中學校
師範學校適用

新制

代數學教本

上

中華書局印行

新制代數教本

編輯大意

一、本書遵照部頒課程標準編纂。爲中學校及師範學校教科書。

一、初學代數者。每於字母代用符號之繁多。心迷目眩。莫明其然。本書緒論中。言之甚詳。且注重由算術導入。務使學者習之了然。

一、負數意義之解釋。及其大小比較等。均爲初等代數學重要事項。本書反復說明。以期明澈。

一、方程式爲初等代數學之應用。不可不加意研求。本書第一編中。卽列簡易方程式。以立其基。由是循序漸進。幷多設應用問題。以引起學者之興趣。

一、分數方程式及根式方程式。初學代數者。莫不視爲畏途。本書務取極簡易之法解之。以免學者多所困難。

一、指數之理論。本書仿照英國 Todhunter 博士之體例編輯。詮釋精確。初學不難領悟。

10836

一、本書於對數一項。僅述大意。其詳細理論及應用。悉載新制三角教本中。以免彼此重複。

一、本書下卷末。附有自1至2500之五位對數表。學者卽可由此檢用。不必另備一表。

一、本書比例編中。詳言可通約量不可通約量之性質。幷設對變法等。期與算術幾何及物理學聯絡。

一、本書之練習問題。皆適合學生程度。其稍煩雜者。悉附於下卷之末。以備複習之用。

一、附錄中各項。亦甚重要。本文授畢。如有餘暇。可以補講。

一、編者學陋能淺。倉卒成書。海內教育諸君。對於本書如有所見。尙望不吝賜敎。

上卷目錄

第一編　緒論

第二編　整式

第三編 一次方程式

第四編 因數及倍數

第五編　分數式

第六編 分數方程式

第七編 冪及冪根

第八編 二次方程式(I)

第九編　二次方程式(II)

新制代數教本

上卷

第一編 緒論

第一章 字母之代用法

1. 代數記號

代數學上表數之法。除用數字1, 2, 3, 4, 5, ……外。兼用羅馬字母a, b, c,……等。在同一問題中。一字母僅表一數。若問題中有各種數。則以不同之各字母表之。

代數學上所用之運算符號+, −, ×, ÷,及相關記號=。均與算術上之意義相同。

數字字母與運算符號。關係記號。總稱之曰代數記號。

例1. 設有人有銀元若干元。今於其銀元之4倍加20元。則得140元。問此人原有若干元。

此問題若更簡單言之。則爲 某人所有銀元之4倍加20元。等於140元。若用符號+及記

號＝表之。則爲

$$(\text{某人銀元之}4\text{倍})+(20\text{元})=(140\text{元})$$

今命此人所有之銀元爲 x 元。則

$$(x\text{元}\times 4)+(20\text{元})=(140\text{元})\cdots\cdots(1)$$

此 x 爲不名數。所謂 x 元者與 1 元之 x 倍同意。卽 1 元 $\times x$。恰與 20 元同於 1 元 $\times 20$ 無異。因之就(1)式論。若將名數之單位 1 元略之不記。可得次式。

$$4x+20=140\cdots\cdots(2)$$

但 $4x$ 同於 $4\times x$。蓋將 $\times$ 號省略之也。

今於(2)式＝號之兩邊。各減 20。得

$$4x=120$$

再以 4 除兩邊。得

$$x=30$$

故此人所有之銀圓爲 30 元也。

驗　$(30\text{元}\times 4)+(20\text{元})=(140\text{元})$

所求之數與既知之數。用運算符號連結之。成兩組數。若互相等。以相關記號＝表之。所得之式。名曰方程式。

所求之數。名曰未知數。

例如(2)式 $4x+20=140$ 爲方程式。x 爲未知數。

2. 問題之代數解法　前節之方程式(2)。係將例1中文句所述之事實。用方程式表之。已覺簡單明瞭。且此之例1中文句。更有廣括之意義。何則。(2)式之中。不論單位如何。凡與此例有同一意義同一數值者。均可適用此式。

例如　某商人有布若干疋。若於其疋數之4倍加20疋。即得140疋。問此商人原有布若干疋。云云等題。均可以方程式(2)表之。且於方程式(2)之20與140。若換以他數。亦不失為同類之題。例如20以a代之。140以b代之。則得

$$4x + a = b \quad \cdots\cdots \ (3)$$

今若限定b為大於a之數。則可由方程式兩邊減去a。

故　$$4x = b - a$$

再以4除兩邊。得

$$x = \frac{b-a}{4} = 30$$

玆所述之(3)式及其答數係例1各同類問題之代數解法。因知

凡問題之代數解法。較之算術解法。簡

單明瞭。且更廣括。

〔注意〕 (2)式之x。卽爲代表所求之數之記號。但不必拘定於x。卽他之任何字母。亦無不可。常例方程式之未知數。用羅馬字母末尾之x, y, z, 表之。既知數用羅馬字母冒頭之a, b, c ……表之。

3. 今更舉一例以明之。

例 2. 有兩數其和爲96。差爲24。求此兩數。

命小數爲x。則大數必爲x＋24。故由題意。

$$x+(x+24)=96.$$

卽

$$2x+24=96.$$

兩邊各減去24。

$$2x=72$$

兩邊以2除之。

$$x=36.$$

此爲小數。故大數爲x＋24卽60。

若以a代96。b代24。且限定a爲大於b之數。則得

$$x+x+b=a$$

仿前法更得結果如下。

$$\text{小數爲}\frac{a-b}{2}\qquad\text{大數爲}\frac{a+b}{2}\cdots\cdots(A)$$

和差兩數。無論何如。以之代入a,b,之中。大小二數即可得出。故(A)式可通用於一般。

表數之數字及字母。用運算符號連結之。所得之式曰代數式。

其可通用於一般者曰公式。

〔注意〕 用公式(A)以求大小二數。則計算之順序。一目瞭然。若如例2中所列數之答數。絕不留計算之痕跡。因何求得。不能便知。此代數解法優於數之解法之一端也。

4. 欲求方程式之未知數。可於＝兩邊。使用下列各種運算。

(1) 兩邊加以相等之數

(2) 兩邊減去相等之數

(3) 兩邊乘以相等之數

(4) 兩邊除以相等之數

求方程式之未知數。名曰**解方程式。**

例題

試解以下各方程式。

1. $x+4=9.$ **2.** $x-5=7.$

3. $7-x=5$. 4. $8=2+y$.

5. $3y=18$. 6. $36=9x$.

7. $4x+7=9+3x$ 8. $5y-3=4y+5$

9. $16x-11=7x+70$. 10. $3x+10=5x-70$.

5. 改題文爲方程式之法 欲解方程式之應用問題。先須從改題文爲方程式入手。實行練習可也。

例 1. 設將50分爲二分。其一分爲x。餘一分必爲$50-x$。

例 2. 設48之一因數爲y。則其餘一因數爲$\frac{48}{y}$.

例 3. 設x, y爲二基數。(基數卽1,2,3,4,5,6,7,8,9,)則$10x+y$乃表十位數字爲x。一位數字爲y之二位整數。而$10y+x$爲其顚倒數。

例題

11. 分a爲二分。其一分爲x。問他一分如何。

12. a爲160之一因數。其他因數若何。

13. 除數爲x。商爲y。剩除爲z。則被除數若何。

14. 70比x所大者幾何。 70-x

15. 某人之年齡現爲31歲。問此人24年後之年齡若何。　$31+24=x$

16. 某人現今之年齡爲56歲。問此人42年前之年齡若何。

17. 三連續奇數之中。其在中央者爲$2n+1$。問前後二者若何。

18. 四連續偶數之最末尾者爲$2n$。問以前三者各若何。

19. 每秒之速力爲x公尺。問每時之速力幾何。

6. 方程式應用問題之解法

欲解應用問題。則先以x表未知數。將題中既知之事實改爲方程式。然後解此程式可也。

例 1. 有某數。若於其3倍加25。即得其4倍。問此數若何。

命此數爲x，則其3倍爲$3x$，其4倍爲$4x$，故依題意。

$$3x+25=4x$$

兩邊減去$3x$。得

$$25=x$$

即　$x=25$

卽此數爲25。

例 2. 有甲乙二人。甲比乙長8歲。又甲年之6倍。等於乙年之7倍。問甲乙之年齡各幾何。

命乙之年齡爲x歲。則甲之年齡爲x+8歲。依題意得.

$$7x=6(x+8).$$

此6(x+8)係表x+8全體之6倍故等於6x+48。

故
$$7x=6x+48.$$

兩邊減去6x。得

$$7x-6x=48.$$

卽
$$x=48.$$

故乙之年齡爲48歲。因之甲之年齡爲56歲。

驗
$$56\times6=48\times7$$

〔注意〕　驗算卽還原之法。答數有無差誤。由此可以知之。是不可廢之事也。

例 3. 有某工程。用工人24名作之。100日可成。今改用工人40名。問幾日可成。

命所求之日數爲x。則專就一人論。此工程須24×100日或x×40日方可成功。

故　　$x\times 40=24\times 100$。

解之得　　$x=60$

即所求之日數為60日。

例題

20. 子之年齡。現為x歲。過3年後。則為其父年二分之一。問現今父年幾何。

21. 有甲乙二數。其差為84。且甲數為乙之8倍。問二數各幾何。

22. 有某宅。八日之間。用米1石2斗。問1石6斗5升之米。可食幾日。

23. 有甲乙丙三人。其所有銀元之和為103元。甲為乙之4倍。乙比丙多5元。問三人各有銀元若干。

24. 有鈔洋64元。內係五元與一元兩種。共計20張。問五元紙幣及一元紙幣各若干張。

25. 設現今父年為子年之7倍。若過3年後。則父年為子年之五倍。問父子之年齡各幾何。

26. 銀圓144元。能購湖縐8匹。今銀圓270元。能購湖縐若干匹。

27. 工人a名。能于b日內。造成之房。今以工人c

名造之。問幾日可成。

設本題中令 $a=18, b=70, c=30$, 試求其答數。

28. 20秒鐘行六分之一公里之火車。問每小時行幾公里。

又問 b 分之內。行 a 公里之火車。每小時行幾公里。

29. 有二位整數。其一位數字爲十位數字之四倍。若於此數加54。則前後之順序顚倒。求此數。

30. 有甲乙丙丁四數。其甲,乙,丙,與,乙,丙,丁,及丙,丁,甲,又丁,甲,乙,之和。各爲20, 22, 24, 27,求甲,乙,丙,丁,四數。※

※設四數之和爲x則 $x-20$, $x-22$, $x-24$, $x-27$, 各爲丁,甲,乙,丙四數。

第二章 定義

7. 代數學 代數學亦如算術。論數之學科也。代數學中。除用數字以表特別之數外。兼用字母以表各種之數。

故代數學者。廣義之算術也。

8. 符號 如1節所述。代數學中。除用運算符號 $+, -, \times, \div$,及關係記號 $=$ 之外。並用 $>, <, \geqq, \leqq$,各符號。

$a>b$ 乃表 a 大於 b.

$a<b$ 乃表 a 小於 b.

$a \geqq b$ 乃表 $a>b$ 或 $a=b$.

$a \leqq b$ 乃表 $a<b$ 或 $a=b$.

代數學中。字母相乘。或一數字與字母相乘。其乘號往往略之。例如 ab 係表 $a \times b$, $3a$ 係表 $3 \times a$, $5xy$ 係表 $5 \times x \times y$ 等。

9. 一數爲他二數或若干數相乘而得者。前數稱爲後二數或若干數之積。後二數或若干數之一。稱爲前數之因數。

例如 $3x$ 爲 3, x 之積。亦意爲 x 之 3 倍, ay 爲 a, y 之積。亦意爲 y 之 a 倍。而 3 及 x 均爲 $3x$ 之因數。a 及 y 均

爲 ay 之因數。積之既知因數。名曰係數。

例如就 $3x$ 言之。3 爲 x 之係數。就 ay 言之。a 爲 y 之係數。

〔注意〕1. 通例係數 1 常略書之。如 a 卽表 $1a$ 之意。

〔注意〕2. 由廣義言之。積之因數。分爲二部分。其一部分亦可謂之他部分之係數。

例如 vt 之中。v 爲 t 之係數。t 亦爲 v 之係數。

10. 羃 代數學中所謂羃。與算術有同一之意義。

例如 3^2 爲 3 之二乘羃。卽爲平方。4^3 爲 4 之三乘羃卽爲立方。$a^2, a^3, a^4, \cdots\cdots$ 各爲 a 之平方。a 之立方。a 之四乘羃。汎言之 n 爲整數時。a^n 爲 a 之 n 乘羃。此 n 名曰指數。

〔注意〕 由 $a^2, a^3,$ 等對照言之。a 可謂 a 之一乘羃。卽 a^1 與 a 相同。然一乘羃之指數。通例略之。

11. 代數式及項 代表數之數字。及字母。與代表運算之符號。三者集合而成之式。名曰代數式。而由(+)或(−)所分離代數式之部分。名曰代數

式之項。

例如$2a-3bx+5cy^2$，乃由$2a$，$3bx$，$5cy^2$三項所成之代數式。

代數式因其項之多寡。分爲一項式。二項式。三項式。等。其二項以上之式。通稱之曰多項式。或曰複式。一項式對於多項式。稱之曰單項式。或曰單式。

12. 代數式之數值 將代數式中所含各字母。各以其所代表之數代入。並將符號所表示之運算。實行算出。所得之數。名曰代數式之數值。或單稱曰值。

例 1. $a=3$，$b=4$時。$5ab$及$\frac{1}{3}a^2b$之數值若何。

$$5ab=5\times3\times4=60\text{(答數)}.$$

$$\frac{1}{3}a^2b=\frac{1}{3}\times3^2\times4=12\text{(答數)}。$$

例 2. $a=1$，$b=2$，$c=3$時。求$3abc-b^2c-6a^3$之數值。

$$3abc-b^2c-6a^3=3\times1\times2\times3-2^2\times3-6\times1^3$$

$$=18-12-6$$

$$=0\text{(答數)}$$

例題

1. $a=2, b=1, c=7, x=4, y=5$ 時。試求以下各式之數值。

(1) $8x$, (2) $4ax$, (3) $6by$, (4) $7b^4$,

2. $a=3, b=2, c=5, x=8$ 時求以下各式之數值。

(1) $\frac{1}{2}x^2$, (2) $\frac{3}{5}c^3$, (3) 9^b, (4) $\frac{7}{12}acx$,

3. $a=3, b=2, c=1, d=0$ 時。求以下各式之數值。

(1) $a^3+b^3+c^3+d^3$ (2) $\frac{1}{3}a^3b^2-a^3+b^3-\frac{1}{6}a^2bc^2$

(3) $3a^2+3b^2+3c^2+3d^2-3ab-3bc-3ca-3ad-3bd-3cd$

13. 整式及分數式 代數式中。不含字母之分母以除之者爲整式。含字母爲分母以除之者爲分數式。

例如 a^2-ab+b^2, $\frac{x}{2}+\frac{2}{3}y-xy$ 均爲整式。

$\frac{x+a}{x-a}$, $\frac{a^2+c^2+d^2}{2ab}$ 均爲分數式。

14. 括弧 括弧者。結合之符號。用以包括全數。名曰括弧。通例括弧用( ),[ ],{ },三種。

例如 $x-(y+z)$ 乃表由 x 減去 y, z 之和。

一括弧之前後。及兩括弧之中間。乘號往往略之。例如 $b(a+c)$, $(a+c)b$, 均表 b 乘 a c 之和。而 $(a+b)(a-b)$

乃表 $a+b$ 乘 $a-b$ 之意。

分數之橫線。與括弧及除號相同。例如 $\frac{a+b}{3}$ 與 $(a+b)\div 3$ 同。

除括弧外。有時倘用括線。例如 $a-\overline{b+c}$ 是與 $a-(b+c)$ 同意。

例題

4. $a=2, b=1, c=3, d=5, e=7$ 時。求以下各式之數值。

(1) $a(b+c)+d$, (2) $a(c-b)+e$, (3) $c^2(b^2+d^2-a^2)$,

(4) $\frac{c^2+d^2+e^2-3b^2}{a^2+b^2}$ (5) $\frac{8a+5d+b^2}{d^2-2c^2}$ (6) $\frac{c^2+d^2-2cd}{a^2+b^2-2ab}$.

5. $a=3, b=4, x=0$, 時。$4a-2b+5x$ 之數值若何。

6. $x=5$ 或 8 時。$x^2-13x+40$ 常等于零。試證之。

7. $a=\frac{1}{2}$ $b=\frac{1}{3}$ $c=\frac{1}{4}$ $d=\frac{1}{5}$ 時。問下式之數值。

$(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)$.

字母除羅馬字母 a, b, c …… 外。常用希臘字母 α, β, γ …及帶 ($'$) 之字母 a', a'' ……, b', b'' ……, 與附添數之字母 a_1, a_2 ……, b_1, b_2 …… 等。

第三章　代數上之數及各原則

15. 代數上之數

在算術中。知

$$8-5=3.$$

$$7-5=2.$$

$$6-5=1.$$

$$5-5=0.$$

即 $a \geqq b$ 時。$a-b$ 雖可由算術解釋之。然若 $a<b$ 時。則 $a-b$ 不能由算術解釋之。常例 $a<b$ 時。$a-b$ 亦置諸數之列中。名曰**負數**。例如

$4-5=$ (比 0 小 1 單位之數) 即爲負一。

$3-5=$ (比 0 小 2 單位之數) 即爲負二。

$2-5=$ (比 0 小 3 單位之數) 即爲負三。

對於負數。稱普通之數曰**正數**。合正數負數。總稱之曰**代數上之數**。

正數之前。置 $(+)$ 號表之。負數之前。置 $(-)$ 號表之。名曰**性質之符號**。例如 $+5$, $+8$, 乃表正 5, 正 8, -2, -2.7 乃表負 2, 負 2.7,

今將正數負數。依大小之順序排列如下。

$$\cdots\cdots -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ +4,\ \cdots\cdots$$

16. 絕對值 將代數上之數。去其性質之符號論之。名曰絕對值。

兩異號之數。若絕對值相等。則其和為0。例如

$$(+3)+(-3)=0.$$

汎言之 $$(+a)+(-a)=0.$$

17. 代數上之數之應用 例如有人營商。其資本因獲利而增加。因虧折而減少。則獲利之數為正數。而虧折之數為負數。

又如寒暑表。溫度之增加。依水銀昇高之度數量之。水銀昇高之度數為正數。而下降之度數為負數。

又如以家計言。收入為正數。而支出為負數。存款為正數。而負債為負數。

故無論任何名數。凡所增之數為正數。而所損之數為負數。

凡正數比零大。亦比負數大。負數比零小。更比正數小。而二負數之大小。常與絕對值之大小相反。

例如-20小於3。亦小於-2。何則。存款3元愈於負債20元。而負債2元。亦愈於負債20元故也。

例題

8. 自某處起向南行 8 公丈。與向北行 8 公丈。代數上宜如何區別之。

9. -2000 之收入。其意云何。

10. 歐洲戰爭。起於民國紀元 3 年。若云民國紀元 -3 年。是何意義。

11. 兄比弟多 $+a$ 歲。由代數上言之。可云弟比兄多幾歲。

12. 自英國格林威基天文臺起。東經 116 度。以 $+116$ 表之。則西經 116 度。宜如何表之。

又攝氏寒暑表冰點以上 3 度。以 $+3$ 表之。則冰點以下 3 度。宜如何表之。

18. 代數上之數之加法減法

一代數上之數加一正數。則可於 15 節所載數之排列中。自第一數之位置起。向右數第二數之箇數。卽得。例如

$$(+6)+(+4)=+10, \qquad (-10)+(+4)=-6,$$

又減法爲加法之反法。故由代數上之數。減去一正數。則可於數之排列中。自被減數之位置起。與前反對。向左數減數之箇數。卽得。例如

$$(+10)-(+6)=+4, \quad (-6)-(+4)=-10,$$

若所加者爲負數。則由下之規則定之。

欲加一負數。可取其絕對值減之。

減法爲加法之反法。故得規則如下。

欲減一負數。可取其絕對值加之。例如

$$(+10)+(-4)=+6, \quad (-6)+(-4)=-10,$$

及 $$(+6)-(-4)=+10, \quad (-10)-(-4)=-6,$$

故汎言之
$$\left.\begin{array}{lr} & +a+(+b)=+(a+b) \\ a>b\text{ 時} & -a+(+b)=-(a-b) \\ a<b\text{ 時} & =+(b-a) \\ a>b\text{ 時} & (+a)+(-b)=+(a-b) \\ & =-(b-a) \\ & -a+(-b)=-(a+b) \end{array}\right\}\cdots\cdots(1)$$

$$\left.\begin{array}{lr} \text{而 } a>b\text{ 時} & +a+(-b)=+(a-b) \\ a<b\text{ 時} & =-(b-a) \\ & -a-(+b)=-(a+b) \\ & +a-(-b)=+(a+b) \\ a>b\text{ 時} & -a-(-b)=-(a-b) \\ a<b\text{ 時} & =+(b-)a \end{array}\right\}\cdots\cdots(2)$$

〔注意〕 代數上之數之和與差。名曰**代數和**

代數差。與通常之算術和算術差有別。

19. 交換規則及結合規則

由加法定義。可明下列二式。但 a,b,c ……均表代數上之數。

$$a+b+c=b+a+c=c+b+a=\cdots\cdots$$

故和不論其相加數之順序如何。始終不易。(交換規則)

又　$a+b+c+d=a+(b+c+d)=(a+b)+(c+d)=\cdots\cdots$

故和若以符號表出時。則將其各項任意劃分之。始終不易。(結合規則)

〔注意〕　減一正數與加此負數等。減一負數與加此正數等。故交換規則及結合規則。亦能適用於減法。

例　題

13. 試計算下列各式

(1) $(+15)+(+3)$, 18　　(2) $(-9)+(-13)$, −22

(3) $(-14)+(+7)$, −7　　(4) $(+14)+(-7)$, 7

(5) $(-2\frac{2}{3})+(-3\frac{1}{3})$, −6　　(6) $(-3\frac{3}{8})+(+1\frac{1}{4})$, $-2\frac{1}{8}$

14 (1) $m=+6$,　　$n=+4$ 時。

又 (2) $m=-12$,　　$n=-16$ 時。

$m+n$之值若何。

15. (1) $a=7$, $b=6$時。 (2) $a=14\frac{1}{9}$, $b=19\frac{2}{3}$時。

$(+a)+(-b)$之值若何。

16. 有人有現款2857元。又有負債1423元。問此人之所有金幾何。

17. 資政院開院。在民國紀元前2年。參政院開院。在民國紀元3年。問中間共隔幾年。

18. 有人自A處起。向東行140步後返身向西行65步。復向東行15步。問此人現今在A處之東幾步。

19. 某日清晨之溫度為華氏60度。正午昇高5度。至黃昏時分。又下降18度。問此時在華氏表中係幾度。

20. 代數上之數之乘法除法.

被乘數與乘數均正數時。由算術可以得之。例如

$$(+3)\times(+4)=(+3)+(+3)+(+3)+(+3).$$
$$=+(3\times4).$$

而被乘數負數時。亦同。例如

$$(-3)\times(+4)=(-3)+(-3)+(-3)+(-3).$$
$$=-(3\times4).$$

然乘數爲負數時。則另設規則如下。

乘以負數時。可乘以絕對值。且變其符號。例如

$$(+5)\times(-4)=-(+5\times4)=-(5\times4).$$

$$(-5)\times(-4)=-(-5\times4)=+(5\times4).$$

汎言之

$$\left.\begin{array}{l}(+a)\times(+b)=+ab\\(-a)\times(+b)=-ab\\(+a)\times(-b)=-ab\\(-a)\times(-b)=+ab\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(3)$$

故知同符號兩因數之積爲正。異符號兩因數之積爲負。並可略言之如下。

同號相乘爲正。異號相乘爲負。

除法係乘法之反法。故由(3)卽得以下各式。

$$\left.\begin{array}{l}(+ab)\div(+a)=+b\\(-ab)\div(+a)=-b\\(+ab)\div(-a)=-b\\(-ab)\div(-a)=+b\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(4)$$

故除法之符號規則。亦同於乘法。可略言之如次。

同號相除爲正。異號相除爲負。

21. 交換規則及結合規則

由乘法意義。可明下列二式。但 a,b,c …… 均代數上之數。

$$a\times b\times c=a\times c\times b=b\times c\times a=\cdots\cdots$$

故積不論其因數之順序如何。始終不易。(交換規則)

又 $a\times b\times c=a\times(b\times c)=b\times(a\times c)=\cdots\cdots$

故積若以符號表出時。則將其各因數任意劃分之。始終不易。(結合規則)

〔注意〕 除法係乘法之反法。故交換規則及結合規則。亦可適用于除法。

22. 配分規則

由乘法意義。可明下式。但 a, b, c, d,m 均代數上之數。

$$(a+b+c+d)m=am+bm+cm+dm.$$

故欲以某數乘由若干項所成之式。則以此數乘其各項可也。(配分規則)

反之欲以某數除由若干項所成之式。則以此數除其各項可也。

$$(a+b+c+d)\div m=a\div m+b\div m+c\div m+d\div m.$$

〔注意〕 性質符號。本同於加減符號。而代數式

首項之前。應有正號者。在代數中往往略之。例如 $a+b$ 即表 $+a+b$ 等。

23. 關於零之加減乘除。可略言之如下。

(加法) 某數與零之和。仍等於某數。即

$$0+a=a+0=a.$$

(減法) 減法爲加法之反法。故由某數減去零。仍等於某數。即

$$a-0=a.$$

又減某數與變其符號而加之相同。故由零減去某數。等於此數變符號。即

$$0-a=-a.$$

(乘法) 某數與 0 之積。常等於 0。即

$$0\times a=a\times 0=0.$$

故若干因數中。若有一因數爲 0。則其連乘積爲 0。反之若干因數之連乘積爲 0。則必有一因數爲 0。

(除法) a 非零時。以 a 除 0。其意在求乘何數於 a。其積爲 0。故所求之商爲 0。明也。故 a 非零時。

$$\frac{0}{a}=0.$$

若 a 爲 0 時。不能得商。此事當於後章分數方程

式中論之。

例題

20. 試計算下列各式。

(1) $(+4)\times(+2)$. (2) $(-3)\times(+8)$.

(3) $(+22)\times(-3)$. (4) $(-16)\times(-3)$.

(5) $(+26)\div(+2)$. (6) $(-108)\div(-6)$.

(7) $(-55)\div(+11)$. (8) $(+64)\div(-8)$.

21. $p=+6$, $q=+9$ 時。試求 $p\times q$ 之值。

22. $a=15$, $b=3$ 時。試求 $(-a)\times(+b)$ 之值。

23. $a=16$, $b=8$ 時試求 $(+a)\div(-b)$ 之值。

24. $m=+72$, $n=-6$ 時。試求 $m\div n$ 之值。

摘要
(代數上之數之四則)

加法

a, b 爲正數時

$$\left.\begin{array}{ll} & +a+(+b)=+(a+b) \\ a>b\text{ 時} & -a+(+b)=-(a-b) \\ a<b\text{ 時} & \qquad\qquad\;\;=+(b-a) \\ a>b\text{ 時} & +a+(-b)=+(a-b) \\ a<b\text{ 時} & \qquad\qquad\;\;=-(b-a) \\ & -a+(-b)=-(a+b) \end{array}\right\}$$

減法

$$
\left.\begin{array}{ll}
a>b\text{時} & +a-(+b)=+(a-b) \\
a<b\text{時} & \qquad\qquad\;\;=-(b-a) \\
 & -a-(+b)=-(a+b) \\
 & +a-(-b)=+(a+b) \\
a>b\text{時} & -a-(-b)=-(a-b) \\
a<b\text{時} & \qquad\qquad\;\;=+(b-a)
\end{array}\right\}
$$

乘法

$$
\left.\begin{array}{r}
(+a)\times(+b)=+ab \\
(-a)\times(+b)=-ab \\
(+a)\times(-b)=-ab \\
(-a)\times(-b)=+ab
\end{array}\right\}
$$

除法

$$
\left.\begin{array}{r}
(+ab)\div(+a)=+b \\
(-ab)\div(+a)=-b \\
(-ab)\div(-a)=+b \\
(+ab)\div(-a)=-b
\end{array}\right\}
$$

零

$$
\left.\begin{array}{l}
a+0=0+a=a \\
a-0=a-0=a \\
0\times a=a\times 0=0 \\
\frac{0}{a}=0(a\text{非零})
\end{array}\right\}
$$

第二編　整式

第一章　整式之加法減法

24. 同類項　例如 $2a^2bx$, $-5a^2bx$ 兩項。其字母因數相同。惟數字係數各異者。謂之爲**同類項**。

同類項之和與差。可求之如下。

例 1. $5a+2a=7a$ (答數).

例 2. $2ab-5ab-ab=-4ab$ (答數).

例 3. $5x^2-(-2x^2)=5x^2+2x^2=7x^2$ (答數)

例 4. $3x+5x+(-8x)-(-4x)=3x+5x-8x+4x$
$=4x$ (答數)

故以同類項相加減時。先將其數字係數相加減。再附以字母因數之部分可也。

例題

1. 試求下列各題中二式之和。

(1) $2a$, $3a$　　(2) $4b$, $-9b$

(3) $-7y$, $3y$　　(4) $\frac{15}{2}a^2$, $\frac{7}{3}a^2$

(5) $-4x^3$, $\frac{1}{3}x^3$　　(6) $\frac{7}{4}ab$, $-\frac{9}{5}ab$

2. 試由下列各題之前式。減去其後式。

(1) $4x, 7x$ (2) $5a, 2a$

(3) $\frac{7}{4}ab, -\frac{9}{5}ab$ (4) $11z, -3z$

(5) $-5x^2, +6x^2$ (6) $-\frac{11}{3}m^3, \frac{3}{2}m^3$

3. 求 $-ab, -3ab, -7ab,$ 之和。

4. 求 $2a^2b^2, -a^2b^2, -5a^2b^2, 7a^2b^2$ 之和。

5. 以 $a=3, b=-4$ 代入前二題中。驗其結果。

6. 試將下列各式簡單之。

(1) $3x+(-5x)$, (2) $-3x^my^n+(+2x^my^n)-(-x^my^n)$

(3) $2a-[4a-(-6a)]$ (4) $m+[2m-(3m-4m)]$

25. 整式之和與差

欲將二以上之整式相加。則先以(+)號連結之。取其同類項。用前節之法。合之可也。

欲由一式減去他式。可變其符號而加之。

例 求 $3a-5b, -2a+3b$ 之和與差。

所求之和 $=(3a-5b)+(-2a+3b)$

$=3a-5b-2a+3b$

$=3a-2a-5b+3b$

$=a-2b$ (答數)．

所求之差 $=(3a-5b)-(-2a+3b)$

$=3a-5b+2a-3b$

$=3a+2a-5b-3b$

$=5a-8b$ (答數)．

今為方便起見。可列式演算如次。

加
$$\begin{array}{r} 3a-5b \\ -2a+3b \\ \hline a-2b \end{array}$$

減
$$\begin{array}{r} 3a-5b \\ ※-2a+3b \\ \hline 5a-8b \end{array}$$

26. 整式各項之次序

書整式時。(例如求和時書之) 宜將各項準一定次序書之。

例如 $3a+2c-b$ 常依 a,b,c 之順書之為 $3a-b+2c$

又如 $2x-5+x^2-4x^3+x^4$ 書作 $x^4-4x^3+x^2+2x-5$．名曰依 x 降冪之順列之。

又若書作 $-5+2x+x^2-4x^3+x^4$,則名曰依 x 昇冪之順列之。

例　題

※心中默將 $-2a+3b$ 變符號視為 $2a-3b$ 可也。

7. 求下列各題中兩式之和。

(1) $a+4,\ a-4$.　(2) $7a-4b,\ -3a+2b$.

(3) $-x+y,\ x-y$.　(4) $6x-9y,\ -3x-y$.

(5) $2x^2-xy,\ -x^2+y^2$.　(6) $x^2+x,\ -3x-y$.

(7) $\frac{1}{2}m^2n-\frac{2}{3}mn^2,\ \frac{3}{2}m^2n+\frac{5}{3}mn^2$.

(8) $x^2+x+1,\ x^2-x+1$.

(9) $x^3-\frac{5}{3}x^2+\frac{1}{2}x,\quad -\frac{1}{2}x^3+2x^2-\frac{1}{4}x$

(10) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,\ a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

8. 試由下列各題之前式減去其後式。

(1) $a+1,\ a-1$.　(2) $0,\ a-2b$.

