

Analysis I

Vorlesung 1

Mengen



Georg Cantor (1845-1918) ist der Schöpfer der Mengentheorie.



David Hilbert (1862-1943) nannte sie ein *Paradies*, aus dem die Mathematiker nie mehr vertrieben werden dürfen.

Eine *Menge* ist eine Ansammlung von wohlunterschiedenen Objekten, die die *Elemente* der Menge heißen. Mit „wohlunterschieden“ meint man, dass es klar ist, welche Objekte als gleich und welche als verschieden angesehen werden. Die *Zugehörigkeit* eines Elementes x zu einer Menge M wird durch

$$x \in M$$

ausgedrückt, die Nichtzugehörigkeit durch

$$x \notin M .$$

Für jedes Element(symbol) gilt stets genau eine dieser zwei Möglichkeiten.

Für Mengen gilt das *Extensionalitätsprinzip*, d.h. eine Menge ist durch die in ihr enthaltenen Elemente eindeutig bestimmt, darüber hinaus bietet sie keine Information. Insbesondere stimmen zwei Mengen überein, wenn beide die gleichen Elemente enthalten.

Die Menge, die kein Element besitzt, heißt *leere Menge* und wird mit

$$\emptyset$$

bezeichnet.

Eine Menge N heißt *Teilmenge* einer Menge M , wenn jedes Element aus N auch zu M gehört. Man schreibt dafür

$$N \subseteq M$$

(manche schreiben dafür $N \subset M$). Man sagt dafür auch, dass eine *Inklusion* $N \subseteq M$ vorliegt. Im Nachweis, dass $N \subseteq M$ ist, muss man zeigen, dass für ein beliebiges Element $x \in N$ ebenfalls die Beziehung $x \in M$ gilt.¹ Dabei darf man lediglich die Eigenschaft $x \in N$ verwenden.

Aufgrund des Extensionalitätsprinzips hat man das folgende wichtige *Gleichheitsprinzip für Mengen*, dass

$$M = N \text{ genau dann, wenn } N \subseteq M \text{ und } M \subseteq N$$

gilt. In der mathematischen Praxis bedeutet dies, dass man die Gleichheit von zwei Mengen dadurch nachweist, dass man (in zwei voneinander unabhängigen Teilargumentationen) die beiden Inklusionen zeigt. Dies hat auch den kognitiven Vorteil, dass das Denken eine Zielrichtung bekommt, dass klar die Voraussetzung, die man verwenden darf, von der gewünschten Schlussfolgerung, die man aufzeigen muss, getrennt wird. Hier wiederholt sich das Prinzip, dass die Äquivalenz von zwei Aussagen die wechselseitige Implikation bedeutet, und durch den Beweis der beiden einzelnen Implikationen bewiesen wird.

Beschreibungsmöglichkeiten für Mengen

Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine Menge anzugeben. Die einfachste ist, die zu der Menge gehörenden Elemente aufzulisten, wobei es auf die Reihenfolge der Elemente nicht ankommt. Bei endlichen Mengen ist dies unproblematisch, bei unendlichen Mengen muss man ein „Bildungsgesetz“ für die Elemente angeben.

Die wichtigste Menge, die man zumeist als eine fortgesetzte Auflistung einführt, ist die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Hier wird eine bestimmte Zahlenmenge durch die Anfangsglieder von erlaubten Zifferfolgen angedeutet. Wichtig ist, dass mit \mathbb{N} nicht eine Menge von bestimmten Ziffern gemeint ist, sondern die durch die Ziffern repräsentierten Zahlwerte. Eine natürliche Zahl hat viele Darstellungsarten, die Ziffernrepräsentation im Zehnersystem ist nur eine davon, wenn auch eine besonders übersichtliche.

Mengenbeschreibung durch Eigenschaften

Es sei eine Menge M gegeben. In ihr gibt es gewisse Elemente, die gewisse Eigenschaften E (Prädikate) erfüllen können oder aber nicht. Zu einer

¹In der Sprache der Quantorenlogik kann man eine Inklusion verstehen als die Aussage $\forall x(x \in N \rightarrow x \in M)$.

