学算笔谈

学算笔谈

學算筆談卷十一

金匱華蘅芳學

論積分

算學之中無有不可還原之數故微分之式亦必有法以還其原此積分之術所由作也

惟因體之微分爲面面之微分爲線線之微分爲點今以微分之式而還其原是從點求線從線求面從面求體也則與求積之意相類故名之曰積分術

求積分所得之數卽微分所由生之函數也所可異者無論何種函數皆可從一箇公法以求其微分惟以微分之式反求其所由生之函數則不能從一箇公法以得其數祇可從無法之中勉强立法枝

枝節節而爲之不能有一貫之理也

積分之術旣如是之難而其立法之時又極勉强則算學家何必創立此術以還其原分之原哉實因微分還原爲算學中必不可少之事故不得不講積分也今且爲學者言積分之用

如旣知曲線之微分等于直角縱橫線二微分平方和之平方根則求其積分卽可得其曲線之長

如旣知曲線面以正交縱橫線爲界其面積之微分等于縱線乘橫線之微分則求其積分卽可得其曲線之面積

如旣知曲線體之曲面微分卽皮積之微分也等于底面之圓周乘其母曲線之微分則求其積分卽可得其曲線體之曲面

如旣知曲線體積之微分等于底面乘母曲線橫線之微分則求

其積分即可得曲線體之積

如既知極曲線之微分等于帶徑微分及帶徑乘弧之微分二平方和之平方根則求其積分即可得其極曲線之長

如既知極曲線面積之微分等于帶徑平方乘弧線微分之半則求其積分即可得極曲線之面積

此皆因算學中有求積分之術故一切曲線之線面皮體皆可從微分還原之理以求之若無此術則雖有其微分之式亦無所用之其線面皮體縱有他法可求亦不能如是易得矣由此知微積二術實有互相爲用之勢有積分而微分之用益神無積分則微分之用不廣也

以算學之常理而論各種函數之微分既莫不從一箇公法而生則

從微分之式反求其成此微分之函數祗須將求微分之公法反其道而行之嘗亦可通何以竟不能有一箇公法以求積分此則學者之所不解也

學者若將求微分之公法細攷之則其不能反用之故自見試思原函數中之天以天加辛代之而爲新函數乃將新函數詳之爲級數依辛之各方自小而大序之則其級數之第一項必爲原函數以原函數減其級數必適將第一項減去而其減餘之各項中不見原函數矣乃以辛約其減餘之各項又于約得之式中令辛等于〇則從第二項起皆化爲〇而所存者只有以辛所約之第二項耳欲從此項求其級數之全式固是不能卽欲從此項求其級數之第一項亦無法可得也所以竟不能有一箇公法以求各種微分式之積分

求積分旣無公法則何不從求微分之各種專法反之以作求積分之各種專法依算學之常理而論誰曰不然

如以各種函數之公微分式爲求積分之題則其本函數必卽爲本題所求之積分式此理固顯而易見也果能如此則積分之術雖不能通爲一法而每種之題可以各設專法其立法之理並無奥義只須從其求微分之原路步步退囘其事豈不甚易

無如凡遇欲求積分之題其形能與公微分式合者甚少不合者甚多其能合之題又往往有一題之式而兼合于數種函數之公微分式者此又學者之所不解也然而其故有三

一因其欲求積分之題本從函數經求微分而成則其形必不能出

于公微分式之外所以至少必有一箇公微分式與之相合

如其題本從常函數求微分而成則于常函數之公微分各式中檢之必有其相似之式

如其題本從越函數求微分而成則于越函數之公微分各式中檢之必有其相似之式

一因其欲求積分之題本非從函數徑求微分而成則其微分之式必是從他法繞道而得故其形必出乎各種公微分之外則于公微分之各式中檢之不能有其相似之形

如曲線之微分為縱橫二線之兩箇微分式各自乘相加平方開之所成　曲線面積之微分為縱線乘橫線之微分所成　曲線體之曲面其微分為底面之圓周乘母曲線之微分所成　曲線

體積之微分爲底面乘母曲線橫線之微分所成則此各種微分式俱爲繞道而得非從函數徑求微分所成也所以公微分式中不能有此種之形

一因其欲求積分之題不能先知其求微分之函數中有無常數之項與之加減所以往往有一箇求積分之題而能兼合于數種函數之公微分式者

因常數與變數相加減所成之函數其微分式中常數之項必不見則與無常數加減之函數所求得之微分必無異是兩種函數可以同得一箇公微分式也所以一箇求積分之題可合于兩種函數之公微分式

惟其如是所以求積分之事比微分更難而求積分之法亦比微分

更巧
天下至巧之法其初莫不由至拙之法漸變而成求積分而欲藉公微分式從其求微分之原路步步退回此固法之至拙者也然舍是法則竟無他法可求積分而徒執是法則遇不與公微分式相合之題又無從尋其每步之迹以作退回之路此乃執而不化之故也苟能將不合于公微分式之題用法化之使與公微分式相合則其積分亦易求所以論積分者必先明題之各種化法
學者讀積分之書而覺甚不易明者皆因不知化法之故耳不知化法則每將化法與求積分之法混而視之而算理遂致不明殊不知化法乃變化其題之本形使與公微分式相合耳本與積分之術無涉也求積分之法乃從公微分式反求其所由生之函數耳初不論

其化與不化也惟書中所言馭題之法往往以化法與求積分之法連屬而論讀者不能劃開視之此其所以不明也

余以爲求積分之法不過從公微分式反求其函數其理無甚難明所不易明者各種化法耳惟題之形狀萬變不窮故其化之之法亦非一端所能盡有可以乘法化之者有可以除法化之者有可以通分之法化之者有可以開方之法化之者有可以二項之例化之者有可以借代之法化之者有可以虛代之法化之者有可以微分之法化之者種種化法各有妙用要當視題爲何種形狀則用何法以化之或可只用一法或必兼用數法又有此法所能化而用彼法以化之亦未嘗不通者則可擇其便者而用之固不能執一以論也然不略言其條理則學者仍不能明

余以爲求積分之題畧可分爲三類一爲不必化者一爲可以化者一爲不可不化者必明此三者然後于積分之術乃有頭緒

大抵求積分之法無不從公微分式而生所以必取夫化法者爲其題不與公微分式相合而欲化之使合也故題之本與公微分式相合者可以不用化法矣故曰不必化也

惟亦有其題雖與公微分式相合本可不用化法然亦可用法化之使其形更合于他種公微分式則其積分比不化者愈明故曰可以化也

若其題本與公微分式不相合若非用法化之則不能使其形變爲相合則不得不用化法矣故曰不可不化也

論積分之書既譯入中土者祗有代微積拾級及微積溯源二書然

是二書者驟讀之皆不易明即返覆數十次亦未必能悉通其義以其演算之法雖多而說理之處太少也余于積分之術亦從二書悟入今就二書中摘取各條間附已意以與學者共明焉

有三箇公例其理亦從公微分式而生為求積分者所必用故必先明其理

一例　無論何種函數之微分式求得積分之數必加以未定之常數呐其呐之為正為負為〇須攷之乃知

此因天之微分為伕而甲丄天及甲丅天之微分亦為伕所以以伕求積分必作呐丄天其呐之同數丄甲丅甲〇須攷其本題之理乃知當用何數

二例　無論何種函數之微分式若有常數為公乘數者可列其

常數于積號之外

此因甲天之微分爲甲彳天猶之以甲乘天之微分也所以凡求甲彳天之積分者其式本當作禾(甲彳天)今可改作甲禾(彳天)則可將彳天求得積分而以甲乘之

三例　無論若干微分式之和較其積分之式等于各微分之積分之和較

此因戊⊥亥丅人之微分爲彳戊⊥彳亥丅彳人所以彳戊⊥彳亥丅彳人之積分必爲禾彳戊⊥禾彳亥丅禾彳人也

既明此三例則可論各種求積分之題惟每種之題其法各有不同

不得不分款以別之

第一款　論不必化之題

凡獨項之微分式其求積分之法將其指數增一以新指數乘其變數之微分以約之

如$天^{寅}彳天$之積分爲$\frac{天^{寅丄一}}{寅丄一}丄丙$其寅之同數無論正負整分俱可惟不能爲丅一其寅若等于負一須用第二款之法其丙爲未定之常數可令之爲$丅\frac{乙^{寅丄一}}{寅丄一}$若$乙=天$之時其積能不見者必有此形

第二款　論可以化之題而不用化法者

凡分子爲常數乘分母之微分則其積分爲常數乘分母之訥氏

對數

惟因

$$彳(訥天)=\frac{伏}{天}$$

所以

$$禾\frac{甲伏}{天}=甲禾\frac{伏}{天}=甲訥天$$

第三款

凡微分之式若與平圓各線之公微分式相合者則其積分即為平圓之各線

如

$$禾(伏餘弦天)=正弦天$$

$$禾(丅伏正弦天)=餘弦天$$

$$禾\frac{伏}{餘弦^{二}天}=禾(伏正割^{二}天)=禾[伏(一丄正切^{二}天)]=正切天$$

$$禾\frac{丅伏}{正弦^{二}天}=禾(丅伏餘割^{二}天)=禾[丅伏(一丄餘切^{二}天)]=餘切天$$

$$禾\frac{伏正弦天}{餘弦^{二}天}=禾(伏正切天正割天)=正割天$$

$$禾\left(丅\frac{伏餘弦天}{正弦^{二}天}\right)=禾(丅伏餘切天餘割天)=餘割天$$

第四款

凡微分之式若與弧之各微分式相合者則其積分即為平圓之弧

如

$$\text{禾}\frac{\sqrt{\text{一丅天}^{\text{二}}}}{\text{彳天}}=\text{正弦}^{\text{丅一}}\text{天}$$

$$\text{禾}\frac{\sqrt{\text{一丅天}^{\text{二}}}}{\text{丅彳天}}=\text{餘弦}^{\text{丅一}}\text{天}$$

$$\text{禾}\frac{\text{一丄天}^{\text{二}}}{\text{彳天}}=\text{正切}^{\text{丅一}}\text{天}$$

$$\text{禾}\frac{\text{一丄天}^{\text{二}}}{\text{丅彳天}}=\text{餘切}^{\text{丅一}}\text{天}$$

$$\text{禾}\frac{\text{天}\sqrt{\text{天}^{\text{二}}\text{丅一}}}{\text{彳天}}=\text{正割}^{\text{丅一}}\text{天}$$

$$\text{禾}\frac{\text{天}\sqrt{\text{天}^{\text{二}}\text{丅一}}}{\text{丅彳天}}=\text{餘割}^{\text{丅一}}\text{天}$$

$$\text{禾}\frac{\sqrt{\text{二天丅天}^{\text{二}}}}{\text{彳天}}=\text{正矢}^{\text{丅一}}\text{天}$$

第五款　論可以化之題

凡微分之式能以訥對及平圓之弧明其積分者若用法化之即可求得其積分之級數名曰級數求積分法

一題　有微分式$\frac{\text{甲丄天}}{\text{彳天}}$欲求其積分

此題若不用化法可依第二款得

$$禾\frac{彳天}{甲丄天}=訥(甲丄天)$$

若以除法化之則其

$$\frac{一}{甲丄天}乂\frac{一}{甲}丅\frac{天}{甲^{二}}丄\frac{天^{二}}{甲^{三}}丅\frac{天^{三}}{甲^{四}}\cdots\cdots$$

以彳天乘之得

$$\frac{彳天}{甲丄天}=\frac{彳天}{甲}丅\frac{天彳天}{甲^{二}}丄\frac{天^{二}彳天}{甲^{三}}丅\frac{天^{三}彳天}{甲^{四}}\cdots\cdots$$

每項各求積分則可得

$$禾\frac{彳天}{甲丄天}=\frac{天}{甲}丅\frac{天^{二}}{二甲^{二}}丄\frac{天^{三}}{三甲^{三}}丅\frac{天^{四}}{四甲^{四}}\cdots\cdots丄呐$$

則

$$訥(甲丄天)=\frac{天}{甲}丅\frac{天^{二}}{二甲^{二}}丄\frac{天^{三}}{三甲^{三}}丅\frac{天^{四}}{四甲^{四}}\cdots\cdots丄呐$$

此

式中令天$=$〇則得訥甲$=$呐所以得

$$訥(甲丄天)=訥甲丄\frac{天}{甲}丅\frac{天^{二}}{二甲^{二}}丄\frac{天^{三}}{三甲^{三}}丅\frac{天^{四}}{四甲^{四}}\cdots\cdots$$