(3) $2x^2-2xy,\ -x^2+xy$.

(4) $-\frac{2}{3}ax-\frac{1}{2}by,\ \frac{1}{2}ax-\frac{3}{4}by$.

(5) $a-5,\ a^3-2a^2-a-2$.　(6) $0,\ -x^4+7x^3+3x-9$.

(7) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3,\ x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$.

(8) $2+4x-6x^2-2x^3+3x^4,\ 2x^4-3x^3-7x^2+3x+1$.

(9) $a^5+\frac{1}{2}a^4-a^3-\frac{2}{5},\ -\frac{1}{2}a^5-\frac{2}{3}a^3+\frac{3}{5}a^2-1$.

(10) $-(x+y)^2-7(x+y)+3,\ -3(x+y)^2+4(x+y)-7$.

9. 由 $2x^2-2x+1,\ 3x^2+x+4$ 之和。減去 x^2+x+1.

10. 試由 $2a^2+3ab+2b^2$ 減去 a^2+ab+b^2, ab 之和。

11. m^2+n^2 越過 m^2-n^2 幾何。

12. 以何式加 $x^2+3xy-y^2$, 其和可得 x^2+y^2。

13. 二數 a b 之和之三倍。與 a 減 b 之五倍相加。應得何式。

14. 有兩位整數。一位之數為 a, 十位之數為 b, 問本數及其顛倒數之和若何。

15. 由 $x^2-2xy+y^2$ 減去何式能得 $x^2+2xy+y^2$ 兼以 $x=3$, $y=-2$ 代驗其結果。

27. 括弧用法

由加法減法之意義。可得下列各式。

$a+(b+c)=a+b+c$ ※$\therefore a+b+c=a+(b+c)$.

$a+(b-c)=a+b-c$ $\therefore a+b-c=a+(b-c)$.

$a-(b+c)=a-b-c$ $\therefore a-b-c=a-(b+c)$.

$a-(b-c)=a-b+c$ $\therefore a-b+c=a-(b-c)$.

故括弧之前。附有(+)號者。可卽去其括弧。若所附為(—)號。則須先變各項之符號。而後去其括弧。

反之無論何式。若置諸括弧之中。附以

※∴故為之記號。

(+)號於其前。則可仍其各項。若置諸括弧之中。附以(−)號於其前。則須全變其符號。

若一式之中。有二重以上之括弧時。可應前法。漸次由內。以及于外。

例 1. $4a-\{3a+[2a-(a-1)]\}$

$=4a-\{3a+[2a-a+1]\}.$

$=4a-\{3a+2a-a+1\}.$

$=4a-3a-2a+a-1.$

$=-1$ (答數).

例 2. 試將 $a+2b-3c+4d-e$ 中第二項以下。置諸括弧之中。附以(+)號于其前。又將第三項以下。置諸括弧之中。附以(−)號于其前。

$$\left.\begin{aligned} & a+2b-3c+4d-e=a+(2b-3c+4d-e) \\ \text{或} \quad & \qquad\qquad\qquad\quad =a+2b-(3c-4d+e) \end{aligned}\right\}\text{(答數)}$$

例題

試將下列各式。除去括弧。

16. $a-(b-c)+a+(b-c)+b-(c+a).$

17. $a-\{b-c-(d-e)\}.$

18. $2a-\{b-(a-2b)\}.$

19. $3a-\{b+(2a-b)-(a-b)\}$.

20. $7a-[3a-\{4a-(5a-2a)\}]$.

21. $-[a-\{b-(c-a)\}]-[b-\{c-(a-b)\}]$.

22. $-[-(-a)]-\{-[-(-x)]\}$.

23. $2a-[2a-(2a-\overline{2a-a})]$.

24. $a+2b-[6a-\{3b-(6a-6b)\}]$.

25. $6a-[7a-\{8a-(9a-\overline{10a-b})\}]$.

26. $x-\{x+y-[x+y+z-(x+y+z+u)]\}$.

27. $2a-(-b-[-c-\{-a-(-b-\overline{c-x})-x\}-b]-a)$.

28. $\{\frac{2}{3}a^2x+\frac{3}{4}ax^2-[\frac{1}{4}a^2x-\frac{2}{3}a^2x-(\frac{1}{2}ax^2-a)]\}$

29. 以 $a=5$, $x=4$, 驗證前題。

30. 試將 $5x-4y+3z-2n+u$ 中第二項以下。置諸括弧之中。附以$(-)$號於其前。又將第三項以下。置諸括弧之中。附以$(+)$號於其前。

31. 試將 $7+ax^2-3bx+c-4cx-bx^2+3cx^2-7ax$ 依 x 降冪之順列之。並將 x 同乘冪之項。置諸括弧之中。

32. 前 26 題中。以 $x=3$, $y=2$, $z=-1$, $u=1$ 代入。驗其結果。

第二章　整式之乘法

28. 指數規則

$a^2=aa$, $a^3=aaa$, $a^4=aaaa$,………

故　$a^2\times a^3=aa\cdot aaa$※$=aaaaa=a^5=a^{2+3}$.

又　$a^3\times a^4=aaa\cdot aaaa=aaaaaaa=a^7=a^{3+4}$.

若　m, n 各爲正整數。則

$a^m\times a^n=a^{m+n}$.

故欲求某數兩乘冪之積。則將其指數相加可也。

29. 乘法運算。常以下列各式爲基礎。

$ab=ba$……………………………〔交換規則〕

$abc=a(bc)=(ab)c=(ac)b$ …………〔結合規則〕

$(a+b+c)m=am+bm+cm$…………〔配分規則〕

$a^m\times a^n=a^{m+n}$ ……………………〔指數規則〕

同符號之積爲正。異符號之積爲負。………

〔符號規則〕

30. 一項式與一項式之積

例 1.　$3a\times 5bc=15abc$ (答數).

※乘法記號又有時用 • 代之。

例 2. $-2a^2\times 6ab^2\times(-11b^3)=132a^3b^5$（答數）.

例 3. $-5xz\times 7yz\times 3xy^2=-105x^2y^3z^2$（答數）.

故不同之字母。常依羅馬字之順列之。其同字母者。可準指數規則。求其總指數。其數字係數則先求其相乘積。置之全式之首。而依符號規則。定其符號可也。

31. 多項式與一項式之積

例 1. $(x-y)\times 3xy=3x^2y-3xy^2$（答數）。

例 2. $(3a^2+4ab-7b^2)\times(-2ab)=-6a^3b-8a^2b^2+14ab^3$（答數）。

卽以一項式乘多項式之各項可也。

例題

試求下列各題中兩式之積［33至47］.

33. $3a$, 4, **34.** -5, $2a$, **35.** $2a$, $3a$,

36. $2\frac{1}{2}x$, $-5x^3$, **37.** $-3\frac{1}{2}abc$, $-2\frac{2}{3}xy$,

38. $\frac{2}{5}a^2m$, $-5am^2$, **39.** $-5a^2bc^3$, $-7a^3b^4c^5$,

40. $-12m^2np$, $7m^8n^9p^6$,

41. $a+1$, 3, **42.** $2a-5$, 4, **43.** $2a-3b$, $-2a$,

44. $7x-8y$, $3x$, **45.** $5a^2-3ab$, $2a^2b$,

46. ax^2-2by^2,　$3abxy$,

47. $2a^3b^5+3a^5b^3$, $-4a^4b^3$,

試求下列各題之相乘積[48至50]

48. $3ab\times5bc\times6ac$,　　49. $-7x^2y\times(-2y^2z)\times3xz^2$

50. $(3ax^3)^4\times(5ab^2xy)^2\times(-2a^2x^2y^3)^3$.

試將以下各式簡單之[51至52].

51. $5x-3(x-2y)-7[5x-3(x-2y)]$.

52. $a+a(1+a^2)-a[1-a(1-a)]$.

53. 以 $a=-2$, $x=3$, $y=1$, 代入51, 52,題中以求其數值。

32. 多項式與多項式之積

例如 $a+b+c$ 以 $m+n+p$ 乘之。則以 M 代 $m+n+p$. 由配分規則

$$(a+b+c)M=aM+bM+cM.$$

M 代以原式 $m+n+p$. 得

$$(a+b+c)M=a(m+n+p)+b(m+n+p)+c(m+n+p)$$
$$=am+an+ap+bm+bn+bp+cm+cn+cp.$$

因之欲求兩多項式之積。則以乘數之各項。乘被乘數之各項。將其各部分積相加可也。

實用上以下列排列之法爲便。

例 1. $x+8$ 以 $x+3$ 乘之。

$$\begin{array}{l} x+8 \\ x+3 \\ \hline x^2+8x \\ \quad\ +3x+24 \\ \hline x^2+11x+24 \end{array}$$
(答數)。

例 2. $3a-7b$ 以 $5a+4b$ 乘之。

$$\begin{array}{l} 3a-7b \\ 5a+4b \\ \hline 15a^2-35ab \\ \qquad\ +12ab-28b^2 \\ \hline 15a^2-23ab-28b^2 \end{array}$$
(答數)。

例 3. $1+4x-10x^2$ 以 $3x^2+1-6x$ 乘之。

茲將二式各依 x 昇冪之順列之如下。

$$\begin{array}{l} 1+4x-10x^2 \\ 1-6x+3x^2 \\ \hline 1+4x-10x^2 \\ \quad -6x-24x^2+60x^3 \\ \qquad\quad +3x^2+12x^3-30x^4 \\ \hline 1-2x-31x^2+72x^3-30x^4 \end{array}$$
(答數)。

例 4. $2x^3+7+4x$ 以 x^2+4-3x 乘之。

玆將兩式依 x 降冪之順列之如下。

$$
\begin{array}{rrrrrr}
2x^3 & & +4x & +7 & & \\
x^2 & -3x & +4 & & & \\
\hline
2x^5 & & +4x^3 & +7x^2 & & \\
 & -6x^4 & & -12x^2 & -21x & \\
 & & +8x^3 & & +16x & +28 \\
\hline
2x^5 & -6x^4 & +12x^3 & -5x^2 & -5x & +28
\end{array}
\text{(答數)}
$$

〔注意〕 欲求兩多項式之積。須先將兩式同列爲 x 昇冪之順。或同列爲 x 降冪之順。

例 題

試求下列各題中二式之積。

54. $x+3,\ x+7$. **55.** $x+5,\ x-2$.

56. $2a-7,\ 3a+4$. **57.** $\frac{1}{2}a-5,\ \frac{1}{2}a-8$.

58. $ax-by,\ ax+2by$. **59.** $-3ab+ac,\ 7ab-5ac$.

60. $2a^m x^{n-1}-3a^{m-1}x^m,\ 5a^2x^n-2a^mx^2$.

61. $\frac{2}{3}a^{m+1}b^{n-1}-\frac{1}{5}a^{n-2}b^{m+2},\ \frac{1}{2}a^nb^{m+1}+a^{m+1}b^n$.

62. $x^2-3x+1,\ x-4$. **63.** $4a^2-6a+9,\ 2a+3$.

64. $1-2a+4a^2-8a^3,\ 1+2a$.

65. $k^2-k+1,\ k^2+k+1$.

33. **次數** 一項由n字母而成者。謂之爲n次之項。

一多項式其最高次之項爲n次者。謂之爲n次之式。

一多項式其各項俱同次數者。謂之爲**同次式**。

同次式與同次式之積。仍爲同次式。

何則。積之各項。係被乘數之各項。與乘數之各項相乘得之。故積之次數。爲二式次數之和。故也。

例 1. $x+a$ 以 $x+b$ 乘之。

$$
\begin{array}{l}
x+a \\
x+b \\
\hline
x^2+ax \\
\quad\ +bx+ab \\
\hline
x^2+(a+b)x+ab
\end{array}
$$
(答數)。

例 2. $3a^2-4ab+5b^2$ 以 $a^2-2ab+3b^2$ 乘之。

$$
\begin{array}{l}
3a^2-4ab+5b^2 \\
a^2-2ab+3b^2 \\
\hline
3a^4-4a^3b+5a^2b^2 \\
\qquad -6a^3b+8a^2b^2-10ab^3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad +9a^2b^2-12ab^3+15b^4 \\
\hline
3a^4-10a^3b+22a^2b^2-22ab^3+15b^4
\end{array}
$$
(答數).

例 3. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 以 $a+b+c$ 乘之。

$$
\begin{array}{lllllllllll}
a^2 & -ab & -ac & +b^2 & -bc & +c^2 & & & & & \\
a & +b & +c & & & & & & & & \\
\hline
a^3 & -a^2b & -a^2c & +ab^2 & -abc & +ac^2 & & & & & \\
 & +a^2b & & -ab^2 & -abc & & +b^3 & -b^2c & +bc^2 & & \\
 & & +a^2c & & -abc & -ac^2 & & +b^2c & -bc^2 & +c^3 & \\
\hline
a^3 & & & & -3abc & & +b^3 & & & +c^3 &
\end{array}
$$

(答數)

例 題

試求下列各題中二式之積〔66至71〕

66. $-3a+2b,\ 2a-3b,$ **67.** $a^2-ab+b^2,\ a+b,$

68. $2x^2+3xy+4y^2,\ 3x^2-4xy+y^2,$

69. $3\frac{1}{8}a^4b+2\frac{1}{16}a^2b^3-4\frac{1}{2}a^3b^2,\ 2\frac{1}{5}a^3-2\frac{1}{2}a^2b+ab^2,$

70. $x^3-2ax^2-4a^2x+a^3,\ x-3a,$

71. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,\ a^2-2ab+b^2,$

試求下列各題之連乘積〔72至74〕

72. $(2x-3y)(4x+y)(x+5y)$

73. $(-3a+b+2c)(2a-3b+c)(a+2b-3c)$

74. $(a^m+b^m)(a^n+b^n)(a^p-b^p)$

75. 試以$a=1$, $b=0$, $c=-1$,驗證73題。

第三章　整式之除法

34. 指數規則 (28節之反者)

若 a^5 以 a^2 除之。a^6 以 a^4 除之如次。

$$\frac{a^5}{a^2}=\frac{aaaaa}{aa}=aaa=a^3=a^{5-2},$$

$$\frac{a^6}{a^4}=\frac{aaaaaa}{aaaa}=aa=a^2=a^{6-4},$$

同理推得 $\frac{a^4}{a}=a^{4-1}=a^3,\ \frac{a^7}{a^3}=a^{7-3}=a^4,\cdots\cdots\cdots,$

又 $\frac{a^2}{a^5}=\frac{aa}{aaaaa}=\frac{1}{aaa}=\frac{1}{a^3}=\frac{1}{a^{5-2}}$

同理推得 $\frac{a^3}{a^5}=\frac{1}{a^{5-3}}=\frac{1}{a^2},\quad \frac{a^3}{a^8}=\frac{1}{a^{8-3}}=\frac{1}{a^5},\cdots\cdots\cdots$

汎言之 m, n 均爲正整數時。

若 $m>n$，則 $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n},$

若 $m<n$，則 $\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}},$

【注意】 $m=n$ 時。則 $a^m\div a^n=a^n\div a^n=1,$

35. 除法運算。常以下列各式爲基礎。

$$\frac{a+b+c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}\ \cdots\cdots\cdots\text{〔配分規則〕}$$

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\ (m>n),\ \frac{a^m}{a^n}=1\cdots\cdots\text{〔指數規則〕}$$

同符號之商爲正。異符號之商爲負。…〔符號規則〕

36. 一項式以一項式除之。

例 1. $\frac{27x^7}{3x^2}=9x^5$ (答數)。

例 2. $\frac{15a^3b^2}{-5ab^2}=-3a^2$ (答數)。

例 3. $\frac{-5x^9y^5z^3}{-7x^3y^4z}=\frac{5}{7}x^6yz^2$ (答數)。

卽將被除數所含除數之字母去之。以係數除係數之商。置之全式之首。而依符號規則。定其符號可也。

唯除數之中。若有被除數所未含之字母。則用分數形狀表之。置該字母于分母可也。

37. 多項式以一項式除之。

例 1. $\frac{6x^2-12x}{3x}=2x-4$ (答數)。

例 2. $\frac{-105a^3b^2-75a^2b^3+27a^2b^4}{-15a^2b}$

$=7ab+5b^2-\frac{9}{5}b^3$ (答數)。

卽以一項式除多項式之各項可也。

例題

試用下列各題之後式除其前式。

76.　$6a, 3$　**77.**　$12x, -x$　**78.**　$-15m, 3m,$

79.　$5x^4, 2x$　**80.**　$9x^3, -3x^2$　**81.**　$-11a^7, -5a^2,$

82.　$7a^7b^{10}c^{13}, -5a^4b^5c^5$　**83.**　$\frac{5}{6}m^6n^7p^8, -\frac{2}{3}m^2n^4p^6,$

84.　$10a^{2n}b^5, -5a^nb^3$　**85.**　$-27x^{n+1}y^{3m}, -9xy^{2m},$

86.　$5+10a, 5,$　**87.**　$4a+8b, -4,$

88.　$3a^2-6ab, -3a$　**89.**　$21a^2b-14ab^2, -7ab,$

90.　$12x^4y^2-2x^3y^3+4xy^5, 2xy^2.$

91.　$12a^4b^3x^4y^2-15a^2b^6xy^4+20ab^2xy^9, 4ab^2xy^2,$

92.　$15x^{2n+1}y^5-12x^{2n+3}y^3-18x^{2n+5}y^4$ (1) 以 $3x^n$ 除之。(2) 以 $-5x^{n+1}y^2$ 除之。

38. 多項式以多項式除之.

若　除數(一因數)　$= a+b+c,$

商　(他因數)　$= n+p+q,$

$$\text{則其被除數(積)} = \begin{cases} an+bn+cn \\ +ap+bp+cp \\ +aq+bq+cq, \end{cases}$$

被除數之第一項為 an。即除數第一項 a 與商之第一項 n 之積。故商之第一項。可以除數之第一項 a 除被除數之第一項 an 得之。今以 n 乘除數全體。由被除數減之。得剩餘之第一項 ap。乃除數第一項

a 與商之第二項 p 之積也。故商之第二項。可以除數之第一項。除剩餘之第一項得之。商之第三項以下。均準此。故欲以一多項式除一他多項式。可演算如次。

將被除數與除數。列爲某公有字母降冪或昇冪之順。然後以除數之第一項。除被除數之第一項。書作商之第一項。

次以商之第一項。乘除數全體。由被除數減之。若有剩餘。則仍以除數之第一項。除新被除數之第一項。如是遞次推算。以至于盡。或得除無可除之剩餘爲止。

例 1. x^2+3x+2 以 $x+1$ 除之。

$$
\begin{array}{l|l}
x^2+3x+2 & x+1 \\ \cline{2-2}
x^2+x & x+2 \quad (\text{答數}) \\ \cline{1-1}
\quad\quad 2x+2 & \\
\quad\quad \underline{2x+2}, &
\end{array}
$$

例 2. $4a^4x^2-4a^2x^4+x^6-a^6$ 以 x^2-a^2 除之。

先將二式列爲 x 降冪之順。然後實行除法。

$$\begin{array}{l|l}
x^6-4a^2x^4+4a^4x^2-a^6 & x^2-a^2 \\ \cline{2-2}
x^6-a^2x^4 & x^4-3a^2x^2+a^4 \\ \cline{1-1}
\quad -3a^2x^4+4a^4x^2 & \\
\quad -3a^2x^4+3a^4x^2 & \\ \hline
\qquad\qquad a^4x^2-a^6 & \\
\qquad\qquad a^4x^2-a^6 & \\ \hline
\end{array}$$

例 3. $5x^3-x+1-3x^4$ 以 $1+3x^2-2x$ 除之。

茲將二式先列為x昇冪之順。然後除之。

$$\begin{array}{l|l}
1-x\qquad +5x^3-3x^4 & 1-2x+3x^2 \\ \cline{2-2}
1-2x+3x^2 & 1+x-x^2 \\ \cline{1-1}
\quad x-3x^2+5x^3 & \\
\quad x-2x^2+3x^3 & \\ \hline
\qquad -x^2+2x^3-3x^4 & \\
\qquad -x^2+2x^3-3x^4 & \\ \hline
\end{array}$$

例 4. $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 以 $x+y+z$ 除之。

$$\begin{array}{l|l}
\qquad x^3-3xyz+y^3+z^3 & x+y+z \\ \cline{2-2}
\qquad x^3+x^2y+x^2z & x^2-xy-xz+y^2-yz+z^2 \\ \cline{1-1}
-x^2y-x^2z-3xyz+y^3+z^3 & \\
-x^2y-xy^2-xyz & \\ \hline
-x^2z+xy^2-2xyz+y^3+z^3 &
\end{array}$$

$$-x^2z \qquad -xyz-xz^2$$

$$xy^2-xyz+xz^2+y^3+z^3$$

$$xy^2 \qquad +y^3+y^2z$$

$$-xyz+xz^2-y^2z+z^3$$

$$-xyz \quad -y^2z-yz^2$$

$$xz^2+yz^2+z^3$$

$$xz^2+yz^2+z^3$$

例題

試以下列各題之後式除其前式。

93. $x^2+11x+30$, $x+5$.

94. x^2-x-90, $x+9$.

95. $4x^2-12x+9$, $2x-3$.

96. $3m^2-13m-10$ $3m+2$.

97. $35x^2+xy-88y^2$, $7x-11y$.

98. $x^2+5\frac{2}{3}xy+3\frac{1}{3}y^2$, $x+5y$.

99. $\frac{1}{9}a^2+\frac{2}{5}ab+\frac{8}{25}b^2$, $\frac{1}{3}a+\frac{4}{5}b$.

100. $6n^3-7n^2x+2nx^2$, $-x+2n$.

101. $-19a^2x^2+3x^4+\frac{7}{2}ax^3$, $\frac{1}{2}x-a$.

102. $21a^6b+20b^4-22a^2b^3-29a^4b^2$, $3a^2b-5b^2$.

103. $4x^4y^5-\frac{1}{2}x^2y^6+12x^8y^3-11x^6y^4$, $4x^3y^2-xy^3$.

104. $6x^4-x^3-11x^2-10x-2,\quad 2x^2-3x-1.$

39. 次將舉一二類雜除法之例。以明其用.

例 1. $x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$ 以 $x^2+(a+b)x+ab$ 除之。

$$\begin{array}{l|l}
x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc & x^2+(a+b)x+ab \\ \cline{2-2}
x^3+(a+b)x^2+abx & x+c \\ \cline{1-1}
\qquad cx^2+(ac+bc)x+abc & \\
\qquad cx^2+(ac+bc)x+abc & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

例 2. $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 以 $x+y+z$ 除之。

$$\begin{array}{l|l}
x^3\qquad -3xyz+(y^3+z^3) & x+y+z \\ \cline{2-2}
x^3+x^2(y+z) & x^2-(y+z)x+y^2-yz+z^2 \\ \cline{1-1}
\quad -x^2(y+z)-3xyz+(y^3+z^3) & \\
\quad -x^2(y+z)-x(y^2+2yz+z^2) & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad x(y^2-yz+z^2)+(y^3+z^3) & \\
\qquad\qquad x(y^2-yz+z^2)+(y^3+z^3) & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

例 3. $a^2+5ab+3b^2$ 以 $a+b$ 除之。

$$
\begin{array}{r|l}
a^2+5ab+3b^2 & a+b \\ \cline{2-2}
a^2+ab & a+4b \\ \cline{1-1}
4ab+3b^2 & \\
4ab+4b^2 & \\ \cline{1-1}
-b^2 &
\end{array}
$$

故得商爲 $a+4b$ 剩餘爲 $-b^2$,

即 $a^2+5ab+b^2=(a+4b)(a+b)-b^2$,

因之除法定義。得擴充言之如下。

所謂以B式除A式云者。乃求合於 $B\times C=A$ 之C式。或 $B\times C$ 較A式所差者。僅爲次數小于B式之C式也,

前例係先將被除數及除數。列爲 a 降冪之順。然後除之。今若均列爲 b 降冪之順。亦可除之如下。

$$
\begin{array}{r|l}
3b^2+5ab+a^2 & b+a \\ \cline{2-2}
3b^2+3ab & 3b+2a \\ \cline{1-1}
2ab+a^2 & \\
2ab+2a^2 & \\ \cline{1-1}
-a^2 &
\end{array}
$$

故得商爲 $3b+2a$, 剩餘爲 $-a^2$,

即　$3b^2+5ab+a^2=(3b+2a)(a+b)-a^2$.

如此。以同一除數除同一被除數。而得不同之商。不同之剩餘者。蓋前者之目的。在求乘何式於除數。使含 a 之項。與被除數相合。後者之目的。在求乘何式於除數。使含 b 之項。與被除數相合。目的不同。結果自異也。

例題

下列各題試以後式除其前式。

105. $x^3+y^3+3xy-1,\quad x+y-1,$

106. $(b+c)x^2-bcx+x^3-bc(b+c),x^2-bc$

107. $x^3+(a+b-c)x^2+(ab-ac-bc)x-abc,\ x-c$

108. $abc-b^2(a+c)+a^2(b+c)+c^2(a+b),a-b+c$

109. $a^{4n}-a^{3n}b^m+a^nb^{3m}-b^{4m},\ a^n-b^m,$

110. $2a^2(b+c)^{2n}-\frac{1}{2},\quad a(b+c)^n+\frac{1}{2},$

111. $x^2-7x+11,\quad x-2,$　　**112.** $3x^2+5x-9,\ x-4,$

113. $x^3-17x^2+15x-13,\quad 2x-5,$

114. $x^2+a^2,\quad x+a,$　　**115.** $a^2+ab+b^2,\quad a-b,$

116. $x^3-y^3,\quad x+y,$　　**117.** $x^4+y^4,\ x^2+xy+y^2,$

雜　題　I

1.　某數之 10 倍減 7。等于其 7 倍加 2。問此數若干。

設某數為x.

$10x-7=7x+2$.　$10x-7x=9$　$\therefore 3x=9$　$\therefore x=3$.

2.　$x=1, y=0, z=1$ 時。問次式之值幾何。

$$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2$$

$10x-7x=2+7$

3.　$3a^2-2ca-2ab$, $2b^2+3bc+3ba$ 及 $c^2-2ac-2bc$ 三式試加之。

4.　試證次式

$$a^3+b^3+c^3-3abc-a(a^2-bc)-b(b^2-ca)$$
$$-c(c^2-ab)=0.$$

5.　$2x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$ 試以 $\frac{1}{2}x+3$ 乘之。

6.　試將 $(x+1)(x+2)(x+3)-(x-1)(x-2)(x-3)$ 簡單之。

7.　$2-12x^5+10x^6$ 以 $1-2x+x^2$ 除之。

8.　兩偶數之和與差。仍為偶數。試證之。

9.　兩奇數之和與差。必為偶數。試證之。

10.　一奇數與一偶數之和與差。必為奇數。試證之。

11.　試由 $5b^4-3b^3a+4b^2a^2$，減去 $5a^4-3a^3b+4a^2b^2$，

12.　試將　$x-(1-\overline{1-x})$,　　$3x-\overline{7-4x}$　　及

$b-2a-\{c-a-(b-a+c)\}$簡單之。

13. $9x^2-1$試以$x^2+\frac{1}{9}$乘之，$a+b+c$試以$a+b-c$乘之。

14. 試證下式。

$$2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2.$$

15. $x^3-3x^2+3x+y^3-1$試以$x+y-1$除之。

16. 父現年39。子現年12。問幾年以前。父年爲子年之4倍。

17. ax^2-x+a以ax^2+x+a乘之。並求$2a+b-3c$之平方。

18. 兩代數式之積爲$x^6+x^5y+x^4y^2-x^3y^3+y^6$。其一式爲$x^2+xy+y^2$。問他式若何，

19. 試證以下兩式

(1)$a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0.$

(2)$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)+(b-c)(c-a)(a-b)=0$

20. $a=1, b=2, c=-3,$時。試求下兩式之值。

$6a+3b+4c,\quad a^3+b^3+c^3-3abc,$

21. 試將$3\{x-2(y-z)\}-[4y+\{2y-(z-x)\}]$簡單之。

22. 問加何式於$(a+b+c)^2$.其和爲$(a-b-c)^2$.

23. 試以$a-b$乘a^3+b^3.其結果以$a+b$除之。

24. 試以$x-z$除x^3+z^3.由其結果。求$x+y+z$除$(x+y)^3+z^3$之商。

25. 有長方形之地。闊爲長四分之三。其周圍爲112丈。求闊與長各幾何.

26. $a=3, b=4, c=5, d=-4$時。試求下式之值。

$$\frac{(a+b)(c+d)-(b+c)(d+a)}{ab+bc-cd-da}$$

27. x^2+7x+c若能以$x+4$除盡。則c之值應若何。

28. 試將$5x-3[2x+9y-2\{3x-4(y-x)\}]$簡單之。

29. 兩代數式之積爲x^7-64x.其一式爲x^2-2x+4.問他式若何。

30. 甲乙二人。更番比鎗。甲12發中7。乙12發中9。今二人共中.32鎗。問二人各發幾鎗。

第三編 一次方程式(I)

第一章 一元一次方程式

40. 等式 兩相等之式。以記號＝連結之。名曰等式。等式之中。其在＝號左側之式。名曰左邊右側之式。名曰右邊。

等式對於其中所含字母。無論代以何數均相等者。謂之爲恆等式。

其必代以特別之數。始能相等者。曰方程式。

41. 未知數及既知數 方程式中。數值尙未得知之數曰未知數。其已知之數或假設爲已知之數。曰既知數。

常例。未知數以羅馬字末尾各字母 $x, y, z, \cdots\cdots$ 表之。既知數以羅馬字冒首各字母 $a, b, c, \cdots\cdots$ 表之。

42. 一元一次方程式 凡僅含未知數一乘冪之方程式。名曰一次方程式。又僅含一未知數之一次方程式。名曰一元一次方程式。

例如 $ax+b=0$. 乃 x 之一元一次方程式。

43. 方程式之根 解方程式云者。乃求其未知數之值之謂也。

求得之數。云爲適合於方程式之數。或曰方程式之根。

44. 公理　解方程式時。常用下列各公理。

1.　加相等數於相等數。其和相等。

2.　由相等數減相等數。其差相等。

3.　乘相等數於相等數。其積相等。

4.　以相等數除相等數。其商相等。

故　方程式之兩邊。以相等之數加之。減之。乘之。除之。其結果仍相等。

45. 移項

例如由方程式 $ax+b=c-d$……………(1)

之兩邊。各減去 b. 得。

$$ax=c-d-b \text{……………} (2)$$

即 (1) 式左邊之 b。若移之右邊。則其符號由 (+) 變爲 (−)。

又 (1) 之兩邊加 d。得

$$ax+b+d=c \text{……………} (3)$$

即 (1) 式右邊移之 d。移之左邊。則其符號由 (−) 變爲 (+)。

故將方程式之任何項。變其符號。(由(+)

而(−)。或由(−)而(+)。) 則可由一邊移之他邊。

46. 方程式之解法　凡一元一次方程式。其形狀均可變作。

$$ax=b.$$

是謂之爲一元一次方程式之普通式。

例 1. 解方程式 $17x+6=10x+27.$

將6移之右邊。10x移之左邊。則得

$$17x-10x=27-6.$$

卽 $$7x=21.$$

兩邊以7除之。得

$$x=3. \quad (答數)$$

驗 $17\times3+6=57,\quad 10\times3+27=57.$※

例 2. 解方程式 $14-8x=19-3x.$

移項得 $$-8x+3x=19-14.$$

卽 $$-5x=5.$$

兩邊以−5除之。 $x=-1$ (答數)

例 3. 試解下之方程式

$$15x-14(10-7x)=5x+7(14x-25).$$

※以後驗算。有時從略。學者宜自爲之。

去括弧 $15x-140+98x=5x+98x-175.$

移項得 $15x-5x=-175+140.$

卽 $10x=-35.$

兩邊以10除之 $x=-\frac{7}{2}$ (答數)

例 4. 試解方程式 $\frac{1}{2}(x+5)-\frac{1}{3}x=\frac{1}{4}(3x-1)+1.$

以分數係數各分母之最小公倍數。乘兩邊各項。

$$6(x+5)-4x=3(3x-1)+12.$$

去括弧 $6x+30-4x=9x-3+12.$

移項且集其同類項。得

$$-7x=-21.$$

兩邊以-7除之 $x=3$ (答數)

故解一元一次方程式之法如次。

(1)若方程式中有分數係數。〔既知數〕則先以其分母之最小公倍數乘其各項。

(2)若有括弧。則去括弧。

(3)將含未知數之項。悉移之一邊。〔通例移之左邊。〕既知數之項。移之他邊。

(4)集其同類項。則方程式變爲普通式。

(5)以未知數之係數除兩邊。卽得未知數之值。

例 題

試解下列各方程式,并驗其結果。[1至23]

1. $7x+8=4x+15+2x$. **2.** $12x+12=13x+15$.

