มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
THAMMASAT UNIVERSITY

คณะศิลปศาสตร์

คณิตศาสตร์ทั่วไป

2507

สารบาญ

บทที่ 1 ตรรกวิทยา

(Logic)

1.1. คณิตศาสตร์และตรรกวิทยา

ถ้าใครกล่าวถึงนักคณิตศาสตร์ หรือ วิชาคณิตศาสตร์ คนที่อยู่นอกวงการคณิตศาสตร์ จะเข้าใจว่านั่นหมายถึงนักคิดเลข หรือ วิชาที่ว่าด้วยการคิดเลข แต่แท้จริงแล้ววิชาคณิตศาสตร์ครอบคลุมไปไกลกว่านั้นมาก และการคิด การให้เหตุผล การลำดับเหตุผลก็อาศัยตรรกวิทยาเป็นพื้นฐาน ฉนั้นผู้ที่จะศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ให้เข้าใจได้อย่างแจ่มแจ้ง ก็ควรจะได้ศึกษาตรรกวิทยาเสียก่อน

ตรรกวิทยาเป็นวิชาที่ว่าด้วยการลำดับเหตุผล (science of reasoning) จากข้อสมมติ (premises) บางชนิดเราอาจหาข้อสรุป (conclusion) ได้

ตัวอย่างที่ 1

ข้อสมมติ $\left\{\begin{array}{l}\text{นักศึกษาคณะศิลปศาสตร์ทุกคนเป็นนักศึกษามหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์}\\ \text{นายแดง เป็นนักศึกษาคณะศิลปศาสตร์}\end{array}\right.$

ข้อสรุป นายแดง เป็นนักศึกษามหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

จากการสรุปนี้จะเห็นว่า ถ้าข้อสมมติเป็นความจริงแล้ว ข้อสรุปจะต้องเป็นความจริงโดยปราศจากเงื่อนไขใด ๆ

การสรุปแบบนี้เรียกว่า valid conclusion

ตัวอย่างที่ 2

ข้อสมมติ $\left\{\begin{array}{l}\text{นกทุกชนิดเป็นสัตว์ที่มีปีก}\\ \text{กา เป็นสัตว์ที่มีปีก}\end{array}\right.$

ข้อสรุป กา เป็นนกชนิดหนึ่ง

การสรุปแบบนี้ ถึงแม้ว่าข้อสรุปจะเป็นความจริง แต่ตามวิชาตรรกวิทยาถือว่าเป็นการสรุปที่ไม่ถูกต้องโดยสมบูรณ์ (invalid conclusion) ซึ่งถ้าเราเปลี่ยนข้อสมมติเล็กน้อยจะเห็นว่าข้อสรุปผิดได้อย่างชัดเจนดังนี้

ข้อสมมติ { นกทุกชนิดเป็นสัตว์ที่มีปีก
แมลงวันเป็นสัตว์ที่มีปีก

ข้อสรุป แมลงวันเป็นนกชนิดหนึ่ง

แบบฝึกหัด 1.1.

การสรุปต่อไปนี้ valid หรือ invalid

1. All men are mortal.
Socrates is a man
∴ Socrates is mortal.

2. All monkeys are tree climbers.
All marmosets are monkeys
∴ All marmosets are tree climbers.

3. นกทุกชนิดออกไข่ได้
แมว ออกไข่ไม่ได้
∴ แมว ไม่ใช่นก

4. นกทุกชนิดมีปีก
แมว ไม่ใช่นก
∴ แมว ไม่มีปีก

5. ปลาทุกชนิดว่ายน้ำได้
กบ ว่ายน้ำได้
∴ กบ เป็นปลาชนิดหนึ่ง

6. สัตว์ทุกชนิดที่ว่ายน้ำได้ เป็นปลา

สุนัข เป็นสัตว์ที่ว่ายน้ำ

∴ สุนัข เป็นปลา

1.2. Symbolic Logic

เพื่อที่จะขยายเนื้อหาของวิชาออกตามวิธีการของคณิตศาสตร์เราใช้สัญญลักษณ์แทนข้อความ ข้อความที่เป็นความจริง เราเรียกว่าข้อความนั้นมี truth–value เป็น T (true) และข้อความที่เป็นเท็จเราเรียกว่าข้อความนั้นมี truth–value เป็น F (false)

ข้อความที่มีลักษณะว่าจะต้องเป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งแน่นั้นเราเรียกว่า statement หรือ proposition

เช่น 1. ฝนกำลังตก

2. ดวงอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก

3. ชายผู้นี้ชื่อ แดง

จากตัวอย่างทั้งสามนี้ ถ้าใครพูดขึ้นเราอาจบอกได้ว่าเขาจะต้องพูดจริงหรือพูดเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเป็นแน่ เพราะถ้าเขาพูดว่า "ฝนกำลังตก" ในขณะที่ฝนกำลังตกเขาก็พูดจริง แต่ถ้าเขาพูดว่า "ฝนกำลังตก" ในขณะที่ฝนไม่ได้ตก เขาก็พูดเท็จ

1.3. Negation

เมื่อเราให้ p แทน proposition อันหนึ่ง เราให้ข้อกำหนดว่า negation of p (เขียนด้วยสัญญลักษณ์ $\sim p$, อ่านว่า non – p หรือ not – p) เป็น proposition ที่มี truth–value ตรงข้ามกับ p เสมอ กล่าวคือ

ถ้า p มี truth–value เป็น T , $\sim p$ จะต้องมี truth–value เป็น F

ถ้า p มี truth–value เป็น F , $\sim p$ จะต้องมี truth–value เป็น T

เราอาจเขียนเทียบกันในตาราง (เรียกว่า truth–value table) ได้ดังนี้

p	~ p
T	F
F	T

ตัวอย่าง ถ้า p แทน "The earth is round."

$\sim$ p ก็ต้องแทน "The earth is not round."

1.4. Compound statement

เราอาจรวม propositions ย่อย ๆ เข้าด้วยกันและผลรวมถือเสมือนเป็น proposition อันหนึ่งเรียกว่า compound statement การรวมมี 4 แบบ

1. Conjunction

เราให้ข้อกำหนดว่า conjunction of propositions p and q (เขียนด้วยสัญญลักษณ์ $p \wedge q$ อ่านว่า p and q) เป็น proposition ที่จะมี truth–value เป็น T ต่อเมื่อทั้ง p และ q มี truth–value เป็น T และถ้าผิดจากนี้ $p \wedge q$ มี truth–value เป็น F

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
F	T	F
T	F	F
F	F	F

2. Disjunction

เราให้ข้อกำหนดว่า disjunction of propositions p and q (เขียนด้วยสัญญลักษณ์ $p \vee q$. อ่านว่า p or q) เป็น proposition ที่จะมี truth–value เป็น F ต่อเมื่อทั้ง p และ q มี truth–value เป็น F และถ้าผิดจากนี้ $p \vee q$ มี truth–value เป็น T

p	q	$p \vee q$
T	T	T
F	T	T
T	F	T
F	F	F

3. Implication

เมื่อ proposition p เป็นสาเหตุให้เกิด proposition q เราเรียกว่า p implies q (เขียนด้วยสัญญลักษณ์ $p \rightarrow q$)

p เรียกว่า antecedent

q เรียกว่า consequent

เราให้ข้อกำหนดว่า $p \rightarrow q$ เป็น proposition ที่จะมี truth-value เป็น F ต่อเมื่อ p มี truth-value เป็น T และ q มี truth-value เป็น F ถ้าผิดจากนี้ $p \rightarrow q$ มี truth-value เป็น T

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
F	T	T
T	F	F
F	F	T

ข้อสังเกต p implies q มีความหมายเดียวกับ If p then q. หรือ q if p. หรือ p only if q ในภาษาทั่วไป

implication $q \rightarrow p$ เรียกว่า converse of implication $p \rightarrow q$ เป็นที่น่าสังเกตว่าคนทั่ว ๆ ไป ถ้าปราศจากการไตร่ตรองอย่างรอบคอบมักคิดว่า "If p then q" นั้นเหมือน ๆ กับ "If q then p" โดยข้อกำหนดดังกล่าว เราอาจเทียบ truth-value ดูได้

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
T	T	T	T
F	T	T	F
T	F	F	T
F	F	T	T

implication $\sim q \rightarrow \sim p$ เรียกว่า contrapositive of implication $p \rightarrow q$ implication คู่นี้มี truth-value เหมือนกัน และในวิชาตรรกวิทยาถือว่าใช้แทนกันได้

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

4. Equivalence

เราให้ข้อกำหนดว่า p is equivalent ot q (เขียนด้วยสัญลักษณ์ $p \longleftrightarrow q$) เป็น proposition ที่จะมี truth–value เป็น T, ต่อเมื่อ p,q มี truth–value เหมือนกัน ถ้าผิดจากนี้ $p \longleftrightarrow q$ มี truth–value เป็น F

p	q	$p \longleftrightarrow q$
T	T	T
F	T	F
T	F	F
F	F	T

ข้อสังเกต p is equivalent to q มีความหมายเดียวกับ p if and ony if q ในภาษาทั่วไป

1.5. Tautologies

ปรากฏว่า compound statements บางชนิดมี truth–value เป็น T เสมอ ไม่ว่า propositions ย่อย ๆ ที่เป็นส่วนประกอบจะมี truth–value เป็น T หรือ F , compound statements ชนิดนี้ เรียกว่า tautologies ซึ่งในวิชาตรรกวิทยา ถือเป็นกฎ และใช้อ้างอิงได้เสมอ เช่น

1. Law of Double Negation : $\sim(\sim p) \longleftrightarrow p$
2. Law of Excluded Middle : $p \vee \sim p$
3. Law of Contradiction : $\sim(p \wedge \sim p)$
4. Law of Equivalence :

   * $$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \longleftrightarrow (p \longleftrightarrow q)$$

5. Law of Syllogism :

   $$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

6. Law of Contraposition :

   $$(p \rightarrow q) \longleftrightarrow (\sim q \leftarrow \sim p)$$

กฎเหล่านี้อาจพิสูจน์ได้โดยเขียน truth–value table ซึ่งจะเห็นได้ว่า truth–value ของ statements เหล่านี้จะต้องเป็น T ทุกกรณี

จะพิสูจน์ Law of Syllogism เป็นตัวอย่าง

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$p \to r$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
F	T	F	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	F	F	T	T	T	T	T

คำอธิบายการเขียนตาราง

ใน Law of Syllogism มีสัญญลักษณ์อยู่ 3 ตัว p, q, r ดังนั้น 3 ช่องแรกจึงเป็นการแจกแจง truth–value ของสัญญลักษณ์ทั้งสาม เท่าที่จะเป็นไปได้มี 2^3 กรณีด้วยกัน (เนื่องจากแต่ละตัวเป็นได้ 2 กรณี ฉนั้นเมื่อเอามาแจกแจงพร้อมกันทั้งสามก็จะได้ 2^3 กรณี)

ช่องที่ 8 คือตัวกฎรูปเป็น implication โดยมี antecedent อยู่ในช่องที่ 6 และ consequent อยู่ในช่องที่ 7 ช่องที่ 7 เป็นรูป implication ที่จะทำได้จากช่องที่ 1 และ 3 ช่องที่ 6 เป็นรูป conjunction จึงต้องเพิ่มช่องที่ 4 และ 5 และช่องที่ 4 และ 5 ก็ทำได้จากช่องที่ 1 กับ 2 และช่องที่ 2 กับ 3 ตามลำดับ

เมื่อแบ่งช่องพอแก่ความต้องการแล้ว ก็เขียน truth–value ตามข้อกำหนด ช่องที่ 4, 5, 7 เป็นรูป implication เราก็ใช้ข้อกำหนดของ implication โดยเทียบ antecedent, consequent จากช่องที่ 1 กับ 2, 2 กับ 3 และ 1 กับ 3 ตามลำดับ

ช่องที่ 6 ทำโดยการรวมช่องที่ 4 กับ 5 โดยใช้ข้อกำหนดของ conjunction.

ช่องที่ 8 ใช้ข้อกำหนดของ implication โดยเทียบ antecedent และ consequent จากช่องที่ 6 และช่องที่ 7

แบบฝึกหัด 1.2.

จงพิสูจน์ tautologies ต่อไปนี้

1. $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
2. $\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
3. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$
4. $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
5. $(p \wedge q) \rightarrow p$
6. $p \rightarrow (p \vee q)$
7. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
8. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
9. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
10. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow s)] \rightarrow (p \rightarrow s)$
11. $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
12. $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$

1.6. Method of Proofs.

การพิสูจน์ (deduction) คือการหาข้อสรุปจากข้อสมมติที่โจทย์กำหนดให้ โดยถือว่าสิ่งที่โจทย์กำหนดให้มี truth–value เป็น T แต่อย่างเดียว และข้อสรุปอันเป็นผลสืบเนื่องมาจากข้อสมมติจะต้องมี truth–value เป็น T แต่อย่างเดียวด้วย

การพิสูจน์มีกฎที่ใช้อ้างได้ เช่น The Rule of Implication

ข้อสมมติ : $\begin{cases} p \rightarrow q \\ p \end{cases}$

ข้อสรุป : q

กฎนี้จะเท็จหรือจริง อาจดูได้จาก truth–value table

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
F	T	T
T	F	F
F	F	T

การที่โจทย์กำหนดให้ $p \rightarrow q$ และ p หมายถึง $p \rightarrow q$ และ p มี truth–value เป็น T พร้อม ๆ กัน ซึ่งเมื่อดูในตารางจะเห็นว่ามีแต่กรณีแรกกรณีเดียวเท่านั้น และในกรณีนี้ q มี truth–value เป็น T เช่นเดียวกัน

ข้อสังเกต

ข้อสมมติ : $\begin{cases} p \rightarrow q \\ q \end{cases}$

ข้อสรุป : p

การสรุปเช่นนี้ใช้ไม่ได้ ดูในตารางจะเห็นว่า $p \rightarrow q$ และ q มี truth–value เป็น T พร้อม ๆ กัน มีได้ 2 กรณี (กรณีที่ 1 กับ 2) ซึ่งในกรณีที่ 1. p มี truth–value เป็น T และในกรณีที่ 2. p มี truth–value เป็น F ฉะนั้น การสรุปว่าเป็น p จึงใช้ไม่ได้ หรือจะสรุปว่าเป็น ~p ก็ใช้ไม่ได้อีกเช่นเดียวกัน

ตัวอย่าง

กำหนดให้ : 1) $p \rightarrow q$

2) $q \rightarrow r$

3) p

ต้องการให้พิสูจน์ว่า r

Deduction :

$$\begin{array}{lll} & p \rightarrow q & \text{(กำหนดให้ 1)} \\ & \underline{p} & \text{(กำหนดให้ 3)} \\ \therefore & \underline{\underline{q}} & \text{(The Rule of Implication)} \\ & q \rightarrow r & \text{(กำหนดให้ 2)} \\ & \underline{q} & \text{(พิสูจน์มาแล้ว)} \\ \therefore & \underline{\underline{r}} & \text{(The Rule of Implication)} \end{array}$$

หมายเหตุ การพิสูจน์ดังกล่าวแล้วเรียกว่า Direct proof.

1.7. Indirect Proofs

การพิสูจน์โจทย์บางอย่างที่ทำแบบ Direct proof ไม่สะดวก อาจทำแบบ Indirect proof ก็ได้ โดยใช้หลักดังนี้

1. ตั้งข้อสมมติเพิ่มขึ้น 1 ข้อ และข้อสมมติที่ตั้งเพิ่มขึ้นนี้จะต้องเป็น negation ของสิ่งที่โจทย์ต้องการให้พิสูจน์เสมอ

2. ดำเนินการพิสูจน์โดยใช้ข้อสมมติที่ตั้งเพิ่มขึ้นนี้ไปจนพบการขัดแย้ง(contradiction) โดย statement ที่ทำให้เกิดการขัดแย้งนี้จะขัดแย้งกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้หรือขัดแย้งกับ tautology อันใดอันหนึ่งก็ได้

ตัวอย่าง

กำหนดให้ 1) $p \rightarrow q$

2) $q \rightarrow r$

3) $\sim r$

ต้องการให้พิสูจน์ $\sim p$

Deduction :

Assume p

	$p \rightarrow q$	(กำหนดให้ 1)
	$\underline{p}$	(Assumption)
$\therefore$	$\underline{q}$	(The Rule of Implication)
	$q \rightarrow r$	(กำหนดให้ 2)
	$\underline{q}$	(พิสูจน์มาแล้ว)
$\therefore$	$\underline{r}$	(The Rule of Implication)

เกิดการขัดแย้งเพราะโจทย์กำหนดให้ $\sim r$

$\therefore \quad \sim p$

แบบฝึกหัด 1.3.

1. กำหนดให้ 1. $p \vee q$

   2. $\sim p$

   จงพิสูจน์ว่า q

2. กำหนดให้ 1. $p \vee q \rightarrow r$

   2. p

   จงพิสูจน์ว่า r

3. กำหนดให้ 1. $p \vee q \rightarrow r \vee s$

   2. q

   3. $\sim s$

   จงพิสูจน์ว่า r

บทที่ 2 เซท

(Sets)

2.1 Sets and Elements

สิ่งที่มีคุณสมบัติเหมือน ๆ กันอาจจัดเข้าอยู่ในพวกเดียวกัน ในวิชาคณิตศาสตร์ set หมายถึงพวก และสิ่งที่จัดเข้าพวกเรียกว่า elements

สมมติว่า ก. ข. ค. สำเร็จปริญญาตรีจากมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ก. เป็นผู้หญิงได้ปริญญา ศ.บ. ข. เป็นผู้หญิงปริญญา น.บ. ค. เป็นผู้ชายปริญญา น.บ. ถ้าแบ่ง set ตามเพศ ก.ข. ก็เป็น elements ของ set เดียวกัน ถ้าแบ่งตามชนิดของปริญญา ข.ค. ก็เป็น elements ของ set เดียวกัน ดังนั้นการที่จัดว่า element ใดเป็นของ set ใดนั้นก็แล้วแต่ว่าเราจะ define set นั้น ๆ อย่างไร

$$A = \{x, y, z\}$$

หมายความว่า A เป็น set ที่มี x, y, z เป็น elements

$x \in A$ (อ่านว่า x belongs to A) หมายความว่า x เป็น element ของ A

$v \notin A$ (อ่านว่า v does not belong to A) หมายความว่า v ไม่ใช่ element ของ A

Set อาจมี elements จำนวนจำกัด (finite) หรือไม่จำกัด (infinite) ก็ได้ เช่น

$$A = \{x \mid x \text{ is any integer}\}$$

หมายความว่าเลขจำนวนเต็มใด ๆ ก็ตาม เป็น element ของ A

2.2 Subsets

Definition Set B จะเรียกว่าเป็น subset ของ set A ($B \subseteq A$) ต่อเมื่อ element ใด ๆ ของ B เป็น element ของ A

2.3 Intersections

Definition Set ที่จะเรียกว่าเป็น intersection ของ set A กับ set B ($A \cap B$) ต่อเมื่อ element ใด ๆ ของ $A \cap B$ เป็น element ของ A และในขณะเดียวกันเป็น element ของ B ด้วย

2.4 Unions

Definition Set ที่จะเรียกว่าเป็น union ของ set A กับ set B $(A \cup B)$ ต่อเมื่อ element ใด ๆ ของ $A \cup B$ เป็น element ของ A หรือ element ของ B

Theorem 1. $A \cap B \subseteq A$

พิสูจน์ ให้ x เป็น element ใด ๆ ของ $A \cap B$

$x \in A \cap B$ หมายความว่า $x \in A$ และ $x \in B$

$\therefore A \cap B \subseteq A$

Theorem 2. $A \subseteq A \cup B$

Theorem 3. $A \cap B \subseteq A \cup B$

Theorem 4. If $A \subseteq B$ and $B \subseteq C$, then $A \subseteq C$

การพิสูจน์ทิ้งไว้ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

2.5 Equality

Definition Sets A, B จะเรียกว่าเท่ากัน $(A = B)$ ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$

Theorem 5. $A \cap B = B \cap A$

พิสูจน์ จากตรรกวิทยา อาศัย tautology ที่ว่า

$$(p \wedge q) \longleftrightarrow (q \wedge p)$$

ให้ element ใด ๆ $x \in A \cap B$

$\therefore (x \in A) \wedge (x \in B)$

$\therefore (x \in B) \wedge (x \in A)$

$\therefore x \in B \cap A$

$\therefore A \cap B \subseteq B \cap A$ ... ... (1)

ให้ element ใด ๆ $y \in B \cap A$

$\therefore (y \in B) \wedge (y \in A)$

$\therefore \; (y \in A) \wedge (y \in B)$

$\therefore \; y \in A \cap B$

$\therefore \; B \cap A \subseteq A \cap B$ ... ... (2)

จาก (1) และ (2) เราได้

$$A \cap B = B \cap A$$

Theorem 6. $A \cup B = B \cup A$

Theorem 7. $A \subseteq B$ if and only if $A \cap B = A$

Theorem 8. $A \subseteq B$ if and only if $A \cup B = B$

การพิสูจน์ทิ้งไว้ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

บทที่ 3 ระบบจำนวน

(The Number System)

3.1 Natural numbers.

Set ของ natural numbers ประกอบด้วยเลข 1, 2, 3,..........ต่อ ๆ ไป ไม่มีที่สิ้นสุด และเลขเหล่านี้เป็นที่รู้จักกันตั้งแต่สมัยที่มนุษย์เริ่มรู้จักการนับ ต่อมานักคณิตศาสตร์ได้ให้นิยาม (definition) การบวก, การคูณ, การเท่ากัน ฯลฯ และพบกฎเกณฑ์ที่พอจะสรุปได้ดังนี้

ให้ N เป็น set ของ natural numbers $a \in N$, $b \in N$, $c \in N$

1. Closure law.

$$a + b \in N, \quad ab \text{ (หรือ } a \times b) \in N$$

2. Commutative Law

$$a + b = b + a \quad ; \quad ab = ba$$

3. Associative Law

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(ab)\,c = a\,(bc)$$

4. Distributive Law

$$a\,(b + c) = ab + ac$$

3.2 Integers.

ปรากฏต่อมาภายหลังว่า การหาคำตอบ (solution) ของสมการ $a + x = b$ เป็นไปไม่ได้เมื่อ $b < a$

เช่นถ้าให้ $3 + x = 2$, เราก็ไม่สามารถหา natural number ใดมาแทน x ให้สอดคล้อง (satisfy) ตามสมการได้ นักคณิตศาสตร์จึงขยายระบบจำนวนออกไปโดยเพิ่มเลข 0 กับเลขลบ เรียกว่า integers และปรากฏว่ากฎเกณฑ์ต่าง ๆ ยังใช้ได้อยู่

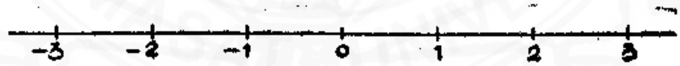
3.3 Rational numbers.

โดยเหตุเดียวกัน การหาคำตอบของสมการ $ax = b$ เป็นไปไม่ได้ในบางกรณี เช่น $2x = 3$ จึงมีการขยายโดยเพิ่มเลขเศษส่วน (fraction) เข้าไปอีก

34. Real numbers.

การขยายให้ทำต่ออีก เนื่องจากเราไม่สามารถหาเลขเศษส่วนมาแทน x ที่จะทำให้ $x^2 = 2$ ได้ เลขที่เพิ่มเข้าไปเรียกว่า irrational numbers ซึ่งเขียนเป็นทศนิยมไม่รู้จบ (infinite decimal expansion) ได้ แต่เป็นทศนิยมไม่รู้จบชนิดที่แปลงเป็นเศษส่วนไม่ได้

3.5 Geometrical Representation



ถ้าเราขีดเส้นตรงและแบ่งช่องเท่า ๆ กัน (ดังแสดงในรูป) จุดบนเส้นตรงจุดหนึ่ง ๆ ใช้แทน (represent) real number จำนวนหนึ่ง ๆ ได้พอดี การพิสูจน์จะต้องอาศัยคณิตศาสตร์ชั้นสูงขึ้นไปอีก.

บทที่ 4 กราฟ

(Grapls)

4.1 Mappings

$f : A \rightarrow B$

อ่านว่า f is a mapping of A into (or onto) B หมายถึงการแสดงความสัมพันธ์ของ elements ของ set A กับ elements ของ set B. และความสัมพันธ์จะเป็นไปในลักษณะเช่นใดก็แล้วแต่ว่าจะ difine อย่างไร เช่น

ให้ A เป็น set ของ integers

B เป็น set ของ even integers

define $f(x) = 2x$, for any $x \in A$

ดังนี้จะเห็นว่า $f(x) \in B$, for any $x \in A$

หมายเหตุ คำว่า "into" หรือ "onto" มีความหมายต่างกันอย่างไร จะมีรายละเอียดในวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงขึ้นไปอีก

4.2 Graphs

การแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง elements ของ sets 2 sets อาจแสดงได้ด้วยการเขียนรูป และรูปที่เขียนเรียกว่า graphs โดยปกติเรามักใช้กับ set ของ real numbers โดยใช้ co-ordinate system ซึ่งมีหลายแบบด้วยกัน

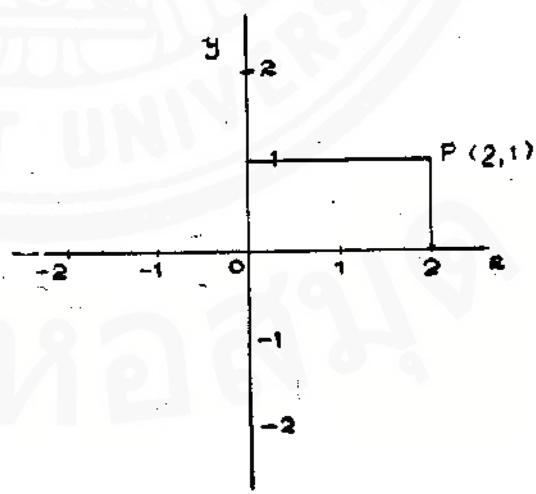
4.3 Rectangular co-ordinate

ระบบนี้ใช้เส้นตรง 2 เส้นตั้งฉากกัน แต่ละเส้นแทน set of real numbers.

เส้นนอน เรียกว่า x–axis

เส้นตั้ง เรียกว่า y–axis

จุดตัดของเส้นทั้งสองเรียกว่า origin

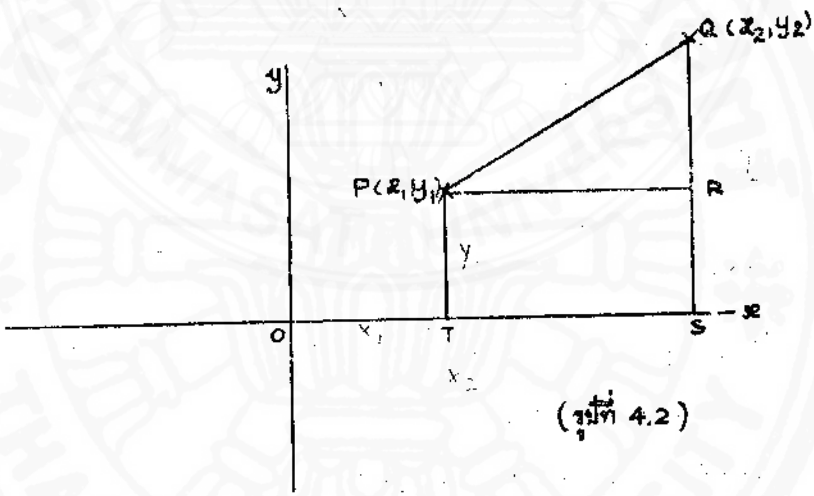


รูป 4.1

และการแบ่งช่องใช้ origin เป็นจุดศูนย์ของทั้งสองเส้น

จุด P $(2, 1)$ (ในรูปที่ 4-1) แสดงระยะที่จุด P ห่างจาก y–axis (abscissa of P) เป็น 2 หน่วย และระยะที่จุด P ห่างจาก x–axis (ordinate of P) เป็น 1 หน่วย และ $(2, 1)$ เรียกว่า เป็น Coordinate ของจุด P

4.4 ระยะระหว่างจุด 2 จุด



(รูปที่ 4.2)

ให้ P (x_1, y_1) และ Q (x_2, y_2) เป็นจุด 2 จุด

ลาก PT, QS ตั้งฉากกับ x–axis

ลาก PR ตั้งฉากกับ QS

$\therefore$ $OT = x_1$, $OS = x_2$, $PT = y_1$, $QS = y_2$

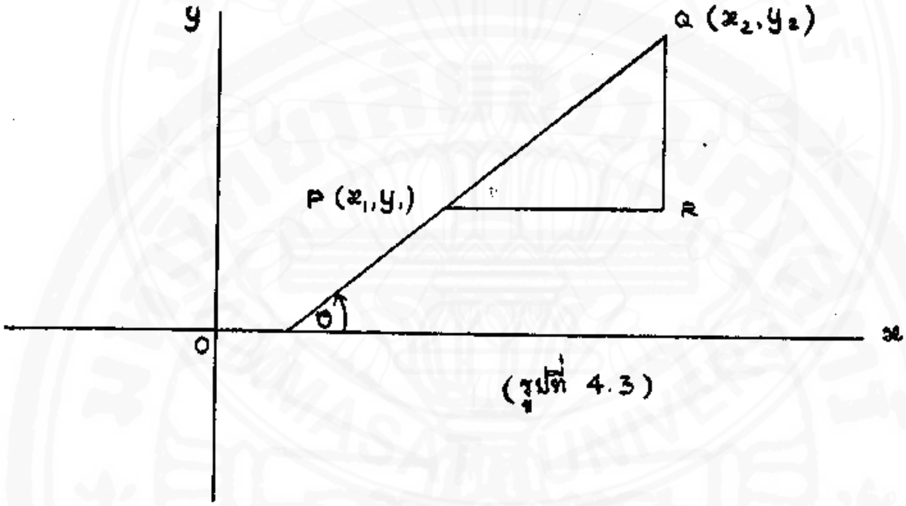
$\therefore$ $PR = OS - OT = x_2 - x_1$

และ $QR = QS - PT = y_2 - y_1$

$\therefore$ $PQ = \sqrt{PR^2 + QR^2}$

$\therefore$ $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

4.5 Slope



(รูปที่ 4.3)

ให้ P (x_1, y_1) และ Q (x_2, y_2) เป็นจุด 2 จุด ให้ θ เป็นมุมที่วัด (ทวนทิศของเข็มนาฬิกา) จาก x–axis ไปยังเส้น PQ

เราให้นิยามว่า slope ของ PQ = tan θ.

