=1$，$z=0$，$y=0$ 故積分常數爲零。讀者可作爲第 125 節的習題而解之。其解爲

$$y=z+(a-z)\log(a-z) \tag{23}$$

今以(23)代入(22)中第二個方程式，整理各項，再照一級線性方程式解之。最後結果爲

$$x=z+(a-z)\log(a-z)-\frac{a-z}{z}\{\log(a-z)\}^2 \tag{24}$$

Geitel 於是給與 z 以任意數值（如從 0.1 至 1.0），從 (23) 與 (24) 計算 x 與 y 的相當值。欲實驗及其他的詳情參考其原文。

代表赤磷與黃磷互相轉變的微分方程式的研究 G. Lemoine 曾有一文載 Ann. Chim. Phys. [4] **27**, 289, 1872。關於此問題 R. Wegscheider 有一組論文見於 Monats, Chemie, **22**, 749, 1901; Zeit. Phys. Chem., **30**, 593, 1899; **34**, 290, 1900; **35**, 513, 1900; J. Wogrinz 著作見同書 **44**, 569, 1903; H. Kühl 著作見同書 **44**, 385, 1903。再可參閱 A. V. Harcourt 與 W. Esson 的，見 Phil. Trans., **156**, 193, 1866; A. C. Geitel 的，見 Journ. Prakt. Chem. [2], **55**, 429, 1897; **57**, 113, 1898; J. Walker 的，見 Proc. Roy. Soc. Edin., **22**, 22, 1898。這是有些奇怪的 Harcourt 與 Esson 的研究，沒有受到從聯立關係的反應的觀點上的更多注意。這樣簡單而不可少的微分方程式或者應該想到的罷。化學家事實上對於這種形式的反應所從事的遠過其他各種。充滿着特殊反應的研究的日子，確已過去，就因爲依照第 77 節刻板的速度方程式是走不通的。

§ 140. 常係數的聯立方程式(Simultaneous Equations with Constant Coefficients)

稍爲多看幾個聯立方程式的例題，在實用上很感便利的，因爲牠們在物理學的許多部分常常見到。一個質點在空間的運動可用三個微分方程式決定之，這些方程式決定此動點在任何時刻的位置。設如 X, Y, Z 各表作用於質量 m 的一個質點上的力 F 的三個分力，Newton 定律告訴我們（見第 130 節），

$$X=m\frac{d^2x}{dt^2};\quad Y=m\frac{d^2y}{dt^2};\quad Z=m\frac{d^2z}{dt^2},$$

欲以 x, y, z 表示爲 t 的函數，必須求這些方程式的積分。這組方程式的解中含有六個任意常數；牠們規定開始觀察時此動點關於 x, y, z 軸的位置與速度。

欲解一組聯立方程式，必須方程式的個數與自變數的個數相同。與普通代數學中聯立方程式的情形十分類似。解這些方程式的方法也與解代數學中聯立方程式類似。這裏可用的運算主要的是消去法與代入法，在計算的各階段中再以微分法與積分法補助之。應用運算記號 D，常可使工作簡捷。

例一　解 $\frac{dx}{dt}+ay=0$，$\frac{dy}{dt}+bx=0$。先求微分，再以 a 乘第二個方程式。相減可消去 y。寫 $ab=m^2$，則

$$x=C_1e^{mt}+C_2e^{-mt};\ y=C_2\sqrt{\frac{b}{a}}e^{-mt}-C_1\sqrt{\frac{b}{a}}e^{mt}。$$

我們亦可先消去 x 而求含有 y 的解，然後代入第二個方程式再求含有 x 的解。這樣結果中卽有四個常數，但其中的二個可以其餘二個表示之。卽四個常數中二個不是任意的與獨立的。不用積分法去從第一個變數求出其餘的變數是免去引入不必要的常數的最好辦法。任意常數的個數恆等於於各方程式的級之和。

例二　解 $\frac{dx}{dt}+y=3x$；$\frac{dy}{dt}-y=x$。求第一式的微分。從此結果減去各已知方程式，得 $(D^2-4D+4)x=0$。解之。$x=(C_1+C_2t)e^{2t}$。以此代入第一式卽得 $y=(C_1-C_2+C_2t)e^{2t}$。

例三 剛體平面內一個質點的轉動，可用方程式

$$\frac{dx}{dt}=\mu y;\qquad \frac{dy}{dt}=\mu x$$

代表之。欲解這組方程式，先求微分，第二式乘以 μ，再繼續演之。最後得 $x=C_1\cos\mu t+C_2\sin\mu t$；$y=C'_1\cos\mu t+C'_2\sin\mu t$。求這些常數間的關係，可將這些數值代入第一式得 $-\mu C_1\sin\mu t+\mu C_2\cos\mu t=\mu C'_1\cos\mu t+\mu C'_2\sin\mu t$，即 $C_1=-C'_2$；$C_2=C'_1$。

例四 解 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-n^2x$；$\dfrac{d^2y}{dt^2}=-n^2y$。

每個方程式可以如第 131 節 I 的方法分別求之，得

$x=C_1\cos nt+C_2\sin nt$；$y=C'_1\cos nt+C'_2\sin nt$。

消去 t 而得 $(C'_1x-C_1y)^2+(C'_2x-C_2y)^2=(C_1C'_2-C_2C'_1)^2$，

等等。結果代表一個質點受中心引力在橢圓路程上的運動。

例五 解 $\dfrac{dy}{dx}+3y-4z=5e^{5x}$；$\dfrac{dz}{dx}+y-2x=-3e^{5x}$

先求微分，解得 $\dfrac{dz}{dx}$；代入第二式。得二級線性方程式，

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=3e^{5x};\qquad \therefore\ y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}+\frac{3}{28}e^{-5x}。$$

再求第二式的微分，解得 $\dfrac{dy}{dx}$，代入第一式，並以求得的 y 的值代入。

可得 $z=C_1e^{x}+\dfrac{1}{4}C_2e^{-2x}-\dfrac{29}{28}e^{5x}$。

例六 R. Wegscheider (Zeit. Phys. Chem., **41**, 52, 1902) 曾經建議以方程式 $\dfrac{dx}{dt}=k_1(a-x-y)$；$\dfrac{dy}{dt}=k_2(a-x-y)(b-y)$ 代

表磺酯(Sulphonic ester)水解的速度。從此證

$$\int \frac{dx}{a-(1+bk)x+\frac{1}{2}bK^2x^2}=k_1t+c_{\circ}$$

示意： 以一個方程式除另一個；展開 e^{-Kx}；留下級數的最初三項，而略去其餘的。

例七　J. W. Mellor 與 L. Bradshaw(Zeit. Phys. Chem., **48**, 353, 1904)。解下列一組方程式，

$$\frac{dX}{dt}=k_1(a-X);\ \frac{du}{dt}=k_2(x-u);\ \frac{dv}{dt}=k_3(y-v);$$

假定 $X=x+y+u+v$; $v=k_4u$; 當 $t=0$ 時 $u=v=x=y=0$。證明，若以 b 代表 $\frac{2k_1k_2(k_4+1)}{k_2+k_3k_4}$，則

$$u=\frac{a}{2(k_4+1)}\left(1+\frac{b}{b-k_1}e^{-k_1t}+\frac{k^2}{b-k_1}e^{-bt}\right),$$

參閱第 125 節例五。

例八　J. J. Thomson (Conduction of Electricity through Gases, Cambridge, 86, 1903) 曾經證一個質量爲 m，電荷爲 e 的荷電質點，放在兩片間電位梯度(Potential gradient) 爲 E 的平行金屬板之間，當感應爲 H 的磁場垂直的作用於此板時，質點的運動方程式爲

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=Ee-He\frac{dy}{dt};\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=He\frac{dx}{dt},\tag{1}$$

這裏假定兩板間沒抵抗介質（如空氣之類）。解這些方程式，用最初條件，$x, y, \dot{x}, \dot{y}$ 爲零。令

$$p=\frac{dx}{dt}, \quad \therefore \ \frac{dp}{dt}=a-b\frac{dy}{dt}; \ \frac{d^2y}{dt^2}=bp, \quad \therefore \ \frac{d^2p}{dt}=-b^2p_{\circ}$$

故從第 132 節 I 再注意 $t=0$ 時 $\dot{x}=0$,

$$p=C_1\sin bt+C_2\cos bt;\ C_2=0;\ \frac{dx}{dt}=C_1\sin bt;$$

$$\therefore \quad x=\frac{C_1}{b}(1-\cos bt) \qquad (2)$$

這因 $t=0$ 時, $x=0$, 而積分常數等於 $\frac{C_1}{b}$。從(2)的第三個方程式與(1)的第二個方程式,

$$\frac{d^2y}{dt^2}=bC_1\sin bt; \quad \therefore \ \frac{dy}{dt}=-C_1\cos bt+C_1。$$

當 $\frac{dy}{dt}=0$, $t=0$ 時積分常數爲 C_1, 再求積分, 得 $y=\frac{C_1(bt-\sin bt)}{b}$, 因 $t=0$ 時 $y=0$。欲求常數 C_1 的值, 以從(2)與上述所得的 $\dot{x}$ 與 $\dot{y}$ 代入 (1)。求得 $C_1=\frac{a}{b}$, 結果若 $a=\frac{Em}{H^2e}$, $b=\frac{He}{m}$。

$$x=a(1-\cos bt); \quad y=a(bt-\sin bt), \qquad (3)$$

我們追蹤方程式(3)所代表的路程上質點的運動。當然我們可以消去 bt 而得結合 x, y 的方程式,但最好還是保留着 bt 因爲在計算時較爲簡單。當

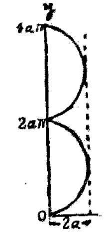
$$bt=0, \ \pi, \ 2\pi, \ 3\pi, \ 4\pi, \ 5\pi, \cdots\cdots;$$

$$x=0, \ 2a, \ 0, \ 2a, \ 0, \ 2a, \cdots\cdots;$$

$$y=0, \ a\pi, \ 2a\pi, \ 3a\pi, \ 4a\pi, \ 5a\pi, \cdots\cdots。$$

故 x 在 0 與 $2a$ 之間來回振動; y 也是週期的, 每隔時間 $\frac{2\pi}{b}$ 重複

一次。換言之，一個電子如前述的情形運動時的路程爲擺線(Cycloid)，此擺線是由半徑爲 a 的輪，沿 Oy 滾動時輪邊上一點所成的軌跡（圖一百五十三）。



圖一百五十三

例九　兩個容器，容積各爲 v_1 與 v_2，貯有相同的氣體，但壓力爲 p_1 與 p_2 各不相同。假定此兩器由毛細管連結則從一器流入另器的氣體之量比例於兩器中壓力平方之差又比例於時間。在 t 秒之末兩器中的壓力 x_1 與 x_2 各爲什麼？(Lorentz)在無限小的時間 dt 內流過毛細管的氣體之量 dQ，依假設爲

$$dQ=a(x_1{}^2-x_2{}^2)dt, \tag{4}$$

此中 a 爲常數。設單位體積的氣體之量爲 b，於是 bv 爲 v 體積的氣體在大氣壓力下之量。若壓力有 dx 的變化，則氣體之量 dQ 發生 bv_2dx 的變化，故

$$dQ=bv_2\frac{\partial x_2}{\partial t}dt;\qquad dQ=-bv_1\frac{\partial x_1}{\partial t}dt。\tag{5}$$

(5)式中一用正號，一用負號表示氣體是離開一個容器而入於另一個容器。溫度顯然假定不變。從(4)與(5)，

$$\frac{dx_1}{dt}=-\frac{a}{bv_1}(x_1{}^2-x_2{}^2);\qquad \frac{dx_2}{dt}=\frac{a}{bv_2}(x_1{}^2-x_2{}^2), \tag{6}$$

但氣體的總質量沒有變動，設如恆等於 ac，依 Boyle 定律，

$$\therefore\ v_1x_1+v_2x_2=c;\qquad \therefore\ c=p_1v_1+p_2v_2。\tag{7}$$

方程式(6)中第一式乘以 $x_2v_1v_2$，第二式乘以 $x_1v_1v_2$；從前者減去後者；除以 $x_2{}^2$；以 $x=\dfrac{x_1}{x_2}$ 代入，得

$$v_1v_2\frac{dx}{dt}=-\frac{ac}{b}(x^2-1)。$$

用通常的方法解上式，得

$$\frac{v_1v_2}{2}\log\frac{x+1}{x-1}=\frac{act}{b}+C;$$

$$即\quad \frac{1}{t}\log\frac{(x_1+x_2)(p_1-p_2)}{(x_1-x_2)(p_1+p_2)}=\frac{2ac}{bv_1v_2}。$$

從這方程式與(7)的第一式可以計算當任何時間 t 的 x_1 與 x_2。

例十　設兩個隣近的電路各有電流 C_1 與 C_2，則依照電磁感應論，

$$M\frac{dC_1}{dt}+L_2\frac{dC_2}{dt}+R_2C_2=E_2;\qquad M\frac{dC_2}{dt}+L_1\frac{dC_1}{dt}+R_1C_1=E_1,$$

此中 R_1, R_2 各爲此兩個電路的電阻；L_1, L_2 爲其自感應係數；E_1, E_2 爲其電動勢；M 爲互感應係數。所有係數都假定爲常數。

第一，先假定 $E_1=E_2=0$ 而解這些方程式。假定 $C_1=a\,e^{mt}$ 與 $C_2=b\,e^{mt}$ 適合於已知方程式。求 C_1 與 C_2 關於 t 的微分，而代入原方程式，得

$$aMm+b(L_2m+R_2)=0;\quad bMm+a(L_1m+R_1)=0。$$

從上二式消去 a,b 得

$$(L_1L_2-M^2)m^2+(L_1R_2+R_1L_2)m+R_1R_2=0。$$

從物理上的理由知感應係數 L_1, L_2 必大於 M。故上列二次方程式的根是負的實數（第 113 節）。

$$C_1=a_1\,e^{-m_1t},\ 或\ a_2\,e^{-m_2t};\quad C_2=b_1\,e^{-m_1t},\ 或\ b_2\,e^{-m_2t}。$$

從前列方程式，

$$a_1Mm_1+b_1L_2m_1+b_1R_2=0;\quad 或\ \frac{a_1}{b_1}=-\frac{L_2m_1+R_2}{Mm_1};$$

同理，$\dfrac{a_2}{b_2}=-\dfrac{Mm_2}{L_1m_2+R_1}$。

結合 C_1 與 C_2 的特殊解得所求之解爲

$$C_1=a_1\,e^{-m_1t}+a_2\,e^{-m_2t};\quad C_2=b_1\,e^{-m_1t}+b_2\,e^{-m_2t}。$$

再者，若 E_1 與 E_2 爲常數，則所求之解爲

$$C_1=\frac{E_1}{R_1}+a_1\,e^{-m_1t}+a_2\,e^{-m_2t};\quad C_2=\frac{E_2}{R_2}+b_1\,e^{-m_1t}+b_2\,e^{-m_2t}。$$

§ 141. 變係數的聯立方程式(Simultaneous Equations with Variable Coefficients)

一級聯立方程式的普遍形式爲

$$\left.\begin{aligned}P_1dx+Q_1dy+R_1dz=0;\\P_2dx+Q_2dy+R_2dz=0。\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

此中係數爲 x, y, z 的函數。這些方程式恆可表示爲下列形式,❶

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R},\tag{2}$$

這形式可作爲一級聯立方程式的標準形式看。在這些方程中若有一個僅含兩個變數即可用通常的方法解之，代入其他方程式而求出其餘的解，如下列例二。

當一組方程式的各個爲對稱時，恆可利用代數學中著名的連比定

❶ 證法見後，第 181 節中。

理❶而使解法簡便。按此定理，

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=\frac{ldx+mdy+ndz}{lP+mQ+nR}$$

$$=\frac{l'dx+m'dy+n'dz}{l'P+m'Q+n'R}=\cdots\cdots, \tag{3}$$

此中 $l, m, n, l', m', n'\cdots\cdots$ 可爲常數，亦可爲 x, y, z 的函數。因 $l, m, n\cdots\cdots$爲任意的，故可選取 $l, m, n\cdots\cdots$而使

$$lP+mQ+nR=0;\quad l'P+m'Q+n'R=0;\cdots\cdots \tag{4}$$

$$ldx+mdy+ndz=0;\cdots\cdots \tag{5}$$

x, y, z 間的關係可以適合(5)者，也適合(2)；若(4)爲完整微分方程式，設如等於 du，用積分法直接可以求得這組已知方程式的解，即

$$u=C_1 \tag{6}$$

此中 C_1 爲積分常數。

同樣若

$$l'dx+m'dy+n'dz=0$$

爲完整微分方程式，設如等於 dv，則

$$v=C_2 \tag{7}$$

爲第二個解。此二解必須在相獨立的。

例一 用上述的方法解方程式

❶ 證法很有趣味，設 $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=k$，則 $dx=Pk$, $dy=Qk$, $dz=Rk$；或 $ldx=lPk$, $mdy=mQk$, $ndz=nRk$。相加之，

得 $ldx+mdy+ndz=k(lP+mQ+nR)$，

$$\therefore\ \frac{ldx+mdy+ndz}{lP+mQ+nR}=k=\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}。$$

$$\frac{dx}{y-z}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{x-y}。$$

此中 $P=y-z$; $Q=z-x$; $R=x-y$。如(4)中所示，

$$y-z+z-x+x-y=0;\quad l=m=n=1;$$

又

$$x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)=0;\ l'=x,\ m'=y,\ n'=z。$$

前一組結合，可知

$$dx+dy+dz=0;\quad \therefore\ x+y+z=C_1;\tag{8}$$

後一組結合，可知

$$x\,dx+y\,dy+z\,dz=0;\quad \therefore\ x^2+y^2+z^2=C_2。\tag{9}$$

方程式(8)，(9)確定 x 與 y 為 z 的函數且含有兩個任意常數，即(8)，(9)為已知方程式的完全解的必要而充分的條件。方程式(8)，(9)所代表者是一羣圓。

例二　解 $\dfrac{dx}{y}=\dfrac{dy}{x}=\dfrac{dz}{z}$。

dx 與 dy 的關係式只含 x 與 y，故立即知其積分為 $y^2-x^2=C_1$，用此結果從 dy 與 dz 的關係式內消去 x。結果為

$$\frac{dz}{z}=\frac{dy}{\sqrt{y^2-C_1}};\quad \therefore\ y+\sqrt{y^2-C_1}=C_2z。$$

這兩個方程式含有兩個積分常數，故為本題的完全解。

例三　解 $\dfrac{dx}{mz-ny}=\dfrac{dy}{nx-lz}=\dfrac{dz}{ly-mx}$。

此中 $P=mz-ny$，$Q=nx-lz$，$R=ly-mx$，l，m，n 與 x，y，z 成為一組適合上述條件的乘數。題中各分數式又可等於

$$\frac{l\,dx+m\,dy+n\,dz}{l(mz-ny)+m(nx-lz)+n(ly-mx)};$$

又

$$\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{x(mz-ny)+y(nx-lz)+z(ly-mx)}。$$

於是

$$l\,dx+m\,dy+n\,dz=0;\ x\,dx+y\,dy+z\,dz=0。$$

本題的解爲

$$u=lx+my+nz=C_1;\ v=x^2+y^2+z^2=C_2。$$

例四 解 $\dfrac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\dfrac{dy}{2xy}=\dfrac{dz}{2xz}$;

故本題之分數等於

$$\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{x(x^2-y^2-z^2)+2xy^2+2xz^2}。$$

亦得化爲 $\dfrac{dz}{z}=\dfrac{2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz}{x^2+y^2+z^2}$;

$\therefore$ $\log(x^2+y^2+z^2)=\log z+\log C_2$; 結果 $x^2+y^2+z^2=C_2z$ 爲所求第二個解。

這是很明顯的，方程式(5)必須可求積分，然後這組已知聯立方程式可解。**可積的準則**(The criterion of integrability)或試驗含有三個以上變數的方程式的完整的方法是易容求得的。例如，設

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0; \quad \therefore du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz。\quad (10)$$

(10)中第二式顯然是完整的，即等於(10)中第一式，因爲牠們同是從 $u=C_1$ 求出的。故此欲使(10)中第一式化爲如第二式那樣的完整形式，

必有某些條件存在。如上所示，必有一個 x, y, z 的函數，如 μ 可使

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mu P;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\mu Q;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\mu R。\tag{11}$$

讀者可求方程式(11)的微係數，其第一式關於 y 與 z；第二式關於 z 與 x；第三式關於 x 與 y，結果可得

$$\left.\begin{aligned}
&P\frac{\partial u}{\partial y}+\mu\frac{\partial P}{\partial y}=Q\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial Q}{\partial x};\\
\therefore\quad &\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=Q\frac{\partial u}{\partial x}-P\frac{\partial u}{\partial y};\\
&Q\frac{\partial u}{\partial z}+\mu\frac{\partial Q}{\partial z}=R\frac{\partial u}{\partial y}+\mu\frac{\partial R}{\partial y};\\
\therefore\quad &\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)=R\frac{\partial u}{\partial y}-Q\frac{\partial u}{\partial z};\\
&R\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial R}{\partial x}=P\frac{\partial u}{\partial z}+\mu\frac{\partial P}{\partial z};\\
\therefore\quad &\mu\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)=P\frac{\partial u}{\partial z}-R\frac{\partial u}{\partial x}。
\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

各以 R, P, Q 按次乘 (12) 中三個方程式而總加之。結果卽得，欲使 (10) 中第一方程式可有 $u=C$ 的形式之積分時係數 P, Q, R 間所必須具有的關係。事實上，我們必須

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0。$$

若方程式(10)是不完整的，可用一個積分因數使之完整。

例一　已知 $(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz=0$，求證其適合於可求積分的條件。欲求這種完整方程式的積分，可先暫時假定 z 爲常數，而積分之。如是可得

$$(y+z)dx+(z+x)dy=0; \quad (y+z)(z+x)=C'。 \qquad (13)$$

積分常數中顯然含有變數 z; 令 $C'_1=f(z)$。欲決定此函數的形式，求 $(y+z)(z+x)=f(z)$ 關於 x, y, z 的微分，以結果與已知方程式比較之。得

$$(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz+2z\,dz=\frac{\partial f(z)}{\partial z}\,dz;$$

$$\therefore \quad 2z\,dz-df(z)=0; \quad 即\ f(z)=z^2+C_2;$$

$$\therefore \quad (y+z)(z+x)=z^2+C_2; \ 即\ xy+yz+zx=C_2,$$

爲所求的解。在這特例中,若乘開已知方程式求之,可更簡捷而所得結果相同,如

$$(x\,dy+y\,dx)+(y\,dz+z\,dy)+(z\,dx+x\,dz)=0;$$

$$\therefore \quad xy+yz+zx=C_2。$$

例二　求 $y\,zdx+x\,zdy+x\,ydz=0$ 的積分。

除以 xyz 得 $\dfrac{dx}{x}+\dfrac{dy}{y}+\dfrac{dz}{z}=0;$

$$\therefore \quad \log x+\log y+\log z=\log C;$$

$$\therefore \quad xyz=C。$$

例三　求 $z\,ydx-z\,xdy-y^2dz=0$。

答: $\dfrac{x}{y}-\log z=C$。

§ 142. 偏微分方程式 (Partial Differential Equations)

求含有三個以上變數的函數的微分而所得的方程式計有兩種:

(1)　方程式中只有一個自變數,如

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=S\,dt,$$

此中含有四個變數——三個因變數一個自變數。這些稱爲**全微分方程式**(Total differential equations)。

(2)　方程式中只有一個因變數,其餘都是自變數,如

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}+R\frac{\partial z}{\partial t}=0,$$

此中 z 爲因變數, x, y, t 爲自變數。這些方程式稱爲**偏微分方程式**(Partial differential equations)。前一類的方程式是不多,而這第二類卻很普通。物理上的意義,微分方程式代表當每個自變數有無限小的變化時,因變數與自變數間的關係。

在研究普通微分方程式時,我們終是假定已知的方程式是從原方程式消去常數而得。解方程式卽是求出這原始的方程式。但是,偏微分方程式也可從消去變數的任意函數而得,正與從消去常數而得,一樣可能。例如,設

$$u=f(ax^3+by^3),$$

爲 x 與 y 的任意函數,如 Euler 定理(第 23 節)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3af'(ax^3+by^3);\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=3bf'(ax^3+by^3);$$

$$\therefore\quad b\frac{\partial u}{\partial x}-a\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

此式中任意函數的形式已不見了。

例一　設 $u=f(at+x)$, 證 $\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$。

這裏$\dfrac{\partial v}{\partial t}=af'(at+x)$；　$\dfrac{\partial v}{\partial x}=f'(at+x)$；　$\therefore\ \dfrac{\partial v}{\partial t}=a\dfrac{\partial v}{\partial x}$。

同樣可證第二式。

試以 $f(at+x)$ 取特殊形式如 $f(at+x)=at+x$，或 $f(at+x)=\sin(at+x)$等而覆證之。

例二　從熱力學方程式 $Q=f\left(\dfrac{p}{\rho}\right)-\dfrac{p}{a\rho}\log p$，消去任意函數。

$$\therefore\quad \frac{\partial Q}{\partial\rho}=-\frac{p}{\rho^2}f'\left(\frac{p}{\rho}\right)+\frac{p}{a\rho^2}\log p;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p}=\frac{1}{\rho}f'\left(\frac{p}{\rho}\right)-\frac{1}{a\rho}\log p-\frac{1}{a\rho}。$$

$$\therefore\quad p\frac{\partial Q}{\partial p}+\rho\frac{\partial Q}{\partial\rho}=-\frac{p}{a\rho}。$$

例三　我們記得解已知微分方程式的目的是求原始方程式，從此而消去常數或任意函數卽能得出已知方程式者，證 $z=f_1(x)+f_2(y)$爲方程式$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$ 的解。

示意：　消去任意函數。

例四　證 $z=f_1(x+at)+f_2(x-at)$爲 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 的解。

在普通微分方程式中恆加一個積分常數於其積分之上，但在偏微分方程式中其積分上須加一個任意函數。若積分中待消去的任意常數的個數等於自變數的個數，則由此而得的微分方程式爲一級；若多於自變數的個數則爲高級。

設 $u=f(x,y)$則有二個一級偏微係數，三個二級的，……，如

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y};\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y};\cdots\cdots$$

§ 143. 何謂偏微分方程式的解?(What is the Solutions of a Partial Differential Equations?)

普通微分方程式的解有兩種，即完全積分與奇異解。特殊解不過是完全積分的變種。從偏微分方程式可得三種解，特殊還是完全積分的變種。這三種如下例所示。

空間的一個球的方程式爲

$$x^2+y^2+z^2=r^2, \tag{1}$$

此中球的中心爲坐標平面的原點，r 爲球的半徑。若球的中心在 xy 平面上任意點(a, b)則上列方程式變爲

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=r^2。 \tag{2}$$

當 a, b 爲任意常數時，每個或兩個都可定任何指定的數值，方程(2)可以代表兩組無限多的球，半徑都是 r。這兩組之一中任一球的中心必在 xy 平面上某一點，這兩組稱爲**雙無限組**(A double infinite system)。

求(2)關於 x 與 y 的微分。

$$x-a+z\frac{\partial z}{\partial x}=0;\quad y-b+z\frac{\partial z}{\partial x}=0。 \tag{3}$$

以 $x-a$, $y-b$ 的值代入(2)，得

$$z^2\left\{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1\right\}=r^2。 \tag{4}$$

故方程式(2)爲(4)的**完全積分**(The complete integral)。(2)中 a, b 取任何指定的特殊數值時即爲(4)的**特殊解**(The particular solution),

如

$$(x-1)^2+(y-79)^2+z^2=r^2。 \tag{5}$$

若求(2)關於 a 與 b 的微分,

$$\frac{\partial}{\partial a}\{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\}=\frac{\partial r^2}{\partial a};$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2\}=\frac{\partial r^2}{\partial b};$$

卽 $$x-a=0; \quad y-b=0。$$

從(2)消去 a 與 b, 得

$$z=\pm r。 \tag{6}$$

此結果能適合方程式(4)但與特殊解不同，並不包括在完全積分(2)之內。微分方程式這樣的解稱爲奇異解(Singular solution)。

在幾何上，此奇異解代表與方程式(2)所表的球相切的兩個平面。故此奇異解是完全積分所表的球之包絡面(Envelope)。圖九十七中若 AB 代表 xy 平面的截線(Section)則 CD 與 EF 代表奇異解所表包絡面的截線。

若一個常數是另一常數的某個函數,設如

$$a=b,$$

(2)可寫爲

$$(x-a)^2+(y-a)^2+z^2=r^2。 \tag{7}$$

求關於 a 的微分,得

$$a=\frac{1}{2}(x+y)。$$

從(7)消去 a。結果方程式爲

$$x^2+y^2+2z^2-2xy=2r^2,$$

此式稱爲(4)的普遍積分(General integral)。

在幾何上，此普遍積分代表一羣中心在 $x=y$ 線上，半徑爲 r 的球之管狀包絡面。$x=y$ 即爲此管狀包絡面的軸。普遍積分適合 (4)，且亦包括在完全積分之內。

不取 $a=b$ 爲結合 a，b 的函數之特殊形式，我們可取任何其他的關係，如 $a=\frac{1}{2}b$。普遍積分所表的包絡面將爲包圍着中心在 $x=\frac{1}{2}y$ 線上，半徑爲 r 的球之圓管。我們若取 $a^2-b^2=1$，則包絡面爲以雙曲線 $x^2-y^2=1$ 爲軸之圓管。

特殊解是從完全解所表的雙無限組中選出的一個特殊面。普遍積分是從完全積分所表的面中選出一羣特殊面的包絡面。奇異解是完全積分所表一切面的包絡面。❶

照理論講，一個方程式必須完全積分，普通積分，與奇異解都求得，方算解得完全。在理想的情形中，完全積分最先決定；消去任意常數如上所示即得奇異解；消去 a 與 $f(a)$ 而決定普遍積分。

在實用上，完全積分恆非進攻的直接目標。普通求出許多適合於問題的條件的特殊解，然後結合這些解而使結果非但適合於已知條件並適合於微分方程式就够了。

自然，一個微分方程式的完全解可適用於此方程式所代表任何物

❶ G. B. Airy 所著 An Elementary Treatise on Partial Differential Equations (London, 1873) 小册關於偏微分方程式解的幾何解釋是値得一讀的。

理變化。這種解雖可很普遍但不切於實用。代表任何特殊變化必須引入某種限制，稱爲**極限條件** (Limiting conditions)。這些條件可以除去普遍解中某些不可能的情形。❶ 在第 117 節末關於代數方程式的解，我們已經遇見過這種觀念。

§ 144. 一級線性偏微分方程式 (The Linear Partial Equation of the First Order)

設
$$u=C_1, \tag{1}$$
爲下列一次一級線性偏微分方程式的解，
$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R, \tag{2}$$
此中 P, Q, R 爲 x, y, z 的函數；C_1 爲常數。今求(1)關於 x 與 y 的微分如第 14 節 IX 或第 22 節 II 例五。可得
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0。 \tag{3}$$
今從一個方程式解 $\frac{\partial z}{\partial x}$；另一個方程式解 $\frac{\partial z}{\partial y}$，以此結果代入(2)，得
$$P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0。 \tag{4}$$
再者，設(1)爲下方程式的一個積分，
$$\frac{\partial x}{P}=\frac{\partial y}{Q}=\frac{\partial z}{R}。 \tag{5}$$
u 關於 x, y, z 的全微分爲

❶ 例見第八章末；第 146 節及其他處所亦可見到。

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=0;\tag{6}$$

因 $dx=kP$, $dy=kQ$, $dz=kR$（第 141 節註）故

$$\frac{\partial u}{\partial x}P+\frac{\partial u}{\partial y}Q+\frac{\partial u}{\partial z}R=0,\tag{7}$$

這是(4)中所示的。這是說(2)的每個積分可適合(5)；逆之亦然。所以(2)的普遍積分卽爲(5)的普遍積分。

剛才關於 $u=C_1$ 所證者也適用於第 141 節(7)中的 $v=C_2$。所以我們若能在 u, v 之間成立一種關係如

$$u=f(v)\qquad 或\quad f(u,v)=0,\tag{8}$$

這任意函數也是已知方程式的解。這稱爲線性偏微分方程式的 Lagrange 的解；方程式(5)稱爲 Lagrange 的輔方程式。

我們現在可以證明從(8)的形式的任何方程式能够得出一個一定的線性偏微分方程式如形式(2)。設如求(8)的第一式關於每個自變數 x 與 y 的微分，可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=f'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=f'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)。$$

相除，而整理各項，卽能失去 $f'(v)$ 與乘有 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 的項；[1] 而得

$$\frac{dx}{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}}+\frac{dy}{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}}$$

[1] 讀者學過第九章，卽能將分母寫爲耶各式(Jacobian)。

$$=\frac{dz}{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}。\tag{9}$$

此方程式與 Lagrange 方程式

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R};\quad 與\quad P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R,$$

形式相同；故 $u=f(v)$ 若為(2)的解，則亦為(5)的解。

例一　解 E. Clapeyron 方程式 (Journ. de l'Ecole Roy. Polyt., **14**, 153, 1834)。

$$p\frac{\partial Q}{\partial p}+\rho\frac{\partial Q}{\partial \rho}=-\frac{p}{a\rho},\tag{10}$$

這在熱力學上很有名的。

這裏，$P=p$，$Q=\rho$，$R=-\frac{p}{a\rho}$，Lagrange 的輔方程式的形式為

$$\frac{\partial p}{p}=\frac{\partial \rho}{\rho}=\frac{\partial Q}{\frac{p}{a\rho}}。\tag{11}$$

從第一、第二兩節所成的方程式可得 $\log p-\log\rho=\log C_1$； 結果為 $\frac{p}{\rho}=C_1$。從第一、第三兩節所成的方程式，得

$$dQ=-\frac{p}{a\rho}\cdot\frac{\partial p}{p};\quad \therefore\quad Q=-\frac{p}{a\rho}\log p+C_2。$$

這是(10)的第二個解。所以完全解為

$$Q=-\frac{p}{a\rho}\log p+f\left(\frac{p}{\rho}\right)。$$

例二　解 $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$。

這裏 $P=y$, $Q=-x$, $R=0$, $\therefore\ \dfrac{dx}{y}=\dfrac{dy}{-x}=\dfrac{dz}{0}$;

$$\therefore\quad dz=0;\quad x\,dx+y\,dy=0。$$

$$\therefore\quad x^2+y^2=C_1;\ z=C_2;\quad 或\ z=f(x^2+y^2)。$$

例三　解 $xz\dfrac{\partial z}{\partial x}+yz\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy$。

這裏 $P=\dfrac{1}{y}$, $Q=\dfrac{1}{x}$, $R=\dfrac{1}{z}$。故輔方程式爲 $y\,dx=x\,dy=z\,dz$。從第一、第二節得 $\dfrac{y}{x}=C_1$。用乘數 $l=y$; $m=x$; $n=-2z$, 如第 141 節(4)可得

$$l\,dx+m\,dy+n\,dz=0;\quad \therefore\ y\,dx+x\,dy=2z\,dz;\quad 或\ z^2-xy=C_2,$$

這是所求的第二個解。故完全解爲 $z^2=xy+f\left(\dfrac{x}{y}\right)$; 或 $\phi\left(z^2-xy, \dfrac{x}{y}\right)=0$。

例四　Moseley(Phil. Mag.[4], **37**, 370, 1869) 以在某條件下的**不全流體**(Imperfect fluid)的運動表示爲

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=mz;\quad \therefore\ z=e^{my}f(x-y)。$$

§ 145. 幾種特別形式 (Some Special Forms)

欲知 Charpit 與 G. Monge 的巧妙的普遍方法，讀者必須參考專書，如 A. R. Forsyth 的 A Treatise on Differential Equations, London, 1903。有幾種從普遍方程式得來的特別的變形可有捷法解之。

I. **變數不直接出現者。** 普遍形式爲

$$f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0。 \tag{I}$$

其解爲

$$z=ax+by+c,$$

但須 a 與 b 適合於關係式

$$f(a,b)=0; \quad 或 \quad b=f(a)。$$

故完全積分爲

$$z=ax+yf(a)+C。 \tag{1}$$

例一 若 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=m^2$,證 $z=ax+by+C'$ 但 $a^2+b^2=m^2$。

其解爲 $z=ax+y\sqrt{m^2-a^2}+C$。求普遍積分,可令 $C=f(a)$。從兩個方程式

$$z=ax+\sqrt{m^2-a^2}\,y+f(a); \quad 與 \quad x-a(m^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}y+f'(a)=0,$$

中消去 a。此中第二式是求第一式關於 a 的微分而得。

例二 解 $z_xz_y=1$。

答: $ax+\frac{y}{a}+C=z$。

示意: $ab=1$, 等等。

注意有時爲便利計寫 $p=\frac{\partial z}{\partial x}=z_x$; $q=\frac{\partial z}{\partial y}=z_y$。

例三 解 $a(z_x+z_y)$

有時如本題,方程式中卻發現變數的,但用變換變數的方法可使 x

的函數與 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 相聯合，y 的函數與 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 相聯合。已知方程式可寫為 $\frac{ap}{z}+\frac{aq}{z}=1$。令 $\frac{dz}{z}=dZ$；　$\frac{dy}{a}=dY$；　$\frac{dx}{a}=dX$，故 $\frac{\partial Z}{\partial Y}+\frac{\partial Z}{\partial X}=1$，這是所需的形式。

答：　$Z=aX+Y(1-a)+C$；

此中 $Z=\log z$；$Y=\frac{y}{a}$；　$X=\frac{x}{a}$；等等。

例四　解 $x^2u^2{}_x+y^2u^2{}_y=z^2$。

令 $X=\log x$，$Y=\log y$，$Z=\log z$，如上題進行。

答：　$z=Cx^a y^{\sqrt{1-a^2}}$

若用這裏的方法不能除去因變數 z，亦許那方程式是屬於下一類的：——

II.　不見自變數 x 與 y 者。普遍形式為

$$f\left(z,\frac{\partial z}{\partial x},\quad\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0。\tag{II}$$

假定

$$\frac{\partial z}{\partial y}=a\frac{\partial z}{\partial x}$$

為解，試驗之。設 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 為從 (II) 所得的 z 的某函數，如 $u_x=\phi(z)$。以這些代入

$$dz=z_xdx+z_ydy。$$

如是我們可得一個普通微分方程式而為易於求積分者。

$$dz=\phi(z)dx+a\phi(z)dy,\quad \therefore\ x+ay=\int\frac{dz}{\phi(z)}+C。\tag{2}$$

例一　解 $z_x^2z+z_y^2=4$。

這裏令 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=a\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\therefore\ (a^2+z)\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2=4$。$\sqrt{a^2+z}\ \dfrac{dz}{dx}=2$，

$$\therefore\ x+ay+C=\int\frac{1}{2}\ (a^2+z)^{\frac{1}{2}}dz=\frac{1}{3}\ (a^2+z)^{\frac{3}{2}}。$$

答：　$2(a^2+z)^3=3(x+ay+C)^2$。

例二　解 $p(1+q^2)=q(z-a)$。

答：　$\dfrac{4}{b}(z-a)=(bx+y+C)^2+4$。

示意：　令 $q=bp$；等等。積分常數與其他常數，綜括以 C 表之。

例三　Moseley (Phil. Mag., [4], **37**, 370, 1869) 的不全流體的運動方程式為

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=mz,$$

令 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=a\dfrac{\partial z}{\partial x}$；　$\therefore\ \dfrac{\partial z}{\partial x}+a\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=mz$；　$\therefore\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{mz}{1+a}$；

$$\therefore\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{amz}{1+a}。$$

從 (2)，$dz=\dfrac{mz}{1+a}dx+\dfrac{amz}{1+a}dy$；$\dfrac{dz}{z}=\dfrac{m}{1+a}(dx+a\ dy)$；

$$\therefore\ \log z=\frac{m}{1+a}(x+ay)+C。$$

若 z 不直接在方程式中出現，我們可將方程式參照下列形式。

III.　z 不直接出現於方程式中，但 x 與 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 可能 y 與 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 分

離者。主要的形式爲

$$f_1\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right)=f_2\left(y, \frac{\partial z}{\partial y}\right)。 \tag{III}$$

假定一個試驗的解,爲每邊各等於一個任意常數 a 而使 z_x 與 z_y 取下列形式,

$$z_x=\psi_1((x, a); \quad z_y=\psi_2(y, a); \quad dz=z_x\,dx+z_y\,dy,$$

然後假定其形式爲

$$z=\int \psi_1(x, a)dx+\int\psi_2(y, a)dy+C。 \tag{3}$$

例一　解 $z_y-z_x+x-y=0$。

令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}-x=\dfrac{\partial z}{\partial y}-y=a$。寫此爲 $z_x=x+a$; $z_y=y+a$;

$$\therefore \quad dz=(x+a)dx+(y+a)dy,$$

$$z=\frac{1}{2}(x+a)^2+\frac{1}{2}(y+a)^2+C。$$

例二　如 S. D. Poisson(Ann. de Chim., **23**, 337, 1823) 的假定含在一個質量的氣體內的熱量 Q, 視壓力 p 與其密度 ρ 而定, 故 $Q=f(p, \rho)$。依有名的氣體方程式, $p=R\rho(1+\alpha\theta)$; 若 p 爲常數,則

$$\frac{d\rho}{d\theta}=-\frac{R\rho}{1+\alpha\theta};$$

又 ρ 爲常數,則

$$\frac{dp}{d\theta}=\frac{R\rho}{1+\alpha\theta}。$$

從第 27 節(10)與(7)在定壓力與定體積(卽 ρ 爲常數)時比熱可寫爲

$$C_p=\left(\frac{\partial Q}{\partial \rho}\right)_p\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)_p=-\left(\frac{\partial Q}{\partial \rho}\right)_p\frac{R\rho}{1+\alpha\theta};$$

$$C_v=\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_v\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_v=\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_v\frac{Rp}{1+\alpha\theta}。$$

如 Laplace 與 Poisson 假定 $\gamma=\frac{C_p}{C_v}$ 爲常數，上二式相除，可得

$$\gamma p\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_\rho+\rho\left(\frac{\partial Q}{\partial \rho}\right)_p=0。$$

此微分方程式屬於(3)。令

$$\frac{\partial Q}{\partial p}=\frac{a}{\gamma p};\quad \frac{\partial Q}{\partial \rho}=-\frac{a}{\rho};$$

$$\therefore\quad dQ=a\left(\frac{1}{\gamma}\frac{dp}{p}-\frac{d\rho}{\rho}\right);\quad 即\quad Q=\frac{a}{\gamma}\log p-a\log\rho+C。$$

設 ϕ 爲一個獨立函數，

$$Q=\phi\left(\frac{p^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho}\right)\ 或\ \frac{p^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho}=\psi(Q),$$

此中 ψ 爲 ϕ 的反函數。若假定在任何變化中任何氣體所含的熱量不變，$\psi(Q)$爲常數。換言之，

$$\frac{p^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho}=常數;\quad 即\quad pv^\gamma=常數,$$

此因體積 v 是隨密度 ρ 而反變的。這關係在第 89 節已用別的方法求到過。

例三　E. Clapeyron 的方程式前已在第 144 節例一中討論過了，也可用分離變數法解之。此方程式是

$$p\frac{\partial Q}{\partial p}+\rho\frac{\partial Q}{\partial \rho}=-\frac{p}{a\rho};$$

從 Boyle 定律知 $p=c\rho$，代入上式，可化爲

$$\frac{\partial Q}{\partial p}+\frac{1}{c}\,\frac{\partial Q}{\partial p}=-\frac{c}{ap};$$

$$\therefore\quad \frac{\partial Q}{\partial p}+\frac{c}{ap}=-\frac{1}{c}\,\frac{\partial Q}{\partial \rho}。$$

設 A 爲任意常數，則

$$\frac{\partial Q}{\partial p}+\frac{c}{ap}=A;\quad -\frac{1}{c}\,\frac{\partial Q}{\partial \rho}=A;$$

$$\therefore\quad \frac{\partial Q}{\partial p}=A-\frac{c}{ap};\quad \frac{\partial Q}{\partial \rho}=-Ac。$$

代入(3)而求積分得

$$Q=Ap-\frac{c}{a}\log p-Ac\rho+C_1。$$

以 $c=\dfrac{p}{\rho}$ 代入，則得寫爲

$$Q=Ap-\frac{p}{a\rho}\log p-Ap+C_1$$

$$=-\frac{p}{a\rho}\log p+f\left(\frac{p}{\rho}\right)。$$

當然若知 p 與 q 的關係卽能求 $f\left(\dfrac{p}{\rho}\right)$ 的值。C. Holtzmann 假定此函數等於 $A+BT$，此中 A 與 B 爲常數，T 的絕對溫度。

IV. **類似於克氏(Clairaut)方程式者。**普遍形式爲

$$z=\frac{\partial z}{\partial x}x+\frac{\partial z}{\partial y}y+f\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\tag{IV}$$

其完全解爲

$$z=ax+by+f(a,b)。\tag{4}$$

例一　解 $z=z_x x+z_y y+z_x z_y$。

答：　$z=ax+by+ab$；奇異解 $z=-xy$。

例二　解 $z=z_x x+z_y y+r\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$。

答：　$z=ax+by+r\sqrt{1+a^2+b^2}$。

奇異解 $x^2+y^2+z^2=r^2$。故奇異解爲一個球的方程式，r 爲常數。

例三　解 $z=z_x x+z_y y-n\sqrt[n]{z_x z_y}$。

答：　$z=ax+by-n\sqrt[n]{ab}$。

奇異解爲 $z=(2-n)(xy)^{\frac{1}{2-n}}$。

求偏微分方程式的解沒有普遍的方法，只能就各種特別的情形求其積分。這方面最大的進展於線性方程式最多。線性方程式在物理算學中常能遇到。

§ 146. 二級線性偏微分方程式 (The Linear Partial Equation of the Second Order)

設有彈性介質（氣體）封閉在截面爲單位面積的管內；設 E 爲此氣體的壓縮彈性係數；力 p 可使 dx 厚的一層氣體發生壓縮 du，則因

應力(Stress)＝彈性(Elasticity)×應變(Strain)。

如有名的 Hooke 定律，可得

$$p=E\frac{du}{dx}。\tag{1}$$

再，此層 dx 厚的氣體受其兩邊壓力之差的作用可向前或向後移動。設此層兩邊的壓力之差爲 dp。求(1)的微分即得

$$dp = E\,\frac{d^2u}{dx}。\tag{2}$$

設 ρ 爲這層 dx 的氣體的密度，m 爲其質量，

$$m = \rho\ dx。$$

今從動力學知推動氣體的壓力可用質量與加速度之積量之，

即
$$dp = m\frac{d^2u}{dt^2} = \rho\ \frac{d^2u}{dt^2}dx。$$

這一層氣體的運動方程式爲

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{E}{\rho}\ \frac{d^2u}{dt^2}。\tag{3}$$

這個線性齊次偏微分方程式代表緊張之弦的運動，風琴小管中空氣的小振動，深淺適度的海中波浪的運動等。我們現在求此方程式的積分。

線性偏微分方程式與線性普通微分方程式很有類似之處。幾乎可以說，每個含有兩個變數的普通微分方程式與同形式的偏微分方程式相類似。解的各部都相似，但不同之點是：

第一，一個普通微分方程式解中的積分常數換爲一個變數或幾個變數的函數。

第二，普通微分方程式解之爲指數形式 $C\,e^{mx}$ 者換爲形式 $e^{mx\frac{\partial}{\partial y}}\phi(y)$。

此式 $e^{mx\frac{\partial}{\partial y}}\phi(y)$ 稱爲戴氏(Taylor)定理的記號形式。應用運算記號 D 代表 $\frac{\partial}{\partial x}$，已經有許多練習了，我們現在再用 D' 代表 $\frac{\partial}{\partial y}$。

由戴氏定理，

$$\phi(y+mx) = \phi(y) + mx\frac{\partial\phi(y)}{\partial y} + \frac{m^2x^2}{\underline{|2}}\cdot\frac{\partial^2\phi(y)}{\partial y^2} + \cdots\cdots,$$

此中 x 作爲常數。

$$\therefore\quad \phi(y+mx)=\left(1+mx\frac{\partial}{\partial y}+\frac{m^2x^2}{\underline{|2}}\frac{\partial}{\partial y^2}+\cdots\cdots\right)\phi(y)。$$

括號內各項顯然是指數級數等於 $e^{mx\frac{\partial}{\partial y}}$，以 D' 代 $\frac{\partial}{\partial y}$，則爲

$$\phi(y+mx)=e^{mxD'}\phi(y)。\tag{4}$$

令 $a^2=\frac{E}{\rho}$ 改變(3)爲

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\tag{5}$$

此式有時稱爲 **d' Alembert 方程式**。不像普通微分方程式中以 $y=e^{mx}$，而假定試驗的解爲

$$u=f(x+mt)。\tag{6}$$

求(6)關於 t 與 x 的微係數，得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=mf'(x+mt)；\ \frac{\partial u}{\partial x}=f'(x+mt)；\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=mf''(x+mt)；$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=m^2f''(x+mt)；\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(x+mt)。$$

以上式代入(5)約去 $f''(x+mt)$ 得輔方程式

$$m^2-a^2=0。\tag{7}$$

設爲此方程式的根，$f''(x+mt)=0$ 爲補函數的一部份。因(7)的根爲 $\pm a$，故

$$u=e^{-atD'}f_1(x)+e^{atD'}f_2(x)。\tag{8}$$

從(4)與(6)，故

$$u=f_1(x-at)+f_2(x+at)。\tag{9}$$

因 $+a$ 與 $-a$ 爲輔方程式(7)的根,故可寫(5)爲

$$(D+aD')(D-aD')u=0。\tag{10}$$

例一　若 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，證 $z=f_1(y+x)+f_2(y-x)$。

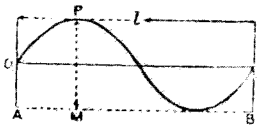
例二　若 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+4\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$,

證 $z=f_1(y+2x)+f_2(y+2x)$。

例三　若 $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial z^2}{\partial y^2}=0$,

證 $z=f_1(2y-x)+f_2(y+2x)$。

若沒有與一些特殊問題有關的材料,對於(9)中不定函數 $f_1(x+at)$ 與 $f_2(x-at)$ 我們說不出什麼來。考察豎琴上一條振動的弦，設使其振動之後不再加什麼力上去。令此弦在張力 T 之下其長爲 $x=l=AB$（圖一百五十四）；每單位長的質量爲 m。欲使免去根號發現，運動方程式(5)中以 a^2 代 $\dfrac{T}{m}$。再令 $u=PM$ 代表弦的任何部份的位移,令弦的一端的縱坐標爲零。於是時間 t 取定任何的值,弦的兩端終是固定,可有極限條件 $x=0$ 時 $u=0$; $x=l$ 時 $u=0$。



圖一百五十四

$$\therefore\quad f_1(at)+f_2(-at)=0;\quad f_1(l+at)+f_2(l-at)=0,\tag{11}$$

爲 d' Alembert 方程式 (5)的解。從第一式得

$$f_1(at)=-f_2(-at)。\tag{12}$$

但 at 可取任何的值。爲意義確定起見，假設令(11)的第二式中的 at

爲 $l+at$，則從(12)

$$f_1(at+2l)=f_1(at)。\tag{13}$$

此解的物理意義爲當 $f_1(\cdots\cdots)$ 每增加或每減少 $2l$ 時，函數的值不變。所以當 at 每增加 $2l$ 卽當 t 每增加 $\frac{2l}{a}$ 時弦的相當部份之位移相同，換言之，在時間 $\frac{2l}{a}$ 內，弦至少作一個完全振動。$4l$，$6l\cdots\cdots$ 等可以類推。故此結論爲 d' Alembert 方程式代表無限的週期運動，其振動週期爲

$$at=2l;\quad 卽\ t=\frac{2l}{a};\quad 卽\ t=2l\sqrt{\frac{m}{T}}。\tag{14}$$

數値的例　鋼琴上中間 C 的振動爲每秒 264 次卽，每次 $\frac{1}{264}$ 秒。設弦長 $2\frac{1}{2}$ 呎，每呎弦重 0.002 磅，求其張力 T，以磅爲單位。質量爲重量被除於 $g=32$。故此

$$t=2l\sqrt{\frac{w}{32T}};\quad \frac{1}{264}=5\sqrt{\frac{0.002}{32\times T}};\qquad \therefore\ T=108\ 磅。$$

方程式(5)或(9)代表經過管內的空氣波動，或向原點而來，或離原點而去。單獨考察離原而去的波動，

$$u=f(x+at)$$

是微分方程式的解。求關於 x 與關於 t 的微係數，我們已在第 142 節例一中見到，

$$\frac{du}{dx}=f(x+at);\qquad \frac{du}{dt}=af'(x+at),$$

第一式代表膨脹率或收縮率；第二式代表質點速度。相除得波的速度，

$$\frac{dx}{dt}=a;\qquad 或\qquad V=\sqrt{\frac{E}{\rho}};$$

此爲音速度的 Newton 公式(Newton's Principia, ii. Prob. 43−50)。Newton 用 E 代表等溫彈性 p；Laplace 用 E 代表絕熱彈性 γp(見第 41 節末)。

方程式(7)的兩個根若相等而爲 a 時從第 131 節 2，知

$$(D-a)^2z=0$$

的解爲

$$z=e^{mx}(C_1x+C_2),$$

由於形式的類似，

$$(D-aD')^2z=0$$

的解爲

$$z=e^{mxD'}\{xf_1(y)+f_2(y)\},$$

或 $$z=xf_1(y+ax)+f_2(y+ax)。\tag{15}$$

例一　解$(D^3-D^2D'-DD'^2+D'^3)z=0$。

答：　$z=xf_1(y-x)+f_2(y-x)+f_3(y+x)$。

例二　解 $\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=0$。

答：　$z=xf_1(y+x)+f_2(y+x)$。

若方程式不是齊次的，如

$$A_0\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+A_1\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}+A_2\frac{\partial^2z}{\partial y^2}+A_3\frac{\partial z}{\partial x}+A_4\frac{\partial z}{\partial y}+A_5z=0,\tag{16}$$

而可分解爲因數，則積分爲各個記號因數所相當的積分之和，每個 $D-mD'$ 形式的因數在解中則有一個 $y+mx$ 的函數，每個 $D-mD'-a$ 形式的因數在解中則形式爲 $z=e^{ax}f(y+mx)$。

例一 解 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$。

因數 $(D+D')(D-D'+1)z=0$。

答： $z=f_1(y-x)+e^{-x}f_2(y+x)$。

但是這些方程式的解並非常常可以表示爲這種形式的，在那些時候習慣上採取

(17)

爲試驗的解，

當然，若 α 爲 β 的函數我們可將 $\alpha=f(\beta)$ 代入而消去 α。今求(17)的微分而得出

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\alpha z;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\beta z;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\alpha\beta z;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\alpha^2 z;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\beta^2 z。$$

以這些結果代入(16)。可得輔方程式

$$(A_0\alpha^2+A_1\alpha\beta+A_2\beta^2+A_3\alpha+A_4\beta+A_5)z=0。\tag{18}$$

括號中可以作爲 α, β 的二次式。已知 β 的任何值可得 α 的相當值；已知 α 的任何值可得 β 的相當值。故有無限個特殊解。於是得重要的規則：

I. **設 u_1, u_2, u_3,……爲任何偏微分方程式的特殊解，每個解乘以一個任意常數，所得的每個積也爲方程式的解。**

II. **特殊解的任何幾個之和或差爲已知方程式的解。**

即使當普遍解無從求得時，求特殊解通常不很困難的。這樣結合特殊解時的主要困難在於要使適合所論問題之條件。爲確定觀念起見，我們得研究幾個例題，作爲下一章的預備工作。

例一　解$(D^2-D')z=0$。

這裏 $\alpha^2-\beta=0$；　$\therefore\ \beta=\alpha^2$。於是(17)變爲 $z=Ce^{\alpha x+\alpha^2 y}$。

令 $\alpha=\frac{1}{2}$，$\alpha=1$，$\alpha=2$，……而得特殊解 $e^{\frac{1}{4}(2x+y)}$，e^{x+y}，e^{2x+4y}，……

$$\therefore\quad z=C_1e^{\frac{1}{4}(2x+y)}+C_2e^{x+y}+C_3e^{2x+4y}+\cdots\cdots$$

屬於 $e^{\alpha x+\beta y}$ 形式的兩項之差包括在上解之中，故 $e^{\alpha x+\beta y}$ 的一級微係數也是積分，同樣二級三級高級微係數必爲積分。因

$$De^{\alpha x+\alpha^2 y}=(x+2\alpha y)e^{\alpha x+\alpha^2 y};\quad D^2e^{\alpha x+\alpha^2 y}=\{(x+2\alpha y)^2+2y\}e^{\alpha x+\alpha^2 y};$$

$$D^3e^{\alpha x+\alpha^2 y}=\{(x+2\alpha y)^3+6y(x+2\alpha y)\}e^{\alpha x+\alpha^2 y};\ \text{等等。}$$

得下解：——

$$z=C_1(x+2\alpha y)e^{\alpha x+\alpha^2 y}+C_2\{(x+2\alpha y)^2+2y\}e^{\alpha x+\alpha^2 y}+\cdots\cdots$$

若 $\alpha=0$，即得特別

$$z=C_1x+C_2(x^2+2y)+C_3(x^3+6xy)+\cdots\cdots$$

例二　解 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-3\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial z}{\partial y}=0$。

令 $z=Ce^{\alpha x+\beta y}$；則得$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-3)=0$。$\therefore\ \beta=\alpha$；$\beta=3-\alpha$。

$$\therefore\quad z=C_1e^{\alpha(x+y)}+e^{3y}C_2e^{\alpha(x-y)}=f_1(y+x)+e^{3y}f_2(x-y)。$$

這裏求特殊積分的方法類似於普通微分方程式求特殊積分的，現在不欲多述，在下章中還要回到這問題的。高於二級的微分方程式有時在研究下列幾類問題時會得遇到，如磁對於偏極化光(Polarized light)

的作用;厚板或曲棒的振動;圓筒在流體中的運動; 因黏滯性而生的空氣波動的阻尼; 等等。

147. 微分方程式的近似積分法(The Approximate Integration of Differential Equations)

求微分方程式的近似解,有兩種有趣而有用的方法:

I. 用級數求積分法。 當一個函數可以展開爲斂級數,依自變數的羃而排列者,因變數的近似值是易於求得的。所達近似的程度,顯然視計算時由級數中所取之項數而定。較古的算學家認此爲求解的卑劣手法; 但在實際工作上都有無上的價值。事實上, 物理的算學中較高深的問題之解, 幾乎常以簡略的無限級數之形式代表之。有限的解反而是例外。

例一　用級數表示 $\frac{dy}{dx}=y$ 的解。

假定 y 的形式爲

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$$

求微係數以 $\frac{dy}{dx}$; y 代入已知方程式內,

$$(a_1-a_0)+(2a_2-a_1)+(3a_3-a_2)x^2+\cdots\cdots=0$$

若 x 不爲零,而 x 的係數都爲零,則可適合此方程式. 這須

$$a_1=a_0;\quad a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}a_0;\quad a_3=\frac{1}{2}a_2=\frac{1}{\lfloor\underline{3}}a_0;\ \cdots\cdots$$

故由代入(1),得

$$y=a_0\left(1+x+\frac{1}{\lfloor\underline{2}}x^2+\frac{1}{\lfloor\underline{3}}x^3+\cdots\cdots\right)=a_0\,e^x。$$

令 a 爲任意常數，最後結果爲 $y=a\,e^x$。代入原方程式可證此爲完全解。

例二 解 $\dfrac{dy}{dx}+ay+bx^2=0$。

求此式的各級微係數，設 $x=0$ 時 $y=y_0$ 代入此結果，得

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=-ay_0;\quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0=a^2y_0;\quad \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0=-a^3y_0-2b;\cdots\cdots$$

依馬氏定理，

$$y=y_0+\left(\frac{dy}{dx}\right)_0\frac{x}{1}+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0\frac{x}{\underline{|2}}+\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots;\tag{1}$$

$$=y_0-ay_0x+\frac{1}{2}\,a^2y_0x^2-\frac{1}{6}(a^3y_0+2b)x^3+\cdots\cdots;$$

$$=y_0\left(1-ax+\frac{1}{2}\,a^2x^2-\cdots\cdots\right)-2ba^{-3}\left(\frac{1}{6}\,a^3x^3-\frac{1}{24}\,a^4x^4+\cdots\right);$$

第二個括號內經過適當變換，結果得

$$y=y_0\,e^{-ax}+2ba^{-3}\left(e^{-ax}-1+ax-\frac{1}{2}a^2x^2\right)。$$

於是最後得

$$y=C_1\,e^{-ax}-2ba^{-3}\left(1-ax+\frac{1}{2}a^2x^2\right)。$$

用第 125 節的方法覆證此結果。

例三 用級數解 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-a^2y=0$。

求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 以上各級微係數。

$$\frac{d^3y}{dx^3}=a^2\,\frac{dy}{dx};\quad \frac{d^4y}{dx^2}=a^2\,\frac{d^2y}{dx^2}=a^4y;\cdots\cdots$$

設 $x=0$ 時 $y=y_0$，則

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0=a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)_0;\ \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_0=a^4y_0;\cdots\cdots$$

依馬氏定理，

$$y=y_0+\left(\frac{dy}{dx}\right)_0\frac{x}{1}+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0\frac{x^2}{\lfloor 2}+\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0\frac{x^3}{\lfloor 3}+\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_0\frac{x^4}{\lfloor 4}+\cdots\cdots$$

$$=y_0+\left(\frac{dy}{dx}\right)_0\frac{x}{1}+ay_0\frac{x^2}{\lfloor 2}+a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)_0\frac{x}{\lfloor 3}+a^4y_0\frac{x^4}{\lfloor 4}+\cdots\cdots$$

$$=y_0\left\{1+\frac{a^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{a^4x^4}{\lfloor 4}+\cdots\right\}+\frac{1}{a}\left(\frac{dy}{dx}\right)_0\left\{\frac{ax}{1}+\frac{a^3x^2}{\lfloor 3}+\cdots\right\}$$

令常數 $y_0=A$; $\frac{1}{a}\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=B$, 卽得

$$y=A\left\{1+\frac{a^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{a^4x^4}{\lfloor 4}+\cdots\cdots\right\}+B\left\{\frac{ax}{1}+\frac{a^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{2}A\ \{e^{ax}+e^{-ax}\}+\frac{1}{2}B\{e^{ax}-e^{-ax}\}$$

$$=C_1\,e^{ax}+C_2\,e^{-ax}。$$

例四 解 $\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-cy=x^2$。 (2)

有時假定級數中各項爲不定指數者較爲便利，本例卽是。

(i) 求稱函數。從 $\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-cy=0$, (3)

令 $y=a_0x^m$ 爲試驗的解，代入得

$$m(m-1)a_0x^{m-2}-(m+c)a_0x^m=0。\qquad (4)$$

從此知道級數中逐項指數之差爲 2，故所求的級數爲

$$y=a_0x^m+a_1x^{m+2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x^{m+2n-2}+a_nx^{m+2n}+\cdots\cdots,\qquad (5)$$

