Aus Wissen und Wissenschaft

15

ÜBER DEN URSPRUNG DER CHINESISCHEN MATHEMATIK

學藝彙刊 (15)

古算考源

錢寶琮著

中華學藝社出版　　商務印書館發行

ÜBER DEN URSPRUNG DER CHINESISCHEN MATHEMATIK

古 算 考 源

錢 寶 琮 著

中華學藝社出版 1935 商務印書館發行

序

寶琮年二十,略知西算.任教蘇州工業學校時,偶由舊書肆購得中國算學書數種.閱之,頗有興趣.遂以整理中國算學史爲己任.顧頭緒紛繁,會通匪易.乃先就分科探討,稍有心得,輒復著書.民國十年春成九章問題分類攷,方程算法源流攷,百鷄術源流攷,求一術源流攷,記數法源流攷五篇.十一年復成朱世傑垛積術廣義一篇,俱送登學藝雜誌,粗疏譾陋,本不值識者一笑.六七年來寶琮讀書稍多,翻閱前著,亦殊不滿.客歲學藝社編輯部忽有印行彙刊之舉,而古算考源六篇列爲彙刋之一種.寶琮初未預聞其事.去冬請收回從事修訂,則以早經發排,不及有所增改.爰將樣本校讀一過,作校正與增補七條,附錄於六篇之後,以補其闕.幸讀者垂察焉.

十七年夏至.

目　次

記數法源流考

太古結繩而治,記數之制,莫得其詳.史稱伏羲時造書契以代結繩之政;黃帝使大撓作甲子,隸首作算數.記數之制,想於黃帝時始得完備.夏侯陽算經序文則曰:『算數起自伏羲,而黃帝定三數爲十等,(註 1) 隸首因以著九章』.(註 2)至宋代刊本算書竟有所謂黃帝九章者.以九章算術之淹博,而謂其著作年代在三千五百年前,識者莫不疑其荒誕.固不足辯也.至於河圖洛書之說本近於陰陽五

註 1. 十等,謂億兆京陔秭壤溝澗正載.三數,謂上中下三種進法也.下數十進如十萬爲億,十億爲兆;中數萬進,如萬萬爲億,萬億爲兆;上數數窮而進,如萬萬爲億,億億爲兆是也.六朝時人談算者,多研究及之.

註 2. 今本夏侯陽算經,爲唐人韓延所纂.序文當亦爲其手筆.

行,決非算數之所祖,且今所傳圖書,皆爲漢以後人僞造附會,(註3)世人不察,以洛書爲伏羲時代之三行縱橫圖誤也.

中國古代記數之法,書契而外,有「積算」之制.算爲計數之具,以竹爲之,或稱籌策,投壺,較射,皆釋算數獲,以較勝負.釋算數獲,謂置算籌以計所獲之數也.儀禮鄉射禮曰:「箭籌八十,長尺有握,握素.」蓋以箭爲籌,長一尺四寸,其冂寸刋本一膚,(註4)以便持用也.又禮記投壺云:「算尺有二寸.」大致與今通用計數竹籌相似.其計數之法,據儀禮所載;釋獲者東面而坐,數以二算爲純(純猶對也.),十純以至數十純,皆東西列之.有餘純則南北橫於其下,一算爲奇,奇則又縱於純下.使自堂上南向視之.一望而知所獲之數也.其釋算縱橫之制,與後世孫子算經夏侯陽算經所詳算位縱橫制正同.(註5)

籌之列於几案,從事計算者,其制較短.漢書言:「用竹徑一分,長六寸,二百七十一而成六觚爲一

註3. 參觀清胡渭易圖明辨.

註4. 小爾雅「側手爲膚.」「握,四寸也.」

註5. 參觀淩廷堪禮經釋例及胡培翬儀禮正義.

握.」(註 6) 甄鸞注數術記遺云:「長四寸,方三分.」蓋漸短而粗,便於取用也,籌之記數用者,五以下者籌各當一,五以上者,以一籌當五,餘籌各當一.橫直布於氈上,組成一數.十位,百位,千位之數,亦如法布之.惟算位自左而右,籌式縱橫相間.故布籌成數,有縱橫兩式,

縱者為 𝍠 𝍡 𝍢 𝍣 𝍤 𝍥 𝍦 𝍧 𝍨,

橫者為 𝍩 𝍪 𝍫 𝍬 𝍭 𝍮 𝍯 𝍰 𝍱.

如有數 6728, 則作 𝍮𝍦=𝍧.籌式無表〇之用,數位有零者空之.如 6708 卽作 𝍮𝍦　𝍧; 6040 卽作 𝍮　= .是已.算位必須縱橫相間者,位數多恐其相混也.古數學家,更製籌作赤黑二色,以分別數之正負.考九章算術加,減,乘,除,開方,比例,盈不足,方程算法,均用籌為之.其布算之途徑,尚可得而詳焉.(註 7) 孫子算經曰:「凡算之法,先識其位,一縱十橫,百立千僵,千十相望,萬百相當.」又曰:「六不積,五不隻.」夏侯陽乘除法亦曰:「一從十橫,百立千僵,千十相望,萬百相當.滿六以上,五在上方,六不積算,五不單

註 6. 六觚,六角形也,每邊十籌,一握適二百七十一籌.

註 7. 參觀勞乃宣古籌算考釋.

張.」皆詳籌之記數法也.

數術記遺述天目先生之言曰:「隸首注術,乃有多種,及余遺忘,記憶數事而已.」下述「積算」等十四種,皆記數法也.其第一種爲積算,卽古代相傳籌制也,二曰太乙算,三曰兩儀算,四曰三才算,十三曰珠算.皆刻板橫分幾道,中有游珠,去來其間.太乙算祗須一珠,兩儀算用色珠二,三才算用色珠三,移易珠之地位,按珠色辨別數之大小.珠算甄鸞注云:「刻板爲三分,其上下二分,以停游珠.中間一分,以定算位.位各五珠,上一珠與下四珠色別,其上別色之珠當〔五〕,其下四珠,珠各當一.」與今通行珠盤相似.惟上一下四,與今制上二下五異.板中別無脊梁,(俗呼橫檔)故珠色上下須別也.六曰八卦算,七曰九宮算,九曰了知算,十曰成數算,十一曰把頭算,十二曰龜算,或用常籌,或用特製之色籌,皆視籌所指之地位方向,定數之大小.而九宮算尤爲簡捷.九宮者,卽漢儒所創之三行縱橫圖也.式如右圖以色珠一,

4	9	2
3	5	7
8	1	6

置於某宮,卽爲其數.再以珠之顏色,辨別算位,如單

位色玄,十位用赤,百位用青,千位用白,萬位用黃等是已,吳書言趙達治九宮一算之術,當卽指此.五曰五行算,專恃籌之五色,八曰運籌算,專視持籌分寸,以定算數,十四曰計算,則別無算術,但從心計也.按數術記遺一書,今傳本爲宋元豐七年(1084 A.D.)刋本.卷首題「漢徐岳撰,北周甄鸞注.」隋志不著錄.疑爲僞作.殆因唐代算學所隸,遂襲其名而依託歟?(註8)所述記數法十四種,多半依附五行方向.不皆可施諸實用.想亦著者理想之談,見當時治算者布毦運籌之煩,欲另闢蹊徑以替之也.

六朝時,中國與印度交通已盛,隋書經籍志補有婆羅門算經三卷,婆羅門陰陽算曆一卷,婆羅門算法三卷.唐開元六年(718 A.D.)太史監瞿曇悉達受詔譯九執術,其所著開元占經云:「天竺算法,用九個字乘除.其字皆一舉札而成.九數至十,空位處恆安一點.」按開元占經原本,錄有天竺算字法樣.今傳本以九口形代之.「一舉札而成」當是其字屈曲連續,可一筆寫成也.以●代○,與西算史述印度古代數碼正合.天竺數碼,傳至天方羅馬,彼方人

註8. 語見四庫全書提要.

士,均樂於施用.至中國獨失傳者,中國本有之數字籌碼,均甚簡易.且其字體屈曲,與漢文迥異.瞿曇悉達之錄此九字,亦好奇爲之耳.此後元初之回回算法,明末之歐西算法,傳入中國時,數字仍因襲舊制,良有以也.

中國古代籌制,本爲布籌演算而設,非爲紙上算草之用.唐以前算經詳草,俱無算式錄存.蓋古代演算用籌,猶今商人演算用珠盤,與筆算異制也.然亦有摹寫布籌之式,用代數字者.未知始於何時.新莽時,布貨文字有「大黃布千」「次布卌百」「弟布𠕂百」「壯布丌百」「中布丅百」「差布一百」「厚布𠦃百」「幼布川百」「幺布〢百」「小布丨百」等語.以籌式代數字,惟五字之式,爲一畫在上與「六不積,五不隻」之成法,有別.(註9)唐人論「書法橫直多者,有俯仰向背之法.若直如筭子便不是書.」(註10)筭子,卽算籌也.籌式作圖摹寫,自應畫平豎直,無所謂筆勢也.唐時當已有布籌演草之圖.故書家擬之以論書法.宋蔡九峯洪

註9. 見黃本驥讀經筆得卷上.

註10. 語見梅文鼎古算器考.

範皇極數所紀算位,一至五皆縱列,六至九皆橫一於上以當五.則竟以籌式爲符號矣.

治數學者,運籌演算之式繁,則須作圖以誌之.以備遺忘,且以示讀者布算之途徑.宋人演算時,仍用籌策,而詳草多錄布籌之圖.天元,開方諸術,用籌轉多,非圖不明.演草遇乘除簡易者,更可逕得圖草.題之答案,可從紙上求之.紙上之籌式,卽數碼也.數之正負,在紙上謄寫及付梓時,不便以赤黑別.則於負數之末位,施一斜撇.如 — 639 作丅≡𝍨.數之有空位者,筆繕時易致差誤,故造〇號以代空位,例如 6020 作丄〇二〇是已.秦九韶數學九章中,算草數碼,除仿布籌之式摹寫外,四或作〤;五或作〇̄,〥;九或作〩,乂.與實物稍異,但求便於書寫,不必完全象形也.〤,乂等式,楊輝書中亦採用之.吾人可稱之曰宋代簡易數碼,以別於前之象形數碼也.後世習用數碼,卽由簡易數碼蛻化而出.明清二代,籌制失傳演算俱用珠盤,或用西法筆算.通俗記數法,用文字外,尙習用一種數碼算法統宗稱之曰暗碼,其書法亦漸有短長之勢,且〥變成6,乂變成〩.皆由筆順蛻化.而古算算位縱橫之制盡廢.粗按之幾不知所

本矣.茲以數碼沿革表示如下:

象形數碼	縱式	𝍠 𝍡 𝍢 𝍣 𝍤 𝍥 𝍦 𝍧 𝍨 〇,
	橫式	𝍩 𝍪 𝍫 𝍬 𝍭 𝍮 𝍯 𝍰 𝍱 〇,
簡易數碼	縱式	𝍠 𝍡 𝍢 〤 ㄛ 𝍥 𝍦 𝍧 㐅 〇,
	橫式	𝍩 𝍪 𝍫 〤 ㄛ 𝍮 𝍯 𝍰 㐅 〇,
習用數碼(暗碼)		〡 〢 〣 / 一 二 三 〤 〥 〦 〧 〨 〩 〇.

現今通用之珠盤,不知創於何人.或由數術記遺中之「珠算」逐漸改良而成,或直接從古代籌制以珠易籌而得.籌策縱橫,演算時運用費事.以珠易籌,自是進步.中置脊梁,亦較數術記遺別色之珠,易於施算.至其上二下五之制,則當爲珠算口訣手法成立後,世人踵事增華之作,惜珠盤圖式,見於現傳算籍者,推程大位算法統宗(1593 A.D.)爲最古.而珠盤之式已盡如今制矣.據算法統宗所載宋紹興(1131–1162)淳熙(1174–1189)以來刊本算書,有盤珠集走盤集等目.書雖失傳,而顧名思義,或爲珠算書之濫觴.楊輝乘除通變算寶(1274 A.D.)著有九歸詳說,朱世傑數學啓蒙(1299 A.D.)亦有乘除歌訣.並應用於籌策,而朱氏歌訣,與今珠算用訣尤爲相近

按珠算之便,全恃口訣手法.若徒有珠盤,而無口訣手法,其用反不如籌策之清晰.則與數術記遺所述之十四種何擇焉,宋元間淺近算書,著者喜以演算成法,編爲歌訣,以便初學.至明代此風尤盛,珠算之起,亦當在宋元之交,(註11)而盛於明代,至程大位算法統宗言之較詳,故流傳獨永焉.

明代珠算盛行.籌制盡廢.迨利瑪竇等傳入西法筆算.治數學者均爲當時來華諸西人之徒.初不知中國古代籌制之完備,數碼之簡明也.又不肯紹介西碼,故譯著諸書,均用一二三四五六七八九,九字及〇號爲記數之用.清代治西算者皆因襲用之.乾嘉而後,古算復明.宋元諸家之算籍亦出.於是治古算者悉效宋代象形數碼爲記數之用,或數字與象形碼兩種兼用,體例不能一致.清末又趨重新法西算.教科書提倡應用西碼.而 1234567890 等碼,遂代中國舊制而興矣.

註11. 參觀許桂林算牖珠盤考.

九章問題分類考

九章算術爲吾國古代算籍之一.周官保氏教國子以六藝:一曰禮,二曰樂,三曰射,四曰馭,五曰書,六曰數.數之分術凡九,號稱九數.九章算術,卽九數之流也.秦火後,舊文殘遺.漢初北平侯張蒼,景帝時大司農耿壽昌各稱删補,故校其目,則與古或異,而所論者多近語也.(註 1) 今本九章算術爲魏景元時人劉徽所輯.事類相推,各有攸歸.幷采其所見,爲之作注.其章有九.其題問則二百四十有六.一曰方田,以御田疇界域.凡三十八問,詳命分算法及田畝之計算;二曰粟米,以御交質變易,凡四十六問,詳簡易比例之誼;三曰衰分,以御貴賤稟稅,凡二十問,詳配分比例之誼;四曰少廣,以御積羃方圓,凡二十四問,詳開方法及單分數算法;五曰商功,以御工程積實,凡二十八問,詳體積之計算;六曰均輸,以御遠

註 1. 見劉徽九章注叙文 263 A.D.

近勞費,凡二十八問,詳各種比例;七曰盈不足,以御隱雜互見,凡二十問,詳推解算法;八曰方程,以御錯糅正負,凡十八問,詳聯立一次式解法;九曰句股,以御高深廣遠,凡二十四問,詳句股弦及其和較互求術,及相似形比例,而致用於測算.其方田章畝法二百四十步爲秦漢田制,衰分章「大夫,不更,簪裊,上造,公士.」爲秦漢爵名,均輸章「長安」爲漢惠帝都「上林」爲漢武苑名,皆張蒼耿壽昌等所附益者也.