เนื่องจาก $\tan\theta = \tan QPR$

$$= \frac{QR}{PR}$$

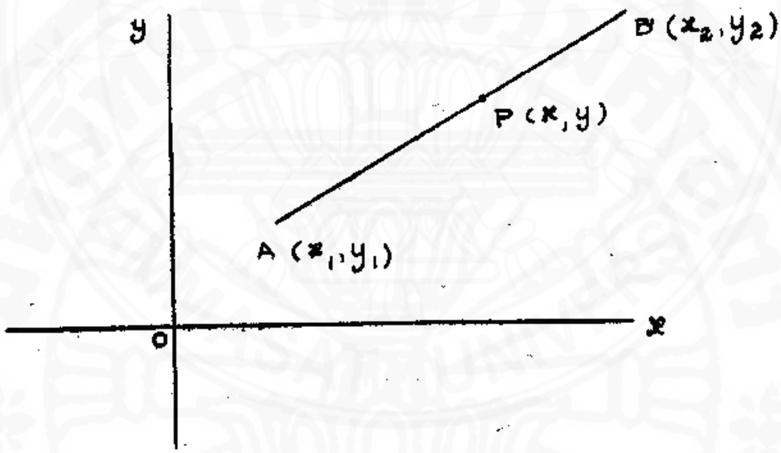
$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

∴ จากนิยามเราได้ slope ของ PQ $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

4.6 รูปกราฟกับสมการ

โดยระบบ rectangular co-ordinate เราสามารถเขียนรูปกราฟจากสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของ elements ใน sets 2 sets ได้ และสามารถหาสมการเมื่อกำหนดรูปกราฟมาให้ก่อนก็ได้เช่นเดียวกัน

(1) การหาสมการเมื่อกำหนดรูปกราฟเป็นเส้นตรงที่ลากผ่านจุด A (x_1, y_1) และ B (x_2, y_2)



ให้ P (x, y) เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง AB

$\therefore$ Slope ของ AP $= \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

Slope ของ AB $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

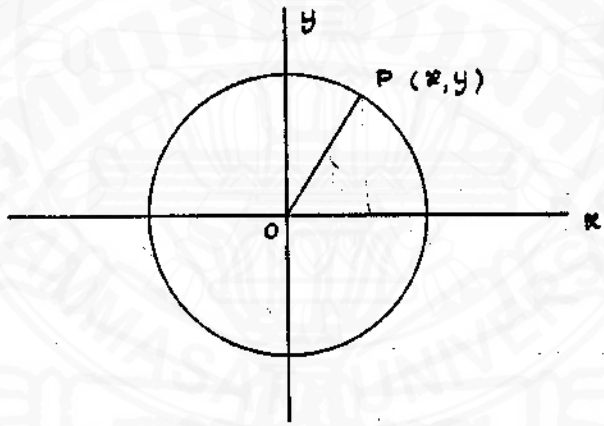
เนื่องจาก AP กับ AB เป็นเส้นตรงอันเดียวกันย่อมมี slopes เท่ากัน

$$\therefore \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

หมายเหตุ สมการที่ได้เป็นชนิด linear equation coordinate ของจุดทุกจุดบนเส้น AB จะต้องสอดคล้องตามสมการ $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2}$ เสมอ

ทั้งนี้ เพราะ P อยู่บน AB. และ coordinate ของจุดใด ๆ นอกเส้น AB ก็จะไม่สอดคล้องตามสมการนี้ เพราะถ้า P ไม่อยู่บน AB slope ของ AP $\neq$ slope ของ AB ฉะนั้นถ้ากำหนดสมการชนิด linear equation ให้ก็จะเขียนรูปกราฟได้เป็นเส้นตรงเสมอ.

(2) การหาสมการเมื่อกำหนดรูปกราฟเป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางที่ origin และมีรัศมี a หน่วย



ให้ P (x, y) เป็นจุดใด ๆ บนเส้นรอบวงกลม

$\therefore$ OP = a เสมอ

เนื่องจาก $x^2 + y^2 = OP^2$

$\therefore$ $x^2 + y^2 = a^2$

ถ้า P ไม่อยู่บนเส้นรอบวง OP $\neq$ a

$\therefore$ coordinate ของจุดอื่น ๆ ก็ไม่สอดคล้องตามสมการ $x^2 + y^2 = a^2$

ดังนั้นถ้าโจทย์ให้เขียนรูปกรวฟโดยกำหนดสมการแบบนี้ให้ รูปกราฟที่เขียนก็จะเป็นวงกลมเสมอ

4.7 การเขียนรูปอย่างคร่าว ๆ

ในกรณีที่รูปกราฟเป็นรูปที่เขียนด้วยเครื่องมือไม่ได้ โดยหลักการจะต้องเขียนทีละจุด ซึ่งในทางปฏิบัติเราทำไม่ได้ เพราะจะได้จุดมากมายสักเท่าใด รูปก็ยังไม่เป็นเส้นขึ้นมาได้ จึงต้องใช้วิธีเขียนอย่างคร่าว ๆ (sketch) และการเขียนจะสะดวกขึ้นเมื่ออาศัยหลักการต่อไปนี้

(1) Symmetry

(a) ถ้าเราหมุนรูปรอบ y–axis ครึ่งรอบแล้วปรากฏว่า รูปอยู่ในลักษณะที่เหมือนกับยังไม่ได้หมุน ดังนี้เรียกว่า รูปกราฟ symmetry with respect to y–axis

ในขณะที่รูปหมุนรอบ y–axis ไปครึ่งรอบ จุด (x, y) กับจุด $(-x, y)$ บนรูปก็จะเปลี่ยนที่กัน ซึ่งแสดงว่า ถ้าเราแทน x ทุกตัวในสมการด้วย $-x$ แล้ว สมการมิได้เปลี่ยนแปลง เราจะสรุปได้ว่ารูปกราฟ symmetry wfth respect to y–axis

(b) ในทำนองเดียวกันถ้าเราหมุนรอบ x–axis ไปครึ่งรอบ จุด (x, y) บนรูปกับจุด $(x, -y)$ ก็จะเปลี่ยนที่กัน ฉะนั้น ถ้าเราแทน y ทุกตัวในสมการด้วย $-y$ แล้ว สมการมิได้เปลี่ยนแปลง ก็แสดงว่า รูปกราฟ symmetry with respect to x–axis

(c) ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราหมุนรูปรอบ origin ไปครึ่งรอบ จุด (x, y) บนรูปกับจุด $(-x, -y)$ ก็จะเปลี่ยนกัน ฉะนั้น ถ้าเราแทน x ทุกตัวด้วย $-x$ และแทน y ทุกตัวด้วย $-y$ แล้วสมการมิได้เปลี่ยนแปลง ก็แสดงว่ารูปกราฟ symmetry with respect to origin

(2) Extend

รูปกราฟบางรูปมีอาณาเขต (extend) จำกัด และเราอาจหาอาณาเขตได้จากสมการ ในกรณีเช่นนี้ เราก็จะไม่ต้องห่วงว่าจะมีรูปกราฟออกไปนอกอาณาเขตที่เราหาไว้

ตัวอย่าง การหา extend ของรูปกราฟ $x^2 + y^2 = 25$

เราได้ $y^2 = 25 - x^2$

เนื่องจาก y^2 เป็นลบไม่ได้

$$\therefore \quad 0 \leq 25 - x^2$$

$$\therefore \quad x^2 \leq 25$$

$$\therefore \quad -5 \leq x \leq 5$$

ทำนองเดียวกัน $x^2 = 25 - y^2$

เนื่องจาก x^2 เป็นลบไม่ได้

$\therefore \quad 0 \leqslant 25 - y^2$

$\therefore \quad y^2 \leqslant 25$

$\therefore \quad -5 \leqslant y \leqslant 5$

ซึ่งแสดงว่ารูปกราฟจะต้องอยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยม

$-5 \leqslant x \leqslant 5, \ -5 \leqslant y \leqslant 5$

(3) Asymtotes

รูปกราฟบางรูปมีอาณาเขตไม่จำกัด อาจใช้ asymtotes เข้าช่วยได้ ซึ่งทำให้การเขียนรูปง่ายเข้า

Definition asymtotes ของรูปกราฟ คือเส้นตรงซึ่งสัมผัสกับรูปกราฟที่ infinity

ตัวอย่าง การหา asymtotes ของรูปกราฟ $(x-2)(y-3) = 7$

เราได้ $\quad y-3 = \frac{7}{x-2}$

เมื่อ $x \rightarrow \infty, \ y-3 \rightarrow 0$

$\therefore$ asymtote เส้นหนึ่งคือ $y - 3 = 0$

ทำนองเดียวกันเราได้ $x - 2 = \frac{7}{y-3}$

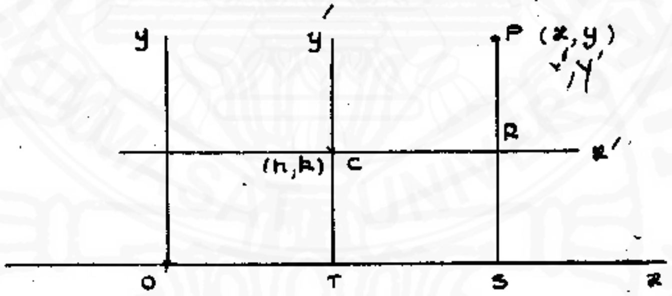
เมื่อ $y \rightarrow \infty, \ x - 2 \rightarrow 0$

$\therefore$ asymtote อีกเส้นหนึ่งคือ $x - 2 = 0$

หมายเหตุ การหา asymtote ช่วยให้มองเห็นเค้าโครงของรูปกราฟ ดังในตัวอย่างตอนที่ว่า เมื่อ $x \rightarrow \infty, \ y - 3 \rightarrow 0$ ซึ่งในตอนนี้แสดงว่าขณะที่ x มีค่ามากขึ้น (ทางบวกหรือทางลบก็ตาม) รูปกราฟจะยิ่งเบียดเข้าใกล้เส้น $y - 3 = 0$ มากขึ้นทุกที และในตอนที่ว่า เมื่อ $y \rightarrow \infty, \ x - 2 \rightarrow 0$ ก็แสดงว่าขณะที่ y มีค่ามากขึ้น (ทางบวกหรือทางลบก็ตาม) รูปกราฟก็จะเบียดเข้าใกล้เส้น $x - 3 = 0$

(4) Translation of axes.

รูปกราฟบางรูปอาจ symmetry with respect to เส้นตรงที่ไม่ใช่ x – axis หรือ y – axis ก็ได้ ซึ่งถ้าเป็นเช่นนี้การเปลี่ยน axis ก็ทำให้การเขียนรูปง่ายเข้า ทั้งนี้เพราะการเปลี่ยน axis ทำให้รูปสมการเปลี่ยนได้



ให้ x' – axis และ y' – axis เป็นเส้นขนานกับ x –axis ตามลำดับ โดยให้ตัดกันที่จุด C (h, k)

เมื่อเทียบกับ xy – axes เราให้ co-ordinate ของ P เป็น (x, y)

$$\therefore \quad OS = x, \ \ PS = y$$

เมื่อเทียบกับ $x'y'$ – axes เราให้ co-ordinate ของ P เป็น (x', y')

$$\therefore \quad CR = x' \text{ และ } PR = y'$$

$$\therefore \quad OS = CR + OT, \ \therefore \ x = x' + h$$

และ $\quad \therefore \quad PS = PR + CT, \ \therefore \ y = y' + k$

ฉะนั้นการเปลี่ยนรูปสมการโดยคิดเทียบกับ $x'y'$ – axes

ก็กระทำโดย แทน x ด้วย $x' + h$

และ แทน y ด้วย $y' + k$

แบบฝึกหัด 4.1

จงเขียนกราฟจากสมการต่อไปนี้

1. $3x + 4y = 25$ เส้นตรง.
2. $x^2 + y^2 = 25$ วงกลม
3. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$
4. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$
5. $(x-1)(y-2) = 4$ Asymptotes
6. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ วงกลมจุดศูนย์กลาง
7. $\dfrac{(x-2)^2}{16} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1$
8. $y = x^2 - 2x - 1$ พาราโบลา.
9. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 7$
10. $y = 1 + 2x - x^2$ พาราโบลา.

บทที่ 5

Undetermined Coefficients and Partial Fractions

5.1 กฎของ Undetermined coefficients

ถ้าพหุนาม 2 อันที่มีทุกเทอมเป็นกำลังของตัวแปร ต่างก็มีจำนวนเทอมนับได้และมีค่าเท่ากันโดยไม่ว่าตัวแปรจะมีค่าเป็นเท่าไร เราจะได้ว่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่มีกำลังเท่ากัน จะมีค่าเท่ากัน

ถ้า $ax^2 + bx + c$ และ $a'x^2 + b'x + c'$ มีค่าเท่ากัน เมื่อ x มีค่าต่างกันเกินกว่า 2 ครั้ง

เราจะได้
$$a = a'$$
$$b = b'$$
$$c = c'$$

ตัวอย่างที่ 1 ถอดกรณฑ์ที่สองของ

$$x^6 + 6x^5 + 13x^4 + 20x^3 + 28x^2 + 16x + 16$$

ถ้าเราให้ตัวข้างบนเท่ากับ $(x^3 + Ax^2 + Bx + 4)^2$

$$= x^6 + A^2x^4 + B^2x^2 + 16 + 2Ax^5 + 2Bx^4 + 8x^3$$
$$+ 2ABx^3 + 8Ax^2 + 8Bx$$
$$= x^6 + 2Ax^5 + (A^2 + 2B)x^4 + (8 + 2AB)x^3$$
$$+ (B^2 + 8A)x^2 + 8Bx + 16$$

ซึ่งถ้าจะเท่ากับข้างบน

เราจะต้องได้ $2A = 6$ หรือ $A = 3$

และ $8B = 16$ หรือ $B = 2$

จะเห็นว่า เราไม่จำเป็นต้องใช้

$$A^2 + 2B = 13$$

$$8 + 2AB = 20$$

และ $B^2 + 8A = 28$ เลย แต่เราควรจะใช้เป็นวิธีตรวจดูว่า $A = 3,\ B = 2$ ถูกต้องหรือไม่โดยการแทนค่าลงไปดู

ตัวอย่างที่ 2 แยกแฟคเตอร์

$$2x^2 - xy - 6y^2 + 8x + 19y - 10$$

เราทราบว่า $2x^2 - xy - 6y^2 = (2x + 3y)(x - 2y)$

เราจึงให้ $(2x + 3y + A)(x - 2y + B)$ เป็นแฟคเตอร์ซึ่งคูณออกมาได้ $2x^2 - xy - 6y^2 + (A + 2B)x + (3B - 2A)y + AB$

หากลองเทียบสัมประสิทธิ์ของ x และ y

จะได้ $A + 2B = 8$ —— 1

$3B - \overset{2A}{\cancel{24}} = 19$ —— 2

ได้ $A = -2,\ B = 5$

ซึ่งจะตรวจเห็นว่า $AB = -10$ จริง —— 3

โจทย์ 1. แยกแฟคเตอร์

(i) $x^2 + 2xy - 3y^2 + 3x + y + 2$

(ii) $2x^2 + 3xy + y^2 + 3x + 2y + 1$

(iii) $x^2 - 2y^2 - 15z^2 + xy - 11yz + 2zx$

(iv) $2x^2 - 2y^2 - z^2 - 3yz + xz$

2. จงหาค่าของ a, b, ... ถ้า

(i) $2x^2 + 7xy + 3y^2 + 4x + ay + 2$ แยกแฟคเตอร์ได้

(ii) $x^2 + a(2x + 3) + 4(x + 2) + (3a - 5)$ ถอดกรณ์ที่สองได้

(iii) $x^5 + x^4 + ax^3 + bx^2 - 4x - 5$ หารด้วย $x^2 + x + 1$ ลงตัว

(vi) $x^3 + 3x^2 + 5x + 7 = (x-2)^3 + a(x-2)^2 + b(x-2) + c$

3. ถอดกรณฑ์ที่สองของ $x^6 + 12x^5y + 60x^4y^2 + 160x^3y^3 + 240x^2y^4 + 192xy^5 + 64y^6$

5.2 เศษส่วนย่อย

การที่เรามีเศษส่วนสองอัน $\frac{2}{x+1}$ และ $\frac{3}{x-2}$ และนำมารวมกันด้วยวิธีเลขธรรมดา เราจะได้ $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} = \frac{2(x-2) + 3(x+1)}{(x+1)(x-2)}$

$$= \frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}$$

ผลที่ได้นี้เป็นจริง ไม่ว่า x จะมีค่าเป็นอะไร

ดังนั้นเราจะเขียนว่า $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} \equiv \frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}$

หากเรามี $\frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}$ เราต้องการจะทำเป็น $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}$ การกระทำนี้เราเรียกว่าทำให้เป็นเศษส่วนย่อย

เศษส่วนย่อยมักจะอยู่ในรูป $\frac{2}{x+1}$, $\frac{2x}{x^2+1}$, $\frac{x^2+1}{x^3+2}$ ซึ่งจะเห็นได้ว่ากำลังของตัวแปร x ที่เศษจะน้อยกว่าส่วนเสมอ หากเรามีเศษส่วน $\frac{x-1}{x+3}$ นี่ไม่ใช่เศษส่วนย่อย เพราะเราอาจจะเขียนเป็น $\frac{x+3-4}{x+3} = 1 - \frac{4}{x+3}$ ได้ หรือ $\frac{x^3+3x}{x-2}$ ก็ไม่ใช่เศษส่วนย่อย เพราะ

$$\frac{x^3+3x}{x-2} = \frac{x^2(x-2) + 2x(x-2) + 7(x-2) + 14}{x-2}$$

$$= x^2 + 2x + 7 + \frac{14}{x-2}$$

ดังนั้น ในเศษส่วนย่อย กำลังของตัว x ที่เศษจะต่ำกว่ากำลังของตัว x ที่ส่วนอย่างน้อยหนึ่งเสมอ

ตัวอย่าง 1 ทำ $\dfrac{7x-1}{(1-2x)\,(1-3x)}$ ให้เป็นเศษส่วนย่อย

เราให้ $\dfrac{7x-1}{(1-2x)\,(1-3x)} \equiv \dfrac{A}{1-2x} + \dfrac{B}{1-3x}$ โดย A และ B เป็นตัวเลข

เราจะได้ $$\frac{7x-1}{(1-2x)\,(1-3x)} = \frac{A\,(1-3x) + B\,(1-2x}{(1-2x)\,(1-3x}$$

$$= \frac{-(3A+2B)\,x + (A+B)}{(1-2x)\,(1-3x)}$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ เราจะได้

$$-\big(3A + 2B\big) = 7$$

และ $$A + B = -1$$

ซึ่งหาค่า A และ B ได้ -5 และ 4 ตามลำดับ

ดังนั้น $$\frac{7x-1}{(1-2x)\,(1-3x)} \equiv \frac{4}{1-3x} - \frac{5}{1-2x}$$

ตัวอย่าง 2 ทำ $\dfrac{3x^2+92x}{(x+6)\,(x^2+1)}$ ให้เป็นเศษส่วนย่อย

ให้ $$\frac{3x^2+92x}{(x+6)\,(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x+6} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

แต่ $$\frac{A}{x+6} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)\,A + (x+6)\,(Bx+C}{(x+6)\,(x^2+1)}$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (6B+C)\,x + (A+6C)}{(x+6)\,(x^2+1)}$$

ดังนั้น เทียบสัมประสิทธิ์ได้

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 3 \\ 6B + C &= 92 \\ A + 6C &= 6 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A &= -12 \\ B &= 15 \\ C &= 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $$\frac{3x^2+92x}{(x+6)\,(x^2+1)} \equiv \frac{-12}{x+1} + \frac{15x+2}{x^2+1}$$

ตัวอย่าง 3. ทำ $\dfrac{3x^2-x-2}{(1+2x)\,(x+2)^2}$ ให้เป็นเศษส่วน

เราให้ $$\frac{3x^2-x-2}{(1+2x)\,(x+2)^2} \equiv \frac{A}{1+2x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

ทางซ้ายมือ $= \dfrac{A(x+2)^2 + B(x+2)(1+2x) + C(1+2x)}{(1+2x)(x+2)^2}$

$= \dfrac{(A+2B)x^2 + (4A+5B+2C)x + 4A+2B+C}{(1+2x)(x+2)^2}$

เทียบสัมประสิทธิ์ เราได้

$$\left.\begin{aligned} A + 2B &= +3 \\ 4A + 5B + 2C &= -1 \\ 4A + 2B + C &= -2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A &= -\tfrac{1}{3} \\ B &= \tfrac{5}{3} \\ C &= -4 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{3x^2 - x - 2}{(1+2x)(x+2)^2} \equiv \dfrac{-\frac{1}{3}}{1+2x} + \dfrac{\frac{5}{3}}{x+2} - \dfrac{4}{(x+2)^2}$

วิธีทำให้เป็นเศษส่วนย่อย อาจจะทำให้ง่ายขึ้นโดยใช้หลักที่ว่า การแยกเป็นเศษส่วนย่อย จะเป็นจริงโดยไม่ว่า x จะมีค่าเท่าใด

ในตัวอย่าง 1 เราได้

$$\frac{7x-1}{(1-2x)(1-3x)} \equiv \frac{A(1-3x) + B(1-2x)}{(1-2x)(1-3x)}$$

ดังนั้น $7x - 1 \equiv A(1-3x) + B(1-2x)$ ไม่ว่า x จะมีค่าเท่าใด

หากเราให้ $x = \frac{1}{2}$ เราจะได้

$$\frac{7}{2} - 1 = A\left(1 - \frac{3}{2}\right)$$

หรือ $A = -5$

และหากเราให้ $x = \frac{1}{3}$ เราจะได้

$$\frac{7}{3} - 1 = B\left(1 - \frac{2}{3}\right)$$

หรือ $B = 4$

ข้อสังเกต เราให้ค่า x โดยทำให้วงเล็บหนึ่งเป็นศูนย์

ในตัวอย่างที่ 2 เราได้

$$3x^2 + 92x \equiv (x^2+1)A + (x+6)(Bx+C)$$

หากเราให้ $x = -6$ เราได้

$$-6\left(-18+92\right)=\left[\left(-6\right)^2+1\right]A$$

หรือ $A = \frac{-6 \times 74}{37} = -12$

หากเราให้ $x = O$ เราได้

$$O = A + 6C$$

ดังนั้น $C = 2$

และหากเราให้ $x = 1$ เราจะได้

$$.95 = 2A + 7\left(B + C\right)$$

แทนค่า A และ C หา B ได้ $B = 15$

ในกรณีนี้เราให้ x เป็นค่าที่ง่าย ๆ สะดวกแก่การคำนวณ

ในตัวอย่างที่ 3 เราได้

$$2x^2 - x - 2 \equiv A\left(x+2\right)^2 + B\left(x+2\right)\left(1+2x\right) + C\left(1+2x\right)$$

หากเราให้ $x = -2 : 12 = C\left(1-4\right)$ หรือ $C = -4$

หากเราให้ $x = -\frac{1}{2} ; -\frac{3}{4} = A\left(\frac{3}{2}\right)^2$ หรือ $A = -\frac{1}{3}$

หากเราให้ $x = O ; -2\ 4A + 2B + C$

แทนค่า A และ C ได้ $B = \frac{5}{3}$

5.3 วิธีทำให้เป็นเศษส่วนย่อยของ Horner

วิธีนี้ใช้เฉพาะเมื่อมีส่วนมีเทอมเดียวแต่มีกำลังสูง เช่น $\frac{x^4 + 2x^3 - x + 3}{(x-2)^5}$

เรานำสัมประสิทธิ์ของกำลังของ x มาเรียงกัน เป็น

1	2	0	− 1	3
1	4	8	15	33
1	6	20	55	
1	8	36		
1	10			
1				

เราจะได้ $\frac{x^4+2x^3-x+3}{(x-2)^5} = \frac{1}{x-2} + \frac{10}{(x-2)^2} + \frac{36}{(x-2)^3}$

$$+ \frac{55}{(x-2)^4} + \frac{33}{(x-2)^5}$$

วิธีทำ เทอมที่ส่วนเป็น $x-2$ เราถือเลข 2 เป็นตัวสำคัญ

บรรทัดแรก 1 2 0 −1 3

บรรทัดที่ 2 ชัก 1 ลงมา เอา 2×1 และบวก 2 ได้ 4

เอา 2×4 และบวก 0 ได้ 8

เอา 2×8 และบวก −1 ได้ 15

เอา 2×15 และบวก 3 ได้ 33

บรรทัดที่ 3 ชัก 1 ลงมา เอา 2×1 และบวก 4 ได้ 6

เอา 2×6 และบวก 8 ได้ 20

เอา 2×20 และบวก 15 ได้ 55

บรรทัดที่ 4 ชัก 1 ลงมา เอา 2×1 และบวก 6 ได้ 8

เอา 2×8 และบวก 20 ได้ 36

บรรทัดที่ 5 ชัก 1 ลงมา เอา 2×1 และบวก 8 ได้ 10

บรรทัดที่ 6 ชัก 1 ลงมา

โจทย์ แยกให้เป็นเศษส่วนย่อย

1. $\frac{5x+6}{(2+x)(1-x)}$
2. $\frac{2x-4}{(1-x^2)(1-2x)}$
3. $\frac{9}{(x+1)(x-2)^2}$
4. $\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}$
5. $\frac{1+3x}{1+11x+28x^2}$
6. $\frac{x^3-2x+1}{(x+1)^4}$
7. $\frac{x^4-2x^2+x-3}{(x-1)^5}$
8. $\frac{x^3-x^2-x-2}{(x+3)^5}$
9. $\frac{x^4+3x+1}{(x-2)^3}$
10. $\frac{x^3+2x^2-x+1}{(x-1)(x+1)^3}$

บทที่ 6 อสมการ

6.1. ในบทนี้ เราจะถือว่าตัวเลขทุกตัวเป็นเลขจริง (real numbers) และจะเริ่มโดยให้คำจำกัดความว่า ถ้า a และ b เป็นเลขสองจำนวน การที่เขียนว่า $a > b$ (อ่านว่า a ใหญ่กว่า b) หมายความว่า $a - b$ เป็นบวก และ $a < b$ (อ่านว่า a เล็กกว่า b) หมายความว่า $a - b$ เป็นลบ เราจะถือว่าเลขสูญไม่เป็นทั้งบวกหรือลบ

<u>กฎที่ 1</u> ก) ถ้า $a > b$ จะได้ว่า $a + x > b + x$ โดย x เป็นตัวเลขใดๆ

พิสูจน์ $\because (a + x) - (b + x) = a - b$

ดังนั้นถ้า $a - b$ เป็นบวก $(a + x) - (b + x)$ ก็เป็นบวก

นั่นคือ $a + x > b + x$

ข) ถ้า $a < b$ จะได้ว่า $a + x < b + x$

<u>กฎที่ 2</u> ก) ถ้า $a > b$ และ $x > 0$ จะได้ว่า $ax > bx$

พิสูจน์ $\because ax - bx = x(a - b)$

ถ้า x เป็นบวก และ $a - b$ เป็นบวก $x(a - b)$ ก็เป็นบวก

ดังนั้น $ax > bx$

ข) ถ้า $a < b$ และ $x > 0$ จะได้ว่า

$$ax < bx$$

ค) ถ้า $a > b$ และ $x < 0$ จะได้ว่า

$$ax < bx$$

ง) ถ้า $a < b$ และ $x < 0$ จะได้ว่า

$$ax > bx$$

<u>กฎที่ 3</u> ถ้า $a_1 > b_1 > 0$

$$a_2 > b_2 > 0$$

$$| \quad | \quad |$$

$$a_n > b_n > 0$$

จะได้ $a_1a_2a_3 \ldots\ldots\ldots a_n > b_1b_2b_3 \ldots\ldots\ldots b_n$

พิสูจน์ $\therefore a_1a_2a_3 \ldots\ldots\ldots a_n > b_1a_2a_3 \ldots\ldots\ldots a_n$

$$> b_1b_2a_3 \ldots\ldots\ldots a_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$> b_1b_2b_3 \ldots\ldots\ldots b_n$$

