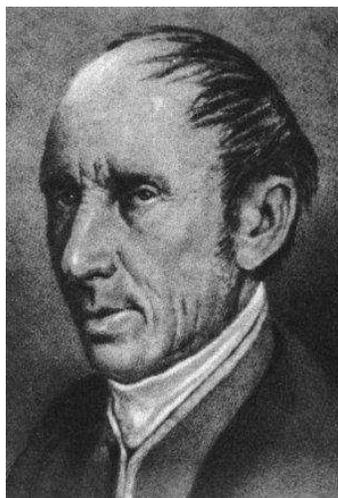


Vorkurs Mathematik

Vorlesung 5

Cauchy-Folgen

Ein Problem des Konvergenzbegriffes ist, dass zur Formulierung der Grenzwert verwendet wird, den man unter Umständen noch gar nicht kennt. Wenn man beispielsweise die durch das babylonische Wurzelziehen konstruierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (sagen wir zur Berechnung von $\sqrt{5}$) mit einem rationalen Startwert betrachtet, so ist dies eine Folge aus rationalen Zahlen. Wenn wir diese Folge in \mathbb{R} betrachten, wo $\sqrt{5}$ existiert, so ist die Folge konvergent. Innerhalb der rationalen Zahlen ist sie aber definitiv nicht konvergent. Es ist wünschenswert, allein innerhalb der rationalen Zahlen den Sachverhalt formulieren zu können, dass die Folgenglieder beliebig nahe zusammenrücken, auch wenn man nicht sagen kann, dass die Folgenglieder einem Grenzwert beliebig nahe zustreben. Dazu dient der Begriff der Cauchy-Folge.



Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

DEFINITION 5.1. Eine reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$

gilt.

SATZ 5.2. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x . Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir wenden die Konvergenzeigenschaft auf $\epsilon/2$ an. Daher gibt es ein n_0 mit

$$|x_n - x| \leq \epsilon/2 \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Für beliebige $n, m \geq n_0$ gilt dann aufgrund der Dreiecksungleichung

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Also liegt eine Cauchy-Folge vor. \square

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

AXIOM 5.3. Die reellen Zahlen \mathbb{R} sind vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge in \mathbb{R} konvergiert.

Damit haben wir alle Axiome der reellen Zahlen zusammengetragen: die algebraischen Axiome, die man auch die Körperaxiome nennt, die Anordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom. Diese Eigenschaften legen die reellen Zahlen eindeutig fest, d.h. wenn es zwei Modelle \mathbb{R}_1 und \mathbb{R}_2 gibt, die beide für sich genommen diese Axiome erfüllen, so kann man eine bijektive Abbildung von \mathbb{R}_1 nach \mathbb{R}_2 angeben, die alle mathematischen Strukturen erhält (sowas nennt man einen „Isomorphismus“).

Die Existenz der reellen Zahlen ist nicht trivial. Vom naiven Standpunkt her kann man, und das haben wir bisher getan und werden wir auch weiterhin tun, die Vorstellung einer „kontinuierlichen lückenfreien Zahlengerade“ zugrunde legen, und dies als Existenznachweis akzeptieren. In einer strengeren mengentheoretischen Begründung der Existenz geht man von \mathbb{Q} aus und konstruiert die reellen Zahlen als die Menge der Cauchy-Folgen in \mathbb{Q} mit einer geeigneten Identifizierung.

Intervallschachtelungen

Aus der Vollständigkeit ergeben sich wichtige Resultate über die Existenz von Zahlen, nämlich in dem Sinne, dass Approximationsverfahren in der Tat reelle Zahlen liefern. Wir besprechen Intervallschachtelungen und Dezimalbruchentwicklung.

DEFINITION 5.4. Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen

$$I_n = [a_n, b_n], \quad n \in \mathbb{N},$$

in \mathbb{R} heißt eine *Intervallschachtelung*, wenn $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist und wenn die Folge der Intervalllängen, also

$$(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}},$$

gegen 0 konvergiert.

SATZ 5.5. Es sei I_n , $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in \mathbb{R} . Dann besteht der Durchschnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$. Eine reelle Intervallschachtelung bestimmt also genau eine reelle Zahl.

Beweis. Siehe Aufgabe 5.5. □

Wenn diese Intervalle durch $I_n = [a_n, b_n]$ gegeben sind, so ist

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Dies wird in Aufgabe 5.6 bewiesen.

Konvergenz der Zifferndarstellung

Wir zeigen nun, wie eine Ziffernentwicklung $0, z_1 z_2 z_3 \dots$ eine Cauchy-Folge (in \mathbb{Q}) ist und wie sie über die Vollständigkeit in der Tat eine reelle Zahl darstellt.

