（再版修訂本）

實用微積分

下册

編著者：

薩本棟，鄭曾同，楊龍生。

青年圖書出版社印行

中華民國三十三年九月

實用微積分

下 册

編著者：

薩本棟，鄭曾同，楊龍生。

青年圖書出版社印行

中華民國三十三年九月

實

中

編著

發行

印刷

經售

本書定價 上冊四十元 下冊三十元 （戰時照價加　成）

實用微積分目次

下卷

第十二章　積分方法　頁(219—256)

第十三章　體積，面積，質量　(257—274)

第十三章附圖

第十四章　力學上之定積分　(275—306)

第十五章　均値定理與不等式　(307—324)

第十四及第十五兩章附圖

第十六章　級數　(325—354)

第十七章　立體解析幾何　(353—372)

第十七章附圖

第十八章　偏微分及其應用　(373—404)

第十九章　重積分　(405—432)

第十八章及第十九章兩章附圖

第二十章　近似的及機械的積分法　(433—444)

第二十章附圖

英漢名詞對照表及索引

勘誤表

第十二章　積分方法

<u>(12.1)積分表</u>　求函數之積分，其方法較諸求函數之微分，實爲較繁難。爲便於應用起見，遂有積分表之刊印，將較常用之積分，分類登記，以資檢用。此等表篇幅之較大者當推 Bierens de Haan 所計之定積分表(Tables d'integrales définies)而流傳較廣者則爲 B. O. Pierce 教授所編之積分簡表(A Short Table of Integrals)。此外，各微積分教本多附有更簡要之積分表，以便讀者。欲求積分表中各公式之眞確，固可將兩方微分而證之，但在純粹數學方面言之，各公式應如何推演，實爲甚重要且富有趣味之問題。　至於應用方面，因有時所欲求之積分，表中未曾列入，惟可由表中其他公式推算而得，故有系統的積分方法亦爲實用數學家所亟欲考究。本章目的即爲略舉各種常用之較重要之積分方法。

<u>(12.2)最基本之積分</u>　最基本之積分公式實不甚多。茲將積分常數略去而將此等公式之曾經前此證過者彙集於下以資參考(a，b，c，……等爲常數)：

A. 普通公式：

(I) $\int\{f(x)\pm g(x)\pm\cdots\}dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx\pm\cdots$；

(II) $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$；

(III) $\int f(u)\frac{du}{dx}dx=\int f(u)\,du$；

B. 特別公式：

$$\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1},\ n\neq-1 \tag{1}$$

$$\int \frac{du}{u}=\ln|u| \tag{2}$$

$$\int \sin u\, du=-\cos u \tag{3}$$

$$\int \cos u\, du=\sin u \tag{4}$$

$$\int \sec^2 u\, du=\tan u \tag{5}$$

$$\int \sec u \tan u\, du=\sec u \tag{6}$$

$$\int e^u du=e^u \tag{7}$$

$$\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a} \tag{8}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=\sin^{-1} u \tag{9}$$

$$\int \frac{1}{1+u^2}du=\tan^{-1} u \tag{10}$$

自上述各公式即可推得不少之常用積分，茲分别陳述之。

(12.3)代替法　代替法之理論，已包含在普通公式(III)中，前曾屢用之。　簡言之，此法係另選一適當之變數代入被積函數 $f(x)$ 及微分 dx 中，以使所欲求之積分可化爲上列各特別公式之一。讀者對於此法之應用，貴能一見即知應如何代替，此與善於

觀察之生物學家遇及動物植物時，能即知其屬於何門類頗相似。

例如 $\int\sqrt{a+bx}\,dx$，$\int x(1-x^2)^{\frac{2}{3}}dx$，(頁99)，$\int\cos ax\,dx$，(頁137)，$\int e^{ax}dx$(頁169)及$\int\tan x\,dx$(頁174)等皆是。

(12.4) $\sin^m x\cos^n x$ 之積分 若 m 或 n 爲整數，則 $\int\sin^m x\cos^n x\,dx$ 可依照特別公式(1)，(2)，(3)及(4)以推演之。但演算之時尙需下列三角公式：

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1 \tag{11}$$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2} \tag{12}$$

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2} \tag{13}$$

及

$$\sin 2x=2\sin x\cos x \tag{14}$$

茲分爲三目而討論之如下：

(A) 若 m 爲正奇數，例如 $2q+1$（q 爲任何正整數或 0），則 $\sin^m x\,dx$ 可寫爲

$$-\sin^{2q}x\,d\cos x=-(1-\cos^2 x)^q\,d\cos x。$$

如以 $u=\cos x$ 代入，則

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=-\int(1-\cos^2 x)^q\cos^n x\,d(\cos x)$$

$$=-\int(1-u^2)^q u^n\,du，$$

再用兩項定理發展 $(1-u^2)^q$，則被積函數將爲 u 之多項式而公式(1)卽可應用矣。

例 1 $\int \sin^3 x\cos^4 x\,dx = -\int (1-\cos^2 x)\cos^4 x\,d\cos x$

$$= \int (\cos^6 x - \cos^4 x)\,d\cos x = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C。$$

(B) 若 n 為正奇數，例如 $2p+1$（p 為任何正整數或 0），則類推上述方法即有

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx = \int (\sin^m x)(1-\sin^2 x)^p\,d\sin x$$

$$= \int v^m(1-v^2)^p\,dv,$$

而公式(1)復可應用。

例 2 $\int \cos^5 x\sin^{-\frac{1}{2}}x\,dx = \int \cos^4 x\sin^{-\frac{1}{2}}x\,d\sin x$

$$= \int (1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\sin^{-\frac{1}{2}}x\,d\sin x$$

$$= \int (\sin^{-\frac{1}{2}}x - 2\sin^{\frac{3}{2}}x + \sin^{\frac{7}{2}}x)\,d\sin x$$

$$= 2\sin^{\frac{1}{2}}x - \frac{4}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x + \frac{2}{9}\sin^{\frac{9}{2}}x + C。$$

(C) 若 m 及 n 均為正偶數，則可先用方程(14)，(13)或(12)化被積函數為倍角之正弦與餘弦，然後再展為多項式而積分之。

例 3 $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2\cos^2 x\,dx$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\frac{d\sin 2x}{2}$$

$$=\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)\,dx+\frac{1}{16}\,\frac{\sin^3 2x}{3}$$

$$=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C\text{。}$$

例4　$\displaystyle\int\sin^4 x\,dx=\frac{1}{4}\int(1-\cos 2x)^2\,dx$

$$=\frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1}{2}+\frac{\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3x}{2}-\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8}\right)+C\text{。}$$

(12.5)倍數角正弦與餘弦相乘之積分　遇被積函數為 $\sin px\cos qx$，或 $\sin px\sin qx$ 或 $\cos px\cos qx$ 各乘積時，可先用下列三角公式：

$$2\sin px\cos qx=\sin(p-q)x+\sin(p+q)x \qquad (15),$$

$$2\sin px\sin qx=\cos(p-q)x-\cos(p+q)x \qquad (16),$$

$$2\cos px\cos qx=\cos(p-q)x+\cos(p+q)x \qquad (17),$$

將各乘積改爲適當之和然後再引用公式(3)與(4)而積分之。

例　$\displaystyle\int\cos 3x\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int\big(\cos(3-2)x+\cos(3+2)x\big)dx$

$$=\frac{1}{2}\int(\cos x+\cos 5x)\,dx=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{10}\sin 5x+C\text{。}$$

(12.6)　$\displaystyle\int\tan^m x\sec^n x\,dx$ 與 $\displaystyle\int\cot^m x\csc^n x\,dx$　設 n 爲正偶數而 m 非正奇數，則因有

$$1+\tan^2 x=\sec^2 x \qquad (18),$$

$$d\tan x=\sec^2 x\,dx \qquad (19),$$

及 $$1+\cot^2 x=\csc^2 x \qquad (20),$$

$$d\cot x=-\csc^2 x\,dx \qquad (21),$$

各關係，故若令 $n=2p+2$，p 爲適當之整數，復以 $u=\tan x$，或 $v=\cot x$ 代入，則

$$\int\tan^m x\sec^n x\,dx=\int\tan^m x\sec^{2p}x(\sec^2 x\,dx)$$

$$=\int u^m(1+u^2)^p\,du,$$

$$\int\cot^m x\csc^n x\,dx=\int\cot^m x\csc^{2p}x\csc^2 x\,dx$$

$$=-\int v^m(1+v^2)^p\,dv,$$

而於展開後復可按項積分之矣。

例 1　$$\int\tan^{\frac{2}{3}}x\sec^4 x\,dx=\int\tan^{\frac{2}{3}}x(1+\tan^2 x)\,d\tan x$$

$$=\frac{3}{5}\tan^{\frac{5}{3}}x+\frac{3}{11}\tan^{\frac{11}{3}}x+C。$$

例 2　$$\int\frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}dx=\int\cot^4 x\csc^2 x\,dx=-\int\cot^4 x\,d\cot x$$

$$=-\frac{1}{5}\cot^5 x+C。$$

設 m 爲正奇數，n 爲任何數，則積分之法有二：其一係將 $\tan x$，$\sec x$，$\cot x$，或 $\csc x$ 表爲 $\sin x$ 與 $\cos x$ 之函數而後應用(12.4)節(A)目或(B)目方法；其他則應用方程(18)或(20)及

$$d\sec x=\sec x\tan x\,dx \qquad (22),$$

$$d\csc x=-\csc x\cot x\,dx \qquad (23),$$

之關係而令 $u=\sec x$， $v=\csc x$， 將所求之積分化爲（令 $m=2q+1$）：

$$\int \tan^m x \sec^n x\, dx=\int \tan^{2q} x \sec^{n-1} x\, d\sec x=\int (u^2-1)^q u^{n-1} du,$$

$$\int \cot^m x \csc^n x\, dx=-\int \cot^{2q} x \csc^{n-1} x\, d\csc x=-\int (v^2-1)^q v^{n-1} dv,$$

然後展開再按項積分之。

例3 $$\int \tan^5 x \sec^{\frac{1}{2}} x\, dx=\int (\sec^2 x-1)^2 \sec^{-\frac{1}{2}} x\, d\sec x$$

$$=\int (\sec^{\frac{7}{2}} x-2\sec^{\frac{3}{2}} x+\sec^{-\frac{1}{2}} x)\, d\sec x$$

$$=\frac{2}{9}\sec^{\frac{9}{2}} x-\frac{4}{5}\sec^{\frac{5}{2}} x+2\sec^{\frac{1}{2}} x+C。$$

或 $$\int \tan^5 x \sec^{\frac{1}{2}} x\, dx=\int \sin^5 x \cos^{-\frac{11}{2}} x\, dx$$

$$=-\int (1-\cos^2 x)^2 \cos^{-\frac{11}{2}} x\, d\cos x$$

$$=-\int (\cos^{-\frac{11}{2}} x-2\cos^{-\frac{7}{2}} x+\cos^{-\frac{3}{2}} x)\, d\cos x$$

$$=\frac{2}{9}\cos^{-\frac{9}{2}} x-\frac{4}{5}\cos^{-\frac{5}{2}} x+2\cos^{-\frac{1}{2}} x+C。$$

(12.7) $\dfrac{px+q}{ax^2+bx+c}$ 之積分 此積分只需公式(10)與(2)，

茲分 $p=0$ 及 $p\neq 0$ 兩目而討論之。

(A) $p=0$，遇此之時，可將 ax^2+bx+c 配成兩完全平方之和或差，如

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\};$$

若 $4ac>b^2$，則用 $u=x+\dfrac{b}{2a}$，$k^2=\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}$ 代入，乃有

$$\int\frac{q\,dx}{ax^2+bx+c}=\frac{q}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}}$$

$$=\frac{q}{a}\int\frac{du}{u^2+k^2}=\left(\frac{q}{ak}\right)\int\frac{d\left(\dfrac{u}{k}\right)}{\left(\dfrac{u}{k}\right)^2+1}$$

而公式(10)即可應用。

若 $4ac<b^2$，則以 $u=x+\dfrac{b}{2a}$，$m^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$ 代入，乃有

$$\int\frac{q\,dx}{ax^2+bx+c}=\frac{q}{a}\int\frac{du}{u^2-m^2}=\frac{q}{2am}\int\left(\frac{du}{u-m}-\frac{du}{u+m}\right),$$

而公式(2)即可應用。

例 1　$$\int\frac{dx}{2x^2+4x+3}=\int\frac{dx}{2(x+1)^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\sqrt{2}(x+1)}{2(x+1)^2+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\sqrt{2}(x+1)+C。$$

例 2　$$\int\frac{dx}{2x^2+4x-1}=\int\frac{dx}{2(x+1)^2-3}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2-\dfrac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{3/2}}\ln\frac{x+1-\sqrt{3/2}}{x+1+\sqrt{3/2}}+C。$$

(B)　$p\neq 0$，遇此時，可先將分子配成分母之紀數與一常數之和如下：

$$\int\frac{(px+q)dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{\dfrac{p}{2a}(2ax+b)+\left(q-\dfrac{pb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}dx$$

$$=\frac{p}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}+\left(q-\frac{pb}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

右邊第一積分可用公式(2)，第二積分則再按前段所述之方法求之。

例3　$$\int\frac{(3x+4)\,dx}{x^2+4x+3}=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+4)-2}{x^2+4x+3}\,dx$$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+3)-\int\frac{2\,dx}{(x+2)^2-1}$$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+3)-\ln\frac{x+1}{x+3}+C$$

(12.8)有理函數之積分　凡函數可表爲兩多項式之商者名爲有理函數，例如

$$R(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_{m-1}x+b^m},$$

此中各 a 與各 b 均爲常數，m 與 n 則爲正整數。如 $n\geqq m$，則照其所示之除法計算後，即可寫 $R(x)$ 爲

$$R(x)=P(x)+\frac{f(x)}{F(x)},$$

此中之 $P(x)$，$f(x)$ 及 $F(x)$ 均爲 x 之多項式，惟 $f(x)$ 之次數較 $F(x)$ 低，二者之間且無公共之因子。$P(x)$ 之積分不難立即求得，故所待討論者僅有 $\frac{f(x)}{F(x)}$ 之積分。茲分四目陳述之。

(A)　若 $F(x)$ 之 m 個根均爲實數，且無重複者，例如 s_1，s_2，……，s_m，則可將之寫爲

$$F(x)=b_0(x-s_1)(x-s_2)\cdots\cdots(x-s_m)。$$

於是按代數原理 $\frac{f(x)}{F(x)}$ 分數可拆爲 m 個部分分數(partial fractions)，其分母各爲 $(x-s_1)$，$(x-s_2)$，……，$(x-s_m)$ 等於下：

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_1}{x-s_1}+\cdots\cdots+\frac{A_m}{x-s_m}$$

此中各 A 代表適當之常數，而積分時可運用公式(2)。求各部分分數中之各常數(例如 A_m)，其法甚多。最速者似爲將恆等式兩邊各乘以$(x-s_m)$後，再令 $x=s_m$，如是右邊爲 A_m

而 $$A_m=\left(\frac{f(x)}{(x-s_1)(x-s_2)\cdots(x-s_{m-1})}\right)_{x=s_m}=\frac{f(s_m)}{F'(s_m)}$$

此中之 $F'(x)=\frac{d}{dx}F(x)$，$F'(s_m)$指將 s_m 代 $F'(x)$ 中 x 所得之值。

例1　求 $\int\frac{3x+1}{x(x^2-1)}dx$。

被積函數之分子，其次數已較低於其分母，故可即行拆爲部分分數。分母 $F(x)$ 之根有三，即 $s_1=0$，$s_2=1$ 及 $s_3=-1$，故令

$$\frac{3x+1}{x(x^2-1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x+1}。$$

欲定 A_1 之值，將此恆等式兩邊各乘以 x，再以 $x=0$ 代入，如是得

$$A_1=\left(\frac{3x+1}{x^2-1}\right)_{x=0}=\frac{1}{-1}=-1，$$

同樣 $$A_2=\left(\frac{3x+1}{x(x+1)}\right)_{x=1}=\frac{3+1}{1(1+1)}=\frac{4}{2}=2，$$

而 $$A_3=\left(\frac{3x+1}{x(x-1)}\right)_{x=-1}=\frac{-3+1}{-1(-1-1)}=\frac{-2}{2}=-1，$$

是以 $$\int\frac{3x+1}{x(x^2-1)}dx=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{2\,dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x+1}$$

$$=-\ln x+2\ln(x-1)-\ln(x+1)+\ln c$$

$$=\ln\frac{c(x-1)^2}{x(x+1)}。$$

(B) 若 $F(x)$ 之 m 個根均為實數而其中復有重複 r 次之根 s，則 $F(x)$ 可寫為

$$F(x)=b_0(x-s_1)\cdots\cdots(x-s)^r\cdots\cdots(x-s_m),$$

而分析為部分分數時，乃有

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_1}{x-s_1}+\cdots+\frac{B_1}{(x-s)}+\frac{B_2}{(x-s)^2}+\cdots+\frac{B_r}{(x-s)^r}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{A_m}{x-s_m}。$$

此中各 A 及 B_r 均不等於0，但其他各 B 可為0！

求積分時只須用公式(1)與(2)。此中各 A 可依前所述之方法求之。至於各常數 B，可用同法先求 B_r，再自兩等式兩方減去 $\frac{B_r}{(x-s)^r}$ 一分數而後用前法以求 B_{r-1}。其他各 B 可仿此逐步計之。

例2　求 $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3(x+1)}dx$。

令 $$\frac{3x^2+2x-3}{x^3(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B_3}{x^3}+\frac{B_2}{x^2}+\frac{B_1}{x},$$

乘兩邊以$(x+1)$再以 $x=-1$ 代入即得

$$A=\left(\frac{3x^2+2x-3}{x^3}\right)_{x=-1}=\frac{3-2-3}{-1}=2;$$

乘兩邊以 x^3，再以 $x=0$ 代入，則得

$$B_3=\left(\frac{3x^2+2x-3}{x+1}\right)_{x=0}=-3;$$

將 $\frac{B_3}{x^3}$ 移至左邊，則有

$$\frac{3x^2+2x-3}{x^2(x+1)}+\frac{3}{x^3}=\frac{3x^2+2x-3+3x+3}{x^3(x+1)}$$

$$=\frac{3x^2+5x}{x^3(x+1)}=\frac{3x+5}{x^2(x+1)}=\frac{2}{x+1}+\frac{B_2}{x^2}+\frac{B_1}{x}\text{。}$$

乘兩邊以 x^2，再以 $x=0$ 代入，乃有

$$B_2=\left(\frac{3x+5}{x+1}\right)_{x=0}=5\text{；}$$

欲求 B_1 固可再自恆等式兩邊減去 $\frac{B_2}{x^2}$ 而後仿前法計之。但因只餘 B_1 一常數未知，故可任意令 x 為一適當值，即可計得之。設令 $x=1$，則有 $\frac{3+5}{2}=\frac{2}{2}+5+B_1$，即 $B_1=4-6=-2$。

故 $$\int\frac{3x^2+2x-3}{x^3(x+1)}dx=\int\left(\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x^3}+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x}\right)dx$$

$$=2\ln\frac{x+1}{x}+\frac{3}{2}x^{-2}-5x^{-1}+C\text{。}$$

(C) 若 $F(x)$ 之根非全為實數，則 $F(x)$ 之中必含如 $a_1x^2+b_1x+c_1$ 之因子且 $b_1^2<4a_1c_1$。設此等因子未曾重複則 $\frac{f(x)}{F(x)}$ 應拆為

$$\frac{f(x)}{F(x)}\equiv\frac{A_1}{x-s_1}+\frac{A_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{p_1x+q_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}$$

$$+\frac{p_2x+q_2}{a_2x^2+b_2a+c_2}+\cdots\cdots,$$

此中各 A 不等 0，同下標之 p 與 q 不能同為 0。

求積分時除公式(2)外，尚需(12.7)節所述之方法。此中各 A 仍可用前此所述之法計之，至於各 p 與各 q 之值，可先將已求得含各 A 之分數減去，然後通分右方分數，再行比較分子各

乘冪之係數。

例 3. 求 $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^3+6x-13}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx$。

因分子與分母同次，故應先相除以得

$$\frac{x^4-2x^3+6x-13}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=1-\frac{2(x^2-4x+7)}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}。$$

因 $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=(x^2+1)(x-1)^2$，故可寫

$$\frac{x^2-4x+7}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\equiv\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{px+q}{x^2+1};$$

乘以 $(x-1)^2$ 後再以 $x=1$ 代入，卽得

$$B_2=\left(\frac{x^2-4x+7}{x^2+1}\right)_{x=1}=\frac{1-4+7}{1+1}=\frac{8-4}{2}=2;$$

將 $\dfrac{B_2}{(x-1)^2}$ 移至左邊而化之，則

$$\frac{x^2-4x+7-2(x^2+1)}{(x-1)^2(x^2+1)}\equiv\frac{B_1}{x-1}+\frac{px+q}{x^2+1},$$

或 $$\frac{-x^2-4x+5}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{-(5+x)}{(x-1)(x^2+1)}\equiv\frac{B_1}{x-1}+\frac{px+q}{x^2+1};$$

次乘以 $(x-1)$ 後再以 $x=1$ 代入，乃得

$$B_1=\left(\frac{-(5+x)}{x^2+1}\right)_{x=1}=-\frac{5+1}{1+1}=-3;$$

再將 $\dfrac{B_1}{x-1}$ 移至左邊而化之，則

$$\frac{3x^2+3-5-x}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{3x^2-x-2}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{3x+2}{x^2+1}\equiv\frac{px+q}{x^2+1};$$

比較分子各 x 乘冪之係數卽得 $p=3$，$q=2$。是以

$$\int\frac{x^4-2x^3+6x-13}{(x^2+1)(x-1)^2}dx=\int dx-2\int\left(\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{3}{x-1}+\frac{3x+2}{x^2+1}\right)dx$$

$$=x+4(x-1)^{-1}+6\ln(x-1)-3\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}-4\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=x+\frac{4}{x-1}+6\ln(x-1)-3\ln(x^2+1)-4\tan^{-1}x+C。$$

(*D*) 若 $F(x)$ 中之二次因子與一次因子均有重複者，則 $\frac{f(x)}{F(x)}$ 應拆爲含 $\frac{B_t}{(x-s)^t}+\cdots\cdots+\frac{B_1}{(x-s)}$ 及 $\frac{p_rx+q_r}{(ax^2+bx+c)^r}+\cdots$ $\cdots+\frac{p_1x+q_1}{(ax^2+bx+c)}$ 各部分分數。此中常數 B_t 不等0，p_r 與 q_r 不得同爲0，其餘各 B 與 p 及 q 則可爲0。至於其值均可按前述方法計之。拆爲部分分數後只有下列兩普通形式

$$\int\frac{dx}{(x-s)^n}\qquad 及\qquad \int\frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}dx；$$

前者可逕用公式(1)或(2)而後者可化爲

$$\int\frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}dx=\int\frac{\frac{p}{2a}(2ax+b)+\left(q-\frac{pb}{2a}\right)}{(ax^2+bx+c)^n}dx$$

$$=\frac{p}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{(ax^2+bx+c)^n}+\left(q-\frac{pb}{2a}\right)\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}。$$

此中之第一積分亦屬於公式(1)或(2)之類，其第二積分則於配 ax^2+bx+c 成兩平方之和或差後，可用後(12.13)節(*A*)目之公式逐步簡化之，以至只須求 $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$。惟此積分之算法已見前(12.7)節(*A*)目，故本目各積分亦得分別計之。

綜合各結果言之，凡有理函數之積分必可以有理，對數或反正切三種初等函數表之。

例4 求 $\displaystyle\int\frac{3x^4+x^3+8x^2+x+2}{x(x^2+1)^2}dx$

令 $$\frac{3x^4+x^3+8x^2+x+2}{x(x^2+1)^2}\equiv\frac{A}{x}+\frac{p_1x+q_1}{x^2+1}+\frac{p_2x+q_2}{(x^2+1)^2}$$

乘以 x 後再令 $x=0$ 即得 $A=2$。自兩邊減去 $\frac{A}{x}=\frac{2}{x}$，則有

$$\frac{3x^4+x^3+8x^2+x+2-2(x^4+2x^2+1)}{x(x^2+1)^2}=\frac{x^3+x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$\equiv\frac{p_1x+q_1}{x^2+1}+\frac{p_2x+q_2}{(x^2+1)^2}。$$

乘以 $(x^2+1)^2$ 後再令 $x^2=-1$，維持 x 不變而比較係數，則因

$$p_2x+q_2\equiv(x^3+x^2+4x+1)_{x^2=-1}=-x-1+4x+1=3x，$$

故 $p_2=3$，$q_2=0$。再減去 $\frac{3x}{(x^2+1)^2}$，乃有

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{(x^2+1)^2}=\frac{x+1}{x^2+1}\equiv\frac{p_1x+q_1}{x^2+1}；$$

比較分子各項之係數，即知 $p_1=1$，$q_1=1$。故所求之積分為

$$\int\frac{3x^4+x^3+8x^2+x+2}{x(x^2+1)^2}=\int\left\{\frac{2}{x}+\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{3x}{(x^2+1)^2}\right\}dx$$

$$=\int\frac{2\,dx}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{3}{2}\int\frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}$$

$$=2\ln x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\tan^{-1}x-\frac{3}{2(x^2+1)}+C。$$

(12.9) 被積函數含 $(ax+b)^{\frac{1}{p}}$ 及 $(ax+b)^{\frac{1}{q}}$ 時 今若令 $(ax+b)^{\frac{1}{r}}=t$，r 為 p 與 q 之最小公倍數，例如 $r=np=mq$（m 與 n 均為正整數），則 $(ax+b)^{\frac{1}{p}}=(ax+b)^{\frac{n}{r}}=t^n$，$(ax+b)^{\frac{1}{q}}=t^m$，

$dx=\dfrac{rt^{r-1}\,dt}{a}$。如是被積函數可化爲 t 之有理函數，而得應用(12.8)節之方法以積分之。

例1　求 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$。

令 $t=x^{\frac{1}{6}}$，$x=t^6$，$dx=6t^5dt$，如是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3\,dt}{t+1}=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln(t+1)+C$$

$$=2x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{3}}+6x^{\frac{1}{6}}-\ln(1+x^{\frac{1}{6}})^6+C。$$

例2　求 $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x+a}\,dx$。

令　$t=\sqrt[3]{x+a}$，即 $x+a=t^3$，$dx=3t^2\,dt$，故

$$\int x\sqrt[3]{x+a}\,dx=\int(t^3-a)t(3t^2)dt=3\int(t^6-at^3)dt$$

$$=3\left(\frac{t^7}{7}-\frac{a}{4}t^4\right)+C=\frac{3}{28}(4t^3-7a)t^4+C$$

$$=\frac{3}{28}(4x-3a)(x+a)^{\frac{4}{3}}+C。$$

(12.10) $\sin x$ 及 $\cos x$ 之有理函數之積分　遇 $\sin x$ 與 $\cos x$ 之有理函數時，其積分常可藉種種巧妙方法計得之，惟此等巧妙方法不易學習耳。除此等捷徑外，一普通方法係用 $t=\tan\dfrac{x}{2}$ 或 $x=2\tan^{-1}t$ 以代入。如是，因

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

及 $$dx=2\,d\tan^{-1}t=\frac{2\,dt}{1+t^2},$$

故所欲求之積分可改爲 t 之有理函數之積分。既化爲 t 之有理函數後，卽可應用(12.8)節各原則以演算之。

例1 $$\int\sec x\,dx=\int\frac{dx}{\cos x}=\int\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$=2\int\frac{dt}{1-t^2}=\int\frac{dt}{1+t}+\int\frac{dt}{1-t}=\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)+C$$

$$=\ln\left\{\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right\}+C=\ln(\sec x+\tan x)+C$$

$$=\ln\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)+C。$$

此答案中係列三個不同之形式，應由讀者根據三角學原理自計之。

例2 $$\int\frac{\cos x\,dx}{1+\cos x}=\int\frac{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\left(\frac{2\,dt}{1+t^2}\right)}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{1-t^2}{1+t^2}dt$$

$$=\int\left(\frac{2}{1+t^2}-1\right)dt=2\tan^{-1}t-t+C=x-\tan\frac{x}{2}+C。$$

(12.11) 被積函數含 $\sqrt{k^2-x^2}$ 或 $\sqrt{x^2\pm k^2}$ 若被積函數中除 x 之有理函數外，尚有 $\sqrt{k^2-x^2}$ 或 $\sqrt{x^2\pm k^2}$ 之有理函數，或可

化爲此等形式之有理函數，例如 $\sqrt{ax^2+bx+c}$，則可用下述之三角函數代替 x，以消去根號：

(A) 遇 $\sqrt{k^2-x^2}$ 時，令 $x=k\sin\theta$，則

$$\sqrt{k^2-x^2}=k\cos\theta,\quad dx=k\cos\theta\,d\theta;$$

(B) 遇 $\sqrt{x^2-k^2}$ 時，令 $x=k\sec\theta$，則

$$\sqrt{x^2-k^2}=k\tan\theta,\quad dx=k\sec\theta\tan\theta\,d\theta;$$

(C) 遇 $\sqrt{x^2+k^2}$ 時，令 $x=k\tan\theta$，則

$$\sqrt{x^2+k^2}=k\sec\theta,\quad dx=k\sec^2\theta\,d\theta。$$

用此等代替，被積函數即可改爲 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 之有理函數，而(12.9)節之方法復得應用。

例1 求 $\displaystyle\int\frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$。

令 $x=2\sin\theta$，則 $dx=2\cos\theta\,d\theta$，$(4-x^2)^{\frac{3}{2}}=8\cos^3\theta$，故

$$\int\frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{2\cos\theta\,d\theta}{8\cos^3\theta}=\frac{1}{4}\int\sec^2\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\tan\theta+C。$$

欲化 $\tan\theta$ 爲 x 之函數，可自 $\sin\theta=\frac{x}{2}$ 計得：

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2},$$

是以知

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}},$$

而上列結果即可寫爲

$$\int\frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{4\sqrt{4-x^2}}+C。$$

例2 求 $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx$。

令 $x=a\sec\theta$，則 $dx=a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$，$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan\theta$

故 $$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx=\int\frac{(a\tan\theta)(a\sec\theta\tan\theta)d\theta}{a^4\sec^4\theta}$$

$$=\int\frac{\tan^2\theta}{a^2\sec^3\theta}d\theta=\int\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{a^2}d\theta$$

$$=\int\frac{\sin^2\theta}{a^2}d\sin\theta=\frac{\sin^3\theta}{3a^2}+C;$$

欲化 $\sin\theta$ 爲 x 之函數，可自 $\sec\theta=\frac{x}{a}$ 計得

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2},$$

故 $$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx=\frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{3a^2x^3}+C。$$

例3 求 $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}$。

因 $x^2+6x+13$ 可配爲兩平方之和，如 $(x+3)^2+4$，故如令 $(x+3)=2\tan\theta$，則 $dx=2\sec^2\theta\,d\theta$，$\sqrt{x^2+6x+13}=2\sec\theta$。

如是 $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}=\int\frac{(2\tan\theta-3)\,2\sec^2\theta\,d\theta}{2\sec\theta}$$

$$=2\int\tan\theta\sec\theta\,d\theta-3\int\sec\theta\,d\theta$$

$$=2\sec\theta-3\ln(\sec\theta+\tan\theta)+C'$$

$$=\sqrt{x^2+6x+13}-3\ln\left[x+3+\sqrt{x^2+6x+13}\right]+C$$

C 與 C' 爲不同值之積分常數（問其相差之數爲何？）。

(12.12) 部分積分法　前此所述之積分方法，均以適當之代替爲出發點，而將被積函數與其跟隨之微分，化爲已知之積分，如公式(1)至(10)者，然後計算之。此外尚有另一種重要之方法，係將欲求之積分，引用

$$d(uv)=v\,du+u\,dv \tag{24}$$

一基本微分關係，化爲已知或較易於計算之積分。此法名爲部分積分法（integration by parts），實一銳利之工具，但初學者於未明其涵義之前，切勿亂用，以免有循環計算之弊！此法之理論如下：將方程(24)改寫爲

$$u\,dv=d(uv)-v\,du \tag{25},$$

再求其積分，乃得

$$\int u\,dv=\int d(uv)-\int v\,du=uv-\int v\,du \tag{26}.$$

設 $\int f(x)\,dx$ 不易計算，但 $f(x)\,dx$ 可寫爲 $\left(u\frac{dv}{dx}dx\right)$，且 $\int v\,du$ 頗易計算，則用方程(26)卽可計出 $\int f(x)dx=\int u\,dv$。

例1　求 $\int \ln x\,dx$。

若以 $u=\ln x$，$dv=dx$ 或 $v=x$，則 $du=\frac{dx}{x}$，而

$$\int\underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv}=\underbrace{x}_{v}\,\underbrace{\ln x}_{u}-\int\underbrace{x}_{v}\,\underbrace{\frac{dx}{x}}_{du}=x\ln x-x+C。$$

例2 求 $\int \sin^{-1} x\, dx$

令 $u=\sin^{-1} x$，$dv=dx$，或 $x=v$。因 $du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$，

故 $$\int \underbrace{\sin^{-1} x}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x}_{v}\, \underbrace{\sin^{-1} x}_{u} - \int \underbrace{x}_{v} \underbrace{\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{du}$$

$$= x \sin^{-1} x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C。$$

例3 $$\int x \tan^{-1} x\, dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{\tan^{-1} x}_{u}\, \underbrace{d(x^2)}_{dv}$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{x^2}_{v}\, \underbrace{\tan^{-1} x}_{u} - \frac{1}{2}\int \underbrace{x^2}_{v}\, \underbrace{d \tan^{-1} x}_{du}$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\, dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{x^2 \tan^{-1} x}{2} - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \frac{x^2 \tan^{-1} x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\tan^{-1} x}{2} + C。$$

例4 $$\int x^2 e^x\, dx = \int \underbrace{x^2}_{u}\, \underbrace{d e^x}_{dv} = \underbrace{x^2}_{u}\, \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v}\, \underbrace{d(x^2)}_{du}$$

$$= x^2 e^x - 2\int x e^x\, dx;$$

再用部分積分法於 $\int x e^x\, dx$，乃有

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int x\,de^x = x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\,dx\right)$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C。$$

在例(1)至(3)中，因 $\ln x$，$\sin^{-1} x$，$\tan^{-1} x$ 之紀數爲代數函數，故分別令之爲 u，而此法乃生效。在例(4)中，x^2 與 e^x 雖均易積分，但必須令 $u=x^2$ 然後 x 之指數方可遞減於0如上。若誤令 $u=e^x$，及 $x^2\,dx=d\left(\frac{x^3}{3}\right)$，則部分積分後，$x$ 之指數將反增高，而與本法之用意背道而馳！又者，既將所求之積分化簡爲求 $\int xe^x\,dx$，則仍應本原來用意，再令 $v=e^x$ 而簡化之。若復誤以 $e^x=u$，$dv=x\,dx$，則將回至原有之積分 $\int x^2 e^x\,dx$，而前功將盡棄矣！

例5　$$\int \underbrace{\sqrt{a^2-x^2}}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x}_{v}\underbrace{\sqrt{a^2-x^2}}_{u} - \int \frac{x(-2x)\,dx}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{(a^2-x^2-a^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}；$$

右邊中項與左邊相同，符號相反，故移至左邊後再以2除之卽得

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C。$$

讀者可注意在例(4)中，部分積分後右邊之新積分較左邊原積分爲簡；本例右邊則爲原積分乘以異於1之常數，故可移此項於左面計之。有時經部分積分兩次後方得原積分乘以異於1之常數，如下例。

例 6 $$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\int \underbrace{\cos bx}_{u}\,\underbrace{d\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)}_{dv}$$

$$=\underbrace{\frac{e^{ax}}{a}}_{v}\underbrace{\cos bx}_{u}-\int \underbrace{\frac{e^{ax}}{a}}_{v}\underbrace{d\cos bx}_{dv}$$

$$=\frac{e^{ax}}{a}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$=\frac{e^{ax}\cos bx}{a}+\frac{b}{a}\int \underbrace{\sin bx}_{u}\,\underbrace{d\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)}_{dv}$$

$$=\frac{e^{ax}\cos bx}{a}+\frac{b}{a}\left(\underbrace{\frac{e^{ax}}{a}}_{v}\underbrace{\sin bx}_{u}-\int \underbrace{\frac{e^{ax}}{a}}_{v}\underbrace{d\sin bx}_{du}\right)$$

$$=\frac{e^{ax}\cos bx}{a}+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx\,;$$

將第三項移至左邊乃得

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C$$

或 $$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}+C。$$

綜上以言，在未用部分積分法以前，吾人應先細察被積函數之形式，以定是否可用其他方法求之。如有其他代替或明顯之算法，則仍以採用之為宜。至於用部分積分法時，眼光須特別放遠以考慮應如何轉變問題方有可能答案，否則循環計算，徒耗寶貴之光陰而不得任何結果！

(12.13) 化簡公式 應用部分積分法，常可將欲求之積分中之被積函數簡化，使其次數減低如(12.12)節例(4)。此等化簡公

式之應用，有時雖仍不免繁長，然有些函數，如(12.8)節(D)目則非如是將無法以積分之，故亦屬重要積分方法之一種。玆舉數例以示之：

(A) $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ 之化簡公式。

欲簡化此公式，須將 n 減少。玆先用部分積分法求

$$\int\underbrace{\frac{1}{(x^2+a^2)^m}}_{u}\underbrace{dx}_{dv}=\underbrace{\frac{x}{(x^2+a^2)^m}}_{uv}-\int\underbrace{x}_{v}\underbrace{\frac{(-2mx)\,dx}{(x^2+a^2)^{m+1}}}_{du}$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^m}+2m\int\frac{(x^2+a^2-a^2)}{(x^2+a^2)^{m+1}}dx$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^m}+2m\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^m}-2ma^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{m+1}},$$

即 $2ma^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{m+1}}=\frac{x}{(x^2+a^2)^m}+(2m-1)\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$。

令 $m+1=n$，即 $m=n-1$，復將兩邊除以 $2ma^2=2(n-1)a^2$

則 $$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\qquad(27).$$

例1 $$\int\frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}=\int\frac{dx}{[(x+1)^2+4]^2}=\int\frac{d(x+1)}{[(x+1)^2+4]^2}$$

$$=\frac{x+1}{2\times4(x^2+2x+5)}+\frac{1}{8}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4}$$

$$=\frac{x+1}{8(x^2+2x+5)}+\frac{1}{16}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C。$$

(B) $\int\cos^n x\,dx$ 與 $\int\sin^n x\,dx$ 之化簡公式。

n 爲正奇數時，此等函數均甚易積分（見前12.4節）。若 n 非正奇數，計算則較繁，故此等化簡公式亦甚有用，其法如下：

$$\int \cos^n x\,dx = \int \underbrace{\cos^{n-1} x}_{u}\,\underbrace{d\sin x}_{dv}$$

$$= \underbrace{\cos^{n-1} x}_{u}\,\underbrace{\sin x}_{v} - \int \underbrace{\sin x}_{v}\,\underbrace{d\cos^{n-1} x}_{du}$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \sin^2 x \cos^{n-2} x\,dx$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \cos^n x\,dx,$$

移項後再除以 n，乃有

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx \qquad (28).$$

用同樣方法，或以 $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ 代方程(28)中之 x，即可證得

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx \qquad (29).$$

當 n 爲正整數時，用公式(26)與(27)即可將 n 減少。若 n 爲負，則應將此等公式反用，即以 $-p=n-2$，p 爲正數，而寫之爲

$$\int \sin^{-p} x\,dx = \frac{1}{1-p}\sin^{1-p} x \cos x + \frac{2-p}{1-p}\int \sin^{2-p} x\,dx \qquad (30),$$

$$\int \cos^{-p} x\,dx = \frac{1}{p-1}\cos^{1-p} x \sin x + \frac{2-p}{1-p}\int \cos^{2-p} x\,dx \qquad (31).$$

例 2　$\int \sin^4 x\,dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx$

$$= -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}\int dx\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x - \frac{3}{8}\sin x \cos x + \frac{3}{8}x + C。$$

例 3 $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^4 x\, dx$

$$= \int \cos^4 x\, dx - \int \cos^6 x\, dx$$

$$= \int \cos^4 x\, dx - \frac{1}{6}\cos^5 x \sin x - \frac{5}{6}\int \cos^4 x\, dx$$

$$= \frac{1}{6}\int \cos^4 x\, dx - \frac{1}{6}\cos^5 x \sin x$$

然後再簡化之。

例 4 $\int \sec^3 x\, dx = \int \cos^{-3} x\, dx = \frac{1}{2}\cos^{-2} x \sin x + \frac{1}{2}\int \sec x\, dx$

$$= \frac{1}{2}\tan x \sec x + \frac{1}{2}\ln(\tan x + \sec x) + C\text{。}$$

(C) $\int \tan^n x\, dx$ 與 $\int \cot^n x\, dx$ 之化簡公式

因 $d \tan x = \sec^2 x$，且 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$，欲簡化此公式，勿庸用部分積分法卽可得：

$$\int \tan^n x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\tan^{n-2} x\, dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x\, d\tan x - \int \tan^{n-2} dx$$

$$= \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\, dx \qquad (32).$$

用同樣方法可得

$$\int \cot^n x\, dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x\, dx \qquad (33).$$

例 5 $\int \cot^4 \frac{x}{3}\, dx = 3\int \cot^4 \frac{x}{3}\, d\left(\frac{x}{3}\right)$

$$= -\frac{3\cot^2 \frac{x}{3}}{3} - 3\int \cot^2\left(\frac{x}{3}\right) d\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$= -\cot^3\frac{x}{3} + 3\cot\left(\frac{x}{3}\right) + 3\int d\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$= x - \cot^{-1}\frac{x}{3} + 3\cot\left(\frac{x}{3}\right) + C。$$

(12.14) 無限定積分　陳述定積分$\int_a^b f(x)\,dx$之定義時，吾人假定在$x=a$至$x=b$間隔內，$f(x)$為x之連續函數，且a與b均為有限值。今若a或b為無限大，或於a至b間隔內一點，被積函數$f(x)$為無限大，則此定積分之意義為何尚須另行規定。茲名此種積分為無限積分 (infinite integral)。無限積分，實用上亦頗常見，茲分別述之以作本章之結束。

A. 上下限為無限大時　令 $f(x)$ 於 $x \geqq a$ 時恆為連續。若當 $t\to\infty$ 時，積分$\int_a^t f(x)\,dx$ 有一極限，則此極限即以記號$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 表之。故據定義有

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx \tag{34}$$

令 $F(x)$ 表 $f(x)$ 之一不定積分，則上式亦可寫為

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to\infty}\Big(F(x) - F(a)\Big) = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a)$$

$$= F(+\infty) - F(a) \tag{35}$$

方程(35)之形狀雖與(7.3)節方程(16)完全相似，然其所代表之意義則不可不特加注意！　仿此

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{b} f(x)dx。\qquad (36).$$

而 $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx \qquad (37).$$

此中 c 爲一任意實數。

例 1　$\int_0^t \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} t$，$\lim_{t\to\infty} \tan^{-1} t = \frac{\pi}{2}$；

故 $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}。$$

例 2　$\int_1^t \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = 2t^{\frac{1}{2}} - 1$，

故 $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{t\to+\infty}\left\{2t^{\frac{1}{2}} - 1\right\} = +\infty。$$

例 3　$\int_0^t \cos x\, dx = \sin t$；$t\to\infty$ 時 $\sin t$ 不趨於一極限，

故 $\int_0^{+\infty} \cos x\, dx$ 無意義。

B．被積函數爲無限大時　設于 $x=a$ 至 $x=b\,(b>a)$ 間隔內，除 b 點外 $f(x)$ 皆爲連續，而 $|f(b)|$ 則趨 ∞。若當 $t\to b-$ 時，積分 $\int_a^t f(x)\,dx$ 有一極限，則吾人以記號 $\int_a^b f(x)dx$ 表此極限，即

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to b-}\int_a^t f(x)dx \tag{38}$$

同樣，若 $|f(a)|=\infty$，則

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to a+}\int_t^b f(x)dx \tag{39}$$

又若 $f(x)$ 於 a 至 b 間隔內之一值 c 變為 $\pm\infty$，而除此之外均係連續，則 $\int_a^b f(x)dx$ 可以下列方程表之：

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to c-}\int_a^t f(x)dx+\lim_{t\to c+}\int_t^b f(x)dx \tag{40}$$