โดยใช้กฎที่ 2 เป็นขั้น ๆ ไป

<u>กฎที่ 4</u> ถ้า $a > b > 0$ จะได้

ก) $a^n > b^n > 0$ ถ้า $n > 0$

ข) $a^n < b^n$ ถ้า $n < 0$

พิสูจน์ ก) ใช้กฎที่ 3

ข) ถ้า $n < 0$ สมมติ $m = -n$

$\therefore m > 0$

$$a^n - b^n = \frac{1}{a^m} - \frac{1}{b^m} = \frac{b^m - a^m}{a^m b^m}$$

แต่ $a^m b^m$ เป็นบวก และ $a^m - b^m$ เป็นบวก โดย (ก)

ดังนั้น $b^m - a^m$ เป็นลบ

ดังนั้น $a^n - b^n$ เป็นลบ นั่นคือ $a^n < b^n$

หมายเหตุ กฎที่ 4 นี้ ยังเป็นจริง เมื่อ n เป็นเลขเศษส่วน (rational) คือ $n = \frac{p}{q}$ เมื่อ p และ q เป็นเลขจำนวนเต็ม (integer) ถ้าเราถือว่า $a^{\frac{p}{q}}$ หมายถึงราก q ของ a^p ที่เป็นบวก

ตัวอย่างของกฎต่าง ๆ

(1) ก. $\because \quad 5 > -1$

จะได้ $\quad 5 + 3 > -1 + 3$

หรือ $\quad 8 > 2$

ข. $\because \quad -4 < -2$

จะได้ $\quad -4 + 5 < -2 + 5$

หรือ $\quad 1 < 3$

(2) ก. $\because \quad 3 > -2$

จะได้ $\quad 4 \times 3 > 4 \times (-2)$

หรือ $\quad 12 > -8$

ข. $\because \quad -1 < 0$

จะได้ $\quad 3 \times (-1) < 3 \times 0$

หรือ $\quad -3 < 0$

ค. $\because \quad 3 > 2$

จะได้ $\quad (-1) \times 3 < (-1) \times (-2)$

หรือ $\quad -3 < 2$

ง. $\because \quad -1 < 0$

จะได้ $\quad (-2) \times (-1) > (-2) \times 0$

หรือ $\quad 2 > 0$

6.2. การถอดสมการธรรมดา

ตัวอย่าง $\quad 5x + 3 < -2$

ลบ 3 ออกทั้งสองข้าง $\quad 5x < -5$

คูณ $\frac{1}{5}$ ตลอดทั้งสองข้าง $\quad x < -1$

<u>ตอบ</u> $\quad x < -1$

ข้อสังเกต คำตอบในอสมการไม่ได้ตอบเป็นค่าเดียวเหมือนในสมการ $x < -1$ หมายความว่า เลขที่น้อยกว่า -1 ลงไปไม่ว่าตัวไหนจะทำให้อสมการที่กำหนดให้เป็นจริง

6.3. อสมการกำลังสอง $ax^2 + 2bx + c > 0$ อาจจะทำให้เป็นแบบใดแบบหนึ่งดังต่อไปนี้

(1) $(x-\alpha)(x-\beta) > 0$

(2) $(x-\alpha)(x-\beta) < 0$

(3) $(x-\gamma)^2 + \delta^2 > 0$

(4) $(x-\gamma)^2 + \delta^2 < 0$

ตัวอย่าง (1) $3x^2 - 16x + 5 > 0$

$(3x-1)(x-5) > 0$

หรือ $\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-5) > 0$

(2) $-x^2 + 6x - 8 \geq 0$

$x^2 - 6x + 8 \leq 0$

$(x-2)(x-4) < 0$

(3) $x^2 - 4x + 13 > 0$

$x^2 - 4x + 4 + 9 > 0$

$(x-2)^2 + 3^2 > 0$

(4) $-x^2 - 2x - 17 > 0$

$x^2 + 2x + 1 + 16 < 0$

$(x+1)^2 + 4^2 < 0$

(1) $\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-5) > 0$

การที่อสมการ (1) จะเป็นจริง $x - \frac{1}{3}$ และ $x - 5$ จะต้องมีเครื่องหมายเดียวกัน ดังนั้น x จึงจำต้องอยู่ภาย<u>นอก</u>ช่วงระหว่าง $\frac{1}{3}$ และ 5

(2) $(x-2)(x-4) < 0$

จะเป็นจริงเมื่อ $x-2$ และ $x-4$ จะต้องมีเครื่องหมายต่างกัน ดังนั้น x จะต้องอยู่ใน ช่องระหว่าง 2 และ 4

(3) $(x-2)^2 + 3^2 > 0$

จะเป็นจริงเสมอไปว่า x จะมีค่าเท่าไร เช่นเดียวกับ $(x-2)^2 > 0$ เป็นจริง เว้นแต่เมื่อ $x = 2$

(4) $(x+1)^2 + 4^2 < 0$

จะไม่มีวันเป็นจริงเลย ไม่ว่า x จะเป็นค่าอะไร

จะสังเกตเห็นว่า $ax^2 + 2bx + c > 0$ จะเป็นจริงเสมอไปว่า x มีค่าเท่าใด ก็ต่อเมื่ออสมการนี้จะเขียนเป็น (3) ได้

นั่นคือ $a(x+\frac{b}{a})^2 + \frac{ac-b^2}{a} > 0$

ซึ่งจะเป็นจริงเสมอ ถ้า $a > 0$ และ $ac - b^2 > 0$

ตัวอย่าง 1 ถอดอสมการ $\frac{1}{x-2} > -1$

$$\frac{1}{x-2} + 1 > 0$$

$$\frac{x-1}{x-2} > 0$$

คูณตลอดด้วย $(x-2)^2$: $(x-1)(x-2) > 0$

$\therefore \quad x > 2$

หรือ $\quad x < 1$

<u>ตอบ</u> $\quad x > 2$ หรือ $x < 1$

ตัวอย่าง 2 ถอดอสมการ $\frac{x+2}{x+1} > \frac{x+3}{x+2}$

$$\frac{x+1+1}{x+1} > \frac{x+2+1}{x+2}$$

$$\therefore \quad 1 + \frac{1}{x+1} > 1 + \frac{1}{x+2}$$

$x - 7 - 15$
$x \; 7 - 2$

$$\therefore \quad \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} > 0$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} > 0$$

$$\therefore \quad (x+1)(x+2) > 0$$

$$\therefore \quad x < -2 \text{ หรือ } x > -1$$

<u>ตอบ</u> $x < -2$ หรือ $x > -1$

โจทย์ ถอด~~สมการ~~ อสมการ

1. $3 - x < 6 - 2x$
2. $\frac{5}{x+12} < 0$
3. $\frac{x+5}{x-11} < 0$
4. $\frac{(x-3)^2}{x-2} < 0$
5. $(x-5)(x+7)(x-2) < 0$
6. $(5-2x)(4-x)(2+x) > 0$
7. $(x-3)^3(x+7) < 0$
8. $(x+1)(x-3)(x+7)(x-8) < 0$
9. $(x+5)(x-2)^3(x+8)^2 > 0$
10. $\frac{x+5}{x-2} > \frac{x-4}{x+1}$
11. $\frac{x+7}{x+4} > \frac{x+5}{x+3}$
12. $\left|\frac{1}{x+8}\right| < 1$
13. $\left|\frac{2x}{x+12}\right| < 1$
14. $x^2 + 2x - 35 > 0$
15. $4 > x(x-7)$

16. $\frac{x+6}{(x+2)(x-2)^3} > 0$

17. จงหาค่า x เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้ อสมการทั้งสองนี้เป็นจริง

$$5x + 8 > 3x + 2$$

$$3x + 7 < 2(1 - x)$$

18. ถอดอสมการ $-1 < \frac{3x+4}{x-7} < 1$

19. จงหาว่าเลขสองจำนวนนี้ จำนวนไหนใหญ่กว่า

$$\sqrt{3} + \sqrt{17} \quad ; \quad \sqrt{13} - \sqrt{6}$$

20. พิสูจน์ว่า $|a| - |b| < |a + b| < |a| + |b|$

และ $|a| - |b| < |a - b| < |a| + |b|$

6.4. อสมการที่สำคัญ

I. Weierstrass inequality.

ถ้า a_i เป็นเลขบวก $(i = 1, 2, \ldots\ldots, n)$ ซึ่งมีผลบวก s เราจะพิสูจน์ได้ว่า

1. $(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \ldots\ldots (1 + a_n) > 1 + s$

2. $(1 - a_1)(1 - a_2)(1 - a_3) \ldots\ldots (1 - a_n) > 1 - s$

ถ้า $a_i < 1$

3. $(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots\ldots (1 + a_n) < \frac{1}{1-s}$

ถ้า $s < 1$

4. $(1 - a_1)(1 - a_2) \ldots\ldots (1 - a_n) < \frac{1}{1+s}$

เราจะลองพิสูจน์ (1)

$$\therefore (1 + a_1)(1 + a_2) = 1 + (a_1 + a_2) + a_1a_2$$
$$> 1 + (a_1 + a_2)$$

$$\therefore (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) > 1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_3 + a_2a_3$$
$$> 1 + (a_1 + a_2 + a_3)$$

ดังนี้เรื่อยไป จนได้

$$(1+a_1)(1+a_2)\,\ldots\ldots\,(1+a_n) > 1 + s$$

ส่วน (2) . (3) และ (4) ให้ลองพิสูจน์เอง

II. Cauchy's inequality

ถ้าเรามีเลข a_i และ b_i $(i = 1, 2, \ldots\ldots, n)$

โดย a_k และ b_k ไม่เป็นสัดส่วนกันทุกตัว k

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots\ldots + a_n b_n)^2 < (a_2^1 + a_2^2 \ldots + a_n^2)\ b_1^2+\ldots+b_n^2)$$

พิสูจน์

ลองพิจารณา $\sum (a_i x + b_i)^2$

ค่าของ x ที่ทำให้ $a_i \times b_i = o$ ทุกตัว i จะมีได้ ก็ต่อเมื่อ a_i และ b_i เป็นสัดส่วนกัน

มิฉะนั้นแล้ว $\sum (a_i x + b_i)^2$ จะเป็นบวกเสมอ ไม่ว่าค่าเท่าใด

แต่ $\sum (a_i x + b_i)^2 = x^2 \sum a_i^{\ 2} + 2x \sum a_i b_i + \sum b_i^{\ 2}$

เราได้เห็นมาแล้วว่า $Ax^2 + 2Bx + C > o$ จริงเสมอ

ถ้า $A > o$ และ $AC - B^2 > o$

ดังนั้น $A = \sum a_i^{\ 2} > o$ $AC - B^2 = \sum a_i^{\ 2} \sum b_i^{\ 2} - (\sum a_i b_i)^2 > o$

III. Tchebychef's inequality

ถ้า $a_i \geqslant a_2 \geqslant \ldots\ldots \geqslant a_n$ และ $b_i \geqslant \ldots\ldots \geqslant b_n$ จะได้

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n}\ \frac{b_1 + b_2 \ldots\ldots + b_n}{n} < \frac{a_1b_1 + \ldots\ldots + a_nb_n}{n}$$

ยกเว้น $a_1 = a_3 = \ldots\ldots = a_n$ หรือ $b_1 = b_2 = \ldots\ldots = b_n$

พิสูจน์

$$\because \sum_{\mu} \sum_{\gamma} (a_\mu\ b_\mu - a_\mu\ b_\gamma)$$

$$= \sum_{\mu} (n\ a_\mu\ b_\mu - a_\mu \sum b)$$

$$= n\sum ab - \sum a \sum b$$

และ $\sum \sum (a_\gamma b_\gamma - a_\gamma b \sum b\mu)$

$$\mu \quad \gamma = \sum_{\mu} (n\, a_\gamma b_\gamma - a_\gamma \sum b)$$

$$= n \sum ab - \sum a \sum b$$

$$n\sum ab\ )\ \sum a \sum b = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \sum_{\gamma} (a\mu\, b\mu - a\mu\, b\gamma + a\gamma b\gamma\ a_\gamma b\mu)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\mu} \sum_{\gamma} (a\mu - a\gamma)\ (b\mu - b\gamma)$$

แต่ $(a_\mu - a_\gamma)\ (b_\mu - b_\gamma)$ เป็นบวก เว้นไว้แต่วงเล็บหนึ่งเป็นสูญ

$\sum \sum$ ทุกตัวเป็นสูญได้ก็ต่อเมื่อ $a_1 = a_2\ \dots\dots = a_n$

หรือ $b_1 = b_2 = \dots\dots = b_n$ ซึ่งเป็นข้อยกเว้นของเรา

ดังนั้น $n \sum ab - \sum a \sum b$ จะเป็นบวกเสมอ

โดยการใช้ข้อเหตุผลซ้ำ ๆ กัน ถ้าเรามี

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots\dots \geqslant a_n$$

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \dots\dots \geqslant b_n$$

$$|\qquad |\qquad\qquad |$$

$$1_1 \geqslant 1_2 \geqslant \dots\dots \geqslant 1_n$$

เราจะได้ $\frac{\Sigma a}{n}\ \frac{\Sigma b}{n}\ \dots\dots\ \frac{\Sigma l}{n} < \frac{\Sigma ab\dots\dots 1}{n}$

กรณีพิเศษของอสมการนี้ เมื่อมีเลขบวก

$a_p^1, a_2^p, \dots\dots, a_n^p, a_1^q, a_2^q, \dots\dots, a_n^q, a_1^r, a_2^r, \dots\dots, a_n^r;$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

โดย $p + q + r + \dots\dots = m$

และ $p, q, r, \dots\dots$ มีเครื่องหมายเหมือนกัน

เราจะได้ $\frac{\Sigma ap}{n} \frac{\Sigma ag}{n} \frac{\Sigma ar}{n}$ .... $< \frac{\Sigma am}{n}$

เช่น ถ้า a, b, c เป็นเลขบวกไม่เท่ากัน และ n เป็นเลขบวก ตัวเต็ม จะพิสูจน์ว่า $(a + b + c)^n < 3^{n-1} \left(a^n + b^n + c^n\right)$ โดยใช้สูตรข้างบน

$$\frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a+b+c}{3} \text{ .... n ตัว } < \frac{a^n + b^n + c^n}{3}$$

$$\therefore \quad (a + b + c)^n < 3^{n-1} \left(a^n + b^n + c^n\right)$$

โจทย์ 1. ถ้า $a > o$, $b > o$, $a + c = 1$

พิสูจน์ว่า $4ab \leq 1$ และ $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \leqslant 12\frac{1}{2}$

2. ถ้า $x > o$ พิสูจน์ $2 \leq x + \frac{1}{x} \leq x^3 + \frac{1}{x3}$

2. พิสูจน์ อสมการต่อไปนี้ โดย a, b, ... เป็นบวกและไม่เท่ากันหมด

(I) $a^3b + ab^3 < a^4 + b^4$

(II) $\left(a^4 + b^4\right) a^5 + b^5\right) < 2 \left(a^9 + b^9\right)$

(III) $(a + b)^n < 2^{n-1} \left(a^n + b^n\right)$. n เป็นเลขบวกตัวเต็ม

(IV) $\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 < (a + b + c) \left(a^3 + b^3 + c^3\right)$

(V) $(b + c - a) (c + a - b) \leq c^2$

(VI) $(b + c - a)\ c + a - b) (a + b - c) < abc$

(VII) $\left(a^2 + b^2\right) \left(a^3 + b^3\right) \left(a^6 + b^6\right) < 4\left(a^{11} + b^{11}\right)$

(VIII) $(a + b + c + d)^3 < 16 \left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3\right)$

(IX) $(a + b + c)^2 > 3 (bc + ca + ab)$

(X) $(bc + ca + ab) (a + b + c)^4 < 27 \left(a^3 + b^3 + c^3\right)^2$

4. ถ้า x, y, z, เป็นเลขบวกที่มีค่าเปลี่ยนโดยมีผลบวกเป็นค่าคงที่ K จงหาค่าที่น้อยที่สุดของ $x^2 + y^2 + z^2$

5. เมื่อใดอสมการต่อไปนี้จึงเป็นจริง

$$(\text{I})\quad x^3 + y^3 > x^2y + xy^2$$

$$(\text{II})\quad (1 + xy)^2 < (x + y)^2$$

6. ถ้า $o < x < \frac{1}{2}$ พิสูจน์ว่า $(1 + x)(1 + x^2) \ldots\ldots (1 + x^{n-1})$

$$< (1 - x)/(1 - 2x + x^n)$$

7. ถ้า a, b, c, เป็นเลขบวก และ $x + y + z = o$

พิสูจน์ว่า $a^2x^2 + b^2y^2 + + c^2z^2 - 2bcyz - 2cazx - 2abxy \geqslant o$

6.5. ตัวกลางเลขคณิต และเรขาคณิต

เนื่องจาก $(x - y)^2 > o$ เสมอ เว้นไว้แต่ $x = y$ เราจะได้ $x^2 + y^2 > 2xy$

หรือ $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ โดย $a = x^2$, $b \times y^2$

ตัวนั้น ตัวกลางเลขคณิตของเลขบวกสองตัวจะใหญ่กว่าตัวกลางเรขาคณิตเสมอ เว้นไว้แต่ว่าเมื่อเลขสองตัวเท่ากัน ใหญ่กว่าจะกลายเป็นเท่ากัน

ถ้ามีเลขบวกหลายตัว คือ a_1 . a_2 , ... , a^n

เราจะเรียก $\frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n}{n} = A(a)$ ว่าเป็นตัวกลางเลขคณิต

และ $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots\ldots\ldots a^n} = G(a)$ เว้นไว้แต่เมื่อ a_i เท่ากันหมด

เราก็จะได้ว่า $A(a) > G(a)$ เว้นไว้แต่เมื่อ a_i เท่ากันหมด

พิสูจน์

ให้ a_μ และ a_γ เป็นเลขที่ใหญ่และเล็กที่สุดในพวก a_1 a_2 .... a_n

ในจำนวนนี้เราแทน a_μ ด้วย $G(a)$ และ a_γ ด้วย $\frac{a_\mu a_\gamma}{G(a)}$ และเราเรียกเลขใหม่นี้ว่า b_1 . b_2 , ... b_n

เราจะเห็นว่า $a_1\, a_2 \,\ldots\ldots\, a_n = b_1\, b_2 \,\ldots\ldots\, b_n$

นั่นคือ $G(a) = G(b)$

และ $G(a) + \dfrac{a_\mu a_\gamma}{G(a)} - a_\mu - a_\gamma = \dfrac{1}{G(a)}\left\{G^2(a) - (a_\mu + a_\gamma)\, G(a) + a_\mu a_\gamma\right\}$

$$= -\frac{1}{G(a)}\left(a_\mu - G(a)\right)\left(G(a) - a_\gamma\right)$$

ทั้งสองวงเล็บทางขวามือเป็นบวกเสมอ

ดังนั้น $G(a) + \dfrac{a_\mu a_\gamma}{G(a)} < a_\mu + a_\gamma$

$\therefore\; b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n < a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$

นั่นคือ $A(b) < A(a)$

ในทำนองเดียวกัน เราเปลี่ยนจาก $b_1, \ldots\ldots b_n$ เป็น

$c_1, \ldots\ldots, c_n$ เราจะได้

$G(c) = G(b) = G(a)$

และ $A(c) < A(b) < A(a)$ ทำดังนี้ไป $n-1$ ครั้ง เราจะได้ตัวเลข n ตัวที่ทุกตัว เป็น $G(a)$ ดังนั้นตัวกลางเลขคณิตของเลข n ตัวนี้คือ $G(a)$ ดังนั้น $G(a) < A(a)$

ตัวกลางถ่วง (Weighted means)

ให้ $A(a, p) = (y_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots\ldots p_n a_n) / P_n$

และ $G(a, p) = \left(a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots\ldots a_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{P_n}}$

โดย $P_n = p_1 + p_2 \ldots\ldots + p_n$ และ $p_1, p_2, \ldots\ldots, \ldots\ldots p_n$ เป็นเลขบวก ตัวเต็ม เรียกว่าตัวถ่วงของ $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$

เราจะเห็นว่า $H(a, p) < A(a, p)$ เพราะ $A(a, p)$ และ $G(a, p)$ ก็เป็นตัวกลางเลขคณิตและเรขาคณิตของเลข ซึ่งมี p_1 ตัวแรกเท่ากับ a_1, p_1 ตัวต่อไป เท่ากับ a_2, ... และ p_n ตัวสุดท้ายเท่ากับ a_n

ถ้า p_i ไม่ใช่เป็นตัวเต็ม คือเป็นเลข rational เราจะหา k เลขตัวเต็มได้ที่จะทำให้ $kp_1, kp_2 \ldots$ เป็นตัวเลขเต็ม ให้เป็น $q_1, q_2\ q_3 \ldots q_n$

$$A(a, p) = \frac{\sum p_i a_i}{P_n} = \frac{\sum q_i a_i}{Q_n} = A(a, q)$$

$$\text{และ}\quad G(a, p) = \left(\pi\, a_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{P_n}} = \left(\pi\, a_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{Q_n}} = G(a, q)$$

เนื่องจาก q_i เป็นเลขตัวเต็ม

เราจะได้ $G(a, q) < A(a, q)$

หรือ $G(a, p) < A(a, p)$

โดย p เป็นเลข rational.

ตัวอย่างที่ 1. ถ้า $3x + 5y = 2$ และ $x > o$ ให้หาค่าที่มากที่สุดของ x^2y^3

ในที่นี้เราต้องการเลข 5 ตัว ที่มีตัวกลางเลขคณิตเป็นตัวคูณของ $3x + 5y$ นั่นคือ $\frac{3x + 5y}{5}$

ที่เราทราบว่าต้องการ 5 ตัว เพราะเราเห็นว่า

x^2 มี x 2 ตัว y^3 มี y 3 ตัว ดังนั้น x^2y^3 จะมี x และ y รวมกัน 5 ตัว

ถ้าเราให้เลข 5 ตัวนั้นเป็น $\frac{3x}{2}, \frac{3y}{2}, \frac{5y}{3}, \frac{5y}{3}, \frac{5y}{3}$ ซึ่งเป็นเลขบวก

ตัวกลางเลขคณิตของมัน คือ $\frac{3x + 5y}{5}$

ตัวกลางเรขาคณิตของมัน คือ $\sqrt[5]{\frac{3x}{2}\cdot\frac{3x}{2}\cdot\frac{5y}{3}\cdot\frac{5y}{3}\cdot\frac{5y}{3}}$

$$\sqrt[5]{\frac{3x}{2}.\frac{3x}{2}.\frac{5y}{3}.\frac{5y}{3}.} < \frac{3x+5y}{5} = \frac{2}{5}$$

อสมการนี้จะไม่เป็นจริง เมื่อเลขทั้ง 5 ตัวเท่ากันหมด ซึ่งจะทำให้อสมการนี้เป็นสมการ

ดังนั้น ถ้า $\frac{3x}{2} = \frac{5y}{3}$ จะทำให้

$$\sqrt[5]{\left(\frac{3x}{2}\right)^2\left(\frac{5y}{3}\right)^3} = \frac{2}{5}$$

หรือ $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{5}{3}\right)^3 x^2y^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^5$

$$x^2y^3 = 2^7 . 3 . 5^{-8}$$

ซึ่งเป็นค่าที่มากที่สุดของ x^2y^3

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า a, b, c, เป็นเลขบวกที่ไม่เท่ากันหมด พิสูจน์ว่า

$$9a^2b^2c^2 < (bc+ca+ab)(a^4+b^4+c^4)$$

ถ้าเรามีเลข 3 ตัว คือ bc, ca และ ab

เราจะได้ $\frac{1}{3}(bc+ca+ab) > \sqrt[3]{(bc . ca . ab)}$

$$= \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

และพิจารณาเลข 3 ตัว คือ $a^4b^4c^4$

$$\frac{1}{3}(a^4+b^4+c^4) > \sqrt[3]{a^4b^4c^4}$$

คูณกัน $\frac{1}{9}(bc+ca+ab)\ a^4+b^4+c^4) > a^2b^2c^2$

ตัวอย่างที่ 3. จงหาค่าน้อยที่สุดของ x^4+y^4 ถ้า $x^2+y^2 = c^2$

$$x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2$$

$$= c^4 - 2x^2y^2$$

ดังนั้น x^4+y^4 จะน้อยที่สุดก็ต่อเมื่อ x^2y^2 มากที่สุด

เราทราบแล้วว่า เลข 2 จำนวนเป็นบวก คือ x^2, y^2

$$G < A$$

$$\sqrt{x^2 y^2} < \frac{x^2+y^2}{2}$$

หรือ $$x^2 y^2 < \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 = \frac{c^4}{4}$$

ซึ่งจะเป็นจริงเสมอ เว้นไว้แต่เลขสองจำนวนเท่ากัน ซึ่งทำให้อสมการกลายเป็นสมการ

ดังนั้น $x^2 y^2$ จะมากที่สุด มีค่าเท่ากับ $\frac{c^4}{4}$

ค่าน้อยที่สุดของ $x^4 + y^4$ คือ $c^4 - \frac{c^4}{2} = \frac{c^4}{2}$

โจทย์ 1. จงหาค่ามากที่สุดของ $x^3 y^5$ ถ้า $x^2 + y^2 = 1$

2. จงหาค่ามากที่สุดของ $12x^2 \left(1 - 3x^2\right)$

3. จงหาค่ามากที่สุดของ $x^2 y^3$ เมื่อ $x > o$ และ $5x + 6y = 7$

4. ถ้า x, y เป็นบวก พิสูจน์ว่า $\left\{ \frac{1}{2} \left(x + y\right) \right\}^{x+y}$

$$\leqslant x^x y^y$$

5. จงหาค่าน้อยที่สุดของ $x^2 + y^{-2}$ เมื่อ $x^2 + y^2 = c^2$

6. จงหาค่าน้อยที่สุดของ $yz + zx + xy$ ถ้า $xyz = c^2 \left(x + y + z\right)$ และ x, y, z มีเครื่องหมายเหมือนกันหมด

7. พิสูจน์อสมการต่อไปนี้ ถ้า a, b, c เป็นเลขบวกไม่เท่ากันหมด

(I) $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$

(II) $\left(a + b\right)\left(b + c\right)\left(c + a\right) > 8\ abc$

(III) $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} > 6$

(VI) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) > 9$

(V) $(a+b+c)^3 > 27abc < 9\left(a^3+b^3+c^3\right)$

(VI) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} > 4$

(VII) $16abcd < \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$

(VIII) $\left(\frac{a}{e}+\frac{b}{f}+\frac{c}{g}\right)\left(\frac{e}{a}+\frac{f}{b}+\frac{g}{c}\right) \geqslant 9$

(IX) ถ้า $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ เป็นเลขบวกอยู่ใน A.P.

จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{a_1 a_n} < \sqrt[n]{(a_1 a_2 \ldots\ldots a_n)} < \frac{a_1+a_n}{2}$

(X) ถ้า $0 < n < m$ พิสูจน์ว่า $m^{2m} < (m+n)^{m+n}(m-n)^{m-n}$

บทที่ 7

การหาผลบวกของอนุกรมโดยวิธีหาผลต่างระหว่างเทอม

(Summation of series by the Method of Differences)

7.1. อนุกรม

อนุกรม หมายถึงนิพจน์ (expression) ซึ่งทุกเทอมที่ต่อ ๆ กันไปต่างก็เกิดขึ้นจากกฎเกณฑ์ใดกฎเกณฑ์หนึ่ง อนุกรมที่สิ้นสุดลงได้ เรียกว่า finite series อนุกรมที่ไม่สิ้นสุด เรียกว่า infinite series

ในที่นี้จะใช้สัญญลักษณ์ $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots\ldots\ldots$ แทนอนุกรม

7.2. การหาผลบวกของอนุกรม

จากการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษา เราได้พบการหาผลบวกของก้าวหน้าเลขคณิต (Arithmetic Progression), และก้าวหน้าเรขาคณิต (Geometric Progression) ดังตัวอย่างซึ่งจะยกมาทบทวนดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 ก. จงหาผลบวกของ 10 เทอมแรก

ข. เทอมที่ 15 ของอนุกรม $1 + 3 + 5 + \ldots\ldots\ldots$

วิธีทำ อนุกรมนี้มีเทอมเป็น Arithmetic Progression

มีเทอมแรก $a = 1$, Common difference $d = 2$

ผลบวกของ n เทอม $s_n = \frac{n}{2}\left\{2a + (n-1)d\right\}$

ผลบวกของ 10 เทอม $s_{10} = \frac{10}{2}\left\{(2)(1) + (10-1)(2)\right\}$

$$= 5\left\{2 + 18\right\}$$

$= (5)(20)$

$= 100$ **ตอบ**

เทอมที่ n คือ $u_n = a + (n-1)d$

$u_{15} = 1 + (15-1)(2) = 29$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2 ก. จงหาผลบวกของ 5 เทอมแรก

ข. เทอมที่ 5

ของอนุกรม $1 + 3 + 9 + \ldots\ldots$

วิธีทำ อนุกรมนี้มีเทอมเป็น Geometric Progression

มีเทอมแรก $= 1$, Common ratio $r = 3$

ผลบวกของ n เทอม $= \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

$= \dfrac{1(3^5 - 1)}{3 - 1} = 121$ **ตอบ**

เทอมที่ n คือ $u_n = ar^{n-1}$

$u_5 = 1(3)^{5-1} = 3^4 = 81$ **ตอบ**

7.3. การหาผลบวกของกำลังต่าง ๆ ของ natural numbers

ผลบวกของกำลังหนึ่งของ natural numbers

$= 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n$ ใช้สัญญลักษณ์ $\sum n$ อ่านว่าซิกม่า n

ผลบวกของกำลังสองของ natural numbers

$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2$ ใช้สัญญลักษณ์ $\sum n^2$

ผลบวกของกำลังสามของ natuaral numbers

$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + n^3$ ใช้สัญญลักษณ์ $\sum n^3$

I $\sum n = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{n}{2}(n+1)$ (เพราะเป็น A.P.)