東漢鄭玄周官保氏注「鄭司農云:九數,方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要;今有重差,夕桀,句股.」唐賈公彥疏止釋重差,句股,而不及夕桀.陸德明釋文亦云:「此二字非鄭注」.疏云:「方田以下皆依九章算術而言.今有重差句股也者,此漢法增之.馬氏(融)注以爲今有重差夕桀,夕桀亦是算術之名,與鄭異.」今監本三者並載,蓋後人因馬注而攙入耳.(註2)按鄭注方田至旁要九名,當是漢時相傳九數之目.「少廣」當作「步廣」,後漢書鄭玄傳李賢注引九章算術作「步廣」,字倘

註2. 見李淳羣經識小及段玉裁周禮漢讀考.

不誤.(註 3) 旁要亦爲句股之類,謂不必實有是形.可自旁假設要取之.(註 4) 當卽劉徽本句股章相似比例之術.馬融注及賈公彥疏並言今九章以句股替旁要,故不重舉也.句股之法,出於周髀算經.周髀爲西漢人僞書,託爲周公商高問答之辭.(註 5) 數理疏淺,文辭隱晦.至漢末趙君卿方圓圖注出,其術始稍完備.時人采其術入九章,以替旁要.劉徽謂「校其目與古或異.」當卽指此.

重差術,劉徽云:「望極高,測絕深,而兼知其遠者,必用重差.」因未知數多,必多所測望,如兩表測高,則高等於兩餘切差,除表間距離,故曰重差也.徽述重差術九問,綴於所注九章之後.首問卽論測望海島之法,唐人因稱之曰海島算經.與九章算共限習三年.「夕桀」二字,未詳何解.清錢大昕養新錄以爲「夕桀」乃「互棄」之脫誤.方程章劉徽注有維棄爲齊同之法,與古直除術稍異.錢氏互棄之說,當卽指此.然亦與句股重差爲不類.大致句股,重

註 3. 見洪頤煊讀書叢錄.

註 4. 見孔繼涵九章算術跋.

註 5. 見陳杰算法大成前編卷二.

差,夕桀等術,爲漢人所創,鄭馬以之附於九數,故曰今有重差夕桀也.劉徽注粟米章「今有」二字,以爲九數都術.清初算學家卽以今有爲四率比例之古名,致鄭馬所注無復義理可言,則妄而敢也.「旁要」「夕桀」二名不見徽所著書中,宋人楊輝在其詳解九章算法及九章算法纂類中,以句股容方題爲旁要術,秦九韶以其數書九章第八卷測望圜營題爲句股夕桀術.清顧觀光九數存古竟以句股容方爲旁要專術;句股容圓如測圓海鏡之類,爲夕桀專術.並附句股卷,則未免穿鑿附會矣.

又唐章懷太子李賢注後漢書鄭玄傳,引九章算術云:「方田一,粟米二,差分三,步(少)廣四,均輸五,方程六,旁要七,盈不足八,句股九.」宋李石續博物誌記九章算法,悉如李注.篇目章次與鄭玄注及劉徽本均異,不知何取.

劉徽而後,歷兩晉以迄南北朝,數學極盛,作者林立,大都彰明九數者也,其從事九章算術爲之注疏,見隋書經籍志者,有李遵義疏一卷,南齊祖沖之注若干卷,北周甄鸞注九卷,等.今均失傳,無從考矣.唐貞觀時李淳風等取劉徽本爲之刋定注解,立於

學官.與其所注孫子五曹海島張邱建夏侯陽,周髀,五經算,綴術,緝古,共稱「算經十書」唐代嘗用之以取士,此劉李注本所以保存獨善也.宋崇寧間亦立於學官,南渡後此學既廢,古本算經幾泯沒無傳矣.民間本題曰黃帝九章,豈以其爲隸首之所作歟?右班直賈憲爲之作細草,簡捷殘闕,殊鮮價值.慶元庚申,鮑澣之得劉李注古本九章,但劉徽圖盡亡佚,盈不足方程兩章,李注已闕矣.(註6)景定二年,楊輝著詳解九章算法及九章算法纂類,所用術與劉李注本稍有異同.明初刻永樂大典彙收各種算籍,劉李注本九章算術亦纂入焉.清初古學湮沒,九章書亦不彰,以算名者如王錫闡梅文鼎之流,咸未之見.乾隆時戴震與修四庫全書得宋元豐七年刊本,校之.并作訂譌補圖.刻於曲阜孔氏算經十書中.嘉慶時李潢著九章海島細草圖說共十卷.於戴氏所謂舛譌不可通者,一一疏而通之.九章算術之書,於是無疑義矣.

考古人九數之目,方田,粟米,差分,步廣,商功,均輸,方程,盈不足,旁要.前六名咸從實用立名,使學者

註6. 見鮑澣之九章算經序.

知事物之所在,可以按名以知術也.後三者義理稍深,應用亦較狹,故從其專術得名.古人所知者,祇此九種.卽稱之曰九數.非以數理之事,胥可納於九數之內也.漢人創句股重差等術,劉徽卽以句股章替旁要,而以重差章附於九章之後,深知古人立九數之旨也.晉張邱建發明級數算法,爲後世垜積術之自出.初非九章所及也.而後人之視垜積術也,或隸之少廣,或屬之商功均輸,皆嫌未能允當.見立天元一術,則曰此卽少廣之借一算也;見大衍求一,則曰此方程之齊同術也,自編算書,尤多以九章爲目.如算法統宗,九數通考等.蓋國人崇古之念甚深,以九章爲古聖所作,宜無所不備也.諸家立術,雖有變通;推其本旨,皆自此出.而且知後人無以易周漢之舊也.至其分章題問,雖多未盡善處,固未敢議其後也.有之,自宋楊輝九章算法纂類始.輝以粟米章之互換,少廣章之求從,開方,皆重疊無謂.且以題問不歸章次.作纂類以辯其訛.厥後清焦循以加減乘除釋九章,羅士琳以比例通九章,皆未以九章章次爲然也.

世傳楊輝書譌脫滋多.雖經宋景昌校正,仍多

乖訛.纂類卷首列九章互見目錄,似爲當時俗傳分類算法.輝纂類與之稍有異同.輝分九章二百四十六問爲「乘除」「互換」「合率」「分率」「衰分」「疊積」「盈不足」「方程」「句股」九門,共六十九法.二百四十六問中,互見二法者二問.—VI 18並見衰分方程 VII 18並見分率互換.—脫漏者亦二問.—II 44及46應屬分率門反其率術.—茲錄纂類節目於後.爲表示便利計,以羅馬數字代九章算術章次,以亞拉伯數代表一章中第幾問,例如方程章「五雀六燕」題今以 VIII 9 表之

乘除第一十五法四十問	直田	I 1,2.
	里田方田法	I 3,4.
	圭田	I 25,26.
	斜田	I 27—30.
	圓田	I 31,32.
	畹田	I 33,34.
	弧田	I 35,36.
	環田	I 37,38.
	約分	I 5,6.
	合分	I 7,8,9.
	課分	I 10—14.
	平分	I 15,16.
	乘分	I 19—24.
	除分	I 17,18.
	經率	II 32,33.

互換第二 二法 五十五問	互換乘除法	II 1—31, III 11—17.
	先取用而求互換	III 10,20 VII 9,18. V 7,8,10-16,27,28.
合率第三 三法 二十問	少廣術	IV 1—11.
	反用合分術	VI 9,20—26.
	併率除術	VII 10.
分率第四 二法 五十五問	貴賤率	II 38—43.
	反其率	II 45.
	分率	VII 13,15—18,20. III 34—37.
衰分第五 二法 十八問	衰分	III 1—9.
	均輸	VI 1—6,17—19.
疊積第六 十五法 二十八問	商功求積	V 1.
	城垣求積	V 2—7.
	垣積求廣	V 26.
	方堡壔	V 8,27.
	圓堡壔	V 9,28.
	方亭	V 10.
	圓亭	V 11.
	方錐	V 12.
	圓錐	V 13,23—25.
	塹堵	V 14.
	陽馬	V 15.
	鼈臑	V 16.
	芻童	V 19—22.
	芻甍	V 18.
	羨除	V 17.

盈不足第七 五法 十一問	盈不足二法	VII 1--4,11,12,19.
	兩盈朒一法	VII 5,6.
	盈朒適足二法	VII 7,8.
方程第八 四法 二十問	方程	VIII 1,3,7,9,14,16—18. VI 18, VII 14.
	損益	VIII 2,11.
	分母子	VIII 10,13.
	正負	VIII 4,8,15.
句股第九 二十法 三十七問	平方增成二法	IV 12—18.
	立方增成二法	IV 19—24.
	句股求弦	IX 1—5.
	弦句求股	IX 2,4.
	股弦求句	IX 3.
	股弦較與句求弦五法	IX 6,10.
	股弦和與句求股	IX 13,16.
	句股容圜術	IX 16.
	句股較與弦求股二法	IX 11.
	句腰容方法	IX 20.
	句弦和,股率求句股法	IX 14,21.
	句股較,股弦較求句股	IX 12.
	句股旁要法(卽容方術)	IX 15.
	餘句股容積法	IX 17—19,22—24.

楊輝互換門乘除法曰:「以所求率乘所有數爲實,以所有率爲法,實如法而一.」(註7)置位草曰:「錢率,物率,錢數,物數:(註8)依本色對列.」云云,與今西法四率比例無異.惟纂類互換不收句股章相似比例八問,而錄均輸章第二十七,二十八兩問,未審何故.合率謂術文內有「置諸分數併而爲法」一語也.今命分應用問題用之.所采三法尙爲合理.分率門題問之簡易者,僅爲乘除之應用,當可分別入乘除互換二門,其盈不足章題六問,以古法盈不足術馭之,固屬繁而無當.張邱建算經遇此類題爲之另立簡法,輝所述正與之相似.蓋今數學中之推解算法也.(註9)謂之分率,亦嫌未洽.若爲立一推解門,以舊盈不足章諸題歸之,當無不妥.衰分門列均輸題九問,甚是.算術同,題理亦相似也.句股門列少廣開方題十三問,亦未允當.蓋句股不能盡開方之用,而少廣可以通開方之窮也.總之,九章二百四十六問劉徽所分事歸類者,固有未盡善

註7.「實如法而一」謂以法除實得所求數也.

註8. 宜稼堂叢書本作「錢錢物物數數率率」.

註9. 推解之名見筆算數學.

處,而輝之纂類,仍多支離勉強也.

按少廣章直田求從及開平方法爲田畝算法之反求術,同爲面積算法.開立方法爲商功章求體積題之反求術,與垣積求廣術三問,實爲相類,同爲體積算法也.與其以少廣題問入句股章,無寧以之分別列於方田商功二章後,爲妥善也.又句股章第二十問,須開帶縱平方,與開平方諸題當同隸冪積算法後.又盈不足章第十一問「蒲莞並生」題,第十二問「兩鼠對穿」題,第十九問「良馬與駑馬俱發長安」題,三問中前二問須用指數函數解,後一問宜用二次式解答.若以盈不足術馭之,祇得其近似值耳.故應另置.方程章第十三問「五家共井」題,答數得整寸數,似無定方程,亦應另置.琮嘗就各題性質,分列於九類;一曰乘除,二曰互換,三曰面積,四曰體積,五曰句股,六曰衰分,七曰合率,八曰推解,九曰方程,表示如下,希世之明算者有以正之.

乘除第一 四十問	分數	I 5—24.
	經率	II 32—46.
	乘率	III 10—12,18,19.

互換第二五十三問	粟米術	II 1—31.
	簡比例	III 13-17, VI 12,16, VII 9,15.
	繁比例	III 20.
	連比例	VI 10,11.
	反比例	VI 7,8.
	相似句股比例	IX 14,17—19,21—24.
面積第三二十七問	田畝算法	I 1—4,25—38.
	直田求從	IV 1.
	開平方	IV 12—18.
	開帶縱平方	IX 20.
體積第四三十四問	商功求積	VI 1.
	各色體積	VI 2—25.
	垣積求廣	VI 26—28.
	開立方	IV 19—24.
句股第五十五問	句股弦互求術	IX 1—5.
	句股和較術	IX 6—13.
	句股形容方圓術	IX 15,16.
衰分第六十八問	衰分本術	III 1—9, VI 5,6,17—19.
	均輸本術	VI 1—4.

合率第七二十一問	單分數,直田求從	IV 2—11.
	分工合作題	VI 9,20—28, VII 10.
推解第八十八問	盈不足本術	VII 1—8.
	推解雜題	VII 13,16,17,20.
	蒲莞問題	VII 11,12,19.
方程第九二十問	方程本術	VIII 1-12,14-18, VII14 ,18.
	無定方程	VIII 13.

方程算法源流考

凡例: 古籌式所用數碼如下:—

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
縱式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
橫式	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

記法則單位百位萬位,均用縱式,十位千位均用橫式.

九數中方程一門爲一次聯立式算法.劉徽注云:『程,課程也.羣物總雜,各列有數.每行爲率,二物者再程,三物者三程,皆如物數程之.並列爲行,故謂之方程.』古算一次聯立式演算,未知量不以符號表示.但用籌策布其數(係數)於某行某率,列各率之數於上,實數於下,即成一行.率謂不同之未知量,實則一行(式)內數率和較之值也.二物再程,三物三程,皆如物數程之者,謂所列行數須與題中未知量數相等也.今凡代數等式非恆等式概謂之

方程式.蓋非九章方程本義矣.

今本九章算術方程章凡十八問.二元者八問,三元者六問,四元五元各二問,每問後各附演解術語.其已詳於前者,略之於後.第一問術語詳方程概論,第二問詳易位損益之方.第三問詳正負加減之法.第十第十一兩問,係數有爲分數者以分母徧乘諸位.然後布算,聯立一次式解法公理,幾囊括無遺矣.第十三問五家共井一題,如方程以正負術入之,僅能得井深與各家綆長相互之比,而答案臚列深長尺寸,則方程而似求一術者也.

今本九章算術方程章卷首書明魏劉徽注,唐李淳風注釋.而卷中無「臣淳風等謹按」等字樣,與盈不足章同.此二章李注或歷久失傳,或已與劉注相混,不復能辨別矣.

九章方程第一題云:『今有上禾三秉,中禾二秉,下禾一秉,實三十九斗;上禾二秉,中禾三秉,下禾一秉,實三十四斗;上禾一秉,中禾二秉,下禾三秉,實二十六斗.問上中下禾實一秉各幾何?』『術曰置上禾三秉,中禾二秉,下禾一秉,實三十九斗於右方,中左列如右方.以右行下禾徧乘中行,而以直除,又乘

其次亦以直除.然以中行中禾不盡者,偏乘左行,而以直除.左方下禾不盡者,上爲法,下爲實.實卽下禾之實.求中禾以法乘中行下實,而除下禾之實.餘如中禾秉數而一,卽中禾之實.求上禾亦以法乘右行下實,而除下禾中禾之實,餘如上禾秉數而一,卽上禾之實.實皆如法各得一斗.

按術語,「除」,減也.「直除」,謂多行減少行,減不盡者作幾度減之.「然」,猶乃也.「餘如中禾秉數而一」謂以相減之差爲實,中禾秉數爲法,法除實得商也.末句「實皆如法,各得一斗.」意謂上中下禾之實皆以左方下禾不盡爲法除之,各得一秉斗數也.均輸章實如法而一,得各縣車數,術文亦作「實如法得一車」語法正同.

