民國三十年出版

高級中學學生用

高中代數學

編著者　傅　溥

世界書局印行

例言

1. 本書係依照教育部頒布之高中暫行課程標準,及根據編者多年之教授經驗編纂而成.專供高級中學普通科,及與此同程度學校之用.

1. 本書程度係與初中相啣接,假定學生已具有相當之數學知識,故有多數名詞解釋在後而引用反在前者,職是之故.

1. 本書起首數章重在復習,故對於計算之法則及定理,僅揭其綱要而略其證明.

1 學語譯名我國極不統一,本書所採用者均係通行已久之名詞,茲更於卷尾附一中英學語對照表,俾使學者參閱,且可作翻讀西文原書之助.

1. 初等方程式及聯立方程式最足以磨鍊學生之思想,惟其計算方法學生大率已於初中時習得之,故本書僅重於其解法之原理,而於討論方面則於可能範圍內詳爲敍述.

1. 圖表爲代數學與幾何學互相融合而成者,本書於不與解析幾何學相重複之範圍內,特闢一章敍述之,俾學

者得知代數學與幾何學之溝通情形.

1. 確率不僅在數學上占有重要之位置,即於吾人之實際生活上亦頗爲必要,故本書特闢一章於可能範圍內詳加敍述,學者如能融會貫通之,則於複雜社會之生存上當可得多少之助益.

1. 本書問題雖僅只五百餘題,然選擇精當難易適度,學者如能一一演習之,則對於代數學一科可謂已入門牆,編者他日有暇當一一演出藉供學者自修之助.

1. 本書付印倉促,謬誤之處在所難免,海內明達如承見教則不勝感謝之至.

目　次

8566

第七章　聯立方程式……………………127

附 錄

3. 答數

高中代數學

第一章　數及其計算

1　自然數　一物與多物之觀念,爲吾人所共有者.於此有甚多同種類之物體時,設於其中任取一物,則所取之物數謂之一.次於殘餘之物體中再任取一物,則此所取之一物與前所取之一物合併後之數,謂之加一於一,或稱其物之數爲二,即二爲加一於一之略稱.再於殘餘之物體中更任取一物,此所取之一物與前所取二物合併後之數,謂之加一於二,或稱其物之數爲三,即三爲加一於二之略稱;詳言之則爲加一於一後再行加一之略稱也.如此以推,加一於三謂之四,加一於四謂之五,加一於五謂之六,………如斯吾人即得數之觀念.

不論其物數如何之多,吾人仍能設想再行添加一物於其中,故任取何數,吾人亦能得一較其數多一之數.

一,二,三,四 ……… 等數,謂之自然數.通常皆以 1, 2, 3, 4, ……… 等符號以表之.依自然數之順序,整列成

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9…………

系統時,謂之自然數列.自然數列如吾人依次唱之,則後唱

者較前唱者其數爲大,前唱者較後唱者其數爲小.例如 7 較 5 爲大,而 5 較 7 爲小是.由此定義,當易得知下述之事實.

第一: 有相異之 a, b 二數時,則 a 較 b 爲大,或較 b 爲小,二者必居其一.

第二: 有 a, b, c 三數,a 較 b 爲大而 b 復較 c 爲大時,則 a 較 c 爲大.

a, b 二數相等,或 a 等於 b,或 b 等於 a 者;其意爲 a 不大於 b,亦不小於 b,畢竟二數同爲一數之謂也.爲簡單表示 a, b 二數相等起見,通常皆用下列之記法以表之.

$$a=b, \quad 或 \quad b=a.$$

如此,凡以符號 = 表示其兩側之二數相等者,謂之**等式**.

又 $a>b$ 表示 a 較 b 爲大,
$a<b$ 表示 a 較 b 爲小,
$a\neq b$ 表示 a 不等於 b,
$a\ngtr b$ 表示 a 不大於 b,
$a\nless b$ 表示 a 不小於 b,
$a\gtrless b$ 表示 a 較 b 爲大或較 b 爲小,
$a\geqq b$ 表示 a 較 b 爲大或與 b 相等,
$a\leqq b$ 表示 a 較 b 爲小或與 b 相等.

如上所示,用各種符號以表示二數大小之關係者,謂之

不等式.於等式或不等式,其符號＝或＞,＜等之右側及左側所書者,各謂之等式或不等式之右邊及左邊.

2. **加法**　加3於5云者,其意爲於自然數列中求其位於5後之第三位數爲何數之謂.即於自然數列中,由6數起,順次唱數其後之三數6, 7, 8而求得其數爲8是也.此種算法,通常皆以符號＋表之,而書作

$$5+3=8.$$

一般所謂加b於a者,皆爲於自然數列中求其a後之b位數爲何數之謂也.因自然數列中無最後之符號,故吾人常能求得此a與b相加之結果之數,謂之a與b之和,通常皆以$a+b$以表之.因$a+1, a+2, \cdots\cdots$各表位於a後之第一數,第二數,……,故數列$a+1, a+2, \cdots\cdots$所表示者,爲自然數列中a後之所有部分.隨之位於a後之任意一數,可以$a+d$之形式以表之.此處之d爲某一定之自然數.

將大數唱數而加之,甚爲煩難.故必須暗記小數之和而適用下述之加法法則以求大數之和.

加法爲交換的及結合的算法,即應遵從下述二種法則之算法.

交換法則　$a+b=b+a.$

即加b於a之結果與加a於b之結果相同.

結合法則　$a+(b+c)=(a+b)+c.$

即加 c 於 b 所得之和於 a 之結果,與於加 b 於 a 之和中再行加 c 之結果相同.

將上述之法則反復適用之,可推知下述事項之眞確.即任意有限個數之和,當其加合時,不論其排列之順序如何,或任意分羣以加合之,其結果皆屬相同.例如

$$a+b+c+d=a+d+b+c=b+a+d+c$$

是.又由和之定義,及等式或不等式之規則,復可推得下列之事實.

(1) 若 $a=b$, 則 $a+c=b+c$.

(2) 若 $a<b$, 則 $a+c<b+c$.

(3) 若 $a>b$, 則 $a+c>b+c$.

反之,

(4) 若 $a+c=b+c$, 則 $a=b$.

(5) 若 $a+c<b+c$, 則 $a<b$.

(6) 若 $a+c>b+c$, 則 $a>b$.

再由(1)(2)(3)諸式,亦可推得下列之事實.

(7) 若 $a=b$, $c=d$, 則 $a+c=b+d$.

(8) 若 $a<b$, $c<d$, 則 $a+c<b+d$.

(9) 若 $a>b$, $c>d$, 則 $a+c>b+d$.

3. **乘法** 以 b 乘 a 云者,係以 b 個 a 數相加而求其和之謂也.此和謂之以 b 乘 a 之積,通常皆以 $a\times b$ $a\cdot b$ 或

ab以表之.又 a 謂之被乘數,b 謂之乘數,a 及 b 各謂之積ab之因子.由乘法定義,

$$ab=a+a+a+a+\cdots\cdots\cdots \text{（至 } b \text{ 項止）}.$$

可知反復適用加法以求乘積時,其手續至爲煩瑣.故必須記憶小數之乘積後,然後適用加法之法則或依下述之乘法法則以求大數之乘積,始爲便利.

乘法亦如加法,係交換的且爲結合的算法;而關於加法則爲配分的,故須遵從下述之三種法則.

交換法則 $ab=ba$.

即以 b 乘 a 所得之結果,與以 a 乘 b 所得之之結果相同.

結合法則 $a(bc)=(ab)c$.

即以積bc乘 a 所得之結果,與以 c 乘積ab所得之結果相同.

配分法則 $a(b+c)=ab+ac$.

即以 b 與 c 相加之和乘 a 所得之結果,與加合以 b, c 各乘 a 所得二積之結果相同.

上述之法則,得擴張之於任意有限個因子之積.即任意有限個因子之積,與其各因子相乘之順序無關.

關於積之等不等之規則如下.

(1) 若 $a=b$, 則 $ac=bc$.

(2) 若 $a>b$, 則 $ac>bc$.

(3) 若 $a<b$, 則 $ac<bc$.

(4) 若 $ac=bc$, 則 $a=b$.

(5) 若 $ac>bc$, 則 $a>b$.

(6) 若 $ac<bc$, 則 $a<b$.

(7) 若 $a=b$, $c=d$, 則 $ac=bd$.

(8) 若 $a>b$, $c>d$, 則 $ac>bd$.

(9) 若 $a<b$, $c<d$, 則 $ac<bd$.

4. 減法及負數 由5減3云者,係於自然數列中求其5前之第三位數爲何數之謂也.即由數列中之4數起,依逆行順序,唱數其前之三數4, 3, 2而求得其數爲2也.此種算法,通常皆以符號－表之,而書作

$$5-3=2.$$

一般由a減b云者,皆爲於自然數列中求a前之b位數爲何數之謂也.其由a減b後所得之數,謂之差,或謂之餘數,用$a-b$以表之.其a謂之被減數,b謂之減數.

加法與減法,恰爲反對之算法.例如$a-b$所表者爲a前b位之數,然於此數加b時,則仍復爲a.即

$$(a-b)+b=a,$$

同樣, $$(a+b)-b=a.$$

由$a+b-b=a$, 可知減法能還原加法.同時由$a-b+b=a$,

可知加法亦能還原減法.

自然數列不能充分應減法之要求,因此數列之最前方爲1,超此卽不能更行數得其前方之數故也.但如於1之前方,仍能自由數去,則於吾人之計算上,方便極多.因自然數列僅爲排列於一定順序之符號系統,斷無不可於其前方再行附加新的符號之順序的系統之理.故吾人因之作成0（讀爲零）之符號置於1之前方,次作成 −1 之符號置之於0之前方,再作成 −2 之符號置之於 −1 之前方,順此以往,卽行創設一新的數列

$$\cdots\cdots-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,0,1,2,3,4,5,\cdots\cdots$$

此數列謂之完全數列.完全數列旣無最初之符號,亦無最終之符號,能向其前後方數至任何之遠處.

此新的符號中之0,具有數之意義,至爲明瞭.例如由3之前方數去,其所數之數,順次與由其三物之羣中逐次取去一個之動作相對應時,則因其動作恰於三物悉行取去後,方始告終,故得以0爲空無一物之符號.此0之常被視爲自然數之一之理由也.

其他 −1,−2 −3,…… 等符號,雖毫無物數之意義,但因其與自然數相同,有順序的性質,且於含有自然數之順序系統中,占有某一定之位置,故亦有足以名之爲數之理由.吾人爲使此種新數與以前之數有區別起見,特稱之爲負數.

而對於以前所論之數,則稱之爲正數.正數,負數,與 0,統稱之爲整數.

完全數列中之數,如將其前面所附之符號除去之,則謂之其數之絕對值.例如 4,與 -4 之絕對值爲 4, a 與 $-a$ 之絕對值爲 a 是.絕對值通常皆以| |以示之,例如 $|4|$,$|a|$ 等是.

設 a, b, c 爲完全數列中之任意三數,則隨 a 先於 b,與 b 一致,或後於 b 而書作

$$a<b,\quad a=b,\quad \text{或}\quad a>b.$$

因完全數列爲一順序的系統,故第一節之第二法則,亦能適用之.即

$$\text{若}\quad a<b,\ \text{而}\ b<c,\ \text{則}\ a<c.$$

$a<b$,即於完全數列中 a 位於 b 之前方時,謂之代數的 a 較 b 爲小,或代數的 b 較 a 爲大.

5. 負數之計算 負數,零,自然數等互相結合之算法,與自然數與加法乘法及減法之結合相同.即其算法之名稱,及表示之方法,亦無不各與自然數對應之算法相同.設 a 表完全數列中之任意一數,a 與 b 各表自然數,則此等新算法得定其義如下.

加減與減法之定義,即

(1) $a+b$ 表示 a 後之第 b 位數,

(2)　$a-b$ 表示 a 前之第 b 位數,

(3)　$a+0$ 及 $a-0$ 表示與 a 同爲一數,

(4)　$a+(-b)$ 表示與 $a-b$ 同爲一數,

(5)　$a-(-b)$ 表示與 $a+b$ 同爲一數.

換言之,卽加正數 b 於任意之數 a 云者,係指於完全數列中 a 之後方數 b 個數位之謂.又由 a 減正數 b 云者,係指於完全數列中 a 之前方數 b 個位數之謂.但加負數與減負數,則各與減去或加合其所對應之正數同值.

乘法之定義,卽

(1)　$0\cdot a$ 及 $a\cdot 0$ 表示爲 0,

(2)　$a(-b)$ 及 $(-a)b$ 表示爲 $-ab$,

(3)　$(-a)(-b)$ 表示爲 ab.

換言之,卽各不爲 0 之二因子之積,隨其因子之爲同號或爲異號,而爲正數或爲負數.而其積之絕對值,則等於其因子之絕對值之積.

上述之新算法定義,旣非假定,亦非需要證明之定理,僅爲所謂新算法之定義而已.如問爲何而創設此種算法,則其答案爲吾人研究數之本身間及外界物與物間之關係時,而欲使負數盡量的有效之故.可知此種新的算法,決非任意所能創設者,反爲從來算法應用於新數上之自然擴張.

負數如應用之以行量的測定時,則其便利至足稱道.如計算某人之財產時,設視其資產爲正,則負債爲負;計算某時間前後之溫度時,設其水銀柱上升爲正,則下降爲負;又以某點爲標準而決定直線上各點之位置時,設位於右方者爲正,則位於左方者爲負等是.

6. 除法 算術及代數上所謂之除法算法,其種類有二.其一爲累次減法之意義,其他則爲乘法之逆算.此二種算法,有時相一致者,卽整除之時是.

於累次減法之除法,以 3 除 7 云者,其意義爲下述之二答案.

(1) 欲得較 3 爲小之餘數,須由 7 減去 3 之幾倍.

(2) 此餘數爲何數.

卽由 7 中累次減去 3 時,卽足以解答之.此種除法,實無異於累次減法.其對於減法之關係,猶之乘法之對於加法相同.

一般 a, b 爲任意二自然數時,其以 b 除 a 之意義,卽在求適合於 $a=bq+r$ 及 $r<b$ 之二自然數 q 及 r (其中一數爲 0 亦可). 此 a 謂之被除數, b 謂之除數, q 謂之商, r 謂之餘數.

如被除數 a 爲除數 b 之整數倍時,則餘數 r 爲 0.此時 a 則謂之被 b 所整除.卽

$$a=bq,\quad \text{或}\quad qb=a.$$

故 a 被 b 所整除云者,其意爲有某數 q,此數如以 b 乘之,則可得 a 數之謂也.

整除之除法,通常皆以 $a\div b$ 表之.而其商 q,則以 $\frac{a}{b}$ 或 $^a/_b$ 表之.即

$$q=\frac{a}{b},\quad \text{或}\quad qb=a.$$

茲將關於整除之定理及公式述之於下.

定理 1. 整除法與乘法互爲逆算.即

$$a\div b\times b=a,\quad \text{及}\quad a\times b\div b=a.$$

定理 2. 被除數能爲除數所整除時,其被除數,除數,同以一數乘之,其商不變.即

$$q=\frac{a}{b}\text{時,}\quad \text{則}\quad q=\frac{am}{bm}.$$

定理 3. 整除法與乘法相同,對於加法及減法,皆爲配分的.即

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c},\quad \text{及}\quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

關於商之四則計算,茲將其公式錄之於下.

加法 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},$

減法 $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd},$

乘法 $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$

除法 $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

如被除數之絕對值,能被除數之絕對值所整除時,則由商之定義,對於負數亦有意義甚明.此商如以式表之,則得下述之定理.

定理 4. 如 a 能爲 b 所整除時,則

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b};\quad \frac{a}{-b}=-\frac{a}{b};\quad \frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}.$$

由商之定義,如除數爲 0 時,則無意義.如被除數爲 0,而除數爲不等於 0 之某數 b 時,則有意義.但實際上 $0/b$ 所表者爲 0.

7. **分數** 如上節所述,其第二種類之除法,不外整除法之擴張.其結果,致數之系統中,有插入分數之必要.當吾人對於此新數研求其順序的定義時,不能不令人想起下述之定理.

定理 5. 有自然數 a, b, c, d,如 a 能爲 b 所整除,c 能爲 d 所整除時;則其 a/b 與 c/d 於自然數列中之關係的順序,與 ad 對於 bc 之關係的順序相同.即

隨 $ad <, =,$ 或 $> bc$ 之關係;其 a/b 亦 $<, =,$ 或 $> c/d$.

但不論 a, c 能否各爲 b, d 所整除,其 ad, bc 於自然數列中之關係的順序,皆得而知之.故任取二自然數 a, b,作成 $\frac{a}{b}$ 或 a/b 時,若 a 能爲 b 整除,則與從來之計算相同,a/b 表以 b 除 a 所得之自然數;若 a 不能爲 b 整除時,則暫時認 a/b

爲一符號,至其與除法之關係,則容後述之.

此時亦應與適合於 "隨ad先於,或一致於,或後於bc;其$^a/_b$亦先於,或一致於,或後於$^c/_d$:" 之規則,同樣想像$^a/_b$,$^c/_d$等符號,亦曾經排列而附與此等符號以有順序之性質.即用含有先於,一致於,後於,等意義之符號$<,=,>$,表隨$ad<,=,$或$>bc$而$^a/_b$亦$<,=,>$ $^c/_d$之關係.

於此規則,如$^a/_b$之符號係表示自然數時,則於自然數列中指定其固有之位置.不然則指定數列中連續二數間之位置.由此定義且經排列後之符號$^a/_b$集合之全部,卽行成一順序的系統.

$^a/_b$不表自然數時,謂之**分數**.其a謂之**分子**,b謂之**分母**,a與b總稱之爲分數之項.可知分數爲$^a/_b$形式之符號,而由其位於包含自然數之順序系統中之位置以定義之者.故由順序之見地,分數亦得名之爲數.

爲與分數易於區別起見,其以前所論諸數,則謂之**整數**.

如分子分母之一方或雙方爲負整數之分數例如$\frac{-a}{b}$,$\frac{a}{-b}$,$\frac{-a}{-b}$等時,則順序的定其義如下.

(1)　$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$;　$\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$;　$\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$.

(2)　凡負之分數皆位於0之前方.

(3)　負分數相互間之關係,依下列之規則排列之.卽
依　$-ad<,=,$　或　$>-bc$,

而 $-\frac{a}{b} <, =, $ 或 $> -\frac{c}{d}$.

吾人對於整數與分數,爲便於與後節所研究之他數區別起見,特稱之爲有理數.其由此等數組成之系統,謂之有理系統.此系統有其部分之整數系統所無之一重要性質,即有理系統係稠密的數列,其不相等之二有理數間,必更有其他之有理數是.

如前節所述,設 a, b, c, d 表正或負之整數,而 a/b, c/d 亦表整數時,則

$$(1)\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}; \qquad (2)\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd};$$

$$(3)\quad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}; \qquad (4)\quad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

然(1)(2)(3)(4)各等式之第二邊,於 a/b 與 c/d 不爲整數時,亦有意義,即爲一定之分數是.故(1)(2)(3)(4)各式,當可適用之於分數之加減乘除各算法.即

(1) 二分數 a/b 與 c/d 之和爲分數 $(ad+bc)/bd$,

(2) 由分數 a/b 減分數 c/d 之差爲分數 $(ad-bc)/bd$.

(3) 二分數 a/b 與 c/d 之積爲分數 ac/bd.

(4) 以分數 c/d 除分數 a/b 所得之商爲分數 ad/bc.

此等擴張後之算法,亦皆遵從交換,結合,及配分各法則.又等不等之規則,亦能適用之.

又分數亦可由商之意義以定義之,即分數 a/b 爲以 b 乘

之則其積爲 a 之數是.換言之,即滿足下列等式之數是也.

$$\frac{a}{b}\times b=a.$$

由(3).(4),得

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\quad\text{與}\quad\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$$

故可知除法亦可謂之乘法之逆算.即以 $\frac{c}{d}$ 除 $\frac{a}{b}$ 云者,其意爲求以 $\frac{c}{d}$ 除之,則得 $\frac{a}{b}$ 之數之謂也,此即算術及代數中除法之一般意義;蓋由整除法擴張而來者也.

如分數之分子,分母含有公共之因子時,則由分數之兩項除去此公共之因子後,其分數之值仍不變.依此法將分子分母所有各公共因子均行略去之分數,謂之不可約分數.二不可約分數如相等時,則其分子與分子,分母與分母,亦必相等.

8.　冪與根　通常對於 aa 之積,皆以 a^2 表之,謂之 a 之平方. aaa 之積,以 a^3 表之,謂之 a 之立方. $aaa\cdots\cdots$(n 個因子)之積,以 a^n 表之,謂之 a 之第 n 次冪.

凡 a, b 二數有 $a^n=b$ 之關係時,則 b 謂之 a 之乘冪或簡稱曰冪.其 n 謂之指數,a 謂之底.反之,a 謂之 b 之方根,以 $\sqrt[n]{b}$ 表之.又 n 謂之根指數.如 $n=2$ 時,則根指數多行略去;僅書作 $\sqrt{b}$.

因冪之定義爲某數自乘若干次所得之積,故其計算之

法則如下.

(1) 同數之諸冪之積,等於以各冪指數之和爲指數之同數之冪.即

$$a^m\times a^n\times a^p\times\cdots\cdots=a^{m+n+p+\cdots\cdots}.$$

(2) 某數之冪之乘冪,等於以二指數之積爲指數之同數之冪.即

$$(a^m)^n=a^{mn}$$

(3) 二同數之冪之商,等於以二指數之差爲指數之同數之冪.即

$$a^m\div a^n=a^{m-n}.$$

(4) 諸數之積之冪,等於其各數同次數之冪之積.即

$$(abc\cdots\cdots\cdots)^m=a^mb^mc^m\cdots\cdots\cdots.$$

(5) 分數之冪,等於以分子同次數之冪爲分子,分母同次數之冪爲分母之分數.即

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.$$

如冪之指數爲偶數時,則其冪爲正;爲奇數時,則其冪之號與其底之數相同.

因求根爲求冪之逆算,故關於根之計算法則,容易由冪之計算法則以推知之.茲將關於根之計算法則述之於下

(1) 某數m次冪之第n次根,等於其數之$\frac{m}{n}$次冪.即

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.$$

(2) 某數第m次根之第n次根,等於其數之第mn次根.即

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

(3) 諸數之積之第m次根,等於其各數第m次根之積.即

$$\sqrt[m]{abc\cdots\cdots}=\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(4) 分數之第m次根,等於以分子之第m次根爲分子,分母之第m次根爲分母之分數.即

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

正數之偶數次根,有正負二數,但其絕對值相等.負數之偶數次根則不存在,因不論正負數,其偶次羃皆爲正數故也.正數之奇次根,僅一正數.又負數之奇次根,亦僅一負數.

羃之指數,不僅限於正整數,即對於分數及負數,亦有意義.茲分條說明之於下.

(1) $a^{\frac{1}{n}}$爲$\sqrt[n]{a}$.

由指數法則, $a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\cdots\cdots$至$n$個因子

$$=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\cdots\text{至}\,n\,\text{項}}=a^{\frac{n}{n}}=a^{1}=a.$$

$$\therefore\qquad a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}.$$

(2) $a^{\frac{m}{n}}$爲$\sqrt[n]{a^{m}}$.

由指數法則, $a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times\cdots\cdots$至$n$個因子

$$=a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\cdots\cdots\text{至}\,n\,\text{項}}=a^{\frac{mn}{n}}=a^{m}.$$

∴ $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}$.

(3) a^0 爲 1.

由指數法則, $a^0\times a^m=a^{0+m}=a^m$.

∴ $a^0=a^m\div a^m=1$.

(4) a^{-m} 爲 $\frac{1}{a^m}$.

由指數法則, $a^m\times a^{-m}=a^{m-m}=a^0$.

但 $a^0=1$.

∴ $a^m\times a^{-m}=1$.

即 $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$. 或 $a^m=\frac{1}{a^{-m}}$.

可知不論 m, n 之爲正爲負或爲 0 爲分數,指數之法則皆能成立.即不論 m, n 之值如何,下列三式皆能成立.

$$a^m\times a^n=a^{m+n};\quad (a^m)^n=a^{mn};\quad (ab)^m=a^mb^m$$

9. 無理數 $\sqrt[n]{a}$ 所表示者,雖間爲有理數,然由開方法則以求其根時,常得一種既非整數復非分數之不盡數.例如 $\sqrt{2}$ 所表示者,爲 1.414213……… 之無限數是.此數既非整數亦非分數,爲前次吾人所知數中之所無者;除知其自乘之後成爲 2 外,其眞值如何,實無由知之.

但於 2 之右方由小數第一位起,逐次加 0 以行開方時:將所得結果之止於小數第一位者,第二位者,第三位者…

………,及各於其末位加一之諸數,順次併列時,則如下所示.

1.4 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213…………

1.5 1.42, 1.415, 1.4143, 1.41422, 1.414214…………

於上列二組數中,其第一組各數之平方皆較 2 爲小,第二組各數之平方皆較 2 爲大.而第一組各數雖較第二組各數爲小,但隨此二組數之位數增加,則順次互相接近,毫無止境.又其各數之平方,亦順次與 2 相接近,毫無止境.故 $\sqrt{2}$ 實與較第一組各數爲大較第二組各數爲小,即夾於此二組數間之數,同其性質.因之吾人得以此數爲 $\sqrt{2}$ 之值.如此既非整數復非分數,而夾於二組無限接近之數間之數,謂之無理數.爲使與無理數易於區別起見,故前述之正負整數分數,及 0,皆謂之有理數.

與 $\sqrt{2}$ 同樣,其 $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{\frac{3}{5}}$ 等亦皆爲無理數.又圓周率 3.1415926……亦爲無理數.

一般正之有理數 a 不恰等於某有理數之 n 次時,則其第 n 次根 $\sqrt[n]{a}$ 即爲無理數.此由開方所生之無理數,或謂之不盡根.例如 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{\frac{3}{5}}$ 等皆爲不盡根是.但圓周率則非不盡根.

無理數亦有正負之別,例如 2 之平方根有 $\sqrt{2}$ 及 $-\sqrt{2}$;前者爲正,後者爲負是.

無理數之值,雖不能以有理數表之;但因其係夾於二組有理數間且能無限的與其二組有理數相接近,故此二組數,皆謂之其無理數之近似值.其小者謂之不足之近似值,而大者則謂之過剩之近似值.例如 $\sqrt{2}$ 之近似值如上所示,其第一組各數爲不足之近似值,而第二組各數爲過剩之近似值是.

10.　虛數　正數之平方根,雖可用有理數或無理數以表之,而負數之平方根,則如前所述,全無意義.但當解二次方程式時,往往有需要負數之平方根者,例如解 $x^2=-4$ 時,即不可不求 -4 之平方根是.因無論如何之有理數或無理數,其平方決無成爲 -4 之理,隨之於吾人已知之數中,並無適合於此方程式之值存在.

爲使二次方程式此時亦屬有根起見,故對於數之意義,不可不加以擴張,認爲 -4 之平方根,亦爲數之一種.此新數以 i 表之,定 $i^2=-1$,即 $i=\sqrt{-1}$.如 a 爲任意之有理數或無理數時,其 ai 通常謂之虛數,但 a 則視爲 i 之係數.

爲與虛數易於區別起見,其以前所述之有理數及無理數,統稱之爲實數.

虛數之計算,與實數相同,其法則如下.

(1)　$ai+bi=(a+b)i$;

(2)　$ai-bi=(a-b)i$;

(3)　$a\cdot bi=bi\cdot a=abi$;

(4)　$ai\cdot bi=-ab$;

(5)　$ai\div bi=\frac{a}{b}$.

上之計算法則中所應注意者,爲ai與bi之積爲變更其係數相乘之結果之符號而得之實數$-ab$是.

一實數a與一虛數bi用$+$,$-$等號以結合之者,謂之複素數.有時亦單稱虛數.

二複素數$a+bi$, $c+di$相等時,則$a=c$, $b=d$.反之如$a=c$, $b=d$時,則$a+bi$亦等於$c+di$.又如$a+bi=0$時,則$a=0$, $b=0$.反之$a=0$, $b=0$時,則$a+bi=0$.

複素數之計算法則如下.

(1)　$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$;

(2)　$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$;

(3)　$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

(4)　$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$.　但　$c+di\neq0$.

問 題 一

1.　試計算下列各式之值.

(a)　$8^{\frac{2}{3}}$;　(b)　$16^{-\frac{1}{2}}$;　(c)　$\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$;　(d)　$27^{-\frac{4}{3}}$.

2.　試將下列各式化簡之.

(a)　$(x^{q-r})^{p}\times(x^{r-p})^{q}\times(x^{p-q})^{r}$;

(b) $\dfrac{(xyz)^{x+y+z}}{x^{y+z}\,y^{z+x}\,z^{x+y}}$.

(c) $\left\{x^{\frac{p-q}{pq}}\right\}^{r}\left\{x^{\frac{q-r}{pr}}\right\}^{p}\left\{x^{\frac{r-p}{rp}}\right\}^{q}\div x^{\frac{p-q}{r}+\frac{q-r}{p}+\frac{r-p}{q}}$.

3. 將下列各式化簡後,以分數指數表示之.

(a) $\sqrt[3]{a^7}\times\sqrt[5]{a^7}\times a^{-\frac{1}{3}}\div a^{\frac{4}{5}}$;

(b) $\sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{\{a^6\sqrt{(a^{-23})}\}}}$;

(c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{(a^6b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}})}\times b^{-\frac{9}{2}}\times(c^{\frac{1}{3}}a^4)^{-\frac{1}{2}}}$.

4. 簡約下列諸式.

(a) $(3+\sqrt{-2})(3-\sqrt{-2})$;

(b) $(\sqrt{5}+4\sqrt{-3})(\sqrt{5}-4\sqrt{-3})$;

(c) $1\div\sqrt{-1}\div\sqrt{-1}$;

(d) $(a+bi)^2+(a-bi)^2$.

第二章　式及其計算

11　代數式　以 $+, -, \times, \div, \sqrt{\ }$ 等計算之符號,將文字或文字與數字連結而成者,謂之代數式,或簡稱曰式.

代數式中之文字,其能於研究之初確定其代表某特別之數值後,於其研究中始終不變其值者,謂之已知之文字,或謂之已知數或謂之常數.反之,其文字於研究中能自由任取何值,且能任意由一值以變爲他值者,謂之變數.

表常數時,常用 a, b, c 等文字;而表變數時,則常用 x, y, z 等文字.

代數式中其分母不含變數者謂之整式.而含變數者則謂之分數式.例如

$$ax^2+bx+c \quad \text{及} \quad \frac{y}{b}+\sqrt{x}$$

等爲整式,而

$$y+\frac{1}{x} \quad \text{及} \quad \frac{2+x}{1-x}$$

等則爲分式是.

代數式中,其變數不附根號者,謂之有理式.而附根號者,則謂之無理式.有理式中之爲整式者特稱之爲有理整式.

例如

$$ax^2+bx+c$$

爲有理整式,而

$$y+\frac{1}{x} \text{ 及 } \frac{2+x}{1-x}$$

爲有理式,其

$$\frac{y}{b}+\sqrt{x}$$

則爲無理式是.

代數式中以+,−等計算符號連結之部分,謂之其式之項.項前爲+號者,謂之正項.項前爲−號者,謂之負項.

整式因其項數之多少,復有單項式,二項式,三項式,及多項式等名稱.

於單項式中,其常數因子之積,謂之爲變數因子之積之係數.例如於$4ab^2x^3y^4$,其$4ab^2$爲x^3y^4之係數是.

變數相同之項,特稱之爲同類項.例如 $-2x^2y$, bx^2y 及 abx^2y 等,皆爲同類項是.

單項式之次數,爲其中變數之指數之和.例如$4ab^2x^3y^4$之次數爲7,而ax^3之次數爲3,b之次數爲0是.

多項式之次數,爲其中最大次數之項之次數.而任意整式之次數,則爲將其式簡約之後所得最簡式之次數.例如ax^3+bx^2+cx+d之次數爲3,而$(x-1)(x-2)$之次數爲2是.

如將多項式之項,依其次數之昇降順序排列之,則於計

算上,便利諸多.若同次數之項有數個時,則依其某變數之次序排列之.例如

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$$

爲依 x 之降冪順序排列者,而

$$f+ex+dx^2+cx^3+bx^4+ax^5$$

則爲依 x 之昇冪順序排列者.又

$$5x^3-2x^2y+4xy^2+y^3$$

依 x 爲降冪順序,依 y 則爲昇冪順序.此種各項之次數相同之多項式,特稱之爲同次多項式或謂之同次式.

12 加法及減法 設 A.B 表二代數式時,則 A 與 B 之和及由 A 減 B 之差,爲依計算之法則,各由 $A+B$ 及 $A-B$ 所得之最簡形式.當化簡此等代數式時,下列之諸公式,實爲重要

(1) $a+b-c=a-c+b$; (2) $a-(b+c)=a-b-c$;

(3) $a+(b-c)=a+b-c$; (4) $a-(b-c)=a-b+c$;

(5) $a(b-c)=ab-ac$.

上列之諸公式,不外將交換,結合及配分諸法則擴張之而應用於減法者.由上列之(2)(3)(4)三式,得括弧之規則如下.

前方附有+號之括弧,其前方之符號可與括弧同時取去.前方附有−號之括弧,如將其符號與括弧同時取去

之,必須變更其括弧內各項之符號.又由此規則,亦可將括弧插入於式中之任何部分

如將括弧內更含有括弧之代數式化簡時,可適用上述之規則,順次將其括弧取去之.

例 $$\begin{aligned} a-\{b-[c-(d-e)]\} &= a-b+[c-(d-e)] \\ &= a-b+c-(d-e) \\ &= a-b+c-d+e. \end{aligned}$$

去括弧時,由內由外開始,其順序自可任意.惟由最外部開始時,則無再三變更符號之煩瑣,較爲便利.

二同類項相加時,可將其係數相加之結果,置於其公共之文字前以爲係數,相減時,則將其係數相減之結果,置於其公共之文字前以爲係數.

二多項式相加時,可將其所有各項不變其符號,順次排列之,然後將同類項歸併之.

由一多項式以減其他多項式時,可變其減數各項之符號而加之於被減數.

例一 試加合 $x^3+ax^2y+2ab^3$ 及 bx^2y-5ab^3 二式.

$$\begin{aligned} & x^3+ax^2y+2ab^3+(bx^2y-5ab^3) \\ &= x^3+ax^2y+2ab^3+bx^2y-5ab^3 \\ &= x^3+ax^2y+bx^2y+2ab^3-5ab^3 \\ &= x^3+(a+b)x^2y-3ab^3. \end{aligned}$$

例二. 試由$a^3+a^2b+b^3$減去$2a^2b-ab^2+b^3$.

$$\begin{aligned} & a^3+a^2b+b^3-(2a^2b-ab^2+b^3) \\ &= a^3+a^2b+b^3-2a^2b+ab^2-b^3 \\ &= a^3-a^2b+ab^2. \end{aligned}$$

當加減時,如其多項式有同類項,則以其同類縱列於一直行之下,然後就其同行以行加減時,則尤爲便利.

例一 試求 $x^3-4x^2y+y^3+y^2x$, $5x^2y+6y^3-7x^3$ 及 $2x^2y-3y^3+5xy^2$之和.

$$\begin{array}{rrrrr} & x^3 & -4x^2y & +xy^2 & +y^3 \\ & -7x^3 & +5x^2y & & +6y^3 \\ +) & & 2x^2y & +5xy^2 & -3y^3 \\ \hline & -6x^3 & +3x^2y & +6xy^2 & +4y^3 \end{array}$$

例二. 求由$4a^2+5ab-b^2$減去$-a^2+2ab-3b^2$之差.

$$\begin{array}{rrrr} & 4a^2 & +5ab & -b^2 \\ -) & -a^2 & +2ab & -3b^2 \\ \hline & 5a^2 & +3ab & +2b^2 \end{array}$$

13. 乘法 二代數式A, B之積,爲依計算之法則,由式AB所得之最簡形式.當化簡時,下列諸法則,至爲重要.即

(1) 交換,結合及配分之法則,

(2) 指數之法則.

(3) 符號之規則,即 $a(-b)=(-a)b=-ab$, $(-a)(-b)=ab$ 等是.

求二單項式之積時,可將其數字因子之積,以乘其文字因子之積.其積之符號隨其二單項式之爲同號或異號而爲＋或－.

求多項式與單項式或多項式與多項式之積時,可以乘數各項逐次以乘被乘數各項而將其所得之積加合之卽可.

二個以上之單項式或二個以上之多項式相乘時,可將上述之二法則反復適用之.

例一. 試求 $-4a^2b^2x^3$, $2bx^4$ 及 $-3a^3x$ 之積.

$$
\begin{aligned}
-4a^2b^2x^3\times 2bx^4\times -3a^3x &= 24a^2b^2x^3bx^4a^3x\\
&= 24a^5b^3x^8.
\end{aligned}
$$

例二. 試求 $a-2b$ 及 $ab-b^2+a^2$ 之積

爲便利起見,故將二式依 a 之降冪順序排列之,而將其項數較少之式爲乘數以乘之.

$$
\begin{aligned}
&(a^2+ab-b^2)(a-2b)\\
&\quad = a^3+a^2b-ab^2-2a^2b-2ab^2+2b^3\\
&\quad = a^3-a^2b-3ab^2+2b^3.
\end{aligned}
$$

觀例 2,可知二因子爲同次式時,其積亦爲同次式.

設二因子爲 x 或其他某文字之多項式或爲二文字之同次式時,則計算時依下述二例排列之,較爲便利.

例三. 試以 $x-3+x^2$ 乘 $2x^3-x^2+5$

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & 2x^3 & -x^2 & & +5 \\
\times) & & & & x^2 & +x & -3 \\ \hline
 & 2x^5 & -x^4 & & +5x^2 & & \\
 & & 2x^4 & -x^3 & & +5x & \\
 & & & -6x^3 & +3x^2 & & -15 \\ \hline
 & 2x^5 & +x^4 & -7x^3 & +8x^2 & +5x & -15
\end{array}$$

例四. 試以$2y+x$乘x^2-y^2+2xy.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & +2xy & -y^2 & \\
\times) & x & +2y & & \\ \hline
 & x^3 & +2x^2y & -xy^2 & \\
 & & 2x^2y & +4xy^2 & -2y^3 \\ \hline
 & x^3 & +4x^2y & +3xy^2 & -2y^3
\end{array}$$

如例3所示,於列式時將其式之各項依 x 之昇冪或降冪排列之,則僅須看出其 x 之位置,卽可得知其次數,故計算時,可略去其 x,而僅書其係數在多項式之各項具有數字係數時,採用此法,尤爲便利.如缺某項,則以該項之係數爲 0.茲舉例於下.

例五. 試以x^3+3x^2-2 [illegible] x^3-3x^2+2.

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & 1 & -3 & +0 & +2 & & & \\
\times) & 1 & +3 & +0 & -2 & & & \\ \hline
 & 1 & -3 & +0 & +2 & & & \\
 & & 3 & -9 & +0 & +6 & & \\
 & & & & -2 & +6 & -0 & -4 \\ \hline
 & 1 & +0 & -9 & +0 & +12 & -0 & -4
\end{array}$$

先依 x 之降冪順序,將其各項之係數排列之.次將其下列之各項係數,逐次與上列之各項係數相乘,將其積書之於適當之位置而求其總和.至乘數爲 0,則其積卽行略去之.因 x^3 與 x^3 之積爲 x^6,故將 $x^6, x^5, x^4, \cdots\cdots$ 等 x 之冪,順次添加於所得係數之積之各項,卽得二式之積爲

$$x^6-9x^4+12x^2-4.$$

上述之方法,謂之分離係數法.此法不僅能適用之於一文字之多項式之乘法,卽關於二文字之同次多項式之乘法,亦能適用之.因二文字之同次多項式,如將其中一文字依降冪順序排列之,則其他文字卽被依昇冪順序而整列.隨之其任意係數之位置,能表示與其相伴之二文字之冪數.茲舉例於下.

例六. 試求 $(a+b)^2, (a+b)^3, (a+b)^4, \cdots\cdots$ 之結果.

因乘數之係數常爲1+1,故各式之結果,爲逐次相乘所得之結果.

$$\begin{array}{lrll}
(1) & 1+1 & \text{卽} & a+b \\
 & \underline{1+1} & & \\
(2) & 1+2+1 & \text{卽} & a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \\
 & \underline{1+2+1} & & \\
(3 & 1+3+3+1 & \text{卽} & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3 \\
 & \underline{1+3+3+1} & & \\
(4) & 1+4+6+4+1 & \text{卽} & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
 & & & =(a+b)^4
\end{array}$$

繼續此法,可求得 $(a+b)^n$ 至任何次數.

例七. 證明 $(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)=a^5-b^5$.

$$\begin{array}{r} 1+1+1+1+1 \\ \times)\ 1-1 \\ \hline 1+1+1+1+1 \\ -1-1-1-1-1 \\ \hline 1+0+0+0+0-1 \end{array}$$

因積之最高次數爲 5,故得

$$a^5+0\cdot a^4b+0\cdot a^3b^2+0\cdot a^2b^3+0\cdot ab^4-b^5,$$

即　a^5-b^5.

由上例方法,可證明下列三恆等式無論何時,皆屬眞確. 即 n 爲正整數時,

$$(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})(a-b)=a^n-b^n.$$

n 爲正之奇數時,

$$(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})(a+b)=a^n+b^n.$$

n 爲正之偶數時,

$$(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})(a+b)=a^n-b^n.$$

14. **除法**　設 A, B 爲任意二代數式而 B 不等於 0 時,則所謂以 B 除 A 所得之商云者,係依計算之規則,將分數 $\frac{A}{B}$ 約成最簡之形式.其行約分之計算時,下列之諸公式,至爲重要.

(1)　$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$.

(2) $m>n$時, $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$.

$m<n$, $\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}$.

(3) $\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$, $\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$, $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$.

(4) $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$.

卽爲下述之三規則是.

(1) 消去分子分母共有之因子.

(2) 分子分母中有同文字（或式）異羃之因子時,則將其指數較低之因子消去,同時復由較高之指數中減去其較低之指數.

(3) 因分子分母之符號相同相異,其商之符號亦隨之爲+爲−

以單項式除單項式時,置被除數於除數之上,作成分數而簡約之卽可.

以單項式除多項式時,其被除數之各項,皆須以除數除之然後將其除得之各商,再行加合之.

以多項式除多項式時,除易於看出其分子分母之公共因子者,得依因子分解之方法,析出其公共因子而消去之外;一般多用所謂長除法之方法以計算之.卽將除數被除數各依降羃或昇羃之順序排列之,以除數之首項除被除

數之首項,其所得者卽爲商之第一項;次以商之第一項,乘除數之各項,將其所得之積,依同類項各書之於被除數之下而以被除數減之;再以除數之首項,除此差之首項,將其所得之商以爲商之第二項;更用商之第二項,遍乘除數之各項,將其所得之積依同類項置之於第一次差之下而由第一次差以減之;復以除數之首項,除此第二次差之首項,以爲商之第三項.如此逐次除之.能除盡時,則其某次之差,當成爲零.如不能除盡時,則減至相當之次數時,其所剩之差,當較除數之首項之次數爲低.此較除數首項次數爲低之殘餘部分,通常皆稱之爲剩餘.

例一. 求 $-8a^3b^2c\div6ab^6d$, 及 $(ax^3-4a^2x^2)\div ax$ 之商.

$$-8a^3b^2c\div6ab^6d=\frac{-8a^3b^2c}{6ab^6d}=-\frac{8a^3b^2c}{6ab^6d}$$

$$=-\frac{4a^2c}{3b^4d}.$$

$$(ax^3-4a^2x^2)\div ax=\frac{ax^3-4a^2x^2}{ax}=\frac{ax^3}{ax}-\frac{4a^2x^2}{ax}$$

$$=x^2-4ax,$$

例二. 求 $(x^2-y^2)\div(x^2+2xy+y^2)$ 之商.

$$(x^2-y^2)\div(x^2+2xy+y^2)=\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}=\frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)^2}$$

$$=\frac{x-y}{x+y}.$$

例三 求 $(8a^3+8a^2b+4ab^2+b^3)\div(2a+b)$ 之商.

$$\begin{array}{r@{}l}
2a+b) & 8a^3+8a^2b+4ab^2+b^3(4a^2+2ab+b^2 \\
 & \underline{8a^3+4a^2b} \\
 & 4a^2b+4ab^2+b^3 \\
 & \underline{4a^2b+2ab^2} \\
 & 2ab^2+b^3 \\
 & \underline{2ab^2+b^3}
\end{array}$$

例四. 求 $(2x^4+3x^3+4x^2+x-2)\div(x^2-x+1)$ 之商.

$$\begin{array}{r@{}l}
x^2-x+1) & 2x^4+3x^3+4x^2+x-2(2x^2+5x+7 \\
 & \underline{2x^4-2x^3+2x^2} \\
 & 5x^3+2x^2+x-2 \\
 & \underline{5x^3-5x^2+5x} \\
 & 7x^2-4x-2 \\
 & \underline{7x^2-7x+7} \\
 & 3x-9
\end{array}$$

除法與乘法相同,亦可用分離係數法以計算之.玆就例三計算之如下.

$$\begin{array}{r@{}l}
2+1) & 8+8+4+1(4+2+1 \\
 & \underline{8+4} \\
 & 4+4+1 \\
 & \underline{4+2} \\
 & 2+1 \\
 & \underline{2+1}
\end{array}$$

因二式皆爲 a, b 之同次式,其二式各首項之商爲 a^2,故所得之商爲 $4a^2+2ab+b^2$.

15. 有理分數式之計算 設A, B表任意之二整式而B不等於0時,則將以B除A所得之商書成$\frac{A}{B}$之形式者,謂之分數式.A謂之分子,B謂之分母,A, B同謂之分數式之兩項.如A, B二式皆爲有理式時,則$\frac{A}{B}$之形式特稱之爲有理分數式.

分數式之計算,與前述之分數計算完全相同.其分數式之兩項,能以共同之因子以乘除之,而其值不變.卽以共同之因子除其分數式之兩項時,則可使其分數式化爲最簡單之形式.此法謂之約分.又各選擇適當之因子以乘諸分數式之兩項時,則可使多數之分數式化成相同之分母.此法謂之通分.

求分數式之代數的和時,其次序如下.

(1) 先行通分,使各分數式之分母,皆行化爲各分數式分母之最低公倍式.

(2) 將通分後各分數式之分子,以其原分數式前之符號連結之,置之於公分母之上以爲新分數之分子.

(3) 將所得之新分數,用約分法化成最簡之形式.

上述之規則,在分數式與整式混合時亦能適用之,因整式可視爲分母爲1之分數式故也.又某分數式中,如其兩項有公共之因子,且此因子在其他分母中皆不含有時,則先將此分數化爲不可約分數後,再行通分,更爲便捷.

例一 化簡$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}-\frac{2b}{a^2-b^2}$.

因此三分數式分母之最低公分母爲a^2-b^2,故

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}-\frac{2b}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{a^2-b^2}+\frac{a+b}{a^2-b^2}-\frac{2b}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{a-b+a+b-2b}{a^2-b^2}=\frac{2a-2b}{a^2-b^2}=\frac{2}{a+b}.$$

例二. 化簡$x-\frac{1}{1-x}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}$.

因第一分母爲1,第二分母爲$-(x-1)$,第三分母爲x^2-1,故三分母之最低公分母爲x^2-1.

$$\therefore\quad x-\frac{1}{1-x}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}=\frac{x^3-x}{x^2-1}+\frac{x+1}{x^2-1}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}$$

$$=\frac{x^3-x+x+1-x^3+3x-1}{x^2-1}=\frac{3x}{x^2-1}.$$

例三. 化簡$\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}$.

上之分數式,以分爲二組化簡時較爲便利.卽

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-(x-2)}{x^2-4}=\frac{4}{x^2-4}.$$

$$\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-1}=2\cdot\frac{x-1-(x+1)}{x^2-1}=\frac{-4}{x^2-1}.$$

$$\frac{4}{x^2-4}-\frac{4}{x^2-1}=4\cdot\frac{x^2-1-(x^2-4)}{(x^2-4)(x^2-1)}=\frac{12}{x^4-5x^2+4}.$$

二個以上之分數式之積,亦爲一分數式.其分子爲各原分數式之諸分子之積,其分母爲各原分數式之諸分母之

積.若以整式乘分數式時,則僅須將其整式以乘分數式之分子即可.

將分數式昇高至任意之乘冪時,只須將其分數式之分子分母各昇高至任意之乘冪即可.

以一分數式乘他分數式時,只須將其除數之分子分母顛倒之以乘其被除數即可.若以分數式除整式時,則以其整式乘該分數式之分子即可.

例四. 試以$\frac{x+1}{x-1}$乘$\frac{x^3-1}{x^3+1}$.

$$\frac{x^3-1}{x^3+1}\times\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x^3-1)(x+1)}{(x^3+1)(x-1)}=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}.$$

例五. 試以$\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^4-y^4}$除$\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}$.

$$\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}\div\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^4-y^4}=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}\times\frac{x^4-y^4}{x^4+x^2y^2+y^4}$$

$$=\frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}.$$

於分數式$\frac{A}{B}$如其A, B各不爲整式而爲分數式時,則分數式$\frac{A}{B}$,謂之繁分數式.化簡繁分數式時,由分數之定義,以分母之分數,除其分子之分數即可.或同時以A, B二分數式分母之最低公倍式以乘A, B二式,亦無不可.總之以化簡A, B二式時,何法手續爲最簡,即採用何法.

例六. 化簡 $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}+1}{\dfrac{a-b}{a+b}+1}$.

$$\frac{\dfrac{a+b}{a-b}+1}{\dfrac{a-b}{a+b}+1}=\frac{\dfrac{a+b+a-b}{a-b}}{\dfrac{a-b+a+b}{a+b}}=\frac{\dfrac{2a}{a-b}}{\dfrac{2a}{a+b}}=\frac{2a}{a-b}\times\frac{a+b}{2a}$$

$$=\frac{a+b}{a-b}.$$

例七. 化簡 $\dfrac{\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}}$.

$$\frac{\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{a(a-b)+b(a+b)}$$

$$=\frac{a^2+ab-ba+b^2}{a^2-ab+ba+b^2}=1$$

例八. 化簡 $\dfrac{a}{b+\dfrac{c}{d+\dfrac{e}{f}}}$

第六,七,八例形式之繁分數,謂之連分數式.連分數式之化簡法,通常皆自其最下部逐次向上方化簡之.

$$\frac{a}{b+\dfrac{c}{d+\dfrac{e}{f}}}=\frac{a}{b+\dfrac{c}{\dfrac{df+e}{f}}}=\frac{a}{b+\dfrac{cf}{df+c}}$$

$$=\frac{a}{\frac{b(df+e)+cf}{df+e}}=\frac{a(df+e)}{b(df+e)+cf}$$

$$=\frac{adf+ae}{bdf+be+cf}$$

問　題　二

1. 求 $\frac{3}{2}a^2b-5ab^2+7b^3$, $2a^3-\frac{1}{2}b^2b+5ab^2$ 及 $3b^3-2a^3$ 之和.

2. 求由 $5b^4-3ab^3+4a^2b^2$ 減去 $5a^4-3a^3b+4a^2b^2$ 之差.

3. 化簡 $a-\{3a+c-[4a-(3b-c)+3b]-2a\}$.

4. 求 x^2-x+1, x^2+x+1 及 x^4-x^2+1 三式之積.

5. 設 $3x=a+b+c$ 時,求 $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-e)^3-3$ $(x-a)(x-b)(x-c)$ 之值.

6. 用分離係數法求下列各式之積.

   (a) x^3+x^2+x+1 與 $x-1$;

   (b) $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$ 與 $y-x$;

   (c) $3x^2-xy+2y^2$ 與 $3y^2-xy+2x^2$.

7. 求下列各式之商.

   (a) 以 x^2+xy+y^2 除 $x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5$;

   (b) 以 $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ 除 $x^5-5x^4y+7x^3y^2-x^2y^3-4xy^4+2y^5$;

8. 用分離係數法求下列各式之商.

(a) 以 $1+3x-5x^2$ 除 $1+x-8x^2+19x^3-15x^4$;

(b) 以 $1-2x+x^2$ 除 $1-6x^5+5x^6$.

9. 化簡下列各式.

(a) $\dfrac{a}{a-x}+\dfrac{a}{a+x}+\dfrac{2a^2}{a^2+x^2}+\dfrac{4a^2}{a^4+x^4}$;

(b) $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}$;

(c) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$.

10. 化簡下列各式.

(a) $\dfrac{a(b+c-a)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b(c+a-b)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c(a+b-c)}{(c-a)(c-b)}$;

(b) $\dfrac{a(b+c)}{b+c-a}+\dfrac{b(c+a)}{c+a-b}+\dfrac{c(a+b)}{a+b-c}$.

(c) $\dfrac{x}{1+\dfrac{x}{1+x+\dfrac{2x^2}{1-x}}}$.

第三章　倍式及約式

16. 因子分解　某整式等於二個以上之其他整式之積時,則此等整式,各謂之其整式之因子.使整式還原成爲其各因子之積時,謂之分解其整式爲因子,或簡稱因子分解.

行因子分解時,如整式之各項皆具有共通之因子時,則可將其共通之因子置於括號之外,而以各項除去此因子後之殘餘部分,不變其符號置於括號之內.至其理由,如適用配分之法則,則至爲明瞭.

例一.　試將 $abx^2+aby^2-abz^2$ 分解爲因子.

$$abx^2+aby^2-abz^2=ab(x^2+y^2-z^2).$$

通常之整式,不限各項皆含有共通之因子.故行因子分解時,必須採用已知之恆等式以求之,茲將應用於因子分解之各恆等式,分類述之於下.

(a)　三項完全平方式　凡具有 $a^2\pm 2ab+b^2$ 形式中之一者,皆謂之三項完全平方式.由乘法,

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2.$$

故反之,可由此等式還原,以行三項完全平方式之因子解.即

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b)=(a+b)^2,$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)(a-b)=(a-b)^2.$$

凡三項式中,其中央之項等於其兩端之項之平方根之積之二倍者,皆可通用上列之二公式以行因子分解.

例二. 分解 $9x^2-12xy+4y^2$ 爲因子.

因 $12xy=2\sqrt{9x^2}\sqrt{4y^2}$,故所與之式爲完全平方式.

$$\text{故}\quad 9x^2-12xy+4y^2=(3x)^2-2(3x)(2y)+(2y)^2$$
$$=(3x-2y)(3x-2y)$$
$$=(3x-2y)^2$$

(b) 二平方之差 由乘法,$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,故反之凡二平方之差,皆可分解之爲因子.即

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

(c) 二平方之和 如用虛數單位 $i=\sqrt{-1}$ 時,則 a^2+b^2 之平方之和,成爲平方之差之形式,隨之可分解爲二虛數之因子.因 $i^2=-1$,

$$\therefore\quad b^2=-(-b^2)=-(ib)^2.$$

$$\therefore\quad a^2+b^2=a^2-(ib)^2=(a+ib)(a-ib).$$

(d) 任意二數等冪之和及差 由前第十三節所證明,

得三恆等式如下

第一：　不論 n 爲奇數偶數，

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

第二：　n 爲偶數時，

$$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1}$$

第三：　n 爲奇數時，

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}+\cdots\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$$

故得三定理如下.

(1)　a^n-b^n 常能以 $a-b$ 整除之.

(2)　n 爲偶數時，a^n-b^n 能以 $a+b$ 整除之.

(3)　n 爲奇數時，a^n+b^n 能以 $a+b$ 整除之.

於上述三定理中，如置 $n=2,3$ 時，則得二平方之和及差，與二立方之和及差之公式如下.

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);$$

$$a^2+b^2=a^2-(ib)^2=(a-ib)(a+ib);$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

(e)　二次三項式　二次三項式 ax^2+bx+c 均能分解爲因子，茲將其一般解法述之於下.

(1)　置 x^2 之係數 a 於全式括弧之外方使 x^2 之係數爲 1，得

$$ax^2+bx+c=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right\}.$$

(2) 將括弧內之 $x^2+\frac{b}{a}x$ 配成完全平方,即加一項 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}$於其中而同時復減去之,因之得

$$\begin{aligned}a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right\}&=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right\}\\&=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)\right\}\\&=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)^2\right\}.\end{aligned}$$

(3) 因括弧內係二式平方之差,故引用二平方之差之公式,得

$$a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)^2\right\}=a\left\{x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$
$$\left\{x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}.$$

$$\therefore\quad ax^2+bx+c=a\left\{x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\left\{x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}.$$

如ax^2+bx+c所分解之因子皆爲有理數時,則可由觀察之方法以分解之.設其所分解之因子爲$px+r, qx+s$,則由

$$ax^2+bx+c=(px+r)(qx+s).$$

其 p, q, r, s 四數,可由 $pq=a, ps+qr=b, rs=c$ 三式以求得之.

設 $a=1$ 二次三項式成爲 x^2+bx+c 之形式時,則 p, q 各等於 1,其 r, s 二數則可由 $r+s=b,\ rs=c$ 以求得之.

上述諸公式,其諸文字無論代表數或代表式,均能適用之.

例二. 試分解下列二式爲因子.

(a)　$9a^2-12ay+4y^2$;　(b)　$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$

(a)
$$9a^2-12ay+4y^2=(3a)^2-2(3a)(2y)+(2y)^2$$
$$=(3a-2y)^2.$$

(b)
$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$
$$=(a^2+2ab+b^2)+2c(a+b)+c^2$$
$$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=(a+b+c)^2.$$

例三. 試分解 $x^4+x^2y^2+y^4$ 爲因子.

$$x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$
$$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$$

例四. 試分解下列諸式爲因子.

(a)　x^6-y^6;　(b)　x^6+y^6;　(c)　x^6-y^{15}.

(a)
$$x^6-y^6=(x^2)^3-(y^2)^3=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$$
$$=(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$$

(b)
$$x^6+y^6=(x^2)^3+(y^2)^3=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4).$$

(c)
$$x^6-y^{15}=(x^2)^3-(y^5)^3=(x^2-y^5)(x^4+x^2y^5+y^{10}).$$

例五. 試分解下列各式爲因子.

(*a*) $x^2+13x+42$; (*b*) $x^2-13x+22$;

(*c*) $2x^2+7x+3$; (*d*) $abx^2+(a^2+b^2)x+ab$.

