x ヲ 1, 2, 3, ...n トオケバ

$$\frac{1}{1+1^2+1^4}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1.2}\right\}$$

$$\frac{2}{1+2^2+2^4}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+2.1}-\frac{1}{1+2.3}\right\}$$

$$\frac{3}{1+3^2+3^4}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+3.2}-\frac{1}{1+3.4}\right\}$$

....

$$\frac{n}{1+n^2+n^4}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+n(n-1)}-\frac{1}{1+n(n+1)}\right\}$$

依ツテ所要ノ和ヲ S トスレバ

$$S=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1}-\frac{1}{1+n(n+1)}\right\}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)},$$

46. $n>3$ **ナルトキ次ノ三ツノ級數ノ和ハ a, b, c ノ如何ニ拘ラズ皆 0 ニ等シキコトヲ證セヨ。**

i) $$\boldsymbol{a-n(a-1)+\frac{n(n-1)}{2!}(a-2)-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(a-3)+\ldots\ldots+(-1)^n(a-n),}$$

ii) $$\boldsymbol{ab-n(a-1)(b-1)+\frac{n(n-1)}{2!}(a-2)(b-2)-\ldots\ldots+(-1)^n(a-n)(b-n),}$$

iii) $$\boldsymbol{abc-n(a-1)(b-1)(c-1)+\frac{n(n-1)}{2!}(a-2)(b-2)(c-2)-\ldots\ldots+(-1)^n(a-n)(b-n)(c-n),}$$

〔解〕 二項定理ニヨリ

$$(1-1)^n=1-n+\frac{n(n-1)}{2!}-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\ldots\ldots+(-1)^n=0 \qquad (1)$$

$n>3$ ナル故ニ n ヲ $n-1$ トオケバ (1) ヨリ

$$1-(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}+\ldots\ldots+(-1)^{n-1}=0 \qquad (2)$$

(1) ニ a, (2) ニ n ヲ掛ケテ邊々相加フレバ

$$a-n(a-1)+\frac{n(n-1)}{2!}(a-2)-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(a-3)+\ldots\ldots+(-1)^n(a-n)=0, \qquad (3)$$

コレ即チ (i) ナリ,

次ニ (3) ニ於テ a ハ任意ノ數ニシテ又 $n>3$ ナル故ニ a ヲ $a-1$, n ヲ $n-1$ トオケバ

$$a-1-(n-1)(a-2)+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}(a-3)-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}(a-4)+\ldots\ldots+(-1)^{n-1}(a-n)=0, \qquad (4)$$

(3) ニ b, (4) ニ n ヲカケテ相加フレバ

$$ab-n(a-1)(b-1)+\frac{n(n-1)}{2!}(a-2)(b-2)-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(a-3)(b-3)+\ldots\ldots+(-1)^n(a-n)(b-n)=0 \qquad (5)$$

コレ即チ (ii) ナリ,

最後ニ (5) ニ於テ a ヲ $a-1$, b ヲ $b-1$, n ヲ $n-1$ トオケバ

$$(a-1)(b-1)-(n-1)(a-2)(b-2)+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}(a-3)(b-3)-\ldots\ldots+(-1)^{n-1}(a-n)(b-n)=0 \qquad (6)$$

(5) ニ c, (6) ニ n ヲカケテ相加フレバ

$$abc-n(a-1)(b-1)(c-1)+\frac{n(n-1)}{2!}(a-2)(b-2)(c-2)-\ldots\ldots+(-1)^n(a-n)(b-n)(c-n)=0$$

コレ即チ (iii) ナリ。

(注意) (i) ハ $n>1$ ナルトキ (ii) ハ $n>2$ ナルトキ成立ス。

47. m, n **ガ正ノ整數ナルトキ級數**

$$\boldsymbol{a^m-n(a-1)^m+\frac{n(n-1)}{2!}(a-2)^m-\ldots\ldots+(-1)^n(a-n)^m}$$

ハ $m<n$ ナラバ 0 ニ等シク $m=n$ ナラバ $n!$ ニ等シキコトヲ證セヨ。

〔解〕 m ガ任意ノ正ノ整數 m ニ等シキトキノ所題ノ級數ノ和ヲ S_m ニテ表ハセバ前問 (i) ニヨリ $n>1$ ナルトキ

$$S_1=a-n(a-1)+\frac{n(n-1)}{2!}(a-2)+\ldots\ldots+(-1)^n(a-n)=0,$$

依ツテ今 $m=p<n$ ナルトキ $S_p=0$ ナリト假定スレバ

$$a^p-n(a-1)^p+\frac{n(n-1)}{2!}(a-2)^p-\ldots\ldots+(-1)^n(a-n)^p=0 \qquad (1)$$

(1) ニ於ケル a ハ任意ノ數ニシテ且ツ $n>1$ ナル故ニ a ヲ $a-1$, n ヲ $n-1$ トオケバ

$$(a-1)^p-(n-1)(a-2)^p+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}(a-3)^p-\cdots\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}(a-n)^p=0 \qquad (2)$$

(1) ニ a, (2) ニ n ヲカケテ相加フレバ

$$a^{p+1}-n(a-1)^{p+1}+\frac{n(n-1)}{2!}(a-2)^{p+1}-\cdots\cdots+(-1)^n(a-n)^{p+1}=0$$

即チ $S_p=0$ $(p<n)$ ナリト假定スレバ S_{p+1} モ亦 0 ナルコトヲ知ル故ニ $m<n$ ナルトキ所題ノ級數ハ常ニ 0 ナリ。

次ニ $m=n=1$ ナラバ $S_1=a-(a-1)=1=1!$

故ニ今 $m=n=p$ ナルトキ $S_p=p!$ ナリト假定スレバ

$$a^p-p(a-1)^p+\frac{p(p-1)}{2!}(a-2)^p-\cdots\cdots+(-1)^p(a-p)^p=p!$$

a ヲ $a-1$ トオケバ

$$(a-1)^p-p(a-2)^p+\frac{p(p-1)}{2!}(a-3)^p-\cdots\cdots+(-1)^p(a-p-1)^p=p! \quad (3)$$

又 (1) ニ於テ $n=p+1$ トオケバ

$$a^p-(p+1)(a-1)^p+\frac{(p+1)p}{2!}(a-2)^p-\cdots\cdots+(-1)^{p+1}(a-p-1)^p=0 \quad (4)$$

(3) ニ $p+1$, (4) ニ a ヲ乘ジテ相加フレバ

$$a^{p+1}-(p+1)(a-1)^{p+1}+\frac{(p+1)p}{2!}(a-2)^{p+1}-\cdots\cdots$$
$$+(-1)^{p+1}(a-p-1)^{p+1}=(p+1)!$$

即チ $m=n=p$ ノトキ $S_p=p!$ ナリト假定スレバ $m=n=p+1$ ノトキモ亦 $(p+1)!$ トナル, 故ニ $m=n$ ナルトキ所題ノ級數ハ常ニ $n!$ ニ等シ。

第七章　確率

基本定理 **I.** 互ニ相排斥スル n 個ノ事柄ノ各ノ起ル確率ヲ夫々 p_1, p_2, ……p_n トスルトキ是等ノ事柄ノ何レカ一ツガ起ル確率ハ $p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n$ ナリ。

II. 互ニ獨立セル n 個ノ事柄ノ各ノ起ル確率ヲ夫々 p_1, p_2, ……p_n トスルトキ是等ノ事柄ガ悉ク起ル確率ハ $p_1p_2\cdots\cdots p_n$ ナリ。

III. 互ニ相從屬セル n 個ノ事柄ニ於テ第一ノ事柄ノ起ル確率ヲ p_1 トシ, 第一ガ起リタルトキノ第二ノ起ル確率ヲ p_2, 第一, 第二ガ起リタルトキノ第三ノ起ル確率ヲ p_3 等順次斯クノ如クスルトキ是等ノ事柄ガ相次デ悉ク起ル確率ハ $p_1p_2\cdots\cdots p_n$ ナリ。

IV. 一回ノ實驗ニ於テ起ル確率ガ p, 起ラザル確率ガ $1-p=q$ ナル如キ或事柄ニ就テ n 回ノ實驗ヲ施ストキ丁度 r 回其事柄ノ起ル確率ハ ${}_nC_r\, p^r q^{n-r}$ ナリ。

V. 互ニ相排斥スル n 個ノ原因ノ事前確率ヲ夫々 q_1, q_2, ……q_n トシ, 是等ノ各原因ヨリ或事柄ノ起ル確率ガ夫々 p_1, p_2, ……p_n トスルトキ其事柄ノ起リタルコトヨリ推定スル各原因ノ事後確率ハ夫々

$$\frac{q_i p_i}{q_1p_1+q_2p_2+\cdots\cdots+q_np_n}, \quad i=1, 2, 3, \cdots\cdots;$$

ナリ。

演習問題

1. 二個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ 1, 2 ナル目ノ出ル確率如何。

〔解〕 一方ノ骰子ノ各ノ目ニ對シテ他方ニ6通リノ目ノ顯ハレ方アル故ニ二個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲルトキ色々ノ目ノ顯ハレル場合ノ總數ハ 6^2 ナリ，此中 1,2 ノ顯ハレル場合ハ 1,2; 2,1 ノ二ツナリ，依ツテ所要ノ確率ハ $\frac{2}{6^2}=\frac{1}{18}$，

2. 白球 3 個，黑球 5 個ヲ入レタル袋ノ中ヨリ一球ヲ取リ出シテソレガ白ナル確率如何，又二球ヲ同時ニ取リ出シテソレガ共ニ白ナル確率如何。

〔解〕 球ノ總數 8 ナル故ニ一球ヲ取リ出ストキノ場合ノ數ハ 8 ニシテソノ中白ナル場合ノ數ハ 3，依ツテ取リ出シタル一球ガ白ナル確率ハ $\frac{3}{8}$，次ニ同時ニ二球ヲ取リ出ス場合ノ總數ハ ${}_8C_2$，ソノ中二ツ共ニ白ナル場合ノ數ハ ${}_3C_2$，故ニ取リ出シタル二球ガ共ニ白ナル確率ハ

$$\frac{{}_3C_2}{{}_8C_2}=\frac{3}{28},$$

3. 二個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ顯ハレル目ノ和ガ 7 トナル確率如何。

〔解〕 二個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ色々ノ目ノ顯ハレル場合ノ總數ハ 6^2，其中二ツノ目ノ和ガ 7 トナル場合ノ數ハ 1,6; 2,5; 3,4; 4,3; 5,2; 6,1 ノ 6，依ツテ所要ノ確率ハ $\frac{6}{6^2}=\frac{1}{6}$，

4. 4 個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ顯ハルヽ目ノ和ガ 10 トナル確率ヲ求ム。

〔解〕 4 個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲルトキ色々ノ目ノ顯ハルヽ場合ノ總數ハ 6^4 其中目ノ和ガ 10 トナル場合ノ數ハ

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4$$

ノ展開式ニ於ケル x^{10} ノ係數ニ等シ，然ルニ上ノ式ハ

$$x^4(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4=x^4\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)=x^4(1-x^6)^4(1-x)^{-4}$$

$$=x^4(1-4x^6+\ldots\ldots)\left(1+4x+\frac{4.5}{2!}x^2+\frac{4.5.6}{3!}x^3+\ldots\ldots+\frac{4.5.6.7.8.9}{6!}x^6+\ldots\ldots\right)$$

故ニ x^{10} ノ係數ハ

$$\frac{4.5.6.7.8.9}{6!}-4=80$$

依ツテ所要ノ確率ハ $\frac{80}{6^4}=\frac{5}{81}$

5. 1, 1, 1, 2, 2, 3 ナル目ヲ盛リタル骰子ト 1, 2, 2, 3, 3, 3 ナル目ヲ盛リタル骰子トヲ同時ニ投ゲテ顯ハルヽ目ノ和ガ 4 トナル確率ヲ求ム。

〔解〕 骰子ハ 2 個ナル故ニ色々ノ目ノ顯ハルヽ總テノ場合ノ數ハ 6^2 ニシテ其中二ツノ目ノ和ガ 4 トナル場合ノ數ハ前問ト同樣ニ乘積

$$(3x+2x^2+x^3)(x+2x^2+3x^3)=3x^2+8x^3+14x^4+8x^5+3x^6$$

ノ x^4 ノ係數 14 ナリ，何ントナレバ第一ノ骰子ハ 1 ノ目ガ三ツ 2 ノ目ガ二ツ 3 ノ目ガ一ツ，第二ノ骰子ハ 1 ノ目ガ一ツ，2 ノ目ガ二ツ，3 ノ目ガ三ツアレバナリ，依ツテ其確率ハ

$$\frac{14}{6^2}=\frac{7}{18},$$

6. 夫々 1, 2, 3, …… n ナル番號ヲ付ケタル同ジ大サノ n 個ノ球ヲ入レタル袋ヨリ 5 個ヲ取リ出シソノ中ニ 1, 2, 3 ナル番號ノ球ノアル確率如何，又取リ出シタル 5 個ノ中ニ 1, 2, 3 ノ何レカ只一ツダケ入リ居ル確率如何。

〔解〕 1, 2, 3……n ナル番號ノ n 個ノ球ヨリ 5 個ヲ取リ出ス場合ノ總數ハ ${}_nC_5$，其中 1, 2, 3 ナル三球ヲ含ム場合ハ n 個ノ中ヨリ其三個ヲ除キタル殘リノ $n-3$ 個ヨリ 2 個ヲ取リ出ス場合ノ數 ${}_{n-3}C_2$ ニ等シ，依ツテ 5 個ヲ取リ出シテ其中ニ 1, 2, 3 ノ含マルヽ確率ハ

$$\frac{{}_{n-3}C_2}{{}_nC_5}=\frac{60}{n(n-1)(n-2)},$$

次ニ 5 個ヲ取リ出ス場合ノ數 ${}_nC_5$ ノ中 1, 2, 3 ノ中ノ 1 ノミガ含マレ居ル場合ノ數ハ n 個ノ中ヨリ 1, 2, 3 ヲ除キタル殘リノ $n-3$ 個ヨリ 4 個ヅヽ取リタル組合セ ${}_{n-3}C_4$ ニ等シ，同樣ニ 1, 2, 3 中ノ 2 ノミガ含マレ居ル場合ノ數モ ${}_{n-3}C_4$ ニシテ 3 ノミガ含マレ居ル場合ノ數モ ${}_{n-3}C_4$ ナリ，即チ場合ノ總數 ${}_nC_5$ ノ中ノ 1, 2, 3 ノ何レカ只 1 ツダケ含マレ居ル場合ノ數ハ 3 ${}_{n-3}C_4$，依ツテ其確率ハ

$$\frac{3\,{}_{n-3}C_4}{{}_nC_5}=\frac{15(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)},$$

7. n 枚ノ札ヲ入レタル袋ヨリ無心ニ若干枚ノ札ヲ取リ出シタルトキ其數ガ偶數ナルコトノ確率ハ奇數ナルコトノ確率ヨリ小ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 n 枚ノ中ヨリ 1 枚，2 枚，3 枚，……n 枚ヲ取リ出ス場合ノ總數ハ

$${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\dots\dots+{}_nC_n$$

然ルニ $(1+x)^n=1+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\dots\dots+{}_nC_nx_n$

$\therefore\ (1+1)^n=1+{}_nC_1+{}_nC_2+\dots\dots+{}_nC_n$

$\therefore\ {}_nC_1+{}_nC_2+\dots\dots+{}_nC_n=(1+1)^n-1=2^n-1,$

此中偶數枚ヲ取リ出ス場合ノ數ハ

$${}_nC_2+{}_nC_4+{}_nC_6+\dots\dots$$

然ルニ $(1+x)^n+(1-x)^n=2+2\,{}_nC_2x^2+2\,{}_nC_4x^4+\dots\dots$

$\therefore\ (1+1)^n+(1-1)^n=2+2({}_nC_2+{}_nC_4+\dots\dots)$

$\therefore\ {}_nC_2+{}_nC_4+{}_nC_6+\dots\dots=\dfrac{1}{2}\{(1+1)^n+(1-1)^n-2\}=2^{n-1}-1$

依ツテ取リ出シタル札ノ數ガ偶數ナルコトノ確率ハ

$$\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}$$

從ツテ 奇數ナルコトノ確率ハ

$$1-\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}=\frac{2^n-2^{n-1}}{2^n-1}=\frac{2^{n-1}}{2^n-1}$$

即チ偶數ナルコトノ確率ハ奇數ナルコトノ確率ヨリ $\dfrac{1}{2^n-1}$ ダケ少ナシ，

8. n 個ノ球ヲ入レタル袋ヨリ p 個ヲ取リ出シ之ヲ元ニ戻シテ更ニ q 個ヲ取リ出ストキ此兩回ノ取リ出シニ丁度 r 個ノ球ガ共通ナル確率如何。

〔解〕 初メニ取リ出シタル p 個ノ中ヨリ r 個ヲ選ブ方法ハ ${}_pC_r$ 通リアリ，此各ニ對シテ初メニ取リ出シタル p 個以外ノモノヨリ $q-r$ 個ヲ選ブ仕方ハ ${}_{n-p}C_{q-r}$ 通リアリ，故ニ初メニ取リ出シタル p 個中ノ或 r 個ダケガ第二回ニ取リ出シタル q 個中ニ含マルヽ場合ノ數ハ

$${}_pC_r\cdot{}_{n-p}C_{q-r}$$

ナリ，而シテ n 個中ヨリ任意ノ q 個ヲ取リ出ス仕方ハ ${}_nC_q$ 通リナル故ニ所要ノ確率ハ

$$\frac{{}_pC_r\cdot{}_{n-p}C_{q-r}}{{}_nC_q}=\frac{p!}{r!(p-r)!}\cdot\frac{(n-p)!}{(q-r)!(n-p-q+r)!}\cdot\frac{q!(n-q)!}{n!}$$

9. 和ガ 100 ニ等シキ二ツノ正ノ整數ヲ取ルトキ其二ツノ整數ノ積ガ 1000 ヨリ大ナル確率ヲ求ム。

〔解〕 二數ノ中ノ一ツハ 1 ヨリ 99 マデノ 99 通リノ値アリ，其中積ガ 1000 ヨリ大ナル場合ヲ考フルニ一ツヲ x トスレバ他ハ $100-x$

$\therefore\ x(100-x)>1000 \qquad \therefore\ x^2-100x+1000<0$

故ニ $x^2-100x+1000=0$ ノ二根ヲ $\alpha,\ \beta$ トスレバ

$$\alpha<x<\beta \quad (\text{但シ } \alpha<\beta \text{ トス})$$

然ルニ $\alpha=11.3\dots\dots,\quad \beta=88.7\dots\dots$

故ニ x ハ 12 ヨリ 88 マデナリ，即チ積ガ 1000 ヨリ大ナルタメニハ二數ノ中ノ一ツハ 12 乃至 88 ナル 77 個ノ値ナルヲ要ス，依ツテ所要ノ確率ハ $\dfrac{77}{99}=\dfrac{7}{9}$ ナリ。

10. 和ガ一定ナル二ツノ正ノ數ヲ取ルトキ，其積ガ其最大値ノ半分ヨリ小ナル確率ハ $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 一定ノ和ヲ $2a$ トスレバ其積ノ最大値ハ a^2 ナリ(第三章基本定理 III) 今一數ヲ x トスレバ他ハ $2a-x$ ニシテ $x(2a-x)<\dfrac{a^2}{2}$

ナルタメニハ $x^2-2ax+\dfrac{a^2}{2}>0.$

$\therefore\ \left\{x-a\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}\left\{x-a\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}>0$

$\therefore\ x<a\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 及ビ $x>a\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),$

即チ 2 數ノ積ガ最大積ノ半分ヨリ小ナルタメニハ x ハ 0 ヨリ $a\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ マデノ値ト $a\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ヨリ $2a$ マデノ値トヲトラザルベカラズ，即チ x ノ取リ得ル値ハ $a\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left\{2a-a\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}=2a\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 通リナリト考フルコトヲ得，斯ク考フルトキハ和ガ $2a$ ナルタメニ x ノ取リ得ル總テノ値ハ $2a$ 通リアルコトトナル故ニ所要ノ確率ハ $\dfrac{2a\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2a}=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ナリ。

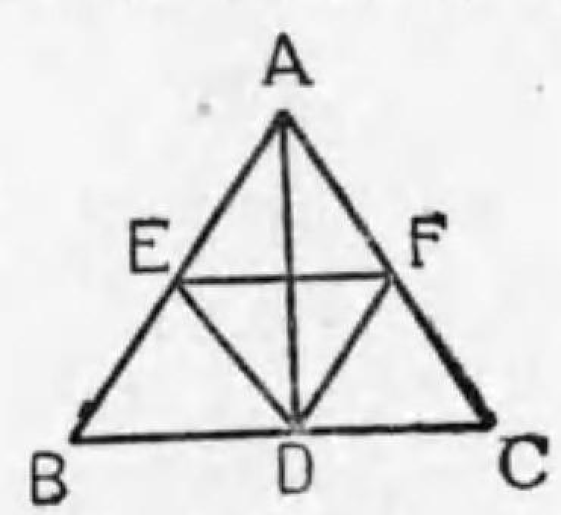
11. **長サ a ナル線分 AB 上ニ任意ノ一点ヲトルトキ其点ガ B ヨリモ A ニ近キ確率如何。**

〔解〕 AB 上ニ一点ヲ取リ得ル總テノ場合ノ數ハ其長サ a ニテ表ハサルベシ其中其一点ガ B ヨリモ A ニ近キタメニハ A ト AB ノ中点トノ間ニアラザルベカラザルガ故ニ其場合ノ數ハ A ト AB ノ中点トノ間ノ長サ $\frac{a}{2}$ ニテ表ハサルベシ, 依ツテ所要ノ確率ハ $\dfrac{\frac{a}{2}}{a}=\dfrac{1}{2}$, ナリ。

12. **長サ a ナル線分 AB 上ニ任意ノ二点ヲトルトキ二点トモ A ヨリ b 以内ノ距離ニアル確率如何。**

〔解〕 AB 上ニ任意ノ一点ヲトル場合ノ總數ハ a ニシテ其各ニ對シテ第二ノ点ヲ取ル場合ノ數モ亦 a ナル故ニ AB 上ニ二点ヲ任意ニトル場合ノ總數ハ a^2 ニテ表ハサル, 其中一点ガ A ヨリ b 以内ノ距離ニアル場合ノ數ハ b ニテ表ハサレ其各ニ對シテ第 ノ点モ A ヨリ b 以内ニアル場合ノ數ハ b ナル故ニ二点トモ A ヨリ b 以内ニアル場合ノ數ハ b^2 ニテ表ハサル, 依ツテ所要ノ確率ハ $\frac{b^2}{a^2}$ ナリ。

13. **一線分ヲ三ツニ分ツトキ其何レノ一ツモ他ノ二ツノ和ヨリ小ナル確率ハ $\frac{1}{4}$ ニ等シキコトヲ証セヨ。**



〔解〕 AD ヲ所題ノ線分ノ長サトシ AD ヲ高サトスル正三角形 ABC ヲ作ルトキハ此正三角形内ノ任意ノ一点ヨリ三邊ニ下ス三ツノ垂線ノ和ハ常ニ AD ニ等シキコトハ初等幾何學ニヨツテ知ル處ナリ。今 AB, AC ノ中点ヲ夫々 E, F トシ EF, FD, DE ヲ結ブ, 然ルトキハ梯形 $BEFC$ 中ノ任意ノ一点ヨリ BC ニ下ス垂線ハ AD ノ半分ヨリ小ナル故ニ AB, AC ニ下ス垂線ノ和ヨリ小ナリ, 同樣ニ梯形 $ABDF$ 内ノ一点ヨリ AB ニ下ス垂線ハ AC, BC ニ下ス垂線ノ和ヨリ小ニシテ梯形 $AEDC$ 内ノ一点ヨリ AC ニ下ス垂線ハ AB, BC ニ下ス垂線ノ和ヨリ小ナリ, 故ニ $\triangle DEF$ 内ノ一点ヨリ AB, BC, AC ニ下ス垂線ノ何レノ一ツモ他ノ二ツノ和ヨリ小ナリ。

即チ $\triangle ABC$ 内ノ總テノ点ヨリ三邊 AB, BC, CA ニ下ス垂線ノ和ハ所題ノ線分 AD ニ等シク, 其中 $\triangle DEF$ 内ノ總テノ点ヨリ AB, BC, CA ニ下ス三垂線ノ一ツハ常ニ他ノ二ツノ和ヨリ小ナリ, 故ニ AD ニ等シキ線分ヲ任意ノ三ツニ分ツ方法ノ總數ヲ $\triangle ABC$ ノ面積ニテ表ハストキハ其一ツガ他ノ二ツノ和ヨリ小ナル場合ノ數ハ $\triangle DEF$ ノ面積ニテ表ハサルベシ, 依ツテ所要ノ確率ハ

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\frac{1}{4} \text{ ナリ。}$$

14. **一定ノ正ノ整數 N ヨリ大ナラザル任意ノ整數ヲ選ブトキ其數ガ N ノ因數トナル確率ヲ求ム。**

〔解〕 N ヲ素因數ニ分解シタルトキ $N=\alpha^p\beta^q\gamma^r\ldots\ldots$ トナリタリトセヨ, 但シ α, β, γ ハ素因數ニシテ p, q, r ハ正ノ整數ナリ, 然ルトキハ N ノ因數ハ

$$(1+\alpha+\alpha^2+\ldots\ldots+\alpha^p)(1+\beta+\beta^2+\ldots\ldots+\beta^q)(1+\gamma+\gamma^2+\ldots\ldots+\gamma^r)\ldots\ldots$$

ノ展開式中ノ各項ナルコト明カナリ, 故ニ其因數ノ個數ハ

$$(1+p)(1+q)(1+r)\ldots\ldots$$

ナリ, 而シテ N ヨリ大ナラザル整數ノ個數ハ N ナルガ故ニ所要ノ確率ハ

$$\frac{(1+p)(1+q)(1+r)\ldots\ldots}{N} \text{ ナリ。}$$

15. **n 個ノ任意ノ奇數ノ相乘積ヲ作ルトキ末位數字ガ 5 トナル確率ハ $\frac{n}{n+4}$ ナルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 若干ノ整數ノ相乘積ノ末位ノ數字ハ相乘ズベキ整數ノ末位ノ數字ニテ定マル, 故ニ本問ハ 1, 3, 5, 7, 9 ナル五個ノ奇數ヲ重複ヲ許シテ n 回相乘セル積ニ於テ末位數字ガ 5 トナル確率ヲ求ムレバ可ナリ, 然ルニ五數字ヲ n 回相乘セル總テノ積ノ個數ハ ${}_5H_n$ ニシテ此中末位ガ 5 ナラザル數ハ 5 ヲ除キタル殘リノ 4 數字ヲ n 回相乘シタル積ニシテ其數ハ ${}_4H_n$ ナリ從ツテ末位數字ガ 5 ナル積ハ ${}_5H_n-{}_4H_n$ 個アリ, 依ツテ所要ノ確率ハ

$$\frac{{}_5H_n-{}_4H_n}{{}_5H_n}=1-\frac{4.5.6.\ldots\ldots(4+n-1)}{5.6.7.\ldots\ldots(5+n-1)} \qquad \text{（第四章基本定理 V）}$$

$$=1-\frac{4}{5+n-1}=\frac{n}{n+4},$$

16. **或事件ガ n 年間ニ m 回起リタリトイフ,然ラバ其 n 年間ノ或特別ナル一年間ニ其事件ノ一回モ起ラザリシ確率ハ $\left(1-\frac{1}{n}\right)^m$ ナルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 m 回ノ事件ノ各ハ n 年ノ中ノ何レノ年ニ起リテモ可ナル故ニ各ノ事件ノ起ル場合ハ n 通リアリ從ツテ m 回ノ總テノ起ル場合ノ總數ハ n^m 通リアリ,同樣ニ n 年中ノ或特別ナル一年ヲ除キタル $n-1$ 年內ニ m 回ノ總テガ起ル場合ノ總數ハ $(n-1)^m$ 通リアリ,故ニ或特別ノ一年內ニ其事件ガ一回モ起ラザリシ確率ハ

$$\frac{(n-1)^m}{n^m}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^m=\left(1-\frac{1}{n}\right)^m$$

ナリ。

17. **當年 20 才ノ人ガ 50 才ニ於テ受取ルベキ 10000 圓ノ生存所得ヲ契約セリ公正ナル契約金如何,但シ生殘表ニヨレバ 20 才ノ人 93268 人ハ 50 才ニ於テ 69517 人トナル,又年利率ヲ 5 分トス。**

〔解〕 生存所得トハ契約ト同時ニ若干ノ掛金ヲ拂ヒオキ契約年令ニ達シタルトキ受取ルベキ金額ニシテ若シ其年令以前ニ死亡スレバ何等ノ所得モナキモノナリ,然ルニ生殘表ニヨレバ 20 才ノ人ガ 50 才マデ生存スル確率ハ $\frac{69517}{93268}$ ナル故ニ 50 才マデ生存シテ 10000 圓ヲ得ルトイフコトハ今ヨリ 30 年後ニ無條件ニ $10000\times\frac{69517}{93268}$ 圓ヲ得ルトイフコトニ同ジト考ヘルコトヲ得,即チ此人ノ期望金額ハ 30 年後ノ $10000\times\frac{69517}{93268}$ 圓ナリ,故ニ此金額ノ今日ノ現價ガ即チ契約ノ際ノ公正ナル掛金ナリ,依ツテ所要ノ掛金ヲ a トスレバ

$$a=10000\times\frac{69517}{93268}\times\frac{1}{(1.05)^{30}}$$

$$\therefore\ \log a=\log 10000+\log 69517-\log 93268-30\log 1.05$$
$$=4+4.8421-4.9697-0.6360$$
$$=3.2364$$

$\therefore\ a=1724$ 圓弱

18. **二個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ何レカ一方ニダケ 1 ノ目ノ出ル確率如何。**

〔解〕 一個ノ骰子ニツキ 1 ノ目ノ出ル確率ハ $\frac{1}{6}$ ニシテ出デザル確率ハ $\frac{5}{6}$ ナリ,又一方ノ骰子ニ 1 ノ目ノ出ルコトト他ノ骰子ニ 1 ノ目ノ出デザルコトトハ互ニ獨立セル事柄ナル故ニ一方ニ 1 ノ目ノ出ルコトト他ニ 1 ノ目ノ出デザルコトトガ同時ニ起ル確率ハ $\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$,同樣ニ一方ニ 1 ノ目ガ出デズニシテ他ニ 1 ノ目ノ出ヅル確率モ $\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$,而シテ此二ツノ場合ニ互ニ相排斥スル事柄ナル故ニ此二ツノ場合ノ何レカガ起ル確率即チ所要ノ確率ハ

$$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{18}$$

19. **3 白球, 4 黑球ヲ入レタル甲袋ト 5 白球, 2 黑球ヲ入レタル乙袋トアリ,今無心ニ何レカノ袋ニ手ヲ入レテ一球ヲ取リ出シソレガ白ナル確率ヲ求ム。**

〔解〕 甲袋ニ手ヲ入レル確率ハ $\frac{1}{2}$,手ガ甲ニ入リタルトキ白ヲ得ル確率ハ $\frac{3}{7}$,而シテ此二ツノ事柄ハ互ニ從屬セルガ故ニ此二ツガ引續イテ起ル確率即チ手ガ甲袋ニ入ツテ白ヲ取リ出ス確率ハ $\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}$,同樣ニ手ガ乙ニ入ツテ白ヲ取リ出ス確率ハ $\frac{1}{2}\times\frac{5}{7}$,而シテ手ガ甲ニ入ルコトト乙ニ入ルコトトハ互ニ相排斥スルガ故ニ甲,乙ノ何レカヨリ白ヲ取リ出ス確率ハ

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{7}=\frac{4}{7}.$$

20. **白球 2 個, 黑球 10個 ヲ 2個 ノ袋ニ分配シ,其何レカノ袋ヨリ 1 球ヲ取リ出シテソレガ白球ナルコトノ確率ヲ最大又ハ最小ナラシメントス,如何ニ分配スベキカ。**

〔解〕 第一ノ袋ノ白球ノ數ヲ x,黑球ノ數ヲ y トスレバ第二ノ袋ノ白球ノ數ハ $2-x$ 黑球ノ數ハ $10-y$ ナリ,今此二ツノ袋ノ何レカヨリ 1 球ヲ取リ出シテソレガ白ナル確率ヲ p トスレバ前問ト同樣ニ

$$p=\frac{1}{2}\times\frac{x}{x+y}+\frac{1}{2}\times\frac{2-x}{2-x+10-y}=\frac{6x-(x+y)(x-1)}{(x+y)(12-x-y)},$$

球ハ 2 個ノ袋ニ分配スルモノナル故ニ x, y ハ同時ニ 0 ナラズ又 x, y ハ同時ニ 2 及ビ 10 ナラズ故ニ

$x=0$ ナラバ y ハ 1 乃至 10 ナル故ニ

$$p=\frac{1}{12-y}$$ ノ最大及ビ最小値ハ $\frac{1}{2}$ 及ビ $\frac{1}{11}$

$x=1$ ナラバ y ハ 0 乃至 10 ニシテ

$$p=\frac{6}{(1+y)(11-y)}$$ ノ最大及ビ最小値ハ $\frac{6}{11}$ 及ビ $\frac{1}{6}$

$x=2$ ナラバ y ハ 0 乃至 9 ニシテ

$$p=\frac{1}{2+y}$$ ノ最大及ビ最小値ハ $\frac{1}{2}$ 及ビ $\frac{1}{11}$

是等ノ最大及ビ最小値ヲ比較スレバ

p ノ最大値ハ $\frac{6}{11}$ ニシテ，ソノトキ $x=1$, $y=0$ 或ハ 10

p ノ最小値ハ $\frac{1}{11}$ ニシテ，ソノトキ $x=0$, $y=1$ 或ハ $x=2$, $y=9$

依ツテ p ヲ最大ナラシムルニハ第一ノ袋ニ白 1 個；又ハ白 1 個黑 10 個ヲ入レ，p ヲ最小ナラシムルニハ第一ノ袋ニ黑 1 個；又ハ白 2 個黑 9 個ヲ入レヽバ可ナリ。

21. 3 白球，2 黑球ヲ入レタル袋アリ，先ヅ甲ヨリ始メテ甲，乙交互ニ一球ヲ取リ出シテ初メテ白ヲ取リ出シタル方ヲ勝トス，甲，乙ノ勝ツ確率ノ割合如何，但シ取リ出シタル球ハ元ニ戻サヾルモノトス。

〔解〕 甲ガ第一回ニ勝ツ確率即チ第一回ニ白ヲ取リ出ス確率ハ $\frac{3}{5}$，次ニ第一回ニハ失敗スルモ第二回ニ勝ツタメニハ甲ハ第一回ニ失敗シ次ニ乙モ失敗シ次ニ甲ガ白ヲ取リ出サヾルベカラズ，而シテ取リ出シタル球ハ元ニ戻サヾルガ故ニソレ等ノ確率ハ夫々 $\frac{2}{5}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{3}$ ニシテ且ツ互ニ從屬ス．故ニソレ等三ツノ事柄ノ相次デ起ル確率即チ甲ガ第二回ニ勝ツ確率ハ $\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{3}=\frac{1}{10}$，而シテ黑球ハ 2 個ニシテ取リ出シタル球ハ元ニ戻サヾルガ故ニ甲ハ第一回ニ勝ツカ第二回ニ勝ツカノ外ナク且ツ此二ツノ事柄ハ互ニ排斥スルガ故ニ此二ツノ事柄ノ何レカノ起ル確率，即チ甲ノ勝ツ確率ハ

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$$

乙ノ勝ツ確率モ同樣ニシテ求ムルコトヲ得ベキモ元來此勝負ハ甲ガ勝ツカ然ラザ

レバ乙ガ勝ツカナル故ニ甲ノ勝ツ確率ト乙ノ勝ツ確率トノ和ハ 1 ニ等シ，從ツテ乙ノ勝ツ確率ハ

$$1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$$

依ツテ其割合ハ 7：3

22. 前問ニ於テ取リ出シタル球ヲ元ニ戻ストスレバ如何。

〔解〕 甲ガ第一回ニ勝ツ確率ハ前ト同樣ニ $\frac{3}{5}$，次ニ第二回ニ勝ツタメニ甲ガ第一回ニ失敗シ，次ニ乙モ失敗シ，次ニ甲ガ成功スルコトノ確率ハ前問ト異ナリ取リ出シタル球ヲ元ニ戻スガタメニ袋ノ中ニハ常ニ白球 3 個，黑球 2 個アル故ニ，夫々 $\frac{2}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$ ニシテ此三ツノ事柄ハ互ニ獨立ス，從ツテ此三ツノ事柄ガ悉ク起ル確率，即チ第二回ニ甲ガ勝ツ確率ハ

$$\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)$$

同樣ニ第一回，第二回ニ失敗スルモ其間乙モ亦失敗シテ第三回目ニ甲ガ勝ツ確率ハ

$$\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right),$$

取リ出シタル球ヲ元ニ戻スガタメニ此勝負ハ無限ニ續ケ得ベシ，從ツテ一般ニ第 n 回目ニ甲ノ勝ツ確率ハ

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2(n-1)}\left(\frac{3}{5}\right),$$

而シテ甲ガ第一回ニ成功スルコト，第一回ニハ失敗スルモ第二回目ニ成功スルコト第一第二回ニ失敗スルモ第三回目ニ成功スルコト等ハ皆兩立シ得ザル互ニ相排斥スル事柄ナル故ニ是等ノ事柄ノ何レカガ起ル確率即チ甲ガイツカ勝ツ確率ハ

$$\frac{3}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2\frac{3}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^4\frac{3}{5}+\cdots\cdots+\left(\frac{2}{5}\right)^{2(n-1)}\frac{3}{5}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{5}{7}$$

從ツテ乙ノ勝ツ確率ハ　$1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$，

依ツテ其割合ハ　5：2，

23. 甲乙兩人ガ順次ニ骰子ヲ投ゲテ最初ニ 1 ノ目ヲ出シタル方ヲ勝トス先ヅ甲ヨリ初ムルトキ兩人ノ勝ツ確率如何。

〔解〕 前問ト同様ニ第一回ニ甲ノ勝ツ確率ハ $\frac{1}{6}$，第一回ニ甲ガ失敗シ次ニ乙モ失敗シ次ニ甲ガ成功スル確率即チ甲ガ第二回目ニ勝ツ確率ハ

$$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$$

同様ニ第三回目ニ甲ノ勝ツ確率ハ

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{6},$$

一般ニ 第 n 回目ニ甲ノ勝ツ確率ハ

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{2(n-1)}\left(\frac{1}{6}\right),$$

依ツテ甲ノ勝ツ確率ハ

$$\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^4\frac{1}{6}+\cdots\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^{2(n-1)}\frac{1}{6}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{6}\ \frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{6}{11},$$

從ツテ乙ノ勝ツ確率ハ $\qquad 1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11},$

或ハ又次ノ如ク考フルモ可ナリ，

甲ノ勝ツ確率ヲ p, 乙ノ勝ツ確率ヲ q トスレバ

$$p+q=1, \qquad (1)$$

然ルニ第一回ニ甲ガ失敗スレバ次ニ乙ノ番トナリ，此時乙ノ勝ツ確率ハ最初甲ノ有セシ確率 p トナルベシ，即チ最初甲ガ失敗スレバ乙ノ勝ツ確率ハ p トナル故ニ乙ガ勝ツ確率 q ハ最初甲ガ失敗スルコトヽ，甲ガ勝ツトイフコトヽガ同時ニ起ル確率ニ等シ，而シテ此二ツガ同時ニ起ル確率ハ $\frac{5}{6}\cdot p$， 故ニ

$$q=\frac{5}{6}p, \qquad (2)$$

(1), (2) ヨリ $\qquad p=\frac{6}{11}, \quad q=\frac{5}{11}.$

或ハ甲ガ第一回ニ失敗スレバ次ハ乙ノ番ニシテ其次ガ甲ノ番ナル故ニ第一回ニ甲

ガ失敗スレバ甲ノ勝ツ確率ハ初メ乙ノ有セシ確率 q トナルベシ，故ニ甲ガ勝ツトイフコトハ第一回ニ成功スルカ然ラザレバ第一回ニ失敗スルコトヽ乙ガ勝ツトイフコトガ同時ニ起ルカノ何レカナリト考フルコトヲ得，從ツテ

$$p=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}q \qquad (3)$$

(2) ニ代ヘルニ (3) ヲ以テスルモ同様ナリ。

24. 甲, 乙, 丙三人ガ順次ニ 1 個ノ骰子ヲ投ゲテ最初ニ 1 ノ目ヲ出シタルモノヲ勝トス, 甲, 乙, 丙ノ順ニ投グルモノトスレバ各ノ勝ツ確率ノ割合如何。

〔解〕 前問ト同様ニ甲ノ勝ツ確率ハ

$$\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^3\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^6\frac{1}{6}+\cdots\cdots=\frac{1}{6}\times\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3}=\frac{36}{91}$$

乙ノ勝ツ確率ハ

$$\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^4\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^7\frac{1}{6}+\cdots\cdots=\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3}=\frac{30}{91}$$

丙ノ勝ツ確率ハ

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)^5\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^8\frac{1}{6}+\cdots\cdots=\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6}\times\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3}=\frac{25}{91}$$

依ツテ其割合ハ

$$36:30:25$$

或ハ又前問別解ノ如ク考ヘ甲, 乙, 丙ノ勝ツ確率ヲ p, q, r トスレバ

$$p+q+r=1,$$

甲ガ最初ニ 1 ノ目ヲ出サヾレバ次ニ乙ノ勝ツ確率ハ甲ノ確率 p トナル，

依ツテ $\quad q=\frac{5}{6}p,$

甲, 乙兩人トモ 1 ノ目ヲ出サヾルトキハ次ニ丙ノ勝ツ確率ハ又甲ノ確率 p トナル

依ツテ $\quad r=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}p$

此ノ三方程式ヨリ

$$p=\frac{36}{91}, \quad q=\frac{30}{91}, \quad r=\frac{25}{91},$$

25. **甲乙丙ノ 3 人ガ交互ニ 3 個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ顯ハル丶目ノ和ガ 6 トナルモノヲ勝チトス，甲乙丙ノ順ニ投ゲルトキ各ノ勝ツ確率如何。**

〔解〕 3 個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ色々ノ目ノ顯ハル丶場合ノ總數ハ 6^3 其中 3 ツノ目ノ和ガ 6 トナル場合ノ數ハ

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3$$

ノ展開式ニ於ケル x^6 ノ係數ニ等シク而シテ其係數ハ 10 ナリ，故ニ 3 ツノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ顯ハル丶目ノ和ガ 6 トナル確率ハ

$\dfrac{10}{6^3}$ 從ツテ 6 トナラザル確率ハ $1-\dfrac{10}{6^3}$，

依ツテ甲ノ勝ツ確率ハ前問ト同樣ニ

$$\frac{10}{6^3}+\left(1-\frac{10}{6^3}\right)^3\frac{10}{6^3}+\left(1-\frac{10}{6^3}\right)^6\frac{10}{6^3}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{10}{6^3}\ \frac{1}{1-\left(1-\frac{10}{6^3}\right)^3}=\frac{11664}{33397},$$

乙ノ勝ツ確率ハ

$$\left(1-\frac{10}{6^3}\right)\frac{10}{6^3}+\left(1-\frac{10}{6^3}\right)^4\frac{10}{6^3}+\left(1-\frac{10}{6^3}\right)^7\frac{10}{6^3}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{10}{6^3}\left(1-\frac{10}{6^3}\right)\times\frac{1}{1-\left(1-\frac{10}{6^3}\right)^3}=\frac{11124}{33397}$$

丙ノ勝ツ確率ハ

$$\left(1-\frac{10}{6^3}\right)^2\frac{10}{6^3}+\left(1-\frac{10}{6^3}\right)^5\frac{10}{6^3}+\left(1-\frac{10}{6^3}\right)^8\frac{10}{6^3}+\cdots\cdots$$

$$=\left(1-\frac{10}{6^3}\right)^2\frac{10}{6^3}\ \frac{1}{1-\left(1-\frac{10}{6^3}\right)^3}=\frac{10609}{33397},$$

26. **甲乙兩人各 2 個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ顯ハル丶目ノ和ガ兩人トモ相等シクナル確率何程ナルカ。**

〔解〕 2 個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲルトキ色々ノ目ノ顯ハル丶場合ノ總數ハ 6^2，其中二ツノ目ノ和ガ 2, 3, 4, …… 12 トナル場合ノ數ハ

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2=x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8$$
$$+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+x^{12},$$

ノ右邊ニ於ケル $x^2, x^3, x^4 \ldots\ldots x^{12}$ ノ係數

1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1

ニ等シ，從ツテ二ツノ目ノ和ガ 2, 3, 4, …… 12 トナル確率ハ夫々

$$\frac{1}{36},\quad \frac{2}{36},\quad \frac{3}{36},\ \cdots\cdots\ \frac{1}{36},$$

ニ等シ，依ツテ甲乙兩人トモ二ツノ目ノ和ガ 2, 3, 4, …… トナル確率ハ夫々

$$\frac{1}{36}\times\frac{1}{36},\quad \frac{2}{36}\times\frac{2}{36},\quad \frac{3}{36}\times\frac{3}{36},\ \cdots\cdots$$

ニ等シ，依ツテ顯ハル丶目ノ和ガ兩人トモ相等シクナル確率ハ

$$\left(\frac{1}{36}\right)^2+\left(\frac{2}{36}\right)^2+\left(\frac{3}{36}\right)^2+\left(\frac{4}{36}\right)^2+\left(\frac{5}{36}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{36}\right)^2$$

$$=\frac{1}{(36)^2}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+5^2+4^2+3^2+2^2+1^2)=\frac{73}{648}$$

27. **甲乙二人順次ニ二個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ乙ガ 7 点ヲ得ル前ニ甲ガ 6 点ヲ得レバ甲ノ勝トシ，甲ガ 6 点ヲ得ル前ニ乙ガ 7 点ヲ得レバ乙ノ勝トス，甲ヨリ投ゲ始ムルトキ甲乙ノ勝ツ確率ハ如何。**

〔解〕 2 個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ 7 点ヲ得ル確率ハ前問ト同樣ニ $\dfrac{6}{36}$，6 点ヲ得ル確率ハ $\dfrac{5}{36}$，故ニ甲ガ第一回ニ勝ツ確率ハ $\dfrac{5}{36}$，第二回ニ勝ツ確率ハ $\dfrac{31}{36}\times\dfrac{30}{36}\times\dfrac{5}{36}$，第三回ニ勝ツ確率ハ $\dfrac{31}{36}\times\dfrac{30}{36}\times\dfrac{31}{36}\times\dfrac{30}{36}\times\dfrac{5}{36}$ 等追ツテ斯クノ如クナル故ニ甲ノ勝ツ確率ハ

$$\frac{5}{36}+\frac{31}{36}\cdot\frac{30}{36}\cdot\frac{5}{36}+\left(\frac{31}{36}\cdot\frac{30}{36}\right)^2\frac{5}{36}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{5}{36}\times\frac{1}{1-\frac{31}{36}\times\frac{30}{36}}=\frac{30}{61},$$

從ツテ乙ノ勝ツ確率ハ

$$1-\frac{30}{61}=\frac{31}{61},$$

28. **1 個ノ骰子ヲ何回投ズレバ其間ニ 1 ノ目ノ出ル確率ガ $\dfrac{1}{2}$ トナルカ。**

〔解〕 1ノ目ノ出デザル確率ハ $\frac{5}{6}$ ナル故ニ x 回投ズル間ニ1ノ目ガ一回モ出デザル確率ハ $\left(\frac{5}{6}\right)^x$ ナリ，從ツテ x 回ノ中1ノ目ガ少クトモ1回顯ハルヽ確率ハ $1-\left(\frac{5}{6}\right)^x$ ナリ，依ツテ次ノ方程式ヲ得

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^x=\frac{1}{2} \qquad \therefore \left(\frac{5}{6}\right)^x=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad x=\frac{\log 2}{\log 6-\log 5}\doteqdot 3.8$$

故ニ3回ニテハ1ノ目ノ出ル確率ハ $\frac{1}{2}$ ニ及バザルモ4回投ズレバ $\frac{1}{2}$ ヨリ多クナル。

29. 10本ノ福引中ニ當リ籤1本アリ最初ニ引ク人ト次ニ引ク人トノ損益如何，若シ當リ籤3本アラバ如何。

〔解〕 福引ヲ引ク場合ノ損益ハ當リ籤ヲ引ク確率ノ多少ニ由ツテ定マル 10本ノ福引中ニ當リ籤1本アル場合ニハ最初ニ引ク人ガ當リ籤ヲ引ク確率ハ明カニ $\frac{1}{10}$ ニシテ第二ニ引ク人ガ當リ籤ヲ引クタメニハ最初ノ人ガ空籤ヲ引クコトヽ次ニ自分ガ當リ籤ヲ引クコトヽノ二ツノ事柄ガ相次デ起ラザルベカラズ，而シテ此二ツノ事柄ノ確率ハ夫々 $\frac{9}{10}$ 及ビ $\frac{1}{9}$ ナル故ニ次ニ引ク人ガ當リ籤ヲ引ク確率ハ $\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10}$ ナリ，即チ最初ニ引ク人ノ當リ籤ヲ引ク確率ト次ニ引ク人ノ當リ籤ヲ引ク確率トハ相等シ，依ツテ最初ニ引ク人モ次ニ引ク人モ損益ニ於テ變ルコトナシ，若シ10本ノ中當リ籤3本アル場合ニハ最初ニ引ク人ノ當リ籤ヲ引ク確率ハ $\frac{3}{10}$ ニシテ第二ニ引ク人ノ當リ籤ヲ引ク場合ハ (1) 第一ノ人ガ當リ籤ヲ引キテ自分モ當リ籤ヲ引クカ或ハ (2) 第一ノ人ガ空籤ヲ引キテ自分ガ當リ籤ヲ引クカノ何レカナリ，然ルニ (1) ノ確率ハ $\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}$ ニシテ (2) ノ確率ハ $\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}$ ナリ，故ニ第二ノ人ガ當リ籤ヲ引ク確率ハ

$$\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{3}{10},$$

即チ此場合ニモ福引ノ順序ニ由ツテ當リ籤ヲ引ク確率ニ相違アルコトナシ，即チ福引ノ順序ハ何等損益ニ關係ナシ。

一般ニ n 本中 r 本ノ當リ籤アル場合ニモ當リ籤ヲ引ク確率ハ福引ノ順序ノ如何ニ拘ラズ常ニ $\frac{r}{n}$ ナルコトハ上ト同様ニシテ算出スルコトヲ得。

30. 一個ノ骰子ヲ n 回投ゲテ奇數回1ノ目ノ顯ハルヽ確率ヲ求ム。

〔解〕 1ノ目ノ出ル確率 $\frac{1}{6}$，出デザル確率 $\frac{5}{6}$ ナル故ニ基本定理 IV ニヨリ

今 n 回中只一回ダケ1ノ目ノ出ル確率ハ ${}_nC_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

丁度3回ダケ1ノ目ノ出ル確率ハ ${}_nC_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}$，

丁度5回ダケ1ノ目ノ出ル確率ハ ${}_nC_5\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^{n-5}$

………………………………

而シテ是等ノ場合ハ互ニ相排斥スル故ニ所要ノ確率ヲ p トスレバ

$$p={}_nC_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+{}_nC_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}+{}_nC_5\left(\frac{1}{5}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^{n-5}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{6^n}\{{}_nC_1\cdot 5^{n-1}+{}_nC_3\cdot 5^{n-3}+{}_nC_5\cdot 5^{n-5}+\cdots\cdots\},$$

然ルニ

$$(5+1)^n=5^n+{}_nC_1 5^{n-1}+{}_nC_2 5^{n-2}+{}_nC_3 5^{n-3}+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}5+{}_nC_n$$

$$(5-1)^n=5^n-{}_nC_1 5^{n-1}+{}_nC_2 5^{n-2}-{}_nC_3 5^{n-3}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}{}_nC_{n-1}5+{}_nC_n(-1)^n$$

$$\therefore \quad {}_nC_1 5^{n-1}+{}_nC_3 5^{n-3}+{}_nC_5 5^{n-5}+\cdots\cdots=\frac{1}{2}\{(5+1)^n-(5-1)^n\}$$

$$=\frac{1}{2}(6^n-4^n)$$

$$\therefore \quad p=\frac{1}{6^n}\cdot\frac{1}{2}(6^n-4^n)=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\},$$

31. 甲乙二人ノ碁打チアリ五回ノ中甲ハ三回，乙ハ二回勝ツダケノ技倆ヲ有ス，然ラバ乙ガ二回勝ツ前ニ甲ガ三回勝ツ確率如何。

〔解〕 一回ノ勝負ニ於テ甲ノ勝ツ確率ハ $\frac{3}{5}$，負ケル確率ハ $\frac{2}{5}$ ナリ，而シテ乙ガ二回勝ツ前ニ甲ガ三回勝ツタメニハ最初ヨリ三回トモ引續キ甲ガ勝ツカ或ハ四回ノ中一回ダケ（但シ最後ナラザル）甲ガ負ケルカ何レカナラザルベカラズ，而シテ前者ノ確率ハ ${}_3C_3\left(\frac{3}{5}\right)^3$，後者ノ確率ハ $({}_4C_1-1)\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)$，依ツテ所要ノ確率ハ

$${}_3C_3\left(\frac{3}{5}\right)^3+({}_4C_1-1)\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{297}{625},$$

32. **或試合ニ於テ甲乙ノ技倆ハ 7 回中甲ハ 4 回乙ハ 3 回勝ツ割合ナリトイフ，五回勝負ニ於テ甲ノ勝ツ確率如何。**

〔解〕 1 回ノ試合ニ於テ甲ノ勝ツ確率ハ $\frac{4}{7}$，負ケル確率ハ $\frac{3}{7}$，5 回勝負ニ於テ甲ガ勝ツ場合ハ (1) 三回引續イテ甲ガ勝ツカ (2) 四回試合シテ最後ニアラザル一回甲ガ負ケルカ (3) 5 回試合シテ最後ニアラザル一回ト其他ノ一回ト合セテ二回甲ガ負ケルカノ何レカナリ (1) ノ確率ハ明カニ $\left(\frac{4}{7}\right)^3$，(2) ノ確率ハ甲ノ負ケル一回ハ第一，第二，第三回ノ試合ノ何レニテモヨキ故ニ ${}_3C_1\left(\frac{4}{7}\right)^3\left(\frac{3}{7}\right)$，(3) ノ確率ハ甲ノ負ケル 2 回ハ第一，第二，第三，第四回ノ試合ノ何レノ 2 回ニテモ可ナル故ニ ${}_4C_2\left(\frac{4}{7}\right)^3\left(\frac{3}{7}\right)^2$，依ツテ所要ノ確率ハ

$$\left(\frac{4}{7}\right)^3+{}_3C_1\left(\frac{4}{7}\right)^3\left(\frac{3}{7}\right)+{}_4C_2\left(\frac{4}{7}\right)^3\left(\frac{3}{7}\right)^2=\frac{10624}{16807}$$

33. **1, 2, 2, 4, 4, 6 ナル目ヲ盛リタル骰子ヲ 8 回投ゲテ 1 ノ目ヲ 3 回，2 ノ目ヲ 2 回，4 ノ目ヲ 3 回出ダス確率如何。**

〔解〕 1 ノ目ノ出ル確率ハ $\frac{1}{6}$，故ニ 3 回 1 ノ目ノ出ル確率ハ $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ 而シテ其 3 回ハ 8 回ノ中任意ノ 3 回ナル故ニ其場合ノ數ハ ${}_8C_3$ 故ニ 8 回中ニ 1 ノ目ガ兎ニ角 3 回顯ハレル確率ハ ${}_8C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3$ 次ニ 2 ノ目ノ出ル確率ハ $\frac{2}{6}$，故ニ 2 回 2 目ノ出ル確率ハ $\left(\frac{2}{8}\right)^2$，而シテ其 2 回ハ 8 回中 1 ノ目ノ出ル 3 回ヲ除キタル殘リ 5 回中ノ任意ノ 2 回ナル故ニ其場合ノ數ハ ${}_5C_2$，故ニ殘ル 5 回中ニ 2 ノ目ガ 2 回出ル確率ハ ${}_5C_2\left(\frac{2}{6}\right)^2$，最後ニ 4 ノ目ノ出ル確率ハ $\frac{2}{6}$，故ニ 8 回中 1 ノ目ト 2 ノ目トノ出デタル 5 回ヲ除キタル殘リ 3 回トモ皆 4 ノ目ノ出ル確率ハ $\left(\frac{2}{6}\right)^3$，從ツテ所要ノ確率ハ

$${}_8C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot{}_5C_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^3=\frac{70}{6561}$$

34. **1 個ノ骰子ヲ 50 回投ズルトキ 1 ノ目ノ出ル最モ確實ナル回數ハ何回ナルカ。**

〔解〕 1 回投ズルトキ 1 ノ目ノ出ルノ確率 $\frac{1}{6}$，出デザル確率 $\frac{5}{6}$，故ニ 50 回投ズルトキ 1 ノ目ガ 0, 1, 2, 3, ...50 回出ヅル確率ハ

$$\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right)^{50}$$

ノ展開式ニ於ケル各項ノ値ナリ，依ツテ所要ノ回數ハ此展開式ニ於ケル最大項ノ $\frac{1}{6}$ ノ指數ナリ，今其最大項ヲ $r+1$ 番目トスレバ其項ノ $\frac{1}{6}$ ノ指數ハ r ニシテ且ツ第五章問 22 ト同樣ニ r ハ

$$\frac{50-r+1}{r}\cdot\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}}>1 \quad \text{即チ} \quad r<8\frac{1}{2}$$

ヲ滿足セシムル最大整數ナリ，依ツテ $r=8$，

依ツテ 1 ノ目ハ 8 回出ルコトガ最モ確實ナリ。

35. **1 個ノ骰子ヲ 5 回投ゲテ 3 回引續キテ同ジ目ノ出ル確率如何。**

〔解〕 5 回ノ中引續キテ 3 回同ジ目ノ出ル場合ハ

(1) 第一，第二，第三回，(2) 第二，第三，第四回，(3) 第三，第四，第五回ノ三種ナリ，(1) ノ場合ハ第一回ニ出ル目ハ何ニテモヨク第二，第三回ハ第一回ニ出デタルト同ジ目ガ出デザルベカラザル故ニ其確率ハ $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$，(2) ノ場合ハ第一回ニ出ル目ハ何ニテモヨク第二回ハ第一回ト異ナルモノ第三，第四回ハ第二回ト同ジモノガ出デザルベカラザル故ニ其確率ハ $\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$，(3) ノ場合ハ第一回，第二回ハ同ジ目ニテ第三，第四，第五ハソレト異ナル同ジ目ノ出ル場合ト第二回ガ第一回ト異ナリ第三，第四，第五回ガ第二回ト異ナル同ジ目ノ出ル場合トニ通リアリ，而シテ前ノ場合ノ確率ハ $\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$ ニシテ後ノ場合ノ確率ハ $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$ ナル故ニ (3) ノ場合ノ確率ハ此二ツノ和ニ等シ，依ツテ所要ノ確率ハ

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{27}$$

36. n 個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ 4 ノ倍數個 (0 ヲ含ム) ダケ 1 ノ目ノ出ル確率ハ方程式 $(6x-5)^4=1$ ノ四根ノ n 乘ノ和ノ $\frac{1}{4}$ ニ等シキコトヲ証セヨ。

〔解〕 所要ノ確率ヲ p トスレバ

$$p=\left(\frac{5}{6}\right)^n+{}_nC_4\left(\frac{5}{6}\right)^{n-4}\left(\frac{1}{6}\right)^4+{}_nC_8\left(\frac{5}{6}\right)^{n-8}\left(\frac{1}{6}\right)^8$$
$$+{}_nC_{12}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-12}\left(\frac{1}{6}\right)^{12}+\cdots\cdots$$

然ルニ $$\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{5}{6}\right)^n+{}_nC_1\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{6}\right)+{}_nC_2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{6}\right)^2+\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{5}{6}\right)^n-{}_nC_1\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{6}\right)+{}_nC_2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{6}\right)^2-\cdots\cdots$$

$$\therefore \left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\right)^n$$
$$=2\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n+{}_nC_2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{6}\right)^2+{}_nC_4\left(\frac{5}{6}\right)^{n-4}\left(\frac{1}{6}\right)^4+\cdots\cdots\right\}$$

$$\therefore \left(\frac{5}{6}+i\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{5}{6}-i\frac{1}{6}\right)^n$$
$$=2\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n-{}_nC_2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{6}\right)^2+{}_nC_4\left(\frac{5}{6}\right)^{n-4}\left(\frac{1}{6}\right)^4-\cdots\cdots\right\}$$

$$\therefore \left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{5}{6}+i\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{5}{6}-i\frac{1}{6}\right)^n$$
$$=4\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n+{}_nC_4\left(\frac{5}{6}\right)^{n-4}\left(\frac{1}{6}\right)^4+{}_nC_8\left(\frac{5}{6}\right)^{n-8}\left(\frac{1}{6}\right)^8+\cdots\cdots\right\}=4p,$$

故ニ此左邊ノ括弧内ノ四數ヲ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ トスレバ

$$p=\frac{\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\delta^n}{4},$$

然ルニ $\alpha-\frac{5}{6}=\frac{1}{6},\quad \beta-\frac{5}{6}=-\frac{1}{6},\quad \gamma-\frac{5}{6}=i\frac{1}{6},\quad \delta-\frac{5}{6}=-i\frac{1}{6}$

即チ $6\alpha-5=1,\quad 6\beta-5=-1,\quad 6\gamma-5=i,\quad 6\delta-5=-i$

$\therefore\ (6\alpha-5)^4=1,\quad (6\beta-5)^4=1,\quad (6\gamma-5)^4=1,\quad (6\delta-5)^4=1$

故ニ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ハ方程式 $(6x-5)^4=1$ ノ四根ナリ，即チ p ハ所題ノ四次方程式ノ四根ノ n 乘ノ和ノ $\frac{1}{4}$ ニ等シ。

37. 100 本ノ福引中 1 等 50 圓 3 本，2 等 10 圓 20 本，殘リ空籤ナリトイフ，此福引ヲ引カントスル人幾何ノ料金ヲ拂フガ至當ナルカ。

〔解〕 福引ヲ引カントスル人ノ支拂フ料金ハ其人ノ期望金額ニ等シキトキ公正ナリ，

然ルニ所題ノ場合ニ於テハ一等ヲ引ク確率即チ 50 圓ヲ得ル確率ハ $\frac{3}{100}$，2 等ヲ引ク確率即チ 10 圓ヲ得ル確率 $\frac{20}{100}$，依ツテ福引ヲ引ク人ノ期望金額ハ

$$50\times\frac{3}{100}+10\times\frac{20}{100}=3.5 \text{ 圓}$$

即チ至當ナル料金ハ 3 圓 50 錢ナリ。

38. 甲ハ 10 錢銀貨 5 枚ヲ出シ乙ハ同ジク 3 枚ヲ出シ各自分ノ銀貨ヲ投ゲテ顯ハルヽ表ノ數ノ多キ方ヲ勝トシ勝チタル方ハ他ノ銀貨ヲ取ルコトヽス，甲乙何レガ有利ナルカ。

〔解〕 先ヅ甲ノ勝ツ確率ヲ求メンニ甲ガ只 1 ツノ表ヲ顯ハストキ甲ガ勝ツタメニハ乙ハ總テ裏ヲ顯ハサヾルベカラズ，此確率ハ

$${}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{2^8}$$

甲ガ 2 ツノ表ヲ顯ハストキ甲ガ勝ツタメニハ乙ハ多クトモ 1 ツノ表ヲ顯ハサヾルベカラズ，其確率ハ

$${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}=\frac{5}{2^5}$$

同樣ニ甲ガ 3 ツノ表ヲ顯ハシテ勝ツ確率ハ

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{35}{2^7}$$

甲ガ 4 ツノ表ヲ顯ハシテ勝ツ確率ハ ${}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2^5}$

甲ガ 5 ツノ表ヲ顯ハシテ勝ツ確率ハ $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{2^5}$

依ツテ甲ノ勝ツ確率ハ $\frac{5}{2^8}+\frac{5}{2^5}+\frac{35}{2^7}+\frac{5}{2^5}+\frac{1}{2^5}=\frac{163}{2^8}$

從ツテ甲ノ期望金額ハ 30 錢 $\times\frac{163}{2^8}$ 錢 $=\frac{4890}{2^8}$ 錢

次ニ乙ノ勝ツ確率ハ甲ノ場合ト同樣ニ

$$ {}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\} $$

$$ +\left(\frac{1}{2}\right)^3\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}=\frac{37}{2^8}, $$