據術意先依題列右中左三行,以右行上川偏乘中左行得如第二式;以中左二行與右行四位對減,至中'左'上禾盡而止.如是中'行二度減右行,左行一度減右行.得中"左"兩行,如第三式.

第一式

左行	中行	右行	
𝍠	𝍡	𝍢	上禾秉數
𝍡	𝍢	𝍡	中禾秉數
𝍢	𝍠	𝍠	下禾秉數
𝍪𝍥	𝍫𝍣	𝍫𝍨	實斗數

第二式			
𝍢	𝍥	𝍢	上禾
𝍥	𝍨	𝍡	中禾
𝍨	𝍢	𝍠	下禾
𝍮𝍧	𝍠 𝍡	𝍬𝍨	實
左′	中′	右	

第三式			
〇	〇	𝍢	上禾
𝍣	𝍤	𝍡	中禾
𝍧	𝍠	𝍠	下禾
𝍬𝍨	𝍪𝍣	𝍬𝍨	實
左″	中″	右	

乃以中″行中禾不盡𝍤,徧乘左″行,四度減中″行至左″行中禾盡而止.如第四式.

第四式			
〇	〇	𝍢	上禾
〇	𝍤	𝍡	中禾
𝍬𝍥	𝍠	𝍠	下禾
𝍱𝍨	𝍪𝍣	𝍬𝍨	實
左‴	中″	右	

求下禾一秉斗數,卽以𝍬𝍥爲法,𝍱𝍨爲實,法除實不盡,以法爲分母,實爲分子,約分得分母𝍣,分子𝍩𝍠,(卽下禾之實)求中禾以𝍣乘中″行下實𝍪𝍣,得𝍱𝍥斗,減下禾一秉之實𝍩𝍠,餘𝍰𝍤斗,以中禾乘數𝍤除之,得中禾之實𝍩𝍦斗,求上禾亦以分母𝍣乘右下實𝍬𝍨斗,得𝍠𝍭𝍥斗,內減下禾一秉實𝍩𝍠斗,中禾二秉實𝍬𝍣斗餘𝍠𝍩𝍠斗,以上禾乘數𝍢除之,得上禾實𝍬𝍦斗.乃置上禾實𝍬𝍦斗,中禾𝍩𝍦斗,下禾

一斗,皆以法四除之,得上禾一秉實九斗四分斗之一,中禾一秉四斗四分斗之一,下禾一秉二斗四分斗之三,合問.

劉徽注術文『右行上禾徧乘中行而以直除』云,『爲齊同之意,爲齊同者謂中行上禾亦徧乘右行也.』(註 1)然則漢魏時人,多以互乘法使首項列數齊同,而對減消奪之.與古法原文直除術稍異.馬融注九數綴曰:『今有重差夕桀.』清錢大昕以夕桀爲互乘之脫誤,謂卽方程之維乘.錢說若確,則互乘術之於方程,在漢魏時竟與重差術並重矣.今本張邱建算經列方程題四問,術俱未詳.唐李淳風補術,劉孝孫細草,俱從直除術,復與古法盡合.

九章方程損益術曰:『損之曰益,益之曰損.』辭頗費解,古算方程未知量諸項,與下實並列爲行,無加減號及等號介於其間.移項變號之理,不易了解,而文亦難以達意也.蓋無論何值,對未知量諸項而言,爲損爲益.以之併入下實,適得其反,或如第十一問半馬之價,對於下實而言爲益,以之遷入首項,卽爲損矣.

註 1. 參觀方程章第七問術文注.

第三問正負術云:『同名相除,異名相益,正無人負之,負無人正之;其異名相除,同名相益,正無人正之,負無人負之.』此文分兩段立說,前言相減消奪,後言相加消奪也.同名異名,謂同號異號也.無人謂無對也,設 a, b 爲任何兩數,而 $a > b$,則相減法云:

$$\pm a-(\pm b)=\pm(a-b)$$

$$\pm a-(\mp b)=\pm(a+b)$$

$$0-b=-b$$

$$0-(-b)=b$$

相加法云:

$$\pm a+(\mp b)=\pm(a-b),$$

$$\pm a+(\pm b)=\pm(a+b),$$

$$0+b=b,$$

$$0+(-b)=-b.$$

古算籌正算赤,負算黑,否則以邪正爲異,赤黑相取,左右相推求,悉中正負加減之公理.方程兩行,欲消去其任一項,見爲同色則相除以盡,見爲異色,則相益以使之盡也.

上述損益正負二術,九章言之.後之治斯學者,劉徽張邱建以及唐之李劉,宋之楊秦,元之朱氏,均

無以易之.

又第十第十一兩問,物率係數有爲分數者,術文未詳其方.注云:『各以分母乘其全內子行定,乃如方程.諸物有分者倣此.』蓋通分之誼也.

第九問『今有五雀六燕,集稱之衡,雀俱重,燕俱輕,一雀一燕交而處,衡適平,幷燕雀重一斤,問燕雀一枚各重幾何?』『術曰:如方程交易質之,各重八兩.』注文綴曰:『按此四雀一燕與一雀五燕,其重等.是三雀四燕重相當,雀率重四,燕率重三也.諸再程之率皆可異術求之,卽其數也.』

又第十八問,問麻,麥,菽,荅,黍每斗直錢若干,爲五色方程.依次乘消數頗煩重.注中有約法二則.尙屬簡明.其一術先取方程五行中,二行首項物數差一者,相減得一行,(注中謂之減行)首項物數爲一.乃以之直除他行,使他行首項悉爲消去.可免徧乘之煩.乃依法以次消去第二第三項,若「減行」內首位物數已爲他行首位物數之因數者,則逕用直除消去之.至餘一物一實而止,餘仿舊法演之.其第二術號稱「新術」法令左右相減,先去下實.又轉去物位,求其一行內二物正負相當者.對易其數,

得二物各當之率.又令二物與他行互相去取,轉其二物相取之數,皆相當之率也.各據二物相當之率,對易其數,卽各當之率.乃置方程任一行爲列衰式,就物數各以其率乘之.令同名相從,異名相消,餘爲法.又置下實乘列衰所得,各爲實,實以法除,卽得各物價矣.其左右相減消奪之法亦仿第一術,甚爲簡要.二行減餘得新行後,物數與實見有公因數可約者則約之而後入算,按此所謂「新術」與「五雀六燕」題之「異術」,法理相同.皆以方程正負術,化多元爲一元,多行爲一行.乃以衰分術解之,卽得各直也.又按注者於說明新術之前,有序言二百餘字.譏世人之好煩,布氈用算,以方程爲難能可貴.而自詡如庖丁解牛,游刄理間,數理之事,亦可以少算勝也.

秦九韶數書九章卷十七「推求物價」術曰:『以方程求之,正負入之,列積及物數於下布行數各對本色.有分者通之,可約者約之,爲定率積列數.每以下項互徧乘之,每視其積以少減多.其下物數各隨積正負之.類如同名相減,異名相加,正無人負

之,負無人正之,其如同名相加,異名相減,正無人正之,負無人負之.使其一行物數得一數者爲法,其積爲實,實如法而一,所得不計,遍損或益諸積.各得法實,除之.餘仿此.』按「積」即古法之「下實」,秦氏列方程置積於上,未知量諸項於下,與古算稍異,演算時有分者通之,可約者約之.互乘消奪不限於未知量首項,立術均較古法爲通.與近代算術相同矣,術語亦簡括明白,爲論方程者之要訣.

楊輝詳解九章算法纂類於方程先解古法直除術,復立互乘對減之法.大致與秦術相似.(註2)用法因題而異,蓋直除對減,各有所宜.大致二色方程對減易明.三色以上,直除爲便也.

元朱世傑算學啓蒙有方程正負九問,立式演算均與古算相似.亦用直除術.四元玉鑑亦有方程正負八問,則方程而兼天元術者也.

明儒淺陋,古籍寖失,治算者都徒憑臆測,不事數理,算書如吳信民九章比類,程大位算法統宗等,均爲有數之著述.而於方程算法,類皆沿訛踵謬.或

註2. 勞玉初古籌算考釋卷四引輝所立互乘術文.以爲直除術誤也.

分二色爲一法,三色爲一法,四色五色以上爲一法,法無劃一,所立假如,僅可施諸本例,不可移易他處.且謬爲歌訣,以誤後人.（註 3） 明末西算傳入,算理漸明.然同文算指通編卷五所載「雜和較乘法」,以筆算新理,演方程舊法,（註 4） 皆李之藻氏取古人之法以補之.非利瑪竇氏之所傳也.（註 5）

清初梅文鼎作方程論六卷,一曰正名,二曰極數,三曰致用,四曰刊誤,五曰測量,六曰方程御雜法.正名篇分方程爲四類,一和數,二較數,三和較雜,四和較交變,分類立說以明錯糅正負之用,極數謂窮其致也,更立帶分,疊脚,重審等目.致用,謂省算也.刊誤則臚列前明諸算書之謬誤處,而闢之也.測量,御雜,皆爲方程之應用.諸卷均舉例詳解,更作論喻其算理.反覆申明.承明儒淺陋之後,有明算如梅氏者起而正之,方程之法,始爲有用.其功蓋亦匪細.惜梅氏屢稱古人之法,逕捷簡易,欲竭力推明之.而未見古本九章算術及秦九韶楊輝等之名著,秦氏方程

註 3. 語見梅瑴成增刪算法統宗卷八.

註 4. 舊法謂明代盛行之五乘對減法也.

註 5. 語見梅文鼎方程論卷首餘論.

通術一百四十餘言,能盡之意.梅氏言之,覺作論六卷使後之讀者,轉覺其過事鋪張,而說理亦嫌迂遠也.

梅瑴成增删算法統宗以程大位方程歌訣,都屬謬誤,卷八方程章,節錄乃祖方程論以替之.其後屈曾發九數通考,梅啓照學彊恕齋算學等,述方程算法,悉依方程論分類,舉例詳解,爲梅氏書所蔽.道光中,駱春池藝遊錄有方程正誤一篇,則專取梅氏方程論中之說理未精處,從而正其誤也.

戴震校刋算經十書,啓古學昌明之漸,李潢作九章算法細草圖說於是方程古法,盡得疏解.其業尤偉.九章方程第十八問,舊注約法二則,文多脫誤,世莫得讀.李之友人戴金溪李尙之各爲校正一術,幷作細草.今備錄於舊術細草之後.(註6)光緒中勞乃宣著古籌算考釋,卷四專論方程.古法行列之式,及直除對減之術,益以顯明.研求古算法者可參考及之.

方程算法爲九數之一,爲吾國代數學最古之

註6. 戴校第一術詳草.可參觀古籌算攷釋卷四,李校第二術詳草.見李氏遺書方程新術解.

發明,天元四元,百雞求一之術,皆自此出.其布算之簡捷,數理之明晰,較之西法有過之無不及.凡方程題以他術馭之,率不勝其繁,華蘅芳學算筆談,嘗論及之矣.光緒中烏程方貞元著方程衍元一卷吳縣馮世澂著方程天元術二卷,均以天元術演方程題,謂爲天元術入門之一助則可.如以二書爲獨闢蹊徑,於方程術有所貢獻,則未之敢信也.

百雞術源流考

九章算術方程章第十三問題云:「今有五家共井,甲二綆不足如乙一綆,乙三綆不足如丙一綆,丙四綆不足如丁一綆,丁五綆不足如戊一綆,戊六綆不足如甲一綆.各得所不足一綆,皆逮.問井深綆長各幾何?」如方程置五行如下:

甲綆	𝍡	○	○	○	𝍠
乙綆	𝍠	𝍢	○	○	○
丙綆	○	𝍠	𝍣	○	○
丁綆	○	○	𝍠	𝍤	○
戊綆	○	○	○	𝍠	𝍥
井深	𝍠負	𝍠負	𝍠負	𝍠負	𝍠負
下實	○	○	○	○	○
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

以正負術入之消去甲乙丙丁四項,得戊綆𝍦𝍪𝍠正,井深𝍮𝍥負,下實空.即得戊綆長爲井深之𝍦𝍪𝍠分之𝍮𝍥,再以次代入(5)(4)(3)(2)行得丁綆長爲井深之𝍦𝍪𝍠分之𝍠𝍪𝍨;丙綆長爲井深之

𝍦𝍪𝍠 分之𝍠𝍬𝍧;乙綆長爲井深之𝍦𝍪𝍠 分之𝍠𝍱𝍠;甲綆長爲井深之𝍦𝍪𝍠 分之𝍡𝍮𝍤.

既得各家綆長與井深相與之率.如以井深爲七丈二尺一寸,則甲乙丙丁戊綆各得二丈六尺五寸,一丈九尺一寸,一丈四尺八寸,一丈二尺九寸,及七尺六寸,合問.倍井深及各家綆長,其相與之比不變,以之入題,亦可合問.九章答案臚列深長尺寸,原非通例.案此題答案當爲無限.九章所答,則答案之一也.以此題實開張邱建百雞術及後世求一術之先河,故追論之.

張邱建算經末一問題云:「今雞翁一直錢五;雞母一直錢三;雞雛三直錢一.凡百錢,買雞百隻.問雞翁,母,雛各幾何?」答曰:「雞翁四,母十八,雛七十八.」又答:「雞翁八,母十一,雛八十一.」又答:「雞翁十二,母四,雛八十四.」凡三答,未知量有三,而方程只得二行.故答數無定也.算經術曰:「雞翁每增四.雞母每減七.雞雛每益三卽得.」術文似非全豹,考其意不過謂每雞母七,可當雞翁四雞雛三也.雞數相等雞直亦相當也.蓋雞翁雛增減之數,與雞母損益之數相與之比爲四,三,七.義理與「五家共井」

題同,試置方程如下.