(*a*) 由 $r+s=13$, $rs=42$, 其 r, s 二數之積與和皆爲正數,故二數亦皆爲正數.由是得 $r=7, s=6$ 或 $r=6, s=7$ 之二組數.

$$\therefore\quad x^2+13x+42=(x+7)(x+6).$$

(*b*) 由 $r+s=-13$, $rs=22$. 其 r, s 二數之積爲正,而和爲負,故二數同爲負數.由是得 $r=-11, s=-2$;或 $r=-2, s=-11$ 之二組數.

$$\therefore\quad x^2-13x+22=(x-11)(x-2).$$

(*c*)
$$2x^2+7x+3=2\left\{x^2+\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}\right\}$$
$$=2\left\{x^2+\frac{7}{2}x+\frac{49}{16}+\frac{3}{2}-\frac{49}{16}\right\}$$
$$=2\left\{\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{49-24}{16}\right\}$$
$$=2\left\{\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)\right\}$$
$$=2\left(x+\frac{7}{4}+\frac{5}{4}\right)\left(x+\frac{7}{4}-\frac{5}{4}\right)$$
$$=2(x+3)\left(x+\frac{2}{4}\right)=(x+3)(2x+1).$$

(d) $$abx^2+(a^2+b^2)x+ab=\frac{(abx)^2+(a^2+b^2)abx+a^2b^2}{ab}$$

$$=\frac{(abx+a^2)(abx+b^2)}{ab}$$

$$=(bx+a)(ax+b).$$

在被分解爲因子之代數式,其項過多時,雖無一定之規則以分解之,但若就其式中之某一文字之昇降冪順序排列之,則便利諸多.茲舉數例示之如下.

例六. 試分解下列各式爲因子.

(a) x^3+x-3x^2-3; (b) $ax+by+bx+ay$;

(c) $a^2-3b^2-c^2-2ab+4bc$;

(d) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

(a) $$x^3-3x^2+x-3=x^2(x-3)+(x-3)=(x^2+1)(x-3).$$

(b) $$ax+by+bx+ay=ax+bx+ay+by=x(a+b)+y(a+b)$$

$$=(a+b)(x+y).$$

(c) $$a^2-3b^2-c^2-2ab+4bc=a^2-2ab-3b^2+4bc-c^2$$

$$=a^2-2ab+b^2-4b^2+4bc-c^2=(a-b)^2-(2b-c)^2$$

$$=\{a-b+(2b-c)\}\{a-b-(2b-c)\}$$

$$=(a+b-c)(a-3b+c).$$

(d) $$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$

$$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$$

$$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$$

$$=(b-c)(a-b)(a-c).$$

問題三

分解下列各式爲因子.

1 $(x+y)^4-(x-y)^4$.　　2. $(2x+3y)^3+(3x+2y)^3$.

3. x^4-5x^2+4.　　4 $ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)$.

5. $(a+b)^2-8(a+b)(c+d)+15(c+d)^2$.

6. $a^2x+abx+ac+b^2y+aby+bc$.

7. $x^4-7x^2y^2+y^4$.　　8. $(x^2+7x+6)(x^2+7x+12)-280$.

9. x^9-y^9.　　10. $x^{10}+y^{10}$.

17. 最高公約式　一整式A能爲其他整式M所整除時,則M謂之A之約式.其二個以上整式之共通約式,謂之其諸整式之公約式.在二個以上整式之公約式中,其次數之最高者,謂之其諸整式之最高公約式.例如 15, x, x^2, y, xy, ………… 等式,爲 $15x^3y^3z^2$, $30x^2y^3z^3$, $-45x^3yz^2$ 三式之公約式,而 $15x^2yz^2$ 則爲其最高公約式是.最高公約式簡書之爲 $H.C.F.$

求二個以上單項式之最高公約式時,可將所與各式中相同之各文字,一一並列之,而以其各式中各文字之最小指數以爲指數卽可.

求二個以上多項式之最高公約式時,如各式皆能分解

爲因子時,則先行分解之然後將各式中相同之各因子一一並列之,而以其各式中各因子之最小指數以爲指數卽可.

求多項式之最高公約式之一般方法,通常皆用連除法.例如求二多項式 A, B 之最高公約式時,先依其式中某文字之降冪順序排列之,然後以次數較低之 A 式以除 B 式,將其所得剩餘用爲除數,再除 A 式.如復有剩餘,則更用此剩餘以除前之剩餘.如此輾轉相除,迨至完全除盡時,則最後之除式,卽爲所求之最高公約式.

連除法如以除式表之,則其順序如下.

$$
\begin{array}{lll}
A)\,B\,(Q & & \\
\;\;\underline{AQ} & & \\
 & R)\,A\,(P & \\
 & \;\;\underline{RP} & \\
 & & S)\,R\,(\cdots \\
 & & \;\;\underline{\cdots} \\
 & & \;\;\cdots\cdots
\end{array}
$$

由上式,得 $B=AQ+R$……………………(1)

$R=B-AQ$……………………(2)

由(1)式,A, R 之公約式亦爲 B 之約式;由(2)式,A, B 之公約式亦爲 R 之約式.隨之 A 與 B 之公約式,亦卽 A 與 R 之公約式.故 A 與 R 之最高公約式,卽爲所求之最高公約式.

同理,由 $A=RP+S$……………………(1′)

$$S=A-RP\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2')$$

二式,可推知 R, S 二式之最高公約式,卽爲所求之最高公約式.繼續此法,無論何時之除數與被除數之最高公約式皆爲所求之最高公約式.設除至最後毫無剩餘時,則除數爲被除數之公約式甚明.又除數爲其自身與被除數之最高公約式,故亦卽所求之最高公約式.

例一. 求 $(x-2)^3(x-1)^2(x-3)$ 與 $(x-2)^2(x-1)(x-3)^3$ 之 *H.C.F.*

所求之 *H.C.F.* 爲 $(x-2)^2(x-1)(x-3)$.

例二. 求 $a^4b^2-a^2b^4$ 與 $a^4b^3+a^3b^4$ 之 *H.C.F.*

$$a^4b^2-a^2b^4=a^2b^2(a^2-b^2)=a^2b^2(a-b)(a+b);$$

$$a^4b^3+a^3b^4=a^3b^3(a+b).$$

∴ 所求之 *H.C.F.* 爲 $a^2b^2(a+b)$.

例三. 求 x^3+x^2-2 與 x^3+2x^2-3 之 *H.C.F.*

$$\begin{array}{l}
x^3+x^2-2)\,x^3+2x^2-3\,(1\\
\qquad\qquad\underline{x^3+\ \ x^2-2}\\
\qquad\qquad\qquad\quad x^2-1)\,x^3+x^2-2\,(x+1\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\underline{x^3-x\qquad\quad}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x^2+x-2\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{x^2\qquad -1}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x-1)\,x^2-1\,(x+1\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \underline{x^2-x\qquad}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ x-1\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \underline{\underline{x-1}}
\end{array}$$

∴　所求之 $H.C.F.$ 爲 $x-1$.

設所與之多項式含有單項因子時,則此因子可先行除去之.然後用連除法以求其餘式之最高公約式.但此所除去之各單項因子,亦應求得其最高公約式以爲所求最高公約式之一部分.

又當行連除法以求最高公約式時,於除法之計算中,如以任意之單項式或數以乘除其除數或被除數時,對於其多項式之最高公約式並無影響.故於計算之途中遇有除得分數形式之商時,可選擇適宜之單項式或數以乘除其除數或被除數,則較爲簡便.

求三個多項式之最高公約式時,可先求其中二式之最高公約式,然後將此結果再與第三式以求其最高公約式即可.其求四個以上之多項式之最高公約式時,亦準此.

18. 最低公倍式　一整式 A 能爲他整式 M 所整除時,則 A 謂之 M 之倍式.其二個以上整式之共通倍式,謂之其諸整式之公倍式.在二個以上整式之公倍式中,其次數之最低者,謂之其諸整式之最低公倍式.例如 a^2bxy^2, $a^2bx^2y^2$, $a^3b^2xy^2$ 等式皆爲 a^2xy, $abxy^2$ 二式之公倍式,而 a^2bxy^2 則爲其最低公倍式.最低公倍式,簡書之爲 $L.C.M.$

求二個以上單項式之最低公倍式時,可將所與各式中相異之各文字一一並列之,而以其各式中各文字之最大

指數以爲指數卽可.

求二個以上多項式之最低公倍式時,如各式皆能分解爲因子,則先行分解之.然後將式中相異之各因子一一並列之,而以其各式中各因子之最大指數以爲指數卽可.

求二多項式之最低公倍式,一般皆先求得其二式之最高公約式,然後以此最高公約式除其二式中之一式,將其所得之商以乘其他一式卽可.

設 G 爲 A, B 二式之最高公約式, L 爲其最低公倍式,以 G 除 A, B 所得之商各爲 A', B' 則

$$A=A'G, \qquad B=B'G.$$

因 A', B' 無公約式,故 A, B 二式之最低公倍式爲 $A'B'G$.

$$\therefore \quad L=A'B'G=AB'=BA'=\frac{AB}{}.$$

由上式,得 $LG=AB$.

卽二整式之最低公倍式與其最高公因式之積,等於其二式之積.

求三多項式之最低公倍式時,可先求得其中任意二式之最低公倍式,以此結果再與第三式求其最低公倍式.其求四個以上多項式之最低公倍式時皆準此.

例一. 求 $3(x-y)(x+y)$, $(a-c)^2(x+y)$ 與 $2(a+c)(x+y)^2$ 之 L.C.M.

所求之 L.C.M. 爲 $6(a-c)^2(a+c)(x-y)(x+y)^2$.

例二. 求x^3-a^2x與$ax^4+2a^2x^3+a^3x$之$L.C.M.$

$$x^3-a^2x=x(x^2-a^2)=x(x-a)(x+a);$$

$$ax^4+2a^2x^3+a^3x^2=ax^2(x^2+2ax+a^2)$$

$$=ax^2(x+a)^2.$$

∴ 所求之$L.C.M.$爲$ax^2(x+a)^2(x-a)$.

例三. 求x^3+2x-3與x^3+2x^2-5x+2之$L.C.M.$

先求得二式之最高公約式爲$x-1$，因

$$x^3+2x-3=(x^2+x+3)(x-1);$$

$$x^3+2x^2-5x+2=(x^2+3x-2)(x-1).$$

∴ 所求之$L.C.M.$爲$(x-1)(x^2+x+3)(x^2+3x-2)$.

問 題 四

求下列各式之$H.C.F.$

1 $2x^2-5x+2$與$4x^3+12x^2-x-3$.

2. x^4+3x^2-10與x^4-3x^2+2.

3 $8a^3+1$與$16a^4+4a^2+1$.

4. $2x^4+4x^3+3x^2-2x-2$與$3x^4+6x^3+7x^2+2x+2$.

5. $mn(x^2+y^2)+xy(m^2+n^2)$與$mn(x^3+y^3)+xy(m^2y+n^2x)$.

求下列各式之$L.C.M.$

6. $x^3(x-y)^2, y^2(x+y)^2$與$xy(x^2-y^2)$.

7. $4a+4b, 6a^2-24b^2$與$a^2-3ab+2b^2$.

8 x^3-a^3, x^3+a^3 與 $x^4+a^2x^2+a^4$.

9 $9x^3-x-2$ 與 $3x^3-10x^2-7x-4$.

10. $a^3+6a^2+11a+6$ 與 $a^3+10a^2+29a+20$.

第四章　有理整式

19. 有理整式之值　將代數式中之所有文字,概行易以數值,而依其符號之所示,實行計算時;其所得之數值,謂之原代數式之數值,或簡稱之爲值.

茲更就代數式之值之一語,將其意義推廣之如下.即於代數式中多數之文字中,以數值或以文字所表之值代入於其中文字之若干中,簡約後所得之式,亦謂之原代數式之值是.例如於 $2ac-6b+2bc-a^2+ab$, 置 $a=3$. $c=4$ 時,則此式之值爲 $b+3$; 於 $ax+by$, 置 $a=1$, $b=1$ 時,則此式之值爲 $2x+y$; 又置 $x=a-b$, $y=a+b$ 時,則其值爲 a^2+b^2 等是.總之代數式之值,雖係指其數值而言,然亦不限於數值.

關於 x 之 n 次有理整式,其一般形式爲

$$ax^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

如置 $\alpha=\alpha$ 時,則此式之值爲

$$a\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+a_2\alpha^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}\alpha+a_n.$$

如以數字代入於 $a, a_1, a_2,\cdots\cdots$ 及 α 中以求其數值時,則由下例所示之算法以計算之,較爲便利.例如欲求

$$a\alpha^3+a\alpha^2+a_2\alpha+a_3$$

之數值時,先以 α 乘 a,得

$$a\alpha.$$

加 a_1,得　$a\alpha+a_1.$

次以 α 乘之,得　$a\alpha^2+a_1\alpha.$

再加 a_2,得　$a\alpha^2+a_1\alpha+a_2.$

再以 α 乘之,得　$a\alpha^3+a_1\alpha^2+a_2\alpha.$

再加 a_3,得　$a\alpha^3+a_1\alpha^2+a_2\alpha+a_3.$

但實際上計算時則以下式之配置,較爲便利.

$$\begin{array}{lllll}
a & a_1 & a_2 & a_3 \\
 & a\alpha & a\alpha^2+a_1\alpha & a\alpha^3+a_1\alpha^2+a_2\alpha \\
\hline
 & a\alpha+a_1 & a\alpha^2+a_1\alpha+a_2 & a\alpha^3+a_1\alpha^2+a_2\alpha+a_3
\end{array}$$

在次數較 3 爲大時,亦能依同樣之方法以計算之,甚爲明瞭.

例一. 求 $x=3$ 時 $2x^4-4x^3+5x+13$ 之數值.

$$\begin{array}{rrrrr}
2 & -4 & 0 & 5 & 13 \\
 & 6 & 6 & 18 & 69 \\
\hline
 & 2 & 6 & 23 & 82
\end{array}$$

即所求之數值爲82.

20. 必要條件與充分條件　某事件成立時所不可不具備之條件,謂之必要條件.反之,如某條件具備時,某事件必定成立,則其條件謂之充分條件.例如

$$ab=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

時,$a=0$之條件爲充分條件而非必要條件是.因於 a b 之積,如 $a=0$ 時,則ab必等於 0.然ab成爲 0 時,不必定需$a=0$,卽 $b=0$ 亦可故也.

次就 $ab=0$ 時,$a=0$,$b=0$之條件研究之.因ab成爲 0 時,此條件不可不具備;又此條件具備時,則ab必成爲 0.故此條件爲必要且兼充分之條件.

又 a,b 皆爲實數,於

$$a^2+b^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

時,$a=0$之條件則爲必要之條件而非充分之條件.因a^2+b^2成爲 0 時,a 不可不爲 0;而 $a=0$ 時,其$b\neq0$則 a^2+b^2 亦不成爲 0 故也.

次就 $a^2+b^2=0$ 時,$a=0$, $b=0$之條件研究之.因 $a^2+b^2=0$ 時,其 a,b 皆不可不爲 0;又$a=0$, $b=0$時,則 a^2+b^2 亦必爲 0.故$a=0$,$b=0$,爲 $a^2+b^2=0$ 時之必要且兼充分之條件.

21. 剩餘定理　關於 x 之 n 次整式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n.$$

其 a_0, a_1, a_2, ……, a_n 等係數,皆爲不含 x 之數.此後凡表 x 之整式時,皆用

$$f(x),\quad \phi(x),\quad F(x).$$

等符號以表之.而 x 等於某特別值 a 時,整式 $f(x)$ 之值,則

以 $f(a)$ 表之.例如於

$$f(x)=2x^3-x+1.$$

整式,其

$$f(0)=1,\quad f(1)=2,\quad f(2)=15,\quad f(-2)=-13.$$

等是.

今於 $$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n$$

整式,以 x 之一次式 $(x-\alpha)$ 除之,設所除得之商爲

$$Q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+b_{n-1}.$$

整式,而剩餘爲 R 時;則

$$f(x)=(x-\alpha)Q(x)+R.$$

上式之 R 不含 x,如於此恆等式置 $x=\alpha$ 時,則

$$f(\alpha)=R.$$

於以得下述之定理.

定理 1. 以 $x-\alpha$ 除 x 之整式 $f(x)$ 所得之剩餘,等於 $f(\alpha)$.

上述之定理,謂之剩餘定理.

系 $f(x)$ 能爲 $x-\alpha$ 所整除之必要且兼充分之條件,爲

$$f(\alpha)=0.$$

應用剩餘定理,可證明下述之定理

定理 2. 對於 $x=\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\cdots\cdots\cdots\cdots$ 等值,x 之整式 $f(x)$ 成爲 0 時;其 $f(x)$ 可爲 $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 所整除.但 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots\cdots\cdots\cdots$ 各爲相異之數.

證明: 由假定, $f(\alpha_1)=0$, 故 $f(x)$ 能爲 $(x-\alpha_1)$ 所整除.卽

$$f(x)=(x-\alpha_1)f_1(x)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

其 $f_1(x)$ 爲較 $f(x)$ 低一次之 x 整式.

又因 $f(\alpha_2)=0$, 故於(1)之關係式置 $x=\alpha_2$ 時,則

$$0=(\alpha_2-\alpha_1)f_1(\alpha_2)$$

而 $$\alpha_1\neq\alpha_2.$$

$$\therefore\quad f_1(\alpha_2)=0.$$

由前定理之系,可知 $f_1(x)$ 能爲 $(x-\alpha_2)$ 所整除.卽

$$f_1(x)=(x-\alpha_2)f_2(x)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

其 $f_2(x)$ 爲較 $f_1(x)$ 低一次之 x 整式.以(2)代入於(1)時,得

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)f_2(x).$$

此卽表示 $f(x)$ 能爲 $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ 所整除也.順次用 $f(\alpha_3)=0$ $f(\alpha_4)=0$, ……可證明 $f(x)$ 能爲 $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$……所整除

系 1. 使 x 之 n 次整式成爲 0 之 x 之值,不能多過 n 個.

因假定 x 之 n 次整式對於較 n 爲多之 x 之值成爲 0 時,則此整式由上述定理,可爲較 n 次爲高之整式整除之,不合理甚明.

系 1 又可改述之如下.

n 次之方程式,不能有較 n 個爲多之根.

系 2. 不高於 n 次之 x 整式,對於較 n 爲多之 x 之值成爲 0 時,則此整式各項之係數,皆不可不爲 0,卽

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n.$$

對於 x 之 n 個以上值,例如對於 $n+1$ 個值成爲 0 時,則非

$$a_0=a_1=a_2=a_3=\cdots\cdots\cdots\cdots=a_n=0$$

不可,因如 $a_0\neq 0$, 則 $f(x)$ 爲 x 之 n 次整式;由系 1, 對於較 n 爲多之 x 之值,不能成爲 0. 又如 $a_0=0$, $a_1\neq 0$ 時,則 $f(x)$ 爲 x 之 $n-1$ 次整式,由系 1, 對於較 $n-1$ 爲多之 x 之值,不能成爲 0. 順次以推,苟非

$$a_0=a_1=a_2=\cdots\cdots\cdots\cdots=a_n=0.$$

則 $f(x)$ 對於較 n 爲多之 x 之值,不能成爲 0 故也.

系 2 又可改述之如下.

不高於 n 次之 x 整式,對於較 n 爲多之 x 之值成爲 0 時,則此整式恆等的等於 0.

系 3. 不高於 n 次之 x 之二整式,對於較 n 爲多之 x 之值其值相等時,則此二整式恆等的相等.

因

$$f_1(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n.$$

$$f_2(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+b_n.$$

二整式如對於較 n 爲多之 x 之值其值相等,則

$$f_1(x)-f_2(x)=(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}$$

$$+\cdots\cdots\cdots+a(a_n-b_n).$$

對於較 n 爲多之 x 之值成爲 0; 由系 2, 得

$$a_0-b_0=0 \quad a_1-b_1=0, \ \cdots\cdots\cdots, \ a_n-b_n=0.$$

卽 $$a_0=b_0, \ a_1=b_1, \ \cdots\cdots\cdots, \ a_n=b_n.$$

故也.

由系 2 與系 3, 又可得一系於下.

系 4. 不論 x 之値如何, 其

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0.$$

之等式常能成立之必要且兼充分之條件, 爲

$$a_0=a_1=a_2=\cdots\cdots\cdots=a_n=0.$$

又不論 x 之値如何, 其

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=b_0x^n+b_1x^{n-1}$$
$$+\cdots\cdots+b_n.$$

之等式常能成立之必要且兼充分之條件, 爲

$$a_0=b_0, \ a_1=b_1, \cdots\cdots\cdots, \ a_n=b_n.$$

例一. 如 a, b, c 互異時, 證明

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{1}{(a-b)(a-c)(x-a)}$$
$$+\frac{1}{(b-c)(b-a)(x-b)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(x-c)}.$$

以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 乘其兩邊時, 得

$$1=\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\cdots\cdots\cdots(1)$$

故祇須證明(1)爲恆等式卽可.

(1)之兩邊爲對於 x 不超過二次之式,而對於 $x=a,b,c$ 三值(1)皆能成立,故由系 3,(1)爲恆等式.

22. 綜合除法　設以 $x-\alpha$ 除

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n.$$

所得之商爲

$$Q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+b_{n-1}.$$

而剩餘爲 R,則

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=(x-\alpha)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}$$
$$+\cdots\cdots+b_{n-1})+R$$

如將上之等式右邊依乘法計算後而整理之,則得

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=b_0x^n+(b_1-b_0\alpha)x^{n-1}$$
$$+(b_2-b_1\alpha)x^{n-2}+\cdots\cdots+R-b_{n-1}\alpha.$$

由前述定理之系 4,比較其兩邊之係數時,得

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1-b_0\alpha,\ a_2=b_2-b_1\alpha,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$a_n=R-b_{n-1}\alpha.$$

卽　$b_0=a_0,\ b_1=a_1+b_0\alpha,\ b_2=a_2+b_1\alpha,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,$

$$R=a_n+b_{n-1}\alpha.$$

由此關係,可順次以求得其 $b_0,b_1,b_2\cdots\cdots\cdots\cdots,R.$ 但實際

計算時則以採取下列形式爲便.

$$\begin{array}{ccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots\cdots\cdots & a_n \\
 & b_0\alpha & b_1\alpha & \cdots\cdots\cdots & b_{n-1}\alpha \\
\hline
b_0 & b_1 & b_2 & \cdots\cdots\cdots & R
\end{array}$$

先將$a_0, a_1\ a_2,\cdots\cdots, a_n$並書於一列,取等於$a_0$之$b_0$,作$b_0\alpha$置於$a_1$之下,與$a_1$相加得$b_1$.次作$b_1\alpha$置於$a_2$之下,與$a_2$相加得$b_2$.依此法順次計算之其最後所得者即爲$R$.此種方法謂之綜合除法.

例三. 試以$x+2$除$f(x)=x^4-1$.

$$\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\
 & -2 & 4 & -8 & 16 & \\
\hline
1 & -2 & 4 & -8 & 15 &
\end{array}$$

$$\therefore\quad Q(x)=x^3-2x^2+4x-8,\ R=15.$$

例四. 試以$3x-2$除$f(x)=3x^3-14x^2+5x-4$.

先以$x-\frac{2}{3}$除$f(x)$.

$$\begin{array}{cccc|c}
3 & -14 & 5 & -4 & \frac{2}{3} \\
 & 2 & -8 & -2 & \\
\hline
3 & -12 & -3 & -6 &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad f(x)&=\left(x-\frac{2}{3}\right)(3x^2-12x-3)-6 \\
&=(3x-2)(x^2-4x-1)-6
\end{aligned}$$

即 $\quad Q(x)=x^2-4x-1\quad R=-6.$

因以$x-a$除$f(x)$所得之剩餘,等於$f(a)$.故計算$f(a)$時,可用綜合除法以行之.如第十九節所述,計算有理整式之值之方法,即不外綜合除法之應用.

問 題 五

試計算出下列各有理整式之數值.

1 $3x^3-7x^2+4x+40$, $x=13$.

2 $2x^4-5x^3+3x^2-12x+29$, $x=-5$.

3 $x^5-2x^4+7x^2-8x+5$ $x=4$

4 $x^6-4x^4+7x^3+6x^2-11x+10$, $x=-2$.

5. $n=7$, $x=3$時,下式之值如何

$$x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots\cdots\cdots\cdots+nx^n.$$

6. 不論x之值如何,$\dfrac{ax+b}{cx+d}$之值一定不變時,其a, b, c, d之間,應有若何之關係,且其一定不變之值如何.

7. ax^2+bx+c與px^2+qx+r二式,不拘x之值如何皆相等時,證明

$$a=p,\quad b=q,\quad c=r.$$

8. a, b, c, p, q, r各不等於0,證明$\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$之值不拘$x$之值如何,皆屬一定時;則必$\dfrac{a}{p}=\dfrac{b}{q}=\dfrac{c}{r}$.

用綜合除法,求以下各式之商及剩餘.

9. 以 $x-5$ 除 $2x^5-12x^4+14x^3-23x^2+17x-33$.

10. 以 $x-2$ 除 $3x^4-5x^3-4x^2+3x-2$.

11. 以 $x+1$ 除 x^4-1.

12. 以 $3x-2$ 除 $3x^3-11x^2+18x-3$

13 $p, p_1, p_2, \cdots\cdots\cdots, p_n. a, a_1, a_2, \cdots\cdots\cdots, a_n$ 各不等於 0, 證明 $\dfrac{px^n+p_1x^{n-1}+\cdots\cdots+p_n}{ax^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n}$ 之值,不拘 x 之值如何,皆屬一定時;則必 $\dfrac{p}{a}=\dfrac{p_1}{a_1}=\dfrac{p_2}{a_2}=\cdots\cdots=\dfrac{p_n}{a_n}$.

14. 證明下列二等式完全相等.

(a) $(x+a+b)^2-4ab=(x+a-b)^2+4bx$

(b) $x(x-1)(x-2)(x-3)+1=(x^2-3x+1)^2$.

第五章　對稱式及交代式

23. 對稱式　凡式中之若干文字任意交換其中二文字而其式仍不變者,謂之其各文字之對稱式例如

$$a+b+c, \quad bc+ca+ab, \quad a^3+b^3+c^3-3abc.$$

等,皆爲 a, b, c 三文字之對稱式是.

凡言對稱式時,必須明言某某文字之對稱式始可.例如 $(a+b)c$ 爲 a, b 之對稱式,而非 a, b, c 之對稱式是.但該式如係式中所有各文字之對稱式時,則其文字始可略去之,僅稱對稱式.

設以 L 與 M 表某特殊數時,則關於 a, b 之一次同次式,其一般形式爲 $La+Mb$. 若此式爲對稱式,則必

$$La+Mb=Lb+Ma.$$

由前節剩餘定理之系 3, 可知 $L=M$. 即關於 a, b 之一次對稱式爲 $L(a+b)$.

關於 a, b, c 二次同次式之一般形式,爲

$$La^2+L_1b^2+L_2c^2+Mbc+M_1ca+M_2ab.$$

若此式爲對稱式時,則由上述方法,同樣可證明

$$L=L_1=L_2,\quad M=M_1=M_2.$$

卽關於 a, b, c 一般之二次同次對稱式,爲

$$L(a^2+b^2+c^2)+M(bc+ca+ab).$$

例一. 化簡下式.

$$(a+b+c)^2-(b+c)^2-(c+a)^2-(a+b)^2$$

因此式爲關於 a, b, c 之二次同次對稱式,故不可不等於

$$L(a^2+b^2+c^2)+M(bc+ca+ab)$$

將上二式中 a^2 之係數比較之,得 $L=-1$; bc 之係數比較之,得 $M=0$. 故原式等於 $-(a^2+b^2+c^2)$.

玆以 P 表 a, b, c 三文字之對稱式,如 P 於 $b=-c$ 時成爲 0 則 P 能爲 $b+c$ 所整除.然 a 與 b 雖交換之,其 P 仍不變,故 P 亦能爲 $c+a$ 所整除.同樣, P 亦能爲 $a+b$ 所整除.但 $(b+c)(c+a)(a+b)$ 爲對稱式,故以 $(b+c)(c+a)(a+b)$ 除 P 所得之商,亦爲對稱式.

同樣, P 於 $a=0$ 時成爲 0, 則 P 含有 a 之因子.隨之亦含有 b 與 c 之因子.其以 abc 除 P 所得之商,亦爲對稱式.

例二. 將下式分解爲因子.

$$a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$$

此式爲對稱式甚明,因設 $b=-c$ 時,則此式成爲 0, 故 $b+c$ 爲此式之一因子.隨之 $c+a$ 與 $a+b$ 亦各爲其因子.然

此式爲三次式,故不可不等於$L(b+c)(c+a)(a+b)$.將二式中之a^2b之係數比較之,得$L=1$.卽原式等於$(b+c)(c+a)(a+b)$.

$$\therefore\quad a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$$
$$=(b+c)(c+a)(a+b).$$

24. 交代式 凡式中之若干文字任意交換其中二文字而其式僅變更其符號者,謂之其各文字之**交代式**例如於$(a-b)(a-c)(b-c)$式中,交換其中之文字a, b時,則成爲

$$(b-a)(b-c)(a-c)=-(a-b)(a-c)(b-c).$$

又交換a與c,或b與c亦然.故此式爲a, b, c之交代式.

凡不指示文字而僅稱交代者,卽爲其式中各文字之交代式.

若干相同文字之對稱式與對稱式,或交代式與交代式,或對稱式與交代式之關係如下.

對稱式與對稱式之積,及以對稱式除對稱式所得之商,俱爲對稱式

對稱式與交代式之積.爲交代式.

以交代式除對稱式所得之商.或以對稱式除交代式所得之商,俱爲交代式.

交代式與交代式之積,及以交代式除交代式所得之商,俱爲對稱式.

偶數個交代式之連乘積爲對稱式,奇數個交代式之連乘積仍爲交代式.

定理 於若干文字之交代式中,如任意使其中二文字相等時,則其式成爲 0.

證明 設以 A 表 a, b, c, d 等文字之交代式,於 A 中任意交換其中二文字,例如交換 a 與 b 時,則由交代式之定義,原式成爲 $-A$.故如置 $a=b$ 時,則 $A=-A$ 卽 $2A=0$.故 A 不可不爲 0.因 $a=b$ 時,A 成爲 0;故 A 能爲 $a-b$ 所整除隨之上述之定理,又可改述之如下.

定理 若干文字之交代式,能爲其文字中任意二文字之差所整除,隨之亦能爲其諸差之連乘積所整除.

於 a, b, c 三文字中任意選取二文字所作之差之連乘積爲 $(a-b)(a-c)(b-c)$,此式已說明如上,爲一交代式.又由本節之定理,凡 a, b, c 三文字之交代式,皆能以此連乘積整除之.故此連乘積謂之 a, b, c 三文字之最簡交代式.

於 a, b, c, d 四文字中任意選取二文字所作之差之連乘積爲

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

此式之爲交代式,可實行於 a, b, c, d 中任意交換其中二文字以證明之.但關於四文字之交代式,皆能以此連乘積整除之.故此連乘積爲此四文字之最簡交代式.

三文字之最簡交代式,爲關於其諸文字之三次式.因凡若干文字之交代式,皆能以其諸文字之最簡交代式整除之.故三文字之交代式其次數較三爲低者,不可不爲 0. 例如 $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)$ 爲 a, b, c 三文字之交代式而其次數爲二故此式爲 0 是.

三文字之三次交代式,不可不等於其諸文字之最簡交代式前添置一某數係數之式.例如

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
$$=L(a-b)(a-c)(b-c)$$

是上之等式中之 L 卽表數係數.如比較上式兩邊之某項,例如 a^2b 之係數時,可知 $L=1$

$$\therefore \quad a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
$$=(a-b)(a-c)(b-c).$$

四文字之最簡交代式,爲其諸文字之六次式.隨之四文字之交代式如其次數較六爲低時,亦不可不爲 0.

25. 循環順序　並列若干文字於一列,逐次以第二文字代第一文字,第三文字代第二文字,如此順次置換之,至最後之文字則以第一文字代之,此種交換方法,謂之依其諸文字之循環順序.例如依循環順序,將 a, b, c 交換之,則成爲 b, c, a; 再依循環順序交換之,則成爲 c, a, b; 更依循環順序交換之,仍行還原爲 a, b, c 是.

作成對稱式及交代式時,如注目於其循環順序,則便利諸多.例如有 a, b, c 三文字,將 bc 依循環順序逐次交換之,則得 ca 與 ab, 而此諸式之和 $bc+ca+ab$ 爲對稱式.又將 $a^2(b-c)$ 依循環順序逐次交換之,則得 $b^2(c-a)$ 與 $c^2(a-b)$, 而此諸式之和 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 爲交代式是.

例三. 分解 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 爲因子.

此式爲交代式甚明.因此式爲四次式,故以 a, b, c 之最簡交代式 $(a-b)(a-c)(b-c)$ 除得之商,不可不爲一次之對稱式.卽不可不爲 $L(a+b+c)$. 此處之 L 爲數係數,故原式等於

$$L(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c).$$

次比較其任一項,例如 a^3b 之係數時,得 $L=1$.或以任意之特殊值,例如 $a=0$, $b=1$, $c=0$ 代入於 a, b, c 中時,亦可得 $L=1$.

$$\therefore \quad a^3(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
$$=(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c).$$

例四. 分解 $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^6$ 爲因子.

此式爲關於 x, y, z 之五次交代式,故以 x, y, z 之最簡交代式 $(x-y)(x-z)(y-z)$ 除得之商,不可不等於二次對稱式.卽不可不等於 $L(x^2+y^2+z^2)+M(yz+zx+xy)$, 故原式等於 $(x-y)(x-z)(y-z)\{L(x^2+y^2+z^2)+M(yz+zx+xy)\}$.

次比較x^4y之係數,得$L=-5$;比較y^3z^2之係數,得

$$-L+M=10,$$

卽$M=5$.故原式等於

$$5(x-y)(x-z)(y-z)(yz+zx+xy-x^2-y^2-z^2).$$

$$\therefore\quad (y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5=5(x-y)(x-z)(y-z)$$
$$(yz+zx+xy-x^2-y^2-z^2).$$

問　題　六

分解下列各式爲因子.

1. $a^3+b^3+c^3-3abc.$
2. $a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3).$
3. $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b).$
4. $(a^2+b^2+c^2)^3-(b^2+c^2-a^2\,{}^3-(c^2+a^2-b^2)^3-(a^2+b^2-c^2)^3.$
5. $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b).$
6. $a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2$
   $+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$
7. $(b-c)(a-b+c)(a+b-c)+(c-a)(b+c-a)$
   $(b-c+a)+(a-b)(c+a-b)(c-a+b).$
8. $(a+b+c)^5-(b+c-a)^5-(c+a-b)^5-(a+b-c)^5.$
9. $a^5(b-c)+b^5(c-a)+c^5(a-b).$
10. $a^3(b-c)(b-d)(c-d)-b^3(a-c)(a-d)(c-d)$

$$+c^3(a-b)(a-d)(b-d)-d^3(a-b)(a-c)(b-c).$$

化簡下列各式.

11. $$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$$

12. $$\frac{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}.$$

13. $$\frac{yz}{(x^2-y^2)(x^2-z^2)}+\frac{zx}{(y^2-z^2)(y^2-x^2)}+\frac{xy}{(z^2-x^2)(z^2-y^2)}$$

14. $$\frac{b^2(a-c)(a-d)}{(b-c)(b-d)}+\frac{c^2(a-d)(a-b)}{(c-d)(c-b)}+\frac{d^2(a-b)(a-c)}{(d-b)(d-c)}.$$

15. $$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)$$
$$+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b).$$

16. 試就 a, b, c 三文字作成一一般之三次同次對稱式.

第六章　方程式

26. 方程式　以等號連結之二式,謂之等式.等式中位於等號之左方者,謂之左邊,或稱前邊.位於等號之右方者,謂之右邊,或稱後邊.二者併稱之爲其兩邊.

等式有二種,不論其式中文字所取之值如何,兩邊皆相等者,謂之恒等式.式中所含某一定文字,如不取某特別之值時,則兩邊不相等者,謂之方程式.例如

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \cdots\cdots(1)$$

$$x^4+a^2x^2+a^4=(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2) \cdots\cdots(2)$$

$$2x+5=8-x \cdots\cdots(3)$$

$$3x^2-5x=2(x-1) \cdots\cdots(4)$$

$$ax+by=c \cdots\cdots(5)$$

等皆爲等式,而(1)(2)等爲恆等式,(3)(4)(5)等爲方程式是.

當方程式成立時,其中應取某特別值之一定文字,謂之方程式之未知數.其值已知之數,或視爲已知之數之文字,謂之已知數.如於上所舉之方程式中,其 2, 3, 5,……a, b, c 等爲已知數而 x, y 等爲未知數是.

通常未知數皆用 x, y, z, w 等文字,而已知數皆用 a, b, c, d 等文字以表之.

方程式成立時,其未知數所取之值,謂之方程式之根,或謂之解.其值謂之滿足其方程式,或謂之適合其方程式.又尋求方程式之根,則謂之解方程式.例如 $x=1$ 爲上述例三之根,而 $x=2$ 或 $x=\frac{1}{3}$ 則爲上述例四之根是.

如上所述,方程式有僅有一個之根者,亦有二個或二個以上之根者.且有時其根並不存在者.此時之方程式,謂之無根.

方程式之未知數,有僅爲一個者.亦有具有數個者.如上述之方程式,其例三例四之未知數爲一個,而例五之未知數爲二個是.

含有一個未知數之方程式,謂之一元方程式.含有二個未知數之方程式,謂之二元方程式.含有三個以上未知數之方程式謂之多元方程式.

方程式之兩邊爲未知數之有理整式時,謂之有理整方程式.含有未知數之分母時,謂之分數方程式.含有未知數之無理式時,則謂之無理方程式.

方程式中未知數之最高次數爲一次者謂之一次方程式;爲二次者,謂之二次方程式;三次以上者,則謂之高次方程式.

27. 方程式解法之原理 有含同數未知數之二方程式,其一方方程式之根與他方方程式之根完全相同時.換言之,卽凡能滿足第一方程式未知數之値,皆能滿足第二方程式,又凡能滿足第二方程式未知數之値,亦皆能滿足第一方程式時.則此二方程式,謂之同値.

解方程式云者,不外探索與其原方程式同値,且其未知數之値甚爲明顯之方程式也.

定理 1. 於方程式之兩邊同加一式（或數）時,其方程式之根不變.換言之,卽如此所得之方程式,與原方程式爲同値.

證明: 設含有一個或數個未知數之二式爲A, B,於方程式

$$A=B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

之兩邊同加一式(或數)C時,得方程式

$$A+C=B+C \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

故如能證明(1)與(2)二方程式爲同値時,則本定理卽被證明.

先取方程式(1)中之任意一根代入於A, B, C中之未知數時,設其所得之値各爲A', B', C',則必$A'=B'$.而於此相等之二數中,同加一數C'時,則成$A'+C'=B'+C'$.卽方程式(1)之根能滿足方程式(2).次取方程式(2)中之任意一根代

入於A, B, C中之未知數時,設其所得之值各爲A'',B'',C'',則必$A''+C''=B''+C''$.而於此相等之二數中同減一數C''時,則成$A''=B''$.即方程式⑵之根亦爲方程式⑴之根.故方程式⑴與⑵爲同值.即本定理已被證明.

系 1. 變更方程式各邊中任意項之符號時,可將其項自一邊移置於他邊,而其方程式之根不變.

上述之方法,謂之移項.故系 1 又可改述之如下.

移項後所得之方程式,與原方程式爲同值.

系 2 任何方程式,皆能作成與其同值之一邊爲 0 之方程式.換言之,即凡方程式皆能化成與其同值之$P=0$形式之方程式.

定理 2. 於方程式之兩邊同以一不含未知數且不等於 0 之式(或數)乘之,其方程式之根不變.換言之,即如此所得之方程式,與原方程式爲同值.

此定理可依定理 1 之證明法,同樣證明之,故證明從略,由學者自行證明之.

系 1. 於方程式之兩邊同以一不含未知數且不等於 0 之式(或數)除之,其方程式之根不變.換言之,即如此所得之方程式與原方程式爲同值.蓋以同一數除方程式之兩邊云者,不外以其逆數乘方程式之兩邊故也.

系 2. 雖變更方程式兩邊之符號,而其根不變.換言之,

卽如此所得之方程式,與原方程式爲同值.

因變更方程式兩邊之符號,等於同以 -1 乘其兩邊故也.

定理 3. 於方程式之兩邊同以一含有未知數之式乘之,其所得之方程式,除特殊之情形外,不與原方程式同值.

證明: 於方程式

$$A=B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

之兩邊,同以一含有未知數之式 C 乘之,作成

$$AC=BC \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

方程式時,則此二方程式一般多不同值.

因方程式(2)與

$$AC-BC=0$$

卽 $$(A-B)C=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

爲同值,且此方程式一般皆能由

$$\begin{cases} A-B=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4) \\ C=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5) \end{cases}$$

二方程式之根以滿足之.

然方程式(4)與方程式(1)爲同值,又方程式(5)亦有其根,故方程式(2)除具有方程式(1)之根外,兼具有方程式(5)之根.可知方程式(1)與(5),一般多不同值.隨之本定理卽被證明.

系　於方程式之兩邊同以一含有未知數之式除之,其所得之方程式,除特殊之情形外,不與原方程式同值

23. 一元一次方程式　如前所述,一元一次方程式恆能化成

$$ax+b=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之形式.因此式爲一次方程式,故對於 x 爲一次整式.隨之其 a 不能爲 0.故於方程式(1),不可不使 $a\neq0$.

因 $a\neq0$ 故以之除方程式(1)之兩邊時,得

$$x+\frac{b}{a}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

移項,得　$$x=-\frac{b}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

方程式(3)與方程式(2)爲同值,隨之與方程式(1)亦爲同值.又因方程式(3)之根,明爲 $-\frac{b}{a}$,此外並無他根.因之得一定理如下.

定理　一元一次方程式 $ax+b=0$ 之根爲 $-\frac{o}{a}$,此外無根存在.

於 $-\frac{b}{a}$,如 a 與 b 同符號時,則 $-\frac{b}{a}$ 爲負數;如 a 與 b 異符號時,則 $-\frac{b}{a}$ 爲正數;又 $b=0$ 時,則 $-\frac{b}{a}$ 爲 0.故得一定理如下.

定理　於方程式 $ax+b=0$,如 a 與 b 同符號時,則其根爲負數;異符號時,則其根爲正數;又 $b=0$ 時,則其根爲 0.

例一. 解 $\frac{3x}{2}-5=\frac{2x}{5}+\frac{1}{2}$ 方程式.

以10乘兩邊,得　$15x-50=4x+5.$

移項得　$15x-4x=5+50.$

即　$11x=55.$

以11除兩邊,得　$x=5.$

即所求之根爲5

例二. 解 $\frac{x-a}{b-a}+\frac{x-c}{b-c}=2$ 方程式.

先將不含 x 之各項盡行移置於右邊,得

$$\frac{x}{b-a}+\frac{x}{b-c}=2+\frac{a}{b-a}+\frac{c}{b-c}=\left(1+\frac{a}{b-a}\right)+\left(1+\frac{c}{b-c}\right)$$

$$=\frac{b}{b-a}+\frac{b}{b-c}.$$

即　$$\left(\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}\right)x=\left(\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}\right)b.$$

設 $\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}\neq 0$ 時,以之除兩邊,得

$$x=b.$$

又因 $\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{2b-(a+c)}{(b-a)(b-c)}$, 此式僅於 $2b=a+c$ 即 $b=\frac{a+c}{2}$ 時成爲0,此外不能爲0,故如 $b\neq\frac{a+c}{2}$ 時,本方程式之根爲 b.

例三. 解 $7x-3\lambda=2(x-1)$ 方程式,且討論 λ 所能取之種種數值.

先移項,得　$5x=3\lambda-2.$

解之,得　$x=\frac{3\lambda-2}{5}.$

討論　此根依 $3\lambda-2$ 之爲正數,0,或負數,亦爲正數,0,或負數.但

$$3\lambda-2=3(\lambda-\frac{2}{3}).$$

此式依 λ 大於,等於,或小於 $\frac{2}{3}$,亦爲正數,0,或負數因之得 λ 大於 $\frac{2}{3}$ 時,其根爲正數;λ 等於 $\frac{2}{3}$ 時,其根爲 0; λ 小於 $\frac{2}{3}$ 時,其根爲負數.

29. 一元一次方程式之討論　上節所討論者係假定方程式

$$ax+b=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之 a 不爲 0,本節則就 $a=0$ 時以討論之.

先解方程式,(假定 $a\neq0$)得其根爲 $\frac{-b}{a}$. 於此分數,如置 a 等於 0 時,則成爲 $\frac{-b}{0}$. 此時可依 $b=0$, 與 $b\neq0$ 兩方面分別研究之.

(1)　$b=0$ 時,此時 $\frac{-b}{a}$ 成爲 $\frac{0}{0}$,即成爲不定形是.

於方程式　$0\cdot x+0=0.$

爲 $0\cdot x$ 不論 x 之值如何,恆等於 0. 故此等式不論 x 之值如何,恆能成立.即爲恆等式是隨之適合於等式(1)之未知數 x 之值不一定,無論何數均可.可知 $a=0$, $b=0$ 時,方程

式(1)成爲不定.如勉強應用一次方程式之根之公式時,則其根,成$\frac{0}{0}$之形.

(2)　$b \neq 0$ 時,此時 $\frac{-b}{a}$ 成爲 $\frac{-b}{0}$, 即成爲不能形是.

於方程式　$0 \cdot x + b = 0$.

其 $0 \cdot x$ 不論 x 之値如何恆等於 0. 故此式成爲 $b=0$. 然 b 不爲 0, 故不能成立.換言之,即此時等式(1)不能成立.可知 $a=0$, $b \neq 0$ 時,方程式(1)成爲不能.如勉強應用一次方程式之根之公式時則其根成 $\frac{-b}{0}$ 之形.

要之以上所討論者,不過爲便利起見,擴張方程式之意義而謂其方程式爲不定或不能也.

例.　解$\frac{2x+7}{2\lambda+1}=1+\frac{x+\lambda}{2\lambda-1}$方程式且討論之.

先假定 λ 不取使 $2\lambda+1$ 與$2\lambda-1$ 爲 0 之値,即 λ 不爲方程式

$$2\lambda+1=0 \text{與} 2\lambda-1=0$$

之根,隨之其 λ 不等於 $-\frac{1}{2}$與$\frac{1}{2}$. 因設 λ 如取此二値時,則於方程式之係數中,其分母爲 0, 故非除去之不可.

以不等於 0 之數$(2\lambda+1)(2\lambda-1)$乘方程式之兩邊後,盡移其項於左邊而簡約其同類項時,則得與此同値之方程式

$$(2\lambda-3)x-6\lambda^2+13\lambda-6=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

將此方程式不含 x 之部分分解成因子時,成爲

$$(2\lambda-3)x-(2\lambda-3)(3\lambda-2)=0 \cdots\cdots\cdots(2)$$

如$2\lambda-3\neq0$時解之得

$$x=3\lambda-2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

討論　$2\lambda-3\neq0$ 卽 λ 不爲 $2\lambda-3=0$ 之根時,換言之卽 $\lambda\neq\frac{3}{2}$ 時,則如(3)所示,其根爲 $3\lambda-2$. 因此式等於 $(\lambda-\frac{2}{3})$, 故 λ 較 $\frac{2}{3}$ 爲大時,其根爲正;λ 較 $\frac{2}{3}$ 爲小時,其根爲負;λ 等於 $\frac{2}{3}$ 時,其根爲 0.

次設 $2\lambda-3=0$ 時,則方程式(2)之係數皆成爲 0. 卽方程式成爲 $0\cdot x=0$ 隨之所與之方程式成爲不定.

問　題　七

解下列諸方程式:

1. $\frac{1}{3}(x-3)-\frac{1}{4}(x-8)+\frac{1}{5}(x-5)=0$

2. $\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{3}(x-3)+\frac{1}{4}(x-4)=4.$

3. $a(x-a)=b(x-b).$

4. $(x+a)(x+b)-(x-a)(x-b)=(a+b)^2.$

5. $a(2x-a)+b(2x-b)=2ab.$

6. $(a^2+x)(b^2+x)=(ab+x^2)^2.$

7. $3(x+3)^2+5(x+5)^2=8(x+8)^2.$

8. $(x+a)^4-(x-a)^4=8ax^3-8a^4.$

9. $(x-1)^3+x^3+(x+1)^3=3x(x^2-1)$.

10 $(x+a)^3+(x+b)^3+(x+c)^3=3(x+a)(x+b)(x+c)$.

11. $(x-a)(x-b)=(x-b)(x+b)-(x-a)(a-b)$.

12. 解 $5x+\lambda=2x+3\lambda+1$ 方程式且決定其根爲負數時 λ 之值如何.

解下列諸方程式且討論之.

13 $(3\lambda+1)\ +\lambda-2=0$

14. $2x+\lambda=\frac{1}{3}(5-3\lambda x)$.

15. $\frac{x+7}{\lambda+1}=1+\frac{x+\lambda}{2\lambda-2}$.

30 一元二次方程式　如前所述,一元二次方程式恆能化成

$$ax^2+bx+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之形式,因此式爲二次方程式,故對於 x 爲二次整式,隨之其 a 不能爲 0. 故於方程式(1),不可不使 $a \neq 0$.

因 $a \neq 0$,故以之除方程式之兩邊時,得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

然

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

故(2)成爲

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

於上之方程式中,隨 b^2-4ac 之爲正數,爲 0,爲負數,其 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 亦爲正數,爲 0,爲負數故可分三方面討論之如下

(I) $b^2-4ac>0$ 時,此時 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 爲正數.因

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2.$$

故方程式(3)成爲

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

分解爲因子,得

$$\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$$

隨之得下列一組之同値方程式.

$$\begin{cases} x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0 \\ x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

解之,得

$$\begin{cases} x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ab}}{2a} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

即所求方程式之根爲 $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 及 $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 二實數.

(II) $b^2-4ac=0$ 時,此時方程式(3)成爲

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

故此方程式之根等於方程式

$$x+\frac{b}{2a}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

之根.解之,得

$$x=-\frac{b}{2a} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

卽此時方程式(I)之根爲實數 $-\frac{b}{2a}$.

但方程式(7)之左邊由方程式(8)之左邊之平方而成.故此時方程式(7)實具有方程式(8)之根二重,此種相重之根,謂之**二重根**.又於(1)之所論根式中,其二根雖相異,但若於其根之公式(6)中置 $b^2-4ac=0$ 時,則二根均成 $-\frac{b}{2a}$.故此時方程式之根,亦可謂之**相等**.故二重根亦或謂之等根.

(III) $b^2-4ac<0$ 時.此時方程式(3)成爲

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2=0 \quad\cdots\cdots\cdots(10)$$

因 $b^2-4ac=-(4ac-b^2)$,而 $4ac-b^2>0$ 故也.故得一組與原方程式同値之方程式如下.

$$\begin{cases} x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=0 \\ x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{i\sqrt{4ab-b^2}}{2a}=0 \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

解之,得

$$\begin{cases} x=\dfrac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \\ x=\dfrac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

即所求方程式之根爲 $\dfrac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ 與 $\dfrac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ 二虛數.

因 $\sqrt{b^2-4ac}$ 於 $b^2-4ac\geqq0$ 時表其平方根,於 $b^2-4ac<0$ 時則表 $i\sqrt{4ac-b^2}$,故總括以上討論之結果,得一定理如下.

定理 一元二次方程式具有

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ 及 } x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

二根,此外無其他根存在.如 $b^2-4ac>0$ 時,則二根爲相異實數;如 $b^2-4ac=0$ 時則二根爲相等實數;如 $b^2-4ac<0$ 時,則二根爲相異虛數.

此 b^2-4ac 通常皆稱之爲一元二次方程式之判別式.方程式之二根如簡單書之,通常皆書作

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

此即方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根之公式也.

例一. 解 $3x^2-x-4=0$ 方程式.

以 3 除此方程式之兩邊,得

$$x^2-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}=0.$$

因　$$x^2-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}=\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{49}{36}.$$

故所與之方程式成爲

$$\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{49}{36}=0.$$

即　$$\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{7}{6}\right)^2=0.$$

因之得

$$\begin{cases} x-\frac{1}{6}-\frac{7}{6}=0 \\ x-\frac{1}{6}+\frac{7}{6}=0 \end{cases}$$

解之,得

$$x=\frac{4}{3},\quad x=-1.$$

即所求方程式之二根爲 $\frac{4}{3}$ 及 -1.

如用本節所求得之根之公式時因

$$a=3,\ b=-1,\ c=-4$$

故　$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\ {}^2-4ac}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\times3\times4}}{6}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{1\pm7}{6}.$$

即所求方程式之根爲 $\frac{1+7}{6}=\frac{4}{3}$ 及 $\frac{1-7}{6}=-1$ 是.

如所與方程式能逕行分解爲因子時則先行分解之較爲便利.

例二. 解 $x^2+3x+2=0$ 方程式.

將方程式之左邊分解成因子時,得

$$(x+1)(x+2)=0$$

因之得同值之方程式一組於下.

$$\begin{cases}x+1=0\\x+2=0.\end{cases}$$

解之,得 $x=-1,\quad x=-2.$

即所求方程式之根爲 -1 與 -2.

例三. 解 $25x^2-10x+1=0$ 方程式.

先以25除方程式之兩邊,得

$$x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{25}=0.$$

即 $$\left(x-\frac{1}{5}\right)^2=0$$

解之,得 $$x=\frac{1}{5}.$$

即所求方程式之二根相等,其值爲 $\frac{1}{5}$.

例四. 解 $x^2-x+1=0$ 方程式.

應用根之公式,因 $a=1, b=-1\ c=1$, 故

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

$$=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

即所求方程式之根爲$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$與$\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

31. 一元二次方程式之討論

於方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

其係數 a, b, c 皆爲實數;茲就 a, b, c 各係數一個或數個成爲 0 時,方程式之根討論之如下.

(I)　$a \neq 0, b \neq 0, c=0$ 時,方程式成爲

$$ax^2+bx=0.$$

即　$$x(ax+b)=0.$$

解之,得　$$x=0,\ x=-\frac{b}{a}.$$

即 $a \neq 0$ $b \neq 0$ $c=0$ 時,二次方程式之根一爲 0,一爲 $-\frac{b}{a}$.

(II)　$a \neq 0, b=0, c \neq 0$ 時,方程式成爲純二次方程式

$$ax^2+c=0.$$

解之,得　$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

即 $a \neq 0, b=0, c \neq 0$ 時,二次方程式之二根爲 $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ 與 $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$, 其絕對值相等,其號相反.

(III)　$a \neq 0, b=0, c=0$ 時,方程式成爲

$$ax^2=0.$$

解之,得　$$x=0.$$

即 $a \neq 0, b=0, c=0$ 時,二次方程式之二根相等,且均爲 0.

(IV)　$a=0, b \neq 0, c \neq 0$ 時,因 $b^2-4ac=b^2$, 故於二次方程

式之根之公式,其分子成爲 $-b+\sqrt{b^2}$ 與 $-b-\sqrt{b^2}$, 二式中一方爲 0 時,則他方不爲 0. 因設 $b>0$ 時,其

$$-b+\sqrt{b^2}=-b+b=0,\quad -b-\sqrt{b^2}=-2b;$$

又設 $b<0$ 時,其 $-b+\sqrt{b^2}=-2b$, $-b-\sqrt{b^2}=0$ 故也.隨之方程式之二根成爲 $\frac{0}{0}$ 與 $\frac{-2b}{0}$, 其一根不定,而他根不能

今取其不定之根研究之,先設 $b>0$, 然於 $a\neq0$ 時,

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(b+\sqrt{b^2-4ac})}{2a(b+\sqrt{b^2-4ac})}$$

$$=\frac{-4ac}{2a(b+\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

卽 $a\neq0$ 時,方程式之一根常等於 $\frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$.

然此等式於 $a=0$ 時亦能成立.故於上式置 $a=0$ 時,得 $\frac{-c}{b}$.

次於 $b<0$ 時,亦能計算其他根之値爲 $\frac{-c}{b}$.故 $a=0, b\neq0$ 時,其呈不定形之根之値爲 $\frac{-c}{b}$. 此卽於二次方程式中置 $a=0$ 時所得方程式

$$bx+c=0$$

之根也.卽 $a=0, b\neq0, c\neq0$ 時,二次方程式之一根不能,他根爲方程式 $bx+c=0$ 之根.

如上所述,$a=0$ 時,二次方程式之一根不能,他根爲 $\frac{-c}{b}$

如此時 b 亦爲 0 時,則 $\frac{-c}{b}$ 亦不能.($c\neq0$) 卽

(V) $a=0, b=0, c\neq0$ 時,二次方程式之二根皆不可能.

又於 $\frac{-c}{b}$ 式設 $b\neq0$ $c=0$ 時,則成爲 0. 故

(VI)　$a=0,\ b\neq 0,\ c=0$ 時,二次方程式之一根爲0,一根不能

(VII) 最後 $a=0,\ b=0,\ c=0$ 時,二次方程式之二根皆爲不定甚明.

$a=0$ 時,方程式 $ax^2+bx+c=0$ 成爲 $bx+c=0$, 雖早已不成其爲二次方程式;但於 $a\neq 0$ 時,所求得二次方程式之根中,使 $a=0$ 加以討論後故不得不擴張二次方程式之意義,謂此時方程式之根爲不能或不定.

又 $a=b=c=0$ 時,二次方程式之二根雖呈不定之形式,但由其不定形之性質如何,其二根之值亦有能決定之者.

例一. 解 $(\lambda-1)x^2-2(\lambda-2)x-\lambda-1=0$ 方程式,且討論 $\lambda=1$ 時其根之值如何.

先解方程式得

$$x'=\frac{\lambda-2+\sqrt{(\lambda-2)^2+(\lambda-1)(\lambda+1)}}{\lambda-1}$$

$$=\frac{\lambda-2+\sqrt{2\lambda^2-4\lambda+3}}{\lambda-1}.$$

$$x''=\frac{\lambda-2-\sqrt{(\lambda-2)^2+(\lambda-1)(\lambda+1)}}{\lambda-1}$$

$$=\frac{\lambda-2-\sqrt{2\lambda^2-4\lambda+3}}{\lambda-1}.$$

二根.如 $\lambda=1$ 時則成爲

$$x'=\frac{0}{0},\qquad x''=\frac{-2}{0}.$$

其 x' 爲不定,x'' 爲不能.

然 $\lambda\neq1$ 時,

$$x'=\frac{\lambda-2+\sqrt{(\lambda-2)^2+(\lambda-1)(\lambda+1)}}{\lambda-1}$$

$$=\frac{\{\lambda-2+\sqrt{(\lambda-2)^2+(\lambda-1)(\lambda+1)}\}\{\lambda-2-\sqrt{(\lambda-2)^2+(\lambda-1)(\lambda+1)}\}}{\lambda-1\{\lambda-2-\sqrt{(\lambda-2)^2+(\lambda-1)(\lambda+1)}\}}$$

$$=\frac{-(\lambda-1)(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda-2-\sqrt{2\lambda^2-4\lambda+3})}=-\frac{\lambda+1}{\lambda-2-\sqrt{2\lambda^2-4\lambda+3}}.$$

於此式置 $\lambda=1$ 時,得

$$x'=-\frac{2}{-1-1}=1.$$

此卽於所與方程式中置 $\lambda=1$ 所得之方程式

$$2x-2=0$$

之根也.