依ツテ乙ノ期望金額ハ　50 錢$\times\frac{37}{2^8}=\frac{1850}{2^8}$ 錢

即チ甲ノ期望金額ハ乙ヨリ多シ故ニ甲ハ有利ナリ。

39. 50 錢, 10 錢, 5 錢ナル 3 種ノ貨幣ヲ各 5 枚ヅヽ入レタル一ツノ袋ヨリ無心ニ 3 枚ヲ取リ出ストキノ期望金額如何。

〔解〕 3 種ノ貨幣合計 15 枚ヨリ 3 枚ヲ取リ出ス場合ノ總數ハ ${}_{15}C_3=455$, 次ニ 3 個ノ貨幣ノ配合ヲ考フルニ今 50 錢, 10 錢, 5 錢ヲ夫々 A, B, C ニテ表ハセバ其配合ハ

$(3A)$, $(3B)$, $(3C)$, $(2A, B)$, $(2A, C)$, $(2B, A)$, $(2B, C)$,
$(2C, A)$, $(2C, B)$, (A, B, C)

ナル 10 通リナリ, 是等ノ各配合ノ確率及期望金額ヲ計算スレバ

配合ノ種類	其場合ノ數	確率	期望金額
$(3A)$	${}_5C_3=10$	$\frac{10}{455}$	$150\times\frac{10}{455}$
$(3B)$	”	”	$30\times$ ”
$(3C)$	”	”	$15\times$ ”
$(2A, B)$	${}_5C_2\times{}_5C_1=50$	$\frac{50}{455}$	$110\times\frac{50}{455}$
$(2A, C)$	”	”	$105\times$ ”
$(2B, A)$	”	”	$70\times$ ”
$(2B, C)$	”	”	$25\times$ ”
$(2C, A)$	”	”	$60\times$ ”
$(2C, B)$	”	”	$20\times$ ”
(A, B, C)	$({}_5C_1)^3=125$	$\frac{125}{455}$	$65\times\frac{125}{455}$

依ツテ所要ノ期望金額ハ

$$ \frac{1}{455}(1500+300+150+5500+5250+3500+1250+3000+1000+8125) $$

$$ =\frac{29575}{455}=65\text{ 錢} $$

(注意) 3 種ノ貨幣ノ平均價格ハ

$$ \frac{50\times5+10\times5+5\times5}{15}=\frac{325}{15} $$

故ニ取リ出シタル 3 枚ノ平均價格ハ　$\frac{325}{15}\times3=65$ 錢

即チ上ノ期望金額ハ平均價格ニ當ル。

40. 1 ヨリ n マデノ番號ヲ付シタル n 枚ノ札ヲ入レタル箱ヨリ任意ノ 2 枚ヲ取リ出シテ其 2 枚ノ番號ノ積ニ等シキ金額ヲ得ベキコトヲ約束セラレタル人ノ期望金額如何。

〔解〕 p, q ヲ 1 ヨリ n マデノ中ノ任意ノ二ツノ番號トス, n 枚ヨリ 2 枚ヲ取リ出ス場合ノ數ハ ${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2}$, 其中 p 號, q 號ノ 2 枚ヲ取リ出ス場合ハ只一ツ, 依ツテ pq 圓ヲ得ベキ確率ハ $\frac{2}{n(n-1)}$, 從ツテ其期望金額ハ $\frac{2pq}{n(n-1)}$ 圓, 故ニ p, q ノ 1 ヨリ n ニ至ルアラユル値ニ對スル斯ル期望金額ノ總和ガ即チ此人ノ總期望金額ナリ, 但シ $p\neq q$ ナルヲ要スルコト勿論ナリ, 依ツテ所要ノ期望金額ヲ S トスレバ

$$ S=\Sigma\frac{2pq}{n(n-1)}=\frac{2\Sigma pq}{n(n-1)} $$

然ルニ　$2\Sigma pq=(1+2+3+\dots\dots+n)^2-(1^2+2^2+3^2+\dots\dots+n^2)$

$$ =\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{12}n(n+1)(n-1)(3n+2) $$

$$ \therefore\ S=\frac{1}{12}(n+1)(3n+2), $$

41. 同シ技倆ノ棋士甲乙ガ試合ヲナシ先キニ三回勝チタルモノハ相手ヨリ a 圓ヲ受取ルコトヲ約束セリ, 然ルニ甲ガ二回勝チ乙ガ一回勝チタルトキ都合ニヨリ試合ヲ中止セリトイフ, 乙ハ何程ヲ甲ニ支拂フガ正當ナルカ。

〔解〕 既ニ甲ハ二回乙ハ一回勝チタルガ故ニ此試合ヲ繼續シテ甲乙ノ勝敗ヲ決スルモノトスレバコノ試合ニ勝チ得ルモノハ

(1) 甲　　(2) 乙，甲　　(3) 乙，乙

ナル三ツノ場合ナリ (1), (2) ハ甲ノ勝利ニシテ乙ハ甲ニ a 圓ヲ拂ハザルベカラズ，(3) ハ乙ノ勝利ニシテ乙ハ甲ヨリ a 圓ヲ受取ラザルベカラズ，然ルニ技倆ハ同ジキガ故ニ一回ノ試合ニ於テ甲，乙ノ勝ツ確率ハ夫々 $\frac{1}{2}$，從ツテ (1), (2), (3) ノ確率ハ夫々 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$，

依ツテ乙ハ甲ニ a 圓ヲ支拂フ確率 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$，從ツテ甲ノ期望金額ハ $a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$，又甲ヨリ a 圓ヲ受取ルベキ確率 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$，從ツテ乙ノ期望金額ハ $a\left(\frac{1}{4}\right)$，故ニ乙ヨリ甲ニ支拂フベキ正當ナル金額ハ

$$a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-a\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{a}{2}\text{ 圓}$$

42. 1 ヨリ n マデノ番號ヲ付シタル n 個ノ球ヲ入レタル袋ヨリ 1 球ヅヽ n 回取リ出シ第 r 回目ニ第 r 號ノ球ヲ取リ出ス毎ニ 1 圓ヲ得ルコトヲ約束セラレタル人ノ期望金額ハ幾何ナルカ。

〔解〕 第一回ニ 1 號，第二回ニ 2 號，第三回ニ 3 號等，取リ出ス回數ト取リ出シタル球ノ番號ト一致スル毎ニ 1 圓ヲ得ル約束ナル故ニ 1 圓ヲ得ル確率ハ取リ出ス回數ト取リ出シタル球ノ番號ト一致スル確率ナリ，然ルニ球ノ出ズル順序ノ總テノ場合ノ數ハ $n!$ ニシテ其中第一回ニ 1 號ノ出ル場合ノ數ハ $(n-1)!$，第二回目ニ 2 號ノ出ル場合ノ數モ $(n-1)!$，第三回ニ 3 號ノ出ル場合ノ數モ $(n-1)!$ 等ナル故ニ第 r 回目ニ第 r 號ノ出ル確率ハ總テ

$$\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$$

ナリ，依ツテ所要ノ期望金額ハ

$$1\times\frac{1}{n}+1\times\frac{1}{n}+\ldots\ldots+1\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\times n=1\text{ 圓，}$$

43. A, B, C, D, E ノ五人ガ各 1 圓ヲ出シ，各人順番ニ二個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ最大得点者ニ賭金ヲ與ヘントス，若シ最高点者ガ 2 人以上アルトキハ賭金ヲ其人々ニ等分スルモノトス，最初ニ投ジテ 6 点ヲ得タル A ノ期望金額如何。

〔解〕 二個ノ骰子ヲ同時ニ投ジテ 2, 3, 4, 5, ……12 点ノ顯ハルヽ場合ノ數ハ

$$(x+x^2+\ldots\ldots+x^6)^2=x^2+2x^3+3x^4+\ldots\ldots+x^{12}$$

ノ各次ノ係數 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3 2, 1 ニ等シ，故ニ 5 点以下ヲ得ル確率ハ $\frac{1+2+3+4}{36}=\frac{10}{36}$，6 点ヲ得ル確率ハ $\frac{5}{36}$，7 点以上ヲ得ル確率ハ

$$\frac{6+5+\ldots\ldots+2+1}{36}=\frac{21}{36},$$

最初ニ投ゲテ 6 点ヲ得タル A ガ勝ツタメハ殘ル 4 人ガ皆 6 点以下ヲ取ラザルベカラズ，然ルニ各人ガ 6 点又ハ 5 点以下ヲトル確率ハ $\frac{10}{36}+\frac{5}{36}$ ナル故ニ 4 人ガ皆 6 点以下ヲトル確率ハ $\left(\frac{10}{36}+\frac{5}{36}\right)^4=\left(\frac{15}{36}\right)^4$

4 人ガ皆 6 点以下ヲトルトシタル場合ニ各人ガ 6 点ヲトル確率ヲ p，5 点以下ヲトル確率ヲ q トスレバ p, q ハ無論 $\frac{5}{36}\cdot\frac{10}{36}$ ニ比例セザルベカラズシテ，且ツ其和ハ 1 ナラザルベカラズ，依ツテ $p=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$，$q=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$，

故ニ 6 点ヲ取リタル A ガ勝ツトシテ殘ル 4 人ガ皆 5 点以下ナル確率ハ $\left(\frac{2}{3}\right)^4$，從ツテ此場合ノ期望金額ハ $5\left(\frac{2}{3}\right)^4$，1 人ガ 6 点 3 人ガ 5 点以下ナル確率ハ ${}_4C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3$，從ツテ此場合ノ期望金額ハ $\frac{5}{2}\,{}_4C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3$，追ツテ斯クノ如クナル故ニ所要ノ期望金額ハ

$$\left(\frac{15}{36}\right)^4\left\{5\left(\frac{2}{3}\right)^4+\frac{5}{2}\,{}_4C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3+\frac{5}{3}\,{}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{5}{4}\,{}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{5}{5}\,{}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\right\}$$
$$=\frac{\left(\frac{15}{36}\right)^4}{\frac{1}{3}}\left\{{}_5C_1\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)+{}_5C_2\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_5C_3\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3\right.$$
$$\left.+{}_5C_4\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_5C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\right\}$$

$$=\frac{3.15^4}{36^4}\left\{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^5-\left(\frac{2}{3}\right)^5\right\}=\left(\frac{5}{36}\right)^4(3^5-2^5),$$

或ハ次ノ如ク考フルモ可ナリ

A ガ 6 点チトリタルトキ殘ル 4 人ガ皆 5 点以下ヲトル確率ハ $\left(\frac{10}{36}\right)^4$, 從ッテ此場合ノ期望金額ハ $5\left(\frac{10}{36}\right)^4$, 1 人ガ 6 点 3 人ガ 5 点以下ナル確率ハ ${}_4C_1\left(\frac{5}{36}\right)\left(\frac{10}{36}\right)^3$, 從ッテ此場合ノ期望金額ハ $\frac{5}{2}{}_4C_1\left(\frac{5}{36}\right)\left(\frac{10}{36}\right)^3$, 等追ッテ斯クノ如クナル故ニ所要ノ期望金額ハ

$$5\left(\frac{10}{36}\right)^4+\frac{5}{2}{}_4C_1\left(\frac{5}{36}\right)\left(\frac{10}{36}\right)^3+\frac{5}{3}{}_4C_2\left(\frac{5}{36}\right)^2\left(\frac{10}{36}\right)^2$$

$$+\frac{5}{4}{}_4C_3\left(\frac{5}{36}\right)^3\left(\frac{10}{36}\right)+\frac{5}{5}{}_4C_4\left(\frac{5}{36}\right)^4$$

$$=\frac{1}{\frac{5}{36}}\left\{{}_5C_1\left(\frac{10}{36}\right)^4\left(\frac{5}{36}\right)+{}_5C_2\left(\frac{10}{36}\right)^3\left(\frac{5}{36}\right)^2+{}_5C_3\left(\frac{10}{36}\right)^2\left(\frac{5}{36}\right)^3\right.$$

$$\left.+{}_5C_4\left(\frac{10}{36}\right)\left(\frac{5}{36}\right)^4+{}_5C_5\left(\frac{5}{36}\right)^5\right\}$$

$$=\frac{36}{5}\left\{\left(\frac{10}{36}+\frac{5}{36}\right)^5-\left(\frac{10}{36}\right)^5\right\}$$

$$=\left(\frac{5}{36}\right)^4(3^5-2^5),$$

44. 同形ノ三個ノ箱アリ，甲箱ハ 2 白 3 黒，乙ハ 4 白 1 黒，丙ハ 3 白 7 黒ヲ容ル，今無心ニ一球ヲ取リ出シタルニ黒ナリトイフ，然ラバ其黒球ガ丙箱ヨリ出デシ確率如何。

〔解〕 黒球ヲ取リ出シタル原因ハ甲乙丙ノ三個ノ箱ナリ，然ルニ甲乙丙ハ皆同形ナル故ニ其事前確率ハ皆 $\frac{1}{3}$，又甲乙丙ヨリ一黒球ヲ取リ出ス確率ハ夫々 $\frac{3}{5}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{7}{10}$，故ニ基本定理 V ニヨリ

$$\frac{\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}}{\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}}=\frac{7}{15},$$

45. 4 個ノ球ヲ入レタル袋ヨリ一球ヲ取リ出シタルニ白ナリシトイフ，袋ノ中ニ 3 個ノ白球アル確率如何。

〔解〕 袋ノ中ニ 4 球アル故ニ 1 白球チ取リ出シタルコトノ原因ハ次ノ 4 種アリ，

1. 袋ノ中ノ 4 球皆白ナルコト
2. 3 球白ニシテ 1 球白ナラザルコト
3. 2 球白ニシテ 2 球白ナラザルコト
4. 1 球白ニシテ 3 球白ナラザルコト

而シテ是等 4 種ノ原因ハ一般ニ平等ナラズ，何ントナレバ球ハ白ナルカ，白ナラザルカノ何レカナル故ニ一球ガ白ナル確率ハ $\frac{1}{2}$，從ッテ 4 球皆白ナル確率即チ原因 (1) ノ事前確率ハ $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$ ニシテ同様ニ原因 (2) ノ事前確率ハ

$${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},$$

(3), (4) ノ事前確率ハソレゾレ

$${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8},\qquad {}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4},$$

ナレバナリ，次ニ原因 (1), (2), (3), (4) ヨリ 1 白球チ取リ出ス確率ハ夫々 1, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$, 故ニ基本定理 V ニヨリ原因 (2) ノ事後確率即チ所要ノ確率ハ

$$\frac{\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{16}\times1+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}=\frac{3}{8},$$

（注意） 若シ原因 (1) (2) (3) (4) ノ事前確率ガ皆相等シク $\frac{1}{4}$ ニ等シトスレバ，所要ノ確率ハ

$$\frac{\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}\times1+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}=\frac{3}{10}$$

トナル。

46. 上等中等各 5 本下等 10 本合計 20 本ノ福引ノ中當リ籤上等 1 本，中等 3 本，下等 7 本アリ，今 1 本ノ當リ籤ヲ引キタルコトヲ告ゲラレタルトキソレガ上等ナルコトノ確率如何。

〔解〕 引キタル1本ノ當リ籤ハ上中下 3 種ノ中ノ何レカナリ，然ルニ上中下 3 種ノ籤ノ事前確率ハ題意ニヨリ夫々 $\frac{5}{20}$, $\frac{5}{20}$, $\frac{10}{20}$ ニシテ，ソレヨリ當リ籤ヲ引ク確率ハ夫々 $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$ ナリ，依ツテ引キタル當リ籤ガ上等ナル確率ハ基本定理 V ニヨリ

$$\frac{\frac{5}{20}\times\frac{1}{5}}{\frac{5}{20}\times\frac{1}{5}+\frac{5}{20}\times\frac{3}{5}+\frac{10}{20}\times\frac{7}{10}}=\frac{1}{11}$$

47. 4 球ヲ入レタル袋ヨリ 1 球ヅヽ 3 回取リ出シテ毎回元ニ戻シタルニ 2 回白ヲ得タリトイフ，然ラバ其袋ノ中ニ 3 個ノ白球アル確率如何。

〔解〕 3 回ノ中 2 回白ヲ得，1 回白ナラザルモノヲ得タル故ニ原因ハ次ノ 3 種ナリ，

(1) 白 3 個　非白 1 個

(2) 白 2 個　非白 2 個

(3) 白 1 個　非白 3 個

是等ノ原因ノ事前確率ハ前々問ト同様ニ夫々

$${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},\quad {}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8},\quad {}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$$

次ニ原因 (1), (2) (3) ヨリ 3 回中或順序ニ 2 回白ヲ得，一回非白ヲ得ル確率ハ夫々 $\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$, $\left(\frac{2}{4}\right)^2\frac{2}{4}=\frac{1}{8}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{64}$

依ツテ原因 (1) ノ存在スル確率ハ基本定理 V ニヨリ

$$\frac{\frac{1}{4}\times\frac{9}{64}}{\frac{1}{4}\times\frac{9}{64}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{64}}=\frac{3}{8},$$

若シ原因 (1), (2), (3) ノ事前確率ヲ相等シク皆 $\frac{1}{3}$ ナリトスレバ

$$\frac{\frac{1}{3}\times\frac{9}{64}}{\frac{1}{3}\times\frac{9}{64}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{64}}=\frac{9}{20},$$

48. とらんぷ 52 枚中一枚ヲ紛失セリ，殘リノ 51 枚中ヨリ二枚ヲ取リ出シタルニ二枚トモはーとナリトイフ，紛失シタル一枚ガはーとナル確率及ビだいやナル確率各如何。

〔解〕 紛失シタル一枚ハ (1) はーとナルカ，(2) だいやナルカ，(3) すぺーどナルカ，(4) くろばーナルカナリ，而シテ此四種類ノ事前確率ハ相等シクシテ皆 $\frac{1}{4}$ ナリ，又 51 枚中ヨリ任意ノ二枚ヲ取リ出ス仕方ハ ${}_{51}C_2$ 通リアル故ニ取リ出シタル二枚ガはーとナル確率ハ (1) ナラバ $\frac{{}_{12}C_2}{{}_{51}C_2}$, (2) ナラバ $\frac{{}_{13}C_2}{{}_{51}C_2}$, (3) ナラバ $\frac{{}_{13}C_2}{{}_{51}C_2}$, (4) ナラバ $\frac{{}_{13}C_2}{{}_{51}C_2}$, 依ツテ (1) ナルコトノ事後確率即チ紛失シタル一枚ガはーとナルコトノ確率ハ

$$\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{{}_{12}C_2}{{}_{51}C_2}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{{}_{12}C_2}{{}_{51}C_2}+\frac{1}{4}\frac{{}_{13}C_2}{{}_{51}C_2}+\frac{1}{4}\frac{{}_{13}C_2}{{}_{51}C_2}+\frac{1}{4}\frac{{}_{13}C_2}{{}_{51}C_2}}=\frac{{}_{12}C_2}{{}_{12}C_2+3{}_{13}C_2}=\frac{11}{50}$$

同様ニ (2) ノ事後確率ハ

$$\frac{\frac{1}{4}\frac{{}_{13}C_2}{{}_{51}C_2}}{\frac{1}{4}\frac{{}_{12}C_2}{{}_{51}C_2}+\frac{1}{4}\frac{{}_{13}C_2}{{}_{51}C_2}+\frac{1}{4}\frac{{}_{13}C_2}{{}_{51}C_2}+\frac{1}{4}\frac{{}_{13}C_2}{{}_{51}C_2}}=\frac{{}_{13}C_2}{{}_{12}C_2+3{}_{13}C_2}=\frac{13}{50}$$

49. 或手紙ガ *London*，或ハ *Washington* ヨリ來レルコトヲ知ル，而シテ消印中ニ相隣レル二字 *on* ダケ認メ得タリ，*London* ヨリ來レル確率如何。

〔解〕 *London* ヨリ來レルコトヽ *Washington* ヨリ來レルコトノ事前確率ハ相等シク何レモ $\frac{1}{2}$ ナリトセン．*London* ナル文字ニハ相隣レル二文字ガ 5 組アリテソノ中 *on* ハ二組アリ，故ニ *London* ヨリナラバ *on* ノ字ノ表ハルヽ確率 $\frac{2}{5}$，次ニ *Washington* ナル文字ニハ相隣レル二文字ハ 9 組アリテ其中 *on* ハ 1 組アルノミ故ニ *Washington* ヨリナラバ *on* ノ表ハヽル確率ハ $\frac{1}{9}$，依ツテ *London* ヨリ來レル確率ハ

$$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}}=\frac{18}{23}$$

50. 10 圓紙幣 3 枚ト 5 圓紙幣 3 枚トヲ入レタル財布ヨリ無心ニ 4 枚ヲ取リ出シテ他ノ空財布ニ入レ其 4 枚ノ中ヨリ又無心ニ 2 枚ヲ取リ出シタルニ 2 枚トモ 10 圓紙幣ナリシトイフ，始メ取リ出シタル 4 枚ノ中間殘ル 2 枚ノ紙幣ニ對スル期望價格ハ何程ナルカ。

〔解〕 取リ出シタル二枚ガ共ニ 10 圓紙幣ナリシコト、10 圓，5 圓トモ 3 枚ナリシコトヽヨリ空財布ニ入レタル 4 枚ハ

(1) 10 圓 2 枚，5 圓 2 枚ナリシカ

(2) 10 圓 3 枚，5 圓 1 枚ナリシカ

ノ何レカナリ，然ルニ 10 圓 3 枚，5 圓 3 枚合セテ 6 枚ヨリ 4 枚ヲ取ル總テノ場合ハ ${}_6C_4=15$ ニシテ，ソノ中 10 圓 2 枚，5 圓 2 枚ヲ取ル方法ハ ${}_3C_2\times{}_3C_2=9$，10 圓 3 枚，5 圓 1 枚ヲ取ル方法ハ ${}_3C_3\times{}_3C_1=3$ ナル故ニ (1) (2) ノ事前確率ハ夫々 $\dfrac{9}{15}$ 及ビ $\dfrac{3}{15}$

又 (1) ノ場合ニ 2 枚取リ出シテ共ニ 10 圓紙幣ナル確率ハ $\dfrac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{6}$，(2) ノ場合ニ 2 枚トモ 10 圓ナル確率ハ $\dfrac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\dfrac{3}{6}$

故ニ空財布ニ入レタル 4 枚ガ (1) ナリシ確率ハ

$$\frac{\dfrac{9}{15}\times\dfrac{1}{6}}{\dfrac{9}{15}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{3}{15}\times\dfrac{3}{6}}=\frac{1}{2}$$

(2) ナリシ確率ハ

$$\frac{\dfrac{3}{15}\times\dfrac{3}{6}}{\dfrac{9}{15}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{3}{15}\times\dfrac{3}{6}}=\frac{1}{2}$$

故ニ後ニ殘レル 2 枚ガ 5 圓ノミナル確率ハ $\dfrac{1}{2}$，從ツテ其期望價格ハ 10 圓 $\times\dfrac{1}{2}=5$ 圓，後ニ殘リシ 2 枚ガ 10 圓，5 圓各 1 枚ナル確率ハ $\dfrac{1}{2}$，從ツテ其期望價格ハ 15 圓 $\times\dfrac{1}{2}=7.$圓5

依ツテ所要ノ期望價格ハ

5 圓 + 7.圓 5 = 12.圓 5,

51. 黒又ハ白合セテ 4 球ヲ入レタル袋ヨリ 1 球ヲ取リ出シタルニ白ナリトイフ，其 1 球ヲ元ニ戻シテ次ニ又 1 球ヲ取リ出シテ再ビ白ヲ得ル確率如何。

〔解〕 黒白合セテ 4 球ヲ入レタル袋ヨリ 1 白球ヲ取リ出シタリトイフ事實ノ原因ハ

(1) 4 白，　(2) 3 白，1 黒，　(3) 2 白，2 黒，　(4) 1 白，3 黒

ノ四種ニシテ且ツ 1 白球ヲ取リ出シタリトイフ事實ヨリ推定スル是等ノ原因ノ事後確率ヲ夫々 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 トスレバ問. 45 ニ於テ述ベタルト同様ニ（事前確率ヲ等シカラズトスレバ）

$$Q_1=\frac{1}{8},\quad Q_2=\frac{3}{8},\quad Q_3=\frac{3}{8},\quad Q_4=\frac{1}{8}$$

ニシテ而シテ各原因ヨリ 1 白球ヲ取リ出ス確率ハ夫々

$$1,\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{4}$$

ナル故ニ次ニ 1 球ヲ取リ出シテソレガ白ナル確率ハ原因 (1) ヨリハ $\dfrac{1}{8}\times 1$，(2) ヨリハ $\dfrac{3}{8}\times\dfrac{3}{4}$，(3) ヨリハ $\dfrac{3}{8}\times\dfrac{2}{4}$，(4) ヨリハ $\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{4}$ ナリ，故ニ原因ノ如何ヲ問ハズ兎ニ角次ニ白ノ出ヅル確率即チ所要ノ確率ハ是等ノ和

$$\frac{1}{8}\times 1+\frac{3}{8}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$$

ナリ．若シ各原因ノ事前確率ヲ相等シト考フレバ

$$Q_1=\frac{2}{5},\quad Q_2=\frac{3}{10},\quad Q_3=\frac{2}{10},\quad Q_4=\frac{1}{10}$$

ナル故ニ所要ノ確率ハ

$$\frac{2}{5}\times 1+\frac{3}{10}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{10}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

トナル。

52. 黒白合セテ 5 球ヲ入レタル袋ヨリ 1 球ヲ取リ出シタルニ黒ナリシトイフ，之ヲ元ニ戻シテ再ビ 1 球ヲ取リ出シタルニ今度ハ白ナリシトイフ，然ラバソレヲ元ニ戻シテ第三回目ニ 1 球ヲ取リ出シテ黒ヲ得ル確率如何。

〔解〕 1 黒，1 白ヲ取リ出シタル事實ヨリ原因ハ次ノ 4 種ナルヲ知ル

(1) 1 白，4 黒，　(2) 2 白，3 黒，　(3) 3 白，2 黒，　(4) 4 白，1 黒

各原因ノ事前確率ヲ $q_1\ q_2\ q_3\ q_4$ トスレバ

$$q_1={}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{5}{32},\quad q_2={}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{10}{32},$$

$$q_3={}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{32},\quad q_4={}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{32},$$

各原因ヨリ 1 黑 1 白ヲ取リ出ス確率ヲ $p_1\ p_2\ p_3\ p_4$ トスレバ

$$p_1=\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{25},\qquad p_2=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25},$$

$$p_3=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25},\qquad p_4=\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{25},$$

故ニ $\quad q_1p_1+q_2p_2+q_3p_3+q_4p_4=\dfrac{1}{5},$

從ツテ各原因ノ事後確率ヲ $Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4$ トスレバ

$$Q_1=\frac{5}{32}\times\frac{4}{25}\div\frac{1}{5}=\frac{1}{8},\quad Q_2=\frac{10}{32}\times\frac{6}{25}\div\frac{1}{5}=\frac{3}{8},$$

$$Q_3=\frac{3}{8},\qquad Q_4=\frac{1}{8}$$

各原因ヨリ黑ヲ取リ出ス確率ハ夫々 $\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{2}{5},\ \dfrac{1}{5}$

故ニ第三回目ニ黑ヲ取リ出スコトノ確率ハ

$$\frac{1}{8}\times\frac{4}{5}+\frac{3}{8}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{8}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{2},$$

53. 5 球ヲ入レタル袋ヨリ 2 球ヲ取リ出シタルニ二ツ共白ナリシトイフ，之ヲ元ニ戻シテ更ニ 2 球ヲ取リ出シテ白ト白ナラザルモノトーツヅヽ得ル確率如何。

〔解〕 2 白球ヲ取リ出シタルコトヨリ原因ハ次ノ 4 種ナルヲ知ル

(1) 2 白， (2) 3 白， (3) 4 白， (4) 5 白

各原因ノ事前確率 q ハ皆相等シク何レモ $\dfrac{1}{4}$ ナリト見做ス，

各原因ヨリ 2 白球ヲ得ル確率 p ハ夫々

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10},\quad \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10},\quad \frac{{}_4C_2}{{}_5C_2}=\frac{6}{10},\quad \frac{{}_5C_2}{{}_5C_2}=1,$$

故ニ $\quad \Sigma qp=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{10}+\dfrac{6}{10}+1\right)=\dfrac{1}{2}$

故ニ各原因ノ事後確率 Q ハ夫々

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}\div\frac{1}{2}=\frac{1}{20},\quad \frac{1}{4}\times\frac{3}{10}\div\frac{1}{2}=\frac{3}{20},$$

$$\frac{1}{4}\times\frac{6}{10}\div\frac{1}{2}=\frac{6}{20},\quad \frac{1}{4}\times1\div\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

最後ニ各原因ヨリ白ト白ナラザルモノトヲ取リ出ス確率ハ夫々

$$\frac{2\times3}{{}_5C_2}=\frac{6}{10},\quad \frac{3\times2}{{}_5C_2}=\frac{6}{10},\quad \frac{4\times1}{{}_5C_2}=\frac{4}{10},\quad \frac{5\times0}{{}_5C_2}=0$$

依ツテ所要ノ確率ハ

$$\frac{1}{20}\times\frac{6}{10}+\frac{3}{20}\times\frac{6}{10}+\frac{6}{20}\times\frac{4}{10}+\frac{1}{2}\times0=\frac{6}{25}$$

54. 黑白合セテ 20 個ノ球ヲ入レタル袋ヨリ順次ニ 1 球ヅヽ 10 回取リ出シタルニ白球 6 個，黑球 4 個ヲ得タリトイフ，次ニ取リ出ス球ガ白ナル確率如何，但シ取リ出シタル球ハ總テ元ニ戻サザルモノトス。

〔解〕 球ノ總數 20 ニシテ白球 6 個，黑球 4 個ヲ得タルコトヨリ其原因ハ次ノ 11 通リアルベシ

原因	A_1	A_2	A_3 ……	A_{10}	A_{11}
白球	6,	7,	8,	15,	16,
黑球	14,	13,	12,	5,	4,

各原因ヨリ或順序ニ白球 6 個，黑球 4 個ヲ得ル確率ヲ $p_1\ p_2\ \dots\dots\ p_{11}$ トスレバ

$$p_1=\frac{6}{20}\cdot\frac{5}{19}\cdot\frac{4}{18}\cdot\frac{3}{17}\cdot\frac{2}{16}\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{14}{14}\cdot\frac{13}{13}\cdot\frac{12}{12}\cdot\frac{11}{11}$$

$$p_2=\frac{7}{20}\cdot\frac{6}{19}\cdot\frac{5}{18}\cdot\frac{4}{17}\cdot\frac{3}{16}\cdot\frac{2}{15}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{11}{11}\cdot\frac{10}{11}$$

……………………………………………………

$$p_{11}=\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}\cdot\frac{13}{17}\cdot\frac{12}{16}\cdot\frac{11}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}$$

今 $\quad M_1=1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6 \qquad N_1=11.\,12.\,13.\,14$

$M_2=2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7 \qquad N_2=10.\,11.\,12.\,13$

……………… ………………

$M_{11}=11.\,12.\,13.\,14.\,15.\,16 \qquad N_{11}=1.\,2.\,3.\,4$

トナキ，且ツ各原因ノ事前確率ヲ皆相等シト考ヘ各原因ノ事後確率ヲ $Q_1 Q_2 \ldots\ldots Q_{11}$ トスレバ

$$Q_1=\frac{M_1N_1}{M_1N_1+M_2N_2+\ldots\ldots+M_{11}N_{11}}=\frac{M_1N_1}{\Sigma MN},$$

$$Q_2=\frac{M_2N_2}{\Sigma MN},\ \ldots\ldots\ Q_{11}=\frac{M_{11}N_{11}}{\Sigma MN},$$

各原因ヨリ次ニ白球ヲ取リ出ス確率ハ夫々

$$0,\quad \frac{1}{10},\quad \frac{2}{10},\ \ldots\ldots\ \frac{10}{10},$$

依ツテ所要ノ確率ヲ P トスレバ

$$P=\frac{1}{10.\Sigma MN}(M_2N_2+2.M_3N_3+3.M_4N_4+\ldots\ldots+10.M_{11}N_{11})$$

然ルニ $(1-x)^{-7}=1+7x+\frac{7.8}{2!}x^2+\frac{7.8.9}{3!}x^3+\ldots\ldots$

$$=\frac{1}{6!}(M_1+M_2x+M_3x^2+\ldots\ldots+M_{11}x^{10}+\ldots\ldots)$$

$$(1-x)^{-5}=1+5x+\frac{5.6}{2!}x^2+\frac{5.6.7}{3!}x^3+\ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{4!}(N_{11}+N_{10}x+N_9x^2+\ldots\ldots+N_1x^{10}+\ldots\ldots)$$

故ニ $(1-x)^{-7}\cdot(1-x)^{-5}=(1-x)^{-12}$ ノ展開式ニ於ケル x^{10} ノ係數ハ $\frac{\Sigma MN}{6!\,4!}$ ニ等シ，依ツテ $\frac{\Sigma MN}{6!\,4!}=\frac{12.13.\ldots\ldots21}{10!}$

$$\therefore\ \Sigma MN=\frac{6!\,4!}{10!}(12.13.\ldots\ldots21)$$

又 $(1-x)^{-8}=1+8x+\frac{8.9}{2!}x^2+\ldots\ldots$

$$=\frac{1}{7!}(M_2+2M_3x+3M_4x^2+\ldots\ldots+10M_{11}x^9+\ldots\ldots)$$

故ニ $(1-x)^{-8}\cdot(1-x)^{-5}=(1-x)^{-13}$ ノ展開式ニ於ケル x^9 ノ係數ハ P ノ分子ニ $\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{7!}$ ヲ乘ジタルモノニ等シ，

依ツテ $M_2N_2+2M_3N_3+\ldots\ldots+10M_{11}N_{11}=\frac{4!\,7!}{9!}(13.14.\ldots\ldots21)$,

$$\therefore\ P=\frac{1}{10}\cdot\frac{4!\,7!}{9!}(13.14.\ldots\ldots21)\div\frac{6!\,4!}{10!}(12.13.\ldots\ldots21)=\frac{7}{12}$$

（注意）一般ニ黒白兩種ノ球ノ總數 n ナルトキ 1 球ヅヽ $p+q$ 回取出シテ p 個ノ白ト q 個ノ黒トヲ得タル場合ニ次ニ白ヲ得ル確率ハ

$$\frac{p+1}{p+q+2}$$

ニシテ總數 n ニ關係セズ本問ハ $p=6,\ q=4$ ナル特別ノ場合ナリ。

55. 太陽ハ今日マデ 2000000 日間毎朝東天ヨリ登ルヲ知ル，然ラバ明日モ亦東天ヨリ登ル確率如何。

〔解〕前問ノ注意ニ於テ $p=2000000,\ q=0$ トセバ可ナリ，即チ所要ノ確率ハ

$$\frac{2000000+1}{2000000+2}=\frac{2000001}{2000002}\doteqdot 1,$$

56. 5 男 4 女ヲ生ミタル婦人ガ次ニ男兒ヲ生ム確率如何。

〔解〕前問ト同樣ニ $p=5,\ q=4$ トスレバ所要ノ確率ハ

$$\frac{5+1}{5+4+2}=\frac{6}{11},$$

57. 10 發ノ射撃中 9 發命中セル射手ノ第 11 發ガ命中スル確率如何。

〔解〕前問ト同樣ニ $p=9,\ q=1$ トスレバ所要ノ確率ハ

$$\frac{9+1}{9+1+2}=\frac{5}{6},$$

58. 甲ガ眞ヲイフ確率 $\frac{4}{5}$，乙ガ眞ヲイフ確率 $\frac{5}{7}$ ナルトキ甲，乙共ニ眞ナリトイフコトノ信用ノ程度如何，又甲ガ眞ナリトイヒ乙ガ眞ナラズトイフ事柄ノ眞ナル確率如何。

〔解〕甲，乙ガ眞ナリ或ハ眞ナラズナドト證言スルコトノ原因ハ (1) 其事ガ眞ナルコトヽ，(2) 其事ガ眞ナラザルコトヽノ二ツニ外ナラズ，此二ツノ原因ノ事前確率ハ事柄其者ノ性質ニ由ツテ定マルベキモノナルモ所題ノ如キ場合ニハソノ性質不明ナレバ事前確率ハ相等シク共ニ $\frac{1}{2}$ ナリト考フルノ外ナシ，次ニ原因 (1) ヨリ甲，乙共ニ眞ナリトイフ證言ノ出ズル確率即チ甲，乙共ニ眞ヲイフ確率ハ $\frac{4}{5}\times\frac{5}{7}$ ニシテ原因 (2) ヨリ甲，乙共ニ眞ナリトイフ證言ノ出ズル確率，即チ甲乙共ニ僞ヲイフ確率ハ $\frac{1}{5}\times\frac{2}{7}$ ナル故ニ甲乙共ニ眞ナリトイフ場合ニ原因 (1) ノ存在スル確率即チ其事ノ信用ノ程度ハ基本定理 V ニヨリ

$$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{7}}{\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{7}}=\frac{10}{11}$$

次ニ原因 (1) ヨリ甲ガ眞ナリトイヒ乙ガ眞ナラズトイフ證言ノ出ヅル確率即チ甲ハ眞ヲイヒ乙ハ僞ヲイフ確率ハ $\frac{4}{5}\times\frac{2}{7}$ ニシテ原因 (2) ヨリ同ジ證言ノ出ズル確率ハ $\frac{1}{5}\times\frac{5}{7}$ ナル故ニ甲ガ眞ナリトイヒ乙ガ眞ナラズトイフ場合ニ原因 (1) ノ存在スル確率即チ其事ノ眞ナル確率ハ基本定理 V ニヨリ

$$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{7}}{\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{5}{7}}=\frac{8}{13},$$

59. 甲ガ眞ヲイフ確率 $\frac{7}{10}$，乙ガ眞ヲイフ確率 $\frac{9}{10}$ ナリトシ 3 白，7 黑ヲ入レタル袋ヨリ 1 球ヲ取リ出シタルニ甲乙共ニ白ナリトイフ，實際ソレガ白ナル確率如何。

〔解〕 甲乙共ニ白ナリト證言スルコトノ原因ハ (1) 實際白ナルコト，(2) 實際ハ白ナラズシテ黑ナルコトノ二ツナリ，然ルニ 3 白，7 黑ナル故ニ原因 (1), (2) 前確率ハソレゾレ $\frac{3}{10}$ 及ビ $\frac{7}{10}$ 又原因 (1) ヨリ甲，乙共ニ白ナリトノ證言ノ出ズル確率即チ甲乙共ニ眞ヲイフ確率ハ $\frac{7}{10}\times\frac{9}{10}$ ニシテ原因 (2) ヨリ同ジ證言ノ出ズル確率即チ甲乙共ニ僞ヲイフ確率ハ $\frac{3}{10}\times\frac{1}{10}$，從ツテ基本定理 V ニヨリ原因 (1) ノ存在スル確率即チ所要ノ確率ハ

$$\frac{\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{9}{10}}{\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{9}{10}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{10}\times\frac{1}{10}}=\frac{9}{10}$$

ナリ。

60. 1, 2, 3, 4, 5 ナル番號ヲ付シタル 5 枚ノ札ヲ入レタル袋ヨリ 1 枚ヲ取リ出シテ甲乙共ニ 1 ナリト證言ストイフ，實際ソレガ 1 ナルコトノ確率如何，但シ甲ノ眞ヲイフ確率 $\frac{4}{5}$，乙ノ眞ヲイフ確率ハ $\frac{5}{7}$ トス。

〔解〕 甲乙共ニ 1 ナリト證言セシ原因ハ (1) 實際ソレガ 1 ナルコト，(2) 實際ハソレガ 1 ナラザルコトノ二ツナリ，而シテ札ハ 5 枚ナル故ニ原因 (1) ノ事前確率ハ $\frac{1}{5}$，(2) ノ事前確率ハ $\frac{4}{5}$ ナリ，又原因 (1) ヨリ所題ノ證言ノ出ズル確率ハ即チ甲乙共ニ眞ヲイフ確率 $\frac{4}{5}\times\frac{5}{7}$ ナルモ原因 (2) ヨリ同ジ證言ノ出ズル確率ハ甲乙共ニ僞ヲイヒ而モ其僞リハ實際顯ハレタル番號以外ノ 4 種ノ中特ニ 1 ナリトイフガ故ニ甲，乙各ガ斯ル證言ヲナス確率ハ夫々 $\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}$ 及ビ $\frac{2}{7}\times\frac{1}{4}$ ニシテ從ツテ題意ノ如ク兩人トモ斯ル同ジ證言ヲナス確率ハ $\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{4}$ ナリ，即チ原因 (1), (2) ノ事前確率ハ $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$ ニシテ又コレヨリ所題ノ證言ノ出ヅル確率ハ $\frac{4}{5}\times\frac{5}{7}$, $\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{4}$ ナリ，依ツテ此場合ニ原因 (1) ノ存在スル確率即チ所要ノ確率ハ基本定理 V ヨリ

$$\frac{\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{7}}{\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{7}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{4}}=\frac{40}{41}$$

61. 事前確率 $\frac{1}{5^9+1}$ ナル或事件アリ，眞ヲイフ確率 $\frac{5}{6}$ ナル人 10 人ガ一致シテ此事件ノ起レルコトヲ證言スルトキ眞ニ此事件ノ起レル確率如何。

〔解〕 10 人ガ一致シテ起レルコトヲ證言セシ原因ハ (1) 此事件ガ起レルコト，(2) 實際ハ此事件ガ起ラザルコトノ二ツナリ，原因 (1) ノ事前確率ハ題意ニヨリ $\frac{1}{5^9+1}$ ニシテ從ツテ原因 (2) ノ事前確率ハ $1-\frac{1}{5^9+1}=\frac{5^9}{5^9+1}$ ナリ，又原因 (1) ヨリ 10 人ガ一致シテ此事件ノ起レルコトヲ證言スル確率即チ 10 人ガ一致シテ眞ヲイフ確率ハ題意ニヨリ $\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$ ニシテ原因 (2) ヨリ同ジ證言ノ出ズル確率即チ 10 人ガ一致シテ僞ヲイフ確率ハ $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$ ナリ，依ツテ原因 (1) ノ存在スル確率即チ所要ノ確率ハ

$$\frac{\frac{1}{5^9+1}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{10}}{\frac{1}{5^9+1}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{10}+\frac{5^9}{5^9+1}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{10}}=\frac{5^{10}}{5^{10}+5^9}=\frac{5^{10}}{5^9(5+1)}=\frac{5}{6}.$$

62. 一ツノ銀貨ヲ投ゲテソノ表面ガ表ハレタリト甲ガ言ヒシト乙ガ言ヒシト丙ガ言ヒシト丁ガ言フトキ實際表面ノ出デシ確率ハ

$$\frac{a^4+6a^2b^2+b^4}{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}$$

ナルコトヲ證セヨ，但シ各人ノ眞ヲイフ確率ヲ $\frac{a}{a+b}$ トス。

〔解〕 原因ハ (1) 實際表面ガ投ゲ出サレタルコト，(2) 實際ハ裏面ガ投ゲ出サレタルコトノ二ツニシテ各ノ事前確率ハ $\frac{1}{2}$，又原因 (1) ヨリ所題ノ如キ證言ノ出ズル場合ヲ考フルニ甲乙丙丁皆眞ヲ言ヒシガタメカ或ハ内二人ガ僞ヲイヒ殘ル二人ガ眞ヲイヒシガタメカ，或ハ四人皆僞ヲイヒシガタメカノ三ツノ場合アリ，而シテ此等三ツノ場合ノ確率ハ夫々 $\left(\frac{a}{a+b}\right)^4$，${}_4C_2\left(\frac{a}{a+b}\right)^2\left(\frac{b}{a+b}\right)^2$，$\left(\frac{b}{a+b}\right)^4$ ナル故ニ原因 (1) ヨリ所題ノ證言ノ出ズル確率ハ

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^4+{}_4C_2\left(\frac{a}{a+b}\right)^2\left(\frac{b}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{a+b}\right)^4$$

同様ニ原因 (2) ヨリ所題ノ證言ノ出ズル確率ハ

$${}_4C_1\left(\frac{a}{a+b}\right)^3\left(\frac{b}{a+b}\right)+{}_4C_3\left(\frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{b}{a+b}\right)^3$$

依ツテ原因 (1) ノ存在スル確率即チ所要ノ確率ハ

$$\frac{\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{a}{a+b}\right)^4+{}_4C_2\left(\frac{a}{a+b}\right)^2\left(\frac{b}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{a+b}\right)^4\right\}}{\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{a}{a+b}\right)^4+{}_4C_1\left(\frac{a}{a+b}\right)^3\left(\frac{b}{a+b}\right)+{}_4C_2\left(\frac{a}{a+b}\right)^2\left(\frac{b}{a+b}\right)^2+{}_4C_1\left(\frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{b}{a+b}\right)^3+\left(\frac{b}{a+b}\right)^4\right\}}$$

$$=\frac{a^4+6a^2b^2+b^4}{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}$$

63. 信用ノ確率 p ナル人ガ生起ノ事前確率 q ナル或事柄ノ生起シタルコトヲ證言スルトキ其事柄ノ生起シタル事後確率 Q ヲ求メ，之ヲ事前確率 q ト比較セヨ。

〔解〕 此證言ノ生セシ原因ハ (1) 此事柄ノ生起シタルコト，(2) 此事柄ノ生起セザルコトノ二ツニシテ (1) ノ事前確率ハ q，(2) ノ事前確率 $1-q$，又證人ノ信用ノ確率 p ナル故ニ原因 (1) ヨリ所題ノ證言ノ生ズル確率 p，原因 (2) ヨリ所題ノ證言ノ生ズル確率 $1-p$，

依ツテ原因 (1) ノ存在スル確率即チ所要ノ確率 Q ハ基本定理 V ニヨリ

$$Q=\frac{qp}{qp+(1-q)(1-p)}$$

今 q ト Q トヲ比較スルニ

$$Q-q=\frac{qp-q^2p-q(1-q)(1-p)}{qp+(1-q)(1-p)}=\frac{q(1-q)(2p-1)}{qp+(1-q)(1-p)}$$

p, q, $1-q$, $1-p$ ハ皆正ナル故ニ $p\gtreqless\frac{1}{2}$ ナルニ從ツテ $Q\gtreqless q$ ナルヲ知ル，即チ證人ノ信用ノ確率ガ $\frac{1}{2}$ ヨリ大ナルカ等シキカ或ハ小ナルカニ從ツテ其證人ノ主張ノ正シキコトノ確率ハ其事自身ノ固有ノ確率ヨリ大トナリ或ハ等シクナリ或ハ却ツテ小トナル。

64. 信用ノ確率 $\frac{1}{2}$ 以上ノ證人ニアラザレバ證人ノ數ヲ增スモ其事ノ眞ナル確率ハ增加セザルコトヲ證セヨ。

〔解〕 n 人ノ信用ノ確率ヲソレゾレ $p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_n$ トシ生起ノ事前確率 q ナル事柄ノ生起セルコトヲ此 n 人ガ一齊ニ證言スルトキノ此事柄ノ實際生起シタル確率ヲ Q_n トスレバ

$$Q_n=\frac{p_1p_2\ldots\ldots p_nq}{p_1p_2\ldots\ldots p_nq+(1-p_1)(1-p_2)\ldots\ldots(1-p_n)(1-q)}$$

同様ニ $n+1$ 人ガ證言スルトキノ此事柄ノ生起セル確率ヲ Q_{n+1} トスレバ

$$Q_{n+1}=\frac{p_1p_2\ldots\ldots p_{n+1}q}{p_1p_2\ldots\ldots p_{n+1}q+(1-p_1)(1-p_2)\ldots\ldots(1-p_{n+1})(1-q)}$$

故ニ $Q_{n+1}>Q_n$ ナルタメニハ

$$\frac{p_1p_2\ldots\ldots p_{n+1}q}{p_1p_2\ldots\ldots p_{n+1}q+(1-p_1)(1-p_2)\ldots\ldots(1-p_{n+1})(1-q)}$$

$$>\frac{p_1p_2\ldots\ldots p_nq}{p_1p_2\ldots\ldots p_nq+(1-p_1)(1-p_2)\ldots\ldots(1-p_n)(1-q)}$$

$$\therefore\ p_{n+1}\{p_1p_2\ldots\ldots p_nq+(1-p_1)(1-p_2)\ldots\ldots(1-p^n)(1-q)\}$$

$$>p_1p_2\ldots\ldots p_{n+1}q+(1-p_1)(1-p_2)\ldots\ldots(1-p_{n+1})(1-q)$$

$$\therefore\ p_{n+1}>1-p_{n+1}\qquad\therefore\ p_{n+1}>\frac{1}{2},$$

即チ第 $n+1$ 人ノ信用ノ確率 p_{n+1} ガ $\frac{1}{2}$ ヨリ大ナラザレバ $n+1$ 人ガ証言シタルトキノ其事柄ノ生起ノ確率 Q_{n+1} ハ n 人ガ証言シタルトキノ確率 Q_n ヨリ大ナラズ。

65. 生起ノ事前確率 $\frac{1}{2}$ ナル或事柄ニ關シテ信用ノ確率大ナル人ノ主張ノ正シキ確率ハ信用ノ確率小ナル人ノ主張ノ正シキ確率ヨリ大ニシテ其差ハ兩人ノ信用ノ確率ノ差ヨリ大ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 甲ノ信用ノ確率ヲ p, 乙ノ信用ノ確率ヲ q トシ甲ハ生起ノ事前確率 $\frac{1}{2}$ ナル或事柄ノ生起ヲ主張シ乙ハ其不生起ヲ主張スルモノトセン, 甲ノ主張ノ正シキ確率即チ其事柄ノ實際生起セル確率ヲ P, 乙ノ主張ノ正シキ確率即チ其事柄ノ實際ハ生起セザル確率ヲ Q トスレバ

$$P=\frac{\frac{1}{2}p(1-q)}{\frac{1}{2}p(1-q)+\frac{1}{2}(1-p)q}=\frac{p(1-q)}{p(1-q)+(1-q)q}$$

$$Q=\frac{\frac{1}{2}(1-p)q}{\frac{1}{2}p(1-q)+\frac{1}{2}(1-p)q}=\frac{(1-p)q}{p(1-q)+(1-p)q}$$

$$\therefore\ P-Q=\frac{p(1-q)-(1-p)q}{p(1-q)+(1-p)q}=\frac{p-q}{p(1-q)+(1-p)q}$$

$\therefore$ $p>q$ ナラバ $P>Q$ ナリ

又 $$P-Q-(p-q)=\frac{(p-q)\{1-p(1-q)-(1-p)q\}}{p(1-q)+(1-p)q}$$
$$=\frac{(p-q)\{(1-p)-q(1-2p)\}}{p(1-q)+(1-p)q}$$

然ルニ $p-q>0,\quad 1-p>q(1-2p)$

$\therefore$ $P-Q>p-q,$

即チ兩人ノ主張ノ正シキコトノ確率ノ差ハ兩人ノ信用ノ確率ノ差ヨリ大ナリ。

66. 甲ハ a 個, 乙ハ b 個ノ碁石ヲ有ス, 或試合ヲ何回モ繰返シテ負ケタルモノハ勝チタルモノニ毎回 1 個ノ碁石ヲ與ヘ, 一人ガ相手ノ碁石ヲ取リ盡ストキ最

後ノ勝負ヲ決スルモノトス, 毎回ノ試合ニ於テ甲ノ勝ツ確率ヲ p, 乙ノ勝ツ確率ヲ $q=1-p$ トスルトキ甲乙ガ最後ノ勝利ヲ得ル確率各如何。

〔解〕 試合ノ途中ニ於テ甲ガ n 個ノ碁石ヲ持チタルトキ甲ノ全勝スベキ確率ヲ u_n トスレバ甲ガ次ニ勝ツ確率ハ p ニシテ然ルトキハ碁石ハ $n+1$ 個トナル故ニ次ニ全勝スル確率ハ u_{n+1}, 然ルニ甲ガ次ニ負ケル確率ハ q ニシテ然ルトキハ碁石ハ $n-1$ 個トナル故ニ次ニ全勝スル確率ハ u_{n-1} ナリ, 故ニ

$$u_n=pu_{n+1}+qu_{n-1}$$

即チ $$pu_{n+1}-u_n+qu_{n-1}=0$$

此關係ヨリ u_a ヲ求ムレバソレハ即チ所要ノ甲ノ全勝スル確率ニシテ u_b ハ乙ノ全勝スル確率ナリ, 然ルニ今

$$\frac{A+Bx}{p-x+qx^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n+\ldots\ldots$$

トスレバ

$$A+Bx=(p-x+qx^2)(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n+\ldots\ldots)$$
$$=a_0p+(a_1p-a_0)x+(a_2p-a_1+a_0q)x^2+(a_3p-a_2+a_1q)x^3+\ldots\ldots$$
$$+(a_np-a_{n-1}+a_{n-2}q)x^n+\ldots\ldots$$

$$\therefore\ a_0p=A,\quad a_1p-a_0=B,\quad a_2p-a_1+a_0q=0,\quad a_3p-a_2+a_1q=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad a_np-a_{n-1}+a_{n-2}q=0,$$

故ニ $u_n=a_n.$

然ルニ $p+q=1$ ナル故ニ

$$\frac{A+Bx}{p-x+qx^2}=\frac{A+Bx}{(p-qx)(1-x)}=\frac{C}{p-qx}+\frac{D}{1-x}=\frac{C}{p}\left(1-\frac{q}{p}x\right)^{-1}+D(1-x)^{-1}$$
$$=\frac{C}{p}\left(1+\frac{q}{p}x+\frac{q^2}{p^2}x^2+\ldots\ldots\right)+D(1+x+x^2+\ldots\ldots)$$

$$\therefore\ a_n=\frac{C}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^n+D=u_n$$

然ルニ $u_0=0.\qquad u_{a+b}=1$

$$\therefore\ \frac{C}{p}+D=0,\qquad \frac{C}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}+D=1.$$

$$\therefore\ D=\frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}},\qquad C=\frac{-p}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}},$$

$$\therefore\ u_n=\frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}-\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}=\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}},$$

$$\therefore\ u_a=\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

同樣ニ

$$u_b=\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^b}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

第 八 章

複　素　數

基本定理 **I.** $a+bi=0$ ナルトキハ $a=0,\ b=0,$

II. $(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$

$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i,$$

III. $a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)=r\{\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi)\},$

但シ $r=\sqrt{a^2+b^2},\ \tan\theta=\dfrac{b}{a},\ k$ ハ 0 或ハ任意ノ整數.

IV. $(a+bi)^n=r^n\{\cos n(\theta+2k\pi)+i\sin n(\theta+2k\pi)\}$

但シ n ハ任意ノ實數 k ハ 0 或ハ正負ノ整數 (*De moivre* ノ定理)。

演習問題

1. $a+bi=c+di$ ナルトキハ $a=c,\ b=d$ ナルコトヲ証セヨ. 逆ニ $a=c,\ b=d$ ナルトキハ $a+bi=c+di$ ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 實數ノ場合ト同ジクニツノ複素數ガ相等シトハ其二ツノ複素數ノ差ガ 0 ナルコトナリ, 故ニ $a+bi=c+di$ ナラバ

$(a+bi)-(c+di)=0$

故ニ基本定理 II ニヨリ　$(a-c)+(b-d)i=0$

故ニ基本定理 I ヨリ　$a-c=0,\quad b-d=0$

$\therefore\ a=c,\quad b=d$

逆ニ $a=c,\ b=d$ ナルトキハ　$(a-c)+(b-d)i=(a+bi)-(c+di)=0$

$\therefore\ a+bi=c+di,$

2. $z_1=a_1+b_1i,\quad z_2=a_2+b_2i,\quad z_3=a_3+b_3i$ トスルトキ

(1) $z_1+z_2+z_3=z_1+z_3+z_2=z_2+z_1+z_3=\ldots\ldots$

(2) $z_1z_2z_3=z_1z_3z_2=z_2z_1z_3=\ldots\ldots$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 基本定理 II ニヨリ

$$z_1+z_2+z_3=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i+a_3+b_3i=(a_1+a_2+a_3)+(b_1+b_2+b_3)i$$
$$=(a_1+a_3+a_2)+(b_1+b_3+b_2)i=(a_1+a_3)+(b_1+b_3)i+a_2+b_2i$$
$$=a_1+b_1i+a_3+b_3i+a_2+b_2i=z_1+z_3+z_2$$

同樣ニ　$z_1+z_2+z_3=z_2+z_1+z_3=z_3+z_1+z_2=z_3+z_2+z_1=z_2+z_3+z_1$

又　$z_1z_2z_3=\{(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i\}(a_3+b_3i)$

$$=\{(a_1a_2-b_1b_2)a_3-(a_1b_2+a_2b_1)b_3\}+\{(a_1a_2-b_1b_2)b_3+(a_1b_2+a_2b_1)a_3\}i$$
$$=\{(a_1a_3-b_1b_3)a_2-(a_1b_3+a_3b_1)b_2\}+\{(a_1a_3-b_1b_3)b_2+(a_1b_3+a_3b_1)a_2\}i$$
$$=\{a_1a_3-b_1b_3)+(a_1b_3+a_3b_1)i\}(a_2+b_2i)=z_1z_3z_2$$

同樣ニ　$z_1z_2z_3=z_2z_1z_3=z_2z_3z_1=z_3z_1z_2=z_3z_2z_1$

即チ複素數ニ就テモ交換ノ法則ハ成立ス。

3. 同上.

$$z_1+z_2+z_3=z_1+(z_2+z_3),\qquad z_1z_2z_3=z_1(z_2z_3)$$

ヲ証セヨ。

〔解〕 基本定理 II ニヨリ

$$z_1+z_2+z_3=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i+(a_3+b_3i)=(a_1+a_2+a_3)+(b_1+b_2+b_3)i$$
$$z_1+(z_2+z_3)=a_1+b_1i+(a_2+a_3)+(b_2+b_3)i=(a_1+a_2+a_3)+(b_1+b_2+b_3)i$$

故ニ問題 1 ニヨリ

$$z_1+z_2+z_3=z_1+(z_2+z_3)$$

次ニ　$z_1z_2z_3=\{(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i\}(a_3+b_3i)$

$$=\{(a_1a_2-b_1b_2)a_3-(a_1b_2+a_2b_1)b_3\}+\{(a_1a_2-b_1b_2)b_3+(a_1b_2+a_2b_1)a^3\}i$$

$$z_1(z_2z_3)=(a_1+b_1i)\{a_2a_3-b_2b_3)+(a_2b_3+a_3b_2)i\}$$

$$=\{a_1(a_2a_3-b_2b_3)-b_1(a_2b_3+a_3b_2)\}+\{a_1(a_2b_3+a_3b_2)+b_1(a_2a_3-b_2b_3)\}i$$
$$=\{(a_1a_2-b_1b_2)a_3-(a_1b_2+a_2b_1)b_3\}+\{(a_1a_2-b_1b_2)b_3+(a_1b_2+a_2b_1)a_3\}i$$

故ニ問題 1 ニヨリ

$$z_1z_2z_3=z_1(z_2z_3)$$

即チ複素數ニ就テモ結合ノ法則ハ成立ス。

4. 同上,

$$(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3,\qquad \frac{z_1+z_2}{z_3}=\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_3}$$

ヲ証セヨ。

〔解〕 基本定理 II ニヨリ

$$(z_1+z_2)z_3=\{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i\}(a_3+b_3i)$$
$$=\{(a_1+a_2)a_3-(b_1+b_2)b_3\}+\{(a_1+a_2)b_3+(b_1+b_2)a_3\}i$$
$$z_1z_3+z_2z_3=(a_1a_3-b_1b_3)+(a_1b_3+a_3b_1)i+(a_2a_3-b_2b_3)+(a_2b_3+a_3b_2)i$$
$$=(a_1a_3-b_1b_3+a_2a_3-b_2b_3)+(a_1b_3+a_3b_1+a_2b_3+a_3b_2)i$$
$$=\{(a_1+a_2)a_3-(b_1+b_2)b_3\}+\{(a_1+a_2)b_3+(b_1+b_2)a_3\}i$$

故ニ問題 1 ニヨリ

$$(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3.$$

次ニ　$\dfrac{z_1+z_2}{z_3}=\dfrac{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i}{a_3+b_3i}=\dfrac{(a_1+a_2)a_3+(b_1+b_2)b_3}{a_3^2+b_3^2}$

$$+\frac{(b_1+b_2)a_3-(a_1+a_2)b_3}{a_3^2+b_3^2}i$$

$$\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_3}=\frac{a_1a_3+b_1b_3}{a_3^2+b_3^2}+\frac{a_3b_1-a_1b_3}{a_3^2+b_3^2}i+\frac{a_2a_3+b_2b_3}{a_3^2+b_3^2}+\frac{a_3b_2-a_2b_3}{a_3^2+b_3^3}i$$
$$=\frac{a_1a_3+b_1b_3+a_2a_3+b_2b_3}{a_3^2+b_3^2}+\frac{a_3b_1-a_1b_3+a_3b_2-a_2b_3}{a_3^2+b_3^2}i$$
$$=\frac{(a_1+a_2)a_3+(b_1+b_2)b_3}{a_3^2+b_3^2}+\frac{(b_1+b_2)a_3-(a_1+b_2)b_3}{a_3^2+b_3^2}i$$

故ニ問題 1 ニヨリ

$$\frac{z_1+z_2}{z_3}=\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_3}$$

即チ複素數ニ就テモ分配ノ法則ハ成立ス。

5. **同上，若シ $z_1=z_2$ ナルトキハ $z_1+z_3=z_2+z_3$，$z_1z_3=z_2z_3$，及ビ $\dfrac{z_1}{z_3}=\dfrac{z_2}{z_3}$ ナルコト及ビ逆ニ $z_1+z_3=z_2+z_3$ 或ハ $z_1z_3=z_2z_3$ 或ハ $\dfrac{z_1}{z_3}=\dfrac{z_2}{z_3}$ ナルトキハ $z_1=z_2$ ナルコトヲ証セヨ，但シ $z_3 \neq 0$ トス。**

〔解〕 基本定理 II ニヨリ

$$z_1+z_3=(a_1+a_3)+(b_1+b_3)i, \quad z_2+z_3=(a_2+a_3)+(b_2+b_3)i$$

然ルニ $z_1=z_2$ 故ニ問題 1 ニヨリ $a_1=a_2$, $b_1=b_2$

$$\therefore\ a_1+a_3=a_2+a_3, \quad b_1+b_3=b_2+b_3$$

$$\therefore\ (a_1+a_3)+(b_1+b_3)i=(a_2+a_3)+(b_2+b_3)i$$

$$\therefore\ z_1+z_3=z_2+z_3,$$

次ニ

$$z_1z_3=(a_1a_3-b_1b_3)+(a_1b_3+a_3b_1)i,$$

$$z_2z_3=(a_2a_3-b_2b_3)+(a_2b_3+a_3b_2)i$$

然ルニ $a_1=a_2$, $b_1=b_2$ $\quad\therefore\ a_1a_3-b_1b_3=a_2a_3-b_2b_3,\quad a_1b_3+a_3b_1=a_2b_3+a_3b_2$

$$\therefore\ (a_1a_3-b_1b_3)+(a_1b_3+a_3b_1)i=(a_2a_3-b_2b_3)+(a_2b_3+a_3b_2)i$$

$$\therefore\ z_1z_3=z_2z_3,$$

次ニ

$$\frac{z_1}{z_3}=\frac{a_1a_3+b_1b_3}{a_3^2+b_3^2}+\frac{b_1a_3-a_1b_3}{a_3^2+b_3^2}i, \quad \frac{z_2}{z_3}=\frac{a_2a_3+b_2b_3}{a_3^2+b_3^2}+\frac{b_2a_3-a_2b_3}{a_3^2+b_3^2}i$$