SATZ 5.6. Eine Zifferndarstellung (im Dezimalsystem) definiert eine eindeutig bestimmte reelle Zahl. Wenn

$$0, z_1 z_2 z_3 \dots$$

die Zifferndarstellung bezeichnet, so ist die Zahl der Grenzwert der durch

$$x_n = \sum_{i=1}^n z_i 10^{-i}$$

gegebenen Folge.

Beweis. Es sei eine Zifferndarstellung (oder Dezimalentwicklung) gegeben, wobei wir uns nur um Darstellungen der Form $0, z_1 z_2 z_3 \dots$ kümmern müssen. Es genügt zu zeigen, dass die zugehörige Folge

$$x_n = \sum_{i=1}^n z_i 10^{-i}$$

eine Cauchy-Folge ist. Aufgrund der Vollständigkeit von \mathbb{R} besitzt dann die Zifferndarstellung einen eindeutigen Grenzwert, und dieser ist die durch die Zifferndarstellung bestimmte Zahl. Dazu betrachten wir die Differenz (für $m \geq n$)

$$\begin{aligned} x_m - x_n &= \sum_{i=1}^m z_i 10^{-i} - \sum_{i=1}^n z_i 10^{-i} \\ &= \sum_{i=n+1}^m z_i 10^{-i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 10^{-n-1} \left(\sum_{j=0}^{m-n-1} z_{j+n+1} 10^{-j} \right) \\
&\leq 10^{-n} \left(\sum_{j=0}^{m-n-1} 10^{-j} \right),
\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Abschätzung verwendet haben, dass die Ziffern kleiner als 10 sind. Nach Aufgabe 3.21 gilt für die Summe rechts die Gleichheit

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m-n-1} 10^{-j} &= \sum_{j=0}^{m-n-1} \left(\frac{1}{10} \right)^j \\
&= \frac{1 - \left(\frac{1}{10} \right)^{m-n}}{1 - \frac{1}{10}} \\
&\leq \frac{1}{\frac{9}{10}} \\
&= \frac{10}{9}.
\end{aligned}$$

Bei gegebenem n haben wir also für jedes $m \geq n$ die Abschätzung

$$x_m - x_n \leq 10^{-n} \frac{10}{9}.$$

Zu einem beliebig vorgegebenen $\epsilon > 0$ finden wir zuerst ein n_0 mit

$$10^{-n_0} \frac{10}{9} \leq \epsilon$$

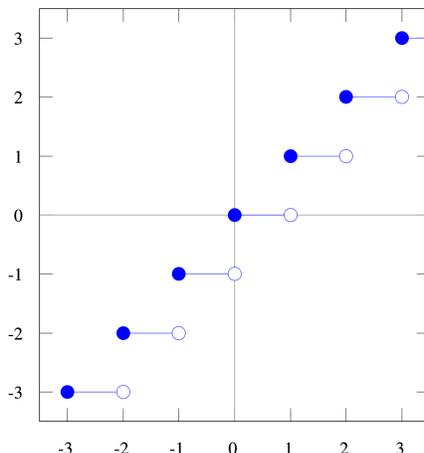
und für $m \geq n \geq n_0$ gilt dann

$$x_m - x_n \leq \epsilon.$$

□

Wir besprechen nun, wie man zu einer irgendwie gegebenen reellen Zahl die Dezimalbruchentwicklung findet und zeigen, dass sie eindeutig bestimmt ist. Die Zahl kann als ein Bruch $\frac{3}{7}$, durch eine algebraische Eigenschaft, wie bei $\sqrt{5}$, als das Inverse x^{-1} einer irgendwie gegebenen Zahl x , als Ergebnis einer Verknüpfung $x + y$ oder $x \cdot y$ von irgendwie gegebenen Zahlen x und y , oder als Grenzwert einer Folge gegeben sein. In irgendeiner Weise muss die Zahl natürlich vorliegen. Der im folgenden Satz beschriebene Algorithmus zur Bestimmung der Ziffern benötigt lediglich, dass man die auftretenden Zahlen mit 10 multipliziert, Differenzen berechnet und mit ganzen Zahlen vergleichen kann. Für den letzten Punkt ist die folgende Überlegung hilfreich.

Für die reellen Zahlen bilden die ganzzahligen halboffenen Intervalle $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$, aufgrund des Archimedes-Axioms eine disjunkte *Überdeckung*. Jede reelle Zahl liegt also in genau einem dieser Intervalle. Deshalb ist die folgende Definition sinnvoll.



DEFINITION 5.7. Zu einer reellen Zahl x ist die *Gaußklammer* $[x]$ durch

$$[x] = n, \text{ falls } x \in [n, n + 1[\text{ und } n \in \mathbb{Z},$$

definiert.

Es ist also $[x]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

SATZ 5.8. Zu einer reellen Zahl $x \in [0, 1[$ erhält man eine Ziffernentwicklung (im Dezimalsystem) mit den Ziffern z_i durch die rekursive Bestimmung

$$s_0 = x, z_{i+1} = [10 \cdot s_i] \text{ und } s_{i+1} = 10 \cdot s_i - z_{i+1},$$

die x darstellt.