因之於 $\lambda=1$ 時,其 $x'=1$ 而 x'' 則不能.

32. 一元二次方程式之根僅有二個 由上述二節,凡一元二次方程式,解之皆可求得其根二個.本節所證明者,則爲其僅有二根,不能更有其他之第三根.

假設一元二次方程式具有三個互異之根 α,β,γ 時,則將此根各代入於其方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1)$$

中,因而得下列之三等式

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$a\beta^2+b\beta+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$a\gamma^2+b\gamma+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

以(2)與(3)邊邊相減,得

$$a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0$$

即 $$(\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

然由假定 $\alpha\neq\beta$;故等式(5)成立時必

$$a(\alpha+\beta)+b=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

同樣,由(3)與(4),亦得

$$a(\beta+\gamma)+b=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

以(6)與(7)邊邊相減,得

$$a(\alpha-\gamma)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

即如 α, β, γ 三個互異數爲方程式(1)之根時,則等式(8)不可不成立.但由假定,α 與 γ 不相等,故$\alpha-\gamma\neq 0$.又由假定,a 亦不爲 0.故等式(8)不能成立.可知三個互異數爲方程式(1)之根之假定爲不合理,即一元二次方程式不能有二個以上之根.

例一. 解 $a^2\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=x^2$ 方程式.

由觀察方法,此方程式能爲$x=a$, $x=b$所滿足甚明,故 a, b 爲此方程式之僅有二根.(此方程式非恆等式,因不能更爲 $x=c$ 所滿足故也.)

例二. 解$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$

$$=x^2.$$

由視察方法,此方程式能爲$x=a$, $x=b$, $x=c$所滿足甚明,故此式雖形式上有如x之二次方程式,而實際上則爲一恆等式.

33. 一元二次方程式之根與係數之關係 由第三十節研究之結果,得知二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之二根,爲

$$\begin{cases} x'=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x''=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

作成此二根之和時,得

$$x'+x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b}{2a}.$$

因而得 $x'+x''=-\frac{b}{a} \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

又作成此二根之積時得

$$x'x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}.$$

因而得 $$x'x''=\frac{c}{a}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

此等式(3)與(4),卽爲方程式(1)之根與係數之關係也.因得一定理如下.

定理 1. 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根之和,等於以其首項之係數變更符號後除其第二項之係數所得之商;其二根之積等於以其首項之係數除其不含未知數之項所得之商.

系 設方程式$x^2+px+q=0$之根爲x'及x'',則

$$x'+x''=-p,\quad x'x''=q.$$

如上所述,方程式之根與係數之關係,雖可用解方程式後所得之根之值以求之,但此關係如用下法,則不待解其方程式亦可以求出之.

先假定 $$ax^2+bx+c=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之根爲x'及x'',則由因子分解方法分解之得

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'')\ \cdots\cdots(2)$$

因(2)爲恆等式,故展開其右邊以比較其係數時,則其結果如下.

因 $$a(x-x')(x-x'')=ax^2-a(x'+x'')x+ax'x''.$$

$$\therefore\quad ax^2+bx+c=ax^2-a(x'+x'')x+ax'x''.$$

故得 $$-a(x'+x'')=b,\quad ax'x''=c.$$

因$a\neq 0$,故以之除上二式之兩邊時,得

$$-(x'+x'')=\frac{b}{a},\quad x'x''=\frac{c}{a}.$$

此即方程式(1)之根與係數之關係也.

反之,如以x',x''爲所與之二數(相異或相等均可)且使

$$\frac{b}{a}=-(x'+x''),\qquad \frac{c}{a}=x'x'$$

以決定 a, b, c 時則因

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\&=a\{x^2-(x'+x'')x+x'x''\}\\&=a(x-x')(x-x'').\end{aligned}$$

故$ax^2+bx+c=0$成爲$a(x-x')(x-x'')=0$,其二根爲x'及x''.因之復得一定理如下.

定理 2　二次方程式$ax^2+bx+c=0$之二根爲x'及x''二數之必要且兼充分條件,爲$\frac{b}{a}=-(x'+x'')$及$\frac{c}{a}=x'x''$.

如置$\frac{b}{a}=p,\frac{c}{a}=q$時,則亦得一系如下

系　方程式$x^2+px+q=0$之二根爲x'及x''二數之必要且兼充分條件,爲$p=-(x'+x'')$及$q=x'x''$.

由上所述之定理,可易於以所與之二數爲根以作成方程式.

設所與之二數爲 α 及 β, 其和爲 $-p$, 其積爲 q; 卽設

$$-p=\alpha+\beta,\ 或\ p=-(\alpha+\beta),\ q=\alpha\beta.$$

時,則由上述定理,方程式

$$x^2+px+q=0.$$

之根爲 α 及 β. 又以不等於 0 且不含未知數之任意數 a 乘其兩邊時,其所得之結果

$$ax^2+apx+aq=0.$$

亦能爲 α, β 所滿足.換言之,卽與 $x^2+px+q=0$ 爲同値也.今置 $ap=b$, $ac=c$ 時,則此方程式成爲

$$ax^2+bx+c=0.$$

因得一規則如下.卽

以所與二數爲根求作二次方程式時,可以 1 爲 x^2 之係數以所與二數之和變更符號後爲 x 之係數,以所與二數之積爲不含 x 之項然後將此三項加合後所得之二次有理整式,使之等於 0 卽可.又如此所得之方程式,雖以不等於 0 且不含未知數之任意數乘之,其根亦不變.

例一. 試以 3 及 −7 二數爲根,求作方程式.

先作　　二根之和 $=3+(-7)=-4.$

　　　　二根之積 $=3\times(-7)=-21.$

因之得所求之方程式爲

$$x^2+4x-21=0.$$

又此式任以不等於 0 且不含未知數之數乘之,其所得結果,亦爲所求之方程式

例二. 試以$\frac{\sqrt{2}}{3}$及$\frac{1}{7}$二數爲根,求作方程式.

先作　　二根之和$=\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{7}$.

二根之積$=\frac{\sqrt{2}}{21}$.

因之得所求之方程式爲

$$x^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{7}\right)x+\frac{\sqrt{2}}{21}=0$$

以21乘其兩邊以除去其分母時,得

$$21x^2-(7\sqrt{2}+3)x+\sqrt{2}=0.$$

此卽所求之方程式也.

34. 二次方程式之根之對稱式 設二次方程式

$$x^2+px+q=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之根爲x'及x''則有下述之定理存在.

定理 1. 凡關於x'及x''之對稱式,皆可以關於p及q之有理式以表之.

上述定理中所謂之對稱式,係指關於x'及x''之有理式且兼對稱者而言.又關於x'及x''之有理式,恆能化作

$$\frac{P}{Q}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

之形式此處之P及Q爲關於x'及x''不含公約式之有理

整式.

此式如爲對稱,則P, Q二式亦爲對稱.由對稱式之性質推之至爲明顯.故上述之定理,又可歸着之於下之定理.

凡關於x'及x''之對稱有理整式,皆可以p及q之有理整式以表之.

證明: 因關於x'及x''之對稱有理整式,如分作同次之部分時,則其各同次之部分,亦爲對稱式.故就同次對稱式以證明上述之定理卽可.

然關於x'及x''之同次對稱式,如將其係數置之於度外,則由

$$\left.\begin{array}{l}(x'x'')^l\\(x'x'')^m(x'^n+x''^n)\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

等形式之項而成.如應用根與係數之關係,卽

$$x'+x''=-p,\quad x'x''=q\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

時,則成爲

$$(x'x'')^l=q^l$$

$$(x'x'')^m(x'^n+x''^n)=q^m(x'^n+x''^n).$$

故對於 $x'^n+x''^n$ 之對稱式研究之卽可.

因x'及x''爲方程式(1)之根,故

$$\left.\begin{array}{l}x'^2+px'+q=0\\x''^2+px''+q=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

邊邊相加,得

$$x'^2+x''^2+p(x'+x'')+2q=0.$$

但 $x'+x''=-p,$

∴ $x'^2+x''^2-p^2+2q=0.$

即 $x'^2+x''^2=p^2-2q.$

今命 $S_n=x'^n+x''^n$ ……………………………(6)

時,則由上之結果,得

$$S_1=x'+x''=-p.$$

$$S_2=x'^2+x''^2=p^2-2q.$$

以 x' 及 x'' 各乘(5)之等式時,得

$$x'^3+px'^2+qx'=0$$

$$x''^3+px''^2+qx''=0.$$

邊邊相加,得

$$x'^3+x''^3+p(x'^2+x''^2)+q(x'+x'')=0.$$

即 $S_3+pS_2+qS_1=0$

因之得 $S_3=-pS_2-qS_1=-p(p^2-2q)-q(-p)$

$$=-p^3+3pq$$

一般如以 x'^{n-2} 及 x''^{n-2} 各乘(5)之等式邊邊相加時,則得

$$S_n+pS_{n-1}+qS_{n-2}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

應用此種關係,可順次以求得 $S_3, S_4, S_5, \cdots\cdots S_n$. 此 S_n 由

上之計算,其爲關於 p 及 q 之有理整式甚明.即本定理已被證明.

以上之定理,雖僅就 $x^2+px+q=0$ 形式之二次方程式說明之,由此當可推知關於 $ax^2+bx+c=0$ 形式之二次方程式之根之對稱式,亦有同樣之定理存在.即

定理 2　關於二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根 x' 及 x'' 之對稱式,可以關於其係數 a, b, c 之有理式以表之.

因於上之證明中,如置 $p=\frac{b}{a}$, $q=\frac{c}{a}$ 時,即成爲本定理故也.

例一. 設二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 x' 及 x'', 試計算下之對稱式之值.

(1) $x'^2x''^3+x'^3x''^2$,　(2) $\frac{1}{x'^3}+\frac{1}{x''^3}$,　(3) $\frac{x''^2}{x'^2}+\frac{x'^2}{x''^2}$.

(1) $$x'^2x''^3+x'^3x''^2=x'^2x''^2(x'+x'')=(x'x'')^2(x'+x'').$$

然 $$x'+x''=-\frac{b}{a},\quad (x'x'')^2=\frac{c^2}{a^2}.$$

因之得 $$x'^2x''^3+x'^3x''^2=-\frac{bc^2}{a^3}.$$

(2) $$\frac{1}{x'^3}+\frac{1}{x''^3}=\frac{x'^3+x''^3}{x'^3x''^3}.$$

然 $$x'^3x''^3=(x'x'')^3=\frac{c^3}{a^3}.$$

又 $$x'^3+x''^3=-p^3+3pq=-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}=\frac{3abc-b^3}{a^3}.$$

因之得 $$\frac{1}{x'^3}+\frac{1}{x''^3}=\frac{3abc-b^3}{a^3}\div\frac{c^3}{a^3}=\frac{3abc-b^3}{c^3}.$$

(3) $$\frac{x''^2}{x'^2}+\frac{x'^2}{x''^2}=\frac{x''^4+x'^4}{x'^2x''^2}.$$

然 $$x'^2x''^2=(x'x'')^2=\frac{c^2}{a^2}.$$

又由公式(7),置 $n=4$ 時,則

$$S_4+pS_3+qS_2=0.$$

因之得 $$S_4=x'^4+x''^4=-pS_3-qS_2$$

因 $$S_2=p^2-2q,\quad S_3=-p^3+3pq.$$

∴ $$S_4=p^4-4p^2q+2q^2.$$

隨之得 $$S_4=\frac{b^4}{a^4}-\frac{4b^2c}{a^3}+\frac{2c^2}{a^2}=\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}.$$

$$\frac{x''^2}{x'^2}+\frac{x'^2}{x''^2}=\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}\div\frac{c^2}{a^2}$$

$$=\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^2c^2}.$$

由上之定理,可推得下述之定理.

定理 設關於二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根 x' 及 x'' 之有理式爲 A,如於 A 中交換其 x' 與 x'' 時所得之式爲 B,則以 A 與 B 爲二根之方程式,其係數可以關於 a, b, c 之有理式以表之.

證明: 因交換 x' 與 x'' 時,則 A 成爲 B, B 成爲 A,二式皆不變其值,故 $A+B$ 及 AB 爲關於 x' 及 x'' 之對稱式.由前述之定理,其 $A+B$, 及 AB 皆可以 a, b, c 之有理式以表之.隨之以 A 與 B 爲二根之方程式,即

$$x^2-(A+B)x+AB=0$$

之係數,可以關於 a, b, c 之有理式表之.

例二. 設二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 x' 及 x'',求作以 x'^2 及 x''^2 爲二根之方程式.

因
$$x'^2+x''^2=p^2-2q=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}.$$
$$x'^2x''^2=\frac{c^2}{a^2}.$$

故得所求之方程式爲

$$x^2-\frac{b^2-2ac}{a^2}x+\frac{c^2}{a^2}=0$$

如以 a^2 乘之,則得

$$a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0.$$

例三 設二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 x' 及 x'',求作以 $\frac{1}{x'^3}$ 及 $\frac{1}{x''^3}$ 爲二根之方程式.

由例一
$$\frac{1}{x'^3}+\frac{1}{x''^3}=\frac{3abc-b^3}{c^3}.$$

又
$$\frac{1}{x'^3}\times\frac{1}{x''^3}=\frac{a^3}{c^3}.$$

故得所求之方程式爲

$$x^2-\frac{3abc-b^3}{c^3}x+\frac{a^3}{c^3}=0$$

如以 c^3 乘之,則得

$$c^3x^3-(3abc-b^3)x+a^3=0.$$

35. 兩個二次方程式具有公共根之條件

定理 1. 二個二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \text{ 及 } a'x^2+b'x+c'=0 \cdots\cdots\cdots(1)$$

之根完全相同時,其必要且兼充分之條件,爲

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

證明: 設(1)之二方程式二根完全相同時其二根爲 x' 及 x'',則必

$$x'+x''=-\frac{b}{a}, \quad x'x''=\frac{c}{a}.$$

$$x'+x''=-\frac{b'}{a'}, \quad x'x''=\frac{c'}{a'}.$$

因之得 $$\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}, \quad \frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}.$$

$\therefore$ $$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}.$$

次設上述之等式成立時,其 $\frac{a'}{a}=k$ ($k\neq 0$ 甚明),則

$$a'=ak, \quad b'=bk, \quad c'=ck$$

$\therefore$ $$a'x^2+b'x+c'=k(ax^2+bx+c).$$

可知方程式 $a'x^2+b'x+c'=0$, 爲於方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二邊,同以一不等於 0 且不含未知數之 k 乘之所得者,故此二方程式爲同值,卽其二根完全相同.隨之本定理卽被證明.

定理 2.　二個二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \text{ 及 } a'x^2+b'x+c'=0.$$

僅有一個公共根時,其必要且兼充分之條件,爲

$$ab'-a'b\neq 0.$$

且　$$(a'c-ac')^2-(ab'-a'b)(bc'-b'c)=0.$$

證明:　設二方程式

$$ax^2+bx+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$a'x^2+b'x+c'=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

之公共根爲x_1則

$$ax_1{}^2+bx_1+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$a'x_1{}^2+b'x_1+c'=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

以 a' 乘(3)之兩邊,a 乘(4)之兩邊後,邊邊相減,得

$$(ab'-a'b)x_1+ac'-a'c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

設 $ab'-a'b\neq 0$ 時,得

$$x_1=\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

又以 b' 乘(3)之兩邊,b 乘(4)之兩邊後,邊邊相減,得

$$(ab'-a'b)x_1{}^2+b'c-bc'=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

同樣,得　$$x_1{}^2=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

由(6)與(3)之關係,因而成立下式.

$$\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}=\frac{(a'c-ac')^2}{(ab'-a'b)^2}.$$

將上式去分母兼移項時,得

$$(a'c-ac')^2-(ab'-a'b)(bc'-b'c)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

以 R 表上式之左邊卽置

$$R=(a'c-ac')^2-(ab'-a'b)(bc'-b'c)$$

$$=a'^2c^2+a^2c'^2-bb'(a'c+ac')+b^2a'c'$$

$$+b'^2ac-2aa'cc'\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

時,則(9)成爲

$$R=0.$$

次設 $ab'-a'b=0$ 時,則(5)成爲

$$ac'-a'c=0$$

隨之容易誘導得下之等式.

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}.$$

此卽如定理1所證明,二方程式(1)與(2)之二根完全相同時也但此(9)之等式,亦能成立甚明.可知

$$R=(a'c-ac')^2-(ab'-a'b)(bc'-b'c)=0.$$

爲(1)及(2)具有公共根之必要條件.又 $ab'-a'b\neq0$ 及 $R=0$ 爲(1)及(2)僅有一公共根之必要條件.

次假設 $ab'-a'b\neq0$ 且 $R=0$ 時,置

$$x_1=\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}$$

由 $R=0$ 之等式得

$$\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}=\frac{(a'c-ac')^2}{(ab'-a'b)^2}.$$

因之得 $$x_1^2=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}.$$

以此x_1之值代入於方程式(1)中之 x 時,得

$$ax_1^2+bx_1+c=\frac{a(bc'-b'c)}{ab'-a'b}+\frac{b(a'c-ac')}{ab'-a'b}+c$$

$$=\frac{a(bc'-b'c)+b(a'c-ac')+c(ab'-a'b)}{ab'-a'b}$$

$$=0.$$

即 $x_1=\dfrac{a'c-ac'}{ab'-a'b}$ 爲方程式(1)之根.同樣可知此數亦爲方程式(2)之根.因 $ab'-a'b\neq 0$, 故方程式(1)與(2)其兩根不能完全相同.隨之可知 $ab'-a'b\neq 0$ 且 $R=0$,爲此二方程式僅有一公共根之充分條件.即本定理已被證明.

系 1. 二方程式 $ax^2+bx+c=0$ 及 $a'x^2+b'x+c'=0$ 具有公共根之必要,且兼充分條件爲 $R=0$.

系 2 二方程式 $ax^2+bx+c=0$ 及 $a'x^2+b'x+c'=0$ 僅有一公共根時,此根必爲實根.

設此公共根爲x_1 則於 $ab'-a'b\neq 0$ 時,由(6)得

$$x_1=\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}.$$

其 $\dfrac{a'c-ac'}{ab'-a'b}$ 爲實數故也.

系 3 二方程式 $ax^2+bx+c=0$ 及 $a'x^2+b'x+c'=0$ 共有

一虛根時,則其他一根亦爲虛數.其二方程式之根完全相同.

設 x_1 爲二方程式之公共虛根時,則由等式(5)

$$(ab'-a'b)x'=a'c-ac'.$$

然 $ab'-a'b$ 及 $a'c-ac'$ 皆爲實數,故如 x_1 爲虛數時,則上之等式如能成立,必不可不 $ab'-a'b=0, a'c-ac'=0$.隨之其二方程式之二根完全相同.而方程式之二根,設其一根爲虛數時,則其他一根亦爲虛數.故本系眞確不誤.

問題八

解下列諸方程式

1 $9x^2-24x+16=0.$

2. $3x^2=8x+3.$

3 $16x^2+16x+3=0.$

4. $x^2+(a-x)^2=(a-2x)^2.$

5. $x^2+(a-2x)^2=(a-3x)^2.$

6. $(x-a)^2+(x-b)^2=(a-b)^2.$

7. $(a-x)^3+(x-b)^3=(a-b)^3.$

8. $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0.$

9. $(x-a+2b)^3-(x-2a+b)^3=(a+b)^3.$

10 求 λ 取如何之値時,方程式 $ax^2+bx+c-\lambda=0$ 之二

根爲相異之實根.

11. 設 a, b, c 爲相異之實數時證明方程式

$$(a+b+c)x^2-2(bc+ca+ab)x+3abc=0$$

之根爲相異之實根.

12. 求 λ 取如何之值時,方程式 $x^2-(2\lambda+3)x+\lambda^2-1=0$ 之二根爲相異之實根.

13. 求 λ 取如何之值時,方程式 $(\lambda+2)x^2-2\lambda x+1=0$ 之二根相等.

14. 求 $m=-1$ 時, $(m^2+m)x^2+3mx-2=0$ 之根如何.又 $m=0$時,其根如何.

15. 設 x' 及 x'' 爲二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根,求作以$\frac{x''^2}{x'^2}$及$\frac{x'^2}{x''^2}$爲二根之方程式.

16. 求以二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根 k 倍之數二根之方程式.

17. 求以由二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根中減去 h 數之數爲二根之方程式.

18. 設二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 x' 及 x'',求作以下列各組數爲根之方程式

$$(a)\quad \frac{1}{x'}\text{及}\frac{1}{x''},\quad (b)\quad \frac{x''}{x'}\text{及}\frac{x'}{x''},\quad (c)\quad \frac{x'+x''}{x'}\text{及}\frac{x'+x''}{x''}.$$

19. 設 $x^2+px+q=0$ 之二根爲 x' 及 x'',求以 p 及 q 表下列各式之式

(a) $(x'-x'')^2$, (b) $x'^5+x''^5$, (c) $\frac{x''}{x'}+\frac{x'}{x''}$.

20. 設$2x^2-5x+3=0$之二根爲x'及x'',證明以$\frac{x'}{x''}$及$\frac{x''}{x'}$爲二根之方程式爲$6x^2-13x+6=0$.

21. 求出$a^2x^2+b^2x+c^2=0$之根等於$ax^2+bx+c=0$之根之平方之條件

22. 設$px^2+qx+r=0$之二根爲x'及x'',證明以$x'+x''$及$\frac{x'x''}{x'+x''}$二根之方程式爲$pqx^2+(pr+q^2)x+qr=0$.

23. 證明$x^2+ax+b=0$之二根之差等於$x^2+px+q=0$之二根之差時,則必$a^2-4b=p^2-4q$.

24. 設$x^2+px+q=0$之二根爲x'及x'',證明以$(x'+x'')^2$及$(x'-x'')^2$爲二根之方程式爲

$$x^2-2(p^2-2q)x+p^2(p^2-4q)=0.$$

36. **分數方程式** 茲先述關於分數方程式解法之基本定理於下.

定理1. 設A, B爲關於未知數之有理整式,如此二式不含公約數時,則方程式$\frac{A}{B}=0$與方程式$A=0$爲同値.

證明: 由假定,其A與B不含公約數.故方程式$A=0$之根不能使B爲0可知方程式$A=0$之根,卽爲$\frac{A}{B}=0$之根.又方程式$\frac{A}{B}=0$之根不可不使此分子爲0.卽不可不爲$A=0$之根.卽本定理已被證明.

此定理不外於第二十七節所述定理3之特殊情形.卽

$A=0$之方程式爲以含有未知數之B式乘方程式$\frac{A}{B}=0$所得者,而此二方程式爲同値也.

以B乘方程式$\frac{A}{B}=0$之兩邊以作成$A=0$之方程式時,謂之去分母

定理 2　凡分數方程式皆能化成$\frac{A}{B}=0$之形式.

因分數方程式如將其所有各項悉行移之於一邊化成一分數式後,如以其分子分母之最高公因式除其兩項時,必成$\frac{A}{B}=0$之形式故也.

因所有之分數方程式皆能化成$\frac{A}{B}=0$之形式故將分數方程式化成$\frac{A}{B}=0$之形式後,再行應用定理 1 時,則卽能解之.

例一. 解$\frac{x-1}{2x+1}=\frac{x+1}{3x-2}$.

移項,得　$\frac{x-1}{2x+1}-\frac{x+1}{3x-2}=0.$

卽　$\frac{(x-1)(3x-2)-(x+1)(2x+1)}{(2x+1)(3x-2)}=0.$

卽　$\frac{x^2-8x+1}{(2x+1)(3x-2)}=0.$

去分母,得　$x^2-8x+1=0.$

解之得　$x=4-\sqrt{15}$ 或 $4+\sqrt{-5}$

此卽所求之根也

例二. 解$\frac{x}{(x+2)(2x+3)}=\frac{2x}{2x+3}-\frac{1}{x+2}$方程式.

將所有各項移於左邊化成一分數時,得

$$\frac{x-2x(x+2)+(2x+3)}{(x+2)(2x+3)}=0.$$

或

$$\frac{-x(2x+3)+(2x+3)}{(x+2)(2x+3)}=0.$$

即

$$\frac{(2x+3)(1-x)}{(x+2)(2x+3)}=0.$$

以$2x+3$約其兩項時,得

$$\frac{1-x}{x+2}=0.$$

去分母,得　$1-x=0.$

因之得　$x=1.$

當解分數方程式時,不必定行依照將各項盡行移置於左邊,於化成既約分數後,再行除去其分母之順序.只須所得之結果,能與如此計算之結果相同,則於計算之中途,無論用何種方法均可.

一般如以方程式兩邊所有各分數式分母之最低公倍式乘其兩邊時,則此所得之方程式,如解之皆能得所求之根.

但以分母之最低公倍式乘分數方程式之兩邊後所求得之根,常較原方程式所具之根爲多.例如於例二,以$(x+2)(2x+3)$乘其方程式之兩邊時,得

$$x=2x(x+2)-(2x+3).$$

移項再行因子分解時得

$$(2x+3)(1-x)=0.$$

解之,得　$x=1$, 或 $-\frac{3}{2}$.

此 $-\frac{3}{2}$ 顯非方程式之根甚明.此種於計算之途中混入之根,謂之增根.因增根非原方程式所有之根,故於求得方程式之根後,不可不辨別其孰爲方程式之根,孰爲增根.待發覺其爲增根後,當卽棄去之.

辨別增根有無之方法,可置其根於分數方程式分母之未知數中,而檢驗其分母是否有成爲 0 者.如其根代入於分母之未知數中,使任何分母皆不成爲 0 時,則其根顯非增根.如使其分母有一爲 0 時,則多屬增根.

例三.　解 $\frac{x^2-3x}{x^2-1}+2+\frac{1}{x-1}=0.$

此方程式所應注意者,爲 x 不可爲 1 或 -1. 因 x 不爲 1 或 -1 時,則 x^2-1 決不能成爲 0. 故以 x^2-1 乘方程式之兩邊時,得

$$x^2-3x+2(x^2-1)+(x+1)=0$$

卽　$(x-1)(3x+1)=0.$

解之,得　$x=-\frac{1}{3}$, 或 1.

因 $x=1$ 時,則原方程式之分母俱成爲 0. 可知其爲增根,故原方程式僅有一根 $-\frac{1}{3}$.

分數方程式亦有無根時,玆舉一二例以說明之.

例四. 解$\dfrac{1}{x-a}=0$方程式.

此方程式無論與x以如何之值,均不能滿足之.因任以何數除1,其商皆不能成0故也.隨之此方程式無根存在.

例五. 解$\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{1}{x+5}=\dfrac{8}{(2x-1)(x+5)}$方程式.

以分母之最低公倍式$(2x-1)(x+5)$乘其兩邊時,得

$$2(x+5)-(2x-1)=8.$$

移項簡約之得

$$3=0.$$

不合理甚明.即所與之方程式無根存在.

37. 無理方程式 茲先述關於無理方程式解法之基本定理於下.

定理 於方程式之兩邊,昇高同次數之冪後所得之方程式,一般不與原方程式同値.

證明: 將方程式

$$A=B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之兩邊各自乘n次時得方程式

$$A^n=B^n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

但此兩方程式,一般多不同値.因方程式(1)與方程式

$$A-B=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

爲同値,而方程式(2)與方程式

$$A^n-B^n=0$$

即　$$(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+\cdots\cdots+B^{n-1})$$
$$=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

爲同値,但此方程式(4)係以含有未知數之式

$$A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots\cdots\cdots+B^n$$

乘方程式(3)所得者,故由二十七節之定理3不與方程式(3)同値.隨之方程式(1)與(2)亦不同値.即本定理已被證明.

茲爲便利起見,置

$$P=A^{n-1}+A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+\cdots\cdots+B^{n-1}$$

系1. 方程式$A^n=B^n$爲以P乘方程式$A=B$之兩邊所得者.

系2. 方程式$A^n=B^n$於方程式$P=0$不具根時,始與方程式$A=B$同値.

系3. 方程式$A^n=B^n$於方程式$P=0$具有根時,則除方程式$A=B$之根外,尚含有$P=0$之根

系4. 方程式之兩邊各自乘後所得之方程式,一般不與原方程式爲同値.

解無理方程式時通常皆將其各項適宜的移動後,昇高其兩邊成同次之羃,因以化成有理方程式,然後將此有理方程式解之即可.若一次昇高其兩邊成同次之羃後,所得者再爲無理方程式時,可再行將其各項適宜移動之昇高其兩邊成同次之羃,藉以化成有理方程式反復此法,不論

如何之無理方程式,最後皆可化成爲有理方程式.

解無理方程式時,通常皆須昇高其兩邊成同次之冪,其所得之有理方程式所含之根,由定理,可知較原方程式之根爲多.欲辨別最後所得方程式之根孰爲原方程式之根,孰爲增根時,不可不將所得之根,一一代入於原方程式中以驗之.其能滿足原方程式者,卽爲所求之根.

例一. 解 $\sqrt{2x-3}=2\sqrt{x+2}-3$ 方程式.

兩邊自乘之,得

$$2x-3=4(x+2)-12\sqrt{x+2}+9.$$

移項後整頓之,得

$$12\sqrt{x+2}=2x+20$$

兩邊各以 2 除之,得

$$6\sqrt{x+2}=x+10$$

兩邊各自乘,得

$$36(x+2)=x^2+20x+100$$

卽 $x^2-16x+28=0.$

分解爲因子,得

$$(x-2)(x-14)=0.$$

解之得 $x=2$, 或 14.

$x=2$ 時, $\sqrt{2x-3}=\sqrt{4-3}=1.$

$$2\sqrt{x+2}-3=2\sqrt{2+2}-3=4-3=1.$$

其兩邊相等.故 2 爲原方程式之根.

次 $x=14$ 時,代入於原方程式中,得

$$\sqrt{28-3}=2\sqrt{14+2}-3.$$

即　$5=5.$

其方程式能成立.故14亦爲原方程式之根.故所求之根爲 2 與14.

例二.　解$2\sqrt{x-3}+1=\sqrt{2x+1}$方程式.

兩邊自乘之,得

$$4(x-3)+4\sqrt{x-3}+1=2x+1.$$

移項　$4\sqrt{x-3}=12-2x.$

以 2 除之,得

$$2\sqrt{x-3}=6-x.$$

兩邊自乘之得

$$4(x-3)=36-12x+x^2.$$

移項　$x^2-16x+48=0$

解之,得　$x=4$　或　$12.$

$x=4$ 時,代入於原方程式中,成$3=3$ 其方程式能成立.又$x=12$時,代入於原方程式中,成$7=5$.其方程式不能成立.故12爲增根,而 4 則爲所求之根.

解以上之例題時,雖係將方程式之兩邊昇高成同次之冪但有時可先行適宜之計算,或行適宜之置換後,然後始

行化爲有理式者.其方法固可因利乘便,不必定拘執於一途也.玆例示一二於下

例三 解 $2x-3\sqrt{x}-14=0$ 方程式.

此方程式雖能於移項後兩邊各自乘以解之,但以下法爲較便.

因 $x=(\sqrt{x})^2$, 故方程式得改書之爲

$$2(\sqrt{x})^2-3\sqrt{x}-14=0$$

如以 $\sqrt{x}$ 爲一未知數以處理之,則原方程式爲關於 $\sqrt{x}$ 之二次方程式.

解之,得 $\sqrt{x}=\frac{7}{2}$, 或 -2.

因 $\sqrt{x}$ 不能爲負數,故 -2 不合理.僅

$$\sqrt{x}=\frac{7}{2}$$

爲合理.將上式兩邊各自乘,得

$$x=\frac{49}{4}$$

卽所求之根爲 $\frac{49}{4}$.

例四. 解 $\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-4}=\sqrt{12}+2$ 方程式.

先以恆等式 $(x^2+4)-(x^2-4)=12-4$ 與原方程式邊邊相除,得

$$\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-4}=\sqrt{12}-2$$

將上式與原方程式邊邊相加而以 2 除之,得

$$\sqrt{x^2+4}=\sqrt{12}.$$

將上式兩邊各自乘,得

$$x^2+4=12,$$

即　$x^2=8.$

因之得　$x=\pm2\sqrt{2}.$

即爲所求之根也.

38. 高次方程式　凡三次以上方程式,統稱之爲<u>高次方程式</u>.高次方程式通常皆於高等代數學所謂<u>方程式論</u>中以討論之,不屬於本書之範圍.但其特例亦有能應用二次方程式之解法以解之者.茲就其簡單者略舉數則於下.

A.　由視察的方法以求根者.

由二十一節之定理2,由視察的方法如求出n次方程式之一根時,則其解法可誘導成$n-1$次之方程式.

例一.　解$3x^3-x-2=0$方程式.

$x=1$爲此方程式之一根,易由視察之方法以求出之甚明.故此方程式之左邊能以$x-1$整除之.即

$$3x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2).$$

故其他二根爲方程式

$$3x^2+3x+2=0$$

之二根.解之,得

$$x=\frac{-3\pm i\sqrt{15}}{6}.$$

卽所求之根爲　$1,\ \dfrac{-3+i\sqrt{15}}{6},\ \dfrac{-3-i\sqrt{15}}{6}.$

B　$ax+bx^2+c=0$ 形式之方程式.（其 x 爲含未知數之項）

此方程式能應用二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之解法以解之應用公式時,得

$$x^2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

例二　解 $x^4-10x^2+9=0$

應用公式,得

$$x^2=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{10\pm8}{2}=9,\text{或 }1.$$

$x^2=9$ 時,得 $x=\pm3.$

$x^2=1$ 時,得 $x=\pm1.$

卽所求方程式之根爲　$3\quad -3\quad 1,\ -1.$

C　相反方程式.

相反方程式爲將方程式之各項依 x 之降冪或昇冪順序排列時,則其第一項之係數與末項之係數相同,第二項之係數與末第二項之係數相同;其餘準此類推者.例如

$$ax^3+bx^2+bx+a=0.$$

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0.$$

$$ax^5+bx^4+cx^3-cx^2-bx-a=0$$

等皆爲相反方程式是.

例三. 解 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ 方程式.

以 x^2 除其兩邊得

$$ax^2+bx+c+b\frac{1}{x}+a\cdot\frac{1}{x^2}=0$$

即 $$a(x^2+\frac{1}{x^2})+b(x+\frac{1}{x})+c=0.$$

置 $x+\frac{1}{x}=y$ 時,得

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

$$\therefore\quad a(y^2-2)+by+c=0.$$

設上列方程式之二根爲 α,β 時,則原方程式之四根爲列二方程式之二組根.

$$x+\frac{1}{x}=\alpha,\quad x+\frac{1}{x}=\beta.$$

D. 二項方程式

凡屬於 $x^n\pm A=0$ 形式之方程式,謂之二項方程式.

例四. 解 $x^5-1=0$ 方程式.

由十六節之定理,

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1).$$

得所求之根爲 $x=1$,

或 $$x^4+x^3+x^2+x+1=0$$

之根,但上之方程式爲相反方程式,故以x^2除之,得

$$x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}+1=0$$

置 $x+\frac{1}{x}=y$ 時,則 $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$

$\therefore$ $y^2-2+y+1=0.$

$\therefore$ $y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$

$\therefore$ $x+\frac{1}{x}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$

即 $x^2-\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}x+1=0$

$\therefore$ $x=\frac{-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}.$

或 $x=\frac{-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}.$

即所求之根爲 1 $\frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4},$

$\frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}$ $\frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4},$

$\frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}$ 是.

問 題 九

解下列諸方程式

1. $\dfrac{4}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{1-x}$.

2. $\dfrac{2x+1}{2x-1}-\dfrac{8}{4x^2-1}=\dfrac{2x-1}{1+2x}$.

3. $\dfrac{x+a}{x-b}+\dfrac{x+b}{x-a}=2$.

4. $\dfrac{ax}{a+x}+\dfrac{bx}{b+x}=a+b$.

5. $\dfrac{x-b}{x-a}-\dfrac{x-a}{x-b}=\dfrac{2(a-b)}{x-a-b}$.

6. $\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x+b}{x-b}+\dfrac{x+c}{x-c}-3=0$.

7. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{b}{x}+\dfrac{b^2}{x^2}=1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{b^2}{a^2}$.

8. $\dfrac{2x^2-ax-a^2}{x-2a}+\dfrac{2x^2-3ax-8a^2}{x-3a}=\dfrac{8x^2-8a^2}{2x-3a}$.

9. $6\sqrt{x^2-2x+6}=21+2x-x^2$.

10. $2x^2-3x-21=2x\sqrt{x^2-3x+4}$.

11. $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{b-x}=\sqrt[3]{a+b-2x}$

12. $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x}=\sqrt[4]{a+b-2x}$.

13. $2\sqrt{x^2-3x+1}+3=\dfrac{5}{\sqrt{x^2-3x+1}}$.

14. $\sqrt{a-x}=x-b$.

15. $\dfrac{(x-a)\sqrt{x-a}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}=a-b$.

16. $\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}-\sqrt{\dfrac{b-x}{x-a}}=1$.

17. $(x-a)^4+(x-b)^4=(a-b)^4.$

18. $$a^4\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^4\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^4\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^4.$$

19 $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12=0.$

20. $(x^2+2)^2+8x(x^2+2)+15x^2=0.$

21 $2x^2-4x+3\sqrt{x^2-2x+6}=15.$

22. $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)=\frac{9}{16}a^4.$

23. $ax^3+bx^2+bx+a=0.$

24. $4x^4-4x^3-7x^2-4x+4=0.$

25. $9x^4-24x^3-2x^2-24x+9=0.$

26. $x^3-1=0$

27. $x^4-1=0$

28 $x^4+a^4=0.$

29. $x^5+32=0.$

30 $x^8-1=0.$

第七章　聯立方程式

39　聯立方程式　於含有未知數 x, y 之方程式,例如

$$3x-2y=8 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

其能適合於 x, y 之值,有無數組存在.因如將此方程式改書成

$$3x=8+2y,$$

即 $$x=\frac{8+2y}{3}.$$

時,則任與何值代入於 y 卽能得一與此對應之 x 值故也.例如於

……………………

$y=1$ 時,則 $x=3\frac{1}{3}$;

$y=2$ 時,則 $x=4$;

$y=3$ 時,則 $x=4\frac{2}{3}$;

……………………

是可知能適合於方程式(1)之 x, y 之值,有無數組存在.同樣,其能適合於方程式

$$x+y=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

之 x, y 之值,亦有無數組存在.因如將此方程式改書成

$$x=6-y$$

時,則於

……………………

$y=1$ 時, 則 $x=5$;

$y=2$ 時, 則 $x=4$

$y=3$ 時, 則 $x=3$;

……………………

故也.但其能同時滿足兩方程式(1)及(2)之 x, y 之值則僅有 $x=4, y=2$ 之一組,此外並無存在.

凡含有二個以上未知數之方程式數個,均能爲其各未知數之相同值所滿足時,則此等方程式,謂之聯立方程式.或謂之方程式組.其能滿足聯立方程式之未知數之值,則謂之聯立方程式之根.或謂之聯立方程式之解

聯立方程式如係由整方程式組成時,則取其中最高次方程式之次數以爲聯立方程式之次數,例如

$$\left.\begin{aligned} ax+by&=c \\ a'x+b'y&=c' \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=a \\ x^2+y^2+z^2&=b \\ yz+zx+xy&=c \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

等組方程式,各能爲 x, y, z 之相同値所滿足時,則(1)謂之聯立二元一次方程式,(2)謂之聯立三元二次方程式是.

於聯立方程式,如滿足其各未知數之數値能同時存在時,則此聯立方程式,謂之成立,或謂之有根.否則謂之不能成立,或謂之無根,亦或謂之不能.

40. 聯立方程式解法之原理　設含有若干未知數之聯立方程式二組,其第一組之根悉爲第二組之根;反之,第二組之根亦悉爲第一組之根時,則此二組聯立方程式,謂之同値.

解聯立方程式時,除能引用於第六章所證明之諸定理外,茲更就其與聯立方程式解法有密切關係之定理二三,證明之於下.

定理 1.　於所與一組之聯立方程式中,將其組諸方程式之右邊與右邊相加,左邊與左邊相加後所得之方程式,以代其中任一方程式時則此組之聯立方程式,與原組之聯立方程式爲同値.

證明:　設所與一組之聯立方程式爲

$$\left.\begin{matrix} A_1=B_1 \\ A_2=B_2 \\ A_3=B_3 \end{matrix}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

則證明

$$\left.\begin{aligned} A_1+A_2+A_3&=B_1+B_2+B_3\\ A_2&=B_2\\ A_3&=B_3\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\quad(2)$$

爲同値卽可

於(1)組諸方程式中,如以其滿足(1)組未知數之值代入於其未知數時,則A_1之值,等於B_1之値;A_2之值,等於B_2之値;A_3之值,等於B_3之値,隨之$A_1+A_2+A_3$之值,亦不可不等於$B_1+B_2+B_3$之値.故凡滿足(1)組聯立方程式之未知數之值,必能滿足(2)組聯立方程式.

又將滿足(2)組聯立方程式之未知數之值,嵌入於(2)組諸方程式時,則A_2之值,等於B_2之値;A_3之值,等於B_3之値;隨之A_2+A_3之值,亦等於B_2+B_3之値.然$A_1+A_2+A_3$之値等於$B_1+B_2+B_3$之值,故A_1之値不可不等於B_1之値可知凡能滿足(2)組聯立方程式之未知數之值,必能滿足(1)組聯立方程式.

故(1)組聯立方程式與(2)組聯立方程式爲同值.卽本定理已被證明.

於上之(2)組第一方程式,如改爲

$$A_1+A_2=B_1+B_2,$$

或 $$A_1+A_3=B_1+B_3$$

時,其(1)與(2)二組聯立方程式仍爲同値甚屬明暸.所應注

意者,爲於不失卻同値之範圍其能替代 $A_1=B_1$ 之方程式者必不可不含 $A_1=B_1$ 之一事.例如

$$A_2+A_3=B_2+B_3,\quad A_2=B_2\quad A_3=B_3$$

之一組聯立方程式不與(1)爲同値是.因滿足此一組聯立方程式之未知數之値,不必定能滿足 $A_1=B_1$ 故也.

一般於(2)組聯立方程式中,其能替代其第一方程式者,爲

$$L_1A_1+L_2A_2+L_3A_3=L_1B_1+L_2B_2+L_3B_3$$

形式之方程式.但此處之 L_1, L_2, L_3 爲不含未知數且不等於 0 之數.

又本定理中所謂加者,當知其亦含有減之意.

定理 2　於一組聯立方程式,設其中一方程式之任意未知數能以其他未知數表之,例如$x=P$,其 P 不含 x 僅含 x 以外之未知數時;則於其餘諸方程式中,盡置 P 以代 x 所得之方程式一組,與原組之聯立方程式爲同値.

證明:　設於 A_2, A_3. B_2, B_3 諸式,置 P 以代 x 所得之諸式爲 A'_2, A'_3, B'_2, B'_3 時,則證明下列之二組聯立方程式爲同値卽可.

$$\left.\begin{array}{r} x=P \\ A_2=B_2 \\ A_3=B_3 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}x=P\\A'_2=B'_2\\A'_3=B'_3\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

凡滿足(1)組聯立方程式之未知數之值,均能使x之值與P之值相等.故於其餘之諸方程式,或以未知數之值以代未知數,或改x爲P後再以未知數之值代入之,其結果均屬相等.故凡能滿足(1)組聯立方程式之未知數之值,必能滿足(2)組聯立方程式.

反之,其能滿足(2)組聯立方程式之未知數之值,能使x之值與P之值相等.故不論豫置x以代P與否,與其於(2)組殘餘之諸方程式中,以未知數之值以代未知數所得之結果,毫無影響.故凡能滿足(2)組聯立方程式之未知數之值,亦必能滿足(1)組聯立方程式.

故(1)組聯立方程式與(2)組聯立方程式爲同值.即本定理已被證明.

41. 聯立方程式之解法 聯立方程式之解法,要在適宜引用第六章第二十七節及本章第四十節所證明之諸定理,藉以變更所設方程式之形式,因而誘導得所求之根之明白方程式.其解法當隨其方程式形式之不同而異.本節所述者,則爲一般聯立方程式之解法.

A 加減法

設有　$A=0\ \ B=0,\ C=0,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ L=0.$

諸聯立方程式則應用定理1,如適宜選定$p, q, r, \cdots\cdots, t$等諸數,作成

$$pA+qB+rC+\cdots\cdots\cdots\cdots+tL=0,\ B=0,$$
$$C=0,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ L=0.$$

一組與前組同値之聯立方程式時,則方程式

$$pA+qB+rC+\cdots\cdots\cdots\cdots+tL=0$$

之未知數,可較所設之方程式少一個或數個.卽於原方程式之兩邊同以一數乘之,然後邊邊相加（或相減）,其所得方程式之未知數,爲於所設方程式之未知數中消去一個或數個者.依此法順次消去之,至其最後所得之方程式僅含一個未知數時,則其未知數之根,卽行求得.此種方法,謂之加減消去法,或簡稱加減法.

例一.　解下列之聯立方程式.

$$3x+2y=16\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$x-4y=24\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以2乘(1),得

$$6x+4y=32\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2)+(3),得　$7x=56.$

$\therefore\quad x=8.$

以x之値代入於(1)或(2),得$y=-4.$

卽所求聯立方程式之一組根爲 $x=8$, $y=-4$.

B. 代入法

先將一方程式中之一未知數之值,以其他未知數及已知數表之;然後以此未知數之值,代入於其他方程式中之同一未知數時,則其未知數卽行消去.此種方法,謂之代入消去法,或簡稱之爲代入法.

例二. 解下列之聯立方程式.

$$2x+7y=35 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$5x-3y=26 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1),得 $$x=\frac{35-7y}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以(3)之 x 之值代入於(2),得

$$\frac{5(35-7y)}{2}-3y=26.$$

解之,得 $y=3$.

以 y 之值代入於(3),得 $x=7$.

卽所求聯立方程式之一組根爲 $x=7$, $y=3$.

C. 等置法

於二方程式將其某相同之未知數之值,以其他之未知數及已知數表之;然後用等號以連結此所得之二式,則其未知數卽行消去.此種方法,謂之等置消去法,或簡稱之爲等置法.

例三. 解下列之聯立方程式.

$$4x-3y=5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$3x-2y=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由(1),得 $$x=\frac{5+3y}{4} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

由(2),得 $$x=\frac{4+2y}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

置(3)與(4)之 x 之値相等時,得

$$\frac{5+3y}{4}=\frac{4+2y}{3}.$$

解之,得 $y=1.$

以 y 之値代入於(3)或(4),得 $x=2$

卽所求聯立方程式之一組根爲 $x=2$ $y=1.$

D. 未定係數法

設有三個三元一次方程式

$$a_1x+b_1y+c_1z=p_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=p_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$a_3x+b_3y+c_3z=p_3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

時,然後選定二未定係數 λ_1 及 λ_2,各以之乘(2)及(3),將其所得結果與(1)相加,得

$$(a_1+a_2\lambda_1+a_3\lambda_2)x+(b_1+b_2\lambda_1+b_3\lambda_2)y$$
$$+(c_1+c_2\lambda_1+c_3\lambda_2)z$$
$$=p_1+p_2\lambda_1+p_3\lambda_2.$$

今設使 y 之係數及 z 之係數皆成爲 0, 以選定 λ_1 及 λ_2 時,則得

$$x=\frac{p_1+p_2\lambda_1+p_3\lambda_2}{a_1+a_2\lambda_1+a_3\lambda_2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

又置 y 及 z 之係數各等於 0 時,得

$$b_1+b_2\lambda_1+b_3\lambda_2=0;$$

$$c_1+c_2\lambda_1+c_3\lambda_2=0.$$

上之二方程式成爲以 λ_1 及 λ_2 爲未知數之二元一次方程式,解之,得

$$\lambda_1=\frac{b_3c_1-b_1c_3}{b_2c_3-b_3c_2};$$

$$\lambda_2=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{b_3c_2-b_2c_3}.$$

將上二式之 λ_1 及 λ_2 之值代入於(4)時,卽得 x 之根

$$x=\frac{p_1(b_2c_3-b_3c_2)+p_2(b_3c_1-b_1c_3)+p_3(b_1c_2-b_2c_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)}.$$

依同樣方法,得

$$y=\frac{p_1(c_2a_3-c_3a_2)+p_2(c_3a_1-c_1a_3)+p_3(c_1a_2-c_2a_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)}.$$

$$z=\frac{p_1(a_2b_3-a_3b_2)+p_2(a_3b_1-a_1b_3)+p_3(a_1b_2-a_2b_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)}.$$

未定係數法雖較前述之三法爲繁雜,但此事毫不足爲未定係數法病.未定係數法之特色,在秩序整然,且能使一般聯立三元一次方程式之解法,直接歸着於聯立二元

一次方程式之解法.

又未定係數法,雖在未知數三個以上之聯立方程式,亦能適用之.

例四. 解下列之聯立方程式.

$$7x+3y-2z=16\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2x+5y+3z=39\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$5x-y+5z=31\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以二未定係數 λ_1 及 λ_2 各乘(2)及(3式後將所得之結果與(1)邊邊相加時,得

$$\begin{aligned}(7+2\lambda_1+5\lambda_2)x+(3+5\lambda_1-\lambda_2)y&\\+(-2+3\lambda_1+5\lambda_2)z&\\=16+39\lambda_1+31\lambda_2.&\end{aligned}$$

今使 y 與 z 之係數各成爲 0 時,則

$$(7+2\lambda_1+5\lambda_2)x=16+39\lambda_1+31\lambda_2$$

$$\therefore\quad x=\frac{16+39\lambda_1+31\lambda_2}{7+2\lambda_1+5\lambda_2}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

又置 y 及 z 二係數各等於 0 時,則

$$3+5\lambda_1-\lambda_2=0.$$

$$-2+3\lambda_1+5\lambda_2=0.$$

解之得　$\lambda_1=-\frac{13}{28},\quad \lambda_2=\frac{19}{28}.$

將 λ_1 及 λ_2 之值代入於(4)時,得 $x=2$.

將 x 之值代入於(1),(2),(3)三式中之任意二式,使成爲二元一次聯立方程式時,解之得 $y=4$, $z=5$.

即所求聯立方程式之一組根爲 $x=2$, $y=4$, $z=5$.

42. 聯立二元一次方程式 聯立二元一次方程式經整頓後,皆能化成下列之一般形式.

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

此聯立方程式之解法如下.

假定 a_1, b_1, a_2, b_2 中至少有一個不爲 0 者,例如設 $b_1\neq0$ 時,則於方程式(1)移項後以 b_1 除其兩邊時,成爲

$$y=-\frac{a_1x+c_1}{b_1}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

將(3)所表之 y 之值 $-\frac{a_1x+c_1}{b_1}$ 代入於方程式(2)時,得

$$a_2x-\frac{b_2(a_1x+c_1)}{b_1}+c_2=0.$$

以 b_1 乘上式之兩邊後整頓之,則成

$$(a_2b_1-a_1b_2)x+b_1c_2-b_2c_1=0.$$

即 $$(a_1b_2-a_2b_1)x-(b_1c_2-b_2c_1)=0\cdots\cdots(4)$$

故如 $a_1b_2-a_2b_1\neq0$ 時,則

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

將 x 之值代入於(3)整頓後,得

$$y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

即所求聯立方程式之一組根爲

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\\y&=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

如上所說明者,係假定$b_1\neq0$又假定$b_2\neq0$時,其所得之結果,亦完全相同.因將a_1, b_1, c_1各與a_2, b_2, c_2相交換時,僅止於方程式(1)與(2)之交換,而其二方程式之一組並無若何變化;且於(7)組行此交換時,亦成

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_2b_1-a_1b_2}\\y&=\frac{c_2a_1-c_1a_2}{a_2b_1-a_1b_2}\end{aligned}\right\}\quad 即\quad\left.\begin{aligned}x&=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\\y&=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\end{aligned}\right\}$$

事實上毫無變化故也.

上述之結果,當含有b_1, b_2之一方能爲0之意義甚明.此時之根,亦能以(7)表之.茲說明之於下.

設　$b_1=0$　時,則$a_1b_2-a_2b_1$成爲a_1b_2.故$a_1b_2-a_2b_1\neq0$時,爲$a_1b_2\neq0$.其a_1, b_2雙方均不能爲0此時之聯立方程式成爲

$$\begin{cases}a_1x+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$$

因$a_1\neq0$由第一方程式得

$$x=-\frac{c_1}{a_1}.$$

將上式 x 之值 $-\frac{c_1}{a_1}$ 代入於第二方程式時,得

$$-\frac{a_2c_1}{a_1}+b_2y+c_2=0.$$

以 a_1 乘上式之兩邊,得

$$a_1b_2y-(c_1a_2-c_2a_1)=0.$$

因 $a_1b_2\neq 0,$

$$\therefore\quad y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2}.$$

故此時聯立方程式之一組根為

$$x=-\frac{c_1}{a_1},\qquad y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2}$$

此即於(7)置 $b_1=0$ 所得之結果也.

又於上述之說明,假定 a_1,b_1,a_2,b_2 中至少有一個不為 0 者.設 $b_1\neq 0$,則 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 時,其 a_1, a_2 中之一方為 0 時之根,亦能以(7)表之甚明.至其說明方法,則與假定 $b_1=0$ 時之說明方法相同.

但 a_1, a_2 雙方,或 b_1, b_2 雙方同成為 0 時,則 $a_1b_2-a_2b_1=0$.此種情形,容下節再行研究之.茲總合上述之結果,得一定理如下.

定理 聯立二元一次方程式

$$\left.\begin{array}{l}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

於 $a_1b_2-a_2b_1\neq0$ 時,有下列之一組根,此外無根存在.

$$\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\\[2ex]y=\dfrac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

此(2)之組,謂之聯立方程式(1)之根之公式.

今爲簡單起見,置

$$D=a_1b_2-a_2b_1,\ A=b_1c_2-b_2c_1,\ B=c_1a_2-c_2a_1$$

時,則根之公式成爲

$$x=\frac{A}{D},\qquad y=\frac{B}{D}.$$

43. 聯立二元一次方程式之討論

聯立方程式

$$a_1x+b_1y+c_1=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

於 $a_1b_2-a_2b_1\neq0$ 時,僅有

$$\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\\[2ex]y=\dfrac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

之一組根,已證明如上.玆更就 $a_1b_2-a_2b_1=0$ 時研究之.

因 $a_1b_2-a_2b_1=0$ 時,其 a_1, b_1, a_2, b_2 四數有悉數爲 0 與否之別,故特分爲二方面以研究之.

I. a_1, b_1, a_2, b_2 四數中至少有一不爲 0 者.但此時當包括有四數悉不爲 0 之可能意義在內.

先於恆等式

$$b_2(a_1x+b_1y+c_1)-b_1(a_2x+b_2y+c_2)$$

$$=(a_1b_2-a_2b_1)x-(b_1c_2-b_2c_1)$$

$$-a_2(a_1x+b_1y+c_1)+a_1(a_2x+b_2y+c_2)$$

$$=(a_1b_2-a_2b_1)x-(c_1a_2-c_2a_1).$$

於 $a_1b_2-a_2b_1=0$ 時,成爲

$$b_2(a_1x+b_1y+c_1)-b_1(a_2x+b_2y+c_2)=-A\cdots\cdots(4)$$

$$-a_2(a_1x+b_1y+c_1)+a_1(a_2x+b_2y+c_2)=-B\cdots(5)$$

但 $A=b_1c_2-b_2c_1,\quad B=c_1a_2-c_2a_1.$

又因(4)(5)兩等式之右邊 A, B 有爲 0 與否之別,故須再行分爲二方面以研究之.

(i) A, B 中至少一方不爲 0 時.此時包含 A, B 雙方皆不爲 0 或一方爲 0 而他方不爲 0 之兩種.要之其 A, B 二方至少一方不爲 0. 故設 $A\doteqdot 0$ 時,則 b_1, b_2 不能同時爲 0. 卽至少其一方不能爲 0. 設 $b_1\doteqdot 0$ 時,則於等式(4)移項後以 b_1 除其兩邊.成爲

$$a_2x+b_2y+c_2=\frac{b_2}{b_1}(a_1x+b_1y+c_1)+\frac{A}{b_1}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

因 $a_1x+b_1y+c_1=0,$

故　$a_2x+b_2y+c_2=\frac{A}{b_1}$.

上式之右邊不爲 0. 故能滿足方程式(1)之未知數 x, y 之值,不能滿足方程式(2)隨之聯立方程式(1)與(2)不能成立.卽此時聯立方程式(1),(2)爲不能.

(ii)　$A=B=0$ 時.由假定,a_1, b_1, a_2, b_2 四數中至少有一個不爲 0 者存在.設 $b_1\neq0$ 時,則於等式(4)移項後以 b_1 除其兩邊,成爲

$$a_2x+b_2y+c_2=\frac{b_2}{b_1}(a_1x+b_1y+c_1).$$

因　$a_1x+b_1y+c_1=0$,

故　$a_2x+b_2y+c_2=0$.

卽凡能滿足方程式(1)之未知數 x, y 之值悉能滿足方程式(2)然方程式(1)爲二元一次方程式,能滿足其方程式之未知數之值有無數組存在.故此時聯立方程式之根有無數組存在.卽此時聯立方程式(1)及(2)爲不定.

總合上述(i)(ii)兩方面之結果時,因之得一定理於下.

定理　$a_1b_2-a_2b_1=0$ 而 a_1, b_1, a_2, b_2 四數中至少有一不爲 0 時,則聯立方程式

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0.$$

於 $b_1c_2-b_2c_1$, $c_1a_2-c_2a_1$ 中一方不爲 0 時爲不能,於二式同時爲 0 時爲不定.

II. a_1, b_1, a_2, b_2 悉數爲 0 時.此時聯立方程式成爲

$$c_1=0, \qquad c_2=0.$$

如 c_1, c_2 中有不爲 0 者,則此一組之等式不能成立.隨之聯立方程式(1)(2)不能成立.卽此時聯立方程式爲不能.次如 $c_1=c_2=0$ 時,則此二等式不論 x, y 之値如何,皆能成立.隨之方程式(1)(2)之根完全不定.卽此時聯立方程式爲不定.因之得一定理於下.

定理 2. 設 a_1, b_1, a_2, b_2 悉數爲 0 時,則聯立方程式

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0.$$

於 c_1, c_2 中有不爲 0 時爲不能,於二數同時爲 0 時爲不定.

例一. 解下列之聯立方程式.

$$x+y=a+b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$(a+c)x-by=bc \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

因 $D=-b-(a+c)=-(a+b+c)$,故如 $a+b+c \fallingdotseq 0$ 時,則聯立方程式僅有一組之根.此根易由視察方法以求得之.卽

$$x=b, \qquad y=a$$

是.如 $a+b+c=0$ 時,則因 $a+c=-b, c=-(a+b)$,故方程式(2)成爲

$$-b(x+y)=-b(a+b).$$

此即以 $-b$ 乘方程式(1)之兩邊所得之結果.可知此時僅方程式(1)之一個方程式.即此時聯立方程式爲不定.

