始

物理學通論

東北帝國大學總長
理學博士
本多光太郎著

東　京
內田老鶴圃刊行
1932

序　言

本書は編者の一人が東北帝國大學理科大學にありて講義せるを基として編纂せるものにして物理學各論を學ばんとするものに必要なる知識を與ふることを目的とせり．されば基礎的事項に重きを置き現代に於ける物理學發展の概略を叙述せり．

本書は二十八章より成りエネルギーを骨子として物性熱音光磁氣電氣等に關する重要なる諸現象を說明せり。計算には簡單なる微積分を使用せりと雖も成るべく其の物理的意義を讀者に示さんことを力めたり．力學に屬する部分は一般に之を省き單に本書所載の事項を說明するに必要なる範圍に止めたり．

本書を編纂するに當り編者はローレンツの物理學田丸博士の振動水野博士の電子論ポインチング及びタムソンの物理學タムソンの電氣及び磁氣學プレストンの熱學及び光學等の著書に負ふ所少からず．又友人理學博士木下季吉理學博士石原純及び理學士木村正路の三氏は本書に就きて重要なる數多の注意を編者に與へられたり．玆に上記の諸氏に對して深く感謝の意を表す．

大正四年九月

仙臺に於て

編者識す

増訂第八版に就いて

本書の初めて出版せられしより年を經ること既に十年其間に於ける物理學の進歩殊に原子の構造量子則及び相對則に關する發展は頗る著しきものあり. 本書第八版を發行するに當り東京帝國大學助教授遠藤美壽氏の多大の助力により斯學の進歩に適合せる修正と增補とを行ふを得たるは余の深く感謝する所なり. 讀者若し本書によりて物理學の基本的知識と最近進歩の大要を習得せらるるを得ば著者の本懐之に過ぎざるなり. 尙本書は從來川北教授と共著として發行せられたるものなるも今回の訂正を機とし余一人の著書として本書の內容に關する責任を負ふこととせり.

大正十四年七月

著者識す

第十五版に際して

大正四年始めて本書を公にしてより版を重ぬること十二回に及び數萬の讀者を得たるは余の實に欣快とする處なり. 然るに最近十數年間に於ける物理學の進歩は洵に驚くべきものあり. 余はこれに應ずるため既に屢々修正增補をなし來れりと雖も今また斯學の現況より見るときは最近の發展に伴はざるの憾少からず. 依つて玆に第十五版の發行を機とし親しき友人二三の助力を得て改訂を行ひ以て世の要望に副はんことを期せり.

從來數次の修補に際しては專ら初版の原稿に基づき逐次に所要の事項を追加せしも今また斯の如くして上記の目的を達せんことの不可能なるを知り今回の改訂に際しては全く舊版を棄てゝ新に稿を起すことゝせり.

初めて第一版を發行するに當つては物理學を修めんとする者に對する邦文の著書少く從つて細目に涉る記述を要すること多かりしも現今に於ては既に多數の良書あり. 故に多くの事項を之等の著書に委ね本書には專ら物理學の基礎として重要なる現象を揭げ原理法則を說くを主眼とせり. これ舊版に比して少しく體裁を異にする所以なり. また從前に比して說明を稍々簡單にせるはその詳細を他に求むること容易なるによる. 讀者もし本書によつて物理學の基

本的知識を會得するを得ば余の最も本懐とする處なり.

今回新に稿を起すに當つては余先づ左記の大久保三枝兩君に諮つて改訂の大綱を定めこれに從つて山田君文案を起草し余その草案を精細に點檢して加筆添削し更に大久保野邑兩君の推敲を經て印刷に附せり. 校正に際しても更に西山廣根の兩君を加へて檢討を重ね誤謬なからんことを期せり.

多大の勞を吝まず余に協力せられたる

東北帝國大學教授 理學博士	大久保準三
同	三枝彦雄
同	山田光雄
第二高等學校教授 理學士	野邑雄吉
東北帝國大學助手 理學士	西山善次
東北帝國大學囑託 理學士	廣根德太郎

の諸君に對して深く感謝す.

昭和七年十月

著者識す

物理學通論目次

第一章 運動

第二章 力

第三章 重力

第四章 仕事とエネルギー

第五章 剛體の運動

第六章 彈性體

第七章 流體

第八章 表面張力

第九章 溫度と熱

第十章 分子運動論

第十一章 熱力學

第十二章 振動

第十三章 波動

第十四章 音波

第十五章 光の反射屈折

第十六章 光波

第十七章 光の干涉

第十八章 偏光と複屈折

第十九章 電氣

第二十章 磁氣

第二十一章 電流

第二十二章 電解質

第二十三章 電流と磁場

第二十四章 電磁氣感應

第二十五章 電磁氣單位

第二十六章 電磁波

第二十七章 陰極線とX線

第二十八章 放射能

第二十九章　分子及び結晶

第三十章　量子論

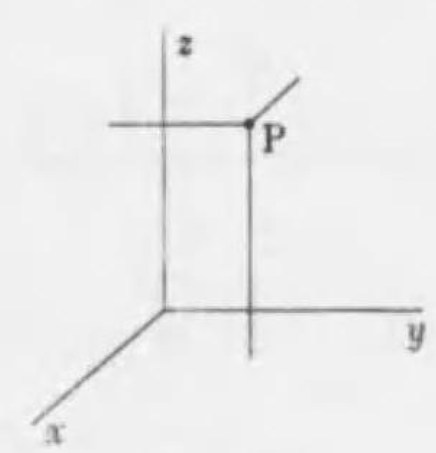
第三十一章　原子の構造

第三十二章　相對論

物理學通論

第一章　運動

1. **運動**　物體が時とともにその位置を變ずることを**運動**と云ひ一定の位置に止まることを**靜止**と稱へる．荷を運ぶ車は動いて刻々に位置を變じ路傍の木は靜に同じ位置に止まる．併しながら本來この運動と靜止とは他の物體に對して相對的にのみ考へ得られる．車と木の運動と靜止は何れも地表に對して考へる．全く空虚の空間に對する運動または靜止は何等の意義をも有しない．必ず何等かの基準體を撰ばなければならない．その基準として何を採るべきかについては相當の考察を必要とするけれどもその根本に於て全く便宜の問題に屬する．通常は地球を不動と見做して之を基準に採るけれども場合によつては地球の自轉公轉を考へるを要する．



第1圖

數學的に位置を表はすためには通常一の直角坐標系を用ひる．運動する一點Pの位置はその坐標 $x\ y\ z$ によつて表はされる．P點が靜止するときは之等の坐標が一定の値を保ち運動すれば各々時刻に伴つて變化する．この $x\ y\ z$ を時刻 t の函數として

$$x=\xi(t) \qquad y=\eta(t) \qquad z=\zeta(t)$$

の形に表はし得ればこの點の運動は完全に明かになる．之等の三式より t を消去して

$$\varphi(x\ y\ z)=0 \quad \psi(x\ y\ z)=0$$

の形の二式を求めれば之が卽ち運動の徑路を表はす．或は徑路を知り且つP點が通過した長さ s を時刻の函數として

$$s=f(t)$$

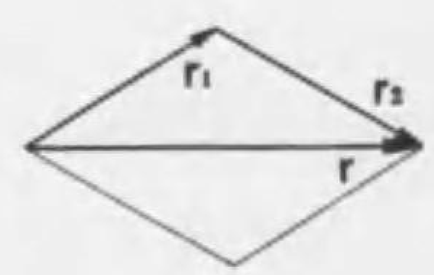
の形に表はしても運動が明かにせられる．

一般に大さある物體の中の各點は必しも同一の運動をしない．例へば車が動くとき車軸は直線の上を動くけれども車輪の周邊にある點は曲線を畫いて動く．もし物體の中の各點が總て同一の運動をなすとき卽ち各點がすべて平行に同じ距離だけ動く場合には之を**併進運動**と云ひ物體の中の一點または一の直線が動かず他の點がその周りに動くときには**廻轉運動**と稱へる．

一點Pが一の位置Aから他の位置Bに移動するときAからBに至る直線距離とその方向とを併せ考へて $\mathbf{r}$ を**變位**と名づける．この移動が直線に沿ふてなされる場合に限らず一般に曲線を畫いて移動する場合にもこの $\mathbf{r}$ を以て變位と名づけることゝする．P點が原點Oを過る直線の上を動けばOよりの變位の大さは變るけれども方向は變らない．またP點がOを中心とする圓の上を動くときはOよりの變位の方向のみが變り大さは變らない．

第2圖

二つの變位 $\mathbf{r}_1$ $\mathbf{r}_2$ が引續いて生じたときには順序に關係なくこの $\mathbf{r}_1$ $\mathbf{r}_2$ を二邊とする平行四邊形の對角線に當る一の變位 $\mathbf{r}$ が生ずる．逆にまた一の變位 $\mathbf{r}$ は二つの變位 $\mathbf{r}_1$ $\mathbf{r}_2$ を合はせたものと考へてよい．二つの變位の結果として生ずる一の變位を求めることを**合成**と云ひ逆に一の變位を二つの變位に分けることを**分解**と稱する．$\mathbf{r}_1$ $\mathbf{r}_2$ は全く對等の關係にあつて何れを先とし何れを後と考へても合成の結果は變らない．



第3圖

2.　ベクトル　物理學に現はれる諸種の量にはたゞ大さのみを考へるものが多い．物體の體積はたゞ幾竓と表はせば足り溫度は幾度と表

はせば完全に定まる．この種の量を一般に**スカラー**と名づける．

然るになほ之等の外に大さと方向とを併せ考ふべき量がある．例へば變位を表はすには幾糎と云ふ距離の外に方向をも明かにしなければならない．この種の量もまた少くない．大さと方向とを有し且つ中斜法による合成分解を適用し得る量を一般に**ベクトル**と名づける．

ベクトルの大さと方向とを併せ考へたものを表はすために通常 $\mathbf{a}$ の如き記號を用ひる．前節に用ひた $\mathbf{r}$ もまた大さと方向とを併せて表はす．$\mathbf{a}$ の大さのみを考へる場合には a と表はすことゝする．またベクトルの消滅した結果を0とする．二つのベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ とが大さも方向も等しいときには

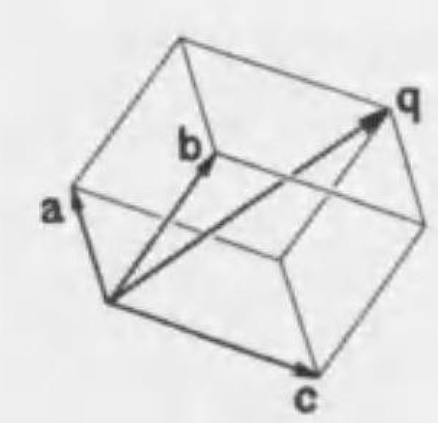
$$\mathbf{a}=\mathbf{b}$$

と表はす．こゝにベクトルに對して用ひられたこの等號は之等のベクトルが大さのみならず方向までも等しいことを意味する．大さのみが等しいときには

$$a=b$$

と表はすことゝする．

ベクトルは矢を以て表はすことができる．矢の方向はベクトルの方向に向け長さはベクトルの大さに比例せしめる．二つのベクトルを合成するには之等を二邊とする平行四邊形の對角線に當るベクトルを求める．多數のベクトルについては先づ二つを合成したものと第三のものとを合成し逐次に全部を合成した結果を全部の合成ベクトルと稱へる．合成する順序は結果に關係しない．例へば三つのベクトル $\mathbf{a}$ $\mathbf{b}$ $\mathbf{c}$ を合成すれば何れを先に合成しても之等を三稜とする平行六面體の對角線に當るベクトル $\mathbf{q}$ が得られる．この合成には逐次に平行四邊形を作る代りに $\mathbf{a}$ の尖端から $\mathbf{b}$ を畫き次にその尖端から $\mathbf{c}$ を畫いて $\mathbf{a}$ の始點から最終點に至るベクトルを作ればよい．多數のベクトルについてもまた同樣である．



第4圖

簡單のために合成することを**加へ合はす**と云ひ合成ベクトルを**和**と稱する．二つのベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ との和を

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}$$

と表はす．この如くベクトルに用ひられた加法記號は中斜法の合成を意味する[1]．また $\mathbf{b}$ と大さ等しく方向が反對なるベクトルを $-\mathbf{b}$ とし $\mathbf{a}$ と $-\mathbf{b}$ とを合成したものを

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}$$

と表はすことゝする．

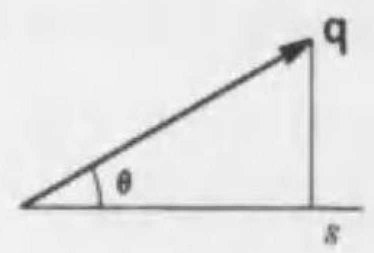
ベクトル $\mathbf{a}$ の方向に向ひ大さ n 倍なるベクトルを

$$n\mathbf{a}$$

と表はし n が負のときには方向が逆なることを意味することゝする．また $\frac{1}{n}$ 倍なるものは

$$\frac{\mathbf{a}}{n}$$

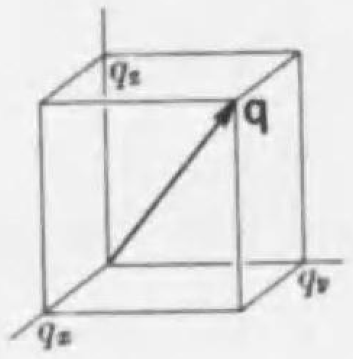
とする．



第５圖

一の方向 s の上に之と θ の角をなし大さ q なるベクトル $\mathbf{q}$ を射影すればその大さは

$$q\cos\theta$$



第６圖

之をベクトル $\mathbf{q}$ の s 方向に於ける**分素**と名づけ q_s と表はすことにする．坐標軸 $x\ y\ z$ に對する分素 $q_x\ q_y\ q_z$ は $\mathbf{q}$ を對角線とする直六面體の稜で表はされる．例へば $\mathbf{q}$ が原點からの變位 $\mathbf{r}$ ならば $q_x\ q_y\ q_z$ は坐標 $x\ y\ z$ に等しい．$\mathbf{q}$ の大さ q と分素 $q_x\ q_y\ q_z$ との間には

$$q^2=q_x^2+q_y^2+q_z^2$$

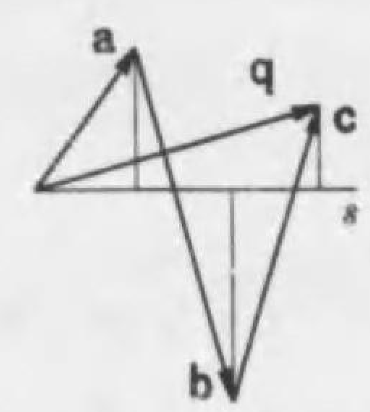
の關係がある．この $x\ y\ z$ 分素はベクトルによつて定まるとともに逆に $x\ y\ z$ 分素を知れば之によつて $\mathbf{q}$ の大さも方向も決定する．

多數のベクトルを合成せるものゝ一の方向に對する分素は各個の分

(1) 大さを加へ合はすことゝ區別しなければならない．

素の和に等しい．$\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}$ を合成した $\mathbf{q}$ の s への射影 q_s は圖に明かなやうに各個の射影 $a_s\ b_s\ c_s$ の和に等しい．從つて $x\ y\ z$ に對しても

$$q_x=a_x+b_x+c_x \quad q_y=a_y+b_y+c_y \quad q_z=a_z+b_z+c_z$$



第７圖

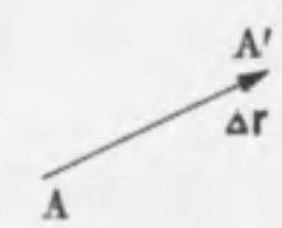
坐標軸 $x\ y\ z$ について多數のベクトルの分素を加へ合はすならば之等の合成ベクトルの分素が得られる．また一のベクトル $\mathbf{a}$ を $x\ y\ z$ の方向に分解し次に之等を s の上に射影して加へ合はせば $\mathbf{a}$ の s 方向の分素が得られる．s の方向餘弦を $l\ m\ n$ とすれば

$$a_s=la_x+ma_y+na_z$$

を得る．

3.　速度と加速度　物體の運動を見るに場合によつて或は速く或は遲い．一點Pが始めAの位置にあり次に $\varDelta t$ なる時間の後 $\varDelta\mathbf{r}$ だけ隔たるA′に移動したとすれば單位時間に對する變位は

$$\frac{\varDelta\mathbf{r}}{\varDelta t}$$



第８圖

時間 $\varDelta t$ を大きく取ればその間にも遲速の不同があり得るけれども之を極めて小さく取れば全く一樣と考へられる．よつてこの時間を次第に小さくしたときの極限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varDelta\mathbf{r}}{\varDelta t}=\mathbf{v}$$

を以てその瞬間の運動の遲速を表はすことゝし之をそのときのP點の**速度**と名づける．その瞬間の運動が續くとき單位時間に生ずべき變位とも考へられる．

速度の大さの單位としては通常１秒に１糎を通過する速度を採つて１糎秒$^{-1}$と表はす．速度もまた一のベクトルとして之に中斜法を適用する．速度 $\mathbf{v}$ の大さを v とし $x\ y\ z$ 方向の分速度を $v_x\ v_y\ v_z$ とすれば

$$v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2$$

P 點が單位時間に $\mathbf{v}$ だけ動けばその間に坐標 $x\ y\ z$ は $v_x\ v_y\ v_z$ だけ變化

する．即ち $v_x\ v_y\ v_z$ は $x\ y\ z$ の變化する速さに等しく

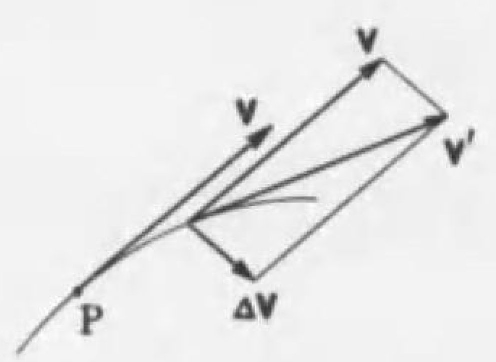
$$v_x=\frac{dx}{dt}\qquad v_y=\frac{dy}{dt}\qquad v_z=\frac{dz}{dt}$$

速度の大さは單位時間に通過すべき長さと云ふてもよい．P 點の畫く徑路の長さを s とすれば速度の大さは

$$\frac{ds}{dt}$$

とも表はされる．その方向は徑路の切線と一致する．

一般には速度も時刻とともに變化する故に速度の變化の遲速を考へなければならない．始め $\mathbf{v}$ なる速度を有した一點 P が $\varDelta t$ なる時間の後 $\mathbf{v}'$ なる速度を有するとすればこの間に $\varDelta\mathbf{v}$ なる速度が加はることを要する．單位時間に對する速度の變化は



第 9 圖

$$\frac{\varDelta\mathbf{v}}{\varDelta t}$$

$\varDelta t$ を極めて小さくしたときの極限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\varDelta\mathbf{v}}{\varDelta t}=\mathbf{u}$$

を以て速度の變化の遲速を表はすことゝし之をそのときのP點の加速度と稱へる．加速度の大さの單位としては通常１秒に １糎秒$^{-1}$ の速度が加はる加速度を採り１糎秒$^{-2}$と表はす．

速度の大さまたは方向の變化は必ず加速度を伴ふ．速度の大さが一定なるときも方向が變るには加速度がなければならない．従つて速度の大さの變化する速さと加速度の大さとは等しくない．たゞ徑路が直線なる場合に限つて之等が一致する．速度が單位時間に $\mathbf{u}$ だけ加はれば之に伴つて分速度は $u_x\ u_y\ u_z$ だけ變化する．従つて $u_x\ u_y\ u_z$ は $v_x\ v_y\ v_z$ の變化する速さに等しい．即ち

$$u_x=\frac{dv_x}{d}\qquad u_y=\frac{dv_y}{dt}\qquad u_z=\frac{dv_z}{dt}$$

従つてまた

$$u_x=\frac{d^2x}{dt^2}\qquad u_y=\frac{d^2y}{dt^2}\qquad u_z=\frac{d^2z}{dt^2}$$

でなければならない．

4. 等加速直線運動 今一例として一點Pが直線の上を動き原點Oよりの距離 s が

$$s=\frac{1}{2}\alpha t^2+at+A \qquad 1$$

で表はされる運動を考へる．こゝに $\alpha\ a\ A$ は何れも定數とする．速度は上式を微分して

$$\frac{ds}{dt}=\alpha t+a \qquad 2$$

加速度は

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\alpha \qquad 3$$

となつて不變である．[1] この運動を**等加速直線運動**と稱へる．1と2に t を 0 と置けば

$$s=A\qquad\qquad \frac{ds}{dt}=a$$

a と A とは時刻の始めに於ける速度と位置とを表はす．もし始めの位置を原點と取れば A は 0 になり

$$s=\frac{1}{2}\alpha t^2+at$$

また 2 に t を $-\dfrac{a}{\alpha}$ と置けば $\dfrac{ds}{dt}$ は 0 となる．即ちこの時刻に於ては速度が 0 となる．この時刻から t を測ることに改めれば上の t の代りに $t-\dfrac{a}{\alpha}$ と置いて

$$s=\frac{1}{2}\alpha t^2\qquad\qquad \frac{ds}{dt}=\alpha t$$

が得られる．即ち速度は時間に比例して增加し通過した途の長さは時間の二乘に比例する．

---

(1) $\dfrac{ds}{dt}$ が正ならば速度が s の正の方向に向ひ之が負ならば速度が s の負の方向に向ふ．$\dfrac{d^2s}{dt^2}$ の正負は加速度が s の正の方向または負の方向に向ふことを示す．

また逆に直線運動に於て加速度の不變なることが豫め知られた場合には之をαとして

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\alpha$$

積分して

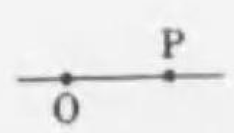
$$\frac{ds}{dt}=\alpha t+a \qquad s=\frac{1}{2}\alpha t^2+at+A$$

が得られる．aとAとは積分定數で上に述べた如く時刻の始めの速度と位置とに相當する．

5. 單振動 或る時間ごとに同一の運動が反覆して繰返されるときには之を**週期運動**と云ひ一回の運動に要する時間をその**週期**と名づける．一の線の上を往復する週期運動は特に**振動**と稱へる．

今その最も簡單なる例として一點Pが直線の上を往復し定點Oよりの距離が

$$s=C\cos(2\pi\nu t-\varepsilon) \qquad 4$$



第10圖

と表はされる場合を考へる．こゝにC ν εは定數とする．P點はOの兩側に$+C$と$-C$との間を絶えず往復する．この運動を**單振動**と云ひCをその**振幅**と名づける．tが$\frac{1}{\nu}$だけ増せばsは舊の値に戻りP點は再び舊の位置に歸る．其の後は4の示す如くにまた前と同樣の運動を繰返す．從つて$\frac{1}{\nu}$はこの單振動の週期に等しい．νは單位時間に對する振動回數で通常これを單に**振動數**と稱する．tが$\frac{\varepsilon}{2\pi\nu}$なる時刻には$s$が最大となりP點は振動の最端に達する．$\varepsilon$が0ならばP點は時刻の始めに於てこの位置に來り$\varepsilon$が大きければP點がこの位置に來ること遲い．$\varepsilon$が大なるほど振動が遲れ$\varepsilon$が$2\pi$に達すれば一振動だけの遲れを生ずる．$2\pi\nu t-\varepsilon$を**位相**と云ひ$\varepsilon$を**位相定數**と名づける．

4を微分して速度と加速度を求めれば

$$\frac{ds}{dt}=-2\pi\nu C\sin(2\pi\nu t-\varepsilon) \qquad 5$$

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-4\pi^2\nu^2C\cos(2\pi\nu t-\varepsilon) \qquad 6$$

この後式を4と比較すれば

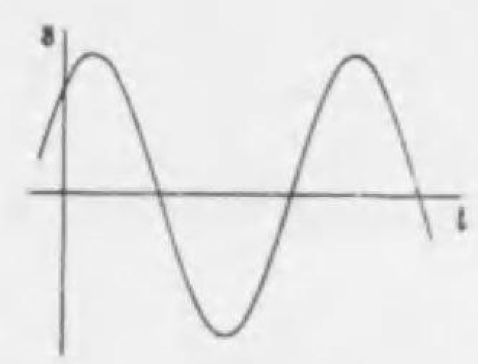
$$\frac{d^2s}{dt^2}=-4\pi^2\nu^2s$$

卽ち加速度は常に定點Oからの變位に比例する．併し變位が正なるときには加速度が負の方向に向ひ變位が負なるときには加速度が正の方向に向ふ．卽ち加速度は常にOに向ふ．

單振動はまた

$$s=C\sin(2\pi\nu t-\delta)$$

と表はしてもよい．δを適當に撰べはこの式は4と一致する．



第11圖

逆に加速度が常に定點Oに向ひ且つ之よりの距離に比例するときにはその運動が單振動なることを直に知り得る．その比例の係數を$4\pi^2\nu^2$と置けば

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-4\pi^2\nu^2s$$

この關係を充たすものは

$$s=C\cos(2\pi\nu t-\varepsilon)$$

でなければならない[1]．Cとεとは積分定數で上に述べたやうに振幅と位相定數とを表はす．この式とこれを微分した式

$$\frac{ds}{dt}=-2\pi\nu C\sin(2\pi\nu t-\varepsilon)$$

とにtを0と置けばこの瞬間の變位Aと速度aとが得られる．

$$A=C\cos(-\varepsilon) \qquad a=-2\pi\nu C\sin(-\varepsilon)$$

よつてCとεとは

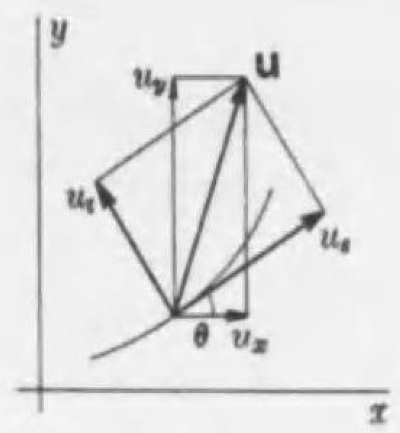
$$C^2=A^2+\frac{a^2}{4\pi^2\nu^2} \qquad \varepsilon=\tan^{-1}\left(\frac{a}{2\pi\nu A}\right)$$

によつて定められる．

6. 曲線運動と加速度 平面の中に運動する一點Pの坐標をx yとしその畫く徑路のx軸に對する傾きの角をθとする．加速度$\mathbf{u}$はこの

[1] 之が上の關係を充たすことは微分によつて直に檢證せられる．また上の關係を充たす函數がこの外にないことも證明せられる．

平面の内にある．これを徑路の方向の分加速度 u_s と之に垂直の分加速度 u_t とに分解して考へ前者を**切線加速度**と云ひ後者を**垂直加速度**と名づける．垂直加速度は徑路の彎曲の內側に向ふこと云ふまでもない．



第 12 圖

圖に示す如くに

$$u_s = +u_x\cos\theta + u_y\sin\theta \qquad 7$$

$$u_t = -u_x\sin\theta + u_y\cos\theta \qquad 8$$

然るに

$$v_x = v\cos\theta \qquad v_y = v\sin\theta$$

よつて

$$u_x = \cos\theta\frac{dv}{dt} - v\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \qquad u_y = \sin\theta\frac{dv}{dt} + v\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

之を 7 に入れて

$$u_s = \frac{dv}{dt} \qquad 9$$

卽ち切線加速度は速度の大さの變化する速さに等しい．また 8 に入れゝば

$$u_t = v\frac{d\theta}{dt} = v\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} = v^2\frac{d\theta}{ds}$$

この右邊の $\frac{d\theta}{ds}$ は徑路の曲率である．その逆數卽ち曲率半徑を ρ とすれば垂直加速度の大さは

$$u_t = \frac{v^2}{\rho} \qquad 10$$

その方向は曲率中心に向ふ．切線加速度のみならば徑路は曲ることなく速度の大さのみが變化し垂直加速度のみならば速度の大さは變らずに方向のみが變化する．

上には動點が一平面の上を動くと考へたけれども一般の運動に於ても短い時間を取れば一の平面卽ち所謂接觸平面の內の運動と見做し得られる．[1] 從つて上の結果は一般の場合にも成立つ．

[1] 徑路の上に極めて密接した三點を取り之によつて定まる平面を接觸平面と稱へる．

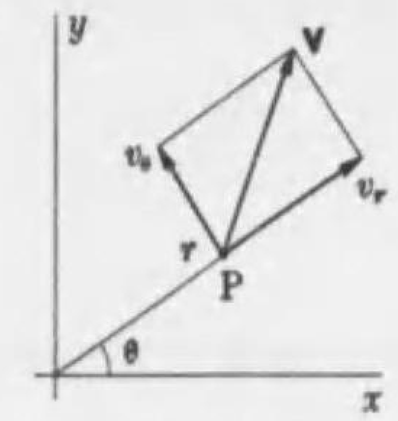
平面の上を運動する一點 P の直角坐標 x y と極坐標 r θ との關係を

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

とすれば時刻 t について微分して

$$\frac{dx}{dt} = \cos\theta\frac{dr}{dt} - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dy}{\partial t} = \sin\theta\frac{dr}{dt} + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$



第 13 圖

及び

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \cos\theta\frac{d^2r}{dt^2} - 2\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \sin\theta\frac{d^2r}{dt^2} + 2\cos\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

之を用ひて動徑 r の方向と之に直角な方向との分速度及び分加速度が求められる．r に沿ふての分速度 v_r は v_x v_y を再び r の方向に射影したものゝ和に等しい．故に

$$v_r = +\cos\theta\frac{dx}{dt} + \sin\theta\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \qquad 11$$

r に垂直に θ の增す方向の分速度は

$$v_\theta = -\sin\theta\frac{dx}{dt} + \cos\theta\frac{dy}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \qquad 12$$

と表はされる．同樣にして r 方向の分加速度は

$$u_r = +\cos\theta\frac{dx^2}{dt^2} + \sin\theta\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad 13$$

r に垂直に θ の增す方向の分加速度は

$$u_\theta = -\sin\theta\frac{d^2x}{dt^2} + \cos\theta\frac{d^2y}{dt^2} = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) \qquad 14$$

と表はされる．

．こゝに現はれる $\frac{d\theta}{dt}$ は動徑が原點の周りに單位時間に畫く角を表はし**角速度**と名づける．$\frac{d^2\theta}{dt^2}$ は單位時間に角速度が變化する速さを示し**角加速度**とも稱する．また動徑 r が $d\theta$ だけ廻轉する間にその畫く面積は $\frac{1}{2}r^2d\theta$ に等しく $\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$ は動徑が單位時間に畫く面積を表はす．之を**面積速度**と名づける．

第二章　力

7. **慣性**　石塊を動かすには手を以て之を押すを要しまた羽毛の如きものも靜穏なる室内に置けば常に一定の位置に止まる．これ等はたゞ簡單な例に過ぎないけれども一般に物體が運動を始めるときこれを詳細に觀れば必ず外より何等かの作用を受けることが知られる．即ち外部から全く作用を受けない物體は何時までも靜止すると考へ得られる．

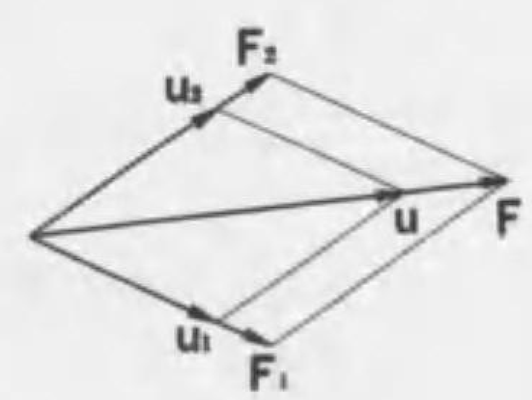
また既に運動しつゝある物體を考へればその速度の變化するは必ず外部より何等かの作用を受ける場合に限る．例へば水平なる床の上を動く球の運動が漸次に緩慢となつて遂に靜止するは床面より作用する摩擦に因る．床面の滑かなるほど到達する距離が大きく假に摩擦を全く除き得るとすれば球の運動は何時までも繼續すると考へられる．即ち外部より全く作用を受けないときには何時までも同じ速度を保つて直線に進行する．實際に當つて外部より働く作用を全く除くことは不可能なるためにこの法則は直接の實驗によつては證明し難いけれども外部よりの作用が減ずるに從つて上述の場合に益々近づくことが見られる．換言すれば物體は凡て現在の運動狀態を持續せんとする性質を有する．この性質を**慣性**と云ひこの法則を**ニウトンの第一則**または**慣性則**と名づける．

この法則は運動を考へる基準として何を採るかにも關係しこれが成立つためには基準を適當に撰ばなければならない．例へば動搖する船の中で船體を基準にとれば他より何等の作用をも受けない物體が船に對して甚だ複雜な運動をすることになる．ニウトンの第一則の中にはこれが成立つ如くに基準を撰ぶべき規約もまた含まれる．普通に地球を基準とるは之に對してニウトンの第一則が成立つことを上の如く

して知るゆゑに外ならない．併しながら極めて精密に論ずれば地球に對してはこの法則がたゞ大略に於て成立つに止まり完全には成立たない．これが精密に成立つべき基準を考へれば之に對して地球は運動をすることになる．地球の自轉公轉は即ちこの運動を意味する．

8. **力と質量**　上に述べた如くに物體が運動を始めまたはその速度に變化を生ずるは必ず外部よりの作用に基く．よつてこの種の作用を**力**と名づける．實驗によれば力を受けて物體の速度が變化するときの加速度は力の方向に向ひその大さに比例する．綱を以て舟を曳けば舟は綱の方向に運動を始める．二人が力を併せて引けば一人が引くに比して二倍の加速度を生ずる．之を**ニウトンの第二則**と名づける．但しこゝには先づ形の小さい物體について云ふことゝする．その理想の場合として物質が一點に集合したものを考へて之を**質點**と名づける．

同じ力が作用するときにも生ずる加速度は物體によつて異なる．一般に物體の受ける加速度は小量の物質より成るものに於て大きく多量の物質より成るものに於て小さい．兩者に等しい加速度を與へるとすれば前者の受ける力は小さく後者の受ける力は大きくなければならない．即ち大量の物質は慣性が大きく小量の物質は慣性が小さい．よつて同じ力が作用して等しい加速度の生ずる物體は凡て等しい**質量**を有すると云ひ一の物體に生ずる加速度が他の物體に生ずるものゝ n 倍なるときには後者の質量を前者の質量の n 倍と稱する．質量の單位としては普通に瓦を用ひる．力の單位としては單位質量に作用して單位の加速度を生ずるものを採る．1 瓦の質量に 1 糎秒$^{-2}$ の加速度を與へる力を 1 ダイン と稱へる．



第 1 圖

更に實驗の結果によるに多くの力が同時に物體に作用するときには之等の力を中斜法によつて合成した一の力が作用すると同じ加速度を生ずる．即ち二つの力 $\mathbf{F}_1$ と $\mathbf{F}_2$ とが同時に作用する結果は之等の合力 $\mathbf{F}$ が作用すると等しく從つて力をベクトルと考へてよい．合力 $\mathbf{F}$

の作用によつて生ずる加速度 $\mathbf{u}$ と $\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2$ が獨立に作用するときに生ずる加速度 $\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2$ とを考へれば $\mathbf{u}\ \mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2$ は $\mathbf{F}\ \mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2$ に比例し $\mathbf{u}$ は $\mathbf{u}_1$ と $\mathbf{u}_2$ とを合成したものに等しい. 從つて $\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2$ が同時に作用するとき之等が各々獨立に $\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2$ なる加速度を生ずるとも考へられる.

9. 運動の方程式 質量 m なる物體に作用する力を $\mathbf{F}$ とし之によつて生ずる加速度を $\mathbf{u}$ とすれば

$$m\mathbf{u} = \mathbf{F}$$

坐標軸 $x\ y\ z$ の方向の分力を $X\ Y\ Z$ とすれば

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z \qquad 1$$

この三式を運動の方程式と名づける.

質量 m の物體が 4 節の等加速直線運動をなす場合には加速度が s の正の方向に向つて大さ α と表はされる. 從つてこの物體に作用する力もまた s の正の方向に向ひ大さ $m\alpha$ でなければならない. 5 節の單振動に於ては加速度が常に O 點に向つて大さ $4\pi^2\nu^2 s$ と表はされる. 從つてこの運動に於ては O に向ひ大さ $4\pi^2\nu^2 ms$ なる力を要する. また半徑 r なる圓周の上を大さ v の速度で動く場合には 6 節により大さ $\frac{mv^2}{r}$ の力が圓の中心に向つて作用しなければならない. この力を求心力と稱する. このとき物體が靜止にあつて且つ何等かの作用により中心と反對の方向に $\frac{mv^2}{r}$ の力を受けるものと假想すればこの物體を中心より一定の距離に保つに上記の求心力を要すること恰も物體が圓運動をなす場合に等しい. 斯く假想した力を**遠心力**と稱する.

物體の質量と速度との積を**運動量**と名づける. 卽ち質量を m 速度を $\mathbf{v}$ とすれば運動量は

$$m\mathbf{v}$$

と表はされる. その大さは質量 m と速度の大さ v との積 mv に等しく方向は速度と同じい. また坐標軸 $x\ y\ z$ に對する分素は $mv_x\ mv_y\ mv_z$ に等しい. 物體に力が作用しないときは速度が變ることなく從つて運動量もまた不變に保たれる. 運動の方程式 1 は

$$\frac{d}{dt}(mv_x) = X \qquad \frac{d}{dt}(mv_y) = Y \qquad \frac{d}{dt}(mv_z) = Z \qquad 2$$

卽ち

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} \qquad 2$$

とも表はされる. 力が作用すれば物體の運動量に變化を生じ單位時間に對するその變化が力に等しい.

一定の力が物體に作用すれば運動量は時間に比例して增減し二つの時刻に於けるその差は作用する力と時間との積に等しい. 一般に時刻 $t_1\ t_2$ に於ける運動量の差は力を時間について積分したものに等しい.(1)

$$(m\mathbf{v})_2 - (m\mathbf{v})_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt \qquad 3$$

力を時間について積分したものを**力積**と名づける.

運動量の變化は作用した力積によつて定まる. 故に强い力を一瞬間だけ作用せしめるも弱い力を連續して長く作用せしめてもその生ずる運動量の變化は等しい. 作用する力が頻繁に變化する場合も長い時間に於ける効果は平均の力が繼續すると異ならない.

10. 質量と速度との關係 ニウトンの兩法則が種々の實驗觀測と極めてよく一致することは云ふまでもない. 殊にこの運動の方程式と次章に述べる萬有引力の法則とによつて遊星の運動を論じた結果は精密な觀測と符合して殆ど差異を認め得ない.

併しながら最近に發達したアインスタインの相對論によればニウトンの第二則にも少しく修正を要する. 上に述べた第二則に於ては物體が現に有する速度の如何に拘らず力の方向にその大さに比例して加速度を生ずると考へたけれども相對論によれば物體の速度が之に關係する. 物體が靜止より動き始めるときには力の方向に加速度を生ずるけれども旣に或る速度を以て運動しつゝある物體に力が作用するとき生ずる加速度は力の方向と嚴密には一致しない. 加速度の大さも現に有

(1) $(mv_x)_2 - (mv_x)_1 = \int_{t_1}^{t_2} X\,dt$ …… ……

する速度の大小に關係する．運動量が $m\mathbf{v}$ と表はされ運動の方程式が 2 の形を有することは前と同樣であるけれども質量 m が速度の大さ v に關係して

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad 4$$

と表はされる．c は眞空中の光の速度 3×10^{10} 糎秒$^{-1}$ を表はし[1] m_0 は物體によつて定まる．v が c に較べて著しく小ならば $\frac{v^2}{c^2}$ を 1 に對して省略し得る．卽ち速度が小さい場合には m が m_0 に等しい．この m_0 を**靜質量**と名づける．光の速度は極めて大きく之に較べて普通の物體の速度は極めて小さい．從つて通常の運動に於ては從前の運動の法則を正しいと考へて誤りを生じない．

11. 作用と反作用　手を以て物體を動かす場合には手が力を作用せしめ物體が力の作用を受ける．併しこの場合に手が物體を引くと同時に手はまた物體によつて引かれる．如何なる場合にも物體が他から力の作用を受ける場合には同時に後者が前者から力の作用を受ける．要するに力は二者の間の作用の一方に過ぎない．斯くして互に作用するものゝ一方が他方に及ぼす**作用**に對して後者が前者に及ぼす作用を**反作用**と稱へる．

種々の實驗觀測によれば作用と反作用とは作用する二者を結ぶ直線の上にあつて大さ相等しく方向は相反する．これを**ニウトンの第三則**または**反作用の法則**と名づける．糸で錘を吊すとき錘が糸を下に引く力と糸が錘を上に引く力とは作用と反作用の關係をなし手を以て糸を上に引く力と糸が手を下に引く力とも又た同樣の關係にある．但し手が糸を上に引く力と錘が糸を下に引く力との間には作用と反作用の關係がない．單に大さ相等しく方向相反する二つの力に過ぎない．或は机上の物體が机から受ける壓力と物體に作用する重力とについてもまた同じい．要するに作用と反作用の關係は直接の相互作用の間に限り

---

(1) 第 16 章參照．

他の第三者を經て相對する二つの力はこの關係をなさない．

物體が例へば壁に衝突して極めて短い時間に速度を失ふときにはその加速度が甚だ大きく從つて壁が物體に及ぼす力は甚だ大きくなければならない．其の反作用として物體は甚だ大きい力を壁に及ぼす．槌を以て板に釘を打つこともまたこの理に基づく．手を以てたゞ釘を押す場合には板が同大の力を以て抵抗するために釘は進み得ない．槌を以て强く打ち釘の受ける力が抵抗の限度を超えるに到つて始めて釘は板の中に進入する．

第三章　重　　力

12.　萬有引力　地上の物體は總て地球に引かれて下に落ちまた地球は太陽に引かれてその周圍に運行する．凡て物質はその種類の如何を問はず互に相引く性質を有する．物質の間に作用するこの引力を**萬有引力**と云ひ特に地球が地上の物體に及ぼす引力を**重力**と名づける．ニウトンによれば二つの物體の間の引力は兩者の質量の積に比例し距離の二乘に逆比例する．これをニウトンの**萬有引力の法則**と稱する．

この法則もまた實驗觀測の結果と極めてよく一致する．既に前章にも述べた如くこの法則と運動の法則とによつて遊星の運動を論じた結果はよく實際の觀測と符合し僅かに水星の運動に於て微少の差を見出すに過ぎない．たゞ最近の相對論によつて此處にもまた變更を要することゝなりその結果として萬有引力の法則は甚だ複雜な形を取るに至つたけれども通常の場合には從來の如くに考へて殆ど誤りがない．たゞ極度の精密を要する場合にのみ相對論によるを要する．なほこの引力は物體の質量のみによつて定まり形狀構造化學組成等に全く關係しない．地上の物體に作用する重力はその物體の質量に比例する．

二つの物體の質量を $m_1 m_2$ としその間の距離を r とすれば引力の大さ

$$\gamma\frac{m_2 m_1}{r^2} \qquad 1$$

と表はされる．γ は**萬有引力の恒數**と云ひ二つの單位質量が單位の距離を隔てゝ作用するときの引力に等しく

$$6.68\times10^{-8}\text{ダイン糎}^2\text{瓦}^{-2}$$

と測定せられる．

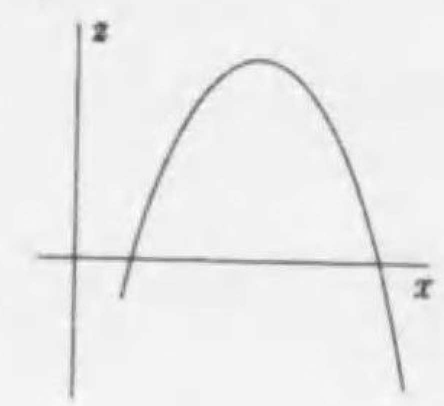
上記の如く地上の物體に作用する重力はその質量に比例する．質量

を m とすれば重力は

$$mg \qquad 2$$

と表はされる．g は單位質量に對する重力に等しく物體の性質に關係しない．從つて物體が落下する加速度は空氣の抵抗などのない限り常にこの g に等しい．よつて g を重力の加速度と名づける．

13.　拋射體の運動　物體を斜に拋射すれば圖の如き曲線を描いて落下する．このとき物體の受ける力をたゞ下に向ふ重力のみとすれば水平の分加速度がない．物體は最初の速度を含む鉛直面の中に運動する．今この平面の中に水平と鉛直の方向を x z の軸に取れば運動の方程式は



第１圖

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0 \qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=-mg$$

即ち

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0 \qquad \frac{d^2z}{dt^2}=-g \qquad 3$$

之等を積分すれば速度を表はす式

$$\frac{dx}{dt}=a \qquad \frac{dz}{dt}=-gt+c \qquad 4$$

が得られる．この第一式は水平の分速度 v_x が不變なることを示し第二式は垂直の分速度 v_z が時間に比例して變化することを表はす．之等の式に t を 0 と置けば

$$v_x=a \qquad v_z=c$$

即ち a c はこの時刻の分速度である．このときの速度の大さを V としその仰角を α とすれば

$$a=V\cos\alpha \qquad c=V\sin\alpha$$

故に 4 は

$$\frac{dx}{dt}=V\cos\alpha \qquad \frac{dz}{dt}=V\sin\alpha-gt \qquad 5$$

更に之等を積分すれば

$$x = V\cos\alpha\, t + A \qquad z = V\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2 + C \tag{6}$$

が得られる．この二式によつて各時刻の物體の位置が表はされる．これ等に t を 0 と置けば

$$x = A \qquad z = C$$

A C は卽ちこの瞬間の位置の坐標である．

拋射點を原點とし拋射せられた瞬間から時刻を測るとすれば t が 0 のとき x z が 0 でなければならない．卽ち A C はともに 0 となり

$$x = V\cos\alpha\, t \qquad z = V\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$$

之等より t を消去すれば拋射體の畫く徑路の式が得られる

$$z = \tan\alpha\, x - \frac{1}{2}\frac{g}{V^2}\sec^2\alpha\, x^2 \tag{7}$$

卽ち徑路は上下の軸を有する拋物線なることが知られる．

この拋物線の最高點に達するときには

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

でなければならない．從つて

$$t = \frac{V}{g}\sin\alpha \tag{8}$$

この t を z の式に入れて最高點の高さを求めれば

$$z = \frac{V^2}{2g}\sin^2\alpha \tag{9}$$

また拋射體が達する水平距離を求めるには 7 の z を 0 と置いて

$$x = 2\frac{V^2}{g}\cos\alpha\sin\alpha \tag{10}$$

を得る．併し實際に物體を拋射するときの運動は空氣の抵抗のためこの計算の結果と一致しない．

空氣の抵抗は物體の速度が小なるとき速度に比例するけれども速度が大なるときには大略その二乘に比例する．一般に抵抗を速度の n 乘に比例すると置いて物體が垂直に落下する場合を考へれば重力 mg と抵抗 kv^n とが釣合ひ

$$mg - kv^n = 0$$

卽ち

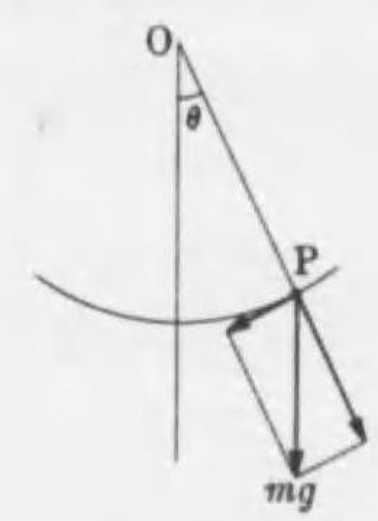
$$v = \sqrt[n]{\frac{mg}{k}} \tag{11}$$

なるときに加速度が消滅して一樣の運動を生ずる．始め速度が之よりも小ならば重力によつて加速せられ若しまた之よりも大ならば抵抗のために減速して漸次にこの極限の速度に近づく．

物體が極めて微小なるとき質量に比例する重力は表面の受ける抵抗に比して甚だ小さく[(1)]從つて 11 の速度は極めて小さい．塵埃などの微粒が永く空中に浮游することもこの理に基づく．

14. **單振子** 輕い糸の下端に錘をつけ上端を固定して錘を振動せしめるものを**單振子**と名づける．糸の傾きが θ なるとき錘に作用する重力 mg を糸の方向と之に直角なる方向に分解すれば

$$mg\cos\theta \qquad mg\sin\theta$$



第 2 圖

前者に對しては糸の張力が對抗するために錘はこの分力に關係なく糸の長さ l を半徑とする圓の上を運動する．運動の方程式は第 1 章 14 によつて

$$m\frac{1}{l}\frac{d}{dt}\left(l^2\frac{d\theta}{dt}\right) = -mg\sin\theta$$

糸の長さは常に一定なる故

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \tag{12}$$

振動の範圍が小さいときには θ が小さく $\sin\theta$ を θ と置くことができる．卽ち

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \tag{13}$$

この關係を充たすためには

$$\theta = \alpha\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t - \varepsilon\right)$$

---

(1) 形を相似に保ちながら大さを漸次に小ならしめれば表面積は徑幅の二乘に比例して小となり體積はその三乘に比例して小になる．抵抗は前者に比例し重力は後者に比例する故に重力は省略せられる．

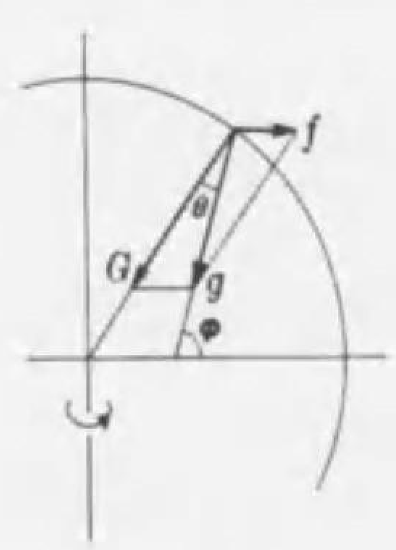
でなければならない.[1] 即ち角 θ は單振動の如くに變化する. 振動の週期は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad 14$$

振幅が大なるときには $\sin\theta$ を θ と置くことができない. 若し糸に直角な分力が常に $mg\theta$ なりとすれば振幅の大小に拘らず常に 13 が成立ち週期は振幅に關係しないけれども實際の分力 $mg\sin\theta$ は $mg\theta$ よりも小さく且つその程度は θ の大なるほど著しい. 即ち θ が增すに從つて錘を平衡の位置に引き戻す力が上記の場合よりも小さい. 從つて振幅の增すに從つて週期は長くなる.

15. 地球の自轉と重力 重力は云ふまでもなく物體の高さ卽ち地球よりの距離に關係する. 例へば高山の頂上に於ける重力はその山麓に於けるよりも小さくまた精密な裝置を用ひれば數米の高低による重力の差も檢出せられる. 且つ地球は完全なる球形をなさず南北に稍々偏平なる廻轉楕圓體をなすため重力は兩極に於て强く赤道に於て弱い.

また地球が絶えず自轉をなすに伴つて地上の物體は地軸の周りに圓運動をする. 從つて地表の物體は地球の引力によつて下に引かれると同時にこの圓運動の遠心力を受ける. 普通に重力と稱するものは地球の引力とこの遠心力との合力である. 單位質量について地球の引力を G 遠心力を f とし之等の合力を g とするに g と G の間の角 θ は緯度卽ち g と赤道面との間の角 φ に較べて極めて小さい.[2]



第 3 圖

地球の半徑を R とし自轉の角度を ω とすれば大約[3]

$$f=R\cos\varphi\,\omega^2$$

その g 方向の分力はまた略よ

(1) 9 頁脚註參照.

(2) θ は φ が 45 度のときに於て最大であるが約 6 分を超えない.