Beweis. Zu jeder reellen Zahl $t \in [a, b[$ in einem halboffenen Intervall gibt es ein eindeutiges j , $0 \leq j \leq 9$, mit

$$t \in \left[a + \frac{j}{10}(b-a), a + \frac{j+1}{10}(b-a) \right[,$$

da diese Intervalle eine disjunkte Zerlegung von $[a, b[$ bilden. Bei $[a, b[= [0, 1[$ kann man das j als $j = [10t]$ finden. Das angegebene Rekursionsschema funktioniert auf diese Weise, d.h. $\frac{z_1}{10}$ mit $z_1 = [10s_0]$ ist die linke Grenze des halboffenen Teilintervalls der Länge $\frac{1}{10}$, in dem s_0 liegt. Die Zahl $s_1 = 10s_0 - z_1$ gibt somit das Zehnfache des Abstands der Zahl s_0 von der linken Grenze des Teilintervalls an. Induktiv sieht man, dass z_i eine natürliche Zahl zwischen 0 und 9 ist, dass $s_i \in [0, 1[$ ist und dass

$$x \in \left[\sum_{i=1}^k z_i 10^{-i}, \sum_{i=1}^k z_i 10^{-i} + 10^{-k} \right[$$

für jedes k ist. Daher ist $0, z_1 z_2 z_3 \dots$ eine Ziffernentwicklung und es liegt eine Intervallschachtelung für x vor, wobei die unteren Intervallgrenzen die durch

andererseits sind die s_i rationale Zahlen mit b als Nenner. D.h. s_i muss eine der b Zahlen

$$0, \frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \frac{3}{b}, \dots, \frac{b-1}{b}$$

sein. Unter den s_1, s_2, s_3, \dots muss es also irgendwann eine Wiederholung geben, sagen wir $s_k = s_\ell$ mit $\ell > k$. Da die Zahlen z_{i+1} und s_{i+1} nur von s_i abhängen, ist $z_{\ell+1} = z_{k+1}$, $z_{\ell+2} = z_{k+2}$, u.s.w, d.h., es liegt eine Periodizität vor. Es liege eine periodische Ziffernentwicklung für die reelle Zahl x vor. Da sich die Eigenschaft, eine rationale Zahl zu sein, weder bei Multiplikation mit einer rationalen Zahl $\neq 0$ noch bei Addition mit einer rationalen Zahl ändert, können wir sofort annehmen, dass die Ziffernentwicklung die Form

$$0, z_{m-1}z_{m-2} \dots z_0 z_{m-1}z_{m-2} \dots z_0 z_{m-1}z_{m-2} \dots z_0 \dots$$

besitzt. Die dadurch definierte Zahl können wir als

$$\left(\sum_{i=0}^{m-1} z_i 10^i \right) \cdot 0,00\dots00100\dots00100\dots00100\dots001\dots$$

auffassen, wobei die Einsen an der m -ten, $2m$ -ten u.s.w. Stelle stehen. Wir müssen uns also nur noch um periodische Ziffernentwicklungen von dieser speziellen Art kümmern. Wir betrachten die Folge

$$y_\ell = \sum_{j=1}^{\ell} \left(\frac{1}{10} \right)^{jm},$$

deren Glieder approximierende abbrechende Ziffernentwicklungen von x sind (wobei manche übersprungen werden). Aufgrund von Aufgabe 3.21 ist

$$\sum_{j=1}^{\ell} \left(\frac{1}{10} \right)^{jm} = \frac{1 - \left(\frac{1}{10} \right)^{(\ell+1)m}}{1 - \left(\frac{1}{10} \right)^m} - 1.$$

Der Limes davon (für ℓ gegen unendlich) ist, da ja $\left(\frac{1}{10} \right)^{(\ell+1)m}$ gegen 0 konvergiert, gleich

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{10} \right)^m} - 1 = \frac{1}{\left(\frac{99\dots99}{10^m} \right)} - 1 = \frac{10^m}{99\dots99} - 1 = \frac{1}{99\dots99},$$

wobei jeweils m Neunen vorkommen. Diese Zahl ist also rational. \square

Die entsprechende Aussage gilt für die Ziffernentwicklung zu jeder Basis, nicht nur im Dezimalsystem. Eine reelle Zahl mit einer periodischen Ziffernentwicklung wird so geschrieben, dass man einen Strich über die Periode macht, also beispielsweise

$$351,05288\overline{2700}.$$

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Augustin Louis Cauchy.JPG , Autor = Benutzer Anarkman auf Commons, Lizenz = PD	1
Quelle = Floor function.svg , Autor = Benutzer Omegatron auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	5
Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz.	9
Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt.	9