3. $7y-8=2y+9$. **4.** $\frac{1}{2}x+8=-\frac{1}{2}x-1$.

5. $15x-8=20x-8-4x$. **6.** $-\frac{1}{11}x-12=4$.

7. $8x+19=-5x-4x+11$. **8.** $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=\frac{1}{4}x-7$.

9. $7(y-18)=3(y-14)$.

10. $7z-3(2z-3)=2(-z-18)$

11. $\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}x-\frac{5}{6}x=15$.

12. $\frac{1}{4}(x+3)=\frac{1}{16}(3x+16)$.

13. $\frac{1}{3}(x-2)-\frac{1}{2}(12-x)=\frac{1}{4}(5x-36)-1$.

14. $\frac{1}{4}(x+8)-\frac{1}{3}(5x+2)=\frac{1}{2}(14-x)-2$.

15. $0.12x-1.24=0.05x+0.72$.

16. $1.5x+12-8.75x=0.625x-3.75$.

17. $4[4(x-4)]=4$. **18.** $6x-[7x-(3x-18]=16$.

19. $\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{3}-[x-\frac{1}{3}(2x-1)]=0$.

20. $(2x-7)(x-3)=(x-3)(2x+8)$.

21. $(\frac{1}{2}x+4)(\frac{1}{3}x-6)=(\frac{1}{2}x+5)(\frac{1}{3}x-7)$.

22. $(x-1)^3+5(x^2-4)=(x+2)(x^2-3)$.

23. $x^2-x[1-x-2(3-x)]=x+1$.

24. $9x^2-5x+m$ 若能以 $x-1$ 除盡。則 m 之值當若何。

25. $x^3-5x-8n$ 若能以 $x-2$ 除盡。則 n 之值當若何。

47. 應用問題之解法

例 1. 有相隣二整數。其和爲 163。問二數各幾何。

解 相隣二數所差爲一。故命小數爲 x。則大數爲 $x+1$。

故 $$x+(x+1)=163.$$

解之得 $$x=81.$$

故 $$x+1=82.$$

故所求二整數爲 81 及 82。

驗 $81+82=163.$

例 2. 父年 40 歲。子年 10 歲。問幾年之後。父年爲子年之三倍。

解 命所求之年數爲 x。則自今 x 年之後。父年爲 $40+x$ 歲。子年爲 $10+x$ 歲。故得

$$40+x=3(x+10)$$

解之得 $$x=5.$$

卽自今5年之後也。

驗　自今5年之後。父年40+5卽45歲。子年10+5卽15歲。且$45=15\times3$.

例題

26. 有二數。其和爲200。其差爲2。問二數各幾何。

27. 何數加40。其和得原數之三倍。

28. 有遺產5000元。分給二子。但知長子所得之4倍。較次子所得之5倍。多2000元。問二子各得若干。

29. 某省國會議員出缺一名。乃於候補者二人中選之。投票總數爲943票。一候補者較他候補者多65票當選。問二人各得票數若干。

30. 某畜牧家。將綿羊山羊合共200頭出售。甲給價綿羊每頭1元2角5。山羊每頭1元6角。乙給價平均每頭1元5角。自總價言之。乙比甲多22元。故全數售之於乙。問綿羊山羊各若干頭。

31. 箱內盛紅綠黑三種鉛筆。紅者爲總數三分之一。綠者爲六分之一。所賸黑者15枝。問綠鉛筆之數。

32. 有兩位整數。其數字之和爲8。其顚倒數較原數多18。問原數幾何。

33. 某鐵路。甲車以每時35英里之速。由某站開行。乙車在甲開行之站。後84英里處之車站。同時同向開行。問幾時之後。乙車追及甲車。但乙之速度每時49英里。

34. 母年比子年多18歲。母子年齡之和為子年之4倍。問母子之年各幾何。

35. 某銀行三日中所存之款。合共16900元。但知第二日為第一日三分之一。又等於第三日之三倍。問三日所存之款各幾何。

36. 分130為五分。每分均比其次分大12。問每分各幾何。

37. 空氣於一立積之中。大約養1淡4。今在縱6丈橫3丈。高1丈2尺之教室空氣中。所含養及淡之量各幾何。

38. 有三角形。周圍32寸。最長邊比最短邊長8寸。最短邊比稍短之邊短3寸。問三邊之長各若干。

39. 有兩輪車。大輪周圍18尺。小輪周圍12尺。今小輪比大輪多轉10次。問所行之距離幾何。

40. 相隣三偶數之和。比其最小之數多42。問各數幾何。

41. 父現年爲子年之三倍。10年以前。父年爲子年之五倍。問父子之現年各若干。

42. 有生於十一月之嬰兒。至此年十二月十日。則其日數。等於自十一月一日至此嬰兒墜地之日數。問此童生日係十一月幾日。

43 有父子五人。每年每人入款各爲600元。但父至今51年。長子至今27年。次子至今24年。三子至今19年。末子至今17年間。均存之。問幾年以前。父所存金等於四子所存金之和。

44. 問五時與六時之間。鐘上之長針。在何處與短針相合。

45. 問二時與三時之間。又九時與十時之間。長短兩針。成正反方向之時間。

46. 問八時與九時間。長短二針成直角之時間。

47. 有兩位數。其數字之和爲12。其顚倒數較原數所大者爲原數四分之三。求原數。

48. 有魚尾長4寸。頭長爲身長$\frac{1}{7}$與尾長之和。又身長爲尾長$\frac{1}{2}$與頭長之和。問魚之全長。

49. 有火車。以每時30公里之速。自甲站向乙站而行。在乙站停30分。即以每時28公里之速。開還甲

地。往復費15分。問甲乙兩站之距離。

50. 有水桶。具甲乙丙三管。水滿時。甲管流之。1小時20分可盡。乙管流之。3小時20分可盡。丙管流之。5小時可盡。今三管並開。問幾小時可盡。

凡如此問題。須假定水之壓力。始終相同。

51. 一水桶。由甲乙二管流入。丙管流出。專開甲管。6小時可滿。專開乙管。8小時可滿。若開丙管。則可於12小時間。將水流盡。今以空桶三管同時齊開問幾小時可滿。

52. 僱用女繡工。原定一年工資170元。及首飾一件。然經7月之後。女工辭出。僅得工資95元。首飾一件。問首飾一件價值幾何。

53. 有甲乙丙三工人。作一工事。甲一人獨作。須12日。乙一人獨作。須16日。丙一人獨作。須24日完功。今甲先作4日後。乙工加入。又過二日。丙工加入。問成功之日數。

54. 問一時與二時中間。長短兩針夾皿於正中之時間。

55. 欲分60爲四分。第一分加3。第二減3。第三以3乘之。第四以3除之。結果均等。問如何分法。

第二章 聯立一次方程式

48. 含二未知數x,y之一次方程式.(即二元一次方程式)如

$$x+y=5 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

就y解之,得 $y=5-x$.

是以 $x=1$ 時 $y=4$.

$x=2$ 時 $y=3$.

$x=3$ 時 $y=2$.

…………

如是方程式中之x,y.能得答數無窮.故此方程式.稱爲不定.

49. 又若取含x,y之另一方程式.如

$$y-x=1 \cdots\cdots\cdots\cdots (2).$$

則 $y=1+x$

故 $x=1,\ y=2$.

$x=2$,則 $y=3$.

$x=3$,則 $y=4$.

…………

此方程式亦屬不定.然(1),(2)二式.乃表二未知數不同之關係.故此等方程式.可稱爲各自獨立.

然若取 $x-y=3$. $5x-5y=15$ 二式。可由一以得其餘。互相關聯。非各自獨立者。故此等方程式。稱爲相與一致。

50. 如前之(1)(2)。以各自獨立之若干方程式。以之聯合而求其公共之答數[$x=2$, $y=3$,]者。名曰聯立方程式。

然如 $x+y=5$, $3x+3y=16$ 二式。不能有 x, y 之值。同時適合於兩式。明矣。故此等方程式。非聯立方程式。稱爲互相矛盾。

51. 由含二以上未知數之聯立方程式。次第將未知數消減。俾只賸一方程式含一未知數之法。名曰消去法。

解聯立二元一次方程式時。通例用三種消去法。卽所謂加減消去法。代入消去法。比較消去法是也。

52. 加減消去法

例 試解下之聯立方程式

$$\begin{cases} 5x-3y=20 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 2x+5y=39 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解 以5乘(1), 以3乘(2)

$$25x-15y=100\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$6x+15y=117\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(3)與(4)相加。$31x\qquad=217.$

$$\therefore x=7\qquad(答數).$$

次將消去y。以5乘(2)。以2乘(1)。

$$10x+25y=195\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$10x-6y=40\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

由(5)減去(6)　$31y=155.$

$$\therefore y=5\qquad(答數).$$

驗　$5\times7-3\times5=35-15=20,$

$2\times7+5\times5=14+25=39$

【注意】 x,y之中若求得其一。則以其值代入(1),或(2)。卽可求得其餘一未知數之值。此法比之上法。更便於用。

上解法中。y係以(3),(4)相加消去之。x係以(5),(6)相加消去之。故由聯立二元一次方程式。欲用加減消去法。以消去一元。其法如下。

將二方程式。各乘以相當數。俾一未知數之係數。彼此之絕對值相等。然後視同係數之項。爲異符號。或同符號。而加之或

減之可也。

【注意】 欲使一未知數之係數。彼此之絕對值相等。則各乘以該係數除兩係數之最小公倍數之商斯可矣。

例題

試解下列各聯立方程式。

1. $\begin{cases} x+y=17. \\ x-y=7. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x+11y=2. \\ 7x-11y=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-12y=3. \\ x+4y=19. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x+10y=42. \\ 6x+20y=84. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 12x+15y=8. \\ 16x+9y=7. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 8x+2y=5. \\ 12x+3y=7. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x-\frac{y}{2}=11. \\ 2x-3y=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1. \\ \frac{x}{4}-\frac{2y}{3}=3. \end{cases}$

53. 代入消去法

例 試解下之聯立方程式。

$$\begin{cases} 5x+4y=32 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 4x+3y=25 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解 由(1)得 $5x=32-4y$.

$$\therefore x=\frac{32-4y}{5} \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以此代入(2)式之x。得

$$4\left(\frac{32-4y}{5}\right)+3y=25.$$

解之得 $\left.\begin{array}{l} y=3 \\ x=2 \end{array}\right\}$ (答數)。
以此代入(3)。得

故用代入消去法。以消去一元。其法如下。

由一方程式。將一未知數以他未知數及既知數之項表之。然後代入第二方程式中可也。

例題

試解下列各聯立方程式。

9. $\begin{cases} x=2y-3. \\ y=2x-15. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x-2y=1. \\ 4x+5y=47. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x=\frac{5}{3}y. \\ x-4=\frac{6}{5}(y+6). \end{cases}$

12. $\begin{cases} 18x-15y=51. \\ 6x-5y=17. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x+4y=2. \\ 9x-20y=8. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y=2. \\ 2x+3y=60. \end{cases}$

15. $4x-6y-3=7x+2y-4=-2x+3y+24.$

16. $\begin{cases} \frac{2x+3y}{5}=10-\frac{y}{3}. \\ \frac{4y-3x}{6}=\frac{3x}{4}+1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 1.5x+2y=14.5. \\ x-0.2y=2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x+0.2y=-1.4. \\ 0.4x-y=1.6. \end{cases}$　19. $\begin{cases} 0.5x-1.2y=-0.5. \\ 1.5x+0.4y=0.5. \end{cases}$

54. 比較消去法

例 試解下之聯立方程式。

$$\begin{cases} 2x-5y=66 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 3x+2y=23 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

解 由(1).得　$2x=66+5y$

$$\therefore x=\frac{66+5y}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

又由(2).得　$3x=23-2y.$

$$\therefore x=\frac{23-2y}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

由(3)與(4).得　$\dfrac{66+5y}{2}=\dfrac{23-2y}{3}.$

解之得　$y=-8$

以此代入(3)或(4).得　$x=13$　(答數).

故用比較消去法。以消去一元。其法如下。

由二方程式。各求得一未知數。以他未知數及既知數之項表之。令其相等可也。

例題

試解下列各聯立方程式。

20. $\begin{cases} 7x+2y=20. \\ 13x-3y=17. \end{cases}$　21. $\begin{cases} x=3y-2. \\ x=5y-12. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 5y=2x+1. \\ 8y=5x-11. \end{cases}$　23. $\begin{cases} 21x-23y=2. \\ 7x-19y=12. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 6x-9y=4. \\ 4x-6y=9. \end{cases}$　25. $\begin{cases} \frac{x+y}{3}+x=15. \\ \frac{x-y}{5}+y=6. \end{cases}$

26. $8y-12x=56y-39x=4.$

27. $\frac{x+y}{8}+\frac{y-x}{6}=5.\quad \frac{x+y}{4}-\frac{x-y}{3}=10.$

55. 三元一次聯立方程式

欲解含三未知數之三聯立方程式。(即三元一次方程式)則取二方程式之不同兩組。(例如第一與第二。第二與第三)消去一未知數。得兩方程式。再由此二方程式。消去一未知數可也。

【注意】 多元聯立方程式之解法。亦準此。

例 試解下之聯立方程式

$$\begin{cases} 4x+3y+2z=25 \cdots\cdots\cdots(1) \\ 3x-2y+5z=20 \cdots\cdots\cdots(2) \\ 10x-5y+3z=17 \cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

解　由(1),(2)消去z。則

$$14x+19y=85 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

又　由(1),(3)消去z。則

$$-8x+19y=41 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

由(4),(5)消去y。則得

以此代入(5)。得

以x,y之值代入(1)。得

$$\left.\begin{aligned} x&=2. \\ y&=3. \\ z&=4. \end{aligned}\right\}(\text{答數}).$$

例題

試解下列各聯立方程式

28. $\begin{cases} 5x+3y+7z=2. \\ 2x-4y+9z=7. \\ 3x+2y+6z=3. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x-y+z=4 \\ 5x+y+3z=5. \\ 2x-3y+4z=20. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x+2y-3z=6. \\ 2x+4y-7z=9. \\ 3x-y-5z=8. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x+y=28. \\ x+z=30. \\ y+z=32. \end{cases}$

32. $\begin{cases} x-y=2. \\ y-z=3. \\ x+z=9. \end{cases}$

33. $\begin{cases} 3x-y=7. \\ 3x-z=8. \\ 3z-x=0. \end{cases}$

34. $\begin{cases} x+y-z=6. \\ x+y+z=12. \\ x-3y-z=10. \end{cases}$ 35. $\begin{cases} 2x-3y+5z=11. \\ 5x+4y-6z=-5. \\ -4x+7y-8z=-14. \end{cases}$

36. $\begin{cases} (x-1)(4y+3)=(4x-8)(y+2). \\ (x-2)(3z+1)=(3x-8)(z+1). \\ (y+1)(2z+3)=(2y+1)(z+2). \end{cases}$

56. 應用問題之解法

例 1. 有長方形。其縱延長二尺。橫縮短三尺。則成正方形。其面積比原面積少 5 平方尺。問此長方形之縱橫各幾何。

解 命縱為 x 尺。橫為 y 尺。則由題設第一段。得

$$x+2=y-3.$$

$$\therefore y-x=5 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

由題設第二段。得 $(x+2)(y-3)=xy-5.$

即 $$xy+2y-3x-6=xy-5.$$

$$\therefore 2y-3x=1 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由 (1),(2) 解之。得 $x=9,\ y=14.$

故原長方形縱 9 尺。橫 14 尺。

例 2. 有甲乙丙三銀塊。其成色各為 0.75, 0.585, 0.8. 合共重 540 公分。若甲乙鎔成一餅。其成

色成0.7.又若乙丙鎔成一餅.則其成色成0.6.問三銀塊之重各幾何.(成色爲0.75.即7成5.言此銀10公分之中.有7公分5係眞銀.)

解 命甲乙丙三銀塊之重.各爲x公分.y公分.z公分.則合之必爲540公分.故得

$$x+y+z=540 \qquad \cdots\cdots(1)$$

今甲乙鎔成一餅.其分量應爲$x+y$公分.其成色係0.7.故其眞銀之分量爲$(x+y)0.7$.必與原眞銀之分量等.故得

$$0.7(x+y)=0.75x+0.585y.$$

$$\therefore\ 0.05x-0.115y=0.$$

$$\therefore\ 10x-23y=0 \qquad \cdots\cdots(2)$$

同理推得 $0.6(y+z)=0.585y+0.8z.$

$$\therefore\ -3y+40z=0 \qquad \cdots\cdots(3)$$

由(1),(2),(3)解之.得

$$\begin{cases} x=368. \\ y=160. \\ z=12. \end{cases}$$

故甲銀塊爲368公分.乙銀塊爲160公分.丙銀塊爲12公分.

例題

37. 某議會出席議員48人。某議案以贊成者比反對者多18人通過。問此議案贊成者幾人。反對者幾人。

38. 有甲乙二數。甲減1等於乙加1。又甲減5等於乙減3。問二數各幾何。

39. 有甲乙二童。乙以其所有彩畫明信片四分之三予甲。則共有100張。甲以其所有彩畫明信片之半與乙。則乙亦得100張。問甲乙二童所有之彩畫明信片各幾何。

40. 囊中裝黑白兩色之球。白球之數之半。等於黑球三分之一。又白球之數之二倍。比黑白兩球全數少6。問兩色之球各幾何。

41. 父子二人。但知自今3年之後。父之歲數。爲子之歲數之三倍。又自今7年以前。父之歲數。爲子之歲數之7倍。問父子現今之年各幾何。

42. 某茶商。有上下二種茶。上茶7斤。下茶9斤。混合之。得每斤1元3角7分5之茶。又下茶3斤。上茶5斤。混合之。得每斤1元4角5分之茶。問上下兩茶一斤之價。

43. 有人有金錶銀錶金鍊三物。金錶與金鍊之價之和。等於銀錶價之7倍。又銀錶半價與金鍊之價之和。等於金錶價十分之三。今金鍊之價40元。問金錶銀錶之價各幾何。

44. 有人有等重銀錠8個。等重金條16條。以銀三錠。置之天秤左皿。以金6條。置之右皿。且須加3兩於右皿。方得左右平衡。又若於左皿加銀5錠。右皿加金11條。而左右仍平。問銀一錠金一條之重各幾何。

45. 有人定酒二罈。斤數各不相同。一盛甲酒。每斤8角。一盛乙酒。每斤5角。共費15元5角。今酒商甲乙互誤。要求加洋1元5角。問兩罈之斤數各若干。

46. 有父子三人。長子比次子多4歲。自今2年之後。父年爲二子之年之和之2倍。又自今6年以前。父年爲二子之年之和之6倍。問三人現今年齡各幾何。

47. 有長方形之地。若闊增2丈。長減3丈。則面積減15方丈。又闊增3丈。長減2丈。則面積增18方丈。問闊長各幾丈。

48. 400與500之間。有一三位之數。其數字之和為9。其顛倒數為原數四十七分之三十六。問原數幾何。

49. 某日遇順風。砲聲每秒可傳 344.42 公尺。遇逆風。每秒只可傳 335.94 公尺。問無風時。聲傳之速。及此日風行之速。

50. 陣前計算敵人軍勢。但知敵軍 5 名。與我軍6名相當。然戰後敵軍失14000名。我軍失 6000 名。則敵軍 2 名。乃與我軍 3 名相當。問敵軍人數及我軍人數。

51. 有兩三位之數。其和加 1 則成 1000。今若將大數置之小數之左。中間置小數點。即為小數置之大數之左。中間置小數點之 6 倍。問兩數各幾何。

52. 有銀圓若干元。分給甲乙丙三人。甲所得比乙丙所得和七分之四多30元。乙所得比甲丙所得和之八分之三多30元。又丙所得比甲乙所得和之十分之一多30元。問甲乙丙三人各得幾何。

雜題 II

1. $a=5,\ b=3,\ c=-6$ 時。又 $a=-3,\ b=-2,$ $c=4$ 時。試求下式之值。

$$a(a+b)(a+b+c)-a(a-b)(a-b-c).$$

2. 試證下列二式

(1) $a^2+3(a-2b)^2=3(a-b)^2+(a-3b)^2.$

(2) $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$

$$=2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab).$$

3. 有小火輪。在靜水中。每小時行 9 海浬。今上溯於某河。所費之時間。等於下行於此河之時間之2倍。問每小時水流之速幾何。

4. 試解下之聯立方程式。

$$\begin{cases} x+\dfrac{y}{2}=1. \\ y+\dfrac{z}{3}=1. \\ z+\dfrac{x}{4}=1. \end{cases}$$

5. 試解下之方程式。

$$2.25x-0.125=3x+375.$$

6. 試解下之方程式。

$$\frac{x+0.75}{0.125}-\frac{x-0.25}{0.25}=15.$$

7. 試解下之聯立方程式。

$$\frac{x}{2}+y=1,\ \frac{y}{3}-z=3,\ z+2y+3x+8=0.$$

8.　試解下之聯立方程式。

$$y+z-x=a,\ z+x-y=b,\ x+y-z=c.$$

9.　分 18000 元予甲乙丙三人。乙所得比甲所得之 3 倍少 600 元。丙所得比乙所得之 4 倍多 600 元，問三人各得幾何。

10.　有某甲。由某處起程 5 小時之間，行 28 公里。至 8 小時後。有某乙亦自該處起程追甲。3 小時間，行 20 公里。問乙在何處追及甲。

11.　有人僱一工人。作工 2 星期。言明作工一日給資 6 角。停工一日。扣資 3 角。此人共得工資 7 元 5 角。問共停工日數。

12.　7 年以前。甲之年齡爲乙之 3 倍。7 年以後。甲之年齡爲乙之 2 倍。問甲乙現今之年齡各幾何。

13.　有長方形之地。長增 3 丈。寬增 2 丈。則面積增 64 方丈。又若長增 2 丈。寬增 3 丈。則面積增 68 方丈。問原長寬各幾何。

14.　有甲乙丙三工人。甲乙二人。作工 6 日。可得 7 元 2 角。甲丙二人。作工 9 日。可得 9 元 7 角 2 分。又乙丙二人作工 15 日。可得 14 元 4 角。問甲乙丙三人

一日之工資各幾何。

15. 有三位數。等於其數字之和之48倍。若由此數減198。則數字之位置顛倒。又兩端數字之和。等於中央數字之2倍。問此三位數若何。

16. 有銀圓若干元。分給甲乙丙三人。甲所得比乙丙所得和之八分之三多8元。乙所得比甲丙所得和之七分之三多4元。丙所得等於甲乙所得和之三分之二。問甲乙丙各得若干元。

17. 有甲乙二數。甲數爲三位。乙數爲二位今置甲於乙之左。連成一數。則比甲乙和之83倍多178。又置甲於乙之右。連成一數。則比甲乙之差之252倍多56。問甲乙二數各幾何。

18. 有若干人。分爲甲乙丙三組。甲乙之人數相加。減丙之人數。比乙丙人數相加。減甲之1倍少2人。若甲加30人。乙丙之和減29人。則甲比乙丙之和多1人。又總人數比丙減乙之8倍多34人。問甲乙丙三組之人數各幾何。

第四編 因數及倍數

第一章 乘除之公式

57. 二數之和之平方

由乘法 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

故二數之和之平方。等於兩數之平方和。加二數之積之二倍。

例 $(2a+5)^2=4a^2+20a+25$ (答數)。

58. 二數之差之平方

由乘法 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$。

故二數之差之平方。等於兩數之平方和。減二數之積之二倍。

例 $(3x-2)^2=9x^2-12x+4$ (答數)。

59. 二數之和與差之積

由乘法 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$。

故二數之和與差之積。等於兩數平方之差。

例 $(5m+4)(5m-4)=25m^2-16$ (答數)。

60. 茲舉兩複雜之例如下。

例 1. $(a+b-c)^2=(\overline{a+b}-c)^2$。

由58節 $=(a+b)^2-2(a+b)c+c^2$。

由 57 節　　$=a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2$.（答數）

例 2. $(x-y+z)(x+y-z)=(x-y-z)(x+y-z)$.

由 59 節　　$=x^2-(y-z)^2$

由 58 節　　$=x^2-y^2+2yz-z^2$（答數）.

例　題

試書出下列各題之結果［1 至 16］.

1. $(a+1)^2$.　**2.** $(7-b)^2$.　**3.** $(x+2a)^2$.

4. $(y-3z)^2$.　**5.** $(2a+3b)^2$.　**6.** $(5x-7y)^2$.

7. $(x+2)(x-2)$.　**8.** $(2a+3)(2a-3)$.　**9.** $(a-\frac{2}{3})(a+\frac{2}{3})$.

10. $(5x+4y)(5x-4y)$.　**11.** $(5x^py^r-6x^{l-1}y^{l+1})^2$.

12. $\{a+b(x-1)\}^2$.　**13.** $(2x-3y+7)^2$.

14. $(m^4+n^2-1)^2$.　**15.** $(-3x^2+7)(3x^2+7)$.

16. $(5mn^2+2m^2n)(-5mn^2+2m^2n)$.

17. $x=a+1$, $y=a-2$ 時，試將 $x^2+y^2-4x+6y+3$ 簡單之.

下列各式試簡單之［18 及 19］.

18. $(x^2-1)(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)$.

19. $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)(a+b+c)$.

20. $a=x+1$. $b=x-1$ 時，a^2-ab+3 之值若何.

61. 兩二項式之積

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ "

先就形如 $x+a$, $x+b$, 之兩二項式論之。

(1) $(x+7)(x+4)=x(x+4)+7(x+4).$

$=x^2+4x+7x+28.$

$=x^2+11x+28.$

(2) $(x-7)(x-4)=x(x-4)-7(x-4).$

$=x^2-4x-7x+28.$

$=x^2-11x+28.$

(3) $(x+7)(x-4)=x(x-4)+7(x-4).$

$=x^2-4x+7x-28.$

$=x^2+3x-28.$

(4) $(x-7)(x+4)=x(x+4)-7(x+4).$

$=x^2+4x-7x-28.$

$=x^2-3x-28.$

汎言之 $(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab.$

即 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$

故形如 $x+a$, $x+b$ 兩二項式之積。乃由下列三項而成。

I. 積之第一項。爲各二項式第一項之積。

II. 積之末項。爲各二項式末項之積。

III. 積之第二項。以各二項式第二項之代數和爲係數。

62. 例如 $ax+b$, $cx+d$ 兩二項式之積。亦可做前節求得之。

例 1. $(3x+2y)(2x-y)=6x^2+xy-2y^2$ (答數).

卽積之第一項爲原兩二項式第一項之積。積之末項。亦爲原兩二項式末項之積。積之第二項。爲

$$2x\times 2y+3x\times(-y)=xy.$$

例 2. $(4a+5b)(2a-3b)=8a^2-2ab-15b^2$ (答數).

此積之第二項。爲 $4a\times(-3b)+2a\times 5b=-2ab$.

卽形如 $ax+b$, $cx+d$ 兩二項式之積。乃由三項而成。其第一項與第三項。各與前 I. II. 相同。惟積之第二項。等於各二項式之第一項與第二項交互相乘之代數和。

例題

試書出下列各式之結果。

21. $(x+7)(x+4)$. **22.** $(m+3)(m-9)$.

23. $(x-5)(x-4)$. **24.** $(a-6)(a+8)$.

25. $(7-x)(5-x)$. **26.** $(6+y)(-3+y)$.

27. $(7-z)(-5-z)$. **28.** $(2x+1)(2x+3)$.

29. $(x^2-7)(x^2-5)$。　　30. $(3xy-8)(3xy-7)$。

31. $(5x^2+3yz)(5x^2-2yz)$。　　32. $(x+y-3)(x+y-5)$。

33. $(a+3b+7)(a+3b-11)$。

63. 二立方之和與差

由除法 $(a^3+b^3)\div(a+b)=a^2-ab+b^2$。

$$(a^3-b^3)\div(a-b)=a^2+ab+b^2.$$

故二數立方之和。能以此二數之和除盡。其商爲二數之平方和。減其相乘積。

又二數立方之差。能以此二數之差除盡。其商爲二數之平方和。加其相乘積。

64. △兩同乘羃之和與差

由除法 $(a^4-b^4)\div(a-b)=a^3+a^2b+ab^2+b^3$。

$$(a^4-b^4)\div(a+b)=a^3-a^2b+ab^2-b^3.$$

$$(a^5-b^5)\div(a-b)=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4.$$

$$(a^5+b^5)+(a+b)=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4.$$

又實行除法。可知 a^2+b^2, a^4+b^4, a^6+b^6……。均不能以 $a+b$ 除盡。亦不能以 $a-b$ 除盡。

因之 n 爲任何正整數時。

I. 　a^n+b^n 在 n 爲奇數時。能以 $a+b$ 除盡。n 爲偶數時。不能以 $a+b$ 除盡。亦不能

以 $a-b$ 除盡。

II.　a^n-b^n 在 n 爲奇數時。能以 $a-b$ 除盡。n 爲偶數時。能以 $a+b$ 除盡。亦能以 $a-b$ 除盡。

【注意】 由本節諸例。可知以 $a-b$ 除得之商之各項。均係正號。以 $a+b$ 除得之商。一正一負。遞次相間。且商爲同次式。a 之指數。由 $n-1$ 起。次第減 1。b 之指數。由第二項 1 起。次第加 1。

例　題

試書出下列各題之商。

34. $(8-x^3)\div(2-x)$.　　35. $(x^3+1)\div(x+1)$.

36. $(x^3+125)\div(x+5)$.　　37. $(8a^3-27)\div(3-2a)$.

38. $(x^5+y^5)\div(x+y)$.　　39. $(x^5-a^5)\div(x-a)$.

40. $(a^6-1)\div(a^2-1)$.　　41. $(a^{3n}-1)\div(a^n-1)$.

42. $\{(x+y)^3-1\}\div(x+y-1)$　　43. $(x^4-1)\div(x-1)$.

44. $(a^5+1)\div(a+1)$.　　45. $(1-x^5)\div(1-x)$.

46. $(a^{10}-\frac{1}{32}b^5)\div(a^2-\frac{1}{2}b)$.　　47. $(x^{30}-1)\div(x^5+1)$.

第二章 因數分解

65. 本編自此以後。將述求整式之因數之法。(但本編所求之因數亦爲整式。)

一項式之因數。由視察可以得之。故不具論。茲特述多項式因其形狀而求因數之簡例如下。

66. 括出公因數之法

例 1. $2x^2y-6xy^2=2xy(x-3y)$ (答數).

例 2. $ab^2+abc+b^2c=b(ab+ac+bc)$ (答數)。

例 3. $ac+ad-bc-bd=(ac+ad)-(bc+bd)$(答數).

$$=a(c+d)-b(c+d)$$

$$=(a-b)(c+d)$$ (答數).

例題

求下列各式之因數。

48. $5x+5$. **49.** $4m+4n$. **50.** $ab+bc$.

51. $-x^3-x^2$. **52.** a^2b-ab^2. **53.** $3a^4-2a^2$.

54. $30a^2b^3d+12a^5b^2c^4d^3$. **55.** $15+20a-30a^2$.

56. $16(m^2+n^2)-8$. **57.** $5a^3(a-2x)+2(a-2x)$.

58. $ac+ad+bc+bd$ **59.** $2ax-3by-2ay+3bx$.

60. $5ax-cx-5ay+cy$. **61.** x^3-x^2+x-1.

62. $6a^3-6a^2v+2av^2-2v^3$.

63. $\frac{1}{6}ay+\frac{2}{9}xy-\frac{21}{44}af+\frac{28}{55}bf.$

67. 完全平方 適成某整式之平方之式。名曰完全平方。

68. 完全平方之三項式

此類之式。可由 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2.$

及 $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$

求得其因數。

69. 兩平方之差之二項式

此類之式可由 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$

求得其因數。

例 分 1723^2-277^2 爲因數。以計算其值。

$$1723^2-277^2=(1723+277)(1723-277)$$
$$=2000\times1446$$
$$=2892000 \text{ (答數)}.$$

例 題

求下列各式之因數[64 至 80]。

64. $x^2-2x+1.$　　65. $a^2+6a+9.$

66. $9a^2+30a+25.$　　67. $20x-4x^2-25.$

68. $49x^2-28xy+4y^2.$　　69. $a^2b^2+2abcd+c^2d^2.$

70. $x^2-1.$　　71. $4-a^2.$　　72. $a^2-x^2y^2.$

73. $a^{2n}-1.$　　74. $x^{2n}-b^{2m}.$　　75. $x^2-4.$

76. $(m-1)^2-1$. **77.** $9-(3-x)^2$.