(3) 地軸からの距離は $R\cos(\varphi-\theta)$ で θ が小さい故 $R\cos\varphi$ としてもよい.

$$-R\omega^2\cos^2\varphi$$

と表はされる. 故に

$$g=G-R\omega^2\cos^2\varphi$$

兩極に於ては g が極大となつて G に等しく赤道では極小になる. 卽ち

$$g=G-R\omega^2$$

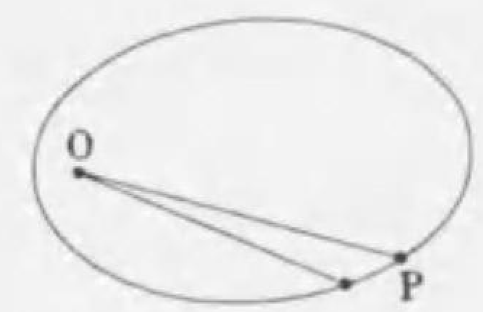
赤道に於けるこの $R\omega^2$ の值は 3.46 糎秒$^{-2}$ と計算せられる. 地球が完全に球形ならば兩極と赤道との g の差は之に等しくなければならない. 實際には地球が偏平な楕圓體をなすために重力の差が更に大きく實測によれば 5.2 糎秒$^{-2}$ に達する.

なほまた各地に於ける重力は山岳等による地方的の不規則を除けばヘルメルトの實驗式

$$g=978.052[1+0.005285\sin^2\varphi-0.000007\sin^2 2\varphi$$
$$+0.000018\cos^2\varphi\cos 2(\lambda+17^\circ)+0.0003086H] \qquad 15$$

によつてよく表はされる.[1] λ は經度を表はし H は海面よりの高さを米であらはす. 凡そ緯度45度の海面に於ける g の值 980.665 糎秒$^{-2}$ は種々の場合に標準として用ひられる.

16. 遊星の運動 遊星が太陽の周りに公轉する軌道は太陽を中心とする圓に近いけれどもなほ精密に云へば太陽を焦點の一に有する楕圓をなしてゐる. 遊星に於てはその楕圓の偏心率が小さく圓に近いけれども彗星には偏心率の大きい偏平な楕圓または拋物線双曲線が現はれることもまた尠くない.



第 4 圖

遊星の受ける力は常に太陽に向ふ故に遊星の運動が一の平面の内に行はれることは云ふまでもない. 或る時刻に於て遊星の速度と太陽とを含む平面を考へれば太陽の引力による加速度はこの平面の內にあり從つて速度は常にこの平面の內にある.

(1) ハイスカネンによれば高さの項を除いて

$$g=978.049(1+0.005293\sin^2\varphi-0.000007\sin^2 2\varphi+0.000019\cos^2\varphi\cos 2\lambda)$$

太陽の質量をMとし遊星の質量をmその太陽よりの距離をrとすれば遊星の受ける引力は

$$\gamma\frac{Mm}{r^2}$$

太陽Oを原點として遊星Pの極坐標$r\ \theta$を取れば運動の方程式は第1章13 14によつて

$$m\left[\frac{dr^2}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=-\gamma\frac{Mm}{r^2} \qquad 16$$

$$m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0 \qquad 17$$

この後式より

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$$

即ち

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=k \qquad 18$$

こゝにkは積分定數でこの式は面積速度が一定なることを表はす.[1] 角速度$\frac{d\theta}{dt}$は動徑の二乗に逆比例し太陽より遠いときに小さく近いときに大きい.

面積速度が不變なることは萬有引力の場合のみに限らない. 一般に一の中心よりの引力または斥力のみが作用し動徑に直角に力が作用しない場合には常に18が成立ち從つて面積速度は一定になる.

16の兩邊に$\frac{dr}{dt}$をかけ17の兩邊に$r\frac{d\theta}{dt}$をかけて加へれば

$$\left[\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2}-r\frac{dr}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]=-\gamma\frac{M}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

故に

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\right]=-\gamma\frac{M}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

よつて

$$d\left[\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}\right]=-\gamma\frac{M}{r^2}dr$$

これを積分して

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}=\gamma\frac{M}{r}+h \qquad 19$$

(1) 6節參照.

こゝにhは積分定數である. 速度をvとすればこの左邊は$\frac{1}{2}v^2$を表はす. 速度の大さは太陽よりの距離によつて定まり太陽に近いときに速く遠いときに遲い.

19と18とによつて

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{k^2}{r^2}=2\gamma\frac{M}{r}+2h$$

即ち

$$\frac{dr}{dt}=\sqrt{2\gamma\frac{M}{r}+2h-\frac{k^2}{r^2}}$$

この兩邊を18の兩邊で割れば

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{r^2}{k}\sqrt{2\gamma\frac{M}{r}+2h-\frac{k^2}{r^2}} \qquad 20$$

この式は軌道の上の變位に於ける$r\ \theta$の關係を示す. 之を

$$d\theta=\frac{k\,dr}{r^2\sqrt{2\gamma\frac{M}{r}+2h-\frac{k^2}{r^2}}}$$

とし

$$z=\frac{k}{r}-\gamma\frac{M}{k} \qquad q^2=2h+\gamma\frac{M^2}{k^2} \qquad 21$$

と置けば

$$d\theta=-\frac{dz}{\sqrt{q^2-z^2}}$$

これを積分すれば

$$\theta=\cos^{-1}\frac{z}{q}+\alpha \qquad z=q\cos(\theta-\alpha)$$

αもまた積分定數である. $z\ q$の値を入れ且つ

$$e=\sqrt{1+2\frac{hk^2}{\gamma^2M^2}} \qquad l=\frac{k^2}{\gamma M} \qquad 22$$

と置けば

$$r=\frac{l}{1+e\cos(\theta-\alpha)} \qquad 23$$

が得られる.

17. ケプレルの三則 前節の23は太陽を焦點とする二次曲線をあら

はしαは主軸がθの0なる方向となす角を示す. eは偏心率に當り軌道はその大小によつて次の三種の場合を生ずる. 卽ち

$e>1$ 双曲線　　$e=1$ 拋物線　　$e<1$ 楕圓

後にも述べる如く初めの速度と位置との如何によつて軌道は以上の何れかに屬する.

一般に動徑rはθがαのとき極小$\frac{l}{1+e}$になる. この點を**近日點**と稱する. 楕圓軌道の場合には之と相對する點に於てrが極大$\frac{l}{1-e}$になる. この點を**遠日點**と稱する. この二つの動徑の和は

$$2a=2\frac{l}{1-e^2} \tag{24}$$

動徑は單位時間に$\frac{k}{2}$なる面積を畫き週期Tの間にこの軌道の全面積卽ち$\pi a^2\sqrt{1-e^2}$を畫く. 故に

$$\pi a^2\sqrt{1-e^2}=\frac{k}{2}T$$

然るに24と22によつて

$$a(1-e^2)=\frac{k^2}{\gamma M}$$

之を前式に入れて

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{\gamma M}{4\pi^2} \tag{25}$$

以上の結果の中

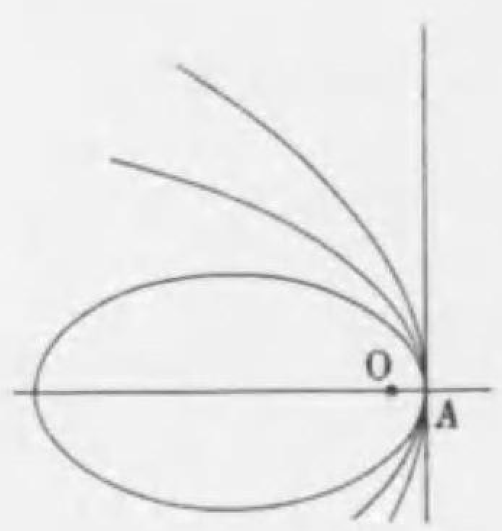
1 遊星は太陽を焦點とする楕圓を描く

2 遊星が太陽の周圍に畫く面積速度は不變に續く

3 各遊星の軌道の長徑の三乘はその週期の二乘に比例する.

この三者を**ケプレルの三則**と稱する.

假に遊星が太陽よりの距離pなる一點Aから動徑rに直角に運動を始めるとすればこのAが軌道の近日點または遠日點となるべきことは明かである. このときの速度Vが極めて大ならば太陽の引力の



第5圖

影響を受けること少く殆んど直線に逸走する. この場合にはAが近日點となり從つて上記の如く

$$p=\frac{l}{1+e}$$

卽ち

$$e=\frac{k^2}{p\gamma M}-1$$

となる. 然るに18によつて

$$pV=k$$

之を用ひて

$$e=\frac{pV^2}{\gamma M}-1$$

Vが大ならばeは1より大きく軌道は双曲線になる. Vが次第に減少すればeもまた小となり

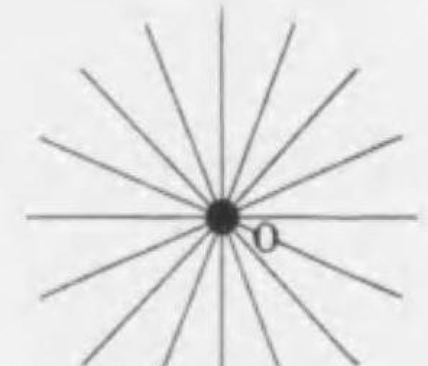
$$pV^2=2\gamma M$$

に於てeは1となり軌道は拋物線となる. 更にVが減少すればeは1より小さく軌道は楕圓となり

$$pV^2=\gamma M$$

に於てeが0となり軌道は圓になる. なほVを減少せしめればeは負になりAを遠日點とする楕圓の軌道を生ずる. Vが極めて小ならば遊星は殆ど直線に太陽に向つて落下する.

18. 萬有引力の場 物體の周圍に於て萬有引力の作用の達する範圍を萬有引力の**場**と名づけその中の各點に單位質量を持ち來たすとき作用する力の大さと方向とを以てその點に於ける場の強さ及び方向とする. 例へば一點Oに質量Mの物體があればその周圍の各點の場はOに向ひ強さは$\gamma\frac{M}{r^2}$に等しい. 場を**G**とすれば質量mなる物體にはm**G**なる力が作用する. 多數の物體があるときの作用は各物體によつて生ずる引力の合成せられたものに等しい. 故にその場は各物體の生ずる場の合成に等しい. 物質が廣く分布する場合には各部分の生ずる場が集つて全體としての場を生ずる.



第6圖

場の分布を見るには場の方向を辿つて曲線を引くを便とする．この線を指力線と名づける．且つ場の强弱に應じて疎密ならしめ恰も場に直角な單位面積を過る指力線の數をその點の場の强さに等しからしめる．圖には一例として一個の小さい物體の生ずる場の指力線を示す．

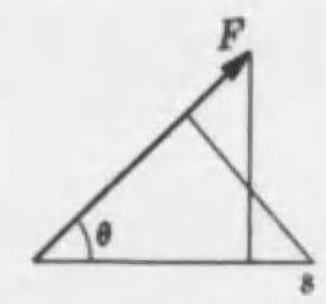
萬有引力の作用が如何にして物體の間に傳へらるゝかについては後章に於て說明するけれども物體は之に接する周圍の空間に特殊の變化を起しその變化は更に之に接する空間に變化を生じて逐次に外方に及び引力の場を形成する．その場の中に他の物體を持ち來たせばその點の空間の變化によつて物體が力の作用を受ける．その作用の傳達せられる速度は實驗によつて測定するを得ないけれども相對論によれば光の速度に等しいと推定せられる．

第四章　仕事とエネルギー

19.　仕事　力が物體に作用する間に物體が動くとき力の大さとその方向の分變位との積を**仕事**と名づけ物體が力によつて仕事をなされると稱する．即ち力 **F** と變位 s の間の角を θ とすれば仕事は

$$Fs\cos\theta$$

で表はされる．この仕事が負なるとき即ち物體が力に逆つて動くときには物體が力に仕事をなすとも云ふ．また二つの物體 PQ が互に力を及ぼし合ひ P がその受ける作用に對して仕事をなすだけその反作用が Q に仕事をなすときには直接に P が Q に仕事をなすと稱へる．例へば手を以て車を押せば車と手は同時に動きこれ等が互に押し合ふ力によつて手が車に仕事をする．



第１圖

物體が動かぬとき或は力の方向に垂直に動くときは力が仕事をしない．またこの變位としては必ず力の作用する間に生ずる變位のみを取り力の作用の絕えた後の變位は全く除外する．なほ變位の生ずる遲速も仕事には關係しない．他の力が同時に作用する場合にも一の力の仕事は上記の如くにその力の大さとその方向の分變位との積と定める．

一般の場合には物體の動く徑路が曲線をなし力も一樣でない．この場合に徑路の微片 ds に對する仕事は

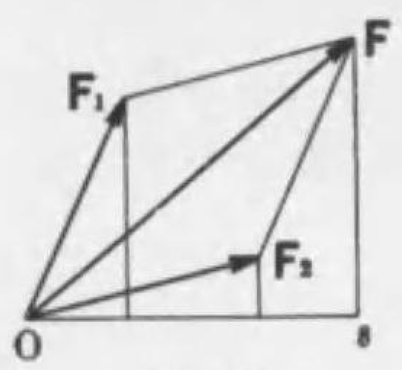
$$dW = F\cos\theta ds \qquad 1$$

從つて徑路の上のA點よりB點に至るまでになされる仕事は

$$W=\int_A^B F\cos\theta ds$$

である．

仕事はまた變位の大さとその方向の分力との積とも考へられる[(1)]. 然るに二つの力 $\mathbf{F}_1\,\mathbf{F}_2$ の變位 s に對する分力は $\mathbf{F}_1\,\mathbf{F}_2$ の合力 $\mathbf{F}$ の s に對する分力に等しい. 從つて二つの力の仕事の和はその合力の仕事に等しい. 多數の力が作用する場合にもまた同様である.



第 2 圖

力 $\mathbf{F}$ の仕事はその x y z 方向の分力 $X\,Y\,Z$ の仕事の和に等しい. また變位 ds の分變位を dx dy dz とすれば 1 の仕事は

$$Xdx+Ydy+Zdz$$

と表はされる. 例へば重力のときには

$$X=0 \qquad Y=0 \qquad Z=-mg$$

として

$$dW=-mgdz$$

A B 兩點の高さの差を h とすれば

$$W=-mgh$$

この結果によれば仕事は高さの差 h のみに關係しＡＢ間の徑路には關係しない.

仕事には正負があるけれども方向は考へない. 仕事の單位は力と長さとの單位を併記して表はす. また 1 ダイン の力の方向に 1 糎の變位を生じたときの仕事を 1 エルグ と稱する.

20. 速度の變化と仕事 運動の方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y \qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z$$

の各々の兩邊に各々分速度をかけて加へ合せば

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right)=X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}$$

(1) 一般に一のベクトル **A** の大さとこの方向に對する他のベクトル **B** の分素との積を **A B** の内積と云ひ (**A B**) と表はす. **A B** の間の角を θ とすれば (**A B**) は $AB\cos\theta$ に等しい. 仕事は力と變位との内積で表はされる.

即ち

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}\right]=X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt} \qquad 2$$

短い時間 dt を考へれば

$$d\left[\frac{m}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}\right]=Xdx+Ydy+Zdz$$

今この物體の速度を v とし

$$T=\frac{1}{2}mv^2$$

と置けば前式の左邊は T の變化 dT に等しくまた右邊は物體になされた仕事 dW を表はす. 即ち

$$dT=dW$$

T の增減は物體になされた仕事に等しい. 之を積分すれば

$$T=W+C \qquad 3$$

C は積分の定數で仕事をなされる前に有した T に相當する.

靜止した物體が v なる速度を得るためには $\frac{1}{2}mv^2$ に等しい仕事がなされなければならない. 逆に物體が速度 v を有するとき之が靜止するには必ず物體が $\frac{1}{2}mv^2$ だけの仕事をなすを要する. 之等の仕事は物體の質量と速度とによつて定まり力の大小には關係しない. たゞその速度の變化を生ずるに要する時間は力の大小によること勿論である. 例へば打擊を以てすれば物體の速度を瞬間に變化せしめ得るけれどもその仕事の量は緩かに力を作用せしめる場合と異ならない. 13節の拋射體の場合に初めの速度を V とすれば

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mV^2-mgh$$

この關係は同節の式からも直に檢證せられる.

物體が靜止より運動を始めて再び靜止するまでに物體になされる仕事は總計して零でなければならない. 例へば物體を揭げるとき手は物體に mgh の仕事をなしまた重力は $-mgh$ の仕事をなすによつて物體の受ける仕事は零である. 手が之より少い仕事を以て物體を h の高さに揭げることは全くあり得ない. また手が mgh よりも大なる仕事をなせ

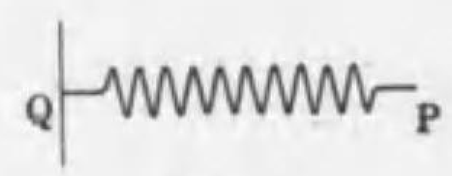
ば仕事に過剰を生じ物體が終點に達してもなほ速度を有する.

21.　エネルギー　上に述べた如くに運動の狀態にある物體は靜止の狀態に達するまでに抵抗に逆つて仕事をなし得る. 高處にある水は落下するに當りまた引き伸ばされた發條は收縮に當つて何れも他に仕事をなすことができる. 斯く物體が仕事をなし得るは物體がその狀態に於て特殊の要素を有するによると考へ之を**エネルギー**と名づける.

物體が有するエネルギーの量は他に對して爲し得べき仕事の量によつて表はす. 速度を有する物體は靜止するまでに $\frac{1}{2}mv^2$ の仕事をなし得る故に靜止せるときに比しこれだけ多くのエネルギーを有する. これを**運動のエネルギー**と名づける. また引き伸ばされた發條は自然の狀態にあるときよりも多くのエネルギーを有する. このエネルギーは物體の彈性による. 故に之を**彈性のエネルギー**と稱する. 一般にこの如く靜止の狀態にある物體の內に貯へらるゝエネルギーを**潛狀のエネルギー**と名づける. なほこの外に熱音光電氣磁氣等に關係するエネルギーについては後章に於て改めて述べるけれどもエネルギーには本來この如き種別がなくたゞ發現の狀態により種々の異態として區別するに過ぎない.

運動する物體は仕事をなすとともに靜止して運動のエネルギーを失ひ引き伸ばされた發條は仕事をなすとともに自然の狀態に歸つて彈性のエネルギーを失ふ. また仕事をなされる物體はエネルギーを得て次に自ら他に仕事をなすことができる. 後章にも述べる如くに如何なる現象に於てもエネルギーは一態より他態に變じ或は一の物體より他の物體に移動するに止まりその總量には決して增減がない.

22.　潛狀のエネルギー　發條の一端Qを固定し他端Pを執つて引き伸ばせば手が發條に仕事をなし之に相當するエネルギーは手から發條に移る. 然るにQ點は動かぬためエネルギーはQより外に移ることなく發條の內に貯へられる. このとき發條の各部がその隣の部分になした仕事はPよりQに近づくに從



第3圖

つて漸次に減少し發條の單位の長さを取つて考へれば右よりなされた仕事と左になした仕事との差は一定である. 卽ち發條を引き伸ばすために外部から與へられたエネルギーは各部に一樣に分配せられる. 次に力を緩めて發條を靜かに舊の狀態に戾すときには發條が手に仕事をなしてエネルギーを失ふ. もし發條を引き伸ばしたるまゝ急に手を放せばこのエネルギーによつて發條は振動を始める.

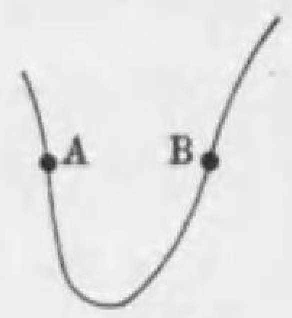
發條を引き伸ばせばその各部に歪みを生じ自然の狀態にあるときと異なること云ふまでもない. 卽ち引き伸ばされた發條がエネルギーを有することはこの歪みに基づく. 然るに物體を高處に揚げた場合には仕事をなし得る狀態にあるけれどもその物體の實質には何等の變化もない. 地球と無關係に之を見れば低處にあるときと異ならない. 從つて高處にある物體のエネルギーはその物體にあると云ふを得ない.

併しながら今日一般に承認せられる處によればこの場合のエネルギーは重力の場に潛むと考へられる. 旣に前章に述べた如くに萬有引力は物體の周圍の空間に生ずる特殊の狀態に基づき物體が移動すればこれに伴つてその場もまた變化する. この場の變化には恰も發條の伸縮の如くにエネルギーの增減を伴ふ. 物體を高處に揚げるために與へられたエネルギーは物體を經て重力の場に移りその中に貯へられ逆に物體が落下するときには重力の場がそのエネルギーを物體に與へる. 從つて物體が單獨に有するエネルギーは高處にあるときと低處にあるときとに何等の差異もない.

重力または一般に萬有引力の場のエネルギーは物體と地球または遊星と太陽等の相對的の位置によつて定まる. 一般にこの如きエネルギーを**位置のエネルギー**と稱する. この種のエネルギーは關係物體の何れにも所屬するものでないけれども便宜のために重力のエネルギーが高處の物體に屬する如く考へる場合も多い.

重力の外に物體に作用する力が全くない場合または他の力が仕事をなさぬ場合には重力のエネルギーと運動のエネルギーとの和が一定である. 例へば滑かな曲面に沿ふて物體が辷り落ちる場合に於て面が完

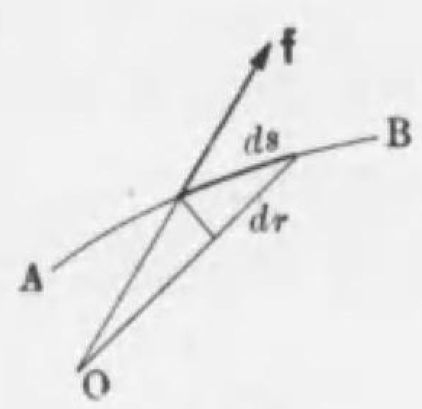
全に平滑ならば之から物體に及ぼす力はたゞこの面に垂直にのみ作用し面に沿ふ物體の運動を妨ぐる如き力は作用しない. この力は物體の速度と直角に作用する故に仕事をなさない. 物體の運動のエネルギーは重力のエネルギーによつて定まり從つて物體の速度の大さは落下した高さによつて定まる. 速度の方向は曲面の形に從ふけれども大さは高さにのみ關係する. 曲面の底部を通過して再び右に上るときには運動のエネルギーが減じて重力のエネルギーが增し舊の位置と同じ高さに達すれば運動のエネルギーを全く失つてまた逆に辷り落ち次で左方の舊の位置に上り同樣の運動を繼續する. 重力のエネルギーと運動のエネルギーとは交互に相變ずる.



第 4 圖

23. 中心力のエネルギー 一の物體 P が定點 O より距離の二乘に逆比例する斥力

$$f=\frac{c}{r^2} \tag{4}$$



第 5 圖

を受けて動く場合を考へれば微小なる變位 ds の間に力が物體になす仕事は力 f とその方向の分變位 dr との積

$$\frac{c}{r^2}\,dr=d\left(-\frac{c}{r}\right) \tag{5}$$

に等しい. 物體が A 點より B 點に移る間になされる仕事は O 點より A B に至る距離を a b として

$$\int_A^B d\left(-\frac{c}{r}\right)=\frac{c}{a}-\frac{c}{b} \tag{6}$$

この仕事は A B 兩點の位置によつて定まり其の中間の徑路には關係しない. 物體が O 點の近くにあれば之が遠ざかるまでに仕事をなすことができる. 卽ち物體は位置のエネルギーを有する. O 點よりの距離 r の位置から無限に遠ざかるまでに $\frac{c}{r}$ なる仕事がなされる. 從つて無限

遠を標準に取れば距離 r に於ける位置のエネルギーが

$$\frac{c}{r} \tag{7}$$

と表はされる.

定點 O から作用する力が引力ならば上記と反對に O に近づくときに力が物體に仕事をする. 引力の大さが 4 に等しい場合を考へれば前と同じ變位に對する仕事は 5 6 と正負反對になり從つて位置のエネルギーも 7 と反對の負値を取る. 4 の f を動徑 r の方向の力とし從つて c が正のときは斥力これが負のときは引力を表はすと考へれば上の諸式は引力の場合をも表はすことになる.

16節の遊星運動に於ては

$$f=-\gamma\frac{Mm}{r^2}$$

從つて遊星の位置のエネルギーは

$$V=-\gamma\frac{Mm}{r} \tag{8}$$

同節の 19 は遊星のエネルギーを表はす. 之を

$$\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]-\gamma\frac{Mm}{r}=mh$$

とすれば左邊の第一項は運動のエネルギー第二項は位置のエネルギーを表はし右邊の mh はその和に等しい. h は定數なる故この兩種のエネルギーの和は一定である.

楕圓軌道の場合は第 3 章 22 24 によつて

$$a=\frac{l}{1-e^2}=\frac{k^2}{\gamma M(1-e^2)}$$

然るに同章 22 より h は

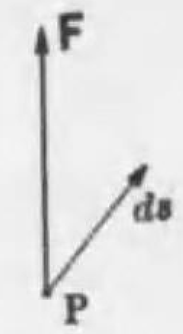
$$h=-\frac{\gamma^2M^2}{2k^2}(1-e^2)$$

と定まる. 故に

$$mh=-\frac{\gamma Mm}{2a} \tag{9}$$

軌道の長軸は短軸の如何に拘らずエネルギーによつて定められる.

24. ポテンシアル　物體Pの受ける力**F**がその位置によつて定まり且つその位置のエネルギーVが考へらるゝとき物體がdsなる變位をなしその方向の分力F_sによつて仕事をなされ位置のエネルギーに dV なる變化を生ずるとすれば



第6圖

$$F_s ds = -dV$$

なる關係がなければならない．仕事の正負に從つてエネルギーは減少または增加する．單位の變位に對して考へればF_sはその方向に於てVの減少する勾配に等しい．卽ち

$$F_s = -\frac{\partial V}{\partial s} \qquad 10$$

F_sの最大なる方向は卽ち**F**の方向に外ならない．故に**F**はVの減少の最も急な方向に向ひ大さはその勾配に等しい．

各點に於ける位置のエネルギーを知れば力はその勾配として直に求められる．從つて各點に於て作用する力を示す代りに各點の位置のエネルギーを示してもよい．たゞ位置のエネルギーが考へ得られるためには前節の例に述べた如くに二點の間の移動に際してなされる仕事がその經路に無關係なることを要する．今Vを$x\ y\ z$の函數とすれば$x\ y\ z$に對する分力は

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad Z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad 11$$

によつて求められる．斯く各點に於ける力を表はすために位置のエネルギーを用ふるとき之を**力のポテンシアル**と云ふ．

ポテンシアルの等しい點を連ねる曲面を等位面と名づける．この面に沿ふてはポテンシアルの勾配がなく從つて力の作用がない．力は等位面に垂直である．ポテンシアルの單位の昇降ごとに一個の等位面を畫けばその間隔はポテンシアルの勾配の逆數に等しい[(1)]．卽ち力の强い處には等位面が密集し力の弱い處では間隔が大きい．

物體は位置のエネルギーの減少する方向に力を受ける．從つてもし

(1) 勾配は等位面に直角な方向の單位の長さに對する等位面の數に等しい．從つて相隣る二つの間隔は勾配の逆數になる．

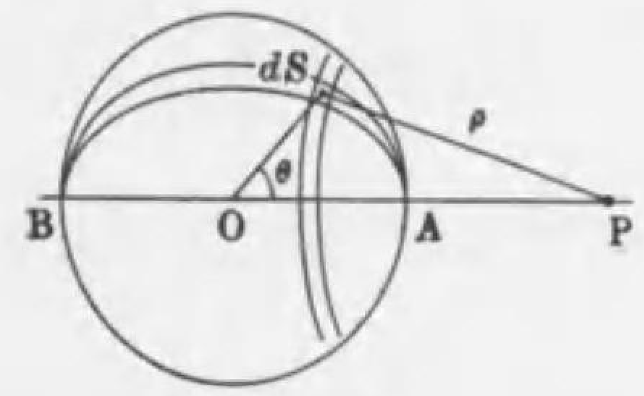
或る點に於て位置のエネルギーが極小であれば物體はこの點に永く靜止し得るのみでなく物體がこの點を離れゝば之に向つて引き戾さんとする力の作用を受ける．卽ち物體は此處に安定の平衡を保つ．

二つの力のなす仕事の和は合力のなす仕事に等しい．故に一の物體に二つの力が作用し之等の各々に對して位置のエネルギーが考へ得られる場合には各個の力の位置のエネルギーの和が合力の位置のエネルギーに等しい．

25. 球體の萬有引力　質量mの物體は周圍に萬有引力の場を伴ひ單位質量を有する他の物體が受ける引力の位置のエネルギーは

$$-\gamma\frac{m}{r}$$

と表はされる．一の球面の上に物質が一樣に分布したとき他の單位質量の物體Pが受ける作用の位置のエネルギーは球面上の各部の質量によるPの位置のエネルギーを集めて得られる．



第7圖

球面の半徑をa單位面積に含まれる質量をσとし中心OよりPに向ふ極點Aよりの角距離θとOAを軸とする方位角φに從つて球面を分割し$d\theta\ d\varphi$の間にある微片dSを取れば[(1)]其の面積は$ad\theta a\sin\theta d\varphi$從つてこの中に含まれる質量は

$$\sigma a^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

この部分からPに至る距離をρとすればこの微片の質量がPに及ぼす引力のエネルギーは

$$-\gamma\frac{\sigma}{\rho}a^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

よつてこれを全球面に積分すれば

$$V = -\gamma\sigma a^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\frac{1}{\rho}\sin\theta d\theta d\varphi$$

(1) φは地上の經度に相當する．θは緯度に相當するけれども極Aから測ることとする．

ρ はφに關係なき故φについての積分は直になし得られる. 即ち

$$V=-2\pi\gamma\sigma a^2\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{1}{\rho}\sin\theta d\theta$$

OP を r として

$$\rho^2=r^2+a^2-2ra\cos\theta \qquad \rho d\rho=ra\sin\theta d\theta$$

よつて上の積分は

$$V=-\frac{2\pi\gamma\sigma a}{r}\int d\rho$$

こゝにPが球外にあればθにつき0よりπに至る積分となりρについては $r-a$ より $r+a$ に至る積分になる. よつて

$$V=-4\pi\gamma\frac{\sigma a^2}{r} \qquad 12$$

Pが球内にあれば積分は $a-r$ より $a+r$ に至ることゝなり從つて

$$V=-4\pi\gamma\sigma a \qquad 13$$

球面に含まれる全質量をMとすれば12 13は

$$V=-\gamma\frac{M}{r} \qquad V=-\gamma\frac{M}{a}$$

と表はされる.

之によつて見れば球外に於けるVは恰もこの球の全質量が悉くその中心に凝集したときと異ならない. 球内に於てはVが一定の値を有し. 從つて球内には力の作用がない. 地球の如き球形のものも多數の球層に分つて考へれば上の計算が適用せられる. 卽ち外部に對する作用は全質量が中心にある場合に同じい. 球内に於てはその點を過る球層の外側のものは作用を及ぼさずたゞ内側のものゝ作用のみとなり中心に近づくに從つて重力が減少する.

26. 單位と元 諸種の量を測る單位を定めるに通常は先づ長さ時間質量の三單位を定め次に之を基礎としてその他の單位を定める. 前者を基本單位と云ひ後者を誘導單位と稱へる. 從つて基本單位の大さを變更すれば誘導單位の大さもまた變化する. 例へば長さの單位を2倍ならしめれば面積の單位は4倍となり密度の單位は$\frac{1}{8}$になる 一般に

誘導單位は基本單位の或る乘冪に比例して變化するものでその羃數を基本單位に對する**元**と稱する. 例へば物質の密度は質量に對して1元長さに對しては −3 元に相當する.

誘導單位の元を [面積] [密度] 等の如くに表はす. また基本單位について長さをL時間をT質量をMとして之に對して種々の單位の元を次の如くに表はす

$$[\text{面積}]=[\mathrm{L}^2] \qquad [\text{密度}]=\left[\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}^3}\right]$$

$$[\text{速度}]=\left[\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}\right] \qquad [\text{加速度}]=\left[\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}\right]$$

$$[\text{力}]=[\text{質量}\times\text{加速度}]=[\mathrm{LMT}^{-2}]$$

$$[\text{運動量}]=[\text{質量}\times\text{速度}]=[\mathrm{LMT}^{-1}]$$

$$[\text{仕事}]=[\text{力}\times\text{長さ}]=[\mathrm{L}^2\mathrm{MT}^{-2}]$$

併し多くの量の中には異種の量で同じ元を有するものもある. 仕事と次章に述べる力の能率の如きはその一例である. また角の如く元の0なるものもある.

或る量の元を考へることは計算の正否を檢するに便なるのみでなく時としては之より種々の事實を推知することができる. 例へば單振子の週期は時間の元を有する. この週期の大小は振子の長さ l と重力の強さgとによつて定まるべく他に關係するものがない. g と l とによつて時間の元を有する量を作るとすれば

$$\sqrt{\frac{l}{g}}$$

の外にあり得ない. 從つて週期が之に比例することが推定せられる.

第五章　剛體の運動

27.　質量の中心　多數の質點が互に作用を及ぼす場合には各個の運動が他の運動に關係して一般には甚だ複雜な運動を生ずる．併し何れの場合にも相互に及ぼし合ふ力は必ず作用と反作用とが一對となつて現はれる．一の質點に他のものが作用すると同大の力が逆に前者から後者に作用する．

このとき物體 $P_1\ P_2$......の運動の方程式を

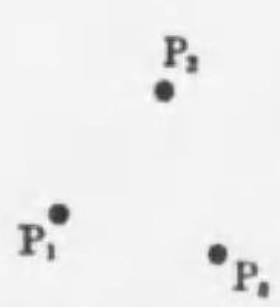
$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}=X_1 \quad m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}=X_2 \quad \ldots\ldots$$
$$m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}=Y_1 \quad m_2\frac{d^2y_2}{dt^2}=Y_2 \quad \ldots\ldots \qquad 1$$
$$m_1\frac{d^2z_1}{dt^2}=Z_1 \quad m_2\frac{d^2z_2}{dt^2}=Z_2 \quad \ldots\ldots$$

として兩邊を加へ合せば

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\frac{dx_1}{dt}+m_2\frac{dx_2}{dt}+\ldots\ldots\right)=X_1+X_2+\ldots\ldots$$
$$\frac{d}{dt}\left(m_1\frac{dy_1}{dt}+m_2\frac{dy_2}{dt}+\ldots\ldots\right)=Y_1+Y_2+\ldots\ldots \qquad 2$$
$$\frac{d}{dt}\left(m_1\frac{dz_1}{dt}+m_2\frac{dz_2}{dt}+\ldots\ldots\right)=Z_1+Z_2+\ldots\ldots$$

即ち

$$\frac{d}{dt}(m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2+\ldots\ldots)=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\ldots\ldots \qquad 2$$



第 1 圖

この式の左邊は各質點の運動量の總和が單位時間に受ける變化を表はし右邊は各物體に作用する力の總和を表はす．

各質點に作用する力は之を $P_1\ P_2$......の相互作用によるものと之等に外から作用するものとに分けて考

へてもよい．上に述べた如くに P_1 が P_2 から受ける力があれば P_2 はまた P_1 から同大の力を逆の方向に受ける．故に

$$\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\ldots\ldots$$

の中で之等の質點の相互作用による力は一對づゝ消し合つて全く外部から作用する力のみ殘ることになる．即ち 2 の右邊に於ては相互の作用を省略してもよい．

斯く運動量の總和はたゞ外部から作用する力の總和によつて變化するのみで內部に於ける相互の作用は運動量の總和に關係しない．故に外部と全く交渉のない質點系に於ては相互作用によつて各個の運動量が變化するときにもたゞ互に之を交換するに止まりその總和には變化がない．

今 $P_1\ P_2$ ......の平均の位置としてその坐標が

$$\bar{x}=\frac{1}{M}(m_1x_1+m_2x_2+\ldots\ldots)$$
$$\bar{y}=\frac{1}{M}(m_1y_1+m_2y_2+\ldots\ldots) \qquad M=m_1+m_2+\ldots\ldots \qquad 3$$
$$\bar{z}=\frac{1}{M}(m_1z_1+m_2z_2+\ldots\ldots)$$

なる一點を考へれば

$$m_1\frac{dx_1}{dt}+m_2\frac{dx_2}{dt}+\ldots\ldots=M\frac{d\bar{x}}{dt}$$
$$m_1\frac{dy_1}{dt}+m_2\frac{dy_2}{dt}+\ldots\ldots=M\frac{d\bar{y}}{dt} \qquad 4$$
$$m_1\frac{dz_1}{dt}+m_2\frac{dz_2}{dt}+\ldots\ldots=M\frac{d\bar{z}}{dt}$$

よつて 2 は次の如く表はされる

$$M\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}=X \quad M\frac{d^2\bar{y}}{dt^2}=Y \quad M\frac{d^2\bar{z}}{dt^2}=Z$$
$$X=X_1+X_2+\ldots\ldots \quad Y=Y_1+Y_2+\ldots\ldots \quad Z=Z_1+Z_2+\ldots\ldots \qquad 5$$

3 によつて表はされる平均の位置を $P_1\ P_2$......の**質量の中心**または**重心**と名づける．5 によればこの點の運動は恰も全體の質量が此處に集まり總ての力がまた此處に作用する如くに生ずる．

もし外部から作用する力がなければ重心は靜止するか或は等速直線運動をつゞける. 例へば舟の中の人が前方に步めば舟は少しく後退して人と舟との重心は一樣の運動をつゞける. 地上の物體が落下する場合には同時に地球が上昇する. たゞこの場合には地球の質量が極めて大なるために物體と地球との重心は殆ど全く地球の中心と一致し地球の運動は極めて小さく之を認め得ない.

16節の遊星の運動を更に詳しく考へるに遊星と太陽とは常に之等の重心を隔てゝ相對する. 重心を原點に取り遊星と太陽との質量を m M 原點よりの距離を r R とすれば[1]

$$mr = MR$$

第 2 圖

故に

$$r+R = r\left(1+\frac{m}{M}\right)$$

然るに遊星に作用する引力は

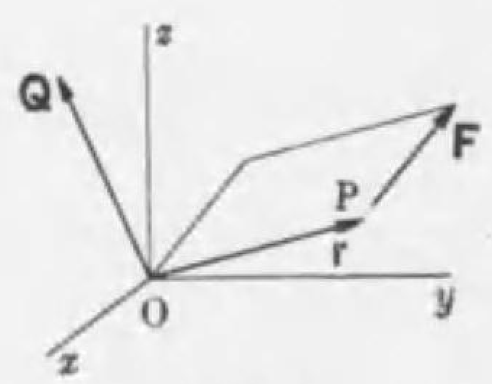
$$-\gamma\frac{Mm}{(r+R)^2} = -\gamma\frac{1}{\left(1+\frac{m}{M}\right)^2}\frac{Mm}{r^2}$$

これより考へれば遊星に對する太陽の引力は恰も太陽が遊星との重心にあつて其の質量が

$$M\frac{1}{\left(1+\frac{m}{M}\right)^2}$$

なる場合と同樣である.

28. 力の廻轉能率 質點Pに力 **F** が作用するとき一の定點たとへば原點Oから P に至る動徑 **r** とこの **F** とを兩邊とする平行四邊形の面積の大さを有してこの平面に垂直に立つベクトル **Q** を考へ之を力 **F** の定點O



第 3 圖

(1) 3 に於て P_1 を遊星 P_2 を太陽とする. 重心を原點にとる故

$$\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$$

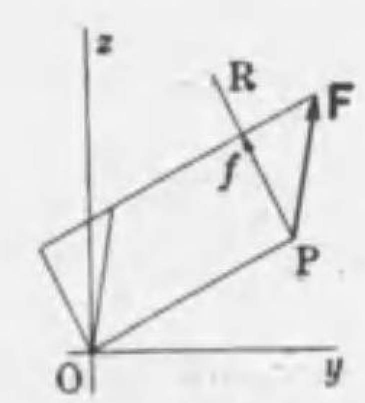
故に

$$m_1x_1 = -m_2x_2 \quad m_1y_1 = -m_2y_2 \quad m_1z_1 = -m_2z_2$$

に關する**能率**と名づける. 但し能率 **Q** の方向は **r F** に對して右旋の關係をなす如く取るものとする.[1]

或る方向たとへば x 軸に對して能率の分素を求めるに **Q** と x 軸との間の角は **r F** の平面と yz 平面との間の角に等しい. 從つて Q_x は **r F** のなす平行四邊形を yz 平面に射影したものに相當する. その大さは x 軸に直角の分力と x 軸よりこの分力に至る距離との積に等しい. この分力が x の正の方向に對して右旋の關係を有するとき正となり左旋の關係を有するときには負になる. 一般に或る軸に對する能率の分素をその軸の周りの力の廻轉能率と稱する.

また多くの力が同時に作用するときその合力の能率は各個の能率を合成したものなることも證明せられる. 例へば x 分素について考へるにこの分素は x 軸より質點に至る距離と質點を通り x 軸を含む平面に直角な方向Rに於ける分力 f との積としてもよい. 二つの力 $\mathbf{F}_1$ $\mathbf{F}_2$ のRに對する分力の和は $\mathbf{F}_1$ $\mathbf{F}_2$ の合力 **F** のRに對する分力に等しい. 從つて二つの力の能率の x 分素の和はその合力の能率の x 分素に等しい. y z 分素について考へてもまた同樣である. 即ち多數の力の能率の和は合力の能率に等しい.



第 4 圖

一の力 **F** を x y z の方向の分力に分けて考へれば直に

$$Q_x = yZ - zY \quad Q_y = zX - xZ \quad Q_z = xY - yX \qquad 6$$

が得られる.

29. 角運動量 質點Pが速度 **v** を以て運動するとき一の定點たとへば原點Oから P に至る動經 **r** と運動量 m**v** とを兩邊とする平行四邊形

(1) **r F** の順序に平行四邊形を一周する方向の廻轉で右螺子が **Q** の方向に進むとき右旋の關係をなすと云ひ逆に左螺子が **Q** の方向に進むときには左旋の關係をなすと稱する.

一般に一のベクトル **A** の尖端から他のベクトル **B** を描き之等の作る平行四邊形だけの大さを以て **A B** と右旋の關係をなす如く直角に立つベクトルを **A B** の外積と名づけ [**A B**] と表はす. **A B** の間の角を θ とすれば [**A B**] の大さは $AB\sin\theta$ である. [**B A**] は [**A B**] と大さが等しく方向が反對になる. 力の能率は動徑と力との外積 [**r F**] である.

の面積に等しい大さを以てこの平面に直角に立つベクトル**H**を考へ之を運動量 $m\mathbf{v}$ の定點Oに關する能率と名づける．この場合にも**H**の方向は $\mathbf{r}$ $m\mathbf{v}$ に對して右旋の關係をなさしめる．運動量の能率はまた**角運動量**とも稱へる．その x y z 分素は6と同様にして

$$H_x = myv_z - mzv_y \quad H_y = mzv_x - mxv_z \quad H_z = mxv_y - myv_x \qquad 7$$

$\mathbf{r}$ と $\mathbf{v}$ とのなす平行四邊形は單位時間に動徑 $\mathbf{r}$ が描く面積の二倍に等しい．從つて角運動量は面積速度[1]の $2m$ 倍に等しい．また物體の速度を多數の分速度に分解して考へるとき合速度による角運動量は各分速度の角運動量を合成したものに等しいことは力の能率の場合と同様に證明せられる．

多數の質點 P_1 P_2…… について運動の方程式1の第三列に y_1 y_2…… をかけ第二列に z_1 z_2…… をかけて差を作れば

$$m_1\left(y_1\frac{d^2z_1}{dt^2} - z_1\frac{d^2y_1}{dt^2}\right) + m_2\left(y_2\frac{d^2z_2}{dt^2} - z_2\frac{d^2y_2}{dt^2}\right) + \cdots\cdots$$
$$= y_1Z_1 - z_1Y_1 + y_2Z_2 - z_2Y_2 + \cdots\cdots \qquad 8$$

この左邊はまた

$$\frac{d}{dt}\left[m_1\left(y_1\frac{dz_1}{dt} - z_1\frac{dy_1}{dt}\right) + m_2\left(y_2\frac{dz_2}{dt} - z_2\frac{dy_2}{dt}\right) + \cdots\cdots\right]$$
$$= y_1Z_1 - z_1Y_1 + y_2Z_2 - z_2Y_2 + \cdots\cdots \qquad 8$$

としてもよい[2]．同様にして

$$\frac{d}{dt}\left[m_1\left(z_1\frac{dx_1}{dt} - x_1\frac{dz_1}{dt}\right) + m_2\left(z_2\frac{dx_2}{dt} - x_2\frac{dz_2}{dt}\right) + \cdots\cdots\right]$$
$$= z_1X_1 - x_1Z_1 + z_2X_2 - x_2Z_2 + \cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dt}\left[m_1\left(x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_1}{dt}\right) + m_2\left(x_2\frac{dy_2}{dt} - y_2\frac{dx_2}{dt}\right) + \cdots\cdots\right]$$
$$= x_1Y_1 - y_1X_1 + x_2Y_2 - y_2X_2 + \cdots\cdots$$

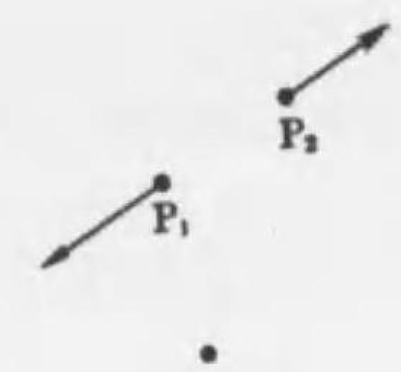
この左邊は各質點の原點に對する角運動量の總和が單位時間に受ける變化を表はし右邊は各質點に作用する力の能率の總和である．

然るに P_1 P_2…… の相互の間には作用と反作用とが必ず對をなして現はれ且つ之等は一直線の上にあるために P_1 が P_2 より受ける力の能率と

(1) 6節參照．

(2) 逆に微分して檢算すればよい．

P_2 が P_1 より受ける力の能率とが大さ等しく方向が反對である．從つて上式の右邊に於て各個の間の相互の作用による能率は互に相殺して殘りがない．即ち全く外部より作用する力の能率のみを考へればよい．角運動量の總和の變化はたゞ外部から作用する力の能率の和のみによつて定まりもし外部から作用する力の能率がなければ角運動量の總和は變化しない．



第5圖

30. **重心の周りの運動** 重心の運動をあらはす5によつて

$$M\left(\bar{y}\frac{d^2\bar{z}}{dt^2} - \bar{z}\frac{d^2\bar{y}}{dt^2}\right) = \bar{y}Z - \bar{z}Y \qquad 9$$

今 x y z 軸に平行に且つ重心を原點として之とともに移動する坐標軸 ξ η ζ を設ければ

$$x_1 = \bar{x} + \xi_1 \quad x_2 = \bar{x} + \xi_2 \quad \cdots\cdots$$
$$y_1 = \bar{y} + \eta_1 \quad y_2 = \bar{y} + \eta_2 \quad \cdots\cdots$$
$$z_1 = \bar{z} + \zeta_1 \quad z_2 = \bar{z} + \zeta_2 \quad \cdots\cdots$$

之を8に入れゝば

$$m_1\left[(\bar{y}+\eta_1)\left(\frac{d^2\bar{z}}{dt^2} + \frac{d^2\zeta_1}{dt^2}\right) - (\bar{z}+\zeta_1)\left(\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} + \frac{d^2\eta_1}{dt^2}\right)\right]$$
$$+ m_2\left[(\bar{y}+\eta_2)\left(\frac{d^2\bar{z}}{dt^2} + \frac{d^2\zeta_2}{dt^2}\right) - (\bar{z}+\zeta_2)\left(\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} + \frac{d^2\eta_2}{dt^2}\right)\right]$$
$$+ \cdots\cdots = (\bar{y}+\eta_1)Z_1 - (\bar{z}+\zeta_1)Y_1 + (\bar{y}+\eta_2)Z_2 - (\bar{z}+\zeta_2)Y_2 + \cdots\cdots$$

即ち

$$(m_1 + m_2 + \cdots\cdots)\left(\bar{y}\frac{d^2\bar{z}}{dt^2} - \bar{z}\frac{d^2\bar{y}}{dt^2}\right)$$
$$+ (m_1\eta_1 + m_2\eta_2 + \cdots\cdots)\frac{d^2\bar{z}}{dt^2} - (m_1\zeta_1 + m_2\zeta_2 + \cdots\cdots)\frac{d^2\bar{y}}{dt^2}$$
$$+ \bar{y}\left(m_1\frac{d^2\zeta_1}{dt^2} + m_2\frac{d^2\zeta_2}{dt^2} + \cdots\cdots\right) - \bar{z}\left(m_1\frac{d^2\eta_1}{dt^2} + m_2\frac{d^2\eta_2}{dt^2} + \cdots\cdots\right)$$
$$+ m_1\left(\eta_1\frac{d^2\zeta_1}{dt^2} - \zeta_1\frac{d^2\eta_1}{dt^2}\right) + m_2\left(\eta_2\frac{d^2\zeta_2}{dt^2} - \zeta_2\frac{d^2\eta_2}{dt^2}\right) + \cdots\cdots$$
$$= \bar{y}(Z_1 + Z_2 + \cdots\cdots) - \bar{z}(Y_1 + Y_2 + \cdots\cdots)$$
$$+ \eta_1Z_1 - \zeta_1Y_1 + \eta_2Z_2 - \zeta_2Y_2 + \cdots\cdots$$

然るに $\xi\eta\zeta$ 軸の原點が重心にある故

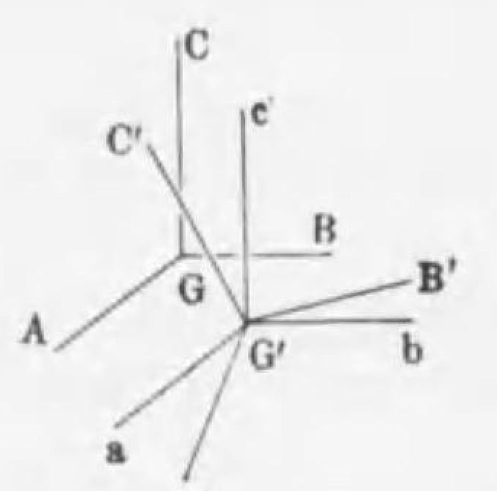
$$m_1\xi_1+m_2\xi_2+\ldots\ldots=0 \quad m_1\eta_1+m_2\eta_2+\ldots\ldots=0 \quad m_1\zeta_1+m_2\zeta_2+\ldots\ldots=0$$

よつて上式の左邊の第二列第三列は 0 である．また 9 によつて第一列は左右兩邊に於て相等しく從つて

$$\frac{d}{dt}\left[m_1\left(\eta_1\frac{d\zeta_1}{dt}-\zeta_1\frac{d\eta_1}{dt}\right)+m_2\left(\eta_2\frac{d\zeta_2}{dt}-\zeta_2\frac{d\eta_2}{dt}\right)+\ldots\ldots\right]$$
$$=\eta_1Z_1-\zeta_1Y_1+\eta_2Z_2-\zeta_2Y_2+\ldots\ldots \qquad 10$$

卽ち 8 に類する三式が得られる．從つて重心の周りの角運動量の總和は各質點に作用する力の重心に關する能率の和によつて定まる．恰も $\xi\eta\zeta$ 軸が靜止せる如くに考へてもよい．重心の運動は質量の總てがこゝに集まり力の總てがこゝに作用すると考へて論じ得べく重心の周りの運動については恰も重心が靜止せる如くに考へてよい．

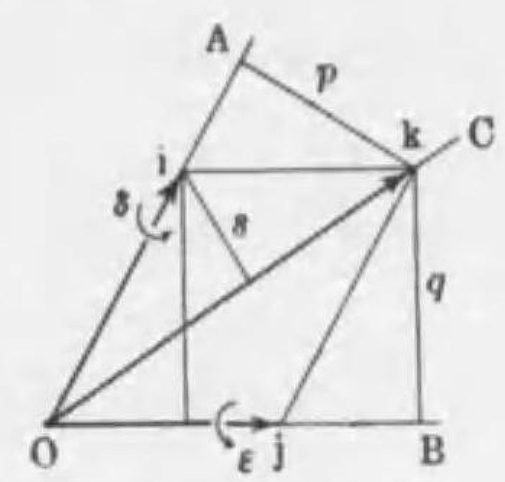
31．剛體 外力の作用を受けても變形を生じない物體を剛體と名づける．完全な剛體は勿論たゞ理想的のものに過ぎないけれども普通の固體は特に强大な力が作用して著しく變形する場合を除いてはこれを剛體と見做してもよい．



第 6 圖

剛體の中の一點 G が剛體の運動に伴つて短い時間の後 G′ に移動し剛體の中の三軸 A B C が A′ B′ C′ の位置に來た場合この移動を先づ G より G′ に至る併進運動と G′ の周りの廻轉とに分けて考へてもよい．この併進運動によつて A B C が a b c に來るとすれば G′ を通り aA′ の平面に直角な軸の周りに廻轉して a より A′ に來らしめ次に A′ を軸として適當に廻轉すれば A B C を悉く A′ B′ C′ に來らしめることができる．

然るにまた一點を過る二つの軸の周りの微少な二つの廻轉はたゞ一の廻轉と見做してもよい．例へば次圖の如く A 軸の周りに微小な角 δ だけ廻轉し次に B 軸の周りに微少な角 ε だけ廻轉したとする．A B の上に交點から δ ε に相當する長さを取り之等を二邊とする平行四邊形



第 7 圖

の角點 i j k を考へ k から A B に至る距離を p q とすれは $p\delta$ と $q\varepsilon$ とはともに平行四邊形の面積に相當して互に相等しい．二つの廻轉が k 點に生ずる變位は $p\delta$ $q\varepsilon$ に等しく且つ反對の方向に生ずる故に互に相殺する．[1] 從つて直線 Ok の上には變位を生じない．二つの廻轉 ε δ は C 軸の周りの或る廻轉 γ に等しくなければならない．

次に i 點から C 軸に至る距離を s とし i 點の變位を考へるに之を C 軸の周りの廻轉と見れば $s\gamma$ と表はされまた B 軸の周りの廻轉と見れば $q\varepsilon$ と表はされる．從つて

$$q\varepsilon=s\gamma$$

こゝに $q\varepsilon$ は平行四邊形の面積に相當する故この式は γ が平行四邊形の對角線に相當することを示す．軸の方向のベクトルを以て廻轉を表はすことゝすれば二つの微小な廻轉は之等を中斜法で合成した一の廻轉に等しい．[2] 從つて角速度もまた一のベクトルとして考へることができる．普通には廻轉または角速度を之等と右旋の關係をなす方向のベクトルとして表はす．

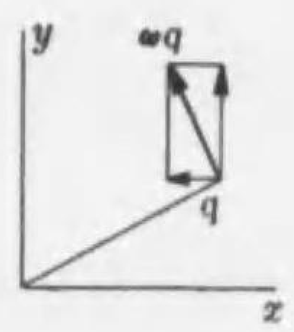
上に述べた如くに剛體の運動は各瞬間に於て一の併進運動と一の廻轉運動とから成ると考へられる．剛體の中の一軸が固定せられた場合には剛體はたゞその周りに廻轉し得るのみである．また剛體の中の一點のみが固定せられたときに生ずる剛體の運動はこの點を通る軸の周りの廻轉であるけれどもその廻轉の軸は時刻とともに變化するを常とする．剛體を組織する各部分の相互作用もまたニウトンの第三則に從ふ故に剛體の運動も前に述べた質點系の運動の一般法則に從ふべきこと云ふまでもない．重心の運動は總ての質量がこゝに集まり總ての力が此處に作用するとして考へられる．次には剛體の廻轉について考へ

(1) 圖の面に直角に變位を生じ δ によつては後に退き ε によつては前に進む．

(2) 廻轉角が微小ならざる場合にはこのやうにして合成するを得ない．

ることゝする. 物體が固定軸または固定點を有せず全く自由なる場合には假に重心を靜止するものと見做してその周りの廻轉を考へればよい.

