Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Maß- und Integrationstheorie

Arbeitsblatt 15

Übungsaufgaben

AUFGABE 15.1. Es sei M eine Menge, die mit einer Halbmetrik versehen sei. Zeige, dass M ein topologischer Raum ist.

AUFGABE 15.2. Es sei M eine Menge, die mit einer Halbmetrik d versehen sei. Zeige, dass d genau dann eine Metrik ist, wenn der topologische Raum M ein Hausdorffraum ist.

AUFGABE 15.3. Es sei X ein topologischer Raum. Wir nennen Punkte $x, y \in X$ *umgebungsäquivalent*, wenn für jede offene Menge $U \subseteq X$ die Zugehörigkeit $x \in U$ genau dann gilt, wenn $y \in U$ gilt. Zeige, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

AUFGABE 15.4. Es seien X und Y Mengen, auf denen jeweils eine Halbmetrik definiert sei und es sei

$$\varphi\colon\ X \longrightarrow Y$$

eine Abbildung. Zeige, dass φ genau dann stetig ist, wenn es zu jedem $x \in X$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart existiert, dass aus $d(x, x') \leq \delta$ die Abschätzung $d(\varphi(x), \varphi(x')) \leq \epsilon$ folgt.

AUFGABE 15.5. Es seien X und Y Mengen, auf denen jeweils eine Halbmetrik definiert sei und es sei

$$\varphi\colon\ X \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung. Zeige, dass φ eine stetige Abbildung

$$\tilde{\varphi}\colon\ X/\sim \longrightarrow Y/\sim$$

induziert, die mit den Quotientenabbildungen verträglich ist.

AUFGABE 15.6. Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller konvergenten Folgen. Zeige, dass durch

$$\|v\| := \left|\lim_{n\to\infty} v_n\right|$$

eine Halbnorm auf V gegeben ist. Bestimme Z aus Lemma 15.11 und V/Z.

AUFGABE 15.7. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer Halbnorm $\|-\|$, zugehöriger Halbmetrik d und sei

$$Z = \{v \in V \mid \|v\| = 0\}.$$

Zeige, dass der Restklassenraum V/Z in kanonischer Weise mit der Quotientenmenge $V/\sim$ übereinstimmt, wobei $\sim$ die zu d gehörige Äquivalenzrelation ist, und dass die induzierte Metrik auf $V/\sim$ von der induzierten Norm herrührt.

AUFGABE 15.8. Es sei X ein topologischer Raum und sei $C^b(X, \mathbb{K})$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum der stetigen beschränkten $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen auf X, versehen mit der Supremumsnorm. Es sei $x \in X$. Zeige, dass die Auswertung an x, also die Abbildung

$$C^b(X, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K},\ f \longmapsto f(x),$$

$\mathbb{K}$-linear und stetig ist.

AUFGABE 15.9. Man gebe ein Beispiel für einen σ-endlicher Maßraum $(M, \mathcal{A}, \mu)$ derart, dass

$$V \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \int_M f d\mu,$$

nicht stetig ist, wobei V den $\mathbb{R}$-Vektorraum der beschränkten integrierbaren Funktionen auf M, versehen mit der Supremumsnorm, bezeichnet.

Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe G, die zugleich ein topologischer Raum ist derart, dass die Verknüpfung

$$G \times G \longrightarrow G,\ (g, h) \longmapsto g \circ h,$$

und die Inversenbildung

$$G \longrightarrow G,\ g \longmapsto g^{-1},$$

stetige Abbildungen sind.

AUFGABE 15.10. Zeige, dass ein topologischer Vektorraum eine (additive) topologische Gruppe ist.

AUFGABE 15.11. Zeige, dass die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}^n, +)$, $(S^1,$ mit der Winkeladdition), die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ topologische Gruppen sind.

Es sei V ein topologischer Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dann heißt

$$V' = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}) :\ f \text{ stetig }\}$$

der *topologische Dualraum* zu V.

Aufgabe 15.12. Es sei V ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei V' der stetige Dualraum zu V. Zeige, dass V' über

$$\|f\| := \sup\left(|f(x)|, \|x\| = 1\right)$$

zu einem normierten Vektorraum wird.

Aufgabe 15.13.*

Zeige, dass ein metrischer Raum genau dann eine abzählbare Basis der Topologie besitzt, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 15.14. (4 Punkte)

Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der beschränkten integrierbaren Funktionen auf M, den wir mit der Supremumsnorm versehen. Zeige, dass

$$V \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \int_M f d\mu,$$

stetig ist.

Aufgabe 15.15. (3 Punkte)

Es sei V ein unendlichdimensionaler normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeige, dass es eine lineare Abbildung

$$V \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt, die nicht stetig ist.

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5