78. $c^2-(a-b)^2$. **79.** $(x-4)^2-4(x-4)+4$.

80. $x^2(x+2)^2+(x+2)^2+2x(x+2)^2$

下列各式先行因數分解。再求其值。[81至84]。

81. 86^2-14^2. **82.** 37^2-27^2.

83. 1811^2-689^2. **84.** 10001^2-1.

√70. 形如x^2+ax+b三項式之因數。

此類式之因數。必為兩二項式。且其第一項。必均為x。其第二項相乘之積。必為+b. 其代數和必為+a此可由16節知之。

例 1. $x^2+8x+15=(x+3)(x+5)$ (答數).

例 2. $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$ (答數)

例 3. $a^2x^2+5ax-24=(ax-3)(ax+8)$ (答數).

例 4. $x^2-3xy-28y^2=(x+4y)(x-7y)$ (答數)。

√71. 形如ax^2+bx+c三項式之因數。

此類式之因數。可由62節反溯得之。

例 1. $6x^2+19x+10=(2x+5)(3x+2)$ (答數).

例 2. $6a^2-17ab+10b^2=(a-2b)(6a-5b)$ (答數).

例 3. $5x^2-6xy-8y^2=(x-2y)(5x+4y)$ (答數).

例 4. $10a^4+a^2b-21b^2=(2a^2+3b)(5a^2-7b)$ (答數).

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

例題

下列各式，試求其因數。

85. x^2+3x+2. **86.** x^2+x-2. **87.** x^2-x-6.

88. x^2-5x+6. **89.** $a^2-3a-40$. **90.** $6y-y^2-y^3$.

91. x^4+2x^2-24. **92.** $x^2-11xm+30m^2$.

93. $(m+n)^2+2(m+n)-15$.

94. $(a-b)^2+7(a-b)+12$.

95. x^4-13x^2+36. **96.** $2x^2+5x+2$.

97. $6+3x-63x^2$. **98.** $6a^2+19a-36$.

99. $3a^2-5ab-2b^2$. **100.** $18x^2y^2-71xyz-45z^2$.

72. 兩立方之和及差之二項式。

此類之式，由 63 節及 64 節，可求得其因數。

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

$$a^4-b^4=(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3).$$

或 $$=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3).$$

$$=(a-b)(a+b)(a^2+b^2).$$

$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4).$$

....

例題

下列各式試求其因數。

101. $x^3+1.$ = $(x+1)$ **102.** $x^3-8.$ **103.** $64x^3-1.$

104. $8x^3+y^3.$ **105.** $x^4+x.$ **106.** $x^6+y^6.$

107. $x^4-1.$ **108.** $x^5+32.$ **109.** $x^4-16y^4.$

110. $1-(x+y)^3.$ **111.** $(a+b)^4-1$ **112.** $1-x^5y^5.$

73. 以下將述兩重要公式。以資學生記憶。

例 1. 求 $a^4+a^2b^2+b^4$ 之因數。

$$a^4+a^2b^2+b^4=\boxed{a^4+2a^2b^2+b^4}-a^2b^2.$$

$$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2. \quad (a^2+2a^2b^2+b^2)$$

$$\surd=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab) \text{ (答數)}.$$

例 2. 求 ~~$a^3+b^3+c^3-3abc$~~ 之因數。

由乘法 (33 節) 及除法 (38 節) 得

$-c(b+c)$ $a(c(+b)$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab) =$$

(答數)。

例如 求之 求下列 式

cab ca abc
cb^2 cab ab
c^2b ca ab^2
cab abc

例題

下列各式。試求其因數。[113 至 122]

113. $a^7-1.$ **114.** $2^{3x+3}-64.$

115. $16a^4+36a^2b^2+81b^4.$ **116.** $b^3+c^3-1+3bc.$

117. $a^3-1+c-ac.$ **118.** $x^6+y^3+1-3x^2y.$

119. $x^3+y^3+1-3xy.$ **120.** $36a^4-21a^2+1.$

$(x-1)(x^2+1x\ 1)=x^3+1.$

121. $ab(x^2-y)^2+xy(a^2-b^2)$. **122.** $\frac{1}{8}ab^2-\frac{3}{25}ac^2$.

123. $(a^2-b^2)(c^2-d^2)$. 試以兩平方之差表之。

124. 試求下列兩式之因數。

(1) $a^3-27b^3+c^3+9bc$.

(2) $a^3-b^3-c^3-3abc$.

125. 試將 x^8+81x^4+6561. 分解爲三因數。

126. 試將 $(a^4-2a^2b^2-b^4)^2-4a^4b^4$. 分解爲四因數。

127. 試將 $4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$. 分解爲四因數。

74. 利用因數分解之代數計算

例 1. 求下列二式之積。

$$(3+x-2x^2)^2-(3-x+2x^2)^2 \text{..........} (1)$$

$$(3+x+2x^2)^2-(3-x-2x^2)^2 \text{..........} (2)$$

(1) 式 $=(3+x-2x^2+3-x+2x^2)$

$(3+x-2x^2-3+x-2x^2)$

$=6(2x-4x^2)$

$=12x(1-2x)$.

(2) 式 $=(3+x+2x^2+3-x-2x^2)$

$(3+x+2x^2-3+x+2x^2)$

$=6(2x+4x^2)$

$=12x(1+2x)$.

故所求之積 $=12x(1-2x)\times12x(1+2x)$

$=144x^2(1-4x^2)$ (答數).

例 2. 試以 $3x^2+5x-2$ 除 $2x^2+x-6$ 及 $6x^2-5x+1$ 之積。

$(2x^2+x-6)(6x^2-5x+1)$

$=(2x-3)(x+2)(3x-1)(2x-1)$.

$3x^2-5x-2=(3x-1)(x+2)$.

故所求之商為 $(2x-3)(2x-1)$.

例 3. $x+y=a$ $x-y=b$ 時。試證

$4(x^4-6x^2y^2+y^4)=6a^2b^2-a^4-b^4$

$x^4-6x^2y^2+y^4=x^4-2x^2y^2+y^4-4x^2y^2$

$=(x^2-y^2)^2-\frac{1}{4}(4xy)^2$

$=\{(x+y)(x-y)\}^2-\frac{1}{4}\{(x^2+y)^2-(x-y)^2\}^2$

$=(ab)^2-\frac{1}{4}(a^2-b^2)^2$

故 $4(x^4-6x^2y^2+y^4)=4a^2b^2-(a^2-b^2)^2$

$=6a^2b^2-a^4-b^3$.

例題

123. 求 x^2+ax+a^2, x^2-ax+a^2, $x^4-ax^2+a^4$ 之連乘

積。

129. $x^8+16a^4x^4+256a^8$ 以 $x^2+2ax+4a^2$ 除之。

130. 試以 x^2+5x+6 除 $x^2+7x+10$ 及 $x+3$ 之積。

131. 試以 x^2+x-2 除 $2x(x^2-1)(x+2)$.

132. $x+1$ 之平方。可以 $(x^3+x^2+4)^3-(x^3-2x+3)^3$ 除盡。試證之。

133. $2b+2d$ 為 $(a+b+c+d)^3-(a-b+c-d)^3$ 之一因數。試證之。

134. $x+y=m$ 及 $x-y=n$ 時。試將 x^3+y^3 以 m 與 n 表之。

75. 利用因數分解求方程式之根

例 1. 求方程式 $(x-1)(x-2)=0$ 之根。

此方程式之根為 1 及 2。何則。$x=1$ 能使其左邊為 $0\times(-1)$. 即等於 0. $x=2$ 能使其左邊為 1×0。亦等于 0。而除此以外。則別無他值可使左邊為 0 故也。

例 2. 試解方程式 $x^3-9x^2+20x=0$.

因 $$x^3-9x^2+20x=x(x^2-9x+20).$$
$$=x(x-4)(x-5).$$

故 $$x(x-4)(x-5)=0.$$

故所求之根。由

$$x=0,\quad x-4=0,\quad x-5=0$$

可以得之。即 0, 4, 5,

【注意】由前例。知凡含 x 之方程式。若以 a 爲根。則將各項。悉集之一邊。必可以 $x-a$ 除盡。

例　題

試解下列各方程式。

135. $(x-2)(2x+3)=0.$　　**136.** $5y(y-11)=0.$

137. $x(x-5)(3-2x)=0.$　　**138.** $x^2+7x+10=0.$

139. $10x^2+7x-12=0.$　　**140.** $x^3+6x^2-16x=0.$

141. $(x^2-4)(x^2-9)=0.$

142. $(9x^2-25)(12-5x-2x^2)=0.$

第三章　最高公因數

76. 因數及公因數　某整式之因數云者。乃能除盡此整式之式之謂。設二以上之整式。有公共之因數時。則稱之曰公因數。

【注意】本編中所謂式,均指整式而言。

77. 最高公因數　二以上整式之最高公因數云者。乃整式各因數之中。其次數最高。而數字係數最大者也。

為簡便起見。最高公因數。常略記作H. C. F.(參照卷末之中西名詞對照表.)

78. 求二式之最高公因數。例分兩類,

I. 可由視察知其因數之例.

例 1. 求x^2y^5z及$x^3y^3z^4$之H. C. F.

因　$x^2y^5z=xxyyyyyz$.

$x^3y^3z^4=xxxyyyzzzz$.

$\therefore$ 所求之H. C. F. $=xxyyyz$.

$=x^2y^3z$ (答數).

故二以上整式之H. C. F. 可如下法求之。

分解各式為最簡因數。取其公有之因數相乘即得。若各式有數字係數。則再以

數字係數之最大公約數乘之可也。

【注意】二式之最高公因數。與二式之數值之最大公約數。大有區別。例如 a^3 與 a^2 之最高公因數爲 a^2。若令 a 之值爲 $\frac{1}{2}$。則 a^2 爲 $\frac{1}{4}$。即最高公因數 a^2 $(\frac{1}{4})$。比其一因數 a $(\frac{1}{2})$ 小明矣。

例 2. 求 $36x^2y^5z$ 及 $20x^3y^3z^4$ 之 H. C. F. 所求之 H. C. F. 爲 $4x^2y^3z$.

例 3. 求 x^2-1 及 x^2+x-2 之 H. C. F.

因
$$x^2-1=(x-1)(x+1).$$
$$x^2+x-2=(x-1)(x+2).$$

$\therefore$ 所求之 H. C. F. $=x-1$ (答數).

例題

下列各題試求其 H. C. F.

1. $ab^2mx,\ bcm^2y.$　　**2.** $15x^3y,\ 27xy^2z.$

3. $a^2bx^2,\ ab^2x^2,\ a^2b^2x,$　　**4.** $2x^4,\ 3x^5,\ x^3,\ 5x^6.$

5. $56xy^3,\ 70x^3y,\ 98x^3y^3.$　　**6.** $20a^3x^4b,\ 40ax^3,\ 10a^2x^3.$

7. $27(x-y)^3(a+x)^2(b+x),\ 18(x-y)^2(x+b)(x+a).$

8. $x^2+xy,\ x^2+2xy+y^2.$　　**9.** $a^2-ab,\ a^2-2ab+b^2.$

10. $a^3+b^3,\ a^2-b^2.$　　**11.** $16a^4-81b^4,\ 4a-6b.$

12. $a^3+3a^2b+2ab^2,\ a^4+4a^3b+3a^2b^2.$

13. $x^4+x^2-6,\ x^4-3x^2+2.$

14. $3x^4+8x^3+4x^2,\ 3x^5+11x^4+6x^3,\ 3x^4-16x^3-12x^2.$

15. $ab(x+a),\ a\{x^2+(a-b)x-ab\},\ b(x^2+ax).$

79. II. 不能由視察知其因數之例。

此類之式。可由下列三定理。求其H. C. F.

(1) 某式之因數。亦爲其倍數之式之因數。

(2) 兩式之公因數。亦爲其和與差或其倍數式之和與差之因數。

(3) 兩式中一式以他式所未含之因數乘除之。則兩式之最高公因數亦不變。

以上三定理可證之如下。

(1) 設整式p爲整式A之因數。則亦爲mA之因數。因p爲A之因數。故以p除A所得之商命爲a。則

$$A=ap$$

$$\therefore\ mA=map.$$

故p亦能除盡mA。得商爲ma。即p亦爲mA之因數。

(2) 設整式p為整式A及整式B之因數。則亦為$A\pm B$或$mA\pm nB$之因數。

因p為A,B之因數。故可命

$$A=ap.$$

$$B=bp.$$

$$\therefore\quad A\pm B=(a\pm b)p.$$

又 $$mA\pm nB=(ma\pm nb)p.$$

故$A\pm B$乃及$mA\pm nB$。均能以p除盡。即p為$A\pm B$之因數。亦為$mA\pm nB$之因數。

(3) 設M無A之因數。則A與B之最高公因數。亦等於A與MB之最高公因數。

因最高公因數。乃同時能除盡AB者也。而M無A之因數。則A與M無公因數。故雖乘M於B。决不能影響於A與B之公因數。更不能影響於A與B之最高公因數。

同理可證以M除B。亦不影響於A與B之最高公因數。

今將先述算術上求二數最大公約數之例。以資比較。

例如 求18與48之最大公約數。可演算如次。

1	18	48	2
	12	36	
	6	12	2
		12	
		=	

6爲6自身與12之公約數。故由(2)，可知亦爲6+12即18之約數。

6爲18之約數。故由(2)可知亦爲18×2即36之約數。又由(2)可知更爲36+12即48之約數。

因之6爲18與48之公約數。

又凡18與48之公約數。由(1)可知爲18×2即36之約數。且由(2)可知爲48—36即12之約數。

如此凡18與48之公約數。必爲18與12之公約數。故由(2)可知爲18—12即6之約數。

故18與48之最大公約數。均含於6之中。不能比6更大。因之6既爲18與48之公約數。亦爲18與48之最大公約數。

故任意除數。與其所對應之被除數之最大公約數。即爲所求之最大公約數。

今設A,B各爲依某公有文字降冪之順排列之式。且假定B之次數。不大於A。

以B除A。所得之商爲Q。剩餘爲R。則

$$\begin{array}{l} B)A(Q \\ \underline{\quad BQ\quad} \\ \quad\ R \end{array}$$

因之$R=A-BQ$及$A=BQ+R$。

凡B與R之公因數。由(2)可知爲$BQ+R$即A之因數。又A與B之公因數。由(2)可知爲$A-BQ$即R之因數。

故A與B之公因數。同於B與R之公因數。因之A與B之H. C. F.同於B與R之H. C. F.

今B以R除之。所得之剩餘爲S。則準前同理R與S之H. C. F.同於B與R之H. C. F.即同於A與B之H. C. F.

如是順次推算。可知

任意除數與其所對應之被除數之H. C. F.即爲所求之H. C. F.

若於運算之某階級。得除盡無剩餘時。則該處之除數。即爲被除數之因數。

故該處之除數。即爲除數自身及被除數之H. C. F.因之最後之除數。即爲所求之H. C. F.

【注意】由除法性質。剩餘之次數。漸次減小。必至於某階級。可以除盡。或得不含字母之剩餘爲止。

若得不含字母之剩餘。則題設二式。除1以外。別無公因數。

例 1. 求 $2x^2+x-3$ 與 $4x^3+8x^2-x-6$ 之 H.C.F.

$$\begin{array}{r|r|r|l}
x & 2x^2+x-3 & 4x^3+8x^2-x-6 & 2x \\
 & 2x^2+3x & 4x^3+2x^2-6x & \\ \hline
 & -2x-3 & 6x^2+5x-6 & 3 \\
-1 & -2x-3 & 6x^2+3x-9 & \\ \hline
 & & 2x+3 &
\end{array}$$

故所求之 H. C. F. $=2x+3$ (答數).

例 2. 求 $12x^4+30x^3-72x^2$ 與 $32x^3+84x^2-176x$ 之 H. C. F.

先將二式去其單項因數。即

$$12x^4+30x^3-72x^2=6x^2(2x^2+5x-12).$$

$$32x^3+84x^2-176x=4x(8x^2+21x-44).$$

因 $6x^2$ 與 $4x$ 之最高公因數為 $2x$。故求括弧內二式之 H. C. F. 再以 $2x$ 乘之.即得所求之 H. C. F.

$$\begin{array}{r|r|r|l}
2x & 2x^2+5x-12 & 8x^2+21x-44 & 4 \\
 & 2x^2+8x & 8x^2+20x-48 & \\ \hline
-3 & -3x-12 & x+4 & \\
 & -3x-12 & & \\ \hline
\end{array}$$

故所求之 H. C. F. $=2x(x+4)$ (答數).

例 3. 求 $4x^2-8x-5$ 與 $12x^2-4x-65$ 之 H. C. F.

$$
\begin{array}{r|r|rr|l}
2x & 4x^2-8x-5 & & 12x^2-4x-65 & 3 \\
 & 4x^2-10x & & 12x^2-24x-15 & \\
\hline
1 & 2x-5 & 10 & 20x-50^{※} & \\
 & 2x-5 & & 2x-5 & \\
\end{array}
$$

故所求之 H. C. F. $=2x-5$ (答數).

※以 10 除之,而無碍於 H. C. F. 者,由 79 節之 (3),可以知之。

例 4. 求 $8x^2+2x-3$ 與 $6x^3+5x^2-2$ 之 H. C. F.

以前式除後式,得 8 除 6,不能除盡,故後式須先以 4 乘之,然後實行除法。

$$
\begin{array}{r|r|rr|l}
4x & 8x^2+2x-3 & & 6x^3+5x^2\qquad-2 & \\
 & 8x^2-4x & & 4 & \\
\hline
 & 6x-3 & & 24x^3+20x^2\qquad-8 & 3x \\
 & 6x-3 & & 24x^3+6x^2-9x & \\
\hline
 & & & 14x^2+9x-8 & \\
 & & & 4 & \\
\hline
 & & & 56x^2+36x-32 & 7 \\
 & & & 56x^2+14x-21 & \\
\hline
 & & 11 & 22x-11 & \\
\hline
 & & & 2x-1 & \\
\end{array}
$$

故所求之H. C. F. $=2x-1$ (答數).

例　題

下列各題。試求其二式之H. C. F.

16. $x^2-5x+6,\ x^2+3x-10.$

17. $18a^2-9a-14,\ 30a^2-59a+28.$

18. $18x^4-33x^2+14,\ 3x^4+x^2-2.$

19. $x^3+4x-5,\ x^3-2x^2+6x-5.$

20. $2x^3+3x^2-x-12,\ 6x^3-17x^2+2x+15.$

21. $x^3-3x^2+4,\ x^3-2x^2-4x+8.$

22. $x^2-3x+2,\ x^4-6x^2+8x-3.$

23. $2a^2+3a-2,\ 4a^3+16a^2-19a+5.$

24. $m^4-3m^3+4m,\ 3m^4-18m^3+36m^2-24m.$

25. $x^3-(a+b-c)x^2+(ab-ac-bc)x+abc,$

$x^3-(a-b+c)x^2+(ac-ab-bc)x+abc.$

80. 三式之最高公因數 欲求三式之H. C. F. 先求二式之H. C. F. 再求此H. C. F. 與第三式之H. C. F. 即爲所求之H. C. F.

【注意】 求四式以上之H. C. F. 之法。亦準此。

例　題

試求下列各題中三式之H. C. F.

26. x^2+4x+3, x^2-4x-5, $2x^2-5x-7$.

27. $2x^2+5x-12$, $2x^2-13x+15$, $10x^2-23x+12$.

28. x^3-4x+3, $2x^3+x^2-7x+4$, x^3-2x^2+1.

29. $2x^3+5x^2-4x-10$, $2x^3+5x^2+2x+5$,

$2x^3+7x^2+7x+5$.

30. x^3+x^2-5x+3, x^3-7x+6, $x^3-x^2-10x+10$.

第四章　最低公倍數

81. **倍數及公倍數**　某整式之倍數云者。乃此整式能除盡之式之謂。設二以上整式。有公共之倍數時。則稱之曰公倍數。

82. **最低公倍數**　二以上整式之最低公倍數云者。乃各式之公倍數中。次數最低。而係數最小者也。爲簡便起見。最低公倍數。常略記作L. C. M. (參照卷末之中西名詞對照表。)

83. 求二式以上之最低公倍數。分爲兩類。

I. 可由視察知其因數之例。

例 1. 求 a^3bc, a^2bc^2, ab^2c^4 之L. C. H.

因　$a^3bc = aaabc.$

$a^2bc^2 = aabcc,$

及　$ab^2c^4 = abbcccc.$

故所求之 L. C. M. $= aaabbcccc = a^3b^2c^4$ (答數)

故二式以上之L. C. M. 可如下法求之。

分解各式爲最簡因數。取其不同之因數相乘卽得。唯同因數之中。必取其最多者。若各式有數字係數。則再以數字係數

之最小公倍數乘之可也。

例 2. 求 $2a^3bc, 3a^2bc^2, 4ab^2c^4$ 之 L. C. M. 所求之 L. C. M. 為 $12a^3b^2c^4$.

例 3. 求 $3x^2+3x-36$ 及 $2x^2-14x+24$ 之 L.C.M.

因 $3x^2+3x-36=3(x^2+x-12)=3(x+4)(x-3)$.

及 $2x^2-14x+24=2(x^2-7x+12)=2(x-4)(x-3)$.

∴ 所求之L. C. M. $=6(x-3)(x+4)(x-4)$ (答數).

例　題

下列各題。試求其 L. C. M.

31. $2a, 3b$.　**32.** $4a^3b, 2ab^2, 2ab$.

33. $7a^2b, 3a^3bx, 2a^2x^3$.　**34.** $7a^3m^2, 21x^2m^3, 343xm$.

35. $a+1, a-1, a$.　**36.** $a+b, a^2+2ab+b^2$.

37. $x+1, x^2-2x-3$.　**38.** $8a^2+16a, a^3+4a^2+4a, a$

39. $x^2+3x+2, x^2+4x+3, x^2+5x+6$.

40. $x^3+2x^2-8x-16, x^3+3x^2-8x-24$.

41. $x^2-y, ^2(x-y)^2, x^3-y^3$.　**42.** $x-a, a^2-x^2, x^4-a^4$.

43. x^2-1, x^3+1, x^3-1.

44. $6x^2-xy-y^2, 6x^2+5xy+y^2, 9x^2+6xy+y^2$.

84. II. 不能由視察知其因數之例。

先求題設二式之最高公因數。以之除其一式。更

以所得之商。乘他式。即得最低公倍數。

命 A, B 爲題設二式。H 爲其最高公因數。今以 H 除 A, B 所得之商命各爲 a, b. 則

$$A=H.a,\qquad B=H.b$$

今 a, b 之間。無公因數。故 A, B 之最低公倍數即爲 $H\,a\,b$.

85. 由前節 A, B 之最低公倍數 L. 等於 $H.a.b$.

$$\therefore\ AB=H.a.H.b=H.H.a.b=HL.$$

故任何二式之積。等於其最高公因數與最低公倍數之積。

例 求 $6x^3-11x^2y+2y^3$ 及 $9x^3-22xy^2$ 之 L. C. M. 因題設二式之 H. C. F. 爲

$$3x^2-4xy-2y^2.$$

故 $6x^3-11x^2y+2y^3=(2x-y)(3x^2-4xy-2y^2)$.

及 $9x^3-22xy^2-8y^3=(3x+4y)(3x^2-4xy-2y^2)$.

$\therefore$ 所求之 L.C.M. $=(2x-y)(3x+4y)(3x^2-4xy-2y^2)$.

【注意】 欲求二式以上之 L. C. M. 先求其二式之 L. C. M. 與第三式之 L. C. M. 次求此結果與第四式之 L. C. M. 如是遞次推求。至最後之 L. C. M. 即爲所求之 L. C. M.

例題

下列各題試求其 L. C. M. [45 至 54]

45. x^3-3x+2, x^3+2x^2-x-2.

46. x^2+x-2, x^3+2x^2+2x+1.

47. $2x^3-17x^2+19x-4$, $3x^3-20x^2-10x+27$.

48. x^3-x^2-9x+9, $x^4-4x^2+12x-9$.

49. $y^3-6y^2+11y-6$, $y^3-9y^2+26y-24$, $y^3-8y^2+19y-12$.

50. z^3-5z^2+9z-9, z^3-z^2-9z+9, $z^4-4z^2+12z-9$.

51. $x^3-ax^2+a^2x-a^3$, $x^3+ax^2+a^2x+a^3$, $x^3+ax^2-a^2x-a^3$.

52. x^4-y^4, x^3+y^3, $x^4+x^2y^2+y^4$.

53. x^2-1, x^3-1, x^3+1, x^4+x^2+1.

54. $8x^3+27y^3$, $8x^3-27y^3$, $16x^4+36x^2y^2+81y^4$.

55. 試求下列四式之最小公倍數.

$$x^2+(2b-a)x-2ab,\quad x^2-(2b+a)x+2ab.$$

$$x^2+(2b+a)x+2ab,\quad x^2-(2b-a)x-2ab.$$

雜　題　III.

1. $a=1,\ b=2,\ c=3\ d=0$ 時。求次式之數值。

$$\frac{ab+2bc-3cd}{b+c+d}+\frac{a^3+b^3-c^3}{a^2+b^2-c^2}$$

2. 試由 $(2a-b)^2$ 與 $(a-2b)^2$ 之和。減去 $2(a-b)$ 之平方。

3. 某代數式。以 x^2-2x+1 除之。得商為 x^2+2x+1 剩餘為 $x+1$. 問此代數式若何。

4. 試解方程式 $3(x+3)^2+5(x+5)^2=8(x+8)^2$.

5. 兄弟五人。自長至末。遞差二歲。又長者年齡五分之一。等於末者之年齡。問各人之年齡幾何。

6. 有火車。由甲站出發。每時之速為18公里。至乙站後。停車30分。復以每時24公里之速。開回甲站。適在最初開行後11小時抵站。問甲乙兩站之距離幾何。

7. 試將下列二式簡單之。

(1). $(x+y)(x-y)+(y+z)(y-z)+(z+x)(z-x)$.

(2). $(a+b+c+d)(a-b-c+d)-(a+b-c-d)$
$(a-b+c-d)$.

8. 試計算積 $(x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)$.

9. 試分解 $x^3-x^2y+xy^2-y^3$ 為因數。

10. 試分解 $a^2-b^2+c^2-d^2-2(ac-bd)$ 爲因數。

11. 求 $4x^3-10x^2+4x+2$ 及 $3x^4-2x^3+3x+2$ 之最高公因數。

12. 求 $ab(x^2+1)+x(a^2+b^2)$ 及 $ab(x^2-1)+x(a^2-b^2)$ 之最低公倍數。

13. 某人以其財產。分給各子。但知長子得 1000 元。又所餘七分之一。次子得 2000 元又所餘七分之一。如是遞次分之。各子所得之金適相等。問此人之財產並其子數。

14. 有鐘。時針分針秒針。均裝在一軸之上。正午時三針合一。問幾分之後。秒針適平分他二針所成之角。

15. 有三位數。其末位數字爲 2。今以此 2 置之左端首位。以原首二兩數。置之中末兩位。則所得之數。較原數少 189。問原數幾何。

16. 有六位數。一位數字爲 2。若以 2 置之首位。他數字順次降之。即爲原數三分之一。問原數幾何。

17. $x+y=2a$, $x-y=2b$ 時。求 $x^4+x^2y^2+y^4$ 之值。

18. 試解方程式 $\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{3}(x-2)+\frac{1}{4}(x-3)=0$.

19. 試計算下列二式

(1) $(x^{m+1}-4)(x^{m+1}-7)$

(2) $(2a^{2m+1}-b^{m+1})(2a^{2m+1}+3b^{m+1})$.

20. 試將下列二式化為因數。

(1) $25x^{4p}-8x^{2p}+\frac{16}{25}$.　(2) $36a^{n+2}-48a^{n}+16a^{n-2}$。

21. 試將下列二式化為因數。

(1) $(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-15$。

(2) $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$.

22. 求 $6x^3+x^2-5x-2$ 及 $6x^3+x^2-3x-2$ 之最高公因數及最低公倍數。

23. 某商人以每斤九角之酒150斤。與每斤6角之酒若干斤。混合售之。每斤8角。得利為買價之三成。問每斤6角之酒若干斤。

24. 有獵犬追狐。見狐在其前50步。但知犬行3步之間。狐行4步。唯犬2步之長。等於狐三步。問犬追及狐時。狐行若干步。

25. $2x^2-5x+9$ 及 x^2+6x-5 立方之和。可以 $3x+7$ 及 $x-2$ 之積除盡。試證之。

26. $x+y=2a$, $x-y=2b$ 時。試證

$$x^4-23x^2y^2+y^4=(7a^2-3b^2)(7b^2-3a^2).$$

27. 試解下列各聯立方程式。

(1) $\begin{cases} 5(x+y)-3(x+z)=43. \\ 2(x+y)-5(y+z)=10. \\ 4(x+z)-3(y+z)=58. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{3}=\dfrac{3y+2z}{4}=\dfrac{x+2}{2}, \\ 2x-y+5z=7. \end{cases}$

28. 下列二式試各分爲因數。

(1) $a^4+a^2b^2-b^2c^2-c^4$. (2) $a(a-2b)^3-b(b-2a)^3$.

29. 下列二方程式.試用因數分解解之。

(1) $x^2-(a-m)x=(a-1)(m-1)$.

(2) $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12=0$.

30. 求 $6x^2-13x+6$, $2x^2+5x-12$, $6x^2-x-12$ 之最高公因數。又此三式之最低公倍數。等於三式連乘。以最高公因數之平方除之。試證之。

31. 求 $x^3-9x^2+26x-24$, $x^3-12x^2+47x-60$ 之最高公因數。及其最低公倍數。

32. 求 $21x(xy-y^2)^2$, $35(x^4y^2-x^2y^4)$ 及 $15y(x^2+xy)^2$ 之最低公倍數。

第五編 分數式

86. 分數式 分數式即代數分數。以 $\frac{b}{a}$ 形狀。表二式之商者也。

被除數 a 稱爲分子。除數 b。稱爲分母。分母分子通稱之曰分數式之項。

87. 分數式之分母分子。以同數乘之或除之。其值不變。

命 $$\frac{a}{b}=x.$$

則 $$a=bx.$$

兩邊以任何數 m 乘之。

$$am=bx\times m=bmx.$$

兩邊以 bm 除之。

$$\frac{am}{bm}=x.$$

故 $$\frac{a}{b}=x=\frac{am}{bm}.$$

反言之 $$\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}=\frac{am\div m}{bm\div m}.$$

88. 分數式化爲最簡之法〔約分法〕分數式之分母分子。若絕不含公因數。則名曰最簡

之式。

今欲化分數式爲最簡式。則將分母分子化爲最簡之因數。然後消去其公因數可也。或分母分子各以其 H. C. F. 除之亦可。

例 1. $\frac{6a^3b^2c^4}{8a^2b^5c^6}=\frac{3a\times2a^2b^2c^4}{4b^3c^2\times2a^2b^2c^4}=\frac{3a}{4b^3c^2}$ (答數).

例 2. $\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-12}=\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+4)}=\frac{x-2}{x+4}$ (答數).

例 3. $\frac{x^3-4x^2+4x-1}{x^3-2x^2+4x-3}=\frac{(x^3-4x^2+4x-1)\div(x-1)}{(x^3-2x^2+4x-3)\div(x-1)}$

$$=\frac{x^2-3x+1}{x^2-x+3}\quad(答數).$$

此分母分子之 H. C. F. 爲 $x-1$。可用70節所述之法求之。

例題

下列各式試化爲最簡式。

1. $\frac{a^2x}{ax^2}$. 2. $\frac{a^2x^3}{5a^3x^2}$. 3. $\frac{4x^4m^2n^3}{8x^3m^2n^2}$.

4. $\frac{150a^3x^4z^7}{48a^4x^7}$. 5. $\frac{5(x+y)^3}{15(x+y)^2}$. 6. $\frac{x^2-1}{x^3-1}$.

