Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Maß- und Integrationstheorie

Arbeitsblatt 9

In diesem Arbeitsblatt geht es ausschließlich um das Lebesgue-Integral, es darf nicht mit dem Riemann-Integral argumentiert werden.

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 9.1. Es seien M und N Mengen und es seien

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

und

$$f\colon N \longrightarrow \mathbb{R}$$

Abbildungen. Zeige, dass für die Subgraphen die Beziehung

$$(\varphi \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})^{-1}(S(f)) \,=\, S(f \circ \varphi)$$

gilt.

Aufgabe 9.2. Zeige, dass das Integral der Nullfunktion gleich 0 ist.

Aufgabe 9.3. Zeige, dass das Integral einer messbaren Funktion über einer Nullmenge gleich 0 ist.

Aufgabe 9.4. Es sei M ein σ-endlicher Maßraum,

$$f\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine messbare Funktion und $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Zeige, dass

$$\{(x,c) \mid f(x) = c\} \,\subseteq\, M \times \overline{\mathbb{R}}$$

eine Nullmenge ist.

Aufgabe 9.5. Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, sei f eine integrierbare nichtnegative numerische Funktionen auf M und $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige, dass auch af integrierbar ist und dass

$$\int_M af \, d\mu \,=\, a \cdot \int_M f \, d\mu$$

gilt.

Aufgabe 9.6. Es sei M eine abzählbare Menge, die mit dem Zählmaß versehen sei, und sei

$$f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass f genau dann integrierbar ist, wenn die Familie $f(m)$, $m \in M$, summierbar ist, und dass in diesem Fall das Integral gleich der Summe ist.

Aufgabe 9.7. Bestimme den Flächeninhalt des Subgraphen zur linearen Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto cx,$$

über dem Intervall $[a, b]$ mit $c \geq 0$, $b \geq a \geq 0$.

Aufgabe 9.8. Bestimme den Flächeninhalt des Subgraphen zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 1 + \sin x,$$

über dem Intervall $[0, 2\pi]$.

Aufgabe 9.9.*

Es sei M eine Menge und es sei $T_n \uparrow M$ eine Ausschöpfung von M mit Teilmengen $T_n \subseteq M$, $n \in \mathbb{N}$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n \subseteq M \times \mathbb{R}$ der Subgraph zur Indikatorfunktion e_{T_n}. Zeige, dass die A_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Ausschöpfung von $M \times [0, 1]$ bilden.

Aufgabe 9.10. Es seien $(M, \mathcal{A}, \mu)$ und $(N, \mathcal{B}, \nu)$ zwei endliche Maßräume und es sei

$$f\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

integrierbare Funktion. Zeige

$$\int_{M \times N} f d\mu \otimes \nu \ = \ \nu(N) \cdot \int_M f(x) d\mu(x).$$

Aufgabe 9.11. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto 1 - t^2.$$

Für welches $a \in [0, 1]$ ist die Tschebyschow-Abschätzung für diese Funktion am besten?

Aufgabe 9.12.*

Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine integrierbare Funktion. Zeige, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $r \in \mathbb{R}_+$ derart gibt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} f d\lambda^n \leq \epsilon$$

ist

Aufgabe 9.13. Es sei

$$L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine lineare Abbildung, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine messbare Teilmenge und $N = L(M)$. Es sei

$$N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine messbare Funktion. Zeige

$$\int_M (f \circ \varphi) d\lambda^n = \int_N f (\det L)^{-1} d\lambda^n.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 9.14. (3 Punkte)

Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und sei

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass f integrierbar ist. Man gebe auch eine Abschätzung für das Integral $\int_T f \, d\lambda^n$ an.

Aufgabe 9.15. (4 Punkte)

Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum. Zeige, dass für jedes $r \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$M \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times \mathbb{R},\, (x,t) \longmapsto (x, t+r),$$

maßtreu ist.

Aufgabe 9.16. (4 Punkte)

Bestimme das Volumen des Subgraphen zur linearen Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto cx + dy,$$

(mit $c, d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$) über dem Einheitsquadrat $[0,1] \times [0,1]$.

Aufgabe 9.17. (6 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \sin t.$$

Für welches $a \in [0, 1]$ ist die Tschebyschow-Abschätzung für diese Funktion am besten? Bestimme a numerisch bis auf 5 Nachkommastellen.

Abbildungsverzeichnis