テハ、二數$c+a$, $c-a$ノ對數ヲ要スルノミナルニ、後ノ解法ニテハ、三數a, c, $\sin B$ノ對數ヲ使用スルガ故ニ始メノ解法ニヨル方簡單ナリ、

又a, cガ殆ンド相等シキ場合ニハ、Bハ$0°$ニ近クシテ之レヲ其ノ餘弦ニヨリテ精密ニ求ムルヲ得ズ、因テ後ノ解法ニ依ル能ハズ、然ルニ前ノ解法ニテハ正切ニヨリテ$\frac{B}{2}$ヲ求ムルガ故ニ此ノ如キ憂ナシ、

106. 直角ノ二辺ヲ與ヘテ直角三角形ヲ解クコト、

解　$\tan A=\frac{a}{b}$

ニヨリテAヲ求メ、B, Cヲ求ムルニハ次式ヲ用ヒル、

$$B=90°-A$$

$$c=\frac{a}{\sin A}$$

面積ヲ計算スルニハ

$$S=\frac{1}{2}ab$$

ヲ用ヰル、

注意、問題ハ常ニ一ツノ解ヲ有ス、

注意、此ノ場合ニ$c^2=a^2+b^2$ニヨリテcヲ求メンニハ、先ヅ之ヲ對數計算ニ適スル形ニ変ズルヲ要ス、乃チ

$$c^2=a^2+b^2=a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)$$

ト書キ換ヘ、$\frac{b}{a}$ヲ餘切トスル正ノ鋭角ヲ求メテ之レ

ヲφト置ケバ

$$c^2=a^2(1+\cot^2\varphi)=a^2\operatorname{cosec}^2\varphi$$

從テ　$c=\frac{a}{\sin\varphi}$

故ニ先ヅ表ヨリ補助角φヲ求メ、次ニcヲ計算スベシ、

サリナガラ斯クナスコトハ前ニ示シタル解法ト異ナルニ非ザルナリ、

108. 驗算

三角形ヲ解キタル後驗算ヲ行ハンニハ、既知及未知ノ原素ヲナルベク多ク含ミテ解法ニ使用セザル等式ヲ用ヰルヲヨシトス、

直角三角形ニ關スル計算ハ簡單ニシテ驗算ノ必要ナカルベシ、然レトモ特ニ驗算ヲ行ハンニハ第一第二、第四ノ場合ニハ

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{c-a}{c+a}}$$

第三ノ場合ニハ

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{c-b}{c+b}}$$

ヲ用ヰル、

(104)、例ノ驗算

(1) $c=851.61$

$a=704.27$

$c+a=1555.88$

$c-a=147.34$

(2) $\log 147.3=2.16820$

$4 \text{-----} 12$

$\log(c-a)=2.16832$

(5) $\frac{B}{2}=17°6'21''$

$\log\tan 17°6'=\bar{1}.88804$

$20'' \text{----} 15.0$

$1 \text{------} 0.8$

$\log\tan\frac{B}{2}=\bar{1}.48820$

(3) $\log 1555.0=3.19173$

$8 \text{-------} 22.4$

$8 \text{--------} 2.24$

$\log(c+a)=3.19198$

(4) $\log(c-a)=2.16832$

$-\log(c+a)=\bar{4}.80802$

$2\log\tan\frac{B}{2}=\bar{2}.97634$

$\log\tan\frac{B}{2}=\bar{1}.48817$

二様ニ計算シタル $\log\tan\frac{B}{2}$ ノ値ニ末位ノ3ダケノ差アリ、近似数ノミノ計算ナルカユヱニ、計算ノ途中ニ誤リナキモ、結果ノ一致セサルコトマヽ止ムヲ得サルナリ、

(106)ノ例ノ験算

(1) $c=2324.5$

$b=2080.3$

$c+b=4404.8$

$c-b=244.2$

(2) $\log 4404.0=3.64385$

$8 \text{-------} 8$

$\log(c+b)=3.64393$

(3) $\log(c-b)=2.38775$

(4) $\log(c-b)=2.38775$

$-\log(c+b)=\bar{4}.35607$

$2\log\tan\frac{A}{2}=\bar{2}.74382$

$\log\tan\frac{A}{2}=\bar{1}.37191$

(5) $\frac{A}{2}=13°15'$

$\log\tan\frac{A}{2}=\bar{1}.37193$

此ノ場合ニハ $\log\tan\frac{A}{2}$ ノ末位ニ2ダケノ差アリ、

問題

次ノ場合ニ直角三角形ヲ解ケ($C=90°$) (1−4)

1. $a=554.29$米, $C=85°12'47''$
2. $b=673.43$米, $B=56°47'26''$
3. $a=375.27$間, $b=234.78$間
4. $b=432.78$米, $c=827.75$米
5. 半径0.5米ナル円ニ内接スル正七辺形ノ周及面積ヲ計算セヨ,
6. 直角三角形ノ直角ノ二等分線ガ斜辺ヲ分ツ二ツノ分ガ2.9米ト3.7米トナルコトヲ知リテ此三角形ノ角ヲ求メヨ、

一般ナル三角形ノ解法

109, 一般ナル三角形ヲ解クコト、

原素ノ三ツ与ヘテ一般ナル三角形ヲ解クニハ次ノ如ク四ツノ場合アリ、

(1) 一辺ト二角トヲ與フル場合

(2) 三辺ヲ與フル場合

(3) 二辺ト其夾角トヲ与フル場合

(4) 二辺ト其一ツニ對スル角トヲ与フル場合

110. 一辺ト二角トヲ與ヘテ三角形ヲ解クコト、

解 辺c及ヒ二角A, Bヲ與ヘルモノトス、

先ヅ $C=180^\circ-(A+B)$

ニヨリテAヲ求メ、次ニ正弦比例ヨリ得ル所ノ式

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}$$

及ビ

$$b=\frac{c\sin B}{\sin C}$$

ニヨリテa, bヲ求ム、

面積ヲ要スル場合ニハ

$$S=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}$$

ヲ用ヰル、

験算ニハ次式ヲ用ヰル

$$c=\frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$$

注意、c, A, Bガ正ニシテ、$A+B<180^\circ$ナレバ問題ハ常ニ一ツノ解ヲ有ス、

例、$A=50^\circ58'42''$, $B=32^\circ50'48''$, $c=169,37$ナルコトヲ知リテ三角形ヲ解ケ

既知部	未知部
$A=50^\circ58'42''$	$C=96^\circ10'30''$
$B=32^\circ50'48''$	$A=132,35$米
$C=169,37$米	$B=92,40$米

(公式)
$$C=180^\circ-(A+B)$$
$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}$$
$$b=\frac{c\sin B}{\sin C}$$

予備ノ計算

(1) $\log 169,3=2,22866$
$7 \quad 17.5$
$\log c=2,22884$

(2) $\log\sin 50^\circ58'=\bar{1},89030$
$40''\text{------}6,7$
$2\text{------}0,3$
$\log\sin A=\bar{1},89037$

(3) $\log\sin 32^\circ50'=\bar{1},73416$
$40''\text{----}12,7$
$8\text{------}2,5$
$\log\sin B=\bar{1},73431$

(4) $\log\sin C$
$=\log\cos 6^\circ10'30''=\bar{1},99748$

未知部ノ計算

(1) $A=50^\circ58'42''$
$B=32^\circ50'48''$
$A+B=83^\circ49'30''$
$C=96^\circ10'30''$

(2) $\log c=2,22884$
$\log\sin A=\bar{1},89037$
$-\log\sin C=0,00252$
$\log a=2,12173$
$1323\text{------}56$
$5\text{------}17$
$a=132,35$

(3) $\log c=2,22884$
$\log\sin B=\bar{1},73431$
$-\log\sin C=0,00252$
$\log b=1,96567$
$b=92,40$

験算

公式 $$c=\frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$$

(1)

$$a=132{,}35$$
$$b=92{,}40$$
$$a+b=224{,}75$$
$$\log 224.7=2{,}35160$$
$$5\text{------}10$$
$$\log(a+b)=2{,}35170$$

(2)

$$\frac{C}{2}=48^\circ 5' 15''$$
$$\log\sin 48^\circ 5'=\bar{1}{,}87164$$
$$10''\text{----}18$$
$$5\text{-----}0{,}9$$
$$\log\sin\frac{C}{2}=1{,}87167$$

(3)

$$A=50^\circ 58' 42''$$
$$B=32^\circ 50' 48''$$
$$A-B=18^\circ\ 7'\ 54''$$
$$\frac{A-B}{2}=9^\circ\ 3'\ 57''$$
$$\log\cos\frac{A-B}{2}=\bar{1}.99454$$

(4)

$$\log(a+b)=2{,}35170$$
$$\log\sin\frac{C}{2}=\bar{1}{,}87167$$
$$-\log\sin\frac{A-B}{2}=0{,}00546$$
$$\log c=2{,}22883$$

1. $a=54.27$, $B=32^\circ 48' 56''$, $C=75^\circ 26' 48''$ ナルコトヲ知リテ三角形ヲ解ケ、

2. $a=457{,}8$, $B=107^\circ 55' 46''$, $C=49^\circ 25' 47''$ ナルトキ a 辺ニ對スル高サヲ求メヨ、

3. $a=100$, $B=105$, $C=60^\circ$ ナルコトヲ知リ表ヲ用ヰズシテ此ノ三角形ヲ解ケ

III. 三辺ヲ與ヘテ三角形ヲ解クコト、

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}$$
$$\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b}$$
$$\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}$$

ニヨリテA,B,Cヲ求ム

面積ヲ要スルトキハ

$$S=pr$$

ニヨル、

驗算ニハ

$$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ$$

ヲ用ヰル、

注意、$A+B>C$, $b+c>a$, $c+a>b$ ナルトキニ限リ問題ハ唯一ツノ解ヲ有ス、

例 $a=273{,}96$, $b=198{,}63$, $c=236{,}91$ ナルコトヲ知リテ三角形ヲ解ケ

既知部	未知部
$a=273{,}96$	$A=77^\circ 24' 14''$
$b=198{,}63$	$B=45^\circ 2' 20''$
$c=236{,}91$	$C=57^\circ 33' 36''$

(公式)

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$
$$\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}$$
$$\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b}$$
$$\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}$$