然ルニ $a_1=a_2$, $b_1=b_2$ $\quad\therefore\ a_1a_3+b_1b_3=a_2a_3+b_2b_3,\quad b_1a_3-a_1b_3=b_2a_3-a_2b_3$

$$\therefore\ \frac{a_1a_3+b_1b_3}{a_3^2+b_3^2}+\frac{b_1a_3-a_1b_3}{a_3^2+b_3^2}i=\frac{a_2a_3+b_2b_3}{a_3^2+b_3^2}+\frac{b_2a_3-a_2b_3}{a_3^2+b_3^2}i$$

$$\therefore\ \frac{z_1}{z_3}=\frac{z_2}{z_3},$$

逆ニ $z_1+z_3=z_2+z_3$ ナラバ $(a_1+a_3)+(b_1+b_3)i=(a_2+a_3)+(b_2+b_3)i$

$$\therefore\ a_1+a_3=a_2+a_3,\quad b_1+b_3=b_2+b_3 \qquad \therefore\ a_1=a_2,\quad b_1=b_2$$

$$\therefore\ a_1+b_1i=a_2+b_2i \qquad \therefore\ z_1=z_2$$

次ニ $z_1z_3=z_2z_3$ ナラバ $a_1a_3-b_1b_3=a_2a_3-b_2b_3$, $a_1b_3+a_3b_1=a_2b_3+a_3b_2$

$$\therefore\ a_3(a_1-a_2)=b_3(b_1-b_2), \quad b_3(a_1-a_2)=a_3(b_2-b_1)$$

$$\therefore\ a_3b_3(a_1-a_2)^2=-a_3b_3(b_1-b_2)^2$$

然ルニ a_3, b_3 ハ 0 ナラザル故ニ $\quad (a_1-a_2)^2=-(b_1-b_2)^2$

$$\therefore\ a_1=a_2,\quad b_1=b_2 \qquad \therefore\ z_1=z_2,$$

同樣ニ $\dfrac{z_1}{z_3}=\dfrac{z_2}{z_3}$ ナラバ $z_1=z_2$ ヲ証明スルコトヲ得。

6. **$(i)^n$ ヲ求メヨ，但シ n ヲ正ノ整數トス。**

〔解〕 $(i)^1=i$, $(i)^2=-1$, $(i)^3=-i$, $(i)^4=1$ ナル故ニ m ヲ正ノ整數トシ

$n=4m$ 　ナラバ　$(i)^n=\{(i)^4\}^m=1$

$n=4m+1$ 　ナラバ　$(i)^n=(i)^{4m}(i)=i$

$n=4m+2$ 　ナラバ　$(i)^n=(i)^{4m}(i)^2=-1$

$n=4m+3$ 　ナラバ　$(i)^n=(i)^{4m}(i)^3=-i,$

7. **$\dfrac{(1+i)^3-(1-i)^3}{(1+i)^2-(1-i)^2}$ ヲ簡單ニセヨ。**

〔解〕 基本定理 I, II, 及ビ問題 1－5 ニヨリ複素數モ實數ト同樣ニ計算シ得ルガ故ニ所題ノ分數ノ分母，分子ヲ因數ニ分解シテ簡單ニスレバ

$$\frac{\{(1+i)-(1-i)\}\{(1+i)^2+(1+i)(1-i)+(1-i)^2\}}{\{(1+i)-(1-i)\}\{(1+i)+(1-i)\}}$$

$$=\frac{(1+i)^2+(1+i)(1-i)+(1-i)^2}{(1+i)+(1-i)}=\frac{1+2i-1+1+1+1-2i-1}{2}$$

$$=\frac{2}{2}=1,$$

8. **$7+24i$ ノ平方根ヲ求ム。**

〔解〕 x, y ヲ實數トシ所要ノ平方根ヲ $x+yi$ トスレバ

$$\pm\sqrt{7+24i}=x+yi \qquad \therefore\ 7+24i=x^2-y^2+2xyi$$

$$\therefore\ x^2-y^2=7,\quad xy=12, \qquad \therefore\ (x^2+y^2)^2=7^2+4(12)^2=(25)^2$$

然ルニ x, y ハ實數ナル故ニ $\quad x^2+y^2=25$

$$\therefore\ x^2=16,\quad y^2=9,$$

然ルニ又 $xy=12$ ヨリ x, y ハ同符號ナルヲ要ス，故ニ

$$\left.\begin{matrix} x=4 \\ y=3 \end{matrix}\right) \quad 或ハ \quad \left.\begin{matrix} x=-4 \\ y=-3 \end{matrix}\right)$$

依ッテ所要ノ平方根ハ $4+3i$ 或ハ $-4-3i$,

9. i **ノ立方根ヲ求メヨ。**

〔解〕 x, y ヲ實數トシ所要ノ立方根ヲ $x+yi$ トスレバ

$$i=(x+yi)^3=x^3-3xy^2+(3x^2y-y^3)i$$

$$\therefore\ x^3-3xy^2=0,\quad (1)\qquad 3x^2y-y^3=1,\quad (2)$$

(1) ヨリ $x=0$ 又 $x^2-3y^2=0$

$x=0$ ナラバ (2) ヨリ $y^3=-1$, y ハ實數ナル故ニ $y=-1$,

$x^2-3y^2=0$ ナラバ (2) ヨリ $8y^3=1$, y ハ實數ナル故ニ $y=\frac{1}{2}$

從ツテ $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, 即チ x, y ノ價ハ次ノ三組アリ

$$(0,\ -1),\quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right),\quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

依ツテ所要ノ立方根ハ

$$-i,\quad \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

10. 1 ノ 5 乘根ヲ求メヨ。

〔解〕 1 ノ 5 乘根ヲ x トスレバ

$$x^5=1\qquad \therefore\ (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$$

$$\therefore\ x=1\quad 又ハ\quad x^4+x^3+x^2+x+1=0$$

x ハ 0 ナラザル故ニ第二式ヲ x^2 ニテ割レバ

$$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$x+\frac{1}{x}=y$ トオケバ $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$

$$\therefore\ y^2-2+y+1=0\qquad \therefore\ y^2+y-1=0\qquad \therefore\ y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$\therefore\ y=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ トスレバ $x+\frac{1}{x}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ヨリ

$$x=\frac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i}{4}$$

$y=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ トスレバ $x+\frac{1}{x}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ヨリ

$$x=\frac{-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,i}{4},$$

即チ所要ノ 5 乘根ハ

$$1,\quad \frac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i}{4},\quad \frac{-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,i}{4},$$

11. 次ノ諸數ヲ $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ **ナル形ニテ表ハセ,**

$$a,\qquad bi,\qquad a+bi$$

但シ a, b **ヲ實數トス。**

〔解〕 がうすノ表示法ニヨリ r ハ其數ノ絶對値ニシテ θ ハ $\tan\theta=\frac{b}{a}$ ニヨリテ定メラルル故ニ $b=0$ ナルトキハ $r=|a|$, $\tan\theta=0$, 故ニ $a>0$ ナラバ $\theta=2n\pi$, $a<0$ ナラバ $\theta=(2n+1)\pi$,

$$\therefore\ a=a(\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi)\qquad a>0,$$

又ハ $a=-a\{\cos(2n+1)\pi+i\sin(2n+1)\pi\}$ $\quad a<0,$

$a=0$ ナルトキハ $r=|b|$, $\tan\theta=\infty$

故ニ $b>0$ ナラバ $\theta=\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $b<0$ ナラバ $\theta=-\frac{\pi}{2}+2n\pi$,

$$\therefore\ bi=b\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right\}\qquad b>0$$

又ハ $bi=-b\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right\}\qquad b<0$

$a\neq0$, $b\neq0$ ナルトキハ $r=\sqrt{a^2+b^2}$ ニシテ θ ハ $\tan\theta=\frac{b}{a}$ ヨリ一般ニ三角函數表ト a, b ノ符號トニヨリ最小正角 α ヲ定ム, 然ルトキハ $\theta=\alpha+2n\pi$,

$$\therefore\ a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\{\cos(\alpha+2n\pi)+i\sin(\alpha+2n\pi)\},$$

12. $(\sqrt{3}+i)^4$ **ヲ求メヨ。**

〔解〕 $\sqrt{3}+i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ トスレバ

$$r=\sqrt{3+1}=2,\quad \tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\qquad \therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}+2n\pi$$

$$\therefore\ \sqrt{3}+i=2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi\right)\right\}$$

故ニ基本定理 IV ニヨリ

$$(\sqrt{3}+i)^4=2^4\left\{\cos 4\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi\right)+i\sin 4\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi\right)\right\}$$

$$=16\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=16\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-8+8\sqrt{3}\,i$$

或ハ二項定理ニヨリ

$$(\sqrt{3}+i)^4=(\sqrt{3})^4+4(\sqrt{3})^3i+6(\sqrt{3})^2(i)^2+4\sqrt{3}(i)^3+(i)^4$$

$$=9+12\sqrt{3}\,i-18-4\sqrt{3}\,i+1$$

$$=-8+8\sqrt{3}\,i.$$

13. **$1+\sqrt{3}i$ ノ 5 乗根ヲ求メヨ。**

〔解〕 前問ト同様ニ

$$1+\sqrt{3}\,i=2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right)\right\},$$

故ニ基本定理 IV ニヨリ

$$(1+\sqrt{3}\,i)^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{1}{5}}\left\{\cos\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right)+i\sin\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right)\right\},$$

$$=\sqrt[5]{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{15}+\frac{2n\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{15}+\frac{2n\pi}{5}\right)\right\}.$$

故ニ所要ノ 5 乗根ハ次ノ五ツナリ。

$n=0$ トシテ $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)$

$n=1$ トシテ $\sqrt[5]{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{15}+\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{15}+\frac{2\pi}{5}\right)\right\}$

$n=2$ トシテ $\sqrt[5]{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{15}+\frac{4\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{15}+\frac{4\pi}{5}\right)\right\}$

$n=3$ トシテ $\sqrt[5]{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{15}+\frac{6\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{15}+\frac{6\pi}{5}\right)\right\}$

$n=4$ トシテ $\sqrt[5]{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{15}+\frac{8\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{15}+\frac{8\pi}{5}\right)\right\}.$

但シ n ヲ 5 以上トスルモ 0 乃至 4 ノ場合ノ値ヲ繰リ返スニ過ギザルコト明カナリ，而シテコレ等ノ値ノ近似値ハ一般ニ三角函数表ニヨリテ求ムルヲ得ベシ。

14. **i ノ 4 乗根ヲ求メヨ。**

〔解〕 $i=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right),$

$$\therefore\quad i^{\frac{1}{4}}=\cos\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)+i\sin\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right),$$

然ルニ $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ナル故ニ所要ノ 4 乗根ハ次ノ 4 ツナリ，

$n=0,\quad \cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i$

$n=1,\quad \cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}i$

$n=2,\quad \cos\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i$

$n=3,\quad \cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}i$

15. **1 ノ 6 乗根及ビ −1 ノ 6 乗根ヲ求メヨ。**

〔解〕 $1=\cos(2n\pi)+i\sin(2n\pi)$, $\quad -1=\cos(2n+1)\pi+i\sin(2n+1)\pi$

$$\therefore\quad 1^{\frac{1}{6}}=\cos\frac{2n\pi}{6}+i\sin\frac{2n\pi}{6}=\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3},$$

$$(-1)^{\frac{1}{6}}=\cos\frac{2n+1}{6}\pi+i\sin\frac{2n+1}{6}\pi$$

然ルニ $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

ナル故ニ所要ノ 6 乗根ハ次ノ如シ

	1 ノ 6 乗根	−1 ノ 6 乗根
$n=0$,	$\cos 0+i\sin 0=1$,	$\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$
$n=1$,	$\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$
$n=2$,	$\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$
$n=3$,	$\cos\pi+i\sin\pi=-1$	$\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

$$n=4,\quad \cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$$

$$n=5,\quad \cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,$$

16. a ヲ任意ノ實數トスルトキ a ノ 6 乘根ヲ求メヨ。

〔解〕 $a=a(\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi) \qquad a>0,$

又ハ $a=-a\{\cos(2n+1)\pi+i\sin(2n+1)\pi\} \qquad a<0$

$$\therefore\ a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{2n\pi}{6}+i\sin\frac{2n\pi}{6}\right)=\sqrt[6]{a}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right) \qquad a>0$$

又ハ $$=(-a)^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{2n+1}{6}\pi+i\sin\frac{2n+1}{6}\pi\right) \qquad a<0$$

依ツテ前問ニヨリ所要ノ 6 乘根ハ次ノ如シ

$a>0$ ナル場合	$a<0$ ナル場合
$\sqrt[6]{a}$	$\sqrt[6]{-a}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$
$\sqrt[6]{a}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$	$\sqrt[6]{-a}\,i$
$\sqrt[6]{a}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$	$\sqrt[6]{-a}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$
$-\sqrt[6]{a}$	$\sqrt[6]{-a}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$
$\sqrt[6]{a}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$	$-\sqrt[6]{-a}\,i$
$\sqrt[6]{a}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$	$\sqrt[6]{-a}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right),$

一般ニ任意ノ實數ノ n 乘根ハ $|a|$ ノ n 乘根ノ實數値ニ 1 或ハ -1 ノ n 乘根ヲ乘ジタルモノニ等シ。

17. 複素數 $a+bi$ ノ n 乘根モ實數ト同樣ニ其 n 乘根ノ一ツニ 1 ノ n 乘根ノ總テヲ乘シタルモノニ等シキコトヲ証セヨ。

〔解〕 $a+bi=r\left(\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi)\right),\quad r=\sqrt{a^2+b^2},\quad \tan\theta=\frac{b}{a},\quad k$ ハ 0 又ハ任意ノ整數，トオケバ $a+bi$ ノ n 乘根ノ總テハ次ノ如シ

$$(a+bi)^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right),$$ （基本定理 IV）

$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots(n-1),$

然ルニ $r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)$ ハ $a+bi$ ノ n 乘根ノ一ツニシテ $\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ $(k=0,\ 1,\ 2\ldots\ldots n-1)$ ハ 1 ノ n 乘根ノ總テナリ，故ニ複素數ノ n 乘根モ實數ト同樣ニ其一ツノ n 乘根ニ 1 ノ n 乘根ノ總テヲ乘ジタルモノニ等シ。

18. 1 ノ n 乘根ノ虚數ノ一ツヲ ω トスレバ n 乘根ノ總テハ

$$\omega^0,\ \omega^1,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \ldots\ldots\ \omega^{n-1}$$

ニ由ツテ表ハサレ，且ツ

$$\omega^0+\omega^1+\omega^2+\ldots\ldots+\omega^{n-1}=0$$

ナルコトヲ証セヨ。但シ n ヲ素數トス。

〔解〕 $0,1,2,\ldots\ldots(n-1)$ 中ノ任意ノ一ツヲ m トスレバ

$$(\omega^m)^n=\omega^{mn}=(\omega^n)^m=1^m=1,$$

故ニ ω^m ハ 1 ノ n 乘根ナリ，從ツテ $\omega^0,\ \omega^1,\ \omega^2,\ \ldots\ldots\omega^{n-1}$ ハ皆 1 ノ n 乘根ナリ，而シテ何レノ二ツモ相等シカラズ，何ントナレバ n ハ素數ニシテ，ω ハ $\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ ニ於テ k ヲ $1,2,\ldots\ldots\ n-1$ ノ何レカトシタルモノナル故ニ

$$\omega^p=\cos\frac{2pk\pi}{n}+i\sin\frac{2pk\pi}{n},\quad \omega^q=\cos\frac{2qk\pi}{n}+i\sin\frac{2qk\pi}{n},$$

p,q 及ビ k ハ共ニ $n-1$ 以下ナル故ニ $\frac{2pk\pi}{n}$ ト $\frac{2qk\pi}{n}$ トノ差ハ 2π ノ倍數トナリ得ザレバナリ，依ツテ $\omega^0,\ \omega^1,\ \omega^2,\ldots\ldots\omega^{n-1}$ ハ 1 ノ n 乘根ノ n 個ノ總テナリ，次ニ ω ハ 1 ノ n 乘根ナル故ニ

$$x^n-1=0 \quad 即チ \quad (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots\ldots+x+1)=0$$

ノ根ナリ，而シテ ω ハ虚數ナル故ニ 1 ニ等シカラズ，故ニ ω ハ

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots\ldots+x+1=0$$

ノ根ナリ，故ニ

$$\omega^{n-1}+\omega^{n-2}+\ldots\ldots+\omega+1=0$$

即チ　$\omega^{n-1}+\omega^{n-2}+\ldots\ldots+\omega+\omega^0=0,$

19. **1 ノ n 乘根ヲ $1, \omega, \omega^2, \ldots\ldots\omega^{n-1}$ トスレバ**

$$(1-\omega)(1-\omega^2)\ldots\ldots(1-\omega^{n-1})=n$$

ナルコトヲ証セヨ。但シ n ヲ素數トス。

〔解〕 $1, \omega, \omega^2, \ldots\ldots\omega^{n-1}$ ハ 1 ノ n 乘根ノ總テナル故ニ(前問)方程式

$$x^n-1=0$$

ノ根ノ總テナリ，故ニ次ノ恒等式ヲ得

$$x^n-1=(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)\ldots\ldots(x-\omega^{n-1}),$$

兩邊ヲ $x-1$ ニテ割レバ

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots\ldots+x+1=(x-\omega)(x-\omega^2)\ldots\ldots(x-\omega^{n-1}),$$

$x=1$ トオケバ

$$n=(1-\omega)(1-\omega^2)\ldots\ldots(1-\omega^{n-1}),$$

20. **1 ノ 7 乘根ノ虛數ノ一ツヲ x トシ $\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{x^2}{1+x^4}+\dfrac{x^3}{1+x^6}$ ノ値ヲ計算セヨ。**

〔解〕 $x^7=1$　$\therefore\ \dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{x^2}{1+x^4}+\dfrac{x^3}{1+x^6}=\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{x^5}{1+x^3}+\dfrac{x^4}{1+x}$

又　$x^6+x^5+x^4+{}^3+x^2+x+1=0$　（前々問）

$\therefore\ (1+x)(1+x^2+x^4)+x^6=0$　$\therefore\ \dfrac{x^4}{1+x}=-\dfrac{1+x^2+x^4}{x^2}$

$(1+x^2)(1+x+x^4)+x^5=0$　$\therefore\ \dfrac{x}{1+x^2}=-\dfrac{1+x+x^4}{x^4}$

$(1+x^3)(1+x+x^2)+x^6=0$　$\therefore\ \dfrac{x^5}{1+x^3}=-\dfrac{1+x+x^2}{x}$

$$\therefore\ \frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^4}+\frac{x^3}{1+x^6}=-\frac{1+x^2+x^4}{x^2}-\frac{1+x+x^4}{x^4}-\frac{1+x+x^2}{x}$$

$$=-x^5(1+x^2+x^4)-x^3(1+x+x^4)-x^6(1+x+x^2)$$

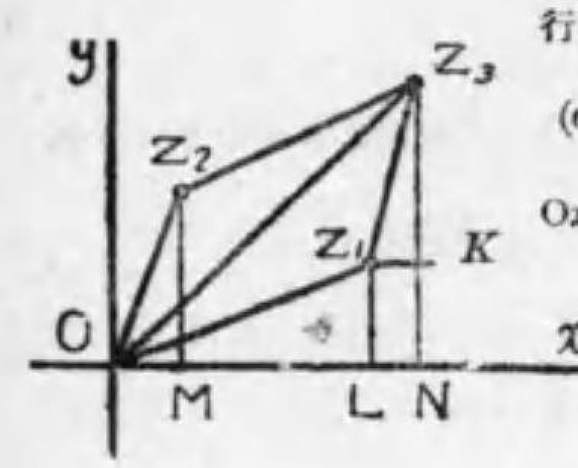
$$=-(x^5+x^7+x^9+x^3+x^4+x^7+x^6+x^7+x^8)$$

$$=-(x^5+1+x^2+x^3+x^4+1+x^6+1+x)$$

$$=-(2+1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)=-2,$$

21. **二ツノ複素數ヲ表ハス点ト原点トヲ三ツノ頂点トスル平行四邊形ノ第四ノ頂点ハ其二ツノ複素數ノ和又ハ差ヲ表ハスコトヲ証セヨ。**

〔解〕 z_1, z_2 ヲ二ツノ複素數 a_1+b_1i，a_2+b_2i ヲ表ハス点トシ Oz_1 Oz_2 ヲ二邊トスル平行四邊形ノ第四ノ頂点ヲ z_3 トスレバ z_3 ハ二ツノ複素數ノ和 $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$ ヲ表ハスベシ，何ントナレバ z_1 z_2 z_1 ヨリ Ox ニ下ス垂線ノ足ヲ L, M, N, トシ z_1 ヨリ z_3N ニ下ス垂線ノ足ヲ K トスレバ



$$ON=OL+z_1K=a_1+OM=a_1+a_2,$$

$$Nz_3=Lz_1+Kz_3=b_1+Mz_2=b_1+b_2$$

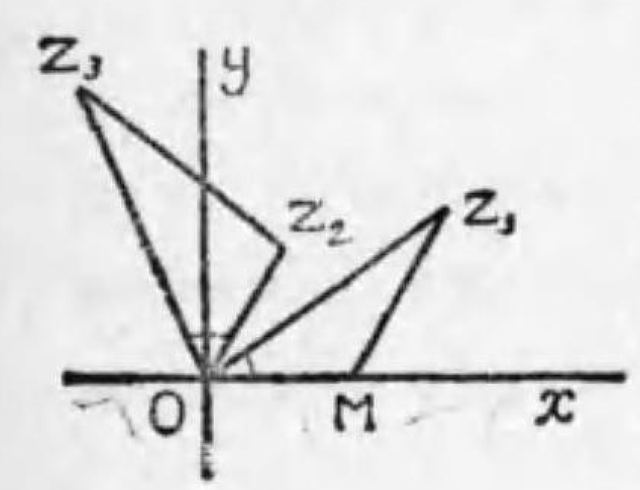
ナレバナリ，

次ニ Oz_1, z_1z_2 ヲ二邊トスル平行四邊形ノ第四ノ頂点ヲ z_3 トスレバ z_3 ハ z_2，z_1 ノ表ハス複素數 a_2+b_2i ト a_1+b_1i トノ差 $(a_2-a_1)+(b_2-b_1)i$ ヲ表ハスベシ，何ントナレバ此平行四邊形ノ O ヲ過ル對角線ハ Oz_2 ナル故ニ上ト同樣ニ z_2 ノ表ハス複素數ハ z_1，z_3 ノ表ハス複素數ノ和ニ等シケレバナリ，同樣ニ Oz_2，z_2z_1 ヲ二邊トスル平行四邊形ノ第四ノ頂点ハ z_1，z_2 ノ表ハス複素數ノ差即チ $(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$ ヲ表ハス。

22. **二ツノ複素數ヲ表ハス点 z_1，z_2 ガ與ヘラレタルトキ其二ツノ複素數ノ積及ビ商ヲ表ハス点ヲ作圖セヨ。**

〔解〕 z_1 z_2 ノ表ハス複素數ヲ

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\qquad r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$



トシ其積ヲ表ハス点ヲ z_3 トスレバ基本定理 IV ニヨリ z_3 ノ表ハス複素數ハ

$$r_1r_1\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

$\therefore\ Oz_1=r_1$，$Oz_2=r_2$，$Oz_3=r_1r_2=Oz_1\cdot Oz_2$，

故ニ今 Ox 上ニ $OM=1$ ヲトレバ

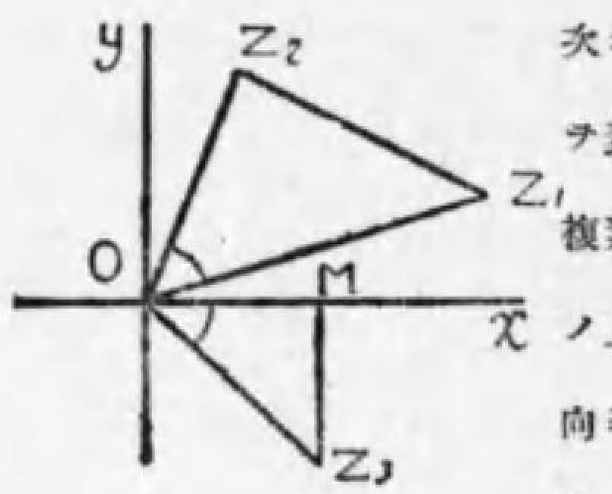
$OM : Oz_1 = Oz_2 : Oz_3$,

又　$\angle xOz_1=\theta_1$　$\angle xOz_2=\theta_2$，　$\angle xOz_3=\theta_1+\theta_2=\angle xOz_1+\angle xOz_2$

$\therefore$　$\angle xOz_3-\angle xOz_2=\angle xOz_1$

$\therefore$　$\angle z_2Oz_3=\angle MOz_1$　　　$\therefore$　$\triangle OMz_1 \backsim \triangle Oz_2z_3$,

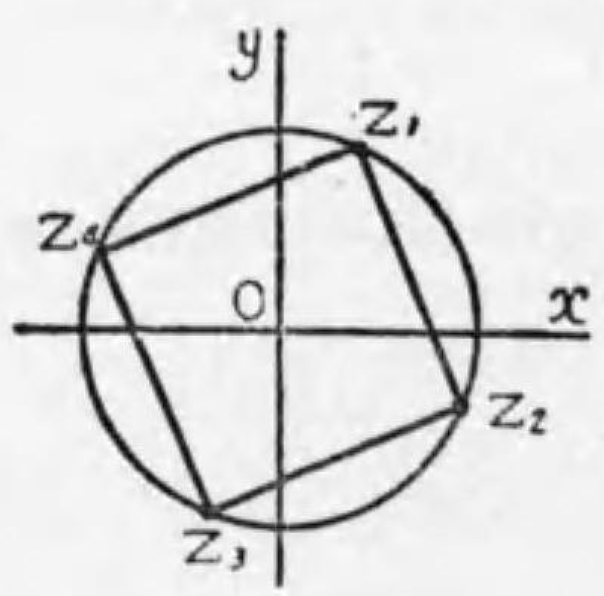
故ニ OM 上ノ三角形 OMz_1 ニ相似ナル三角形 Oz_2z_3 ヲ Oz_2 ノ上ニ同ジ向キニ作レバ其第三頂点 z_3 ハ所要ノ積ヲ表ハス点ナリ，



次ニ z_1 ノ表ハス複素數ヲ z_2 ノ表ハス複素數ニテ割リタル商ヲ表ハス点ヲ z_3 トスレバ z_1 ノ表ハス複素數ハ z_2, z_3 ノ表ハス複素數ノ積ニ等シ，依ツテ上ト同様ニ次ノ作圖法ヲ得，即チ Oz_2 ノ上ノ三角形 Oz_2z_1 ト相似ナル三角 OMz_3 ヲ OM ノ上ニ同ジ向キニ作レバ其第三ノ頂点 z_3 ハ z_1 ノ表ハス複素數ヲ z_2 ノ表ハス複素數ニテ割リタル商ヲ表ハス。

23. **四邊形 $z_1z_2z_3z_4$ ノ各頂点ノ表ハス四ツノ複素數ノ和ガ O ニシテ且ツ各ノ絕對値ガ皆 1 ニ等シキトキハ此四邊形ハ矩形ナルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 各頂点ノ記號 z_1，z_2，z_3，z_4 ヲ以テ複素數ソノモノヲ表ハスコトヽセン



$|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=1$ ナル故ニ四ツノ頂点ハ原点ヲ中心トシ 1 ヲ半徑トスル圓周上ニアリ，

又 $z_1+z_2+z_3+z_4=0$　　　$\therefore$ $\frac{z_1+z_2}{2}+\frac{z_3+z_4}{2}=0$

然ルニ問 21 ニヨリ $\frac{z_1+z_2}{2}$ 及ビ $\frac{z_3+z_4}{2}$ ハ夫々 z_1z_2 及ビ z_3z_4 ノ中点トナルコト明カニシテ其和ガ 0 ナルコトハ此二ツノ中点ガ何レモ原点ナルカ然ラザレバ原点ニ關シテ對稱ナルコトヲ示ス，共ニ原点ナル場合ニハ對角線 z_1z_2，z_3z_4 ガ圓ノ直徑トナル故ニ $z_1z_2z_3z_4$ ハ矩形ナリ，原点ニ關シテ對稱ナル場合ニハ相對スル二邊 z_1z_2，z_3z_4 ガ平行ニシテ且ツ相等シキコトヲ容易ニ證明シ得ル故ニ $z_1z_2z_3z_4$ ハ矢張リ矩形ナルヲ知ル。

24. **$\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}=\frac{z_1'-z_2'}{z_3'-z_2'}$ ナルトキハ三ツノ複素數 z_1, z_2, z_3 ヲ表ハス点 z_1，z_2，z_3 ヲ頂点トスル三角形ハ他ノ三ツノ複素數 z_1', z_2', z_3' ヲ表ハス点 z_1', z_2', z_3' ヲ頂点トスル三角形ニ相似ナルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 今線分 $\overrightarrow{z_2z_1}$，$\overrightarrow{z_2z_3}$，$\overrightarrow{z_2'z_1'}$，$\overrightarrow{z_3'z_1'}$ ガ $\overrightarrow{Ox}$ トナス角ヲ夫々 θ_{21}，θ_{23}，θ_{21}' θ_{23}' トシ各ノ長サヲ r_{21}，r_{23}，r_{21}' r_{23}' トスレバ問 21 ニヨリ

$$z_1-z_2=r_{21}(\cos\theta_{21}+i\sin\theta_{21}),\qquad z_3-z_2=r_{23}(\cos\theta_{23}+i\sin\theta_{23})$$

$$z_1'-z_2'=r_{21}'(\cos\theta_{21}'+i\sin\theta_{21}')\qquad z_3'-z_2'=r_{23}'(\cos\theta_{23}'+i\sin\theta_{23}')$$

ナルコト明カナリ，

$$\therefore\ \frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}=\frac{r_{21}(\cos\theta_{21}+i\sin\theta_{21})}{r_{23}(\cos\theta_{23}+i\sin\theta_{23})}=\frac{r_{21}}{r_{23}}(\cos\theta_{21}+i\sin\theta_{21})(\cos\theta_{23}+i\sin\theta_{23})^{-1}$$

$$=\frac{r_{21}}{r_{23}}(\cos\theta_{21}+i\sin\theta_{21})\{\cos(-\theta_{23})+i\sin(-\theta_{23})\}$$

$$=\frac{r_{21}}{r_{23}}\{\cos(\theta_{21}-\theta_{23})+i\sin(\theta_{21}-\theta_{23})\}$$

同様ニ $\frac{z_1'-z_2'}{z_3'-z_2'}=\frac{r_{21}'}{r_{23}'}\{\cos(\theta_{21}'-\theta_{23}')+i\sin(\theta_{21}'-\theta_{23}')\}$

然ルニ $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}=\frac{z_1'-z_2'}{z_3'-z_2'}$　　$\therefore$ $\left|\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}\right|=\left|\frac{z_1'-z_2'}{z_3'-z_2'}\right|$　　$\therefore$ $\frac{r_{21}}{r_{23}}=\frac{r_{21}'}{r_{23}'}$,

$\therefore$ $\frac{z_2z_1}{z_2z_3}=\frac{z_2'z_1'}{z_2'z_3'}$,

從ツテ $\theta_{21}-\theta_{23}=\theta_{21}'-\theta_{23}'$,　　$\therefore$ $\angle z_1z_2z_3=\angle z_1'z_2'z_3'$,

故ニ　$\triangle z_1z_2z_3$ ト $\triangle z_1'z_2'z_3'$ トハ互ニ相似形ナリ。

25. **$\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$ ト $\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}$ トノ比ノ値ガ實數ナルトキハ四ツノ複數 $z_1z_2z_3z_4$ ヲ表ハス四点 $z_1z_2z_3z_4$ ハ同一圓周上ニアルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 前問ノ如ク $\overrightarrow{z_1z_3}$ $\overrightarrow{z_2z_3}$ $\overrightarrow{z_1z_4}$ $\overrightarrow{z_2z_4}$ ガ Ox トナス角ヲ θ_{13}，θ_{23}，θ_{14} θ_{24} トシ各ノ長サヲ r_{13}，r_{23}，r_{14}，r_{24} トスレバ前問ト同様ニ

$$z_3-z_1=r_{13}(\cos\theta_{13}+i\sin\theta_{13}),\qquad z_3-z_2=r_{23}(\cos\theta_{23}+i\sin\theta_{23})$$

$$z_4-z_1=r_{14}(\cos\theta_{14}+i\sin\theta_{14}),\qquad z_4-z_2=r_{24}(\cos\theta_{24}+i\sin\theta_{24})$$

$$\therefore\quad \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=\frac{r_{13}}{r_{23}}\{\cos(\theta_{13}-\theta_{23})+i\sin(\theta_{13}-\theta_{23})\},$$

$$\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}=\frac{r_{14}}{r_{24}}\{\cos(\theta_{14}-\theta_{24})+i\sin(\theta_{14}-\theta_{24})\},$$

$$\therefore\quad \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}:\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}=\frac{r_{13}r_{24}}{r_{23}r_{14}}\{\cos(\theta_{13}-\theta_{23}-\theta_{14}+\theta_{24})+i\sin(\theta_{13}-\theta_{23}-\theta_{14}+\theta_{24})\}$$

故ニ此比ノ値ガ實數ナルトキハ

$$\sin(\theta_{13}-\theta_{23}-\theta_{14}+\theta_{24})=0 \qquad \therefore\ \theta_{13}-\theta_{23}-\theta_{14}+\theta_{24}=0 \text{ 又ハ } \pi$$

即チ $(\theta_{13}-_{23}\theta)-(\theta_{14}-\theta_{24})=0$ 又ハ π

$\therefore\ \angle z_1z_3z_2-\angle z_1z_4z_2=0$ 又ハ π

$\therefore\ \angle z_1z_3z_2=\angle z_1z_4z_2=0$ 又ハ $\angle z_1z_3z_2+\angle z_2z_4z_1=\pi$

故ニ $z_1z_2z_3z_4$ ハ同一圓周上ニアリ。

26. 複素數 z_1, z_2, z_3, z_4 ヲ表ハス四ツノ点ガ同一圓周上ニアラバ

$$z'_k=\frac{az_k+b}{cz_k+d},\quad k=1,2,3,4,$$

ニ由ツテ定メラルヽ四ツノ複素數 $z_1'\ z_2'\ z_3'\ z_4'$ ヲ表ハス四点モ亦同一圓周上ニアルコトヲ証セヨ。

〔證〕 $z_1'\ z_2'\ z_3'\ z_4'$ ガ同一圓周上ニアルタメニハ前問ニヨリ

$$\frac{z_3'-z_1'}{z_3'-z_2'}:\frac{z_4'-z_1'}{z_4'-z_2'}=\text{實數},$$

ナレバ可ナリ，

然ルニ

$$z_3'-z_1'=\frac{az_3+b}{cz_3+d}-\frac{az_1+b}{cz_1+d}=\frac{(az_3+b)(cz_1+d)-(az_1+b)(cz_3+d)}{(cz_3+d)(cz_1+d)}=\frac{(ad-bc)(z_3-z_1)}{(cz_3+d)(cz_1+d)}$$

同樣ニ

$$z_3'-z_2'=\frac{(ad-bc)(z_3-z_2)}{(cz_3+d)(cz_2+d)},\quad z_4'-z_1'=\frac{(ad-bc)(z_4-z_1)}{(cz_4+d)(cz_1+d)},\quad z_4'-z_2'=\frac{(ad-bc)(z_4-z_2)}{(cz_4+d)(cz_2+d)}$$

$$\therefore\quad \frac{z_3'-z'}{z_3'-z_2'}:\frac{z_4'-z_1'}{z_4'-z_2'}=\frac{(z_3-z_1)(cz_2+d)}{(cz_1+d)(z_3-z_2)}:\frac{(z_4-z_1)(cz_2+d)}{(cz_1+d)(z_4-z_2)}=\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}:\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}$$

然ルニ $z_1z_2z_3z_4$ ハ同一圓周上ニアル故ニ前問ノ逆ニヨリ上ノ右邊ノ値ハ實數ナリ，従ツテ左邊ノ比ノ値モ亦實數ナリ，依ツテ $z_1'\ z_2'\ z_3'\ z_4'$ モ亦同一圓周上ニアリ。

27. 三ツノ複素數 α, β, γ ヲ表ハス三点ガ正三角形ヲ作ルトキハ

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$$

ナルコト及ビ其逆ヲ証セヨ，但シ α, β, γ ハ悉クハ相等シカラサルコト勿論ナリトス。

〔解〕 α, β, γ ノ表ハス点ヲ A, B, C トスレバ問 24 ト同樣ニ $\alpha-\beta, \gamma-\beta$ ノ絕對値ハ夫々 BA, BC ニ等シク，其偏角ハ BA, BC ガ OX トナス角ニ等シキガ故ニ $\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$ ノ絕對値ハ $\dfrac{BA}{BC}$ ニシテ其偏角ハ $\angle CBA$ ニ等シ

同樣ニ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ ノ絕對値ハ $\dfrac{AC}{AB}$ ニシテ其偏角ハ $\angle BAC$ ニ等シ，

然ルニ $\triangle ABC$ ガ正三角形ナルトキハ $\dfrac{BA}{BC}=\dfrac{AC}{AB}=1, \angle CBA=\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$,

$$\therefore\quad \frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$$

分母ヲ去リ整頓スレバ

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0 \qquad (1)$$

逆ニ (1) ガ成立スレバ

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma} \qquad \therefore\ \frac{BA}{BC}=\frac{AC}{AB}=\frac{CB}{CA}=1$$

$$\therefore\quad BA=BC=AC$$

即チ $\triangle ABC$ ハ正三角形トナル。

28. 任意ノ三角形 ABC ノ重心ヲ O トシ，OB, OC ヲ O ヲ中心トシテ夫々 $-\dfrac{2\pi}{3}$ 及ビ $\dfrac{2\pi}{3}$ 回轉シテ OB', OC' ノ位置ニ移ストキ $\triangle AB'C'$ ハ正三角形ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 重心 O ヲ原点トシ，A,B,C,B',C' ノ表ハス複素數ヲ夫々 $\alpha, \beta, \gamma, \beta', \gamma'$ トスレバ β', γ' ハ其絕對値ハ夫々 β, γ ノ絕對値ニ等シク，偏角ハ β, γ ノ偏角ニ夫々 $-\dfrac{2\pi}{3}$ 及ビ $\dfrac{2\pi}{3}$ ヲ加ヘタルモノニ等シ，依ツテ今 1 ノ立方根ノ虚數ヲ ω トスレバ

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},\qquad \omega^2=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\therefore\quad \beta'=\omega^2\beta,\qquad \gamma'=\omega\gamma,\qquad\qquad (\text{基本定理 IV})$$

$$\therefore\quad \frac{1}{3}(\alpha+\omega\beta'+\omega^2\gamma')=\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma),$$

然ルニ問 21 ニヨリ $\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)$ ハ $\triangle ABC$ ノ重心ヲ表ハスコトヲ容易ニ證明スルコトヲ得，而シテ其重心ヲ原點トシタル故ニ

$$\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)=0 \qquad \therefore\ \alpha+\omega\beta'+\omega^2\gamma'=0$$

$$\therefore\quad \alpha^2+\beta'^2+\gamma'^2-\alpha\beta'-\beta'\gamma'-\gamma'\alpha=(\alpha+\omega\beta'+\omega^2\gamma')(\alpha+\omega^2\beta'+\omega\gamma')=0\ (\text{問. 34}).$$

依ツテ前問ニヨリ $\triangle AB'C'$ ハ正三角形ナリ。

29. 次ノ二ツノ方程式ノ根ヲ表ハス点ヲ作圖セヨ。

$$a)\ \ x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0,$$

$$b)\ \ x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1=0.$$

〔解〕 (a) ノ兩邊ニ $x-1$ ヲ乘ズレバ $x^9-1=0$ トナル故ニ (a) ノ根ハ 1 ノ 9 乘根ノ八ツノ虚數ナリ，故ニ基本定理 III, IV ニヨリ其絶對値ハ皆 1 ニシテ偏角ハ夫々

$$\frac{2\pi}{9},\ \frac{4\pi}{9},\ \frac{6\pi}{9},\ \cdots\cdots\cdots\ \frac{16\pi}{9}$$

ニ等シ，依ツテ原点ヲ中心トスル圓周ト Ox トノ交リヲ一ツノ頂点トスル内接正 9 角形ノ他ノ 8 ツノ頂点ガ所要ノ根ヲ表ハス点ナリ，次ニ (b) ノ兩邊ニ $x+1$ ヲ乘ズレバ $x^9+1=0$ トナル故ニ (b) ノ根ハ -1 ノ 9 乘根ノ 8 ツノ虚數ナリ，故ニ基本定理 III, IV ニヨリ其絶對値ハ皆 1 ニシテ偏角ハ夫々

$$\frac{\pi}{9},\ \frac{3\pi}{9},\ \frac{5\pi}{9},\ \cdots\cdots\cdots\ \frac{17\pi}{9}\ \left(\text{但シ}\ \frac{9\pi}{9}\ \text{ヲ除ク}\right)$$

ニ等シ，依ツテ原点ヲ中心トスル圓ト Ox ノ左方ヘノ延長 Ox' トノ交リヲ一ツノ頂点トスル内接正 9 角形ノ他ノ 8 ツノ頂点ガ所要ノ根ヲ表ハス点ナリ。

30. $x=\cos\alpha+i\sin\alpha,\quad y=\cos\beta+i\sin\beta,\quad z=\cos\gamma+i\sin\gamma$

ナルトキ次ノ式ヲ証セヨ，

$$(y+z)(z+x)(x+y)=8xyz\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

〔解〕 $y+z=(\cos\beta+\cos\gamma)+i(\sin\beta+\sin\gamma)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ トオケバ

$$r=|y+z|=\sqrt{(\cos\beta+\cos\gamma)^2+(\sin\beta+\sin\gamma)^2}=\sqrt{2+2\cos(\beta-\gamma)}=2\cos\frac{\beta-\gamma}{2},$$

又問 21 ニヨリ $\theta=\frac{\beta+\gamma}{2},$

$$\therefore\quad y+z=2\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\left(\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+i\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$$

同様ニ $$z+x=2\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\left(\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}+i\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)$$

$$x+y=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

又基本定理 IV ニヨリ

$$\left(\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+i\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\left(\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}+i\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\beta+\alpha}{2}+\frac{\gamma+\alpha}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+i\sin\left(\cos\frac{\beta+\alpha}{2}+\frac{\gamma+\alpha}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$=\cos(\alpha+\beta+\gamma)+i\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$

$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)(\cos\gamma+i\sin\gamma)=xyz,$$

$$\therefore\quad (y+z)(z+x)(x+y)=8xyz\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

31. 次ノ式ヲ証セヨ。

$$\{\cos\theta+\cos\varphi+i(\sin\theta+\sin\varphi)\}^n+\{\cos\theta+\cos\varphi-i(\sin\theta+\sin\varphi)\}^n$$

$$=2^{n+1}\left(\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^n\cos\frac{n(\theta+\varphi)}{2}$$

〔解〕 前問ト同様ニ $\cos\theta+\cos\varphi+i(\sin\theta+\sin\varphi)$ ノ絶對値ハ $2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$，偏角ハ $\frac{\theta+\varphi}{2}$，故ニ

$$\{\cos\theta+\cos\varphi+i(\sin\theta+\sin\varphi)\}^n=\left\{2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\left(\cos\frac{\theta+\varphi}{2}+i\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\right\}^n$$

$$=2^n\left(\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^n\left\{\cos\frac{n(\theta+\varphi)}{2}+i\sin\frac{n(\theta+\theta)}{2}\right\}$$

同様ニ

$$\{\cos\theta+\cos\varphi-i(\sin\theta+\sin\varphi)\}^n=\left\{2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\left(\cos\frac{\theta+\varphi}{2}-i\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\right\}^n$$

$$=2^n\left(\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^n\left\{\cos\frac{n(\theta+\varphi)}{2}-i\sin\frac{n(\theta+\varphi)}{2}\right\}$$

$$\therefore\quad \{\cos\theta+\cos\varphi-i(\sin\theta+\sin\varphi)\}^n+\{\cos\theta+\cos\varphi-i(\sin\theta+\sin\varphi)\}^n$$

$$=2^n\left(\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^n 2\cos\frac{n(\theta+\varphi)}{2}=2^{n+1}\left(\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^n\cos\frac{n(\theta+\varphi)}{2},$$

32. $(\cos\alpha+x\sin\alpha)^m+a\cos m\alpha+bx\sin m\alpha$ ガ x^2+1 ニテ割リ切レルヤウニ a, b ノ値ヲ定メヨ，但シ m ハ正ノ整數ニシテ $\cos m\alpha$, $\sin m\alpha$ ハ 0 ニ等シカラズトス。

〔解〕 m ハ正ノ整數ナル故ニ所題ノ式ガ x^2+1 ニテ割リ切レルタメニハ $x=i$ トオキタルトキ 0 トナレバヨシ，即チ

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^m+a\cos m\alpha+ib\sin m\alpha=0$$

$$\therefore\ \cos m\alpha+i\sin m\alpha+a\cos m\alpha+ib\sin m\alpha=0$$

$$\therefore\ (1+a)\cos m\alpha+i(1+b)\sin m\alpha=0$$

$$\therefore\ (1+a)\cos m\alpha=0,\qquad (1+b)\sin m\alpha=0$$

然ルニ $\cos m\alpha\neq0$, $\sin m\alpha\neq0$ $\quad\therefore\ a=-1,\ b=-1$,

33. a, b, c, d ガ實數ニシテ虛數係數ノ二次方程式

$$x^2+(a+bi)x+c+di=0$$

ガ一ツノ實數根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ $abd=d^2+b^2c$ ナルコトヲ証セヨ，又此方程式ハ二根トモ實數トナリ得ルカ如何。

〔解〕 x ヲ或實數トスルトキ

$$x^2+(a+bi)x+c+di=0$$

ナルタメニハ

$$(x^2+ax+c)+(bx+d)i=0$$

ナラザルベカラズ，コレガタメニハ

$$x^2+ax+c=0,\quad bx+d=0$$

ナラザルベカラズ．コレヨリ x ヲ消去スレバ $abd=d^2+b^2c$

逆ニ此關係ガ成立スレバ $x^2+ax+c=0$ ノ一根ハ $\dfrac{-d}{b}$ ニシテ x ノコノ値ニ由リテ所題ノ方程式ハ滿足ス，依ツテ此關係ハ一根ガ實數ナルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ナリ，

次ニ所題ノ方程式ヲ滿足セシムル x ノ實數値ハ $bx+d=0$ 即チ $x=-\dfrac{d}{b}$ 以外ニナシ，依ツテ二根トモ實數値トナルコト能ハズ。

34. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)$ ヲ証セヨ，但シ ω ハ 1 ノ立方根ノ虛數トス。

〔解〕 $a+b+c$ ハ $a^3+b^3+c^3-3abc$ ノ一因數ナルコト明カナリ，從ツテ $a+\omega b+\omega^2c$ ハ $a^3+(\omega b)^3+(\omega^2c)^3-3a(\omega b)(\omega^2c)=a^3+b^3+c^3-3abc$ ノ一因數ナリ，何ントナレバ $\omega^3=1$, $\omega^6=1$ ナレバナリ，同樣ニ $a+\omega^2b+\omega c$ モ亦所題ノ式ノ一因數ナリ，而シテ所題ノ式ハ a, b, c ニツキ 3 次ノ同次式ニシテ a^3 ノ係數ハ 1 ナリ，依ツテ

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)$$

35. n ガ 3 ノ倍數ナラザル奇數ナルトキ $(x+y)^n-x^n-y^n$ ハ x^2+xy+y^2 ニテ割リ切レルコトヲ証セヨ。

〔解〕 1 ノ立方根ノ虛數ヲ ω トスレバ $x^2+xy+y^2=(x-\omega y)(x-\omega^2y)$

所題ノ式ニ於テ $x=\omega y$ トオキタルトキノ値ヲ P トスレバ

$$P=(\omega y+y)^n-(\omega y)^n-y^n=y^n\{(1+\omega)^n-\omega^n-1\},$$

然ルニ $1+\omega+\omega^2=0$ (問. 18) $\quad\therefore\ 1+\omega=-\omega^2$

$$\therefore\ (1+\omega)^n-\omega^n-1=(-\omega^2)^n-\omega^n-1$$

n ハ奇數ナル故ニ

$$P=y^n\{-\omega^{2n}-\omega^n-1\}$$

故ニ $n=3m+1$ ナラバ $P=y^n\{-\omega^2-\omega-1\}=0$

$\quad\ \ n=3m+2$ 〃 $P=y^n\{-\omega-\omega^2-1\}=0$

故ニ n ガ 3 ノ倍數ナラザル奇數ナルトキハ所題ノ式ハ $x-\omega y$ ナル因數ヲ有ス，同樣ニ $x-\omega^2y$ ナル因數ヲ有スルコトヲ知ル，依ツテ $(x-\omega y)(x-\omega^2y)$ 則チ x^2+xy+y^2 ナル因數ヲ有ス。

36. $x^{2n}-2a^nx^n\cos n\theta+a^{2n}$

$$=\left\{x^2-2ax\cos\theta+a^2\right\}\left\{x^2-2ax\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)+a^2\right\}\cdots\cdots\left\{x^2-2ax\cos\left(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)+a^2\right\}$$

ヲ証セヨ。

〔解〕 今　$x^{2n}-2a^nx^n\cos n\theta+a^{2n}=0$　トオケバ

$$(x^n-a^n\cos n\theta)^2+a^{2n}\sin^2 n\theta=0$$

$$\therefore\ x^n-a^n\cos n\theta=\pm i\,a^n\sin n\theta$$

$$\therefore\ x^n=a^n(\cos n\theta\pm i\sin n\theta)=a^n\{\cos(n\theta+2k\pi)\pm i\sin(n\theta+2k\pi)\}$$

$$\therefore\ x=a\left\{\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)\pm i\sin\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)\right\}$$

但シ　$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots\ (n-1),$

$$\therefore\ x^{2n}-2a^nx^n\cos n\theta+a^{2n}=\{x-a\cos\theta-i\,a\sin\theta\}\{x-a\cos\theta+i\,a\sin\theta\}$$

$$\left\{x-a\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)-i\,a\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\right\}\left\{x-a\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)+i\,a\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\right\}$$

$$\left\{x-a\cos\left(\theta+\frac{2.2\pi}{n}\right)-i\,a\sin\left(\theta+\frac{2.2\pi}{n}\right)\right\}\left\{x-a\cos\left(\theta+\frac{2.2\pi}{n}\right)+i\,a\sin\left(\theta+\frac{2.2\pi}{n}\right)\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left\{x-a\cos\left(\theta+\frac{(n-1)2\pi}{n}\right)-i\,a\sin\left(\frac{(n-1)2\pi}{n}\right)\right\}$$

$$\left\{x-a\cos\left(\theta+\frac{(n-1)2\pi}{x}\right)+i\,a\sin\left(\theta+\frac{(n-1)2\pi}{n}\right)\right\},$$

然ルニ

$$\left\{x-a\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)-i\,a\sin\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)\right\}\left\{x-a\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\,a\sin\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)\right\}$$

$$=\left\{x-a\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)\right\}^2+a^2\sin^2\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)=x^2-2ax\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right)+a^2,$$

$$\therefore\ x^{2n}-2a^nx^n\cos n\theta+a^{2n}=\left\{x^2-2ax\cos\theta+a^2\right\}\left\{x^2-2ax\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)+a^2\right\}$$

$$\cdots\cdots\left\{x^2-2ax\cos\left(\theta+\frac{(n-1)2\pi}{n}+a^2\right\},$$

37. $\boldsymbol{x^{10}+\sqrt{3}\,x^5+1}$　**ヲ因數ニ分解セヨ。**

〔解〕 $x^{10}+\sqrt{3}\,x^5+1=x^{10}-2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)x^5+1=x^{10}-2x^5\cos\frac{5\pi}{6}+1$

依ツテ前問ニ於テ

$n=5,\quad a=1,\quad \theta=\frac{\pi}{6}$　トスレバ

$$x^{10}+\sqrt{3}\,x^5+1=\left\{x^2-2x\cos\frac{\pi}{6}+1\right\}\left\{x^2-2x\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{5}\right)+1\right\}$$

$$\left\{x^2-2x\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{5}\right)+1\right\}\left\{x^2-2x\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{6\pi}{6}\right)+1\right\}$$

$$\left\{x^2-2x\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{8\pi}{5}\right)+1\right\},$$

38. $\boldsymbol{n}$ **ガ 3 ノ倍數ヨリ 1 少ナキ正ノ整數ナルトキハ**

$\boldsymbol{(y-z)^n+(z-x)^n+(x-y)^n}$　**ハ** $\boldsymbol{x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy}$ **ニテ割リ切レ，其平方ニテハ割リ切レザルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 1 ノ立方根ノ虚數ヲ ω トスレバ

$$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=(x+\omega y+\omega^2z)(x+\omega^2y+\omega z),$$

今所題ノ式ニ　$x=-(\omega y+\omega^2z)$　トオキタルトキノ値ヲ P トスレバ

$$P=(y-z)^n+\{(1+\omega^2)z+\omega y\}^n+\{-(1+\omega)y-\omega^2z\}^n$$

$$=(y-z)^n+(-\omega z+\omega y)^n+(\omega^2y-\omega^2z)^n=(y-z)^n(1+\omega^n+\omega^{2n})$$

然ルニ　$n=3m+2$

$$\therefore\ 1+\omega^n+\omega^{2n}=1+\omega^2+\omega^4=1+\omega^2+\omega=0\qquad\therefore\ P=0,$$

故ニ所題ノ式ハ　$x+\omega y+\omega^2z$　ナル因數ヲ有ス，同様ニ所題ノ式ハ　$x+\omega^2y+\omega z$　ナル因數ヲ有ス，從ツテ　$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$　ナル因數ヲ有ス，次ニ

$$f(x)=(x-y)^n+(z-x)^n+(y-z)^n$$

トオクトキ $f(x)$ ガ $(x+\omega y+\omega^2z)^2$ ナル因數ヲ有スルタメニハ

$$f'(x)=n(x-y)^{n-1}-n(z-x)^{n-1}$$

ガ $x+\omega y+\omega^2z$ ナル因數ヲ有セザルベカラズ　　（第十章基本定理 II），

然ルニ $f'(x)$ ニ於テ　$x=-(\omega y+\omega^2z)$　トオケバ

$$n\{-(1+\omega)y-\omega^2z\}^{n-1}-n\{(1+\omega^2)z+\omega y\}^{n-1}$$

$$=n(\omega^2y-\omega^2z)^{n-1}-n(\omega y-\omega z)^{n-1}=n(y-z)^{n-1}(\omega^{2(n-1)}-\omega^{n-1})$$

$$=n(y-z)^{n-1}(\omega^{2(3m+1)}-\omega^{3m+1})=n(y-z)^{n-1}(\omega^2-\omega)\neq 0$$

故ニ $f'(x)$ ハ $x+\omega y+\omega^2z$ ナル因數ヲ有セズ，從ツテ所題ノ式ハ $(x+\omega y+\omega^2z)^2$ ナル因數ヲ有セズ，從ツテ $(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2$ ニテ割リ切レズ。

39. $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_{2n}x^{2n}$

トスレバ

$$a_0+a_3+a_6+\ldots\ldots=a_1+a_4+a_7+\ldots\ldots=a_2+a_5+a_8+\ldots\ldots=3^{n-1}$$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 1 ノ立方根ヲ $1,\ \omega,\ \omega^2$ トシ所題ノ式ノ兩邊ニ於ケル x ノ代リニソレゾレ ω, ω^2 ヲ以テスレバ

$$(1+\omega+\omega^2)^n=a_0+a_1\omega+a_2\omega^2+a_3+a_4\omega+a_5\omega^2+\ldots\ldots \qquad (1)$$

$$(1+\omega^2+\omega)^n=a_0+a_1\omega^2+a_2\omega+a_3+a_4\omega^2+a_5\omega+\ldots\ldots \qquad (2)$$

又 $x=1$ トオケバ

$$3^n=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\ldots\ldots \qquad (3)$$

(1), (2), (3) ヲ加フレバ $1+\omega+\omega^2=0$ ナル故ニ

$$3^n=3(a_0+a_3+a_6+\ldots\ldots)$$

$$\therefore\ a_0+a_3+a_6+\ldots\ldots=3^{n-1},$$

又 (1) ニ ω^2, (2) ニ ω ヲカケテ (3) ト加フレバ

$$3^n=3(a_1+a_4+a_7+\ldots\ldots)$$

$$\therefore\ a_1+a_4+a_7+\ldots\ldots=3^{n-1}$$

同様ニ (1) ニ ω, (2) ニ ω^2 ヲカケテ (3) ト加フレバ

$$3^n=3(a_2+a_5+a_8+\ldots\ldots)$$

$$\therefore\ a_2+a_5+a_8+\ldots\ldots=3^{n-1},$$

40. **次ノ關係ヲ証セヨ。**

$$\frac{1}{n!\,1!}-\frac{1}{(n-2)!\,3!}+\frac{1}{(n-4)!\,5!}\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)!}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}$$

$$\frac{1}{(n+1)!\,0!}-\frac{1}{(n-1)!\,2!}+\frac{1}{(n-3)!\,4!}\ldots\ldots\ldots=\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)!}\cos\frac{(n+1)\pi}{4},$$

〔解〕 $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

故ニ De moinre ノ定理(基本定理 IV) 及ビ二項定理ニヨリ

$$(1+i)^{n+1}=2^{\frac{n+1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}=2^{\frac{n+1}{2}}\left\{\cos\frac{(n+1)\pi}{4}+i\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\right\},$$

$$=1+(n+1)i+\frac{(n+1)n}{2!}i^2+\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}i^3+\ldots\ldots$$

$$=1-\frac{(n+1)n}{2!}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!}-+\ldots\ldots$$

$$+i\left\{(n+1)-\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5!}-+\ldots\ldots\right\}$$

$$=1-\frac{(n+1)!}{2!\,(n-1)!}+\frac{(n+1)!}{4!\,(n-3)!}-+\ldots\ldots$$

$$+i\left\{\frac{(n+1)!}{n!\,1!}-\frac{(n+1)!}{3!\,(n-2)!}+\frac{(n+1)!}{5!\,(n-4)!}-+\ldots\ldots\right\}$$

$$\therefore\ 2^{\frac{n+1}{2}}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=1-\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}+\frac{(n+1)!}{4!(n-3)!}-+\ldots\ldots$$

$$2^{\frac{n+1}{2}}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}=\frac{(n+1)!}{n!\,1!}-\frac{(n+1)!}{3!(n-2)!}+\frac{(n+1)!}{5!(n-4)!}-+\ldots\ldots$$

即チ

$$\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)!}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\frac{1}{(n+1)!\,0!}-\frac{1}{(n-1)!\,2!}+\frac{1}{(n-3)!\,4!}-+\ldots\ldots$$

$$\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)!}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}=\frac{1}{n!\,1!}-\frac{1}{(n-2)!\,3!}+\frac{1}{(n-4)!\,5!}-+\ldots\ldots$$

41. ***Euler*** **ノ公式** $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ **(微分學演習第十一章)ニ由ツテ複素數ノ自然對數ハ又複素數ナルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 $a+bi=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}$

トオケバ Euler ノ公式ニヨリ

$$a+bi=e^x(\cos y+i\sin y)$$

$$\therefore\ a=e^x\cos y,\quad b=e^x\sin y,\qquad \therefore\ a^2+b^2=e^{2x}\qquad \therefore\ x=\log\sqrt{a^2+b^2},$$

又 $\tan y=\frac{b}{a}$,　　$\therefore\ y=\tan^{-1}\frac{b}{a}$,

$$\therefore\ \log(a+bi)=x+iy=\log\sqrt{a^2+b^2}+i\tan^{-1}\frac{b}{a},$$

但シ $\tan^{-1}\frac{b}{a}$ ハ $-\pi$ ヨリ π ニ至ル間ノ或一ツノ値ニシテ, a, b ノ符號ニヨツテ定マルモノトス, 若シ一般ノ値ヲ要スル場合ニハ

$$\log(a+bi)=\log\sqrt{a^2+b^2}+i\left(2n\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a}\right),$$

但シ n ハ 0 或ハ正負ノ整數，從ツテ任意ノ複素數ヲ $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ニテ表ハセバ　$\log\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}=\log r+i(2n\pi+\theta)$,

即チコレニ由ツテ任意ノ複素數ノ自然對數ハ又他ノ複素數ナルヲ知ル。

42. 次ノ諸對數ノ一般ノ値ヲ書ケ。

$$\log 2,\quad \log(-2),\quad \log i,\quad \log(-i)$$

〔解〕　$2=2(\cos 0+i\sin 0)=2e^{i2n\pi}$　$\therefore\ \log 2=\log 2+i(2n\pi)$.

$-2=2(\cos\pi+i\sin\pi)=2e^{i(2n+1)\pi}$　$\therefore\ \log(-2)=\log 2+i(2n+1)\pi$

$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$　$\therefore\ \log i=\log 1+i\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=i(4n+1)\frac{\pi}{2}$,

$-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$　$\therefore\ \log(-i)=\log 1+i\left(2n\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=i(4n-1)\frac{\pi}{2}$

43. $\log(1+\cos\theta+i\sin\theta)=\log 2+\log\cos\frac{\theta}{2}+i\left(\frac{\theta}{2}+2n\pi\right)$ ヲ証セヨ。

〔解〕 前々問ニヨリ

$$\log(1+\cos\theta+i\sin\theta)=\log\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}+i\left(2n\pi+\tan^{-1}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$$

$$=\log\sqrt{2+2\cos\theta}+i\left(2n\pi+\tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\log\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)+i\left(2n\pi+\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\log 2+\log\cos\frac{\theta}{2}+i\left(2n\pi+\frac{\theta}{2}\right),$$

44. 複素數ノ複素數羃ハ又複素數ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕　$(a+bi)^{x+iy}=e^z$　トオキ兩邊ノ自然對數ヲトレバ

$$z=(x+yi)\log(a+bi)$$

$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　トオケバ前問ニヨリ

$$\log(a+bi)=\log r+i(2n\pi+\theta),$$

$$\therefore\ (a+bi)^{x+yi}=e^{(x+yi)\{\log r+i(2n\pi+\theta)\}}$$

$$=e^{\{x\log r-y(2n\pi+\theta)\}+i\{y\log r+x(2n\pi+\theta)\}}$$

$$=e^{x\log r}\cdot e^{-y(2n\pi+\theta)}\cdot e^{i\{y\log r+x(2n\pi+\theta)\}}$$

然ルニ　$e^{x\log r}=r^x$，又 Euler ノ公式(問 41)ニヨリ

$$e^{i\{y\log r+x(2n\pi+\theta)\}}=\cos\{y\log r+x(2n\pi+\theta)\}+i\sin\{y\log r+x(2n\pi+\theta)\},$$

$$\therefore\ (a+bi)^{x+yi}=r^x e^{-y(2n\pi+\theta)}[\cos\{y\log r+x(2n\pi+\theta)\}+i\sin\{y\log r+x(2n\pi+\theta)\}],$$

$n=0$ 或ハ正負ノ如何ナル整數値ヲ與フルモ此右邊ハ一般ニ複素數ヲ表ハス。今 $n=0$ ノトキノ値ヲ以テ $(a+bi)^{x+yi}$ ノ値ナリト定ムレバ

$$(a+bi)^{x+yi}=r^x e^{-y\theta}\{\cos(y\log r+x\theta)+i\sin(y\log r+x\theta)\},$$

但シ　$r=\sqrt{a^2+b^2}$,　$-\pi\leqq\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}\leqq\pi$,

之ニ由ツテ複素數ノ複素數羃ハ又一ツノ複素數ナルヲ知ル。

45. 次ノ諸數ヲ一ツノ複素數ニテ表ハセ。

$$2^{1+i},\quad 1^i,\quad i^i,\quad (\sqrt{i})^{\sqrt{i}},$$

〔解〕 前問ニ於テ　$a=2$, $b=0$, $x=y=1$　トスレバ　$r=2$, $\theta=0$,

$$\therefore\ 2^{1+i}=2\{\cos(\log 2)+i\sin(\log 2)\},$$

同様ニ　$1^i=1$,　$i^i=e^{-\frac{\pi}{2}}$,

$$(\sqrt{i})^{\sqrt{i}}=(\sqrt{i})^{\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}}=(i)^{\frac{1}{2\sqrt{2}}+i\frac{1}{2\sqrt{2}}}=e^{-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{\pi}{4\sqrt{2}}+i\sin\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right),$$

46. 次ノ級數 n 項ノ和ヲ求メヨ。

$$1+x\cos\theta+x^2\cos 2\theta+\ldots\ldots+x^{n-1}\cos(n-1)\theta.$$

〔解〕 今 $A=1+x\cos\theta+x^2\cos 2\theta+\ldots\ldots+x^{n-1}\cos(n-1)\theta$

$B=\quad x\sin\theta+x^2\sin 2\theta+\ldots\ldots+x^{n-1}\sin(n-1)\theta$

トオケバ

$$A+iB=1+x(\cos\theta+i\sin\theta)+x^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)+\ldots\ldots$$
$$+x^{n-1}\{\cos(n-1)\theta+i\sin(n-1)\theta\}$$

然ルニ　Euler ノ公式ニヨリ

$$\cos k\theta+i\sin k\theta=e^{ik\theta},$$

$$\therefore\ A+iB=1+xe^{i\theta}+x^2e^{i2\theta}+\ldots\ldots+x^{n-1}e^{i(n-1)\theta},$$

コノ右邊ハ初項 1，公式 $xe^{i\theta}$ ナル等比級數ナル故ニ

$$A+iB=\frac{1-x^n e^{in\theta}}{1-x e^{i\theta}}=\frac{(1-x^n e^{in\theta})(1-x e^{-i\theta})}{(1-x e^{i\theta})(1-x e^{-i\theta})}$$

$$=\frac{1-xe^{-i\theta}-x^n e^{in\theta}+x^{n+1}e^{i(n-1)\theta}}{1+x^2-x(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}$$

$$=\frac{1-x(\cos\theta-i\sin\theta)-x^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)+x^{n+1}\{\cos(n-1)\theta+i\sin(n-1)\theta\}}{1+x^2-2x\cos\theta},$$

$$=\frac{1-x\cos\theta-x^n\cos n\theta+x^{n+1}\cos(n-1)\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}+i\frac{x\sin\theta-x^n\sin n\theta+x^{n+1}\sin(n-1)\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$$

$$\therefore\quad A=\frac{1-x\cos\theta-x^n\cos n\theta+x^{n+1}\cos(n-1)\theta}{1-2x\cos\theta+x^2},$$

コレ即チ所題ノ級數 n 項ノ和ナリ，同時ニ又

$$B=\frac{x\sin\theta-x^n\sin n\theta+x^{n+1}\sin(n-1)\theta}{1-2x\cos\theta+x^2},$$

ナルヲ知ル。

47. 複素數ノ三角函數ヲ定義シ次ノ諸公式ヲ証セヨ。

$$\sin^2(a+bi)+\cos^2(a+bi)=1,\quad 1+\tan^2(a+bi)=\sec^2(a+bi),$$

$$1+\cot^2(a+bi)=\operatorname{cosec}^2(a+bi),$$

$$\sin(a+bi+c+di)=\sin(a+bi)\cos(c+di)+\cos(a+bi)\sin(c+di),$$

〔解〕 Euler ノ公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

ニ於テ x ヲ $-x$ トオケバ

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x$$

$$\therefore\quad \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},\quad \therefore\quad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{i(e^{ix}+e^{-ix})},$$

之レト同様ニ今 $z=a+bi$ トスルトキ

$$\cos z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2},\qquad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\qquad \tan z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})},$$

ト定義ス，然ルトキハ

$$\cos^2 z+\sin^2 z=(\cos z+i\sin z)(\cos z-i\sin z)=e^{iz}\cdot e^{-iz}=e^0=1$$

$$1+\tan^2 z=(1+i\tan z)(1-i\tan z)=\frac{2e^{iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}\times\frac{2e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}=\left(\frac{2}{e^{iz}+e^{-iz}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{\cos^2 z}=\sec^2 z,$$

同様ニ $1+\cot^2 z=\operatorname{cosec}^2 z$,

次ニ $a+bi=z,\quad c+di=u$ トスレバ

$$\sin z\cos u+\cos z\sin u=\frac{1}{4i}(e^{iz}-e^{-iz})(e^{iu}+e^{-iu})+\frac{1}{4i}(e^{iz}+e^{-iz})(e^{iu}-e^{-iu})$$

$$=\frac{1}{2i}(e^{i(z+u)}-e^{-i(z+u)})=\sin(z+u),$$

同様ニ $\cos(z+u)=\cos z\cos u-\sin z\sin u$.