II $\sum n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2$ ดำเนินวิธีหาดังต่อไปนี้

$$n^3-(n-1)^3 = 3n^2-3n +1$$

$$\therefore (n-1)^3-(n-2)^3 = 3(n-1)^2-3(n-1) +1$$ (จากการเปลี่ยน n เป็น n − 1)

$$(n-2)^3-(n-3)^3 = 3(n-2)^2-3(n-2) +1$$ (,, ,, n − 2)

....

$$3^3-2^3 = 3\cdot 3^2-3\cdot 3 +1$$

$$2^3-1^3 = 3\cdot 2^2-3\cdot 2 +1$$

$$1^3-0^3 = 3\cdot 1^2-3\cdot 1 +1$$

จากการบวกกันจะได้

$$n^3 = 3\sum n^2-3\sum n+n$$

$$3\sum n^2 = n^3+3\sum n-n$$

$$= n^3-n+3\,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{1}\left[2(n-1)+3\right]$$

$$\sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

III $\sum n^3 = 1^3+2^3+3^3+\dots\dots n^3$ ดำเนินวิธีหาดังต่อไปนี้

$$n^4-(n-1)^4 = 4n^3-6n^2+4n-1$$

$$\therefore (n-1)^4-(n-2)^4 = 4(n-1)^3-6(n-1)^2+4(n-1)-1$$

$$(n-2)^4-(n-3)^4 = 4(n-2)^3-6(n-2)^2+4(n-2)-1$$

....

$$3^4-2^4 = 4\cdot 3^3-6\cdot 3^2+4\cdot 3-1$$

$$2^4-1^4 = 4\cdot 2^3-6\cdot 2^2+4\cdot 2-1$$

$$1^4-0^4 = 4\cdot 1^3-1\cdot 1^2+4\cdot 1-1$$

จากการบวกกันจะได้

$$n^4 = 4\sum n^3 - 6\sum n^2 + 4\sum n - n$$

$$4\sum n^3 = n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n$$

$$= n(n+1)(n^2 - n + 1 + 2n + 1 - 2)$$

$$= n(n+1)(n^2 + n)$$

$$\sum n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

ค่าของ $\sum n$, $\sum n^2$, $\sum n^3$ นี้ เอาไปใช้เป็นประโยชน์ในการหาผลบวกของอนุกรมอื่น ๆ ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวกถึง n เทอมของอนุกรมต่อไปนี้

$$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots\ldots$$

วิธีทำ เทอมที่ $n = u_n = n(n+1)(n+2)$

ถ้าคูณออกมาจะได้ $u_n = n^3 + 3n^2 + 2n$

(ซึ่งหมายความว่าอาจจะเขียนได้ใหม่ว่า $u_1 = 1^3 + 3.1^2 + 2.1$ แทนที่จะเป็น 1.2.3

และ $u_2 = 2^3 + 3.2^2 + 2.2$

$u_3 = 3^3 + 3.3^2 + 2.3$

....

$u_n = n^3 + 3n^2 + 2n)$

จากการบวกกันจะได้ผลบวก $\quad S_n = \sum n^3 + 3\sum n^2 + 2\sum n$

$$= \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 + 3\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)}{2}$$

$$= n\left(n+1\right)\left[\frac{n(n+1)}{4} + \frac{2n+1}{2} + 1\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}\left[n^2 + n + 4n + 2 + 4\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+1)(n+3)}{4}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวกของ n เทอม จากอนุกรมซึ่งมีเทอมที่ n เป็น $2^{n-1} + 8n^3 - 6n^2$

วิธีทำ จาก $u_n = 2^{n-1} + 8n^3 - 6n^2$

เราอาจเขียนได้ว่า $u_1 = 2^0 + 8 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2$

$u_2 = 2^1 + 8 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2$

$u_3 = 2^2 + 8 \cdot 3^3 - 6 \cdot 3^2$

....

$u_n = 2^{n-1} + 8 \cdot n^3 - 6 \cdot n^2$

จากการบวกกันจะได้ผลบวก $= \left(1 + 2 + 2^2 + \ldots\ldots 2^{n-1}\right) + 8\sum n^3 - 6\sum n^2$

$$= \frac{2^n - 1}{2-1} + \frac{8n^2(n+1)^2}{4} - \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= 2^n - 1 + n\left(n+1\right)\left\{2n\left(n+1\right) + \left(2n+1\right)\right]$$

$$= 2^n - 1 + n\left(n+1\right)\left(2n^2 - 1\right)$$

ตอบ

7.4. การหาผลบวกของตัวเลขทั่วไป

สัญญลักษณ์ $\sum$ อาจจะใช้ในการแสดงผลบวก ตัวเลขอื่นนอกเหนือไปจาก natural numbers ก็ได้ โดยทั่วไปถ้าเขียนว่า $\sum_{i=1}^{n} x_i$ ก็หมายความว่า $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots x_n$

ตัวอย่าง ให้ x เป็นคะแนนสอบกลางปี

y เป็นคะแนนสอบปลายปี

จากนักเรียน 4 คน ปรากฏว่าได้ผลต่อไปนี้

x	5	8	6	9
y	4	6	8	9

จงหาค่าของ $\sum_{i=1}^{4} x_i$, $\sum_{i=1}^{4} y_i$, $\sum_{i=1}^{4} x_i^2$, $\sum_{i=1}^{4} y_i^2$, $\sum_{i=1}^{4} x_i y_i$, $\sum_{i=1}^{4} (x_i - y_i)$, $\sum_{i=1}^{4} (x_i + y_i)$, $\sum_{i=1}^{4} |x_i - y_i|$ และ $\sum_{i=1}^{4} (x_i - y_i)^2$

วิธีทำ ค่าของ x และ y ที่ให้มามีความหมายว่า

$$x_1 = 5 , x_2 = 8 , x_3 = 6 , x_4 = 9$$

และ $$y_1 = 4 , y_2 = 6 , y_3 = 8 , y_4 = 9$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{4} x_i = x_1 + x_3 + x_4 = 5 + 8 + 6 + 9 = 28$$ **ตอบ**

$$\sum_{i=1}^{4} y_i = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 4 + 6 + 8 + 9 = 27$$ **ตอบ**

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 25+64+36+81 = 206$$ **ตอบ**

$$\sum_{i=1}^{4} y_i^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 16+36+64+81 = 197$$ **ตอบ**

$$\sum_{i=1}^{4} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

$$= (5 \times 4) + (8 \times 6) + (6 \times 8) + (9 \times 9)$$

$$= 20 + 48 + 48 + 81 \qquad = 197$$ **ตอบ**

$$\sum_{i=1}^{4}(x_1 - y_1) = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + (x_3 - y_3) + (x_4 - y_4)$$

$$= (5-4) + (8-6) + (6-8) + (9-9)$$

$$= 1 + 2 - 2 + 0 \qquad = 1 \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

$$\sum_{i=1}^{4}(x_i + y_i) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + (x_4 + y_4)$$

$$= (5+4) + (8+6) + (6+8) + (9+9)$$

$$= 9 + 14 + 14 + 18 \qquad = 55 \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

$\sum_{i=1}^{4}|x_i - y_i|$ เครื่องหมาย $|\ |$ อ่านว่าค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) หมายความถึงค่าเป็นตัวเลขโดยไม่คิดเครื่องหมาย

$$\sum_{i=1}^{4}|x_i - y_i| = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3| + |x_4 - y_4|$$

$$= |5-4| + |8-6| + |6-8| + |9-9|$$

$$= 1 + 2 + 2 + 0 \qquad = 5 \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

$$\sum_{i=1}^{4}(x_i - y_i)^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2$$

$$= (5-4)^2 + (8-6)^2 + (6-8)^2 + (9-9)^2$$

$$= 1 + 4 + 4 + 0 \qquad = 9 \quad \underline{\text{ตอบ}}$$

สรุป การบวกลบคูณหารภายในสัญญลักษณ์ $\sum$ อาจสรุปได้ดังต่อไปนี้

1. ผลบวกของตัวที่ประกอบด้วยผลบวกของเทอมสองเทอมขึ้นไปจะมีค่าเท่ากับผลบวกของตัวประกอบแต่ละตัวรวมกัน

$$\sum_{i=1}^{N} \left(x_i + y_i + z_i\right) = \sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=1}^{N} y_i + \sum_{i=1}^{N} z_i$$

พิสูจน์ $\therefore \sum_{i=1}^{N} \left(x_i + y_i + z_i\right) = \left(x_1 + y_1 + z_1\right) + \left(x_2 + y_2 + z_2\right) \ldots\ldots$

$+ \left(x_N + y_N + z_N\right)$

$$= \left(x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_N\right) + \left(y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_N\right) + \left(z_1 + z_2 + \ldots\ldots + z_N\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=1}^{N} y_i + \sum_{i=1}^{N} z_i$$

ตัวอย่าง จากตัวอย่างที่แล้ว จะเห็นได้ว่า เราอาจจะหา $\sum_{i=1}^{N} \left(x_i + y_i\right)$ และ $\sum_{i=1}^{N} \left(x_i - y_i\right)$ ได้โดย

$$\sum_{i=1}^{N} \left(x_i + y_i\right) = \sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$= 28 + 27 = 55$$ **ตอบ**

$$\sum_{i=1}^{N} \left(x_i - y_i\right) = \sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$= 28 - 27 = 1$$ **ตอบ**

2. ผลบวกของผลคูณระหว่างตัวคงค่ากับตัวแปรใด ๆ จะมีค่าเท่ากับตัวคงค่านั้น คูณด้วยผลบวกของตัวแปรนั้น

$$\sum_{i=1}^{N} ax_i = a \sum_{i=1}^{N} x_i$$

พิสูจน์ $\sum_{i=1}^{N} ax_i = ax_1 + ax_2 + \ldots\ldots + ax_N$

$$= a\left(x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_N\right)$$

$$= a\sum_{i=1}^{N} x_i$$

ตัวอย่าง จากค่าของ x และ y ในตัวอย่างที่แล้ว จงหาค่าของ $\sum_{i=1}^{4}\left(2x_i - y_i\right)$ และ $\sum_{i=1}^{4}\left(3x_i^2 - 2y_i\right)$

วิธีทำ $\sum_{i=1}^{4}\left(2x_i - y_i\right) = 2\sum_{i=1}^{4} x_i - \sum_{i=1}^{4} y_i$

$$= \left(2 \times 28\right) - 27 \qquad 29 =$$ **ตอบ**

$$\sum_{i=1}^{4}\left(3x_i^2 - 2y_i\right) = 3\sum_{i=1}^{4} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{4} y_i$$

$$= \left(3 \times 206\right) - \left(2 \times 27\right) = 564$$ **ตอบ**

3. ผลบวกของตัวคงค่า N ตัว จะมีค่าเท่ากับ N เท่าของตัวคงค่านั้น

$$\sum_{i=1}^{N} b = Nb$$

พิสูจน์ $\sum_{i=1}^{N} b = b + b + b + \ldots\ldots$ ถึง N เทอม

$$= Nb$$

ตัวอย่าง จากค่าของ x และ y ในตัวอย่างที่แล้ว จงหาค่าของ $\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - 4\right)^2$

วิธีทำ อาจทำได้ 2 วิธี คือ

$$\text{ก.}\quad \sum_{i=1}^{4}\left(x_i-4\right)^2 = \left(x_1-4\right)^2 + \left(x_2-4\right)^2 + \left(x_3-4\right)^2 + \left(x_4-4\right)^2$$

$$= \left(5-4\right)^2 + \left(8-4\right)^2 + \left(6-4\right)^2 + \left(9-4\right)^2$$

$$= 1 + 16 + 4 + 25 \qquad = 46 \qquad \underline{\underline{\text{ตอบ}}}$$

$$\text{หรือ ข.}\quad \sum_{i=1}^{4}\left(x_i-4\right)^2 = \sum_{i=1}^{4}\left(x_i^2 - 8x_i + 16\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{4}x_i^2 - 8\sum_{i=1}^{4}x_i + \sum_{i=1}^{4}16$$

$$= 206 - \left(8\times 28\right) + \left(4\times 16\right) = 46 \qquad \underline{\underline{\text{ตอบ}}}$$

7.5. การหาผลบวกของอนุกรม โดยพิจารณาจากผลต่างระหว่างเทอมที่อยู่ถัดกันไป

อนุกรมบางอนุกรม ความแตกต่างระหว่างเทอมที่ถัดกันไป คงค่า เช่น A.P. ถ้าเขียนให้เห็นแต่ละเทอมจะเป็นเช่นนี้

2 . 5 . 8 . 11 ....

ผลต่าง 3 . 3 . 3

ผลต่างระหว่างเทอมที่ถัดกันไป = 3 = คงค่า

แต่บางอนุกรม ต้องหาผลต่างของผลต่างระหว่างเทอมที่ถัดกันไปอีกที่จึงจะคงค่า เช่น

1 . 4 . 9 . 16 . 25 36

ผลต่างครั้งที่ 1 3 . 5 . 7 . 9 . 11 .

ผลต่างครั้งที่ 2 2 . 2 . 2 . 2 2

บางอนุกรม ผลต่างครั้งที่ 3 คงค่า เช่น

$$0 \;,\; 7 \;,\; 26 \;,\; 63 \;,\; 124 \;,\; \overset{215}{\cancel{251}} \;,\; \ldots\ldots\ldots$$

$$7 \;,\; 19 \;,\; 37 \;,\; 61 \;,\; 91$$

$$12 \;,\; 18 \;,\; 24 \;,\; 30$$

$$6 \;,\; 6 \;,\; 6$$

อย่างไรก็ตาม ก็ยังมีอนุกรมชนิดที่ไม่มีผลต่างครั้งใดคงค่าเลยก็ได้

ในที่นี้จะกล่าวถึงอนุกรมที่มีผลต่างครั้งหนึ่งครั้งใดคงค่าเท่านั้น

เราไม่ทราบว่าเหอมที่ x ของอนุกรมเหล่านี้อยู่ในรูปใด อาศัยการสมมติให้

$$u_x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \ldots\ldots\ldots + a_Nx^N$$

$$\therefore\; u_{x+1} = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + a_3(x+1)^3 + \ldots\ldots + a_N(x+1)^N$$

ผลต่าง $u_{x+1} - u_x = a_1 + a_2(2x+1) + a_3(3x^2+3x+1) + \ldots\ldots + a_N(Nx^{N-1}_{+\ldots})$

(1) ถ้าผลต่างครั้งแรกคงค่า นั่นคือ $u_{x+1} - u_x$ คงค่า

จากการเทียบสัมประสิทธิ์ของ x , x^2 ...., x^{N-1} โดยหลักของ undetermined coefficient จะได้ a_2 , a_3 , ... , $a_N = 0$

และตัวผลต่างที่คงค่า $= a_1$

$$\therefore\; \underline{u_x = a_0 + a_1x}$$

(2) ถ้าผลต่างครั้งที่ 2 คงค่า

$$u_{(x-1)} = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + (x-1)^3 + \ldots\ldots\ldots + a_N(x-1)^N$$

ผลต่าง $u_x - u_{x-1} = a_1 + a_2(2x-1) + a^3(3x^2-3x+1) + \ldots\ldots\ldots + a_N(Nx^{N-1}_{-\ldots})$

ผลต่างครั้งที่ 2 $(u_{x+1} - u_x) - (u_x - u_{x-1})$

$$= 2a_2 + a_3(6x) + \ldots\ldots\ldots$$

จากการเทียบสัมประสิทธิ์ของ x , x^2 , ... x^{N-2} โดยหลักของ undetermined coefficient จะได้ a_3 , a_4 , ... $= 0$

และตัวผลต่างที่คงค่า $= 2a_2$

$$\therefore\; \underline{u_x = a_0 + a_1x + a_2x^2}$$

ทำนองเดียวกัน เราอาจพิสูจน์ได้ว่า ถ้าผลต่างที่ m คงค่า

$$u_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots\dots + a_m x^m$$

สัมประสิทธิ์ a_0 , a_1 , a_2 .... a_m หาได้โดยการแทนค่า $x = 1, 2, 3, \dots\dots\dots$ ลงในข้างขวา และแทนค่า u_1 , u_2 , u_3 , ... ที่ตรงกันลงในข้างซ้ายของสมการ แล้วถอดสมการหาค่า a_0 , a_1 , a_2 .... ที่ต้องการออกมาได้

เมื่อได้ u_x ก็จะหาค่าของผลบวก s_n ได้ โดยหา $\sum_{x=1}^{n} u_x$

ตัวอย่าง จงหาเทอมที่ n และผลบวกของ n เทอมของอนุกรมต่อไปนี้

$-1 \ , \ -3 \ , \ 3 \ , \ 23 \ , \ 63 \ , \ 129 \ , \dots\dots\dots$

วิธีทำ ตรวจดูว่าผลต่างครั้งที่เท่าใดจึงจะคงค่า

$-1 \ , \ -3 \ , \ 3 \ , \ 23 \ , \ 63 \ , \ 129 \ , \dots\dots\dots$

$-2 \ , \ 6 \ , \ 20 \ , \ 40 \ , \ 66 \ , \dots\dots\dots$

$8 \ , \ 14 \ , \ 20 \ , \ 26 \ , \dots\dots\dots$

$6 \ , \ 6 \ , \ 6 \ , \dots\dots\dots$ ผลต่างครั้งที่ 3 คงค่า

$$u_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

แทนค่า $x = 1 , 2 , 3 , 4$ ตามลำดับจะได้

$$u_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = -1 \dots\dots\dots (1)$$

$$u_2 = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = -3 \dots\dots\dots (2)$$

$$u_3 = a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 3 \dots\dots\dots (3)$$

$$u_4 = a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 23 \dots\dots\dots (4)$$

จากสมการทั้ง 4 ถอดสมการได้ดังนี้

$$(2) - (1) \quad a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -2 \dots\dots\dots (5)$$

$$(3) - (2) \quad a_1 + 5a_2 + 19a_3 = 6 \dots\dots\dots (6)$$

$(4)-(3)$ $\quad a_1 + 7a_2 + 37a_3 = 20$ .... (7)

$(6)-(5)$ $\quad 2a_2 + 12a_3 = 8$ .... (8)

$(7)-(6)$ $\quad 2a_2 + 18a_3 = 14$ .... (9)

$(9)-(8)$ $\quad 6a_3 = 6$

$$a_3 = 1$$

แทนค่าใน (8) $\quad a_2 = -2$

แทนค่าใน (5) $\quad a_1 = -3$

แทนค่าใน (1) $\quad a_0 = 3$

$\therefore u_x = 3 - 3x - 2x^2 + x^3$

เทอมที่ $n = 3 - 3n - 2n^2 + n^3$

$$S_n = 3n - 3\sum n - 2\sum n^2 + \sum n^3$$

$$= 3n - 3\,\frac{n(n+1)}{2} - 2\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\} + \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= 3n - \frac{3}{2}n(n+1) - \frac{n(n+)(2n+1)}{3} + \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$ **ตอบ**

แบบฝึกหัด

(1) จงหาเทอมที่ n และผลบวกของ n เทอมของอนุกรมต่อไปนี้

ก. $1 \cdot 4 \cdot 7 + 4 \cdot 7 \cdot 10 + 7 \cdot 10 \cdot 13 + \ldots\ldots$

ข. $1 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot 5 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 9 + \ldots\ldots$

ค. $1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 10 + 3 \cdot 7 \cdot 11 + \ldots\ldots$

(2) จงหาผลบวกของ n เทอมของอนุกรมที่มีเทอมที่ n เป็น

ก. $3n^2 - n$

ข. $n^3 + \frac{3}{2}n$

ค. $n(n+2)$

ง. $n^2\left(2n + 3\right)$

จ. $3^n - 2^n$

ฉ. $3\left(4^n + 2n^2\right) - 4n^3$

(3) กำหนดตารางต่อไปนี้

X	7	8	9	6	8	7	9	6	8	7
Y	8	7	8	7	9	8	9	7	8	7

จงหา ก. $\sum x$ ข. $\sum y$

ค. $\sum xy$ ง. $\sum x^2$

จ. $\sum y^2$

ถ้า d_x และ d_y เป็นส่วนเบี่ยงเบนของ x . y จาก 7 (คือ $d_x = x - 7$, $d_y = y - 7$)

จงหา $\sum d_x$. $\sum d_y$. $\sum d_x\, d_y$. $\sum d_x^2$. $\sum d_y^2$ แล้วใช้ค่าที่หามาใหม่นี้ ไปช่วยในการหาคำตอบ ก. , ข. , ค. , ง. และ จ. ข้างต้น ให้ตรวจสอบกันด้วยว่าตรงกันจริงหรือไม่

(4) จงหาเทอมที่ n และผลบวกของ n เทอมของอนุกรมต่อไปนี้

ก. $4 + 14 + 30 + 52 + 80 + 114 + \ldots\ldots$

ข. $8 + 26 + 54 + 92 + 140 + 193 + \ldots\ldots$

(5) จงแสดงการหา $\sum n^4$ เมื่อ n เป็น natural numbers

(6) จงหาเทอมที่ n และผลบวกของ n เทอมของอนุกรมต่อไปนี้

ก. $3 . 4 + 8 . 11 + 15 . 20 + 24 . 31 + 35 . 44 + \ldots\ldots$

ข. $1 . 3 + 4 . 7 + 9 . 13 + 16 . 21 + 25 . 31 + \ldots\ldots$

ค. $1 . 5 + 2 . 15 + 3 . 31 + 4 . 53 + 5 . 81 + \ldots\ldots$

(ใช้ $\sum n^4$ จากข้อ 5)

บทที่ 8

การอินเตอร์โปเลต

(Interpolation)

8.1 ความหมายของการอินเตอร์โปรเลต

การอินเตอร์โปเลตหมายถึงการหาค่าแทรกที่เหมาะสม

ตัวอย่างเช่น กำหนดค่าต่อไปนี้

x	0	2	4	6	8	10
u_x	1	4	16	36	64	100

วิธีหาค่าของ x ที่เหมาะกับค่าของ u_x ในช่วง 1 ถึง 100 หรือการหาค่าของ u_x ที่เหมาะกับ x ในช่วง 0 ถึง 10 เรียกว่าวิธีอินเตอร์โปเลต (Interpolation) เช่น หา u_x เมื่อ $x = 51$

วิธีหาค่าของ x ที่เหมาะกับค่าของ u_x ในช่วงอื่น (น้อยกว่า 1 หรือเกิน 100) หรือการหาค่าของ u_x ที่เหมาะกับ x ในช่วงอื่น (น้อยกว่า 0 หรือเกินกว่า 10) เรียกว่าเอกซตราโปเลต (Extrapolation) เช่นหา u_x เมื่อ $x = 12$

ในตัวอย่างข้างต้น ถ้าสังเกตดูจะเห็นว่า u_x เป็นกำลังสองของ x เป็นกำลังสองของ x ฉะนั้น $u_x = x^2$

ฉะนั้นเราอาจจะอินเตอร์โปเลต ได้ว่า เมื่อ $x = 5$, $u_x = 25$ และเราอาจจะเอกซตราโปเลต ได้ว่า เมื่อ $x = 12$, $u_x = 144$

เราอาจสรุปได้ว่า เราจะอินเตอร์โปเลต หรือเอกซตราโปเลตหาค่าใด ๆ u_x ที่เหมาะสมกับค่า x ก็ต้องทราบความสัมพันธ์ของ y กับ x นั้นเสียก่อน ความสัมพันธ์นี้จะเป็นรูปใด สุดแต่ความมากน้อยของค่า x , u_x แต่ละคู่

8.2 การอินเตอร์โปเลตอย่างง่าย (Simple interpolation)

ถ้าค่าของ u_x เพิ่มขึ้นหรือลดลงเท่า ๆ กันทุกค่าของ x (ที่เพิ่มขึ้นหรือลดลงเท่ากัน) ฉะนั้น ตามบทที่ 7 เราอาจสมมติได้ว่า $u_x = a_0 + a_1 x$ แล้วคำนวนหาค่า a_0 และ a_1 แล้วแทนค่าลงในสมการ จากนั้นเมื่อกำหนดค่าของ x ให้ก็จะหาค่าของ u_x ได้

ในกรณีที่ค่า x เป็นเลขหลายตำแหน่ง เราก็อาจลดทอนลงเป็นหน่วยเล็ก ๆ ให้ง่ายขึ้นเสียก่อน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

เลข	logarithm	ความแตกต่าง (+)	x
30597	4.4856788	0.0000142	−3
30598	4.4856930	0.0000142	−2
30599	4.4857072	0.0000142	−1
30600	4.4857214	0.0000142	0
30601	4.4857356	0.0000142	1
30602	4.4857498	0.0000142	2

ต้องการหาค่าของ log 30600.3

ในที่นี้เลขมีค่ามาก จึงอาจเปลี่ยน 30600 ให้เป็น 0 , 30601 ให้เป็น 1 , ... ตามลำดับ

ให้ u_x คือค่า logarithm ในช่องที่ 2

จาก $u_x = a_0 + a_1 x$

เมื่อ $x = 0$, $u_x = 4.4857214$ แทนค่าลงในสมการจะได้

$$a_0 = 4.4857214 \quad \text{......................} \quad (1)$$

เมื่อ $x = 1$, $u_x = 4.4857356$ แทนค่าลงในสมการจะได้

$$a_0 + a_1 = 4.4857356 \quad \text{......................} \quad (2)$$

$(2)-(1)$ $\quad \therefore \ a_1 = 0.0000142$

$u_x = 4.4857214 + 0.0000142\,x$

ต้องการหาค่าของ log 30600.3 ค่า 30600.3 จะตรงกับ $x = 0.3$

$u_x = 4.4807214 + (0.0000142)(0.3)$

$= 4.4857257$

จะสังเกตได้ว่า ผลลัพธ์ที่ได้ก็จะตรงกับวิธีเทียบบัญญัติไตรยางค์

ถ้าค่า x เลื่อนไป 1 ค่าของ u_x เลื่อนไป .0000142

" " .3 " " " $\frac{(.0000142)(.3)}{1}$

$\therefore$ ค่าของ u_x จะเป็น $= 4.4857214 + (.0000142)(.3)$

$= 4.4857257$

จะเห็นว่า การเทียบบัญญัติไตรยางค์ก็ตรงกับ ความสัมพันธ์ของ u_x กับ x เป็นกำลังหนึ่งนั่นเอง

8.3 การอินเตอร์โปเลตโดยการหาความแตกต่างที่เท่ากัน

เราอาจจะหา u_x ในเทอมของ x ได้โดยพิจารณาหาว่า ความแตกต่างครั้งที่เท่าใด จึงจะมีค่าคงค่า

ตัวอย่าง จงหาค่า u_x เมื่อ $x = 0.4$ จากตารางต่อไปนี้

เลข (x)	กำลังสอง (u_x)	ความแตกต่างครั้งที่ 1 $\triangle^1$	ความแตกต่างครั้งที่ 2 $\triangle^2$
0	0	1	2
1	1	3	2
2	4	5	2
3	9	7	2
4	16	9	–
5	25	–	–

$$u_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

เมื่อ $x = 0$, $u_x = 0$ $\therefore$ $a_0 = 0$ .... (1)

เมื่อ $x = 1$, $u_x = 1$ $\therefore$ $a_0 + a_1 + a_2 = 1$ .... (2)

เมื่อ $x = 2$, $u_x = 4$ $\therefore$ $a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 4$ .... (3)

(2) – (1) $a_1 + a_2 = 1$ .... (4)

(3) – (4) $a_1 + 3a_2 = 3$

$2a_2 = 2$

$a_2 = 1$

$\therefore$ $a_1 = 0$

$\therefore$ $u_x = x^2$

$x = 0.4$ $\therefore$ $u_x = (0.4)^2 = 0.16$ ตอบ

8.4 การอินเตอร์โปเลต โดยใช้สูตรของ Newton

สมมติว่า เราจะใช้สัญญลักษณ์ต่อไปนี้

x	ฟังคชัน	ความแตกต่างที่ 1	ความแตกต่างที่ 2	ความแตกต่างที่ 3	ความแตกต่างที่ 4
0	u_0	Δ_0^1	Δ_0^2	Δ_0^3	Δ_0^4
1	u_1	Δ_1^1	Δ_1^2	Δ_1^3	–
2	u_2	Δ_2^1	Δ_2^2	–	–
3	u_3	Δ_3^1	–	–	–
4	u_4	–	–	–	–

จะเห็นได้ว่า สัญญลักษณ์ต่าง ๆ ในตารางข้างบนอาจเขียนได้ใหม่ ดังนี้

x	U_x	ความแตกต่าง ที่ 1	ความแตกต่าง ที่ 2	ความแตกต่าง ที่ 3	ความแตกต่าง ที่ 4
0	$u_0 = u_0$	Δ_0^1	Δ_0^2	Δ_0^3	Δ_0^4
1	$u_1 = u_0 + \Delta_0^1$	$\Delta_0^1 + \Delta_0^2$	$\Delta_0^2 + \Delta_0^3$	$\Delta_0^3 + \Delta_0^4$	–
2	$u_2 = u_0 + 2\Delta_0^1 + \Delta_0^2$	$\Delta_0^1 + 2\Delta_0^2 + \Delta_0^3$	$\Delta_0^2 + 2\Delta_0^3 + \Delta_0^4$	–	–
3	$u_3 = u_0 + 3\Delta_0^1 + 3\Delta_0^2 + \Delta_0^3$	$\Delta_0^1 + 3\Delta_0^2 + 3\Delta_0^3 + \Delta_0^4$	–		–
4	$u_4 = u_0 + 4\Delta_0^1 + 6\Delta_0^2 + 4\Delta_0^3 + \Delta_0^4$	–	–	–	–

จะเห็นว่า สัมประสิทธิ์ของ u_0 , u_1 , u_2 . ... เป็นดังนี้

$$1$$

$$1 + 1$$

$$1 + 2 + 1$$

$$1 + 3 + 3 + 1$$

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1$$

ซึ่งเป็นเทอมต่าง ๆ ในการกระจายตามทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem) ของ $(1+1)^0$, $(1+1)^1$, $(1+1)^2$, $(1+1)^3$, ...