對數ノ計算

(1) $2p=709,50$

$p=354,75$

$p-a=80,79$

$p-b=156,12$

$p-c=117,84$

(1) $\log 354,7=2,54986$

$5\text{-------}6$

$\log p=2,54992$

(2) $\log(p-a)=1,90736$

(3) $\log 156,1=2,19340$

$2\text{----}5,6$

$\log(p-b)=2,19346$

(4) $\log 117,8=2,07115$

$4\text{-----}14,4$

$\log(p-c)=2,07129$

(5) $\log(p-a)=1,90736$

$\log(p-b)=2,19346$

$\log(p-c)=2,07129$

$-\log p=\overline{3},45008$

$2\log r=3,62219$

$\log r=1,81110$

未知數ノ計算

(1) $\log r=1.81110$

$-\log(p-a)=\overline{2},09264$

$\log\tan\frac{A}{2}=1,90374$

$38^\circ 42'\text{-------}1$

$7\text{-------}3$

$\frac{A}{2}=38^\circ 42' 7''$

$A=77^\circ 24' 14''$

(2) $\log r=1,81110$

$-\log(p-b)=\overline{3},80654$

$\log\tan\frac{B}{2}=\overline{1},61764$

$32^\circ 31'\text{------}58$

$10\text{-------}6$

$\frac{B}{2}=22^\circ 31' 10''$

$B=45^\circ 2' 20''$

(3) $\log r=1.81110$

$-\log(p-c)=\overline{3},92871$

$\log\tan\frac{C}{2}=\overline{1},73981$

$28^\circ 46'\text{-------}57$

24

$40''\text{---}20$

$8\text{----}4$

$\frac{C}{2}=28^\circ 46' 48''$

$C=57^\circ 33' 36''$

驗算

$$\frac{A}{2}=38^\circ 42' 7''$$
$$\frac{B}{2}=22^\circ 31' 10''$$
$$\frac{C}{2}=28^\circ 46' 48''$$
$$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ 0' 5''$$

注意、$\tan\frac{A}{2}$等ノ代リニ$\sin\frac{A}{2}$等又ハ$\cos\frac{A}{2}$等ヲ用ヰレバ如何

唯一角ヲ要スル場合ニハ、何レノ公式ヲ用フルモ四個ノ對數ヲ用ヒルガ故ニ其ノ手數同一ナリ、然レドモスベテノ角ヲ要スル場合ニ、$\tan\frac{A}{2}$等ヲ用ヰレバ四個、$\sin\frac{A}{2}$等ヲ用ヰレバ六個、$\cos\frac{A}{2}$等ヲ用ヰレバ七個ノ對數ヲ取ルヲ要スルガ故ニ$\tan\frac{A}{2}$等ヲ用ヰル方簡便ナリ、ナホカク手數ノ上ニテ簡便ナルノミナラズ正弦又ハ餘弦ニヨリテ角ヲ求ムルヨリモ正切ニヨリテ角ヲ求ムル方精密ナル結果ヲ得ルナリ、

問題

1、$a=95,482$, $b=82,347$, $c=79,874$ナルコトヲ知リテ三角形ノ三ツノ角、面積ヲ計算セヨ、

2、二ツノ底ガ152,4 104,7ニシテ、他ノ二辺384,25, 256,34ナル梯形ノ角ヲ求メヨ、

3、$a=\sqrt{3}+1$, $b=2$, $c=\sqrt{6}$ナルコトヲ知リテ三角形ヲ解ケ、

112、二辺ト夾角トヲ與ヘテ三角形ヲ解クコト、

解 二辺b, cト夾角Aトヲ与フルモノトス、

($b\geqq c$ トス)

先ヅ

$$\frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}$$

ニヨリテ $\frac{B+C}{2}$ ヲ求ム、次ニ

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

ナルニヨリ $\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$ ヲ正切ニ有スル 0° ト 90° トノ間ニアル角ヲαトスレバ

$$\frac{B-C}{2}=\alpha$$

因テ $B=90^\circ-\frac{A}{2}+\alpha$

$$C=90^\circ-\frac{A}{2}-\alpha$$

斯クナストキハ一辺ト各角トヲ知ルガ故ニ(109)ニヨリ、正弦比例ニヨリ得ル所ノ式

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B} \qquad (1)$$

ヲ用ヰテαヲ求ムベキガ如シト雖モ、実ハ

$$a=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}} \qquad (2)$$

ヲ用ヰルヲ便トス、何トナレバB,Cヲ求メタル後aヲ求ムルニ、(1)ニヨレバ、新タニ $b,\sin A$, $\sin B$ノ對數ヲ求ムルヲ要スルニ、(2)ニヨレバ、新タニ $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{B-C}{2}$ ノ對數ノミヲ取レバ可ナリ、故ニ(2)ヲ用ヰル方(1)ヲ用ヰルヨリモ簡単ナリ、

驗メシニハ

$$\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{p-a}{p}$$

ヲ用ヰル、

サリナガラ面積ヲ求ムル場合ニハ、(1)ニヨリテaヲ計算シ、面積ヲ $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ ニヨリテ計算スルヲ便トス、何トナレバB,Cヲ求メタル后面積ヲ求ムルマデニ、(1)ヲ用ヰレバ、新タニ b, $\sin\frac{A}{2}$, $\sin B$, 2, c, $\sin A$ノ對數ヲ取レバ十分ナルニ、(2)ト $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ トヲ用ヰレバ、新タニ $b+c$, $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{B-C}{2}$, $2, b, c$, $\sin A$ノ對數ヲ取ルヲ要スレバナリ、

吟味、問題ノ成立スルタメニ、B,Cガ正数ナルコトガ必要ニシテ且十分ナリ、是ガタメニ其ノ小ナル方Cガ正ナレバヨシ、

即チ $90^\circ-\frac{A}{2}-\alpha>0$

即チ $90^\circ-\frac{A}{2}>\alpha$

此ノ両辺ハ共ニ正ノ鋭角ナルニヨリ、其ノ正切ニテ置換スレバ

$$\cot\frac{A}{2}>\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

是ハ常ニ成立スル関係ナリ、故ニ問題ハ常ニ成立ス、

例、$b=4.5672$, $c=3.4565$, $A=56^\circ7'48''$ ナルコトヲ知リテ三角形ヲ解クコト、

既知部	未知部
$b=4.5672$	$B=76^\circ29'21''$
$c=3.4565$	$C=47^\circ22'51''$
$A=56^\circ7'48''$	$a=3.9003$

（公式）

$$\frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}$$

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

$$a=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$$

對數ノ計算

(1) $\frac{A}{2}=28^\circ3'54''$

(2) $b=4.5672$
$c=3,4565$
$b+c=8,0237$
$b-c=1,1107$

(3) $\log 1,110=0,04532$
$7\text{-------}27,3$
$\log(b-c)=0,04559$

(4) $\log 8,023=0,90434$
$7\text{------}3,5$
$\log(b+c)=0,90438$

(5) $\log\cot 28^\circ4'=0,27311$
$6''\text{-----}3$
$\log\cot\frac{A}{2}=0,27314$

(6) $\log\sin 28^\circ3'=\bar{1}.67232$
$50''\text{---}20,0$
$4\text{----}1,6$
$\log\sin\frac{A}{2}=\bar{1}.67254$

(7) $\log\cos 14^\circ34'=\bar{1}.98581$
$40''\text{---}2,0$
$5\text{-----}0,2$
$\log\cos\frac{B-C}{2}=\bar{1}.98583$

未知數ノ計算

(1) $\log(b-c)=0,04559$
$-\log(b+c)=\bar{1}.09562$
$\log\cot\frac{A}{2}=0,27314$
$\log\tan\frac{B-C}{2}=\bar{1}.41435$
$14^\circ33'\text{----}22$
13
$10''\text{---}8,7$
$5\text{---}4,7$

$\frac{B-C}{2}=14^\circ33'15''$

$\frac{B+C}{2}=61^\circ56'6''$

$B=76^\circ29'21''$

$C=47^\circ22'51''$

(2) $\log(b+c)=0,90438$
$\log\sin\frac{A}{2}=\bar{1}.67254$
$-\log\cos\frac{B-C}{2}=0,01417$
$\log a=0,59109$
$3900\text{-------}6$
$3\text{---------}3$

$a=3,9003$

驗算

公式 $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{p-a}{p}$

(1) $\frac{B}{2}=38^\circ14'41''$
$\log\tan 38^\circ14'=\bar{1}.89645$
$40''\text{-----}17,3$
$1\text{-----}3,5$
$\log\tan\frac{B}{2}=\bar{1}.89666$

(2) $\frac{C}{2}=23^\circ41'26''$
$\log\tan 23^\circ41'=\bar{1}.64209$
$20''\text{---}11,3$
$6\text{----}3,4$
$\log\tan\frac{C}{2}=\bar{1}.64224$

(3) $\log\tan\frac{B}{2}=\bar{1}.89666$
$\log\tan\frac{C}{2}=\bar{1}.64224$
$\bar{1}.53890$

(1) $a=3,9003$
$b=4.5672$
$c=3,4565$
$2p=11,9240$
$p=5,9620$
$p-a=2,0617$

(2) $\log p=0,77539$

(3) $\log 2,061=0,31408$
$7\text{-------}14,7$
$\log(p-a)=0,31423$

(4) $\log(p-a)=0,31423$
$-\log p=\bar{1}.22461$
$\bar{1}.53884$

注意1. $\frac{B-C}{2}$ ガアマリ小ナラザル場合ニハ

$$a=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$$ ……ノ代リニ

$$a=\frac{(b-c)\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}$$ ―ヲ用ヒテモ可ナリ、

注意2. 実地應用上，b, c ノ代リニ其ノ對數ヲ与フルコトアリ、此ノ場合ニハ $\log b$, $\log c$ ヨリ b, c

ヲ求ムルコトナリ，對数ノママニテ，$B-C$ ヲ計算スルコトヲ得、何トナレバ $\tan\varphi=\frac{c}{b}$ ナル補助角 φ ヲ用ヰレバ

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{1-\frac{c}{b}}{1+\frac{c}{b}}=\frac{1-\tan\varphi}{1+\tan\varphi}=\tan(45^\circ-\varphi)$$

ト成ルコトヲ得ルニヨ

$$\tan\frac{B-C}{2}=\tan(45^\circ-\varphi)\cot\frac{A}{2}$$

ト書クコトヲ得レバナリ、

若又 c ノ代リニ $\log c$ ヲ與フル場合ニハ次ノ如クナスベシ

正弦及ヒ正射影ノ法則ヨリ得ル所ノ二式

$$a\sin C=c\sin A$$

$$a\cos C=b-c\cos A$$

ニツキ除法ヲ行ヒテ得ル式

$$\tan C=\frac{c\sin A}{b-c\cos A}$$

ヨリ C ヲ求メ

$$B=180^\circ-(A+C)$$

及ビ $$a=\frac{c\sin A}{\sin C}$$

ヨリ B, a ヲ求ム、

注意3、B, C ヲ要セズシテ單ニ a ノミヲ要スル場合ニ

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

ヲ用ヒルヲヨシトスルガ如ク看ユレドモ，之ハ對数計算ニ適セザルヲ以テ，矢張補助角トシテ $\frac{B-C}{2}$ ヲ求メ，

$$a=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$$ ニヨリ a ヲ計算スルヲヨシトス、

若シ強イテ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{A}{2}$ ニヨリ a ヲ計算センニハ，先ヅ之レヲ對数計算ニ適スル形ニ変ズルヲ要ス、