從此求得

$$-cy=-ca_0x^m-ca_1x^{m+2}-ca_2x^{m+4}-\cdots\cdots$$

$$-ca_{n-1}x^{m+2n-2}-ca_nx^{m+2n}+\cdots\cdots$$

$$-x\frac{dy}{dx}=-ma_0x^m-(m+2)a_1x^{m+2}-(m+4)a_2x^{m+4}-\cdots\cdots$$

$$-(m+2n-2)a_{n-1}x^{m+2n-2}-(m+2n)a_nx^{m+2n}+\cdots\cdots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=m(m-1)ax^{m-2}+(m+2)(m+1)a_1x^m+(m+4)(m+3)a_2x^{m+2}+\cdots$$

$$+(m+2n)(m+2n-1)a_nx^{m+2n-2}+\cdots\cdots$$

總加上列三式得，

$$\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-cy$$

$$=m(m-1)a_0x^{m-2}+[a_1(m+2)(m+1)-a_0(m+c]x^m$$

$$+[a_2(m+4)(m+3)-a_1(m+2+c)]x^{m+2}$$

$$+\cdots\cdots+[a_n(m+2n)(m+2n-1)$$

$$-a_{n-1}(m+2n-2+c)]x^{m+2n-2}+\cdots\cdots \tag{6}$$

因(5)爲方程式(3)的解，故(6)恆等於 0，即其各項都等於 0。

$$\therefore\quad m(m-1)a_0=0; \tag{7}$$

$$a_1(m+2)(m+1)-a_0(m+c)=0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad a_n(m+2n)(m+2n-1)-a_{n-1}(m+2n-2+c)=0。$$

故級數中逐項係數的關係爲

$$a_n=\frac{m+2n-2+c}{(m+2n)(m+2n-1)}a_{n-1}。 \tag{8}$$

從(7)，知 $m=0$ 或 $m-1=0$，或 $a_0=0$；但 a_0 爲(5)首項的係數，令

其爲零，將一無所得。

設 $m=0$，則從(8)得計算出，

$$a_1=\frac{c}{1\cdot 2}a_2;\qquad a_2=\frac{c+2}{3\cdot 4}a_1=\frac{c(c+2)}{\lfloor 4}a_0;\ \cdots\cdots$$

$$\therefore\quad Y_1=a_0\left\{1+c\frac{x^2}{\lfloor 2}+c(c+2)\ \frac{x^4}{\lfloor 4}+\cdots\cdots\right\}。\qquad (9)$$

此爲(3)的一個解。

再從 $m-1=0$，設 $m=1$；從(8)得計算出

$$a_1=\frac{c+1}{\lfloor 3}a_0;\qquad a_2=\frac{c+3}{5\cdot 3}a_1=\frac{(c+3)(c+1)}{\lfloor 5}a_0;\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad Y_2=a_0\left\{x+(c+1)\frac{x^3}{\lfloor 3}+(c+3)(c+1)\ \frac{x^5}{\lfloor 5}+\cdots\cdots\right\}。\qquad (10)$$

此爲(3)的又一個解，

(3)的完全解爲(9)與(10)之和，故卽爲

$$y=c_1y_1+c_2y_2。$$

此爲(2)的補函數。

(ii) 求特殊積分。設(6)爲(2)的解，則

$$m(m-1)a_0x^{m-2}=x^2;$$

$$a_1(m+2)(m+1)-a_0(m+c)=0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n(m+2n)(m+2n-1)-a_{n-1}(m+2n-2+c)=0。$$

比較(11)式的指數，知 $m-2=2$， 卽 $m=4$；比較(11)式的係數，知

$m(m-1)a_0=1$； 卽 $4\times 3\times a_0=1$； $\therefore\ a_0=\dfrac{1}{12}$。

當 $m=4$ 時(8)式爲

$$a_n=\frac{2+2n+c}{2(n+2)(2n+3)}a_{n-1},$$

從此求得

$$a_1=\frac{c+4}{2\cdot3\cdot5}\times\frac{1}{12};\qquad a_2=\frac{(c+6)(c+4)}{(2\cdot4\cdot7)(2\cdot3\cdot5)}\times\frac{1}{12};\cdots\cdots$$

故得特殊積分爲

$$y_3=\frac{1}{12}x^4+\frac{c+4}{360}x^6+\frac{(c+6)(c+4)}{20160}x^8+\cdots\cdots$$

最後(2)的普遍解爲

$$y=c_1y_1+c_2y+y_3\text{。}$$

例五 下列速度方程式表示酵素(Enzyme)對於水楊糖(Salicine)的催化作用 (J. W. Mellor's Chemical Statics and Dynamics, London, 380, 1904):

$$\frac{dy}{dt}=k(a-x-y)(c-y);\quad \frac{dx}{dt}=k_2y\text{。}\tag{11}$$

從馬氏定理,

$$x=x_0+\left(\frac{dx}{dt}\right)_0t+\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0\frac{t}{\underline{|2}}+\cdots\cdots\tag{12}$$

當 $x=0$ 與 $y=0$ 時,方程式(11)可化出

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0=(k_2y)_0=0;\quad\therefore\quad\left(\frac{dy}{dt}\right)_0=k_1ac;$$

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0=k_1k_2ac=A\text{。}\tag{13}$$

求(11)中第一式的微係數,得

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_0=-k_1(a-x-y)\frac{dy}{dt}-k_1(c-y)\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right);\tag{14}$$

從(11)中第二式與(13)，(14)得

$$\left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)_0 = -k_1^2k_2ac(a+c) = B。\tag{15}$$

再求(14)的微係數，

$$\frac{d^3y}{dx^3} = k_1\left\{\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right)\frac{dy}{dt} - (a-x-y)\frac{d^2y}{dt^2} + \right.$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right) + (c-y)\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right\};$$

$$\left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)_0 = 2k_1^3a^2c^2 + k_1^3a^2c(a+c) - k_1c\{k_1k_2ac - k_1^2ac(a+c)\};$$

$$= 2k_1^3a^2c^2 + k_1^3a^2c(a+c) - k_1^2k_2ac^2 + k_1^3ac^2(a+c)$$

$$= k_1^3ac(a+c)^2 + 2k_1^3a^2c^2 - k_1^2k_2ac^2。$$

$$\therefore\quad \left(\frac{d^4y}{dt^4}\right)_0 = k_1^3k_2ac(a+c) + 2k_1^3k_2a^2c^2 - k_1^2k_2^2ac^2 + C。\tag{16}$$

結果從(12)，(13)，(15)，(16)並集合常數在一起，以記號 A, B, C,… 代之，可得

$$x = A\frac{t^2}{\underline{|2}} + B\frac{t^3}{\underline{|3}} + C\frac{t^4}{\underline{|4}} + \cdots\cdots;$$

$$\therefore\quad y = \frac{A}{k_2}\cdot\frac{t}{1} + \frac{B}{k^2}\cdot\frac{t^2}{\underline{|2}} + \frac{C}{k_2}\cdot\frac{t^3}{\underline{|3}} + \cdots\cdots\tag{17}$$

此中已爲 t 與常數表示 x 或 y 了。

有許多連接化學反應的速度方程式求積分的結果得到無限級數的形成。若爲斂級數，看起來都像很好了。但另外有一點這裏必須重視的。級數中的常數是從數值的材料求得其值的，計算的結果與觀測的結果之符合，認爲是理論的後盾。事實上級數公式是十分經驗的公式。提

出幾十個假設，都能供給變數間相仿的關係，常數的最好數值也能以相同的方法決定。當然，若能用獨立的方法求出常數的值而結果的算式又能與實驗的材料相符合，我們對於理論即能多一些信任。這裏所說的與第 108 節中所論並不衝突。那裏所論者是常數，而這裏所論者是潛在的理論。

不過我們將會越出本書的範圍了。我希望本書所述的已足够使讀者對於處理微分方程式時所用的記號與觀念，很能熟悉，在參考較爲高深的書籍不致感到滿紙盡是些不可理解的符咒。欲求更廣的實用上的詳情，讀者須再讀些專書如 A. R. Forsyth 著 Differential Equations, London, 1903; W. E. Byerly 著 Fourier's Series and Spherical Harmonics, Boston, 1895。H. F. Weber 與 B. Riemann 合著 Die Partiellen Differential-Gleichungen der Mathematischen Physik, Braunschweig, 1900－1901 是較爲高深之作。A. Gray 與 G. B. Mathews 著有 A Treatise on Bessel's Functions and their Application to Physics, London, 1895。

II.　累次近似法。　這方法在原理上很像第 115 節中用以解數值方程式的近似法。當已知方程式中有幾項是很小，可以作爲這樣的項並不存在而解之。故一個擺在空氣中作小振動時的運動方程式，

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+q^2\theta=a\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2;\quad \text{可改爲}\quad \frac{d^2\theta}{dt^2}+q^2\theta=0, \tag{18}$$

但須右邊的 $a\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ 是很小。用第 131 節的方法解 (18) 的第二式，得

$$\theta=-r\cos qt。$$

果眞是這樣，則 $a\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ 必爲 $ar^2q^2\sin^2 qt$。以此代入 (18)，注意 $1-\cos 2x=2\sin^2 x$，故得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+q^2\theta=\frac{ar^2q^2}{2}(1-\cos 2qt);$$

即
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+q^2\left(\theta-\frac{ar^2}{2}\right)=-\frac{aq^2r^2}{2}\cos 2qt。$$

解此式，如第 135 節，並用 $t=0$ 時 $\theta=r,\frac{d\theta}{dt}=0$ 的條件，得

$$\theta=\frac{1}{2}ar^2+(r-\frac{2}{3}ar^2)\cos qt+\frac{1}{6}ar^2\cos 2qt。$$

例　在雜誌 Technics, **1**, 514, 1904 中有一組方程式很像上列例五中者曾用累次近似法且假定 k_1 與 a 較 k_2 與 c 爲很小，而解之。

示意：　求(11)中第二式的微分；得 $\frac{d^2x}{dt^2}=k_2\frac{dy}{dt}$，　$\therefore\ \frac{dy}{dt}=\frac{1}{k_2}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$；又 $\frac{dx}{dt}=k_2y$　$\therefore\ y=\frac{1}{k_2}\ \frac{dx}{dt}$；代入(11)的第一式而展開之，得

$$\frac{1}{k_2}\ \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{k_1}{k_2{}^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{k_1}{k_2}(x-c-a)\frac{dx}{dt}+k_1c(a-x)。\quad(19)$$

略去含有 $\frac{k_1}{k_2}$ 的項，且令 $k_2ck_2=q^2$，則所剩之式爲

$$\frac{d^2(x-a)}{dt^2}+q^2(x-a)=0。$$

因 $t=0$ 時 x 與 y 都等於零，故求得積分爲

$$x-a=-a\cos qt。$$

求其微係數而代入(19),得

$$\frac{d^2x}{dt^2}+q^2(x-a)=-k_1(a\cos qt+c)aq\sin qt+\frac{k_1}{k_2}a^2q^2\sin^2 qt;$$

$$\therefore\quad \frac{d^2x}{dt^2}+q^2(x-a)=q\,k_1\,ac\sin qt-\frac{a^2qk_1}{2}\sin 2qt+\frac{a^2q^2k_1}{2k_2}(1-\cos 2qt),$$

此式可用第 135 節 IV 的方法解之。其近似的完全解,卽補函數與特殊解之和,爲

$$x-a=+a\cos qt-\frac{q^2t\cos qt}{2}+\frac{a^2k_1\sin 2qt}{6q}+\frac{a^2k_1\cos 2qt}{6k_2}+\frac{a^2k_1}{2k_2}。$$

這個不適用於實際工作,因其太嫌繁重。

第八章　傅氏定理(Fourier's Theorem)

『傅氏定理非特是近世解析學中最美麗的結果之一，並且可以說在處理近世物理上的深奧問題時，幾乎是處處少不了的工具。單只提起研究高音的振動，電號沿電報線的傳播，地殼的導熱時，沒有牠就無法駕馭這些問題的普遍性者，不過舉其重要性的一個微弱觀念罷了』。——Thomson and Tait。❶

§ 148. 傅氏級數 (Fourier's Series)

我們大家知道，空氣的質點使其振動到某種狀態即能發出聲音。一個擺的往復運動可以看作振動的最簡形式，這是類似於單音的振動，如風琴管的**基本純音** (Fundamental note)。圖五十二中，週期曲線，以方程式 $y=\sin x$; 或 $y=\cos x$ 代表者，是圖形表示這種發生單音的振動。

但樂音(Musical note)則較爲複雜，含有一個單音——稱爲基本純音，再混以一組輔助振動——稱爲泛音。這種樂音的週期曲線大沒

---

❶ "Fourier's theorem is not only one of the most beautiful results of modern analysis, but may be said to furnish a indispensable instrument in the treatment of nearly every recondite question in modern physics. To mention only sonorous vibrations, the propagation of electric signals along a telegraph wire, and the conduction of heat by the earth's crust, as subjects in their generality intractable without it, is to give but a feeble idea of its importance."—Thomson and Tait.

有代表單音者簡單。Fourier 證明任何週期曲線可將沿着同軸而有原曲線週期之 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$……等的許多**諧和曲線**(Harmonic curves)混合而成。唯一的限制只是(i)縱坐標必爲有限數；(ii)曲線必向同一方向進行。Fourier 更證明初等曲線只有一種特別的結合方法可混合而得已知曲線。這與 Helmholtz 所說同一的合音只能分解爲同樣的一組**元音**(Elementary sound)很相當。故一個合音，用算學的記號可以表示爲一個級數，並不如馬氏定理中爲自變數的昇冪級數，而是此變數的倍數之正弦與餘弦的級數。

傅氏理定所決定的定律，可展開任意函數爲自變數 x 的倍數之正弦與餘弦的級數。設 $f(x)$ 爲關於時間，空間，溫度，或位的週期函數，傅氏定理說：

$$f(x)=A_0+a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+b_1\cos x+b_2\cos 2x+\cdots \qquad (1)$$

此式稱爲**傅氏級數**。描起圖來，很易證明三角級數與傅氏級數一樣，當 x 的値每增加 2π 時，級數的値經過種種變化而回復到原有的値，這在後文中卽能見到。用這種方式去研究運動是比其他的算學推理方式更有益處，應用於含有位，與熱，光，音，電的傳導與其他的傳播等的物理問題，已有很大的成功。任何物理性質，如密度，壓力，速度等，凡隨時間作週期的變化，而其數量或強度能量測者則可用傅氏級數代表之。

傅氏級數各項都是週期的，從這點看來，我們可以說，**傅氏級數是人造的方法，用一組波動或振動來代表任何物理性質的傳播或進行。**Helmholtz 說『這不過是算學上的虛擬，因其使計算簡易故值得讚美，

但不必相當於實在的什麼』。

§ 149. 求傅氏級數中常數的值 (Evaluation of the Constants in Fourier's Series)

假定傅氏級數在極限 $x=+\pi$ 與 $x=-\pi$ 之間是有效的，今欲進而求係數 A_0, a_1, a_2,……，b_1, b_2,……的值而使此級數成立。

I. 求 A_0 的值。方程式(1)乘以 dx 然後求每項在上下限 $x=+\pi$，與 $x=-\pi$ 間的積分。含有正弦與餘弦的各項都變爲零，所剩者得

$$2\pi A_0=\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\,dx;\quad 即\ A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\,dx。\tag{2}$$

故 $f(x)$ 爲已知時，此積分可以求得。[1]

我竭力勸告讀者必須精通第 74, 75, 83 等節後，再讀本章。

II. 求含有餘弦各項中係數的值，設如 b_n，此中 n 取 1 至 n 各值。欲使方程式 (1)，當在上下限 $\pm\pi$ 間求積分時，所有各項爲零而但剩 $b_n\cos nx$ 各項，則在乘以 dx 外必乘以另一因數。這裏必須以 $\cos nx\,dx$ 乘之。此時

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=b_n\pi,$$

(見第75節)所有其餘各項，當求積分時都變爲零。故 b_n 的值爲

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos nx\,dx。\tag{3}$$

從此式可得各係數 b_1, b_2,……，b_n。若令 $n=0$，第一項的係數 A_0 的形式爲

---

[1] 這裏我不欲詳述，因爲讀者可以自求其結果的。這不過是第75節的一種練習罷了。

$$A_0=\frac{1}{2}b_0。\tag{4}$$

若入(1)中,我們可不用(2)而寫(1)爲

$$f(x)=\frac{1}{2}b_0+a_1\sin x+b_1\cos x+a_2\sin 2x+b_2\cos 2x+\cdots\cdots\tag{5}$$

III. 求含有正弦各項中係數的值,設如 a_n; 如上的辦法, 乘以 $\sin nx\,dx$ 而在上下限 $\pm\pi$ 之間求積分。可得

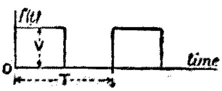
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin nx\,dx。\tag{6}$$

例一 這裏的問題,有時舉出作爲練習。令(1)中 $x=\frac{2\pi t}{T}$, 並展開圖一百五十五的曲線。注意 T 爲 t 的一個特別值。所欲展開的級數爲

$$f(t)=A_0+a_1\sin\frac{2\pi t}{T}+\cdots\cdots+b_1\cos\frac{2\pi t}{T}+\cdots\cdots$$

求 A_0 的值可用 T(即週期時間)乘上式,如(2),求上下限 0 與 T 間的積分。得

$$A_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt=f(t)\text{ 的平均高度}=\frac{V}{2}。$$



圖一百五十五

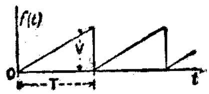
求含有正弦與餘弦各項中的常數,可各乘以 $\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)dt$ 與 $\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)dt$ 而求上下限 0 與 T 間的積分。解答爲

$$f(t)=\frac{V}{2}+\frac{2V}{\pi}\left(\sin\frac{2\pi t}{T}+\frac{1}{3}\sin\frac{6\pi t}{T}+\frac{1}{5}\sin\frac{10\pi t}{T}+\cdots\cdots\right)。$$

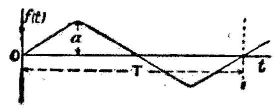
注意無論 n 爲奇數爲偶數 $\sin 2n\pi$ 恆爲 0; n 爲奇數時 $\cos 2n\pi$ 爲

-1，n 爲偶數時 $\cos 2n\pi$ 爲 $+1$。本例中的積分都可用第73,75節的方法求之。惟 $\int x\sin nx\,dx=n^{-2}(\sin nx-nx\cos nx)$ 須用分部積分法。

例二 圖一百五十六中許多直線都從右至左向下傾斜，方程式爲



圖一百五十六



圖一百五十七

$f(t)=mt$，此中 m 爲常數。當 $t=T$ 時，$f(t)=V$，故 $V=mT$，即 $m=\frac{V}{T}$； $\therefore\ f(t)=\frac{Vt}{T}$。從此證明

$$A_0=\frac{V}{T}\int_0^T t\,dt=\frac{V}{2};\qquad a_1=\frac{2}{T}\int_0^T\frac{Vt}{T}\sin\frac{2\pi t}{T}dt=-\frac{V}{\pi},$$

再證
$$f(t)=\frac{V}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\sin\frac{2\pi t}{T}-\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi t}{T}-\frac{1}{3}\sin\frac{6\pi t}{T}-\cdots\cdots\right)$$

例三 圖一百五十七中,可見到 A_0 爲零,因

$$A_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt=f(t)\text{的平均高度}=0;$$

$$a_1=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi t}{T}dt。$$

今注意在極限 $-\frac{1}{4}T$ 與 $+\frac{1}{4}T$ 間，$f(t)=mt$；當 $t=\frac{1}{4}T$ 時 $f(t)=a$，故 $a=\frac{1}{4}mT$； 即 $m=\frac{4a}{T}$；而在極限 $t=\frac{1}{4}T$ 與 $t=\frac{3}{4}T$ 間，$f(t)=2a\left(1-\frac{2t}{T}\right)$；故

$$a_1=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{+\frac{T}{4}}\frac{4at}{T}\sin\frac{2\pi t}{T}\,dt+\frac{2}{T}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3}{4}T}2a\left(1-\frac{2t}{T}\right)\sin\frac{2\pi t}{T}\,dt=\frac{8a}{\pi^2}。$$

同樣可證凡右下角註有偶數的 a 都等於零，又所有的 b 都等於零。故

$$f(t)=\frac{8a}{\pi^2}\left(\sin\frac{2\pi t}{T}-\frac{1}{9}\sin\frac{6\pi t}{T}+\frac{1}{25}\sin\frac{10\pi t}{T}-\cdots\cdots\right)。$$

有幾種圖解法也可求傅氏級數的係數。參閱 J. Perry 之作載於 Electrician, **28**, 362, 1892; 又 W. B. Woodhouse, 同書 **46**, 987, 1901; 當級數用以表示交流電的電動勢爲時間的週期函數時，最好參閱，O. Henrici 的作品，見 Phil. Mag. [5], **38**, 110, 1894。

§ 150. 展開一個函數爲三角級數 (The Development of a Function in a Trigonometrical Series)

I. **展開爲正弦的級數。** 假設欲求

$$f(x)=x$$

的值，以傅氏定理表示之。從(2)，(3)，(6)

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}x\cos nx\cdot dx=0;\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}x\sin nx\cdot dx=\pm\frac{2}{n}$$

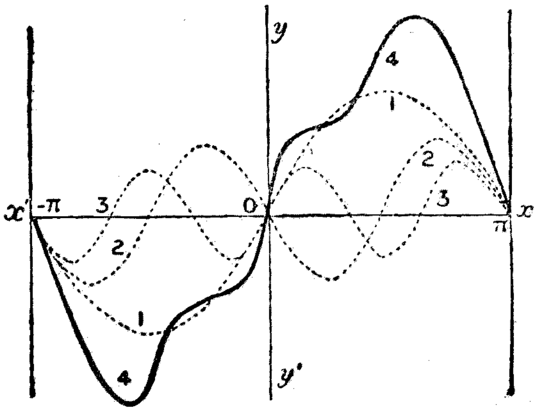
正負號視 n 的奇偶而定；

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}x\,dx=\frac{1}{4\pi}(\pi^2-\pi^2)=0$$

故傅氏級數的形式爲，

$$x=2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots\cdots\right)\tag{7}$$

此稱爲**正弦級數**(Sine series)；所有含餘弦的各項在求積分時消去了。



圖一百五十八

描繪(7)的括號內各項得一組曲線如圖一百五十八所示。描$y=\sin x$得曲線 1; 描 $y=\frac{1}{2}\sin 2x$, 得曲線 2; 描 $y=\frac{1}{3}\sin 3x$, 得曲線 3。這些卽是圖中的虛線,代表泛音或諧函數。曲線 4 卽由上述三個曲線的縱坐標的代數和,描繪而得。正弦級數的普遍形式爲

$$f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+a_3\sin 3x+\cdots\cdots \tag{8}$$

此中 a 的值爲方程式(6)所表示者。

II. 展開爲餘弦級數。作爲說明,設

$$f(x)=x^2,$$

須以傅氏定理展開之。這裏

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}x^2\cos nx\cdot dx=\mp\frac{4}{n^2},$$

負正號視 n 的奇偶而定。又

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}x^2\sin nx\cdot dx=0;$$

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}x^2\,dx=\frac{1}{6\pi}\{\pi^3-(-\pi)^3\}=\frac{1}{3}\pi^2。$$

故得

$$x^2=\frac{1}{3}\pi^2-4(\cos x-\frac{1}{2^2}\cos 2x+\frac{1}{3^2}\cos 3x-\cdots\cdots)\qquad(9)$$

描繪括號內各項,得圖一百五十九中虛線所繪之曲線。**餘弦級數**(Cosine series)的普遍形式爲

$$f(x)=\frac{1}{2}b_0+b_1\cos x+b_2\cos 2x+\cdots\cdots,\qquad(10)$$

此中 b 的值如(3),(4) 所示。通常 x 的任何**奇函數**(Odd function)只能展開爲正弦級數,**偶函數**(Even function)只能展開爲餘弦級數。若 x 的函數,當 x 變號時而不變號者稱爲偶函數。例如,雖 x 變號時,x^2 之值不變;又 $\cos x$ 是等於 $\cos(-x)$的,故 x^2 與 $\cos x$ 都是 x 的偶函數。若 $f(x)$爲 x 的偶函數,則 $f(x)=f(-x)$。若 x 的函數,當 x 變號時,而亦變號者稱爲奇函數。如 x, $x^3\cdots\cdots$ 與任何奇次冪都是奇函數。因 $\sin x=-\sin(-x)$,故 $\sin x$ 爲 x 的奇函數;普遍的說,若 $f(x)$爲奇函數,則 $f(x)=-f(-x)$。x 在極限 $-\pi$ 與 $+\pi$ 間,(8)中 $f(x)$爲奇函數,(10) 中 $f(x)$爲偶函數。

例一　展開 1 爲函弦級數,其極限爲 $x=\pi$, $x=0$。

這裏 $f(x)=1$。求 $n=1, 2, 3\cdots\cdots$時的積分,可得

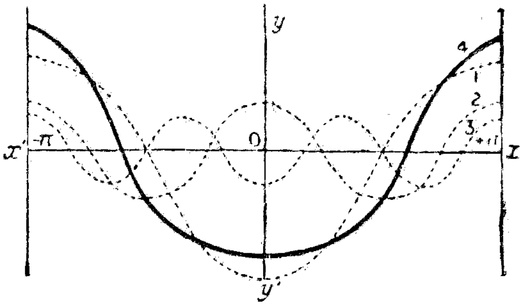
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$=\frac{2}{n\pi}\{1-(-1)^n\}=\frac{4}{n\pi}\text{或 } 0,$$

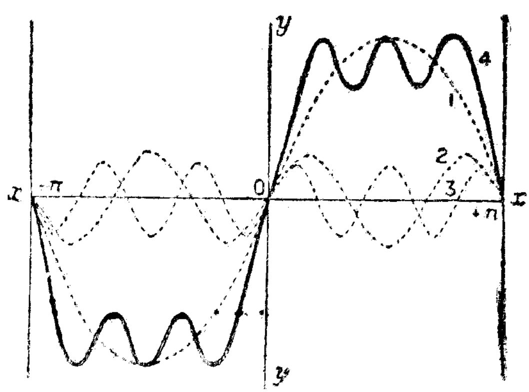
視 n 的奇偶而定。從(8)故得

$$1=\frac{4}{\pi}(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\cdots)。\tag{11}$$

最初三項的圖如圖一百六十中虛線所示。



圖一百五十九



圖一百六十

例二 證明當 $x=\pm\pi$ 之間時，

$$e^x=\frac{2\sin h\,\pi}{\pi}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{5}\cos 2x+\cdots\cdots\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{5}\sin 2x+\cdots\cdots\right)\right\} \tag{12}$$

例三　x 在 π 與 0 之間，證明

$$x\sin x=1-\frac{1}{2}\cos x-\frac{2}{3}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos 3x-\frac{2}{15}\cos 4x+\cdots \tag{13}$$

若 $x=\frac{1}{2}\pi$，則

$$\frac{1}{4}\pi=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{15}+\frac{1}{35}-\cdots\cdots$$

例四　證

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{25}\cos 5x+\cdots\cdots\right)。 \tag{14}$$

$$b_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}=\pi;$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\frac{2}{n^2\pi}\{(-1)^n-1\}。$$

例五　設 c 爲常數，證

$$c=\frac{4c}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\cdots\right)。 \tag{15}$$

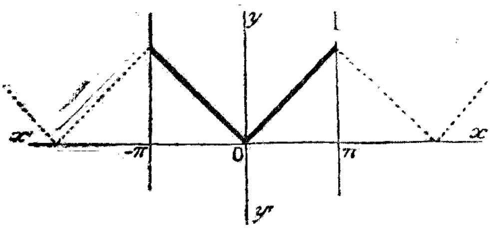
III.　**正弦級數與餘弦級數的比較。**正弦級數與餘弦級數都是 x 的週期函數，其週期爲 2π。上述的展開式只能在極限 $x=\pm\pi$ 之間時適用，即當 x 大於 $-\pi$ 與小於 $+\pi$ 時。在此範圍之內，代表一個函數 $f(x)$ 只能有一個傅氏級數；但若取此完全週期的一部份作範圍如在極限 $x=0$，$x=\pi$ 之間，則一個函數往往同時可有兩種傅氏級數，可爲正

弦級數，亦可爲餘弦級數。例如展開 $f(x)=x$，則當 x 在極限 $x=0$ 與 $x=\pi$ 之間時既可如(7)所表示的正弦級數，亦可如(14)所表示的餘弦級數。

卽
$$f(x)=x=2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots\cdots\right); \tag{7}$$

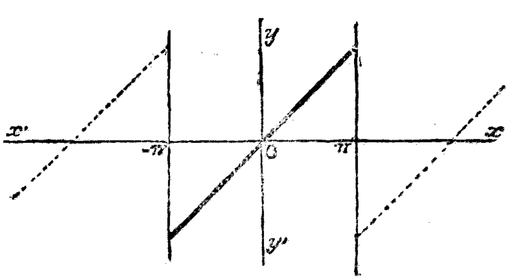
$$f(x)=x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{25}\cos 5x+\cdots\cdots\right)。 \tag{14}$$

描繪(14)的略圖其形狀如圖一百六十一所示，其中深線表示在極限之間者，虛線表示在極限以外者。同樣描繪(7)的略圖其形狀如圖一百六十二所示，其中($\pm\pi$, 0)；($\pm 3\pi$, 0)…… 等點亦在(7)的圖上。比較兩圖中的曲線只有在極限 $x=0$ 與 $x=\pi$ 之間的部完全相合的。故 x 在極限 $x=0$ 與 $x=\pi$ 之間，$f(x)=x$ 用正弦級數來表示與用餘弦級數一樣。



圖一百六十一

我們與其從教本中整個採用其最後結果，不若依隨常規的證法，於



圖一百六十二

工作中自己可以得些練習。

§ 151. 傅氏級數的推廣(Extension of Fourier's Series)

到現在爲止,傅氏級數中變數的值,只是達到 $\pm\pi$ 之間的範圍以內。但是,積分是可以推廣而使 x 有任何極值間一切的值。

I. **極限爲 $x=+c$, $x=-c$。** 設 $f(x)$ 爲 x 的任何函數,x 的值在極限 $+c$ 與 $-c$ 之間。以變數 x 改換爲 $\frac{cz}{\pi}$,於是 $z=\frac{\pi x}{c}$。故

$$f(x)=f\left(\frac{cz}{\pi}\right)。\tag{16}$$

當變數 x 從 $-c$ 變化爲 $+c$ 時,z 從 $-\pi$ 變化爲 $+\pi$,所以 x 取 $-c$ 與 $+c$ 間的一切值則函數 $f\left(\frac{cz}{\pi}\right)$ 可展開爲傅氏級數如(5),卽

$$f\left(\frac{c}{\pi}z\right)=\frac{1}{2}b_0+b_1\cos z+a_1\sin z+b_2\cos 2z+a_2\sin 2z+\cdots\tag{17}$$

此中

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f\left(\frac{c}{\pi}z\right)\cos nz\,dz;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f\left(\frac{c}{\pi}z\right)\sin nz\,dz。\tag{18}$$

展開式(17)在 $+\pi$ 與 $-\pi$ 間是眞確的。從(16)卽得

$$f(x)=\frac{1}{2}b_0+b_1\cos\frac{\pi x}{c}+a_1\sin\frac{\pi x}{c}+b_2\cos\frac{2\pi x}{c}+\cdots\cdots\tag{19}$$

係數與(17)中相同,結果(19)在 $+c$ 與 $-c$ 間是眞確的。從(18)可得

$$b_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{+c}f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}dx;\quad a_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{+c}f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}dx。\tag{20}$$

故得規則: **任何函數其週期是從 $-c$ 至 $+c$,卽 $T=2c$ 者,可表示**

爲一個三角函數的級數週期各爲 $T, \frac{1}{2}T, \frac{1}{3}T, \cdots\cdots$。

例一 從(19)證明 x 取 0 與 c 之間的值時，正弦級數爲

$$f(x)=a_1 \sin\frac{\pi x}{c}+a_2 \sin\frac{2\pi x}{c}+a_3 \sin\frac{3\pi x}{c}+\cdots\cdots \tag{21}$$

$$a_n=\frac{2}{c}\int_0^c f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}dx。 \tag{22}$$

再證餘弦級數爲

$$f(x)=\frac{1}{2}b_0+b_1\cos\frac{\pi x}{c}+b_n\cos\frac{2\pi x}{c}+\cdots\cdots \tag{23}$$

$$b_n=\frac{2}{c}\int_0^c f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}dx。 \tag{24}$$

例二 x 取 0 與 c 之間的值時，證下列級數：

$$c=\frac{4c}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{c}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{c}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{c}+\cdots\cdots\right) \tag{25}$$

$$mx=\frac{2mc}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{c}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{c}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{c}-\cdots\cdots\right) \tag{26}$$

$$mx=\frac{m\pi}{2}-\frac{4m}{\pi}\left(\cos\frac{\pi x}{c}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{2\pi x}{c}+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{c}+\cdots\right) \tag{27}$$

示意：(26)爲 $f(x)=mx$，展開之成一個正弦級數；(27)爲同樣的函數而展開爲一個餘弦級數。

例三 設 $f(x)=x$，又 x 之值在 $\pm c$ 之間，則

$$x=\frac{2c}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{c}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{c}+\cdots\cdots\right) \tag{28}$$

II. 極限爲 $x=+\infty$ 與 $x=-\infty$。因爲無論 c 爲何值，上列公式終是眞確的，當 c 變爲無限大時，其所得極限值應該亦是眞確，卽 x 可

取一切的數值。我們再仔細觀察一下；爲免演算時弄錯，並表示方程式(20)已經求過積分，我們採用第 80 節的寫法，如

$$b_n=\frac{1}{c}\left[\int f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}dx\right]_{-c}^{+c};$$

$$a_n=\frac{1}{c}\left[\int f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}dx\right]_{-c}^{+c};$$

但表示此式已經求過積分，用 λ 代 x 更爲便利。於是

$$b_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{+c}f(\lambda)\cos\frac{n\pi\lambda}{c}d\lambda;$$

$$a_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{+c}f(\lambda)\sin\frac{n\pi\lambda}{c}d\lambda。\tag{20}$$

以這些 $a_1, a_2, \cdots\cdots$; $b_0, b_1, \cdots\cdots$ 的值代入(19)，再用第 192 節三角公式(24)，(13)，(6)即得

$$f(x)=\frac{1}{c}\left[\frac{1}{2}\int_{-c}^{+c}f(\lambda)d\lambda+\int_{-c}^{+c}\left\{f(\lambda)\cos\frac{\pi\lambda}{c}\cos\frac{\pi x}{c}d\pi+\cdots\cdots\right\}\right.$$

$$\left.+\int_{-c}^{+c}\left\{f(\lambda)\sin\frac{\pi\lambda}{c}\sin\frac{\pi x}{c}d\lambda+\cdots\cdots\right\}\right];$$

$$=\frac{1}{c}\int_{-c}^{+c}f(\lambda)d\lambda\left\{\frac{1}{2}+\left(\cos\frac{\pi\lambda}{c}\cos\frac{\pi x}{c}+\sin\frac{\pi\lambda}{c}\sin\frac{\pi x}{c}\right)+\cdots\right\};$$

$$=\frac{1}{c}\int_{-c}^{+c}f(\lambda)d\lambda\left\{\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{c}(\lambda-x)+\cos\frac{2\pi}{c}(\lambda-x)+\cdots\right\};$$

$$=\frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c}f(\lambda)d\lambda\left\{1+2\cos\frac{\pi}{c}(\lambda-x)+2\cos\frac{2\pi}{c}(\lambda-x)+\cdots\right\};$$

$$=\frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c}f(\lambda)d\lambda\left\{1+\cos\frac{\pi}{c}(\lambda-x)+\cos\left(-\frac{\pi}{c}\right)(\lambda-x)+\cdots\right\};$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{+c}f(\lambda)d\lambda\left\{\frac{\pi}{c}\cos\frac{0\pi}{c}(\lambda-x)+\frac{\pi}{c}\cos\frac{\pi}{c}(\lambda-x)+\cdots\cdots\right.$$

$$+\frac{\pi}{c}\cos\left(-\frac{\pi}{c}\right)(\lambda-x)+\cdots\cdots\Big\}。$$

當 c 無限增大時，括號內各項的極限值爲 $\int^{+\infty}\cos\frac{n\pi}{c}(\lambda-x)d\,\frac{n\pi}{c}$。

設 $\alpha=\frac{n\pi}{c}$，此中 n 爲任何整數，$f(x)$ 的形式爲

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\alpha(\lambda-x)d\alpha, \qquad (30)$$

此 x 可有一切的值。(30)中的雙重積分稱爲傅氏積分 (Fourier's integral)。

有時寫傅氏級數爲下列形式爲便利，

$$f(x)=\frac{1}{c}\int_0^c f(\lambda)d\lambda+\frac{2}{c}\sum_{n=1}^{n=\infty}\cos\frac{n\pi x}{c}\cos\frac{n\pi\lambda}{c}f(\lambda)d\lambda, \qquad (31)$$

此式當 x 取 0 與 c 之間的值時是眞確的。

例 求一個式子，表示 x 在 0 與 a 之間時其值等於 v；x 在 a 與 b 之間時其值爲 0。

這裏當 $\lambda=0$ 至 $\lambda=a$ 時 $f(x)=v$；當 $\lambda=a$ 至 $\lambda=b$ 時 $f(x)=0$；$c=b$ 則 $\cos\frac{n\pi\lambda}{c}f(\lambda)d\lambda$ 變爲 $v\int_0^a\cos\frac{n\pi\lambda}{b}d\lambda$ 即 $\frac{vq}{n\pi}\sin\frac{n\pi a}{b}$。故所求的式子爲

$$f(x)=\frac{va}{b}+\frac{2v}{\pi}\left(\sin\frac{\pi a}{b}\cos\frac{\pi x}{b}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi a}{b}\cos\frac{2\pi x}{b}+\cdots\right)$$

當 $x=a$ 時，此式化爲 $\frac{1}{2}v$。

III. 傅氏積分的不同形式。傅氏積分又可寫成其他的形式。從第 83 節，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x\,dx=\int_{-\infty}^{0}\cos x\,dx+\int_{0}^{\infty}\cos x\,dx;$$

$$\int_{-\infty}^{0}\cos x\,dx=\int_{\infty}^{0}\cos(-x)\,d(-x)=-\int_{\infty}^{0}\cos x\,d\ ;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x\,dx=2\int_{0}^{\infty}\cos x\,dx。$$

故(30)又可寫爲

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)d\lambda\int_{0}^{\infty}\cos\alpha(\lambda-x)d\alpha, \tag{32}$$

此中積分極限與 α 及 λ 無關,故求積分時任何次序都可以。又若 $f(x)$ 是一個奇函數或偶函數,(32)更可化得簡單。

(i)　設 $f(x)$爲 x 的奇函數,卽

$$f(x)=-f(-x)\quad 或\quad -f(x)=f(-x),$$

則用三角公式與第 83 節的結果,可得

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)d\lambda\int_{0}^{\infty}\cos\alpha(\lambda-x)d\alpha\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)\cos\alpha(\lambda-x)d\lambda\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{0}f(\lambda)\cos\alpha(\lambda-x)d\lambda+\int_{0}^{\infty}f(\lambda)\cos\alpha(\lambda-x)d\lambda;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\alpha\int_{\infty}^{0}f(-\lambda)\cos(-\lambda-x)\,d(-\lambda)\\
&\quad+\int_{0}^{\infty}f(\lambda)\cos\alpha(\lambda-x)\,d\lambda;\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\alpha\left\{-\int_{0}^{\infty}f(\lambda)\cos\alpha(\lambda+x)d\lambda\right\}+\int_{0}^{\infty}f(\lambda)\cos\alpha(\lambda-x)d\lambda
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty f(\lambda)\{\cos\alpha(\lambda-x)-\cos\alpha(\lambda+x)\}d\lambda$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty f(\lambda)\sin\alpha\lambda\sin\alpha x\cdot d\lambda;$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\lambda)d\lambda\int_0^\infty\sin\alpha\lambda\sin\alpha x\,d\alpha,\tag{33}$$

此式對於一切奇函數 $f(x)$ 而 (x) 爲正值時是眞確的。

(ii)　設 $f(x)$ 爲 x 的偶函數,卽

$$f(x)=f(-x)。$$

用同上的方法可化(32)爲傅氏積分,

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\lambda)d\lambda\int_0^\infty\cos\alpha\lambda\cos\alpha x\,d\alpha,\tag{34}$$

此式對於一切偶函數 $f(x)$, 而 x 爲正值時是眞確的。

雖然傅氏級數的積分是由求逐項的積分而得的，但並不能說將積分過的級數逐項而求微分卽能得此級數，因爲求微分使一個級數不斂些,求積分使一個級數更斂些。換言之,一個斂級數求微分後可變爲散級數。這裏發生了另一問題，卽傅氏級數的斂性。在以前的展開式中假定:

(i)三角函數是均勻的斂級數。

(ii)級數是實在等於 $f(x)$。

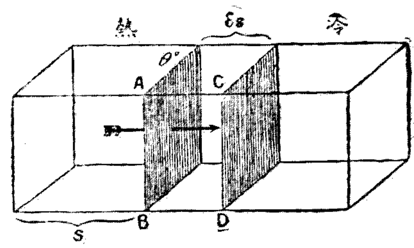
這些假定是否合法，已經有過精密的研究。結果證明設函數是單值的(Single valued);在極限 $\pm\pi$ 間是有限的,且只有有限個的極大或極小時,上述展開式恆是適用的。$y=f(x)$ 的曲線，其全部的長不必合於同一定律,很可由幾個完全不同的曲線連合而成。x 取一切的値時

一個週期函數的完全表示法可使每項展開爲一個週期函數，而每個級數自身又是一個週期函數，餘可類推。

傅氏級數的斂性條件之正式的研究，不得不略去。W. E. Byerly's An Elementary Treatise on Fourier's Series, etc.，論傅氏級數在數學物理上之應用是一部最實用的著作。J. Fourier 的原著 Théorie analytique de la Chaleur, Paris, 1822，或者與其他關於這問題的著作同樣的新鮮；再可參閱 W. Williams, Phil. Mag. [5], **42**, 125, 1896; Lord Kelvin 集; Riemann-Weber 之作（第 147 節中已引過）等。

§ 152. 傅氏線擴散定律(Fourier's Linear Diffusion Law)

設一個單位截面積的金屬棒中任意平截面爲 AB（圖一百六十三）。設此截面在任何時刻有相等溫度——卽等溫面；設平面 AB 的左邊的溫度高於右邊。結果，熱要從溫度高的一邊流到低的一邊，如箭頭所示方向，而穿過平面 AB。Fourier 假定，(i) 流的方向垂直於截面 AB；(ii) 流的速度，在經過任何截面時，比例於此截面兩邊溫度之差。



圖一百六十三

設流的速度是等的，又設 θ 爲平面 AB 的溫度。在平面 AB 上任何點的溫度昇高率爲 $\dfrac{d\theta}{ds}$，卽所謂溫度梯度 (Temperature gradient)。每秒鐘從棒的熱端流向冷端的熱量爲$-a\frac{d\theta}{ds}$,此中 a 爲常數,表示當溫度梯度爲 1 時,每秒鐘流過單位面積的熱量。平面 CD 距離 AB 爲 δs,今觀察其上一點的 $-a\frac{d\theta}{ds}$ 之值;δs 取得很小使溫度梯度可以作爲常數。在 $s+\delta s$ 點的溫度爲 $\left(\theta-\frac{d\theta}{ds}\delta s\right)$,因爲$-\frac{d\theta}{ds}$爲沿棒的溫度昇高率,乘以 δs,即爲當熱從 s 至 $s+\delta s$ 點時,爲溫度的昇高量。故流過小截片 $ABCD$ 的熱量爲

$$-a\frac{d}{ds}\left(\theta-\frac{d\theta}{ds}\delta s\right);$$

又
$$+a\frac{d^2\theta}{ds^2}\delta s \tag{34}$$

爲從一邊流入時的熱量與從另一邊流出時的熱量之差。故 (34) 表示每秒鐘所加於截片 $ABCD$ 的熱量。若 σ 表示單位體積的熱容量,則 $ABCD$ 部份的熱容量爲 $(1\times\delta s)\sigma$。故每單位面積溫度的昇高率爲 $\sigma\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\delta s$。所以

$$a\frac{d^2\theta}{ds^2}\delta s=\sigma\frac{d\theta}{dt}\delta s。\tag{35}$$

令$\frac{a}{\sigma}=K$;此方程式可寫爲

$$\frac{1}{K}\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{d^2\theta}{ds^2},\tag{36}$$

此中 K 爲此物質的擴散係數 (Diffusivity)。方程式(36)表示傅氏線擴散定律。此式包括一切擴散的可能情形,其中所論的物質,在平行於

已知平面的任何平面上，各點的條件是相同的。更普遍些可寫為

$$\frac{1}{K}\cdot\frac{dV}{dt}=\frac{d^2V}{dx^2}。\tag{37}$$

我們所研究者若為三向度的擾動的傳播(Propagation of the disturbance)不能用這簡單情形的直線傳播（即一向度傳播）方程式，所用之方程式將為，

$$\frac{1}{K}\cdot\frac{dV}{dt}=\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}。\tag{38}$$

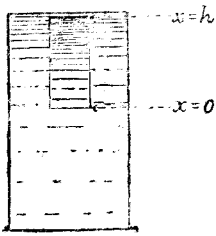
Lord Kelvin 稱 V 為此物質於時間 t 與固定的參考平面的距離為 x 時的性質 (Quality)。故微分方程式(37)表示每單位時間此性質的增加率等於擴散係數與$\frac{dV}{ds}$（即每單位空間的性質）的增加率之積。性質隨擴散的題材而定。例如，牠可代表粘滯流體運動的三個分速度之一，也可代表垂直於電流方向的每單位面積的電流強度，又可代表隔離的導體內任何點的溫度與位，又可代表一個已知液體的濃度。歐姆定律(Ohm's law)只是傅氏線擴散定律的一個特例。費克擴散定律(Fick's law of diffusion)是另一個例。電話沿電線而傳遞，真的，任何線傳播現象，是包括在傅氏這定律之內。

§ 153. 對於溶液中鹽類擴散上之應用。(Application to the Diffusion of Salts in Solution.)

一個單位截面積的小圓內裝滿一些鹽類的溶液（圖一百六十四）。設以此管並內容物沉入貯有大量的水的器內，使管口恰恰在水面之下。鹽類溶液越管而出，從水內向器底下沉。故管口可假定其恆與淨水接

觸。管內溶液自底至頂共高 h。鹽類擴散依照傅氏定律，

$$\frac{dV}{dt}=K\frac{d^2V}{d^2x},\tag{1}$$



圖一百六十四

此即稱爲物質在溶液中擴散的費氏定律（Fick's law of diffusion）。

I. **求任何時間 t 後，擴散管內各種高度 x 所溶物質的濃度 V。**這等於費氏方程式的一個解使適合於實驗舉行時所有的條件。這些所謂極限條件(Limiting conditions)是:(i) 當

$$x=0,\quad \frac{dV}{dx}=0\tag{2}$$

時，$\frac{dV}{dx}=0$ 是說此時既無鹽類從溶液出來，亦無鹽類向溶液中去；(ii) 當

$$x=h,\quad V=0\tag{3}$$

時；(iii) 當

$$t=0,\quad V=V_0。\tag{4}$$

讀者在進習後文之前必須弄清這點。V, x, t 各有什麼意義? V_0 顯然是表示實驗開始時鹽類溶液的濃度；V 是在時間 t，距離管底爲 x 處（圖一百六十四）此溶液的濃度，設如每升溶液內所含鹽類的克分子是；在管頂顯是 $x=h$；$V=0$ 因爲此處是純水；第一個條件是說管底的濃度在實驗是不變的。

第一求特殊解。依第 146 節的方法，作爲試驗假定

$$V=e^{\alpha x+\beta t} \tag{5}$$

爲當 α 與 β 爲常數時(1)的解。代入(1)，可得

$$\beta=K\alpha^2。 \tag{6}$$

故若(6)是眞確的，α 爲無論何值(5)爲(1)的解。故當 $\alpha=i\mu$ 時亦眞確。

$$\therefore\quad V=e^{i\mu x+\beta t}=e^{i\mu x+K\alpha^2 t}=e^{i\mu x-K\mu^2 t}。$$

結果

$$V=e^{-K\mu^2 t}e^{i\mu x};\quad V=e^{-K\mu^2 t}e^{-i\mu x},$$

爲(1)的解。故其和與差

$$V=\frac{1}{2}e^{-K\mu^2 t}(e^{i\mu x}\pm e^{-i\mu x})$$

亦爲(1)的解；從 Euler 的正弦與餘弦級數（第 97 節）

$$V=a\ e^{-K\mu^2 t}\cos\mu x;\quad V=b\ e^{-K\mu^2 t}\sin\mu x, \tag{7}$$

此中 a 與 b 爲常數；同樣

$$V=(a\cos\mu x+b\sin\mu x)e^{-K\mu^2 t}, \tag{8}$$

爲已知方程式的解。現在還得用三個已知條件來決定常數 a 與 b。

條件 (i)，當 $x=0$，$\frac{dV}{dx}=0$。求(8)關於 x 的微係數，可得

$$\frac{dV}{dx}=(-\mu a\sin\mu x+\mu b\cos\mu x)e^{-K\mu^2 t}。$$

當 $x=0$ 時，$\sin\mu x$ 爲零；當 $x=0$ 時，$\cos\mu x=1$。結果若 $x=0$ 時 $\frac{dV}{dx}=0$ 則 b 必須爲零。故(5)，亦即是 (8)，能適合於第一條件。

條件(ii)當 $x=h$，$V=0$。欲(8)可以適合第二條件，必須於 $x=h$

時 $\cos\mu h=0$。但

$$\cos\frac{1}{2}\pi=\cos\frac{3}{2}\pi=\cdots\cdots=\cos\frac{1}{2}(2n-1)\pi=0,$$

此中 $\pi=180°$，又 n 爲從 1 至 ∞ 的任何整數。故此欲 $\cos^m\mu h$ 爲零，我們必須 $\mu h=\frac{1}{2}\pi$；$\mu h=\frac{3}{2}\pi$；……或

$$\mu=\frac{\pi}{2h};\ =\frac{3\pi}{2h};\ =\frac{5\pi}{2h};\ \cdots\cdots=\frac{(2n-1)\pi}{2h}。$$

逐一以 μ 的這些值代入 (8)，而總加這些結果一起；可得

$$V=a_1e^{-\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2Kt}\cos\frac{\pi x}{2h}+a_2e^{-\left(\frac{3\pi}{2h}\right)^2Kt}\cos\frac{3\pi x}{2h}$$

$$+\cdots\text{至無限項}, \tag{9}$$

這能適合必要的條件之二，即(1)與(2)。

條件(iii)當 $t=0$，$V=V_0$，我們必須求(9)中係數 a_1，a_2……使特殊解(8)或(9)能適合於第三條件。這能用通常的方法採用 $t=0$ 時的最初各條件。當 $t=0$ 時，$V=V_0$。故從(9)

$$V_0=a_1\cos\frac{\pi x}{2h}+a_2\cos\frac{3\pi x}{2h}+\cdots\cdots, \tag{10}$$

當 x 取 0 與 h 間的一切值是眞確的。所以

$$a_1=\frac{2V_0}{h}\int_0^h\cos\frac{\pi x}{2h}dx;\quad a_2=\frac{2V_0}{h}\int_0^h\cos\frac{3\pi x}{2h}dx;\cdots\cdots$$

$$a_n=\frac{4V_0}{(2n-1)\pi}。 \tag{11}$$

這些結果是令(9)中每項等於零而求極限 0 與 h 間的積分。以這些值如 a_1，a_2，……等代入(9)，即得適合於實驗的極限條件的解。必要時，

可寫結果所得的級數爲更簡的形，

$$V=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{2n-1}e^{-\left(\frac{2n-1}{2h}\pi\right)^2\kappa t}\cos\frac{2n-1}{2h}\pi x, \tag{12}$$

此中極限 $n=\infty$ 與 $n=0$ 間的總和記號，意義是說 n 取 0, 1, 2, 3, ……至無限大，各正整數值，再將這些結果總加之。

h 若從管端量起，即以管口爲 $x=0$，管底爲 $x=h$，同樣方法，得

$$V=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{2n+1}e^{-\left(\frac{2n+1}{2h}\pi\right)^2\kappa t}\sin\frac{2n+1}{2h}\pi x。 \tag{13}$$

當 $x=h$ 時，可以引入第四條件 $\frac{dV}{dx}=0$，但這樣所得的結果是相同的，我們從下列例一中可以見到這點。

例一　T. Graham 的擴散實驗(Phil. Trans., **151**, 188, **1861**)。高 152 毛米，直徑 87 毛米的容器內，下層裝有 0.1 升的鹽類溶液，其上裝有 0.7 升的水。此時液體的高度總共 127 毛米。經過某時間以後，逐次取出 100 立方厘米，卽液體總體積的 $\frac{1}{8}$，而決定各層中所含鹽類的量。這裏在容器之底 $x=0$；在其頂面 $x=H$；當 $t=0$ 時，在溶液與水的接觸面 $x=h$。極限條件在某時間 t 之末爲：(i) $x=0$ 則 $\frac{dV}{dx}=0$；(ii) $x=H$ 則 $\frac{dV}{dx}=0$；(iii) $t=0$ 則在 $x=0$ 與 $x=h$ 之間時 $V=V_0$；(iv) $t=0$ 則在 $x=h$ 與 $x=H$ 之間時 $V=0$。欲使這些結果適用於費氏方程式的傅氏解法，第一須證明(8)爲費氏方程式的特殊積分。求 (8) 關於 x 的微係數，從第一個條件已知 b 等於零，卽條件(i)可適合。從條件(ii)，$\sin \mu H$ 必須爲零；但 $\sin n\pi$ 爲零，故

我們可得

$$\mu H=n\pi; \quad \text{即} \ \mu=\frac{n\pi}{H},$$

此中 n 可有 0, 1, 2, 3……中任何之值。總加所有的特殊積分，得

$$V=a_0+a_1\cos\frac{\pi x}{H}e^{-\left(\frac{\pi}{H}\right)^2\kappa t}+a_2\cos\frac{2\pi x}{H}e^{-\left(\frac{2\pi}{H}\right)^2\kappa t}+\cdots\cdots$$

此中常數 $a_0, a_1, a_2,$…… 必須使適合於條件 (iii) 與 (iv)。從條件 (iii)，當 $t=0$ 時，$V=V_0$；結果,從 $x=0$ 至 $x=h$,

$$V_0=a_0+a_1\cos\frac{\pi x}{H}+a_2\cos\frac{2\pi x}{H}+\cdots\cdots。$$

從條件(iv),從 $x=h$ 至 $x=H$，可將 $V=0$ 代入。故依第83節(4)得

$$a_0=\frac{1}{H}\int_0^H V_0\,dx=\frac{1}{H}\left\{\int_h^H 0\,dx+\int_0^h V_0\,dx\right\}=\frac{V_0h}{H}。$$

同樣可證，

$$a_n=\frac{2}{H}\int_0^H V_0\cos\frac{n\pi x}{H}dx$$

$$=\frac{2V_0}{n\pi}\int_0^h\cos\frac{n\pi x}{H}d\left(\frac{n\pi x}{H}\right)=\frac{2V_0}{n\pi}\sin\frac{n\pi h}{H}。$$

故這些條件全部採用時，普遍解的形式將為

$$V=\frac{V_0h}{H}+\frac{2V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi h}{H}\cos\frac{n\pi x}{H}e^{-\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2\kappa t}, \quad (14)$$

這是此類工作的標準方程式。在 Graham 的實驗中，$h=\frac{1}{8}H$。故距離容器之底為 x 處之平面中，其濃度 V 可從下列無限級數求得之，

$$V=\frac{V_0}{8}+\frac{2V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{8}\cos\frac{n\pi x}{H}e^{-\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2\kappa t}。\quad (15)$$

無限級數事實上只有當收斂得很快時，方有實用；除了最初幾項外，以後各項要對於結果影響極少，雖是略去亦無關係．量測各層 x 之濃度時要其與 H 的關係使 $\cos\frac{n\pi x}{H}=1$，往往可使此級數變爲有用；還有使 t 爲很大，則第二項之後各項小得幾乎爲零。

例二　H. F. Webber 擴散實驗(Wied. Ann., **7**, 469, 536, 1879; 或 Phil. Mag., [5] **8**, 487, 523, 1879)。濃硫酸鋅溶液（每立方厘米溶液中含有 0.25 至 0.35 克）裝在圓柱形容器內，其底置有光滑的混汞鋅片，直徑約 1.1 厘米。此溶液之上，注入較淡的溶液（每立方厘米約 0.15 至 0.20 克），兩者之間再置一個混汞鋅片。已知若 V_1，V_2 各表上層與下層的濃度，因濃度之差而生之位差 E，可用下式表之，

$$E=A(V_2-V_1)\{1+B(V_2+V_1)\}, \tag{16}$$

此中 A 與 B 爲已知常數，B 與 A 比較爲很小的數。這個位差，或電動勢差可用以決定鋅電極周圍兩種溶液濃度之差。使這些條件適用於費氏方程式，設 h_1 爲下層溶液的高，h_2 爲上層溶液的高，於是 $h_1+h_2=H$。t 取所有的值時所須適合於極限條件爲 $x=0$，則 $\frac{dV}{dx}=0$；$x=0$ 則 $\frac{dV}{dx}=0$。最初條件：當 $t=0$，x 的值如在 $x=h$ 與 $x=H$ 之間時，則 $V=V_2$。如上例一樣可得

$$a_0=\frac{V_1h_1+V_2h_2}{H};\quad a_n=-\frac{2(V_2-V_1)}{\pi}\ \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi h_1}{H};$$

又普遍解爲

$$V=\frac{V_1h_1+V_2h_2}{H}$$

$$-\frac{2(V_2-V_1)}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi h_1}{H}\cos\frac{n\pi x}{H}e^{-\frac{n^2\pi^2\kappa t}{H^2}} \quad (17)$$

此方程式只適用於界層 $x=0$, $x=H$ 處的變濃度。必須使此適用於方程式(16)。設 $x=0$ 與 $x=H$ 兩層的變濃度各爲 V' 與 V''。

$$V'=\frac{V_1h_1+V_2h_2}{H}$$

$$-\frac{2(V_2-V_1)}{\pi}\left\{\sin\frac{\pi h_1}{H}e^{-\frac{\pi^2}{H^2}\kappa t}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi h_1}{H}e^{-\frac{4\pi^2}{H^2}\kappa t}+\cdots\right\};$$

$$V''=\frac{V_1h_1+V_2h_2}{H}$$

$$+\frac{2(V_2-V_1)}{\pi}\left\{\sin\frac{\pi h_1}{H}e^{-\frac{\pi^2}{H^2}\kappa t}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi h_1}{H}e^{-\frac{4\pi^2}{H^2}\kappa t}+\cdots\right\};$$

$$V''-V'=\frac{4(V_2-V_1)}{\pi}\left\{\sin\frac{\pi h_1}{H}e^{-\frac{\pi^2}{H^2}\kappa t}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi h_1}{H}e^{-\frac{9\pi^2}{H^2}\kappa t}+\cdots\cdots\right\},$$

$$V''+V'=2\frac{V_1h_1+V_2h_2}{H}$$

$$-\frac{4(V_2-V_1)}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi h_1}{H}e^{-\frac{4\pi^2}{H^2}\kappa t}+\cdots\cdots\right\}。$$

在實際工作中, H 使成很小。時間經過一天 $(t=1)$ 之後,

$\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi h_1}{H}e^{-\frac{16\pi^2}{H^2}\kappa t}$ 等……與 $\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi h_1}{H}e^{-\frac{25\pi^2}{H^2}\kappa t}$ 等…… 各項將

小於 $\frac{1}{400}$。故此後的項非實驗所能及，可以略去。今令 h_1 儘量接近於 $\frac{1}{3}H$，可使 $\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi h_1}{H}$ 這一項爲零。從此

$$V''-V'=\frac{4(V_2-V_1)}{\pi}\sin\frac{\pi}{3}e^{-\frac{4\pi^2\kappa t}{H^2}}$$

$$V''+V'=\frac{2(V_1h_1+V_2h_2)}{H}-\frac{2(V_2-V_1)}{\pi}\sin\frac{2\pi}{3}e^{-\frac{4\pi^2\kappa t}{H^2}}。$$

今以這些值代入 (16)，注意 π，V_2，V_1，h_1，h_2，$\sin\frac{1}{3}\pi$，$\sin\frac{2}{3}\pi$，H 都是常數，當 $t=0$ 時，V_1，V_2 各自變爲 V'，V''。由於兩個界層 V' 與 V'' 的濃度之差而發生的兩個電極的位差 E，爲

$$E=A(V''-V')\{1+B(V''+V')\}=A_1e^{-\frac{\pi^2\kappa t}{H^2}}+B_1e^{-\frac{5\pi^2\kappa t}{H^2}} \qquad (18)$$

此中 A_1 與 B_1 爲常數。因 B 與 A 比較，是很小的數，故若時間很短，上式可化爲

$$E=A_1e^{-\frac{\pi^2\kappa t}{H^2}}。 \qquad (19)$$

此方程式 Webber 用以試驗費氏定律之正確與否。常數 $\frac{\pi^2\kappa}{H^2}$，當時間經過 4，5，6，7，8，9，10 天後之值各爲 0.2032，0.2066，0.2045，0.2027，0.2027，0.2049，0.2049。是很可滿意的結果。亦可參閱 W. Seitz, Inaugural-Dissertation, Leipzig, 1897。

II. **求已知時間 t 內擴散過任何橫截面的鹽類的量 Q。**求 (7) 關於 x 的微係數，以 $-\kappa\,dt$ 乘全式可得 $-\kappa\frac{dV}{dx}dt$。設 x 爲任何已

知橫截面的高度，則 $-\kappa q\frac{dV}{dx}dt$ 爲時間 dt 內通過此橫截面的鹽類的量；q 爲此橫截面的面積。設容管有單位截面積，則 $q=1$。

$$\therefore\quad Q=-\kappa\int_0^t\frac{dV}{dx}dt=\int_0^t\frac{\kappa\pi}{2h}\left\{a_1e^{-\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2\kappa t}\sin\frac{\pi x}{2h}+\cdots\cdots\right\}dt_{\circ}$$

求上下限 0 與 t 間的積分。結果可表示在時間 t 內通過容管任何橫截面 x 的鹽類的量。即

$$Q=-\kappa\int_0^t\frac{dV}{dx}dt=\frac{2h}{\pi}\left\{a_1\left(1-e^{-\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2\kappa t}\right)\sin\frac{\pi x}{2h}+\cdots\right\}_{\circ}\quad(20)$$

III. **求已知時間 t 內，越出管外的鹽類的量 Q_1。** 以 $h=x$ 代入(20)。$\frac{1}{2}\pi$，$\frac{3}{2}\pi$ ……，$\frac{1}{2}(2n+1)\pi$ 各角的正弦爲 1。故

$$Q_1=\frac{2h}{\pi}\left\{a_1\left(1-e^{-\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2\kappa t}\right)-\frac{1}{3}a_3\left(1-e^{-\left(\frac{3\pi}{2h}\right)^2\kappa t}\right)+\cdots\right\}_{\circ}\quad(21)$$

IV **求擴散係數 K 的值。** 因級數(21)的各項收斂得很快，故可略去此級數的較高的項。支配實驗使在 $x=h,\frac{1}{3}h,\frac{1}{5}h\cdots\cdots$ 時施行量測，這樣(20)中 $\sin\frac{\pi x}{2h}$，……等，都等於 1。於是得到與(21)相仿的級數。代入係數，經過適當的移項，即得

$$\frac{Q\pi}{2ha_1}=\left(1-e^{-\frac{\kappa t\pi^2}{4h^2}}\right)^2;\quad\kappa=\frac{4h^2}{t\pi^2}\log\left(\frac{Q\pi}{2ha_1}-1\right)_{\circ}$$

$$a_1=\frac{2V_0}{h}\cdot\frac{2h}{\pi}\int_0^h\cos\frac{\pi x}{2h}d\left(\frac{\pi x}{2h}\right)=\frac{4V_0}{\pi}_{\circ}$$

$$\therefore\quad\kappa=\frac{4h^2}{t\pi^2}\log\left(\frac{Q\pi^2}{8hV_0}-1\right)_{\circ}\quad(22)$$