48. $\{\cos(a+bi)+i\sin(a+bi)\}^{c+di}=\cos\{(c+di)(a+bi)\}+i\sin\{(c+di)(a+bi)\}$ **ナルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 $a+bi=z,\quad c+di=u$ トスレバ

$$(\cos z+i\sin z)^u=\left\{\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}+\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}\right\}^u=(e^{iz})^u=e^{izu},$$

$$\cos(uz)+i\sin(uz)=\frac{e^{iuz}+e^{-iuz}}{2}+\frac{e^{iuz}-e^{-iuz}}{2}=e^{iuz},$$

$$\therefore\quad (\cos z+i\sin z)^u=\cos uz+i\sin uz,$$

即チ De moivre ノ定理(基本定理 IV) ハ θ, n ガ複素數ナル場合ニモ成立ス。

第 九 章

方 程 式 (其ノ一)

基本定理 I. n 次ノ有理整方程式ハ n 個ノ根ヲ有ス。

II. n 次ノ有理整方程式

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$$

ノ n 個ノ根ヨリ任意ノ 1 ツ又ハ 2 ツ又ハ 3 ツ等ヲ取リテ作ルアラユル積ノ和ヲ夫々 S_1, S_2, S_3 等ニテ表ハセバ

$$S_1=-p_1,\quad S_2=p_2,\quad S_3=-p_3,\quad \ldots\ldots\ S_n=(-1)^np_n$$

III. 實數係數ヲ有スル有理整方程式ガ $a+bi$ (a, b ハ實數) ナル根ヲ有スルトキハ必ズ又 $a-bi$ ナル根ヲ有ス。

演習問題

1. 三次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ ノ三根ヲ α, β, γ トスルトキ $\Sigma\alpha^3$ 及ビ $\Sigma\alpha^2\beta$ ヲ p, q, r ニテ表ハセ。

〔解〕 基本定理 II ニヨリ

$$\alpha+\beta+\gamma=-p,\qquad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q,\qquad \alpha\beta\gamma=-r,$$

$$\therefore\quad \Sigma\alpha^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma+3\alpha\beta\gamma$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$$

$$=(-p)\{(-p)^2-3q\}-3r=3pq-p^3-3r$$

$$\Sigma\alpha^2\beta=\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta=\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\alpha+\gamma)$$

$$=\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)+\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\alpha+\beta+\gamma)-3\alpha\beta\gamma$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-3\alpha\beta\gamma=(-p)q+3r$$

$$=3r-pq,$$

2. $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$ ノ根ヲ $\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ldots\alpha_n$ トシ, $\Sigma\dfrac{1}{\alpha_1}$ 及ビ $\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2$ ヲ求メヨ。

〔解〕 $$\Sigma\frac{1}{\alpha_1}=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots\ldots+\frac{1}{\alpha_n}$$

$$=\frac{(\alpha_2\alpha_3\ldots\ldots\alpha_n)+(\alpha_1\alpha_3\alpha_4\ldots\ldots\alpha_n)+\ldots\ldots+(\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_{n-1})}{\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n},$$

右邊ノ分子ハ α_1, α_2, ……α_n ノ中ヨリ $n-1$ 個ヲトリテ作リタルアラユル積ノ和ナル故ニ基本定理 II ニヨリ $(-1)^{n-1}p_{n-1}$ ニ等シク分母ハ $(-1)^np_n$ ニ等シ

$$\therefore\quad \Sigma\frac{1}{\alpha_1}=-\frac{p_{n-1}}{p_n}$$

次ニ $$\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2=(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\alpha_1-\alpha_3)^2+(\alpha_1-\alpha_4)^2+\ldots\ldots+(\alpha_1-\alpha_n)^2$$

$$+(\alpha_2-\alpha_3)^2+(\alpha_2-\alpha_4)^2+\ldots\ldots+(\alpha_2-\alpha_n)^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(\alpha_{n-1}-\alpha_n^2)$$

$$=(n-1)\Sigma\alpha_1^2-2\Sigma\alpha_1\alpha_2$$

$$=(n-1)\{(\Sigma\alpha_1)^2-2\Sigma\alpha_1\alpha_2\}-2\Sigma\alpha_1\alpha_2$$

$$=(n-1)\{(-p_1)^2-2p_2\}-2p_2=(n-1)p_1^2-2np_2.$$

3. 同上, $\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 及ビ $\Sigma\dfrac{\alpha_1^2}{\alpha_2}$ ヲ求メヨ。

〔解〕 今 $$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_5+\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_5+\alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_5+\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5)$$

$$=\alpha_1^2(\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_5+\alpha_2\alpha_4\alpha_5+\alpha_3\alpha_4\alpha_5)+\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$$

$$+\alpha_2^2(\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_5+\alpha_1\alpha_4\alpha_5+\alpha_3\alpha_4\alpha_5)+\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$$

$$+\alpha_3^2(\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_2\alpha_5+\alpha_1\alpha_4\alpha_5+\alpha_2\alpha_4\alpha_5)+\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$$

$$+\alpha_4^2(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_5+\alpha_1\alpha_3\alpha_5+\alpha_2\alpha_3\alpha_5)+\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$$

$$+\alpha_5^2(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4)+\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$$

故ニ一般ニ

$$(\Sigma\alpha_1)(\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)=\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4+5\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$$

$$\therefore\quad (-p_1)(p_4)=\Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4+5(-p_5)$$

$$\therefore\quad \Sigma\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4=5p_5-p_1p_4$$

次ニ $(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)\left(\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\alpha_2}+\dfrac{1}{\alpha_3}\right)$

$$=\alpha_1+\frac{\alpha_2^2+\alpha_3^2}{\alpha_1}+\alpha_2+\frac{\alpha_1^2+\alpha_3^2}{\alpha_2}+\alpha_3+\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_3}$$

故ニ一般ニ

$$(\Sigma\alpha_1^2)\left(\Sigma\frac{1}{\alpha_1}\right)=\Sigma\alpha_1+\Sigma\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}$$

然ルニ $\Sigma\alpha_1^2=(\Sigma\alpha_1)^2-2\Sigma\alpha_1\alpha_2=(-p_1)^2-2p_2=p_1^2-2p_2$

$$\Sigma\frac{1}{\alpha_1}=-\frac{p_{n-1}}{p_n} \qquad \text{(前問)}$$

$$\therefore\quad \Sigma\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}=(p_1^2-2p_2)\left[-\frac{p_{n-1}}{p_n}\right]+p_1=\frac{p_1p_n-(p_1^2-2p_2)p_{n-1}}{p_n}$$

4. 聯立方程式 $x+ay+a^2z+a^3=0,\ x+by+b^2z+b^3=0,\ x+cy+c^2z+c^3=0$ ヲ解ケ。

〔解〕 今所題ノ聯立方程式ノ根ヲ x, y, z トシ t ノ三次方程式

$$t^3+zt^2+yt+x=0$$

ヲ考フレバ係數 x, y, z ハ所題ノ聯立方程式ヲ滿足セシムル故ニ t ノ三根ハ a, b, c ナルヲ知ル，然ルトキハ基本定理 II ニヨリ

$$a+b+c=-z, \qquad ab+bc+ca=y, \qquad abc=-x$$

$$\therefore\quad x=-abc, \qquad y=ab+bc+ca, \qquad z=-(a+b+c),$$

5. 聯立方程式

$$x+ay+a^2z+a^3u+a^4=0, \qquad x+by+b^2z+b^3u+b^4=0$$

$$x+cy+c^2z+c^3u+c^4=0, \qquad x+dy+d^2z+d^3u+d^4=0 \quad \text{ヲ解ケ。}$$

〔解〕 前問ト同樣ニ所要ノ根ヲ x, y, z, u トスレバ t ノ四次方程式

$$t^4+ut^3+zt^2+yt+x=0$$

ノ四根ハ a, b, c, d ナリ，依ツテ基本定理 II ニヨリ

$$a+b+c+d=-u, \qquad ab+ac+ad+bc+bd+cd=z$$

$$abc+abd+acd+bcd=-y, \qquad abcd=x,$$

即チ $x=abcd, \qquad y=-(abc+abd+acd+bcd)$

$$z=ab+ac+ad+bc+bd+cd, \qquad u=-(a+b+c+d),$$

6. 聯立方程式

$x+y+z=9, \qquad x^2+y^2+z^2=41, \qquad x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=180$ ヲ解ケ。

〔解〕 $41=x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=81-2(xy+yz+zx)$

$$\therefore\quad xy+yz+zx=20,$$

又 $180=x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=x^2(9-x)+y^2(9-y)+z^2(9-z)$

$$=9(x^2+y^2+z^2)-(x^3+y^3+z^3)=9\times41-(x^3+y^3+z^3-3xyz+3xyz)$$

$$=369-\{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz\}$$

$$=369-\{9(41-20)+3xyz\},$$

$$\therefore\quad xyz=0$$

故ニ基本定理 II ニヨリ x, y, z ハ次ノ三次方程式ノ根ナリ

$$t^3-9t^2+20t=0 \qquad \therefore\quad t=0,\ 4,\ 5$$

t ノ何レノ値ガ x, y, z ノ何レニシテモ可ナル故ニ所要ノ根ハ次ノ 6 組ナリ

$$\left.\begin{array}{l}x=0\\y=4\\z=5\end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{c}0\\5\\4\end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{c}4\\0\\5\end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{c}4\\5\\0\end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{c}5\\0\\4\end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{c}5\\4\\0\end{array}\right)$$

7. 四次方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ ノ二根ノ和ガ他ノ二根ノ和ニ等シキタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ム。

〔解〕 四根ヲ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ トスレバ

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-p \qquad (1)$$

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=q \qquad (2)$$

$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-r \qquad (3)$$

$$\alpha\beta\gamma\delta=s \qquad (4)$$

今 $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ ナリトスレバ (1) ヨリ

$$2(\alpha+\beta)=2(\gamma+\delta)=-p \qquad (5)$$

又 (2), (3) ヨリ

$$(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)+\alpha\beta+\gamma\delta=q, \qquad \alpha\beta(\gamma+\delta)+\gamma\delta(\alpha+\beta)=-r.$$

(5) ヲ代入スレバ

$$\frac{p^2}{4}+\alpha\beta+\gamma\delta=q, \qquad -\frac{p}{2}(\alpha\beta+\gamma\delta)=-r,$$

コレヨリ $\alpha\beta+\gamma\delta$ ヲ消去スレバ

$$\frac{p}{2}\left[q-\frac{p^2}{4}\right]=r, \qquad \therefore\ p^3-4pq+8r=0 \qquad (6)$$

コレ即チ必要ナル條件ニシテ $\alpha+\gamma=\beta+\delta$ 或ハ $\alpha+\delta=\beta+\gamma$ ナル場合モ同様ナリ

逆ニ (6) ノ左邊ヲ F トシ F ヲ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ニテ表ハセバ

$$F=-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3+4(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)$$
$$-8(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)$$

茲ニ於テ $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ トオケバ

$$F=-8(\alpha+\beta)^3+8(\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2+(\alpha\beta+\gamma\delta)\}-8(\alpha+\beta)(\alpha\beta+\gamma\delta)=0$$

トナル，故ニ F ハ $\alpha+\beta-\gamma-\delta$ ナル因數ヲ有ス，然ルニ F ハ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ノ對稱式ナル故ニ從ツテ上ノ因數ヨリ β,γ 及ビ β,δ ヲ交換シテ得ベキ $\alpha+\gamma-\beta-\delta$, $\alpha+\delta-\beta-\gamma$ ナル因數ヲモ有ス

$$\therefore\ F=k(\alpha+\beta-\gamma-\delta)(\alpha+\gamma-\beta-\delta)(\alpha+\delta-\beta-\gamma)$$

然ルニ F ハ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ニツキテ三次ナル故ニ k ハ定數ナリ，故ニ (6) ガ成立スルトキ即チ $F=0$ ナルトキ何レカ二根ノ和ハ他ノ二根ノ和ニ等シ．故ニ (6) ハ又十分ナル條件ナリ，即チ所要ノ條件ハ (6) ナリ。

8. 三次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ ノ二根ノ積ガ他ノ一根ニ等シキタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ム。

〔解〕 三根ヲ α,β,γ トシ前問ト同様ニ根ト係數トノ關係ト $\alpha\beta=\gamma$ トヨリ α,β, ヲ消去スレバ可ナルコト勿論ナルモ今次ニ根ノ對稱式（根ノ對稱式ハ常ニ係數ノ整式ニテ表ハサル，問題 57 參照）ヲ利用シテ所要ノ條件ヲ求メントス，即チ $\alpha\beta-\gamma$ ヲ因數トスル α,β,γ ノ最低次ノ對稱式

$$F=(\alpha\beta-\gamma)(\alpha\gamma-\beta)(\beta\gamma-\alpha)$$

ヲ考フ，二根ノ積ガ他ノ一根ニ等シキトキハ明カニ $F=0$ ニシテ逆ニ $F=0$ ナルトキハ何レカ二根ノ積ハ殘ル一根ニ等シ，故ニ $F=0$ ハ題意ニ適スルタメニ必要

ニシテ且ツ十分ナル條件ナリ，依ツテ F ヲ係數ニテ表ハセバ所要ノ條件ヲ得ベシ，

即チ

$$F=\alpha^2\beta^2\gamma^2-\alpha\beta\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2-\alpha\beta\gamma$$
$$=r^2+r(p^2-2q)+(q^2-2pr)+r=r^2+r(p^2-2p-2q+1)+q^2$$

故ニ所要ノ條件ハ

$$r^2+r(p^2-2p-2q+1)+q^2=0,$$

9. 三次方程式 $x^3+qx+r=0$ ノ二根ノ和ガ二次方程式 $x^2+bx+c=0$ ノ一根ニ等シキタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ム。

〔解〕 三次方程式ノ根ヲ α,β,γ, 二次方程式ノ根ヲ ω,θ トシ，前問ト同様ニ $\alpha+\beta-\omega$ ヲ一因數トシ α,β,γ, 及ビ ω,θ ニツキテノ最低次ノ對稱式

$$F=(\alpha+\beta-\omega)(\beta+\gamma-\omega)(\gamma+\alpha-\omega)(\alpha+\beta-\theta)(\beta+\gamma-\theta)(\gamma+\alpha-\theta)$$

ヲ考フ，α,β,γ 中ノ任意ノ二ツノ和ガ ω,θ ノ何レカニ等シキトキハ $F=0$ トナリ，逆ニ $F=0$ ナルトキハ α,β,γ ノ中ノ何レカ二ツノ和ハ ω,θ ノ何レカニ等シクナル故ニ $F=0$ ヲ係數 q,r,b,c ニテ表ハシタルモノガ所要ノ條件ナリ，然ルニ

$$(\alpha+\beta-\omega)(\beta+\gamma-\omega)(\gamma+\alpha-\omega)=(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$
$$-\{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)\}\omega+2(\alpha+\beta+\gamma)\omega^2-\omega^3$$
$$=r-q\omega-\omega^3,$$

$$\therefore\ F=(r-q\omega-\omega^3)(r-q\theta-\theta^3)$$
$$=r^2-rq(\omega+\theta)-r(\omega^3+\theta^3)+\omega\theta\{q^2+q(\omega^2+\theta^2)+\omega^2\theta^2\}$$
$$=r^2+brq+br(b^2-3c)+c\{q^2+q(b^2-2c)+c^2\}$$

故ニ所要ノ條件ハ

$$r^2+br(q+b^2-3c)+c(c^2-2cq+b^2q+q^2)=0$$

10. $(n-1)p_1^2<2np_2$ ナルトキハ方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_n=0$ ハ必ズ虛數根ヲ有スルコトヲ証セヨ。

〔解〕 所題ノ方程式ノ根ヲ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots,\alpha_n$ トシ，アラユル二根ノ差ノ平方ノ和ヲ P トスレバ $P=(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\alpha_1-\alpha_3)^2+\ldots\ldots+(\alpha_1-\alpha_n)^2$

$$+(\alpha_2-\alpha_3)^2+\ldots\ldots+(\alpha_2-\alpha_n)^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2$$

$$=(n-1)\Sigma\alpha_1^2-2\Sigma\alpha_1\alpha_2=(n-1)\{(-p_1)^2-2p_2\}-2p_2=(n-1)p_1^2-2np_2$$

然ルニ假設ニヨリ

$$(n-1)p_1^2<2np_2 \qquad \therefore\ P<0$$

故ニ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ ノ總テハ實數ナル能ハズ，即チ所題ノ方程式ハ若干個ノ虛數根ヲ有ス。

11. **方程式 $1000x^3+ax^2+bx+1=0$ ハ a, b ノ如何ニ係ラズ絶對値ガ $\frac{1}{10}$ ヨリ大ナラザル一根ヲ有スルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 所題ノ方程式ノ根ヲ α, β, γ トスレバ

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{1}{1000} \qquad \therefore\ |\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\gamma|=\frac{1}{1000}$$

故ニ $|\alpha|, |\beta|, |\gamma|$ ハ悉クハ $\frac{1}{10}$ ヨリ大ナル能ハズ，即チ少クトモ一ツハ $\frac{1}{10}$ ニ等シキカ或ハ $\frac{1}{10}$ ヨリ小ナラザルベカラズ，故ニ所題ノ方程式ハ a, b ノ如何ニ係ハラズ絶對値ガ $\frac{1}{10}$ ヨリ大ナラザル一根ヲ有ス。

12. **方程式**

$$x^{n+3}=a^{n+3}\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^{n+3}\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^{n+3}\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \qquad (1)$$

ノ根ノ中 a, b, c 以外ノ n 個ハ次ノ方程式ノ根ナルコトヲ証セヨ，

$$x^n+H_1x^{n-1}+H_2x^{n-2}+\ldots\ldots+H_{n-1}x+H_n=0 \qquad (2)$$

但シ H_r ハ a, b, c ヨリ作ル r 次ノ同次積ノ和ヲ表ハスモノトス。

〔解〕 a, b, c 三文字ヨリ作ル r 次ノ同次積ノ和 H_r ハ次ノ展開式ニ於ケル x^r ノ係數ニ等シ

$$(1+ax+a^2x^2+\ldots\ldots)(1+bx+b^2x^2+\ldots\ldots)(1+cx+c^2x^2+\ldots\ldots)$$

$$=\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)}$$

$$=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}\cdot\frac{1}{1-ax}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}\cdot\frac{1}{1-bx}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\cdot\frac{1}{1-cx}$$

$$=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}(1+ax+a^2x^2+\ldots\ldots)+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}(1+bx+b^2x^2+\ldots\ldots)$$

$$+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}(1+cx+c^2x^2+\ldots\ldots)$$

$$\therefore\ H_r=\frac{a^{r+2}(b-c)+b^{r+2}(c-a)+c^{r+2}(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

故ニ今 $D=-(a-b)(b-c)(c-a)$ トオケバ (2) ハ次ノ如クナル

$$Dx^n+\{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)\}x^{n-1}+\{a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)\}x^{n-2}$$

$$+\ldots\ldots+\{a^{n+2}(b-c)+b^{n+2}(c-a)+c^{n+2}(a-b)\}=0$$

$$\therefore\ Dx^n+(b-c)(a^3x^{n-1}+a^4x^{n-2}+\ldots\ldots+a^{n+1}x+a^{n+2})$$

$$+(c-a)(b^3x^{n-1}+b^4x^{n-2}+\ldots\ldots+b^{n+1}x+b^{n+2})$$

$$+(a-b)(c^3x^{n-1}+c^4x^{n-2}+\ldots\ldots+c^{n+1}x+c^{n+2})=0$$

$$\therefore\ Dx^n+(b-c)\frac{a^3x^{n-1}\left(1-\frac{a^n}{x^n}\right)}{1-\frac{a}{x}}+(c-a)\frac{b^3x^{n-1}\left(1-\frac{b^n}{x^n}\right)}{1-\frac{b}{x}}$$

$$+(a-b)\frac{c^3x^{n-1}\left(1-\frac{c^n}{x^n}\right)}{1-\frac{c}{x}}=0$$

$$\therefore\ x^n+\frac{a^3(x^n-a^n)}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b^3(x^n-b^n)}{(b-c)(b-a)(x-b)}+\frac{c^3(x^n-c^n)}{(c-a)(c-b)(x-c)}=0$$

兩邊ニ $(x-a)(x-b)(x-c)$ ヲ乘ズレバ

$$x^n(x-a)(x-b)(x-c)+\frac{a^3(x^n-a^n)(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3(x^n-b^n)(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$$

$$+\frac{c^3(x^n-c^n)(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=0$$

$$\therefore\ x^n\left\{(x-a)(x-b)(x-c)+\frac{a^3(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\right\}$$

$$=a^{n+3}\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^{n+3}\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^{n+3}\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)},$$

左邊ノ括弧內ハ x^3 トナルコト明カナリ，之ニ由ツテ (2) ニ $(x-a)(x-b)(x-c)$

チ乘ズレバ (1) トナルヲ知ル，故ニ (1) ノ根ヨリ a, b, c ヲ除キタル殘リノ n 個ノ根ハ總テ (2) ノ根ナリ。

13. 與ヘラレタル方程式ノ根ノ (1) 逆數ヲ根トスル方程式 (2) 符號ヲ變ジタルモノヲ根トスル方程式 (3) k 倍ヲ根トスル方程式及ビ (4) 與ヘラレタル方程式ノ根ヨリ m ダケ大ナル根ヲ有スル方程式ヲ作レ。

〔解〕 與ヘラレタル方程式ヲ

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n=0 \qquad (A)$$

トシ，此方程式ノ任意ノ一根ヲ x トス

(1) (A) ニ於テ $y=\dfrac{1}{x}$ 即チ $x=\dfrac{1}{y}$ トオケバ y 即チ $\dfrac{1}{x}$ ヲ根トスル方程式ヲ得，即チ

$$\left(\frac{1}{y}\right)^n+p_1\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1}+p_2\left(\frac{1}{y}\right)^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}\left(\frac{1}{y}\right)+p_n=0$$

$$\therefore\ p_ny^n+p_{n-1}y^{n-1}+\ldots\ldots+p_1y+1=0$$

(2)，(A) ニ於テ $y=-x$，即チ $x=-y$ トオケバ y 即チ $-x$ ヲ根トスル方程式ヲ得，即チ

$$(-y)^n+p_1(-y)^{n-1}+p_2(-y)^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}(-y)+p_n=0$$

$$\therefore\ (-)^n\{y^n-p_1y^{n-1}+p_2y^{n-2}-+\ldots\ldots+(-)^{n-1}p_{n-1}y+(-1)^np_n\}=0$$

$$\therefore\ y^n-p_1y^{n-1}+p_2y^{n-2}-+\ldots\ldots+(-1)^np_n=0$$

(3)，(A) ニ於テ $y=kx$，即チ $x=\dfrac{y}{k}$ トオケバ y 即チ kx ヲ根トスル方程式ヲ得，

即チ $$\left(\frac{y}{k}\right)^n+p_1\left(\frac{y}{k}\right)^{n-1}+p_2\left(\frac{y}{k}\right)^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}\left(\frac{y}{k}\right)+p_n=0$$

$$\therefore\ y^n+p_1ky^{n-1}+p_2k^2y^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}k^{n-1}y+p_nk^n=0,$$

(4)，(A) ニ於テ $y=x+m$，即チ $x=y-m$ トオケバ y 即チ $x+m$ ヲ根トスル方程式ヲ得，即チ

$$(y-m)^n+p_1(y-m)^{n-1}+p_2(y-m)^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}(y-m)+p_n=0.$$

14. $x^3-px^2+r=0$ ノ三根ヲ α, β, γ トシ $\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}, \dfrac{\gamma+\alpha}{\beta}, \dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}$ ヲ三根トスル方程式ヲ作レ。

〔解〕 所要ノ方程式ハ

$$\left(x-\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\right)\left(x-\frac{\gamma+\alpha}{\beta}\right)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{\gamma}\right)=x^3-\left(\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\gamma}\right)x^2$$

$$+\left\{\frac{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta}+\frac{(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}{\beta\gamma}+\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}{\gamma\alpha}\right\}x-\frac{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}{\alpha\beta\gamma}=0 \qquad (1)$$

然ルニ $$\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\gamma}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)}{\alpha\beta\gamma}$$

$$\frac{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta}+\frac{(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}{\beta\gamma}+\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}{\gamma\alpha}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta^2+\beta^2+\gamma^2)+3\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma},$$

$$\frac{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}{\alpha\beta\gamma}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+2\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}$$

而シテ $\alpha+\beta+\gamma=p$，　$\alpha\beta+\beta\gamma+\beta\alpha=0$，　$\alpha\beta\gamma=-r$，

$$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=p^2,$$

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma=p^3-3r$$

是等ノ値ヲ (1) ニ代入スレバ所要ノ方程式ハ次ノ如クナル，

$$x^3-\frac{p^3-(p^3-3r)}{-r}x^2+\frac{p^3-3r}{-r}x-\frac{p^3-(p^3-3r)-2r}{-r}=0,$$

即チ　$rx^3+3rx^2+(3r-p^3)x+r=0$，

或ハ又次ノ如ク方程式ノ變更ヲ行フモ可ナリ

$$\alpha+\beta+\gamma=p \qquad \therefore\ \frac{\beta+\gamma}{\alpha}=\frac{p-\alpha}{\alpha}=\frac{p}{\alpha}-1,$$

同樣ニ　$\dfrac{\gamma+\alpha}{\beta}=\dfrac{p}{\beta}-1$，　$\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}=\dfrac{p}{\gamma}-1$，

依ツテ所要ノ方程式ノ根ヲ y トシ所題ノ方程式ノ根ヲ x トスレバ

$$y=\frac{p}{x}-1 \qquad \therefore\ x=\frac{p}{y+1},$$

然ルニ　$x^3-px^2+r=0$　　$\therefore\ \left(\dfrac{p}{y+1}\right)^3-p\left(\dfrac{p}{y+1}\right)^2+r=0$

$$\therefore\ ry^3+3ry^2+(3r-p^3)y+r=0.$$

15. 方程式 $x^3+px+q=0$ ノ三根ヲ α, β, γ シ $(\beta-\gamma)^2, (\gamma-\alpha)^2, (\alpha-\beta)^2$ ヲ根トスル方程式ヲ作レ。

〔解〕 $(\beta-\gamma)^2=(\beta+\gamma)^2-4\beta\gamma$

然ルニ $\alpha+\beta+\gamma=0,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p$

$\therefore\ \beta+\gamma=-\alpha,\quad \beta\gamma=p-\alpha(\beta+\gamma)=p+\alpha^2$

$\therefore\ (\beta-\gamma)^2=\alpha^2-4(p+\alpha^2)=-(3\alpha^2+4p)$

同樣ニ $(\gamma-\alpha)^2=-(3\beta^2+4p),\quad (\alpha-\beta)^2=-(3\gamma^2+4p)$

故ニ所要ノ方程式ノ根ヲ y, 所題ノ方程式ノ根ヲ x トスレバ

$$y=-(3x^2+4p)\qquad 即チ\qquad x^2=-\frac{y+4p}{3}$$

之ト所題ノ方程式トヨリ x ヲ消去スレバ所要ノ方程式ヲ得,

然ルニ所題ノ方程式ヨリ

$$x(x^2+p)=-q\qquad \therefore\ x^2(x^2+p)^2=q^2$$

$$\therefore\ -\frac{y+4p}{3}\left(-\frac{y+4p}{3}+p\right)^2=q^2$$

即チ $(y+4p)(y+p)^2+27q^2=0$

16. 方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ ノ根ヲ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ トシ $\beta^2+\gamma^2+\delta^2$, $\gamma^2+\delta^2+\alpha^2$, $\delta^2+\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ ヲ根トスル方程式ヲ作レ。

〔解〕 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-p,\quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=q$

$$\therefore\ \beta^2+\gamma^2+\delta^2=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)-\alpha^2$$
$$=p^2-2q-\alpha^2$$

同樣ニ $\gamma^2+\delta^2+\alpha^2=p^2-2q-\beta^2,\ \delta^2+\alpha^2+\beta^2=p^2-2q-\gamma^2,\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=p^2-2q-\delta^2,$

故ニ所要ノ方程式ノ根ヲ y トスレバ

$$y=p^2-2q-x^2,\qquad 即チ\qquad x^2=p^2-2q-y,$$

然ルニ所題ノ方程式ヨリ

$$x^2(x^2+q)+s=-x(px^2+r),$$

$$\therefore\ \{x^2(x^2+q)+s\}^2=x^2(px^2+r)^2$$

$$\therefore\ \{(p^2-2q-y)(p^2-q-y)+s\}^2=(p^2-2q-y)\{p(p^2-2q-y)+r\}^2$$

コレ即チ所要ノ方程式ナリ。

17. 方程式 $x^3+qx+r=0$ ノ根ヲ α,β,γ トスルトキ $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$ ヲ根トスル六次方程式ハ $r^2(x^2+x+1)^3+q^3x^2(x+1)^2=0$ ナルコトヲ證セヨ。

〔解〕 $\frac{\alpha}{\alpha}$, $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$ ヲ三根トスル三次方程式ハ所題ノ方程式ニ於テ $\frac{x}{\alpha}=y$ 即チ $x=\alpha y$ トオキテ

$$\alpha^3y^3+\alpha qy+r=0$$

同樣ニ $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\beta}$ 及ビ $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{\gamma}{\gamma}$ ヲ三根トスル方程式ハ

$$\beta^3y^3+\beta qy+r=0,\qquad \gamma^3y^3+\gamma qy+r=0$$

故ニ $1,\ \frac{\beta}{\alpha},\ \frac{\gamma}{\alpha},\ \frac{\alpha}{\beta},\ 1,\ \frac{\gamma}{\beta},\ \frac{\alpha}{\gamma},\ \frac{\beta}{\gamma},\ 1$ ヲ根トスル方程式ハ次ノ如シ

$$(\alpha^3y^3+\alpha qy+r)(\beta^3y^3+\beta qy+r)(\gamma^3y^3+\gamma qy+r)=0$$

即チ

$$(\alpha\beta\gamma)^3y^9+\alpha\beta\gamma(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)qy^7+(\alpha^3\beta^3+\beta^3\gamma^3+\gamma^3\alpha^3)ry^6+\alpha\beta\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)q^2y^5$$
$$+\{\alpha^3(\beta+\gamma)+\beta^3(\gamma+\alpha)+\gamma^3(\alpha+\beta)\}qry^4+\{(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)r^2+\alpha\beta\gamma q^3\}y^3$$
$$+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)q^2ry^2+(\alpha+\beta+\gamma)qr^2y+r^3=0\qquad (1)$$

然ルニ $\alpha\beta\gamma=-r,\quad \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=q^2,$

$$\alpha^3\beta^3+\beta^3\gamma^3+\gamma^3\alpha^3=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2-\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\}+3\alpha^2\beta^2\gamma^2$$
$$=q^3+3r^2,$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=-2q$$

$$\alpha^3(\beta+\gamma)+\beta^3(\gamma+\alpha)+\gamma^3(\alpha+\beta)=-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4$$
$$=-\{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2-2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)\}=-(4q^2-2q^2)=-2q^2,$$

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)^3-3\alpha^2(\beta+\gamma)-3\alpha(\beta+\gamma)^2-3\beta\gamma(\beta+\gamma)=3\alpha\beta\gamma=-3r$$

故ニ (1) ハ次ノ如クナル

$$-r^3y^9-rq^3y^7+(q^3+3r^2)ry^6+2q^3ry^5-2q^3ry^4-(3r^3+rq^3)y^3+q^3ry^2+r^3=0$$

即チ $r^2(y^3-1)^3+q^3y^2(y^2-1)^2(y-1)=0$

コレヨリ $1,1,1$ ナル三根ヲ除クタメニ $(y-1)^3$ ニテ割レバ

$$r^2(y^2+y+1)^3+q^3y^2(y+1)^2=0$$

或ハ次ノ如クスルモ可ナリ

$\frac{\beta}{\alpha},\ \frac{\gamma}{\alpha}$ ヲ二根トスル二次方程式ハ $x^2-\frac{\beta+\gamma}{\alpha}x+\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}=0$ 即チ $x^2+x+\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}=0$

同様ニ $\frac{\gamma}{\beta},\ \frac{\alpha}{\beta};\ \frac{\alpha}{\gamma},\ \frac{\beta}{\gamma}$ ヲ二根トスル二次方程式ハ $x^2+x+\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}=0,$

$x^2+x+\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}=0,$ 故ニ所要ノ方程式ハ

$$\left(x^2+x+\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}\right)\left(x^2+x+\frac{\gamma\alpha}{\beta^2}\right)\left(x^2+x+\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}\right)=0$$

$$\therefore\ (x^2+x)^3+\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}+\frac{\gamma\alpha}{\beta^2}+\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}\right)(x^2+x)^2$$
$$+\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}\cdot\frac{\gamma\alpha}{\beta^2}+\frac{\gamma\alpha}{\beta^2}\cdot\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}+\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}\cdot\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}\right)(x^2+x)+1=0$$

コレヨリ $(x^2+x)^2$, (x^2+x) ノ係數ヲ q, r ニテ表ハセバ所要ノ結果ヲ得。

18. **1 ノ 11 根乘ノ虛數ノ一ツヲ α トシ**

$$\alpha+\alpha^{10},\quad \alpha^2+\alpha^9,\quad \alpha^3+\alpha^8,\quad \alpha^4+\alpha^7,\quad \alpha^5+\alpha^6$$

ヲ根トスル五次方程式ヲ作レ。

〔解〕 $\alpha^{11}=1$ ナル故ニ

$$\alpha+\alpha^{10}=\alpha+\frac{1}{\alpha},\quad \alpha^2+\alpha^9=\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2},\quad \alpha^3+\alpha^8=\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3},\quad \alpha^4+\alpha^7=\alpha^4+\frac{1}{\alpha^4},$$
$$\alpha^5+\alpha^6=\alpha^5+\frac{1}{\alpha^5}$$

而シテ $\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \alpha^5$ ハ皆 1 ノ 11 乘根ノ虛數ニシテ (第八章問. 18)

即チ何レモ

$$x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0 \qquad (1)$$

ノ根ナリ，依ツテ今 $\qquad y=x+\frac{1}{x} \qquad (2)$

トオキ (1), (2) ヨリ x ヲ消去スレバ所要ノ方程式ヲ得ベシ，(1) ヲ x^5 ニテ割レバ $\quad x^5+\frac{1}{x^5}+x^4+\frac{1}{x^4}+x^3+\frac{1}{x^3}+x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}+1=0$

(2) ヨリ $x+\frac{1}{x}=y,\qquad \therefore\ x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2,\qquad x^4+\frac{1}{x^4}=(y^2-2)^2-2$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)=y(y^2-3),$$

$$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^4-x^2+1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)=y\{(y^2-2)^2-2-(y^2-2)+1\}$$
$$=y(y^4-5y^2+5)$$

$$\therefore\ y(y^4-5y^2+5)+(y^2-2)^2-2+y(y^2-3)+y^2-2+y+1=0$$

即チ $\qquad y^5+y^4-4y^3-3y^2+3y+1=0,$

19. **方程式 $x^n+x+1=0$ (1), ノ根ヲ $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ldots,\ \alpha_n$ トスレバ**

$$(\alpha_1^{n-1}+\alpha_2^{n-1}+\ldots\ldots+\alpha_n^{n-1})-(\alpha_1^n+\alpha_2^n+\ldots\ldots+\alpha_n^n)=1$$

及ビ $$\left(\frac{1}{\alpha_1^{n-1}}+\frac{1}{\alpha_2^{n-1}}+\ldots\ldots+\frac{1}{\alpha_n^{n-1}}\right)-\left(\frac{1}{\alpha_1^n}+\frac{1}{\alpha_2^n}+\ldots\ldots+\frac{1}{\alpha_n^n}\right)$$
$$=n+(-1)^{n+1}2$$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 所題ノ方程式 (1) ヨリ

$$x(x^{n-1}+1)=-1,\qquad \therefore\ x^{n-1}(x^{n-1}+1)^{n-1}=(-1)^{n-1}$$

$y=x^{n-1}$ トオケバ $y(y+1)^{n-1}=(-1)^{n-1}$, 即チ

$$y^n+(n-1)y^{n-1}+\ldots\ldots=(-1)^{n-1} \qquad (2)$$

(2) ノ根ハ $\alpha_1^{n-1},\ \alpha_2^{n-1},\ \ldots\ldots\ \alpha_n^{n-1}$ ナルコト明カナリ，故ニ

$$\alpha_1^{n-1}+\alpha_2^{n-1}+\ldots\ldots+\alpha_n^{n-1}=-(n-1)$$

次ニ (1) ヨリ

$$x^n+1=-x \qquad \therefore\ (x^n+1)^n=(-x)^n$$

$y=x^n$ トオケバ $(y+1)^n=(-1)^ny$ 即チ

$$y^n+ny^{n-1}+\ldots\ldots=(-1)^ny \qquad (3)$$

(3) ノ根ハ $\alpha_1^n,\ \alpha_2^n,\ \ldots\ldots\ \alpha_n^n$ ナル故ニ

$$\alpha_1^n+\alpha_2^n+\ldots\ldots+\alpha_n^n=-n,$$

$$\therefore\ (\alpha_1^{n-1}+\alpha_2^{n-1}+\ldots\ldots+\alpha_n^{n-1})-(\alpha_1^n+\alpha_2^n+\ldots\ldots+\alpha_n^n)=-(n-1)+n=1$$

次ニ $y=\frac{1}{x^{n-1}}$ ト (1) ヨリ x ヲ消去スレバ

$$\frac{1}{y}\left(\frac{1}{y}+1\right)^{n-1}=(-1)^{n-1} \qquad \therefore\ (1+y)^{n-1}=(-1)^{n-1}y^n$$

$$\therefore\ y^n+(-1)^n y^{n-1}+\dots\dots=0 \qquad (4)$$

(4) ノ根ハ $\dfrac{1}{\alpha_1^{n-1}},\ \dfrac{1}{\alpha_2^{n-1}},\dots\dots\dfrac{1}{\alpha_n^{n-1}}$ ナル故ニ

$$\frac{1}{\alpha_1^{n-1}}+\frac{1}{\alpha_2^{n-1}}+\dots\dots+\frac{1}{\alpha_n^{n-1}}=(-1)^{n+1},$$

次ニ $y=\dfrac{1}{x^n}$ ト (1) トヨリ x ヲ消去スレバ

$$\left(\frac{1}{y}+1\right)^n=\frac{(-1)^n}{y} \qquad \therefore\ (1+y)^n=(-1)^n y^{n-1}$$

$$\therefore\ y^n+(n+(-1)^{n+1})y^{n-1}+\dots\dots=0 \qquad (5)$$

(5) ノ根ハ $\dfrac{1}{\alpha_1^n},\ \dfrac{1}{\alpha_2^n},\dots\dots\dfrac{1}{\alpha_n^n}$ ナル故ニ

$$\frac{1}{\alpha_1^n}+\frac{1}{\alpha_2^n}+\dots\dots+\frac{1}{\alpha_n^n}=-(n+(-1)^{n+1})$$

$$\therefore\ \left(\frac{1}{\alpha_1^{n-1}}+\frac{1}{\alpha_2^{n-1}}+\dots\dots+\frac{1}{\alpha_n^{n-1}}\right)-\left(\frac{1}{\alpha_1^n}+\frac{1}{\alpha_2^n}+\dots\dots+\frac{1}{\alpha_n^n}\right)$$
$$=n+(-1)^{n+1}2,$$

20. 外接圓ノ半徑 R, 內接圓ノ半徑 r, 周圍 $2s$ ナル三角形ノ三ツノ高サハ次ノ三次方程式ノ根ナルコトヲ證セヨ。

$$2Rx^3-(s^2+r^2+4Rr)x^2+4rs^2x-4r^2s^2=0$$

〔解〕 三邊ヲ a, b, c トシ對應スル高サヲ α, β, γ トスレバ初等幾何學ニヨリ

$$a\alpha=b\beta=c\gamma=2rs \qquad (1)$$

$$\frac{bc}{\alpha}=\frac{ac}{\beta}=\frac{ab}{\gamma}=2R \qquad (2)$$

$$r^2s=(s-a)(s-b)(s-c) \qquad (3)$$

(1), (2) ヨリ

$$(2R\alpha)(\beta\gamma)=(bc)(\beta\gamma)=(b\beta)(c\gamma)=4r^2s^2, \qquad \therefore\ 2R\alpha\beta\gamma=4r^2s^2$$

又 $(2R\alpha)(b\beta)=bc(2rs)$ $\qquad\therefore\ 2R\alpha\beta=2crs$

同様ニ $2R\beta\gamma=2ars,\quad 2R\gamma\alpha=2brs$

$$\therefore\ 2R(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=2(a+b+c)rs=4rs^2,$$

又 (3) ヨリ

$$r^2s=s^3-(a+b+c)s^2+(ab+bc+ca)s-abc=-s^3+2Rs(\alpha+\beta+\gamma)-4Rrs$$

$$\therefore\ 2R(\alpha+\beta+\gamma)=r^2+s^2+4Rr,$$

依ッテ α, β, γ ハ次ノ三次方程式ノ根ナリ

$$x^3-\frac{r^2+s^2+4Rr}{2R}x^2+\frac{4rs^2}{2R}x-\frac{4r^2s^2}{2R}=0$$

即チ $\quad 2Rx^3-(r^2+s^2+4Rr)x^2+4rs^2x-4r^2s^2=0.$

21. 一根ガ $\sqrt{2}+i$ ナルコトヲ知リテ次ノ方程式ヲ解ケ,

$$2x^6-3x^5+5x^4+6x^3-27x+81=0,$$

〔解〕 基本定理 III ニヨリ所題ノ方程式ハ又 $\sqrt{2}-i$ ナル根ヲ有ス, 且ツ各係數ハ有理數ナル故ニ尙 $-\sqrt{2}+i,\ -\sqrt{2}-i$ ナル根ヲ有ス, 即チ所題ノ方程式ハ $\sqrt{2}+i,\ \sqrt{2}-i,\ -\sqrt{2}+i,\ -\sqrt{2}-i$ ナル四ツノ根ヲ有ス, 從ッテ其左邊ハ

$$(x-\sqrt{2}-i)(x-\sqrt{2}+i)(x+\sqrt{2}-i)(x+\sqrt{2}+i)$$
$$=(x^2-2\sqrt{2}x+3)(x^2+2\sqrt{2}x+3)=(x^2+3)^2-8x^2$$
$$=x^4-2x^2+9$$

ニテ整除セラル, 實際割リ算ヲ行ヘバ其商トシテ $2x^2-3x+9$ ヲ得, 故ニ殘ル二根ハ $2x^2-3x+9=0$ ヨリ $x=\dfrac{3}{4}(1\pm i\sqrt{7})$

22. 二根ガ $a+bi$ 及ビ $a+2bi$ ナル形ナルコトヲ知リテ次ノ方程式ヲ解ケ。

$$x^4-4x^3+11x^2-14x+10=0,$$

〔解〕 二根ガ $a+bi,\ a+2bi$ ナラバ他ノ二根ハ基本定理 III ニヨリ $a-bi,\ a-2bi$ ナリ, 然ルニ基本定理 II ニヨリ

$$(a+bi)+(a+2bi)+(a-bi)+(a-2bi)=4 \qquad (1)$$

$$(a+bi)(a+2bi)(a-bi)(a-2bi)=10 \qquad (2)$$

(1) ヨリ $a=1$, (2) ヨリ $(a^2+b^2)(a^2+4b^2)=(1+b^2)(1+4b^2)=10$

$$\therefore\ b^2=1 \quad 又ハ \quad -\frac{9}{4},$$

然ルニ b ハ實數ナルコト勿論ナル故ニ $b=\pm1$,

依ッテ所要ノ四根ハ $1\pm i,\ 1\pm 2i$ ナリ。

23. 二根ノ和ガ 0 ナルコトヲ知リテ次ノ方程式ヲ解ケ。

$$x^4+4x^3-5x^2-8x+6=0,$$

〔解〕 和ガ 0 ナル二根ヲ α, $-\alpha$ トスレバ

$$\alpha^4+4\alpha^3-5\alpha^2-8\alpha+6=0,$$

$$\alpha^4-4\alpha^3-5\alpha^2+8\alpha+6=0$$

$$\therefore\ 8\alpha^3-16\alpha=0 \qquad \therefore\ \alpha=0 \text{ 又ハ } \pm\sqrt{2},$$

然ルニ $\alpha=0$ ハ所題ノ方程式ヲ滿足セシメズ, 依ツテ $\alpha=\sqrt{2}$, $-\alpha=-\sqrt{2}$, 殘ル二根ハ $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=x^2-2$ ニテ所題ノ方程式ノ左邊ヲ割リテ得ベキ $x^2+4x-3=0$ ヨリ $x=-2\pm\sqrt{7}$ ナルヲ知ル。

24. 三根ガ等差級數ヲナスコトヲ知リテ $x^3-15x^2+71x-105=0$ ヲ解ケ。

〔解〕 三根ハ等差級數ヲナス故ニ中項ヲ α, 公差ヲ δ トスレバ三根ハ $\alpha-\delta$, α, $\alpha+\delta$ ニテ表ハサル, 然ルトキハ

$$(\alpha-\delta)+\alpha+(\alpha+\delta)=15, \qquad \therefore\ \alpha=5,$$

所題ノ方程式ノ左邊ヲ $x-5$ ニテ割レバ

$$x^2-10x+21=0 \qquad \therefore\ (x-3)(x-7)=0$$

故ニ所要ノ三根ハ 3, 5, 7 ナリ。

25. 三根ガ等比級數ヲナスコトヲ知リテ $x^3-7x^2+14x-8=0$ ヲ解ケ。

〔解〕 三根ハ等比級數ヲナス故ニ中項ヲ α, 公比ヲ r トスレバ三根ハ $\frac{\alpha}{r}$, α, αr ニテ表ハサル, 然ルトキハ

$$\frac{\alpha}{r}\cdot\alpha\cdot\alpha r=8 \qquad \therefore\ \alpha=2,$$

所題ノ方程式ノ左邊ヲ $x-2$ ニテ割レバ

$$x^2-5x+4=0 \qquad \therefore\ (x-1)(x-4)=0$$

故ニ所要ノ根ハ 1, 2, 4 ナリ。

26. 一根ガ他ノ一根ノ 2 倍ニ等シキコトヲ知リテ $x^3-3x^2-10x+24=0$ ヲ解ケ。

〔解〕 一根ガ他ノ一根ノ 2 倍ニ等シキ故ニ三根ヲ α, 2α, β トスレバ

$$\alpha+2\alpha+\beta=3, \qquad 2\alpha^2+\alpha\beta+2\alpha\beta=-10$$

即チ $\beta=3(1-\alpha)$, $2\alpha^2+3\alpha\beta=-10$

$$\therefore\ 2\alpha^2+9\alpha(1-\alpha)=-10$$

$$\therefore\ 7\alpha^2-9\alpha-10=0 \qquad \therefore\ \alpha=2 \text{ 又ハ } -\frac{5}{7}$$

$$\alpha=2 \text{ ナラバ } \beta=-3, \qquad \alpha=-\frac{5}{7} \text{ ナラバ } \beta=\frac{36}{7}$$

然ルニ $2\alpha^2\beta=-24$ ナルヲ要スル故ニ $\alpha=2$, $\beta=-3$, 依ツテ所要ノ根ハ 2, 4, -3 ナリ, 或ハ又次ノ如クスルモ可シ,

所題ノ方程式ニ於テ $y=2x$ 即チ $x=\frac{y}{2}$ トオケバ

$$y^3-6y^2-40y+192=0$$

y ハ x ノ 2 倍ナル故ニ原方程式ト此方程式ハ共通ノ一根ヲ有ス, 即チ

$$x^3-3x^2-10x+24=0$$

$$x^3-6x^2-40x+192=0$$

ハ共通ノ一根ヲ有シ其共通根ガ原方程式ノ題意ニイフ處ノ一根ナリ, 然ルニ此兩方程式ノ左邊ノ最大公約數ヲ求ムレバ $x-4$, 故ニ原方程式ノ一根ハ 4 ナリ, 從ツテ他ノ一根ハ 2, 從ツテ殘ル一根ハ根ト係數トノ關係ヨリ -3 ナルヲ知ル。

27. 二根ノ積ガ 2 ニ等シキコトヲ知リテ $3x^4-20x^3+27x^2+26x-24=0$ ヲ解ケ。

〔解〕 四根ノ積ハ $\frac{-24}{3}=-8$ ナル故ニ他ノ二根ノ積ハ -4 ナリ, 故ニ

$$x^4-\frac{20}{3}x^3+9x^2+\frac{26}{3}x-8=(x^2+px+2)(x^2+qx-4)$$

トオキ x^3, 及 x ノ係數ヲ等シトオケバ

$$p+q=-\frac{20}{3}, \qquad -4p+2q=\frac{26}{3} \qquad \therefore\ p=-\frac{11}{3}, \qquad q=-3$$

$\therefore$ 所題ノ方程式ハ次ノ如クナル

$$3\left(x^2-\frac{11}{3}x+2\right)(x^2-3x-4)=0$$

$$\therefore\ (3x^2-11x+6)(x^2-3x-4)=0$$

$$\therefore\quad (3x-2)(x-3)(x-4)(x+1)=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{2}{3},\ 3,\ 4,\ -1,$$

28. 三根ガ調和級數ヲナスコトヲ知リテ $15x^3-13x^2-3x+1=0$ ヲ解ケ。

〔解〕 所題ノ方程式ニ於テ $y=\frac{1}{x}$ 即チ $x=\frac{1}{y}$ トオケバ

$$\frac{15}{y^3}-\frac{13}{y^2}-\frac{3}{y}+1=0$$

即チ $y^3-3y^2-13y+15=0$ (1)

(1) ハ原方程式ノ根ノ逆數ヲ根トスルガ故ニ (1) ノ三根ハ題意ニヨリ等差級數ヲナス，故ニ其中項ヲ α, 公差ヲ d トスレバ三根ハ $\alpha-d,\ \alpha,\ \alpha+d$ ニシテ

$$(\alpha-d)+\alpha+(\alpha+d)=3 \qquad \therefore\quad \alpha=1,$$

又 $(\alpha-d)\alpha(\alpha+d)=-15 \qquad \therefore\quad d=\pm 4$

故ニ (1) ノ三根ハ $-3,\ 1,\ 5$ ナリ，從ツテ原方程式ノ三根ハ $-\frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{5}$ ナリ。

29. 一根ガ他ノ一根ヨリ 2 ダケ大ナルコトヲ知リテ次ノ方程式ヲ解ケ,

$$x^3-4x^2-x+4=0 \qquad (1)$$

〔解〕 (1) ノ根ヲ 2 ダケ增スタメニ $y=x+2$ 即チ $x=y-2$ トオケバ

$$(y-2)^3-4(y-2)^2-(y-2)+4=0$$

即チ $y^3-10y^2+27y-18=0$ (2)

(1), (2) ハ共通ノ一根ヲ有シ其共通根ハ (1) ノ大ナル方ノ根ナリ．依ツテ

$$x^3-4x^2-x+4,\qquad x^3-10x^2+27x-18$$

ノ最大公約數ヲ求ムレバ $x-1$, 故ニ (1) ノ大ナル方ノ根ハ 1, 從ツテ小ナル方ノ根ハ -1, 從ツテ根ト係數トノ關係ヨリ殘ル一根ハ 4 ナルヲ知ル。

30. 第二項ヲ消去スルコトニ由ツテ次ノ方程式ヲ解ケ,

$$x^4-12x^3+49x^2-78x+40=0 \qquad (1)$$

〔解〕 第二項ヲ消去スルタメニ $x=y+m$ トオケバ

$$(y+m)^4-12(y+m)^3+49(y+m)^2-78(y+m)+40=0 \qquad (2)$$

第二項即チ y^3 ノ係數ヲ求ムレバ $4m-12$, 故ニ第二項ガ消失スルタメニハ

$$4m-12=0 \qquad \therefore\quad m=3,$$

故ニ (2) ハ次ノ如クナル

$$(y+3)^4-12(y+3)^3+49(y+3)^2-78(y+3)+40=0$$

整頓スレバ

$$y^4-5y^2+4=0,\qquad \therefore\quad y^2=1 \text{ 又ハ } 4 \qquad \therefore\quad y=\pm1,\ \pm2,$$

$$\therefore\quad x=y+m=y+3 \text{ ヨリ } x=1,\ 2,\ 4,\ 5,$$

31. 方程式 $x^n+npx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}qx^{n-2}+\ldots\ldots=0$ ノ根ガ等差級數ヲナストキハ各根ハ n ガ偶數ナルトキハ $k\sqrt{\frac{3(p^2-q)}{n+1}}-p$ ニ於テ $k=1,\ 3,\ 5,\ldots\ldots$ トオキタルモノニ等シク．n ガ奇數ナルトキハ $k=2,\ 4,\ 6,\ldots\ldots$ トオキタルモノニ等シキコトヲ証セヨ。

〔解〕 各根ヲ $a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots\ldots\ a+(n-1)d$ トスレバ基本定理 II ニヨリ

$$\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=-np,\qquad \therefore\quad d=-\frac{2(p+a)}{n-1},$$

又各二根ノ積ノ和ヲ P トスレバ

$$P=\frac{n(n-1)q}{2!}=\frac{1}{2}\{(-np)^2-[a^2+(a+d)^2+\ldots\ldots+(a+\overline{n-1}\,d)^2]\},$$

然ルニ $a^2+(a+d)^2+\ldots\ldots+(a+\overline{n-1}\,d)^2$

$$=na^2+2ad(1+2+3+\ldots\ldots+\overline{n-1})+d^2\{1^2+2^2+\ldots\ldots+(n-1)^2\}$$

$$=na^2+n(n-1)ad+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}d^2,$$

$$\therefore\quad n^2p^2-n(n-1)q=na^2+n(n-1)ad+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}d^2$$

$$=na^2-2n(p+a)a+\frac{2n(2n-1)(p+a)^2}{3(n-1)}$$

$$\therefore\quad np^2-(n-1)q=p^2-(p+a)^2+\frac{2(2n-1)(p+a)^2}{3(n-1)},$$

$$\therefore\quad (p+a)^2=\frac{3(n-1)^2(p^2-q)}{n+1},\qquad \therefore\quad p+a=\pm(n-1)\sqrt{\frac{3(p^2-q)}{n+1}},$$

$$\therefore\quad d=\mp 2\sqrt{\frac{3(p^2-q)}{n+1}},$$

今 $\sqrt{\frac{3(p^2-q)}{n+1}}=R$ トオキ $a=-p+(n-1)R,\ d=-2R$ トスレバ所要ノ根ハ

$-p+(n-1)R,\ \ -p+(n-3)R,\ \ -p+(n-5)R,\ \ldots\ldots$

ニシテ即チ n ガ偶數ナラバ $kR-p$ ニ於テ $k=1,\ 3,\ 5,\ldots\ldots$ トオキタルモノニ等シク n ガ奇數ナラバ $k=2,\ 4,\ 6,\ldots\ldots$ トオキタルモノニ等シ，

$a=-p-(n-1)R,\ d=2R$ ヲ取ルモ同樣ナリ。

32. **方程式 $x^3-3x-1=0$ ノ一根ヲ α トスレバ他ノ二根ハ $2-\alpha^2$，及ビ $\alpha^2-\alpha-2$ ナルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 題意ニヨリ $\alpha^3-3\alpha-1=0,\quad \therefore\ \alpha(\alpha^2-3)=1,\quad \therefore\ \alpha^2(\alpha^2-3)^2=1$

今 $\beta=2-\alpha^2$ トオケバ $\alpha^2=2-\beta,$

$$\therefore\ (2-\beta)\{(2-\beta)-3\}^2=1,\qquad \therefore\ (2-\beta)(1+\beta)^2=1.$$

$$\therefore\ \beta^3-3\beta-1=0,$$

故ニ β ハ又所題ノ方程式ノ一ツノ根ナリ，次ニ殘ル一根チ γ トスレバ

$$\alpha+\beta+\gamma=0\qquad \therefore\ \gamma=-\alpha-\beta=\alpha^2-\alpha-2,$$

33. **$x^4+px^3-6x^2-px+1=0$ ノ一根ガ α ナルトキハ他ノ三根ハ $-\frac{1}{\alpha}$，$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$，$\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ ナルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 $\alpha^4+p\alpha^3-6\alpha^2-p\alpha+1=0$ ニ於テ $\beta=-\frac{1}{\alpha}$ 即チ $\alpha=-\frac{1}{\beta}$ トオケバ

$$\frac{1}{\beta^4}-p\frac{1}{\beta^3}-6\frac{1}{\beta^2}+p\frac{1}{\beta}+1=0\qquad \therefore\ 1-p\beta-6\beta^2+p\beta^3+\beta^4=0$$

即チ β モ亦所題ノ方程式チ滿足セシム，

次ニ $\gamma=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$ 即チ $\alpha=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ トオケバ

$$\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^4+p\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^3-6\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^2-p\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)+1=0$$

$$\therefore\ (\gamma-1)^4+p(\gamma-1)^3(\gamma+1)-6(\gamma-1)^2(\gamma+1)^2-p(\gamma-1)(\gamma+1)^3+(\gamma+1)^4=0$$

$$\therefore\ \gamma^4+p\gamma^3-6\gamma^2-p\gamma+1=0$$

即チ γ モ亦所題ノ方程式ヲ滿足セシム，從ツテ又 $-\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ モ亦所題ノ方程式ノ根ナリ。

34. **$a,\ b,\ c,\ d$ ガ等シカラザル正數ニシテ $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ ガ方程式**

$$\frac{x}{x-a}+\frac{x}{x-b}+\frac{x}{x-c}+x+d=0$$

ノ根ナルトキ

$$\frac{a^2}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)}+\frac{b^2}{(b-\alpha)(b-\beta)(b-\gamma)(b-\delta)}$$
$$+\frac{c^2}{(c-\alpha)(c-\beta)(c-\gamma)(c-\delta)}=0$$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 所題ノ方程式ノ分母ヲ去レバ

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+d(x-a)(x-b)(x-c)+3x^3-2(a+b+c)x^2$$
$$+(bc+ca+ab)x=0$$

$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ ハ此方程式ノ根ナル故ニ上ノ左邊ハ x ノ如何ニ拘ラズ

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

ニ等シ，依ツテ $x=a$ トオケバ

$$3a^3-2(a+b+c)a^2+(bc+ca+ab)a=(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)$$

然ルニ此左邊ハ

$$a^3-a^2b-a^2c+abc=a(a-b)(a-c)$$

ニ等シ，故ニ

$$\frac{a^2}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)}=\frac{a}{(a-b)(a-c)}$$

同樣ニ

$$\frac{b^2}{(b-\alpha)(b-\beta)(b-\gamma)(b-\delta)}=\frac{b}{(b-c)(b-a)}$$

$$\frac{c^2}{(c-\alpha)(c-\beta)(c-\gamma)(c-\delta)}=\frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

$$\therefore\ \frac{a^2}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)}+\frac{b^2}{(b-\alpha)(b-\beta)(b-\gamma)(b-\delta)}$$
$$+\frac{c^2}{(c-\alpha)(c-\beta)(c+\gamma)(c-\delta)}$$

$$=\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{a(c-b)+b(a-c)+c(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0,$$

35. $a, b, c, \ldots\ldots; p, q, r\ldots\ldots,$ 及ビ n ガ皆實數ナルトキハ m ノ如何ニ係ラズ方程式

$$\frac{p^2}{x-a}+\frac{q^2}{x-b}+\frac{r^2}{x-c}+\ldots\ldots=m+n^2x$$

ノ根ハ總テ實數ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 β ヲ 0 ニ等シカラザル實數トシ $x=\alpha+\beta i$ ナル根ヲ有ストスレバ

$$\frac{p^2}{(\alpha-a)+\beta i}+\frac{q^2}{(\alpha-b)+\beta i}+\frac{r^2}{(\alpha-c)+\beta i}+\ldots\ldots=m+n^2(\alpha+\beta i)$$

從ツテ又基本定理 III ニヨリ

$$\frac{p^2}{(\alpha-a)-\beta i}+\frac{q^2}{(\alpha-b)-\beta i}+\frac{r^2}{(\alpha-c)-\beta i}+\ldots\ldots=m+n^2(\alpha-\beta i)$$

此兩式ヲ邊々相減ズレバ

$$2\beta i\left\{\frac{p^2}{(\alpha-a)^2+\beta^2}+\frac{q^2}{(\alpha-b)^2+\beta^2}+\frac{r^2}{(\alpha-c)^2+\beta^2}+\ldots\ldots+n^2\right\}=0$$

然ルニ $\beta\neq0$ ニシテ且ツ括弧內ハ正ニシテ 0 ニアラズ故ニ上ノ式ハ成立セズ，

依ツテ $\alpha+\beta i$ ナル根ヲ有セズ，從ツテ總テノ根ハ實數ナリ。

36. 次ノ方程式ノ根ハ總テ實數ナルコトヲ証セヨ，

$$x^n-\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^{n-4}-+\ldots\ldots=0, \qquad (1)$$

〔解〕 n ガ偶數ナルトキハ所題ノ方程式 (1) ハ次ノ如クナル

$$x^{2n}-\frac{2n(2n-1)}{2!}x^{2n-2}+\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{4!}x^{2n-4}-\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{2n(2n-1)\ldots\ldots4,3}{(2n-2)!}x^2+(-1)^n=0$$

即チ

$$1-\frac{2n(2n-1)}{2!}x^2+\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{4!}x^4-\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{2n(2n-1)\ldots\ldots4,3}{(2n-2)!}x^{2n-2}+(-1)^nx^{2n}=0$$

然ルニ

$$(1+x)^{2n}=1+2nx+\frac{2n(2n-1)}{2!}x^2+\ldots\ldots+x^{2n},$$

$$(1-x)^{2n}=1-2nx+\frac{2n(2n-1)}{2!}x^2-\ldots\ldots+x^{2n}$$

$$\therefore\ (1+x)^{2n}+(1-x)^{2n}=2\left\{1+\frac{2n(2n-1)}{2!}x^2\right.$$

$$\left.+\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{4!}x^4+\ldots\ldots+x^{2n}\right\}$$

$$\therefore\ (1+ix)^{2n}+(1-ix)^{2n}=2\left\{1-\frac{2n(2n-1)}{2!}x^2\right.$$

$$\left.+\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{4!}x^4-\ldots\ldots+(-1)^nx^{2n}\right\}$$