令 $F(x)$ 表 $f(x)$ 之一不定積分，則(40)可寫為

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{x\to c-}F(x)-F(a)+F(b)-\lim_{x\to c+}F(x)$$

$$=F(b)-F(a)+\lim_{x\to c-}F(x)-\lim_{x\to c+}F(x) \tag{41}$$

若 $F(x)$ 於 $x=c$ 點為連續，則 $\lim\limits_{x\to c-}F(x)$ 與 $\lim\limits_{x\to c+}F(x)$ 相等，方程(41)之結果可化為

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \tag{42}$$

仍與(7.3)節之方程(16)無異。但若 $F(x)$ 非連續函數，則方程(42)不能成立。

例1 $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{t\to 1-}\int_0^t\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{t\to 1-}\sin^{-1}t=\frac{\pi}{2}$。

例 2 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-1}^{1}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=0$，

蓋被積函數 $\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ 於 $x=0$，雖爲 ∞，而其積分 $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 則係連續於是點，故可用方程(42)計之。

例 3 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{t\to0-}\int_{-1}^{t}\frac{dx}{x^2}+\lim_{t\to0+}\int_{t}^{1}\frac{dx}{x^2}$

$$=\lim_{t\to0-}\left(-\frac{1}{t}\right)-1+(-1)-\lim_{t\to0+}\left(-\frac{1}{t}\right)$$

$$=+\infty-1+1-(-\infty)=+\infty，$$

本題若誤用方程(42)，則所得之結果將爲

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{1}=-1-1=-2 \text{ 而大錯矣！}$$

第 十 二 章 習 題

1. 已與下列各函數 $f(x)$ 求 $F(x)=\int f(x)\,dx$：

(a) $\frac{x}{b^2+c^2x^2}$；　(b) $\frac{1}{x\ln x\ln x\ln x}$；

(c) $e^{a\ln x}+e^{x\ln a}$；　(d) $\frac{1}{x\ln x^2}$；

(e) $\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$；　(f) $\frac{1}{1+e^x}$；

(g) $\left(\frac{1}{9+x^2}\right)\tan^{-1}\frac{x}{3}$；　(h) $\frac{1}{\sqrt{a+x}+\sqrt{x}}$；

(i) $\dfrac{a+bx}{A+Bx}$；　(j) $\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}-\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$；

(k) $\dfrac{a\sqrt{bx}-b\sqrt{ax}}{x(\sqrt{ax}-\sqrt{bx})}$；　(l) $\dfrac{x\sqrt{\ln(x^2+a^2)}}{x^2+a^2}$。

2. 已與以下之三角函數 $f(\theta)$，求 $F(\theta)=\int f(\theta)\,d\theta$：

(a) $\sin^3\theta\cos^3\theta$；　(b) $\dfrac{\sin^3\theta}{1+\cos\theta}$；

(c) $\sin^4\theta\cos^2\theta$；　(d) $\sin 3\theta\sin 5\theta$；

(e) $\cos\theta\cos 2\theta\cos 3\theta$；　(f) $\tan^2\theta\sec^4\theta$；

(g) $(\sec 3\theta-\tan 3\theta)^2$；　(h) $\cot^3\theta\csc^4\theta$；

(i) $\dfrac{1}{\sin^3\theta}$；　(j) $\dfrac{\cot\theta}{\sin\theta-1}$；

(k) $\dfrac{1}{\sin^3\theta\cos^3\theta}$；　(l) $\dfrac{1}{\sin\theta(a+b\cos\theta)}$；

(m) $\dfrac{(1+\sin\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$；　(n) $\dfrac{1}{\sin\theta+\tan\theta}$；

(o) $\dfrac{1}{2\csc\theta-\sin\theta}$；　(p) $\dfrac{1}{3+2\cos\theta}$。

3. 已與下列各有理函數 $f(u)$，求 $F(u)=\int f(u)\,du$：

(a) $\dfrac{2u+5}{u^2+2u+5}$；　(b) $\dfrac{u^2-u+3}{u^4-5u^2+4}$；

(c) $\dfrac{u+2}{\sqrt{4u-u^2}}$；　(d) $\dfrac{2u^2-u-1}{2u^3-2u^2-u}$；

(e) $\dfrac{3u^2-8u+1}{(u-1)^3(u+2)}$；　(f) $\dfrac{5-7u}{u^4-2u^3+5u^2}$；

(g) $\dfrac{1}{(u-1)^2(u^2+1)^2}$；　(h) $\dfrac{(2u^2-7)}{(u^2-3u+4)(u^2-3u+1)}$；

(i) $\frac{1}{(u^4+1)^2}$； (j) $\frac{u^4+18u^2-28u}{(u+2)(u^2-2u+4)^2}$。

4. 已與以下之 $f(y)$，試用適當之代替而求

$$F(y)=\int f(y)\,dy：$$

(a) $\frac{y}{(1+y)^{\frac{2}{3}}+(1+y)^{\frac{1}{2}}}$； (b) $\frac{y}{(a+by)^{\frac{3}{2}}}$；

(c) $(a+y)^{\frac{2}{3}}y^3$； (d) $y^3(a+y^2)^{\frac{2}{3}}$；

(e) $\frac{(1+y^3)^{\frac{2}{3}}}{y}$； (f) $y^3\sqrt{a^2+y^2}$；

(g) $\frac{\sqrt{(y^2-a^2)^3}}{y}$； (h) $\sqrt{2ay-y^2}$；

(i) $y\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}$； (j) $\sqrt{a^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$；

(k) $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{a-y}}$； (l) $\frac{\sqrt{y}-\sqrt{a}}{\sqrt{y+a}}$；

(m) $\sqrt{y(1+y^3)}$； (n) $(a+y^2)^{-\frac{3}{2}}$；

(o) $\frac{y^4}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}}$； (p) $\frac{1}{y\sqrt{8y^2+6y+1}}$；

(q) $\frac{1}{y^2\sqrt{27y^2+6y-1}}$。

5. 用部分積分法，求以下 $f(x)$ 之 $F(x)=\int f(x)\,dx$：

(a) $(a^2+x^2)\ln(a^2+x^2)$； (b) $x^2\ln\ln x$；

(c) $x^2\sin^{-1}x$； (d) x^3e^{ax}；

(e) $\sqrt{x^2+a^2}$； (f) $x\sin 2x$；

(g) $\tan^2 x \sec x$； (h) $\sec^5 x$；

(i) $e^{ax}\sin(bx+c)$； (j) $e^{2x}\sin 3x\cos x$；

(k) $\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}e^{x}$； (l) $\dfrac{\tan^{-1}\sqrt{x}}{x^2}$；

(m) $x e^{ax}\cos bx$； (n) $x\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$。

6. 求以下各積分之化簡公式：

(a) $\displaystyle\int\frac{x^n}{\sqrt{a+bx}}dx$； (b) $\displaystyle\int x^n e^{ax}dx$。

(c) $\displaystyle\int x^m\cos^n x\,dx$； (d) $\displaystyle\int x^m\sin^n x\,dx$；

(e) $\displaystyle\int e^{ax}\tan^n x\,dx$； (f) $\displaystyle\int e^{ax}\cot^n x\,dx$。

7. 求以下各積分：

(a) $\displaystyle\int\sqrt{x+\sqrt{2+x}}\,dx$； (b) $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$；

(c) $\displaystyle\int\frac{[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+x]^n}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}dx$； (d) $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)^2}dx$；

(e) $\displaystyle\int\frac{1}{a^2+b^2\cos^2 x}dx$； (f) $\displaystyle\int\frac{1}{a+b\tan x}dx$；

(g) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sin(a+x)}dx$； (h) $\displaystyle\int\frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2+x^4}}dx$。

8. 求下列諸曲線所包圍之面積：

(a) 橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$；

(b) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$；

(c) $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ 及其漸近線 $x=2a$；

(d) $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$；

(e) $16a^3y^2=b^2x^2(a-2x)$；

(f) $r\cos\theta=a\cos 2\theta$；

(g) $r^2\cos\theta=a^2\sin 3\theta$；

(h) $r^2=\frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}$。

9. 求下列諸曲線之弧長：

(a) 拋物線 $r=\frac{2a}{1+\cos\theta}$ 自 $\theta=0$ 至 $\theta=\frac{\pi}{2}$；

(b) 螺線 $r=\frac{1}{\theta}$，自 $\theta=1$ 至 $\theta=\frac{1}{2}$；

(c) 蔓葉線(cissiod) $r=2a\tan\theta\sin\theta$ 自 $\theta=0$ 至 $\theta=\frac{\pi}{4}$；

(d) 次擺線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 之全長；

(e) $3ay^2=x(x-a)^2$。

10. 求以下二曲線之方程式：

(a) 斜度爲 xy，通過 (2,1) 點；

(b) 斜度爲 $\frac{xy}{1+x^2}$，通過 (0,1) 點。

11. 求心形曲線 $r=2a(1-\cos\theta)$ 與圓 $r=2a\cos\theta$ 間之公共面積。

12. 求外擺線(epicycloid)：$x=(a+b)\cos\theta-b\cos\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)$，

$$y=(a+b)\sin\theta-b\sin\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)$$

一拱之長；自所得結果推計次擺線(hypocycloid)一拱及心

形曲線之長。

13. 用 $t=x+\sqrt{a+bx+x^2}$ 為變數以求下列諸積分（a 與 b 為適當之常數）：

(a) $\int\frac{dx}{x+\sqrt{1+x+x^2}}$；　(b) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+2}}$；

(c) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+1}}$；　(d) $\int\frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2}dx$；

(e) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$。

14. 若 $a+bx-x^2=(x-A)(B-x)$，A 與 B 均為實數，試以 $t=\frac{\sqrt{a+bx-x^2}}{x-A}$ 或 $\frac{\sqrt{a+bx-x^2}}{B-x}$ 為變數而求下列諸積分：

(a) $\int\frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$；　(b) $\int\frac{dx}{[illegible]}$；

(c) $\int\frac{x\,dx}{(2+3x-2x^2)^{\frac{3}{2}}}$；　(d) $\int\frac{dx}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}$；

(e) $\int\frac{dx}{x\sqrt{5-4x-x^2}}$。

15. 試討論 $\int x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}dx$ 之化簡公式，此中 m，n，r 及 s 均為整數且 n 為正，試由是求

(a) $\int x^3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx$；　(b) $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$；

(c) $\int x^5(1+x^3)^{\frac{2}{3}}dx$；　(d) $\int\frac{dx}{x^2(a+x^3)^{\frac{5}{3}}}$；

(e) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$；　　(f) $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}}$。

16. 試令 $t=\dfrac{1}{x}$ 以求下列諸積分：

(a) $\displaystyle\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$；　　(b) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}}$；

(c) $\displaystyle\int\frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}dx}{x^4}$；　　(d) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$。

17. $$\int_0^{2\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\begin{cases}0, & 若\ m\neq n,\\ \pi & 若\ m=n。\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\begin{cases}0, & 若\ m\neq n,\\ \pi & 若\ m=n。\end{cases}$$

18. 示明以下各定積分

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{4}$；

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-k^2\sin^2 x}=\frac{\pi}{2\sqrt{1-k^2}}$，$k^2<1$；

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$

$\displaystyle=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(n)}\frac{\pi}{2}$ 如 n 爲雙整數；

$\displaystyle=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(n-1)}{1\cdot3\cdot5\cdots(n)}$　如 n 爲單整數。

(d) $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1+a\sin x} = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)dx}{1+a\sin x}$

$= \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\right)$，如 $|a|<1$，

$= \frac{\pi}{a}$，如 $|a|=1$

$= \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} \ln(a+\sqrt{a^2-1})$，如 $|a|>1$。

(e) $\int_0^{\infty} \frac{du}{(u^2+1)^n} = \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 2}\,\frac{\pi}{2}$。

19. 求以下各無限積分：

(a) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x}$；　(b) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{4/5}}$；

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$；　(d) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$；

(e) $\int_{-a}^{0} \frac{dx}{x^2}$，$a>0$；　(f) $\int_{-a}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$，$a>0$。

20. 試以圓 $x^2+y^2=a^2$ 內之適當面積解釋

$$\int_{-t}^{t} \sqrt{a^2-x^2}\,dx = t\sqrt{a^2-t^2} + a^2\sin^{-1}\frac{t}{a}。$$

(參較 12.12 節例 5)。

21. 玆用下列各關係爲雙曲線函數(hyperbolic function)之三基

本定義：

$\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，$\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，$\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$。

試示 $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$，$\int \sinh x\,dx=\cosh x+C$，及 $\int \cosh x\,dx=\sinh x+C$。

22. 令 $y=\sinh x$ 與 $x=\sinh^{-1}y$，$y=\cosh x$ 與 $x=\cosh^{-1}y$ 及 $y=\tanh x$ 與 $x=\tanh^{-1}y$ 分別為三個相應之同意義的方程。試自前題之定義，示明：

$$\sinh^{-1}y=\ln(y+\sqrt{y^2+1})，$$
$$\cosh^{-1}y=\ln(y+\sqrt{y^2-1})，$$

及 $$\tanh^{-1}y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)。$$

若以 $u=\cosh x$，$u=\sinh x$ 或 $u=\tanh x$ 為代替，試示

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\cosh^{-1}u+C，\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=\sinh^{-1}u+C，$$

及 $$\int\frac{du}{1-u^2}=\tanh^{-1}u+C。$$

並以之與基本公式(9)及(10)相比較。

第十三章　體積面積及質量

<u>(13.1)定積分之應用</u>　第七章討論定積分時，特別注重其意義及基本算法。因當時所授之積分方法甚為有限，故對於定積分之應用，僅以平面面積為例。茲已說明較重要之積分方法，其應用自可再為推廣。為簡便起見，吾人此後均將由題意先求一微分關係如（參較7.4節方程 17）

$$du = f(x)\,dx \tag{1}$$

者，而逕由之以計得在適當之上下限 x_2 及 x_1 內之定積分：

$$u = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \tag{2}$$

如是排列方程，雖未盡嚴格，但如有必要，讀者固可仿(7.2)及(7.3)各節所述無限和與定積分之關係逐步推演之也。

<u>(13.2)旋轉體之體積</u>　設 AB 為曲線 $y=f(x)$ 在 $x=x_1$ 至 $x=x_2$ 間隔內之弧。若以平面 $DCBA$ 繞 X 軸旋轉一周，即得一旋轉體（solid of revolution）。茲述求此體積之算法。

設於橫坐標為 x 與 $x+dx$ 之 P 與 Q 兩點之處各畫縱線 PS 與 QR 將 $DCBA$ 面積截出一細條 $PQRS$（圖13.1）。當 $DCBA$ 面積繞 X 軸旋轉一周時，此細條所旋成之形狀與一薄圓片極近似，圓片之厚為 dx，其半徑約為 $PS=y$。因此，若薄片之厚無限減小，即 dx 為無窮小，則薄片之體積 dV 亦為無窮小，而二者之關係為

$$dV = \pi y^2\,dx \tag{3}$$

今若將 $DCBA$ 面積分爲無數細條，則所求之體積將爲類似上述之各薄圓片體積之總和。是故以 $x=x_2$ 及 $x=x_1$ 爲上下限而計方程(3)之定積分卽可得所求旋轉體之體積：

$$V=\int_{x_1}^{x_2}\pi y^2\,dx=\pi\int_{x_1}^{x_2}[f(x)]^2\,dx \qquad (4).$$

因 y^2 永爲正，故不論 $y=f(x)$ 曾否與 X 軸相交，只須 $x_2>x_1$，方程(4)之體積卽爲正。換言之，若曲線會與 X 軸相交如圖(13.1)乙，則旋轉體將類似兩個錐體，其體積仍可由方程(4)計之。

例 1　求橢圓球之體積。

橢圓球可以橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之上半繞 X 軸旋轉一周而成。因 $y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$，且球之左右兩端（卽橢圓與 X 軸交點）爲 $x=\pm a$，故所求之體積爲：

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2\,dx=\pi\int_{-a}^{a}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

$$=\pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a}=\pi b^2\left\{\left(a-\frac{a}{3}\right)-\left(-a+\frac{a}{3}\right)\right\}$$

$$=\frac{4\pi b^2 a}{3}。$$

在本題中讀者應注意橢圓曲線 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 雖有上下兩半，但只須用其上半旋轉一周卽可得所求之物體。又因自 $x=-a$ 至 $x=0$ 與自 $x=0$ $x=a$ 之半橢圓球，其體積完全相等，故所欲求之體積，亦可視爲半橢圓球之兩倍。惟半橢圓球之體積爲

$$\pi\int_0^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi\int_{-a}^0 b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx,$$

故所求之體積爲

$$V=2\pi\int_0^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx.$$

或 $$2\pi\int_0^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi\int_{-a}^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx;$$

由是知凡所求之體積可分爲兩個相等部分時，其下限(或上限)常可改爲較簡之值，例如0，而將所得之結果乘2。

本例之球係以 X 軸爲旋轉軸，今若將 $x=g(y)$ 曲線繞 Y 軸旋轉，則仿方程(3)及(4)，即可推出所得之體積爲圖(13.2)。

$$V'=\pi\int_{y_1}^{y_2} x^2\,dy \qquad (5).$$

例2 若將前例之橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之右半繞 Y 軸旋轉一周，則所得之體積爲

$$V'=2\pi\int_0^b x^2\,dy=2\pi\int_0^b a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy$$

$$=2\pi a^2\left(y-\frac{y^3}{3b^2}\right)\Big|_0^b=\frac{4\pi ba^2}{3}.$$

V 與 V' 所表之兩體積，其一係橄欖形之橢圓球(prolate ellipsoid)，其他則爲扁形橢圓球(oblate ellipsoid)。

例3 將 $x=\frac{\pi}{3}$，$x=\frac{2\pi}{3}$，$y=\frac{x}{\pi}$ 及 $y=\sin x$ 四線所包

圖之面積，圖(13.3)，旋轉於 X 軸，問所得之體積爲何？

所求之體積 V 爲 $MQOSN$ 與 $MPORN$ 兩面積旋轉於 X 軸所成兩體積之差。前者爲

$$V_1=\pi\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sin^2 x\,dx=\pi\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sin(4\pi/3)}{2}+\frac{\pi}{3}-\frac{\sin(2\pi/3)}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{2},$$

後者則爲

$$V_2=\pi\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\frac{x}{\pi}\right)^2dx=\frac{x^3}{3\pi}\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}=\frac{\pi^2}{3}\left(\frac{8}{27}+\frac{1}{27}\right)=\frac{\pi^2}{9},$$

故 $V=V_1-V_2=\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{9}=\frac{7\pi^2}{18}$。

例 4 將擺線一拱繞 X 軸旋轉一周，問所得體積爲何？

擺線參變方程爲

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t);$$

其一拱與 X 軸相交之點爲 $x=0$ 與 $x=2\pi a$。若將自變數改爲 t，則當 $x=0$ 時 $t=0$；當 $x=2\pi a$ 時，$t=2\pi$。故所求之體積爲

$$V=\int_0^{2\pi a}\pi y^2\,dx=\int_0^{2\pi}\pi a^2(1-\cos t)^2a(1-\cos t)\,dt$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\,dt$$

$$=\pi a^3\left\{t-3\sin t+\frac{3}{2}(t+\sin t\cos t)-\left(\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}\right)\right\}_0^{2\pi}$$

$$=\pi a^3(2\pi+3\pi)=5\pi^2 a^3。$$

例5　將心形曲線 $r=a(1-\cos\theta)$ 旋轉於 X 軸一周，求所成之體積。

若以 θ 為參數，則此曲線之參變方程將為：

$x=a(1-\cos\theta)\cos\theta$，$y=a(1-\cos\theta)\sin\theta=a\left(\sin\theta-\dfrac{\sin 2\theta}{2}\right)$。

茲先求 M 點之坐標(圖13.4)。在 M 點，$\dfrac{dy}{dx}=\infty$，即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos\theta-\cos 2\theta}{-\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta}=\infty；$$

因 $\cos\theta-\cos 2\theta$ 為有限，故上列方程表示

$$-\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta=0，$$

即 $\sin\theta=0$ 或 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，即 $\theta=0$ 或 π，及 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$。惟 $\theta=0$，$r=0$ 係 O 點(該點之斜度並非 ∞)，$\theta=\pi$，$r=2a$ 係 N 點，故 M 點之極坐標為 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$r=\dfrac{a}{2}$，其 X 坐標乃 $x=\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{a}{4}$。

今若求自 $x=-2a$(N 點)至 $x=\dfrac{a}{4}$(P 點)之定積分 $\displaystyle\int y^2dx$，所得者將為 $NSMP$ 面積旋轉而成之體積 V_1。自此減去 OMP 面積旋轉而成之體積 V_2 方為所求心形之體積 V。但

$$V_1=\pi\int_{-2a}^{\frac{a}{4}} y^2\,dx$$

$$=\pi a^3\int_{\pi}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\theta(1-\cos\theta)^2(2\cos\theta\sin\theta-\sin\theta)d\theta$$

$$=\pi a^3\int_{\pi}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)\,d\theta \qquad (6).$$

此中 $f(\theta)=\sin^2\theta\,(1-\cos\theta)^2\,(2\cos\theta\sin\theta-\sin\theta)$

$$=(1-\cos^2\theta)(1-\cos\theta)^2\,(2\cos\theta-1)\sin\theta \qquad (7).$$

同樣，因在 $\theta=0$ 至 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 間隔內，y 及 x 與 θ 之關係仍可用前此之方程表之，故

$$V_2=\pi\int_0^{\frac{a}{4}} y^2\,dx=\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta \qquad (8).$$

是以 $V=V_1-V_2=\pi a^3\left\{\int_{\pi}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)\,d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)\,d\theta\right\}$

$$=\pi a^3\left\{\int_{\pi}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{0} f(\theta)d\theta\right\}=\pi a^3\int_{\pi}^{0} f(\theta)d\theta \quad (9).$$

再以 $u=\cos\theta$ 代入，於 $\theta=\pi$ 時，$u=-1$；$\theta=0$ 時，$u=1$，

故得 $V=\pi a^3\int_{-1}^{1} -(1-u^2)(1-u)^2(2u-1)\,du$

$$=\pi a^3\int_{1}^{-1}(-1+4u-4u^2-2u^3+5u^4-2u^5)\,du$$

$$=\pi a^3\left(-u+2u^2-\frac{4}{3}u^3-\frac{u^4}{2}+u^5-\frac{u^6}{3}\right)_1^{-1}$$

$$=\pi a^3\left(\left(1+2+\frac{4}{3}-\frac{1}{2}-1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+2-\frac{4}{3}-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$=\pi a^3\left(2+\frac{8}{3}-2\right)=\frac{8\pi a^3}{3}。$$

本例之(6)、(8)、(9)各方程所表示之關係甚爲重要。方程(9)表示所求定積分之上下限可逕用 O 與 N 點之坐標而不必顧及 M 點。凡遇原係由兩積分相減(例如 V_1 與 V_2)而得之結果，其被積函數(例如 $f(\theta)$)之值，於參數 θ 自下限(例如 N)經過中間之 M 值連續變至上限 O 時，均爲單值的，則自 N 至 M 之 $f(\theta)d\theta$ 之定積分減去(自 O 至 M 之 $f(\theta)d\theta$ 之定積分)，即等於(自 N 至 O 之 $f(\theta)d\theta$ 之定積分)。此理與(自 N 至 M 之線段)，減去(自 O 至 M 之線段)即得(自 N 至 O 之線段)一理頗爲相似。

(13.3)截面已知的物體之體積　前節所述求體積之方法可以擴展之於截面已知的物體。此蓋因方程(3)中之 πy^2 實即旋轉體之截面積 A 也。設在物體上(圖13.5)，任取一直線爲 X 軸，而在此直線上任取一點爲原點 O。若於距 O 爲 x 及 $x+dx$ 之處，作兩平面與 X 軸垂直，則可自物體割出一薄片，厚爲 dx。其截面 A 顯然爲 x 之函數。當 dx 爲無窮小時，此薄片之體積 dV 亦爲無窮小，二者之關係即爲

$$dV = A\,dx \qquad (10),$$

是即方程(3)之較普通公式。今假定物體上各截面如 A 者，其與 x 之關係已知，則將類似方程(10)之各薄片之體積相加，即得物體之總體積 V。換言之，用適當之上下限 x_1 與 x_2 而計方程(10)之定積分，即得

$$V = \int_{x_1}^{x_2} A\,dx \qquad (11).$$

例1 求橢圓體之體積。

前節兩例所討論之橢圓球乃以橢圓旋轉而成。至於普通橢圓體之各截面（縱，橫，及側）則均為橢圓，形頗似橄欖但非旋轉體。令其三"半軸"之長分別為 a，b 及 c。茲取 X 軸之方向與長為 a 之半軸脗合，而令原點 O 位於體之中心如圖(13.6)，即 $OA=a$，$OB=b$，$OC=c$。在距原點為 x 之處，作正交於 X 軸之平面 $PQRQ'R'$，此平面自體所截出之截面係一橢圓，其半軸分別為 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{PR}$。Q 點既係位在半軸為 a 及 b 之 $AQBA'B'Q'$ 橢圓上，故若 Q 之坐標為 (x, y)，其所滿足之方程應為 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，或 $\overline{PQ}=y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$。同理，因 R 係位在半軸為 a 及 c 之 $ARCA'C'R'$ 橢圓上，故半軸 $\overline{PR}=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$。但橢圓 $PQRQ'R'$ 之面積 A 係等於 $\pi\times\overline{PQ}\times\overline{PR}$，即

$$A=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

且體左右兩端之 X 坐標分別為 $-a$ 及 a，故所求之體積為

$$V=\int_{-a}^{a}A\,dx=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a}$$

$$=2\pi bc\left(a-\frac{a}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}abc。$$

例2 設有兩個正交同大之正圓柱，半徑為 a，問其公有之體積為何。

為便於作圖起見，圖(13.7)僅示此體之八分之一。OB 表縱立圓柱之軸，$ASCO$ 表其圓截面之四分之一；OC 表橫臥圓柱之軸，$AQBO$ 表其圓截面四分之一。令 X 軸取 OA 方向。於 $OP=x$ 處，豎一平面與 OX 正交。此平面與橫柱相交於 QR 直線而與縱柱相交於 SR 直線。因 QR 及 SR 係分別與 OC 及 OB 平行，故知 $PQ \parallel SR$，$PS \parallel QR$，且因半徑 $OQ=OS$，故 $PQRS$ 係一正方形，其面積遂為 $\overline{PQ}^2$。惟 $OP=x$，$OQ=a$ (圓柱半徑)，故 $\overline{PQ}^2=a^2-x^2$ 而在 P 處薄片之體積遂為

$$dV=\overline{PQ}^2\,dx=(a^2-x^2)dx。$$

所求之體積 V 既為圖中所示之八倍，故

$$V=8\int_0^a(a^2-x^2)dx=8\left\{a^2x-\frac{x^3}{3}\right\}_0^a=\frac{16}{3}a^3。$$

(13.4)旋轉體之面積 設自 $x=x_1$ 至 $x=x_2$ 間隔內，$y=f(x)$ 曲線之弧 AB 全在 X 軸之上(13.1 甲)，即 y 之值均為正，且為單值的。茲將 AB 繞 X 軸旋一周，其所成之面積，亦可仿(13.2)節法求之。在 $OP=x$ 及 $OQ=x+dx$ 之處豎縱線 PS 及 QR。將 AB 弧截出一段 $SR=ds$。此短段繞 X 軸旋一周所成之面積將與一正圓錐截體之旁面積相彷彿。若 ds 為無窮小，則此薄截體之斜高可視為即等於 ds，而其兩底面周線之平均長將為 $2\pi y$，故其旁面積 dA 為

$$dA=2\pi y\,ds \tag{12}$$

所求旋轉體面積即為類似上述薄截體之旁面積之總和。若令 x 為

自變數，則 $ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$，而所求面積爲

$$A=\int_{x_1}^{x_2}2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_{x_1}^{x_2}f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\text{。}\qquad(13)$$

方程 (13) 亦可改用 y 爲自變數。但此時表 AB 弧之曲線 $x=g(y)$ 須爲 y 之單值函數，否則須分爲數支而討論之。例如在圖 (13.8) 中，弧 AB 須先分爲 AC 及 CB 兩部分。在 AC 部分內因 y 係漸增故 dy 爲正而

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy\text{，}$$

至於在 CB 部分內，因 y 漸減，故 dy 爲負而 ds 之絕對值應爲

$$ds=-\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dx=-\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy\text{。}$$

如是若 A，B，C 三點之坐標分別爲 y_1，y_2 及 y_c，則 AC 弧所旋成之面積爲

$$A_1=2\pi\int_{y_1}^{y_c}y\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dx=2\pi\int_{y_1}^{y_c}\phi(y)dy\text{，}$$

假定 $\phi(y)=y\sqrt{1+[g'(y)]^2}$，而 CB 弧所旋成之面積則爲

$$A_2=2\pi\int_{y_c}^{y_2}y\left(\sqrt{1+[g'(y)]^2}\right)dy=-2\pi\int_{y_c}^{y_2}\phi(y)dy\text{，}$$

總面積遂爲

$$A=A_1+A_2=2\pi\int_{y_1}^{y_c}\phi(y)dy-2\pi\int_{y_c}^{y_2}\phi(y)dy \quad (14).$$

讀者當已注意方程(14)絕不與 $2\pi\int_{y_1}^{y_2}\phi(y)dy$ 相等！因此，爲免除誤會起見，此後將不用此方程。

此外，若 y 可直接表爲 s 之函數，或 y 與 s 均可表爲另一參數 t 之函數，只須在所規定之間隔內，y 爲 s 或 t 之單值正函數，即 $y(s)=Y(t)$，而自弧之一端 A(即 $s=s_1$，或 $t=t_1$) 移至弧之他端 B(即 $s=s_2$ 或 $t=t_2$) 時，s 與 t 係恆增，則［參較 13.2 節例 5 之方程(6)，(8)及(9)］

$$A=2\pi\int_{s_1}^{s_2}[y(s)]ds=2\pi\int_{t_1}^{t_2}\left(Y(t)\frac{ds(t)}{dt}\right)dt \quad (15).$$

之值亦爲所欲求之面積。此方程之應用有時較方程(13)更便。

例 1 設以 $2mx=y^2$ 旋於 X 軸而成一拋物面。若欲得 $\frac{2\pi}{3}m^2$ 面積，且弧之一端係自 $x=0$ 起，問其他端之坐標 x 爲何？

$$A=2\pi\int_0^x y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=2\pi\int_0^x y\sqrt{1+\frac{m^2}{y^2}}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^x\sqrt{m^2+y^2}\,dx=2\pi\int_0^x\sqrt{m^2+2mx}\,dx$$

$$=\frac{2\pi}{3m}(m^2+2mx)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x=\frac{2\pi}{3}m^2\left\{\left(1+\frac{2x}{m}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right\}$$

但 $A=\frac{2\pi m^2}{3}$，故 $1=\left(1+\frac{2x}{m}\right)^{\frac{3}{2}}-1$，而 $x=\frac{m}{2}\left(2^{\frac{2}{3}}-1\right)$。

例2 求擺線一拱旋轉於X軸所成之表面面積。

擺線參變方程爲 $x=a(t-\sin t)$ 及 $y=a(1-\cos t)$。茲以 t 爲自變數。因一拱擺線兩端之 t 爲 $t=0$ 及 $t=2\pi$，且

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt$$
$$=a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt，$$

故 $$A=2\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt$$

$$=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt=16\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\frac{t}{2}-1\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right)$$

$$=16\pi a^2\left(\frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}-\cos\frac{t}{2}\right)_0^{2\pi}$$

$$=16\pi a^2\left\{\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right\}=\frac{64}{3}\pi a^2。$$

例3 求心形曲線 $r=a(1-\cos\theta)$ 旋於其始線之面積。

所求面積，自圖(13,4)言之，似應分爲兩部分，其一爲 NSM 弧所產生者，其他則爲 OM 弧所產生者，但若以 θ 爲自變數，則當 θ 自 0 連續增至 π 時，曲線即可自 O 經 M 及 S 而被描至 N，且因

$$y=r\sin\theta=a(1-\cos\theta)\sin\theta，$$

$$ds=\sqrt{(r\,d\theta)^2+(dr)^2}=a\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin\theta}\,d\theta$$
$$=2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta，$$

故 $$y\,ds=2a^2(1-\cos\theta)\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}d\theta，$$

其中 $2a^2(1-\cos\theta)\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}=8a^2\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}$ 一函數自 $\theta=0$ 至 $\theta=\pi$ 乃 θ 之單值正函數。是以求面積時可適用方程(15)而計之爲

$$A=2\pi\int_{\theta_1=0}^{\theta_2=\pi}y\,ds=16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^4\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{32}{5}\pi a^2\left(\sin^5\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{32}{5}\pi a^2。$$

本例算法與前此(13.2)節例(5)算法之理論實係相同，雖則前例爲兩體積相減而本例則爲兩面積相加，此爲讀者須特加注意之點！

(13.5)密度及質量　與面積及體積相類似之問題爲密度不均勻的物體之質量。密度(density)之意係指每單位體積(volume)內，物體所含之質量(mass)。故按此定義，如物體之密度係均勻的，則其質量 m，密度 q 及體積 V 有下述關係：

$$m=qV \tag{16}$$

若物體之密度非均勻的，而欲計其質量，則可先將物體分爲甚多之小體積或元體(element)。此等元體之形狀、大小、位置，及分法除必須滿足一條件外，別無限制。此條件爲：各元體內之密度須可視爲均勻的。如以 q 表此密度，其值當然視各元體之位置而定，則各元體之質量將爲

$$dm=q\,dV \tag{17}$$

整個物體之質量既係此等元體質量之總和，故在適當之上下限內求方程(17)之定積分，即得所求之質量。

前此所討論之各定積分，其被積函數均係一個自變數之函數，故本題中之 q 雖可爲三個坐標之函數，但如欲應用已授方法，q 須暫認爲一個變數之函數。至於微分 dV 亦應先表爲同一自變數之微分後方得積分方程(17)。例如若以 x 爲自變數而 V 與 x 之關係已知，則在適當之上下限 x_2 與 x_1 內，(17)之積分可寫作

$$m=\int_{x_1}^{x_2}\left(q(x)\frac{d}{dx}V(x)\right)dx \qquad (18).$$

例 1 有均厚之三角片，其密度與距其底邊之遠度成正比。若頂點之密度爲 a，試求此片之質量。

取通過頂點而正交於底邊之直線爲 X 軸；令原點位在底邊上，如圖(13.9)。題設密度與距底邊遠度成正比，即 $q=kx$，故即以 x 爲自變數。令三角形高爲 h，則因頂點之密度爲 a，故 $a=kh$，或比例係數 $k=\frac{a}{h}$，而密度 q 與 x 之關係遂爲

$$q=\frac{ax}{h}.$$

茲將三角形分爲無數與底邊平行之細條。若三角片之厚爲 b，一細條之寬爲 dx，其長爲 y，則在 x 處之細條，其體積將爲 $dV=by\,dx$，而其質量遂爲

$$dm=q\,dV=\frac{ax}{h}(by\,dx)。$$

令底邊 BC 長爲 c，則自圖卽知 $\frac{y}{c}=\frac{h-x}{h}$，故

$$dm=\frac{ax}{h}\left(\frac{bc}{h}(h-x)\right)dx$$

而 $$m=\int_0^h \frac{abc}{h^2}(hx-x^2)dx=\frac{abc}{h^2}\left(h\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^h$$

$$=\frac{abch}{6}=\frac{aV}{3}。$$

此中 $V=\frac{bch}{2}$ 乃三角片之體積。換言之，若以 $\frac{m}{V}$ 爲片之平均密度，則其值將爲 $\frac{a}{3}$ 即頂點密度之三分之一。

例2 半徑爲 5 厘米之圓球，其密度與距中心之平方成正比，在表面上之密度則爲 25克/立方厘米，求球之質量。

令 r 表距中心之遠度。題設 $q=kr^2$，且當 $r=5$ 時，$q=25$，故 $k=1$，而

$$q=r^2。$$

半徑相等各點之密度旣係相同，最便於應用之元體係半徑爲 r，厚爲 dr 之圓殼。圓殼之體積約等於 $4\pi r^2\,dr$（即球面積 $4\pi r^2$ 乘以殼厚 dr），故元體之質量爲

$$dm=q\,dV=4\pi r^4\,dr，$$

由是乃得球之質量爲

$$m=\int_0^5 4\pi r^4 dr=\frac{4\pi}{5}r^5\Big|_0^5=2500\pi\text{克}。$$

第十三章習題

1. 茲將下列諸曲線所包圍之面積依所示之線爲軸旋一周，試求所得之體積：

(a) 拋物線 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$，$x=0$，及 $y=0$；繞 $y=0$；

(b) 四尖次擺線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，繞 $y=0$；

(c) 箕舌線(witch) $y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$，$y=0$，繞 $y=0$；

(d) 半立方拋物線 $y^2=x^3$，$x=0$，$y=a$，繞 $y=a$；

(e) $y^2=x^3$，$y=0$，$x=b$，繞 $x=0$；

(f) 蔓葉線(cissoid) $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$，繞其漸近線 $x=2a$ 爲軸；

(g) $\begin{cases} x=a\cos 3\theta \\ y=a\sin 3\theta \end{cases}$ 繞 $y=0$；

(h) $\begin{cases} x=t^2 \\ y=4t-t^3 \end{cases}$ 繞 $y=0$；

(i) 鏈線 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$，$x=0$，$x=h$，繞 $y=0$；

(j) 雙曲線 $x^2-y^2=1$，$y=\pm 1$，繞 $y=0$。

2. 以一平面截圓球，截體高 h，球之半徑爲 r，求所截之體積。

3. 一軟木球，直徑爲 4 寸，比重爲 $\frac{1}{4}$，浮於水面，問球之中心高出水面若干？

4. 有圓弧一段在圓中心所張之角爲 2α，今將該弧繞其所割之弦旋轉一周，問所成之體積若干？（參較附圖 13.10）

5. 將心形曲線 $r=a(1+\cos\theta)$ 自 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 到 $\theta=\pi$ 部份之面積旋轉於始線一周，求所成之體積。

6. 自拋物線 $y^2=4px$ 之頂點 O 到其通徑之一端作一直線 OE。茲以 OE 弧繞 OE 線爲軸，旋轉一周，求其體積，(圖13.11)。

7. 試證明稜錐體(pyramid)或錐體(cone)之體積爲其底面 B 及

高 h 乘積之三分之一。

8. 設已知四尖夾擺線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 之面積為 $\frac{3}{8}\pi a^2$，試求立體 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 之體積。

9. 設以平面 $z=c$ 截立體 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$，問所截出之體積為何？

10. 試求在下列兩曲面內之體積：$x^2+y^2=8z^2$ 及 $x^2+y^2+z^2=9$。

11. 一無線電塔，其水平截面均為正方形，正方形之四角係位於兩正交之拋物線上，如 EOC 與 BAD(圖13.12)。兩拋物線之軸 OA 與塔軸符合，其頂亦與塔頂相合。若 $OD=OC=a$，$OA=b$，求塔所包含之體積。

12. 有一楔形固體如圖(13.13)，其頂為一直線 BC，其底為一半徑為 a 之圓(與 BC 線平行)，此體與 BC 及圓正交之截面均為三角形。若自 BC 線至圓之垂直距離為 b，試求其體積。

13. 今以一斜平面與圓柱體一正截面相交於其直徑，若斜平面與正截面所作之角為 α，問兩面自柱體所截出之體積若干？(柱之半徑為 a)。

14. 一號角 $ACEFD$，圖(13.14)，係以半徑漸增之圓為其截面，其一邊則與一圓周(半徑為 a)相切如圖。設通過圓中心而與直徑 AB 作 θ 角之直線適與號角截面相交於其直徑 CD，CD 之長 $2x$ 則與 θ 角成正比，而當 $\theta=90°$ 此直徑 EF 則為 $2b$，試求號角之體積。

15. 設自直徑為 15 寸之圓柱，挖去一邊長為 6 寸之洞，洞軸與柱軸正交，試求挖去之體積。

16. 將下列各曲線，依所示之軸旋轉一周，試求所成之面積：

(a) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，繞 $y=0$；

(b) $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ 繞 $y=0$；

(c) $x=e^t\cos t$，$y=e^t\sin t$ 自 $t=0$ 至 $t=\frac{\pi}{2}$，繞 X 或 Y 軸；

(d) 一等角螺線 $r=ae^{\lambda\theta}$，（自 $\theta=0$ 至 $\theta=\pi$ 之一弓狀弧），旋轉於其始線；

(e) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 繞 X 軸或 Y 軸。

(f) 一拋物線 $y^2=4px$ 爲通徑所截之弧，繞通徑旋轉。

17. 有一球形之黃銅殼浮於水中，其直徑爲一米，其厚爲一毫米，銅之比重爲 8.9，問球沈入水中之部分若干米？

18. 有兩細線，其一之密度與距一端之遠度成正比，其他則與此距離之平方成正比，試分求其質量。

19. 一圓柱體高爲 h，半徑爲 a，其各點之密度係與距柱軸遠度之立方成正比，若在柱面之密度爲 b，問柱之質量爲何？

20. 一半球體各點之密度與距底面之遠度之平方成正比，求此球體之質量。

21. 一薄直角三角形各點之密度與距直角頂之遠度成正比，用極坐標求此三角形之平均密度。

22. 一正圓錐體高爲 h，底面半徑爲 a，其各點之密度與距錐軸遠度成正比例，若在錐底半徑爲 a 處之密度爲 b，求錐之質量。

第十四章 力學上之應用

(14.1) 力學與微積分 Newton 發明微積方法，其動機原爲解決力學上之需要。自此法大明之後，應用範圍日廣，而力學上之問題，反因其所需之概念較爲抽象，而不爲初學者所注重。應用微積分於力學之時，初學者所遇之困難，既多爲未能徹底了解應用之物理的觀念，而非微分或積分之計算，其根本補救方法自當從灌輸物理學知識入手。 本章於陳列各微積分公式之前，對於各公式之來源及其物理的意義亦略爲簡要論述，以助讀者。至於較詳之討論，可參閱大學程度之物理學或力學課本。

本章所討論之問題，可分爲兩類：其一爲物體在平面曲線上之運動（包括切線及法線加速度之觀念），其他則爲力學中較常用之定積分，如質量中心，轉動慣量，流體靜壓，靜壓中心及功等。

(14.2) 曲線上之運動 設有一點 P 沿曲線 $y=f(x)$ 運動，則其在各時刻之速度，其數值可照(4.2)節所述，定爲每單位時間內所行之弧長，即

$$v=\frac{ds}{dt} \qquad (1)$$

但 P 之軌跡係曲線，故除以方程(1)表其數值外，尚須指出其運動之方向，此方向即切於曲線之方向，可由 $\tan\tau=\frac{dy}{dx}$ 所示之 τ 角定之。惟 $(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2$，故方程(1)亦可寫爲

$$v^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \qquad (2),$$

此中之 $\dfrac{dx}{dt}$ 與 $\dfrac{dy}{dt}$ 可視爲 P_1 點在 OX 與 OY 方向之投影之運動速度。換言之，在曲線上之運動速度可分解爲兩個垂直部分：其一與 OX 方向同，其他則與 OY 方向同。反之，如一點在 OX 與 OY 兩軸上投影之運動速度 $v_x=\dfrac{dx}{dt}$ 及 $v_y=\dfrac{dy}{dt}$ 已知，則此點沿曲線移動之速度，其數值（可名爲快慢 speed）將爲：

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2} \tag{3},$$

而其移動之方向與 OX 軸所作之角 τ（即切線之方向角），其正切將爲

$$\tan\tau=\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{v_y}{v_x} \tag{4}.$$

分解一有方向性之數量（例如速度）爲數部分時，實不必限定此等部分之數目爲二，或其方向互爲直角而與 OX 及 OY 平行。但因直角三角形勾股弦關係甚爲簡便，故分解之時，多取二個正交之方向。此外，欲完全表示在平面上有方向性之量（例如速度），既只須提及其數值（即 v）與方向（即 τ），故若已知此等量在任意兩正交方向之分值，該量即可確定。例如以極坐標之向徑爲準，則 v 亦可分解爲與向徑 r 平行及與之垂直之兩部分，因

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \tag{5},$$

故仿前此所述，此中之 $\dfrac{dr}{dt}$ 可視爲 v 在 r 方向之分速度，而 $r\dfrac{d\theta}{dr}$ 則應視爲 v 在與 r 正交方向之分速度。

由　　$v_x=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{ds}{dt}\dfrac{dx}{ds}=v\cos\tau$，

$$v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{ds}{dt}\frac{dy}{ds}=v\sin\tau=v\cos\left(\tau-\frac{\pi}{2}\right),$$