例二　解下列之聯立方程式.

$$p(x+y)+q(x-y)=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$p(x-y)+q(x+y)=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

將上列二方程式整頓之,成爲

$$(p+q)x+(p-q)y=5,$$

$$(p+q)x-(p-q)y=3$$

將上列二方程式邊邊相加相減各以 2 除其兩邊,得

$$(p+q)x=4,$$

$$(p-q)y=1.$$

如 $p^2-q^2\neq 0$ 時,則

$$x=\frac{4}{p+q},$$

$$y=\frac{1}{p-q}.$$

即所求聯立方程式之一組根也.

又如 $p^2-q^2=0$ 時,設 $p=q$,則方程式(1)(2)各成爲

$$2px=5, \qquad 2px=3.$$

此二方程式不能同時成立甚明.即此時聯立方程式爲不能.次設 $p=-q$ 時,則方程式(1)(2)各成爲

$$2py=5, \qquad -2py=3.$$

亦不能同時成立甚明.卽此時聯立方程式亦爲不能.因之得結論如下.卽 $p^2-q^2=0$ 時,所設之聯立方程式爲不能.

44 二元一次同次方程式 聯立二元一次方程式具有

$$a_1x+b_1y=0,$$

$$a_2x+b_2y=0$$

之形式時,謂之同次方程式.此種聯立方程式,如於上述之一般聯立二元一次方程式中,置其絕對項等於 0 時,則由上節討論之結果,易於了解下述之事項.

(i) $a_1b_2-a_2b_1\neq0$ 時,$x=y=0$,此外無能滿足聯立方程式之值.

(ii) $a_1b_2-a_2b_1=0$ 時,聯立方程式爲不定.隨之於未知數 x, y 中,至少能爲其一方不爲 0 之值所滿足.因之得一定理於下.

定理 聯立方程式

$$a_1x+b_1y=0$$

$$a_2x+b_2y=0.$$

能爲其未知數 x, y 中至少一方不爲 0 之值所滿足時,其必要且兼充分之條件,爲 $a_1b_2-a_2b_1=0$.

此結果當歸着於二個一元一次方程式具有公共根之條件.因 x, y 中至少有一不爲 0,故設 $y\neq0$ 時,則於上之聯

立方程式兩邊各以 y 除之,得

$$a_1\frac{x}{y}+b_1=0$$

$$a_2\frac{x}{y}+b_2=0.$$

此卽以 x 與 y 之比 $\frac{x}{y}$ 爲一未知數之二個一次方程式也.此二方程式之根相等之必要且兼充分之條件,爲

$$-\frac{b_1}{a_1}=-\frac{b_2}{a_2}$$

卽　$a_1b_2=a_2b_1.$

$\therefore$　$a_1b_2-a_2b_1=0$

45. **聯立三元一次方程式**　聯立三元一次方程式經整頓後,皆能化成下列之一般形式.

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

設 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ 九數中至少有一不爲 0,例如 $c_1\neq 0$ 時,則以 c_2 乘方程式(1)之兩邊,c_1 乘方程式(2)之兩邊後,邊邊相減時,得

$$(c_1a_2-c_2a_1)x-(b_1c_2-b_2c_1)y+c_1d_2-c_2d_1=0 \cdots(4)$$

又各以 c_3, c_1 乘方程式(1),(3)後,邊邊相減時,得

$$(c_3a_1-c_1a_3)x-(b_3c_1-b_1c_3)y+c_3d_1-c_1d_3=0 \cdots(5)$$

由方程式(4)與(5)消去 y 時,得

$$\begin{aligned}\{(c_1a_2-c_2a_1)(b_3c_1-b_1c_3)-(c_3a_1-c_1a_3)(b_1c_2-b_2c_1)\}x&\\ +(c_1d_2-c_2d_1)(b_3c_1-b_1c_3)&\\ -(c_3d_1-c_1d_3)(b_1c_2-b_2c_1)&\\ =0.&\end{aligned}$$

將上式改寫之,則成爲

$$\begin{aligned}c_1\{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\}x&\\ +c_1\{d_1(b_2c_3-b_3c_2)+d_2(b_3c_1-b_1c_3)&\\ +d_3(b_1c_2-b_2c_1)\}=0.&\end{aligned}$$

因 $c_1\neq0$,故以 c_1 除上式之兩邊時,得

$$\begin{aligned}\{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\}x&\\ +d_1(b_2c_3-b_3c_2)+d_2(b_3c_1-b_1c_3)&\\ +d_3(b_1c_2-b_2c_1)=0.&\end{aligned}$$

隨之如 $a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\neq0$ 時,則

$$x=-\frac{d_1(b_2c_3-b_3c_2)+d_2(b_3c_1-b_1c_3)+d_3(b_1c_2-b_2c_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)}\cdots(7)$$

如以上式之 x 之值代入於方程式4,或由(4)(5)兩方程式消去 x 時,則得

$$y=-\frac{d_1(c_2a_3-c_3a_2)+d_2(c_3a_1-c_1a_3)+d_3(c_1a_2-c_2a_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)}\cdots(8)$$

將(7)(8)兩式之 x 與 y 之值代入於方程式(1)中而計算之,得

$$z=-\frac{d_1(a_2b_3-a_3b_2)+d_2(a_3b_1-a_1b_3)+d_3(a_1b_2-a_2b_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)}\cdots(9)$$

如以D代上三式中表 x, y, z 之值之分數公共分母時,則D可書成下列之種種形式.

$$\left.\begin{aligned}D&=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\\&=b_1(c_2a_3-c_3a_2)+b_2(c_3a_1-c_1a_3)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)\\&=c_1(a_2b_3-a_3b_2)+c_2(a_3b_1-a_1b_3)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)\\&=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)\\&=a_2(b_3c_1-b_1c_3)+b_2(c_3a_1-c_1a_3)+c_2(a_3b_1-a_1b_3)\\&=a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

因$D \neq 0$時,則於由三數構成之 $(a_1,a_2,a_3)(b_1,b_2,b_3)(c_1,c_2,c_3)$ $(a_1,b_1,c_1)(a_2,b_2,c_2)(a_3,b_3,c_3)$ 六組中任何組,皆至少有一個不爲0者存在.隨之於$D \neq 0$時,聯立方程式之係數中,全體至少有三個不爲0者.

又於原方程式(1)(2)(3)中,循環交換 x, y, z 時同時不變其添數 1, 2, 3 之配置而循環交換其文字 a, b, c 時,仍屬不變.隨之如於等式(7)施行同樣之方法時,則順次卽得等式(8),(9).可知由方程式(4)與(5)之一組求得 x 之值後,則可不必如上法以求 y, z 之值,僅須於表 x 之值之式中循環交換其文字 a, b, c 卽可.

或於 x 之值中交換其文字 a, b 時,卽成爲 y 之值;交換其文字 a, c 時,則成爲 z 之值.此因於原方程式中交換 x, y 時,同時交換 a, b;及交換 x, z 時,同時交換 a, c,則仍屬

不變故也.

可知以上之結果(7)(8),(9)三式,雖係由假定$c_1 \neq 0$時以求得者,但此結果可由假定係數 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ 中任何一數不爲0時以求得之甚明.隨之於 $D \neq 0$ 時,原方程式之根,爲(7),(8),(9)三式所表之值.此外無根存在.因之得一定理於下.

定理 聯立三元一次方程式.

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

於 $D \neq 0$ 時,有

$$\left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{d_1(b_2c_3-b_3c_2)+d_2(b_3c_1-b_1c_3)+d_3(b_1c_2-b_2c_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)} \\ y=-\dfrac{d_1(c_2a_3-c_3a_2)+d_2(c_3a_1-c_1a_3)+d_3(c_1a_2-c_2a_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)} \\ z=-\dfrac{d_1(a_2b_3-a_3b_2)+d_2(a_3b_1-a_1b_3)+d_3(a_1b_2-a_2b_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)} \end{array}\right\}\cdots(2)$$

之一組根.此外無根存在.

此(2)式謂之聯立方程式(1)之根之公式.卽與於四十一節所述未定係數法所求得之結果,置$d_1=-p_1, d_2=-p_2, d_3=-p_3$時,完全一致.

48. 聯立n元一次方程式 n個n元一次方程式經

整頓後，皆能化成下列之一般形式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+\cdots\cdots\cdots+l_1w+p_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+\cdots\cdots\cdots+l_2w+p_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z+\cdots\cdots\cdots+l_3w+p_3=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_nx+b_ny+c_nz+\cdots\cdots+l_nw+p_n=0 \end{cases}$$

式中 $x, y\ z\cdots\cdots\cdots w$ 爲 n 個之未知數，其 $a_1, b_1, c_1\cdots\cdots\cdots\cdots$ 等則皆爲已知數.

設 $a_1 \doteqdot 0$ 時，則由最初之方程式得

$$x=-\frac{1}{a_1}(b_1y+c_1z+\cdots\cdots\cdots\cdots+l_1w+p_1).$$

將上式 x 之値代入於其餘之 $n-1$ 個方程式中時，則得關於 $y, z,\cdots\cdots w$ 等 $n-1$ 個未知數之方程式 $n-1$ 個.隨之所設之聯立 n 元一次方程式之解法，歸着於聯立 $n-1$ 元一次方程式之解法.如此逐次消去其未知數 $x, y, z,\cdots\cdots$ 時，最後卽得一一元一次方程式.解此一元一次方程式時，卽得一未知數之根.再以此未知數之値順次代入於原方程式中，繼續求之，當可將 $x, y, z,\cdots\cdots\cdots\cdots, w$ 等 n 個未知數之根求出.

又如應用未定係數法時，則其解法如下.以 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,\cdots\cdots\cdots, \lambda_n$ 各乘一方程式之兩邊，然後邊邊相加，置未知數 $y, z,$

………,w之係數等於 0, 即使

$$\begin{cases} b_1\lambda_1+b_2\lambda_2+b_3\lambda_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+b_n\lambda_n=0 \\ c_1\lambda_1+c_2\lambda_2+c_3\lambda_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+c_n\lambda_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_1\lambda_1+l_2\lambda_2+l_3\lambda_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+l_n\lambda_n=0 \end{cases}$$

後,然後應用含有 $n-1$ 個未知數之聯立一次方程式之解法得以決定其 $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3:\cdots\cdots\cdots\cdots:\lambda_n$ 之比之值.而 x 之值則可由方程式

$$(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+a_3\lambda_3+\cdots\cdots+a_n\lambda_n)x+p_1\lambda_1+p_2\lambda_2+p_3\lambda_3 \\ +\cdots\cdots+p_n\lambda_n=0.$$

以決定之.即如 $a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+a_3\lambda_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n\lambda_n\neq0$, 則

$$x=-\frac{p_1\lambda_1+p_2\lambda_2+p_3\lambda_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+p_n\lambda_n}{a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+a_3\lambda_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n\lambda_n}.$$

將上式之 x 之值代入於原方程式中,即得關於其餘 $n-1$ 個之未知數 y, z,…………,w 之聯立方程式.如此逐次求之,即得所求之根.

例一. 解下列之聯立方程式.

$$3u-2y=2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$5v-7z=11\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$2x+3y=39\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$4y+3z=41 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

因 u 僅於方程式(1)中含有之,故於方程式(2),(3),(4)計算 x, y, z 之値時,得

$$x=12,\quad y=5,\quad z=7$$

將 y 之值代入於方程式(1)中,得 $u=4$.故所求聯立方程式之根爲

$$x=12,\quad y=5,\quad z=7,\quad u=4$$

之一組.

例二. 解下列之聯立方程式.

$$y+z+u-kx=a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$z+u+x-ky=b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$u+x+y-kz=c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$x+y+z-ku=d \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

將各方程式邊邊相加,得

$$(3-k)(x+y+z+u)=a+b+c+d\cdots\cdots(5)$$

以 $3-k$ 乘方程式(1)之兩邊後與方程式(5)邊邊相減,得

$$(3-k)(1+k)x=(k-2)a+b+c+d.$$

隨之如 $(3-k)(1+k)\neq 0$ 時,則

$$x=\frac{(k-2)a+b+c+d}{(3-k)(1+k)}.$$

次觀察所設方程式之形勢,可知如於上式之右邊循環

交換 a, b, c, d 時,則可順次以得 y, z, u 之値甚明.故所求聯立方程式之根如 $(3-k)(1+k)\neq 0$ 時,則

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{(k-2)a+b+c+d}{(3-k)(1+k)}, \quad y=\frac{(k-2)b+c+d+a}{(3-k)(1+k)} \\ z&=\frac{(k-2)c+d+a+b}{(3-k)(1+k)}, \quad u=\frac{(k-2)d+a+b+c}{(3-k)(1+k)} \end{aligned}\right\}\cdots \quad (6)$$

如 $(3-k)(1+k)=0$ 時,則可討論之如下.

i. $k=-1$ 時,此時方程式(1),(2),(3),(4),之左邊皆相等,悉成爲 $x+y+z+u$. 隨之

(1) 如 $a\neq b\neq c\neq d$ 時,則聯立方程式爲不能.

(2) 如 a, b, c, d 各不相等時,則聯立方程式爲不定.因結果僅有一個方程式 $x+y+z+u=a$ 故也.

ii. $k=3$ 時,此時方程式(5)成爲

$$0=a+b+c+d.$$

上式爲方程式成立時之必要條件甚明.隨之

(1) 如 $a+b+c+d\neq 0$ 時,則聯立方程式爲不能.

(2) 如 $a+b+c+d=0$ 時,則將方程式(1),(2),(3)邊邊相加,因 $k=3$

$$\therefore \quad -(x+y+z)+3u=a+b+c=-d.$$

$$\text{卽} \quad x+y+z-3u=d.$$

卽爲方程式(4)是.但置 $x+y+z+u=4t$ 時,則方程式(1),(2),(3),(4)各成爲

$$4t-4x=a,\ 4t-4y=b,\ 4t-4z=c,\ 4t-4u=d.$$

隨之

$$x=t-\frac{a}{4},\ y=t-\frac{b}{4},\ z=t-\frac{c}{4},\ u=t-\frac{d}{4}\cdots\cdots(7)$$

因 t 能取任意之値,故此時聯立方程式爲不定.其未知數之値如(7)所示.

47. 未知數之數與方程式之數之關係　於一次方程式,其未知數之數如與方程式之數相等時,則一般其未知數之値皆能決定,已如上述諸節所討論.本節僅就未知數之數與方程式之數不相等時討論之.

未知數之數與方程式之數不等時,約可分爲下列二方面.

(i)　未知數之數較方程式之數爲多時.

(ii)　未知數之數較方程式之數爲少時.

茲依上述之二方面順次硏究之於下.

定理 1.　未知數之數如較方程式之數爲多時,則聯立方程式一般爲不定.

例如二元一次方程式僅有一個時,則如第三十九節所述,其能滿足方程式未知數之値,有無數組存在.隨之其方程式爲不定.又三元一次方程式如僅有一個或二個時,則最多僅能消去一未知數,且此時所得之二元一次方程式

僅有一個,故其方程式爲不定.

設有含未知數 m 個之方程式 n 個而 $m>n$ 時,則於此一組方程式中將其 m 個未知數中之 $m-n$ 個視作已知數以計算之,而此一組方程式卽成爲關於其餘 n 個未知數之聯立方程式.因方程式之數亦有 n 個,故解之其 n 個之未知數得以此 $m-n$ 個未知數以表之.因於此結果,此 $m-n$ 個未知數能取任意之值.故 m 個未知數之值,一般不能決定.卽聯立方程式爲不定.

定理 2. 未知數之數較方程式之數爲少時,則聯立方程式一般爲不能.

設有含未知數 m 個之方程式 n 個而 $m<n$ 時,則於此一組方程式中任取 m 個方程式解之,均能決定其 m 個未知數之值.但此所決定之未知數之值,一般多不能滿足其餘之 $m-n$ 個方程式.隨之 n 個方程式之組,不能成立.故聯立方程式爲不能.

問　題　十

解下列之聯立方程式.

1. $3x-y+z=4,$
$5x+2y+3z=18,$
$3x+4y+2z=17.$

2 $5x-6y-10z=8,$
$2x-4y+5z=6,$
$7x+4y-15z=17.$

3. $2x+5y-4z=1,$

$7x-3y+2z=13$

$8x-21y+16z=23.$

4 $3x-2y+5z=7,$

$9x+3y-10z=0,$

$6x-5y-15z=33.$

5. $\frac{6}{x}+\frac{3}{y}=10,\quad \frac{4}{x}-\frac{9}{y}+\frac{2}{z}=4,\quad \frac{3}{x}+\frac{6}{y}+\frac{1}{z}=7.$

6. $3x-5y+5z=0$

$3x+4z=3,$

$5x-3y=25$

$7w-2z=13.$

7. $4w-2x+7y-5z=1,$

$3w+3x-y-z=2,$

$7w-3x+5y-2z=8$

$w+2x+3y+4z=30.$

8. $w+x+y+z=16,$

$x-w+2y+3z=33,$

$2w+5x+5y-6z=0,$

$3w+7x-y-2z=5.$

9. $ax+by+cz=k,$

$bx+cy+az=k,$

$cx+ay+bz=k.$

10. $x+y+z=0,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$

$ax+by+cz=(a-b)(a-c)(b-c)$

11. $x+y+z=1,$

$ax+by+cz=k,$

$a^2x+b^2y+c^2z=k^2.$

12. $ax+by+cz=b,$

$bx+cy+az=c,$

$cx+ay+bz=a.$

13. $x-ay+a^2z=a^3,$

$x-by+b^2z=b^3,$

$x-cy+c^2z=c^3.$

14 $(4-x)(17-y)=z,$

$(5-x)(14-y)=z,$

$(7-x)(11-y)=z.$

15. $bx+cy+az=cx+ay+bz=a^2+b^2+c^2$,

$x+y+z=a+b+c$.

16. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, $lx+my+nz=p$.

解下列之聯立方程式且討論之.

17 $(\lambda-3)x+(2\lambda+1)y+\lambda-5=0$,

$(\lambda-1)x-(3\lambda-1)y-2\lambda+7=0$.

18. $(\lambda-3)x+(2\lambda+1)y+\lambda-5=0$,

$(\lambda-1)x-(3\lambda-1)y-2\lambda+3=0$.

19. $(\lambda-3)x-(2\lambda+1)y-3\lambda+2=0$

$(\lambda-1)x+(3\lambda-1)y+2\lambda=0$.

20. $(\lambda-5)x+(3\lambda-1)y+2\lambda+4=0$,

$(\lambda+1)x-(4\lambda-3)y+2\lambda-12=0$

21. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$,

$\frac{b}{x}-\frac{a}{y}=1$.

22. $\frac{x+y}{x-y}=\frac{a}{b-c}$.

$\frac{x+c}{y+b}=\frac{a+b}{a+c}$.

23. $\frac{x}{a+\alpha}+\frac{y}{b+\alpha}=1$,

$\frac{x}{a+\beta}+\frac{y}{b+\beta}=1$.

24. $ax+by+cz=0$,

$bcx+cay+abz=0$.

但 a, b, c, 皆不爲 0.

48. 由一次及二次方程式組成之聯立二元方程式

含有未知數 x, y 之一次及二次方程式經整頓後,皆能化爲下列之一般形式.

$$lx+my+n=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

因(2)爲二次之方程式,故其係數 a, h, b 中至少有一個不爲 0 者.

凡如此形式之聯立方程式之解法,皆可歸着於一元二次方程式之解法.茲述之於下.

先假定方程式(1)之係數 l, m 中至少有一個不爲 0 者,例如 $m\neq0$ 時,則方程式(1)與方程式

$$y=-\frac{lx+m}{m} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

爲同値.以此 y 之値代入於方程式(2)時,得

$$ax^2-\frac{2hx(lx+n)}{m}+\frac{b(lx+n)^2}{m^2}+2gx-\frac{2f(lx+n)}{m}+c$$
$$=0.$$

以m^2乘上式之兩邊整頓之,得

$$(am^2-2hlm+bl^2)x^2+2(gm^2-hmn-flm+bln)x$$
$$+bn^2-2fmn+cm^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

如 $am^2-2hlm+bl^2\neq0$, 則(4)爲關於 x 之二次方程式.設解此方程式所得之根爲 x_1, x_2,將 x_1, x_2 代入於方程式(3)所得之 y 之値各爲 y_1, y_2,則聯立方程式之根爲

$$\left.\begin{aligned}x&=x_1\\y&=y_1\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}x&=x_2\\y&=y_2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

之二組.此外無根存在.

又如假定 $l\neq0$ 時,亦能求得同樣之結果.即此時由方程式(1)及(2)消去其 x 時,得方程式

$$(am^2-2hlm+bl^2)y^2+2(fl^2-glm-hln+amn)y$$
$$+an^2-2gln+cl^2=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

將方程式(6)解之,求得 y 之值後,再代入於方程式(1)以求 x 之值,即可求得所要之根 x, y 之二組值.

次作成方程式(4)之判別式時,則其值如下.

$$\text{判別式}=4\{(gm^2-hmn-flm+bln)^2$$
$$-(am^2-2hlm+bl^2)(bn^2-2fmn+cm^2)\},$$
$$=4m^2\{(f^2-bc)l^2+(g^2-ca)m^2+(h^2-ab)n^2$$
$$+2(af-gh)mn+2(bg-hf)nl+2(ch-fg)lm\}.$$

爲簡單起見,置

$$\left.\begin{array}{l}A=f^2-bc,\ B=g^2-ca,\ C=h^2-ab\\ F=af-gh,\ G=bg-hf,\ H=ch-fg\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(7)$$

時,則

$$\text{判別式}=4m^2(Al^2+Bm^2+Cn^2+2Fmn+2Gnl+2Hlm)\cdots(8)$$

再置 $$D=Al^2+Bm^2+Cn^2+2Fmn+2Gnl+2Hlm \quad\cdots\cdots(9)$$

時,則

$$\text{判別式}=4m^2D\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

由假定 $m\neq0$ 故 $m^2>0$ 隨之其方程式(4)之判別式與 D

同符號.如 D 爲 0 時,則亦爲 0.故方程式(4)之根隨 D 之爲正數,0,或負數而爲相異之實根,相等之實根,或相異之虛根.

又於方程式(4)之係數,如將 (l,m), (a,b), (f,g) 三組之二數同時交換時,則成爲方程式(6)之係數.且 D 不因此交換而變化,故可知方程式(6)之判別式爲 $4l^2D$. 因 $l\neq0$, 故方程式(6)之根隨 D 之爲正數,0,或負數而爲相異之實根,相等之實根,或相異之虛根.

又 $am^2-2hmn+bl^2\neq0$ 時,則 l, m 中至少有一方不爲 0 者.故得一定理於下.

定理 聯立方程式

$$lx+my+n=0,$$

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0.$$

於 $am^2-2hlm+bl^2\neq0$ 時,具有二組根.如

$$D=Al^2+Bm^2+Cn^2+2Fmn+2Gnl+2Hlm.$$

爲正數時,則其根爲實數,二組互異.D 爲 0 時,則其根爲實數,二組相等.D 爲負數時,則其二組根均含虛數.

例一. 解下列之聯立方程式.

$$2x-y-1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x^2-4y^2+x+3y-1=0\cdots\cdots\cdots(2)$$

由方程式(1),得

$$y=2x-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

將 y 之值代入於方程式(2)得

$$x^2-4(2x-1)^2+x+3(2x-1)-1=0.$$

即 $$-15x^2+23x-8=0.$$

解之,得 $x=1$, 或 $x=\frac{8}{15}$.

$x=1$ 時,由(3)得 $y=1$.

$x=\frac{8}{15}$時,由(3)得 $y=\frac{1}{15}$.

故所求聯立方程式之二組根爲

$x=1,\ y=1;\ x=\frac{8}{15},\ y=\frac{1}{15}$

例二. 解下列之方程式.

$$x+y=a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$xy=b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

上列之聯立方程式雖可如例1所示之一般方法以解之,但依下法解之亦可.

將方程式(1)之兩邊各自乘,得

$$x^2+2xy+y^2=a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以4乘方程式(2)之兩邊,得

$$4xy=4b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由(3)減(4)得

$$(x-y)^2=a^2-4b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\therefore \quad x-y=\pm\sqrt{a^2-4b}.$$

故可知所求聯立方程式之根,由二組聯立方程式

$$\left.\begin{array}{l}x+y=a\\x-y=\sqrt{a^2-4b}\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{l}x+y=a\\x-y=-\sqrt{a^2-4b}\end{array}\right\}$$

之根而成.解此二組聯立方程式時,得

$$\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-4b})\\y=\dfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-4b})\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-4b})\\y=\dfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-4b})\end{array}\right\}$$

此卽所求聯立方程式之二組根也.

又此二組根隨 a^2-4b 之爲正數,0,或負數而爲相異之實數,相等之實數,或虛數.

49. 聯立二元二次方程式　由含有二個未知數 x, y 之二次方程式二個所組成之聯立方程式,經整頓後,皆能化成下列之一般形式.

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x+2f'y+c'=0\cdots\cdots\cdots(2)$$

因上列二方程式均爲二次,故其係數 (a,h,b),及 (a',h',b') 二組中至少各有一不爲 0 者.

此種聯立方程式之解法,一般不能由初等的方法以解之,須歸着於一元四次方程式之解法.玆述之於下.

將兩方程式之左邊依 x 之降冪順序排列之,則成爲

$$ax^2+2(hy+g)x+by^2+2fy+c=0,$$

$$a'x^2+2(h'y+g')x+b'y^2+2f'y+c'=0.$$

爲簡單起見,置

$$\left.\begin{array}{ll} p=hy+g, & q=by^2+2fy+c \\ p'=h'y+g', & q'=b'y^2+2f'y+c' \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(3)$$

時,則聯立方程式成爲

$$ax^2+2px+q=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$a'x^2+2p'x+q'=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

以 a', a 各乘方程式(4),(5)之兩邊後邊邊相減,得

$$2(ap'-a'p)x+aq'-a\,q=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

又以 p',p 各乘方程式(4),(5)之兩邊後邊邊相減,得

$$(ap'-a'p)x^2-(pq'-p'q)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

其 $ap'-a'p$ 雖含有 y,但爲關於 y 之有理整式,故對於 y 之任何值決無成不定或不能形式之事.因之於

$$ap'-a'p\neq0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

時,易於證明方程式(4),(5)之一組,即所設之聯立方程式與方程式(6),(7)之一組爲同值.

由方程式(6),得

$$x=-\frac{aq'-a'q}{2(ap'-a'p)}.$$

以 x 之值代入於方程式(7)除去分母後,得

$$(aq'-a'q)^2-4(ap'-a'p)(pq'-p'q)=0.$$

隨之如 $ap'-a\,p\neq0$ 時,所設之聯立方程式與

$$x=-\frac{aq'-a'q}{2(ap'-a'p)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$(aq'-a'q)^2-4(ap'-a'p)(pq'-p'q)=0\cdots(10)$$

之一組爲同值.因方程式 (10) 僅含有 y,故由此決定 y 之值後,以之代入於方程式(9)隨之 x 之值卽行決定.卽所求之根卽行求出.然以(3)之值置入於方程式 (10) 中而計算之,則得關於 y 之四次方程式如下.

$$R=\alpha y^4+\beta y^3+\gamma y^2+\delta y+\varepsilon=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

但 $\alpha=(ab'-a'b)^2+4(ah'-a'h)(bh'-b'h);$

$$\beta=4\{(ab'-a'b)(af'-a'f)+(ag'-a'g)(bh'-b'h)$$
$$+(ah'-a'h)(bg'-b'g)+2(ah'-a'h)(fh'-f'h)\};$$

$$\gamma=2(ab'-a'b)(ac'-a'c)+4\{(af'-a'f)^2$$
$$+(ah'-a'h)(ch'-c'h)+2(ah'-a'h)(fg'-f'g)$$
$$+(ag'-a'g)(bg'-b'g)+2(ag'-a'g)(fh'-f'h)\};$$

$$\delta=4\{(ac'-a'c)(af'-a'f)+(ah'-a'h)(cg'-c'g)$$
$$+(ag'-a'g)(ch'-c'h)+2(ag'-a'g)(fg'-f'g)\};$$

$$\varepsilon=(ac'-a'c)^2+4(ag'-a'g)(cg'-c'g).$$

由二十一節定理 2 之系 1,一元四次方程式有四根.又由方程式(9)對於 y 之各值,x 之值亦僅各爲一個.故所求聯立方程式之根共有四組.不能較四組爲多.

一元四次方程式之解法,不在本書研究之範圍.故關於聯立二元二次方程式,在目下之程度,實無法以解之.

50. 聯立二元二次方程式之特例 聯立二元二次方程式之解法一般雖須歸着於一元四次方程式之解法.但亦有能應用一元二次方程式之解法以解之者.茲舉其特例數題解之於下.

例一. 解下列之聯立方程式.

$$x^2+3xy+2y^2=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$3x^2-4xy-y^2=7 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以 7,與 3 各乘方程式(1),(2)之兩邊,得

$$7x^2+21xy+14y^2=21 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$9x^2-12xy-3y^2=21 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由(4)減(3),得

$$2x^2-33xy-17y^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

置$x=vy$以y^2除其兩邊,得

$$2v^2-33v-17=0.$$

解之,得 $v=-\frac{1}{2}$, 或 $v=17$.

隨之 $x=-\frac{1}{2}y$, 或 $x=17y$.

$x=-\frac{1}{2}y$ 時,由方程式(1),得

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\right)y^2=3.$$

即 $\frac{3}{4}y^2=3.$

∴ $y=\pm 2.$

$y=2$ 時, $x=-1$;

$y=-2$ 時, $x=1$.

又 $x=17y$ 時,由方程式(1),得

$$342y^2=3.$$

∴ $y=\pm\sqrt{\frac{1}{114}}.$

$y=\sqrt{\frac{1}{114}}$ 時, $x=17\sqrt{\frac{1}{114}}$;

$y=-\sqrt{\frac{1}{114}}$ 時, $x=-17\sqrt{\frac{1}{114}}$.

故所求聯立方程式之根爲下列四組.

$$\left.\begin{matrix}x=-1\\y=2\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}x=1\\y=-2\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}x=-17\sqrt{\frac{1}{114}}\\y=-\sqrt{\frac{1}{114}}\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}x=17\sqrt{\frac{1}{114}}\\y=\sqrt{\frac{1}{114}}\end{matrix}\right\}$$

例二. 解下列之聯立方程式.

$x^2-y^2+x-5=0$ ……………………(1)

$3x^2+2y^2-6x-2=0$ ………………(2)

以2乘方程式(1)之兩邊後與方程式(2)邊邊相加,得

$$5x^2-4x-12=0.$$

因之得 $x=2$ 或 $x=-\frac{6}{5}$.

$x=2$ 時,由方程式(1)得

$$y^2=4+2-5=1, \qquad \therefore \quad y=\pm 1.$$

$x=-\dfrac{6}{5}$時,由方程式(1)得

$$y^2=\frac{36}{25}-\frac{6}{5}-5=-\frac{119}{25}$$

$$\therefore \quad y=\pm\frac{\sqrt{119}}{5}i.$$

故所求聯立方程式之根爲下列四組.

$$\left.\begin{array}{l}x=2\\y=1\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}x=2\\y=-1\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}x=-\dfrac{6}{5}\\y=\dfrac{\sqrt{119}}{5}i\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}x=-\dfrac{6}{5}\\y=-\dfrac{\sqrt{119}}{5}i\end{array}\right\}$$

例三. 解下列之聯立方程式,

$$x^2-3xy-7y^2+3y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2x^2+5xy+y^2-y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以3乘方程式(2)之兩邊後與方程式(1)邊邊相加,得

$$7x^2+12xy-4y^2=0.$$

分解爲因子,成爲

$$(7x-2y)(x+2y)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

因之得　$7x-2y=0$,　或　$x+2y=0$.

先就$x+2y=0$時,由方程式(1),得

$$(4+6-7)y^2+3y=0$$

即　$3y(y+1)=0$

$\therefore$　$y=0$,　或　$y=-1$.

$y=0$ 時, $x=0$;

$y=-1$ 時, $x=-2y=2$.

次就 $7x-2y=0$ 即 $y=\frac{7}{2}x$ 時,由方程式(1)得

$$x(127x-14)=0.$$

$$\therefore\quad x=0,\ \text{或}\ x=\frac{14}{127}.$$

$x=0$ 時, $y=0$;

$x=\frac{14}{127}$ 時, $y=\frac{49}{127}$.

故所求聯立方程式之根爲下列之三組.

$$x=y=0,\quad \left.\begin{array}{l}x=2\\ y=-1\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}x=\dfrac{14}{127}\\ y=\dfrac{49}{127}\end{array}\right\}$$

例四. 解下列之聯立方程式.

$$x^2-xy+3x-y=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2x^2+3xy-10x+y=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

置 $y=vx$ 時,則聯立方程式成爲

$$x\{(1-v)x+3-v\}=0,$$

$$x\{(2+3v)x-10+v\}=0$$

以 x 除上列二方程式之兩邊得

$$(1-v)x+3-v=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$(2+3v)x-10+v=0\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由(3)(4)兩方程式消去 x 時,得

$$(1-v)(v-10)-(2+3v)(3-v)=0.$$

卽 $2v^2+4v-16=0.$

卽 $v^2+2v-8=0.$

解之得 $v=2$ 或 $v=-4.$

將 v 之值代入於方程式(3)而計算之得 x, y 之值如下.

$$v=2 \text{ 時}, x=1, y=vx=2;$$

$$v=-4 \text{ 時}, x=-\frac{7}{5} \quad y=vx=\frac{28}{5}.$$

又原方程由視察方法能爲 $x=y=0$ 所滿足甚明.

故所求聯立方程式之根爲下列之三組.

$$x=y=0, \quad \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=-\frac{7}{5} \\ y=\frac{28}{5} \end{array}$$

例五. 解下列之聯立方程式.

$$xy+2x-3y-1=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2xy-3x+y-9=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

置 $xy=t$ 時,則所設之聯立方程式成爲

$$2x-3y+t-1=0,$$

$$-3x+y+2t-9=0.$$

解之得 $x=t-4,\ y=t-3 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

將此 x,y 之值代入於 $xy=t$ 中,得

$$(t-4)(t-3)=t$$

卽　$t^2-8t+12=0.$

因之得　$t=2,$ 或 $t=6.$

將 t 之值代入於(3)時,得所求之根二組如下.

$$\left.\begin{array}{l}x=-2\\y=-1\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{l}x=2\\y=3\end{array}\right\}$$

例六. 解下列之聯立方程式.

$$x^2-3xy+4y^2+x-4y=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2x^2-xy-5y^2+2x-5y=0\cdots\cdots\cdots(2)$$

先假定$y\neq0$,置 $x=vy$ 後以 y 除上二方程式之兩邊,得

$$(v^2-3v+4)y+v-4=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$(2v^2-v-5)y+2v-5=0\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由(3)與(4)消去 y 時,得

$$(v^2-3v+4)(2v-5)-(2v^2-v-5)(v-4)=0$$

卽　$-2v^2+24v-40=0.$

分解爲因子,得

$$-2(v-2)(v-10)=0.$$

因之得　$v=2,$ 或 $v=10.$

將 v 之值代入於(3)而計算之得 x, y 之值如下.

$v=2$ 時, $y=1.$　隨之 $x=2y=2.$

$v=10$ 時, $y=-\frac{3}{37},$ 隨之 $x=10y=-\frac{30}{37}.$

又置 $y=0$ 時,則所設方程式成爲

$$x^2+x=0,\quad 2(x^2+x)=0$$

但此兩方程式能爲$x=0$,或 $x=-1$ 所滿足.故所求聯立方程式之根爲下列之四組.

$$\left.\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}x=-1\\y=0\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}x=2\\y=1\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}x=-\frac{30}{37}\\y=-\frac{3}{37}\end{array}\right\}$$

問題十一

解下列之聯立方程式.

1 $x+y=x^2-y^2=23.$

2. $x^2-4y^2+x+3y=2x-y=1.$

3 $x-y=a,$

$x^2-xy+y^2=b.$

4 $px+qy+1=0$

$y^2-4ax+4ab=0.$

5. $x-y=5$

$\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{5}{84}.$

6. $x+y=a+b,$

$\frac{a}{x+b}+\frac{b}{y+a}=1.$

7. $x^2-3xy+2y^2=3,$

$2x^2+xy+ay^2=5.$

8. $x^2+xy=a,$

$y^2+xy=b.$

9 $x^2+xy-ay^2+x=0,$

$ax^2-2xy+y^2-2x=0.$

10. $xy+a(x+y)+1=0.$

$2xy+ay-3=0$

11. $x^2-3xy+4y^2+x-4y=0,$

$2x^2-6xy+y^2+x+y=0.$

12. $x^2+2xy-y^2=ax+by.$

$x^2-2xy-y^2=bx-ay.$

13. $x^2+xy+y^2=(a+b)(x+y)$,

$x^2-xy+y^2=(a-b)(x-y)$.

14. $x^2+xy=12$,

$xy-2y^2=1$.

15. $x^2+2y^2=2$

$3y^2-xy-x^2=17$.

16 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{a^2}$,

$\frac{1}{y^2}+\frac{1}{yx}=\frac{1}{b^2}$.

17. $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=10$,

$\frac{ab}{xy}=3$.

18. $x^2+xy+x=14$,

$y^2+xy+y=28$.

19. $x^2-xy=8x+3$,

$xy-y^2=8y-6$,

20. $\frac{x+y}{1-xy}=3$,

$\frac{x-y}{1+xy}=\frac{1}{3}$.

21. $x-y=a(x^2-y^2)$,

$x+y=b(x^2-y^2)$.

22. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}$.

第八章　不等式

（不等式中所含之各文字皆表實數）

51. 關於不等式之基礎定理　有 a, b 二數時,其 a 之大於 b 或小於 b,由 $a-b$ 之爲正爲負而定.即

若 $a-b>0$ 時,則 $a>b$;

若 $a-b<0$ 時,則 $a<b$.

是.凡二數之大小皆能由此標準以決定之.以下所述者,即爲關於不等式之基礎定理.

定理 1.　若 $a>b$ 時,則 $a\pm x>b\pm x$. 即於不等式之兩邊同加一數或同減一數時,不等式之號不變.

證明:　$(a\pm x)-(b\pm x)=a-b$.

然由假定,　$a-b>0$.

$$\therefore\quad (a\pm x)-(b\pm x)>0,$$

$$\therefore\quad a\pm x>b\pm x.$$

定理 2.　若 $a>b, a'>b'$ 時,則 $a+a'>b+b'$.

證明:　$(a+a')-(b+b')=(a-b)+(a'-b')$.

然由假定,　$a-b>0,\ a'-b'>0$.

$\therefore\quad (a+a')-(b+b')>0,$

$\therefore\quad a+a'>b+b'.$

系　若 $a>b, a'>b', a''>b'', \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 時，則

$$a+a'+a''+\cdots\cdots>b+b'+b''+\cdots\cdots$$

定理 3.　$m>0$ 時，若 $a>b$ 則 $ma>mb.$

證明：　$ma-mb=m(a-b).$

然由假定，　$m>0$ $a>b.$

$\therefore\quad m(a-b)>0,$

$\therefore\quad ma>mb.$

同樣可證明 $m<0$ 時，若 $a>b$，則 $ma<mb.$

系 1.　$m>0$ 時若 $a>b$，則 $\dfrac{a}{m}>\dfrac{b}{m}.$

系 2.　若 $a>b$ 時，則 $-a<-b.$

系 3.　$m<0$ 時，若 $a>b$ 則 $\dfrac{a}{m}<\dfrac{b}{m}.$

定理 4.　$a>0, b>0, a'>0, b'>0$ 而 $a>b, a'>b'$ 時，則

$$aa'>bb'.$$

證明：　$aa'-bb'=(aa'-ba')+(ba'-bb')$

$$=a'(a-b)+b(a'-b').$$

然由假定，　$a-b>0, a'-b'>0,$ 且 $a'>0, b>0.$

$\therefore\quad aa'-bb'>0,$

$\therefore\quad aa'>bb'.$

系 1.　$a>0,\ b>0,\ a'>0,\ b'>0\ a''>0\ b''>0\cdots\ \cdots\cdots,$ 而

$a>b,\ a'>b',\ a''>b'',\cdots\cdots\cdots$時,則

$$aa'a''\cdots\cdots\cdots>bb'b''\cdots\cdots$$

系 2.　$a<0, b<0, a'<0, b'<0$, 而 $a>b, a'>b'$ 時,則

$$aa'<bb'.$$

證明:　$a>b, a'>b'$ 而其各文字均表負數,故

$$-a<-b,\quad -a'<-b'$$

上列二不等式之兩邊悉爲正數,故由定理 4,

$$(-a)(-a')<(-b)(-b').$$

即　$aa'<bb'$.

定理 5.　如 $a>b>0$ 且 n 爲正整數時,則 $a^n>b^n$.

證明:　於定理 4 系 1, 置

$$a=a'=a''=\cdots\cdots\cdots=a,$$

$$b=b'=b''=\cdots\cdots\cdots=b$$

時,則

$$a^n>b^n.$$

定理 6.　如 $0>a>b$ 且 n 爲正整數時,則

$$a^{2r}<b^{2r},\quad a^{2r+1}>b^{2r+1}.$$

證明:　因如 $0>a>b$, 則

$$-b>-a>0.$$

$\therefore\quad (-b)^{2r}>(-a)^{2r}.$

即　$a^{2r}<b^{2r}.$

又因 $0<-a<-b.$

∴ $-a^{2r+1}<-b^{2r+1}.$

隨之 $a^{2r+1}>b^{2r+1}.$

定理 7. 如$a>b>0$且n爲正整數時,則$a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$.

證明: 因如$a^{\frac{1}{n}}<b^{\frac{1}{n}}$,則由定理5,得$a<b$.又如$a^{\frac{1}{n}}=b^{\frac{1}{n}}$,則$a=b$甚明.二者皆與$a>b$之假定相反,故必$a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$.

又同樣可證明如$0>a>b$且r爲正整數時,則

$$a^{\frac{1}{2r+1}}>b^{\frac{1}{2r+1}}.$$

52 絕對不等式與條件不等式 凡任以如何實數或某一定限制以內之數代入於不等式之文字中,其不等式均能成立時,則此不等式謂之絕對不等式.絕對不等式以外之不等式,則謂之條件不等式.

例如 $x^2+3>0$ 對於 x 之所有實數值皆能成立,故爲絕對不等式.又於 $x>1$ 之範圍內, $x^2-1>0$ 必能成立,故 $x^2-1>0$ 於 $x>1$ 之範圍內爲絕對不等式.然如不豫附 x 以任何限制,或於 $x>-1$ 之限制之下,則 $x^2-1>0$ 不一定成立.故此時 $x^2-1>0$ 卽爲條件不等式.

不等式之有絕對不等式與條件不等式二種,猶之於等式之有恆等式與方程式.其絕對不等式相當於恆等式,而條件不等式則相當於方程式.

於條件不等式,爲使其不等式能成立而求其應給與於

其中某特別文字之值之限界,謂之解不等式.即解不等式云者,爲決定給與如何範圍以內之值於其不等式中之某特別文字,則其不等式能成立;又給與如何範圍以內之值於其不等式中之某特別文字,則其不等式不能成立之謂.

53. 不等式之解法

例一. 設 $a\neq c$, 解 $ax+b>cx+d$ 不等式.

$$ax+b>cx+d \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

應用五十一節之定理 1,將不等式(1)移項使成爲

$$ax-cx>d-b,$$

即 $(a-c)x>d-b.$

i. 如 $a-c>0$ 隨之 $a>c$ 時,則由五十一節定理3之系1,

得 $x>\frac{d-b}{a-c}.$

ii 如 $a-c<0$ 隨之 $a<c$ 時,則由五十一節定理3系3,得

$$x<\frac{d-b}{a-c}.$$

故所求滿足不等式(1)之 x 之值,爲

$a>c$ 時,則 $x>\frac{d-b}{a-c};$

$a<c$ 時,則 $x<\frac{d-b}{a-c}.$

例二. 解 $\frac{15-27x-2x^2}{12-17x+6x^2}<1$ 不等式.

$$\frac{15-27x-2x^2}{12-17x+6x^2}<1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

將不等式(1)之左邊移至右邊整頓之,成爲

$$0<\frac{(2x+3)(4x-1)}{(2x-3)(3x-4)}.$$

以 8 除右邊之分子,6 除右邊之分母則

$$0<\frac{(x+\frac{3}{2})(x-\frac{1}{4})}{(x-\frac{3}{2})(x-\frac{4}{3})}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

將右邊分子與分母之因子依大小之順序排列之,則爲

$$x+\frac{3}{2},\quad x-\frac{1}{4},\quad x-\frac{4}{3},\quad x-\frac{3}{2}.$$

因(2)之右邊爲正,故必不出(i)四因子悉爲正,(ii)二因子爲正他二因子爲負,(iii)四因子悉爲負之三途.於(),其四因子中之最小者卽 $x-\frac{3}{2}$ 爲正,於(ii),其第二大數 $x-\frac{1}{4}$ 爲正,第三大數 $x-\frac{4}{3}$ 爲負;於(iii),其四因子中之最大者卽 $x+\frac{3}{2}$ 爲負.隨之不等式僅限於

$$\text{(i)}\quad x>\frac{3}{2},\quad \text{(ii)}\quad \frac{4}{3}>x>\frac{1}{4},\quad \text{(iii)}\quad x<-\frac{3}{2}.$$

之三方面,始能成立.

又此不等式亦可依下法解之.

以 $f(x)$ 代(2)之右邊之分數式,使 x 由 $-\infty$ 以變化至 $+\infty$,則 $f(x)$ 於通過 $-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$ 四值時（僅限於此四值）變更其符號.

但 $x>\frac{3}{2}$ 時,其 $f(x)$ 爲正.故隨 x 之變化,$f(x)$ 之符號變化如下表.

x	$-\infty$	……	$-\frac{3}{2}$	……	$\frac{1}{4}$	……	$\frac{4}{3}$	……	$\frac{3}{2}$	……	$+\infty$
$f(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	

由此可知 $f(x)$ 爲其 x 所取值之範圍,爲

$$\text{(i)}\quad x>\frac{3}{2},\quad \text{(ii)}\quad \frac{4}{3}>x>\frac{1}{4},\quad \text{(iii)}\quad x<-\frac{3}{2}.$$

〔**注意**〕 解含分數式之不等式時,不可妄去其分母.因去分母爲以其分母之式乘不等式之兩邊,若其分母爲正,乘後不等式之兩邊雖不變;但若爲負時,則乘後其不等式之不等式號須變更方向故也.

例三. 解 $\sqrt{3-x}>x-2$ 不等式.

若根號內之式爲負,則不等式無意義,故 x 不能較 3 爲大.又 $x=3$ 時,左邊爲 0,右邊爲 1,不等式不能成立甚明.故僅須於 $x<3$ 之範圍內研究之卽可.

(i) $x\leqq 2$ 時,

此時不等式之左邊爲正,右邊爲負或 0,不等式不能成立甚明.

(ii) $2<x<3$ 時

此時不等式之兩邊皆爲正,故由五十一節之定理 5,原不等式與兩邊自乘後所得之不等式

$$3-x>(x-2)^2$$

爲同值,解此不等式時,得

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

因$\frac{3-\sqrt{5}}{2}<2$及$2<\frac{3+\sqrt{5}}{2}<3$,故以此解與$2<x<3$之限制相結合時,得

$$2<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

54. 絕對不等式

例一 若$a\neq b$時,證明$a^6+b^6>a^5b+ab^5$.

$$(a^6+b^6)-(a^5b+ab^5)=a^5(a-b)+b^5(b-a)$$
$$=(a^5-b^5)(a-b).$$

若$a>b$時,則a^5-b^5與$a-b$皆爲正.

若$a<b$時,則a^5-b^5與$a-b$皆爲負.

故無論何時,其積皆爲正.隨之

$$a^6+b^6>a^5b+ab^5$$

例二. 證明$a^2+b^2+c^2\geqq bc+ca+ab$.

$$a^2+b^2+c^2-(bc+ca+ab)$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geqq 0,$$
$$\therefore\quad a^2+b^2+c^2\geqq bc+ca+ab.$$

其等號僅限於$a=b=c$時,始能成立.

例三. $a>b>0$時,證明下列之不等式.

$$\frac{a}{2}\geqq\sqrt{2a(a-b)}-(a-b).$$

由左邊減去右邊,

$$\frac{a}{2}-\{\sqrt{2a(a-b)}-(a-b)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{a-2\sqrt{a\cdot 2(a-b)}+2(a-b)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{\sqrt{a}-\sqrt{2(a-b)}\}^2\geqq 0.$$

$$\therefore\quad \frac{a}{2}\geqq\sqrt{2a(a-b)}-(a-b).$$

其等號僅限於 $\sqrt{a}=\sqrt{2(a-b)}$ 卽 $a=2b$ 時,始能成立.

例四. 如 a, b, c 三數皆爲正數且各不相等時,證明下列之不等式.

$$(b+c)(c+a)(a+b)>8abc.$$

$$(b+c)(c+a)(a+b)-8abc=2abc+b^2c+b^2a+c^2a$$

$$+c^2b+a^2b+a^2c-8abc$$

$$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)-6abc$$

$$=a(b^2+c^2-2bc)+b(c^2+a^2-2ac)+c(a^2+b^2-2ab)$$

$$=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2>0.$$

$$\therefore\quad (b+c)(c+a)(a+b)>8abc.$$

例五. n 爲正數時,證明下列之不等式.

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}}>\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots\cdots(2n)}>\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1}.$$

於不等式 $a+b>2\sqrt{ab}$,置 $a=2n-1$, $b=2n+1$ 時,則成爲

$$(2n-1)+(2n+1)>2\sqrt{(2n-1)(2n+1)},$$

$$\therefore \quad 4n>2\sqrt{(2n-1)(2n+1)}.$$

$$\therefore \quad 2n>\sqrt{(2n-1)(2n+1)}.$$

以$2n\sqrt{2n+1}$除其兩邊後再以$\sqrt{2n-1}$乘之,得

$$\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}>\frac{2n-1}{2n},$$

$$\text{即} \quad \frac{2n-1}{2n}<\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}.$$

於此不等式中逐次使 n 減 1 時,則得下列之一羣不等式.

$$\frac{2n-3}{2(n-1)}<\sqrt{\frac{2n-3}{2n-1}}.$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{5}{2\cdot3}<\sqrt{\frac{5}{7}}.$$

$$\frac{3}{2\cdot2}<\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

$$\frac{1}{2\cdot1}<\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

將上列 n 個不等式邊邊相乘時,得

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots\cdots(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

即所設不等式之一部分已被證明.

次於不等式$a+b>2\sqrt{ab}$, 置$a=n,b=n+1$時,則成爲

$$n+(n+1)>2\sqrt{n(n+1)}.$$

$$\therefore \quad 2n+1>2\sqrt{n(n+1)},$$

$$\therefore \quad \frac{2n+1}{2n} > \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

於此不等式中逐次使 n 減 1 時,則得下列之一羣不等式.

$$\frac{2n-1}{2(n-1)} > \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{7}{2\cdot 3} > \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

$$\frac{5}{2\cdot 2} > \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\frac{3}{2\cdot 1} > \sqrt{\frac{2}{1}}.$$

將上列 n 個不等式邊邊相乘後以 $2n+1$ 除之,得

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots(2n)} > \frac{\sqrt{n+1}}{2n+1}.$$

即所設不等式之他部分亦被證明.

55. 分數之定理

定理 1. 設 n 個分數

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3}\cdots\cdots\cdots,\ \frac{a_n}{b_n}.$$

之分母皆爲同號時,則分數

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}$$

不較 n 個分數中之最大者爲大,亦不較其最小者爲小.

證明: 設 n 個分數中之最大者其值爲 g, 又最小者之值爲 k.

茲先就 $b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots b_n$ 等悉表正數時證明之如下.

因 g 爲 n 個分數中之最大者,故

$$g>\frac{a_1}{b_1},\ g>\frac{a_2}{b_2},\ g>\frac{a_3}{b_3},\ \cdots\cdots\cdots,g>\frac{a_n}{b_n}.$$

但於上之不等式中,對於最大分數,則須易不等式爲等式.

由假定,其 $b_1\ b_2, b_3, \cdots\cdots, b_n$ 皆爲正,故應用五十一節之定理 3,得

$$gb_1>a_1,\ gb_2>a_2,\ gb_3>a_3,\ \cdots\cdots\cdots,\ gb_n>a_n.$$

$$\therefore\quad g(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n)>a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$$

又因 $b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n$ 爲正數,故應用五十一節定理 3 之系 1,得

$$g>\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots\cdots+b_n}.$$

同樣, $k<\frac{a_1}{b_1},\ k<\frac{a_2}{b_2},\ k<\frac{a_3}{b_3},\ \cdots\cdots\cdots,\ k<\frac{a_n}{b_n}.$

$$\therefore\quad kb_1<a_1,\ kb_2<a_2,\ kb_3<a_3,\ \cdots\cdots\cdots kb_n<a_n.$$

$$\therefore\quad k(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n)<a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$$

$$\therefore\quad k<\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots\cdots+b_n}.$$

又設 $b_1\ b_2\ b_3, \cdots\cdots\cdots; b_n$ 等悉表負數時,則由五十一節

之定理 3 及系 3

$$gb_1<a_1,\ gb_2<a_2,\ gb_3<a_3,\ \cdots\cdots\cdots,\ gb_n<a_n.$$

$$\therefore\quad g(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n)<a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n.$$

因 $b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n$ 爲負,

$$\therefore\quad g>\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}.$$

同樣可證明

$$k<\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}.$$

卽本定理已被證明.

由同樣方法亦可證明下述之一般定理.

定理 2. 設 $b_1, b_2\ b_3, \cdots\cdots, b_n$ 及 $l_1\ l_2, l_3, \cdots\cdots, l_n$ 皆表正數時,則分數

$$\frac{l_1a_1+l_2a_2+l_3a_3+\cdots\cdots+l_na_n}{l_1b_1+l_2b_2+l_3b_3+\cdots\cdots+l_nb_n}.$$

不較 n 個分數 $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\ \frac{a_3}{b_3}, \cdots\cdots\ \frac{a_n}{b_n}$ 中之最大者爲大,亦不較其中之最小者爲小.

此定理如擴張之,更可得一定理如下.

定理 3. 設 $a_1\ a_2\ a_3, \cdots\cdots, a_n;\ b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots\ b_n$ 及 $l_1, l_2, l_3, \cdots\cdots, l_n$ 悉表正數時,則

$$\left\{\frac{l_1a_1^m+l_2a_2^m+l_3a_3^m+\cdots\cdots+l_na_n^m}{l_1b_1^m+l_2b_2^m+l_3b_3^m+\cdots\cdots+l_nb_n^m}\right\}^{\frac{1}{m}}.$$

及 $\left\{\frac{a_1a_2a_3\cdots\cdots\cdots\cdots a_n}{b_1b\,b_3\cdots\cdots\cdots\cdots b_n}\right\}^{\frac{1}{n}}$.

皆不較 n 個分數 $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{a_3}{b_3}$, …………, $\frac{a_n}{b_n}$ 中之最大者爲大,亦不較其中之最小者爲小.

系　設 n 個分數 $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{a_3}{b_3}$, …………, $\frac{a_n}{b_n}$ 皆相等時,則此諸分數皆等於下列之分數

$$\left\{\frac{l_1a_1^m+l_2a_2^m+l_3a_3^m+\cdots\cdots\cdots+l_na_n^m}{l_1b_1^m+l_2b_2^m+l_3b_3^m+\cdots\cdots\cdots+l_nb_n^m}\right\}^{\frac{1}{m}}.$$

但 m 爲任意之整數, $l_1, l_2, l_3,$………… l_n 則爲任意之數.

56. 相加平均與相乘平均

定理　設 $x_1, x_2\ x_3,$………………, x_n 皆表正數時,則

$$\frac{1}{n}(x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots\cdots+x_n)$$
$$\geqq\sqrt[n]{x_1x_2x_3\cdots\cdots\cdots x_n}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之等號,僅限於 $x_1=x_2=x_3=\cdots\cdots\cdots=x_n$ 時,始能成立.

上式之左邊,謂之 $x_1\ x_2, x_3,$…………x_n 之相加平均,右邊謂之 $x_1, x_2, x_3,$…………, x_n 之相乘平均.故上述之定理又可更述之如下.

n 個正數之相加平均,不能較其相乘平均爲小.但此二數僅限於 n 個正數皆相等時,始能相等.

證明:　先就 $n=2$ 時研究之.此時 (1) 之關係爲

$$\frac{1}{2}(x_1+x_2)\geqq\sqrt{x_1x_2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(2)之左邊減去右邊,則成爲

$$\frac{1}{2}(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2.$$

可知如 $x_1 \neq x_2$ 時,(2)之左邊較右邊爲大.換言之卽 $n=2$ 時,本定理能成立是.

次就 $n=4$ 時研究之.

$$因\quad \frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}(x_3+x_4)\right\}.$$

故應用(2)之關係,得

$$\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4) \geqq \frac{1}{2}(\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_3x_4}) \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

再將(2)之關係應用於 $\sqrt{x_1x_2}$, $\sqrt{x_3x_4}$ 二數時,得

$$\frac{1}{2}(\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_3x_4}) \geqq \sqrt{\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_3x_4}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4) \geqq \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

於(5),其等號僅限於(3)及(4)兩方之等號均能成立時,始能成立.故(5)之等號,僅限於

$$x_1=x_2,\quad x_3=x_4,\quad \sqrt{x_1x_2}=\sqrt{x_3x_4}.$$

卽 $x_1=x_2=x_3=x_4$ 時,始能成立.隨之於 $n=4$ 時,本定理亦能成立.

反復此法,可證明凡 n 爲 2 之乘羃時,本定理皆能成立.

次爲示明 n 不爲 2 之乘羃時之證明法起見,故特先就 $n=3$ 時研究之.

$n=3$ 時,上述之定理成爲

$$\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)\geqq\sqrt[3]{x_1x_2x_3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

將(6)三乘之,得

$$\left\{\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)\right\}^3\geqq x_1x_2x_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

可知如欲證明(6)時,僅須證明(7)即可.

置 $\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)=k$ 即 $x_1+x_2+x_3=3k$, 將 x_1, x_2, x_3, k 四數應用本定理時,(對於四數本定理之能成立係已證明者)得

$$\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+k)\geqq\sqrt[4]{x_1x_2x_3k}.$$

因上式之左邊等於 k,

$$\therefore\quad k\geqq\sqrt[4]{x_1x_2x_3k}$$

即 $\quad k^3\geqq x_1x_2x_3.$

其等號僅限於 $x_1=x_2=x_3=k$ 即 $x_1=x_2=x_3$ 時,始能成立.隨之 $n=3$ 時,本定理已被證明.