此外還有幾種方法可求 κ 的值。從第 71 節亦可見到這類的例。

V. **求經過已知時間 t 後，留存在管內的鹽類的量 Q_2**。實驗開始時溶液中鹽類的量可以記號 Q_0 代表之。Q_0 之決定，可令 (20) 中 $t=0$ 然後消去 $\sin\frac{\pi x}{2h}$，……如 IV 所示。

$$Q_0=\frac{2h}{\pi}\left(a_1-\frac{1}{3}a_3+\cdots\cdots\right);\quad 而\ Q_2=Q_0-Q_1;$$

$$\therefore\quad Q_2=\frac{2h}{\pi}\left(a_0\,e^{-\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2\kappa t}-\frac{1}{3}a_3e^{-\left(\frac{3\pi}{2h}\right)^2\kappa t}+\cdots\cdots\right)。\qquad(23)$$

例　一種鹽類的溶液，濃度為 V_0，注入管內至管高三分之二，其三分之一裝以純溶劑。求 Q_2。

從(9)，

$$a_n=\frac{2V_0}{h}\int_0^{\frac{2}{3}h}\cos\frac{n\pi x}{2h}dx=\frac{4V_0}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3},$$

此中 $n=1,3,5,\cdots\cdots$ 又 h 為管高。於是

$$a_1=\frac{4V_0}{\pi}\sin 60^\circ=\frac{2\sqrt{3}\,V_0}{\pi};\quad a_2=0;\quad a_3=-\frac{2\sqrt{3}\,V_0}{3\pi}。$$

從(23)，可得

$$Q_2=\frac{4\sqrt{3}\,V_0h}{\pi}\left(e^{-\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2\kappa t}-\frac{1}{9}e^{-\left(\frac{3\pi}{2h}\right)^2\kappa t}+\cdots\cdots\right)。$$

VI. 設擴散管分成 m 層，求第 $r-1$ 層與第 r 層間的鹽類的量 Q　在厚為 dx 的第 r 層的鹽類的量顯是 dQ_r；因為離管底 x 單位處的平面內鹽類濃度為 V，故

$$dQ_r = V\,dx;\quad \text{即}\ Q_r = \int_{\frac{(r-1)H}{m}}^{\frac{rH}{m}} V\,dx。\tag{24}$$

V 的值於(10)或(12)中已經求得，代入(24)，再用通常的方法求積分。

例一　回到 1 中例一 Graham 實驗，證明

$$Q_r = \int_{\frac{(r-1)H}{m}}^{\frac{rH}{m}} \left(\frac{V_0}{8} + \frac{2V_0}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{8}\cos\frac{n\pi x}{H}\,e^{-\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2\kappa t}\right)dx;$$

用(24)，再用(15)而暫行略去 Σ 記號。求積分得

$$Q_r = \frac{V_0H}{8m} + \frac{2V_0H}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{8}\left(\sin\frac{n\pi r}{m}\right.$$

$$\left.-\sin\frac{n\pi(r-1)}{2m}\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2\kappa t};$$

$$\therefore\quad Q_r = \frac{V_0H}{8}\left(\frac{1}{m} + \frac{4m}{n^2\pi^2}\right)\sin\frac{n\pi}{8}\sin\frac{n\pi}{2m}\cdot$$

$$\cos\frac{n\pi(2r-1)}{2m}\,e^{-\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2\kappa t}。$$

歸回略去的 Σ 記號，並注意在 Graham 實驗中 $m=8$，即得

$$Q_r = \frac{V_0H}{8}\left(\frac{1}{8} + \frac{32}{\pi^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{8}\sin\frac{n\pi}{16}\cdot\right.$$

$$\left.\cos\frac{(2r-1)n\pi}{16}\,e^{-\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2\kappa t}\right)。\tag{25}$$

此 $\frac{1}{8}V_0H$ 乘以管的截面積（本例中為 1）表示管內所有鹽類的總量。

令 $Q_0 = \frac{1}{8}V_0H$。所不幸者 Graham 實驗的大部份不適用於數值上的

研究，因爲他的擴散管的形狀雖是已知，使所得方程式很是難看。在實驗詳情中略加改變往往可省去不少的算學上的功夫。Q_r 的值隨 $\cos\frac{(2r-1)n\pi}{16}$ 的值而定。若擴散管分作 8 層，卽 r 的值爲 1, 2, 3, ……8。當 r 取 1 至 8 的值，而 n 取 1, 2, 3, 4, …… 的值時，$\cos\frac{(2r-1)n\pi}{16}$ 的值列成下表：

第 r 層	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
$r=1$	$+\cos\frac{1}{16}\pi$	$+\cos\frac{1}{8}\pi$	$+\cos\frac{3}{16}\pi$	$+\cos\frac{1}{4}\pi$
$r=2$	$+\cos\frac{3}{16}\pi$	$+\cos\frac{3}{8}\pi$	$-\cos\frac{7}{16}\pi$	$-\cos\frac{1}{4}\pi$
$r=3$	$+\cos\frac{5}{16}\pi$	$-\cos\frac{3}{8}\pi$	$-\cos\frac{1}{16}\pi$	$-\cos\frac{1}{4}\pi$
$r=4$	$+\cos\frac{7}{16}\pi$	$-\cos\frac{1}{8}\pi$	$-\cos\frac{5}{16}\pi$	$+\cos\frac{1}{4}\pi$
$r=5$	$-\cos\frac{7}{16}\pi$	$-\cos\frac{1}{8}\pi$	$+\cos\frac{5}{16}\pi$	$+\cos\frac{1}{4}\pi$
$r=6$	$-\cos\frac{5}{16}\pi$	$-\cos\frac{3}{8}\pi$	$+\cos\frac{1}{16}\pi$	$-\cos\frac{1}{4}\pi$
$r=7$	$-\cos\frac{3}{16}\pi$	$+\cos\frac{3}{8}\pi$	$+\cos\frac{7}{16}\pi$	$-\cos\frac{1}{4}\pi$
$r=8$	$-\cos\frac{1}{16}\pi$	$+\cos\frac{1}{8}\pi$	$-\cos\frac{3}{16}\pi$	$+\cos\frac{1}{4}\pi$

從(25)計算 Q_1, Q_4, Q_5, Q_8 的相當值，求其總和，可見三角級數的最初三項互相消去，以後各項小得可以略去。故

$$Q_1+Q_4+Q_5+Q_8=\frac{1}{2}Q_0, \tag{26}$$

此結果與 J. Stefan(Wien. Akad. Ber., **79**, ii, 161, 1879)所作氯鈉與其他鹽類在水溶液中擴散的實驗相符合。當 $t=14$ 天時，級數

(23)是收斂得如是之快,除了第一第二兩項外,其餘統可略去。結果得

$$Q_1+Q_2=Q_0\left(\frac{1}{4}+\frac{64}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{16}e^{-\left(\frac{\pi}{H}\right)^2\kappa t}\right)。\tag{27}$$

Q_1, Q_2, Q_0, H, t, 都是可以量測的, e 與 π 為已知常數, 故 κ 的值很易計算。

例二 一種氣體 A, 依從 Dalton 分壓力定律, 擴散入另一種氣體 B 內, 證明若氣體 A 的分壓力為 p, 在距離 x, 在時間 t 則

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}。\tag{28}$$

在 Loschmidt 的擴散實驗中 (Wien. Akad. Ber., **61**, 367, 1870; **62**, 468, 1870.)用高為 48.75 厘米直徑為 2.6 厘米的圓柱管兩個, 底為密封, 兩口相合, 中夾金屬片, 抽出時卽能交通。以此兩管貯不同的氣體, 一管直立於他管之上, 抽出夾片, 使交通一定的時間 t, 然後取各管中的混合物而分析之。兩管相聯時其高共為 97.5 厘米。今欲解方程式(28)而使當 $t=0$ 時從 $x=0$ 至 $x=\frac{1}{2}L=l$, 則 $p=p_0$; 從 $x=\frac{1}{2}L$ 至 $x=L$, 則 $p=0$; 當 t 為任何值而 $x=0$ 與 $x=L$ 時, $\frac{dp}{dx}=0$。注意 p_0 為氣體的原來壓力。從證明

$$p=\frac{p_0}{2}+\frac{2p_0}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{L}e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\kappa t}。\tag{29}$$

經過時間 t 後, 上管與下管中所含氣體的量各為 Q_1 與 Q_2, 則

$$Q_1=q\int_0^l p\,dx;\quad Q_2=q\int_l^L p\,dx,\tag{30}$$

此中 $l=\frac{1}{2}L$，又 q 爲管的截面積。從此證明

$$\frac{Q_1-Q_2}{Q_1+Q_2}=\frac{\pi}{8^2}\left(\frac{1}{1^2}e^{-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\kappa t}+\frac{1}{3^2}e^{-\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2\kappa t}+\cdots\cdots\right),$$

從此常數 κ 可以決定。若時間充分的長，則

$$\frac{D}{S}=\frac{\pi}{8^2}e^{-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\kappa t} \tag{31}$$

此中 D 與 S 各表兩管中氣體的量之差與和。Loschmidt 量測 D, S, t, κ 而求得觀測值與計算值很是接近。O. A. von Obermayer 實驗 (Wien. Akad. Ber., **85**, 147, 749, 1882; **87**, 1, 1883) 也與這些結果相符。

VII. **求到達靜止狀態時擴散管各部份溶解物的濃度。**經過充份長的時間後，到達平衡狀態，其時管的兩部份內物質的濃度爲常數。若圖一百六十四中外面的容器是很大，管底的溶液使與固體的鹽類直接接觸而得飽和狀態則易發生平衡狀態。此時

$$\frac{dV}{dt}=0;\quad \frac{d^2V}{dx^2}=0。$$

求後者的積分，得

$$V=ax+b, \tag{32}$$

此中 a, b 爲常數，可從實驗材料決定之，如第 108 節所述。(32) 的意義是濃度，由下而上的減少，如一個直線的縱坐標，符合於費氏實驗。

例一　適用第 152 節 (38) 於漏斗形容器中鹽類的擴散情形。圓錐形的容器 $q=\pi m^2x^2$，此中圓錐頂點在坐標軸之原點，頂角之半的正

切為 m。關於圓錐形容器中的靜止狀態 Fick 曾經作一組粗略的實驗，其結果相似的符合於方程式

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial V}{\partial x}=0;\qquad \therefore\ V=C_1+\frac{C_2}{x}。\tag{33}$$

圓錐頂與貯鹽器相接觸，故當 $x=0$，則 $V=V_0$，又當 $x=h$（圓錐的高）則 $V=0$。這可使 C_1 與 C_2 的值求得。A. Fick, Pogg. Ann., **94**, 59, 1855；或 Phil. Mag., [4], **10**, 30, 1855。

例二　一塊很大很大的**鈾鐳瀝清**（Pitchblende）有兩處表面是平行的平面可使同垂直於 x 軸。由於內部的變化而發生熱，故有連續的熱流向表面流出。在靜止狀態中每平方厘米的熱流 $-k\left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\right)\delta s$，等於每平方厘米的熱的產生率如 $q\,\delta s$。從此證明 $\frac{d^2\theta}{ds^2}=-\frac{q}{k}$。設有 100 厘米厚的一片，表面上使為 0°C.，設 q 為單位的 $\frac{1}{1200000}$ 而 $k=0.005$ (R. J. Strutt, Nature, **68**, 6, 1903) 證明在此片中間層的溫度比表面高出 $\frac{1}{5}$°C.

示意：　先求上方程式的積分。極限條件，當 $s=0$ 與 $s=100$ 時 $\theta=0$。

$$\therefore\quad \theta=-\frac{qs}{2k}(s-100);$$

在此片中間 $s=50$，故

$$\theta=\frac{1}{5}\text{（近似值）。}$$

§ 154. 對於熱之傳導問題的應用 (Application to Problems on the Conduction of Heat)

讀者知道，常微分方程式與偏微分方程式的分別是：常微分方程式只有有限個獨立特殊積分，但偏微分方程式可有無限個這樣的解。在實際工作中我們必須取出一個特殊積分使適合於已知實驗舉行時所具的條件。假設在下列方程式中

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

欲求 V 的值，使 $y=\infty$ 時 $V=0$；又 $y=0$ 時 $V=f(x)$。與第 153 節(5)相仿，假定

$$V=e^{\alpha y+\beta x},$$

為一個解，此中 α, β 為常數。代入(1)而除以 $e^{\alpha y+\beta x}$，得

$$\alpha^2+\beta^2=0,$$

若此條件成立，則 V 的假定值為 (1) 的解。故 $V=e^{\alpha y\pm i\alpha x}$ 亦為(1)的解，於是 $e^{\alpha y}e^{i\alpha x}$ 與 $e^{\alpha y}e^{-i\alpha x}$ 亦為解。相加而除以 $2i$，或相減而除以 2；從第 97 節(13)與(15)可知

$$V=e^{\alpha y}\cos\alpha x;\quad 與\quad V=e^{\alpha y}\sin\alpha x \tag{2}$$

必為(1)的解。方程式(2)的第一式乘以 $\cos\alpha\lambda$，其第二式乘以 $\sin\alpha\lambda$。結果還是可以適合(1)的。相加之，再依第 192 節(24)得

$$e^{-\alpha y}\cos\alpha(\lambda-x)$$

亦必適合(1)。乘以 $f(\lambda)d\lambda$，結果還是(1)的解

$$e^{-\alpha y}f(\lambda)\cos\alpha(\lambda-x)d\lambda。$$

乘以 $\frac{1}{\pi}$ 而求當 a 取 0 與 ∞ 間各值的極值。故從第 151 節 (30) 與 (32)，我們可得適合於所求條件的特殊解

$$V=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}da\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ay}f(\lambda)\cos a(\lambda-x)d\lambda。\tag{3}$$

例一 一個大的鐵片，π 厘米厚，其均匀的溫度為 $100°$，突然浸入零度的池内 10 秒鐘。求 10 秒鐘末此片中間層的溫度，設此片的擴散係數 κ 在 C. G. S. 制中為 0.2 單位，此片表面在全部時間内使保持為零度。設熱流垂直於此片的兩面，則凡平行於面的平面上必為同溫。故如第 153 節(1)，溫度隨

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2},\tag{4}$$

而定。解須適合於條件：$t=0$ 時 $\theta=100°$；$x=0$ 時 $\theta=0$；$x=\pi$ 時 $\theta=0$。先求特殊解。假定 $\theta=e^{ax+\beta t}$ 為一個解。從此證明

$$\theta=e^{-\kappa\mu^2 t}\cos\mu x,\tag{5}$$

$$\theta=e^{-\kappa\mu^2 t}\sin\mu x。\tag{6}$$

為(4)的解。令 μ 取特殊值，可得(4)的特殊解。次之，結合這些特殊解使得到(4)的一個解而能適合於三個條件者，我們必須注意 μ 取所有的值當 $x=0$ 時(6)為零；若 μ 為整數，當 $x=\pi$ 時(6)亦為零。所以，若令 θ 等於形式為 $Ae^{-\kappa\mu^2 t}\sin nx$ 的各項之和，如

$$\theta=a_1e^{-\kappa t}\sin x+a_2e^{-4\kappa t}\sin 2x+a_3e^{-9\kappa t}\sin 3x+\cdots\cdots,\tag{7}$$

直至 n 項，則此解適合於上第二第三條件，因 $\sin\pi=0=\sin 0$。當 $t=0$ 時，(7)化為

$$\theta=a_1 \sin x+a_2 \sin 2x+a_3 \sin 3x+\cdots\cdots \tag{8}$$

但 x 爲 0 與 π 間之值時，從第 150 節例一，可知若 $\theta=100$ 則 n 爲偶數時 $a_n=0$； n 爲奇數時 $a_n=\frac{400}{n\pi}$。

$$\theta=\frac{400}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\cdots\right) \tag{9}$$

我們必須以這級數的係數代(7)中的 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ 而得適合於所有必要條件的解。注意(9)中 a_2, a_4,⋯⋯爲零。故得所求之解爲

$$\theta=\frac{400}{\pi}\left(e^{-\kappa t}\sin x+\frac{1}{3}e^{-9\kappa t}\sin 3x+\cdots\cdots\right)。 \tag{10}$$

引入數值材料。當 $x=\frac{1}{2}\pi$，$t=10$，$\kappa=0.2$。利用對數表。若僅留第一項而略去其餘，則結果可正確至十分之一度。今用下式作數值計算，

$$\theta=\frac{400}{\pi}e^{-2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{400}{\pi}e^{-2}。$$

注意 $\sin\frac{1}{2}\pi=1$。 答 17.2°C. 在以上的實驗中若片厚不是 π 厘米而是 c 厘米，則用展開式

$$\theta=\frac{400}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{c}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{c}+\cdots\cdots\right),$$

從 $x=0$ 至 $x=c$。

例二 一個無限大的固體一面是平面有均勻的溫度 $f(x)$。若使平面保持零度，在 t 年之末固體內離平面 x 處一點的溫度是什麼？設坐標軸的原點在平面上。我們必須解方程式(4)而使適合於條件：當 $x=0$ 時 $\theta=0$；當 $t=0$ 時 $\theta=f(x)$。依照上述求(5)(6)(3)的方法進行，得

$$\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\kappa\alpha^2 t}f(\lambda)\cos\alpha(\lambda-x)d\lambda; \tag{11}$$

因爲需要的是 x 的正値，從第 151 節(33)上式可寫爲

$$\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}d\alpha\int_0^{\infty}e^{-\kappa\alpha^2 t}f(\lambda)\sin\alpha x\sin\alpha\lambda\,d\lambda。 \tag{12}$$

故從第 192 節(28)所求的解爲

$$\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(\lambda)d\lambda\int_0^{\infty}e^{-\kappa\alpha^2 t}\{\cos\alpha(\lambda-x)-\cos\alpha(\lambda+x)\}d\alpha。$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}}\int_0^{\infty}f(\lambda)\left\{e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4\kappa t}}-e^{-\frac{(\lambda+x)^2}{4\kappa t}}\right\}d\lambda。 \tag{13}$$

這最後的積分必須詳述之。欲說明方法，令

$$u=\int_0^{\infty}e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx。$$

Laplace(1810)第一個求得上式的積分，用着很巧的方法，稱爲**用微分求積分法** (Integration by differentiation)。求已知方程式的微分得

$$\frac{du}{db}=-\int_0^{\infty}x\,e^{-a^2x^2}\sin bx\,dx,$$

但須 b 與 x 無關。今用通常的分部積分法求右邊的積分，

$$\therefore\quad \frac{du}{db}=-\frac{b}{2a^2}u;\quad 即\quad \frac{du}{u}=-\frac{b}{2a^2}db。$$

求積分，得

$$\log u=-\frac{b^2}{4a^2}+c;\quad 即\quad u=c\,e^{-\frac{b^2}{4a^2}}。$$

求 c 的值，令 $b=0$，於是如第 111 節(10)所示，

$$c=u=\int_0^{\infty}e^{-a^2x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2a},$$

故得

$$u=\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{b^2}{4a^2}}。$$

回到本題。用

$$\beta=\frac{\lambda-x}{2\sqrt{\kappa t}};\quad \therefore\ \lambda=x+2\beta\sqrt{\kappa t};\quad \therefore\ d\lambda=2\sqrt{\kappa t}\,d\beta。\tag{14}$$

代入(13)使變數變換。這樣代入後對於積分上下限有何影響？以前我們從未考慮過這點，因爲其時所論者或是不定積分（第 72 節）或是上下限爲常數的定積分（第 83 節）。這裏我們立刻可以見到，

$$若\ \lambda=0\ 則\ \beta=-\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}};\quad 若\ \lambda=\infty，則\ \beta=+\infty。\tag{15}$$

結果(13)的形式變成

$$\theta=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_{-\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}}^{\infty}e^{-\beta^2}f(2\beta\sqrt{\kappa t}+x)d\beta\right.$$

$$\left.-\int_{-\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}}^{\infty}e^{-\beta^2}f(2\beta\sqrt{\kappa t}-x)d\beta\right\}。\tag{16}$$

設最初的溫度爲常數，如 $f(x)=\theta_0$，則從第 83 節(4)所求的解爲

$$\theta=\frac{\theta_0}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_{-\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}}^{\infty}e^{-\beta^2}d\beta-\int_{+\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}}^{\infty}e^{-\beta^2}d\beta\right\}$$

$$=\frac{2\theta_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}}e^{-\beta^2}d\beta。\tag{17}$$

在數值計算上必須將上式中最後的積分展開爲級數如第 111 節所述。所以

$$\theta=\frac{2\theta_0}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}-\frac{x^3}{3(2\sqrt{\kappa t})^3}+\cdots\cdots\right\}。\tag{18}$$

設一萬萬年以前，地球是 7000°F. 的鎔化物質，從其時起表面常保持爲 0°F.，則現在地面下 1 哩處的溫度若何？依 Lord Kelvin 所定本題中 $\kappa=400$。所求之解答爲 104°F.(約計)。因 $\theta_0=7000°$；$x=5280$ 呎；$t=100,000,000$ 年，

$$\therefore \quad \theta=\frac{2\times 7000}{\sqrt{3.1416}}\left(\frac{5280}{2\times 20\times 10,000}\right)=104。$$

Lord Kelvin 的論文 "On the Secular Cooling of the Earth," (W. Thomson and P. G. Tait's Treatise on Natural Philosophy, **1**, 711, 1867) 中曾以地下溫度增加量 $\frac{d\theta}{dx}$ 的觀測值與從上式各項取最可能值而求得者相比較。計算值是每下 $\frac{1}{51}$ 呎增加 1°；觀測值是每下 $\frac{1}{55}$ 呎，增加 1°。這樣的接近使他相信材料是幾乎正確的。他明白的推廣這種計算而結論說：『我以爲我們可以很有把握的說，地球的凝固不會比 20,000,000 年以前更近，否則我們地下的熱將比現在實有者更多；也不會比 40,000,000 年以前更遠，否則我們不會有現在所見的地下溫度增加量那樣多了』。參閱 O. Heaviside 著 Electromagnetic Theory, **2**, 12, London, 1899。關於放射性的現象使我們對於冷卻過程的性質要改變一些原來的假定。參閱第 153 節 VII 例二。

例三　兩個極長的棒，一爲 1°C.，一爲 0°C.，其端十分的接觸，且在理想的條件下卽兩者並不因周圍空氣而熱有所得失。設軸的原點在兩棒接合處，且 x 軸沿着棒的長度。極限條件爲：當 $t=0$ 則 x 小於

零時 $\theta=0$；x 大於零時 $\theta=f(x)=1$。今欲求 θ,x,t 間的關係。從第 151 節(32)傅氏積分出發，進而求 $t=0$ 時 u 可爲 $f(x)$ 的條件，即用本節(3)的方法。變換求積分的次序，可得

$$\theta=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)d\lambda\int_0^\infty e^{-\kappa\alpha^2t}\cos\alpha(\lambda-x)d\alpha。\tag{19}$$

以 Laplace 用微分求積分的方法，得

$$\theta=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)d\lambda\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\kappa t}}e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4\kappa t}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4\kappa t}}d\lambda。\tag{20}$$

但若當 $t=0$，從 $x=-\infty$ 至 $x=0$ 時 $\theta=0$；當 $t=0$ 從 $x=0$ 至 $x=+\infty$ 時 $\theta=1$；則因 $f(x)=1$，

$$\theta=\frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}}\int_0^\infty e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4\kappa t}}d\lambda。\tag{21}$$

以上文中(15)，(14)代入，從第 83 節(3)得

$$\theta=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}}^{+\infty}e^{-\beta^2}d\beta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}}e^{-\beta^2}d\beta+\int_0^\infty e^{-\beta^2}d\beta\right\}。\tag{22}$$

然後依第 111 節第 147 節求積分，得所求的解爲

$$\theta=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right)^3\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5\lfloor 2}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right)^5-\cdots\cdots\right\}。\tag{23}$$

這裏所舉例的熱的擴散變化很類似於鹽類溶液與純溶劑接觸而放在一起時的擴散作用。若 κ 可決定卽能用(23)計算在任何時間(t),離兩種液體接觸處爲任何距離 x,單位體積的溶液中鹽類的重量(θ)。當一組 θ, x, t 的值爲已知,則可從(23)計算 κ。參閱 J. C. Graham, Zeit. Phys. Chem.,**50**, 257, 1904, 可得一例。

第九章　或然率與誤差論

(Probability and the Theory of Errors)

『只有完全的知識可以指示必然，在自然界中完全的知識乃是無限的知識，顯然不是我們能力所能及的。故此，我們不得不以部份的知識而自足——這種知識卻與無知相混合而會發生疑問的。』——W. Stanley Jevons.

『當我們無力決定何者是眞實的時候，我們應該依據了最可能者而做』。
—René Descartes.❶

§ 155. 或然率 (Probability)

我們對於任何未來事件的每一推論，幾乎多少總有些疑問。若境遇是順利，則所作預測，比條件不易支配時，信賴的程度高些。於決定的條件一無所知時，所作的預言顯然不及根據於廣博的知識者之可靠。若一個獵人射鳥的時候，中者少而不中者多，則在任何未來的一鎗，我們當然推想他不易射中較爲穩妥。沒有慣例的比較標準，我們對於判斷的正確程度無從表示什麼意見。或然率的理論卽欲於我們的材料不足以確切決定事件的發生與否，但足以應用算學方法時，求出對於事件期望的理由之多寡。許多踏實的人，意想這或然率的道理太虛擬了，太

---

❶ "Perfect knowledge alone can give certainty, and in Nature perfect knowledge would be infinite knowledge, which is clearly beyond our capacities. We have, therefore, to content ourselves with partial knowledge—knowledge mingled with ignorance, producing doubt."—W. Stanley Jevons.
"Lorsqu'il n'est pas en notre pouvoir de discerner les plus vraies opinions, nous devons suivre les plus probables."—René Descartes.

不定了；沒有深切研究的價值。Liagre[1] 說得很對，大約這是由於 Probability 一字含有或然與不定等附帶的意義所致。眞的，這個字太嫌含糊，會使通常對於算學推理的確信，也受到些除損。牠在思想上的權力也眞大，以致這門算學的一切應用，人家終以爲沾有不可饒赦的罪惡——缺乏眞實。換去這種名稱；牠的理論也就不致再顯示虛擬的性格，在最有趣最有用的算學應用中自能取得其地位。

Laplace 在 Essai philosophique sur les Probabilités, Paris, 1812, 的結尾中說，『或然率的理論，沒有別的，只是以常識化爲計算而已。牠所確切決定的，凡有正常頭腦的人憑着一種本能，不必知道變化的順序，也能覺察得到。在意見的構成上，或當須要選擇時最有利之見解的認識上，有了牠，不必再聽之於機會了。所以，對於人類無知與脆弱的頭腦，牠是一個最有價值的補助。……』

I.　**設有兩個可能的事件，其發生的情形，第一個共有 a 種，第二個共有 b 種，則第一個事件發生的或然率爲 $\frac{a}{a+b}$，第二個事件發生的或然率爲 $\frac{b}{a+b}$。**設有一個鎗手，在光線，風力，樂性等一定的條件下，每十二鎗約可射中標的一鎗，我們可以說他未來任何一鎗要射中標的的機會是十二之一即 $\frac{1}{12}$，不中的機會是十二之十一，即 $\frac{11}{12}$。設有更精巧些的鎗手每十二鎗約射中標的五鎗，他未來任何一鎗射中的機會是 $\frac{5}{12}$ 而不中的機會是 $\frac{7}{12}$。這個意思用更普遍語言表示之，

[1] J. B. J. Liagre's Calcul des Probabilités, Bruxelles, 1879。

設一個事件成功的情形共有 a 種，失敗的情形共有 b 種，則此事

$$\text{成功的或然率}=\frac{a}{a+b}；\ \text{失敗的或然率}=\frac{b}{a+b}。\tag{1}$$

但須成功與失敗在每種情形中是同樣的容易發生。依照定理，

$$\text{或然率}=\frac{\text{成功或失敗的情形的種數}}{\text{成功與失敗的情形的種數}}。\tag{2}$$

例　設有四個白球六個黑球同置於一個袋中，試證明任取一球時，為白者的或然率是$\frac{4}{10}$，為黑者的或然率是$\frac{3}{5}$。用賭博中的語調，則曰白球是六負四勝。

II.　**設以 p 表示一個事件成功的或然率，則 $1-p$ 表示其失敗的或然率。**鎗手之於標的，不是射中，卽是不中，那是必然的事。在算學中，以 1 表示這必然率，故

$$\text{射中的或然率}+\text{不中的或然率}=\text{必然率}=1。\tag{3}$$

若一個事件必然是失敗的，則其成功的或然率為 0。必然率是或然率的單位。或然率的程度是必然率的分數。

當然，上列名詞並不含有這事件本身的性質在內，不過計算者自己的腦筋對於一個疑問事件之發生的態度。我們想不出一個原因有利於某事件的發生，我們卽說這事件是**不然的**；我們想不出一個原因不利於某事件的發生，我們卽稱之是**必然的**。或然率的各種深淺的程度，不大可能；成為疑問；或有可能——都介於這兩個極端限度之間。

嚴格的說，自然界中沒有機會這東西存在其間。跳舞在一線陽光中的微塵，牠所經歷的不規則的路程也像天空行星的軌道一樣可以必

然的決定。

所有的自然只是藝術，爲你所不知；

所有的機會，自有方針，你所不能見；

所有的矛盾，乃是和諧，可惜你沒有懂得。

所謂『機會』所謂『或然率』，沒有別的，不過一種習慣的說法，表示我們不知事件的原因而無法預述其結果而已。Liagre 說『對於全知全能者，所有未來的事件，不是必然的，就是不然的』。

III.　**兩個獨立事件共同發生的或然率是牠們各自發生的或然率之積**。設 p 爲一個事件發生的或然率，q 爲另一事件發生的或然率，P 爲此兩個事件共同發生的或然率，則

$$P=pq。\tag{4}$$

此事可用下例說明之：A 器中含有白球 a_1 個，黑球 b_1 個，而 B 器中含有白球 a_2 個，黑球 b_2 個；從 A 器中取出一個白球的或然率爲 $p_1=\frac{a_1}{a_1+b_1}$，從 B 器中取出一個白球的或然率爲 $p_2=\frac{a_2}{a_2+b_2}$。從兩器中各自取出一個球來，配成一對，共可配成 $(a_1+b_1)(a_2+b_2)$ 對，而其中白球的對數，僅爲 a_1a_2。

例：　從兩器中各自取出一個球來，其或然率如下：

$$兩個白球：\frac{a_1a_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)};\tag{5}$$

$$兩個黑球：\frac{b_1b_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)};\tag{6}$$

$$從第一器是白球，從第二器是黑球：\frac{a_1b_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)};\tag{7}$$

$$從第一器是黑球，從第二器是白球: \frac{b_1a_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}。\tag{8}$$

$$一個白球一個黑球: \frac{a_1b_2+b_1a_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}。\tag{9}$$

(5)(6)(9)之和爲 1。依照上述定義,這是必需的條件。

這種事件，由幾個事件合併而成者，稱爲**合成事件** (Compound event)。投擲三個骰子,一次擲出三只么來,是根據於三個簡單事件的合成事件。觀測誤差卽是由幾個獨立誤差所產生的合成事件。

例一　設有 n 個獨立誤差,每個發生的或然率各爲 $p, q, r,$……, 則牠們共同發生的或然率 $P=p\times q\times r\times$……。

例二　若每 100 個產兒中 49 是男，51 個是女，則未來兩胎的產兒都是男；都是女；先是男後是女的或然率各若何?

答:　0.2401; 0.2601; 0.2499。

示意:　$\frac{49}{100}\times\frac{49}{100}$; $\frac{51}{100}\times\frac{51}{100}$; $\frac{49}{100}\times\frac{51}{100}$。

IV.　**幾個事件不能共同發生,但其中一個發生卽作爲成功者，其成功的或然率是各自發生的或然率之和**。設 $p, q,$…… 爲幾個事件各自發生的或然率,其中任一個事件發生若作爲成功,其成功的或然率爲 P，則

$$P=p+q+\cdots\cdots \tag{10}$$

例一　一袋中含有 12 個球, 2 個白的, 4 個黑的, 6 個紅的,取出第一個球爲或白或黑的或然率若何? 取出一個白球的或然率爲 $\frac{1}{6}$;一

個黑球的或然率爲 $\frac{1}{3}$；取出第一個球爲或白或黑的或然率爲 $\frac{1}{2}$。

例二　從本節 III 的例二，證明一男一女的或然率爲 0.4998，二次同性的或然率爲 0.5002。

示意：　0.2499+0.2499；　0.2401+0.2601.

V.　**設 p 爲一個事件試驗一次時成功的或然率，則試驗 n 次時須成功 r 次的或然率 P，爲**

$$\boldsymbol{P}=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}\,p^{r}(1-p)^{n-r}。\tag{11}$$

試驗一次時此事件失敗的或然率爲$(1-p)$；試驗 n 次時每次失敗的或然率爲$(1-p)^n$。第一次成功，其餘各次都失敗的或然率爲 $p(1-p)^{n-1}$，這是根據公式 (4)。但此事件成功的一次，同樣可以在第二次，或第三次，或……。故此事件在試驗 n 次時恰恰成功一次的或然率，從(4)與(10)，❶

$$(p+p+\cdots\cdots+\text{共 } n \text{ 個})\times(1-p)^{n-1}；\quad \text{即 } np(1-p)^{n-1}\tag{12}$$

此事件在試驗 n 次時第一第二次成功，其餘各次都失敗的或然率爲 $p^2(1-p)^{n-2}$。但是成功的二次，同樣可以在第一第三次，或第二第四次中。故此事件在試驗 n 次時恰恰成功二次的或然率爲

$$\frac{1}{\lfloor 2}n(n-1)p^2(1-p)^{n-2}。\tag{13}$$

所以試驗 n 次時須成功 r 次的或然率可用公式(11)表示之。

例一　一個骰子投擲 4 次恰好 3 次是么，其或然率若何？答：$\frac{5}{324}$

❶ 讀者至此，必須將第 190 節細讀一遍。

示意：　$n=4$; $r=3$; 一個骰子投擲一次而得么的機會是六中之一故 $p=\frac{1}{6}$; $n-r=1$; $p^r=\left(\frac{1}{6}\right)^3$; $1-p=\frac{5}{6}$。故 $\frac{4\times3\times2}{1\times2\times3}\times\frac{5}{6^4}$。

例二　一個骰子，投擲 3 次，恰好 3 次都是兩點，其或然率若何？

答：　$\frac{1}{216}$。

示意：$n=3$; $r=3$; $(1-p)^{n-1}=5^\circ=1$; $p=\frac{1}{6}$; 等等。

VI.　**設 p 為一個事件試驗一次時成功的或然率（其值很小），則在試驗 n（其值很大）次時須成功 r 次的或然率 P 為**

$$P=\frac{(np)^r}{\underline{|r}}e^{-np}。\tag{14}$$

從公式(11)，p 無論小得如何，只要將試驗的次數增加，我們總可使此事件試驗 n 次時成功一次的機率變得儘量的大。此事件試驗 n 次時每次失敗的或然率為 $(1-p)^n$，設使 p 充分的小，使 n 充分的大，我們可使 $(1-p)^n$ 變得儘量的小。❶ 若 n 為無限之大而 p 為無限之小，則可寫為 $n=n-1=n-2=\cdots\cdots$

$$\therefore\quad (1-p)^n=1-np+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}p^2-\cdots\cdots$$

$$=1-np+\frac{(np)^2}{\underline{|2}}-\cdots\cdots\text{（近似值）}$$

$$\therefore\quad (1-p)^n=e^{-np}。\text{（近似值）}\tag{15}$$

從(11)與(15)立刻可得 (14)。這個結果極為重要。

---

❶ 讀者須以一個很小的數代 p，一個很大的數代 n 而試算之。所用二項式公式見第 97 節。並參閱第 11 節。

例　n 粒麥任意散佈在面積爲 s 單位的面上，證明 a 單位面積內含有 r 粒麥的或然率爲

$$\frac{\left(\frac{an}{s}\right)^r}{\lfloor r}\,e^{-\frac{an}{s}}。$$

小面積 ds 內含有一粒麥的或然率是無限之小，以 $n\frac{ds}{s}$ 代表之。設選定的面積爲 a 單位，我們可將每 ds 作爲試驗一次，故試驗的次數共爲 $\frac{a}{ds}$。於是須以 $\frac{an}{s}$ 代(14)中之 np 而得所求之結果。

VII.　**一個事件在試驗 n 次時至少須成功 r 次的或然率 P 爲**

$$\boldsymbol{P=p^n+np^{n-1}(1-p)+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}p^{n-2}(1-p)^2}$$

$$\boldsymbol{+\cdots\cdots 至(n-r)項。}\qquad (16)$$

因爲此事件在試驗 n 次時，可以每次成功，可以失敗一次，可以失敗二次……可以失敗 $n-r$ 次，但最低限度爲成功 r 次。於是至少成功 r 次的或然率爲這些或然率之和。

例　一個骰子投擲 4 次至少有 3 次是兩點的或然率若干？

答：$\frac{7}{432}$。

示意：　這裏 $p^n=\left(\frac{1}{6}\right)^4$；其下一項爲 $4\times5\times\left(\frac{1}{6}\right)^4$，等等。

有時自然變化是太複雜了，不能用『資用假設』(Working hypothesis) 化之，而使其簡單。當然就會有這樣的問題發生，卽所得觀測的事件的過程能否合理的歸之於自然律的運用或歸之於機會？例如，我

們見到氣壓表的許多讀數的平均數終是早晨九時的大於下午四時的；Laplace (Théorie analytique des Probabilités, Paris, 49, 1820) 疑問到這種現象是否歸之一個已知的自然律的運用抑歸之於機會？又如 G. Kirchhoff (Monatsberichte der Berliner Akademie, Oct., 1859) 疑問到鐵的蒸氣中與日光中的 70 條光譜線的符合是否可歸之於機會？他求出偶然符合的機率約為 1:1000000000000。故此，他的論斷是太陽中有鐵的存在，沒有理由可以懷疑。Mitchell (Phil. Trans., **57**, 243, 1767；並參閱 Kleiber, Phil. Mag., [5], **24**, 439, 1887) 曾想計算，若星球任意散佈的天空，星羣是否比我們所期望者為大。A. Schuster(Proc. Roy. Soc., **31**, 337, 1881) 欲解答的問題為：鐵的光譜線中和諧關係的種數是否比由機會所分佈者為大？Mallet (Phil. Trans., **171**, 1003, 1880) 與 R. J. Strutt (Phil. Mag., [6], 1, 311, 1901) 曾經提問到：元素的原子量近似於整數，是否有理由可以作為偶然的符合？換言之；在常識上是否有根據可以信任 Prout 定律的眞實：卽其他元素的原子量是恰為氫的原子量之倍數？

或然率的理論並不想供給一個無誤的準則，將偶然的符合，從定因的結果中分別開來。在信任其材料之前有某些條件，必須適合。例如，收集事實必須充分的多。又如，應用或然率的理論時不應注意於其他來源所得出的任何知識，是否可以作為確證，故如 Kirchhoff 關於太陽中或有鐵的存在之結論，乃得力於兩個光譜中明亮線的符合之明顯關係。

欲知計算的詳情必須參考原文。計算的大部份根據於 Laplace 的

雖然古舊但是標準的作品 Théorie 中的分析。此書之一個很好的摘要，見於 Encyclopaedia Metropolitana。或然率理論在自然變化上最有結果的應用，與氣體動力論及觀測誤差的定律，都有關係。

§ 156. 氣體動力論上的應用 (Application to the Kinetic Theory of Gases)

氣體動力論的目的在於根據假設說明氣體的物理性質，此假設是氣體含有許多高速運動的分子。下列的說明第一步根據於 R. Clausius (Phil. Mag., [4], **17**, 81, 1859)的記錄。欲知進一步的發展可參考 O. E. Meyer 的 The Kinetic Theory of Gases, London, 1899.

I. **證明一個分子在靜止的一羣分子中運動，經過距離 x 而不碰撞的或然率爲**

$$P=e^{-\frac{x}{l}}, \tag{17}$$

此中 l 爲分子不遇碰撞而進行的自由路程的或然值(Probable value)，$\frac{x}{l}$ 爲實在經過的路程與自由路程平均長度之比。『自由路程』(Free path)的定義是一個分子在連接兩個碰撞間所經過的距離。『平均自由路程』(Mean free path)是一個分子許多自由路程的平均值。考察已知方向中，在這些條件下任何分子的運動。設 a 爲此分子經過單位長的路程而不遇碰撞的或然率，則此分子經過兩單位長的路程而不遇碰撞的或然率爲 $a\times a$ 即 a^2，此分子經過 x 單位長的路程而不遇碰撞的或然率爲

$$P=a^x, \tag{18}$$

此中 a 爲眞分數。故其對數爲負數（何耶）？若氣體的分子是靜止的則一個分子在無論什麼方向中運動，a 的値是相同的。從(18)則

$$p=e^{-\frac{x}{l}}$$

此中 $l=-\frac{1}{\log a}$。與(15)相比較我們可以對此公式的意義得一清楚的觀念。設經過單位路程作爲試驗一次，(17)中的 x 即相當於(15)中的 n。(17)中的 $\frac{1}{l}$ 以(15)中的 p 代之。故 $\frac{1}{l}$ 代表一個事件（碰撞）在試驗一次中發生的或然率　若作試驗 l 次則碰撞發生一次。此實爲平均自由路程的定義。

11. **證明一個分子在一羣靜止的分子中運動，不遇碰撞而能經過之路程其長度的或然値爲**

$$l=\frac{\lambda^3}{\rho^2\pi}, \tag{19}$$

此中 λ 爲相隣兩個分子間的平均距離，ρ 爲分子作用球的半徑，π 爲常數，其意義與通常的相同。設單位體積中含有 N 個分子。設此體積分爲 N 個小立方體，每個立方體平均只含一個分子。設 λ 爲這些小立方體一邊的長。在容積 λ^3 的立方體中只含有一個分子。半徑爲 ρ 的球，通過其中心的截面積爲 $\pi\rho^2$（第 191 節(13)）。設此運用分子經過距離 λ，則此分子的前半球面經過的體積爲 $\pi\rho^2\lambda$ 的圓柱空間（第 191 節(26)）。所以，在此圓柱 $\pi\rho^2\lambda$ 中有一個分子的或然率與 1 之比等於 $\pi\rho^2\lambda$ 與 λ^3 之比，換言之，即現在所論的分子經過路程長 λ 而與另一分子碰撞的或然率爲 $\pi\rho^2\lambda:\lambda^3$。而不遇碰撞的或然率爲

$1-\frac{\pi\rho^2}{\lambda^2}$。從(17)，

$$P=e^{-\frac{\lambda}{l}}=1-\frac{\rho^2\pi}{\lambda^2}。\tag{20}$$

按照動力論，氣體的一種基本性質爲分子間的空間與比分子體積大得許多，故此 $\frac{\rho^2\pi}{\lambda^2}$ 比 1 小得許多。故 $\frac{\lambda}{l}$ 與 1 比較時爲很小的數。依指數級數定理（第 97 節）展開 $e^{-\frac{\lambda}{l}}$ 而略去 λ 的高次冪，得

$$e^{-\frac{\lambda}{l}}=1-\frac{\lambda}{l}。\tag{21}$$

從(20)與(21)，

$$l=\frac{\lambda^3}{\rho^2\pi}；\quad 卽\quad P=e^{-\frac{\rho^2\pi x}{\lambda^3}}\tag{22}$$

例　在壓力下，氣體的行動所表示，ρ 比 λ 小了許多。從此證明『一個分子在與另一分子碰撞之前可以在與其相同的許多其他的分子之旁經過』

示意：　從(22)的第一方程式，$l:\lambda=\lambda^2:\rho^2\pi$。解釋這些記號的意義。

III.　**證明 n 個分子在剛才所論的單獨分子的同樣條件下運動，其自由路程的平均值爲**

$$l=\frac{\lambda^3}{\rho^2\pi}\tag{23}$$

在 n 個與已知分子同速同向而運動之分子中，$ne^{-\frac{x}{l}}$ 個可經過距離 x

而不遇碰撞，$ne^{-\frac{x+dx}{l}}$ 個可經過距離 $x+dx$ 而不遇碰撞。在經過路程 x 的分子中

$$n(e^{-\frac{x}{l}}-e^{-\frac{x+dx}{l}})=ne^{-\frac{x}{l}}(1-e^{-\frac{dx}{l}})=\frac{n}{l}e^{-\frac{x}{l}}dx$$

個在經過距離 dx 而遇到碰撞的。上列變算的最後一步直接從(21)來的。所有經過 x 而不到 $x+dx$，即遇碰撞的分子，其所經路程的總和爲

$$\frac{x}{l}ne^{-\frac{x}{l}}dx。$$

因每個分子在極限 $x=0$ 與 $x=\infty$ 之間必在某處遇到碰撞，故 n 個分子在碰撞之前所經過可能的路程之總和爲

$$n\int_0^\infty \frac{x}{l}e^{-\frac{x}{l}}dx,$$

這些 n 個自由路程的平均值爲

$$\int_0^\infty \frac{x}{l}e^{-\frac{x}{l}}dx=l。$$

此積分可照第 73 節的方法求之。此爲這些等速運動的分子的平均自由路程。

例一　以速率 V 運動的分子，入於每單位體積含有 n 個靜止的氣體分子的空間內，在單位時間中此分子與靜止分子之一發生碰撞的或然率若何？

用前述的記法。此分子在單位時間中經過空間 V。這樣，牠可遇到靜止的分子 $\pi n\rho^2 V$ 個。在單位時間中碰撞次數的或然值爲 $\pi n\rho^2 V$，

這是代表單位時間中碰撞一次的或然率。

例二 證明一個等速 V 的分子在一羣 N 個靜止分子間運動在單位時間中發生碰撞次數的或然值爲

$$\frac{V}{l}=\frac{V\rho^2\pi}{\lambda^3}。\tag{24}$$

此結果與前題有何關係？注意碰撞次數爲 $\frac{V}{l}$；又 $N\lambda^3=1$。

IV. **一個分子在一羣分子中，二者以相同的等速度運動，不過前者的方向與後者的成 θ 角，則單位時間中碰撞次數的或然值爲**

$$\frac{\rho^2\pi}{\lambda^3}2v\sin\frac{1}{2}\theta。\tag{25}$$

設 v 爲一個分子的合速度；x_1, y_1, z_1 爲其分速度，從速度平行六面體（第 46 節）則

$$\left.\begin{array}{c} v^2=x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2 \\ x_1=v\cos\theta_1;\ y_1=v\sin\theta_1\cos\phi_1;\ z_1=v\sin\theta_1\sin\phi_1 \end{array}\right\}\tag{26}$$

設有一組分子的速度爲 V，其相對於此同速度（但其分速度各 x_1, y_1, z_1）的已知分子的分速度爲 x, y, z 則

$$v^2=x^2+y^2+z^2;\tag{27}$$

$$x=v\cos\theta;\ y=v\sin\theta\cos\theta;\ z=\sin\theta\cos\phi。\tag{28}$$

又得一個分子關於另一個作爲靜止的分子的相對合速度 V，

$$V=\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2}\tag{29}$$

我們選取三個坐標軸時，若取 x 軸使與已知分子的運動方向合一，注意 $\cos 0^\circ=1$，$\sin 0^\circ=0$，即可將

$$y_1=0;\quad z_1=0;\quad \therefore\ x_1=v \tag{30}$$

代入(26)。以(30)與(26)代入(29)得

$$V=\sqrt{(v-v\cos\theta)^2+v^2\sin^2\theta\cos^2\phi+v^2\sin^2\theta\sin^2\phi};$$

$$\therefore\quad V=\sqrt{v^2-2v^2\cos\theta+v^2\cos^2\theta+v^2\sin^2\theta}$$

這是由於 $\sin^2\phi+\cos^2\phi=1$ 的關係。同樣 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，故結果

$$V=v\sqrt{2-2\cos\theta}=v\sqrt{2(1-\cos\theta)},$$

但 $1-\cos\theta=2(\sin\frac{1}{2}x)^2$，故

$$V=2v\sin\frac{1}{2}\theta。\tag{31}$$

已經求得分子的相對速度，從(24)與(31)直接可得

$$碰撞次數=\frac{V\rho^2\pi}{\lambda^3}=\frac{\rho^2\pi}{\lambda^3}2v\sin\frac{1}{2}\theta。$$

V.　**一個分子在一羣分子中運動，單位時間中在一切方向內所遇到的碰撞次數爲**

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{V\rho^2\pi}{\lambda^3}。\tag{32}$$

設 V 爲分子的速度，則各種運動都可依照速度平行六面體而分解爲三組運動。進行如上例。在方向 θ 與 $\theta+d\theta$ 間運動的分子數 n 與單位體積內分子總數 N 之比等於

$$n:N=2\pi\sin\theta\,d\theta:4\pi;\quad 即\ n=\frac{1}{2}N\sin\theta\,d\theta。\tag{33}$$

因 θ 角可從 $0°$ 增加至 $180°$，碰撞次數故爲

$$\frac{\rho^2\pi}{\lambda}2V\sin\frac{\theta}{2}\cdot\frac{n}{N}=\frac{2V\rho^2\pi}{\lambda^3}\sin\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin\theta\,d\theta,$$

欲得碰撞總次數,須求 $0°$ 與 $180°$ 間一切方向的積分。故若以 A 表碰撞總次數,用第 75 節的積分法,得

$$A=\frac{V\rho^2\pi}{\lambda^3}\int_0^\pi \sin\frac{\theta}{2}\sin\theta\, d\,\theta=\frac{2V\rho^2\pi}{\lambda^3}\int_0^\pi \sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{V\rho^2\pi}{\lambda^3}。$$

例　一個分子在運動於一切方向的分子羣中運動，其速度爲 V，求其自由路程的長。

答：　自由路程的長爲 $\frac{V}{A}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\lambda^3}{\rho^2\pi}$　　(34)

等速度的假設可參閱第 164 節。

VI.　**假定兩個異類的分子在一次碰撞時結合起來,兩種氣體間的化學反應速度爲**

$$\frac{dx}{dt}=kNN', \tag{35}$$

此中 N 與 N' 各表一個單位體積的混合氣體所含兩種氣體的分子數,dx 表示單位體積中一種氣體與另一氣體在時間 dt 內結合的分子數;k 爲常數,設兩種氣體各爲 A 與 B。設 λ 與 λ' 各表此兩種氣體內兩個相隣分子間的距離,則如上述,

$$N\lambda^3=N'\lambda'^3=1。 \tag{36}$$

ρ 爲分子作用球的半徑，設兩種分子的作用球接近到 2ρ 以內,分子即行結合，今欲求兩種氣體的結合率。B 的分子在單位時間內進行到 A 的分子的作用球內,其或然率依(24)爲 $\frac{V\pi\rho^2}{\lambda^3}$。在 N' 個 B 的分子中,

在時間 dt 内，

$$N'\frac{\pi\rho^2}{\lambda^3}V\,dt;\quad 即\ NN'\pi\rho^2V\,dt \tag{37}$$

個能結合。但時間 dt 内所結合的分子數爲 $-dN=-dN'$，從(37)即

$$dN=dN'=-NN'\pi\rho^2V\,dt$$

設 dx 代表單位體積中在時間 dt 内所結合的分子數，

$$dx=-dN=-dN'=\pi\rho^2VNN'dt。\quad \therefore\ \frac{dx}{dt}=kNN'。$$

此 k 代表常數 $\pi\rho^2V$。立刻可以見到此爲質量作用定律之應用於二分子反應。J. J. Thomson 的記錄 "The Chemical Combination of Gasses," Phil. Mag., [5], **18**, 233, 1884, 研究化學者在此處讀之極有裨益。

§ 157. 觀測誤差 (Error of Observation)

設有許多有經驗的觀測者約定各自獨立的去測驗一個升瓶頸口上的刻度是否準確，各人都儘量的使其量測精確，但無可避免的結果是各人的量數各有小小的不同。如我們想像所及的，

1.0003; 0.9991.; 1.0007; 1.0002; 1.0001; 0.9998;……

若一個觀測者，儘可能的注意於消滅誤差，重複一種量測許多次，也會發生恰如上述的同樣事情。這種參差，無疑的是由於各種不可知的也是無法駕馭的誤差而來的。

人家告訴我們說氯化鈉的結晶的形式是立方體，故相隣兩面的夾角爲 90°。事實上這角量起來有 0.5° 的出入。氣體結合的 Gay Lussac-Humboldt 定律至今沒有人覆證到恰好過；也沒有人能用水解

方法從水分開氫與氧而恰得 $2H_2 : O_2$ 之比。

各個量數與其算術中數的不規則的差異稱爲**偶然誤差**(Accidental error)。在以後的討論中,若不特別註明,偶然誤差將稱爲**觀測誤差**。愈是接近於準確量數的極限,則這些差異愈是確實存在。或如 Lamb ❶ 所說『所用的方法愈改良,則設想的數量愈模糊而不可捉摸;判斷是閃約游移直到最後陷於失望,於是將一些結果定下來,並不相信牠確實如此,不過感到就事實論我們所最能爲力者是如此』。從一組不一致的量數中求出我們所最能爲力者卽是本章後文的目的。最簡單的也像最複雜的量測一樣,終是含有一些意外的誤差。絕對的符合的自身,倒是偶然的恰合。Stanley Jevons 說,『我們所遇見的最麻煩的事之一,乃是實驗結果符合得過份利害』。這樣的符合立刻會挑起不信任的感覺。

從兩個變數所觀測到的關係,不應用空間一點代表之,而寧可用一個圓來代表,各種不同的觀測集合於其中心的周圍(圖一百六十五)。任何特殊的觀測在此圓周內的某些地方可以佔到一個位置。圖一百六十五提示到我們上述的說明卽一個鎗手描準標的中心而放射。鎗手相似於觀測者,子彈所射擊之處相似於一個觀測,射擊處與中心的距離相似於一個觀測誤差。故一鎗而射中標的,是想射中中心的嘗試,一個科學的量測是想量得數量眞值的嘗試。(Maxwell)

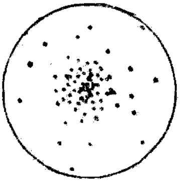
圓的半徑愈大(圖一百六十五)則量測愈粗糙,愈不確;反之,若量測受到觀測誤差的影響愈少,則此圓的半徑愈小。換言之,鎗手的鎗

❶ H. Lamb 在學士會中主席演說辭,1904; Nature, **70**, 372, 1904。

法愈不精，則記載他射擊標的之版須愈大。

§ 158. 誤差定律(The Law of Errors)

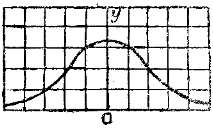
這些誤差可用另一種圖形表示之。經過標的（圖一百六十五）的中心畫一縱線，令射在此線之右者爲正誤差 (Positive error)，射在此線之左者爲負誤差 (Negative error)。設在一次比賽中共放 500 鎗；此中有 10 鎗射在右邊而在離中心 0.4 與 0.5 呎之間；20 鎗在 0.3 與 0.4 之間，餘如下表所示：



圖一百六十五

下列兩數間的正差異	誤差數	誤差百分數	下列兩數間的負差異	誤差數	誤差百分數
0.4 至 0.5	10	2	0.4 至 0.5	10	2
0.3 至 0.4	20	4	0.3 至 0.4	20	4
0.2 至 0.3	40	8	0.2 至 0.3	40	8
0.1 至 0.2	80	16	0.1 至 0.2	80	16
0.0 至 0.1	100	20	0.0 至 0.1	100	20

以上表第三行爲縱坐標，第一行中兩數的中數爲橫坐標，描圖，結果爲圖一百六十六。



圖一百六十六

研究圖一百六十五與圖一百六十六，我們可以見到這些不規則誤差的分羣顯有規則性存在，事實上我們所考察的試驗次數愈多，則此性質愈明顯。我們更可發見：

1. 小的誤差比大的更易發現。

2. 正的誤差與負的誤差發現次數相仿。

4. 很大的正的誤差與負的誤差不會發現。

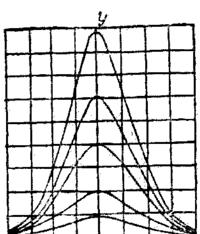
誤差 x 與其發現次數或其發現或然率 y 的任何算學上的關係，必須適合這些特性。當這樣的函數

$$y=f(x),$$

描圖時，必有一個縱坐標的極大值相當於沒有誤差；欲適合於第二條件必須關於 y 軸爲對稱；當 x 的絕對值增加時 y 必須減少，直到 x 變爲很大時 y 必變至幾乎爲零的小。這樣就是下方程式所代表的曲線。

$$y=ke^{-h^2x^2}, \tag{1}$$

此中 h 與 k 爲常數。[1] 此方程式的圖稱爲**或然率曲線** (Probability curve)，或稱次數曲線，或稱誤差曲線，可使 h 與 k 取定任意常數值，照通常的方法描繪一組 x 與 y 的相當值而得之。[2]



圖一百六十七

1. **求常數 k 的意義。** 今 $x=0$，則 $y=k$，此爲曲線的縱坐標的極大值，今令 $h=1$，k 取 $\frac{1}{2}$，1,2,3,4 等值。描繪 x 與 y 的相當值如圖一百六十七所示。

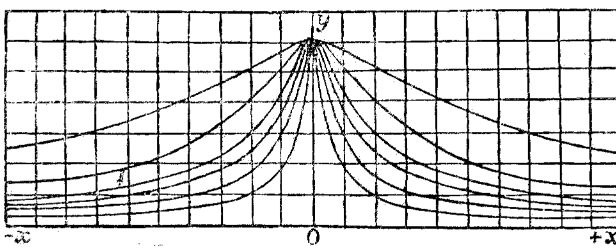
另一種辦法，彎曲一條鐵絲使之成這些曲線形狀之一，置一燈於其後則影射於幕上。移動鐵絲與燈的位置很易使幕上的影作此組曲線的各種形狀。我們若同意以每個量數與其算術中數的差異作爲一個誤差，k 卽相當於與此算術中數本身相合符的量數，卽沒有誤差的量數。曲線與 y 軸交點的高度代表算術中數發現的次數；k 與曲線的實在形狀無關，只是觀測的準確度

[1] 用附錄 II 表 XVII。

[2] E. B. Sargant, "The Education of Examiners," Nature, 70, 63, 1901。

愈增加，則此縱坐標的長度亦增加。

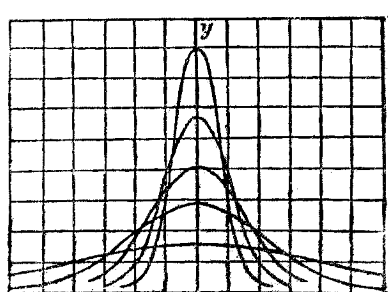
II. **求常數 h 的意義。**令 $k=1$，當 $h=\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$1,2,3,\cdots\cdots$時描繪 $x=\pm0.3$，±0.4，±0.5，$\pm0.6,\cdots\cdots$等 x 與 y 的相當值，得圖一百六十八所示。這樣可以見到，雖然一組曲線交 y 軸於同一點，



圖一百六十八

不過 h 的值愈大則曲線在居中縱坐標 Oy 鄰近愈尖銳。物理上的表示卽 h 的數值愈大則結果愈準確，各個量數與其算術中數的差異愈小。故此 Gauss 稱 h 爲**絕對量數**(Absolute measure)或**精密係數**(Modulas of precision)。

III. **當 h 與 k 都爲變數時**我們卽得圖一百六十九中一組曲線。一個精於鎗法者的射擊，所得的曲線必較不善射擊所得者包圍較少的面積。

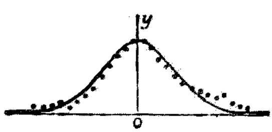


圖一百六十九

現在我們須將經驗定律付之實驗的測驗。Bessel 曾取 Bradley 所作 470 個天文量數的觀測誤差與依照誤差定律所應有者相比較。結果

如下表所列:❶

誤差的數值在下列弧的數值之間	誤差個數	
	觀測的	理論的
0 與 0.1 秒	94	95
0.1 與 0.2	88	89
0.2 與 0.3	78	78
0.3 與 0.4	58	64
0.4 與 0.5	51	50
0.5 與 0.6	36	36
0.6 與 0.7	26	24
0.7 與 0.8	14	15
0.8 與 0.9	10	9
0.9 與 1.0	7	5
1.0 以上	8	5



圖一百七十

這是上列公式的一個驚奇的覆證。這是可以見到的,理論供給任何大小的誤差,很大的亦有,但在實用上,是有一個極限,此極限以上,誤差是不見發生的。圖一百七十中的點子代表決定光速時的觀測誤差。從誤差曲線

$$y=8.9e^{-0.025x^2},$$

所描繪的圖,如我們所見,幾乎是實在誤差的忠實表示。Airy 與 Newcomb 也曾證明當觀測值的個數很多時其誤差的個數與大小,都與理論很相符合。但在每種情形中,實見的大誤差常比理論上的為多。今

❶ 錄自 Encke 的論文,見 Berliner Astronomisches Jahrbuch, 249, 1834; 或 Taylor 的 Scientific Memoirs, 2, 317, 1841。

引一例。S. Newcomb 考察水星横過子午線 (Transit of Mercury) 的 684 個觀測值。依照誤差定律，數值大於 ±27″ 者應爲 5 個誤差。實際上有 49 個超出這個極限。在圖一百七十中，也可注意到大誤差是怎樣積聚在次數曲線的兩端。

理論假定着觀測是易於產生相同的誤差，但所以不同者由於產生此誤差的偶然環境。❶ 方程式(1)並非此誤差定律的的完善代表。眞相是更複雜。誤差的大小有些奇怪好像隨觀測的個數而定。在很長的一組觀測值中，誤差可以分羣排列。每羣的精密係數各不相同。這是說很長的一組觀測值中精密係數並非常數。參閱 Encyc. Brit., F. Y. Edgeworth 的 Law of Error 一條，**28**，280，1902。但或然率曲線以公式

$$y=ke^{-h^2x^2}$$

所代表者，可以作爲此定律的很好的圖形表示；此定律所表示的是誤差發生的或然率與其數值的關係。所有我們此後的工作，全是根據於這條經驗定律！J. Venn 在他所著 Logic of Chance, 1896，中稱之爲『誤差的指數定律』，稱之爲**定律**，因爲牠所表示的是一個物理的事實，關係於實際上誤差所依之而發生的次數；而『最小平方法』是一種**法則**，證明如何從一組實驗結果中可以抽出最好的代表值。H. Poincaré 在他的 Thermodynamique, Paris, 1892 的序文中引用簡括的語句說『人人堅信於此（誤差定律），因爲算學家意想這是觀測的事實，而

❶ 有些觀測者的結果好像大誤差比其他的易於產生，這或由於注意的疎忽或中斷，我想 Thomson 與 Tait 將稱這失常的大誤差爲『可以避免的錯誤』了。

觀測者意想這是算學的定理』。

Adrian (1808) 好像是第一個根據理論而設法求出上列公式。此後也曾有過幾個嘗試，最有名的如 Gauss, Hagen, Herschel, Laplace 等輩，但在我看來不能算是成功的。

§ 159. 或然率積分 (Probability Integral)