及 $$\frac{dr}{dt}=\frac{ds}{dt}\frac{dr}{ds}=v\cos\psi=v\cos(\tau-\theta),$$

$$r\frac{d\theta}{dt}=\frac{ds}{dt}\frac{r\,d\theta}{ds}=v\sin\psi=v\cos\left(\tau-\theta-\frac{\pi}{2}\right).$$

諸方程言之，在某規定方向之分速度 v_ϕ 其定義可即寫爲

$$v_\phi=v\cos(\tau-\phi) \qquad (6).$$

ϕ 表規定方向與 OX 所作之角，τ 表 v 與 OX 所作之角，圖(14.1)。

(14.3)加速度 仿照直線上運動之情形，速度對時間 t 之變化率名爲加速度。但因物係沿曲線運動，速度之變化實包括快慢變化與方向變化兩項。欲將此兩項變化全行示明，自非一個數量所能奏效。例如因物之速度係沿切線方向，其數値爲 v，初讀者或將斷定其加速度爲

$$\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}.$$

其實此僅指物在切線方向之加速度 a_t 而非其加速度之全値。欲求後者，仍以先分別求在兩正交方向分速度之變化率，然後再按直角三角形勾股弦關係將之合併。例如因 v_x 及 v_y 分別表 v 在 OX 與 OY 方向之分速度，故在此兩方向之加速度分別爲

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2} \quad 及 \quad a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2} \qquad (7);$$

而由直角三角形勾股弦定理乃得加速度之總値爲

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2} \qquad (8).$$

其方向與 OX 方向作 $\tan^{-1}\frac{a_y}{a_x}$ 角。

例 有物沿半徑為 R 之圓以固定之快慢 V 而動，試求其加速度。

物之快慢雖為固定不變，但因係沿圓而動，故其速度方向常改，而其加速度遂不等0。茲先求 v_x 及 v_y。自圖(14.2)觀之，如將 V 分解為水平及垂直兩部分，即得

$$v_x = -V\sin\theta = -\frac{V}{R}y,$$

及

$$v_y = V\cos\theta = \frac{V}{R}x。 \qquad (14.1)$$

次求 v_x 及 v_y 對 t 之紀數以定 P 點在 OX 與 OY 方向之分加速度 a_x 及 a_y：

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{V}{R}\frac{dy}{dt} = -\frac{V}{R}v_y = -\left(\frac{V}{R}\right)^2 x, \qquad (9)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{V}{R}\frac{dx}{dt} = \frac{V}{R}v_x = -\left(\frac{V}{R}\right)^2 y,$$

將此兩值之平方相加後再開方，即得加速度之數值為

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{V^2}{R^2}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{V^2}{R}, \qquad (10)$$

至於 a 之方向則自方程(9)即知其係自 P 向 O。

方程(9)表示物體作等速圓周運動時，其在任何直徑上之投影之加速度，其方向與位移相反，其數值則與位移成正比。此與(8.1[illegible])節簡諧運動之定義相符。是故若就直線上之簡諧運動，如(8.19)節所述者，[illegible]而之常數 a 即等於 $\frac{V}{R}$，惟 $\frac{V}{R}$ 實亦 P 點轉動於 O 點之角速度（見

[illegible]節），故簡諧運動公式

$$A\sin(pt+\alpha)$$

中之 p 常名為角速度(angular velocity)。

(14.4)切線與法線加速度 沿一曲線運動之物體，其在任意[illegible] $\dfrac{dv}{dt}$ [illegible]係沿切線之方向[illegible]此方向之加速度[illegible]名之為切線加速度(tangential acceleration)[illegible]按照定義，顯然[illegible]對 t 之變化率[illegible]

$$\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$$

[illegible]速度方向之變[illegible]，故除此之外[illegible]分加速度[illegible]

([illegible]法線之方向[illegible]法線加速度(normal acceleration)。欲求法線加速度 a_n [illegible]

度，而後求此分速度[illegible]之變化率[illegible]在此方向

[illegible]所作之角為 $(\tau-\phi)$，而在此方向之分速度依方程(10)為

$$v_\phi=v\cos(\tau-\phi)$$

v 與 τ 既隨所討論之 P 而異，故求(6)對 t 之紀數時，v 與 τ 均應視為 t 之函數。因此，在 ϕ 方向之分加速度 a_ϕ 將為

$$a_\phi=\frac{dv_\phi}{dt}=\frac{d}{dt}[v\cos(\tau-\phi)]$$

$$=\frac{dv}{dt}\cos(\tau-\phi)-v\sin(\tau-\phi)\frac{d\tau}{dt}$$

$$=\frac{d^2s}{dt^2}\cos(\tau-\phi)-\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left(\frac{d\tau}{ds}\right)\sin(\tau-\phi)\qquad(12)$$

若$\phi=\tau$，則所得者顧係方程(11)之切線加速度；若$\phi=\tau+\frac{\pi}{2}$，即法線方向，則$\cos(\tau-\phi)=0$，$(\tau-\phi)=-1$，而$a_\phi=a_N$，

故 $$a_n=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d\tau}{ds}=\frac{v^2}{\frac{ds}{d\tau}} \tag{13}.$$

試以此結果與等速圓周運動之加速度方程(10)相較則知$\frac{ds}{d\tau}$相當於一圓之半徑，此與前(11.3)節中採用$\frac{ds}{d\tau}$爲曲度半徑之定義完全滿通。讀者當已注意在本段論述，吾人仍先求一普通答案可以適用於任何ϕ，然後於欲求a_N時將$\phi=\tau+\frac{\pi}{2}$之特別值代入。若起始即將$\phi=\tau+\frac{\pi}{2}$代入方程(6)中，a_N之值將無法推得之矣。

例 試證若擺錘(bob of pendulum)被限制在擺線(cycloid)上運動，則其切線加速度係與錘離靜止位置之弧長成正比。是以無論擺幅爲何此式擺子之運動乃屬於眞正簡諧運動。

令圖(14.3) $X'COX$表擺線，$X'S$與SX表限制繩SP運動之面，P爲擺錘。取原點O及OX軸如圖(11.8)。$X'OX$擺線之方程乃

$$x=b(\phi+\sin\phi),\ y=-b(1+\cos\phi)。$$

擺錘所受之重力加速度g可分爲PT及PN兩部分。PN之影響係拉擺繩使不鬆，$PT=g\sin\tau$則係使擺錘P向C移動。故若令s表CP弧長，則切線加速度爲

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g\sin\tau。$$

而本題之意係證弧長s乃與$\sin\tau$成正比。自擺線方程可得CP弧長

$$s=\int_0^x\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=b\int_0^\phi\sqrt{(1+\cos\phi)^2+\sin^2\phi}\,d\phi$$

$$=b\int_0^\phi\sqrt{2+2\cos\phi}\,d\phi=2b\int_0^\phi\cos\frac{\phi}{2}d\phi=4b\sin\frac{\phi}{2}。$$

但 $\sin\tau=\frac{dy}{ds}=\frac{b\sin\phi\,d\phi}{2b\cos\frac{\phi}{2}d\phi}=\sin\frac{\phi}{2}$，

是以 $\frac{d^2s}{dt^2}=-g\sin\tau=-g\sin\frac{\phi}{2}=-\frac{g}{4b}s$。

由是乃知（參閱 8.19 節） $s=A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{4b}}t+\alpha\right)$，

而擺之 $p=\sqrt{\frac{g}{4b}}$，或其週期（即來回一次所需之時間）爲

$T=\frac{2\pi}{p}=4\pi\sqrt{\frac{b}{g}}$。欲使 $T=2$ 秒（即欲得"秒擺" seconds pendulum），則 b 之值應爲（即母圓之半徑）

$$b=\frac{g}{4\pi^2}=\frac{980}{4\pi^2}\text{厘米},$$

或約 25 厘米弱，而 SO 長則約 1 米。

(14.5)拋物體方程 前數節所討論之問題乃由已知運動之情況以推求加速度。茲將題反轉，令已知者爲加速度而所欲求者爲物體所作之軌跡。拋射體之運動即爲此問題中之較常見者。

物體因受地球吸力之影響而有一鉛直向下之重力加速度 g (acceleration due to gravity)。在尋常距離內，g 之數值可認爲固定不變。今若向鉛直方向拋射物體，則其運動情況，因係在一鉛直之直線上，可逕以前此(6.7)節之方法討論之不必另述。設

物體拋出之方向非鉛直的乃與水平方向作 α 角（圖 14.4），射出時之快慢為 V。茲所欲知者乃其軌跡，其所能達之最高點，以及其復落至與拋出點同高處之距離（此距離名為其水平射程 range）等問題。假定空氣所生之阻力等可以不計，則拋出之後，物只受重力加速度 $-g$（負號表向下）之影響。如是，其在鉛直方向與水平方向加速度之方程乃分別為

$$a_x=0，\text{及}\ a_y=\frac{dv_y}{dt}=-g；$$

積分之，則得 $v_x=C_1$，$v_y=C_2-gt$，

C_1 與 C_2 為兩個積分常數。當拋出之時（即 $t=0$），鉛直速度乃 $V\sin\alpha$，而其水平速度則為 $V\cos\alpha$，故積分常數 C_1 與 C_2 應分別等於 $V\cos\alpha$ 及 $V\sin\alpha$。換言之，在任何時刻 t，分速度 v_x 及 v_y 與 t 之關係為

$$v_x=\frac{dx}{dt}=V\cos\alpha，\text{及}\ v_y=\frac{dy}{dt}=V\sin\alpha-gt；$$

再積分之，乃有

$$x=(V\cos\alpha)t+C_3，\text{及}\ y=(V\sin\alpha)t-\tfrac{1}{2}gt^2+C_4。$$

若取用座標之原點適位於拋出點，則於 $t=0$ 時，$x=0$，$y=0$，而積分常數 C_3 與 C_4 均為 0。所求軌跡之參變方程遂為

$$x=(V\cos\alpha)t \qquad (14a)$$

$$y=(V\sin\alpha)t-\tfrac{1}{2}gt^2 \qquad (14b).$$

消去 t，乃得一二次方程

$$y=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2V^2\cos^2\alpha} \qquad (15)$$

此為二次方程所表之曲線命名為拋物線也。當拋射體達其最高

點之時，按極大之點 $\frac{dy}{dt}$ 應爲0，但

$$\frac{dy}{dt}=v_y=V\sin\alpha-gt,$$

若令之爲0，卽知到達極高點之時刻乃 $t=\frac{V\sin\alpha}{g}$。以此代入方程(14b)中乃知極高之點爲

$$y_{\max}=\frac{V^2\sin^2\alpha}{g}-\frac{V^2\sin^2\alpha}{2g}=\frac{V^2\sin^2\alpha}{2g}。$$

若拋出之角 α 可以變更，則此結果顯然表示欲得最大之極高點 H，α 必須爲 $90°$ 或拋出方向必須爲鉛直向上，此實常識勿庸贅述。此時 $H=\frac{V^2}{2g}$ 可名爲最高射程。

當物復回至與拋出點同高之處時，$y=0$。惟(14b)示除原始時刻 $t=0$ 外，$y=0$ 之答案尙有

$$t=\frac{2V\sin\alpha}{g}$$

一值，以之代入(14a)中，則得水平射程

$$x=\frac{2V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}=\frac{V^2}{g}\sin 2\alpha。$$

若拋出角 α 可以改變，則欲得最大之水平射程必須令 $2\alpha=90°$ 或 $\alpha=45°$。此最大之水平射程

$$\frac{V^2}{g}=2H$$

適爲最高射程 H 之兩倍。

例 若高射砲彈所能達之最高度爲 H，今欲擊高 h 之敵機，問在何半徑內之敵機均有被擊中之可能。取原點於砲位。試以各個不同之拋出角 α 而畫出多個拋物

線如圖(14.5)，則知$P'P$可表敵機不得飛入之範圍。因此，本題命意即：若α可以隨意變更，問當$y=h$時，x之最大值爲何？以$h=y$及最高射程$H=\frac{V^2}{2g}$代入方程(15)乃有

$$h=x\tan\alpha-\frac{x^2}{4H}\sec^2\alpha \tag{17}$$

以示$P'P$橫線上各點之橫坐標x與拋出角α之關係。求對α之紀數，則得

$$0=\tan\alpha\frac{dx}{d\alpha}+x\sec^2\alpha-\frac{x\sec^2\alpha}{2H}\frac{dx}{d\alpha}-\frac{x^2}{2H}\sec^2\alpha\tan\alpha。$$

若在此中令$\frac{dx}{d\alpha}=0$，則

$$x\sec^2\alpha-\frac{1}{2H}x^2\sec^2\alpha\tan\alpha=0$$

其答案除$x=0$外尚有

$$x\tan\alpha=2H，\quad 或\quad \sec^2\alpha=\frac{x^2+4H^2}{x^2}，$$

此即示P點之橫坐標x與拋出角α之關係。以之代入原軌跡方程(17)中即有 $h=2H-\frac{x^2+4H^2}{4H}=\frac{4H^2-x^2}{4H}$，

或 $x^2=4H^2-4Hh$，

即 $x=\pm2\sqrt{H(H-h)}$。

(17.5)質量中心 設以力加諸一物體，則物體之普通運動情況將爲轉動與移動兼而有之。若所加之力線通過物體之質量中心(center of mass)，則物體將不旋轉，其上各點運動之軌跡均爲平行的，而其運動情況遂與一同值質量集中於此點之小物體相同。此爲質量中心之物理的意義。對稱的物體，其質量中心之位置

固在其幾何的中心。至於不對稱的物體之質量中心，其尋求方法，仍爲先將物體分爲甚多之小元體（參較 13.5 節），然後求兩元體之質量中心，再次第擴展之於所有之元體。因是，在未述本題算法之前，應知如何計算兩個及多個小物體之質量中心之位置。

令 m_1 及 m_2 表兩小物體之質量，其在一平面上之位置則以 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 表之。茲以一甚輕（即質量甚小可以忽略之意）但甚強之桿將之連接。如是若於桿上任意點加力，則 m_1 與 m_2 因轉與移俱有，故其所作軌跡將非平行的。若所加之力適通過其質量中心（令此點之坐標爲 $\bar{x}$ 及 $\bar{y}$），圖（14.8），則兩點之軌跡將爲平行的。換言之，若加一垂直之力，力之作用線位在 $x=\bar{x}$ 直線上，則 m_1 與 m_2 均將沿垂直方向以同一之加速度 a 而移動。此時，使 m_1 及 m_2 移動之力，按 Newton 定律，可視爲分別等於

$$F_1=m_1a \text{ 及 } F_2=m_2a;$$

但加於 $\bar{x}$ 處之力 F，其效果既與 F_1 及 F_2 分別加於 m_1 及 m_2 相同，故 F 爲 F_1 及 F_2 兩平行力之合力，其數值係等於 $F=F_1+F_2$。對平面上任意點而言，F 之力矩（moment）必等於 F_1 與 F_2 對同點之力矩之和。求對原點 O 之力矩乃有

$$F\bar{x}=F_1x_1+F_2x_2,$$

因 $F=F_1+F_2=(m_1+m_2)a$，故

$$\bar{x}=\frac{F_1x_1+F_2x_2}{F_1+F_2}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}。$$

同樣，若令所加之力取水平方向，則可推得

$$\bar{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}。$$

求三個小物體 m_1，m_2，m_3 之質量中心時，可先計其中任兩個之質量中心(x', y')，然後再假定此兩物之質量係集中於此點再求其與第三質量連合後之質量中心。據前所述

$$x' = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}，\quad y' = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}。$$

與第三質量連合後，其質量中心之坐標，依照前述應爲

$$\bar{x} = \frac{m' x' + m_3 x_3}{m' + m_3} = \frac{(m_1 + m_2)\dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} + m_3 x_3}{(m_1 + m_2) + m_3}$$

$$= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

及 $$\bar{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}。$$

再擴展之於 n 個物體，則結果顯然爲

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots\cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots\cdots + m_n} \qquad (18a),$$

及 $$\bar{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots\cdots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \cdots\cdots + m_n} \qquad (18b)。$$

如此等物體不在同一平面上，只須再加一公式：

$$\bar{z} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots\cdots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \cdots\cdots + m_n} \qquad (18c)。$$

以示其與三個坐標平面相距之遠度，卽可確定其位置。

自方程(18)之推求法觀之，若欲求一固體之質量中心，可先分之爲無數元體。令 dm 表一元體之質量，其質量中心坐標爲(x, y, z)。若在適當之上下限內計 $\int x\,dm$，$\int y\,dm$ 及 $\int z\,dm$

而後以 $m=\int dm$ 除之，即得 $\bar{x}$，$\bar{y}$，$\bar{z}$ [illegible]

以計此積分值時，dm 與 x，y，z 間之關係須已知，然後 dm 方能表以

為 x，y，z 或另一變數之函數，而

$$\bar{x}=\frac{\int_{x_1}^{x_2}\left(x\frac{dm}{dx}\right)dx}{m},\quad \bar{y}=\frac{\int_{y_1}^{y_2}\left(y\frac{dm}{dy}\right)dy}{m},$$

$$\bar{z}=\frac{\int_{z_1}^{z_2}\left(z\frac{dm}{dz}\right)dz}{m} \tag{19}$$

諸值，方可計得。至於所用質量為 dm 之元體，其形狀，大小等等，除其質量中心必須位在 (x，y，z) 之點外，別無限制。

簡言之，方程(19)實為質量中心位置之定義。若不欲細究其物理的意義，則逕以是為本節之出發點而忽略前此之說明亦無不可。

此外，質量中心與重心(center of gravity)常混為同一之觀念。此乃因大地對一物體各部分之吸引力可視為平行的，故若以重力加速度 g 代前此之 a，物體各部分之重量代前此之各力 F_1，F_2 等，則方程(19)所示者亦為重心之坐標。惟若物體所佔之範圍過大，大地對其各部分之吸力不能視為平行的時，重心與質量中心實非相同。此細微區別本書此後將不詳較。

由上所述，質量中心或重心一詞均係與質量有關。但如遇密度 q 為均勻之物體時，$m=qV$，$dm=q\,dV$，而方程(19)遂可改為

$$\bar{x}=\frac{\int_{x_1}^{x_2}\left(x\frac{dV}{dx}\right)dx}{V},\quad \bar{y}=\frac{\int_{y_1}^{y_2}\left(y\frac{dV}{dy}\right)dy}{V},\ \cdots \tag{20}$$

故有時吾人亦言一體積之重心。又如物體為薄片，其厚度 b 均等而

則 $dV=b\,dA$（A 表片之面積），而方程(20)復可寫作

$$\bar{x}=\frac{\int_{x_1}^{x_2}\left(x\frac{dA}{dx}\right)dx}{A},\ \cdots\text{等} \tag{21}$$

故有時吾人亦言一面積之重心。此等措詞純為簡便起見，至於其物理的意義，仍須於方程(19)中尋求之。

例1　求圖(14.7)平面 $ABEOFD$ 之重心。

就對稱情形而言，重心 G 位置應在對稱軸 AOC 上。此缺角之正方可視為由兩正方相減而成。$ABCD$ 正方之重心在 O，其面積為 a^2，a 表 AB 邊長。$OECF$ 正方之重心在 O' 距 O 為 $\sqrt{2}\frac{a}{4}=\frac{a}{2\sqrt{2}}$，其面積為 $\frac{a^2}{4}$。若用基本方程(18a)，則以 $\bar{x}=0$，$x_1=OG$，$m_1=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3}{4}a^2$，$x_2=OO'=\frac{a}{2\sqrt{2}}$，$m_2=\frac{a^2}{4}$，即有 $0=\frac{3a^2}{4}(\overline{OG})+\frac{a^2}{4}\frac{a}{2\sqrt{2}}$，或 $\overline{OG}=x_1=-\frac{a}{6\sqrt{2}}$。

例2　有一細棒其密度與距一端 O 之遠度成正比。試求其質量中心。

取棒長方向為 X 軸，棒端 O 為原點。在距 O 為 x 之處，截一短段 dx。若以 a 表棒之均勻的截面積，則此元體之質量為

$$dm=kx\,a\,dx,$$

此中之比例係數可由棒他端之密度計之。若棒長為 l，則

$$m=\int_0^l kax\,dx=\frac{1}{2}akl^2;\quad \int_0^l x\,dm=\int_0^l kax^2dx=ak\frac{l^3}{3};$$

而 $$\bar{x}=\frac{\int_0^l x\,dm}{m}=\frac{\frac{akl^3}{3}}{\frac{akl^2}{2}}=\frac{2}{3}l。$$

所得結果與棒密度之價值及截面積 a 均無關。

例3　求半圓球之重心(圖14.8)。

取通過球心而與其底面正交之直線爲 X 軸。由對稱情况言之，重心必位在 X 軸上；令其距底面之位置爲 $\bar{x}$。在 x 處截出一薄片 dx 此片重心之 X 坐標爲 x，故可用作元體；片之半徑可視作等於 $y=\sqrt{a^2-x^2}$，a 表球之半徑。元體之體積遂爲

$$dV=\pi y^2\,dx=\pi(a^2-x^2)\,dx；$$

又因半球之體積爲 $V=\frac{2}{3}\pi a^3$，故

$$\bar{x}=\frac{\int x\,dV}{V}=\frac{\pi\int_0^a x(a^2-x^2)\,dx}{\frac{2}{3}\pi a^3}=\frac{\left(a^2\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^a}{\frac{2}{3}a^3}=\frac{\frac{a^4}{4}}{\frac{2a^3}{3}}=\frac{3}{8}a。$$

例4　求弓形之重心(圖14.9)。

取對稱軸線爲 X 軸，則重心必位在此軸線上。令圓之方程爲

$$x^2+y^2=a^2。$$

茲所欲求者爲自 $x=a-h$ 至 $x=a$（h 表弓形之高，a 表圓之半徑）之面積之重心。在 x 處截出一細條，寬爲 dx，長爲 $2y$。此條重心之 X 坐標顯然爲 x，故可用爲元體。元體面積爲 $dA=2y\,dx=2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$，是以重心位在

$$\bar{x}=\frac{\int x\,dA}{A}=\frac{\int_{a-h}^{a}2x\sqrt{a^2-x^2}\,dx}{2\int_{a-h}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx}$$

$$=\frac{-\frac{2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{a-h}^{a}}{\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)\Big|_{a-h}^{a}}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\left\{a^2-(a-h)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\pi}{2}a^2-(a-h)\sqrt{a^2-(a-h)^2}-a^2\sin^{-1}\frac{a-h}{a}}。$$

在此結果中，若改用 θ 代 h 以作參數，即 $\cos\theta=\frac{a-h}{a}$，則更簡潔：因 $\sqrt{a^2-(a-h)^2}=a\sin\theta$ 且 $\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{a-h}{a}=\theta$，故

$$\bar{x}=\frac{\frac{2}{3}a^3\sin^3\theta}{a^2(\theta-\sin\theta\cos\theta)}=\frac{2a\sin^3\theta}{3(\theta-\sin\theta\cos\theta)}。$$

(14.7) 轉動慣量與迴轉半徑　設有小質量 m，轉動於一軸線，m 至軸線之遠度爲 r。在短時內，其運動情況亦可視爲沿一直線而移動，此直線之方向係與半徑爲 r 之圓周上切線相同，(見前 4.6 節)。若使其運動之力爲 F，則按 Newton 定律，此力與切線加速度 a 之關係爲 $F=ma$。但此力對於旋轉軸之力矩 (moment of force) 爲 $L=Fr$，而切線加速度與角加速度 α 之關係則爲 $a=r\alpha$，

故亦有 $L=Fr=mar=mr^2\alpha$，即　$L=mr^2\alpha$；

換言之，移動之時，力 $F=$(質量 m)×(加速度 a)，而轉動時，則力矩 $L=(mr^2)\times$(角加速度 α)。故如認質量 m 為移動時之慣量，則 mr^2 即表示質量 m 旋於轉軸之慣量，r 為 m 至轉軸之距離。茲以 I 表此轉動慣量* (rotational inertia) 即

$$I=mr^2 \qquad (22),$$

故

$$L=I\alpha \qquad (23).$$

方程(22)可視為轉動慣量之基本定義。 今若擴充之於數個質量 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_n$，其距軸線之遠度分別為 $r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n$，則因轉動之時，各質量之角加速度均同，故所需之總力矩為

$$(m_1r_1^2+m_2r_2^2+\cdots\cdots+m_nr_n^2)\alpha \quad .$$

而此等質量之轉動慣量遂為

$$I=m_1r_1^2+m_2r_2^2+\cdots\cdots+m_nr_n^2 \qquad (24).$$

欲求一物體之轉動慣量，吾人遂先將之分為甚多之小質量——元體。此等元體之形狀，大小等無他限制，祇須其上各點距軸線之遠度均為相等。若元體之質量為 dm，其距軸線之遠度為 r，則此元體之轉動慣量為

$$dI=r^2\,dm \qquad (25),$$

而整個物體之轉動慣量遂為在適當上下限內 r^2dm 之積分。依照前述，如欲援用已授方法以計此定積分，可先將 m 與 r 之關係表出，然後即可得

$$I=\int_{r_1}^{r_2}\left(r^2\frac{dm}{dr}\right)dr \qquad (26).$$

* 轉動慣量英名常作 moment of inertia。

方程(26)可視爲轉動慣量之定義。由此言之，轉動慣量之起因係由質量而來。惟在若干問題中吾人爲簡便起見，常言一體積或面積對某軸線之轉動慣量。前者實含有密度均勻的體積之意，而後者則含密度與厚度皆均勻之薄片之意。於是一體積對某軸線之 I 常寫爲

$$I=\int_{r_1}^{r_2}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right)dr \qquad (27),$$

而一面積對某軸線之 I 則常寫作

$$I=\int_{r_1}^{r_2}\left(r^2\frac{dA}{dr}\right)dr \qquad (28).$$

此與(19)，(20)，(21)各方程之意頗相似。

由方程(24)知 I 之值可以物體之全部質量 m 乘以一適當長度之平方。令此適當之長爲 k，則按定義

$$I=mk^2 \qquad (29),$$

而

$$k^2=\frac{\int_{r_1}^{r_2}r^2\left(\frac{dm}{dr}\right)dr}{m} \qquad (30).$$

k 之名爲迴轉半徑 (radius of gyration)，其重要性乃在於當物體爲均密的時，其值只由物體之幾何的形狀決定之。因此，爲便於應用起見，吾人常將某種體積或面積之迴轉半徑計列成表。

例 1　有細桿長爲 b，今以通過其一端 A 而垂直於桿長 AB 之線爲軸，求其 I 及 k。

取 AB 爲 X 軸而在其上 x 處截出 dx 一段。此段之質量爲

$dm=aq\,dx$，a 表桿之截面，q 表密度，二者均爲常數。此段距原點 O 之遠度可視爲 x，故

$$I=\int_0^b x^2 aq\,dx=aq\frac{x^3}{3}\bigg|_0^b=\frac{aqb^3}{3}。$$

但桿之質量爲 $m=aqb$，故 $I=\frac{mb^2}{3}$ 而 $k=\frac{b}{\sqrt{3}}$。

例 2　一圓盤，半徑爲 a，其密度與距中心之遠度成正比。若以通過中心而垂直於盤面之直線爲軸，求其 I 與 k。

本題之元體應爲同心環。環之半徑可視爲 r，其寬爲 dr。若盤之厚度爲 b，則元體積爲 $dV=2\pi r\,b\,dr$。因密度 $q=cr$（c 爲一比例係數），故 $dm=q\,dV=cr\,dr=2\pi bc\,r^2\,dr$，而

$$I=\int_0^a 2\pi bcr^4\,dr=2\pi bc\frac{r^5}{5}\bigg|_0^a=\frac{2\pi bc}{5}a^5；$$

但盤之質量爲 $m=\int_0^a 2\pi cbr^2dr=2\pi cb\frac{a^3}{3}$，故 $k^2=\frac{I}{m}=\frac{3a^2}{5}$，

而　$k=\sqrt{\frac{3}{5}}\,a$。

(14.8)轉動慣量一定理　設已知一物體旋轉於通過其重心 G 之一軸線之轉動慣量 I_0，茲將其轉動軸線平行的移至距中心 G 爲 h 之 H 處，則其對後述軸線之轉動慣量將爲，圖(14.10)：

$$I=I_0+mh^2 \qquad (31)；$$

就廻轉半徑言，若以 k_0 爲對通過重心軸線之值，k 爲對另一平行軸線之值，當兩軸距離爲 h 時，則將有

$$k^2=k_0^2+h^2 \qquad (32).$$

此定理之證如下，圖(14.10)。以重心 G 爲原點 O。令旋轉軸爲過 H 而垂直於紙面之直線，其距重心之遠度爲 h。取一元體，其質量爲 dm，其距 H 軸之遠度爲 s。作一平面通過元體而與紙面平行。如是若取 X 及 Y 軸如圖(14.10)，則

$$h^2=a^2+b^2\,;\; r^2=x^2+y^2,$$

而
$$s^2=(x-a)^2+(y-b)^2,$$

即
$$s^2=h^2+r^2-2ax-2by\,;$$

故以 H 爲轉軸時，於適當之上下限內可得物體之 I 爲

$$I=\int s^2\,dm=\int(h^2+r^2-2ax-2by)\,dm \qquad (33).$$

但若轉軸通過 O，則

$$I_0=\int r^2\,dm\,;$$

又因 h，a，及 b 均爲常數，故

$$\int h^2\,dm=mh^2。$$

且據重心定義及 O 之位置，$\bar{x}=\bar{y}=0$。是以

$$\int 2ax\,dm=2a\int x\,dm=2am\bar{x}=0,$$

$$\int 2by\,dm=2b\int y\,dm=2bm\bar{y}=0\,;$$

以此等關係代入方程(33)中即有方程(31)。

例1　已知一圓盤對通過中心而垂直於盤面之轉動慣量爲 $\frac{1}{2}ma^2$，求其對盤周上一點而垂直於盤面之直線之轉動慣量 I。

兩軸之距離 h 等於半徑 a，故

$$I=ma^2+\frac{1}{2}ma^2=\frac{3}{2}ma^2。$$

例2　有圓盤半徑爲 $2a$，今以距中心爲 $\frac{a}{2}$ 之點爲心，另挖去一較小圓盤，直徑爲 a，求所得物體對通過中心 O 而垂直於盤面之軸之迴轉半徑 k，圖(14.11)。

未挖去小圓盤前，圓盤對於轉軸 O 之轉動慣量 I_1 爲

$$I_1=\frac{1}{2}m_1a^2=\frac{c}{2}\pi a^4$$

因 $m_1=c\pi a^2$，c 爲一比例常數。挖去之圓盤其對 O 之轉動慣量爲

$$I_2=\frac{m_2}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2+m_2\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{3}{2}m_2\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{3}{8}\left(c\pi\frac{a^2}{4}\right)a^2=\frac{3}{32}c\pi a^4。$$

若挖去小圓盤後，物體之轉動慣量爲 I_3，則因 $I_1=I_2+I_3$ 之故，

乃有　$$I_3=I_1-I_2=\frac{1}{2}c\pi a^4-\frac{3}{32}c\pi a^4=\frac{13}{32}c\pi a^4。$$

但原盤挖去小圓盤後，其質量爲

$$m_3=m_1-m_2=\pi ca^2-\pi c\frac{a^2}{4}=\frac{3c}{4}\pi a^2,$$

故　$$k^2=\frac{I_3}{m_3}=\frac{13}{24}a^2，即\ k=\sqrt{\frac{13}{24}}\,a。$$

(14.9)液體靜壓　設在一液體中，深度爲 y 之處，作一水平平面。若此平面之面積爲 A，則因須支持在面上高爲 y，截面爲 A 之液柱之故，此面所受之總力爲

$$F=wyA \tag{34}$$

w 表液柱每單位體積之平均重量。換言之，每單位面積所受之壓力 P(hydrostatic pressure)即等於

$$P=\frac{F}{A}=wy \tag{35}$$

由液體靜力學之原理，吾人且知在靜止液體內某點之壓力，各方皆同，雖則方程(34)係就垂直方向以說明之。是以不論平面面積之形狀大小及方向，只須其上各點距液面之深度相等，其每單位面積所受之力亦均相同。故欲求一不規則或範圍頗大之平面面積所受之力時，可先分之甚多之元面積 dA。若此元面積各部分之深度均等於 y，則其所受之力為

$$dF=PdA=wydA \tag{36}$$

因面積為一平面，故各元面積所受之壓力均為平行的，而在適當上下限內求(36)之積分即可求得該面積所受之總力。若 w 為常數，而 A 與 y 之關係均已知，則方程(36)可寫為

$$F=w\int_{y_1}^{y_2}\left(y\frac{dA}{dy}\right)dy \tag{37}$$

y_2 與 y_1 分表所討論平面面積沒在液中之最深與最淺之點。方程(37)實即液體內平面面積所受之靜壓之定義。

例 設有一水槽，其截面為一倒置之三角形，高為 h，底為 a（居上）。今滿盛以水，問槽兩端面所受之總壓力各為何？

以水面爲參考。取甚多之水平線將三角形分爲甚多之細條，每條上各點距水面遠度可視爲均等。茲取距水面爲 y 之細條，令其垂直寬度爲 dy，而水平長度則爲 x。此條所受之力爲

$$dF=wy\,dA=wxy\,dy$$

但自圖(14.12)知

$$\frac{x}{a}=\frac{h-y}{h},$$

故
$$dF=w\frac{a(h-y)}{h}y\,dy,$$

而三角形所受之全力乃爲

$$F=\int_0^h \frac{wa}{h}(h-y)\,y\,dy=\frac{wa}{h}\left(\frac{hy^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^h$$

$$=\frac{wah^2}{6}=w\frac{h}{3}\left(\frac{ah}{2}\right)=w\frac{h}{3}A,$$

A 表三角形之總面積。至於$\left(w\frac{h}{3}\right)$，按方程(35)，可視爲三角形每單位面積所受之平均壓力，此平均壓力即等於在水平面下深處爲$\frac{h}{3}$處之壓力。此外，讀者當已注意，只須截面爲三角形，不論其爲直角的、等腰的或他式，結果均如上述。

(14.10) 靜壓中心　自前節之例言之，置於液體中之一平面面積，其所受之全壓力等於面積上之一適當點所受之壓力乘以面積總值。此適當點之壓力可視爲所討論平面面積上之平均壓力。除此點外，吾人又可尋得一點，其地位宛如加於面上全壓力所集中之處。此點則名爲靜壓中心(center of hydrostatic pressure)。依據前此所述求重心或質量中心之方法，此點既係甚多平行力 $dF=wy\,dA$ 之合力位置，故若令此點距水面之深度爲$\bar{y}$，則求各力對水面上一直線之力矩即得

$$F\bar{y}=\int y\,dF$$

或
$$\bar{y}=\frac{1}{F}\int_{y_1}^{y_2}wy^2dA=\frac{1}{F}\int_{y_1}^{y_2}wy^2\frac{dA}{dy}dy \qquad (38).$$

是即靜壓中心距液面深度之定義。

例 求前節三角形之靜壓中心。

因 $dF=wy\,dA=\dfrac{wa(h-y)}{h}y\,dy$，故

$$\bar{y}=\frac{1}{F}\int_0^h\frac{wa(h-y)y^2dy}{h}=\frac{6}{wah^2}\frac{wa}{h}\left\{h\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right\}_0^h$$

$$=6h\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{h}{2}。$$

以此與前例相較，乃知三角形面積之靜壓中心位在底線(在液面)至頂點之半途，而壓力與平均壓力相等之點係位在底線(在液面)至頂點三分之一處。

(14.11) 功 設加一不變之力F於一物體。當物體沿一直線移動之時，此力所作之功W係等於力在移動方向之分力$F\cos\theta$與所行路程s之乘積，即

$$W=(F\cos\theta)s \qquad (39),$$

θ表F與s兩方向間之角。自此定義方程言之，若所加之力非不變者，即F與θ在路程上各點均不同，或所行之路程s非一直線，則將路程分為甚多之小段ds後，可得在每段落內所作之功為

$$dW=F\cos\theta\,ds \qquad (40),$$

θ表力F與軌跡s上切線T間之角，圖(14.13)，F與θ既係s之函數，故於適當上下限內求方程(40)之積分，即得所作之全功為

$$W=\int_{s_1}^{s_2}F\cos\theta\,ds \qquad (41).$$

是爲功之定義方程之一。

例1　若加20仟克之力於一鋼線上，線則伸一厘米。問此力所作之功若干？

據 Hooke 定律，線之伸長 x 與所加之力成正比，故 $F=kx$。今已知當 $F=20$ 仟克時，$x=1$ 厘米，乃得 $k=\frac{1}{20}\frac{\text{仟克}}{\text{厘米}}$，即 $F=20x$。所加之力既係沿線之方向，故 $\theta=0$。當線之伸長自 x 增至 $x+dx$ 時，F 力所作之功爲

$$dW=F\,dx=20x\,dx。$$

自 $x=0$ 伸至 $x=1$，所作之功遂爲

$$W=\int_0^1 20\,x\,dx=\frac{20\,x^2}{2}\bigg|_0^1=10\text{厘米一仟克}。$$

例2　設有氣體其原始壓力爲 p_1，今按等溫的手續 $pv=C$（常數）壓縮之，使其壓力增至 p_2，問所作之功若干？

假定此氣體係處在一筒中，今在筒上置活塞並加力以壓縮之。令 A 表活塞之截面積，則當活塞進行一短距離 dx 時，氣體之容積減小 $dv=A\,dx$。惟加諸活塞之力既爲 $F=pA$（p 爲每單位面積之壓力）故將活塞推入 dx 距離所作之功爲

$$dW=-F\,dx=-pA\,dx=-p\,dv,$$

此中右邊之負號不以表壓縮時 dx 與 dv 均減少之意。惟按等溫手續壓縮，$pv=C$，故以 p 爲自變數即有

$$dW=-p\frac{dv}{dp}dp=-p\left(-\frac{C}{p^2}\right)dp=\frac{C}{p}dp,$$

所作之功遂為

$$W=\int_{p_1}^{p_2}\frac{C}{p}dp=C\ln p\Big|_{p_1}^{p_2}=C\ln\frac{p_2}{p_1}\text{。}$$

推求方程(40)之時，吾人係將所行之全距離分為甚多之小距離，而後計在此小距離內，力 F 所作之功 dW。有時，吾人可將所加之全力分為甚多之小力 dF，每力所行之距離為 y 而與之作 θ 角。如是則此小力 dF 行距離 y 所作之功將為

$$dW=y\cos\theta\, dF \tag{42}$$

在適當之上下限內求此方程之積分，即得所作之全功為

$$W=\int y\cos dF \tag{43}$$

例3　茲以喞筒將水由一半圓球形之水池中抽出。若池滿貯水，問所作之功若干？

令水池之半徑為 R，每單位體積水之重量為 w。茲在離水面為 y 之處截得一薄水層，其厚度為 dy，其半徑遂為 $x=\sqrt{R^2-y^2}$。此薄水層之重量為 $\pi w x^2 dy$。將此水量抽出池外，此重量應升高 y，故所作之功為

$$dW=\pi w x^2 y\, dy=\pi w y(R^2-y^2)dy\text{。}$$

抽盡水所作之全功遂為

$$W=\int_0^R \pi w y(R^2-y^2)dy=\pi w\left(\frac{R^2y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^R=\frac{\pi w R^4}{4}\text{。}$$

第十四章習題

1. 一點運動之方程爲 $x=a\cos wt$，$y=b\sin wt$，試描其軌跡？並求其速度及切線與法線加速度。若 $a>b>0$，其速度及法線加速度於何點爲極大或極小？

2. 一點運動之方程爲 $x=a\cos wt$，$y=a\sin 2wt$。試描其軌跡。又問於何點其速度方爲極大或極小？

3. 一圓輪以等角速度 w 沿一直線滾動，周緣上一固定點之軌跡爲擺線 $x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$，試求此點之速度，問何處其值爲最大？

4. 有一物以每秒 20 尺之速度，沿半徑爲 200 尺之圓周運動。當此物離一固定直徑 100 尺時，問其於此直徑上之射影之速度及加速度爲何？

5. 有一點以每秒 U 尺之快慢沿一心形曲線 $r=a(1-\cos\theta)$ 運動。當 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 時，問連該點於原點之向徑，其轉動速度爲何？

6. 一童在平地上能投一石達 40 米之遠，若彼在一高 14 米之屋頂上，問所投之石離屋之最遠距離爲何？重力加速度＝9.8 米/秒^2。

7. 一斜面與水平方向所作之角爲 β，設有物以初速 V 射出，問其在斜面上之射程爲何？又證所得之最大射程爲

$$R=\frac{V^2}{g}\frac{1}{1+\sin\beta}。$$

8. 將一拋射物以每秒 V 尺之速度拋出，使擊中位在同一水平面

上而在其射程內之鵠的，試證射出之角可有二個不同之值，若其一爲$(45^\circ+\alpha)$，則其他爲$(45^\circ-\alpha)$。

9. 一槍連射二彈，其一之射出速度爲V，與水平方向作角α，其他之射出速度爲V'，其方向角則爲α'。若兩彈同在一垂直平面內，試證若兩彈中途相遇，出發前後相差之時間爲

$$\frac{2}{g}\cdot\frac{VV'\sin(\alpha-\alpha')}{V\cos\alpha+V'\cos\alpha'}.$$

10. 有過山砲位在距山 3500 米之處，設山高 700 米，砲彈之初速爲每秒 207 米，問砲彈所不能擊中山後之區域約若干米？

11. 一童立於一高10米之屋頂，欲擲一球與立在馬路他邊之另一童，路闊20米，若彼沿水平方向投射，問其拋射速度爲何？

12. 設AB表一牆，其頂點爲B，牆底爲A，C爲槍彈出發點，$\alpha=\angle BCA$角，AC距離爲a，若槍彈適可越過牆頂，試證其最小之射出速度爲(AC垂直於AB)：

$$\sqrt{ga\left(\frac{1+\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}}\right)},\quad g=\text{重力加速度}。$$

13. 求下列諸曲線所包圍面積之質量中心：

(a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$，$y=0$； $x=0$；

(b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$； (於第一象限內)；

(c) $y^2=4x^2-x^3$；

(d) $y^2=2px$； 與 $y=mx$；

(e) $y^2=ax$； $x^2=by$；

(f) 蔓葉線 $y^2(2a-x)=x^3$； $x=2a$；

(g) 箕舌線 $x^2y=4a^2(2a-y)$，$y=a$；

(h) 心形線 $r=a(1+\cos\theta)$；

(i) 雙紐線 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 之一葉；

(j) 擺　線 $x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$；

一拱與 X 軸間之面積

14. 求下列各物質曲線之質量中心：

(a) 一直線內各點之密度與其離一端之距離成正比；

(b) 一等角螺線 $r=e^{\theta}$ 自 $\theta=0$ 至 $\theta=\pi$ 弧(密度均勻)；

(c) 擺線 $x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$ 一拱(密度均勻)；

(d) 重鏈垂線 $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ 之弧從 $x=-a$ 至 $x=a$

(密度均勻)。

15. 求下列諸旋轉體體積之質量中心：

(a) 正圓錐體；

(b) $y=a\sin 2x$ 之一弧 $x=0$，$x=\frac{\pi}{4}$ 繞 X 軸；

(c) $y^2=4ax$ (第一象限內)，$y=0$，$x=a$ 繞 Y 軸；

(d) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (第一象限內)　　繞 X 軸；

(e) 心形曲線 $r=a(1+\cos\theta)$ 之上半繞始線為軸；

(f) 自一正圓柱體截去一同高同底之正圓錐體所剩餘之體積。

(g) 第十三章第六題之旋轉體。

16. 求下列諸旋轉面之質量中心：

(a) $x^2+y^2=2ax$　繞 X 軸；

(b) 心形曲線 $r=a(1+\cos\theta)$ 之上半葉繞始線旋轉所成之面。

17. 一圓弧所張之圓心角為 2θ，試求(1)此圓弧之重心，(2)此圓弧所包圍之扇形面積之重心。

18. 求拋物線與其通徑間之上半面積繞通徑旋轉一週所得體積之質量中心。

19. 一半圓片之半徑為 a，片內各點之密度與距圓心遠度之平方成正比，求其質量中心。

20. 一正圓錐體內各點之密度與距錐軸成正比，求其質量中心。

21. 試證下列各物體之轉動慣量及廻轉半徑(密度為均勻的)：

物體之質量為 M	轉動軸之位置	轉動慣量	廻轉半徑
(a)棒(長 l)	通過棒中心，垂直於棒	$\frac{1}{12}Ml^2$	$k=?$
(b)長方形(邊 $2a$, $2b$)	通過中心，而平行於 $2a$ 之一邊	$\frac{1}{3}Mb^2$	?
(c)長方形(邊 $2a$, $2b$)	通過中心，垂直於面	$\frac{1}{3}M(a^2+b^2)$	?
(d)圓柱體(半徑為 a)	與柱軸脗合	$\frac{1}{2}Ma^2$	?
(e)三角形之面(高 h)	與底邊脗合	$\frac{1}{6}Mh^2$	?
(f)橢圓(軸長 $2a$, $2b$)	與 $2a$ 軸脗合	$\frac{1}{4}Mb^2$	?