7. $\frac{m-n}{2m-2n}$. 8. $\frac{a^2+ab}{a^2-ab}$. 9. $\frac{1-5a+6a^2}{1-7a+12a^2}$.

10. $\dfrac{(a^3-b^3)(a^2-ab+b^2)}{(a^3+b^3)(a^2+ab+b^2)}$. 11. $\dfrac{ax-ab}{ax+3x-3b-ab}$.

12. $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$. 13. $\dfrac{x^2-5x-14}{x^2+10x+16}$.

14. $\dfrac{x^2-(a-b)x-ab}{x^2-(a+c)x+ac}$. 15. $\dfrac{x^5-x^4y-xy^4+y^5}{x^4-x^3y-x^2y^2+xy^3}$.

16. $\dfrac{x^3-3x^2-15x+25}{x^3+7x^2+5x-25}$. 17. $\dfrac{x^4-13x^2+36}{x^4-x^3-7x^2+x+6}$.

89. 分數式化爲帶分數式(由整式與分數式二者所成之式)之法.

以分母除分子卽得。

例 1. $\dfrac{x+3}{x+1}=1+\dfrac{2}{x+1}$ (答數).

例 2. $\dfrac{x^3-1}{x+1}=x^2-x+1-\dfrac{2}{x+1}$ (答數).

【注意】由除法符號規則。

$$\frac{-2}{x+1} \text{ 與 } \frac{2}{-(x+1)} \text{ 均等於 } -\frac{2}{x+1}.$$

90. 帶分數式化爲分數式之法

將帶分數式之整式部分。以分母乘之。加原分子爲分子。再以原分母爲分母可也。

例 1. $x-5+\frac{x-3}{x-4}=\frac{(x-5)(x-4)+(x-3)}{x-4}$

$$=\frac{x^2-8x+17}{x-4}\ (答數).$$

例 2. $a-b-\frac{a^2-ab-b^2}{a+b}$

$$=\frac{(a-b)(a+b)-(a^2-ab-b^2)}{a+b}=\frac{ab}{a+b}(答數).$$

例題

下列各分數式。試化爲帶分數式。

18. $\frac{x^3+x^2-1}{x^2}$. **19.** $\frac{x^2+x-xy}{x-y}$. **20.** $\frac{a^2-b^2-a}{a-b}$.

21. $\frac{9x^2-9x+3}{x-1}$. **22.** $\frac{m^3-n^3-1}{m-n}$. **23.** $\frac{x^3+x^2-2}{x+1}$.

下列各帶分數式試各化爲分數式。

24. $x+1+\frac{3x-4}{2x}$. **25.** $a+b-\frac{2ab}{a+b}$.

26. $a+x-\frac{a^2+x^2}{a+x}$. **27.** $a^2-ax+x^2-\frac{x^3}{a+x}$.

91. 二以上之分數式化爲最低公分母之法〔通分法〕

以二分數式以上分母之最低公倍數爲分母。且與原分數式等值之分數式，稱爲有最低公分母之

分數式。

例 1 試化 $\frac{a}{yz}$, $\frac{b}{xz}$, $\frac{c}{xy}$ 爲等值分數式。且有最低公分母。

分母之最低公倍數爲xyz。故得

$$\frac{a}{yz}=\frac{ax}{xyz},\ \frac{b}{xz}=\frac{by}{xyz},\ \frac{c}{xy}=\frac{cz}{xyz}\ (\text{由 87 節}).$$

$$\therefore\ \frac{ax}{xyz},\ \frac{by}{xyz},\ \frac{cz}{xyz}\quad (\text{答數}).$$

例 2. 試化 $\frac{3x}{4a^2}$, $\frac{2y}{3a}$, $\frac{5}{6a^3}$ 爲等值分數式且有最低公分母。

最低公分母爲 $12a^3$。故所求之式如次。

$$\frac{9ax}{12a^3},\ \frac{8a^2y}{12a^3},\ \frac{10}{12a^3}$$

例 3. 試化 $\frac{2}{x^2+4x+3}$ 及 $\frac{3}{x^2+2x+1}$ 爲等值分數式。且有最低公分母。

分母之最低公倍數爲 $(x+1)^2(x+3)$。故得

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{x^2+4x-3}&=\frac{2}{(x+1)(x+3)}=\frac{2(x+1)}{(x+1)^2(x+3)}\\ \frac{3}{x^2+2x+1}&=\frac{3}{(x+1)^2}=\frac{3(x+3)}{(x+1)^2(x+3)}\end{aligned}\right\}(\text{答數}).$$

故二以上之分數式化爲等值分數式且有最低

公分母之法如下。

以各分母之最低公倍數爲公分母.再以各分母除之。用第一商乘第一分子。第二商乘第二分子.如是所得之積。更以公分母除之卽得。

例題

下列各分數式。試各化爲等值分數式。且有最低公分母。

28. $1-a,\ \frac{a^2}{a+1}$. **29.** $m,\ \frac{1+4m}{m-4}$ **30.** $\frac{15}{14xy^2},\ \frac{2x}{3y^2}$.

31. $\frac{3}{5a^2b},\ \frac{7}{15abx},\ \frac{1}{10b^2x}$. **32** $\frac{x}{x-1},\ \frac{1}{x-1},\ \frac{1}{1-x^2}$.

33. $\frac{m}{y(x-y)},\ \frac{y}{m(y-x)},\ \frac{1+m}{my}$.

34. $\frac{1}{n-m},\ \frac{2nm}{n^3-m^3},\ \frac{m-n}{n^2+nm+m^2}$.

35. $\frac{1}{(a-c)(a-b)},\ \frac{1}{(b-a)(b-c)},\ \frac{1}{(c-a)(c-b)}$.

92. 加法及減法 欲求二以上有同分母之分數式之代數和。則以分子之代數和爲分子。再以同分母爲分母可也。即$\frac{a}{d}\pm\frac{b}{d}=\frac{a\pm b}{d}$

故求二以上之分數式分母不同者之代數和。其法如下。

將各分數式化爲有最低公分母且等值之分數式。然後取其各分子之代數和爲分子。取最低公分母爲分母可也。

例 1. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd}$

$$=\frac{ad+cb}{bd}\quad(答數).$$

例 2. $\frac{a}{b^2c}+\frac{d}{bc^2}=\frac{ac}{b^2c^2}+\frac{bd}{b^2c^2}$

$$=\frac{ac+bd}{b^2c^2}\quad(答數).$$

例 3. $\frac{x}{a-x}+\frac{x}{a+x}=\frac{x(a+x)}{(a-x)(a+x)}+\frac{x(a-x)}{(a-x)(a+x)}$

$$=\frac{x(a+x)+(a-x)x}{(a-x)(a+x)}$$

$$=\frac{2ax}{a^2-x^2}\quad(答數).$$

例 4. $\frac{1}{1-x}-\frac{2}{x+1}+\frac{3x}{x^2-1}$

$$=\frac{-1}{x-1}-\frac{2}{x+1}+\frac{3x}{x^2-1}=\frac{-(x+1)-2(x-1)+3x}{x^2-1}$$

$$=\frac{1}{x^2-1}\quad(答數).$$

例題

下列各分數式試簡單之。

36. $\frac{b}{2a}+\frac{3b}{4a}-\frac{5b}{6a}$.　**37.** $\frac{5ab-3y}{20y}+\frac{3ab-5x}{4x}$.

38. $\frac{1}{x^3}-\frac{x^2-1}{x^5}$.　**39.** $\frac{a}{a-1}-1-\frac{1}{a(a-1)}$.

40. $\frac{1}{(x-y)^3}-\frac{1}{(y-x)^2}$.　**41.** $\frac{1}{(a-1)^3}-\frac{2}{(1-a)^3}$.

42. $\frac{3(2a^3+1)}{2a^3n^4}-\frac{2(3a^3x^4+2)}{5a^3x^5}-\frac{3(5x-2n^4)}{5n^4x}$.

43. $\frac{1+x}{1+x+x^2}+\frac{1-x}{1-x+x^2}$.　**44.** $\frac{2}{x}+\frac{x-6}{3x+6}-\frac{1}{x^2+2x}$.

45. $\frac{3a}{a+x}+\frac{a}{a-x}-\frac{2ax}{a^2-x^2}$.

46. $\frac{a-1}{a+1}-\left(\frac{a-1}{1-a}+\frac{a^2+1}{a^2-1}\right)$.

47. $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(a-b)}$.

48. $\frac{bc}{(c-a)(a-b)}+\frac{ca}{(a-b)(b-c)}+\frac{ab}{(b-c)(c-a)}$.

49. $\frac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\frac{a+c}{(b-c)(b-a)}+\frac{a+b}{(c-a)(c-b)}$.

50. $\frac{1}{x(x-y)(x-z)}+\frac{1}{y(y-x)(y-z)}-\frac{1}{xyz}$.

51. $\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

93. 乘法 欲求二分數式之積 $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$. 則令

$$\frac{a}{b}=x,\qquad \frac{c}{d}=y.$$

故 $\quad a=bx,\qquad c=dy.$

此二等式之積爲 $ac=bdxy.$

兩邊以 b d 除之。

$$\frac{ac}{bd}=xy.$$

唯 $$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=xy.$$

故 $$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

故欲求二分數式之積。則以分子之積爲分子。分母之積爲分母。可也.

同理推得。$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{ac}{bd}\times\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}$ 等。

又 $$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}.$$

同理推得 $$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

例 1. $\frac{2a^2b}{3cd^2}\times\frac{6c^2b}{5ab}\times\frac{5ab^2c}{8a^2c^2d^2}$

$$=\frac{2a^2b\times 6c^2d\times 5ab^2c}{3cd^2\times 5ab\times 8a^2c^2d^2}=\frac{b^2}{2d^3}\text{ (答數)}.$$

例 2. $$\frac{x^2-y^2}{x^2-3xy+2y^2}\times\frac{xy-2y^2}{x^2+xy}\times\frac{x^2-xy}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{\cancel{(x-y)}\cancel{(x+y)}\times y\cancel{(x-2y)}\times x\cancel{(x-y)}}{\cancel{(x-y)}\cancel{(x-2y)}\times \cancel{x}\cancel{(x+y)}\times(x-y)^2}$$

$$=\frac{y}{x-y}\text{ (答數)}.$$

94. **逆數**　若二數之積爲1。則此數稱爲彼數之逆數。

例如$\frac{a}{b}$之逆數爲$\frac{b}{a}$。因$\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$故也。

95. **除法**　命$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=x$

則 $$\frac{a}{b}=x\times\frac{c}{d}.$$

兩邊以bd乘之。

$$\frac{a}{b}\times bd=x\times\frac{c}{d}\times bd.$$

即 $$ad=x\times bc.$$

兩邊以bc除之。

$$\frac{ad}{bc}=x.$$

然 $$\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

因之 $x=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

$$=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}.$$

故欲以一分數式除某式。則以其逆數乘之可也。

例 1. $\frac{15a^2x^3}{8by^2}\div\frac{3a^3x^2}{4b^2y}=\frac{15a^2x^3}{8by^2}\times\frac{4b^2y}{3a^3x^2}$

$$=\frac{15a^2x^3\times 4b^2y}{8by^2\times 3a^3x^2}=\frac{5bx}{2ay}\text{(答數)}.$$

例 2. $\frac{ax}{(a-x)^2}\div\frac{ab}{a^2-x^2}$

$$=\frac{ax}{(a-x)^2}\times\frac{(a-x)(a+x)}{ab}$$

$$=\frac{x(a+x)}{b(a-x)}\text{(答數)}.$$

例　題

下列各式試簡單之。

52. $\frac{7x}{a^3}\times\frac{5ab^3}{14x^3}$　　53. $\frac{15a^3b^2}{22x^2y^5}\times\frac{14xy^2}{25a^2b}$.

54. $\frac{33b^4x^2z^5}{75a^3y^4}\times\left(-\frac{15ay^2}{22b^3z^4}\right)$.

55. $\frac{15(a^2+b^2)^2}{14a^2(a-b)}\times\frac{21a^3(a-b)^3}{10b^2(a^2+b^2)^2}$.

56. $\frac{x-3}{x+1}\times\frac{x^2+2x+1}{x^3-27}$.

57. $\dfrac{x^4-y^4}{(x+y)^2}\times\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\times\dfrac{x+y}{(x-y)^2}$.

58. $\left(\dfrac{a+1}{b+1}\right)^2\times\dfrac{b^2-1}{a^3+1}$. 59. $\left(\dfrac{a^2-b^2}{x+y}\right)^2\times\left(\dfrac{x^3+y^3}{a+b}\right)^2$.

60. $\dfrac{12x^5y^6}{35a^7b^3}\div\dfrac{18x^6y^5}{7a^4b^6}$. 61. $\dfrac{5a^2bc}{3b^2c^2a}\div\dfrac{5a^2bc^2}{3ab^2c^3}$.

62. $\dfrac{6(a^2-b^2)}{7(x^3-1)}\div\dfrac{3(a+b)}{(1-x)}$. 63. $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2+2x-15}\div\dfrac{x+4}{x+5}$.

64. $\dfrac{6x^{2n}-24}{x^{2n+3}+6x^{n+3}+9x^3}\times\dfrac{x^n+3}{x^n-2}\div\dfrac{3x^n+6}{x^{n+2}+3x^2}$.

65. $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3}\div\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}\times\dfrac{x^3+1}{x^3-1}\div\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

66. $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2+y^2}\times\dfrac{x^2+y(2x+y)}{x^3-y^3}\div\dfrac{x^3+y^3}{x^2-y(2x-y)}$.

67. $\left(x-\dfrac{xy-y^2}{x+y}\right)\left(x-\dfrac{xy^2-y^3}{x^2+y^2}\right)\div\left(1-\dfrac{xy-y^2}{x^2}\right)$.

68. $\dfrac{(x-a)^2-b^2}{(x-b)^2-a^2}\times\dfrac{x^2-(b-a)^2}{x^2-(a-b)^2}\times\dfrac{ax+a^2-ab}{bx-ab+b^2}$.

96. 繁分數式

例 1. 試將 $\dfrac{3x}{x-\frac{1}{4}}$ 簡單之.

題設分數式之分母分子以4乘之,得

$$\frac{12x}{4x-1}\text{ (答數)}.$$

例 2. 試化$\dfrac{\dfrac{a+x}{a-x}-\dfrac{a-x}{a+x}}{\dfrac{a+x}{a-x}+\dfrac{a-x}{a+x}}$爲最簡式。

此式分母分子之最低公分母爲$(a+x)(a-x)$。故分母分子各以此乘之。得

$$\text{題設分數式}=\frac{(a+x)^2-(a-x)^2}{(a+x)^2+(a-x)^2}$$

$$=\frac{a^2+2ax+x^2-a^2+2ax-x^2}{a^2+2ax+x^2+a^2-2ax+x^2}$$

$$=\frac{4ax}{2a^2+2x^2}=\frac{2ax}{a^2+x^2}\text{(答數)}.$$

例 3. 試化$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$爲最簡式。

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}}}=\frac{1}{1-\dfrac{x}{x+1}}$$

$$=\frac{x+1}{x+1-x}=\frac{x+1}{1}=x+1\text{(答數)}$$

【注意】此類之分數式。名曰**連分數式**。

例題

下列各式試簡單之。

69. $\dfrac{a+\dfrac{a^2}{c}}{b+\dfrac{bc}{a}}$. **70.** $\dfrac{\dfrac{a}{a-1}+1}{1-\dfrac{a}{1-a}}$. **71.** $\dfrac{a-\dfrac{ax}{a+x}}{a+\dfrac{ax}{a-x}}$.

72. $\dfrac{x}{1-\dfrac{1}{1+x}}$. **73.** $a+\dfrac{a}{a+\dfrac{1}{a}}$. **74.** $x-\dfrac{x}{1+x+\dfrac{2x^2}{1-x}}$.

75. $\dfrac{x}{1+\dfrac{x}{y}}+\dfrac{y}{1+\dfrac{y}{x}}-\dfrac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}$.

76. $\dfrac{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+2}{x+y}+\dfrac{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2}{x-y}$.

77. $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}+\dfrac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2(a-b)(b-c)(c-a)}$.

78. $\dfrac{\dfrac{a-b}{1+ab}+\dfrac{b-c}{1+bc}}{1-\dfrac{(a-b)(b-c)}{(1+ab)(1+bc)}}$. **79.** $\dfrac{\dfrac{1+x}{1+x^2}-\dfrac{1+x^2}{1+x^3}}{\dfrac{1+x^2}{1+x^3}-\dfrac{1+x^3}{1+x^4}}$.

80. $\dfrac{\dfrac{1}{ca}+\dfrac{1}{ab}-\dfrac{1}{bc}}{(b+c)^2-a^2}+\dfrac{\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}-\dfrac{1}{ca}}{(c+a)^2-b^2}$

$+\dfrac{\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}-\dfrac{1}{ab}}{(a+b)^2-c^2}$.

第六編 分數方程式

第一章 分數方程式

97. 分數方程式 方程式中。有分數式之分母含未知數者。名曰分數方程式。

例 1. 試解下方程式

$$\frac{3}{x+2}=\frac{2}{x+1}\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

(1) 式兩邊。用分母之最小公倍數 $(x+1)(x+2)$ 乘之。則 (1) 式變作

$$3(x+1)=2(x+2).$$

解之得 $x=1.$

驗 $\frac{3}{1+2}=1.$ 及 $\frac{2}{1+1}=1.$

例 2. 試解下方程式。

$$\frac{-2x^2}{x^2-1}+\frac{x}{1-x}=-\frac{x}{x+1}-3\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

(1) 式兩邊。以分母之最小公倍數 x^2-1 乘之。得

$$-2x^2-x(x+1)=-x(x-1)-3(x^2-1).$$

卽 $(x+1)(x-3)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$

由是得 $x=-1$ 及 $x=3.$

唯3爲適合於(1)式之根。而-1則使(1)中第一及第三分數之分母爲零。不能云爲(1)式之根。故-1爲題外之根。

今若將(1)式各項悉移之左邊。則

$$\frac{-2x^2}{x^2-1}+\frac{x}{1-x}+\frac{x}{1+x}+3=0$$

各項加之。得

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=0$$

即 $$\frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)}=0$$

即 $$\frac{x-3}{x-1}=0$$

因之 $$x-3=0$$

故 $$x=3$$

去分數方程式之分母。化爲整數方程式之法。名曰去分母。

【注意】1. 如本例後段之法。先將各項。集之左邊。上下約去同一之因數$(x+1)$。故祇得一根。爲$x=3$。

然如前段之法。方程式兩邊。以$x^2-1=(x-1)(x+1)$乘之。則消去分母。而$(x+1)$之一因數。尚遺存于式中。此題外之根$x=-1$之所由來也。

不特此也。有時分數方程式無根。例如下列方程式。

$$\frac{x^2}{x-1}=2+\frac{1}{x-1}$$

移項得

$$\frac{x^2-2x+1}{x-1}=0$$

即 $$\frac{(x-1)^2}{x-1}=0$$

∴ $$x-1=0$$

而 $x=1$ 時。原方程式分數之分母爲零。故不與原方程式合。故原方程式無根。

【注意】2. $\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}$ 之中。若令 $x=-1$。則變爲 $\frac{0}{0}$。此符號名曰不定符號。因無論乘何數於0。終等於0故也。然若 $x+1$ 實非零時。則 $x+1$ 無論爲如何小數。此分數式之分母分子。總可以 $x+1$ 約之。因之 $x+1$ 爲極小之數時。

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\frac{x-3}{x-1}.$$

是以 x 若漸漸與 -1 相近。至其極端。分數式之值。

乃等於2。

又如$\frac{x+3}{x-2}$之中。若$x=2$。則變爲$\frac{5}{0}$(卽$\frac{m}{0}$之形狀)。卽此時分數式無數值。以無論乘何數於0。終不能得5故也。因之$\frac{5}{0}$之符號。名曰不能符號。

98. 如前例。去分數方程式之分母時。往往得題外之根。故分數方程式。可如下法解之。

將各項悉集之一邊。化爲一分數式。若分母分子有公約數則去之。然後令分子等於0。可也。

或先去分母。得整方程式。解之。若有根能使分母之最小公倍數爲0。則須驗其合於原式者。然後用之。他根則直用之可也。

例 3. 試解方程式 $\frac{7x+10}{x-2}=\frac{5x}{12}+\frac{35}{6}$.

以$12(x-2)$乘各項。得

$$84x+120=5x^2-10x+70x-140.$$

卽　$5x^2-24x-260=0.$

因數分解得

$$(x-10)(5x+26)=0.$$

因之 $x=10$ 及 $x=-\frac{26}{5}$.

然 10 及 $-\frac{26}{5}$ 均不使 $12(x-2)$ 爲零。故均爲題設方程式之根。

例 4. 試解方程式 $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-8}$.

左右各化爲一分數式。得

$$\frac{-2}{(x-2)(x-4)}=\frac{-2}{(x-6)(x-8)}.$$

兩邊以 -2 除之。

$$\frac{1}{(x-2)(x-4)}=\frac{1}{(x-6)(x-8)}.$$

去分母。得 $(x-6)(x-8)=(x-2)(x-4)$.

故 $$x^2-14x+48=x^2-6x+8.$$

即 $$-8x=-40.$$

$\therefore$ $$x=5.$$

5 不使分母之最小公倍數 $(x-2)(x-4)(x-6)(x-8)$ 爲 0。故爲題設方程式之根。

【注意】分數方程式中。有時爲方便起見。並不左

右各相加而化爲一分數式。

例 5. 試解方程式 $\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{x-1}+10$.

移項相加。得 $\frac{x^2-1}{x-1}=10$.

即 $x+1=10$.

$\therefore$ $x=9$

【注意】如上例。有時爲便宜起見。將含未知數之項。集之一邊。既知數置之他邊。

例 6. 試解方程式 $\frac{x-2}{x-4}+\frac{x-3}{x-5}=2$.

將題設之式。變爲

$$1+\frac{2}{x-4}+1+\frac{2}{x-5}=2.$$

即 $\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-5}=0$.

去分母。得 $x-5+x-4=0$.

$\therefore$ $x=\frac{9}{2}$.

【注意】如上例。分數式可除者。則以分母除分子。化爲帶分數可也。

例　題

試解下列各方程式。

1. $\frac{12}{x}=4.$

2. $5-\frac{3}{x}=2.$

3. $\frac{5x-5}{x+1}=3.$

4. $\frac{x}{1+2x}=\frac{1-2x}{4(1-x)}.$

5. $\frac{x-1}{x-3}=\frac{x-4}{x-2}.$

6. $\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{x}=1.$

7. $\frac{x^2-x-1}{x^2-x}=\frac{1}{x}-\frac{2}{x-1}.$

8. $\frac{1}{1+x}+\frac{3}{1-x}=\frac{24}{1-x^2}.$

9. $\frac{x-3}{x^2-9}-\frac{12-9x}{x^2-36}=\frac{3x-27}{x^2-81}.$

10. $\frac{3x-1}{(x-2)(x+3)}=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x+3}+\frac{2}{5}.$

11. $\frac{7}{6x+30}+\frac{3}{4x-20}=\frac{15}{2x^2-50}.$

12. $\frac{6}{x-5}-\frac{9}{x-3}=\frac{1}{x-7}-\frac{4}{x-1}.$

13. $\frac{x+8}{x-5}-\frac{x+6}{x-6}+\frac{x+4}{x-7}=\frac{x+5}{x-5}-\frac{x+2}{x-6}+\frac{x+3}{x-7}.$

14. $\frac{x+5}{x-7}-\frac{x+3}{x-8}+\frac{x+1}{x-9}=\frac{x+2}{x-7}-\frac{x-1}{x-8}+\frac{x}{x-9}.$

第二章　字母方程式

99. **字母方程式**　方程式中之既知數。係以字母表之者曰。字母方程式。

例 1. 試解方程式 $mx=nx+d$.

移項得　$mx-nx=d$.

即　$(m-n)x=d$.

$\therefore$　$x=\dfrac{d}{m-n}$.

【注意】 設 $d\neq0$ 而 $m=n$ 時。題設方程式。不能成立。故此類之方程式。謂之不能。

若 $d=0$ 而 $m=n$ 時。不論 x 之數值如何。均適合於題設方程式。故此類之方程式。謂之不定。

例 2. 試解方程式 $a+\dfrac{1-a^2}{x}=1$.

移項得　$\dfrac{1-a^2}{x}=1-a$.

兩邊以 $1-a$ 除之。

$$\frac{1+a}{x}=1.$$

$\therefore$　$x=1+a$.

【注意】 $1-a=0$ 即 $a=1$ 時。題設方程式。變爲恒等

式。即爲不定。

例題

試解下列各方程式。

15. $mx+a=b$.

16. $a-bx=c$.

17. $x-ax+1=bx$.

18. $a+\frac{b}{x}=c$.

19. $\frac{a}{x}+b=\frac{b}{x}+a$.

20. $\frac{a-bx}{ax-b}=\frac{3}{4}$.

21. $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}=a^2+b^2$

22. $\frac{b-c}{bx-c}=\frac{a+c}{ax+c}$.

23. $(x+a)^2=(x-b)^2$.

24. $(x+a)^2=5a^2+(x-a)^2$.

25. $x(x-a)+x(x-b)=2(x-a)(x-b)$

26. $(a+x)(b+x)-(c-x)(d-x)=0$.

27. $ax(x+a)+bx(x+b)=(a+b)(x+a)(x+b)$.

28. $\frac{mx-a-b}{nx-c-d}=\frac{mx-a-c}{nx-b-d}$.

29. $\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-a+c}=\frac{1}{x-b-c}-\frac{1}{x-b}$.

30. $\frac{a+x}{a^2+ax+x^2}+\frac{a-x}{a^2-ax+x^2}=\frac{3a}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}$.

$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

第三章　分數方程式及字母方程式之應用

100. 應用問題之解法

例 1. 有分數。若化為最簡式。則為 $\frac{1}{5}$. 若自其各項減 1. 化為最簡式。則為 $\frac{1}{6}$. 試求此分數

解　命所求分數之分子為 x。則分母 5x。

由題意得

$$\frac{x-1}{5x-1}=\frac{1}{6}.$$

解之得　$x=5.$

故所求分數為 $\frac{5}{25}.$

驗　$\frac{5}{25}=\frac{1}{5}.\quad \frac{5-1}{25-1}=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}.$

例 2. 有甲乙二人。甲 a 歲。乙 b 歲。問幾年之後。甲年為乙年之 n 倍。

解　命所求年數為 x。則彼時甲為 $a+x$ 歲。乙為 $b+x$ 歲。

由題意得

$$a+x=n(b+x).$$

解之,得 $$x=\frac{a-nb}{n-1}.$$

例如 $a=40$, $b=10$, $n=3$, 則 $x=5$.

討論※ $n>1$ 時,分母恆為正,故若 $a>nb$, 則 x 之值為正,故合於題意之年數在未來,若 $a=nb$, 則 x 之值為 0,故合於題意之年數即現在,又若 $a>nb$, 則 x 之值為負,故合於題意之年數在過去,所謂過去,亦限於甲乙既生之後為止,否則不成問題矣。

例題

31. 加何數於 $\frac{2}{7}$ 之分母分子,能等於 $\frac{3}{4}$。

32. 有某數,與其逆數 7 倍之和為 8,試求其數。

33. 有火車,於若干小時內,行 200 公里,若每小時之速度,增加 5 公里,則以前同時間,可多行 40 公里,問此火車每小時之速。

34. 有三位整數,其數字自左而右,漸次多 1,而本數以其數字之和除之,得商 26,試求此數。

35. 以銀 72 元,分給若干人,若以銀 144 元,分給比前較多 3 人,則每人所得為 4 元,試求其人數。

※討論一事,現今能習最佳,否則可暫置之。

36. 本宜以某數除$\frac{1}{2}$。今因差誤。乃以某數加諸$\frac{1}{2}$。而所得結果亦同。問此係何數。

37. 有輪船。在靜水中每小時可行20海里。今行於流水之中。若以順流而下可行72海里之時間。逆流而上。可行48海里。問每時水流若干海里。

38. 有相隣兩整數。其和爲n。問此二整數若何。

39. 問n鐘後。時鐘二針相合之時間。本題結果中。試順次以$n=1, 2, 3, \ldots\ldots, 11, 12$代入驗之。

40. 有人購甲乙二種葡萄酒。共計14瓶。但知甲總價9元。乙總價12元。一瓶之價。甲乙相等。問甲乙二種之瓶數。

41. 有大小二車輪。大輪周較小輪周多4尺。小輪行1200尺時。大輪行1500尺。問兩輪周各幾尺。

42. 有二位整數。加位數字比減位數字多2又加位數字與減位數字互易。以原數除之。即得$\frac{23}{32}$。問原數幾何。

43. 甲乙丙兄弟三童。平分蘋果若干個。因蘋果之數。不能以3除盡。故丙云若以a個給丁妹。則三人可以平分。甲云如丙弟言。幷以吾三人所得n分之一與之。則四人平均。問蘋果之數。

本題結果。試以 $a=5$ $n=9$ 代入驗之。

44. 汽車與自行車競走。汽車每時之速。比自行車快10公里。又汽車以自行車行63公里之時間。加6小時。可行279公里。問汽車每時之速。

45. 有水槽具甲乙丙三管。甲管注滿時間。需乙管注滿時間之半。乙管注滿時間。需丙管注滿時間三分之二。今三管同時並開。6小時注滿。問各管注滿之時間各幾何。

46. 有圓環形之路。設甲乙丙三郵政局。乙至甲15公里。同向自丙至乙13公里。又同向自甲至丙14公里。今有郵差二名。自甲局起。乘自行車向相反方向而行。至乙局相會後。復以相反方向向甲局而進。其快者比慢者早7小時抵局。問二人每時之速各幾何。

47. 有人以其財產分給各子。長子得 d 元。又其餘 n 分之一。次子得 $2d$ 元。又其餘 n 分之一。三子得 $3d$ 元。又其餘 n 分之一。如是遞次分之。其所得均相等。問財產之總數。

本題結果。以 $d=1500$, $n=11$ 及 $d=2000$, $n=6$, 代入驗之。

48. 正午至現在之時間。適爲現在至正子時間之 m 倍。問現在何時。

49. 甲童語乙童。汝試默思一數加 3。其和以 2 乘之。其積加 4。以 2 除之。得商減 1。再以 4 乘之。其結果加 4。又以 4 除之。試以其數告余。余將猜得汝所默思之數。乙告之曰。d。問甲當謂乙所想像之數爲何。

50. 寒暑表中。華氏之 32 度。與攝氏之零度相當。華氏之 212 度與攝氏之 100 度相當。試求華氏之度數化攝氏度數之公式。

又問二表有相同之度數否。

第四章 聯立一次方程式

101. 聯立二元一次方程式之根之公式

若將聯立二元一次方程式。左右整頓之。則得普通形狀之式。爲

$$ax+by=c \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$a'x+b'y=c' \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

其解法如下。

今欲消去 y。則於 (1) 之兩邊。以 b' 乘之。(2) 之兩邊。以 $-b$ 乘之。相加得

$$(ab'-a'b)x=cb'-c'b \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

兩邊以 $ab'-a'b$ 除之。得

$$x=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}.$$

又消去 x。則於 (1) 之兩邊。以 $-a'$ 乘之。(2) 之兩邊。以 a 乘之。得

$$(ab'-a'b)y=ac'-a'c \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

兩邊以 $ab'-a'b$ 除之。得

$$y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}.$$

故其根爲

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{cb'-c'b}{ab'-a'b} \\ y &= \frac{ac'-a'c}{ab'-a'b} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

此卽聯立二元一次方程式之根之公式也。

驗 $$a\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}+b\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}=c.$$

$$a'\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}+b'\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}=c.$$

【注意】 若 $ab'-a'b=0$. 則 (3) (4) 左邊均爲 0。此時 (5) 之公式。不能通用。

例 1. 試解下之聯立方程式。

$$\begin{cases} ax+by=c. \\ bx+ay=c. \end{cases}$$

解 以 b,a 代 a',b', 以 c 代 c', 則得

$$x=\frac{ca-cb}{a^2-b^2}$$

$$y=\frac{ac-bc}{a^2-b^2}.$$

卽 $$x=y=\frac{c}{a+b}$$ (此結果在 $a^2-b^2=0$ 時。不能通用)。

例 2. 試解下之聯立方程式

$$\begin{cases} a^2x+b^2y=c^2 \\ ax+by=c. \end{cases}$$

解根之公式中。以 a^2, b^2 各代 a', b', c^2 代 c'，則得

$$x=\frac{cb^2-c^2b}{ab^2-a^2b}$$

$$y=\frac{ac^2-a^2c}{ab^2-a^2b}.$$

即 $$x=y=\frac{c(b-c)}{a(b-a)}.$$

例題

試解下列各聯立方程式

1. $\begin{cases} x+y=2a \\ ax-by=bx+ay. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2 \\ bx-ay=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y=a+b \\ bx+ay=2ab \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1 \\ \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} (a+c)x-by=bc \\ x+y=a+b. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+y=c \\ ax-by=c(a-b). \end{cases}$

7. $\begin{cases} (a+b)x-(a-b)y=4ab \\ (a-b)x+(a+b)y=2a^2-2b^2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} (a+h)x+(b-h)y=c \\ (b+k)x+(b-k)y=c. \end{cases}$

102.　聯立一次方程式之雜例　聯立一次方程式中。有須用特別方法。以求其根者。茲舉數例如下。

例 1.　試解下之聯立方程式

$$\begin{cases}\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=m\\[2mm]\dfrac{c}{x}+\dfrac{d}{y}=n.\end{cases}$$

解　此類之聯立方程式。可視$\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$爲未知數以解之。今命 $X=\frac{1}{x}$, $Y=\frac{1}{y}$則題設方程式變作

$$aX+bY=m\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$cX+dY=n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由 (1),(2) 就 X, Y 解之。得

$$X=\frac{1}{x}=\frac{dm-bn}{ad-bc}$$

$$Y=\frac{1}{y}=\frac{-cm+an}{ad-dc}.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned}x&=\frac{ad-bc}{dm-bn}\\[2mm] y&=\frac{ad-bc}{an-cm}\end{aligned}\right\}\text{(答數)}.$$

例 2.　試解下之聯立方程式

$$\begin{cases} a(x+y)+b(x-y)=1 \\ b(x+y)+a(x-y)=1. \end{cases}$$

解　此類之聯立方程式,可視 $x+y$, $x-y$ 爲未知數以解之。

今命 $X=x+y$, $Y=x-y$, 則原方程式變作

$$aX+bY=1 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$bX+aY=1 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由 (1).(2) 解之,得

$$X=x+y=\frac{1}{a+b} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$Y=x-y=\frac{1}{a+b} \cdots\cdots\cdots\cdots (4).$$

(3),(4)相加折半得 $x=\dfrac{1}{a+b}$
(3)減(4)折半得 $y=0$　　(答數).