先ヅ

$$a^2=(b^2+c^2)\left(\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\right)-2bc\left(\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\right)$$

$$=(b+c)^2\sin^2\frac{A}{2}+(b-c)^2\cos^2\frac{A}{2}$$

$$=(b+c)^2\sin^2\frac{A}{2}\left\{1+\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2\cot^2\frac{A}{2}\right\}^2$$

茲ニ於テ $\left|\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}\right|$ ヲ正切トスル正ノ鋭角ヲ求メテ φ トスレバ

$$a^2=(b+c)^2\sin^2\frac{A}{2}\sec^2\varphi$$

因テ $$a=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\varphi}$$

コレ對数計算ニ適スル式ナリ、然レトモ

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2} ト \tan\varphi=\left|\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}\right| ト$$

ヲ比較スレバ $\varphi=\left|\frac{B-C}{2}\right|$ ナルヲ知ルガ故ニ、此方法ハ其実前法ト異ナルナキナリ、

113、二辺ト其ノ一ツノ辺ニ對スル角トヲ與ヘテ三角ヲ解クコト、

解　二辺 a, b ト a ニ對スル角 A トヲ與ヘ、

先ヅ正弦比例ヨリ得ル所ノ式

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a} \qquad (1)$$

ニヨリテ B ヲ求メ、次ニ

$$C=180^\circ-(A+B) \qquad (2)$$

ニヨリテ C ヲ求メ、終リニ正弦比例ヨリ得ル所ノ

式　　$C=\frac{a\sin C}{\sin A}$

ニヨリテ C ヲ求ム、

面積ヲ要スル場合ニハ

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

ヲ用ヰル、

吟味　問題ガ解ヲ有スルタメニ必要ニシテ且十分ナル要條ハ(1)ヨリ B ヲ求メ得ルコトヽ(2)ヨリ求ムル C ガ正ナルコトナリ、

先ヅ(1)ヨリ B ヲ求メ得ルタメニ

$$\frac{b\sin A}{a}\leqq 1 \quad 即チ \quad b\sin A\leqq a$$

以下此要條ハ満足セラルルモノトス、

(I)　$b\sin A=a$ ナル場合

此ノ場合ニ　$B=90^\circ$

(2)ヨリ得ル C ガ正ナルタメニ

$$180^\circ-(A+B)>0$$

即チ　　$A<90^\circ$

故ニ $A<90^\circ$ ナルトキニ限リ問題ハ唯一ツノ解ヲ有ス、

(II)　$b\sin A<a$ ナル場合

(1)ヨリ得ル所ノ B ニ二ツノ値アリ、其ノ一ツ B_1 ハ鋭角, 他ノ一ツ B_2 ハ鈍角ニシテ, B_1, B_2 ハ互ニ補角ヲナス、

(i) $A<90^\circ$ ナルトキ

先ヅ　$180^\circ-A-B_1>0$ ナルユヱ B_1 ハ常ニ採用スルコトヲ得、次ニ B_2 ガ採用シ得ルタメニ

$$180^\circ-A-B_2>0$$

即チ　$180^\circ-B_2>A$

即チ　$B_1>A$

両辺共ニ鋭角ナルユヱ此ノ関係ハ次ノ如ク書クコトヲ得、

$$\sin B_1>\sin A$$

即チ　$\frac{b\sin A}{a}>\sin A$

即チ　　$b>a$

故ニ $b>a$ ナルトキハ二ツノ解, $b\leqq a$ ナルトキハ一ツノ解アリ、

(ii)　$A=90^\circ$ ナルトキ

(i)ニ於ケルト同様ニ B_1 ハ常ニ採用スルコトヲ得レドモ $180^\circ-A-B_2<0$ ナルユヱ B_2 ハ常ニ採用スルヲ得ズ、

故ニ問題ニハ唯一ツノ解アリ、

(iii) $A > 90°$ ナルトキ

B_1 ガ採用シ得ルタメニ

$$180° - A - B_1 > 0$$

即チ　$180° - A > B_1$

両辺トモ鋭角ナルユエ

$$\sin A > \sin B_1$$

即チ　$\sin A > \dfrac{b \sin A}{a}$

即チ　$a > b$

因テ $a > b$ ナルトキニ限リ B_1 ハ採用スルヲ得。

B_2 ニツキテハ $180° - A - B_2 < 0$ ナルユエ之レハ採用スルヲ得ス、

因テ $a > b$ ナルトキニ限リ唯一ツノ三角形ガ成立ツ、

吟味ノ結果次ノ如シ

$b \sin A > a$　解ナシ

$b \sin A = a \begin{cases} A < 90° & \text{一解} \\ A \geqq 90° & \text{解ナシ} \end{cases}$

$b \sin A < a \begin{cases} A < 90° \begin{cases} b > a & \text{二解} \\ b \leqq a & \text{一解} \end{cases} \\ A = 90° \quad \text{一解} \\ A > 90° \begin{cases} a > b & \text{一解} \\ a \leqq b & \text{解ナシ} \end{cases} \end{cases}$

注意一、頂点Cヨリ對辺BCヘ下ス垂線ガ $b \sin A$ ニ等シキコトニ注意スレバ、上ノ吟味ノ結果ハ幾何學ニテ知レルコトヽ一致スルヲ看ルヘシ、

注意二、二ツノ解アルトキ之レヲ機意ノ場合ト云フ、

注意三、唯一ツノ解アル場合ニハ

$$a = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}} \text{ 又ハ } \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = \frac{p-c}{p}$$

ヲ用ヰテ験シヲ行フ、

機意ノ場合ニ、c ノ二ツノ値ヲ c_1, c_2 トスレバ、此ノ二数ハ c ニ關スル二次方程式、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

即チ　$c^2 - 2bc\cos A + b^2 - a^2 = 0$

ノ二根ナルユエ次式アリ、

$$c_1 + c_2 = 2b\cos A$$

機意ノ場合ニハ之ヲ用ヰテ験算ヲ行フ、

例、$a = 152.08$, $b = 236.74$, $A = 32°29'36''$ ナルコトヲ知リテ三角形ヲ解ケ、

既知部	未知部	
$a = 152.08$	$B_1 = 56°44'52''$	$B_2 = 123°15'8''$
$b = 236.74$	$C_1 = 90°45'32''$	$C_2 = 24°45'32''$
$A = 32°29'36''$	$c_1 = 283.07$	$c_2 = 116.29$

（公式）

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

$$C = 180° - (A + B)$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C$$

豫備ノ計算

(1) $\log 152,0 = 2,18184$

$8 \text{-----} 23,2$

$\log a = 2,18207$

(2) $\log 236,7 = 2,37420$

$4 \text{-----} 7,2$

$\log b = 2,37427$

(3) $\log\sin 32°29' = \overline{1}.73002$

$30'' \text{-----} 10,0$

$6 \text{-----} 2,0$

$\log\sin A = \overline{1}.73014$

$(4)_1$ $\log\sin C_1$

$= \log\cos 45'32'' = \overline{1}.99996$

$(4)_2$ $\log\sin 24°15' = \overline{1}.61354$

$10'' \text{-----} 4,7$

$6 \text{-----} 2,8$

$\log\sin C_2 = \overline{1}.61362$

未知部ノ計算

(1) $\log b = 2,37427$

$\log\sin A = \overline{1}.73014$

$-\log a = \overline{3}.81793$

$\log\sin B = \overline{1}.92234$

$56°44' \text{-----} 27$

7

$50 \text{-----} 6,7$

$2 \text{-----} 0,3$

$B_1 = 56°44'52''$

$B_2 = 123°15'8''$

(2) $C_1 = 90°45'32''$

$C_2 = 24°15'16''$

$(3)_1$ $\log a = 2,18207$

$\log\sin C_1 = \overline{1}.99996$

$-\log\sin A = 0,26986$

$\log c_1 = 2,45189$

$2830 \text{-----} 79$

$7 \text{-----} 10$

$c_1 = 283,07$

$(3)_2$ $\log a = 2,18207$

$\log\sin C_2 = \overline{1}.61362$

$-\log\sin A = 0,26986$

$\log c_2 = 2,06555$

$1162 \text{-----} 21$

$9 \text{-----} 34$

$c_2 = 116,29$

驗算 公式 $c_1 + c_2 = 2b\cos A$

(1) $c_1 = 283,07$

$c_2 = 116,29$

$c_1 + c_2 = 399,36$

$\log 399,3 = 2,60130$

$6 \text{-----} 6,6$

$2,60137$

(2) $\log\cos 32°30' = \overline{1}.92603$

$20'' \text{-----} 2,7$

$4 \text{-----} 0,5$

$\log\cos A = \overline{1}.92606$

(3) $\log 2 = 0,30103$

$\log b = 2,37427$

$\log\cos A = \overline{1}.92606$

$2,60136$

注意四、 Bガ90°ニ近キトキ正弦ニヨリ之レヲ精密ニ求ムルコト不可能ナルガ故ニ、次ノ式ヲ用ヰル、

$$\tan B = \pm \frac{b\sin A}{\sqrt{(a+b\sin A)(a-b\sin A)}}$$

或ハ $\tan\left(45° + \frac{B}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{a+b\sin A}{a-b\sin A}}$

注意五、 a, b, A ヲ知リテ三角形ヲ解クニ当リ先ツ c ヲ求メンニハ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

即チ $$c^2 - 2b\cos A . c + b^2 - a^2 = 0 \qquad (1)$$

ナル二次方程式ヲ用ヰル、今之レヲ解ケバ

$$c = b\cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A}$$

之レヲ對數計算ニ適スル式ニ變形スルタメニ

$$c = b\cos A \pm a\sqrt{1-\frac{b^2\sin^2 A}{a}}$$

ト書キ, $\frac{b\sin A}{a}$ ヲ正弦トスル補助角ヲ φ トオケバ

$$c = b\cos A \pm a\sqrt{1-\sin^2\varphi}$$
$$= \frac{a\sin\varphi}{\sin A}\cos A \pm a\cos\varphi$$

因テ $$c = \frac{a\sin(\varphi \pm A)}{\sin A}$$

コレ對數計算ニ適スル式ナリ.

コヽニ φ ハ B ニ外ナラズ.

問題

1. $a=2199.1$, $b=2513.2$, $A=27°47'44''$ ナルトキ三角形ヲ解ケ

2. $a=3.7856$, $b=5.6927$, $A=35°40'27''$ ナルトキ三角形ヲ解ケ.

3. $a=\sqrt{8}$, $b=\sqrt{12}$, $A=45°$ ナルコトヲ知リテ三角形ヲ解ケ.

　猜意ノ場合ニ次式ヲ証明セヨ.