22. 求下列諸密度不均勻物體之轉動慣量及廻轉半徑：

(a) 圓柱體內各點之密度與其至柱軸之距離成正比，旋轉軸與柱軸脗合。

(b) 一圓錐體之面，各點之高度與距頂點之遠度成正比，旋轉軸與錐軸吻合。

(c) 一圓錐體內各點之密度與其至軸之距離成正比，旋轉軸與該軸吻合。

23. 設有位在 XOY 平面上之一面積。今已知其旋轉於 OX 與 OY 軸之轉動慣量 I_{xx}，I_{yy} 與 I_{xy} 如下：

$$I_{xx}=\int y^2\,dm,\ I_{yy}=\int x^2\,dm,\ I_{xy}=\int xy\,dm。$$

今若另取一與 OX 軸作 α 角之直線為旋轉軸，試證對此旋轉軸之轉動慣量為 $I=I_{xx}\cos^2\alpha+2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha+I_{yy}\sin^2\alpha$。

24. 求拋物線 $y^2=4ax$ 與 $x=a$ 內之面積(a)對 X 軸及(b)對 Y 軸之轉動慣量及迴轉半徑。

25. 求擺線 $x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$ 自 $\theta=0$ 至 $\theta=2\pi$ 之弧長對 X 軸之轉動慣量及迴轉半徑。

26. 一橫臥之水管，直徑為 $2a$，問垂直截面上之總壓力為何？若半貯以水，則截面上之總壓力為何？靜壓中心何在？

27. 一水槽，其垂直截面為一向上之拋物線，若水槽口闊為 $4p$ 深為 p，求截面所受之總壓力及其靜壓中心？

28. 一圓柱體器皿半盛以水，半盛以油，水油不能相混，油之密度為水之半，求分離柱體曲面為兩半之力，及底面壓力。

29. 有一球體半徑為一米，內貯滿水，求分離球面為兩半之力。

30. 設有某種氣體之脹縮係依絕熱手續(adiabatic process)進行則壓力 p 與容積 V 之關係為 $pV^{1.4}=C$ (C 為常數)。問

當容積自 V_1 變至 V_2，該氣體所作之功為若干？

31. Van der Waal 之氣態方程在溫度不變情況下為：

$p=\dfrac{C}{V-b}-\dfrac{a}{V^2}$，$a$，$b$，$c$ 為常數，若容積自 V_1 脹到 V_2 求所作之功；p 表壓力。

32. 按萬有引力定律，二質點間之吸引力為 $F=k\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$，k 為常數，m_1 m_2 為二質點之質量，r 為距離。若二質點 m_1 m_2 起始之距離為 a，質點 m_1 沿某曲線移動至離 m_2 為 b 之處，試求所作之功。

33. 一均勻之棒，長 l，每單位長之密度為 c，吸引位在同一直線上之一質點 m，該點距棒之近端為 a。問當該質點因吸力而自原位置移動 b 距離時所作之功。

34. 兩帶電小球，中心相距為 r，各帶電荷 Q_1 及 Q_2，其互相推拒之力可由 Coulomb 定律計算之：$F=\dfrac{kQ_1Q_2}{r^2}$，k 為常數。設當 $r=50$ 厘米，$F=20$ 克重。今兩球之距離自 $r=75$ 厘米變為 $r=100$ 厘米，求所作之功。

35. 彈性體所受壓縮之力 F，與縮短距離 x 之關係，亦按 Hooke 定律 $F=kx$ 計算之。今有彈簧一個，原長一米，每壓縮一厘米需力 5 克重，若自 80 厘米縮至 60 厘米問作功若干？

36. 有錐形貯水池，深 15 米，口徑 20 米，滿盛以水。今以唧筒將水吸盡，問作功若干？

37. 有橫置圓柱形之貯水池，柱長 h，半徑為 a，以唧筒吸取其水，問作功幾何？

第十五章　均值定理與不定式

(15.1)算術的平均　測定一量或搜集統計，所得結果常參差不齊，故於欲得一可以代表全體數據之數值時，多用諸值之算術的平均。若 y_1，y_2……，y_n 表所得結果之 n 個價值，其算術的平均 $\overline{y}$ 之定義為

$$\overline{y}=\frac{y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n}{n}=\frac{\sum y}{n} \qquad (1).$$

方程(1)所表者乃 n 個數值之平均。今若有一函數 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 至 $x=b$ 間隔內連續的變更，則在此間隔內，任取 n 個 y 之值而平均之似亦可視為在該間隔內 y 之平均值。但若所用之 n 個 y 值未加以適當之限制，則所得之平均既無客觀的價值，且亦不足以代表函數在規定間隔內之全體。欲使所得平均可以代表全體各值，則所選擇之 n 個 y 值應平均的分佈於規定間隔內。此意義可以微積分原理表示之如下：將此間隔 a 至 b 分為 n 個相等的小間隔 h，即 $nh=b-a$，而於每小間隔(例如自 $x=x_{k-1}$ 至 $x=x_k$)取一點 x'_k，則與此等 x'_k 相對應之諸 y，即 $y_1=f(x'_1)$……，$y_n=f(x_n')$，其算術的平均將為

$$\overline{y}=\frac{y_1+y_2+y_3+\cdots\cdots+y_n}{n}=\frac{y_1h+y_2h+\cdots\cdots+y_nh}{nh}$$

$$=\frac{y_1h+y_2h+\cdots\cdots+y_nh}{b-a} \qquad (2).$$

自方程(2)之最後分數之分子觀之，若未曾將自 a 至 b 間隔分為

相等之小間隔，則計算平均值 $\bar{y}$ 時，應將各 y 乘以每間隔之間距 h 方不至於對各 y 有所偏袒。換言之，若 h_1，h_2，……，h_n 表各間隔之間距，即

$$h_1+h_2+\cdots\cdots+h_n=b-a,$$

則平均值 $\bar{y}$ 應爲

$$\bar{y}=\frac{y_1h_1+y_2h_2+\cdots\cdots+y_nh_n}{b-a}=\frac{\sum_{k=n}^{k=n}y_kh_k}{b-a} \qquad (3).$$

今若令各 h 無限減短，同時 n 無限增多，則方程(3)分子所示之無限和即與前此所定之自 a 至 b 之定積分 $\int_a^b y\,dx$ 之意義相同。是以依照本段所述之理，在 a 至 b 間隔內一函數 $y=f(x)$ 之平均值，吾人可採其定義爲

$$\bar{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b y\,dx \qquad (4).$$

讀者可注意方程(4)實係定義，其來源可視爲尋常算術的平均值(即方程1)之推廣式。但如不欲考究採此定義之原因，則逕以方程(4)爲本節之發軔點亦無不可。

由方程(4)所定之平均值，其應用甚廣。例如將此方程寫爲

$$\bar{y}=\frac{\int_a^b y\,dx}{\int_a^b dx} \qquad (5),$$

而以之與前此質量中心(或重心)之定義方程相較，則知質量中心坐標 $\bar{x}$，$\bar{y}$，$\bar{z}$ 可視爲物體內各質點距三個坐標平面還[illegible]

值（見前(14)章方程 19, 20, 21 等）。又若以之與迴轉半徑之平方 k^2 相較，則知 k^2 可視為物體內各點距轉軸之平方（即 r^2）之平均（見 14 章方程 30）。一量之算術的平均與其平方的平均，在應用上均極常見，惟二者之值迥異，切不可相混。就質量中心與迴轉半徑言之，其區別所在當已略見。為簡便起見，算術的平均，如方程(4)或(5)所示者，此後將名之為平均值。茲在下數節申論平均值之應用。

例 在第一象限內試求圓周 $x^2+y^2=a^2$ 上縱坐標 y 對於橫坐標 x 之平均 $\overline{y}$。設所計者為 y 對弧 s 之平均值，試比較兩結果。

據公式(4) $$\overline{y}=\frac{\int_0^a y\,dx}{a-0}=\frac{1}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

設以 $x=a\sin t$，則當 x 自 0 變至 a 時，t 將自 0 變至 $\frac{\pi}{2}$，且 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$，$dx=a\cos t\,dt$，故

$$\overline{y}=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2 t\,dt=a\left(\frac{t+\sin 2t}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a}{4}=0.785\,a$$

若對 s 求平均，則須用下列公式：

$$\overline{y}_s=\frac{2}{\pi a}\int_0^{\frac{\pi a}{2}}y\,ds。$$

設改用極坐標，則圓之方程為 $r=a$ 而 $y=a\sin\theta$，$ds=a\,d\theta$，當 $s=0$，$\theta=0$；如 $s=\frac{\pi a}{2}$，則 $\theta=\frac{\pi}{2}$，故

$$\overline{y_s}=\frac{2}{\pi a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2\theta\, d\theta=\frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\, d\theta=\frac{2a\cos\theta}{\pi}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$=\frac{2a}{\pi}=0.635\,a。$$

由本例言之，求平均值時，必須標明對何量而計。若將第一象限按橫坐標 x 或弧 s 分爲多個相等部分（圖 15.1 甲及乙）則知計 $\overline{y_s}$ 時靠近 A 點之各縱線爲數較密，且較短，故其效果遂使 $\overline{y_s}$ 較小於 $\overline{y}$ 。

(15.2)均值定理之積分式 就方程(4)言之，$y=f(x)$之平均值

$$\overline{y}=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

顯然係在 y 之最大及最小兩值之間，此乃因若以 x 爲橫坐標，$y=f(x)$ 爲縱坐標，則分子表在曲線 $y=f(x)$ 下，X 軸上，$x=a$ 與 $x=b$ 兩縱線間之面積，而分母$(b-a)$表兩縱線之距離；故分子所表之面積必在最大之 y 乘以 $(b-a)$，與最小之 y 乘以 $(b-a)$二者之間。$y=f(x)$ 既係連續於 a 至 b 間隔內，故在此間隔內最少必有一適當之 x_1 值，其相應之 $f(x_1)$ 可等 $\overline{y}$。此理之嚴格的解析證明稍難，但自圖(15.2)觀之，實甚顯然。換言之，方程(4)可改寫爲

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(x_1)，a<x_1<b \qquad (6).$$

方程 (6) 常名爲均值定理之積分式。此中應特別注意者，爲

即 x_1 係在 a 至 b 間隔內，至其確實價值則未規定。在多數問題中，吾人只須知某量所在之範圍，故此點雖未確定，實屬無礙。表示方程(6)之另一法係將 x_1 表為 a 至 b 距離之一分數。因吾人可令

$$x_1=a+\theta(b-a)$$

θ 為一適當之分數，故均值定理之積分式又常寫作

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f[a+\theta(b-a)]，0<\theta<1 \qquad (7a),$$

或以 $h=b-a$ 代入，即 $b=a+h$，(7a)復可化為

$$\int_a^{a+h} f(x)dx=hf(a+\theta h)，0<\theta<1 \qquad (7b).$$

例　試由均值定理證 $\frac{k}{1+k}<\ln(1+k)<k$。

因 $\ln(1+k)=\int_0^k\frac{dx}{1+x}$，且自 $x=0$ 至 $x=k$ 間隔內，$y=f(x)=\frac{1}{1+x}$ 之最大值為 $\frac{1}{1+0}=1$，其最小值為 $\frac{1}{1+k}$，故

$$\bar{y}=\frac{1}{k}\int_0^k\frac{dx}{1+x}$$

之值係在 1 與 $\frac{1}{1+k}$ 之間，即

$$1>\frac{1}{k}\int_0^k\frac{dx}{1+x}>\frac{1}{1+k}$$

或　　$k>\ln(1+k)>\frac{k}{1+k}$　　Q. E. D.

(15.3) Rolle 定理　令 $y=g(x)$ 為一連續且有紀數之函數，

且當 $x=a$ 及 $x=b$ 時，其值均為 0，即 $g(a)=g(b)=0$。此函數之圖線將為一光滑連續曲線，在 $x=a$ 及 $x=b$ 處與 X 軸相交（圖 15.3）。自圖不難察知曲線在 a 至 b 間隔內，至少有一點其切線係與 X 軸平行（例如圖中之 P 或 Q 點）。若此點之 X 坐標為 x_1，則有 $g'(x_1)=0$，$g'(x)$ 表 $y=g(x)$ 對 x 之一級紀數。此定理名為 Rolle 定理，可用嚴格的數學分析方法證之，茲則僅陳述之如下：

定理　設 $g(x)$ 係連續於 (a, b) 間隔內，且 $g(a)=g(b)=0$，而在間隔之內任意點（不必包括 $x=a$ 及 $x=b$ 兩值），$g(x)$ 均有其紀數 $g'(x)$，則必有一值 x_1，可使其紀數 $g'(x_1)=0$，$a<x_1<b$。

引用 Rolle 定理時，吾人應特別注意所假設之條件是否滿足，以免推斷錯誤。譬如圖（15.4）甲所示之函數非連續，圖乙之函數在 q 點之紀數為無限大，圖丙之函數，其在 $x=c$ 點之紀數左右不等，均與 Rolle 定理中之假設不合，故在此等情況下，a 與 b 間實無從尋得一點 x_1 可使 $g'(x_1)=0$。換言之，此等曲線在 a 至 b 間，並無切線取水平方向之點 x_1。

(15.4)均值定理之微分式　說明 Rolle 定理時，前雖係藉幾何的直覺，但此定理之功用，實在於可以不藉幾何的直覺而由之推得意義更廣的解析的定理，以作更進一步之探討（見後 16.2 節）。茲先用之以證均值定理之另一式如下：

定理　設在 $x=a$ 至 $x=b$ 之間隔內，函數 $F(x)$ 為連續的且

有確定紀數，則在 a 至 b 間，心有 x 之一值(不等於 a 或 b)可使

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(x_1)，a<x_1<b \qquad (8),$$

$F'(x)$ 表 $F(x)$ 對 x 之一級紀數。

欲證此定理，先令 $F(b)-F(a)-k(b-a)=0$，k 表一適當之常數。次將左邊之 a 改為變數 x 而造成一函數

$$g(x)=F(b)-F(x)-k(b-x)。$$

如是，函數 $g(x)$ 滿足 Rolle 定理之各條件，且 $g(a)=g(b)=0$，故必有一 x_1，足使

$$g'(x_1)=-F'(x_1)+k=0, \quad a<x_1<b;$$

由是知前此之 k 可表為 $F'(x_1)$ 而

$$F(b)-F(a)-(b-a)F'(x_1)=0,$$

是即方程(8)。

方程(8)常名為均值定理之微分式，其幾何的意義亦甚簡明。令 AP_cB 表 $y=F(x)$ 曲線在 $x=a$ 至 $x=b$ 間隔內之部分，$\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$ 所表者乃 AB 弦線之斜度。今 $F(x)$ 係連續於 a 至 b 間隔內，且有確定紀數，故在 APB 弧上最少必可尋得一適當之 P 點(圖 15.5)，其切線方向係與 AB 相同。若此適當點之 X 坐標為 x_1，則其處之斜度為 $F'(x_1)$，故有方程(8)。

方程(8)所以亦名均值定理之故，實因其可自方程(6)蛻化而來。因如令 $\int f(x)dx=F(x)+C$，$F'(x)=f(x)$，

則
$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),$$

故方程(6)可寫爲

$$F(b)-F(a)=(b-a)F'(x_1),\ a<x_1<b,$$

而與方程(8)相符矣。同樣若以 $b=h+a$ 代入，方程(8)亦可寫成下列兩式：

$$F(a+h)-F(a)=hF'(x_1),\ a<x_1<(a+h) \qquad (9a),$$

或 $$F(a+h)=F(a)+hF'(a+\theta h),\ 0<\theta<1 \qquad (9b).$$

例　已知 $\tan^{-1}1=0.7854$，問 $\tan^{-1}1.02$ 之值準確至小數後三位爲何？

令 $F(x)=\tan^{-1}x$，$F'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$a=1$，$h=0.02$，則方程(9a)變爲

$$\tan^{-1}1.02=\tan^{-1}1+0.02\left(\frac{1}{1+x_1^2}\right),\ 1<x_1<1.02,$$

$1+x_1^2$ 最小值爲 2，其最大値爲 2.0404，故 $\tan^{-1}1.02$ 之範圍在

$$\left(0.7854+\frac{0.02}{2}\right)=0.7854+0.0100=0.7954,$$

與 $$\left(0.7854+\frac{0.02}{2.0404}\right)=0.7854+0.0098=0.7952$$

之間，而其值準確至小數後三位當爲 0.795。

(15.5)不定式　第一章討論極限問題時，曾言及有些函數，於 $x=a$ 點，無確定之值，惟當 $x\to a$ 時，則有確定之極限；在此情形下，吾人常規定此極限爲該函數在 $x=a$ 點之値（見1.12節最末一段），以使函數連續於是點。所謂求一不定式(indeterminate form)之值云者，實即計函數之極限之另一稱法而已。

凡當 $x=a$ 時，函數之形式變爲 $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$0\times\infty$，1^{∞}，0^{0}，∞^{0}，或 $\infty-\infty$ 七式之一者，均名爲不定式。$\frac{0}{0}$ 與 $\frac{\infty}{\infty}$ 之值不定，甚易了解，因任何數與 0 (或 ∞) 相乘均爲 0 (或 ∞)，故此二者實可等於任何數。同理，$0\times\infty$ 可改爲 $\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$ $\left(即\frac{0}{0}\right)$ 或 $\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$ $\left(即\frac{\infty}{\infty}\right)$，故亦爲不定式。若求 1^{∞}，0^{0} 及 ∞^{0} 三式之對數後，而分別化之爲 $\infty\times 0$，$0\times(-\infty)$ 及 $0\times\infty$，即知此三者確爲不定式。此與 $1^{0}=1$，$0^{\infty}=0$ 之有定值，頗易相混，初學者應特別留意而區別之。至於 $\infty-\infty$ 爲不定式之理，則因兩甚大之數之差，常可有一恆定值，而此恆定差值復可爲任何數。欲計 $\infty-\infty$ 不定式之時，常亦先化之爲 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$，故計算不定式之關鍵繫於 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 之演算。欲計 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$，吾人尚應再用 Rolle 定理以證下述之均值定理之推廣式，庶運用可以較便。

<u>(15.6)均值定理之推廣式</u>　設在 $x=a$ 至 $x=b$ 間隔內，函數 $F(x)$ 與 $G(x)$ 係連續的，且有確定之紀數。若 $G'(x)$ 在間隔內(不必包括 $x=a$，或 $x=b$ 兩點)不等 0，則在 a 至 b 間必有 x 之一值(不等於 a 或 b)可使

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(x_1)}{G'(x_1)},\quad a<x_1<b \qquad (10).$$

證此公式之方法與證方程(8)之方法頗相似。在下章亦將應用之，茲特重述一次。令 $F(b)-F(a)+k[G(b)-G(a)]=0$ 而

k 表特定之常數。次將左邊之 a 改爲變數 x 而造成一函數

$$g(x)=F(b)-F(x)-k[G(b)-G(x)]。$$

此函數滿足 Rolle 定理各條件，且 $g(a)=g(b)=0$，故必有一 x_1 足使

$$g'(x_1)=-F'(x_1)+kG'(x_1)=0, \quad a<x_1<b。$$

惟 $G'(x_1)\neq 0$，故知前此之 k 爲 $F'(x_1)/G'(x_1)$ 而方程(10)屬眞。

<u>(15.7)不定式0/0</u> 若 $F(x)$ 與 $G(x)$ 均有紀數而 $F(a)=0$，$G(a)=0$，且當 $x\to a$ 時，$F'(x)/G'(x)$ 有確定極限，則

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{G'(x)} \qquad (11).$$

欲證此關係，可用方程(10)以得

$$\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(x_1)}{G'(x_1)}, \quad a<x_1<x,$$

因 $F(a)=G(a)=0$，故

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F'(x_1)}{G'(x_1)}, a<x_1<x,$$

當 $x\to a$，x_1 亦趨於 a，故有方程(11)。假如方程右邊趨於正或負無限大，則左邊亦然。又若 $F'(a)$ 與 $G'(a)$ 復均爲0，且 $\lim_{x\to a}\frac{F''(x)}{G''(x)}$ 存在，則再用方程(11)卽有：

$$\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F''(x)}{G''(x)}\text{或}\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F''(x)}{G''(x)} \quad (12).$$

若用二級紀數，仍得不定式，則應再類推之，以求分母與分子之三級紀數，直到結果爲確定值或無限大爲止。惟於未求較高級紀數之前，必須先驗證所得者實爲不定式方可。若已得確定值而再行微分，則結果將大誤矣！ 此外，讀者當已注意方程(11)

或(12)所示者乃分母與分子個別之紀數並非整個分數之紀數。

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x^2-x}$,

當 $x=0$ 時,$e^x-1=0$,$x^2-x=0$。故用方程(11)有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2x-1}=\frac{1}{0-1}=-1。$$

今若誤將 $\dfrac{e^x}{2x-1}$ 之分子與分母再分別微分,則將得 $\dfrac{e^x}{2}$ 而其極限爲 $\dfrac{1}{2}$ 非應得之答案 -1!

(15.8)不定式 ∞/∞ 若 $F(a)=\infty$,$G(a)=\infty$,則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F(x)}{G(x)}$ 之值可改寫爲 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$,$P(x)=\dfrac{1}{G(x)}$,$Q(x)=\dfrac{1}{F(x)}$,以使其形式爲 $\dfrac{0}{0}$ 而後應用前節方法計算之。但 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 之紀數有時甚繁而 $F'(x)$ 與 $G'(x)$ 則甚簡便。遇此之時,則

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{G'(x)} \tag{13}$$

一關係仍可成立。若方程(13)右邊仍爲不定式,須再分求其分子與分母之紀數,而計其極限。若結果爲 ∞,則所求之極限即係無限大。方程(13)之證稍繁,茲述之如下:

先假定 a 爲無限大。任取一數 $x'<x$。如是按方程(10)乃有

$$\frac{F(x)-F(x')}{G(x)-G(x')}=\frac{F'(x_1)}{G'(x_1)},\quad x'<x_1<x,$$

或
$$\frac{F(x)\left(1-\dfrac{F(x')}{F(x)}\right)}{G(x)\left(1-\dfrac{G(x')}{G(x)}\right)}=\frac{F'(x_1)}{G'(x_1)},\ x'<x_1<x \tag{14}$$

今若令 x' 無限增大，則 x_1 與 x 均將無限增大。設限制 x' 之增大率使其較緩於 x，俾下列兩極限均得爲 0，

$$\lim_{\substack{x'\to\infty\\ x\to\infty}}\frac{F(x')}{F(x)}=0,\quad \lim_{\substack{x'\to\infty\\ x\to\infty}}\frac{G(x')}{G(x)}=0,$$

則方程（14）左邊之極限將爲

$$\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}$$

而其右邊則爲 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F'(x)}{G'(x)}$，故有方程(13)。

若 a 非無限大，則令 $x=a+\dfrac{x}{y}$ 以使當 $x\to a$ 時 $y\to\infty$。如是命 $F(x)=f(y)$，$G(x)=g(y)$，則 $F'(x)=\dfrac{-xf'(y)}{y^2}$，$G'(x)=\dfrac{-xg'(y)}{y^2}$，故 $\dfrac{F'(x)}{G'(x)}=\dfrac{f'(y)}{g'(y)}$。因

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{y\to\infty}\frac{f(y)}{g(y)}=\lim_{y\to\infty}\frac{f'(y)}{g'(y)}=\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{G'(x)},$$

故方程(13)爲眞。

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cot x}{\ln x}$。

因 $\dfrac{\cot 0}{\ln 0}=\dfrac{\infty}{-\infty}$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cot x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\csc^2 x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{\sin^2 x}$，

因 $\dfrac{-0}{\sin^2 0}=\dfrac{0}{0}$，故須再行分別微分分子與分母而得：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cot x}{\ln x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2\sin x\cos x}=-\infty。$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^h}{e^x}$。

若 $n \leqq 0$，則 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$ 顯然爲0，因分子恆小於一定數，而分母則趨於無限大。設 $n>0$，則當 $n\to\infty$ 時，x^n 及 e^x 均趨於∞，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{e^x}$。若 $(n-1)$ 仍 >0，則可再分求分子及分母之紀數而得 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}$。如是演算若干次後，當有一時分子 x 之指數 $\leqq 0$。是以無論 n 爲何，所求之極限恆爲 0。

(15.9) 不定式 $0.\infty$ 與 $\infty-\infty$　此等不定式可化爲 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 已如(15.5)節所述。至於應如何演算，方易便捷，純視算者之經驗定之。例如下：

例1　求 $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$。

$$\lim_{x\to 0} x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0,$$

若寫之爲 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\frac{1}{\ln x}}$，則演算將更繁！

例2　求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$。

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0。$$

(15.10) $0^0, 1^\infty$ 及 ∞^0 不定式　凡函數取此等不定式者均屬於 $y=[F(x)]^{f(x)}$ 之類。今若求 y 之對數，則有 $\ln y=f(x)\ln F(x)$

而可化之爲 $0\times\infty$ 不定式。如是，按前節方法，即可先計得對數 $\ln y$ 之極限，而後再由之以計 y 之極限。例如下：

例1　求 $\lim\limits_{x\to 0} x^x$，(此爲 0^0 式)。

令 $y=x^x$。求對數則有 $\ln y=x\ln x$，於是因 $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$ (見15.9節例1)，故 $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=0$ 或 $\ln\left(\lim\limits_{x\to 0} y\right)=0$ 而 $\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0} x^x=e^0=1$。

例2　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$，(此爲 1^∞ 式)

令 $y=\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$；求對數則有 $\ln y=x\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right)=\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$，

而於 $x\to\infty$ 時將取 $\dfrac{0}{0}$ 式，故

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{a}{x}}\right)\left(-\dfrac{a}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{1+\dfrac{a}{x}}=a\text{。}$$

是以 $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=e^a$。

例3　求 $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{2x}+x)^{1/x}$，(此爲 ∞^0 式)。

令 $y=(e^{2x}+x)^{\frac{1}{x}}$，求對數則有 $\ln y=\dfrac{\ln(e^{2x}+x)}{x}$，而於 $x\to\infty$ 時，將取 ∞/∞ 式，故分別微分分子與分母後，得

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{2x}+1}{e^{2x}+x},$$

當 $x\to\infty$ 時，此仍為 ∞/∞，再分求紀數乃得

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{4e^{2x}}{2e^{2x}+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{2+e^{-2x}} = 2。$$

故 $\lim_{x\to\infty} (e^{2x}+x)^{1/x} = e^2$。

第 十 五 章 習 題

1. 茲自圓周上一點 P 作弦線至周上其他各點。若以弦與過 P 點之直徑所夾之角為變數，問弦長之平均值為何？

2. 由斜面上滑下物體之初速為 V_0，經過時間 t 秒後，其速度 $v=V_0+at$，$a=8$ 米/秒。若行程為 s，則 $v=\sqrt{V_0^2+2as}$。設初速為 0，求在 2 秒鐘內之平均速度，與在 16 米行程內之平均速度；並說明兩者何以不同。

3. 有一球形橡皮袋，半徑 r 為 25 厘米，內貯氣體，氣壓 p 為每方厘米 3 仟克。今將該袋內氣體依等溫律 $pV=C$ 壓縮使其半徑縮至 15 厘米。若以 (a) 體積 V 為自變數或以 (b) 半徑 r 為自變數，試分別計算壓縮時之平均氣壓。

4. 於交流電原理中常用 $\sin^2 x$ 自 $x=0$ 至 $x=\pi$ 之平均值，試求此值。問此值與其自 $x=0$ 至 $x=2\pi$ 之平均值有無區別？又問此平均值與同間隔內 $\sin x$ 之平均值之比為何？

5. 某電位差為 $e=E_0+E_1\sin(\omega t+\alpha_1)+E_2\sin(2\omega t+\alpha_2)$

$+\cdots\cdots+E_n\sin(n\omega t+\alpha_n)$。試求其一週期內，即 $t=0$ 至 $t=\frac{2\pi}{\omega}$，之均方根(即平均平方值之平方根)。

6. 簡諧運動之物體其行程爲 $s=\cos\omega t$。自 $t=0$ 至 $t=\frac{\pi}{2\omega}$ 時間內，求對 t 之平均行程，及對 t 之平均速度。

7. 一拋射體之初速爲 V，射出角爲 α，其射程爲 $\frac{V^2\sin 2\alpha}{g}$。設 α 自零變到 $\frac{\pi}{4}$，問射程之平均值爲何？又若令速度自 0 變至 V，問其平均射程爲何？

8. 由均值定理之積分式，示以下各關係：

(a) $\frac{2k}{1+k^2}>\ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right)>2k$，　$0<k<1$；

(b) $k<\sin^{-1}k<\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$，　$k>0$；

(c) $0<\ln(1+k^2)<\frac{2k^2}{1+k^2}$，　$0<k<1$；

(d) $(1+k)<e^k<\frac{1}{1-k}$，　$0<k<1$。

9. 由均值定理之微分式 $F(b)=F(a)+(b-a)F'(x_1)$，求下列各題中之 x_1 值。

(a) $F(x)=e^x$，　$a=0$，　$b=1$；

(b) $F(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$，　$a=0$，　$b=1$；

(c) $F(x)=x^3$，　$a=0$，　$b=1$；

(d) $F(x)=\log x$，　$a=1$，　$b=2$。

10. 求下列函值準確至小數後三位：

(a) $e^{-0.1}$；　　　　(b) $\ln 1.05$；

(c) $\sin(0.05)$；　　(d) $\cos(1.55)$

11. 求下列極限：

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$　　(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}$；

(c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{\cos^2 2x}$；　　(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}$；

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{x}}{\tan x-x}$；　　(f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\cos x-\sin x}{2\sin x\cos x-\cos x}$。

12. (a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$；　　(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$；

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sec\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$；

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n}$

試分別討論 (1) $n>m$，(2) $n=m$ 及 (3) $n<m$ 三情形。

13. (a) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$；　　(b) $\lim\limits_{x\to 1}\sec\dfrac{\pi x}{2}\ln x$；

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$；　　(d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$。

14. (a) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^3}}$；　　(b) $\lim\limits_{x\to 0-}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^3}}$；

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$；　　(d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+\cos x\right)^{\frac{1}{x}}$；

(e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{\tan x}$。

15. (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\ln\ln x}$； (b) $\lim\limits_{x\to\infty} x e^{-x}$；

(c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}$； (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$；

(e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$． (f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$。

16. 設 $f(x)$ 及 $p(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 間隔內為連續函數，且 $p(x)\geqq 0$，試證

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx=f(x_1)\int_a^b p(x)\,dx,\quad a\leqq x_1\leqq b。$$

17. 按 $\int_1^x x^n\,dx=\dfrac{x^{n+1}-1}{n+1}$，如 $n\neq -1$。今若將此公式寫為

$$\int_1^x x^n\,dx=\lim_{m\to n}\frac{x^{m+1}-1}{m+1},$$ 則亦可適用於 $n=-1$ 之時，

試申論之。

第十六章 級 數

(16.1) 函數之近似值　第五章論微分時，吾人曾言一函數 $y=F(x)$ 在某點 x_0 之增量約等於 $\Delta y\cong\left(\frac{dy}{dx}\right)_0\Delta x$，$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ 表函數在 x_0 之紀數，Δx 則表自變數 x 之增量。由是知當 x 自 x_0 增至 $x_0+\Delta x$ 時，y 將自 y_0 約增至

$$y_0+\Delta y=F(x_0+\Delta x)\cong F(x_0)+\left(\frac{dy}{dx}\right)_0\Delta x \quad (1).$$

若令 $x_0=a$，$\Delta x=h$，則 $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=F'(a)$，而此方程可寫爲

$$F(a+h)\cong F(a)+hF'(a) \quad (2).$$

試以此與前章均值定理方程(9)，即

$$F(a+h)=F(a)+hF'(x_1)，a<x_1<(a+h) \quad (3).$$

相較，即知近似方程(2)與準確方程(3)不同之點乃在於後者最末項爲 $hF'(x_1)$ 而非 $hF'(a)$，且 $x_1>a$。因吾人僅知 x_1 之範圍而不知其確值，故嚴格言之，方程(3)亦僅爲一近似的公式，其準確程度須視函數 F 之性質而定。例如在(15.4)節所舉之例中，因 x_1 未能確定之故，用公式(3)只知 $\tan^{-1}1.02$ 之值準確至小數後第三位爲0.795。今若欲得更多一位或數位之可靠數碼，則公式(3)尙須補充。補充之法可仿(15.4)節引用 Rolle 定理以求所謂有剩餘之 Taylor 定理如下。

(16.2) 有剩餘之 Taylor 定理　設將方程(2)中之 h 仍改爲 $(b-a)$，即 $a+h=b$，且另加一項以使之可成一準確等式如次：

$$F(b)-F(a)-(b-a)F'(a)-k(b-a)^2=0 \qquad (4),$$

此中之 k 為一待定常數，其值可彷前(15.4)節證方程(8)之法求之。如是彷前，將方程(4)中之 a 改為 x 以造成一函數

$$g(x)=F(b)-F(x)-(b-x)F'(x)-k(b-x)^2\text{。}$$

設在自 $x=a$ 至 $x=b$ 間隔內，$F(x)$ 之一級紀數 $F'(x)$ 及其二級紀數 $F''(x)$ 均有確定有限值，則 $g(x)$ 合於 Rolle 定理各條件。於是，因 $g(a)=g(b)=0$，故在 a 至 b 間必有一 x_1 值足使 $g'(x_1)=0$，即

$$g'(x_1)=-F'(x_1)+F'(x_1)-(b-x_1)F''(x_1)+2k(b-x_1)$$
$$=0, \quad a<x_1<b;$$

或，
$$k=\frac{F''(x_1)}{2}\text{。}$$

換言之，較方程(3)更進一步之公式為

$$F(b)=F(a)+(b-a)F'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}F''(x_1), \quad a<x_1<b, \qquad (5a),$$

或
$$F(a+h)=F(a)+hF'(a)+\frac{h^2}{2}F''(a+\theta h), \quad 0<\theta<1. \qquad (5b)$$

例 求 $u=\tan^{-1}1.05$ 準確至小數後第四位。

因 $F(x)=\tan^{-1}x$，$F'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$F''(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$，故

$$u=\tan^{-1}1+0.05\left(\frac{1}{1+1^2}\right)-\frac{0.0025}{2}\,\frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2}, \quad 1<x_1<1.05,$$

最後一項之值既在 -0.00062 與 -0.00059 之間，故準確至小數後第四位，依4舍5入原則，當為

$$\tan^{-1}1.05=0.7854+0.0250-0.0006=0.8098\text{。}$$

若欲得更佳之近似值，吾人可將方程(5)再擴充為

$$F(b)=F(a)+(b-a)F'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}F''(a)$$

$$+\frac{(b-a)^3}{3!}F'''(x_1)\qquad(6a),$$

此中之 x_1 仍在 a 與 b 之間，即 $a<x_1<b$；或令 $0<\theta<1$，$b=a+h$，則

$$F(a+h)=F(a)+hF'(a)+\frac{h^2}{2!}F''(a)+\frac{h^3}{3!}F'''(a+\theta h)\qquad(6b).$$

仿此推廣，即得有剩餘之 Taylor 定理如下：

若在 a 至 b 間隔內，$F(x)$ 之 n 級紀數有確定之有限值，即 $F(x)$，$F'(x)$，……，$F^{(n)}(x)$ 各函數均有確定有限值；則

$$F(b)=F(a)+(b-a)F'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}F''(a)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(a)+\frac{(b-a)^n}{n!}F^{(n)}(x_1)，a<x_1<b，\qquad(7a),$$

或 $F(a+h)=F(a)+hF'(a)+\frac{h^2}{2!}F''(a)+\cdots\cdots$

$$+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(a+\theta h)，\quad 0<\theta<1，\qquad(7b).$$

此中最後一項名為剩餘 R_n，即

$$R_n=\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(a+\theta h)，\quad 0<\theta<1\qquad(8).$$

當推廣均值定理以求 Taylor 定理時，吾人曾假定 k 為一待定之常數，而剩餘之形式為 $R_n=k(b-a)^n$。其實此假定中之 n 可取他值，而所得之 R_n 有時更易應用。例如令 $n=p$ 為任何

$$F(b)-F(a)-(b-a)F'(a)-k(b-a)^2=0 \qquad (4),$$

此中之 k 爲一待定常數，其值可仿前(15.4)節證方程(8)之法求之。如是仿前，將方程(4)中之 a 改爲 x 以造成一函數

$$g(x)=F(b)-F(x)-(b-x)F'(x)-k(b-x)^2\text{。}$$

設在自 $x=a$ 至 $x=b$ 間隔內，$F(x)$ 之一級紀數 $F'(x)$ 及其二級紀數 $F''(x)$ 均有確定有限值，則 $g(x)$ 合於 Rolle 定理各條件。於是，因 $g(a)=g(b)=0$；故在 a 至 b 間必有一 x_1 值足使 $g'(x_1)=0$，即

$$g'(x_1)=-F'(x_1)+F'(x_1)-(b-x_1)F''(x_1)+2k(b-x_1)$$
$$=0, \quad a<x_1<b;$$

或，
$$k=\frac{F''(x_1)}{2}\text{。}$$

換言之，較方程(3)更進一步之公式爲

$$F(b)=F(a)+(b-a)F'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}F''(x_1), \quad a<x_1<b, \qquad (5a),$$

或 $$F(a+h)=F(a)+hF'(a)+\frac{h^2}{2}F''(a+\theta h), \quad 0<\theta<1. \qquad (5b)$$

例 求 $u=\tan^{-1}1.05$ 準確至小數後第四位。

因 $F(x)=\tan^{-1}x$；$F'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$；$F''(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$，故

$$u=\tan^{-1}1+0.05\left(\frac{1}{1+1}\right)-\frac{0.0025}{2}\cdot\frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2}, \quad 1<x_1<1.05,$$

最後一項之值既在 -0.00062 與 -0.00059 之間，故準確至小數後第四位，依4舍5入原則，當爲

$$\tan^{-1}1.05=0.7854+0.0250-0.0006=0.8098\text{。}$$

或卽縮寫爲

$$F(x)=F(a)+(x-a)F'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}F''(a)$$

$$+\frac{(x-a)^3}{3!}F'''(a)+\cdots\cdots \qquad (11a),$$

此中右邊最後諸小點卽以表示項數無限多未曾寫完，且每項之值均可仿前寫出。似此種項數爲無限多之和，而每項之值均可按一定律例寫出之者，謂其名爲無限級數或級數（infinite series 或 series）；方程（11a）右邊所示者則稱爲 Taylor 級數。若令 $a=0$ 則得 Maclaurin 級數如下：

$$F(x)=F(0)+xF'(0)+\frac{x^2}{2!}F''(0)+\frac{x^3}{3!}F'''(0)+\cdots \quad (11b).$$

例 1　試求 e^x 之 Maclaurin 級數。

令 $F(x)=e^x$，則 $F'(x)=F''(x)=\cdots\cdots=F^{(n-1)}(x)=e^x$。

故 $F(0)=F'(0)=F''(0)=\cdots\cdots=F^{(n-1)}(0)=e^0=1$ 而

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n e^{\theta x}}{n!},$$

剩餘 $R_n=\dfrac{x^n e^{\theta x}}{n!}$，$0<\theta<1$。

茲須證 $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n|=0$。證此不難，因若 $x<0$，則 $e^{\theta x}<1$，$|R_n|<\dfrac{x^n}{n!}$；若 $x>0$，則 $e^{\theta x}<e^x$，而 $|R_n|<\dfrac{x^n}{n!}e^x$。但無論 x 爲何有限值，e^x 之值仍係有限，故如能知當 $n\to\infty$ 時，$\dfrac{x^n}{n!}\to 0$，則 $\lim|R_n|=0$。今因

$$\frac{x^n}{n!}=\frac{x}{1}\times\frac{x}{2}\times\frac{x}{3}\times\cdots\cdots\times\frac{x}{(n-1)}\times\frac{x}{n},$$

故無論 x 爲何值，自一適當之 m 起，$\frac{x}{m}<\frac{1}{p}$，p 爲一大於 1 之數。令起始 m 個因子之積爲 c，則

$$\frac{x^n}{n!}=\frac{x^m x^{n-m}}{n!}<c\left(\frac{1}{p}\right)^{n-m}$$

推 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p}\right)^{n-m}$ 應爲 0，因 $p>1$，故知無論 x 爲何有限值，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$，而 e^x 之 Maclaurin 級數遂爲

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots,\quad |x|<\infty \tag{12}$$

例 2　求 $\sin x$ 與 $\cos x$ 之 Maclaurin 級數。

令 $F(x)=\sin x$，　　$F(0)=0$，

$F'(x)=\cos(x)$，　　$F'(0)=1$，

$F''(x)=-\sin x$，　　$F''(0)=0$，

$F'''(x)=-\cos x$，　　$F'''(0)=-1$；

自此以後，各値將依序重見。至於剩餘則可用 Lagrange 式(8)

$$R_n=\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(x_1)=\frac{h^n}{n!}\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x_1\right),\quad a<x_1<b,$$

以證其趨 0。因正弦與餘弦之絕對値不大於 1，故當 $n\to\infty$ 時，$R_n\to 0$。是以吾人可將 $\sin x$ 展爲 Maclaurin 級數如下：

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots,\quad |x|<\infty \tag{13}$$

同樣，可證

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots,\quad |x|<\infty \tag{14}.$$

自方程(11a)與(11b)觀之，一函數 $F(x)$ 似可以一無限多項之和代表之。驟觀之，此事不難領悟，因前此所述之定積分，亦係無限多項之和之極限也。然此處所用之無限多項，實與定積分之無限多項有別，因後者之項數雖爲無限多，但每項之值則均爲無窮小；至於方程(11a)或(11b)各項則非無窮小，而其無限多項之和在適當情形下仍有確定之極限。是以吾人對於方程(11a)與(11b)之有效範圍應作較詳之探討。此問題與級數之斂散性有關，茲在下數節述之。

(15.4)級數之收斂與其發散　設令 S_n 表一級數起始 n 項之和，即

$$S_n=u_1+u_2+\cdots\cdots u_{n-1}+u_n \tag{15}.$$

u_n 表級數之第 n 項，其值於規定 n 後即可按各項組成律例寫出。若當 $n\to\infty$ 時，$\lim S_n$ 趨於一極限 U（不爲無限大），則吾人稱級數爲收斂的（cenvergent），U 則名爲此收斂級數之和(sum)，即

$$U=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}u_k \tag{16}.$$

不收斂的級數則名爲發散級數（divergent series）。例如 $1+2+3+\cdots\cdots$ 與 $1-1+1-1+\cdots\cdots$ 等皆是，蓋前者 n 項之和可無限增大，而後者 n 項之和或爲 0 或爲 1 則無確定極限也。

自定義言之，一收斂級數之和 U 既等於

$$U=\lim_{n\to\infty}S_n \tag{17},$$

S_n 表其首 n 項之和，故一級數收斂與否，其關鍵不在於起始若干項，而實繫於級數末後各項之和。是以若刪去收斂級數中有限數目之項，所剩餘之級數仍係收斂。此外因方程(17)亦可寫作

$$\lim_{(n-1)\to\infty} S_{n-1}=U \tag{18a}$$

或

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=U \tag{18b}$$

是以

$$\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=U-U=0 \tag{19}$$

即

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0 \tag{20}$$

u_n 表級數之第 n 項。方程(20)所示之條件僅爲必要的而非充足的。例如調和級數(harmonic series)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots \tag{21}$$

之第 n 項之極限爲 $\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$。今若將級數(21)各項依下法合併寫之

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots\cdots$$

即知自第一括弧起，各括弧內之值均較 $\frac{1}{2}$ 爲大，因此級數無限多項之和可較任何指定之值爲大，而調和級數遂爲發散的。由方程(20)所示之必要條件言之，若 $\lim_{n\to\infty} u_n\neq 0$ 則級數必爲發散的無疑；換言之，$\lim_{n\to\infty} u_n\neq 0$ 實爲級數發散之充足條件。