例 3.　試解下之聯立方程式

$$\frac{x-3}{y+7}=\frac{x-2}{x-3} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{x+3y-4}{4+y}=2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

解　由(1)去分母。

$$(x+3)(y+3)=(x-2)(y+7).$$

即　$xy+3y-3x-9=xy-2y+7x-14,$

$\therefore \qquad 5y-10x=15.$

$\therefore \qquad y-2x=-1 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

又由(2)去分母。

$$x+3y-4=2(x+y)=2x+2y.$$

$\therefore \qquad y-x=4 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

由(3),(4)解之得

$$x=5,\ y=9.\quad \text{(答數)}.$$

例 4. 試解下之聯立方程式。

$$\frac{3x+y}{9}-\frac{5y-2x}{7}=\frac{3y+1}{14} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(x+20)^2-(x+y)(x-y)=(y+22)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解　(1)式去分母簡單之。得

$$78x-103y=9 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2)式去括弧簡單之。得

$$10x-11y=21 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由(3)與(4).得 $x=12,\ y=9$　(答數).

例　題

試解下列各聯立方程式。

9. $\begin{cases} \dfrac{25}{x}+\dfrac{18}{y}=8 \\ \dfrac{15}{x}-\dfrac{12}{y}=1. \end{cases}$　**10.** $\begin{cases} (x+1)(y+5)=(x+5)(y+1) \\ xy+x+y=(x+2)(y+2) \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} \dfrac{4}{x}-3y=8 \\ \dfrac{5}{x}-6y=1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{x-a}{b}+\dfrac{y-b}{a}=0 \\ \dfrac{x+y-b}{a}+\dfrac{x-y-a}{b}=0. \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} x+\dfrac{3}{y}=\dfrac{7}{2} \\ 3x-\dfrac{2}{y}=\dfrac{26}{3}. \end{cases}$

15. $\left\{ x-\dfrac{5}{y}+7=3x-\dfrac{9}{y}-11=7x+21. \right.$

16. $\begin{cases} \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=3. \\ \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}-\dfrac{c}{z}=1. \\ \dfrac{2a}{x}-\dfrac{b}{y}-\dfrac{c}{z}=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x+\dfrac{2x+7y}{15}+17=\dfrac{y}{5}+\dfrac{4x+7}{3} \\ \dfrac{22-6y}{3}+\dfrac{5x-28}{4}=\dfrac{x+1}{6}-\dfrac{8y+5}{18}. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \frac{1}{2}(a+b-c)x+\frac{1}{2}(a-b+c)y=a^2+(b-c)^2 \\ \frac{1}{2}(a-b+c)x+\frac{1}{2}(a+b-c)y=a^2-(b-c)^2. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=2a \\ \dfrac{x-y}{2ab}=\dfrac{x+y}{a^2+b^2}. \end{cases}$

103. 應用問題之解法

例 1. 有船夫。駛船於40里之河。往復須8小時。但知此船夫以下行5里之時間。可上行3里。問此河上行下行之時間。各須幾何。

解 此船夫行於靜水中。每小時之速為 x 里。水流每小時之速為 y 里。則 $x+y$ 為此河順流而下每小時之里數。$x-y$ 為此河逆流而上每小時之里數。故由題意得

$$\frac{40}{x+y}+\frac{40}{x-y}=8 \cdots\cdots\cdots\cdots (1).$$

$$\frac{5}{x+y}=\frac{3}{x-y} \cdots\cdots\cdots\cdots (2).$$

(1)式兩邊以8除之。

$$\frac{5}{x+y}+\frac{5}{x-y}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots (3).$$

以(2)代入(3)。得

$$\frac{3}{x-y}+\frac{5}{x-y}=1.$$

即

$$\frac{8}{x-y}=1.$$

$$\therefore \quad x-y=8 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

以(4)代入(2)。得

$$x+y=\frac{40}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

由 (4), (5) 得 $x=10\frac{2}{3}$, $y=2\frac{2}{3}$ 而 $\left.\begin{array}{l} x+y=\frac{40}{3} \\ x-y=8 \end{array}\right\}$.

故上行 40 里。須 5 小時。下行 40 里。須 3 小時。

例 2. 甲乙丙三人各有銀圓若干元。甲語乙曰。汝若與予 700 元。則予所有爲汝所餘之 2 倍。乙語丙曰。汝若與予 1400 元。則予所有爲汝所餘之 3 倍。丙語甲曰。汝若與予 420 元。則予所有爲汝所餘之 5 倍。問三人各有銀圓若干。

解 設甲爲 x 元, 乙爲 y 元, 丙爲 z 元。則由題意得

$$\begin{cases} x+700=2(y-700) \cdots\cdots(1). \\ y+1400=3(z-1400) \cdots\cdots(2). \\ z+420=5(x-420) \cdots\cdots(3). \end{cases}$$

由 (1), (2), (3) 解之。得

$$x=980,\ y=1540,\ z=2380.$$

即甲爲 980 元。乙爲 1540 元。丙爲 2380 元。

例 題

20. 有大小二數。小數除大數。得商數 4. 剩餘爲 0.37. 又大數除小數。得商數 0.23. 剩餘爲 0.0149. 問

二數各幾何。

21. 有大小二數。其和爲47.小數除大數。所得之商及剩餘均5.試求二數。

22. 有二輪車。行120尺時。前輪較後輪多轉6次。若前輪增大原輪四分之一。後輪增大原輪六分之一。仍行前道則前輪較後輪多轉4次。問前後輪周各幾尺。

23. 有分數。其分母分子之差爲4.若分母減分子爲分子。分母加分子爲分母。將此分數約分之得$\frac{2}{3}$.試求此分數。

24. 有長92碼之火車。與長84碼之火車。相向而走。經一秒半鐘過盡。若並車齊走。則6秒鐘後。一車越過他車。問兩火車每秒之速各幾何。

25. 有甲乙丙三工人。共作一事。甲乙合作。12日可成。甲丙合作。15日可成。甲乙丙合作。10日可成。問甲乙丙一人獨作。各須幾日。

26. 甲乙二工人。能於30日間竣功之事。初甲獨作。20日後。乙再參入。經18日竣功。問甲乙一人獨作。各須幾日。

27. 有銀圓若干元。由若干人分擔之。若人數加

多三名。則一人之負擔減少 1 角若人數減少 2 名。則一人之負擔加多 1 角。求人數及一人之負擔幾何。

28. 有分數。分母比分子多 7. 今分子加 4. 分母加 3. 約分之。則成 $\frac{1}{2}$. 求此分數。

29. 有人以若干元。購米麥合共 55 石。米之總價。比麥多 432 元。又一石之價。米比麥貴 5 成。若以購米之銀圓購麥。購麥之銀圓購米。則合共 70 石。問此人付銀圓全數幾何。

30. 某敎習於甲乙丙三學生。與以二數。命求其積。甲演算時。有 1 應進諸前一位者。忘之。故厥後驗算時。以小數除積。得商爲 971. 剩餘爲 214. 乙演算時。於甲所誤前一位之處。有 2 應進諸前一位者。亦忘之。故厥後驗算時。得商爲 965. 剩餘爲 198. 丙演算時。於乙所誤前一位之處有 1 應進諸前一位者。亦忘之。故厥後驗算時。得商爲 940. 剩餘爲 48. 問此二數各幾何。並問甲乙丙之學生。各在何處差誤。

【注意】 二數命爲 x, y. 甲差誤之位數命爲 z 可也。

雜題 IV.

1. $x=a+1$, $y=a-2$ 時，下式之值若何。

$$x^2+y^2-4x+6y+3.$$

2. 若 $a=b=c$. 則 $(a-b+c)(a+b+c)(a^2-b^2+c^2)=a^4-b^4c^4$. 試證之。

3. 甲乙二人。前後兩次爲若干公尺之競走。初乙比甲早 t 秒出發。而負 a 公尺。次先行 $a+d$ 公尺。而負 $t-3$ 秒。求乙之速幾何。又若競走距離爲 A 公尺。試求甲之速幾何。

4. 試將 $x^2-z(a+b)x-ab(a-z)(b+z)$ 化爲因數。

5. 試將 $a^3-b^3-a(a^2+b^2)+b(a-b)^2$ 化爲因數。

6. 求 $x^4+ax^3+a^3x+a^4$ 及 $x^4+a^2x^2+a^4$ 之最小公倍數。

7. 試將下列二式簡單之。

(1) $\dfrac{44(a+c)^r}{66(a+c)^{r+2}}$.　　(2) $\dfrac{a^n+a^{n+2}}{a^{n+1}+a^{n+3}}$.

8. 試解方程式 $\dfrac{x}{b}-\dfrac{a}{b}=1-\dfrac{x}{a}$.

9. 試將下列三式簡單之。

(1) $\dfrac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)+abc}{abc}$.

(2) $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}$　　(3) $\dfrac{\dfrac{px+q}{rx+s}-\dfrac{p}{r}}{\dfrac{py+q}{ry+s}-\dfrac{p}{r}}$.

10. 試解下列各聯立方程式。

(1) $\begin{cases}\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y}=a\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=b\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=c\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x+\dfrac{y}{2}=1\\ y+\dfrac{z}{3}=1\\ z+\dfrac{x}{4}=1.\end{cases}$ (3) $\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}=a\\ \dfrac{xz}{x+z}=b\\ \dfrac{yz}{y+z}=c.\end{cases}$

11 有甲乙丙三數。其和爲 190. 甲加乙丙和之半。則爲 120. 乙加甲丙和之五分之一。則爲 90. 問各數幾何。

12. 試解下之方程式。

(1) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{3}{x-3}$ (2) $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=1,\ \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=\dfrac{a}{b}$.

13. 試將 $(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$ 化爲因數.

14. 試將下列三分數通分。

$$\frac{1}{2x^2-4x+2},\quad \frac{1}{2x^2+4x+2},\quad \frac{1}{1-x^2}.$$

15. 試將 $\dfrac{360(a-b)^{n+1}(x+y)^{n-3}}{75(a-b)^n(x+y)^{n-5}}$ 簡單之.

16. 試將下列二式簡單之。

(1) $\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{4}{a^{n-1}}+\dfrac{5}{a^{n-2}}$. (2) $\dfrac{a^{n+1}b^{n-1}}{c^{m+1}d^{m-1}}\div\dfrac{a^n b^n}{a^m d^m}$

17. 有甲丙乙山道。共長28里。甲至丙爲上。乙至丙爲下。今有某旅人。自甲至乙費去6小時。自乙返甲。費去5小時又$\frac{2}{3}$。但知此旅人上山時每小時可行4里。下山時每小時可行6里。問自甲至丙。自丙至乙各幾里。

18. 試將下列二式簡單之。

(1)
$$\frac{(a+b-c)^2-d^2}{(a+b)^2-(c+d)^2}+\frac{(b+c-a)^2-d^2}{(b+c)^2-(a+d)^2}+\frac{(c+a-b)^2-d^2}{(c+a)^2-(b+d)^2}.$$

(2)
$$\frac{1}{x^2-(a+b)x+ab}+\frac{1}{x^2-(c+a)x+ca}+\frac{1}{x^2-(b+c)x+bc}$$

19. 試將 $\frac{c}{(x-a)(a-b)}+\frac{c}{(x-b)(b-a)}$ 簡單之。

20. 有長方形之地。長闊各縮短10公尺。則面積減少14公畝。長闊各延長10公尺。則面積加多16公畝。問此地之周圍幾公尺。

21. 試解下之聯立方程式。

$$\begin{cases} x+y+z=a+b+c \\ 2x+2y-4z=2c-b-a \\ ax+by+cz=bc+ca+ab. \end{cases}$$

22. 試化下列二式爲因數。

(1) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

(2) $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$.

23. 試將下列二式簡單之。

(1) $\left\{1-\frac{1-x}{1+x}+\frac{1+2x^2}{1-x^2}\right\}\times\frac{x+1}{2x+1}$.

(2) $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}-\frac{2b}{a^2+b^2}-\frac{4b^3}{a^4+b^4}$.

24. 試將$(1+a)^2\div\left\{1+\cfrac{a}{1-a+\cfrac{a}{1+a+a^2}}\right\}$簡單之。

25. 有罈盛酒若干斤。另有罈盛水倍於酒之斤數。今自兩罈內。各挹出 6 斤。以酒注入水罈之中。又以水注入酒罈之中。如是則兩罈中酒與水之成分相同。問最初酒罈中。有酒若干斤。

26. 有甲乙二船。沿同航路相對而駛。甲船在午前 m 小時。遇某燈台。乙船在同日午前 n 小時。遇此燈台。今甲船之速。每小時 a 海里。乙船之速。每小時 b 海里。問兩船相遇之時間。

27. 有二位數。以其數字之和除此數。得商爲 7。又自其顛倒數減 12。以十位數字減去一位數字之差除之得商爲 9。問原數幾何。

28. 試解下之聯立方程式。

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x+y+z}+\dfrac{6}{2x-y}+\dfrac{1}{y-3z}=1 \\ \dfrac{6}{x+y+z}+\dfrac{4}{2x-y}-\dfrac{1}{y-3z}=3 \\ \dfrac{15}{x+y+z}-\dfrac{2}{2x-y}-\dfrac{3}{y-3z}=5. \end{cases}$$

29. 試解下之聯立方程式。

$$xyz=a(yz-zx-xy)=b(zx-xy-yz)$$
$$=c(xy-yz-zx).$$

30. 印刷術發明之西曆年號。可以四數字表之。其和爲14。而十位數字。爲一位數之半。又百位數字。爲十位數字與千位數字之和。若將原數顚倒。則比原數多4905。問印刷術發明之西曆年號。

第七編 冪及冪根

第一章 自乘法

104. **自乘法** 作某數任何乘冪之法。名曰自乘法。

【注意】自乘法不過多數相等之因數連乘而已。

105. m及n均正整數時。則得

$$(a^n)^m = a^{mn} \quad 及 \quad (ab)^n = a^n b^n.$$

何則。由指數規則。

$$(a^n)^2 = a^n \times a^n = a^{n+n} = a^{2n}.$$

$$(a^n)^3 = (a^n)^2 \times a^n = a^{2n+n} = a^{3n}.$$

$$\therefore \quad (a^n)^m = a^{mn}.$$

又 $(ab)^n = ab \times ab \times ab \cdots\cdots\cdots$(至n個).

$= (aaa\cdots\cdots$至n個$)(bbb\cdots\cdots$至n個$)$.

$= a^n b^n.$

【注意】 $(a^n)^m = a^{mn} = (a^m)^n$ 又 $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

又由乘法符號規則。凡某數偶數乘冪之符號爲正。奇數乘冪之符號與原符號同。

例題

試演出下列各式之算法。

1. $(x^3)^5$.

2. $(a^3b^2c)^4$.

3. $(-3x^2yz^3)^3$.

4. $\left(\frac{3ab^2}{5x^2y}\right)^2$.

5. $\left(-\frac{4ax}{7b^2y}\right)^3$.

6. $\left(-\frac{3a^2b^3c^4}{2x^2y^5}\right)^5$.

7. $\frac{(3a^2x^3)^2(4b^2x)^4}{(6a^3x^5)(a^2b)^2}$

8. $\frac{(4x^4y)^3}{(9x^2y^3)^4} \div \frac{(x^2y^5)^2}{(3y)^5}$.

第二章 開方法

106. 開方法 某數之 n 乘根謂取此數 n 個連乘卽得某數。從某數求此數之法。名曰開方法。

$n=2$ 時。卽二乘根。特稱之曰平方根。

$n=3$ 時。卽三乘根。特稱之曰立方根。

某數之 n 乘根。用 $\sqrt[n]{\ }$ 記號置於某數之前。以表之。名曰根號。根號上之小數字 n。名曰根指數。但平方根例不書根指數。

【注意】 $\sqrt{a+b}$ 同於 $\sqrt{(a+b)}$。蓋於根號之右。用一括線以代括弧也。若根號之右。旣無括線。又無括弧。則根號僅屬於其右側一數爲止。例如 $\sqrt{}a+b$ 乃表 a 之平方根加 b 之意。

107. 代數式之分類。 代數式中不含字母冠根號者。曰有理式。含字母冠根號者曰無理式。

自首章迄今所述之代數式。均有理式也。

108. 若 m 及 n 爲正整數時。

$$\sqrt[n]{a^{mn}}=a^m.$$

又 $$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}.$$

何則。由104節。知

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

反之卽得第一式。(由106開方定義)

第二式亦可由 $(ab)^n=a^nb^n$.

得 $$\sqrt[n]{a^nb^n}=ab=\sqrt[n]{a^n}\times\sqrt[n]{b^n}.$$

故求單式根數之法如下。

將各因數之指數。以根指數除之。再取所得各因數相乘。卽得。

【注意】1. $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$ 故 $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$.

【注意】2. 由乘法符號規則。可知以下三件。

I. 正數之偶數乘根。均有複號±。

例如 $5^2=25,(-5)^2=25$. 故自代數學上言之。某正數 a 之平方根。必有正負兩數。絕對值相同。而符號各異。通例。正者用 $\sqrt{a}$ 或 $+\sqrt{a}$ 表之。負者用 $-\sqrt{a}$ 表之。

僅冠以 $\sqrt{\ }$ 號者。例表正數。故 $\sqrt{a^2}$ 在 a 爲正數時。等於 $+a$. 在 a 爲負數時。等於 $-a$.

II. 負數無偶數乘根。

例如 $\sqrt{-x^2}$ 既非 $+x$. 亦非 $-x$. 因此二者之平方。

均得 $+x^2$ 故也。

故負數之平方根。乃別成一類。名曰**虛數**。對於虛數。普通之數稱爲**實數**，

III. 某數奇數乘根之符號。與原符號同。

某數之立方根。必有一實根。除此以外。則如後章所論。尙有二虛數（二項方程式）。唯本編及次二編。尙不論此。

如是。a^2 之兩平方根中。其爲正數者例以 $\sqrt{a^2}$ 表之。a^3 之三立方根中其爲實數者例以 $\sqrt[3]{a^3}$ 表之。則根之意義。全與算術相同。

例　題

9.　$a=3,\ b=2,\ c=1.\ x=5$ 時。求次式之數值。

(1)　$\sqrt{3a}$　　(2)　$\sqrt[3]{3a^2b^3}$　　(3)　$\sqrt{\frac{1}{5}x}$

10.　$a=10,\ b=\frac{1}{4},\ c=\frac{1}{5}$ 時。$a^5b^2c^3\sqrt{b^2-c^2}$ 之數值若何。

11.　$x=5,\ a=8$ 時。$\sqrt[3]{x^2-3a}+x\sqrt{x^2+3a}$ 之數值若何。

下列各式。試各求其所表之根。(12 至 23).

12.　$\sqrt{16a^2b^8}$.　**13.**　$\sqrt[3]{8a^3b^3}$.　**14.**　$\sqrt[3]{-64a^3b^{12}c^{15}}$.

15.　$\sqrt[6]{64x^{10}y^{11}z^2\times x^2y^7z^4}$.　**16.**　$\sqrt[4]{5\frac{1}{16}x^{4n}y^{8n-12}}$.

17. $\sqrt{\dfrac{49a^{10}}{b^4c^{10}}}$. **18.** $\sqrt[3]{-\dfrac{a^{21}x^{15}}{343}}$. **19.** $\sqrt[5]{\dfrac{a^5x^{10}}{(1-x)^{10}}}$.

20. $\sqrt[5]{0.00032a^{5n+15}b^{x(5x-10)}}$. **21.** $\sqrt[p]{a^pb^pc^{mnp}}$.

22. $\sqrt[3]{\{3\frac{3}{8}x^{3n-9}(x-1)^9\}}$ **23.** $\sqrt[m]{\{\sqrt[n]{(a^{m^n}b^{m^2n^3-m^3n^2})}\}}$.

24. $a=3,\ b=4,\ c=5,\ d=6$ 時。求次式之數值。

$$\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}+\sqrt[3]{(a^2+b^2-c^2+6d^2)}}{d-c+b-a}$$

109. 三項式之平方根

由68節知

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2.$$

及 $$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

故成完全平方之三項式之平方根。由此兩公式。可以視察得之。

例　題

試求下列各式之平方根。

25. x^2+4x+4.　　**26.** a^2-6a+9.

27. $49x^2+112xy+64y^2$.

28. $25a^2-170ab+289y^2$.

29. $(a+b)^4+2(a^2-b^2)^2+(a-b)^4$.

30. $(x-2)^2+6(x^2-5x+6)+9(x-3)^2$.

31. $(x^2-5)^2+14x(x^2-5)+49x^2$.

32. $(6x-y)^2+2(6x-y)(3x+y)+(3x+y)^2$.

33. $9\frac{b^2x^4}{a^2}-24x^2y^2+16\frac{a^2y^4}{b^2}$.

110. 四項式之立方根.

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

及 $$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

故成完全立方之四項式之立方根。由此兩公式可以視察得之。

例 題

試求下列各式之立方根。

34. $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$.

35. $a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$.

36. $1-21x+147x^2-343x^3$.

37. $8a^6-132a^4b^3+726a^2b^6-1331b^9$.

38. $x^3-3x^2(a+b)+3x(a+b)^2-(a+b)^3$.

39. $(a+b)^3-3(a+b)^2(a-b)+3(a+b)(a-b)^2-(a-b)^3$.

40. $8(a+2)^3+12(a+2)^2+6(a+2)+1$.

41. $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$.

42. $125x^3-225x^2y+135xy^2-27y^3$.

第三章 多項式之平方根及立方根

111. 多項式之平方根 茲假定為求 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 之平方根。此 A 表自根之第一項起若干項。B 表其餘之項。今若將 A, B 中之各項。按某字母降冪(或昇冪)之順列之。則 A 中任何項之次數。必比 B 中各項之次數較高(或較低)。今設已知 A 之各項。將求 B 之各項。則由 $(A+B)^2$ 之式。減去 A^2。所賸者為 $(2A+B)B$。由前式排列之方法而熟思之。即知 $(2A+B)B$ 中最高次(或最低次)之項。必由 A 之第一項與 B 之第一項之積加倍而成。

因之欲求根之第二項。即 B 中最高次(或最低次)之項。可由全式減去根之既得部分之平方。然後取其第一項。以根之第一項之二倍除之。即得。

根之第一項。顯然為題設式第一項之平方根。容易求得。則其餘各項。亦可依上法順次求得之。

例 1. 求 $4x^4-12x^2y+9y^2$ 之平方根。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^4-12x^2y+9y^2\,(2x^2-3y \quad \text{(答數)} \\
 & 4x^4 \\
\hline
4x^2-3y) & -12x^2y+9y^2 \\
 & -12x^2y+9y^2 \\
\hline
\end{array}
$$

例 2. 求 $4x^4-12x^3+29x^2-30x+25$ 之平方根。

$$
\begin{array}{lll}
 & 4x^4-12x^3+29x^2-30x+25 & (2x^2-3x+5 \\
 & 4x^4 & \text{(答數)}. \\
\hline
4x^2-3x) & -12x^3+29x^2 & \\
 & -12x^3+9x^2 & \\
\hline
4x^2-6x+5) & 20x^2-30x+25 & \\
 & 20x^2-30x+25 & \\
\hline
\end{array}
$$

例　題

試求下列各式之平方根。

43. x^4-4x^3+8x+4.　**44.** $4m^4-4m^3+5m^2-2m+1$.

45. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$.

46. $4x^4+12x^3+5x^2-6x+1$.

47. $4x^4-28x^3+51x^2-7x+\frac{1}{4}$.

48. $x^4y^4-4x^3y^3+6x^2y^2-4xy+1$.

49. $\frac{1}{9}x^4+\frac{4}{3}x^3y+2x^2y^2-12xy^3+9y^4$.

50. $49x^8+42x^6-19x^4-12x^2+4$.

51. $a^4+4a^3+4a^2+2a+4+\frac{1}{a^2}$.

52. $\frac{x^4}{y^2}-4x^3+4x^2y^2+6xy-12y^3+9\frac{y^4}{x^2}$.

112. 多項式之立方根 玆假定爲求 $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$ 之立方根。此A表自根之第一項起若干項，B表其餘之項。今若將A，B中各項，按某字母降冪(或昇冪)之順列之，則A中任何項之次數，必比B中各項之次數較高(或較低)。今設已知A之各項，將求B之各項。

則由 $(A+B)^3$ 之式，減去 A^3，所賸者爲 $(3A^2+3AB+B^2)B$。由前式排列之方法而熟思之，卽知 $(3A^2+3AB+B^2)B$ 中最高次(或最低次)之項，必由A之第一項之平方與B之第一項之積三倍而成。

因之欲求根之第二項，卽B之最高次(或最低次)之項，可由全式減去根之既知部分之立方，然後取其第一項，以根之第一項平方之三倍除之，卽得。

根之第一項，顯然爲題設式第一項之立方根，容易求得，則其餘各項，亦可依上法順次求得之。

例 1. 求 $27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$ 之立方根。

$$
\begin{array}{l|l}
 & 27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3\ (3x+2y\ \text{(答數)}. \\
 & 27x^3 \\
\hline
27x^2+18xy+4y^2) & 54x^2y+36xy^2+8y^3 \\
 & 54x^2y+36xy^2+8y^3 \\
\hline
\end{array}
$$

例 2. 求 $x^6-6x^5y+21x^4y^2-44x^3y^3+63x^2y^4-54xy^5+27y^6$ 之立方根.

	$x^2-2xy+3y^2$ (答數).
	$x^6-6x^5y+21x^4y^2-44x^3y^3+63xy^5+27y^6$
$3x^4$	x^6
$-6x^3y+4x^2y^2$	
$3x^4-6x^3y+4x^2y^2$	$-6x^5y+21x^4y^2-44x^3y^3$
$4x^2y^2$	$-6x^5y+12x^4y^2-8x^3y^3$
$3x^4-12x^3y+12x^2y^2$	$9x^4y^2-36x^3y^3+63xy^5+27y^6$
$9x^2y^2-18xy^3+9y^4$	$9x^4y^2-36x^3y^3+63xy^5+27y^6$
$3x^4-12x^3y+21x^2y^2-18xy^3+9y^4$	

例題

試求下列各式之立方根。

53. $8x^3+36x^2+54x+27$.

54. $x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1$.

55. $1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$.

56. $8x^3-12x^2+12x-7+\frac{3}{x}-\frac{3}{4x^2}+\frac{1}{8x^3}$.

57. $1+3x-8x^3-6x^4+6x^5+8x^6-3x^8-x^9$.

58. $a^{3m}-6a^{2m+1}x^n+12a^{m+2}x^{2n}-8a^3x^{3n}$.

第四章 數之平方根

113. 開平九九表 欲求一數之平方根。須將自 1 至 9 諸數之平方。記之胸中。所謂開平九九表是也。其表如下。

數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
其平方	1	4	9	16	25	36	49	64	81

蓋 1 與 100 之間。祇有 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 八數。其平方根爲整數。其餘各數之平方根。均非整數。明矣。

某整數或分數爲另一整數或分數之平方時。謂之**完全平方**。

例如 144 與 $\frac{4}{9}$ 各爲 12 與 $\frac{2}{3}$ 之平方。爲完全平方。

非完全平方之整數之平方根。如後章所述。祇能求得其近似數而已。

如是之數。名曰**平方根數**。

求平方根時。恰能得一整數或一分數者。謂之**能開盡**。否則**不能開盡**。

114. $1^2=1$,……$10^2=100$,………$100^2=10000$,……
……$1000^3=1000000$……… 故知.

由一數字所成數之平方。或爲一數字。或爲二數字。

由二數字所成數之平方。或爲三數字。或爲四數字。

由三數字所成數之平方。或爲五數字。或爲六數字。　以下準此。

故將題設之數。自右端一位起。每隔二位劃分之。最後之區。有時祇得一數字。而各區之數。即等於平方根數字之數。

例如961, 3457, 23687, 劃分之爲 9, 61; 34, 57; 2, 36, 87. 故此各數之平方根。各爲二數字三數字。明也。

115. 能開盡平方根之例

例 1. 求3969之平方根。

劃分之爲39, 69. 故平方根只二數字。其算法可仿111節演之。如下。

$$
\begin{array}{rl}
 & 39,69(\underset{a}{60}+\underset{b}{3} \\
a^2= & 36 \\ \hline
2a+b=123) & 3\;69 \\
 & 3\;69 \\ \hline
\end{array}
$$

然實地應用。以下法爲便。

39,69(63答數
36
123) 369
369

先於3900中。減去最大之平方數 60^2. 所賸者爲369. 以求得根之部分之二倍卽120除之。得根之第二位。※爲3. 以3加入 60×2. 再以3乘之。由369減之。無餘剩。故能開盡。

例 2. 求106929之平方根。

此例每隔二位劃分之。得三區。故知根之數字爲三。

$$
\begin{array}{rl}
 & 10,69,29(300+20+7 \\
 & \qquad\qquad\quad a \qquad b \\
a^2=9 & \\
2a+b=62) & 1\ 69 \\
 & 1\ 24 \\
2a+2b+c=647) & 45\ 29 \\
 & 45\ 29
\end{array}
$$

※若以此爲第二位。將依法所得之數。由賸數減之。如不受減。則漸次減1。作爲第二位可也。

然實地應用。則以下法爲便。

```
        10,69,29(327 答數
         9
       ─────────
     62)169
         124
       ─────────
   ※647) 4529
          4529
       ─────────
```

※此段演算。係以既知根 320 之 2 倍。除賸數 4529 得 7. 加入 2×320 中。爲除數。

例 3. 求 50126400 之平方根。

```
        50,12,64,00(7080 答數
        49
      ─────────────
 1408)  1 12 64
        1 12 64
      ─────────────
```

例 4. 求 52.2729 之平方根。

```
        52.27,29(7.23 答數
        49
      ───────────
  142)  3 27
        2 84
      ───────────
 1443)   43 29
         43 29
      ───────────
```

【注意】 $0.1^2=0.01$, $0.01^2=0.0001$, $0.001^2=0.000001$

………………………

故小數須在小數點下向右。每隔二位劃分之。

例題

59. 試求下列各數之平方根。※

(1) 729.	(2) 1156.	(2) 1849.
(4) 2209.	(5) 3481.	(6) 6084.
(7) 1681.	(8) 56169.	(9) 4157521.
(10) 49126081.	(11) 26625600.	(12) 9345249.
(13) 13.69.	(14) 0.2809.	(15) 4.5796.
(16) 400.8004.	(17) 19650.4324.	(18) 182.493031.
(19) 0.00022201.	(20) 0.0016630084.	