故ニ (1) ハ次ノ方程式ト等值ナリ

$$(1+ix)^{2n}+(1-ix)^{2n}=0 \qquad (2)$$

同樣ニ n ガ奇數ナルトキハ (1) ハ次ノ如クナル

$$x^{2n+1}-\frac{(2n+1)2n}{2!}x^{2n-1}+\frac{(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)}{4!}x^{2n-3}-\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{(2n+1)2n\ldots\ldots4}{(2n-2)!}x^3+(-1)^n(2n+1)x=0,$$

即チ

$$(2n+1)x-\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{3!}x^3+\frac{(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{5!}x^5$$

$$-\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(2n+1)2n\ldots\ldots3}{(2n-1)!}x^{2n-1}+(-1)^nx^{2n+1}=0,$$

故ニ n ガ奇數ナルトキハ上ト同樣ニ (1) ハ次ノ (3) ト等值ナリ，

$$(1+ix)^{2n+1}-(1-ix)^{2n+1}=0, \qquad (3)$$

依ツテ (2) 及ビ (3) ガ總テ實根ヲ有スルコトヲ証スレバヨシ，

今 α, β ヲ實數トシ (2) ニ $x=\alpha\pm\beta i$ ヲ代入スレバ

$$(1-\beta+\alpha i)^{2n}+(1+\beta-\alpha i)^{2n}=0,$$

$$(1+\beta+\alpha i)^{2n}+(1-\beta-\alpha i)^{2n}=0$$

$$\therefore\ \{(1-\beta)^2+\alpha^2\}^{2n}=\{(1+\beta)^2+\alpha^2\}^{2n} \qquad (4)$$

(4) ガ成立スルタメニハ $\beta=0$ ナラザルベカラザルコトハ容易ニ証明スルコトヲ得，即チ (2) ヲ滿足セシムル x ノ虛數根ナシ，

同樣ニ (3) ヲ滿足セシムル x ノ虛數根ナシ，

依ツテ所題ノ方程式 (1) ハ虛根ヲ有セズ。

或ハ又次ノ如ク考フルモ可ナリ，

De moivre ノ定理ニヨリ

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

$$=\cos^n\theta+in\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta-+\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \cos n\theta=\cos^n\theta-\frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-+\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \frac{\cos n\theta}{\sin^n\theta}=\cot^n\theta-\frac{n(n-1)}{2!}\cot^{n-2}\theta$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cot^{n-4}\theta-+\cdots\cdots$$

故ニ所題ノ方程式ニ於テ $x=\cot\theta$ トオケバ所題ノ方程式ハ

$$\frac{\cos n\theta}{\sin^n\theta}=0 \qquad (5)$$

トナル故ニ

$$\cos n\theta=0,\qquad \sin\theta\neq 0,\qquad \therefore\quad n\theta=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{2k\pi}{n}\pm\frac{\pi}{2n},\qquad k=0,\ 1,\ 2\ \cdots\cdots(n-1),$$

即チ θ ノ値ハ $2n$ 個アリ，然ルニ n ガ偶數ナラバ

$$\cot\left(\frac{2k\pi}{n}\pm\frac{\pi}{2n}\right)=\cot\left(\frac{2k'\pi}{n}\pm\frac{\pi}{2n}\right),\qquad k-k'=\frac{n}{2},$$

n ガ奇數ナラバ

$$\cot\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{\pi}{2n}\right)=\cot\left(\frac{2k'\pi}{n}-\frac{\pi}{2n}\right),\qquad k-k'=\frac{n-1}{2},$$

$$\cot\left(\frac{2k\pi}{n}-\frac{\pi}{2n}\right)=\cot\left(\frac{2k'\pi}{n}+\frac{\pi}{2n}\right),\qquad k-k'=\frac{n+1}{2},$$

故ニ (5) ヲ滿足セシムル θ ノ總テノ値ニツキ $\cot\theta$ ノ異ナル値ハ丁度 n 個アリ，從ツテ所題ノ方程式 (1) ハ n 個ノ實根ヲ有ス，從ツテ虛根ヲ有セズ。

37. **n 個ノ虛數 $a_1+b_1i,\ a_2+b_2i,\ \cdots\cdots a_n+b_ni$ ニ於テ $b_1,\ b_2,\cdots\cdots b_n$ ガ同符號ニシテ且ツ**

$$(x-\overline{a_1+b_1i})(x-\overline{a_2+b_2i})\cdots\cdots(x-\overline{a_n+b_ni})=f(x)+i\varphi(x)$$

トスレバ方程式 $f(x)+k\varphi(x)=0$ ハ實根ノミヲ有スルコトヲ証セヨ，但シ k ハ任意ノ實數ナリ。

〔解〕 $f(x)+i\varphi(x)=(x-\overline{a_1+b_1i})(x-\overline{a_2+b_2i})\cdots\cdots(x-\overline{a_n+b_ni})$

i ノ符號ヲ變ズレバ

$$f(x)-i\varphi(x)=(x-\overline{a_1-b_1i})(x-\overline{a_2-b_2i})\cdots\cdots(x-\overline{a_n-b_ni})$$

然ルニ k ヲ任意ノ實數トスレバ

$$(1-ki)(f(x)+i\varphi(x))+(1+ki)(f(x)-i\varphi(x))=2(f(x)+k\varphi(x))$$

$$\therefore\quad f(x)+k\varphi(x)=\frac{1-ki}{2}\{f(x)+i\varphi(x)\}+\frac{1+ki}{2}\{f(x)-i\varphi(x)\}$$

$$=\frac{1-ki}{2}(x-\overline{a_1+b_1i})(x-\overline{a_2+b_2i})\cdots\cdots(x-\overline{a_n+b_ni})$$

$$+\frac{1+ki}{2}(x-\overline{a_1-b_1i})(x-\overline{a_2-b_2i})\cdots\cdots(x-\overline{a_n-b_ni})$$

今 $f(x)+k\varphi(x)=0$ ガ $x=\alpha+\beta i$ ナル虛根ヲ有ストスレバ

$$\frac{1-ki}{2}\{\alpha-a_1+i(\beta-b_1)\}\{\alpha-a_2+i(\beta-b_2)\}\cdots\cdots\{\alpha-a_n+i(\beta-b_n)\}$$

$$+\frac{1+ki}{2}\{\alpha-a_1+i(\beta+b_1)\}\{\alpha-a_2+i(\beta+b_2)\}\cdots\cdots\{\alpha-a_n+i(\beta+b_n)\}=0$$

即チ $$(1-ki)\{\alpha-a_1+i(\beta-b_1)\}\{\alpha-a_2+i(\beta-b_2)\}\cdots\cdots\{\alpha-a_n+i(\beta-b_n)\}$$

$$=-(1+ki)\{\alpha-a_1+i(\beta+b_1)\}\{\alpha-a_2+i(\beta+b_2)\}\cdots\cdots\{\alpha-a_n+i(\beta+b_n)\},$$

ナラザルベカラズ，兩邊ノ絕對値ヲ求ムレバ

$$\{(\alpha-a_1)^2+(\beta-b_1)^2\}\{(\alpha-a_2)^2+(\beta-b_2)^2\}\cdots\cdots\{(\alpha-a_n)^2+(\beta-b_n)^2\}$$

$$=\{(\alpha-a_1)^2+(\beta+b_1)^2\}\{(\alpha-a_2)^2+(\beta+b_2)^2\}\cdots\cdots\{(\alpha-a_n)^2+(\beta+b_n)^2\},$$

然ルニ $b_1\ b_2\cdots\cdots b_n$ ハ同符號ナル故ニ $\beta\neq 0$ ナル限リ m ノ如何ニ係ラズ

$$(\beta-b_m)^2>(\beta+b_m)^2$$

ナルカ，或ハ $(\beta-b_m)^2<(\beta+b_m)^2$

ナリ，從ツテ m ノ如何ニ係ラズ

$$(\alpha-a_m)^2+(\beta-b_m)^2>(\alpha-a_m)^2+(\beta+b_m)^2$$

ナルカ，或ハ $(\alpha-a_m)^2+(\beta-b_m)^2<(\alpha-a_m)^2+(\beta+b_m)^2$

ナリ，何レニシテモ $\beta\neq0$ ナル限リ上ノ等式ハ成立セズ即チ $f(x)+k\varphi(x)=0$ ハ虚根ヲ有スルコト能ハズ。

38. **有理整方程式 $p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_n=0$ ノ總テノ根ノ絶對値ハ $1,\ \left|\dfrac{p_1}{p_0}\right|,\ \left|\dfrac{p_2}{p_0}\right|,\ldots\ldots\ldots\left|\dfrac{p_n}{p_0}\right|$ 中ノ最大ノモノニ 1 ヲ加ヘタルモノヨリ小ナルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 任意ノ一根ヲ α トスレバ

$$p_0\alpha^n+p_1\alpha^{n-1}+\ldots\ldots+p_n=0.$$

$$\therefore\ \alpha^n=-\frac{p_1}{p_0}\alpha^{n-1}-\frac{p_2}{p_0}\alpha^{n-2}-\ldots\ldots-\frac{p_{n-1}}{p_0}\alpha-\frac{p_n}{p_0}$$

$$\therefore\ |\alpha|^n=\left|-\frac{p_1}{p_0}\alpha^{n-1}-\ldots\ldots-\frac{p_{n-1}}{p_0}\alpha-\frac{p_n}{p_0}\right|$$

$$\leqq\left|\frac{p_1}{p_0}\right|\cdot|\alpha|^{n-1}+\left|\frac{p_2}{p_0}\right|\cdot|\alpha|^{n-2}+\ldots\ldots+\left|\frac{p_{n-1}}{p_0}\right||\alpha|+\left|\frac{p_n}{p_0}\right|$$

今 $1,\left|\dfrac{p_1}{p_0}\right|,\left|\dfrac{p_2}{p_0}\right|,\ldots\ldots\ldots\left|\dfrac{p_n}{p_0}\right|$ 中ノ最大ノモノヲ P トスレバ

$$|\alpha|^n\leqq P\left\{|\alpha|^{n-1}+|\alpha|^{n-2}+\ldots\ldots+|\alpha|+1\right\}=\frac{P(|\alpha|^n-1)}{|\alpha|-1}$$

若シ $|\alpha|\leqq1$ ナラバ $|\alpha|$ ハ當然 $P+1$ ヨリ小ニシテ本題ハ成立スル故ニ $|\alpha|>1$ ナル場合ヲ考フルニ此場合ニハ上ノ不等式ヨリ

$$|\alpha|^n<\frac{P|\alpha|^n}{|\alpha|-1}\qquad\therefore\ 1<\frac{P}{|\alpha|-1}\qquad\therefore\ |\alpha|<P+1.$$

即チ任意ノ根ノ絶對値ハ $P+1$ ヨリ小ナリ。

39. **方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_n=0$ ニ於テ絶對値ノ最大ナル負ノ係數ヲ $-P$ トスレバ此方程式ノ正根ハ $P+1$ ヨリ小ナルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 $x>0$ ナルトキハ $x^n,\ x^{n-1},\ \ldots\ldots x$ ハ皆正ナル故ニ

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n\geqq x^n-P(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots\ldots+x+1)$$

然ルニ $x^n-P(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots\ldots+x+1)=x^n-\dfrac{P(x^n-1)}{x-1}$

$$=\frac{x^{n+1}-(P+1)x^n+P}{x-1}$$

若シ $x\geqq P+1$ ナラバコノ兩邊ニ x^n ヲ乘ズレバ $x^{n+1}\geqq(P+1)x^n$

$$\therefore\ x^{n+1}-(P+1)x^n\geqq0$$

$$\therefore\ x^{n+1}-(P+1)x^n+P>0$$

$$\therefore\ \frac{x^{n+1}-(P+1)x^n+P}{x-1}>0$$

$$\therefore\ x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n>0$$

即チ $P+1$ ヨリ小ナラザル x ノ値ニ對シテ所題ノ方程式ノ左邊ハ常ニ正ニシテ 0 トナラズ，依ツテ所題ノ方程式ニ正根アリトスレバソレハ $P+1$ ヨリ小ナラザルベカラズ。

40. **方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_n=0$ ニ於テ**

$$p_1>0\ \ p_2>0,\ \ldots\ldots p_{r-1}>0,\ \ p_r<0$$

ニシテ絶對値ノ最大ナル負ノ係數ヲ $-P$ トスレバ此方程式ノ正根ハ $\sqrt[r]{P}+1$ ヨリ小ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 前問ト同様ニ $x>0$ ナルトキハ

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n>x^n-P(x^{n-r}+x^{n-r-1}+\ldots\ldots+x+1)$$

然ルニ $x^n-P(x^{n-r}+x^{n-r-1}+\ldots\ldots+x+1)=x^n-\dfrac{P(x^{n-r+1}-1)}{x-1}$

若シ $x\geqq\sqrt[r]{P}+1$ ナラバ

$$(x-1)^r\geqq P,\qquad\therefore\ (x-1)^{r-1}(x^{n-r+1}-1)\geqq\frac{P(x^{n-r+1}-1)}{x-1}$$

然ルニ $(x-1)^{r-1}(x^{n-r+1}-1)<x^{r-1}(x^{n-r+1}-1)=x^n-x^{r-1}$

$$\therefore\ x^n-x^{r-1}>\frac{P(x^{n-r+1}-1)}{x-1}$$

$$\therefore\ x^n-\frac{P(x^{n-r+1}-1)}{x-1}>x^{r-1}>0,$$

$$\therefore\ x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n>0$$

即チ $\sqrt[r]{P}+1$ ヨリ小ナラザル x ノ値ニ對シテ所題ノ方程式ノ左邊ハ常ニ正ニシテ 0 トナラズ，依ツテ正根アリトスレバソレハ $\sqrt[r]{P}+1$ ヨリ小ナラザルベカラズ。

41. **$p_0=1$ ニシテ且ツ $p_1, p_2 \cdots\cdots p_n$ ガ皆整數ナル有理整方程式**

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n=0$$

ノ有理數ノ根ハ皆整數ニシテ而モ p_n ノ因數ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 今 $\dfrac{h}{k}$ ヲ既約分數トシ $x=\dfrac{h}{k}$ トオケバ

$$p_0\left(\frac{h}{k}\right)^n+p_1\left(\frac{h}{k}\right)^{n-1}+\cdots\cdots+p_{n-1}\left(\frac{h}{k}\right)+p_n=0$$

然ルニ $p_0=1$,

$$\therefore\ -\left(\frac{h}{k}\right)^n=p_1\left(\frac{h}{k}\right)^{n-1}+p_2\left(\frac{h}{k}\right)^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}\left(\frac{h}{k}\right)+p_n$$

$$\therefore\ -\frac{h^n}{k}=p_1h^{n-1}+p_2h^{n-2}k+\cdots\cdots+p_{n-1}hk^{n-2}+p_nk^{n-1}$$

右邊ハ整數ナル故ニ左邊モ亦整數ナラザルベカラズ，然ルニ h, k ハ公約數ヲ有セズ，故ニ $k=1$ ナラザルベカラズ，即チ有理數ノ根ガアラバソレハ整數ナラザルベカラズ，次ニ $k=1$ ナル故ニ

$$h^n+p_1h^{n-1}+p_2h^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}h+p_n=0$$

$$\therefore\ h^{n-1}+p_1h^{n-2}+p_2h^{n-3}+\cdots\cdots+p_{n-1}=-\frac{p_n}{h}$$

左邊ハ整數ナル故ニ右邊モ整數ナラザルベカラズ，即チ h ハ p_n ノ因數ナラザルベカラズ。

（注意） p_0 ガ 1 ナラザル整數ナル場合ニモ若シ整數根ガアラバ其根ハ p_n ノ因數ナルコトハ上ノ證明ヨリ明カナリ。

42. **$x^4-2x^3-13x^2+38x-24=0$ ヲ解ケ。**

〔解〕 若シ有理根アリトスレバ 24 ノ因數 1, 2, 3, 4, 6, 12, 24 ノ中ナリ，依ツテ簡單ナルモノヨリ實際試メシヲ行フコトニ由ツテ $x=1$, 及ビ 2 ハ其根ナルヲ知ル，依ツテ殘ル二根ヲ α, β トスレバ根ト係數トノ關係ヨリ

$$1+2+\alpha+\beta=2, \qquad 1\cdot2\cdot\alpha\beta=-24$$

即チ　$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-12 \qquad \therefore\ \alpha=3,\ \beta=-4$

故ニ所題ノ方程式ノ根ハ　1, 2, 3, -4 ナリ。

43. **$x^3-11x-20=0$ ノ虚數根ヲ求メヨ。**

〔解〕 $x=\alpha+\beta i$ トオケバ

$$(\alpha+\beta i)^3-11(\alpha+\beta i)-20=0$$

即チ　$\alpha^3-3\alpha\beta^2-11\alpha-20+i(3\alpha^2\beta-\beta^3-11\beta)=0$

$$\therefore\ \alpha^3-3\alpha\beta^2-11\alpha-20=0 \qquad (1)$$

$$3\alpha^2\beta-\beta^3-11\beta=0 \qquad (2)$$

$\beta\neq0$ ナル故ニ (2) ヨリ

$$\beta^2=3\alpha^2-11$$

(1) ニ代入スレバ　$\alpha^3-3\alpha(3\alpha^2-11)-11\alpha-20=0$

$$\therefore\ 4\alpha^3-11\alpha+10=0 \qquad (3)$$

(3) ガ整數ノ根ヲ有スレバソレハ 10 ノ約數 1, 2, 5, 10 ノ何レカナル故ニ簡單ナルモノヨリ試メシヲ行ヒ $\alpha=-2$ ヲ得，從ツテ

$$\beta^2=1 \qquad \therefore\ \beta=\pm1,$$

故ニ所要ノ虚根ハ次ノ二ツナリ，　$-2\pm i$,

44. **聯立方程式 $x+y+z=6$, $x^2+y^2+z^2=14$, $x^3+y^3+z^3=36$ ヲ解ケ。**

〔解〕 $14=x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=6^2-2(xy+yz+zx)$

$$\therefore\ xy+yz+zx=11,$$

又　$36=x^3+y^3+z^3=x^3+y^3+z^3-3xyz+3xyz$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz=6(14-11)+3xyz=18+3xyz$$

$$\therefore\ xyz=6,$$

故ニ x, y, z ハ三次方程式

$$t^3-6t^2+11t-6=0$$

ノ三根ニ等シ，6 ノ因數ハ 1, 2, 3, 6 ナル故ニ實際試メシヲ行ツテ $t=1, 2$, 從ツテ 3 ヲ得，依ツテ所要ノ根ハ次ノ 6 組ナリ。

$$\left.\begin{array}{l}x=1\\y=2\\z=3\end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{c}1\\3\\2\end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{c}2\\1\\3\end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{c}2\\3\\1\end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{c}3\\1\\2\end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{c}3\\2\\1\end{array}\right)$$

45. **有理整方程式 $f(x)=0$ ノ係數ガ皆整數ニシテ且ツ $f(0)$ 及ビ $f(1)$ ガ共ニ奇數ナラバ此方程式ハ整數ノ根ヲ有シ得ザルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 $f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$

トスレバ　$f(0)=p_n,\quad f(1)=p_0+p_1+\ldots\ldots+p_{n-1}+p_n$

ガ共ニ奇數ナル故ニ

$$p_0+p_1+\ldots\ldots+p_{n-1}=\text{偶數},$$

故ニ $p_0,\ p_1,\ldots\ldots p_{n-1}$ 中ノ奇數ハ偶數個ナリ，

次ニ各係數ハ整數ナル故ニ若シ $f(x)=0$ ガ整數根 h ヲ有ストスレバ h ハ p_n ノ因數ニシテ(問. 41) p_n ハ奇數ナル故ニ h モ亦奇數ナリ，從ツテ $h^n,\ h^{n-1},\ldots\ldots h$ ハ皆奇數ナリ，故ニ又 p_kh^{n-k} ハ p_k ガ奇數ナラバ奇數ニシテ p_k ガ偶數ナラバ偶數ナリ，故ニ

$$p_0h^n\quad p_1h^{n-1},\quad\ldots\ldots p_{n-1}h$$

ノ中ノ奇數ノ個數ハ

$$p_0,\quad p_1,\quad\ldots\ldots p_{n-1}$$

中ノ奇數ノ個數ニ等シ，然ルニ後者ノ數ハ偶數個ナリ，從ツテ前者ノ奇數ノ個數モ偶數ナリ，故ニ

$$p_0h^n+p_1h^{n-1}+\ldots\ldots+p_{n-1}h$$

ハ偶數ナリ，而シテ p_n ハ奇數ナリ，故ニ $p_0h^n+p_1h^{n-1}+\ldots\ldots+p_{n-1}h+p_n\neq0,$

即チ $f(x)=0$ ハ整數根ヲ有スルコト能ハズ。

46. **$p_0x^n+p_1x^{n-1}+\ldots\ldots p_{n-1}x+p_n=0$ ガ逆數方程式ナルトキハ**

$$\boldsymbol{p_0=p_n,\quad p_1=p_{n-1},\quad p_2=p_{n-2},\ \ldots\ldots}$$

ナルカ，或ハ

$$\boldsymbol{p_0=-p_n,\quad p_1=-p_{n-1},\quad p_2=-p_{n-2},\ \ldots\ldots}$$

ナルコトヲ證セヨ。

〔解〕 逆數方程式トハ任意ノ一根ノ逆數ガ又其方程式ノ根トナルモノナル故ニ所題ノ方程式 $p_0x^n+p_1x^{n-1}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$　　(1)

ガ逆數方程式ナルトキハ任意ノ一根 x ニ對シテ又 $\dfrac{1}{x}$ ナル根ヲ有セザルベカラズ，即 (1) ノ根ノ逆數ヲ根トスル方程式ハ (1) ソノモノナラザルベカラズ，然ルニ (1) ノ根ノ逆數ヲ根トスル方程式ハ問. 13 ニヨリ

$$p_0\left(\frac{1}{x}\right)^n+p_1\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}+\ldots\ldots+p_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)+p_n=0$$

即チ　$p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots+p_1x+p_0=0$　　(2)

(1), (2) ガ同ジ根ヲ有スル方程式ナルタメニハ

$$\frac{p_0}{p_n}=\frac{p_1}{p_{n-1}}=\frac{p_2}{p_{n-2}}=\ldots\ldots=\frac{p_{n-1}}{p_1}=\frac{p_n}{p_0}\qquad(3)$$

ナラザルベカラズ，即チ

$$p_0^2=p_n^2,\quad p_1^2=p_{n-1}^2,\quad p_2^2=p_{n-2}^2,\ \ldots\ldots$$

$$\therefore\quad p_0=\pm p_n,\quad p_1=\pm p_{n-1},\quad p_2=\pm p_{n-2},\ \ldots\ldots$$

若シ $p_0=p_n$ ナラバ (3) ヨリ

$$p_0=p_n,\quad p_1=p_{n-1},\quad p_2=p_{n-2},\ \ldots\ldots\qquad(4)$$

$p_0=-p_n$ ナラバ

$$p_0=-p_n,\quad p_1=-p_{n-1},\quad p_2=-p_{n-2},\ \ldots\ldots\qquad(5)$$

逆ニ (4) 或ハ (5) ガ成立スルトキハ (3) ハ成立シ，從ツテ方程式 (2) 及ビ (1) ハ同ジ根ヲ有スルコトヽナル故ニ (1) ハ逆數方程式トナル。

47. **逆數方程式ノ解法ハ常ニ　$p_0x^{2n}+p_1x^{2n-1}+\ldots\ldots+p_2x^2+p_1x+p_0=0$ ノ解法ニ歸シ得ベキコトヲ證セヨ。**

〔解〕 前問ニヨリ總テノ逆數方程式ハ次ノ四種ニ分類セラル

$$p_0x^{2n}+p_1x^{2n-1}+\ldots\ldots+p_{n-1}x^{n+1}+p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots+p_1x+p_0=0\qquad(A)$$

$$p_0x^{2n+1}+p_1x^{2n}+\ldots\ldots+p_nx^{n+1}+p_nx^n+\ldots\ldots+p_1x+p_0=0\qquad(B)$$

$$p_0x^{2n+1}+p_1x^{2n}+\ldots\ldots+p_nx^{n+1}-p_nx^n-\ldots\ldots-p_1x-p_0=0\qquad(C)$$

$$p_0x^{2n}+p_1x^{2n-1}+\ldots\ldots+p_{n-1}x^{n+1}-p_{n-1}x^{n-1}-\ldots\ldots-p_1x-p_0=0\qquad(D)$$

(B) ハ -1 ナル根ヲ有スルコト明カニシテ -1 ハソレ自身ノ逆數ナル故ニ (B) ノ左邊ヲ $x+1$ ニテ割リタル方程式ハ矢張リ逆數方程式ニシテ且ツ其第一項ハ p_0x^{2n}, 最後ノ項ハ $+p_0$ トナル 故ニ (A) 類ノモノトナル，

(C) ハ 1 ナル根ヲ有スルコト明カニシテ 1 ハソレ自身ノ逆數ナル故ニ (C) ノ左邊ヲ $x-1$ ニテ割リタル方程式ハ矢張リ逆數方程式ニシテ且ツ其第一項ハ p_0x^{2n}, 最後ノ項ハ $+p_0$ トナル故ニ矢張リ又 (A) 類ノモノトナル, 最後ニ (D) ハ

$$p_0(x^{2n}-1)+p_1x(x^{2n-2}-1)+\ldots\ldots+p_{n-1}x^{n-1}(x^2-1)=0$$

ナル故ニ $x^2=1$ 即チ ±1 ナル根ヲ有ス, 依ツテ (D) ノ左邊ヲ x^2-1 ニテ割リタル方程式ハ又逆數方程式ニシテ且ツ其第一項ハ p_0x^{2n-2}, 最後ノ項ハ $+p_0$ トナル故ニ矢張リ又 (A) 類ノモノトナル

以上ニ由ツテ總テノ逆數方程式ノ解法ハ結局 (A) 類ノ解法ニ歸スルコトヲ知ル。

48. 前問 (A) 類ノ逆數方程式ハ $x+\dfrac{1}{x}=y$ トオクコトニ由ツテ其次數ヲ半減シ得ルコトヲ証セヨ。

〔解〕 (A) 類ノ逆數方程式ノ各項ハ中央項 p_nx^n ノ外ハ皆前後一對ヲナス故ニ x^n ニテ割リテ各一對ヲ一纏メニスレバ

$$p_0\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+p_1\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)+\ldots\ldots+p_{n-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)+p_n=0$$

茲ニ於テ $x+\dfrac{1}{x}=y$ トオケバ

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2,$$

今一般ニ $x^k+\dfrac{1}{x^k}=Y_k$ トオケバ

$$yY_{k-1}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right)=x^k+x^{-k}+x^{k-2}+\frac{1}{x^{k-2}}=Y_k+Y_{k-2}$$

$$\therefore\quad Y_k=yY_{k-1}-Y_{k-2},$$

故ニ若シ Y_{k-1}, Y_{k-2} ガソレゾレ y ニツキ $(k-1)$ 次及ビ $(k-2)$ 次ナラバ Y_k ハ y ニツキ k 次トナル, 然ルニ $Y_1=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=y$, $Y_2=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=y^2-2$ ハ夫々 y ニツキ 1 次及ビ 2 次ナリ, 依ツテ Y_k ハ y ニツキ k 次ナリ, 從ツテ $x^n+\dfrac{1}{x^n}=Y_n$ ハ y ニツキ n 次ナリ, 即チ原方程式ハ $x+\dfrac{1}{x}=y$ トオクコトニ由ツテ y ノ n 次方程式トナル即チ次數ガ半分ニ低下ス。

49. 方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$ ノ根ヲ $\alpha_1\ \alpha_2\ldots\ldots\alpha_n$ トスレバ

$$(1-p_2+p_4-+\ldots\ldots)^2+(p_1-p_3+p_5-+\ldots\ldots)^2=(1+\alpha_1^2)(1+\alpha_2^2)\ldots\ldots(1+\alpha_n^2)$$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 $x^n+p_1x^{n-1}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_n)$

$$\therefore\quad 1+\frac{p_1}{x}+\frac{p_2}{x^2}+\frac{p_3}{x^3}+\ldots\ldots+\frac{p_n}{x^n}=\left(1-\frac{\alpha_1}{x}\right)\left(1-\frac{\alpha_2}{x}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{\alpha_n}{x}\right)$$

$x=i$ トオケバ

$$1+\frac{p_1}{i}+\frac{p_2}{i^2}+\frac{p_3}{i^3}+\frac{p_4}{i^4}+\ldots\ldots=\left(1-\frac{\alpha_1}{i}\right)\left(1-\frac{\alpha_2}{i}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{\alpha_n}{i}\right)$$

$$\therefore\quad 1-ip_1-p_2+ip_3+p_4-ip_5-p_6+\ldots\ldots=\left(1-\frac{\alpha_1}{i}\right)\left(1-\frac{\alpha_2}{i}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{\alpha_n}{i}\right)$$

$$\therefore\quad (1-p_2+p_4-p_6+\ldots\ldots)-i(p_1-p_3+p_5\ldots\ldots)$$

$$=\left(1-\frac{\alpha_1}{i}\right)\left(1-\frac{\alpha_2}{i}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{\alpha_n}{i}\right)$$

同樣ニ $x=-i$ トオケバ

$$(1-p_2+p_4-p_6+\ldots\ldots)+i(p_1-p_3+p_5\ldots\ldots)$$

$$=\left(1+\frac{\alpha_1}{i}\right)\left(1+\frac{\alpha_2}{i}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{\alpha_n}{i}\right)$$

$$\therefore\quad (1-p_2+p_4-+\ldots\ldots)^2+(p_1-p_3+p_5\ldots\ldots)^2=(1+\alpha_1^2)(1+\alpha_2^2)\ldots\ldots(1+\alpha_n^2),$$

50. 同上, $A=1+p_3+p_6+\ldots\ldots$, $B=p_1+p_4+p_7+\ldots\ldots$, $C=p_2+p_5+p_8+\ldots\ldots$ トスレバ $A^3+B^3+C^3-3ABC=(1-\alpha_1^3)(1-\alpha_2^3)\ldots\ldots(1-\alpha_n^3)$ ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_n)$

$x=1$ トオケバ

$$A+B+C=(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots\ldots(1-\alpha_n)\qquad(1)$$

次ニ 1 ノ立方根ノ虚數ヲ ω トシ $x=\dfrac{1}{\omega}$ トオケバ

$$\frac{1}{\omega^n}+\frac{p_1}{\omega^{n-1}}+\frac{p_2}{\omega^{n-2}}+\frac{p_3}{\omega^{n-3}}+\frac{p_4}{\omega^{n-4}}+\ldots\ldots$$

$$=\left(\frac{1}{\omega}-\alpha_1\right)\left(\frac{1}{\omega}-\alpha_2\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{\omega}-\alpha_n\right)$$

$$\therefore\quad 1+\omega p_1+\omega^2 p_2+p_3+\omega p_4+\omega^2 p_5+\ldots\ldots=(1-\omega\alpha_1)(1-\omega\alpha_2)\ldots\ldots(1-\omega\alpha_n)$$

$$\therefore\quad A+\omega B+\omega^2 C=(1-\omega\alpha_1)(1-\omega\alpha_2)\ldots\ldots(1-\omega\alpha_n) \qquad (2)$$

同様＝ $x=\dfrac{1}{\omega^2}$ トオケバ

$$A+\omega^2 B+\omega C=(1-\omega^2\alpha_1)(1-\omega^2\alpha_2)\ldots\ldots(1-\omega^2\alpha_n) \qquad (3)$$

(1), (2), (3) ヲ邊々相乘ズレバ

$$A^3+B^3+C^3-3ABC=(1-\alpha_1^3)(1-\alpha_2^3)\ldots\ldots(1-\alpha_n^3),$$

51. 三次方程式 $x^3+px+q=0$ ヲ解ケ。

〔解〕 今 $x=u+v$ トオケバ

$$x^3=u^3+v^3+3uv(u+v),\quad px=p(u+v),$$

$$\therefore\quad u^3+v^3+3uv(u+v)+p(u+v)+q=0$$

$$\therefore\quad u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0,$$

茲ニ於テ $3uv+p=0$ トスレバ上ノ方程式ハ $u^3+v^3+q=0$ トナル，即チ $u+v$ ガ所題ノ方程式ノ根ナルタメニハ

$$3uv+p=0 \qquad (1)$$

$$u^3+v^3+q=0 \qquad (2)$$

ナラザルベカラズ，逆ニ (1), (2) ヲ滿足セシムル u, v ノ値ニ對シ $u+v$ ハ所題ノ方程式ノ根トナルヤ明カナリ，(1), (2) ヨリ

$$u^3v^3=-\frac{p^3}{27},\qquad u^3+v^3=-q$$

$$\therefore\quad u^3-v^3=\pm\sqrt{(u^3+v^3)^2-4u^3v^3}=\pm\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}$$

右邊ノ ± ハ只 u, v ヲ交換セシムルノミニシテ $u+v$ ニハ無關係ナル故ニ

$$u^3-v^3=\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}$$

トスルコトヲ得，然ルトキハ (2) ヨリ

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\qquad v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

コレヨリ (1) ヲ滿足セシムル u, v ノ値即チ積ガ實數トナル u, v ノ値ヲ定ムレバ $u+v$ ハ所要ノ根ナリ，然ルニ

1. $\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}>0$ ナルトキハ u^3, v^3 ハ實數ナル故ニ

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},\qquad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

トシ，且ツ 1 ノ立方根ノ虚數ヲ ω トスレバ

$$x=u+v,\qquad x=\omega u+\omega^2 v,\qquad x=\omega^2 u+\omega v$$

ハ所要ノ三根ニシテ其中一ツハ實數他ノ二ツハ複素數ナリ。

2. $\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}=0$ ナルトキ u^3, v^3 ハ實數ナル故ニ $u=v=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}}$ トスレバ

$$x=2u,\qquad x=(\omega+\omega^2)u=-u,\qquad x=(\omega^2+\omega)u=-u$$

ガ所要ノ三根ニシテ，三根トモ實數ニシテ其中二根相等シ。

3. $\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}<0$ ナルトキハ u^3, v^3 ハ共軛複素數トナル故ニ今ソレヲ $r(\cos\theta\pm i\sin\theta)$ ニテ表ハセバ

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=r(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$\therefore\quad u=r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}\right),\quad r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{3}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{3}\right),$$

$$r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+4\pi}{3}+i\sin\frac{\theta+4\pi}{3}\right),$$

$$v=r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3}-i\sin\frac{\theta}{3}\right),\quad r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{3}-i\sin\frac{\theta+2\pi}{3}\right),$$

$$r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+4\pi}{3}-i\sin\frac{\theta+4\pi}{3}\right),$$

コノ中積ガ實數トナルモノヲ取リテ加フレバ所要ノ三根トシテ

$$x=2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta}{3},\qquad x=2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+2\pi}{3},\qquad x=2r^{\frac{1}{3}}\frac{\theta+4\pi}{3},$$

ヲ得，即チ此場合ニハ三根トモ實數ニシテ而モ不等ナリ。

52. 三次方程式 $x^3+px+q=0$ ノ判別式ヲ作リコレニ由ツテ根ノ性質ヲ判別スル方法ヲ述ベヨ，但シ p, q ヲ實數トス。

〔解〕 方程式ノ判別式トハ其方程式ノアラユル二根ノ差ノ平方ノ積ナルガ故ニ所要ノ判別式ヲ D トシ三根ヲ α, β, γ トスレバ

$D=(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2,$

然ルニ所題ノ方程式ニ於テハ

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\qquad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p,$$

$$\therefore\ (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-4\{p-\gamma(\alpha+\beta)\}=\gamma^2-4(p+\gamma^2)$$

$$=-3\left(\gamma^2+\frac{4}{3}p\right)$$

同樣ニ　$(\beta-\gamma)^2=-3\left(\alpha^2+\frac{4}{3}p\right),\qquad (\gamma-\alpha)^2=-3\left(\beta^2+\frac{4}{3}p\right)$

$$\therefore\ D=-27\left(\gamma^2+\frac{4}{3}p\right)\left(\alpha^2+\frac{4}{3}p\right)\left(\beta^2+\frac{4}{3}p\right)$$

$$=-27\left\{\alpha^2\beta^2\gamma^2+\frac{4}{3}p(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)+\frac{16}{9}p^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+\frac{64}{27}p^3\right\}$$

然ルニ　$\alpha^2\beta^2\gamma^2=q^2,\qquad \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=p^2$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=-2p$$

$$\therefore\ D=-27\left\{q^2+\frac{4}{3}p^3-\frac{32}{9}p^3+\frac{64}{27}p^3\right\}=-27\left(q^2+\frac{4}{27}p^3\right)$$

$$=-(4p^3+27q^2)$$

次ニ判別式ニ由ツテ根ノ性質ヲ判定スル方法ヲ考フルニ係數ガ實數ナル方程式ノ虛數根ハ常ニ一對ヲナス故ニ $p,\ q$ ガ實數ナル場合ノ三次方程式ノ根ハ

(1)　三根皆實數ニシテ其中少クトモ二ツガ相等シキカ

(2)　三根皆實數ニシテ悉ク相等シカラザルカ

(3)　一根實數ニシテ他ノ二根ハ互ニ共軛ナル虛數ナルカ

ノ三ツノ場合ニ限ル，(1) ノ場合ニハ明カニ $D=0$，(2) ノ場合ニハ $D>0$，(3) ノ場合ニハ $\alpha=a,\ \beta=b+ci,\ \gamma=b-ci$ トスレバ

$$D=(a-b-ci)^2(2ci)^2(b-a-ci)^2=-4c^2(a-b-ci)^2(a-b+ci)^2$$

$$=-4c^2\{(a-b)^2+c^2\}^2<0$$

此假設ハ總テノ場合ヲ盡シ終結ハ互ニ相容レズ依ツテ其逆モ亦眞ナリ，即チ

$D=0$ ナラバ三根ノ中少クモ二根相等シク

$D>0$ ナラバ三根實數ニシテ皆等シカラズ

$D<0$ ナラバ二根虛數一根實數ナリ。

（注意）若シ初メノ方程式ガ $x^3+px^2+qx+r=0$ ナラバ

$$D=18pqr+p^2q^2-4p^3r-4q^3-27r^2,$$

53.　四次方程式　$x^4+px^2+qx+r=0$　ヲ解ケ。

〔解〕今　$2x=u+v+w,\quad s=u^2+v^2+w^2,\quad t=u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2$　トオク，

然ルトキハ　$4x^2=s+2(uv+vw+wu)$

$$\therefore\ 16x^4=s^2+4(uv+vw+wu)s+4t+8uvw(u+v+w)$$

$$16px^2=4ps+8p(uv+vw+wu)$$

$$16qx=8q(u+v+w)$$

$$16r=16r,$$

邊々相加フレバ

$$0=s^2+4t+4ps+16r+8(u+v+w)(uvw+q)+4(s+2p)(uv+vw+wu)$$

玆ニ於テ　$uvw+q=0,\qquad s+2p=0$　トスレバ上ノ方程式ヨリ

$$4p^2+4t-8p^2+16r=0\qquad \therefore\ t=p^2-4r,$$

故ニ　$2x=u+v+w$　ガ所題ノ四次方程式ノ根ナルタメニハ

$$u^2+v^2+w^2=-2p,\qquad (1)$$

$$u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2=p^2-4r,\qquad (2)$$

$$u^2v^2w^2=q^2,\qquad (3)$$

ナラザルベカラズ，逆ニ $u,\ v,\ w$ ガ此三ツノ關係ヲ滿足セシムルトキハ $2x=u+v+w$ ハ所題ノ方程式ノ根トナルヤ明カナリ

然ルニ (1), (2), (3) ヲ滿足セシムル $u^2,\ v^2,\ w^2$ ハ三次方程式

$$z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0\qquad (4)$$

ノ根ナリ，

(4) ノ三根ヲ $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ トスレバ

$$u=\pm\sqrt{\alpha},\quad v=\pm\sqrt{\beta},\quad w=\pm\sqrt{\gamma}$$

然ルニ　$2x=u+v+w$　ガ所要ノ根ナルタメニハ　$uvw=-q$

ナルヲ要スル故ニコノ關係ヲ滿足セシムル $u,\ v,\ w$ ノ値ヲ $\sqrt{\alpha},\ \sqrt{\beta},\ \sqrt{\gamma}$ トスレバ

所要ノ四根ハ

$$\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}{2},\quad \frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}{2},\quad \frac{-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}{2},$$

$$\frac{-\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}{2},$$

或ハ $u=\sqrt{\alpha}$, $v=\sqrt{\beta}$, $w=\sqrt{\gamma}$ トスレバ

$$\frac{u+v+w}{2},\quad \frac{u-v-w}{2},\quad \frac{-u+v-w}{2},\quad \frac{-u-v+w}{2}$$

ナリ。

54. 四次方程式 $x^4+px^2+qx+r=0$ ノ判別式ヲ作リ且ツコレニ由ツテ根ノ性質ヲ判定スル方法ヲ述ベヨ，但シ p, q, r ヲ實數トス。

〔解〕 判別式ヲ D, 四根ヲ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ トスレバ

$$D=(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2(\alpha-\gamma)^2(\delta-\beta)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2,$$

$$\alpha=\frac{u+v+w}{2},\quad \beta=\frac{u-v-w}{2},\quad \gamma=\frac{-u+v-w}{2},\quad \delta=\frac{-u-v+w}{2},\qquad (A)$$

$$\therefore\ \alpha-\beta=v+w,\qquad \gamma-\delta=v-w,\qquad \alpha-\gamma=w+u,\qquad \delta-\beta=v-u$$

$$\alpha-\delta=u+v,\qquad \beta-\gamma=u-v,$$

$$\therefore\ D=(v^2-w^2)^2(w^2-u^2)^2(u^2-v^2)^2$$

然ルニ前問ニヨリ u^2, v^2, w^2 ハ次ノ三次方程式ノ根ナリ

$$z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0,\qquad (1)$$

故ニ D ハ三次方程式 (1) ノ判別式ナリ

(1) ニ於テ $z=y-\dfrac{2p}{3}$ トオキテ z^2 ノ項ヲ消去シタル結果ヲ

$$y^3+Hy+G=0\qquad (2)$$

トスレバ $H=-\dfrac{p^2+12r}{3}$, $G=\dfrac{-2p^3+72pr-27q^2}{27}$,

(2) ノ三根ハ (1) ノ三根ヨリソレゾレ $\dfrac{2p}{3}$ ダケ增加シタルニ過ギザル故ニ双方ノ各二根ノ差ハ變ラズ，依ツテ所要ノ判定式 D ハ (2) ノ判別式ナリ，依ツテ前々問ニヨリ

$$D=-(4H^3+27G^2)=\frac{1}{27}\{4(p^2+12r)^3-(2p^3-72pr+27q^2)^2\}$$

求ニ此ノ判別式ニ由ツテ四根ノ性質ヲ判定スル方法ヲ考フルニ

1. $D=0$ ナラバ四根ノ中少クモ二根ハ相等シク，若シコノトキ $H=G=0$ ナラバ (2) ノ三根ハ 0 トナリ從ツテ (1) ノ三根ハ皆相等シク，從ツテ (A) ヨリ $\beta=\gamma=\delta$ トナル，即チ $H=G=0$ ナルトキハ四根ノ中三根ガ相等シクナル。

2. $D<0$ ナラバ二根ハ實數ニシテ不等，他ノ二根ハ複素數トナル何ントナレバ今 α, β ヲ實數，γ, δ ヲ互ニ共軛ナル複素數トスレバ

$$(\alpha-\beta)^2>0,\qquad (\gamma-\delta)^2<0,\qquad (\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2>0,\qquad (\delta-\beta)^2(\gamma-\beta)^2>0$$

ナリ，而シテ其他ノ場合ニハ $D<0$ トナラザルコトハ同樣ニ證明スルコトヲ得レバナリ。

3. $D>0$ ナラバ四根皆實數ニシテ不等ナルカ，或ハ四根皆複素數ナルカノ何レカナリ。

55. 三次方程式 $px^3+3qx^2+3rx+s=0$ ノ三根ヲ α, β, γ トスルトキ三次式 $ax^3+3bx^2+3cx+d$ ガ $l(x-\alpha)^3+m(x-\beta)^3+n(x-\gamma)^3$ ナル形ニ變換セラルヽタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求メヨ。

〔解〕 x ノ如何ニ係ラズ

$$ax^3+3bx^2+3cx+d=l(x-\alpha)^3+m(x-\beta)^3+n(x-\gamma)^3$$

ナルタメニハ

$$\left.\begin{aligned} a&=l+m+n\\ -b&=l\alpha+m\beta+n\gamma\\ c&=l\alpha^2+m\beta^2+n\gamma^2\\ -d&=l\alpha^3+m\beta^3+n\gamma^3 \end{aligned}\right\}\qquad (1)$$

然ルニ α, β, γ ハ $px^3+3qx^2+3rx+s=0$ ノ根ナル故ニ

$$\left.\begin{aligned} p\alpha^3+3q\alpha^2+3r\alpha+s&=0\\ p\beta^3+3q\beta^2+3r\beta+s&=0\\ p\gamma^3+3q\gamma^2+3r\gamma+s&=0 \end{aligned}\right\}\qquad (2)$$

故ニ (1) ノ各式ニソレゾレ $s, 3r, 3q, p$ ヲ乘ジテ加フレバ

$$as-3br+3cq-dp=0\qquad (3)$$

コレ即チ必要ナル條件ナリ，逆ニ (3) ガ成立スルトキハ (1) ニ於ケル四ツノ關係式中ノ任意ノ三ツヲ滿足セシムル l, m, n ノ値ニ對シテ (2) 及ビ 3) ヨリ

(1) ノ殘ル關係モ亦成立スルコトハ容易ニ証明セラル丶故ニ所題ノ變形ハ可能ナリ，故ニ (3) ハ所要ノ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ナリ。

56. 二次方程式 $x^2+ax+b=0$ ノ二根ヲ α, β トスルトキ α, β ノ有理整對稱式ハ係數 a, b ノ整式ニテ表ハサル丶コトヲ証セヨ。

〔解〕 α, β ノ任意ノ整對稱式ヲ $S(\alpha\ \beta)$ トス $\alpha=\beta$ ナルトキハ $S(\alpha, \beta)$ ハ α ノ多項式ニシテ且ツ $\alpha=-\dfrac{a}{2}$ ナル故ニ本題ハ明カニ成立ス，$\alpha\neq\beta$ ナルトキハ $\beta=-a-\alpha$，ナル故ニ今

$$S(\alpha\beta)=S(\alpha,\ -a-\alpha)=A_0\alpha^m+A_1\alpha^{m-1}+\ldots\ldots+A_m \qquad (1)$$

トオケバ S ハ α, β ノ整式ナル故ニ右邊ノ總テノ A ハ係數 a ノ整式ナリ，又 S ハ α, β ニ關シテ對稱ナル故ニ α, β ヲ交換スルモ何等變化セズ，故ニ

$$S(\alpha\beta)=A_0\beta^m+A_1\beta^{m-1}+\ldots\ldots+A_m \qquad (2)$$

今別ニ

$$F(x)=A_0\;{}^m+A_1x^{m-1}+\ldots\ldots+A_m \qquad (3)$$

ヲ考ヘ $F(x)$ ヲ x^2+ax+b ニテ割リタルトキノ商ヲ $Q(x)$，剩餘ヲ $A+Bx$ トス

即チ $\quad F(x)=Q(x)(x^2+ax+b)+A+Bx, \qquad (4)$

x^2 ノ係數ハ 1 ニシテ $A_0\ A_1\ldots\ldots$ ハ a ノ整式ナル故ニ A, B ハ a, b ノ整式ナリ (4) ニ於テ $x=\alpha$ 及ビ $x=\beta$ トスレバ

$$F(\alpha)=A+B\alpha, \qquad F(\beta)=A+B\beta,$$

然ルニ (1)，(2)，(3) ヨリ

$$F(\alpha)=S(\alpha,\beta)=F(\beta) \qquad \therefore\ A+B\alpha=A+B\beta$$

而シテ $\alpha\neq\beta, \qquad \therefore\ B=0,$

$$\therefore\ F(\alpha)=S(\alpha\beta)=A,$$

然ルニ A ハ a, b ノ整式ナリ，依ツテ $S(\alpha\beta)$ ハ a, b ノ整式ナリ，即チ二根ノ任意ノ整對稱式ハ係數 a, b ノ整式ニテ表ハサル。

57. 方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+\ldots\ldots+p_n=0$ ノ根ヲ $\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ldots\ \alpha_n$ トスルトキ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\alpha_n$ ノ有理整對稱式ハ係數 $p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ ノ整式ニテ表ハサル丶コトヲ証セヨ。

〔解〕 前問ニ於テ証シタル二次方程式ノ場合ヲ基礎トシ，數學的歸納法ニ由ツテ本問ヲ証セントス，$\alpha_1\ \alpha_2\ldots\ldots\alpha_n$ ノ任意ノ整對稱式ヲ $S(\alpha_1\ \alpha_2\ldots\ldots\alpha_n)$ トシ先ヅ

$$S(\alpha_1\ \alpha_2\ldots\ldots\alpha_n)=S_0\alpha_1{}^{\mu}+S_1\alpha_1{}^{\mu-1}+\ldots\ldots+S_{\mu-1}\alpha_1+S_{\mu}$$

トオケバ $S_0, S_1\ldots\ldots S_{\mu}$ ハ何レモ皆 $\alpha_2, \alpha_3\ldots\ldots\alpha_n$ ノ整對稱式ナルコト明カナリ，

次ニ $\quad f(x)=x^n+p_1x^{n-1}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$

ヲ $x-\alpha_1$ ニテ割リタル方程式即チ $\alpha_2\ \alpha_3\ldots\ldots\alpha_n$ ヲ根トスル方程式ヲ

$$\varphi(x)=\;{}^{n-1}+q_1x^{n-2}+\ldots\ldots+q_{n-2}x+q_{n-1}=0$$

トスレバ

$$\left.\begin{aligned}
&q_1=\alpha_1+p_1\\
&q_2=\alpha_1{}^2+p_1\alpha_1+p_2\\
&q_3=\alpha_1{}^3+p_1\alpha_1{}^2+p_2\alpha_1+p_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&q_{n-1}=\alpha_1{}^{n-1}+p_1\alpha_1{}^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

今 $\varphi(x)=0$ ノ根 $\alpha_2\ \alpha_3\ldots\ldots\alpha_n$ ノ整對稱式 $S_0\ S_1\ldots\ldots S_{\mu}$ ハ $\varphi(x)=0$ ノ係數 $q_1\ q_2\ldots\ldots q_{n-1}$ ノ整式ニテ表ハサル丶モノト假定スレバ $q_1\ q_2\ldots\ldots q_{n-1}$ ハ (1) ヨリ α_1 ト $p_1\,p_2\ldots\ldots p_{n-1}$ ノ整式ナル故ニ $S_0\,S_1\ldots\ldots S_{\mu}$ 從ツテ S ハ又 $\alpha_1\,p_1\,p_2\ldots\ldots p_{n-1}$ ノ整式ニテ表ハサル，依ツテソノ S ヲ

$$S(\alpha_1\ \alpha_2\ldots\ldots\alpha_n)=A_0\alpha_1{}^m+A_1\alpha_1{}^{m-1}+\ldots\ldots+A_{m-1}\alpha_1+A_m \qquad (2)$$

トオケバ $A_0\ A_1\ldots\ldots A_m$ ハ總テ皆 $p_1\ p_2\ldots\ldots p_{n-1}$ ノ整式ナリ

今 $\quad F(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots\ldots+A_{m-1}x+A_m \qquad (3)$

ヲ考ヘ之ヲ $\quad f(x)=x^n+p_1x^{n-1}+\ldots\ldots+p_n$

ニテ割リタル商ヲ $Q(x)$，剩餘ヲ $g(x)$ トスレバ

$$F(x)=Q(x)\cdot f(x)+g(x) \qquad (4)$$

$g(x)$ ハ $(n-1)$ 次以下ナル故ニ

$$g(x)=C_0x^{n-1}+C_1x^{n-2}+\ldots\ldots+C_{n-1}$$

トスレバ $f(x)$ ノ最高次ノ係數ハ 1 ナル故ニ $C_0, C_1\ldots\ldots C_{n-1}$ ハ總テ皆 $p_1\ p_2\ldots\ldots p_n$ ノ整式ナリ，(4) ニ於テ $x=\alpha_1\ \alpha_2\ldots\ldots\alpha_n$ トオケバ

$$F(\alpha_1)=g(\alpha_1),\quad F(\alpha_2)=g(\alpha_2),\ \ldots\ldots F(\alpha_n)=g(\alpha_n), \qquad (5)$$

又 (2) (3) ヨリ

$$S(\alpha_1\ \alpha_2\ldots\ldots\alpha_n)=F(\alpha_1)$$

然ルニ　$S(\alpha_1\ \alpha_2\ldots\ldots\alpha_n)$　ハ　$\alpha_1\ \alpha_2\ldots\ldots\alpha_n$　ニ關シテ對稱ナル故ニ從ツテ又

$$S(\alpha_1\ \alpha_2\ldots\ldots\alpha_n)=F(\alpha\ )=F(\alpha_1)=\ldots\ldots=F(\alpha_n)$$

故ニ (5) ヨリ

$$S(\alpha_1\ \alpha_2\ldots\ldots\alpha_n)=g(\alpha_1)=g(\alpha_2)=\ldots\ldots=g(\alpha_n)$$

故ニ　$g(x)-S(\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n)=C_0x^{n-1}+C_1x^{n-2}+\ldots\ldots+C_{n-1}-S(\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n)=0$

ナル $n-1$ 次ノ方程式ハ $\alpha_1,\ \alpha_2\ldots\ldots\alpha_n$ ナル n 個ノ根ヲ有ス

故ニ　$C_0=C_1=\ldots\ldots=C_{n-2}=0,$

$$S(\alpha_1\ \alpha_2\ldots\ldots\alpha_n)=C_{n-1}$$

然ルニ C_{n-1} ハ $p_1\ p_2\ldots\ldots p_n$ ノ整式ナリ，即チ $(n-1)$ 次ノ方程式 $\varphi(x)=0$ ノ根ノ整對稱式 $S_0\,S_1\ldots\ldots$ ガ其係數 $q_1\ q_2,\ldots\ldots$ ノ整式ニテ表ハサルヽモノト假定スレバ n 次ノ方程式 $f(x)=0$ ノ根ノ整對稱式 $S(\alpha_1\ \alpha_2\ldots\ldots\alpha_n)$ ガ其係數 $p_1\ p_2\ldots\ldots p_n$ ノ整式ニテ表ハサルヽコトヽナル，然ルニ二次方程式ノ場合ニ此假定ノ成立スルコトハ前問ニ於テ之ヲ証セリ，依ツテ n ノ如何ニ係ラズ一般ニ最高次ノ係數ガ 1 ナル方程式ノ根ノ整對稱式ハ常ニ其係數ノ整式ニテ表ハサルヽコトヲ知ル。

第　十　章

方　程　式（其ノ二）

基本定理　I. x ガ連續的ニ變化スルトキ

$$f(x)=a_0x^{n}+a_1x^{n-1}+\ldots\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

モ亦連續的ニ變化ス，卽チ $y=f(x)$ ノぐらふハ連續曲線ナリ，（微分學演習第二章參照）。

II. $f(x)=0$ ノ k 重根ハ $f'(x)=0$ ノ $k-1$ 重根ナリ，（微分學演習第三章參照）。

III. $f'(x)>0$ ナル x ノ値ノ範圍内ニ於テハ x ガ增スニ從ツテ $f(x)$ ハ增シ $f'(x)<0$ ナル x ノ値ノ範圍内ニ於テハ x ガ增スニ從ツテ $f(x)$ ハ減ズ，$f'(x)=0$ ナル x ノ値ニ於テ $f(x)$ ハ一般ニ極大又ハ極小トナル，（微分學演習第六章參照）。

演習問題

1. $y=x^3$ ノぐらふヲ描ケ。

〔解〕 $x=0$ ノトキ $y=0$，故ニ曲線ハ原点ヲ過ル又

$$y'=3x^2$$

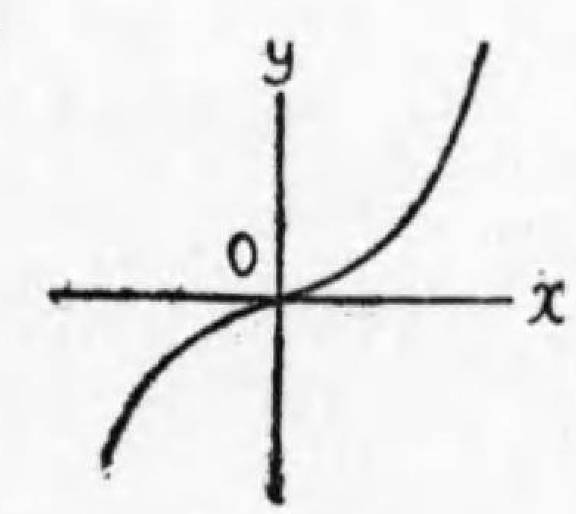
y' ハ常ニ正ナル故ニ x ガ增ストキ y ハ常ニ增ス又

$$x\to-\infty \text{ ノトキ } y\to-\infty,$$

$$x\to\infty \text{ ノトキ } y\to\infty$$

而シテ x ガ $-\infty$ ヨリ ∞ マデ連續的ニ變化スルトキ y モ亦連續的ニ變化ス。

依ツテぐらふハ圖ノ如クナルベシ。

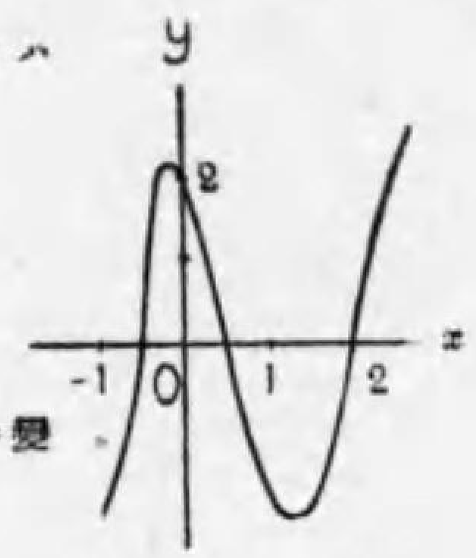


2. $y=4x^3-8x^2-x+2$ ノぐらふヲ描ケ。

〔解〕 $x=0$ ノトキ $y=2$, $y=0$ ノトキ $4x^3-8x^2-x+2=0$ ヨリ $x=2$, $x=\pm\frac{1}{2}$ 故＝曲線ハ y 軸ト原点ヨリ 2 ナル距離＝於テ, x 軸ト原点ヨリ 2, $\pm\frac{1}{2}$ ナル三点＝於テ交ル,

又 $$y'=12x^2-16x-1=12\left(x-\frac{4-\sqrt{19}}{6}\right)\left(x-\frac{4+\sqrt{19}}{6}\right)$$

故＝ $x<\frac{4-\sqrt{19}}{6}$ 或ハ $x>\frac{4+\sqrt{19}}{6}$ ナルトキハ $y'>0$ ナル故＝此範圍内＝テ x ガ増ストキ y ハ常＝増シ $\frac{4-\sqrt{19}}{6}<x<\frac{4+\sqrt{19}}{6}$ ナルトキ $y'<0$ ナル故＝此範圍内＝テ x ガ増ストキ y ハ常＝減ズ, 從ツテ $x=\frac{4-\sqrt{19}}{6}$ ＝於テ y ハ極大トナリ $x=\frac{4+\sqrt{19}}{6}$ ＝於テ y ハ極小トナル



又 $x\to-\infty$ ノトキ $y\to-\infty$,

$x\to\infty$ ノトキ $y\to\infty$

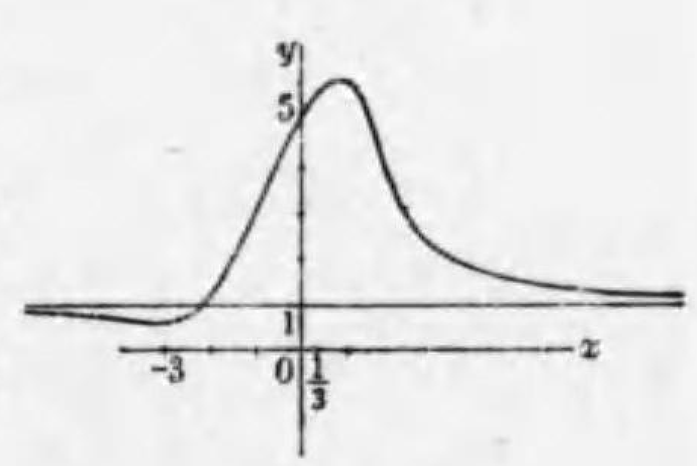
而シテ x ガ連續的＝變化スルトキ y モ亦連續的＝變化ス, 依ツテ所要ノぐらふハ圖ノ如クナル。

3. $y=\frac{x^2+3x+5}{x^2+1}$ ノぐらふヲ描ケ。

〔解〕 $x=0$ ノトキ $y=5$, $y=0$ ノトキ $x=$虚數, 故＝曲線ハ y 軸ト原点ヨリ 5 ナル距離＝於テ交リ, x 軸トハ交ラズ

又 $$y'=\frac{(2x+3)(x^2+1)-2x(x^2+3x+5)}{(x^2+1)^2}=\frac{-(3x-1)(x+3)}{(x^2+1)^2},$$

故＝ $x<-3$ 或ハ $x>\frac{1}{3}$ ナルトキハ $y'<0$, ナル故＝此範圍内＝テ x ガ増ストキ y ハ減ジ $-3<x<\frac{1}{3}$ ナルトキハ $y'>0$ ナル故＝此範圍内＝テ x ガ増ストキ y ハ増ス, 從ツテ $x=-3$ ノトキ $y=\frac{1}{2}$ ハ y ノ極小値＝シテ $x=\frac{1}{3}$ ノトキ $y=\frac{11}{2}$ ハ y ノ極大値トナル



又 $x\to\pm\infty$ ノトキ $$y=\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=1.$$

而シテ分母ハ常＝ 0 トナラザル故＝ x ガ連續的＝變化スルトキ y モ亦連續的＝變化ス, 依ツテ所要ノぐらふハ圖ノ如クナル。

4. $y=x+\sqrt{x-2}$ ノぐらふヲ描ケ。

〔解〕 $x<2$ ナラバ y ハ虚數トナル故＝曲線ハ $x\geqq2$ ナル範圍＝存在ス, 而シテ $x=2$ ノトキ $y=2$, 又 $x>2$ ナル故＝ y ハ常＝正＝シテ 0 トナラズ

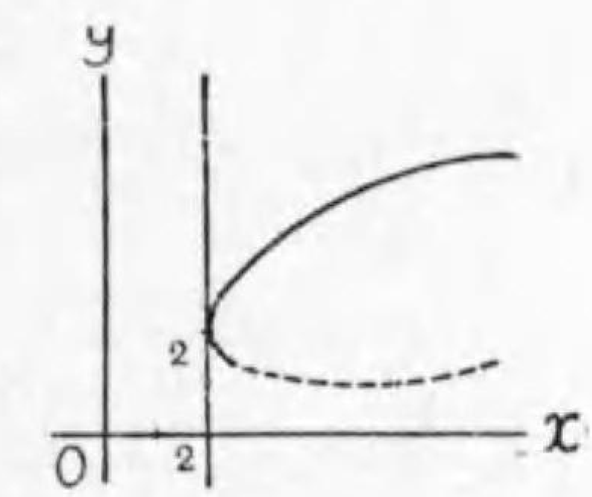
又 $y'=1+\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$

x ガ 2 ヨリ大ナルトキ y' ハ常＝正ナル故＝ x ガ 2 ヨリ増ストキ y ハ常＝増ス,

又 $x\to\infty$ ノトキ $y\to\infty$,

而シテ x ガ 2 ヨリ大ナル値ヲ取リテ連續的＝變化スルトキ本問ノ y モ亦連續的＝變化スル故＝所要ノぐらふハ圖ノ如クナルベシ,

若シ $y=x-\sqrt{x-2}$ トスレバぐらふハ点線ノ部分トナル。

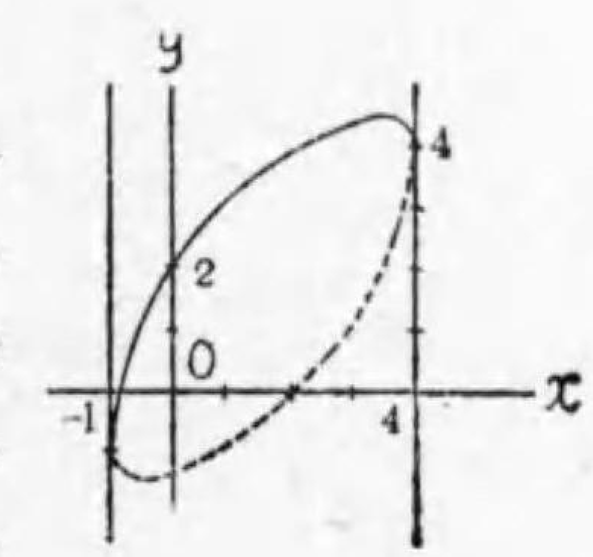


5. $y=x+\sqrt{(x+1)(4-x)}$ ノぐらふヲ描ケ。

〔解〕 $x<-1$ 又ハ $x>4$ ナラバ y ハ虚數トナル故＝曲線ハ $-1\leqq x\leqq4$ ナル範圍内＝アリ, 而シテ $x=-1$ ノトキ $y=-1$, $x=4$ ノトキ $y=4$, 又 $x=0$ ノトキ $y=2$, 故＝曲線ハ y 軸ト原点ヨリ 2 ナル距離＝於テ交ル,