4. $c_1^2+c_2^2-2c_1c_2\cos 2A = 4a^2\cos^2 A$

5. $\tan A = \cot\frac{c_1+c_2}{2}$

114. 三角形解法ノ種々ノ例.

　コレマデハ三角形ノ原素ノ若干ヲ知リテ他ヲ求ムルコトノミヲ論ゼシガ, 以下原素ナラザルモノヲモ與ヘテ三角形ヲ解クコトヲ例示セントス.

例1. a, A 及ビ $b+c=l$ ヲ與ヘテ三角形ヲ解クコト.

解 $$a = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$$ ヨリ

$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{l\sin\frac{A}{2}}{a}$$

ソコデ $\frac{l\sin\frac{A}{2}}{a}$ ヲ餘弦トスル角ヲ α トスレバ

$$\frac{B-C}{2} = \alpha$$

而シテ $$\frac{B+C}{2} = 90° - \frac{A}{2}$$

故ニ $$\left.\begin{aligned} B &= 90° - \frac{A}{2} + \alpha \\ C &= 90° - \frac{A}{2} - \alpha \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

斯クシテ B, C ヲ求ムレバ, 問題ハ三角形解法ノ第一ノ場合(110)ニ帰ス.

　吟味. 先ヅ正数 $\frac{l\sin\frac{A}{2}}{a}$ ガ鋭角 $\frac{B-C}{2}$ ノ餘弦ノ値トシテ採用シ得ルタメニ次ノ條件アリ.

$$\frac{l\sin\frac{A}{2}}{a} \leqq 1 \quad (2)$$

　以下此ノ條件ヲ具備スルモノトシ, α ハ正ノ鋭角ナリトス.

　次ニ(2)ヨリ得ル所ノ B, C ガ三角形ノ角トシテ採用シ得ルタメニ, 其ノ小ナル方 C ガ正ナルヲ要ス.

因テ

$$\therefore \alpha < 90° - \frac{A}{2}$$

α, $90°-\frac{A}{2}$ ハ共ニ鋭角ナルニヨ

$$\cos\alpha > \sin\frac{A}{2}$$

即チ $$\frac{l\sin\frac{A}{2}}{a} > \sin\frac{A}{2} \quad\text{------------}\ 3$$

(2), (3) ヲ一括シテ

$$1 \geqq \frac{l\sin\frac{A}{2}}{a} > \sin\frac{A}{2}$$

即チ $$l > a \geqq l\sin\frac{A}{2}$$

此條件ヲ満足スルトキニ限リ問題ハ唯一ツノ解ヲ有ス、

解二、b, c ニツキ次ノ二方程式アリ、

$$b+c=l \qquad (1)$$

$$b^2+c^2-2bc\cos A=a^2 \qquad (2)$$

(2)ヨリ $$l^2-4bc\cos^2\frac{A}{2}=a^2$$

故ニ $$bc=\frac{l^2-a^2}{4\cos^2\frac{A}{2}} \qquad (3)$$

(1), (3) ニヨリ b, c ハ次ノ二次方程式ノ二根ナルヲ知ル、

$$x^2-lx+\frac{l^2-a^2}{4\cos^2\frac{A}{2}}=0 \qquad (4)$$

此ノ方程式ヲ解キテ b, c ヲ求ムレバ容易ニ残レル未知ノ原素ヲ定ムルコトヲ得、

吟味、問題ガ成立ツタメニ (4) ノ二根 b, c ガ正ノ実数ニシテ且ツ $b+c > a > b\sim c$ 即チ $l > a > b\sim c$ ナルヲ要ス

先ヅ根ガ実数ナルタメニ

$$a^2 \geqq l^2\sin^2\frac{A}{2}$$

即チ $$a \geqq l\sin\frac{A}{2}$$

此ノ要件ヲ具備スルトキ (4) ノ二根ガ共ニ正ナルタメニ、其ノ和ガ正数ナルニヨ、其ノ積モ亦正ナルヲ要ス、

因テ $$l > a$$

次ニ $a > b\sim c$ ナルタメニ

$$a^2 > b^2+c^2-2bc$$

即チ $$a^2 > (b+c)^2-4bc$$

即チ $$a^2 > l^2-\frac{l^2-a^2}{\cos^2\frac{A}{2}}$$

是ハ常ニ成立ス

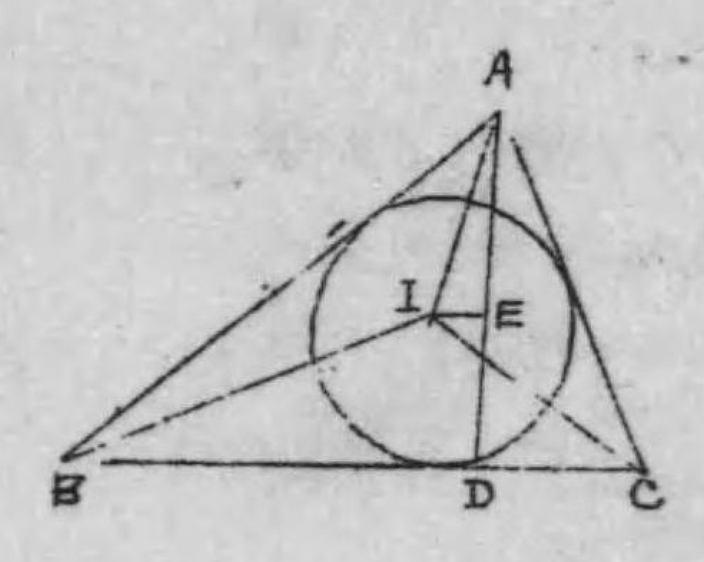
因テ $$l > a \geqq l\sin\frac{A}{2}$$

ナルトキニ限リ唯一ツノ三角形ガ成立ツ、

例2、内切円ノ半径 r 及ビ斜辺ニ對スル高サ h ヲ与ヘテ直角三角形ヲ解クコト、

解 直角三角形 ABC ニ於テ、直角ノ頂点 A ヨリ斜辺 BC ヘ下ス垂線ノ足ヲ D トス、

然ルトキハ三角形 ABC ニ於テ



$$BD=h\cot B,$$

$$CD=h\cot C$$

故ニ

$$a=h(\cot B+\cot C)$$

同様ニ三角形 BIC ニ於テ

$$a=r\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$$

故ニ　$h(\cot B+\cot C)=r\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$

即チ　$$\frac{h\sin(B+C)}{\sin B\sin C}=\frac{r\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$B+C=90^\circ$ナルニ由リ

$$\frac{h}{\sin B\sin C}=\frac{r}{\sqrt{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

半角ヲ用ヒ，且簡単ニスレバ

$$\frac{h}{4\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{r}{\sqrt{2}}$$

餘弦ノ積ヲ其和ニ化スレバ

$$\frac{h}{2\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)}=\frac{r}{\sqrt{2}}$$

因テ　$$\frac{h}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\frac{B-C}{2}\right)}=\frac{r}{\sqrt{2}}$$

故ニ　$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{h-r}{\sqrt{2}r}\qquad(1)$$

ソコデ $\frac{h-r}{\sqrt{2}r}$ ヲ餘弦トスル角ヲαトスレバ

$$\frac{B-C}{2}=\alpha$$

然ルニ　$$\frac{B+C}{2}=45^\circ$$

故ニ　$$B=45^\circ+\alpha,\quad C=45^\circ-\alpha\qquad(2)$$

斯クシテ B, C ヲ求メタル上ハ

$$b=\frac{h}{\sin C},\quad c=\frac{h}{\sin B},\quad a=\frac{h}{\sin B\sin C}$$

ヨリ a, b, c ヲ計算ス、

吟味，先ヅ(1)ニ於テ $\frac{h-r}{\sqrt{2}r}$ ガ鋭角 $\frac{B-C}{2}$ ノ餘弦トナリ得ルタメニ

$$0<\frac{h-r}{\sqrt{2}r}\leqq 1\qquad(3)$$

以下此ノ條件ハ具備スルモノトシ，αハ正ノ鋭角ナリトス、

次ニ(2)ヨリ得ル所ノ角ガ直角三角形ノ鋭角トナリ得ルタメニ$45^\circ+\alpha$ノ方ハ正ナルニ由リ，$45^\circ-\alpha$ノ方ガ正ナレバヨシ、之ガタメα，45°共ニ鋭角ナルニ由リ

$$\cos 45^\circ<\cos\alpha$$

即チ　$$\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{h-r}{\sqrt{2}r}\qquad(4)$$

(3), (4)ヲ一括シテ

$$1\geqq\frac{h-r}{\sqrt{2}r}>\frac{1}{\sqrt{2}}$$

即チ　$$(\sqrt{2}+1)r\geqq h>2r$$

此要件ヲ具備スル時ニ限リ唯一ツノ三角形ガ成立ツ、

注意，IヨリADヘ垂線IEヲ引キ，角IAEガ$\frac{B-C}{2}$ニ等シキコトニ注意スレバ容易ニ(1)ヲ書キ下スコトヲ得、

例3，一辺a，此ノ辺ヘ引ケル中線m及角Aヲ與ヘテ三角形ヲ解クコト、

解　$b^2+c^2=2\left(m^2+\frac{a^2}{4}\right)$ノ中ノ$b, c$ノ代リニ夫々 $\frac{a\sin B}{\sin A}, \frac{a\sin C}{\sin A}$ ヲ置ケバ

$$\frac{a^2}{\sin^2 A}(\sin^2 B+\sin^2 C)=2\left(m^2+\frac{a^2}{4}\right)$$

両辺ヲ二倍シテ正弦ノ平方ヲ二倍角ノ餘弦ニテ表セバ

$$\frac{a^2}{\sin^2 A}(2-\cos 2B-\cos 2C)=4m^2+a^2$$

或ハ

$$\frac{a^2}{\sin^2 A}\left\{2-2\cos(B+C)\cos(B-C)\right\}=4m^2+a^2 \qquad (1)$$

故ニ

$$\cos(B-C)=\frac{(4m^2+a^2)\sin^2 A-2a^2}{2a^2\cos A} \qquad (2)$$

之レヨリB−Cヲ求メテ之ヲαトスレバ

$$B+C=180°-A$$

ナルニヨリ

$$B=\frac{1}{2}(180°-A+\alpha) \qquad (3)$$

$$C=\frac{1}{2}(180°-A-\alpha)$$

斯クシテB, Cヲ求メタル上ハa, B, Cヲ知リテ三角形ヲ解クコトニ帰ス、

吟味、(2)ノ第二辺ニアル数ガ餘弦ノ値トシテ採用シ得ルタメニ

$$-1\leqq\frac{(4m^2+a^2)\sin^2 A-2a^2}{2a^2\cos A}\leqq 1 \qquad (4)$$

以下此ノ條件ハ満足セラレ, 且メハ0°ト180°トノ間ニアルモノトス、

(3)ニ於ケルB, Cガ三角形ノ角トシテ採用シ得ルタメニ180°−A−αガ正ナルヲ要ス,

即チ　$180°-A>\alpha$

即チ　$-\cos A<\cos\alpha$

即チ　$-\cos A<\dfrac{(4m^2+a^2)\sin^2 A-2a^2}{2a^2\cos A}$　(5)