溯源六卷第一百三十九款

一題　有微分式$\frac{彳天}{一丄天^{二}}$欲以天之斂級數明其積分

此題若不用化法可依第四款之法得$禾\frac{彳天}{一丄天^{二}}=正切^{下}天$若用除法化之則

$$\frac{\text{一}}{\text{天}^{2}\text{丄一}}=\frac{\text{一}}{\text{天}^{2}}-\frac{\text{一}}{\text{天}^{4}}+\frac{\text{一}}{\text{天}^{6}}-\frac{\text{一}}{\text{天}^{8}}\cdots\cdots$$

所以

$$\text{禾}\frac{\text{彳天}}{\text{天}^{2}\text{丄一}}=-\frac{\text{一}}{\text{天}}+\frac{\text{一}}{\text{三天}^{3}}-\frac{\text{一}}{\text{五天}^{5}}\cdots\cdots+\text{呐}$$

卽

$$\text{正切}^{-1}\text{天}=-\frac{\text{一}}{\text{天}}+\frac{\text{一}}{\text{三天}^{3}}-\frac{\text{一}}{\text{五天}^{5}}\cdots\cdots+\text{呐}$$

此式中若令天＝○不能攷得呐之同數

因弧＝○則天＝○而級數之各項皆變爲無窮之故惟令其弧爲象限則弧等于$\frac{\text{一}}{\text{二}}$周而天爲無窮故級數化爲○而$\frac{\text{周}}{\text{二}}$＝呐故得

$$\text{正切}^{-1}\text{天}=\frac{\text{周}}{\text{二}}-\frac{\text{一}}{\text{天}}+\frac{\text{一}}{\text{三天}^{3}}-\frac{\text{一}}{\text{五天}^{5}}\cdots\cdots$$

三題　有正弦為天之弧微分式$\frac{彳天}{\sqrt{一-天^{二}}}$欲求其積分之級數 六卷一百三十九

從二項例得

$$(一-天^{二})^{-\frac{一}{二}}=一+\frac{一}{二}天^{二}+\frac{一\cdot三}{二\cdot四}天^{四}+\frac{一\cdot三\cdot五}{二\cdot四\cdot六}天^{六}+\frac{一\cdot三\cdot五\cdot七}{二\cdot四\cdot六\cdot八}天^{八}+\cdots\cdots$$

所以得

$$正弦^{-一}天=\int\frac{彳天}{\sqrt{一-天^{二}}}=天+\frac{一}{二}\cdot\frac{天^{三}}{三}+\frac{一\cdot三}{二\cdot四}\cdot\frac{天^{五}}{五}+\frac{一\cdot三\cdot五}{二\cdot四\cdot六}\cdot\frac{天^{七}}{七}+\cdots\cdots$$

此式中令弧$=○$則正弦$=○$而左右兩邊

之數同時俱化爲○故知其不必有常數配之也（溯源六卷第一百三十九款）

第六款　論不可不化之題

凡微分式中括弧之指數爲正整之數者則可用乘法詳其所括之數而以弧外之各數乘之乃求其積分

一題　有微分式$(\text{五丄七天}^{\text{二}})\text{彳天}$欲求其積分

因題式中括弧之指數爲整正之數故可將其$\text{五丄七天}^{\text{二}}$自乘得$\text{二五丄七〇天}^{\text{二}}\text{丄四九天}^{\text{四}}$以

彳乘之得$\text{二五彳}\perp\text{七〇天}^{\text{二}}\text{彳}\perp\text{四九天}^{\text{四}}\text{彳}$每項各求積分得$\text{二五天}\perp\frac{\text{三}}{\text{七〇天}^{\text{三}}}\perp\frac{\text{五}}{\text{四九天}^{\text{五}}}\text{呐}$拾級第十七卷第六款原答有誤今特校正

廿二題　有微分式$(\text{甲}\perp\text{三天}^{\text{二}})^{\text{三}}\text{彳}$欲求其積分

則可將$\text{甲}\perp\text{三天}^{\text{二}}$自乘再乘得$\text{甲}^{\text{三}}\perp\text{九甲}^{\text{二}}\text{天}^{\text{二}}\perp\text{二七甲天}^{\text{四}}\perp\text{二七天}^{\text{六}}$以彳乘之得$\text{甲}^{\text{三}}\text{彳}\perp\text{九甲}^{\text{二}}\text{天}^{\text{二}}\text{彳}\perp\text{二七甲天}^{\text{四}}\text{彳}\perp\text{二七天}^{\text{六}}\text{彳}$每項各求積分得

兩丄$\frac{二七禾天^{六}}{七}$丄$\frac{二七甲禾天^{五}}{五}$丄$\frac{九甲禾天^{三}}{三}$丄三禾天

拾級十七卷第六款原答有誤今特校正

第七款

凡實分數之微分式其分母之乘數各不相等者可將其各乘數為分母各以虛倍數為其分子以齊同通分之法化之為散分數之微分式而一一求其積分

一題　有微分式$\frac{禾天}{天^{二}丅甲^{二}}$欲求其積分

其分母$天^2-甲^2$可化為$(天-甲)(天+甲)$故可令

$$\frac{甲}{(天-甲)(天+甲)}=\frac{呷}{天-甲}+\frac{吃}{天+甲}$$

將其右邊之數齊同通分則

$$\frac{甲}{天^2-甲^2}=\frac{甲}{(天-甲)(天+甲)}=\frac{(呷+吃)天+(呷-吃)甲}{(天-甲)(天+甲)}$$

乃令

$$甲=(呷+吃)天+(呷-吃)甲$$

惟因天為變數所以

$$(呷-吃)甲=甲$$

$$呷+吃=〇$$

從此二式可求得

$$呷=\frac{1}{2}$$

吆＝一丅$\frac{二}{三}$

以此兩數代入前式中而以彳天乘之得

$\frac{天丅甲}{甲彳天}$＝$\frac{二}{一}$×$\frac{天丅甲}{彳天}$丅$\frac{二}{一}$×$\frac{天丄甲}{彳天}$

求其積分得

禾$\frac{天丅甲}{甲彳天}$＝$\frac{二}{一}$訥(天丅甲)丅$\frac{二}{一}$訥(天丄甲)丄呐

＝$\frac{二}{一}$訥$\frac{天丅甲}{天丄甲}$丄呐

＝一訥$\sqrt{\frac{天丅甲}{天丄甲}}$丄呐

溯源五卷中第一百十六款

二題　有微分式

$$\frac{\text{天}^{二}\,\text{丅}\,\text{六天}\,\text{丄}\,\text{八}}{\text{三天}\,\text{丅}\,\text{五}}\,\text{彳天}$$

欲求其積分

惟因

$$\text{天}^{二}\,\text{丅}\,\text{六天}\,\text{丄}\,\text{八}=(\text{天}\,\text{丅}\,\text{二})(\text{天}\,\text{丅}\,\text{四})$$

故可令

$$\frac{(\text{天}\,\text{丅}\,\text{二})(\text{天}\,\text{丅}\,\text{四})}{\text{三天}\,\text{丅}\,\text{五}}=\frac{\text{天}\,\text{丅}\,\text{二}}{\text{呷}}\,\text{丄}\,\frac{\text{天}\,\text{丅}\,\text{四}}{\text{叱}}=\frac{(\text{天}\,\text{丅}\,\text{二})(\text{天}\,\text{丅}\,\text{四})}{(\text{呷}\,\text{丄}\,\text{叱})\text{天}\,\text{丅}\,\text{四呷}\,\text{丅}\,\text{二叱}}$$

乃令左右兩邊分子內天之同方之倍數

為相等則

呷丄乚＝三

丅四呷丅二乚＝丅五

從此兩式求得

呷＝丅三

乚＝三七

所以其積分之式為

禾 天三丅六天丄八 / (三天丅五)彳天 ＝

丅三禾 天丅三 / 彳天 丄三七禾 天丅四 / 彳天 ＝

三七訥(天丅四)丅三訥(天丅二)丄呐

溯源一百十五卷第十六款

第八款

凡實分數之微分式其分母有相等之乘數者則其分母之形必如(天丄甲)巳可令(天丄甲)巳 (天丄甲)巳丅一 (天丄甲)巳丅二 …… (天丄甲)為各項之分母以虛倍數為其分子

以齊同通分之法化之

一題 有微分式

$$\frac{(天^{二}丅甲^{二})(天丅甲)}{天彳天}$$

欲求其積分

惟因

$$(天^{二}丅甲^{二})(天丅甲)=(天丅甲)^{二}(天丄甲)$$

故可令

$$\frac{(天丅甲)^{二}(天丄甲)}{天^{二}}=\frac{(天丅甲)^{二}}{呷}\,丄\frac{天丅甲}{吃}\,丄\frac{天丄甲}{哂}$$

$$=\frac{(天丅甲)^{二}(天丄甲)}{呷(天丄甲)丄吃(天^{二}丅甲^{二})丄哂(天丅甲)^{二}}=$$

$$\frac{(天丅甲)^{二}(天丄甲)}{呷甲丅吃甲^{二}丄哂甲^{二}丄(呷丅二甲哂)天丄(吃丄哂)天^{二}}$$

乃令其分子中天之同方之倍

數爲相等則

呷丅吃甲丄呐昞＝〇

呷丅二甲呐＝〇

吃丄呐＝一

從此求得

呷＝三甲

吃＝四三

呐＝四一

所以

(天甲)(天甲)丅(天甲)(天甲) / 天伕 天伕

＝二甲 ✕ (天甲)/伕 丄 四三 ✕ 天甲/伕 丄 四一 ✕ 天甲/伕

惟因

禾 (天甲)/伕 ＝ 天甲/丅一

禾 天甲/伕 ＝ 訥(天甲)

禾 天甲/伕 ＝ 訥(天甲)

所以

禾 (天甲)(天甲)丅(天甲)/天伕 ＝

丅二甲 ✕ 天甲/一 丄 四三 訥(天甲) 丄 四一 訥(天甲) 丄 呐

溯源五卷第一百十六款

二題　有微分式$\frac{天(天+一)^{二}(天-一)^{二}}{(天^{三}+(天^{二}+一))禾天}$欲求其積分

則可令$\frac{天(天+一)^{二}(天-一)^{二}}{天^{三}+天^{三}+二}=\frac{天}{呷}+\frac{(天+一)^{二}}{吃}+\frac{天+一}{呐}+\frac{(天-一)^{二}}{叮}+\frac{天-一}{哦}$將右邊齊同通分又令左右兩邊天之同方倍數爲相等求得

呷$=$二

吃$=-$三

呐$=-\frac{四}{五}$

叮$=$一

哦$=-\frac{四}{三}$

則題式化爲$\frac{天}{二禾天}-三\frac{(天+一)^{二}}{禾天}-\frac{四}{五}\frac{天+一}{禾天}+\frac{(天-一)^{二}}{禾天}-\frac{四}{三}\frac{天-一}{禾天}$所以

兩(天丅一)丄 天丅一/四丅三 訥(天丄一)丄 天丄一/四丅五 訥 天丄三/三天丄一 訥二

溯源五卷第一百十六款

得

禾 天(天丄一)二(天丅一)二 / 三天(三天丄二) 伕二

第九款

凡實分數之微分式其分母之乘數若爲虛式則必有其兩箇虛

式之乘數其形如 $(天丄角丄亢\sqrt{丅一})(天丄角丅亢\sqrt{丅一})$ 故其分母之形必如 $天^{二}丄二角天丄角^{二}丄亢^{二}$ 欲化之爲散分數

其法如下

一題　有微分式 $\frac{天^{二}丄二角天丄角^{二}丄亢^{二}}{(呼天丄呬)彳天}$ 欲求其積分

惟因 $天^{二}丄二角天丄角^{二}丄亢^{二}=(天丄角)^{二}丄亢^{二}$ 故可令 $天丄角=人$ 則 $天=人丅角$ 而 $\frac{(天丄角)^{二}丄亢^{二}}{(呼天丄呬)彳天}=\frac{人^{二}丄亢^{二}}{(呼人丅呼角丄呬)彳人}=\frac{人^{二}丄亢^{二}}{呼人彳人}丄\frac{人^{二}丄亢^{二}}{呬'彳人}$ 其呬'以代常數 $呬丅呼角$ 也求其第一