用同樣方法,可證明一般 n 不爲 2 之乘冪時,本定理皆能成立.即取一較 n 爲大之 2 之乘冪 p, 置 $p-n=m$, (m 爲正整數) 再置

$$\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots\cdots+x_n)=k.$$

即 $\quad x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots\cdots+x_n=nk,$

將 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots\cdots\cdots x_n$ 與 m 個 k 合成之 p 個正數應用本定理時,（對於 p 個數本定理之能成立係已知之者）則得

$$\frac{1}{p}(x_1+x_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+x_n+mk)\geqq\sqrt[p]{x_1x_2\cdots\cdots x_nk^m}.$$

因上式之左邊等於 k, 故兩邊自乘 p 次,則成為

$$k^p\geqq x_1x_2x_3\cdots\cdots x_nk^m,$$

或 $$k^n\geqq x_1x_2x_3\cdots\cdots\cdots\cdots x_n.$$

因之得 $$k=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\geqq\sqrt[3]{x_1x_2\cdots\cdots x_n}.$$

其等號僅限於

$$x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=k,$$

即 $$x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n$$

時,始能成立.即本定理已被證明對於 n 之任意正整數值,皆能成立.

例一. 如 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots\cdots\cdots, x_n$ 悉為正或悉為負時,證明下列之不等式.

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_4}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{x_n}{x_1}\geqq n.$$

因 $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_3}, \cdots\cdots\cdots, \frac{x_n}{x_1}$ 悉為正數,故對於此等正數應用本節之定理時,得

$$\frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_4}+\cdots\cdots+\frac{x_n}{x_1}\right)\geqq\sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdot\frac{x_3}{x_4}\cdots\cdots\frac{x_n}{x_1}}.$$

隨之得 $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_4}+\cdots\cdots+\frac{x_n}{x_1}\geqq n.$

其等式僅限於

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\frac{x_3}{x_4}=\cdots\cdots\cdots\frac{x_n}{x_1}$$

時始能成立.如注意及

$$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots\cdots, x_n$$

等爲同號時,則限於

$$x_1=x_2=x_3=\cdots\cdots=x_n$$

時,始能成立.

例二. 設 n 爲 2 以上之整數時,證明

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n>1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots n.$$

將 1, 2, 3, …… n 之 n 個數應用於本節之定理時,得

$$\frac{1}{n}(1+2+3+\cdots\cdots+n)>\sqrt[n]{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots n}.$$

因上式之左邊等於 $\frac{n+1}{2}$,故

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n>1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots n.$$

問 題 十 二

解下列之不等式.

1. $2x^2-7x+6>0.$ 2. $(x-1)(x-2)(x-3)<0.$

3. $x^3+1>x^2+x$.　　4. $\dfrac{2x}{x+1}>3$.

5. $\dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)}>0$.　6. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x+2}<0$.

7. $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}>1$.

8. $\dfrac{x-a}{x+a}+\dfrac{3a}{x-a}-\dfrac{10a^2}{x^2-a^2}>0$. 但 $a>0$.

9. $x>\sqrt{3-2x}$ 但平方根爲正.

10 $\sqrt{3-x}<x-2$ 但平方根爲正.

11. $\sqrt{a-x}>x-b$ 但 $a>b>0$ 而平方根爲正.

12. $\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}}>\dfrac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}}$ 但 $a>b>0$ 而平方根爲正.

13. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-1}>\sqrt{3x}$ 但平方根爲正.

14. $\sqrt{x^2+1}+p\sqrt{x}>x+1$ 但平方根爲正.

證明下列之諸不等式.

15. $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)<2(a^3+b^3+c^3)$ 但 a, b, c 悉爲正且各不相等.

16. $3(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)(bc+ca+ab)$ 但 a, b, c 悉爲正且各不相等.

17. $a+b>0$ 且 $a\neq b$ 時 $a^3+b^3>ab(a+b)$.

18. $a\neq b$ 時 $(a^4+b^4)(a^2+b^2)>(a^3+b^3)^2$.

19. $a+b+c>0$ 且 $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$ 時, $a^3+b^3+c^3>3abc$.

20. $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ 時 $\frac{a}{b}>\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}}>\frac{c}{d}$.

21. $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}>\frac{e}{f}$ 時 $\frac{a}{b}>\sqrt[3]{\frac{a^3+c^3+e^3}{b^3+d^3+f^3}}>\frac{e}{f}$.

22. $n^n>1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots\cdots(2n-1)$.

23. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)\nless 9$.

24. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\nless 9abc$.

25. $a^2cd+b^2da+c^2ab+d^2bc\nless 4abcd$.

26. m 爲大於 1 之整數時,則

$$\frac{a_1{}^m+a_2{}^m+a_3{}^m+\cdots\cdots+a_n{}^m}{n}>\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{n}\right)^m$$

第九章　應用問題

57. 應用問題之解法　本章所謂之應用問題,係指應用方程式,聯立方程式,不等式等之解法所能解之關於數及量之各種問題而言.茲將關於解應用問題之步驟分析之,約爲下述之四層.

(1)　未知數之選定.

(2)　方程式或不等式之作成.

(3)　方程式或不等式之解法.

(4)　根之討論.

解應用問題,通常皆須應問題之要求,選定未知數後,由問題中所與已知數之關係,作成方程式或不等式.然後解此方程式或不等式以求出其所求之數.

一般雖多以問題所要求之數爲未知數而以 x, y, z 等文字表之,作成方程式或不等式卽可.然有時不直接以所求之數爲未知數,另行選定其他之未知數以作成方程式,由解此方程式之結果,再行計算問題所要求之數時,反爲簡便者.故解應用問題時,對於未知數之選定,實爲重要之

事.

如此選定未知數後,以此未知數與問題中所與之數即已知數之關係,作成方程式或不等式,卽得決定此未知數之値之方程式或不等式.但此時當詳審問題之意義,使其未知數與已知數間之關係,盡行包含於方程式或不等式中.

又如關於量之問題時,尤應選定適宜之單位,然後用未知數或已知數以表之.故作成後之方程式或不等式,其兩邊之項皆爲不名數.

解方程式時,其所求得之根,未必能盡合於題意,因問題中之未知數不能不有一定之限制,而此限制不能施之於方程式故也.故於求得方程式之根後,其根是否能盡合乎題意,不可不加以討論.例如所求未知數之値應爲正數時,而方程式之根中倘有負數存在,則此負根不可不棄去之;又如所求之數應爲整數時,而以此爲未知數作成之方程式中倘含有分數之根,則此分數之根不可不棄去之是.

58. 方程式應用問題例解

例一. 甲以每時 $3\frac{1}{2}$ 哩之速率,由 A 地向 B 地進行.經四十分鐘後,乙以每時 $4\frac{1}{2}$ 哩之速率,由 B 地向 A 地進行.二人於 A 方距離兩地中點半哩處相會.求兩地之距離爲幾哩.

設兩地之距離爲x哩.由題意,甲乙二人於相會時,甲曾行$\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)$哩,乙曾行$\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)$哩.隨之二人行至相會處,甲由$A$地出發後,曾經$\dfrac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}}$時;乙由$B$地出發後,曾經$\dfrac{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}}$時.但當乙由$B$地出發時,甲已由$A$地出發40分鐘卽$\frac{2}{3}$時.因之得方程式於下.

$$\frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}}=\frac{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}.$$

去分母,得　$9(x-1)=7(x+1)+42;$

解之,得　$x=29.$

此根能合題意甚明.故得A, B兩地間之距離爲29哩.

例二．父現年四十六,子現年二十五,求幾年後父年爲子年之四倍.

設x年後其父年恰爲子年之四倍.由題意,x年後父年爲$46+x$,子年爲$25+x$.因此時父年爲子年之四倍,故得下列方程式.

$$46+x=4(25+x).$$

解之,得　$x=-18.$

負數不合題意甚明.但此時可另行解釋之如下.卽將x

年後之詞意擴張之,其 x 爲正數時,則依普通之意義,指 x 年之後;如 x 爲負數時,則指變更 x 符號後所表年數之前是.故上面所求之根爲 $x=-18$ 即指18年前也.

例三. 某學校將學生 120 人分爲兩級.但知甲級人數之二倍,較乙級人數多70.求兩級人數各若干.

設甲級之人數爲 x.由題意,其乙級之人數爲 $120-x$.又甲級人數之二倍,較乙級人數多70.故得下列方程式.

$$2x=120-x+70.$$

解之,得 $$x=\frac{190}{3}=63\frac{1}{3}.$$

因每級之人數不能爲分數,故所求得之根,不適合於題意,因之問題成爲不能.

例四. 有某工作,甲乙丙三人合力作之,其所需時間,較甲一人獨作所需時間少六小時,較乙一人獨作所需時間少一小時,而等於丙一人獨作所需時間之半.求三人合作時所需時間幾何.

設三人合作時所需之時間爲 x 小時,則三人合作時每小時能作此工作 $\frac{1}{x}$.由題意,甲一人獨作時需 $x+6$ 小時,乙一人獨作時需 $x+1$ 小時,丙一人獨作時需 $2x$ 小時.隨之甲,乙,丙三人獨作時,每小時各能作此工作之 $\frac{1}{x+6}$, $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{2x}$.因之得一方程式如下.

$$\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{x}.$$

去分母後整頓之,得

$$3x^2+7x-6=0.$$

即　$$(3x-2)(x+3)=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{2}{3},\quad 或\quad x=-3.$$

因負根不能適合於題意,故二根中僅能採用 $x=\frac{2}{3}$, 即所需之時間爲 $\frac{2}{3}$ 小時

例五. 直角三角形之斜邊及三邊之和各爲 a, l, 求餘二邊之長各若干.

設所求二邊中之一邊其長爲 x. 則由題意,其他邊之長爲 $l-(x+a)$. 因此三角形爲直角三角形,故得方程式如下.

$$x^2+\{l-(x+a)\}^2=a^2.$$

移項後整頓之,得

$$2x^2-2(l-a)x+l(l-2a)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

解之,得　$$x=\frac{1}{2}(l-a\pm\sqrt{(a^2+2al-l^2})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

討論　由問題之性質,其 a 與 l 皆不可不爲正數,又方程式(1)之根爲實數之條件,爲

$$a^2+2al-l^2\geqq 0.$$

茲爲簡單起見,置 $l_1=-(\sqrt{2}-1)a$, $l_2=(\sqrt{2}+1)a$ 時,其

$l_1<l_2$.上列之不等式成爲

$$-(l-l_1)(l-l_2)\geqq 0$$

隨之方程式(1)之根爲實數之條件,成爲

$$l_1\leqq l\leqq l_2.$$

然 $l-a$ 爲二邊之長之和.且二邊之和較斜邊爲大.故問題成立時,必 $l-a>a$ 隨之 $l>2a$.

又 $l_2>2a$ 甚明.故問題成立時,必

$$2a<l\leqq l_2 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

此時方程式(1)之根爲適合於問題起見,其必要且兼充分之條件,顯爲

$$0<x<l-a \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

如(3)之不等式成立.則觀方程式(1)之係數之符號.其二根皆爲正數甚明.此時方程式(1)之左邊如以 $f(x)$ 表之則

$$f(l-a)=2(l-a)^2-2(l-a)^2+l(l-2a)=l(l-2a).$$

其 $f(l-a)>0$. 又觀方程式(2),其二根之一方較 $l-a$ 爲小.故二根均較 $l-a$ 爲小.故(2)之二根能滿足(4)之條件.隨之能適合於題意.且因此二根之和爲 $l-a$, 故此二根卽爲所求二邊之長.

因之於 $2a<l\leqq(\sqrt{2}+1)a$ 時,其問題能成立.否則則爲不能.而此問題成立時,其所求二邊之長各爲

$$\frac{1}{2}(l-a-\sqrt{a^2+2al-l^2}),\quad \frac{1}{2}(l-a+\sqrt{a^2+2al-l^2})$$

59. 聯立方程式應用問題例解

例一. 甲於距靶 500 米處向靶發鎗,於發鎗後經 $4\frac{1}{3}$ 秒時,得聞彈丸命中靶上之聲音.又乙於距甲 650 米距靶 400 米處聞得鎗聲後,再經 $2\frac{1}{3}$ 秒時,聞得彈丸中靶之聲音.求彈丸及音之速度各若干.

設彈丸之速度爲每秒 x 米,音之速度爲每秒 y 米.由題意,甲發鎗後其彈丸飛至靶上,需時 $\frac{500}{x}$ 秒;其彈丸中靶之聲音回至甲處,需時 $\frac{500}{y}$ 秒.隨之甲自發鎗後至聞中靶之聲止,共經過 $\left(\frac{500}{x}+\frac{500}{y}\right)$ 秒.但此時間爲 $4\frac{1}{3}$ 秒,故得一方程式如下.

$$\frac{500}{x}+\frac{500}{y}=4\frac{1}{3}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又鎗聲傳至乙處,需時 $\frac{650}{y}$ 秒.彈丸中靶聲傳至乙處,需時 $\frac{400}{y}$ 秒.隨之乙於聞得甲發鎗之聲後至聞得彈丸中靶之聲止,其間經過之時間爲 $\left(\frac{500}{x}+\frac{400}{y}-\frac{650}{y}\right)$ 秒.但此時爲 $2\frac{1}{3}$ 秒.故復得一方程式如下.

$$\frac{500}{x}+\frac{400}{y}-\frac{650}{y}=2\frac{1}{3}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由方程式(1)減方程式(2),得

$$\frac{750}{y}=2.$$

因之得　　$y=375.$

以 y 之值代入於方程式(1)中,得

$$\frac{500}{x}+\frac{500}{375}=4\frac{1}{3}.$$

移項,得 $$\frac{500}{x}=3.$$

因之得 $$x=\frac{500}{3}=166\frac{2}{3}.$$

上之求出之 x, y 之值,能適合於題意甚明.故得彈丸之速度爲每秒 $166\frac{2}{3}$ 米,音之速度爲每秒 375 米.

例二. 某人有三子,其父之年齡恰爲三子年齡之和.但經九年後,則父年爲長子及次子年齡之和.如再經三年後,則父年爲長子及第三子年齡之和.又更經三年後,則父年爲次子及第三子年齡之和.求父子四人現年各幾何.

設父之年齡爲 x,長子之年齡爲 y,次子之年齡爲 z,第三子之年齡爲 w.則由題意得下列之聯立方程式.

$$y+z+w=x,$$

$$(y+9)+(z+9)=x+9$$

$$(y+12)+(w+12)=x+12,$$

$$(z+15)+(w+15)=x+15.$$

將上列之一組方程式左邊之已知數悉行移置於右邊,得

$$y+z+w=x \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y+z=x-9\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$y+w=x-12\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$z+w=x-15 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由方程式(1)逐次與方程式(2),(3),(4)邊邊相減,得

$$w=9,\quad z=12,\quad y=15.$$

將 w, y, z 之值代入於方程式(1)中,得

$$x=36.$$

此所求得之 x, y, z, w 之值,能適合於題意甚明.故所求得之父年爲36歲,長子爲15歲,次子爲12歲,第三子爲9歲.

例三. 有蘋菓若干,分給於童子若干人.若於一人所得之數,加上童子多二人時所分得之數,則爲14.又如蘋菓之數多二,童子之數減一時,則每人可得十個.求蘋菓與童子各若干.

設蘋菓之數爲 x,童子之數爲 y.則由題意,得下列之聯立方程式.

$$\frac{x}{y}+\frac{x}{y+2}=14 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{x+2}{y-1}=10 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

去方程式(2)之分母整頓之,成爲

$$x=10y-12 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以(3)代入於方程式(1)中,得

$$(10y-12)\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y+2}\right)=14.$$

以2除上式之兩邊且除去其分母時,得

$$(5y-6)(2y+2)=7(y+2)y.$$

移項後整頓之,得

$$3y^2-16y-12=0$$

解之,得 $y=6$ 或 $y=-\frac{2}{3}$.

因人數不能爲負數,故此二根中不能採用 $-\frac{2}{3}$.故僅

$$y=6$$

隨之由方程式(3),得

$$x=10\times6-12=48.$$

即所求蘋菓之數爲48,童子之數爲 6.

60. 不等式應用問題例解

例一. 有機關車車輪之周圍爲15呎,客車車輪之周圍在 9 呎與10呎之間之某列車,於經過若干哩(一哩之整數倍)之距離時,其客車車輪較機關車車輪多轉 1496 回.求客車車輪之周圍爲若干.

設列車經過之距離爲 x 呎,則 $\frac{x}{15}$ 爲機關車車輪迴轉之回數.$\frac{x}{15}+1496$ 爲客車車輪迴轉之回數.由題意,得不等式如下.

$$\frac{x}{10}<\frac{x}{15}+1496<\frac{x}{9}.$$

解此不等式,得

$$33660<x<44880$$

可知列車經過之距離在33660呎與44880呎之間.然由題

意,此距離不可不爲5280呎之整數倍.以5280除33660,得整數商6,以5280除44880,得整數商8.故可知此距離爲7哩或8哩.

設列車經過之距離爲7哩,則客車車輪之周圍爲$9\frac{1}{3}$呎.若列車經過之距離爲8哩,則客車車輪之周圍爲$9\frac{39}{49}$呎.隨之得所求客車車輪之周圍爲$9\frac{1}{3}$呎或$9\frac{39}{49}$呎.

例二. 有沿途每距60步樹有電報柱一支之街道.甲以每分鐘行35步之速度,由第一號柱出發,經半小時後,乙以每分鐘行45步之速度,由第一號柱出發,追於乙後.求乙出發後經若干時間,其甲乙二人始行至於相鄰二柱間.

設甲與乙最初同行於二柱間時,其二柱爲$x+1$及$x+2$號.則當乙通過此$x+1$號柱時甲當在乙前60步以內.

因第一號柱至第$x+1$號柱之距離爲$60x$步,故乙於出發後經$\frac{60x}{45}$分鐘始達$x+1$號柱.較乙先30分鐘出發之甲至此時所行之距離爲$35(\frac{60x}{45}+30)$步.因之得下列之不等式.

$$0<35\left(\frac{60x}{45}+30\right)-60x<60.$$

解此上列之不等式,得

$$78\frac{3}{4}>x>74\frac{1}{4}.$$

x當爲整數,固不待論.因問題在求甲與乙最初行至於相鄰二柱間之時間,故吾人於能適合於上列不等式之範

圍內,不可不取其最小之整數75.隨之可知甲乙二人最初行至於相鄰二柱間之二柱爲76號及77號.而乙由出發以至達於76號柱時所需之時間,爲 $\frac{75\times60}{45}$ 分即 100 分或一時四十分.

又乙通過76號柱時,甲在第76號柱之前方50步,第77號柱之後方10步處.

問題十三

1. 有甲乙二桶,甲桶盛有水一斗八升葡萄酒一斗二升之混合液,乙桶盛有水三升,葡萄酒九升之混合液.今欲混合此二桶中之混合液,俾合成水與萄葡酒等分之混合液一斗四升.求由二桶中各須取出混合液幾升.

2. 有兵士一隊,計可列成每邊四列之中空正方陣,或每邊八列之中空正方陣.但第一正方陣前列之人數,較第二正方陣前列之人數多十六.求此隊之人數幾何.

3 快車與慢車駛行於距離 120 哩之兩市間,其所需時間之比爲 9 與 14.但慢車停車所費時間,等於不停車時駛行20哩距離之時間;而快車停車時間,則僅等於此時間之半.且快車每時間之速度較慢車多15哩.求兩列車之速度幾何.

4 於某日午前比較坐鐘與掛鐘所示之時間時坐鐘

爲九時五分,掛鐘爲九時.待翌日午後再比較之,則坐鐘爲三時四分掛鐘爲三時二分.但知掛鐘每時快四秒,求坐鐘每時應快若干秒.

5. 有水槽,於其空虛時;如開甲管使水流入,則 5 小時可滿,開乙管則 6 小時可滿.又於其充滿水時,閉其甲乙二管;開丙管則 3 小時20分流盡.開丁管則15小時流盡.今設此水槽有水半槽,問如將甲乙丙丁四管同開時,則經幾小時可滿.

6. 有二位之數,其單位之數字較十位之數字大 a,如將此二數字交換其位置時,則等於原數之 b 倍.(但 b 爲整數)求此數爲何數.

7. 有二位之數,其值較其二位數字之和之四倍大 3.如於此數之二倍加36時,則等於交換其二位數字後之數之二倍減36.求此數爲何數.

8 有能容水一石二斗之水槽,若甲乙丙三管同開注水入內時,則二十四分鐘可滿.若僅開甲管,則較僅開丙管時多需十分鐘.又每一分鐘間,甲乙二管同時注入之水量,較於同時間丙管注入之水量多一升.問如甲乙丙三管單獨開放時,各需若干時間始滿

9. 有位於三角形之頂點 A, B, C 之三市,某人欲繞行此三角形之一周,特決定其最初出發之邊爲步行,第二邊

爲騎行,第三邊爲車行.但每行一里,步行需時 a 分,騎行需時 b 分,車行需時 c 分.如其進行之方向始終不變,則由 A 出發,至歸至 A 處,計需 A 小時.由 B 出發,至歸至 B 處,計需 B 小時,由 C 出發,至歸至 C 處計需時 C 小時,求此三角形之周圍計長若干里.

10 有二等邊三角形,其周長 $2p$,高爲 h.求其各邊之長度.

11 某人有現金五千元以某種利率貸之於人,一年後收回本利後,計於其內消費二十五元再以如前利率全數貸之於人,經一年後,計共得本利五千三百八十二元.求其年利率幾何.

12. 有甲乙二工人,以不同之工資於某期間內,共同從事於某工作.其間甲未休息一日,而乙休息六日,計甲得工資十九元二角,乙得工資十元八角.如乙未嘗休息一日,甲嘗休息六日,則二人所得之工資相等.求此期間之日數及甲乙二人每日之工資各若干.

13 有滿盛酒精之桶,於其中酌取一斗八升後,以水補之.再於其中酌取一斗八升,復以水補之.設此時桶中酒精與水之比爲 16:9, 求桶之容量幾何

14 以小石由井口落下,經 t 秒時,得聞小石衝擊水面之聲音.求由井口至水面之深度.但當小石落下時,空氣之

抵抗不計及之,落體之加速度爲 g 秒秒米.音之速度爲 v 秒米.

15. 有三角形,其二邊之長爲 a, b,其面積等於第三邊上正三角形之面積.求第三邊之長度.

16. 有某人由甲地出發,向乙地進行.因由此路程之中央起,至乙地止,全爲山路.故行抵中點後,其速度每時減少 $\frac{2}{3}$ 哩.計自出發後,經十小時,始抵乙地.又歸時始終保持較最初之速度每時少半哩之速度.計經十小時四十分,始達甲地.求此人最初之速度及甲乙兩地間之距離.

17. 有三位之數,其十位之數字等於單位之數與百位之數字之和之半,如於此數加 198 時,則等於交換單位與百位數字所得之數,又如於此數加 5 時,則等於各位數字平方之和之 7 倍.求此數爲何數.

18. 有直角三角形,其周爲 $2p$,其內切圓之半徑爲 r.求三邊之長各幾何.

19. 試將73分爲二部分,各部分皆爲整數,使其大部分之三倍,較其小部分與 8 之和之五倍爲大;由大部分減 8 後之差之三倍,較小部分之七倍爲小.

20. 有分數於分子加 2,分母加 3,則其值爲 $\frac{3}{4}$.如於分子加 3 分母加 1,則其值介於 1 與 2 之間.求此分數.

21. 有若干學生須容納於具有若干房間之寄宿舍中,

若一室住七人,則餘十八人;若一室住十人,則最後之一室不足十人.求室數若干.

22. 有甲乙二人,同時由周圍400丈之正方形相鄰兩隅出發,同向而行,甲在乙前.計甲之速度爲每分42丈,乙之速度爲每分34丈.求二人出發後,經若干時間始再行行至一邊.

23. 有人還賬若干筆,因改釐以下不計之習慣,爲分以下不計,致得銀七分.但每賬均在五元以上,而合之則不足八十元.求賬數爲若干筆.

24. 有沿街每隔75丈樹立一柱之街道,甲以每分33丈之速度,由第三十七號柱出發;同時乙以每分47丈之速度,由第一號柱出發,自後追之.求乙追及甲後,最後二人行於二柱間時,其相鄰二柱爲若干號.

第十章　函數

61. 函數與極限　如第十一節所述,於一事項之研究中,其代表一定數值之文字,謂之常數.反之,其能代表種種數值之文字,謂之變數.例如 x 之整式 $f(x)=ax^2+bx+c$, 其

$x=0$ 時, $f(x)=c$;

$x=1$ 時, $f(x)=a+b+c$;

$x=-2$ 時, $f(x)=4a-2b+c$

等卽視 a, b, c 等爲常數 x 爲變數是.

有二變數 x, y 於此二變數間有某種關係存在,而由此關係,如其中之任意一方例如 x 之值決定後,其他方 y 之值亦隨之決定者,則 y 謂之爲 x 之函數.例如於 x, y 間有 $y=x^2-1$ 之關係時,其 y 之值雖隨 x 之種種值而變化,但若 x 之值決定後,則 y 之值亦隨之而定.卽 y 爲 x 之函數是.

x 之整式,分數式等,皆爲 x 之函數.前曾用 $f(x)$ 等符號以表 x 之整式者,卽不外表明其式爲 x 函數之意.一般表 x 之函數時,皆用 $f(x)$, $F(x)$ 等符號.表 $x=a$ 時函數 $f(x)$ 之值,則以 $f(a)$.例如於 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$,其

$$f(0)=1,\quad f(1)=\frac{1}{2},\quad f(-3)=\frac{1}{10},$$

等是.

變數 x 無限的接近於一定數 a 時,則以 $x\longrightarrow a$ 之符號以表示之.此時 a 謂之爲變數 x 之極限値,或謂之爲 x 收斂於 a 之値.

上之所謂 x 無限的接近於 a 云者,並非爲 $x=a$,僅爲 x 能取與 a 極相接近之數值之謂.詳言之,卽任取如何小之正數 ε,更可使

$$|x-a|<\varepsilon$$

是.上式中之 $|\ \ |$ 符號,係表示 $x-a$ 之絕對值.卽不論 $x-a$ 之符號爲正爲負,而其數値則始終不變,自有其一定之大小也.例如 $|3|=3$, $|-3|=3$ 等是.(見第四節)

又 x 接近於 a 之値時,其值不必連續的變更.例如 x 順次取

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

之值進行時,亦得謂之 $x\longrightarrow 0$ 是.

設 a, b 爲二定數,其 $x\longrightarrow a$ 時,則 $f(x)\longrightarrow b$ 此時稱 b 爲 $x\longrightarrow a$ 時 $f(x)$ 之極限值.一般皆以下列之符號以表之.

$$\lim_{x\to a} f(x)=b.$$

例一. $\lim\limits_{x\to 1}(1+2x)=3.$

因任取如何小之正數 ε,對此使

$$0<|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

而使 x 接近於 1 時,則確能得

$$|(1+2x)-3|<\varepsilon\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

故也.又此例實際於 $x=1$ 時,則 $1+2x=3$. 故於(1)無特別附加 $0<|x-1|$ 之必要.

例二. $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x^2}{1-x}=2.$

於 $x\neq1$ 之制限內,

$$\frac{1-x^2}{1-x}=1+x.$$

故其極限値爲 2 甚明.又 $x=1$ 時,其分母分子皆成爲 0. 分數之値表面上雖呈不定之形式,但與其極限値爲 2 之事,並無抵觸.

變數 x 雖超過任何大之正數後再行增大時,則 x 謂之成爲正之無限大,以符號 $x\longrightarrow+\infty$ 表之.又 x 爲負數其絕對値成爲正之無限大時,則 x 謂之成爲負之無限大,以 $x\longrightarrow-\infty$ 表之.但正之無限大,通常僅用 ∞ 之符號以表之.

例三. 證明 $0.777\cdots\cdots=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\cdots\cdots+\frac{7}{10^n}\right)=\frac{7}{9}$.

因 $\frac{7}{9}-\frac{7}{10}=\frac{7}{90}$,

$$\frac{7}{9}-\left(\frac{7}{10}+\frac{7}{100}\right)=\frac{7}{90}-\frac{7}{100}=\frac{7}{900},$$

$$\frac{7}{9}-\left(\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}\right)=\frac{7}{900}-\frac{777}{1000}=\frac{7}{9000},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{9}{7}-\left(\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\cdots\cdots+\frac{7}{10^n}\right)=\frac{7}{9\times10^n}$$

故$\frac{7}{9}$與0.777…… 之差,如使 n 取值至無限大,即此小數之位數取至無限大時,則可使之小至較任何數爲小.

例四. 證明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=2.$

因 $2-(1+\frac{1}{2})=\frac{1}{2},$

$$2-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})=\frac{1}{4},$$

$$2-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})=\frac{1}{8},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$2-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2^n})=\frac{1}{2^n}.$$

故 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}$ 與 2 之差,如 n 成爲無限大時,則可小至較任何數爲小.

62. 二次三項式之值之研究 於 x 之二次數

$$f(x)=ax^2+bx+c,$$

如與 x 以種種之值時,則 $f(x)$ 亦隨之而取種種之值,已如前述.茲更就其值之符號研究之於下.

置 $P=ax^2+bx+c$ ……………………………(1)

則由因子分解,

$$P=\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

但 a, b, c 皆不含 x 且 $a\neq0$,當不待論.

當研究此式之值時,由 b^2-4ac 之值如何,因而可分爲下述之三方面.

(i) $b^2-4ac>0$ 時此時二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

有二個相異之實根,設此二根各爲 x' 及 x'',置

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \cdots\cdots\cdots(4)$$

時,則 $P=ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'')$ ……(5)

因二次方程式不能有二個以上之根,故此式於 $x=x'$ 或 $x=x''$ 時爲 0,於其他諸值皆不爲 0.

因 x' 及 x'' 爲相異之實數,故與此相異之值可分爲下列三種.

(1) 較 x',x'' 中之小者爲小之值

(2) 位於 x',x'' 間之值.即較其中之小者爲大,大者爲小之值.

(3) 較x',x''中之大者爲大之値.

x於具有上列各値時,其二次三項式P之値之號如下.

(1) x較x',x''二數中之小者爲小時,此時 $x-x'$ 及 $x-x''$皆爲負數.隨之$(x-x')(x-x'')$爲正數.故 $a(x-x')(x-x'')$與a爲同號之數.卽此時二次三項式ax^2+bx+c之値與a爲同號.

(2) x位於x',x''二數之間時,此時因x',及x''一方較x爲大,他方較x爲小,故$x-x'$及$x-x''$爲異號之數.因之$(x-x')(x-x'')$爲負數.故$a(x-x')(x-x'')$與a爲異號之數.卽此時二次三項式ax^2+bx+c之値與a爲異號.

(3) x較x',x''二數中之大者爲大時,此時 $x-x'$ 及 $x-x''$ 皆爲正數.因之$(x-x')(x-x'')$爲正數.故$a(x-x')(x-x'')$與a爲同號之數.卽此時二次三項式ax^2+bx+c之値與a爲同號.

總上所得結果因之得一定理於下.

定理 1. 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有相異之實根時,如x較此方程式二根中之小者爲小,或較大者爲大,則二次三項式ax^2+bx+c之値與a爲同號.如x介於其二根之間,則二次三項式ax^2+bx+c之値與a爲異號.

可知 $b^2-4ac>0$ 時,二次三項式ax^2+bx+c由x之値如

何,能爲正數或負數.

(ii)　$b^2-4ac=0$ 時,此時由(2),得

$$P=a(x+\frac{b}{2a})^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

但此時其方程式(3)具有等根.設此根爲 x',則

$$x'=-\frac{b}{2a}.$$

隨之得　$$P=a(x-x')^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

因 $a(x-x')^2$ 於 $x=x'$ 時成爲 0,而於 $x\neq x'$ 時均不成爲 0,且 $(x-x')^2$ 於 $x\neq x'$ 時常爲正數.故 $a(x-x')^2$ 卽 P 於 $x=x'$ 時成爲 0.於 $x\neq x'$ 時,其値與 a 爲同號.因之得一定理於下.

定理 2　二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有等根時,如 x 不等於此方程式之根,則二次三項式 ax^2+bx+c 之値,恆與 a 爲同號.

可知 $b^2-4ac=0$ 時,二次三項式 ax^2+bx+c 之値,如 a 爲正數時,則不論 x 之値如何,常爲正數或 0.決不能爲負數.又 a 爲負數時,則不論 x 之値如何,常爲負數或 0.決不能爲正數.

(iii)　$b^2-4ac<0$ 時,此時由(2),得

$$P=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\}\cdots\cdots\cdots(8)$$

其方程式(3)具有虛根.因 $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ 爲正數,又 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 不

論 x 取若何之實數值,皆不能成負數,即不外成爲 0 或爲正數.故 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ 不論 x 之值如何,常爲正數.隨之 $a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\}$ 即 ax^2+bx+c 常與 a 同號.因之得一定理於下.

定理 3. 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根爲虛數時,則二次三項式 ax^2+bx+c 之值,不論 x 之值如何,常與 a 爲同號.

可知 $b^2-4ac<0$ 時,二次三項式 ax^2+bx+c 之值,不論 x 之值如何,常爲正數 ($a>0$ 時) 或負數,($a<0$ 時) 決無成爲 0 時.

例一 問 $3x^2+x-2$ 於 x 取如何之值時,其值爲正.

先就二次方程式 $3x^2+x-2=0$ 研究之.因

$$3x^2+x-2=(3x-2)(x+1)=0.$$

此方程式之根爲 $\frac{2}{3}$ 及 -1, 而

$$3x^2+x-2=3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+1).$$

故此二次三項式之值爲正時,須

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+1)>0.$$

上列不等式之關係,於 $x-\frac{2}{3}$ 及 $x+1$ 兩者皆爲正數或負數時,始能成立.

先就 $x<-1$ 時,其 $x-\frac{2}{3}<0$, $x+1<0$,

$$\therefore\quad 3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+1)>0$$

次就 $x>\frac{2}{3}$ 時,其 $x-\frac{2}{3}>0,\ x+1>0$

$$\therefore\quad 3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+1)>0.$$

如 x 取其他之值,則 $x-\frac{2}{3}$ 及 $x+1$ 二者不能同爲正數或負數.故所求 x 之值,爲

$$x<-1,\quad 或\quad x>\frac{2}{3}.$$

63. 二次方程式之根與與數之比較　設二次方程式

爲 $$ax^2+bx+c=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

所與與數爲 α.茲將不俟解方程式(1)而能將其根與 α 比較大小之方法,述之於下.

因此問題僅限於方程式(1)之根爲實數時,故先就

$$b^2-4ac>0$$

時研究之.此時方程式(1)之根爲相異之實數.設此二根各爲 x' 及 x'',則

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x''),$$

$$\therefore\quad a\alpha^2+b\alpha+c=a(\alpha-x')(\alpha-x'').$$

故如上節所說明,其結果如下.

(i)　$a\alpha^2+b\alpha+c$ 與 a 爲同號時,則 α 較 x' 及 x'' 二數中之小者爲小,或較其大者爲大.

(ii)　$a\alpha^2+b\alpha+c$ 與 a 爲異號時,則 α 位於 x' 及 x'' 二數

之間.

於 (i) 時,其 2α 較 $x'+x''$ 爲小或大,則隨之 α 較 x' 及 x'' 中之小者爲小,或較其大者爲大.然

$$x'+x''=-\frac{b}{a},$$

$$\therefore\quad 2\alpha-(x'+x'')=2\alpha+\frac{b}{a}=\frac{2a\alpha+b}{a}.$$

可知如 $2a\alpha+b$ 與 a 爲異號時,其 2α 較 $x'+x''$ 爲小.隨之 α 較二根 x' 及 x'' 中之小者爲小.又如 $2a\alpha+b$ 與 a 爲同號時,則 2α 較 $x'+x''$ 爲大.隨之 α 較二根 x' 及 x'' 中之大者爲大.因得一定理於下.

定理 1. 方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有相異之實根 x' 及 x'' 時,(i) 如 $a\alpha^2+b\alpha+c$ 與 a 爲同號,而 $2a\alpha+b$ 與 a 爲異號時,則 α 較二根 x' 及 x'' 中之小者爲小.(ii) 如 $a\alpha^2+b\alpha+c$ 與 a 爲同號,而 $2a\alpha+b$ 亦與 a 爲同號時,則 α 較二根 x' 及 x'' 中之大者爲大.(iii) 如 $a\alpha^2+b\alpha+c$ 與 a 爲異號時,則 α 爲介於二根 x' 及 x'' 之間之數.

又設 α 等於方程式(1)之一根時,則 $a\alpha^2+b\alpha+c=0$. 而此時隨 2α 較二根之和爲小或大,隨之 α 亦較其他之根爲小或大.因之如上述之說明,復得一定理於下.

定理 2. 方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有相異之實根時,如 α 等於其中之一根,則隨 $2a\alpha+b$ 與 a 爲異號或爲同號,α 亦

較其他之根爲小或大.

次就 $b^2-4ac=0$ 時研究之.因方程式(1)之根爲 $-\frac{b}{2a}$,此根設以 x' 代之,則方程式(1)之左邊成爲 $a(x-x')^2$. 隨之 $a\alpha^2+b\alpha+c=a(\alpha-x')^2$, 其 $a\alpha^2+b\alpha+c$ 與 a 爲同號. ($\alpha\neq x'$ 時) 而 $\alpha-x'=\alpha-\left(\frac{-b}{2a}\right)=\frac{2a\alpha+b}{2a}$,故如 $2a\alpha+b$ 與 a 爲異號時,則 α 較 x' 爲小.如 $2a\alpha+b$ 與 a 爲同號時,則 α 較 x' 爲大.因之得一定理於下.

定理 3. 方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有等根時,(i) 如 $2a\alpha+b$ 與 a 爲異號時,則 α 較此方程式之根爲小.(ii) 如 $2a\alpha+b$ 與 a 爲同號時,則較其根爲大.

例一. 試將方程式 $-x^2+5x+2=0$ 之根與 1, 2, -3. 三數比較之.

以 1, 2, -3 三數分別代入於所與方程式之左邊 x 時,則各得

$$6,\quad 8,\quad -22.$$

因起首二數 6 與 8 皆與 x^2 之係數異號,故可知 1 與 2 二數皆介乎所與方程式之二根間.

又最後一數 -22 與 x^2 之係數爲同號,而 $2a\alpha+b$ 於此時成爲 $2\times(-1)\times(-3)+5=11$,與 x^2 之係數異號.故 -3 較所與方程式二根中之小者爲小.

64. **極大極小** 於 x 之函數 $y=f(x)$, 一般如 x 之值

變化時,則 y 之值亦隨之變化,已如前述.但有時當 x 之值漸次增加,至達於某值爲止,其 y 之值漸次減小,至成爲某值 m;迨 x 再繼續增加,則 y 之值反由 m 而漸次增加者,此時 m 謂之爲函數 $f(x)$ 之極小值或謂之極小.例如於 $y=f(x)=(x-2)^2+3$,其 x 之值較 2 爲小,至漸次增大以達於 2 時,則 y 之值亦漸次減小,終成爲 3.如 x 達於 2 後再繼續增大時,則 y 之值反由 3 漸次增大.故 3 爲此函數 $f(x)=(x-2)^2+3$ 之極小值.

又有時當 x 之值漸次增加,至達於某值爲止,其 y 之值漸次增加,至成爲某值 m;迨 x 再繼續增加,則 y 之值反由 m 而漸次減小者,此時 m 謂之爲函數 $f(x)$ 之極大值,或謂之極大.例如於 $y=f(x)=-(x-1)^2+5$,其 x 之值較 1 爲小至漸次增大以達於 1 時,則 y 之值亦漸次增大,終成爲 5 如 x 達於 1 後再繼續增大時,則 y 之值反由 5 漸次減小,故 5 爲此函數 $f(x)=-(x-1)^2+5$ 之極大值.

（注意）變數 x 之值雖始終漸次增大或漸次減小,其 y 之值可由增而減,再由減而增,更由增而減,如此經數度之增減.換言之,卽函數能有數個之極大值及極小值.可知極大值決非最大值,極小值決非最小值.譬如登山,登一峯後當下一谷,其峯雖屬該山之最高部分,然更有高於其峯之他山在,又下一谷後,當更登一峯,其谷雖爲該處之最低

部分,然更有低於其谷之他谷在是.

極大極小之研究,原屬於高等數學之範圍.本篇所論者,僅爲關於不等式之諸定理,及應用上述諸節所能研究之簡單函數.

下述之二定理,爲應用相加平均與相乘平均之定理所能證明者,學者可自行證明之.

定理 1. 諸正數之和爲一定,則其諸數之積,於各數皆相等時爲極大.

定理 2. 諸正數之積爲一定,則其諸數之和,於各數皆相等時爲極小.

例一 求 ax^2+bx+c 之極大值或極小值.

因 $y=ax^2+bx+c$, 故於 $x=-\frac{b}{2a}$ 時, y 之值成爲 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.此卽 y 值之界限也.

如 $a>0$ 時,則 y 之值常較 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 爲大.故 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 爲 y 之極小值.如 $a<0$ 時,則 y 之值常較 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 爲小.故 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 爲 y 之極大值.

例二. 求 $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+5}$ 之極大值或極小值.

置所與之分數式等於λ時,則

$$\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+5}=\lambda.$$

去分母,得 $(1-\lambda)x^2-(2-4\lambda)x+3-5\lambda=0.$

滿足上之方程式之 x 之值如爲實數,則必

$$(2-4\lambda)^2-4(1-\lambda)(3-5\lambda)\geqq 0.$$

將左邊化簡後以 -4 除之,得

$$\lambda^2-4\lambda+2\leqq 0.$$

$$\therefore\quad \{\lambda-(2+\sqrt{2})\}\{\lambda-(2-\sqrt{2})\}\leqq 0$$

$$\therefore\quad 2-\sqrt{2}\leqq \lambda \leqq 2+\sqrt{2}.$$

即 $2-\sqrt{2}$ 爲其極小值,$2+\sqrt{2}$ 爲其極大值.

例三. 求周圍一定之矩形中其面積之最大者爲何形.

設周圍爲 $2p$,其二邊各爲 a, b,則

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab},$$

然 $\quad a+b=p,$

$$\therefore\quad \left(\frac{p}{2}\right)^2\geqq ab.$$

可知矩形之面積 ab 不能較 $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ 爲大.故其極大值爲 $\frac{p^2}{4}$.
此時 $a=b$,故矩形爲邊長 $\frac{p}{2}$ 之正方形.

問題十四

求下列各式之極限.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^4+x^5}{2x^3-x^4+4x^5}.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-4x^3+4x^5}{x^2+5x^3-x^4}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3}{2x^2+x-1}$.

5 使方程式 $x^2+\lambda x+(\lambda-1)(\lambda-2)=0$ 之二根爲相異之實數,試決定 λ 之值.

6. 證明方程式 $(a+b+c)x^2-2(bc+ca+ab)x+3abc=0$ 之根於 a, b, c 互相不等時,爲相異之實數.

7. 證明 $b=k+\dfrac{ac}{k}$ 時,方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根爲有理數.

8. 證明方程式 $(a^2+p^2)x^2-2(aq+bp)x+b^2+q^2=0$ 之根爲有理數時,則其二根不等.

9. 證明如 b^2-ac 或 q^2-pr 爲負數時,則方程式

$$(b^2-ac)x^2+(ar+cp-2bq)x+(q^2-pr)=0$$

之根常爲實數.

10. 將方程式 $x^2-2x+\lambda=0$ 之根與 3 比較之.

11. 使方程式 $(\lambda-2)x^2+2\lambda x-5=0$ 之一根大於 1 而他根小於 1,試決定 λ 之值.

12. 於 $y=\dfrac{12x-19}{x^2-4x+5}$,試研究對於 x 之實數值之 y 值變化.

13. 求 $(x-a)(x-b)$ 之極小值.

14 設 a 爲正數,求 $\frac{x^2+a^2}{x}$ 之極大值及極小值.

15 設 a 爲正數,證明 $\frac{x^2}{x-a}$ 於 $x=2a$ 時爲極小.

16. 求面積一定之矩形中,其周圍最小者爲何形.

17. 證明立方體爲表面積一定之直六面體中之體積最大者.

18. 證明立方體爲體積一定之直六面體中之表面積最小者.

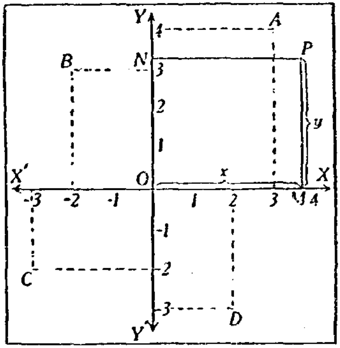
19. 求經過圓內一定點之弦爲其點所分之二部分平方之和之最大值及最小值.

20. 設直角三角形之周圍一定,求其夾成直角之二邊之和以何時爲最大.

第十一章　圖表

65. 坐標　於平面上,如固定垂直的交於0點之直線 XX' 及 YY', 由任意一點 P 引 PM 垂直於 XX',PN 垂直於 YY' 時,則得悉 PM, PN 二線之長度後,隨之其 P 點之位置,亦行決定

上述之二線 PN 及 PM,謂之 P 點之坐標. PN 或與其等長之線 OM 謂之橫坐標. PM 或與其等長之線 ON,謂之縱坐標.橫坐標通常皆以 x 表之,縱坐標則皆以 y 表之.



第一圖

又 XX' 及 YY' 二線,謂之坐標軸.其 XX' 謂之橫坐標軸,或稱橫軸. YY' 謂之縱坐標軸,或稱縱軸. O 點則謂之原點.

橫坐標以某單位向原點之右方所量得之數值爲正,向原點之左方所量之數值爲負.又縱坐標以某單位向原點

之上方所量得之數值爲正,向原點之下方所量得之數值爲負

如某點之橫坐標爲a,縱坐標爲b,則該點通常皆以$x=a$, $y=b$表之.或簡寫作(a, b).如圖,其A,B,C,D各點,通常皆以$(3, 4)$, $(-2, 3)$, $(-3, -2)$, $(2, -3)$表之.又原點爲(O, O).

因決定點之位置之坐標種類甚多,故上述之坐標,特稱之爲直交坐標.

66. 函數之圖表法 於x之函數$y=f(x)$,如以種種之值代入於x,則隨之可求得其y之種種對應值,已如前述.今取某坐標軸,將變數x, y之種種對應值爲各點之坐標,而將其各點一一描寫於包含坐標軸之平面上時,則其各點卽行集合形成直線或曲線.此直線或曲線,謂之表函數$y=f(x)$之圖或簡稱圖表.

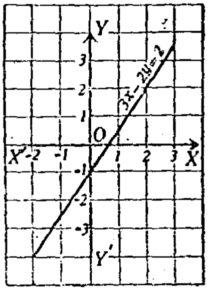
例一. 試以圖表$3x-2y=2$方程式.

將原方程式就y解之,得

$$y=\frac{3x-2}{2}$$

故得x, y之種種對應值如下表.

x	……-2	-1	0	1	2	3……
y	……-4	$-2\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	2	$3\frac{1}{2}$ ……



第二圖

如描寫……, $(-2, -4)$, $(-1, -2\frac{1}{2})$,

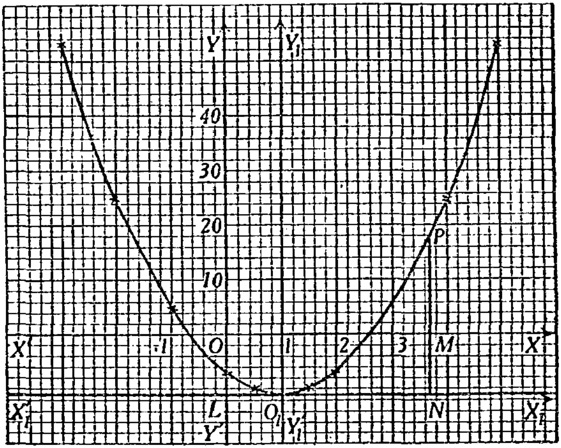
……，諸點於坐標軸之平面上,連結之卽得一如圖二所示之直線.

例二. 試以圖表函數$y=4x^2-8x-7$.

對應於x種種値之y値如下表.

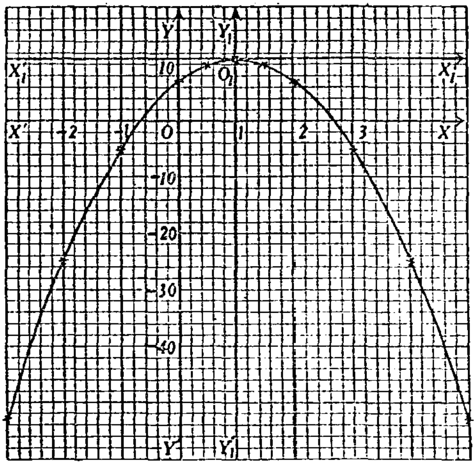
x	……-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5………
y	…… 53	25	5	-7	-11	-7	5	25	53 ……

因y之値較x之値過大,紙面上不易描寫,故縱坐標之單位,僅取等於橫坐標$\frac{1}{10}$之長度.依法將各點描寫後,連結之卽得一如第三圖所示之曲線.此種曲線,謂之拋物線.



第 三 圖

例三. 試以圖表函數$y=7+8x-4x^2$.



第　四　圖

此方程式之 y 之值僅與例 2′ 方程式 y 之值異其符號.故由上例 x, y 之種種對應值,描寫 $(-3, -53)$, $(-2, -25)$, ………,諸點而連結之,即得一如圖四所示之拋物線.

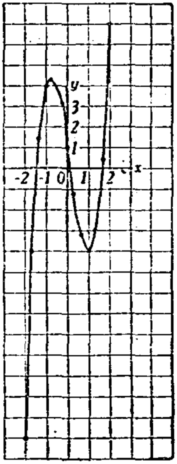
例四. 試以圖表函數 $y=3x^3-x^2-7x+1$.

對應於 x 種種值之 y 值如下表.

x	$\cdots\cdots-3$	-2	-1	0	1	2	$3\cdots\cdots$
y	$\cdots\cdots-68$	-13	4	1	-4	7	$52\cdots\cdots$

如再將 $x=-2$ 及 $x=2$ 間之 x, y 之對應值精細計算之,則如下表.

x	$-1\frac{1}{3}$	$-1\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$
y	-4	$\frac{4}{9}$	$4\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{9}$	$-1\frac{1}{3}$	$-3\frac{2}{9}$	-3	$\frac{4}{9}$



第　五　圖

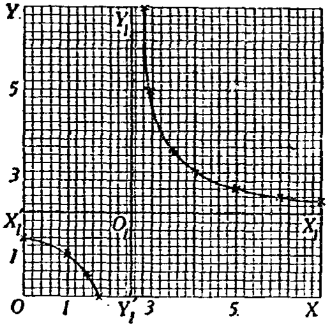
如將上列二表 x, y 之種種對應值取爲點之坐標一一描寫之於平面上而連結之,則得一如圖五所示之曲線.

例五. 求函數 $y=\dfrac{4x-7}{2x-5}$ 之圖表.

其 x, y 之種種對應值如下表.

x	………0	1	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{2}$	2.8	3	$3\frac{1}{2}$	4	5	6	7……∞
y	……1.4	1	$\frac{1}{2}$	0	±∞	7	5	$3\frac{1}{2}$	3	2.6	2.4	2.33…0

故取上表所列 x, y 之種種對應值爲各點之坐標一一描寫於平面上而連結之,則得如圖六所示之一對曲線.此種曲線,謂之**雙曲線**.



第 六 圖

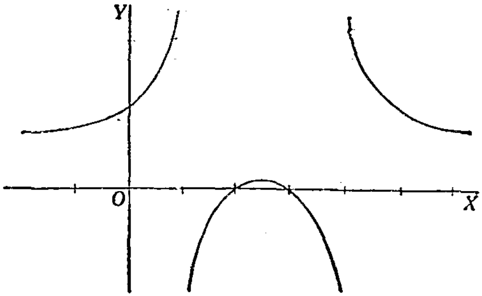
例六. 試以圖表函數

$$y=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-4)}.$$

其 x, y 之種種對應值如下表.

x	0	.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	5	6	∞	−.5	−1	−2	−∞
y	1.5	2.14	±∞	−.6	0	.11	0	−.6	∓∞	1.5	1.2	1	1.3	1.2	1.11	1

表此函數之曲線交 x 軸於 $x=2$ 及 $x=3$ 處.又當 x 經過 1 時,其 y 之值由 $+\infty$ 忽變爲 $-\infty$; x 經過 4 時,其 y 之值忽由 $-\infty$ 變爲 $+\infty$.故其圖如圖七所示.



第 七 圖

67. 極大極小之圖的解法 於第三圖,設有一點由直線 Y_1Y_1' 之左邊沿曲線向直線 Y_1Y_1' 之右邊移動時,則其點之縱坐標隨其距離 O_1 點愈近而愈行減少.待一經越過 O_1 點後,則復行漸次增加.又於第四圖,設有一點由直線 Y_1Y_1' 之左邊沿曲線向直線 Y_1Y_1' 之右邊移動時,則其點之縱坐標隨其距離 O_1 點愈近而愈行增加.待一經越過 O_1 點後,則復行漸次減少.如此位於曲線上之一點,當動點越過其點時,不論其點之縱坐標由減而增,或由增而減,皆謂之該曲線之轉換點.轉換點之縱坐標值,謂之曲線之轉換值.或稱函數之轉換值.

於轉換點之近旁,其縱坐標係由減而增者則其轉換點之縱坐標,謂之爲該函數之極小值.其縱坐標係由增而減

者,則其轉換點之縱坐標,謂之爲該函數之極大值.例如於第三圖,其函數之極小值爲於$x=1$時,$y=-11$.又於第四圖,其函數之極大值爲於$x=1$時,$y=11$.及第五圖其函數之極大值爲於$x=-\frac{2}{3}$時,$y=4\frac{1}{3}$.極小值爲於$x=1$時,$y=-4$是.

所謂極大值極小值云者,係指曲線上某點之縱坐標值較位於其點近傍曲線上任何點之縱坐標值爲大或小之謂也.故極大值不必爲最大值,極小值不必爲最小值.如於一函數有數個極大值及極小值時,則其極大值不必定大於其極小值.此實與六十四節所討論者相一致.

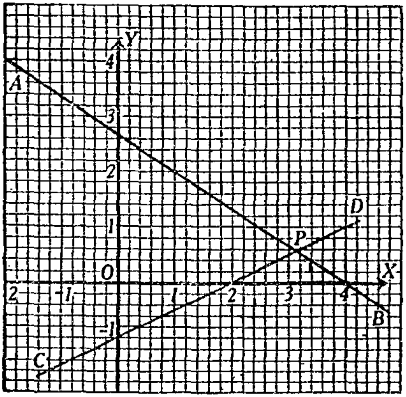
68. **方程式實根之圖的解法** 具有實係數之方程式$f(x)=0$之實根,不外爲函數$y=f(x)$之直線或曲線截於橫軸上之點之橫坐標.故將表函數$f(x)$之直線或曲線繪成後,則其方程式$f(x)=0$之實根,可近似的求得其值.

又方程式$f_1(x)=f_2(x)$之實根,不外表函數$y=f_1(x)$及$y=f_2(x)$之直線或曲線相交點之橫坐標.故將表函數$f_1(x)$,$f_2(x)$之直綫或曲線繪成後,則方程式$f_1(x)=f_2(x)$之實根,可近似的求得之.

例一. 求下列聯立方程式之根.

$$2x+3y=8 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x-2y=2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$



第八圖

如前法繪成表方程式(1)與(2)之直線 AB 及 CD 時,則 AB 上任意點之坐標,皆能滿足方程式(1),但僅有一點能滿足方程式(2),卽 AB 與 CD 之交點 P 是。由 P 點之坐標,故得

$$x=3.15\quad y=.57.$$

例二. 求下列聯立方程式之根.

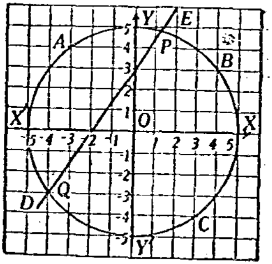
$$x^2+y^2=25\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$3x-2y=-6\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

如前法繪成方程式(1)與(2)之曲線 ABC 圓及直線 DE 後,求得其交點 P 與 Q. 由 P 與 Q 之坐標,求得其二組根爲

$$x=1\frac{1}{3},\qquad y=4\frac{4}{5};$$

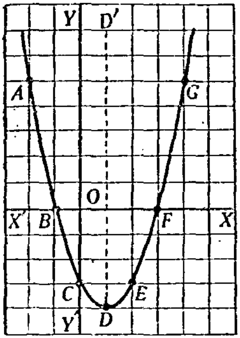
$$x=-4,\qquad y=-3$$



第九圖

例三. 求方程式 $x^2-2x-3=0$ 之根.

繪成表函數 $f(x)=x^2-2x-3$ 之曲線 ADG 後,求得其與



第 十 圖

橫軸之交點 B 及 F. 觀圖, B 及 F 之橫坐標爲 $x=-1$ 及 $x=3$, 故得方程式之二根爲 -1 及 3.

例四. 求方程式 $3x^3+4x-12=0$ 之根.

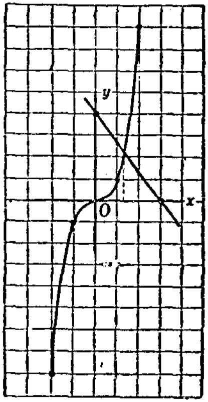
將方程式改書之使成爲

$$x^3=-\frac{4}{3}(x-3)$$

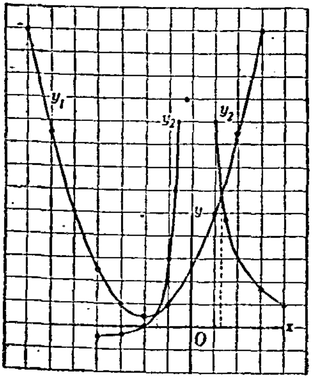
繪成表函數 x^3 及 $-\frac{4}{3}(x-3)$ 之曲線及直線而求其交點之橫坐標時,得

$$x\fallingdotseq 1.3.$$

因交點僅只一個,故實根亦僅只一個.



第 十 一 圖



第 十 二 圖

例五. 求方程式

$$x^4+4x^3+5x^2-6x-12=0$$

之實根.

方程式改書之使成爲

$$\frac{1}{2}(x^2+4x+5)=\frac{3(x+2)}{x^2}.$$

繪成表函數 $\frac{1}{2}(x^2+4x+5)$ 及 $\frac{3(x+2)}{x^2}$ 之曲線而求其交點之橫坐標時,得 $x\fallingdotseq 1.3$ 及 $x\fallingdotseq -1.5$.