Eigenschaft E gehört innerhalb von M die Teilmenge bestehend aus allen Elementen aus M , die diese Eigenschaft erfüllen. Man beschreibt eine durch eine Eigenschaft definierte Teilmenge meist als

$$\{x \in M \mid E(x)\} = \{x \in M \mid x \text{ besitzt die Eigenschaft } E\} .$$

Dies geht natürlich nur mit solchen Eigenschaften, für die die Aussage $E(x)$ eine wohldefinierte Bedeutung hat. Wenn man eine solche Teilmenge einführt, so gibt man ihr häufig sofort einen Namen (in dem auf die Eigenschaft E Bezug genommen werden kann, aber nicht muss). Z.B. kann man einführen

$$G = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade}\} ,$$

$$U = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist ungerade}\} ,$$

$$Q = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine Quadratzahl}\} ,$$

$$\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine Primzahl}\} .$$

Für die Mengen in der Mathematik sind meist eine Vielzahl an mathematischen Eigenschaften relevant und daher gibt es meist auch eine Vielzahl an relevanten Teilmengen. Aber auch bei alltäglichen Mengen, wie etwa die Menge K der Studierenden in einem Kurs, gibt es viele wichtige Eigenschaften, die gewisse Teilmengen festlegen, wie etwa

$$O = \{x \in K \mid x \text{ kommt aus Osnabrück}\} ,$$

$$P = \{x \in K \mid x \text{ studiert im Nebenfach Physik}\} ,$$

$$D = \{x \in K \mid x \text{ hat im Dezember Geburtstag}\} .$$

Die Menge K ist dabei selbst durch eine Eigenschaft festgelegt, es ist ja

$$K = \{x \mid x \text{ ist Studierender in diesem Kurs}\} .$$

Mengenoperationen

So, wie man Aussagen zu neuen Aussagen verknüpfen kann, gibt es Operationen, mit denen aus Mengen neue Mengen entstehen.

- *Vereinigung*

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\} ,$$

- *Durchschnitt*

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\} ,$$

- *Differenzmenge*

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\} .$$

Diese Operationen ergeben nur dann einen Sinn, wenn die beteiligten Mengen als Teilmengen in einer gemeinsamen Grundmenge gegeben sind. Dies sichert, dass man über die gleichen Elemente spricht. Häufig wird diese Grundmenge nicht explizit angegeben, dann muss man sie aus dem Kontext erschließen. Ein Spezialfall der Differenzmenge bei einer gegebenen Grundmenge ist das *Komplement* einer Teilmenge $A \subseteq G$, das durch

$$\complement A := G \setminus A = \{x \in G \mid x \notin A\}$$

definiert ist. Wenn zwei Mengen einen leeren Schnitt haben, also $A \cap B = \emptyset$ gilt, so nennen wir sie *disjunkt*.

Konstruktion von Mengen

Die meisten Mengen in der Mathematik ergeben sich ausgehend von einigen wenigen Mengen wie beispielsweise den endlichen Mengen und \mathbb{N} durch bestimmte Konstruktionen von neuen Mengen aus schon bekannten oder schon zuvor konstruierten Mengen.² Wir definieren³

DEFINITION 1.1. Es seien zwei Mengen L und M gegeben. Dann nennt man die Menge

$$L \times M = \{(x, y) \mid x \in L, y \in M\}$$

die *Produktmenge*⁴ der beiden Mengen.

Die Elemente der Produktmenge nennt man *Paare* und schreibt (x, y) . Dabei kommt es wesentlich auf die Reihenfolge an. Die Produktmenge besteht also aus allen Paarkombinationen, wo in der ersten *Komponenten* ein Element der ersten Menge und in der zweiten Komponente ein Element der zweiten Menge steht. Zwei Paare sind genau dann gleich, wenn sie in beiden Komponenten gleich sind.

²Darunter fallen auch der Schnitt und die Vereinigung, doch bleiben diese innerhalb einer vorgegebenen Grundmenge, während es hier um Konstruktionen geht, die darüber hinaus gehen.

