Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 29

Aufgaben

Aufgabe 29.1. Es sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad d und sei R der zugehörige Zahlbereich. Zeige, dass für Rang der Einheitengruppe $R^\times$ die Abschätzungen

$$\text{rang } R^\times \leq d-1$$

und

$$\text{rang } R^\times \geq \begin{cases} \frac{d}{2}-1, & \text{bei } d \text{ gerade,} \\ \frac{d-1}{2}, & \text{bei } d \text{ ungerade,} \end{cases}$$

gelten.

Aufgabe 29.2.*

(1) Zeige die Gleichheit
$$\left| \ln \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| \right| = \left| \ln \left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| \right| .$$
(2) Stimmt diese Gleichung auch ohne die äußeren Beträge?
(3) Wie sieht es aus, wenn man die inneren Beträge weglässt?

Aufgabe 29.3. Wir betrachten auf den von 0 verschiedenen reellen Zahlen $\mathbb{R}^\times$ die folgende Menge von vier Abbildungen.

$$G = \{\text{Identität}, \text{Negation}, \text{Invertierung}, \text{Negation des Inversen}\}.$$

(1) Zeige, dass G eine kommutativen Gruppe ist. Was ist die Ordnung der Abbildungen? Was ist der Isomorphietyp der Gruppe?
(2) Die Gruppe G operiert in natürlicher Weise auf $\mathbb{R}^\times$. Bestimme die Bahnen zu dieser Operation, wie viele Elemente besitzen die Bahnen? Gibt es Fixpunkte?
(3) Bestimme ein übersichtliches Repräsentantensystem für die Operation aus (2).

AUFGABE 29.4. Bestimme für den quadratischen Zahlbereich A_D zu $D = 5$ die Fundamentaleinheit > 1.

AUFGABE 29.5. Bestimme für den quadratischen Zahlbereich A_D zu $D = 6$ die Fundamentaleinheit > 1.

AUFGABE 29.6. Bestimme für den quadratischen Zahlbereich A_D zu $D = 7$ die Fundamentaleinheit > 1.

AUFGABE 29.7. Zeige, dass man Lemma 29.3 auch mit der zweiten Komponente formulieren kann. Zeige ferner, dass die erste Komponente nur in der Fundamentaleinheit minimal ist, während die zweite Komponente mehrfach minimal sein kann.

AUFGABE 29.8. Zeige, dass die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ isomorph zu $\{1, -1\} \times \mathbb{Z}$ ist.

AUFGABE 29.9. Es sei $R = \mathbb{Z}[Y]/(Y^2 - 6Y + 1)$. Zeige, dass die Restklasse y von Y in R kein Quadrat ist, wohl aber im Quotientenkörper $Q(R)$.

AUFGABE 29.10. Es sei u die Fundamentaleinheit von $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Bestimme die multiplikative Ordnung von u in R/pR für $p = 2, 3, 5, 7, 11$.

AUFGABE 29.11.*

Beschreibe die logarithmische Ableitung

$$R^\times \longrightarrow \Omega_{R|\mathbb{Z}},\ f \longmapsto \frac{df}{f},$$

für $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ mit Hilfe einer Fundamentaleinheit von R. Was ist die Ordnung des Bildes einer Fundamentaleinheit?

AUFGABE 29.12.*

Beschreibe die logarithmische Ableitung

$$R^\times \longrightarrow \Omega_{R|\mathbb{Z}},\ f \longmapsto \frac{df}{f},$$

für $R = \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ mit Hilfe einer Fundamentaleinheit von R. Was ist die Ordnung des Bildes einer Fundamentaleinheit?

Aufgabe 29.13.*

Zeige, dass im 15. Kreisteilungsring $R_{15} = \mathbb{Q}[X]/(\Phi_{15})$ mit
$$\Phi_{15} = X^8 - X^7 + X^5 - X^4 + X^3 - X + 1$$
das Element $X - 1$ eine Einheit ist.

Aufgabe 29.14.*

(1) Bestimme für den 15. Kreisteilungskörper $R_{15} = \mathbb{Q}[X]/(\Phi_{15})$ mit
$$\Phi_{15} = X^8 - X^7 + X^5 - X^4 + X^3 - X + 1$$
das Minimalpolynom für $Y = X + X^{-1} = X + X^{14}$.

(2) Es sei $S = \mathbb{Z}[Y] \subseteq R_{15}$ der von Y erzeugte Unterring. Bestimme die Ringautomorphismen von S.

(3) Ist Y eine Einheit in S?

(4) Beschreibe die Einheitengruppe von S.

Aufgabe 29.15.*

Es sei
$$\begin{aligned} S &= \mathbb{Z}[Y]/\big(Y^4 - Y^3 - 4Y^2 + 4Y + 1\big) \\ &\subseteq R_{15} \\ &= \mathbb{Z}[X]/\big(X^8 - X^7 + X^5 - X^4 + X^3 - X + 1\big), \end{aligned}$$
wobei $Y = X + X^{-1}$ ist.

(1) Zeige, dass das Element
$$Z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
zu S gehört.

(2) Schreibe Z als polynomialen Ausdruck in Y.

(3) Beschreibe S als quadratische Erweiterung von $\mathbb{Z}[Z]$.

Aufgabe 29.16.*

Es sei R ein Zahlbereich mit r reellen Einbettungen und s Paaren von komplexen Einbettungen und es sei $u_1, \ldots, u_{r+s-1}$ ein System von Fundamentaleinheiten von R. Es sei Λ das von $L(u_1), \ldots, L(u_{r+s-1})$ im Untervektorraum $H = \left\{(v_1, \ldots, v_{r+s}) \mid \sum_{j=1}^{r+s} v_j = 0\right\} \subset \mathbb{R}^{r+s}$ erzeugte Gitter. Zeige, dass zwischen dem Regulator und dem Volumen einer Grundmasche $\mathfrak{M}$ von Λ der Zusammenhang
$$\sqrt{r+s} \cdot \operatorname{Reg}(R) = \operatorname{vol}(\mathfrak{M})$$
besteht.

Abbildungsverzeichnis