例　試討論幾何級數：

$$a+ar^2+ar^3+\cdots\cdots \quad (22).$$

之斂散性。

本題之 $u_{n+1}=ar^n$，若 $|r|\geq 1$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1}$ 將不爲 0，故若 $|r|\geq 1$，幾何級數必係發散的。若 $|r|<1$，此級數可以收斂，但如欲確定其實係收斂的，可試求其首 n 項之和。此和爲

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1},$$

又因 $\quad rS_n=\quad ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^n,$

故 $\quad (1-r)S_n=a-ar^n,$

即 $\quad S_n=\dfrac{a-ar^n}{1-r}$。

惟當 $|r|<1$ 時，$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$，故

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a}{1-r}$$

有一確定之值，而當 $|r|<1$ 時，幾何級數遂爲收斂的。

上例表示幾何級數首 n 項之和可以計得；但欲計多數級數之首 n 項之和常爲極困難之事。故欲證驗一級數是否收斂，尙須另闢更易於應用之途徑。

(16.5) 比較證驗法　各項皆爲正數之級數，名爲正項級數 (positive series)。設有一正項級數(簡稱爲級數 u)：

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$$

今欲證驗其是否收斂，可取另一適當之正項級數(簡稱爲級數(a)：

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots$$

與之比較。

定理 I　若已知級數(a)爲收斂的，而自某項起級數(u)各項均分別不大於級數(a)之各項，則級數(u)亦爲收斂的。

定理 II　若已知級數(a)爲發散的，而自某項起，級數(u)各項均分別不小於級數(a)之各項，則級數(u)亦爲發散的。

定理 II 之證甚顯。欲證定理 I，須用下述之極限基本定理：設有變數其值恆增(或恆減)但永不超過(或小於)一定數，則此變數必有一極限。此定理似甚顯明，但實仍須嚴格的證明，茲因其證不屬本書範圍，故不陳。

級數(a)既係收斂的，則其和必有一極限。今級數(u)之各項自一適當之項起既分別不大於(a)之各項，是則級數(u)之和恆增但永不超過級數(a)之和，故按本節基本定理，級數(u)之和亦有一極限而係收斂的。

本節所述之比較證驗法，其成功與否端在於吾人能否已知一適當之發散或收斂級數與未知者相較。故所認識之級數愈多，則使用此法之成功機會亦愈多，通常用作比較之級數，其最簡單者爲幾何級數(22)與調和級數(21)二者。例如下：

例 1　求下列級數(u)之收斂範圍：

$$\frac{1}{2}+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^4}{1+x^4}+\frac{x^6}{1+x^6}+\cdots\cdots$$

試以此與下列幾何級數(a)

$$x^2+x^4+x^6+\cdots\cdots$$

相比，即知自第二項起 $u_{n+1}<a_n$。今於 $x<1$ 時，級數(a)爲收斂的，故於 $|x|<1$ 時，級數(u)亦爲收斂的。若 $|x|=1$，各項

均爲$\frac{1}{2}$，故顯然爲發散的。若 $|x|<1$，則 $\lim_{n\to\infty} u_n=1$ 而非 0，故亦非收斂的。此級數之收斂範圍遂爲 $|x|<1$。

例 2　討論下列級數(u)之收斂範圍：

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}+\frac{1}{8^p}+\cdots\cdots$$

當 $p>1$ 時，此級數之各項均不大於下列級數(a)：

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}\cdots\right)+\cdots\cdots;$$

但將級數(a)括弧內各項相加則可寫之爲

$$1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\frac{8}{8^p}+\cdots\cdots+=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{(2^{p-1})^2}+\cdots\cdots;$$

此乃一幾何級數，其 $r=\frac{1}{2^{p-1}}$。令 $p>1$，故 $r<1$，而級數(a)爲收斂的。因此，當 $p>1$ 時，級數(u)亦爲收斂的。當 $p=1$ 時，級數(u)與調和級數同，故爲發散的。若 $p<1$，則其各項，自第二項始，均較調和級數各項爲大，故亦爲發散的。總之，此級數之收斂範圍僅限於 $p>1$。

(16.6)比值證驗法　比較證驗法須藉一已知級數以作比較；比值證驗法則只須由級數本身中取其第$(n+1)$項 u_{n+1} 與其第 n 項 u_n 之比值以驗之。令 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=L$，

(I) 若 $|L|<1$，則級數收斂；

(II) 若 $|L|>1$，則級數發散；

(III) 若 $|L|=1$，則本法不靈，即級數收斂與否不能用此法以決定之。遇此之時，或須改用比較證驗法。但若遇L之值可寫

爲 $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^p+an^{p-1}+\cdots\cdots}{n^p+bn^{p-1}+\cdots\cdots}$$

之時，則於 $(b-a)>1$，級數收斂，而於 $(b-a)\leqq 1$，級數發散。此證甚繁，茲不述。至其條件(I)之證須分爲兩部討論之。茲先證正項級數之合於條件(I)者收斂。因級數各項均爲正，故 $|L|=L$ 而 $L<1$。今在 L 與 1 間取一值 r 即 $L<r<1$。因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=L$，故自某項始（例如 m，$n\geqq m$）可有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<r$$

而自 u_m 項始，級數 $u_1+\cdots\cdots+u_m+u_{m+1}+\cdots\cdots$ 中之其餘各項即 $u_m+u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots$ 將較正項級數 $u_m+ru_{m+1}+r^2u_{m+1}+\cdots$ 之和爲小。惟後者爲一收斂幾何級數$(r<1)$，是以前者亦爲收斂的。若 $|L|>1$，則自一適當之項始，$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}>1$，換言之，自某項始，$u$ 之各項之絕對值均較其前一項爲大，是以 u_n 之極限必非 0，而級數遂爲發散的。

例1 在 $\frac{1\cdot2}{1\cdot3}+\frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\cdots\cdots$ 級數中，

$$u_n=\frac{1\cdot2\cdots(n+1)}{1\cdot3\cdots(2n+1)};\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+2}{2n+3};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{2+\frac{3}{n}}=\frac{1}{2},$$

是以此級數爲收斂的

例2 在 $\frac{1}{10^{25}}+\frac{1.2}{10^{45}}+\frac{1.2.3}{10^{60}}+\cdots\cdots$ 級數中，

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{10^{20}}。$$

當 $n\to\infty$ 時，其值無限增大，是以此級數為發散的。

例3　在 $\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\cdots$ 級數中，$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+1}{2n+2}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$，故不能用此法以作判定。但 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}$，

$a=\frac{1}{2}$，$b=1$，$b-a=\frac{1}{2}<1$，乃知此級數為發散的。

(16.7)絕對的與附件的收斂　若級數中正項或負項之數目係有限，則將此等有限之項數減去後，所得之級數之符號將為純一而證驗正項級數散斂性之方法即可應用。但有時級數中正負項之數目均為無限多，於是證驗其散斂性之方法即須用及前節之條件(I)。惟前節所述之證，僅得用於正項級數，欲證其亦可用於正負項兼有之級數則須用下述定理：

定理：　改變一級數中全體負項之符號，若所得之正項級數係收斂的，則原級數亦為收斂的。

本定理亦係根據(16.5)節之基本極限定理而來。令下列級數

(u)：

$$u_1+u_2+u_3\cdots\cdots \tag{25}$$

為一正負項兼有之級數。今將其負項之符號悉改以得一正項級數 (u') 如下：

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots\cdots \tag{26}$$

若令 U_n 表原級數首 n 項之和，而以 P_n 與 $-N_n$ 分表別其首 n 項中各正項與各負項之和，則有

$$U_n = P_n - N_n \qquad (27a),$$

同樣若以 U_n' 表級數(u')首 n 項之和，則必有

$$U_n' = P_n + N_n \qquad (27b).$$

今知 U_n' 有極限，P_n 與 N_n 均爲恆增的變數，但自 (27b) 復知 P_n 與 N_n 之值必不能超過 U_n' 之極限。是以 P_n 與 N_n 亦各有其極限(16.5 節基本定理)。P_n 與 N_n 既有確定極限，U_n 爲二者之差亦有確定極限，是以有如上述之定理。

讀者應注意本定理之反說不確。換言之，一正負項兼有之級數雖爲收斂的，而將其各負項之符號均改變後所得之正項級數則未必收斂。倘若後者亦收斂，則前者之收斂名爲絕對的(absolutely convergent)；否則名爲附件的收斂(conditionally convergent)。

根據本節定理，即知一級數收斂之充足條件實爲

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=L, \quad |L|<1,$$

如(16.6)節(I)所云。

例如因 $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$ 爲收斂級數，故 $1+x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots$ 亦爲收斂的，x 可爲任何有限值。

系　絕對的收斂級數中各項之次序可以任意改變而不影響於該級數之收斂性或其和之值。附件的收斂級數中各項之次序則不得任意改變，改變後之級數與原級數常不相同。

本系第一段之證不難可由讀者自求之；其第二段之證稍繁，

既不諱，但可由下例見之：

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\cdots$$ （見16.14節）

乘以 $\frac{1}{2}$ 則

$$\frac{1}{2}\ln 2 = \quad \frac{1}{2} \quad - \frac{1}{4} \quad + \frac{1}{6} - \cdots\cdots$$

兩者相加，乃得

$$\frac{3}{2}\ln 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots\cdots$$

此即將原級數中各項之次序改變後之級數，但其值顯異於原級數。

(16.8) 交替級數　若級數各項之符號係交替的為正負如

$$\pm(v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \cdots\cdots) \qquad (28).$$

其中各 v 全為正值，則其收斂之條件為

$$v_{n+1} < v_n，\text{ 及 } \lim_{n\to\infty} v_n = 0 \qquad (29).$$

注意 $\lim_{n\to\infty}(v_{n+1}/v_n) < 1$，較本條件 $v_{n+1} < v_n$ 為苛。

例如 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots + \cdots$ 為收斂的，雖則調和級數 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots$ 係發散的。欲證條件(29)，可將級數(28)括弧內起始變數之項之和寫為

$$V_{2m} = (v_1 - v_2) + (v_3 - v_4) + \cdots\cdots + (v_{2m-1} - v_{2m}) \qquad (30a).$$

今 $v_{n+1} < v_n$，故各括弧內之差均為正，而 V_{2m} 遂係恆增的。若取起始單數之項之和，則得

$$V_{2m+1} = v_1 - (v_2 - v_3) - (v_4 - v_5) - \cdots\cdots - (v_{2m} - v_{2m+1}) \qquad (30b).$$

表示 V_{2m+1} 之值係恆減的且較小於 v_1。由是並知 V_{2m} 之值不超過 v_1，因 $V_{2m}=V_{2m+1}-v_{2m+1}\leqq v_1$ 也。是以根據基本極限定理，V_{2m} 有一極限。同樣亦可證 V_{2m+1} 不小於 (v_1-v_2)，因

$$V_{2m+1}=V_{2m}+v_{2m+1}\geqq V_{2m}\geqq(v_1-v_2)$$

故 V_{2m+1} 亦有極限。最後因 $\lim\limits_{m\to\infty} v_{2m+1}=0$，且

$$\lim_{m\to\infty} V_{2m+1}=\lim_{m\to\infty} V_{2m}+\lim_{m\to\infty} v_{2m+1}=\lim_{m\to\infty} V_{2m},$$

乃知兩極限係相等，而級數遂爲收斂的。

由上述結果觀之，若自某項起棄去交替級數中其後各項，則所得之近似值之誤差，其數值必不超過所留最後之項之數值。

例 討論以下級數之散斂性：

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots。$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{-n}{n+1}x\right|=|x|$，故此級數於 $|x|<1$ 時爲絕對收斂。如 $|x|>1$，其 u_n 之極限爲

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{nx^{n-1}}{1}\right|=\infty,$$

故爲發散的。至於 $x=\pm1$ 時之情形爲何，可以 $x=1$ 與 -1 分別代入而檢驗之。當 $x=1$ 時，級數爲收斂的交替級數

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots.$$

因各項之數值均較小於其前一項之數值，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 也。若 $x=-1$，則爲調和級數乘以 -1，故爲發散的。綜言之，此級數

之收斂範圍爲 $-1<x\leqq 1$。又如以此級數之首 n 項作級數之近似值，其誤差之數值不至超過 $\frac{x^n}{n}$。

(16.9)冪級數　按一級數之各項並不限定須爲常數，前已有多例，若各項均爲 $(x-a)$ 之乘冪乘以一係數，如

$$b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\cdots\cdots \tag{31}$$

者，則稱之爲冪級數(power series)。Taylor 與 Maclaurin 級數均爲冪級數之良例。冪級數之收斂或發散，通常視 x 所取之值而定，有時 x 之值可毫無限制(即可爲任何有限值)。應用前節所述之比值試驗法，可證若

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|=C \tag{32}$$

則(A)當 $|x-a|<C$ 時，級數(31)爲絕對的收斂；

(B)當 $|x-a|>C$ 時，級數(31)爲發散的。

至於 $|x-a|=C$ 則須另行討論。此乃因收斂與發散條件分別爲

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}(x-a)^{n+1}}{b_n(x-a)^n}\right|<1，即|x-a|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| \tag{33a}$$

與

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}(x-a)^{n+1}}{b_n(x-a)^n}\right|>1，即|x-a|>\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| \tag{33b}$$

(16.10)由冪級數確定之函數　本章之原始目的係以示明一函數在適當情形下可展爲一冪級數，例如 Taylor 與 Maclaurin 級數。反之，一冪級數在其收斂範圍內，亦表一函數，因在其收斂範圍內，與 x 以一定之值，該級數即有一確定之和故也。至於所得之和可否以初等函數表之，則爲另一問題。其實各高等函數

常可以一收斂冪級數為其定義：例如

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\,4^2}-\frac{x^6}{2^2\,4^2\,6^2}+\cdots\cdots,\ |x|<\infty \qquad (34a),$$

$$J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^2\cdot4}+\frac{x^5}{2^2\cdot4^2\cdot6}-\cdots\cdots,\ |x|<\infty \qquad (34b).$$

均可用（33a）證其為收斂的。J_0 與 J_1 分名為零級與壹級之 Bessel 函數[1]，其在高等物理學與工程學中應用甚廣。

(16.11) 討論 Taylor 及 Maclaurin 級數　欲將一函數 $F(x)$ 展為 Taylor 或 Maclaurin 級數，必須證明所得剩餘 R_n 之極限趨 0。欲證 $R_n\to0$，除已舉之 e^x，$\sin x$，$\cos x$ 諸例外，均屬甚難之事。故初步工作多先求冪級數之收斂範圍，然後再就此範圍內討論 R_n 是否趨 0，因在此範圍外，R_n 根本上即不趨 0。反言之，用 Taylor 或 Maclaurin 展開法，即使所得之級數為收斂的，而結果是否為原函數之展開式亦尚須用 $R_n\to0$ 一事證驗之。例如設函數 $F(x)$ 之 Maclaurin 級數為

$$F(x)=F(0)+xF'(0)+\frac{x^2}{2!}F''(0)+\cdots\cdots,$$

今將 $G(x)=F(x)+e^{-\frac{1}{x^2}}$ 一函數亦按 Maclaurin 方法展開之，其各項亦將為

$$F(0)+xF'(0)+\frac{x^2}{2!}F''(0)+\cdots\cdots,$$

因 $G(0)=F(0)$，$G'(0)=F'(0)$，……$G^{(n)}(0)=F^{(n)}(0)$ 也。但此級數顯然非 $G(x)$，此蓋因將 $G(x)$ 用 Maclaurin 方法展開時，其剩餘 R_n 不趨 0，是故 $G(x)$ 不能展為 Maclaurin 級數。

例 展 $(1+x)^m$ 為 Maclaurin 級數（m 為任何數）。

若 m 為正整數，所求之展開式之項數將為有限，且即初等代數中之二項定理。茲所欲論者為 m 非正整數之展開式。令

$$F(x)=(1+x)^m, \qquad F(0)=1,$$

$$F'(x)=m(1+x)^{m-1}, \qquad F'(0)=m,$$

$$F''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2}, \qquad F''(0)=m(m-1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F^{(n)}(x)=m(m-1)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

$$F^{(n)}(0)=m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)。$$

於是

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n；$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{(n-1)!}\cdot\frac{n!}{m(m-1)\cdots(m-n+1)}\right|$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{m-n+1}\right|=1,$$

是以除 m 為正整數外，此級數於 $|x|>1$ 係發散的。至於 $|x|<1$ 時，其 R_n 之情形，可用 Cauchy 式之剩餘(10)討論之。

$$R_n=\frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{(n-1)!}m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)(1+\theta x)^{m-n}$$

$$=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)x^n}{(n-1)!}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}(1+\theta x)^{m-1}, \quad 0<\theta<1.$$

故如 $|x|<1$，此中最後因子係有限值；因 $0<\theta<1$，是以若 $(m-1)>0$，則 $(1+\theta x)^{m-1}<(1+|x|)^{m-1}$（有限值）；如 $(m-1)<0$，則

$(1+\theta x)^{m-1}<(1+|x|)^{m-1}$(亦爲有限値)。至於$\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$則爲恆小於 1 之正値，因 $n>0$，而

$$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1,\quad |x|<1,\quad 0<\theta<1,$$

也。由是言之，R_n 趨於 0 與否可由其第一因子

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)x^n}{(n-1)!},\quad |x|<1$$

定之。惟此因子乃下列收斂級數之普通項：

$$m(m-1)x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2!}x^3$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{3!}x^4+\cdots\cdots$$

故其極限爲 0。因此，$\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$，而普遍的二項定理遂爲

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots(35).$$

讀者可注意本證必須用 Cauchy 式之剩餘，若用 Lagrange 式剩餘，則將無結果。

(16.12) 冪級數之微積分 設有一冪級數

$$f(x)=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\cdots\cdots,\ |x-a|<c\quad(36).$$

今按項求其對 x 之積分或微分，以得

$$\int_a^x f(x)dx=b_0(x-a)+\frac{b_1}{2}(x-a)^2+\frac{b_2}{3}(x-a)^3+\cdots\cdots(37),$$

或
$$f'(x)=b_1+2b_2(x-a)+3b_3(x-a)^2+\cdots\cdots\quad(38).$$

其收斂範圍仍爲 $|x-a|<c$。

讀者對此或將認爲當然之事無待贅述；實則一級數可否按項

積分或微分，須頗繁艱之理論方能判定，蓋按積分，微分與級數之和三者之基本定義，三種演算手續均爲依一定規律求極限。由此等規律之繁複情形言之，此三手續之次序，是否可以任意對調，實非明顯之事。所幸如級數係冪級數，則可按項積分或微分之。由是所得之級數，其收斂範圍與原級數同，且在收斂範圍內亦表原級數之積分函數或紀數。此事之證甚繁，茲略之。

試將(36)按項微分而令結果中之 x 爲 a，即可得

$$b_0=f(a),\ b_1=f'(a),\cdots b_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

以示(36)實即 Taylor 級數。由此言之，若有一函數可展爲一冪級數，此冪級數必爲 Taylor 或 Maclaurin 級數無疑。

例 1　零級 Bessel 函數爲

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\,4^2}-\frac{x^6}{2^2\,4^2\,6^2}+\cdots\cdots,\qquad |x|<\infty;$$

按項微分即得

$$\frac{d}{dx}J_0(x)=-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{2^2\,4}-\frac{x^5}{2^2 4^2 6}+\cdots=-J_1(x),\quad |x|<\infty,$$

以示 J_0 與 J_1 之一關係。

例 2　$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots\cdots,\qquad |x|<\infty;$

按項積分之即有

$$\int_0^x\cos x\,dx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots=\sin x;\quad |x|<\infty。$$

例 3　求 $\ln(1+x)$ 之 Maclaurin 級數。

因　$\ln(1+x)=\displaystyle\int_0^x\frac{dx}{1+x}$，且按二項定理

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots, \ |x|<1,$$

故知

$$\ln(1+x)=\int_0^x(1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots)dx$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots \qquad (31)$$

讀者可注意此級數之收斂範圍實為 $-1<x\leqq 1$（見16.8節例），然則被積級數之收斂範圍僅為 $|x|<1$。按項積分後之級數，其收斂範圍較大於原級一事，亦頗常見。

<u>(16.13) 冪級數之運算</u>　在其公共收斂範圍內，兩個冪級數可互相加減或相乘。換言之，若公同之收斂範圍為 $|x|<C$，由下列二函數：

$$f(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots\cdots,$$

$$F(x)=B_0+B_1x+B_2x^2+B_3x^3+\cdots\cdots,$$

可得：

$$f(x)\pm F(x)=(b_0\pm B_0)+(b_1\pm B_1)x$$

$$+(b_2\pm B_2)x^2+\cdots\cdots, \quad |x|<C;$$

$$f(x)\ F(x)=(b_0B_0)+(b_1B_0+b_0B_1)x$$

$$+(b_2B_0+b_1B_1+b_0B_2)x^2+\cdots, \ |x|<C。$$

二收斂級數亦可相除，但所得之級數，其收斂範圍除無分子之收斂範圍所限制外，且應較分母 $F(x)=0$ 之最小數值之根為更小。

本節原理之證稍繁，茲略之。但在應用上此點頗便，因用此等原理即不必藉 Taylor 或 Maclaurin 方法以求若干函數之級數也。

例 因 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots\cdots$，$-1<x\leqq 1$，

及 $\ln(1-x)=-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}-\cdots\cdots$，$-1\leqq x<1$，

故相減之後即有

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right),\ |x|<1 \qquad (40)$$

例2 已知 $\left.\begin{array}{l}\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots\cdots \\ \cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots\cdots\end{array}\right\}$，$|x|<\infty$，

及

相除乃得

$$\begin{array}{l|l}
x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+\cdots\cdots & 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\cdots\cdots \\ \hline
x-\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^5}{24}-\cdots\cdots & x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+\cdots\cdots \\ \cline{1-1}
\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{30}+\cdots\cdots & \\
\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{6}+\cdots\cdots & \\ \cline{1-1}
\dfrac{2x^5}{15} &
\end{array}$$

惟 $\cos x=0$ 最小之根爲 $\dfrac{\pi}{2}$，故

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots\cdots,\quad |x|<\frac{\pi}{2} \qquad (41).$$

例3 求 $\dfrac{1-3x}{1-3x+2x^2}$ 之 Maclaurin 級數。

令所求之級數爲 $b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots$，

乘以分母$(1-3x+2x^2)$後即得

$$
\begin{array}{l}
b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots\cdots \\
\quad -3b_0x-2b_1x^2-3b_2x^3+\cdots\cdots \\
\qquad\quad +2b_0x^2+2b_1x^3+\cdots\cdots \\
\hline
b_0+(b_1-3b_0)x+(b_2-3b_1+2b_0)x^2+(b_3-3b_2+2b_1)x^3+\cdots\cdots
\end{array}
$$

將此與分子 $(1-3x)$ 相較，則知

$$b_0=1;$$

$$b_1-3b_0=-3, \quad 故\ b_1=0;$$

$$b_2-3b_1+2b_0=0, \quad 故\ b_2=-2;$$

$$b_3-3b_2+2b_2=0, \quad 故\ b_3=6;$$

而所求級數之首三項遂爲

$$\frac{1-3x}{1-3x+2x^2}=1-2x^2+6x^3+\cdots\cdots, \quad |x|<\frac{1}{2}。$$

其收斂範圍係由分母 $1-3x+2x^2$ 之根（即 $\frac{1}{2}$ 與 1）定之。若用 Maclaurin 方法發展此三例之函數，其繁長不言而喻。此爲本節所述方法之優點。

(16.14) 極大與極小 吾人亦可利用 Taylor 級數以推得判定極大與極小之各條件。令

$$F(a+h)-F(a)=hF'(a)+\frac{h^2}{2!}F''(a)+\frac{h^3}{3!}F'''(a)+\cdots\cdots \quad (42)$$

若 $F(x)$ 在 $x=a$ 點爲極大，則當 h 爲任何正或負之小值，$F(a+h)<F(a)$。h 既可正可負，故如欲 $F(a+h)<F(a)$，必有 $F'(a)=0$，且因 h^2 爲正，故 $F''(a)$ 須爲負。設或

$F''(a)=0$，則在極大點，$F'''(a)$ 亦必爲 0，而 $F^{(4)}(a)$ 則須爲負，（參較 3.7 節）。

同樣，若 $F(x)$ 在 $x=a$ 點爲極小，則 $F(a+h)>F(a)$；因 h 爲任何正或負之小值，故乃有 $F'(a)=0$ 及 $F''(a)>0$ 之條件。餘可仿前。

(16.15) 不定式　冪級數之又一應用在於計算不定式如 $\frac{0}{0}$ 者。茲舉兩例以示之：

例 1　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-\sin 2x}{x+x^4}$。

$$e^x-e^{-x}-\sin 2x=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\right)$$

$$-\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\right)-\left(2x-\frac{8x^3}{3!}+\frac{2x^5}{15}\cdots\right)$$

$$=\frac{5x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+\cdots\cdots$$

故所求之極限爲 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{5x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+\cdots}{x^3+x^4}=\frac{5}{3}$。

例 2　求 $\lim\limits_{x\to0}(1+bx)^{a/x}$。

先計對數則有

$$\lim_{x\to0}\frac{a}{x}\ln(1+bx)=\lim_{x\to0}\frac{a}{x}\left(bx-\frac{(bx)^2}{2}+\frac{(bx)^3}{3}-\cdots\right)=ab,$$

$$\lim_{x\to0}(1+bx)^{a/x}=e^{ab}。$$

第十六章 習題

1. 用有餘項之 Taylor 定理，以證下列關係：

(a) $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$，

(b) $x > \sin x > x - \frac{1}{6}x^3$，

$\tan x > x + \frac{1}{3}x^3$，$\left(\frac{\pi}{2} > x > 0\right)$。

2. 計算下列諸值：

(a) tan 46° 準確至小數後 3 位；

(b) sin 1° 準確至小數後 6 位；

(c) $\sqrt{3} = \frac{7}{4}\sqrt{\frac{48}{49}}$ 準確至小數後 7 位；

(d) $\sqrt{e}$ 準確至小數後 4 位；

(e) $\frac{1}{\sqrt{1.01}}$ 準確至小數後 4 位。

3. 問下列各級數之第 n 項 a_n 爲何並測驗其歛散性。

(a) $\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \frac{1}{\sqrt{3^3}} + \cdots\cdots$；　(b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots\cdots$；

(c) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots\cdots$；　(d) $\frac{2}{1.2.3} + \frac{4}{2.3.4} + \frac{6}{3.4.5} + \cdots$；

(e) $\frac{1}{a} + \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{3a+2b} + \cdots$；　(f) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots\cdots$；

(g) $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \cdots$；　(h) $\frac{1}{1.5} + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{3.5} + \cdots$。

4. 若級數第 n 項之 u_n 如下列所示，試寫出其首三項，並測驗其歛散性。

(a) $\dfrac{n!}{3\cdot(3+5)\cdots[3+(n-1)5]}$；　(b) $\dfrac{2(n+1)!\,n!}{(2n+1)!}$；

(c) $\dfrac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}(n-1)[n+\sqrt{n+1}]}$；　(d) $\dfrac{n\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{1+n^3}}$；

(e) $\dfrac{1}{(a+nb)[a+(n+1)b]}$，$(a,b<0)$　(f) $\dfrac{n}{1+n\sqrt{n}}$；

(g) $\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$；　(h) $\dfrac{1+n^2}{n!}$；

(i) $\dfrac{\ln(1+n)}{1+n^2}$；　(j) $\dfrac{1}{n(\ln n)^p}$。

5. 問下列各級數收歛時，x 值之範圍爲何？

(a) $1+x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots$；

(b) $x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$；

(c) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{1}{3}\dfrac{x^3}{2^3}+\cdots\cdots$；

(d) $x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\cdots\cdots$；

(e) $\dfrac{x-1}{8}-\dfrac{1}{3}\dfrac{(x-1)^3}{8^3}+\dfrac{1}{5}\dfrac{(x-1)^5}{8^5}-\cdots\cdots$；

(f) $x+2!\,x^2+3!\,x^3+\cdots\cdots$；

(g) $\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1\cdot2}{3\cdot5}x^2+\dfrac{1\cdot2\cdot3}{3\cdot5\cdot7}x^3+\cdots\cdots$；

(h) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1\cdot3}{2\cdot4}\dfrac{x}{3}+\dfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\dfrac{x^2}{9}+\cdots\cdots$；

(i) $\frac{1+\sin^2 x}{1}+\frac{1+\sin^2 2x}{2^2}+\frac{1+\sin^2 3x}{3^3}+\cdots\cdots$；

(j) $\sum\frac{(n^2-1)x^n}{n^3+2}$；　　(k) $\sum\left(\frac{2\pi}{\pi}\sin\frac{\pi}{2\pi}\right)^n x^n$；

(l) $\sum e^{-\sqrt{n}}x^n$；　　(m) $\sum\frac{x^n\ln n}{n}$；

(n) $\sum\frac{x^n}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$。

6. 用合併簡單級數之法，展開下列函數而得其起始四項，並決定收斂之區域：

(a) $\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$；　　(b) $e^{x\cos x}\cos(x\sin x)$。

7. 若 $\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{1}{2}x+\frac{B_1}{2!}x^2-\frac{B_2}{4!}x^4+\frac{B_3}{6!}x^6-\cdots\cdots$，

試示 $B_1=\frac{1}{16}$，$B_2=\frac{1}{30}$，$B_3=\frac{1}{42}$，……B_1，B_2，B_3，

‥等名爲 Bernoulli 數。

8. 試用級數之加減乘除，積分或微分各法將下列函數展開爲 Maclaurin 級數(最少三項)，並示明其收斂範圍。

(a) $\tan^{-1}x$；　(b) $\sin^2 x$；　(c) $e^x\sin x$；

(d) $e^x\cos x$；　(e) 2^x；　(f) $\ln(1+\sin x)$；

(g) $\cos(a\sin^{-1}x)$；　(h) $\sec x$；　(i) $\frac{2-x}{(2+x)(1+x^2)}$；

(j) $(1-2x^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$；　(k) $e^{k\sin^{-1}x}$。

9. 證下列諸展開式：

(a) $\ln x = \ln 3 + \frac{x-3}{3} - \frac{(x-3)^2}{2\cdot 3^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n} + \cdots$；

$$-1 < (x-3) \leqq 1；$$

(b) $\sqrt{x} = \sqrt{a} + \frac{x-a}{2\sqrt{a}} - \frac{(x-a)^2}{2^2 2!\, a^{3/2}} + \frac{1\cdot 3(x-a)^3}{2^3 3!\, a^{5/2}} - \cdots\cdots$，

$$|x-a| < a。$$

10. 示零級 Bessel 函數 $y = J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \cdots\cdots$

滿足下列微分方程：$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0$。

11. 示 Legendre 多項式

$$y = P_m(x) = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1}{m!}\left\{x^m - \frac{m(m-1)}{2(2m-1)}x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.4.(2m-1)(2m-3)}x^{m-4} - \cdots\cdots\right\}$$

滿足 $\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right\} + m(m+1)y = 0$。

12. 示 n 級 Bessel 函數 $y = J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!}\left(1 - \frac{x^2}{2^2(n+1)}\right.$

$$\left. + \frac{x^4}{2^4 2!(n+1)(n+2)} - \frac{x^6}{2^6 3!(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\cdots\right)$$

滿足 $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$，$n$ 爲一正整數。

13. 求 (a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$；　(b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cos x - \sin 2x}{x^2\ln(1+x)}$；

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{\tan^2 x}$；　　(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}$；

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)-(1-2x)^{\frac{1}{2}}}{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-(1+4x)^{\frac{1}{4}}}$。

14. 試將 Taylor 定理中之剩餘 R_n 寫爲：

$$R_n(x)=F(b)-F(x)-(b-x)f'(x)-\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)-\cdots\cdots$$

$$-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)，$$

而示 $\dfrac{d}{dx}R_n(x)=-\dfrac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)$，$R_n(b)=0$，及

$$R_n(a)=\int_a^b\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt。$$

試利用前章題(16)之結果及此積分以估計 R_n 之值而得本章之方程(8)與(10)。問此估計法與本章所用以估計 R_n 之方法，其假定孰爲較奇？

第十七章　立體解析幾何

(17.1)解析方法與幾何概念　前此所討論之問題均限於一個自變數之函數，微積分學中所用之自變數，其數目當然不限於一，討論兩自變數之函數時，固亦可藉純粹的解析方法，但如能利用立體幾何，則較易明瞭。茲先說明立體解析幾何之原理，並可由平面幾何推至立體幾何之理，本章說明立體幾何要點，以備於後數章討論多變數函數時之應用。

(17.2)空間之直角坐標　欲定一點在平面內之位置，只須取兩適當之坐標軸（通常為互成直角之兩直線），而指明 P 點距此兩直線之距離即得。與此相似，欲定一點 P 在空間之位置，則須取三個適當而相互垂直之平面，而指明 P 點距此三平面之距離。設 x、y 與 z 軸所定之三平面名為坐標平面（coordinate planes），三平面公共之交點 O 名為原點，其三交線 OX、OY、OZ 則名為坐標軸（coordinate axes）。通常作圖之時，自此三軸之位置則如圖(17.1)所示，即以紙面為 OY 及 OZ 軸所在之平面，而令 OX 軸垂直向外。此種坐標制名為右手制（right-handed system），蓋 OX，OY 及 OZ 之正方向可分別以右手之拇指、食指及中指三者互作直角表明之也。

坐標面既定之後，欲定任意點 P 之位置，可自該點作三平面分別與坐標面平行，而與坐標軸分別交於 A、B、C 三點。令 $OA=x$，$OB=y$，$OC=z$，則 x，y，z 即為 P 點距 YOZ，

ZOX 及 XOY 三平面之速度。茲名之爲 P 點之直角坐標，而簡寫之爲 $P=(x,y,z)$。因所用坐標制爲右手的，故 x，y，z 各值之正負應合於次述規定：

(A) 在 YOZ 面前之 x 爲正，其後爲負；

(B) 在 ZOX 面右之 y 爲正，其左爲負；而

(C) 在 XOY 面上之 z 爲正，其下爲負。

讀者可注意上述坐標實即(1.6)節所述者之推廣，蓋位於圖(1.1)紙面上諸點亦可認爲有三個坐標，特其 Z 坐標恣爲 0 而已。

(17.3)方向角，方向餘弦，及方向數　在平面中任取一直線 SQ。其方向可由其與坐標軸(例如 X 軸)所作之角定之。與 SQ 平行之直線，其方向既悉同，故表此角之時，常自原點 O 繪一直線 OP 與 SQ 平行，圖(17.3)。若 OP 與 X 軸所作之角爲 α，其與 Y 軸所作之角爲 β，則因 $\sin^2\alpha=\cos^2\beta$，故有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1 \qquad (1)$$

之關係。同樣，若自原點作 OP 直線，與空間之任一方向 SQ 平行，(圖17.4)，而令 OP 與 OX，OY，OZ 各軸所作之角分別爲 α，β，γ，則有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \qquad (2)$$

方程(2)實即方程(1)之推廣式，因在圖(17.3)中 $\alpha+\beta=90°$ 而 $\cos\gamma=0$ 也。欲證方程(2)可參閱圖(17.2)。因

$$\overline{OP}^2=\overline{OA}^2+\overline{AP}^2=\overline{OA}^2+\overline{AF}^2+\overline{FP}^2$$

故若令 $OP=r$，則有

$$r^2=x^2+y^2+z^2 \qquad (3).$$

設 $\alpha=\angle POA$，$\beta=\angle POB$，$\gamma=POC$，且

$$\cos\alpha=\frac{OA}{OP}=\frac{x}{r};\ \cos\beta=\frac{OB}{OP}=\frac{y}{r};\ \cos\gamma=\frac{OC}{OP}=\frac{z}{r},$$

即 $x=r\cos\alpha$，$y=r\cos\beta$，$z=r\cos\gamma$，故代入方程(3)後即有方程(2)所示之關係。

方程(2)極爲重要。其中之 α，β，γ 各角名爲方向角(direction angles)，其值以自 0 至 180° 之正角爲限。方向角之餘弦常分別以 $l=\cos\alpha$，$m=\cos\beta$，$n=\cos\gamma$ 表之，其名爲方向餘弦(direction cosines)。讀者可注意自 O 向 P 之方向角若爲 α，β，γ，則自 P 向 O 之方向角將爲其補角，故自 O 向 P 之方向餘弦與自 P 向 O 之方向餘弦，其數值相等但其符號係反背，雖則兩方向均爲平行的。換言之，兩平行方向之方向餘弦，其符號爲正抑爲負，須由題意另行定之。

除以其方向角或方向餘弦決定空間之一方向外，吾人亦常用與方向餘弦 l，m，n 成正比之三數(名爲方向數 direction numbers)以定此方向。因有方程(2)所示之關係，即

$$l^2+m^2+n^2=1 \qquad (4).$$

故若所用之三數爲 $a=kl$，$b=km$，$c=kn$，k 爲一比例係數，則

$$a^2+b^2+c^2=k^2 \qquad (5).$$

而 $l=\dfrac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$；$m=\dfrac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$；$n=\dfrac{\pm c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$；　(6).

此中之符號是否均爲正或負，仍須由題意另定之。

例1　設有 P 點坐標爲 $(-2, 1, 2)$，問 OP 及 PO 兩方向之方向餘弦及方向角爲何。

因 $x=-2$，$y=1$，$z=2$，故 OP 的距離爲

$$r=\sqrt{4+1+4}=3,$$

於是 OP 之方向餘弦爲

$$l=\frac{-2}{3},\quad m=\frac{1}{3},\quad n=\frac{2}{3}$$

其方向角遂爲

$$\alpha=\cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)=131.8°,\quad \beta=\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=70.5°,$$

$$\gamma=\cos^{-1}\frac{2}{3}=48.2°。$$

至於自 P 向 O 之方向餘弦則爲

$$l'=\frac{2}{3},\quad m'=-\frac{1}{3},\quad n'=-\frac{2}{3}$$

而其方向角爲

$$\alpha'=48.2°, \ldots$$ [illegible]

例2　[illegible] -3，4，5 [illegible] 方向餘弦與方向角。

(解) $a=-3$，$b=4$，$c=$ [illegible]

則 [illegible] $\sqrt{\ldots}=\sqrt{9+16+25}$ [illegible]

但因規定 $l>0$，而 $a=-3$，故 [illegible] 負 [illegible]，即

$$l=\frac{-3}{-5\sqrt{2}}=\ldots,\quad m=\frac{4}{-5\sqrt{2}}=\ldots,\quad n=\frac{5}{-5\sqrt{2}}=-0.707\ldots$$ [illegible]

方向角則爲 [illegible] $\beta=$ [illegible]

(17.4)兩點之距離　設平面中兩點之坐標分別為 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2)，則其距離 s 為

$$s=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{7}$$

將此推廣，若空間兩定點 P_1 及 P_2 之坐標為 (x_1, y_1, z_1) 及 (x_2, y_2, z_2)，則其距離將為

$$s=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{8}$$

欲證(8)，可作過 P_1 及 P_2 兩平行於坐標面之平面如圖(16.5)。令 $P_1P_2=s$。由圖知

$$P_1A=x_2-x_1,\quad P_1B=y_2-y_1,\quad P_1C=z_2-z_1,$$

線段 P_1P_2 之方向餘弦為

$$l=\frac{P_1A}{s};\quad m=\frac{P_1B}{s};\quad n=\frac{P_1C}{s};$$

故 $\left(\frac{x_2-x_1}{s}\right)^2+\left(\frac{y_2-y_1}{s}\right)^2+\left(\frac{z_2-z_1}{s}\right)^2=1$

而方程(8)即隨此得以成立。若 P_1 與 P_2 係位於 XOY 平面中，則 $z_1=z_2=0$，方程(8)即變為方程(7)矣。

例　求 $P_1=(1, -1, 0)$ 與 $P_2=(1, 2, 4)$ 兩點間之距離及由 P_1 至 P_2 之方向餘弦。

解　因 $x_2-x_1=1-1=0$，$y_2-y_1=2-(-1)=3$，$z_2-z_1=4-0=4$，

故 P_1P_2 之距離為

$$s=\sqrt{0+3^2+4^2}=5。$$

而自 P_1 至 P_2 之方向餘弦為

$$l=\frac{0}{5}=0;\quad m=\frac{3}{5};\quad n=\frac{4}{5}.$$

其方向角則為

$$\alpha=90^\circ;\quad \beta=53.1^\circ;\quad \gamma=35.5^\circ。$$

(17.5)直線之方程 在平面幾何中，通過兩點 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 之直線，其方程為

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \tag{9}$$

仿此，即知通過空間兩點 $P_1=(x_1, y_1, z_1)$ 與 $P_2=(x_2, y_2, z_2)$ 之方程為

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{10}$$

證方程(10)方法與證方程(9)之法同。設過 P_1 點作三直線 P_1A，P_1B，P_1C 分別與 X，Y，Z 三軸平行而令 P_2A，P_2B，P_2C 與 P_1A，P_1B，P_1C 分別正交；(圖 16.6)僅示 P_1P_2 及 P_1B 兩線。令 P_1P_2 直線上任意點 P 之坐標為(x, y, z)，則自直角三角形 P_1P_2A，P_1P_2B，或 P_1P_2C，即有

$$\frac{P_1P}{P_1P_2}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1};$$

是即通過 P_1 及 P_2 之方程(10)。

若已與者為一點 P_1，及直線所取之方向(例如由其方向數 a，b，c 定之)，則因 x_2-x_1，y_2-y_1 及 z_2-z_1 分別與方向數成正比之故，方程(10)即可寫為

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c} \tag{11}$$

此式實與平面幾何中之直線方程之點斜式(point slope form)相當，蓋若所求直線係在 XOY 平面中，即 $z=z_1=0$，則因

$$a=k\cos\alpha,\ b=k\cos\beta,\ c=k\cos\alpha,$$

故方程(11)即與常見之

$$(y-y_1)=\frac{b}{a}(x-x_1)=(x-x_1)\tan\alpha$$

相同。讀者應注意平面幾何中之直線僅由單一次方程表之；空間直線之方程則需兩個一次方程。

例1 因 X 軸之方向餘弦爲 $l=1,m=0,n=0$，且通過原點，故其方程按(11)應 $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$，以0爲分母之除法既無意義，此結果實表示 X 軸之方程爲

$$y=0 \quad 及 \quad z=0;$$

此實顯然，因 X 軸上各點之 Y 與 Z 坐標均爲0，而其 X 坐標則可爲任何值。同樣，Y 軸方程爲 $z=0$、$x=0$；而 Z 軸方程則爲 $x=0$，$y=0$。

例2 一直線通過 $P_1=(1,-1,0)$ 與 $P_2=(1,2,4)$ 兩點，求其方程。

自方程(10)即得：$\frac{x-1}{1-1}=\frac{y-(-1)}{2-(-1)}=\frac{z-0}{4-0}$

或 $$x=1,\quad 4(y+1)=3z。$$

(17.6)兩直線間之角 在平面幾何中，兩直線 PT 與 PS 間之角係等於其與 X 軸所成角 α 與 α' 之差，圖(16.6)即

$$\theta=\alpha-\alpha';$$

若用方向餘弦表之，則得

$$\cos\theta=\cos(\alpha-\alpha')=\cos\alpha\cos\alpha'+\sin\alpha\sin\alpha'$$

$$=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta' \qquad (12)$$

空間兩直線所夾之角，其意義不若圖(17.7)所示者之明顯，因空間兩直線未必有交點也。所謂空間兩直線所夾之角，實即指過原點與此兩直線平行之兩直線間之角。此角(θ)之餘弦亦可將方程(12)增加一項而推廣之如次：

$$\cos\theta=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma' \qquad (13a)$$

或 $\cos\theta=ll'+mm'+nn' \qquad (13b).$

式中之 l，m，n 及 l'，m'，n' 分表兩直線之方向餘弦。欲證(13)，可作兩直線 OP 與 OP' 各與所論之直線平行，據定義，其夾角 $\theta=\angle POP'$。若令 $OP=r$，$OP'=r'$，$PP'=s$，則自 POP' 三角形(圖 17.8)即有

$$s^2=r^2+r'^2-2rr'\cos\theta.$$

若 P 與 P' 之坐標分別為(x, y, z)與(x', y', z')，則 $r^2=x^2+y^2+z^2$，$r'^2=x'^2+y'^2+z'^2$，

$$s^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2.$$

即 $\qquad (14)$

以是代入(14)乃得

$$\cos\theta=\frac{xx'+yy'+zz'}{rr'} \qquad (15).$$

因 $l=x/r$，$m=y/r$，$n=z/r$，$l'=x'/r'$，$m'=y'/r'$，$n'=z'/r'$，(15)遂可化為(13)。

由方程(13)言之，兩直線正交之必要且充足條件為

$$ll'+mm'+nn'=0 \qquad (16a).$$

或改用其方向數，則 $aa'+bb'+cc'=0 \qquad (16b),$

因 $\cos\theta=0$ 也。同樣，若兩直線之方向係相同，則 $\theta=0$，$l=l'$，$m=m'$，$n=n'$，而 $l^2+m^2+n^2=1$，是即方程(2)。