項$\frac{人^{二}丄亢^{二}}{呼人彳人}$之積分因可令

$人^{二}丄亢^{二}=戊$

則

$人彳人=\frac{二}{一}彳戊$

所以求得

$禾\frac{人^{二}丄亢^{二}}{呼人彳人}=\frac{二}{呼}禾\frac{戊}{彳戊}$

$=呼\frac{二}{二}訥戊$

$=呼訥(人^{二}丄亢^{二})$

㊀求其

第二項$\frac{人^{二}丄亢^{二}}{哂彳人}$之積分可令

$人=亢亥$

則

$\frac{人^{二}丄亢^{二}}{哂彳人}=\frac{亢}{哂}\times\frac{亥^{二}丄一}{彳亥}$

惟因

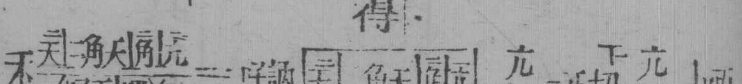
$禾\frac{亥^{二}丄一}{彳亥}=正切^{丅一}亥$

所以求得

$禾\frac{亢}{哂}\times\frac{亥^{二}丄一}{彳亥}=\frac{亢}{哂}正切^{丅一}亥丄丙$

$=\frac{亢}{哂}正切^{丅一}\frac{亢}{人}丄丙$

㈢將㈠㈡兩式相加而以人與吜之同數代還之則得



第十款　溯源五卷第一百十四款

凡實分數之微分式其分母之虛乘數若有數雙相等者其分母必為$\text{天}^{\text{二}}+\text{二角天}+\text{角}^{\text{二}}+\text{亢}^{\text{二}}$之某方其形如$(\text{天}^{\text{二}}+\text{二角天}+\text{角}^{\text{二}}+\text{亢}^{\text{二}})^{\text{午}}$

一題　有微分式$\dfrac{(\text{吁天}+\text{呬})\text{彳天}}{(\text{天}^{\text{二}}+\text{二角天}+\text{角}^{\text{二}}+\text{亢}^{\text{二}})^{\text{午}}}$欲求其積分

因可令
$天^{二}丄角=人$
$啞丅呷角=啞$
則題式化爲

$$\frac{(天^{二}丄亢)^{年}}{(呷人丄啞)彳}=\frac{(天^{二}丄亢)^{年}}{呷人彳}丄\frac{(天^{二}丄亢)^{年}}{啞彳}$$

求其第一項 $\frac{(天^{二}丄亢)^{年}}{呷人彳}$ 之積分可令

$天^{二}丄亢=戊$
則
$人彳=三彳戊$
而

$$禾\frac{(天^{二}丄亢)^{年}}{\text{[illegible]}}=\frac{三}{呷}禾戊^{年}彳戊$$

$$=\frac{三}{呷}\times\frac{戊^{年丄一}}{年丄一}$$

求其第二項 $\frac{(天^{二}丄亢)^{年}}{啞彳}$ 之積分則必須先

識別得

$$\text{禾}\frac{(\text{人}^{二}\text{丄}\text{元}^{二})^{午}}{\text{彳人}}-\frac{(\text{人}^{二}\text{丄}\text{元}^{二})^{午丅一}}{\text{咦人}}\text{丄}\text{呼禾}\frac{(\text{人}^{二}\text{丄}\text{元}^{二})^{午丅}}{\text{彳人}}$$

欲將此式化為微分式只須將其右邊之第一項求微分惟因

$$\frac{(\text{人}^{二}\text{丄}\text{元}^{二})^{午丅一}}{\text{咦人}}=\text{咦人}(\text{人}^{二}\text{丄}\text{元}^{二})^{丅午丄一}$$

所以

$$\text{彳}(\text{人}^{二}\text{丄}\text{元}^{二})^{丅午丄一}=(\text{丅午丄一})(\text{人}^{二}\text{丄}\text{元}^{二})^{丅午}\text{二人彳人}$$

$$\text{彳}(\text{咦人})=\text{咦彳人}$$

而

$$\text{彳}\frac{(\text{人}^{二}\text{丄}\text{元}^{二})^{午丅一}}{\text{咦人}}=\text{咦人}(\text{丅午丄一})(\text{人}^{二}\text{丄}\text{元}^{二})^{丅午}\text{二人彳人}\text{丄}\text{咦}(\text{人}^{二}\text{丄}\text{元}^{二})^{丅午丄一}\text{彳人}$$

$$=\left[\text{咦}(\text{丅午丄一})\text{二人}^{二}\text{丄}\text{咦}(\text{人}^{二}\text{丄}\text{元}^{二})\right]\text{彳人}\div(\text{人}^{二}\text{丄}\text{元}^{二})^{午}$$

所以

$$\frac{(\text{人}^{二}\text{丄}\text{元}^{二})^{午}}{\text{彳人}}=\frac{(\text{人}^{二}\text{丄}\text{元}^{二})^{午}}{\text{咦}\left[(\text{一丅午})\text{二人}^{二}\text{丄}(\text{人}^{二}\text{丄}\text{元}^{二})\right]\text{彳人}}\text{丄}\text{呼}\frac{(\text{人}^{二}\text{丄}\text{元}^{二})^{午丅}}{\text{彳人}}$$

去其各項之

公乘數$\frac{天}{(人丄元)}$則式化爲

一＝呹(天丄元)丅二(午丅一)呹天^{二}丄呷(天丄元)

再將此式移項化之得

〇＝元^{二}丅一元(呹丄呷)丄元^{二}呷呹丄(二午丅三)]

惟因人爲

未定之數故可令

元^{二}(呷丄呹)＝〇

(二午丅三)呹丄呷＝〇

從此求得

呹＝$\frac{元^{二}}{(二丄午三)}$

呞＝$\frac{元^{三}}{(二丄午三)}$ 二丅午三

代入識別之

式得

$$禾\frac{(天^{二}\perp元^{二})^{午}}{彳天}=\frac{(二午\top三)元^{二}}{一}\times\frac{(天^{二}\perp元^{二})^{午}}{人}\perp\frac{(午\perp三)元^{二}}{二午\top三}禾\frac{(天^{二}\perp元^{二})^{午\top一}}{彳天}$$

以午丅一代午得

$$禾\frac{(天^{二}\perp元^{二})^{午\top一}}{彳天}=\frac{二午\top四)元^{二}}{一}\times\frac{(天^{二}\perp元^{二})^{午\top一}}{人}\perp\frac{(午\top四)元^{二}}{二午\top五}禾\frac{(天^{二}\perp元^{二})^{午\top二}}{彳天}$$

依此法遞推之則知 $禾\frac{(天^{二}\perp元^{二})^{午}}{彳天}$ 可藉代數及他積分式 $禾\frac{(天^{二}\perp元^{二})^{午\top一}}{彳天}$ 以明之而其 $禾\frac{(天^{二}\perp元^{二})^{午\top一}}{彳天}$ 又可藉他代數及他積

分式$禾\frac{(\text{二天二元})^{\text{二}}}{\text{彳天}}$以明之如是屢推至其他積分式為$禾\frac{\text{丄元}}{\text{彳天}}$則能以平

圓之弧●明之而積分之數必至此而止一溯源五卷第百十五款

第十一款　論合名微分

有一種微分式拾級中謂之合名微分溯源中謂之二項微分此種微分式其括弧之指數若為正整之數則為實函數之微分括弧之指數若非正整之數則為虛函數之微分惟其虛函數之微分有可化之為實函數者有不可化之為實函數者故其化法及求積分之法各有不同不能不一一論之

第十二款　凡合名微分其括弧之指數為正整之數者可將其括弧內之數以乘法詳之而每項各以括弧外之乘數乘之則可一

一求其積分

一題 有微分式 $天^{二}(甲丄乙天^{三})^{二}彳天$ 欲求其積分

則可將 $甲丄乙天^{三}$ 自乘得 $乙^{二}天^{六}丄二甲乙天^{三}丄甲^{二}$ 以 $天^{二}彳天$ 乘之得

$乙^{二}天^{八}彳天丄二甲乙天^{五}彳天丄甲^{二}天^{二}彳天$ 每項各求其積分得

$\frac{乙^{二}天^{九}}{九}丄\frac{甲乙天^{六}}{三}丄\frac{甲^{二}天^{三}}{三}丄㖈$

第十三款 凡合名微分其括弧外變數之指數較括弧內變數之

指數少一數者則其求積分之法可以一增其括弧之指數爲實

以新指數乘其括弧內變數之指數復以其倍數乘之為法以約之

一題　有微分式 $他=丅天^{卯丅一}(甲天^{卯}丄乙)^{寅}彳天$ 欲求其積分

則可令 $甲天^{卯}丄乙=人$ 故 $天^{卯}=\frac{甲}{人丅乙}$ $卯天^{卯丅一}彳天=\frac{甲}{彳人}$ $天^{卯丅一}彳天=\frac{卯甲}{彳人}$ 而題式化為 $他=\frac{卯甲}{人^{寅}彳人}$ 求其積分得

$他=\frac{卯甲(寅丄一)}{人^{寅丄一}}丄丙$ 以所代之數還之得 $他=\frac{卯甲(寅丄一)}{(甲天^{卯}丄乙)^{寅丄一}}丄丙$ 一溯源五卷第一百〇八款

二題　有微分式 $(甲丄乙天^{二})^{三}寅天彳天$ 欲求其積分

則如法求之得其積分之式

$\frac{寅}{三}(甲丄乙天^{三})^{\frac{亖}{三}}丄丙$

拾級十七卷第八款

第十四款　凡合名虛函數之微分式若其括弧外變數之指數加一以括弧內變數之指數約之能爲整數者則可借他變元代其括弧內之數而以括弧指數之分母爲指數化其式爲實函數

一題　有微分式 $天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{\frac{巳}{午}}$ 欲化之爲實函數

則可令 $甲丄乙天^{卯}=人^{午}$ 則 $(甲丄乙天^{卯})^{\frac{巳}{午}}=人^{巳}$ 而 $天^{卯}=\frac{人^{午}丅甲}{乙}$ 所以 $天^{寅}=\left(\frac{人^{午}丅甲}{乙}\right)^{\frac{寅}{卯}}$ 而 $天^{寅丅一}彳天=\frac{午}{卯乙}人^{午丅一}\left(\frac{人^{午}丅甲}{乙}\right)^{\frac{寅}{卯}丅一}彳人$ 則題式化爲 $\frac{午}{卯乙}人^{巳丄午丅一}彳人\left(\frac{人^{午}丅甲}{乙}\right)^{\frac{寅}{卯}丅一}$

其$\frac{寅}{卯}$能爲整數者必爲實函數

第十五款　凡合名虛函數之微分式其括弧外變數之指數加一以括弧內變數之指數約之用加括弧之指數而得整數者亦可化之爲實函數

一題　有微分式$天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{\frac{巳}{壬}}$欲化之爲實函數

可將其括弧內之數$甲丄乙天^{卯}$以$天^{卯}$約之則題式變爲

$$天^{寅丅一}彳天\left[(甲天^{丅卯}丄乙)天^{卯}\right]^{\frac{巳}{壬}}$$

卽

$$天^{寅丄\frac{卯巳}{壬}丅一}彳天(甲天^{丅卯}丄乙)^{\frac{巳}{壬}}$$

令

此式中 $\text{甲天}^{\text{丅卯}}\text{丄乙}=\text{人}^{\text{午}}$ 則 $\left(\text{甲天}^{\text{丅卯}}\text{丄乙}\right)^{\frac{\text{午}}{\text{巳}}}=\text{人}^{\text{巳}}$ 而 $\text{天}^{\text{丅卯}}=\frac{\text{甲}}{\text{人}^{\text{午}}\text{丅乙}}$ 所以 $\text{天}^{\text{寅}\text{丄}\frac{\text{午}}{\text{卯巳}}\text{丅卯}}=\left(\frac{\text{甲}}{\text{人}^{\text{午}}\text{丅乙}}\right)^{\text{寅}\text{丄}\frac{\text{午}}{\text{卯巳}}}$ 而 $\text{天}^{\text{寅}\text{丄}\frac{\text{午}}{\text{卯巳}}}=\left(\frac{\text{甲}}{\text{人}^{\text{午}}\text{丅乙}}\right)^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}\text{丄}\frac{\text{午}}{\text{卯巳}}}}\text{一}\left(\frac{\text{甲}}{\text{人}^{\text{午}}\text{丅乙}}\right)^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}\text{丄}\frac{\text{午}}{\text{巳}}}$ 求微分得

$$\left(\text{寅}\text{丄}\frac{\text{午}}{\text{卯巳}}\right)\text{天}^{\text{寅}\text{丄}\frac{\text{午}}{\text{卯巳}}\text{丅一}}\text{彳天}=\frac{\text{卯}}{\text{寅}\text{丄}\frac{\text{午}}{\text{卯巳}}}\times\frac{\text{甲}}{\text{午人}}\times\frac{\text{甲}}{\text{午人}^{\text{午丅一}}}\left(\frac{\text{甲}}{\text{人}^{\text{午}}\text{丅乙}}\right)^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}\text{丄}\frac{\text{午}}{\text{卯巳}}}\text{丅一}}\text{彳人}$$