³Definitionen werden in der Mathematik zumeist als solche deutlich herausgestellt und bekommen eine Nummer, damit man auf sie einfach Bezug nehmen kann. Es wird eine Situation beschrieben, bei der die verwendeten Begriffe schon zuvor definiert worden sein mussten, und in dieser Situation wird einem neuen Konzept ein Name (eine Bezeichnung) gegeben. Dieser Name wird *kursiv* gesetzt. Man beachte, dass das Konzept auch ohne den neuen Namen formulierbar ist, der neue Name ist nur eine Abkürzung für das Konzept. Sehr häufig hängen die Begriffe von Eingaben ab, wie den beiden Mengen in dieser Definition. Bei der Namensgebung herrscht eine gewisse Willkür, so dass die Bedeutung der Bezeichnung im mathematischen Kontext sich allein aus der expliziten Definition, aber nicht aus der alltäglichen Wortbedeutung erschließen lässt

⁴Man spricht auch vom *kartesischen Produkt* der beiden Mengen

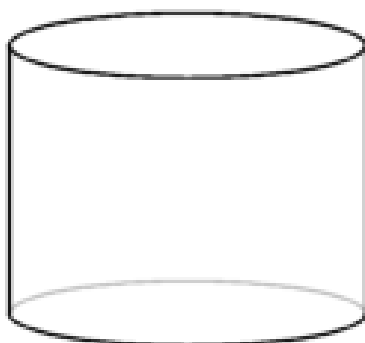
Bei einer Produktmenge können natürlich auch beide Mengen gleich sein. Dann ist es verlockend, die Reihenfolge zu verwechseln, und also besonders wichtig, darauf zu achten, dies nicht zu tun. Wenn es in der ersten Menge n Elemente und in der zweiten Menge k Elemente gibt, so gibt es in der Produktmenge $n \cdot k$ Elemente. Wenn eine der beiden Mengen leer ist, so ist auch die Produktmenge leer. Man kann auch für mehr als nur zwei Mengen die Produktmenge bilden, worauf wir bald zurückkommen werden.

BEISPIEL 1.2. Es sei V die Menge aller Vornamen (sagen wir der Vornamen, die in einer bestimmten Grundmenge an Personen wirklich vorkommen) und N die Menge aller Nachnamen. Dann ist

$$V \times N$$

die Menge aller Namen. Aus einem Namen lässt sich einfach der Vorname und der Nachname herauslesen, indem man entweder auf die erste oder auf die zweite Komponente des Namens schaut. Auch wenn alle Vornamen und Nachnamen für sich genommen vorkommen, so muss natürlich nicht jeder daraus gebastelte mögliche Name wirklich vorkommen. Bei der Produktmenge werden eben alle Kombinationsmöglichkeiten aus den beiden beteiligten Mengen genommen.

Wenn zwei geometrische Punktengen A und B gegeben sind, beispielsweise als Teilmengen einer Ebene E , so kann man die Produktmenge $A \times B$ als Teilmenge von $E \times E$ auffassen. Dadurch entsteht ein neues geometrisches Gebilde, das man manchmal auch in einer kleineren Dimension realisieren kann.



Ein Zylindermantel ist die Produktmenge aus einem Kreis und einer Strecke

BEISPIEL 1.3. Es sei S ein Kreis, worunter wir die Kreislinie verstehen, und I eine Strecke. Der Kreis ist eine Teilmenge einer Ebene E und die Strecke ist eine Teilmenge einer Geraden G , so dass für die Produktmenge die Beziehung

$$S \times I \subseteq E \times G$$

gilt. Die Produktmenge $E \times G$ stellt man sich als einen dreidimensionalen Raum vor, und darin ist die Produktmenge $S \times I$ ein Zylindermantel.

Eine andere wichtige Konstruktion, um aus einer Menge eine neue Menge zu erhalten, ist die Potenzmenge.

DEFINITION 1.4. Zu einer Menge M nennt man die Menge aller Teilmengen von M die *Potenzmenge* von M . Sie wird mit

$$\mathfrak{P}(M)$$

bezeichnet.

Es ist also

$$\mathfrak{P}(M) = \{T \mid T \text{ ist Teilmenge von } M\} .$$

Wenn eine Menge n Elemente besitzt, so besitzt ihre Potenzmenge 2^n Elemente.

Induktion

Mathematische Aussagen, die von natürlichen Zahlen abhängen, können mit dem Beweisprinzip der *vollständigen Induktion* bewiesen werden. Die folgende Aussage begründet dieses Prinzip.

SATZ 1.5. Für jede natürliche Zahl n sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Es gelte

- (1) $A(0)$ ist wahr.
- (2) Für alle n gilt: wenn $A(n)$ gilt, so ist auch $A(n+1)$ wahr.

Dann gilt $A(n)$ für alle n .