ฉะนั้น จึงอาจสรุปได้ว่า

$$= u_0 + x\,\Delta_0^1 + \frac{x(x-1)}{1.2}\,\Delta_0^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\,\Delta_0^3 + \ldots\ldots$$

สูตรนี้มีชื่อว่า Newton's Formula for Interpolation จากสูตรนี้ เราจะหา u_x ได้ เมื่อทราบค่า u_0 , x , Δ_0^1 , Δ_0^2 , Δ_0^3 , ...

ตัวอย่าง ต่อไปนี้เป็นตารางของกรณฑ์ที่สาม จงหากรณฑ์ที่สามของ 102.5 โดยสูตรของ Newton

จำนวน	กรณฑ์ที่สาม
101	4.6570095
102	4.6723287
103	4.6875482
104	4.7026694

วิธีทำ หา u_0 , x , Δ_0^1 , Δ_0^2 , Δ_0^3 โดยสร้างตารางดังต่อไปนี้

จำนวน	x	u_x	Δ^1	Δ^2	Δ^3
101	0	4.6570095	153192	– 997	14
102	1	4.6723287	152195	– 983	
103	2	4.6875482	151212		
104	3	4.7026694			

(ในที่นี้ไม่ได้ใส่จุดทศนิยมไว้)

จากสูตรของ Newton

$$u_x = u_0 + x\Delta_0^1 + \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta_0^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta_0^3 + \dots\dots\dots$$

เนื่องจาก จำนวน 102.5 ตรงกับ $x = 1.5$

จากตารางอ่านค่า $u_0 = 4.6570095$, $\Delta_0^1 = .0153192$

$$\Delta_0^2 = -.0000997, \ \Delta_0^3 = .0000014$$

ฉะนั้น $u_{1.5} = 4.6570095 + (1.5)(.0153192) + \frac{(1.5)(.5)}{(1)(2)}(-.0000997)$

$$+ \frac{(1.5)(.5)(-.5)}{1.2.3}(.0000014)$$

$$= 4.6570095 + (1.5)(.0153192) + (0.375)(-.0000997)$$

$$+ (-0.0625)(.0000014)$$

$$= 4.6570095 + 0.02297880 - 0.00003739 - 0.00000009$$

$$= 4.67995082$$

$\therefore$ กรณฑ์ที่สามของ 102.5 มีค่า = 4.67995082 **<u>ตอบ</u>**

เนื่องจากการหาตัวสัมประสิทธิ์ $\frac{x(x-1)}{1.2}$, $\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}$, ... ฯลฯ (เรียกว่า Binomial Coefficients) เสียเวลามาก จึงได้มีผู้สร้างเป็นตารางไว้ดังนี้

Table of the binomial coefficients in Newton's formula from x = 0 to x = 2 by intervals of 0.1

x	$\frac{x(x-1)}{1.2}$	$\frac{x(x-1)(x-2)}{12.3}$	$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}$
0	0	0	0
0.1	−0.045	+0.0285	−0.0206625
0.2	−0.08	+0.048	−0.0336
0.3	−0.105	+0.0595	−0.0401625
0.4	−0.12	+0.064	−0.0416
0.5	−0.125	+0.0625	−0.0390625
0.6	−0.12	+0.056	−0.0336
0.7	−0.105	+0.0455	−0.0261625
0.8	−0.08	+0.032	−0.0176
0.9	−0.045	+0.0165	−0.0086625
1.0	0	0	0
1.1	+0.055	−0.0165	+0.0078375
1.2	+0.12	−0.032	+0.0144
1.3	+0.195	−0.0455	+0.0193375
1.4	+0.28	−0.056	+0.0224
1.5	+0.375	−0.0625	+0.0234375
1.6	+0.48	−0.064	+0.0224
1.7	+0.595	−0.0595	+0.0193375
1.8	+0.72	−0.048	+0.0144
1.9	+0.855	−0.0285	+0.0078375
2.0	+1	0	0

ในข้อตัวอย่างข้างบน $x = 1.5$ จะอ่านสัมประสิทธิ์เหล่านี้ได้ตรงบันทัด $x = 1.5$ ได้ผลคือ

$$\frac{x(x-1)}{1.2} = 0.375$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} = -0.0625$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4} = 0.0234375$$

โดยอาศัยตารางนี้ จะทำให้ทุ่นเวลาการคำนวณลงไปมาก

โจทย์แบบฝึกหัด

1. Given $x = 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8$

   $u_x = 3 \quad 8 \quad 15 \quad 24 \quad 35 \quad 48,$

   find u_x where $x = 5.8$

2. Given $x = 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8$

   $u_x = 2 \quad 10 \quad 20 \quad 32 \quad 46,$

   find u_x where $x = 4.4$

3. Given $x = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$

   $u_x = 1 \quad 8 \quad 27 \quad 64 \quad 125 \quad 216,$

   find u_x where $x = 2.2$

4. Given $x = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$

   $u_x = 0 \quad 0 \quad 6 \quad 24 \quad 60 \quad 120 \quad 210,$

   find u_x where $x = 3.6$

5. Given the cubes below, find the cube of 32.4 by Newton's interpolation formula

Number	Cube
31	29791
32	32768
33	35937
34	39304
35	42875

6. Given the following values for the normal integral.

$^{x}/6$	P
1.4	.91924
1.5	.93319
1.6	.94520
1.7	.95543

Find the value of P by Newton's Interpolation formula for $x/\sigma = 1.54$, nothing the successive approximations up to third differences. Take u_0 at 1.4

χ^2	P
10	0.903610
11	0.856564
12	0.800136
13	0.736186

7. Find as closely as possible the value of P for $\chi^2 = 11.7$ by Newton's Interpolation formula from the following χ^2 table (d.f. = 17)

บทที่ 9

ตรีโกณมิติ

๙.๑ ฟังก์ชันของมุมประกอบ (Functions of Compound Angles)

เมื่อมุมหลาย ๆ มุมบวกหรือลบกัน เกิดเป็นมุมใหม่มุมเดียวขึ้น มุมใหม่นี้เรียกชื่อว่า มุมประกอบ (Compound Angles)

เช่น มุม $A+B$, $A-B$, $A+B+C$ หรือ $A+B-C$ เป็นต้น มุมเหล่านี้เรียกว่า มุมประกอบ

ฟังก์ชันของมุมประกอบ ก็คือ $\sin(A+B)$ หรือ $\cos(A+B)$ หรือ $\tan(A+B)$ มุม A กับ B มิสามารถจะแยกจากกันได้อีก ฉะนั้น $\sin(A+B)$ จะแยกเป็น $\sin A+\sin B$ ไม่ได้ และ $\cos(A-B)$ จะแยกเป็น $\cos A-\cos B$ ไม่ได้อีกเช่นกัน

ตัวอย่าง ถ้า $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$

$$\therefore A+B = 90^\circ$$

$$\sin(A+B) = \sin 90^\circ = 1$$

แต่ $\sin A+\sin B = \sin 60^\circ + \sin 30^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \neq 1$$

$\therefore$ จะเห็นได้ว่า $\sin(A+B) \neq \sin A + \sin B$

ในทำนองเดียวกัน $\sin 2A \neq 2\sin A$

และ $\tan 3A \neq 3\tan A$

สูตร

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

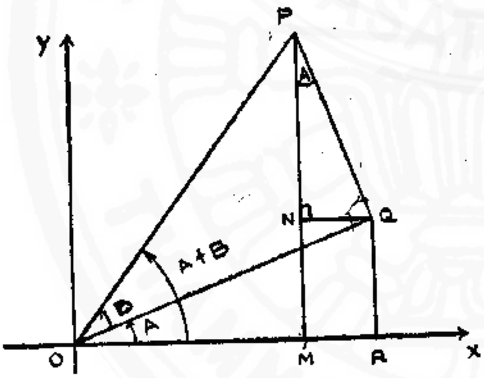
$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

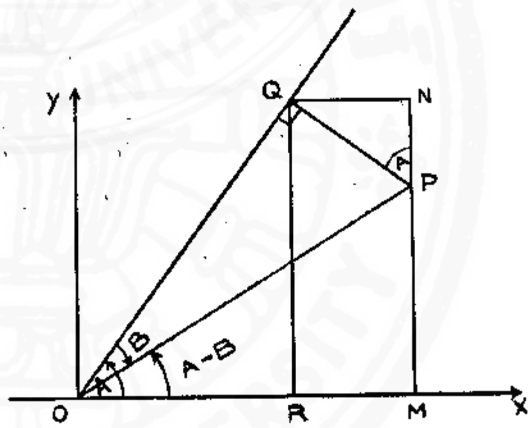
วิธีพิสูจน์สูตร

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$



รูปที่ 1



รูปที่ 2

ให้ OP หมุนเวียนจุด O ออกจากแขน OX ไปกว้าง A แล้วหมุนต่อไปจากแขน OQ กว้าง B.

$\therefore$ จะได้มุมประกอบ POX $= A + B$

วิธีลากเส้นเพื่อการพิสูจน์

1. เลือกจุด ๆ หนึ่งบนแขนของมุมประกอบ (จุด P) ลากเส้นตั้งฉาก 2 เส้น

   ก. เส้นที่ 1 ลากไปตั้งฉากกับเส้นเดิม (Initial line) คือเส้น OX ที่จุด M

   ข. เส้นที่ 2 ลากไปตั้งฉากกับแขนของมุมที่เหลือ (แขน OQ) ที่จุด Q

3. จากจุด Q ลากเส้นตั้งฉาก 2 เส้น

ก. เส้นที่ 1 ลากไปตั้งฉากกับเส้นเดิม (Initial line) ที่จุด R

ข. เส้นที่ 2 ลากไปตั้งฉากกับเส้นตั้งฉากในข้อ ก.

วิธีพิสูจน์

$$
\begin{aligned}
\sin(A+B) &= \frac{PM}{OP} = \frac{PN+NM}{OP} \\
&= \frac{PN+QR}{OP} \\
&= \frac{PN}{OP} + \frac{QR}{OP} \\
&= \frac{PN}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OP} + \frac{QR}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP} \\
&= \cos A\ \sin B + \sin A\ \cos B
\end{aligned}
$$

และ $\cos(A+B) = \frac{OM}{OP}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{OR-MR}{OP} \\
&= \frac{OR-NQ}{OP} \\
&= \frac{OR}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP} - \frac{NQ}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OP} \\
&= \cos A\ \cos B - \sin A\ \sin B
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

ในทำนองเดียวกัน จากรูปที่ 2

$$
\begin{aligned}
\sin(A-B) &= \frac{PM}{OP} = \frac{QR-PN}{OP} \\
&= \frac{QR}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP} - \frac{PN}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OP} \\
&= \sin A\ \cos B - \cos A\ \sin B
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

$$
\begin{aligned}
\cos(A-B) &= \cos(A+(-B)) \\
&= \cos A\ \cos(-B) - \sin A\ \sin(-B) \quad \text{(ใช้สูตรที่พิสูจน์แล้ว)} \\
&= \cos A\ \text{coa}\ B + \sin A\ \sin B
\end{aligned}
$$

ในการพิสูจน์ $\tan(A+B)$ หรือ $\tan(A-B)$ เราอาจจะแตกออกในรูป $\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$ แล้วกระจายต่อโดยสูตรที่พิสูจน์แล้วก็จะได้โดยง่าย

ตัวอย่าง จงกระจาย $\tan(A+B+C)$

$$\tan(A+\overline{B+C}) = \frac{\tan A + \tan(B+C)}{1-\tan A \tan(B+C)}$$

$$= \frac{\tan A + \dfrac{\tan B + \tan C}{1-\tan B \tan B}}{1-\tan A \cdot \dfrac{\tan B + \tan C}{1-\tan B \tan C}}$$

$$= \frac{\dfrac{\tan A - \tan A \tan B \tan C + \tan B + \tan C}{1-\tan B \tan C}}{\dfrac{1-\tan B \tan C - \tan A \tan B - \tan A \tan C}{1-\tan B \tan C}}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1-\tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$$

บทแทรก ถ้า $A+B+C = 180^\circ$

$$\tan(A+B+C) = \tan 180^\circ = 0$$

$\therefore \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ เมื่อ $A+B+C = 180^\circ$

ฟังค์ชั่นของมุมทวีคูณ (Functions of Multiple Angles)

สูตร

$$\sin 2A = 2\sin A \cos A$$

$$\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A \qquad \text{.........} (1)$$

$$= 2\cos^2 A - 1 \qquad \text{.........} (2)$$

$$= 1 - 2\sin^2 A \qquad \text{.........} (3)$$

$$= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} \qquad \text{.........} (4)$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan A}$$

$$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

$$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$$

$$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

วิธีพิสูจน์สูตร ก็ใช้การกระจายตามสูตรของมุมประกอบที่เรียนมาแล้ว

เช่น

$$\begin{aligned}
\sin 2A &= \sin(A+A) \\
&= \sin A\cos A + \cos A\sin A \\
&= 2\sin A\cos A
\end{aligned}$$

Q.E.D.

$$\begin{aligned}
\sin 3A &= \sin(2A+A) \\
&= \sin 2A\cos A + \cos 2A\sin A \\
&= 2\sin A\cos^2 A + (1-2\sin^2 A)\sin A \\
&= 2\sin A(1-\sin^2 A) + (1-2\sin^2 A)\sin A \\
&= 3\sin A - 4\sin^3 A
\end{aligned}$$

Q.E.D.

สูตรอื่น ๆ ขอให้นักศึกษาลองพิสูจน์ด้วยตนเอง

---

๙๒. ฟังค์ชั่นผกผัน (Inverse Functions)

ถ้า $\sin\theta = \frac{1}{2}$

เราทราบดีว่า $\frac{1}{2}$ เป็นค่า sin ของมุม ๆ หนึ่ง คือมุม 30°

นั่นคือ $\theta = 30^\circ$

แต่ยังมีวิธีเขียนอีกแบบหนึ่ง โดยแยก θ ไว้ตามลำพังเป็น

$$\theta = \sin^{-1}\frac{1}{2}$$

ซึ่งมีความหมายถึงมุมทุกมุมที่มีค่า sin เป็น $\frac{1}{2}$ เช่นมุม 30° . 150° . 390° . 510° เป็นต้น

$\tan^{-1}\sqrt{3}$, $\cos^{-1}x$, $\sin^{-1}\alpha$, เหล่านี้เรียกว่า Inverse Functions, Inverse Function มีค่ามุมไม่จำกัด แต่ค่ามุมที่เล็กที่สุดเราเรียกว่า Principal value, Principal value ของ $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ คือมุม 30°

Principal values ของ

	$\cos^{-1}\frac{1}{2}$	$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\tan^{-1}(1)$
คือ	60°	135°	45°

และจะต้องเข้าใจไว้ด้วยว่า $\sin^{-1}x$ มิได้หมายถึง $\frac{1}{\sin x}$

Identities of Inverse Functions

$$\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

ให้ $\tan\theta = \alpha$

$$\theta = \tan^{-1}\alpha$$

$$\cos\left(2\tan^{-1}\alpha\right) = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$$

$$2\tan^{-1}\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\right)$$

จงพิสูจน์ว่า $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

ให้ $\tan^{-1}x = \alpha$ $\quad\therefore\quad x = \tan\alpha$

$\tan^{-1}y = \beta$ $\quad y = \tan\beta$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$ (จากสูตร)

$$= \frac{x+y}{1-xy}$$

$$\alpha+\beta = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$$ • •

ถ้า $y = x$

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{x+x}{1-x^2}$$

$$2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$$ • •

และ $\tan\left(\tan^{-1}x+\tan^{-1}y\right) = \dfrac{x+y}{1-xy}$ • •

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ว่า $\tan^{-1}5-\tan^{-1}3+\tan^{-1}\frac{7}{9} = n\pi+\frac{\pi}{4}$

$$\text{L.H.S.} = \tan^{-1}\frac{5-3}{1+15}+\tan^{-1}\frac{7}{9}$$

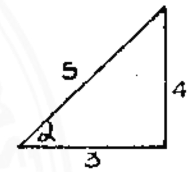
$$= \tan^{-1}\frac{\frac{1}{8}+\frac{7}{9}}{1-\frac{7}{72}}$$

$$= \tan^{-1}1$$

$= n\pi+\frac{\pi}{4}$ (ค่ามุมซึ่งค่า tangent $= 1$ เขียนเป็น general form คือ $n\pi+\frac{\pi}{4}$)

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ว่า $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$

$$\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{16}{17}\cos^{-1}\frac{16}{15}$$

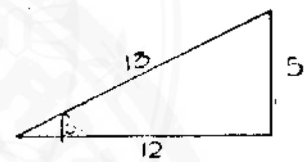


ให้ $\quad \alpha = \sin^{-1}\frac{4}{5}$

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}$$

ให้ $\quad \beta = \cos^{-1}\frac{12}{13}$

$$\cos\beta = \frac{12}{13}$$



$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$= \frac{3}{5}\times\frac{12}{13} - \frac{4}{5}\times\frac{5}{13}$$

$$= \frac{16}{65}$$

$$\alpha+\beta = \cos^{-1}\frac{16}{15}$$

$$\sin^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \cos^{-1}\frac{16}{15}$$

Q.E.D.

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้สมการ $\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = n\pi + \frac{3\pi}{4}$

$$\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \tan^{-1}\frac{2x+3x}{1-6x^2} = n\pi + \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{2x+3x}{1-6x^2} = \tan\left(n\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = -1$$

$$6x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$(6x+1)(x-1) = 0$$

$$x = 1, -\frac{1}{6}$$

Ans.

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $\sin^{-1}x + \sin^{-1}(1-x) = \cos^{-1}x$

$$\sin^{-1}(1-x) = \cos^{-1}x - \sin^{-1}x$$

ให้ $\quad \cos^{-1}x = \alpha,\ x = \cos\alpha,\ \sin\alpha = \sqrt{1-x^2}$

$$\sin^{-1}x = \beta,\ x = \sin\beta,\ \cos\beta = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sin^{-1}\left(1-x\right) = \alpha - \beta$$

$$1 - x = \sin\left(\alpha - \beta\right)$$

$$1 - x = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$= \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-x^2} - x^2$$

$$= \left(1-x^2\right) - x^2$$

$$= 1 - 2x^2$$

$$2x^2 - x = 0$$

$$x = 0\,,\ \frac{1}{2}$$

Ane.

๙๓. การกำจัด (Elimination)

ไม่มีสูตรที่ใช้ได้ทั่ว ๆ ไปในการกำจัดค่ามุมให้หมดไปจากสมการตรีโกณมิติที่กำหนดให้ นอกจากจะได้พิจารณาตามรูปสมการและด้วยการใช้สูตรที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังค์ชั่นตรีโกณมิติเป็นข้อ ๆ ไป

เช่น จงกำจัดค่า θ จากสมการ

$$x\cos\theta = a \qquad \text{.........} (1)$$

$$y\cot\theta = b \qquad \text{.........} (2)$$

จาก (1) $\sec\theta = \frac{x}{a}$

จาก (2) $\tan\theta = \frac{y}{b}$

แต่ $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2 \qquad \text{.........} (3)$$

สมการที่ได้ใหม่นี้ (สมการ 3) เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x , y ซึ่งไม่ขึ้นอยู่กับค่า θ . เราเรียกสมการใหม่นี้ว่า eliminant ของสมการที่กำหนดให้ (สมการ (1) & (2))

ตัวอย่างต่อไปนี้ จะแสดงวิธีกำจัดค่า θ จากสมการแบบต่าง ๆ

ตัวอย่างที่ 1 จงกำจัด θ จากสมการ

$$x = \cot\theta + \tan\theta \qquad \dots\dots (1)$$

$$y = \sec\theta - \cos\theta \qquad \dots\dots (2)$$

จาก (1)

$$x = \frac{1}{\tan\theta} + \tan\theta$$

$$= \frac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta}$$

$$= \frac{\sec^2\theta}{\tan\theta} \qquad \dots\dots (3)$$

จาก (2)

$$y = \sec\theta - \frac{1}{\sec\theta}$$

$$= \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec\theta}$$

$$= \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta} \qquad \dots\dots (4)$$

$(3)\times(4)$ $$xy = \frac{\sec^2\theta}{\tan\theta} \cdot \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta} = \sec\theta\ \tan\theta \qquad \text{---}(5)$$

$(5)\times(3)$ $$x^2 y = \sec^3\theta$$

$$\sec^2\theta = \left(x^2 y\right)^{2/3}$$

$(5)\times(4)$ $$xy^2 = \tan^3\theta$$

$$\tan^2\theta = \left(xy^2\right)^{2/3}$$

แต่ $$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

$$\left(x^2 y\right)^{2/3} - \left(xy^2\right)^{2/3} = 1$$

$$x^{4/3}\, y^{2/3} - x^{2/3}\, y^{4/3} = 1$$

Ans.

ตัวอย่างที่ 2 จงกำจัด θ จากสมการ

$$\frac{x}{a} = \cos\theta + \cos 2\theta \qquad \dots\dots (1)$$

$$\frac{y}{b} = \sin\theta + \sin 2\theta \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

จาก (1) $$\frac{x}{a} = 2\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

จาก (2) $$\frac{y}{b} = 2\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$(3)^2+(4)^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^3}{b^2} = 4\cos^2\frac{3\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}+4\sin^2\frac{3\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$= 4\cos^2\frac{\theta}{2}\left[\sin\frac{3\theta}{2}+\cos^2\frac{3\theta}{2}\right]$$

$$= 4\cos^2\frac{\theta}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

จาก (3) แต่ $$\frac{x}{a} = 2\cos\frac{\theta}{2}\left[4\cos^3\frac{\theta}{2} - 3\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

$$= 2\cos^2\frac{\theta}{2}\left[4\cos\frac{\theta}{2} - 3\right] \qquad \ldots\ldots\ldots (6)$$

แทนค่า $4\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ ใน (6)

$$2\frac{x}{a} = \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-3\right) \qquad \text{Ans.}$$

ตัวอย่างต่อไปจะแสดงถึงการกำจัดค่ามุมมากกว่า 1 มุม

จงกำจัด θ และ ϕ จากสมการ

$$a\sin^2\theta + b\cos^2\theta = m \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$b\sin^2\phi + a\cos^2\phi = n \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$a\tan\theta = b\tan\phi \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

จาก (1) $$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta = m\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)$$

$$(a-m)\sin^2\theta = (m-b)\cos^2\theta$$

$$\tan^2\theta = \frac{m-b}{a-m}$$

จาก (2) $$b\sin^2\phi+a\cos^2\phi = n\left(\sin^2\phi+\cos^2\phi\right)$$

$$\left(b-n\right)\sin^{2}\phi = \left(n-a\right)\cos^{2}\phi$$

$$\tan^{2}\phi = \frac{n-a}{b-n}$$

จาก (3)

$$a^{2}\tan^{2}\theta = b^{2}\tan^{2}\phi$$

$$a^{2}\left(\frac{m-b}{a-m}\right) = b^{2}\left(\frac{n-a}{b-n}\right)$$

$$a^{2}\left(bm-h^{2}-mn+bn\right) = b^{2}\left(an-a^{2}-mn+am\right)$$

$$mab\left(a-b\right)+nab\left(a-b\right) = mn\left(a^{2}-b^{2}\right)$$

$$mab+nab = mn\left(a+b\right)$$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m} = \frac{a+b}{ab}$$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

Ans.