32. 一軸の周りの廻轉 剛體が一の軸の周りに廻轉する場合には各部分が圓運動をする. 廻轉軸を z 軸とし角速度を ω とすれば z 軸から q なる距離にある點の速度は ωq その x y z 方向の分速度は



第 8 圖

$$-\omega q\frac{y}{q} \qquad +\omega q\frac{x}{q} \qquad 0$$

即ち

$$\frac{dx}{dt}=-\omega y \quad \frac{dy}{dt}=+\omega x \quad \frac{dz}{dt}=0 \tag{11}$$

z 軸に對する角運動量は之と 7 とによつて

$$m_1\omega(x_1^2+y_1^2)+m_2\omega(x_2^2+y_2^2)+\ldots\ldots=\omega(m_1q_1^2+m_2q_2^2+\ldots\ldots)$$

今

$$I=m_1q_1^2+m_2q_2^2+\ldots\ldots \tag{12}$$

と置けばこの角運動量は

$$I\omega$$

と表はされる. I は物體の形と質量の分布と軸の位置とによつて定まりその軸に關する物體の**慣性能率**と名づける.

また外から作用する力のこの軸に對する廻轉能率を N とすれば 8 によつて

$$\frac{d}{dt}(I\omega)=N$$

剛體の廻轉する角を θ とすれば ω は $\frac{d\theta}{dt}$ と表はされる. よつて

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=N \tag{13}$$

とも表はされる.

この關係は恰も直線運動に於ける力と加速度との關係に類似して力の能率は力に相當し角加速度は加速度に相當する. 慣性能率は廻轉に對する慣性の大小を示すもので質量に相當する. 外から作用する力の

能率がなければ物體は靜止するかまたは一定の角速度で廻轉をつゞける.

この場合に角運動量の方向は必しも角速度の方向卽ち廻轉軸の方向に一致するとは限らない. 例へば角運動量の x 分素は 7 11 によつて

$$-(m_1\omega z_1x_1+m_2\omega z_2x_2+\ldots\ldots)=-\omega(m_1z_1x_1+m_2z_2x_2+\ldots\ldots)$$

一般には之が 0 でないために廻轉軸と直角の方向にもまた角運動量がある. 卽ち角運動量は廻轉軸と必しも一致しない.

上式の ω の係數

$$J_{zx}=m_1z_1x_1+m_2z_2x_2+\ldots\ldots \tag{14}$$

を z x 軸に對する**慣性乘積**と名づける. 若し J_{zx} J_{zy} がともに 0 なる場合には角運動量が廻轉軸と一致する 例へば物體が z 軸の周りの廻轉體なる場合には z が等しく x y の正負相反する部分が對をなして存在するために J_{zx} J_{zy} はともに 0 になる.

前節の廻轉運動に於て各部分の運動のエネルギーの總和 T を求めれば

$$\frac{1}{2}(m_1\omega^2q_1^2+m_2\omega^2q_2^2+\ldots\ldots)=\frac{1}{2}I\omega^2$$

卽ち

$$T=\frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{15}$$

剛體が小さな角 $d\theta$ だけ廻轉すればこれに伴つて各部は廻轉軸を繞つて

$$q_1d\theta_1 \quad q_2d\theta_2 \quad \ldots\ldots$$

だけ變位する. 之等の點に作用せる力 $\mathbf{F}_1$ $\mathbf{F}_2$ ……のこの變位の方向の分力を f_1 f_2…… とすれば仕事 dW は

$$f_1q_1d\theta+f_2q_2d\theta+\ldots\ldots=(f_1q_1+f_2q_2+\ldots\ldots)d\theta$$

然るに右邊の f_1q_1 f_2q_2 …… は $\mathbf{F}_1$ $\mathbf{F}_2$ …… の z 軸に對する能率である. 從つて

$$dW=Nd\theta \tag{16}$$

之を積分して考へれば

$$W=\int N d\theta \qquad 16$$

第 9 圖

この場合に各部の相互作用は仕事に關係しない．例へば P_1P_2 の相互作用は反對の能率を有する故にこの仕事は互に相殺する．從つてこの場合に於ても全く外部から作用するものゝみを考へればよい．

運動のエネルギーの增減は力のなした仕事に等しい．從つて

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=N\frac{d\theta}{dt} \qquad 17$$

之によつても直に 13 が得られる．

33. 慣性能率と廻轉半徑 物體が簡單な形をなすときには慣性能率を計算によつて求めることができる．廻轉軸を z 軸とし之と直角に x y 軸を取り各部分の密度を ρ と表はせば慣性能率は

$$I=\iiint \rho(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

によつて求められる．また剛體の總質量 M に對して

$$Mk^2=I$$

なる如き長さ k を**廻轉半徑**と稱へる．

x y z 軸と平行に重心 G を原點とする軸 $\xi\,\eta\,\zeta$ を考へれば

$$x=\bar{x}+\xi \qquad y=\bar{y}+\eta \qquad z=\bar{z}+\zeta$$

慣性能率は 12 によつて

$$\begin{aligned} I=&\,m_1(\bar{x}^2+\bar{y}^2)+m_2(\bar{x}^2+\bar{y}^2)+\cdots\cdots\\ &+2m_1(\bar{x}\xi_1+\bar{y}\eta_1)+2m_2(\bar{x}\xi_2+\bar{y}\eta_2)+\cdots\cdots\\ &+m_1(\xi_1^2+\eta_1^2)+m_2(\xi_2^2+\eta_2^2)+\cdots\cdots \end{aligned}$$

第三列の和は ζ 軸に對する慣性能率である．また $\xi\,\eta\,\zeta$ 軸の原點が重心にあるために

$$m_1\xi_1+m_2\xi_2+\cdots\cdots=0 \qquad m_1\eta_1+m_2\eta_2+\cdots\cdots=0$$

從つて第二列は 0 になる．第一列は卽ち重心に總ての質量があるとしたとき z 軸に對して有すべき慣性能率に等しい．ζ 軸に對する慣性能率を I_s とし重心と z 軸との距離を h とすれば

$$I=Mh^2+I_s \qquad 18$$

卽ち重心を通る軸に對する慣性能率を知れば之に平行な軸に對する慣性能率が直に求められる．

同一の點を通る軸もその方向によつて之に對する慣性能率を異にする．原點 O を過ぎ x y z 軸に對する方向餘弦 l m n なる軸 A を取れば之に對する慣性能率は次の如くに表はされる[1]

$$I=l^2I_x+m^2I_y+n^2I_z-2mnJ_{yz}-2nlJ_{zx}-2lmJ_{xy} \qquad 19$$

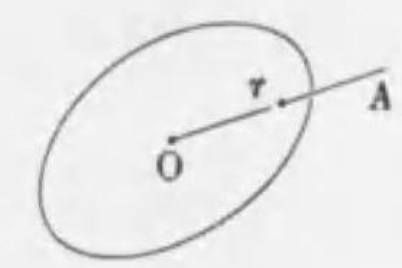
x y z 軸に對する慣性能率と慣性乘積とを知れば他の傾きの軸に對する慣性能率が得られる．

今 O 點のまわりに一の曲面

$$I_xx^2+I_yy^2+I_zz^2-2J_{yz}yz-2J_{zx}zx-2J_{xy}xy=1 \qquad 20$$

を描き O より l m n の方向に直線を引き曲面を貫く點の坐標を x y z とし O よりの距離を r とすれば

$$x=lr \qquad y=mr \qquad z=nr$$



第 10 圖

之を上式に入れて

$$Ir^2=1$$

この二次曲面の動徑は之を軸とするときの慣性能率の平方根に逆比例する．この曲面を描けば

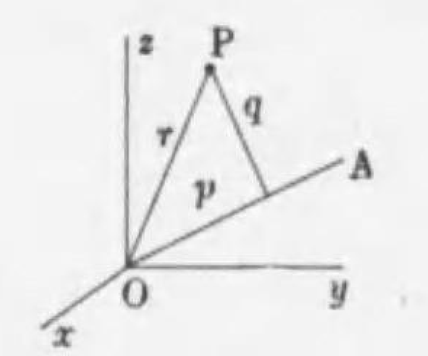
---

(1) 軸より P なる部分に至る距離を考へれば圖の如く

$$q^2=r^2-p^2$$

とゝに

$$r^2=x^2+y^2+z^2 \qquad p=lx+my+nz$$



よつて

$$\begin{aligned} q^2=&\,l^2(y^2+z^2)+m^2(z^2+x^2)+n^2(x^2+y^2)\\ &-2mnyz-2nlzx-2lmxy \end{aligned}$$

從つて A 軸に對する慣性能率は

$$\begin{aligned} I=m_1q_1^2+m_2q_2^2+\cdots\cdots=&\,l^2[m_1(y_1^2+z_1^2)+m_2(y_2^2+z_2^2)+\cdots\cdots]\\ &+m^2[m_1(z_1^2+x_1^2)+m_2(z_2^2+x_2^2)+\cdots\cdots]\\ &+n^2[m_1(x_1^2+y_1^2)+m_2(x_2^2+y_2^2)+\cdots\cdots]\\ &-2mn[m_1y_1z_1+m_2y_2z_2+\cdots\cdots]\\ &-2nl[m_1z_1x_1+m_2z_2x_2+\cdots\cdots]\\ &-2lm[m_1x_1y_1+m_2x_2y_2+\cdots\cdots] \end{aligned}$$

O 點を通る各方向の軸に對する慣性能率は直に知られる.

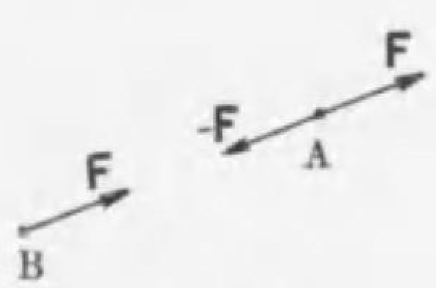
20の各係數は $x\ y\ z$ 軸に對する慣性能率と慣性乘積とを表はす. もしこの曲面の主軸の方向に始めから $x\ y\ z$ 軸を取つたとすれば20は

$$I_a x^2 + I_b y^2 + I_c z^2 = 1$$

の形に表はされなければならない. 從つてこの軸については慣性乘積は 0 になる. この主軸を慣性能率の主軸と稱し $I_a\ I_b\ I_c$ を慣性能率の主値と名づける. 曲面20を**慣性楕圓面**と稱する.

物體	大さ	軸の位置	慣性能率
太さ一樣なる棒	長さ l	中心を通過し棒に垂直	$Ml^2/12$
厚さ一樣なる矩形板	邊の長さ $a\ b$	中心を通過し b 邊に平行	$Ma^2/12$
同	同	中心を通過し板に垂直	$M(a^2+b^2)/12$
直六面體	邊の長さ $a\ b\ c$	中心を通過し $a\ b$ 面に垂直	$M(a^2+b^2)/12$
圓板	半徑 a	直徑	$Ma^2/4$
同	同	中心を通過し板に垂直	$Ma^2/2$
直圓壔	半徑 a	圓壔の軸	$Ma^2/2$
同	半徑 a 長さ l	中心を通過し軸に垂直	$M(l^2+3a^2)/12$
楕圓板	半軸の長さ $a\ b$	a 軸	$Mb^2/4$
同	同	中心を通過し板に垂直	$M(a^2+b^2)/4$
楕圓體	半軸の長さ $a\ b\ c$	a 軸	$M(b^2+c^2)/5$

34. 剛體の平衡 外力を受ける剛體が靜止の狀態を保つためには先づ重心が靜止にあるを要する. これがためには外力の總和が零でなければならない. また如何なる軸を考へるも之に對する角運動量の變化があり得ない.[1] 即ち外力の能率の總和が零なるを要する. この如き外力は剛體の內部の相互作用にのみ影響し剛體が破壞せざる限り全體としての運動には關係しない.



第 11 圖

例へば二點 A B に之等を結ぶ直線に沿ふて同大の力を反對に作用せしめても剛體の運動に關係しない. A 點に **F** なる力が作用するとき A B 兩點に **−F** **+F** なる二力を附加してもよい. A に於ける **+F** **−F** の兩力は互に相消す故に A に **F** なる力が作用することは B に **F** なる力が作用するに等しい. 即ち剛體に作用する力は作用線の上の何れの點に於ても同一の效果を生ずる.

[1] 即ち $I\omega$ が生じない. 如何なる軸を考へてもその周りの廻轉が生じないことは靜止をつゞけることに外ならない.

作用線が相交る二つの力に於てはこの交點に作用するに等しく從つてこの點に之等の合力が作用するに等しい. 平行なる二つの力は之等と同じ平面にあつて兩者よりの距離が之等の大さに逆比例する如き直線の上に作用する一の力に等しい. 二つの力が同じ方向ならば合力は兩者の間にあつて大さは之等の和に等しく二つの力が反對ならば合力は兩者の外にあつて大さは之等の差に等しい. 但し大さ等しく方向反對なる二つの力は一に合成するを得ない. この如き力の一對を**偶力**と名づける. 偶力はたゞ能率のみを有する. 從つて之が剛體に作用するもたゞ重心の周りの廻轉を生ずるに止まり重心の運動を生じない.

35. 剛體に作用する重力 剛體の各部分 $P_1\ P_2$ ...... に作用する重力は

$$\begin{array}{lll} X_1=0 & X_2=0 & \cdots\cdots \\ Y_1=0 & Y_2=0 & \cdots\cdots \\ Z_1=-m_1 g & Z_2=-m_2 g & \cdots\cdots \end{array}$$

之等の總和を考へれば

$$X=0 \qquad Y=0 \qquad Z=-Mg \tag{21}$$

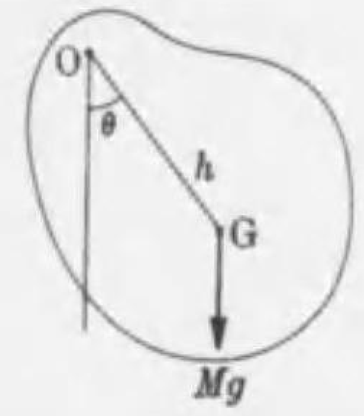
更にまた之等の能率の總和を考へれば

$$-m_1 g y_1 - m_2 g y_2 - \cdots\cdots \qquad m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + \cdots\cdots \qquad 0$$

3によつて

$$-Mg\bar{y} \qquad Mg\bar{x} \qquad 0 \tag{22}$$

とも表はされる.



第 12 圖

この結果は恰も總ての質量が重心にあるとき作用する重力の能率に等しい. 從つて剛體の運動を論ずる場合に重力は重心に於て作用する如くに考へてよい.

水平軸の周りに廻轉振動をなす剛體を**複振子**と稱する. その質量を M とし軸 O に對する慣性

能率を I この軸と重心 G との距離を h 之が鉛直より傾く角を θ とすれば

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=-Mgh\sin\theta$$

振動の範圍が小さければ

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=-Mgh\theta$$

從つて週期は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}} \qquad 23$$

重心を通つて O に平行な軸に對する慣性能率を I_0 とすれば

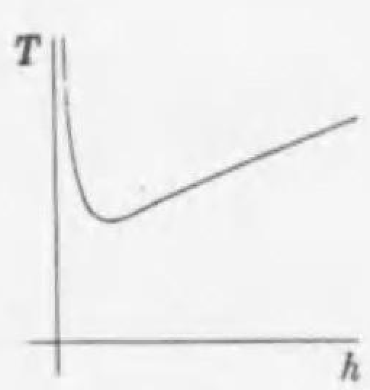
$$T=2\pi\sqrt{\frac{I_0+Mh^2}{Mgh}} \qquad 24$$

h と T との關係は圖の如く h の或る大さに於て T が極小となり一の T に對して二つの h が對應する．之を $h_1\ h_2$ とすれば 24 によつて[(1)]

$$h_1+h_2=\frac{gT^2}{4\pi^2}$$

卽ち

$$g=\frac{4\pi^2(h_1+h_2)}{T^2}$$



第 13 圖

重心の兩側に二つの軸を設け之等に對する週期が相等しい如くに重心の位置を調節すれば h_1+h_2 は兩軸の間の距離として測り得べく從つて g を精密に測ることができる．但しこの場合に重心より兩軸までの距離が h_1 と h_2 とに相當しなければならない．之がためには重心を兩軸の何れかに偏せしめる．この如き振子を**可逆振子**と名づける．

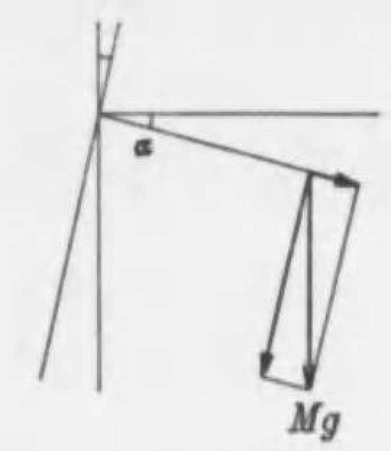
---

(1) **24** から

$$h^2-\frac{gT^2}{4\pi^2}h+\frac{I_0}{M}=0$$

一の T に對する二つの h はこの方程式の二つの根である．卽ち h_1+h_2 は h の係數から直に知られる．

振子の軸を水平より傾けて殆ど之を鉛直ならしめたものを**水平振子**と名づける．重力を振子の軸に平行と垂直との方向に分解して考へれば軸に平行な分力は振子の運動に關係なくたゞ軸に垂直な分力のみを考へればよい．この分力は軸を含む鉛直平面に平行に作用する．軸が鉛直となす角を α とすればこの分力は水平と α の角をなして下に傾く．その作用は恰も重力がこの方向に作用しその强さが g より $g\sin\alpha$ に減じたと同樣になる．振子の振動は軸が水平なる場合と同樣でたゞ週期が增大する．振動の範圍が小さければ週期は

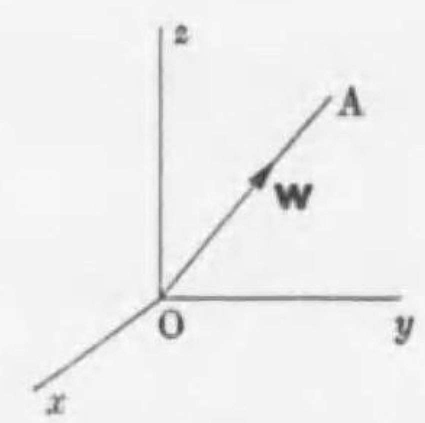


第 14 圖

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh\sin\alpha}} \qquad 25$$

と表はされる．

36. 獨樂の廻轉　旣に 32 節に述べた如くに廻轉運動に於て角運動量の方向は一般に廻轉軸と一致しない．廻轉軸 A の上に原點 O を取り角速度 **w** を $x\ y\ z$ 軸の周りの $\omega_x\ \omega_y\ \omega_z$ なる角速度に分解し之等の廻轉による各點の速度を考へるに 11 の如き計算によつて[(1)]



第 15 圖

ω_x によつて	0	$-\omega_x z$	$+\omega_x y$
ω_y によつて	$+\omega_y z$	0	$-\omega_y x$
ω_z によつて	$-\omega_z y$	$+\omega_z x$	0

從つて **w** なる廻轉による各點の速度は

$$\frac{dx}{dt}=\omega_y z-\omega_z y \qquad \frac{dy}{dt}=\omega_z x-\omega_x z \qquad \frac{dz}{dt}=\omega_x y-\omega_y x$$

よつて剛體の角運動量を計算すればその x 分素は

$$m_1y_1(\omega_x y_1-\omega_y x_1)-m_1z_1(\omega_z x_1-\omega_x z_1)$$
$$+m_2y_2(\omega_x y_2-\omega_y x_2)-m_2z_2(\omega_z x_2-\omega_x z_2)$$

---

(1) ω_x については $x\ y\ z$ 軸を **11** の $z\ x\ y$ 軸と考へ ω_y については $x\ y\ z$ 軸を **11** の $y\ z\ x$ 軸と考へればよい．

$$+\ldots\ldots=\omega_x[m_1(y_1^2+z_1^2)+m_2(y_2^2+z_2^2)+\ldots\ldots]$$
$$-\omega_y(m_1x_1y_1+m_2x_2y_2+\ldots\ldots)-\omega_z(m_1x_1z_1+m_2x_2z_2+\ldots\ldots)$$

即ち

$$I_x\omega_x-J_{xy}\omega_y-J_{xz}\omega_z$$

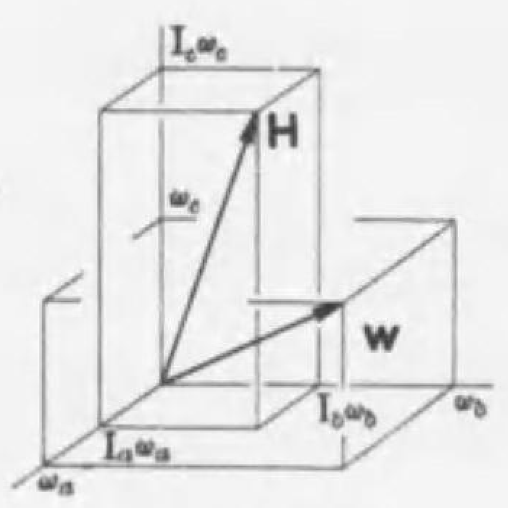
同様にして y z 分素は

$$I_y\omega_y-J_{yz}\omega_z-J_{yx}\omega_x$$
$$I_z\omega_z-J_{zx}\omega_x-J_{zy}\omega_y$$ 26

特別の場合として x y z 軸が慣性能率の主軸 a b c と一致したときには J_{yz} J_{zx} J_{xy} が悉く 0 となるために角運動量の分素は

$$I_a\omega_a \qquad I_b\omega_b \qquad I_c\omega_c$$

で表はされる．圖によつても明かなる如くに角運動量 **H** の方向は角速度の方向より慣性能率の大なる方に偏る．

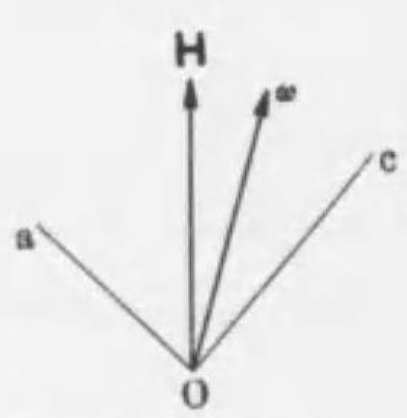


第 16 圖

剛體が一定點の周りに自由に廻轉し得るときには一般に甚だ複雑な運動を生ずる．次に一例として獨樂の心軸を定點に置いて廻轉せしめる場合を考へることとする．

通常の獨樂はその心軸の周りに對稱の形をなし從つて慣性能率の主軸の一は心軸と一致し他の二つは之に直角でなければならない．後者の方向は心軸に直角で且つ互に直角をなす限り何れの方向にもとり得る．慣性能率の主値はこの二つの横軸に關するものが互に相等しく心軸に關するものが獨り異なる．

今ある瞬間に獨樂がその心軸 c に對して少しく傾いた角運動量 **H** を以て廻轉を始めたとする．この廻轉の角速度 ω は心軸 c に關する慣性能率 I と之に直角な軸に關する慣性能率 I' とによつて定まり且つ對稱の理によつて **H**



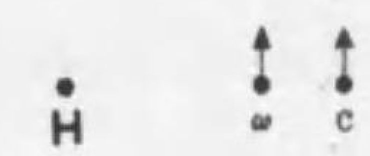
第 17 圖

と c との平面の内にある．**H** を c の方向とこれに直角な a の方向とに分解すれば之等は

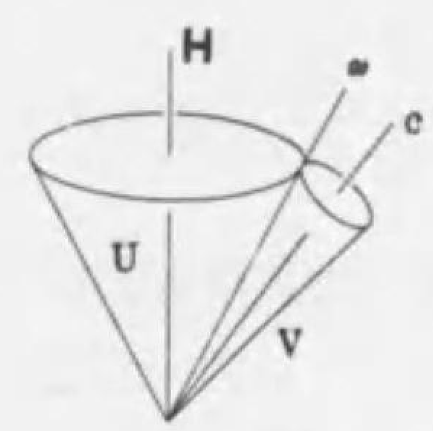
$$I\omega_c \qquad I'\omega_a$$

に等しい．I が I' より大なるか小なるかに從つて ω は **H** に對して a の側にあるかまたは c の側にある．

獨樂に外部から力の能率が作用しない場合に於ては角運動量 **H** が大さも方向も一定に保たれる．心軸 c は廻轉 ω によつて移動するけれどもその移動は **H**c 平面に直角に生じ從つて次の瞬間に於ても **H** に對して舊と同じ傾きを有する．これと同時に廻轉軸もまた變化するけれども **H**c の關係は初めと同様である．故に ω の **H**c に對する關係もまた舊に等しい．即ちこの瞬間の狀況は始めの瞬間と全く等しくたゞ c と ω とが **H** を軸として少しく廻轉した位置に移ることに於て異なる．斯くして c と ω とは **H** の周りに一様な速度を以て圓錐を描いて移動する．



第 18 圖



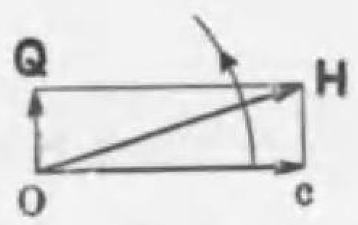
第 19 圖

この結果は恰も心軸 c を軸として獨樂の中に描かれた圓錐 V が角運動量 **H** を軸として空間に描かれた圓錐 U に接し辷ることなしに一様の速さを以て轉がる如くに考へられる．U と V との接觸する線がその瞬間の廻轉軸になる．即ち廻轉軸は空間に對しては角運動量の周りに圓錐 U を描き獨樂に對しては心軸の周りに圓錐 V を描いて移動する．

地球の自轉の軸は慣性能率の主軸に對して少しく傾きを有するために自轉軸は南北の主軸の周りに移動する．即ち地表の南北の兩極は平均の位置を續つて絶えず移動する．[1]

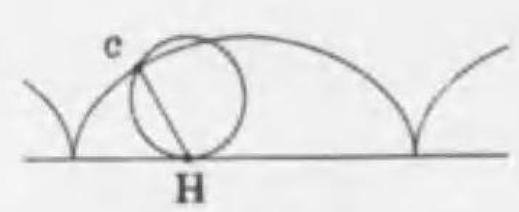
[1] 地球の場合には 31 節に述べたやうに重心を固定點と見做せばよい．實際の事情は更に複雑なために兩極の移動も正しく上の理論の如くには生じないけれども兩極は約四百日の週期を以て平均位置の周りに移動する．

37.　歳差運動　心軸 c の周りに廻轉してゐる獨樂に外から c に垂直に力の能率 **Q** を作用せしめれば獨樂は之に從つて **Q** の周りにも廻轉を始める. これによつて得た **Q** の周りの角運動量を始めから有する角運動量と合成した **H** は c よりも少しく **Q** の側に偏る. 從つて始め心軸と一致した獨樂の角運動量が外から作用する能率のために心軸を離れてその能率の方向に偏倚する. 併しながらこの偏倚を生ずるとともに前記の如くに c は **H** の周りに廻轉を始める. 能率 **Q** の作用によつてその方向の角運動量が漸次に加はり **H** が漸次に **Q** の方に移動すると同時に心軸 c は **H** の周りに廻轉をつゞける.



第 20 圖

其の狀は恰も車が直線の上を轉がるとき輪の上の一點がなす運動に類する.[1] 輪の上の點 c は各瞬間そのとき輪の直線に接する點 H を中心として廻轉運動をなし同時に H は一樣の速さを以て直線の上を移動して c の徑路は所謂るサイクロイドになる. これと同樣に獨樂の心軸 c はサイクロイドを描きながら **H** を追ふて **Q** の方に移動する. 若しまた最初の廻轉が心軸と一致してゐないときには一般に c が所謂るトロコイドを描いて **H** を追ふことになる.



第 21 圖

心軸の周りの角速度が大なるときには c が **H** を旋ることが速く且つ **Q** の作用による **H** の移動は遲い. 從つて c はたゞ微細な顫動をなすのみで **H** を多く離れることはない. 卽ち心軸は常に角運動量の方向を取ることになる. 外から作用する能率が常に心軸に直角に加はるならば角運動量の大さには變化なくたゞ方向のみが變り心軸は常に之を追ふて動く.

---

(1)　輪が少し廻轉する間 H 點に於て直線に接する輪上の點は動かない. 卽ちこの點が瞬間の廻轉軸になる. 剛體が固定面に沿ふて轉がるときには接觸點が瞬間の廻轉の中心になる. 前圖 19 に於ても V が U に切する線 ω がこの瞬間 V の廻轉軸になる.

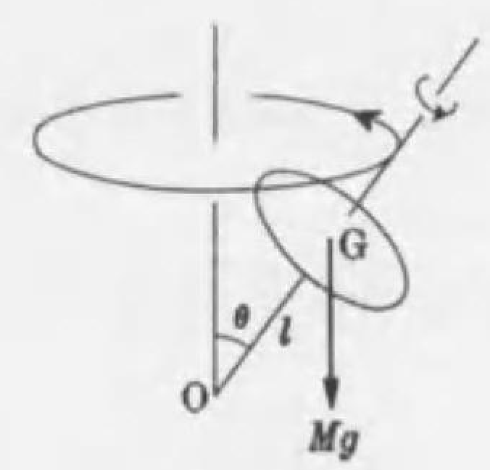
心軸が常に角運動量の方向をとる故に

$$H = I\omega$$

能率 **Q** の作用によつて時間 dt の間に角運動量 Qdt を生じ之が舊の角運動量に直角に加はる故に **H** は $\frac{Q}{I\omega}dt$ なる角だけ廻轉する. 卽ち心軸は之に伴つて

$$\frac{Q}{I\omega} \qquad 27$$

なる角速度で移動する. この心軸の移動を**歳差運動**と名づける　ω が大なるときはこの角速度が小さい. 卽ち急速に廻轉しつゝある獨樂は傾けんとする作用に對して強く抵抗する.



第 22 圖

獨樂の下端を固定點に置いて廻轉せしめるとき重力は獨樂を倒す如くに作用しその能率 **Q** は水平に横に向ふ. 從つて心軸は横へ移動し鉛直軸の周りに圓錐を描く. 獨樂の質量を M とし重心 G より下端に至る距離を l 心軸の傾きを θ とすれば重力の能率は

$$Q = Mgl\sin\theta$$

卽ち心軸の移動する角速度は

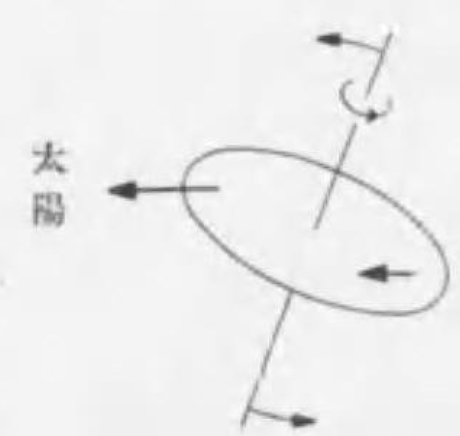
$$\frac{Mgl}{I\omega}\sin\theta$$

重心 G は

$$\frac{Mgl^2}{I\omega}\sin\theta$$

なる速度を以て圓を描く. この圓周の長さは $2\pi l\sin\theta$ なる故 G が之を一週する時間は

$$2\pi\frac{I\omega}{Mgl}$$



第 23 圖

地球は南北に偏平な楕圓體をなし太陽よりの引力が太陽に近い部分に於て強く反對の部分に於て弱い. このために地軸を黄道の面に直角ならしめんとする能率を生じて恰も前圖

と逆の歳差運動を生ずる．卽ち地球の自轉軸は黄道の軸の周りに圓錐を描き約 26000 年を週期として舊に歸る．

38. 質點系の自由度と平衡の狀態 多數の質點 P_1P_2…… の一群を考へるに一の瞬間に於ける各個の分布の狀態は之等の坐標

$$x_1\ y_1\ z_1 \quad x_2\ y_2\ z_2 \quad \cdots\cdots$$

によつて完全に表はされる．各質點の位置の變るに從つて之等の坐標が變化する．凡ての質點が任意に動き得べき場合には之等の坐標が相互に關係なく變化する．

併しながら場合によつては之等の質點の運動が制限を受ける場合がある．例へば P_1P_2 が常に一定の距離を保つものとすれば之等の坐標 $x_1\ y_1\ z_1\ x_2\ y_2\ z_2$ は互に無關係に變化するを得ない．從つて獨立に變化し得るものはこの中の 5 個に限られ殘りの一は前者によつて必然に定められる．[1] 更に P_2P_3 の間にも同樣の關係があれば $x_3\ y_3\ z_3$ の中の一が他の二つ及び $P_1\ P_2$ の坐標の 5 個によつて定まる．この如き關係が多數にあれば各質點の坐標の中で獨立に變化し得るもの少く他の坐標は必然に定まることになる．

この如き場合に獨立に變化し得る坐標の數をその質點の**自由度**と名づける．n 個の質點が各々自由に動き得るときは $3n$ の自由度を有し何れか二つの間に上記の關係があれば自由度は $3n-1$ となり更に他の二つの間にも同樣の關係があれば自由度は $3n-2$ に減ずる．一個の質點は全く自由なるとき自由度 3 を有するけれども一の曲面の上にのみ動き得るときの自由度は 2 となり一の曲線に沿ふてのみ動き得るときの自由度は 1 である．

剛體をなす各部分は互に固く連結せられて獨立には運動するを得ない．剛體の中に三點を撰んでその位置を定めれば他の諸點の位置は自

(1) 二點間の距離を l とすれば

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=l^2$$

なる關係がなければならない．例へば $x_1\ y_1\ z_1\ x_2\ y_2$ が與へられゝば z_2 はこの式によつて自ら定められる．

ら定まる．またこの三點の二つづゝの距離は不變なるためにその坐標 9 個の中で獨立なるものは 6 個に過ぎない．[1] 卽ち剛體の位置と傾きとは 6 個の坐標によつて定まる．故に剛體の自由度は 6 である．

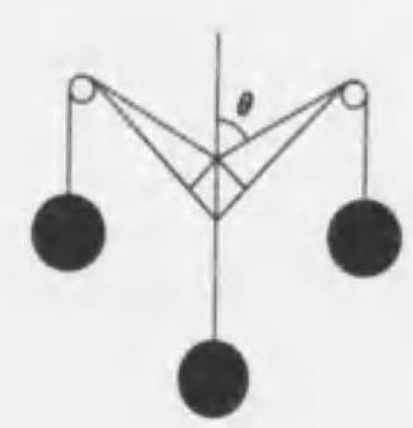
なほまた坐標は直角坐標に限らず極坐標またはその他のものを用ひてもよい　その質點系の狀態を表はし得べき變數を考へればその獨立なるものゝ數は必ず自由度の數に等しい．

地上の物體は重力によつて引かれ周圍の事情の許す限り下降してこれ支へる表面の最も低い處に靜止する．この靜止の位置に於て重力による位置のエネルギーは極小になる．從つて物體を他の位置に動かすときには必ず位置のエネルギーの增加を伴ふ．

第 24 圖

一般に質點系が靜止して安定に釣合ふときには位置のエネルギーが極小なる狀態を取る．この狀態から他の狀態に移るには必ずエネルギーの增加を要するため外から何等かの作用を受けない限りこの系には運動を生じない．

位置のエネルギーの極小に於ては狀態に微小の變化を與へても位置のエネルギーは殆ど變らない．卽ちこの系に於て作用する力の仕事は總計に於て消殺する．例へば相等しい三個の錘を滑車に懸けて圖の如く釣合はしめるとき θ が $\frac{\pi}{3}$ なる位置に靜止する．



第 25 圖

假に中央の錘が少しく下に動けば兩側の錘はこれに伴つて少しく上に動かなければならない．前者の下降を δ とすれば後者の上昇は $\delta\cos\theta$ と考へられる．故に重力のなす仕事は

$$mg\delta-2mg\delta\cos\theta$$

θ に $\frac{\pi}{3}$ と置けばこの仕事は 0 になる．

逆にこの仕事を 0 ならしむるが如き θ を求めて釣合の位置を知ることもできる．この如く變位を假想しこれに對

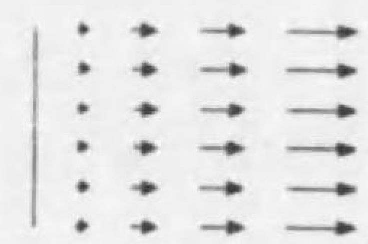
(1) 三點の坐標 9 個の間に前頁註の如き式が 3 個ある．從つて獨立な坐標は 9−3 個である．

する仕事が全く消殺すべき條件より釣合の狀態を知り得ることを**假想變位の原理**と名づける.[1]

(1) このことは位置のエネルギーが極小なる場合のみならずその極大なる場合にも成立する. この場合にも釣合は生じ得るけれどもその狀態は安定でない.

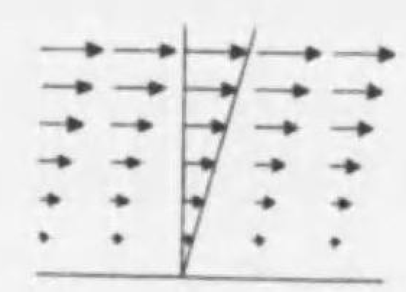
第六章　彈　性　體

39.　歪みと歪力　物體に外力が作用すれば變形を生じて内部の各點に相對的の變位を生ずるを常とする. この内部の變位を**歪み**と名づける. 多くの固體に於ては内部に歪みを生ずるとともに相隣る部分の間に力の作用を生じ外力に抗して原の狀態に還らうとする. この如き性質を**彈性**と云ひ歪みのために内部に生ずる力を**歪力**と名づける.



第1圖

歪みの狀態が物體の各部に於て全く一樣なる場合には之を**一樣の歪み**と稱する. その一種として各點の變位が一の平面に垂直に生じ且つその大さが平面よりの距離に比例する場合には卽ち伸長または短縮である. 伸縮の程度は長さの變化と原の長さとの比を以て表はされる. また變位が一の平面に平行なる一の方向に生じ且つその大さが平面よりの距離に比例する場合にはこの歪みを**辷り**と名づける. その程度は始めこの平面に垂直なりし直線が歪みによつて傾いた角によつて表はされる. 云ふまでもなく全體としての移動は歪みに關係しない. たゞ相對的の變位のみを考へる.



第2圖

物體の内部に半徑 δ の小球

$$x^2+y^2+z^2=\delta^2 \qquad 1$$

を描いて次に物體を歪ませればこの小球も變形する. 各部分の始めの位置を $x\ y\ z$ とし歪みを生じた後の位置を $x'\ y'\ z'$ とすれば一般に後者は前者の函數をなしまた逆に前者を後者の函數とも考へられる. よつて $x\ y\ z$ を $x'\ y'\ z'$ の級數に展開し原點の附近のみを考へることとし

$$
\begin{aligned}
x &= a_1x' + b_1y' + c_1z' + d_1 \\
y &= a_2x' + b_2y' + c_2z' + d_2 \qquad\qquad 2 \\
z &= a_3x' + b_3y' + c_3z' + d_3
\end{aligned}
$$

と置くことができる．こゝに $a_1\ b_1 \ldots\ldots d_3$ は歪みの狀態によつて定まる定數である．これを1に入れて

$$
\begin{aligned}
(a_1x' + b_1y' + c_1z' + d_1)^2 &+ (a_2x' + b_2y' + c_2z' + d_2)^2 \\
&+ (a_3x' + b_3y' + c_3z' + d_3)^2 = \delta^2 \qquad 3
\end{aligned}
$$

を得る．卽ち歪みのために球が變形して橢圓體になる．これを**歪みの橢圓體**と名づけその主軸を歪みの主軸と云ひ二つづゝの主軸のなす三個の平面を歪みの主要面と稱する．主軸の長さを

第3圖

$$2\delta(1+\alpha) \qquad 2\delta(1+\beta) \qquad 2\delta(1+\gamma)$$

と置けばこの橢圓體は恰も舊の小球が主軸に沿ふて單位の長さにつき $\alpha\ \beta\ \gamma$ だけ伸縮したものと考へてもよい．從つて一般に小さい範圍をとれば歪みを互に直角な三つの方向の伸縮から成ると見做してもよい．

物體の內に一の斷面を考へるにその兩側の部分が互に及ぼし合ふ力はニウトンの第三則に從つて大さ等しく方向は相反する．この力が斷面に垂直に作用する場合には之を**垂直歪力**と云ひ斷面に平行に作用する場合には之を**切線歪力**と稱する．一般の場合には相互作用が斷面と或る傾きをなし恰も上記の二種の歪力より成るものと考へることができる．垂直歪力に於て兩側が互に引き合へば**張力**と云ひ逆に押し合へば**壓力**と名づける[1]．何れの場合にも斷面の單位面積に對する力を以て歪力の強さを表はす．

物質は凡て原子と名づける微小な粒子によつて構成せられる．原子の性質と之等が物體を構成する狀況とは後章に述べるけれども要するに固體は多數の原子が相互の作用によつて安定の配列をなせるものに

(1) 彈性力學に於ては多く張力を正とし壓力を負として考へる．之に伴ふ歪みに於ても彈性力學では伸長を正とし短縮を負とする．

外ならない．外力が作用すればこの配列に變化を生じその結果として相隣る原子の間の作用も變化し外力の作用が去るとき再び原の配列に歸らしめる．原子の變位と相互の作用とを個々に考へれば極めて複雜なること云ふまでもない．此處に云ふ歪みは平均の變位に相當し歪力は平均としての相互作用に相當する[1]．

歪みと之に伴ふ歪力との關係は勿論この物體を構成する原子の種類と配列とによつて定められ一般には甚だ複雜である．水晶の如きものの彈性は結晶軸に對する傾きによつて一樣でない．一般に物質の性質が何れの方向にも同一であればこれを**等方質**と云ひ性質が方向によつて異るときは**異方質**と名づける．以下には主として等方質について考へることゝする．

歪みの主要面に於ては兩側の歪みの狀況が全く對稱である．從つて兩側が互に及ぼし合ふ歪力はこの面に垂直でなければならない．一般に歪力は歪みの主要面を隔てゝ作用する張力または壓力より成るとも見做し得る．之を歪力の主要素と云ひ歪みの主要面を歪力の主要面とも稱へる．

この歪力の主要素の三個が總て相等しい場合は歪みの橢圓體が球となり歪みの主軸の方向の伸縮が總て相等しい場合に相當する．從つて何れの方向をも主軸と考へられ如何なる傾きの面に於ても歪力は常に垂直に作用しその強さも傾きに關係しない．このやうな歪力を**流體歪力**と稱する．

40. 彈性率 歪力の大小は歪みの大小に伴ひ之が小さい範圍に於ては歪みと歪力とが互に比例すると見做してもよい．これを**フツクの法則**と名づける．後にも述べる如く歪みが大なる場合には歪みと歪力の關係が複雜になるけれども多くの場合には上の如くに考へ得られる．

棒狀の物體の兩端に力を加へて之を引き伸ばす場合には棒の伸びるに從つて內部に收縮せんとする歪力を生じ之が外力と釣合ふに至つて停止する．このとき棒の橫斷面を考へればその兩側は之に垂直に互に

(1) 第二十九章參照．

引き合ふ．卽ち歪力は棒の軸の方向の張力である．その强さは兩端に作用する外力と等しくなければならない．この張力は棒の伸長に比例する．橫斷面の單位面積に對する張力を T とすれば之と單位の長さに對する伸長 ε との關係は

$$T=E\varepsilon \qquad 4$$

と表はされる．また棒を兩端から壓縮する場合にはこれと同樣に收縮を生ずる．[1] E はこの物質によつて定まり之を**伸長の彈性率**または**ヤングの彈性率**と名づける．

併しながら是等の場合に生ずる歪みはたゞ張力または壓力の方向の伸縮のみに止まらない．如何なる物質に於ても縱の伸長または短縮と同時に橫斷面に沿ふて短縮または伸長を生ずる．單位の幅に對する橫の伸縮 δ と上記の縱の伸縮 ε との比[2]

$$\sigma=-\frac{\delta}{\varepsilon} \qquad 5$$

もまたその物質によつて定まり之を**ポアソンの比**と名づける．

棒の軸の方向に ε 之と直角に δ の伸縮をなすために生ずる體積の變化は單位體積に對して

$$(1+\varepsilon)(1-\sigma\varepsilon)(1-\sigma\varepsilon)-1$$

ε は一般に小なるゆゑ上式は

$$(1-2\sigma)\varepsilon$$

としてもよい．

前節に述べた如くに一般の歪みに伴ふ歪力は歪みの主軸の方向の張力または壓力より成ると見做すことができる．これを $A\ B\ C$ とすれば之に對する歪み $\alpha\ \beta\ \gamma$ は $A\ B\ C$ による伸縮の重なりとして

$$E\alpha=A-\sigma(B+C) \quad E\beta=B-\sigma(C+A) \quad E\gamma=C-\sigma(A+B) \qquad 6$$

で定められる．

(1) 壓力と收縮とについては $T\ \varepsilon$ が負になる．

(2) 普通には伸長を正とし短縮を負として考へる故 $\varepsilon\ \delta$ の一方が正ならば他方は負になり σ は常に正である．

もし一方にのみ伸縮せしめ橫の伸縮を妨げることゝして $\beta\ \gamma$ を 0 と置き $A\ \alpha$ を $T\ \varepsilon$ と表はせば

$$E\varepsilon=T-\sigma(B+C) \quad 0=B-\sigma(C+T) \quad 0=C-\sigma(T+B)$$

よつて

$$T=E\frac{1-\sigma}{1-\sigma-2\sigma^2}\varepsilon \quad B=\frac{\sigma}{1-\sigma}T \quad C=\frac{\sigma}{1-\sigma}T$$

この場合の T と ε との關係は 4 の場合と少しく異なる．卽ち橫の伸縮を許さずに縱にのみ伸縮せしめるには橫よりの伸縮が自由なる場合に比して多くの力を要しこの場合の伸長の彈性率は

$$e=\frac{1-\sigma}{1-\sigma-2\sigma^2}E \qquad 7$$

になる．

$A\ B\ C$ が總て等しく T なる場合には $\alpha\ \beta\ \gamma$ がまた等しく何れも

$$\varepsilon=\frac{1-2\sigma}{E}T \qquad 8$$

單位體積に對する膨脹收縮を考へれば

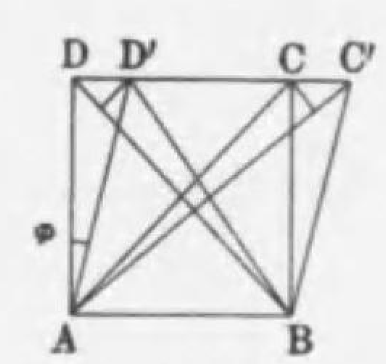
$$3\varepsilon=3\frac{1-2\sigma}{E}T \qquad T=\frac{E}{3(1-2\sigma)}3\varepsilon$$

故に歪力と體積の變化との比

$$k=\frac{E}{3(1-2\sigma)} \qquad 9$$

を**體積の彈性率**と名づける．

41. 辷り 一平面に平行な辷りに於ては各部分がこの平面よりの距離に比例して平行に變位する．側面から見れば始め正方形 ABCD をなしたものが平行四邊形 ABC'D' に變ずる．辷りの角 φ が小さいときには AD と AD' との差は省略して ABC'D' を菱形と見做してもよい．從つてこの歪みは AC と BD とに沿ふて伸縮せしめて後に少しく右に廻轉したものとも考へることができる．廻轉は勿論この物體の內部の變化に關係しない．

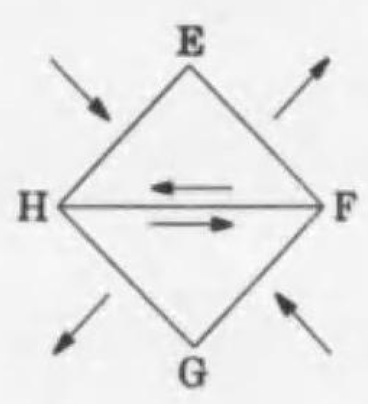


第 4 圖

上記の正方形の一邊の長さを l とすれば CC′ は $l\varphi$ に等しく AC と AC′ との差は $\frac{1}{\sqrt{2}}l\varphi$ に等しい.[1] 然るに AC は $\sqrt{2}l$ なる故に AC の伸縮率は $\frac{\varphi}{2}$ と表はされる. 同様に BD の伸縮率は $-\frac{\varphi}{2}$ に等しい. 卽ちこの二つの軸に於て

$$\alpha=\frac{\varphi}{2} \qquad \beta=-\frac{\varphi}{2} \qquad 10$$

歪力の主要素の二つが大さ相等しく正負相反する場合には之等を一の切線歪力と見ることができる. 物體の中にこの歪力の主要素と直角に面を有する立方形を考へ其の稜の長さを l とし張力壓力の强さを S とすればEF HE の兩面に同大の力 l^2S が圖の如くに作用する. よつて半立方形 EFH に及ぼす作用を考へれば HF の面に垂直な分力は互に相消して之に平行な分力のみが殘る. 水平分力の和は $\sqrt{2}l^2S$ に等しい. この半立方形が靜止にあるためには上の分力と反對の力が HF と平行にその下の部分から作用しなければならない. 半立方形 GHF についてもまた同樣である. 卽ち HF を隔てる兩側の相互作用は HF に平行な切線歪力であつて單位面積に對する歪力は S に等しい.