設 $x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots x$ 爲一組誤差依其數值由小而大排列。設逐個間的差是相等的。若 x 爲一個誤差，則遇到一個誤差在 x_0 與 x 間的或然率，爲各個或然率 $ke^{-h^2x_0^2}$; $ke^{-h^2x_1^2}$; $\cdots\cdots$; 之和〔第 155 節(10)〕，即

$$P=k(e^{-h^2x_0^2}+e^{-h^2x_1^2}+\cdots\cdots)=k\sum_{x_0}^{x} e^{-h^2x^2}。\tag{1}$$

若總和的記號易以積分記號，必須令 dx 表示兩個極限 x_0 與 x 間逐個相等間距之一，故得

$$P=\frac{k}{dx}\int_{x_0}^{x} e^{-h^2x^2}\,dx。$$

這是必然的，所有的誤差包括在極限 $\pm\infty$ 之間，因爲必然率可用 1 表之，故得

$$1=\frac{k}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2x^2}\,dx=\frac{k}{dx}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{h},\tag{2}$$

(第 111 節末)。即

$$k=\frac{h}{\sqrt{\pi}}dx。\tag{3}$$

以這 k 的值代入前節或然率方程式 (1)，可得同一關係的另一種表示法，即

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx, \tag{4}$$

此結果所代表者爲數值在 x 與 $x+dx$ 間的觀測誤差的或然率。即是下列比值：

$$\frac{x \text{ 與 } x+dx \text{ 間誤差的個數}}{\text{誤差的總個數}}。$$

記號 y 與 P 是這個繁重語句的簡便略語。就受到偶然誤差影響而爲數很多的觀測值而言，一個數值爲 x 的觀測誤差的或然率爲

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx, \tag{5}$$

稱爲 Gauss 的誤差定律。這結果與前節中 $y = k e^{-h^2x^2}$，是同一意義的。在 (4) 中 dx 表示任何特例中，x 值逐個間的間距。例如，設一個物質稱衡到千分之一克，則 $dx=0.001$；設稱衡至百分之一克，則 $dx=0.01$，等等。沒有誤差則其或然率爲

$$\frac{h\,dx}{\sqrt{\pi}}; \tag{6}$$

沒有數值爲毫米的誤差，則其或然率爲

$$\frac{0.001h}{\sqrt{\pi}}。 \tag{7}$$

一個誤差在極限 x_0 與 x 之間的或然率爲

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{x_0}^{x} e^{-h^2x^2} dx。 \tag{8}$$

一個誤差的絕對值在 0 與 x 之間的或然率爲

$$P = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-h^2x^2} dx, \tag{9}$$

這是表示一個誤差的絕對值小於 x 時的或然率。我們亦可寫爲

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hx} e^{-h^2x^2}\,d(hx), \tag{10}$$

這是或然率積分(8)的另一種寫法。在(8) 中，極限爲 x_0 與 x；在(9)與 (10) 中極限爲 $\pm x$。求微係數而用通常求一個函數之極小值的方法，我們從(1)求得，當

$$x^2=\frac{1}{2h^2}; \quad \therefore\ x_0{}^2+x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots\cdots+x_n{}^2=\Sigma\frac{1}{2h^2}$$

時，$y=k\,e^{-h^2x^2}$ 中 y 的値爲極小。但我們已經知道觀測值愈準確則 h 的值愈大。h 的值愈大則 $\Sigma(x^2)$的值愈小；當 h 爲極大時，$\Sigma(x^2)$的值爲極小。這不過是 Legendre 的最小平方原理：**所觀測的數量的最或然值 (Most probable value) 是能使各個誤差的平方之和爲極小者**。即是說，當

$$x_0{}^2+x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots\cdots+x_n{}^2=\text{極小} \tag{11}$$

之時，此中 x_0, x_1, x_2 各表影響於觀測值的各個誤差。

說明最小平方原理的理由，我們可以回到比利時軍隊的古法，他們以每人射擊點與標的中心的距離總加起來作爲各組鎗手的記錄。其和最小者得此軍團之奬。這個規則的錯誤不難見到。假設一個鎗手的記錄一爲 1，一爲 3；而另一鎗手的記錄爲二個 2。顯然後一鎗手比前一鎗手的鎗法要好些。射擊可以偏倚到任何方向而不影響於記錄。結果每個差異並不比例於從射擊點引至中心的**直線的長短**，而須比例於以此直線爲半徑以中心爲圓心所作圓的**面積**。這是說最好奬給那些與

中心距離平方之和爲最小者。❶這不是別的，卽最小平方原理的圖形表示，公式(11)。這樣辦法，前述兩個鎗手的記錄各爲 10 與 8。

§ 160. 一組觀測值的最好代表值(The Best Representative Value for a Set of Observations)

以任何量數與眞實結果的差異爲誤差之定義，在實際上是絕無用處的，因爲在此定義中隱含着，以研究的目標爲已知的了。於是誤差是什麽呢？在可能答覆此問題以前，我們必須決定所測數量的最或是值。我們剛才見到，唯一可用的材料終是連帶着不可避免的觀測誤差。結果，在某限度内，量數自身間是各不相同的。雖有這種事實，還是要研究者肯定的說出關於研究的數量，他所認爲最或然值者是什麽。眞的，**在我們的教本中每個化學上或物理上的常數是從一組相當的多而又不相一致的觀測值中所得的最好代表值**。例如，爲求電阻 1 歐姆溫度 0°C 時截面積爲一方毫米的純水銀柱之確切高度曾經用過很大與很多的努力。所得結果有如下列：（單位爲厘米）。

106.33;	106.31;	106.24;
106.32;	106.29;	106.21;
106.32;	106.27;	106.19;

見 J. D. Everett's Illustrations of C. G. S. System of Units, London, 176, 1891)。無疑的，所求常數的眞實的値存在於 106.19 與 106.33 之間，然而沒有充分的理由可說任一個比別一個更有當選的資格。但是物理學家必須從 106.19 與 106.33 厘米間的無限個可

❶ 參閱第 191 節中相似圖形的性質。

能的值中選出一個來。

1. **一組不相一致的結果，其最好代表值是什麼?** 算術中數很自然的有自薦的資格，於是有些算學家就從下列公理出發：『算術中數是一組不同觀測値的最好代表值』。根據於誤差定律曾經做過各種嘗試想證明算術中數在同樣條件與同樣可靠的情形中，是許多觀測値的最好代表值。證法的基礎建築於正的差異與負的差異有同樣的可能，且最後互相對銷；如下例一所示。❶

例一 設 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ 爲一組觀測値、a 爲其算術中數，證明剩餘誤差(Residual errors)的代數和爲

$$(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots\cdots+(a_n-a)=0。\qquad(1)$$

示意： 依算術中數的定義，

$$a=\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}；\quad 即\ na=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n，$$

$$\therefore\quad a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n-na=0；$$

$$\therefore\quad (a_1-a)+(a_2-a)+\cdots\cdots+(a_n-a)=0。$$

例二 證明算術中數使誤差的平方和爲極小。

示意： 參閱第 167 節。

這裏附帶的可注意者計算許多觀測値的算術中數時若觀測値有幾

❶ G. Hinrichs 在其所著 The Absolute Atomic Weights of the Chemical Elements 中批評以算術中數爲一組不相一致的觀測値之最好代表值，及選用此法之人。他質問道：『我們若是不能用許多個先令重量的算術中數作爲一個新的先令的眞實重量，我們何敢假定化學元素原子量的少數測定値之算術中數作爲其眞實的値?』不但這裏好像有些誤解在內，F. Y. Edgeworth 曾有『中數之選取』一文載於 Phil. Mag., [5], 24, 268, 1887, 且有叢篇有關係的題材之文亦載於 1883 與 1889 的同一雜誌。

位數字相同者，可以不必做全部的加法。例如前列九個觀測值的算術中數可寫爲

$$166+\frac{1}{9}(.33+.32+.32+.31+.29+.27+.24+.21+.19)$$

$$=166.276。$$

II. **定間距 (Constant interval) 的最好代表值**。在式子 $x_n=x_0+nx$（此中 n 爲正整數 1, 2, ……）中，定間距 x 的最好代表值可以從一組量數 x_0, x_1, x_2, ……決定之，

$$x_1=x_0+x;\ x_2=x_0+2x;\cdots\cdots x_n=x_0+nx,$$

此中 x_0 爲第一個觀測值；$n=1$ 時，x_1 爲第二個觀測值，$n=2$ 時，x_2 爲第三個觀測值，……。今須求定間距 x 的最好代表值。顯然，

$$x=x_1-x_0;\ x=x_2-x_1;\cdots\cdots x=x_n-x_{n-1}。$$

算術中數不能再用，因爲牠將化爲

$$x=\frac{x_n-x_0}{n}$$

好像只有第一項與最後項是量測過的。在這種情形時，結果常是參照下式

$$x=6\frac{(n-1)(x_n-x_1)+(n-3)(x_{n-1}-x_2)+\cdots\cdots}{n(n^2-1)} \tag{2}$$

此式從第 108 節(4)的第二方程式中令

$$\Sigma(x)=\Sigma(n)=1+2+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1);$$

$$\Sigma(x^2)=\Sigma(n^2)=1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$\Sigma(y)=\Sigma(x_n)=x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n;$$

$$\Sigma(xy)=\Sigma(nx_n)=x_1+2x_2+\cdots\cdots+n\,x_n,$$

而得。

若 n 爲奇數，則居中的量數不會見於此式之內。故觀測的次數最好是偶數。這些量數，在求下列各種時都可遇到：各種溫度時棒的長度；電流計上針的振動；決定聲音在氣體中速度的 Kundt 方法中微塵圖形(Dust figure)的間距；CH_2 對於有機化學上同系物 (Homologous series) 的物理的與化學的性質之影響，等等。

例一　求一種氣體比熱之比的 Kundt 實驗中，實驗簿上所記載的微塵圖形爲 30.7，43.1，55.6，67.9，80.1，92.3，104.6，116.9，129.2，141.7，154.0，166.1，厘米。波節 (Node) 距離的最好代表值是什麼？　　答：12.3 厘米。

例二　在某一地磁實驗中 Gauss 與 Weber 的地磁計上磁針的振動時間爲 3.25；9.90；16.65；23.35；30.00；36.65；43.30；50.00；56.70；63.30；69.80；76.55；83.30，89.90；96.65；103.15；109.80；116.65；123.25；129.95；136.70；143.35 秒。證明此振動週期是 6.707 秒。

例三　尚有一種方法，並不根據於最小平方法者，如下例所示：電流計上針的逐個振動的時刻爲(a)10 分 9.90 秒；(b)10 分 23.20 秒；(c)10 分 36.45 秒；(d) 10 分 49.80 秒；(e) 11 分 3.25 秒；(f) 11 分 16.60 秒，求振動週期。從(d)減(a)，除以 3；得 13.300。從(e)減(b)，除以 3；得 13.350；同樣從 (f) 與 (c) 得 13.383。中數

$=13.344=$ 振動週期。

§ 161　或然誤差 (The Probable Error)

有些觀測值與算術中數差異得很小，我們可以將算術中數作爲眞相的極近似值；在其他的情形中算術中數是沒有多大價值的。故現在所要決定的問題是：我們所選之算術中數而作爲一組觀測值的最好代表值者，可以信任至何等程度？換言之，這些結果的優劣如何？

我們可以應用 Gauss 的精確度的絕對量數來答覆此問題。這是很易證明的兩組觀測值之精確度的量數隨其正確性而反變。設誤差 x_1 的或然率介於 0 與 l_1 之間，誤差 x_2 的或然率介於 0 與 l_2 之間，即

$$P_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{l_1}e^{-h_1^2x_1^2}\,d(h_1x_1);\qquad P_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{l_2}e^{-h_2^2x_2^2}\,d(h_2x_2),$$

這是顯然的，若兩組觀測值者有同樣程度的可以信任，則 $P_1=P_2$。

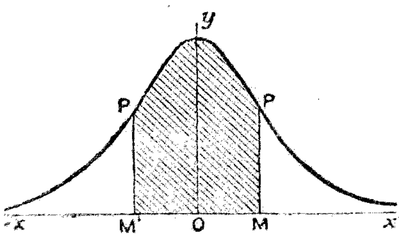
$$\therefore\quad l_1h_1=l_2h_2;\quad 即\ l_1:l_2=h_2:h_1,$$

即兩組觀測值之精確度的量數隨其正確性而反變。當兩組觀測值之精確度的量數相同時，一個誤差 l_1 與另一個誤差 l_2 的或然率相同。例如，設 $h_1=4h_2$，則當 $l_2=4l_1$ 時 $P_1=P_2$；即或然率相同時第二組所犯之誤差四倍於第一組者。換言之，第一組觀測值的正確性四倍於第二組。因爲這個準則在應用上有某種困難，故其用處僅限於理論的研究。

算術中數代表所有的觀測值，至如何接近的程度，還有一種表示的方法，是假定所有的誤差，不問正負，依其絕對值的次序而排列之，然後在兩端極限之間選取一個數量使大於此數量的誤差之個數與小於此數

量者之個數相等。**此數量稱爲或然誤差**(The probable error),但不是『**最或然誤差**』(The most probable error),也不是『**實在誤差的最或是值**』(The most probable value of the actual error)。

或然誤差是決定我們採取算術中數爲一組觀測值的最代表值時所可信任的程度。例如,氧的原子價(氫的原子價爲1)爲15.879,其或然誤差爲 ±0.0003。這至說,一組觀測值的算術中數爲 15.879 而氧的原子價的眞值在 15.8793 與 15.8787 之間的或然率是 $\frac{1}{2}$;即優勢均等,你可用 1 鎊對 1 鎊作賭。



圖一百七十一

參閱圖一百七十一,設 MP 與 $M'P'$ 的作出是使與 Oy 等距而此兩縱線與曲線及橫軸所圍之面積(即圖中畫有陰影的部份)等於曲線與橫軸所圍總面積之半,於是顯然所有的觀測值中其誤差的絕對值大於 OM 者佔半數,小於 OM 者亦佔半數,即 OM 代表或然誤差的絕對值,MP 爲其或然率。

有些研究者以所得結果的或然誤差是很小,而用以鄭重的表示其工作之正確。其實,**或然誤差並不表示工作的正確與否**,也不表示誤差的絕對值,只是表示各種大小不同的誤差的比例。或然誤差很大的一組量數,可以比近眞誤差較小的另一組更爲正確,因爲這第二組或許可以受到一個大的定誤差的影響(如以後所見)。

誤差的個數，大於或然誤差者與其小於或然誤差者相等。任意選取一個誤差，其爲大於或然誤差者與其爲小於或然誤差者同樣可能。故此，或然誤差爲下列積分中 x 的值，

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hx} e^{-h^2x^2}\,d(hx),\tag{1}$$

見第 159 節 (10)。從附錄二，表 X，當 $P=\frac{1}{2}$ 時，$hx=0.4769$；卽若 r 爲或然誤差，則

$$hr=0.4769。\tag{2}$$

前已證明，

$$y=\frac{h\,dx}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2},\tag{3}$$

故從第 155 節，獨立誤差 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n$ 發生的或然率爲其各個或然率之積，卽

$$P=\frac{h^n(dx)^n}{\sqrt{\pi^n}}e^{-h^2\Sigma(x^2)}。\tag{4}$$

對於任何一組觀測值，其量數若已儘量的正確，則 h 爲極大值。求上方程式的微係數，而使 $\frac{dP}{dh}$ 等於零，則

$$h=\pm\sqrt{\frac{n}{2\Sigma(x^2)}};\tag{5}$$

以此代入(2)得

$$r=\pm0.6745\sqrt{\frac{\Sigma(x^2)}{n}}。\tag{6}$$

但 $\Sigma(x^2)$ 爲實在誤差的平方之和，而實在誤差是不知的。依最小平方

法原理，當各量數是同樣的可信時，觀測值的最或然值是使觀測值與算術中數之差異的平方之和爲最小者。設 $\Sigma(v^2)$ 爲觀測值與算術中數之差異的平方之和。若 n 很大，我們即可令 $\Sigma(x^2)=\Sigma(v^2)$；但若 n 表示有限數時

$$\Sigma(v^2)<\Sigma(x^2);\quad \therefore\ \Sigma(x^2)=\Sigma(v^2)+u^2。\tag{7}$$

關於 u^2 我們所知者是當 n 增加時，其值減小；當 $\Sigma(x^2)$ 增加時其值增加。這是普遍的假定即最好的近似值，可從下列寫法而得之，

$$u^2=\frac{\Sigma(x^2)}{n};\qquad \therefore\quad \frac{\Sigma(x^2)}{n}=\frac{\Sigma(v^2)}{n-1}$$

故此，一個觀測值的或然誤差 r，爲

$$r=\pm 0.6745\sqrt{\frac{\Sigma(v^2)}{n-1}},\quad [\text{一個觀測值}]\tag{8}$$

此實爲 Bessel 方程式用於一個觀測值的或然誤差。$\Sigma(v^2)$ 表示全組中各個量數與算術中數之差的平方之和，n 表示實際所取量數的個數全組觀測值的算術中數的或然誤差，R 爲

$$R=\pm 0.6745\sqrt{\frac{\Sigma(v^2)}{n(n-1)}},\quad [\text{一切觀測值}]\tag{9}$$

此公式的求法見第 162 節 V 例二。以上兩個公式顯示觀測值的個數增加時可使近真誤差減小。(8)與(9)只是近似值罷了，當觀測值的個數很少時是沒有什麼意義的。故此我們可寫 $\frac{2}{3}$ 以代 0.6745。數值上的應用見下節。

許多觀測值的剩餘誤差，求其平方時很費工夫，這可應用 Peter 近似公式，而省去之。依照他的公式，一個觀測值的或然誤差　，

$$r=\pm 0.8453\frac{\Sigma(+v)}{\sqrt{n(n-1)}}，\text{［一個觀測值］}\qquad (10$$

此中 $\Sigma(+v)$ 表示各觀測值與算術中數之差異的總和，不論牠們的正負。全組觀測值的算術中數的或然誤差 R，爲

$$R=\pm 0.8453\frac{\Sigma(+v)}{n\sqrt{n-1}}。\text{［一切觀測值］}\qquad (11$$

用 Bessel 公式與 Peter 公式時，附錄二，表 VI 至表 IX 可以節省數值計算的時間。

§ 162. 均方誤差與平均誤差 (Error of Mean Square and Average Error)

選取或然誤差，作比較各組觀測值間所犯誤差之用似最自然，因爲或然誤差在依照秩序排列的一組中佔有居中的位置，誤差之一小於此或然誤差者與大於此者有相等的個數。還有別的比較標準。在德國喜歡用**均方**誤差 (Error of mean square)，**其定義爲所有各誤差平方的中數等於均方誤差的平方**。即若假定每個觀測值中含有此種誤差，則牠們所有誤差的平方之和，將等於各觀測值中所實有的誤差的平方之和。在第 159 節中(5)，我們見到過比式如下，

$$\frac{x\text{ 與 }x+dx\text{ 間的誤差個數}}{\text{誤差的總個數}}=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}\,dx。$$

以 x^2 乘兩邊，則得

$$\frac{x\text{ 與 }x+dx\text{ 間誤差的平方之和}}{\text{誤差的總個數}}=\frac{h}{\sqrt{\pi}}x^2e^{-h^2x^2}\,dx。$$

求極限 $+\infty$ 與 $-\infty$ 間的積分，得

$$\frac{\text{所有誤差的平方之和}}{\text{誤差的總個數}}=\frac{\Sigma(x^2)}{n}=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-h^2x^2}\,dx。$$

令 代表均方誤差,於是依第 111 節的積分法,得

$$m^2=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-h^2x^2}\,dx=\frac{1}{2h^2};\tag{1}$$

從上節(2),得

$$r=0.6745\,m。\tag{2}$$

從上節(8)與(9),影響於一個觀測值的均方誤差, m, 爲

$$m=\pm\sqrt{\frac{\Sigma(v^2)}{n-1}};\ [\text{一個觀測值}]\tag{3}$$

影響全部觀測值的均方誤差, M, 爲

$$M=\pm\sqrt{\frac{\Sigma(v^2)}{n(n-1)}}。[\text{一切觀測值}]\tag{4}$$

均方誤差切勿與平均誤差相訛傳,平均誤差(Average error)是另一種比較標準,其定義是所有誤差之絕對值的中數。設 a 代表平均誤差從第 81 節,即得

$$a=\frac{\Sigma(+v)}{n}=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}x\,e^{-h^2x^2}\,dx=\frac{1}{h\sqrt{\pi}};\ r=0.8454a\tag{5}$$

平均誤差量測每個觀測值與全組觀測值中數的平均差異。在幾組不同的觀測值中欲注意於各組觀測值的相對正確度時,平均誤差比或然誤差更爲有用的一個比較標準。平均誤差不但隨各個不同的誤差所發生之比例而定,並且與每個誤差的大小有關。即有未知的定誤差存在而使誤差理論的進一步的應用發生問題時,平均誤差還能供給有用的資料,因爲牠能使我們比較影響於各組觀測值的定誤差之大小,因而

可發見牠們而消去牠們。

現在讀者可以證明，影響於 n 個觀測值中數的平均誤差 A 可用下式表之：

$$A=\pm\frac{\Sigma(+v)}{n\sqrt{n}}。\tag{6}$$

此式決定一組觀測值的平均誤差所影響於中數的效果，可作爲一個標準，用以比較在相似條件下各組實驗中各個中數的相對正確度。

例一 觀測電流的電阻，從電流計上得到偏轉如下列：37.0,36.8,36.8,36.9,37.1。求其均方誤差與或然誤差。這樣少數的觀測值不過用以說明應用上列公式的方法罷了。至於在實際工作中從少數觀測值所求出的均方誤差與或然誤差是沒有什麼價值的。列成下表：——

觀測值的號數	偏轉的觀測值	與中數之差異	v^2
1	37.0	+0.08	0.0064
2	36.8	−0.12	0.0144
3	36.8	−0.12	0.0144
4	36.9	−0.02	0.0004
5	37.1	+0.18	0.0324

中數 $=36.92$; $\Sigma(v^2)=0.0680$

表中最後兩行數字可從第二行計算而得。因 $n=5$，又若寫 0.6745 爲 $\frac{2}{3}$ 即得。

一個觀測值的均方誤差 $=\pm\sqrt{\frac{0.068}{4}}=\pm0.13$。

中數的均方誤差 $=\pm\sqrt{\frac{0.068}{5\times4}}=\pm0.058$。

$$\text{一個觀測值的或然誤差} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{\frac{0.068}{4}} = \pm 0.087,$$

$$\text{中數的或然誤差} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{\frac{0.068}{5\times 4}} = \pm 0.039。$$

$$\text{一個觀測值的平均誤差} = \pm\frac{0.52}{5} = \pm 0.104。$$

$$\text{中數的平均誤差} = \pm\frac{0.52}{5\sqrt{5}} = \pm 0.0465。$$

全部觀測值的算術中數與其均方誤差爲 36.92±0.058；與其或然誤差爲 36.92±0.039。誤差中含有二位有效數字已經夠了。附錄二中表 VI 與表 VII 很便於數值計算的。

例二 F. Rudberg (Pogg. Ann., **41**, 271, 1837) 用各種方法求得乾燥空氣的膨脹係數 α 爲 $\alpha\times 100=0.3643, 0.3654, 0.3644, 0.3650, 0.3653, 0.3636, 0.3651, 0.3643, 0.3643, 0.3645, 0.3646, 0.3662, 0.3840, 0.3902, 0.3652$。假定這些結果是同樣的可以信任，試求其或然誤差與均方誤差。

例三 從第 61 節例三，證均方誤差爲或然率曲線轉向點的橫坐標。爲簡便計，令 $h=1$。

例四 Cavendish 曾經發表過 29 個關於地球的平均密度的測定值，其中除掉一個之外，第一位有效數字都是 5；各數列下：——4.88, 5.50, 5.61, 5.07, 5.26, 5.55, 5.36, 5.29, 5.58, 5.65, 5.57, 5.53, 5.62, 5.29, 5.44, 5.34, 5.79, 5.10, 5.17, 5.39, 5.42, 5.47, 5.63, 5.34, 5.46, 5.30, 5.75, 5.68, 5.85. 覆算下列結果：中數 = 5.45；$\Sigma(+v)=5.04$, $\Sigma(v^2)=1.367$; $M=\pm 0.041$; $m=\pm 0.221$;

$R=\pm 0.0277$; $r=\pm 0.149$; $a=0.18$; $A=\pm 0.033$。

或然誤差,均方誤差,與誤差的絕對量數,三者間之關係,可從第161節(2),第159節(4)與(5)求得之。事實上若誤差的絕對量數 $h=1.0000$,則均方誤差 $m=0.7071$;平均誤差 $a=0.5642$;或然誤差 $r=0.4769$。

用下列的結果,很易結合受到均方誤差或或然誤差的影響的量數:

1. **許多觀測值之和(或差)的均方誤差,等於每個觀測值的均方誤差之平方和的平方根。** 設 x_1, x_2 代表兩個獨立的量數,其和(或差)結合成爲最後的結果 X,如

$$X=x_1+x_2。$$

設 x_1 與 x_2 的均方誤差各爲 m_1 與 m_2。若 X 的均方誤差爲 M,則

$$X\pm M=(x_1\pm m_1)+(x_2\pm m_2),$$

$$\therefore \quad \pm M=\pm m_1\pm m_2。$$

兩邊平方得

$$M^2=m_1^2\pm 2m_1m_2+m_2^2。$$

因 m_1, m_2 影響於 M 的機會有正有負,且含有 $m_1 m_2$ 各項成爲正負的機會是相等的,故 $m_1 m_2$ 各項彼此可以消去,❶ 結果得

$$M^2=m_1^2+m_2^2,$$

即
$$M=\pm\sqrt{m_1^2+m_2^2}。$$

❶ 嚴密的證法,參閱 A. L. Bowley 所著 Elements of Statistics 第 287 頁。——譯者註。

同理推之於兩個以上的量數，可得

$$M^2 = m_1{}^2 + m_2{}^2 + m_3{}^2 + \cdots\cdots;$$

卽
$$M = \pm\sqrt{m_1{}^2 + m_2{}^2 + m_3{}^2 + \cdots\cdots} \tag{7}$$

從(2)均方誤差 M 與或然誤差 R 成比例，同樣 m_1 與 r_1；m_2 與 r_2；……成比例，故

$$R^2 = r_1{}^2 + r_2{}^2 + r_3{}^2 + \cdots\cdots;$$

卽
$$R = \pm\sqrt{r_1{}^2 + r_2{}^2 + r_3{}^2 + \cdots\cdots}\,。 \tag{8}$$

換言之，兩個量數 A 與 B 各有或然誤差 $\pm a$ 與 $\pm b$，則其和(或差)之或然誤差爲

$$\boldsymbol{R} = \pm\sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}\,。 \tag{9}$$

例一　氯化鈦（$TiCl_4$）的分子量知爲 188.545，其或然誤差爲 ±0.0092，氯的原子量爲 35.179±0.0048，問鈦的原子量爲何？

答：　47.829±0.0213。

示意：　$188.545 - 4 \times 35179 = 47.829$；

$$R = \sqrt{(0.0092)^2 + (4 \times 0.0048)^2} = \pm 0.0213。$$

在這些說明的例中，我們若不留心於或然誤差的解釋，顯然將會忽視第 94 節的忠告。

例二　在公式 $R = k(\theta_2 - \theta_1)$ 中 θ_1 與 θ_2 各有均方誤差爲±0.0003 與 ±0.0004，則 $\theta_2 - \theta_1$ 與 $3(\theta_2 - \theta_1)$ 所有的均方誤差爲何？

答：　±0.0005 與 ±0.0015。

II.　**兩個量數 A 與 B，各有或然誤差 $\pm a$ 與 $\pm b$，則其積的或然誤差爲**

$$R=\pm\sqrt{(Ab)^2+(Ba)^2}。\tag{10}$$

若加入第三個量數 C，其或然誤差爲 $\pm c$，則

$$R=\pm\sqrt{(BCa)^2+(ACb)^2+(ABc)^2}。\tag{11}$$

例一　Thorpe 求出下列分子之比：

$$4Ag : TiCl_4=100 : 44.017\pm0.0031。$$

試從此而決定氯化鈦的分子量；銀的原子量$=107.108\pm0.0031$，爲已知的　　答：188.583 ± 0.0144。

示意：

$$R=\pm\sqrt{\{(4\times107.108\times0.0031)^2+(44.017\times4\times0.0031)^2\}}$$

例二　錫的比熱爲 0.0537，附有均方誤差 ±0.0014，又其原子量爲 118.150，附有均方誤差 ±0.0089，試證此兩者之積 (Dulong 與 Petit 定律)爲 6.34 ± 0.1654。

III.　**兩個量數 A 與 B，各有或然誤差 $\pm a$ 與 $\pm b$，則其商 $\frac{B}{A}$ 的或然誤差爲**

$$R=\pm\frac{\sqrt{\left(\frac{Ba}{A}\right)^2+b^2}}{A}。\tag{12}$$

例一　已知下列原子之比，

$$Cu : 2Ag=100 : 339.411\pm0.0039,$$

設 $Ag=107.108\pm0.0031$，則銅的原子量爲何？

答：63.114 ± 0.0020。

示意：　$R=\pm\sqrt{\left(\frac{214.216\times0.0039}{339.411}\right)^2+(0.0062)^2}\div339.411$

$=\pm0.0020$。

$Cu:2\times107.108=100:339.411$;　$\therefore\ Cu=63.114$。

例二　假使在 16° 的空氣內水蒸氣的極大壓力 f_1 爲 8.2000，附有均方誤差 ±0.0024，又在 16° 的露點 (Dewpoint) 時水蒸氣的極大壓力 f_2 爲 13.5000 附有均方誤差 ±0.0012。空氣的相對濕度 $h=\frac{f_1}{f_2}$。試證在 16° 時相對濕度爲 0.6074±0.0002。

IV.　**數量 A, B, C, 各有或然誤差 $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$；則比例式**

$$A:B=C:x$$

中，x 的或然誤差

$$R=\pm\frac{\sqrt{\left(\frac{BCa}{A}\right)^2+(Cb)^2+(Bc)^2}}{A}\tag{13}$$

例　Stas 求得* $AgClO_3$ 可以供給 25.080±0.0019% 的氧，74.920±0.0003% 的 AgCl。若氧的原子量爲 15.879±0.0003，則 AgCl 的分子量爲何？

答：　142.303±0.0066。

示意：　$25080:74.920=3\times15.879:x$;　$\therefore\ x=142.303$。

$$R=\pm\frac{\sqrt{\left\{\left(\frac{74.92\times47.637\times0.001}{25.08}\right)^2+(47.637\times0.001)^2+(74.92\times3\times0.0009)^2\right\}}}{25.08}$$

若比例式爲

$$A:B=C+x:D+x,$$

則或然誤差

$$R=\pm\sqrt{\frac{(C-D)^2}{(A-B)^4}(B^2a^2+A^2b^2)+\frac{B^2C'^2+A^2d^2}{(A-B)^2}}。\tag{14}$$

例　Stas 求得 31.488±0.0006 克的 NH_4Cl 相當於 100 克的 $AgNO_3$。試從此測定氮的原子量，已知 Ag=107.108±0.0031; Cl=35.179±0.0048; H=1; O_3=47.637±0.0009。

答: 13.911±0.0048。

V. **一組觀測值的算術中數的或然誤差與觀測值的個數之平方根成反比例。**設一組獨立的觀測值 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ 其或然誤差各為 $r_1, r_2, \cdots\cdots r_n$，結合這組觀測值而得最後的結果為 u。設或然誤率各與實在誤差 $da_1, da_2, \cdots\cdots da_n$ 成比例。最後的結果 u 是一個函數，如下

$$u=f(a_1, a_2, \cdots\cdots a_n)。$$

每個變數對於 u 的影響可用偏微分決定之，如

$$du=\frac{\partial u}{\partial a_1}da_1+\frac{\partial u}{\partial a_2}da_2+\cdots\cdots\tag{15}$$

此 $da_1, da_2, \cdots\cdots da_n$ 表示在量測 $a_1, a_2\cdots\cdots a_n$ 時所犯的實在誤差；偏微係數決定這些變數對於最後結果 u 的影響；du 表示因 $da_1, da_2\cdots\cdots$ 等的連合發生而 u 中所含的實在誤差。令 du 為 R; $da_1, da_2\cdots\cdots$ 等各為 $r_1, r_2, \cdots\cdots$；求(15)的平方，而得

$$R^2=\left(\frac{\partial u}{\partial a_1}\right)^2 r_1^2+\left(\frac{\partial u}{\partial a_2}\right)^2 r_2^2+\cdots\cdots\tag{16}$$

因每二項交互的積為數極微，故可略去。n 個觀測值的算術中數

$$u=\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n},$$

故得

$$\frac{\partial u}{\partial a_1}=\frac{\partial u}{\partial a_2}=\cdots\cdots=\frac{1}{n};\quad \therefore\quad R^2=\frac{r_1{}^2+r_2{}^2+\cdots\cdots+r_n{}^2}{n^2}$$

但觀測值各有相等的精確程度，故 $r_1{}^2=r_2{}^2=\cdots\cdots=r_n{}^2=r^2$。

$$\therefore\quad R^2=\pm\sqrt{\frac{nr^2}{n^2}}=\pm\frac{r}{\sqrt{n}}。\qquad (17)$$

這裏的結果顯示我們對於觀測值增加的效果很易於估價得太高。設 R 爲八個觀測值的或然誤差，欲使或然誤差爲 $\frac{1}{2}R$ 則須取四倍於原有的個數，卽三十二個觀測值；欲使或然誤差減至 $\frac{1}{3}R$，則須取九倍於原有的個數，卽 72 個觀測值；餘可類推

例一　用某種方法測定氧的原子量得到兩種測定值，各爲 15.8726±0.00058 與 15.8769±0.00058。從此試證原子量應寫爲 15.87475±0.00041

例二　第 161 節中已知公式(8)，求從此化出公式(9)。

示意：用本節(17)。

例三　求第 161 節中 Peter 相似公式(10)與(11)。

示意：從 $\frac{\Sigma(x^2)}{n}=\frac{\Sigma(v^2)}{n-1}$，平均的說我們可以假定 $\Sigma(x):\sqrt{n}=\Sigma(v):\sqrt{n-1}$，等等。$\frac{\Sigma(x)}{n}$ 爲誤差的中數，若 $\frac{\Sigma(x)}{n}=$ 或然率積分(§161)$=\frac{1}{h\sqrt{\pi}}$，則從第 161 節(2)，$r=0.8454\frac{\Sigma(x)}{n}$，等

等。並參閱第 159 節

例四　證明當 n 爲很大時，以誤差中數之平方除誤差平方之中數，其商爲常數。

示意：　可證

$$\frac{\Sigma(v^2)}{n} \div \left(\frac{\Sigma(v)}{n}\right)^2 = \frac{\pi}{2} = 1.77。\tag{18}$$

曾經有人提議此式可以作爲觀測值忠實性與計算工作的正確性的一種測驗。例如第 167 節 V 的例中之數字，$\Sigma(v)=55.53$；$\Sigma(v^2)=354.35$；$n=14$；常數 $=1.60$　若觀測值的個數不多時，這條例通常並不很對。

例五　證明或然誤差（或均方誤差）與精確度的絕對量數用反比例。

示意：

$$r = \frac{1}{h} \times 常數; \qquad \frac{1}{h} \tag{19}$$

§ 163. 或然率積分的數值 (Numerical Values of the Probability Integrals)

我們已經討論過兩個問題

1.　附有觀測誤差的一組量數，其最好的代表值是什麼?

2.　附有觀測誤差的一組已知量數，以算術中數代表之，與其中所有各個接近到如何程度?

現在留着成問題的即：

3.　算術中數與絕對眞確值近似到如何程度？此處可用 Crookes 研究鉈的原子量的模範作品 (Phil. Trans., **163**, 277, 1874.) 說明之。此常數的 Crooke 的決定值爲

$$\left.\begin{array}{l} 203.628;\ 203.632;\ 203.636;\ 203.638; \\ 203.639; \\ 203.642;\ 203.644;\ 203.649;\ 203.650; \\ 203.666; \end{array}\right\}\text{算術中數爲 } 203.642。$$

此算術中數僅爲兩個極端的極度 203.628 與 203.666 之間，無限個鉈的原子量的可能值之一。很可能的，203.642 不是眞實的值；也很可能的，203.642 是很接近於所求的眞實值。『接近到如何？』這問題是不能答覆的。改變此問題爲『眞實值包含極限 $203.642 \pm x$ 之間的或然率是什麽？』，則無論 x 的値選取得如何的小，此問題終是很易解答。

第一，假定此算術中數的精確度的絕對量數 h 爲已知。附錄二表 X 卽載，或然率積分

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hx} e^{-h^2x^2}\,d(hx),$$

的數値，式中 P 表示一個觀測誤差的絕對値等於或小於 x 的或然率，h 爲這些結果的精確度的絕對量數。

當 $h=1$，P 的値可直接從表中查出。例如，我們可以查到當 $x=\pm 0.1$ 時 $P=.112$；當 $x=\pm 0.2$ 時 $P=.223$；……意思是說，在精確係數 $h=1$ 的一組觀測値含有 1000 個誤差則有 112 個在 $+0.1$，與 -0.1 之間；223 個在 $+0.2$ 與 -0.2 之間，等等。或 888 個出於 ± 0.1 的極限之外；777 個出於 ± 0.2 的極限之外；…… 當 h 不等於 1，我們必須取 $\frac{0.1}{h}$，$\frac{0.2}{h}$，……替代 0.1，0.2，……。

例一　設 $hx=0.64$、從表上知 $P=0.6346$。故 0.6346 表示誤差 x 欲小於 $\frac{0.64}{h}$ 時的或然率，卽是說誤差的 63.46% 在極限 $\pm\frac{0.64}{h}$ 之間。其餘 36.54% 在此極限之外。

例二　$h=1$，求一個誤差須包含在極限 ±0.3 之間的或然率。

答：　0.329。

例三　$h=1$，求一個誤差含在 -0.01 與 $+0.1$ 之間的或然率。此爲含在 0 與 -0.01 間及含在 0 與 $+0.1$ 間的或然率之和。

答：　$\frac{1}{2}(0.113+0.1125)=0.0619$。

例四　$h=1$，求一個誤差含在 $+1.0$ 與 $+0.01$。此爲含在 1.0 與 0 間及 0.01 與 0 間的或然率之差。

答：　$\frac{1}{2}(0.8427-0.0113)=0.4157$。

故此表可使我們求出誤差的數值與精心所作許多量數中含有此誤差的次數之關係。從或然誤差 R 演算通常比從精確係數 h 更爲容易。更實用的例見於下列一組例題之中。

第二，假使算術中數的或然誤差爲已知。 附錄二，表 XI 所載爲或然率積分

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{ax}{r}} e^{-\left(\frac{x}{r}\right)^2} d\left(\frac{x}{r}\right)$$

的數值，此中 P 表示附有或然誤差 r（或 R）的一組量數的算術中數中含有絕對值等於或小於 x 的觀測誤差的或然率。此表與 h 不生關

係。今說明其用處,在 1000 個誤差中 54 個將小於 $\frac{1}{10}R$；500 個將小於 R；823 個將小 $2R$；957 個將小於 $3R$；993 個將小於 $4R$；僅有一個大於 $5R$。r(或 R) $=\frac{a}{h}$，此中 h 爲精確係數 a，爲常數，其值爲 0.4769。

例一 一組結果以 6.9 代表之，其或然誤差爲 ±0.25；或然誤差的絕對值小於 0.25 的或然率爲 $\frac{1}{2}$ 實在誤差小於 0.75 的或然率爲何？此時 $\frac{x}{R}=\frac{0.75}{0.25}=3$。從表 I，當 $\frac{x}{R}=3$ 時 $p=0.9570$。這是說 95.7% 的誤差小於 0.75；4.3% 的誤差大於此數。

例二 D. Gill 求得太陽的視差爲 8.802″±0.005。則太陽視差在 8.802″±0.025 之間的或然率爲何？此時 $\frac{x}{R}=\frac{0.025}{0.005}=5$。從表 XI，$R=5$ 時 $P=0.9993$。

例三 Dumas 記錄出下列 19 個氫的化學當量（O=100）的測定值，乾燥劑在有些情形中用硫酸(H_2SO_4)其餘的用氧化磷(P_2O_5)：

1) H_2SO_4:— 12.472；12.480；12.548；12.489；12.496；12.522；12.533；12.546；12.550；12.562。

2) P_2O_5:— 12.480；12.491；12.490；12.490；12.508；12.547；12.490；12.551；12.551。J. B. A. Dumas 所著 Recherches sur la Composition de l'Eau 一文載在 Ann. Chim. Phys., [3], **8**, 200, 1843。假定結果中沒有定誤差之存在，則算術中數（12.515）中的或然

誤差在 ±0.015 間的或然率爲何？研究化學的讀者或能見到此解答對於 Prout 定律之關係。

示意：$\frac{x}{R}=t$；$R=0.005685$；$x=0.015$；$\therefore t=2.63$。

從表 XI，當 $t=2.63$，$P=0.969$。故算術中數 12.515 所誤差在 ±0.015 之間的優勢爲 969 對 31。欲用表 X；$h=\frac{0.4769}{R}=102$，$\therefore hx=102\times0.015=1.53$。從表，當 $hx=1.53$ 時 $P=0.924$；等等。即是說 96.9% 的誤差比規定的極限小，3.1% 比此大。

例四　就上載 W. Crookes 關於鉈的原子量的十個測定值計算此原子量在 203.632 與 203.652 間的或然率。此時 $x=\pm0.01$；$R=\pm0.0023$；$\therefore t=\frac{x}{R}=4.4$；從表 XI，$P=0.997$。（注意此數與代表必然率的 1 何等接近）。鉈的原子量的眞實值在 203.632 與 203.652 間的機會 332 對 1。從表 X，亦可得相同的結果。如 $h=0.4769\div0.0023=207$；$\therefore hx=207\times0.01=2.07$。當 $hx=2.07$ 時 $P=0.997$。若 Crookes 的相同條件下，取 1000 個觀測值，我們很有理由希望其中 997 個所附的誤差，其絕對值是小於 0.01，而只有 3 個所附的誤差大於此數。

以上所有求到的法則與公式，並不是神聖不可侵犯的。我們從事時所根據的基本假定，讀者須常存在心。要是不能滿足這些條件，所有結論非但是無用的贅物，甚且是錯誤百出的。必要的條件是：

1. 每個觀測值須像其他的同樣易於附有誤差。

2. 須無滋擾的影響，使結果有着偏向，對於某些方面的差異恆較其他方面爲大。

3. 觀測值須爲數很多。在實用上，若第二條件能够滿足，則所取觀測值的個數可以大大減少。通常 10 至 25 個認爲是足够的個數。

§ 164. Maxwell 的分子速度分佈律 (Maxwell's Law of Distribution of Molecular Velocities)

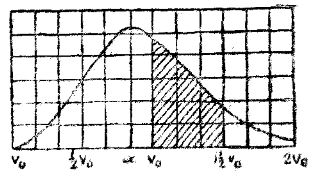
在以上的討論中，一種氣體的分子速度假定是相同的。這個簡化的假定，是否可以認爲對的？

依照動力論，一種氣體作爲含有許多完全彈性的球，以某種速度在空間內運動。若與容器之壁碰撞，則作爲分子依照動力學定律而回跳。這就說明氣體的壓力。在平衡狀態下的氣體，所有分子的速度並不相同的。有些的速度較其他的爲大。同一分子在一個時候可以運動得快些，在別的時候可以比較慢些。求一個定律來支配各種分子運動速度的分佈情形，曾經有人試過且有相當成就。Maxwell 的定律根據一個假定，即分子速度間的關係與觀測值的誤差的關係一樣。這個假定在氣體動力論的發展上是一個重要的角色。一個分子可有等於 v 的速度，其或然率 y 以下式表之：

$$y=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{v}{\alpha}\right)^2 e^{-\left(\frac{v}{\alpha}\right)^2}。\qquad (1)$$

速度超過某種限度以外的分子，爲數很少的。一個分子雖有任何速度的可能，但其速度超過某種限度的或然率小得幾近於零。讀者若將上列方程式親自描圖觀之，即於分子速度的分佈可得一個很好的觀念。注

意縱坐標是比例於分子的個數，橫坐標是比例於其速度。x 軸，曲線，與某兩個縱坐標所包圍的面積可以表示，速度相當於此兩縱坐標間之橫坐標的分子的個數。圖一百七十二中陰影部份代表速度在 V_0 與 $1.5V_0$ 間的分子的個數。



圖一百七十二

例　用普通求極大值的方法，證明本節公式(1)當 $v=\alpha$ 時 y 爲極大值。

回到第 156 節氣體動力論的研究，速度在 v 與 $v+dv$ 間的分子的個數假定可用與表示均方誤差(§ 162)類似的方程式表示之，即

$$dN=\frac{4N}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{v}{\alpha}\right)^2 e^{-\left(\frac{v}{\alpha}\right)^2} d\left(\frac{v}{\alpha}\right), \tag{2}$$

此中 N 表示分子的總數，α 爲常數，其值待求。

I.　**求以分子的平均速度 V_0 表示常數 α 的值。**因速度爲 v 的分子共有 dN 個、所有這些分子速度的和爲 vdN，而全體分子速度的和必爲 $\int_{v=0}^{v=\infty} vdN$；從 (2)

$$\therefore\quad V_0=\frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\left(\frac{v}{\alpha}\right)^3 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} d\left(\frac{v}{\alpha}\right)=\frac{4}{\alpha^3\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\alpha^4}{2}=\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}。$$

此式中何以不見 N? 平均速度 V_0 是 N 個已知分子的速度之和的 N 分之一。故

$$\alpha=\frac{1}{2}V_0\sqrt{\pi}。 \tag{3}$$

II.　**求氣體分子的平均速度。**依照初等力學中一條有名的定理，

質量 m，其速度爲 v，則其動能爲 $\frac{1}{2}mv^2$。故 dN 個分子的動能之和爲 $\frac{1}{2}(m\,dN)v^2$，因 dN 個分子皆以速度 v 運動的。從(2)，故全體分子的總動能(T)爲

$$T=\int_{v=0}^{v=\infty}\frac{1}{2}\,mv^2\,dN=\frac{2Nm}{a^3\sqrt{\pi}}\int_0^\infty v^4e^{-\frac{v^2}{a^2}}\,dv=\frac{3}{4}Nma^2=\frac{3}{4}Ma^2。$$

$$\therefore\quad a=2\sqrt{\frac{T}{3M}}\tag{4}$$

此中 $M=Nm=N$ 個分子的總質量，其每個質量爲 m。N 個同樣分子的總動能爲

$$T=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2+\cdots\cdots+\frac{1}{2}\,mv_N^2$$

$$=\frac{1}{2}m(v_1^2+v_2^2+\cdots\cdots+v_N^2)。\tag{5}$$

均方速度 U 的意義即此速度之平方等於 N 個分子的各個速度之平方的算術中數，即

$$U^2=\frac{v_1^2+v_2^2+\cdots\cdots+v_N^2}{N};\quad\therefore\quad T=\frac{1}{2}m\,NU^2=\frac{1}{2}MU^2,\tag{6}$$

再從(4)與(6)，可得

$$a=\frac{2U}{\sqrt{6}};\qquad V_0=\frac{4U}{\sqrt{6\pi}}=0.9213U。\tag{7}$$

在化學理論的許多著作中載有簡明的證法，證明若氣體的壓力爲 p，密度爲 ρ，則

$$p=\frac{1}{3}\rho U^2。\tag{8}$$

此式與 (6) 連用卽可從氣體的壓力與密度的已知值而計算其分子的平均速度,此在任何理論化學教本中可以見到。

讀者必能熟知 Maxwell 定律所立足的原理,事實上此原理爲全部動力論的基礎。我可更舉二例以明之。譬如說鄉鎮上每日下午三點十分的一班火車,雖然逐日的搭客不會相同的人,但搭客的人數很近乎是一個常數。保險公司可很確切的平均得人口中每千人的死亡數。自然,我所說的並不指有騷擾的因子在內。銀行假期可以需要定備車去應付額外運輸,時疫可使一地的死亡率增高。但是,這些機關商業上的成功可以充分的證明研究中所用的**平均法** (Method of averages) **或稱統計法** (Statistical method) 是有眞實性的。這些情形中也需用到與上相同的算式。

由此可見,根據於「全體分子的速度相等」這假設之上,作爲初步的相似法,這些計算很可取的。『分子之舞』的眞實結果是各種不同的速度分佈於全體分子之中,這是持有十分確切的理由的。

G. H. Darwin 曾經根據於「同一氣體的分子並不同一大小」這假定而求出平均自由路程的值, 等等。他曾假定分子大小的差異依觀測誤差的次數分配定律,進而試驗其結果。關於這點可參閱 "On the Mechanical Conditions of a Swarm of, Meteorites" (Phil. Trans., **180**, 1, 1889.)。

§ **165**. **定誤差或系統誤差** (Constant or Systematic Errors)

上述的不規則的偶然誤差具有一種分明的性質, 卽其值爲正爲負是同樣的容易。但有不具這種性質的誤差。設氣壓計的眞空不十分完

差，每個讀數會得過小；設溫度計的玻球在刻度而收縮，則零點昇高而使以後所有讀數都不正確；設天平的盤的懸點與樑的擺動中心不能等距，則稱出的重量就有錯誤。溫度有 5° 或 6° 的變化，就很易使分析上有 0.2 至 0.1% 的誤差，這是由於標準溶液的體積發生變化。我們稱這種含有缺陷的量數是受到定誤差❶的影響。依照定義，定誤差是由很確定的原因所產生，這些原因使觀測誤差偏重於一方面而輕於另一方面。故如 Dumas 關於銀的原子量的測定值，有些是受到定誤差之影響的，因爲在他工作中是用銀作爲氧的吸留(Occlusion)之用。

研究者最大努力之一即在偵察出定誤差，要是可能，則消滅之。『科學史所教訓大家的太明白了，沒有單獨的一種方法是絕對可靠的，誤差之源潛伏在我們最不以爲意的地方：牠們可以從最有經驗而最爲正直的人之注意之下脫逃出來』。❷現在有兩個極嚴重的問題。定誤差如何可以偵察出來？從一組量數中如何可以消滅定誤差的影響？通常是變更實驗舉行時所處的境遇。Lord Rayleigh 繼續的說：『只有從各種不同的來源與各種不同的方法所得證據的符合，至少可使實用上確定性的獲得與全部信任的回復』。故數量的量測當在不同的境遇之下，而用不同的工具，等等。這是假定雖然每種方法或每種儀器有其自身特

❶ 個人誤差 (Personal error)。這是定誤差的另一形式，是隨觀測者的個性而定。如 Greenwich 天文台上幾個天文家關於星球橫過的時間與其出現的時刻的判斷，各人間有 $\frac{1}{100}$ 至 $\frac{1}{3}$ 秒的差異，而一人觀測所得幾乎是常數。有些人讀起滴管上的刻度來終是稍高，有些人則稍低。游尺讀數，根據色度測驗的分析（如 Nessler 氏氨的方法），等等，可以受到個人誤差之影響。

❷ Lord Rayleigh 的主席演說辭，1884 年學士報告。

有的定誤差，所有這些定誤差集合起就有偶然誤差的性質。用具體的例來說明，一支槍上的瞄準器不準確可使子彈恆向一個方向偏異，但另一支槍上的瞄準器很可使之在另一個方向有定誤差，當槍的支數增加時，則定誤差就有着偶然誤差的性質，爲數很多時彼此可以抵銷。就因這個理由，Stas 普通總用幾種方法來決定原子量。例如，Stas 求 Ag : KCl 之比值用兩組決定值。在一組中，四個決定值是四種不同來源的 KCl 與一種銀結合；在另一組中以幾種不同來源的銀與一種 KCl 結合作種種的實驗。不幸，此後一組始終沒有完工。

計算算術中數類似於從擊射點的分佈中猜度標的中心。(圖一百六十五)若所有的射擊都受同一個定誤差的影響，這樣估計出來的中心將從眞實的中心偏移過些，距離的大小視這未知的定誤差的大小而定。若這大小最後可以決定，則一個簡單的算術運算（加或減）卽能求出正確的值。故 Stas 有一次求得，氯化鉀相當於銀 100 份的量爲

$$Ag : KCl = 100 : 69.1209。$$

後來知道 KCl 中含有硅石 (Silica) 百分之 0.00259。研究化學的讀者必能知道，結果必須從 69.1209 中減去 0.00179。故得

$$Ag : KCl = 100 : 69.11903。$$

自從 Lord Rayleigh (Proc. Roy. Soc., **43**. 356, 1888) 曾經證明抽盡氣體的玻球的容量小於滿裝氣體者之後，所有氣體密度的量數凡是用到眞空球者，因其縮小的關係必須加以校正。故如 Regnault 關於氫與氧的比重卽 1 : 15.9611 必須改爲 1 : 15.9105。爲了溫度計的定誤差而須改正的適當數值載明於有名的『Kew 氏證明書』等等之中。

若每組結果的均方誤差，與別組用同一儀器在同一境遇下所得結果的均方誤差，相差之數在意料之中，則不像會有定誤差存在了。一人或幾人所發表的關於同一化學元素的幾組不同的原子量測定值，用此試驗不會得到滿意的結果。故此 Ostwald 結論說，定誤差雖然爲實驗者所窺察不到，但牠們必然是存在的。

例　討論下列文句：『只是增加實驗值的個數，而不變更觀測的境遇或方法，可減少偶然誤差的影響。但在某限度以外，增多觀測值的個數是沒有用處的。反之，觀測值的個數與種類愈多，則消滅定誤差與偶然誤差二者的影響也愈完全』。

§ 166. 比例誤差 (Proportional Errors)

當數量而不能直接量測時，在科學量數中是誤差的最大來源之一。這些情形中，兩個或兩個以上的分別觀測必須舉行。每個觀測可以給與最後結果以某些小的錯誤。如 Faraday 曾從許多張金葉的重量而測定每張的厚度。Foucault 從偏向角測定時間，Le Chatelier 從偏向角測定溫度。化學反應速度的測定常有賴於幾種麻煩的分析方法。❶

就因這個緣故，許多化學家寧可不取別的而以 O=16 作爲標準，當作他們原子量體系的基礎。大多數元素的原子量直接間接都參照氧而測定。若 H=1 爲基礎，則多數元素的原子量要從氧與氫的關係之

❶ 間接的結果很易引起其他的誤差來源。所用的公式可以很不確切，使正確的量數也只用有粗糙的近似結果。例如當觀測值的正確須要更精密的程度而所用的公式只是初步的近似；如不以 π 等於 3.1416 而等於 $\frac{22}{7}$；如完全氣體的膨脹係數用之於不完全氣體。這種誤差稱之爲方法的誤差(Errors of Method)。

性質而定了,——但此關係至今尙無滿意的確定。從 1887 年後最好的測定值還有 H：O=1：15.96 與 H：O=1：15.87 之出入。若取前者則銻與鈾的原子量各爲 119.6 與 239.0; 若取後者則各爲 118.9 與 237.7, 單位上就有如此之出入。故此，最好設法使原子量不依此未定的比值 H：O 而決定,卽採用 O=16 作爲基礎。

所欲測定的數量若須從量數計算而得,則戴氏定理(Taylor's theorem)是一個便利的方法,用以批判任何設計中的實驗所處之境遇;也是一個寶貴的觀察，可以深知量數的誤差在整個結果上的影響。欲使誤差來源的重要與否能够辨別清楚,最要的,研究者對於其結果中易犯的各種誤差之來源須有淸楚的觀念；欲得最好的結果，須知何處應有最大的注意。化最小的工夫而得到必要的正確。

1. **簡單量數的比例誤差**。 設 y 爲所求之數量可從 x 計算而得者,而 x 可以直接量測且與 y 的關係爲

$$y=f(x)。$$

$f(x)$常受有誤差 dx 的影響而使 y 與其眞實值差異一個數量 dy。於是誤差將爲

$$dy=(y+dy)-y=f(x+dx)-f(x)。$$

dx 必爲很小,故從戴氏定理,

$$f(x+dx)=f(x)+f'(x)dx+\cdots\cdots,$$

或略去 dx 的高次項,得

$$dy=f'(x)\cdot dx。$$

誤差與 y 總值的關係爲

$$\frac{dy}{y}=\frac{f'(x)dx}{f(x)}。\qquad (1)$$

一個函數的微係數代表當變數發生微小的變化時此函數值所生的變化。讀者於初習微積分之日卽已知之。$\frac{dy}{y}$，這比值稱爲**比例誤差**；又稱**相對誤差**(Relative error)；又稱**分數誤差**(Fractional error)，卽全部算法中所生的誤差與所求數量之比值；而 $100\,dy:y$ 則稱爲**百分比誤差** (Percentage error)。一個量數的正確度視比例誤差的大小而決定的。

$$比例誤差=\frac{誤差之數值}{所測數量之數值}。$$

讀者常是莫明其妙，爲何很留心的實驗與很正確的計算而所得結果很是錯誤。例如，某一物質的分子量已知爲 160 或 160 的倍數。欲決定此倍數，取此物質 0.380 克(或 w 克)，加之於裴氏溫度標(Beckmann's arbitrary scale) $\theta_1°$ (或 3.50°) 的丙酮 (Acetone)14.01 克(或 w_1 克)中，於是溫度降至 $\theta_2°$ (或 3.36°)；此物質的分子量 M 如已知公式所示，

$$M=1670\frac{w}{w_1(\theta_1-\theta_2)};\quad 卽\quad M=1670\frac{0.380}{14.01\times0.14}=323,$$

近似於 2×160。今設溫度的讀數，由於熱的對流，輻射，傳導等而有 $\pm0.05°$ 的誤差。設 $\theta_1°=3.55°$ 與 $\theta_2°=3.31°$，

$$\therefore\quad M=1670\frac{0.380}{14.01\times0.24}=188。$$

這是說溫度的讀數中若有 $\pm\frac{1}{20}°$ 的誤差卽使結果十分錯誤了。此例

並無過甚其詞之處。解兩個聯立方程式而同時測定一個固體的熔解熱與比熱；和測定蒸汽的潛熱等很易有此同樣的錯誤。研究一下化算的公式卽知在計算最後結果的方法中，就使溫度讀數內相當小的誤差可以變爲嚴重的大。

例一　任何光學教本中告知我們透鏡的曲度半徑 r 如下式所示

$$r=\frac{af}{f-a}。$$

設 f 與 a 的眞實値各爲 20 與 15。設 f 與 a 很易有誤差 ± 0.5，f 可讀得 20.5，a 可讀得 14.5。於是 r 的眞實値爲 60，但其觀測値將爲 51.2。比例誤差 $=\frac{8.8}{60}$。這是說測定 f 與 a 時其誤差若爲 20 中之 0.5 卽 2.5%，則 r 將與眞實値差異 15%。

例二　用公式

$$V=8e^{5000\frac{T_1-T_0}{T_1T_0}}$$

而求溫度對於化學反應速度 V 的影響，證 T_1 在絕對溫度 300° 時測定値中有 1° 的誤差可使 V 的値有 2.4 的比例誤差。

示意：以 $T_1=300$，$T_0=273$ 代入，用表 IV。求得 $V=41.52$。今令 $T_1=301$，則求得 $V=43.79$。故 T_1 中有 1° 的差誤可使 V 的値有 6% 的出入。

我們若知一個天文家在估計地球與太陽間的距離時有 100,000 哩的絕對誤差，又知一個物理家在量測光譜線的波長時有 $\frac{1}{1,000,000,000}$ 哩的絕對誤差，此兩個量數的相對正確度，雖是一者是另一者的

$\overline{1,\ 0,000,000,000,000}$，但我們對之沒有觀念可以構成。在第一量數中，誤差約爲所測數量的 $\frac{1}{1000}$，在第二量數中則誤差幾與所測數量的大小屬於同級。故前者的誤差小得可以略去，而後者的誤差則使結果完全無用。

故此認識所用研究方法的長處與弱點是重要的事：以工作各階段的正確度分級而使產生所需的結果，可使各處都成爲充分而不過多。我已說過從事於數値計算工作『科學的見地』是很需要的。

例一　欲從直徑的量數而測定球的容積。設 y 表示體積，x 表示直徑，用量法的公式 $y=\frac{1}{6}\pi x^3$。今求直徑量數中的小誤差對於計算所得之體積的影響。假使在此量數中有誤差 dx，則

$$y+dy=\frac{1}{6}\pi(x+dx)^3=\frac{1}{6}\pi\{x^3+3x^2dx+3x(dx)^2+(dx)^3\}。$$

依假設 dx 爲一個很小的分數，故略去其高次項，而以 y 除之，得

$$\frac{y+dy}{y}=\frac{1}{6}\pi\left(\frac{x^3+3x^2dx}{\frac{1}{6}\pi x^3}\right);\quad \frac{dy}{y}=3\frac{dx}{x}$$

卽計算所得之結果中誤差將三倍於量數中者。於是在量測直徑時必須極端留心。用前述的戴氏定理，此同樣的結果更是易於求得。求原式之微分而以原式除之，卽不難求得相對誤差。

例二　批評從一氧化鉛之 Pb : O 的比値，而測定鉛的原子量的方法。設 y 表示鉛的原子量，a 表示已知的氧的原子量。從實驗求得 x 份的鉛與一份的氧化合，則所求鉛的原子量可用簡單的比例決定之，

$y:a=x:1$；卽 $y=ax$；卽 $dy=a\,dx$； $\therefore \dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{x}$。 (2)

故 x 的測定值中有1%的誤差卽使 y 的計算值有相等的誤差。故此法而決定鉛的原子量易有很好的結果。

例三 用硝酸銀使氯化鋇沉澱而測定鋇的原子量，則較之用相同的方法而測定鈉的原子量時少受實驗誤差的影響，試證明之。假定1份硝酸銀中之銀需要 x 份氯化鈉(或鋇)沉澱而成氯化銀。設 a 與 b 各爲已知的銀與氯的原子量。則若 y 表示鈉的原子價，$y+b:a=x:1$；卽 $y=ax-b$； $\therefore a=\dfrac{y+b}{x}$。求微分而以 $y=23$，$b=35.5$ 代入。

$$\frac{dy}{y}=\frac{a}{ax-b}dx=\frac{y+b}{y}\cdot\frac{dx}{x}=2.54\frac{dx}{x},$$

卽在氯化鈉的測定值中有誤差爲1%，則鈉的原子量中有誤差爲2.5%。故 b 大於 y 時很不利益。在鋇的情形中，引入的誤差不爲2.5%而爲1.5%。

例四 設從氯化鋇的溶液中沉澱出硫酸鋇來而測定鋇的原子量，a 表示已知的氯的原子量，b 表已知的 SO_4 的化合量，則當 x 份氯化鋇轉化爲一份硫酸鋇時，

$$y+2a:y+b=x:1;\quad \frac{dy}{y}=\frac{(b-2a)dx}{(1-x)(bx-2a)}。$$

例五 測定液體粘滯性的一個近似公式爲

$$\eta=\frac{\pi p t r^4}{8vl},$$

此中 v 爲液體從半徑 r 長度 l 的毛細管中時間 t 內所流過的體積，

p 爲液體柱所生的實在壓力。證明粘滯性 η 的計算值中的比例誤差四倍於量測管的半徑時所有的誤差。

例六 在正切電流計中，針的偏向角的正切比例於電流。證明因角的讀數的誤差而使電流計算值中所生的比例誤差，以偏向角 $45°$ 時爲最小。電流強度比例於偏向角 x 的正切，即

$$y=f(x)=C\tan x;\quad \therefore\ dy=\frac{C\,dx}{\cos^2 x};\quad 即\ \frac{dy}{y}=\frac{dx}{\sin x\cos x}。$$

求極小值，令

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{y}\right)=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=0;$$

$$\therefore\quad \sin^2 x=\cos^2 x\quad 即\ \sin x=\cos x。$$

此式只有在 $45°$ 隣近時成立(表 XIV)，所以在近於 $45°$ 的角其觀測誤差影響於最後結果者爲最小。換言之，用正切電流計所得最好的結果是當針偏向 $45°$ 附近時。

偏向角 $42°$ 時若有誤差 $0.25°$，則於電流的計算值有何影響？注意在上列公式中角以弧度爲單位。故

$$0.25°=\frac{\pi\times 0.25}{180}=0.00436\ 弧度$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{y}=\frac{dx}{\sin x\cos x}=\frac{2\,dx}{\sin 2x}=\frac{0.00872}{\sin 84°}=0.09;\quad 即\ 9\%,$$

因從正弦自然值表 $\sin 84°=0.9945$。

例七 證明惠氏電橋(Wheatstone Bridge)上電阻量數中的比例誤差以近於橋之中點處爲最小。設 R 爲電阻，l 爲電橋的長度，x 爲

接觸點與一端的距離。 $\therefore\ y=\dfrac{Rx}{l+x}$。進行如上題並證明當 $x=\dfrac{1}{2}l$ 時比例誤差爲極小。

例八 依照牛頓(Newton)定律，兩個物體間的引力 g 與其各個的質量 m_1, m_2 成正比例，與其距離 r 的平方成反比例。每個物體的質量假定其集中在重心。一克的重量在巴黎爲 980.868 達因。達因者力之單位。故牛頓定律 $g=\dfrac{\mu\, m_1\, m_2}{r^2}$(達因)可寫爲 $w=\dfrac{a}{r^2}$（克），此中 a 爲常數 $=\mu\times m_1\times m_2\times 980.868$。從此證明當高度小有變化時 $\dfrac{dw}{w}=-\dfrac{2dr}{r}$。Marek 嘗用萬國度量衡會的標準仟克比較可以偵察出 500,000,000 中之 1 之差。從證明當稱盤之高度相差 1 厘米時，可以偵察物質重量上之差異。

示意： 地球半徑 $=r=637,130,000$ 厘米； $w=1$ 仟克； $dr=1$ 厘米；

$$\therefore\quad -\frac{dw}{w}=\frac{2}{637130000}=\frac{1}{318565000}\text{。此比 }\frac{1}{500000000}\text{ 爲大。}$$

再證，若一仟克較其原高舉起 10 厘則減少重量 0.00003 克。

示意： 求 $-dw$； r 的值如前； $w=1000$ 克； $dx=10$ 厘米。

II. **合成量數的比例誤差**。每當一個結果的間接測定要結合幾種不同類的量數——重量，溫度，體積，電動勢，等等——則溫度計讀數中有百分比誤差百分之一所生的影響與電量計讀數中有百分比誤差百分之一所生者會大不相同。

欲使每種量數對於最後結果發生相同的影響，則有些觀測值顯然

必須較別的更要留心量測。若一個大誤差與一個小誤差相混合則總誤差內見不到小誤差的影響了。故此，Ostwald 提出,『一個變誤差若比大誤差小於十分之一,會被忽視;眞的,只要五分之一,就常會如此』。

例一　Joule 氏表示時間 t 內一個電阻爲 R 的電導體所產生的熱量 Q(卡) 與其電流強度 C(安培) 的關係爲 $Q=0.24C^2Rt$。證明欲使對於 Q 有相同的影響,則量測 R 與 t 時,其精密只能如 C 之一半。

例二　相當於 R 中 0.1% 的比例誤差,在 Q 中的比例誤差爲何?