แบบฝึกหัดบทที่ 9.1

Prove that

1. $\sin 75^{\circ} = \cos 15^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

2. $\sin 15^{\circ} = \cos 75^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

3. $\cos\left(A+B\right)\cos\left(A-B\right) = \cos^{2}A-\sin^{2}B$

4. $\sin\left(A+B\right)\sin\left(A-B\right) = \cos^{2}B-\cos^{2}A$

5. $\cos\left(A+B\right)+\sin\left(A-B\right) = \left(\cos A+\sin A\right)\left(\cos B-\sin B\right)$

6. $\dfrac{\sin\left(A-B\right)}{\cos A\ \cos B}+\dfrac{\sin\left(B-C\right)}{\cos B\ \cos C}+\dfrac{\sin\left(C-A\right)}{\cos C\ \cos A} = 0$

7. $\tan\left(45^{\circ}+A\right) = \dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}$

8. $\left(45^\circ - A\right) = \frac{1-\tan A}{1+\tan A}$

9. Express $\cot\left(A+B+C\right)$ in terms of cotA, cotB cotC

10. Prove that $\cos 4\alpha \cos\alpha - \sin 4\alpha \sin\alpha \cos 3\alpha \cos 2\alpha - \sin 3\alpha \sin 2\alpha$

11. $\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \tan A$

12. $\sin A = 1 - 2\sin^2\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right)$

13. $\tan\left(45^\circ + A\right) + \tan\left(45^\circ - A\right) = 2\sec 2A$

14. $\frac{\cos^3 A - \cos 3A}{\cos A} + \frac{\sin^3 A + \sin 3A}{\sin A} = 3$

15. $\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A} \cdot \frac{\cos A}{1+\cos A} = \tan\frac{A}{2}$

แบบฝึกหัดบทที่ 9.2

Prove the following statements

1. $\tan^{-1}\frac{1}{4} - \tan^{-1}1 = \tan^{-1}\frac{1}{7}$

2. $\cot^{-1}\frac{4}{3} - \cot^{-1}\frac{15}{8} = \cot^{-1}\frac{48}{13}$

3. $2\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{4} = \tan^{-1}\frac{32}{43}$

4. $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}\frac{5}{6} + \tan^{-1}\frac{1}{11}$

5. $\tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{8} + \tan^{-1}\frac{1}{81} = \cot^{-1}3$

6. $2\tan^{-1}\frac{1}{8} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + 2\tan^{-1}\frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}$

7. $\cos^{-1}\frac{63}{65} + 2\tan^{-1}\frac{1}{5} = \sin^{-1}\frac{3}{5}$

Solve the equations

8. $\sin^{-1} x - \cos^{-1} x \sin^{-1}(3x - 2)$

9. $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1}\frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$

10. $\cot^{-1}\frac{x^2-1}{2x} + \tan^{-1}\frac{2x}{x^2-1} + \frac{4\pi}{3} = 0$

แบบฝึกหัดบทที่ 9.3

Eliminate θ between the equations

1. $\cos\theta + \sin\theta = a$

   $\cos 2\theta = b$

2. $x = \sin\theta + \cos\theta$

   $y = \tan\theta + \cot\theta$

3. $x = \tan^2\theta\,(a\tan\theta - x)$

   $y = \sec^2\theta\,(y - a\sec\theta)$

4. $x\cos\theta - y\sin\theta = a\cos 2\theta$

   $x\sin\theta + y\cos\theta = a\sin 2\theta$

5. If $\cos(a - 3\theta) = m\cos^3\theta$

   and $\sin(a - 3\theta) = m\sin^3\theta$

   show that $m^2 + m\cos a = 2$

Eliminate θ and ϕ from the equations;

6. $\tan\theta + \tan\phi = x$

   $\cot\theta + \cot\phi = y$

   $\theta + \phi = a$

7. $a\sin^2\theta + b\cos^2\theta = a\cos^2\phi + b\sin^2\phi = 1$

$$a\tan\theta = b\tan\phi$$

8. $c\sin\theta \quad = a\tan(\theta + \phi)$

$a\sin\phi \quad = b\sin\theta$

$\cos\theta - \cos\phi \quad = 2m$

9. It $\dfrac{\tan(\theta + a)}{\tan(\theta - a)} = \dfrac{a+b}{a-b}$

and $a\cos 2a + b\cos 2\theta = c$

show that $a^2 + c^2 - 2ac\cos 2a = b^2$

10. If $\tan\theta + \tan\phi = a$

$\cot\theta + \cot\phi = b$

$\theta - \phi = a$

show that $ab(ab - 4) = (a+b)^2 \tan^2 a$

บทที่ 10

Determinants

10.1 เราได้เคยพบมาแล้วว่าจากสมการ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ และ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ เราจะหาค่าของ x และ y ได้

$$\frac{x}{b_1c_2-c_1b_2} = \frac{y}{c_1a_2-a_1c_2} = \frac{1}{a_1b_2-b_1a_2}$$

โดยมีข้อแม้ว่า $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$

หากเราจะเขียน $a_1b_2 - b_1a_2$ เป็น $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}$

ก็จะทำให้สะดวกขึ้น เราเรียกว่าเป็น determinant ที่มี order 2

ดังนั้นผลที่ได้เราอาจจะเขียนได้เป็น

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

จะเห็นว่า ส่วนของทุกตัวคือผลที่ได้จากการเอาแถวตั้งออกทีละแถวจาก

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{Vmatrix}$$

ใน $\triangle \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

$$\equiv a_1 b_2 - b_1 a_2$$

มีแถวตั้ง 2 แถว คือ a_1 a_2 และ b_1 b_2

และแถวนอน 2 แถว คือ a_1 b_1 และ a_2 b_2

หลักที่ 1 ค่าของ $\triangle$ ไม่เปลี่ยนแปลงถ้าเราเอาแถวตั้งสลับกับแถวนอน

เช่น $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

ดังนั้นหลักต่าง ๆ ต่อไปนี้หากใช้กับแถวนอนได้ ก็ใช้กับแถวตั้งได้เช่นกัน

หลักที่ 2 ถ้าแถวนอนของ $\triangle$ สองแถวถูกสลับที่กัน เครื่องหมายของ $\triangle$ จะเปลี่ยนไป

เช่น $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_2 b_1 - b_2 a_1 = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

หลักที่ 3 ถ้าแถวนอนของ $\triangle$ 2 แถวเหมือนกัน ค่าของ $\triangle$ เป็นสูญ

เช่น $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_1 b_1 - a_1 b_1 = 0$

หลักที่ 4 ถ้าคูณทุกตัวในแถวนอนของ $\triangle$ ด้วยเลข k ผลที่ได้รับคือ k $\triangle$

เช่น $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ ka_2 & kb_2 \end{vmatrix} = a_1\, kb_2 - b_1\, ka_2 = k \times \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

ดังนั้น $\begin{vmatrix} 63 & 27 \\ 35 & 16 \end{vmatrix} = 9 \times \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 35 & 16 \end{vmatrix} = 9 \times 7 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 16 \end{vmatrix}$

$$= 63\left(16 - 15\right) = 63$$

หลักที่ 5 หาก determinant อยู่ในรูป $\begin{vmatrix} a_1 + x_1 & b_1 + y_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

เราจะแยกออกได้เป็นผลบวกของ determinant 2 อัน คือ

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ และ $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

เพราะ $\left(a_1 + x_1\right) b_2 - \left(b_1 + y_1\right) a_2 = \left(a_1 b_2 - b_1 a_2\right) + \left(x_1 b_2 - y_1 a_2\right)$

หากนำหลักที่ 4 มาใช้ด้วย เราจะได้

$$\begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

ซึ่งเป็นผลที่สำคัญในการใช้หาค่าของ determinant

ตัวอย่างที่ 1 หาค่าของ $\triangle \equiv \begin{vmatrix} 103 & 259 \\ 33 & 83 \end{vmatrix}$

$$\triangle = \begin{vmatrix} 103-(3\times 33) & 259-(3\times 83) \\ 33 & 83 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 33 & 83 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 33-(8\times 4) & 83-(8\times 10) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2$$

ตัวอย่างที่ 2 หาค่าของ $\triangle \equiv \begin{vmatrix} 560 & 170 \\ 387 & 117 \end{vmatrix}$

$$\triangle = 10 \times 9 \times \begin{vmatrix} 56 & 17 \\ 43 & 13 \end{vmatrix} = 90 \times \begin{vmatrix} 56-(3\times 17) & 17 \\ 43-(3\times 13) & 13 \end{vmatrix}$$

$$= 90 \times \begin{vmatrix} 5 & 17 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} = 90 \times \begin{vmatrix} 5-4 & 17-13 \\ 4 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= 90 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} = 90\,(13-16) = -270$$

8549
8547

โจทย์ I. หาค่าของ

655
2597
-27

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 90 & 80 \\ 70 & 60 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 45 & 37 \\ 45 & 17 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 28 & 29 \\ 30 & 31 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 21 & 36 \\ 28 & 45 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 19 & 39 \\ 23 & 48 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 203 & 305 \\ 99 & 152 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 1931 & 1932 \\ 1933 & 1934 \end{vmatrix}$ 10. $\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} a & b \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix}$ 12. $\begin{vmatrix} x+y & x+2y \\ x-y & x-2y \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} a^2-b^2 & (a-b)^2 \\ a^2+ab & ab-b^2 \end{vmatrix}$ 14. $\begin{vmatrix} px+qz & py+qz \\ rx+sz & ry+sz \end{vmatrix}$

II. ถอดสมการเป็นคู่ ๆ จากต่อไปนี้

(i) $2x + 3y + 7 = 0$ (ii) $3x - 2y - 5 = 0$

(iii) $2x - 5y + 3 = 0$ (iv) $3x + 4y - 7 = 0$

1. (i) กับ (ii) 2. (i) กับ (iii)
3. (i) กับ (iv) 4. (ii) กับ (iii)
5. (ii) กับ (iv) 6. (iii) กับ (iv)

10.2 หากเรามีสมการ 3 อันคือ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0,\ a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

ซึ่งมีค่า x และ y แทนได้ทั้งสามสมการ

เราจะหาค่าของ x และ y จากสองสมการหลังได้

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}$$

โดยมีข้อแม้ว่า $a_2b_3 - b_2a_3 \neq 0$

ถ้า $a_2b_3 - b_2a_3 = 0$ เราจะหาค่า x และ y แทนทั้งสามสมการไม่ได้ เว้นไว้แต่ว่า $\frac{a_2}{a_3} = \frac{b_2}{b_3} = \frac{c_2}{c_3}$ ซึ่งจะทำให้สมการสองสมการหลังเป็นสมการอันเดียวกัน

ค่าของ x และ y หากแทนในสมการแรก เราจะได้

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

ซึ่งเราจะเขียนเป็นรูป $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

การจัดตัวแรกเป็นแถวตั้งและแถวนอน แถวละ 3 ดังนี้จะได้ determinant ที่มี order 3

ดังนั้นเราจะให้คำจำกัดความของ $\triangle \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

ว่าคือตัวเลขซึ่งมีค่า

$$\triangle = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \left(b_2c_3 - c_2b_3\right) - b_1 \left(a_2c_3 - c_2a_3\right) + c_1 \left(a_2b_3 - b_2a_3\right)$$

หากเราจัดเทอมเสียใหม่ได้

$$\triangle = a_1 \left(b_2c_3 - b_3c_2\right) - a_2 \left(b_1c_3 - b_3c_1\right) + a_3 \left(b_1c_2 - b_2c_1\right)$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

หลักที่ 1 จะเห็นว่าหลักที่ 1 เมื่อใช้กับ determinant order 2 ก็ใช้ได้กับ order 3 คือค่าของ $\triangle$ ไม่เปลี่ยนหากสลับแถวนอนกับแถวตั้ง แตาหากเราพิสูจน์ไป เราก็จะได้ว่าหลักที่สอง สาม สี่ และห้าก็เป็นจริง การพิสูจน์นี้ไม่ยากนักหากแต่ว่าจะยาว ดังนั้นจะไม่แสดงให้ดู เพียงแต่ว่าจะยกตัวอย่างของการใช้หลักต่าง ๆ ไว้

หลักที่ 2 ถ้าแถวนอน (หรือแถวตั้ง) สองแถวถูกสลับที่กัน เครื่องหมายของ $\triangle$ จะเปลี่ยนไป

ตัวอย่าง
$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)(7 \times 2 - 3 \times 5) = -1$$

หลักที่ 3 ถ้าแถวนอน (หรือแถวตั้ง) ของ $\triangle$ 2 แถวเหมือนกันค่าของ $\triangle$ เป็นศูนย์

ตัวอย่าง
$$\triangle = \begin{vmatrix} 17 & 9 & 17 \\ 9 & 2 & 9 \\ 15 & 4 & 15 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 17 & 9 & 17 \\ 9 & 2 & 9 \\ 15 & 4 & 15 \end{vmatrix}$$

โดยหลักที่สอง ดังนั้น $\triangle = -\triangle$ นั่นคือ $\triangle = 0$

หลักที่ 4 ถ้าคูณทุกตัวในแถวนอน (หรือแถวตั้ง) ของ $\triangle$ ด้วย k ผลที่ได้รับคือ $k\triangle$

ตัวอย่าง
$$\begin{vmatrix} 56 & 9 & 0 \\ 24 & 15 & 18 \\ 16 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 8 \times \begin{vmatrix} 7 & 9 & 0 \\ 3 & 15 & 18 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 24 \times \begin{vmatrix} 7 & 9 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

หลักที่ 5 หาก determinant อยู่ในรูป
$$\begin{vmatrix} a_1 + x_1 & b_1 + y_1 & c_1 + z_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

เราจะแยกออกได้เป็นผลบวกของ determinant

สองอันคือ
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ และ } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ตัวอย่าง (i) $\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 9 \\ 12 & 7 & 11 \end{vmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-1 & 1 & 1 \\ 10-6 & 6 & 9 \\ 12-7 & 7 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1-1 & 1 \\ 4 & 6-1 & 9 \\ 5 & 7-11 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 9 \\ 5 & -4 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\cancel{= 4(-4) + (-3)\,5 = -1}$$

$$= 4(-4) \mp (-3)\times 5 = -16+15 = -1$$

(ii) $\Delta \equiv \begin{vmatrix} 16 & 12 & 17 \\ 5 & 4 & 6 \\ 9 & 7 & 11 \end{vmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 16-(3\times 5) & 12-(3\times 4) & 17-(3\times 6) \\ 5 & 4 & 6 \\ 9 & 7 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 9 & 7 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1+1 \\ 5 & 4 & 6+5 \\ 9 & 7 & 11+9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 11 \\ 9 & 7 & 20 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 20 - 11 \times 7 = 3$$

โจทย์ I. หาค่าของ

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 6 \\ 1 & 9 & 7 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 20 & 50 & 30 \\ 18 & 45 & 27 \\ 15 & 7 & 13 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 3 & 6 & 9 \\ 8 & 5 & 13 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 7 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 8 & 5 & 5 \\ 9 & 5 & 10 \\ 13 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 11 \\ 4 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 29 & 38 & 40 \\ 24 & 32 & 34 \\ 19 & 26 & 28 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 265 & 240 & 219 \\ 240 & 225 & 198 \\ 216 & 198 & 181 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} a & o & c \\ a & b & o \\ o & b & c \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$ 18. $\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -e & 1 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} x^2+y^2+1 & x^2+2y^2+3 & x^2+3y^2+4 \\ y^2+2 & 2y^2+6 & 3y^2+8 \\ y^2+1 & 2y^2+3 & 3y^2+4 \end{vmatrix}$

II. (1) พิสูจน์ว่า $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & 3 \\ 2 & x-5 & 1 \\ 3 & 6 & x-6 \end{vmatrix} = 0$

มีรากสามค่าสำหรับ x และให้หา

(2) เขียน $\begin{vmatrix} ap+bq & ar+bs \\ cp+dq & cr+ds \end{vmatrix}$ ให้เป็นผลบวกของ determinant

4 อัน และให้พิสูจน์ว่า เท่ากับ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}$

(3) ทำให้ง่ายเข้า $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc^2+b^2c \\ 1 & ca & ca^2+c^2a \\ 1 & ab & ab^2+a^2b \end{vmatrix}$

10.3 เราอาจแยกแฟคเตอร์ของ determinant โดยใช้ Remainaer Theorem

เช่น $\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

ถ้าเราให้ $a = b$ แถวตั้ง 2 แถวแรกจะเท่ากันทำให้ $\Delta = 0$

เพราะฉะนั้น $(a-b)$ เป็นแฟคเตอร์ของ $\triangle$

ในทำนองเดียวกัน $(b-c)$ และ $(c-a)$ ก็เป็นแฟคเตอร์ หากเราคูณ $\triangle$ ออกมา เทอมที่มีกำลังสูงสุดคือ กำลังสามกับกำลังหนึ่ง เราเรียกว่า $\triangle$ มี degree สี่ แต่ $(a-b)(b-c)(c-a)$ มี degree เพียงสาม และถ้าเราสลับ a, b, c, ตาม cyclic $\triangle$ จะมีค่าคงเดิม ดังนั้น แฟคเตอร์ที่เหลือจึงอยู่ในรูป $k(a+b+c)$ โดย k เป็นตัวที่ไม่มี a หรือ b หรือ c

$$\therefore \triangle = k(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)$$

หากเราจะเทียบสัมประสิทธิ์ของ bc^3 เราจะได้ $k = 1$

หรือเราอาจจะทำโดยวิธีทำธรรมดา คือ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ a^2+ab+b^2 & b^2+bc+c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)(b^2+bc+c^2-a^2-ab-b^2)$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

10.4 สมการ $a_1x+b_1y+c_1z=0$

$$a_2x+b_2y+c_2z=0$$

$$a_3x+b_3y+c_3z=0$$

เป็นจริงเมื่อ $x=y=z=0$ หากมีค่าอื่น ๆ อีกคือไม่เป็นศูนย์ทุกตัว เช่นสมมติว่า $z \neq 0$

เราจะเขียนสมการได้ในรูป $a_1\left(\frac{x}{z}\right) + b_1\left(\frac{y}{z}\right) + c_1 = 0$

ซึ่งเราเห็นมาแล้วว่า จะหาค่าได้เมื่อ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

หากเรามีสมการ

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

เราจะได้

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1z + d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2z + d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3z + d_3 \end{vmatrix} = 0$$

นั่นคือ

$$z \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

โดยวิธีเดียวกัน เราจะหาค่าของ x และ y ได้

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

ส่วนคือ

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{matrix} \right\|$$

โดยหักแถวตั้งออกทีละแถว

✱ 10.5 ผลคูณของ **determinant**

ถ้า $\triangle \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ และ $\triangle' \equiv \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

$\Delta \times \Delta' \equiv D$ โดย

$$D \equiv \begin{vmatrix} a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3 & a_1y_1+b_1y_2+c_1y_3 & a_1z_1+b_1z_2+c_1z_3 \\ a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3 & a_2y_1+b_2y_2+c_2y_3 & a_2z_1+b_2z_2+c_2z_3 \\ a_3x_1+b_3x_2+c_3x_3 & a_3y_1+b_3y_2+c_3y_3 & a_3z_1+b_3z_2+c_3z_3 \end{vmatrix}$$

โจทย์ I. แยกแฟคเตอร์

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} a & a & b+c \\ a+c & b & b \\ c & a+b & c \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & (x-y) & (x-y)^2 \\ 1 & (y-z) & (y-z)^2 \\ 1 & (z-x) & (z-x)^2 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} a^2 & (b+c)^2 & bc \\ b^2 & (c+a)^2 & ca \\ c^2 & (a+b)^2 & ab \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} a & a-c & a-b \\ b & c+a & b-a \\ c & c-a & a+b \end{vmatrix}$

II. ถอดสมการ

1. $x+y+z=2$, $x+2y+3z=1$, $3x+y-5z=4$

2. $2x-y-z=6$, $x+3y+2z=1$, $3x-y-5z=1$

3. $x+y+z=4$, $x+2y+3z=9$, $3x+y+4z=12$

4. $x+y-z=1$, $2x+y+z=7$, $x-5y+3z=3$

5. $x+2y-3z=0$, $3x+3y-z=5$, $x-2y+2z=1$

6. $x+2y-z=5$, $3x-y+3z=7$, $2x+3y+z=11$

III. 1. เขียนกำลังสองของ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ เป็น determinant order 2

2. เขียนกำลังสองของ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & o \\ a_2 & b_2 & o \\ a_3 & b_3 & o \end{vmatrix}$ เป็น determinant order 3

3. หาค่าของ $\begin{vmatrix} a & b & o \\ c & o & a \\ o & b & c \end{vmatrix}$ และเขียนกำลังสองเป็น determinant order 3

4. พิสูจน์ว่า $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & -b & -c & -d \\ a & b & -c & -d \\ a & b & c & -d \end{vmatrix} = -8\,abcd$

5. พิสูจน์ $\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & b & a & a \\ 1 & a & b & a \\ 1 & a & a & b \end{vmatrix} = (b-a)^3$

6. พิสูจน์ $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \\ a & b & d & c \\ b & a & d & c \end{vmatrix} = 0$

7. พิสูจน์ $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & a \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & cb & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

IV. แยกแฟคเตอร์

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

2. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

3. $$\begin{vmatrix} (a-x)^2 & (a-y)^2 & (a-z)^2 \\ (b-x)^2 & (b-y)^2 & (b-z)^2 \\ (c-x)^2 & (c-y)^2 & (c-z)^2 \end{vmatrix}$$

บทที่ 11

การเรียงลำดับและการเลือก

(Permutations and Combinations)

1. คำจำกัดความ

การเรียบเรียงลำดับ (Permutation) คือวิธีการจัดเรียงสิ่งของที่กำหนดให้ ให้เรียงเป็นลำดับโดยอาจนำมาจัดเรียงพร้อมกันทั้งหมดหรือจัดเรียงเพียงบางสิ่งก็ได้

การเลือก (Combination) คือวิธีการเลือกสิ่งของทั้งหมดหรือแต่เพียงบางสิ่งจากสิ่งของที่กำหนดให้ โดยไม่คำนึงถึงลำดับในการเลือกสิ่งของเหล่านั้น

ตัวอย่าง กำหนดตัวอักษร 3 ตัว คือ A, B และ C

ก. การเรียงลำดับคราวละ 3 ตัว มี 6 วิธีคือ

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB และ CBA

การเรียงลำดับคราวละ 2 ตัว มี 6 วิธีคือ

AB, AC, BA, BC, CA และ CB

ข. การเลือกคราวละ 3 ตัว มี 1 วิธีคือ

เลือกทั้ง A, B กับ C

การเลือกคราวละ 2 ตัว มี 3 วิธีคือ

เลือก A กับ B, A กับ C และ B กับ C

2. การหาจำนวนการเรียงลำดับและการเลือกเมื่อกำหนดจำนวนในการจัดเรียงหรือเลือกแต่ละคราวไว้หนึ่งจำนวน

2.1 หลักพื้นฐาน ถ้าเหตุการณ์หนึ่งอาจเกิดขึ้นได้ p วิธี และเมื่อเหตุการณ์นี้ได้เกิดขึ้นโดยวิธีหนึ่งวิธีใดแล้ว อีกเหตุการณ์หนึ่งอาจเกิดขึ้นได้ q วิธี เหตุการณ์ทั้งสองจะเกิดขึ้นพร้อมกันได้ $p \times q$ วิธี

ถ้าเหตุการณ์ที่หนึ่งเกิดได้ p วิธี เหตุการณ์ที่สองเกิดได้ q วิธี (หลังจากที่เหตุการณ์ที่หนึ่งเกิดแล้ว) เหตุการณ์ที่สามเกิดได้ r วิธี (หลังจากเหตุการณ์ที่หนึ่งและสองเกิดแล้ว)........... และเหตุการณ์สุดท้ายเกิดได้ z วิธี (หลังจากที่เหตุการณ์อื่น ๆ เกิดแล้ว) เหตุการณ์ทั้งหมดนี้จะเกิดขึ้นพร้อมกันได้ $p \times q \times r \times \ldots\ldots \times z$ วิธี

ตัวอย่างที่ 1 ห้อง ๆ หนึ่งมีประตูอยู่ 10 ประตู จงหาจำนวนวิธีที่ชายคนหนึ่งอาจเดินเข้าห้องและกลับออกมาโดยไม่ซ้ำประตูเดิม

วิธีทำ ชายคนนั้นเลือกเข้าห้องได้ 10 ประตู (10 วิธี) แต่ตอนออกจากห้องเขาเลือกได้เพียง 9 ประตูเพราะมีประตูหนึ่งเป็นประตูที่เขาใช้ผ่านเข้าห้อง ฉะนั้นเขาอาจเดินเข้าห้องและกลับออกมาโดยไม่ซ้ำประตูเดิมได้ $10 \times 9 = 90$ วิธี

ตัวอย่างที่ 2 จากตำบล ก. มีทางไปตำบล ข. 3 ทาง และจากตำบล ข. มีทางไปตำบล ค. 5 ทาง อยากทราบว่า จากตำบล ก. จะไปตำบล ค. โดยผ่านตำบล ข. ได้กี่วิธี

วิธีทำ จากตำบล ก. ไม่ว่าจะไปยังตำบล ข. ด้วยทางใดทางหนึ่งใน 3 ทาง ก็อาจไปยังตำบล ค. ได้ 5 ทาง

$\therefore$ ออกจากตำบล ก. ผ่านตำบล ข. และถึงตำบล ค. ได้ $= 3 \times 5 = 15$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3 มีผู้สมัครเข้ารับเลือกเป็นผู้แทน 6 คน และผู้สมัครรับเลือกเป็นรองผู้แทนอีก 4 คน จงหาจำนวนวิธีที่จะได้ผู้ปฏิบัติหน้าที่ซึ่งประกอบด้วยผู้แทน 1 คน และรองผู้แทน 1 คน

วิธีทำ มีผู้สมัครเข้ารับเลือกเป็นผู้แทน 6 คน การเลือกผู้ปฏิบัติหน้าที่ในตำแหน่งผู้แทนจึงทำได้ 6 วิธี ทำนองเดียวกัน เลือกรองผู้แทนได้ 4 วิธี ฉะนั้นเลือกผู้ปฏิบัติหน้าที่ได้ $6 \times 4 = 24$ วิธี

ตัวอย่างที่ 4 มีโรงแรมอยู่ 4 แห่ง อยากทราบว่านักท่องเที่ยว 3 คนจะเลือกพักโรงแรมโดยไม่ซ้ำกันเลยได้กี่วิธี

วิธีทำ นักท่องเที่ยวคนที่หนึ่งเลือกพักได้ 4 แห่ง

นักท่องเที่ยวคนที่สองเลือกพักได้ 3 แห่ง ($\because$ ซ้ำกับคนแรกไม่ได้)

นักท่องเที่ยวคนที่สามเลือกพักได้ 2 แห่ง

$\therefore$ นักท่องเที่ยว 3 คนจะเลือกพักโรงแรมโดยไม่ซ้ำกันได้ $4 \times 3 \times 2 = 24$ วิธี

ตัวอย่างที่ 5 มีเลขโดดอยู่ 4 ตัว คือ 1, 5, 6 และ 8 จะสร้างเลขสามหลัก (บวก) ได้กี่จำนวน

วิธีทำ หลักที่หนึ่ง (คิดหลักไหนก่อนก็ได้) เลือกได้ 4 วิธี

หลักที่สอง (หลักใดหลักหนึ่งจากสองหลักที่เหลือ) เลือกได้ 3 วิธี

หลักที่สาม (หลักที่เหลือ) เลือกได้ 2 วิธี

$\therefore$ สร้างเลขสามหลัก (บวก) ได้ $4 \times 3 \times 2 = 24$ จำนวน

ตัวอย่างที่ 6 เลขสามหลักที่มีค่าไม่น้อยกว่า 300 และประกอบด้วยเลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 มีกี่จำนวน

วิธีทำ หลักร้อยเลือกตัวเลขได้ 3 วิธี ($\because$ เลือก 0, 1 หรือ 2 ไม่ได้)

หลักสิบเลือกตัวเลขได้ 6 วิธี

หลักหน่วยเลือกตัวเลขได้ 6 วิธี

$\therefore$ มีเลขสามหลักที่มีค่าไม่น้อยกว่า 300 และประกอบด้วยเลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 อยู่ $3 \times 6 \times 6 = 108$ จำนวน

ตัวอย่างที่ 7 มีเลขโดดอยู่ 5 ตัว คือ 1, 2, 3, 5 และ 8 จะสร้างเลขคู่สี่หลัก (บวก) ได้กี่จำนวน

วิธีทำ เลขคู่คือเลขจำนวนที่มีหลักหน่วยเป็นเลขโดดคู่

$\therefore$ หลักหน่วยเลือกตัวเลขได้ 2 วิธี (คือ 2 หรือ 8)

หลักสิบเลือกตัวเลขได้ 4 วิธี ($\because$ หลักหน่วยเลือกไปแล้ว 1 ตัว)

หลักร้อยเลือกตัวเลขได้ 3 วิธี

หลักพันเลือกตัวเลขได้ 2 วิธี

$\therefore$ จะสร้างเลขคู่สี่หลัก (บวก) ได้ $2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$ จำนวน

หมายเหตุ ตัวอย่างที่ 6 เลขโดดแต่ละตัวอาจใช้ได้หลายครั้ง และต้องคิดหลักร้อยก่อน เพราะโจทก์กำหนดให้หาเลขที่มีค่าไม่น้อยกว่า 300 ซึ่งขึ้นอยู่กับหลักร้อยต้องไม่น้อยกว่า 3 ส่วนหลักสิบกับหน่วยจะเลือกหลักใดก่อนก็ได้

ตัวอย่างที่ 7 มีเลขโดดเพียง 5 ตัว แต่ละตัวใช้ได้เพียงครั้งเดียว และต้องคิดหลักหน่วยก่อน เพราะเลขจำนวนคู่หมายถึงเลขที่หลักหน่วยเป็นเลขโดดคู่ ส่วนหลักที่เหลือจะคิดหลักใดก่อนก็ได้

2.2 การหาจำนวนการเรียงลำดับคราวละ r สิ่งโดยเลือกจากสิ่งของ n สิ่งซึ่งไม่ซ้ำกันเลย $(r \leq n)$

การเรียงลำดับคราวละ r สิ่ง หมายถึงการจัดเรียงสิ่งของ r สิ่งให้เป็นระเบียบตามลำดับ ฉะนั้นจึงมี r ลำดับด้วยกัน และเนื่องจากมีสิ่งของซึ่งไม่ซ้ำกันเลยอยู่ n สิ่ง

∴ ลำดับแรกเลือกสิ่งของได้ n วิธี

ลำดับที่สองเลือกสิ่งของได้ $n-1$ วิธี

ลำดับที่สามเลือกสิ่งของได้ $n-2$ วิธี

⋮

ลำดับที่ r เลือกสิ่งของได้ $n-(r-1) = n-r+1$ วิธี

ฉะนั้น การเรียงลำดับคราวละ r สิ่ง โดยเลือกจากสิ่งของ n สิ่งซึ่งไม่ซ้ำกันมี

$$n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$$

ให้ ${}^nP_r$ แทนจำนวนการเรียงลำดับคราวละ r สิ่ง โดยเลือกจากสิ่งของ n สิ่งซึ่งไม่ซ้ำกันเลย

และ $\lfloor n$ (factorial n หรือ n factorial) แทน $1\times2\times3\times\ldots\ldots\times(n-1)\times n$ (บางตำราใช้ $n!$ แทน $\lfloor n$)

จะได้ ${}^nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$

$$= n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)\frac{(n-r)(n-r-1)\ldots\ldots3.2.1}{(n-r)(n-r-1)\ldots\ldots3.2.1}$$

$$= \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r}$$

ตัวอย่างที่ 1 $\underline{|3} = 1 \times 2 \times 3 = 6$

$\underline{|5} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

${}^{5}P_2 = 5 \times 4 \ \left(\text{หรือ } \frac{\underline{|5}}{\underline{|5-2}}\right) = 20$

${}^{7}P_3 = 7 \times 6 \times 5 \ \left(\text{หรือ } \frac{\underline{|7}}{\underline{|7-3}}\right) = 210$

