Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Zahlentheorie

Arbeitsblatt 12

Übungsaufgaben

Aufgabe 12.1.*

Betrachte die Quadratrestgruppe

$$\mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^{\times 2},$$

wobei $\mathbb{Q}^{\times 2}$ die Untergruppe der Quadrate bezeichne. Zeige, dass es zu jeder Restklasse $x \in \mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^{\times 2}$ einen Repräsentanten aus $\mathbb{Z}$ gibt.

Aufgabe 12.2. Zeige, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzungen

$$0 \leq \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leq 1$$

gelten.

Aufgabe 12.3.*

Bestimme die Anzahl der hinteren Nullen in der Dezimalentwicklung von 100!.

Aufgabe 12.4.*

Bestimme die Primfaktorzerlegung von 10!.

Aufgabe 12.5. Bestimme die Primfaktorzerlegung von

$$\binom{20}{10}.$$

Aufgabe 12.6. Zeige mit Hilfe des Bertrandschen Postulats, dass für jedes $n \geq 2$ der Binomialkoeffizient

$$\binom{2n}{n}$$

einen Primfaktor größer als n besitzt.

Aufgabe 12.7. Zeige, dass für $n \geq 2$ die Fakultät $n!$ keine Quadratzahl ist.

Aufgabe 12.8.*

Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass das Produkt von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen von $n!$ geteilt wird.

Zur Erinnerung.

Aufgabe 12.9. Zeige, dass die Logarithmen zur Basis b die folgenden Rechenregeln erfüllen.

(1) Es ist $\log_b(b^x) = x$ und $b^{\log_b(y)} = y$, das heißt der Logarithmus zur Basis b ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis b.
(2) Es gilt $\log_b(y \cdot z) = \log_b y + \log_b z$
(3) Es gilt $\log_b y^u = u \cdot \log_b y$ für $u \in \mathbb{R}$.
(4) Es gilt
$$\log_a y = \log_a \left(b^{\log_b y}\right) = \log_b y \cdot \log_a b.$$

Aufgabe 12.10. Sei $\varphi(n)$ die Eulersche Funktion. Zeige, dass die Folge $\frac{\varphi(n)}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, sowohl in 1 als auch in $\frac{1}{3}$ einen Häufungspunkt besitzt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 12.11. (4 Punkte)

Sei $\varphi(n)$ die Eulersche Funktion. Zeige, dass die Folge $\frac{\varphi(n)}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, sowohl in 1 als auch in 0 einen Häufungspunkt besitzt.

Aufgabe 12.12. (5 Punkte)

Beweise Korollar 12.5, also die Aussage, dass
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0$$
ist, mit Hilfe von Korollar 11.6 über die Riemannsche ζ-Funktion.

Aufgabe 12.13. (4 Punkte)

Bestimme anhand des Beweises der Ungleichungen von Tschebyschow einen expliziten Wert für c mit $\pi(x) \geq c\frac{x}{\ln(x)}$.

Aufgabe 12.14. (4 Punkte)

Zeige unter Verwendung der Ungleichungen von Tschebyschow, dass es (zumindest für x hinreichend groß) mehr Primzahlen zwischen x und x^2 als zwischen 1 und x gibt.