因テ(4), (5)ヨリ問題ガ解ヲ有スルタメノ條件ハ次ノ如シ、

$$-\cos A<\frac{(4m^2+a^2)\sin^2 A-2a^2}{2a^2\cos A}\leqq 1 \qquad (6)$$

正　但シ 90>A ナル件。

(I)　A<90°ナルトキ

(6)ノ各項ニ$2a^2\cos A$ヲ乗ズレバ

$$-2a^2\cos^2 A<(4m^2+a^2)\sin^2 A-2a^2\leqq 2a^2\cos A$$

簡単ニシテ

$$a^2\sin^2 A<4m^2\sin^2 A\leqq a^2(1+\cos A)^2$$

即チ　$a\sin A<2m\sin A\leqq a(1+\cos A)$

即チ　$\dfrac{a}{2}<m\leqq\dfrac{a}{2}\cot\dfrac{A}{2}$

此ノ要件ヲ備フルトキハ問題ハ唯一ツノ解ヲ有ス、

(II)　A>90°ナルトキ

(I)ニ於ケルト殆ト同様ニシテ

$$\frac{a}{2}>m\geqq\frac{a}{2}\cot\frac{A}{2}.$$

ナルトキ問題ハ唯一ツノ解ヲ有ス、

故ニA≠90°ナルトキmガ$\frac{a}{2}$ト$\frac{a}{2}\cot\frac{A}{2}$トノ間ニアルトキニ限リ問題ハ唯一ツノ解ヲ有ス、

(III), 上ニハA≠90°ナリトセシガ特ニA=90°ナルトキハ(1)ハ次ノ如シ

$$2a^2=4m^2+a^2$$

即チ　$a=2m$

因テ$a=2m$ナルトキハ問題ハ不定ニシテ, $a\neq 2m$ナルトキハ問題ハ不可能ナリ、

問題

1. 一ツノ鋭角ト次ノモノトヲ與ヘテ直角三角形ヲ解ケ.

(i) 周囲

(ii) 直角ノ二辺ノ和或ハ差

(iii) 内接円ノ半径

2. 斜辺ト次ノモノトヲ與ヘテ直角三角形ヲ解ケ

(i) 直角ノ二辺ノ和或ハ差

(ii) 内接円ノ半径

(iii) 直角ノ二等分線

3. 次ノモノヲ與ヘテ直角三角形ヲ解ケ.

(i) 周囲, 斜辺ニ對スル高サ

(ii) 直角ノ一辺, 他ノ二辺ノ和或ハ差

(iii) 斜辺ヘ引ケル中線ノタメニ生ズル二ツノ三角形ノ内切円ノ半径,

4. 各角及ビ次ノモノヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ

(i) 内接円ノ半径

(ii) 一ツノ傍切円ノ半径

5. 一辺a, 二辺b,cノ和及ビ次ノモノヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ

(i) 二角B,Cノ差

(ii) 頂点Aヨリ引ケル高サ

6. a,A及ビ次ノモノヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ

(i) 頂点Aヨリ引ケル高サh.

(ii), $\frac{c-b}{h}=m$

(iii), $c-b+h=n$

7. 一角, 周囲ト次ノモノトヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ.

(i), 外接円ノ半径

(ii), 各角ノ正弦ノ和.

8. 一角A, 此角ノ頂点ヨリ引ケル高サh及ビ次ノモノヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ.

(i), 角Aノ二等分線l

(ii), 頂点Aヨリ引ケル中線m

(iii), 頂点Bヨリ引ケル高サh'

(iv), 二辺b,cノ和s

9. 一角A及ビ次ノモノヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ.

(i), 二辺b,cノ平方ノ差d^2, 面積S

(ii) 二辺a,bノ和m, 二辺a,cノ和n

10. 二角B,Cノ差αト次ノモノトヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ.

(i) 辺a, 角Aノ二等分線l

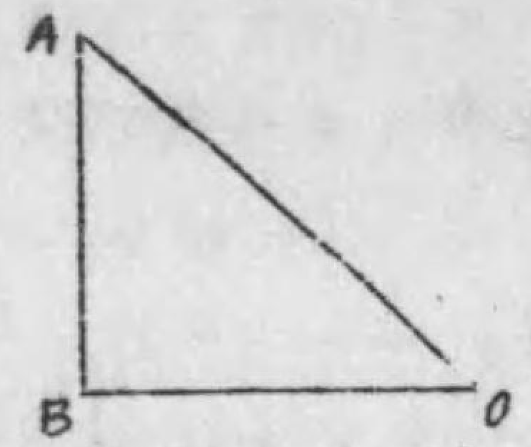
(ii) 辺a, 頂点Aヨリ引ケル高サh

(iii) 外接円ノ半径R, 角Aノ二等分線l

三角形解法ノ應用

115. 水平面ニ直立スル物ノ高サヲ測ルコト

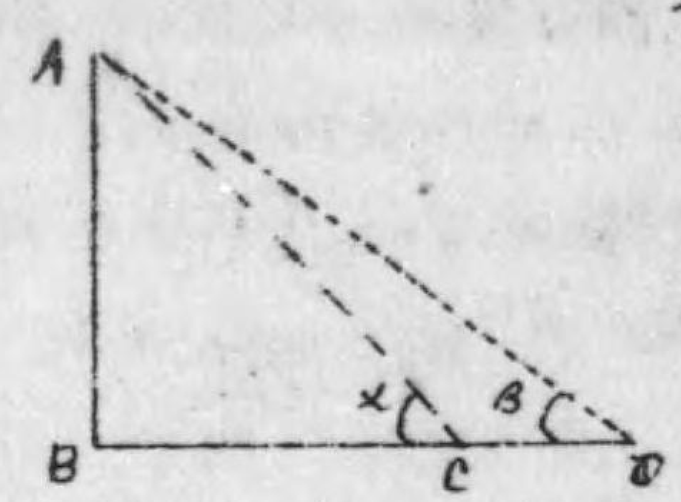
(1) 水平面ニ直立スル物ABノ基底Bヨリ此ノ水平面上ニ一ツノ基線BOヲ取リ、其長サaトOニ於テAノ仰角αトヲ測ル、然ルトキハ



$$AB = a\tan\alpha$$

ナリ。

(2) 基底Bニ達シ得ザルトキハBヲ通ズル一水平線上ニ基線CDヲ取リ、其ノ長サaトC, Dニ於テAノ仰角α, βトヲ測ル、然ルトキハΔACDニ於テ∠CAD=α−βナルニ由リ



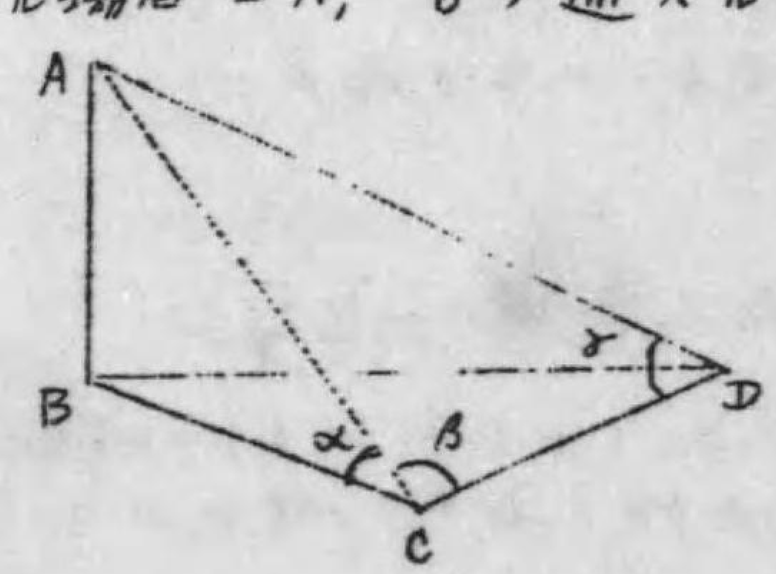
$$AC = \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

因テ直角三角形ABCニ於テ

$$AB = \frac{a\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$$

ナリ。

(3) 基底Bヲ通ズル水平線ノ上ニ基線ヲ作リ得ザル場合ニハ, Bヲ通ズル水平面上ニ於テ任意ニ基線CDヲ作リ, CニオテAノ仰角αト角ACDトヲ測リ, Dニ於テ角ADC=γヲ測ル。



然ルトキハΔACDニ於テ

$$AC = \frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

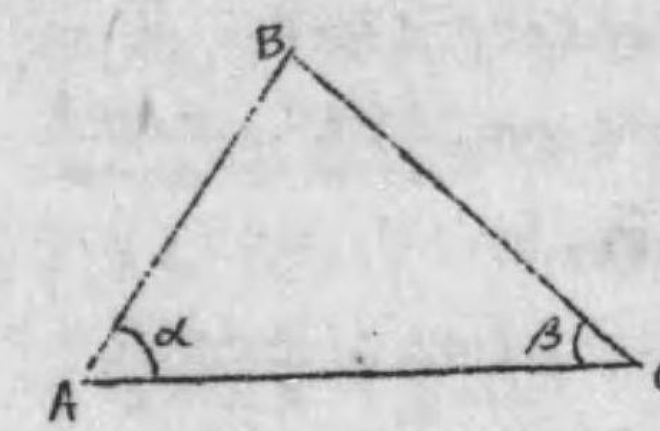
故ニ直角三角形ABCニ於テ

$$AB = \frac{a\sin\gamma\sin\alpha}{\sin(\beta+\gamma)}$$

ナリ。

116. 二点間ノ距離ヲ測ルコト。

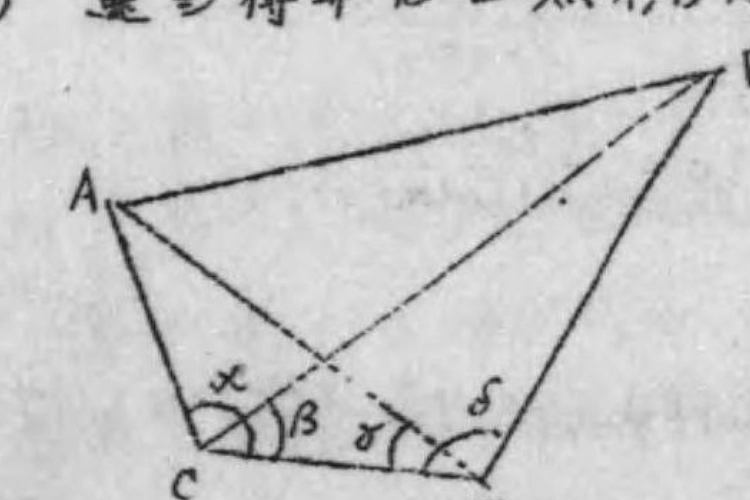
(1) 達シ得ル点Aヨリ達シ得ザル点Bマデノ距離ヲ測ルニハAヨリ一ツノ基線ACヲ引キ, 其長サaト, 角BAC, BCAノ大サα, βトヲ測ル。然ルトキハ



$$AB = \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

ナリ。

(2) 達シ得ザル二点A, B間ノ距離ヲ測ルニハ適宜ノ場所ニ於テ基線CDヲ取リ, Cニ於テ角ACD, BCD, ACBヲ測リ, Dニ於テ角ADC, BDCヲ測ル, 然ルトキハCD=aトスレバ