翁數 𝍠	翁直 𝍤	以右行分母	翁 𝍠	𝍩𝍤
母數 𝍠負	母直 𝍢負	𝍢通分,得	母 𝍠負	𝍨負
雛數 𝍠	雛直 𝍠		雛 𝍠	𝍠
下實 ○	分母 𝍢		實 ○	○
	○			

	翁 𝍩𝍣		翁	𝍦
同名相消得	母 𝍧負	約分得	母	𝍣負
	雛 ○		雛	○
	實 ○		實	○

上法下實得雞翁數爲雞母數七分之四,以之入首行得鷄雛數爲雞母數七分之三,故術曰云云:

顧「五家共井」題方程五行均無下實.此題以共雞共值立式,各得下實一百,與「共井」題稍異.然則本術僅得翁母雛損益之數,未能逕得答案也.甄鸞以此術難以通曉,而定其術云:「置錢一百在地,以九爲法,除之.爲雞母之數.不盡者反減下法,爲雞翁之數.」李淳風爲之注釋,劉孝孫作細草.宋謝察微亦爲之依數立術,皆附會甄說,未得本題通術.所答計數,僅爲偶合,清焦循加減乘除釋卷六,辨甄劉之誤甚詳.別創三色差分之法,以取之.然循所

立術,亦爲偶合,而非通術.駱春池藝遊錄詳三色差分四色差分算法.更用大衍求一術解百雞題.雖取法尙是,然亦非張邱建算經本旨.丁取忠復辯焦循所立術於其數學拾遺中.且應用二色差分術,解百雞題.先假定雞翁無,由雞母雞雛共雞錢各一百入算.得雞母雞雛數.再以經術雞翁母雛增減率四,七,三損益之.而得三答.時日淳見數學拾遺謂二色方程暗合.因爲廣衍若干題,作百雞術衍二卷.於是百雞題意燦然大著.並附求一術解法,爲藝遊錄補.丁取忠爲之序云:「甄李去古未遠,莫溯心源;輓近辯說所及,徒滋聚訟.甚矣!作者難,述者更不易也!」

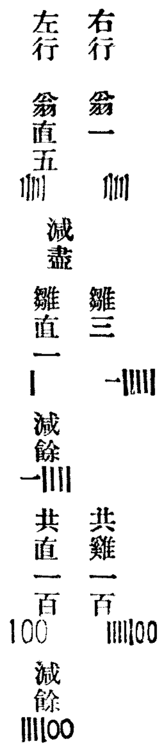
左行	右行
雛直一	雛三
Ⅲ	Ⅲ
母直三	母一
IIII	I
共錢一百	共雞一百
Ⅲ00	100

時日淳百雞術衍解百雞題術云:「用雞母雞雛求,如方程置左右行,互乘相減.上餘八爲法,下餘二百爲實,除之得二十五,爲雞母數.以減共雞一百,餘七十五爲雞雛數.乃用翁雛較(即母損率)七減母.母雛較(即翁增率)四加翁.母翁較(即雛增率)三加雛,得雞母十八,雞翁四,雞雛七十八爲一

答,又如法依數加減,而得又答.」

又如方程用雞翁雞母求,得雞母數二百,雞翁數一百負.再以翁增率四除翁負一百得二十五,以二十五乘母損率七得一百七十五,自二百減之,餘二十五,爲雞母數.以二十五乘雛增率三,得七十五,爲雞雛數.如前草法求之,得數亦同.

上二術以方程術解百雞題,取徑頗巧,日淳於此題未以翁雛共求,未解其例.若用翁雛共求,則互乘相消後,法除實爲不盡,不能還求答數如前.然日淳於其自廣之題,固亦有法除實不盡,因另立新法而得答數者.茲仿其法意,演算如下:



若用雞翁雞雛求,如方程置左右行,互乘相減,上餘 一|||| 爲法,下餘 ||||00 爲實.以等 || 約之,爲法七,實二百.以雛分母三,乘得六百爲通分雛數.亦以法七通總雞一百爲七百.而以所通雛數減餘一百,爲通分翁數.蓋得翁數爲十四又七分之二,母數空.雛數八十五又

七分之五也.乃「依法減較」置母雛較(卽翁增率)四先去其二.遞加至四較而以法七除之,適盡.四乘四得十六,以減一百餘八十四.以七除之得十二,爲雞翁數.四乘雛增率三得十二,以減六百餘五百八十八,以七除之得八十四,爲雞雛數.四卽雞母數,爲一答.又以「通率」損益之,而得又答.

上術似亦可通,惟入算稍繁,其「依法減較」云云,實爲求一術之心計法.非方程本術也.舍此又別無他術可通.按百雞一題,本爲三元無定.方程.與孫子「物不知數」一問,義理相髣髴.其可以方程常法馭之者,亦以此題雞翁雛答數,適爲翁增率雛增率之倍數也.日淳論百雞題云:「算理之微妙,不如孫子物不知數一問.」而簡易視之,故所述頗多語病.至於其方程算法,置左右行,用雞雛求者.不以一雛爲率,而以三雛爲率,雖乘除通分,答數無訛.然術繁不易了解.使方程算法不如丁取忠二色差分之簡明.其自廣之題,求得三物「約率」後,更求「通率」,亦屬無謂.張邱建百雞題程式.雖爲無定.而答數則祇宜三組.百雞術衍例言中,有「依算經三答爲限」一語.是亦未明經旨甚矣!述者誠不易也!

又方中通數度衍中有類似百雞題者二問.均有三元而列爲方程,只得二行.方氏謂二式無凖,不可立通數.故答案亦未能全得駱春池藝遊錄以三色差分之法,及大衍術解數度衍題,及百雞題.悉合題旨.且云:「置雞翁十二,以「定」四(卽翁增率)除之,得三.故知有三數.」後附其自廣之題云:「今有銀九十六兩,買物一百六十枚.其價甲九錢,乙七錢,丙五錢,丁三錢.問各幾何?」是則未知量有四,而方程只得二式.以丁價三錢乘共物式,與共價式相減.約分得甲三乙二丙一價二十四兩.春池解此式,先假定甲數爲一,則得乙數一百十八,丙數一,丁數四十.乃就所答,以各物價較數,互相增減,得他組答數.共四十組.如以甲數爲二,以前法求之,亦得四十組.答案甲數累加至七十九,則得四十組至七十八組者各二.七十九組者一.計此問可得四千六百八十一組答數.丁取忠數學拾遺辯春池答數組數之誤.謂自甲一起累至甲四十止,每歷二數組數相同.組數按數而增,確如春池所計.自甲四十一起,至甲七十九止.答數組數遞減,至甲數七十九,答數僅可一組.故此問只有三千一百二十一答.其云四千六

百八十一者,誤也.華世芳亦以丁氏爲然.且論答數應有組織,更爲詳盡.又作答數界限一卷其自序云:「古時算題一問,祇有一答.自張邱建算經創立百雞之術,始陳繁變.悉本自然.近山陽駱氏又推廣於四色差分.立法善矣,計數則非.長沙丁氏從而訂正之,未及標明界限,不免心計之勞.…………考之西籍凡三色,如百雞之類者,以代數求之,其限立顯矣.至於四色略而不詳,而均中比例之法,遺漏尙多.且未必盡題可馭.爰取四色各題,推其答數界限,云云.」按物數大於方程行數二以上者,西算存而不論.華氏論之甚備,用特介紹其說,附於百雞術篇末,蓋亦一問多答題問解法之餘緒也.

求一術源流考

求一算術出於孫子「物不知數」之問,爲九章所未詳.唐宋兩代疇人,頗用之以治曆.宋秦九韶以大衍釋之,其術始顯.法以各數及不滿各數之殘餘,求未以各數除去之數,必先求以各數去之餘一之數,而後諸數可求.故曰求一也.求一術亦爲無定算法之一種.推步家謂之方程誤也.玆叙其源流幷附以證釋,以公同好.

孫子三卷未詳其作者名字年代.卷首列「量之所起」云云,承譌踵謬,決非周代作品.且問題中有「佛書」及「棋局十九道」等語,當爲六朝人所著.與夏侯陽張邱建確相先後.卷下有題云:「今有物不知數,三三數之賸二,五五數之賸三,七七數之賸二,問物幾何?」「答曰二十三.」「術曰.三三數之賸二,置一百四十;五五數之賸三,置六十三;七七數之賸二,置三十.幷之得二百三十三.以二百十

減之卽得.凡三三數之賸一則置七十,五五數之賸一則置二十一,七七數之賸一則置十五.一百六以上以一百五減之卽得.」按術文當分兩段.讀前半爲本題之解法,後半則同類題之總術也.云「三三數之賸一置七十」者,七十爲三除之賸一之數,而同時爲五與七之公倍數也.仿此二十一爲三與七之公倍數,以五除之恰餘一;十五爲三與五之公倍數,以七除之亦恰餘一.置七十,二十一,十五,各以賸數乘之,相加得總.逢一百零五去之,所餘卽爲答數.惟術中以三爲法者,須置七十,爲五七小公倍之兩倍.以五爲法,則置二十一,卽爲三七之小公倍.以七爲法,則置十五,亦卽爲三五之小公倍.此二倍或一倍之乘數,秦氏書稱之曰「乘率」.此題之能解與否,卽在求此乘率一法,孫子算經但具術文,而未詳其所以得術之由.與張邱建百雞題術同有缺憾.後人或疑其故祕機緘,或譏其但從心計.皆不知術者也.

宋何承天調日法用強弱二率,齊祖冲之求圓周,立約密二率.皆似得之於求一術.顧調日法詳草及冲之綴術早已失傳,未敢以爲定論也.竊按承天

強率$\frac{26}{49}$,弱率$\frac{9}{17}$.如以子母互乘,26×17減9×49恰餘一.若先得朔餘日法(註1)$\frac{9}{17}$爲太弱,則可用求一術解$17x=9y+1$之無定式,得$\frac{x}{y}=\frac{26}{49}$爲強率也.冲之於圓周率亦然,冲之知$\pi<\frac{157}{50}$(註2)設$x$,$y$俱爲整數,而$\frac{x}{y}$爲略大於$\frac{157}{50}$之分數.則$50x>157y$,更假定$50x=157y+1$,以求一術解之,得$\frac{22}{7}$爲$\frac{x}{y}$之第一答,卽爲約率.更仿何承天調日法得密率,$\pi=\frac{9\times22+157}{9\times7+50}=\frac{355}{113}$.說當另詳分數算法篇中.

唐李淳風創甲子元曆.麟德二年起頒用.其推算氣朔法用上元甲子距所求年積算.淳風以甲子歲天正十一月甲子夜半合朔冬至爲「上元」.求得麟德元年距上元歲積二十六萬九千八百八十年.其推算之法,唐史曆書及開元占經俱以數太繁重,删除未錄.考其術當爲求一算術.其用數「朞實」「朔實」,卽各法數,大小餘及閏餘卽不滿法之殘

註1. 朔餘日法爲陰歷每月日數之小數部份,其強弱率調日法之詳,可參觀李尙之日法朔餘強弱攷.

註2. 魏劉徽發現$\pi=3.14$,化爲分數卽爲$\frac{157}{50}$.世謂之「徽率」.

餘.上元以來距所求年之積算,則未以各法數除去之數也.(註3)與孫子物不知數題理同而數異.其術甚繁.清張敦仁嘗設題推演之.另詳於後.曆法自唐麟德以下迄於宋元諸家,皆依賴是術而成.五代曹士蔿始變古法,不復推上古爲元.祇行於民間.世謂之「小術」.至郭守敬造授時曆,斷取近距.始廢積年日法.明清因之,治曆者幾不知求一術爲何物矣.

唐書藝文志稱貞元人龍受有算法二卷,宋史則載龍受益求一算術化零歌一卷,又龍受益法王守忠求一算術一卷.龍受與龍受益當是一人.惟書皆失傳,無從考矣.宋沈括夢溪筆談卷十八云:「算術多門,如求一,上驅,搭因,重因之類,皆不離乘除.」楊輝乘除通變算寶有「求一」代乘除之說.求一法乃以倍折兼用,使法之首位數爲一,然後以「加」「減」代乘除算也.然則龍受益求一算術,或亦如沈楊所述爲乘除捷法之一種.與曆家求積年術迥異.

宋秦九韶著數書九章十八卷,凡九類,卷一二

註3. 語見張敦仁求一算術自序.

謁「大衍」類,即求一術也.宋儒多喜研精易象.秦氏以大衍掛揲之理,可以求一算術明之.數書九章首題爲「耆卦發微」,即以數理解易象,故稱求一術而冠以「大衍」也.九韶於算無所不通,而於求一算術,尤能昌明絕學.然推本易象,終爲傅合.與唐一行大衍曆法,爲同病耳.

秦氏大衍總術曰:『置諸問數.求總等,不約一位,約衆位.曰「元數」,乃兩兩連環求等,約奇勿約偶.徧約畢,變「元數」皆曰「定數」,以「定」相乘爲「衍母」,以各「定」約「衍母」各得「衍數」.(或列各「定」爲母於右行,各立天元一爲子於左行.以母互乘子亦得「衍數」)諸「衍數」各滿「定母」去之,不滿曰「奇數」.以「奇」與「定」用大衍求一術入之,以求「乘率」.置各「乘率」對乘「衍數」,得「用數」.然後各以所餘乘「用數」爲「各總」.併「總」滿「衍母」去之,不滿爲所求數』.

按「總等」爲諸數之公因數也.兩兩連環求等謂兩數轉輾相除,以求公因數也.約,除也.約奇勿約偶,謂兩數求得公因數後,祇以公因數除其一數.

不徧除也.其意與不約一位約衆位同.

凡大衍求一題皆如下式,設$N \equiv R_1 \pmod{A_1} \equiv R_2 \pmod{A_2} \equiv R_3 \pmod{A_3} \equiv \cdots\cdots$,求$N$.式內$A$及$R$及$N$均爲正整數.$A_1A_2A_3\cdots\cdots$爲諸問數,如無等如約,卽爲諸元數,亦爲各定母.$R_1, R_2, R_3\cdots\cdots$爲各行所餘.$N$爲所求數.

設如數書九章卷一,「程行計地」題$A_1=300$, $A_2=240$, $A_3=180$.求三數總等,得60.只存A_1不約,約A_2 A_3各爲元數.$A_1'=300$, $A_2'=4$, $A_3'=3$.以$A_1'A_2'A_3'$兩兩連環求等,先以$A_2'A_3'$相求,得公因數一,不約.次以$A_1'A_3'$求等,得3,便約A_1'得100.復以等3乘A_3'得9.次以$A_1'A_2'$求等得4.以4約$A_1'(100)$得25.復以4乘A_2'得16.徧約畢.各得定母,設D_1, D_2, D_3爲各定,則$D_1=25$, $D_2=16$, $D_3=9$.

兩兩求等相約時,約一位復乘他位者,以求得之等,皆已於求總等時約過者也.否則兩數有等者,約一存一,不必復乘.至於何位應約,何位應存.秦術文中未詳.其求總等一法,亦於算未密,徒滋紛擾.歷考秦氏各題,以諸問數求定數算法,可以下術求之,置諸問數兩兩求等,如兩數同具此等數次數同者,

任意約其一數.一數含此等數多次而他數僅含少次者,則約少次之數,而存多次之數.徧約畢,務使各數俱不同類.(註 4) 乃爲定母.

以定相乘爲衍母,故衍母爲諸定母之小公倍.亦爲諸問數之小公倍也.若 A_1, A_2, A_3 諸數爲無等可約,則 A_1, A_2, A_3 卽爲定母,$A_1A_2A_3$ 爲衍母,而 A_2A_3, A_1A_3 及 A_1A_2 爲三行衍數也.

更設 $A_1A_2A_3$ 爲 300, 240, 180 三數,其「衍」「奇」諸數表示如下.

	問數	定母(D)	衍母	衍數(Y)	奇數(G)
1	300	25		144	19
2	240	16	3600	225	1
3	180	9		400	4

「以奇與定用大衍求一術求乘率」者設 C 爲正整數,而 $CG\equiv 1 \pmod D$.求 C 之最小值也.但 $Y \equiv G \pmod D$,故 $CY \equiv 1 \pmod D$.又 CY 稱爲「用數」.故置「用數」滿「定母」去之,當餘一也.

數書九章大衍求一術曰:「置奇右上,定居右

註 4.「不同類」亦爲秦書名詞.言爲互素數也.

下.立天元一於左上.先以右上除右下所得商數,與左上一相生,入左下.然後以右行上下,以少除多.遞互除之,所得商數.隨卽遞互累乘,歸左行上下.須使右上末後奇一而止,乃驗左上所得,以爲乘率.或奇數已見單一者,便爲乘率.