(17.7)平面之方程　空間之直線係由兩個一次方程表之。若僅有一個一次方程，其所表者實爲一平面。據此以言，方程(10)與(11)可視爲兩平面之交線。決定一平面之位置，其方法甚多，茲先假定已知者爲其中一點 P_0 之坐標 (x_0, y_0, z_0) 與其法線 ON 之方向數 a，b，c。如是令 $P=(x,y,z)$，爲此平面中任意點則 P_0P 與 ON 正交，而據方程(16)即有

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \tag{17}$$

反之，任一含 x，y，z 之一次方程如

$$ax+by+cz+F=0 \tag{18}$$

者皆代表一平面。蓋若 $P_0=(x_0, y_0, z_0)$ 點滿足方程(18)，則

$$ax_0+by_0+cz_0+F=0 \tag{19}$$

而將二者相減之後即有方程(17)。

例1　各坐標面之方程如下：

XOY 面：$z=0$；　YOZ 面：$x=0$；　ZOX 面：$y=0$。

例2　設有一平面與 X，Y，Z 各軸分別相交於 A，B，C，若此三點之坐標，(名爲即該平面之截距 intercept)，分別爲 $(A,0,0)$，$(0,B,0)$及$(0,0,C)$，則以之次第代入(18)即知

$$a=-\frac{F}{A};\quad b=-\frac{F}{B};\quad b=-\frac{F}{C};$$

而所求平面之方程遂爲

$$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1 \qquad (20);$$

此可視爲平面幾何中直線方程截距式(intercept form)之推廣。

(17.8)曲面之方程 在平面幾何中一自變數之函數可以一曲線表之；同樣，在立體幾何中，二自變數之函數，如$z=F(x,y)$者，可以一曲面示之，例如前節之平面。欲說明各種曲面之情況，因須用三度空間，自不若說明平面曲線之易。但如以適當之平面截所求之曲面，使其相交之曲線得呈現於平面上，則曲面狀況爲何當較易了然。例如作平行於坐標面之平面，如$z=z_0$，且以X軸與Y軸在此截面上之射影爲坐標軸，則原方程將變爲含y與x兩變數之函數而其所表之曲線爲何即可描得，例如次：

例1 論$x^2-4y=0$之形狀。

在XOY平面上$x^2-4y=0$之軌跡爲一拋物線，圖(17.9)，今原方程不含z，故z可爲任何值。是以若作一直線垂直於XOY面而過$x^2-4y=0$拋物線上之任意點，此直線上之X，Y，Z坐標亦將滿足此方程。準此即知$x^2-4y=0$所代表者爲一拋物形曲面，如圖(17.9)。讀者至此當已注意若原方程缺少一變數，則該方程即表一柱面。

例2 論$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$之形狀。

以$z=z_0$平面截此曲面，所得之曲線，在XOY平面之射影，其方程爲

$$z_0=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

此即表示若z_0爲任何正值，所得之曲線均爲橢圓。至若z_0爲

負，則 x 與 y 不能均爲實數；換言之，z 不得爲負。故曲面係位在 XOY 平面之上部。若以 $x=x_0$ 平面或 $y=y_0$ 平面截此曲面，所得之曲線，其射影在 XOY 平面中之方程爲

$$z=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \quad 或 \quad z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2},$$

表示其爲向上之拋物線。故所求曲面之形狀係如圖(17.10)所示，因截面或爲橢圓或爲拋物線，故此曲面所包圍之體積稱爲橢圓拋物體(elliptic paraboloid)。

(17.9)曲線之方程　空間之曲線均可視爲兩個曲面之交線，故空間曲線，亦可以兩個適當聯立方程，如

$$z=F(x, y), \quad z=G(x, y) \qquad (21)$$

者，表示之。例如 X 軸可視爲 XOY 平面 $z=0$ 與 ZOX 平面 $y=0$ 之交線。但因通過一曲線之曲面可有無限多個，故表同一曲線之聯立方程，其形式亦儘可不同。

除以兩聯立方程表空間曲線外，吾人亦可利用一參數 t 以示之。令曲線上任意點 P 之坐標與參數 t 之關係爲

$$x=f(t), \quad y=g(t), \quad z=h(t) \qquad (22);$$

今若能自此三關係中之一解出 t 以使 t 爲 x，y 或 z 之函數，然後再代入其他兩關係，所得之兩方程將爲兩個柱面，其交線即爲所求之曲線。例如若自 $z=h(t)$ 解出 t 而得 $t=H(z)$，則方程(22)可寫爲

$$x=f[H(z)]=F(z) \qquad (23a),$$

及

$$y=g[H(z)]=G(z) \qquad (23b).$$

(23a)中未含 y，故爲與 Y 軸平行之柱面；(23b)未含 x，乃與

X 軸平行之柱面。二者相交之曲線即參變方程(22)所示者也。

例　問 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$ 所代表之曲線爲何。

自 $x^2+y^2=a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t=a^2$ 一關係看之，此曲線必係位在圓柱 $x^2+y^2=a^2$ 上。又因 t 每增加 2π，z 增加 $2\pi b$ 而 x 與 y 之值與原值同，故知所得者爲一盤旋圓柱而上之螺旋線(helix)，其螺距(pitch)則爲 $2\pi b$。

(17.10) 曲面之參變方程　設引用兩個參數(例如 s 與 t)而表 P 點之坐標爲

$$x=F(s,t),\ y=G(s,t),\ z=H(s,t) \qquad (24).$$

假定由此三關係中之二可解出 s 及 t 使爲兩變數之函數，例如令 $s=S(x,y)$，$t=T(x,y)$，則以此兩値代入第三關係即得

$$z=H[S(x,y),T(x,y)]=h(x,y) \qquad (25),$$

是即一曲面之方程。由是知方程(24)在適當情況下亦表一曲面。

例　若 ϕ 與 θ 爲兩個參數，問

$$x=a\cos\phi\cos\theta,\ y=b\cos\phi\sin\theta,\ z=c\sin\phi,$$

所代表者爲何？

將 x 與 y 平方後以消去 θ，即有

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\phi;$$

再加以 z 之平方以消去 ϕ 乃得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

是爲一橢圓體之方程，因若以 $x=x_0$，$y=y_0$ 或 $z=z_0$，$|x_0|<|a|$，$|y_0|<|b|$，$|z_0|<|c|$，平面截之，所得之曲線均爲橢圓也。

第十七章習題

1. 自原點作直線至 P 點，坐標如下，求 OP 及 PO 兩方向之方向餘弦及方向角：

(a) $P=(3,4,-12)$；　(b) $P=(-1,-2,2)$；

(c) $P=(-2,6,3)$；　(d) $P=(0,-3,4)$。

2. 求連 P 與 R 各直線之方向餘弦及方向角：

	(a)	(b)	(c)	(d)
P	$(-6,2,3)$	$(5,-1,-6)$	$(4,-3,1)$	$(-4,2,-1)$
R	$(6,-2,0)$	$(0,3,14)$	$(2,3,-2)$	$(-2,0,0)$

並求(a)與(b)，(b)與(c)，(c)與(d)及(d)與(a)各對直線間之角。

3. 已知以下各方向之方向數，計其方向餘弦：

(a) $-2,-2,2$；　(b) $-2,3,6$；

(c) $4,20,-5$；　(d) $-6,2,-3$。

4. 說明以下各方向：

(a) $\cos\alpha=\cos\beta=0$；　(b) $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$；

(c) $\cos\gamma=0$，$\cos\alpha\neq1$；　(d) $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos\beta=-\frac{1}{2}$。

5. 求與以下各題兩方向(由其方向數決定者)正交之方向：

(a) $3,4,2$；$1,2,3$；　(b) $5,6,-3$；$2,-4,-1$；

(c) $0,1,0$；$0,0,1$；　(d) $2,1,-1$；$4,2,0$。

6. 三角形之三頂點爲$(7,3,4)$，$(1,0,6)$及$(4,5,-2)$，試計其各

邊之長，及各邊在三坐標面中與其在坐標軸上各投影之長。

7. 三角形之三頂點爲 $(7, 3, 4)$，$(1, 0, 6)$及$(4, 5, -2)$。求各邊之方向數並示其爲一直角三角形。

8. 四邊形之頂點爲 $(5, 5, 2)$，$(7, 5, -3)$，$(3, 2, -1)$及$(1, 2, 4)$。討論其性質。

9. 連$P_1=(x_1, y_1, z_1)$及$P_2=(x_2, y_2, z_2)$之直線爲$P=(x, y, z)$點所分，其比率爲 $k=P_1P/PP_2$，試證

$$x=\frac{x_1+kx_2}{1+k}, \quad y=\frac{y_1+ky_2}{1+k}, \quad z=\frac{z_1+kz_2}{1+k};$$

由以上結果，求等分$(3, 2, 1)$至$(4, -2, 6)$直線之點。

10. 求以下各直線之方程：

(a) 過$(4, 5, -2)$與$(7, 3, 4)$兩點；

(b) 過$(1, 0, 6)$，其方向數爲 $6, 3, -2$；

(c) 過$(-1, -2, 4)$，而與連$(-3, 0, 3)$於$(-1, -1, 2)$之直線平行；

(d) 過$(1, 2, 3)$，正交於 $3x-4y+5z=6$ 平面；

(e) 過$(2, -1, -3)$，與 $x+2y-3z=2$ 及 $5x-3z+4=0$ 兩平面平行；

(f) 過$(0, 0, 3)$，與 $y=4$，$z=3$；及 $2x=5$，$3y=7$ 兩直線正交。

11. 求以下各平面之方程：

(a) 過$(2, -3, 1)$與方向 $a=2$，$b=1$，$c=-1$ 正交；

(b) 過$(2, 4, 3)$，平行於 $5x-2y+3z=7$ 平面；

(c) 過$(1, -2, 1)$，正交於 $3x+y+z=2$ 及 $x-2y+z=4$ 兩平面；

(d) 過$(3, 4, 1)$與$(2, 6, -2)$兩點，正交於 $2x-3y+4z=2$ 平面；

(e) 與 X，Y，Z 三軸相交之截距分別爲 3，2，及 -6；

(f) 過$(2, 5, -3)$，$(-2, -3, 5)$，$(5, 3, -3)$三點。

12. 若 l，m，n 分表 $lx+my+nz+p=0$ 平面之法線方向餘弦，試示自 $P=(x_0, y_0, z_0)$ 點至此平面之距離爲：

$$lx_0+my_0+nz_0+p。$$

13. 已知兩平面之方程爲 $lx+my+nz+p=0$ 及 $l'x+m'y+n'z+p'=0$，(a) 求其交線之方向數；(b) 計二者間之夾角；(c) 示等分二者間夾角之平面之方程爲

$$lx+my+nz+p=l'x+m'y+n'z+p'。$$

14. 示通過 $A=(x_1, y_1, z_1)$，$B=(x_2, y_2, z_2)$，及 $C=(x_3, y_3, z_3)$三點之平面可用以下行列式表之：

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0。$$

15. 若 $A(x^2+y^2+z^2)+2Lx+2My+2Nz+D=0$ 爲一個球面，問其半徑與中心之坐標各爲何？何時此球不存在？

16. 求以下各圓之半徑及中心：

(a) $x^2+y^2+z^2=25$，$z=3$；

(b) $x^2+y^2+z^2=6x+4y$；$2x+y+2z=1$；

(c) $x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z=2$　$6x+2y-3z+5=0$；

(d) $x^2+y^2+z^2=2x$；$3x-y=3$。

17. 試由 $Ax^2+By^2+Cz^2+2Fyz+2Gzx+2Hxy=0$ 一方程解出 x 使爲 y 與 z 之顯函數而示明如其所表者爲兩平面，則各係數應滿足下列兩關係($A\neq 0$)：

$$A\Delta_3=A\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}=A(ABC+2FGH-AF^2-BG^2-CH^2)=0;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} A & H \\ H & B \end{vmatrix}=(AB-H^2)\leqq 0。$$

一般言之，本題之曲面爲通過原點之錐面，試示明之。

18. 由(17)題結果，令 $z=1$，試示圓錐曲線

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0$$

之性質將如下表所示：

	$\Delta_2>0$ (橢圓類)	$\Delta_2=0$ (拋物線類)	$\Delta_2<0$ (雙曲線類)
$\Delta_3=0$	點 (半徑爲 0 之圓)	如 $G^2>AC$，兩平行線 如 $G^2=AC$，一直線 如 $G^2<AC$，無軌跡	兩相交直線
$\Delta_3=0$	如 $A\Delta_3<0$，橢圓 如 $A\Delta_3>0$，無軌跡	拋物線	雙曲線

19. 利用平行於各坐標面之平面截以下各曲面而討論其形狀：

(a) $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-k^2=0$；　(b) $y^2+z^2=4x$；

(c) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$；　(d) $a^2x^2+y^2=z^2$；

(e) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$； (f) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2cz$；

(g) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$； (h) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

(i) $(x^2+y^2+z^2+a^2-b^2)^2=4a^2(x^2+y^2)$；

(j) $ayz+bzx+cxy=0$。

20. 求以下各曲面之直角坐標方程（u 與 v 爲參數）：

(a) $x=u\cos v$，$y=u\sin v$，$z=kv$；

(b) $x=u\cos v$，$y=u\sin v$，$z=ku$；

(c) $x=au\cos v$，$y=bu\sin v$，$z=cu$；

(d) $x=a\cos v$，$y=b\sin v$，$z=u$；

(e) $x=u\cos v$，$y=u\sin v$，$z=u^2$。

21. 試用兩個適當柱面說明以下各曲線（a,b,c 爲常數，t 爲參數）：

(a) $x=at$，$y=bt^2$，$z=ct^3$；

(b) $x=a\sin t$，$y=b\cos t$，$z=ct$；

(c) $x=t\cos t$，$y=t\sin t$，$z=kt$；

(d) $x=a\cos t$，$y=a\cos(t-2\pi/3)$，$z=a\cos(t+2\pi/3)$；

(e) $x=\cos(t+a)$，$y=\cos(t+b)$，$z=\cos(t+c)$；

(f) $x=A\cos(t+a)$，$y=B\cos(t+b)$，$z=C\cos(t+c)$。

22. 試用一適當參數表出以下各題兩曲面之交線：

(a) $y^2+z^2=a^2$，$x^2+z^2=b^2$；

(b) $x+y+z=0$，$ax+by+cz+d=0$；

(c) $5x^2-yz-2zx+2xy+2x+2y=0$，$2x^2-zx+x+y=0$；

（試用 $t=y/x$ 爲參數）；

(d) $z^2+2z-4y+2=0$，$y^2-2y+x-1=0$；

(試用 $t=(y-1)/(z-1)$ 爲參數)；

23. 試以 $Ax+By+Cz=k$ (k 爲一參數)各平行平面截題(19)各曲面而討論其平行截面 (parallel sections) 之形狀。

24. 已與一二次三元方程：

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Fyz+2Gzx+2Hxy$$
$$+2Lx+2My+2Nz+D=0,$$

今將坐標軸平行移於 (α , β , γ) 點，若所得之方程不含 x,y,z 之一次各項，試示行列式(名爲判別式 discriminant)。

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix} \neq 0。$$

在此情形下，(α , β , γ) 點名爲此二次曲面 (quadric surface) 之心 (center) 。

25. 將前題之原點移至該二次曲面之心後，試示所得方程之常數將爲 Δ_4/Δ_3，Δ_4 與 Δ_3 表以下兩行列式：

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} A & H & G & L \\ H & B & F & M \\ G & F & C & N \\ L & M & N & D \end{vmatrix}; \quad \Delta_3=\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}。$$

26. 由題(17)及題(25)結果，試斷定一二次曲面之形狀可大體的說明如次(參較題 18)：

	$\Delta_3\neq 0$	$\Delta_3=0$
$\Delta_4\neq 0$	有心的二次曲面或無軌跡	拋物面
$\Delta_4=0$	錐　面 或　點	柱面或 無軌跡

第十八章　偏微分及其應用

(18.1) 多元函數　茲於本章開始討論兩個及兩個以上自變數之函數，即多元函數(functions of several variables)之微積各問題。設 S 爲 XOY 平面上之一部分。若在此區域內任擇一點 $P(x, y)$，(卽指定 x 與 y 之值)，立可有一値 u 與之相應，則稱 u 爲 x，y 兩自變數在 S 區域內之函數，而以記號表之如次：

$$u=f(x, y) \tag{1}$$

同樣，令 V 爲空間之一部分；若在 V 內任擇一點 $P(x, y, z)$，卽有一値 u 與之相應，則 u 爲 x, y, z 三變數在 V 區域內之函數

$$u=F(x, y, z) \tag{2}$$

自變數之數目超過二個時，用幾何圖形以說明函數與其自變數之關係(參較十七章)，實不可能，然吾人爲便利計，亦常擴充平面及立體幾何之各概念以作解釋，例如稱 n 個自變數 $x, y, z\cdots$ 爲 n 度空間之點之坐標。此種推廣，讀者可自爲之，茲不俱述。

多元函數之連續性，其定義可由(1.2)節所述之一元函數之連續定義推廣之如下：令 $F(x, y, \cdots\cdots)$ 表 x，y，……等變數之函數，若無論依何律例，當 $x\to a$，$y\to b$，……時，$F(x, y, \cdots)$ 所趨之極限，等於 $F(x, y, \cdots)$ 於 $x=a$，$y=b$，…時之値，卽

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b\\ \cdots\cdots}} F(x, y, \cdots\cdots)=F(a, b, \cdots\cdots)$$

則稱 $F(x, y, \cdots\cdots)$ 連續於 $(a, b, \cdots\cdots)$ 點。

(18.2)偏紀數 設 u 爲 x，y 兩自變數之函數：$u=f(x,y)$。若視 y 爲常數而求 u 對 x 之紀數，則所得之結果稱爲 u 對 x 之偏紀數(partial derivatve)，而以記號 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial x}$，或 $f_x(x,y)$ 表之。換言之，函數 f 對 x 之偏紀數，其定義爲：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\right)。$$

同樣，視 x 爲常數而求 u 對 y 之紀數，乃得 u 對 y 之偏紀數：

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\right)。$$

上述定義亦可推廣於二元以上之函數。例如函數 $u=f(x,y,z)$ 可有次列諸偏紀數：$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$(即 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，$\frac{\partial f}{\partial z}$)。

由上所述，即知有偏紀數之函數，必係連續，雖則連續多元函數未必均有偏紀數。

例 若 $u=x^y+z$，則 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}x^y=yx^{y-1}$；

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}x^y=x^y\ln x；而\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial z}{\partial z}=1。$$

(18.3)偏紀數之幾何的意義 設圖(18.1)所示曲面之方程爲：

$$z=f(x,y) \qquad (3).$$

過曲面上之一定點 P，(在此點 $x=x_0$，$y=y_0$)，作 $ABCD$ 平面(即 $y=y_0$ 平面)與 XOZ 面平行。令 IPJ 表此平面與曲面相交之曲線。若以 OX 及 OZ 在 $ABCD$ 上之射影爲坐標軸，則曲線 IPJ 之方程爲：

$$z=f(x, y_0)。$$

在此平面上，$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$顯然與$\left(\frac{dz}{dx}\right)$之意義相同，故在 $x=x_0$，$y=y_0$ 點之$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$可視爲 IPJ 曲線過 P 點之斜度。同樣，作 $EFGH$ 平面與 YOZ 平行，令其與曲面相交之曲線爲 KPL，則在 $x=x_0$，$y=y_0$ 點之$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$可視爲 KPL 曲線過 P 點之斜度。

(18.4)切面與法綫 既知過 $x=x_0$，$y=y_0$，$z=z_0$ 點之兩切綫之斜度分別爲$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0$及$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0$如前節末所述，則過此點之切面方程即可確定。因過曲面 $z=f(x, y)$ 上任意點之切面必含過該點而切於該面之切綫全體，故此切面可由其中之任二切綫定之。據(17.7)節方程(17)，吾人可將切面之方程寫爲：

$$z-z_0=A(x-x_0)+B(y-y_0) \tag{4}$$

此中之 A 及 B 爲兩個待定之常數。欲求其值，可依次令 $y=y_0$ 平面，或 $x=x_0$ 平面，與方程(4)之平面相交，其交線之斜度必分別等於在 $x=x_0$，$y=y_0$ 點之$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$與$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$即$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0$與$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0$。換言之，平面(4)與 $y=y_0$ 平面之交綫爲 $z-z_0=A(x-x_0)$，其斜度爲 $A=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0$；平面(4)與 $x=x_0$ 平面之交綫爲 $z-z_0=B(y-y_0)$，其斜度爲 $B=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0$；而切於曲面 $z=f(x, y)$ 之平面，其方程遂爲：

$$z-z_0=(x-x_0)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0+(y-y_0)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 \tag{5}$$

又按(17.7)節方程(17)，與此切面正交之直綫，其方向數係與$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0$，$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0$及 -1 三數成正比，故按(17.5)節方程(11)，過 $l\,(x_0,y_0,z_0)$ 點之法綫方程爲：

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0}=\frac{z-z_0}{-1} \qquad (6).$$

(18.5)高級偏紀數　$f(x,y)$之偏紀數$f_x(x,y)$及$f_y(x,y)$既仍爲 x 及 y 之函數，故亦可有偏紀數，其名爲 $f(x,y)$ 之二級偏紀數。此等二級偏紀數，驟視之，似有四個如下：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{以} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{或} f_{xx}(x,y)\text{表之；}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{以} \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \text{或} f_{xy}(x,y)\text{表之；}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{以} \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \text{或} f_{yx}(x,y)\text{表之；}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{以} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{或} f_{yy}(x,y)\text{表之。}$$

但吾人可證明：若$f(x,y)$之二級偏紀數f_{xy}與f_{yx}爲連續函數，則二者彼此相等，故四者之中實僅有三個不同之值。欲證$f_{xy}=f_{yx}$，先令

$u=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)-f(x+\Delta y,y)+f(x,y)$，

而視 x 及 $x+\Delta x$ 爲常數，且寫 $F(y)=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$。如是按均值定理，如 $0<\theta_1<1$，則

$$u=F(y+\Delta y)-F(y)=F'(y+\theta_1\Delta y)\Delta y$$
$$=[f_y(x+\Delta x,y+\theta_1\Delta y)-f_y(x,y+\theta_1\Delta y)]\Delta y,$$

故 $u=f_{xy}(x+\theta_2\Delta x, y+\theta_1\Delta y)\Delta y\Delta x, 0<\theta_1<1, 0<\theta_2<1$, (7).

仿此若令 $G(x)=f(x, y+\Delta y)-f(x, y)$，即可證

$u=f_{yx}(x+\theta_1'\Delta x, y+\theta_2'\Delta y)\Delta x\Delta y, 0<\theta_1'<1, 0<\theta_2'<1$, (8).

由(7)及(8)乃得

$$f_{xy}(x+\theta_2\Delta x, y+\theta_1\Delta y)=f_{yx}(x+\theta_1'\Delta x, y+\theta_2'\Delta y) \qquad (9).$$

惟 f_{xy} 及 f_{yx} 均爲連續函數，故令(9)中之 Δx 及 Δy 趨於 0，即有

$$f_{xy}=f_{yx}。$$

根據上述原理，依照各種不同之次序將 $f(x, y)$ 對 x 求偏紀數 m 次，對 y 求偏紀數 n 次，所得之結果均屬相等，故可以同一記號表之。例如 $\frac{\partial^5 f}{\partial x^2\partial y^3}$ 代表 $f(x, y)$ 對 x 求偏紀數兩次，對 y 求偏紀數三次之結果。

以上所述顯然可以推廣於三元或三元以上之函數。

例 1　設 $u=e^x\cos y$，試求其二級及其三級偏紀數。

$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y$；$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^x\cos y$；$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-e^x\sin y$；

$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y$；$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-e^x\cos y$；$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-e^x\sin y$。

此結果顯然表示 $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$。

又 $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=e^x\cos y$；$\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}=-e^x\sin y$；

$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=-e^x\cos y$；$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=e^x\sin y$；

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial x}=-e^x\sin y\ ;\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial x\partial y}=-e^x\sin y\ ;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial y\partial x}=-e^x\cos y\ ;\quad \frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x\partial y}=-e^x\cos y\ ;$$

亦表示 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}$。

及 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^3 u}{\partial y\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}$。

例 2 設 $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}$，$\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}=-\dfrac{\partial v}{\partial r}$，$u$ 與 v 各為 r 及 θ 之函數，試示

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0。$$

微分第一方程得 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}=-\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 v}{\partial r\partial \theta}$；

因 $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}=-r\dfrac{\partial v}{\partial r}$ 而 r 與 θ 俱為自變數，故 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=-r\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta\partial r}$；

是以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$

$$=\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta\partial r}=0。$$

(18.6)全微分 設 $f(x, y)$ 及其偏紀數 f_x 及 f_y 均為 x 及 y 之連續函數，今將 x 及 y 之值改變，令 Δx，Δy 分表二者之增量，如是所產生之增量 Δu 將為

$$\Delta u=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y),$$

或

$$\Delta u=[f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)]$$
$$+[f(x, y+\Delta y)-f(x, y)] \qquad (10).$$

據均值定理，

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)$$
$$=f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x, \quad 0<\theta_1<1;$$
$$f(x, y+\Delta y)-f(x, y)$$
$$=f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y, \quad 0<\theta_2<1。$$

將此代入(10)內，得

$$\Delta u=f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x+f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y。$$

f_x 及 f_y 既爲連續函數，故當 Δx 及 Δy 皆趨於 0 時，此中之 Δx 與 Δy 之係數分別趨於 $f_x(x, y)$ 及 $f_y(x, y)$。換言之，兩係數與 $f_x(x, y)$ 及 $f_y(x, y)$ 相差將爲二無窮小 h 及 k，故可寫

$$\Delta u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)+\left(h\Delta x+k\Delta y\right) \quad (11).$$

茲仿前此第五章微分之定義，名公式(11)右邊第一括弧內之部分爲 u 之全微分 (total differential)，且亦仿一元函數之微分記號以 du 表之，即：

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y \quad (12).$$

至於公式(11)之第二括號內所含之兩項既均爲兩無窮小之乘積，其值與第一括號內之值(即 du)相較實爲甚小。換言之，du 乃 Δu 之主要部分，故當 Δx 及 Δy 均甚小之時，du 可視爲 Δu 之近似值，此與一元函數之情況相似(參閱5.2節)。

在方程 (12) 中，若令 u 依序等於自變數 x 及 y，則得

$dx=\Delta x$ 及 $py=\Delta$，y 故自變數之全微分即等於其增量，而定義方程(12)可改寫為：

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad (13).$$

吾人可用同樣之方法討論兩元以上之函數之增量。例如若三元函數 $u=f(x,y,z)$ 及其偏紀數 f_x，f_y，f_z 均為連續，則可將其增量化作與(12)類似之形式，其主要部分，即 u 之全微分，係由下列公式計之：

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz \qquad (14).$$

例 1　$u=x^y+z$ 之全微分為

$$du=yx^{y-1}\,dx+x^y\ln x\,dy+dz。$$

例 2　一正長方體之邊長為 3.07，3.96，12.10 尺，問其對角綫之長約為若干。

答案顯然為$\sqrt{3.07^2+3.96^2+12.10^2}$。但用本節原理，其算法應如下：

邊長為 x,y,z 之正長方體，其對角綫之長為：$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，

因 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$；$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$；$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$。

故
$$du=\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}。$$

以 $x=3$，$y=4$，$z=12$，$dx=3.07-3=.07$，$dy=3.96-4=-.04$，$dz=12.10-12=.10$ 代入上二式內，得 $u=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=13$，$du=\dfrac{.07\times3-.04\times4+.10\times12}{13}=\dfrac{1.25}{13}=0.10$，故所求對角綫

之長約為13+0.10=13.10尺。

(18.8)函數的函數之紀數 若 u 為 x 之函數，x 又為自變數 t 之函數，則 u 對 t 之紀數為：

$$\frac{du}{dt}=\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} \qquad (15),$$

此方程已於前(2.8)節證明。茲將其推廣：設 u 為 x，y 兩變數之函數 $[u=f(x,y)]$ 而 x,y 又皆為自變數 t 之函數，則 u 亦為 t 之函數，其對 t 之紀數，可由下列方程求之：

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad (16).$$

欲證此，試與 t 以一增量 Δt，令 Δx，Δy，Δu 表相應之 x，y，u 之增量，則

$$\Delta u=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,y) \qquad (17).$$

依照上節之方法，此方程可化為：

$$\Delta u=f_x(x+\theta_1\Delta x,\ y+\Delta y)\Delta x+f_y(x,y+\theta_2\Delta y)\Delta y, \quad 0<\theta_1<1;\ 0<\theta_2<1.$$

將兩邊各除以 Δt，則有

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}=f_x(x+\theta_1\Delta x,\ y+\Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t}+f_y(x,y+\theta_2\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad (18);$$

令 $\Delta t\to 0$，則 $\frac{\Delta u}{\Delta t}\to\frac{du}{dt}$，$\frac{\Delta x}{\Delta t}\to\frac{dx}{dt}$，$\frac{\Delta y}{\Delta t}\to\frac{dy}{dt}$，

$$f_x(x+\theta_1\Delta x,\ y+\Delta y)\to f_x(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x},$$

及 $$f_y(x,y+\theta_2\Delta y)\to f_y(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y},$$

故乃得所欲證之結果。

若除 t 外，尚有其他自變數，則 u，x，及 y 均應視爲多元自變數之函數，而方程(18)中之紀數均應改用偏紀數表之，即

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \tag{19}$$

因當 Δt 趨 0 時，$\frac{\Delta u}{\Delta t}$，$\frac{\Delta x}{\Delta t}$ 及 $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ 僅表 u, x 與 y 對 t 之偏紀數也。

用同樣之方法可證：若 $u=f(x,y,z)$，則當自變數僅有 t 一個時，

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} \tag{20}$$

而當自變數不止 t 一個時，則

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \tag{21}$$

餘類推。

例　若 $u=x^2y-y^2x$，且 $x=2t-3$，$y=t^2+2$，求 $\frac{du}{dt}$。

據方程(16)，$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

但 $\frac{\partial u}{\partial x}=2xy-y^2$，$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2-2xy$，$\frac{dx}{dt}=2$，$\frac{dy}{dt}=2t$

故 $\frac{du}{dt}=2(2xy-y^2)+2t(x^2-2xy)$。

讀者可自將 $x=2t-3$，$y=t^2+2$ 之關係代入，然後化簡之。

(18.8)函數的函數之微分　(18.6)節方程(13)所示之關係，無論 x，y 是否自變數均恆眞確。蓋設 x 及 y 皆爲另一變數 t 之函數，則

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

以 dt 乘上式之兩邊，即得

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy。$$

又如 x, y 爲 s, t 兩自變數之函數：$x=F(s,t)$，$y=G(s,t)$，則

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t};$$

將前一式乘以 ds，後一式乘以 dt，然後相加，得

$$\frac{\partial u}{\partial s}ds+\frac{\partial u}{\partial t}dt=\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt\right).$$

因 s，t 爲自變數，故

$$\frac{\partial u}{\partial s}ds+\frac{\partial u}{\partial t}dt=du,\quad \frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt=dx,\quad \frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt=dy,$$

以之代入上式後乃得

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{13}$$

此爲方程(13)甚重要之最大理由。

同樣吾人可證明若 $u=f(x, y, \ldots\ldots)$，無論 x，y，……是否自變數，恆有

$$du=f_x\,dx+f_y\,dy+\ldots\ldots \tag{22}$$

質言之，下列兩微分關係仍屬真確：

$$df(u)=f'(u)du,\quad df(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv,$$

此中之 u，v 可爲自變數或其他變數之函數。

例1　$d\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{d(x^2+y^2+z^2)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$=\frac{2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}。$$

例2　$d\ln(x^3+xy)=\dfrac{d(x^3+xy)}{x^3+xy}=\dfrac{3x^2dx+x\,dy+y\,dx}{x^3+xy}$

$$=\frac{(3x^2+y)dx+x\,dy}{x^3+xy}。$$

(18.9)記號問題　當 $u=f(x,y)$ 爲 x 與 y 之顯函數時，u 對 x 或對 y 之偏紀數 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 或 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$，據前述定義，其意義實甚顯然。設除 $u=f(x,y)$ 外，復有 $y=g(x,z)$ 一關係與之聯立，今欲求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$。此時吾人在未求偏紀數前應先問何者爲自變數。前此所用之偏紀數之記號雖足以顯示此點，但本題則須特別謹慎，因自變數可爲 x 與 y，或 x 與 z，或 y 與 z。若自變數爲 x 與 y，則 u 對 x 之偏紀數之記號有時寫爲 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_y$，下標即所以表示當認爲常數之變數。同樣，$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_z$ 表示自變數爲 x 與 z 但所求之偏紀數係對 x 言。至於若 y 與 z 爲自變數，則 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 一記號根本無意義。據此以言，吾人自 $u=f(x,y)$ 及 $y=g(x,z)$ 兩聯立方程可推得下列關係

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_z=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \qquad (23).$$

此實卽方程(19)之另一寫法也。若依方程(19)之寫法，則得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x},$$

其意義則殊欠明顯。

例　在熱力學中，壓力 p，體積 v 及溫度 t 可以所謂物態方程式 $F(p, v, t)$ 表之。但有時所用之兩自變數並非由 p，v，t 三者中選擇其二。例如採用 t 與內能 E 爲自變數，吾人亦可求 v 對 t 之偏紀數。如是，按方程(23)乃有

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_E=\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p+\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_t\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_E,$$

(18.10)隱函數之紀數　設方程 $f(x, y)=0$ 確定 y 爲 x 之隱函數。前(2.9)節曾言，若視 y 爲 x 之函數而求此方程兩邊對 x 之紀數，則由所得之結果，即可解出 $\frac{dy}{dx}$ 之值。據(17.8)節之理，$\frac{dy}{dx}$ 之值亦可用函數 f 之偏紀數表之，因

$$df(x,y)=d(0)=0=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

故即可得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x} \qquad (24).$$

此結果且可推廣於二元以上之函數。例如 $f(x, y, z)=0$ 確定 z 爲 x, y 二變數之隱函數，則 z 對 x（或 y）之偏紀數可自 $df=0$ 求之。因

$$df=0=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

惟求 z 對 x 之偏紀數時，y 應視爲常數，而自此乃得

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} \qquad (25a);$$

同樣亦有 $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x=-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$ (25b)

例1 設 $x^2+y^2+z^2=a^2$。求 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ 及 $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$。

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2=0$；$\frac{\partial f}{\partial x}=2x$；$\frac{\partial f}{\partial y}=2y$；$\frac{\partial f}{\partial z}=2z$。

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{2x}{2z}=-\frac{x}{z}；\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x=-\frac{y}{z}。$$

例2 若 $f(x,y,z)=0$，試證 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x=-1$。

在所欲證之結果中，$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$，$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$，$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x$ 三個偏紀數之意義須特加說明。因 $f(x,y,z)$ 中之 x,y,z 三變數，其地位均同，故任一變數可視為其他二變數之函數。於是，$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ 係指當 z 為 x 及 y 之函數時，z 對 x 之偏紀數；$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$ 則指當 x 為 y 及 z 之函數時，x 對 y 之偏紀數；$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x$ 之意義可仿此釋之。是以應用公式(25)卽有

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}；\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}；\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x=-\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}}；$$

三者相乘乃得 -1。

(18.11) 空間曲綫之切綫與法面 表示空間曲綫之方法有三已見前(17.9)節：

(一)參變方程： $x=f(t)$，$y=g(t)$，$z=h(t)$； (26)

(二)兩柱面之交線： $y=\phi(x)$，$z=\psi(x)$； (27).

(三)任何兩曲面之交線：$F(x,y,z)=0$，$G(x,y,z)=0$； (28).

先就方程(26)論之。當 $t=t_0$ 時，令曲線上 P 點之坐標為 x_0，y_0，z_0。今與 t 以一增量 Δt，以達到曲綫上坐標為 $x_0+\Delta x$，$y_0+\Delta y$，$z_0+\Delta z$ 之 Q 點，如是 PQ 割綫之方向數係與 Δx，Δy，Δz 成正比。今若令 $\Delta t\to 0$ 以使 Q 沿曲綫趨於 P，則 PQ 割綫將趨與曲綫相切，而 Δx，Δy，Δz 之極限將變為此切綫之方向數。但

$$\Delta x:\Delta y:\Delta z=\frac{\Delta x}{\Delta t}:\frac{\Delta y}{\Delta t}:\frac{\Delta z}{\Delta t}\to\frac{dx}{dt}:\frac{dy}{dt}:\frac{dz}{dt}.$$

是以過 (x_0,y_0,z_0) 點而切於曲綫之切綫方程為：

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_0}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{dy}{dt}\right)_0}=\frac{z-z_0}{\left(\frac{dz}{dt}\right)_0} \qquad (29)$$

而過同點之法面方程則為

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{dy}{dt}\right)_0(y-y_0)+\left(\frac{dz}{dt}\right)_0(z-z_0)=0 \qquad (30).$$

例1 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=kt$ 表圓柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上之一螺旋綫。試求過其上 (x_0,y_0,z_0) 點之切綫與法面方程。

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0=-(a\sin t)_0=-y_0,\quad\left(\frac{dy}{dt}\right)_0=(a\cos t)_0=x_0,\quad\left(\frac{dz}{dt}\right)_0=k。$$

故過 (x_0,y_0,z_0) 點之切綫方程為

$$\frac{x-x_0}{-y_0}=\frac{y-y_0}{x_0}=\frac{z-z_0}{k}.$$

而過同點之法面方程則為

$$-y_0(x-x_0)+x_0(y-y_0)+k(z-z_0)=0。$$

若曲線係由方程(27)定之，則可視 $x=t$。如是方向數係與 $1:\left(\frac{dy}{dx}\right)_0:\left(\frac{dz}{dx}\right)_0$ 成正比，而切線與法面方程將分別為

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_0}=\frac{z-z_0}{\left(\frac{dz}{dx}\right)_0} \qquad (31).$$

及　$$(x-x_0)+\left(\frac{dy}{dx}\right)_0(y-y_0)+\left(\frac{dz}{dx}\right)_0(z-z_0)=0 \qquad (32).$$

例2　求 $y^2=2mx$，$z^2=m-x$ 曲線上切線及法面方程。

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\frac{m}{y_0};\left(\frac{dz}{dx}\right)_0=-\frac{1}{2z_0}，$$故切線方程為

$$(x-x_0)=\frac{y_0}{m}(y-y_0)=-2z(z-z_0)，$$

而法面方程則為

$$(x-x_0)+\frac{m}{y_0}(y-y_0)-\frac{z-z_0}{2z_0}=0。$$

若曲線係以方程(28)表之，則所求之切線方程最好以切於兩曲面之切面之交線示之。自(18.4)節方程(5)知與切面正交之直線，其方向數係與 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0$、$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0$，$-1$ 成正比，但

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)};\quad\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)}，$$

故所求之方向數亦可寫為

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0:\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0:\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0。$$

因此，過(x_0, y_0, z_0)點而切於$F(x, y, z)=0$與$G(x, y, z)=0$兩曲面之切面分別爲

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0(y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0(z-z_0)=0,$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0(y-y_0)+\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_0(z-z_0)=0。$$

此兩方程可改寫爲

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_0}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_0}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_0} \quad (33).$$

以與方程(29)或(31)相對應。同樣，法面之方程爲

$$\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_0(x-x_0)+\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_0(y-y_0)+\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_0(z-z_0)=0 \quad (34).$$

此中各行列式內之各數爲F與G兩函數在(x_0, y_0, z_0)點之相當偏紀數。

例 3　求過 $x_0=1$，$y_0=1$，$z_0=1$ 點而切於圓：

$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3x=0$；$G(x,y,z)=2x-3y+5z-4=0$

之切線方程。因

$$F_x=2x-3, \qquad F_y=2y, \qquad F_z=2z;$$

$$G_x=2, \qquad G_y=-3, \qquad G_z=5;$$

故
$$\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_0=\begin{vmatrix}2 & 2\\ -3 & 5\end{vmatrix}=16;$$

$$\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_0=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & 2\end{vmatrix}=9; \quad \begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_0=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-1;$$

而所求之切線方程爲

$$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}。$$

(18.12)弧長　空間曲線上兩鄰點 P 與 Q 之距離之平方旣爲

$$\overline{PQ}^2=\overline{\Delta x}^2+\overline{\Delta y}^2+\overline{\Delta z}^2,$$

故依照平面曲線弧長之計算法卽可推得

$$\overline{ds}^2=\overline{dx}^2+\overline{dy}^2+\overline{dz}^2。$$

若以方程(26)表所與之曲線，則弧長將爲

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2+[h'(t)]^2}\,dt \qquad (35).$$

若曲線爲兩柱面之交線如方程(27)所示，則

$$s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (36).$$

最後，如曲線係以兩曲面之交線如方程(28)所示者表之，則因

$$dx:dy:dz=\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}=j_x:j_y:j_z$$

故

$$\frac{dx}{ds}=\frac{j_x}{\sqrt{j_x^2+j_y^2+j_z^2}}$$

而

$$s=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{j_x^2+j_y^2+j_z^2}}{j_x}\,dx \qquad (37).$$

此中各 j 卽代表所示之行列式。

例1　求以下螺旋線自 $t=0$ 至 $t=t$ 之弧長：

$$x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ z=4t。$$

$$s=\int_0^t\sqrt{9\sin^2 t+9\cos^2 t+16}\,dt=\int_0^t 5\,dt=5t。$$

例2　求 $F(x,y,z)=y-x=0$，$G(x,y,z)=z-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=0$

曲線上自 $x=2$ 至 $x=7$ 之弧長。

$$F_x=-1, \qquad F_y=1, \qquad F_z=0;$$

$$G_x=-\sqrt{x}, \qquad G_y=0, \qquad G_z=1;$$

$$j_x=\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1; \quad j_y=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{x} \end{vmatrix}=1; \quad j_z=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -\sqrt{x} & 0 \end{vmatrix}=\sqrt{x};$$

$$s=\int_2^7 \frac{\sqrt{j_x^2+j_y^2+j_z^2}}{j_x}\,dx=\int_2^7 \sqrt{2+x}\,dx=\frac{2}{3}(2+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^7$$

$$=\frac{2}{3}(27-8)=\frac{38}{3}。$$

(18.13) 多元函數之 Taylor 定理　設有二元函數 $f(x, y)$，並知 x_0, y_0 爲 x, y 之任意一對值。今與 x, y 以增量 h 及 k 後，相應之函數之值變爲 $f(x_0+h, y_0+k)$。茲欲將 $f(x_0+h, y_0+k)$ 發展爲 h 及 k 之冪級數。

先假設有一輔助函數

$$F(t)=f(x_0+ht, y_0+kt) \tag{38}$$

並將其發展爲 Maclaurin 級數：

$$F(t)=F(0)+F'(0)t+\frac{F''(0)}{2!}t^2+\cdots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n$$

$$+\frac{F^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1}, \qquad 0<\theta<1;$$

令 $t=1$，遂有

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{F''(0)}{2!}+\cdots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}+\frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \tag{39}$$

但　$F(1)=f(x_0+h, y_0+k)$，　$F(0)=f(x_0, y_0)$，

且　　$F'(t)=\frac{d}{dt}f(x_0+ht, y_0+kt)$

$=f_x(x_0+ht, y_0+kt)\frac{d}{dt}(x_0+ht)+f_y(x_0+ht, y_0+kt)\frac{d}{dt}(y_0+kt)$

$=hf_x(x_0+ht, y_0+kt)+kf_y(x_0+ht, y_0+kt)$,

$\therefore F'(0)=hf_x(x_0, y_0)+kf_y(x_0, y_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 h+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 k$,