又 $y'=1+\frac{3-2x}{2\sqrt{(x+1)(4-x)}}$

故＝ $-1<x<\frac{6+\sqrt{22}}{4}$ ナルトキ $y'>0$ ナルコトヲ容易＝知ル故＝此範圍内＝テ x ガ増ストキ y ハ増シ又 $\frac{6+\sqrt{22}}{4}<x<4$ ナルトキ $y'<0$ ナルコトヲ容易＝知ル故＝此範圍内＝テ x ガ増ストキ y ハ減ズ, 從ツテ $x=\frac{6+\sqrt{22}}{4}$ ノトキ



y ハ極大トナル又 x ガ -1 ヨリ 4 マデ連續的ニ變化スルトキ y モ亦連續的ニ變化ス，依ツテ所要ノぐらふハ圖ノ如シ，

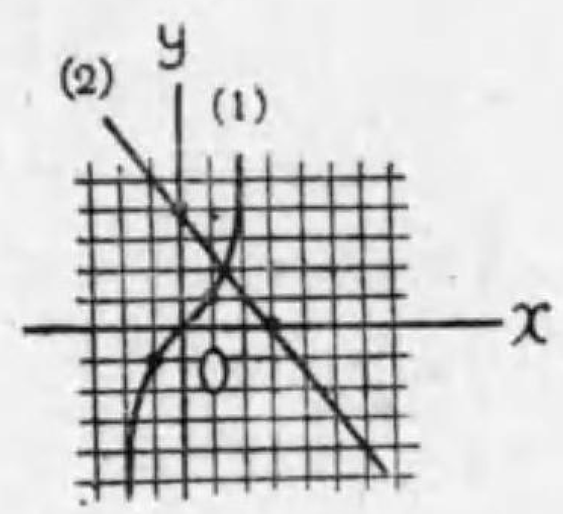
若シ $y=x-\sqrt{(x+1)(4-x)}$ トスレバぐらふハ点線ノ部分トナル。

6. ぐらふヲ利用シテ方程式 $3x^3+4x-12=0$ ノ實根ノ近似値ヲ求メヨ。

〔解〕 所題ノ方程式ヲ變形スレバ $x^3=-\frac{4}{3}(x-3)$ トナル故ニ其實根ハ

$$y=x^3 \qquad (1) \qquad\qquad y=-\frac{4}{3}(x-3) \qquad (2)$$

ノぐらふノ交点ノ x ノ値ナリ，然ルニ (1) ノぐらふハ問 1. ニヨリテ圖ノ如クニシテ (2) ノぐらふハ x 軸，y 軸トソレゾレ原点ヨリ 3 及ビ 4 ナル距離ニ於テ交ル直線ナルガ故ニ其交点ハ只一ツニシテ其点ノ x ノ値ハ圖ノ如ク大略 1.3 ナルヲ見ル，依ツテ所要ノ實根ハ只一ツニシテ近似値ハ大略 1.3 ナリ。



7. 適當ナルぐらふヲ用ヒテ方程式 $x^3+6x^2-x-20=0$ ノ實根ノ近似値ヲ求メヨ。

〔解〕 所題ノ方程式ヲ變形スレバ $\frac{1}{5}(x^2+6x-1)=\frac{4}{x}$ トナル故ニ其實根ハ

$$y=\frac{1}{5}(x^2+6x-1) \qquad (1) \qquad\qquad y=\frac{4}{x} \qquad (2)$$

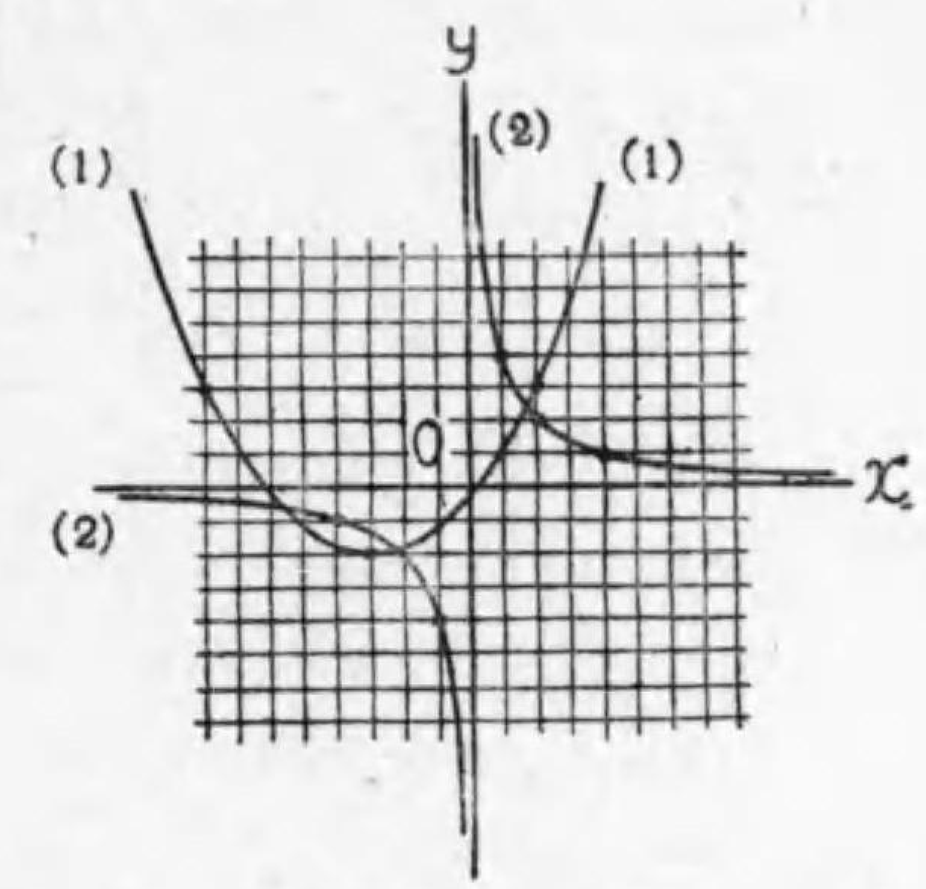
ノぐらふノ交点ノ x ノ値ナリ，然ルニ (1) ヲ滿足セシムル x, y ノ値ハ

$$\begin{array}{llllll} x=0 \\ y=-\frac{1}{5} \end{array}\Big) \quad \begin{array}{c} -3\pm\sqrt{10} \\ 0 \end{array}\Big) \quad \begin{array}{c} -3 \\ -2 \end{array}\Big) \quad \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array}\Big) \quad \begin{array}{c} \pm\infty \\ \infty \end{array}\Big)$$

等ニシテ (2) ヲ滿足セシムル x, y ノ値ハ

$$\begin{array}{l} x=1 \\ y=4 \end{array}\Big) \quad \begin{array}{c} -1 \\ -4 \end{array}\Big) \quad \begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array}\Big) \quad \begin{array}{c} -4 \\ -1 \end{array}\Big) \quad \begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array}\Big) \quad \begin{array}{c} -3 \\ -\frac{4}{3} \end{array}\Big) \quad \begin{array}{c} \pm\infty \\ 0 \end{array}\Big) \quad \begin{array}{c} 0 \\ \pm\infty \end{array}\Big)$$

等ナルガ故ニ (1) (2) ノぐらふハ圖ノ如クニシテ交点ハ三ツアリテ其各ノ x ノ値ハ大略 -5.5, -2.2 及ビ 1.7 ナルヲ見ル，依ツテ所要ノ實根ハ三ツアリテ其近似値ハ大略 -5.5, -2.2, 1.7 ナリ。



8. 適當ナルぐらふヲ用ヒテ方程式 $x^4-4x^3+7x^2+7x-28=0$ ノ實根ノ近似値ヲ求メヨ。

〔解〕 所題ノ方程式ヲ $\frac{1}{7}(x^2-4x+7)=\frac{4-x}{x^2}$ ト變形スレバ其實根ハ

$$y=\frac{1}{7}(x^2-4x+7) \qquad (1), \qquad\qquad y=\frac{4-x}{x^2} \qquad (2)$$

ノぐらふノ交点ノ x ノ値ナリ，然ルニ (1) ニ於テハ

$$y'=\frac{1}{7}(2x-4)=\frac{2}{7}(x-2)$$

故ニ $x<2$ ナラバ $y'<0$ ニシテ y ハ x ガ増ストキ減ジ $x>2$ ナラバ $y'>0$ ニシテ y ハ x ト共ニ増シ，従ツテ $x=2$ ノトキ $y=\frac{3}{7}$ ハソノ極小値トナル，而シテ

$$\begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \end{array}\Big) \quad \begin{array}{c} 1 \\ \frac{4}{7} \end{array}\Big) \quad \begin{array}{c} -1 \\ \frac{12}{7} \end{array}\Big) \quad \begin{array}{c} 2 \\ \frac{3}{7} \end{array}\Big) \quad \begin{array}{c} \pm\infty \\ \infty \end{array}\Big)$$

又 (2) ニ於テハ

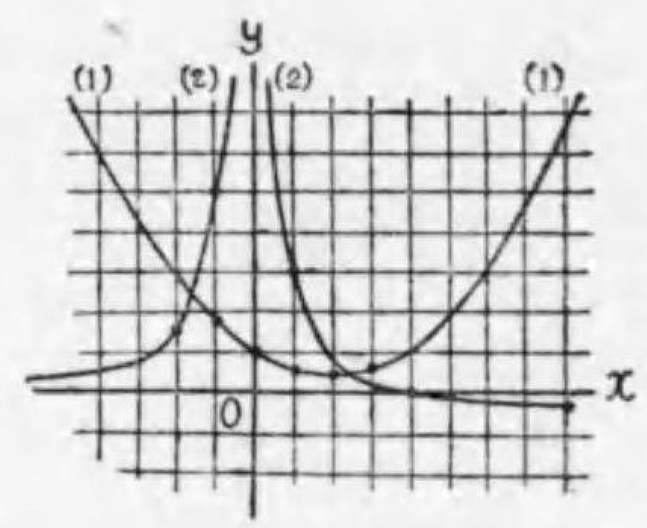
$$y'=\frac{-x^2-2x(4-x)}{x^4}=\frac{x-8}{x^3},$$

故ニ $x<0$ ナルトキ $y'>0$ ニシテ y ハ x ト共ニ増シ $x=0$ ノトキ y ハ ∞ トナリ $0<x<8$ ナルトキ $y'<0$ ニシテ y ハ x ガ増ストキ減ジ，$x>8$

ナルトキ $y'>0$ ニシテ y ハ x ト共ニ増ス即チ (2) ハ $x=0$ ニ於テ不連續ニシテ $x=8$ ニ於テ極小値 $y=-\frac{1}{16}$ トナル，而シテ

$$\begin{matrix} x=1 \\ y=3 \end{matrix}\Big)\quad \begin{matrix} -1 \\ 5 \end{matrix}\Big)\quad \begin{matrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}\Big)\quad \begin{matrix} -2 \\ \frac{3}{2} \end{matrix}\Big)\quad \begin{matrix} 3 \\ \frac{1}{9} \end{matrix}\Big)\quad \begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix}\Big)\quad \begin{matrix} \pm\infty \\ 0 \end{matrix}\Big)$$

故ニ (1) (2) ノぐらふハ圖ノ如クニシテ交点ハ二ツアリテ其各ノ x ノ値ハ大略 2.1 及ビ -1.6 ナルヲ見ル，依ツテ所要ノ實根ハ二ツアリテ其近似値ハ大略 2.1, -1.6 ナリ。

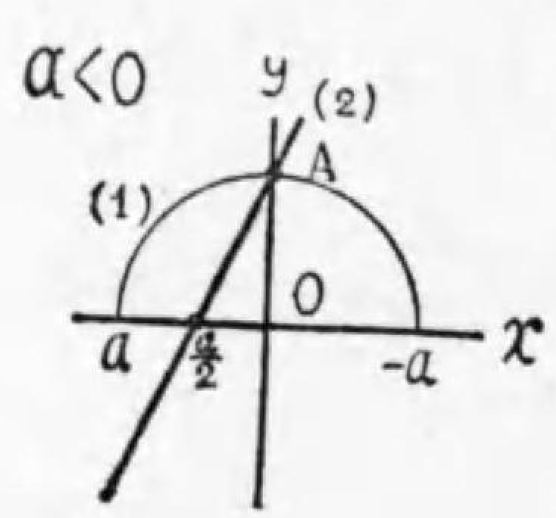


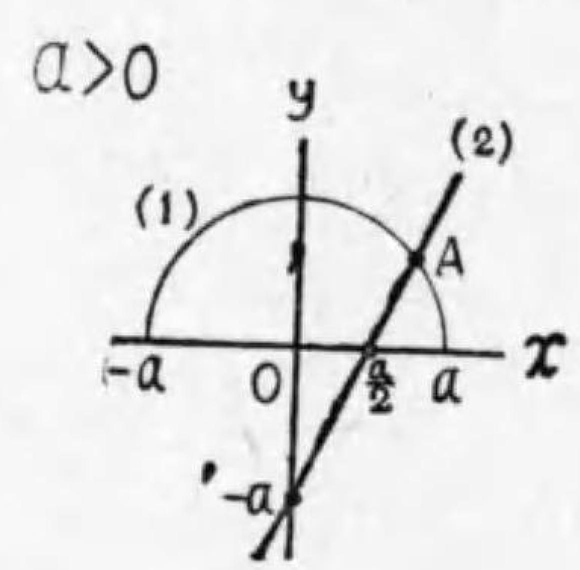
9. ぐらふヲ利用シテ不等式 $\sqrt{a^2-x^2}>2x-a$ ヲ解ケ。

〔解〕 $a=0$ ナラバ所題ノ不等式ハ明カニ成立セズ故ニ $a\neq0$ トス，而シテ

$$y=\sqrt{a^2-x^2}\qquad(1)\qquad\qquad y=2x-a\qquad(2)$$

ナル二ツノぐらふヲ考フ，(1) ハ原点ヲ中心トシ a ノ絶對値ヲ半徑トスル圓ノ如キ半圓ニシテ，(2) ハ x 軸，y 軸ヲ原点ヨリ $\frac{a}{2}$ 及 $-a$ ナル距離ニ於テ切ル直線ナリ，即チ $a>0$ ナルカ $a<0$ ナルカニ從ツテぐらふノ關係ハ圖ノ如クナル。二ツノぐらふノ交点ヲ A トシ A ノ x ノ値ヲ α トスレバ α ヨリ小ナル x ノ値ニ對スル (1) ノ y ノ値ハ (2) ノ y ノ値ヨリ大ニシテ其他ノ場合ニハ (1) ノ y ハ (2) ノ y ニ等シキカ或ハ (2) ノ y ヨリ小ナリ即チ所題ノ不等式ヲ滿足セシムル x ノ値ハ α ヨリ小ナルモノニ限ル，





但シ x ガ $-|a|$ ヨリ小トナリ得ザルコト勿論ナル故ニ所題ノ不等式ヲ滿足セシムル x ノ値ハ

$$-|a|\leqq x<\alpha$$

ナリ，然ルニ α ハ (1), (2) ノ交点ノ x ノ値ナル故ニ

$$\sqrt{a^2-x^2}=2x-a$$

ノ根ナリ，即チ此方程式ヲ解キテ

$$a>0\quad ナラバ\quad \alpha=\frac{4a}{5},$$

$$a<0\quad ナラバ\quad \alpha=0,$$

故ニ所要ノ解ハ

$$a>0\quad ナラバ\quad -a\leqq x<\frac{4a}{5},$$

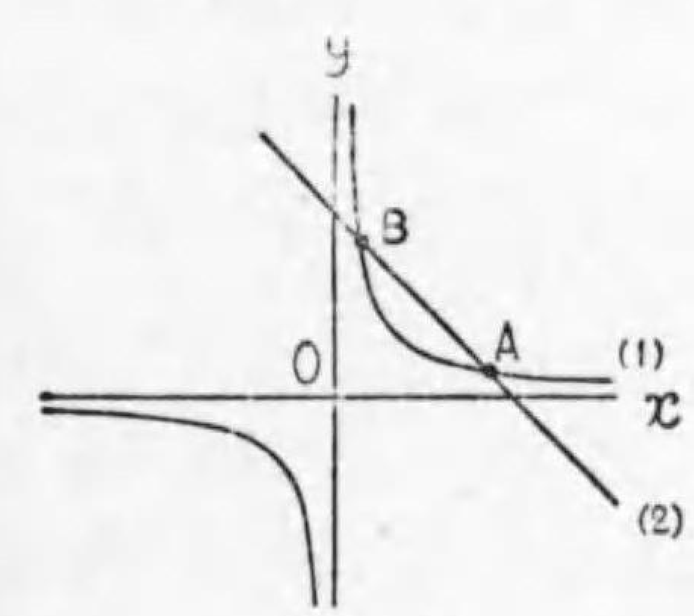
$$a<0\quad ナラバ\quad a\leqq x<0,$$

10. ぐらふヲ利用シテ不等式 $x+\frac{1}{ax}>1+\frac{1}{a}$, $(a>0)$ ヲ解ケ。

〔解〕 所題ノ不等式ヲ變形シテ $\frac{1}{ax}>1+\frac{1}{a}-x$ トシ二ツノぐらふ

$$y=\frac{1}{ax}\qquad(1)\qquad\qquad y=1+\frac{1}{a}-x\qquad(2)$$

ヲ描ク $a>0$ ナル故ニ (1) ハ圖ノ如キ双曲線ニシテ (2) ハ x 軸，y 軸ト等角ヲナス直線ナリ，



(1), (2) ノ交リヲ圖ノ A, B トシ A, B ノ x ノ値ヲ α, β $(\beta<\alpha)$ トスレバ $0<x<\beta$ 及ビ $\alpha<x$ ナル x ノ値ニ對スル (1) ノ y ハ (2) ノ y ヨリ大ニシテ其他ノ場合ニハ (1) ノ y ハ (2) ノ y ヨリ小ナルカ又ハ (2) ノ y ニ等シ，即チ所題ノ不等式ヲ滿足セシムル x ノ値ハ

$$0<x<\beta,\qquad\qquad \alpha<x,$$

ニ限ル，

然ルニ α, β ハ (1), (2) ノノ交点ノ x ノ値ナル故ニ方程式

$$\frac{1}{ax}=1+\frac{1}{a}-x$$

ノ根ナリ，然ルニ此方程式ヲ解キテ

$$x=1 \quad 又ハ \quad \frac{1}{a}$$

ヲ得，依ツテ

$0<a<1$ ナラバ $\alpha=\frac{1}{a}$, $\beta=1$ 故ニ所要ノ解ハ

$$0<x<1, \qquad \frac{1}{a}<x,$$

$1<a$ ナラバ $\alpha=1$, $\beta=\frac{1}{a}$ 故ニ所要ノ解ハ

$$1<x<\frac{1}{a}, \qquad 1<x,$$

11. a, b ヲ二ツノ實數トシ有理整方程式 $f(x)=0$ ガ a ト b トノ間ニ全然實根ヲ有セザルカ，若シクハ偶數個ノ實根ヲ有スルトキハ $f(a)$ ト $f(b)$ トハ同符號ヲ有シ，a ト b トノ間ニ奇數個ノ實根ヲ有スルトキハ $f(a)$ ト $f(b)$ トハ異符號ヲ有スルコトヲ証セヨ。

〔解〕 方程式 $f(x)=0$ ノ實根ハ函數 $y=f(x)$ ノぐらふガ x 軸ト交ル点ノ x ノ値ナリ，故ニ a ト b トノ間ニ全然根ヲ有セザルカ若シクハ偶數個ノ實根ヲ有スルトキハ $y=f(x)$ ノぐらふハ $x=a$ ト $x=b$ トノ間ニ於テ全然 x 軸ト交ラサルカ若シクハ偶數個ノ点ニ於テ x 軸ト交ルベシ，而シテ此ぐらふハ連續曲線ナル故ニ何レノ場合ニ於テモ $x=a$, $x=b$ ニ於テ曲線ハ x 軸ノ同ジ側ニアルベシ，從ツテ $x=a$, $x=b$ ニ對應スル y ノ値ハ同符號ヲ有スベシ，之ニ反シテ若シ a ト b トノ間ニ奇數個ノ實根ヲ有スルトキハ $y=f(x)$ ノぐらふハ $x=a$ ト $x=b$ トノ間ニ於テ x 軸ト奇數個ノ点ヲ於テ交ルベク從ツテ $x=a$, $x=b$ ニ於テ曲線ハ x 軸ノ反對ノ側ニアルベシ，從ツテ $x=a$, $x=b$ ニ對應スル y ノ値 $f(a)$, $f(b)$ ハ異符號ヲ有スベシ。

12. a, b ヲ二ツノ實数トスルトキ $f(a)$ ト $f(b)$ トガ同符號ヲ有スルカ，

異符號ヲ有スルカニ從ツテ方程式 $f(x)=0$ ハ ab 間ニ偶數個(0 ヲ含ム)又ハ奇數個ノ實根ヲ有スルコトヲ証セヨ。

〔解〕 $f(a)$ ト $f(b)$ トガ同符號ナルカ又ハ異符號ナルニ從ツテ $y=f(x)$ ノぐらふノ $x=a$, $x=b$ ニ對應スル点ハ x 軸ノ同ジ側ニアルカ又ハ反對ノ側ニアリ，而シテ此ぐらふハ連續曲線ナル故ニ $x=a$, $x=b$ ニ對應スル点ガ x 軸ノ同ジ側ニアルカ又ハ反對ノ側ニアルカニ從ツテ $y=f(x)$ ノぐらふハ $x=a$, $x=b$ ノ間ニ於テ x 軸ト偶數個(0 ヲ含ム)ノ点ニ於テ交ルカ又ハ奇數個ノ点ニ於テ交ルベシ，從ツテ a, b 間ニ偶數個(0 ヲ含ム)又ハ奇數個ノ實根ヲ有スベシ。

13. 方程式 $2x^3-4x-1=0$ ノ根ヲ分離セヨ。

〔解〕 $f(x)=2x^3-4x-1$ トスレバ $f(x)=2x(x^2-4)+4x-1$

故ニ $x>2$ ナラバ $f(x)$ ハ常ニ正，

故ニ $f(x)=0$ ハ 2 ヨリ大ナル實根ヲ有セズ

又 $f(x)=2x(x^2-2)-1$

故ニ $x<-2$ ナラバ $f(x)$ ハ常ニ負

故ニ $f(x)=0$ ハ -2 ヨリ小ナル實根ヲ有セズ，

依ツテ今 $x=-2$ ヨリ $x=2$ マデノ $f(x)$ ノ符號ヲ吟味スレバ次ノ如シ

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$

故ニ前間ニヨリ $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$ 間ニ各一ツノ根ヲ有スルヲ知ル。

14. 方程式 $x^4-4x^3-2x^2+3x+1=0$ ノ根ヲ分離セヨ。

〔解〕 $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+3x+1$ トスレバ

$$f(x)=x^2(x^2-4x-2)+3x+1=x^2(x-2-\sqrt{6})(x-2+\sqrt{6})+3x+1$$

然ルニ $2+\sqrt{6}<5$ 故ニ $x>5$ ナラバ $f(x)$ ハ常ニ正

故ニ $f(x)=0$ ハ 5 以上ノ實根ヲ有セズ，

又 $f(x)=x^4+1-x(4x^2+2x-3)=x^4+1-x\left(x-\frac{-1+\sqrt{13}}{4}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{13}}{4}\right)$

然ルニ $\dfrac{-1-\sqrt{13}}{4}>-2$ 故ニ $x<-2$ ナラバ $f(x)$ ハ常ニ正,

故ニ $f(x)=0$ ハ -2 以下ノ實根ヲ有セズ,

依ツテ今 -2 ヨリ 5 マデノ間ノ $f(x)$ ノ符號ヲ吟味スレバ次ノ如クナル

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

故ニ $(0, 1)$, $(4, 5)$ 間ニ 1 ツ或ハ 3 ツノ實根ヲ有シ $(-2, -1)$, $(-1, 0)$ 等ノ間ニハ實根ヲ有セザルカ或ハ 2 ツノ實根ヲ有スルカナルヲ知ル,

依ツテ $(-1, 0)$ 間ヲ吟味センニ $x=-\dfrac{1}{2}$ トオケバ $f(x)$ ノ符號ハ一トナル,

故ニ $(-1, 0)$ 間ニ二ツノ實根アリテ其一ツハ $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$ 間ニ他ノ一ツハ $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ 間ニアルヲ知ル, 從ツテ所題ノ方程式ノ四根ハ皆實數ニシテソレゾレ

$$\left(-1, -\frac{1}{2}\right),\quad \left(-\frac{1}{2}, 0\right),\quad (0, 1),\quad (4, 5)$$

ノ間ニアルヲ知ル。

15. $f(x)$ ハ x ノ有理整式ニシテ $f(x)+7$ ハ $(x+1)^4$ ニテ割リ切レ, $f(x)-2$ ハ $(x-1)^4$ ニテ割リ切レ, $f(x)+5$ ハ $(x-2)^4$ ニテ割リ切レルトキハ方程式 $f(x)=0$ ハ少クトモ二ツノ相異ナル實根ヲ有スルコトヲ証セヨ。

〔解〕 題意ニヨリ

$$f(x)=g_1(x)(x+1)^4-7=g_2(x)(x-1)^4+2=g_3(x)(x-2)^4-5$$

但シ $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ ハ $f(x)$ ヲソレゾレ $(x+1)^4$, $(x-1)^4$, $(x-2)^4$ ニテ割リタルトキノ商ヲ表ハスモノトス,

從ツテ $x=-1$, $x=1$, $x=2$ ノトキノ $f(x)$ ノ符號ハ夫々 $-$, $+$, $-$ トナル,

故ニ $f(x)=0$ ハ $(-1, 1)$, $(1, 2)$ 間ニ少クトモ一ツヅヽノ實根ヲ有ス, 從ツテ少クトモ二ツノ相異ナル實根ヲ有ス。

16. x ノ或値ニ對スル $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots\dots+a_{n-1}x+a_n$ ノ値ハ x ガ正ニシテ適當ニ大ナルトキハ a_0 ト同符號トナリ, 又 x ガ負ニシテ其絶對値ガ適當ニ大ナルトキハ $(-1)^n a_0$ ト同符號トナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 方程式 $f(x)=0$ ノ實根ヲ $k_1\ k_2 \dots\dots k_m$ 虚數ヲ $\alpha_1\pm\beta_1 i$, $\alpha_2\pm\beta_2 i \dots\dots \alpha_p\pm\beta_p i$ トスレバ

$$f(x)=a_0(x-k_1)(x-k_2)\dots\dots(x-k_m)\{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\}\{(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2\}\dots\dots\{(x-\alpha_p)^2+\beta_p^2\},$$

但シ $m+2p=n$,

x ニ實根 $k_1\ k_2 \dots\dots k_m$ 中ノ最大ナルモノヨリ大ナル値ヲ與フルトキ

$$(x-k_1)(x-k_2)\dots\dots(x-k_m)>0,$$

又 x ノ如何ニ係ラズ

$$\{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\}\{(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2\}\dots\dots\{(x-\alpha_p)^2+\beta_p^2\}>0$$

故ニ x ニ $k_1\ k_2 \dots\dots k_m$ 中ノ最大ノモノヨリ大ナル正ノ値ヲ與フレバ $f(x)$ ハ a_0 ト同符號トナル,

次ニ x ノ符號ヲ變ズレバ

$$f(-x)=(-1)^n a_0x^n+(-1)^{n-1}a_1x^{n-1}+\dots\dots+a_n$$

$f(-x)$ ハ x ニ正ノ適當ニ大ナル値ヲ與フレバ上ノ証明ニヨリ $(-1)^n a_0$ ト同符號トナル, 從ツテ $f(x)$ ハ x ノ負ニシテ絶對値ノ適當ニ大ナル値ニ對シテ $(-1)^n a_0$ ト同符號トナル。

17. 方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+\dots\dots+p_{n-1}x+p_n=0$ ハ n ガ奇數ナラバ p_n ト反對ノ符號ヲ有スル少クトモ一ツノ實根ヲ有シ, n ガ偶數ニシテ $p_n<0$ ナラバ少クトモ一ツノ正根及ビ一ツノ負根ヲ有スルコトヲ証セヨ。

〔解〕 $f(x)=x^n+p_1x^{n-1}+\dots\dots+p_n$ トスレバ

n ガ奇數ナラバ $x=-\infty$ ノトキ $f(x)$ ハ $(-1)^n=-1$ ト同符號即チ負(前問)

$x=0$ ノトキ $f(x)=p_n$,

$x=\infty$ ノトキ $f(x)$ ハ正 (前問)

故ニ $p_n>0$ ナラバ $(-\infty, 0$ 間ニ少クトモ一ツノ實根ヲ有シ

$p_n<0$ ナラバ $(0, \infty)$ 間ニ少クトモ一ツノ實根ヲ有ス

即チ n ガ奇數ナラバ常ニ p_n ト反對ノ符號ヲ有スル少クトモ一ツノ實根ヲ有ス,

次ニ n ガ偶數ニシテ $p_n<0$ ナラバ,

$x=-\infty$ ノトキ $f(x)$ ハ $(-1)^n=1$ ト同符號, 即チ正

$x=0$ ノトキ $f(x)=p_n<0$,

$x=\infty$ ノトキ $f(x)$ ハ正

故ニ $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ 間ニ少クトモ一ツヅヽノ實根ヲ有ス, 即チ少クモ一ツノ負根ト一ツノ正根トヲ有ス。

18. **方程式 $x^3-9x-m(x^2-1)=0$ ハ m ガ實數ナルトキハ常ニ實根ノミヲ有スルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 $f(x)=x^3-9x-m(x^2-1)$ トオケバ

$x=-\infty$ ノトキ $f(x)$ ハ負,

$x=-1$ ノトキ $f(x)$ ハ正,

$x=0$ ノトキ $f(x)=m$,

$x=1$ ノトキ $f(x)$ ハ負,

$x=\infty$ ノトキ $f(x)$ ハ正,

故ニ m ノ如何ニ係ラズ $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$ 間ニ夫々一ツノ實根アリ, 即チ m ノ如何ニ係ラズ實根ノミヲ有ス。

19. **α ノ如何ニ係ラズ方程式 $x^3-6x^2+9x-4\sin^2\alpha=0$ ハ常ニ三ツノ正根(0 ヲ含ム)ヲ有スルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 $f(x)=x^3-6x^2+9x-4\sin^2\alpha$ トオク

$\alpha=0, \pi, 2\pi, \ldots\ldots$ ナルトキ即チ $\sin\alpha=0$ ナルトキハ $f(x)=0$ ハ $0, 3, 3$ ナル三ツノ正根ヲ有スルコト明カナル故ニ $\sin\alpha\neq0$ ナル場合ヲ考フ, 然ルニ

$$f(x)=x(x-3)^2-4\sin^2\alpha$$

$\sin\alpha$ ハ 1 ヨリ大ナラザル故ニ $x>4$ ナルトキハ $f(x)$ ハ常ニ正, 故ニ $f(x)$ ハ 4 ヨリ大ナル正根ヲ有セズ, 依ツテ今 0 ヨリ 4 マデノ間ノ $f(x)$ ノ符號ヲ吟味スレバ

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$-$,	$4\cos^2\alpha$,	$2\cos2\alpha$,	$-$,	$4\cos^2\alpha$

故ニ $\cos\alpha=0$ ナルトキハ 1, 及ビ 4 ハ二根ニシテ從ツテ殘ル一根ハ又 1 トナル故ニ $f(x)=0$ ハ三ツノ正根ヲ有シ $\cos\alpha\neq0$ ナルトキハ上ノ符號ノ變化ヨリ $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 4)$ 間ニ夫々一根ヲ有スルコトヲ知ル, 故ニ矢張リ三ツノ正根ヲ有ス, 即チ α ノ如何ニ係ラズ所題ノ方程式ハ常ニ三ツノ正根ヲ有シ且ツ大等ノ正根ハ 4 ヨリ大ナラズ。

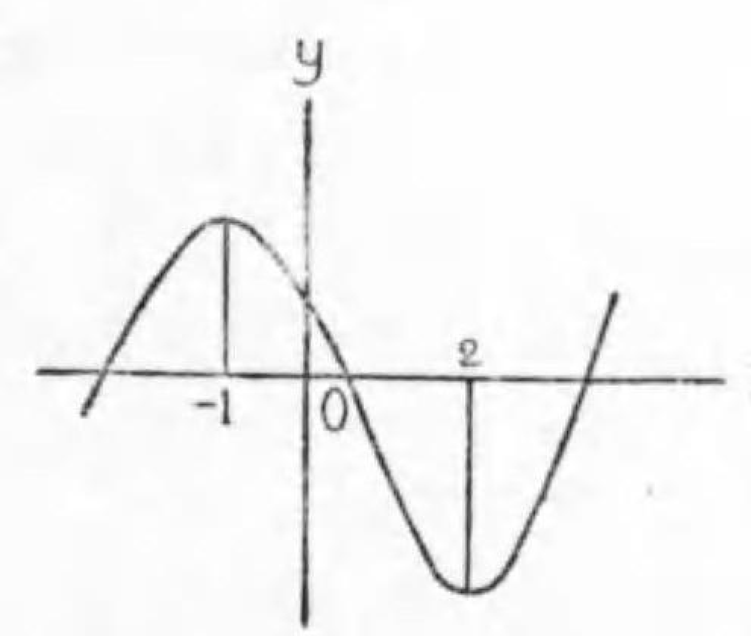
20. **x ガ連續的ニ變化スルトキ $f(x)=2x^3-3x^2-12x+6$ ノ變化スル狀態ヲ考究シ, 由ツテ以テ方程式 $f(x)=0$ ノ正根及ビ負根ノ數ヲ求メヨ。**

〔解〕 $f'(x)=6x^2-6x-12=6(x-2)(x+1)$

x ガ $-\infty$ ヨリ ∞ マデ連續的ニ變化スルトキ $f'(x)$ ノ符號ノ變化ト $f(x)$ ノ增減ノ狀態トヲ表示スレバ次ノ如クナル

x	$-\infty$		-1		0		2		∞
$f'(x)$		正	0	負	——	負	0	正	
$f(x)$	$-$	增	13 (極大)	減	6	減	-14 (極小)	增	$+$

依ツテ $y=f(x)$ ノぐらふハ圖ノ如シ, 故ニ方程式 $f(x)=0$ ハ -1 ヨリ小ナル負根一ツ 2 ヨリ小ナル正根一ツ 2 ヨリ大ナル正根一ツヲ有ス。

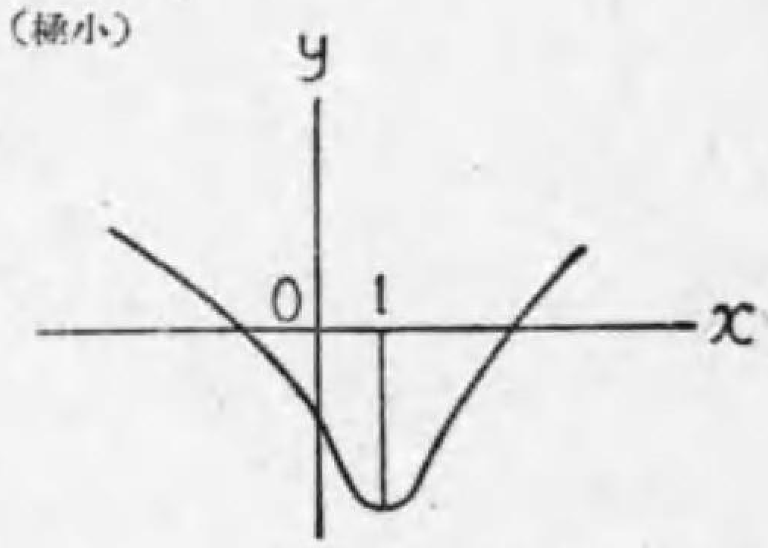


21. **x ガ連續的ニ變化スルトキ $f(x)=x^4+3x^2-10x-5$ ノ變化スル狀態ヲ考究シ, 由ツテ以テ方程式 $f(x)=0$ ノ正根及ビ負根ノ數ヲ求メヨ。**

〔解〕 $f'(x)=4x^3+6x-10=2(x-1)(2x^2+2x+5)$

x ガ $-\infty$ ヨリ ∞ マデ連續的ニ變化スルトキ $f'(x)$ ノ符號及ビ $f(x)$ ノ增減ハ次ノ如シ

x	$-\infty$		0		1		∞
$f'(x)$		負	——	負	0	正	
$f(x)$	$+$	減	-5	減	-11 (極小)	增	$+$



依ツテ $y=f(x)$ ノぐらふハ圖ノ如シ，故ニ方程式 $f(x)=0$ ハ正根，負根各一ツヲ有ス。

22. **x ガ連續的ニ變化スルトキ　$f(x)=x^3+px+q$　ノ增減スル狀態ヲ考究スルコトニ由ツテ三次方程式　$f(x)=0$　ガ三ツノ相異ナル實根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求メヨ。**

〔解〕 $f'(x)=3x^2+p$

故ニ $p>0$ ナルトキハ $f'(x)$ ハ常ニ正ナル故ニ $f(x)$ ハ x ト共ニ常ニ增シ，從ツテ $y=f(x)$ ノぐらふハ x 軸ト一回ヨリ多ク交ルコト能ハズ，即チ $f(x)=0$ ハ一ツヨリ多クノ實根ヲ有スル能ハズ，$p=0$ ナルトキモ同樣ナルコト明カナリ，故ニ三ツノ相異ナル實根ヲ有スルタメニハ

$$p<0 \qquad (1)$$

ナラザルベカラズ，$p<0$ ナル場合ニ $-\frac{p}{3}=k^2$ トオキ $f(x)$ ノ增減ヲ表示スレバ

x	$-\infty$		$-k$		k		∞
$f'(x)$		正	0	負	0	正	
$f(x)$	$-$	增	$2k^3+q$	減	$-2k^3+q$	增	$+$

即チ $x=-\infty$ ノトキ $f(x)<0$ ニシテ $x=-k$ ノトキ $f(x)=2k^3+q$ ハ極大トナリ $x=k$ ノトキ $f(x)=-2k^3+q$ ハ極小トナリ $x=\infty$ ノトキ $f(x)>0$ トナル故ニ $y=f(x)$ ノぐらふガ x 軸ト三度交ルタメニハ極大値ハ正ニシテ極小値ハ負ナラザルベカラズ，即チ $f(x)=0$ ガ三ツノ實根ヲ有スルタメニハ

$$2k^3+q>0, \quad -2k^3+q<0 \qquad (2)$$

ナラザルベカラズ，逆ニ (1)，(2) ガ成立スルトキハ $f(x)$ ハ正ノ極大値ト負ノ極小値トヲ有スルコトヽナル故ニ $y=f(x)$ ノぐらふハ x 軸ト三ツノ相異ナル点ニテ交リ從ツテ $f(x)=0$ ハ三ツノ相異ナル實根ヲ有スルコトヽナル，依ツテ所要ノ條件ハ (1) 及ビ (2) ナリ，然ルニ (2) ヨリ

$$-2k^3<q<2k^3 \qquad \therefore\ q^2<4k^6=4\left(-\frac{p}{3}\right)^3$$

即チ　$27q^2+4p^3<0 \qquad (3)$

(3) ガ成立スルトキハ p ハ當然負ナラザルベカラザルガ故ニ所要ノ條件ハ結局 (3) トナル。

23. **次ノ方程式ハ實根ノミヲ有スルコトヲ證セヨ，**

$$(x-a)(x-b)(x-c)-p^2(x-a)-q^2(x-b)-r^2(x-c)-2pqr=0, \qquad (1)$$

〔解〕 (1) ヲ變形スレバ

$$(x-a)\{(x-b)(x-c)-p^2\}-q^2(x-b)-r^2(x-c)-2pqr=0$$

今二次方程式

$$(x-b)(x-c)-p^2=0 \qquad (2)$$

ノ二根ヲ α, β トスレバ α, β ハ實數ニシテ不等ナリ，何ントナレバ $x=-\infty$，k（k ハ b, c 間ノ或値）∞ トオケバ (2) ノ左邊ハ正負正トナレバナリ，

又 $(x-b)(x-c)=p^2>0$ ナル故ニ α, β ノ中ノ一ツハ b, c ノ双方ヨリ大ニシテ他ハ双方ヨリ小ナリ，故ニ今 $\alpha<\beta$, $b\leqq c$ トスレバ

$$\alpha<b\leqq c<\beta$$

茲ニ於テ (1) ノ左邊ヲ $f(x)$ トシ $f(-\infty)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\infty)$ ノ符號ヲ考フルニ

$$f(-\infty)<0$$

$$f(\alpha)=-q^2(\alpha-b)-r^2(\alpha-c)-2pqr=q^2(b-\alpha)+r^2(c-\alpha)-2pqr$$

然ルニ　$p=\pm\sqrt{(\alpha-b)(\alpha-c)}$

$$\therefore\ f(\alpha)=\{q\sqrt{b-\alpha}\pm r\sqrt{c-\alpha}\}^2>0$$

$$f(\beta)=-q^2(\beta-b)-r^2(\beta-c)-2pqr=-\{q\sqrt{\beta-b}\pm r\sqrt{\beta-c}\}^2<0$$

$f(\infty)>0$

故ニ (1) ハ $(-\infty,\alpha)$, (α,β), (β,∞) 間ニ各一根ヲ有ス，即チ實根ノミヲ有ス。

24. **a ノ絕對値ガ 2 ヨリ小ナラザルトキ $x=-1$ ヨリ $x=1$ ニ至ル間ニ於テ**

$$|x^2+ax+b|<2$$

ヲ滿足セシメザル x ノ値ガ少クトモ一ツ存在スルコトヲ証セヨ。

〔解〕 若シ $x=-1$ ヨリ $x=1$ ニ至ル總テノ値ニ對シテ所題ノ不等式ガ常ニ成立スルモノトスレバ其區域内ニ於テ

$$f(x)=x^2+ax+b$$

ノ最大値ハ 2 ヨリ小ニシテ最小値ハ -2 ヨリ大ナラザルベラズ，從ツテ最大値ト最小値トノ差ハ 4 ヨリ小ナラザルベカラズ，換言スレバ $(-1,1)$ ナル區域内ニ於ケル $f(x)$ ノ最大値ト最小値トノ差ガ 4 ヨリ小ナラザルトキハ此區域内ニ於テ所題ノ不等式ヲ滿足セシメザル x ノ値ハ少クトモ一ツアルナリ

然ルニ $f'(x)=2x+a$

故ニ $a\geqq 2$ ナラバ $f'(x)$ ハ $(-1,1)$ 內ニテ常ニ正或ハ 0 ニシテ從ツテ $f(x)$ ハ x ト共ニ常ニ增ス故ニ其最小値ハ $f(-1)$ ニシテ其最大値ハ $f(1)$ ナリ，之レニ反シテ $a\leqq -2$ ナルトキハ $(-1,1)$ 內ニ於テ $f'(x)$ ハ常ニ負或ハ 0 ニシテ，從ツテ $f(x)$ ハ x ガ增ストキ常ニ減少スル故ニ其最大値ハ $f(-1)$ ニシテ最小値ハ $f(1)$ ナリ，而シテ

$$f(-1)=1-a+b,\qquad f(1)=1+a+b,$$

故ニ $a\geqq 2$ ナルモ又 $a\leqq -2$ ナルモ其最大値ト最小値トノ差ハ $2|a|$ ニシテ 4 ヨリ小ナラズ故ニ $|a|\geqq 2$ ナルトキハ $(-1,1)$ 內ニ於テ所題ノ不等式ヲ滿足セシメザル x ノ値ハ少クトモ一ツアルベシ。

25. **方程式 $4x^4+5x^2-7x+2=0$ ハ等根ヲ有スルカ否カヲ吟味セヨ。**

〔解〕 基本定理 II ニヨリ $f(x)=0$ ノ重根ハ又 $f'(x)=0$ ノ根ナル故ニ $f(x)=0$ ノ等根ヲ求ムルニハ $f(x)=0$ ト $f'(x)=0$ トノ共通ノ根ヲ求ムレバ可ナリ，即チ $f(x)$, $f'(x)$ ノ最大公約數ヲ 0 ナラシムル x ノ値ヲ求ムレバ可ナリ，依ツテ

$$f(x)=4x^4+5x^2-7x+2 \quad トオケバ$$

$$f'(x)=16x^3+10x-7,$$

此二式ノ最大公約數ヲ求ムレバ $2x-1$,

故ニ所要ノ等根ハ $\frac{1}{2}$ ナリ，而シテ $x=\frac{1}{2}$ ハ

$$f''(x)=48x^2+10=0$$

ノ根ナラザル故ニ是レハ所題ノ方程式ノ二重根ナリ。

26. **方程式 $x^n-npx+(n-1)q=0$ $(p>0)$ ガ等根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求メヨ。**

〔解〕 $f(x)=x^n-npx+(n-1)q=0$

トスレバ $f(x)=0$ ガ等根ヲ有スルタメニハ $f(x)=0$, $f'(x)=0$ ガ共通ノ根ヲ有セザルベガラズ，然ルニ

$$f'(x)=nx^{n-1}-np=n(x^{n-1}-p)$$

故ニ $f'(x)=0$ ノ一ツノ根ヲ $x=p^{\frac{1}{n-1}}\omega$ (ω ハ 1 ノ $n-1$ 乘根ノ虛數ノ一ツ)トシ $f(x)=0$ ニ代入スレバ

$$p^n=q^{n-1}$$

コレ即チ必要ナル條件ナリ，逆ニ此關係ガ成立スレバ $f(x)=0$, $f'(x)=0$ ハ共通根ヲ有スルコトヲ容易ニ証明シ得ル故ニ所題ノ方程式ハ等根ヲ有スルコトヽナル，依ツテ所要ノ條件ハ $p^n=q^{n-1}$ ナリ。

27. **方程式 $x^{n+1}-x^n-x+1=0$ ノ判別式ハ 0 ニ等シキコトヲ証セヨ。**

〔解〕 一ツノ方程式ノ判別式トハ其方程式ノアラユル二根ノ差ノ平方ノ積ナル故ニ其方程式ガ等根ヲ有スルトキハ判別式ハ當然 0 トナル，依ツテ今所題ノ方程式ヲ $f(x)=0$ トシコレト $f'(x)=0$ トガ共通根ヲ有スルカ否カヲ吟味センニ

$$f'(x)=(n+1)x^n-nx^{n-1}-1$$

然ルニ $f(x)=0$ ハ $x=1$ ナル根ヲ有スルコト明カニシテ $x=1$ ハ又 $f'(x)=0$ ノ根ナルコト明カナリ，故ニ $f(x)=0$ ハ $x=1$ ナル等根ヲ有ス，依ツテ其判別式ハ 0 ナリ。

28. 五次方程式 $x^5+qx^3+rx^2+t=0$ ($t \neq 0$) ガ等根ヲ有スルトキハ其等根ハ又二次方程式 $15rx^2-6q^2x+25t-4qr=0$ ノ根ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 α ヲ等根トスレバ α ハ $f(x)=x^5+qx^3+rx^2+t=0$ 及ビ $f'(x)=5x^4+3qx^2+2rx=0$ ノ根ナリ，即チ

$$\alpha^5+q\alpha^3+r\alpha^2+t=0 \qquad (1)$$

$$5\alpha^4+3q\alpha^2+2r\alpha=0 \qquad (2)$$

$t \neq 0$ ナル故ニ $\alpha \neq 0$，故ニ (2) ヨリ

$$\alpha^3=-\frac{3q\alpha+2r}{5}, \qquad \alpha^5=-\frac{3q\alpha^3+2r\alpha^2}{5}$$

(1) ニ代入シテ整頓スレバ

$$15r\alpha^2-6q^2\alpha+25t-4qr=0$$

即チ α ハ又所題ノ二次方程式ノ根ナリ。

29. 方程式 $f(x)=x^n+p_1x^{n-1}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$ ノ k 重根ハ其各項ニ等差級數 $a+nd, a+(n-1)d, \ldots\ldots a+d, a$ ノ各項ヲ乘ジタル方程式ノ $k-1$ 重根ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 今 $f(x)$ ノ各項ニ等差級數ノ各項ヲ乘ジテ得ル方程式ヲ $F(x)=0$ トスレバ

$$F(x)=(a+nd)x^n+(a+\overline{n-1}\,d)p_1x^{n-1}+(a+\overline{n-2}\,d)p_2x^{n-2}+\ldots\ldots$$
$$+(a+d)p_{n-1}x+ap_n$$
$$=a(x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}x+p_n)$$
$$+d\{nx^n+(n-1)p_1x^{n-1}+(n-2)p_2x^{n-2}+\ldots\ldots+p_{n-1}x\}$$
$$=af(x)+d.xf'(x)=0,$$

然ルニ $f(x)=0$ ノ k 重根ハ $f'(x)=0$ ノ $k-1$ 重根ナル故ニ（基本定理 II）

$$f(x)=(x-\alpha)^k\cdot g(x)$$

トスレバ

$$f'(x)=(x-\alpha)^{k-1}h(x)$$

但シ $g(x)$，$h(x)$ ハ夫々 x ノ $n-k$ 次ノ多項式ニシテ $(x-\alpha)$ ナル因數ヲ有セザルモノナリ，

$$\therefore\quad F(x)=(x-\alpha)^{k-1}\{a(x-\alpha)g(x)+dxh(x)\}=0$$

$h(x)$ ハ $(x-\alpha)$ ナル因數ヲ有セザル故ニ $a(x-\alpha)g(x)+dxh(x)$ ハ $(x-\alpha)$ ナル因數ヲ有セズ，故ニ α ハ $F(x)=0$ ノ $k-1$ 重根ナリ，即チ $f(x)=0$ ノ k 重根ハ $F(x)=0$ ノ $k-1$ 重根トナル。

30. 方程式 $f(x)=0$ ノ各ノ根ノ m 乘ノ和ヲ求メヨ，但シ m ヲ正ノ整數トス。

〔解〕 $f(x)=0$ ノ根ヲ $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ トスレバ

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_n)$$

$$\therefore\quad \log f(x)=\log(x-\alpha_1)+\log(x-\alpha_2)+\ldots\ldots+\log(x-\alpha_n)$$

兩邊ヲ x ニ關シテ微分スレバ（微分學演習第三章參照），

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-\alpha_1}+\frac{1}{x-\alpha_2}+\ldots\ldots+\frac{1}{x-\alpha_n}$$

$$\therefore\quad \frac{xf'(x)}{f(x)}=\frac{x}{x-\alpha_1}+\frac{x}{x-\alpha_2}+\ldots\ldots+\frac{x}{x-\alpha_n}$$
$$=\left(\frac{x-\alpha_1}{x}\right)^{-1}+\left(\frac{x-\alpha_2}{x}\right)^{-1}+\ldots\ldots+\left(\frac{x-\alpha_n}{x}\right)^{-1}$$
$$=\left(1-\frac{\alpha_1}{x}\right)^{-1}+\left(1-\frac{\alpha_2}{x}\right)^{-1}+\ldots\ldots+\left(1-\frac{\alpha_n}{x}\right)^{-1}$$

二項定理ニ由ツテ展開スレバ

$$=1+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_1^2}{x^2}+\ldots\ldots+\frac{\alpha_1^m}{x^m}+\ldots\ldots$$
$$+1+\frac{\alpha_2}{x}+\frac{\alpha_2^2}{x^2}+\ldots\ldots+\frac{\alpha_2^m}{x^m}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+1+\frac{\alpha_n}{x}+\frac{\alpha_n^2}{x^2}+\ldots\ldots+\frac{\alpha_n^m}{x^m}+\ldots\ldots$$

故ニ各ノ根ノ n 乘ノ和ヲ u_m トスレバ

$$\frac{xf'(x)}{f(x)}=n+\frac{u_1}{x}+\frac{u_2}{x^2}+\ldots\ldots+\frac{u_m}{x^m}+\ldots\ldots$$

即チ所要ノ u_m ハ左邊ノ式ヲ $\frac{1}{x}$ ノ羃ニ展開シタルトキノ $\frac{1}{x^m}$ ノ係數ニ等シ。

31. **四次方程式 $x^4-3x^3+5x^2-12x+4=0$ ノ四根ノ五乘ノ和ヲ求メヨ。**

〔解〕 前問ノ結果ニヨリ

$$\frac{xf'(x)}{f(x)}=\frac{4x^4-9x^3+10x^2-12x}{x^4-3x^3+5x^2-12x+4}$$

ヲ $\dfrac{1}{x}$ ノ羃ニ展開スルタメニ普通ノ割リ算ヲ施セバ

$$4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{18}{x^3}+\frac{79}{x^4}+\frac{123}{x^5}+\ldots\ldots$$

トナルガ故ニ各根ノ五乘ノ和ハ 123 ナルヲ知ル。

32. **1 ノ n 乘根ヲ $\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots\theta_n$ トシ $\Sigma(\theta_1{}^m\theta_2{}^p)$ ヲ求メヨ，但シ m, p ハ互ニ異ナル正ノ整數トス。**

〔解〕 $u_m=\theta_1{}^m+\theta_2{}^m+\theta_3{}^m+\ldots\ldots+\theta_n{}^m$

$u_p=\theta_1{}^p+\theta_2{}^p+\theta_3{}^p+\ldots\ldots+\theta_n{}^p$ トスレバ

$$\therefore\ u_mu_p=\theta_1{}^{m+p}+\theta_2{}^{m+p}+\ldots\ldots+\theta_n{}^{m+p}$$
$$+\theta_1{}^m\theta_2{}^p+\theta_1{}^m\theta_3{}^p+\ldots\ldots+\theta_1{}^m\theta_n{}^p+\ldots\ldots$$
$$=u_{m+p}+\Sigma(\theta_1{}^m\theta_2{}^p)$$

玆ニ於テ u_m, u_p, u_{m+p} ヲ求メンニ $\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots\theta_n$ ハ $f(x)=x^n-1=0$ ノ根ナルガ故ニ

$$\frac{xf'(x)}{f(x)}=\frac{nx^n}{x^n-1}=n+\frac{n}{x^n}+\frac{n}{x^{2n}}+\ldots\ldots+\frac{n}{x^{kn}}+\ldots\ldots\ldots$$

故ニ m ガ n ノ倍數ナルトキハ $u_m=n$，然ラザル場合ニハ $u_m=0$,

依ツテ次ノ結果ヲ得

(1) m, p ノ双方ガ n ノ倍數ナル場合（$m+p$ モ亦 n ノ倍數）

$\Sigma(\theta_1{}^m\theta_2{}^p)=n^2-n$,

(2) m, p ノ何カ一ツガ n ノ倍數ニシテ他ガ n ノ倍數ナラザル場合

$\Sigma(\theta_1{}^m\theta_2{}^p)=0$

(3) m, p ノ双方ガ n ノ倍數ナラザルモ $m+p$ ガ n ノ倍數ナル場合

$\Sigma(\theta_1{}^m\theta_2{}^p)=-n$,

33. **或四次方程式ノ四根ノ 1 乘, 2 乘, 3 乘, 4 乘ノ和ガ夫々 u_1 u_2 u_3 u_4 ナリトイフ其方程式如何。**

〔解〕 求メントスル四次方程式ヲ

$$f(x)=x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$$

トスレバ

$$\frac{xf'(x)}{f(x)}=\frac{4x^4+3px^3+2qx^2+rx}{x^4+px^3+qx^2+rx+s}$$

普通ノ割リ算ヲ施セバ

$$4-\frac{p}{x}+\frac{p^2-2q}{x^2}+\frac{3pq-3r-p^3}{x^3}+\frac{4pr+2q^2-4p^2q+p^4-4s}{x^4}+\ldots\ldots$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\ u_1&=-p\\ u_2&=p^2-2p\\ u_3&=3pq-3r-p^3\\ u_4&=4pr+2q^2-4p^2q+p^4-4s\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}\therefore\ p&=-u_1\\ q&=\frac{1}{2}(u_1{}^2-u_2)\\ r&=\frac{1}{6}(3u_1u_2-u_1{}^3-2u_3)\\ s&=\frac{1}{24}(16u_1u_3+6u_2{}^2-u_1{}^4-9u_4)\end{aligned}\right\}$$

34. **方程式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_n=0$ ノ正根ノ數ハ係數 $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n$ 間ノ符號ノ變化ノ數ヨリ多カラズシテ其差ハ偶數ナルコトヲ証セヨ，之ヲ *Descartes* ノ符號ノ法則トイフ。**

〔解〕 $f(x)=0$ ノ正根ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\alpha_r$ トシ負根ヲ $-\beta_1, -\beta_2, \ldots\ldots\beta_m$ 複素數根ヲ $\gamma_1\pm\delta_1i$, $\gamma_2\pm\delta_2i$, $\ldots\ldots\gamma_k\pm\delta_ki$ $(r+m+2k=n)$ トスレバ

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_r)F(x),$$

$$F(x)=a_0(x+\beta_1)(x+\beta_2)\ldots\ldots(x+\beta_m)\{(x-\gamma_1)^2+\delta_1{}^2\}\ldots\ldots\{(x-\gamma_k)^2+\delta_k{}^2\},$$

$F(x)$ ノ最高次ノ係數ハ a_0 ニシテ a_0 ハ常ニ正トスルコトヲ得，又 $F(x)$ ノ最後ノ項ハ $a^0\beta_1\beta_2\ldots\ldots\beta_m(\gamma_1{}^2+\delta_1{}^2)\ldots\ldots(\gamma_k{}^2+\delta_k{}^2)$ ニシテ其符號ハ正，即チ $F(x)$ ハ正ヨリ始マリ正ニ終ル，故ニ係數間ノ符號ノ變化ノ數ハ偶數ナリ，

次ニ $(x-\alpha_1)F(x)$ ノ符號ノ變化ヲ考フルニ今假リニ $F(x)$ ノ符號ヲ

$+-++---+-++$

ナリトスレバ之ニ $x-\alpha_1$ ヲ乘ズル場合ノ符號ノミヲ記セバ

$$
\begin{array}{l}
+-++---+-++ \\
\;\;-+--+++-+-- \\
\hline
+-+\pm-\mp\mp+-+\pm-
\end{array}
$$

但シ此符號 $\pm$ 又ハ $\mp$ ハ α_1 ト $F(x)$ ノ係數トヲ定メザレバ正負何レトモ決定シガタキモノナリ，然レドモ斯ル複符號ハ常ニ $F(x)$ ノ同符號ノ連續セル所ニ起リ且ツ其前後ハ常ニ異符號ナリ，故ニ斯ル複符號ハ正負何レニテモ符號ノ變化ハ $F(x)$ ノ之ニ對應スル變化ニ等シキカ或ハソレヨリ偶數個多クナルコトハ容易ニ知ルコトヲ得ベシ，而シテ $(x-\alpha_1)F(x)$ ハ $F(x)$ ヨリ一項多ク而モ其增加シタル最後ノ一項ハ $F(x)$ ノ最後ノ項ト異符號ヲ有ス，從ツテ $(x-\alpha_1)F(x)$ ハ最後ニ於テ符號ノ變化ヲ一ツ或ハ奇數個增スベシ，即チ $(x-\alpha_1)F(x)$ ノ符號ノ變化ノ數ハ中間ニ於テハ $F(x)$ ノソレニ等シキカ或ハソレヨリ偶數個多ク最後ニ於テ常ニ一ツ或ハ奇數個增スガ故ニ $F(x)$ ニ $(x-\alpha_1)$ ヲ乘ズレバ符號ノ變化ハ奇數個增スコトヽナル，$(x-\alpha_2)$，$(x-\alpha_3)$ 等ヲ乘ズル場合モ同樣ナリ又此關係ハ $F(x)$ ノ各項ノ符號ガ如何ナル場合ニモ同樣ニ成立ス，

依ツテ今ソレ等ノ增加スル奇數ヲ $2p_1+1$, $2p_2+1$…… トスレバ

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_r)F(x)$$

ノ符號ノ變化ハ $F(x)$ ノソレヨリ

$$(2p_1+1)+(2p_2+1)+\ldots\ldots+(2p_r+1)=2(p_1+p_2+\ldots\ldots+p_r)+r,$$

個多ク，而シテ $F(x)$ ノ符號ノ變化ハ偶數ナルコト上ニイヘル如クナル故ニ其偶數ヲ $2p_0$ トスレバ結局 $f(x)$ ノ符號ノ變化ノ數ハ

$$2(p_0+p_1+\ldots\ldots p_r)+r$$

ニシテ正根ノ數 r ヨリ偶數個多シ，

從ツテ逆ニ符號ノ變化ノ數ガ s ナルトキ正根ノ數ヲ r トスレバ r ハ s ヨリ大ナルコト能ハズ又 $r=s-$ 奇數，ナル能ハザルガ故ニ $r=s$ 或ハ $s-$偶數ナラザルベカラズ，即チ正根ノ數ハ係數間ノ符號ノ變化ノ數ヨリ一般ニ偶數個少ナシ。

35. 方程式 $x^4+2x^2+3x-1=0$ ノ根ノ性質ヲ判定セヨ。

〔解〕 偶數次ニシテ絕對項負ナル故ニ少クトモ正負二ツノ實根ヲ有ス（問. 17）然ルニ係數間ノ符號ノ變化ハ只一ツナル故ニ正根ハ一ツヨリ多カラズ，又 x ノ符號ヲ換ヘレバ $x^4+2x^2-3x-1=0$

トナリテ符號ノ變化ハ矢張リ一ツ，故ニ此方程式ノ正根即チ原方程式ノ負根ハ一ツヨリ多カラズ，

之ニ由ツテ所題ノ方程式ハ正負各一ツヾヽノ實根ヲ有スルコトヲ知ル，從ツテ殘ル二根ハ虛數ナリ，即チ二ツノ實根ト二ツノ虛根ヲ有ス。

36. 方程式 $x^{2n}-x^4+x^3-x^2+1=0$ ハ少クトモ $2n-6$ 個ノ虛根ヲ有スルコトヲ証セヨ。

〔解〕 係數間ノ符號ノ變化ハ四ツ，故ニ正根ハ多クトモ四ツ

次ニ x ヲ $-x$ トオケバ符號ノ變化ハ二ツ，故ニ負根ハ多クトモ二ツ，即チ所題ノ方程式ノ實根ハ 6 個ヨリ多カラズ，從ツテ虛根ハ $2n-6$ ヨリ少ナカラズ，即チ少クトモ $2n-6$ 個ノ虛根ヲ有ス。

37. 三次方程式 $x^3-px^2+qx-r=0$ ノ三根ヲ表ハス長サガ一ツノ三角形ヲ作ルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求メヨ。

〔解〕 三根ヲ a, b, c トスレバ a, b, c ハ實數ナルヲ要スル故ニ判別式ハ正或ハ 0 ナラザルベカラズ（第九章問. 52）即チ

$$18pqr-4p^3r+p^2q^2-4q^3-27r^2\geqq 0 \qquad (1)$$

又 a, b, c ハ皆正ナルヲ要スル故ニ Descartes ノ符號ノ法則（問. 34）ニヨリ

$$p>0, \quad q>0, \quad r>0 \qquad (2)$$

ナルヲ要ス，又 a, b, c ヲ三邊トスル三角形ノ面積ヲ S トスレバ

$$S=\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{p[p^3-2(a+b+c)p^2+4(ab+bc+ca)p-8abc]}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{p[4pq-p^3-8r]},$$

a, b, c ガ三角形ヲ作リ得ルタメニハ S ハ正ノ實數ナルヲ要ス，即チ

$$4pq-p^3-8r>0 \qquad (3)$$

逆ニ (1), (2), (3) ナル條件ガ成立スレバ所題ノ方程式ノ三根ハ皆正ノ實數ニシテ且ツ一ツノ三角形ヲ作ル

依ツテ所要ノ條件ハ (1) (2) (3) ナリ。

38. **m, n ガ正ノ整數ニシテ且ツ $(m+n)b>na,\ a>b$ ナルトキハ方程式**

$$(x+a-b)^{m+n}=(x+a)^m x^n$$

ハ只一ツノ正根ヲ有スルコトヲ證セヨ。

〔解〕 二項定理ニヨツテ兩邊ヲ展開シ整頓スレバ

$$\{(m+n)(a-b)-ma\}x^{m+n-1}$$

$$+\frac{1}{2!}\{(m+n)(m+n-1)(a-b)^2-m(m-1)a^2\}x^{m+n-2}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{m!}\{(m+n)(m+n-1)\ldots\ldots(n+1)(a-b)^m-m!\,a^m\}x^n$$

$$+\frac{(m+n)(m+n-1)\ldots\ldots n}{(m+1)!}(a-b)^{m+1}x^{n-1}+\ldots\ldots+(a-b)^{m+n}=0 \qquad (1)$$

