MATHÉMATIQUE ET LOGIQUE. — **Sur la logique de M. Brouwer,**

par M. V. GLIVENKO (*).

Dans la note précédente (**) M. A. Khintchine a indiqué quelques défauts techniques de la critique que MM. M. Barzin et A. Errera ont fait sur la logique de M. L.-E.-J. Brouwer. Je me propose ici de montrer que le point de départ d'une telle critique n'est pas légitime.

On s'efforce parfois, comme MM. Barzin et Errera l'ont fait, d'interpréter le contenu de la logique brouwerienne en introduisant la notion de propositions tierces, c'est-à-dire de propositions qui ne sont ni vraies ni fausses. Je vais montrer que dans la logique brouwerienne, l'introduction des propositions tierces est autant illégitime que dans la logique classique, de sorte que la logique brouwerienne n'est nullement une logique tripartite.

Rappelons d'abord les principes connus de la logique. Nous nous servons des symboles usuels, la négation ($\sim p$) d'une proposition signifiant toujours sa fausseté.

$$\text{I.}\quad p \supset p,$$

$$\text{II.}\quad p \supset q : \supset : q \supset r . \supset . p \supset r,$$

$$\text{III.}\quad pq \supset p, \qquad \text{IV.}\quad pq \supset q,$$

$$\text{V.}\quad r \supset p : \supset : r \supset q . \supset . r \supset pq,$$

$$\text{VI.}\quad p \supset p \vee q, \qquad \text{VII.}\quad q \supset p \vee q,$$

$$\text{VIII.}\quad p \supset r : \supset : q \supset r . \supset . p \vee q \supset r,$$

$$\text{IX.}\quad p \supset q : \supset : p \supset \sim q . \supset . \sim p,$$

$$\text{X.}\quad \sim p \vee p.$$

(*) Présenté par M. De Donder.

(**) Objection à une note de MM. Barzin et Errera, ces *Bulletins*, pp. 222-223.

Remarquons que du principe IX on déduit facilement le principe de contradiction dans sa forme classique, $\sim(\sim p \,.\, p)$. De plus, des principes I-IX on peut en déduire deux autres, dits principes d'opposition, et qui nous seront utiles dans la suite :

$$\text{XI.}\quad p \supset \sim q \,.\supset.\, q \supset \sim p,$$

$$\text{XII.}\quad p \supset q \,.\supset.\, \sim q \supset \sim p.$$

La logique brouwerienne rejette le principe X, c'est-à-dire la vérité de la proposition $\sim p \vee p$. Quant aux principes I-IX et XI-XII, ils ne subissent point la critique brouwerienne.

Théorème. — *Dans la logique brouwerienne, la proposition « la proposition* $\sim$ p v p *est fausse » est fausse* (Brouwer) (*) :

$$\sim(\sim(\sim p \vee p)).$$

Démonstration :

$$\text{(VII)}\quad p \supset \sim p \vee p$$

$$\text{(XII)}\quad \frac{p \supset \sim p \vee p \,.\supset.\, \sim(\sim p \vee p) \supset \sim p}{1. \qquad \sim(\sim p \vee p) \supset \sim p}$$

$$\text{(VI)}\quad \sim p \supset \sim p \vee p$$

$$\text{(XII)}\quad \frac{\sim p \supset \sim p \vee p \,.\supset.\, \sim(\sim p \vee p) \supset \sim(\sim p)}{2. \qquad \sim(\sim p \vee p) \supset \sim(\sim p)}$$

$$(1)\qquad \sim(\sim p \vee p) \supset \sim p$$

$$(2)\qquad \sim(\sim p \vee p) \supset \sim(\sim p)$$

$$\text{(IX)}\quad \frac{\sim(\sim p \vee p) \supset \sim p : \supset : \sim(\sim p \vee p) \supset \sim(\sim p) \,.\supset.\, \sim(\sim(\sim p \vee p))}{3. \qquad \sim(\sim(\sim p \vee p))}$$

(*) *Jahresbericht d. Deutsch. Math.-Ver.* 33 (1925), p. 252.

THÉORÈME. — *Dans la logique brouwerienne, la fausseté de la fausseté de la fausseté d'une proposition* q *implique la fausseté de la proposition* q (Brouwer) (*) :

$$\sim(\sim(\sim q)) \supset \sim q.$$

Démonstration :

$$\text{I.}\quad \sim q \supset \sim q$$

$$\text{(XI)}\quad \frac{\sim q \supset \sim q \,.\supset.\, q \supset \sim(\sim q)}{4.\quad q \supset \sim(\sim q)}$$

$$\text{(4)}\quad q \supset \sim(\sim q)$$

$$\text{(XII)}\quad \frac{q \supset \sim(\sim q) \,.\supset.\, \sim(\sim(\sim q)) \supset \sim q}{5.\quad \sim(\sim(\sim q)) \supset \sim q}$$

THÉORÈME. — *Dans la logique brouwerienne, la proposition « la proposition* $\sim$ p v p *implique la fausseté d'une proposition* q » *implique la fausseté de la proposition* q.

On a

$$\text{(XII)}\quad \sim p \vee p \supset \sim q \,.\supset.\, \sim(\sim q) \supset \sim(\sim p \vee p)$$

$$\text{(XII)}\quad \frac{\sim(\sim q) \supset \sim(\sim p \vee p) \,.\supset.\, \sim(\sim(\sim p \vee p)) \supset \sim(\sim(\sim q))}{6.\quad \sim p \vee p \supset \sim q \,.\supset.\, \sim(\sim(\sim p \vee p)) \supset \sim(\sim(\sim q))\quad (^{**})}$$

$$\text{(Hypothèse)}\quad \sim p \vee p \supset \sim q$$

$$\text{(6)}\quad \frac{\sim p \vee p \supset \sim q \,.\supset.\, \sim(\sim(\sim p \vee p)) \supset \sim(\sim(\sim q))}{7.\quad \sim(\sim(\sim p \vee p)) \supset \sim(\sim(\sim q))}$$

$$\text{(3)}\quad \sim(\sim(\sim p \vee p))$$

$$\text{(7)}\quad \frac{\sim(\sim(\sim p \vee p)) \supset \sim(\sim(\sim q))}{8.\quad \sim(\sim(\sim q))}$$

$$\text{(8)}\quad \sim(\sim(\sim q))$$

$$\text{(5)}\quad \frac{\sim(\sim(\sim q)) \supset \sim q}{\sim q}$$

(*) *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 33 (1925), page 253.

(**) En vertu du principal II.

Théorème. — *Dans la logique brouwerienne, la proposition « une proposition* p *est tierce » est fausse.*

En introduisant l'état tiers (p') d'une proposition, qui n'est ni la vérité ni la fausseté, on le soumet naturellement à la double condition suivante :

une proposition étant fausse, sa tierceté est fausse :

$$\sim p \supset \sim p';$$

une proposition étant vraie, sa tierceté est fausse :

$$p \supset \sim p'.$$

En tenant compte de cette double condition, on obtient

$$\text{(VIII)} \qquad \frac{\sim p \supset \sim p' : \supset : p \supset \sim p' . \supset . \sim p \vee p \supset \sim p'}{\sim p \vee p \supset \sim p'.}$$

Donc, en vertu du théorème précédent,

$$\sim p'.$$