${}^{10}P_5 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30,240$

ข้อสังเกต ถ้าเขียน ${}^{n}P_r$ เป็นผลคูณจะเริ่มด้วย n และลดลงทีละ 1 จนครบ r แฟคเตอร์

ตัวอย่างที่ 2 บนรถยนต์โดยสารคันหนึ่งมีที่นั่งว่างอยู่ 8 ที่ ถ้ามีคนโดยสารขึ้นมา 4 คน อยากทราบว่า คนโดยสารทั้ง 4 คนจะนั่งที่เหล่านั้นได้กี่วิธี

วิธีทำ วิธีที่ 1 มีที่ว่างอยู่ 8 ที่ เลือกมา 4 ที่และเรียงตามลำดับให้แก่คน 4 คน

$\therefore$ ทำได้ $= {}^{8}P_4$

$= 8 \times 7 \times 6 \times 5$

$= 1,680$ วิธี

วิธีที่ 2 คนที่หนึ่งเลือกที่นั่งได้ 8 วิธี คนที่สองเลือกได้ 7 วิธี คนที่สามเลือกได้ 6 วิธี และคนที่สี่เลือกได้ 5 วิธี

$\therefore$ คนทั้งสี่เลือกนั่งได้ $8 \times 7 \times 6 \times 5$

$= 1,680$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3 มีเลขโดดอยู่ 9 ตัว คือเลข 1, 2, 3, ... , 9 จะสร้างเลขบวกหกหลักได้กี่จำนวน

วิธีทำ จำนวนเลขบวก 6 หลัก = จำนวนการเรียงลำดับคราวละ 6 ตัว โดยเลือกจากตัวเลข 9 ตัวซึ่งไม่ซ้ำกันเลย

$= {}^{9}P_6$

$= 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$

$= 60,480$

หมายเหตุ 1 ในการเรียงลำดับคราวละ r สิ่ง โดยเลือกจากสิ่งของ n สิ่งซึ่งไม่ซ้ำกันเลยนั้น ถ้าสิ่งของแต่ละสิ่งอาจเลือกมาเรียงลำดับได้ไม่จำกัดจำนวนครั้ง (คือเลือกซ้ำได้ 0, 1, 2, ... ,r ครั้ง) แต่ละลำดับในการเลือกจะเลือกได้ n วิธี และจำนวนการเรียงลำดับจะเท่ากับ $n \times n \times n$ .... ถึง r แฟคเตอร์

$$= n^r$$

ตัวอย่างที่ 1 ผลที่ได้จากการทอดลูกเต๋า 3 ลูก มี $6 \times 6 \times 6$ (หรือ 6^3)

$$= 216 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 2 ใส่ลูกบอลล์ 5 ลูกลงในตะกร้า 3 ใบ จะทำได้ $3^5 = 243$ วิธี (เพราะใส่ลูกบอลล์แต่ละลูกได้ 3 แห่ง)

2. พิจารณา $^nP_r = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$

เมื่อ $r = n$ จะได้ $^nP_r = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|0}}$ แต่ $^nP_r = \underline{|n}$

$$\therefore \quad \underline{|n} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|0}}$$

เพื่อให้สูตรนี้ใช้ได้สำหรับทุกค่าของ r ที่เป็นเลขจำนวนเต็มตั้งแต่ 0 ถึง n จึงต้องให้ความหมายแก่ $\underline{|0}$ และให้เท่ากับ 1 คือ $\underline{|0} = 1$

2.3 การหาจำนวนการเรียงลำดับเป็นรูปวงกลมคราวละ r สิ่ง โดยเลือกจากสิ่งของ n สิ่งซึ่งไม่ซ้ำกัน

เราทราบแล้วว่าจำนวนการเรียงลำดับคราวละ r สิ่ง โดยเลือกจากสิ่งของ n สิ่ง ซึ่งไม่ซ้ำกันเลย เท่ากับ $\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$ วิธี คราวนี้เลือกการเรียงลำดับที่ได้นี้มาวิธีหนึ่งแล้วทำให้ลำดับหน้าสุดและลำดับท้ายสุดบรรจบกันเป็นรูปวงกลม จะเห็นว่า เราไม่อาจบอกได้ว่าสิ่งใดอยู่ลำดับหน้าสุด และถ้าจะแยกวงกลมนี้ให้กลับเป็นการเรียงลำดับอย่างแรกจะแยกเป็น r วิธี (โดยตัดที่ช่องใดช่องหนึ่งใน r ช่องระหว่างสิ่งของที่เรียงกันอยู่) ซึ่งหมายความได้ว่ามีการเรียงลำดับอยู่ r วิธี ที่ทำให้เป็นวงกลม

แล้วเป็นวิธีเดียวกัน ฉะนั้นการเรียงลำดับทั้งหมดนำมาแบ่งออกได้เป็นพวก ๆ พวกละ r วิธี ซึ่งเปลี่ยนเป็นแบบวงกลมแล้วได้พวกละ 1 วิธี (ดังตัวอย่าง การเรียงลำดับคราวละ 4 สิ่ง ABCD, BCDA, CDAB และ DABC ซึ่งเป็นการเรียงลำดับต่างวิธีกันเป็น 4 วิธี เมื่อทำเป็นรูปวงกลมจะได้

$D^{A}_{C}B$ $A^{B}_{D}C$ $B^{C}_{A}D$ $C^{D}_{B}A$ ตามลำดับ ซึ่งเป็นวิธีเดียวกัน หรือการเรียงลำดับรูปวงกรมวิธีหนึ่ง เช่น $D^{A}_{C}B$ จะกลับเรียงเป็นการเรียงลำดับอย่างธรรมดาได้ 4 วิธี โดยตัดตรงรอยขีด เช่น $D^{A}_{C}B$ เป็น ABCD

$D^{A}_{C}B$ เป็น BCDA เป็นต้น

ฉะนั้น จำนวนการเรียงลำดับเป็นรูปวงกลมคราวละ r สิ่ง โดยเลือกจากสิ่งของ n สิ่ง ซึ่งไม่ซ้ำกันเลยเท่ากับ $\dfrac{\underline{|n}}{r\,\underline{|n-r}}$ หรือ $\dfrac{{}^{n}P_{r}}{r}$

หมายเหตุ 1 ในการทำให้การเรียงลำดับเปลี่ยนเป็นรูปวงกลมนั้น เราโค้งหางแถวตามเข็มนาฬิกา และถือว่าการเรียงตามเข็มนาฬิกาและทวนเข็มนาฬิกา เช่น $\begin{matrix} F & A & B \\ E & D & C \end{matrix}$ และ $\begin{matrix} B & A & F \\ C & D & E \end{matrix}$ เป็นวิธีที่ต่างกันและใช้กันทั่วไป กรณีที่ต้องการให้เป็นวิธีเดียวกัน จำนวนการเรียงลำดับเป็นรูปวงกลมจะเป็น $\dfrac{\underline{|n}}{2r\,\underline{|n-r}}$

1. ถ้า $r = n$ คือนำมาเรียงลำดับพร้อมทั้ง n สิ่ง จำนวนการเรียงลำดับเป็นวงกลมจะเท่ากับ $\dfrac{\underline{|n}}{n\,\underline{|n-n}} = \underline{|n-1}$

ตัวอย่างที่ 1 มีเด็กอยู่ 10 คน จะให้ยืนเรียงกันเป็นวงกลมครั้งละ 6 คน ได้กี่วิธี และยืนเป็นวงกลมพร้อมกันทั้ง 10 คนได้กี่วิธี

วิธีทำ ให้ยืนเรียงกันเป็นวงกลมครั้งละ 6 คนได้

$$= \frac{\underline{|10}}{6\,\underline{|10-6}} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{6}$$

$$= 25{,}200 \text{ วิธี}$$

ให้ยืนเรียงกันเป็นวงกลมพร้อมกันทั้ง 10 คนได้

$$= \underline{|10-1}$$

$$= \underline{|9}$$

$$= 362{,}880 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ชาย 5 คนกับหญิง 5 คนยืนสลับกันเป็นวงกลมได้กี่วิธี

วิธีทำ วิธีที่ 1 คิดในรูปของวงกลม

กำหนดให้ชาย (หรือหญิง) คนหนึ่งอยู่กับที่ ฉะนั้น จึงเหลือชาย (หญิง) อีก 4 คน และหญิง (ชาย) 5 คน เลือกยืนได้ 9 ตำแหน่ง การที่กำหนดให้ชายหญิงยืนสลับกันทำให้ตำแหน่งที่จะยืนถูกกำหนดตายตัวว่า ชาย (หรือหญิง) จะต้องยืนใน 4 ตำแหน่งที่กำหนดให้ (คือ ถ้าตำแหน่งแรกเป็นตำแหน่งที่ 1 อีก 4 ตำแหน่งที่กำหนดนี้คือ ตำแหน่งที่ 3, 5, 7 และ 9) และหญิง (ชาย) ต้องยืนใน 5 ตำแหน่งที่เหลือ (คือ 2, 4, 6, 8 และ 10) ชาย (หญิง) 4 คน เลือกสลับกันเองได้ $\underline{|4}$ วิธี และหญิง (ชาย) 5 คนสลับกันเองได้ $\underline{|5}$ วิธี ฉะนั้น ให้ชาย 5 คน หญิง 5 คน ยืนสลับเป็นวงกลมได้

$$\underline{|4} \times \underline{|5} = 2880 \text{ วิธี}$$

วิธีที่ 2 คิดในแนวเส้นตรงก่อนแล้วจึงเปลี่ยนเป็นวงกลม

การเรียงเป็นแนวเส้นตรงโดยให้ยืนสลับกันนั้น ถ้าคนแรกเป็นชายจะทำให้ $\underline{|5} \times \underline{|5}$ วิธี (ชาย 5 คนเลือกสลับกัน 5 ตำแหน่ง คือตำแหน่งที่ 1, 3, 5, 7, 9 และหญิง 5 คน เลือกสลับในอีก 5 ตำแหน่งที่เหลือคือตำแหน่งที่ 2, 4, 6, 8, 10) ทำนองเดียวกันถ้าคนแรกเป็นหญิงก็จะทำได้ $\underline{|5} \times \underline{|5}$ วิธี

$\therefore$ การยืนสลับกันเป็นแนวเส้นตรงทำได้ $\underline{|5} \times \underline{|5} + \underline{|5} \times \underline{|5}$

$$= 2 \times \underline{|5} \times \underline{|5} \quad \text{วิธี}$$

และเนื่องจากยืนเรียงครั้งละ 10 คน ฉะนั้นการยืนสลับกันเป็นวงกลมจึงทำได้

$$= \frac{2 \times \underline{|5} \times \underline{|5}}{10}$$

$$= 2,880 \quad \text{วิธี}$$

2.4 การหาจำนวนการเลือกคราวละ r สิ่ง โดยเลือกจากสิ่งของ n สิ่งซึ่งไม่ซ้ำกัน $(r \leq n)$

ถ้าเราเลือกสิ่งของมาคราวละ r สิ่ง จากสิ่งของ n สิ่งซึ่งไม่ซ้ำกันเลย (ให้ครบทุกวิธีที่เป็นไปได้) และนำสิ่งของ r สิ่งที่เลือกมาในแต่ละคราวมาเรียงลำดับกันให้ครบทุกวิธี (เป็น $\underline{|r}$ วิธี) ก็จะได้การเรียงลำดับคราวละ r สิ่งโดยเลือกจากสิ่งของ n สิ่งซึ่งไม่ซ้ำกันเลยครบทุกวิธี คือเท่ากับ $\frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$ วิธี

ฉะนั้น จึงกล่าวได้ว่า ในจำนวน $\frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$ วิธีนี้ เราอาจนำมาแบ่งเป็นพวก ๆ ละ $\underline{|r}$ วิธี โดยพวกหนึ่ง ๆ เป็นวิธีหนึ่งในการเลือกสิ่งของ r สิ่งจากสิ่งของ n สิ่ง หรือเป็นวิธีหนึ่งของการเลือกคราวละ r สิ่ง (และครบทุกวิธีของการเลือก) ฉะนั้น จำนวนการเลือกคราวละ r สิ่งโดยเลือกจากสิ่งของ n สิ่งซึ่งไม่ซ้ำกันเลย = จำนวนพวกที่แบ่งได้

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}} \div \underline{|r}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r}}$$

ให้ ${}^{n}C_{r}$ แทนจำนวนการเลือกคราวละ r สิ่ง โดยเลือกจากสิ่งของ n สิ่งซึ่งไม่ซ้ำกันเลย

จะได้ ${}^{n}C_{r} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r}}$

หมายเหตุ 1 ในการใช้สัญญลักษณ์ ^nP_r หรือ ^nC_r , n และ r จะต้องเป็นเลขจำนวนเต็ม และ

$0 \leqslant r \leqslant n$

2. $$^nC_{n-r} = \frac{|\underline{n}}{|\underline{n-r}\;|\underline{n-(n-r)}} = \frac{|\underline{n}}{|\underline{n-r}\;|\underline{r}} = \frac{|\underline{n}}{|\underline{r}\;|\underline{n-r}} = {}^nC_r$$

ตัวอย่างที่ 1 มีอักษรอยู่ 4 ตัว A, B, C และ D

การเรียงลำดับคราวละ 2 ตัว มี $^4P_2 = 4 \times 3 = 12$ วิธี $\frac{4!}{2!}$

การเลือกคราวละ 2 ตัวมี $^4C_2$ หรือ $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ วิธี (เป็นครึ่งหนึ่งของจำนวนการลำดับเพราะของสองสิ่งสลับได้ $|\underline{2} = 2$ วิธี) ดังภาพ $\frac{n!}{r(n-r)!}$

การเรียงลำดับ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	AB	BA	AC	CA	AD	DA	BC	CB	BD	DB	CD	DC
การเลือก	1		2		3		4		5		6	

ตัวอย่างที่ 2 คนกลุ่มหนึ่งมี 10 คน จะเลือกผู้แทน 3 คนได้กี่วิธี

วิธีทำ เลือกผู้แทน 3 คนจาก 10 คนได้

$$= {}^{10}C_3 = \frac{|\underline{10}}{|\underline{3}\;|\underline{10-3}} = \frac{|\underline{10}}{|\underline{3}\;|\underline{7}} = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120$$ วิธี

$\frac{12}{2}(3+9)$ $\frac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$

$\frac{19}{2}[2+18]$ 190

ตัวอย่างที่ 3 ในการประชุมคราวหนึ่งมีสมาชิกมาเข้าประชุม 20 คน ถ้าทุกคนทักทายและจับมือกัน อยากทราบว่า จะมีการจับมือกันกี่ครั้ง

วิธีทำ ในการจับมือกันแต่ละครั้งต้องใช้คน 2 คน และ 2 คนจะจับมือกันเพียงครั้งเดียว (ไม่คิดลำดับ)

$\therefore$ จะมีการจับมือกัน $^{20}C_2$

$$= \frac{\lfloor 20}{\lfloor 2 \; \lfloor 20-2}$$

$$= \frac{\lfloor 20}{\lfloor 2 \; \lfloor 18}$$

$$= \frac{20 \times 19}{1 \times 2}$$

$$= 190 \text{ ครั้ง}$$

ตัวอย่างที่ 4 จากไพ่สำรับหนึ่งซึ่งมี 52 ใบ จะเลือกไพ่ขึ้นมา 4 ใบได้กี่วิธี

วิธีทำ เลือกได้ $= {}^{52}C_4$

$$= \frac{\lfloor 52}{\lfloor 48 \; \lfloor 4}$$

$$= \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$

$$= 270{,}725 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 5 จากไพ่เต็มสำรับ (i) จะเลือกไพ่ 5 ใบให้มีคิง 2 ใบ และควีน 3 ใบ ได้กี่วิธี และ (ii) ถ้าดึงขึ้นทีละใบ ไพ่ 5 ใบจะขึ้นคิง 2 ใบและควีน 3 ใบได้กี่วิธี

วิธีทำ (i) ไพ่สำรับหนึ่งมีคิง 4 ใบและควีน 4 ใบ

$\therefore$ เลือกคิง 2 ใบได้ $^{4}C_2 = 6$ วิธี

เลือกควีน 3 ใบได้ $^{4}C_3 = 4$ วิธี

$\therefore$ เลือกไพ่ 5 ใบให้มีคิง 2 ใบและควีน 3 ใบ ได้ $6 \times 4 = 24$ วิธี

(ii) การที่โจทย์กำหนดให้ดึงไพ่ขึ้นทีละใบ หมายความว่า โจทย์ต้องการให้คิดลำดับด้วย

จาก (i) การเลือกให้ได้คิง 2 ใบและควีน 3 ใบ ทำได้ 24 วิธี และไพ่ 5 ใบสลับกัน (คือเป็นใบที่ 1, 2, 3, 4 และ 5) ได้ $\underline{|5}$ วิธี

$\therefore$ ไพ่ขึ้นได้ $= 24 \times \underline{|5} = 2,880$ วิธี

ตัวอย่างที่ 6 มีหนังสืออยู่ 12 เล่ม จะเลือกหนังสือ 5 เล่มได้กี่วิธี โดย

ก. ต้องมีหนังสือเล่มหนึ่งที่กำหนดให้

ข. ต้องไม่มีหนังสือเล่มหนึ่งที่กำหนดให้

วิธีทำ ก. เนื่องจากโจทย์บังคับให้มีหนังสือเล่มหนึ่งที่กำหนดให้ ฉะนั้นจึงมีหนังสือที่จะให้เลือกได้อีก 11 เล่ม และต้องเลือกอีก 4 เล่ม (รวมกับเล่มที่กำหนดให้เป็น 5 เล่ม)

$\therefore$ เลือกได้ $^{11}C_4$

$$= \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$

$= 330$ วิธี

ข. เนื่องจากเลือกหนังสือเล่มที่กำหนดให้ไม่ได้ จึงเหลือหนังสือให้เลือกได้อีก 11 เล่ม และต้องเลือก 5 เล่ม (เพราะเล่มที่กำหนดให้ไม่ได้เอามารวมด้วย)

$\therefore$ เลือกได้ $^{11}C_5$

$$= \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$$

$= 462$ วิธี

ตัวอย่างที่ 7 ถ้า $^nC_{14} = {}^nC_{10}$ จงหาค่าของ $^{26}C_n$

วิธีทำ วิธีที่ 1 จาก $^nC_{14} = {}^nC_{10}$

โดยอาศัยสูตร $^nC_r = {}^nC_{n-r}$ เราทราบว่า $^nC_{14} = {}^nC_{n-14}$

$\therefore n - 14 = 10$

$n = 24$

วิธีที่ 2 จาก ${}^{n}C_{14} = {}^{n}C_{10}$

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|14}\;\underline{|n-14}} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|10}\;\underline{|n-10}}$$

$$\frac{\underline{|n-10}}{\underline{|n-14}} = \frac{\underline{|14}}{\underline{|10}}$$

$$(n-10)\;(n-11)\;(n-12)\;(n-13) = 14\;.\;13\;.\;12\;.\;11$$

พิจารณาเลขสองจำนวนนี้คือจำนวนซ้ายมือเท่ากับจำนวนขวามือ โดยแต่ละจำนวนเป็นผลคูณของ 4 แฟคเตอร์เท่ากัน และแต่ละแฟคเตอร์มีผลต่างเท่ากัน ฉะนั้น เลขทั้ง 2 ข้างจะต้องเท่ากันเป็นคู่ ๆ และจำนวนมากที่สุดของแต่ละข้างเท่ากัน คือ

$$n-10 = 14$$

$$n = 24$$

$$\therefore\; {}^{26}C_{n} = {}^{26}C_{24}$$

$$= \frac{\underline{|26}}{\underline{|24}\;\underline{|2}}$$

$$= \frac{26 \times 25}{1 \times 2}$$

$$= 325$$

หมายเหตุ ใช้คู่อื่นก็จะได้ผลเท่ากัน และให้สังเกตด้วยว่า ในที่นี้มีจำนวนแฟคเตอร์เป็นเลขคู่ ซ้ายมืออาจเป็น $(-11)\;(-12)\;(-13)\;(-14)$ ก็ได้ ซึ่งจะได้ $n = -1$ แต่ค่านี้ใช้ไม่ได้ เพราะตามสมการที่กำหนดให้มี $r = 14$ n จะต้องไม่น้อยกว่า 14 ฉะนั้น $n = -1$ ใช้ไม่ได้

2.5. การหาค่าของ r ที่ทำให้จำนวนการเลือกคราวละ r สิ่ง โดยเลือกจากสิ่งของ n สิ่ง ซึ่งไม่ซ้ำกันเลย มีค่ามากที่สุด

$$\because\; {}^{n}C_{r-1} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\;\underline{|n-(r-1)}}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\;\underline{|n-r+1}}$$

$$\therefore \quad {}^{n}C_{r} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\;\underline{|n-r}}$$

$$= \frac{\underline{|n}\;(n-r+1)}{r\,\underline{|r-1}\;\underline{|n-r+1}}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\;\underline{|n-r+1}} \cdot \frac{n-r+1}{r}$$

$$= {}^{n}C_{r-1} \times \frac{n-r+1}{r}$$

$\therefore \; {}^{n}C_{r} > {}^{n}C_{r-1}$ ถ้า $\frac{n-r+1}{r} > 1$

หรือถ้า $\frac{n+1}{r} - 1 > 1$

หรือถ้า $\frac{n+1}{r} > 2$

หรือถ้า $\frac{n+1}{2} > r$

นั่นคือ เมื่อ $r < \frac{n+1}{2}$, ${}^{n}C_{r}$ จะมีค่ามากกว่า ${}^{n}C_{r-1}$

ในทางตรงกันข้าม ถ้า $r < \frac{n+1}{2}$ จะทำให้ ${}^{n}C_{r}$ มีค่าน้อยกว่า ${}^{n}C_{r-1}$

และเมื่อ $r = \frac{n+1}{2}$ จะได้ ${}^{n}C_{r} = {}^{n}C_{r-1}$

(i) ถ้า n เป็นเลขคู่ ให้เท่ากับ 2 m จะได้ว่า

$$\frac{n+1}{2} = \frac{2m+1}{2} = m + \frac{1}{2}$$

ฉะนั้น เมื่อ $r \leq m$, ${}^{n}C_{r} > {}^{n}C_{r-1}$ นั่นคือ ${}^{n}C_{0} < {}^{n}C_{1} < \ldots\ldots < {}^{n}C_{m}$

และเมื่อ $r \geqslant m+1$. ${}^{n}C_{r} < {}^{n}C_{r-1}$ นั่นคือ $\ldots\ldots < {}^{n}C_{m+1} < {}^{n}C_{m}$

$$\therefore \; {}^{n}C_{m} = {}^{n}C_{\frac{n}{2}}$$

(ii) ถ้า n เป็นเลขคี่ให้เท่ากับ 2 m + 1 จะได้

$$\frac{n+1}{2} = \frac{2m+2}{2} = m+1$$

$\therefore$ เมื่อ $r < m+1$, ${}^nC_r > {}^nC_{r-1}$ คือ ${}^nC_0 < {}^nC_1 < \dots\dots < {}^nC_m$

เมื่อ $r > m+1$, ${}^nC_r < {}^nC_{r-1}$ คือ $\dots\dots < {}^nC_{m+2} < {}^nC_{m+1}$

และเมื่อ $r = m+1$ จะได้ ${}^nC_{m+1} = {}^nC_m$

$\therefore$ ${}^nC_{m+1} = {}^nC_m$ มีค่ามากที่สุด

หรือ ${}^nC_{\frac{n+1}{2}} = {}^nC_{\frac{n-1}{2}}$ มีค่ามากที่สุด

ฉะนั้นจึงสรุปได้ว่าค่าของ r ที่ทำให้จำนวนการเลือกคราวละ r สิ่ง โดยเลือกจากสิ่งของ n สิ่ง ซึ่งไม่ซ้ำกันเลยมีค่ามากที่สุด คือ

$r = \frac{n}{2}$ เมื่อ n เป็นเลขคู่

และ $r = \frac{n-1}{2}$ และ $\frac{n+1}{2}$ เมื่อ n เป็นเลขคี่

2.6. การหาจำนวนการเรียงลำดับของสิ่งของ $m+n$ สิ่ง ซึ่งมี m สิ่งซ้ำกันเป็นชนิดหนึ่ง และ n สิ่งซ้ำกันเป็นอีกชนิดหนึ่ง

ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots\dots a_m$ แทน m สิ่งซึ่งเป็นชนิดหนึ่ง

$b_1, b_2, b_3, \dots\dots b_n$ แทน n สิ่งซึ่งเป็นอีกชนิดหนึ่ง

ถ้า $m+n$ สิ่งไม่มีซ้ำกันเลย การเรียงลำดับจะมี $\underline{|m+n}$ วิธี ลองพิจารณาการเรียงลำดับวิธีหนึ่ง เช่น $a_1\,a_2\,a_3 \dots\dots a_m\,b_1\,b_2\,b_3 \dots\dots b_n$ ถ้าเราเอาชนิดแรก m ตัว คือ $a_1, a_2, \dots\dots, a_m$ มาสลับกัน (โดยไม่ทำให้ b ต่าง ๆ เปลี่ยนแปลง) จะทำได้ $\underline{|m}$ วิธี แต่สิ่งของ m สิ่งนี้ซ้ำกัน เขียน $a_1, a_2, \dots\dots, a_m = a$, $\underline{|m}$ วิธีที่ได้นี้จะกลายเป็นวิธีเดียวกัน คือ $aaa \dots\dots b_1b_2b_3 \dots\dots b_n$

ฉะนั้น การที่ m สิ่งซ้ำกันจะรวมแต่ละ $\underline{|m}$ วิธีเข้าเป็น 1 วิธี และการเรียงลำดับจะมีเพียง $\frac{\underline{|m+n}}{\underline{|m}}$ วิธี

ในทำนองเดียวกัน เมื่อมีอีก n สิ่งซ้ำกันเป็นอีกชนิดหนึ่งแต่ละ $|\underline{n}$ วิธีจะรวมเป็น 1 วิธี และจะทำให้มีจำนวนการเรียงลำดับเท่ากับ $\dfrac{|\underline{m+n}}{|\underline{m}\ |\underline{n}}$ วิธี

นั่นคือ จำนวนการเรียงลำดับของสิ่งของ m+n n สิ่ง ซึ่งมี m สิ่งซ้ำกันเป็นชนิดหนึ่ง และ n สิ่งซ้ำกันเป็นอีกชนิดหนึ่ง เท่ากับ $\dfrac{|\underline{m+n}}{|\underline{m}\ |\underline{n}}$ วิธี

ข้อสังเกต เราอาจคิดว่าทั้งหมดมี m + n ลำดับ และการเรียงลำดับก็เท่ากับการเลือก m ลำดับเพื่อใส่ m สิ่งที่ซ้ำกัน และ n ลำดับที่เหลือ สำหรับ n สิ่งซึ่งซ้ำกันหรือกลับกัน และจำนวนวิธี $= {}^{m+n}C_m$ หรือ ${}^{m+n}C_n$

$$= \frac{|\underline{m+n}}{|\underline{m}\ |\underline{n}}$$

โดยทำนองเดียวกันจะได้ว่า จำนวนการเรียงลำดับสิ่งของ $a+b+c+\ldots\ldots+z$ สิ่ง ซึ่งมี a สิ่งซ้ำเป็นชนิดที่หนึ่ง, b สิ่งซ้ำเป็นชนิดที่สอง, c สิ่งซ้ำเป็นชนิดที่สาม, ... และ z สิ่งซ้ำเป็นอีกชนิดหนึ่ง จะเท่ากับ $\dfrac{|\underline{a+b+c+\ldots\ldots\ldots+z}}{|\underline{a}\ |\underline{b}\ |\underline{c}\ \ldots\ldots\ldots |\underline{z}}$

และ จำนวนการเรียงลำดับสิ่งของ n สิ่งซึ่งมี a สิ่งซ้ำเป็นชนิดที่หนึ่ง, b สิ่งซ้ำเป็นชนิดที่สอง c สิ่งซ้ำเป็นชนิดที่สาม, ... , z สิ่งซ้ำเป็นอีกชนิดหนึ่ง และที่เหลือเป็นชนิดอื่น ๆ ซึ่งไม่ซ้ำกันเลย $(a+b+c+\ldots\ldots\ldots+z<n)$ จะเท่ากับ

$$\frac{|\underline{n}}{|\underline{a}\ |\underline{b}\ |\underline{c}\ \ldots\ldots\ldots |\underline{z}}$$

ตัวอย่างที่ 1 นำอักษรชุดหนึ่งซึ่งมี a 5 ตัว, b 4 ตัวและ c 6 ตัวมาเรียงลำดับได้กี่วิธี

วิธีทำ จะทำได้ $= \dfrac{|\underline{5+4+6}}{|\underline{5}\ |\underline{4}\ |\underline{6}}$

$$= \frac{|\underline{15}}{|\underline{5}\ |\underline{4}\ |\underline{6}}$$

$$= 630{,}630 \quad \text{วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 2 อักษรชุดหนึ่งมี p 3 ตัว, q 6 ตัว และ a, b, c, d, e อีกอย่างละ 1 ตัว อยากทราบว่าจะนำอักษรชุดนี้มาเรียงลำดับให้ครบทุกตัวได้กี่วิธี