因交點僅只二個,故實根亦僅只二個.

問 題 十 五

1. 描寫下列諸點$(3,2)$,$(4,-1)$,$(-3,2)$,$(-3,-3)$,$(0,0)$,$(0,-4)$.

2. 求作三頂點爲$(4,1)$,$(-1,3)$及$(1,-2)$三點之三角形.

3. 描寫$(-2,1)$及$(2,-3)$二點而測其距離.

4. 凡縱坐標皆爲 4 之點位於何處.

試以圖表下列諸函數.

5. (a) $3x+5$, (b) $2-3x$,

(c) $-3x$, (d) $\frac{3}{2}x$.

6. (a) x^2, (b) $\frac{1}{4}x^2$, (c) $3x^2$.

7. (a) x^2-1, (b) x^2+x, (c) x^2-2x.

8. (a) x^2-4x+4, (b) x^2-x-5, (c) x^2-3x-8.

9. (a) $6+x-x^2$, (b) $2-x-x^2$, (c) $10-3x-x^2$.

10 (a) $\frac{x-3}{x-4}$, (b) $\frac{x-4}{x-3}$.

(c) $\frac{10x-1}{x}$, (d) $\frac{0x+1}{x}$.

11. (a) $\frac{x^2-1}{x^2-4}$, (b) $\frac{(x-3)(x-6)}{(x-2)(x-4)}$,

(*c*) $\frac{(x-3)(x-5)}{(x-1)(x-7)}$,　　(*d*) $\frac{(x-4)(x-7)}{(x-1)(x-\ 0)}$.

12. (*a*) x^3+2x-5, (*b*) $x^3+2x-18$, (*c*) $x^3-12x-1$.

試繪圖求下列諸函數之極大值或極小值.

13. (*a*) x^2+6x+1, (*b*) x^2-2x+5, (*c*) $2x^2-8x+17$.

14. (*a*) $1-6x-x^2$, (*b*) $3+2x-x^2$, (*c*) $-4+4x-x^2$

試繪圖求下列諸方程式之實根.

15. (*a*) $x^2-5x+6=0$,　　(*b*) $x^2+5x+6=0$

(*c*) $15x^2-7x-2=0$.

16. (*a*) $x^3-6x^2-8x+40=0$,

(*b*) $x^3+6x^2-x-20=0$.

17. (*a*) $x^4-12x^2+12x+4=0$,

(*b*) $x^4-10x^2-4x+8=0$.

18. (*a*) $x^4+6x^3+10x^2-12x-30=0$,

(*b*) $x^4-4x^3+7x^2+7x-28=0$.

第十二章　數學的歸納法

69. 數學的歸納法　數學的歸納法爲亙於數學各分科廣用之一種證明法,茲舉例說明之於下.

例一.　證明$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ ……………(1)

證明分二段.

I.　先檢驗上式對於 n 之某特別值,其關係均能成立.

$$n=1\text{ 時,}\quad\text{左邊}=1,\quad\text{右邊}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=1;$$

$$n=2\text{ 時,}\quad\text{左邊}=3,\quad\text{右邊}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3=3;$$

可知對於$n=1,2$之特別值時,(1)式之關係成立.

II.　次假定 n 等於某特別整數 r 時,(1)式之關係成立.從而證明其等於較 r 大於 1 之值即 $r+1$ 時,亦能成立.

由假定,$n=r$ 時,(1)式能成立.故其對於 r 成

$$1+2+3+\cdots\cdots\cdots\cdots+r=\frac{1}{2}r(r+1).$$

於上式兩邊各加$r+1$,則成

$$1+2+3+\cdots\cdots+r+(r+1)=\frac{1}{2}r(r+1)+(r+1)$$

$$=\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{2}r+r+1$$

$$=2(r^2+r+2r+2)$$

$$=2(r^2+3r+2)$$

$$=2(r+1)(r+2)$$

$$=\frac{1}{2}(r+1)(r+2).$$

此卽表明(1)式之關係於$n=r+1$時亦能成立也.

由 I, II 兩段,因得一推論於下.

由 I, $n=1, 2$ 時,(1)式能成立.又$n=2$時能成立則由 II, $n=3$時亦能成立.再$n=3$時能成立,復由II, $n=4$時亦能成立.順次以推,可知對於n之任意正整數值,(1)式之關係皆能成立.

例二. 因連續二整數之一必爲偶數,故此二整數之積能以 2 整除之.試以此證明連續三整數之積能以 6 整除之.

設連續三數中之最小者爲n,則其餘二數爲$n+1$及$n+2$.

$$n=1\text{ 時,}\quad n(n+1)(n+2)=1\cdot2\cdot3=6.$$

能以 6 整除之甚明.

次假定$n=r$時本定能成立,則$r(r+1)(r+2)$能以 6 整除之.但

$$(r+1)(r+2)(r+3)=r(r+1)(r+2)+3(r+1)(r+2).$$

其$3(r+1)(r+2)$能爲3×2卽 6 所整除.故如$r(r+1)(r+2)$能爲 6 所整除時,則上式之右邊能以 6 整除之.隨之其左邊亦不能不爲 6 所整除.

與上例同樣,可知$n(n+1)(n+2)$對於n之各整數值皆能以 6 整除之.

上述二例所用之證明法,謂之數學的歸納法,或略稱之爲歸納法.

問 題 十 六

試用數學的歸納證明下列各式之關係.

1. $1+r+r^2+\cdots\cdots+r^n=\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$.
2. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)$
$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$
3. $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
4. $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$.
5. $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$
6. 設 n 爲正整數,則 x^n-y^n 能爲 $x-y$ 所整除.
7. 連續四整數之積能以 1·2·3·4 整除之.
8. 連續五整數之積能以 1·2·3·4·5 整除之.

第十三章　順列及組合

70. **順列及組合**　由所與 n 個物件中取出 r 個依種種順序排列而成者,謂之由 n 個物件中取出 r 個之順列.或謂之 n 個物件之 r 順列.例如於不同之三物 a, b, c 中任取二物所得之順列爲

$$ab,\ ac\ \ ba,\ bc,\ ca\ \ cb.$$

之六種是.

又由所與 n 個物件中取出 r 個爲一組而不論其排列之順序時,謂之由 n 個物件中取出 r 個之組合.或謂之 n 個物件之 r 組合.例如於不同之三物 a, b, c 中任取二物所得之組合爲

$$ab,\ \ ac,\ \ bc$$

之三種是.

以後凡表物件時,皆用 a, b, c 等文字或 1, 2, 3 等數字以行之.且於無特別申明時,其所表者皆爲相異之物件.

茲將關於計算順列及組合之種數時常用之基礎定理述之於下.

定理　設第一事件A由m個方法生起,第二事件B由n個方法生起時,則A與B互相結合所能生起之方法,其總數爲mn

例如投一骰子,其骰面之現出方法,計有六種.又投二骰子時,則對於一方骰子之各面,他方骰面之現出方法,各有六種.故全體共有6×6種之現出方法.(甲之一點與乙之二點同時現出,及甲之二點與乙之一點同時現出,不視爲同相.餘同此.) 由此例之同樣方法,可證明本定理之眞確不誤.

又此定理對於二個以上事件之結合時,亦能成立.例如設第一事件A由m個方法生起,第二事件B由n個方法生起,第三事件C由p個方法生起時,則A, B, C互相結合而生起之方法,其總數爲mnp.是.

71. 求由n個物件中取出r個之順列之數　由n個物件中取出r個之順列之數,通常皆用符號$_nP_r$以表之.

由n個物件$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$中取出$r$個排作順列時,可於$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$中任取一個置於首位後,再於剩餘之$n-1$個物件中任取一個置於第二位,更於剩餘之$n-2$個物件中任取一個置於第三位,如此順次行之卽成.因其占第一位之物件,於n個物件中無論取何個皆可,其方法之數爲n.次占第二位之物件,於剩餘之$n-1$個中

任取何個皆可,故其方法之數爲$n-1$.再占第三位之物件,於剩餘之$n-\overset{2}{\cancel{1}}$個中任取何個皆可,故其方法之數爲$n-2$.其餘類推.故由上節之定理,其所求順列之數爲

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(r\text{個因子之積})$$

即
$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(n-r+1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又如$r=n$時,則

$${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots4\cdot3\cdot2\cdot1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)左右邊之積,謂之n之階乘,通常皆以符號$n!$或$\lfloor\underline{n}$以表之.即

$${}_nP_n=n!$$

公式(1)亦可另行證明之如下.

由n個物件$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots\cdots a_n$,中取出$r$個排成一列時,其排列方法有${}_nP_r$種.其中$a_1$占最左端之順列,不外於$a_2, a_3, \cdots\cdots\cdots, a_n$中任取$r-1$個排列於$a_1$之左方之順列.故其數有${}_{n-1}P_{r-1}$種.又$a_2, a_3, \cdots\cdots\cdots, a_n$等占最左端時,亦各有${}_{n-1}P_{r-1}$種.故全體應有$n\times{}_{n-1}P_{r-1}$個順列.因之得下式之關係.

$${}_nP_r\ =n\times{}_{n-1}P_{r-1},$$

同理,
$${}_{n-1}P_{r-1}=(n-1)\times{}_{n-2}P_{r-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

又 $_{n-r+1}P_1=(n-r+1)$

甚明.將上列諸等式邊邊相乘,即得

$$_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots(n-r+1).$$

例一. 求用 $abcde$ 五文字能作成若干順列又設其順列中最初最終之位置皆屬子音時其數若何.

用 $abcde$ 五文字所作順列之數爲

$$_5P_5=5!=120,$$

次因子音有三個,若於最初最終之位置配置子音時,則其方法有 $_3P_2$ 種.又對於此中一組,將其餘三文字置於內部之方法有 $_3P_3$ 種.故由上節之定理,其所求順列之數爲

$$_3P_2\times{}_3P_3=3\cdot2\times3!=36.$$

例二. 有學生十人敎師四人排成一列,如敎師四人須互相鄰接不能脫離時,則其方法有幾種.

先除敎師單就學生排成一列時,其不同之方法有 $_{10}P_{10}$ 種.於此各排列中相鄰二人間或兩端之首位,得插入敎師四人之排列.如此,其得插入敎師四人一團之地位,共計有十一處.又因敎師四人互相移換位置時,其方法共有 $_4P_4$ 種.故所求排列方法之數爲 $_{11}P_{11}\times{}_4P_4=11!\times4!$

$$_{10}P_{10}\times11\times{}_4P_4=10!\times11\times4!=11!\times4!$$

例三. 有 n 人圍繞圓桌而坐,其方法有幾.

n 人圍繞圓桌而坐之方法,共有 $n!$ 種.但 n 人相互位置

相同之排列視爲一種時,則其數較此爲少.即以某一人固定於某一席次而使其餘 $n-1$ 人雜坐於 $n-1$ 席次時,可知其不同之方法爲 $(n-1)!$ 種.此種順列,謂之圓順列.

72　**求由 n 個物體中取出 r 個之組合之數**　由 n 個物件中取出 r 個之組合之數,通常皆用符號 ${}_nC_r$ 或 $\left(\frac{n}{r}\right)$ 以表之.

於由 n 個物件中任取 r 個所成組合中之一組,如將其 r 個物件依種種順序排列之,則得 $r!$ 個順列.又取 n 個物中之 r 組合之全體,將其 r 個物件依種種順序排列之,則得 n 個物件之 r 順列.因之得下列之關係式.

$$r!\times{}_nC_r={}_nP_r:$$

由此得

$$ {}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots(n-r+1)}{r!},$$

或　$${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-1)!}={}_nC_{n-r}.$$

例一.　${}_{15}C_{13}={}_{15}C_2=\frac{15\cdot14}{2!}=105.$

例二.　求於 $a, b, c\ d, e\ f, g, h, i$ 之九文字中,用 2 個母音與 5 個子音所聯成之字數有幾.

由母音 3 個中任意取出 2 個之方法,有 ${}_3C_2$ 種.由子音 6 個中任意取出 5 個之方法,有 ${}_6C_5$ 種.故於所與之九文字中選出 2 母音與 5 子音之方法,共有 ${}_3C_2\times{}_6C_5$ 種.由此

各組合,每組合皆能排成 ${}_7P_7$ 個不同之單字.故所求之字數爲

$${}_3C_2\times{}_6C_5\times{}_7P_7=3\times6\times7!=90720.$$

例三. 證明 ${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$.

上式由公式 ${}_nC_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, 可以得知其相等.亦可依下法以證明之.

將含 n 個文字之 r 組合全體分爲二羣.

〔第一羣〕含特別之某一文字者.〔第二羣〕不含特別之某一文字者.

於含特別某一文字之組合中,除去其特別之文字時,則成爲於所與 n 個文字中除去其文字而由其餘之 $n-1$ 個中,任取 $r-1$ 個所之成組合.此種組合之數,爲 ${}_{n-1}C_{r-1}$ 個故屬於第一羣組合之數,亦爲 ${}_{n-1}C_{r-1}$ 個.

屬於第二羣之組合,不外由所與 n 個文字中,除去某特別文字後,於其剩餘之 $n-1$ 個文字中,任取 r 個所成之組合.故屬於此羣之組合,其數爲 ${}_{n-1}C_r$ 個

第一羣之組合數與第二羣組合數之和,不可不爲 ${}_nC_r$.故得

$${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r.$$

73. 求由全體不相異之 n 個物體中一次取出 r 個所得之組合及順列數

i、 $r=n$ 時，此時組合之數爲 1 甚明.

如欲求此時順列之數時,則須先行說明下例.

例. 求以 1, 1, 1, 2, 3, 4 六數字所作之六位數有幾.

於此六數字所成六位數中之一,將與 2, 3, 4 相異之三數字例如 5, 6, 7 代入於其中之 1, 1, 1 處時,則可得由 2, 3, 4, 5, 6, 7 六數字所成之六位數 3! 個.若於最初所成之六位數中乘施同樣之方法時,則可得 2, 3, 4, 5, 6, 7 六數字所成六位數之全體.設以 x 表最初六數字所成六位數之個數,則因之得

$$3!\times x=6!,$$

$$\therefore\quad x=\frac{6!}{3!}=120.$$

由上例之同樣推理,因之得一結論如下.

$a, b, c\cdots\cdots\cdots\cdots$ 爲相異文字,於 n 個文字中,其 p 個與 a 相同, q 個與 b 相同, r 個與 c 相同,以下類推時,則以此諸文字之全體作成之順列,其數爲

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots\cdots}.$$

ii $r<n$ 時

表此時組合及順列之數之公式甚爲複雜,茲以例示其計算之方法於下.

例. 求以 *Species* 中之五文字作成之組合及順列之數有幾.

所與之文字爲 $S\ S, e, e\ c, i, p$ 七個.應選出之文字爲(a)含相同文字之二組,(b)含相同文字之一組.(c)全不含相同之文字之三類.

(a)含相同文字 S, S, e, e 二組時 ——此時於 c, i, p 三文字中再行取出一文字即可.故組合之數爲 3,順列之數爲 $3\times\frac{5!}{2!2!}$.

(b)含相同文字之一組時 —— 如含 S, S 時,則於 e, c, i, p 四文字中尚應再行取出三個.故組合之數爲 ${}_4C_3$,順列之數爲 ${}_4C_3\times\frac{5!}{2!}$.

如含 e, e 時,其數亦相等.故(b)時組合之數爲 $2\times{}_4C_3$,順列之數爲 $2\times{}_4C_3\times\frac{5!}{2!}$.

(c)完全不含相同之文字時 —— 組合之數爲 1,順列之數爲 5!.

總括(a)(b)(c)三方面,因之得

$$\text{所求組合之數}=3+2\times{}_4C_3+1=12,$$

$$\text{所求順列之數}=3\times\frac{5!}{2!2!}+2\times{}_4C_3\times\frac{5!}{2!}+5!=690.$$

74. 允許同一物件得重複取出時之順列及組合數

(I) 於允許重複取出之規定下,由 n 個物件中一次各取出 r 個所得之順列數,通常皆以 ${}_nH_r$ 表之.

例. 求僅用有效數字所作成之三位數,其數有幾.

於 1, 2, 3…………,9 之九個文字中,任意取出三個（但

同一數字得任取數次）排成一列時,卽得所求之數.因其占第一位之數字,於九個數字中任何數字均可;占第二位之數字,於九個數字中任何數字均可;占第三位之數字,於九個數字中任何數字亦可.故所求之數爲9×9×9卽9^3.

由上例,得 ${}_9\Pi_3=9^3$. 與此例相同,一般可證明

$${}_n\Pi_r=n^r.$$

(II) 於允許重複取出之規定下,由 n 個物件中一次各取出r個所得之組合數,通常皆以 ${}_nH_r$ 表之.

例. 於1, 2, 3, 4四數字中,允許其相同文字可以重複取出時,求一次取出三個所作成之組合數.

此組合中必有如112, 222, 234,………… 等排列者,於此等組合中,如將其較大數字置於較小數字之右側,排成一列後,（例如不書211而書112是）再加0於左端之數,加1於中央之數,加2於右端之數,則得由1, 2, 3, 4, 5, 6六數字中無重複的一次取出三個所得之組合.（例如由112,得124由222得234,由234得246是.）

於1, 2, 3, 4四數字中允許重複取出一次取出三個所成之組合皆行同樣之方法時,則應生出1, 2, 3, 4, 5, 6六數字中無重複的一次取出三個所得組合之全部,且僅此全部.故

$${}_4H_3={}_{4+(3-1)}C_3.$$

由同樣推理,因得一一般之結果於下.卽

$$ {}_{n}H_{r}={}_{n+r-1}C_{r}=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-1)}{r!}. $$

75. 類似問題 下列問題,雖可由與求順列組合等完全不同之方法以解之,因其表面上甚爲類似,故揭之於下.

例一. 有位於平面上之 n 直線,其中無二線相平行及三線交於一點之事.證明此等直線分其平面爲$\frac{1}{2}(n^2+n+2)$部分.

今以 $f(n)$ 表 n 直線所分平面部分之數時,則 $(n-1)$ 直線所分平面部分之數可以 $f(n-1)$ 表之.設於 $(n-1)$ 直線所分 $f(n-1)$ 個部分之平面上,再引一與此等直線中任何線皆不平行且不經過此等直線交點之直線時,則此直線與 $(n-1)$ 直線交於 $(n-1)$ 點.因而於 $f(n-1)$ 個區分中,再行增加 n 個區分.故得

$$
\begin{aligned}
f(n)&=n+f(n-1),\\
f(n-1)&=(n-1)+f(n-2),\\
\cdots\cdots\cdots&=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
\cdots\cdots\cdots&=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
f(2)&=2+f(1),\\
f(1)&=2.
\end{aligned}
$$

將上列諸等式邊邊相加,得

$$f(n)=n+(n-1)+\cdots\cdots+2+1+1$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)+1 \quad S=\frac{1}{2}n(a+l)$$

$$=\frac{1}{2}(n^2+n+2).$$

例二. 有致 n 人之信 n 封,設封信時將信與信封誤置,求其錯誤之方法有幾.

設 n 信爲致 $a, b, c\cdots\cdots$ 之 n 人者,其與信對應之信封爲 $a', b', c', \cdots\cdots\cdots\cdots$, 其錯誤之方法爲 $f(n)$.

如 a 誤封入於 $(n-1)$ 個信封 $b', c', \cdots\cdots\cdots$ 之任一封中,例如 a 封入於 k' 中,則 k 封入於 a' 時,其 a' 及 k' 二封旣已差誤,故其他各封錯誤之數爲 $f(n-2)$.

又 a 封入於 k' 中而 k' 不在 a 內時,則其他各封錯誤之數爲 $f(n-1)$.

故得 a 誤封入於 k' 時,其錯誤之數爲

$$f(n-2)+f(n-1).$$

由同理,a 誤封入於 k 外之 $b', c'\cdots\cdots$ 中之一時,其錯誤之數亦相同.故 a 誤封入於 $b', c', \cdots\cdots k', \cdots\cdots$ 之 $(n-1)$ 封之信封內時,其錯誤之總數爲 $(n-1)\{f(n-1)+f(n-2)\}$.由之得

$$f(n)=(n-1)\{f(n-1)+f(n-2)\},$$

$$\therefore\ f(n)-nf(n-1)=-\{f(n-1)-(n-1)f(n-2)\}.$$

同理， $f(n-1)-(n-1)f(n-2)=-\{f(n-2)-(n-2)f(n-3)\}$,

$$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$f(3)-3f(2)=-\{f(2)-2f(1)\}.$$

因信與封各祇一件時,則無錯誤.故 $f(1)=0$. 又信與封各二時,其錯誤僅一次.故 $f(2)=1$.

$$\therefore\quad f(3)-3f(2)=-\{1-0\}=(-1)^3,$$

$$f(4)-4f(3)=-\{f(3)-3f(2)\}=(-1)^4,$$

$$\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots,$$

$$f(x)-nf(n-1)=(-1)^n.$$

由此得

$$\frac{f(n)}{n!}-\frac{f(n-1)}{(n-1)!}=(-1)^n\cdot\frac{1}{n!},$$

$$\frac{f(n-1)}{(n-1)!}-\frac{f(n-2)}{(n-2)!}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(n-1)!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{f(2)}{2!}-\frac{f(1)}{1!}=(-1)^2\cdot\frac{1}{2!}.$$

將上列諸等式邊邊相加,得

$$f(n)=n!\left\{\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right\}.$$

卽所求之錯誤數也.

問題十七

1. 求以 0, 1, 2, 3, 4 五數字能作成五位之數若干. $C^4_1 \cdot 4!$

2. 求以 1, 2, 5, 8 四數字能作成若干個奇數. $C^2_1 \cdot 3!$

3. 有專能漕右舷者四人,專能漕左舷者四人,共載於八人共漕之小舟上.其位置之分配方法有幾. $4! \cdot 4!$

4 求以構成 *equation* 一語之文字以聯成其他單語時,設不變更其子音之順序,求其所成單語之數. ✓

5. 有由三冊組成之書二部,二冊組成之書二部,同置於一書架上.設其同屬一部之書籍不互相分離時,其方法有幾.

$4! \cdot \underbrace{3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2!} = 3456$

部内的順序, 分別之排列

6. 以絲線貫穿七色之珠七枚作成珠輪時,其方法有幾. $(7-1)!/2 = 360$

7. 有大人與小兒各五人圍坐於一圓桌上,其方法有幾.但小兒不許互相鄰接. $(5-1)!$

8. 有乘載五十六人之列車,而搭客計有六十人.求能乘坐列車之組數有幾.又一人能加入之組數有幾. $C^{60}_{56} = 487635$. $C^{59}_{55} = 455126$ [illegible]

9. 有將校 10 人下士 12 人兵卒 18 人.今欲編成將校 5 人下士 8 人兵卒 10 人之隊伍.其編制之方法有幾.

10. 有互異之子音 7 個,互異之母音 4 個.今以子音 3 個母音 2 個聯成單語時,其字數有幾.

11. 有德文書 7 冊,英文書 3 冊,於其中選出德文書 4 冊英文書 1 冊,置於書架上,而使英文書常居中部時,其方法有幾. ✓

$C_5^6 \cdot (5-1)!$

12. 於 6 人中選出 5 人使作環狀順列時,其種類有幾.

13. 投 n 個骰子時,其出現點數之排列,共有幾種.

14. 有十分銀幣,五分白銅幣,及一分銅幣各在五個以上,求由其中選取五枚之方法有幾.

15. 有數字 7, 8, 9 三個,如能重複取用時,則於用此數字排成之數中,其位數不較 4 爲多之數有幾.

16. 求以 9 個有效數字排成之三位整數有幾.

17. 以信 5 封投入於郵筒 3 個之方法有幾.

18. 某會選舉會長一名,計有選舉權者 12 名,被選舉權者 3 名.求其選舉之方法有幾種.

19. 某平面上有三點不同在一直線上之點 n 個,求連結二點時所得之直線有幾.

20. 於空間有 n 個平面,其中無平行之二面,亦無同交於一直線之三面,及同交於一點之四面.求空間爲此諸平面分爲若干部分.

21. 有通過球之中心之 n 個平面;設其中無同含一直徑之三平面時,則球之表面爲此諸平面分爲若干部分

第十四章　二項定理及多項定理

76. 二項定理

置　$f(x)=(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\cdots\cdots\cdots(x+a_n)$.

而將其右邊實行乘法之計算時;其 x^n 之係數爲 1, x^{n-1} 之係數爲 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 之和, x^{n-2} 之係數爲於此 n 個數中各取二個所作乘積之和.一般其 x^{n-r} 之係數皆等於由此 n 個數中各取 r 個所作乘積之和,故如置

$$\left.\begin{array}{l} A_1=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n \\ A_2=a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+\cdots\cdots+a_1a_n \\ \qquad\quad +a_2a_3+a_2a_4+\cdots\cdots+a_2a_n \\ \qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +a_{n-1}a_n \\ A_3=a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+\cdots\cdots+\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +a_{n-2}a_{n-1}a_n \\ \qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n=a_1a_2a_3\cdots\cdots\cdots a_n \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(1)$$

時,則得 $f(x)=x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots\cdots+A_rx^{n-r}$

$+\cdots\cdots+A_n.$

其(1)式中之 A_1 含 ${}_nC_1$ 個項, A_2 含 ${}_nC_2$ 個項.一般 A_r 則含 ${}_nC_r$ 個項.故置

$$a_1=a_2=a_3=\cdots\cdots\cdots\cdots=a_n=a$$

時,因得下式之關係.

$$(x+a)^n=x^n+{}_nC_1ax^{n-1}+{}_nC_2a^2x^{n-2}+\cdots\cdots$$
$$+{}_nC_ra^rx^{n-r}+\cdots\cdots+a^n\cdots\cdots(2)$$

上式之關係,謂之二項定理.其右邊謂之左邊之展開式

例如 $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2,$

$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3,$

$(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4,$

$(x+a)^5=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5,$

$\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$

$\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

等是.

此定理亦可直接用數學的歸納法證明之如下

$n=1$ 時,此定理能成立甚明.

今假定 $n=m$ 時,此定理亦能成立.則

$$(x+a)^m=x^m+{}_mC_1ax^{m-1}+{}_mC_2a^2x^{m-2}+\cdots\cdots$$
$$+{}_mC_ra^rx^{m-r}+\cdots\cdots+a^m.$$

以$x+a$乘其兩邊,得

$$(x+a)^{m+1}=x^{m+1}+({}_mC_1+1)ax^m+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+({}_mC_r+{}_mC_{r-1})a^rx^{m-r+1}+\cdots\cdots\cdots$$
$$+a^{m+1}.$$

然 ${}_mC_r+{}_mC_{r-1}={}_{m+1}C_r$.（第七十二節例三）

$$\therefore\quad (x+a)^{m+1}=x^{m+1}+{}_{m+1}C_1ax^m+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+{}_{m+1}C_ra^rx^{m-r+1}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+a^{m+1}.$$

此卽示明 $n=m+1$ 時,本定理亦能成立也.故由數學的歸納法,本定理無論何時,皆能成立.

如規定0!及 ${}_nC_0$ 爲 1 時,則有時可得種種之便利.例如於此規約之下,其

$${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}={}_nC_{n-r}.$$

可謂之對於 $r=0, 1, 2, \cdots\cdots\cdots\cdots, n$ 時,皆能成立是.用此規約時,二項定理可簡書之如下.

$$(x+a)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_ra^rx^{n-r}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

或 $$(x+a)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_rx^ra^{n-r}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

Σ 之符號係表諸項之和,例如 $\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r$ 表於 ${}_nC_r$ 公式中順次置 $r=1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ 時所得各項之和是.

其(3)式爲將 $(x+a)^n$ 順 x 之降冪展開之者,(4)式則爲

將 $(x+a)^n$ 順 x 之昇冪展開之者.又(3)式之 ${}_nC_ra^rx^{n-r}$ 及(4)式之 ${}_nC_rx^ra^{n-r}$, 謂之一般項.

於(4)式,置 $a=1$ 時,則得

$$(1+x)^n=1+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+{}_nC_rx^r\cdots\cdots+x^n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

反之,如於此關係式,置 $\frac{x}{a}$ 以代 x 再以 a^n 乘其兩邊時,則得(4)式之關係.故(4)與(5)可視爲同表一事項之關係式.故(5)式亦可稱之爲二項定理.

於(5)式之展開式,可知由初項及末項數起,凡項數相同之項,其係數必相等.

於二項定理,如得知 $(1+x)^n$ 之展開式時,則 $(1+x)^{n+1}$ 之展開式可機械的書出之.例如知

$$(1+x)^n=1+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+C_rx^r+\cdots\cdots\cdot$$

時,則

$$(1+x)^{n+1}=1+(1+c_1)x+(c_1+c_2)x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(C_{r-1}+C_r)x^r+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

是卽於 $(1+x)^{n+1}$ 之展開式,其 x^r 之係數,等於 $(1+x)^n$ 之展開式 x^{r-1} 之係數 C_{r-1} 與 x^r 之係數 C_r 之和,例如由

$$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3,$$

得

$$(1+x)^4=1+(1+3)x+(3+3)x^2+(3+1)x^3+x^4$$
$$=1+4x+6x^2+4x^3+x^4,$$

同理,得

$$(1+x)^5=1+(1+4)x+(4+6)x^2+(6+4)x$$

$$+(4+1)x^4+x^5=1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5,$$

$$(1+x)^6=1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$$

等是.

例 求$\left(2x^2-\dfrac{1}{3x}\right)^6$之展開式中$x^3$之係數.

$$(\tfrac{1}{x})^r = x^{-r}$$

$$\text{一般項}={}_6C_r\overbrace{(2x^2)^{6-r}}^{x^{n-2r}}\left(-\frac{1}{3x}\right)^r=(-1)^r{}_6C_r\cdot\frac{2^{6-r}}{3^r}\cdot x^{12-3r}.$$

由$12-3r=3$得$r=3$.將此r之值代入於上式時卽得x^3之項.故

$$\text{所求之係數}=(-1)^3{}_6C_3\cdot\frac{2^3}{3^3}=-\frac{160}{27}.$$

77. $(1+x)^n$ 展開式中之最大係數及最大項

$(1+x)^n$ 之展開式中之係數爲$1, {}_nC_1, {}_nC_2, \cdots\cdots, {}_nC_r\cdots\cdots\cdots$等,其第$r+1$項之係數爲${}_nC_r$,故比較${}_nC_r$與${}_nC_{r-1}$時,得

$$\frac{{}_nC_r}{{}_nC_{r-1}}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}\bigg/\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}$$

$$=\frac{n-r+1}{r}.$$

可知${}_nC_r$隨

$$\frac{n-r+1}{r}\gtreqless 1,\quad \text{卽}\quad \frac{a+1}{2}\gtreqless r.$$

而大於,等於,或小於${}_nC_{r-1}$.故順次將$1, 2, 3\cdots\cdots$等値代入於r時,則${}_nC_r$初時漸次增大,待r之値增至較$\frac{1}{2}(n+1)$

爲大時,則復行漸次減小.設$\frac{1}{2}(n+1)$爲整數,（即 n 爲奇數時）則於 $r=\frac{1}{2}(n+1)$ 時,其 ${}_nC_r={}_nC_{r-1}$ 較其他係數爲大.設$\frac{1}{2}(n+1)$不爲整數,（即 n 爲偶數時）則對於滿足$\frac{n+1}{2}>r$之 r 最大値,（換言之即於 $r=\frac{n}{2}$ 時）其 ${}_nC_r$ 爲最大.故無論何時,皆以其中央之二項或中央之一項之係數爲最大.

次設 $x>0$ 時,於 $(1+x)^n$ 之昇羃展開式將其第 $r+1$ 項與第 r 項比較之.此時如以μ_r表第 $r+1$ 項時,則得

$$\frac{\mu_r}{\mu_{r-1}}=\frac{{}_nC_r x_r}{{}_nC_{r-1}x^{r-1}}=\frac{n-r+1}{r}x$$

可知μ_r隨

$$\frac{n-r+1}{r}x\gtreqless 1, \quad \text{即} \quad \frac{n+1}{1+x}x\gtreqless r.$$

而大於,等於,或小於μ_{r-1} 故與上述之理論完全相同,得一結論於下.

設 $\frac{n+1}{1+n}x$ 爲整數則於 $r=\frac{n+1}{1+x}x$ 時,其 $\mu_r=\mu_{r-1}$ 較其他各項爲大.設 $\frac{n+1}{1+x}x$ 不爲整數,則對於滿足 $\frac{n+1}{1+x}x<r$ 之 r 最大整數値,其μ_r爲最大.但此時常有最初之項或最後之項爲最大者.

例. 求$\left(1+\frac{2}{3}\right)^{10}$展開式中之最大項.

$$\text{因}\frac{n+1}{1+x}x=\frac{10+1}{1+\frac{2}{3}}\times\frac{2}{3}=\frac{22}{5}$$

不爲整數,而滿足 $\frac{22}{5}>r$ 之 r 最大值爲 4,故 μ_4 即其第五項爲最大項.

78. 二項係數之性質 於 $(1+x)^n$ 之展開式

$$(1+x)^n=1+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

中,其 1, ${}_nC_1$, ${}_nC_2$, ………… 等,謂之二項係數.

二項係數間之關係,雖可用 ${}_nC_r$ 之公式以證明之,但以直接用二項定理證明之者,較爲簡單,茲證明之於下.

爲便利起見,置 ${}_nC_r=C_r$ 時,則

$$(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots\cdots+C_rx^r+\cdots\cdots$$
$$+C_nx^n\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(I) 置 $x=1$ 時,則得

$$2^n=C_0+C_1+C_2++\cdots\cdots-+C_n.$$

即 $(1+x)^n$ 展開式之各項係數之和等於 2^n.

(II) 置 $x=-1$ 時,則得

$$(1-1)^n=C_0-C_1+C_2-\cdots\cdots+(-1)^nC_n$$

$$\therefore\quad 0=(C_0+C_2+C_4+\cdots\cdots)-(C_1+C_3+C_5+\cdots\cdots),$$

即 $$C_0+C_2+C_4+\cdots\cdots=C_1+C_3+C_5+\cdots\cdots.$$

即 $(1+x)^n$ 展開式奇數項係數之和,等於其偶數項係數之和.

(III) 因 $C_r=C_{n-r}$, 故得

$$(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots\cdots+C_rx^r+\cdots\cdots+C_nx^n$$

與 $$(1+x)^n=C_n+C_{n-1}x+C_{n-2}x^2+\cdots\cdots+C_{n-r}x^r+\cdots\cdots+C_0x^n.$$

上列二展開式相乘積之 x^n 項之係數,爲

$$C_0^2+C_1^2+C_2^2+\cdots\cdots+C_n^2.$$

由二十一節定理 2 之系 3,其

$$C_0^2+C_1^2+C_2^2+\cdots\cdots+C_r^2+\cdots\cdots+C_n^2$$

亦等於 $(1+x)^n\times(1+x)^n$ 之 x^n 之係數,卽等於 $(1+x)^{2n}$ 之 x^n 之係數.但此係數爲 $\frac{(2n)!}{n!n!}$,

$$\therefore\quad C_0^2+C_1^2+C_2^2+\cdots+C_r^2+\cdots+C_n^2=\frac{(2n)!}{n!n!}.$$

卽 $(1+x)^n$ 展開式中各項係數之平方和,等於 $\frac{(2n)!}{n!n!}$.

(IV) 如(III)所示,其

$$(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots\cdots+C_nx^n,$$

又 $$(1-x)^n=C_n-C_{n-1}x+C_{n-2}x^2+\cdots\cdots+(-1)^nC_0x^n.$$

上列二展開式相乘積之 x^n 項之係數爲

$$(-1)^n\{C_0^2-C_1^2+C_2^2-\cdots\cdots+(-1)^nC_n^2\},$$

又 $(1+x)^n\times(1-x)^n$ 卽 $(1-x^2)^n$ 之 x^n 之係數如 n 爲奇數時,爲 0; 如 n 爲偶數時,爲 $(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{n!}{(\frac{1}{2}n)!(\frac{1}{2}n)!}$.故

$$C_0^2-C_1^2+C_2^2-\cdots+(-1)^nC_n^2$$

之爲 0 爲 $(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{n!}{\{(\frac{1}{2}n)!\}^2}$,—隨 n 之爲奇爲偶而定.

例一. 證明 $C_1+2C_2+3C_3+\cdots+rC_r+\cdots+nC_n=n2^{n-1}$

$$C_1+2C_2+3C_3+\cdots\cdots\cdots+rC_r+\cdots\cdots\cdots+nC_n$$

$$=n+2\frac{n(n-1)}{1\cdot2}+3\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots+r\frac{n!}{r!(n-r)!}+\cdots\cdots+n$$

$$=n\{1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot2}+\cdots+\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}+\cdots+1\}$$

$$=n(1+1)^{n-1}=n2^{n-1}.$$

例二.　證明 $C_0-\frac{1}{2}C_1+\frac{1}{3}C_2-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{C_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$.

$$C_0-\frac{1}{2}C_1+\frac{1}{3}C_2-\cdots\cdots=1-\frac{1}{2}n+\frac{1}{3}\cdot\frac{n(n-1)}{1\cdot2}-\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{n+1}\{n+1-\frac{(n+1)n}{1\cdot2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot2\cdot3}-\cdots\cdots+(-1)^n\}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\{1-(n+1)+\frac{(n+1)n}{1\cdot2}-\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot2\cdot3}$$

$$+\cdots\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}(1-1)^{n+1}=\frac{1}{n+1}.$$

例三.　設 n 爲任何正整數證明

$$\frac{C_0}{x}-\frac{C_1}{x+1}+\frac{C_2}{x+2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{C_n}{x+n}$$

$$=\frac{n!}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n)}.$$

因 $C_0={}_nC_0=1, C_1={}_nC_1, C_2={}_nC_2, \cdots\cdots$, 故如假定

$$\frac{1}{x}-\frac{{}_nC_1}{x+1}+\frac{{}_nC_2}{x+2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{{}_nC_n}{x+n}$$

$$=\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+n)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(1)$$

成立時,則以$x+1$代入於x,得

$$\frac{1}{x+1}-\frac{{}_nC_1}{x+2}+\frac{{}_nC_2}{x+3}-\cdots\cdots\cdots+(-1)^n\frac{{}_nC_n}{x+n+1}$$

$$=\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+n+1)}\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(2)$$

亦能成立.由(1)式減(2)式得

$$\frac{1}{x}-\frac{{}_nC_1+1}{x+1}+\frac{{}_nC_2+{}_nC_1}{x+2}-\cdots\cdots+(-1)^r\frac{{}_nC_r+{}_nC_{r-1}}{x+r}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{x+n+1}$$

$$=\frac{(n+1)!}{x(x+1)\cdots\cdots\cdots(x+n+1)}.$$

但對於r之各正整數值,其${}_nC_r+{}_nC\ {}_{-1}={}_{n+1}C_r$.故得

$$\frac{1}{x}-\frac{{}_{n+1}C_1}{x+1}+\frac{{}_{n+1}C_2}{x+2}-\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\frac{{}_{n+1}C_{n+1}}{x+n+1}$$

$$=\frac{(n+1)!}{x(x+1)\cdots\cdots\cdots(x+n+1)}.$$

可知如本題之恆等式對於n之某特別值能成立時,則對於其下位較大之數,亦能成立.然$n=1$時,則不論x之值如何,本題之恆等式皆能成立甚明.故其對於n爲任何正整數時,亦能成立.

如以特別數值代入於x,則即得$C_0, C_1, C_2,\cdots\cdots\cdots$等之關係式.例如置$x=1$時,得

$$\frac{C_0}{1}-\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{3}-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{1}{x+1}.$$

置 $x=\frac{1}{2}$ 時,得

$$\frac{C_0}{1}-\frac{C_1}{3}+\frac{C_2}{5}-\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{2^n\times n!}{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n+1)}$$

是.

79. 一般之二項定理　n 等於正整數時,其

$$(1+x)^n=1+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之關係能成立,旣如七十六節所證明.但 n 不爲正整數時,則當如何,自應成一問題.

n 等於正之分數或負之有理數（整數或分數）時,其 ${}_nC_r$ 失去由 n 個物件中取出 r 個所成組合之數之意義.此時如仍欲使符號 ${}_nC_r$ 成爲有意義時,則當以

$${}_nC_0=1,\ {}_nC_r=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}\quad(r=1,2,3\cdots\cdots)$$

爲其定義.當 ${}_nC_r$ 之定義如上所述決定後,則於 x 之絕對值小於 1 時,不論其 n 爲正之分數或負之有理數,下列之關係式,皆可證明其常能成立.

$$(1+x)^n=1+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

n 如不爲正整數時,則(1)式之右邊爲一無限級數.如此一無限級數之和等於 $(1+x)^n$ 云者,指加第二項 ${}_nC_1x$ 於初項 1 後,再加第三項 ${}_nC_2x^2$,如斯順次相加,其和可與 $(1+x)^n$ 接近至於任何程度也.(1)式之右邊,謂之其左邊之展開式.

又由(1)之展開式,如 x 之絕對值甚小時,則可取.

$$1,\ 1+{}_nC_1x,\ 1+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2,\cdots\cdots\cdots\cdots$$

等數以爲$(1+x)^n$之近似值.

例一. 求$(1-x)^{-3}$之展開式.

$${}_{-3}C_r=\frac{-3(-3-1)\cdots\cdots(-3-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}$$

$$=(-1)^r\frac{3\cdot4\cdot5\cdots\cdots(r+2)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}=(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)}{1\cdot2},$$

$$\therefore\quad (1-x)^{-3}=1-\frac{3}{1}(-x)+\frac{3\cdot4}{1\cdot2}x^2-\frac{4\cdot5}{1\cdot2}(-x)^3+\cdots\cdots\cdots$$

$$=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

例二. 求$(1+x)^{\frac{1}{2}}$之展開式.

$${}_{\frac{1}{2}}C_r=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots\cdots(\frac{1}{2}-r+1)}{r!}$$

$$=(-1)^{r-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2r-3)}{2^r\cdot r!}\quad(r=2,3,4\cdots\cdots)$$

$$\therefore\quad (1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2^2\cdot2!}x^2+\frac{1\cdot3}{2^3\cdot3!}x^3-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

例三. 試計算$\sqrt{99}$及$\sqrt[3]{30}$之近似值.

$$\sqrt{99}=10\left(1-\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=10\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{100}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{100}\right)^2+\cdots\cdots\cdots\right\}$$

$$=10\{1-0.005-0.0000125-\cdots\cdots\cdots\}$$

$$\fallingdotseq 9.949875.$$

$$\sqrt[3]{30}=3\left(\frac{30}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=3\left(\frac{27}{30}\right)^{-\frac{1}{3}}=3\left(1-\frac{1}{10}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$=3\left\{1+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{10}\right)+\frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3}-1)}{2!}\left(\frac{1}{10}\right)^2+\cdots\right\}$$

$$=3+0.1+0.00\dot{6}+\cdots\cdots\doteqdot 3.107.$$

80. 多項定理 設 n 爲正整數,則於

$$(a+b+c+d+\cdots\cdots\cdots\cdots+k)^n\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之展開式,欲求其 $a^pb^qc^r\cdots\cdots(p+q+r+\cdots\cdots=n)$ 之係數時,可先將(1)式改書成 $\{a+(b+c+d+\cdots\cdots+k)\}^n$,將此式依二項定理展開之,則其 a^p 之係數爲

$$\frac{n!}{p!(n-p)!}(b+c+d+\cdots\cdots\cdots\cdots+k)^{n-p}$$

次於 $(b+c+d+\cdots\cdots k)^{n-p}$ 之展開式,同樣,其 b^q 之係數爲

$$\frac{(n-p)!}{q!(n-p-q)!}(c+d+\cdots\cdots\cdots+k)^{n-p-q}.$$

如此順次計算之得(1)式展開式中 $a^pb^qc^r\cdots\cdots$ 之係數爲

$$\frac{n!}{p!(n-p)!}\times\frac{(n-p)!}{q!(n-p-q)!}\times\frac{(n-p-q)!}{r!(n-p-q-r)!}\times\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{n!}{p!q!r!\cdots\cdots\cdots\cdots}.$$

卽 $$(a+b+c+\cdots\cdots)^n=\Sigma\frac{n!}{p!q!r!\cdots\cdots}a^pb^qc^r\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

上式中之 Σ,表對於滿足

$$p+q+r+\cdots\cdots\cdots\cdots=n$$

之 $p,q,r\cdots\cdots$（0 或正整數）之各組之總和.此種關係式

謂之多項定理.

例一. 求 $(a+b+c)^3$ 之展開式.

a^3, b^3, c^3 之係數爲 1,甚明.又 $a^2b, a^2c, b^2a, \cdots\cdots$ 等之係數相等亦甚明.故

$$(a+b+c)^3=(a^3+b^3+c^3)+l(a^2b+a^2c+b^2c+b^2a$$
$$+c^2a+c^2b)+mabc.$$

由公式,求得

$$l=\frac{3!}{2!\,1!}=3. \quad m=\frac{3!}{1!\,1!\,1!}=6.$$

$$\therefore \quad (a+b+c)^3=\Sigma a^3+3\Sigma a^2b+6abc.$$

上式中之 Σ,表同形之項之和.

例二. 求 $(1+2x+3x^2+4x^3)^4$ 展開式中 x^3 之係數.

此展開式之一般項爲

$$\frac{4!}{p!q!r!s!}\cdot 1^p(2x)^q(3x^2)^r(4x^3)^S \quad (p+q+r+S=4)$$

$$=\frac{4!}{p!q!r!s!}2^q\cdot 3^r 4^S\cdot x^{q+2r+3S}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

設此項表 x^3 之項時,則

$$q+2r+3s=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

但 $$p+q+r+s=4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

故由(2)式及(3),求得 p, q, r, s 後代入於(1)式中,卽得 x^3 之項.

s	p	q	r
1	3	0	0
0	2	1	1
0	1	3	0

先由(2)式得 $s=1$ 或 $s=0$.

對於 $s=1$ 時,則 $q+2r=0$. 隨之得 $q=0$, $r=0$. 以此等值代入於(3)式中,得 $p=3$.

對於 $s=0$ 時,則 $q+2r=3$. 隨之得 $r=1$, $q=1$; 或 $r=0$, $q=3$. 故由(3)式,得 $r=1$, $q=1$ 時, $p=2$; 又 $r=0$, $q=3$ 時, $p=1$. 故得所求之係數爲

$$\frac{4!}{3!\,1!}\cdot 4+\frac{4!}{2!\,1!\,1!}\cdot 2\cdot 3+\frac{4!}{1!\,3!}\cdot 2^3=120.$$

問題十八

1. 試展開下列各式.

(a) $(a+b)^8$, (b) $(3x-y)^3$,

(c) $\left(3x-\frac{1}{3x}\right)^5$, (d) $\left(a^2-\frac{x}{a^3}\right)^{10}$.

2. 設 $\frac{1}{3}(n-2r)$ 不爲正整數時則 $(x+x^{-2})^{n-3}$ 之展開式中不含 x^{2r} 之項.

3. 求 $\left(x^2+\frac{a^3}{x}\right)^5$ 展開式中 x 之係數.

4. 設 $(a+b)^{20}$ 展開式中第 $3r$ 項之係數與第 $r+2$ 項之係數相等,求其係數之值.

5. 設 n 爲正整數時,證明

$$1-n\frac{1+x}{1+nx}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1+2x}{(1+nx)^2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$\cdot\frac{1+3x}{(1+nx)^3}+\cdots\cdots=0.$$

6.　設 $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$ 時,求 $(a+b)^{300}$ 展開式中之最大項.

7.　知 $(1+x)^n$ 展開式中連續三項之係數為6, 15, 20,求 n 之值.

8.　求下列各式展開式中之最大係數.

(a)　$(1+2x)^{20}$,　(b)　$(a+x)^9$,　(c)　$(a+x)^8$.

9.　展開下列各式至第五項.

(a)　$(1-x)^{-4}$,　(b)　$(1+2x)^{-4}$,　(c)　$(2-x)^{-3}$,

(d)　$(1-3x)^{-\frac{2}{3}}$.　(e)　$(1-5x)^{\frac{3}{5}}$.

10.　用二項定理求 99^4, 51^4, 999^3 之值.

11.　用二項定理求 $\sqrt[2]{110}$, $\sqrt[3]{130}$ $\sqrt[4]{630}$ 之近似值之小數第四位.

12.　求 $(1+2x+3x^2)^4$ 展開式中 x^5 之係數.

13.　求 $(2+x-x^2)^5$ 展開式中 x^8 之係數.

14.　求 $(7+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3$ 展開式中 x^{10} 之係數.

15.　證明 $C_0-2C_1+3C_2-\cdots\cdots+(-1)^n(n+1)C_n=0$.

16.　證明 $C_1-2C_2+3C_3-\cdots\cdots+(-1)^n nC_n=0$.

17.　證明 $C_0+2C_1+3C_2+\cdots\cdots+(n+1)C_n=2^{n-1}(n+2)$.

18.　證明 $C_2+2C_3+3C_4+\cdots\cdots+(n-1)C_n=1+(n-2)2^{n-1}$.

19.　證明 $C_0+3C_1+5C_2+\cdots\cdots+(2n+1)C_n=(n+1)2^n$.

20.　證明 $3C_1+7C_2+11C_3+\cdots\cdots+(4n-1)C_n=1+(2n-1)2^n$.

21.　證明 $(a+b+c+d)^4=\Sigma a^4+4\Sigma a^3b+6\Sigma a^2b^2+12$

$$\Sigma a^2bc+24abcd.$$

22.　用數學的歸納法證明.

$$(x+a)^n=x^n+C_1a(x+b)^{n-1}+C_2a(a-2b)(x+2b)^{n-2}+\cdots$$

$$\cdots\cdots+C_ra(a-b)^{r-1}(x+rb)^{n-r}+\cdots\cdots+a(a-nb)^{n-1}.$$

23.　用數學的歸納法證明

$$\frac{C_0}{x}-\frac{C_1}{x+1}+\frac{C_2}{x+2}-\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^n\frac{C_n}{x+n}$$

$$=\frac{n!}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n)}.$$

24.　用數學的歸納法證明

$$x^n+\frac{1}{x^n}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^n-n\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1\cdot 2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-4}-\cdots\cdots$$

$$\cdots+(-1)^r\frac{n(n-r-1)(n-r-2)\cdots(n-2r+\ )}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots r}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2r}+\cdots.$$

上式右邊最後之項如 n 爲偶數時則爲 $(-1)^{\frac{n}{2}}2$;如 n 爲奇數時,則爲 $(-1)^{\frac{n-1}{2}}n\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

或然率　通[illegible]性

第十五章　確率 probability

81.　確率之第一定義　有二事象,其一事象之生起,能期待與其他事象之生起同一程度時,則此二事象之生起,謂之同一確度.例如投一骰子,其 1 點之面以至於 6 點之面必有一面現出,而各面之現出能期待爲同一程度,故 1 點之面以至於 6 點之面,其各面現出,爲同一確度.

某事象於所有各機會之數 n 個能於 a 個之機會生起時,則其事象生起之確率或簡稱其事象之確率.謂之 $\frac{a}{n}$.但此等 n 個之機會,其生起之確度皆爲同一者.例如投一骰子時,對於其 1 點之面現出之事象,因 $a=1, n=6$,故其確率爲 $\frac{1}{6}$,又此時對於奇數點之面現出之事象,因 $a=3, n=6$ 故其確率爲 $\frac{3}{6}$ 是.此時 a 個之機會,謂之其事象生起成功之機會.其餘 $n-a$ 個之機會,謂之其事象失敗之機會.

由上述之定義,因得結論如下.

i.　一事象必定生起之確率爲 1,（因 $a=n$ 故也）其必不生起之確率爲 0.（因 $a=0$ 故也）

例如於置有白球之袋中任取一球時,則該球爲白球之

確率爲 1,爲黑球之確率爲 0 是.

ii. 一事象生起之確率爲 p 時,則其事象不生起之確率爲 $1-p$.

因一事象生起成功機會之數爲 a,所有各機會之數爲 n 時,則

$$p=\frac{a}{n}.$$

而其事象生起失敗機會之數爲 $n-a$ 故此事象失敗之確率爲

$$\frac{n-a}{n}, \quad \text{即} \quad 1-p$$

也.

例一. 有盛有白球三個黑球四個赤球五個之布袋,求下述三方面之確率.(i) 取出一球,其球爲白球;(ii) 取出二球,二球皆爲白球;(iii) 取出三球,二球爲白球,一球爲黑球.

(i) 取出一球時,其方法之數全體爲 12.而此中取出白球之次數爲 3.故其確率爲 $\frac{3}{12}$.

(ii) 取出二球時,其方法之數全體爲 ${}_{12}C_2$.而此中二球皆爲白球時之次數爲 ${}_3C_2$.故其確率爲

$$\frac{{}_3C_2}{{}_{12}C_2}=\frac{1}{22}.$$

(iii) 取出三球時,其方法之數全體爲 ${}_{12}C_3$.而此中二球爲白球,一球爲黑球時之次數爲 ${}_3C_2\times4$.故其確率爲

${}_3C_2\cdot C^4$

$$\frac{{}_3C_2\times 4}{{}_{12}C_3}=\frac{3}{55}.$$

例二. 置各附有 1, 2, 3 ……, n 之號碼之球 n 個,今於此袋中取出五球時,求下述二方面之確率.(i)附有 1, 2, 3 之號碼之球皆行取出.(ii) 附有 1, 2, 3 之號碼之球僅取出一個.

由 n 個球中取出五個之各種方法,其數為 ${}_nC_5$. 就中

(i) 附有 1, 2, 3 之號碼之三球皆在五球之內時,其數為 ${}_{n-3}C_2$.（因 1, 2, 3 三球以外之二球為 4, 5, 6……,n 等球中之球,而由 4 5, 6…… n 中取出二球之方法,其數為 ${}_{n-3}C_2$ 故也.）故其確率為

$\frac{{}_1C_1\times C_2}{{}_nC_5}$

$$\frac{{}_{n-3}C_2}{{}_nC_5}=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{n(n-1)(n-2)}.$$

(ii) 附有 1, 2, 3 之號碼之三球僅有一個在內時,其數為 $3\times{}_{n-3}C_4$.（因 1 在內時則 2, 3 不在其內,故 1 以外之四球為 4, 5, 6……,n 中之球,隨之其含 1 時之數為 ${}_{n-3}C_4$. 又含 2 或含 3 時,其數亦相等.故全體共為$3\times{}_{n-3}C_4$.）故其確率為

$\frac{{}_3C_1\times{}_{n-3}C_4}{{}_nC_5}$

$$\frac{3\times{}_{n-3}C_4}{{}_nC_5}=\frac{15(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)}.$$

例三. 投二骰子,求其現出二面之點之和為 8 時之確率.

將二骰子同時投擲時,其面之現出方法計共有 6^2 種,而

此 6^2 種現出方法,皆同其確度.就中二面點數之和爲 8 時,則如下表所示,共有 5 種.

第一骰子	2	3	4	5	6
第二骰子	6	5	4	3	2

故二面點數之和爲 8 之確率爲 $\frac{5}{6^2}$ 即 $\frac{5}{36}$.

又此題亦可另行解之如下.

將 $$(a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+b_5x^5+b_6x^6)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

二式相乘時,其 x^8 之係數爲

$$(a_2b_6+a_3b_5+a_4b_4+a_5b_3+a_6b_2)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

將上式各項之添數與前表相比較時,可知其中項數等於投二骰子其二面點數之和爲 8 時之數.隨之投二骰子其二面點數之和爲 8 時之數等於

$$a_2=a_3=a_4=a_5=a_6=1,$$

$$b_2=b_3=b_4=b_5=b_6=1$$

時(3)式之數值,或置

$$a_1=a_2=a_3=\cdots\cdots=a_6=1,$$

$$b_1=b_2=b_3\cdots\cdots=b_6=1$$

時(1)(2)二式之積中 x^8 之係數.如將此積計算之,則爲

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2=x^2\frac{(1-x^6)^2}{(1-x)^2}$$

$$=x^2(1-2x^6+x^{12})(1+2x+\cdots\cdots+7x^6+\cdots\cdots)$$

$$=x^2+\cdots\cdots+5x^8+\cdots\cdots.$$

故得二面點數之和爲 8 時之數爲 5.可知所求之確率爲$\frac{5}{36}$.

82. 確率之第二定義 有盛入m個球之布袋,設其球中之k個爲白球.今於此袋中取出一球後再行納入於袋中,第二次復行取出一球後再行納入於袋中,第三次復行取出一球後再行納入於袋中,如此取納以迄於N次.設N之值非常之大時,則白球被取出之次數,殆等於全體次數之$\frac{k}{m}$.即假設$N_1, N_2,\cdots\cdots$等爲非常大之數,如上所述,將一球出納$N_1, N_2,\cdots\cdots$等次,如白球被取出之次數各爲$r_1, r_2,\cdots\cdots$,則

$$\frac{r_1}{N_1},\ \frac{r_2}{N_2},\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

等分數皆殆等於$\frac{k}{m}$.（參照後述八十八節大數之法則）

故設某袋中有球m個,其中白球究有若干不得而知時,設N爲非常大之數,則如上述之方法,將一球取出復行納入N次,如其白球被取出之次數爲r,則分數$\frac{r}{N}$必與$0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m},\cdots\cdots,\frac{m-1}{m}$, 1 之任一數大約相等.設$\frac{r}{N}$與$\frac{k}{m}$大約相等時,則設想其袋中之白球爲$k$個,決無大差.（但袋與球不能有任何裝置,如有裝置時,則$\frac{r}{N}$當然不能與$0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}\cdots\cdots$, 1 中之任一數近似的相等.）

又用如後所論之柏玆之定理時,設一袋中盛有m個球,其中白球個數不能明瞭時,則如上所述,將其中之球出納N次,(N爲非常大之數)如其白球之被取出次數爲r,而$\frac{r}{N}$大略與$\frac{k}{m}$相等時,則可證明其以後一次試行時白球被取出之確率大略等於$\frac{k}{m}$.

總合上述之事實,設N爲非常大之數,於N次試行中某事象生起之次數爲r時,則分數$\frac{r}{N}$大略有其一定之值.而此值得視爲代表其後一次試行其事象生起之確率.故得以此值爲確率之定義,此卽確率之第二定義也.

將一骰子投擲至非常多之次數時,如其骰子之構造處處皆同,則其1點之面現出之次數,殆等於全體現出次數之$\frac{1}{6}$.又不正之骰子如投擲至非常多之次數時,則其1點之面現出之次數,與其全次數之比,亦略有一定之值.此比卽其骰子1點之面之現出確率也.

又由死亡生存表,設20歲之人93268人中,其達於30歲尙行健在者爲86292人時,則以此事實爲基礎,得20歲之人此後10年間生存之確率爲$\frac{86292}{93268}$云者,亦係由此確率之第二定義所得者.

如此可知第二定義(或謂之經驗的定義)於不能由第一定義(或謂之數學的定義)以決定時,尙能確定其確率之意義.