按術文遞互累乘之法,未詳其方.以今代數法明之,如命某行定母爲 D,奇數爲 G.互除列式如下.

	$C_n=g_nC_{n-1}+C_{n-2}$	r_n
	$C_{n-2}=g_{n-2}C_{n-3}+C_{n-4}$	r_{n-2}
設以 G 除 D,商 g 餘 r_1,	…………………	….
以 r 除 G,商 g_2 餘 r_2,	…………………	….
以 r_2 除 r_1,商 g_3 餘 r_3,	$C_4=g_4C_3+C_2$	r_4
……………………………,	$C_2=g_2C_1+1$	r_2
……………………………,	天元 1	衍奇 G
以 r_{n-2} 除 r_{n-3} 商 g_{n-1} 餘 r_{n-1},		衍定 D
以 r_{n-1} 除 r_{n-2} 商 g_n 餘 r_n,	$C_1=g_1$	r_1
若 n 爲偶次,而 $r_n=1$,卽	$C_3=g_3C_2+C_1$	r_3
止不除.左上下所寄 C	…………………	….
數,悉依 $C_k=g_kC_{k-1}+C_{k-2}$	…………………	….
之乘累算法,至 $r_n=1$ 時,	$C_{n-1}=g_{n-1}C_{n-2}+C_{n-3}$	r_{n-1}

左上所寄之 $C_n = g_nC_{n-1}+C_{n-2}$ 卽爲乘率 C'，此求一術之所以名也。

前例第一行 $D=25$, $G=19$ 用求一術立式得式如下。

4	1
天元 1	奇 19
	定 25
1	6

先以右上19除右下25，得商1餘6，以商1乘左上天元1得1，歸左下。次以右下6除右上19，得商3餘1，卽止不復除。以商3乘左下1得3，加左上天元1得4爲乘率。

第二行奇數已見單一，不必互除累乘，卽以1爲乘率。

第三行 $G=4$, $D=9$。以 G 除 D，商2餘1。以商2乘天元1得2歸左下，次以右下1除右上4使右上必餘1，故祇得商3，以商3乘左下2加天元1得7爲乘率。

7	1
天元 1	奇 4
	定 9
2	1

按 $0 \pmod{Y} \equiv 1 \pmod{D}$ 式，若命 x,y 俱爲正整數。

設 $Yy=Dx+1$，依西算代數解無定方式，得 $y=Dp+O$。式內 p 爲任何整數，O 爲一有法整數 (Definite Integer). 其計算之法,在代數中亦用互除得商,累乘併算求之.惟累乘併算之序,適與秦氏求一術求乘率法相反.蓋取 $\mathcal{O}_k=g_k\mathcal{O}_{k+1}+\mathcal{O}_{k+2}$ 之程式也.自 $\mathcal{O}_n=g_n$ 起,至 $\mathcal{O}_1=g_1\mathcal{O}_2+\mathcal{O}_3$ 止.所得卽 $\mathcal{O}$ 值也.按 $\mathcal{O}_1$ 與 C_n 演算次序,雖屬相反,而得值則同.證之如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_1&=g_1\mathcal{O}_2+\mathcal{O}_3=g_1(g_2\mathcal{O}_3+\mathcal{O}_4)+\mathcal{O}_3=(g_1g_2+1)\mathcal{O}_3+g_1\mathcal{O}_4,\\&=C_2\mathcal{O}_3+C_1\mathcal{O}_4=C_2(g_3D_4+\mathcal{O}_5)+C_1C_4=(g_3C_2+C_1)\mathcal{O}_4+C_2\mathcal{O}_5,\\&=C_3\mathcal{O}_4+C_2\mathcal{O}_5,\\&=C_4\mathcal{O}_5+C_3\mathcal{O}_6,\\&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\&=C_{n-2}\mathcal{O}_{n-1}+C_{n-3}\mathcal{O}_n.\end{aligned}$$

但 $\mathcal{O}_n=g_n$, $\mathcal{O}_{n-1}=g_ng_{n-1}+1$, 代入前式,得

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_1&=(g_ng_{n-1}+1)C_{n-2}+g_nC_{n-3},\\&=g_n(g_{n-1}C_{n-2}+C_{n-3})+C_{n-2},\\&=g_nC_{n-1}+C_{n-2},\\&=C_n.\end{aligned}$$

$$\mathcal{O}=C.$$

設 $p=0$, 則 $y=\mathcal{O}=C$.

$\therefore\ CY\equiv1\pmod{D}$.

秦氏大衍術,立天元一法爲二:其一爲求衍數法,所立天元一當以之代各分數之分子.而原分子爲一,則通分時卽以一乘衍數爲分子也.其一爲大衍求一術求乘率法,先立天元一於左上,所立天元一,當與 $CG\equiv 1 \pmod{D}$ 式內之 1,用意相似.按普通代數一次無定式,可約之爲 $ay=bx+c$.「c」爲任得整數,小於 b 者.今秦氏求一演算以 1 概之者,意謂 $ay=bx+c$ 式內之 x,y 整數值.必爲 $ay'=bx'+1$ 式內 x',y' 二整數值之 c 倍,蓋前式答案,可由解後式間接得之也.秦氏所立天元一,卽代此 c 值.在大衍題爲賸餘 R.如竟以 R 入算,則乘數當得 CR,故術言以賸餘乘用數,得各總.卽得 $RCY\equiv R \pmod{D}$.

綜上所述,秦氏大衍術之立天元一,與李治朱世傑等之立天元一術稍異.朱李所立天元一爲未知數.而秦氏所立天元一則已知數也.秦氏術雖創於海鏡玉鑑之前,而大衍算術之復明,反在測圓,四元之後.淸代算學家於立天元一之見,往往以先入爲主.而於秦氏立天元一之眞旨,每多誤解也.焦循天元一釋謂秦氏立天元一,乃欲得一數,立一數以爲齊同之準.其究必是一也云云.李善蘭天算或問

則謂立天元一卽代衍奇之數.皆未暢其旨.黃宗憲求一術通解以爲記衍數一次爲天元.別無深理.通解求乘率法,不復贅立天元.於法則簡捷矣.說天元之理,亦嫌未洽.

既得各行乘率 C, 各乘以衍數 Y 得 CY, 謂之「用數」.再以賸餘 R 乘之得 RCY 爲「各總」.「各總」相併滿「衍母」去之,不滿爲 $\Sigma RCY-mDY=N$ 卽所求數.式內 m 亦爲整數.

$$\text{設 } N\equiv R_1(\mathrm{mod}\ A_1)$$

$$\equiv R_2(\mathrm{mod}\ A_2)$$

$$\equiv R_3(\mathrm{mod}\ A_3),$$

$$\text{依法得 } N=R_1C_1Y_1+R_2C_2Y_2+R_3C_3Y_3-mA_1A_2A_3,$$

$$=R_1C_1A_2A_3+R_2C_2A_1A_3+R_3C_3A_1A_2-mA_1A_2A_3.$$

$$\text{證 } \because R_1C_1A_2A_3\equiv R_1(\mathrm{mod}\ A_1),$$

$$\therefore N\equiv R_1(\mathrm{mod}\ A_1).$$

$$\text{同理得 } N\equiv R_2(\mathrm{mod}\ A_2),$$

$$\equiv R_3(\mathrm{mod}\ A_3).$$

合問

若諸問數爲有等可約,則設 $A_1=ad^p$, $A_2=bd^{p'}$, $A_3=c$. a, b, c, d 爲互素數, p', p 均爲正整數,而 $p' \nless p$.則各步演算表示如下:

	問數 A	定數 D	衍數 Y	乘率 C	賸餘 R	各總 RCY
1	ad^p	ad^p	bc	C_1	R_1	R_1C_1bc
2	$bd^{p'}$	b	ad^pc	C_2	R_2	$R_2C_2ad^pc$
3	c	c	abd^p	C_3	R_3	$R_3C_3abd^p$

衍母$=abcd^p$,

$N=R_1C_1bc+R_2C_2ad^pc+R_3C_3abd^p-mabcd^p$,

依題意 $N\equiv R_1(\text{mod } ad^p)\equiv R_2(\text{mod } bd^{p'})$,

得 $R_1-R_2\equiv 0(\text{mod } d^{p'})$,

$$
\begin{aligned}
&R_1C_1bc+R_2C_2ad^pc-R_2,\\
&\quad =R_1C_1bc-R_1+R_2C_2ad^pc+R_1-R_2,\\
&\quad =R_1(C_1bc-1)+R_2C_2ad^pc+R_1-R_2,\\
&\quad \equiv 0(\text{mod } ad^p)+R_2C_2ad^pc+0(\text{mod } d^{p'}),\\
&\quad \equiv 0(\text{mod } d^{p'}).
\end{aligned}
$$

又
$$
\begin{aligned}
&R_1C_1bc+R_2C_2ad^pc-R_2,\\
&\quad =R_1C_1bc+R_2(C_2ad^pc-1),\\
&\quad \equiv 0(\text{mod } b).
\end{aligned}
$$

$\therefore\quad R_1C_1bc+R_2C_2ad^pc-R_2\equiv 0(\text{mod } bd^{p'})$.

$\therefore\quad N-R_2\equiv 0(\text{mod } bd^{p'})$.

餘如上例可證 $N-R_1\equiv 0(\text{mod } ad^p)$,

$N-R_3\equiv 0 \pmod{c}$. 合問(註5)

數書九章卷一二大衍題凡九問.未知量多者以八計少亦三計.數旁以本題字或天干字八音字標註分別之.數雖繁瑣,而依法演算,層次井然.如遇多元,無西法支離之煩.其以奇定求乘率一法,尤較直捷.演草亦簡短明晰.竊嘗以爲中算之長於西術者,以大衍求一與四元消法爲尤著.惜俱有術無證,後人罕通其妙.宋元算書,文字簡括,符號亦未能完備.讀者更視爲畏途,若能以古算精闢處,詳爲解釋.易以新式符號,再公之於世界.未始非算學界之曙光也.

今本數書九章卷一「古曆會積」題及卷二「程行相及」題,題旨算法,均有罣誤處.前題宋景昌數書九章札記中辯之甚詳.(註6)後題則黃宗憲通解爲之校正矣.

秦氏而後歷元明以至清代,五百餘年.求一算術幾失傳矣.永樂大典及四庫全書雖均採及.數書

註5. 證法節錄北京高師數理雜誌第三期傅種孫大衍術.

註6. 書在宜稼堂叢書中. 1842年成.

九章.然傳者無人,世莫得讀.戴震四庫全書提要有云:「其法雖不盡精密,而大衍數中,所載立天元一法,爲郭守敬李治所本.歐羅巴之借根方,至爲巧妙.亦從此出也.」數語,程度幼稚,無可諱言.至嘉慶初,李潢,張敦仁,焦循,李銳,陳杰諸人出,古算復興.張敦仁得錄秦氏書於李潢家,與李銳等日夕討論.研窮祕奧,依秦氏所說略事增删.推而衍之,成求一算術三卷.焦循天元一釋亦論及大衍術,李銳日法朔餘強弱考則用求一術以推求朔餘之強數弱數焉.

張敦仁求一算術以淺顯之筆,寫艱深之術.使盡人能解.其復古之功臣歟?卷上先述「求等」「約分」「求定母」「求衍數」「求乘率」諸術.惟「求總等」一法,棄而未用.餘則悉如秦意.卷末結以孫子物不知數題,及同類題數問演法,以立求一總術.卷中設題,用數較繁,法亦愈密.卷下爲演紀題,推麟德以來四家歲積算法.亦闡明秦氏術者也.演紀設數更繁,依秦術推演,衍數過大.不易入算.故張分兩步推演,於舊術稍爲變通.今節錄其算式步驟如下.

題云:「今有麟德術日法1340,歲實489428,朔

實 39571. 實測到麟德元年甲子歲,天正冬至,日辰甲子,小餘 240, 潤餘 17770. 欲以甲子歲天正十一月甲子夜半合朔冬至爲上元.問上元距麟德元年歲積幾何.」

按題意麟德術定一年日數爲 $\frac{489428}{1340}$.陰曆每月日數爲 $\frac{39571}{1340}$. 又測得麟德元年冬至在十一月甲子日夜半後 $\frac{240}{1340}$ 日.在合朔後 $\frac{17770}{1340}$ 日.蓋是年冬至爲十一月十三日甲子日晨也.由此實測之數,推得積年後.麟德元年後任何年日曆,卽可依法造成也.(註 7)

命 $60x$ 爲麟德元年距上元年數,卽「積算」.因上元與本年俱爲甲子,故年數爲60倍數也.命 y 爲上元十一月甲子日至本年冬至甲子日整紀數,(六十日稱爲一紀) z 爲上元至本年冬至整月數.

依題意 $$\frac{489428}{1340}\times 60x=60y+\frac{240}{1340}, \tag{1}$$
$$=\frac{39571}{1340}z+\frac{17770}{1340}. \tag{2}$$

先從(1)式入算,約分通分,得

$$1122357\,x=335\,y+1.$$

$$[82\,(\mathrm{mod}\ 335)]x\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 335).$$

註 7. 參觀新唐書曆書及李善蘭麟德術解.

$$\therefore \quad 82x \equiv 1 \pmod{335}.$$

式內 335 稱爲「蔀率」,82 稱爲「奇率」.用大衍求一術入之得乘率(張氏亦謂之因率)143.

或得 $$x \equiv 143 \pmod{335}.$$

$$60x \equiv 8580 \pmod{20100}.$$

式內 8580 謂之「入元歲」, 20100 謂之「氣元率」.以上式 $60x$ 之值代入(2)式,得

$$\frac{489428}{1340} \times [8580 \pmod{20100}] \equiv \frac{39571}{1340} z + \frac{17770}{1340}.$$

通分,得

$$489428 \times 8580 \pmod{489428 \times 20100} = 39571z + 17770,$$

但 $489428 = 14576 \pmod{39571}$.

又 $14576 \times 8580 = 125062080 \equiv 17720 \pmod{39571}$,

$$14576 \times 20100 = 292977600 \equiv 33487 \pmod{39571}.$$

式內 14576 謂之「歲閏」, 17720 謂之「入閏」, 33487 謂之「元閏」.諸數代入前式,化簡得

$$17720 \pmod{33487} = 17770 \pmod{39571},$$

$$0 \pmod{33487} = 50 \pmod{39571}.$$

式內 50 謂之「閏縮」,爲大衍題之賸餘.命 p 爲整數,解

$$33487p = 50 \pmod{39571}.$$

用 33487 及 39571 求「因數」,得 $C=37197$.

或 $p=50\times 37197-39571\,m,$

$=13$ 爲最小正整數值稱爲乘元限數.

故 $60\,x=8580+13\times 20100,$

$=269880$ 爲積算. 合問.

求一算術後,駱騰鳳著藝遊錄以求一術解百數雞及類似之題.時日淳更推廣之,補駱氏術之未備.日淳又著求一術指一卷,述求一術較張敦仁書更簡.丁取忠弟子黃宗憲爲之校訂.宗憲悟「泛母」(卽諸問數)求「定母」捷法.繼又悟求乘率簡法,成求一術通解二卷.卷下更創新術數則,尙簡易可用.求一術至是大顯於世.