ΔACD, ΔBCDニ於テ

$$AC = \frac{a\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)} \qquad BC = \frac{a\sin\delta}{\sin(\beta+\delta)}$$

因テΔACBニ於テ二辺AC, BCト夾角ACBトヲ知ルユヱABヲ求ムルコトヲ得。

117. ぽての一ノ問題

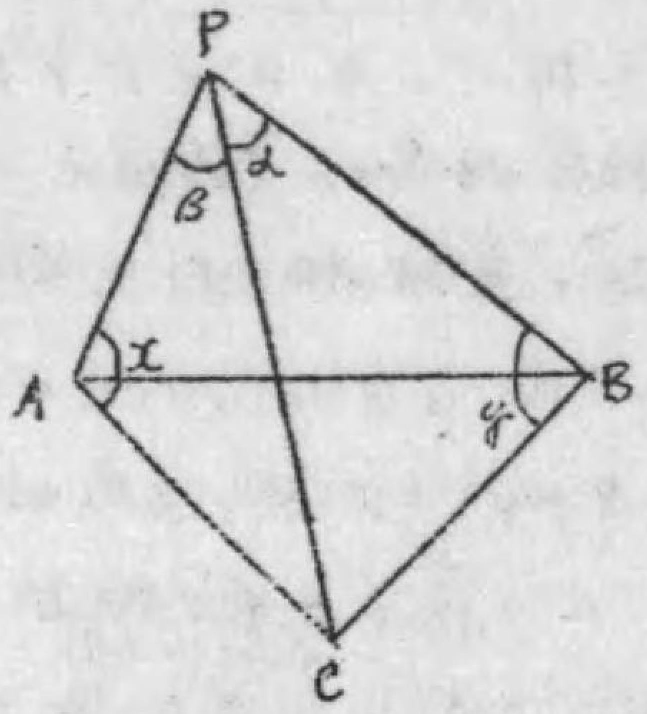
定三角形 ABC ノ平面上ノ一点 P ヨリ二辺 BC, AC ヲ視ル角ヲ知リテ AP, BP ノ長サヲ求ムルコト、

二角 BPC, APC ヲ α, β ニテ表ハシ又二角 PAC, PBC, ヲ x, y ニテ表ハセバ

$$x+y=360^\circ-(\alpha+\beta+C) \qquad (1)$$

又 $\Delta ACP, \Delta BCP$ ニ於テ

$$PC=\frac{b\sin x}{\sin\beta}=\frac{a\sin y}{\sin\alpha}$$



故ニ

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}$$

今 $\dfrac{a\sin\beta}{b\sin x}=\tan\varphi$ トオケバ

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{\tan\varphi-1}{\tan\varphi+1}$$

即チ

$$\frac{\tan\frac{x-y}{2}}{\tan\frac{x+y}{2}}=\tan(\varphi-45^\circ)$$

故ニ

$$\tan\frac{x-y}{2}=\tan(\varphi-45^\circ)\tan\frac{x+y}{2} \qquad (2)$$

(1), (2) ニヨリ, x, y ノ和ト差トヲ求メ, 従ツテ x ト y トヲ求ムルコトヲ得、然ルトキハ

$$AP=\frac{b\sin(x+\beta)}{\sin\beta}, \qquad BP=\frac{a\sin(y+\alpha)}{\sin\alpha}$$

ナリ。

注意、$\alpha+\beta+C=180^\circ$ ナルトキハ四点 A, B, C, P ハ同一ノ円周上ニアリテ AP, BP ハ不定ナリ、

問題

1、地上ノ一点ヨリ塔上ニ立テル長サ l ナル避雷針ヲ望ミ其上端及ビ下端ノ仰角ヲ測リ α, β ヲ得タリ、塔ノ高サ如何、

2、塔ノ南ノ地点ニテ其ノ頂ノ仰角ヲ測リ α ヲ得、ソレヨリ西方ニ l ダケ歩ミテ再ビ塔頂ノ仰角ヲ測リ β ヲ得タリ、塔ノ高サヲ求ム、

3、正北ニ傾斜シテ立テル旗竿ノ下端ヲ通スル水平面上ニテ竿ノ下端ヨリ a 尺ト b 尺トノ距離ニアル二点ニテ竿ノ上端ノ仰角ヲ測リ α, β ヲ得タリ、竿ノ上端ト水平面トノ距離ヲ求ム、

4、麓ニテ山頂ヲ望ム二仰角 45° ニシテ、水平面ト 30° ノ角ヲナス坂路ヲ a 尺登リテ再ビ山頂ノ仰角ヲ測リ 60° ヲ得タリ、然ラバ此山ノ高サ如何、

5、高サ h ナル塔ノ頂上ヨリ地上ノ一ツノ線分ヲ直角ニ視且其ノ両端ノ俯角 α, β ナリトイフ、線分ノ長サヲ求ム、

6、地上ニ於テ相互ノ距離 60尺, 80尺, 100尺ナル三点ヨリ、直立セル塔ノ仰角ヲ測リ、何レモ 45° ヲ得タリ　塔ノ高サヲ求ム、

7. 水平面上ニテ一直線上ニアル三点 A, B, C, アリ. 是等ノ三点ニテ丘頂ノ仰角ヲ測リ夫夫 30°, 45°,

60° ヲ得タリトスレバ丘ノ高サ如何、但シ AB=150R、BC=200R、

8. 一直線上ニ B, D, E, C ノ順ニ四ツノ点アリ、此ノ直線外ノ一点 A ヨリ BD, DE, EC ヲ視ル角ガ夫々 β, γ ナルコト、BD=a, EC=b ナルコトヲ知リテ DE ヲ求ム、

9. 一直線ノ道ヲ行ク人, 初メ A ニ於テ鉄塔 P ヲ正北ニ視, 次キニ a 里進ミテ B ニ達スルトキ之レヲ道ニ垂直ナル方向ニ視, 更ラニ b 里進ミテ C ニ達スルトキ之レヲ北西ニ視タリトセバ, A, P ノ距離及ビ角 PAB ヲ求メヨ、

10. 一角 α ノ両辺ガ其角ノ頂点ヲ通ル鉛直線トナス角ヲ θ, θ' トシテ、α ノ水平面上ニ於ケル正射影ノ大サヲ求メヨ、

第六編

複素数

118. 複素数ノ三角法的形式

複素数 $a+bi$ ヲ次ノ如ク書換フ

$$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right)$$

然ルトキハ $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$ ナルニヨ, $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ヲ餘弦トシ, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ヲ正弦トスル角アリ、其一ツヲ θ トシ, 絶對値 $\sqrt{a^2+b^2}$ ヲ ρ ニテ表ハセバ, 零ニ等シカラザル複素数ハ次ノ如ク書キ表ハスコトヲ得

$$\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$$

例ヘバ $$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

θ ヲ複素数ノ変角トイフ、

一ツノ複素数ノ変角ハ一定ナルモノニアラズ, 其ノ一ツヲ θ トスレバ一般ニ $2n\pi+\theta$ ナリ、

間隔 $(-\pi, +\pi)$ ノ間ニアル変角ヲ其主値トイフ、

主値ハ一ツアリ而シテ唯一ツニ限ル、

零ナラザル実数モ亦此形ニ化スルコトヲ得、即チ a ガ正数ナレバ

$$a=a(\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi)$$
$$-a=a\{\cos(2n+1)\pi+i\sin(2n+1)\pi\}$$

正数ノ変角ノ主値ハ零ニシテ, 負数ノモノハ π ナリ、

119、定理

二ツノ複素数ガ相等シキタメニ必要ニシテ且十分ナル要件ハ其絶對値ガ相等シク，且其偏角ノ差ガ2πノ整数倍ニ等シキコトナリ。

証明　二ツノ複素数 $p(\cos\theta+i\sin\theta)$, $p'(\cos\theta'+i\sin\theta')$ ガ相等シケレバ

$$p\cos\theta=p'\cos\theta';\quad p\sin\theta=p'\sin\theta'$$

今此二ツノ等式ノ両辺ヲ平方シテ辺々相加フレバ

$$p^2=p'^2 \quad \text{故ニ} \quad p=p'$$

從テ　$\cos\theta=\cos\theta';\quad \sin\theta=\sin\theta'$

故ニ　$\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'=1$

即チ　$\cos(\theta-\theta')=1$

故ニ　$\theta-\theta'=2n\pi$.