答：　0.001；卽 0.1%

例三　相當於 C 中 0.02% 的百分比誤差，在 Q 中的百分比誤差爲何?　　答：　0.01%。

例四　若用公式 $s=\dfrac{w_1}{w-w_1}$，從一個物質在空氣中與水中的重量 $(w,\ w_1)$而測定其密度 s，則

$$\frac{ds}{s}=\frac{w_1}{w-w_1}\left(\frac{dw_1}{w_1}-\frac{dw}{dw}\right)。$$

例五　物質的比熱用混合法測定時其公式爲

$$s=\frac{m_1c(\theta_2-\theta_1)}{m(\theta-\theta_2)},$$

此中 m 爲實驗前此物質的重量；m_1 爲量熱計中水的重量；c 爲水在 θ_2 與 θ_1 間的平均比熱；θ 爲物體浸入前的溫度；θ_1 爲量熱計中水所達的最高溫度；θ_2 爲溫度均勻後此全系統的溫度。假定儀器的水當量包括在 m_1 中,則各個溫度的測定值之小誤差對於結果的影響爲何?

第一，θ_1 中的誤差。證明 $\dfrac{ds}{s}=-\dfrac{d\theta_1}{\theta_2-\theta_1}$，設有 $0.1°$ 的誤差在

讀數之中,且 $\theta_2-\theta_1=10°$, 則結果比熱中的誤差約為 1%。若最大的誤差允許為 0.01% 則温必須讀至 0.0001°。

第二, θ 中的誤差。證明 $\frac{ds}{s}=-\frac{d\theta}{\theta-\theta_2}$。當 $\theta-\theta_2=50°$ 時若的測定值中可有最大的誤差 0.1%, 則 θ 必須讀至 0.05°。設温度的讀數中有誤差 0.1°, 且 $\theta-\theta_2=50°$, 證結果比熱中的誤差將為0.2%。

第三, θ_2 中的誤差。證明 $\frac{ds}{s}=\frac{d\theta_2}{\theta_2-\theta_1}+\frac{d\theta_2}{\theta-\theta_2}$。若最大的誤差可有 0.1%, 且 $\theta_2-\theta_1=10°$, $\theta-\theta_1=50°$, 證 θ_2 必須讀至 $\frac{1}{120}°$; 但 θ_2 讀數中若有誤差 .1°, 證結果比熱中的誤差將為 1.2%。

例六　在上列實驗中,設 $m_1=100$ 克,證明欲使 s 的誤差在 0.1% 以內,重量不必讀到 0.1 克以下; 當 $m=50$ 克時,重量不必讀到 0.5 克以下。

因為實在誤差與或然誤差成比例, 總誤差 du 的最或然值或平均值可從下式得之,

$$(du)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial a_1}da_1\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial a_2}da_2\right)^2+\cdots\cdots \tag{3}$$

這是從第 162 節 (16) 來的。注意平方的項都是正數。因誤差是偶然的,正項與負項之數相同。為數很多時,這些幾乎互相抵銷。故有公式 (3)。

例一　以 u^2 除(3), 從上組例題很易證明

$$\left(\frac{dQ}{Q}\right)^2=4\left(\frac{dC}{C}\right)^2+\left(\frac{dR}{R}\right)^2+\left(\frac{dt}{t}\right)^2。$$

從此證明,相當於 C 中比例誤差 0.03; R 中比例誤差 0.02; t 中比例誤差 0.03, Q 的比例誤差爲 0.07。

例二 用凝固點方法測定物質的分子量的通常公式爲 $M=\frac{Kw}{\theta}$, 此中 K 爲常數, M 爲所求的分子量, w 爲此物質溶解於 100 克溶劑中的重量, θ 爲凝固點的降落。實在的測定值, $w=0.5139$, $\theta=0.295$, $K=19$(Perkin and Kipping's Organic Chemistry), 設 w 的測定值中誤差爲 0.01; θ 的測定值中誤差爲 0.01, 則對 M 的影響若何? 再證 θ 的測定值中若誤 0.01, 則影響 M 至 -3.39, 而 w 的測定值中誤差若爲 0.01, 則影響 M 僅至 0.94。從此證明重量不必讀至 0.01 克以下的。

從第 162 節(16), 當每個觀測值對於最後結果的影響相同時, 偏微係數都相等。設以 u 代表 n 個觀測值 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$。

$$u=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n; \quad \therefore \frac{\partial u}{\partial a_1}=\frac{\partial u}{\partial a_2}=\cdots\cdots=1。$$

但欲附着於每個觀測值的實在誤差相同, 從第 162 節(17)必須

$$da_1=da_2=\cdots\cdots=da_n=\frac{du}{\sqrt{n}}; \tag{4}$$

其比例誤差爲:

$$\frac{da_1}{u}=\frac{da_2}{u}=\cdots\cdots=\frac{da_n}{u}=\frac{du}{u}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}。 \tag{5}$$

例一 假使前組例中 Q 可有最大的比例誤差 0.5%, 則在相等影響的條件下, 每個變數 C, R, t 中可有最大的比例誤差爲何? 此時,

$$2\frac{dC}{C}=\frac{dR}{R}=\frac{dt}{t}=\frac{0.005}{\sqrt{3}}$$

答：t 與 R 中爲 0.22；C 中爲 0.11%。

例二　設體積爲 v 的已知液體在 t 秒內流過半徑 r 長度 l 的毛細管，其粘滯性 $\eta=\frac{\pi pr^4t}{8vl}$，此中 p 爲出口處超過大氣壓力的壓力。在相等影響的條件，η 的誤差爲 0.1%，則誤差 dr, dv, dl, dt, dp 各須爲何？此時，

$$\frac{dp}{p}=\frac{dt}{t}=4\frac{dr}{r}=-\frac{dv}{v}=-\frac{dl}{l}=\frac{0.001}{\sqrt{5}}=0.00045。$$

在決定 dp, dt,……以前，必須知道 p, t, v, r, l 的數值。故如 r 約爲 2 毫米，則欲使 η 中的誤差爲 0.1%，則半徑必須量至 0.00022 毫米。這是已經證明，研究一下實驗結果所參照的公式，如何可使我們決取最好而適用的境遇

例三　量測電池的電阻 X。設對於兩個外電阻 r_1 與 r_2 發生電流各爲 C_1 與 C_2，又 R_1 與 R_2 爲電路的總電阻，E 爲電池的電動勢是常數。物理教本告知我們

$$X=\frac{C_2r_2-C_1r_1}{C_1-C_2}。\tag{6}$$

比值 $C_1:C_2$ 取何值時可有最好的結果？如通常一樣，求偏微分，即從上公式(3)，

$$(dX)^2=\left(\frac{\partial X}{\partial C_1}dC_1\right)^2+\left(\frac{\partial X}{\partial C_2}\partial C_2\right)^2。\tag{7}$$

從(6)求 $\frac{\partial X}{\partial C_1}$ 與 $\frac{\partial X}{\partial C_2}$；以 R_1 代 r_1；R_2 代 r_2。從歐姆(Ohm)定

律，$E=CR$，E 爲常數，$C_1:C_2=R_2:R_1$。故得

$$\frac{\partial X}{\partial C_1}=-\frac{C_2(r_2-r_1)}{(C_1-C_2)^2}=-\frac{R_1^2R_2}{E(R_2-R_1)};$$

$$\frac{\partial X}{\partial C_2}=\frac{C_1(r_2-r_1)}{(C_1-C_2)^2}=\frac{R_1R_2^2}{E(R_2-R_1)}。\qquad(8)$$

以此代入(7)。

(i) 若用鏡電流計，設 $dC_1=dC_2=dC=$常數。

$$\therefore\quad (dX)^2=\frac{(R_1^4R_2^2+R_1^2R_2^4)(dC)^2}{E^2(R_2-R_1)^2}=\frac{R_1^4(x^2+x^4)(dC)^2}{E^2(x-1)^2}\qquad(9)$$

此其 $x=R_2:R_1$ 使誤差有極小值，依通常的方法，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4-x^2}{x^2-2x+1}\right)=0;\quad \therefore\ x^3-2x^2-1=0;$$

$$\therefore\ x=2.2(近似值)。$$

卽 $R_2=2.2R_1$；從歐姆定律，卽 $C_1=2.2C_2$。以 x 的值加入(9)得

$$dX=\frac{\sqrt{20}\,R_1^2\cdot dC_1}{E}\qquad(10)$$

這是說明外電阻 R_1 應該小至與電池組的偏極(Polarization of battery)相符合。

(ii) 若用正切電流計，$\frac{dC}{C}$ 爲常數，上述方法不能適用，故以 $C_1=ER_1$ 與 $C_2=ER_2$ 代入(8)中前節，得

$$(dX)^2=\left(\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}\right)^2\cdot\left(\frac{dC}{C}\right)^2;\quad dX=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}}\cdot\frac{dC}{C}\qquad(11)$$

從此可以證明沒有最好的比值 $R_2:R_1$。從最後一式，可以見到誤差 dX 隨 R_1 減小而減小，隨 R_2 增大而減小。故此須使 R_2 增大，使

R_1 減小而至與電流計的刻度範圍(Range)及電池組的偏極相符。

上列每種情形都易求出比例誤差。從(10)與(11)各得

$$\frac{dC_1}{C_1}=\frac{1}{\sqrt{20}}\cdot\frac{X}{R_1^3}\cdot\frac{dX}{X};\quad \frac{dC}{C}=\frac{1}{2}\cdot\frac{X}{R_1}\cdot\frac{dX}{X}$$

後者中是假定 $C_1:C_2=3:1$; 故從 (11), 居間的步驟爲

$$dX=\frac{\sqrt{2}\cdot 3R_1^2}{3R_1-R_1}\times\frac{dC}{C}。$$

§ 167. 不同正確度的觀測值(Observations of Different Degrees of Accuracy)

以上都是假定任何特殊一組中各個觀測值是同樣可靠的，卽沒有理由可說某個觀測值比別個更可取。不過,通例是用不同的方法,由不同的觀測者,甚至一個觀測者在不同時間❶ 所得的量數,不易於有同樣的誤差。有些結果會比其他的可靠些。爲使觀念確定起見，假設用同一方法求得一個燒瓶的容積之十二個測定值如下：六個量數各爲 1.6 升；四個各爲 1.4 升；二個各爲 1.2 升。數字 6, 4, 2 代表三個結果 1.6, 1.4, 1.2 的相對值,因爲量數 1.6 是比 1.2 化了三倍的工夫所求得。所以 1.6 要 1.2 可信任三倍。在這些情形中，習慣上常說這三組觀測值的實用相對值(或稱這三組觀測值的權)是 6 : 4 : 2, 卽等於 3 : 2 : 1。由此言之,一個觀測值的權(Weight) 或一組觀測值的

❶ 我記得 Dumas 在他的大著作『水的重量組成』中討論到誤差,在幾頁之後加有下列的附註:『這些工作所需要的久長時間逼着我延長到深夜，普通終要到清晨二三點鐘才能稱衡完畢。我不敢說這些重量可像在較好境遇中或由一個並不如此疲乏的觀測者所得,受到同樣的信賴，繼續用心十五至二十小時的無可避免的結果，或許就是事實上誤差的原因。』

權，代表關於同一數量此觀測值與其他觀測值的相對精確度。這所告知我們者不是觀測值的絕對精確度 h。

下文要證明，就理論言，一個觀測值的權與其或然誤差的平方成反比例；就實用言，常指定隨意的權而加之於觀測值上。例如若有一個觀測值是在很好的境遇求得，而另一則否，則將二者平等看待則不合理。自然，觀測者看重最好的觀測值，認爲牠發現的次數較多。卽若有觀測值 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$，其權各爲 $p_1, p_2, \cdots\cdots p_n$，則觀測者已假定 a_1 已重複量測 p_1 次，其結果恆爲 a_1；又 a_n 已重複量測 p_n 次，其結果恆爲 a_n。

舉一實例，Morley[1] 曾經關於氧的密度求出三組正確的測定值如下：

I. 1.42879 ± 0.000034； II. 1.42887 ± 0.000048；

III. 1.42917 ± 0.000048。

從上列的三個或然誤差所示，第一個比後二個更有價值。但因實驗方面的理由，Morley 作爲四組實驗看待，二組所得結果都是 1.42917，一組是 1.42879，一組是 1.42887。結果氧的密度的最好代表值爲 1.42900，而不是 1.42894。

以觀測值的權乘觀測值稱爲**加權觀測值**(Weighted observation)；以觀測值的權乘誤差稱爲**加權誤差**(Weighted error)。

觀測值加權之法顯易引起誤用。最易受到的影響不是由於觀測值

[1] E. Morley, "On the densities of Oxygen and Hydrogen and on the Ratio of their Atomic Weights," Smithsonian Contributions to Knowledge, No. 980, 55, 1895。

本有的性質，反是結果間彼此的不同。這才是致命的錯誤。

I. **幾個等權的觀測值的最好代表值，是其算術中數。** 設 a_1, a_2, $\cdots a_n$ 爲被觀測的數量，P 爲其最或然值，則 $P-a_1$, $P-a_2 \cdots\cdots P-a_n$ 代表此 n 個觀測值內的誤差。從最小平方法原理，當

$$(P-a_1)^2+(P-a_2)^2+\cdots\cdots+(P-a_n)^2=\text{極小值}$$

時，這些誤差爲極小。故此，依通常的方法求極小值，得

$$P=\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}, \tag{1}$$

卽關於一個未知數量的一組已知量數，其最好代表值是 n 個觀測值的算術中數，但各個量數都須在同樣可信的程度。

II. **幾個異權的觀測值，其最好代表值可求之如下，先得每個觀測值與其權之積，再以各權之和除這些積之和。** 同上列的記號，設 a_1, a_2, $\cdots\cdots a_n$, 爲 n 個觀測值，其權各爲 p_1, $p_2 \cdots\cdots p_n$。依照權的定義，a_1 可以看作 p_1 個其權爲 1 的觀測值之中數，a_2 可以看作 p_2 個其權爲 1 的觀測值之中數，等等。故實際的觀測值可以分解成一組假擬的等權觀測值。應用上之規則 I 於此組假擬的觀測值，則所有其權爲 1 的觀測值之個數將爲 $p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n$; 其中 p_1 個觀測值之和爲 $p_1 a_1$; p_2 個觀測值之和爲 $p_2 a_2$ 等等。故從(1)這組異權觀測值的最或然值爲

$$P'=\frac{p_1 a_1+p_2 a_2+\cdots\cdots+p_n p_n}{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n}. \tag{2}$$

注意這公式與求排列在直線上的一組輕重不同的質點的重心之公式，在形式上兩者是類似的。

所以，加權觀測值是假擬的結果，即作爲牠們是等權的眞實量數看待。從這習慣，(2)中 P' 的值還是算術中數，有時亦稱爲**普遍中數**(General mean)或稱**或然中數**(Probable mean)。

III. **一個觀測值的權與其或然誤差成反比例。**設 a 爲一組觀測值，其或然誤差爲 R，其權爲 1。設 $p_1, p_2, \cdots\cdots p_n$ 與 $r_1, r_2, \cdots\cdots r_n$ 各爲這組觀測值 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 的權與或然誤差。依定義，有 p_1 個其權爲 1 的觀測值爲 a_1；有 p_2 個其權爲 1 的觀測值爲 a_2；……。由第 162 節(17)，

$$r_1=\frac{R}{\sqrt{p_1}};\quad p_1=\frac{R^2}{{r_1}^2};\quad p_2=\frac{R^2}{{r_2}^2};\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad p_1:p_2:p_3:\cdots\cdots=\frac{1}{{r_1}^2}:\frac{1}{{r_2}^2}:\frac{1}{{r_3}^2}:\cdots\cdots \tag{3}$$

例一　設有 n 個觀測值其權各爲 $p_1, p_2, \cdots\cdots p_n$，試證

$$R=\pm\frac{r_1}{\sqrt{\Sigma(p)}}。\tag{4}$$

求關於 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ 的偏微係數而代入第 162 節(16)。

例二　設 n 個觀測值其權各爲 $p_1, p_2, \cdots\cdots p_n$，證其均方誤差

$$M=\pm\sqrt{\frac{\Sigma(px^2)}{(n-1)\Sigma(p)}}。$$

示意：進行如第 161 節，但以 px^2 與 pv^2 代替 x^2 與 v^2。設若一組觀測值的權之和爲 $\Sigma(p)=40$，又九個觀測值的中數與各個差異之平方，各乘其權而總加之，所得之和爲 $\Sigma(px^2)=0.3998$，試證 $M=\pm 0.035$。

例三　四組觀測值的或然誤差各爲 1.2, 0.8, 0.9, 1.1，則其相

當的權之比爲何？用公式(3)。　　答：　$7:16:11:8$。

例四　幾個學習化學者測定孔雀石 (Malachite) 中所含銅的百分量，得到下列結果：(1)39.1；(2)38.8, 38.7, 38.6；(3)39.9；39.1, 39.3；(4)37.7, 37.9。若這些分析是同樣的可信，則從公式(1)，其中數 38.8 是這種鑛石所含銅的百分量的最好代表值。但這些分析所得的價值不一。第一組是教師所求得的，此組上我們加權爲 10。第二第三組各由一個學生用電解法所求得。求 (2) 的學生較求 (3) 者更有經驗，結果我們加權 6 於前者，加權 4 於後者。第四組亦爲學生所求得，他使銅沉澱爲 CuS，烤乾作爲 CuO 而稱其重量。CuS 若氧化爲 $CuSO_4$ 則會在洗滌時失去，故銅有少於應有者的危險，我們對於此組加權爲 2。從這些假定，證明 38.91 是此鑛石中所含銅的百分量的最好代表值。爲計算便利起見，可先在各組上減去 37。從公式 (2)，

$\frac{84.0}{44}=1.91$，然後再在此普遍中數上加以 37。因爲現在急需重行測定，然如此空幻的方法還不能不採用來計算『自然界的常數』，實是不幸的事。

例五　H. A. Rowland (Proc. Amer. Acad., **15**, 75, 1879) 曾經關於熱之功當量的 Joule 測定值，作一詳盡的研究，他以爲 Joule 的幾個值加有括號內所附的權：442 (0)；427.5 (2)；426.8 (10)；428.7(2)；429.1(1)；428.0(0)；425.8(2)；428.0(3)；427.1(3)；426.0(5)；422.7(1)；426.3(1)。故此 Rowland 的結論是以 426.9 爲 Joule 工作結果的最好代表值。覆算此結果。注意 Rowland 加權

0 於 442.8，卽捨棄此數。

例六 Encke 發表 8.60816″±0.037 爲太陽的視差；而 D. Gill 所得者爲 8.802″±0.005。故此 Encke 與 Gill 的工作優點之比爲 $(0.005)^2$；$(0.037)^2=25:1369=1:54.76$。

IV. **幾個算術中數，每個附有已知的或然誤差或均方誤差，今結合之使成一個普遍中數。** 一個份子的銀相當於

NH_4Cl，49.5365±0.013 份 （依照 Pelouze）

NH_4Cl，49.523 ±0.0055 份 （依照 Marignac）

NH_4Cl，49.5973±0.0005 份 （依照 Stas, 1867 年）

NH_4Cl，49.5992±0.00039 份 （依照 Stas, 1882 年），

此中前一數表示每組實驗值的算術中數，後一數爲其或然誤差，我們如何可以求得此組觀測值的最好代表值？先得決定的，應該指定如何的權加之於每一結果。根據實驗值發表的詳點，就其內在的明證而加以個人的判斷，常是不可靠的。若僅爲自 Stas 之手而指定最大的權於末二個值，也是同樣的不平。

L. Meyer 與 K. Seubert 在論文 Die Atomgewichte der Elemente, aus der Originalzahlen neu berechnet, Leipzig, 1883 中依照他們測定時所用材料的質量，作爲權而加之於每一結果。這裏假定觀測誤差的大小與其所用材料的多寡成反比例。卽是說，用 20 克材料所作的實驗較之用 10 克者可靠兩倍。這種假定終有些無所根據。處理這精細問題的又一辦法，卽於每個算術中數上，加一個權，其值與均方誤差的平方成反比例。F. W. Clarke 在他的 Recalculation of the Atomic Weights, Smithsonian Miscellaneous Collections, 1075, 1897 一文中採用或然誤差。雖然這種加權的方法在特別情形中與 Morley 的不相合，但 Clarke 認爲此法卽非盡善，終不失爲穩妥的嚮導。設 $A,B,C,\cdots\cdots$，爲每組實驗值的算術中數；$a,b,c,\cdots\cdots$ 各爲其或然誤差（均方誤差亦可），於是從(2)，

$$\text{普遍中數}=\frac{\dfrac{A}{a^2}+\dfrac{B}{b^2}+\dfrac{C}{c^2}+\cdots\cdots}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+\cdots\cdots}; \tag{5}$$

$$\text{或然誤差}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+\cdots\cdots}}。 \tag{6}$$

例一　從上列的實驗結果，證明 Ag : NH_4Cl 的最好值爲

100 : 49.5983±0.00031。

示意：以 $A=49.5365$，$a=0.013$；$B=49.523$，$b=0.0055$；$C=49.5973$，$c=0.0005$；$D=49.5992$，$d=0.00039$ 代入方程式(5)。

例二　下列各數表示金的原子量（H＝1）是歷來發表中的最可靠者：195.605±0.0099；195.711±0.0224；195.808±0.0126；195.624±0.0224；195.896±0.0131；195.770±0.0082。從此證明此常數的最好代表值爲 196.743±0.0049。

例三　Regnault 求 0° 時水蒸氣的蒸氣壓力得下列三組測定值。

I.　4.54；4.54；4.52；4.54；4.52；4.54；4.52；4.50；4.50；4.54。

II.　4.66；4.67；4.64；4.62；4.62；4.66；4.67；4.66；4.66。

III. 4.54; 4.54; 4.54; 4.58; 4.58; 4.57; 4.58。

證明 I 組的最好代表值爲 4.526，其或然誤差爲 ±0.0105; II 組爲 4.653，其或然誤差爲±0.0105; III 組爲 4.561，其或然誤差±0.0127。故水蒸氣在 0° 時蒸氣壓力的最或然值爲 4.582，其或然誤差爲 0.0064。

當定誤差（或系統誤差）大於偶然誤差時，事實上或然率的理論就無足重要。並且，卽使各組實驗值僅受偶然誤差的影響時，或然誤差的這種用法並非可告無罪，因爲或然誤差只能表示實驗者舉行某種方法是先後一致到如何程度，而不能表示這方法如何適合於需要的目的。在結合各組測定值時，若或然誤差彼此相異很大，依照 Clarke 的準則而對各誤差加權然後計算普遍中數的或然誤差，還不是滿意的辦法。例如 Clarke（前引同書第 126 頁）從下列結果：

136.271±0.0106; 136.390±0.0141; 135.600±0.2711;

136.563±0.0946。

而求出鋇的原子量的普遍中數爲 136.315±0.0085。此中各組與普遍中數所差異之量，大於其或然誤差所能使人設想到的。結果，定誤差必是大於或然誤差。像這種情形，計算所得的或然誤差 ±0.0085 沒有眞實的意義，我們的結論，最多也只能說鋇的原子量在第五位以下卽小數第二位後不能正確的知道。[1]

正確度不同的觀測值的均方誤差與或然誤差。在一組異權的觀測值中，其權爲 1 的單獨觀測值的均方誤差與或然誤差各爲

[1] W. Ostwald 關於 Clarke 著作的批評見 Zeit. Phys. Chem., 23, 187, 1897。

$$m=\pm\sqrt{\frac{\Sigma(pv^2)}{n-1}};\quad 與\quad r=\pm 0.6745\sqrt{\frac{\Sigma(pv^2)}{n-1}};\tag{7}$$

一組異權觀測值的中數，其均方誤差與或然誤差各爲

$$M=\pm\sqrt{\frac{\Sigma(pv^2)}{(n-1)\Sigma(p)}};\quad 與$$

$$R=\pm 0.6745\sqrt{\frac{\Sigma(pv^2)}{(n-1)\Sigma(p)}}。\tag{8}$$

例　一個角在各種不同的境遇中量測十四次。所有的觀測值關於「度」「分」都同爲 $4°$，$15'$，不過，「秒」則相異，其值列下（後附括號內之數即爲權）：$45''.00(5)$；$31''.25(4)$；$42''.50(5)$；$45''.00(3)$；$37''.50(3)$；$38''.33(3)$；$27''.50(3)$；$43''.33(3)$；$40''.63(4)$；$36''.25(2)$；$42''.50(3)$；$39''.17(3)$；$45''.00(2)$；$40''.83(3)$。試證其權爲 1 的單獨觀測值的均方誤差爲 $s\pm 9''.475$；又中數 $39''.78$ 的均方誤差爲 $1''.397$。

示意：$\Sigma(p)=46$，$\Sigma(pv^2)=1167.03$；$n=14$，等等。

其權爲 p 的單獨觀測值的均方誤差與或然誤差各爲

$$m=\pm\sqrt{\frac{\Sigma(pv^2)}{(n-1)p}};\quad 與\quad r=\pm 0.6745\sqrt{\frac{\Sigma(pv^2)}{(n-1)p}}。\tag{9}$$

例　就上例證明權爲 (2) 的單獨觀測值的均方誤差爲 $\pm 6''.70$；權爲(3)者，$\pm 5''.47$；權爲(4)者，$\pm 4''.74$；權爲 (5) 者，$\pm 4''.24$。

VI.　**最小平方原理，關於精確度不同的觀測值**，所陳述的，是『被觀測數量的最或然值爲使誤差平方加權後之和最小者』。即

$$p_1v_1^2+p_2v_2^2+p_3v_3^2+\cdots\cdots+p_nv_n^2=\text{極小值}。$$

誤差 v 是每個觀測值與 n 個觀測值的中數之差異；誤差平方加權，即

誤差 v 的平方與權 p 之積。

§ 168. 限於條件的觀測值 (Observations Limited by Conditions)

總加分析的結果，則所有成份的重量之和應該等於原有物質的重量；平面三角形三個角之和必須恰等於 180°；球面三角形三個角之和恆等於 180°+(球面過剩)；一種結晶各面上法線所成之角在同一平面中其和須為 360°。量數有這種性質的限制者稱為條件觀測值(Conditioned observations)。所要滿足的條件,其個數顯然少於未知數量的個數,卽觀測值的個數，否則未知數量可以直接從條件中求出，而不必有求於量測了。

在實際上，量測所得並不會達到所需要的標準，一種物質的成份的百分數加起來不會恰等於 100；三角形的三角之和量起來不是大於 180° 就會小於 180°。只有在完全正確的理想之境,條件才得滿足。有時從幾個不完全的條件觀測值有求其最好代表值的需要。所用方法在下例中說明之。

例一 一種化合物,分析所得結果如下：炭 37.2%，氫 44.1%，氮 19.4%。設每個測定值同樣的可靠,每種成份百分數的最好代表值為何？設 C, H, N 各表所求的炭，氫，氮的百分數，則 $C+H=100-N=100.0-19.4=80.6$。∴ $2C+H=117.8$；$C+2H=124.7$。解此後二個聯立方程式。答：$C=36.97\%$；$H=43.86\%$；$N=19.17\%$。注意此結果全不依靠關於物質構造的任何假設。學習化學者會得知道更好的辦法來校正分析的結果。就從本例我們便能聯想到原子的假設

如何可以使外觀混亂的東西變成秩然有序。有些分析化學者先將百分數的結果加以乘除使的總和爲 100 然後發表。還有些留出一種成份不加決定而用減去來計算之。這些方法都是失去工作的確切性，最不可取。

例二　量測三角形的三角得 $A=51°$；$B=94°20'$；$C=34°56'$。證明此三角的最或然值是 $A=51°56'$；$B=94°15'$；$C=34°49'$。

例三　立方體結晶各面上法線之角爲 $\alpha=91°13'$；$\beta=89°47'$；$\gamma=91°15'$；$\delta=89°42'$。此四角的最好代表值是什麼?

答：$\alpha=90°43'45''$；$\beta=89°17'45''$；$\gamma=90°0'45''$。$\delta=89°57'45''$。

例四　三角形三角的觀測方程式各爲 $A=36°25'47''$；$B=90°36'28''$；$C=52°57'57''$；而條件方程式爲 $A+B+C-180°=0$。設 x_1, x_2, x_3 各爲 A, B, C 中所附有的誤差，則可得

$$x_1+x_2+x_3=-12''。\tag{1}$$

I. **若觀測值是同樣可靠，卽如** $x_1=x_2=x_3=k$。代入（1）得 $3k+12''=0$，卽 $k=-4''$；

$$\therefore\quad A=36°25'43''；\ B=90°36'24''；\ C=53°57'53''。$$

每個觀測值的均方誤差的公式爲

$$\pm\sqrt{\frac{\Sigma(v^2)}{n-w+q}},$$

此中 w 爲 n 個觀測方程式中所含未知數量的個數；q 爲所須滿足的條件方程式的個數。結果 w 個未知數量化爲 $w-q$ 個獨立的數量。$\Sigma(v^2)$爲 A, B, C 的觀測值與計算值之差異的平方之和。故均方誤差

$=\pm\sqrt{48}=\pm 6''.93$。

II. **若觀測值的權不等**;設其 A, B, C 的權各為 $p_1=4$; $p_2=2$; $p_3=3$。習慣上終是假定每個觀測值中所附誤差之大小與其權成反比例(或許讀者能自己證明這個原理)。所以我們不寫 $x_1=x_2=x_3=k$,而寫 $x_1=\frac{1}{4}k$; $x_2=\frac{1}{2}k$; $x_3=\frac{1}{3}k$。從(1)得 $13k+144=0$; $k=-11.07$;

$\therefore\ x_1=-2''.77$; $x_2=-5''.54$; $x_3=-3''.69$。

$$\text{均方誤差}=m=\pm\sqrt{\frac{\Sigma(pv^2)}{n-w+q}}$$

即 $m=\pm 11''.52$。A, B, C 中所附有均方誤差各為 m_1, m_2, m_3,

$$m_1=\pm\frac{m}{\sqrt{p_1}};\quad m_2=\pm\frac{m}{\sqrt{p_2}};\quad m_3=\pm\frac{m}{\sqrt{p_3}}。$$

故此 $A=36°25'44''.23\pm 5''.76$; $B=90°36'22''.46\pm 8''.15$;

$C=52°57'53''.31\pm 6''.65$。

自然,只有當量數必須用作以後的計算的基礎時實驗所得的資料方可這樣化法。無論何如,實際量測值必須與經過校製的結果同時寫出。

169. Gauss 氏一次觀測方程式的解法(Gauss' Method of Solving a Set of Linear Observation Equations)

繼續第 108 節,設 x, y, z 代表未知數量,其值待求,又設 $a_1, a_2, \cdots\cdots, b_1, b_2, \cdots\cdots, c_1, c_2, \cdots\cdots, R_1, R_2\cdots\cdots$ 為實際數字,其值已從觀測決定,列成下列觀測方程式(Observation equations):

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=R_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=R_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=R_3\\ a_4x+b_4y+c_4z=R_4 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

若僅有三個方程式爲已知，則用代數的方法很易求出 x, y, z 的相當值，但是現在這些 x, y, z 的必須適合第四方程式。這裏的問題是求 x, y, z 的最可能的値，使之適合此四個已知的觀測方程式。我們僅取四個含有 x, y, z 的方程式者，因其簡單而便於討論。其實，方程式與未知數量，任何幾個都可以。不過未知數量含有三個以上者比較的少見。我們假定觀測方程式的正確度相等。否則須以權的平方根乘各個方程式，如下列例三所示。這樣轉化各個方程式爲相等正確度。

I. **轉化觀測方程式爲一組範式，使可用普通的代數方法解之。**以 a_1 乘第一方程式，a_2 乘第二，a_3 乘第三，a_4 乘第四。所得四個結果，總加之。再以同樣方法用 b_1, b_2, b_3, b_4 處理之；再以同樣方法用 c_1, c_2, c_3, c_4 處理之。爲簡明計，今寫

$$[aa]_1=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2;$$

$$[bb]_1=b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2;$$

$$[ab]_1=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4;$$

$$[ac]_1=a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3+a_4c_4;$$

$$[aR]_1=a_1R_1+a_2R_2+a_3R_3+a_4R_4;$$

$$[bR]_1=b_1R_1+b_2R_2+b_3R_3+b_4R_4;$$

其餘如 $[cc]_1$；$[bc]_1$；$[cR]_1$ 可以類推。結果所得三個範式爲

$$\left.\begin{aligned}[aa]_1x+[ab]_1y+[ac]_1z&=[aR]_1;\\ [ab]_1x+[bb]_1y+[bc]_1z&=[bR]_1;\\ [ac]_1x+[bc]_1y+[cc]_1z&=[cR]_1。\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

此三個方程式稱爲第一組**範式**(Normal equations)。

II. **解範式**。從這組聯立方程式(2)而決定 x, y, z 的值,可用任何方法,如行列式(第 179 節);比較法;加減法;代入法。❶ 今用最後一法。解第一範式求 x,得

$$x=-\frac{[ab]_1}{[aa]_1}y-\frac{[ac]_1}{[aa]_1}z+\frac{[aR]_1}{[aa]_1}。\qquad(3)$$

以此式代入其他兩個範式中,則使 x 從此兩個範式中消去,得第二組範式爲,

$$\left([bb]_1-\frac{[ab]_1}{[aa]_1}[ab]_1\right)y+\left([bc]_1-\frac{[ac]_1}{[aa]_1}[ab]_1\right)z$$
$$=\left([bR]_1-\frac{[ab]_1}{[aa]_1}[aR]_1\right);$$
$$\left([bc]_1-\frac{[ac]_1}{[aa]_1}[ab]_1\right)y+\left([cc]_1-\frac{[ac]_1}{[aa]_1}[ac]_1\right)z$$
$$=\left([cR]_1-\frac{[ac]_1}{[aa]_1}[aR]_1\right)。$$

爲簡明起見,我們寫

$$[bb]_2=[bb]_1-\frac{[ab]_1}{[aa]_1}[ab]_1;\quad [cc]_2=[cc]_1-\frac{[ac]_1}{[aa]_1}[ac]_1;$$
$$[bc]_2=[bc]_1-\frac{[ac]_1}{[aa]_1}[ab]_1;$$

❶ 若範式中有兩個不是獨立方程式,則無法求得確定的解答。

$$[bR]_2=[bR]_1-\frac{[ab]_1}{[aa]_1}[aR]_1;\quad [cR]_2=[cR]_1-\frac{[ac]_1}{[aa]_1}[aR]_1。$$

故僅含 y, z 的兩個範式可寫為

$$\left.\begin{aligned}[bb]_2y+[bc]_2z=[bR]_2;\\ [bc]_2y+[cc]_2z=[cR]_2;\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

解此中第一式求 y，得

$$y=-\frac{[bc]_2}{[bb]_2}z+\frac{[bR]_2}{[bb]_2}。\tag{5}$$

代入(4)中第二式得第三組範式為

$$\left([cc]_2-\frac{[bc]_2}{[bb]_2}[bc]_2\right)z=\left([cR]_2-\frac{[bc]_2}{[bb]_2}[bR]_2\right),$$

此式又可簡寫為

$$[cc]_3z=[cR]_3。$$

故
$$z=\frac{[cR]_3}{[cc]_3}。\tag{6}$$

$[bb]_2,[bc]_2,\cdots\cdots,[cc]_3,\cdots\cdots$等稱為輔式(Auxiliary)。方程式(3),(5),(7)連合組成一組消去方程式(Elimination equations)：

$$\left.\begin{aligned}x=-\frac{[ab]_1}{[aa]_1}y-\frac{[ac]_1}{[aa]_1}z+\frac{[aR]_1}{[aa]_1};\\ y=-\frac{[bc]_2}{[bb]_2}z+\frac{[bR]_2}{[bb]_2};\\ z=\frac{[cR]_3}{[cc]_3}。\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

從最後一式直接可求 z 的值；z 為已知後，從第二式可求 y；z 與 y 均為已知後，從第一式可求 x。

注意三組範式中係數的對稱性。任一組範式中其第一橫行的係數與第一直行者完全相同，第二橫行的係數與第二直行者完全相同，…。故此每組中只須計算第一式的係數其餘卽能寫出。輔式的構成與求解並非難，而是繁。曾有人設計幾種表格可以節省計算工夫，亦可試驗結果的正確與否。我們不預備在此細講。

IV. **x, y, z 的權。**不欲提起任何理論上的討論，x, y, z 的權各爲下式所示：❶

$$p_z=[cc]_3;\quad p_y=p_z\frac{[bb]_2}{[cc]_2};\quad p_x=p_z\frac{[cc]_1[bb]_2}{[cc]_1[bb]_1-[bc]_1[bc]_1}。\tag{8}$$

III. **x, y, z 的值上所附有均方誤差。**設

$$a_1x+b_1y+c_1z-R_1=v_1;$$

$$a_2x+b_2y+c_2z-R_2=v_2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots。$$

設其權爲 1 的任何觀測的數量，其均方差爲 M，則

$$\left.\begin{aligned}&\text{等權時：}\quad M=\pm\sqrt{\frac{\Sigma(v^2)}{n-w}};\\&\text{異權時：}\quad M=\pm\sqrt{\frac{\Sigma(pv^2)}{n-w}}。\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

此中 n 爲觀測方程式的個數，w 爲 x, y, z……等數量的個數。在這裏，$w=3$，$n=4$。設 M_x, M_y, M_z 各表 x, y, z 所附有的各均方誤差。

$$\therefore\quad M_x=\pm\frac{M}{\sqrt{p_x}};\quad M_y=\pm\frac{M}{\sqrt{p_y}};\quad M_z=\pm\frac{M}{\sqrt{p_z}}。\tag{10}$$

例一　s, t 的相當值測定如下：

---

❶ 讀者欲知其詳，可參閱唐藝青著實用最小二乘式，第 176 頁，商務出版。——譯者註

$$s=3.5,\quad 5.7,\quad 8.2,\quad 10.3,\cdots\cdots;$$

$$t=\quad 0,\quad 88,\quad 182,\quad 274,\cdots\cdots。$$

從此求公式

$$s=p+qt \tag{11}$$

中常數 p, q 之值。現在所欲求者是 (11) 中 p, q 的最好數值。本例中的 p 卽爲(1)中的 x; q 卽爲(1)中的 y。從前述的理論，顯然

$$[aa]_1x+[ab]_1y=[aR]_1;$$

$$[ab]_1x+[bb]_1y=[bR]_1。$$

$$\therefore\quad x=-\frac{[ab]_1}{[aa]_1}y+\frac{[aR]_1}{[aa]_1};\qquad \therefore\ y=\frac{[bR]_2}{[bb]_2}。$$

又，$[aa_1]=4$;　$[bb]_1=115944$;　$[ab]_1=544$;　$[aR]_1=27.7$; $[bR]_1=4816.2$; $[bb]_2=4853.67$;　$[bR]_2=115951.4$。$x=3.52475$; $y=0.02500$; 在(11)中卽 $p=3.52475$; $q=0.02500$，故

$$s=3.525+0.025t。$$

p	q		計算值與觀測值之差	計算值與觀測值之差的平方
	計算值	觀測值		
0	3.525	3.5	+0.025	0.000625
88	5.725	5.7	+0.025	0.000625
182	8.075	8.2	-0.125	0.015625
274	10.375	10.3	+0.075	0.005625
				0.0225

$$\therefore\quad M=\pm 0.106。$$

$$q\text{ 的權 }=[bb]_2=41960;\quad M_q=\pm\frac{0.106}{\sqrt{41960}}=\pm 0.0004。$$

$$p \text{ 的權} = \frac{[aa]_1}{[bb]_1} = 1.5; \quad M_p = \pm\frac{0.106}{\sqrt{1.5}} = \pm 0.087;$$

例二 下列方程式是 C. F. Gauss 在他著作 Theoria motus Corporum Coelestium (Hamberg, 1809; Gauss' Werke, **7**, 240, 1871)中提出,作爲上述方法之說明:

$$\left.\begin{aligned} x-y+2z&=3\\ 3x+2y-5z&=5\\ 4x+y+4z&=21\\ -x+3y+3z&=14 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

從此試證 $x=+2.470$; $y=+3.551$; $z=+1.916$; $\Sigma(v^2)=0.0804$; $M=\pm284$; $p_x=246$; $p_y=136$; $p_z=539$; $M_x=\pm0.057$; $M_y=\pm0.077$; $M_z=\pm0.039$。

示意: 第一組範式爲, $27x+6y=88$; $6x+15y+z=70$; $y+54z=107$。

例三 下列方程式也是 Gauss 在同書中提出:

$$\left.\begin{aligned} x-y+2z&=3, \text{ 其權爲 } 1;\\ 3x+2y-5z&=5, \text{ 其權爲 } 1;\\ 4x+y+4z&=21, \text{ 其權爲 } 1;\\ -2x+6y+6z&=28, \text{ 其權爲 } \tfrac{1}{4}。 \end{aligned}\right\}$$

依規則,以 $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ 乘最後一個方程式,所得者與 (12) 完全相同的一組。試證 $x=+2.47$, 其權爲 24.6; $y=+3.55$, 其權爲 13.6;

$z=+1.9$，其權爲 53.9。再以這些數值代入 III 中公式卽能求出 v_1，v_2，v_3，v_4，於是證 $M=\pm 295$。再進而求 M_x，M_y，M_z。

例四 在緯度 L 處秒擺的長度 l 可用 A. C. Clairaut 方程式表之，$l=L_0+A\sin^2 L$，此中 L_0 與 A 爲常數，可從下列觀測值求得之：

$$L=0°0' \quad, 18°27' \quad, 48°24' \quad, 58°15' \quad, 67°4' \quad;$$

$$l=0.990564,\ 0.991150,\ 0.993867,\ 0.994589,\ 0.995325。$$

從此試證 $l=0.990555+0.005679\sin^2 L$。

示意： 範式爲 $x+0.44765y=0.993099$；

$$x+0.70306y=0.994548。$$

例五 Hinds 與 Callum(Journ. Amer. Chem. Soc., **24**, 848, 1902)用所傳光的強度在光度計上的讀數 x 表示鉄溶液強度的讀數百分數 y，其公式爲 $y(x+b)=a$。讀數如下：

$$x=3.8\ ,4.3\ ,4.7\ ,5.3\ ,6.0\ ,6.7\ ,7.4\ ,8.1\ ,8.7\ ,9.7\ ;$$

$$y\times 10^2=8.64,7.57,6.92,6.06,5.28,4.70,4.22,3.79,3.52,3.13。$$

著者說明 $a=0.2955$；$b=0.375$。y 測定値的或然誤差爲 0.000034，卽一千萬分之三。試覆算之。

示意： 用公式(9)。

以上所述是根據於最小平方的原理。Meyer 曾有一個比簡捷的算法，雖無上述確切，但在一般的實用上巳够正確。我們用方程式(12)說明 Mayer 氏方法。

先使各方程式中 x 的係數都爲正數，卽以 -1 乘第四方程式，而

總加之；再使各方程式中 y 的係數都爲正數，卽以 -1 乘第一方程式，而總加之；再使各方程式中 z 的係數都爲正數，卽以 -1 乘第二方程式，而總加之。所得結果爲

$$9x-y-2z=15;\ 5x+7y=37;\ x+y+14z=33;$$

用代數的方法解此聯立方程式，得 $x=2.485$；$y=3.511$；$z=1.929$。試以這些值與例二所得的最好代表值比較之。

影響於兩個或多個不獨立觀測值的誤差。在計算原子量與其他常數時，所有誤差有積聚於最後決定的常數之趨勢。氟的原子量是從比值 $CaF_2:CaSO_4$ 求得的。在計算非但含有量測此比值時的實驗誤差，並且還有鈣與硫的原子量的測定值之誤差在內。J. D. van der Plaats(Compt. Rend., **116**, 1362, 1893)曾經指出，用着充分的實驗資料可使比值中所含的三個原子量上的誤差平均分配，而不積聚在單獨一個之上。F. W. Clarke (Amer. Chem. Journ., **27**, 32, 1902,) 說明從下列三十個列成一次方程式的比值計算出七個原子量，卽銀、氯、溴、碘、氮、鈉、鉀——$O=16$；$H=1.0079$ 爲已知——的方法，

$$Ag:Br=100:74.080;\quad \therefore\ 100Br=74.080Ag;$$

$$KClO_3:O_3=100:39.154;\quad \therefore\ 39.154K+39.154Cl=2920.608;$$

…………………………………………………………

從這三十個一次方程式用前述的方法化出七個範式。解此而得七個元素的原子量，依最小平方法，其中觀測誤差是平均分配的。

所觀測的兩個數量皆有觀測誤差，而欲求此等數量間的最或然關係時，我們可如下列方法進行。設所觀測的數量爲

$$y=0.5,\quad 0.8,\quad 1.0,\quad 1.2;$$

$$x=0.4,\quad 0.6,\quad 0.8,\quad 0.9。$$

而在方程式

$$y=ax+b$$

中求 a 與 b 的最好代表值。

我們可用第 114 節的圖解法;亦可在四個觀測方程式中任取二個而求 a, b。如取第一第三兩個,即

$$0.5=0.4a+b;\ 1.0=0.8a+b;\quad \therefore\ a=1.25,\ b=0。$$

設欲使 a, b 的值適合於此問題的條件時,其必要的校正值爲 α 與 β。於是所求的方程式即爲

$$y=(1.25+\alpha)x+\beta。$$

以 x, y 的觀測值代入而得四個觀測方程式:

$$0.5=(1.25+\alpha)0.4+\beta;$$

$$1.0=(1.25+\alpha)0.8+\beta;$$

$$0.8=(1.25+\alpha)0.6+\beta;$$

$$1.2=(1.25+\alpha)0.9+\beta。$$

從此可求得下列兩個範式:

$$0.1250=2.7\alpha+4.0\beta;\quad 0.0975=1.97\alpha+2.7\beta。$$

$$\therefore\quad \alpha=+0.089;\quad \beta=-0.029。$$

最後得

$$a=1.25+0.089=+1.339;\quad b=0.000-0.029=-0.029。$$

前列觀測值的最好代表方程式爲

$$y=1.339x-0.029。$$

參閱 A. F. Ravenshear, Nature, **63**, 489, 1901。上法見於 M. Merriman 著 A Textbook of the Method of Least Squares, New York, 127, 1891; W. H. Keesom 在 Communications from the Physical Laboratory at the University of Leiden, Suppl. No. 4, 1902, 中曾經舉出一個更普遍的方法。

§ 170. 可疑的觀測值當在何時捨棄(When to Reject Suspected Observations)

有些錯誤,如氣體燃化計(Endiometer)與滴定管(Burette)上的錯誤讀數,如求重量的總和時的錯誤,如算術工作中所犯的錯誤,只要從校驗的觀測或校驗的計算中一經發覺,無疑的必須捨棄含有這些錯誤的觀測值。有時,有些結果與其他的差異非尋常可比,簡直出於意料之外,但最詳盡的搜索又找不出牠的原由。在一組觀測值中如何處理失常的誤差,久已成爲一個困難的問題,因爲當錯誤是十分顯著時,這些誤差只能依良知的判斷去剔除。然而聽任沒有經驗或有偏見的工作者,單因牠們與大體不合而捨棄這些觀測值,實爲一件危險的事。S. W. Holman 在他著的 Discussion on the Precision of Measurements, New York, 1901, 中說過『若觀測者欲於其結果上加權,則最要緊的必須他的正直的品性沒有疑問,在科學或工學上,這種品性初次所遇到的試探即是關於可疑的或不符的觀測值之捨棄。想得合符結果的先入之見或無意之志,要儘量避免,倒是次要的事』。

有人曾經提出過幾種準則可使研究者遇到可疑的觀測值時,對於

是否加入以計算中數的問題，有所適從。C. Chauvenet, Hagen, Stone, Pierce等人都有這種準則求出。但是所有的，無一可說完全滿意。Chauvenet 氏準則或許是最簡明易懂而應用時又最便利。這是預備從或然率的理論證明可靠的觀測值與其算術中數的差異不會超過某一限度。

我們從第 161 節(2)與(6)知道

$$r=\frac{0.4769}{h}=0.6745\sqrt{\frac{\Sigma(v^2)}{n-1}}。$$

設 $x=rt$，此中 t 代表在一組很多的觀測值中其誤差可有希望為小於 r 者的個數（以觀測值的總個數為 1），r 為單獨觀測值的或然誤差，若量數而大於 x 時則棄捨之。設觀測值共有 n 個，卽誤差共有 n 個，則以 nP 表示誤差小於 rt 者的個數，其大於 rt 者將為 $n(1-P)$，設此數而小於 $\frac{1}{2}$，則誤差之不為大於 rt 的或然率較大，故可捨棄之。

於是可疑的觀測值之取捨準則為

$$\frac{x}{r}=t;\quad \frac{1}{2}=n(1-P);\quad \therefore\quad P=\frac{2n-1}{2n}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t}\,dt。\qquad (1)$$

連續應用這些公式，卽可試驗兩個或多個可疑的觀測值。t 的值，卽 P 的值，卽 n 的值可從附錄 II 表 XI 中查得。表 XII 所載為相當於 n 各值的 $\frac{x}{r}$ 的值。

例一　同一觀測者測得氧的原子量之十三個值如下表所列。19.81 應否捨棄？

觀測值	x	x^2	觀測值	x	x^2
15.96	−0.26	0.0676	15.88	−0.34	0.1156
19.81	+3.59	12.8881	15.86	−0.36	0.1296
15.95	−0.27	0.0729	16.01	−0.21	0.0441
15.95	−0.27	0.0729	15.96	−0.26	0.0676
15.91	−0.31	0.0961	15.88	−0.34	0.1156
15.88	−0.34	0.1156	15.93	−0.29	0.0841
15.91	−0.31	0.0961			
十三個測定值的中數 $=16.22$; $\Sigma(x^2)=13.9659$。					

此可疑的觀測值與中數的差異爲 3.59。依照 Chauvenet 的準則，因或然誤差 $r=0.7281$，$n=13$，從附錄 II 表 XII，$\frac{x}{r}=3.07$，$\therefore$ $x=3.07\times0.7281=2.27$。因觀測值 19.81 與中數的差異超出。準則所許可的限度 2.27，故須捨棄。

例二 16.01 應否從這組觀測值中捨棄？

示意： 除去 19.81 後所剩十二個觀測值，如上例同法決定之。

例三 第 162 節公式(6)後例二 F. Rudberg 的結果中有兩個觀測值 0.3902 與 0.3840 是否可以保留？

例四 第 163 節例四 W. Crookes 的資料中 203.666 一值是否有何錯誤？

例五 第 167 節(III)例五中 H. A. Rowland 曾經捨棄 442.8 一值，他是否完全根據本節所述的準則？

例六 有些人以爲第 162 節公式(6)後例四 Cavendish 資料中 4.88 是有錯誤，若依本節準則是否要將此值捨棄？

這些例題不過作爲此準則應用的方法之說。沒有別的意義。忽視研究者的智識而欲稱意立出一個準則用之於一切情形，必不能如願以償。除了研究者自己不偏的判斷與豐富的常識以外能否有更好的嚮導，這是很成問題的。我們所要牢記的理論只是『常識精鍊而爲算術』。[1]

任何觀測值爲了不合試驗而捨棄必須記錄出來。事實上，少數失常結果的出現適足以加強從經驗公式 $y=ke^{-h^2x^2}$ 所發展出來的誤差理論。若有充分的量數，差異所產生的機會無疑是正負相同的。[2] C. L. Gerling 在他的 Die Ausgleichungs-Rechnungen der Praktischen Geometrie, Hamberg, 68, 1843, 中說：『觀測者所懷疑的每個觀測值，在我看來卻是其眞實性的一個證據。他沒有權力可以使之變形而與大多數相一致，然亦沒有更多的權力，藉口因爲牠要損及同類而將這證物掩沒。』誤差的全部理論建築在一個假設之上，卽觀測值的個數求得充分的多時可以定出量數所易犯的誤差。此條件而不能滿足，則失常的量數若任其存在必使中數受到不是份所應得的影響。於是，結果要比捨棄失常的量數時更少正確。**只因觀測值的個數範圍甚小，故本節所述的準則可以採用。**這是眞的，或許有些好的觀測值會得失去，不過牠的代價已可取償於重大錯誤之剔除。

這裏或者無須指明，一個可疑的觀測值最後或許可被證爲眞正的例外而需要進一步的研究者。忽視了這些結果便會斷絕了新的眞理之路。不久以前，從氨而得的氮的密度 Lord Rayleigh 所曾視爲困難者

[1] "Common sense reduced to arithmetic".

[2] F. Y. Edgeworth 的很有趣味的論文 "On Discordant Observation" 見於 Phil. Mag. [5], 23, 364, 1887。

現在已成歷史。由氨而得的氮較之由空氣而得的氮已知其要輕 $\frac{1}{1000}$。不以此微小的誤差作爲可疑而置之不顧，Lord Rayleigh 堅持着重視這個差異，故得引起 W. Ramsay 與 M. W. Travers 關於『氬及其化合物』的光芒煥發的著作。

第十章　變分法(The Calculus of Variations)

『自然以最最容易與最最靈巧的方法而工作着』。[1] —— P. de Fermat.