然ルニ $(m+n)b>na$　 $\therefore\ (m+n)(a-b)<ma$　 故ニ x^{m+n-1} ノ係數ハ負，次ニ x^{m+n-2} ノ係數ハ $(m+n)(a-b)<ma$ ナル故ニ $(m+n-1)(a-c)<(m-1)a$ ナラバ負，然ラザレバ不明ナリ，然レドモ $(m+n-1)(a-b)>(m-1)a$ ニシテ x^{m+n-2} ノ係數 $(m+n)(a-b)(m+n-1)(a-b)-ma(m-1)a$ ガ正トナラバ k ノ 2 以上ノ總テノ値ニ對シテ $(m+n-k)(a-b)>(m-k)a$ ナル故ニ其以後ノ各次ノ係數ハ皆正トナル，但シ $a>b$ ナル故ニ x^{n-1} 以下ノ係數ハ總テ正ナルコト勿論ナリ，故ニ方程式 (1) ノ係數ハ最初ノ若干ハ總テ負ニシテ其以下ハ總テ正ナリ，即チ符號ノ變化ハ只一ツアルノミ依ツテ正根ハ一ツヨリ多カラズ

然ルニ $x=0$ トスレバ (1) ノ左邊ハ $(a-b)^{m+n}$ ニシテ正

$x=\infty$ トスレバ最高次ノ係數負ナル故ニ負

故ニ (1) ハ少クトモ一ツノ正根ヲ有ス

之ニ由ツテ (1) ハ只一ツノ正根ヲ有スルコトヲ知ル。

39. **實數係數ノ整方程式 $f(x)=0$ ノ相隣レル二ツノ實根 α, β ノ間ニハ $f'(x)=0$ ノ實根ガ少クトモ一ツ存在スルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 α, β ハ $f(x)=0$ ノ根ナル故ニ $f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0$ 故ニ今 $\beta>\alpha$ トシ x ガ α ヨリ β マデ連續的ニ變化スルトキ函數 $f(x)$ ハ 0 ヨリ連續的ニ或値マデ增加シ次ニ其値ヨリ減少シテ 0 トナルカ，或ハ反對ニ 0 ヨリ連續的ニ或値マデ減少シ次ニ其値ヨリ增加シテ 0 トナルカ，或ハ斯ノ如キ連續的ノ增減ヲ偶數回繰リ返スカノ何レカナリ，然ルニ $f(x)$ ガ增ストキ $f'(x)>0$ ニシテ $f(x)$ ガ減ズルトキ $f'(x)<0$ ナリ（基本定理 III）故ニ x ガ α ヨリ β マデ連續的ニ變化スルトキ $f'(x)$ ハ正ヨリ負或ハ負ヨリ正ニ移ルコト少クトモ一回一般ニ奇數回アルベシ，然ルニ $f(x)$ ガ整式ナルトキ $f'(x)$ モ整式ニシテ從ツテ x ガ連續的ニ變化スルトキ $f'(x)$ モ亦連續的ニ變化ス，故ニ $f'(x)$ ガ正ヨリ負或ハ負ヨリ正ニ移ル境目ニ於テ $f'(x)=0$ トナル，故ニ x ガ α ヨリ β マデ總テノ實數値ヲトリテ變化スル間ニ $f'(x)=0$ トナルコトハ少クトモ一回，一般ニ奇數回アルベシ，即チ α, β ノ間ニ $f'(x)=0$ ノ實根ハ少クトモ一ツ，一般ニ奇數個アルベシ。

40. **方程式 $f(x)=0$ ガ實根ノミヲ有スルトキハ $f'(x)=0$ モ亦實根ノミヲ有スルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 $f(x)=0$ ヲ n 次トスレバ $f'(x)=0$ ハ $(n-1)$ 次ナリ，$f(x)=0$ ノ n 個ノ實根ガ皆相異ナルトキハ相隣レル二根ハ $(n-1)$ 組アリ，其各組ノ間ニ $f'(x)=0$ ノ實根ガ少クトモ一ツアラザルベカラザルガ故ニ（前問）$f'(x)=0$ ハ少クトモ $(n-1)$ 個ノ實根ヲ有セザルベカラズ，而シテ $f'(x)=0$ ハ $(n-1)$ 次ナル，故ニ $f'(x)=0$ ハ實根ノミヲ有ス，

若シ $f(x)=0$ ガ一ツノ k 重根 α ヲ有スレバ α ハ $f'(x)=0$ ノ $k-1$ 重根ニシテ且ツ $f(x)=0$ ノ相隣レル二根ハ $(n-k)$ 組アリテ其各組ノ間ニ $f'(x)=0$ ノ根ハ少クトモ一ツヽアル故ニ此場合ニモ $f'(x)=0$ ノ實根ハ丁度

$$k-1+n+k=n-1$$

アルコトヽナル，二重以上ノ根ガ二ツ以上アル場合モ同樣ナリ。

41. **方程式 $f(x)=0$ ガ相等シカラザル實根ノミヲ有スルトキハ方程式 $f(x)-f'(x)=0$ モ亦相等シカラザル實根ノミヲ有スルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 $f(x)=0$ ノ相隣レル二ツノ實根ヲ α, β $(\alpha<\beta)$ トスレバ $f(\alpha)=f(\beta)=0$

$$\therefore\ f(\alpha)-f'(\alpha)=-f'(\alpha),\qquad f(\beta)-f'(\beta)=-f'(\beta),$$

然ルニ $f(\alpha)=f(\beta)=0$ ナル故ニ x ガ α ヨリ β マデ連續的ニ變化スルトキ $f(x)$ ハ 0 ヨリ連續的ニ或値マデ增加シ次ニ其値ヨリ減少シテ 0 トナルカ或ハ反對ニ 0 ヨリ連續的ニ或値マデ減少シ次ニ其値ヨリ增加シテ 0 トナルカ，或ハ斯ノ如キ連續的ノ增減ヲ偶數回繰リ返スカノ何レカナリ，即チ何レニシテモ $f(x)$ ハ $x=\alpha$ ニ於テ增加ノ狀態ニアラバ $x=\beta$ ニ於テ減少ノ狀態ニアルベク，$x=\alpha$ ニ於テ減少ノ狀態ニアラバ $x=\beta$ ニ於テ增加ノ狀態ニアルベシ，然ルニ $f(x)$ ガ增加ノ狀態ニアルトキ $f'(x)$ ハ正ニシテ減少ノ狀態ニアルトキ $f'(x)$ ハ負ナリ，故ニ $f'(\alpha)$ $f'(\beta)$ ハ異符號ヲ有ス，故ニ $f(\alpha)-f'(\alpha)$ ト $f(\beta)-f'(\beta)$ トハ異符號ヲ有ス，

從ツテ $f(x)-f'(x)=0$ ハ α, β 間ニ少クトモ一ツ一般ニ奇數個ノ實根ヲ有ス

即チ $f(x)-f'(x)=0$ ハ $f(x)=0$ ノ相隣レル二ツノ實根ノ間ニ奇數個ノ實根ヲ有ス

故ニ今 $f(x)=0$ ノ次數ヲ n トシ $f(x)=0$ ガ n 個ノ相異ナル實根ヲ有ストスレバ $f(x)-f'(x)=0$ モ n 次ニシテ且ツ少クトモ $n-1$ 個ノ相異ナル實根ヲ有セザルベカラズ，從ツテ殘ル一根モ實數ニシテ且ツ其實根ハ他ノ $n-1$ 個ノ何レトモ相等シキヲ得ズ（α, β 間ニ二個アルヲ得ザレバ）故ニ $f(x)-f'(x)=0$ モ亦相等シカラザル實根ノミヲ有ス。

42. **方程式 $1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\dfrac{x^n}{n!}=0$ ハ n ガ偶數ナラバ實根ヲ有セズ，n ガ奇數ナラバ只一ツノ實根ヲ有スルコトヲ證セヨ。**

〔解〕 二次方程式 $f_2(x)=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}=0$ ハ判別式ガ負ニシテ x^2 ノ係數ガ正ナル故ニ x ノ總テノ實數値ニ對シテ正ナリ，依ツテ今 x ノ總テノ實數値ニ對シテ

$$f_{2n}(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}>0$$

ナリト假定シ，ソレヨリ $f_{2n+2}(x)$ モ亦常ニ正ナルコトヲ證セントス，然ルニ

$$f'_{2n+1}(x)=f_{2n}(x)$$

故ニ $f'_{2n+1}(x)$ モ亦假定ニヨリ常ニ正ナリ，從ツテ $f_{2n+1}(x)=0$ ハ一ツヨリ多クノ實根ヲ有スル能ハズ，何ントナレバ若シ二ツノ實根ヲ有スレバ其間ノ一ツノ値ニ於テ $f'_{2n+1}(x)$ ハ 0 トナレバナリ，然ルニ $f_{2n+1}(x)=0$ ハ奇數次ナル故ニ少クトモ一ツノ實根ヲ有ス，故ニ $f_{2n}(x)$ ガ常ニ正ナリト假定スレバ $f_{2n+1}(x)=0$ ハ只一ツノ實根ヲ有ス（A），而シテ又

$$f'_{2n+2}(x)=f_{2n+1}(x)$$

$f_{2n+1}(x)=0$ 即チ $f'_{2n+2}(x)=0$ ガ只一ツノ實根ヲ有スル故ニ $f_{2n+2}(x)=0$ ハ二ツヨリ多クノ實根ヲ有スルコト能ハズ，何ントナレバ若シ三ツ以上ノ實根ヲ有スレバ $f'_{2n+2}(x)=0$ ハ一ツヨリ多クノ實根ヲ有スルコトヽナレバナリ，依ツテ今 $f_{2n+2}(x)=0$ ハ二ツノ實根 α, β ヲ有ストスレバ $f'_{2n+2}(x)=0$ 即チ $f_{2n+1}(x)=0$ ハ α, β 間ニ一根 γ ヲ有ス，然ルニ

$$f_{2n+2}(x)=f_{2n+1}(x)+\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!},\qquad f_{2n+1}(\gamma)=0$$

$$\therefore\ f_{2n+2}(\gamma)=\frac{\gamma^{2n+2}}{(2n+2)!}>0,$$

又 $f_{2n+2}(x)$ ハ偶數次ナル故ニ $x=\pm\infty$ ニ於テ正ナリ，故ニ α, β ナル二實根ヲ有ストスレバ $f_{2n+2}(x)$ ノ符號ノ變化ハ次ノ如シ

x	$-\infty$	α	γ	β	∞
$f_{2n+2}(x)$	$+$,	0,	$+$,	0,	$+$

而シテ $f_{2n+2}(x)$ ハ x ノ總テノ値ニ對シテ連續ナル故ニ上ノ符號ノ變化ヨリ $f_{2n+2}(x)=0$ ハ α, β ノ外ニ尙偶數個ノ實根ヲ有スルカ然ラザレバ α, β ハ共ニ重根トナラザルベカラズ，何レニシテモ $f_{2n+2}(x)=0$ ハ二ツヨリ多クノ實根ヲ有スルコトヽナル之レ不合理ナリ，故ニ $f_{2n+2}(x)=0$ ハ二ツノ實根ヲ有スル能ハズ，又偶數次ナル故ニ只一ツノ實根ヲ有スル能ハズ，即チ $f_{2n+2}(x)$ ハ決シテ 0 トナラズ，而シテ $x=\pm\infty$ ノトキ正ニシテ且ツ x ノ總テノ實數値ニ對シテ連續ナル故ニ結局 $f_{2n+2}(x)$ ハ常ニ正ナリ，即チ $f_{2n}(x)>0$ ナリト假定スレバ $f_{2n+2}(x)$ モ亦常ニ正ナリ，然ルニ $f_2(x)>0$

故ニ $f_{2n+2}(x)$ ハ n ノ如何ニ係ラズ常ニ正ニシテ 0 トナラズ即チ $f_{2n+2}(x)=0$ ハ實根ヲ有セズ，從ツテ又 (A) ヨリ $f_{2n+1}(x)=0$ ハ只一ツノ實根ヲ有ス。

43. **n 次方程式 $f(x)=x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}-\ldots\ldots\pm a_n=0$ ガ正根ノミヲ有スルトキハ**

$$\frac{a_1}{{}_nC_1}\geqq\sqrt{\frac{a_2}{{}_nC_2}}\geqq\sqrt[3]{\frac{a_3}{{}_nC_3}}\geqq\ldots\ldots\geqq\sqrt[n]{\frac{a_n}{{}_nC_n}}$$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 所題ノ方程式ハ正根ノミヲ有スル故ニ Descartes ノ符號ノ法則（問. 34）ニヨリ $a_1\ a_2\ldots\ldots a_n$ ハ皆正ナリ，依ツテ今

$$a_1={}_nC_1b_1,\qquad a_2={}_nC_2b_2\ \ldots\ldots\ a_n={}_nC_nb_n$$

トオケバ $b_1\ b_2\ldots\ldots b_n$ モ亦皆正ニシテ且ツ証明スベキ式ハ

$$b_1\geqq\sqrt{b_2}\geqq\sqrt[3]{b_3}\geqq\ldots\ldots\geqq\sqrt[n]{b_n}$$

トナル，

然ルニ $f(x)=0$ ガ實根ノミヲ有スルトキハ $f'(x)=0$ モ亦實根ノミヲ有シ（問. 40）$f'(x)=0$ ガ實根ノミヲ有スレバ $f''(x)=0$ モ亦實根ノミヲ有スル等以下同樣ナル

故ニ $f(x)=0$ ヲ $(n-2)$ 回微分シテ得ベキ二次方程式

$$x^2-2b_1x+b_2=0$$

モ亦實根ヲ有ス，故ニ其判別式ハ正或ハ 0 ナリ，即チ

$$b_1^2-b_2\geqq0\qquad\therefore\ b_1\geqq\sqrt{b_2}\qquad(1)$$

又 $f(x)=0$ ヲ $(n-3)$ 回微分シテ得ベキ

$$x^3-3b_1x^2+3b_2x-b_3=0$$

モ實根ノミヲ有シ，從ツテ x ヲ $\dfrac{1}{x}=X$ トオキタル

$$b_3X^3-3b_2X^2+3b_1X-1=0$$

モ實根ノミヲ有ス，故ニ之レヲ微分シタル

$$b_3X^2-2b_2X+b_1=0$$

モ亦實根ヲ有ス，故ニ

$$b_2^2-b_1b_3\geqq0$$

故ニ (1) ヨリ $b_2^2-b_3\sqrt{b_2}\geqq0\qquad\therefore\ b_2^{\frac{3}{2}}\geqq b_3\qquad\therefore\ b_2^{\frac{1}{2}}\geqq b_3^{\frac{1}{3}}$　　(2)

同樣ニ $f(x)=0$ ヲ $(n-4)$ 回微分シテ得ベキ

$$x^4-4b_1x^3+6b_2x^2-4b_3x+b_4=0$$

モ實根ノミヲ有シ，從ツテ x ヲ $\dfrac{1}{x}=X$ トオキタル

$$b^4X^4-4b_3X^3+6b_2X^2-4b_1X+1=0$$

モ亦實根ノミヲ有ス，故ニ之ヲ二回微分シタル

$$b^4X^2-2b_3X+b_2=0$$

モ實根ヲ有ス，故ニ

$$b_3^2-b_2b_4\geqq0$$

故ニ (2) ヨリ

$$b_3^2\geqq b_3^{\frac{2}{3}}b_4\qquad\therefore\ b_3^{\frac{4}{3}}\geqq b_4\qquad\therefore\ b_3^{\frac{1}{3}}\geqq b_4^{\frac{1}{4}}\qquad(3)$$

以下同樣ニ

$$b_4^{\frac{1}{4}}\geqq b_5^{\frac{1}{5}}\geqq b_6^{\frac{1}{6}}\geqq\ldots\ldots\geqq b_n^{\frac{1}{n}}$$

トナル。

44. **x ガ連續的ニ增加シテ $f(x)=0$ ノ一ツノ實根 α ヲ通過スルトキ其通過ノ途端ニ於テ $f(x)$ ト $f'(x)$ トハ異符號ヨリ同符號ニ變化スルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 今 α ヲ一般ニ k 重根トシ

$$f(x)=(x-\alpha)^kF(x),\qquad F(\alpha)\neq0,\qquad(1)$$

トオケバ

$$f'(x)=(x-\alpha)^{k-1}\{(x-\alpha)F'(x)+kF(x)\},\qquad(2)$$

然ルニ $x=\alpha$ ノトキ $(x-\alpha)F'(x)+kF(x)$ ハ $kF(\alpha)$ トナリ且ツ k ハ正ノ整數ナル故ニ $x=\alpha$ ノトキ $(x-\alpha)F'(x)+kF(x)$ ト $F(x)$ トハ同符號ヲ有ス，而シテ x ガ連續的ニ變化スルトキ此兩式モ亦連續的ニ變化スル故ニ $x=\alpha$ ニ於テ同符號ナラバ $x=\alpha$ ト極メテ接近セル其前後ニ於テモ此兩式ハ同符號ナリ，然ルニ $(x-\alpha)^k$ ト $(x-\alpha)^{k-1}$ トハ $x<\alpha$ ナラバ異符號ニシテ $x>\alpha$ ナラバ共ニ正ナリ，故ニ (1), (2) ヨリ $f(x)$, $f'(x)$ ハ x ガ α ヨリ少シク小ナルトキハ異符號ニシテ

α ヨリ少シク大ナルトキハ同符號トナルコトヲ知ル，即チ x ガ α ヲ通過スル途端ニ於テ $f(x)$, $f'(x)$ ハ異符號ヨリ同符號トナル，

$k=1$ ナル場合ニモ上ノ所論ハ同様ニ成立スルコト明カナリ。

45. a, b $(a<b)$ ヲ任意ノ二ツノ實數トスルトキ方程式 $f(x)=0$ ノ ab 間ニアル實根ノ數ハ Sturm ノ函數列ニ於テ $x=a$ トオキタルトキノ符號ノ變化ノ數ヨリ $x=b$ トオキタルトキノ符號ノ變化ノ數ヲ引キタルモノニ等シキコトヲ証セヨ。

〔解〕 Sturm ノ函數列ヲ $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$,……$f_n(x)$ トスレバ之等ノ函數ハ $f(x)$ ト $f_1(x)=f'(x)$ トニ最大公約數ヲ求ムル普通ノ運算ヲ施シタルトキノ各次ノ剩餘ノ符號ヲ換ヘタルモノナル故ニ今各次ノ商ヲ $q_1\ q_2$ ……q_{n-1} トスレバ

$$f(x)=q_1f_1(x)-f_2(x),$$

$$f_1(x)=q_2f_2(x)-f_3(x)$$

…………………………

$$f_{m-1}(x)=q_mf_m(x)-f_{m+1}(x)$$

…………………………

$$f_{n-2}(x)=q_{n-1}f_{n-1}(x)-f_n(x)$$

ナル關係アリ，

又 $f(x)=0$ ノ重根ハ $f(x)$ ヲ $f(x)$ ト $f'(x)$ トノ最大公約數ニテ割ルコトニ由ツテ總テ單根トナシ得ル故ニ $f(x)=0$ ハ最初ヨリ重根ヲ有セザルモノトスルコトヲ得，然ルトキハ $f_n(x)$ ハ定數ニシテ 0 ニアラズ，

又 $f(x)$ ガ重根ヲ有セザルトキハ函數列ノ相隣レル任意ノ二ツハ公約數ヲ有セザル故ニ x ノ同ジ値ニヨツテ同時ニ 0 トナルコトナシ

玆ニ於テ x ヲ a ヨリ b マデ連續的ニ變化セシムルトキ sturm ノ函數列ノ符號ノ變化ヲ考フルニコレ等ノ函數列ノ符號ノ變化ヲ生セシムルハ x ガ (1) $f(x)=0$ ノ實根 α ヲ通過スルカ或ハ (2) $f_m(x)=0$ $(m\neq n)$ ノ實根 β ヲ通過スルカノ何レノカノ場合ニ限ル

(1) ノ場合ニハ前問ニヨリ $f(x)$ $f_1(x)$ ノ間ニ異符號ノ消失一ツアリ，即チ $f(x)$, $f_1(x)$ 間ニ符號ノ變化ハ一ツ消失ス，而シテ $f(x)$, $f_1(x)$ ハ同時ニ 0 トナリ得ザル故ニ $f_1(\alpha)\neq0$, 故ニ x ガ α ヲ通過スルトキ $f_1(x)$ ノ符號ハ變ラズ，從ツテ(同時ニ (2) ガ起ラザレバ) 其以下ノ符號ノ變化ニ影響セズ，即チ x ガ α ヲ通過スルトキ函數列ノ符號ノ變化ハ只一ツ減少ス，

(2) ノ場合ニ於テハ $f_m(\beta)=0$ $\quad\therefore\ f_{m-1}(\beta)=-f_{m+1}(\beta)\neq0$,

故ニ x ガ β ヲ通過スル前後ニ於テ

$$f_{m-1}(x),\quad f_m(x),\quad f_{m+1}(x)$$

間ノ符號ノ變化ハ依然トシテ一ツニシテ增減ナシ (1), (2) ガ同時ニ起ル場合或ハ (2) ノ場合ガ各所ニ起ル場合ナドニツイテモ同様ナリ，即チ x ガ $f(x)=0$ ノ一ツノ實根ヲ通過スルトキニ限リ函數列ノ符號ノ變化ハ $f(x)$, $f_1(x)$ 間ニ於テ常ニ只一ツ消失シ其他ノ場合ニ於テハ函數列全體ノ符號ノ變化ハ增減セズ

之ニ由ツテ sturm ノ函數列ニ於テ $x=a$ ナルトキノ符號ノ變化ノ數ヨリ $x=b$ ナルトキノ變化ノ數ヲ減シタルモノハ ab 間ニアル $f(x)=0$ ノ實根ノ數ニ等シキヲ知ル。

46. 次ノ方程式ノ正根及ビ負根ノ數ヲ求メヨ，

$$x^4+2x^3-13x^2-24x+18=0$$

〔解〕 先ヅ $F(x)=x^4+2x^3-13x^2-24x+18$, $\quad F'(x)=4x^3+6x^2-26x-24$

ノ最大公約數ヲ求メンニ

$x^4+2x^3-13x^2-24x+18$	$x+1$	$2x^3+3x^2-13x-12$
$2x^4+4x^3-26x^2-48x+36$		29
$2x^4+3x^3-13x^2-12x$		$58x^3+87x^2-377x-348$
$x^3-13x^2-36x+36$		
$2x^3-26x^2-72x+72$		$58x^3+118x^2-168x$
$2x^3+3x^2-13x-12$		$-31x^2-209x-348$
$-29x^2-$[illegible]$9x+84$		-58
$58x^2+118x-168$	$x+31$	$1798x^2+12122x+20184$
$58x^2+174x$		$1798x^2+3658x-5208$
$-56x-168$	$58x$	$8464)\ 8464x+25392$
$-56x-168$	-56	$x+3$

即チ $F(x)$, $F'(x)$ ノ最大公約數ハ $x+3$, 故ニ $F(x)=0$ ハ $x=-3$ ナル二重根ヲ有ス, 依ツテ此二重根ヲ單根トスルタメニ $F(x)$ ヲ $x+3$ ニテ割レバ sturm ノ函數列ノ $f(x)$ トシテ $x^3-x^2-10x+6$ ヲ得,

即チ $f(x)=x^3-x^2-10x+6$

$f'(x)=3x^2-2x-10=f_1(x)$,

$f_2(x)$ 以下ヲ求ムルタメニ $f(x)$, $f_1(x)$ ノ最大公約數ヲ求ムル運算ヲ行フ, 但シ sturm ノ函數列ハ正ノ定數ヲ乘除スルモ差支ナキコト明カナル故ニ之ニ由ツテ分數ノ計算ヲ避クルヲコトヽスベシ

$$
\begin{array}{r|c|l}
f(x)\ldots\ldots\ x^3-x^2-10x+6 & x-1 & 3x^2-2x-10\ldots\ldots f_1(x) \\
 & & 31 \\
\hline
3x^3-3x^2-30x+18 & & 93x^2-62x-310 \\
3x^3-2x^2-10x & & 93x^2-66x \\
\hline
-x^2-20x+18 & & 4x-310 \\
\hline
-3x^2-60x+54 & & 31 \\
-3x^2+2x+10 & & \\
\hline
-2)\ -62x+44 & & 124x-9610 \\
 & & 124x-88 \\
\hline
f_2(x)\ldots\ldots\ 31x-22 & 3x+4 & \\
 & & 9522\ldots\ldots f_3(x)
\end{array}
$$

即チ $f(x)=x^3-x^2-10x+6$, $f_1(x)=3x^2-2x-10$,

$f_2(x)=31x-22$, $f_3(x)=9522$

故ニ $x=-\infty$, 0, ∞ ニ對スル函數列ノ符號ハ次ノ如シ

x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	符號ノ變化ノ數
$-\infty$	−	+	−	+	3
0	+	−	−	+	2
∞	+	+	+	+	0

故ニ負根ノ數ハ $3-2=1$, 正根ノ數ハ $2-0=2$, 但シ負根 -3 ハ二重根ナル故ニ所題ノ方程式 $F(x)=0$ ハ二重根 -3 ト正根二ツトヲ有ス。

47. Sturm ノ函數列ニヨリテ方程式 $x^5+5px^3+5p^2x+q=0$ ガ實根ノミヲ有スル條件ヲ求メヨ。

〔解〕 $f(x)=x^5+5px^3+5p^2x+q$, $f'(x)=5(x^4+3px^2+p^2)$ ヨリ sturm ノ函數列ヲ作ル, 但シ p, q ハ正負不明ナル故ニ運算ノ途中乘除スルコトヲ得ズ

$$
\begin{array}{r|c|l}
f(x)\ldots\ldots x^5+5px^3+5p^2x+q & x & x^4+3px^2+p^2\ldots\ldots f_1(x) \\
x^5+3px^3+p^2x & & \\
\hline
2px^3+4p^2x+q & & \\
\hline
f_2(x)\ldots\ldots -2px^3-4p^2x-q & -\dfrac{x}{2p} & x^4+2px^2+\dfrac{q}{2p}x \\
\cline{3-3}
-2px^3+\dfrac{q}{p}x^2-2p^2x & & px^2-\dfrac{q}{2p}x+p^2 \\
\hline
-\dfrac{q}{p}x^2-2p^2x-q & 2x+\dfrac{q}{p^2} & \\
\cline{3-3}
-\dfrac{q}{p}x^2+\dfrac{q^2}{2p^3}x-q & & -px^2+\dfrac{q}{2p}x-p^2\ldots f_3(x) \\
 & & -px^2+\dfrac{q}{2p}x \\
\hline
-\left(2p^2+\dfrac{q^2}{2p^3}\right)x & -\dfrac{px}{\left(2p^2+\dfrac{q^2}{2p^3}\right)} & -p^2 \\
\hline
f_4(x)\ldots\ldots \left(2p^2+\dfrac{q^2}{2p^3}\right)x & \dfrac{q}{2\left(2p^2+\dfrac{q^2}{2p^3}\right)p} & p^2\ldots\ldots f_5(x)
\end{array}
$$

即チ $f(x)=x^5+5px^3+5p^2x+q$, $f_1(x)=x^4+3px^2+p^2$

$f_2(x)=-2px^3-4p^2x-q$, $f_3(x)=-px^2+\dfrac{q}{2p}x-p^2$

$f_4(x)=\left(2p^2+\dfrac{q^2}{2p^3}\right)x$, $f_5(x)=p^2$,

$f(x)=0$ ガ實根ノミヲ有スルタメニハ $x=-\infty$ ノトキ上ノ函數列ノ符號ハ

$-+-+-+$

トナリ, $x=\infty$ ノトキ

$++++++$

トナラザルベカラズ, ソレガタメニハ $p<0$, $\left(2p^2+\dfrac{q^2}{2p^3}\right)>0$ ナルヲ要ス

逆ニ此二ツノ關係アラバ $f(x)=0$ ハ實根ノミヲ有ス, 故ニ所要ノ條件ハ

$$p<0, \qquad 2p^2+\frac{q^2}{2p^3}>0,$$

之ヲ一ツニマトメテ　$4p^3+q^2<0,$

48. ***Horner*** **ノ方法ニヨツテ方程式 $x^3-2x-7=0$ ノ 2 ト 3 トノ間ノ根ヲ小數第三位マデ計算セヨ。**

〔解〕

$f(x)$ ………………	1	0	-2	-7	2.258
		2	4	4	
		2	2	-3	
		2	8		
		4	10		
		2			
$f(x+2)=f_1(x)$ ……	1	6	10	-3	
$f_1\left(\frac{x}{10}\right)=f_2(x)$ …	1	60	1000	-3000	$f_2(2)=-752$
		2	124	2248	$f_2(3)=+567$
		62	1124	-752	
		2	128		
		64	1252		
		2			
$f_2(x+2)=f_3(x)$ …	1	66	1252	-752	
$f_3\left(\frac{x}{10}\right)=f_4(x)$ …	1	660	125200	-752000	$\frac{752000}{125200}=6+$
		5	3325	642625	$f_4(6)=3176, f_4(5)=-109375$
		665	128525	-109375	
		5	3350		
		670	131875		
		5			
$f_4(x+5)=f_5(x)$ …	1	675	131875	-109375	$\frac{1093750}{131875}=8+$
$f_5\left(\frac{x}{10}\right)=f_6(x)$ …	1	6750	13187500	-109375000	$f_6(8)=-3442488.$

49. 方程式 $x^3+x^2+12x-24=0$ ノ正根ヲ小數第三位マデ求メヨ。

〔解〕 正根ノ數及ビ其位置ヲ知ランガタメニ *sturm* ノ函數列ヲ作レバ

$$f(x)=x^3+x^2+12x-24, \qquad f_1(x)=3x^2+2x+12,$$

$$f_2(x)=-35x+114, \qquad f_3(x)=-61668,$$

故ニ　$x=0$ トスレバ　$-++-$　符號ノ變化 2,

　　　$x=\infty$ トスレバ　$++--$　符號ノ變化 1

故ニ正根ハ $2-1=1$,

次ニ　$x=1$ トスレバ　$-++-$　符號ノ變化 2,

　　　$x=2$ トスレバ　$+++-$　符號ノ變化 1

故ニ只一ツノ正根ハ 1, 2 ノ間ニアリ, 依ツテ *Horner* ノ方法ニヨリ次ノ運算ヲ施ス

$f(x)$ ………………	1	1	12	-24	1.517
	1	1	2	14	
		2	14	-10	
		1	3		
		3	17		
		1			
$f(x+1)=f_1(x)$ ……	1	4	17	-10	
$f_1\left(\frac{x}{10}\right)=f_2(x)$ …	1	40	1700	-10000	$\frac{100}{17}=5+$
		5	225	9625	$f_2(5)=-375,\ f_2(6)=1856$
		45	1925	-375	
		5	250		
		50	2175		
		5			
$f_2(x+5)=f_3(x)$ …	1	55	2175	-375	
$f_3\left(\frac{x}{10}\right)=f_4(x)$ …	1	550	217500	-375000	$\frac{3750}{2175}=1+$
		1	551	218051	$f_4(1)=-156949,\ f_4(2)=62208,$
		551	218051	-156949	
		1	552		
		552	218603		
		1			
$f_4(x+1)=f_5(x)$ …	1	553	218603	-156949	
$f_5\left(\frac{x}{10}\right)=f_6(x)$ …	1	5530	21860300	-156949000	$\frac{1569490}{218603}=7+$
		7	38759	153293413	$f_6(7)=-3655587,\ f_6(8)>0,$
		5537	21899059	-3655587	

依ツテ所要ノ正根ハ 1.517.

50. ***Horner*** **ノ方法ニ由ツテ次ノ方程式ノ -2 ト -3 トノ間ニアル根ヲ小數第二位マデ求メ第三位以下省略法ニヨツテ第五位マデ計算セヨ，**

$$x^3+6x^2-x-20=0,$$

〔解〕 先ヅ x ノ符號ヲ變ズレバ $x^3-6x^2-x+20=0$, 依ツテ次ノ運算ヲ施ス

$f(x)$ ………………	1	-6	-1	20	2.15412	
		2	-8	-18		
		-4	-9	2		
		2	-4			
		-2	-13			
		2				
$f(x+2)=f_1(x)$ ……	1	0	-13	2		$f_2(1)=701$, $f_2(2)=-592$
$f_1(x/10)=f_2(x)$	1	0	-1300	2000		
		1	1	-1299		
		1	-1299	701		
		1	2			
		2	-1297			
		1				
$f_2(x+1)=f_3(x)$ …	1	3	-1297	701		$\frac{7010}{1297}=5+$
$f_3(x/10)=f_4(x)$ …	1	30	-129700	701000		
		5	175	-647625		$f_4(5)=53375$, $f_4(6)=-75904$
		35	-129525	53375		
		5	200			
		40	-129325			
		5				
$f_4(x+5)=f_5(x)$ …	1	45	-129325	53375		$\frac{533750}{129325}=4+$
$f_5(x/10)=f_6(x)$ …	1	450	-12932500	53375000		
之ヨリ省略算　$F(x)$……		1	-12933	53375		
			4	-51716		$f_6(4)=1652264$,　$f_6(5)<0$,
			-12929	1659		
			4			
$F(x+4)=F_1(x)$		1	-12925	1659		
$F_1(x/10)=F_2(x)$		1	-129250	165900		$\frac{16590}{12925}=1+$,
$\phi(x)$ ……………			-1293	1659		
				-1293		$F_2(1)=36651$,　$F_2(2)<0$,
$\phi(x+1)=\phi_1(x)$			-1293	366		
$\phi_1(x/10)=\phi_2(x)$			-1293	3660		
			-129	366		$\frac{366}{129}=2+$
				-258		
				108		

依ツテ所要ノ根ノ近似値ハ　-2.15412　ナルヲ知ル。

51. ***Horner*** **ノ方法ニヨリテ 5 ノ四乘根ヲ小數第二位マデ求メ第三位以下省略法ニヨリテ第五位マデ計算セヨ。**

〔解〕 $f(x)=x^4-5=0$ ノ實根ヲ求ムレバ可ナリ. 依ツテ次ノ運算ヲナス,

$f(x)$ …	1	0	0	0	-5	1.49534	
		1	1	1	1		
		1	1	1	-4		
		1	2	3			
		2	3	4			
		1	3				
		3	6				
		1					
$f_1(x)$…	1	4	6	4	-4		$f_2(4)=-11584$
$f_2(x)$	1	40	600	4000	-40000		$f_2(5)=625$
		4	176	3104	28416		
		44	776	7104	-11584		
		4	192	3872			
		48	968	10976			
		4	208				
		52	1176				
		4					
$f_3(x)$…	1	56	1176	10976	-11584		
$f_4(x)$…	1	560	117600	10976000	-115840000		$f_4(9)=-7115599$
		9	5121	1104489	108724401		
		569	122721	12080489	-7115599		
		9	5202	1151307			
		578	127923	13231796			
		9	5283				
		587	133206				
		9					
	1	596	133206	13231796	-7115599		$\frac{7115599}{1323180}=5+$
$F(x)$ …		1	1332	1323180	-7115599		
			5	6685	6649325		
			1337	1329865	-466274		
			5	6710			
			1342	1336575			
			5				
$F_1(x)$…		1	1347	1336575	-466274		$\frac{466274}{133658}=3+$
$\phi(x)$ …			14	133658	-466274		
				42	401100		
				133700	-65174		
				42			
$\phi_1(x)$…			14	133742	-65174		$\frac{65174}{13374}=4+$
				13374	-65174		
					53496		
					-11678		

第十一章

行　列　式

基本定理 I. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2,$$

II. 行列式ノ行ト列トヲソノマヽ取リ換ユルモ行列式ノ値ハ變ラズ。

III. 行列式ノ或一列(又ハ一行)中ノ總テノ元素ヲ k 倍スレバ行列式モ亦 k 倍セラル。

IV. 行列式ノ二列(又ハ二行)ヲ取リ換ユレバ行列式ハ其符號ノミ變ズ。

V. $$\begin{vmatrix} a_1+a_1' & a_2+a_2' & a_3+a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1 & b_2 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

VI. 行列式ノ或一列(又ハ一行)ノ各元素ニ各ノ餘因數ヲ乘ジテ加ヘタルモノハ其行列式ニ等シ。

演習問題

1. $\triangle = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$ ノ値ヲ求ム。

〔解〕 第一列ニ 12, 第二列ニ 6, 第三列ニ 3 ヲ乘ジテ分母ヲ去レバ基本定理 III 及ビ I ニヨリ

$$\triangle = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & -3 & 6 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{12\cdot6\cdot3}(-18+72+36-27-16+103) = \frac{155}{216}$$

2. $\triangle = \begin{vmatrix} 6 & -3 & 15 \\ 4 & 6 & -14 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ノ値ヲ求ム。

〔解〕 基本定理 III ニヨリ第一列ヨリ 3, 第二列ヨリ 2 ヲ括リ出シ, 次ニ尙第一行ヨリ 2 ヲ括リ出セバ

$$\triangle = 3\cdot2\cdot2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12(3+7+5-15+1+7) = 96,$$

3. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 & 4 \\ 1 & -6 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ -1 & 10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ ヲ證セヨ。

〔解〕 左邊ノ第二行ヨリ 2 ヲ括リ出シ右邊ノ第三列ヨリ 2 ヲ括リ出セバ兩邊ノ行列式ハ行ト列トヲソノマヽ取リ換ヘタルモノトナル故ニ基本定理 II ニヨリ相等シ。

4. 二列(又ハ二行)ガ全ク相等シキ行列式ノ値ハ 0 ナルコトヲ證セヨ。

〔解〕 所題ノ行列式ヲ $\triangle$ トシ $\triangle$ ニ於テ其相等シキ二列又ハ二行ヲ取リ換ユレバ基本定理 IV ニヨリテ $-\triangle$ トナル, 然ルニ其二列又ハ二行ハ全ク相等シキ故ニ之ヲ取リ換ヘルモ行列式ニハ何等ノ變化ナキ筈ナリ, 故ニ

$$-\triangle = \triangle \qquad \therefore\ \triangle = 0,$$

5. 二列(又ハ二行)ノ對應元素ガ比例ヲナス行列式ノ値ハ 0 ナルコトヲ證セヨ。

〔解〕 對應元素ノ比ノ値ヲ k トシ一方ノ列（又ハ行）ノ各元素ヨリ共通ノ因數 k ヲ括リ出セバ所題ノ行列式ハ二列（又ハ二行）ノ相等シキ行列式ト k トノ積ニ等シク，而シテ其ノ行列式ハ前問ニヨリ 0 ナル故ニ所題ノ行列式モ亦 0 ナリ。

6. 或列（又ハ行）ノ元素ニ同一ノ數ヲ乘ジテ他ノ列（又ハ行）ノ對應元素ニ加フルモ行列式ノ値ハ變ラザルコトヲ証セヨ。

〔解〕 基本定理 V，及ビ前問ニヨリ

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & a_2+kb_2 & a_3+kb_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

此關係ハ行列式ノ次數ト k ノ如何ニ係ラズ成立ス，故ニ任意ノ行列式ニ於テ或列又ハ或行ノ元素ニ同一ノ數 k ヲ乘ジテ他ノ列又ハ行ノ對應元素ニ加フルモ行列式ノ値ハ變ラズ。

7. $\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix}$ **ノ値ヲ求ム。**

〔解〕 前問ニヨリ第一行ノ各元素ヲ第二，第三，第四行ノ對應元素ヨリ引キ基本定理 VI ニヨリ第一列ニツキテ展開スレバ

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y & 0 \\ 0 & z \end{vmatrix} = xyz,$$

8. $\triangle = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ **ノ値ヲ求ム。**

〔解〕 基本定理 VI ニヨリ第一列ニツキテ展開スレバ

$$\triangle = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

然ルニ右邊ノ第三行列式ノ第一，第二列ヲ交換スレバ第二ノ行列式トナリ又第四ノ行列式ノ第三列ヲ第二列ト交換シ再ビ第一列ト交換スレバ矢張リ第二ノ行列式トナル，故ニ

$$\triangle = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

次ニ第一行列式ノ第三列ノ各元素ヲ第一，第二列ノ對應元素ヨリ引キ第二行列式ノ第一列ノ各元素ヲ第二，第三列ノ各元素ヨリ引キ且ツ第一列ヨリ 2 ヲ括リ出セバ

$$\triangle = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 12\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3(3+2+2) - 12(1) = 9$$

或ハ問. 6 ニヨリ $\triangle$ ノ第二，第三，第四行ノ各元素ヲ第一行ノ對應元素ニ加フレバ

$$\triangle = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 3 & 2 & 2 \\ 9 & 2 & 3 & 2 \\ 9 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

右邊ノ行列式ノ第一行ノ 2 倍ヲ第二，第三，第四行ヨリ引ケバ

$$\triangle = 9\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9,$$

9. $\triangle=\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 20 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 11 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ **ノ値ヲ求ム。**

〔解〕 第三列ニツキ展開シ次ニ第一行列式ノ第一列ヨリ第三列ノ 7 倍，第二列ヨリ第三列ヲ引キ又第二行列式ニツイテモ同ジク第一列ヨリ第三列ノ 7 倍，第二列ヨリ第三列ヲ引ケバ

$$\triangle=5\begin{vmatrix} 7 & 2 & 20 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}+11\begin{vmatrix} 8 & 7 & 20 \\ 3 & 1 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$=5\begin{vmatrix} 0 & 2 & -22 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}+11\begin{vmatrix} -48 & 0 & -22 \\ -5 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

右邊ノ第一行列式ヲ第一行ニツキ第二行列式ヲ第二行ニツキ展開スレバ

$$\triangle=5\begin{vmatrix} 2 & -22 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}-11\begin{vmatrix} -48 & -22 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}=5(2+88)+11(48+110)=2188,$$

10. $\triangle=\begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ **ノ値ヲ求ム。**

〔解〕 第一列ノ 3 倍ヲ第二列ニ加ヘ第三列ヨリ第一列ヲ引キ第四列ニ第一列ヲ加ヘ第二行ニツキ展開スレバ

$$\triangle=\begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 & 5 \\ 19 & 0 & -2 & 17 \\ -7 & 0 & 5 & -2 \\ 12 & 0 & 3 & 9 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 19 & -2 & 17 \\ -7 & 5 & -2 \\ 12 & 3 & 9 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 19 & -2 & 17 \\ -7 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

右邊ノ行列式ニ於テ第二行ノ 4 倍ヲ第一行ヨリ，第二行ノ 3 倍ヲ第三行ヨリ引キ第三列ニツキ展開スレバ

$$\triangle=6\begin{vmatrix} 27 & -2 & 23 \\ -27 & 5 & -17 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix} 27 & 23 \\ -27 & -17 \end{vmatrix}=6\times27\begin{vmatrix} 1 & 23 \\ 1 & 17 \end{vmatrix}$$

$$=6\times27\times(-6)=-972,$$

11. $\triangle=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}=abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$

ヲ証セヨ。

〔解〕 第一行ヲ第二，第三，第四行ヨリ引キ第一行ニツキ展開スレバ

$$\triangle=\begin{vmatrix} 1+a & -a & -a & -a \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=(1+a)\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix}+a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$-a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix}+a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(1+a)bcd+acd\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}-abd\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}+abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(1+a)bcd+acd+abd+abc=abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right),$$

12. $\triangle=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$ **ノ値ヲ求ム。**

〔解〕 $a=b$ トオケバ第一，第二列ハ相等シクナル故ニ所題ノ行列式ハ 0 トナル，故ニ剰餘定理(第一章)ニヨリ $\triangle$ ハ $a-b$ ナル因數ヲ有ス，同様ニ $\triangle$ ハ $(a-c)$，$(a-d)$，$(b-c)$，$(b-d)$，$(c-d)$ ナル因數ヲ有ス

$$\therefore\ \triangle=K(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d),$$

然ルニ $\triangle$ ハ a, b, c, d ニツイテ 6 次ナル故ニ k ハ a, b, c, d ヲ含マズ，依ツテ主項 bc^2d^3 ノ係數ヲ比較シテ $k=1$ ヲ得

$$\therefore\ \triangle=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d),$$

13. $\triangle=\begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}$ **ノ値ヲ求ム。**

〔解〕 第三列ヨリ第二列ヲ，第四列ヨリ第一列ヲ引ケバ第三，第四列ハ比例ヲナス故ニ問. 5 ニヨリ $\triangle=0$，即チ

$$\triangle=\begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ -4 & 4 & 4 & -4 \\ 12 & -12 & -12 & 12 \end{vmatrix}=0,$$

14. $\triangle=\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix}=8\,abc$ **ヲ証セヨ。**

〔解〕 第一列ヲ第二，第三列ニ加ヘテ 2 ヲ括リ出セバ

$$\triangle=4\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a \end{vmatrix}=4\{a^2(b+c)-ac(a-b)-ab(a-c)\}=8\,abc,$$

15. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$

$=-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$ **ヲ証セヨ。**

〔解〕 左邊ノ行列式ヲ $\triangle$ トシ $\triangle$ ノ第二，第三，第四列ニソレゾレ bc, ca, ab ヲ乘ジ次ニ第一行ヨリ abc，第二，第三，第四行ヨリ夫々 a, b, c ヲ括リ出セバ

$$a^2b^2c^2\triangle=\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ abc & 0 & bc^2 & b^2c \\ abc & c^2a & 0 & ca^2 \\ abc & ab^2 & a^2b & 0 \end{vmatrix}=a^2b^2c^2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ \triangle=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

次ニ $\triangle$ ノ第二列以下ヲ第一列ニ加フレバ第一列ハ $a+b+c$ ナル共通ノ因數ヲ有スルコトナル，故ニ $\triangle$ ハ $a+b+c$ ナル因數ヲ有ス，又 $\triangle$ ノ第一列ニ第二列ヲ加ヘ第三，第四列ヲ引ケバ第一列ハ $-a+b+c$ ナル共通ノ因數ヲ有スルコトヽナル，故ニ $\triangle$ ハ $-a+b+c$ ナル因數ヲ有ス，同樣ニ $\triangle$ ハ又 $a-b+c$, $a+b-c$ ナル因數ヲ有スルコトヲ知ル

$$\therefore\ \triangle=k(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),$$

$\triangle$ ハ a, b, c ニツイテ 4 次ナル故ニ k ハ a, b, c ヲ含マズ，依ツテ $a=b=c=1$ トオケバ $-3=3k$ $\quad\therefore\ k=-1,$

$$\therefore\ \triangle=k(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

16. $\triangle=\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}=2\,abc(a+b+c)^3$ **ヲ証セヨ。**

〔解〕 第三行ヲ第一，第二行ヨリ引キ第一，第二行ヨリ $(a+b+c)$ ヲ括リ出セバ

$$\triangle=\begin{vmatrix} (b+c)^2-a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & (c+a)^2-b^2 & b^2 \\ c^2-(a+b)^2 & c^2-(a+b)^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ c-a-b & c-a-b & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

第一，第二列ノ和ヲ第三列ヨリ引キ第一行ニ a，第二行ニ b ヲ乘ズレバ

$$\triangle=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ -2b & -2a & 2ab \end{vmatrix}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{ab}\begin{vmatrix} a(b+c-a) & 0 & a^2 \\ 0 & b(c+a-b) & b^2 \\ -2ab & -2ab & 2ab \end{vmatrix}$$

第三行ヲ第一, 第二行ニ加ヘ, 第三列ニツイテ展開スレバ

$$\triangle=\frac{(a+b+c)^2}{ab}\begin{vmatrix} a(b+c) & a^2 & a^2 \\ b^2 & b(c+a) & b^2 \\ 0 & 0 & 2ab \end{vmatrix}=2(a+b+c)^2\begin{vmatrix} a(b+c) & a^2 \\ b^2 & b(c+a) \end{vmatrix}$$

$$=2(a+b+c)^2\{ab(b+c)(c+a)-a^2b^2\}=2abc(a+b+c)^3,$$

17. $\triangle=\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ **ヲ a, b, c ノ一次式ノ積ニテ表ハセ。**

〔解〕 第二行ニ ω (1ノ立方根ノ虚數) 第三行ニ ω^2 ヲカケテ第一行ニ加ヘ第一行ヨリ $a+\omega b+\omega^2 c$ ヲ括リ出セバ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a+\omega b+\omega^2 c & b & c \\ c+\omega a+\omega^2 b & a & b \\ b+\omega c+\omega^2 a & c & a \end{vmatrix}=(a+\omega b+\omega^2 c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ \omega & a & b \\ \omega^2 & c & a \end{vmatrix}$$

右邊ノ行列式ノ第二, 第三列ヲ第一列ニ加ヘ $a+b+c$ ヲ括リ出セバ

$$\triangle=(a+\omega b+\omega^2 c)\begin{vmatrix} 0 & b+a+c & c+b+a \\ \omega & a & b \\ \omega^2 & c & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+\omega b+\omega^2 c)(a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \omega & a & b \\ \omega^2 & c & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+\omega b+\omega^2 c)(a+b+c)(\omega^2 b+\omega c-\omega^2 a-\omega a)$$

$$=(a+\omega b+\omega^2 c)(a+b+c)(a+\omega^2 b+\omega c),$$

18. $\triangle=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3+bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3+cda \\ 1 & c & c^2 & c^3+dab \\ 1 & d & d^2 & d^3+abc \end{vmatrix}=0$ **ヲ証セヨ。**

〔解〕 基本定理 V ニヨリ

$$\triangle=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 1 & b & b^2 & cda \\ 1 & c & c^2 & dab \\ 1 & d & d^2 & abc \end{vmatrix}$$

第二行列式ヲ $\triangle'$ トシ, $\triangle'$ ノ各列ニ a, b, c, d ヲ乘ジ, 然ル後第四行ヨリ $abcd$ ヲ括リ出セバ

$$\triangle'=\frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & abcd \\ b & b^2 & b^3 & bcda \\ c & c^2 & c^3 & cdab \\ d & d^2 & d^3 & dabc \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & 1 \\ b & b^2 & b^3 & 1 \\ c & c^2 & c^3 & 1 \\ d & d^2 & d^3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} \quad \text{(基本定理 VI)},$$

$\therefore\ \triangle=0,$

19. **a, b, c ガ何レノ二ツモ相等シカラズシテ**

$$\begin{vmatrix} a & a^3 & a^4-1 \\ b & b^3 & b^4-1 \\ c & c^3 & c^4-1 \end{vmatrix}=0$$

ナルトキハ $abc(ab+bc+ca)=a+b+c$ ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 假設ニヨリ

$$\begin{vmatrix} a & a^3 & a^4 \\ b & b^3 & b^4 \\ c & c^3 & c^4 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a & a^3 & 1 \\ b & b^3 & 1 \\ c & c^3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ abc\begin{vmatrix}1 & a^2 & a^3\\ 1 & b^2 & b^3\\ 1 & c^2 & c^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & a^3\\ 1 & b & b^3\\ 1 & c & c^3\end{vmatrix}$$

左邊ノ行列式ハ a, b, c ニツキ五次ノ同次交代式ニシテ右邊ハ四次ノ同次交代式ナリ，依ツテ

$$\begin{vmatrix}1 & a^2 & a^3\\ 1 & b^2 & b^3\\ 1 & c^2 & c^3\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)\{L(a^2+b^2+c^2)+M(ab+bc+ca)\}$$

$$\begin{vmatrix}1 & a & a^3\\ 1 & b & b^3\\ 1 & c & c^3\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)\,N(a+b+c)$$

トオキ兩邊ノ係數ヲ比較スレバ $L=0,\ M=1,\ N=1$ ヲ得，而シテ

$$(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0,$$

$$\therefore\ abc(ab+bc+ca)=a+b+c,$$

20. $\triangle=\begin{vmatrix}a^2+\lambda & ab & ac & ad\\ ab & b^2+\lambda & bc & bd\\ ac & bc & c^2+\lambda & cd\\ ad & bd & cd & d^2+\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3(\lambda+a^2+b^2+c^2+d^2)$ **ヲ証セヨ。**

〔解〕 各列ヨリ a, b, c, d ヲ括リ出シ，然ル後第四列ヨリ第三列ヲ引キ第三列ヨリ第二列ヲ，第二列ヨリ第一列ヲ引ケバ

$$\triangle=abcd\begin{vmatrix}a+\frac{\lambda}{a} & b & c & d\\ a & b+\frac{\lambda}{b} & c & d\\ a & b & c+\frac{\lambda}{c} & d\\ a & b & c & d+\frac{\lambda}{d}\end{vmatrix}=abcd\begin{vmatrix}a+\frac{\lambda}{a} & b & c & d\\ -\frac{\lambda}{a} & \frac{\lambda}{b} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\lambda}{b} & \frac{\lambda}{c} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{\lambda}{c} & \frac{\lambda}{d}\end{vmatrix}$$

第二，第三，第四列ヨリ λ ヲ括リ出シ第一，第二，第三，第四行ニ a, b, c, d ヲ乘ズレバ

$$\triangle=\lambda^3\begin{vmatrix}a^2+\lambda & b^2 & c^2 & d^2\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

第二列ニツキテ展開スレバ

$$\triangle=\lambda^3\left\{\begin{vmatrix}b^2 & c^2 & d^2\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a^2+\lambda & c^2 & d^2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}\right\}$$

$$=\lambda^3\{b^2+d^2+c^2+a^2+\lambda\}=\lambda^3(\lambda+a^2+b^2+c^2+d^2),$$

21. $\triangle=\begin{vmatrix}ax-by-cz & ay+bx & cx+az\\ ay+bx & by-cz-ax & bz+cy\\ cx+az & bz+cy & cz-ax-by\end{vmatrix}$

$=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)(ax+by+cz)$ **ヲ証セヨ。**

〔解〕 各行ニ順次 a, b, c ヲ乘ジ各列ニ順次 x, y, z ヲ乘ジ第一行ニ第二，第三行ヲ加ヘ然ル後第一列ニ第二，第三列ヲ加フレバ

$$\triangle=\frac{1}{abc\,xyz}\begin{vmatrix}(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) & b^2(x^2+y^2+z^2) & c^2(x^2+y^2+z^2)\\ (a^2+b^2+c^2)y^2 & b(by-cz-ax)y & c(bz+cy)y\\ (a^2+b^2+c^2)z^2 & b(bz+cy)z & c(cz-ax-by)z\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}{abc\,xyz}\begin{vmatrix}1 & b^2 & c^2\\ y^2 & b(by-cz-ax)y & c(bz+cy)y\\ z^2 & b(bz+cy)z & c(cz-ax-by)z\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}{ax}\begin{vmatrix}1 & b & c\\ y & by-cz-ax & bz+cy\\ z & bz+cy & cz-ax-by\end{vmatrix}$$

然ルニ右邊ノ行列式ヲ $\triangle'$ トスレバ

$$\triangle'=\begin{vmatrix}1 & b & c\\ y & by & bz+cy\\ z & bz & cz-ax-by\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0 & c\\ y & -cz-ax & bz+cy\\ z & cy & cz-ax-by\end{vmatrix}$$

右邊ノ第一行列式ノ第一，第二行ハ比例チナス 故ニ其値ハ 0，第二行列式チ Δ'' トスレバ同樣ニ

$$\Delta''=\begin{vmatrix}1 & 0 & c\\ y & -cz-ax & cy\\ z & cy & cz\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ y & -cz-ax & bz\\ z & cy & -ax-by\end{vmatrix}$$

$$=0+\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ y & -cz-ax & bz\\ z & cy & -ax-by\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-cz-ax & bz\\ cy & -ax-by\end{vmatrix}$$

$$=ax(ax+by+cz),$$

$$\therefore\quad \Delta=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)(ax+by+cz),$$

22. 方程式 $\begin{vmatrix}3-2x & 4 & 5\\ 1+x & 6 & -4\\ 3x & 3 & 1\end{vmatrix}=0$ ヲ解ケ。

〔解〕 所題ノ方程式ヨリ

$$\begin{vmatrix}3 & 4 & 5\\ 1 & 6 & -4\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}-2 & 4 & 5\\ 1 & 6 & -4\\ 3 & 3 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{-\begin{vmatrix}3 & 4 & 5\\ 1 & 6 & -4\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-2 & 4 & 5\\ 1 & 6 & -4\\ 3 & 3 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-65}{-163}=\frac{65}{163}$$

23. 方程式 $\begin{vmatrix}a & b & x\\ b & 2a+b & 2x\\ x & 2x & 3(a+b)\end{vmatrix}=0$ ヲ解ケ。

〔解〕 左邊チ Δ トシ Δ ノ第二，第三列ヲ第一列ニ加フレバ

$$\Delta=\begin{vmatrix}a+b+x & 2(a+b+x) & 3(a+b+x)\\ b & 2a+b & 2x\\ x & 2x & 3(a+b)\end{vmatrix}=(a+b+x)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ b & 2a+b & 2x\\ x & 2x & 3(a+b)\end{vmatrix}$$

第一行ノ 2 倍及ビ 3 倍ヲ第二行及ビ第三行ヨリ引ケバ

$$\Delta=(a+b+x)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ b & 2a-b & 2x-3b\\ x & 0 & 3(a+b-x)\end{vmatrix}=(a+b+x)\begin{vmatrix}2a-b & 2x-3b\\ 0 & 3(a+b-x)\end{vmatrix}$$

$$=3(a+b+x)(2a-b)(a+b-x)=0$$

$\therefore$ $2a-b\neq 0$ ナラバ $x=a+b$ 又ハ $-(a+b)$

$2a-b=0$ ナラバ 不定。

24. $\begin{vmatrix}u_1+a^2x & w_2+abx & v_2+acx\\ w_2+abx & v_1+b^2x & u_2+bcx\\ v_2+acx & u_2+bcx & w_1+c^2x\end{vmatrix}=0$ ナルトキハ

$\begin{vmatrix}u_1 & w_2 & v_2 & a\\ w_2 & v_1 & u_2 & b\\ v_2 & u_2 & w_1 & c\\ a & b & c & 0\end{vmatrix}x=\begin{vmatrix}u_1 & w_2 & v_2\\ w_2 & v_1 & u_2\\ v_2 & u_2 & w_1\end{vmatrix}$ ナルコトヲ證セヨ。

〔解〕 所題ノ行列式ヲ基本定理 V ニヨリ八個ノ行列式ノ和ニテ表ハセバ

$$\begin{vmatrix}u_1 & w_2 & v_2\\ w_2 & v_1 & u_2\\ v_2 & u_2 & w_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}u_1 & w_2 & acx\\ w_2 & v_1 & bcx\\ v_2 & u_2 & c^2x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}u_1 & abx & v_2\\ w_2 & b^2x & u_2\\ v_2 & bcx & w_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}u_1 & abx & acx\\ w_2 & b^2x & bcx\\ v_2 & bcx & c^2x\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}a^2x & w_2 & v_2\\ abx & v_1 & u_2\\ acx & u_2 & w_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a^2x & w_2 & acx\\ abx & v_1 & bcx\\ acx & u_2 & c^2x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a^2x & abx & v_2\\ abx & b^2x & u_2\\ acx & bcx & w_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a^2x & abx & acx\\ abx & b^2x & bcx\\ acx & bcx & c^2x\end{vmatrix}=0$$

然ルニ此第四，第六，第七，第八行列式ハ明カニ 0 ナリ，故ニ

$$\begin{vmatrix}u_1 & w_2 & v_2\\ w_2 & v_1 & u_2\\ v_2 & u_2 & w_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}u_1 & w_2 & a\\ w_2 & v_1 & b\\ v_2 & u_2 & c\end{vmatrix}cx+\begin{vmatrix}u_1 & a & v_2\\ w_2 & b & u_2\\ v_2 & c & w_1\end{vmatrix}bx+\begin{vmatrix}a & w_2 & v_2\\ b & v_1 & u_2\\ c & u_2 & w_1\end{vmatrix}ax=0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} u_1 & w_2 & v_2 \\ w_2 & v_1 & u_2 \\ v_2 & u_2 & w_1 \end{vmatrix} = x\left\{ -a\begin{vmatrix} w_2 & v_1 & u_2 \\ v_2 & u_2 & w_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} u_1 & w_2 & v_2 \\ v_2 & u_2 & w_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} u_1 & w_2 & v_2 \\ w_2 & v_1 & u_2 \\ a & b & c \end{vmatrix}\right\}$$

$$= x\begin{vmatrix} u_1 & w_2 & v_2 & a \\ w_2 & v_1 & u_2 & b \\ v_2 & u_2 & w_1 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

25. **方程式** $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 \ldots\ldots a_n \\ a_n & x & a_1 \ldots\ldots a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & x \ldots\ldots a_{n-2} \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_1 & a_2 & a_3 \ldots\ldots x \end{vmatrix} = 0$ **ヲ解ケ。**

〔解〕 1 ノ $(n+1)$ 乘根ノ任意ノ一ツヲ ω トシ第二列, 第三列,……第 $n+1$ 列ニ夫々 $\omega, \omega^2 \ldots\ldots \omega^n$ ヲ乘ジテ第一列ニ加ヘタルトキノ第一列ノ元素ヲ $c_1\ c_2\ c_3 \ldots\ldots c_{n+1}$ トスレバ

$$c_1 = x + a_n\omega + a_{n-1}\omega^2 + \ldots\ldots + a_1\omega^n$$
$$c_2 = a_1 + x\omega + a_n\omega^2 + \ldots\ldots + a_2\omega^n$$
$$c_3 = a_2 + a_1\omega + x\omega^2 + \ldots\ldots + a_3\omega^n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_{n+1} = a_n + a_{n-1}\omega + a_{n-2}\omega^2 + \ldots\ldots + x\omega^n$$

然ルニ $c_2 = c_1\omega, \quad c_3 = c_1\omega^2, \quad c_4 = c_1\omega^3, \ldots\ldots c_{n+1} = c_1\omega^n$

故ニ c_1 ハ所題ノ方程式ノ一ツノ因數ナリ, 故ニ $c_1 = 0$ ヨリ得ベキ

$$x = -(a_n\omega + a_{n-1}\omega^2 + \ldots\ldots + a_1\omega^n)$$

ハ一ツノ根ナリ, 故ニ 1 ノ $(n+1)$ 乘根ヲ $\omega_1, \omega_2, \ldots\ldots \omega_{n+1}$ トスレバ所題ノ方程式ノ根ハ次ノ如シ

$$-(a_n\omega_1 + a_{n-1}\omega_1^2 + \ldots\ldots + a_1\omega_1^n)$$
$$-(a_n\omega_2 + a_{n-1}\omega_2^2 + \ldots\ldots + a_1\omega_2^n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-(a_n\omega_{n+1} + a_{n-1}\omega_{n+1}^2 + \ldots\ldots + a_1\omega_{n+1}^n),$$

26. 一ツノ行列式ノ或一列（又ハ一行）ノ元素ニ他ノ一列（又ハ一行）ノ對應元素ノ餘因數ヲ乘ジテ加ヘタルモノハ 0 ニ等シキコトヲ証セヨ。

〔解〕 一ツノ行列式 △ ノ或一列ノ元素ヲ $b_1, b_2, \ldots\ldots b_n$ トシ他ノ一列ノ對應元素ヲ $c_1, c_2, \ldots\ldots c_n$, 其各ノ餘因數ヲ $C_1, C_2, \ldots\ldots C_n$ トスレバ

$$b_1C_1 + b_2C_2 + \ldots\ldots + b_nC_n = 0 \qquad (1)$$

ナルコトヲ証セントスルニ基本定理 VI ニヨリ

$$c_1C_1 + c_2C_2 + \ldots\ldots + c_nC_n = \triangle \qquad (2)$$

(1) ノ左邊ハ (2) ノ左邊ニ於テ $c_1, c_2, \ldots\ldots c_n$ ヲ $b_1, b_2, \ldots\ldots b_n$ ニテ置キ代ヘタルモノニ等シ, 從ツテ (1) ノ左邊ハ △ ニ於テ c ノ列ヲ b ノ列ニテ置キ代ヘタルモノニ等シ, 依ツテ問. 4 ニヨリ (1) ノ左邊ノ値ハ 0 ナリ。

27. △=0 ナルトキハ其任意ノ一列（又ハ一行）ノ元素ノ餘因數ハ他ノ任意ノ一列（又ハ一行）ノ對應元素ノ餘因數ニ比例ヲナスコトヲ証セヨ, 但シ餘因數ハ總テ 0 ナラザルモノトス。