則

$$\text{天}^{\text{寅}\text{丄}\frac{\text{午}}{\text{卯巳}}\text{丅一}}\text{彳天}=\frac{\text{卯甲}}{\text{午人}^{\text{午丅一}}}\left(\frac{\text{甲}}{\text{人}^{\text{午}}\text{丅乙}}\right)^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}\text{丄}\frac{\text{午}}{\text{卯巳}}}\text{丅一}}\text{彳人}$$

所以其

$$\text{天}^{\text{寅}\text{丄}\frac{\text{午}}{\text{卯巳}}\text{丅一}}\text{彳天}\left(\text{甲天}^{\text{丅卯}}\text{丄乙}\right)^{\frac{\text{午}}{\text{巳}}}=\frac{\text{卯甲}}{\text{午人}^{\text{巳丄午丅一}}}\left(\frac{\text{甲}}{\text{人}^{\text{午}}\text{丅乙}}\right)^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}\text{丄}\frac{\text{午}}{\text{卯巳}}}\text{丅一}}\text{彳人}$$

此式中之 $\frac{\text{卯}}{\text{寅}\text{丄}\frac{\text{午}}{\text{卯巳}}}=\frac{\text{卯巳}}{\text{寅巳丄午}}$ 若能為整

數則必爲實函數

第十六款　凡合名虛函數之微分式若于以上兩款之數皆不能合則不能化之爲實函數衹可將題式分之爲二其一爲微分式其一爲實函數名曰分求積分之法

此法之理無甚難明不過從公微分式變得耳惟因

彳(戊亥)=亥彳戊丄戊彳亥

所以

戊亥=禾戊彳亥丄禾亥彳戊

而

禾戊彳亥=戊亥丅禾亥彳戊　(一)

從此式之理無論何種微分式若能化之爲兩箇乘數一爲

分式之能求積分者令等于彳亥爲實函數令等于戊則可從彳亥求得亥從戊求得彳戊乃以彳亥亥彳戊戊四數代入㊀式之中則凡欲求彳亥戊之積分可先得其第一項之數亥戊而其第二項之數彳戊亥可代入其彳亥戊式中以求之如是屢用代法可使其所得之數愈近于所求之積分

凡欲將合名微分之公式 $天^{寅-一}彳天(甲+乙天^{卯})^{巳}$ 其巳之所代者爲分數 化之爲兩箇乘數其有四法

一可化其式爲

$$天^{寅-卯}天^{卯-一}彳天(甲+乙天^{卯})^{巳}$$

分之爲

$$彳亥=天^{卯-一}彳天(甲+乙天^{卯})^{巳}$$

$$戊=天^{寅-卯}$$

從此得

$$亥=\frac{一}{卯乙(巳+一)}(甲+乙天^{卯})^{巳+一}$$

及

$$彳戊=(寅-卯)天^{寅-卯-一}彳天$$

則

$$戊彳亥=天^{寅-一}彳天(甲+乙天^{卯})^{巳}$$

$$\text{戌彡}=\frac{\text{卯乙}(\text{巳丄一})}{\text{一}}\text{人}^{\text{寅卯}}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丄一}}$$

$$\text{亥微}=\frac{\text{卯乙}(\text{巳丄一})}{\text{寅卯}}\text{天}^{\text{寅卯丅}}\text{彳天}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丄}}$$

代入㊀式得

$$\text{禾天}^{\text{寅丅}}\text{彳天}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}=$$

$$\frac{\text{卯乙}(\text{巳丄一})}{\text{一}}\text{天}^{\text{寅卯}}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丄}}\ \text{丅}\ \frac{\text{卯乙}(\text{巳丄一})}{\text{寅卯}}\text{禾天}^{\text{寅卯丅一}}\text{彳天}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丄一}}$$

惟因式中之

$$\text{禾天}^{\text{寅卯丅一}}\text{彳天}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丄}}=\text{禾天}^{\text{寅卯丅}}\text{彳天}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})$$

$$=\text{甲禾天}^{\text{寅卯丅}}\text{彳天}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}\ \text{丄}\ \text{乙禾天}^{\text{寅丅}}\text{彳天}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}$$

所以

$$\text{禾天}^{\text{寅丅一}}\,\text{彳}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}} =$$

$$\frac{\text{卯乙}(\text{巳丄一})}{\text{一}}\,\text{天}^{\text{寅丅卯}}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丄一}} \left\{ \begin{array}{l} \text{丅}\dfrac{\text{卯乙}(\text{巳丄一})}{\text{甲}(\text{寅丅卯})}\,\text{禾天}^{\text{寅丅卯丅一}}\,\text{彳}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}} \\ \text{丅}\dfrac{\text{卯乙}(\text{巳丄一})}{\text{乙}(\text{寅丅卯})}\,\text{禾天}^{\text{寅丅一}}\,\text{彳}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}} \end{array}\right.$$

則

$$\left\{\text{一丄}\frac{\text{卯乙}(\text{巳丄一})}{\text{乙}(\text{寅丅卯})}\right\}\text{禾天}^{\text{寅丅一}}\,\text{彳}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}} =$$

$$\frac{\text{卯乙}(\text{巳丄一})}{\text{一}}\,\text{天}^{\text{寅丅卯}}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丄一}}\,\text{丅}\frac{\text{卯乙}(\text{巳丄一})}{\text{甲}(\text{寅丅卯})}\,\text{禾天}^{\text{寅丅卯丅一}}\,\text{彳}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}$$

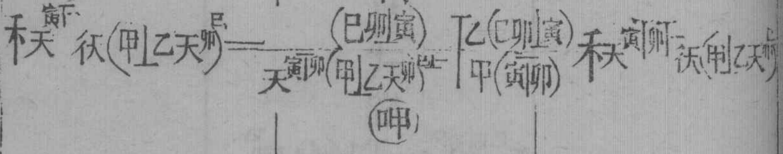
此式中之

$$\text{一丄}\frac{\text{卯乙}(\text{巳丄一})}{\text{乙}(\text{寅丅卯})} = \frac{\text{卯乙}(\text{巳丄一})}{\text{乙}(\text{巳卯丄寅})}$$

$$\frac{\text{卯乙}(\text{巳丄一})}{\text{一}} : \frac{\text{卯乙}(\text{巳丄一})}{\text{乙}(\text{巳卯丄寅})} = \frac{\text{乙}(\text{巳卯丄寅})}{\text{一}}$$

$$\frac{\text{卯乙}(\text{巳丄一})}{\text{甲}(\text{寅丅卯})} : \frac{\text{卯乙}(\text{巳丄一})}{\text{乙}(\text{巳卯丄寅})} = \frac{\text{乙}(\text{巳卯丄寅})}{\text{甲}(\text{寅丅卯})}$$

所以得



二可化其式為

$\text{天}^{\text{巳卯丄寅丅}}\ \text{祅天}^{\text{丅巳卯}}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}$

分之為

$\text{彶}=\text{天}^{\text{巳卯丄寅丅}}\ \text{祅}$

$\text{戊}=\text{天}^{\text{丅巳卯}}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}$

則

$\text{亥}=\dfrac{\text{巳卯丄寅}}{\text{二}}\ \text{天}^{\text{巳卯丄寅}}$

$\text{彶}=\text{丅巳卯天}^{\text{丅巳卯丅}}\ \text{祅}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}\text{丄巳}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丅}}\text{乙卯天}^{\text{卯丅}}\ \text{祅天}^{\text{丅巳卯}}$

$=\text{丅巳卯天}^{\text{丅巳卯丅}}\ \text{祅}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丅}}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})\text{丄乙巳卯天}^{\text{丅巳卯丄卯丅}}\ \text{祅}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丅}}$

$=\text{丨甲巳卯天}^{\text{丅巳卯丅}}\ \text{祅}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丅}}\left\{\begin{array}{l}\text{丅乙巳卯天}^{\text{丅巳卯丄卯丅}}\ \text{祅}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丅}}\\ \text{丄乙巳卯天}^{\text{丅巳卯丄卯丅}}\ \text{祅}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丅}}\end{array}\right.$

$=\text{丨甲巳卯天}^{\text{丅巳卯丅}}\ \text{祅}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丅}}$

從㊀式得

$禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}=$

$\frac{巳卯丄寅}{一}天^{寅}(甲丄乙天^{卯})^{巳}丄\frac{巳卯丄寅}{甲巳卯}禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳丅一}$

(𠮙)

可化其式爲

$$\text{天}^{\text{寅丄卯(巳丄一)}}\ \text{天}^{\text{丅卯(巳丄一)丅一}}\ \text{彳天}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}$$

分之爲

$$\text{彳亥}=\text{天}^{\text{丅卯(巳丄一)丅一}}\ \text{彳天}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}$$

$$\text{戌}=\text{天}^{\text{寅卯(巳丄一)}}$$

則

$$\text{亥}=\frac{\text{丄甲卯(巳丄一)}}{\text{天丅卯(巳丄一)}}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丄一}}$$

$$\text{彳戌}=[\text{寅丄卯(巳丄一)}]\ \text{天}^{\text{寅丄卯(巳丄一)丅一}}\ \text{彳天}$$

$$\text{戌彳亥}=\frac{\text{丅甲卯(巳丄一)}}{\text{一}}\ \text{天}^{\text{寅}}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丄}}$$

$$\text{亥彳戌}=\frac{\text{丄甲卯(巳丄一)}}{\text{寅丄卯(巳丄一)}}\ \text{天}^{\text{寅丅一}}\ \text{彳天}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丄一}}$$

$$=\text{丅}\frac{\text{甲卯(巳丄一)}}{\text{甲[寅丄卯(巳丄一)]}}\text{天}^{\text{寅丅一}}\text{彳天(甲丄乙天}^{\text{卯}}\text{)}^{\text{巳丄一}}\text{丄}\frac{\text{丅甲卯(巳丄一)}}{\text{乙[寅丄卯(巳丄一)]}}\text{天}^{\text{寅丄卯丅一}}\text{彳天(甲丄乙天}^{\text{卯}}\text{)}^{\text{巳}}$$

代入(一)式得

$$\text{禾天}^{\text{寅丅一}}\text{彳天(甲丄乙天}^{\text{卯}}\text{)}^{\text{巳}}=$$

$$\text{丄}\frac{\text{甲卯(巳丄一)}}{\text{一}}\text{天}^{\text{寅}}\text{(甲丄乙天}^{\text{卯}}\text{)}^{\text{巳丄一}}\text{丅}\frac{\text{甲卯(巳丄一)}}{\text{甲[寅丄卯(巳丄一)]}}\text{禾天}^{\text{寅丅一}}\text{彳天(甲丄乙天}^{\text{卯}}\text{)}^{\text{巳}}$$

$$\text{丄}\frac{\text{甲卯(巳丄一)}}{\text{乙[寅丄卯(巳丄一)]}}\text{禾天}^{\text{寅丄卯丅一}}\text{彳天(甲丄乙天}^{\text{卯}}\text{)}^{\text{巳}}$$

則

$$\left(\text{一丅}\frac{\text{甲卯(巳丄一)}}{\text{甲[寅丄卯(巳丄一)]}}\right)\text{禾天}^{\text{寅丅一}}\text{彳天(甲丄乙天}^{\text{卯}}\text{)}^{\text{巳}}$$

$$=\text{丅}\frac{\text{甲卯(巳丄一)}}{\text{天}^{\text{寅}}}\text{(甲丄乙天}^{\text{卯}}\text{)}^{\text{巳丄一}}\text{丄}\frac{\text{甲卯(巳丄一)}}{\text{乙[寅丄卯(巳丄一)]}}\text{禾天}^{\text{寅丄卯丅一}}\text{彳天(甲丄乙天}^{\text{卯}}\text{)}^{\text{巳}}$$

所以得

$$\text{禾天}^{\text{寅丅一}}\text{彳天(甲丄乙天}^{\text{卯}}\text{)}^{\text{巳}}=$$

$$\frac{\text{甲寅}}{\text{天}^{\text{寅}}}\text{(甲丄乙天}^{\text{卯}}\text{)}^{\text{巳丄一}}\text{丅乙}\left(\frac{\text{甲寅}}{\text{寅丄甲卯(巳)}}\right)\text{禾天}^{\text{寅丄卯丅一}}\text{彳天(甲丄乙天}^{\text{卯}}\text{)}^{\text{巳}}\quad\text{(丙)}$$