Beweis. Es sei

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist wahr}\} .$$

Wir wollen zeigen, dass $M = \mathbb{N}$ ist, denn genau dies bedeutet, dass die Aussage für alle n gilt. Nach der ersten Bedingung ist

$$0 \in M .$$

Nach der zweiten Voraussetzung gilt für M , dass aus $n \in M$ stets $n+1 \in M$ folgt. Damit enthält M die 0, daher die 1, daher die 2, usw., und damit überhaupt alle natürlichen Zahlen. \square

Der Nachweis von (der Gültigkeit von) $A(0)$ heißt dabei der *Induktionsanfang* und der Schluss von $A(n)$ auf $A(n+1)$ heißt der *Induktionsschluss*. Innerhalb des Induktionsschlusses nennt man die Gültigkeit von $A(n)$ auch die *Induktionsvoraussetzung*. In manchen Situationen ist die Aussage $A(n)$ erst für $n \geq n_0$ für ein gewisses n_0 (definiert oder) wahr. Dann beweist man im Induktionsanfang die Aussage $A(n_0)$ und den Induktionsschluss führt man für $n \geq n_0$ durch.

Das folgende Standardbeispiel für einen Induktionsbeweis verwendet das Summenzeichen. Für gegebene (natürliche, reelle, komplexe) Zahlen a_1, \dots, a_n bedeutet

$$\sum_{k=1}^n a_k := a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Dabei hängen im Allgemeinen die a_k in einer formelhaften Weise von k ab. Entsprechend ist das Produktzeichen definiert, nämlich durch

$$\prod_{k=1}^n a_k := a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n.$$

Insbesondere sind für $n \in \mathbb{N}$ die Potenzen durch

$$a^n = \prod_{i=1}^n a = a^{n-1} \cdot a = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}$$

definiert. Dabei gelten die Konventionen $0a = 0$ und $a^0 = 1$ (die erste lässt sich auch über die Multiplikation begründen, die zweite ist aber auch sinnvoll). Als Rechenregeln für das Potenzieren gelten

$$\begin{aligned} (1) \quad & (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \\ (2) \quad & a^{n+m} = a^n \cdot a^m \\ (3) \quad & (a^n)^m = a^{nm}. \end{aligned}$$

AUFGABE 1.6. Beweise durch Induktion die folgende Formel für $n \geq 1$.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Lösung

Beim Induktionsanfang ist $n = 1$, daher besteht die Summe links nur aus einem Summanden, nämlich der 1, und daher ist die Summe 1. Die rechte Seite ist $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$, so dass die Formel für $n = 1$ stimmt.

Für den Induktionsschritt setzen wir voraus, dass die Formel für ein $n \geq 1$ gilt, und müssen zeigen, dass sie auch für $n + 1$ gilt. Dabei ist n beliebig. Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^n k \right) + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir für die zweite Gleichheit die Induktionsvoraussetzung verwendet. Der zuletzt erhaltene Term ist die rechte Seite der Formel für $n+1$, also ist die Formel bewiesen.

AUFGABE 1.7. Zeige durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$

ein Vielfaches von 43 ist.

Lösung

Für $n = 0$ ist

$$6^2 + 7 = 43$$

ein Vielfaches von 43. Sei nun die Aussage für n bewiesen und betrachten wir den Ausdruck für $n+1$. Dieser ist

$$\begin{aligned}
6^{n+1+2} + 7^{2(n+1)+1} &= 6 \cdot 6^{n+2} + 7^2 \cdot 7^{2n+1} \\
&= 6 \cdot 6^{n+2} + (6 + 43)7^{2n+1} \\
&= 6(6^{n+2} + 7^{2n+1}) + 43 \cdot 7^{2n+1} \\
&= 6 \cdot 43 \cdot s + 43 \cdot 7^{2n+1},
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Induktionsvoraussetzung verwendet wurde (nämlich die Eigenschaft, dass $6^{n+2} + 7^{2n+1}$ ein Vielfaches von 43 ist). Daher ist diese Zahl ein Vielfaches von 43.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Georg Cantor 1894.jpg , Autor = Benutzer Taxiarchos228 auf Commons, Lizenz = PD	1
Quelle = David Hilbert 1886.jpg , Autor = Unbekannt (1886), Lizenz = PD	1
Quelle = Geometri cylinder.png , Autor = Benutzer Anp auf sv Wikipedia, Lizenz = PD	5