第 5 圖

こゝには靜止の釣合を考へたけれども運動してをる場合にもこのことは成立つ. この場合には半立方形EFHの全面に作用する歪力の合力が內部の質量と加速度との積に等しくなければならない. 併しこの立方形を小さく考へれば表面に作用する歪力は稜の二乘に比例し內部の質量と加速度の積は稜の三乘に比例して小さくなる. 從つて後者は前者に對して省略せられる. 同樣に重力の影響なども省略せられ一般に歪力のみで釣合ふを要する.

この結果と 6 10 の兩式とによつて[2]

(1) CC′ を AC の上に射影すれば $l\varphi\cos\frac{\pi}{4}$.

(2) $\alpha=\frac{\varphi}{2}$ $\beta=-\frac{\varphi}{2}$ $\gamma=$ $A=S$ $B=-S$ $C=0$

$$\frac{\varphi}{2}=\frac{S}{E}(1+\sigma) \qquad S=\frac{E}{2(1+\sigma)}\varphi$$

卽ち切線歪力と辷りとの關係はこれによつて表はされる. この切線歪力と辷りとの比

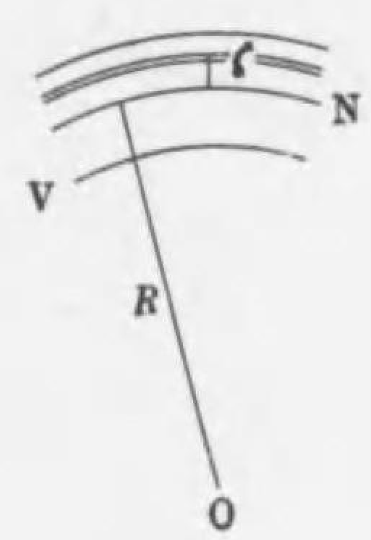
$$n=\frac{E}{2(1+\sigma)} \qquad 11$$

を**剛性率**と名づける.

次に種々の物質の彈性率の表を揭げる.

物質	E	n	k	σ
銅	$10.0-13.0\times10^{11}\frac{\text{瓦}}{\text{糎秒}^2}$	$3.9-4.8\times10^{11}\frac{\text{瓦}}{\text{糎秒}^2}$	$13\times10^{11}\frac{\text{瓦}}{\text{糎秒}^2}$	
アルミニウム	6.3— 7.2	2.3—2.7	7	0.3
金	7.6— 8.1	2.8	13	0.4
銀	7.0— 8.0	2.5 2.9	10	0.4
黃銅	8.0—10.0	2.7—3.7	10	0.3—0.4
錫	4.0— 5.5	1.7	5	0.3
鐵	20. —22.	8.0—8.3	17	0.3
鉛	1.5— 1.7	0.55	4	0.4
白金	16.— 17.5	6.0—7.0	25	0.4
硝子	5.0— 8.0	2.0—3.0	3—8	0.2—0.3

42. **撓み** 棒の兩端に力を加へて之を曲げる場合に棒を細く分割して考へれば彎曲の外側のものは延び內側のものは縮み中間に伸縮のない部分を生ずる. よつてこの部分を**中層**と名づける. 中層 N の曲率半徑を R とすれば中層より外側に向つて ζ の距離にある薄層の曲率半徑は $R+\zeta$ である. 從つてこの薄層と中層との長さの比は



第 6 圖

$$\frac{R+\zeta}{R}$$

卽ち棒の單位の長さに對するこの薄層の伸長は

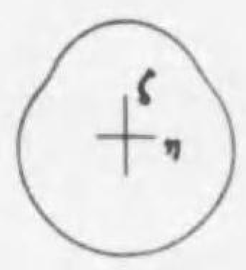
$$\frac{\zeta}{R}$$

よつてこの部分には張力

$$E\frac{\zeta}{R} \qquad 12$$

を生ずる．中層の内側に於ては外側と反對に短縮を伴ふ故に壓力を生ずる．

棒の軸に沿ふて中層に接して x 軸を取り中層と直角に ζ 軸を上方に η 軸を兩者に直角に取れば棒の横斷面の全體に於ける力は12によつて



第7圖

$$\frac{E}{R}\int\zeta d\eta d\zeta$$

棒を兩端から引き伸ばしまたは壓縮することなければこの力が0なるを要する．即ち

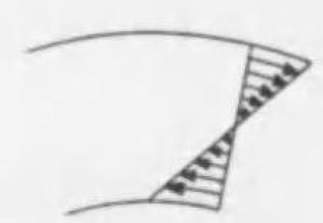
$$\int\zeta d\eta d\zeta=0 \qquad 13$$

故に中層は斷面の重心を過る．

この張力壓力によつて斷面の兩側が互に及ぼし合ふ能率を考へれば右側より左側には η 軸の周りに

$$Q=\frac{E}{R}\int\zeta^2 d\eta d\zeta$$

なる能率を及ぼし左側より右側には之と反對の能率を及ぼす．この


第8圖

$$\int\zeta^2 d\eta d\zeta$$

は恰も斷面と同形の板の上に單位面積について單位質量が分布したとき η 軸に關して有する慣性能率とも考へることができる．之をこの η 軸に關する斷面の慣性能率とも稱する．これを I と表はせば

$$Q=\frac{E}{R}I$$

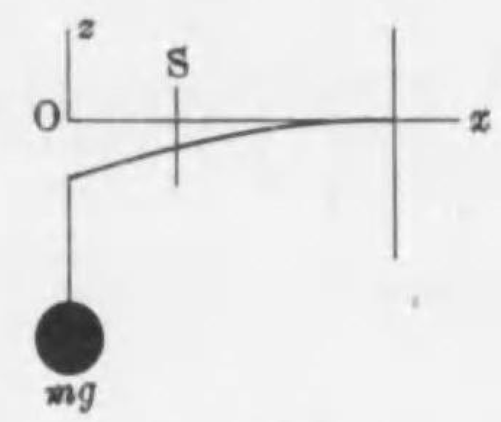
なほまた一般には ζ 軸の周りにも

$$\frac{E}{R}\int\eta\zeta d\eta d\zeta$$

なる能率を生ずるけれども斷面の形が η または ζ の軸に對して對稱な

る如き場合にはこの積分が0となつてこの能率は現はれない．

輕い棒の一端を水平に固定し他端に質量 m の錘を懸けたときその端から x の距離にある斷面Sに對して錘に作用する重力の有する能率は mgx である．從つて之と釣合ふがためにはこの斷面に於て右側から左側に反對の能率が作用しなければならない．即ち



第9圖

$$\frac{E}{R}I=mgx \qquad 14$$

中層の高さを z と表はし且つ水平に對する傾きが小なりとすれば

$$\frac{1}{R}=-\frac{d^2z}{dx^2} \qquad 15$$

よつて

$$EI\frac{d^2z}{dx^2}+mgx=0 \qquad 16$$

故に

$$z=-\frac{mg}{6EI}x^3+cx+C$$

こゝに c と C とは積分定數で棒を固定した右端の狀況によつて定められる．固定端に於ては棒の高さと其の傾きがともに0である．棒の長さを l とすれば x を l と置くとき z と $\frac{dz}{dx}$ とがともに0なるを要する．故に

$$-\frac{mg}{6EI}l^3+cl+C=0 \qquad -\frac{mg}{2EI}l^2+c=0$$

これによつて

$$c=\frac{mg}{2EI}l^2 \qquad C=-\frac{mg}{3EI}l^3$$

從つて

$$z=-\frac{mg}{EI}\left(\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}l^2x+\frac{1}{3}l^3\right) \qquad 17$$

錘を吊せる端の垂下は x を0と置いて

$$-\frac{mg}{3EI}l^3$$

となる.[1]

もし右圖の如くに棒の兩端を水平に支へ錘を中央に吊すときには左右兩半の狀況が上に述べた場合と等しくたゞ上下が逆となるに過ぎない. 全長を l とすれば中央の垂下は

$$-\frac{mgl^3}{48EI}$$

となる. これを測つて彈性率を求めることができる.

第 10 圖

但しこの計算に於ては棒の質量に對する重力の作用を省略してある. 棒の單位の長さに對する質量を μ とし前々圖に於て斷面 S より左の部分に作用する重力 μgx がその部分の中央に作用すると考へれば 14 の右邊に更に

$$\frac{1}{2}\mu gx^2$$

を附加しなければならない.

撓みの大小は斷面の慣性能率 I によつて定まり之が大ならば撓みが少い. 撓みを小にするためには棒の斷面を **I** の如き形にする.

43. 捩り 棒の一端を固定して他端を捩れば横斷面に沿ふ辷りを生じて廻轉する. 棒の長さを l とし一端が他端に對して θ なる角だけ廻轉するとき心軸から r の距離にある圓筒層を考へれば辷りは

第 11 圖

$$\varphi=\frac{r\theta}{l} \qquad 18$$

となる. この圓筒層の厚さを dr とすればその斷面の面積は $2\pi r\,dr$ なる故にこの面に對する辷りの歪力は心軸に關して

$$dQ=\frac{2\pi n\theta}{l}r^3dr \qquad 19$$

(1) この彎曲と同時に横斷面に沿ふて辷りを生ずるけれども之によつて生ずる垂下は彎曲による垂下に比して甚しく小さい.

なる能率を有する. 棒を半徑 a の圓形とし斷面の全體にこの能率を積分すれば

$$Q=\frac{\pi n\theta}{2l}a^4 \qquad 20$$

こゝに

$$\frac{\pi na^4}{2l}$$

を棒の捩りの恒數と名づける. 之を τ とすれば

$$Q=\tau\theta \qquad 21$$

棒の斷面が圓形をなさない場合には上記の能率の積分が複雜になるのみでなく一の斷面にも凹凸を生じ歪みが上の如き單純な辷りでないけれども一般に能率と捩りの角とは互に比例する.

針金を以て物體を吊し之を少しく廻轉して放せば物體は廻轉振動を始める. 廻轉の角を θ とすれば物體は之に比例する能率を受けて初めの位置に歸らうとする. 物體の慣性能率を I とすれば

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\tau\theta \qquad 22$$

故に

$$\theta=C\cos\left(\sqrt{\frac{\tau}{I}}\,t-\varepsilon\right)$$

卽ち單振動の如き廻轉を生ずる.[1] 振動の週期は

$$2\pi\sqrt{\frac{I}{\tau}}$$

この週期を測れば τ が知られ從つて剛性率が求められる.

44. 彈性のエネルギー 長さ l 横斷面積 S なる棒の一端を固定し他端に力を加へて引き伸ばし全長に對して λ だけの伸長を生ぜしめる力は 4 によつて

$$F=ES\frac{\lambda}{l}$$

更に少しく力を增してなほ $d\lambda$ だけ引き伸ばすときになす仕事は

(1) この場合に慣性能率の主軸が針金の軸と一致するやうに物體を吊さなければならない. 然らざるときには斜な軸の周りの複雜な廻轉を生ずる.

$$Fd\lambda = ES\frac{\lambda}{l}\,d\lambda$$

従つて伸長が 0 より λ までに至る間になされる仕事は

$$\frac{ES}{l}\int_0^\lambda \lambda d\lambda = \frac{ES}{2l}\lambda^2 \qquad 23$$

棒を壓縮する場合にもまた同様にこの計算が適用せられる.

この仕事によつて棒が外部から受けるエネルギーは既に前々章にも述べた如く棒の内に貯へられる. 弾性體が歪むとき之を構成する原子の相互の距離が變化し安定の狀態から離れる. 從つて之がために位置のエネルギーが增加しなければならない. 上記のエネルギーはこの增加として原子の間に潛み再び外力が弛み原子の配列が舊に復するとき外に現はれる.

棒の一端を固定し他端を捩つて θ だけ廻轉するに要する力の能率は

$$Q = \tau\theta$$

よつて最初の狀態から θ だけ捩るに要する仕事は

$$\int_0^\theta \tau\theta d\theta = \frac{1}{2}\tau\theta^2 \qquad 24$$

と表はされる.

フツクの法則が成立つ範圍に於ては歪力と之による歪みとが比例するために壓縮または辷りに於ても弾性のエネルギーは體積の變化または辷りの角の二乘に比例する.

45. 異方質の弾性 前の諸節に於ては主として等方性の物質について述べたけれども固體の中には異方性のものが少くない. 一般に結晶は多少の異方性を有し歪みと歪力との關係が複雜である. たとへば水晶に於て結晶主軸の方向と之に直角の方向との伸長の弾性率は

軸に平行 10.10×10^{11} 瓦糎$^{-1}$秒$^{-2}$ 　軸に垂直 7.703×10^{11} 瓦糎$^{-1}$秒$^{-2}$

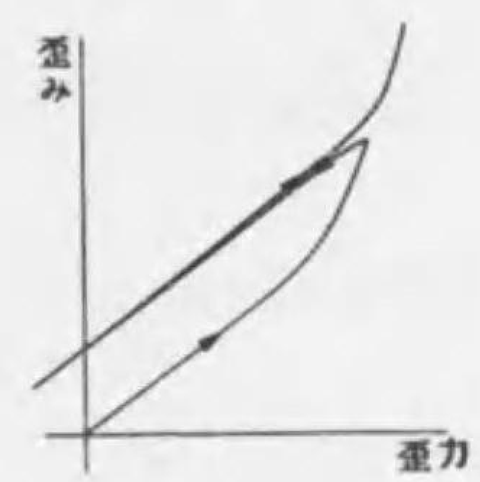
の如くに著しく異なる. 從つて總ての方向から一様に壓力を受ける場合にも壓縮せらる程度は縱には小さく横には大きい.

等方性の物質では弾性率の中の二個が定まれば他の弾性率は之より求めることができる. 例へば伸長の弾性率とポアソンの比とを知れば

體積の弾性率剛性率は 9 11 によつて求められる. 然るに結晶體は多數の獨立の弾性率を有しその數は結晶が對稱性に乏しいほど多い. 所謂る三斜晶系[1]に屬する結晶は21個の弾性率を必要とし等方質に最も近い立方晶系[2]に屬するものもなほ 3 個を要する.

固體は硝子の如き所謂る無定形質を除いては總て結晶に屬し金屬もまた微小な結晶の集合より成るために微細に考へれば必ず異方質である. たゞその微粒の結晶軸が種々の方向に向つて均等に分布せるときには平均としての性質が方向に關係しない. 卽ち之を等方質と考へてもよい. 併しながら微粒の結晶軸が特定の方向に多く偏る場合には平均としての性質がまた異方性を呈する. 例へば針金の如きものは製作の際の操作のために微粒の結晶軸の方向が針金の軸の方向に對して一定の傾きをなす傾向あるために縱と横との性質を少しく異にする.

フツクの法則が適用せられる範圍についてはもとより判然たる限界がない. 歪みを大ならしめれば之と歪力とが比例せず歪みの增加に伴ふ歪力の增加の度は次第に減少する. 從つて外力によつて物體を變形せしめるとき外力の大なるほど歪みの生ずる率は大きい. 歪みが或る程度に達すれば歪力は最大に達し外力を之より大ならしめれば物體は破壞する.



第 12 圖

圖には一例として鐵棒を兩端より引き伸ばし次に力を弛めて逆に少しく壓縮し再びまた引き伸ばすときの歪力と歪みの關係を示す

物體が破壞するに至らない以前にも歪みの一部は外力を去つた後まで殘留する. 卽ち歪みと歪力との關係はその物體が經過した履歴に關係する. 故にこの現象を**弾性履歴**と稱へる.

また歪みが大なる場合には外力に應ずる歪みの一部が徐々に現はれ平衡に達するに多少の時間を要する. 逆に外力が除かれた場合にも直に舊に還らない. この現象を**弾性餘効**と名づける.

---

(1) 砂糖硫酸銅等の如く對稱性の最も少いもの.

(2) 岩鹽螢石の如く對稱性の最も多いもの.

第七章　流　　體

46.　流體　液體と氣體とはこれを壓縮するとき抵抗して歪力を生ずる．卽ち流體は體積の彈性を有する．併し之等はその形を變じても自ら舊に還ることなく微小の外力によつても直に運動を生ずる．たゞ內部に辷りを生ずるとき共の運動のつゞく間は辷りの歪力が現はれるけれども靜止した後にはこの歪力も消滅して垂直歪力のみが殘る．辷りの運動に抵抗する性質は粘稠な液體に於て特に著しい故に之を**粘性**と名づける．氣體と液體とを併せて**流體**と云ひ粘性のない流體を**完全流體**と名づける．液體氣體に於ては後にも述べる如くに原子の間の相互の作用が固體の場合に比べ遙に小なるため相互に一定の配列を保ち得ず各々單獨にまたは數個づつ分子を形成し轉々として動く故に上の如き流動性を有すると考へられる．

一般に液體の彈性は壓縮に對して壓力を生ずるけれども伸長に對しては極めて特殊の場合を除けば張力を生ずることなく直に破斷せられる．從つて液體の中の歪力は常に壓力である．單位體積に對する縮小と壓力との比すなはち體積の彈性率の逆數を壓縮率と名づける．次に二三の液體について體積の彈性率を擧げれば

物質	k
水銀	2.6×10^{11} [illegible]
水	0.20
石油	0.14
アルコール	0.083
エーテル	0.054

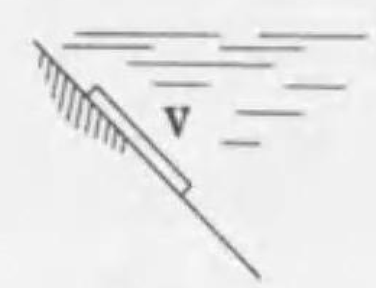
液體を壓縮して體積に相當の變化を生ぜしめるためには極めて大なる力を要する．從つて多くの場合には液體の體積の變化を無視することができる．

氣體に於ては體積が壓力に逆比例し密度が壓力に比例する．これを**ボイルの法則**と名づける．一定量の氣體の壓力を p 體積を V とすれば

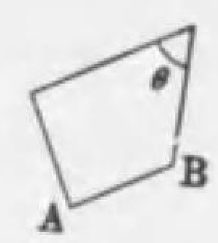
$$pV=C$$

C は氣體の量に比例しまた後章に述べる如くに溫度にも關係する．この法則は氣體の密度が大なるとき精密には成立たないけれども稀薄なる狀態に於てはよく實際に適合する．

靜止した流體が器壁に及ぼす壓力は常に壁面に垂直である．若しこの力が壁面に垂直ならずとすればその反作用として器壁に接する流體が器壁から受ける力もまた壁面に沿ふ分力を有する．壁面に接する流體の薄層Vを考へれば之が內側から受ける力はその面に垂直なるにも拘らず壁面から受ける力は斜に作用する故に互に釣合ふを得ない．從つてVは靜止にあるを得ない．この場合に薄層の厚さを極めて小さく考へればその端面に作用する壓力も內部に作用する重力もともに壁面とその對面とより作用する壓力に比して省略せられる．同樣に流體の中に浸る物體について考へてもその表面に於ける壓力は常にこれに垂直でなければならない．



第1圖



第2圖

靜止した流體の中に微小な流體柱 AB を考へ一の底面Aは柱軸に垂直とし他の底面Bは柱軸と θ なる角をなすとする．之等の底面の面積を S_1 S_2 とし之等に作用する壓力の強さを p_1 p_2 とする[1]にBに作用する力 p_2S_2 の柱軸の方向に於ける分力はAに作用する力 p_1S_1 と釣合はなければならない．卽ち

$$p_1S_1-p_2S_2\sin\theta=0 \qquad 1$$

且つ $S_2\sin\theta$ は S_1 に等しい故

$$p_1=p_2 \qquad 2$$

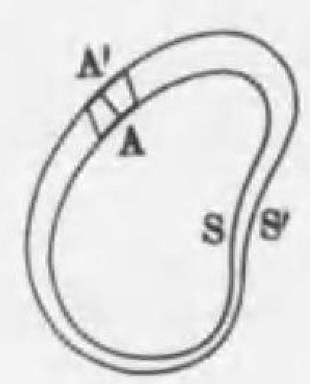
---

(1)　流體力學に於ては壓力を正と考へるを常とする．

でなければならない．この結果はBの傾きθに全く關係しない．卽ち壓力の强さは面の傾きに關係しない．重力が作用する場合にも流體柱を極めて小さく考へれば體積に比例する重力は表面積に比例する壓力に比して極めて小さく從つて之を無視してもよい．

完全流體では流動する場合にもこの關係が成立つ．その場合には1の左邊がこの小柱の質量と柱軸の方向の加速度との積に比例しなければならない．然るにこの質量は流體柱の體積に比例する故これもまた表面積に比例する壓力に比して無視せられる．

流體が壓力pに於て少しく膨脹收縮しその表面がSよりS'となり面積dSなる其の一部AがA'に移る場合その面に直角にpdSなる力を受けて變位する間に内部の流體のなす仕事はこのpdSとAA'の間の垂直距離δとの積に等しく從つてAがA'に移る間に描く體積と壓力pとの積に等しい．從つて全面に總計して考へればその膨脹收縮に於てなす仕事は壓力pと體積Vの增加との積



第3圖

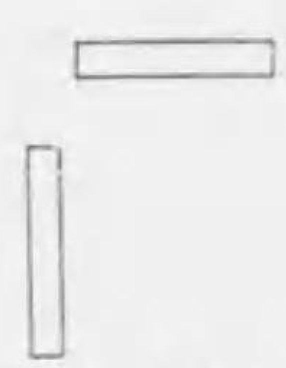
$$pdV$$

に等しい．從つて膨脹收縮が大なる場合には

$$\int pdV \qquad 3$$

なる仕事が外に對してなされる．

47. 流體の平衡と重力 靜止せる流體の中に細い水平柱を考へれば其の兩端に作用する壓力は等しくなければならない．卽ち同じ深さの諸點では壓力が等しい．また鉛直に細い流體柱を考へればその上下の端面に作用する力の差はこの流體柱に作用する重力と釣合はなければならない．端面を單位面積にとつて考へれば兩端の壓力の差はその流體柱の重さに等しい．



第4圖

大氣もその重さのために壓力を生じ之が大氣に接する總ての物體の表面に作用する．その壓力は位置の高低と氣象の狀況とに關係すること勿論であるけれども海面に於ける壓力は平均として略々1.013×10^6ダイン糎$^{-2}$であつて高さ76糎の水銀柱の壓力に等しい．この壓力を1氣壓と稱して普通に壓力の單位として用ひる．[1]

流體の中に浸る物體はその表面の各部に作用する壓力のために上に向ふ力を受ける．之を**浮力**と名づける．その大さは物體と同體積の流體の重量に等しい．換言すれば流體の中に在る物體の重さは之と同じ體積の流體の重さだけ減少する．これを**アルキメデスの原理**と名づける．

靜止した液體の表面は何れの部分も之に作用する外力の方向に垂直になる．若し表面の或る部分が外力に垂直でない場合には表面に近い部分は切線分力によつて運動を生じなければならない．故に鉛直に作用する重力の下に靜止する液體の表面は水平になる．

48. 定常流 流體が運動するときその中に速度の方向を辿つて曲線を描き之を流線と名づける．流れの速度の分布が時刻とともに變化すれば一般に流線もまた變化し且つ一の瞬間に於ける流線は流體の一部が實際に動く徑路と一致しないけれども速度の分布が時刻に關係しない場合には流線に變化なく且つ運動の徑路をも示すことになる．この場合の流れを**定常流**と稱する．また流線の一群によつて圍まれた管狀の部分を流管と稱する．定常流に於ては流管を恰も固定した壁の如くに考へてもよい．

定常流をなす完全流體の中に流線sに平行して微小な壔形ABを考へその底面の面積をS高さをδとし流體の密度をρとすればこの壔形の内に含まれる質量は$\rho S\delta$である．この左右の底面ABに於ける壓力をp_1 p_2とすればその差によつて壔形はs

第5圖

(1) 氣壓は$76\rho g$と表はされる．ρは溫度0度に於ける水銀の密度13.5955瓦糎$^{-3}$ gは標準とする重力の加速度980.665糎秒$^{-2}$．

の方向に $S(p_1-p_2)$ なる力を受ける. p_1-p_2 を $-\frac{\partial p}{\partial s}\delta$ とすればこの力は

$$-S\delta\frac{\partial p}{\partial s}$$

で表はされる. また s の方向が水平となす仰角を θ とすれば壔形の内部に作用する重力の s 方向の分力は

$$-\rho S\delta g\sin\theta$$

s の方向に作用する之等の力はこの方向の加速度を生ずる. s は運動の方向なる故この加速度は切線加速度になる. 速度の大さを v として

$$\rho S\delta\frac{dv}{dt}=-S\delta\frac{\partial p}{\partial s}-\rho S\delta g\sin\theta$$

卽ち

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}-g\sin\theta$$

兩邊に vdt 卽ち壔形が流線に沿ふて動く變位 ds をかけて

$$vdv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}ds-g\sin\theta ds$$

こゝに $\frac{\partial p}{\partial s}ds$ は位置の變化 ds による壓力の增減を示しまた $\sin\theta ds$ は ds による高さの變化を表はす. 之等を dp dz とすれば

$$\frac{1}{2}d(v^2)+\frac{1}{\rho}dp+gdz=0 \qquad 4$$

液體に於ては密度 ρ が殆ど壓力 p に關係しない. これを不變と見れば上の式を積分して

$$\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}+gz=C \qquad 5$$

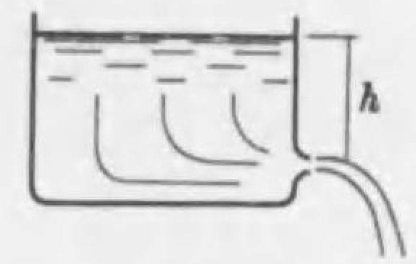
C は積分定數で高さ z を測る水準と液體の周圍の狀況とに關係するけれども一の流線の上では一定の値を有する. この關係を**ベルヌーイの定理**と名づける.

上の式は同じ流管の上にある諸點の壓力の關係を示すものでもしこの二點が同じ水平にあるときまたは高さの差によつて生ずる壓力の差を無視し得るときには

$$\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}=C$$

壓力は流れの急な處に於て小さく緩かな處に於て大きい. 卽ち壓力は流管の細い處で小さく太い處で大きい.

液體が器壁の小孔から流出する場合には流線が略々圖の如くに生じ液の表面と流出した後との壓力はともに氣壓に等しい. 流出の速度を v とし液面に於ける速度を省略し孔の深さを h として液面と小孔とに對する 5 の左邊を相等しと置けば



第 6 圖

$$\frac{1}{2}v^2-gh=0 \qquad 6$$

液體は h だけの高さを自由に落下せるに等しい速度で流出する. これを**トリチエリーの定理**と名づける.

氣體の場合にも壓力の變化が小さく從つて密度の變化を省略し得るときには 5 が適用し得られる. 小孔を有する函の內の氣壓が少しく外よりも高く氣體がその孔から徐々に流出するときその速度を v とし函の內外の壓力の差を p とし函の內部に於ける速度と重力の影響とを無視すれば

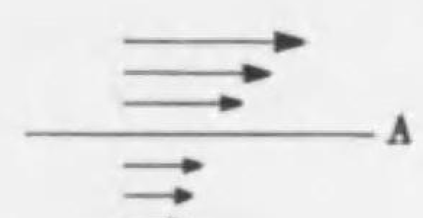
第 7 圖

$$\frac{1}{2}v^2=\frac{p}{\rho} \qquad 7$$

流出の速度は壓力の差の平方根に比例する.

49. 粘性 粘性ある流體の內に辷りの運動があるときはその面に沿ふて運動に抵抗する力を生じ速度の大なる側はその小なる側を前に引き逆に速度の小なる側はその大なる側を後に引く. この作用を流體の**內部摩擦**とも名づける.

流體が一の斷面 A に平行に流れ速度 v がこの A よりの距離 q に關係するとき A の兩側が互に作用する力 f は A に平行し且つ q の方向に於ける速度の勾配 $\frac{\partial v}{\partial q}$ に比例する. A の單位面積に對するこの力は

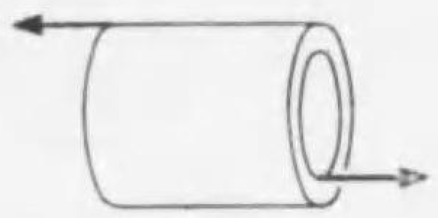


第 8 圖

$$f=\eta\frac{\partial v}{\partial q} \qquad 8$$

で表はされる．η は流體の性質によつて定まり**粘性係數**と名づけられる．

液體が定常狀態を以て圓管の中を流れる場合に液體を管と同軸の圓筒層に分けて考へれば各層は內側に隣接する液體のために流れの方向に引かれ外側に隣接する液體のために逆の方向に引かれる．半徑 r なる圓筒面に於ける速度を v とし管の長さを l とすればこの面を隔てゝ內外が互に作用する力は



第 9 圖

$$2\pi r l\eta\frac{dv}{dr}$$

從つて厚さ dr なる圓筒層の內外から作用する力の差は

$$2\pi l\eta\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)dr$$

管の兩端に於ける壓力の差を p とすればこの圓筒層の兩端に作用する力は $2\pi rpdr$ である．この層の運動には加速度がなく從つて之に作用する力は全體として相殺しなければならない．卽ち

$$2\pi l\eta\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)dr+2\pi rpdr=0$$

故に

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)=-\frac{p}{l\eta}r$$

之を積分すれば

$$r\frac{dv}{dr}=-\frac{p}{2l\eta}r^2+C$$

この r を 0 と置けば C は 0 なることが知られる．故に

$$\frac{dv}{dr}=-\frac{p}{2l\eta}r$$

更に積分すれば

$$v=-\frac{p}{4l\eta}r^2+D$$

管壁に接する液體は動かない．管の半徑を a とすれば r を a と置くとき v が 0 となるべく從つて

$$D=\frac{p}{4l\eta}a^2$$

故に

$$v=\frac{p}{4l\eta}(a^2-r^2) \qquad 9$$

この式によつて各點の速度が知られる．

單位時間に流れる液體の體積は

$$\int_0^a 2\pi rvdr$$

卽ち

$$\frac{\pi p}{8l\eta}a^4 \qquad 10$$

故に單位時間に流れる液量を測ればこの式によつて η を知ることができる．

次に種々の流體の粘性係數を揭げる．

物質	η	物質	η	
エーテル	0.0026 $\frac{\text{瓦}}{\text{糎秒}}$	水素	0.000097 $\frac{\text{瓦}}{\text{糎秒}}$	溫度 18 度
水	0.0106	水蒸氣	0.000097	
アルコール	0.0130	窒素	0.000180	
水銀	0.0159	酸素	0.000206	

50.　流體の抵抗　上の場合に管壁は液體によつて絕えず前方に引かれる．一般に流體が固體の傍を流れるときには固體が流體によつて引かれる．流れが緩かな場合には固體が受ける力が流れの速度に比例する．例へば半徑 a なる球を速度 v なる流れの中に置くとき之に作用する力はストークスの計算によれば[1]

$$6\pi a\eta v \qquad 11$$

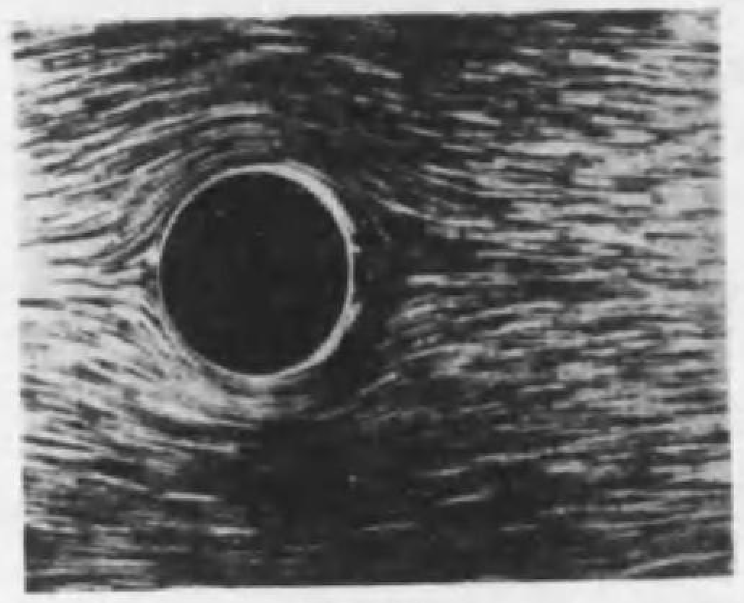
また逆に靜止せる流體の中を v なる速度を以て球を動かすときには流體が上記の力を以て球の運動に抵抗する．

併しながら流れの速度または物體の速度が甚しく大なる場合には流體の中に極めて複雜な運動を生ずる．管を流れる流體に關する 9 も兩

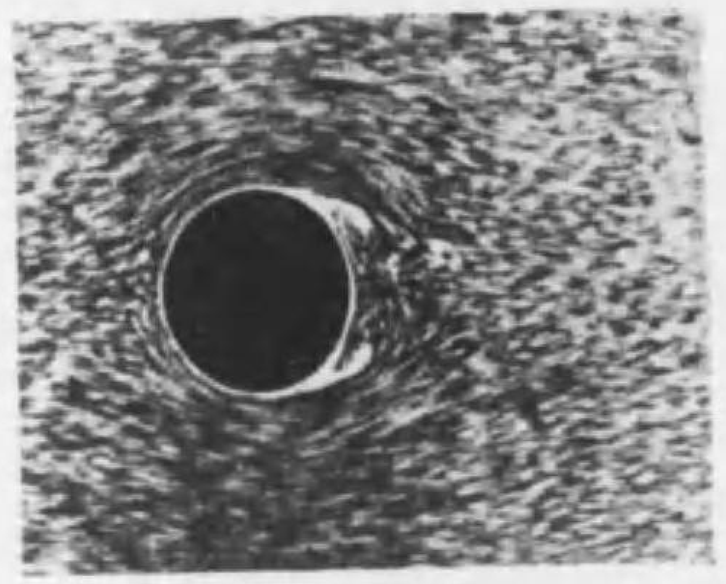
(1) 球の近くの流れはこの球のために妨げられて一樣でないこと云ふまでもないけれども球を遠く離れた處の速度は v である．

端の壓力の差が小なるときにのみ適用せられる．流速が或る限界を越えれば管内の流れが甚しく亂れて無數の渦流を生ずる．この場合には流量が管の兩端の壓力の差に比例せず10によつて計算せらるゝよりも少い．

また流れの中に球が靜止する場合にも流速が大なるときには球の背側に渦流を生ずる．流速が小さい場合には球の附近の流れが右圖aの如くに生ずる．完全流體に於ては球の前後兩側の壓力が相等しいため球に抵抗を及ぼさない．流體に粘性があるときにも11の抵抗が作用するに過ぎない．然るにbcの如く球の背側に渦流を生ずるに至れば背側の壓力は甚しく減少するために球の受ける力は急に増加する．靜止せる流體の中を球が運動する場合にもまた同じい．この如き場合に物體の流體に接する面を平滑ならしめ且つ後側を漸次に細くして魚形とすれば後方に生ずる渦流を少くし從つて流體の抵抗を減少せしめることができる．



第10圖 a



第10圖 b

第10圖 c

第八章　表面張力

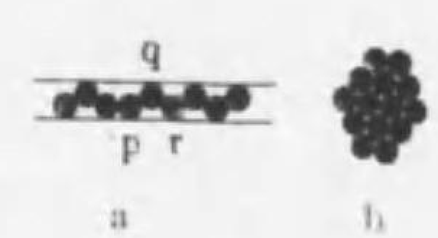
51.　表面張力　液體が自由の表面を有する場合にはその液面が狀況の許す限り縮小せんとする傾向を有する．從つて液面は宛も彈性ある膜によつて包まれたる如くに作用し小滴はその體積に對し面積の最小なる球形をとる．この如き作用を**表面張力**と名づける．

一般に分子の間には距離の大なるとき引力が作用し距離の小なるとき斥力が作用する．從つて液體の内部に於て遠い分子は互に引力を及ぼし隣接する分子は互に斥力を及ぼす．極めて薄い部分Lを取つて考へるに兩側の部分ＡＢが互に相引くために薄層Lは壓縮せられる．從つてLの内部に於ては相隣るものが互に斥力を及ぼし合つて外よりの壓縮に對抗する．然るに今ＡＢの兩部またはその一方を除き去ればLを兩側より壓縮する力が消滅するためにその内部の分子の間隔は表面の方向に擴がり相隣る分子の間の斥力は著しく減少する．之がためにこの薄層Lに沿ふては引力が斥力に勝ることゝなり從つて表面が收縮せんとする作用を生ずる．(1)

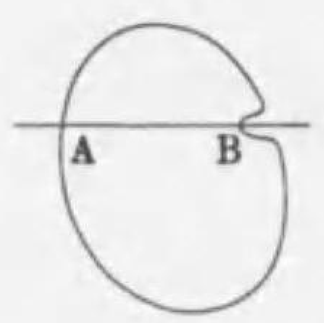
第1圖

液體の一塊を平面 AB によつて切斷し二つに分つ場合を考へるに兩半を引き離すためには斷面の兩側の分子が相互に及ぼし合ふ引力に對

(1) 球形の磁石のやうに互に相引くものを圖aの如くに並べて兩面より硝子板を以て抑へると考へる．この球の配列は安定でない．この狀態を保たしめるには硝子板を兩側から壓さなければならない．若し硝子板を除けば圖bの如くに縮んで團塊になる．aの狀態では例へばｐｒの間がｑに妨げられて近づき得ない．併し硝子板Ａが除かれゝばｑは上に浮んでｐｒが自由に近づく．始めの狀態では相隣るものゝ間の彈力が收縮を妨げ硝子板の去るとともにこの彈力が消えて引力が勝つことになる

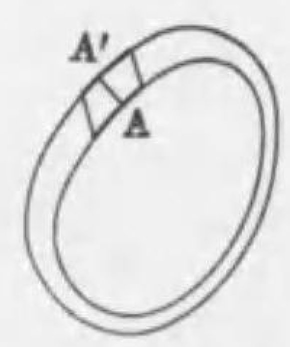


して仕事をなさなければならない. この仕事は斷面の面積に比例する. 斯くして液體を切斷する代りにBに於ける凹處を壓して更に深くし遂にAに達せしめて切斷するも同量の仕事を要する. 液體は表面張力を以てこの凹部の深く進むに抵抗する.



第2圖

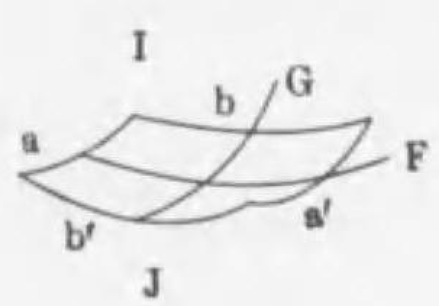
表面張力の强さ卽ち液面に於ける單位の幅に作用する張力を H とすれば液面の周邊の長さ ds なる微片Aに作用する張力は Hds で表はされAに直角に作用する. この部分がA′まで變位するに際してなされる仕事は張力とその方向の分變位 δ との積 $Hds\delta$ に等しい. 然るに δds はこの變位によつて增加する面積に相當する. 液の面積を S とすれば仕事は HdS 從つて液面を擴げるための仕事卽ち液面のエネルギーは表面張力の强さと面積の增加との積に等しい. 故に表面張力の强さは單位面積のエネルギーに等しい. 表面張力は液面に極めて近い分子の作用に基づく. 故に液層が極めて薄い場合を除くの外は液層の厚さに關係しない.



第3圖

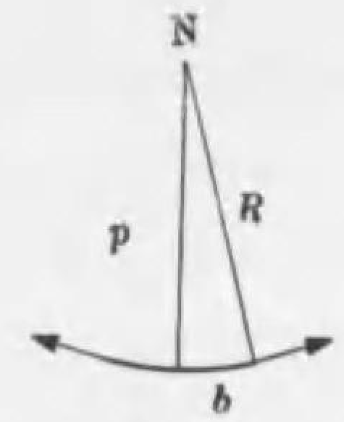
表面の增加がエネルギーの增加を伴ふことは液體の場合に限らず固體に於てもまた同樣である. 固體に於ては原子の移動が自由ならざるために表面張力による諸種の現象が著しく現はれないけれども表面の小なるほど安定の度が高い.

52. 液面の曲率と兩側の壓力 液面の一點を過り二つの主曲率線FGに平行に邊の長さ $2a$ $2b$ なる小矩形 $aba'b'$ を考へるにこの薄層は周邊に於て隣接する部分より表面張力を受け兩面よりは壓力を受ける. a 邊に作用する張力は $2aH$ に等しく a' 邊にも同大の張力が作用する. F線に對する主曲率を $\frac{1}{R_1}$ とすれば之等の張力が中心の液面



第4圖

となす傾きは各々 $\frac{b}{R_1}$ なる故に中心に於ける法線Nの方向の分力は合せて $4aH\frac{b}{R_1}$ に等しい. 同樣にG線に對する主曲率を $\frac{1}{R_2}$ とすれば b 邊とその對邊に作用する張力のNの方向に於ける分力は合せて $4bH\frac{a}{R_2}$ である. 從つて之等を加へ合せば[1]



第5圖

$$4ab\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)H$$

この液面の兩側IとJの壓力の差を p とすればこの液面は $4abp$ なる力をNと反對の方向に受ける. この力と表面張力とが釣合ふためには

$$4abH\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=4abp$$

卽ち

$$p=H\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \qquad 1$$

なる關係がなければならない. 但し曲率半徑 R_1 R_2 はI側に向ふときに正とし反對のJ側に向ふときに負とする. 液體が薄膜として存在する場合には膜が表裏兩面より成る故に

$$p=2H\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \qquad 2$$

石鹼球の場合にその半徑を R とすれば

$$p=\frac{4H}{R} \qquad 3$$

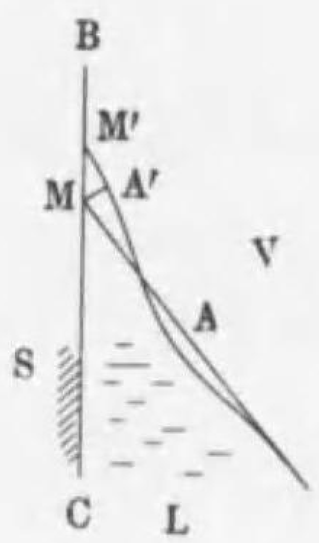
53. 接觸角 液面が器壁に會する點に於て液面と壁面とがなす角を**接觸角**と名づける. 但しこのとき兩面が交はる角の中その液體を包む側の角をとることゝする.

液體の分子が相互に作用する如く液體の分子と器壁をなす分子との間にもまた一般に引力斥力が作用する. 例へば水が硝子に附着するは硝子と水との分子が相引くために外ならない. 一般に同種の分子の

(1) $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ はこの曲面の曲率と名づける. FGを主曲率線とすることは必ずしも必要ではない. たゞ互に垂直な二つの方向にとればよい. その場合 $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ の値は不變である.

間の引力を**凝集力**と云ひ異種の分子の間の引力を**附着力**と稱する. 液體の内部の凝集力よりも壁面に對する附着力が勝れば液體は壁面を潤し逆ならば液體は壁面より分離する.

今液體Lが固體Sの面 BC と θ なる傾きの面Aをなして接觸し MA MB MC に於て液體固體と眞空[1] V とが互に相接するとする. 假に境界Aを少しく變形して A′ の如くならしめると考へれば界面は增加する. MM′ を dl とすれば單位の幅に對するA面の增加は $dl\cos\theta$ なる故にエネルギーは $Hdl\cos\theta$ だけ增加する. 之とともに固體と液體の界面は dl だけ增し固體と眞空との界面は dl だけ減少する. SとL及びSとVとの界面の單位面積のエネルギーを H' H'' とすれば兩界面の增減によつて $H'dl-H''dl$ なるエネルギーの變化を生ずる. 平衡狀態に於ては界面の微少なる變化に對してエネルギーの變化が0なるを要する.[2] 卽ち



第6圖

$$H\cos\theta\, dl + H'dl - H''dl = 0$$

故に

$$H\cos\theta + H' = H'' \qquad 4$$

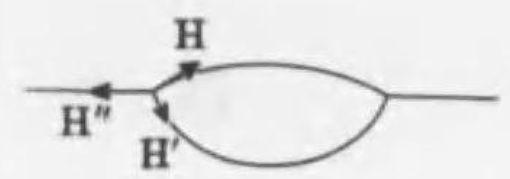
この結果は MB MC に沿ふて H' H'' なる張力が作用し之等と MA に沿ふて作用する張力 H の BC に平行なる分力とが釣合ふ如くにも考へられる.

液體と固體との間の附着力が全くない場合にはその接觸面は兩者にとつて宛も自由表面の如く從つてこの界面のエネルギー H' は兩者の自由表面のエネルギーの和 $H+H''$ に等しい. 從つてこのとき接觸角は π になる. 然るに固體と液體との間に附着力があれば兩者の接觸によつてエネルギーの減少を來たす故に H' は減少し接觸角も減少する. 油

(1) 空氣とするも大差はない.

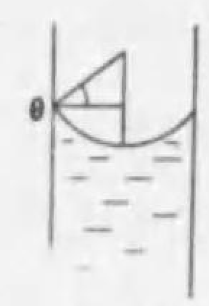
(2) A′ を考へるとき液體の壁面に接する近くをのみ變化せしめる. この變化の範圍を小さく限れば重力等の作用が省略せられる.

の一滴を水面に落せば空氣油水の二つづゝの間の表面張力 H H' H'' は三者の接觸線に沿ふて右圖の如く作用する. この滴が平衡にあるためには H'' が $H+H'$ より小さくなければならない. この條件が充たされない場合には油が滴をなさず膜となつて水の上に擴がる.



第7圖

毛細管を液面に立てれば液の性質によつて液が或は管内に上昇し或は逆に下降する. これを**毛細管現象**と名づける. 液が上昇する場合には毛細管の中の液面の直下に於ける液の壓力は管外の液面に於ける壓力よりも小さい. この液面の高さを h とすれば[1] 壓力の差は ρgh に等しく面はこれに應ずる曲率の球面をなさなければならない. 球面の半徑を R とすれば



第8圖

$$\rho gh = \frac{2H}{R} \qquad 5$$

管の半徑を r とすれば R は $\frac{r}{\cos\theta}$ に等しい. 卽ち

$$h = \frac{2H\cos\theta}{rg\rho}$$

次に數種の液體の表面張力の値を揭げる

物質	H	
水銀	470 $\frac{\text{ダイン}}{\text{糎}}$	溫度 18 度
水	77	
アルコール	20	
エーテル	17	

(1) 圖に示す如くに液面は中央が低く周邊に於て高いけれどもその差を省略し全體としての高さを h とする.

第九章　温度と熱

54.　温度　物體を熱すればこれに伴つて種々の變化を生ずる．殆ど總ての物體は熱せられるとき膨脹し冷却するとき收縮する．この性質は僅少の例外を除けば總ての固體液體氣體に共通しこれによつて冷熱の程度をも示すことができる．普通に用ひられる水銀寒暖計に於ては水銀の膨脹の度によつて温度を測る．

多くの固體は熱せられるとき融解して液體となり液體はまた沸騰して氣體になる．融解沸騰等の現象はそのときの氣壓に關係するけれども氣壓を一定ならしめれば各物質につき一定の温度に於て生ずる故に通常は純粋の水を標準に取り之が 1氣壓 の下に氷から融解する温度を 0 度とし同じく 1氣壓 の下に沸騰する温度を 100 度とし共の間の水銀の膨脹を 100 等分して 1 度を定める．[1]

水銀を撰ぶことはたゞ便宜にもとづくのみで場合によつてはアルコール等の液體を用ひる．然るに種々の物質の冷熱による膨脹收縮の度が精密には比例しない．例へば水の如きは約 4 度以下に於て膨脹收縮が通常と反對となり熱するとき收縮し冷却するとき膨脹する．從つて上の如くにして寒暖計を作ればその指度は液體の性質に關係し 0 度と 100 度との外では精密には一致しない．現今は後章に述べる理由によつて氣體の膨脹收縮による寒暖計を標準に採り他の寒暖計は之に比較して用ひる．

温度 1 度の變化について生ずる長さの變化の 0 度に於ける長さに對する率を**線膨脹係數**と云ひ體積の變化の 0 度に於ける體積に對する率を**體膨脹係數**と名づける．今 0 度と t 度に於ける物體の長さを $l_0\,l$ その體積を $V_0\,V$ とすれば線膨脹係數と體膨脹係數は

(1) これ所謂攝氏の寒暖計である．この書では華氏列氏等のものは用ひない．後に云ふ絶對温度の外は凡てこの攝氏の温度によることゝする．攝氏 18 度を 18°C と表はすこともある．

$$\frac{1}{l_0}\frac{dl}{dt} \qquad\qquad \frac{1}{V_0}\frac{dV}{dt}$$

である．$l\ V$ は

$$l = l_0(1+\alpha t+\alpha' t^2+\ldots\ldots) \qquad 1$$

$$V = v_0(1+\beta t+\beta' t^2+\ldots\ldots)$$

と表はされる．併し t の二乘以上の項は多くの場合に極めて小さく通常これを無視してもよい．α と β とは線膨脹係數と體膨脹係數とを表はす．等方質に於ては α が方向に關係しない．從つて多くの場合

$$\beta = 3\alpha \qquad 2$$

と考へてもよい．[1]

今 0 度と t 度に於ける密度を $\rho_0\ \rho$ とすれば

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{V}{V_0}$$

從つて

$$\rho = \rho_0\frac{1}{1+\beta t} \qquad 3$$

故に之等の温度に於ける密度の比を測れば β が求められる．

0 度と t 度に於て一の容器を充たす液體の質量を $m_0\,m$ その器の内容積を $V_0\,V$ とし液體の體膨脹係數を β 容器をなす固體の體膨脹係數を b とあらはせば 3 によつて

$$\frac{m}{V} = \frac{m_0}{V_0}\frac{1}{1+\beta t}$$

然るに

$$V = V_0(1+bt)$$

なるによつて

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1+bt}{1+\beta t}$$

(1)

$$(1+\alpha)^3 = 1+3\alpha+3\alpha^2+\alpha^3$$

α が小ならば之を

$$1+3\alpha$$

と見做してもよい．

右邊を簡單にして

$$\frac{m}{m_0}=1-(\beta-b)t \qquad 4$$

と表はすことができる.

第1圖

容器を充たす液體の質量は0度と t 度に於て

$$m_0-m=m_0(\beta-b)t \qquad 5$$

だけ增減する. 例へば m_0 m を0度と t 度に於て寒暖計の球部を充たす水銀の量とすれば m_0-m は毛細管に昇降する量を表はす. その體積は

$$\frac{m_0-m}{\rho}=\frac{m_0}{\rho}(\beta-b)t$$

$\frac{m_0}{\rho}$ は略々球部の容積 V と見做してもよい. よつて上の體積は

$$V(\beta-b)t$$

とも表はされる.

次に數種の物質の膨脹係數を掲げる.