四亦化其式為

$天^{寅丄卯(巳丄一)}天^{丅卯(巳丄一)丅一}伕(甲丄乙天卯)^{巳}$

亦分為

$後＝天^{丅卯(巳丄一)丅一}伕(甲丄乙天卯)^{巳}$

$戊＝天^{寅丄卯(巳丄一)}$

則

$亥＝丅\frac{甲卯(巳丄一)}{二}天^{丅卯(巳丄一)}(甲丄乙天卯)^{巳丄一}$

$伐＝[寅丄卯(巳丄一)]天^{寅丄卯(巳丄一)丅一}伕$

$戊亥＝丅\frac{甲卯(巳丄一)}{二}天^{寅}(甲丄乙天卯)^{巳丄一}$

$亥伐＝丅\frac{甲卯(巳丄一)}{寅丄卯(巳丄一)}天^{寅丅一}伕(甲丄乙天卯)^{巳丄一}$

代入

(一)式得

$$禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}＝$$

$$丅\frac{天^{寅}}{甲卯(巳丄一)}(甲丄乙天^{卯})^{巳丄一}丄\frac{寅卯丄巳卯}{甲卯(巳丄一)}禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳丄一}$$

(可)

以上所得呷𠮙㖠叮四式為一切合名微分式求積分之公式從呷式可使寅卯同名之式其寅依卯遞損從𠮙式可使巳為正分數者其巳以一遞損若寅卯二數有一為負者可從㖠式求之若其巳為負數者可從叮式求之皆能使其寅變至小于卯其巳變至小于一而止所以無論何種合名微分式皆可從此四式中擇其合用之式以求積分則此四式實為積分術中至精絕妙之式也

學者觀以上各款之說即可知每款之法乃是每種微分式求積分之專法心中可以了然無疑矣惟余以為求積分之正法只有第一款而已自二款以至十五款不過窮其變化之妙耳至于第十六款之法其意雖若專為合名微分而設然于以上各款之理無不兼容

幷包所以無論何款之微分式苟能化之爲合名之式者無不可用公式推之是呷𠮙呐叮四式卽謂之一切代函數微分之公積分式可也

茲取各款中所已有之題以第十六款之公式求其積分殊覺大有趣味且以見公式之無所不通也

一題　有微分式 $天^{寅}伕$ 欲求其積分

因題式可化作 $\frac{天^{寅丄一}}{天}伕$ 卽 $天^{寅丄一}天^{-一}伕(○丄天)$ 故可于呷式中令

甲＝○
乙＝一
丙＝一
丁＝一

卽可得

$禾天^{寅}彳天=一\frac{寅丄一}{天^{寅一}三天}\;丅\;\frac{寅丄一}{〇}禾天^{寅二}彳天$

其

$\frac{寅丄一}{〇}禾天^{寅二}彳天=〇$

其

$\frac{寅丄一}{天^{寅一}一天}=\frac{寅丄一}{天^{寅丄一}}$

所以得

$禾天^{寅}彳天=\frac{寅丄一}{天^{寅丄一}}丄呐$

二題　有微分式$\frac{天}{彳天}$欲求其積分

則可令

$月一=人$

而

$天=一丄人$

$彳天=彳人$

故題式可化為

$\frac{一丄人}{彳人}=\frac{〇}{〇}人彳人(一丄人)^{丅一}$

如于㊞式中令

$天=人$

$彳天=彳人$

$寅=一$

甲二一
卯二一
巳二下
則可得

禾人秋(一丄人)下二

八(一丄人)下禾人秋(一丄人)下

又令
寅二二
從(丙)式得

下禾人秋(一丄人)下二

下三大(一丄人)下三禾大秋(一丄人)下

又令
寅二三
從(丙)

式得

禾三人秋(一丄人)下二

三人三(一丄人)下三禾三人秋(一丄人)下

如是屢求之則得

禾一人秋二人下三大上三大下……

以天下代其人得

禾天秋二(天上)下(天下)上(天下)下(天下)上……

此即

爲訥天之級數

三題 有微分式 $(甲丄乙天)^{巳}彳天$ 欲求其積分

因題式可化作 $天^{○}彳天(甲丄乙天)^{巳}$ 故可于(呷)式中令

$寅=一$

$卯=一$ 則可得

$$禾(甲丄乙天)^{巳}彳天=\frac{乙(巳丄一)}{天(甲丄乙天)^{巳丄一}}丅\frac{乙(巳丄一)}{甲(○)}禾天^{丅一}彳天(甲丄乙天)^{巳}$$

所以得

$$禾(甲丄乙天)^{巳}彳天=\frac{乙(巳丄一)}{(甲丄乙天)^{巳丄一}}$$

四題　有微分式 $\frac{(一丄天^{三})^{二}}{彳天}$ 欲求其積分

因題式可化為 $天彳天(一丄天^{三})^{丅二}$ 故可于㈺式中令

寅＝一

卯＝二

巳＝丅一

甲＝一

乙＝一

則

$$禾\frac{一丄天^{三}}{彳天}＝丅天^{丅二}(一丄天^{三})丄禾天^{丅三}彳天(一丄天^{三})^{丅}$$

又

從㈺式得

$$禾天^{丅六}彳天(一丄天^{三})^{丅二}＝$$

$$\frac{三}{一}天^{丅二}(一丄天^{三})丄禾天^{丅四}彳天(一丄天^{三})^{丅一}$$

$$禾天^{丅四}彳天(一丄天^{三})^{丅一}＝$$

$$丅\frac{五}{一}天^{丅五}(一丄天^{三})丅禾天^{丅六}彳天(一丄天^{三})^{丅一}$$

⋯⋯所以得

$$\frac{一丄天}{禾}$$

$$丅\frac{天}{一}丄\frac{三天^{二}}{一}丅\frac{五天^{五}}{一}丄\cdots\cdots丄呐$$

五題　有微分式$(五丄七天^{二})彳天$欲求其積分

因題式可化為$天^{〇}彳天(五丄七天^{二})^{二}$故可于吃式中令

寅＝一
卯＝二
巳＝二
甲＝五
乙＝七

則

$$禾(五丄七天^{二})^{二}彳天＝\frac{天}{五}\left[(五丄七天^{二})^{二}\right]丄四禾天^{〇}彳天(五丄七天^{二})$$

其

$$禾天^{〇}伕(五丄七天^{三})^{〇}=\frac{三}{天}(五丄七天^{三})^{\frac{三}{〇}}丄禾天^{〇}伕(五丄七天^{三})^{〇}$$

其

$$禾天^{〇}伕(五丄七天^{三})^{〇}=禾伕=天$$

所以得

$$禾(五丄七天^{三})^{二}伕=\frac{五}{天}(五丄七天^{三})^{二}丄\frac{三}{四}天(五丄七天^{三})丄\frac{三}{四}天$$

$$=二五天丄\frac{三}{七〇}天^{三}丄\frac{五}{四九}天^{五}丄丙$$

六題　有微分式

丑天彳天(甲丄乙天)三

欲求其積分

則可于(甲)式中令

寅＝二

卯＝二

巳＝三

得

不丑天彳天(甲丄乙天)三＝

三乙/丑 天(甲丄乙天)三 丄 三乙/甲 不天彳天(甲丄乙天)三

＝ 三乙/丑 (甲丄乙天)三 丄丙

七題　有微分式

呼人彳人(人丄元)午

欲求其積分

因題式可作

呼禾人彳人(人丄元)午

故可于(甲)式中令

寅＝二

卯＝二

巳＝丨午

甲＝元

乙＝一

天＝人

彳天＝彳人

則

$$\text{禾人彳人}(\text{元丄人})^{\text{丅午}}=$$

$$\frac{\text{二丅二午}}{\text{人}(\text{元丄人})^{\text{丅午丄二}}}\;\text{丅}\;\frac{\text{三丅二午}}{\text{元}(\text{二丅一})}\;\text{禾人}^{\text{丅}}\text{彳人}(\text{元丄人})^{\text{丅午}}$$

$$=\frac{\text{二}}{\text{一}}\times\frac{\text{一丅午}}{(\text{元丄人})^{\text{午丅二}}}\;\text{丅}\;\text{〇}$$

所以得

$$\text{禾}\frac{(\text{人丄元})^{\text{丶}}}{\text{呼人彳人}}=\frac{\text{二}}{\text{呼}}\times\frac{\text{一丅午}}{(\text{人丄元})^{\text{丅午丄一}}}$$

八題　有微分式$\frac{(\text{人丄元})^{\text{午}}}{\text{彳人}}$欲求其積分

因題式可作$\text{人}^{\text{〇}}\text{彳人}(\text{元丄人})^{\text{丅午}}$　故可于(可)式中令

寅＝一
卯＝二
巳＝丅午
甲＝元
乙＝一
天＝一人
彳天＝一彳人
得

$$\text{禾}\frac{(\text{人丄元})^{\text{午}}}{\text{彳人}}=$$

九題　有微分式$天^{卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}$欲求其積分

$$丅\left[\frac{二元(甲丄一)}{人(元丄人)^{甲丄一}}\right]\frac{一元(甲丄一)}{一丄二丅二午}禾人^{?}彳人(元丄人)^{甲丄一}$$

$$=\left[\frac{丅(二午丄二)元}{一}\times\frac{(人丄元)^{午丅}}{人\;人}\right]\frac{(午二午丄二)元}{丅午丅三}禾\frac{(人丄元)^{午丅一}}{彳人}$$

$$=\frac{(二午丅二)元}{一}\times\frac{(人丄元)^{午丅}}{人\;人}\;丄\;\frac{(二午丅二)元}{二午丅三}禾\frac{(人丄元)^{午丅一}}{彳人}$$

十題　有微分式

$$\text{天}^{\text{丅卯}(\text{巳丄一})\text{丅一}}\,\text{彳天}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}$$

欲求其積分

于(呷)式中令　寅一卯　則

$$\text{禾天}^{\text{丅卯丅一}}\text{彳天}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}} = \frac{\text{乙}(\text{巳卯丄卯})}{\text{天}^{〇}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丄一}}} \text{丅} \frac{\text{乙}(\text{巳卯丄卯})}{\text{甲}(\text{丅卯丄卯})}\,\text{禾天}^{\text{丅一}}\text{彳天}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}$$

$$= \frac{\text{乙卯}(\text{巳丄一})}{(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丄一}}} \text{丅}〇$$

所以

$$\text{禾天}^{\text{丅卯丅一}}\text{彳天}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}} = \frac{\text{乙卯}(\text{巳丄一})}{(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丄一}}}$$

于呐式中令

$$\text{寅}=\text{丅卯}(\text{巳}\perp\text{一})$$

則

$$\text{禾天}^{\text{丅卯}(\text{巳}\perp\text{一})\text{丅一}}\text{彳天}(\text{甲}\perp\text{乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}=\frac{\text{丅甲卯}(\text{巳}\perp\text{一})}{\text{天}^{\text{丅卯}(\text{巳}\perp\text{一})}}(\text{甲}\perp\text{乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}\perp\text{一}}$$

$$\text{丅}\frac{\text{丅甲卯}(\text{巳}\perp\text{一})}{\text{乙}[\text{丅卯}(\text{巳}\perp\text{一})\perp\text{卯巳}]}\text{禾天}^{\text{丅卯}(\text{巳}\perp\text{一})\perp\text{卯丅一}}\text{彳天}(\text{甲}\perp\text{乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}$$

$$=\text{丅}\frac{\text{甲卯}(\text{巳}\perp\text{一})}{\text{天}^{\text{丅卯}(\text{巳}\perp\text{一})}}(\text{甲}\perp\text{乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}\perp\text{一}}\text{丅〇}$$

所以得

$$\text{禾天}^{\text{丅卯}(\text{巳}\perp\text{一})\text{丅一}}\text{彳天}(\text{甲}\perp\text{乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}=\text{丅}\frac{\text{甲卯}(\text{巳}\perp\text{一})}{\text{天}^{\text{丅卯}(\text{巳}\perp\text{一})}}(\text{甲}\perp\text{乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}\perp\text{一}}$$

或有問者曰九十兩題之式以呷呐兩式求其積分此理余竊疑焉何也其九題之式即造呷式時所用之式也其十題之式即造呐式時所用之式也斯時呷呐兩式尚未造成則何能用其式以求積分

得毋自相矛盾乎

答之曰以呷呐兩式馭九十兩題乃不過借此以明公式之無所不遍云耳非謂舍此更無他術可求也九題之式合于第十三款之例十題之式合于第十五款之例故造公式時可用此兩款之法以求其積分

學算筆談卷十二

金匱華蘅芳學

論各種算學不外乎加減乘除

余作學算筆談從算學之至淺者起由漸而深至第十卷而論微分第十一卷而論積分已爲今日算學中極深之事矣微積之外或能更有他種算學深妙于此亦未可知然當今之世尚未能有其書須俟後之算學家創之非余之所及見矣

夫算學之自淺而深亦處于勢之不得不然正如殷因夏禮周因殷禮其所損益者可知也吾以爲後世之算學無論至如何精深可以一言蔽之曰加減乘除而已古今之算學不外乎此四字則可知百世之下其算學仍不離乎此四字也