〔解〕 今 $\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots\ldots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \ldots\ldots b_n \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ h_1 & h_2 & h_3 \ldots\ldots h_n \end{vmatrix}$ トシ, 任意ノ二列ヲ $l_1, l_2, l_3 \ldots\ldots l_n$ 及ビ $m_1, m_2, m_3 \ldots\ldots m_n$ トシ各ノ餘因數ヲ $L_1, L_2, L_3 \ldots\ldots L_n$ 及ビ $M_1, M_2, M_3 \ldots\ldots M_n$ トスレバ基本定理 VI 及ビ前問ニヨリ

$$\left.\begin{array}{l} a_1L_1 + a_2L_2 + \ldots\ldots + a_nL_n = 0 \\ b_1L_1 + b_2L_2 + \ldots\ldots + b_nL_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_1L_1 + l_2L_2 + \ldots\ldots + l_nL_n = \triangle = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_1L_1 + m_2L_2 + \ldots\ldots + m_nL_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_1L_1 + h_2L_2 + \ldots\ldots + h_nL_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}
a_1M_1+a_2M_2+\ldots\ldots+a_nM_n=0\\
b_1M_1+b_2M_2+\ldots\ldots+b_nM_n=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
l_1M_1+l_2M_2+\ldots\ldots+l_nM_n=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
m_1M_1+m_2M_2+\ldots\ldots+m_nM_n=\triangle=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
h_1M_1+h_2M_2+\ldots\ldots+h_nM_n=0
\end{array}\right\} \qquad (2)$$

$\triangle=0$ ニシテ且ツ餘因數ハ總テ 0 ナラザル故ニ (1). (2) ヨリ $L_1:L_2:\ldots\ldots:L_n$ 及ビ $M_1:M_2:\ldots\ldots:M_n$ ノ値ハ只一通リ定マル (問. 31) 然ルニ (1), (2) ハ同ジ方程式ナリ，故ニ $L_1, L_2,\ldots\ldots L_n$ ノ比ト $M_1, M_2,\ldots\ldots M_n$ ノ比トハ相等シ，即チ

$$\frac{L_1}{M_1}=\frac{L_2}{M_2}=\ldots\ldots=\frac{L_n}{M_n},$$

28. 行列式ヲ利用シテ次ノ聯立方程式ヲ解ケ，

$$\boldsymbol{a_1x+b_1y+c_1z=d_1} \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{a_2x+b_2y+c_2z=d_2} \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{a_3x+b_3y+c_3z=d_3} \qquad (3)$$

〔解〕 (1), (2), (3) ヲ滿足セシムル x, y, z ノ値ヲ夫々 x, y, z ニテ表ハセバ

$$\begin{vmatrix} a_1x+b_1y+c_1z & b_1 & c_1\\ a_2x+b_2y+c_2z & b_2 & c_2\\ a_3x+b_3y+c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

左邊ノ行列式ノ第二行ニ $-y$, 第三行ニ $-z$ ヲ乘ジテ第一行ニ加フレバ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

左邊ノ行列式ヲ $\triangle$ ニテ表ハシ右邊ノ行列式ヲ ${}_a\triangle_d$ ニテ表ハセバ

$$\triangle x={}_a\triangle_d$$

同樣ニ $\triangle y={}_b\triangle_d$, $\triangle z={}_c\triangle_d$,

故ニ $\triangle\neq0$ ナラバ

$$x=\frac{{}_a\triangle_d}{\triangle}, \quad y=\frac{{}_b\triangle_d}{\triangle}, \quad z=\frac{{}_c\triangle_d}{\triangle}, \qquad (4)$$

逆ニ (4) ハ (1), (2), (3) ヲ滿足セシム，何ントナレバ今 $\triangle$ ノ元素 a_1, b_1 等ノ餘因數ヲ A_1, B_1 等ニテ表ハセバ (4) ヨリ

$$x=\frac{d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3}{\triangle}, \quad y=\frac{d_1B_1+d_2B_2+d_3B_3}{\triangle}, \quad z=\frac{d_1C_1+d_2C_2+d_3C_3}{\triangle},$$

各式ニ a_1, b_1, c_1 ヲカケテ加フレバ

$$a_1x+b_1y+c_1z=\frac{d_1}{\triangle}(a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1)+\frac{d_2}{\triangle}(a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2)$$

$$+\frac{d_3}{\triangle}(a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3)=d_1 \qquad (問. 26)$$

即チ (1) ハ成立ス，全ク同樣ニ (4) ニ對シテ (2), (3) ガ成立スルコトヲ證明シ得レバナリ。

(注意) 四元以上ノ場合ニツイテモ全ク同樣ナリ，

29. 前問ニ於テ $\triangle=0$ ナル場合ヲ吟味セヨ。

〔解〕 聯立方程式 (1), (2), (3) ハ $\triangle\neq0$ ナラバ常ニ只一組ノ根ヲ有スルコトハ前問ニ於テ解キタル如クナルモ $\triangle=0$ ナラバ然ラズ，今各種ノ場合ニツキテ吟味センニ

1. $\triangle=0$ ニシテ ${}_a\triangle_d$, ${}_b\triangle_d$, ${}_c\triangle_d$ ノ中ニ 0 ナラザルモノアル場合，此場合ニハ (1), (2), (3) ハ聯立セズ即チ不能ナリ，何ントナレバ今假リニ $\triangle=0$, ${}_a\triangle_d\neq0$ ナリトシ (1), (2), (3) ガ聯立ストスレバ

$${}_a\triangle_d=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1x+b_1y+c_1z & b_1 & c_1\\ a_2x+b_2y+c_2z & b_2 & c_2\\ a_3x+b_3y+c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1\\ b_2 & b_2 & c_2\\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1\\ c_2 & b_2 & c_2\\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}z=0$$

トナリテ矛盾スレバナリ，${}_b\triangle_d\neq0$ 又ハ ${}_c\triangle_d\neq0$ トスルモ同樣ナリ。

2. $\triangle={}_a\triangle_d={}_b\triangle_d={}_c\triangle_d=0$ ニシテ $\triangle$ ノ各元素ノ餘因數ノ中ニ 0 ナラザルモノアル場合,

此場合ニハ (1), (2), (3) ノ何レカハ他ノ二ツヨリ誘導スルコトヲ得, 即チ (1), (2), (3) ハ不定ナリ, 何ントナレバ今假リニ a_1 ノ餘因數 A_1 ガ 0 ナラズトスレバ

$$A_1=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0,$$

故ニ (2), (3) ヨリ y, z ヲ x ニテ表ハスコトヲ得其 y, z 及ビ x ニ對シテ

$$(a_1x+b_1y+c_1z-d_1)\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1x+b_1y+c_1z-d_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1x+b_1y+c_1z-d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z-d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z-d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}y$$

$$+\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}z-\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_1 & b_1 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ a_1x+b_1y+c_1z-d_1=0$$

即チ (2), (3) ヨリ x ニテ表ハシタル y, z ハ (1) ヲ滿足セシム, 即チ (1) ハ (2), (3) ヨリ誘導セラル, $\triangle$ ノ他ノ餘因數ガ 0 ナラザル場合モ同樣ナリ, 即チ此場合ニハ三ツノ方程式ハ二ツニ歸シ三ツノ未知數中ノ一ツハ全ク不定ナリ。

3. $\triangle={}_a\triangle_d={}_b\triangle_d={}_c\triangle_d=0$, $\triangle$ ノ各元素ノ餘因數モ皆 0 ニ等シキモ ${}_a\triangle_d$, ${}_b\triangle_d$, ${}_c\triangle_d$ ノ元素ノ餘因數ノ中ニ 0 ニ等シカラザルモノアル場合,

此場合ニハ (1), (2), (3) ハ聯立セズ即チ不能ナリ, 何ントナレバ今假リニ

$$\begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix}\neq 0$$

トシ (2), (3) ヲ同時ニ滿足セシムル x, y, z ノ値アリトスレバ

$$\begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & a_2x+b_2y+c_2z \\ a_3 & a_3x+b_3y+c_3z \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}z=0$$

トナリテ矛盾スレバナリ。

4. $\triangle$, ${}_a\triangle_d$, ${}_b\triangle_d$, ${}_c\triangle_d$ 及ビソノ各元素ノ餘因數皆 0 ナルモ $\triangle$ ノ元素中ニ 0 ナラザルモノアル場合,

此場合ニハ (1), (2), (3) ノ中ノ二ツハ殘ル一ツヨリ誘導セラル即チ三ツノ方程式ハ只一ツノ方程式ニ歸シ x, y, z ノ中二ツハ全ク不定ナリ, 何ントナレバ今假リニ $a_1\neq 0$ トスレバ (1) ヨリ

$$x=\frac{d_1-b_1y-c_1z}{a_1},$$

コノ y, z 及ビ x ニ對シテ

$$(a_2x+b_2y+c_2z-d_2)a_1=\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_2x+b_2y+c_2z-d_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_1x+b_1y+c_1z-d_1 \\ a_2 & a_2x+b_2y+c_2z-d_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}z-\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$

同樣ニ $\quad a_3x+b_3y+c_3z=d_3$

トナル, 即チ (1) ヨリ y, z ニテ表ハシタル x ハ (2), (3) ヲ滿足セシム, 即チ (2), (3) ハ (1) ヨリ誘導セラル, $\triangle$ ノ其他ノ元表ガ 0 ナラザル場合モ同樣ナリ,

5. $\triangle$ ノ元表ガ總テ 0 ナルモ d_1, d_2, d_3 中ニ 0 ナラザルモノアル場合,

此場合ハ (1), (2), (3) ハ明カニ不能ナリ。

30. 次ノ三ツノ方程式ガ同時ニ成立スル爲ニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ム,

$$\boldsymbol{a_1x+b_1y+c_1=0,\qquad a_2x+b_2y+c_2=0,\qquad a_3x+b_3y+c_3=0,}$$

〔解〕 x, y ノ同ジ値ニテ所題ノ三方程式ガ同時ニ成立スルトキハ其 x, y ヲ次ノ行列式ノ第一第二行ニカケテ第三行ニ加フレバ

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+a_1x+b_1y \\ a_2 & b_2 & c_2+a_2x+l_2y \\ a_3 & b_3 & c_3+a_3x+b_3y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix}=0$$

故ニ $\triangle=0$ ハ必要ナル條件ナリ，サレド之ハ十分ナル條件ナラズ，何ントナレバ $x+y+1=0$，$x+y+2=0$，$x+y+3=0$ ノ如キハ $\triangle=0$ ナルモ同時ニ成立セザレバナリ，然レドモ $\triangle=0$ ノ外ニ尙 x, y ノ係數ヨリ作ル二次ノ行列式ノ中ニ 0 ナラザルモノアラバ所題ノ方程式ハ同時ニ成立ス．何ントナレバ今假リニ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0,\qquad \triangle=0$$

トスレバ第一，第二ノ方程式ヨリ x, y ノ値ハ只一組定マル，ソノ値ニ對シテ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}(a_3x+b_3y+c_3)=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ a_3x+b_3y+c_3=0$$

トナレバナリ，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\neq 0,\quad \text{又ハ}\quad \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\neq 0$$

ナル場合モ同様ナリ，即チ此場合ニハ一ツノ方程式ハ他ノ二ツヨリ誘導セラル，若シ x, y ノ係數ヨリ作ル二次ノ行列式ガ悉ク 0 ナルトキハ之レト同時ニ x 又ハ y ノ係數ト c_1, c_2, c_3 ヨリ作ル總テノ二次ノ行列式モ亦 0 ナラバ，換言スレバ $\triangle$ ノ各元素ノ餘因ガ悉ク 0 ナラバ所題ノ三ツノ方程式ハ只一ツニ歸スルガ故ニ x, y ノ同ジ値ニテ成立スルコト明カナリ，故ニ十分ナル條件ハ $\triangle=0$ ニシテ x, y ノ

係數ヨリ作ル二次ノ行列式中ニ 0 ナラザルモノアルカ．或ハ $\triangle$ ノ總テノ餘因數ガ 0 ナルカノ何レカナリ。

（注意）三元以上ノ場合ニモ同樣ニ證明スルコトヲ得。

31. 次ノ三ツノ方程式ヨリ x, y, z ノ比ガ只一組定マルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ム，

$$a_1x+b_1y+c_1z=0,\qquad a_2x+b\,y+c_2z=0,\qquad a_3x+b_3y+c_3z=0,$$

〔解〕x, y, z ノ比ガ定マルタメニハ x, y, z ハ悉クハ 0 ナルヲ得ズ，今假リニ $z\neq 0$ トスレバ

$$a_1\frac{x}{z}+b_1\frac{y}{z}+c_1=0,\quad a_2\frac{x}{z}+b_2\frac{y}{z}+c_2=0,\quad a_3\frac{x}{z}+b_3\frac{y}{z}+c_3=0$$

ガ $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ ノ同ジ値ニテ成立セザルベカラズ，故ニ前問ニヨリ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

ハ必要ナル條件ナリ，

次ニ $\triangle=0$ ニシテ且ツ $\triangle$ ノ各元素ノ餘因數ノ中ニ 0 ナラザルモノアラバ所題ノ方程式ヨリ x, y, z ハ比ノ只一組定マル，何ントナレバ今假リニ

$$C_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

トスレバ第一，第二方程式ヨリ

$$C_3x=-\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}z,\qquad C_3y=-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}z,$$

ヲ得，x, y, z ノ此ノ値ニ對シテ前問ト同樣ニ

$$a_3x+b_3y+c_3z=0$$

トナル故ニ 0 ナラザル z ノ任意ノ値ニ對シテ所題ノ方程式ヲ滿足セシムル $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ ノ只一組ノ値ガ定マレバナリ，故ニ $\triangle=0$ ニシテ $\triangle$ ノ元素ノ餘因數ノ中ニ 0 ナラザルモノアルコトガ十分ナル條件ナリ。

〔注意〕 若シ只一組トイフコトヲ除ケバ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ $\triangle=0$ ナリ，何トナレバ各元素ノ餘因數ガ皆 0 ナラバ $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$, $\dfrac{a_1}{a_3}=\dfrac{b_1}{b_3}=\dfrac{c_1}{c_3}$ ニシテ三ツノ方程式ハ只一ツニ歸シ x, y, z ノ比ガ不定トナルノミナレバナリ。

32. 方程式 $lx+my+nz=0$ ガ x, y, z ノ三組ノ値 $(a_1\,b_1\,c_1)$, $(a_2\,b_2\,c_2)$, $(a_3b_3c_3)$ ニテ滿足セラルヽタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ム。

〔解〕 題意ニ適スルタメニハ

$$la_1+mb_1+nc_1=0,\quad la_2+mb_2+nc_2=0,\quad la_3+mb_3+nc_3=0 \qquad (1)$$

ガ l, m, n ノ同ジ値ニ對シテ同時ニ成立セザルベカラズ，l, m, n ハ悉クハ 0 ナラザルコト勿論ナル故ニ (1) ガ成立スルタメニハ前問ト同樣ニ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

ナルヲ要ス，逆ニ $\triangle=0$ ナラバ l, m, n ノ或定マル値ニ對シテ (1) ガ成立スルヤウニ a_1, b_1, c_1 等ヲ定ムルコトヲ得，何ントナレバ此時若シ $\triangle$ ノ各元素ノ餘因數モ亦皆 0 ナラバ

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2},\qquad \frac{a_1}{a_3}=\frac{b_1}{b_3}=\frac{c_1}{c_3}$$

ナル故ニ $la_1+mb_1+nc_1=0$ ニ適スル任意ノ a_1, b_1, c_1 ニ對シ $a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ ヲ定メ得ベク若シ又餘因數ノ中例ヘバ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0,$$

ナラバ (1) ノ第一，第二方程式ヨリ第三ガ誘導セラルヽ故ニ（前々問）第一，第二ヲ滿足セシムル a_1, a_2 等ヨリ a_3, b_3, c_3 ヲ定メ得レバナリ，

故ニ所要ノ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ $\triangle=0$ ナリ。

33. $$x+y+z+u=1,\qquad ax+by+cz+du=k,$$
$$a^2x+b^2y+c^2z+d^2u=k^2,\qquad a^3x+b^3y+c^3z+d^3u=k^3$$

ヲ解ケ，但シ a, b, c, d ハ皆相異ナルモノトス。

〔解〕 $$\triangle=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix},\qquad {}_a\triangle_k=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & b & c & d \\ k^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ k^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

トスレバ問. 28 ト同樣ニ

$$x=\frac{{}_a\triangle_k}{\triangle},\qquad y=\frac{{}_b\triangle_k}{\triangle},\qquad z=\frac{{}_c\triangle_k}{\triangle},\qquad u=\frac{{}_d\triangle_k}{\triangle},$$

然ルニ問. 12 ニヨリ

$$\triangle=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

a ト k トヲ交換スレバ

$${}_a\triangle_k=(k-b)(k-c)(k-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

同樣ニ

$${}_b\triangle_k=(a-k)(a-c)(a-d)(k-c)(k-d)(c-d)$$

$${}_c\triangle_k=(a-b)(a-k)(a-d)(b-k)(b-d)(k-d)$$

$${}_d\triangle_k=(a-b)(a-c)(a-k)(b-c)(b-k)(c-k)$$

$$\therefore\ x=\frac{(k-b)(k-c)(k-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)},\qquad y=\frac{(a-k)(k-c)(k-d)}{(a-b)(b-c)(b-d)},$$

$$z=\frac{(a-k)(b-k)(k-d)}{(a-c)(b-c)(c-d)},\qquad u=\frac{(a-k)(b-k)(c-k)}{(a-d)(b-d)(c-d)},$$

34. $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a_1a_1'+a_2a_2'+a_3a_3' & a_1b_1'+a_2b_2'+a_3b_3' & a_1c_1'+a_2c_2'+a_3c_3' \\ b_1a_1'+b_2a_2'+b_3a_3' & b_1b_1'+b_2b_2'+b_3b_3' & b_1c_1'+b_2c_2'+b_2c_3' \\ c_1a_1'+c_2a_2'+c_3a_3' & c_1b_1'+c_2b_2'+c_3b_3' & c_1c_1'+c_2c_2'+c_3c_3' \end{vmatrix}$$

ヲ証セヨ。

〔解〕 右邊ノ行列式ヲ D ニテ表ハシ，之ヲ基本定理 V ニヨリ 27 個ノ行列式ノ和トシテ表ハストキハ

$$D=\Sigma\begin{vmatrix} a_l a_l' & a_m b_m' & a_n c_n' \\ b_l a_l' & b_m b_m' & b_n c_n' \\ c_l a_l' & c_m b_m' & c_n c_n' \end{vmatrix}=\Sigma a_l' b_m' c_n'\begin{vmatrix} a_l & a_m & a_n \\ b_l & b_m & b_n \\ c_l & c_m & c_n \end{vmatrix}$$

但シ Σ ハ $l=1, 2, 3$; $m=1, 2, 3$; $n=1, 2, 3$ ニ對スル總テノ和ヲ表ハス。

然ルニ若シ l, m, n ノ中何レカ二ツガ相等シケレバ問 4 ニヨリ

$$\begin{vmatrix} a_l & a_m & a_n \\ b_l & b_m & b_n \\ c_l & c_m & b_n \end{vmatrix}=0$$

故ニ上ノ Σ ノ中ニ含マル、27 個ノ行列式ノ中 0 ナラザルモノハ l, m, n ガ皆相異ナルモノノミニシテ且ツ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_1 & b_2 \\ c_3 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

等ハ只符號ノミ異ナル故ニ結局 D ハ △ ニテ割リ切レルコトヲ知ル，即チ

$$D=k.\triangle \qquad (1)$$

D ハ $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ ニツキ三次ノ同次式ニシテ △ モ亦然ルガ故ニ k ハソレ等ノ文字ヲ合マズ，從ツテソレ等ノ文字ニ特別ナル値ヲ與フルモ k ハ不變ナリ，依ツテ (1) ノ兩邊ニ於テ $a_1=b_2=c_3=1$, $a_2=a_3=b_1=b_3=c_1=c_2=0$ トオケバ

$$\begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=k,$$

$$\therefore\ D=\begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix}\triangle=\begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & b_3' \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

35. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1' & b_2' \end{vmatrix}$ **ヲ一ツノ行列式ニテ表ハセ。**

〔解〕 $\begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1' & b_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1' & a_2' & 0 \\ b_1' & b_2' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$\therefore\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1' & b_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1' & a_2' & 0 \\ b_1' & b_2' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1a_1'+a_2a_2' & a_1b_1'+a_2b_2' & a_3 \\ b_1a_1'+b_2a_2' & b_1b_1'+b_2b_2' & b_3 \\ c_1a_1'+c_2a_2' & c_1b_1'+c_2b_2' & c_3 \end{vmatrix},$$

36. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} x^2-yz & y^2-zx & z^2-xy \\ z^2-xy & x^2-yz & y^2-zx \\ y^2-zx & z^2-xy & x^2-yz \end{vmatrix}$ **ヲ証セヨ。**

〔解〕 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & -2z & y \\ y & -2x & z \\ z & -2y & x \end{vmatrix}$

$$\therefore\ \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}^2=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x & -2z & y \\ y & -2x & z \\ z & -2y & x \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x^2-yz & z^2-xy & 2xz-2y^2 \\ 2xy-2z^2 & y^2-zx & x^2-yz \\ y^2-zx & 2yz-2x^2 & z^2-xy \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\{-6(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)+2(y^2-zx)^3+2(z^2-xy)^3+2(x^2-yz)^3\}$$

$$=(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3+(x^2-yz)^3-3(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$$

$$=\begin{vmatrix} x^2-yz & y^2-zx & z^2-xy \\ z^2-xy & x^2-yz & y^2-zx \\ y^2-zx & z^2-xy & x^2-yz \end{vmatrix}$$

或ハ左邊ノ行列式ノ x, y, z 等ノ餘因數ハ夫々 $yz-x^2$, $xz-y^2$, $xy-z^2$ 等ナル故ニ問. 41 ト同様ニ

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} zy-x^2 & xz-y^2 & xy-z^2 \\ zx-y^2 & xy-z^2 & yz-x^2 \\ xy-z^2 & yz-x^2 & zx-y^2 \end{vmatrix}$$

右邊ノ第二，第三列ヲ交換シ且ツ各元素ノ符號ヲ變ズレバ所題ノ結果ヲ得ベシ。

37. $l_1^2+m_1^2+n_1^2=l_2^2+m_2^2+n_2^2=l_3^2+m_3^2+n_3^2=1$

$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3=l_3l_1+m_3m_1+n_3n_1=0$

ナルトキハ $\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}=\pm 1$ ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 $$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} l_1^2+m_1^2+n_1^2 & l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2 & l_1l_3+m_1m_3+n_1n_3 \\ l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2 & l_2^2+m_2^2+n_2^2 & l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3 \\ l_1l_3+m_1m_3+n_1n_3 & l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3 & l_3^2+m_3^2+n_3^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1,$$

$$\therefore \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}=\pm 1,$$

38. 同上 $l_1^2+l_2^2+l_3^2=m_1^2+m_2^2+m_3^2=n_1^2+n_2^2+n_3^2=1,$

$l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3=m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3=n_1l_1+n_2l_2+n_3l_3=0$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 $\triangle=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}=\pm 1$ ノ l_1, m_1 等ノ餘因數ヲ L_1, M_1 等トスレバ

$$l_1L_1+m_1M_1+n_1N_1=\pm 1, \qquad (1)$$

又假設ニヨリ

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

$$l_1l_3+m_1m_3+n_1n_3=0$$

$$\therefore \frac{l_1}{m_2n_3-m_3n_2}=\frac{m_1}{n_2l_3-n_3l_2}=\frac{n_1}{l_2m_3-l_3m_2}$$

$$\therefore \frac{l_1}{L_1}=\frac{m_1}{M_1}=\frac{n_1}{N_1} \qquad (2)$$

(2) ノ各分數ノ値ヲ $\frac{1}{k}$ トシ (1) ニ代入スレバ假設ニヨリ $l_1^2+m_1^2+n_1^2=1$ ナル

故ニ $k=\pm 1$, 但シ $\triangle=1$ ナラバ $k=1$, $\triangle=-1$ ナラバ $k=-1$,

$\therefore\ l_1=\pm L_1,\quad m_1=\pm M_1,\quad n_1=\pm N_1$

同様ニ $l_2=\pm L_2,\quad m_2=\pm M_2,\quad n_2=\pm N_2$

$l_3=\pm L_3,\quad m_3=\pm M_3,\quad n_3=\pm N_3$

$\therefore\ l_1^2+l_2^2+l_3^2+=\pm(l_1L_1+l_2L_2+l_3L_3)=\pm\triangle=1,$

同様ニ $m_1^2+m_2^2+m_3^2=n_1^2+n_2^2+n_3^2=1.$

又 $l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3=\pm(m_1L_1+m_2L_2+m_3L_3)=0,$

同様ニ $m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3=n_1l_1+n_2l_2+n_3l_3=0,$

39. $\begin{vmatrix} 2bc-a^2 & b^2 & c^2 \\ 2ac-b^2 & c^2 & a^2 \\ 2ab-c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}\div\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=a^3+b^3+c^3+abc$ ヲ証セヨ。

〔解〕 $$a^3+b^3+c^3+abc=\begin{vmatrix} -a & c & b \\ c & -b & a \\ b & a & -c \end{vmatrix}$$

然ルニ $$\begin{vmatrix} -a & c & b \\ c & -b & a \\ b & a & -c \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2bc-a^2 & 2ac-b^2 & 2ab-c^2 \\ b^2 & c^2 & a^2 \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2bc-a^2 & b^2 & c^2 \\ 2ac-b^2 & c^2 & a^2 \\ 2ab-c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 2bc-a^2 & b^2 & c^2 \\ 2ac-b^2 & c^2 & a^2 \\ 2ab-c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & c & b \\ c & -b & a \\ b & a & -c \end{vmatrix}$$

$$=a^3+b^3+c^3+abc,$$

40. $\begin{vmatrix} 1 & bc+ad & b^2c^2+a^2d^2 \\ 1 & ca+bd & c^2a^2+b^2d^2 \\ 1 & ab+cd & a^2b^2+c^2d^2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ ヲ求ム。

〔解〕 求ムル商ヲ $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ トスレバ

$$\begin{vmatrix} 1 & bc+ad & b^2c^2+a^2d^2 \\ 1 & ca+bd & c^2a^2+b^2d^2 \\ 1 & ab+cd & a^2b^2+c^2d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1+ay_1+a^2z_1 & x_2+ay_2+a^2z_2 & x_3+ay_3+a^2z_3 \\ x_1+by_1+b^2z_1 & x_2+by_2+b^2z_2 & x_3+by_3+b^2z_3 \\ x_1+cy_1+c^2z_1 & x_2+cy_2+c^2z_2 & x_3+cy_3+c^2z_3 \end{vmatrix}$$

$\therefore\ x_1+ay_1+a^2z_1=1 \qquad x_2+ay_2+a^2z_2=bc+ad \qquad x_3+ay_3+a^2z_3=b^2c^2+a^2d^2$

$x_1+by_1+b^2z_1=1 \qquad x_2+by_2+b^2z_2=ca+bd \qquad x_3+by_3+b^2z_3=c^2a^2+b^2d^2$

$x_1+cy_1+c^2z_1=1 \qquad x_2+cy_2+c^2z_2=ab+cd \qquad x_3+cy_3+c^2z_3=a^2b^2+c^2d^2$

之等三組ノ聯立方程式ヨリ次ノ結果ヲ得

$x_1=1 \qquad x_2=ab+bc+ca \qquad x_3=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+abc(a+b+c)$

$y_1=0 \qquad y_2=-a-b-c+d \qquad y_3=-(b+c)(c+a)(a+b)$

$z_1=0 \qquad z_2=1 \qquad z_3=ab+bc+ca+d^2,$

41. $\triangle=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$ ノ a_1, b_1 等ノ餘因數ヲ A_1, B_1 等トスルトキ

$\triangle'=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=\triangle^3$ ヲ証セヨ。

〔解〕 $a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1+d_1D_1=\triangle,\quad a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1+d_2D_1=0$ 等ナル故ニ

$$\triangle\cdot\triangle'=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \triangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \triangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \triangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \triangle \end{vmatrix}=\triangle^4$$

$\therefore\ \triangle'=\triangle^3.$

42. 同上, $\begin{vmatrix} B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \\ B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=a_1\triangle^2$ ヲ証セヨ。

〔解〕 $\triangle\cdot\begin{vmatrix} B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \\ B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & \triangle & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & \triangle & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & \triangle \end{vmatrix}=a_1\triangle^3$$

$\therefore\ \begin{vmatrix} B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \\ B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=a_1\triangle^2,$

43. 同上，$\begin{vmatrix} C_3 & D_3 \\ C_4 & D_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \triangle$ ヲ証セヨ。

〔解〕 $\triangle \cdot \begin{vmatrix} C_3 & D_3 \\ C_4 & D_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & \triangle & 0 \\ a_4 & b_4 & 0 & \triangle \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & 0 & 0 \\ b_3 & \triangle & 0 \\ b_4 & 0 & \triangle \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_3 & \triangle & 0 \\ b_4 & 0 & \triangle \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 \triangle^2 - a_2 b_1 \triangle^2,$$

$$\therefore \begin{vmatrix} C_3 & D_3 \\ C_4 & D_4 \end{vmatrix} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \triangle.$$

44. $\begin{vmatrix} (a_1-b_1)^2 & (a_1-b_2)^2 & (a_1-b_3)^2 & (a_1-b_4)^2 \\ (a_2-b_1)^2 & (a_2-b_2)^2 & (a_2-b_3)^2 & (a_2-b_4)^2 \\ (a_3-b_1)^2 & (a_3-b_2)^2 & (a_3-b_3)^2 & (a_3-b_4)^2 \\ (a_4-b_1)^2 & (a_4-b_2)^2 & (a_4-b_3)^2 & (a_4-b_4)^2 \end{vmatrix} = 0$ ヲ証セヨ。

〔解〕 所題ノ行列式ヲ $\triangle$ トスレバ

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 & 0 \\ a_3^2 & a_3 & 1 & 0 \\ a_4^2 & a_4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2b_1 & b_1^2 & 0 \\ 1 & -2b_2 & b_2^2 & 0 \\ 1 & -2b_3 & b_3^2 & 0 \\ 1 & -2b_4 & b_4^2 & 0 \end{vmatrix}$$

ナルコトハ直チニ知ルコトヲ得，然ルニ此二ツノ行列式ハ第四行ノ各元素 0 ナル故ニ共ニ 0 ナリ，故ニ其積ナル $\triangle$ モ亦 0 ナリ。

45. $\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ a & b & c & d \\ d & c & b & a \\ w & z & y & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+w & y+z \\ a+d & b+c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-w & y-z \\ a-d & b-c \end{vmatrix}$ ヲ証セヨ。

〔解〕 左邊ヲ $\triangle$ トシ $\triangle$ ノ第四行ヨリ第一行ヲ引キ第三行ヨリ第二行ヲ引ケバ

$$\triangle = \begin{vmatrix} x & y & z-y & w-x \\ a & b & c-b & d-a \\ d & c & b-c & a-d \\ w & z & y-z & x-w \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2x & 2y & z-y & w-x \\ 2a & 2b & c-b & d-a \\ 2d & 2c & b-c & a-d \\ 2w & 2z & y-z & x-w \end{vmatrix}$$

次ニ第一行ニ第四行ヲ，第二行ニ第三行ヲ加ヘ然ル後第四列ヨリ第一列ヲ引キ，第三列ヨリ第二列ヲ引ケバ

$$\triangle = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} x+w & y+z & z-y & w-x \\ a+d & b+c & c-b & d-a \\ d+a & c+b & b-c & a-d \\ w+x & z+y & y-z & x-w \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} x+w & y+z & z-y & w-x \\ a+d & b+c & c-b & d-a \\ 0 & 0 & 2(b-c) & 2(a-d) \\ 0 & 0 & 2(y-z) & 2(x-w) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}(x+w) \begin{vmatrix} b+c & c-b & d-a \\ 0 & 2(b-c) & 2(a-d) \\ 0 & 2(y-z) & 2(x-w) \end{vmatrix} - \frac{1}{4}(a+d) \begin{vmatrix} y+z & z-y & w-x \\ 0 & 2(b-c) & 2(a-d) \\ 0 & 2(y-z) & 2(x-w) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}(x+w)(b+c) \begin{vmatrix} 2(b-c) & 2(a-d) \\ 2(y-z) & 2(x-w) \end{vmatrix} - \frac{1}{4}(a+d)(y+z) \begin{vmatrix} 2(b-c) & 2(a-d) \\ 2(y-z) & 2(x-w) \end{vmatrix}$$

$$= \{(x+w)(b+c)-(a+d)(y+z)\} \begin{vmatrix} b-c & a-d \\ y-z & x-w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+w & y+z \\ a+d & b+c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-w & y-z \\ a-d & b-c \end{vmatrix}$$

46. $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f \\ f & a & b & c & d & e \\ e & f & a & b & c & d \\ d & e & f & a & b & c \\ c & d & e & f & a & b \\ b & c & d & e & f & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{vmatrix}$ ヲ証セヨ，但シ

$$A = a^2 - d^2 + 2ce - 2bf$$
$$B = e^2 - b^2 + 2ac - 2df$$
$$C = c^2 - f^2 + 2ae - 2bd$$

〔解〕 左邊ノ行列式ニ於テ第二行以下ヲ第一行ニ加フレバ

$$a+b+c+d+e+f \qquad (1)$$

ハ其一ツノ因數ナルヲ知ル，又第二行ヨリ順次各行ニ $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1$ ヲ乘ジテ第一行ニ加フレバ

$$a-b+c-d+e-f \qquad (2)$$

モ亦其一ツノ因數ナルヲ知ル，又 1 ノ立方根ノ虛數ヲ ω トシ第二行以下ニ順次 $\omega, \omega^2, 1, \omega, \omega^2$ ヲ乘ジテ第一行ニ加フレバ

$$a+\omega b+\omega^2 c+d+\omega e+\omega^2 f \qquad (3)$$

モ亦其一ツノ因數ナルヲ知ル，同樣ニ $\omega^2, \omega, 1, \omega^2, \omega$ 及ビ $-\omega, \omega^2, -1, \omega, -\omega^2$ 及ビ $-\omega^2, \omega, -1, \omega^2, -\omega$ ヲ乘ジテ加フレバ

$$a+\omega^2 b+\omega c+d+\omega^2 e+\omega f \qquad (4)$$

$$a-\omega b+\omega^2 c-d+\omega e-\omega^2 f \qquad (5)$$

$$a-\omega^2 b+\omega c-d+\omega^2 e-\omega f \qquad (6)$$

モ亦其因數ナルヲ知ル，故ニ左邊ノ行列式ハ此等六ツノ因數ト定數トノ積ニ等シ，而シテ a^6 ノ係數ヲ比較シテ其定數ハ 1 ナルヲ知ル

然ルニ (1), (2) 及ビ (3), (5) 及ビ (4), (6) ノ積ハ夫々次ノ如シ

$$(a+c+e)^2-(b+d+f)^2=A+B+C$$

$$(a+\omega^2 c+\omega e)^2-(d+\omega b+\omega^2 f)^2=A+\omega^2 B+\omega C$$

$$(a+\omega c+\omega^2 e)^2-(b+\omega^2 b+\omega f)^2=A+\omega B+\omega^2 C$$

故ニ左邊ノ行列式ハ

$$(A+B+C)(A+\omega^2 B+\omega C)(A+\omega B+\omega^2 C)$$

$$=A^3+B^3+C^3-3ABC$$

$$=\begin{vmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{vmatrix}$$

47. $f(xy)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ **ガ** x, y **ノ一次ノ因數ニ分解セラルヽタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ**

$$\triangle=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=0$$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=(lx+my+n)(l'x+m'x+n')$ ト假定スレバ

$$a=ll', \qquad 2h=lm'+l'm, \qquad b=mm'$$

$$2g=ln'+l'n, \qquad 2f=mn'+m'n, \qquad c=nn'$$

$$\therefore \quad \triangle=\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2ll' & lm'+l'm & ln'+l'n \\ lm'+l'm & 2mm' & mn'+m'n \\ ln'+l'n & mn'+m'n & 2nn' \end{vmatrix}$$

然ルニ
$$\begin{vmatrix} l & l' & 0 \\ m & m' & 0 \\ n & n' & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} l' & l & 0 \\ m' & m & 0 \\ n' & n & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2ll' & lm'+l'm & ln'+l'n \\ l'm+lm' & 2mm' & mn'+m'n \\ l'n+ln' & nm'+n'm & 2nn' \end{vmatrix}$$

左邊ノ兩行列式ハ第三行ノ各元素 0 ナル故ニ共ニ 0 ナリ，依ツテ右邊ノ行列式モ 0 ナリ $\qquad \therefore \ \triangle=0$

逆ニ $\triangle=0$ ナルトキハ $f(xy)=0$ ヲ x ノ二次方程式ト考ヘタルトキノ判別式 $(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)$ ハ完全平方トナル故ニ $f(xy)$ ハ二ツノ一次因數ニ分解セラル，依ツテ $\triangle=0$ ハ所要ノ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ナリ。

48. 次ノ式ガ一次ノ因數ニ分解セラルヽヤウニ k **ノ値ヲ定メヨ，**

$$2x^2-3ky^2-12z^2+17yz+kzx-xy \qquad (1)$$

〔解〕 所置ノ整式 (1) ハ x, y, z ニツキ二次ニシテ同次ナル故ニ若シ一次ノ因數ニ分解セラルヽナラバ其因數ハ一次ニシテ同次ナル $lx+my+nz$ ナル形ノモノナルベシ，故ニ (1) ガ一次ノ因數ニ分解セラルヽナラバ (1) ニ於テ $z=1$ トオキタル

$$2x^2-xy-3ky^2+kx+17y-12 \qquad (2)$$

モ亦 $lx+my+n$ ナル形ノ一次ノ因數ニ分解セラルベク逆ニ (2) ガ x, y ノ一次ノ因數ニ分解セラルレバ (1) モ亦 x, y, z ノ一次ノ因數ニ分解セラルベシ，然ルニ (2) ガ一次因數ニ分解セラルヽタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ前問ニヨリ

$$\triangle=\begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{k}{2} \\ -\frac{1}{2} & -3k & \frac{17}{2} \\ \frac{k}{2} & \frac{17}{2} & -12 \end{vmatrix}=0 \qquad \therefore \ 3k^3+271k-566=0$$

觀察ニヨリ k ノ一ツノ値ハ 2 ニシテ他ハ虚數ナルヲ知ル，

依ツテ所要ノ値ハ 2 ナリ。

49. $\triangle=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=0$ **ナルトキハ** $\begin{vmatrix} a & h & g & x \\ h & b & f & y \\ g & f & c & z \\ x & y & z & u \end{vmatrix}$

ハ完全平方ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 $\triangle$ ノ元素 a, h, g 等ノ餘因數ヲソレゾレ $\triangle_a$, $\triangle_h$, $\triangle_g$ 等ニテ表ハセバ

$$-\begin{vmatrix} a & h & g & x \\ h & b & f & y \\ g & f & c & z \\ x & y & z & u \end{vmatrix}=\triangle_a x^2+\triangle_b y^2+\triangle_c z^2+2\triangle_h xy+2\triangle_f yz+2\triangle_g xz-u\triangle$$
$$=\frac{1}{\triangle_a}(\triangle^2_a x^2+\triangle_a\triangle_b y^2+\triangle_a\triangle_c z^2+2\triangle_a\triangle_h xy+2\triangle_a\triangle_f yz+2\triangle_a\triangle_g xz)-u\triangle,$$

然ルニ $\triangle=0$ ナル故ニ 問. 27 ニヨリ

$$\frac{\triangle_a}{\triangle_h}=\frac{\triangle_h}{\triangle_b}=\frac{\triangle_g}{\triangle_f},\qquad \frac{\triangle_a}{\triangle_g}=\frac{\triangle_h}{\triangle_f}=\frac{\triangle_g}{\triangle_c},$$

$$\therefore\ \triangle_a\triangle_b=\triangle^2_h,\quad \triangle_a\triangle_c=\triangle^2_g,\quad \triangle_a\triangle_f=\triangle_h\triangle_g,$$

$$\therefore\ -\begin{vmatrix} a & h & g & x \\ h & b & f & y \\ g & f & c & z \\ x & y & z & u \end{vmatrix}=\frac{1}{\triangle_a}(\triangle^2_a x^2+\triangle^2_h y^2+\triangle^2_g z^2+2\triangle_a\triangle_h xy+2\triangle_h\triangle_g yz+2\triangle_a\triangle_g xz)$$
$$=\frac{1}{\triangle_a}(\triangle_a x+\triangle_h y+\triangle_g z)^2,$$

50. 次ノ方程式ハ實根ノミヲ有スルコトヲ証セヨ，

$$\begin{vmatrix} a+x & h & g \\ h & b+x & f \\ g & f & c+x \end{vmatrix}=0,$$

〔解〕 所題ノ方程式ヲ $D(x)=0$ トシ $D(x)=0$ ガ a, b, c, h, g, f ノ如何ニ係ラズ實根ノミヲ有スルコトヲ証明スルニハ βi ナル根ヲ有セザルコトヲ証明スレバ可ナリ，何ントナレバ若シ $\alpha+\beta i$ ナル根ヲ有スレバ a, b, c ノ代リニ $a+\alpha$, $b+\alpha$, $c+\alpha$ ヲ以テシタル方程式ガ βi ナル根ヲ有スルコトヽナレバナリ

然ルニ $D(\beta i)=0$ ナラバ

$$D(\beta i)\cdot D(-\beta i)=0$$

故ニ $D(x)=0$ ガ βi ナル根ヲ有スレバ $D(x)\cdot D(-x)=0$ モ亦 βi ナル根ヲ有セザルベカラズ，然ルニ

$$D(x)\cdot(-x)=\begin{vmatrix} a+x & h & g \\ h & b+x & f \\ g & f & c+x \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a-x & h & g \\ h & b-x & f \\ g & f & c-x \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a^2+h^2+g^2-x^2 & ah+bh+fg & ag+hf+cg \\ ah+bh+fg & h^2+b^2+f^2-x^2 & gh+bf+cf \\ ag+hf+cg & gh+bf+cf & g^2+f^2+c^2-x^2 \end{vmatrix}$$
$$=-x^6+Ax^4-Bx^2+C=0,$$

トスレバ

$$A=a^2+b^2+c^2+2(h^2+g^2+f^2)>0,$$

$$B=(a^2+h^2+g^2)(b^2+h^2+f^2)+(a^2+h^2+g^2)(c^2+g^2+f^2)$$
$$+(b^2+h^2+f^2)(c^2+g^2+f^2)-(ah+bh+fg)^2$$
$$-(ag+cg+hf)^2-(bf+cf+gh)^2$$
$$=(ab-h^2)^2+(hf-bg)^2+(af-hg)^2+(ac-g^2)^2+(gf-ch)^2+(af-hg)^2$$
$$+(bc-f^2)^2+(hf-bg)^2+(gf-ch)^2$$
$$=(ab-h^2)^2+(ac-g^2)^2+(bc-f^2)^2+2(hf-bg)^2+2(af-hg)^2$$
$$+2(gf-ch)^2>0,$$

$$C=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}^2>0$$

故ニ $x=\beta i$ 即チ $x^2=-\beta^2$ トオケバ $D(x)\cdot D(-x)=0$ ノ左邊ノ各項ハ皆正トナリテ從ツテ其和ハ 0 トナラズ，即チ $D(x)\cdot D(-x)=0$ ハ βi ナル根ヲ有セズ，故ニ $D(x)=0$ ハ βi ナル根ヲ有セズ，從ツテ $\alpha+\beta i$ ナル根ヲ有セズ，即チ $D(x)=0$ ハ常ニ實根ノミヲ有ス。

51. a, b, c ガ方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ ノ三根ナルトキ

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ac \\ ab & (c+a)^2 & bc \\ ac & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

ノ値如何。

〔解〕 所題ノ行列式ヲ △ トシ第二行，第三行ヲ第一行ニ加フレバ

$$\triangle=\begin{vmatrix} (b+c)(a+b+c) & ab & ac \\ (a+c)(a+c+b) & (c+a)^2 & bc \\ (a+b)(a+b+c) & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} b+c & ab & ac \\ a+c & (c+a)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

然ルニ　$a+b+c=-p$,

$$\therefore\quad \triangle=-p\begin{vmatrix} b+c & ab & ac \\ a+c & (c+a)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

次ニ第二列，第三列ヲ第一列ニ加フレバ

$$\triangle=-p\begin{vmatrix} 2(a+b+c) & (a+c)(a+c+b) & (a+b)(a+b+c) \\ (a+c) & (c+a)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$=p^2\begin{vmatrix} 2 & a+c & a+b \\ a+c & (c+a)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$=p^2\left\{2\begin{vmatrix} (c+a)^2 & bc \\ bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}-(a+c)\begin{vmatrix} a+c & bc \\ a+b & (a+b)^2 \end{vmatrix}+(a+b)\begin{vmatrix} a+c & (c+a)^2 \\ a+b & bc \end{vmatrix}\right\}$$

$$=p^2\{2[(c+a)^2(a+b)^2-b^2c^2]-(a+c)(a+b)[(a+c)(a+b)-bc]$$
$$+(a+b)(a+c)[bc-(c+a)(a+b)]\}$$

$$=p^2\{-2b^2c^2+2bc(a+c)(a+b)\}=2p^2abc(a+b+c)$$

$$=2p^3r,$$

52. $$\begin{vmatrix} a_1+a_2-a_3-a_4 & b_1+b_2-b_3-b_4 & a_1a_2-a_3a_4+b_1b_2-b_3b_4 \\ a_1-a_2+a_3-a_4 & b_1-b_2+b_3-b_4 & a_1a_3-a_2a_4+b_1b_3-b_2b_4 \\ a_1-a_2-a_3+a_4 & b_1-b_2-b_3+b_4 & a_1a_4-a_2a_3+b_1b_4-b_2b_3 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 & a_1^2+b_1^2 \\ 1 & a_2 & b_2 & a_2^2+b_2^2 \\ 1 & a_3 & b_3 & a_3^2+b_3^2 \\ 1 & a_4 & b_4 & a_4^2+b_4^2 \end{vmatrix}$$ ヲ証セヨ。

〔解〕 右邊ノ行列式ヲ △ トスレバ第一列ニ第二列ヲ加ヘ第三第四列ヲ引キ次ニ第二列ヨリ第三列ヲ，第三列ヨリ第四列ヲ引ケバ

$$2\triangle=2\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2-a_3-a_4 & b_1+b_2-b_3-b_4 & a_1^2+a_2^2-a_3^2-a_4^2+b_1^2+b_2^2-b_3^2-b_4^2 \\ 0 & a_2-a_3 & b_2-b_3 & a_2^2-a_3^2+b_2^2-b_3^2 \\ 0 & a_3-a_4 & b_3-b_4 & a_3^2-a_4^2+b_3^2-b_4^2 \\ 1 & a_4 & b_4 & a_4^2+b_4^2 \end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix} a_1+a_2-a_3-a_4 & b_1+b_2-b_3-b_4 & a_1^2+a_2^2-a_3^2-a_4^2+b_1^2+b_2^2-b_3^2-b_4^2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & a_2^2-a_3^2+b_2^2-b_3^2 \\ a_3-a_4 & b_3-b_4 & a_3^2-a_4^2+b_3^2-b_4^2 \end{vmatrix}$$

第二列ニ　-2　ヲカケテ第一列ヲ加ヘ然ル後第三列ニ　-2　ヲカケテ第二列ヲ加フレバ

$$2\triangle=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1+a_2-a_3-a_4 & b_1+b_2-b_3-b_4 & a_1^2+a_2^2-a_3^2-a_4^2+b_1^2+b_2-b_3^2-b_4^2 \\ a_1-a_2+a_3-a_4 & b_1-b_2+b_3-b_4 & a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2+b_1^2-b_2^2+b_3^2-b_4^2 \\ a_1-a_2-a_3+a_4 & b_1-b_2-b_3+b_4 & a_1^2-a_2^2-a_3^2+a_4^2+b_1^2-b_2^2-b_3^2+b_4^2 \end{vmatrix}$$

第一行ニ　$a_1+a_2+a_3+a_4$，第二行ニ　$b_1+b_2+b_3+b_4$　ヲ乘ジテ第三行ヨリ引ケバ

$$2\triangle=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1+a_2-a_3-a_4 & b_1+b_2-b_3-b_4 & -2a_1a_2+2a_3a_4-2b_1b_2+2b_3b_4 \\ a_1-a_2+a_3-a_4 & b_1-b_2+b_3-b_4 & -2a_1a_3+2a_2a_4-2b_1b_3+2b_2b_4 \\ a_1-a_2-a_3+a_4 & b_1-b_2-b_3+b_4 & -2a_1a_4+2a_2a_3-2b_1b_4+2b_2b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1+a_2-a_3-a_4 & b_1+b_2-b_3-b_4 & a_1a_2-a_3a_4+b_1b_2-b_3b_4 \\ a_1-a_2+a_3-a_4 & b_1-b_2+b_3-b_4 & a_1a_3-a_2a_4+b_1b_3-b_2b_4 \\ a_1-a_2-a_3+a_4 & b_1-b_2-b_3+b_4 & a_1a_4-a_2a_3+b_1b_4-b_2b_3 \end{vmatrix}.$$

53. 主對角線上ノ元素ガ皆 a ニシテ其他ノ元素ガ皆 b ナル $n+1$ 次ノ行列式ノ値ハ $(a+nb)(a-b)^n$ ニ等シキコトヲ証セヨ。

〔解〕 所題ノ行列式ヲ △ トスレバ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a & b & b \cdots\cdots b \\ b & a & b \cdots\cdots b \\ b & b & a \cdots\cdots b \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ b & b & b \cdots\cdots a \end{vmatrix}$$

第二行以下ヲ總テ第一行ニ加フレバ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a+nb & b & b \cdots\cdots b \\ a+nb & a & b \cdots\cdots b \\ a+nb & b & a \cdots\cdots b \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a+nb & b & b \cdots\cdots a \end{vmatrix}=(a+nb)\begin{vmatrix} 1 & b & b \cdots\cdots b \\ 1 & a & b \cdots\cdots b \\ 1 & b & a \cdots\cdots b \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 1 & b & b \cdots\cdots a \end{vmatrix}$$

第一列ヲ各列ヨリ引キ第二列以下ヨリ $a-b$ ヲ括リ出セバ

$$\triangle=(a+nb)\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots\cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+nb)(a-b)^n\begin{vmatrix} 1 & b & b \cdots\cdots b \\ 0 & 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 1 \end{vmatrix}$$

然ルニ第一行ニツイテ展開スレバ

$$\begin{vmatrix} 1 & b & b \cdots\cdots b \\ 0 & 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \end{vmatrix}=1,$$

$$\therefore\ \triangle=(a+nb)(a-b)^n$$

54. $\begin{vmatrix} x^{n-1} & x^{n-2} & \cdots\cdots & x & 1 \\ 1 & x^{n-1} & \cdots\cdots & x^2 & x \\ x & 1 & \cdots\cdots & x^3 & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ x^{n-2} & x^{n-3} & \cdots\cdots & 1 & x^{n-1} \end{vmatrix}=(x^n-1)^{n-1}$ ヲ証セヨ。

〔解〕 所題ノ行列式ヲ △ トシ，第一列ニ $x, x^2, \ldots\ldots, x^{n-1}$ ヲカケテ第二列，第三列……，第 n 列ヨリ引ケバ

$$\triangle=\begin{vmatrix} x^{n-1} & x^{n-2} & \cdots\cdots & x & 1 \\ 1-x^n & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ x(1-x^n) & 1-x^n & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ x^{n-2}(1-x^n) & x^{n-3}(1-x^n) & \cdots\cdots & 1-x^n & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(1-x^n)^{n-1}\begin{vmatrix} x^{n-1} & x^{n-2} & \cdots\cdots & x & 1 \\ 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ x & 1 & \cdots\cdots & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \\ x^{n-2} & x^{n-3} & \cdots\cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

第 n 行ニツイテ展開スレバ

$$\triangle=(1-x^n)^{n-1}(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ x & 1 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ x^{n-2} & x^{n-3} & \cdots\cdots & x & 1 \end{vmatrix}=(1-x^n)^{n-1}(-1)^{n-1}$$
$$=(x^n-1)^{n-1},$$

55. $$\begin{vmatrix} a, & a+d, & a+2d, & \cdots\cdots, & a+(n-1)d \\ a+(n-1)d, & a, & a+d, & \cdots\cdots, & a+(n-2)d \\ a+(n-2)d, & a+(n-1)d, & a, & \cdots\cdots, & a+(n-3)d \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+d, & a+2d, & a+3d, & \cdots\cdots, & a \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(nd)^{n-1}\left(a+\frac{n-1}{2}d\right)$$ ヲ証セヨ。

〔解〕 左邊ヲ $\triangle$ トシ第二行以下ヲ第一行ニ加ヘテ $\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$ ヲ括リ出セバ

$$\triangle=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}\begin{vmatrix} 1 & a+d & a+2d & \cdots\cdots & a+(n-1)d \\ 1 & a & a+d & \cdots\cdots & a+(n-2)d \\ 1 & a+(n-1)d & a & \cdots\cdots & a+(n-3)d \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a+2d & a+3d & \cdots\cdots & a \end{vmatrix}$$

各列ヲ其上ノ列ヨリ引キ第一列乃至第 $n-1$ 列ヨリ d ヲ括リ出セバ

$$\triangle=n\left(a+\frac{n-1}{2}d\right)d^{n-1}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 & 1 \\ 0 & -(n-1) & 1 & \cdots\cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -(n-1) & \cdots\cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots\cdots & -(n-1) & 1 \\ 1 & a+2d & a+3d & \cdots\cdots & a+(n-1)d & a \end{vmatrix}$$

第一行ニツキ展開スレバ

$$\triangle=(-1)^{n-1}n\left(a+\frac{n-1}{2}d\right)d^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 & 1 \\ -(n-1) & 1 & \cdots\cdots & 1 & 1 \\ 1 & -(n-1) & \cdots\cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots\cdots & -(n-1) & 1 \end{vmatrix}$$

右邊ノ行列式ヲ $\triangle'$ トシ $\triangle'$ ノ第 $(n-1)$ 行(最後ノ行)ヲ第一行ヨリ引キ第一行ニツキ展開スレバ

$$\triangle'=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots\cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots\cdots & 1 & 1 \\ 0 & -(n-1) & \cdots\cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & -(n-1) & 1 \end{vmatrix}=n\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 & 1 \\ -(n-1) & 1 & \cdots\cdots & 1 & 1 \\ 1 & -(n-1) & \cdots\cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots\cdots & -(n-1) & 1 \end{vmatrix}$$

此右邊ノ行列式ハ $\triangle'$ ト同ジ形ニテ $(n-2)$ 次ナリ，依ツテ同ジ計算ヲ繰リ返セバ

$$\triangle'=n^{n-3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -(n-1) & 1 \end{vmatrix}=n^{n-2}$$

$$\therefore\ \triangle=(-1)^{n-1}(nd)^{n-1}\left(a+\frac{n-1}{2}d\right),$$

56. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots\cdots & n^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \cdots\cdots & n^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2^n & 3^n & \cdots\cdots & n^n \end{vmatrix}=n!\,(n-1)!\cdots\cdots 3!\,2!\,1!$ ヲ証セヨ。

〔解〕 今 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ ヲ皆相異ナル n 個ノ數トスレバ一般ニ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots\cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots\cdots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \cdots\cdots & a_n^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \cdots\cdots & a_n^n \end{vmatrix}=a_1a_2\ldots a_n\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots\cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots\cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots\cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

右邊ノ行列式ニ於テ $a_n=a_{n-1}$, $a_n=a_{n-2}$, $\cdots\cdots$, $a_2=a_1$ トオケバ 0 トナリ且ツ $\triangle$ ハ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ニツキ $1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 次ナル故ニ

$$\begin{aligned}\triangle=k\,a_1a_2\cdots\cdots a_n(a_n-a_{n-1})(a_n-a_{n-2})\cdots\cdots&(a_n-a_1)\\ (a_{n-1}-a_{n-2})\cdots\cdots&(a_{n-1}-a_1)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ &(a_2-a_1)\end{aligned}$$

主項 $a_1a_2^2a_3^3\cdots\cdots a_n^n$ ノ係數ヲ比較シテ $k=1$ ナルヲ知ル，依ツテ a_n, a_{n-1} $\cdots\cdots a_2, a_1$ ヲ夫々 $n, n-1, \cdots\cdots 2, 1$ トスレバ

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots\cdots & n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2^n & 3^n & \cdots\cdots & n^n \end{vmatrix}=n!\,(n-1)!\,(n-2)!\cdots\cdots 2!\,1!$$

57. $\triangle_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots\cdots & n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots\cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$

$$\triangle_k=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots 1 \\ k & k+1 & k+2 & \cdots\cdots n \\ k^2 & (k+1)^2 & (k+2)^2 & \cdots\cdots n^2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ k^{n-k} & (k+1)^{n-k} & (k+2)^{n-k} & \cdots\cdots n^{n-k} \end{vmatrix}$$

トスレバ　$\triangle_1=(n-1)!\,(n-2)!\cdots\cdots(n-k+1)!\triangle_k$　ナルコトヲ証セヨ，

但シ k ハ n ヨリ小ナル任意ノ正ノ整數トス。

〔解〕 $\triangle_1$ ノ第一行ヲ他ノ各行ヨリ引キ第一列ニツキ展開スレバ

$$\triangle_1=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots 0 \\ 1 & 2-1 & 3-1 & \cdots\cdots n-1 \\ 1 & 2^2-1 & 3^2-1 & \cdots\cdots n^2-1 \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 1 & 2^{n-1}-1 & 3^{n-1}-1 & \cdots\cdots n^{n-1}-1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2-1 & 3-1 & \cdots\cdots n-1 \\ 2^2-1 & 3^2-1 & \cdots\cdots n^2-1 \\ 2^3-1 & 3^3-1 & \cdots\cdots n^3-1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 2^{n-1}-1 & 3^{n-1}-1 & \cdots\cdots n^{n-1}-1 \end{vmatrix}$$

各行ヨリ　$2-1,\ 3-1,\ \cdots\cdots,\ n-1$　ヲ括リ出シ然ル後各列ヲ其次ノ列ヨリ引ケバ

$$\triangle_1=(n-1)!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots 1 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots\cdots n \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots\cdots n^2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 2^{n-2} & 3^{n-2} & 4^{n-2} & \cdots\cdots n^{n-2} \end{vmatrix}=(n-1)!\,\triangle_2$$

同樣ニ　$\triangle_2$ ノ第一行ヲ他ノ各行ヨリ引キ第一列ニツキ展開スレバ

$$\triangle_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots 0 \\ 2 & 3-2 & 4-2 & \cdots\cdots n-2 \\ 2^2 & 3^2-2^2 & 4^2-2^2 & \cdots\cdots n^2-2^n \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 2^{n-2} & 3^{n-2}-2^{n-2} & 4^{n-2}-2^{n-2} & \cdots\cdots n^{n-2}-2^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 3-2 & 4-2 & \cdots\cdots n-2 \\ 3^2-2^2 & 4^2-2^2 & \cdots\cdots n^2-2^2 \\ 3^3-2^3 & 4^3-2^3 & \cdots\cdots n^3-2^3 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 3^{n-2}-2^{n-2} & 4^{n-2}-2^{n-2} & \cdots\cdots n^{n-2}-2^{n-2} \end{vmatrix}$$

各行ヨリ　$3-2,\ 4-2,\ \cdots\cdots,\ n-2$　ヲ括リ出シ然ル後各列ノ　2 倍ヲ其次ノ列ヨリ引ケバ

$$\triangle_2=(n-2)!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots\cdots n \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & \cdots\cdots n^2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 3^{n-3} & 4^{n-3} & 5^{n-3} & \cdots\cdots n^{n-3} \end{vmatrix}=(n-2)!\,\triangle_3$$

以下同樣ニシテ

$$\triangle_3=(n-3)!\,\triangle_4\quad\cdots\cdots\quad\triangle_{k-1}=(n-k+1)!\,\triangle_k$$

$$\therefore\ \triangle_1=(n-1)!\,(n-2)!\,\cdots\cdots\,(n-k+1)!\,\triangle_k,$$

58.
$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots\cdots s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots\cdots s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots\cdots s_{n+1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots\cdots s_{2n-2} \end{vmatrix}=\begin{aligned}&(a_1-a_2)^2(a_1-a_3)^2(a_1-a_4)^2\cdots\cdots(a_1-a_n)^2\\ &(a_2-a_3)^2(a_2-a_4)^2\cdots\cdots(a_2-a_n)^2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &(a_{n-1}-a_n)^2\end{aligned}$$

ヲ証セヨ，但シ　$a_1^k+a_2^k+\cdots\cdots+a_n^k=s_k$　トス。

〔解〕 今 $\triangle=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots\cdots a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots\cdots a_n^2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots\cdots a_n^{n-1} \end{vmatrix}$　トスレバ

$$\triangle^2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots\cdots a_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots\cdots a_n^{n-1} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots\cdots a_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots\cdots a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots\cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots\cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots\cdots & s_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots\cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

然ルニ $\triangle$ ハ $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ ニツキ $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 次ニシテ且ツ $a_1=a_2$, $a_1=a_3$ 等トオケバ 0 トナル

$$\therefore\ \triangle=M(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots\ldots(a_1-a_n)$$
$$(a_2-a_3)\ldots\ldots(a_2-a_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a_{n-1}-a_n)$$

主項 $a_2a_3^2a_4^3\ldots\ldots a_n^{n-1}$ ノ係數ヲ比較スレバ

$$1=M(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \qquad \therefore\ M=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$\therefore\ \triangle=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots\ldots(a_1-a_n)$$
$$(a_2-a_3)\ldots\ldots(a_2-a_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a_{n-1}-a_n)$$

$$\therefore\ \triangle^2=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots\cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots\cdots & s_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n-1} & \cdots\cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}=(a_1-a_2)^2(a_1-a_3)^2\ldots\ldots(a_1-a_n)^2$$
$$(a_2-a_3)^2\ldots\ldots(a_2-a_n)^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a_{n-1}-a_n)^2,$$

59.
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ 1 & 0 & x_1+x_2 & x_1+x_3 & \cdots\cdots & x_1+x_{n+1} \\ 1 & x_2+x_1 & 0 & x_2+x_3 & \cdots\cdots & x_2+x_{n+1} \\ 1 & x_3+x_1 & x_3+x_2 & 0 & \cdots\cdots & x_3+x_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n+1}+x_1 & x_{n+1}+x_2 & x_{n+1}+x_3 & \cdots\cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}2^n x_1x_2\ldots\ldots x_{n+1}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots\ldots+\frac{1}{x_{n+1}}\right)$$ ヲ證セヨ。

〔解〕 左邊ヲ $\triangle$ トシ $\triangle$ ノ第一行ニ $x_1, x_2\ldots\ldots x_{n+1}$ ヲ乘ジテ第二行以下ヨリ引キ第二列以下ヨリ $x_1, x_2\ldots\ldots x_{n+1}$ ヲ括リ出セバ

$$\triangle=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ 1 & -x_1 & x_1 & x_1 & \cdots\cdots & x_1 \\ 1 & x_2 & -x_2 & x_2 & \cdots\cdots & x_2 \\ 1 & x_3 & x_3 & -x_3 & \cdots\cdots & x_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1} & x_{n+1} & \cdots\cdots & -x_{n+1} \end{vmatrix}$$

$$=x_1x_2\ldots\ldots x_{n+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\ \cdots\cdots & 1 \\ \frac{1}{x_1} & -1 & 1 & 1\ \cdots\cdots & 1 \\ \frac{1}{x_2} & 1 & -1 & 1\ \cdots\cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{x_{n+1}} & 1 & 1 & 1\ \cdots\cdots & -1 \end{vmatrix}$$

最後ノ行ヲ第二行以下ヨリ引キ第一列ニツキ展開スレバ（最後ノ行ハ第 $n+2$ 行）

$$\triangle=x_1x_2\ldots\ldots x_{n+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\ \cdots\cdots & 1 \\ \frac{1}{x_1} & -2 & 0 & 0\ \cdots\cdots & 1 \\ \frac{1}{x_1} & 0 & -2 & 0\ \cdots\cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{x_{n+1}} & 2 & 2 & 2\ \cdots\cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}x_1x_2\ldots\ldots x_n\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & -2 & 0\ \cdots\cdots & 0 \\ \frac{1}{x_2} & 0 & -2\ \cdots\cdots & 0 \\ \frac{1}{x_3} & 0 & 0\ \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{x_{n+1}} & 2 & 2\ \cdots\cdots & 2 \end{vmatrix}$$

右邊ノ行列式ヲ $\triangle'$ トシ第一列ニツキ展開スレバ