§ 171. 微分與變分 (Differentials and Variations)

幾乎二百年以前 Maupertius 想證明**最小作用原理**(The Principle of Least Action) 是最能表現造物主之智慧的一個原理，從此之後許許多多自然變化的事所表現的極大或極小的性質引起自然哲學家的注意。例如在研究化學與物理現象中可使用的能(Energy)時，化學家欲探索得使熵爲極大或使**自由能**(Free energy)極小，同時若用唯能說的方法來處理這些問題，要用到 Hamilton 氏原理:

『一個物體系於時間 t_1 在 A 處;於時間 t_2 在 B 處，牠從 A 至 B 所走的路程是選取於時間 t_2-t_1 內此系的動能與位能之差的中數爲極小者』。

這種性質的問題常須要一個比微分法更有力的算學工具。就是用**變分法**。

設要畫一個定長的曲線從 O 至 A (圖一百七十三) 使 OB, OA 與曲線所圍的面積可極大。這問題牽涉曲線自身的性質。換言之，我們

---

[1] "Nature works by the easiest and readiest means."—— 1662 年 P. de Fermat 給 M. de la Chambre 函中語。

需求曲線的方程式。這與以前所見的問題極不相同，以前的問題是：欲使一個已知的函數達到極大值或極小值須使其中變數選定如何的特殊值。

無論曲線的方程式是怎樣，我們知道曲線下的面積必以積分$\int y\,dx$；或$\int f(x)dx$ 表之。現在當前的問題卽是求出 $f(x)$ 爲如何形式時可使此積分爲極大。很易見得，若函數 $y=f(x)$ 的形式是變動的，y 的值可由二下列兩種方法而發生微量的變化：

(i)　變動自變數 x 的值；

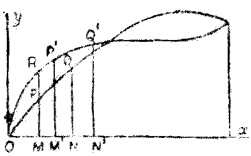
(ii)　變動函數的形式，例如從 $f(x)$ 變爲 $\phi(x)$；更顯明的說從 $y=\sin x$ 變爲 $y=\tan x$。

第一種變化量可用普通的微分 dy 表示之；但第二種變化量則稱爲變分(Variation)，用 Lagrange 氏記法，可以 δy 表之。故微分

$$dy=f(x+dx)-f(x)；$$

而變分則

$$\delta y=\phi(x)-f(x)。\tag{1}$$



圖一百七十三

注意記號 δ 只能用於由函數形式的變化而產生的那些量數。在圖一百七十三中變化量 $dy=NQ-MP$；而變化量 $\delta y=MR-MP$。從定義可以證得微分記號與變分記號可以互相交換的，卽

$$d\,\delta y=\delta\,dy。\tag{2}$$

這是因為

$$
\begin{aligned}
d\delta\, y &= d[\phi(x)-f(x)] \\
&= [\phi(x+dx)-f(x+dx)]-[\phi(x)-f(x)] \\
&= [\phi(x+dx)-\phi(x)]-[f(x+dx)-f(x)] \\
&= \delta\, dy。
\end{aligned}
$$

§ **172. 函數的變分**(The Variation of a Function)

求一個函數的變分。設 y 為已知函數。可用 $y+\delta y$ 代 y 然後從此新函數減去原有的函數即得。這裏我們立刻會覺察在運算方面很有與求微分類似之處。如設

$$u=y^n,$$

則 u 的變分為

$$\delta u=(y+\delta y)^n-y^n=\frac{du}{dy}\delta y, \tag{3}$$

這是依據戴氏定理 而在展開式中略去 δy 的高次項。我們若取 Newton 氏記法，寫 $\frac{dy}{dx}$ 為 $\dot{y}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=\ddot{y}$;……設

$$u=f(y,\dot{y});$$

當 y 變化為 $y+\delta y$，則 $\dot{y}$ 變化為 $\dot{y}+\delta\dot{y}$。用廣義的戴氏定理而略去微小數量的高次項，即得

$$\delta u=\frac{du}{dy}\delta y+\frac{du}{d\dot{y}}\delta\dot{y};$$

即

$$\delta u=\frac{du}{dy}\delta y+\frac{du}{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)。 \tag{4}$$

記得在第 8 節中我們亦曾用 δ 記號，不過那時表示者爲自變數的值中之微小有限變化量，與這裏用 δ 表示函數形式中的微小變化，很不相同，切勿互混。

用十分相同的方法可求 $\delta\dot{y}$，$\delta\ddot{y}$，$\delta\dddot{y}$。

$$\delta\dot{y}=\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d(y+\delta y)}{dx}-\frac{dy}{dx}=\frac{d\delta y}{dx};$$

$$\delta\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2\delta y}{dx^2};\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{5}$$

§ 173. 定限積分的變分 (The Variation of an Integral with Fixed Limits)

設欲求積分

$$U=\int_{x_0}^{x_1} V\,dx \tag{6}$$

的變分，其中 $V=f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots\cdots\right)$；

即 $$V=f(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, \cdots\cdots)。 \tag{7}$$

U 的值可因下列兩種辦法而變更：

(i) 上下限 x_1 與 x_0 有變化時，

(ii) 函數的形式有變化時。

在前文早已見到，只要積分的上下限一定，自變數 x 的任何變化不會影響到 U 的值。今假定此上下限一定。則欲使 U 的值變化，只有變化 $V=f(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, \cdots\cdots)$ 的形式。但 V 的變分爲 δV，從上述規則

$$\delta V=\frac{dV}{dy}\delta y+\frac{dV}{d\dot{y}}\delta\dot{y}+\frac{dV}{d\ddot{y}}\delta\ddot{y}+\cdots\cdots \tag{8}$$

爲簡便計,令

$$P=\frac{dV}{dy};\quad Q=\frac{dV}{d\dot{y}};\quad R=\frac{dV}{d\ddot{y}};\tag{9}$$

卽得

$$\delta U=\int_{x_0}^{x_1}\delta V\,dx=\int_{x_0}^{x_1}\left(P\,\delta y+Q\,\frac{d\delta y}{dx}+R\,\frac{d^2\delta y}{dx^2}+\cdots\cdots\right)dx。\tag{10}$$

逐項求其積分。從第 73 節(A),

$$\int u\frac{dv}{dx}dx=uv-\int v\frac{du}{dx}dx,$$

故若令 $Q=u$; $dQ=du$; $d\,\delta y=dv$; $v=y$, 則

$$\int Q\,\frac{d\delta y}{dx}dx=Q\,\delta y-\int\frac{dQ}{dx}\,\delta y\,dx;$$

同理,連用分部積分法兩次,可得

$$\int R\,\frac{d^2\delta y}{dx^2}=R\,\frac{d\delta y}{dx}-\int\frac{dR}{dx}\cdot\frac{d\delta y}{dx}dx$$

$$=R\,\frac{d\delta y}{dx}-\frac{dR}{dx}\delta y+\int\frac{d^2R}{dx^2}\delta y\,dx,$$

以此二結果代入(10)得

$$\delta U=\int_{x_0}^{x_1}\left(P-\frac{dQ}{dx}+\frac{d^2R}{dx^2}\right)\delta y\,dx$$

$$+\Big|_{x_0}^{x_1}\left(Q-\frac{dR}{dx}\right)\delta y+\Big|_{x_0}^{x_1}R\,\frac{d\delta y}{dx}。\tag{11}$$

上式中最後二項不含任何積分,但視函數的形式而定。設以 x_0 代 x 時所得各項總和爲 I_0; 以 x_1 代 x 時所得各項總和爲 I_1; 則(11)化爲下列形式:

$$\delta U=I_1-I_0+\int_{x_0}^{x_1} K\,\delta y\,dx, \tag{12}$$

此中 K 表示下式,

$$K=P-\frac{dQ}{dx}+\frac{d^2R}{dx^2}。 \tag{13}$$

當函數 V 含有高於 y' 的微係數時,其變分的求法與此相同。

§ 174. 定積分的極大值或極小值(Maximum or Minimum Values of a Definite Integral)

亦許變分法的最重要的應用,是決定一個定積分中所含的函數的形式而使此積分有極大值或極小值。如在

$$U=\int_{x_0}^{x_1} V\,dx \tag{14}$$

中,決定 V 中的函數形式之可使 U 有極大值或極小值者。此問題的充分條件很難討論,今只略述其必要條件。❶ 我們恆可假設 V 中所含的函數為

$$y=f(x,\ \alpha),$$

且所求的積分,可在 α 取某一特殊值(如 $\alpha=0$)時而得,於是 U 為 α 的函數,而於 $\alpha=0$ 時為極大或極小。因此必須

$$\frac{\delta U}{\delta\alpha}=0;$$

即 $$\delta U=0。$$

即 $$I_1-I_0+\int_{x_0}^{x_1} K\,\delta y\,dx=0。 \tag{15}$$

❶ 參閱熊慶來著高等算學分析第 387 頁,商務印書館出版。——譯者註

這裏必須

$$I_1-I_0=0; \quad \int_{x_0}^{x_1} K\,\delta y\,da=0, \tag{16}$$

因兩者若不各等於零，則一者將由另一者的值而決定。又 δy 是隨意的，故只有當

$$K=0; \quad 即 \quad P-\frac{dQ}{dx}+\frac{d^2R}{dx^2}-\cdots\cdots=0, \tag{17}$$

時可以適合第二個條件。變分法中這方面的困難大部從這方程式而發生。常是很難駕馭的，有時太厲害了，以致這方程式無法可解。應用問題的性質常會直接顯示着我們所求者爲函數的極大值還是極小值，而無更大的困難發生；否則，δ^2U 的正負號必須注意；若爲正號則函數爲極小值，若爲負號則函數爲極大值。欲知其詳，此處須參考些別的教本，如 B. Williamson 所著 Integral Calculus, London, 463, 1896。

例一　兩點間最短的線爲何？當然爲直線。但我們可以看看在變分法中的說法。橫坐標爲 x_1 與 x_0 的兩點間的曲線之長，依第 85 節(1)爲

$$\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx。 \tag{18}$$

必須此爲極小值。此中 V 爲 y 的函數。故(17) 中除 $\frac{dQ}{dx}$ 外，餘皆爲零，得

$$\frac{dQ}{dx}=0; \quad 即 \quad Q=c, \tag{19}$$

此中 C 爲常數。但依定義(9),及 $V=\sqrt{1+\dot{y}^2}$,

$$Q=\frac{dV}{d\dot{y}}=\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}=C, \tag{20}$$

$$\therefore \quad dV=(1+\dot{y}^2)^{-\frac{1}{2}}\dot{y}\,d\dot{y}。$$

故 $\dot{y}=(1+\dot{y}^2)C^2$; $\therefore\ \dot{y}^2(1-C^2)=1$; $\therefore\ \dot{y}=a$, (21)

此 a 爲常數,因 C 爲常數。於是求 $\dot{y}=a$ 的積分,可得

$$y=ax+b, \tag{22}$$

此中 b 爲積分常數。故所求的曲線爲直線,(第 31 節(8))。再從(16)與(20),

$$I_1-I_0=\frac{\dot{y}_1}{\sqrt{1+\dot{y}_1{}^2}}\delta y_1-\frac{\dot{y}_0}{\sqrt{1+\dot{y}_0{}^2}}\delta y_0。 \tag{23}$$

若兩點爲定點,則 $\delta y_1=0$, $\delta y_0=0$ 故 $I_1-I_0=0$。設此兩個定點爲 (x_0, y_0)與(x_1, y_1),則

$$y_0=ax_0+b; \quad y_1=ax_1+b。 \tag{24}$$

若只有 x_0 與 x_1 爲已知,而 y_0 與 y_1 爲不定,我們可從 (24) 求得 $\dot{y}_0=a$; $\dot{y}_1=a$ 代入(23)得

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}(\delta y_1-\delta y_0)=0。 \tag{25}$$

因 δy_1 與 δy_0 是隨意的,(25)只有當 $a=0$ 時可以適合。於是直線爲 $y=b$。這是表示顯明的事實卽當兩個直線平行時,其間的最短距離爲其公共垂線之長。

例二 求從一個定點至另一定點的捷線 (Curve of quickest descent)。或如 Todhunter 所說『假定一個極薄而光滑的管,聯結兩點,

一個重的質點在此管中滑下；我們須求此管取何種形式時可使從一點至另一點的時間為極小』。此問題稱為 Brachistochrone (brachisto=最短；chronos=時間)問題，最初是 John Bernoulli 於1696年六月所提出；牠所借助的研究方法是變分法發軔。任何力學書上，我們可以見到，一個物體從靜止出發，其速度（第 121 節例四）為

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gy}\,, \tag{26}$$

此中坐標軸 y 的量數由上而下，x 軸從較高的已知部份出發。故降落所須的時間為

$$t=\int\frac{ds}{\sqrt{2gy}}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int\sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{y}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int V\,dx, \tag{27}$$

但須參閱第 173 節(6)即能明瞭。故取

$$V=\sqrt{\frac{1-\dot{y}^2}{y}}\,, \tag{28}$$

於是 V 中只含有 y 與 $\dot{y}$。求極小值，須

$$P-\frac{dQ}{dx}=0;\quad 即\quad \frac{dV}{dy}-\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{d\dot{y}}\right)=0。 \tag{29}$$

當 V 中所含 x 並不直接表示時，則

$$V=f(y,\dot{y},\ddot{y},\cdots\cdots) \tag{30}$$

的完整微分顯然是

$$\frac{dV}{dx}=\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial V}{\partial \dot{y}}\cdot\frac{d\dot{y}}{dx}+\cdots\cdots$$

$$=P\frac{dy}{dx}+Q\frac{d\dot{y}}{dx}+R\frac{d\ddot{y}}{dx}+\cdots\cdots \tag{31}$$

如第 22 節 II 所示。以 $\frac{dy}{dx}$ 乘(17)式，而從(31)式減去之。P 可消去，所剩爲

$$\frac{dV}{dx}=\left(\frac{dQ}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}+Q\frac{d\dot{y}}{dx}\right)-\left(\frac{d^2R}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx}\right)+R\frac{d\ddot{y}}{dx}+\cdots\cdots。$$

更可寫明白些，

$$\frac{dV}{dx}=\frac{d}{dx}\left(Q\frac{dy}{dx}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{dR}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}-R\ddot{y}\right)+\cdots\cdots,$$

求其積分，得

$$V=Q\frac{dy}{dx}-\frac{dR}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}-R\frac{d^2y}{dx^2}+\cdots\cdots+C, \tag{32}$$

此中 C 爲積分常數。當 P, Q 或 R 爲零時，則爲特例。在這裏最有用的情形是，V 只含有 y 與 $\dot{y}$。此時(29)化而爲

$$V=Q\frac{dy}{dx}+C。 \tag{33}$$

從(28)我們可得

$$V=\sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{y}}=\frac{\dot{y}^2}{\sqrt{y(1+\dot{y}^2)}}+C; \quad \therefore \quad \frac{1}{\sqrt{y(1+\dot{y})^2}}=C; \tag{34}$$

結果，

$$y(1+\dot{y}^2)=\text{常數；（設爲 }2a\text{）。} \tag{35}$$

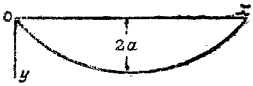
$$\therefore \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{2a-y}{y};$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy}=\left(\frac{y}{2a-y}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{y}{\sqrt{2ay-y^2}}。 \tag{36}$$

用第 70 節(17)，求上式的積分得

$$x=a\ \mathrm{ver}^{-1}\frac{y}{a}-\sqrt{2y-y^2}+b, \tag{37}$$

此中 b 爲積分常數。這是有名的方程式，其曲線稱爲**擺線**(Cycloid)，見圖一百七十四。此擺線的底爲 x 軸，曲線與底的交點。在距原點 O 爲 b 處卽 $OX=b$。當 $b=0$ 時則 $x=0$。此時



圖一百七十四

$$I_1-I_0=\frac{\dot{y}_1\delta y_1}{\sqrt{y_1(1-\dot{y}_1^2)}}-\frac{\dot{y}_0\delta y_0}{\sqrt{y_0(1-\dot{y}^2)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2a}}(\dot{y}_1\delta y_1-\dot{y}_0\delta y_0)。\tag{38}$$

但兩端是定點故 δy_0 與 δy_1 爲零，故 I_1-I_0 亦爲零。若但知較低點的橫坐標而不知其縱坐標，則 I_0 爲零而得

$$I_1=\frac{\dot{y}_1\delta y_1}{\sqrt{2a}}。\tag{39}$$

但 δy_1 是隨意的，故若 I_1 爲零必須 $\dot{y}_1$ 爲零。這是說擺線最低限點處的切線，須平行於 x 軸。

§ 175. 變限積分的變分(The Variation of an Integral with Variable Limits)

上述問題，若已知者假定爲兩個曲線，而欲求從一個已知曲線至另一已知曲線的捷線，則較爲複雜。這裏所求者非但是降落的路程，並且是質點離開一個曲線與到達另一曲線的地點。上半部工作顯然屬於變分法而下半部則容易從微分法解決，卽已知一個曲線而欲求在何位置可使 t 爲極小。積分

$$U=\int_{x_0}^{x_1}V\,dx \tag{40}$$

的值非但因 y 變為 $y+\delta y$ 而發生變化，即上下限 x_1 與 x_0 各變為 x_1+dx_1 與 x_0+dx_0 時亦會發生變化。上下限的變化使 U 增大之量為

$$dU=\int_{x_1}^{x_1+dx_1} V_1dx-\int_{x_0}^{x_0+dx_0} V_0dx; \tag{41}$$

略去 dx_1 與 dx_0 的高次項，則 U 所受到的增加量為

$$dU=V_1dx_1-V_0dx_0。 \tag{42}$$

故 U 的總增加量為

$$dU+\delta U=V_1dx_1-V_0dx_0+\delta\int_{x_0}^{x_1} Vdx。 \tag{43}$$

以言語表之，一個數量從幾個運算所受到的總增加量等於其分別受之於各個者之和。這不過是第 22 節與第 131 節所論及的**疊置原理**的另一種化粧：

極大極小的條件是總增加量等於零。這只有在 $V_1=0$; $V_0=0$ 時方才可以。故此我們除上節所述的條件，更須考察這兩個新的條件。

例　求從一個已知曲線到另一已知曲線的捷線。上節例二已經告訴我們，捷線的形式為擺線。現在的問題是求擺線與兩個已知曲線間的關係。從(15)與(43)，可知極大極小的條件是

$$V_1dx_1-V_0dx_0+I_1-I_0+\int_{x_0}^{x_1} K\,\delta y\,dx=0。 \tag{44}$$

但有上節例二的結果與方程式(33)，(38)可用，故極大極小的條件變為

$$V_1dx_1-V_0dx_0+\frac{\dot{y}_1\delta y_1}{\sqrt{y_1(1+\dot{y}_1^2)}}-\frac{\dot{y}_0\delta y_0}{\sqrt{y_0(1+\dot{y}_0^2)}}$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(P-\frac{dQ}{dx}\right)\delta y\,dx=0。 \tag{45}$$

(29)還是成立的，故

$$\sqrt{y(1+\dot{y}^2)}=\sqrt{2a}\,。\tag{46}$$

$$\therefore\quad V_1dx_1-V_0dx_0+\frac{1}{\sqrt{2a}}\left(\frac{dy_1}{dx_1}\delta y_1-\frac{dy_0}{dx_0}\delta y_0\right)=0。\tag{47}$$

注意此曲線兩端的坐標爲(x_0, y_0)與(x_1, y_1)，設 y 受到一個變分 δy 如

$$Y=y+\delta y\tag{48}$$

而上下限一定；同時 x_0, y_0 與 x_1, y_1 各變爲 x_0, Y_0，與 x_1, Y_1。現在且看當 x 的值各變爲 x_0+dx_0 與 x_1+dx_1 時，δy_0 與 δy_1 受到如何影響。依戴氏定理，非 y_1 變爲 Y_1，而是 Y_1 變爲

$$Y_1+\frac{dY_1}{dx_1}dx_1+\frac{1}{\underline{|2}}\cdot\frac{d^2Y_1}{dx_1^2}(dx_1)^2+\cdots\cdots\tag{49}$$

從(4)與(48)即

$$(y_1+\delta y_1)+\left(\frac{dy_1}{dx_1}dx_1+\frac{dY_1}{d\dot{y}_1}\delta\dot{y}_1\cdot dx_1\right)+\cdots\cdots\tag{50}$$

略去 dx_1 的高次項與 $\delta\dot{y}_1\cdot dx_1$ 之積，求變分與令 x_1 變爲 x_1+dx_1 的結果是

$$Y_1\ 變爲\ y_1+\delta y_1+\dot{y}_1dx_1。\tag{51}$$

設兩個已知曲線之一爲

$$y=f(x_1),\tag{52}$$

則在發生變分後 Y_1 的端值(End value)的橫坐標變爲 $f(x_1+dx_1)$。結果，在發生變分後，依戴氏定理，得

$$y_1+\delta y_1+\dot{y}_1dx_1=f(x_1+dx_1)=f(x_1)+f'(x_1)dx_1。$$

從(52)，y_1 與 $f(x_1)$可以消去，而得

$$\delta y_1=\{f'(x_1)-\dot{y}_1\}dx, \tag{53}$$

δy_0 與 dx_0 之間亦有同樣的關係。

我們再回到本文，從(47)為觀念確定計，設已知的兩個曲線為

$$y_1=mx_1+a;\ y_0=mx_0+b;\quad \therefore\ \dot{y}_1=m;\ \dot{y}_0=n。 \tag{54}$$

從(53)可得

$$\delta y_1=(m-\dot{y}_1)dx_1;\quad \delta y_0=(n-\dot{y}_0)dx_0。 \tag{55}$$

以這些代入(47)得

$$\{V_1+\frac{\dot{y}}{\sqrt{2a}}(m-\dot{y}_1)\}dx_1-\{V_0+\frac{\dot{y}}{\sqrt{2a}}(n-\dot{y}_0)\}dx_0=0。 \tag{56}$$

因 dx_1 與 dx_0 是隨意的，故 dx_1 與 dx_0 的係數必各自為零，方得使(56)為 0。

$$\therefore\quad 1+\dot{y}_1m=0;\ 1+\dot{y}_0n=0;$$

$$即\quad \frac{dy_1}{dx_1}=-\frac{1}{m};\ \frac{dy_0}{dx_0}=-\frac{1}{n}。 \tag{57}$$

今以此結果與第 32 節(18)比較，可知兩個已知曲線與捷線交於直角。

§ 176. 相對的極大與極小

(Relative Maxima and Minima)

James Bernoulli 是 John Bernoulli 的兄弟，他在解決捷線問題之後，又提出另一類問題稱為等周問題 (Isoperimetrical problem)者，其形式如次：U_1 為某一積分，U_2 為含其相同變數的另一積分，當後者之值為常數時，求前者的極大值或極小值。本章之初，所提及的問題是一個很具體的例。這裏 δU_1 非但必須為零，並且當變數之值取可

使 U_2 為常數者時 δU_1 必須為零。顯然 U_1 若為極大值或極小值時，U_1+aU_2 亦為極大值或極小值，此中 a 為任意常數。故問題變為求 U_1+aU_2 的極大值或極小值。若

$$U_1=\int_{x_0}^{x_1} V_1dx;\qquad U_2=\int_{x_0}^{x_1} V_2dx;\tag{58}$$

於是 U_1+aU_2的極大值或極小值視

$$\int_{x_0}^{x_1}(V_1+aV_2)dx\tag{59}$$

的極大值或極小值而定。當 U_2 為已知時，a 的值即能求得。

例　求一個定長的曲線聯結兩個定點，使此曲線與 x 軸與兩個定點的縱坐標所包圍的面積為極大。

如第 84 節所示，這裏

$$U_1=\int_{x_0}^{x_1} y\,dx;\qquad U_2=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx。\tag{60}$$

故

$$V_1+aV_2=y+a\sqrt{1+\dot{y}^2}。\tag{61}$$

我們所求者為下列積分的極大值，

$$U=\int_{x_0}^{x_1}Vdx=\int_{x_0}^{x_1}\left\{y+a\sqrt{1+\dot{y}^2}\right\}dx。\tag{62}$$

V 為 y 與 $\dot{y}$ 的函數，故從(19)，必有

$$V=P\dot{y}+C;\tag{63}$$

$$\therefore\quad y+a\sqrt{1+\dot{y}^2}=\frac{a\dot{y}^2}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}+C_1;$$

$$\therefore\quad y+\frac{a}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}=C_1。\tag{64}$$

即 $$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{a}{(y-C_1)^2};$$

$$\therefore\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{(y-C_1)^2}{a^2-(y-C_1)^2}; \tag{65}$$

求積分,得

$$x-C_2=\sqrt{a^2-(y-C_1)^2}\ ;\ \text{即}\ (x-C_2)^2+(y-C_1)^2=a^2。 \tag{66}$$

這顯然是圓爲方程式。上下限是一定的,故 $I_1-I_0=0$。當兩個定點與曲線的定長知道時, a, C_1, C_2 的值可以求得。

§ 177. 求定積分的微分法 (The Differentiation of Definite Integrals)

我們現在必須旁涉到本文之外。這裏需要說明如何,求定積分 $u=\int f'(x,a)dx$ 的微係數 $\frac{du}{da}$,其上下限各爲 y_1 與 y_0,又 y_1 與 y_0 爲 a 的函數。設 $f'(x,a)dx$ 求積分後變爲 $f(x,a)$,於是

$$u=\int_{y_0}^{y_1}f'(x,a)dx=f(y_1,a)-f(y_0,a)。 \tag{67}$$

然後以 y_0 爲常數,求關於 y_1 的偏微係數,再以 y_1 爲常數,求關於 y_0 的偏微係數,可得

$$\frac{\partial u}{\partial y_1}=\frac{d}{dy_1}f(y_1,a)=f'(y_1,a);$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y_0}=\frac{d}{dy_0}f(y_0,a)=f'(y_0,a)。 \tag{68}$$

今設 a 受到一個小小的增加量,使 a 變爲 $a+h$ 時,u 變爲 $u+k$,於是令上下限不變,則

$$u \text{ 的增加量 } = \int \{f'(x, a+h) - f'(x, a)\} dx。\tag{69}$$

除以 a 的增加量而求極限，可得

$$\frac{u \text{ 的增加量}}{a \text{ 的增加量}} = \int_{y_0}^{y_1} \frac{f'(x, a+h) - f'(x, a)}{h} dx;$$

$$\frac{du}{da} = \int_{y_0}^{y_1} \frac{df'(x, a)}{da} dx。\tag{70}$$

若 y_1 與 y_0 都是 a 的函數，則 $\frac{du}{da}$ 必須爲三個分別的項之和，(i)由於 a 的變化量；(ii)由於 y_1 的變化量；(iii)由於 y_0 的變化量。這些分別的效果已在方程式(68)與(70)求出，結果

$$\frac{du}{da} = \frac{d}{da} \int_{y_0}^{y_1} f'(x, a) dx$$

$$= \int_{y_0}^{y_1} \frac{df'(x, a)}{da} dx + \frac{\partial u}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{da} - \frac{\partial u}{\partial y_0} \cdot \frac{dy_0}{da} \tag{71}$$

$$\therefore \quad \frac{du}{da} = \int_{y_0}^{y_1} \frac{df'(x, a)}{da} dx + f'(y_1, a) \frac{dy_1}{da}$$

$$- f'(y_0, a) \frac{dy_0}{da}。\tag{72}$$

高級微係數可用此相同的方法求得之。

§ 178. 二重積分與三重積分 (Double and Triple Integrals)

今述二重積分，設

$$U = \iint V \, dx \, dy, \tag{73}$$

此中 V 爲 x, y, z, p, q 的函數，而

$$p = \frac{dz}{dx}; \quad q = \frac{dz}{dy}。\tag{74}$$

我們所用的方法與上節所用的普遍方法相同，但關於多重積分的上下限有些困難之處。當結合 z 與 x, y 的函數爲已知時，而 x 與 y 在求變分中爲常數，設以 δz 表示 z 的變分。更設當 z 的變分爲 δz 時，δV 爲 V 的變分，δU 爲 U 的變分；則用前述的方法，

$$\delta V=\frac{dV}{dz}\delta z+\frac{dV}{dp}\delta p+\frac{dV}{dq}\delta q=P\delta z+Q\delta p+R\delta q, \tag{75}$$

爲簡便計，此中令

$$P=\frac{dV}{dz};\quad Q=\frac{dV}{dp};\quad R=\frac{dV}{dq}。 \tag{76}$$

從(75)故可寫爲

$$\delta U=\iint\delta V\,dx\,dy=\iint\left(P\delta z+Q\frac{d\delta z}{dx}+R\frac{d\delta z}{dy}\right)dx\,dy。 \tag{77}$$

仍從前述的舊途徑，得

$$U=\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\left(P-\frac{dQ}{dx}+\frac{dR}{dy}\right)\delta z\,dx\,dy$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\left\{\frac{d}{dx}(Q\delta z)+\frac{d}{dx}(R\delta z)\right\}dx\,dy。 \tag{78}$$

關於 x 與 y 的微分係數是完整的。求關於 y 的積分，可得

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\frac{d}{dx}(R\delta z)dx\,dy=\int_{x_0}^{x_1}\left[R\delta z\right]_{y_0}^{y_1}dx, \tag{79}$$

如第 80 節，此中$\left[R\delta z\right]_{y_0}^{y_1}$表示當以 y_1 與 y_0 代入 y 時所得 $R\delta z$ 的值而在前者中減去後者。再者，從(70)而移項後，可得

$$\int_{y_0}^{y_1}\frac{d(Q\delta x)}{dx}dy=\frac{d}{dx}\int_{y_0}^{y_1}Q\delta x\,dy-\left[(Q\delta x)\frac{dy}{dx}\right]_{y_0}^{y_1}, \tag{80}$$

此中$\left[(Q\delta z)\dot{y}\right]_{y_0}^{y_1}$表示當以 y_1 與 y_0 代入 y 時所得$(Q\delta z)\dot{y}$的値，而在前者中減去後者。從此，可寫爲

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\frac{d(Q\delta z)}{dx}\,dx\,dy=\left[\int_{y_0}^{y_1}Q\delta z\,dy\right]_{x_0}^{x_1}$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\left[(Q\delta z)\frac{dy}{dx}\right]_{y_0}^{y_1}。\qquad(81)$$

以(79)與(81)代入(78)中，可得

$$\delta U=\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\left(P-\frac{dQ}{dx}-\frac{dR}{dy}\right)\delta z\,dx\,dy+\int_{x_0}^{x_1}\left[R\delta z\right]_{y_0}^{y_1}dx$$

$$+\left[\int_{y_0}^{y_1}Q\,\delta z\,dy\right]_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\left[(Q\delta z)\frac{dy}{dx}\right]_{y_0}^{y_1}dx。\qquad(82)$$

若上下限 y_1 與 y_0 爲常數，則 $\dot{y}_1$ 與 $\dot{y}_0$ 爲零，故可略去最後一項。若上下限亦有變化則必須依據第 175 節的原理，加上一個新的項。

求極大與極小的條件，(82)中的 δU 只能在 δz 的係數爲零時，即

$$P-\frac{dQ}{dx}-\frac{dR}{dy}=0\qquad(83)$$

時，可以爲零　解這個偏微分方程式可得，z 爲 x, y，與任意常數所表示的函數；此中任意常數必須取定可使(82)中其餘各項爲零者。

三重積分

$$U=\iiint V\,dx\,dy\,dz,\qquad(84)$$

此中 V 爲 u, x, y, z, p, q, r；且 u 爲適合於

$$p=\frac{du}{dx};\quad q=\frac{du}{dy};\quad r=\frac{du}{dz}\qquad(85)$$

的函數。我們亦得

$$\delta U=\iiint \delta V\,dx\,dy\,dz。 \tag{86}$$

與前同樣，

$$\delta V=N\delta u+P\frac{d\delta u}{dx}+Q\frac{d\delta u}{dy}+R\frac{d\delta u}{dz}, \tag{87}$$

此中

$$N=\frac{dV}{du};\quad P=\frac{dV}{dp};\quad Q=\frac{dV}{dq};\quad R=\frac{dV}{dr}, \tag{88}$$

變分可求得爲

$$\delta U=\iiint\left(N-\frac{dP}{dx}-\frac{dQ}{dy}-\frac{dR}{dz}\right)\delta u\,dx\,dy\,dz$$

$$+\iiint\left\{\frac{d}{dx}(P\delta u)+\frac{d}{dy}(Q\delta u)+\frac{d}{dz}(R\delta u)\right\}dx\,dy\,dz。 \tag{89}$$

求極大與極小的條件，我們必須解偏微分方程式

$$N-\frac{dP}{dx}-\frac{dQ}{dy}-\frac{dR}{dz}=0, \tag{90}$$

並且使任意常數的值必須取定可使(89)中其餘各爲零者。關於變分法的完全的敍述是遠出於本書的範圍。J. H. Jellet 著 An Elementary Treatise on the Calculus of Variations, Dublin, 1850 是一本很好的教科書；O. Bolza，在他的 Lectures on the Calculus of Variations, Chicago, 1904, 中關於近代的理論有所論述。

J. H. van der Waal 在他的 Binäre Gemische, Leipzig, 34, 1900, 中，求三重積分，但問題的物理條件使(90)的解可以更簡單的獲得。

第十一章 行列式(Determinants)

『極費心力的運算常可借助於別種例行公事式的運算之代庖，以節省時間與精力。例如，利用行列式的理論，只須依規定的格式寫下係數，再經過機械式的運算，就可解決某些代數運算』。❶

——E. Mach.

§ 179. 聯立方程式 (Simultaneous Equations)

本章目的在於說明一種記法的體系，牠在純粹算學與應用算學的各枝中，是常用的。

I. **二元齊次聯立方程式。**

齊次方程式

$$a_1x+b_1y=0; \quad a_2x+b_2y=0 \tag{1}$$

代表通過原點的兩個直線。此時 $x=0$, $y=0$(參閱第 29 節),解方程式(1)求 x 與 y，可覆證此結果。第一方程式乘以 b_2，第二方程式乘以 b_1。相減。再第二方程式乘以 a_1，第一方程式乘以 a_2。相減。各得

---

❶ "Operations involving intense mental effort may frequently be replaced by the aid of other operations of routine character, with a great saving of both time and energy. By means of the theory of determinants, for example, certain algebraic operations can be solved by writing down the coefficients according to a prescribed scheme and operation with them mechanically."—**E. Mach.**

$$x(a_1b_2-a_2b_1)=0;\quad y(a_2b_1-a_1b_2)=0。\tag{2}$$

故 $x=0$，與 $y=0$；或

$$a_1b_2-a_2b_1=0,\quad 與\ a_2b_1-a_1b_2=0。\tag{3}$$

(3)中的關係可寫爲

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}=0;\quad 與\quad \begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_1, & b \end{vmatrix}=0,\tag{4}$$

上式的左邊稱爲行列式。沒有別的，只是對角乘積之差的另一寫法能了。

乘積 a_1b_2，a_2b_1 稱爲行列式的項；a_1，b_1，a_2，b_2 稱爲行列式的元素。一個行列式中縱橫各行，每行含有兩個元素者稱爲二次行列式。

從上列方程式，可知含有 x 與 y 的兩個一次齊次方程式，只有當其係數所成的行列式等於 0 時，x 與 y 可有 0 以外的其他的值。

II. **三元一次齊次方程式。**

解一次方程式

$$a_1x+b_1y+c_1=0;\quad a_2x+b_2y+c_2=0\tag{5}$$

求 x 與 y，可得

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-b_1a_2};\quad y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-b_1a_2}。\tag{6}$$

若 $a_1b_2-b_1a_2=0$ 時，須視 $b_1c_2-b_2c_1$；與 $c_1a_2-c_2a_1$ 的值如何而後可以決 x，y 的值。設 $b_1c_2-b_2c_1$ 或 $c_1a_2-c_2a_1$ 有一個等於零，則另一個必亦等於零，因如 $b_1c_2-b_2c_1=0$，則 $\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$；再由 $a_1b_2-b_1a_2=0$，

則 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$，故

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2},$$

卽得 $c_1a_2-c_2a_1=0$。此時(6)中 x 與 y 的值各等於一個分數，其分子分母都爲 0，故 x 與 y 可有無限對的值適合(5)。故(5)所代表的兩個直線有無限點是公共的，卽此兩個直線相重合。

若 $a_1b_2-b_1a_2=0$ 而 $b_1c_2-b_2c_1$ 與 $c_1a_2-c_2a_1$ 都不爲零，則得

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{0}=\infty;\quad y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{0}=\infty。$$

此時(5)中兩個直線的交點在無限遠處，卽此兩個直線平行。這性質更可從下列方法見之。化方程式(5)各爲正切形式（參閱第 31 節(8)）得

$$y=-\frac{a_1}{b_1}x-\frac{c_1}{b_1};\quad y=-\frac{a_2}{b_2}x-\frac{c_2}{b_2};\tag{7}$$

但因 $a_1b_2-b_1a_2=0$，$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=$ 直線傾斜角的正切；換言之，此兩個直線對於 x 軸的斜度相等，卽互相平行。❶

當兩個直線有一確定的交點時，則(6)中 x 與 y 的值可以適合方程式(5)，卽

$$a_1(b_1c_2-b_2c_1)+b_1(c_1a_2-c_2a_1)+c_1(a_1b_2-a_2b_1)=0,$$

$$a_2(b_1c_2-b_2c_1)+b_2(c_1a_2-c_2a_1)+c_2(a_1b_2-a_2b_1)=0。$$

若令

❶ 故『平行線交於無限遠處』的定義，其意義是當兩個直線之交點漸移漸遠時，牠們是漸漸近於平行。

$$x=\frac{X}{Z};\qquad y=\frac{Y}{Z},\tag{8}$$

而代入(5)則得兩個含有 X, Y, Z 的一次齊次方程式為

$$a_1X+b_1Y+c_1Z=0;\quad a_2X+b_2Y+c_2Z=0。\tag{9}$$

從(6)得

$$\frac{X}{Z}=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1};\quad \frac{Y}{Z}=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-b_1a_2},$$

故有　$X:Y:Z=(b_1c_2-b_2c_1):(c_1a_2-c_2a_1):(a_1b_2-a_2b_1),$

$$=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}。\tag{10}$$

左邊的三個行列式都可從下列矩陣(Matrix)中得之。

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{Vmatrix}$$

一組數量，共 mn 個排作 m 橫行與 n 縱行的矩形陣列，卽稱爲矩陣。[1]

(10)中所得的結果可以用來求一次聯立方程式的解。

例一　解 $4x+5y=7$; $3x-10y=19$。

此時　$X:Y:Z=\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -10 & -19 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ -19 & 3 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -10 \end{vmatrix}=-165:55:-55;$

卽得　$x=3;\qquad y=-1$。

例二　解 $20x-19y=23$;　$19x-20y=16$。

[1] 參閱 M. Bôcher's Introduction to Higher Algebra 第二章，此商務印書館出版譯本名高等代數通論，余介石先生所譯。——譯者註

答： $x=4$, $y=3$。

例三 解下列觀測方程式：

$$.5x-.2y=.4;\quad .14x+.3y=1.18。$$

答： $x=2$, $y=3$。

例四 解 $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=6$; $\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y=-1$。

答： $x=24$, $y=18$。

三個方程式：

$$a_1x+b_1y+c_1=0;\ a_2x+b_2y+c_2=0;\ a_3x+b_3y+c_3=0, \tag{12}$$

所代表的三個直線會於一點的條件，是三者中任意二個的根必須適合第三個(第 32 節)。令

$$x=\frac{X}{Z};\quad y=\frac{Y}{Z},$$

(12)變爲三個含有 X, Y, Z 的齊次方程式：

$$a_1X+b_1Y+c_1Z=0;\ a_2X+b_2Y+c_2Z=0;\ a_3X+b_3Y+c_3Z=0。\tag{13}$$

從(13)的後二個得

$$X:Y:Z=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}。\tag{14}$$

但這些 X, Y, Z 的值必須適合(13)的第一方程式，故代入後得

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+b_1\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}=0;\tag{15}$$

更便利些，上式可寫爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad (16)$$

此式的左邊稱爲三次行列式。

從方程式(13)(14)(16)可知，**只有當含有 X, Y, Z 的三個齊次方程式中係數所成的三次行列式等於零時，X, Y, Z 可以等於不爲零的數值。**此行列式稱爲此組方程式的**消去式**(Eliminant)。

180. 行列式的展開式(The Expansion of Determinants)

從(15)與(16)得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1。 \qquad (17)$$

展開一個行列式，可依下列步驟：先就每一橫行與每一縱行取出一個元素（即所取之元素，無兩個在同一橫行與同一縱行）而求其積稱爲一項；然後再在各項上附以適當的正負號而求其代數和。附加正負號的方法可依下述規則：從左上角起沿對角線向下先求得一項，此項稱爲**主項** (Leading term)，在(17)中卽爲 $a_1b_2c_3$，主項須附以正號；又其餘五項❶ 的正負號的決定是先將每項中元素依照字母次序排列，然後觀察元素的右下角所註的數字，至少須對調幾次方能變成主項的形式，若對調的次數是奇數，則此項附以負號，若對調的次數爲偶數，則

❶ 二次行列式共有 2×1 卽 $\underline{|2}$ 項；三次行列式共有 $3\times2\times1$ 卽 $\underline{|3}$ 項；四次行列式共有 $\underline{|4}$ 項，餘類推。

附以正號。例如 $a_2 b_1 c_3$ 中須對調一次（即 2 與 1 對調）而得主項，故 $a_2 b_1 c_3$ 須附以負號；又如 $a_2 b_3 c_1$ 中須對調二次（即 2 與 1 對調，又 2 與 3 對調），故 $a_2 b_3 c_1$ 須附以正號。

例一　證明 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2+12+8-4-6-8=4$。

例二　證明 $\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ b & 0 & a \\ c & a & 0 \end{vmatrix} = 2abc$。

§ 181. 聯立方程式的解法 (The Solution of Simultaneous Equations)

繼續第 179 節的討論，設方程式

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1;\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2;\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3, \qquad (18)$$

各乘以適當的數量，而可使 y 與 z 消去者。如以 A_1 乘第一方程式，A_2 乘第二方程式，A_3 乘第三方程式，此中 A_1，A_2，A_3，選取適合於下列關係者，即須

$$b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3=0;\quad c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3=0。 \qquad (19)$$

從(18)，

$$a_1A_1x+b_1A_1y+c_1A_1z=d_1A_1;$$
$$a_2A_2x+b_2A_2y+c_2A_2z=d_2A_2;$$
$$a_3A_3x+b_3A_3y+c_3A_3z=d_3A_3。$$

總加之，因(19)而得

$$x(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)=d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3。 \qquad (20)$$

方程式(19)爲 A_1, A_2, A_3 的齊次方程式,從(10)可得

$$A_1 : A_2 : A_3 = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}。$$

以 A_1, A_2, A_3 的值代人(20)可如(14)(15)(16)相同的關係,而得

$$x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_4 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}。 \tag{21}$$

同理以 B_1, B_2, B_3 乘(18)中各方程式;再同理以 C_1, C_2, C_3 乘(18)中各方程式,而如上法可求得

$$y\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad z\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}。 \tag{22}$$

例一 解 $5x+3y+3z=48;$

$2x+6y-3z=18;$

$8x-3y+2z=21。$

從(21)得 $x=\begin{vmatrix} 48 & 3 & 3 \\ 18 & 6 & -3 \\ 21 & -3 & 2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & -3 \\ 8 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 3;$

同理得 $y=5;\ z=6。$

例二 H. E. Roscoe 與 C. Schorlemmer(Treatise on Chemistry, **1**, 704, Londan, 1878)在分析含有 C_2H_4, C_3H_6, C_6H_6 三種的混合氣體,用下列一組方程式:

$$x+y+z=a;\ 2x+3y+6z=b;\ 2x+\frac{5}{2}y+\frac{5}{2}z=c,$$

此中 a, b, c 從氣體滴管所得的數字。解之,求 x, y, z。

例三　測定混合於溶液中的氯,溴,碘,用 Field 法,(Jour. Chem. Soc., **10**, 234, 1858)須解下列方程式:

$$x+y+z=a;\quad 1.31x+y+z=b;\quad 1.637x+1.25y+z=c,$$

此中 a, b, c 可從分析中決定的數字。用簡接法分析鈉鹽與鉀鹽的混合物時也可遇到相同的方程式。設求 x, y, z。

例四　解觀測方程式

$$.3x+.2y+.5z=3.2;\quad .2x+.3y+.4z=2.9;$$

$$.4x+.3y+.5z=3.7。\qquad 答:\ x=2,\ y=3,\ z=4。$$

例五　以第 141 節(1)爲例,證出其(2)來,作爲一種說明,以示聯立方程式的解法『只須依規定的格式寫下係數,再經過機械式的運算』。

在方程式(1)以 z 作爲因變數,解兩個聯立方程式而求出 $\frac{dx}{dz}$ 與 $\frac{dy}{dz}$。故此

$$\frac{dx}{dz}=\frac{\begin{vmatrix}Q_1 & R_1\\ Q_2 & R_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}P_1 & Q_1\\ P_2 & Q_2\end{vmatrix}};\quad \frac{dy}{dz}=\frac{\begin{vmatrix}R_1 & P_1\\ R_2 & P_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}P_1 & Q_1\\ P_2 & Q_2\end{vmatrix}};$$

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix}Q_1 & R_1\\ Q_2 & R_2\end{vmatrix}}=\frac{dy}{\begin{vmatrix}R_1 & P_1\\ R_2 & P_2\end{vmatrix}}=\frac{dz}{\begin{vmatrix}P_1 & Q_1\\ P_2 & Q_2\end{vmatrix}},$$

此與第 141 節所求得的(2)相同。

182. 試驗方程式是否矛盾(Test for Consistent Equations

從兩個方程式,

$$a_1x+b_1y+c_1=0;\quad a_2x+b_2y+c_2=0,$$

中求 x 與 y 的值,如第 179 節(6)所示,極爲容易;同樣從三個方程式,

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0;\quad a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0;$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0;$$

求 x, y, z 的值亦然;普遍言之,欲求 1, 2, 3,…… 個未知量,各有 1, 2, 3,…… 個獨立方程式表示未知量間的關係者,是爲必要而且充分。

設有三個方程式而只含兩個未知量,就很可能從兩個方程式所求得的未知量之值,並不適合於第三方程式。例如,

$$3x-2y=4;\quad 2x+4y=24;\quad x+y=2。$$

解前兩個方程式時得 $x=4$, $y=4$。但這對數值並不適合於第三方程式。解後兩個方程式時得 $x=-8$, $y=10$。但這對數值又不適合第一方程式。故此,欲能求得一組方程式是否矛盾的試驗方法,實爲很有用處的事;換言之,即欲求得可否決定 x 與 y 的值使之適合於一組已知的方程式。例如,下列一組方程式

$$a_1x+b_1y+c_1=0;\quad a_2x+b_2y+c_2=0;\quad a_3x+b_3y+c_3=0;\tag{23}$$

是否矛盾?從第一第二方程式可得

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-b_1a_2};\quad y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-b_1a_2}。\tag{24}$$

以此代入(23)中最後一個方程式，則兩個未知量可以消去；若方程式不是矛盾的，則

$$a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)=0。$$

但此式左邊顯然是一個行列式的展開式，故

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0。\tag{25}$$

此結果稱爲三個已知方程式的消去式。從此我們可得結論，**三個含有 x 與 y 的方程式，只有當其係數與絕對項所成的行列式爲零時才不相矛盾。**

例一　證明下列方程式

$$x+y-z=0;\quad x-y+z=2;\quad y+z-x=4;\quad x+y+z=6。$$

是不相矛盾的。

示意：　其消去式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}=0。$$

例二　一點受到坐標原點上的引力作用而在空間自由振動。其運動方程式爲

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-q^2x;\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-q^2y;\quad \frac{d^2z}{dt^2}=-q^2z。$$

求此點的路程(Path)。

先用第 141 節例四的方法,解得

$$x=c_1\cos qt+c_4\sin qt;\quad y=c_2\cos qt+c_5\sin qt;$$

$$z=c_3\cos qt+c_6\sin qt,$$

因時間並不能決定路程的形式與位置,故消去 t。這裏 $\cos qt$, 與 $\sin qt$ 可以作爲自變數,即以未知量視之。當然有了兩個方程式已夠消去,但已知者有三個而都須適合的。欲使其不相矛盾,必須

$$\begin{vmatrix} x & C_1 & C_4 \\ y & C_2 & C_5 \\ z & C_3 & C_6 \end{vmatrix}=0。$$

展開此中行列式,結果得 x, y, z 的一次齊次式,此爲通原點的平面方程式,其位置可用常數 C 來決定。假定旋轉此平面使與 xy 平面相合爲止,則 $z=0$。解得 $\cos qt$ 與 $\sin qt$,以結果代入有名的方程式 $\sin^2 qt+\cos^2 qt=1$。所得者爲二次方程式。展開而令 $C_2{}^2+C_5{}^2=a$; $2(C_1C_2+C_4C_5)=b$; $C_1{}^2+C_4{}^2=C$; $(C_1C_5-C_2C_4)^2=h$, 則得

$$ax^2-bxy+cy^2=h。$$

在判別式 b^2-4ac 中 a 與 c 必須爲正,故這曲線若非橢圓即爲圓。

§ 183. 行列式的基本性質(Fundamental Properties of Determinants)

讀者讀畢本節可以對於行列式的特性得一觀念:——

I. **一個行列式若以橫行換爲縱行,以縱行換爲橫行,則其值不變。** 只須展開下式,可以直接知道,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}。 \tag{26}$$

從此可得系如下：任何定律對於一個行列式的橫行而眞確時則對於其縱行亦必眞確；其逆定理亦成立。

II. **一個行列式中取其兩個橫行對調，或取其兩個縱行對調，則絕對值不變，而符號相反。**

用直接展開，可得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}。 \tag{27}$$

III. **一個行列式若其中有兩個橫行或兩個縱行，完全相同，則其值爲零。**

若此完全相同的兩個橫行或縱行，彼此對調時，則應該絕對值不變，而符合相反。此只有行列式的值爲零時可以成立。若展開下式亦可得同一的結論，如

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0。$$

IV. **一個行列式，其兩個橫行或兩個縱行的各元素所差只有一個常數因數，則其值爲零。**

可如下列展開而說明之，

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 6 \\ 12 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 4 \times 0 = 0 \tag{28}$$

V. **一個行列式中若有一個橫行或一個縱行全爲零，則其值爲零。**

可如下列展開而說明之，

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0。\tag{29}$$

VI. **欲使一個行列式乘以一個因數，可於其一個橫行或一個縱行的各元素上都乘以此因數。**

可如下列展開而說明之，

$$m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_1 & b_1 & c_1 \\ ma_2 & b_2 & c_2 \\ ma_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{30}$$

VII. **欲使一個行列式除以一個因數，可於其一個橫行或一個縱行的各元素上都除以此因數**

這是直接跟從上款來的，用此很易化一個行列式爲較簡的形式。如

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 12 & 18 & 4 \\ 24 & 27 & 2 \end{vmatrix} = 9\cdot 6\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 9\cdot 6\cdot 2\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \tag{31}$$

VIII. **一個行列式若其中一個橫行或一個縱行的各元素都變號，則此行列式變號。**

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -a_1 & b_1 & c_1 \\ -a_2 & b_2 & c_2 \\ -a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_1 & -b_1 & c_1 \\ -a_2 & -b_2 & c_2 \\ -a_3 & -b_3 & c_3 \end{vmatrix}。 \qquad (32)$$

IX. **任何行列式的一個橫行或一個縱行可化之都等於 1（Dostor 氏定理）。**

此點除下列之例外不須多加說明的，

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 8 & 8 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 8 & 7 & 6 \end{vmatrix}。 \qquad (33)$$

X. **一個行列式若其中一個橫行或一個縱行的各元素可以表示爲兩個（或多個）數量之和或差，則此行列式可以表示爲兩個（或多個）其他行列式之和或差。**

此可展開下式每個行列式重行排列各項而證之。

$$\begin{vmatrix} a_1 \pm p, & b_1 & c_1 \\ a_2 \pm q, & b_2 & c_2 \\ a_3 \pm r, & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} p & b_1 & c_1 \\ q & b_2 & c_2 \\ r & b_3 & c_3 \end{vmatrix}。 \qquad (34)$$

普遍言之，若一個橫行或一個縱行的各元素都可表示 n 個數量之和，則此行列式可以表示爲 n 個其他行列式之和。

例 按此定理，試證

$$\begin{vmatrix} b+c, & a-b, & a \\ c+a, & b-c, & b \\ a+b, & c-a, & c \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3。$$

XI. **於任一橫行的元素上加以或減以他一橫行的相當各元素,則此行列式的值不變。縱行亦然。**

從 X 與 III, 可得

$$\begin{vmatrix} a_1 \pm b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 \pm b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 \pm b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1' \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (35)$$

因右邊第二個行列式爲零, 故可證明此定理成立。此結果可以作爲化簡行列式之用。

例一 證明

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix} = 0。$$

第二縱行加第三縱行,所得之和除以 $x+y+z$。從 III 卽可證明。

例二 證明

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}。$$

加第二縱行與第三縱行於第一縱行,然後以 $x+y+z$ 除之。

例三 何以下列二式是不等的?

$$\begin{vmatrix} a & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+a_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & b_2+a_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & b_3+a_3 & c_3 \end{vmatrix}。$$

例四　證明

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 3 & 6 & -2 \\ 5 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -28。$$

XII. **一個行列式中若有一個橫行（或縱行）除一個元素外，其餘元素都為零，則此行列式可以化為除去此不為零的元素所在的橫行與縱行而得之較低一次之行列式與此不為零的元素之積，而附以適當的正負號。**

若此不為零的元素位於第 m 橫行第 n 縱行，則 $m+n$ 為奇時附以負號，為偶時附以正號。例如，

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}。 \tag{36}$$

逆定理亦能成立。故一個行列式亦可增高次數而不變其值。

XIII. **一個行列式中若從左上角向下的對角線之一側其元素都為零者則此行列式等於其主項。**

如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3。 \tag{37}$$

一個行列式中除去任一元素所在的橫行與縱行而得之較低一次的行列式稱為相當於此元素的**子式** (Minor)；子式或稱**小行列式** (Subdeterminant)；上依 XII 中所述的規則而附以正負號者，稱為相當於此

元素的餘因子(Cofactor),或稱餘式(Complement)。

§ 184. 行列式的乘法(Multiplication of Determinants)

這是依下法行之:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} d_1 & e_1 \\ d_2 & e_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1d_1+b_1e_1 & a_1d_2+b_1e_2 \\ a_2d_1+b_2e_1 & a_2d_2+b_2e_2 \end{vmatrix}。 \tag{38}$$

其證法可直接展開此方程式的右邊而得之。

$$\begin{vmatrix} a_1d_1+b_1e_1, & a_1d_2+b_1e_2 \\ a_2d_1+b_2e_1, & a_2d_2+b_2e_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1d_1, & a_1d_2 \\ a_2d_1, & a_2d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1d_1, & b_1e_2 \\ a_2d_1, & b_2e_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1e_1, & a_1d_2 \\ b_2e_1, & a_2d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1e_1, & b_1e_2 \\ b_2e_1, & b_2e_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1d_1, & b_1e_2 \\ a_2d_1, & b_2e_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1e_1, & a_1d_2 \\ b_2e_1, & a_2d_2 \end{vmatrix} = d_1e_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + d_2e_1 \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= (d_1e_2 - d_2e_1) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} d_1 & e_1 \\ d_2 & e_2 \end{vmatrix}。$$

根據上節 1. 一個行列式中以所有的橫行換成縱行,所有的縱行換爲橫行,而相對的次序不變,則此行列式之值不變,因此兩個行列式的積還可有下列幾種不同的寫法,當展開時結果是相同的。如(38)的右邊又可寫爲

$$\begin{vmatrix} a_1d_1+b_1d_2, & a_1e_1+b_1e_2 \\ a_2d_1+b_2d_2, & a_2e_1+b_2e_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1d_1+a_2d_2, & a_1e_1+a_2e_2 \\ b_1d_1+b_2d_2, & b_1e_1+b_2e_2 \end{vmatrix}; \text{ 等等。}$$

例一 $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2, & a_1a_2+b_1b_2 \\ a_1a_2+b_1b_2, & a_2^2+b_2^2 \end{vmatrix}。$$

例二　求下列兩個行列式的積:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ d_3 & e_3 & f_3 \end{vmatrix}。$$

本題解答可有幾種寫法,其中之一爲

$$\begin{vmatrix} a_1d_1+b_1e_1+c_1f_1, & a_1d_2+b_1e_2+c_1f_2, & a_1d_3+b_1e_3+c_1f_3, \\ a_2d_1+b_2e_1+c_2f_1, & a_2d_2+b_2e_2+c_2f_2, & a_2d_3+b_2e_3+c_2f_3, \\ a_3d_1+b_3e_1+c_3f_1, & a_3d_2+b_3e_2+c_3f_2, & a_3d_3+b_3e_3+c_3f_3, \end{vmatrix}$$

此式可以展開而覆證之，不過手續麻煩些。展開之共得二十七個行列式,其中除了六個以外都等於零。

當一個行列式中的兩個元素所立的地位，關於主項所在的對角線爲對稱時,則稱爲**共軛元素**(Conjugate elements)。如(34)右邊第二式中 b_1 與 q; c_1 與 r; c_2 與 b_3 都是共軛元素。共軛元素各相等,則此行列式稱爲**對稱行列式**(Symmetrical determinant)；若共軛元素僅僅正負號相反時,則稱爲**歪行列式**(Skew determinant)。**一個行列式的平方卽爲對稱行列式**。

§ 185. 求行列式的微分(The Differentiation of Determinants)

假使一個行列式的各元素是獨立的,則因

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=x_1y_2-x_2y_1,$$

故得

$$d(D)=x_1dy_2+y_2dx_1-x_2dy_1-y_1dx_2;$$

$$=(y_2dx_1-y_1dx_2)+(x_1dy_2-x_2dy_1);$$

$$=\begin{vmatrix} dx_1 & y_1 \\ dx_2 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & dy_1 \\ x_2 & dy_2 \end{vmatrix}。\tag{39}$$

若一個行列式的各元素都爲 t 的函數,則寫 $\frac{dx_1}{dt}$ 爲 $\dot{x}_1$; $\frac{dy_2}{dt}$ 爲 $\dot{y}_2$ 等,可用同樣方法證明,如

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix};$$

則

$$\frac{d(D)}{dt}=\begin{vmatrix} \dot{x}_1 & y_1 \\ \dot{x}_2 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & \dot{y}_1 \\ x_2 & \dot{y}_2 \end{vmatrix}。\tag{40}$$

例一　若 $D=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$; 試證

$$d(D)=\begin{vmatrix} dx_1 & y_1 & z_1 \\ dx_2 & y_2 & z_2 \\ dx_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & dy_1 & z_1 \\ x_2 & dy_2 & z_2 \\ x_3 & dy_3 & z_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & dz_1 \\ x_2 & y_2 & dz_2 \\ c_3 & y_3 & dz_3 \end{vmatrix};$$

$$\frac{d(D)}{dt}=\begin{vmatrix} \dot{x}_1 & y_1 & z_1 \\ \dot{x}_2 & y_2 & z_2 \\ \dot{x}_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & \dot{y}_1 & z_1 \\ x_2 & \dot{y}_2 & z_2 \\ x_3 & \dot{y}_3 & z_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \dot{z}_1 \\ x_2 & y_2 & \dot{z}_2 \\ x_3 & y_3 & \dot{z}_3 \end{vmatrix}。$$

例二　設 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \cdots\cdots$ 等爲常數,試證

$$d\begin{vmatrix} a_1x & b_1y & c_1z \\ a_2x & b_2y & c_2z \\ a_3x & b_3y & c_3z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1dx & b_1y & c_1z \\ a_2dx & b_2y & c_2z \\ a_3dx & b_3y & c_3z \end{vmatrix}+\cdots\cdots=dx\begin{vmatrix} b_1y & c_1z \\ b_2y & c_2z \end{vmatrix}+\cdots\cdots$$

§ 186. 耶各式與海司式 (Jacobians and Hessians)

I. 定義。設 u, v, w 爲自變數 x, y, z 的函數，則行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \tag{41}$$

稱爲耶各式(Jacobian)，當所論之變數不生疑義時亦可寫作

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)};\ 或\ J(u,\ v,\ w);\ 或\ J。 \tag{42}$$

若 u, v, w 本身卽爲一個函數，如 u，關於 x, y, z 的微係數，是一個特例，行列式將爲

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{vmatrix} \tag{43}$$

稱爲 u 的海司式，寫爲 $H(u)$ 或簡寫爲 H。海司式是一個對稱行列式，其各元素都是 u 關於 x, y, z 的二級微係數。換言之，原函數 u 的海司式是 u 的一級微係數的耶各式；用(42)的記法，

$$H(u)=\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial(x,\ y,\ z)}。\tag{44}$$

II. 不相獨立的函數之耶各式與海司式。設

$$u=f(v),$$

則

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(v)\frac{\partial v}{\partial x};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=f'(v)\frac{\partial v}{\partial y}。$$

依第 142 節的方法,消去函數 $f(v)$ 得

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

或

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=0。\tag{45}$$

這是說,若 u 爲 v 的函數,則關於 x 與 y 的 u 與 v 的耶各式等於零。

此定理的逆定理亦成立。若(45)可以成立,則 u 爲 v 的函數。

同理,可證只有當 u 的海司式不等於零時,u 關於 x 與 y 的一級微係數可以互相獨立。

例一 若第 144 節中(9)的各分母,即 P, Q, R,爲零,試證 u 可以表示爲 v 的函數,即 u 與 v 不是互相獨立的。

解: 此式爲耶各式。若 u 爲 v 的函數,則耶各式爲零。若 u 或 v 僅爲 z 的函數,則 R 爲零;若 u 爲 v 的函數,則 P, Q, R 都爲零;又 $f(u, v)=0$ 可以表示爲 $v=c$,此中不含任意函數。

例二　證明 $\dfrac{\partial(\phi, u, v)}{\partial(v, y, z)}=0$ 是使 $\phi=0$ 爲 $P\dfrac{\partial z}{\partial x}+Q\dfrac{\partial z}{\partial y}=R$ 之積分的一個條件。

示意：　ϕ 爲 x, y, z 的函數可以表示爲 u 與 v 的函數。

例三　設 P, Q, R 爲已知，u 與 v 的耶各式必比例於 P, Q, R。此可從第 144 節中的方程式證之。

III.　一個函數的函數的耶各式。設 u_1, u_2 爲 x_1 與 x_2 的函數，而 x_1, x_2 又爲 y_1 與 y_2 的函數，

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial y_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial y_1};$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_2}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial y_2}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial y_2}。$$

依照行列式的乘法規則，

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_2}\\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_1}\\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2}\\[2ex] \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}, \tag{46}$$

即

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(y_1, y_2)}=\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x_1, x_2)}\cdot\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}。$$

這與下式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$$

在形式上很有類似之處。

IV. 隱函數❶ 的耶各式。若 u 與 v 不爲 x 與 y 的顯函數，而其關係爲

$$p=f_1(x,\ y,\ u,\ v)=0; \quad q=f_2(x,\ y,\ u,\ v)=0,$$

u 與 v 可視爲 x 與 y 的隱函數。求微係數，得

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0;$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0;$$

$$\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0;$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0;$$

依行列式的乘法的規則，

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial p}{\partial u} & \frac{\partial p}{\partial v}\\ \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial v}\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y}\\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y}\end{vmatrix} \tag{47}$$

或
$$\frac{\partial(p,\ q)}{\partial(u,\ v)}\cdot\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)}=-\frac{\partial(p,\ q)}{\partial(x,\ y)}.$$

此結果可推廣而用於含有任何個獨立的關係。

§ 187. 熱力學上的說明 (Illustrations from Thermodynamics)

---

❶ 一個函數可直接以自變數表示者稱爲**顯函數** (Explicit function)，例如 $z=x^2$; $z+a=bx^4$ 等 即稱 z 爲 x 的顯函數。一個函數不能以直接以自變數表示者稱爲**隱函數**(Implicit function)。故 $x^2+xy=y^2$; $x+y=z^c$ 爲隱函數。

行列式，耶各式與海司式在應用算學的部門常能遇到。下列者可以作爲本書前幾章的算學方法之一個簡單練習。讀者不難求知大部份係數的實際意義。參閱 J. E. Trevor 之作品見於 Journ. Phys. Chem., **3**, 523, 573, 1899; **10**, 99, 1906; 及 R. E. Baynes 所著 Thermodynamics, Oxford, 95,1878。

設 U 表示內能 (Internal energy)，ϕ 表示熵，p 表示壓力，v 表示體積，T 表示絕對溫度，Q 表示質量與成份都爲一定的一個體系的熱量，熱力學上的兩個定律陳述如下：

$$dQ=dU+p\,dv;\quad d\,Q=Td\phi。\tag{1}$$

見第 27 節。求以 u 的微係數表示下列各偏微係數的值：

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)_v,\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)_T,\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial T}\right)_p,\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial T}\right)_v,\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)_p,\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)_T;$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T,\ \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_\phi,\ \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p,\ \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_\phi,\ \left(\frac{\partial v}{\partial \phi}\right)_p,\ \left(\frac{\partial v}{\partial \phi}\right)_T。$$

I. 當 v 或 ϕ 爲常數時。從(1)，

$$-p=\frac{\partial U}{\partial v};\quad 與\quad T=\frac{\partial U}{\partial\phi}。\tag{2}$$

先以體積 v 爲常數，求(2)關於 ϕ 的微係數，得

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial\phi}\right)_v=\frac{\partial^2U}{\partial v\partial\phi};\quad 與\ \left(\frac{\partial T}{\partial\phi}\right)=\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}。\tag{3}$$

相除，得

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v=\frac{\dfrac{\partial^2U}{\partial v\partial\phi}}{\dfrac{\partial^2U}{\partial\phi^2}}。\tag{4}$$

次之,以熵 ϕ 爲常數,求(2)關於 v 的微係數,得

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_\phi=\frac{\partial^2 U}{\partial v^2};\quad 與\ \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_\phi=\frac{\partial^2 U}{\partial\phi\partial v}。\tag{5}$$

相除,得

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\phi=\frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial^2 U}{\partial\phi\partial v}}。\tag{6}$$

II. 當 p 或 T 爲常數時。我們知道

$$dp=\frac{\partial p}{\partial v}dv+\frac{\partial p}{\partial\phi}dp;\quad 與\quad dT=\frac{\partial\theta}{\partial v}dv+\frac{\partial T}{\partial\phi}d\phi,\tag{7}$$

第一,當 p 爲常數時,從方程式(7)中消去 dv 或 $d\phi$。從此證明

$$\frac{dv}{-\dfrac{\partial p}{\partial\phi}}=\frac{\partial\phi}{\dfrac{\partial p}{\partial v}}=\frac{d\theta}{J}$$

此中 J 表示耶各式 $\dfrac{\partial(p,T)}{\partial(v,\phi)}$。設 H 表示 U 的海司式,證明

$$-\left(\frac{\partial v}{\partial\phi}\right)_p=\frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial v\partial\phi}}{\dfrac{\partial^2 U}{\partial v^2}};\quad -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p=\frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial v\partial\phi}}{H};$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial T}\right)_p=\frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial v^2}}{H}。\tag{8}$$

最後,若 T 爲常數,證明

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)_T=\frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial v\partial\phi}}{\dfrac{\partial^2 U}{\partial\phi^2}};\quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)_T=\frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial v\partial\phi}}{H};$$

$$-\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T=\frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial\phi^2}}{H}。\tag{9}$$

§ 188. 曲面的研究 (Study of Surfaces)

正像二元一次方程式代表一個第一級的曲線(即爲直線)一樣，一個三元一次方程式是代表一個**第一級曲面** (A surface of the first order)。這種方程式的普遍形式爲

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

是一個平面方程式。

三元二次方程式代表**第二級曲面**(A surface of the second order)。三元二次方程式的普遍形式爲

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+\cdots\cdots+N=0。$$

所有第二級曲面的平面截口是圓，拋物線，雙曲線或橢圓，故第二級曲面總稱爲**圓錐曲線面**，其特例即爲球面，拋物線面，雙曲線面，橢圓面。

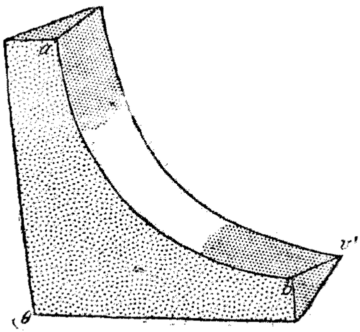
J. Thomson(Phil. Mag., **43**, 227, 1871)從氣體方程式

$$f(p,\ v,\ T)=0,\quad 即\quad pv=RT,$$

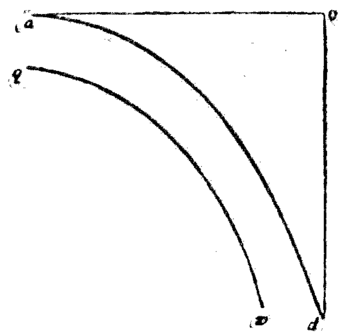
令 p, v, 與 T 同時變化，而描繪得一個第二級曲面。圖一百七十五中 $pabv$ 曲面是這樣求得的。

因爲任何垂直於 T 軸或 θ 軸的平面截口爲等邊雙曲線，故此爲雙曲線面。圖二十九中的等溫線 T_1, T_2, T_3,⋯⋯ 可以視爲垂直 θ 軸

於 T_1, T_2, T_3……各點的平面截口在 pv 平面上的射影。圖一百七十六中，相當於 pv 與 ab 的曲線就是這樣的射影。



圖一百七十五



圖一百七十六

通常，三個變數產生的曲面，不像受着 Boyle 與 Charles 定律支配的氣體方程式所產生者那樣簡單。

Van der Waal 氏 ψ 曲面是從變數 ψ, x, v 發展而得，此中 ψ 爲定體積 $(U-T\phi)$ 時的熱力位 (Thermodynamic potential)；x 爲物質的成份；v 爲所論體系的體積。ψ 曲面類似於，但不全同於，上圖中的 $pabv$ 曲面。

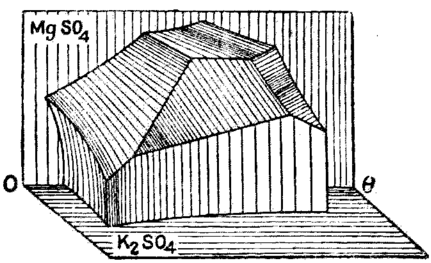
所謂 **Gibbs 熱力面**是以同樣的方法從已知體系的變數 v, U, ϕ 求得，此中 v 爲體積，U 爲內能，ϕ爲熵。

重鹽 (Double salt) 的可溶性，可以參照三個變數而研究之，卽溫度 θ，與每種成份的濃度 s_1 與 s_2。如硫酸鎂 $MgSO_4$ 與硫酸鉀 K_2SO_4 的混合溶液會得沉澱出重鹽 $MgSO_4 \cdot K_2SO_4 \cdot 6H_2O$，但須在某種條件之下。所得的曲面稱爲**可溶性面** (Surface of solibility)。在某種條件下，此溶液又會沉澱出別種固體。例如，我們也可得 $MgSO_4 \cdot 7H_2O$ 的

結晶，如此卽有別的可溶性面。這還並不完全。上述的體系也可沉澱出含水物 $MgSO_4 \cdot 6H_2O$ 的結晶；重鹽 $MgSO_4 \cdot K_2SO_4 \cdot 4H_2O$；或分立的成份。最後,所得一組曲面如圖一百七十七所示。

方程式

$$f(x,y,z)=0; \quad 或 \quad z=\phi(x,y),$$



圖一百七十七

所代表的曲面還顯示任何物質關於變數 x, y, z 的特性。實際上曲面所具有的某些幾何特性隨着物質的性質而定。所以當我們知道曲面方程式時，必須能研究此曲面在任何點的性質

I. 切線與切面。設 $P(x_1, y_1, z_1)$爲曲面

$$u=f(x, y, z)=0 \tag{1}$$

上的一點。通過此點的直線方程式爲（第 47 節）

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}=r, \tag{2}$$

若再與此面相交,則

$$u=f(x_1+lr, \ y_1+mr, \ z_1+nr)=0。 \tag{3}$$

依據戴氏定理,

$$r\left[l\frac{du}{dx_1}+m\frac{du}{dy_1}+n\frac{du}{dz_1}\right]$$

$$+\frac{r^2}{\underline{|2}}\left[l\frac{d^2u}{dx_1{}^2}+m\frac{d^2u}{dy_1{}^2}+n\frac{d^2u}{dz_1{}^2}\right]+\cdots\cdots=0。 \tag{4}$$

因 P 爲此面上之點，故 r 的一個值必須爲零；我們若選取可使

$$l\frac{du}{dx_1}+m\frac{du}{dy_1}+n\frac{du}{dz_1}=0 \tag{5}$$

的直線，則 r 的另一值亦爲零；於是另一交點重合於 P，卽此線爲切線。方程式(5)表示切曲面於 $P(x_1, y_1, z_1)$ 的切線的方向餘弦間的關係。從(2)與(5)消去 l, m, n，可得

$$(x-x_1)\frac{\partial u}{\partial x_1}+(y-y_1)\frac{\partial u}{\partial y_1}+(z-z_1)\frac{\partial u}{\partial z_1}=0。 \tag{6}$$

此爲 x, y, z 的一次方程式代表一個平面。方程式(6)是在 $P(x_1,y_1,z_1)$ 點的**切面方程式**(Equation of a tangent plane)。

若曲面的形式是

$$z=f(x, y), \tag{7}$$

方程式(6)在 $P(x_1, y_1, z_1)$點，將爲

$$(x-x_1)\frac{\partial z_1}{\partial x_1}+(y-y_1)\frac{\partial z_1}{\partial y_1}=z-z_1。 \tag{8}$$

例一　證明球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$，其上一點(x_1, y_1, z_1) 的切面爲 $xx_1+yy_1+zz_1=r^2$。

示意：$\frac{\partial u}{\partial x_1}=2x_1$；$\frac{\partial u}{\partial y_1}=2y_1$；$\frac{\partial u}{\partial z_1}=2z_1$。代入方程式(6)卽得，

$$xx_1+yy_1+zz_1=x_1^2+y_1^2+z_1^2=r^2。$$

例二　拋物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=4pz$，其上一點$(x_1, y_1, z_1)$的切面方程式爲$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=2p(z+z_1)$。

例三　證明，若上列(1)或(7)的切面平行於 xy 平面，則 $z-z_1=0$。

示意：當一個直線平行於 x 軸時則與此軸的交角為零，而 $\tan 0°=0$；故此，$\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 與 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 必都為零；而 $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ 不等於零。

II. 法線。類似於第 39 節(1)，讀者自己可以證得，過曲面 $f(x, y, z)=0$ 上一點 (x_1, y_1, z_1) 而垂直於此點切面的直線方程式為

$$\frac{x-x_1}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}=\frac{y-y_1}{\dfrac{\partial u}{\partial y}}=\frac{z-z_1}{\dfrac{\partial u}{\partial z}};\quad \text{或}\quad \frac{x-x_1}{\dfrac{\partial z}{\partial x}}=\frac{y-y_1}{\dfrac{\partial z}{\partial x}}=\frac{z-z_1}{-1}。\tag{9}$$

此卽法線方程式。

例一　證球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 的法線是 $\dfrac{x}{x_1}=\dfrac{y}{y_1}=\dfrac{z}{z_1}$。

用前款例一的結果代入(9)即得。

例二　曲面 $xyz=a^3$ 上一點 (x_1, y_1, z_1) 的法線為 $xx_1-x_1^2=yy_1-y_1^2=zz_1-z_1^2$。

例三　曲面 $z=2x^2-4y^2$，試求其上一點的切面與法線。[1]

例四　我們不知結合 p, v, T 的特性方程式。若為理想氣體，則有 $pv=RT$。從第 27 節(13)與(15)可得基本方程式

$$dU=Td\phi-pdv,\tag{10}$$

結合 v, U, ϕ 的關係。此式是具有 $U=f(v, \phi)$ 形式的曲面的微分方程式，

$$\therefore\quad dU=\left(\frac{\partial U}{\partial \phi}\right)_v d\phi+\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_\phi dv。\tag{11}$$

[1] 本題係譯者補入。

此中兩個偏微係數與 -1 比例於曲面上任一點的法線的方向餘弦。再從(10)與(11)，

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \phi}\right)_v = T; \quad \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right) = -p。\tag{12}$$

換言之，曲面上任一點的法線的方向餘弦比例於 T, $-p$, -1。故 v, U, ϕ 爲此點在曲面上的坐標，還有一對變數 p 與 T 卽可從此點法線的方向餘弦知之。於是五個數量 p, v, T, U, ϕ 可以用這辦法很簡單的表示出來。

III. **轉向切線** (Inflexional tangents) 借助於廣義的戴氏定理(第 100 節)與第 101 節中的方法，我們可以討論曲面方程式。無限個直線

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}, \tag{13}$$

是適合下列關係的，

$$l^2+m^2+n^2=1; \quad l\frac{\partial z}{\partial x}+m\frac{\partial z}{\partial y}-n=0。\tag{14}$$

這些直線交曲面於重合的兩點；其中有兩個直線亦能適合。

$$l\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2lm\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+m\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0。\tag{15}$$

此二直線交曲面於重合的三點，稱爲**轉向切線**。此二直線或爲實而不同，或爲實而相合，或虛的，須隨 l, m 的二次式

$$z_{xx}l^2+2z_{xy}lm+z_{yy}m^2 \tag{16}$$

的根爲實而不同，或實而相同，或虛，而定。卽是以下式爲準

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=\begin{cases}+\text{（逆點）}\\ 0\text{（共軛點）}\\ -\text{（節點）}\end{cases}\tag{17}$$

曲面的每個轉向切線在其切點交曲線於重合的三點。轉向切線與曲面比其他切線切得更密。在曲線與切面的切點有逆點，有共軛點，有節點，須視上式中爲正，爲零，爲負而定。

在 (x_1, y_1, z_1) 點的轉向切線方程式可以從(13)，(15)與(12)的第二式消去 l, m, n 求得之。我們若以同樣方法處理曲面方程式

$$u=f(x, y, z)=0,\tag{18}$$

欲決定轉向切線必須知道下列三式

$$l^2+m^2+n^2=1;\ l\frac{\partial u}{\partial x}+m\frac{\partial u}{\partial y}+n\frac{\partial u}{\partial z}=0。\tag{19}$$

$$\left(l\frac{\partial}{\partial x}+m\frac{\partial}{\partial y}+n\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u=0。\tag{20}$$

三個轉向切線之爲實而不同，或實而相合，或實的，須按行列式

$$\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{xz} & u_x\\ u_{xy} & u_{yy} & u_{yz} & u_y\\ u_{xz} & u_{yz} & u_{zz} & u_z\\ u_x & u_y & u_z & u_0\end{vmatrix}\tag{21}$$

之爲負，爲正，爲零而定。轉向切線爲虛的時，曲面在此點或爲凸，或爲凹；逆定理亦確。再者，若

$$\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{vmatrix} \quad 與 \quad u\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{xz} \\ u_{xy} & u_{yy} & u_{yz} \\ u_{xz} & u_{yz} & u_{zz} \end{vmatrix} \tag{22}$$

在 $P(x, y, z)$點爲正，如 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 與 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 同號，則曲面是凹的，若 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 與 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 異號，則曲面是凸的。

附錄一　公式集

『第一次當我遇到要在五個東西上加以別的七個時，我把全部計數一遍；但是後來我發見前五個可以不必數的，我就省去一部的麻煩；再後來，記得五與七之和是十二，我就可以完全不用計數了』❶。——E. Mach.