116. 分數平方根之例 由108節注意1．欲求分數之平方根。則取分母分子之平方根。可也。

例 1. 求 $\frac{144}{169}$，及 $1\frac{9}{16}$ 之平方根。

$$\sqrt{\frac{144}{169}}=\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{169}}=\frac{12}{13}\text{ (答數)}.$$

※如學者於算術中。開方已熟。則此中選出數題。可也。

$$\sqrt{1\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}\text{ (答數)}.$$

117. 不能開盡平方根之例

例 1. 求 792.4 之平方根。

```
         7,92,40,00,00(28.149……………………答數
         4
       ───────
   48)3 92                    驗
      3 84                        792.400000
     ────────          28.149²=792.366201
   561)8 40                    ────────────
       5 61                         0.033799
      ────────
  5624)2 79 00
       2 24 96
      ─────────
 56289)  54 04 00
         50 66 01
        ─────────
          3 37 99
```

例 2. 求 $\sqrt{\frac{5}{9}}$, $\sqrt{\frac{4}{5}}$ 至小數第四位止。

$$\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{2.2360\cdots\cdots}{3}=0.7453\cdots$$

(答數)

$$\sqrt{\frac{4}{5}}=\overset{2}{\sqrt{0.8}}=0.8944\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(答數)}.$$

或 $$\sqrt{\frac{4\times5}{5\times5}}=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{20}}{5}=\frac{4.4721\cdots\cdots}{5}$$

$$=0.8944\cdots\cdots(\text{答數}).$$

例題

60. 求下列各數之平方根。

(1) $\frac{169}{289}$. (2) $1\frac{25}{144}$. (3) $11\frac{14}{25}$. (4) $39\frac{1}{16}$.

(5) $0.\dot{1}$, (6) $0.00\dot{4}$. (7) $0.13\dot{4}$. (8) $1.36\dot{1}$.

61. 求下列各數之平方根。至小數第四位止。

(1) 7. (2) 19. (3) 21.5. (4) 125.4.

(5) 31.046. (6) 0.4. (7) 0.081. (8) 0.01735.

62. 試求下列各數之平方根。至小數點下三位止。

(1) $\frac{7}{16}$. (2) $\frac{4}{11}$. (3) $3\frac{1}{4}$. (4) $\frac{1}{2}$.

(5) $2.\dot{4}$. (6) $0.0\dot{4}\dot{1}$. (7) $0.0\dot{8}\dot{3}$. (8) $0.\dot{2}\dot{5}$.

63. 有正方形之地。其面積爲 1 畝。問其每邊之長幾尺。

64. 有方柱。高 3 丈 6 尺。體積 182 立方尺。又四分之一。問上下切面正方形之一邊幾尺。

65. 有正方形之地。其面積 1369 平方丈。今周圍作寬一丈之路。鋪以石塊。但知每一平方丈。須銀 1

元五角。問此路全鋪。共須銀圓若干。

66. 圓面積約等於半徑之平方。乘周率3.1416。今有面積706.86平方寸之圓。問其半徑幾尺。

67. 長196丈。濶64丈之長方形。今作成平方。問其一邊應若干丈。

68. 有長方形之地。長與闊丈數之比。等於7:5.其面積爲315平方丈。問長闊各幾丈。

69. 由幾何學定理。直三角形。直角二邊(a,b)平方之和。等於斜邊(c)之平方今a=5, b=12時。c之值幾何。

70. 直三角形中。斜邊c=40,一邊b=32時。求他一邊a之值若何。

71. 有圓形地三塊。其徑各爲697尺,185尺,153尺。今欲作圓形地三塊。令其面積各等於此中二圓地面積之差。求其徑各幾何。

72. A,B二人。由甲地起程向乙地而行。其時間之比。如2.與3之比。又其時間數之積爲150.問兩地之間。A,B所行之時間數各幾何。

第五章 數之立方根

118. **開立九九表** 欲求二數之立方根。先須將自 1 至 9 諸立方。記之於胸。所謂開立九九表是也。其表如下。

數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
其立方	1	8	27	64	125	216	343	512	729

蓋自 1 與 1000 之間。祇有 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 八數。其立方根爲整數。其餘各數之立方根。均非整數明矣。

開立方時。亦有完全立方。能開盡不能開盡各名稱。其意可由前章類推。

非完全立方之整數之立方根。如後章所述。祇能求得其近似值而已。如是之數名曰**立方根數**。

119. $1^3=1,\cdots\cdots 10^3=1000,\cdots\cdots 100^3=1000000,\cdots\cdots\cdots 1000^3=1000000000,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 故知

由一數字所成數之立方。或爲一數字或爲二數字。或爲三數字。

由二數字所成數之立方。或爲四數字。或爲五數字。或爲六數字。

由三數字所成數之立方。或爲七數字。或爲八數字。或爲九數字。

以下準此。

故將題設之數。自右端一位起。每隔三位劃分之。最後一區。有時爲一數字。有時爲二數字。而各區之數。卽等於立方根數字之數。

120. 能開盡立方根之例。

例 1. 求 157464 之立方根。

劃分之得 157, 464,故立方根爲二數字。其算法可參照 112 款演之如下。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 157,464(50+4 \\
 & \qquad\qquad\;\; a \quad b \\
a^3= & 125 \\
\hline
3a^2=7500 & 32\,464 \\
3ab=\;\;600 & \\
b^2=\;\;\;16 & \\
\hline
3a^2+3ab+b^2=8116 & 32\,464 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\cdot\cdot
\end{array}
$$

然實地應用。則以下法爲便。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 157,464(54 \text{ 答數} \\
 & 125 \\
\hline
7500 & 32\,464 \\
600 & \\
16 & \\
\hline
8116 & 32\,464
\end{array}
$$

先於15700之中減去最大之立方數50^3.次將其餘數32464.以已求得根之部分平方之三倍卽3×50^2除之。得4爲第二位。*

作$3\times 50^2+3\times 50\times 4+4^2$.以4乘之。所得之數。由32644減之。無餘。故能開盡。

例 2. 求13312053之立方根。

劃分之得13, 312, 053, 故立方根之數字爲三。

$$
\begin{array}{rr|l}
 & & 13,312,053\,(\underset{a}{200}+\underset{b}{30}+\underset{c}{7} \\
a^3= & & 8 \\
\hline
3a^2= & 1200 & 5\ 312 \\
3ab= & 180 & \\
b^2= & 9 & 4\ 167 \\
\hline
3a^2+3ab+b^2= & 1389 & 1\ 145\ 053 \\
b^2= & 9 & \\
\hline
{}^{*}3a^2+6ab+3b^2= & 158700 & \\
3(a+b)c= & 4830 & \\
c^2= & 49 & \\
\hline
3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2= & 163579 & 1\ 145\ 053 \\
\hline
\end{array}
$$

*此段演算。係以既求得根之部分230.視如前段

之200.用同法以計算之。

然實地應用。則以下法爲便。

	13,312,053(237 答數
	8
1200	5 312
180	
9	4 167
1389	1 145 053
9	
※158700	
4830	
49	
163579	1 145 053

※此段演算中。欲得 $158700=3\times230^2$ 時。則將半括弧內四數相加。可也。

例 3. 求252.435968之立方根。

※若以此爲第二位。將依法所得之數。由賸數減之。如不受減。則漸次減1。作爲第二位可也。

	252.435,968(6.32
	216
10800	36 435
540	
9	
11349	34 047
9	2 388 968
1190700	
3780	
4	
1194484	2 388 968

【注意】 $0.1^3=0.001$, $0.01^3=0.000001$, ……………故凡小數須在小數點下向右每隔三位劃分之。

例題

73. 試求下列各數之立方根。

(1) 1331.　(2) 3375.　(3) 4913.　(4) 12167.

(5) 29791.　(6) 68921.　(7) 79507000.

(8) 148877000.　(9) 8869743.

(10) 733870808.　(11) 2.197.

(12) 0.004913.　(13) 16.974593.

(14) 0.238328.　　(15) 125525.735343.

121. 分數立方根之例

由108節注意1.欲求分數之立方根。則取分母分子之立方根。可也。

例 1. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}$ (答數).

例 2. $\sqrt[3]{18\frac{26}{27}}=\sqrt[3]{\frac{512}{27}}=\frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$ (答數).

122. 不能開盡立方根之例

例 1. 求9之立方根。

	9.000,000(2.08……答數	
	8	
120000	1 000 000	驗
4800		9.000000
64		$208^3 \doteq 8.998912$
124864	998 912	0.001088
	1 088	

例 2. $\sqrt[3]{\frac{29}{64}}=\frac{\sqrt[3]{29}}{\sqrt[3]{64}}=\frac{3.072\cdots\cdots}{4}=0.768\cdots$(答數).

例 3. $\sqrt[3]{\frac{5}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5\times49}{7\times49}}=\frac{\sqrt[3]{245}}{\sqrt[3]{343}}=\frac{6.2573\cdots}{7}$

$=0.8939\cdots\cdots$(答數).

例題

74. 試求下列各數之立方根.

(1) $39\frac{38}{125}$.　(2) $12568\frac{5}{64}$.　(3) $240\frac{17712}{19683}$.

75. 試求下列各數之立方根。至小數點下三位止。

(1) 10.　(2) 1·5.　(3) 3·75.

76. 有立方體。其體積為 1728 立方尺。問其表面積幾何。

77. 有直立體。長 486 寸。闊 16 寸。高 1 寸之四分之三。求於此等積立方體之一稜幾何。

78. 有直立體。其體積為14739立方寸。闊與高相等。長為其三倍。問長幾何。

79. 球之體積。約等於其徑之立方。乘 0,5236. 今有球之體積為$\overset{\text{立方寸}}{22.44935}$. 問其徑幾何。

80. 有三鉛球。其徑各為6寸, 8寸, 10寸,今鎔成一球。問其徑幾寸.

雜題 V.

1. 若$\frac{2a}{3}=\frac{3b}{4}=\frac{c}{2}=1$時。求$(a-b)^2+(b-a)^2+(c-a)^2$之數值。

2. $9a^2b^3-12a^4b+3b^5+2a^3b^2+4a^5-11ab^4$以$3b^3+4a^3-2ab^2$除之。

3. 試化$(a^2-b^2+c^2-d^2)^2-(2ac-2bd)^2$爲因數。

4. 求$1-x-x^3+x^5$與$1-x^4-x^6-x^7$之最高公因數。

5. 有人由甲地向乙地而行。若每小時以5里之速。步行而往。則須比所定時間遲1小時方到。若每小時以8里之速。乘人力車而往。則比所定時間。早三小時又八分之一可到。問甲乙兩地之距離幾何。

6. 試將下式簡單之。

$$\frac{(x^2-11x+30)(x^2-7x-44)}{x^2-17x+66}$$

7. 有正方形之室。每邊7公尺。今欲於中央鋪地氈。餘鋪漆布。但知地氈一平方公尺。值銀三元。漆布一平方公尺。值銀1元6角。共費銀91元。問漆布之寬幾何。

8. 試解 $\left.\begin{aligned} a(x+y)-b(x-y)&=a^2-b^2 \\ a(x-y)+b(x+y)&=2ab \end{aligned}\right\}$

9. 試將 $\dfrac{b(x^3-a^3)-ax(x^2-a^2)-a^3(x-a)}{(b-a)(x-a)}$ 簡單之。

10. $x=\frac{4}{5}$, $y=\frac{3}{5}$ 時。求下式之數值。

$$(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})\div(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2})$$

11. $x^2+(a-1)x+a+1$ 試以 $(a-1)x-a^2-a-1$ 乘之。

12. 有人自甲地行至乙地須費若干小時。若每小時多走 2 里。則以前時間三分之二可到。若每小時少走 1 里。則須遲 3 小時方到。問兩地相距幾何。

13. 試化 $(a-c)^3+2a^2c-4ac^2+2c^3$ 爲因數。

14. 試將次式簡單之。

$$\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\times\frac{x^3-1}{x^6+1}\times\frac{(x-1)^2(x+1)^2+x^2}{x^4+x^2+1}.$$

15. 某工場。僱用工人若干名。其總人數之半。每日工資 6 角。其五分之二。每日工資 5 角。餘爲每日工資 4 角。今一日工資共費 270 元。問工人之數。

16. 試解 $\left.\begin{aligned} (a+b)x-(a-b)y&=4ab \\ (a-b)x+(a+b)y&=2a^2-2b^2 \end{aligned}\right\}.$

17. 試將下式簡單之。

$$\frac{1+n-n^3-n^4}{1-a^4}\div\frac{n^2-1}{a^2-1}.$$

18. 有甲乙二人。各自相隔 560 里之A，B兩地。相向而行。甲行 2 日。乙行 7 日。相遇。但知甲比乙每日多行10里。問甲乙二人每日各行幾里。

19. 試將下式簡單之。

$$\left(\frac{x^2+y^2}{xy}-2\right)\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}\right)\div\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right).$$

20. 試證

$$x(x-2y)^3-y(y-2x)^3=(x-y)(x+y)^3.$$

21. 試將下式簡單之。

$$\left\{\frac{3}{x-1}-\frac{2x-1}{x^2+\frac{x-1}{2}}\right\}\div\left\{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right\}$$

22. $x^2=x+1$ 時。試證 $x^3=2x+1$. 及 $x^5=5x+3$.

23. 有分數。其分子加分母之 2 倍為分子。分母加分子之 5 倍為分母時。其值得0.8 求原分數。

24. 甲比乙每小時多行 a 里。今乙在甲前 d 里。甲自後追之。至 n 里追及。問甲乙之速各幾何。

25. 將某數 a 分為甲乙丙三分。令甲之 b 倍。與乙之 m 倍。與丙之 n 倍。均相等。試求其三分。

第八編 二次方程式(I)

第一章 一元二次方程式

123. 整數方程式中。僅含未知數之二乘冪為止。而不含其高次乘冪者。稱為二次方程式。

僅含一未知數之二次方程式。其普通形狀如次。

$$ax^2+bx+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

形如(1)式之二次方程式。名曰完全二次方程式。若(1)式之中。$b=0$ 時。則稱為純二次方程式。

124. 純二次方程式之解法

純二次方程式之形狀為

$$ax^2+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

移項得 $\qquad ax^2=-c.$

以 a 除之 $\qquad x^2=-\frac{c}{a}.$

開平方得 $\qquad x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$

【注意】 純二次方程式(2)之根。在 a 與 c 異符號時為實數。a 與 c 同符號時為虛數。

例 1. 試解 $7x^2-18=5x^2$.

移項得 $\qquad 7x^2-5x^2=18.$

即 $2x^2=18.$

以2除之 $x^2=9.$

開平方 $x=\pm 3$ (答數).

驗 $7(+3)^2-18=7\times 9-18=63-18=45.$

$5(+3)^2=5\times 9=45.$

又 $7(-3)^2-18=7\times 9-18=63-18=45.$

$5(-3)^2=5\times 9=45.$

例 2. 試解 $5x^2-10=0.$

移得 $5x^2=10.$

以5除之 $x^2=2.$

開平方 $x=\pm\sqrt{2}$ (答數).

例 3. 試解 $4x^2+20=0.$

移項 $4x^2=-20.$

以4除之 $x^2=-5.$

開平方 $x=\pm\sqrt{-5}$ (答數).

例題

試解下之二次方程式。

1. $3x^2-2=x^2+6.$ **2.** $x^2-1=2.61.$

3. $\dfrac{x^2+1}{5}=10.$ **4.** $\dfrac{3x^2+8}{10}=4.$

5. $\frac{3}{4x^2}-\frac{1}{6x^2}=\frac{1}{12}$.　　6. $\frac{3}{5x^2}-\frac{5}{3x^2}=\frac{8}{15}$.

7. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{4}$.　　8. $\frac{15}{8-x}+\frac{7}{2-3x}=2$.

9. $(2x-3)(3x-4)-(x-13)(x-4)=0$.

10. $2\{(x+a)(x+b)+(x-a)(x-b)\}=a^2+4b^2$.

125. 完全二次方程式之解法

因 $(x\pm b)^2=x^2\pm 2bx+b^2$. 故凡二項式 $x^2\pm 2bx$ 中。若加以 x 之係數之半之平方。卽成完全平方。

例 1. 試解方程式 $x^2-8x=20$.

因 $$x^2-8x=20.$$

兩邊加 x 之係數 8 之半之平方 16.配成左邊爲完全平方。

$$x^2-8x+16=36.$$

開平方 $$x-4=\pm 6.$$

$\therefore$ $$x=4\pm 6.$$

卽 $$x=10 \text{ 或 } x=-2 \text{ (答數)}.$$

驗 $$10^2-8\times 10=100-80=20.$$

又 $$(-2)^2-8(-2)=4+16=20.$$

故欲解形如 $x^2+bx=c$ 之完全二次方程式。則先

於兩邊加以 x 之係數之半之平方。然後取其平方根即得。

例 2. 試解方程式$\frac{x+1}{x-1}=\frac{4x-3}{x+9}$.

去分母　　$(x+1)(x+9)=(x-1)(4x-3)$.

簡單為之　　$3x^2-17x=6$.

以 3 除之　　$x^2-\frac{17}{3}x=2$.

兩邊加以 x 之係數之半之平方$\left(\frac{17}{6}\right)^2$.則成

$$x^2-\frac{17}{3}x+\left(\frac{17}{6}\right)^2=2+\left(\frac{17}{6}\right)^2=\frac{361}{36}.$$

開平方　　$x-\frac{17}{6}=\pm\frac{19}{6}$.

$\therefore$　　$x=\frac{17}{6}\pm\frac{19}{6}$ 即 6 或 $-\frac{1}{3}$.

然 6 及 $-\frac{1}{3}$ 不使原方程之最低公分母 $(x-1)(x-9)$ 為零。故為所求之根。

例題

11. $x^2-7x=4x$.　　**12.** $x^2-6x+8=0$.

13. $(2x-1)^2=2$.　　**14.** $(x+10)^2=28$.

15. $x^2-2x-17=0$.　　**16.** $x^2-4x+8=0$.

17. $13x-6-6x^2=0$.　　**18.** $x(5x-2)=-6$

19. $x^2-2\sqrt{2}x-1=0$.　20. $\frac{5x-7}{7x-5}=\frac{x-5}{2x-13}$.

21. $(3x+2)(2x-1)+4(x+2)=-(5x+2)(2x-2)$.

22. $\frac{5}{21}x(x+1)-\frac{1}{7}(2x^2+x-1)=\frac{4}{35}(x+1)$.

23. $x^2-2ax+a^2=b^2$.

24. $x^2-2mx-1=0$.

25. $(a^2+b^2)x-abx^2-ab=0$.

26. $x^2-4(a+b)+1=2x$.

27. $(m^2-1)x^2-2(m^2+1)x+m^2-1=0$.

126. x^2之係數若非1時。亦能使其含未知數之項成完全平方。其法如下。

因　$(ax\pm b)^2=a^2x^2\pm 2abx+b^2$.

故若於二項式$a^2x^2\pm 2abx$中。加以x^2之係數之平方根。除x之係數之半之平方。則成完全平方。

例 1. 試解方程式$9x^2+6x=48$.

9之平方根3除6得2。其半爲1。原式兩邊。各加以1之平方。則成

$$9x^2+6x+1=49.$$

開平方　$3x+1=\pm 7$.

由是得　$x=2$ 或 $-\frac{8}{3}$(答數).

例 2.　試解方程式 $5x^2-8x=4$。

原式兩邊以 5 乘之。

$$25x^2-40x=20.$$

配成平方　$25x^2-40x+16=36.$

開平方　$5x-4=\pm 6.$

由是得　$x=2$ 或 $-\frac{2}{5}$(答數)。

例　題

試解以下各方程式。

28. $3x^2-2x=8.$　**29.** $5x^2-6x=27.$

30. $2x^2+3x=5.$　**31.** $2x^2-5x=7.$

32. $7x^2+5x=150.$　**33.** $7x^2-20x=75.$

34. $(x+2)(2x+1)+2(x-1)(x+1)=51.$

35. $\frac{7}{3x-2}+\frac{4}{2x-5}=5.$

36. $\frac{11-3x}{1-x}+\frac{2(7-4x)}{1-2x}=1.$

37. $\frac{x+1}{x^2-4}+\frac{1-x}{x+2}=\frac{2}{5(x-2)}.$

38. $\frac{2x+7}{2x-3}+\frac{3x-2}{x+1}=5.$

39. $mnx^2-(m+n)(mn+1)x+(m^2+1)(n^2+1)=0.$

40. $(3a^2+b^2)(x^2-x+1)=(3b^2+a^2)(x^2+x+1).$

127. 普通之解法

試解 $ax^2+bx+c=0.$

移項 $ax^2+bx=-c.$

以 $4a$ 乘之 $4a^2x^2+4abx=-4ac.$

兩邊各加 b^2 配成平方。

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac.$$

開平方 $2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}.$

$$\therefore \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdots\cdots\cdots(3).$$

例 試求方程式 $3x^2-5x+2=0$ 之根。

因 $a=3,\ b=-5,\ c=2$ 以之代入前公式(3)中得

$$x=\frac{5+\sqrt{25-24}}{6} \text{或} \frac{5-\sqrt{25-24}}{6}.$$

$\therefore\quad x=1$ 或 $\frac{2}{3}$(答數).

例題

試由公式求下列各方程式之根。

41. $2x^2+3x=14.$ **42.** $3x^2-5x=12.$

43. $x^2-7x=18.$ **44.** $5x^2-x=42.$

45. $3x^2-11x=-6.$ **46.** $5x^2-7x=-2.$

47. $4x^2-9x=28.$ **48.** $7x^2+5x=38.$

第二章 一元二次方程式之性質

128. 完全二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根。設為 α,β. 則由公式 (3). 得

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\ \beta&=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$

根號內之式 b^2-4ac. 名曰方程式之**判別式**。方程式之根之性質。能由判別式以判別之。

I. <u>若判別式為正數而非零則二根俱實數。且不相等。</u>

若判別式為完全平方。則二根俱有理式。若判別式非完全平方。則二根俱根數。

II. <u>若判別式為零。則二根為實數。且互相等。</u>

此時二根。俱等於 $-\frac{b}{2a}$.

III. <u>若判別式為負數。則二根俱虛數。且不相等。</u>

質言之可列表如下。

	判別式 $[b^2-4ac]$	根
I.	正	實數
II.	零	實數(等根)
III.	負	虛數

【注意】 因 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$.

故判別式爲正時。若以 α,β 間之數代 x。則上二因數 $x-\alpha, x-\beta$ 中一爲正。一爲負。因之完全二次方程式之左邊。恆與 a 之符號相反。

若與 x 以比 α,β 中大者尤大。或比 α,β 中小者尤小之數值。則二因數 $x-\alpha, x-\beta$. 或俱爲正。或俱爲負。故完全二次方程式之左邊。恆與 a 之符號相同。

判別式爲正時。且設 $\alpha=\beta$. 則

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2.$$

故此時無論代 x 以何值。而完全二次方程式之左邊。恒與 a 之符號相同。

判別式爲負時。即 b^2-4ac 爲負。故 $4ac-b^2$ 爲正。令等於 A^2.

$$\therefore \quad ax^2+bx+c$$

$$=a\left\{x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{-A^2}}{2a}\right\}\left\{x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{-A^2}}{2a}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{-A^2}{4a^2}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{A}{2a}\right)^2\right\}$$

上式右邊括弧內之式。不論 x 之值如何恆爲正。故完全二次方程式之左邊。恆與 a 之符號相同。

例 1. 試判別 $x^2-5x+6=0$ 之二根。

因 $a=1,\ b=-5,\ c=6.$

故 $b^2-4ac=25-24=1.$

故二根爲不相等之實數。且爲有理數。

例 2. 試判別 $3x^2+7x-1=0$ 之二根。

因 $a=3,\ b=7,\ c=-1.$

故 $b^2-4ac=49+12=61.$

故二根爲不相等之實數。且均爲根數。

例 3. 試判別方程式 $4x^2-12x+9$ 之二根。

因 $a=4,\ b=-12,\ c=9.$

故 $b^2-4ac=144-144=0.$

故二根爲實數。且互相等。

例 4. 試判別 $2x^2-3x+4=0$ 之二根。

因 $a=2,\ b=-3,\ c=4.$

故　$b^2-4ac=9-32=-23$.

故二根俱虛數。

例 5. 方程式 $2mx^2+(5m+2)x+(4m+1)=0$ 若得等根。m 之值應若何。

因　$a=2m,\ b=5m+2,\ c=4m+1$.

若二根相等。則必 $b^2-4ac=0$.

卽　$(5m+2)^2-4(2m)(4m+1)=0$.

由是得　$m=2$ 或 $-\frac{2}{7}$

【注意】由上法。本題之方程式若有等根。應改作

$$4x^2+12x+9=0.\ 及\ 4x^2-4x+1=0.$$

例　題

試判別下列各方程式之二根[49至56]

49. $x^2+5x+6=0$.　　**50.** $x^2+2x-15=0$.

51. $x^2+2x+3=0$.　　**52.** $3x^2+7x+2=0$.

53. $9x^2+6x+1=0$.　　**54.** $6x^2-7x-3=0$.

55. $5x^2-5x-3=0$.　　**56.** $2x^2-x+5=0$.

下列各方程式中。m 須有何值。始得等根。[57至59]

57. $(m+1)x^2+(m-1)x+(m+1)=0$.

58. $(2m-3)x^2+mx+m-1=0$.

59. $2mx^2+x^2+4x+2mx+2m-4=0$,

60. $(3m+1)x^2+2(m+1)x+m=0$ 中。m 須有何值。始得以下各件。試分別言之。

(1) 二根相等。　　(2) 二根爲不相等之實數。

(3) 二根爲虛根。

129. 根與係數之關係

完全二次方程式之二根。設爲 α, β 則由 128 節公式 (4) 得

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{2}, \quad 及 \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

然 $ax^2+bx+c=0$ 之兩邊。若以 a 除之。得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

故將完全二次方程式。變成 x^2 之係數爲 1 時。則 x 之係數。等於二根之和變符號。既知項（卽 $\frac{c}{a}$）等於二根之積。

130. 已知其根求作方程式之法

準前節所論。則已知其根時。可作其方程式如下。

例如二根爲 α, β. 則其方程式爲

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0.$$

卽

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0.$$

同理作得以 α, β, γ 爲根之方程式。爲

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0.$$

例 1. 求作以3及$-\frac{5}{2}$爲根之二次方程式。

所求之方程式。爲 $(x-3)\left(x+\frac{5}{2}\right)=0$.

即 $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{15}{2}=0$.

故 $2x^2-x-15=0$. (答數).

例 2. 設$x^2-7x+8=0$之二根爲α, β.求$\alpha\beta^2+\alpha^2\beta$之數值.

因 $\alpha+\beta=7$. $\alpha\beta=8$.

故 $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)$.

$=8\times7=56$ (答數)。

例題

試以下列各題所設之數爲根。作方程式。[61至71]

61. $7, 6$. **62.** $5, -3$. **63.** $3+12, 3-12$.

64. $1\frac{1}{2}, -2$. **65.** $-1\frac{1}{6}, -1\frac{2}{3}$, **66.** $a, a-b$.

67. $4, 2\frac{1}{8}$. **68.** $\frac{3}{11}, \frac{2}{11}$. **69.** $1+\sqrt{-1}, 1-\sqrt{-1}$.

70. $1, 2, 3$. **71.** $3, 2, -5$.

設方程式$x^2-7x+8=0$之二根爲α, β. 試求下列各式之數值[72至77]

72. $(\alpha-\beta)^2$. **73.** $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ **74.** $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$.

75. $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$. **76.** $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}$. **77.** $\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}$.

78. 設α,β為方程式$ax^2+bx+c=0$之二根。試證下列各式。

(1) $\alpha^2+\beta^2=\frac{b^2-2ac}{a^2}$.　　(2) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{b}{c}$.

(3) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{b^2-2ac}{ac}$.　　(4) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}$.

79. 以$x^2+3x-5=0$之根之逆數為根之方程式。為$5x^2-3x-1=0$. 試證之。

80. x為實數時$\frac{x^2-15}{2x-8}$之值。不能在3與5之間。試證之。

131. 二次方程式應用問題之解法

二次方程式有二根。故二次方程式之應用問題。例得兩種答數。然此二數之中。有時或得負數。或得分數不能適合於題意。即有時得正數。而以過大過小之故。亦有不能不拋棄者。故學者須加審查而後用之。不可草率從事。且有時將題文稍加變易。即不適原題之根。亦有可以適用者。是不可以不察也。

解問題時。若得虛數之根。乃表示問題中所言之事實。為不可能也。

例 1. 有帶其尺數平方之3倍。+25.等於其尺數之20倍。問此帶之長幾何。

設帶之尺數爲x．則由題意

$$3x^2+25=20x.$$

解之得 $x=5$ 或 $\frac{5}{3}$

故帶之長爲5尺。或 $\frac{5}{3}$ 尺。兩數均能適用。

例 2. 遠處見道上有行人一羣。不知其數。但知其人數平方之3倍加25.等於人數之20倍。問人數幾何。

此例之中。命人數爲x。則得前題之同方程式。解之。得根爲5或 $\frac{5}{3}$．然x係表人數。故 $\frac{5}{3}$ 不能適用。卽行人5人。

例 3. 隣接二整方之平方和爲481．求此二整數。命一整數爲x．則他一整數爲x+1．依題意得

$$x^2+(x+1)^2=481.$$

解之得 $x=15$ 或 -16.

若本題所謂整數。僅指正整數言。則所求之數爲15與15+1．卽15與16.

若本題所謂整數。兼指負整數言。則−16與−16+1卽−16與−15.亦能適用。

例 4. 有人以銀圓二元四角。購墨水若干瓶。若以此銀圓比前多購四瓶。則每瓶比前低三分。問

原購墨水之瓶數。

命墨水之瓶數爲 x，則由題意得。

$$\frac{240}{x}-\frac{240}{x+4}=3.$$

解之。得　$x=16$ 或 -20。卽原購墨水爲16瓶。

【注意】　前方程式中。以 $-x$ 代 x。則得

$$\frac{240}{x-4}-\frac{240}{x}=3.$$

解之。得　$x=20$ 或 -16.

蓋前題中之多購四瓶。變成少購四瓶。每瓶低三分。變成每瓶貴三分也。

例 5.　有長8尺之竿。今欲分爲二分。以之爲二邊。作成長方形。使其面積。等於20平方尺。問二分之長各幾何。

命一分之長爲 $4+x$ 尺。則他分之長爲 $8-(4+x)=4-x$ 尺。故依題意得。

$$(4+x)(4-x)=20.$$

卽　$$16-x^2=20.$$

解之。得　$$x=\pm\sqrt{-4}=\pm\sqrt{4\times-1}=\pm2\sqrt{-1}.$$

是得虛數。卽表示此問題爲不可能也。

【注意】　就面積之式 $16-x^2$ 觀之。在 $x=0$ 時。面積

最大。只等於16.亦不能等於20平方尺。明矣。

例題

81. 有二數。其和爲15.其積爲56.問兩數各幾何。

82. 有兩位整數。其數字之積爲30.其顚倒數比原數多9.問原數幾何。

83. 有父子二人。其年齡之和爲65.父子年齡之積。比父年5倍多500.問父子之年齡各幾何。

84. 試分100爲二分。使其積爲2600.