物質	α	物質	β	
アルミニウム	2.42×10^{-5}	アルコール	1.10×10^{-3}	
銀	1.94	石油	0.92	
銅	1.71	水銀	0.181	溫度18度
白金	0.90	水	0.18	
鐵	1.2			
黄銅	1.9			
硝子	0.80			

55. 氣體の膨脹 氣體は壓力による體積の變化が著しい. 故にその膨脹係數を測るときには壓力を精密に一定にしなければならない. 實驗の結果によれば一定の壓力の下に於て氣體は溫度の變化に比例して膨脹收縮しその體膨脹係數は何れの氣體に於ても殆ど同じく 0.003660 即ち $\frac{1}{273.2}$ である. これを**シヤールの法則**と名づける. 0度と t 度に於ける體積を V_0 V とすれば

$$V=V_0\left(1+\frac{1}{273.2}t\right) \qquad 6$$

この場合に0度と t 度に於ける壓力 p_0 と p とは相等しい. 從つて

$$pV=p_0V_0\left(1+\frac{1}{273.2}t\right) \qquad 7$$

然るにボイルの法則によれば體積と壓力との積は各々の溫度について一定である. 故に7は p_0 と p とが相等しいときのみに限らず一般に一の氣體の0度に於ける壓力と體積 p_0 V_0 及び t 度に於ける壓力と體積 p V の間に成立つ. もし體積を一定として溫度を變じたときには V_0 が V に等しい. 卽ち

$$p=p_0\left(1+\frac{1}{273.2}t\right) \qquad 8$$

右圖に示す如くに硝子等の容器に氣體を入れて之を水銀を入れたる管に連ね水銀面を常に管上の標點にあらしめて容器の溫度を變へ之に相當した壓力を測れば氣體の膨脹係數が求められる. 壓力の測定は體積の測定に比べて簡單なるために氣體の膨脹係數を測るには多くこの方法を用ひる.

或はまた8を正しいとすれば之によつて溫度を測定することができる. この目的に用ひるときにはこの裝置を**氣體寒暖計**と稱する. これがためには氣體として水素空素ヘリウムの如くに沸騰點の低い氣體を撰ぶ.

第2圖

上の7に於て

$$273.2+t=T \qquad \frac{p_0V_0}{273.2}=R \qquad 9$$

と置けば

$$pV=RT \qquad 10$$

氣體の 1瓦分子 を取れば氣體の種類の如何に拘らず0度1氣壓に於て 2.241×10^4 竓の體積を有する. 1氣壓 は 1.013×10^6 ダイン糎$^{-2}$ なる故に9によつて R は 8.313×10^7 エルグ度$^{-1}$ になる. これを**氣體恒數**と稱する.

併し更に精密に考へればボイル—シヤールの法則も完全には成立たない．從つて壓力と體積との溫度に對する關係は10と少しく異るけれどもその差異は多くの場合に甚だ小さい．また如何なる氣體も之を稀薄ならしめれば10が益々精密に成立つ．從つて理想の場合としてこの式が完全に成立つ氣體を考へこれを**完全氣體**と名づけ10をその**特性方程式**と稱する．

この式の中のTは恰も攝氏の零下273.2度[1]を基點として測る溫度に相當し之が0なる場合には體積または壓力が消滅する．後にも述べる如くこの溫度は理論上に考へ得べき最低の溫度に相當し之を零度と取ることを至當とする．故にTを**絕對溫度**と名づける．

56. 熱とエネルギー 熱の量をあらはす單位としては水の1瓦の溫度を14.5度より15.5度に高めるに要する熱量を取り之を1カロリーと稱へる[2]．物體を熱しまたは冷すとき溫度の變化の範圍が特に大ならざる限り溫度の變化は物體に出入する熱量に比例する．溫度の變化の1度に對して出入する熱量をその物體の**熱容量**と名づける．

熱量の測定には多く次の如き方法を用ひる．チユワー瓶の如く熱を散逸せしめぬ器に水を入れ豫め熱せられた物體をこの中に落して水を攪拌しその溫度の上昇を測れば物體の放出した熱量を知ることができる．この裝置を**水熱量計**と稱する．この場合に水の外に容器と之に附屬した寒暖計攪拌器等もまた多少の熱を吸收する故に恰も水の量が實際よりも多いと同樣になる．之等の諸部分に相當する水の量をこの裝置の水當量と稱する．

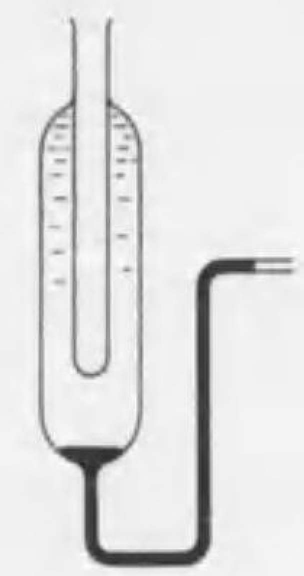
ブンゼンの**氷熱量計**では氷が融解するとき體積の減少する性質によつて熱量を測る．その構造は圖の如く二重の硝子管の中間の部分に水を充たし毛細管に連ねる．その內腔に寒劑を入れて周圍の水を氷らせ

[1] 71節參照．

[2] 水を0度より100度まで熱する熱量を100カロリーと定めることもある．これを平均カロリーと稱する．本文の15度カロリーと平均カロリーとの關係は

1平均カロリー＝0.9997 15度カロリー

と測定せられる．



第3圖

次に寒劑を除いて豫め熱せられた物體を入れ周圍の氷を融解せしめる．その融解せる氷の量は毛細管の水銀の移動を見て知り得べく從つて物體の放出した熱量が知られる[1]．

ジヨリーの**蒸氣熱量計**では天秤の一方の皿に物體を載せて之を二重壁で圍み水蒸氣を通ずる．水蒸氣の一部は物體と皿との上に凝結してその重さを增す故にその量によつて物體の得た熱量が知られる．

種々の實驗によるに熱の發生消滅に際しては必ず他方に運動のエネルギー位置のエネルギー等の增減を伴ふ．たとへば二つの物體が衝突して熱を發する場合には物體の運動のエネルギーが失はれて熱を生ずる．且つその際に生ずる熱の量とエネルギーの量とは互に比例し常に一定の率を以て相伴ふ．これより見れば明かに熱はエネルギーの一態でなければならない．熱の生滅が他種のエネルギーの增減を伴ふことはエネルギーが全體として不變の量をなし或は他種の形態より熱の形態に變じ或は逆に熱の形態から他種の形態に移るためと考へるを至當とする．エネルギーが不生不滅に保たるゝことを**エネルギー不滅の法則**と稱する．この法則はマイヤーとヘルムホルツによつて見出され全く確實なるものとして現今一般に承認せられる．音光電氣磁氣等の總ての現象を通じて例外なく適用せられる．

單位の熱量に相當するエネルギーを力學に於ける單位によつて表はす數を**ジユールの恒數**と名づける．ジユールの測定に於ては數個の翼を有する水車を錘に作用する重力によつて廻轉せしめ一方には水の攪拌によつて生ずる溫度の上昇を測り他方に於ては錘の下降した高さを測る．錘の質量をmその下降の高さをhとすれば重力が翼車を廻轉せしめた仕事はmghに等しい．水量と容器の水當量を併せてwとし之が

[1] 氷が融解し水蒸氣が凝結するなどの際に吸收または放出させられる熱の量については58節に述べる．

t 度だけ熱したとすれば發生した熱量は wt と表はされる．從つてジユールの恒數は

$$J=\frac{mgh}{wt}$$

と計算せられる．

ローランドの實驗に於ては約 8 瓩の水を容れる熱量計を用ひ蒸氣力を以て翼車を廻轉し熱量計は針金を以て吊し翼車の廻轉によつて生ずる針金の捩れの角より廻轉に要せる力の能率を求め之と翼の廻轉數とによつて攪拌の仕事を計算する．なほ後章に述べる如く電流による熱の發生によつてもジユールの恒數を測定することができる．イエーゲル及びスタインウエーアの測定の結果

$$J=4.186\times10^{7}\frac{\text{エルグ}}{\text{カロリー}}$$

は最も精確なるものと考へられる．

57. **比熱**　物質の單位質量の熱容量を**比熱**と名づける．固體液體に於ては熱量計によつてこれを測定することができる．氣體に於ては溫度による體積の變化が大きく從てその比熱を論ずるには外壓に對する仕事をも考へなければならない．壓力を一定にせるときの比熱を**定壓比熱**と云ひ體積を一定にせるときの比熱を**定積比熱**と名づける．固體液體にもこの兩種の比熱を考ふべきであるけれどもその差は極めて小さい．また固體液體に於て定積比熱を直接に測定することは甚だ困難なるために普通は定壓比熱を測定する．

體積を一定にして氣體を熱する場合にはこれに加はる熱が悉く氣體の內部に殘るけれども壓力を一定にして熱する場合には氣體が膨脹するに伴ひ外壓に對して仕事をなしこれに相當したエネルギーは氣體より外部の空氣に移る．從つて氣體の定壓比熱は常に定積比熱よりも大きい．

氣體の定壓比熱は次の如くして測定せられる．水熱量計の中に蛇管を置きこれに或る溫度 t に熱した氣體を一樣の速さを以て通す．氣體は水に熱を奪はれ遂には水と同じ溫度となつて排出せられる．故に水

の溫度は漸次に上昇する．水の最初の溫度を t' 最後の溫度を t'' とすれば氣體の失ふ熱は單位質量につき最初は $c(t-t')$ 最後は $c(t-t'')$ その平均をとれば熱量計を通過する氣體の總量 m の失ふ熱量は $mc\left(t-\frac{t'+t''}{2}\right)$ に等しい．この熱量は卽ち熱量計の得る量に等しい．故に熱量計の水量に水當量を併せて w とすれば

$$mc\left(t-\frac{t'+t''}{2}\right)=w\,(t''-t')$$

故に

$$c=\frac{w\,(t''-t')}{m\left(t-\frac{t'+t''}{2}\right)} \qquad 11$$

氣體の定積比熱を直接に測定するためにはジヨリーの示差蒸氣熱量計が用ひられる．この裝置に於ては熱容量と大さとが相等しい二個の中空の銅球を作り一方は眞空とし他方に氣體を充たす．兩球を天秤の兩臂に懸けて箱の中に收め水蒸氣を導き兩球に凝結する水量の差を測る．之によつて球內の氣體を一定の體積の下に暖めるに要する熱量が求められる．

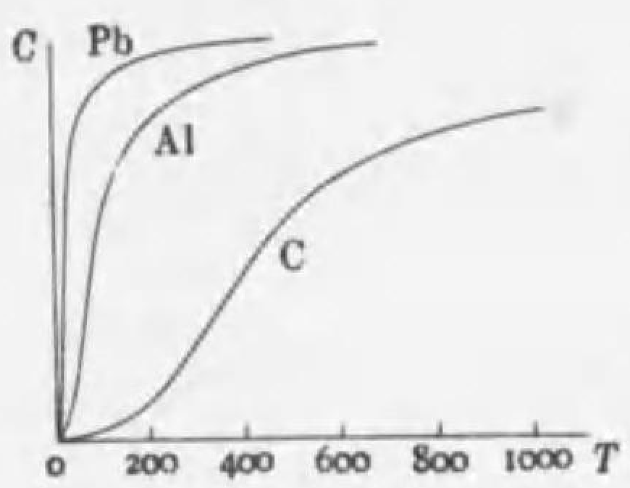
定壓比熱 c_p と定積比熱 c_v との比 $\frac{c_p}{c_v}$ の値は氣體に依つてそれぞれ一定し通常 γ と表はされる．ヘリウムアルゴン水銀蒸氣等の一原子氣體では 1.67 酸素窒素水素等の二原子氣體では 1.40 なる値を有し分子の構造が複雜となるに從つて次第に減少する．

次に數種の物質の比熱を掲げる．

物質	c	物質	c_p	γ
アルミニウム	0.214 $\frac{\text{カロリー}}{\text{瓦度}}$	ヘリウム	0.745 $\frac{\text{カロリー}}{\text{瓦度}}$	1.67
鐵	0.105	アルゴン	0.149	1.67
銅	0.091	水銀蒸氣	0.745	1.67
銀	0.055	水素	2.37	1.40
白金	0.032	酸素	0.153	1.40
鉛	0.031	水蒸氣	0.329	1.33
硝子	0.19			
アルコール	0.58			
水銀	0.0333			

種々の物質について比熱の値を比較すれば一般に固體の比熱が最も小さく液體これにつぎ氣體の比熱は最も大きい.

物質の 1 瓦分子 の熱容量を**分子熱**と云ひ元素の 1 瓦原子 の熱容量を**原子熱**と名づける. 固體または液體の元素について原子熱を測定した結果によれば何れの元素も略々等しい原子熱を有する. このことを**チウロン－プチーの法則**と稱する. たゞ原子番號の低い元素にはこの法則が適用し得ないものが多い. また近年の測定によれば極めて低い溫度では何れの元素の比熱も著しく減少し絕對零度に至つて零になる. 溫度に對する原子熱の變化は略々圖に示す如く絕對零度に於て 0 より始まり溫度の昇るに從つて增加し總て一定の値 $3R$ に近づき相當の高溫度に於てはすべての元素がチウロン－プチーの法則に從ふ.



第 4 圖

58. 氣化と凝結 融解と凝固 液體とその蒸氣とが接觸して平衡狀態にあるときの蒸氣の壓力はその溫度によつて定まる. この狀態を蒸氣の**飽和**と名づけこれに相當する壓力を**飽和壓**と稱する. 液體に接觸する蒸氣の壓力がその溫度の飽和壓よりも小ならば液體は更に氣化し飽和壓よりも大ならば過剩の蒸氣は凝結する. 蒸氣の溫度が降つて飽和以上の狀態に達すればその一部は凝結する. そのとき液體の滴は多くの場合に微小な浮游物を核として生じ浮游物のない場合に急激に冷却すれば蒸氣が著しく飽和の狀態を越えるまで凝結を生じない.

第11章に述べる如くに液體の小滴が蒸氣の內に存在するときこれと接觸して釣合ふ蒸氣壓は滴粒の小なるほど高く從つて大なる滴に對して飽和した蒸氣も小なる滴に對しては飽和しない. 故に滴粒の大なるものは蒸氣の中にあつて釣合ふことを得るも小さいものは直に氣化する. 從つて蒸氣が著しく飽和の狀態を越えない限りは直に相當の大さの滴粒をその中に形成することができない. 假に小滴を生ずることが

あつてもその多くは直ちに氣化して消滅する. 併しながら蒸氣の中に浮游物がある場合には其の表面に凝結する液體は始めより相當の大さの滴粒をなすために一度生じた滴は漸次にその大さを增加する.

水蒸氣を含む空氣を急に膨脹せしめればその溫度が降つて水蒸氣の一部は浮游せる塵埃を核として凝結し霧を生ずる. 綿を以て濾過した空氣には浮游物がないために容易には霧を生じない.

液體を熱するとき始めはたゞ表面より徐々に蒸發するに過ぎないけれども液體の溫度が昇つてその溫度に對する飽和壓が液面に於ける外壓を越えるに至れば液體の內部にも氣泡を生じて沸騰を始める. 溫度が低いときには氣泡が生ずることあつてもその中の蒸氣壓が外壓より小さいために直に消滅する. 飽和壓が外壓を超えるに至つて始めて氣泡を生じ得る. 一定の壓力の下に熱した液體が沸騰を始めれば全部が氣化し終るまで溫度は一定に保たれる. このことは液體が氣化するときに熱を要するによる. この熱を**氣化熱**と稱する. 逆に氣體が液化するときは氣化熱と同量の熱が再び放出せられる.

液體を氣體に變ずるための熱量は物質の狀態の變化に伴ふ內部のエネルギーを增加すると同時に一部は體積の增加により外壓に對してなす仕事のために費される. 從つて氣化熱はその場合の壓力と溫度とに關係する.

次に數種の物質の沸騰點と氣化熱との表を掲げる. 沸騰點は 1 氣壓の下に於けるものを示し氣化熱は沸騰點に於て飽和壓の下に蒸發する場合について示す.

物質	沸騰點	氣化熱
水銀	357.0 度	68 $\frac{\text{カロリー}}{\text{瓦}}$
水	100.0	538
アルコール	80.3	94
液體酸素	−182.9	
液體ヘリウム	−268.	

固體を熱して融解し始めるに至れば全部が融解するまでその溫度が

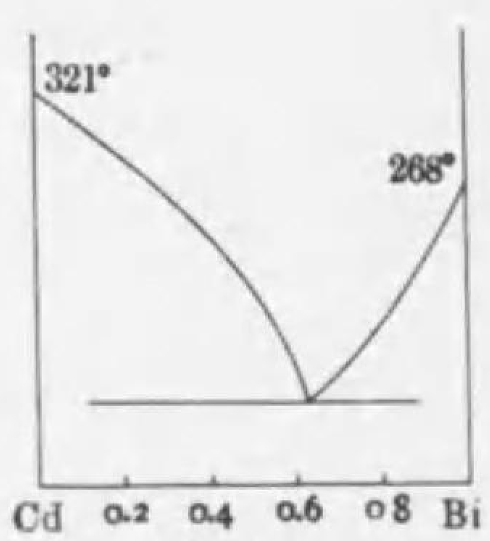
一定に保たれる. このことは固體を液化するときに熱を要するに基づく. この熱を**融解熱**と名づける. 逆に液體が固體に變ずるときにはこれと同量の熱が放出せられる.

固體が液化するときには一般にその體積が少しく變化し外壓に對して仕事をなすけれどもその量は極めて少い. 從つて融解に際して吸收せられる熱量は殆ど總て内部のエネルギーとしてその物質の中に止まる. また融解點が殆ど壓力に關係しないために融解熱に對する壓力の影響もまた甚だ小さい.

次に數種の物質の融解點と融解熱を掲げる.

物質	融解點	融解熱
銅	1083度	41.6 $\frac{\text{カロリー}}{\text{瓦}}$
鐵	1530	6.0
鉛	327	5.4
水	0	80.
水銀	−38.9	2.8
アルコール	−118	
固體酸素	−219	

純粹なる物質の融解點と沸騰點とは壓力によつて一定し殊に前者は壓力に關係することも少いために溫度の標準を定めまたは不變の溫度を得るに利用せられる. 併しながら物質の不純なる場合には之等の溫度が著しく不純物によつて影響せられる. 一例として蒼鉛とカドミウムとの合金の融解する溫度と兩種の金屬の混合の比との關係を示せば圖の如くに融解點は純粹の金屬の場合に最も高くこれに他方の加はるに從つて次第に低く或る混合比に於て最低になる. 沸騰點もまた多くの場合に不純物のために低下する.



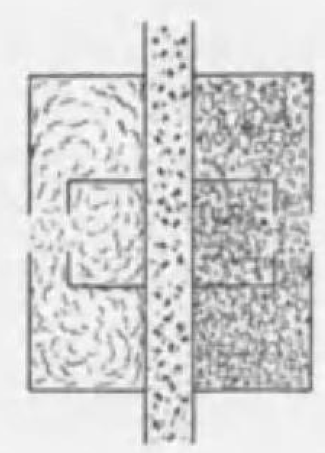
第5圖

59. 熱の傳導 溫度を異にする二つの物體を接觸せしめるとき熱は高溫のものから低溫のものに移り遂にその溫度が平均する. 同一の物

體の中に溫度の高低ある場合にもまた同樣に熱は高溫の部分から低溫の部分に流れる. これを**熱の傳導**と稱する.

物體內部の溫度の分布が一の方向に次第に低くこれと直角の平面の中には高低なき場合この平面を過つて高溫の側から低溫の側へ移る熱量は溫度の勾配に比例する. 今この方向に測る長さを p とすれば溫度 t の勾配は $\frac{dt}{dp}$ でこの平面の單位面積を過つて單位時間に流れる熱量は

$$Q=-k\frac{dt}{dp}$$


第6圖

と表はされる. こゝに k は物質に特有の恒數でこれを**熱傳導率**と名づける. 負號は t の減ずる方向に熱の流れることを表はす.

熱傳導率は例へは次の如き方法によつて測定せられる. 測定をなすべき物質を以て板を作りその兩面に圖の如く密閉せる室を作り左側には水蒸氣を通じて板面を熱し右側には氷を充たして板面を冷し左より右に向つて熱を流れしめる. 板の厚さと兩面の溫度の差とを測れば溫度の勾配が知られまた左側に於て板面に凝結する水蒸氣または右側に於て融解する氷の量を測れば板を通過する熱量が知られ從つて熱傳導率が計算せられる. なほ外部から熱が出入するを妨げるためには更に兩側を水蒸氣と氷とによつて蔽ふ.

溫度の分布が定常狀態に達すれば熱の移動は單に熱傳導率によつて定まるけれども定常ならざる狀態では熱傳導率の外に比熱 c と密度 ρ とが熱の移動の遲速に關係する. 例へば熱せられた物體が冷却する如き場合に物體の形狀と表面の狀況とを一定ならしめて比較すれば冷却の遲速は

$$K=\frac{k}{c\rho}$$

によつて定められる. K を**熱の擴散率**と名づける.

次に種々の物質について熱傳導率を掲げる

物質	k	物質	k
銀	1.01 $\frac{\text{カロリー}}{\text{度秒糎}}$	氷	0.005 $\frac{\text{カロリー}}{\text{度秒糎}}$
アルミニウム	0.4	硝子	0.002
白金	0.17	水	0.0014
鐵	0.16	アルコール	0.00043
鉛	0.08	空氣	0.000052

固體に於て金屬の熱傳導率は甚だ大きく之に比して他種の物質の熱傳導率は遙に小さい．また大體とし熱傳導率は固體に於けるより液體に於て小さく氣體に於ては更に小さい．なほまた熱傳導率は溫度にも關係し極めて低い溫度に於ては著しく增加する．

液體氣體に於ては各部分の溫度を異にする場合に對流を生じこれに伴つて熱が移動する．また後章に述べる如くに高溫の物體が輻射を發しこれが低溫の物體に吸收せられるためにも熱の移動を生ずる．

第十章　分子運動論

60.　原子の熱運動　既に述べた如くに物質を構成する原子が安定の配列をなせば固體を形成する．このとき各個の原子は周圍より受ける作用が互に釣合ふ如き位置にあつて若し原子の位置が少しく亂された場合には振動を生ずる．一個の原子の振動は隣接する他の原子の振動を誘起し漸次に周圍に波及して遂には物體の全部に擴がり總ての原子が不規則なる振動をなすことになる．物體は種々の機會に絕えず外界より攪亂を受けるため原子の不規則なる振動は殆ど止むことがない．

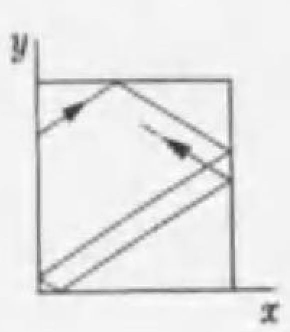
現今の物理學に於ては冷熱の現象を上記の如き原子の不規則なる運動によるものとして說明する．卽ちこの運動が少ければ溫度が低く烈しければ溫度が高い．衝突摩擦等によつて熱を發することも斯く考へればよく說明せられる．また熱が高溫の物體から低溫の物體に移ることは前者に於ける烈しい原子運動が後者の原子に傳播して平均を得んとする故に外ならない．物體を熱して膨脹するは原子の運動が烈しくなるに伴つて相互の間隔が擴大するためと考へられる．

固體を熱して融解するは原子運動の烈しさが或る程度を超ゆるとき原子の配列が安定の狀態を保ち得ず原子が轉々として位置を換へるためと考へ得る．また液體が蒸發して氣體となるは原子の運動が更に激烈となるため原子の相互の作用に抗つてその距離を擴大し各々自由に運動するものとして說明せられる．但し液體氣體の狀態に於ては原子の二個以上が一團となつて運動する場合も考へられる．この一團を**分子**と名づける．

液體が自由の表面を有するときはその表面から絕えず蒸發する．このことは液體の分子の中で上記の不規則なる熱運動のために偶々大なる速度を得たるものが表面から逸出する故に外ならない．液體を容器

に入れて密閉すれば表面から蒸發する蒸氣が容器の空間を充たして飽和の狀態に達する. 液體の表面に接する蒸氣の中には液體に向つて動く分子があつて之等は液體の中に沒入する. その數は蒸氣の密度に比例すべきこと云ふまでもない. 液體から逸出するものと蒸氣から再び還るものとが同數となれば平衡狀態を保つことになる. 飽和蒸氣はこの如きものと考へられる. 飽和蒸氣を壓縮すれば液に沒入するものが逸出するものより多くなり凝結の現象を生ずる. 固體に於てもまたその表面より氣化すること液體の場合に等しい. たゞその飽和の密度は極めて小さい.

61. 氣體の壓力 氣體に於ては分子の間の距離が大なるために分子の相互の作用は極めて少く各分子は自由に運動し放置すれば直ちに飛散する. 分子は相互に絶えず衝突しまた器壁とも衝突する. 個々の分子が器壁に衝突する作用は極めて短い時間たゞ微小な力を及ぼすに過ぎないけれども多數の分子が頻繁に衝突する結果は平均として相當の力が絶えず器壁を壓することになる.



第1圖

假に單位體積の立方形の箱の中で分子が運動するとし且つ分子は完全な彈性球の性質を有すると考へ分子相互の間には衝突がないと假定すれば各分子は左圖に示す如き徑路を描いて運動する. 速度の大さには變化なく從つて x 方向の分速度の大さ v_1 もまた變らない. 故に分子が單位時間に右壁に衝突する回數は $\frac{v_1}{2}$ である. 分子の質量を m とすれば一回の衝突によつて $2mv_1$ 單位時間には $2mv_1\frac{v_1}{2}$ 卽ち mv_1^2 なる運動量が右壁に與へられる. 故に凡ての分子が右壁に及ぼす壓力卽ち壁面に作用する全壓力 p は上記の運動量を總ての分子に就て合計して得られる. 單位體積の中の分子の數を n とし v_1^2 の平均を $\overline{v_1^2}$ とすれば

$$p = nm\overline{v_1^2} \qquad 1$$

分子の速度の大さを v とし x y z 軸に對する分速度を v_1 v_2 v_3 とすれば

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

從つて平均に於ても

$$\overline{v^2} = \overline{v_1^2} + \overline{v_2^2} + \overline{v_3^2}$$

氣體の平均としての性質は總ての方向に一樣である故に $\overline{v_1^2}$ $\overline{v_2^2}$ $\overline{v_3^2}$ は何れも相等しく $\overline{v_1^2}$ は $\frac{1}{3}\overline{v^2}$ と考へることができる. これを 1 に入れて

$$p = \frac{1}{3}nm\overline{v^2} \qquad 2$$

この右邊の $m\overline{v^2}$ は分子の運動のエネルギーを平均せるものゝ二倍に等しい. これを $2u$ と置く. 一定量の氣體に於て分子の總數を N 體積を V とすれば單位體積の中の分子の數は $\frac{N}{V}$ に等しい. 從つて

$$pV = \frac{2}{3}Nu \qquad 3$$

この結果によれば氣體の體積が一定なるとき壓力は分子運動のエネルギーに比例する. 然るに實驗の結果によれば旣に述べた如く氣體の體積を一定するとき壓力が絶體溫度に比例する. 從つて此の兩者を比較すれば分子の運動のエネルギーは絶體溫度に比例しなければならない. よつて

$$u = \frac{3}{2}kT \qquad 4$$

卽ち

$$\frac{1}{2}m\overline{v_1^2} = \frac{1}{2}m\overline{v_2^2} = \frac{1}{2}m\overline{v_3^2} = \frac{1}{2}kT$$

と置けば k は分子一個の運動のエネルギーが溫度 1 度の變化に對して增減する量の $\frac{2}{3}$ 倍を表はす. 之を**ボルツマンの恒數**と稱する.

今 1 瓦分子 の分子の數を L とし Lk を R と置けばボイル—シヤールの法則

$$pV = RT \qquad 5$$

が得られる. 旣に述べた如く R は總ての氣體について同じくまたアボガドローの法則によれば L もまた總ての氣體について同一である. 從つて k もまた氣體の種類に關係しない.

上の計算では分子相互の間に衝突がないとして論じたけれども實際

には頻繁に衝突を生ずる．且つ器壁もまた多數の原子によつて構成せられ完全な平面とは異なり壁面に於ける分子の反射は甚だ不規則である．併し平均として考へれば衝突の狀況は殆ど上に述べたところに等しい．たゞ多數の分子が絶えず互に地位を交換するに過ぎない．

62. 氣體の比熱 前節の 4 によれば 1 瓦分子 の氣體が有する運動のエネルギーは

$$Lu=\frac{3}{2}RT$$

分子の有するエネルギーの中たゞこの運動のエネルギーのみが溫度に關係するとすれば 1 瓦分子 を一定の體積に於て熱するときの熱容量卽ち定積分子熱は

$$C_v=\frac{3}{2}R \qquad 6$$

で定められる.[1]

然るに一定の壓力の下に熱する場合には外壓に對して仕事をなすために更に多くの熱を要する．壓力 p の下に溫度を dT だけ高めるとき體積が dV だけ膨脹すれば pdV だけの仕事がなされる．然るに

$$pdV=RdT$$

卽ち溫度 1 度の變化に對して R だけの熱を要する．故に壓力を一定として熱する場合の分子熱は 6 と併せて

$$C_p=\frac{3}{2}R+R \qquad 7$$

この式と 6 とによつて C_p と C_v との比を取れば卽ち定壓比熱と定積比熱との比 γ が得られる．卽ち

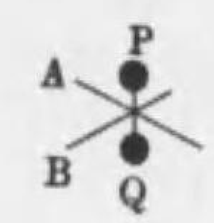
$$\gamma=1.666$$

この結果はヘリウム等の單原子氣體に於てよく實際に符合する．

併しながら既に述べた如くに γ は氣體の分子の二個の原子より成る

(1) C_v と R とをともにエルグの單位またはともにカロリーの單位で表はす．R をカロリーの單位で表はせば 1.986 カロリー度$^{-1}$ になる．本書では特殊の場合の外すべて等式の兩邊の量を同じ單位で表はすことにする．

場合に約 1.40 なる値を有し分子が複雜となるに從ひ更に減少する．このことは分子が前節に述べたる如き運動の外に或は廻轉運動をなし或は內部に振動を伴ふによると考へられる．例へば二つの原子 P Q より成る分子に於て PQ に直角なる二つの慣性主軸 A B を取りその周りの廻轉が各々平均として $\frac{1}{2}kT$ なるエネルギーを以て行はれるとすればこのために 1 瓦分子 について RT だけのエネルギーを多く有することになる．從つて分子熱は R だけ多く



第 2 圖

$$C_v=\frac{5}{2}R \qquad C_p=\frac{7}{2}R \qquad 8$$

となり

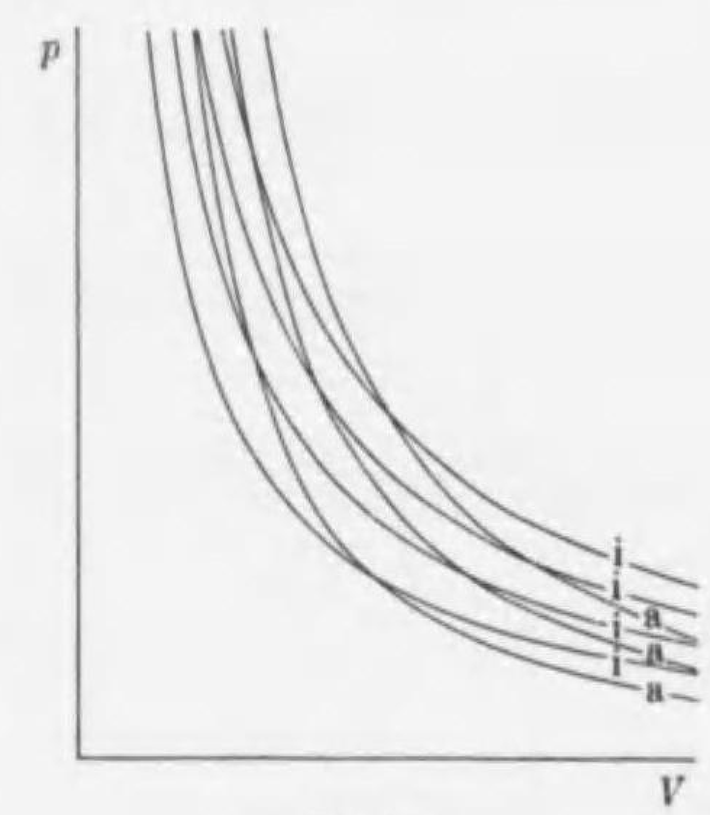
$$\gamma=1.40$$

とならなければならない．

63. 等溫變化と斷熱變化 物體の溫度を一定に保つて壓力等を變化せしめるときその變化を**等溫變化**と名づける．氣體に於ては壓力 p と體積 V とが逆比例する．之等の關係を圖に表はせば i の如き双曲線が得られる．その曲線を**等溫線**と稱する．

物體と外部との間に熱が出入することなくして生ずる變化を**斷熱變化**と名づける．この場合に物體が有するエネルギー U は物體が外部になせる仕事のみによつて變化する．卽ち

$$dU=-pdV \qquad 9$$



第 3 圖

i は等溫線を示し下方のものより順次に高溫に相當する．a は斷熱線を示し下方のものより順次に 13 式 K の大なるものに相當する．

氣體の 1 瓦分子 をとれば

$$p=\frac{RT}{V}$$

故に

$$dU=-\frac{RT}{V}dV \tag{10}$$

だけ分子のエネルギーが變化する.

これに伴つて氣體の溫度が變化する. 4によつても知られる如くに分子のエネルギーは溫度のみによつて定まる. 故に

$$dU=C_v dT \tag{11}$$

でなければならない. よつて前式と較べて

$$C_v\frac{dT}{T}+R\frac{dV}{V}=0$$

よつて

$$C_v\log T+R\log V=K$$

但しKはその氣體の最初の體積と溫度とに關係する. 然るに前節に述べた如く

$$R=(C_p-C_v) \qquad \frac{C_p}{C_v}=\gamma$$

によつて

$$\log T+(\gamma-1)\log V=\frac{K}{C_v}$$

故に

$$TV^{\gamma-1}=e^{\frac{K}{C_v}} \tag{12}$$

5によつて

$$pV^{\gamma}=Re^{\frac{K}{C_v}} \tag{13}$$

この式の右邊は一の定數である.

斷熱變化に於ける溫度と壓力の關係は前圖 a に示す如くになる. この曲線を**斷熱線**と名づける. 從つて斷熱線は等溫線よりも傾きが大きい.

γは次の方法によつても測定せられる. 活栓を備へた次圖の如き容器の中に氣體を入れ先づ氣體の壓力p_1を大氣の壓力p_0よりも少しく低くし次に急に活栓を開いて內部の壓力をp_0ならしめ直に活栓を閉ぢて體積を不變に保ちながら冷却せしめる. かくして內外の溫度を等しか

らしめて再び壓力を測る. 始め容器の活栓を開くとき器內の氣體は急に壓縮せられるためこの變化は斷熱的と見なしてよい. 始めの體積をV_1とし壓縮せられて後の體積をV_2とすれば

$$p_1V_1^{\gamma}=p_0V_2^{\gamma}$$

また最初と最後の狀態は同一の溫度なる故に

$$p_1V_1=p_2V_2$$

故に之等の兩式より

$$\frac{p_0}{p_1}=\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\gamma}$$

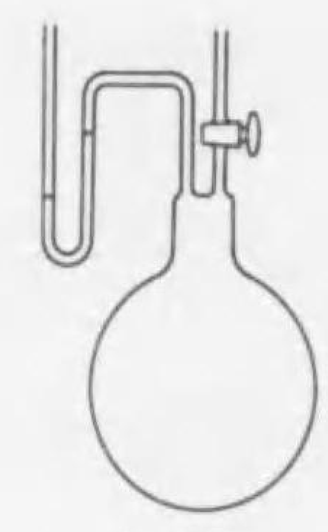
從つて

$$\gamma=\frac{\log\frac{p_0}{p_1}}{\log\frac{p_2}{p_1}}$$

この實驗に於てp_0 p_2とp_1との差が小なれば

$$\gamma=\frac{p_0-p_1}{p_2-p_1}$$

としてもよい



第4圖

64. フアンデルパールスの方程式 上の理論に於ては分子の大さと分子の間の相互作用とを無視したけれども密度が大なる場合には此の假定は正しくない. 分子が大さを有するために分子と壁との衝突または分子相互の衝突は分子の中心が未だ接觸しない前に生ずる. 從つて衝突の回數は前の計算よりも少しく多く恰も氣體の體積が減じたと結果を同じくする. 從つて完全氣體の特性方程式5にはVの代りに$V-b$と置くべきである.

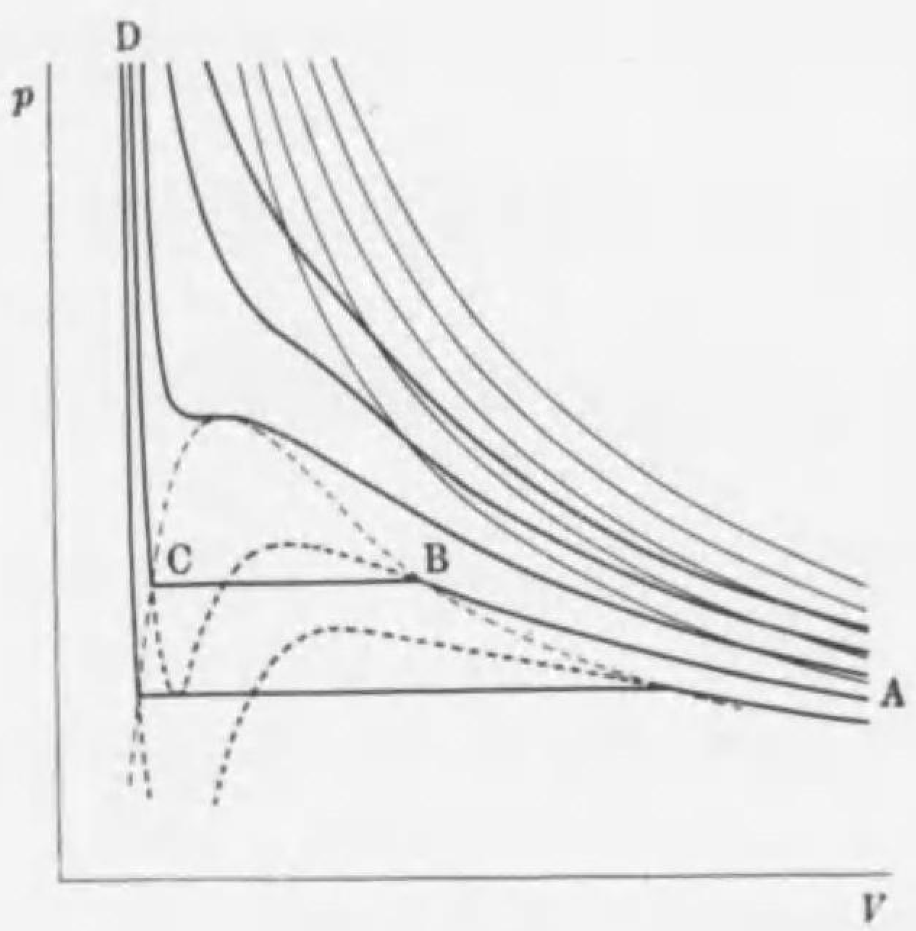
分子の相互の引力のために壁に接する分子は少しく內側に向つて引かれる. この作用は壁に對する氣體の壓力を減殺する. 若し分子力の作用がなければ壁に及ぼす壓力は實際の壓力pよりも少しく大きくなければならない. この差は作用を及ぼす內部と之を受ける外層とにある分子の數に比例し從つて密度の二乘に比例する. 故に之を$\frac{a}{V^2}$と置けば分子力の作用のない場合の壓力は$p+\frac{a}{V^2}$となるべきである. 依つて5の代りに

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT \tag{14}$$

の式が得られる. これを**フアンデルバールスの方程式**と名付ける. a b は氣體について定まつた恒數で之等をフアンデルバールスの恒數と名づける. 次に數種の氣體について此の恒數を揭げる

物質	a	b	
ヘリウム	3.4×10^4 氣壓糎^6	24 糎^3	1 瓦分子に對して
水素	21.1	22	
酸素	137.	32	
炭酸瓦斯	342.	41	
水蒸氣	578.	33	

このフアンデルバールスの方程式は種々の氣體につき壓力の廣い範圍によく實際と適合する. 一定量の氣體をとり其の溫度を一定に保ちながら之を壓縮すれば壓力は次第に增大し遂に飽和に達して液化を始める. 更につゞいて壓縮を行へば全部が液化するまで壓力は變らないけれども氣體の全部が液化した後に尙ほ壓縮をつゞければ壓力は急に增加する. 左圖は一定の溫度に於ける壓力 p と體積 V との關係を示す. 溫度の高まるに從ひ V 軸に平行な直線の部分が漸次に短縮して遂に或る溫度に於て消滅する. 此の溫度を超えれば氣體を如何に強く壓縮しても次第



第 5 圖

細い線は完全氣體の等溫線を示し、太い線は實際の氣體の等溫線を表はす.

に濃密とはなるけれども凝結の現象は現はれない. 此の溫度を**臨界溫度**と云ひ臨界溫度に於ける飽和壓力を**臨界壓力**と名づける.

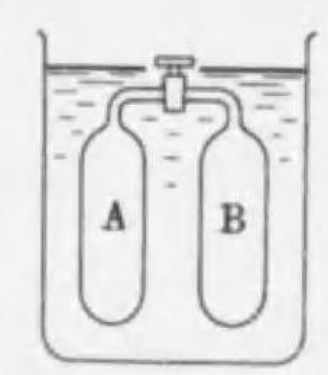
上記の等溫線は液化に相當する水平部分を除けばフアンデルバールスの方程式によつてよく表はされる. たゞ液化の部分に於ては14の表はす曲線が點線の如き形をとる. 此の點線が表はす狀態は實際には多く現はれないけれども過熱と過冷との場合には不安定ながら少しく實現せられる.

次に諸種の物質について沸騰點臨界溫度臨界壓力を揭げる

物質	沸騰點	臨界溫度	臨界壓力
ヘリウム	—268.6 度	—268. 度	2.3 氣壓
水素	—252.7	—234.5	20.
酸素	—182.9	—118.	50.
炭酸瓦斯	— 78.2	31.1	73.
水蒸氣	100.0	365.	194.6

65. ジユールートムソンの實驗 氣體の分子の相互作用は一般に微弱なるために外部に對する仕事を伴はない膨脹たとへば眞空の中に噴出する如き場合には分子運動のエネルギーに變化なく從つて溫度は變化しない.

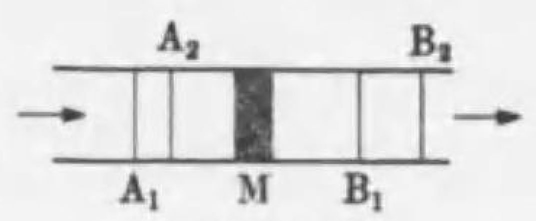
活栓を備へた管を以て二個の容器を連結しその一方Aには壓縮した氣體を充たし他方Bは眞空として後に活栓を開いて急に氣體を膨脹せしめるに一方は熱し他方は冷却する. AよりBに氣體が擴がるに當りAに殘る氣體はBに移る氣體に對して仕事をなしエネルギーを失つて冷却しBに移る氣體はAにある氣體によつて仕事をなされエネルギーを得て熱する. 併し全體としては眞空に於ける膨脹なる故に全體のエネルギーは變らない. 從つてA Bを一個の水熱量計の中に置いて實驗すれば殆んど熱の發生消滅のないことが認められる.



第 6 圖

併しながら精密に云へば分子の相互作用のために溫度の變化を生ず

る．ジユールートムソンの精密な實驗に於ては金屬管の中央に綿栓を置き之を通して氣體を噴出せしめ栓の兩側の溫度を測定する．氣體が栓 M を透して噴出する場合に初め A_1B_1 なる位置を占めた氣體が次に A_2B_2 なる位置に移るとすれば其の結果は A_1A_2 の氣體が B_1B_2 に移ることに等しい．管の橫斷面積を S 氣體が A_1A_2 にあるときの壓力と體積とを p_1 V_1 とし B_1B_2 にあるときの値を p_2 V_2 とすればこの氣體は左方から p_1V_1 だけの仕事をなさるゝとともに右方に對して p_2V_2 だけの仕事をなし併せて

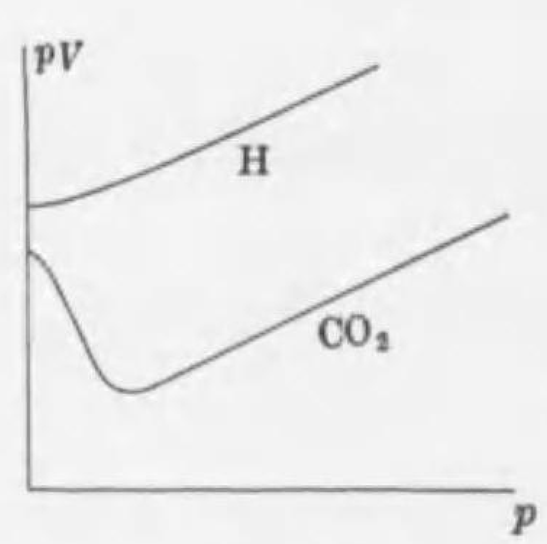


第 7 圖

$$p_1V_1 - p_2V_2$$

なる仕事を外部よりなされる．之に相當するエネルギーの一部は氣體の溫度を變じ殘部は分子の間の位置のエネルギーを增減せしめる．若し p_1V_1 が p_2V_2 に等しく且つ分子力の作用が全く無いならば噴出のために溫度の變化は生じないけれども普通の氣體では噴出によつて溫度に多少の變化を生ずる．

實驗によれば水素を除いては一般に噴出のときに溫度の降下を生ずる．等溫變化では p が甚しく大きくない限り pV の積が圖の CO_2 の如く p の增加に伴つて減少する．故に氣體の自由膨脹によつて冷却を生ずることが豫期せられる．たゞ常溫の水素では pV が p とともに增加し且つ分子力の作用も甚だ小なるため噴出の後の溫度は却つて上昇する．併し低溫に於ては水素もまた他の氣體と同じく噴出によつて冷却する．



第 8 圖

次表は噴出の前後に於ける壓力の差 1 氣壓 に對する溫度の變化を示す．

氣體	溫度の變化	
水素	0.030 度	
窒素	—0.31	常溫
酸素	—0.32	溫度の上昇を正として下降を負とする
炭酸瓦斯	—1.24	

空氣その他の臨界溫度の低い氣體を多量に液化するには上記の原理を應用する．例へばリンデの機械では先づ壓縮ポンプによつて約 150 氣壓 に空氣を壓縮し之を銅の蛇管に通し其の下端の細孔から噴出せしめる．冷却した空氣は蛇管の外部を通過して次に來る空氣を冷しながら再び喞筒に還る．絕えず喞筒を働かせば上記の作用が繰返され細孔から噴出する空氣は次第に冷却して遂には噴出のときに液化する．たゞ水素は上記の理由により先づ之を壓縮し液體空氣によつて相當の低溫度に冷却した後に膨脹せしめる．

66. 擴散 氣體の分子は常に大なる速度を以て不規則に運動し絕えずその位置を變へるために氣體の中に相隣る部分が異なる流動をなす如き場合にも兩部分の分子が漸次に混交して一樣の流動に近づくこと粘性を有するに等しい．この作用は分子運動の烈しいほど大きい．從つて氣體の粘性は溫度の高いほど著しい．

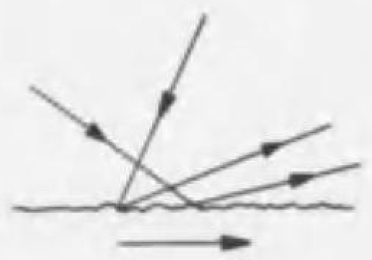
二種の氣體が相接するときには壓力が相等しい場合にも分子運動のために兩種の氣體が漸次に混合する．この現象を**擴散**と名づける．分子運動の速度は次節にも示す如く平均として分子の質量の平方根に逆比例するゆゑ擴散も質量の小なる氣體に於て特に著しい．この現象は氣體のみならず液體に於ても同樣に生じ場合によつては固體にも認められる．何れも溫度の高いほど著しい．

擴散によつて物質の移動する速さはその物質の濃度卽ち單位體積に含まれる分子の數の勾配に比例する．濃度 C が一の方向 p に對して增減する場合 p に垂直なる平面の單位面積を通じて單位時間に移動する量は

$$-k\frac{\partial C}{\partial p}$$

と表はされる．この移動は濃度の小なる方に向つて生ずる．kはこゝに關係する物質と溫度その他の狀況によつて定まり**擴散率**と名づけられる．

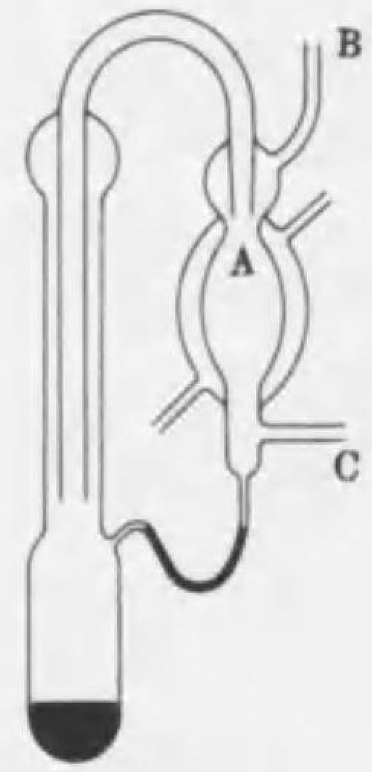
氣體の分子の器壁に對する衝突は甚だ不規則なること云ふまでもない．たゞ器壁が靜止すれば平均に於て平面に對する彈性的の反射に等しいけれども器壁が動く場合にはその運動の影響を受ける．例へば器壁が高速度を以て右に動けば反射せられた分子の速度は多く右に向ふ．



第 9 圖

このことは所謂る分子式眞空喞筒に應用せられる．內側に螺旋狀の溝を有する圓管の中に密接する圓筒を急速に廻轉すれば溝內の氣體は圓筒の廻轉に伴つて動き溝の一方から他方に移動する．よつて溝の一端に連なる容器の內の氣體を除いて眞空とすることができる．

なほ眞空喞筒としては圖の如き水銀氣流喞筒等を用ひる．水銀を熱してその蒸氣をAより噴出せしめればBに連なる容器の中の氣體は水銀蒸氣に從つてCに排出せられる．Aの周圍は水流によつて冷却せしめる．之等の喞筒は何れも補助喞筒を用ひて排氣口の氣壓を低くして使用する．



第 10 圖

67.　分子の速度　一の分子が他の分子と衝突してより次にまた他の分子と衝突するまでに通過する距離を**自由行路**と言ひ其の平均を**平均自由行路**と名づける．分子を假に半徑δの球と考へれば一の分子が運動するときに半徑δの圓筒を描き之が他の分子に觸れる場合に衝突を生ずる．換言すれば中心の描く直線から 2δ 以內の距離に他の分子の中心があれば衝突を生ずる．半徑 2δ の圓筒の體積は單位の長さについて$4\pi\delta^2$また他の分子の中心がこの內にある數は平均として

$$4\pi n\delta^2$$

單位の長さを動く間に之だけの衝突を生ずる故に平均自由行路は[1]

$$\frac{1}{4\pi n\delta^2}$$

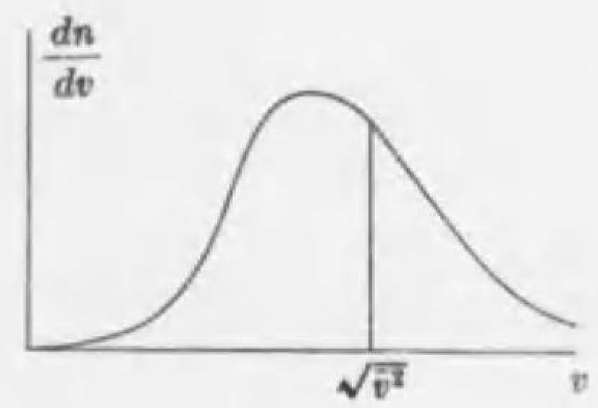
に等しい．之が長ければ分子の運動が自由なるため前章に述べた如く粘性係數擴散率等が大きい．之等によつて平均自由行路を推算するに例へば標準狀態の水素に於て約 18×10^{-6} 糎と求められる．

また$\overline{v^2}$の平方根を考へて之を**平均自乘の速度**と名づける．一例として標準狀態の水素1竓をとるに質量 nm は 0.0000900 瓦また 1 氣壓 は 1.013×10^6ダイン糎$^{-2}$なる故 **2** によつて $\sqrt{\overline{v^2}}$ は 1.839×10^5 糎秒$^{-1}$ になる．標準狀態に於て種々の氣體を比較すればnは互に等しくmは分子量に比例する．從つて平均自乘の速度は分子量の平方根に逆比例する．

併しながら各分子の速度が各々異ることは勿論たゞ一個の分子についても速度は他の分子と衝突する毎に變化する．從つて上記の$\sqrt{\overline{v^2}}$は一種の平均を示すに過ぎない．各分子の有する速度は衝突の際の偶然の狀況によつて定まる．マクスウエルが統計的に計算せる結果によれば種々の速度に對する分子の分布密度は

$$dn=\frac{nv^2}{\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}dv \qquad 16$$

で表はされる．この式は速度の範圍dvに對する分子の數dnを示すもので之を圖に示せば左の如くになる．卽ち速度の小なるものも大なるものも少く$\sqrt{\overline{v^2}}$に近い速度のものが多い．



第 11 圖

ボルツマンの恒數kは61節に述べた如く氣體恒數Rと 1 瓦分子 の分子の數Lとによつて$\frac{R}{L}$と表はされる．之をR卽ち 8.313×10^7 エルグ度$^{-1}$と後章[2]に述べる如くして定めたL卽ち 6.06×10^{23} とによつて計算すれば

$$1.371\times10^{-16}\ \text{エルグ度}^{-1}$$

(1) 分子を彈性球と假想すれば δ が 10^{-8} 糎の程度に算出せられる．

(2) 180 節參照．

と求められる．分子の質量についても後章に述べるけれども水素に於て 3.324×10^{-24} 瓦他の氣體に於ては分子量に比例して重い．

68. ブラウン運動　水中に浮游する極めて微小なる粒子を顯微鏡によつて見れば粒子が各ゝ甚だ不規則なる運動をなすことが認められる．この運動は粒子の小なるほど烈しく例へば金の膠狀溶液に浮游する微粒の如きに於て特に著しい．この運動を**ブラウン運動**と名づける．

前に述べた如く水の分子は絶えず不規則な運動をなす故その間に介在する微粒は周圍より分子の衝突を受けて動かされる．その衝突は全く不規則に生ずるため大體に於ては前後左右よりの衝突が平均するけれども時として衝突が一方に偏するときには微粒が力を受ける．粒子が大なる場合には周圍よりの衝突が極めて多數なるために常によく平均を保ち一方に偏すること極めて稀なるのみでなく少しく平均を缺くとも粒子の質量が大なるために動くこと少い．然るに粒子が小なるときには周圍よりの衝突の回數が少いために平均を失ふこと多く且つ質量の小なるために烈しく動かされる．從つてブラウン運動は粒子の小なるほど烈しい．

粒子の位置と速度とが不規則に變化するためその運動のエネルギーと位置のエネルギーとも絶えず變化する．また一の瞬間に於ても多數の粒子の或るものは烈しく動き他のものは靜止し之等の有するエネルギーが一樣でない．併し統計的の計算によれば特に大なるエネルギーを有するものは極めて少くエネルギーの小なるものほど多い．位置と速度とについて小さい範圍 dG をとり粒子一個の總エネルギーを u とすれば[(1)]この範圍に屬する粒子の數は

$$Ce^{-\frac{u}{kT}}dG \qquad 17$$

の如くに表はされる．定數 C は粒子の總數その他の狀況によつて定められる．分子もまた一の微粒に外ならない．16の結果もこの場合の一

(1) 例へば直角坐標に於て位置が $dx\ dy\ dz$ の間にあり速度が $dv_x\ dv_y\ dv_z$ の間にある範圍をとれば dG を $dxdydzdv_xdv_ydv_z$ と考へる．

に屬する[(1)]．

また計算によればこの如き不規則なる運動に於ては粒子の各自由度に對し平均として

$$\frac{1}{2}kT \qquad 18$$

なる運動のエネルギーが配布せられる．こゝに k はボルツマンの恒數 T は絶對溫度を表はす．このエネルギーの量は溫度にのみ關係して粒子の大小構造または之に作用する外力等には全く關係しない．卽ち各自由度に屬する運動のエネルギーは全く均等である．之を**エネルギー等配則**と名づける．微粒の重心の運動を考へればその自由度は3なるゆゑに粒子が全體としてブラウン運動をなすエネルギーは平均に於て $\frac{3}{2}kT$ である．4によつて表はされる結果はこの一の場合に屬する．廻轉運動のエネルギーについてもまた同樣に考へられ8によつて表はされる結果はその一の場合に屬する．

更に位置のエネルギーについても運動のエネルギーと等しく一自由度に平均として $\frac{1}{2}kT$ だけが配布せられる．固體または液體の元素を考へれば各原子が $\frac{3}{2}kT$ づつの運動のエネルギーと位置のエネルギーを有する故に 1 瓦原子 の有するエネルギーは

$$3LkT = 3RT$$

になる．從つて溫度1度に對するこのエネルギーを求めれば定積分子熱が得られる．卽ち

$$C_v = 3R$$

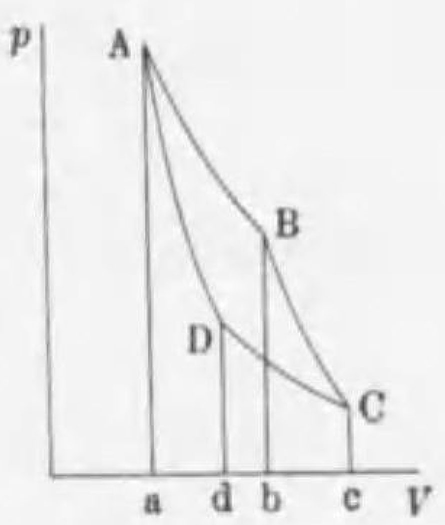
約 6 カロリー となりヂウロン―プチーの法則はエネルギー等配則の結果として說明せられる．たゞ低溫に於てはこの等配則が適用せられない．ヂウロン―プチーの法則に例外あることはこの理由に基づくと考へられる[(2)]．

(1) 16 に於ては速度の大さが dv の間にあるものを考へたに反し 18 では各分速度を狹い範圍に限る故範圍を少しく異にしてゐる．16 は 17 から直に導かれる．

(2) 第 30 章參照．

第十一章　熱　力　學

69. **熱機關**　平衡にある物體ではその壓力と體積とが知られゝば溫度は自から知られまた溫度と體積とが定まれば壓力がこれによつて定まる. 卽ち之等三量の中の何れか二つを以て物體の狀態を表はすことができる. 從つて物體の狀態は壓力 p と體積 V とを坐標とする圖の上の一點で表はされる. 若しまた物體が極めて徐々にその狀態を變ずるときには狀態を表はす點が一の曲線を描いて移動する. 但し物體の變化が急激に生ずるときには各瞬間の狀態が平衡狀態と異なり從つてその變化を pV 圖上に表はすを得ない. 次には主として變化が極めて徐々に生じ常に殆ど平衡の狀態にあると見做し得る場合を考へる. 從つてこの場合に外力を極めて少しづゝ增減すれば變化を逆に生ぜしむることができる. この如き變化を可逆變化と名づける.