§ 189. 小數量的計算(Calculation with Small Quantities)

在第五章關於近似值的計算已經研究過了，故下列公式的求法，不必再說什麼。

等號在這裏要讀作『近似於』或『很接近於』。設 $\alpha, \beta, \gamma\cdots\cdots$ 與 1 或 x 相比時是很小的分數；

$$(1\pm\alpha)(1\pm\beta)=1\pm\alpha\pm\beta。\tag{1}$$

$$(1\pm\alpha)(1\pm\beta)(1\pm\gamma)\cdots\cdots=1\pm\alpha\pm\beta\pm\gamma\pm\cdots\cdots\tag{2}$$

$$(1\pm\alpha)^2=1\pm2\alpha;\quad(1\pm\alpha)^n=1\pm n\alpha。\tag{3}$$

$$\sqrt{1+\alpha}=1+\frac{1}{2}\alpha。\quad\sqrt{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\tag{4}$$

$$\frac{1}{(1\pm\alpha)}=1\mp\alpha;\ \frac{1}{(1\pm\alpha)^n}=1\mp n\alpha;\ \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}=1-\frac{1}{2}\alpha。\tag{5}$$

---

❶ "When for the first time I have occasion to add five objects to seven others. I count the whole lot through, but when I afterwards discover that by starting to count from five I can save myself part of the trouble, and still later, by remembering the five and seven always add up to twelve, I can dispense with the counting altogether."—E. Mach.

$$\frac{(1\pm\alpha)(1\pm\beta)}{(1\pm\gamma)(1\pm\delta)}=1\pm\alpha\pm\beta\mp\gamma\mp\delta。\tag{6}$$

在下列公式中右邊第三項是作爲第二級近似値看，除非需要額外的正確度，都不採用。

$$e^{\alpha}=1+\alpha;\quad a^{\alpha}=1+\alpha\log a。\tag{7}$$

$$\log(1+\alpha)=\alpha=\alpha-\frac{1}{2}\alpha^2。\tag{8}$$

$$\log(x+\alpha)=\log x+\frac{\alpha}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^2}{x^2}。\tag{9}$$

$$\log\frac{x+\alpha}{x-\alpha}=\frac{2\alpha}{x}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\alpha^2}{x^2}。\tag{10}$$

依第 98 節戴氏定理，

$$\sin(x+\beta)=\sin x+\beta\cos x-\frac{1}{2}\beta^2\sin x-\frac{1}{6}\beta^2\cos x+\cdots\cdots$$

若 β 不大於 $2\frac{1}{2}^{\circ}$，即 $\beta<.044$; $\frac{1}{2}\beta^2<.001$; $\frac{1}{6}\beta^3<.00001$。但 $\sin x$ 是不大於 1 的，故用下式即可有小數三位正確：

$$\sin(x+\beta)=\sin x+\beta\cos x;$$

若再多取一項 $-\frac{1}{2}\beta^2$，即可使結果正確到小數五位了。

$$\sin\alpha=\alpha=\alpha\left(1-\frac{1}{6}\alpha^2\right);\ \cos\alpha=1=1-\frac{1}{2}\alpha^2\tag{11}$$

$$\sin(x\pm\beta)=\sin x\pm\beta\cos x;\ \cos(x\pm\beta)=\cos x\pm\beta\sin x。\tag{12}$$

$$\tan\alpha=\alpha=\alpha\left(1+\frac{1}{3}\alpha^2\right);\ \tan(x\pm\beta)=\tan x\pm\beta\sec^2 x。\tag{13}$$

例　試證兩個小分數之積的平方根很近於其和之半。參閱(4)。一望而知$\sqrt{24.00092\times24.00098}=24.00095$。

§ 190. 排列與組合 (Permutations and Combinations)

幾個東西變換其一部或全部的次序時所得的每種排法稱為一種排列。例如兩個東西 a, b 的排列有二種;即 ab 與 ba;第三個東西 c 加入這兩種排列內時各有三種辦法如 $abc, acb, cab; bac, bca, cba$。故三個東西,全數排列時共 $1\times2\times3$ 種;第四個東西 d 加入這六種排列內時就各有四種辦法,於是四個東西全數排列共有 $1\times2\times3\times4$ 種。更普遍些,n 個東西全數排列,其種數共為

$$n(n-1)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1=\lfloor\underline{n}。$$

$\lfloor\underline{n}$ 讀為 n 的階乘。❶

慣用的記法,${}_nP_n$ 表示 n 個東西中取出 n 個來排列的種數,

$$_{\text{共有個數}}P_{\text{取出個數}}={}_nP_n=\lfloor\underline{n}。\tag{1}$$

若 n 個東西中有些是相同的,設如其中有 p 個是相同的一類,q 個是相同的另一類,r 個是相同的更另一類,

$$P_n=\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{p}\,\lfloor\underline{q}\,\lfloor\underline{r}}。\tag{2}$$

若 n 個東西中,祇取 r 個排列,則

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)=\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}}\tag{3}$$

幾個東西,取其全部或一部合成一組,不管每組內部的次序,則每組稱為一種組合。在排列中注意到各個東西的次序;在組合中只注意於某些東西的有無。從兩個東西取出兩個的組合是一種,因為 ab 與中所含的東西是相同的。三個東西中取出兩個的組合共為三種,即

---

❶ $\lfloor\underline{n}=\Gamma(n+1)$ 是珈瑪函數(第 136 節),這是值得記憶的。當 n 為很大時,

$$\lfloor\underline{n}=n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n},$$

此為 Stirling 公式。此式可使對數表用以求 $\lfloor\underline{n}$ 的值。誤差是 $\lfloor\underline{n}$ 之值的 $\frac{1}{12}n$ 級。

ab, bc, ca；四個東西中取出兩個的組合，共爲六種，卽 ab, ac, ad, bc, bd, cd。但當每組爲 r 個東西時，一組可有 $\underline{|r}$ 種不同的排列。

設 ${}_nC_r$ 表示 n 個東西中取出 r 個的組合種數。我們可見 ${}_nC_r$ 種組合可以產生 ${}_nC_r\times\underline{|r}$ 種排列。這是無異於 n 個東西中取出 r 個的排列種數。故此，從(3)

$$C_r=\frac{{}_nP_r}{\underline{|r}}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}\tag{4}$$

卽

$${}_nC_r=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}。\tag{5}$$

幾乎所有的排列與組合的問題可以參考標準公式(3)與(5)的。特殊情形，在任何代數學教本中都論及之。雖然許多有機化合物，不斷的登載在雜誌之上，但究竟可以存在者有如何的多，化學家實無一些印象。例如，Hatchett 的論文 (Phil. Trans., **93**, 193, 1803) 曾經提到，關於所有金屬所成可能的合金，作系統的考察，從二種金屬進而至於三種，四種的合金。但他是否知道他所從事的共有多少呢?

例一　證明從三十種金屬，每種取出等量來，則二種金屬所成者可有 435 種，三種金屬所成者可有 4060 種，四種金屬所成者可有 27405 種必須考察。

例二　若三十種金屬，每種有同樣的四個不等量，可任取其中之一，則二種金屬所合成者可有 5655 種，三種金屬所合成者可有 247660 種，四種金屬所合成者可有 6933465 種，必須考察。

碳化氫系的同分異構物的種數（包括側鏈等等）在下文中曾討論到：Cayley(Phil. Mag., [4], **13**, 172, 1857; **47**, 444, 1874; 或

B. A. Reports, 257, 1875) 最早啓發這關鍵的問題。並參閱 O. J. Lodge(Phil. Mag., [4], **50**, 367, 1875), Losanitsch(Ber., **30**, 1917, 1897), Hermann(同書 3423), H. Rey(同書 **33**, 1910, 1900), H. Kauffmann(同書 2231)。

§ 191. 量法公式(Mensuration Formulae)

Pythagoras 定理 (Euclid, i, 47)是常用的。在任何直角三角形中,如圖一百八十四,

$$斜邊平方=其他兩邊平方之和。\tag{1}$$

Euclid, vi, 4 亦很有用。若兩個三角形 ABC 與 DEF 互相等角,即一個三角形的 A 角, B 角, C 角各自等於另一三角形的 D 角, E 角, F 角,則等角的對邊成比例。——相似三角形定理——故

$$AB : BC = DE : EF;\quad BC : CA = EF : FD;$$

$$AB : AC = DE : DF。$$

$\pi = 3.1416$, 或 $\frac{22}{7}$, 或 $180°$; θ 爲弧度; r 爲圓的半徑。

I. 弧及周的長

$$圓的弦(中心角爲\ \theta) = 2r \sin \frac{1}{2}\theta。\tag{2}$$

$$圓的弧(中心角爲\ \theta) = \frac{\theta}{180}\pi r。\tag{3}$$

$$圓周 = 2\pi r = \pi \times 直徑。\tag{4}$$

$$橢圓周(兩軸之半各爲\ a, b) = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}。\tag{5}$$

三角形中。$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$。

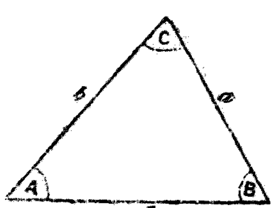
II. 面積

矩形(其邊各爲 a, b) $=a\times b$。 (6)

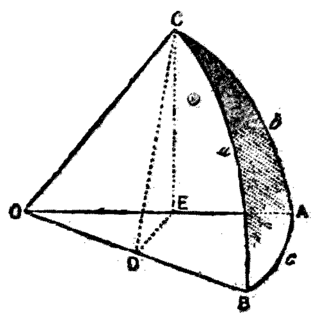
平行四邊形(其邊各爲 a, b; 夾角爲 θ) $=ab\sin\theta$。 (7)

菱形 $=\frac{1}{2}$(對角線之積)。 (8)

$$\left.\begin{aligned}&\text{三角形(高爲 } h\text{; 底爲 } b) = \frac{1}{2}h\cdot b;\\ &\text{三角形(兩邊爲 } a, b\text{; 夾角爲 } c) = \frac{1}{2}ab\sin c;\\ &\text{三角形[三邊爲 } a,b,c\text{; } s=\frac{1}{2}(a+b+c)]\\ &\qquad = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\text{。}\end{aligned}\right\} \quad (9)$$



百一百七十八



圖一百七十九

球面三角形 $=(A+B+C-\pi)r^2$, (10)

此中　爲球半徑; A, B, C 爲球面三角形的角。(圖一百七十九)

梯形(高爲 h, 平行邊各 a, b) $=\frac{1}{2}h(a+b)$。 (11)

正 n 邊形(邊爲 a) $=\frac{1}{4}na^2\cos\frac{180^\circ}{n}$。 (12)

圓$=\pi r^2=\frac{1}{4}\pi\times$直徑。 (13)

扇形(中心角爲 θ)$=\frac{1}{2}$(弧)$\times$半徑$=\frac{1}{360}\pi\theta r^2$。 (14)

弓形$=$扇形$-$三角形$=\frac{\theta}{360}\pi r^2-\frac{1}{2}r^2\sin\theta$ (15)

拋物線與縱坐標兩倍$(2y)$所圍面積$=\frac{4}{3}xy$;
$=$同底同高平行四邊形的$\frac{2}{3}$。 (16)

橢圓$=\pi ab$。 (17)

曲線所圍不規則圖形之面積(可以參閱 Simpson 氏規則)。

相似形。相似形的面積之比等於其相當邊平方之比。任何平面圖形的面積之比等於其線向度平方之比。例如，圓的面積之比等於其半徑平方之比。

III. 面(頂與底除外)。

球$=4\pi r^2$。 (18)

圓柱(高爲 h)$=2\pi rh$。 (19)

角柱(底周爲 p)$=ph$。 (20)

圓錐或角錐$=\frac{1}{2}p\times$側高。 (21)

球帶(高爲 h)$=2\pi rh$。 (22)

IV. 體積。

長方體(邊爲 a, b, c)$=abc$。 (23)

$$\left.\begin{aligned}&\text{球}=\frac{2}{3}\ \text{外切圓柱};\\&\quad=\frac{4}{3}\pi r^3=4.189r^3=\frac{1}{6}\pi(\text{直徑})^3。\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

$$\text{球鼓 (Spherical segment)}=\frac{1}{6}\pi h(3R^2+3R'^2+h^2);\tag{25}$$

此中 R,R' 各爲上下底半徑，h 爲其高。

$$\left.\begin{aligned}&\text{圓柱或角柱}=\text{底}\times\text{高};\\&\text{圓柱}=\pi r^2h\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{圓錐或角錐}=\frac{1}{3}(\text{外切圓柱或角柱})=\text{底}\times\frac{1}{3}\text{高};\\&\text{圓錐}=\frac{1}{3}\pi r^2h=1.047r^2h。\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

$$\text{直圓錐台}=\frac{1}{3}\pi h(a^2+ab+b^2);\tag{28}$$

此中 a,b 各爲上下底半徑。

相似形。相似形體積之比等於其相當邊的立方比。任何立體的體積之比等於其線向度的立方比。例如，球的體積之比等於其半徑的立方比。

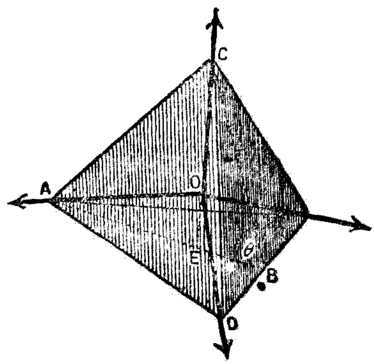
V. 重心。

三角形平片。頂點與對邊中點聯線上，距頂點三分之二之處。

圓錐或角錐　頂點與底的重心之聯線上，距頂點四分之三之處。

Bayer 氏關於碳的環狀化合物的應變學說 (Strain theory) 曾引起有機化學家的相當注意。這是根據於一個假定，即一個碳原子四個原子價的作用方向，只沿着此原子重心與正四面體頂點的聯結線。換言

之，任何兩個這樣的原子間，其化學相引力只沿着這四個方向發生作用。當幾個碳原子結合而成環狀化合物，其引力方向卽生偏轉。此時有比例應變存在。應變愈大，化合物愈不穩定。這些假定的效用問題，暫時不提，我們且求二原子至六原子的環狀化合物的引力方向之偏轉角，作爲一個量法的習題。



圖一百八十

I. **假定其形式爲正四面體，求在一個碳原子中心的引力方向間的角。** 設 s 爲正四面體（圖一百八十）的側高，AB 或 BC；h 爲其垂直的高 EC；l 爲任何一邊 DC 或 AC；ϕ 爲四面體重心與任何二頂點聯線間的夾角 DOC 或 AOC。

$\therefore\quad s^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2=l^2;\quad s^2=\frac{3}{4}l^2$。但 h 分 s 於 $2:1$，$h^2=l^2-\left(\frac{2}{3}s\right)^2=\frac{2}{3}l^2$。但 $CD=2BD=l$；$BC=AB=s$；$CE=h$。故 $h=\sqrt{\frac{2}{3}}l$。此正四面體的重心分 CE 於 $3:1$，其分點卽爲 0。

$$\therefore\ \sin\frac{\phi}{2}=\frac{1}{2}AC\div OC=\frac{\frac{l}{2}}{\frac{3}{4}h};\quad 卽\ \phi=109°28'。\qquad (29)$$

II. **當二個至六個碳原子合成一個封閉環狀時，求引力方向的偏轉角。** 從（29），如乙炔（$H_2C\equiv CH_2$），則此角從 $109°28'$ 偏轉至 $\frac{1}{2}(109°28')$ 卽 $55°$，$44'$。如環丙烷，假定其環爲等邊三角形，則此角

偏轉$\frac{1}{2}(109°28'-60°)=24°44'$。如環丁烷，假定其環爲正方形，此角偏轉$\frac{1}{2}(109°28'-90°)=9°34'$。如環戊烷，假定其環爲正五邊形，此角偏轉$\frac{1}{2}(109°28'-108°)=0°44'$。如環己烷，假定其環爲正六邊形，此角偏轉$\frac{1}{2}(109°28'-120°)=-5°36'$。

在圖一百八十中，θ 角爲 $70°32'$。參閱 H. Sachse 氏 "On the Configuration of the Polymethylene Ring," Zeit. Phys. Chem., **10**，203，1892。

§ 192. 平面三角法(Plane Trigonometry)

初學微積分的人須將三角法的工作涉歷一過。下列的大要或許不無助益。三角法所研究者爲三角形邊與角的關係。若此三角形畫在平面上的，則用平面三角法；若此三角形畫在球面上的，則用球面三角法。三角法在物理與化學上的應用是關於線與角本身的推理，而關於線與角所代表的數量者少，(卽那些藉角的函數進行者)。

1. 角的量法。角是由相交的兩個直線所構成。角的大小關於此兩個直線的相對方向或斜度，而與其長短無關。在實用上，角的大小常以度，分，秒量之。這些單位是以直角分爲相等部份，其定義如下：

1 直角＝90 度，寫爲 $90°$；

1 度 ＝60 分，寫爲 $60'$；

1 分 ＝60 秒，寫爲 $60''$。

但在理論的計算上，另有一組量角的單位。在圖一百八十一中圓

弧 PA 與 $P'A'$ 的長短是各與半徑 OA 與 OA' 成比例的，卽

$$\frac{\text{圓弧 } P'A'}{\text{半徑 } OA'}=\frac{\text{圓弧 } PA}{\text{半徑 } OA}。$$

若中心角一定，則圓弧與半徑之比亦一定。故這個比例可以用來作爲一種量角的方法。當

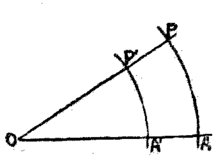
$\frac{\text{圓弧}}{\text{半徑}}=1$ 時，其中心角稱爲 1 **弧度**(Radian)。

$$2\text{ 直角}=180°=\pi\text{ 弧度(此中 }\pi=3.14159)。\qquad (1)$$

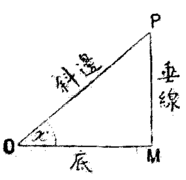
此種量法稱爲**弧度法**(Circular or radian measure)。

2. **度與弧度的關係**。圓的半徑爲 r，則其圓周爲 $2\pi r$；圓的半徑爲 1，則圓周爲 2π。相當於弧 2π, π, $\frac{1}{2}\pi$, …… 的角各爲 360°, 180°, 90°……。圖一百八十二中設角 AOP 爲 D 度或 α 弧度，則

$$D°:360°=\alpha:2\pi。\quad \therefore D°=\frac{\alpha}{2\pi}360,\quad \text{卽 } \alpha=\frac{D}{360}2\pi。\qquad (2)$$



圖一百八十一



圖一百八十二

例一 一弧度等於幾度？

$$\text{此時 } \alpha=1,\quad \therefore\ D=\frac{360}{2\pi}=57.295°=57°17'44.8''。\qquad (3)$$

例二 一度等於幾弧度？ 答：$\frac{\pi}{180}$ 卽 0.0175。

例三 $2\frac{1}{2}^{\circ}$ 等於幾弧度? 答: 0.044。

度與弧度的換算表見於附錄二表十三。

3. **一個角的三角函數為一個三角形邊的函數。**角(或可說圓弧,如圖一百八十一)的某種函數稱為三角函數。從 P 作 $PM \perp OM$(圖百八十二)。在三角形 OPM 中,

(i) 比值$\frac{MP}{OM}$,或$\frac{\text{垂線}}{\text{底}}$,稱為角 POM 的正切 (Tangent),寫為 $\tan\angle POM$。

這裏需要證明者,即此比值只與角 POM 之大小有關而與三角形 POM 的大小無關。如在圖一百八十一的 P 與 P' 作直線 PM 與 $P'M'$ 垂直於 OA。於是 ΔPOM 與 $\Delta P'O'M'$,故 $\frac{M'P'}{OM'}=\frac{MP}{OM}$。

(ii) 比值$\frac{OM}{MP}$,或$\frac{\text{底}}{\text{垂線}}$,稱為角 POM 的餘切(Cotangent),寫為 $\cot\angle POM$。注意一角的餘切等於其正切的倒數。

(iii) 比值$\frac{MP}{OP}$,或$\frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}$,稱為角 POM 的正弦 (Sine),寫為 in$\angle POM$。

(iv) 比值$\frac{OP}{MP}$,或$\frac{\text{斜邊}}{\text{垂線}}$,稱為角 POM 的餘割 (Cosecant),寫為 $\operatorname{cosec}\angle POM$。注意一角的餘割為其正弦的倒數。

(v) 比值$\frac{OM}{OP}$,或$\frac{\text{底}}{\text{斜邊}}$,稱為角 POM 的餘弦 (Cosine),寫為 $\cos\angle POM$。

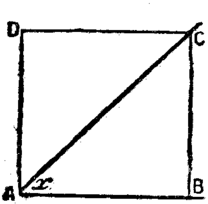
(vi)　比值$\frac{OP}{OM}$，或$\frac{\text{斜邊}}{\text{底}}$，稱爲角 POM 的正割 (Secant)，寫爲 $\sec\angle POM$。注意一角的正割爲其餘弦的倒數。

例　設以 x 代 $\angle POM$，則

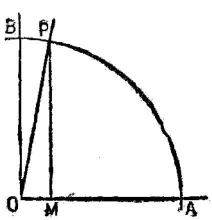
$$\sin x=\frac{1}{\operatorname{cosec} x};\quad \cot x=\frac{1}{\tan x};\quad \cos x=\frac{1}{\sec x}。$$

這些函數的平方，如 $(\sin x)^2$，$(\cot x)^2$，……普通寫作 $\sin^2 x$，$\cot^2 x$，……；但$(\sin x)^{-1}$，$(\cot x)^{-1}$，……的意義爲 $\frac{1}{\sin x}$，$\frac{1}{\cot x}$，……不能寫作 $\sin^{-1}x$，$\cot^{-1}x$，……等形式，因此種形式的符號另有其他意義。

4.　**求三角函數的數值。**



圖一百八十三



圖一百八十四

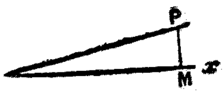
(i)　45° 或 $\frac{\pi}{4}$。作正方形如圖一百八十三。聯 AC。則 $\angle BAC=\frac{1}{2}$直角 $=45°$。在直角三角形 ABC 中，

$$AC^2=AB^2+BC^2。$$

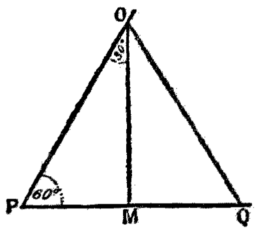
因 AB，BC 爲正方形之邊，故 $AB=BC$；於是 $AC^2=2AB^2=2BC^2$；即 $AC=\sqrt{2}\,AB=\sqrt{2}\,BC$。

$$\therefore \quad \sin 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{AB} = 1。 \tag{4}$$



圖一百八十五



圖一百八十六

(ii) 90° 或 $\frac{\pi}{2}$。在圖一百八十四中,若 POM 爲直角三角形,當 M 接近於 O 時,則 $\angle MOP$ 接近於 90°。當 MP 與 OP 相合,則 $OP=MP$。又 $OM=$ 零。

$$\therefore \quad \sin 90^\circ = \frac{MP}{OP} = 1; \quad \cos 90^\circ = \frac{OM}{OP} = 0;$$

$$\tan 90^\circ = \frac{MP}{OM} = \infty。 \tag{5}$$

(iii) 0°。在圖一百八十五中,當 $\angle MOP$ 愈變愈小,則 OP 接近於 OM,到了極限,與之相合。故 $PM=$ 零; $OM=OP$。

$$\therefore \quad \sin 0^\circ = \frac{MP}{OP} = 0; \quad \cos 0^\circ = \frac{OM}{OP} = 1;$$

$$\tan 0^\circ = \frac{MP}{OM} = 0。 \tag{6}$$

(iv) 60° 或 $\frac{\pi}{3}$。在等邊三角形中 (圖一百八十六),三角都是

$60°$。作 $OM \perp PQ$； 則 $2PM=PQ=PO$。又因 $PO^2=MP^2+MO^2$。

$\therefore\ 4PM^2=MO^2+PM^2$； 卽 $MO^2=3PM^2$。 $\therefore\ MO=\sqrt{3}\,PM$。

$$\therefore\ \sin 60°=\frac{MO}{PO}=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos 60°=\frac{PM}{PO}=\frac{1}{2};$$

$$\tan 60°=\frac{MO}{PM}=\sqrt{3}。\tag{7}$$

(v) $30°$ 或 $\frac{\pi}{6}$。用前款的結果，

$$\therefore\ \sin 30°=\frac{MP}{OP}=\frac{1}{2};\ \cos 30°=\frac{MO}{OP}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\tan 30°=\frac{MP}{OM}=\frac{1}{\sqrt{3}}。\tag{8}$$

這些結果列爲下表：

表 XIV. 特殊角的三角函數之數值

角	0° 與 360°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
正　弦	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
餘　弦	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
正　切	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞

此外如 $\sin 15°=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$； $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$。

還須知道清楚的，角雖是恆用度分秒法量測，但在計算時則須化爲弧度，除非特別說明須直接採用度分秒者。在第 166 節 I. 例六中已可見到。假使我們有時須用到近似公式

$$\sin(x+\theta)=\sin x+\theta\cos x,$$

其中 $x=35°$, $\theta=50''$。三角函數自然數值表中可以查得 $\sin 35°$, $\cos 35°$ 的數值,但 θ 必須化爲弧度。故此

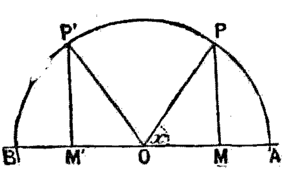
$$\sin(x+\theta)=\sin 35°+\frac{0.00926\pi}{180}\cos 35°,$$

因 $50''=\left(\frac{50}{60}\right)'=\left(\frac{50}{60}\times\frac{1}{60}\right)^{\circ}=0.00926°$。$\sin 35°$ 與 $\cos 35°$ 的數值取四位小數各爲 0.5736 與 0.8192。故 $\sin(x+\theta)$ 的數值爲 0.5737。

5. **三角函數正負號的規則。** 這在第 46 節 I 中已經講過。下表所列不過是一個總結。當角轉過四象限時其函數值的變化,亦載在內。

象　限	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$\sec x$	$\operatorname{cosec} x$
I {符號 數值	+ 0 至 1	+ 1 至 0	+ 0 至∞	+ ∞至 0	+ 1 至∞	+ ∞至 1
II {符號 數值	+ 1 至 0	− 0 至 1	− ∞至 0	− 0 至∞	− ∞至 1	+ 1 至∞
III {符號 數值	− 0 至 1	− 1 至 0	+ 0 至∞	+ ∞至 0	− 1 至∞	− ∞至 1
IV {符號 數值	− 1 至 0	+ 0 至 1	− ∞至 0	− 0 至∞	+ ∞至 1	− 1 −∞

6. **補角的函數** $180°-x$ 或 $\pi-x$ 稱爲角 x 的補角。圖一百八十七中,設 $\angle MOP=x$,延長 OM 至 M'。則 $\angle MOP'$ 爲 x 的補角。作 $\angle P'OM'=\angle MOP$。設 $OP'=OP$。作 $P'M'$ 與 PM 垂直於 BA。三角形 POM 與三角 $OP'M'$ 全同。設 OM



圖一百八十七

爲正，OM' 爲負，　$\therefore M'P'=MP;\ OM'=-OM$。

$$\sin(180°-x)=\sin(\pi-x)=\sin\angle POM'=\sin\angle M'OP'=\sin x。$$

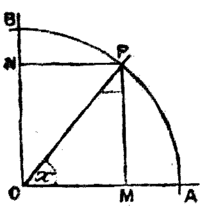
$\cos(180°-x)=-\cos x$；$\tan(180°-x)=-\tan x$。

例一　求 $\sin 120°$ 的值。

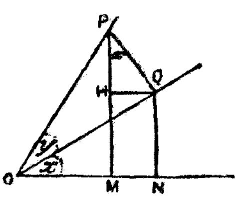
$$\sin 120°=\sin(180°-60°)=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}。$$

例二　求 $\tan 120°$ 的值。　　答：$-\sqrt{3}$。

7．**餘角的函數**　$90°-x$ 或 $\frac{\pi}{2}-x$ 稱爲 x 的餘角。圖一百八十八中，PN 與 PM 各垂直於 OB 與 OA。於是 $OM=NP$，$ON=MP$。



圖一百八十八



圖一百八十九

$$\sin(90°-x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\angle NOP=\frac{NP}{OP}=\frac{OM}{OP}=\cos x。$$

$\cos(90°-x)=\sin x$；$\tan(90°-x)=\cot x$；$\cot(90°-x)=\tan x$。

8．證 $\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$。

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{MP}{OP}\div\frac{OM}{OP}=\frac{MP}{OP}\times\frac{OP}{OM}=\frac{MP}{OM}=\tan x。$$

9．證 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$。圖一百八十九中，$OP^2=MP^2+OM^2$。以 OP^2 除兩邊得 $1=\frac{OP^2}{OP^2}=\frac{MP^2}{OP^2}+\frac{OM^2}{OP^2}=\left(\frac{MP}{OP}\right)^2+\left(\frac{OM}{OP}\right)^2$。

$\therefore\ \sin^2 x+\cos^2 x=1$。

10. 證 $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$。圖一百八十九中，$PQ$ 垂直於 OQ，$\angle HPQ=\angle NOQ$，

$$\sin(x+y)=\frac{MP}{OP}=\frac{PH}{OP}+\frac{QN}{OP}=\frac{PH}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OP}+\frac{NQ}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP};$$

$$=\sin x\cos y+\cos x\sin y。$$

11. **三角公式備要** 從上述各定義，可以求出下列的關係，在三角法中慣常作爲一種練習的。大部份也用幾何的方法證明之，10 題中卽爲一例。

注意：$\pi=180°$；或 3.14159 弧度；1弧度$=57.2958°$。

$$\left.\begin{aligned}&\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x;\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x;\\&\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sec x;\quad \sec\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{cosec} x;\\&\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x;\quad \cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\tan x。\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin(\pi-x)=\sin x;\quad \cos(\pi-x)=-\cos x;\\&\tan(\pi-x)=-\tan x;\quad \cot(\pi-x)=-\cot x。\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x;\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x;\\&\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot x;\quad \cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\tan x;\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin(\pi+x)=-\sin x;\quad \cos(\pi+x)=-\cos x;\\&\tan(\pi+x)=\tan x;\quad \cot(\pi+x)=\cot x。\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

$$\sin(-x)=-\sin x;\ \cos(-x)=\cos x;\ \tan(-x)=-\tan x。\tag{13}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1;\quad \frac{\sin^{-1}x}{x}=\frac{\tan^{-1}x}{x}=1;\tag{14}$$

此中 x 表示很微小的角。

當 n 為任何正負整數或零時，

$$\sin x=\sin\{n\pi+(-1)^n x\}。\tag{15}$$

$$\cos x=\cos(2n\pi\pm x)。\tag{16}$$

$$\tan x=\tan(n\pi+x)。\tag{17}$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x};\quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}。\tag{18}$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1。\tag{19}$$

$$\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x};\quad \cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}。\tag{20}$$

$$\operatorname{cosec} x=\sqrt{1+\cot^2 x};\quad \sec x=\sqrt{1+\tan^2 x}。\tag{21}$$

$$\sin x=\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}};\quad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}。\tag{22}$$

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y。\tag{23}$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y。\tag{24}$$

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y。\tag{25}$$

$$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y。\tag{26}$$

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y。\tag{27}$$

$$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y。\tag{28}$$

若 $x=y$，從(23)與(24)得

$$\sin 2x=2\sin x\cos x。\tag{29}$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x;\tag{30}$$

$$=2\cos^2 x-1; \tag{31}$$

$$=1-2\sin^2 x。 \tag{32}$$

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}。 \tag{33}$$

$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1;\quad 或\quad 1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}。 \tag{34}$$

$$\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2};\quad 或\quad 1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}。 \tag{35}$$

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x。 \tag{36}$$

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x。 \tag{37}$$

在 (25) 至 (28) 中設 $x+y=\alpha$; $x-y=\beta$; 則 $x=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$; $y=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$。爲求一致起見,最後結果中,仍以 x 代 α; y 代 β, 可得

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)。 \tag{38}$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)。 \tag{39}$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)。 \tag{40}$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)。 \tag{41}$$

就上列公式中選取適當者而相除之,可得

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}。 \tag{42}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x \tan y}。 \tag{43}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}。 \tag{44}$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x \cos y}。 \tag{45}$$

$$\cot x \pm \cot y = \frac{\sin(x\pm y)}{\sin x \sin y}。 \tag{46}$$

$$\cos\frac{x}{2}\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}};\quad \sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}};$$

$$\tan\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}。 \tag{47}$$

§ 193. 雙曲線函數的關係 (Relations among the Hyperbolic Functions)

$$\cos x = \cosh ix = \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})。 \tag{1}$$

$$\sin x = \frac{1}{i}\sinh ix = \frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})。 \tag{2}$$

$$\cos x + i\sin x = \cosh ix + \sinh ix = e^{ix}。 \tag{3}$$

$$\cos x - i\sin x = \cosh ix - \sinh ix = e^{-ix}。 \tag{4}$$

$$\cosh x = \cos ix; \qquad i\sinh x = \sin ix。 \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}; \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x};\\ &\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x}; \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}。\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\cosh 0 = 1; \quad \sinh 0 = 0; \quad \tanh 0 = 0。 \tag{7}$$

$$\cosh(\pm\infty) = +\infty; \ \sinh(\pm\infty) = \pm\infty; \ \tanh(\pm\infty) = \pm 1。 \tag{8}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sinh x}{x}=1;\quad \lim_{x\to0}\frac{\tanh x}{x}=1;\quad \lim_{x\to0}\frac{\cosh x}{x}=1。\tag{9}$$

$$\sinh(-x)=-\sinh x;\quad \cosh(-x)=\cosh x;$$
$$\tanh(-x)=-\tanh x。\tag{10}$$

$$\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y。\tag{11}$$

$$\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y。\tag{12}$$

$$\tanh(x\pm y)=\frac{\tanh x\pm\tanh y}{1\pm\tanh x\tanh y}。\tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned}\cosh(x+iy)&=\cosh x\cosh iy+\sinh x\sinh iy;\\&=\cosh x\cos y+i\sinh x\sin y。\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned}\sinh(x+iy)&=\sinh x\cosh iy+\cosh x\sinh iy;\\&=\sinh x\cos y+i\cosh x\sin y。\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

$$\sinh x+\sinh y=2\sinh\frac{1}{2}(x+y)\cosh\frac{1}{2}(x-y)。\tag{16}$$

$$\sinh x-\sinh y=2\cosh\frac{1}{2}(x+y)\sinh\frac{1}{2}(x-y)。\tag{17}$$

$$\cosh x+\cosh y=2\cosh\frac{1}{2}(x+y)\cosh\frac{1}{2}(x-y)。\tag{18}$$

$$\cosh x-\cosh y=2\sinh\frac{1}{2}(x+y)\sinh\frac{1}{2}(x-y)。\tag{19}$$

$$\sinh 2x=2\sinh x\cosh x=\frac{2\tanh x}{1-\tanh^2x}。\tag{20}$$

$$\cosh 2x=\cosh^2x+\sinh^2x;\tag{21}$$

$$=1+2\sinh^2x=2\cosh^2x-1;\tag{22}$$

$$=\frac{1+\tanh^2x}{1-\tanh^2x}。\tag{23}$$

$$\cosh x+1=2\cosh^2\frac{x}{2};\ \cosh x-1=2\sinh^2\frac{x}{2} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{x}{2}&=\frac{\sinh x}{1+\cosh x};\\ &=\frac{\cosh x-1}{\sinh x}。\end{aligned}\right\}。 \tag{25}$$

$$\sinh^2 x-\cosh^2 x=1。 \tag{26}$$

$$1-\tanh^2 x=\operatorname{sech}^2 x;\ \coth^2 x-1=\operatorname{cosech}^2 x。 \tag{27}$$

$$\cosh x=\frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 x}};\qquad \sinh x=\frac{\tanh x}{\sqrt{1-\tanh^2 x}}。 \tag{28}$$

$$\sinh 3x=3\sinh x+4\sinh^3 x。 \tag{29}$$

$$\cosh 3x=4\cosh^3 x-3\cosh x。 \tag{30}$$

反雙曲線函數　設 $\sinh^{-1}y=x$，則 $y=\sinh x$。

因 $y=\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，$\therefore\ e^{2x}-2ye^x-1=0$；$\therefore\ e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$。

x 爲實數值時，$\sinh^{-1}x$ 不能有負值。

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad \sinh^{-1}y&=\log\{y+\sqrt{y^2+1}\};\\ \cosh^{-1}y&=\log\{y+\sqrt{y^2-1}\}。\end{aligned}\right. \tag{31}$$

$$\tanh^{-1}y=\frac{1}{2}\log\{(1+y)/(1-y)\};$$

$$\coth^{-1}y=\frac{1}{2}\log\{(1-y)/(1+y)\}。 \tag{32}$$

$$\operatorname{sech}^{-1}y=\log\left\{1+\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\right\};$$

$$\operatorname{cosech}^{-1}y=\log\left\{1-\frac{\sqrt{1+y^2}}{y}\right\}。 \tag{33}$$

葛渡式(Gudermannian)參閱第 112 節圖一百三十八。

$$\theta=\cos^{-1}\operatorname{sech} x;\ \cos\theta=\operatorname{sech} x;\ \sec\theta=\cosh x。\tag{34}$$

$$e^{\theta}=\cos\theta+\sinh x=\sec\theta+\tan\theta。\tag{35}$$

$$\theta=\log(\sec\theta\tan\theta)=\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)。\tag{36}$$

$$\tanh\frac{x}{2}=\tan\frac{\theta}{2}。\tag{37}$$

當 θ 與 x 受上列各關係式之一所結合時，θ 稱爲 x 的葛渡式，寫作 $\operatorname{gd} x$。

類似於 Demoivre 定理，則有

$$(\cosh x\pm\sinh x)^n=\cosh nx\pm\sinh nx。\tag{38}$$

以雙曲線函數公式與第 192 節圓函數（卽三角函數）公式作一比較，很有用處的。從表 II 與表 III 取其相當的不定積分互相對照觀之，亦有類似之處。此外讀者可入下表所列者。

表 XVI　雙曲線函數與三角函數

雙曲線函數	三角函數	
$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sinh^{-1}\frac{x}{a}$。	$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}$。	(39)
$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\cosh^{-1}\frac{x}{a}$。	$\int\frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\cos^{-1}\frac{x}{a}$。	(40)
$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a}$，設 $x<a$。	$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$。	(41)
$\int\frac{-dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{x}{a}$，設 $x>a$。	$\int\frac{-dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{x}{a}$。	(42)
$\int\frac{-dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\frac{x}{a}$。	$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a}$。	(43)
$\int\frac{-dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{a}\operatorname{cosech}^{-1}\frac{x}{a}$。	$\int\frac{-dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\operatorname{cosec}^{-1}\frac{x}{a}$。	(44)
$\int\operatorname{sech} x\,dx=\operatorname{gd} x$。	$\int\sec x\,dx=\operatorname{gd}^{-1}x$。	(45)

雙曲線函數的數值可用級數公式計算之。

附錄二　數值表

『人類的心智是難於滿足的，確乎也永不會運用着牠的最高機能，要是牠所做者只是算法機的工作』。❶ ——J. C. Maxwell.

舊有算術運算的結果而需要常常用到者都編列爲算學表的形式。這些表的用處非但免去在老的運算的重複中耗費時間與精力，且可貢獻着更爲正確的工作，因爲正確的算學表一經造成，誤差就不易發生些。下列的表，大部份已經本書引用過，再在此地列入者因爲牠們在流行的簡單的算學式不易找到。除此地所有者外，讀者還得備有『倒數，平方根，立方根表』，『常用對數表』，『三角函數自然值表』，『三角函數對數表』。參閱序文末節所言。

表 I　函數的奇異值

曲線的性質	$\frac{dy}{dt}$	$\frac{d^2y}{dt^2}$	$\frac{d^3y}{dt^3}$	$\frac{d^4y}{dt^4}$
切線平行於 x 軸	0	..	..	..
切線平行於 y 軸	∞	..	..	..
極大值	0	−	..	..
	0	0	0	−
極小值	0	+	..	..
	0	0	0	+
迴折點	..	0	非 0	..
向下凸	非 0	+	..	..
向下凹	非 0	−	..	..

❶ "The human mind is seldom satisfied, and is certainly never exercising its highest functions, when it is doing the work of a calculating machine." —J. C. Maxwell.

表 II 標準積分

函數	微分法	積分法	
$u=x^n$	$\frac{du}{dx}=nx^{n-1}$	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$	(1)
$u=a^x$	$\frac{du}{dx}=a^x \log_e a$	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\log_e a}$	(2)
$u=e^x$	$\frac{du}{dx}=e^x$	$\int e^x dx=e^x$	(3)
$u=\log_e x$	$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x}=\log_e x$	(4)
$u=\sin x$	$\frac{du}{dx}=\cos x$	$\int \cos ax\, dx=\frac{\sin ax}{a}$	(5)
$u=\cos x$	$\frac{du}{dx}=-\sin x$	$\int \sin ax\, dx=-\frac{\cos ax}{a}$	(6)
$u=\tan x$	$\frac{du}{dx}=\sec^2 x$	$\int \sec^2 ax\, dx=\frac{\tan ax}{a}$	(7)
$u=\cot x$	$\frac{du}{dx}=-\operatorname{cosec}^2 x$	$\int \operatorname{cosec}^2 ax\, dx=-\frac{\cot ax}{a}$	(8)
$u=\sec x$	$\frac{du}{dx}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$	$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=\sec x$	(9)
$u=\operatorname{cosec} x$	$\frac{du}{dx}=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{cosec} x$	(10)
$u=\sin^{-1} x$	$\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}$	(11)
$u=\cos^{-1} x$	$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$=-\cos^{-1}\frac{x}{a}$	(12)
$u=\tan^{-1} x$	$\frac{du}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$	(13)
$u=\cot^{-1} x$	$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}$	$=-\frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{x}{a}$	(14)
$u=\sec^{-1} x$	$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a}$	(15)
$u=\operatorname{cosec}^{-1} x$	$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$=-\frac{1}{a}\operatorname{cosec}^{-1}\frac{x}{a}$	(16)
$u=\operatorname{vers}^{-1} x$	$\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\operatorname{vers}^{-1} x$	(17)
$u=\operatorname{covers}^{-1} x$	$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$	$=-\operatorname{covers}^{-1} x$	(18)

表 III　(一)標準積分表(雙曲線函數)

函　　數	微　分　法	積　　分	法
$y=\sinh x$	$\dfrac{dy}{dx}=\cosh x$	$\int\cosh x\ dx=\sinh x$	(9)
$y=\cosh x$	$\dfrac{dy}{dx}=\sinh x$	$\int\sinh x\ dx=\cosh x$	(10)
$y=\tanh x$	$\dfrac{dy}{dx}=\mathrm{sech}^2 x$	$\int\mathrm{sech}^2 x\ dx=\tan x$	(11)
$y=\coth x$	$\dfrac{dy}{dx}=-\mathrm{cosech}^2 x$	$\int\mathrm{cosech}^2 x\ dx=-\coth x$	(12)
$y=\mathrm{sech}\ x$	$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sinh x}{\cosh^2 x}$	$\int\dfrac{\sinh x}{\cosh^2 x}dx=-\mathrm{sech}\ x$	(13)
$y=\mathrm{cosech}\ x$	$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\cosh x}{\sinh^2 x}$	$\int\dfrac{\cosh x}{\sinh^2 x}dx=-\mathrm{cosech}\ x$	(14)
$y=\sinh^{-1} x$	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\sinh^{-1} x$	(15)
$y=\cosh^{-1} x$	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\cosh^{-1} x$	(16)
$y=\tanh^{-1} x$	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1-x^2}$, $x<1$	$\int\dfrac{dx}{1-x^2}=\tanh^{-1} x$	(17)
$y=\coth^{-1} x$	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x^2-1}$, $x>1$	$\int\dfrac{dx}{x^2-1}=\coth^{-1} x$	(18)
$y=\mathrm{sech}^{-1} x$	$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$	$\int\dfrac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=-\mathrm{sech}^{-1} x$	(19)
$y=\mathrm{cosech}^{-1} x$	$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$	$\int\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}=-\mathrm{cosech}^{-1} x$	(20)

(二)雙曲線函數與三角函數

雙　曲　線　函　數	三　角　函　數	
$\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sinh^{-1}\dfrac{x}{a}$	$\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$	(39)
$\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\cosh^{-1}\dfrac{x}{a}$	$\int\dfrac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\cos^{-1}\dfrac{x}{a}$	(40)
$\int\dfrac{dx}{a^2-x^2}=\dfrac{1}{a}\tanh^{-1}\dfrac{x}{a}$, 設 $x<a$	$\int\dfrac{dx}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$	(41)
$\int\dfrac{-dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{a}\coth^{-1}\dfrac{x}{a}$, 設 $x>a$	$\int\dfrac{-dx}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}\cot^{-1}\dfrac{x}{a}$	(42)
$\int\dfrac{-dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\dfrac{1}{a}\mathrm{sech}^{-1}\dfrac{x}{a}$	$\int\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\dfrac{1}{a}\sec^{-1}\dfrac{x}{a}$	(43)
$\int\dfrac{-dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}=\dfrac{1}{a}\mathrm{cosech}^{-1}\dfrac{x}{a}$	$\int\dfrac{-dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\dfrac{1}{a}\mathrm{cosec}^{-1}\dfrac{x}{a}$	(44)
$\int\mathrm{sech}\ x\,dx=\mathrm{gd}\ x$	$\int\sec x\,dx=\mathrm{gd}^{-1}x$	(45)

雙曲線函數的數値可用級數公式計算之。

表 IV 雙曲線正弦與餘弦，e^x，e^{-x} 的數值

x.	e^x.	e^{-x}.	cosh x.	sinh x.	x.	e^x.	e^{-x}.	cosh x.	sinh x.
0·00	1·00000	1·00000	1·00000	·00000	0·40	1·49182	0·67032	1·08107	0·41075
·01	1·01005	·99005	1·00005	·01000	·41	1·50682	·66365	1·08523	·42158
·02	1·02021	·98020	1·00020	·02000	·42	1·52196	·65705	1·08950	·43246
·03	1·03045	·97045	1·00045	·03000	·43	1·53726	·65051	1·09388	·44337
·04	1·04081	·96080	1·00080	·04001	·44	1·55271	·64404	1·09837	·45434
·05	1·05127	·95123	1·00125	·05002	·45	1·56831	·63763	1·10297	·46534
·06	1·06184	·94177	1·00180	·06004	·46	1·58407	·63128	1·10768	·47640
·07	1·07251	·93239	1·00245	·07006	·47	1·59999	·62500	1·11250	·48750
·08	1·08329	·92312	1·00320	·08009	·48	1·61607	·61878	1·11743	·49865
·09	1·09417	·91393	1·00405	·09012	·49	1·63232	·61263	1·12247	·50985
·10	1·10517	·90484	1·00500	·10017	·50	1·64872	·60653	1·12763	·52110
·11	1·11628	·89583	1·00606	·11022	·51	1·66529	·60050	1·13289	·53240
·12	1·12750	·88692	1·00721	·12029	·52	1·68203	·59452	1·13827	·54375
·13	1·13883	·87810	1·00846	·13037	·53	1·69893	·58860	1·14377	·55516
·14	1·15027	·86936	1·00982	·14046	·54	1·71601	·58275	1·14938	·56663
·15	1·16183	·86071	1·01127	·15056	·55	1·73325	·57695	1·15510	·57815
·16	1·17351	·85214	1·01283	·16068	·56	1·75067	·57121	1·16094	·58973
·17	1·18530	·84366	1·01448	·17082	·57	1·76827	·56553	1·16690	·60137
·18	1·19722	·83527	1·01624	·18097	·58	1·78604	·55990	1·17297	·61307
·19	1·20925	·82696	1·01810	·19115	·59	1·80399	·55433	1·17916	·62483
·20	1·22140	·81873	1·02007	·20134	·60	1·82212	·54881	1·18547	·63665
·21	1·23368	·81058	1·02213	·21155	·61	1·84043	·54335	1·19189	·64854
·22	1·24608	·80252	1·02430	·22178	·62	1·85893	·53794	1·19844	·66049
·23	1·25860	·79453	1·02657	·23203	·63	1·87761	·53259	1·20510	·67251
·24	1·27125	·78663	1·02894	·24231	·64	1·89648	·52729	1·21189	·68459
·25	1·28403	·77880	1·03141	·25261	·65	1·91554	·52205	1·21879	·69675
·26	1·29693	·77105	1·03399	·26294	·66	1·93479	·51685	1·22582	·70897
·27	1·30996	·76338	1·03667	·27329	·67	1·95424	·51171	1·23297	·72126
·28	1·32313	·75578	1·03946	·28367	·68	1·97388	·50662	1·24025	·73363
·29	1·33643	·74826	1·04235	·29408	·69	1·99372	·50158	1·24765	·74607
·30	1·34986	·74082	1·04534	·30452	·70	2·01375	·49659	1·25517	·75858
·31	1·36343	·73345	1·04844	·31499	·71	2·03399	·49164	1·26282	·77117
·32	1·37713	·72615	1·05164	·32549	·72	2·05443	·48675	1·27059	·78384
·33	1·39097	·71892	1·05495	·33602	·73	2·07508	·48191	1·27850	·79659
·34	1·40495	·71177	1·05836	·34659	·74	2·09594	·47711	1·28652	·80941
·35	1·41907	·70469	1·06188	·35719	·75	2·11700	·47237	1·29468	·82232
·36	1·43333	·69768	1·06550	·36783	·76	2·13828	·46767	1·30297	·83530
·37	1·44773	·69073	1·06923	·37850	·77	2·15977	·46301	1·31139	·84838
·38	1·46228	·68386	1·07307	·38921	·78	2·18147	·45841	1·31994	·86153
·39	1·47698	·67706	1·07702	·39996	·79	2·20340	·45384	1·32862	·87478

表 IV.—續前

x.	e^x.	e^{-x}.	cosh x.	sinh x.	x.	e^x.	e^{-x}.	cosh x.	sinh x.
·80	2·22554	·44933	1·33743	·88811	1·20	3·32012	·30119	1·81066	1·50946
·81	2·24791	·44486	1·34638	·90152	1·21	3·35348	·29820	1·82584	1·52764
·82	2·27050	·44043	1·35547	·91503	1·22	3·38719	·29523	1·84121	1·54598
·83	2·29332	·43605	1·36468	·92863	1·23	3·42123	·29229	1·85676	1·56447
·84	2·31637	·43171	1·37404	·94233	1·24	3·45561	·28938	1·87250	1·58311
·85	2·33965	·42741	1·38353	·95612	1·25	3·49034	·28650	1·88842	1·60192
·86	2·36316	·42316	1·39316	·97000	1·26	3·52542	·28365	1·90454	1·62088
·87	2·38691	·41895	1·40293	·98398	1·27	3·56085	·28083	1·92084	1·64001
·88	2·41090	·41478	1·41284	·99806	1·28	3·59664	·27804	1·93734	1·65930
·89	2·43513	·41066	1·42289	1·01224	1·29	3·63279	·27527	1·95403	1·67876
·90	2·45960	·40657	1·43309	1·02652	1·30	3·66930	·27253	1·97091	1·69838
·91	2·48432	·40252	1·44342	1·04090	1·31	3·70617	·26982	1·98800	1·71818
·92	2·50929	·39852	1·45390	1·05539	1·32	3·74342	·26714	2·00528	1·73814
·93	2·53451	·39455	1·46453	1·06998	1·33	3·78104	·26448	2·02276	1·75828
·94	2·55998	·39063	1·47530	1·08468	1·34	3·81904	·26185	2·04044	1·77860
·95	2·58571	·38674	1·48623	1·09948	1·35	3·85743	·25924	2·05833	1·79909
·96	2·61170	·38289	1·49729	1·11440	1·36	3·89619	·25666	2·07643	1·81977
·97	2·63794	·37908	1·50851	1·12943	1·37	3·93535	·25411	2·09473	1·84062
·98	2·66446	·37531	1·51988	1·14457	1·38	3·97490	·25158	2·11324	1·86166
·99	2·69123	·37158	1·53141	1·15983	1·39	4·01485	·24908	2·13196	1·88289
1·00	2·71828	·36788	1·54308	1·17520	1·40	4·05520	·24660	2·15090	1·90430
1·01	2·74560	·36422	1·55491	1·19069	1·41	4·09596	·24414	2·17005	1·92591
1·02	2·77319	·36059	1·56689	1·20630	1·42	4·13712	·24171	2·18942	1·94770
1·03	2·80107	·35701	1·57904	1·22203	1·43	4·17870	·23931	2·20900	1·9[illegible]70
1·04	2·82922	·35345	1·59134	1·23788	1·44	4·22070	·23693	2·22881	1·[illegible]188
1·05	2·85765	·34994	1·60379	1·25386	1·45	4·26311	·23457	2·24884	2·01428
1·06	2·88637	·34646	1·61641	1·26996	1·46	4·30596	·23224	2·26910	2·03686
1·07	2·91538	·34301	1·62919	1·28619	1·47	4·34924	·22993	2·28958	2·05965
1·08	2·94468	·33960	1·64214	1·30254	1·48	4·39295	·22764	2·31029	2·08265
1·09	2·97427	·33622	1·65525	1·31903	1·49	4·43710	·22537	2·33123	2·10586
1·10	3·00417	·33287	1·66852	1·33565	1·50	4·48169	·22313	2·35241	2·12928
1·11	3·03436	·32956	1·68196	1·35240	1·51	4·52678	·22091	2·37382	2·15291
1·12	3·06485	·32628	1·69557	1·36929	1·52	4·57223	·21871	2·39547	2·17676
1·13	3·09566	·32303	1·70934	1·38631	1·53	4·61818	·21654	2·41736	2·20082
1·14	3·12677	·31981	1·72329	1·40347	1·54	4·66459	·21438	2·43949	2·22510
1·15	3·15819	·31664	1·73741	1·42078	1·55	4·71147	·21225	2·46186	2·24961
1·16	3·18993	·31349	1·75171	1·43822	1·56	4·75882	·21014	2·48448	2·27434
1·17	3·22199	·31037	1·76618	1·45581	1·57	4·80665	·20805	2·50735	2·29930
1·18	3·25437	·30728	1·78083	1·47355	1·58	4·85496	·20598	2·53047	2·32449
1·19	3·28708	·30422	1·79565	1·49143	1·59	4·90375	·20393	2·55384	2·34991