何以言之數之最易明者爲整數故算學中亦以整數之加減乘除爲最易之事童而習之夫人而能爲之也其稍難者爲分數故又有分數之加減乘除再進而論之則有小數故又有小數之加減乘除凡習數學者非熟習此三種加減乘除之法固不能演算也然祇習此三種加減乘除之法則但能演數而不能演元故言天元者又必習天元之加減乘除言代數者又必習代數之加減乘除而代數中之加減乘除又有整數分數指數其法各不相同至于微分積分仍無非加減乘除也各種函數之公微分式即微分中加減乘除之式也由各種函數之公微分式返求其所由生之函數即積分中加減乘除之式也吾故曰自古迄今之算學無非加減乘除也

惟天元代數之加減乘除必兼用數學之加減乘除而微分積分之

加減乘除又必兼用代數之加減乘除故亦兼用數學之加減乘除所以算術愈深則其所用之各種加減乘除之法愈多而事亦愈繁矣

學者若知各種算法無非加減乘除則于學算之事大有裨益因心中常存此意則視各種算學皆非甚難之事祇須留心熟習其加減乘除之法便可更進一步也數學如是元代如是微積亦如是則可知微積之後若再有別種深妙之法亦當如是也

各種算法莫不自有其加減乘除之法學算者必先從數學之加減乘除起不明數學之加減乘除不能明元代之加減乘除也不明代數之加減乘除不能明微積之加減乘除也明其加減乘除則其術自明不明其加減乘除而能明其術者蓋未之有也

學者心中必以爲算術愈深則其加減乘除之法愈難余謂不然最難者數學之加減乘除也元代微積之加減乘除皆因數學之加減乘除以爲用既有數學之各法以爲基而更習他法乃是增高繼長之功夫耳有何難事哉

然此語人必不信以爲故作此説爲循循善誘之計耳吾亦不必深辯惟請學者自思之從甫經識數而習熟整數分數之加減乘除用功幾何用力幾何迨巳明數學而習元代之加減乘除用功幾何用力幾何必有辨矣

故以不明元代之人而學元代必比不明數學之人而學數學其事較易以不明微積之人而學微積又必比不明元代之人而學元代其事更易故學算者惟患自已不肯進步耳若孳孳不已其精進之

功固日易一日也

學算之人每以數學爲易而元代爲難其事亦非無因葢以數學之加減乘除其事雖難而其理極淺且有各種便于初學之書其中有各種歌訣可以記誦故出于口應于手已可會于心又因書中題目甚多日夕演算不覺其煩而斯時學者之心自知不習此法斷不能算故心虛而力勤迨既明數學自以爲一切之數無不能算此心便存自滿之見而志亦稍怠又見元代之書其言加減乘除之法不過寥寥數語所設之題亦不甚多且不能如數學之明晰則誰肯用力揣摩索其加減乘除之義哉此所以諉之于難而其術遂不易明也余惟深知此弊故筆談之中于各術之加減乘除無不詳釋其法而一一表明之使學者易習其法則不致惘無頭緒也余之作此筆談

之意原欲使不明算法之人觀此便能明算也

論一切算稿均宜筆之于書

學者甫經習算未必能即有著述不過將書中所有之題依法推演而已迨既明點線面體之理則能依題中之算理作圖且能于本法之外別立他法以馭之此種算法其理雖淺近易明未可矜言創獲然一時心思所寄繪圖立說演草亦非旦夕之工故須隨時記于一簿以便他日覆校不可因心中已經明白不留底稿也

又如初習天元代數之時往往因書中算式未能詳細寫出而爲之逐節詳演者其算稿亦宜登記簿中不可遺棄也

大抵學算之時其算稿往往不肯詳細註明揣其惜墨如金之意非爲欲秘其術不過因自已業已明白故不必逐一書之也殊不知經

年累月之後自己亦已遺忘即檢得昔時手書之稿每不知其所算者何題所演者何術則惟有付之敗簏而已豈不可惜

嘗見先輩算學家每有心得不肯輕易寫出其意蓋欲俟後日融會貫通方可一氣呵成以成著作也然至中年以後積勞成疾怔忡健忘雖欲自述其生平心得之事亦不能矣此所以學貫天人心通象數而卒至老死牖下一無著述也

又見先輩算學家其演算之稿每以片紙隨手書之隨手置之自已不甚愛惜亦無人爲之收拾者迨年已衰老眼目昏花心思絀塞不能更有著述始追憶曩時諸稿檢點叢殘則覺頭緒紛如幾不知其所語云何也蓋已飄零散佚存者無幾而當時所書又未標題明白雖有及門之士欲爲之彙而錄之亦無下手之處

大抵人當少壯之時其氣勇往直前每不自料其病人當老健之日自謂精神矍鑠恒不自計其死故于生平之著作每日事因循而不肯早爲收拾此不獨算學如此即別種學問亦莫不如此余見之多矣故于此特爲學者言之使知病與死乃人生必有之事而不可一日不防者也

所以學算之人斷不可筆嬾每演一題每引一書必須一一寫明然後可再論算理算數當演算之時自然以片紙書之爲便惟至演畢此條必須用簿錄之無論何種算法皆可錄于此簿之內若欲分門別類再可從此簿錄出則不致有飄零散失之虞

用一簿以記算稿一取其不致散失二取其易于檢尋三取其編年記事可以証學業之精進四可不致被人持去蓋只此一簿以記算

稿若被人持去則無從登記矣故我必不肯以此與人而人亦不便向我借觀也余之算草每以白紙大帳簿書之取其紙厚頁大便于作圖及寫各種算式也人之見之者以爲是帳目也故置之案頭人亦不來翻閱

凡讀前人之算學書或因算式未詳而爲之補演或因字句脫漏訛數錯誤而爲之校正者莫妙于卽寫在原書之眉上否則卽記于算稿之簿中而註明爲某書某卷某題而作斷不可書于紙條夾在書中葢恐翻閱之時必致飄零錯亂也雖用漿黏之日久必脫不足恃也

用簿登記算稿積漸而多則可分類錄出以成著作卽使自已未遑手定他人亦能代爲編輯之且可傳之其徒或留示子孫也

論算學中可以著書之事

初習算學之時于各種算法未能淹貫于胸中故每見一種算書則覺頭緒紛如知其然而不知其所以然祇能依法推算而已固不敢輕言著述也

至習之既久則于古人之各種成法略有端緒而心亦得以稍暇惟苦于爲法所拘覺舍此別無他法此由于所見之書尚少心思未能開拓故也

學者每觀一書則覺此書之中各法已具此外當更無他法及見他書則知其中更有新義再觀他書又復然如是徧觀各書則可知算學中之新義日出而不窮惟在善算者之探索焉耳

學者既知此意則可于算學中自求新義然往往苦思力索寢食俱

廢而終覺無路可通此乃未得其法之故耳

凡著算學之書大約不外二法一爲闡明古義一爲創立新術然此二者恆相因而致未有不明古義而能創新術者也

如取古人之算書而詳校之或爲之細草或爲之圖解乃學者最有益之事因同一演算而工夫不致虛費古書得以發明非特有益于已抑且嘉惠後學也

凡事必當取法于已往故欲著算學之書者必先觀古人所著之書而得其命意之處

九章爲算學中最古之書劉徽注之李湻風又注之至本朝李雲門又爲之細草圖說人咸以爲便

緝古算經原文甚簡且有缺蝕之處唐時列之學宮限習三年其爲

艱與可知本朝張古餘以天元之術爲補細草而其義始明李雲門又爲攷注以明其條段之理而開方之義乃大顯則可知同一書也以天元演之而通則以條段演之而亦無不通著算書者不妨以此法證彼法卽如以我心與古人之心相印也

測圓海鏡李欒城本以九容之術演天元惟因細草不詳致顧箬溪有天元一無下手之歎宣城梅氏以借根方釋之其義始明後元和李尚之校正天元細草而海鏡始有善本矣

四元玉鑑原書首列假令四草以下各題均無細草讀者恒苦其難通甘泉羅氏集諸家之大成以十餘年心力演成細草學者始知有四元之術

正負開方之術略見于秦氏數書九章中而其法不詳元和李氏取

海鏡中相消之式推得開方之例撰成開方說三卷于是翻積益積代開續開之法得以復明而學者可奉爲圭臬矣是皆獨費苦心力任艱鉅不惜一身之勞數十年之苦以闡明古書之奧義者也雖曰述古亦與自立新術何異故其所成著作上可無愧于古人下可有裨于後學其功豈淺鮮哉

儀徵阮文達公集經史中能算之人而作疇人傳甘泉羅氏又作續疇人傳使古人之制作心思不致湮没且可使讀是書者得以尙友古人恍如素識則益奮勉勤學以冀他日得附于此傳之末是亦學算之一助也

從前算學之書不過分類設題祇詳馭題之術絕不講解題意惟本朝梅氏叢書演算之中參以議論罕譬曲諭惟恐人之不明故算書

之面目從此一新而讀之者如聞其口講如見其指畫不以艱苦難通爲病矣

古之算書每不多作圖九章中惟有句股之圖以靑出朱入明句股兩冪之和等于弦冪而已其餘各術無有以圖明之者自幾何原本譯入中土而象數之學乃得大顯于世其妙處在于用甲乙丙丁等字以代手之指而點線面體之形象乘除加減之曲折莫不可按圖索之此算理所以易明也

惟以圖顯算理祇能至立方而止多乘以上不能作圖則非圖之所能顯故算學家又創立代數之術一切條段莫不可以算式明之于是昔之所非圖不明者今可不必用圖矣昔之所不能作圖者今可以代數之式代其圖之用矣余之算書皆不作圖者亦因用代數式

之故
觀以上諸說則可知算學之書從古至今所以能日出不窮者以其善于翻出新樣故也每翻一新樣則能使昔之難者變爲易昔之繁者變爲簡昔之晦者變爲明故算學日有進境而不致株守成法也學者若能于古今之算書中求其窒碍難通之處而思設法以破之則從此可創古人所未有之術前以繼往後以開來爲算學中力闢新境此余所自問未能而日望之後學者也

著述中最易爲之事莫如取古之算書以他法演之如九章數學也可以天元之法演之海鏡玉鑑天元四元也可以代數之術演之幾何象數也可以代數之式明其相等之理此皆易爲之事而可使面目一新者也

若干古書中摘取數十題每題以數學幾何天元代數各演一草則此書最有益于初學者

古之算書每類之題各有本術不通其術則不能算不兼通諸術則不能盡解諸題學者每以枝枝節節爲苦自有天元一術而各題可不必問其本術但以如積之法求之而無所不通且可因草得術豈非大快之事然有數種題其天元草中仍須用其本術不明其本術亦不能用天元也所以條段之理終古不可廢也

如天元之所最易馭者莫如句股之題若不知句股二冪之和等于弦冪則無從下手矣緝古之題以天元馭之迎及而解然非用臺錐本術亦不能演元也

余以爲臺錐之術以圖說解其立術之理不如以代數解之爲便夫

斜解立方爲兩塹堵斜解塹堵爲一陽馬一鼈臑此圖非圖不明者也剖全臺之積爲一立方四塹堵四陽馬此亦非圖不明者也旣明平此則可將臺之高廣長各數從代數之術求其立方塹堵陽馬之積而合之卽可得臺之全積且亦得求臺積之本術凡商工之題皆可用此法馭之錐垜亦然

幾何原本爲學者最易明之書且于此書之理無不深信然至第十卷則甚不易明且心中不能無疑此因數之有等無等有比例無比例非圖所可明也以代數釋幾何幾乎可以廢圖然至第十卷亦不能盡明因代數式中不能顯有等無等有比例無比例之事也余以爲後日必能有一種算術其式中專能顯此各事而後幾何之第十卷乃有大用

由此可見算學中未明之事尚多皆可作學算者著述之資且不特昔人之所未明而我能明之者可以著書即將古今之人所不能明之事反覆論之以見其何以不易明必如何而後可明亦未始非算學中有益之事因我雖不能明此他人或者能因我之言而設法以明之也

論學算與著書並非兩事

人視著算學之書以爲大不易之事殊不知仍與學算無異也蓋算稿積多刪其蕪淺者存其精妙者即是著作也譬如作文者閱數日作一篇當其作文之時固未必存傳世之念及稿已積多則可選定若干篇而刻文稿也

惟因學算之稿他日即可成著作故作算稿時必須仔細爲之非特

數與算式宜寫得詳明即文理字句亦宜斟酌盡善勉得後日再用一番修飾之工

凡作算稿有數件最要之事一必詳載題目二必解明算理三必全寫算式與其簡也寧繁四必用格式影寫與其作草書寧可作正書

嘗見先輩算學家其演算之稿每作草字而算式則用市俗號碼正文之外旁書側注者甚多幾于小註之中又有小註此種算稿若能自巳清理當亦不難若自身歿之後他人欲爲刻之則無從下手矣此由于作草之時未用格式影寫之故也