逆ニ　$p=p';\ \theta-\theta'=2n\pi$ ナレバ

$$p(\cos\theta+i\sin\theta)=p'(\cos\theta'+i\sin\theta')$$

ナルコト明カナリ。

120、定理

複素数ノ積ノ絶對値ハ各因数ノ絶對値ニ等シク，其偏角ノ一ツハ各因数ノ偏角ノ和ニ等シ。

証明　$p_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot p_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$$=p_1p_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)$$
$$+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\}$$
$$=p_1p_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

因テ本定理ハ二ツノ因数ノ場合ニ成立ツ。

三ツ以上ノ因数ノ場合ニ擴張スルコト容易ナリ。

121、定理

二ツノ複素数ノ商ノ絶對値ハ被除数ノ絶對値ヲ除数ノ絶對値ニテ割リタル商ニ等シク，其偏角ノ一ツハ被除数ノ偏角ヨリ除数ノ偏角ヲ減ジタル差ニ等シ。

証明　$p_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ ヲ $p_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ ニテ割リタル商ヲ $p(\cos\theta+i\sin\theta)$ トスレバ

$$p_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=p(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot p_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

故ニ

$$p_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=pp_2\{\cos(\theta+\theta_2)+i\sin(\theta+\theta_2)\}$$

因テ　$p_1=pp_2,\quad \theta_1=\theta+\theta_2+2n\pi$

故ニ　$p=\dfrac{p_1}{p_2},\quad \theta=\theta_1-\theta_2-2n\pi$

122、定理

n ガ正ノ整数ナルトキ

$$\{p(\cos\theta+i\sin\theta)\}^n=p^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

ナリ。

積ニ関スル定理ニヨリ明カナリ。

123、ドモアブルノ定理

n ガ正ノ整数ナルトキ

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$ ナリ、

前條ニヨリ明カナリ。

124. 和角ノ三角函數

$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_3+i\sin\theta_3)\cdots(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$
$$=\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_n)$$

此等式ノ第一辺ノ各因數ハ夫夫 $\cos\theta_1(1+i\tan\theta_1)$,

$\cos\theta_2(1+i\tan\theta_2)$, $\cos\theta_3(1+i\tan\theta_3)$, ------

$\cos\theta_n(1+i\tan\theta_n)$ ニ等シキヲ以テ其連乘積ハ

$$\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cdots\cos\theta_n(1+i\tan\theta_1)(1+i\tan\theta_2)(1+i\tan\theta_3)\cdots(1+i\tan\theta_n)$$

ニ等シ、今

$$\Sigma\tan\theta_1=t_1,\quad \Sigma\tan\theta_1\tan\theta_2=t_2 \text{ 等}$$

ト置ケバ

$$(1+i\tan\theta_1)(1+i\tan\theta_2)(1+i\tan\theta_3)\cdots(1+i\tan\theta_n)$$
$$=1-t_2+t_4-\cdots+i(t_1-t_2+t_3-\cdots)$$

故ニ

$$\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_n)$$
$$=\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cdots\cos\theta_n\{1-t_2+t_4+\cdots+i(t_1-t_3+t_5-\cdots)\}$$

因テ $\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_n)=\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_n(1-t_2+t_4-\cdots)$

$\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_n)=\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_n(t_1-t_3+t_5-\cdots)$

第二辺ノ括弧内ノ最後ノ項ハ n ガ偶數ナルトキ

$\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)$ ノモノハ $(-1)^{\frac{n}{2}}t_n$ ニシテ,

$\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)$ ノモノハ $(-1)^{\frac{n}{2}}t_{n-1}$ ナリ、又 n ガ奇

數ナルトキ, $\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)$ ノモノハ

$(-1)^{\frac{n-1}{2}}t_{n-1}$ ニシテ, $\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)$ ノモノハ $(-1)^{\frac{n-1}{2}}t_n$

ナリ、

從テ $$\tan(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)=\frac{t_1-t_3+t_5-\cdots}{1-t_2+t_4-\cdots}$$

125. 倍角ノ三角函數

n ガ正ノ整數ナルトキ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ ヲ二項定理ニ

ヨリ展開スレバ

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$
$$=\cos^n\theta+\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\cdot i\sin\theta+\binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\cdot i^2\sin^2\theta$$
$$+\cdots+\binom{n}{r}\cos^{n-r}\theta\cdot i^r\sin^r\theta+\cdots+i^n\sin^n\theta$$
$$=\cos^n\theta-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+\cdots$$
$$+i\left\{\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+\cdots\right\}$$

然ルニ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

因テ $$\cos n\theta=\cos^n\theta-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+\cdots$$
$$\sin n\theta=\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+\cdots$$

茲ニ $\binom{n}{r}$ ハ $\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1.2.3.\cdots r}$ ヲ表ハス.

n ガ偶數ナルトキ $\cos n\theta$ ノ最後ノ項ハ $(-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\theta$

ニシテ, $\sin n\theta$ ノ最後ノ項ハ $n(-1)^{\frac{n-2}{2}}\cos\theta\sin^{n-1}\theta$ ナリ、

n ガ奇數ナルトキ $\cos n\theta$ ノ最後ノ項ハ $n(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\theta\sin^{n-1}\theta$

ニシテ, $\sin n\theta$ ノ最後ノ項ハ $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n\theta$ ナリ、

$\sin n\theta$, $\cos n\theta$ ヲ表ハス式ニヨリ $\tan n\theta$ ヲ $\tan\theta$ ニテ

表ハス式ヲ得

$$\tan n\theta=\frac{\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+\cdots}{\cos^n\theta-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+\cdots}$$

但分母,分子ヲ $\cos^n\theta$ ニテ割レバ

$$\tan n\theta=\frac{\binom{n}{1}\tan\theta-\binom{n}{3}\tan^3\theta+\binom{n}{5}\tan^5\theta-\cdots\cdots}{1-\binom{n}{2}\tan^2\theta+\binom{n}{4}\tan^4\theta-\cdots\cdots\cdots}$$

nが偶数ナルトキ分子ノ最後ノ項ハ $n(-1)^{\frac{n-2}{2}}\tan^{n-1}\theta$ ニシテ,分母ノ最後ノ項ハ $(-1)^{\frac{n}{2}}\tan^n\theta$ ナリ、又nが奇数ナルトキ分子ノ最後ノ項ハ $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\tan^n\theta$ ニシテ,分母ノ最後ノ項ハ

$$n(-1)^{\frac{n-1}{2}}\tan^{n-1}\theta \text{ ナリ.}$$

126. 正弦及ビ餘弦ノ冪

$x=\cos\theta+i\sin\theta$ トスレバ $\frac{1}{x}=\cos\theta-i\sin\theta$ ナル

ユエ

$$x+\frac{1}{x}=2\cos\theta,\qquad x-\frac{1}{x}=2i\sin\theta$$

因テ

$$2^n\cos^n\theta=\left(x+\frac{1}{x}\right)^n=x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}\cdot\frac{1}{x}+\binom{n}{2}x^{n-2}\cdot\frac{1}{x^2}+\cdots$$
$$+\binom{n}{2}x^2\cdot\frac{1}{x^{n-2}}+\binom{n}{1}x\cdot\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}$$
$$=x^n+\frac{1}{x^n}+\binom{n}{1}\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\binom{n}{2}\left(x^{n-4}+\frac{1}{x^{n-4}}\right)$$
$$+\cdots\cdots$$

然ルニrが整数ナレバ

$$x^r+\frac{1}{x^r}=(\cos r\theta+i\sin r\theta)+(\cos r\theta-i\sin r\theta)$$
$$=2\cos r\theta$$

因テ

$$2^{n-1}\cos^n\theta=\cos n\theta+\binom{n}{1}\cos(n-2)\theta+\binom{n}{2}\cos(n-4)\theta$$
$$+\cdots+\binom{n}{r}\cos(n-2r)\theta+\cdots\cdots$$

nが偶数ナルトキ最後ノ項ハ $\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}$ ニシテ,nが奇数ナレバ $\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\cos\theta$ ナリ、

又 $2^n i^n\sin^n\theta=\left(x-\frac{1}{x}\right)^n$

$$=x^n-\binom{n}{1}x^{n-1}\frac{1}{x}+\binom{n}{2}x^{n-2}\frac{1}{x^2}+\cdots\cdots$$
$$+(-1)^{n-2}\binom{n}{2}x^2\cdot\frac{1}{x^{n-2}}+(-1)^{n-1}\binom{n}{1}x\cdot\frac{1}{x^{n-1}}$$
$$+(-1)^n\frac{1}{x^n}$$

nが偶数ナレバ

$$2^n i^n\sin^n\theta=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)-\binom{n}{1}\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\binom{n}{2}\left(x^{n-4}+\frac{1}{x^{n-4}}\right)$$
$$+\cdots\cdots\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}}$$

故ニ

$$2^{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\theta=\cos n\theta-\binom{n}{1}\cos(n-2)\theta+\binom{n}{2}\cos(n-4)\theta$$
$$+(-1)^{n-r}\binom{n}{r}\cos(n-2r)\theta+\cdots\cdots+\frac{1}{2}(-1)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}}$$

nが奇数ナレバ

$$2^n i^n\sin^n\theta=\left(x^n-\frac{1}{x^n}\right)-\binom{n}{1}\left(x^{n-2}-\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\binom{n}{2}\left(x^{n-4}-\frac{1}{x^{n-4}}\right)$$
$$+\cdots\cdots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

然ルニ $x^r-\frac{1}{x^r}=2i\sin r\theta$

故ニ $2^{n-1}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n\theta=\sin n\theta-\binom{n}{1}\sin(n-2)\theta+\binom{n}{2}\sin(n-4)\theta$

$$+\cdots\cdots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\sin\theta$$

冪根

127. 定理

零ニ等シカラザル数ノ第n冪根ハn個アリ而シテn個ニ限ル、

証明 $p(\cos\theta+i\sin\theta)$ ノ第n乗根ヲ $r(\cos w+i\sin w)$ トスレバ

$$r^n(\cos nw+i\sin nw)=p(\cos\theta+i\sin\theta)$$

故ニ $r^n=p,\quad nw=\theta+2m\pi$

因テ $r=\sqrt[n]{p}$, $w=\frac{\theta+2m\pi}{n}$

ココニ $\sqrt[n]{p}$ ハ p ノ第 n 乗根ノ正ナルモノヲ表ハシ, m ハ任意ノ整数ヲ表ハス、

今 m ヲ n ニテ割リタル商ヲ q, 剰余ヲ k トスレバ（$k=0,1,2,3,\ldots\ldots,n-1$）

$$w=\frac{\theta+2(qn+k)\pi}{n}=2q\pi+\frac{\theta+2k\pi}{n}$$

故ニ次ノ n 個ノ数ノ第 n 乗冪ハ $p(\cos\theta+i\sin\theta)$ ニ等シ、

$$\sqrt[n]{p}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\quad k=0,1,2,3,\ldots\ldots,n-1$$

此等ノ数ノ変向ノ差ハ 2π ノ整数倍ニ等シカラザルガ故ニ此等ノ数ハ相等シキコトナシ、故ニ第 n 乗根ハ常ニ n 個アリテ n 個ヨリ多カラズ、

例ヘバ $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ ナルニヨリ i ノ立方根ハ次ノ如シ、

$$\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$\cos\frac{3\pi}{6}+i\sin\frac{3\pi}{6}=-i$$

$$\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

θ ガ複素数 $p(\cos\theta+i\sin\theta)$ ノ変向ノ主値ナルトキ $\sqrt[n]{p}(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n})$ ヲ此複素数ノ冪根ノ主値トイフ。

正数 a ノ平方根ノ主値ハ $\sqrt{a}(\cos\frac{0}{2}+i\sin\frac{0}{2})$ 即チ $\sqrt{a}$ ニシテ, 負数 $-a$ ノ平方根ノ主値ハ

$\sqrt{a}(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$ 即チ $i\sqrt{a}$ ナリ、又同ジ負数ノ立方根ハ $\sqrt[3]{a}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ 即チ $\sqrt[3]{a}(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$ ナリ、

128. 定理

m,n ガ正ノ整数ナルトキ根号ガ冪根ノ主値ヲ表ハセバ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ ナリ、若根号ガ冪根ノ一ツヲ表ハセバ此等式ハ完全ナリ、

(1) 根号ガ冪根ノ主値ヲ表ハストキ

θ ヲ $a=p(\cos\theta+i\sin\theta)$ ノ変向ノ主値ナレバ

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{p}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

故ニ

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{p}\left(\cos\frac{\theta}{mn}+i\sin\frac{\theta}{mn}\right)$$

而シテ此第二辺ハ $\sqrt[mn]{a}$ ニ等シ、

因テ

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

(2) 根号ガ冪根ノ主値ノミヲ表ハサザレバ

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{p}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\quad k=0,1,2,\ldots n-1$$

因テ

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{p}\left\{\cos\frac{\theta+2(k+nh)\pi}{mn}+i\sin\frac{\theta+2(k+nh)\pi}{mn}\right\}\quad (1)$$

$$h=0,1,2,\ldots\ldots,m-1$$

又

$$\sqrt[mn]{a}=\sqrt[mn]{p}\left(\cos\frac{\theta+2l\pi}{mn}+i\sin\frac{\theta+2l\pi}{mn}\right)\quad (2)$$

$$l=0,1,2,\ldots\ldots,mn-1$$

先ヅ k,h ヲ与フルトキハ $k+nh$ ヲ mn ニテ割リテ得ル剰余ヲ l トスレバ (1) ノスベテノ値ハ (2) ニ含マル、

又先ヅ l ヲ与フルトキハ l ヲ n ニテ割リテ得ル

商(其ハnヨリ小ナリ)ヲh，剰餘ヲkトスレバ(2)ハ(1)ニ含マル、

因テ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ ハ完全ナル等式ナリ.