第 1 圖

活塞を備へた圓筒に氣體を入れ之を先づ高溫の物體 S と接觸せしめて徐々に膨脹せしめれば氣體は活塞を壓して仕事をなすと同時に S より熱を吸收する. 此のとき氣體の壓力と體積との關係は等溫線 AB によつて表はされる. 次に圓筒を S より離し斷熱的に膨脹せしめれば氣體は仕事をなすとともにその溫度は降下する. このとき壓力と體積との關係は BC の如き斷熱線で表はされる. 氣體の溫度が低溫の物體 R に等しくなるに至つて圓筒を之に接觸せしめ次第に壓縮するに氣體は活塞に壓されて仕事をなされると同時に R に熱を與へる. 適當の壓縮の後に圓筒を R より離して更に斷熱的に壓縮すれば氣體は仕事をなされると同時に溫度が上昇し再び最初の狀態に復歸する. 之等の

二つの壓縮は CD 及び DA で表はされる. 氣體は膨脹に際して外部に仕事をなし壓縮に際して外部から仕事をなされる. 併し壓縮の際の壓力は膨脹の際の壓力よりも小なる故にこの仕事は外部に對してなすことが多く逆になされることが少ない. 故にこの操作を反覆すれば高熱源から熱をとつて低熱源に與へその差を仕事に換へることができる.

この業作の第一の膨脹に際して氣體がなす仕事は前圖の面積 ABba で表はされ第二の膨脹に於ける仕事は面積 BCcb で表はされる. これに次ぐ第三第四の壓縮に際してなされる仕事は面積 CDdc 及び DAad で示される. 從つてこの一回の業作によつて氣體が外部になす仕事は面積 ABCD に相當する. この如く物體が或る變化を經過して後に再び舊の狀態に還る場合にはその變化を**輪業**と名づける.

熱のエネルギーを力學的のエネルギーに換へる裝置を總稱して**熱機關**と名づける. 上に述べた裝置もこの一種と考へてよい. 熱機關に於ては必ず高熱源と低熱源とを要し何れの場合にも熱が作業物體を經て高熱源から低熱源に移るときにその一部が力學的のエネルギーに變ずる. 例へば蒸氣機關に於ては水が火爐の熱を吸收して水蒸氣となり活塞を動かして後に冷却器に入つて熱を放出し再び水に歸る. その吸收する熱量と放出する熱量との差が活塞を動かして力學的のエネルギーに變ずる.

熱機關が一回の輪業の間になす仕事と高熱源から取る熱のエネルギーとの比を熱機關の**効率**と名づける. 今これを ε とし高熱源と低熱源に於て吸收放出する熱量を $Q_1 Q_2$ とすれば

$$\varepsilon = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \qquad 1$$

効率は機關の構造原理等によつて異なることは勿論であるけれども後に述べる理由によつて決して一定の極限を超えるを得ない. 且つこの極限は高熱源と低熱源との溫度によつて定まり普通は 1 に比して遙に小さい.

一般に輪業が二つの斷熱變化と二つの等溫變化とからなる場合には

これを**カルノーの輪業**と稱する. 上に述べた例は氣體に於けるカルノーの輪業で種々の物體についてもまた同様の輪業が考へられる. カルノーの輪業をなさしめる裝置を熱機關の一種と考へこれを**カルノーの機關**と名づける. カルノーの輪業はまた逆の方向にも行ふことができる. 外部から仕事をなせば作業物質は低熱源から熱をとつて高熱源に熱を與へる. この場合にはカルノーの機關が恰も喞筒の如き作用をなし外部からなされた仕事によつて熱を低温から高温へ移す. この如く全く逆に運轉し得る機關を**可逆機關**と名づける.

70. 熱力學の原則 温度の異なる物體を接觸せしめれば熱は必ず高温の物體から低温のものに流れて決して逆に移動することはない. 傳導による熱の移動のみならず一般に如何なる場合にも熱は高温から低温に向つて流れる. 逆に低温から高温に移らしめるためには必ず外部から相當の仕事をなすを要する. 熱が自然に高温に移り得ないことは種々の實驗と推論とによつて確實と認められる. これを**熱力學の第二則**と名づける. これに對して熱をエネルギーの一態と考へこれにエネルギー不滅の法則を適用することを**熱力學の第一則**とも稱する.

熱が低温から高温に自ら移り得るとすれば熱機關の仕事によつて外に移るエネルギーが摩擦抵抗等のために熱となる場合に再びこれを高熱源に還らしめて熱機關を永久に運轉することができる.(1) このことは必しもエネルギー不滅の法則には矛盾しないけれども諸種の實驗觀測によつて不可能と考へられる. この種の永久運動が不可能なることは卽ち熱力學の第二則が成立つことゝ同一に歸着する.

熱力學の第二則から考察すれば熱の傳導または摩擦による熱の發生の現象は何れも完全には舊に復歸することができない. 傳導によつて低熱源に移つた熱が他に何等の變化をも生ぜずに高熱源に移り得ると

(1) 熱が低温から高温に自ら移り得るとすれば例へば海水の熱を高温に移して高熱源とし蒸氣機關を運轉し石炭を要せずに航海することができる. 蒸氣機關によつてなされた仕事は海水の抵抗に逆つて船を進めるためなる故このために費されたエネルギーは終りに熱として海水に還る. 從つて蒸氣機關の運轉は永久に繼續せられる.

すれば熱力學の第二則に反することいふまでもない. また熱が他に何等の變化をも生ぜずに力學的のエネルギーに變じ得るとすればこれを利用して熱を低温から高温に移し得る. 一般に他に變化を殘すことなしに舊に復し得る變化を**可逆變化**と名づけ(1)然らざるものを**非可逆變化**と名づける.

71. 熱機關の効率 高熱源と低熱源との温度が各々一定した場合には如何なる熱機關の効率も可逆機關の効率より大なるを得ない. 何となれば若し假に或る熱機關 A が可逆機關 B よりも大なる効率を有すると假定すれば A B が同じ仕事をなすときに高熱源より取り低熱源に與へる熱量は A に於て小さく B に於て大きい. A が吸收放出する熱量を Q_1' Q_2' とし B の吸收放出する熱量を Q_1'' Q_2'' とするにこの兩機關を組合はせ A を順に働かすその仕事を以て B を逆に働かしめるとき

$$Q_1'' - Q_1' = Q_2'' - Q_2'$$

なる熱量が低熱源より高熱源に移る. 一回の輪業の後に A と B とは全く舊の狀態に歸り他に何等の變化をも生ずることなしに或る熱量が低熱源から高熱源に移ることとなつて熱力學の第二則に反する. 從つて A の効率は B の効率よりも大なるを得ない.

同様にして同じ熱源の間に働く可逆機關の効率は何れも相等しいことが知られる. 二個の可逆機關の中で一が他のものよりも大なる効率を有すると假定すれば上と全く同じく熱力學の第二則に矛盾する結果を生ずる.

實際の機關に於ては摩擦または熱の傳導輻射等によつて仕事に利用せられる熱量が減少するためにその効率は同じ熱源の間に働く可逆機關の効率よりも著しく小さい. 換言すれば可逆機關の効率は實際に製作し得べき機關の中で最大の効率を有する. 如何なる裝置に依つても熱機關の効率がこの極限を越えることはできない.

前節の完全氣體を作業物質とするカルノーの機關に於て氣體の量を

(1) 69 節の定義も之に包括せられる. 徐々に生じた變化ならば外力を極めて少しく増減せしめて逆に舊に戻すことができる. 順逆兩變化に於ける仕事は消殺し外部に變化を殘さない.

1瓦分子としそのＡＢＣＤに於ける體積を $V_a\ V_b\ V_c\ V_d$ なほ AB と CD とに於ける溫度を $T_1\ T_2$ とすれば機關が高熱源からとる熱量 Q_1 は

$$\int_{V_a}^{V_b} p\,dV = \int_{V_a}^{V_b} \frac{RT_1}{V}\,dV$$

卽ち

$$Q_1 = RT_1 \log \frac{V_b}{V_a} \qquad 2$$

同様に氣體が低熱源に與へる熱量 Q_2 は

$$Q_2 = RT_2 \log \frac{V_c}{V_d} \qquad 3$$

故に

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}\,\frac{\log \frac{V_b}{V_a}}{\log \frac{V_c}{V_d}}$$

また斷熱線に於ては

$$T_1 V_a^{\gamma-1} = T_2 V_d^{\gamma-1} \qquad T_1 V_b^{\gamma-1} = T_2 V_c^{\gamma-1}$$

故に

$$\frac{V_b}{V_a} = \frac{V_c}{V_d}$$

從つて

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \qquad 4$$

よつて效率は1により

$$\varepsilon = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \qquad 5$$

然るに可逆機關は最大の效率を有するゆゑ高熱源Ｓと低熱源Ｒとの間に働く熱機關の效率は5の値を超えることがない. 例へば攝氏0度と100度との間に働く熱機關では最大の效率も僅かに $\frac{100}{373}$ 卽ち 0.268 に過ぎない。

また高熱源と低熱源との溫度が等しければ效率は0である. 從つて如何なる裝置も溫度に高低なき場合には熱機關として作働するを得ない. 等溫可逆輪業に於ける仕事は一巡の後に必ず零に歸る.

二つの熱源の間に働く可逆機關が一回の輪業に於て吸收する熱量と放出する熱量との比は4によつて定まりその機關の構造には關係しない. トムソンによつて定義せられたる**溫度の絕對尺度**に於ては此の事實に基き一の溫度を先づ1度と定め他の溫度は之と1度との間に働く可逆機關が之等の溫度に於て吸收放出する熱量の比によつて測ることゝする. 卽ち一の溫度を絕對尺度に於て θ 度とし之と1度の熱源とに於て吸收放出せられる熱量を $Q\ Q_1$ とすれば

$$\theta = \frac{Q}{Q_1}$$

また絕對尺度に於ける θ 度と1度とを氣體寒暖計の絕對溫度に於て T T_1 とすれば4によつて

$$T = \frac{Q}{Q_1} T_1$$

卽ち θ と T とは比例する. 從つて θ の1度と T の1度とを一致せしめれば兩種の尺度は全く一致し氣體寒暖計は絕對尺度を實際に示すことゝなる. この故に寒暖計の標準として氣體寒暖計を用ひる.

絕對零度に於ては之を低熱源として可逆機關を働かすとき效率が1に達し高熱源より得る熱量が悉く仕事に變ずる. 從つてこの溫度は最低の極限をなすもので之より低い溫度はあり得ない. 種々の測定によればこの絕對零度は攝氏零下

273.18 度

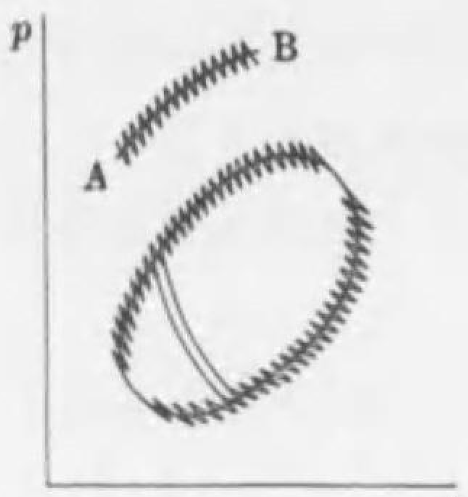
と考られる.

72. 一般の可逆輪業 物體が可逆輪業をなすときその輪業の各部に於て物體に出入する熱量を dQ としそのときの溫度を T とすれば $\frac{dQ}{T}$ の總和は必ず0に等しい. 卽ち

$$\int \frac{dQ}{T} = 0 \qquad 6$$

たゞし物體の吸收する熱を正とし放出する熱量を負とする.

物體のなす可逆變化 AB は次圖に示す如くに無數の微小なる等溫變化と斷熱變化との集合より成るものと考へ得られる. 一般の可逆輪業



第2圖

も無數の斷熱線と等溫線とを以て分割して多數の微小なカルノーの輪業から成ると考へてもよい．この中で任意の1個の輪業を考へ物體が高溫度T_1に於て吸收した熱量をdQ_1とし低溫度T_2に於て放出した熱をdQ_2とすれば4によつて

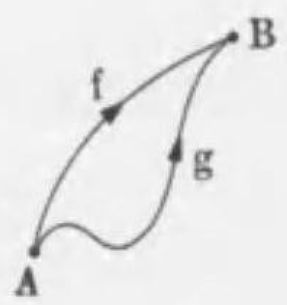
$$\frac{dQ_1}{T_1}+\frac{dQ_2}{T_2}=0$$

この關係はすべての微小な輪業に適用せられる故に總和に於て6が得られる．

物體が平衡の狀態AからBに可逆的に移る場合に

$$S=\int\frac{dQ}{T}$$

の値は途中の變化の徑路に關係しない．何となれば物體が變化の徑路f及びgを經るときのSの値をS_1 S_2とすればAよりfを經てBに至り次にgを經て逆にAへ歸る輪業に於て



第3圖

$$\int\frac{dQ}{T}=S_1-S_2$$

でなければならない．然るに可逆輪業なる故これが零なるを要する．卽ち

$$S_1=S_2$$

故に或る狀態Oを標準に選べばこの狀態から任意の狀態Cまでの可逆變化に於けるSの値はCの狀態にのみ關係し途中の變化の徑路には關係しない．この量をC狀態の**エントロピー**と名づける．但しこゝではOよりCに至る變化を可逆的と考へる．若しこの變化が非可逆的なるときには$\int\frac{dQ}{T}$が勿論その經過によつて異なる．併しかゝる場合にあつてもなほOとCとの間に成立ち得べき可逆變化に於けるSを以てC狀態のエントロピーと定める．エントロピーは物體の熱に關する一狀態を表はすもので物體の現在に於ける狀態にのみ關係する．

物體の或る狀態に於けるエントロピーをSとすれば狀態の微小なる變化に對して

$$dQ=TdS \qquad 7$$

物體の內部のエネルギーをUとすれば可逆變化に於けるエネルギー不滅の原則は

$$dU=TdS-pdV \qquad dS=\frac{dU+pdV}{T} \qquad 8$$

とも表はされる．完全氣體の場合には容易にエントロピーを求めることができる．氣體の1瓦分子をとれば

$$pV=RT \qquad dU=C_v dT$$

從つて

$$dS=C_v\frac{dT}{T}+R\frac{dV}{V} \qquad 9$$

故に

$$S=C_v\log T+R\log V+\sigma$$

σは積分定數でTが1 Vが1なるとき氣體が有するエントロピーに相當する．

斷熱可逆變化に於ては熱の出入がない故にエントロピーは變化しない．從つて斷熱線に沿うてはSが不變である．

73. 物體系のエントロピーの變化　多數の物體からなる一群のエントロピーの和は外部に對して熱の出入のない可逆變化によつては增減しない．この場合に生ずるエントロピーの變化は一に系內の物體の間に熱が移動するがために生ずる．然るに熱が可逆的に一の物體から他の物體に移るにはその兩物體の溫度が相等しくなければならない．從つて一の物體が失ふエントロピーは他の物體の得るエントロピーに等しく全體としてエントロピーの增減を生じない．

物體系のエントロピーは斷熱非可逆變化のために常に增加する．もしdQなる熱が傳導または輻射によつて系內の高溫度T_1から低溫度T_2に移れば恰も系外より可逆的に熱を出入せしめ高溫體が$\frac{dQ}{T_1}$なるエントロピーを失ひ低溫體は$\frac{dQ}{T_2}$なるエントロピーを得たると同一の結果

を生ずる．T_1 は T_2 より大なる故に全體として

$$dQ\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)$$

だけエントロピーが增加する．また摩擦によつて系內の物體に熱を生ずればこの熱量に相當するエントロピーが增加する．故に物體系の中に熱の傳導輻射摩擦等の非可逆變化を生ずるときには物體系のエントロピーが常に增加する．もし變化に關係するあらゆる物體を系內に算へるとすれば斷熱的と云ふ制限は自から充たされる．すべて自然に起る現象は必ず熱の傳導輻射摩擦等の非可逆的現象を伴ふ故に孤獨なる物體系のエントロピーは自然に起る變化のために常に增加する．

74. 自由エネルギー 物體が一の狀態から等溫可逆變化に依つて他の狀態に移るまでになす仕事は中間の徑路に關係しない．假に二個の異なる徑路を經て等溫可逆的に物體が狀態Aから狀態Bに移る場合 W_1 W_2 なる仕事をなすとすれば物體が一の徑路によつてAからBに至り更に他の徑路によつてBからAに歸る場合に W_1-W_2 なる仕事をなすことになる．然るにこの場合の變化は等溫變化なる故[1]にこの仕事は0でなければならない．卽ち W_1 と W_2 とは相等しい．

物體が現在の狀態から等溫可逆變化によつて標準狀態に移る迄に他になし得る仕事の量を物體が現に有する**自由エネルギー**と稱する．例へば壓縮した氣體は等溫可逆的の膨脹によつて仕事をなし得る故に自由エネルギーを有する．併し氣體の有するエネルギーは溫度によつて一定し體積には關係しない[2]．氣體が等溫膨脹によつて仕事をなす場合熱源からエネルギーをとつて仕事をなし自由エネルギーは減少するけれども自から有するエネルギーには變化がない．氣體が眞空の中に膨張すれば仕事をなさないけれどもその自由エネルギーが減少する．物體の有するエネルギーと自由エネルギーとはその意義を異にする．

(1) 71 節參照．

(2) 完全氣體の分子の運動のエネルギーは溫度によつて定まる．分子力がなければ位置のエネルギーを有しない．

物體が狀態Aから狀態Bに移る間になす仕事を W としこの二つの狀態に於て物體の有する內部のエネルギーを $U_a U_b$ とすれば

$$W = U_a - U_b + \int dQ$$

等溫可逆變化に於ては

$$\int TdS = T\int dS$$

從つて

$$\int dQ = T(S_b - S_a)$$

故に

$$W = U_a - U_b - T(S_a - S_b)$$

今

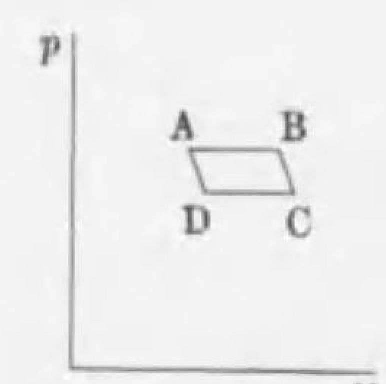
$$F = U - TS \tag{10}$$

と置けば

$$W = F_a - F_b$$

物體が外部に仕事をなさずに等溫可逆的に變化する場合には其の自由エネルギーは增減しない．孤獨なる物體系に於て一定の溫度の下に生ずる非可逆變化では內部エネルギーは一定しエントロピーは常に增加する．從つて自由エネルギーは常に減少する．自由エネルギーが極小に達したときには變化を生ずるを得ない．換言すれば一定溫度に於ける平衡狀態は自由エネルギーの極小に相當する．このことは質點系が靜止して釣合ふ狀態がエネルギーの極小なることに對應し10の右邊の第二項を無視すれば自由エネルギーの極小は內部エネルギーの極小と一致する．

75. 沸騰點融解點と壓力 液體と其の蒸氣とが接觸して平衡にあるとき蒸氣はその溫度に相當する飽和の狀態にある．活塞を備へた圓筒の中に液體と蒸氣とを入れ壓力 p 體積 V につき小さい範圍にカルノーの輪業をなさしめればこの輪業を表はす圖形は ABCD の如く平行四邊形と



第4圖

見做してよい. AB 及び CD は飽和に相當する等溫線なる故に何れも V軸に平行する.

低熱源と高熱源との溫度 T の差を dT としこれに相當する飽和壓 p の差を dp とすればこの輪業の間になされる仕事は

$$dW = dp\,dV$$

氣化熱を L とし液體と氣體との狀態に於ける單位質量の體積を v_l v_g とすれば全體の體積の變化 dV に相當する質量は $\dfrac{dV}{v_g - v_l}$ に等しく液體が高熱源からとる氣化熱は $L\dfrac{dV}{v_g - v_l}$ と表はされる. 等溫膨脹の際に仕事に相當する熱量をも要するけれども氣化熱に比して甚だ小なる故これを省略してもよい. この輪業に於ける効率は

$$\frac{dp\,dV}{L\dfrac{dV}{v_g - v_l}}$$

然るにこの輪業は可逆的なる故に

$$\frac{dT}{T}$$

なるを要する. 上の兩式を比較して

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{(v_g - v_l)T} \qquad 11$$

飽和壓が外壓に等しい場合の溫度は卽ち沸騰點なる故に上記の式は壓力と沸騰點との關係を表はすとも見做される. 如何なる物質に於ても蒸氣の體積は液體としての體積よりも大きい. 故に壓力が增加すれば液體の沸騰點は上昇する.

全く同樣の考察によつて壓力と融解點との關係も求められる. 卽ち融解熱を K とし固體と液體との狀態に於ける單位質量の體積を v_s v_l とすれば

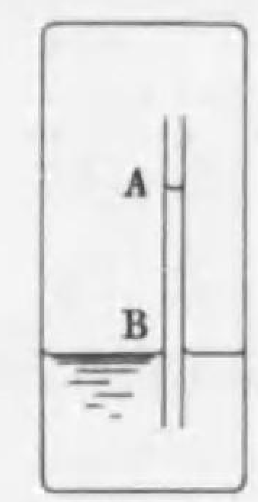
$$\frac{dp}{dT} = \frac{K}{(v_l - v_s)T} \qquad 12$$

融解して體積を增加する物質では壓力が增加するとき融解點が上昇し逆に融解して體積を減ずる物質では壓力が增加するとき融解點は下降する. 卽ち一般に壓力の增加によつて生ずる融解點の變化は物體をし

て體積の小なる狀態を長く保たしむる如き方向に生ずる. 氷に於ては融解によつて體積が減少するため壓力を增せば融解點が下降する. 今 v_s を 1.09竓瓦$^{-1}$ v_l を 1.00竓瓦$^{-1}$ K を 80カロリー瓦$^{-1}$ T を 273 度とし壓力の變化を 1 氣壓として dp に 1.01×10^6ダイン糎^2 と置けば dT として -0.0072 度が得られる. この値は實測とよく一致する.

氷塊に針金を掛けその兩端に錘を吊せば針金が漸次に氷塊の中に埋沒して下方に進行する. この現象を**復氷**と名づける. 針金の下部は壓力が大きく融解點が零度よりも稍ゝ低い. 從つてその部分の氷は周圍から熱をとつて融解し針金の上部に出で壓力が減ずるに伴ひ再び氷結する. この際に放出する熱は針金を經て更に下の氷を融解する. 從つて針金の熱傳導率が大なるほど針金の下方に進むこともまた速い.

76. 液面の曲率と蒸氣壓 液體に接して平衡にある蒸氣の飽和壓は液面の曲率に關係する. 假に密閉した容器の中に液體とその蒸氣とを入れ液中に細管を立てゝその管內の液の高さを h とし蒸氣の密度を σ とするに管內の液面 A に於ける蒸氣の壓力は管外の液面 B に於けるよりも σgh だけ小なるべく從つて飽和壓がこれだけ小なるを要する. 然らざるときには液と蒸氣とが平衡にあり得ない. 液面 A B に於ける飽和壓を p P とすれば



第 5 圖

$$P - p = \sigma gh$$

第 8 章 5 によつて

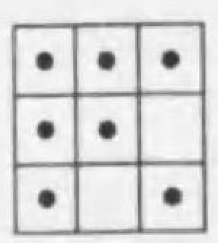
$$P - p = \frac{2\sigma H}{\rho R}$$

この式は蒸氣が平面の液面に接觸するときと曲率半徑 R なる液面に接觸するときとの飽和壓の關係を表はす. 但し液面が凹なるとき R を正とし凸なるときこれを負とする. この關係は空氣の中に浮游する水滴にも適用せられる. 水滴の半徑を r とすれば R に $-r$ と置いて

$$p - P = \frac{2\sigma H}{\rho r}$$

故に水滴と平衡にある蒸氣の飽和壓は滴の小なるほど大きい. もし大小の水滴がある場合には小なる水滴よりは蒸發し大なる水滴に凝結するために小なるものは次第に消失して大なるものに併合せられる. 要するに全體として表面のエネルギーが最小なる狀態に近づく. 固體に於てもまた同樣に粒子の大なるほど安定の度が高い.

77. エントロピーと熱運動 氣體は不變の壓力と溫度とに於て一定の狀態を保つけれども微細に考へれば各個の分子が烈しく運動をなし位置と速度とが絕えず變化することは云ふまでもない. 精細に見れば狀態が甚しく變化するけれども全體として氣體の性質は一定である. 壓力と溫度とによつて示される狀態は分子の分布と運動との概觀に相當し個々の詳細に關係しない. 例へば二個の分子が地位を交換するも全體としての性質は全く異ならない. 精細に見れば各ゝ區別ある無數の狀態が一括して一の**概觀狀態**に屬しその包括の範圍が極めて廣い. 從つてその範圍に於ける**精細狀態**の差異は壓力と溫度とに現はれない.



第6圖

併しながら種ゝの概觀狀態は各ゝその包括する範圍を異にし或るものは廣く或るものは狹い. 例へば圖の如く7個の分子が容器の9個の區劃に分布する場合を考へるに有り得べき種ゝの場合の數9^7の中すべての分子が中央の一劃に集まる回數はたゞ1に過ぎない. 然るに7個の分子が圖の分布を取るときには分子が相互に交代するも同じ分布を生ずる故にこの場合の數は7! 即ち5040の多數に上る. 從つて氣體の分子がその熱運動に伴つて容器の中央に集合する如きことは必しも無しと云ひ難いけれどもその場合は極めて少く實際には殆ど現はれることがない. 之に反して均一に分布する回數は極めて多く實際には殆どこの場合のみが現はれる. この故に氣體は常に容器を充たし外壓がなければ限りなく膨脹する.

また同樣に一物體の中に於てエネルギーが特定の部分のみに配布せらるゝ狀態はその回數が甚だ少く之に比して全體に配布せらるゝ場合は極めて多い. 從つて物體の一部が高溫にあつて他部が低溫にあること

とは特別の場合に限られる. 何等かの事情によつてこの如き狀態を生じても漸次に全體の溫度が平均する. これ即ち熱の傳導に相當する.

一の概觀狀態に含まれる精細狀態の數をその概觀狀態の**出現頻度**と名づける.[1] これが大なる概觀狀態は現はれ易くその小なる概觀狀態は現はれ難い. 偶ゝ特殊の理由によつて頻度の小なる狀態が現はれることがあつても次第に頻度の大なる狀態に移り四圍の狀況の許す限り出現頻度の最大の狀態に達して安定する.

ボルツマンによれば一の狀態のエントロピーSはその出現頻度Wによつて定まり

$$S = k \log W$$

なる關係を有する. 但しkはボルツマンの恒數を表はす. 自然に生ずる非可逆變化に於てエントロピーが增すことは即ち出現頻度の大なる狀態に移ることに外ならない.

(1) 數量的の定義はこゝに述べない.

第十二章　振　動

78. 振動とエネルギー　既に24節に述べた如くに物體は常に位置のエネルギーの減少する方向に移動せんとし位置のエネルギーの極小に於て安定の釣合を保つ. 即ち少しくこの位置を離れゝば直に之に向つて引き戻さんとする力の作用を受ける.

一の物體Pの位置のエネルギーVをx yの函數とし例へば原點に於て極小の値をとるとする. Vを級數に展開して[1]考へるに定數項は原點に於ける位置のエネルギーを表はし物體の運動に關係しない. 從つて之を0にとることができる. またVが原點に於て極小なるべきためには一次の項が0でなければならない. なほx yの小なる範圍のみを考へることゝすれば三次以上の項は省略せられる. 從つて

$$V=\frac{1}{2}(\alpha x^2+\beta y^2+2\gamma xy) \qquad 1$$

よつてVの等位線は原點を中心とする二次曲線になる. 故にその主軸の方向にx y軸をとることゝすれば

$$V=\frac{1}{2}(\mu_1 x^2+\mu_2 y^2) \qquad 2$$

の形に表はされる. Vが原點に於て極小なるためにはμ_1 μ_2が何れも正なるを要する.

物體に作用する力は

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=-\mu_1 x \qquad -\frac{\partial V}{\partial y}=-\mu_2 y$$

物體の質量をmとすれば

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\mu_1 x \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=-\mu_2 y$$

---

(1)　$V=A+ax+by+\frac{1}{2}\alpha x^2+\frac{1}{2}\beta y^2+\gamma xy+\dots\dots$

從つて

$$x=C_1\cos(2\pi\nu_1 t-\varepsilon_1) \qquad y=C_2\cos(2\pi\nu_2 t-\varepsilon_2)$$

但し

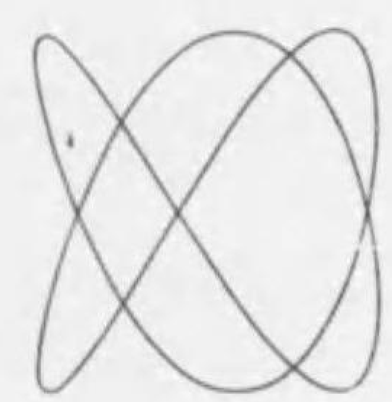
$$\nu_1=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_1}{m}} \qquad \nu_2=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_2}{m}}$$

即ち安定なる釣合の位置の附近に於ける運動は互に直角なる二つの單振動である.

この振動の週期は

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{m}{\mu_1}} \qquad T_2=2\pi\sqrt{\frac{m}{\mu_2}}$$

その徑路は$2C_1$ $2C_2$を二邊とする一の矩形の内にある. T_1 T_2が有理比をなす場合には之等の最小公倍量に當る時間を一期として完全に同一の運動が繰返されて徑路は閉曲線になる. T_1 T_2の比が複雜なるほど徑路の形も複雜になる. 之等の比が有理比をなさない場合は徑路が更に錯綜して閉曲線をなさず矩形の全面を埋める. また特に簡單な場合としてμ_1 μ_2が相等しく從つてν_1 ν_2が相等しいときには次節に述べる如くに楕圓運動を生ずる.



第1圖

79. 單振動の合成　同じ方向に同一の週期を以て生ずる單振動を合成すればまた同じ週期の單振動が得られる. 今

$$x_1=C_1\cos(2\pi\nu t-\varepsilon_1) \qquad x_2=C_2\cos(2\pi\nu t-\varepsilon_2) \qquad \dots\dots$$

なる多數の單振動ありとすれば

$$\begin{aligned}&C_1\cos(2\pi\nu t-\varepsilon_1)+C_2\cos(2\pi\nu t-\varepsilon_2)+\dots\dots\\&=(C_1\cos\varepsilon_1+C_2\cos\varepsilon_2+\dots\dots)\cos 2\pi\nu t\\&\quad+(C_1\sin\varepsilon_1+C_2\sin\varepsilon_2+\dots\dots)\sin 2\pi\nu t\end{aligned}$$

こゝに

$$C_1\cos\varepsilon_1+C_2\cos\varepsilon_2+\dots\dots=C\cos\varepsilon$$
$$C_1\sin\varepsilon_1+C_2\sin\varepsilon_2+\dots\dots=C\sin\varepsilon$$

と置けば

$$x_1+x_2+\dots\dots\dots=C\cos\varepsilon\cos 2\pi\nu t+C\sin\varepsilon\sin 2\pi\nu t$$

即ち

$$x_1+x_2+\dots\dots\dots=C\cos(2\pi\nu t-\varepsilon) \qquad 3$$

が得られる

互に垂直な方向に於ける同じ週期の二つの單振動を合成すれば楕圓運動を生ずる. 今二つの方向の單振動を

$$x=C_1\cos(2\pi\nu t-\varepsilon_1) \qquad y=C_2\cos(2\pi\nu t-\varepsilon_2) \qquad 4$$

とするに

$$x=C_1\cos\varepsilon_1\cos 2\pi\nu t+C_1\sin\varepsilon_1\sin 2\pi\nu t$$

$$y=C_2\cos\varepsilon_2\cos 2\pi\nu t+C_2\sin\varepsilon_2\sin 2\pi\nu t$$

之等より

$$\cos 2\pi\nu t=\frac{C_2 x\sin\varepsilon_2-C_1 y\sin\varepsilon_1}{C_1C_2(\cos\varepsilon_1\sin\varepsilon_2-\sin\varepsilon_1\cos\varepsilon_2)}$$

$$\sin 2\pi\nu t=\frac{C_1 y\cos\varepsilon_1-C_2 x\cos\varepsilon_2}{C_1C_2(\cos\varepsilon_1\sin\varepsilon_2-\sin\varepsilon_1\cos\varepsilon_2)}$$

之等を二乘して加へ合せば

$$(C_2x\sin\varepsilon_2-C_1y\sin\varepsilon_1)^2+(C_1y\cos\varepsilon_1-C_2x\cos\varepsilon_2)^2$$
$$=C_1^2C_2^2(\cos\varepsilon_1\sin\varepsilon_2-\sin\varepsilon_1\cos\varepsilon_2)^2$$

即ち

$$\frac{1}{C_1^2}x^2+\frac{1}{C_2^2}y^2-2\frac{1}{C_1C_2}(\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon_2+\sin\varepsilon_1\sin\varepsilon_2)xy$$
$$=(\cos\varepsilon_1\sin\varepsilon_2-\sin\varepsilon_1\cos\varepsilon_2)^2 \qquad 5$$

この徑路は有限の範圍に止まるべく楕圓なることは明かである.

特別の場合として ε_1 と ε_2 とが等しいときは5の右邊が0となり

$$\left(\frac{x}{C_1}-\frac{y}{C_2}\right)^2=0$$

合成運動は直線の上の單振動になる. また ε_1 と ε_2 との差が $\frac{\pi}{2}$ ならば

$$\frac{x^2}{C_1^2}+\frac{y^2}{C_2^2}=1$$

即ち x y 軸を長軸短軸とする楕圓運動となり更にまた C_1 と C_2 とが等しければ圓運動になる.

フーリエの定理によれば一般に週期的の往復運動は

$$x=C_0+C_1\cos(2\pi\nu t-\varepsilon_1)+C_2\cos(4\pi\nu t-\varepsilon_2)+\dots\dots$$
$$+C_n\cos(2\pi n\nu t-\varepsilon_n)+\dots\dots \qquad 6$$

なる形に表はすことができる. 但し ν は單位時間に對する往復の數を表はし n は整數を表はす. 即ち一般に複雜なる週期的の振動はその振動數の整數倍の振動數を有する多數の單振動の合成と考へ得る. 更に一般の週期的運動も x y z 軸に於ける週期的の振動に分解して考へ得られ從つて多くの單振動の合成と見做してもよい. その中で振動數の最も低いものを**原振動**と云ひその他を**陪振動**と名づける.

80. 減衰振動 物體が振動せんとするとき空氣等の抵抗がある場合には稍々振動の狀況を異にする. 簡單のため直線の上に運動する場合を取り安定の位置よりの距離に比例する力の外に速度に比例する抵抗が作用すると考へる. 物體の質量を m とすれば運動の方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\mu x-k\frac{dx}{dt} \qquad 7$$

こゝに k に附した負號は抵抗が速度と反對の方向に作用することを意味する.

この場合の運動は k の大小によつて趣を異にする. 先づ k^2 が $4m\mu$ より大なる場合には

$$x=Ae^{-\lambda_1 t}+Be^{-\lambda_2 t} \qquad 8$$

が7に適する. 但し

$$\lambda_1=\frac{k}{2m}+\sqrt{\frac{k^2}{4m^2}-\frac{\mu}{m}} \qquad \lambda_2=\frac{k}{2m}-\sqrt{\frac{k^2}{4m^2}-\frac{\mu}{m}} \qquad 9$$

A B は積分定數を表はす. この場合の運動は初めの狀況によつて異なるけれども振動をなさずに漸次に一方から安定の位置に歸る.

次に k^2 が $4m\mu$ より小なる場合には

$$x=e^{-\lambda t}(A\cos 2\pi\nu t+B\sin 2\pi\nu t) \qquad 10$$

が7に適合する. 但し

$$\lambda=\frac{k}{2m} \qquad \nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{m}-\frac{k^2}{4m^2}} \qquad 11$$

また

$$A = C\cos\varepsilon \qquad B = C\sin\varepsilon$$

と置けば

$$x = Ce^{-\lambda t}\cos(2\pi\nu t - \varepsilon) \tag{12}$$

この運動は振幅が次第に減少する單振動と考へられる.[1] これを**減衰振動**と稱する.

[1]
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \gamma^2 x = 0 \tag{a}$$

を充たすため

$$x = Ce^{pt} \tag{b}$$

として上式に代入すれば

$$Cp^2e^{pt} + 2\beta Cpe^{pt} + \gamma^2 Ce^{pt} = 0$$

卽ち p が

$$p^2 + 2\beta p + \gamma = 0$$

を充たせば b が a を充たす. 故に

$$p = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \gamma^2}$$

$\beta^2 > \gamma^2$ のときには p が實である. β が正ならば p は兩根ともに負になる. 之を $-\lambda_1$ $-\lambda_2$ とすればその何れを取つて用ひても b は a を充たす. C は全く任意でよい. a を充たすもの二つを加へたものもまた a を充たすべく從つて

$$x = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t}$$

も a を充たす.

$\beta^2 < \gamma^2$ の場合に $\omega = \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}$ として

$$Ae^{-\beta t}\cos\omega t$$

を a の左邊に代入すれば

$$\begin{aligned}
&A\beta^2e^{-\beta t}\cos\omega t + 2A\beta\omega e^{-\beta t}\sin\omega t - A\omega^2e^{-\beta t}\cos\omega t \\
&-2\beta(A\beta e^{-\beta t}\cos\omega t + A\omega e^{-\beta t}\sin\omega t) + \gamma^2Ae^{-\beta t}\cos\omega t \\
&= Ae^{-\beta t}[\beta^2\cos\omega t + 2\beta\omega\sin\omega t - (\gamma^2 - \beta^2)\cos\omega t \\
&\quad - 2\beta^2\cos\omega t - 2\beta\omega\sin\omega t + \gamma^2\cos\omega t] = 0
\end{aligned}$$

同樣に

$$Be^{-\beta t}\sin\omega t$$

も a を充たす故

$$x = Ae^{-\beta t}\cos\omega t + Be^{-\beta t}\sin\omega t$$

も a を充たす.

尙ほ中間の場合 $\beta^2 = \gamma^2$ のときには最初の場合の λ_1 λ_2 が一致して β になるとともに

$$Dte^{-\beta t}$$

が a を充たすことゝなり

$$x = Ce^{-\beta t} + Dte^{-\beta t}$$

なる解を得る.

この 12 の振動の振幅が次第に減じて物體が安定の位置に靜止するに至ることは抵抗の大なるほど速い. 併しながら k が甚しく大となつて 8 の運動を生ずるに至れば λ_2 が k の增加とともに減少するために物體が安定の位置に歸ることが再び遲くなる. 他の狀況を一定とすれば物體が安定の位置に歸ることは

$$k^2 = 4m\mu \tag{13}$$

の場合に於て最も速い. 故に諸種の計器の指針の如くに速く所定の位置を指す必要あるものには適當の抵抗を附加して振動を避け且つ速に靜止せしめる.

81. 共振 安定の位置にある物體に外部から週期的の力が作用する場合にはその力のために振動を生ずる. 外部から作用する力を假に

$$E\cos 2\pi pt$$

とすれば運動の方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \mu x = E\cos 2\pi pt \tag{14}$$

この式は

$$x = \frac{1}{4\pi^2 m(\nu^2 - p^2)}E\cos 2\pi pt + C\cos(2\pi\nu t - \varepsilon) \tag{15}$$

によつて充たされる.[1] こゝに

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{m}}$$

この第二項は前に述べた如く全く外力に關係のない固有の振動を表はし外力の作用は主として第一項によつて表はされる. 後者を**强制振動**と云ひこれに對して前者を**自由振動**と稱する. 勿論この場合にも自由振動の振幅位相等が振動の始まる際の條件によつて定められる. 强制振動は外力と同じ振動數を以て行はれ振幅は外力の强さに比例し且つ外力の振動數にも關係する. p が ν に近いときに於てこの振幅は著し

[1] **15** を **14** に代入して檢算すれば直に證明せられる. この場合に第二項は **14** の左邊に代入するとき 0 を生ずること旣に知られてをる. たゞ第一項を左邊に代入して右邊を得べきことを檢すればよい.

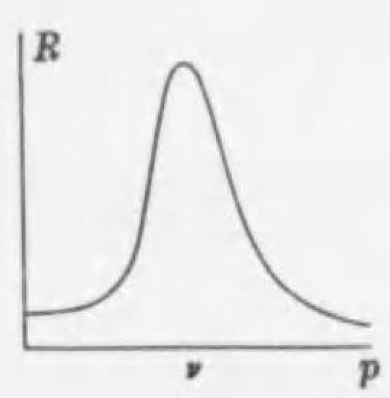
く大きい. 即ち自由振動と同じ振動數の外力に於ては特に烈しく强制振動を生ずる. この現像を**共振**と名づける.

强制振動の位相もまた外力の振動數の大小に關係する. p が ν より小なる場合には ν^2-p^2 が正なる故に外力の方向と變位の方向は常に一致する. 即ち强制振動の位相が外力の位相に一致する. 然るに p が ν より大なる場合には ν^2-p^2 が負となり外力の方向と變位の方向とは反對になる. 即ち强制振動の位相が外力の位相と反對になる.

更に一般には外力とともに前節の如き抵抗も作用する. 此の場合にも强制振動の振動數は外力の振動數に等しい. たゞその振幅と位相とが抵抗の大小に關係する. 前と同樣の計算によればこの場合に强制振動の振幅は

$$R=\frac{E}{4\pi^2 m\sqrt{(\nu^2-p^2)^2+\dfrac{k^2p^2}{4\pi m^2}}} \qquad 16$$

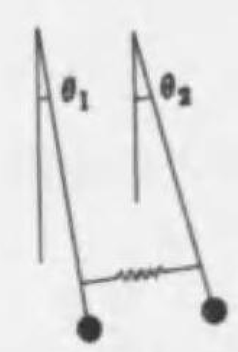
と表はされる. これと p との關係は圖に示す如く p が大略 ν に等しいときに極大になる. その共振の度は抵抗 k の小なるほど著しい.



第 2 圖

これと同時に附隨して生ずる自由振動は前節に述べた如くに漸次に減少する. 從つて相當の時間の後には消失したゞ强制振動のみが殘ることになる.

82. 振動系 例へば二つの同樣の單振子を並列し輕い發條によつて連結して振動せしむるものとし質量を m 長さを l 各振子の傾きを $\theta_1\ \theta_2$ 發條が單位の長さだけ伸縮するとき生ずる力を μ とする. 但しこの發條の自然の長さは振子の間隔に等しく $\theta_1\ \theta_2$ がともに 0 なるとき發條の伸縮が無いとする. $\theta_1\ \theta_2$ が小なる範圍を考へることゝすれば發條の伸長は



第 3 圖

$$l\theta_2-l\theta_1$$

從つて振子 $P_1\,P_2$ に發條が及ぼす力は

$$\mu l(\theta_2-\theta_1)$$

と表はされる. P_1 には重力の外にこの力が右方に作用する故に運動の方程式は[1]

$$ml\frac{d^2\theta_1}{dt^2}=-mg\theta_1+\mu l(\theta_2-\theta_1) \qquad 17$$

同樣に P_2 については

$$ml\frac{d^2\theta_2}{dt^2}=-mg\theta_2-\mu l(\theta_2-\theta_1) \qquad 18$$

此の場合の振動は

$$\begin{aligned}\theta_1&=A\cos(2\pi\nu' t-\varepsilon)+B\cos(2\pi\nu'' t-\delta)\\ \theta_2&=A\cos(2\pi\nu' t-\varepsilon)-B\cos(2\pi\nu'' t-\delta)\end{aligned} \qquad 19$$

と表はされる.[2] 但し

$$\nu'=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \nu''=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}+2\frac{\mu}{m}} \qquad 20$$

$A\ B\ \delta\ \varepsilon$ は積分定數で場合によつて異なる. 假に A と B とが等しく $\delta\ \varepsilon$ がともに零なる場合を取れば

$$\begin{aligned}\theta_1&=2A\cos\pi(\nu''-\nu')t\cos\pi(\nu'+\nu'')t\\ \theta_2&=2A\sin\pi(\nu''-\nu')t\sin\pi(\nu'+\nu'')t\end{aligned} \qquad 21$$

μ が小なる場合は $\nu''-\nu'$ が小さい. 從つて $\cos\pi(\nu''-\nu')t\ \ \sin\pi(\nu''-\nu')t$ の變化は緩かである. 即ち $\theta_1\ \theta_2$ は振動數 $\dfrac{\nu'+\nu''}{2}$ なる單振動の振幅が週

---

(1) 第 3 章 **12** 參照. 發條の質量は省略する.