85. 有東西二市。相距45里。甲騎自東市發。同時乙騎自西市相向而行。經3小時相遇。後甲騎抵西市時。乙騎早2小時半抵東市。問二人每小時之速。

86. 減何數於其逆數。適等於n.幷令 n=6.09 以驗之。

87. 有人於計算時。應由$\frac{1}{2}$減去某數。因誤覓以此數除$\frac{1}{2}$.而所得結果亦同。問此數幾何。

88. 以銀圓31500元。平分與若干人。因此中有三人。失去領費之資格。乃以所扣得者平分與所餘諸人。此時每人多得3375元。問最初人數幾何。

89. 有兩質點。同時由直角頂在直角二邊上移動。一每秒鐘行12尺。一每秒鐘行16尺。問此兩質量相距90尺時。乃在幾秒鐘之後。

90. 有絲線。其長等於某正形之周圍。若截去 3 尺 6 寸。其所餘者等於前正方形九分之四之正方形之周圍。問此絲線之長。

91. 以一角銀幣若干枚。列成正方形。其每邊爲 51 枚。今若以此列成二正方形。則一正方形之一邊。比他正方形之一邊多 21 枚。問後二正方形之一邊各幾枚。

92. 甲自東地起程。同時乙自西地相向而行。35 分後。相遇。但知甲行於此兩地之間。比乙須多 24 分。問二人行此兩地之間。各須時間幾何。

93. 有甲乙二工人。甲作若干日。得工資 48 元。乙比甲少作 6 日。得工資 27 元。然甲作乙之日數。乙作甲之日數。其工資相等。問二人作工之日數。

94. 甲火車自東站開行。乙火車同時自西站開行。兩車途中相遇。自相遇之處至東站。比至西站多 15 公里。厥後甲火車以二小時又三分之二至西站。乙火車以三小時又八分之三至東站。問東西兩站之距離。

95. 有長方形。其二邊之長爲 a,b。今於其內部作第一長方形。使其各邊距外形等遠。且其面積今等於內外兩形中間之面積之 n 分之一。問內形各邊

之長。

本題試令 $a=70$, $b=52\frac{1}{2}$, $n=1$ 以證之。

96. 有兵一隊。列成長方陣。前面一列之人數之2倍。等於列數。若從此隊中減去206人。則可列成厚3列之中空方陣。其陣外一面之人數。等於前長方陣之列數。問此一隊兵之人數。

97. 洋燈與燭台相距4尺。問此兩物之直線上。何處之光度相等。

但光度與距離之平方成反比例。且假定洋燈之光度。爲蠟燭光度之9倍。

98. 試分1爲兩分數。令其立方之和等於$\frac{1}{8}$.

99. 有酒罈盛酒8斗1升。今初次挹出酒若干。以水補入之。二次挹出同量之混合酒。再以水補入之。如是則罈中僅餘酒6斗4升。問每次挹出酒若干升。

100. 甲乙二人。各於東西兩市。同時相向並發。至相遇時。甲比乙多走120里。厥後甲行4日。行完乙道。乙行9日。行完甲道。問東西兩市之距離。

本題以a里代120里,b^2代4日,c^2代9日。以求東西兩市之距離。

又由此結果。以求上題之答數。

第九編 二次方程式(II)

第一章 準二次方程式

132. 方程式中。有比二次更高之方程式。而準二次方程式之解法能解之者。名曰**準二次方程式**。次舉一二例以明之。

133. 複二次方程式

例 1. 試解 $x^4-9=2x^2-1$.

題設之式可移作。

$$x^4-2x^2-8=0.$$

令 $\qquad x^2=X.$

則 $\qquad X^2-2X-8=0.$

解之得 $\qquad X=4$ 或 $-2.$

卽 $\qquad x^2=4$ 或 $-2.$

故 $\qquad x=\pm 2$ 或 $\pm\sqrt{-2}.$

汎言之。形如 $ap^2+bp+c=0$ (p 為含未知數之式.)之式。名曰**複二次方程式**。可仿前例就 p 解之。

例 2. 試解 $(x^2-3x+1)^2=6+5(x^2-3x+1).$

此例中令 $\qquad x^2-3x+1=X.$

則 $\qquad X^2=6+5X.$

即 $$X^2-5X-6=0.$$

此方程式之根爲6或-1.

故由 $x^2-3x+1=6$. 得 $x=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{29}$.

又由 $x^2-3x+1=-1$. 得 $x=2$ 或 1.

故所求之根爲 $\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{29}$, 2, 1.

134. 由視察能求得之根

例 試解 $x(x-1)(x-2)=a(a-1)(a-2)$.

此方程式中.若以 x 代 a. 則左右相等.故 a 爲方程式之一根.

故 $x(x-1)(x-2)-a(a-1)(a-2)$. 必有一因數爲 $x-a$. 今以 $x-a$ 除之.得

$$(x^2+ax+a^2)-3(x+a)+2=0.$$

$$x^2-3x+ax+a^2-3a+2=0.$$

$$x^2-(3-a)x+(a-1)(a-2)=0.$$

其餘之根.可由上式求之.爲 $x=1-a$ 或 $2-a$.

135. 逆數方程式

例 1. 試解 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$.

因 $x=0$ 時.上式成 $a=0$.故 $x\neq0$.兩邊以 x^2 除之.

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

命　$x+\frac{1}{x}=X$. 則 $x^2+\frac{1}{x^2}=X^2-2$.

故　$a(X^2-2)+bX+c=0$.

此 X 之二次方程式之二根爲 α, β. 則

$$x+\frac{1}{x}=\alpha \text{ 或 } x+\frac{1}{x}=\beta.$$

故由此可求得 x.

汎言之。將方程式諸項。列成未知數昇羃之順。或未知數降羃之順。自左而右。自右而左讀之。其同號之係數均相等。唯符號不同者。稱爲**逆數方程式**

例如　$ax^3+bx^2+bx+a=0.$

$$ax^4\pm bx^3+cx^2\pm bx+a=0.$$

$$ax^5+bx^4+cx^3-cx^2-bx+a=0.$$

均逆數方程式。

例 2. 試解　$2x^3-3x^2-3x+2=0.$

由題設方程式。變作

$$2(x^3+1)-3x(x+1)=0.$$

卽　$(x+1)\{2(x^2-x+1)-3x\}=0.$

卽　$(x+1)(2x^2-5x+2)=0.$

故上方程式與下二方程式等値。

卽　$x+1=0$ 及 $2x^2-5x+2=0.$

由此得　$x=-1$, $x=2$ 及 $x=\frac{1}{2}$(答數)

136. 二項方項式

例 1. 試解 $x^3-1=0$.

因數分解。得 $(x-1)(x^2+x+1)=0$.

故題設方程式之根。等於下二方程式之根。

$$\left.\begin{array}{r} x-1=0 \\ x^2+x+1=0 \end{array}\right\}$$

由第一式得 $x=1$.

又由第二式得 $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

【注意】 $x^3-1=0$. 卽 $x^3=1$. 故上例求得三根。卽爲1之三立方根。

卽 $1,\quad -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3},\quad -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

又 $$\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

$$\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

故1之三立方根。通例以 $1, W, W^2$ 表之。而任意數a之三立方根。可以 $\sqrt[3]{a},\quad \sqrt[3]{a}\cdot W,\quad \sqrt[3]{a}\cdot W^2$ 表之。

例 2. 試解 $x^5-1=0$.

因數分解。得 $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$.

故題設方程式。與 $x-1=0$. $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 等值。

由第一式得 $x=1$.

第二式係逆數方程式。可用前節所示之法解之。

例題

試解下列各方程式。

1. $x^6-3x^3=0.$

2. $x^3+1=0.$

3. $(x-1)^3=8$

4. $x^4+9=10x^2.$

5. $x^4-1=0.$

6. $x^4+1=0.$

7. $x^5+1=0.$

8. $x^{10}+3x^5=32.$

9. $x^6-65x^3=-64.$

10. $x^3+x^2-x-1=0.$

11. $x^3-2x^2+2x-1=0.$

12. $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0.$

13. $2x^4-5x^3+4x^2-5x+2=0.$

14. $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+2}+\dfrac{x^2-x+2}{x^2+x+1}=2\dfrac{1}{6}.$

15. $\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}+\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}=\dfrac{34}{15}.$

16. $x(x-1)(x-2)(x-3)=9.8.7.6.$

第二章 根式方程式

137. 含未知數有根號之項之方程式。名曰根式方程式。或曰無理方程式。對於無理方程式。其普通之方程式。稱爲有理方程式。

無理方程式。無次數之可言。

138. 解根式方程式時。以下列原理爲基礎。

將方程式之兩邊。變高正整數之乘冪時。所得之方程式。每含意外之根。

題設方程式。命爲 $M=N.$

兩邊自乘 $M^2=N^2.$

因之 $M^2-N^2=0.$

即 $(M-N)(M+N)=0.$

此方程式與 $M-N=0$ 及 $M+N=0.$

等値。即與 $M=N$ 及 $M=-N.$

等値。唯第一式爲題設方程式。而第二式乃意外者也。

例如方程式 $x+1=2.$

兩邊自乘。得 $(x+1)^2=4.$

此方程式之根爲1或−3. 此中1雖合於題設方

程式。而-3乃意外者。不與題設方程式合。

此定理不特將原方程式自乘時爲然。卽任意變高正整數之乘羃時。亦莫不然。

139. 以下諸例所表之根。一如138節所限定者也。

例 1. 試解 $x+\sqrt{(25-x^2)}=7$.

移項。得　$\sqrt{(25-x^2)}=7-x$ ……………… (1).

兩邊自乘　$25-x^2=49-14x+x^2$.

解之得　$x=3$ 或 $x=4$ ……………… (2).

驗　$3+\sqrt{25-9}=7$.　,　$4+\sqrt{25-16}=7$.

故(2)之二根。均適合於(1)式。蓋在此例。雖兩邊自乘。亦未得意外之根。

例 2. 試解 $x-\sqrt{(25-x^2)}=1$.

移項。得　$-\sqrt{(25-x^2)}=1-x$ ……………… (1).

兩邊平方　$(25-x^2)=1-2x+x^2$ …… (2).

此方程式之根爲4或-3.

驗　$4-\sqrt{(25-16)}=1$. 故4爲題設方程式之根。

然　$-3-\sqrt{(25-9)}=-7$. 不與題設方程式相合。故-3乃意外之根。

蓋所以得－3之原因。乃(1)式自乘時。除題設方程式外。更得

$-\sqrt{(25-x^2)}=-(1-x)$. 卽得 $\sqrt{(25-x^2)}=1-x$, -3 卽其根也.

【注意】 -3非題設方程式之根。一見便知。因使 $x-\sqrt{(25-x^2)}$ 等於1之x值。非大於1不可。故不能等於-3。

例 3. 試解 $\sqrt{(x+6)}+\sqrt{(x+1)}=1$.

移項

$$\sqrt{(x+6)}=1-\sqrt{(x+1)}.$$

兩邊自乘 $$x+6=1-2\sqrt{(x+1)}+x+1.$$

故 $$\sqrt{(x+1)}=-2.$$

此式爲不可能。因左邊旣表正數。則不能等於右邊之負數-2故也。

因之題設方程式無根。

故解根式方程式之法。可總括言之如下。

先將題設方程式移項。俾含根號之式。孤立於一邊。次於其兩邊。變高適當之乘冪。化爲有理。如是逐漸爲之。至根號去盡。得一有理方程式爲止。解之。再驗其根與題設方程式相合者。然後用之。可也。

例題

試解下列各方程式。

17. $\sqrt{(3x+4)}-4=0$. 18. $\sqrt{(16+x)}=2\sqrt{(x+6)}$.

19. $\sqrt{[5+\sqrt{(x-4)}]}=3$. 20. $\sqrt[3]{(10x+35)}-1=4$.

21. $\sqrt{(4x+9)}-2\sqrt{x}=1$.

22. $\sqrt{[(x-5)-7+\sqrt{(x-12)}]}=0$.

23. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}=4+\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$.

24. $\dfrac{x+\sqrt{(x^2+7)}}{28}=\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+7)}}$.

25. $\sqrt{(x+1)}+\sqrt{(2x+3)}=5$.

26. $\sqrt{(x-2)}-\sqrt{(6x-11)}+\sqrt{(x+3)}=0$.

27. $\dfrac{21}{\sqrt{(2x+1)}}-2\sqrt{x}-\sqrt{(2x+1)}=0$.

28. $\sqrt{(x+6)}+\sqrt{(x+1)}=1$.

29. $\sqrt{(3x^2-2x+4)}-3x^2+2x=-16$.

30. $\sqrt[4]{(3x^2+13)}+\sqrt{(3x^2+13)}=6$.

31. $\sqrt{(x^2-3x+4)}-\sqrt{(x^2-5x+7)}=1$.

32. $\sqrt[3]{(8x+4)}-\sqrt[3]{(8x-4)}=2$.

33. $\sqrt{(x^2+b^2)}+a=x$.

34. $\sqrt{\left(\dfrac{4}{x^2}+5\right)}-\sqrt{\left(\dfrac{4}{x^2}-5\right)}=2$.

35. $\dfrac{1+\sqrt{(1-x)}}{1-\sqrt{(1-x)}}=n$.

第三章 聯立二次方程式

140. 代入解法 此種解法。在含二未知數之二聯立方程式中。一爲一次。一爲二次者。卽能適用。

例 試解聯立方程式 $\begin{cases} y+2x=5 \cdots\cdots(1). \\ x^2-y^2=-8 \cdots\cdots(2). \end{cases}$

由(1)式。得 $y=5-2x \cdots\cdots(3)$。

代入(2) $x^2-25+20x-4x^2=-8$.

解之。得 $x=1$ 或 $\frac{17}{3}$.

以 $x=1$ 代入(3).得 $y=3$.

又以 $x=\frac{17}{3}$ 代入(3). 得 $y=-\frac{19}{3}$.

故 $\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=3 \end{matrix}\right\}$ 或 $\left.\begin{matrix} x=\frac{17}{3} \\ y=-\frac{19}{3} \end{matrix}\right\}$(答數).

141. 同次之例 二聯立方程式中。含未知數之項。若同爲二次同項式。則可用下法解之。

例 試解聯立方程式 $\begin{cases} 3x^2-xy=12 \cdots\cdots(1). \\ y^2-x^2=16 \cdots\cdots(2). \end{cases}$

(1)式兩邊。以(2)式兩邊除之。

$$\frac{3x^2-xy}{y^2-x^2}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}.$$

簡單之得　$15x^2-4xy-3y^2=0.$

即　$(5x-3y)(3x+y)=0.$

∴　$5x-3y=0$…………(3).

或　$3x+y=0$…………(4).

$$\left.\begin{array}{l}\text{由 (3), (2) 得}\quad \left.\begin{array}{l}x=3\\y=5\end{array}\right\}\quad\text{或}\quad\left.\begin{array}{l}x=-3\\y=-5\end{array}\right\}.\\ \text{由 (4), (2) 得}\quad \left.\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\\y=-3\sqrt{2}\end{array}\right\}\text{或}\quad\left.\begin{array}{l}x=-\sqrt{2}\\y=3\sqrt{2}\end{array}\right\}.\end{array}\right\}\text{(答數)}.$$

別法　命 $y=Ux$ 代入 (1), (2). 得

$3x^2-Ux^2=12$…………(3).

$U^2x^2-x^2=16$…………(4).

以 (4) 除 (3). 得

$$\frac{3x^2-Ux^2}{U^2x^2-x^2}=\frac{12}{16}.$$

即
$$\frac{3-U}{U^2-1}=\frac{3}{4}.$$

由是得　$3U^2+4U-15=0.$

解之得　$U=\frac{5}{3}$ 或 $-3.$

故　$\frac{y}{x}=\frac{5}{3}$ 或 $-3.$…………(5).

由 (5) 與 (1). 或 (5) 與 (2). 均可求得 $x, y,$ 之值。

例題

試解下列各聯立方程式。

1. $\begin{cases} xy=54 \\ 3x=2y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x^2-3y^2=24 \\ 2x=3y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x-y=5 \\ x^2+y^2=1825. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x+3y=10. \\ x(x+y)=25. \end{cases}$

5. $\begin{cases} (x-7)(y+3)=48 \\ x+y=18. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x-3y=5 \\ 2x^2+5y^2-6y=7. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^2-y^2=5. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x^2-3y=20. \\ x^2+5y=36. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=39 \\ 2x^2+3xy+y^2=63. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2+xy=a. \\ x+y=b. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2+5xy+y^2=43 \\ x^2+5xy-y^2=25. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x+y=3xy-121 \\ x-y=2xy-86. \end{cases}$

142. 雜例

例 1. 試解聯立方程式 $\begin{cases} x+y=7 \cdots\cdots\cdots(1). \\ xy\quad=12 \cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

(1)式自乘 $\qquad x^2+2xy+y^2=49 \cdots\cdots\cdots(3).$

4倍(2)式 $\qquad \underline{4xy\qquad=48} \cdots\cdots\cdots(4).$

由(3)減(4) $\qquad x^2-2xy+y^2=1.$

即 $(x-y)^2=1.$

開平方 $x-y=\pm1$ ………………………(5).

由(5)與(1)，得 $\left.\begin{matrix}x=4\\y=3\end{matrix}\right\}$ 或 $\left.\begin{matrix}x=3\\y=4\end{matrix}\right\}$ (答數).

【注意】 由129節。本例二數。係 $x^2-7x+12=0$ 之根。解此方程式。亦得 3, 4 爲所求之根。

例 2. 試解聯立方程式 $\left\{\begin{matrix}x^2+y^2=170 \cdots\cdots (1).\\ x-y=4 \cdots\cdots (2).\end{matrix}\right.$

2倍(1)式 $2x^2+2y^2=340$ ………………(3)

(2)式自乘 $x^2-2xy+y^2=16$ ………………(4).

(3)減(4) $x^2+2xy+y^2=324.$

開平方 $x+y=\pm18$ ………………(5).

由(2)與(5)，得 $\left.\begin{matrix}x=11\\y=7\end{matrix}\right\}$ 或 $\left.\begin{matrix}x=-7\\y=-11\end{matrix}\right\}$ (答數).

例 3. 試解聯立方程式 $\left\{\begin{matrix}x+y=5 \cdots\cdots (1).\\ x^3+y^3=65 \cdots\cdots (2).\end{matrix}\right.$

以(1)除(2). $x^2-xy+y^2=13$ ……………………(3).

(1)式自乘 $x^2+2xy+y^2=25$ ……………………(4).

由(4)減(3). $3xy=12.$

$\therefore \qquad xy=4 \cdots\cdots\cdots\cdots(5).$

由(1)與(5). $\left.\begin{array}{r}\text{得}x=4\\ y=1\end{array}\right\}$ 或 $\left.\begin{array}{r}x=1\\ y=4\end{array}\right\}$ (答數).

例 4. 試解聯立方程式 $\begin{cases} x+y=3 \cdots\cdots\cdots(1). \\ x^4+y^4=17 \cdots\cdots (2). \end{cases}$

作(1)式之四乘羃 $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4=81.$

由此減(2)式。 $4x^3y+6x^2y^2+4xy^3=64.$

以2除之。 $2x^3y+3x^2y^2+2xy^3=32.$

卽 $xy(2x^2+3xy+2y^2)=32 \cdots\cdots(3).$

(1)式自乘 $x^2+2xy+y^2=9.$

變作 $2x^2+3xy+2y^2=18-xy.$

以之代入(3). $xy(18-xy)=32 \cdots\cdots(4).$

解(4)式。得 $xy=2$ 或 $16 \cdots(5).$

由(5)與(1)·可求得 x, y 之值。

例 5. 試解聯立方程式 $\begin{cases} x^2-y^2-z^2=0 \cdots (1). \\ yz \quad =12 \cdots (2). \\ x+y+z=12 \cdots\cdots (3). \end{cases}$

由(1)式 $x^2=y^2+z^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(4).$

由(3)式 $(y+z)^2=(12-x)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(5).$

由(2)式 $2yz=24 \cdots\cdots\cdots\cdots(6).$

由(5)減(6) $y^2+z^2=(12-x)^2-24.$

代入(4) $x^2=(12-x)^2-24.$

解之得 $x=5.$

由(3)式 $y+z=7 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$

由(7)與(2).可求得y, z之值。

例題

試解下列各聯立方程式。

13. $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=10. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x-y=6 \\ xy=-8. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x+y=12 \\ x^2+y^2=80. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x+7y=23 \\ xy=6. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x-y=9 \\ x^2+y^2=45. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2-y^2=9. \\ x-y=1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5. \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=5. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{13}{36}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=2 \\ xy=6. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x^3+y^3=35 \\ x+y=5. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x^3-y^3=61. \\ x-y=1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^4+y^4=97 \\ x+y=5. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21 \\ x+y=9. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x^2y+xy^2=120 \\ x+y=8. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^2+xy=24 \\ xy+y^2=40. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x^3+y^3=126 \\ x^2-xy+y^2=21. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x^5+y^5=211 \\ x+y=1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x^5-y^5=242 \\ x-y=2. \end{cases}$

31. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{35}{3} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{12}. \end{cases}$

32. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{19}{2} \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{18}. \end{cases}$

33. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1 \\ \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=4. \end{cases}$

34. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=61 \\ x^4+x^2y^2+y^4=1281. \end{cases}$

35. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=3 \\ x^4+x^2y^2+y^4=21. \end{cases}$

36. $\begin{cases} x^2+y^2=2(a^2+b^2) \\ xy=a^2-b^2. \end{cases}$

37. $\begin{cases} yz+zx=12 \\ zx+xy=7 \\ xy+yz=15. \end{cases}$

38. $\begin{cases} x^2yz=a \\ xy^2z=b \\ xyz^2=c. \end{cases}$

143. 應用問題之解法

例 有二位整數。以其數字之積除之得商2.又加27於原數。即得原數之顛倒數。問原數幾何。

解 命一位數字為x。十位數字為y.則由題意。得

$$\frac{10y+x}{xy}=2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1).$$

$$10y+x+27=10x+y \cdots\cdots\cdots\cdots (2).$$

解之得　$x=6$ 或 $\frac{5}{2}$.

但所求數字必須整數。故棄 $\frac{5}{2}$ 而取 6.

因之得　$y=3$.

卽所求之數爲 36.

例題

39. 有二位整數。以其十位數字乘之。得 390. 又其轉倒數。以一位數字乘之。得 280. 問原數幾何。

40. 有長方形地。縱 119 公尺。橫 19 公尺。問縱增幾公尺。橫增幾公尺。則面積不變。而周圍只增 24 公尺。

41. 有車具前後兩輪。行 360 尺時。前輪較後輪多轉 6 次。若兩輪周各增大 3 尺。行前距離時。則前輪較後輪多轉 4 次。問前後兩輪之周圍各幾何。

42. 有長方形之室。下鋪地板 120 平方尺。除一面窗戶外。三面之牆。均翌木板至簷障之。但知正對窗戶之面。用去木板 168 平方尺。又二面每面各用木板 140 平方尺。問此室之縱橫高各幾尺。

43. 有一分數。其分子加 2. 分母減 2. 卽得原分數之逆數。又分子減 2. 分母加 2. 所得之分數加 $1\frac{1}{15}$ 亦得原分數之逆數。問分數若何。

44. 有果品舖。製甲乙二種果品 20 碟。(總價爲 112

文)每種每碟中果品之個數。等於其碟數之半。又每種每個果品之價。等於其碟數。問甲乙二種各爲若干碟。

45. 有長方形。其對角線爲37尺。若於其一邊增8尺。他一邊減14尺。則對角線減8尺。問二邊之長各幾尺。

46. 以十文銅幣。列成正方形。其一邊爲29枚。今若分列爲二正方形。則其一形比他一形多41枚。問第二次所列二正方形之一邊各幾枚。

47. 有某賈以125元購貨二種。今甲種以91元售之。乙種以36元售之。則甲種獲利之成數。與乙種賠損之成數適相等。問甲乙二種之原價各幾何。

48. 甲乙二人。共作一工。6日可竣。若甲一人獨作。須比乙一人獨作多5日。方可竣工。問甲乙獨作。各須幾日。

49. 有水桶具注入與流出二管。若先置水半桶。後將二管齊開。經12時流盡。又若將注入管縮小。令其注滿。須比前多1小時。又將流出管亦縮小。令其流盡。須比前遲1小時。則先置水半桶。後將二管齊開。經15時又$\frac{3}{2}$流盡。問原注入管開幾小時可以將空桶注滿。又問原流出管開幾小時。可以將滿桶流盡。

50. 有二數。其和其積其平方之差皆相等。試求二數。

雜題 VI.

1.　試將 $2x-[3x-9y-\{2x-3y-(x+5y)\}]$ 簡單之。

2.　甲乙二人。往復于A, B兩地之間。二人同時由A地發。以甲較乙速之故。乙在距B地90英尺之處。遇甲自B地返。且比乙早3分鐘返A地。若甲返A地後。卽刻又向B地行。則自A地起在A,B距離六分之一處。遇乙自B地返。問A,B兩地間之距離。並問甲乙二人。往復於此兩地之間。各須時間幾何,

3.　下列二式。各化爲因數。

(1)　$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$.

(2)　$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$.

4.　試將 $\dfrac{a^8-b^8+a^2b^2(a^4-b^4)}{a^6-b^6}$ 簡單之。

5.　試將下列二式簡單之。

(1)　$\dfrac{\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{a+b}{a-b}}{\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$.　(2)　$\dfrac{1}{x^2-\dfrac{x^3+1}{x+\dfrac{1}{x-1}}}$.

6.　試解下列各方程式。

(1)　$\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{2}{x-b}=\dfrac{3}{x-c}$.　(2)　$4x^2-25x-21=0$.

(3)　$x+y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{2}$.

7. 試解下列各聯立方程式。

(1) $\begin{cases} 3x^2-5y^2=28 \\ 3xy-4y^2=8. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} (x+y)^2+2y^2=17 \\ 2x^2+3xy+5y^2=28. \end{cases}$

8. 試求 $x^2+6x+12$ 之最小數值。及 $6x-x^2-4$ 之最大數值。

9. 甲乙二人。合共貨幣18枚。內唯一角小洋及十文銅元兩種。甲所有銀幣之數，等於銅元之三倍。乙所有銀幣之數。等於銅元之數。又甲比乙多7枚。問甲乙所有各幾何[但每角作爲銅元十枚]。

10. 試將 $(1+x)^4+2(1-x+x^2)$ 列成 x 昇冪之順。

11. 任意相鄰二數平方之差。比小數之2倍多1. 試證之。

12. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ 時。試證。

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2.$$

13. 試將 $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$ 化爲因數。

14. 有人往復于甲乙兩地之間。距離30里。途中有山一座。往時須8小時30分。復時須6小時50分。但知此人每小時之速。平地可行6里。上山可行1里半。下山可行9里。問甲乙兩地之間。平地路程幾何。上山路程幾何。下山路程幾何。

15. 試將下列二式簡單之。

(1) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-5x+6}\times\frac{x^2-4x+4}{x^2-4x+3}\times\frac{x^2-6x+9}{x^2-3x+2}$.

(2) $\frac{a^2-bc}{(a-b)(a+c)}+\frac{b^2-ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}$.

16. 試求下列三式之最低公倍數。

$x^2-5x-14,\ x^2-4x-21,\ x^3-3x^2-25x-21$.

又同時使三式為零之x值若何。

17. $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}$若與$\frac{c}{a}+\frac{a}{c}$相等。x之值當若何。

18. 有分數。分母比其分子之2倍多3。分母分子各減1.所得之分數。等于分子加1。分母加5所得之分數。求原分數。

19. 試求x^3-x^2-2x+2與$x^4-3x^3+2x^2+x-1$之最高公因數。又同時使二式為0之x之值若何。

20. 試求方程式$x^2-7x+9=0$二根之平方差。

21. 試解$3x-3[4x-2(2x-5)]=9-2[3x-5(x-5)]$.

22. 試解$\frac{4x^3+4x^2+8x+1}{2x^2+2x+3}=\frac{2x^2+2x+1}{x+1}$.

23. 有甲乙二火車。甲自A站至B站。須行3小時。乙比甲每小時慢行1公里。而自C站至D站。須行3小時半。而CD之距離。比AB之距離多15公里。問

二火車之速各幾何。

24. 試解下列各聯立方程式。

(1) $\frac{xyz}{x+y}=2$, $\frac{xyz}{x+z}=\frac{3}{2}$, $\frac{xyz}{y+z}=\frac{6}{5}$.

(2) $y+z=\frac{1}{x}$, $z+x=\frac{1}{y}$, $x+y=\frac{1}{z}$.

25. 有二質點。在直角二邊上。以不同之速。向直角頂而進。7秒之後。二質點之距離爲65尺。8秒之後。其距離爲61尺。問二質點之速度各幾何。但最初二質點與直角頂之距離。一爲51尺。一爲84尺。

摘要

(二次方程式)

(一) 二次方程式之根之公式。爲

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(二) 判別式 $D=b^2-4ac$ 爲正數時。二根俱實數。D爲負數時。二根俱虛數。D爲0時。二根相等。均爲 $-\frac{b}{2a}$.

(三) 二次方程式之根。若命爲 α, β. 則

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

而 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$。

(四) 將 $M=N$ 兩邊變高任意乘冪時。所得之方程式。每含意外之根。

故凡解根式方程式時。所得之根。須驗其合於原方程式者而後用之。

(五) 含二元之聯立方程式。若一爲一次式。一爲二次式時。則先由一次式求 y 以 x 表之。代入二次式中。解之。以求 x 之值。

若兩方程式同爲二次。絕不含一次之項時。則將二式相除。或令 $y=vx$ 解之。求得 $\frac{y}{x}$ 之值。然後代入原二方程式之任一式中。以求 x 之值。

附 錄

中西名詞對照表

第 一 編

方程式	Equation.
未知數	Unknown number.
代數式	Algebraic expression.
公式	Formula.
代數解法	Algebraic solution.
解方程式	Solve the equation.
代數學	Algebra.
係數	Coefficient.
冪	Power.
平方	Square.
立方	Cube
指數	Index, Exponent.
項	Term.
一項式	Monomial.
二項式	Binomial.
三項式	Trinomial.
多項式	Polynomial.
複式	Compound expression.
單式	Simple expression.

數值	Numerical value.
整式	Integral expression.
分數式	Fractional expression.
負數	Negative number.
正數	Positive number.
絕對值	Absolute value.
格林威基(綠威)	Greenwich.
交換規則	Commutative law.
結合規則	Associative law.
配分規則	Distributive law.
代數和	Algebraical sum.
代數差	Algebraical difference.

第 二 編

同類項	Like term.
依 x 降冪之順列之	Arrange according to descending powers of x.
依 x 昇冪之順列之	Arrange according to ascending powers of x.
次數	Degree order.
指數規則	Index law.
同次式	Homogeneous expression.

第 三 編

等式	Equality.
恆等式	Identity.
普通式	General form.

根	Root.
移項	Transpose.
聯立一次方程式	Simultaneous linear equation.
加減消去法	Elimination by addition and subtraction.
比較消去法	Elimination by comparison.
代入消去法	Elimination by substitution.

第 四 編

因數	Factor.
因數分解	Factorization.
最高公因數	Highest common factor.
倍數	Multiple.
最低公倍數	Lowest common multiple.

第 五 編

分母	Denominator.
分子	Numerator.
通分	To reduce to common denominator.
最低公分母	Least common denominator.
逆數	Reciprocal.
繁分數	Compound fraction.
連分數	Continued fraction.

第 六 編

分數方程式	Fractional equation.
字母方程式	Literal equation.
不能問題	Impossible problem.

不定問題	Indeterminate problem.
討論	Discussion.

第 七 編

自乘法	Involution.
開方法	Evolution.
平方根	Square root.
立方根	Cube root.
根號	Radical sign.
根數	Radical surd.
根指數	Index of radicals.
根式	Radicals expression.
有理式	Rational expression.
無理式	Irrational expression.
複號	Double sign.
虛數	Imaginary number.
實數	Real number.

第 八 編

二次方程式	Quadratic equation.
判別式	Discriminant.

第 九 編

逆數方程式	Reciprocal equation.
二項方程式	Binomial equation.
根式方程式（無理方程式）	Irrational equation.
意外之根	Additional root.
聯之二次方程式	Simultaneous quadratic equation.

自傳之

談

地

一冊 一冊 一冊 一冊 一冊 一冊 一冊

角 角半 角 角半 角

以上各書業已出版

以上各書在刊印中

中華

民國五年七月印刷
民國五年七月發行

（新制代數學教本）全二冊

上冊定價銀一元二角五折實售六角
（外埠加郵匯費六折實售七角二分
輪船火車未通處七折實售八角四分）

編者　閩侯王永炅
　　　泰和胡樹楷
校閱者　義烏陳榥
　　　丹徒王祖訓
發行者　桐鄉陸費逵
印刷者　無錫俞復
印刷所　中華書局
　　　上海靜安寺路一九二號

行所　上海福州路河南路轉角
中華書局

分行所　北京　天津　奉天　廣州　長沙　開封　溫州
長春　漢口　南昌　南京　杭州　濟南　保定
武昌　太原　常德　福州　成都　重慶　雲南
徐州　西安　汕頭　香港　蘭州　衡陽　貴陽
吉林　潮州　安慶　桂林　東昌　廈門　蘭溪
石家莊　黑龍江　張家口　哈爾濱　新加坡
中華書局