129. 定理

nガ正ノ整數ナルトキ $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ハ完全ナル等式ナリ、然レドモ根号ガ冪根ノ主値ヲ表ハストキハ此等式ハ必ズシモ眞ナラズ、

(1) 根号ガ冪根ノ一ツヲ表ハストキ

$$a=p_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_2).$$
$$b=p_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

トスレバ

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{p_1}\left(\cos\frac{\theta_1+2k_1\pi}{n}+i\sin\frac{\theta_1+2k_1\pi}{n}\right)$$
$$\times\sqrt[n]{p_2}\left(\cos\frac{\theta_2+2k_2\pi}{n}+i\sin\frac{\theta_2+2k_2\pi}{n}\right)$$
$$k_1,\ k_2=0,1,2,3,----,n-1$$
$$=\sqrt[n]{p_1p_2}\left\{\cos\frac{\theta_1+\theta_2+2(k_1+k_2)\pi}{n}+i\sin\frac{\theta_1+\theta_2+2(k_1+k_2)}{n}\right\}\quad(1)$$

又 $ab=p_1p_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

因テ $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{p_1p_2}\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2+2l\pi}{n}+i\sin\frac{\theta_1+\theta_2+2l\pi}{n}\right)$

$$l=0,\ 1,2,3,-----,n-1\quad(2)$$

先ヅk_1, k_2ガ與ヘラルルトキハk_1+k_2ヲnニテ割リタル剰餘ヲlトナセバ(1)ハ(2)ニ含マルルコトトナル、

又先ヅlガ與ヘラルルトキハ$k_1=0$, $k_2=l$トナセバ

(2)ハ(1)ニ含マル、

因テ定理ノ最初ノ部分ハ證明セラレタリ.

根号ガ冪根ノ主値ヲ表ハストキ$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ハ成立セザルコトアリ、例ヘバ$\sqrt{-2}\sqrt{-3}=i\sqrt{2}.i\sqrt{3}=-\sqrt{6}$ニシテ$\sqrt{(-2)(-3)}=\sqrt{6}$ニ等シカラザルガ如シ、

130. 定理

m, nガ正ノ整數ナルトキ$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ハ必ズシモ完全ナラズ、根号ガ冪根ノ主値ヲ表ハストキモ此等式ハ必ズシモ成立セズ、

證明 $a=p(\cos\theta+i\sin\theta)$トス.

(1) 根号ガ冪根ノ一ツヲ表ハストキハ

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{p}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

故ニ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{p^m}\left(\cos\frac{m\theta+2mk\pi}{n}+i\sin\frac{m\theta+2mk\pi}{n}\right)\quad(1)$

又 $a^m=p^m(\cos m\theta+i\sin m\theta)$

故ニ $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{p^m}\left(\cos\frac{m\theta+2h\pi}{n}+i\sin\frac{m\theta+2h\pi}{n}\right)\quad(2)$

$$h=0,\ 1,2,3,---,n-1$$

先ヅkガ與ヘラルルトキハmkヲnニテ割リタル剰餘ヲhトスレバ(1)ハ(2)ニ含マル、

又先ヅhガ與ヘラルルトキ(2)ガ(1)ニ含マルルタメニ$h-mk$ガnノ倍數ナラザルベカラズ、因テm, nガ互ニ素ナラズシテ一ヨリ大ナルgナル公約數ヲ有スル場合ニハgハhノ約數ナラザルベカラズ、然ルニgハ常ニhノ約數ナリト言ヒ得ザルヲ以テ

(2) ハ(1)ニ含マレガルコトアリ、

(2) 根号ガ乗根ノ主値ヲ表ハストキ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ ノ成立セザルコトアルハ次ノ例ニテ見ルガ如シ

$$(\sqrt{-1})^6 = -1,\quad \sqrt{(-1)^6} = 1$$

131、1ノ冪根

前條ニヨリ1ノ第n冪根ハ次ノ如シ、

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad k=0,1,2,\text{----},n-1$$

今 $\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ ヲ w ニテ表ハセバ上ニ示セルn個ノ数ヲ次ノ如ク書クコトヲ得

$$w^0,\ w^1,\ w^2,\ w^3,\text{-----},w^{n-1}$$

此数列中ノ一数ヲ w^m トスレバ w^{n-m} ハ w^m ノ逆数ニシテ、又上ノ数列中ノ一数ナリ、

従テ1ノ第n冪根ト共軛ナル数ハマタ1ノ第n冪根ナリ、

132、定理

一ツノ数ノ第n冪根ハ其一ツニ1ノ第n冪根ヲ乗ジタル積ニ等シ、

何トナレバ一ツノ数 $p(\cos\theta+i\sin\theta)$ ノ第n乗根ハ次ノ如ク書クコトヲ得レバナリ、

$$\sqrt[n]{p}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$k=0,1,2,3,\text{----},n-1$$

$$=\sqrt[n]{p}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi+2h\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi+2h\pi}{n}\right)$$

$$h=0,1,2,\text{----},n-1$$

$$=\sqrt[n]{p}\left(\cos\frac{\theta+2h\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2h\pi}{n}\right)\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

正多角形

133、正多角形

半径1ナル円ニ内接スル正n辺形ノ一辺ヲs_nトスレバ

$$s_n = 2\sin\frac{\pi}{n} = \sqrt{2-2\cos\frac{2\pi}{n}}$$

而シテ $2\cos\frac{2\pi}{n} = \left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)+\left(\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$

故ニnヲ與ヘテs_nヲ計算スルニハ 2ヨリ $w+\frac{1}{w}$ ヲ減ジタルモノヲ開平スレバ可ナリ、

例ヘバ $n=3$ ナルトキ

$$w^3-1=0$$

故ニ

$$(w-1)(w^2+w+1)=0$$

$w-1\neq 0$ ナルユエ

$$w^2+w+1=0$$

因テ

$$w+\frac{1}{w}=-1$$

故ニ正三角形ノ一辺ハ $\sqrt{2-(-1)}=\sqrt{3}$ ナリ。

注意1、 $2\cos\frac{2\pi}{n} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{n}\right) =$

$$2\sin\frac{(n-4)\pi}{2n} = 2\sin\frac{\pi}{\frac{2n}{n-4}}$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{n}\right)=2\sin\frac{(n+4)\pi}{2n}=2\sin\frac{\pi}{\frac{2n}{n+4}}$$

因テ $\frac{2n}{n\pm 4}$ ガ3ヨリ小ナラザル整数ニ等シケレバ $2\cos\frac{2\pi}{n}$ ハ辺数 $\frac{2n}{n+4}$ ナル正多角形ノ一辺ヲ表ハス、又 $\frac{2n}{4-n}$ ガ3ヨリ小ナラザル整数ニ等シケレバ即チ $n=3$ ナレバ $-2\cos\frac{2\pi}{n}$ ハ辺数 $\frac{2n}{n-4}=6$ ナ

ル正多角形ノ一辺ヲ表ハス、故ニ上例ヨリ正六辺形ノ一辺ハ1ナルヲ知ル

例2、$n=5$ ナルトキ

例1ニ於ケルト同様ニシテ次ノ等式アリ

$$w^4+w^3+w^2+w+1=0 \qquad (1)$$

此両辺ヲ w^2 ニテ割レバ

$$w^2+w+1+\frac{1}{w}+\frac{1}{w^2}=0$$

$w+\frac{1}{w}=y$ トオケバ

$$y^2-2+y+1=0$$

即チ

$$y^2+y-1=0$$

因テ

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

然ルニ $2\cos\frac{2\pi}{5}$ ハ正ナルニヨリ、ココニ得タル正負二数ノ中正数ノミヲ採レバ

$$2\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

因テ

$$S_5=\sqrt{2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

注意2、$n=5$ ナルトキ $\frac{2n}{n-4}=10$ ナルニヨリ上ニ得タル $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ハ正十辺形ノ一辺ナリ、

注意3、方程式 (1) ノ w ノ奇数冪ノ項ニ1ニ等シキ w^5 ヲ乗ズレバ

$$w^4+w^8+w^2+w^6+1=0$$

或ハ $(w^2)^4+(w^2)^3+(w^2)^2+(w^2)+1=0$

是ハ (1) ニ於テ w ノ代リニ w^2 ヲオキテ得ル等式ナリ、

故ニ $2w^2=2\cos\frac{4\pi}{5}$ ハ方程式 (2) ノ根ナリ。因テ第二ノ根 $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ハ $2\cos\frac{4\pi}{5}$ ニ等シキ所ニシテ

$$2\cos\frac{4\pi}{5}=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{5}\right)=-2\sin\frac{3}{5}\pi=-2\sin\frac{3}{10}\cdot2\pi$$

因テ星形正十辺形ノ一辺ハ $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ナリ。

又　$\sqrt{2-2\cos\frac{4\pi}{5}}=2\sin\frac{2\pi}{5}$

故ニ星形正五辺形ノ一辺ハ $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ ナリ、

〈終〉

238 第六編

大正十三年三月七日印刷
大正十三年三月十日發行

定價 金貳圓

編者 金澤卯一

發行者 森平東一
東京府下豊多摩郡西大久保百五番地

印刷者 有村博行
東京麻布區谷町七十六番地

發賣所 數理學館
東京市四谷區箪笥町六十番地
振替口座東京五三七二四番

終