此中$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$及$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$係代表$f(x, y)$在$(x_0, y_0)$點之偏紀數。同樣，

$$\begin{aligned}F''(t)&=\frac{d}{dt}hf_x(x_0+ht, y_0+kt)+\frac{d}{dt}kf_y(x_0+ht, y_0+kt)\\&=\Big(hf_{xx}(x_0+ht, y_0+kt)+kf_{yx}(x_0+ht, y_0+kt)\Big)h\\&\quad+\Big(hf_{xy}(x_0+ht, y_0+kt)+kf_{yy}(x_0+ht, y_0+kt)\Big)k\\&=h^2f_{xx}(x_0+ht, y_0+kt)+2hkf_{xy}(x_0+ht, y_0+kt)\\&\quad+k^2f_{yy}(x_0+ht, y_0+kt).\end{aligned}$$

$$\therefore\quad F''(0)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 h^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0 hk+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 k^2.$$

仿此，亦可得

$$F'''(0)=\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 h^3+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right)_0 h^2k+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right)_0 hk^2+\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0 k^3$$

……………………………………

由此類推，即知若令

$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0, y_0)$ 代表 $hf_x(x_0, y_0)+kf_y(x_0, y_0)$,

$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0)$代表$\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x_0, y_0)$

$\qquad=h^2f_{xx}(x_0, y_0)+2hkf_{xy}(x_0, y_0)+k^2f_{yy}(x_0, y_0)$,

……………………………………

則自(39)知二元函數之 Taylor 定理可寫爲：

$$f(x_0+h, y_0+k)=f(x_0, y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0, y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0)+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}$$

$$f(x_0+\theta h, y_0+\theta k), \qquad 0<\theta<1, \qquad (40).$$

又在此中，令 $x_0=y_0=0$，則得 Maclaurin 公式：

$$f(h, k)=f(0, 0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0, 0)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0, 0)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(\theta h, \theta k), 0<\theta<1, \quad (41).$$

(18.14)二元函數之均值定理　若於方程(39)中，取 $n=1$，且將 $f(x_0, y_0)$項遷至左邊，則得

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$$

$$=hf_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k)k+f_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k), \quad (42).$$

或以 x，y 代 x_0+h，y_0+k；x_1，y_1 代 $x_0+\theta h$，$y_0+\theta k$，則可得

$$f(x, y)-f(x_0, y_0)=(x-x_0)f_x(x_1, y_1)+(y-y_0)f_y(x_1, y_1), \quad (43).$$

此中(x_1, y_1)爲連(x_0, y_0)及(x, y)線段上之一點。是爲二元函數之均值定理。

(18.14) 極大與極小　設二元函數 $z=f(x, y)$ 在 XOY 平面上之一點 $P(x_0, y_0)$ 之值，較其在 P 之鄰近各點之值皆大，

則 z 之值在此點爲一極大；反之，若 z 之值較其鄰近各點之值皆小，則 z 在此點爲一極小。

當 $f(x, y)$ 於 $x=x_0$，$y=y_0$ 點爲極大或極小時，其在此點之偏紀數顯然必須爲 0：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0, \tag{44}$$

此蓋因通此點之切面必取水平之方向，而此兩偏紀數可視爲切面上兩個直線之斜度也。至於所求之點，果爲極大或極小與否，尚須用二級紀數證驗之。此與單元函數極大與極小情形頗相似，但證驗之法較繁，其原理如下：

設 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$，$\frac{\partial f}{\partial y}=0$，則按方程(40)，$f(x_0+h, y_0+k)$ 可寫爲

$$f(x_0+h, y_0+k)=f(x_0, y_0)+\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+\frac{1}{6}R,$$

或

$$\Delta z=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+\frac{1}{6}R, \tag{45}$$

此中 $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$， $B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$， $C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$；

$$R=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x_0+\theta h, y_0+\theta k), \quad 0<\theta<1。$$

若 A，B，C 三數不全爲 0，則當 h 及 k 之値够小時，Δz 之正負號視 $\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)$ 而定，因 R 中之各項均爲 h，k 之三次式，故爲較高級之無窮小也。

欲知二次式 $(Ah^2+2Bhk+Ck^2)$ 之符號與 A，B，C 之關係，可寫之爲：

$$Q(h, k)=Ah^2+2Bhk+Ck^2=A(h-\alpha k)(h-\beta k),$$

其中 $A\alpha=-B+\sqrt{B^2-AC}$, $A\beta=-B-\sqrt{B^2-AC}$。

如是知若 $B^2>AC$,則 α 與 β 爲實數,而所用之 h 與 k 如滿足 $\alpha k<h<\beta k$,則 $(h-\alpha k)(h-\beta k)$ 之符號爲負,否則爲正;故如 $B^2>AC$,則二次式 $Q(h, k)$ 之符號可正,亦可負。反之,如 $B^2<AC$,α 與 β 同爲複數,二次式應寫爲

$$Q(h, k)=\frac{1}{A}\left\{(Ah+Bk)^2+(CA-B^2)k^2\right\},$$

括弧內之值既爲兩平方之和,除 $h=k=0$ 外,無論 h 與 k 爲何,其值均爲正。故如 $B^2<CA$,(此時 C 與 A 之符號當然相同),二次式 $Q(h, k)$ 之符號將爲確定,即與 A 或 C 之符號相同。至若 $B^2=AC$,則 $Q(h, k)$ 將爲一完全平方如 $\frac{1}{A}(Ah+Bk)^2$,而用適當之 h 與 k,其值可爲 0。

根據以上之代數原理,可知欲定二元函數之極大與極小,除方程(44)所示之必要條件外,尚應分別討論之如下:

(1) 若 $B^2-AC<0$,且

(a) A 及 C 之符號爲正即 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0$,則 $\Delta z>0$,而函數在此點爲極小;

(b) A 及 C 之符號爲負即 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0$,則 $\Delta z<0$,而函數在此點爲極大。

(2) 若 $B^2-AC>0$,則 Δz 在此點無定號,故非極大或極小。

(3) $B^2-AC=0$；在此種情形下函數是否極大或極小不能由二級偏紀數判定之，因二次式 $Q(h,k)$ 可以為 0，Δz 之符號須由 R 決定之也。

例1 試示 $u=x^3+3x^2-2xy+5y^2-4y^3$ 在原點之值為一極小。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6x-2y；\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2x+10y-12y^2；$$

在原點，此兩偏紀數顯均為 0，故此點可為極值。今 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x+6$；$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=10-24y$；$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-2$，故於原點 $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ $=4-6\times 10=-56<0$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}>0$，而原點遂為一極小。

例2 求內接於橢圓體 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 之最大正長方體。

令 V 表一內接於此橢圓體內之正長方體之體積：$V=8xyz$，

則 $$\frac{\partial V}{\partial x}=8y\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial V}{\partial y}=8x\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z}。$$

令 $\frac{\partial V}{\partial x}=0$，$\frac{\partial V}{\partial y}=0$， 乃得

$$y\left(z-\frac{c^2x^2}{a^2z}\right)=0,\quad x\left(z-\frac{c^2y^2}{b^2z}\right)=0。$$

或 $$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=K^2。$$

代入橢圓體方程乃得 $K^2=\frac{1}{3}$ 而所求[illegible]

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}},\quad y=\frac{b}{\sqrt{3}},\quad z=\frac{c}{\sqrt{3}}。$$

故所求之體積 $V=\frac{8}{9}\sqrt{3}\,abc$。

第十八章習題

1. 求下列各函數之一級偏紀數：

(a) $u=\sin xy$；　(b) $u=ax^3+2bxy+cy^2$；

(c) $u=x\ln y$；　(d) $u=x^3+y^3+z^3$；

(e) $u=e^{xyz}$；　(f) $u=z\sin^{-1}\left(\frac{y^2}{x}\right)$。

2. 求下列各曲面過 (x_0,y_0,z_0) 點之法線與切面方程：

(a) $z=\tan^{-1}\frac{y}{x}$；　(b) $z=ax^2+by^2$；

(c) $x^2+y^2+z^2=a$；

(d) $Ax^2+By^2+Cz^2+2Fyz+2Gzx+2Hxy+2Lx+2My+2Nz+D=0$。

3. 求下列兩曲面相交之角：

(a) $x^2+y^2+z^2=14$，[illegible]$=20$，於 $(1,-2,3)$ 點；

(b) $x^2+3y^2+2z^2=9$，$x^2+y^2+z^2$[illegible]44，於 $(2,1,1)$ 點；

(c) $3x^2+2y^2=2z+1$，$x^2+y^2+z^2=4y+2z-2$，於 $(1,1,2)$ 點。

4. [illegible]上 $(-1,2,3)$ 點之切面與 XOY

坐標面相交之角為何?

5. 求下列函數之二級各偏紀數：

(a) $u=ax^2y+bxy^2+cx^2y^2$；　(b) $u=x\cos by$；

(c) $u=x^y$；　(d) [illegible]；

(e) $u=\dfrac{xyz}{x+y+z}$；　(f) $u=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$；

(g) $u=x\sin y+y\sin x$；　(h) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；

(i) $u=e^{xy}+ye^x+xe^y$；　(j) $u=\ln\left\{x\tan^{-1}\sqrt{x^2+y^2}\right\}$。

6. 若 $u=x(y-z)$ 而 $x=r+2s$，$y=s-t$，$z=t$，

求 $\dfrac{\partial u}{\partial r}$，$\dfrac{\partial u}{\partial s}$ 與 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$。

7. 令 u 為 x 與 y 之函數，若 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ 與 $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$，並示 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$。

8. 試示下列諸等式：

(a) 若 $u=(ax^2+by^2+cz^2)^3$，則 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}$；

(b) 若 $u=\dfrac{xy}{x+y}$，則 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$；

(c) 若 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，則 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$；

(d) 若 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，則 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$；

(e) 若 $u=(x+z)e^{y+z}$，則 $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y\partial z}=\dfrac{\partial^4 u}{\partial y\partial x^2\partial z}=\dfrac{\partial^4 u}{\partial y\partial z\partial x^2}$；

(f) 若 $u=x\phi\left(\frac{y}{x}\right)+(x+1)y\ln x$，則

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x+1)y；$$

(g) 若 $u=f\left(\frac{y}{x}\right)+xF\left(\frac{y}{x}\right)$，則

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0；$$

(h) 若 $u=f(x+at)$，$v=F(x-at)$，則

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}，\quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}。$$

9. 令 u 爲 x 及 y 之函數。今

(a) 若 $x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$，$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$，

試示 $$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y'}\right)^2，$$

及 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}。$$

(b) 若 $x^2+y^2=r^2$，$y=x\tan\theta$，

試示 $$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2，$$

及 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}。$$

(c) 若 $x=e^r\cos t$，$y=e^r\sin t$，

證 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{-2r}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)。$$

10. 若 u 與 v 均爲 x 與 y 之函數，而 $v=f(u)$，試示

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}。$$

11. 若 $x=f(u,v)$，$y=g(u,v)$，試示

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y=1,$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y=0$$

並由此兩方程式解出 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y$ 與 $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y$，試計 $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x$ 及 $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x$。

12. 設 $x=u+v$，$y=u^2+v^2$，試由前題結果求 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y$，$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y$ 等。

13. 若 $F(x,y,z,w)=0$，試示

(a) $\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w}=1$，　(b) $\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-1$。

(c) $\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w}=1$，

計算此中各偏紀數時，除分子與分母所示之變數外，其他均視為常數。

13. 若 $f(x,y)=0$，試示

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\{f_{xx}(f_y)^2-2f_{xy}f_xf_y+f_{yy}(f_x)^2\}}{(f_y)^3},$$

並以 $e^x\cos y+xy=0$ 為例。

15. 求下列各函數 u 之全微分：

(a) $u=\tan^{-1}\frac{y}{x}+\tan^{-1}\frac{x}{y}$；　(b) $u=x^y y^z z^x$；

(c) $u=e^x\ln yz$ 而 $z=\sin x$；(d) $u=f\left(x^2+y^2,\frac{x+y}{z}\right)$。

16. 求下列各曲線之切線與法面方程：

(a) $xy+yz=4$， $x^2+y^2+z^2=14$， 過$(-1,2,3)$點；

(b) $y^2=2mx$， $z^2=m-x$， 過(x_0,y_0,z_0)點；

(c) $2x^2+3y^2+z^2=9$，$z^2=3x^2+y^2$， 過$(1,-1,2)$點；

(d) $x=\dfrac{t}{1+t}$，$y=\dfrac{t+1}{t}$，$z=t^2$， 過$t=1$點；

(e) $\left.\begin{array}{l}F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+4a^2=0\\ G(x,y,z)=x^2+y^2-2ax=0\end{array}\right\}$過任意點$(x_0,y_0,z_0)$；

(f) $\left.\begin{array}{l}F(x,y,z)=x^2+y^2-a^2=0\\ G(x,y,z)=y-x\tan\dfrac{z}{c}=0\end{array}\right\}$過任意點$(x_0,y_0,z_0)$。

17. 求$x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$曲線與$3x-7y+2z=0$平面相交之角。

18. 證螺旋線(helix) $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=kt$與Z軸所作之角有固定値。

19. 試示兩曲面 $F(x,y,z)=0$ 及 $G(x,y,z)=0$ 於其交點 $P=(x_0,y_0,z_0)$如係垂直，則

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_0=0。$$

20. 求平面 $ax+by+cz-p=0$ 上最近於原點之點。

21. 求曲面 $xyz=a^3$ 上最近於原點之點。

22. 若$x=r\sin\phi\cos\theta$，$y=r\sin\phi\sin\theta$，$z=r\cos\phi$，$V=f(x,y,z)=F(r,\theta,\phi)$，試示

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$$

$$+\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\cot\phi}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \phi}=0，$$

及 $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)^2$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2。$$

23. 設以下各函數可展爲 Taylor 或 Maclaurin 級數，試示

(a) $e^x\cos y=1+x+\frac{1}{2}(x^2-y^2)+\cdots\cdots$；

(b) $\sin x\sinh y=\frac{2xy}{2!}+\frac{x^4+6x^2y^2+y^4}{4!}$

$$+\frac{x^6+15x^4y^2+15x^2y^4+y^6}{6!}+\cdots\cdots；$$

(c) $a^x\ln(1+y)=y+\frac{1}{2}(2xy\ln a-y^2+x^2y\ln^2 a-xy^2\ln a)$

$$+\frac{1}{3}y^3+\cdots\cdots；$$

24. (a) 求 $z=x^2+xy+y^2+y^3$ 之極大與極小；

(b) 求 $z=x^2+2xy+2y^2+4x-8y$ 之極大與極小；

(c) 求 $z=x^3-y^3+x^2+y^2$ 之極大與極小。

25. 若 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 及 $lx+my+nz=0$，

證 $\dfrac{dx}{\frac{ny}{b^2}-\frac{mz}{c^2}}=\dfrac{dy}{\frac{lz}{c^2}-\frac{nx}{a^2}}=\dfrac{dz}{\frac{mx}{a^2}-\frac{ly}{b^2}}$。

26. 一柱體長一米半徑爲 2 厘米，若長增加一厘米，半徑增加 .01 厘米，問體積增加若干？

27. 正圓錐體之斜高爲 40 厘米，底半徑爲 20 厘米，測量時之可能誤差爲 0.2 厘米，求(a)所計得之體積及(b)斜曲面積之最

大可能誤差。

28. $S=\frac{A}{A-W}$ 爲測定物體比重之公式，A 表物體在空氣中之重，S 表比重，設稱 A 之可能誤差爲 0.05 克，W 之可能誤差爲 0.02 克；令 $A=90$ 克，$W=50$ 克，求最大之可能誤差。

29. 鐘擺之週期爲 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 若 Δl 及 Δg 爲測定時之可能誤差，求 T 之最大可能誤差。

30. 砲彈射程爲 $R=\frac{V^2\sin 2\alpha}{g}$，若各量之可能誤差爲 ΔV，$\Delta\alpha$，及 Δg，求 R 之最大可能誤差。

31. 一圓錐體之高爲 100 厘米，每秒縮短 10 厘米，其底半徑爲 50 厘米，每秒增長 5 厘米，求其體積之變化率。

32. 由下列函數的函數，求其紀數：

(a) 若 $u=x^2+y^2$，$x=r\cos t$，$y=r\sin t$，求 $\frac{\partial u}{\partial r}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial t}$；

(b) 若 $u=e^{xy}$，$x=\sqrt{r^2+s^2}$，$y=\tan^{-1}\frac{s}{r}$，求 $\frac{\partial u}{\partial r}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial s}$；

(c) 若 u 爲 x,y 之函數，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，求 $\frac{\partial u}{\partial r}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial\theta}$。

33. 自下列諸函數的函數，求指定之紀數或全微分：

(a) 若 $u=2x^2+3xy+y^2$，$x=\tan 2t$，$y=\sin 2t$，求 $\frac{du}{dt}$；

(b) 若 $u=x^3-12yz^3+6xyz+3y^3$, $y=\sin x$, $z=\cos x$，求 $\frac{du}{dx}$；

(c) 若 $u=e^x\ln(yz)$，$z=\sin(xy)$，求 du；

(d) 若 $u=e^{ax}(y-z)$，$y=\sin x$，$z=\cos x$，求 $\frac{du}{dx}$。

34. 求下列各題之 $\frac{dy}{dx}$：

(a) $e^x+e^y=2xy$；　　(b) $\sqrt{x^2+y^2}-a\tan^{-1}\frac{y}{x}=0$。

35. 由下列諸式求 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ 及 $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$：

(a) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$；　　(b) $xy+yz+zx=1$；

(c) $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=0$；　　(d) $e^x+e^y+e^z=3xyz$。

36. 求下列曲線之弧長：

(a) $2y=x^2$，$3z=x^3$，自 $x=0$ 至 $x=1$；

(b) $x=3\theta\cos\theta$，$y=3\theta\sin\theta$，$z=4\theta$ 自 $\theta=0$ 至 $\theta=4$；

(c) $\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-4&=0\\ x^2+y^2-2x&=0\end{aligned}\right\}$ 自 $x=0$，$y=0$ 至 $x=1$，$y=1$；

(d) $x=2a(\sin^{-1}t+t\sqrt{1-t})$，$y=2at^2$，$z=4at$，

自 $t=t_1$ 至 $t=t_2$。

37. 有一開口長方體之匣，其三邊之長為 x，y，z；若匣之五塊旁面積之和有固定值，求其最大容積。

38. 若 $xyz=k$(常數)，當 $u=\frac{xyz}{ax+by+cz}$ 為極大時，求 x,y,z 之值。

第十九章　重積分

(19.1) 定積分意義之回憶　第七章討論定積分時，吾人先由求面積一問題，說明 $\int_a^b f(x)dx$ 定積分之意義，及其與無限和 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(\Delta x)_k$，$(\Delta x)_k\to 0$ 之關係。嗣後對於此種直觀方法曾略有批評，而提出嚴格的分析方法所應顧及各點(見7.4節)。自此之後，討論定積分之應用時(例如第(11)章之應用與第(13)與(14)章之各定積分)，吾人為簡捷起見，均不顧(7.4)節之評語，徑由題意求得一適當之微分關係如

$$dm = f(x)dx \tag{1}$$

然後於適當之上下限內，計其定積分，作為所求之值。自此諸章各問題之解答方法言之，各問題之難點即在於應如何選擇自變數(例如 x)，方能將上列之微分關係寫出。例如求一密度不均勻之立體之質量時，吾人先有元體質量 dm 與元體體積 dV 及密度 q 之關係

$$dm = q\,dV \tag{2}$$

然後由題意選一適當之自變數 x 使 q 為 x 之函數，dV 與 $\frac{dV}{dx}$ 亦為 x 之一函數 $g(x)$ 與 dx 相乘，再寫之如方程(1)之形狀。又例如求液體靜壓時，先由物理學原理求得元面積 dA 所受之壓

力 dF 爲

$$dF=wy\,dA \qquad (3).$$

(見十四章)。然後將[illegible] dA 改爲 [illegible] dy 以使 $dF=wy$ [illegible] dy 而積分之。嚴格言之，方程(3)之元體乃一面積 dA，故若按無限和觀念言之，由之所求得之定積分實係所號爲二重積分者(double integral)；同理方程(2)之元體乃一體積 dV，由之所求得之定積分實所號爲三重積分者(triple integral)。此等多重積分(multiple integral)之意義，可仿照(7.1)節之敍述而推廣之，茲不贅述。

§19.2 積分二次 由上述觀之，某題能否以一單次積分，如

$$u=\int_a^b f(x)dx \qquad (4).$$

者，作其解答，全視 $f(x)$ 能否由題意求出。有時依題意以尋求 $f(x)$ 不甚易，[illegible] $f(x)$ [illegible]得之，例如

$$f(x)=\int_{y_1}^{y_2} g(x,y)dy \qquad (5).$$

此中之 y_1 與 y_2 均爲 x 之函數，而計算之時，變數只有 [illegible] x 暫保不變。如是若以方程(5)中之 $f(x)$ 代入方程(4)，則經過兩次積分後，u 之值亦可求得，即

$$u=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} g(x,y)dy \qquad (6).$$

§10.3 以面積與積分二次。設欲求在 $y_2=F(x)$ 及 $y_1=G(x)$ 兩曲線間之面積 $APBRA$（圖(10.1)）。按第七章所述之方法，吾人先將此面積分為甚多細條如 $PQRS$ 者。每條之寬均為 dx，其高約為 y_2-y_1，故其面積為

$$dA=(y_2-y_1)dx.$$

但 $y_2-y_1=F(x)-G(x)$，故欲得所求面積 A，即可將方程(7)積分一次計得之：

即
$$A=\int_a^b [F(x)-G(x)]dx \qquad (8).$$

如欲改用積分二次以求此面積，可將細條 $PQRS$ 之面積再分為甚多之元面積如 $KLMN$ 者。此等長方形元面積之寬均為 dx，其高則為 dy，即元面積為 $dS=dx\,dy$。今令 y 自 y_1 變至 y_2，而後將所得之各元面積相加，即得細條 $PQRS$ 之面積為

$$dx\int_{y_1}^{y_2} dy=dx(y_2-y_1) \qquad (9).$$

是即方程(7)。總言之，若將 $APBRA$ 面積依縱橫線分之為甚多之元面積 $dS=dx\,dy$，再於適當之上下限內求 y 之定積分，而 dx 暫認為固定，則得方程(9)所示之關係；然後於適當之上下限內求方程(9)之定積分，乃得所求之面積

$$A=\iint_s dS=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} dy \qquad (10).$$

方程(10)中間之記號 $\iint_s dS$，乃以表示所求之積分係先分面域

S 爲甚多之元面積如 dS 者，然後求展布於所討論區域 S 上之積分。至於此積分之計算法，則仍須依方程(10)最右邊所示積分二次之步驟行之。

若所欲求之面積係在 $\theta=\theta_1$，$\theta=\theta_2$ 及 $r_1=F(\theta)$ 曲線之內，則按(10.4)節方法吾人可將此面積用夾角爲 $d\theta$ 之 OP 及 OQ 兩向徑分之爲甚多之扇形如圖(19.2)中之 OPQ 者。前已述及，此等扇形面積約爲

$$dA=\frac{1}{2}r_1^2\,d\theta \tag{11}$$

因 $r_1=F(\theta)$ 已可表爲 θ 之函數，故所求者可逕自下列之單次積分

$$A=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}[F(\theta)]^2d\theta \tag{12}$$

計之。至扇形 OPQ 之面積，亦可另行積分求得之。其法係將扇形用通過原點 O 之同心圓弧分爲甚多之四邊形 $KLMN$（圖19.2）。若 r 表 OK，則 $KL=NM=dr$，KN 與 LM 兩弧長各爲 $r\,d\theta$ 與 $(r+dr)d\theta$。因 dr 與 $d\theta$ 均爲無窮小，故於忽略二級無窮小 $dr\,d\theta$ 之值後，$KLMN$ 元面積可寫爲 $dS=r\,d\theta\,dr$。雖在 OPQ 內之各元面積如 $KLMN$ 者，其 $d\theta$ 均係固定，故求 OPQ 面積時，只須任 r 自 0 變至 $r_1=F(\theta)$，即可得其值爲

$$d\theta\int_0^{r_1}r\,dr=d\theta\left(\frac{1}{2}r_1^2\right)=\frac{d\theta[F(\theta)]^2}{2} \tag{13}$$

是即方程(11)矣。由是知若將 OAB 面積按向徑及同心圓弧分之爲甚多之元面積 $dS=r\,d\theta\,dr$，再將適當之此形狀兩次對於定

積分，$d\theta$ 暫認為固定，則得方程(13)之關係；得此後復於適當之上下限內求對 θ 之定積分乃得所求之面積

$$A=\iint_s dS=\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta\int_0^{r_1} r\,dr \qquad (14).$$

(19.4)體積與積分二次　在上節討論求面積之兩例中，第一次積分時，被積函數為 1(方程 10)或 r(方程 14)，均甚簡單，故實無須經二次積分後方能計得其答案。設遇他種問題，有時非積分二次不可。最常見之例當以計算位在一曲面 $z=g(x,y)$ 下，XOY 平面上，及 $y_1=F(x)$ 與 $y_2=G(x)$ 兩柱面間之體積，圖(19.3)。茲將兩柱面在 XOY 平面上所包圍之面積依縱橫線分為甚多之元面積 $dx\,dy$。在每個元面積之四角豎立與 Z 軸平行之垂線以與 $z=g(x,y)$ 曲面相交。由是所得之稜柱 KM'，其體積將為

$$dV=z\,dS=g(x,y)\,dx\,dy \qquad (15).$$

茲若維持 x 不變而令 y 自 $y_1=F(x)$ 變至 $y_2=G(x)$，則求方程(15)中 $g(x,y)dx\,dy$ 對 y 之積分後，其值將等於厚為 dx 之薄片之體積，即

$$PR'\text{ 體積}=dx\int_{y_1}^{y_2} g(x,y)\,dy \qquad (16).$$

經此第一次積分後，方程(16)遂可變為 $f(x)dx$ 之形式，故再求其對 x 之定積分即得各薄片體積之和(即所求之體積)為

$$V=\iint_s z\,dS=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} g(x,y)\,dy \qquad (17).$$

例 求 XOY 平面與下列拋物面(paraboloid)間之體積：

$$z=1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}.$$

因此物體對 YOZ 與 ZOX 兩平面均係對稱，故所求體積為圖(19.4)所示者之四倍。此體與 XOY 平面相交為橢圓

$$1=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9};$$

是以若維持 x 固定而截出一厚為 dx 之薄片，則薄片一邊 P 之 Y 坐標為 $y_1=0$ 其他邊 Q 之 Y 坐標則為 $y_2=3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$。於是薄片之體積為

$$dx\int_{y_1}^{y_2} z\,dy=dx\int_0^{y_2}\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\right)dy$$

$$=dx\left\{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)y-\frac{y^3}{27}\right\}_0^{y_2}=dx\left\{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y_2^2}{27}\right\}y_2$$

$$=\frac{1}{4}\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx;$$

再將各薄片體積相加，即求上列結果自 $x=0$ 至 $x=2$ 之定積分，即得

$$\frac{V}{4}=\iint_s z\,dS=\int_0^2\frac{1}{4}\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx.$$

若以 $x=2\sin\theta$ 代入，即可計算得 V 之值為

$$V=\left(\frac{x}{4}(10-x^2)\sqrt{4-x^2}+6\sin^{-1}\frac{x}{2}\right)_0^2=3\pi.$$

(19.5)二重積分 自嚴格分析立場觀之，吾人曾言方程(2)

線(3)之積分實爲所號爲三重與二重積分者。茲在本節述二重積分之定義及其計算法，至於三重積分則於(19.10)節論之。

設 $g(x,y)$ 爲自變數 x 及 y 在 S 區域內之連續函數。茲將此區域用任意方法分爲 n 個小區域 $(\Delta S)_1$，$(\Delta S)_2$，……，$(\Delta S)_n$。在每小區域 $(\Delta S)_k$ 內任擇一點 P_k，坐標爲 (x_k,y_k) 而計下列之和：

$$g(x_1,y_1)(\Delta S)_1+g(x_2,y_2)(\Delta S)_2+\cdots+g(x_n,y_n)(\Delta S)_n \qquad (18).$$

當 n 無限增大，各小區域 $(\Delta S)_k$ 間任意兩點之距離皆趨於 0 時，方程(18)之極限名爲展布於區域 S 上函數 $g(x,y)$ 之二重積分 (double integral)，其記號常寫爲

$$\iint_S g(x,y)dS=\lim_{\substack{n\to\infty\\(\Delta S)_k\to 0}}\sum_{k=1}^{k=n} g(x_k,y_k)(\Delta S)_k \qquad (19).$$

在方程(19)中，若視函數 $z=g(x,y)$ 爲一曲面，則依上節所述，所求之無限和可視爲一適當立體之體積。此理與(7.3)節所論之單次定積分之理相似。是以二重積分之值，可由積分二次計得之。換言之，如取縱橫線爲網絡，分區域 S 爲甚多之元面積 $dxdy$，則二重積分(19)之值可寫爲

$$\iint_S g(x,y)dS=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} g(x,y)dy$$

$$=\int_A^B dy\int_{x_1}^{x_2} g(x,y)dx \qquad (20).$$

此中之 a，b，A，B 爲適當之常數，y_1 與 y_2 爲 x 之函數(由區

域 S 圖線之方程定之)，x_1 與 x_2 則爲 y 之函數(亦由區域 S 圖線之方程定之)。求 $\int_{y_1}^{y_2} g(x, y)\,dy$ 時，x 應暫認爲不變，而求 $\int_{x_1}^{x_2} g(x, y)\,dx$ 時，y 則應暫認爲不變。不惟如是，所用之網絡可爲任何形狀。例如若以向徑與以原點爲中心之同心圓弧作網絡，則二重積分(19)亦可依下列之式，積分二次以計之 $[g(x, y)=G(r, \theta)]$：

$$\iint_S G(r,\theta)\,dS=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1}^{r_2} rG(r,\theta)\,dr$$

$$=\int_u^v r\,dr\int_{\theta_1}^{\theta_2} G(r,\theta)\,d\theta \qquad (21).$$

此中之 r_1 與 r_2 係 θ 之函數，θ_1 與 θ_2 則爲 r 之函數，α，β，v，u 均爲常數。至於其算法可仿前行之，茲不贅。讀者當已注意方程(19)係定義，方程(20)與(21)則爲實施此定義以作計算之定理，其證雖係藉幾何的直覺，然亦可用純粹分析方法(參閱7.2及7.3節)。

<u>(19.6)二重積分之應用</u> 甚多之物理學及幾何學上問題均易直接排成二重積分。排成二重積分之後，欲計其值，必須積分二次。如是，計算之前，其先決問題有下列數端：

(1)元面積應爲何，卽元面積應用 $dx\,dy$ 或用 $r\,d\theta\,dr$？

(2)積分之次序爲何，卽應先對 x(或 r)積分或先對 y(或 θ)積分。

(3)所用之上下限爲何?

此等問題對於計算之難易有莫大影響，讀者應多加練習方知所能達。茲舉數例於下：

例 1　設有一均厚之正方薄片 $ABCD$。每邊寬 a，厚 b，其各處之密度與距一角(例如 A)之距離之平方成正比。若在 C 點之密度爲 c，求其質量，質量中心，與旋轉於 AB 或 AD 邊之迴轉半徑。圖(18.5)。

先論質量。本題當用直角坐標，因如是則上下限較簡。按定義 $dm=bq\,dS$ 或 $m=\iint bq\,dS$，q 表密度。茲於坐標爲(x,y)之點作一面積 $KLMN$，其各邊與 X 及 Y 軸分別平行。此元面積距 A 之遠度之平方爲 x^2+y^2，故其密度 q 爲

$$q=k(x^2+y^2)$$

欲定比例係數 k 之值，以 C 點之坐標(a,a)及密度 c 代入，乃有 $c=k(a^2+a^2)$或 $k=\frac{c}{2a^2}$。所求之質量對於對角線 AC 爲係對稱，故積分次序爲何不必細究。假定先對 y 積分，則

$$m=\iint_S bq\,dS=\int_0^a dx\int_0^a \frac{bc}{2a^2}(x^2+y^2)dy$$

$$=\int_0^a \frac{bc}{2a^2}\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^a dx=\int_0^a \frac{bc}{2a}\left(x^2+\frac{a^2}{3}\right)dx$$

$$=\frac{bc}{2a}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{a^2x}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{a^2bc}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{a^2bc}{3}\text{。}$$

次論其質量中心。自對稱情況言之，質量中心必位在對角線

AO 上，故只須求其距 Y 軸遠度 $\bar{x}$。因 $dm=bq\,dS$，故按定義即有

$$\bar{x}=\frac{1}{m}\int x\,dm=\frac{1}{m}\iint_S bxq\,dS，$$

即

$$\bar{x}=\frac{3}{a^2bc}\int_0^a dx\int_0^a \frac{bc}{2a^2}x(x^2+y^2)dy$$

$$=\frac{3}{2a^4}\int_0^a dx\left(x^3y+\frac{xy^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{3}{2a^3}\int_0^a\left(x^3+\frac{xa^2}{3}\right)dx$$

$$=\frac{3}{2a^3}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{a^2x^2}{6}\right)\Big|_0^a=\frac{3a}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{8}a。$$

再計其對 AD 軸之轉動慣量 I，將 $dm=bq\,dS$ 代入 I 之定義中，即有

$$I=\int x^2\,dm=\iint_S x^2bq\,dS=\int_0^a dx\int_0^a\frac{bc}{2a^2}x^2(x^2+y^2)dy$$

$$=\frac{bc}{2a^2}\int_0^a dx\left(x^4y+\frac{x^2y^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{bc}{2a}\int_0^a\left(x^4+\frac{x^2a^2}{3}\right)dx$$

$$=\frac{bc}{2a}\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3a^2}{9}\right)\Big|_0^a=\frac{a^4bc}{2}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{9}\right)=\frac{7}{45}a^4bc=\frac{7}{15}ma^2。$$

故迴轉半徑為

$$K=\sqrt{\frac{I}{m}}=\sqrt{\frac{7}{15}}\,a。$$

例2 求圓球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 與圓柱面 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$ 內公有之體積。

〔解〕此立體對 XOY 及 ZOX 坐標面均為對稱，故所求之體積

可視為展布於半圓 OBA 上之二重積分之四倍，圖(19.9)。即

$$V=4\iint_S z\,dS。$$

但 OBA 圓柱與 XOY 坐標面相交之圓可以極坐標表之為

$$r=a\cos\theta，$$

茲令 $dS=r\,d\theta\,dr$ 而先對 r 積分。如是

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}r\sqrt{a^2-r^2}\,dr，$$

因 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}=\sqrt{a^2-r^2}$ 也。由是得

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\left(-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right)_0^{a\cos\theta}=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^3(1-\sin^3\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{4}{3}a^3\left(\theta+\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)。$$

例3 試將 $\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}f(x,y)\,dy$ 改為二重積分而述其所展布之區域為何。

在 XOY 平面上，於 $x=x$ 之處作一細條 dx。第一次積分時，y 之上下限為 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 與 $y=0$，故知與各細條相交之上下曲線之方程應分別為半圓 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 及 X 軸 $y=0$。第二次積分時，x 之上下限為 $x=a$ 與 $x=0$；自圖(19.7)應知此二重積分所展布之區域為圓 $x^2+y^2=a^2$ 在第一象限內之面積。

例4 試將 $P=\int_a^{a\sqrt{2}}dr\int_{\cos^{-1}\frac{a}{r}}^{\frac{\pi}{4}}r\,F(r,\theta)\,d\theta$ 之積分

次序改變。

欲改變積分次序，須先知如將P改為二重積分後，其所展布之面積爲何。玆在(r, θ)平面上作一細圓條dr，圖(19.8)。第一次積分時，θ之上下限爲$\theta=\frac{\pi}{4}$及$\theta=\cos^{-1}\frac{a}{r}$或$\cos\theta=\frac{a}{r}$即$r=a\sec\theta$。故此細條之兩端點，一係位於$AC(r=a\sec\theta)$直線上，其他則係位於$OC\left(\theta=\frac{\pi}{4}\right)$直線上。第二次積分時，$r$係自$a$變至$a\sqrt{2}$，即自$AB$弧變至$C$點，故所求之二重積分所展布之區域爲$ACB$面積。今若改變積分次序，則第一次積分時，$r$應自$AB$弧(即$r=a$)上之値變至$AC$直線上(即$r=a\sec\theta$)之値。第二次對$\theta$積分時，$\theta$應自$A$點之値(即$\theta=0$)變至$OC$直線上之値$\left(\text{即 } \theta=\frac{\pi}{4}\right)$。故

$$P=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sec\theta} rF(r, \theta)dr$$

(19.7) Pappus 定理　利用二重積分之意義，可得兩簡單公式以示旋體體積(或面積)與用以旋轉之面積(或曲線)之重心位置之關係。此兩公式常名爲 Pappus 定理。玆述之：

定理　設以平面上一完閉面積S(或曲線弧s)繞同平面上但不與S(或s)相交之一直線旋轉一周，其所產生之體積V(或面積A)將爲：

$$V=2\pi h S \qquad (22);$$

$$A=2\pi h s \qquad (23);$$

此中之h表面積S(或曲線s)之重心距旋轉軸之遠度。

證方程(22)時，取旋轉軸爲 X 軸。若 dS 表距 X 軸爲 y 之一小面積，則旋轉一周後，此小面積所旋成之體積將爲 $2\pi y\,dS$。所求之全部體積遂爲

$$V=2\pi\iint_S y\,dS;$$

但按重心定義 $\iint_S y\,dS$ 係等於面積 S 之總值乘以其重心距 X 軸(旋轉軸)之遠度 $\bar{y}=h$，即 $hS=\iint_S y\,dS$，故知

$$V=2\pi h\,S。$$

如(22)所示。若以曲線弧 s 代上述之面積，即得方程(23)。

例 將 $x^2+(y-b)^2=a^2$，$a<b$ 繞 OX 軸旋一周以成一鉤環。求其面積與體積。

圓之重心係在圓心 $\bar{y}=h=b$ 之處，圓之面積爲 $S=\pi a^2$，圓周長 $s=2\pi a$，故鉤環體積爲

$$V=(2\pi b)\pi a^2=2\pi^2a^2b;$$

其表面面積則爲

$$A=(2\pi b)(2\pi a)=4\pi^2ab。$$

(19.8)曲面面積 設有一曲面 A 可以 $z=f(x,y)$ 表之。茲在其上取一點 P，而作一平面 PQR。自曲面上截出一完閉交線，此交線在 XOY 平面上將有一投影面積 dS。PQR 平面與 XOY 平面所成之角度即等於兩平面之法線所作之角。若 PN' 表 PQR 平面之法線，其方向角爲 α'，β'，γ'，則 γ' 即爲 PQR 與 dS 間之角，圖(19.9)。自射影情況言之，dS 與 PQR 面積之關係

遂爲 $\quad PQR\text{面積}=\dfrac{dS}{\cos\gamma'}$

所謂曲面 $z=f(x,y)$ 之面積 A 者，即指將類似 PQR 之面積相加，任其數目無限增多，每個之範圍無限減小時之和。惟當 PQR 無限減小時，γ' 將趨於過 P 點之曲面法線之 γ 值。是以曲面面積之定義可排爲下列之二重積分：

$$A=\iint_S\frac{dS}{\cos\gamma}=\iint_S\sec\gamma\,dS \qquad (24).$$

若曲面 $z=f(x,y)$ 上各點均有確定之法線，即 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 之值在曲面上各點(即 S 區域內)均爲連續函數，則據(18.4)節所述

$$\frac{1}{\cos\gamma}=\sec\gamma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

而方程(24)遂可寫爲

$$A=\iint_S\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dS \qquad (25);$$

由是即可利用積分兩次以計其值。

例 求圓球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 爲圓柱 $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}$ 所截出之曲面積(參閱19.6節例2,圖19.6)

於圓球上

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$$

故 $\sec\gamma=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{z^2}+\dfrac{y^2}{z^2}}=\dfrac{a}{z}$。因圓柱 $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}$ 與 XOY 平面所交之圓可以 $r=a\cos\theta$ 極方程示之，且在圓球上半

$$\sec\gamma=\frac{a}{z}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

其與 r 之關係尚簡，故元面積可採用 $r\,d\theta\,dr$。所求之 A 爲圖(19.6)所示 $ADCA$ 之四倍，故

$$A=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}dr=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\left(-\sqrt{a^2-r^2}\right)_0^{a\cos\theta}$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)d\theta=4a^2(\theta+\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi a^2-4a^2。$$

計算本題時，有一缺點，即當 $\theta=0$ 時，$r=a$，被積函數將爲無限大。爲避免此缺點起見，吾人可先用一異於 O 之 α 爲 θ 之下限，然後再令 $\alpha\to0$。如是

$$4\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}dr=4\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}a^2(1-\sin\theta)d\theta$$

$$=4a^2(\theta+\cos\theta)\Big|_\alpha^{\frac{\pi}{2}}=5a^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\ \cos\alpha\right)。$$

當 $\alpha\to0$ 時，此結果即爲所求之値如上。換言之，凡遇被積函數之值於上下限爲無限大之時，均應照此法計算之（參較十二章）。

<u>(19.9)積分三次</u>　擴充(19.2)節所述，卽知若遇排列方程以計某積分 u 時，方程(6)之 $g(x,y)$ 仍可以另一積分表之如

$$g(x,y)=\int_{z_2}^{z_2}h(x,y,z)\,dz,$$

此中之 z_1 與 z_2 均爲 x 與 y 之函數，則 u 之值可由積分三次計

之，即

$$u=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} dy\int_{z_1}^{z_2} h(x, y, z)\,dz \qquad (26).$$

(19.4)節求體積之問題實即此方程最簡單之例。欲明此理，先將立體切成薄片如 PR'，再切此薄片以成細桿如 KM'，最後乃切細桿以成小塊 EE'，圖(19.10)。立體係各薄片之和，各薄片乃各細桿之和，而各細桿復為各小塊之和。今每小塊體積為 $dx\,dy\,dz$。故若令小塊之兩邊位置變更，即以 z 為自變數而令其值自 $z=0$ 變至曲線上 $z=g(x, y)$ 之值以求 $dx\,dy\,dz$ 對 z 之積分，則得細桿 KM' 之體積為

$$dx\,dy\int_0^z dz。$$

再令 y 之位置變更，即維持 x 不變，而令 y 自 P 點之值 y_1 變至 Q 點之值 y_2(y_1 與 y_2 當然均為 x 之函數)以求對 y 之積分，則得薄片之體積為

$$dx\int_{y_1}^{y_2} dy\int_0^z dz。$$

最後再令 x 自 A 點之值 a 變至 B 點之值 b，以求對 x 之積分即有全部體積

$$V=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} dy\int_0^z dz。$$

以此與方程(26)相較乃知該方程中 $h(x, y, z)=1$，其 z 之上下限則分別為 $z_2=z=g(x, y)$ 及 $z_1=0$。因 $h(x, y, z)=1$，且上下限 z_2 與 z_1 均甚簡，故用此法以求體積實未見便利。但如 $h(x, y, z)$

表各點之密度，則此法頗便於計算不均密立體之質量。

例 設有一正方體，其各點之密度與距一角 A 之遠度之平方成正比，求其質量。

令體之一邊長為 a，其最大之密度為 c。如是以角 A 為原點，圖(19.(1)，而以體之三邊為 OX，OY 及 OZ 軸，則最大密度之點，其坐標為 (a, a, a)。因密度與距原點遠度平方成正比，故

$$q = k(x^2+y^2+z^2)。$$

比例係數為 $k=\dfrac{c}{3a^2}$，或 $q=\dfrac{c}{3a^2}(x^2+y^2+z^2)$。茲於體內坐標為 x，y，z 之點，依坐標面之方向割出一長方塊 $dx\,dy\,dz$。此小塊之質量約為

$$q\,dx\,dy\,dz=\frac{c}{3a^2}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz。$$

茲維持 x 與 y 不變，令 z 自 $z=0$ 變至 a 以計截面為 $dx\,dy$ 之一細桿之質量為

$$dx\,dy\int_0^a q\,dz=dx\,dy\int_0^a \frac{c}{3a^2}(x^2+y^2+z^2)\,dz$$

$$=\frac{c}{3a}\left(x^2+y^2+\frac{a^2}{3}\right)dx\,dy；$$

次維持 x 不變，令 y 自 $y=0$ 變至 a，以計厚為 dx 之一薄片質量為 $dx\displaystyle\int_0^a dy\int_0^a \frac{c}{3a^2}(x^2+y^2+z^2)\,dz=dx\int_0^a \frac{c}{3a}\left(x^2+y^2+\frac{a^2}{3}\right)dy$

$$=\frac{c}{3}\left(x^2+\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{3}\right)dx=\frac{c}{3}\left(x^2+\frac{2a^2}{3}\right)dx；$$