用格式以寫算稿則正文與小註不致混淆其註中又註不便于寫入格式者自已亦可改之算式之行列亦可隨時排好不致有空行跨頁之弊因可將文法辭句之長短遷就算式也

算式中干支數目之字均宜寫得工整其應用古算式者須依一縱十橫百立千僵之例寫之其筆畫寧疎勿緊行列務要整齊則一覽易明且便于寫樣刊刻也

凡算式中之表必使之在半頁之內不可有上下半頁跨寫者若表之廣非半頁所能容宜使之在前頁之下半頁後頁之上半頁則展書可覽全表皆以免閱時不便也

算稿中有圖者其圖之位置亦與表同其解圖之說須與圖附近或在圖之前或在圖之後或在圖之下皆可惟不可圖與說相隔數頁以致閱者不便

數理精蘊爲梅文穆手擬之稿其圖說最爲明晳前頁之圖其說未畢則後頁再列前圖必至說畢而止故閱者不須翻覆前頁也

惟如是多列圖未免多費刻工吾以爲一頁之中作圖與說苟能文理精簡已足闡明數理矣如不能畢則于後頁再說數行亦可不必再列前圖也李壬叔云吾每觀一圖雖隔數十頁不必返覆展看也有全書均用此圖者只能于卷首列之如測圓海鏡是也

凡寫代數之式宜用心排列其行格如有不能容之處務須以文理遷就之使不至有空行跨頁之弊

算式有直行所不能容者須設法以改去之或將全式分爲數截書之而註明其截斷之故斷不可用蠅頭小字擠寫于一行之中以致不易刋刻也

嘗觀徐氏務民義齋項氏下學葊算書夏氏萬象一原少廣縋鑿其所創屢乘屢除各術皆不言其立法之根疑其有意祕匿嗣知徐氏

戴氏皆本項氏之法其立法之根實從廉法表中遞加之數悟得其理與西法之二項例無異惟當時二項之例尚未譯出項氏深思而得之以遞加之數明弦矢之本作書七卷名曰象數一原徐壯愍公爲之刻于蘇城未成而板毀于兵燹張君南坪司其校刻之事者也身殉于湖州有友人得其遺篋以歸張先生嘯山而象數一原之底稿在焉先生因年老無嗣留之無所用故以其書畀余並謂余言此書未有刊本若能梓而行之亦不朽盛業也余受而觀之知其第四卷爲項氏未竟之業錢唐戴氏爲之補成之其第七卷亦戴氏手筆也卷首有項氏自序兩篇款識絕筆年月其情甚惓惓于此書卷末有戴氏之跋備言補成是書之意並附項氏手札二通即囑補是書者也余詳閱各卷知其立術之理不外乎遞加之法而其演算之式

均用蠅頭小楷書之其數目均用古算式細至一格之中密書五六位之數非爲之重寫排疏不能刊刻也又若于一動其行列則必致有空行跨頁之弊而原文又不可更動無從增損其字句以遷就行列乃恍然悟徐夏之書但刊其術而不列其造術之草者亦因算稿之行列太密不易刊刻也若于布算之時卽存付梓之見而疏其格式有何難事哉今將是書稿本囑吾弟菩溪爲之校錄排比務使其易于刊刻然非數年之工恐不能蕆事也

算學書算式太密字畫太細最易傷目作算稿時若常寫蠅頭小字亦最易傷目吾願學算之人自省目力得以研究數理勿以能寫能刻多作細字以致自傷其目且累閱者傷目而爲黎斗一時淸夫之纖也

凡觀算學之書行列整齊者易明參差錯亂者難明既整齊矣又覺疎者易明密者不易明葢因目力稍省則心思亦易啟悟也此不獨算學如此即如兒童讀書亦覺大字者易熟小字者難熟也所以凡著算學之書務須疎其行列以使人易明

李氏遺書中開方說三卷原刻訛誤甚多近日白芙堂叢書中所刻為黃君玉屏所手校者可為善本矣惟觀白芙堂所刻他種算書則有極其潦草者此由于著書者作算稿時未將行列格式排好而他人取其草稿付之寫樣之人故至如是也

所以凡作算草須先存即是著書之心凡著算書必豫為他日付刻之計則雖不付之剞劂亦易于傳鈔影寫也余以為凡刻算學之書必請一明算學之人校之凡鈔算學之書斷不可不通算學之人寫

之故最妙之法宜自寫自校自已付刻
上海郁氏取江陰宋勉之所校秦氏數書九章及札記刻入宜稼堂
叢書中刻時讐校不精以致脫誤滋多甚至有脫去一行者吾邑鄒
敬甫先生與勉之爲老友取郁氏刻本校其錯誤之處以質勉之勉
之不覺失色使郁氏當時若延勉之至滬料理付刻之事何至如是
哉

論翻譯算學之書

西書之得行于中國皆由于翻譯之力也計有明迄今翻譯算學之
書共有三次一爲崇禎時西人利瑪竇湯若望入中國與徐李諸公
翻譯新法算書一爲咸豐年間西人偉烈亞力在上海墨海書館與
李壬叔翻譯幾何後九卷及代微積拾級談天代數學等書一爲同

治光緒間江南製造局延請西士傅蘭雅等翻譯各種西學之書其中有化學算學醫學等書非素通是學者不能執筆述之也余髫時曾在墨海書館目覩偉李二君翻譯之例故能與傅君翻譯各種算學之書計譯成而刊板流行者有代數術二十五卷微積溯源八卷三角數理十二卷代數難題解法十六卷余表弟趙靜涵江甯謂亦譯成數學理八卷算式集要二卷

西國算學之書其圖上及算式中之字均用字母識之譯作中國文字則以干支列宿之名配之恒以第一字母爲甲第二字母爲乙干盡則用支支盡則用宿其算式之變數則以天地人物配之

若于翻譯之先豫作一種工夫將應譯之干支列宿天地人物及算學中各種名目如弧角八線等名列爲一表左書西文右用華字則

閱此表者可從西文檢得應用之華字故筆述之時凡遇圖及算式可不必一一細譯其字但于譯稿之上記明某圖某式至謄清之時可自看西書從此表檢得其字以作圖上及算式中之字所以必須如此者因可比口申一一譯出者較爲便捷且不致錯誤也

余譯算學之書遇代數之式恆作一圈以記之口譯者遇算式則將鉛筆于西書之算式上作一圈而口中亦譯曰圈筆述者即于譯稿之上亦畫一圈而口中亦應之曰圈算式有大小長短之別則口中所呼手中所作亦爲長短大小之圈皆取其易于辨別也如有式以某式乘之以與某式相加得某式則譯者曰有圈以圈乘之與圈相加得圈而寫者則書有〇以〇乘之與〇相加得〇是也

數目之字自一至九其西文易于認識故凡遇西書中有數目之表

亦可不必細述但作一大圖或大書一表字以記之惟于其下須記明某行爲某數則謄清之時可以自看西書寫出全表也有圖者亦然

翻譯算學比翻譯尋常文理之書較難因西書文法與中華文法不同其字句之間每有倒轉者惟尋常文字譯時可任意改正之而算學則不能也因文理中有算式在內若顛倒之則算式之先後亂其次序無從與西書核對矣所以口譯筆述之時須以文理語氣遷就之務使算式之次序無一淩亂爲要

筆述之時務須將口譯之字一一寫出不可少有脫漏亦不可稍有增損改易也至謄出清本之時則須酌改其文理字句然所改之字句必須與口譯之意極其切當不可因欲求古雅致與西書之意不

合也所譯之書若能字字確切則將華文再譯西文仍可十得八九所以譯書之人務須得原書之面目使之惟妙惟肖而不可略參私意也原書本有謬誤自己確有見解則可作小註以明之不可改動正文

論疇人傳必須再續

阮文達公作疇人傳四十六卷從黃帝時起以迄乾隆之末凡得二百八十人羅茗香作續疇人傳六卷從補宋元之人起至道光初年止凡得四十四人古今以來算學之源流名人之著作無不斑斑可攷矣道咸以來迄今又數十年算學日新月盛人材輩出其中最著者如戴項徐李諸家其所明者有元代微積諸術皆能超軼古法于算學中大開門徑非徒株守成法而已也若不亟爲之傳未免爲算

學中一件大缺陷之事

疇人傳之不可不再續夫人而知之然數十年來竟無一人肯力任此事者皆因視之太重之故也正傳成于阮氏實爲元和李氏手筆續傳則羅氏自爲之未聞假手他人惟李羅皆有善算之名今之人皆震于其名方且謙讓之不暇則安肯秉筆而作算學之董狐哉

李壬叔爲近日算學中絕大名家余向以此事促之未肯動筆而委之張嘯山先生先生善古文而偏交徐李戴夏諸家者也然亦未肯動筆吳子登先生今之算家年輩最老亦未肯爲此事蓋由于震驚李羅之名而不敢與之匹亦由于欲求全備惟恐蒐羅不富攷覈不精以貽後人之口舌也

余以爲可以不必存此心以致斯傳久不得成吾所知之人所見之

書所聞之事記之可也吾所未知之人未見之書未聞之事闕疑焉可也若人人能存此心而各書其所知所見所聞又有一人集諸家之說而折中之論定之則斯傳之成易易也

余弟若溪作近代疇人著述記一篇錄之于後以待作傳者之採擇焉

近代疇人著述記

疇人傳自羅茗香續後未有再續者近時算家著述序跋足繼前賢而開後學者頗不乏人顧或僻處偏隅遺書未顯或英年多故著作未成亦往往而有欲搜訪而續輯之誠未易言矣然而覃精數理者名山之絕業也多方蒐錄者尙友之苦心也不揣檮眛勉效管窺意在網羅有傷繁冗謹分條詮次如左

儀徵阮文達公元嘗以虞劆推小雅十月之交在幽王六年因用時憲術上推幽王六年十月朔正得入交督漕運時立糧艘盤糧尺算法頒行各省又嘗溯古今沿革之原究中西異同之致掇拾史書薈萃羣籍創爲疇人傳自黃帝以降甄而錄之得二百八十人綜算氏之大成紀步天之正軌至今游藝之士奉爲南鍼

甘泉羅茗香士琳少時所著有比例匯通四卷摘九章中切于日用者滙爲比例十二種意主發明西法後益專精于天元四元之術著觀我生室彙稿已刻者凡九種曰句股容三事拾遺本博繪亭之法取句股中舊有之容方邊容圓徑益以西法之容中垂線交互相求一以天元御之曰三角和較算例取斜平三角中兩邊夾一角術皆入立天元一法用和較推演成式曰四元玉鑑細草以朱松庭原書

秘奧難讀殫精一紀步爲全草補漏訂訛申明疑義曰演元九式括玉鑑中進退升降消長諸例借無數之數入以正負開方式曰臺錐積演以玉鑑中有茭草形段果積疊藏二門足補少廣之缺爰取臺錐形引而申之曰周無專鼎銘攷以四分周術爲主佐以三統漢術推得宣王十六年九月既望甲戌與銘詞合曰續疇人傳以阮傳歷年已久有應續增入者因復增補得六卷曰弧矢算術補以李四香弧矢算術其術未備爰增二十七術合成四十術曰增廣新術推廣正升斜升橫升之算法以求太陰隨地隨時之明魄方向分秒復以其術通之以求交食限內之方向邊分及所經歷之邊分其未刻者有六種曰交食圖說舉隅遵現行之橢圓法于各求下綴以法解曰春秋朔閏考集黃帝以來六術及漢三統術以考春秋自隱迄哀凡

二百五十五年總經傳七百九十九日名推演成書曰綴術輯補以
祖沖之之綴術久佚爰搜括各書參以本法演得二卷曰句股截積
和較算例以孔顨軒少廣正負術所載未備推而廣之得八十四術
曰淮南天文訓存疑曰博能叢話

甘泉易蓉湖之瀚以羅茗香玉鑑細草格于體裁凡四元之條段靡
緣開方之頭緒紛如恐未能指出義例因撮取開方以及天元四元
諸算例爲四元釋例一書附于羅草之後

山陽駱春池騰風著開方釋例四卷于諸乘方方廉和較大小加減
之理皆質言之而推求各元進退定商諸術足補李四香開方說所
未備又嘗取衰分方程句股等法以及九章所未載與夫古今算書
之未能賅洽者溯源正譌爲藝游錄二卷

全椒江雲樵臨泰善用對數所著弧三角舉隅（續傳誤爲張作楠作）簡明直捷附刻于張丹村翠微山房叢書中

黟縣俞理初正燮博極羣書長于考訂兼擅天算之學所著溝洫東田諸解恆星七曜古憲四分諸論皆獨具神識未經人道

德清許積卿宗彥經生而兼精推步之理著太陽行度解以辨王寅旭戴東原之誤其目曰解日本天解日行黃道解日經度解日緯度解求經緯度解高卑盈縮解用赤道度解日度無闊狹解日左右旋凡九篇