排斥的事象

83. 反排事象之確率 有二個以上之事象,如其中之一事象生起,則其他之事象決不能生起時,此等事象,謂之互相反排例.如投一骰子時,其 1 點之面現出與 2 點之面現出互相反排是.

定理 設 $E_1, E_2, \cdots\cdots\cdots\cdots, E_m$ 爲互相反排事象,其諸事象之確率各爲 $p_1, p_2, \cdots\cdots\cdots\cdots, p_m$ 時,則此等事象中任一事象生起之確率爲 $p_1+p_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+p_m$.

例如投一骰子時,其 1 點之面 3 點之面與 5 點之面現出之確率各爲 $\frac{1}{6}$,而此三事象彼此互相反排,故點數爲奇數之面之現出確率,爲 $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$ 卽 $\frac{1}{2}$ 是.

此定理之證明如下.

設全體機會之數爲 n,則 E_1 於 np_1 個機會生起,E_2 於 np_2 個機會生起,以下皆同.而此等事象同時不能有二個以上生起,故此等事象中之任一事象,應於 $np_1+np_2\cdots\cdots\cdots+np_m$ 個之機會生起.故其確率爲

$$\frac{np_1+np_2+\cdots\cdots+np_m}{n}=p_1+p_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+p_m.$$

84. 獨立事象及從屬事象之確率 有二個以上之事象,如其中某事象不拘其生起與否,其他事象生起之確率,皆一定不變時,則此等事象謂之彼此獨立.否則謂之互相從屬.

連續二次投一骰子時,其第一次 1 點之面之現出與第

二次1點之面之現出,爲彼此獨立.又由盛有白球三個,黑球四個之袋中,連續二次各取出一球時,其第一次之白球現出與第二次之白球現出則爲互相從屬.因設第一次取出者爲白球時,則第二次白球現出之確率爲$\frac{2}{6}$;而第一次取出者非白球時,則第二次白球現出之確率爲$\frac{3}{6}$故也.

獨立事象與從屬事象,有時總括之稱爲複合事象者.茲將關於獨立事象與從屬事象之定理述之於下.

定理1. 設$E_1, E_2, \cdots\cdots, E_m$爲獨立事象,其確率各爲$p_1, p_2, \cdots\cdots, p_m$時,則此等事象悉數生起之確率爲$p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots\cdots \cdot p_m$

例如連續二次投一骰子時其1點之面連續現出二次之確率爲$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$即$\frac{1}{36}$是

定理2. 設$E_1\ E_2, \cdots\cdots, E_m$爲從屬事象,其$E_1$之確率爲$p_1$,假定$E_1$生起後$E_2$之確率爲$p_2$,又假定$E_1, E_2$皆生起後$E_3$之確率爲$p_3$,如此順次類推時,則$E_1, E_2, \cdots\cdots, E_m$悉數生起之確率爲$p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots\cdots \cdot p_m$.

例如有盛入白球三個黑球四個之布袋,今於其中連續二次各取出一球時,則白球連續二次被取出之確率爲

$$\frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$$

是.

上述二定理之證明,完全相同.茲將$m=2$時之證明法,揭

之於下.至其一般之定理,則可用數學的歸納法以證明之.

設 E_1, E_2 爲二個之獨立事象或二個之從屬事象,

E_1, E_2 共同生起時之數爲 α,

E_1 生起 E_2 不生起時之數爲 β,

E_1 不生起 E_2 生起時之數爲 γ,

E_1, E_2 共同皆不生起時之數爲 δ,

但此等 $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ 個機會,其生起之確度皆屬相同.

因所有各機會之數爲 $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, 其 E_1, E_2 共同生起時之數爲 α, 故設以 p 表 E_1, E_2 雙方皆行生起時之確率, 則

$$p=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}.$$

又於 E_1 生起之所有機會,其 E_2 生起時之數爲 α, E_2 不生起時之數爲 β. 故 E_1 生起之確率 p_1, 爲

$$p_1=\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}.$$

如 E_1 生起時,則 E_2 於 $\alpha+\beta$ 個機會中之 α 個生起之.故其確率 p_2 爲

$$p_2=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

因之得 $p=p_1p_2.$

85. 例解

例一. 有 A, B 二袋, A 袋中盛有白球三個黑球五個, B

袋中盛有白球四個黑球六個.今任意置手於二袋中之一袋取出二球時,求其二球皆爲白球之確率.

先求置手於A B二袋中之一袋之確率,得置手於A袋中之確率爲$\frac{1}{2}$.

設手置入於A袋中時,則其取出二白球之確率爲

$$\frac{{}_3C_2}{{}_8C_2}=\frac{3}{28}.$$

故得置手於A袋中取出二白球之確率爲

$$\frac{1}{2}\times\frac{C_2}{{}_8C_2}=\frac{3}{56}.$$

同樣,置手於B袋中取出二白球之確率爲

$$\frac{1}{2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{15}.$$

但置手於A袋中與置手於B袋中爲反排事象,故得所求之確率爲

$$\frac{3}{56}+\frac{1}{15}=\frac{101}{840}.$$

例二. 甲解問題之確率爲$\frac{1}{4}$乙解問題之確率爲$\frac{2}{3}$,今使二人同解一問題時,求其解之確率如何.

因　　甲解問題之確率爲$\frac{1}{4}$,乙解問題之確率爲$\frac{2}{3}$,

故　　甲不能解問題之確率爲$\frac{3}{4}$

　　　乙不能解問題之確率爲$\frac{1}{3}$,

隨之得甲乙二人共能解之確率$=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}$,

甲能解,乙不能解之確率$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$,

乙能解,甲不能解之確率$=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$.

因上述之三方面互相反排,故甲乙二人中最少有一人能解之確率,爲上述三確率之和.卽

$$\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}.$$

此問題亦可解之如下.

甲不能解之確率爲$\frac{3}{4}$,

乙不能解之確率爲$\frac{1}{3}$,

故甲乙二人皆不能解之確率$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$.

隨之得甲乙二人中至少有一人能解之確率爲

$$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

二反排事象A, B,其A, B二事象中必有一事象生起時,則此二事象謂之互爲餘事象.投一骰子時,其奇數點面之現出與偶數點面之現出,卽互爲餘事象也.

餘事象確率之和爲1,如例2之第二解法,卽係利用此種性質者.因甲乙二人中至少有一人能解之事象,與甲乙二人皆不能解之事象互爲餘事象;而由1減去甲乙二人皆不能解之確率時,卽得甲乙二人中至少有一人能解之確率也.

例三. 有A, B二人,依A, B之順序順次投擲骰子,公約

最初投得骰面之點爲 1 者勝.求 A,B 二人獲勝之確率如何.

A 之獲勝時如下.

第一次 A 投之,其現出之面爲 1 點時.第一次 A 投之其現出之面不爲 1 點,第二次 B 投之,其現出之面亦不爲 1 點,待第三次 A 投之,其現出之面爲 1 點時.即第三次現出之面始爲 1 點時.第四次現出之面不爲 1 點,第五次現出之面始爲 1 點時.以下依此類推.

第一次現出之面爲 1 點之確率$=\frac{1}{6}$.

第三次現出之面始爲 1 點之確率$=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$.

第五次現出之面始爲 1 點之確率$=\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{6}$.

以下依此類推.

但此等事象皆彼此反排,故設 A 之獲勝確率爲 p 時,則

$$p=\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{6}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-(\frac{5}{6})^2}=\frac{6}{11}.$$

B 之獲勝確率雖可依同法求之,但於求得 A 之獲勝確率後,由 1 減去其確率即可.即 B 之獲勝確率爲 $\frac{5}{11}$ 是.

本題亦可另行解之如下.

設 A 之獲勝確率爲 p, B 之獲勝確率爲 q.茲先就 B 之

獲勝時研究之.如第一次A投出1點之面時,則B卽不勝.如第一次A投出1點以外之面時,則第二次輪至於B.此時B之獲勝確率,變成最初A之所有確率卽p是.故最初B之所有確率q,等於第一次A投出1點以外之面之確率$\frac{5}{6}$,與最初A所有之確率p之積.卽

$$q=\frac{5}{6}p\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又對於A之獲勝時研究之.如第一次A投出之面爲1點時,則甚佳.（其確率爲$\frac{1}{6}$）若第一次A投出1點以外之面時則第二次輪至於B,故A之獲勝確率變爲最初B之所有確率q.故

$$p=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{5}{6}q\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)與(2)二式以求p, q時,卽得$p=\frac{6}{11}$, $q=\frac{5}{11}$.

於上例,其投至n次爲止,1點之面不現出之確率卽A與B皆不能勝之確率爲$\left(\frac{5}{6}\right)^n$故投至$n$次爲止,$A$或$B$獲勝之確率爲$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$.此値於$n$成爲無限大之極限成爲1.卽

$$p+q=1.$$

由上式及(1)(2)二式中之一式,卽可求得p,q之值.

86. 關於獨立試行之定理

定理 設某事象於一次試行時,其生起之確率爲p,不

生起之確率爲 $q.\ (=1-p)$ 則於 n 次試行時其事象恰生起 r 次之確率爲

$$ {}_nC_r p^r q^{n-r}. $$

例如投一骰子,其 1 點之面現出之確率爲 $\frac{1}{6}$,不現出之確率爲 $\frac{5}{6}$.故投一骰子連續至十次,其 1 點之面現出三次之確率爲

$$ {}_{10}C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7 $$

是.

茲就上例證明本定理於下.

投骰十次,自第一次至第三次 1 點之面連續現出三次,至第四次 1 點之面即不現之確率,如置 $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{6}$, 則爲 p^3q^7.

一般投骰十次,其特別三次爲 1 點之面現出,餘七次不爲 1 點之面現出之確率,亦爲 p^3q^7.

但 1 點之面僅現出三次,其餘七次,1 點之面全不出現時之數爲 ${}_{10}C_3$.且此等各時皆彼此反排,故所求之確率等於將 ${}_{10}C_3$ 個 p^3q^7 加合之和,卽爲

$$ {}_{10}C_3 p^3 q^7. $$

由此定理,可知將 $(p+q)^n$ 依二次定理展開時,其各項卽表於 n 次試行中,其事象恰生起 n 次 $n-1$ 次………………之確率.

又於 n 次試行中其事象至少生起 r 次之確率

$$p^n+{}_nC_{n-1}p^{n-1}q+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+{}_nC_rp^rq^{n-r}.$$

如注意及 $(p+q)^n=1$ 時,則可知其能以下式

$$1-\{q^n+{}_nC_1pq^{n-1}+\cdots\cdots\cdots+{}_nC_{r-1}p^{r-1}q^{n-r+1}\}$$

表之.

例如連續十次投一骰子其1點之面至少現出二次之確率爲

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{10}+{}_{10}C_9\left(\frac{1}{6}\right)^9\left(\frac{5}{6}\right)+\cdots\cdots\cdots\cdots+{}_{12}C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^8.$$

或 $$1-\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{10}+{}_{10}C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^9\right\}$$

是.

例. 連續 n 次投一銀幣時,求其表面現出奇數次之確率.

表面僅現出一次之確率 $={}_nC_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$

表面恰現出三次之確率 $={}_nC_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3},$

表面恰現出五次之確率 $={}_nC_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}.$

……………………………………………………

……………………………………………………

因以上各時皆互相反排,故所求之確率爲

$${}_nC_1\left(\frac{1}{2}\right)^n+{}_nC_3\left(\frac{1}{2}\right)^n+{}_nC_5\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\{{}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot 2^{n-1}=\frac{1}{2}.$$

87. **期望金額** 設某事象生起之確率爲p,茲有人約定如其事象生起時,即行受取勝利金 a 元,此時此人之**期望金額**謂之ap元.

又設$E_1, E_2,$…………等爲反排事象,其生起之確率各爲$p_1, p_2,$…………等,如約定E_1生起時,則得a_1元;E_2生起時,則得a_2元;…………,則此人之期望金額,謂之($a_1p_1+a_2p_2+\cdots$……………)元.

例如投一骰子時,其約定1點之面現出,則獲勝利金60元之人之期望金額,爲

$$(60\times\frac{1}{6})\text{ 元},\quad \text{即}\quad 10\text{圓}.$$

又投一骰子,如約定1點之面現出則得1元,2點之面現出則得2元,………,6點之面現出則得6元時,則此人之期望金額爲

$$(1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6})\text{元}=\frac{7}{2}\text{元}$$

是.

88. **大數之法則** 設某事象於一次試行時之確率爲p時,則其事象於n次試行中恰生起r次之確率,爲

$${}_nC_r p^r q^{n-r} \quad (q=1-p).$$

已如八十六節所述.如此值以W_r表之,則

$$\sum_{r=0}^{n} W_r = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r p^r q^{n-r} = (p+q)^n = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\sum_{r=1}^{n} r W_r = \sum_{r=1}^{n} r \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!} p^r q^{n-r}$$

$$= np \sum_{r=1}^{n} \frac{(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{(r-1)!} p^{r-1} q^{n-r}$$

$$= np \sum_{r=1}^{n} {}_{n-1}C_{r-1} p^{r-1} q^{n-r}$$

$$= np(p+q)^{n-1} = np \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\sum_{r=2}^{n} r(r-1) W_r = \sum_{r=2}^{n} r(r-1) \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} p^r q^{n-r}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{r=2}^{n} {}_{n-2}C_{r-2} p^{r-2} q^{n-r}$$

$$= n(n-1)p^2 (p+q)^{n-2}$$

$$= n(n-1)p^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

將(2)及(3)兩式邊邊相加時,得

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 W_r = np\{1+(n-1)p\} = np(np+q),$$

$$\therefore \quad \sum_{r=0}^{n} (r-np)^2 W_r = \sum_{r=0}^{n} (r^2 - 2npr + n^2p^2) W_r$$

$$= \sum_{r=0}^{n} r^2 W_r - 2np \sum_{r=0}^{n} r W_r + n^2p^2 \sum_{r=0}^{n} W_r$$

$$= np(np+q) - 2npnp + n^2p^2 = npq.$$

以n^2除上式之兩邊時,因得

$$\sum_{r=0}^{n} \left(\frac{r}{n} - p\right)^2 W_r = \frac{pq}{n} \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

設 δ 爲所與任意之小正數,(δ 無論小至如何均可)以 Σ' 表對於滿足

$$\left|\frac{r}{n}-p\right|<\delta.$$

之 r 各值之和,以 Σ'' 表對於滿足

$$\left|\frac{r}{n}-p\right|\geqq\delta.$$

之 r 各值之和,則

$$\sum_{r=0}^{n}\left(\frac{r}{n}-p\right)^2W_r=\Sigma'\left(\frac{r}{n}-p\right)^2W_r+\Sigma''\left(\frac{r}{n}-p\right)^2W_r$$

$$>\Sigma''\left(\frac{r}{n}-p\right)^2W_r>\delta^2\Sigma''W_r.$$

由(4)式之關係,得

$$\frac{pq}{n}>\delta^2\Sigma''W_r\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

又 $\Sigma'W_r+\Sigma''W_r=\sum_{r=0}^{n}W_r=1,$

即 $\Sigma''W_r=1-\Sigma'W_r.$

故由(5)式之關係,得

$$\frac{pq}{n\delta^2}>1-\Sigma'W_r.$$

或 $\Sigma'W_r>1-\dfrac{pq}{n\delta^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

上式如以文字敍述之則爲

設某事象於一次試行生起之確率爲 p,於 n 次試行中生起之次數爲 r 時,則 r 滿足

$$\left|\frac{r}{n}-p\right|<\delta.$$

關係之確率較 $1-\frac{pq}{n\delta^2}$ 爲大.（但 $q=1-p$, δ 爲任意之小正數）此定理謂之揭悲歇夫之定理.

例如連續六萬次投一骰子,其 1 點之面現出之次數 r 滿足 $\left|\frac{r}{60000}-\frac{1}{6}\right|<\frac{1}{100}$ 之確率.卽 1 點之面現出次數位於次數 9400 與 10600 間之確率,較

$$1-\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{60000\times\left(\frac{1}{100}\right)^2},\quad \text{卽約爲}\,0.976$$

理大 $\left[\text{此時}\ p=\frac{1}{6},\ q=\frac{5}{6},\ n=60000\ \ \delta=\frac{1}{100}\right]$.

又於(6)式之右邊,由 n 之值取之甚大,可使之任意接近於 1.故得結論如下.

設某事象一次試行之生起確率爲 p,於 n 次試行中其生起之次數爲 r 時,則對於所與之任意小正數 δ,其

$$\left|\frac{r}{n}-p\right|<\delta$$

之關係能成立之確率,由 n 之值取之甚大,可使之任意接近於 1.

上述之結論,如再行淺顯的敍述之,則爲

如 n 非常之大時,其 $\frac{r}{n}$ 約等於 p,殆甚確實.此法則謂之大數之法則.

89. 原因之確率　以上所論者,爲依據既知之原因而計算其事象生起之確率.以下所論者,則爲觀察事象之生起,而計算其事象由某原因生起之確率.

有布袋二個,設其中一袋盛有白球5個黑球2個,而他袋則盛有白球2個黑球4個.今若置手於二袋中之任一袋取出一球時,如求其球爲白球之確率,則爲知其原因而求其事象生起之確率之問題.反之如置手於二袋中之任一袋,取出一球,其球爲白球時,如求其球由第一袋取出之確率,卽成爲由事象而求其原因之確率之問題.

茲將關於原因之確率之基礎定理,述之於下.

定理　有互相反排之原因 C_1 C_2,…………,C_n 等,此諸原因之生起確率(事象未生起以前既知之原因之確率)各爲 P_1, P_2,…………P_n 其一事象 E 由原因 C_1 所生起之確率爲 p_1,由原因 C_2 所生起之確率爲 p_2,以下類推,如知此事象 E 由此等原因中之任一原因生起時,則此事象眞由原因 C_r 所生起之確率(卽事象生起後既知原因 C_r 之確率)爲

$$\frac{P_r p_r}{P_1p_1+P_2p_2+\cdots\cdots+P_np_n}$$

此定理謂之柏玆之定理.

例如有二布袋,其中一袋盛有白球5個黑球2個,他袋中盛有白球2個黑球4個.今置手於此二袋中之任一袋,

取出一球,得知其球爲白球,而求其手置入於第一袋中之確率時,則此問題之原因有二.(1)置手於第一袋中(C_1),(2)置手於第二袋中$(C)_2$是也.而在不知白球被取出以前,其設想曾經置手於第一袋中,與設想曾經置手於第二袋中,皆有同等之確度,卽$P_1=P_2=\frac{1}{2}$是.

設曾經置手於第一袋中取出一球,則其球爲白球之確率爲$\frac{5}{7}$.卽由第一原因,其事象所應生起之確率p_1爲$\frac{5}{7}$.同樣,設曾經置手於第二袋中取出一球,其球爲白球之確率,卽由第二原因其事象所應生起之確率p_2爲$\frac{2}{6}$.隨之由白球曾經被取出之事實判斷之,其曾經置手於第一袋中之確率爲

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}}=\frac{15}{22}.$$

此定理之證明如下.

原因C_r生起且於此原因之下,事象E生起之複事象之確率爲

$$P_rp_r\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

隨之於n個原因中之任一原因,其事象之生起確率爲

$$P_1p_1+P_2p_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+P_np_n.$$

又原因C_r生起且於此原因之下,事象E生起之複事象,

因其事象E已經生起,故其事象可視爲由原因C_r所生起之複事象.如此變換其觀察方法時,此複事象之確率爲

$$(P_1p_1+P_2p_2+\cdots\cdots+P_np_n)\pi_r\cdots\cdots(2)$$

上式中之π_r,爲事象既經生起時,其事象眞由C_r所生起之確率.置(1),(2)二式相等時,得

$$\pi_r=\frac{P_rp_r}{P_1p_1+P_2p_2+\cdots\cdots+P_np_n}.$$

P_r與π_r雖同爲原因C_r之確率,但P_r爲事象未生起以前所判斷C_r之確率,π_r爲事象既生起以後所判斷C_r之確率.於此意義,其P_r謂之原因C_r之事前確率,π_r謂之其事後確率.

系　事前確率皆相等時,則

$$\pi_r=\frac{p_r}{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n}.$$

例一. 袋中有四球,其中白球之數不得而知.今於其中取出一球恰爲白球,求其袋中白球之數爲三之確率.

此問題之原因有五,茲詳舉之於下.

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
無白球	一白	二白	三白	四白

此五原因之事前確率可視爲相等,而

$$p_1=0,\quad p_2=\frac{1}{4},\quad p_3=\frac{2}{4},$$

$$p_4=\frac{3}{4},\quad p_5=1.$$

故所求之確率$=\dfrac{\dfrac{3}{4}}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{4}+1}=\dfrac{3}{10}.$

〔注意〕因 $p_1=0$ 故第一原因之 C_1 如開始卽行除去之,其所得之結果亦相同.

例二. 袋中有球 μ 個,今於其中取出一球後再行納返於袋中,如是連取 n 次其所得者常爲白球.求其袋中有白球 $k(k\leqq\mu)$ 個之確率.

此問題原因有 μ 個.（參照例 1 之注意）

$$\begin{array}{ccc} C_1 & C_2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & C_\mu \\ \text{一白} & \text{二白} & \mu\text{白} \end{array}$$

設原因 C_r 之事前確率爲 P_r,原因 C_r 眞確時;N 次連續取出白球之確率 p_r 成爲 $\left(\dfrac{r}{\mu}\right)^N.$

故所求之確率

$$\pi_k=\frac{P_k\left(\dfrac{k}{\mu}\right)^N}{P_1\left(\dfrac{1}{\mu}\right)^N+P_2\left(\dfrac{2}{\mu}\right)^N+\cdots\cdots+P_\mu\left(\dfrac{\mu}{\mu}\right)^N}$$

$$=\frac{P_k k^N}{P_1+P_2\cdot 2^N+\cdots\cdots+P_\mu\cdot\mu^N}.$$

90. 證言之確率　證言之確率不外爲原因之確率之一種.茲舉例示之於下.

例一. 有 A, B 二人,其 A 言中之確率爲 p, B 言中之確率爲 q.求 A, B 二人皆謂已生起事象之眞實生起確率.

對於 A, B 二人一致皆謂已生起時,其原因有二.一爲其事象實際上已經生起(C_1),其他則爲其事象並未生起(C_2).

如實際上其事象曾經生起時,(設原因C_1爲眞)則A與B一致證言已經生起之確率(卽相當於前條之p_1)爲pq.如實際上其事象並未生起時而A與B一致證言已經生起,則A與B皆未言中.如此:A與B皆行言不中之確率(卽相當於前條之p_2)爲$(1-p)(1-q)$,故其事象眞實生起之確率,爲

$$\pi_1=\frac{P_1pq}{P_1pq+P_2(1-p)(1-q)}.$$

上式中之P_1, P_2爲原因C_1, C_2之事前確率,同樣,其事象眞實未曾生起之確率爲

$$\pi_2=\frac{P_2(1-p)(1-q)}{P_1pq+P_2(1-p)(1-q)}.$$

〔未聞A, B二人之言前能爲P_1期待之事象,於旣聞A, B二人之言後則能爲π_1之期待也〕

例二: 一袋中有球10個,其中9個爲黑球,1個爲白球.今有於20次談話中19次言中之人,證言由此袋中取出一白球.求白球眞由此袋中取出之確率.

C_1白球被取出時;

C_2黑球被取出時.

設C_1, C_2之事前確率爲P_1, P_2則$P_1=\frac{1}{0}$ $P_2=\frac{9}{10}$.

若C_1爲眞時,則此人證言白球之確率p_1爲$\frac{19}{20}$.若C_2爲眞時,則此人證言白球之確率爲$\frac{1}{20}$故所求之確率爲

$$\pi_1=\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{19}{20}}{\frac{1}{10}\cdot\frac{19}{20}+\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{20}}=\frac{19}{28}.$$

例三.　A曰眞之確率爲$\frac{3}{4}$,B曰眞之確率爲$\frac{4}{5}$,C曰眞之確率爲$\frac{6}{7}$時,求A,B一致皆謂曾經生起而C謂未曾生起事件之眞實生起之確率.但事前確率皆屬相等.

若其事件爲眞時,則A,B證言謂已經生起,C謂未曾生起之確率(p_1)爲$\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{7}$.若其事件不眞時,則$A,B$證言謂已經生起,$C$謂未曾生起之確率($p_2$)爲$\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{6}{7}$.故所求之確率爲

$$\frac{\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{7}}{\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{6}{7}}=\frac{2}{3}.$$

問題十九

1.　袋中有球n個,其形相同,但各於其上附有1, 2, ……, n等號碼.今於袋中取出二球,求附有1, 2號碼之二球被取出之確率.

2.　於前問之袋中取出三球時,求其中附有1之號碼之球被取出之確率.

3. 袋中有白球 a 個,赤球 b 個,黑球 c 個.今於此袋中取出一球時,求其球爲白球之確率.

4. 於問題 3 之袋中取出四球時,求(a)四球的爲白球之確率;(b)二球爲白球二球爲赤球之確率.

5. 投三骰子時,求其現出之面之點數之和爲 9 之確率與爲10之確率何者爲大.

6. 袋中有白球 5 個,黃球 6 個.今於此中順次取出一球,連取三次時,求其現出之順序爲白黑白之確率如何.

7. 於贈彩籤13條中,計有贈品者僅只 3 條.求第一次抽取者及第二次抽取者之損益如何.

8. 將骰子三粒同時投之,求其中二面之點數爲 1 之確率.

9. 將銀元一枚連投 n 次(或將銀元 n 枚同時投之)時,求其表面僅行現出一次(或僅一個)之確率.

10. 於某種勝負之比較,其 A 之技倆爲 B 之技倆之二倍.求 B 勝二次之前,A 勝三次之確率.

11. 將一骰子連投 n 次,求其 1 點之面恰現出 2 次,2 點之面恰現出三次之確率.

12. 第一袋中有白球一黑球一.第二袋中有白球二黑球一.第三袋中有白球三黑球一.今於此三袋中各取出一球時,其球色配合之方法,以何者爲最多.

13. 袋中置有1之號碼之券1枚,2之號碼之券2枚,3之號碼之券3枚,…………,n之號碼之券n枚.今有人約定由此袋中取出一券,如其號碼爲r,則得銀r元.求此人之期望金額如何.

14. 投骰子二粒,有約定如其現出點數之和爲r時,則得銀r元之人.求此人之期望金額如何.

15. 有袋二個,第一袋中置有白球3個黑球5個;第二袋中置有白球2個,黑球6個.今置手於二袋中之任一袋,取出一球,其球爲白球.次納返其球於袋中,再行置手於二袋中之任一袋,復行取出一球,亦爲白球.求二次皆係置手於第一袋中之確率.

16. 袋中有四球,分黑白二色.今任意取出一球而其球爲白球.求其袋中存有白球三個之確率.

17. 袋中有四球,今於其中取出一球爲白球時,則將此球納返袋中後再行取出一球時,其球爲白球之確率如何.

18. 甲曰眞之確率爲p,乙曰眞之確率爲q.今有某事件生起,質之於甲,則謂係開之於乙者.求某事件眞實生起之確率.

19. A之談話,四次中有三次爲眞.B之談話,五次中有四次爲眞.今由盛有白球一個黑球九個之袋中任意取出一球時A, B二人一致皆確言其所取出之球爲白球.求白

球眞被取出之確率.

20. 某法庭由法官12人組成之.其各法官下正當判斷之確率爲$\frac{9}{10}$.求其宣告判決正當時之確率.

第十六章　對數

91. **對數之性質**　於 $a^x=n$ 式如與値於 a 及 n 以求 x 時,則 x 謂之以 a 爲底之 n 之對數.通常皆以 $\log_a n$ 以表之.例如於 $2^5=32$,其 5 爲以 2 爲底之 32 之對數,卽 $5=\log_2 32$ 是.

通常對數之底數,皆用較 1 爲大之數.

$a>1$ 時,a^x 隨 x 之値增大而亦增大;x 之値減小而亦減小.且隨 $x>,=,$ 或 <0 而 a^x 亦 $>,=,$ 或 <1. 故此時 a^x 不論 x 取如何之實數値,決無成爲負數之事.卽 $a>1$ 時,無負數之對數存在.

次於 $a^x=n$, 其 n 爲正數時,則與 n 之各値對應,x 之實數値必有一個存在.且僅限於一個.其 x 卽 $\log_a n$ 不僅能成爲正負之整數或分數,且有時成爲無理數.

於 $a^x=n$, 其 x 成爲無理數時之說明,理論過於高深,故本書略去之.

玆將關於對數之重要性質述之如下

(1)　底之對數爲 1.

因無論 a 爲如何之數,其 $a^1=a$.

故 $\log_a a=1$.

(II) 1 之對數爲 0.

因 a 不等於 0 時,其 $a^0=1$.

故 $\log_a 1=0$.

(III) 積之對數,等於其各因子之對數之和.

設 $\log_a m=x \quad \log_a n=y$.

則 $m=a^x, \quad n=a^y$.

隨之 $mn=a^x a^y=a^{x+y}$.

故 $\log_a mn=x+y=\log_a m+\log_a n$.

其因子在三個以上時,亦屬相同.

(IV) 商之對數,等於由被除數之對數減去除數之對數之差.

設 $\log_a m=x, \quad \log_a n=y$.

則 $m=a^x, \quad n=a^y$.

隨之 $\frac{m}{n}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$.

故 $\log_a\left(\frac{m}{n}\right)=x-y=\log_a m-\log_a n$.

(V) 某數之羃之對數,等於以其指數乘其數之對數之積.

設 $\log_a n=x$.

則 $n=a^x$.

隨之 $n^p=(a^x)^p=a^{px}$.

故 $\log_a n^p=px=p\log_a n$.

同樣,得某數冪根之對數等於以其根指數除其數之對數所得之商.

(VI) 以 a 爲底之一數 n 之對數,等於以 $\log_a b$ 乘以 b 爲底之同數 n 之對數所得之積.

設 $\log_a n=x \quad \log_b n=y$.

則 $n=a^x,\quad n=b^y$.

故 $a^x=b^y$.

故 $a^{\frac{x}{y}}=b$.

隨之得 $\frac{x}{y}=\log_a b$.

卽 $x=y\log_a b$

故 $\log_a n=\log_b n\times\log_a b$.

92. 對數表 以10爲底之對數,謂之常用對數.通常之計算皆採用之.卽 $10^x=n$ 時,則其 x 謂之 n 之常用對數

常用對數,一般皆略去其底數,於應書 $\log_{10}n$ 時,僅書作 $\log n$. 以下本章單云對數時,卽係指常用對數而言.

對數爲負數時,其小數部分,常以正數記之.僅其整數部分,始以負數表之.例如

$$log\frac{1}{100\sqrt[8]{10}}=log\frac{1}{100}+log\frac{1}{\sqrt[8]{10}}=(-2)+(-\frac{1}{8})$$

$$=-2\frac{1}{8}=-3+0.875.$$

是.此時故用記號$log\frac{1}{100\sqrt[8]{10}}=\bar{3}.875$以表之.即以3上之符號一表此對數之整數部分爲負數3也.

對數之整數部,謂之其對數之指標.小數部,則謂之其對數之假數.上例之 -3, 即爲其對數之指標,而0.875則爲其假數也.

對數之指標通常可由視察方法以求得之.因

$$10^0=1,\quad 10^1=10,\quad 10^2=100,\quad 10^3=1000\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故 $log\,1=0,\ log\,10=1,\ log\,100=2,\ log\,1000=3,\cdots\cdots\cdots$

可知下列之事實,甚爲明顯.

1與10間之數之對數,爲0與1間之數.隨之其指標爲0.

10與100間之數之對數,爲1與2間之數.隨之其指標爲1

100與1000間之數之對數,爲2與3間之數.隨之其指標爲2.

以下順次類推,因得一法則於下.

較1爲大之數之對數指標,較其數整數部分之數字之數少1.又因

$$10^{-1}=0.1,\quad 10^{-2}=0.01,\quad 0^{-3}=0.001,\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

故　$\log 0.1=-1$　$\log 0.01=-2,$ $\log 0.001=-3,$ ………

可知下列之事實,亦甚爲明顯.

1 與0.1間之數之對數,爲 0 與 -1 間之數.隨之其指標爲 -1.

0.1與0.01間之數之對數,爲 -1 與 -2 間之數.隨之其指標爲 -2.

0.01與0.001間之數之對數,爲 -2 與 -3 間之數.隨之其指標爲 -3.

以下順次類推,因得一法則於下.

較 1 爲小之數之對數指標,爲以較其數之小數點與最初之有效力數字間之 0 之數大 1 之數爲絕對値之負數.

二數如僅由其小數點之位置而異時,則其二數之對數假數相等.因某數M與僅由其小數點之位置而異之數,一般皆等於$M\times10^n$或$M\div10^n$,(但 n 爲正整數)

但　$\log(M\times10^n)=\log M+\log10^n=\log M+n,$

又　$\log(M\div10^n)=\log M-\log10^n=\log M-n.$

卽各數之對數,皆與$\log M$成一整數 n 之差.故其假數與$\log M$之假數相等甚明.隨之如得知任意一數之對數時,則與此數僅依小數點之位置而異之數之對數,甚易求得之.

一般非10之整數乘冪之整數之對數,多爲不盡數.(無

理數）故通常皆將其近似值計算至小數若干位爲止,以供實用.如此將各整數之對數計算至小數若干位爲止製作成表者,謂之對數表.

由上述之理,如得知整數之對數時,則其他任意之數之對數,容易求得之.又任意之數之對數指標,可由視察方法以求得之.故對數表中,通常僅揭載整數之對數假數.

本書卷末所附之對數表,爲1000未滿之整數之四位對數表.

93. **對數表之用法** 玆將關於四位之對數表使用法,舉例說明之於下.

例一. 求$\log 47.2$.

先求得其指標爲1.次由對數表求得其假數爲0.6739.

故得 $\log 47.2=1.6739$.

例二. 求$\log 0.00825$.

先求得其指標爲-3.次由對數表求得其假數爲0.9 65.

故得 $\log 0.00825=\bar{3}.9165$.

例三. 求$\log x=3.7185$之x之值.

先由其指標爲3,故可知x之整數部分之位數爲4.次由對數表,求得假數0.7185之數爲523.故得$x=5230$

例四. 求對數爲$\bar{2}.408$之數.

先由其指標爲-2,可知所求之數於小數點與最初之

有效數字間有 0 一個.次由對數表,得假數爲 0.4082 之數爲 256. 故得所求之數爲 0.0256.

通常四位之對數表中所揭載者,爲由 1 至 1000 之數之對數.隨之其由四個以上之數字所成之數之對數假數,不能直接於對數表中求得之.必須應用下述之法則.

二數之差對於其各數甚爲微小時,則其二數之對數之差,與其二數之差成比例.

上述法則之理由及其成立之限界,如討論之,則其理論過於高深,故本書略去之.

例五. 求 $\log 361.4$.

先求得其指標爲 2. 次由對數表,求得

$\log 361$ 之假數爲 0.5575

$\log 362$ 之假數爲 0.5587

可知此二假數之差（謂之表差）爲 0.0012. 設與二數 361 及 361.4 之差 0.4 相對應之此二數之對數之差爲 x, 則由上述之法則,得

$$1 : 0.4 = 0.0012 : x,$$

由此得 $x = 0.00048$

截至小數第四位止四捨五入之,得

$$\log 361.4 = 2.5575 + 0.0005 = 2.5580.$$

例六. 求對數爲 $\bar{3}.7652$ 之數.

先由其指標爲$\bar{3}$，可知所求之數其小數點與最初之有效數字間有0二個.次由對數表求得

$$\log 0.00582=\bar{3}.7649,$$

$$\log 0.00583=\bar{3}.7657.$$

其表差爲0.0008，因所求之數位於0.00582與0.00583之間，故設所求之數爲$0.00582+x$時，則此數之對數$\bar{3}.7652$與0.00582之對數$\bar{3}.7649$之差爲0.0003.應用比例部分之法則計算之，得

$$0.0008:0.0003=0.00001:x,$$

由此得 $x=0.000004.$

故得所求之數$=0.00582+0.000004=0.005824.$

94. **對數之計算** 兹將關於對數之計算，舉例示之於下.

例一. 試用對數計算$3.268\times15.97.$

設此二數之積爲N，則

$$\log N=\log 3.268+\log 15.97.$$

兹由對數表計算之如下.

$$\begin{array}{r}\log 3.268=0.5142\\ \log 15.97=1.2033\\ \hline \log N=1.7175\\ N=52.18\end{array}$$

例二. 試用對數計算$23.6^3\div9803.6.$

設此二數之商爲N,則

$$\log N=\log 23.6^3-\log 9806.5=3\log 23.6-\log 9806.5.$$

茲由對數表計算之如下.

$$\begin{array}{lr}
\log 23.6=1.3729 & 3\log 23.6=4.1187\\
 & \log 9806.5=3.9915\\
\hline
 & \log N=0.1272\\
 & N=\ \ .3403
\end{array}$$

例三. 知$\log 2=0.3010$, $\log 3.973=0.5991$ 試計算$\sqrt[7]{25^3}$.

設此數爲N,則

$$N=25^{\frac{3}{7}}=(5^2)^{\frac{3}{7}}=5^{\frac{6}{7}}=\left(\frac{10}{2}\right)^{\frac{6}{7}}.$$

$$\therefore\quad \log N=\frac{6}{7}\log\frac{10}{2}=\frac{6}{7}(\log 10-\log 2)=\frac{6}{7}(1-0.3010)$$

$$=0.5991.$$

$$\therefore\quad N=3.973.$$

例四. 解$(0.4)^{2x-1}=0.003$方程式.

取其兩邊之對數,得

$$(2x-1)\log 0.4=\log 0.003.$$

故得 $$2x-1=\frac{\log 0.003}{\log 0.4}=\frac{\bar{3}.4771}{\bar{1}.6020}=\frac{-(3-0.4771)}{0-(1-0.6020)}$$

$$=\frac{2.5229}{0.3980}.$$

再行應用對數時,得

$$\log(2x-1)=\log 2.5229-\log 0.3980,$$

因 $\log 2.5229=0.4019,$

$\log 0.3980=\bar{1}.5999,$

$\therefore \quad \log(2x-1)=0.8020,$

$\therefore \quad 2x-1=6.339,$

$\therefore \quad x=3.670.$

如例4所示,其指數含有未知數之方程式,謂之**指數方程式**.

問題二十

用對數表試計算下列之對數.

1. 65.29^5　　2. $\sqrt{0.0876}.$　　3. $5^5\div\sqrt[3]{89}.$

試用對數計算下列各數.

4. $2.364\times934.25.$　　5. $(1.3872)^5.$

6. $367.21\div1467.9.$　　7. $\dfrac{0.0032}{638.1\times3.5692}.$

8 $\dfrac{0.356\times723.54}{896.72}.$　　9. $\dfrac{46.723\times\sqrt{1.2145}}{(2.284)^3\times(1.8905)^6}.$

10. 求 7^{128} 爲幾位之數.

11. 知 $\log 2=0.3010, \log 3=0.4771, \log 7=0.8451$ 試計算下列各數.

(a) $\log 1458.$　　(b) $\log 0.768.$　　(c) $\log 42000.$

(d) $\log\sqrt[5]{39.2}.$　　(e) $\log\dfrac{225}{224}-\log\dfrac{20}{189}.$

12. 求$\left(\frac{4}{7}\right)^{25}$之小數點與最初之有效數字間之0之個數.

解下列諸方程式.

13. $2^{x+3}=160$　　14. $20^{3x-7}=2^{x+5}$.

15. $5^{x-3}=8$.　　16. $16^{2x+1}\times 36^{5-x}=1468$.

17. $log(x-1)=log(x^2-5x+4)-log\,10$.

18 $log\sqrt{3x+4}+\frac{1}{2}log(5x+1)=log\,3+1$.

19. 有面積400方丈之圓形地面,求其直徑幾何.

20. 有正方形,其面積與高453.4尺底邊687.5尺之平行四邊形之面積相等.求正方形之邊長.

21. 化簡下列各式.

(a) $log\frac{25}{4}+log\frac{36}{50}-log\frac{9}{8}$

(b) $log\frac{133}{65}+2log\frac{13}{7}-log\frac{143}{90}+log\frac{77}{171}$.

22. 解$18^{3-4x}=(54\sqrt{2})^{3x-2}$方程式.

第十七章　級數

95. **等差級數**　遵守某種一定之規則,依一定之順列排列成之數列,謂之級數.其數列中之各數,謂之此級數之項.

級數之各項,與其相鄰前項之差皆相等者,謂之等差級數,或稱爲算術級數.此相等之差,謂之公差.最初之項,謂之初項.最後之項,謂之末項

設等差級數之初項爲 a,公差爲 d,則其各項爲

$$a,\quad a+d,\quad a+2d,\quad a+3d,\cdots\cdots$$

因等差級數各項中之公差 d 之係數,較其項之號數少1.故一般等差級數之第 n 項,爲 $a+(n-1)d$. 設此級數之項數爲 n,其末項爲 l,則

$$l=a+(n-1)d\cdots\cdots(1)$$

甚明.故如等差級數之初項 a,末項 l 及項數 n 已定時,則其公差 d 可由下式求出之.

$$d=\frac{l-a}{n-1}.$$

等差級數之任意二項如已知之,則其初項及公差亦易

於求出.設其第 h 項及第 k 項之値各爲 α, β 時,則其初項 a 與公差 d 之間,有下列二式之關係.

$$a+(h-1)d=\alpha,$$

$$a+(k-1)d=\beta.$$

此卽以 a 及 d 爲未知數之聯立方程式也.解此聯立方程式時,卽可求得其 a 及 d 之値.

設等差級數之初項爲 a,公差爲 d,末項爲 l,其 n 項之和爲 S 時,則

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots\cdots\cdots+(l-d)+l,$$

又 $$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots\cdots\cdots+(a+d)+a.$$

將上列二式邊邊相加時,得

$$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)+(a+l)$$

$$=n(a+l),$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}n(a+l)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又因 $l=a+(n-1)d.$

代入(2)式時,得

$$S=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

三數成等差級數時,則其中間之數,謂之他二數之等差中項.或謂之相加平均.例如 a, b, c 三數成等差級數時,則 b 爲 a 及 c 之等差中項.是因

$$b-a=c-b,$$

$$\therefore \quad b=\frac{a+c}{2}.$$

成等差級數之諸數其位於初項與末項間之各數,謂之其二數間之等差中項.吾人於所與之二數間,得任意插入m個之等差中項.卽設a, b爲所與之二數時,則此問題歸結於作成一初項爲a,末項爲b,項數爲$m+2$之等差級數.設此公差爲d,則

$$b=a+(m+1)d,$$

$$\therefore \quad d=\frac{b-a}{m+1}.$$

隨之得所求之等差中項如下.

$$a+\frac{b-a}{m+1},\ a+2\frac{b-a}{m+1},\ a+3\frac{b-a}{m+1},\ \cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$a+m\frac{b-a}{m+1}.$$

例一. 求第三項爲7第五項爲13之等差級數之初項及公差.

設此級數之初項爲a,公差爲d,則

$$a+2d=7,\quad a+4d=13.$$

解之,得 $a=1,\quad d=3.$

例二 求$1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots\cdots, n-1, n$之和.

此級數之初項爲1,項數爲n,末項爲n,故由公式(2),得

$$1+2+3+\cdots\cdots\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

例三. 求4, 7, 10, 13,…………之級數之十二項之和.

因此級數相連二項之差皆爲3,故此級數爲等差級數.其公差爲3.設所求之和爲S則由公式(3),得

$$S=\frac{1}{2}\times12\{2\times4+(12-1)\times3\}=246$$

例四. 求於3與-7之間,插入四個等差中項.

因此時$a=3, b=-7, m=4$故得

$$d=\frac{-7-3}{4+1}=-2.$$

隨之得所求之等差中項如下.

$$1,\quad -1\quad -3,\quad -5.$$

93 **等比級數** 級數之各項與其相鄰前項之比皆相等者,謂之等比級數.或謂之幾何級數.此相等之比,謂之等比

設等比級數之初項爲a,公比爲r時,則其級數之各項如下

$$a,\quad ar,\quad ar^2,\quad ar^3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因等比級數各項中公比r之冪指數,較其項之號數少1.故一般等比級數之第n項爲ar^{n-1}.設此級數之項數爲n,末項爲l,則

$$l=ar^{-1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

甚明.故如等比級數之初項a,末項l,及項數n已定時,則其公比r,可由下式求出之.

$$r^{n-1}=\frac{l}{a}.$$

由上式,得 r 爲 $\frac{l}{a}$ 之 $n-1$ 乘根.

等比級數之任意二項如已知之,則其初項及公比亦易於求出.設其第 h 項及第 k 項之値各爲 α,β 時,則其初項 a 與公比 r 之間,有下列二式之關係.

$$ar^{h-1}=\alpha,$$

$$ar^{k-1}=\beta$$

此卽以 a 及 r 爲未知數之聯立方程式也.解此聯立方程式時,卽可求得其 a 及 r 之値.

設等比級數之初項爲 a,公比爲 r,其 n 項之和爲 S 時,則

$$S=a+ar+ar^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+ar^{n-1},$$

因得 $$Sr=ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+ar^n.$$

將第一式與第二式邊邊相減時,得

$$S-Sr=a-ar^n,$$

卽 $$S(1-r)=a(1-r^n).$$

設 $r\neq1$ 時,則

$$S=a\frac{1-r^n}{1-r}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

或 $$S=a\frac{r^n-1}{r-1}.$$

設其末項爲 l,則因

$$l=ar^{n-1}$$

$$\therefore\quad S=\frac{a-lr}{1-r}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

〔注意〕 $r=1$ 時,$S=na$

三數成等比級數時,則其中間之數謂之他二數之等比中項.或謂之相乘平均.例如 a, b, c 三數成等比級數時則 b 爲 a 及 c 之等比中項.是.因

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b},$$

隨之 $$b^2=ac$$

$$\therefore\quad b=\pm\sqrt{ac}$$

成等比級數之諸數,其位於初項與末項間之各數,謂之其二數間之等比中項.吾人於所與之二數間,得任意插入 m 個之等比中項.即設 a, b 爲所與之二數時,則此問題歸結於作成一初項爲 a,末項爲 b,項數爲 $m+2$ 之等比級數.設此公比爲 r,則

$$b=ar^{m+1},$$

因得 $$r^{m+1}=\frac{b}{a}$$

$$\therefore\quad r=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}.$$

隨之得所求之等比中項如下.

$$a\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}},\quad a\left(\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}\right)^2,\quad\cdots\cdots\cdots\cdots,\quad a\left(\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}\right)^m.$$

若 a, b 爲同符號之數,而 $m+1$ 爲偶數時,則 r 有正負之二值.隨之所求之等比中項,亦有二種.

設等比級數之初項爲 a,公比爲 r,項數爲 n,其和爲 S 時,則

$$S=a\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

於上列之公式如 r 之絕對值較 1 爲小時,則隨 n 之無限增大,其 r^n 之絕對值亦無限減小,接近於 0.隨之 S 亦無限的接近於 $\frac{a}{1-r}$.換言之,即 n 增至成爲無限大時,則 S 之極限值爲 $\frac{a}{1-r}$.

一般,如等比級數之項數成爲無限大時,則其等比級數,謂之無限等比級數.無限等比級數之公比 r 之絕對值,如較 1 爲小時,則其和有一定之極限值.即設其初項爲 a 時,則其極限值爲 $\frac{a}{1-r}$.

和之極限值,有時亦簡稱之爲和.

例一. 等比級數之第四項爲 189,第六項爲1701,求其初項及公比.

設等比級數之初項爲 a,公比爲 r 時,則

$$ar^3=189 \quad ar^5=1701$$

解之得 $\left.\begin{matrix}a=7\\r=3\end{matrix}\right\}$ 或 $\left.\begin{matrix}a=-7\\r=-3\end{matrix}\right\}$

例二. 求8, 12, 18,…………………之級數之八項之和.

因此級數相連二項之比爲$\frac{3}{2}$,故此級數爲等比級數.其公比爲$\frac{3}{2}$.設所求之和爲S,則由公式(2)得

$$S=a\frac{1-r^n}{1-r}=8\times\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^8}{1-\frac{3}{2}}=8\times\frac{1-\frac{6561}{256}}{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{6305}{16}=394\frac{1}{16}.$$

例三. 求於2, 162之間插入 3 個等比中項.

因此時$a=2, b=162$ $m=3$,故得

$$r^4=\frac{162}{2}=81.$$

$$\therefore\quad r=3,\quad 或\quad -3.$$

隨之得所求之等比中項二種如下.

$$6,\ 18\ \ 54,$$

$$或\quad -6,\ 18\ \ -54.$$

例四. 求無限等比級數 $+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+$…………之和.

因此等比級數之初項爲 1,公比爲$\frac{1}{2}$,故得

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

循環小數,亦可視爲一無限等比級數之和.茲舉例說明之於下.

例五. 化0.86爲分數.

因 $0.36=\frac{36}{100}$, $0.0036=\frac{36}{100}\times\frac{1}{100}$, $0.000036=\frac{36}{100}\times\left(\frac{1}{100}\right)^2\cdots$ …故 $0.\dot{3}\dot{6}$ 不外爲初項爲$\frac{36}{100}$公比爲$\frac{1}{100}$之無限等比級數之和.故求此無限等比級數之和時,得

$$\frac{\frac{36}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{36}{100-1}=\frac{36}{99}=\frac{4}{11}$$

$$\therefore\quad 0.\dot{3}\dot{6}=\frac{36}{99}=\frac{4}{11}$$

例六　化 $2.5\dot{3}1\dot{2}$ 爲分數.

因 $2.5\dot{3}1\dot{2}=(25+0.\dot{3}1\dot{2})\div10$

故如化之使成分數時,則其計算如下.由此結果,可知與算術上所得之結果完全一致.

$$2.5\dot{3}1\dot{2}=\frac{25+\frac{312}{1000-1}}{10}=\frac{25\times(1000-1)+312}{(1000-1)\times10}$$

$$=\frac{(25\times1000)+312-25}{(1000-1)\times10}=\frac{25312-25}{9990}$$

97. 調和級數　於級數中任意鄰接之三項,其第一項與第二項之差,及第二項與第三項之差之比,等於其第一項與第三項之比時,則此級數,謂之調和級數.例如 $a, b, c, d,$ …… 成調和級數時,則

$$a-a:b-c=a:c,$$

$$b-c:c-d=b:d$$

....

....

....

等是.

又設 a, b, c 三數成調和級數時,則由上述之定義,

$$a-b:b-c=a:c$$

$$\therefore\quad c(a-b)=a(b-c)$$

於上式,如以 abc 除其兩邊時,得

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}.$$

可知其逆數 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 成等差級數即調和級數各項之逆數必成等差級數

設 a, b, c 三數成調和級數時,則 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\ \frac{1}{c}$ 成等差級數.

$$故\quad \frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c},$$

$$\therefore\quad b=\frac{2ac}{a+c}.$$

可知二數之調和中項等於以其二數之和除其二數之積之二倍所得之商.

設二數 $a\ b$ 之等差中項,等比中項,調和中項,各爲 A, G, H 時,則

$$A=\frac{1}{2}(a+b),\quad G=\sqrt{ab}\quad H=\frac{2ab}{a+b}.$$

$$\therefore\quad AH=\frac{1}{2}(a+b)\times\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2$$

由此得二數之等比中項,亦爲其等差中項與調和中項之等比中項.

定理 二不等數之等差中項,較其等比中項爲大.

設 a, b 爲二不等數時,則

$$\frac{1}{2}(a+b)>\sqrt{ab},$$

$$\text{即}\quad \frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$$

因 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ 常爲正數,如 $a\neq b$ 時,常大於 0 故也.

二不等數之等差中項較其等比中項爲大,故可知亦較其調和中項爲大.

$$\text{因}\quad A>G,$$

$$\text{而}\quad A\cdot H=G^2,$$

$$\therefore\quad \frac{A\cdot H}{A}<\frac{G^2}{G},$$

$$\text{即}\quad H<G.$$

如將其三中項之大小順序排列之,則如下.

$$A>G>H.$$

於任意二數 a, b 間,亦可插入 n 個之調和中項,即於 $\frac{1}{a}$ 及 $\frac{1}{b}$ 間插入 n 個等差中項時,則其諸等差中項如下

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right),\quad \frac{1}{a}+\frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因等差級數各項之逆數成調和級數故得所求之n個調和中項如下.

$$\frac{(n+1)ab}{nb+a},\quad \frac{(n+1)ab}{(n-1)b+2a},\quad \cdots\cdots\cdots\cdots,\quad \frac{(n+1)ab}{b+na}.$$

調和級數若干項之和之公式,無法以求出之.

98. **二項級數** 以特別值代入於$(1+x)^n$而展開之,其所得級數,謂之二項級數.如某級數判定爲二項級數後,則即可由二項定理以決定之.但此時其二項式之指數,不必定限於正整數.

設指數爲負數時,則

$$(1-x)^{-n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n+1)\cdots\cdots(n+r-1)}{r!}x^r+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

上之展開式如改書成下列形式則更爲適用.

$$(1-x)^{-n}=\frac{1}{n(-1)!}\{1\cdot 2\cdot\cdots\cdots(n-1)+(2\cdot 3\cdot n)x$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots+[(r+1)(r+2)(r+n-1)]x^r$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\}.$$

設指數爲分數 $-\frac{p}{q}$ 時,則

$$(1\pm x)^{-\frac{p}{q}}=1\mp\frac{p}{1!}\frac{x}{q}+\frac{p(p+q)}{2!}\left(\frac{x}{q}\right)^2$$

$$\mp\frac{p(p+q)(p+2q)}{3!}\left(\frac{x}{q}\right)^3+\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

由此得二項級數之性質於下.

(1) 各相連項之分子分母,其因子皆行遞加.

(2) 各相連項之分子之連乘因子,爲以其指數之分母爲公差之等差級數

(3) 各相連項之分母之連乘因子爲 1, 2, 3…………等或其倍數.

凡適合以上各性質之級數,皆可由二項定理以求其和.

例一. 求 $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot3}{3\cdot6}+\frac{1\cdot3\cdot5}{3\cdot6\cdot9}+\cdots\cdots\cdots\cdots$ 至無限項之和

將此級數改書成下列形式,

$$S\equiv\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot3}{2!}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1\cdot3\cdot5}{3!}\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad S+1\equiv1+\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1\cdot3}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{1}{1!}\left(\frac{\frac{2}{3}}{2}\right)+\frac{1\cdot3}{2!}\left(\frac{\frac{2}{3}}{2}\right)^2\quad\frac{1\cdot3\cdot5}{3!}\left(\frac{\frac{2}{3}}{2}\right)^3+\cdots$$

由(A)式,得

$$1+\frac{1}{1!}\left(\frac{\frac{2}{3}}{2}\right)\quad\frac{1\cdot3}{2!}\left(\frac{\frac{2}{3}}{2}\right)^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{3!}\left(\frac{\frac{2}{3}}{2}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$=\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad S=\sqrt{3}-1$$

例二. 求 $1+\frac{2}{6}+\frac{2\cdot5}{6\cdot12}+\frac{2\cdot5\cdot8}{6\cdot12\cdot18}+\cdots\cdots$至無限項之和

$$S\equiv1+\frac{2}{1!}\left(\frac{1}{6}\right)+\frac{2\cdot5}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{2\cdot5\cdot8}{3!}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\cdots\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{2}{1!}\left(\frac{\frac{1}{2}}{3}\right)+\frac{2\cdot5}{2!}\left(\frac{\frac{1}{2}}{3}\right)^2+\frac{2\cdot5\cdot8}{3!}\left(\frac{\frac{1}{2}}{3}\right)^2+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4}$$

例三 求 $\frac{3}{18}+\frac{3\cdot7}{18\cdot24}+\frac{3\cdot7\cdot11}{18\cdot24\cdot30}+\cdots\cdots\cdots\cdots$至無限項之和.

由二項級數之性質(3),其各項分母之因子須爲 1, 2, 3, …… 等之倍數然 8,24,30 爲 3, 4, 5, …… 等之各 6 倍,故使之成爲 1, 2, 3, …… 之倍數如下.

$$S\equiv\frac{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)+\frac{3\cdot7}{3\cdot4}\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{3\cdot7\cdot11}{3\cdot4\cdot5}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=6^2\times2!\left\{\frac{3}{3!}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{3\cdot7}{4!}\left(\frac{1}{6}\right)^4+\frac{3\cdot7\cdot11}{5!}\left(\frac{1}{6}\right)^5+\cdots\right\}$$

$$=\frac{6^2\cdot2}{5}\left\{\frac{-5\cdot-1\cdot2}{3!}\left(\frac{\frac{4}{6}}{4}\right)^3+\frac{-5\cdot-1\cdot3\cdot7}{4!}\left(\frac{\frac{4}{6}}{4}\right)^4\right.$$

$$\left.+\frac{-5\cdot-1\cdot3\cdot7\cdot11}{5!}\left(\frac{\frac{4}{6}}{4}\right)^5+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{72}{5}\left\{1+\frac{-5}{1!}\left(\frac{\frac{4}{6}}{4}\right)+\frac{-5\cdot-1}{2!}\left(\frac{\frac{4}{6}}{4}\right)^2\right.$$

$$+\frac{-5\cdot-1\cdot3}{3!}\left(\frac{\frac{4}{6}}{4}\right)^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\cdots\cdots-\left[1+\frac{-5}{1!}\left(\frac{\frac{4}{6}}{4}\right)+\frac{-5\cdot-1}{2!}\left(\frac{\frac{4}{6}}{4}\right)^2\right]\right\}$$

$$=\frac{72}{5}\left\{\left(1-\frac{4}{6}\right)^{-\frac{-5}{4}}-\left[1+\frac{-5}{1!}\left(\frac{\frac{4}{6}}{4}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{-5\cdot-1}{2!}\left(\frac{\frac{4}{6}}{4}\right)^2\right]\right\}$$

$$=\frac{72}{5}\left\{\sqrt[4]{\frac{1}{3^5}}-\left[1-\frac{5}{6}+\frac{5}{72}\right]\right\}=\frac{1}{5}(8\sqrt[4]{27}-17)$$

99. 指數級數

設 $\frac{1}{n}$ 之值小於 1 時,則 $(1+\frac{1}{n})^{nx}$ 可由二項定理展開之.