黃宗憲求一術通解泛母求定母捷法術云:

「析各泛母(卽諸問數)爲極小數根(素數).偏視各同根(公素因數)取某行最多者用之.餘所有棄之不用.兩行等多者隨意用之.以所用數根連乘之卽得各行定母.若某行各根皆少於他行者,則此行無定母.」蓋以析公素因數入算,無求總等及連環求等約奇勿約偶之煩.且不易差誤也.

其求乘率術,不先求奇數,逕從定母衍數相求.

亦不立天元一,較舊術尤爲簡捷.術曰:「列定母於右行,列衍數於左行(左角預寄一數),輾轉累減(凡定母行與衍母行列數,轉輾累減,則其上所寄,必轉輾累加),至衍數行餘一即止.視左角寄數爲乘率.(兩數相減.必以少數爲法,多數爲實.其法上無寄數者,減餘餘數上仍以一爲寄數.其實上無寄數者,減餘數上以所減次數爲寄數.其法實上俱有寄數者,視累減若干次.以法上寄數亦累加若干次於實上寄數中,即得減餘數上之寄數矣.)

例題:通解題云:「今有數不知總.以五累減之無賸,以七百十五累減之賸十,以二百四十七累減之賸一百四十,以三百九十一累減之賸二百四十五,以一百八十七累減之賸一百零九.問其總數若干.」「答曰一萬〇〇二十.」

解法:置各泛母依法得定母衍數表示如下.

泛母	析母	定母	衍母	衍數	附白
$A_1=5$	5	1			廢位
$A_2=715$	$5\Delta\times11\Delta\times13$	55		96577	
$A_3=247$	$13\Delta\times19\Delta$	247	5,311,735	21505	
$A_4=391$	$17\Delta\times23\Delta$	391		13585	
$A_5=187$	11×17	1			廢白

既得各定母衍數,兩兩對列,以求一術入之,得下列三式.

	Y_2	D_2		Y_4	D_3		Y_4	D_4
1	96577	55°	1	21505	247°	1	13585	391°
	96525			21489			13294	
1	52	55	1	16	247	1	291	391
		52			240			291
	52	3 1		16	7 15		291	100 1
	51			14			200	
17×1+1=18	1		15×2+1=31	2	7	1×2+1=3	91	100
					6			91
				2	1 3×31+15=108		91	9 1×3+1=4
				1			90	
			108+31=139	1		4×10+3=43	1	
	$C_2=18$			$C_3=139$			$C_4=43$	

既得各乘率後,以衍數乘之,又以牘數乘之.併得所求率,表示如下.

衍數 Y	乘率 C	賸數 R	各總 RCY
$Y_2=96577$	18	10	17383860
$Y_3=21505$	139	140	418487800
$Y_4=13583$	43	245	143117975

總$=578989135$,

$109\times5311735=578979115$,

所求總 $=10020$ 合問.

通解卷下有新術數則.其一曰:「於求乘率時,以右行除左行遇所餘與題中本位賸數相同者,即止不除.即以餘數上寄數爲乘率,以乘衍數即得總數,所得亦同.」其一爲依代數無定方程解法數理,分組計算.數雖稍簡,然蹈支離之病,與西算同.而條理反不如西算之淸,則不足取也.

竊按求一算術更可得二簡法,爲黃氏所未及.姑誌於後,以就正有道.其一曰,取題中賸數最小者,徧減諸他組賸數.使本位賸數爲零.則本位乘率用數,均可免求.但就他位求得總數後,加此最小賸數,所得亦同.其二曰,二位賸數相等者,取二組泛母之小公倍爲泛母.即以等數爲賸數,兩組併成一組.亦

可省算.其三曰,求得乘率,後先各乘賸數,得泛係數.滿本位定母去之,不滿曰正係數.以各衍數乘之,得各總.併之滿衍母去之,得所求數.

例題如前.

	定母	賸　數　R	衍數	乘率	泛係數	正係數	各總
2	55	$10-10=0$					
3	247	$140-10=130$	21505	139	18070	39	838695
4	391	$245-10=235$	13585	43	10105	330	4483505

總 5321745

衍母 = 5311730

10010

最小賸數 = 10

10020

以新術解孫子題則如下式.

定　母	賸　數	衍　數	乘　率	係　數	總
3	$2-2=0$				
5	$3-2=1$	21	1	1	21
7	$2-2=0$				

$21+2=23$ 爲所求數.

朱世傑垜積術廣義

（記號）在垜積術 (Summation of integral finite series) 中,最重要成分爲有限之數學級數,連乘之積,如 $a(a+b)(a+2b)\cdots\cdots[a+(p-1)b]$ 謂之級積[(1)]西疇 Kramp 稱之曰 Faculty 且介紹新符號以表之,其符號爲 $a^{p|b}$,a 爲級積之元數,p 爲指數,b 爲公差. Crystal[(2)] 改良之作 $a^{|p|b}$,若 $b=1$ 則此符號更可省略作 $a^{|p|}$;尋常階乘數 $p!$ 依前例可作 $1^{|p|}$.

設有最初 n 項級數如 $u_1+u_2+\cdots\cdots+u_r+\cdots\cdots u_n$,$r$ 爲項次,其上下限爲 n 與 1. 其級數之總可以

$$\sum_{r=1}^{r=n} u_r \quad \text{或} \quad \sum^{n} u_r \quad \text{或} \quad S_n$$

表之.

（定理一）若 $u_r=\dfrac{r^{|p|}}{1^{|p|}}$, p 爲任何正整數,則

$$S_n=1+\frac{2\cdot3\cdot4\cdots\cdots(p+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots p}+\frac{3\cdot4\cdot5\cdots\cdots(p+2)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots p}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n+1)\cdots\cdots(n+p-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots p}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+p-1).(n+p)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots\cdots p(p+1)}$$

$$\therefore\quad \sum^{n}\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}=\frac{n^{|p+1|}}{1^{|p+1|}}$$

(系) $$\sum^{n} r^{|p|}=\frac{1}{p+1}n^{|p+1|}$$

此定理即三角垜求積公式,其證明多數教科書中均述之,玆不更贅.

(定理二) $$\sum^{n}\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}\cdot r=\frac{[(p+1)n+1]n^{|p+1|}}{1^{|p+2|}}$$

證明: $$\sum^{n}\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}\cdot r=\sum^{n}\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}[(r+p)-p]$$

$$=(p+1)\sum^{n}\frac{r^{|p+1|}}{1^{|p+1|}}-p\sum^{n}\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}$$

$$=\frac{(p+1)n^{|p+2|}}{1^{|p+2|}}-\frac{pn^{|p+1|}}{1^{|p+1|}}\qquad\text{(定理一)}$$

$$=[(p+1)(n+p+1)-p(p+2)]\cdot\frac{n^{|p+1|}}{1^{|p+2|}}$$

$$=\frac{[(p+1)n+1]n^{|p+1|}}{1^{|p+2|}} \qquad Q.E.D.$$

例 1 $\sum^{n} r^2=\sum^{n} r\cdot r=\frac{(2n+1)n^{|2|}}{1^{|3|}}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

例 2 $\sum^{n}\frac{r^2(r+1)}{2}=\sum^{n}\frac{r^{|2|}}{1^{|2|}}\cdot r=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$

（定理三） $\sum^{n}\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}(n+1-r)=\sum^{n}\frac{r^{|p+1|}}{1^{|p+1|}}$

證: $\sum^{n}\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}(n+1-r)=\sum^{n}\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}[(n+p+1)-(r+p)]$

$$=(n+p+1)\sum^{n}\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}-(p+1)\sum^{n}\frac{r^{|p+1|}}{1^{|p+1|}}$$

$$=\frac{(n+p+1)n^{|p+1|}}{1^{|p+1|}}-\frac{(p+1)\cdot n^{|p+2|}}{1^{|p+2|}} \text{（定理一）}$$

$$=\frac{(p+2)n^{|p+2|}}{1^{|p+2|}}-\frac{(p+1)n^{|p+2|}}{1^{|p+2|}}$$

$$=\frac{n^{|p+2|}}{1^{|p+2|}}=\sum^{n}\frac{r^{|p+1|}}{1^{|p+1|}} \qquad Q.E.D.$$

例 3　$$\sum^{n} r(n+1-r)=\sum^{n}\frac{r(r+1)}{2}$$

例 4　$$\sum^{n}\frac{r(r+1)(r+2)}{1\cdot2\cdot3}=\sum^{n}\frac{r(r+1)}{1\cdot2}\cdot\frac{(n+1-r)}{1}$$

$$=\sum^{n}\frac{r}{1}\cdot\frac{(n+1-r)(n+2-r)}{1\cdot2}$$

$$=\sum^{n}\frac{(n+1-r)(n+2-r)(n+3-r)}{1\cdot2\cdot3}$$

上四式中第一式與第四式,第二式與第三式顯見俱爲等式,其第一第二兩式依定理三爲等式;故四式俱等.

（定理四）　$$\sum^{n}\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}\cdot\frac{(n\times1-r)^{|q|}}{1^{|q|}}=\sum^{n}\frac{r^{|p+q|}}{1^{|p+q|}}$$

此定理可以形數(Figurate numbers)[8]說明之如下:

連續 n 個,p 級形數之第 r 項與 q 級形數之第$(n+1-r)$項相乘積之總和等於最初 n 個$(p+q)$級形數之總和.

證明:　此定理可用數學歸納法證之:設此定理爲確實,依定理一得下列二式:

$$\sum^{n}\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}\cdot\frac{(n+1-r)^{|q|}}{1^{|q|}}=\frac{n^{|p+q+1|}}{1^{|p+q+1|}},$$

$$\sum^{n}\frac{r^{|p+1|}}{1^{|p+1|}}\cdot\frac{(n+1-r)^{|q|}}{1^{|q|}}=\frac{n^{|p+q+2|}}{1^{|p+q+2|}}.$$

更設以$(n+1-r)$級積之指數不爲 q 而爲 $q+1$, 則得

$$\sum^{n}\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}\cdot\frac{(n+1-r)^{|q+1|}}{1^{|q+1|}}$$

$$=\sum^{n}\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}\cdot\frac{(n+1-r)^{|q|}}{1^{|q|}}\cdot\frac{[(n+p+q+1)-(r+p)]}{q+1}$$

$$=\frac{(n+p+q+1)}{q+1}\sum^{n}\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}\frac{(n+1-r)^{|q|}}{1^{|q|}}-\frac{p+1}{q+1}\sum^{n}\frac{r^{|p+1|}}{1^{|p+1|}}\cdot$$

$$\frac{(n-r+1)^{|q|}}{1^{|q|}}$$

$$=\frac{(n+p+q+1)\,n^{|p+q+1|}}{(q+1)\cdot 1^{|p+q+1|}}-\frac{(p+1)\,n^{|p+q+2|}}{(q+1)\,1^{|p+q+2|}}\qquad\text{(假設)}$$

$$=\frac{(p+q+2)\,n^{|p+q+2|}}{(q+1)\,1^{|p+q+2|}}-\frac{(p+1)\,n^{|p+q+2|}}{(q+1)\,1^{|p+q+2|}}$$

$$=\frac{n^{|p+q+2|}}{1^{|p+q+2|}}=\sum^{n}\frac{r^{|p+q+1|}}{1^{|p+q+1|}}$$

上式與以 $q+1$ 替 q 時之定理四原式完全相同,故

此定理之準確度不以 $(n+1-r)$ 級積之指數加一而異.由定理三已知 p 為任何正整數, $q=1$ 時該式為確,故歸納得 p,q 俱為任何正整數時定理四皆當確實. Q.E.D

系: $$\sum^{n-p}\frac{(r-1)\ (r-2)\cdots\cdots(r-p)}{1\cdot 2\cdots\cdots p}\cdot\frac{(n-r+1)^{|q|}}{1^{|q|}}$$

$$=\sum^{n-p}\frac{(r-p)^{|p|}}{1^{|p|}}\cdot\frac{[(n-p)+1-(r-p)]^{|q|}}{1^{|q|}}$$

$$=\frac{(n-p)^{|p+q+1|}}{1^{|p+q+1|}}$$

(積較術)[4] 垜積求總,其各項之數不為形數者,可用積較術求之.積較術為中國舊術與西洋 Method of finite difference (譯名為逐差法)相同.設有級數

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_r+\cdots\cdots$$

設 $\Delta u_r \qquad \Delta u_{r-1},\cdots\cdots\cdots\cdots,\Delta u_1,$

表 $u_{r+1}-u_r, \qquad u_r-u_{r-1},\cdots\cdots\cdots,u_2-u_1;$

更設 $\Delta^2 u_r=\Delta(\Delta u_r),\ \Delta^2 u_{r-1}=\Delta(\Delta u_{r-1}),\cdots\cdots\cdots,\Delta^2 u_1=\Delta(\Delta u_1),$

表 $\Delta u_{r+1}-\Delta u_r, \qquad \Delta u_r-\Delta u_{r-1}\cdots\cdots\cdots\cdots,\Delta u_2-\Delta u_1;$

依此類推如列級數各項遞求其較則得下表:

$$\begin{array}{llllll} u_1, & u_2, & u_3, & \cdots\cdots, & u_r, & \cdots\cdots \\ \Delta u_1, & \Delta u_2, & \Delta u_3, & \cdots\cdots, & \Delta u_r, & \cdots\cdots \\ \Delta^2 u_1, & \Delta^2 u_2, & \Delta^2 u_3, & \cdots\cdots, & \Delta^2 u_r, & \cdots\cdots \\ \Delta^3 u_1, & \Delta^3 u_2, & \Delta^3 u_3, & \cdots\cdots, & \Delta^3 u_r, & \cdots\cdots \end{array}$$

………………………………………………………………

………………………………………………………………

例 5　若 $u_r=r^3$ 則其積較表爲

$$\begin{array}{lllllll} 1, & 8, & 27, & 64, & \cdots\cdots, & r^3, & \cdots\cdots \\ 7, & 19, & 37, & 61, & \cdots\cdots, & 3r^2+3r+1, & \cdots\cdots \\ 12, & 18, & 24, & 30, & \cdots\cdots, & 6r+6, & \cdots\cdots \\ 6, & 6, & 6, & 6, & \cdots\cdots, & 6, & \cdots\cdots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \cdots\cdots, & 0, & \cdots\cdots \end{array}$$

若 u_r 爲 r 之整式代數函數, k 爲 r 之最高次數.譬如 $u_r=a_0+a_1r+a_2r^2+\cdots\cdots+a_kr^k$ 則其 k 次諸積較 $\Delta^k u$ 皆爲等數,而 k 次以上諸積較如 $\Delta^{k+1}u$, Δ^{k+2} 等皆爲零.如已知某級數之首項及其逐層積較之數,(卽積較表之極左一行,如上例爲 1, 7, 12, 6 四數)則此級數中之任何一項,與任何項此級數之總,皆可由下述二定理推得之.

(定理五)　$u_r=u_1+(r-1)\Delta u_1+\dfrac{(r-1)(r-2)}{1\cdot 2}\Delta^2 u_1+\cdots\cdots$

$$+\frac{(r-k)^{|k|}}{1^{|k|}}\Delta^k u_1$$

上式爲牛頓級數求項式(Newton's Interpolation Formula). 若 u_r 爲整式代數函數,則 k 爲有限數.上式計 $k+1$ 項,亦得有限項數.