最後乃令 x 自 $x=0$ 變至 a 以求各薄片質量之和，即

$$m=\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a \frac{c}{3a^2}(x^2+y^2+z^2)dz=\int_0^a \frac{c}{3}\left(x^2+\frac{2a^2}{3}\right)dx$$

$$=\frac{c}{3}\left(\frac{a^3}{3}+\frac{2a^3}{3}\right)=\frac{c}{3}a^3。$$

(19.10)三重積分　設 $h(x，y，z)$ 爲自變數 $x，y，z$ 在 τ 空間內之連續函數。今將此空間分爲 n 個小區域，$(\Delta\tau)_k$，並於每小區域 $(\Delta\tau)_k$ 內任擇一點 P_k，坐標爲 $x_k，y_k，z_k$ 而求下列之和

$$h(x_1，y_1，z_1)(\Delta\tau)_1+h(x_2，y_2，z_2)(\Delta\tau)_2+\cdots\cdots$$
$$+h(x_n，y_n，z_n)(\Delta\tau)_n \qquad (27).$$

當 n 無限增大，各小區域 $(\Delta\tau)_k$ 內任意兩點之距離皆趨於 0 時，方程(27)之極限名爲展布於空間 τ 內之 $h(x，y，z)$ 之三重積分 (triple integral over τ)，其記號常簡寫爲

$$\iiint_\tau h(x,y,z)d\tau=\lim_{\substack{n\to\infty\\(\Delta\tau)_k\to 0}}\sum_{k=1}^{k=n}h(x_k,y_k,z_k)(\Delta\tau)_k \qquad (28).$$

惟無論 $h(x,y,z)$ 函數之性質如何，依上節所舉之例，吾人均可用一適當之質量代表方程(28)，是以求三重積分時，可由積分三次計得之。換言之，如用與直角坐標面互相正交之平面分空間 τ 爲甚多之元體積如 $dx\,dy\,dz$，則三重積分(28)之值可寫爲

$$\iiint_\tau h(x,y,z)d\tau=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2}dy\int_{z_1}^{z_2}h(x,y,z)dz \qquad (29).$$

此中之 a、b 爲適當之常數，y_1 與 y_2 均爲 x 之函數，其關係須由空間 τ 在 XOY 平面上射影曲線之方程定之；至於 z_1 與 z_2 則均爲 x 與 y 二元之函數，其值乃由包圍空間 τ 曲面之方程定

之，積者當已注意，當對 z 積分時，x 與 y 均應暫視爲不變；第二次對 y 積分時，x 應暫視爲不變。此外，方程(28)係定義，而方程(29)乃實施此定義以作計算之定理，其證雖係藉質量一物理的觀念而構成，但亦可用純粹分析方法，參閱 (7.2)，(7.3) 及 (18.5)各節，茲不贅。

(19.11) 柱坐標　應用二重積分時，計算之繁簡常視所用之坐標爲何而定。同樣，除直角坐標外，三重積分之計算，有時亦以用他種坐標爲簡。常用之坐標有柱坐標（cylindrical coordinates）與球坐標(spherical coordinates)兩種。茲先論柱坐標。

空間一點 P 之位置，可以其距 XOY 平面之遠度 z，及其在 XOY 平面上投影 P' 距原點 O 之遠度 $r=OP'$，及 OP' 與 OX 所作之角 θ 確定之，圖(19.12)。(r,θ,z)之名爲 P 點之柱坐標，其與直角坐標 x，y，z 之關係顯然爲

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z \tag{30}$$

或

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x},\quad z=z \tag{31}$$

用直角坐標時，一元體 $d\tau$ 之空間，係等於 $x=x_1$ 與 $x=x_1+dx$，$y=y_1$ 與 $y=y_1+dy$ 及 $z=z_1$ 與 $z=z_1+dz$ 六平面所包圍之長立方體 $dx\,dy\,dz$。茲畫 $r=r_1$ 與 $r=r_1+dr$ 兩柱面，$\theta=\theta_1$ 與 $\theta=\theta_1+d\theta$ 通過 OZ 軸之兩平面，及 $z=z_1$ 與 $z=z_1+dz$ 兩平面與 XOY 面平行，則亦包圍一元體 $d\tau$。此元體之高爲 dz，其底面面積，於略去較高級之微分後，係 $r\,d\theta\,dr$，故其體積爲

$$d\tau=r\,d\theta\,dr\,dz \tag{32}$$

(19.12)球坐標　令 P' 表空間 P 點在 XOY 平面上之投影。P 點係位在 OPP' 平面上，故欲定其位置，應知 OP' 與 OX 所作之角 θ。至於 OPP' 平面上 P 之位置，復可由 P 距 O 之遠度 R 及 OP 與 OZ 所作之角 ϕ 定之。R，θ，ϕ 三量名為 P 之球坐標。由圖(19.13)觀之，球坐標與直角坐標顯有下列關係

$$x=R\sin\phi\cos\theta,\ y=R\sin\phi\sin\theta,\ z=R\cos\phi \qquad (33),$$

$$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x},\ \phi=\cot^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (34).$$

茲仿前，作 $R=R_1$ 與 $R=R_1+dR$ 兩同心球面，$\theta=\theta_1$ 與 $\theta=\theta_1+d\theta$ 通過 OZ 軸之兩平面，及 $\phi=\phi_1$ 與 $\phi=\phi_1+d\phi$ 兩圓錐面，以包圍一立體，其各邊曲線均係正交。此元體會聚於 (R_1, θ_1, ϕ_1) 點之三線各為 $PQ=dR$(直線)，$PS=R\sin\phi\,d\theta$ (圓弧)，及 $PT=Rd\theta$(圓弧)故於略去較高級之微分後，元體之體積為

$$d\tau=R^2\sin\phi\, dR\, d\theta\, d\phi \qquad (35).$$

(19.13) 三重積分之應用　立體之質量，質量中心，轉動慣量等等問題均可用三重積分表之，因 $dm=q\,d\tau$，(q 表密度)，故按定義即有

$$\bar{x}=\frac{1}{m}\iiint_\tau xq\,d\tau;\quad I_z=\iiint_\tau (x^2+y^2)q\,d\tau$$

等。至於計算之時，其先決問題仍有如(19.6)節所述之三點，即(1)元體為何，(2)積分次序為何及(3)上下限為何。坐標之選擇頗非易事，須多算習題方能體驗得之。

例1　一均密的半圓殼，內外半徑分別爲 a 與 b，求其質量中心之位置。

自本題情形言之，可用球坐標。質量中心位置當然位於對稱軸上，令之爲 Z 軸。於是質量中心位置爲

$$\bar{z}=\frac{1}{m}\iiint_{\tau} z\,dm=\frac{1}{m}\iiint_{\tau} R\cos\phi\, R^{2}\sin\phi\, dR\, d\phi\, d\theta,$$

積分時可用任何次序，因無論依何次序 R，θ，及 ϕ 之上下限均爲常數也。茲依下法求之

$$\bar{z}=\frac{1}{m}\int_{a}^{b} dR\int_{0}^{2\pi} d\theta\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} R^{2}\cos\phi\sin\phi\, d\phi$$

$$=\frac{1}{m}\int_{a}^{b} d\theta\int_{0}^{2\pi} d\theta\left(R^{3}\frac{\sin^{2}\phi}{2}\right)_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{m}\int_{0}^{b} dR\int_{0}^{2\pi}\frac{R^{3}}{2}d\theta$$

$$=\frac{1}{m}\int_{a}^{b}\pi R^{3}\, dR=\frac{\pi R^{4}}{4m}\Big|_{a}^{b}=\frac{\pi(b^{4}-a^{4})}{4m}。$$

因　$m=\dfrac{2\pi}{3}\left(b^{3}-a^{3}\right)$，故

$$\bar{z}=\frac{3(b^{4}-a^{4})}{8(b^{3}-a^{3})}=\frac{3(b^{3}+b^{2}a+ba^{2}+a^{3})}{8(b^{2}+ab+a^{2})}。$$

例2　求高爲 h 半徑爲 a 之圓柱旋轉於通過其中心一直徑之轉動慣量。

以 Z 軸爲柱軸，通過中心之兩正交直徑爲 X 及 Y 軸。令 X 軸爲旋轉軸。於是，若用柱坐標，則元體 $r\,dr\,d\theta\,dz$ 至旋轉軸距離之平方爲 $y^{2}+z^{2}=r^{2}\sin^{2}\theta+z^{2}$。按定義言之，所求之 I

爲圖(19.14)所示立體之轉動慣量之八倍，是以

$$I=8\iiint_{\tau}(r^2\sin^2\theta+z^2)\,d\tau$$

$$=8\int_0^a r\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{h}{2}}(r^2\sin^2\theta+z^2)\,dz$$

$$=8\int_0^a r\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\left(z\,r^2\sin^2\theta+\frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^{\frac{h}{2}}$$

$$=8\int_0^a r\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{hr^2\sin^2\theta}{2}+\frac{h^3}{24}\right)d\theta$$

$$=4\int_0^a hr\,dr\left\{r^2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}\right)+\frac{h^2}{12}\theta\right\}_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\int_0^a \pi hr\left(r^2+\frac{h^2}{6}\right)dr=\pi\left(\frac{a^4h}{4}+\frac{h^3a^2}{12}\right)=m\left(\frac{a^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right)$$

因柱體之質量 $m=\pi a^2 h$。於是對於通過中心一直徑之迴轉半徑 k，其平方爲

$$k^2=\frac{a^2}{4}+\frac{h^2}{12}。$$

(19.14) 吸力　根據萬有引力定律，兩質點間之吸力係與其質量相乘成正比而與二者間之距離 R 之平方成反比，即如 m 與 M 分表兩質量，則吸力爲

$$F=k\frac{mM}{R^2} \qquad (36),$$

此力之方向則沿連兩點之直線。今若欲求頗大立體對於一質點 M 之吸力，則須將此立體 m 分爲甚多之元質量 dm 而求每個元質

量對 M 之吸力 dF，再分解每力為三個垂直分力而後求其諸分力之總和。換言之，若元質量 dm 之坐標為 x，y，z 則其對位於原點 O 之質點 M 之吸力之大小將為

$$dF=\frac{kM}{R^2}dm, \quad R^2=x^2+y^2+z^2 \qquad (37).$$

而此力在 X，Y 及 Z 軸三方向之分力將為

$$dF_x=kM\frac{x}{R^3}dm, \quad dF_y=kM\frac{y}{R^3}dm, \quad dF_z=kM\frac{z}{R^3}dm \qquad (38).$$

因 $dm=q\,d\tau$，故方程(38)可排成三重積分

$$F_x=\iiint_\tau \frac{kMqx}{R^3}d\tau, \quad F_y=\iiint_\tau \frac{kMqy}{R^3}d\tau,$$

$$F_z=\iiint_\tau \frac{kMqz}{R^3}d\tau \qquad (39).$$

例　一均密圓球對球外一質點之吸力宛如球之質量全部係集中於其中心然，試證之。

令球中心位於 $z=b$ 點，半徑為 a，$b>a$，質點 M 位於原點。用柱坐標乃得球之方程為

$$r^2+(z-b)^2=a^2,$$

自任何元體 $r\,d\theta\,dr\,dz$ 至原點之距離 R 係

$$R=\sqrt{r^2+z^2},$$

且因對稱之故，$F_x=F_y=0$，$F=F_z$，故自方程(39)乃得

$$F=\iiint_\tau \frac{kMqz}{(r^2+z^2)^{3/2}}d\tau$$

$$=\int_{b-a}^{b+a}dz\int_0^{r_1}r\,dr\int_0^{2\pi}\frac{kMqz}{(r^2+z^2)^{3/2}}d\theta$$

此中 $r_1=\sqrt{a^2-(z-b)^2}$；

是以 $$F=2\pi kMq\int_{b-a}^{b+a}z\,dz\int_0^{r_1}\frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$=2\pi kMq\int_{b-a}^{b+a}\left\{-(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^{\sqrt{a^2-(z-b)^2}}\right\}z\,dz$$

$$=2\pi kMq\int_{b-a}^{b+a}\left(1-\frac{z}{\sqrt{a^2+2bz-b^2}}\right)dz$$

令 $a^2+2bz-b^2=t^2$，則 $z=\frac{t^2-a^2+b^2}{2b}$；$dz=\frac{t}{b}dt$，而當 $z=b-a$ 時，$t=b-a$，$z=b+a$ 時，$t=b+a$。由是得

$$F=2\pi kMq\left(2a-\int_{b-a}^{b+a}\frac{t^2-a^2+b^2}{2b^2}dt\right)$$

$$=\frac{\pi kMq}{b^2}\left(4ab^2-\frac{1}{3}(b+a)^3+\frac{1}{3}(b-a)^3-(a^2-b^2)(2a)\right)$$

$$=\frac{\pi kMq}{b^2}\left(-\frac{2}{3}a^3+2a^3\right)=\frac{4\pi kMqa^3}{3b^2}=\frac{kM}{b^2}m$$

此中 $m=\frac{4\pi a^3q}{3}$ 表圓球之體積。是即所欲求之證。

第十九章習題

1. 設有 $z=f(x)$ 曲線，今將之旋轉於 X 軸以成一旋轉體。試將此立體體積(自 $x=a$ 至 $x=b$)排成二重積分並述應如何積分二次以求其值。

2. 設 $x^2+y^2=a^2$ 及 $x^2+z^2=a^2$ 表兩正交圓柱，求其公有體積。

3. 求下列各積分：

(a) $\int_1^3 dx\int_0^{\sqrt{x}} 2y\,dy$；　(b) $\int_1^2 dx\int_{-x^2}^{x} dx$；

(c) $\int_{-1}^{2} dx\int_{x^2}^{x+2} (2x+3y+b)\,dy$；　(d) $\int_2^3 dx\int_{x/2}^{x} xy\,dy$；

(e) $\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x+y)\,dx$；

(f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}\,dr$。

4. 求 $z=0$，$z=x+y$ 兩平面自圓柱 $x^2+y^2=a^2$ 所截之體積。

5. 求 $y=x$，$y=2x$ 及 $x=1$，$z=0$ 各平面與 $z=xy$ 曲面內之體積。

6. 求 $x^2+3y^2=z$，$x^2+y^2=2x$ 及 $z=0$ 內之體積。

7. 試示 $z=0$，$z=x+2y+8$ 兩平面自柱面 $r=1-\cos\theta$ 所截之體積為 $\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{1-\cos\theta} [r(\cos\theta+2\sin\theta)+8]\,r\,dr$。

8. 試用極坐標求 $\iint_S e^{x^2+y^2}dS$ 展布於圓 $x^2+y^2=1$ 上之二重積分。

9. 試用直角坐標求 $\iint_S (x^2-3ay)\,dS$ 展布於正方形 $ABCD$ 之二重積分，A, B, C, D 四點分別位於 X 及 Y 軸上，

$ABCD$ 對角線長 $2a$。

10. 一薄片(正方形)之密度係與其距一角成正比，求其質量，質量中心及旋轉於一邊之轉動慣量。

11. 求一鈎環旋轉於其軸之轉動慣量。

12. 求 $z=x+y^2$ 曲面位在三角形 $x=0, y=x, y=a$ 上部之面積。

13. 求 $x=0$，$x=a$，$y=0$，$y=d$ 自 $z=1+2x+3y+x^2$ 曲面所截之面積。

14. 求 $z=xy$ 為圓 $x^2+y^2=a^2$ 所截之面積。

15. 計下列各積分：

(a) $\int_0^4 dx \int_0^{4-x} dy \int_0^{4-x-y} x\,dz$；

(b) $\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x^2+y^2+z^2)dz$；

(c) $\int_2^3 dx \int_1^x dy \int_0^x x\,dz$；

(d) $\int_{-a}^a dx \int_0^x dy \int_0^{x+y} xyz\,dz$；

(e) $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{(x+y)}^{(1+4x+5y)} dz$；

(f) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^A dr \int_0^{\pi} \frac{r^2 \sin\phi\, d\phi}{\sqrt{a^2+h^2-2hr\cos\phi}}$。

16. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 與拋物面 $x^2+y^2=8z$ 間公有之體積。

17. 求球面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 與圓錐體 $x^2+y^2=z^2$ 間公有之體積。

18. 求下列曲面積：

(a) 球面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 爲拋物面 $x^2+y^2=z$ 所截之部分；

(b) 柱面 $x^2+y^2=a^2$ 爲平面 $z=0$ 及 $z=mx$ 所截之部分；

(c) 柱面 $x^2+y^2=a^2$ 於第一象限內爲平面 $x+y+z=2a$ 所截之部分；

(d) 球面 $x^2+y^2+z^2=2ay$ 爲錐面 $x^2+z^2=y^2$ 所截之部分；

(e) 柱面 $y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 爲柱面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 所截之部分；

(f) 拋物面 $y^2+z^2=4ax$ 爲柱面 $y^2=ax$ 及 $x=3a$ 所截之部分；

(g) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 爲柱面 $r=a\cos 2\theta$ 所截之部分。

19. 求平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 與三坐標面間之體積。

20. 求曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ 與三坐標面間之體積。

21. 今將一直角三角形旋轉於互相正交之一邊，試根據 Pappus 定理，求所得體積與曲面面積。

22. 一正圓錐體內各點之密度與其至錐軸遠度成正比，求其質量，質量中心與對軸之轉動慣量。

23. 設在曲面 $x^2z^2+a^2y^2=b^2x^2$ 與平面 $x=0$ 及 $x=a$ 間之物體，其各點之密度與其至 YOZ 面之距離成正比，求其質量

及質量中心。

24. 求橢圓$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$與圓$x^2+y^2=2y$間面積對$X$及$Y$軸之轉動慣量$I_x$及$I_y$。

25. 一柱體$x^2+y^2=2ax$內各點之密度與其距底面之遠度z成正比，柱高h，求對Z軸之轉動慣量及迴轉半徑。

26. 曲線$r=a\sin 2\theta$之一葉，其內各點之密度與至原點之距離成正比，求對X軸之轉動慣量。

27. 心形曲線$r=a(1+\cos\theta)$之上半部，其內各點之密度與其至原點距離成正比，求對X軸旋轉之轉動慣量。

28. 設有一點位於一均密圓盤之垂直中線上，其距盤中心之遠度為b；盤半徑為a，求盤對此點之吸力。

29. 根據前題結果，若有均密之正圓錐體，求其對頂點之吸力。

30. 一均密之半圓殼，內外半徑分別為a與b，求其對球中心之吸力。

31. 一均密之圓柱高h，半徑a，求其對底面中心之吸力。

32. 若一曲面之方程為：$F(x,y,z)=0$，試示其曲面面積可寫為

$$A=\iint_S \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|}\,dS.$$

第二十章 近似的及機械的積分法

(20.1)定積分之近似值 積分方法已詳於第十二章。在實用方面所遇及之定積分，大致均可應用此等方法以先求不定積分，然後再將上下限之值依(7.3)節所述之理代入而計得之。惟有時被積函數不能表爲簡單之方程，或積分手續甚繁而答案僅須準確至適當之程度即可，或答案爲法表爲初等函數，則常須計算其近似值。此等近似值之算法甚多，茲舉較常見而便於應用者於下。

(20.2)梯形規律 定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 可視爲位在曲線 $y=f(x)$ 下，X 軸上，$x=a$ 縱線右與 $x=b$ 縱線左之面積。欲求此面積，可將之分成甚多之細條，而後計各條面積之總和。但各條面積之值可以種種不同之近似曲線代替 $f(x)$ 而計之。最簡單之近似曲線係以折線連兩相鄰縱線，使各條均作梯形。具體的言之，將 a 至 b 間隔以 $(n+1)$ 個縱線 y_0，y_1，……，y_n 等分之爲 n 個寬度相等之細條。今若將各縱線與曲線 $f(x)$ 相交之 A，P_1，P_2，……，B 等點依次連以直線，即得 n 個寬度相等之梯形，每個梯形之寬爲 $h=\dfrac{b-a}{n}$，其長短兩底之平均值等於兩鄰近縱線之平均，故各梯形面積之總和爲

$$A=h\left(\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\cdots+\frac{y_{n-2}+y_{n-1}}{2}+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right)$$

$$=h\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\cdots\cdots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right)$$

若條數夠多，則此面積即可視爲所求定積分之一近似值。 公式(1)常名爲梯形規律(trapezoidal rule)。若在所規定之間隔內 $f(x)$ 之二級紀數之最大絕對值爲 M_2，則用此規律之結果，其最大誤差爲 $\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$。(參較習題 12)。

(20.3)稜形公式 設在前節中，吾人不用折線將 $AP_1P_2\cdots P_{n-1}B$ 各點聯接而改用一適當之 x 之二次方程將相鄰之三點聯接，則所得之近似值有時較公式(1)更優。在未推得此規律之前，應先求所謂爲稜形(prismoid)公式者。令 $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ 表通過 $x=-h$，$y=y_1$；$x=0$，$y=y_2$；及 $x=h$，$y=y_3$ 三點之拋物線之方程(圖20.2)。茲用定積分求拋物線下，X 軸上與 y_1 至 y_3 間之面積，即得

$$A=\int_{-h}^{h}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)dx=\left(\frac{\alpha x^3}{3}+\frac{\beta x^2}{2}+\gamma x\right)_{-h}^{h}=\frac{2\alpha h^3}{3}+2\gamma h,$$

此結果中不含 β 而 α 與 γ 則可表爲 y_1，y_2，y_3 之函數。因 $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ 曲線通過 $x=-h$，$y=y_1$；$x=0$，$y=y_2$；及 $x=h$，$y=y_3$ 三點，故知

$$y_2=0+0+\gamma，y_1=\alpha h^2-\beta h+\gamma，y_3=\alpha h^2+\beta h+\gamma$$

由是得 $y_3+y_1=2\alpha h^2+2y_2$，或 $2\alpha h^2=y_3+y_1-2y_2$。是以將 α 與 γ 之值代入即有

$$A=\frac{h}{3}\left\{(y_3+y_1-2y_2)+6y_2\right\}=\frac{h}{3}(y_1+4y_2+y_3) \quad (2).$$

此公式所以命名爲稜形公式之故，乃因若 B_1 及 B_3 分別表一稜

形之上下兩底面積，B_2 表其居中之截面積，h 表上下兩底之垂直距離，則稜形之體積 V 亦可由一類似公式求之，即

$$V=\frac{h}{3}(B_1+4B_2+B_3) \qquad (3)。$$

此公式名爲 Simpson 規律。

不但如是，舉凡 $y=f(x)$ 代數函數之次數不大於三之時，吾人均可證

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{(b-a)}{6}\left\{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\} \qquad (4)。$$

方程(4)應由讀者自證之。

例　將橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 旋於 X 軸，所成之橢圓球與轉軸垂直之截面積爲 $\pi y^2=\pi b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$，故可用公式(3)以求其體積。但 $h=a$，$B_1=B_3=0$，$B_2=\pi b^2$，故 $V=\frac{4}{3}\pi ab^2$。

(20.4) Simpson 規律　公式(2)與橫坐標起訖點無關，只視兩端及居中之縱坐標 y_1, y_3 與 y_2 三者之值以及兩端縱線之距離 $2h$ 爲何而定。是以若在圖(20.1)中，吾人將 $A\,P_1\,P_2$ 三點，聯以一拋物線如 $a_1x^2+b_1x+c_1$，如上述者，則首兩細條之面積將約爲 $\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_1)$。彷此，第三與第四兩細條之面積將約爲 $\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)$。餘類推。故若自 a 至 b 間隔內細條總數爲雙數，則所求之總面積之值將約爲

$$A\doteq\frac{h}{3}\Big((y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\cdots+(y_{2m-2}+4y_{2m-1}+y_{2m})\Big)$$

$$=\frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\cdots\cdots+4y_{2m-1}+y_{2m}\right) \qquad (5).$$

此公式名爲 Simpson 規律。

若在 a 至 b 間隔內，$f(x)$ 之四級紀數之最大絕對值爲 M_4，則用 Simpson 規律之結果，其最大誤差爲 $\dfrac{M_4(b-a)^5}{180\,n^4}$，參較習題(13)。

例1　試將自 1 至 13 間隔分爲 12 個相等部分，用梯形及 Simpson 規律求定積分 $\int_1^{13}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}dx$ 之近似值。

用梯形規律得：

$$A_1=\frac{13-1}{12}\Big(\frac{1}{2}+2^{\frac13}+3^{\frac13}+4^{\frac13}+5^{\frac13}+6^{\frac13}+7^{\frac13}+8^{\frac13}+9^{\frac13}$$

$$+10^{\frac13}+11^{\frac13}+12^{\frac13}+\frac{13^{\frac13}}{2}\Big)=\frac{1}{2}+20.477+\frac{2.351}{2}=22,153。$$

若用 Simpson 規律則因 $h=1$，故有

$$A_2=\frac{1}{3}\Big\{1+13^{\frac13}+4\Big(2^{\frac13}+4^{\frac13}+6^{\frac13}+8^{\frac13}+10^{\frac13}+12^{\frac13}\Big)$$

$$+2\Big(3^{\frac13}+5^{\frac13}+7^{\frac13}+9^{\frac13}+11^{\frac13}\Big)\Big\}$$

$$=\frac{1}{3}\Big(1+2.351+4(11,108)+2(9.369)\Big)=22.174。$$

至於準確值由積分求得者則爲

$$A=\int_1^{13}x^{\frac13}dx=\frac{3}{4}x^{\frac43}\Big|_1^{13}=\frac{3}{4}\Big(13^{\frac43}-1\Big)=22,175$$

於是可見 A_1 之誤差約為 0.1%，A_2 之誤差則不及 0.01%。

例 2　試由 $\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ 公式推求 π 之值。

將 $x=0$ 至 $x=1$ 間隔分作 10 等分，則

$$y_0=1,\qquad y_1=\frac{1}{1+0.1^2}=0.9900990,$$

$$y_2=\frac{1}{1+0.2^2}=0.9615385,\qquad y_3=\frac{1}{1+0.3^2}=0.9174312,$$

$$y_4=\frac{1}{1+0.4^2}=0.8620690,\qquad y_5=\frac{1}{1+0.5^2}=0.8000000,$$

$$y_6=\frac{1}{1+0.6^2}=0.7352941,\qquad y_7=\frac{1}{1+0.7^2}=0.6711409,$$

$$y_8=\frac{1}{1+0.8^2}=0.6097561,\qquad y_9=\frac{1}{1+0.9^2}=0.5524862,$$

$$y_{10}=\frac{1}{1+1}=0.5000000。$$

故據 Simpson 規律有

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{30}\left(1+0.5000000+4(3.9311573)+2(3.1686577)\right)$$

$$\pi=\frac{4}{30}\times 23.561945=3.141593$$

所求得之 π 之數值係準確至小數後第六位。

(20.5)級數積分法　吾人於 (16.12) 節曾言，冪級數在收斂範圍內可按項積分之，故若能將被積函數展為一冪級數，則積分之結果可以一級數表之。取此級數前若干項之和，即可作為此級數之近似值，例如下。

例 求橢圓 $x^2+2y^2=2$ 之周長。

此橢圓之參變方程為

$$x=\sqrt{2}\cos\theta,\ y=\sin\theta;$$

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{2\sin^2\theta+\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\sqrt{2-\cos^2\theta}\,d\theta=\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\cos^2\theta}\,d\theta,$$

故其周長等於

$$s=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\cos^2\theta}\,d\theta。$$

惟此乃一橢圓積分(elliptic integral),其結果不能以初等函數表之;然吾人不難利用級數積分之方法求得其近似值。因 $\frac{1}{2}\cos^2\theta$ 之值恆小於 1,故依二項定理有

$$\sqrt{1-\frac{1}{2}\cos^2\theta}=1-\frac{1}{4}\cos^2\theta-\frac{1}{32}\cos^4\theta-\frac{1}{128}\cos^6\theta-\cdots$$

按項積分之,乃得

$$4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\cos^2\theta}\,d\theta=4\sqrt{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta-\frac{1}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta-\frac{1}{128}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\,d\theta-\cdots\right\}$$

$$=4\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{32}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{128}\cdot\frac{5}{16}\cdot\frac{\pi}{2}-\cdots\right)$$

$$=2\sqrt{2}\,\pi\left(1-\frac{1}{8}-\frac{3}{256}-\frac{5}{2048}-\cdots\right)=7.65。$$

故欲求之橢圓周長約為7.65單位。

(20.6)面積儀　面積儀係用以量測平面上任意完閉曲線所包圍之面積。其種類甚多，較常見者為 Amsler 氏之極式面積儀(polar planimeter)。此儀(圖 20.3)之主要部分為兩桿 PK 與 KF 及一記錄輪 W(recording wheel)。PK 與 FK 兩桿交連於 K 點，而可自由轉動。輪 W 裝於 KF 桿旁，其軸係與 KF 桿平行，但其位置則不拘，或在 K 與 F 之間或在 K 點之後。命若將 P 端固定於一點而令 F 端沿一完閉曲線描畫，則 PK 桿將以 P 為中心而轉動，K 點將作一圓弧。當 F 端沿曲線繞行一周時，W 輪將滾轉若干，其轉動之次數及多寡可由其旁之盤 D 及其上刻度與附屬之小數尺定之。通常 KF 桿之長可以調節，且根據以下所述之原理，所求面積 A 等於輪滾轉之距離 R 乘以 KF 桿長 L，即 $A=RL$；故令 L 為適當之長，即可由輪之起終示數直接讀得面積為若干單位。

使用此儀之時，應先備一光平之木板將所欲求面積之周線描於紙上，而釘紙於板上；然後在板上擇一適當之點為極而釘 PK 桿 P 端下之小針於是點。此端上多附載一重體以免其移動。P 點選擇妥當後，應試令 F 端沿曲線行一周，以視各部之行動有無阻礙。若面積不太大，極 P 可位在面積之外，否則常須將 P 放於面積之內。在後述情況下，所得之面積應由一所號為"零圓"(zero circle)面積加以或減去 W 輪所示之數而得之。

欲明此儀動作之理，茲先述一直線 KF 在平面上運動時所掃過之面積。此面積之正負當然視運動方向而定。設 KF 由 K_1F_1

經過 2，3，4，5 而達到 K_6F_6（圖 20.4）位置，其所掃過之面積為正，則由 K_6F_6 經 7，8，9，10 而回至 K_1F_1 位置時，其所掃過面積應視爲負。故如是往返一次，KF 桿所掃過之面積應視爲等於 $K_1F_1F_3F_6K_6K_3K_1$（圖 20.5）面積減去 $K_1F_1F_9F_6K_6K_9K_1$ 面積。換言之，所得者爲各 F 點所包圍之面積減去各 K 點所包圍之面積。但若各 K 點未曾包圍一面積，則所得者即爲 F 曲線所包圍之面積。因此，當 Amsler 面積儀之 K 點往返的移動於一圓弧上時，FK 桿所掃過之面積即爲所求之面積。至於如何方能將此桿所掃過面積記下，須分析 KF 桿自一位置 K_1F_1（圖 20.5）轉移至鄰近一位置 K_3F_3 之運動情況。此運動可分爲三部分：

(1) 將 KF 沿其長自 K_1F_1 移至 K_2F_2，其所掃過面積爲 0；

(2) 將 KF 沿與之垂直方向自 K_2F_2 移至 K_3F_3，其所掃過面積爲 Ldp，dp 表所行之垂直距離，L 表桿長；

(3) 將 K_3F_3 桿旋轉 $d\phi$ 角以達到 K_3F_3 位置，所掃過之面積爲 $\frac{L^2}{2}d\phi$。

由是知當 KF 桿自一位置轉移至鄰近另一位置時，其所掃過之面積爲

$$dA=Ldp+\frac{1}{2}L^2\,d\phi;$$

積分之乃得

$$A=L\int dp+\frac{1}{2}L^2\int d\phi.$$

今若於 KF 桿旁裝置一輪，其軸與 KF 軸平行，在第一節

移動時，輪不轉，而於第二節及第三節運動時，輪將隨之滾轉。最簡單之情形乃桿端 F 沿一完閉曲線繞一周後，K 點未曾繞 P，或 KP 桿未曾繞 K 旋轉一周。如是 $\int d\phi=0$，而輪所滾轉之速度為 $R=\int dp$，故所求面積為

$$A=L\int dp=LR=L(R_2-R_1),$$

R_1 與 R_2 分表輪周起終之示數。

若面積太大，以致極 P 須位在面積之內，而 K 點復須繞極行一周，則亦可證所求面積須由零圓面積加以或減去輪所示之面積。零圓面積為每儀之常數，均附刻於儀桿上。其命名之故，乃因若 F 點沿零圓行動，則輪將完全不滾。根據此事，零圓位置不難用實驗方法或作圖以示以，茲不述。

第二十章習題

1. 試將 $\frac{1}{x}$ 曲線下自 $x=2$ 至 $x=10$ 之面積分為八個相等部分而用梯形及 Simpson 規律求 $\int_2^{10}\frac{dx}{x}$ 並以之與 $\ln 5=1.6094$ 相較。

2. 設蒸汽膨脹時，其容積 v 與壓力 p 之關係如下：

v（立方英尺）	2	4	6	8	10
p（磅/方英寸）	68.7	31.3	19.8	14.3	11.3

用梯形及 Simpson 規律求所作之功 $W=\int_2^{10}p\,dv$。

3. 將一旋轉體浮於水中其各橫截面之直徑 D 之平方與深度 h 之關係如下：

h（米）	0	0.03	0.06	0.09	0.12	0.15	0.18
D（米）	6.00	5.90	5.80	5.55	5.25	4.70	4.20
D^2（方米）	36.00	34.81	33.64	30.80	27.56	22.70	17.64

用 Simpson 規律求其所排去水之重量。

4. 一蒸汽機之示器壓容圖(indicator diagram)之長為3.6寸，相距每 0.3 寸之寬度如下：

0, 0.40, 0.52, 0.63, 0.72, 0.93, 0.99, 1.00, 1.00, 1.00, 0.97, 0.

若寬度每寸所代表者為每方寸100磅之壓力，用 Simpson 規律求其平均有效壓力。

5. 某車在各時刻 t（以秒計）之速度 v（以每小時若干英里計）如下：

t	0	5	10	15	20	25	30
v	0	[illegible]	7.5	10.9	13.0	13.7	14

求其在 30 秒內所行之距離。

6. 設一物體之比熱 S 與溫度 T 之關係如下：

T(°C)	0	2	4	6	8	10	12
S	1.00664	1.00543	1.00435	1.00331	1.00233	1.00149	1.00078

今將其溫度自 0°C 升至 12°C，問所需之全熱量。

$$H=\int_0^{12} S\,dT \text{ 爲何？}$$

7. 一空心柱體之截面之四分之一如下表所示，X 與 Y 軸爲其最長及最短之半徑：

x(寸)	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75
y_1(外徑，寸)	6.00	5.95	5.90	5.83	5.76	5.64	5.48	5.22
y_2(內徑，寸)	5.00	4.90	4.78	4.65	4.45	4.22	3.80	3.40

x 寸	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50
y_1(外徑，寸)	4.99	4.68	4.35	3.88	3.25	2.34	0
y_2(內徑，寸)	2.77	2.08	0.00				

求其對 X 軸及 Y 軸之轉動慣量之大約值。

8. 設有寬度爲 h 之細條分一面積爲 n 個，若細條中心之長爲 $y_{1/2}$，$y_{3/2}$，……，$y_{(2n-1)/2}$，則所求面積約爲

$$A=h(y_{1/2}+y_{3/2}+\cdots\cdots+y_{(2n-1)/2})。$$

9. 設將一面積分爲 n 個(雙數)寬度 h 相等之細條，先用 Simpson 規律以求自 x_1 至 x_{n-1} 內之面積而用梯形規律以求左右端末一條之面積，如是所得者爲 A_1；若用 Simpson 規律以求自 x_0 至 x_n 內之面積則所得者將爲 A_2。茲將 A_1 與 A_2 平均之則得下列近似公式

$$A=h[0.4(y_0+y_n)+1.1(y_1+y_{n-1})+y_2+y_3+\cdots\cdots+y_{n-2}]$$

試證此公式。　(本公式常名爲 Durand 規律)

10. 用級數積分法以求 $\int_0^1 e^{-x^2}dx=0.7467$。

11. 求雙曲線 $x^2-y^2=9$ 自(3,0)至(5,4)弧長之近似值。

12. 令 h 表梯形之寬，則自 $x=\alpha$ 至 $x=\alpha+h$ 之面積爲

$\frac{h}{2}\left(f(\alpha)+f(\alpha+h)\right)=T(h)$，又令 $\int_\alpha^{\alpha+h}f(x)dx=I(h)$。

如是若 $\phi(h)=T(h)-I(h)$ 表 $T(h)$ 與 $I(h)$ 相差之值，試示

$\phi(0)=0$；$\phi'(0)=0$，$\phi''(h)=\frac{h}{2}f''(\alpha+h)$。若 M_2 表

$f(x)$ 之二級紀數之最大絕對值，則 $\phi''(h)\leqq\frac{M_2h}{2}$，由是得

$\phi'(h)=\frac{M_2h^2}{4}$，而 $\phi(h)=\frac{M_2h^3}{12}$。

13. 用三縱線各距 h 分 $f(x)$ 下 X 軸上之面積爲兩條，令

$P(h)=\frac{h}{3}\left(f(-h)+f(0)+f(h)\right)$表用稜形公式所得之結果，

$I(h)=\int_{-h}^{h}f(x)dx$ 表積分結果；試以 $\phi(h)=P(h)-I(h)$ 而示

$\phi(0)=\phi'(0)=\phi''(0)=0$，$\phi'''(h)=\frac{h}{3}\left(f'''(h)-f'''(-h)\right)$

$\leqq\frac{2h^2M_4}{3}$，M_1 表 $f(x)$ 四級紀數之最大絕對值。由是示

$\phi(h)\leqq\frac{h^5M_4}{90}$。

英漢名詞對照表及索引

（數字指頁數）

Absolute value 絕對值 2
Acceleration 加速度 66, 68, 277, 279
Angle 角 131, 187, 189
...between 2 directions 二方向間之...,361
Approximate value 近似值 79, 80, 325
Arc 弧 205
differential of ...,...之微分 207, 390
Area 面積 104, 111, 123, 192, 199, 406
...of surface 曲面...,265, 417, 432
sign of..., ...之符號, 118
Asymptote 漸近線 60
Attraction 吸力 426
Base of logarithm 對數之底數 165
change of......, ...之改換 171
Bessel functions, B.函數, 342, 353
Calculus, differential 微分學 21
integral..., 積分學 93
Cardiod 心形曲線 261
Catenary 垂鏈懸線 185
Center of curvature 曲心 214
...of gravity 重心 287
...of quadric surface 二次曲面之心 372
.. of mass 質量中心 286, 413
Change of variable 變數之改換 84, 99
Circle 圓 63,195,196,369
Concavity 彎曲方向 49,58
Conic sections 圓錐曲線 189, 380
Constant 常數 2
Continuity 連續 3,14,133,376
Convergence 收歛 331；見 series
absolute..., 絕對的..., 338
conditional ..,附件的...,338
comparison test, 比較證驗法 333
ratio test, 比值證驗法 335
Coordinates, cylindrical 柱坐標 422
polar ..., 極..., 187
rectangular..., 直角.., 9, 355
spherical..., 球 .., 423
Curvature 曲度 211,217,218
circle of..., ...圓 214
Curve tracing 曲線之描繪 54

Cycloid 擺線 195
Derivative 紀數 22,134,169, 175
existence of…, …之存在 25
infinite …, 無限…, 25
…of high order, 高級…, 36
partial…, 偏…, 373,376
Differential 微分 82
equation, …方程, 110,154, 164,178,185,186
… of higher order, 高級…, 87
table of…, …表 181
total…, 全…, 379
Differentiation, 微分法 81, 196
logarithmic …, 對數…, 179
of function of a function, 函數的函數之…, 32,381-383
of implicit functions 隱函數之…, 33,36,385
Direction cosines 方向餘弦 357
Direction numbers 方向數 357
Directrix 準線 189
Discriminant 判別式 372
Discontinuity 間斷 3,4,15
Distance between 2 points 兩點間之距離 359
"e" defined, "e"之定義 167
Ellipse 橢圓 189,194,200,215
Ellipsoid 橢圓體 258,259,264
Envelope 包絡線 215
Epicycloid 外擺線 203,252
Epitrochoid 外餘擺線 204
Equations, cubic 三次方程 156
parametric…, 參變…, 193
Error 誤差, 82,21,402
Evolute 縮閉線 215
Exponent 指數 165
Focus 焦點 189
Fractions 分數 1
partial…, 部分…, 227
Function 函數 7,14,16,17
implicit…, 隱…, 16
inverse…, 反…, 17,143
multi-valued…, 多值…, 16
… of several variables 多元…, 373
transcendental …, 越…, 17 127
Generating circle, 母圓 195
Helix 螺旋線 401
Hydrostatic pressure 液體靜壓 293
Hyperbola 雙曲線 189
Hyperbolic functions, ……函數 255
Hypocycloid 內擺線 203, 252
Hypotrochoid 內餘擺線 204
Increment 增量 22,80
Indeterminate forms 不定式 311-320,349
Infinitesimal 無窮小 4

... of higher order 高級…, 81
order of…, ……之等級 92
Inertia, rotational 轉動慣量 291
Infinity 無限大 13
Inflection, point of 反轉點 51, 58
Initial line 始線 187
Intercept, 截距 57,363,364
Interval 間隔 3
Integral 積分 93
definite…, 定…, 115
double…, 二重…, 406,411 412
elliptic…, 橢圓…, 111,438
indefinite…, 不定…, 95
infinite…, 無限…, 245
multiple…, 重…, 406
table of…, …表. 219,220
triple…, 三重…,406,421,424
Integrand 被積函數 94
Integration 積分(法) 93
…by parts 部分…法 238
…by substitution 代替……法 220
constant of…, …常數, 95, 100,102
iterated…,…多次 406-410, 419-421
…of rational functions, 有理函數之積分 227-232
Interest, compound 複利 177
Involute 漸伸線 196
Legendre's polynomials, L. 多項式 353
Limit 極限 2,5-7,11,132,168
Logarithm 對數 170,172
Maclaurin series, M. 級數 329, 330,342,344,345,347,393
Mass 質量 269
Maxima and minima 極大與極小 45,47,49,61,188,348,393
Mean, arithmetic 算術的平均 78,307
…, geometric 幾何的…, 78
…, harmonic 調和的…, 78
Mean value theorem 均值定理 307-314
…for functions of 2 variables, 二元函數之……, 393
generalized……, ……之推廣式, 315
differential form, ……之微分式 312,393
integral form, ……之積分式 310
Motion, curvilinear 曲線上運動 275
rectilinear…, 直線上…, 64
simple harmonic…, 簡諧…, 153
Normal 法線 43,57,375
Numbers 數 1
Bernoulli…, B. 數, 352
Parabola 拋物線 189,192
Paraboloid 拋物面 365,409

Parallel sections 平行截面 372
Parameter, 參數 194
Pappus, theorom of, P. 定理 416
Pendulum, seconds 秒擺 82, 281
Plane, coordinate 坐標面 255
equation of a…, 平面之方程 363
normal…, 法面, 387-389
tangent…, 切面 375
Planimeter 面積儀 438
Power series 冪級數
Principal parts 主要部分 81, 379
Principal value 主值 149
Prismoidal formula 稜形公式 434
Projectile 拋射體 282
Radian 弧度 70,132
Radius vector 向徑 187
Radius of gyration 迴轉半徑 292
Rate of change 變化率 69
Reduction formulas 化簡公式
Rolle's theorem, R. 定理 311
Series 級數 323-354
alternating…, 交替…, 339
binomial…, 二項…, 344
convergent…, 見converegence
divergent…, 發散…, 331
geometric…, 幾何…, 333
harmonic…, 調和…, 332
positive…, 正項…, 333
Simpson's rule, S. 規律 435
Slope 斜度 27,43,360
Space curve 空間曲線 365,389
Sphere 球 369
Subnormal 次法線 57
Subtangent 次切線 57
Surface 曲面 364,366,417,432
Tangent 切線 43,57,387-389
Taylor's theorem, T. 定理 325 328,342
…for functions of several variables 多元函數之 T.…, 392
remainder of…, T. …之剩餘 327,228,354
Trapesoidal rule 梯形規律 433
Trochoid 餘擺線 203
Variable 變數 2, 8
dependent…, 自…, 8
independent…, 應…, 8
Velocity 速度 55,68,276,279
Volume 體積 257,263,408
Work 功 298

下册定價三十元