(2) **17 18** の和を取れば

$$l\frac{d^2}{dt^2}(\theta_1+\theta_2)=-g(\theta_1+\theta_2)$$

故に

$$\theta_1+\theta_2=C\cos(2\pi\nu' t-\varepsilon)$$

また **17 18** の差を取れば

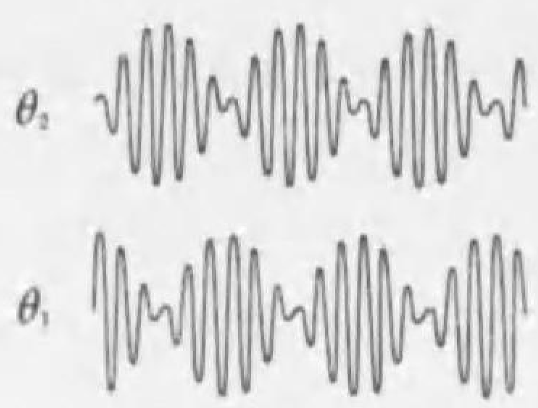
$$l\frac{d^2}{dt^2}(\theta_1-\theta_2)=-g(\theta_1-\theta_2)-2\frac{\mu l}{m}(\theta_1-\theta_2)$$

故に

$$\theta_1-\theta_2=D\cos(2\pi\nu'' t-\delta)$$

$C\ D$ を $2A\ 2B$ として **19** が得られる.

期的に變化する如くに見做してもよい. その狀況は圖に示す如く始めはP_1のみが振動し漸次にその振動がP_2に移るとともにP_1は靜止し次には再び振動がP_2からP_1に歸り絶えず交互に振動する.



第4圖

19によれば二つの振子の振動は振動數ν'及びν''なる二つの單振動より成り

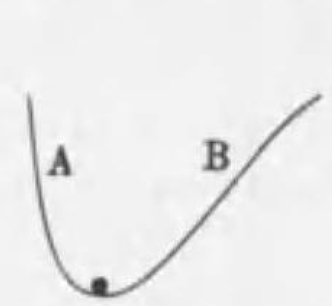
$$\theta_1 = +A\cos(2\pi\nu' t - \varepsilon) \qquad \theta_2 = +A\cos(2\pi\nu' t - \varepsilon) \qquad 22$$

$$\theta_1 = +B\cos(2\pi\nu'' t - \delta) \qquad \theta_2 = -B\cos(2\pi\nu'' t - \delta) \qquad 23$$

の重複と見做してもよい. 22 23の各振動に於てはP_1 P_2が一定の關係を以て一齊に振動する. 一方の振動に於ては兩振子が平行に振動し他方の振動に於ては左右對稱に振動する. この兩種の振動を**標準振動**と名づける. 22の振動に對して發條は關係なく振動數ν'は振子が各個獨立に振動するときに等しい. また23の振動に於ては發條が重力を助ける如くに作用するために振動數が前の場合よりも大きい.

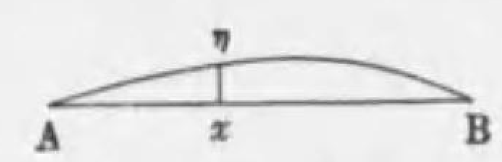
一般に複雜なる振動系の振動も多數の標準振動に分解して考へることができる. 一個の標準振動に於ては各部分が一齊に振動し其の振幅も一定の比例を保つ.

然しながらこの章の理論は主として振幅の小なる場合に適用せられる. 振幅が大となれば1に於ても三次以上の項を考慮しなければならない. その場合には更に複雜な振動を生ずる. 例へば右圖の如き凹處に於て物體が左右に振動するとき振幅が小なる間は最低點の左右に單振動をなすと考へられるけれども振幅が大となつてA Bの間に振動する場合には單振動をなさない. 振動數も振幅の小なる場合と異なり且つ振動の中點が右方に移動する. 併しこの場合の振動も週期的なる故に79節に述べた如くに多數の單振動に分解せられる. 卽ち振幅が增すに伴つて振動數が變化し中點が移動するとともに陪振動が現はれることになる.



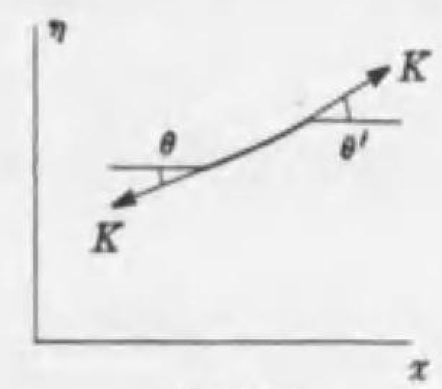
第5圖

83. 弦の振動 絲を左右に强く張つてこれを橫に撥けば絲は圖の如くに振動する. その振動はもとより始めの狀況によるけれども一般に次の如き法則に從ふ.



第6圖

絲の左端Aよりの距離をxとしその部分の變位をηと表はせばηはxの函數をなしこの函數によつて絲の形が定まる. 然るに絲の形は時刻tとともに變化する故にηはxとtとの函數でなければならない.



第7圖

今この絲の中に長さdxなる微片を取つて考へるにその左右から絲の張力Kが作用する. 絲の振動が甚しく大なる場合を除いてはこの張力を殆んど一定と見做すことができる. この微片の兩端に於ける傾きの角をθ θ'とすれば左より作用する力は下に向つて$K\sin\theta$なる分力を有し右より作用する力は上に向つて$K\sin\theta'$なる分力を有し從つてこの微片は上に向つて$K(\sin\theta' - \sin\theta)$だけの力を受ける. θ θ'が小なる場合を考へれば$\sin\theta$を$\dfrac{\partial\eta}{\partial x}$と置き得べくこの微片の兩端に於けるその差は$\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2}dx$になる. 卽ち上に向ふ分力は

$$K\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}dx$$

と表はされる.

この力は微片の質量と加速度との積に等しい. 絲の單位の長さに對する質量をμとすればこの微片の質量はμdxなる故

$$\mu\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}dx = K\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}dx$$

今

$$V^2 = \frac{K}{\mu} \qquad 24$$

と置けば

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - V^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = 0 \qquad 25$$

種々の場合に現はれる絃の運動は總てこの式に從つて生ずる.

絃の標準振動を求めるために假に各部分の振動を

$$\eta = Y\cos 2\pi\nu t \qquad 26$$

と置き振幅 Y が x によつて異なると考へれば

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = -4\pi^2\nu^2 Y\cos 2\pi\nu t \qquad \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = \frac{d^2Y}{dx^2}\cos 2\pi\nu t$$

25 によつて

$$\frac{d^2Y}{dx^2} + \frac{4\pi^2\nu^2}{V^2}Y = 0$$

從つて Y と x との關係は

$$Y = A\cos\frac{2\pi\nu}{V}x + B\sin\frac{2\pi\nu}{V}x \qquad 27$$

の形に表はされる.

然るに絃の左端が固定せられたるため x を 0 とすれば Y は 0 なるべく從つて第一項は現はれ得ない. 即ち A が 0 なるを要する. 且つまた絃の長さを l とすれば x が l なる位置即ち右端もまた固定せられたる故 Y は 0 でなければならない. 從つて第二項に於て $\frac{2\pi\nu}{V}l$ が π またはその整數倍なるを要する. 即ち

$$\frac{2\pi\nu}{V}l = m\pi$$

m は 1 2 ...... 等の整數を表はす. 從つて振動數は

$$\nu = m\frac{V}{2l} \qquad 28$$

となり各點の振動は

$$\eta = B\sin m\pi\frac{x}{l}\cos m\pi\frac{V}{l}t \qquad 29$$

によつて定められる.

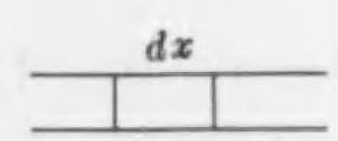
絃は常に正弦曲線をなして振動し m が 1 なるとき即ち原振動に於ては全體が 1 區となつて振動し m が 2 3 ...... 等なるとき即ち陪振動に於ては絃が 2 區 3 區 ...... 等に分れ各區は交互に反對の振動をする. その各區の境を**節**と云ひその中央を**腹**と名づける. 原振動の振動數は最も小さく陪振動の振動數はその整數倍に當る. 24 28 の兩式によつて

$$\nu = m\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{K}{\mu}} \qquad 30$$

即ち振動數は絃が輕く張力の強いときに大きく絃が重く張力が弱いとき小さい.

なほ一般の場合に生ずる振動は甚だ複雜であるけれども總て上記の標準振動が種々の振幅と位相とを以て重なり合ふ結果として考へることができる.

84. 彈性柱の振動 棒の一端を固定して他端を長さに沿ふて摩擦すれば伸縮の振動を生ずる. 左端より x の距離にある部分が伸縮によつてなす變位を ξ とすれば ξ は x の函數をなしこれによつて棒の伸縮の狀態が定まる. 今この棒の中に長さ dx なる微片を考へその兩端に於ける伸長を ε ε' とし棒の横斷面積を S ヤングの彈性率を E とすればこの微片は $ES\varepsilon$ の力を以て左に引かれ $ES\varepsilon'$ なる力によつて右に引かれる. 故にこの微片はその差 $ES(\varepsilon'-\varepsilon)$ なる力を以て右に引かれることになる. 伸長 ε は $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ と[1]置き得べく微片の兩端に於けるその差は $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx$ と表はされる. 即ちこの微片は



第 8 圖

$$ES\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx$$

なる力を以て右に引かれる.

この力は微片の質量と加速度との積に等しい. この棒の密度を ρ とすれば微片の質量は $\rho S dx$ なる故に

$$\rho S\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}dx = ES\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx$$

今

$$V^2 = \frac{E}{\rho} \qquad 31$$

とすれば

(1) $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ は單位の長さに對する兩端の變位の差を意味し即ち伸縮の率を表はす.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - V^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \qquad 32$$

この式は前節の25と全く同形なる故に振動の狀況もまた弦の振動と殆ど同じくたゞ變位が絲に於ては横に生じ棒に於ては縱に生ずるの相違あるに過ぎない.

棒の長さを l としその兩端が固定せられた場合を考へれば各點の振動が

$$\xi = B \sin m\pi \frac{x}{l} \cos m\pi \frac{V}{l} t \qquad 33$$

振動數は

$$\nu = m \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad 34$$

この場合に棒の伸縮は

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -m\pi \frac{B}{l} \cos m\pi \frac{x}{l} \cos m\pi \frac{V}{l} t$$

m が奇數なるとき x に $\frac{l}{2}$ と置けばこの右邊は 0 となる. 即ち棒の中央に於ては伸縮がなくたゞ全體として左右に動くに過ぎない. 從つてこの部分には張力壓力がなく中央の斷面を考へればその左右は相互に作用を及ぼさない. よつて棒をこの點に於て切斷するも振動に影響がない.

棒の左端を固定し右端を自由にした場合の振動は上に述べた場合の一半の振動に相當して左端は節となり右端は腹になる. 棒の長さを l とすれば 33 34 の l に $2l$ と置いて

$$\xi = B \sin m\pi \frac{x}{2l} \cos m\pi \frac{V}{2l} t \qquad 35$$

$$\nu = m \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad 36$$

但し m は奇數である. 原振動に於ては全體が前の場合の半區に相當する振動をなし陪振動に於ては $1\frac{1}{2}$ 區 $2\frac{1}{2}$ 區 ...... 等に相當する振動をする. 振動數は原振動の 3 5 ...... 倍に等しい.

棒の側面を急に打てば彎曲して横に振動する. この場合にも兩端の

第 9 圖

狀況によつて種々の標準振動を生ずる. 例へば兩端が全く自由なるときには圖 a の如く振動し一端が固定せられ他端の自由なるときには圖 b の如くに振動する.(1) 計算の結果によれば長さ l なる棒の振動數は

$$\nu = \frac{m^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{S\rho}} \qquad 37$$

と表はされる. 但し I は42節に述べたる如き横斷面の慣性能率を表はし m は標準振動の種類により a の場合には

4.730　　7.853　　10.996　　......

b の場合には

1.875　　4.694　　7.855　　......

等の値を取る. 棒が短く輕く撓み難いほど振動數が大きい. またこの場合には陪振動の振動數が原振動の振動數と整數の比をなさない.

音叉の振動は兩端の自由なる棒の振動に屬しその陪振動は一般に生じ難く且つ抵抗等によつて消滅し易いために多くの場合には原振動のみが現はれる.

85. 流體柱の振動 流體柱の振動には密度と壓力との增減を棒の場合の伸縮と歪力との如くに考へて全く同樣の結果が得られる. $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ は單位體積に對する膨脹を表はす故これに伴ふ壓力の減少は $k\frac{\partial \xi}{\partial x}$ と表

(1) この場合の横の變位を η とすれば振動は

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} = 0$$

の式に從つて生ずる. 標準振動は

$$\eta = \left(A \cosh \frac{mx}{l} + B \sinh \frac{mx}{l} + C \cos \frac{mx}{l} + D \sin \frac{mx}{l} \right) \cos 2\pi\nu t$$

と表はされる. 但し

$$m^2 = 2\pi\nu l^2 \sqrt{\frac{S\rho}{EI}}$$

A B C D の比と ν とが棒の兩端の狀況で定まる.

はされる．但しkは體積の彈性率である．從つて橫斷面を隔てゝ左右が作用する力は$kS\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$だけ減少する．これを棒の場合と比較すれば直に明かなる如くこの場合にも32が成立ち

$$V^2=\frac{k}{\rho} \qquad 38$$

とならなければならない

此の如き振動は一般に極めて迅速に行はれる．故にこれを斷熱變化と見做してもよい．氣體の斷熱變化に於ては壓力pと體積vとの關係が

$$p v^{\gamma}=C$$

で表はされる．從つて

$$v\frac{dp}{dv}=-\gamma p$$

體積の彈性率は

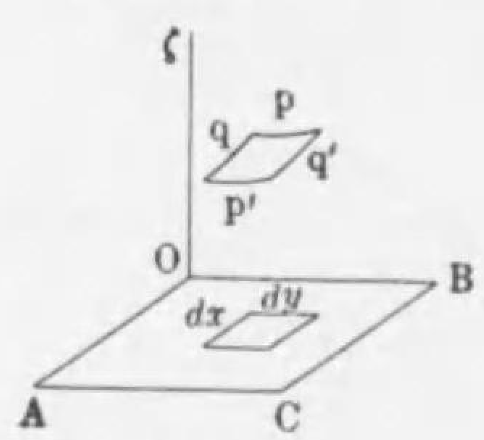
$$-\frac{dp}{\dfrac{dv}{v}}=\gamma p$$

なる故に

$$V^2=\frac{\gamma p}{\rho} \qquad 39$$

管の端が閉ちた場合には節を生じ開いた場合には腹を生ずる．但し實際には管外の流體のために管口が正しく腹に相當しない．その影響は恰も腹が管口よりも少しく外に生ずる如きことになる．半徑rの圓管に於ては腹が約$0.6r$だけ外にある如き振動を生ずる．

86.　膜の振動　膜を平面に張つてこれを打てば振動を生ずる．この平面の中にx y軸を取り面に垂直なる變位をζと表はし張力は各方向に一様とし單位の幅に對する强さをTとする．膜の中にdx dyなる矩形の部分を考へればこの相對する二邊p p′にその隣より作用する力の上方に向ふ分力は83節の場合と同様に



第10圖

$$T dy \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} dx$$

で表はされ他の二邊q q′に作用する力は

$$T dx \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} dy$$

で表はされる．またこの膜の單位面積の質量をσとすればこの矩形の質量は$\sigma dx dy$なる故

$$\sigma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} dx dy = T\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} dx dy + T\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} dx dy$$

故に

$$V^2=\frac{T}{\sigma} \qquad 40$$

と置けば

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}-V^2\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)=0 \qquad 41$$

膜の振動はこの式に從つて行はれる．

今この膜が兩邊a bなる矩形OACBの周邊に於て固定せられる場合にはxが0またはaのとき或はyが0またはbのときζが0なるを要する．この場合に

$$\zeta = A\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\cos 2\pi\nu t \qquad 42$$

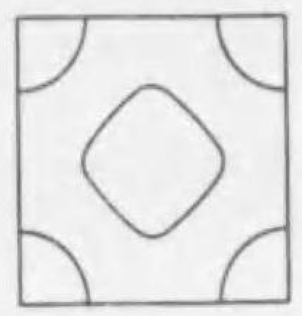
と置いてm nを整數としまたνを

$$\nu=\frac{V}{2}\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}} \qquad 43$$

とすればζが41に適合することは容易に檢證せられる．

m nがともに1なる場合には矩形全體が一區として凸凹の振動をする．一般の場合にはm n個の小矩形に分れて振動し境界線は節となり各區は交互に相反する方向に振動する．振動數は膜が輕く張力の强いほど大きい．

a bが整數比をなすときにはm nの異なる二つの標準振動が同一の振動數を有する場合を生ずる．例へばa bが等しいときにはmとnと



第 11 圖

を交換した二つの標準振動が同じ振動數を有し之等が一致した位相を以て重なり合ふときは兩振動が消し合ふ處に節を生じ膜は例へば圖の如く複雜なる區劃を作つて振動する.

同樣にして圓形の膜の周圍が固定せられたる場合の振動も計算せられる. 標準振動は

$$\zeta = AJ_m\left(\frac{2\pi}{V}\nu r\right)\cos m\theta\cos 2\pi\nu t \qquad 41$$

の如く表はされる. m は 0 1 2...... 等の整數を表はし ν は周邊に於て ζ が 0 となるべきことによつて定められる.

この場合にも種々の標準振動を生ずる. 振動數の最小のものに於ては膜が一區となつて振動し ν は膜の半徑 a に對し

$$\nu = 0.7655\frac{V}{2a}$$

第 12 圖

で定められる. 一般の場合には若干の等角をなす直徑と同心圓とを節として多數の區域に分れて振動する.

(1) $J_m\left(\frac{2\pi}{V}\nu r\right)$ は中心よりの距離 r の或る函數を表はし

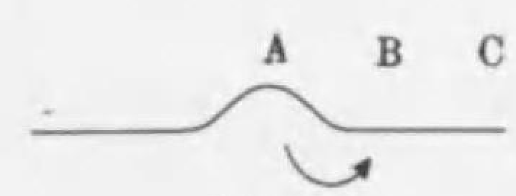
$$J_m(x) = \frac{x^m}{2^m m!}\left(1 - \frac{x^2}{2(2m+2)} + \frac{x^4}{2(2m+2)4(2m+4)} - \cdots\cdots\right)$$

で定義せられる.

第十三章　波　　動

87.　波動　靜止したる水面の一部を攪亂すれば圓形の波紋が四方に擴がりまた綱を張つてその一端を急に動かせばその運動が漸次に他端に向つて傳はる. これ等の場合に始め攪亂によつて生じた運動はこれに隣る部分の運動を誘起しその運動はまた次に傳はり斯くして一點に生じた運動が次第に遠くに傳播する. この如くに一の部分の運動が他の部分に傳はる現象を一般に**波動**と名づけ波動を傳へるものを**媒質**と名づける. 波動傳播の狀況は場合によつて異なるけれども何れの場合にもたゞ運動の狀態が傳播するに止まり媒質の各部は僅少の範圍を往復するに過ぎない.

媒質の一部の運動がこれに隣る部分の運動を誘起することは勿論これ等の間の力の作用に基づく. 水面に高低があれば重力の作用によつて再び平均を得んとする. 例へばAに於て水面が高ければこの部分は降りこれに隣るBの部分が昇つて矢の如くに水の運動を生ずる. これ等が平均を得た時にもなほ慣性によつて運動が續くためBがAに代つて隆起する. 次で同樣のことがBCの間に生じ高低が次第に移動する. また綱の一部を變位せしめて圖の如き形として放てばAなる部分は綱の張力によつて再び舊の位置に歸らんとしこれに隣るBはAに引かれて上に動き更にBCの間に同樣の關係を生じて綱の變形が漸次に移動する.



第 1 圖

第 2 圖

媒質の各部の運動が波動の傳播する方向と一致する場合には**縱波**と名づけこれに反して各部の運動が波動の傳播する方向に直角なる場合には**橫波**と名づける. 彈性體の表面の一部

に力を加へて急に押しまたは引けば壓縮または伸長が逐次に隣の部分に傳はつて波動を生ずる. この波動は縱波である. 彈性體の表面に平行に力を加へて辷りを生ぜしめれば逐次に隣の部分に辷りを起して波動を生ずる. この波動は横波に屬する. 氣體と液體とは體積の變化に對してのみ彈性を有し辷りの變形に對しては彈性を有しないためにこれ等の中では縱波は生じ得るけれども横波は生じ得ない. 併し固體に於てはこの兩種の波が現れる.

媒質の一部の變位のためにこれに隣る部分に作用する力は媒質の性質によつて種々なること云ふまでもない. 水面が水平ならんとすることは重力と表面張力とに因り綱が直線ならんとすることは張力に基づく. また彈性體が舊の狀態に歸ることは歪力の作用による. これ等の力が強い場合には一部分の變位が隣の部分の運動を誘起すること速く從つて波動の傳播が速い. これに反してこの力が弱ければ波動の傳播は遅い. また運動が誘起せらるゝことは媒質の質量が大なるほど遅く質量が小なるほど速い. 卽ち波動の傳播は媒質の密度が小なるほど速く密度の大なるほど遅い.

媒質の一部が週期的に振動する場合には波動が規則正しい列となつて傳播しこれに伴つて各部分も同じ週期の振動をする. その週期を波動の週期と云ひその振動數を波動の振動數と稱する. 多くの場合には媒質の各部の振動が振源の振動と相似に行はれ振源が單振動をなすとき各部にもまた單振動を生ずる. このとき振動の位相が一週期だけ異なる二點の間隔を**波長**と云ひ單位の長さに含まるゝ波長の數を**波數**とも名づける. 一週期の間に波形は一波長だけ前進する故に週期 T 振動數 ν 波長 λ 及び傳播速度 V の間には

$$\lambda = VT \qquad V = \nu\lambda$$

の關係がなければならない. 傳播速度が波長に關係しない場合には波長が振動數に逆比例する.

波動が四方に傳播する場合には同じ位相をなす點が連續して作す曲線または曲面を**等相線等相面**または**波面**と名づける. 水面の一部から

擴がる波に於ては等相線が圓になる. 等方性の媒質に於ては等相線または等相面が振源を中心とする圓または球になる. 併し異方性の媒質に於ては複雜な曲線または曲面をなすのを常とする.

特殊の場合として波面が平面をなして傳播する場合にはこれを**平面波**と稱する. 一の振源から四方に擴がる波動に於ても振源から遠い點に於て波面の小部分を取つて考へる場合には殆どこれを平面波と見做してもよい.

88. 單波 前章に述べた如くに弦の運動は

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - V^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = 0 \qquad 1$$

なる式によつて表はされ場合によつて種々の運動を生ずる. 今その一の場合として

$$\eta = F(x - Vt) \qquad 2$$

と置けばこれが函數 F の如何に拘らず 1 に適することが次の如くして檢證せられる.

假に

$$x - Vt = \xi$$

と置いて考へれば[1]

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{dF}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} = F' \qquad \frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{dF}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} = -VF'$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = \frac{dF'}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} = F'' \qquad \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = -V\frac{dF'}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} = V^2F''$$

よつて 2 は 1 に適合する.

2 によつて表はされる運動を考へるに時刻 t が 0 なるときには絲の形が

$$\eta = F(x)$$

と表はされる. これと時刻 t に於ける形

$$\eta = F(x - Vt)$$

を較べれば後者に於て x なる位置に現はれる變位は前者に於て $x-Vt$

(1) $F' = \dfrac{dF}{d\xi} \qquad F'' = \dfrac{d^2F}{d\xi^2}$

なる位置に於ける變位と等しく逆に前者に於て x なる位置に現はれた變位は後者に於て $x+Vt$ に於ける變位に等しい. 即ち後者は前者を Vt だけ x の正の方向に辷らせた形を有する. 換言すれば弦の各點の變位は V なる速度を以て移動する. 從つて波形は變ることなく一定の速さを以て x の正の方向に傳播する. 同樣にして

$$\eta=F(x+Vt) \qquad 3$$

なる運動も 1 に適合することが知られる. これが表はすものは不變の形を以て x の負の方向に傳はる波動である.

前章32によれば棒の伸縮の運動もまた 1 の形に表はされる故この場合にも 2 3 の兩式によつて表はされる波動が生ずる. この場合には變位が縱に生ずる故に棒は常に直線をなすけれどもその伸縮が不變の狀況を保ちながら速度 V を以て傳播する

2 の特別の場合として

$$\eta=A\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x-Vt)$$

を考へれば波形は正弦曲線をなし各部の運動は單振動で A はその振幅を表はす. x が λ だけ增減すれば η は再び舊の値に歸る. 故に λ は波長を表はす. また波數 $\frac{1}{\lambda}$ を κ とし振動數 $\frac{V}{\lambda}$ を ν とすれば

$$\eta=A\cos 2\pi(\nu t-\kappa x) \qquad 4$$

この種の波動を**單波**と稱へる. 單波は波動の中で最も簡單に且つ種々の場合に屢々現れる. また一般に複雜なる波動をも單波の集合として考へることができる.

二つの波動が同時に一點に達するとき兩者による變位が同じ方向に生ずれば兩波は互に助け合ひ兩波の變位が反對の方向に生ずれば之等が互に消し合ふ. これを波動の**干涉**と名づける. 振動數の等しい二つの波動が同じ位相を以て到着すれば助け合ひ反對の位相を以て到着すれば互に消し合ふ. 振動數が少しく異なる二つの波動に於ては兩者の位相が漸次に差を生じて半週期となれば互に消し合ひ更に一週期となれば再び助け合ひ交互に變化する.

89. 定常波 4 と同じ波形を以て逆の方向に傳播する單波

$$\eta=A\cos 2\pi(\nu t+\kappa x) \qquad 5$$

が單波 4 と重なり合ふときに生ずる變位は

$$\eta=A\cos 2\pi(\nu t-\kappa x)+A\cos 2\pi(\nu t+\kappa x)$$

即ち

$$\eta=2A\cos 2\pi\kappa x\cos 2\pi\nu t$$

原點を $\frac{1}{4}$ 波長だけ左に移して考へれば

$$\eta=2A\sin 2\pi\kappa x\cos 2\pi\nu t \qquad 6$$

この式は前章に於ける29と全く一致する. 即ち振動はこの如き二つの波動の重なり合ふ結果と見做すことができる. 斯く考へた場合にはこの振動を**定常波**と名づける.

定常波に於ては相隣る二節の間の間隔が $\frac{1}{2\kappa}$ 即ち $\frac{\lambda}{2}$ に等しい. 實驗によつてこの二節の間の距離 l と振動數 ν とを測れば波動の波長と振動數との關係より傳播の速度が知られる. 例へば前章29 33の場合の原振動をとれば

$$V=2l\nu \qquad 7$$

によつて V が計算せられる.

固體に於ては既に述べた如くに縱波と橫波とを生じその傳播速度は縱波では $\sqrt{\frac{e}{\rho}}$ 橫波では $\sqrt{\frac{n}{\rho}}$ で表はされる.[(1)] この縱波は棒を傳はる縱波と少しく性質を異にする. 棒を縱波が傳はる場合には圖に示す如く縱の伸縮と同時に橫の縮伸を伴ひ伸縮の彈性がヤングの彈性率 E によつて定まる. 然るに棒の太さを增せば橫よりの伸縮の自由が次第に困難となり棒が甚しく太くなれば橫の伸縮が殆ど生じ得ない. 從つて伸縮は彈性率 e に依つて定まる.[(2)] E は e に比して小なる故に棒を縱波が傳はる速度は同質の大塊の中に於ける縱波の速度よりも小さい.

第 3 圖

(1) 95 節表參照.

(2) 40 節參照.

大地の場合にも表面の近くに於ては表面よりの伸縮があり得るために波動の傳播狀況が內部と少しく異なりそのため特に表面を傳はる波動が現はれる．之を**表面波**と稱する．地震は地殼の急劇なる變動のために生じ縱波橫波及び表面波となつて傳播する．その中で縱波は最も速く橫波が之に次ぎ表面波は最も遲く傳播する．また縱波と橫波は一點より立體的に擴がるため後節に述べる如くに震源を遠ざかるに從ひ振幅が急に減少するけれども表面波は平面的に擴がるため振幅の減少の度が少い．

液體の中の縱波の速度は體積の彈性率kによつて$\sqrt{\frac{k}{\rho}}$と表はされる．氣體の中の縱波の速度は$\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$(1)で表はされ一定の溫度に於ては$p$と$\rho$とが比例するため速度は壓力に關係しないけれども溫度が變るときには$\frac{p}{\rho}$が絕對溫度に比例する．從つて速度は絕對溫度の平方根に比例する．

90.　ホイヘンスの原理　波面が如何に進行するかを見るにはホイヘンスの作圖法を最も便とする．或る瞬間の波面をAとしこれよりτなる時間を經た後の波面を求めるには傳播速度Vと時間τとの積$V\tau$を半徑としてA上の諸點の周りに球を畫きその前面に多數の球が重複して形成する面Bを作ればこれが卽ち所要の波面を示す．

凡て波動は逐次に傳播し各部分の振動がこれに隣る部分の振動の原因をなす故に波面の上の各點を各々振源と考へることもできる．ホイヘンスの作圖法は波面Aの上の各點が各々振源となり波面Bをこれ等より生じた微小なる波の合成と考へることに相當する．この微小なる波を**副波**と名づける．圖に示す如くにAの正面には多數の副波が重複するため新しく波Bが形成せられる．

第4圖

媒質が一樣でなく波動の傳播速度が處によつて異なる場合にも極めて小さい範圍では媒質を一樣と考へることができる．時間τを極めて小さく考へればこの作圖法を用ひてよい．副波は處によつて半徑を異にする故に新しく形成せられる波面は舊の波面と平行でなく傳播速度の小なる側に轉向する．海岸に寄せる波は海の淺いほど速度が小さいために初めの方向の如何に關らず漸次に海岸に平行に近づく．

(1) $k=\gamma p$　85節參照．

91.　波動の反射屈折　いま壓縮が左より右に棒を傳はる場合をとるに一の部分Bは左に隣る部分Aより壓されて右方に動き次で右に隣る部分Cを壓して之を動かしそのときの反作用によつて運動を失ひ再び靜止に歸る．Cはまた同樣にしてBより得た運動をDに傳へて後に靜止する．伸長が傳はるときにもまた之と同樣に一の部分は左に隣る部分より引かれて動き次で右に隣る部分を動かし然る後に靜止する．

然るに今この壓縮が右端に達した場合を考へるにこの部分Nは右に隣る部分がないためにBC等と狀況を異にする．Nは運動を右に傳へることがないために慣性によつて運動をつゞけその結果として左に隣る部分Mを右方に引いて伸長を生ぜしめる．斯く生ずる伸長はこの右端から左に向つて傳播する．左より伸長が來るときには同樣にして左に歸る壓縮を生ずる．

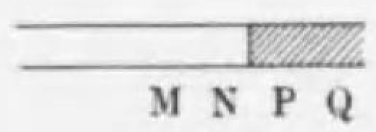
第5圖

これ等の場合に於て反射する波の變位は入射する波の變位と常に同じ方向に生じ右に向ふ變位は同じく右に向ふ變位として反射せられ左に向ふ變位は同じく左に向ふ變位として反射せられる．

若しまたこの棒の右端が堅く固定せられ運動をなし得ない場合には之と反對の結果が生ずる．卽ち壓縮がNの部分に達するとき右端が動き得ないためにNは再び左に隣るMを壓しそのためにまた壓縮が左方に向つて傳播する．左より伸長が來る場合にも同樣にして左に歸る伸長を生ずる．このとき反射波の變位は常に入射波の變位と反對に生じ右に向ふ變位は左に向ふ變位として反射せられ左に向ふ變位は右に向ふ變位となつて反射せられる．若し左方から傳はる波が週期的の波動なる場合には再び週期的の波動として反射せられるけれども固定端に

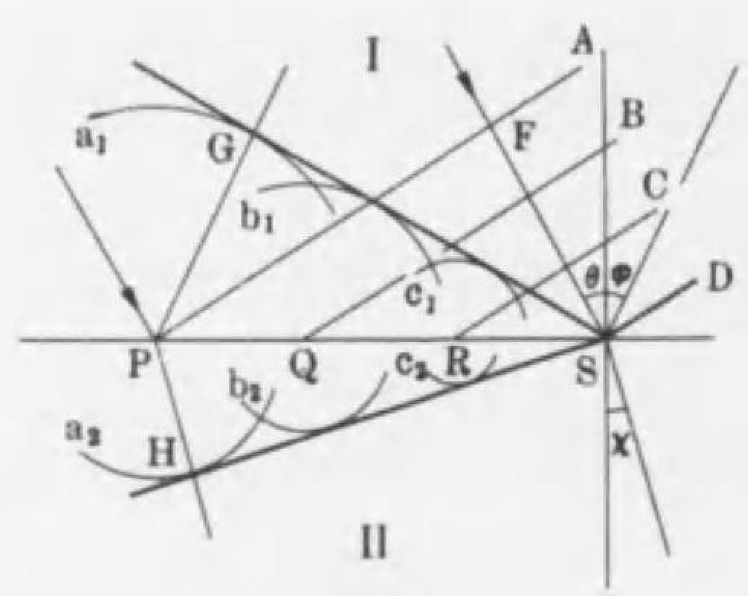
於ては變位の方向が逆變する. 單波の反射に於ては恰も位相に半週期の差を生ずる. このことは棒を傳はる縱波に限らない. 弦を傳はる橫波に於ても弦の端の固定點に於て反射せしめれば變位は逆になり山は谷となり谷は山となつて反射せられる.

上記の棒の右端が更に異種の棒に接續した場合には狀況がまた少しく複雜になる. 併しNに隣るPより右の部分の密度と彈性率が小さく卽ち輕く伸縮し易いときにはNの運動が恰も右方に於て自由なる場合の如くに生ずる. これに反してPより右の部分の密度と彈性率が大きく卽ち重く伸縮し難いときにはNの運動が恰も右方に於て固定せられた場合の如くに生ずる. 從つてこれに相當した反射波が左方に歸ると同時に波の一部は右方にも進入する.



第 6 圖

二つの媒質が平面に於て境せられその上に DS なる波が FS の方向に入射すると考へる. この波が AP の位置にあるときP點から出る副波は媒質 I の中では a_1 の如く媒質 II の中では a_2 の如く擴がる. τ なる時間を經て入射波が AP の位置から DS の位置に進むとすれば a_1 の半徑は媒質 I の傳播速度 V_1 と τ との積 $V_1\tau$ に等しく從つてまた FS に等しい. また a_2 の半徑は媒質 II の傳播速度 V_2 と τ の積 $V_2\tau$ である. 波面が BQ 或は CR の位置にあるときに QR から出る副波は b_1 b_2 c_1 c_2 の如くに重なり合つて反射波 SG と屈折波 SH とを形成する.



第 7 圖

圖によつて明かなる如くに SG と PF とが SP に對してなす傾きは相等しい. 卽ち反射波は入射波と等しい傾きをなし波動の進行方向卽ち FS と PG とが境界の法線となす角 θ φ は相等しい. また

$$FS = V_1\tau \qquad PH = V_2\tau$$

且つ

$$FS = PS\sin\theta \quad PH = PS\sin\chi$$

なる故に

$$\frac{\sin\theta}{\sin\chi} = \frac{V_1}{V_2} \qquad 8$$

卽ち屈折波の方向は兩媒質の中の波動の速度によつて定まる. その大なる媒質から小なる媒質に入るときには波動の進む方向が境界の法線に近づき逆なるときには遠ざかる. $\dfrac{\sin\theta}{\sin\chi}$ 卽ち $\dfrac{V_1}{V_2}$ を媒質 I に對する媒質 II の**屈折率**と名づける.

92. 波動のエネルギー 波動が媒質を傳はるに伴つて運動のエネルギーと歪みのエネルギー或は位置のエネルギーが移動する. 一例として棒を傳はる縱波

$$\xi = A\cos 2\pi(\nu t - \kappa x)$$

を考へれば各部の速度は

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = -2\pi\nu A\sin 2\pi(\nu t - \kappa x)$$

從つて一波長に含まるゝ運動のエネルギーは[(1)]

$$\int_0^\lambda \frac{1}{2}\rho S\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 dx = \pi^2\rho S\nu^2 A^2\lambda \qquad 9$$

また伸縮は

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = 2\pi\kappa A\sin 2\pi(\nu t - \kappa x)$$

從つて一波長の間に含まるゝ歪みのエネルギーは

$$\int_0^\lambda \frac{1}{2}ES\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 dx = \pi^2 ES\kappa^2 A^2\lambda \qquad 10$$

全エネルギーを單位の長さについて考へれば平均として[(2)]

$$\pi^2(\rho\nu^2 + E\kappa^2)SA^2 \qquad 11$$

---

(1) $\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx = \pi$

(2) $\dfrac{E}{\rho} = V^2 \quad \dfrac{\nu}{\kappa} = V$ によつてこの兩項は相等しい.

波動はこのエネルギーを伴つて移動する．單位の長さに含まれるエネルギーは振幅の二乘に比例する．このことは彈性の縱波に限らず多くの場合に一般に成立する．

傳播方向に垂直なる平面の單位面積を過つて單位時間に移動するエネルギーをその**波動の强さ**と稱する．卽ち波の强さは振幅の二乘に比例する．一點から四方に擴がる波動に於てはそのエネルギーが廣い範圍に擴がるために振幅が減少する．一點より平面に沿ふて圓く擴がる波動に於ては波の表面が振源よりの距離に比例して增すために强さは距離に逆比例して減少し從つて振幅は距離の平方根に逆比例する．また一點から球狀に四方に擴がる波動に於ては波の表面が振源よりの距離の二乘に比例して增すため强さは距離の二乘に逆比例し振幅は距離に逆比例して減少する．なほ媒質が粘性を有する如き場合には波動のエネルギーが熱に變化するために振幅は更に速かに減少する．

93.　ドプレルの原理　波動が靜止した振源から生じ波動の作用を受けるものがまた靜止せる場合には單位時間にその受ける波の數が振源の振動數に等しいこと云ふまでもない．併し振源または波動を受けるものが運動しつゝある場合にはその受ける波の數が一般に振源の振動數 n と異なることになる．

振源 S より時刻 t_1 に發する波動がこれを受けるもの P に時刻 t_2 に於て達し時刻 t_1' に於て發する波動が時刻 t_2' に於て達するとする．$t_1'-t_1$ を小とすれば $t_2'-t_2$ もまた小さい．t_1 に於ける S の位置と t_2 に於ける P の位置との距離を R とし波動の傳播の速度を V とすれば S より P に到る時間は

$$t_2-t_1=\frac{R}{V}$$

また t_1' に於ける S の位置と t_2' に於ける P の位置との距離を R' とすれば

$$t_2'-t_1'=\frac{R'}{V}$$

第 8 圖

この兩式によつて

$$(t_2'-t_2)-(t_1'-t_1)=\frac{1}{V}(R'-R)$$

S と P とが圖の如くに兩者を結ぶ直線に對し θ_1 θ_2 なる角をなす方向に速度 v_1 v_2 を以て動くとすれば

$$R'-R=v_1(t_1'-t_1)\cos\theta_1-v_2(t_2'-t_2)\cos\theta_2$$

故に前式より

$$\frac{t_1'-t_1}{t_2'-t_2}=\frac{V+v_2\cos\theta_2}{V+v_1\cos\theta_1}$$

$t_1'-t_1$ なる時間に S より發するだけの波數が $t_2'-t_2$ なる時間に P に達する．故に S を發する振動週期と P に達する振動週期とは之等の時間に比例しなければならない．從つて S を發する振動數 n と P に達する振動數 ν とは $t_1'-t_1$ と $t_2'-t_2$ とに逆比例する．故に

$$\nu=n\frac{V+v_2\cos\theta_2}{V+v_1\cos\theta_1} \qquad 12$$

V に比して v_1 v_2 が小ならば

$$\nu=n\left[1+\frac{1}{V}(v_2\cos\theta_2-v_1\cos\theta_1)\right] \qquad 13$$

こゝに

$$v_2\cos\theta_2-v_1\cos\theta_1$$

は S と P とが近づく速さを表はす．振動數の變化はこれと傳播速度とによつて定められる．振源または波動を受けるものゝ運動によつて振動數にこの如き變化を生ずることを**ドプレル效果**と名づける．

94.　群波　弦を傳はる橫波または棒を傳はる縱波に於ては上に述べた如くに波動が不變の形を保つて傳播しその速度は波形の如何に關係しない．併し媒質に依つては傳播の狀況がこの如く簡單でない．例へば水面に生ずる波に於ては單波を生じ得るけれどもその速度が振動數に關係する．この如き場合には單波の一個は不變の形を保つて傳播するけれどもこれ等の集合に於ては各個の間に傳播の遲速があるために全體として不變の波形を保ち得ない．

振幅が等しく振動數を少しく異にする二つの單波が重なつて

$$\eta=A\cos2\pi(\nu_1 t-\kappa_1 x)+A\cos2\pi(\nu_2 t-\kappa_2 x) \qquad 14$$

なる波動を生ずる場合をとるにこの式を

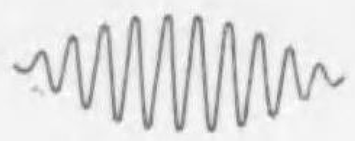
$$\eta=2A\cos2\pi\left(\frac{\nu_1-\nu_2}{2}t-\frac{\kappa_1-\kappa_2}{2}x\right)\cos2\pi\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}t-\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}x\right)$$

として考へれば恰も振動數 $\frac{\nu_1+\nu_2}{2}$ 波數 $\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}$ なる波の振幅が

$$2A\cos2\pi\left(\frac{\nu_1-\nu_2}{2}t-\frac{\kappa_1-\kappa_2}{2}x\right) \qquad 15$$

の如く變化すると見做すことができる．換言すればこの波動は振幅がまた波形をなし速度

$$U=\frac{\nu_1-\nu_2}{\kappa_1-\kappa_2} \qquad 16$$



第9圖

を以て傳播する．

單波の速度 V が振動數に關係しないとすれば

$$\frac{\nu_1}{\kappa_1}=\frac{\nu_2}{\kappa_2}=V \qquad U=V$$

卽ち振幅の波形も各波の波形と同じ速度をもつて傳播する．但し單波の傳播速度が波長に關係する場合には U と V とが等しくない．卽ち振幅の波形は各波の波形と異なる速度をもつて進行する．各波の振動數 ν 波數 κ の差が小なるときには

$$U=\frac{d\nu}{d\kappa} \qquad 17$$

水面の波に於ては微小なるものを除き波長の大なるほど傳播速度が大きい[(1)]．これがために個々の波形は速かに前進するけれども波群の前進は全體として遲く恰も各個の波形が後尾に發生し前端に達して消滅する如くに見える．この如き場合に單波の傳播速度 V を**位相速度**と云ひ波群が全體として移動する速度 U を**群速度**と稱する．波動のエネルギーは波動に伴ひ群速度を以て移動する．

(1) 水面の波は波長約 1.8 糎に於て速度が極小となり波長の大なるものも小なるものも何れも大なる速度を有する．

第十四章　音　　波

95. 音　音は物體の振動に依つて生ずる空氣の中の粗密波でその强弱は振幅の大小によつて定まり高低は振動數の大小に相當する．但し耳に音として感ずる振動はその振動數が 16 秒$^{-1}$ より 20000 秒$^{-1}$ の範圍に屬しこの外の振動は音として感じ難い．

一般に發音體は原振動の外に陪振動を伴ひ從つて此の振動體の發する音波は之等の合成に相當する．その原振動は音の高さを定め陪振動は音色を定める．

音波が空氣の中を傳播する速度は直接に測定せられまたは89節に述べた如くにして計算せられる．精密なる觀測の結果によれば溫度 0 度に於ける速度が 330.8 米秒$^{-1}$ 溫度15度に於ける速度は 339.8 米秒$^{-1}$ と測定せられる．氣體の中の音波の速度は絕對溫度の平方根に比例し略々その分子量の平方根に逆比例する．液體固體は彈性率が大なるため之等の中を音波の傳播する速度は氣體の場合に比して著しく大きい．且つ固體に於ては縱波と橫波の二つの場合が現はれる．次に二三の例を擧げれば

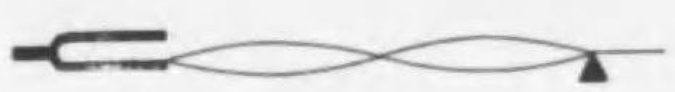
媒質	縱波	橫波	
空氣	$0.331\times10^5\,\frac{米}{秒}$		溫度 0 度
水素	1.28		
水	1.4		
アルコール	1.1		
銅	5.1	$2.3\times10^5\,\frac{米}{秒}$	
鐵	6.1	3.2	
鉛	2.3	0.7	
硝子	5.	3.	

振動數が僅に異なる二つの音が同時に到達すれば干涉のために唸り

の現象を生ずる．單位時間に於けるその唸りの數は二音の振動數の差に等しい．

二つの强い音を同時に聞く場合には之等の振動數の差に等しい振動數の音を感ずる．これを**差音**と名づける．ヘルムホルツによれば之等の音は物體の振動の振幅が大なるとき彈力が歪みに比例しないために生ずると考へられる．

96. 振動數の測定 發音體の振動數は種々の方法によつて測定せられる．サイレンを用ふる方法では先づその小孔を有する圓板の廻轉を適當にしその音を測るべき音と同じ高さならしめる．この板の廻轉數と小孔の數とに依つて音の振動數が直に計算せられる．或はまた絃の張力と長さとを適當に調節しその音を測るべき音と同じ高さならしめ前々章28によつて振動數を計算することができる．音叉の如きものではその端に輕い針をつけ廻轉する圓筒面にその振動を描かしめて振動數を知り得る．



第 1 圖

音叉の一端に絲をつけ絲の他端は滑車を經て適當の錘につなぎその張力を調節する．音叉を振動せしめ絲を支へる枕を動かして絲が最もよく振動する位置を求めればこのとき音叉と絲とは共振の狀態にある．故に節の間の長さと張力とに依つて振動數を計算すれば音叉の振動數が得られる．これを**メルデの方法**と名づける．

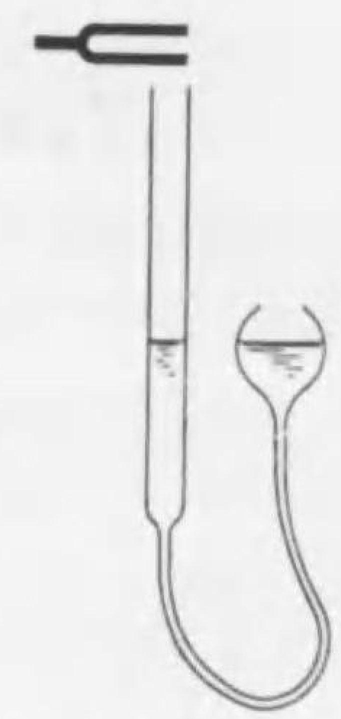
彈性體の棒の中央を固定しその一端に薄板をつけこれを硝子管の中に挿入する．この硝子管の中には輕い粉末を散布し且つ管の他端の活塞を動かして管の長さを適當に變へる．棒を縱に摩擦して縱振動を起さしめ活塞の位置を適當にして粉末の振動を最も烈しからしめればこのとき棒と管中の空氣柱とは共振の狀態にある．この場合に節の位置には粉末の堆積を生じ腹の位置には縞を生ずる故にこれによつて空氣の中の波長λを知り得る．また空氣の中の音波の速度をVとすれば振動數は

$$\nu = \frac{V}{\lambda}$$

棒の振動數もまたこれに等しい．若し棒の振動數を前々章34によつて計算すれば音波の速度Vが知られる．氣體に於ては

$$V=\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

なる故に上の實驗を用ひてγを測定することができる．これを**クントの方法**と名づける．



第 2 圖

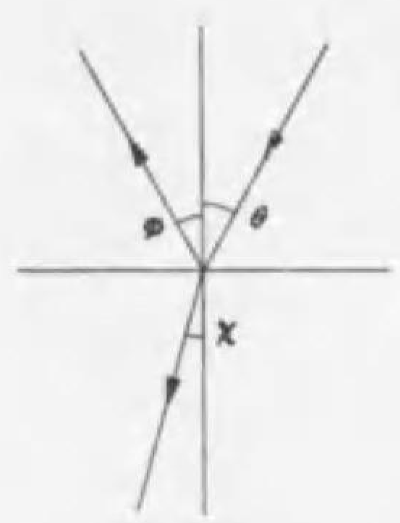
圖の如くに硝子管に水を入れ管口に近く音叉を振動せしめ水面を適當に上下して音の最も强く響く空氣柱の長さを求めればこのとき音叉と空氣柱とは共振の狀態にある．この場合に空氣柱の長さをlとすれば波長はその四倍に等しく空氣柱の振動數即ち音叉の振動數は

$$\nu=\frac{V}{4l}$$

と計算せられる．但し管口は精密に腹とならないために85節に述べた如く半徑rの管に於ては長さを$0.6r$だけ長く考へなければならない．

第十五章　光の反射屈折

97. 光の反射屈折　光は高溫の物體などから發して四方に擴がり一様の媒質の中では直線に傳播する．光の進む徑路を光線と云ひ一點に交はる光線の一群を**光束**と名づける．光束をなす光線が一の中心から發するときには發散光束と云ひ一の中心に向ふときには收斂光束と云ひこれ等を併せて共心光束と稱する．共心光束が後に述べる如くに反射屈折等を經て再び共心光束をなすときには後の中心を始めの中心の**像**と稱する．然るに光線を逆に辿つて考へれば前の中心は後の中心の像に相當する．この如き關係にある二點は互に**共軛**なりと稱する．



第1圖

光が異種の媒質の境界に當れば一般に一部は反射して再びもとの媒質の中に歸り一部は屈折して他の媒質の中に進む．そのとき反射角φは入射角θに等しくまた入射角θと屈折角χとの正弦の比

$$n=\frac{\sin\theta}{\sin\chi} \qquad 1$$

は入射角の大小に關係なく二つの媒質によつて定まる．

また光が媒質Ⅰから媒質Ⅱに入るときの屈折率n_{12}と逆にⅡからⅠに入るときの屈接率n_{21}とは互に逆數の關係をなす．即ち

$$n_{12}n_{21}=1 \qquad 2$$

從つて光が一様なる厚さの板を通過するときその前後に於ける方向は平行する．

更にまた三種の媒質ⅠⅡⅢについてⅠよりⅡに入るときの屈折率とⅡよりⅢに入るときの屈折率との積はⅠよりⅢに入るときの屈折率に

等しい．即ち

$$n_{12}n_{23}=n_{13} \qquad 3$$

從つて眞空を標準にとり光が之より種々の媒質に入るときの屈折率を知れば種々の媒質を相互に組合はせたる場合の屈折率は直に算出せられる．例へば光が水より硝子に入るときの屈折率は眞空より硝子に入るときの屈折率と眞空より水に入るときの屈折率との比に等しい．

光が眞空より物質に入る場合の屈折率をその物質の**絕對屈折率**と名づける．また單に屈折率と云ふときは多くこれを意味する．大體に於て緻密なる物質の屈折率は大なるを常とする．故に總て屈折率の大なる物質は光學的に密なりと云ひその小なる物質を光學的に疎なりと稱へる．また空氣の屈折率は1に近いために空氣に對する他の物質の屈折率はその絕對屈折率と殆ど等しい．

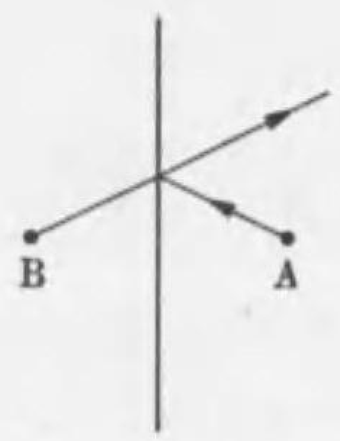
光が屈折率の小なる物質よりその大なる物質に入るとき即ちⅠに對するⅡの屈折率が1より大なるときには屈折した光の方向が界面の法線に近づく．從つて如何なる入射角θに對しても1によつて定めらるべき角χは存在する．即ち入射光の方向に對して必ず屈折光の方向が定まる．然るに光が屈折率の大なる物質よりその小なる物質に入るとき即ちⅠに對するⅡの屈折率が1より小なるときには屈折した光が界面の法線から遠ざかる．その場合に1の關係を充たす角χは必しもあり得ない．入射角θが小さく$\sin\theta$がnより小なる間は$\frac{\sin\theta}{n}$が1より小さく之に等しい$\sin\chi$が存在する．併し角θが之を超えて更に大となれば$\frac{\sin\theta}{n}$は1より大きく之に等しい$\sin\chi$は存在しない．即ち入射角が

$$\Theta=\sin^{-1}n$$

を超えれば之に對する屈折角はあり得ない．實際この場合には入射光の全部が反射せられる．これを**全反射**と云ひΘを**境角**と名づける．

98. 鏡　一の平面鏡の前に光點Aを置けば共の光が反射した後に恰も鏡に對して對稱なる一點Bより發する如き方向を取る．即ちBにAの虚像を生ずる．平面鏡の前に物體があればその各點から發する光は

各々虚像を生じて恰も鏡の後に同大同形の物體がある如くに見える.