證明: $u_2=u_1+\Delta u_1$;

$$u_3=u_2+\Delta u_2,$$

$$=u_1+\Delta u_1+\Delta(u_1+\Delta u_1),$$

$$=u_1+2\Delta u_1+\Delta^2 u_1;$$

$$u_4=u_3+\Delta u_3,$$

$$=u_1+2\Delta u_1+\Delta^2 u_1+\Delta(u_1+2\Delta u_1+\Delta^2 u_1),$$

$$=u_1+3\Delta u_1+3\Delta^3 u_1+\Delta^3 u_1;$$

下倣此.

由此定理可推此等等式右邊諸積較之係數顯與二項例 (Binomial series)係數完全相同.故定理當爲準確. *Q.E.D.*

(定理六) $$\sum^{n} u_r=nu_1+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\Delta u_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\Delta^2 u_1$$

$$+\cdots\cdots+\frac{(n-k)^{|k+1|}}{1^{|k+1|}}\Delta^k u_1$$

證明 (5) $\sum^{n} u_r = \sum^{n}\Big(u_1 + (r-1)\Delta u_1 + \frac{(r-1)(r-2)}{1\cdot 2}\Delta^2 u_1$

$+\cdots\cdots+\frac{(r-k)^{|k|}}{1^{|k|}}\Delta^k u_1\Big)$

$=\sum^{n} u_1 + \sum^{n-1}(r-1)\Delta u_1 + \sum^{n-2}\frac{(r-1)(r-2)}{1\cdot 2}\Delta^2 u_1$

$+\cdots\cdots+\sum^{n-k}\frac{(n-k)^{|k|}}{1^{|k|}}\Delta^k u_1$

$= nu_1 + \frac{(n-1)^{|2|}}{1^{(2)}}\Delta u_1 + \frac{(n-2)^{|3|}}{1^{|3|}}\Delta^2 u_1 + \cdots\cdots$

$+\frac{(n-k)^{|k+1|}}{1^{|k+1|}}\cdot\Delta^k u_1$ (定理一) *Q.E.D.*

按定理五 $u_r = u_1 + (r-1)\Delta u_1 + \frac{(r-2)^{|2|}}{1^{|2|}} + \cdots\cdots$

$+\frac{(r-k)^{|k|}}{1^{|k|}}\Delta^k u_1$，式中求任何項 u_r 時，$r=1$ 時，u_1 祇得其第一項一項，$r=2$ 時，$u_2=u_1+\Delta u_1$ 得兩項，依次遞增至 $r=k$ 或 $>k$ 時 u_r 得上式之 $(k+1)$ 項.故求總式中首項 u_1 有 n 個，次項 $(r-1)\Delta u_1$ 得 $n-1$ 個，又次項 $\frac{(r-2)^{|2|}}{1^{|2|}}\Delta^2 u$

得 $n-2$ 個,至第末項 $\frac{(r-k)^{|k|}}{1^{|k|}}\Delta^{|k|}u$ 得 $n-k$ 個,故逐項求總之項數爲遞減也。

例 6　求 $1+8+27+\cdots\cdots+n^3$ 之和。

檢 r^3 之積較表(例 5)左項得 1, 7, 12, 6 四數.代入定理六得 $\sum\limits^{n} r^3=n\cdot1+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\cdot7+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot12$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\times6=\tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

(定理七)　設 $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_r+\cdots\cdots+u_n$

$$S'_n=u_1\cdot1+u_2\cdot\frac{2^{|p|}}{1^{|p|}}+u_3\frac{3^{|p|}}{1^{|p|}}+\cdots+u_r\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}$$

$$+\cdots u_n\frac{n^{|p|}}{1^{|p|}}$$

則　$S'_n=\sum\limits^{n}u_r\cdot\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}$

$$=\frac{n^{|p+1|}}{1^{|p+1|}}\cdot u_1+(p+1)\frac{(n-1)^{|p+2|}}{1^{|p+2|}}\cdot\Delta u_1+\frac{(p+1)^2}{1^{|2|}}\cdot$$

$$\frac{(n-2)^{|p+3|}}{1^{|p+8|}}\cdot\Delta^2u_1+\cdots+\frac{(p+1)^{|k|}}{1^{|k|}}\cdot\frac{(n-k)^{|p+k+1|}}{1^{|p+k+1|}}\cdot\Delta^k u$$

證明: 依定理五 $u_r=u_1+(r-1)\Delta u_1+\dfrac{(r-2)^{|2|}}{1^{|2|}}\Delta^2 u_1$

$$+\cdots\cdots+\frac{(r-k)^{|k|}}{1^{|k|}}\Delta^k u_1,$$

$$\therefore\ u_r\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}=\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}\cdot u_1+\frac{(r-1)^{|p+1|}}{1\cdot 1^{|p|}}\Delta u_1+\frac{(r-2)^{|p+2|}}{1^{|2|}\cdot 1^{|p|}}\Delta^2 u_1$$

$$+\cdots\cdots+\frac{(r-k)^{|p+k|}}{1^{|k|}\cdot 1^{|p|}}\Delta^k u_1$$

$$S'_n=\sum^{n}\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}\cdot u_1+\sum^{n-1}\frac{(r-1)^{|p+1|}}{1\cdot 1^{|p|}}\Delta u_1+\sum^{n-2}\frac{(r-2)^{|p+2|}}{1^{|2|}\cdot 1^{|p|}}\Delta^2 u_1$$

$$+\cdots\cdots+\sum^{n-k}\frac{(r-k)^{|p+k|}}{1^{|k|}\cdot 1^{|p|}}\Delta^k u_1,$$

$$=\frac{n^{|p+1|}}{1^{|p+1|}}\cdot u_1+\frac{(n-1)^{|p+2|}}{1\cdot 1^{|p|}(p+2)}\Delta u_1+\frac{(n-2)^{|p+3|}}{1^{|2|}\cdot 1^{|p|}(p+3)}\Delta^2 u_1$$

$$+\cdots\cdots+\frac{(r-k)^{|p+k+1|}}{1^{|k|}\cdot 1^{|p|}(p+k+1)}\quad\text{(定理一系)}$$

$$=\frac{n^{|p+1|}}{1^{|p+1|}}\cdot u_1+\frac{(p+1)}{1}\ \frac{(n-1)^{|p+2|}}{1^{|p+2|}}\Delta u_1+\frac{(p+1)^{|2|}}{1^{|2|}}$$

$$\frac{(n-2)^{|p+3|}}{1^{|p+3|}}\Delta^2 u_1+\cdots\cdots+\frac{(p+1)^{|k|}}{1^{|k|}}.$$

$$\frac{(n-k)^{|p+k+1|}}{1^{|p+k+1|}}\Delta^k u_1. \qquad Q.E.D.$$

例 7 $\sum^n u_r\cdot r=\frac{n^{|2|}}{1^{|2|}}\cdot u_1+2\cdot\frac{(n-1)^{|3|}}{1^{|3|}}\cdot\Delta u_1+3\cdot\frac{(n-2)^{|4|}}{1^{|4|}}\Delta^2 u_1$

$$+\cdots\cdots+(k+1)\frac{(n-k)^{|k+2|}}{1^{|k+2|}}\Delta^k u_1.$$

例 8 $\sum^n r^4=\sum^n r^3\cdot r$

$$=\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\cdot 1+2\cdot\frac{(n+1)n\ (n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 7+$$

$$3\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\times 12+4\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\times 6$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}[1+\frac{14}{3}(n-1)+3(n-2)(n-1)$$

$$+\tfrac{2}{5}(n-3)(n-2)(n-1)]$$

$$=\tfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

(定理八) 設 $S_n=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_r+\cdots\cdots+u_n$

$$S'=u_1\frac{n^{|q|}}{1^{|q|}}+u_2\cdot\frac{(n-1)^{|q|}}{1^{|q|}}+\cdots+u_r\frac{(n-r+1)^{|q|}}{1^{|q|}}+\cdots+u_n\times 1$$

則 $S'_n=\sum^n u_r\frac{(n+1-r)^{|q|}}{1^{|q|}}$

$$=\frac{n^{|q+1|}}{1^{|q+1|}}\cdot u_1+\frac{(n-1)^{|q+2|}}{1^{|q+2|}}\Delta u_1+\frac{(n-2)^{|q+3|}}{1^{|q+3|}}\Delta^2 u_1+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(n-k)^{|q+k+1|}}{1^{|q+k+1|}}\Delta^k u_1$$

證：依定理五 $u_r\frac{(n+1-r)^{|q|}}{1^{|q|}}=u_1\frac{(n+1-r)^{|q|}}{1^{|q|}}$

$$+\Delta u_1\cdot\frac{(r-1)(n+1-r)^{|q|}}{1^{|q|}}+\Delta^2 u_1\frac{(r-1)(r-2)}{1\cdot 2}\cdot$$

$$\frac{(n+1-r)^{|q|}}{1^{|q|}}+\cdots+\Delta^k u_1\frac{(r-k)^{|k|}}{1^{|k|}}\cdot\frac{(n+1-r)^{|q|}}{1^{|q|}}$$

$$\therefore\quad S'=\sum^{n}u_1\frac{(n+1-r)^{|q|}}{1^{|q|}}+\sum^{n-1}\Delta u_1\frac{(r-1)}{1}\cdot\frac{(n+1-r)^{|q|}}{1^{|q|}}$$

$$+\sum^{n-2}\Delta^2 u\frac{(r-2)^{|2|}}{1^{|2|}}\cdot\frac{(n+1-r)^{|q|}}{1^{|q|}}+\cdots\cdots+\sum^{n-k}\Delta^k u_1\frac{(r-k)^{|k|}}{1^{|k|}}$$

$$\frac{(n+1-r)^{|q|}}{1^{|q|}}=\frac{n^{|q+1|}}{1^{|q+1|}}\cdot u_1+\frac{(n-1)^{|q+2|}}{1^{|q+2|}}\Delta u_1$$

$$+\frac{(n-2)^{|q+3|}}{1^{|q+3|}}\Delta^2 u_1+\cdots+\frac{(n-k)^{|q+k+1|}}{1^{|q+k+1|}}\Delta^k u_1$$

（定理四系）*Q.E.D.*

例 9 $\sum^{n}u_r(n+1-r)=nu_1+(n-1)u_2+(n-3)u_3+\cdots\cdots+u_n$

$$=\frac{n^{|2|}}{1^{|2|}}\cdot u_1+\frac{(n-1)^{|3|}}{1^{|3|}}\Delta u_1+\frac{(n-2)^{|4|}}{1^{|4|}}\Delta^2 u_1+\cdots$$

$$+\frac{(n-k)^{|k+2|}}{1^{|k+2|}}\Delta^k u_1$$

(結論) 上述八定理中除一,五,六,三定理為西算代數學教科書中所習見者外,餘均為二級數依項次對乘得新級數求其總和.題問雖甚艱奧,而答案公式尚能簡明,元朱世傑四元玉鑑已知應用上述八定理為計算垛積招差之用.惟俱無證明,且定理二,三,四,七,八,中p,q二級積指數均不大於2.近讀玉鑑研究及之,用特擴充之,並以新式符號證明之如上.

註 1. 見靳榮祿級積論其積級符號為 bap

註 2. 見 Crystal's Textbook of Algebra 第二冊.

註 3. 形數之名見查理司密大代數學譯本.

註 4. 參觀華蘅芳積較術或 Crystal's Algebra.

註 5. 他書證定理六皆以定理五推廣之式求之,今從此證者期與定理七八之證法可以一貫也.

校正與增補

(一)記數籌制

古代計算用竹籌,猶今商人計算用珠盤.算籌長短粗細,漢以前無攷.班固漢書律曆志錄劉歆論「備數」云:「其算法用竹.徑一分,長六寸;二百七十一枚而成六觚爲一握,徑象乾律黃鐘之一,長象坤呂林鐘之長;其數以大衍之數五十,其用四十九成陽六爻,得周流六虛之象也.」琮按算籌長六寸而徑祗一分,似嫌太瘦.劉歆審度銅尺及後漢建武尺,據王國維氏莽量攷所測定,當今工部尺七寸二分.若算籌徑一分,僅得今工部尺七釐二毫,極易折斷.殊不合用.疑有誤字.「徑象乾律黃鐘之一」之「一」字疑亦有誤.因依文法觀之與下句文字相對,當云「徑象乾律黃鐘之徑,長象坤呂林鐘之長」方可通順.黃鐘律管長九寸積八百十立方分,徑當

三分三釐餘.林鐘管長六寸算籌以黃鐘徑爲徑,林鐘長爲長,則是徑三分而長六寸也.其束置之法則團聚手中,使成一六角柱體.每邊十籌,周得五十四籌.其總數爲$1+\frac{1}{2}(6+54)9=271$.劉歆以易數解釋之,謂大衍用數49,陽六爻乾之策數216,周流六虛之數6,相加得271也.說文筭下云「長六寸,計歷數者」言長爲不言徑,疑有脫誤.

九章算術方程章正負術劉徽注曰「正算赤,負算黑.否則以邪正爲異」籌算計數,無正負號故以籌色或邪正爲別.北周甄鸞註數術記遺「積算」云「長四寸,方三分」.隋書律曆志備數云「其算用竹廣二分,長三寸.正策三廉,積二百一十六枚,成六觚,乾之策也;負策四廉,積一百四十四枚,成方,坤之策也.觚方皆經十二,天地之大數也.」隋代以三棱之籌表正數方籌表負數.又與三國時劉徽所用者異.其束置之法,正算二百十六枚,束成一六角柱體.每邊六籌對徑十二籌.負算一百四十四枚,束成方柱體,每邊亦十二籌.故言觚方皆徑十二也.算籌自漢迄隋,漸改短小,且易圓柱形爲稜柱形,便於取用也.

(二)零號之採用

印度零號本爲一點●,後乃以○代●.西人研究印度算學史者,謂印度○號始見於876 A.D.時之石刻.開元占經(721A.D.)云「每空位處,恆安一點,有間咸記,無由輒錯」.開元占經原本;錄有算字法樣.今傳本已闕,乃以十口形代之,而旁注「一字」「二字」「三字」……「九字」「點」等字.可證開元以前,傳入之印度算法,尚無○號也.

中國算書自唐初王孝通緝古算術而後,迄南宋末年,著錄於唐書宋史藝文志者,不下三十餘種.然現均失傳.中國數碼之產生及○號之引用,究竟始於何時,殊不可深考.十三世紀中,秦九韶在江南,李冶處河北,又正當干戈擾攘之秋.二人所用數碼,雖有不同,而○號則一致採用.以此推之,○號之引用,當遠在秦李著書之前.北宋初中國與印度交通甚盛.○號於北宋時,自印度傳入中國亦未可知.