即
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+nx\frac{1}{n}+\frac{nx(nx-1)}{1\cdot2}\frac{1}{n^2}$$

$$+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{1\cdot2\cdot3}\frac{1}{n^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+\frac{nx(nx-1)(nx-2)\cdots(nx-r+1)}{r!}\frac{1}{n^r}+\cdots\cdots$$

上之級數,更可改書成下列之形式.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+x+\frac{x(x-\frac{1}{n})}{1\cdot2}+\frac{x(x-\frac{1}{n})(x-\frac{2}{n})}{1\cdot2\cdot3}+\cdots$$

$$\cdots\cdots+\frac{x(x-\frac{1}{n})\cdots(x-\frac{r-1}{n})}{r!}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

於上列之級數,置 $x=1$ 時,則得

$$(1+\frac{1}{n})=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!}+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{r-1}{n})}{r!}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

但 $(1+\frac{1}{n})^{nx}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}^{x}$ 故得

$$1+x+\frac{x(x-\frac{1}{n})}{2!}+\frac{x(x-\frac{1}{n})(x-\frac{2}{n})}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\left\{1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!}+\cdots\cdots\cdots\right\}^{x}$$

上式之關係雖 n 之值增至任何大時,皆屬眞確.設 n 增至成無限大時,則 $\frac{1}{n}$ 成爲 0.故上式之關係如下

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^r}{r!}+\cdots\cdots=(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{r!}+\cdots\cdots)^{x}$$

如以 e 代 $1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{r!}+\cdots\cdots$ 時,則得

$$e^{x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^r}{r!}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此 $1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^r}{r!}+\cdots\cdots$,謂之指數級數.

e 在數學上甚爲重要,常用之以爲對數之底.此種對數,謂之自然對數或稱納氏對數其值爲一無理數約等於 2.71828…….

100. 對數級數

設　$a=e^k$

卽　$k=\log_e a$

∴　$a^x=e^{xk}=e^{x\log_e a}$

由九十九指數級數,得

$$a^x=e^{x\log_e a}=1+x\log_e a+\frac{(x\log_e a)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x\log_e a)^r}{r!}+\cdots$$

置 $a=1+y$ 時,因得

$$(1+y)^x=1+x\log_e(1+y)+\frac{1}{2!}\{x\log_e(1+y)\}^2+\cdots\cdots$$

如 y 之值小於 1 時,則 $(1+y)^x$ 可由二項定理以展開之,因得

$$1+xy+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}y^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-r+1)}{r!}y^r+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=1+x\log_e(1+y)+\frac{1}{2!}\{x\log_e(1+y)\}^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

將上式兩邊之 x 之係數比較之,因得

$$log_e(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots$$

上之級數,謂之對數級數.

例一. 試以ab及$a+b$之項表a^n+b^n.

因恆等式

$$(1-ax)(1-bx)\equiv 1-(a+b)x+abx^2\equiv 1-Sx+px^2$$

但S表$a+b$, p表ab, 因得

$$log_e(1-ax)+log_e(1-bx)=log_e(1-Sx+px^2)$$

故得 $(ax+\frac{a^2x^2}{2}+\frac{a^3x^3}{3}+\cdots\cdots)+(bx+\frac{b^2x^2}{2}+\frac{b^3x^3}{3}+\cdots\cdots\cdots)$

$$=\{x(S-px)+\frac{x^2(S-px)^2}{2}+\frac{x^3(S-px)^3}{3}+\cdots\cdots\}$$

將上列方程式中x^n之係數比較之,則其左邊x^n之係數爲$\frac{1}{n}$ (a^n+b^n) 其右邊x^n之係數爲

$$\frac{x^n}{n}(S-px)^n+\frac{x^{n-1}}{n-1}(S-px)^{n-1}+\frac{x^{n-2}}{n-2}(S-px)^{n-2}+\cdots$$

各項中x^n之係數之和,故其係數爲

$$\frac{1}{n}S^n+\frac{1}{n-1}\{-(n-1)S^{n-2}p\}$$

$$+\frac{1}{n-2}\{\frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}S^{n-4}p^2\}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故得

$$a^n+b^n=(a+b)^n-nab(a+b)^{n-2}$$

$$+\frac{n(n-3)}{1\cdot 2}a^2b^2(a+b)^{n-4}$$

$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot2\cdot3}a^3b^3(a+b)^{n-6}+\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots+(-1)^r\frac{n(n-r-1)(n-r-2)\cdots(n-2r+1)}{r!}a^rb^r(a+b)^{n-2r}+\cdots$$

例二. 設 $a+b+c=0$ 時,證明下列之等式.

$$10(a^7+b^7+c^7)=7(a^2+b^2+c^2)(a^5+b^5+c^5)$$

置 $-p=bc+ca+ab$, $q=abc$ 時,則得下列之恆等式.

$$(1-ax)(1-bx)(1-cx)=1-px^2-qx^3$$

將上式之兩邊各取對數而比較其兩邊展開後 x 各次之係數時,卽得以 p 及 q 表 $\frac{1}{r}(a^r+b^r+c^r)$ 之各項,隨之卽得本題所示之結果,

問題二十一

1 設 a, b, c 三數成等差級數時,證明 $a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$ $c^2(a+b)$ 亦成等差級數.

2. 有成等差級數之四數,其各數平方之和爲 120. 而其第一數與第四數之積較其他二數之積小 8. 求各數幾何.

3. 有成等比級數之三數其三數之和爲 14 而其各數平方之和爲 84. 求各數幾何.

4 設 a, b, c 三數成調和級數時,證明 $\frac{a}{(b+c-a)}$, $\frac{b}{(c+a-b)}$, $\frac{c}{a+b-c}$ 亦成調和級數

5. 設 a, b, c 三數成調和級數時,證明 $\frac{2}{b}=\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}$

6. 設 a, b, c 成等差級數,b, c, d 成等比級數,c, d, e 成調和級數時,證明 a, c, e 成等比級數.

7. 有等比級數,其第一第二第三項之和,與第三第四第五項之和之比爲1:4,而其第七項爲 384. 求此級數.

8. 有成等差級數之三數,其兩外項之積等於中數之5倍;而其中二大數之和等於最小數之8倍.求各數.

9. 有等比級數,其項數爲 7,但知其初六項之和爲 $157\frac{1}{2}$,而後六項之和爲 315. 求此級數.

10. 求 $1, r, 2r^2, 3r^3, \cdots\cdots, (n-1)r^{n-1}$ 之級數之和.

11. 知 $a, b, c, d, e,$ 五數成等差級數,試解下列之聯立方程式.

$$ax+by+cz+du+ev=k$$
$$bx+cy+dz+eu+av=k_1$$
$$cx+dy+ez+au+bv=k_2$$
$$dx+ey+az+bu+cv=k_3$$
$$ex+ay+bz+cu+dv=k_4$$

12. 求 $\frac{3}{4}+\frac{3\cdot5}{4\cdot8}+\frac{3\cdot5\cdot7}{4\cdot8\cdot12}+\cdots\cdots\cdots\cdots$ 至無限項之和.

13. 證明 $1+\frac{1}{4}+\frac{1\cdot4}{4\cdot8}+\frac{1\cdot4\cdot7}{4\cdot8\cdot12}+\frac{1\cdot4\cdot7\cdot10}{4\cdot8\cdot12\cdot16}+\cdots\cdots$ 至無限

$$=1+\frac{2}{6}+\frac{2\cdot5}{6\cdot12}+\frac{2\cdot5\cdot8}{6\cdot12\cdot18}+\frac{2\cdot5\cdot8\cdot11}{6\cdot12\cdot18\cdot24}+\cdots$$至無限.

14 求 $1+\frac{1}{1}\frac{3}{2^3}+\frac{1\cdot3}{2!}\frac{3^2}{2^6}+\frac{1\cdot3\cdot5}{3!}\frac{3^3}{29}+\cdots\cdots$至無限項之和.

15. 求 $1-\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\ \frac{1}{2^2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\ \frac{1}{2^3}\cdot\cdots\cdots$至無限項之和.

16. 求 $1+\frac{4}{1}\frac{1}{4}+\frac{4\cdot7}{2!}\frac{1}{4^2}+\frac{4\cdot7\cdot10}{3!}\frac{1}{4^3}+\cdots$ 至無限項之和.

17. 證明 $(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots)(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots)=1.$

18 證明 $e^{-1}=\frac{2}{3!}+\frac{4}{5!}+\frac{6}{7!}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$

19. 求 $1+\frac{(1+2x)}{1!}+\frac{(1+2x)^2}{2!}+\frac{(1+2x)^3}{3!}+\cdots$中之 x^n 之係.

20. 證明 $log_e2-\frac{1}{2}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6\cdot7}+\cdots\cdots$至無限.

21. 證明 $log_ex=\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\ \frac{x^2-1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\ \frac{x^3-1}{(x+1)^3}+\cdots\cdots\cdots.$

22. 證明 $\{log_e(1+x)\}^2=2\left\{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)x^3\right.$

$$\left.+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^4-\cdots\cdots\cdots\cdots\right\}$$

23. 依 x 之升羃順序,試展開 $log_e\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}.$

24 證明 $\frac{1}{n}+\frac{x}{n(n+1)}+\frac{x^2}{n(n+1)(n+2)}$

$$+\frac{x^3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=e^x\left\{\frac{1}{n}-\frac{x}{1!(n+1)}+\frac{x^2}{2!(n+2)}-\frac{x^3}{3!(n+3)}+\cdots\cdots\right\}$$

第十八章　級數之和

101. 二三簡單級數之和　關於級數中之重要者如等差級數,等比級數,調和級數,二項級數,指數級數,對數級數等,已於第十七章中詳論之.本章更就其他二三簡單級數之求和法述之於下.

(1) 求 $S=1+2x+3x^2+\cdots\cdots+nx^{n-1}=\sum_{r=1}^{n}rx^{r-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$x=1$ 時,此級數成爲等差級數.故本節僅就其 $x\neq1$ 時研究之.

以 x 乘(1)式之兩邊,得

$$Sx=x+2x^2+\cdots\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)式減(2)式,得

$$S(1-x)=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}-nx^n$$

$$=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n$$

$$\therefore\qquad S=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}$$

(2) 求 $S=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots m+2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdots(m+1)+\cdots\cdots$

$+n(n+1)\cdots\cdots(n+m-1)$

$$=\sum_{r=1}^{n} r(r+1)\cdots\cdots(r+m-1)$$

置 $a_r=(r-1)r\cdots\cdots(r+m-1)$ 時,則

$$a_{r+1}=r(r+1)\cdots\cdots(r+m)$$

$$\therefore\quad a_{r+1}-a_r=(m+1)[r(r+1)\cdots\cdots(r+m-1)]$$

於上列等式,置 $r=1,2,3,\cdots\cdots,n$ 將其所得各式邊邊相加,

得 $(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots\cdots\cdots\cdots+(a_{n+1}-a_n)$

$$=(m+1)\sum_{r=1}^{n} r(r+1)\cdots\cdots(r+m-1)=(m+1)S$$

因上式之左邊等於 $a_{n+1}-a_1$ 且 $a_1=0$,

$$\therefore\quad S=\frac{a_{n+1}}{m+1}=\frac{1}{m+1}n(n+1)\cdots\cdots(n+m)$$

例如

$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots\cdots+n(n+1)=\sum_{r=1}^{n} r(r+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)=\sum_{r=1}^{a} r(r+1)(r+2)$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

……

等是.

例一 求 $S=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\sum_{r=1}^{x} r^2$

因 $r^2=r(r+1)-r$,故

$$S=\sum_{r=1}^{n}r(r+1)-\sum_{r=1}^{n}r=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

此級數之和,亦可依下法求之.

於 $(r+1)^3-r^3=3r^2+3r+1$ 之等式中,置 $r=1,2,3,\cdots\cdots n$ 將其所得各式邊邊相加時,得

$$(2^3-1)+(3^3-2^3)+\cdots\cdots\cdots\cdots+\{(n+1)^3-n^3\}$$

$$=3\sum_{r=1}^{n}r^2+3\sum_{r=1}^{n}r+n$$

因上式之左邊等於 $(n+1)^3-1$, 故得

$$(n+1)^3-1=3\sum_{r=1}^{n}r^2+3\sum_{r=1}^{n}r+n$$

$$=3S+\frac{3}{2}n(n+1)+n$$

由此卽得 $S=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

例二. 求 $S=1^3+2^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+n^3=\sum_{r=1}^{n}r^3$

$$r^3=(r-1)r(r+1)+r$$

$$\therefore\quad S=\sum_{r=1}^{n}(r-1)r(r+1)+\sum_{r=1}^{n}r$$

$$=0+1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots\cdots+(n-1)n(n+1)+\sum_{r=1}^{n}r$$

$$=\frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

此級數之和,亦可依下法求之.

於 $(r+1)^4-r^4=4r^3+6r^2+4r+1$ 之等式中,置 $r=1,2,3,\cdots\cdots,n$ 將其所得各式邊邊相加,得

$$(n+1)^4-1=4\sum_{r=1}^{n}r^3+6\sum_{r=1}^{n}r^2+4\sum_{r=1}^{n}r+n$$

$$=4S+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n$$

由此卽得 $S=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

(3) 求 $S=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots m}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot\cdots(m+1)}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$+\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m-1)}$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)\cdots(r+m-1)}$$ 但 $m\geqq2$.

置 $a_r=\frac{1}{r(r+1)\cdots(r+m-2)}$ 時,則

$$a_r-a_{r+1}=\frac{1}{r(r+1)\cdots(r+m-2)}$$

$$-\frac{1}{(r+1)(r+2)\cdots(r+m-1)}$$

$$=\frac{m-1}{r(r+1)\cdots(r+m-1)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\therefore\quad (a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots\cdots+(a_n-a_{n+1})$$

$$=(m-1)\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)\cdots(r+m-1)}=(m-1)S$$

因得 $S=\frac{1}{m-1}(a_1-a_{n+1})$

$$=\frac{1}{m-1}\left\{\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots(m-1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}\right\}$$

例如 $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=(1-\frac{1}{n+1})$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

....

等是.

例三　求 $S=\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+m-1)}$

$$+\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m-1)}$$

$$=\sum_{r=k}^{n}\frac{1}{r(r+1)\cdots(r+m-1)}$$

$$S=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)\cdots(r+m-1)}-\sum_{r=1}^{k-1}\frac{1}{r(r+1)\cdots(r+m-1)}$$

$$=\frac{1}{m-1}\left\{\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots(m-1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}\right\}$$

$$-\frac{1}{m-1}\left\{\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots(m-1)}-\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+m-2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{m-1}\left\{\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+m-2)}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}\right\}$$

例四. 求 $S=\frac{2}{1\cdot3\cdot4}+\frac{3}{2\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{n+1}{n(n+2)(n+3)}$

此級數之第 r 項爲

$$\frac{r+1}{r(r+2)(r+3)}=\frac{(r+1)^2}{r(r+1)(r+2)(r+3)}$$

而 $(r+1)^2=r(r+1)+r+1$

故 $S=\sum_{r=1}^{n}\frac{r(r+1)+r+1}{r(r+1)(r+2)(r+3)}$

$$=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(r+2)(r+3)}+\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(r+1)(r+2)(r+3)}$$

$$+\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)(r+2)(r+3)}$$

$$=\left\{\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right\}$$

$$+\left\{\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}$$

$$+\left\{\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}$$

應用例 3 之公式,因得

$$S=\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right\}$$
$$+\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}$$
$$=\frac{17}{36}-\frac{6n^2+21n+17}{6(n+1)(n+2)(n+3)}$$

102 **積彈** 將彈丸堆成錐體,設其底面成(1)等邊三角形,(2)正方形,(3)矩形時,則其彈丸總和之求法如下.

(1)底面成等邊三角形時, 此時由彈丸積成之錐體,其第一層爲 1 彈,第二層爲每邊二彈之正三角形,第三層爲每邊三彈之正三角形,如此順次增加,每下一層,其邊之彈數亦多 1.故第 n 層,其各邊之彈數爲 n.而其層彈丸之總數則爲

$$n+(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+3+2+1=\frac{1}{2}n(n+1)$$

由此得 第$n-1$層$=\frac{1}{2}(n-1)n$

第$n-2$層$=\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$

………… = …………………

第 3 層$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4$

第 2 層$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3$

第 1 層$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2$

因得 $S=\frac{1}{2}\{n(n+1)+(n-1)n+\cdots\cdots+2\cdot 3+1\cdot 2\}$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

(2)底面成正方形時,　此時由彈丸積成之錐體,第一層爲1,第二層每邊彈丸爲2之正方形,第三層每邊彈丸爲3之正方形,順次增加,其第n層每邊之彈丸爲n之正方形.故得

$$S=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(3)底面成矩形時,　此時由彈丸積成之錐體,其第n層設爲以n及m爲二邊之長方形,則其層彈丸之總數爲nm,隨之其第$n-1$層之彈丸總數爲$(n-1)(m-1)$.順次減少,至第一層則成以1及$m-n+1$爲二邊之長方形.其實爲$m-n+1$個彈丸之一列.由此得

$$\begin{aligned}S&=mn+(m-1)(n-1)+(m-2)(n-2)\\&\quad+\cdots\cdots+(m-n+1)\cdot 1\\&=(\overline{m-n}+n)n+(\overline{m-n}+\overline{n-1})(n-1)\\&\quad+(\overline{m-n}+\overline{n-2})(n-2)+\cdots\cdots+(\overline{m-n}+1)\cdot 1\\&=(m-n)\{n+(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+1\}\\&\quad+\{n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots\cdots+1^2\}\end{aligned}$$

$$=(m-n)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(3n-m+1)$$

103. 擬形數與多角形數　有 n 個級數依次排列之,設其中任意一級數之第 n 項恰等於其前之級數之 n 項之和,而此 n 個級數中,其第一級數之各項皆爲 1 時,則此等級數之次序,謂之擬形數之次序.

擬形數之次序如下.

第一次	1,	1,	1	1	1,……………………
第二次	1,	2,	3,	4,	5,……………………
第三次	1,	3,	6	10,	15,……………………
第四次	1,	4,	10	20,	35,……………………

……………………………………………………

卽第四次之第五項35,等於第三次五項之和 $1+3+6+10+15$. 又第三次之第五項15,等於第二次五項之和,第三次之第四項10,等於第二次四項之和是.餘類推.

由上之定義,可知第二次擬形數之第 n 項爲 $1+1+1+\cdots\cdots$ 至 n 項之和,卽 n 是.

隨之第三次擬形數之第 n 項 $=1+2+\cdots\cdots+n$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)$$

故第四次擬形數之第 n 項 $=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot3+\cdots\cdots$

$$+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}\{1\cdot 2+\ \ \cdot 3+3\cdot 4+\cdots\cdots+n(n+1)\}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3}.$$

故第五次擬形數之第 n 項 $=\frac{1}{2\cdot 5}\{1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots\cdots$

$$+n(n+1)(n+2)\}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

以下類推.

第 n 次擬形數之第 n 項 $=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-2)}{(r-1)!}.$

以最初二項爲(1,1),(1,2),(1,3),(1 4),……之諸等差級數依次排列之,將此諸等差級數之項各取 1, 2, 3,……, n 項所成之級數,謂之多角形數.

卽將最初二項爲 (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),…… 之諸等差級數依次排列之如下.

$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,1$ (1)

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,n$ (2)

$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ n-1$ (3)

$1,\ 4,\ 7,\ 10,\cdots\cdots\cdots\cdots,3n-2$ (4)

……………………………………………

$1,r-1,2r-3,3r-5,\cdots\cdots,(r-2)n-(r-3)$ $(r-1)$

作成多角形數時,先於(1)之級數中取 1 項,得 1.又取 2 項,得 $1+1=2$.取 3 項,得 $1+1+1=3$.…………….取 n 項得 n.

由此得一級數

$$1,\ \ 2,\ \ 3,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ \ n\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

次於(2)之級數中取 1 項,得 1.取二項,得$1+2=3$.取三項,得$1+2+3=6$.…………取 n 項,得$1+2+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

由此得一級數

$$1,\ \ 3,\ \ 6,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ \ \frac{1}{2}n(n+1)\ \cdots\cdots\cdots(B)$$

第三於(3)之級數中取 1 項,得 1.取二項,得$1+3=4$.取三項得$1+3+5=9$………取 n 項,得 $1+3+\cdots\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$.

由此得一級數

$$1,\ \ 4,\ \ 9,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ \ n^2\cdots\cdots\cdots\cdots(C)$$

第四於(4)之級數中取 1 項,得 1.取 2 項,得$1+4=5$.取三項得$1+4+7=12$.………… 取 n 項,得

$$1+4+\cdots\cdots(3n-2)=n+\frac{3}{2}n(n-1).$$

由此得一級數

$$1,\ \ 5,\ \ 12,\ \cdots\cdots\cdots,\ \ n+\frac{3}{2}n(n-1)\cdots\cdots\cdots\cdots(D)$$

順次求之,最後於 $(r-1)$ 級數中取 1 項,得 1.取二項,得 $1+(r-1)=r$.取 3 項,得 $1+(r-1)+(2r-3)=3r-3$,………… 取 n 項,得$1+(r-1)+\cdots\cdots+(r-2)n-(r-3)=n+\frac{1}{2}n(n-1)(r-2)$. 由此得一級數

$$1,\ r,\ 3r-3,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ n+\frac{1}{2}n(n-1)(r-2)\cdots(R)$$

將上法求得之多角形數(A),(B),(C), …… ……, (R)依次排

列之則爲

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n\ \cdots\cdots\cdots(A)$$

$$1,\ 3,\ 6,\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{2}n(n+1)\ \cdots\cdots\cdots(B)$$

$$1,\ 4,\ 9,\ \cdots\cdots,\ n^2\ \cdots\cdots\cdots(C)$$

$$1,\ 5,\ 12,\cdots\cdots,\ n+\frac{3}{2}n(3n-1)\cdots\cdots\cdots(D)$$

……………………………………………………

$$1,\ r,\ 3r-3,\cdots\cdots,n+\frac{1}{2}n(n-1)(r-2)\cdots(R)$$

其(*A*)謂之線形數(*B*)謂之三角形數(*C*)謂之正方形數(*D*)謂之五角形數,………,(*R*)謂之 r 角形數.

r 角形數 n 項之和 S 之求法如下.

因其一般項爲 $n+\frac{1}{2}n(n-1)(r-2)$, 故順次以 1, 2, 3,……,n 代入於其中 n 時,即得其各項之值.故得

$$S=1+\{2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot1\cdot(r-2)\}+\{3+\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot(r-2)\}$$

$$+\cdots\cdots+\{n+\frac{1}{2}n(n-1)(r-2)\}$$

$$=(1+2+3+\cdots\cdots+n)+\frac{1}{2}(r-1)\{2\cdot1+3\cdot2$$

$$+\cdots\cdots\cdots+n(n-1)\}$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)(r-2).$$

問題二十二

求下列級數至 n 項之和.

1. $1+3x+5x^2+7x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$.

2. $1+5x^2+9x^4+\cdots\cdots\cdots\cdots$.

3. $2\cdot5+3\cdot6+4\cdot7+\cdots\cdots\cdots\cdots$.

4. $2\cdot7+3\cdot10+4\cdot13+\cdots\cdots\cdots\cdots$.

5 $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot5+3\cdot4\cdot7+4\cdot5\cdot9+\cdots\cdots\cdots\cdots$.

6. $1\cdot3\cdot7+2\cdot4\cdot8+3\cdot5\cdot9+4\cdot6\cdot10+\cdots\cdots\cdots\cdots$.

7. $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{4\cdot6}+\cdots\cdots\cdots\cdots$.

8. $\frac{4}{2\cdot3\cdot4}+\frac{7}{3\cdot4\cdot5}+\frac{10}{4\cdot5\cdot6}+\cdots\cdots\cdots\cdots$.

9 $\frac{4}{1\cdot2\cdot3}+\frac{5}{2\cdot3\cdot4}+\frac{6}{3\cdot4\cdot5}+\frac{7}{4\cdot5\cdot6}+\cdots\cdots\cdots\cdots$.

10. $\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{2}{3\cdot5\cdot7}+\frac{3}{5\cdot7\cdot9}+\frac{4}{7\cdot9\cdot11}+\cdots\cdots\cdots\cdots$.

11. $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots\cdots\cdots\cdots$.

12. $\frac{1^2}{1}+\frac{1^2+2^2}{2}+\frac{1^2+2^2+3^2}{3}+\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{4}+\cdots\cdots\cdots\cdots$.

13. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\cdots\cdots\cdots\cdots$.

14. $\frac{3}{1\cdot2\cdot4}+\frac{4}{2\cdot3\cdot5}+\frac{5}{3\cdot4\cdot6}+\cdots\cdots\cdots\cdots$.

15. $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-\cdots\cdots\cdots\cdots$.

16. $1^3-2^3+3^3-4^3+5^3-\cdots\cdots\cdots\cdots$.

17. $1^3+3^3+5^3+7^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$.

18. $1^4+2^4+3^4+4^4+\cdots\cdots\cdots\cdots$.

19. $1\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot4^2+4\cdot5^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$.

20. $1\cdot3^2+3\cdot5^2+5\cdot7^2+7\cdot9^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$.

附錄一　對數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0026	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
2.7	.4313	4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	6776	.6785	.6794	.6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

附錄二　中英學語對照表

第一章

數	Number
自然數	Natural number
自然數	Natural scale
等式	Equality
不等式	Inequality
右邊	Right side
左邊	Left side
和	Sum
加法	Addition
交換法則	Commutative law
結合法則	Associative law
被乘數	Multipli cand
乘數	Multiplier
積	Product
乘法	Multiplication
配分法則	Distributive law
餘數	Remainder
差	Difference
被減數	Minuend
減數	Subtrahend
減法	Subtraction
完全數列	Complete scale
負數	Negative number
正數	Positive number
整數	Integer
絕對值	Absolute value
除法	Division
整除	Divisible
被除數	Dividend
除數	Divisor
商	Quotient
分數	Fraction
分子	Numerator
分母	Denominator
有理數	Rational number
有理系統	Rational system
不可約分數	Irreducible fraction
平方	Square
立方	Cube
n次冪	nth power
乘冪	Power

指數	Exponent, Index
底	Base
方根	Root
根指數	Radical index
無理數	Irrational number
不盡根	Surd
近似値	Approximate value
虛數	Imaginary number
實數	Real number
複素數	Complex number

第二章

代數式	Algebraic expression
式	Expression
已知數	Known quantity
常數	Constant
變數	Variable
整式	Integral expression
分數式	Fractional expression
有理式	Rational expression
無理式	Irrational expression
有理整式	Rational integral expression
項	Term
正項	Positive term
負項	Negative term
單項式	Monomials
二項式	Binomials
三項式	Trinomials
多項式	Polynomials
係數	Coefficient
同類項	Like term
降冪	Descending powers
昇冪	Ascending power
同次式	Homogeneous expression
公式	Formula
括弧	Bracket
分離係數法	Detached coefficient
長除法	Long division
剩餘	Remainder
有理分數式	Rotional fractions
約分	Reduction of fractions
通分	Reduction to a common denominator
繁分數式	Complex fractions
連分數式	Continued fractions

第三章

因子	Factor
因子分解	Factorization
約式	Divisor

公約式	Common factor
最高公約式	Highest common factor
連除法	Continued division
倍式	Multiple
公倍式	Common multiple
最低公倍式	Least common multiple

第四章

數値	Value
必要條件	Necessary condition
充分條件	Sufficient condition
剩餘定理	Remainder theorem
綜合除法	Synthetic division

第五章

對稱式	Symmetrical expression
交代式	Alternating expression
循環順序	Cyclical order

第六章

恆等式	Identity
方程式	Equation
未知數	Unknown quantity
根	Root
解	Solution
一元方程式	Simple equation
二元方程式	Equation with two unknown quantities
多元方程式	Equation with many unknown quantities
有理整方程式	Rational and integral equation
分數方程式	Fractional equation
無理方程式	Irrational equation
一次方程式	Simple or linear equation
二次方程式	Quadratic equation
高次方程式	Equation of higher degree
同値	Equivalent
移項	Transposed
討論	Discussion
不定	Indeterminate
不能	Impossible
二重根	Double root
判別式	Discriminant
增根	Additional roots

方程式論	Theory of equation
相反方程式	Reciprocal equation
二項方程式	Binomial equation

第七章

聯立方程式	Simultaneous equation
聯立二元一次方程式	Simultaneous equation of the first degree with two unknown quantities
聯立三元二次方程式	Simultaneous equation of the second with three unknown quantities
加減消去法	Elimination by addition and subtraction.
代入消去法	Elimination by substitution
等置消去法	Elimination by comparison
未定係數法	Method of undetermined multipliers
同次方程式	Homogeneous equation

第八章

絕對不等式	Absolute inequality
條件不等式	Conditional inequality
解不等式	To solve inequality
相加平均	Arithmetic mean
乘平均	Geometric mean

第九章

應用問題	Problem

第十章

函數	Function
極限値	Limiting value
與數	Given number
極大値	Maximum value
極小値	Minimum value

第十一章

坐標	Co-ordinates
橫坐標	Abscissa
縱坐標	Ordinate
坐標軸	Axes of co-ordinate
橫軸	Axis of x
縱軸	Axis of y

原點 Origin

直交坐標 Rectangular co-ordinates

直線 Straight line

曲線 Curve

圖表 Graph

抛物線 Parabola

雙曲線 Hyperbola

轉換點 Turning point

轉換值 Turning value

第十二章

數學的歸納法 Mathematical induction

第十三章

順列 Permutation

組合 Combination

階乘 Fartorial

圓順列 Circular permutation

第十四章

二項定理 Binomial theorem

展開式 Expansion

一般項 General term

多項定理 Multinomial theorem

第十五章

同一確度 Equally likely

確率 Probability

成功之機會 Favourable cases

失敗之機會 Unfavourable cases

反排事象 Exclusive events

獨立事象 Independent events

從屬事象 Dependent events

複合事象 Compound events

餘事象 Complementary events

期望金額 Expectation

大數之法則 Law of large numbers

揭悲歇夫之定理 Tchebycheff's theorem

拍茲之定理 Bayes' theorem

事前確率 A priori probability

事後確率 A posteriori probability

證言之確率 Probability of testimony

第十六章

對數 Logarithm

常用對數 Common logarithm

指標 Characteristic
假數 Mantissa
對數表 Table of logarithms
指數方法式 Exponential equation

第十七章

級數 Series
等差級數 Arithmetical progression
公差 Common difference
初項 First term
末項 Last term
等差中項 Arithmetical mean
等比級數 Geometrical progression
公比 Common ratio
等比中項 Geometrical mean
無限等比級數 Infinite numbers of term of the geometrical progression
調和級數 Harmonical progression
調和中項 Harmonic mean
二項級數 Binomial series
指數級數 Exponential series
自然對數 Logarithmic series
納氏對數 Napierian logarithm
對數級數 Natural logarithm

第十八章

級數之和 Summation of series
積彈 Piles of shot
擬形數 Figurate numbers
多角形數 Polygonal numbers
線形數 Linear numbers
三角形數 Triangular numbers
正方形數 Square numbers
五角形數 Pentagonal numbers
r 角形數 r-gonal numbers

附錄三 答數

問題一

1. (*a*) $4.$ (*b*) $\frac{1}{4}.$ (*c*) $5.$ (*d*) $\frac{1}{81}.$

2. (*a*) 1 (*b*) $x^x y^y z^z.$ (*c*) $1.$

3. (*a*) $a^{\frac{13}{5}}.$ (*b*) $a^{\frac{1}{24}}.$ (*c*) $b^{-\frac{4}{5}}.$

4. (*a*) $11.$ (*b*) $53.$ (*c*) $-1.$ (*d*) $2(a^2-b^2).$

問題二

1. $a^2b+10b^3.$ 2. $-5a^4+3a^3b-3ab^3+5b^4.$

3. $4a.$ 4. $x^8+2x^6+3x^4+2x^2+1.$

5. $0.$ 6. (*a*) $x^4-1.$ (*b*) $y^5-x^5.$

(*c*) $6x^4-5x^3y+14x^2y^2-5xy^3+6y^4.$

7. (*a*) $x^3+y^3.$ (*b*) $x^2-2xy-2y^2.$

8. (*a*) $1-2x+3x^2.$ (*b*) $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4.$

9 (*a*) $\frac{8a^8}{a^8-x^8}.$ (*b*) $\frac{48}{(x^2-9)(x^2-1)}.$

(*c*) $\frac{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$

10. (*a*) $-2.$ (*b*) $\frac{2abc(a+b+c)}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$

(*c*) $\frac{x(1+x^2)}{1+x}.$

問題三

1. $8xy(x^2+y^2).$
2. $5(x+y)(7x^2+11xy+7y^2).$
3. $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$
4. $(ax-by)(bx+ay).$
5. $\{a+b-3(c+d)\}\{a+b-5(c+d)\}$
6. $(a+b)(ax+by+c).$
7. $(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2).$
8. $(x^2+7x+26)(x-1)(x+8).$
9. $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^6+x^3y^3+y^6).$
10. $(x^2+y^2)(x^8-x^6y^2+x^4y^4-x^2y^6+y^8).$

問題四

1. $2x-1.$
2. x^2-2
3. $4a^2-2a+1.$
4. $x^2+2x+2.$
5. $mx+ny.$
6. $x^3y^3(x^2-y^2)^2.$
7. $12(a^2-b^2)(a^2-4b^2).$
8. $x^6-a^6.$
9. $(x-4)(3x-2)(3x^2+2x+1).$

10.　$(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)(a+5)$.

問　題　五

1.　5500.　　2.　2039.　　3.　597.　　4.　0.

5.　21324.　　6.　$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$, $\dfrac{a}{c}$ 或 $\dfrac{b}{d}$.

9.　$Q(x)=2x^4-2x^3+4x^2-3x+2$,　$R=-23$.

10.　$Q(x)=3x^3+x^2-2x-1$,　$R=-4$.

11.　$Q(x)=x^3-x^2+x-1$,　$R=0$.

12.　$Q(x)=x^2-3x+4$,　$R=5$.

問　題　六

1.　$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$.

2.　$-(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)$.

3.　$(a-b)(a-c)(b-c)(bc+ca+ab)$.　　4.　$24(abc)^2$.

5.　$(a-b)(a-c)(b-c)\{a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$.

6.　$4abc$　　7.　$4(a-b)(a-c)(b-c)$.

8.　$80abc(a^2+b^2+c^2)$.

9.　$(a-b)(a-c)(b-c)\{a^3+b^3+c^3+b^2c+c^2a+a^2b+bc^2$
$+ca^2+ab^2+abc\}$

10.　$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$.

11.　$a+b+c$.　　12.　$bc+ca+ab$.

13. $\frac{x+y+z}{(y+z)(z+x)(x+y)}$. 14. a^2. 15. $a^3+b^3+c^3+3abc$.

16. $L(a^3+b^3+c^3)+M(b^2c+c^2a+a^2b+bc^2+ca^2+ab^2)+Nabc$.

問題七

1. 0. 2. 12. 3. $a+b$.

4. $\frac{1}{2}(a+b)$. 5. $\frac{1}{2}(a+b)$. 6. 0.

7. -6. 8. $-a$. 9. 0.

10. $-\frac{1}{3}(a+b+c)$. 11. $\frac{2ab+b^2-a^2}{2b}$. 12. $\frac{2\lambda+1}{3}$, $\lambda<-\frac{1}{2}$.

13. $-\frac{\lambda-2}{3\lambda+1}$. 14. $\frac{5-3\lambda}{3(2+\lambda)}$ 15 $3\lambda-4$.

問題八

1. $\frac{4}{3}$. 2. 3, $-\frac{1}{3}$. 3. $-\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{4}$

4. 0, a. 5. 0, $\frac{a}{2}$. 6. a, b.

7. a, b. 8. 1, $\frac{a-b}{b-c}$. 9. $a-2b$, $2a-b$.

10. $a>0$時 $\lambda<-\frac{b^2-4ac}{4a}$, $a<0$時 $\lambda<-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

12. $\lambda>-\frac{13}{12}$. 13. 2或-1.

14. $m=-1$時一根不能,一根不定.又$m=0$時二根皆不

可能.

15. $a^2c^2x^2-(b^4-4ab^2c+2a^2c^2)x+a^2c^2=0.$

16. $ax^2+kbx+k^2c=0.$ 17. $ax^2+(2ah+b)x+ah^2+bh+c=0.$

18. (a) $qx^2+px+1=0$ (b) $qx^2-(p^2-2q)x+q=0.$

(c) $qx^2-p^2x+p^2=0.$

19. (a) $p^2-4q.$ (b) $-p^5+5p^3q-5pq^2.$

(c) $-\frac{p}{q}.$ 21. $ac-b^2=0.$

問 題 九

1. $-2.$ 2. $1.$ 3. $\frac{1}{2}(a+b$ 4. $-\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}.$ 5. $\frac{a^2+b^2}{a+b}.$

6. $\frac{bc+ca+ab\pm\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-abc(a+b+c)}}{a+b+c}.$

7. $a,$ $\frac{b(a+b)\pm\sqrt{b^2(a+b)^2+4a^2b^2}}{2a}$

8. $\frac{a}{2}(1\pm\sqrt{19}).$ 9. $3,$ $-1,$ $1\pm2\sqrt{19}.$

10. $3,$ $-\frac{21}{13}.$ 11. $a,$ $b,$ $\frac{1}{2}(a+b).$

12. $a,$ $b,$ $\frac{1}{2}\{a+b\pm\frac{1}{63}(a-b)\sqrt{-63}\}.$

13. $0,$ $3.$ 14. $b-\frac{1}{2}+\sqrt{a-b+\frac{1}{4}}.$

15. $a,$ $\frac{4a-b}{3}.$ 16. $\frac{5(a+b)-\sqrt{5}(a-b)}{10}.$

17. $a,\ b,\ \dfrac{a+b\pm i(a-b)\sqrt{7}}{2}.$ 18 $a,\ b,\ c,\ -(a+b+c).$

19. $1,\ -2,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{-23}}{2}.$ 20 $-1,\ -2,\ \dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}.$

21. $3,\ -1,\ \dfrac{2\pm\sqrt{61}}{2}.$ 22. $-\dfrac{5}{2}a,\ \dfrac{-5\pm a\sqrt{10}}{2}.$

23 $-1,\ \dfrac{a-b\pm\sqrt{b^2-2ab-3a^2}}{2a}.$ 24. $2,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{-3\pm\sqrt{-7}}{4}.$

25. $3,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{-8}}{3}.$ 26. $1,\ \dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$

27. $1,\ -1,\ i,\ -i.$ 28. $\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}a,\ \pm\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}a.$

29. $2,\ \dfrac{1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$

30. $\pm1,\ \pm i,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\pm i\sqrt{\dfrac{1}{2}}.$

問題十

1. $x=1,\ y=2,\ z=3.$ 2. $x=3,\ y=\dfrac{1}{2},\ z=\dfrac{2}{5}.$

3. 不定. 4. $x=\dfrac{2}{3},\ y=-4,\ z=-\dfrac{3}{5}.$

5. $x=\dfrac{2}{3},\ y=3,\ z=2.$ 6. $w=1,\ x=5,\ y=0,\ z=-3.$

7. $w=1,\ x=2,\ y=3,\ z=4.$

8. $w=1,\ x=3,\ y=5,\ z=7.$

9. $x=y=z=\dfrac{k}{a+b+c}.$

10. $x=a(b-c),\ y=b(c-a),\ z=c(a-b)$.

11. $x=\dfrac{(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)},\ y=\dfrac{(k-c)(k-a)}{(b-c)(b-a)},\ z=\dfrac{(k-a)(k-b)}{(c-a)(c-b)}$.

12. $x=0,\ y=1,\ z=0$

13. $x=abc,\ y=bc+ca+al,\ z=a+b+c$.

14. $x=1,\ y=5,\ z=36$.

15. $x=-a+b+c,\ y=a-b+c,\ z=a+b-c$.

16. $x=\dfrac{ap}{al+bm+cn},\ y=\dfrac{bp}{al+bm+cn},\ z=\dfrac{cp}{al+bm+cn}$.

17. $x=\dfrac{\lambda+6}{5\lambda-1},\ y=-\dfrac{3\lambda-13}{5\lambda-1},\ \lambda=\dfrac{1}{5}$時不能, $\lambda=2$時不定.

18. $x=\dfrac{\lambda^2+12\lambda-8}{(5\lambda-1)(\lambda-2)},\ y=-\dfrac{3\lambda^2-15\lambda+14}{(5\lambda-1)(\lambda-2)},\ \lambda=\dfrac{1}{5}$或 2 時不能.

19 $x=1,\ y=-1,\ \lambda=\dfrac{1}{5}$或 2 時不定.

20. $x=-\dfrac{2\lambda}{\lambda-1},\ y=-\dfrac{4}{\lambda-1},\ \lambda=1$ 時不能, $\lambda=2$ 時不定.

21. $x=\dfrac{a^2+b^2}{a+b},\ y=\dfrac{a^2+b^2}{b-a},\ a^2+b^2=0$或$a^2-b^2=0$時不能.

22. $x=a+b-c,\ y=a-b+c,\ a+b+c=0$ 時不定.

23. $x=\dfrac{(a+\alpha)(a+\beta)}{(a-b)},\ y=\dfrac{(b+\alpha)(b+\beta)}{b-a},\ \alpha-\beta=0$ 時不定, $\alpha-\beta\neq0,\ a-b=0$時不能.

24. 不定.

題問十一

1. $\left.\begin{aligned}x&=12\\y&=11\end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned}x&=1\\y&=1\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned}x&=\frac{8}{15}\\y&=\frac{1}{15}\end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned}x&=\frac{1}{2}(a+\sqrt{4b-3a^2})\\y&=\frac{1}{2}(-a+\sqrt{4b-3a^2})\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned}x&=\frac{1}{2}(a-\sqrt{4b-3a^2})\\y&=\frac{1}{2}(-a-\sqrt{4b-3a^2})\end{aligned}\right\}$

4. $$\left.\begin{aligned}x&=\frac{2aq^2-p+2q\sqrt{a(aq^2-bp^2-p)}}{p^2}\\y&=\frac{-2aq-2\sqrt{a(aq^2-bp^2-p)}}{p}\end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{2aq^2-p-2q\sqrt{a(aq^2-bp^2-p)}}{p^2}\\y&=\frac{-2aq+2\sqrt{a(aq^2-bp^2-p)}}{p}\end{aligned}\right\}$$

5. $\left.\begin{aligned}x&=12\\y&=7\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned}x&=-7\\y&=-12\end{aligned}\right\}.$

6. $\left.\begin{aligned}x&=a\\y&=b\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned}x&=2a-b\\y&=2b-a\end{aligned}\right\}.$

7. $$\left.\begin{aligned}x&=\frac{-9+\sqrt{91-3a}}{\sqrt{67-a-7\sqrt{91-3a}}}\\y&=\frac{1}{\sqrt{67-a-7\sqrt{91-3a}}}\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}x&=\frac{9-\sqrt{91-3a}}{\sqrt{67-a-7\sqrt{91-3a}}}\\y&=\frac{-1}{\sqrt{67-a-7\sqrt{91-3a}}}\end{aligned}\right\}.$$
$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{-9-\sqrt{91-3a}}{\sqrt{67-a+7\sqrt{91-3a}}}\\y&=\frac{1}{\sqrt{67-a+7\sqrt{91-3a}}}\end{aligned}\right\}.\quad \left.\begin{aligned}x&=\frac{9+\sqrt{91-3a}}{\sqrt{67-a+7\sqrt{91-3a}}}\\y&=\frac{-1}{\sqrt{67-a+7\sqrt{91-3a}}}\end{aligned}\right\}.$$

8. $$\left.\begin{aligned}x&=\frac{a}{\sqrt{a+b}}\\ y&=\frac{b}{\sqrt{a+b}}\end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned}x&=-\frac{a}{\sqrt{a+b}}\\ y&=-\frac{b}{\sqrt{a+b}}\end{aligned}\right\}.$$

9. $a^4-3a+3\neq 0$ 時

$$\left.\begin{aligned}x&=0\\ y&=0\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned}x&=\frac{2a-1}{a^2+1-\sqrt{(2a-1)(a+2)}}\\ y&=\frac{\sqrt{(2a-1)(a+2)}}{a^2+1-\sqrt{(2a-1)(a+2)}}\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{2a-1}{a^2+1+\sqrt{(2a-1)(a+2)}}\\ y&=\frac{-\sqrt{(2a-1)(a+2)}}{a^2+1+\sqrt{(2a-1)(a+2)}}\end{aligned}\right\}.$$

10. $$\left.\begin{aligned}x&=\frac{-a^2-5+\sqrt{a^4-22a^2+25}}{4a}\\ y&=\frac{a^2-5-\sqrt{a^4-22a^2+25}}{2a}\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}x&=-\frac{a^2+5+\sqrt{a^4-22a^2+25}}{4a}\\ y&=\frac{a^2-5+\sqrt{a^4-22a^2+25}}{2a}\end{aligned}\right\}.$$

11. $$\left.\begin{aligned}x&=0\\ y&=0\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned}x&=2\\ y&=1\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned}x&=-\frac{\sqrt{21}+1}{7}\\ y&=-\frac{\sqrt{21}-4}{7}\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned}x&=\frac{\sqrt{21}-1}{7}\\ y&=\frac{\sqrt{21}+4}{7}\end{aligned}\right\}.$$

12. $$\left.\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=\dfrac{a+b}{2}\\y=\dfrac{a-b}{2}\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=\dfrac{a+b+(a-b)i}{4}\\y=\dfrac{a-b-(a+b)i}{4}\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=\dfrac{a+b-(a-b)i}{4}\\y=\dfrac{a-b+(a+b)i}{4}\end{array}\right\}.$$

13. $$\left.\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=a-\sqrt[3]{ab^2}\\y=b-\sqrt[3]{a^2b}\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=a-\dfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{ab^2}\\y=b-\dfrac{1}{2})-1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{a^2b}\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l}x=a-\dfrac{1}{4}(-1+i\sqrt{3})^2\sqrt[3]{ab^2}\\y=b-\dfrac{1}{4}(-1+i\sqrt{3})^2\sqrt[3]{a^2b}\end{array}\right\}.$$

14. $$\left.\begin{array}{l}x=3\\y=1\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=-3\\y=-1\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}x=4\sqrt{\dfrac{2}{3}}\\y=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=-4\sqrt{\dfrac{2}{3}}\\y=-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\end{array}\right\}.$$

15. $$\left.\begin{array}{l}x=2\\y=3\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=-2\\y=-3\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=\dfrac{16}{9}\sqrt{3}\\y=-\dfrac{13}{9}\sqrt{3}\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=-\dfrac{16}{9}\sqrt{3}\\y=\dfrac{13}{9}\sqrt{3}\end{array}\right\}.$$

16. $$\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2}\\y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2+b^2}\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=-\dfrac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2}\\y=-\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2+b^2}\end{array}\right\}$$

17. $$\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{a}{3}\\y=b\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=-\dfrac{a}{3}\\y=-b\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}x=a\\y=\dfrac{b}{3}\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}x=-a\\y=-\dfrac{b}{3}\end{array}\right\}$$

18. $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=4\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=-\frac{7}{3}\\y=-\frac{14}{3}\end{array}\right\}$.　　19. $\left.\begin{array}{l}x=3\\y=-6\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=-\frac{1}{3}\\y=\frac{2}{3}\end{array}\right\}$.

20. $\left.\begin{array}{l}x=1\\y=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=-1\\y=-2\end{array}\right\}$.　　21. $\left.\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=\frac{a+b}{2ab}\\y=\frac{b-a}{2ab}\end{array}\right\}$.

22. $\left.\begin{array}{l}x=b\\y=a\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=\frac{a^2}{b}\\y=\frac{b^2}{a}\end{array}\right\}$

題　問　十　二

1. $x>2$ 或 $x<1\frac{1}{2}$　　2. $x<1$ 或 $3>x>2$.

3. $x>-1$（除 $x=1$）.　　4. $-3<x<-1$.

5 $x>0$　　6. $1<x<2$.

7. $1<x<3-\sqrt{2}$ 或 $2<x<3+\sqrt{2}$.

8. $x<-3a,\quad -a<x<a,\quad x<2a$.

9. $\frac{3}{2}\geqq x>1$　　10. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}<x\leqq 3$.

11. $x\leqq a$ 或 $b<x<b-\frac{1}{2}+\sqrt{a-b+\frac{1}{4}}$.

12 $x<-a,\quad -b\geqq x\geqq -a,\quad x>+\sqrt{ab}$.　　13. $x>1$.

14. $p\geqq +\sqrt{2}$，或 $+\sqrt{2}>p\geqq 2-\sqrt{2}$ 時不拘 x 之值如

何皆能成之；$2-\sqrt{2}>p>0$ 時，

$$\frac{(2-p^2)^2-\sqrt{(2-p^2)^4-64p^4}}{8p^2}>\frac{(2-p^2)^2+\sqrt{(2-p^2)^4-64p^4}}{8p^2};$$

$p=0$ 時 $x\leqq -1$ 或 $-1<x<0$.

問題十三

1. 甲 1 斗，乙 4 升.　　2. 640.

3. 快車每時45哩慢車每時30哩.

4. 遲 2 秒.　　5. 不能.

6. $a=0$, $b=1$. 時 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 之九數

7. 59　　8. 甲 90 分，乙 72 分，丙 60 分.

9. 60 里.　　10. 等邊爲 $\frac{p^2+h^2}{2p}$ 底邊爲 $\frac{p^2-h^2}{p}$.

11. 4 厘.　　12. 24 日，甲 8 角，乙 6 角.

13. 9 斗.　　14. $\overline{t}\,v+\frac{v^2}{g}-\sqrt{\frac{v^3}{g}\left(2\overline{t}+\frac{v}{g}\right)}$.

15. 三邊爲 b, b, $\sqrt{3}b$; 或三邊皆爲 a.

16. 速度每時 2 里，距離 16 里；或速度每時 $\frac{4}{3}$ 里，距離 $8\frac{8}{9}$ 哩.　　17. 345.

18. $\frac{1}{2}(p+r-\sqrt{p^2-6pr+r^2})$, $\frac{1}{2}(p+r+\sqrt{p^2-6pr+r^2}$, $p-r$.

19. 大部分爲 51，或 52，或 53.　　20. $\frac{4}{5}$.

21. 7, 或 8, 或 9.　　22. $26\frac{4}{21}$分鐘.

23. 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15中之一.

24. 124號柱與125號柱之間.

問題十四

1. 0.　　2. $-\infty$.　　3. 6.

4. $\frac{1}{2}$.　　5. $2\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)<\lambda<2\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

10. $\lambda<-3$時,3位於二根之間;$\lambda=-3$時,3爲二根中之大者; $-3<\lambda<1$時,3較二根中之大者爲大;$\lambda=1$時,3較二等根爲大.

11. $2<\lambda<\frac{7}{3}$.　12. -4與9之間之值.　13. $-\frac{(a-b)^2}{4}$.

14. 極小值$2a$,極大值$-2a$.　　16. 正方形.

19. 弦爲其點二等分時其值極小,弦爲經過其點之直徑時其值極大.

20. 二等邊直角三角形.

問題十五

13. 極小值　(a) $x=-3$時$y=-8$.　(b) $x=1$時$y=4$.

(c) $x=1$時$y=13$.

14. 極大值　(a) $x=-3$時$y=10$.　(b) $x=1$時$y=4$.

(c) $x=2$時$y=0$.

15. (*a*) 2, 3. (*b*) −2, −3. (*c*) $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{5}$.

16. (*a*) 2·4, 6·3, −2·7. (*b*) 1·7, −2·2, −5·5.

17. (*a*) 1·5, 2·6, −0·3, −3·8. (*b*) 0·7, 3·2, −1·2, −2·7.

18. (*a*) 1·5, −1·8. (*b*) 2·1, −1·6.

問題十七

1. 96. 2. 12. 3. 576.

4. 672. 5. 3456. 6. 360.

7 2880. 8 487635,455126. 9. ${}_{10}C_5\cdot{}_{12}C_8\cdot{}_{18}C_{12}$.

10. 25200. 11. 2520. 12. 144

13. $\frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{5!}$. 14. 36.

15. 120. 16. 5991 17. 243 18 3^{12}

19 $\frac{1}{2}n(n-1)$. 20. $\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$. 21. n^2-n+2.

問題十八

1. (*a*) $x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3+15a^4x^2+6a^5x+a^6$.

(*b*) $1-5x^2+10x^4-10x^6+5x^8-x^{10}$.

(*c*) $81x^4-216x^3y+216x^2y^2-96xy^3+16y^4$.

(*d*) $16a^4+96a^5+216a^6+216a^7+81a^8$.

(*e*) $64x^{12}-192x^{10}+240x^8-160x^6+60x^4-12x^2+1$.

(*f*) $y^7-7xy^6+21x^2y^5-35x^3y^4+35x^4y^3-21x^5y^2+7x^6y$

$-x^7$.

3　$10a^6$.　　4.　38760　　6.　$\frac{300!}{100!\,200!}\cdot\frac{2^{200}}{3^{300}}$.

7.　6.　　8.　(*a*)　5.　　(*b*)　5 與 6.

9　(*a*)　$1+4x+10x^2+20x^3+35x^4+\cdots\cdots$.

(*b*)　$1-8x+40x^2-160x^3+560x^4-\cdots\cdots$.

(*c*)　$\frac{1}{8}\left\{1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{4}x^3+\frac{15}{16}x^4+\cdots\cdots\right\}$

(*d*)　$1+2x+5x^2+\frac{40}{3}x^3+\frac{110}{3}x^4+\cdots\cdots$.

(*e*)　$1-3x-3x^2-7x^3-21x^4-\cdots\cdots$.

11.　10.4880……,　5.0657……,　5.0099……．

12.　312.　　13　0.　　14.　42.

問 題 十 九

1.　$\frac{2}{n(n-1)}$.　　2.　$\frac{3}{n}$.　　3.　$\frac{a}{a+b+c}$.

4.　(*a*)　$\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{(a+b+c)(a+b+c-1)(a+b+c-2)(a+b+c-3)}$.

(*b*)　$\frac{6a(a-1)b(b-1)}{(a+b+c)(a+b+c-1)(a+b+c-2)(a+b+c-3)}$.

5.　$\frac{25}{216}$, $\frac{27}{216}$.　　6.　$\frac{4}{33}$.　　7.　無損益.

8.　$\frac{5}{72}$　　9.　$\frac{n}{2^n}$.　　10　$\frac{16}{27}$

11. $\frac{n!}{2!3!(n-5)!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{4}{6}\right)^{n-5}$. 12. 二白一黑.

13 $\frac{1}{3}(2n+1)$. 14 7. 15. $\frac{9}{25}$. 16. $\frac{3}{8}$.

17. $\frac{P_1+4P_2+9P_3+16P_4}{4(P_1+2P_2+3P_3+4P_4)}$. 18. $pq+(1-p)(1-q)$.

19. $\frac{4}{7}$. 20. 約爲1.

問題二十

1. 9.0740. 2. $\overline{1}.4713$. 3. 2.8452.

4. 2208. 5. 5.134. 6. 0.2502.

7. 0.000001405. 8. 0.2871. 9. 0.09714.

10. 117位. 11. (*a*) 3.1636. (*b*) $\overline{1}.8851$.

(*c*) 4.6232. (*d*) 0.3186. (*e*) 0.9775.

12. 6個. 13. 4.322. 14. 2.946

15 4.292 16. −6.831. 17. 14.

18. 7. 19. 約22.57丈. 20. 558.4尺.

21. (*a*) $2\log 2$. (*b*) $\log 2$. 22. $\frac{22}{17}$

問題二十一

2. 2, 4, 6, 8 或 −2, −4, −6, −8. 3. 2, 4, 8.

7. 6, ±12, 14, ±48, …………………….

8　3, 9, 15.　　9.　$\frac{5}{2}$, 5, 10, 20, 40, 80, 160.

10　$\frac{1-(n-1)r^n}{1-r}+\frac{r^2(1-r^{n-2})}{(1-r)^2}$.

11.　$v=\frac{1}{5}\left(\frac{k+k_1+k_2+k_3+k_4}{S}-\frac{k_1-k}{d}\right)$.

$u=\frac{1}{5}\left(\frac{k+k_1+k_2+k_3+k_4}{S}-\frac{k_2-k_1}{d}\right)$.

………………………………………….

………………………………………….

但 d 爲此級數之公差 S 爲其總和.

12.　$2\sqrt{2}-1$.

14.　2.　　15.　$\sqrt{\frac{2}{3}}$　　16.　$4\sqrt[3]{4}$.

19.　$\frac{2^n e}{n}$.　　23　$2\left\{x-2\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}-2\cdot\frac{x^9}{9}+\cdots\cdots\right\}$

問題二十二

1.　$\frac{2(1-x^n)}{(1-x)^2}-\frac{1+(2n-1)x^n}{1-x}$.　　2.　$\frac{4(1-x^{2n})}{(1-x^2)^2}-\frac{3+(4n-3)x^{2n}}{1-x^2}$.

3.　$\frac{n(n+4)(n+5)}{3}$.　　4　$n(n^2+5n+8)$.

5.　$\frac{1}{2}n(n+1)^2(n+2)$.　　6.　$\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+35n+88)$.

7.　$\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$.　　8.　$\frac{5}{6}-\frac{3n+5}{(n+2)(n+3)}$.

9.　$\frac{5}{4}-\frac{2n+5}{2(n+1)(n+2)}$.　　10.　$\frac{1}{8}-\frac{4n+3}{8(2n+1)(2n+3)}$.

11. $\frac{2n}{n+1}$ 12 $\frac{1}{36}(n+1)(n+2)(4n+3)-\frac{1}{6}$.

13. $\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}$.

14. $$\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$+\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}.$$

15 $(n+1)(2n+1)$. 16. $n+1)^2(4n+1)$.

17. $(n+1)^2(2n^2+4n+1)$. 18. $\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)$.

19. $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)-\frac{1}{3}n(n+1)(x+2)$.

20 $$\frac{1}{8}\{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)+1\cdot3\cdot5\}$$

$$-\frac{1}{3}\{(2n-1)(2n+1)(2n+3)+1\cdot3\}$$

世界書局出版高中教科書目錄（二）

科目	書名	編著人	冊數	定價
歷史	高中外國史	李季谷	二冊	上冊定價九角半 下冊一元三角半
地理	高中本國地理	諶亞達	二冊	每冊　角
	高中外國地理	王謨	一冊	角
算學	高中代數學	傅溥	一冊	一元九角五分
	高中平面幾何學	傅溥	一冊	角
	高中立體幾何學	傅溥	一冊	角
	高中解析幾何學	傅溥	一冊	角
	高中三角術	傅溥	一冊	角
	新三角法	薛仲華	一冊	角
物理	高中物理學	傅溥	一冊	二元
化學	高中化學	吳治民	一冊	二元五角五分
生物學	高中生物學	沈霽春	一冊	角
	高中生物學	吳子修	一冊	角
圖畫	中學機械畫	楊哲明	一冊	九角五分

25.89

中華民國二十年十月初版
中華民國廿一年九月三版

（高級中學教科書）高中代數學（全一冊）
（每冊定價銀一元九角五分）
（外埠酌加郵費匯費）

編著者　傅溥
出版者　世界書局
印刷兼發行者　（上海大連灣路）世界書局
發行所　（上海四馬路暨各省）世界書局


世
界