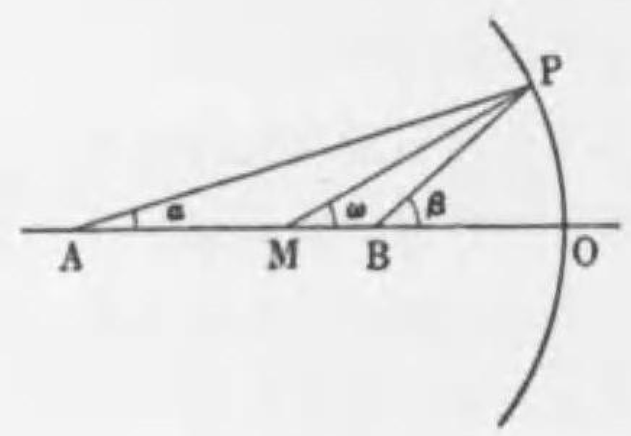
第2圖

また球面をなす鏡の前面に光點Aを置けばこれより發する光が反射して實像または虚像を生ずる. 例へば凹面鏡の場合を取り球面の中心をMとし光點Aより發する光線がPに於て反射せられ直線 AM を Bに於て切るとすれば圖によつて

$$\beta-\omega=\omega-\alpha$$

卽ち

$$\alpha+\beta=2\omega$$

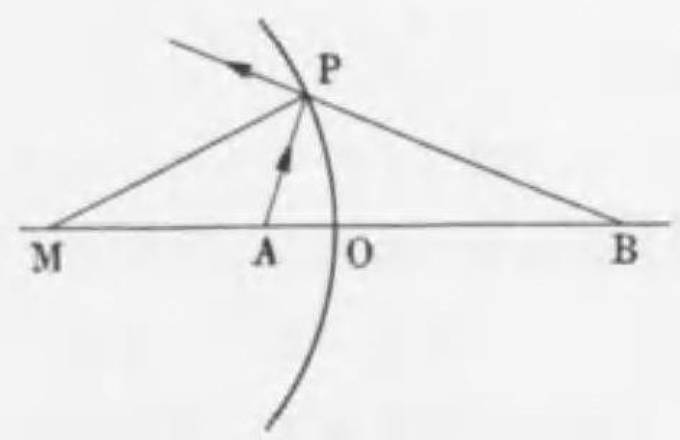


第3圖

今 AM が鏡面を貫く點を O としOP が小なる場合を考へれば α β ω を各々 $\frac{OP}{OA}$ $\frac{OP}{OB}$ $\frac{OP}{OM}$ に等しいと置くことができる. OA OB OM を a b R と表はせば

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{R} \qquad 4$$

が得られる. これによれば b は球面の上のP點の位置に關係なく球面の半徑 R と a とに依つて定まる. 卽ちAより發散する光線は反射の後一定の點Bに收斂する. 卽ちBはAの實像になる. a が無限大なる場合卽ち平行光線の場合にはBが OM の中點Fに生ずる. Fをこの鏡の**焦點**と云ひ $\frac{R}{2}$ 卽ち OF をこの鏡の**焦點距離**と名づける.



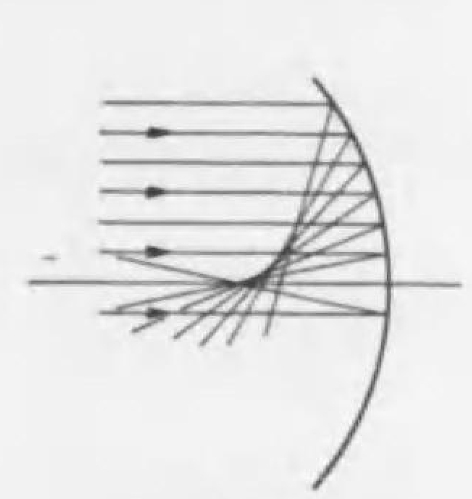
第4圖

Aが焦點より更に鏡に近い場合には圖によつて明かなる如く鏡の反對の側に虚像を生ずる. また凸面鏡に於ては恰もこの圖のAとBとを交換したる如くに虚像を生ず

る. これ等の場合その他一般に光點の位置と球面の反射によつて生ずる像の位置との關係には上記の 4 が適用せられる. たゞ a b または R を O から左に測るとき正とし右に測るとき負として考へる.

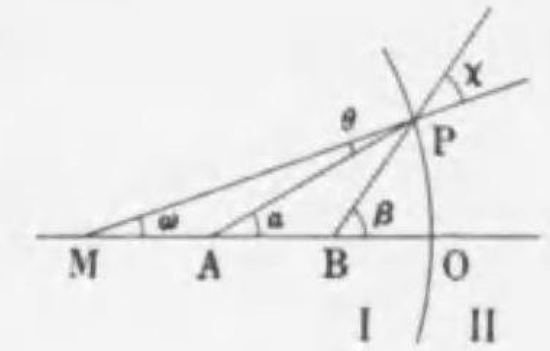
球面鏡の前に物體を置けばその各點に對する像が並列して生ずるため物體全體としての像が生ずる. 凹面鏡に於て物體が焦點よりも外にあれば倒立した實像を生じ内にあれば正立の虚像を生ずる. 凸面鏡に於ては必ず正立の虚像が得られる.

然しながら一點Aから出た光線がまた一點Bに集まるためにはP點が直線 AM の鏡を貫く點 O の近くになければならない. 4 はたゞ近似的に成立つに過ぎない. 卽ち鏡が球面の一小部分に相當し且つAが鏡の正面[1]に位置しA B より鏡に至る光線の開きが小なるを要する. 鏡が球面の大部分を占むるか或はAが鏡の側方にあるときには圖に示す如く反射光線が一點に集まらずして所謂**焦面**を形成し鮮明な像を生じない. これを**球面收差**と名づける.



第5圖

99. レンズ 屈折率を異にする二つの媒質がMを中心とする球面によつて境せられ一點Aから發する光線がP點に於て屈折すると考へ屈折の後の方向を逆に延長して直線 AM を B に於て切るとする. P 點に於ける入射角 θ が小ならば屈折角 χ もまた小さい. また媒質I II の絕對屈折率を n_1 n_2 とすれば



第6圖

$$\frac{\sin\theta}{\sin\chi}=\frac{n_2}{n_1} \qquad 5$$

なる故

$$n_1\theta=n_2\chi$$

としてよい. 然るに θ は $\alpha-\omega$ に等しく χ は $\beta-\omega$ に等しい. 故に

[1] 鏡面の中央とその球面の中心とを結ぶ軸の附近.

$$n_1(\alpha-\omega)=n_2(\beta-\omega)$$

卽ち

$$n_1\alpha-n_2\beta=(n_1-n_2)\omega$$

OP が小ならば α β ω は各々 $\frac{OP}{OA}$ $\frac{OP}{OB}$ $\frac{OP}{OM}$ と置き得べく OA OB OM を a b R と表はせば

$$\frac{n_1}{a}-\frac{n_2}{b}=\frac{n_1-n_2}{R} \qquad 6$$

が得られる. この式は球面上のP點の位置に關係しない. 從つて屈折した後の光線は恰もBより發する如くになる. 卽ちAはBにその虛像を生ずる.

上式もまた球面に於ける像の關係を一般に表はす. たゞ a b または R をOより左に測るとき正とし右に測るとき負とする. 例へば平面に於ける屈折では R を無限大として

$$\frac{b}{a}=\frac{n_2}{n_1} \qquad 7$$

水の屈折率は約 1.33 なる故に上式の n_1 を 1.33 とし n_2 を 1 と置いて 0.75 が得られる. 水中の物體を上から視るときには實際の深さの $\frac{3}{4}$ の位置にある如くに感ずる.

硝子の如き透明なる固體の板の兩側を球面に磨いたものを**レンズ**と云ひその二つの球面の中心を結ぶ直線を**軸**と名づける. 若しその一側に光點を置けば光線は二つの球面に於て逐次に屈折し像を生ずる. 今レンズと空氣との屈折率を n 及び 1 とし假に簡單のために軸上に光點Aがある場合を取れば第一面については

$$\frac{1}{a}-\frac{n}{b'}=\frac{1-n}{R_1} \qquad 8$$

また第二面については

$$\frac{n}{a'}-\frac{1}{b}=\frac{n-1}{R_2} \qquad 9$$

レンズが薄いときには a' と b' を等しいと見て

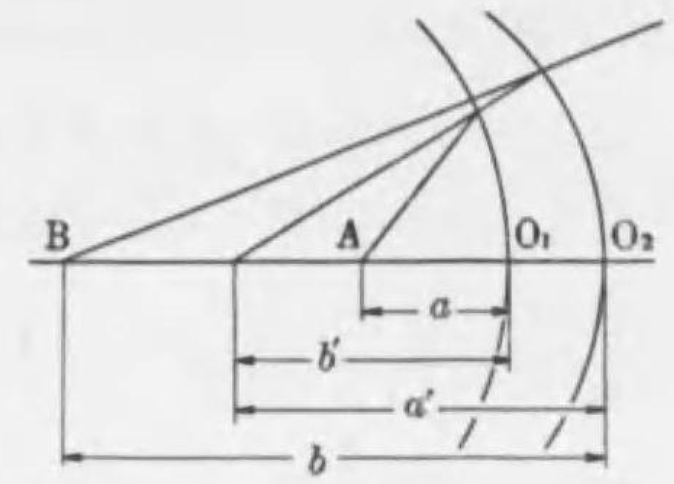
$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=(n-1)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)$$

今

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right) \qquad 10$$

と置けば

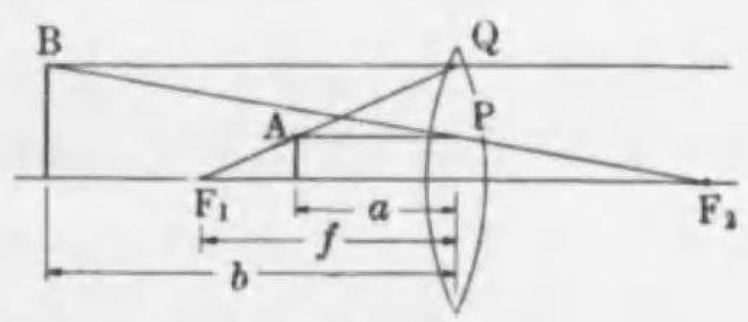
$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{f} \qquad 11$$



第7圖

が得られる. f をそのレンズの焦點距離と云ひレンズの左右の軸上 f の距離にある點を焦點と名づける. この點は恰も a または b が無限大なるときの像の位置に相當する.

上には光點が軸上にある場合を考へたけれども軸の外にある場合の像は圖の如き作圖によつて求められる. 卽ち光點Aから出て一の焦點 F_1 より來る如くにレンズを過る光線は屈折して軸に平行になり初め軸に平行に出る光線は他の焦點 F_2 を通過する故この二つの光線の交點によつて像Bが定められる. この場合にもABよりレンズに至る距離 a b に對して11の關係が成立つ[1]. 軸の近くに物體を置けばその各點が各々像を生じ從つて物體全體としての像が現はれる[2].



第8圖

---

(1) A B が軸上にあるとしてこの關係が成立つ故に A B が軸に近いときにもこの式が適用せらるべきこと勿論また圖によつてもレンズの中央を O として

$$\frac{f}{a}=\frac{OQ}{PQ} \qquad \frac{f}{b}=\frac{OP}{PQ}$$

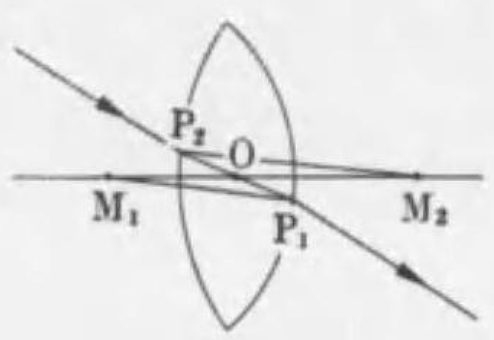
故に

$$\frac{f}{a}-\frac{f}{b}=1$$

卽ち **11** が得られる.

(2) レンズの強さを表はすために焦點距離の逆數を以てし1米の焦點距離を有するレンズの強さを單位と定め1ヂオプーターと稱する. 凸レンズを正とし凹レンズを負として表はすを常とする.

レンズの兩球面の中心をM_1M_2とし平行なる半徑M_1P_1 M_2P_2を引けばP_1 P_2に於て兩面が平行なる故にP_2P_1の徑路をとる光線はレンズを過る前後に於て同じ方向をとる. P_2P_1が軸を切る點をOとすれば



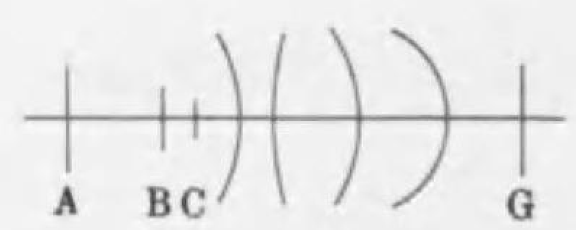
第 9 圖

$$\frac{OM_1}{OM_2}=\frac{R_1}{R_2}$$

故にレンズを通つて方向を變じない光線はすべて一定の點Oを通過する. この點をレンズの**光心**と名づける.

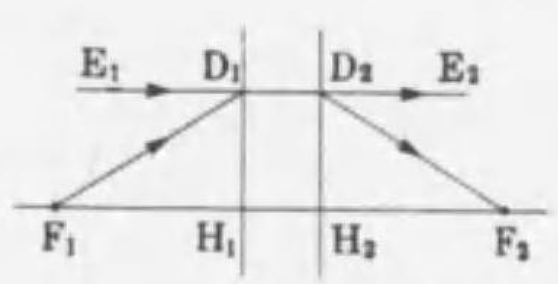
光心を通る光線はレンズを通過して後に再び舊の方向をとる. 兩凹または兩凸レンズの兩球面の半徑が相等しければ光心はレンズの中央にあり平凸または平凹レンズでは軸が球面を貫く點にある. 凹凸または凸凹レンズでは光心がレンズの外にある.

100. レンズの主要面 一の直線の上に中心を有する多數の球面によつて多種の媒質が界せられるとき軸上の一點Aより出る光線は第一の球面を經て像Bを生じ第二の球面を經て像Cを生じ斯くして最後の球面を通過して像Gを生ずる. Aに於て軸に垂直なる直線を考へれば B C……に軸と垂直の直線の像を生じ從つてGに於て軸に垂直の直線として像を生ずる.



第 10 圖

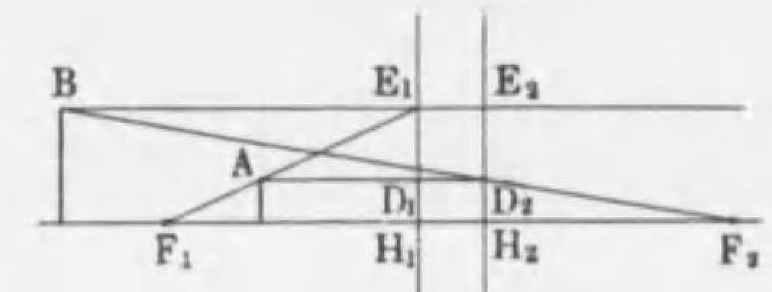
始め一點F_1より出る光線F_1D_1は最後に軸に平行の光線D_2E_2となり最初D_2E_2と同じ直線をなす光線E_1D_1が後に一點F_2を過るD_2F_2となるとする. F_1F_2をこの系の焦點と云ふ. この如きD_1D_2の兩點を考へればD_1に向ふ光線E_1D_1 F_1D_1がD_2より出る光線D_2E_2 D_2F_2となる故にD_1D_2は互に共軛の關係にある. 卽ち軸に垂直なる直線D_1H_1 D_2H_2を考へれば後者は前者の像をなし逆に前



第 11 圖

者を後者の像とも考へられる.(1) 從つてD_1H_1の上の一點を過るべき光線は必ずD_2H_2の上の同高の點を過らなければならない. 換言すれば光線はD_1H_1とD_2H_2に於て屈折し之等の中間を軸と平行に通過すると考へてもよい. この如き點H_1H_2を**主要點**と云ひ之を過つて軸に垂直なる平面を**主要面**と名づける.

主要點の位置を知れば任意の光點に對する像の位置が直に求められる. 卽ちAを光點とすれば軸に平行なる光線がD_2H_2に會する點D_2を求めD_2F_2を引きまたF_1を通過する光線がD_1H_1に會する點E_1を求めこれを通過して軸に平行なる線を引けばこの線がD_2F_2に會する點BはAの像である. 恰も薄いレンズに於ける作圖を二段に分ちAについてはレンズがH_1にありBについてはレンズがH_2にあると考へたことに等しい.



第 12 圖

こゝにH_1F_1 H_2F_2をf_1 f_2としD_1A E_2BをA Bとすれば

$$\frac{f_1}{A}=\frac{H_1E_1}{D_1E_1} \qquad \frac{f_2}{B}=\frac{H_2D_2}{E_2D_2}$$

兩邊の差をとれば右邊は1となり

$$\frac{f_1}{A}-\frac{f_2}{B}=1 \qquad 12$$

が得られる.

厚いレンズも上記の特殊の場合と考へられる. 第13圖に於てレンズの厚さをdとすれば

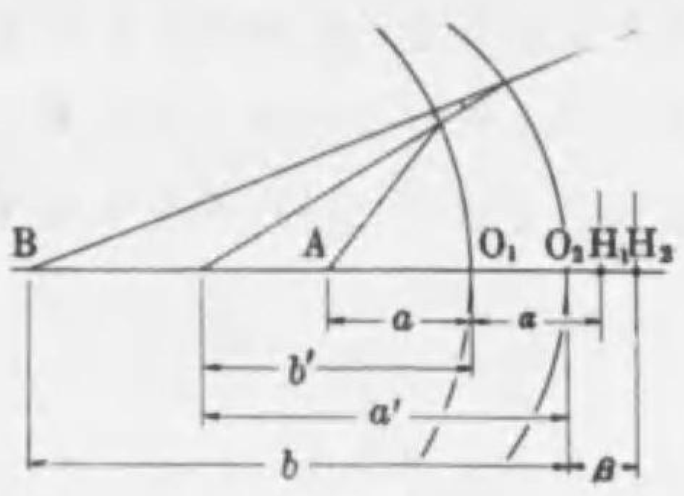
$$a'-b'=d$$

これと8 9とよりa' b'を消去すれば

$$\frac{d}{n}=-\frac{aR_1}{(n-1)a+R_1}+\frac{bR_2}{(n-1)b+R_2} \qquad 13$$

(1) 光線が必ずしも實際に D_1 D_2 を過るのではないけれども實像虛像何れかとしてこの如き關係が考へられる.

今



第 13 圖

$$\alpha=\frac{dR_1}{n(R_1-R_2)+d(n-1)}$$

$$\beta=\frac{dR_2}{n(R_1-R_2)+d(n-1)}$$

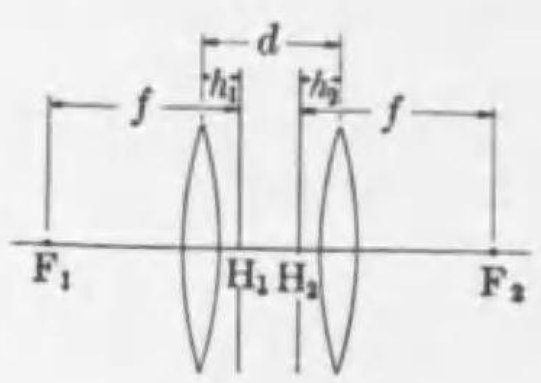
$$f=\frac{nR_1R_2}{n(n-1)(R_1-R_2)+d(n-1)^2}$$

と置けば13は

$$\frac{1}{a+\alpha}-\frac{1}{b+\beta}=\frac{1}{f} \qquad 14$$

と表はされる．これを12と比較すれば f_1 と f_2 とは等しく H_1H_2 が兩球面より α β だけ右にあることが知られる．

上記と同様の理論が多數のレンズの組合はせにも適用せられる．次に一例として焦點距離 f_1 f_2 なる二個の薄いレンズが d なる距離を以て並列せる場合を考へる．光點と像との關係は各レンズに對して



第 14 圖

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b'}=\frac{1}{f_1} \qquad \frac{1}{a'}-\frac{1}{b}=\frac{1}{f_2}$$

$$a'-b'=d$$

a' b' を之等より消去すれば

$$\frac{1}{a+h_1}-\frac{1}{b+h_2}=\frac{1}{f}$$

が得られる．こゝに

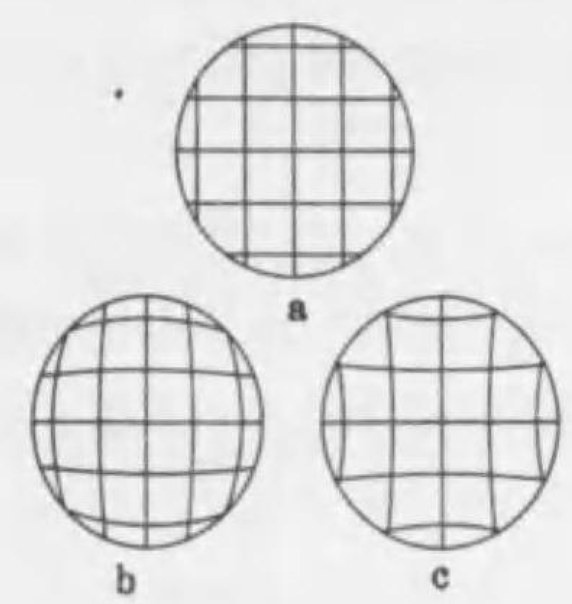
$$h_1=\frac{f_1d}{f_1+f_2-d} \qquad h_2=\frac{f_2d}{f_1+f_2-d}$$

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}-\frac{1}{f_2}-\frac{d}{f_1f_2} \qquad 15$$

これによつて主要面の位置と焦點距離とが定められる．

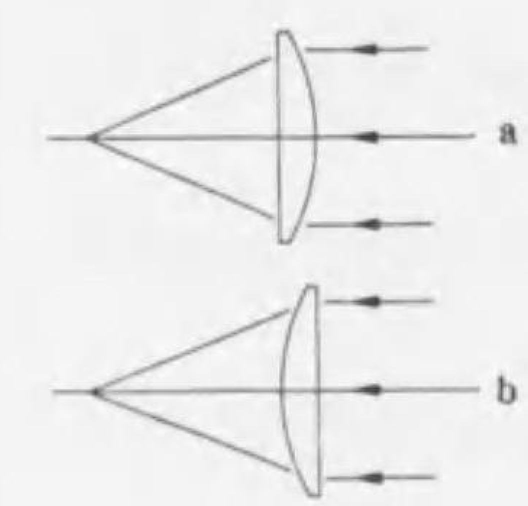
101. レンズの球面收差 前述のレンズに關する諸式は光線の開きが小なるときに成立つけれども若し開きが大ならば光線は精密に一點に像を生じない．これを球面收差と名づける．例へば平行光線がレンズを通るとき周邊部を過る光線は中央部を過る光線に比し過度に屈折

する．また物體のレンズに對する視角が小さいときには像が物體と同形に現はれるけれども視角が大なるときには歪んだ像を生ずる．例へば a の如き方眼を凸レンズを通して見るとき實像ならば b の如く虚像ならば c の如くに現はれる．



第 15 圖

前節のレンズの理論では焦點距離を等しくするレンズは其の兩球面の半徑の如何に關らずすべて同様に作用することゝなるけれども球面收差に關してはレンズの形によつて著しい差を呈する．一般に光線の入射角屈折角が小なるときには收差を生じないけれども光線が斜となるに從つて收差もまた急に增加する．球面收差を小ならしめるには光線がレンズの面に成る可く垂直に出入する如くに裝置する．卽ちレンズに入る光線と出る光線とがレンズの兩面に對して等しい傾きをなす場合を有利とする．例へば平行光線を軸上の一點に集めるに平凸レンズを a の如くに置けば b の如くに置くよりも收差が著しく少い．一般に凸レンズを光學機械に用ふるときには曲率の大なる球面を開きの小なる光線に向はしめる．



第 16 圖

レンズの球面收差を避ける一方法として絞りによつて周邊部に來る光線を遮斷してもよい．併しこの場合には光の量が減少することと云ふまでもない．また多數のレンズを組合はせて球面收差を小ならしむることもできる．

102. レンズの色收差 普通の光は屈折率を異にする種々の單色より成るために各色が異なる位置に像を生ずる．例へば平行光線を凸レンズに通せば屈折率の大なる菫色はレンズに近く像を生じ屈折率の小なる赤色はレンズより遠くに像を生ずる．この如くに色によつて像の

位置を異にすることを**色收差**と名づける.

色收差を避けるには異種の硝子から成る數個のレンズを組合せて用ひる. クラウン硝子は平均の屈折率に比して各色に對する屈折率の不同が少い. 卽ち屈折に比して分散の程度が小さい. これに反してフリント硝子は屈折に比して分散の程度が大きい. 故に例へばクラウン硝子の强い凸レンズとフリント硝子の弱い凹レンズとを組合はせ全體として凸レンズの作用をなさしめながら分散を殆ど相殺せしめることができる. これを**色消しレンズ**と名づける.

赤と菫に對し一の硝子の屈折率を n_r' n_v' 他の硝子の屈折率を n_r'' n_v'' としこの兩種のレンズに於て $\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}$ の値を K' K'' と置き赤に對する焦點距離を f_r' f_r'' 菫に對する焦點距離を f_v' f_v'' とすれば10により

$$\frac{1}{f_r'}=(n_r'-1)K' \qquad \frac{1}{f_r''}=(n_r''-1)K''$$

$$\frac{1}{f_v'}=(n_v'-1)K' \qquad \frac{1}{f_v''}=(n_v''-1)K''$$

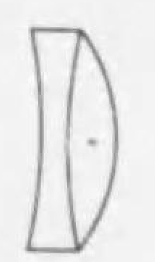
兩レンズを重ねた系の赤と菫に對する焦點距離 F_r F_v は15により

$$\frac{1}{F_r}=\frac{1}{f_r'}+\frac{1}{f_r''}=(n_r'-1)K'+(n_r''-1)K''$$

$$\frac{1}{F_v}=\frac{1}{f_v'}+\frac{1}{f_v''}=(n_v'-1)K'+(n_v''-1)K''$$

色收差を除くためには

$$F_r=F_v$$



第17圖

卽ち

$$(n_r'-1)K'+(n_r''-1)K''=(n_v'-1)K'+(n_v''-1)K''$$

故に

$$(n_v'-n_r')K'+(n_v''-n_r'')K''=0$$

卽ち

$$\frac{\frac{1}{R_2''}-\frac{1}{R_1''}}{\frac{1}{R_2'}-\frac{1}{R_1'}}=-\frac{n_v'-n_r'}{n_v''-n_r''} \qquad 16$$

普通には圖の如く二個のレンズを重ねるために R_2' と R_1'' とを等しく作る. 從つて R_1' R_1'' R_2' R_2'' の中の二つを任意に取ることができる. 例へばこのレンズ系に所要の焦點距離を有せしめまた球面收差を小ならしめるを得る.

なほ精密に言へば二色に對して色消しとなる場合にも他の色に對しては必しも然るを得ない. 精密を要するときにはレンズを用ふる目的に應じ適當の二色に對して色消しを行ふ. 例へば望遠鏡顯微鏡の如く肉眼によつて像を見る目的には眼に最も强い感覺を與へる黃線の附近に對して色消しをする. 寫眞機械の如き裝置には化學作用の最も大なる菫と菫外線とに對して色消しを行ふ. 且つ硝子の種類を適當に選んで他の色に對する收差も成る可く小ならしめる.

103. プリズム 頂角 α なるプリズムの兩面に對稱に光線が通過するときその方向の變化の角を δ とし光線がプリズムの內外に於て兩面の法線となす角を θ χ とすれば

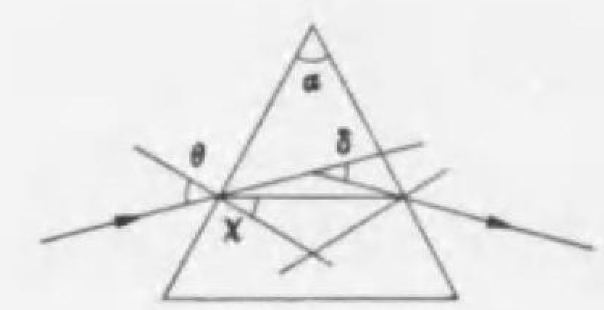
$$\delta=2\theta-2\chi$$

然るに

$$2\chi=\alpha$$

故に

$$\delta=2\theta-\alpha$$



第18圖

光線がプリズムの兩面に對して對稱なる徑路をとる場合に δ が極小なることは容易に證明し得られる. 上の二式より

$$\theta=\frac{\delta+\alpha}{2} \qquad \chi=\frac{\alpha}{2}$$

故に1によつて

$$n=\frac{\sin\frac{\delta+\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \qquad 17$$

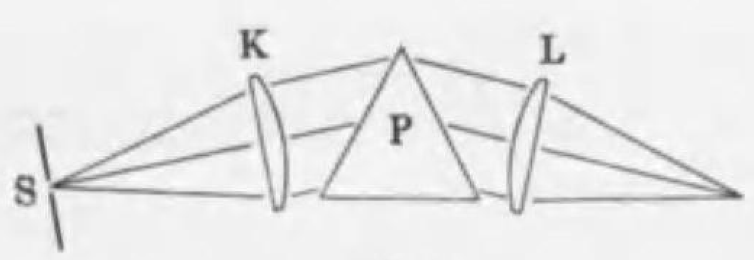
從つて δ を知ればプリズムの屈折率が求められる.

一例として二三の物質の屈折率を擧げれば

物質	赤(6708)	黄(5896)	菫(4047)
水	1.3308	1.3330	1.3428
アルコール	1.367	1.369	1.380
二硫化炭素	1.620	1.632	1.697
クラウン硝子	1.51	1.52	1.53
フリント硝子	1.64	1.65	1.69
金剛石		2.417	

色に附記した數字は光の波長を示す．單位は10^{-8}糎

プリズムはまた光を單色に分解する分光器に用ひられる．細隙Sより來る光線を凸レンズKによつて平行光線としプリズムPを通過せしめるに屈折率の大小によつて偏角を異にする故凸レンズLによつて像を結ばしめれば各色による像が竝列して現はれる．これを**スペクトル**と名づける．その位置に寫眞乾板を置けばスペクトルを撮影することができる．分光計に於てはプリズムPを垂直軸の周りに廻轉し得る水平の臺に載せその一方には細隙SとレンズKとより成るコリメーターを置き他方にはレンズLの位置に望遠鏡を水平に裝置してプリズムに向はしめ之をプリズムと同じ垂直軸の周りに廻轉してスペクトルの各部を觀測しまた偏角等を測定する．



第19圖

光が少數の單色より成るときにはその數だけの明線よりなる**輝線スペクトル**を生じ連續的に諸種の單色を含む場合には**連續スペクトル**が現はれる．また場合によつては連續スペクトルの中に若干の部分を缺いて黑線が現はれる．その場合には**吸收スペクトル**と云ひ黑線を**吸收線**と稱する．例へば日光のスペクトルは所謂る**フラウンホーフエル線**と名づける多數の黑線を有する．

第十六章　光　波

104.　光波　光の本性についてはなほ未だ不明の點が少くない．デモクリトスは光が特殊の微粒より成りこれが發光體より放射せられ眼に入つて視覺を起すと考へニウトンもまたこの微粒と物質との間の引力斥力によつて光の反射屈折を說明し色の差別は粒子の大小によるものとした．これに反してホイヘンスの說に於ては光を一種の彈性媒質の中に生ずる波動と考へる．この說によれば宇宙には**エーテル**と名づける輕く且つ彈性に富む媒質があつて種々の物質の內部及び眞空の中にも充滿しその中に波動が傳はること宛も空氣の中を音波の傳はるに等しい．ニウトンの說はその後繼者によつて主張せられ前世紀の初めに至るまで多くの人の承認する處となつたけれどもこの說によつて說明し難い光の廻折干涉等の現象が波動說によつてよく說明せらるゝに及んで粒子說は否定せられ波動說が確實と見做さるゝに至つた．

波動說に於て後に述べる偏光の現象を說明するには光を橫波と考へるを要する．通常の物質に於て橫波を生じ得るものは固體に限り液體氣體に於てはたゞ縱波を生じ得るに過ぎない．卽ち光波を傳へる媒質としては彈性に富む固體を假想しなければならない．然るに固體に於ては橫波とともに縱波をも生じ得べきに拘らずこれに相當する現象は見出されない．その後マクスウエルの電磁波の理論が實驗によつて確證せられこれが同時に光の性質をよく說明し得るに及んで光を彈性波とする說は遂に棄てられ光は電磁場の傳播の波として現今一般に承認せられる．

併しながら近年に至つて見出された種々の現象の中には光を從來の電磁氣學の示す電磁波としては說明に苦しむものがまた少くない．これ等に關しては寧ろ光を微粒と考へることを有利とする．卽ち光は半

ば波動の如く半ば粒子としての性質を有する．これ等については後章に再び述べるけれども光が微粒に類する性質を現はすは主として光が物體から發生しまたは物體に吸收せられる場合に限られる．光が媒質の中を傳播する狀況を論ずるには常にこれを波動と考へてよい．且つまた多くの場合には彈性波と考へても殆ど誤りを生じない．

次章に述べる如くにして光波の波長と振動數とは精密に測定せられる．その結果によれば光の色は振動數によつて定まること音の高さに類し肉眼に感ずる光の振動數は赤色の 4×10^{14} 秒$^{-1}$ と菫色の 8×10^{14} 秒$^{-1}$ との間にある．赤色よりも振動數の小なるものは**赤外線**と稱し菫色よりも振動數の大なるものは**菫外線**と稱する．[(1)] 波長は媒質の種類に關係するけれども眞空に於て赤色は約 7000×10^{-8} 糎菫色は約 4000×10^{-8} 糎の波長を有する．[(2)] たゞ單に光の波長と云ふ場合には眞空に於けるものを指すこととする．光波の傳播がエネルギーの移動を伴ふことは云ふまでもない．光線に直角なる單位面積を過つて單位時間に流れるエネルギーを光の强さと稱する．後章に述べる如く光の强さは振幅の二乘に比例する．

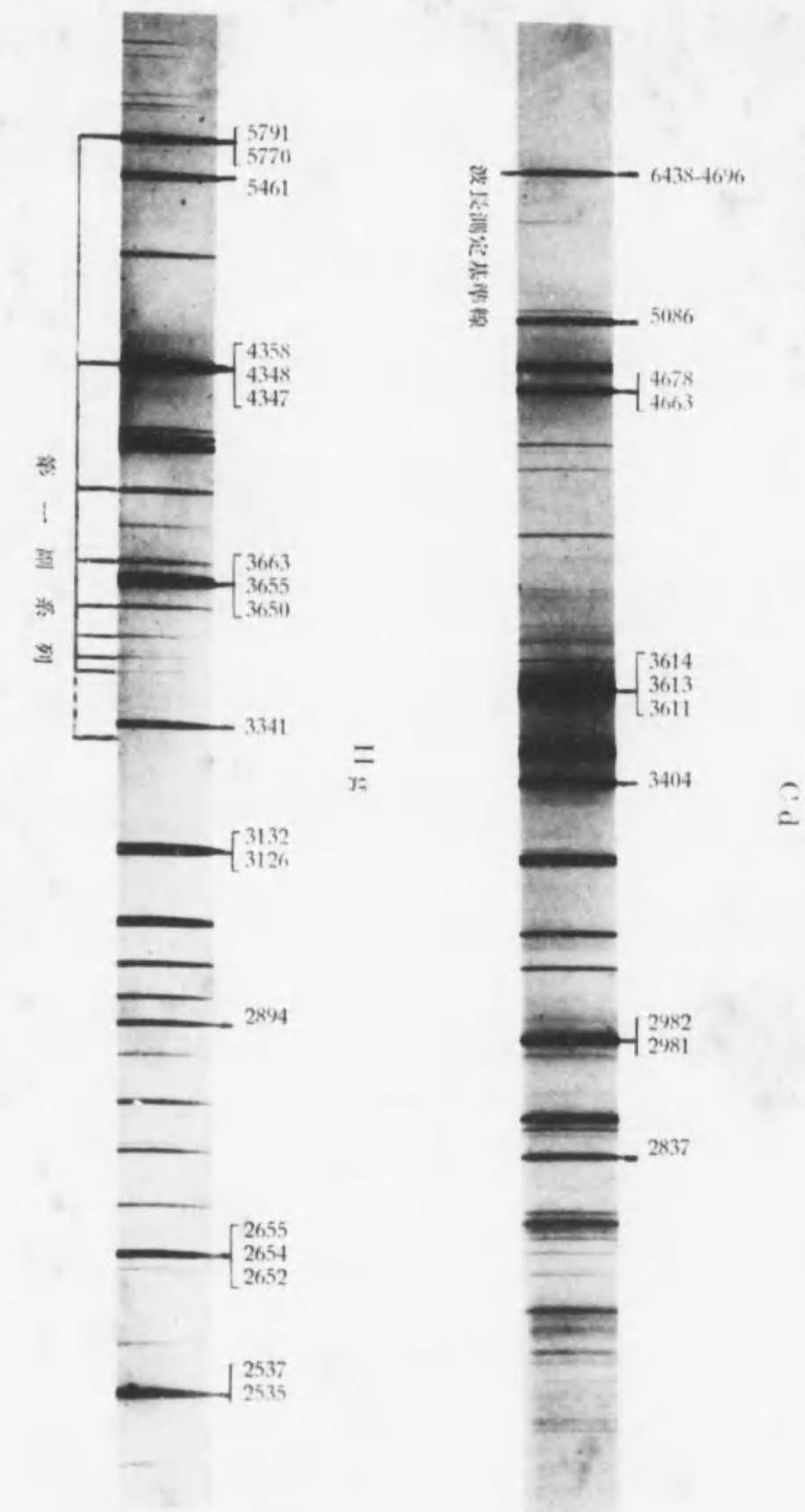
105. 光の輻射　高溫の物體より發する光は一般に總ての振動數の光を含み分光器によつて分解すれば連續スペクトルを現はす．その光の各振動數に對する强さの分布は物體によつて異なるけれども溫度にも關係する．一般に低溫に於ては殆ど赤外線のみを發し高溫に至るに從つて振動數の大なる部分を多量に輻射する．常溫に於て物體が發する光のエネルギーは極めて少く且つ全く赤外線に屬する．故に特殊の方法によつて認め得るに過ぎないけれども溫度の昇るに從つて赤色を呈し遂には白色の光輝を發する．

鹽類を瓦斯の無色の焰の中に入れゝばその鹽類を成す金屬元素に特

(1) 一の光に對しても波長は媒質によつて種々に變るけれども振動數は變らない．一の光を表はすに理論上は振動數 ν を用ひるけれども實驗の便宜のために普通は眞空の中の波長 λ を用ひる．光の速度を c とすれば

$$\nu\lambda = c$$

(2) 次章參照



有の光を發する．例へばナトリウムの鹽類は黄色の光を發する．或は之等の金屬を熱して高温の蒸氣とするときにも同樣の光を生ずる．之等の場合に生ずる光のスペクトルは主として輝線より成りその數と配列とは元素によつて著しく異なる．ナトリウムの如きは數個の線を現はすに過ぎないけれども鐵の如きは數千の線を現はす．且つ輝線の强弱またはその現はれると否とは發光の際の狀況にも關係するけれどもその振動數は元素によつて全く一定し溫度壓力その他の變化によつて影響せられること極めて少い．從つて輝線スペクトルによつて元素の種類を判定することができる．

なほ輝線スペクトルを發せしめるには種々の方法がある．金屬に於てはこれを電極として弧光燈を作りまたはこの電極の間に火花放電をなさしめる．氣體に於ては後章に述べる如くに之を硝子管に封入してその中に眞空放電をなさしめる．

光を發する物體または光を受けるものが運動する場合には93節に述べたドプレルの原理が適用せられる．例へば天體が地球に近づくときにはその光が振動數の多い菫の側に偏し逆に地球より遠ざかるときには光が振動數の少い赤の側に偏する．天體より發する一の元素の光と地上に於て同じ元素の發する光とを分光器によつて比較して振動數の差を測ればこれと光の速度とによつて天體の地球に對する速度を求めることができる．この方法は天體が極めて遠く三角測量の方法を用ひ得ない場合にも應用せられる．

地上の光源に大なる速度を與へることは困難なるためにドプレル効果は殆ど認められないけれども後章に述べる陽極線が發する光はその高速度のために著しくこの効果を現はす．

106. 光の吸收　光が物質の中を通過すればその一部は吸收せられるために光の强さが減少する．このとき光の減少する量はその際に於ける光の强さに比例し且つ通過の距離が短ければその距離にも比例する．今この光の强さを I とし dx なる厚さを通過するときの光の强さの變化を dI とすれば

$$dI = -\alpha I dx$$

即ち

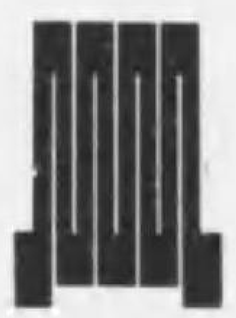
$$I = I_0 e^{-\alpha x} \qquad 1$$

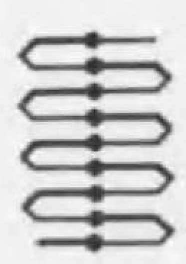
但しI_0は光の初めの强さを表はす．αは物質によつて定まり**吸收率**と名づける．

吸收率は物質によつて異なり且つ色によつて異なるを常とする．例へばフクシンの水溶液は綠色の光を特に吸收するためにこれを透過した光は紅色を呈する．水晶の如きものも赤外線菫外線の或る部分に對して著しい吸收を呈する．

この如き物質に白色の光を通してそのスペクトルを見れば吸收によつて失はれた部分を缺く吸收スペクトルが現はれる．固體液體の吸收は一般に振動數の或る範圍に廣く亘るためにスペクトルには廣い吸收帶が現はれる．併し氣體の吸收は特定の振動數のものが著しくスペクトルに細い吸收線を生ずる．且つその吸收は氣體から發する輻射と同一の振動數に於て生じスペクトルの上の吸收線は自己の輝線と同じ位置に現はれる．太陽の光のスペクトルに現はれるフラウンホーフエル線は太陽の表面より發する白光が太陽の上層の氣體を通過するときにその一部が吸收せらるゝために生ずる．

光が物質に吸收せられるとき熱を生ずる故に鋭敏な寒暖計を用ひて光の强さを測ることができる．普通にはこの目的のためにボロメーターまたは熱電對を用ひる．ボロメーターは後に述べる電氣抵抗寒暖計に屬し圖の如き形の極めて薄い白金板の表面を黑く塗つて作る．之が光を吸收すれば温度が昇り電氣抵抗を增加することによつて光の强さを測定する．また熱電對は後に述べる熱電寒暖計に屬し二種の金屬の細線の對を多數に直列としその接續點に光を當てこれに生ずる熱電流によつて光の强さを測定する．[1]


第1圖


第2圖

(1) 電氣抵抗寒暖計と熱電寒暖計とについては第 21 章參照．

光が物體に當るとき熱を生ずる外になほ物質に對して化學的の効果を生ずる．例へば寫眞の感光作用の如きものはこれに屬する．この性質は振動數の大なる光ほど强く殊に菫外線に於て極めて著しい．化學作用のみならず他の種々の作用も一般に振動數の大なる光に於て著しい．

或る種の物質は菫または菫外線を受けるときその光を吸收するとともに物質に特有の光を發する．例へば石油は靑光を發しシアン化白金バリウムの結晶は綠光を發する．この現象を**螢光**と名づける．或るものに於ては入射する光が絕えて後も發光作用が繼續する．これを特に**燐光**と名づける．この現象は固體液體に於て現はれるのみでなく例へば沃素の蒸氣の如き氣體に於てもまた認められる．固體液體の螢光は一般に或る範圍に亘る連續スペクトルを呈するけれども氣體の螢光はその元素に特有の輝線スペクトルを現はす．螢光を生ずるためには必ずその螢光よりも振動數の大なる光が入射しなければならない．從つてこの現象は菫または菫外線に於て著しく赤または赤外線には認められない．

光が烟霧の如き微粒に當れば散亂を生じて始めの光は減少する．一般にこの散亂作用は波長の短い光に於て著しい．波長の長い赤外線の如きは散亂を受けること少く從つて遠距離に達する．

107. 光の速度 光の傳播の速度は種々の方法によつて測定せられる．例へば木星の衞星の一個が木星の陰影に出入するときに蝕の生ずる週期が時期によつて不同なることは地球と木星との距離が變化するに基づく．故にこれより光の速度を計算することができる．

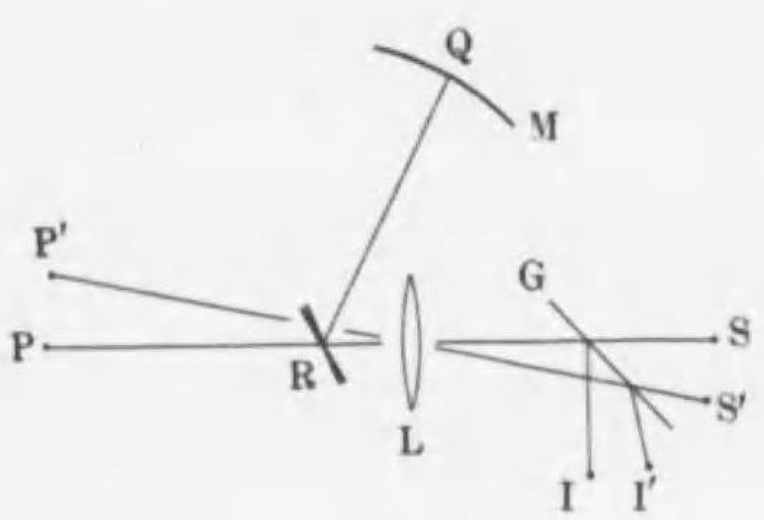
また地球は太陽の周りに大なる速度を以て動くために總ての恒星が地球の進む方向に少しく移動して觀測せられる．地球が v なる速度を以て動きこれと直角に光が c なる速度を以て來るとき望遠鏡を正しく恒星に向はしめれば光が對

第3圖

物鏡を經て接眼鏡に至るまでに望遠鏡が移動するために鏡軸の上を通過しない. 併し望遠鏡を少しく前に傾ければ光が正しくこれを通過する. その傾くべき角は光の速度と地球の速度とにより

$$\tan\theta = \frac{v}{c} \qquad 2$$

で定められる. この角を測れば光の速度は計算せられる. この現象を光の**錯行**と名づける.



第4圖

フーコーの方法に於ては細隙Sより來る光をレンズに通し平面鏡Rによつて反射せしめて凹面鏡Mの上に細隙の像Qを結ばしめる. この凹面鏡は曲率中心がRにある如くに置く. 光はQに於て反射して再びRに還りSにその像を生ずる. 然るに若しRを速かに廻轉すれば光がRQを往復する間にRの傾きが少しく變じこれに反射せらるる光線は舊と異なる路をとりS'に像を現はす. 鏡Rの廻轉の角速度が一定ならばS'は常に一定の位置に生ずる. 細隙とレンズとの間に平面硝子Gを挿めば光の一部がこれによつて反射せられSとS'に生ずべき像がIとI'の位置に現はれる.

一秒間の鏡の廻轉數をn光がRQを往復するに要する時間をτとすればその間に鏡の廻轉する角は

$$\theta = 2\pi n\tau$$

この廻轉の前後のRに對するQの像をP P'とすれば恰も初めPに集まる光線が後にP'より還る如き結果を生ずる. RQをrとしLRをdとすればPP'の距離$2r\theta$がLの中心に開く角は略々$\frac{2r}{r+d}\theta$と置くことができる. 故にI I'の距離は

$$a = \frac{2r}{r+d} 2\pi n\tau l$$

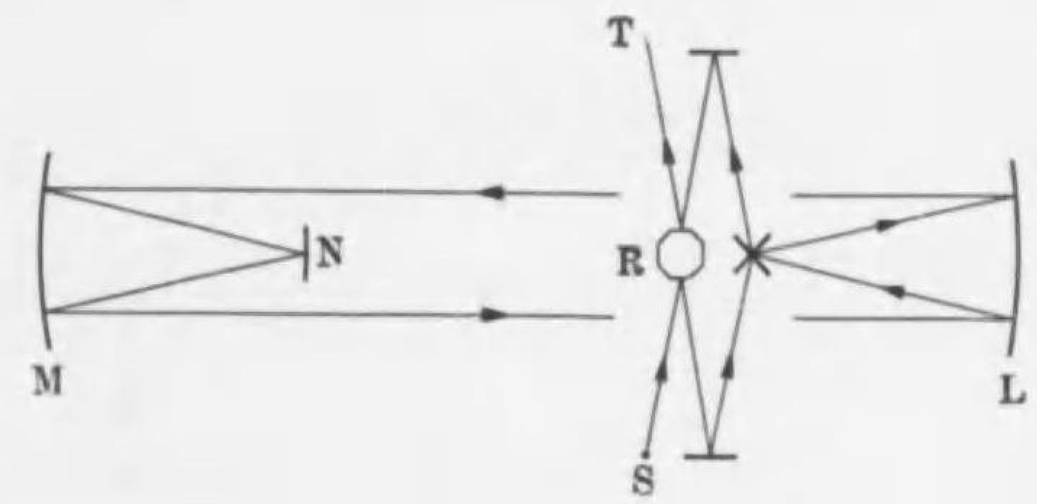
但しlはSLの距離を表はす. これより

$$\tau = \frac{a(r+d)}{4\pi nrl}$$

從つて光の速度は

$$c = \frac{8\pi nr^2 l}{a(r+d)} \qquad 3$$

と求められる.



第5圖

最近マイケルソンによつて行はれた測定に於ては細隙Sより來る光を八角の廻轉鏡Rの一面によつて反射せしめ凹面鏡Lによつて平行光線とし38粁を距てる遠距離に送り凹面鏡Mによつて凹面鏡Nの上に像を結ばしめる. この光線は反射して再び舊に歸りTに達する. 鏡Rを速かに廻轉して光が再び歸るまでに$\frac{\pi}{4}$だけの廻轉をなさしめればRの靜止する場合と同じ位置に像を生ずる. この場合には鏡がこの廻轉をなすに要する時間が光の往復の時間に等しい. 故に鏡の角速度を知れば光の速度が計算せられる. この測定の結果によれば眞空の中の光の速度は

$$c = 2.99796 \times 10^{10} \text{ 糎秒}^{-1}$$

この速度は光の振動數に關係しない.

108. 物質の中の光の速度 波動の章に於て述べた如く波が二つの媒質の界に於て屈折することはこれ等の媒質の中に於て傳播の速度が異なるために生ずる. 且つその屈折率はこれ等の媒質の中の速度の比に等しい. このことは光波についてもまた適用せられる. 若し媒質の光學的の密度が連續的に變化すれば光の


第6圖