元和狄狎鷗欽裴嘗爲李雲門校九章算術細草圖說均輸一章多所增訂又補海島算經細草晚得秦道古數書九章鈔本于張古愚家訂譌補脫歷有年所著有秦書刊誤以老病未卒業歿後其弟子

宋勉之搜得殘稿數卷採其說入札記居京師時嘗手錄徐氏所步玉鑑細草數段因欲補撰全草遺稿四冊爲長洲馬遠林釗所藏余師張嘯山先生曾見之其草與羅氏大同小異實不如羅之詳然四象朝元第三第五兩問羅草方廉隅諸數皆不符原術竟無說以處此沈氏所演獨與術脗合此則勝于羅草者也馬君謀刻之而未果後馬君殉難遺稿遂不可踪迹矣

江陰宋勉之景昌著數書九章札記以狎鷗所校明鈔本爲主而參以李四香所校四庫館本搜眾說而折衷之足資後學考證又嘗校楊輝算法六種皆刻入宜稼堂叢書中其未刻者有開方之分還原術一種

無錫鄒徹甫安鬯精究琴理著琴律細草一卷篤好天元一術校讀

算書每有所得輒題于眉上嘗以郁刻秦道古數書九章謬訛錯出演算不易故用力尤勤而辨正爲多有沈李毛宋諸家所未及者竊擬編次其說爲數書校議一冊庶幾鄉先哲之學術可以不沒云

烏程陳靜葊杰著算法大成上編凡十卷門分類別意在引誘初學其中平弧三角數卷頗能洞見本原句股求三整數法尤爲新得之理惟以天元正負諸乘方爲算家故設難題不適于用未免爲識者所嗤下編十卷則由法而致用顧無刻本葢未定之書也又有緝古算經細草一卷圖解三卷音義一卷刊行于世又有彗星譜二冊其弟子有烏程張南坪福禧歸安丁寶書兆慶皆明算而未成著述算法大成中錄其兩邊夾一角徑求對邊術解頗爲明晰

錢唐項梅侶名達其算學之書已刻者曰下學葊算書凡三種曰句

股六術圖解變通舊術分術爲六使題之相同者通爲一術圖解明晰比例精簡曰平三角和較術曰弧三角和較術極數究理于無可比例中尋得比例婉轉妙合古所未有惜其圖解尚無成書未刻者曰象數一原項氏原書祇六卷而卷四僅六紙爲未完之書殁後其友人戴鄂士校補之始成全帙凡七卷卷一曰整分起度弦矢率論卷二曰半分起度弦矢率論卷三卷四曰零分起度弦矢率論皆以兩等邊三角明其象遞加法定其數末乃申論其算法卷五曰諸術通詮取新立此弧弦矢求他弧弦矢二術半徑求弦矢二術及董氏杜氏諸術按術詮解之卷六曰諸術明變雜列所定弦矢求八線術開諸乘方捷術算律管新術橢圓求周術皆從遞加數轉變而得者也卷七曰橢圓求周圖解則鄂士所補纂也其弟子錢唐王吉甫大

有篤嗜算術徧涉中西兩家言嘗校刻割圓捷術合編不知有他著述否

烏程徐壯愍公有壬著務民義齋算學已刻者凡七種曰測圓密率本杜德美董方立輩屢乘屢除之法而廣爲互求之術曰造表簡法以垜積招差之法求西人立表之根曰橢圓正術因新法盈縮遲疾皆以橢圓立算而取徑迂回布算繁重爰撰是術法簡而密尤便對數曰截球解義直抉球與等徑等高之圓囷其外面皮積亦等之理爲幾何所未發曰弧角拾遺括舊法垂弧次形矢較諸目而統歸于和較施之對數尤便曰表算日食三差以西法步算多資于表獨日食未立步法故用新法補之曰朔食九服里差增廣疇人舊術爲見食各州郡隨時測驗之準其未刻者向有堆垜測圓三卷圓率通攷

一卷四元算式一卷校正九執術一卷古今積年解源二卷強弱率通攷一卷燬于兵燹不可得見矣

錢唐戴鄂士煦粵雅堂叢書中刻其所著求表捷術三種共九卷其一曰對數簡法續對數簡法始以開方表求諸對數繼因假設對數即訥白爾對數以求定準對數即十進對數續悟開無量數乘方法用連比例求諸對數而得數益捷此求對數表捷術也曰外切密率用連比例互相比例借杜德美求弦矢諸術變通之以求切割二線割圓之法乃大備此求八線表捷術也曰假數測圓創爲負算對數可舍八線而徑用弧背入算以求其八線對數此求八線對數表捷術也又有四元玉鑑細草與羅茗香所著略同而圖解明暢過之音分古義二卷以連比例立算與古律分暗合皆未刻

吳縣馮景亭桂芬著弧矢算術細草圖解一卷本李四香十三題而詳演天元加減乘除開方各式意淺語詳有裨初學刻入昭代叢書中咸豐之季西人新術初入中土通其法者尟而李壬叔所譯代微積拾級一書尤為難讀因取其書逐節疏解與上元陳子雋瑒同撰西算新法直解一書惟輕改其所記之號所代之字此正如戴東原之變易舊名轉足以疑誤後學也又有中星表按咸豐辛亥天正冬至星度立算

金山顧尚之觀光著書甚多全稿名曰武陵山人襍著其言算者有十一種曰算賸初續編凡二卷曰九數存古依九章為九卷而以堆垛大衍四元旁要重差夕桀割圓弧矢諸術坿焉皆采自古書而分門隸之曰九數外錄則櫽括西術為對數割圓八線平三角弧三角

各等面體圓錐三曲線靜重學動重學流質重學天文重學作記十篇曰六秝通考據開元占經所紀黃帝顓頊夏殷周魯積年而爲之考證曰九執秝解曰回回秝解皆就其法而疏通證明之曰推步簡法曰新秝推步簡法曰五星簡法皆就疇人所用術改度爲百分趨于簡易而省其紆曲曰算賸餘稿曰襍著則身殁之後余師張嘯山先生爲之分別編次者也

杭州夏紫笙鸞翔遺書凡四種曰萬象一原曰致曲術圖解推究縱橫線之條理研求微積分之奥窔曰洞方術探索夫遞加數尖堆底之原可以加減代乘除爲求弦矢之捷徑曰少廣縋鑿專立捷術以開各類乘方通爲一術可徑求數十位方根無論益積翻積俱視爲坦途矣

臨川紀愼齋大奎著筆算便覽其書以筆算爲名而兼及籌算術宜
城梅氏之義具見簡明同治庚午南昌梅氏重梓算經十書曾取其
書附刻于後

廣州何報之夢瑤曾刪訂算法統宗及輯梅定九朱吟石兩家之書
共爲四卷繼復鈔撮數理精蘊得八卷合爲一書凡得十二卷名曰
算廸今伍氏刻本祇八卷蓋非其全稿也

南海鄒特夫伯奇遺書曰學計一得以算術解經義爲治經者之助
曰補小爾雅釋度量衡三篇博引傳注攷證詳明曰格術補述夢溪
之遺緒爲算學之支流曰對數尺記因西人對數表而變通之以尺
代表製簡用廣曰乘方捷術首立開方四術以明其理又立求對數
較四術以探其賾末設對數開方計息諸草以著其術之切于日用

曰存稿則襍文也嘗繪輿地全圖其經度無盈縮而緯度漸狹相視皆爲半徑與餘弦之比橫九幅縱十一幅合之則成地球滂沱四隤之形以圜繪圖其形維肖又準咸豐甲寅歲前恒星經緯繪赤道南北恒星圖二幅其未定之書尚有測量備要二冊其弟子伊善卿德齡有求弦矢通術一卷刻入傳習錄中

嘉定時淸夫曰醖熟于求一之術嘗以大衍一術求等約分頭緖不一撰求一術指一書晚年目已雙瞽猶能手撥珠盤口授其子著百雞術衍二卷以張邱建百雞一題衍爲大中小三色皆有分子之題以盡通分之妙每題分立兩法一馭以方程一馭以求一以示術理相通每問各列三答以存其槪然疏略甚多若以代數求之則合問之答數尙不止此也

興化劉融齋熙載著天元正負歌四則簡捷易明最便初學見昨非集

長沙丁果臣取忠爲楚南絶學之倡嘗校刻白芙堂算學叢書其所撰述者曰數學拾遺多發明古今算家未盡之旨曰輿地經緯度里表據魏氏海國圖志以補張氏揣籥小錄爲之析旗部增海國推距里惟魏圖轉輾鈔摹所紀經緯不足爲據而據以推算不無毫釐千里之謬卽如今實測英國倫頓爲中國京師中線偏西一百十六度二十八分而此表乃云一百二十七度十分差至一千二百餘里其他各國誤率類是曰粟布演草其書以發商生息爲題彙輯各家術草以明開方之術而鄒特夫截算續商二法亦藉以附見焉曰對數詳解一本乎代數之法而闡明對數之理與用算式繁重演算不易

則曾栗誠之力也
海寧李壬叔善蘭嘗與西士偉烈亞力續譯幾何原本之後九卷以竟徐文定公未完之業又譯代數學十三卷代微積拾級十八卷重學二十卷曲線說三卷談天十八卷刊行于世代數者猶中法之天元四元也惟天元四元之所重者在行列位次而代數則不論行列位次一切皆以記號明之故其理雖同而爲用尤廣微分積分者凡線面體皆設爲由小漸大一刹那中所增之積即微分也其全積即積分也一切曲線及曲線所函面曲面及曲面所函體八線弧背互求眞數對數互求昔之所謂無法而難求者今皆有法求之而甚易矣重學者其學分動靜兩支靜重學所推者力相定動重學所推者力生速速有平速漸加速之分而其理之大要有二曰分力并力曰

重心則靜動兩學所共也又有流質重學其力有二曰互攝力曰互推力曲線者圓錐三曲線也一爲橢圓線二爲雙曲線三爲抛物線置圓錐形截之其截面錐底交角小于錐腰錐底交角者爲橢圓線大于錐腰錐底交角者爲雙曲線等于錐腰錐底交角者爲抛物線談天者西士侯失勒所著天文之書也其言日與恒星不動而地與五星俱繞日而行地與五星之繞日與月之繞地其軌道俱係橢圓而歷時等則所過面積亦等此眞順天以求合而非爲合以驗天也凡此數者皆西人至精之詣中土未有之奇以視明季所譯殆遠過之矣所自著者有則古昔齋算學凡十四種曰方圓闡幽曰弧矢啟祕曰對數探源皆以尖錐立算發古人未發之祕曰垛積比類則本玉鑑遺法而分條別派詳細言之于九章外別立一幟曰四元解指

明算例改定算格詳演細草圖解術雖深讀此可豁然矣曰麟德術解以李氏盈朒遲速二法爲授時術平定二差所託始因取史志所載校正而解明之曰橢圓正術解以徐所立正術俱極精深逐術爲補圖詳解之曰橢圓新術則又變通正術而益趨于簡易曰橢圓拾遺拾西說之遺義以究曲線之極致曰火器眞訣以拋物線之法通之于平圓曰尖錐變法釋考西術之異同別用法之正變可以抉對數之藩籬而無餘蘊矣曰級數回求爲一切級數互求之準繩曰天算或問則襍紀其答問之詞單文賸義剖晰入微曰考數根法數根者惟一可度而他數不能度之數也立法凡四可補幾何之未備

新化鄒叔勣漢勳與丁杲臣同治算學尤硏究天文推步之書著有顓頊憲考其弟季深漢池亦通算學丁氏之度里表多出其手

長沙李晉夫錫蕃著借根句股細草一卷括七十八題爲二十五術大旨與李四香天元句股細草相仿而西法之借根卽中法之天元也固可相附而行

湘陰左壬叟潛所著有割圜八線綴術補草綴術釋明綴術釋戴等書一貫以天元寄分之法用以立式巧變莫測又有通分捷法一帙將分母分子析爲極小數根而同者去之任以多項通分頃刻可得

湘鄉曾栗諴紀鴻文正公之次子也著圓率通攷據西士尤拉之法見代數術二十五卷而立新術推得圓率百位爲從古所未有其他算稿尚未成書卒以用心過度嘔血而卒

以上都爲二十八人附見者五人凡三十三人其他山陬海澨甄明度數之士沒世而後遺書未經流傳者或尚有之第因限于聞

見未及周知當博訪遍人隨時蒐輯茲特略舉所知并撮取諸書大意以著于篇而已光緒十年五月既望華世芳識