(三)九章算術時代攷

九章算術經兩漢人幾度刪補,魏·劉徽始取二

百四十六問，分隸九章．且爲之注，而有今之傳本．其論證已見於本書第十一頁，至十四頁．惟關於九章算術之攷證，遺漏尙多，玆爲補述如後．

九章算術不著錄於漢書藝文志．蓋西漢時有算術而不稱九章．漢書律歷志錄劉歆論備數云：「其法在算術宣於天下，小學是則」．藝文志中則載有許商算術二十六卷，杜忠算術十六卷．又按周代樂詩以一解爲一章，論語以一節爲一章，秦漢法令以一條爲一章．晉書刑法志論秦漢舊律謂「集類爲篇，結事爲章」實得篇章二字之古義．以若干算題分隸於九類，在西漢時亦應稱算術九篇，不可稱九章也．周禮地官保氏有九數之稱．東漢時鄭衆始有九數之目．周禮一書，姚際恆古今僞書攷謂出於西漢之末，九數分類，亦決非周初人所能作，疑出於東漢．近人研究文字學者，多以鄭衆注六書名義爲東漢人所定，非周初所有．可以旁證．琮以爲九章算術之名，或始於東漢，或直爲劉徽所創，書名晚出，毫無疑義，范曄後漢書鄭玄傳馬續傳俱言「通九章算術」然後漢書成於劉宋時，不足據以證鄭玄馬續時已有九章算術之稱也．

劉徽輯各時代之算術問題,分隸於九章.二百四十六問中,何者爲先秦舊文,何者爲漢人增補,何者爲劉徽增輯,則甚難辨析.竊按方田至句股九篇之次序,似與各篇算術成立之先後,極有關係.周初早有田畝租稅之制,方田算術成立,當屬甚早.均輸章之寫成,當在漢武帝置均輸官以後;句股章之寫成,當在鄭衆注九數以後,與趙君卿句股圓方圖注相先後;又少廣章直田求廣術,已知取用最小公分母,當在方田章分數術之後;盈不足章盈不足,兩盈兩不足,盈適足不足適足三術,不知有正負數,當在方程章正負術之前;少廣章有開平方,開平圓術,而方程章復補立開帶從方法.九章算術二百四十六問之撰述時代,祇少有五百年之期間也.

又按魏晉南北朝九章算術傳本,實不止一種,各家傳錄,互有異同.北史藝術傳殷浩上四序堪輿表曰「臣以姚氏之世,行樂伊川.遇遊遁大儒成公興,從求九章要術.…… 興時將臣南到陽翟九岸嶺沙門釋曇影間.……… 求請九章.影復將臣向長廣東山見道人法穆.法穆時共影爲臣開述九章數家雜要,披釋章次,意況大旨.」九章家數甚多,其證一

也;隋書經籍志所載注釋九章者,有李遵義楊淑張峻張纘祖冲之甄鸞等數家.其問題算術,未必皆與劉注本相同,其證二也;張邱建爲晉代(或在北魏初)算家之尤著者.所撰算經弧矢術,開立圓術等,皆與九章算術同誤,周率取用古率3,方程解法用直除術,亦與九章算術同.若不知有劉徽注者.當時劉徽注本,流傳未廣,其證三也.劉徽注本九章算術,至唐代立於學官.且有李淳風等奉敕注釋.尊爲算經十書之一.因得流傳獨永.宋代刊書多以劉李注本爲古本,而九章算術其他各家輯本及注釋遂泯沒無傳矣.唐代修五經正義詩經用毛傳鄭箋,而今文魯齊韓三家詩說,不可深攷,可相參證也.

(四)方程正負術「無入」辯

九章算術方程章正負術曰「同名相除,異名相益,正無入負之,負無入正之;其異名相除,同名相益,正無入正之,負無入負之.」釋文已詳本書30頁.惟前從李潢汪萊等說,「無入」作「無人」,殊有未妥,當辯正之:

方程正負術劉徽注云:「無入爲無對也.無所

得緘則使消奪者居位也」.汪萊(衡齋遺書卷五)言「爲字」讀去聲,音釋甚是.宋末楊輝詳解九章算法注云「本是同名相加,因鄰位無算可入,故正無入者仍爲正,負無入者仍爲負.古本誤刻無人者非」.據劉徽注及楊輝詳解,或云無對,或云無所入,九章術文,宜作「無入」更無疑義.惟宋代刊本九章算術誤刊作「無人」,當時算家如秦九韶朱世傑輩相沿取用,不知校正.楊輝詳解辯正之說,則泯沒無傳矣.

清·乾隆中戴東原氏撰九章算術訂訛,謂「人」字乃傳寫之誤,而孔氏微波榭刻本算經十書改從「入」字.其校勘卓見,與楊輝闇合.至李潢九章算術細草圖說則謂「原本作人,孔刻改爲人非是」而不詳其故.汪萊駁戴氏訂訛則云「人字不誤,無人謂有空位也.」又云「正負者,物也人物通稱耳」諸說皆甚牽強.謂臧三耳甚難而實非.謂臧二耳甚易而實是也.

(五)大衍求一術之遠源

本書第五篇論求一術,推源於孫子算經「物

不知數」之問題,而孫子算經之著作年代,則未能詳攷,殊有遺憾.今案張邱建算經序文,曾言孫子之「蕩杯」,未得其妙.故知其撰著年代,當在張邱建之前.孫子算經者,其亦魏晉人之書乎?惟攷今傳本孫子算經所錄,度量衡制,悉與唐宋制度相符,而隋書律曆志所引孫子算術原文,則與漢魏時代實用者合.又韋昭博弈論「枯棊三百」,李善注引邯鄲湻藝經「棊局縱橫各十七道」.韋昭邯鄲湻皆三國時代吳人.與孫子算術原著時代,當相去不遠.今傳本算經有算題言「棋局方十九道」.用棋三百六十一.與唐代圍棋道數同.術數之書,類多附益.唐代立於學官之孫子算經恐早非孫子算術原著矣.「物不知數」之問題,爲著者原術,抑爲傳習者所增補,殊不可必.而求一術遠源,不能以孫子算經著作時代攷定之,則彰彰明矣.

古代曆法俱先立上元.上元者,其年十一月甲子朔,夜半冬至,日月五星同度,如合璧連珠也.漢三統曆上元在庚戌年,至太初元年丁丑 143128 歲,謂之積年.四分歷上元庚辰,至元和元年甲申積年 9365 歲.乾象,黃初,景初諸歷,立元積年均異.其算法

未能詳考.晉武帝泰始(265−274)初,侍中平原劉智,始推甲子年爲上元.至泰始十年甲午(274 A.D.)94411歲.上元天正甲子朔夜半冬至日月五星始於星紀,得元首之端,名爲正曆.東晉穆帝時著作郎王朔造通曆,後秦姜岌造三紀甲子元曆.俱以甲子年爲上元.三術俱未經頒行,然自劉宋祖冲之北魏李業興更事提倡,迄於元代,曆家演紀,大抵以甲子爲上元.甲子爲六十干支之首,曆法設元,應在此歲.劉智以前不以甲子爲上元,大約積年算法尚未完備.愚以爲晉代改良演紀算法,當卽大衍求一術之遠源也.

西算史載印度算家阿耶波多(Aryabhata c. 510 A. D.)波羅笈多(Brahmagupta 598 A. D. 生)俱能解一次無定式 $ax \pm by = c$. 且應用於求日月五星交會之時期?(開元占經卷一百四載九執曆曆元爲二月春分朔子時曜躔婁宿.)婆羅笈多稱其術曰造微術(Kutaka).亦須先求乘率.惟乘率求法,與秦九韶數書九章術大同小異.兩晉南北朝曆家演紀術,及孫子算經「物不知數」術,詳草俱未傳於後.不知與印度造微術異同如何,二術是否同出一源也.印度在第六世紀以前,算學程度比較幼稚.阿耶波

多而後,諸家算學大都有竊取中國算學之嫌疑.其造微術,或亦爲中國演紀術之傳入彼國者也.

(六)秦九韶傳

南宋大算學家秦九韶履歷年代,清儒焦循錢大昕各有攷證.所引史料,爲周密癸辛雜識續集,景定建康志李梅亭集等書.案秦九韶數學大略自序嘗言「早歲侍親中都,因得訪習於太史.又嘗從隱君子受數學.際時狄患歷歲遙塞不自意全於矢石間.嘗險罹憂,荏苒十載.」等語,自述少年時行蹤及求學之經過,當甚可信.而焦李二君攷證,俱遺漏未爲徵引.用特再爲整理,作秦九韶小傳如後:

秦九韶,字道古,秦鳳間人.早歲侍親於金之中都.(卽今之北平)因得訪習於太史.年十八返鄉里爲義兵首.嘗險罹憂者十餘年.嘗從隱君子受數學,而致力於算數.後入蜀爲縣尉.又轉至東南,寄居湖州,多交豪富.性極機巧,星象音律算術以及營造等事,無不精究.淳祐甲辰(1244)以通直郎通判建康府旋以丁母憂解官.七年(1247)九月作所撰數學大略自序.寶祐間(1253—1258)爲沿江制置司參議

官.或以曆學薦於朝,答對有奏稿,並呈所述數學大略,得知瓊州,至郡數月罷歸.景定(1260–1264)初復知梅州.在梅治政不輟,竟卒於梅.

九韶生卒年月無攷.今以其履歷推之.九韶約生於十二世紀之末.其侍親中都當在年十八以前.1215年金中都陷於元,因回秦鳳路.1229年,元太宗攻鳳翔.復不能安居鄉里,乃入蜀爲縣尉.距中都之陷,十有四年矣.自序所謂狄患當卽指胡元也.以生於慶元卒於景定推之,享壽約六十三四歲.卒年雖較李治(1192–1279)爲早,其年齒當小於治數歲.九韶三十以前爲金秦鳳路人.其大衍求一術之立天元一,或卽金司天監治大明曆之成法,而九韶幼年時得自中都者也.清·焦循以九韶始終爲宋人,似屬無據.

(七)招差術補遺

前撰朱世傑垛積術廣義從事推廣及證明四元玉鑑所用垛積公式.然未錄嵐峯形諸式,殊有遺憾.補錄如下:

定理九: $\sum^{n}\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}\cdot\frac{(n+1-r)(n+r)}{2}=\frac{n^{|p+2|}}{1^{|p+3|}}\cdot[(p+2)n+1]$.

證明: $\sum^{n}\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}\cdot\frac{(n+1-r)(n+r)}{2}$

$$=\sum^{n}\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}\left[\frac{(n+1-r)(n+2-r)}{2}+(n+1-r)(r-1)\right],$$

$$=\sum^{n}\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}\cdot\frac{(n+1-r)^{|2|}}{1^{|2|}}$$

$$+(p+1)\sum^{n}\frac{(r-1)^{|p+1|}}{1^{|p+1|}}\cdot\frac{(n+1-r)}{1},$$

$$=\frac{n^{|p+3|}}{1^{|p+3|}}+(p+1)\frac{(n-1^{|p+3|}}{1^{|p+3|}}.\qquad\text{(定理四)}$$

$$=\frac{n^{|p+2|}}{1^{|p+3|}}\cdot[n+p+2+(p+1)(n-1)],$$

$$=\frac{n^{|p+2|}}{1^{|p+3|}}\cdot[(p+2)n+1].\qquad Q.\ E.\ D.$$

系 1. $\sum^{n}\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}\cdot\frac{(n+1-r)(n+r)}{2}=\sum^{n}\frac{r^{|p+1|}}{1^{|p+1|}}\cdot r$.

例 1. $\sum^{n}\frac{(n+1-r)(n+r)}{2}=\sum^{n}r.\ r=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

系 2. $$\sum_{k+1}^{n}\frac{(r-k)^{|k|}}{1^{|k|}}\cdot\frac{(n+1-r)(n+r)}{2}$$

$$=\frac{(n-k)^{|k+2|}}{1^{|k+3|}}\cdot[(k+2)n+k+1]$$

證明: 設 $r-k=s,\quad n-k=m$

則 $n+1-r=m+1-s\quad n+r=m+s+2k.$

$$\sum_{k+1}^{n}\frac{(r-k)^{|k|}}{1^{|k|}}\frac{(n+1-r)(n+r)}{2}$$

$$=\sum_{1}^{m}\frac{s^{|k|}}{1^{|k|}}\cdot\frac{(m+1-s)(m+s+2k)}{2}$$

$$=\sum_{1}^{n}\frac{s^{|k|}}{1^{|k|}}\cdot\frac{(m+1-s)(m+s)}{2}+k\sum_{1}^{m}\frac{s^{|k|}}{1^{|k|}}(m+1-s)$$

$$=\frac{m^{|k+2|}}{1^{|k+3|}}\cdot[(k+2)m+1)]+k.\frac{m^{|k+2|}}{1^{|k+2|}}$$

$$=\frac{m^{|k+2|}}{1^{|k+3|}}.[(k+2)m+k(k+3)+1]$$

$$=\frac{(n-k)^{|k+2|}}{1^{|k+3|}}\cdot[(k+2)n+k+1].\qquad Q.\ E.\ D.$$

定理十: 設 $S_n=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_r+\cdots\cdots+u_n$

$$=u_1\frac{n(n+1)}{2}+u_2\frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

$$+\cdots\cdots+u_r\frac{(n+1-r)(n+r)}{2}+\cdots\cdots+u_n\cdot n$$

則 $$S_n{}^1=\sum^n u_r\frac{(n+1-r)(n+r)}{2}$$

$$=\frac{n^{|2|}}{1^{|3|}}(2n+1)u_1+\frac{(n-1)^{|3|}}{1^{|4|}}(3n+2)\Delta u_1$$

$$+\frac{(n-2)^{|4|}}{1^{|5|}}(4n+3)\Delta^2u_1+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{(n-k)^{|k+2|}}{1^{|k+3|}}[(k+2)n+k+1]\Delta^k u_1$$

證明: $$u_r\frac{(n+1-r)(n+r)}{2}=\frac{(n+1-r)(n+r)}{2}u_1$$

$$+\frac{(r-1)(n+1-r)(r+r)}{2}\Delta u_1$$

$$+\frac{(r-2)^{|2|}}{1^{|2|}}\quad\frac{(n+1-r)(n+r)}{2}\Delta^2u_1+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\cdots\cdots+\frac{(r-k)^{|k|}}{1^{|k|}}\quad\frac{(n+1-r)(n+r)}{2}\Delta^k u_1$$

$$S^1=u_1\sum_1^n\frac{(n+1-r)\,(n+r)}{2}+\Delta u_1\sum_2^n(r+1)$$

$$\frac{(n+1r)(n-r)}{2}+\Delta^2 u_1\sum_3^n\frac{(r-2)^{|2|}}{1^{|2|}}$$

$$\cdot\frac{(n+1-r)\,(n+r)}{2}+\cdots\cdots+\Delta^k u_1\sum_{k+1}^n\frac{(r-k)^{|k|}}{1^{|k|}}$$

$$\frac{(n+1-r)\,(n+r)}{2}$$

$$=u_1\frac{n^{|2|}}{1^{|3|}}(2n+1)+\Delta u_1\frac{(n-1)^{|3|}}{1^{|4|}}(3n+2)+$$

$$\Delta^2 u_1\frac{(n-2)^{|4|}}{1^{|5|}}(4n+3)+\cdots\cdots+$$

$$\Delta^k u_1\frac{(n-k)^{|k+2|}}{+31}[(k+2)n+k+1]\qquad Q.\,E.\,D.$$

八