表 IV.—續前

x.	e^x.	e^{-x}.	cosh x.	sinh x.	x.	e^x.	e^{-x}	cosh x.	sinh x.
1·60	4·95303	·20190	2·57746	2·37557	2·0	7·38906	·13534	3·76220	3·62686
1·61	5·00281	·19989	2·60135	2·40146	2·1	8·16617	·12246	4·14431	4·02186
1·62	5·05309	·19790	2·62549	2·42760	2·2	9·02501	·11080	4·56791	4·45711
1·63	5·10387	·19593	3·64990	2·45397	2·3	9·97418	·10026	5·03722	4·93696
1·64	5·15517	·19398	2·67457	2·48059	2·4	11·0232	·09072	5·55695	5·46623
1·65	5·20698	·19205	2·69951	2·50746	2·5	12·1825	·08208	6·13229	6·05020
1·66	5·25931	·19014	2·72472	2·53459	2·6	13·4637	·07427	6·76900	6·69473
1·67	5·31217	·18825	2·75021	2·56196	2·7	14·8797	·06721	7·47347	7·40626
1·68	5·36556	·18637	2·77596	2·58959	2·8	16·4446	·06081	8·25273	8·19192
1·69	5·41948	·18452	2·80200	2·61748	2·9	18·1741	·05502	9·11458	9·05956
1·70	5·47395	·18268	2·82832	2·64563	3·0	20·0855	·04979	10·0677	10·0179
1·71	5·52896	·18087	2·85491	2·67405	3·1	22·1980	·04505	11·1215	11·0765
1·72	5·58453	·17907	2·88180	2·70273	3·2	24·5325	·04076	12·2866	12·2459
1·73	5·64065	·17728	2·90897	2·73168	3·3	27·1126	·03688	13·5747	13·5379
1·74	5·69743	·17552	2·93643	2·76091	3·4	29·9641	·03337	14·9987	14·9654
1·75	5·75460	·17377	2·96419	2·79041	3·5	33·1155	·03020	16·5728	16·5426
1·76	5·81244	·17204	2·99224	2·82020	3·6	36·5982	·02732	18·3128	18·2855
1·77	5·87085	·17033	3·02059	2·85026	3·7	40·4473	·02472	20·2360	20·2113
1·78	5·92986	·16864	3·04925	2·88061	3·8	44·7012	·02237	22·3618	22·3394
1·79	5·98945	·16696	3·07821	2·91125	3·9	49·4024	·02024	24·7113	24·6911
1·80	6·04965	·16530	3·10747	2·94217	4·0	54·5982	·01832	27·3082	27·2899
1·81	6·11045	·16365	3·13705	2·97340	4·1	60·3403	·01657	30·1784	30·1619
1·82	6·17186	·16203	3·16694	3·00492	4·2	66·6863	·01500	33·3507	33·3357
1·83	6·23389	·16041	3·19715	3·03674	4·3	73·6998	·01357	36·8567	36·8431
1·84	6·29654	·15882	3·22768	3·06886	4·4	81·4509	·01228	40·7316	40·7193
1·85	6·35982	·15724	3·25853	3·10129	4·5	90·0171	·01111	45·0141	45·0030
1·86	6·42374	·15567	3·28970	3·13403	4·6	99·4843	·01005	49·7472	49·7371
1·87	6·48830	·15412	3·32121	3·16709	4·7	109·947	·00910	54·9781	54·9690
1·88	6·55350	·15259	3·35305	3·20046	4·8	121·510	·00823	60·7593	60·7511
1·89	6·61937	·15107	3·38522	3·23415	4·9	134·290	·00745	67·1486	67·1412
1·90	6·68589	·14957	3·41773	3·26816	5·0	148·413	·00674	74·2099	74·2032
1·91	6·75309	·14808	3·45058	3·30250	5·1	164·022	·00610	82·0140	82·0079
1·92	6·82096	·14661	3·48378	3·33718	5·2	181·272	·00552	90·6388	90·6333
1·93	6·88951	·14515	3·51733	3·37218	5·3	200·337	·00499	100·171	100·167
1·94	6·95875	·14370	3·55123	3·40752	5·4	221·406	·00452	110·705	110·701
1·95	7·02869	·14227	3·58548	3·44321	5·5	244·692	·00409	122·348	122·344
1·96	7·09933	·14086	3·62009	3·47923	5·6	270·426	·00370	135·215	135·211
1·97	7·17068	·13946	3·65507	3·51561	5·7	298·867	·00335	149·435	149·432
1·98	7·24274	·13807	3·69041	3·55234	5·8	330·300	·00303	165·151	165·148
1·99	7·31553	·13670	3·72611	3·58942	5·9	365·037	·00274	182·520	132·517
					6·0	403·429	·00248	201·716	201·714

表 V　珈瑪函數的常用對數

($\Gamma(n)$ 從 $n=1.00$ 至 $n=1.99$ 止

n.	0·00.	0·01.	0·02.	0·03.	0·04.	0·05.	0·06.	0·07.	0·08.	0·09.
1.0	$\bar{1}.0000$	$\bar{1}.9975$	$\bar{1}.9951$	$\bar{1}.9928$	$\bar{1}.9905$	$\bar{1}.9883$	$\bar{1}.9862$	$\bar{1}.9841$	$\bar{1}.9821$	$\bar{1}.9802$
1.1	$\bar{1}.9783$	$\bar{1}.9765$	$\bar{1}.9748$	$\bar{1}.9731$	$\bar{1}.9715$	$\bar{1}.969$[illegible]	$\bar{1}.9684$	$\bar{1}.9669$	$\bar{1}.9655$	$\bar{1}.9642$
1.2	$\bar{1}.9629$	$\bar{1}.9617$	$\bar{1}.968$[illegible]	$\bar{1}.9594$	$\bar{1}.9585$	$\bar{1}.9573$	$\bar{1}.9564$	$\bar{1}.9554$	$\bar{1}.9546$	$\bar{1}.958$[illegible]
1.3	$\bar{1}.9530$	$\bar{1}.9523$	$\bar{1}.9516$	$\bar{1}.9510$	$\bar{1}.9505$	$\bar{1}.9500$	$\bar{1}.94$[illegible]5	$\bar{1}.9491$	$\bar{1}.9487$	$\bar{1}.9483$
1.4	$\bar{1}.9481$	$\bar{1}.9478$	$\bar{1}.9476$	$\bar{1}.9475$	$\bar{1}.9473$	$\bar{1}.9473$	$\bar{1}.9472$	$\bar{1}.9473$	$\bar{1}.9473$	$\bar{1}.9474$
1.5	$\bar{1}.9475$	$\bar{1}.9477$	$\bar{1}.9479$	$\bar{1}.9482$	$\bar{1}.9485$	$\bar{1}.9488$	$\bar{1}.9492$	$\bar{1}.9496$	$\bar{1}.9501$	$\bar{1}.9506$
1.6	$\bar{1}.9511$	$\bar{1}.9517$	$\bar{1}.9523$	$\bar{1}.9529$	$\bar{1}.9536$	$\bar{1}.9543$	$\bar{1}.9550$	$\bar{1}.9558$	$\bar{1}.9566$	$\bar{1}.9575$
1.7	$\bar{1}.9584$	$\bar{1}.9593$	$\bar{1}.9603$	$\bar{1}.9613$	$\bar{1}.9623$	$\bar{1}.9633$	$\bar{1}.9644$	$\bar{1}.9656$	$\bar{1}.9667$	$\bar{1}.9679$
1.8	$\bar{1}.9691$	$\bar{1}.9704$	$\bar{1}.9717$	$\bar{1}.9730$	$\bar{1}.9743$	$\bar{1}.9757$	$\bar{1}.9771$	$\bar{1}.9786$	$\bar{1}.9800$	$\bar{1}.9815$
1.9	$\bar{1}.9831$	$\bar{1}.9846$	$\bar{1}.9862$	$\bar{1}.9878$	$\bar{1}.9895$	$\bar{1}.9912$	$\bar{1}.9929$	$\bar{1}.9949$	$\bar{1}.9964$	$\bar{1}.9982$

$$\log_{10}\sqrt{\pi}=0.24857493635=\log_{10}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)。$$

表 VI　$0.6745\sqrt{\dfrac{1}{n-1}}$ 的數值

(參閱第 161 節)

n.	$\frac{0.6745}{\sqrt{n-1}}$									
	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
0			0·6745	0·4769	0·3894	0·3372	0·3016	0·2754	0·2549	0·2385
10	0·2248	0·2133	·2029	·1947	·1871	·1803	·1742	·1686	·1636	·1590
20	·1547	·1508	·1472	·1438	·1406	·1377	·1349	·1323	·1298	·1275
30	·1252	·1231	·1211	·1192	·1174	·1157	·1140	·1124	·1109	·1094
40	·1080	·1066	·1053	·1041	·1029	·1017	·1005	·0994	·0984	·0974
50	0·0964	0·0954	0·0944	0·0935	0·0926	0·0918	0·0909	0·0901	0·0893	0·0886
60	·0878	·0871	·0864	·0857	·0850	·0843	·0837	·0830	·0824	·0818
70	·0812	·0806	·0800	·0795	·0789	·0784	·0778	·0773	·0768	·0763
80	·0759	·0754	·0749	·0745	·0740	·0736	·0731	·0727	·0723	·0719
90	·0715	·0711	·0707	·0703	·0699	·0696	·0692	·0688	·0685	·0681

表 VII $\dfrac{0.8453}{\sqrt{n(n-1)}}$的數值

（參閱第 161 節）

n.	$\frac{0{\cdot}6745}{\sqrt{n(n-1)}}$.									
	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6	7.	8.	9.
0			0·4769	0·2754	0·1947	0·1508	0·1231	0·1041	0·0901	0·0795
10	0·0711	0·0648	·0587	·0540	·0500	·0465	·0435	·0409	·0386	·0365
20	·0346	·0329	·0314	·0300	·0287	·0275	·0265	·0255	·0245	·0237
30	·0229	·0221	·0214	·0208	·0201	·0196	·0190	·0185	·0180	·0175
40	·0171	·0167	·0163	·0159	·0155	·0152	·0148	·0145	·0142	·0139
50	0·0136	0·0134	0·0131	0·0128	0·0126	0·0124	0·0122	0·0119	0·0117	0·0115
60	·0113	·0111	·0110	·0108	·0106	·0105	·0103	·0101	·0100	·0098
70	·0097	·0096	·0094	·0093	·0092	·0091	·0089	·0088	·0087	·0086
80	·0085	·0084	·0083	·0082	·0081	·0080	·0080	·0079	·0077	·0076
90	·0075	·0074	·0073	·0073	·0072	·0071	·0070	·0069	·0069	·0068

表 VIII $0.8453\sqrt{\dfrac{1}{n(n-1)}}$ 的數值

（參閱第 161 節）

	$\frac{0{\cdot}8453}{\sqrt{n(n-1)}}$.									
	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
0			0·5978	0·3451	0·2440	0·1890	0·1543	0·1304	0·1130	0·0996
10	0·0891	0·0806	·0736	·0677	·0627	·0583	·0546	·0513	·0483	·0457
20	·0434	·0412	·0393	·0376	·0360	·0345	·0331	·0319	·0307	·0297
30	·0287	·0277	·0268	·0260	·0252	·0245	·0238	·0232	·0225	·0220
40	·0214	·0209	·0204	·0199	·0194	·0190	·0186	·0182	·0178	·0174
50	0·0171	0·0167	0·0164	0·0161	0·0158	0·0155	0·0152	0·0150	0·0147	0·0145
60	·0142	·0140	·0137	·0135	·0133	·0132	·0129	·0127	·0125	·0123
70	·0122	·0120	·0118	·0117	·0115	·0113	·0112	·0110	·0109	·0108
80	·0106	·0105	·0104	·0102	·0101	·0100	·0099	·0098	·0097	·0096
90	·0095	·0093	·0092	·0091	·0090	·0089	·0089	·0088	·0087	·0086

表 IX　$0.8453\dfrac{1}{n\sqrt{n-1}}$的數值（參閱第 161 節）

n.	$\dfrac{0.8453}{n\sqrt{n-1}}$									
	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
0			0·4227	0·1993	0·1220	0·0845	0·0630	0·0493	0·0399	0·0332
10	0·0282	0·0243	·0212	·0188	·0167	·0151	·0136	·0124	·0114	·0105
20	·0097	·0090	·0084	·0078	·0073	·0069	·0065	·0061	·0058	·0055
30	·0052	·0050	·0047	·0045	·0043	·0041	·0040	·0038	·0037	·0035
40	·0034	·0033	·0031	·0030	·0029	·0028	·0027	·0027	·0026	·0025
50	0·0024	0·0023	0·0023	0·0022	0·0022	0·0021	0·0020	0·0020	0·0019	0·0019
60	·0018	·0018	·0017	·0017	·0017	·0016	·0016	·0016	·0015	·0015
70	·0015	·0014	·0014	·0014	·0013	·0013	·0013	·0012	·0012	·0012
80	·0012	·0012	·0011	·0011	·0011	·0011	·0011	·0010	·0010	·0010
90	·0010	·0010	·0010	·0009	·0009	·0009	·0009	·0009	·0009	·0009

表 X　或然率積分的數值

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hx} e^{-h^2x^2}d(hx)\text{；}$$ （參閱第 163 節）

此中 P 爲觀測誤差的絕對值，不大於 x 的或然率；h 爲精確量數。

hx.	P.									
	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
0·0	0·0000	0·0113	0·0226	0·0338	0·0451	0·0564	0·0676	0·0789	0·0901	0·1013
0·1	·1125	·1236	·1348	·1459	·1569	·1680	·1790	·1900	·2009	·2118
0·2	·2227	·2335	·2443	·2550	·2657	·2763	·2869	·2974	·3079	·3183
0·3	·3286	·3389	·3491	·3593	·3694	·3794	·3893	·3992	·4090	·4187
0·4	·4284	·4380	·4475	·4569	·4662	·4755	·4847	·4937	·5027	·5117
0·5	0·5205	0·5292	0·5379	0·5465	0·5549	0·5633	0·5716	0·5798	0·5879	0·5959
0·6	·6039	·6117	·6194	·6270	·6346	·6420	·6494	·6566	·6638	·6708
0·7	·6778	·6847	·6914	·6981	·7047	·7112	·7175	·7238	·7300	·7361
0·8	·7421	·7480	·7538	·7595	·7651	·7707	·7761	·7814	·7867	·7918
0·9	·7969	·8019	·8068	·8116	·8163	·8209	·8254	·8299	·8342	·8385
1·0	0·8427	0·8468	0·8508	0·8548	0·8586	0·8624	0·8661	0·8698	0·8733	0·8768
1·1	·8802	·8835	·8868	·8900	·8931	·8961	·8991	·9020	·9048	·9076
1·2	·9103	·9130	·9155	·9181	·9205	·9229	·9252	·9275	·9297	·9319
1·3	·9340	·9361	·9381	·9400	·9419	·9438	·9456	·9473	·9490	·9507
1·4	·9523	·9539	·9554	·9569	·9583	·9597	·9611	·9624	·9637	·9649
1·5	0·9661	0·9673	0·9684	0·9695	0·9706	0·9716	0·9726	0·9736	0·9745	0·9755
1·6	·9763	·9772	·9780	·9788	·9796	·9804	·9811	·9818	·9825	·9832
1·7	·9838	·9844	·9850	·9856	·9861	·9867	·9872	·9877	·9882	·9886
1·8	·9891	·9895	·9899	·9903	·9907	·9911	·9915	·9918	·9922	·9925
1·9	·9928	·9931	·9934	·9937	·9939	·9942	·9944	·9947	·9949	·9951
2·0	0·9953	0·9955	0·9957	0·9959	0·9961	0·9963	0·9964	0·9966	0·9967	0·9969
2·1	·9970	·9972	·9973	·9974	·9975	·9976	·9977	·9979	·9980	·9980
2·2	·9981	·9982	·9983	·9984	·9985	·9985	·9986	·9987	·9987	·9988
2·3	·9989	·9989	·9990	·9990	·9991	·9991	·9992	·9992	·9992	·9993
2·4	·9993	·9993	·9994	·9994	·9994	·9995	·9995	·9995	·9995	·9996
2·5	0·9996	0·9996	0·9996	0·9997	0·9997	0·9997	0·9997	0·9997	0·9998	0·9998
2·6	·9998	·9998	·9998	·9998	·9998	·9998	·9998	·9998	·9998	·9999
∞	1·0000									

表 XI　或然率積分的數值

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{ax}{r}} e^{\left(\frac{x}{r}\right)^2} d\left(\frac{x}{r}\right)\text{，}$$ （參閱第 163 節）

此中 P 爲觀測誤差的絕對值，不大於 x 的或然率；r 爲或然誤差，等於 $\frac{a}{h}$；此中 h 爲精確度，而 a 爲常數 0.4769。

$\frac{x}{r}$	P.									
	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
0·0	0·	0·0054	0·0108	0·0161	0·0215	0·0269	0·0323	0·0377	0·0430	0·0484
0·1	·0538	·0591	·0645	·0699	·0752	·0806	·0859	·0913	·0966	·1020
0·2	·1073	·1126	·1180	·1233	·1286	·1339	·1392	·1445	·1498	·1551
0·3	·1603	·1656	·1709	·1761	·1814	·1866	·1918	·1971	·2023	·2075
0·4	·2127	·2179	·2230	·2282	·2334	·2385	·2436	·2488	·2539	·2590
0·5	0·2641	0·2691	0·2742	0·2793	0·2843	0·2893	0·2944	0·2994	0·3043	0·3093
0·6	·3143	·3192	·3242	·3291	·3340	·3389	·3438	·3487	·3535	·3583
0·7	·3632	·3680	·3728	·3775	·3823	·3870	·3918	·3965	·4012	·4059
0·8	·4105	·4152	·4198	·4244	·4290	·4336	·4381	·4427	·4472	·4517
0·9	·4562	·4606	·4651	·4695	·4739	·4783	·4827	·4860	·4914	·4957
1·0	0·5000	0·5043	0·5085	0·5128	0·5170	0·5212	0·5254	0·5295	0·5337	0·5378
1·1	·5419	·5460	·5500	·5540	·5581	·5620	·5660	·5700	·5739	·5778
1·2	·5817	·5856	·5894	·5932	·5970	·6008	·6046	·6083	·6120	·6157
1·3	·6194	·6231	·6267	·6303	·6339	·6375	·6410	·6445	·6480	·6515
1·4	·6550	·6584	·6618	·6652	·6686	·6719	·6753	·6786	·6818	·6851
1·5	0·6883	0·6915	0·6947	0·6979	0·7011	0·7042	0·7073	0·7104	0·7134	0·7165
1·6	·7195	·7225	·7255	·7284	·7313	·7342	·7371	·7400	·7428	·7457
1·7	·7485	·7512	·7540	·7567	·7594	·7621	·7648	·7675	·7701	·7727
1·8	·7753	·7778	·7804	·7829	·7854	·7879	·7904	·7928	·7952	·7976
1·9	·8000	·8023	·8047	·8070	·8093	·8116	·8138	·8161	·8183	·8205
2·0	0·8227	0·8248	0·8270	0·8291	0·8312	0·8332	0·8353	0·8373	0·8394	0·8414
2·1	·8433	·8453	·8473	·8492	·8511	·8530	·8549	·8567	·8585	·8604
2·2	·8622	·8639	·8657	·8674	·8692	·8709	·8726	·8742	·8759	·8775
2·3	·8792	·8808	·8824	·8840	·8855	·8870	·8886	·8901	·8916	·8930
2·4	·8945	·8960	·8974	·8988	·9002	·9016	·9029	·9043	·9056	·9069
2·5	0·9082	0·9095	0·9108	0·9121	0·9133	0·9146	0·9158	0·9170	0·9182	0·9193
2·6	·9205	·9217	·9228	·9239	·9250	·9261	·9272	·9283	·9293	·9304
2·7	·9314	·9324	·9334	·9344	·9354	·9364	·9373	·9383	·9392	·9401
2·8	·9410	·9419	·9428	·9437	·9446	·9454	·9463	·9471	·9479	·9487
2·9	·9495	·9503	·9511	·9519	·9526	·9534	·9541	·9548	·9556	·9563
3·0	0·9570	0·9577	0·9583	0·9590	0·9597	0·9603	0·9610	0·9616	0·9622	0·9629
3·1	·9635	·9641	·9647	·9652	·9658	·9664	·9669	·9675	·9680	·9686
3·2	·9691	·9696	·9701	·9706	·9711	·9716	·9721	·9726	·9731	·9735
3·3	·9740	·9744	·9749	·9753	·9757	·9761	·9766	·9770	·9774	·9778
3·4	·9782	·9786	·9789	·9793	·9797	·9800	·9804	·9807	·9811	·9814
3·	0·9570	0·9635	0·9691	0·9740	0·9782	0·9818	0·9848	0·9874	0·9896	0·9915
4·	·9930	·9943	·9954	·9963	·9970	·9976	·9981	·9985	·9988	·9990
5·	·9993	·9994	·9996	·9997	·9997	·9998	·9998	·9999	·9999	·9999
∞	1·0000									

表 XII 應用 Chauvenet 氏準則時，相當於 n 各值的 $\frac{x}{r}$ 的數值。

（參閱第 170 節）

n.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
0				2·05	2·27	2·44	2·57	2·67	2·76	2·84
10	2·91	2·96	3·02	3·07	3·12	3·16	3·19	3·22	3·26	3·29
20	3·32	3·35	3·38	3·41	3·43	3·45	3·47	3·49	3·51	3·53
30	3·55	3·57	3·58	3·60	3·62	3·64	3·65	3·67	3·68	3·69
40	3·71	3·72	3·73	3·74	3·75	3·77	3·78	3·79	3·80	3·81
50	3·82	3·83	3·84	3·85	3·86	3·87	3·88	3·88	3·89	3·90
60	3·91	3·92	3·93	3·94	3·95	3·95	3·96	3·97	3·97	3·98
70	3·99	3·99	4·00	4·01	4·02	4·02	4·03	4·04	4·05	4·05
80	4·06	4·06	4·06	4·07	4·07	4·08	4·09	4·09	4·10	4·11
90	4·11	4·12	4·13	4·14	4·14	4·15	4·15	4·15	4·16	4·16

設 $n=100$, $t=4{\cdot}16$；$n=200$, $t=4{\cdot}48$；$n=500$, $t=4{\cdot}90$,

表 XIII　角的弧度（參閱第 192 節）

Degrees.	0′.	6′.	12′.	18′.	24′.	30′.	36′.	42′.	48′.	54′.
0	·00000	·00175	·00349	·00524	·00698	·00873	·01047	·01222	·01396	·01571
1	·01745	·01920	·02094	·02269	·02443	·02618	·02793	·02967	·03142	·03316
2	·03491	·03665	·03840	·04014	·04189	·04363	·04538	·04712	·04887	·05061
3	.05236	·05411	·05585	·05760	·05934	·06109	·06283	·06458	·06632	·06807
4	·06981	·07156	·07330	·07505	·07679	·07854	·08029	·08203	·08378	·08552
5	·08727	·08901	·09076	·09250	·09425	·09599	·09774	·09948	·10123	·10297
6	·10472	·10647	·10821	·10996	·11170	·11345	·11519	·11694	·11868	·12043
7	·12217	·12392	·12566	·12741	·12915	·13090	·13265	·13439	·13614	·13788
8	·13963	·14137	·14312	·14486	·14661	·14835	·15010	·15184	·15359	·15533
9	·15708	·15882	·16057	·16232	·16406	·16581	·16755	·16930	·17104	·17279
10	·17453	·17628	·17802	·17977	·18151	·18326	·18500	·18675	·18850	·19024
11	·19199	·19373	·19548	·19722	·19897	·20071	·20246	·20420	·20595	·20769
12	·20944	·21118	·21293	·21468	·21642	·21817	·21991	·22166	·22340	·22515
13	·22689	·22864	·23038	·23213	·23387	·23562	·23736	·23911	·24086	·24260
14	·24435	·24609	·24784	·24958	·25133	·25307	·25482	·25656	·25831	·26005
15	·26180	·26354	·26529	·26704	·26878	·27053	·27227	·27402	·27576	·27751
16	·27925	·28100	·28274	·28449	·28623	·28798	·28972	·29147	·29322	·29496
17	·29671	·29845	·30020	·30194	·30369	·30543	·30718	·30892	·31067	·31241
18	·31416	·31590	·31765	·31940	·32114	·32289	·32463	·32638	·32812	·32987
19	·33161	·33336	·33510	·33685	·33859	·34034	·34208	·34383	·34558	·34732
20	·34907	·35081	·35256	·35430	·35605	·35779	·35954	·36128	·36303	·36477
21	·36652	·36826	·37001	·37176	·37350	·37525	·37699	·37874	·38048	·38223
22	·38397	·38572	·38746	·38921	·39095	·39270	·39444	·39619	·39794	·39968
23	·40143	·40317	·40492	·40666	·40841	·41015	·41190	·41364	·41539	·41713
24	·41888	·42062	·42237	·42412	·42586	·42761	·42935	·43110	·43284	·43459
25	·43633	·43808	·43982	·44157	·44331	·44506	·44680	·44855	·45029	·45204
26	·45379	·45553	·45728	·45902	·46077	·46251	·46426	·46600	·46775	·46949
27	·47124	·47298	·47473	·47647	·47822	·47997	·48171	·48346	·48520	·48695
28	·48869	·49044	·49218	·49393	·49567	·49742	·49916	·50091	·50265	·50440
29	·50615	·50789	·50964	·51138	·51313	·51487	·51662	·51836	·52011	·52185
30	·52360	·52534	·52709	·52883	·53058	·53233	·53407	·53582	·53756	·53931
31	·54105	·54280	·54454	·54629	·54803	·54978	·55152	·55327	·55501	·55676
32	·55851	·56025	·56200	·56374	·56549	·56723	·56898	·57072	·57247	·57421
33	·57596	·57770	·57945	·58119	·58294	·58469	·58643	·58818	·58992	·59167
34	·59341	·59516	·59690	·59865	·60039	·60214	·60388	·60563	·60737	·60912
35	·61087	·61261	·61436	·61610	·61785	·61959	·62134	·62308	·62483	·62657
36	·62832	·63006	·63181	·63355	·63530	·63705	·63879	·64054	·64228	·64403
37	·64577	·64752	·64926	·65101	·65275	·65450	·65624	·65799	·65973	·66148
38	·66323	·66497	·66672	·66846	·67021	·67195	·67370	·67544	·67719	·67893
39	·68068	·68242	·68417	·68591	·68766	·68941	·69115	·69290	·69464	·69639
40	·69813	·69988	·70162	·70337	·70511	·70686	·70860	·71035	·71209	·71384
41	·71558	·71733	·71908	·72082	·72257	·72431	·72606	·72780	·72955	·73129
42	·73304	·73478	·73653	·73827	·74002	·74176	·74351	·74526	·74700	·74875
43	·75049	·75224	·75398	·75573	·75747	·75922	·76096	·76271	·76445	·76620
44	·76794	·76969	·77144	·77318	·77493	·77667	·77842	·78016	·78191	·78365

表 XIII.—續前

Degrees.	0′.	6′.	12′.	18′.	24′.	30′.	36′.	42′.	48′.	54′.
45	·78540	·78714	·78889	·79063	·79238	·79412	·79587	·79762	·79936	·80114
46	·80285	·80460	·80634	·80809	·80983	·81158	·81332	·81507	·81681	·81856
47	·82030	·82205	·82380	·82554	·82729	·82903	·83078	·83252	·83427	·83601
48	·83776	·83950	·84125	·84299	·84474	·84648	·84823	·84998	·85172	·85347
49	·85521	·85696	·85870	·86045	·86219	·86394	·86568	·86743	·86917	·87092
50	·87266	·87441	·87616	·87790	·87965	·88139	·88314	·88488	·88663	·88837
51	·89012	·89186	·89361	·89535	·89710	·89884	·90059	·90234	·90408	·90583
52	·90757	·90932	·91106	·91281	·91455	·91630	·91804	·91979	·92153	·92328
53	·92502	·92677	·92852	·93026	·93201	·93375	·93550	·93724	·93899	·94073
54	·94284	·94422	·94597	·94771	·94946	·95120	·95295	·95470	·95644	·95819
55	·95993	·96168	·96342	·96517	·96691	·96866	·97040	·97215	·97389	·97564
56	·97738	·97913	·98088	·98262	·98437	·98611	·98786	·98960	·99135	·99309
57	·99484	·99658	·99833	1·00007	1·00182	1·00356	1·00531	1·00706	1·00880	1·01055
58	1·01229	1·01404	1·01578	1·01753	1·01927	1·02102	1·02276	1·02451	1·02625	1·02800
59	1·02974	1·03149	1·03323	1·03498	1·03673	1·03847	1·04022	1·04196	1·04371	1·04545
60	1·04720	1·04894	1·05069	1·05243	1·05418	1·05592	1·05767	1·05941	1·06116	1·06291
61	1·06465	1·06640	1·06814	1·06989	1·07163	1·03887	1·07512	1·07687	1·07861	1·08036
62	1·08210	1·08385	1·08559	1·08734	1·08909	1·09083	1·09258	1·09432	1·09607	1·09781
63	1·09956	1·10130	1·10305	1·10479	1·10654	1·10828	1·11003	1·11177	1·11352	1·11527
64	1·11701	1·11876	1·12050	1·12225	1·12399	1·12574	1·12748	1·12923	1·13097	1·13272
65	1·13446	1·13621	1·13795	1·13970	1·14145	1·14319	1·14494	1·14668	1·14843	1·15017
66	1·15192	1·15366	1·15541	1·15715	1·15890	1·16064	1·16239	1·16413	1·16588	1·16763
67	1·16937	1·17112	1·17286	1·17461	1·17635	1·17810	1·17984	1·18152	1·18333	1·18508
68	1·18682	1·18857	1·19031	1·19206	1·19381	1·19555	1·19730	1·19904	1·20079	1·20253
69	1·20428	1·20602	1·20777	1·20951	1·21126	1·21300	1·21475	1·21649	1·21824	1·21999
70	1·22173	1·22348	1·22522	1·22697	1·22871	1·23046	1·23220	1·23395	1·23569	1·23744
71	1·23918	1·24093	1·24267	1·24442	1·24617	1·24791	1·24966	1·25140	1·25315	1·25489
72	1·25664	1·25838	1·26013	1·26187	1·26362	1·26536	1·26711	1·26885	1·27060	1·27235
73	1·27409	1·27584	1·27758	1·27933	1·28107	1·28282	1·28456	1·28631	1·28805	1·28980
74	1·29154	1·29329	1·29503	1·29678	1·29852	1·30027	1·30202	1·30376	1·30551	1·30725
75	1·30900	1·31074	1·31249	1·31423	1·31598	1·31772	1·31947	1·32121	1·32296	1·32470
76	1·32645	1·32820	1·32994	1·33169	1·33343	1·33518	1·33692	1·33867	1·34041	1·34216
77	1·34390	1·34565	1·34739	1·34914	1·35088	1·35263	1·35438	1·35612	1·35787	1·35961
78	1·36136	1·36310	1·36485	1·36659	1·36834	1·37008	1·37183	1·37357	1·37532	1·37706
79	1·37881	1·38056	1·38230	1·38405	1·38579	1·38754	1·38928	1·39103	1·39277	1·39452
80	1·39626	1·39801	1·39975	1·40150	1·40324	1·40499	1·40674	1·40848	1·41023	1·41197
81	1·41372	1·41546	1·41721	1·41895	1·42070	1·42244	1·42419	1·42593	1·42768	1·42942
82	1·43117	1·43292	1·43466	1·43641	1·43815	1·43990	1·44164	1·44339	1·44513	1·44688
83	1·44862	1·45037	1·45211	1·45386	1·45560	1·45735	1·45910	1·46084	1·46259	1·46433
84	1·46608	1·46782	1·46957	1·47131	1·47306	1·47480	1·47655	1·47829	1·48004	1·48178
85	1·48353	1·48528	1·48702	1·48877	1·49051	1·49226	1·49400	1·49575	1·49749	1·49924
86	1·50098	1·50273	1·50447	1·50622	1·50796	1·50971	1·51146	1·51320	1·51495	1·51669
87	1·51844	1·52018	1·52193	1·52367	1·52542	1·52716	1·52891	1·53065	1·53240	1·53414
88	1·53589	1·53764	1·53938	1·54113	1·54287	1·54462	1·54636	1·54811	1·54985	1·55160
89	1·55334	1·55509	1·55683	1·55858	1·56032	1·56207	1·56382	1·56556	1·56731	1·56905

表 XIV　特殊角的三角函數

（參閱第 192 節）

Angle.	0° to 360°.	30°.	45°.	60°.	90°.	180°	270°.
sine	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cosine	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tangent	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞

表 XV　三角函數的正負號

（參閱第 192 節）

If the Angle is in Quadrant.	sin x.	cos x.	tan x.	cot x.	sec x.	cosec x.
I. {sign value	+ 0 to 1	+ 1 to 0	+ 0 to ∞	+ ∞ to 0	+ 1 to ∞	+ ∞ to 1
II. {sigh value	+ 1 to 0	− 0 to 1	− ∞ to 0	− 0 to ∞	− ∞ to 1	+ 1 to ∞
III. {sign value	− 0 to 1	− 1 to 0	+ 0 to ∞	+ ∞ to 0	− 1 to ∞	− ∞ to 1
IV. {sign value	− 1 to 0	+ 0 to 1	− ∞ to 0	− 0 to ∞	+ ∞ to 1	− 1 to ∞

表 XVI　雙曲線函數與三角函數的比較

（參閱第 193 節末）

Hyperbolic.	Trigonometrical.	
$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sinh^{-1}\frac{x}{a}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}$	(39)
$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\cosh^{-1}\frac{x}{a}$	$\int\frac{-dx}{\sqrt{a^2-{}^2x}}=\cos^{-1}\frac{x}{a}$	(40)
$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{x}\tanh^{-1}\frac{x}{a}$	$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$	(41)
when $x<a$. When $x>a$		
$\int\frac{-dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{x}{a}$	$\int\frac{-dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{x}{a}$	(42)
$\int\frac{-dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\frac{x}{a}$	$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a}$	(43)
$\int\frac{-dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{a}\operatorname{cosech}^{-1}\frac{x}{a}$	$\int\frac{-dx}{x\sqrt{a^2-a^2}}=\frac{1}{a}\operatorname{cosec}^{-1}\frac{x}{a}$	(44)
$\int\operatorname{sech} x.\,dx=gd\,x$	$\int\sec x.\,dx=gd^{-1}x$	(45)

表 XVII e^{x^2} 與 e^{-x^2} 的數值
(x 從 0.1 至 5.0)

x.	e^{x^2}.	e^{-x^2}.	x.	e^{x^2}.	e^{-x^2}.
0·1	1·0101	0·99005	2·6	$8{\cdot}6264\times10^{2}$	$1{\cdot}1592\times10^{-3}$
0·2	1·0408	·96079	2·7	$1{\cdot}4656\times10^{3}$	$6{\cdot}8233\times10^{-4}$
0·3	1·0904	·91393	2·8	2·5402 ,,	3·9367 ,,
0·4	1·1735	·85214	2·9	4·4918 ,,	2·2263 ,,
0·5	1·2840	·77880	3·0	8·1031 ,,	1·2341 ,,
0·6	1·4333	0·69768	3·1	$1{\cdot}4913\times10^{4}$	$6{\cdot}7055\times10^{-5}$
0·7	1·6323	·61263	3·2	2·8001 ,,	3·5713 ,,
0·8	1·8965	·52729	3·3	5·2960 ,,	1·8644 ,,
0·9	2·2479	·44486	3·4	$1{\cdot}0482\times10^{5}$	$9{\cdot}5402\times10^{-6}$
1·0	2·7183	·36788	3·5	2·0898 ,,	4·7851 ,,
1·1	3·3535	0·29820	3·6	$4{\cdot}2507\times10^{5}$	$2{\cdot}3526\times10^{-6}$
1·2	4·2207	·23693	3·7	8·8205 ,,	1·1337 ,,
1·3	5·4195	·18452	3·8	$1{\cdot}8673\times10^{6}$	$5{\cdot}3554\times10^{-7}$
1·4	7·0993	·14086	3·9	4·0329 ,,	2·4796 ,,
1·5	9·4877	·10540	4·0	8·8861 ,,	1·1254 ,,
1·6	12·936	0·077306	4·1	$1{\cdot}9976\times10^{7}$	$5{\cdot}0062\times10^{-8}$
1·7	17·993	·055576	4·2	4·5809 ,,	2·1829 ,,
1·8	25·534	·039164	4·3	$1{\cdot}0718\times10^{8}$	$9{\cdot}3303\times10^{-9}$
1·9	36·996	·027052	4·4	2·5583 ,,	3·9088 ,,
2·0	54·598	·018316	4·5	6·2297 ,,	1·6052 ,,
2·1	82·269	0·012155	4·6	$1{\cdot}5476\times10^{9}$	$6{\cdot}4614\times10^{-10}$
2·2	126·47	$\cdot0^{2}79070$	4·7	3·9228	2·5494 ,,
2·3	198·34	$\cdot0^{2}50418$	4·8	$1{\cdot}0148\times10$	$9{\cdot}8595\times10^{-11}$
2·4	317·35	$\cdot0^{2}31511$	4·9	2·6755 ,,	3·7376 ,,
2·5	518·02	$\cdot0^{2}19304$	5·0	7·2005 ,,	1·3888 ,,

$0{\cdot}0^{2}555$ 為 0·00555; $0{\cdot}0^{4}55$ 為 0·000055.

表 XVIII　自然對數表

許多公式需用自然對數，手頭若有一份自然對數表，便可免得借第 11 節中的公式來換算。本表之用法如下：——

I.　**大於 10 的數之自然對數**，可如下列例二與例三。

II.　**1 與 10、間的數之自然對數**，爲表中所不載，可用補插公式，如用比例部分亦可。

II.　**小於 1 的數之自然對數**，可如下列例五。

用此表求自然對數感到困難，可用普通的常用對數表，查出後乘以 2.3026。

$$\log_e 10 = 2.3026。$$

例一試示 $\log_e \pi = \log_e(3.1416) = 1.1447$。

例二　求 5540 的自然對數。

此時 $\log_e 5540 = \log_e(5.540 \times 1000) = \log_e(5.54 \times 10^3)$；

故　$\log 5540 = \log_e 5.54 + 3\log_e 10 = 8.6198$。

例三　試示 $\log_e 100 = 4.6052$；　$\log_e 1000 = 6.9078$；

$\log_e 10000 = 9.2103$；　$\log_e 100000 = 11.5129$。

示意：　$\log 1000 = \log 10^3 = 3\log 10$。

例四　設有氣體 100 立方厘米，每平方厘米的壓力爲 5000 克，膨脹至體積爲 557 立方厘米，求其所作的功。

從第 88 節，$W = p_1 v_1 \log_e \dfrac{v_2}{v_1} = 5000 \times 100 \times \log_e 5.57 = 850700$ 克厘米。若用常用對數表，須寫 $\log_e 5.57$ 爲 $2.3026 \times \log_{10} 5.57$。

例五　求 $\log_e 0.00051$；$\log_e 0.0031$；與 $\log_e 0.51$。

$$\begin{aligned}\log 0.00051 &= \log 5.1 - \log 10000 = \log 5.1 - \log 10^4 = \log 5.1 - 4\log 10\\ &= 1.6292 - 4 \times 2.3026 = 1.6292 - 9.2104\\ &= \bar{9}.4188 \text{ 或 } -8.5812;\end{aligned}$$

$\log 0.0031 = 1.1314 - 6.9077 = \bar{6}.2237$；或 -5.7763；

$\log 0.51 \quad = 1.6292 - 2.3026 = \bar{2}.3166$；或 -1.6734。

整數位頂上的橫劃與常用對數中同一意義。

n.	·00.	·01.	·02.	·03.	·04.	·05.	·06.	·07.	·08.	·09.
1·0	0·0000	0·0100	0·0198	0·0296	0·0392	0·0488	0·0583	0·0677	0·0770	0·0862
1·1	·0953	·1044	·1133	·1222	·1310	·1398	·1484	·1570	·1655	·1740
1·2	·1823	·1906	·1989	·2070	·2151	·2231	·2311	·2390	·2469	·2546
1·3	·2624	·2700	·2776	·2852	·2927	·3001	·3075	·3148	·3221	·3293
1·4	·3365	·3436	·3507	·3577	·3646	·3716	·3784	·3853	·3920	·3988
1·5	0·4055	0·4121	0·4187	0·4253	0·4318	0·4383	0·4447	0·4511	0·4574	0·4637
1·6	·4700	·4762	·4824	·4886	·4947	·5008	·5068	·5128	·5188	·5247
1·7	·5306	·5365	·5423	·5481	·5539	·5596	·5653	·5710	·5766	·5822
1·8	·5878	·5933	·5988	·6043	·6098	·6152	·6206	·6259	·6313	·6366
1·9	·6419	·6471	·6523	·6575	·6627	·6678	·6729	·6780	·6831	·6881
2·0	0·6932	0·6981	0·7031	0·7080	0·7130	0·7178	0·7227	0·7276	0·7324	0·7372
2·1	·7419	·7467	·7514	·7561	·7608	·7655	·7701	·7747	·7793	·7839
2·2	·7885	·7930	·7975	·8020	·8065	·8109	·8154	·8198	·8242	·8286
2·3	·8329	·8372	·8416	·8459	·8502	·8544	·8587	·8629	·8671	·8713
2·4	·8755	·8796	·8838	·8879	·8920	·8961	·9002	·9042	·9083	·9123
2·5	0·9163	0·9203	0·9243	0·9282	0·9322	0·9361	0·9400	0·9439	0·9478	0·9517
2·6	·9555	·9594	·9632	·9670	·9708	·9746	·9783	·9821	·9858	·9895
2·7	·9933	·9970	1·0006	1·0043	1·0080	1·0116	1·0152	1·0189	1·0225	1·0260
2·8	1·0296	1·0332	·0367	·0403	·0438	·0473	·0508	·0543	·0578	·0613
2·9	·0647	·0682	·0716	·0750	·0784	·0818	·0852	·0886	·0919	·0953
3·0	1·0986	1·1019	1·1053	1·1086	1·1119	1·1151	1·1184	1·1217	1·1249	1·1282
3·1	·1314	·1346	·1378	·1410	·1442	·1474	·1506	·1537	·1569	·1600
3·2	·1632	·1663	·1694	·1725	·1756	·1787	·1817	·1848	·1878	·1909
3·3	·1939	·1970	·2000	·2030	·2060	·2090	·2119	·2149	·2179	·2208
3·4	·2228	·2267	·2296	·2326	·2355	·2384	·2413	·2442	·2470	·2499
3·5	1·2528	1·2556	1·2585	1·2613	1·2641	1·2670	1·2698	1·2726	1·2754	1·2782
3·6	·2809	·2837	·2865	·2892	·2920	·2947	·2975	·3002	·3029	·3056
3·7	·3083	·3110	·3137	·3164	·3191	·3218	·3244	·3271	·3297	·3324
3·8	·3350	·3376	·3403	·3429	·3455	·3481	·3507	·3533	·3558	·3584
3·9	·3610	·3635	·3661	·3686	·3712	·3737	·3762	·3788	·3813	·3838
4·0	1·3863	1·3888	1·3913	1·3938	1·3963	1·3987	1·4012	1·4036	1·4061	1·4086
4·1	·4110	·4134	·4159	·4183	·4207	·4231	·4255	·4279	·4303	·4327
4·2	·4351	·4375	·4398	·4422	·4446	·4469	·4493	·4516	·4540	·4563
4·3	·4586	·4609	·4633	·4656	·4679	·4702	·4725	·4748	·4771	·4793
4·4	·4816	·4839	·4861	·4884	·4907	·4929	·4954	·4974	·4996	·5019
4·5	1·5041	1·5063	1·5085	1·5107	1·5129	1·5151	1·5173	1·5195	1·5217	1·5239
4·6	·5261	·5282	·5304	·5326	·5347	·5369	·5390	·5412	·5433	·5454
4·7	·5476	·5497	·5518	·5539	·5560	·5581	·5602	·5623	·5644	·5665
4·8	·5686	·5707	·5728	·5748	·5769	·5790	·5810	·5831	·5851	·5872
4·9	·5892	·5913	·5933	·5953	·5974	·5994	·6014	·6034	·6054	·6074
5·0	1·6094	1·6114	1·6134	1·6154	1·6174	1·6194	1·6214	1·6233	1·6253	1·6273
5·1	·6292	·6312	·6332	·6351	·6371	·6390	·6409	·6429	·6448	·6467
5·2	·6487	·6506	·6525	·6544	·6563	·6582	·6601	·6620	·6639	·6658
5·3	·6677	·6696	·6715	·6734	·6752	·6771	·6790	·6808	·6827	·6845
5·4	·6864	·6882	·6901	·6919	·6938	·6956	·6975	·6993	·7011	·7029

n.	·00.	·01.	·02.	·03.	·04.	·05.	·06	·07.	·08.	·09.
5·5	1·7048	1·7066	1·7083	1·7102	1·7120	1·7138	1·7156	1·7174	1·7192	1·7210
5·6	·7228	·7246	·7263	·7281	·7299	·7317	·7334	·7352	·7370	·7387
5·7	·7405	·7422	·7440	·7457	·7475	·7492	·7509	·7527	·7544	·7561
5·8	·7579	·7596	·7613	·7630	·7647	·7664	·7682	·7699	·7716	·7733
5·9	·7750	·7766	·7783	·7800	·7817	·7834	·7851	·7868	·7884	·7901
6·0	1·7917	1·7934	1·7951	1·7967	1·7984	1·8001	1·8017	1·8034	1·8050	1·8067
6·1	·8083	·8099	·8116	·8132	·8148	·8165	·8181	·8197	·8213	·8229
6·2	·8245	·8262	·8278	·8294	·8310	·8326	·8342	·8358	·8374	·8390
6·2	·8406	·8421	·8437	·8453	·8469	·8485	·8500	·8516	·8532	·8547
6·4	·8563	·8579	·8594	·8610	·8625	·8641	·8656	·8672	·8687	·8703
6·5	1·8718	1·8733	1·8749	1·8764	1·8779	1·8795	1·8810	1·8825	1·8840	1·8855
6·6	·8871	·8886	·8901	·8916	·8931	·8946	·8961	·8976	·8991	·9006
6·7	·9021	·9036	·9051	·9066	·9081	·9095	·9110	·9125	·9140	·9155
6·8	·9169	·9184	·9199	·9213	·9228	·9243	·9257	·9272	·9286	·9301
6·9	·9315	·9330	·9344	·9359	·9373	·9387	·9402	·9416	·9431	·9445
7·0	1·9459	1·9473	1·9488	1·9502	1·9516	1·9530	1·9544	1·9559	1·9573	1·9587
7·1	·9601	·9615	·9629	·9643	·9657	·9671	·9685	·9699	·9713	·9727
7·2	·9741	·9755	·9769	·9782	·9796	·9810	·9824	·9838	·9851	·9865
7·3	·9879	·9892	·9906	·9920	·9933	·9947	·9961	·9974	·9988	2·0001
7·4	2·0015	2·0028	2·0042	2·0055	2·0069	2·0082	2·0096	2·0109	2·0122	·0135
7·6	2·0149	2·0162	2·0176	2·0189	2·0202	2·0216	2·0229	2·0242	2·0255	2·0268
7·6	·0282	·0295	·0308	·0321	·0334	·0347	·0360	·0373	·0386	·0399
7·7	·0412	·0425	·0438	·0451	·0464	·0477	·0490	·0503	·0516	·0528
7·8	·0541	·0554	·0567	·0580	·0592	·0605	·0618	·0631	·0643	·0656
7·9	·0669	·0681	·0694	·0707	·0719	·0732	·0744	·0757	·0769	·0728
8·0	2·0794	2·0807	2·0819	2·0832	2·0844	2·0857	2·0869	2·0882	2·0894	2·0906
8·1	·0919	·0931	·0943	·0956	·0968	·0980	·0992	·1005	·1017	·1029
8·2	·1041	·1054	·1066	·1078	·1090	·1102	·1114	·1126	·1138	·1151
8·3	·1163	·1175	·1187	·1199	·1211	·1223	·1235	·1247	·1259	·1270
8·4	·1282	·1294	·1306	·1318	·1330	·1342	·1354	·1365	·1377	·1389
8·5	2·1401	2·1412	2·1424	2·1436	2·1448	2·1459	2·1471	2·1483	2·1494	2·1506
8·6	·1518	·1529	·1541	·1552	·1564	·1576	·1587	·1599	·1610	·1622
8·7	·1633	·1645	·1656	·1668	·1679	·1691	·1702	·1713	·1725	·1736
8·8	·1748	·1759	·1770	·1782	·1793	·1804	·1816	·1827	·1838	·1849
8·9	·1861	·1872	·1883	·1894	·1905	·1917	·1928	·1939	·1950	·1961
9·0	2·1972	2·1983	2·1994	2·2006	2·2017	2·2028	2·2039	2·2050	2·2061	2·2072
9·1	·2083	·2094	·2105	·2116	·2127	·2138	·2149	·2159	·2170	·2181
9·2	·2192	·2203	·2214	·2225	·2235	·2246	·2257	·2268	·2279	·2289
9·3	·2300	·2311	·2322	·2332	·2343	·2354	·2364	·2375	·2386	·2396
9·4	·2407	·2418	·2428	·2439	·2450	·2460	·2471	·2481	·2492	·2502
9·5	2·2512	2·2523	2·2534	2·2544	2·2555	2·2565	2·2576	2·2586	2·2597	2·2607
9·6	·2618	·2628	·2638	·2649	·2659	·2670	·2680	·2690	·2701	·2711
9·7	·2721	·2732	·2742	·2752	·2762	·2773	·2783	.2792	·2803	·2814
9·8	·2824	·2834	·2844	·2854	·2865	·2875	·2885	·2895	·2905	·2915
9·9	·2925	·2935	·2946	·2956	·2966	·2976	·2986	·2996	·3006	·3016

英 漢 對 照 表

Abegg, (人名)
Abscissa, 橫坐標
— axis, 橫坐標軸
Absolute error, 絕對誤差
— zero, 絕對零
Acceleration, 加速度
— curve, 加速度曲線
— Normal, 垂直加速度
— Tangential, 切線加速度
— Total, 總加速度
Accidental errors, 偶然誤差
Acetochloranilide, 乙醯氯代胺基苯
Acnode, 共軛點
Addition, 加法
Adrian, (人名)
Airy, G. B., (人名)
d'Alembert's equation, 達氏方程式
Algebra. Laws of, 代數定律
Algebraic functions, 代數函數
Alternando, 更理
Amagat, (人名)
Amago, (人名)
Amount of substance, 物質總量
Ampère, 安培
Amplitude, 幅
Angles. Measurement of, 角的量法
— — Circular, 圓弧法
— — Radian, 弧度法
— Vectorial, 動徑法
Angular velocity, 角速度
Anti-differential, 逆微分
Aperiodic motion, 非週期運動
Approximate calculations, 近似計算
— integration, 積分的近似計算
Approximations. Solving differential equations by successive, 累次近似法解微分方程式
Arc of circle (length), 圓弧 (長)
Archimedes' spiral, 亞氏螺線
Areas bounded by curves, 曲線所圍面積
Arithmetical mean, 算術中數
Arrhenius, S., (人名)
Association. Law of, 結合律
Asymptote, 漸近線
August, (人名)
Atomic weights, 原子量
Austen, W. C. Roberts, (人名)
Auxiliaries, 輔式
Auxiliary equation, 輔方程式
— — Lagrange's 賴氏輔方程式
Average, 平均
— error, 平均誤差
— velocity, 平均速度
Averages. Method of, 平均法
Axis. Transformation of, 坐標軸的轉移
Axis. Abscissa, 橫坐標軸
— Conjugate, 共軛軸
— Co-ordinate, 坐標軸
— Imaginary, 虛軸
— Major, 長軸
— Minor, 短軸
— Oblique, 斜軸
— of imaginaries, 虛數軸
— of reals, 實數軸
— of revolution, 旋轉軸
— Real, 實軸
— Rectangular, 垂直軸
— Transverse, 橫截軸

Bacon, F., (人名)
Bancroft, W. D., (人名)
Bayer, (人名)
Baynes, R. E., (人名)
Berkeley, G., (人名)
Bernoulli, (人名)
Bernoulli's equation, 布氏方程式
— series, 布氏級數
Berthelot, M., (人名)
Berthollet, (人名)

Complete differentials, 完整微分
— elliptic integrals, 完全橢圓積分
— integral, 完全積分
— solution of differential equation, 微分方程式的完全解
Componendo, 合理
— et dividendo, 分合理
Composition of a solution, 溶液成份
Compound interest law, 複利律
Comte, A., (人名)
Concavity of curves, 曲線的凹入
Condensation. Retrograde, 後退凝結
Conditional equation, 條件方程式
Conditioned maxima and minima, 條件極大值與極小值
— observations, 條件觀測
Conditions. Limiting, 極限條件
Conduction of heat, 熱的傳導
Cone, 圓錐
— (centre of gravity), 圓錐重心
— (surface area), 圓錐表面
— (volume), 圓錐體積
Conic sections, 圓錐曲線
Conicoids, 圓錐曲線面
Conjugate axis, 共軛軸
— determinant, 共軛之素 (行列式)
— point, 共軛點
Conrad, M., (人名)
Consistent equations. Test for, 試驗方程式是否矛盾法
Constant, 常數
— errors, 定誤差
— Integration, 積分常數
— of Fourier's series, 傅氏級數的常數
— Phase, 相常數
Contact of curves, 曲線的相切
— Orders of, 曲線相切的等級
Continuous function, 連續函數
Convergent series, 斂級數
— — Test for, 斂級數試驗法
Convertendo, 逆理
Convexity of curves, 曲線的凸出
Cooling curves, 冷却曲線
Co-ordinate axis, 坐標軸
— plane, 坐標平面
Co-ordinates. Cartesian, 笛氏坐標
Co-ordinates. Generalized, 廣義坐標
— Polar, 極坐標
— Transformation of, 坐標的轉換
— Trilinear, 三線坐標
Correction term, 校正項
Cosecant, 餘割
Cosine, 餘弦
— Direction, 方向餘弦
— Hyperbolic, 雙曲線餘弦
— series, 餘弦級數
— — Euler's, 尤氏餘弦級數
Cotangent, 餘切
Cotes and Newton's interpolation formula, 古牛二氏補插公式
Cottle, G. J., (人名)
Criterion. Chauvenet's, 査氏準則
— of integrability, 可積準則
Critical temperature, 臨界溫度
Crompton, H., (人名)
Crookes, W., (人名)
Crunode, 節點
Cubature of solids, 立體求積
Curvature, 曲率
— Centre of, 曲率中心
— Circle of, 曲率圓
— Direction of, 曲率方向
— Radius of, 曲率半徑
Curve, 曲線
— Equation of, 曲線方程式
— Error, 誤差曲線
— Frequency, 頻數曲線
— Imaginary, 虛曲線
— Orders of, 曲線等級
— Plotting, 描繪曲線
— Probability, 或是率曲線
— Sine, 正弦曲線
— Smoothed, 光滑過的曲線
Cusp, 逆點
— Ceratoid, 第一類逆點
— Double, 雙逆點
— First species, 第一類逆點
— locus, 逆點軌跡
— Rhamphoid, 第二類逆點
— Second species, 第二類逆點
— Single, 單逆點
Cycle, 循環

Dostor's theorem, 杜氏定理
Double cusps, 雙逆點
— integrals, 雙重積分
— — Variation of, 雙重積分的變分
Duhem, (人名)
Dulong, (人名)
Dumas, J. B. A., (人名)
Dupre, A., (人名)

Edgeworth, F. Y., (人名)
Elasticity. Adiabatic, 絕熱彈性
— Isothermal, 等溫彈性
Elements, 元素
— Surface, 面元素
— Volume, 體元素
Eliminant, 消去式
Elimination, 消去法
— equations, 消去方程式
Ellipse, 橢圓
— (area of), 橢圓面積
Ellipse, (length of perimeter), 橢圓周長
Ellipsoid, 橢圓面
Elliptic functions, 橢圓函數
— integrals, 橢圓積分
Empirical formulæ, 經驗分式
Encke, (人名)
Envelope, 包絡線
— locus, 包絡線軌跡
Epoch, 初相
Epstein, (人名)
Equilateral hyperbola, 等邊雙曲線
Equilibrium. Van't Hoff's principle, 文氏平衡原理
Equation. Conditional, 條件方程式
— Differential, 微分方程式
— General, 普遍方程式
— Identical, 恆等方程式
— of curve, 曲線方程式
— of line, 直線方程式
— of motion, 運動方程式
— of plane, 平面方程式
— of state, 物態方程式
— Solving, 解方程式
— — Horner, 霍氏解方程式法
— — Newton, 牛氏解方程式法
Equation solving, Sturm, 史氏解方程式法
Error. Absolute, 絕對誤差
— Accidental, 偶然誤差
— Average, 平均誤差
— Constant, 定誤差
— Curve of, 誤差曲線
— Fractional, 分數誤差
— Function, 誤差函數
— — Complement, 誤差函數餘式
— Law of, 誤差定律
— Mean, 均方誤差
— of method, 方法誤差
— Percentage, 百分誤差
— Personal, 個人誤差
— Probable, 或然誤差
— Proportional, 比例誤差
— Relative, 相對誤差
— Systematic, 系統誤差
— Weighted, 加權誤差
Esson, W., (人名)
Etard, (人名)
Eulerian integral, 尤氏積分
Euler's cosine series, 尤氏餘弦級數
— criterion of integrability, 氏尤可積準則
— sine series, 尤氏正弦級數
— theorem, 尤氏定理
Even function of x, 偶函數
Everett, J. D., (人名)
Ewan, T., (人名)
Exact differential, 完整微分
— — equation, 完整微分方程式
— — Test for, 完整微分試驗法
— — — Forsyth's, 福氏完整微分試驗法
Expansion. Adiabatic, 絕熱膨脹
— Isothermal, 等溫膨脹
Explicit functions, 顯函數
Exponential functions, 指數函數
— series, 指數級數
External force, 外力
Extrapolation, 外插法

Factorial, 階乘
Factors. Integrating, 積分因數
Faraday, M., (人名)
Federlin, W., (人名)

Keesom, W. H., (人名)
Kelvin, Lord, (人名)
Kepler, (人名)
Kinetic theory, 動力論
Kipping, S., (人名)
Kirchhoff, (人名)
Kleiber, (人名)
Knight, W. T., (人名)
Kohlrausch, F., (人名)
Kooij, D. M., (人名)
Kopp, (人名)
Kramp, (人名)
Kühl, H., (人名)
Kundt, (人名)

Laar, J. J. van, (人名)
Lag, 落後
Lagrange, (人名)
Lagrange's auxiliary equations, 賴氏輔方程式
— criterion maxima and minima, 賴氏極大極小準則
— interpolation formula, 賴氏補插公式
— method of undetermined multipliers, 賴氏不定乘數法
— solution of differential equations, 賴氏微分方程式解法
— theorem, 賴氏定理
Lamb, H., (人名)
Langley, E. M., (人名)
Laplace, (人名)
Laplace's theorem, 拉氏定理
Laws of algebra, 代數定理
Lead, 超前
Least squares, 最小平方
— — Method of, 最小平方法
Legendre, (人名)
— equation, 雷氏方程式
— parameter, 雷氏參數
Lehfeldt, R. A., (人名)
Leibnitz, (人名)
— series, 萊氏級數
— theorem, 萊氏定理
— — Symbolic form of, 萊氏記號形式定理
Lemoine, G., (人名)
Lenz's law, 楞次定律
Liagre, J. B. J., (人名)
Limiting conditions, 極限情形
Limits of integrals, 積分之限
— inferior, 下限
— lower, 下限
— superior, 上限
— upper, 上限
Linear differential equation, 線性微分方程式
— — — Exact, 完整線性微分方程式
Liouville, (人名)
Locus, 軌跡
— Cusp, 逆點軌跡
— Envelope, 包絡線軌跡
— Nodal, 節點軌跡
— Tac, 切點軌跡
Lodge, O. J., (人名)
Logarithm, 對數
— Briggsian, 白氏對數
— Common, 常用對數
— Hyperbolic, 雙曲線對數
— Naperian, 奈氏對數
— Natural, 自然對數
Logarithmic decrement, 對數減少量
— differentiation, 對數微分法
— functions, 對數函數
— paper, 對數格紙
— series, 對數螺線
Lorentz, H., (人名)
Losanitsch, (人名)
Loschmidt, (人名)
Love, (人名)
Löwel, (人名)
Lower limit, 下限
Lowry, T. M., (人名)
Lupton, S., (人名)

Mach, E., (人名)
Maclaurin's series, 馬氏級數
— theorem, 馬氏定理
Magnitude. Orders of, 數量的等級
Magnus, (人名)
Major axis, 長軸
Mallet, (人名)
Marek, (人名)

Normal Length of, 法線的長
Noyes, A. A., (人名)
Numerical equation, 數值方程式
— values of trigonometrical ratios, 三角函數的數值

Obermayer, O. A. von, (人名)
Oblique axes, 斜軸
Observation equations, 觀測方程式
— — Solving, 觀測方程式解法
— — — Gauss, 果氏觀測方程式解法
Observations, Conditioned, 條件觀測值
— Rejecting, 觀測值之捨棄
— Test for fidelity of, 觀測值是否可靠的試法
Odd function of x, x 的奇函數
Ohm, (人名)
Ohm's law, 歐姆定律
Operation. Symbols of, 運算記號
Orders of contact, 想切的等級
— of curves, 曲線的等級
— of differences, 差數的等級
— of differential equations, 微分方程式的等級
— of determinants, 行列式的次數
— of magnitude, 數量的等級
— of surfaces, 曲面的等級
Ordinary differential equations, 普通微分方程式
Ordinate, 縱坐標
— axis, 縱坐標軸
Origin, 原點
Orthogonal trajectory, 正交曲線
Oscillations. Damped, 阻尼振動
— Forced, 強迫振動
— Free, 自由振動
— Natural, 自然振動
— Period of, 振動週期
Oscillatory motion. Equations of, 振動方程式
Osculation. Points of, 密切點
Osculatory circle, 曲率圈
Ostwald, W., (人名)

Parallelogram (area), 平行四邊形
— of velocities, 速度平行四邊形
Parallelopiped, 平行六面體
— of velocities, 速度平行六面體
— (volume), 平行六面體體積
Paraboloid, 拋物線面
Parabola, 拋物線
— (area of), 拋物線(面積)
Parabolic formulæ, 拋物線公式
Parameters (crystals), 參數
— Legendre's, 雷氏參數
— variable, 參變數
Parnell, T., (人名)
Partial differential, 偏微分
— — equations, 偏微分方程式
— differentiation, 求偏微分法
— fractions, 部份分數
Particular integrals, 特殊積分
— solutions, 特殊解
Parts. Integration by, 分部積分法
— interpolation by proportional, 比例部份補插法
— Rule of proportional, 比例部份規則
Paschen, (人名)
P-discriminant, P 判別式
Pelouse, (人名)
Pendlebury, R., (人名)
Percentage error, 百分數誤差
Perimeter of circle (length), 圓周
— of ellipse (length), 橢圓周
Period of oscillation, 振動週期
Periodic functions, 週期函數
— motion, 週期運動
Perkin, W. H., (人名)
Permutations, 排列
Perpendicular equation of line, 直線的法線方程式
Perry, J., (人名)
Personal error, 個人誤差
Peter's formula, 畢氏公式
Petit and Dulong, (人名)
Phase, 相
— constant, 相常數
Pickering, S. V., (人名)
Pierce, B. O., (人名)
Plaats, J. D. van der, (人名)
Plait point, 褶點
— — curve, 褶點曲線