วิธีทำ อักษรทั้งหมดมี 3 + 6 + 5 = 14 ตัว มีซ้ำกันอยู่ 2 ชนิด ๆ หนึ่ง 3 ตัว และอีกชนิดหนึ่ง 6 ตัว

$$\therefore \text{ จำนวนการเรียงลำดับให้ครบทุกตัว } = \frac{\underline{|14}}{\underline{|3}\ \underline{|6}}$$

$$= 20{,}180{,}160$$

3. การหาจำนวนวิธีแบ่งสิ่งของจำนวนหนึ่งออกเป็นหมู่ ๆ ตามที่กำหนดให้

3.1. การหาจำนวนวิธีแบ่งสิ่งของ $m + n$ สิ่งซึ่งไม่ซ้ำกันเลยออกเป็น 2 หมู่ ๆ หนึ่ง m สิ่งและอีกหมู่หนึ่ง n สิ่ง $(m \neq n)$

การแบ่งสิ่งของ $m + n$ สิ่งซึ่งไม่ซ้ำกันออกเป็นสองหมู่ ๆ หนึ่ง m สิ่ง และอีกหมู่หนึ่ง n สิ่งนี้เหมือนกับการเลือกของ m สิ่งมาไว้พวกหนึ่ง และให้ n สิ่งที่เหลือเป็นอีกพวกหนึ่ง (หรือเลือก n สิ่งเป็นพวกหนึ่งและให้ m สิ่งที่เหลือเป็นอีกพวกหนึ่ง) ฉะนั้น จำนวนวิธีที่จะแบ่งได้จึงเท่ากับ ${}^{m+n}C_m$ หรือ ${}^{m+n}C_n$

$$= \frac{\underline{|m + n}}{\underline{|m}\ \underline{|n}}$$

วิธีทำ ก. จำนวนวิธีที่จะแบ่งออกเป็น 2 กอง $= \frac{\underline{|10}}{\underline{|6}\ \underline{|4}}$

$$= 210$$

ข. ในการแบ่งให้แก่เด็กสองคน การที่เด็กสลับกองกันย่อมเป็นวิธีที่ต่างกัน ซึ่งทำได้ $\underline{|2} = 2$ วิธี

$$\therefore \text{ จำนวนวิธีที่จะแบ่งให้แก่เด็ก 2 คน } = 2 \times \frac{\underline{|10}}{\underline{|6}\ \underline{|4}}$$

$$= 420$$

(ถ้ากำหนดตัวว่าให้เด็กคนใดได้ 6 ผล [illegible]สลับกองกันไม่ได้ และไม่ต้องคูณ 2)

หมายเหตุ ถ้า $m = n$ คือแบ่งเป็น 2 หมู่ ๆ ละเท่า ๆ กัน จะทำให้การแบ่งซึ่งได้กล่าวมาแล้วนั้นมีซ้ำกันเป็นคู่ ๆ (เช่นตัวอย่างการแบ่ง a. b, c และ d ออกเป็น 2 หมู่ ๆ ละ 2 ตัว ตามสูตรข้างบนทำได้ $\frac{\underline{|4}}{\underline{|2}\ \underline{|2}} = 6$ วิธี คือ

	หมู่ที่ 1	หมู่ที่ 2
วิธีที่ 1.	a , b	c , d
,, 2.	a , c	b , d
,, 3.	a , d	b , c
,, 4.	b , c	a , d
,, 5.	b , d	a , c
,, 6.	c , d	a , b

จะเห็นได้ว่า หมู่ที่ 1 ของวิธีที่ 1 ซ้ำกับหมู่ที่ 2 ของวิธีที่ 6 ทำให้วิธีที่ 1 กับวิธีที่ 6 เป็นวิธีเดียวกัน วิธีที่ 2 ซ้ำกับวิธีที่ 5 และวิธีที่ 3 ซ้ำกับวิธีที่ 4 ฉะนั้นจึงมีคือเอา 2 ไปหารจำนวนวิธีเดิม $\left(\text{คือ } 6\right) = \frac{6}{2} = 3)$

ฉะนั้น จำนวนวิธีแบ่งสิ่งของ 2 m สิ่งออกเป็น 2 หมู่ ๆ ละเท่า ๆ กัน จะเท่ากับ $\frac{\underline{|2m}}{\underline{|m}\ \underline{|m}\ \underline{|2}}$

ตัวอย่าง แบ่งผลไม้ 10 ผลออกเป็น 2 กอง ๆ ละ 5 ผลได้ $\frac{\underline{|10}}{\underline{|5}\ \underline{|5}\ \underline{|2}} = 126$ วิธี และแบ่งผลไม้ 10 ผลให้เด็ก 2 คน ๆ ละ 5 ผลได้ $\underline{|2} \times \frac{\underline{|10}}{\underline{|5}\ \underline{|5}\ \underline{|2}} = 256$ วิธี

3.2. การหาจำนวนวิธีแบ่งสิ่งของ $m + n + p$ สิ่งซึ่งไม่ซ้ำกันเลยออกเป็น 3 หมู่ให้มีจำนวน m, n และ p สิ่งตามลำดับ (m, n และ p ไม่เท่ากัน)

ถ้าเราแบ่งสิ่งของ $m + n + p$ สิ่งออกเป็น 2 หมู่ ๆ หนึ่ง m สิ่ง และอีกหมู่หนึ่ง $n+p$ สิ่งเสียก่อนแล้วนำหมู่ที่มี $n + p$ สิ่งมาแบ่งอีกครั้งหนึ่งโดยแบ่งออกเป็น 2 หมู่ ๆ หนึ่ง n สิ่ง อีกหมู่หนึ่ง p สิ่ง ก็จะได้เป็น 3 หมู่ซึ่งมีจำนวน m, n และ p สิ่งตามต้องการ

จากวิธีการแบ่งข้างบนโดยอาศัยสูตรที่ได้จากหัวข้อก่อน เราทราบว่า การแบ่งครั้งแรกทำได้ $\dfrac{\underline{|m+n+p}}{\underline{|m}\ \underline{|n+p}}$ วิธี และเมื่อแบ่งครั้งแรกแล้ว (โดยวิธีใดวิธีหนึ่ง) การแบ่งครั้งที่สองทำได้ $\dfrac{\underline{|n+p}}{\underline{|n}\ \underline{|p}}$ วิธี ฉะนั้น ถ้าคิดการแบ่งทั้ง 2 ครั้งรวมกันจะทำได้ $\dfrac{\underline{|m+n+p}}{\underline{|m}\ \underline{|n+p}} \times \dfrac{\underline{|n+p}}{\underline{|n}\ \underline{|p}} = \dfrac{\underline{|m+n+p}}{\underline{|m}\ \underline{|n}\ \underline{|p}}$ วิธี

นั่นคือ แบ่งสิ่งของ $m + n + p$ ซึ่งสิ่งไม่ซ้ำกันเลยออกเป็น 3 หมู่ ให้มีจำนวน m, n และ p สิ่งตามลำดับได้ $\dfrac{\underline{|m+n+p}}{\underline{|m}\ \underline{|n}\ \underline{|p}}$ วิธี

หมายเหตุ ถ้า $m = n$ จะมีวิธีที่ซ้ำกันเป็น $\underline{|2}$ คือเท่ากับจำนวนวิธีที่ 2 หมู่สลับกันได้ และจำนวนวิธีที่แบ่งได้เท่ากับ $\dfrac{\underline{|m+m+p}}{\underline{|m}\ \underline{|m}\ \underline{|p}\ \underline{|2}}$ หรือ $\dfrac{\underline{|2m+p}}{(\underline{|m})^2\,\underline{|p}\ \underline{|2}}$

ถ้า $m = n = p$, จะมีวิธีที่ซ้ำกันเป็น $\underline{|3}$ คือเท่ากับจำนวนวิธีที่ 3 หมู่สลับกันได้ และจำนวนวิธีที่จะแบ่งได้เท่ากับ

$$\frac{\underline{|m+m+m}}{\underline{|m}\ \underline{|m}\ \underline{|m}\ \underline{|3}} \quad \text{หรือ} \quad \frac{\underline{|3m}}{(\underline{|m})^3\,\underline{|3}}$$

ข้อสังเกต ในการแบ่งสิ่งของที่ไม่ซ้ำกันเลยเป็นหมู่ ๆ จำนวนวิธีที่จะแบ่งได้จะเท่ากับ factorial ของจำนวนทั้งหมด หารด้วยผลคูณของ factorial ของจำนวนในแต่ละหมู่ (ทุกหมู่) และถ้ามีหมู่ซึ่งมีจำนวนเท่ากัน จะต้องแยกชุดที่มีจำนวนเท่ากันออกเป็นชุด ๆ นับดูว่าในแต่ละชุดมีกี่หมู่ แล้วเอาผลคูณของ factorial ของจำนวนหมู่ในแต่ละชุดหารผลหารที่ได้นั้น (ดูตัวอย่างที่ 3)

ตัวอย่างที่ 1 จะแบ่งลูกหิน 13ลูกออกเป็น 3 กอง ให้มีจำนวน 5, 2 และ 6 ลูกตามลำดับได้กี่วิธี

วิธีทำ จะแบ่งได้

$$\frac{\underline{|13}}{\underline{|5}\ \underline{|2}\ \underline{|6}}$$

$$= 36{,}036 \quad \text{วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 2 จะแบ่งเด็ก 12 คนออกเป็น 3 หมู่ ๆ ละเท่า ๆ กันได้กี่วิธี

วิธีทำ จะแบ่งได้

$$\frac{\underline{|12}}{(\underline{|4})^3\ \underline{|3}}$$

$$= 5{,}775 \quad \text{วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 3 มีดินสออยู่ 35 แท่ง ต้องการแบ่งออกเป็น 12 กอง ให้มีกองละ 3 แท่ง อยู่ 4 กอง กองละ 2 แท่ง ๕ กองและกองละ 4 แท่งอีก 2 กอง อยากทราบว่าทำได้กี่วิธี

วิธีทำ มีดินสออยู่ 35 แท่งต้องการแบ่งเป็น 12 กอง

กองละ 3 แท่งมี 4 กอง = 12 แท่ง

กองละ 2 แท่งมี 5 กอง = 10 แท่ง

กองละ 4 แท่งมี 2 กอง = 8 แท่ง

3 ชุดดังกล่าวรวมกันเป็น 11 กอง มี 30 แท่ง ฉะนั้นจึงต้องมีอีกกองหนึ่งซึ่งมีดินสอ 5 แท่ง

$$\therefore \text{ แบ่งได้ } = \frac{\underline{|35}}{(\underline{|3})^4(\underline{|2})^5(\underline{|4})^2\ \underline{|5}\ .\ \underline{|4}\ \underline{|5}\ \underline{|2}}$$

$$= 625{,}822{,}907{,}024.331{,}854{,}838{,}000{,}000 \quad \text{วิธี}$$

4. การหาจำนวนการเรียงลำดับหรือการเลือก เมื่อกำหนดจำนวนในการจัดเรียงหรือเลือกแต่ละคราวไว้หลายจำนวน

ในการหาจำนวนเรียงลำดับหรือการเลือกนั้น บางครั้งเราจะต้องหาหลายครั้งโดยเปลี่ยนจำนวนในแต่ละคราว แล้วนำผลที่ได้มาคำนวณอีกครั้งหนึ่งตามที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 1 มีเลขโดดอยู่ 5 ตัว คือ 0, 1, 2, 3 และ 4 จะสร้างเลขจำนวนเต็มที่มีค่ามากกว่า 200 ได้กี่จำนวน

วิธีทำ เลขจำนวนเต็มที่มีค่ามากกว่า 200 นั้น อาจมี 3 หลัก 4 หลัก หรือ 5 หลัก (ในที่นี้มีได้ไม่เกิน 5 หลักเพราะมีเลขโดด 5 ตัว)

เลข 3 หลักที่มีค่ามากกว่า 200 มี $3 \times 4 \times 3 = 36$ จำนวน (หลักร้อยอาจเป็น 2, 3 หรือ 4)

เลข 4 หลัก มี $4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$ จำนวน (หลักพันเป็น 0 ไม่ได้)

เลข 5 หลัก มี $4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$ จำนวน (หลักหมื่นเป็น 0 ไม่ได้)

$\therefore$ สร้างเลขจำนวนเต็มที่มีค่ามากกว่า 200 ได้ $36 + 96 + 96$

$= 228$ จำนวน

ตัวอย่างที่ 2 คนกลุ่มหนึ่งมี 10 คน ตกลงกันไว้ว่า ในการประชุมคราวหนึ่ง ๆ จะต้องมีผู้เข้าประชุมอย่างน้อย 5 คน จึงจะครบองค์ประชุม อยากทราบว่า จะมีการประชุมที่ครบองค์กี่วิธี

วิธีทำ การประชุมที่จะครบองค์นั้น อาจประกอบด้วย 5, 6, 7, 8, 9 หรือ 10 คน

$\therefore$ มีการประชุมที่ครบองค์ $= {}^{10}C_5 + {}^{10}C_6 + {}^{10}C_7 + {}^{10}C_8 + {}^{10}C_9 + {}^{10}C_{10}$

$= 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1$

$= 638$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3 มีหนังสืออยู่ 8 เล่ม ชายคนหนึ่งมีเงินพอซื้อหนังสือได้ไม่เกิน 3 เล่ม อยากทราบว่า เขาจะเลือกซื้อหนังสือได้กี่วิธี

วิธีทำ เขาอาจซื้อ 1 เล่ม, 2 เล่ม หรือ 3 เล่มก็ได้ (ไม่ซื้อเลยไม่ได้)

∴ เขาเลือกซื้อได้ $^{8}C_1 + {}^{8}C_2 + {}^{8}C_3$

$= 8 + 28 + 56$

$= 92$ วิธี

ตัวอย่างที่ 4 มีบัตรสีแดง 5 ใบ และบัตรสีขาว 8 ใบ จะเลือกบัตร 6 ใบให้มีบัตรสีแดงมากกว่า 2 ใบได้กี่วิธี

วิธีทำ คำว่ามากกว่า 2 ใบ หมายความว่า 3, 4 หรือ 5 ใบ (บัตรสีแดงมี 5 ใบ)

เลือกบัตร 6 ใบให้มีบัตรสีแดง 3 ใบได้ $^{5}C_3 \times {}^{8}C_3 = 560$ วิธี (เลือกบัตรแดง 3 ใบจาก 5 ใบ และบัตรขาว 3 ใบจาก 8 ใบ)

เลือกบัตร 6 ใบให้มีบัตรสีแดง 4 ใบได้ $^{5}C_4 \times {}^{8}C_2 = 140$ วิธี

เลือกบัตร 6 ใบให้มีบัตรสีแดง 5 ใบได้ $^{5}C_5 \times {}^{8}C_1 = 8$ วิธี

∴ จะเลือกบัตร 6 ใบให้มีบัตรสีแดงมากกว่า 2 ใบได้

$= 560 + 140 + 8$

$= 708$ วิธี

ตัวอย่างที่ 5 ชายคนหนึ่งตั้งรางวัลไว้ 4 รางวัล เป็นรางวัลที่ 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ และตั้งปัญหาให้เด็ก 4 คนทาย โดยกำหนดว่า จะแจกรางวัลที่ 1, 2, 3 และ 4 แก่ผู้ทายถูกเป็นอันดับ 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ และถ้าทายไม่ถูกจะไม่ได้รับรางวัล เว้นแต่กรณีที่ไม่มีผู้ทายถูกเลย จะแจกรางวัลนั้นเรียงลำดับตามอายุของผู้ทายจากน้อยไปมาก อยากทราบว่า เขาจะแจกรางวัลได้กี่วิธี

วิธีทำ ในการทายปัญหาอาจมีเด็กทายถูก 4 คน, 3 คน, 2 คน, 1 คน หรือไม่มีผู้ทายถูกเลย

ถ้าเด็กทายถูกทั้ง 4 คนจะแจกรางวัลได้ (4 คนสลับกัน) $\underline{|4} = 24$ วิธี

ถ้าเด็กทายถูก 3 คนจะแจกรางวัลได้ (เลือกมา 3 คนแล้วสลับกัน รับรางวัลที่ 1, 2 และ 3) $^{4}C_3 \times \underline{|3} = 24$ วิธี

ถ้าเด็กทายถูก 2 คนจะแจกรางวัลได้ (เลือกมา 2 คนแล้วสลับกัน รับรางวัลที่ 1 และ 2) $^{4}C_2 \times \underline{|2} = 12$ วิธี

เด็กทายถูก 1 คนจะแจกรางวัลได้

(เลือกมา 1 คนรับรางวัลที่ 1) ${}^{4}C_1 \quad = \; 4$ วิธี

ถ้าไม่มีเด็กทายถูกเลยจะแจกรางวัลได้ (เรียงลำดับตามอายุผู้ทาย) $= \; 1$ วิธี

$\therefore$ เขาจะแจกรางวัลได้ $24 + 24 + 12 + 4 + 1 = 65$ วิธี

ตัวอย่างที่ 6 จงหาจำนวน (i) การเลือกและ (ii) การเรียงลำดับคราวละ 4 ตัว จากตัวอักษรของคำ proportion

วิธีทำ คำ proportion มีตัวอักษร 10 ตัวแบ่งเป็น 6 ชนิดดังนี้ o, o, o, p, p, ; r, r ; t ; i ; n

(i) จำนวนการเลือกหาได้ดังนี้คือ

กรณีที่ 1 ทั้ง 4 ตัวไม่ซ้ำกันเลย ทำได้ ${}^{6}C_4 = 15$ วิธี (เลือก 4 ชนิดจาก 6 ชนิด)

กรณีที่ 2 ซ้ำคู่หนึ่งอีก 2 ตัวไม่ซ้ำ ทำได้ ${}^{3}C_1 \times {}^{5}C_2 = 30$ วิธี (เลือก 1 คู่ จาก 3 คู่ และอีก 2 ชนิดจาก 5 ชนิดที่เหลือ)

กรณีที่ 3 ซ้ำกัน 2 คู่ ทำได้ ${}^{3}C_2 = 3$ วิธี (เลือก 2 คู่จาก 3 คู่)

กรณีที่ 4 ซ้ำ 3 ตัวอีกตัวไม่ซ้ำ ทำได้ $\times\ 1\,{}^{5}C_1 = 5$ วิธี (เลือก 3 ตัวกับชนิดอื่นอีก 1 ชนิด)

$\therefore$ จำนวนการเลือก $= 15 + 30 + 3 + 5 = 53$

(ii) ในการหาจำนวนการเรียงลำดับ จะต้องนำการเลือกแต่ละกรณีมาหาจำนวนการเรียงลำดับ แล้วจึงนำผลที่ได้มารวมกันดังนี้

กรณีที่ 1 (ไม่มีซ้ำกันเลย) เรียงลำดับได้ $15 \times \underline{|4} = 360$ วิธี

กรณีที่ 2 (ซ้ำ 1 คู่) เรียงลำดับได้ $30 \times \dfrac{\underline{|4}}{\underline{|2}} = 360$ วิธี

กรณีที่ 3 (ซ้ำ 2 คู่) เรียงลำดับได้ $3 \times \dfrac{\underline{|4}}{\underline{|2}\ \underline{|2}} = 18$ วิธี

กรณีที่ 4 (ซ้ำ 3 ตัว) เรียงลำดับได้ $5 \times \dfrac{\underline{|4}}{\underline{|3}} = 20$ วิธี

$\therefore$ จำนวนการเรียงลำดับ $= 360 + 360 + 18 + 20 = 758$

4.1 การหาจำนวนการเลือกของสิ่งของ n สิ่งซึ่งไม่ซ้ำกันเลย โดยไม่จำกัดจำนวนสิ่งที่จะเลือกในแต่ละคราว

จำนวนการเลือกตามหัวข้อนี้คือ $^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \dots + {}^nC_{n-1} + {}^nC_n$ แต่เมื่อ n มีค่ามาก วิธีนี้ย่อมไม่สะดวก จึงจำเป็นต้องหาวิธีอื่นที่สะดวกกว่านี้

ในการเลือกสิ่งของแต่ละวิธีนั้นสิ่งของแต่ละสิ่งจะเป็นได้เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งในสองอย่างคือ ถูกเลือกหรือไม่ถูกเลือกเท่านั้น ถ้าเราคิดว่ามีทางเลือกอยู่ 2 ทางดังกล่าวแล้วให้สิ่งของแต่ละสิ่งเลือกทางใดทางหนึ่งจะได้ว่า สิ่งของแต่ละสิ่งเลือกได้ 2 วิธี ฉะนั้นเมื่อให้เลือกพร้อมกัน n สิ่งจะมี $2 \times 2 \times 2 \times \dots\dots\dots$ ถึง n แฟคเตอร์ $= 2^n$ วิธี ในจำนวนเหล่านี้จะรวมการเลือกคราวละ 0 สิ่ง, 1 สิ่ง, 2 สิ่ง, ... n สิ่งคือครบทุกวิธี แต่การเลือกคราวละ 0 สิ่ง จะไม่เรียกว่าการเลือก (คือไม่มีการเลือกเกิด) ซึ่งกรณีนี้มีอยู่ 1 วิธี (คือกรณีที่สิ่งของทุกสิ่งเลือกทางที่ไม่ถูกเลือก)

ฉะนั้น จำนวนการเลือกของสิ่งของ n สิ่งซึ่งไม่ซ้ำกันเลย โดยไม่จำกัดจำนวนสิ่งที่จะเลือกในแต่ละคราว เท่ากับ $2^n - 1$

ตัวอย่าง ชายคนหนึ่งมีเพื่อน 6 คน เขาจะเชิญมารับประทานอาหารที่บ้านได้กี่วิธี (เชิญครั้งละกี่คนก็ได้)

วิธีทำ เขาจะต้องเลือกเพื่อน (กี่คนก็ได้) จากเพื่อน 6 คน

$\therefore$ เขาเชิญได้ $2^6 - 1 = 63$ วิธี

หรือ ใช้วิธีเดิม เขาเชิญได้ $= {}^6C_1 + {}^6C_2 + {}^6C_3 + {}^6C_4 + {}^6C_5 + {}^6C_6$

$= 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1$

$= 63$ วิธี

4.2. การหาจำนวนการเลือกของสิ่งของ $p+q+r+$ ....สิ่งซึ่งมี p สิ่งซ้ำเป็นชนิดที่หนึ่ง q สิ่งซ้ำเป็นชนิดที่สอง r สิ่งซ้ำเป็นชนิดที่สาม .... โดยไม่จำกัดจำนวนสิ่งที่จะเลือกในแต่ละคราว

ในการหาจำนวนการเลือกตามหัวข้อนี้ เราควรคิดเป็นชุด ๆ ดังนี้ ชุดที่หนึ่งมีสิ่งของอยู่ p สิ่ง ฉะนั้นชุดที่หนึ่งอาจไม่ถูกเลือกเลย คือถูกเลือก 0 สิ่ง ถูกเลือก 1 สิ่ง (เลือกสิ่งไหนก็เป็นวิธีเดียวกัน เพราะซ้ำกัน), 2 สิ่ง, 3 สิ่ง,.........หรือ p สิ่ง รวมเป็น $p+1$ วิธี ทำนองเดียวกัน ชุดที่สองถูกเลือกได้ $q+1$ วิธี ชุดที่สามถูกเลือกได้ $r+1$ วิธี...

$\therefore$ ถ้าทุกชนิดพร้อมกัน จะทำได้

$$(p+1)\ (q+1)\ (r+1)\ \ldots\ldots \text{ วิธี}$$

แต่ในจำนวนนี้มีอยู่ 1 วิธีที่ไม่เป็นการเลือก คือเมื่อทุกชุดไม่ถูกเลือกเลย

$\therefore$ จำนวนการเลือกที่ต้องการเท่ากับ

$$(p+1)\ (q+1)\ (r+1)\ \ldots\ldots - 1$$

ตัวอย่าง มีหนังสืออ่านเล่นเรื่องหนึ่งซ้ำกันอยู่ 10 เล่ม เรื่องที่สองซ้ำกัน 7 เล่ม เรื่องที่สามกัน 13 เล่ม อยากทราบว่า จะเลือกหนังสือให้ห้องสมุดได้กี่วิธี

วิธีทำ ในการมอบหนังสือให้แก่ห้องสมุด อาจมอบให้เพียง 1 เล่ม, 2 เล่ม .... หรือทั้งหมด

มอบหนังสือเรื่องที่หนึ่งให้ห้องสมุดได้ $10+1=11$ วิธี (คือ 0, 1, 2, ... หรือ 10 เล่ม)

${}^{30}C_3$

มอบหนังสือเรื่องที่สองให้ห้องสมุดได้ $7+1=8$ วิธี

มอบหนังสือเรื่องที่สามให้ห้องสมุดได้ $13+1=14$ วิธี

แต่จะไม่มอบเลยไม่ได้ (มี 1 วิธี)

$\therefore$ จะเลือกหนังสือมอบให้ห้องสมุดได้ $11 \times 8 \times 14 - 1$

$$= 1{,}231 \quad \text{วิธี}$$

แบบฝึกหัด

1. In how many ways can a boy and a girl be chosen from 6 boys and 9 girls? 54

2. In how many ways can 3 different prizes be awarded to 10 boys, if any boy may win them all?

3. In how many ways can a first, second and third prize be awarded in a class of 10 boys?

4. In a certain manufacturing plant, the first operation can be done on any one of five machines, the second on only one machine, the third on any one of six machines, and the fourth on either of two machines. Over how many routes can the raw material be processed?

5. There are 8 candidates for a Classical, 7 for a Mathematical, and 4 for a Natural Science Scholarship. In how many ways can the Scholarships be awarded?

6. Find the values of ${}^{8}P_{7}$; ${}^{25}P_{5}$.

7. Find the values of $\lfloor\underline{6}$; $\dfrac{\lfloor\underline{7}}{\lfloor\underline{4}}$; $\dfrac{\lfloor\underline{8}}{\lfloor\underline{5}\,\lfloor\underline{3}}$

8. Express in factorials:

   (i) $10 \times 9 \times 8$; (ii) $10 \times 11 \times 12 \times 13$;

   (iii) $n(n-1)(n-2)$; (iv) $n(n+1)(n+2)(n+3)$;

   (v) $n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)$; (vi) $n(n+1)(n+2)(n+3) \ldots\ldots (n+r)$

9. How many different arrangements can be made by taking 5 of the letters of the word **Equation**?

10. If four times the number of permutations of n things 3 together is equal to five times the number of permutations of $n-1$ things 3 together, find n.

11. In how many orders can the letters of the word treason be arranged? How many arrangements begin with t? How many begin with t and end with n?

12. In how many ways can 8 boys be arranged in a row? In how many of these ways do 2 particular boys ocupy end places?

13. In how many ways can 6 people be arranged at a round table so that 2 particular people sit together?

14. What is the total number of positive (a) odd integers of five different digits, (b) even integers of three different digits, which can be formed from the digits 1, 2, 3, 4, 5, 6, and 7?

15. (a) If ${}^{x}P_4 = 7 . {}^{x}P_3$, find x;

(b) If ${}^{n}P_5 = 12 . {}^{n}P_3$, find n;

(c) If ${}^{n+1}P_{r+1} = 15\, {}^{n}P_r$, find n.

16. Find the values of ${}^{24}C_4$; ${}^{19}C_{14}$.

17. (a) If ${}^{2n}C_3 : {}^{n}C_2 = 44 : 3$; find n ;

(b) If ${}^{n}C_{12} = {}^{n}C_8$; find ${}^{n}C_{17}$, ${}^{22}C_n$.

18. On how many arrangements can be made out of the letters of the word **draught**, the vowels never being separated ?

19. Out of the letters A, B, C, p, q, r how many arrangements can be made (i) beginning with a capital, (ii) beginning and ending with a capital ?

20. In how many ways can a committee of 4 men and 3 ladies be formed from 10 men and 8 ladies ?

21. What is the greatest number of points of intersection of (i) 12 straight lines, (ii) 9 circles, (iii) 6 straight lines and 5 circles ?

22. The tennis squad of University A consists of twelve players and that of University B of eight players. Find the number of double matches that can be arranged between the two squads.

23. How many distinct bridge hands (13 cards from a deck of 52) Contain exactly six clubs ?

24. In how many ways can the letters of the word **Vowels** be arranged, if the letters **o,e** can only occupy odd places ?

25. Out of 25 consonants and 5 vowels how many words can be formed each consisting of 2 consonants and 3 vowels ?

26. In a library there are 20 Latin and 6 Greek books ; in how many ways can a group of 5 consisting of 3 Latin and 2 Greek books be placed on a shelf ?

27. In how many ways can 4 Latin and 1 English book be placed on a shelf so that the English book is always in the middle, the selection being made from 7 Latin and 3 English books ?

28. In how many ways can 4 red counters, 4 white counters and 1 black counters be arranged in a row ?

29. In how many orders can 8 stories be arranged in a book if neither the longest nor the shortest first ? In how many of these ways does the longest come last ?

30. In how many ways can 5 men and 2 ladies be arranged at a round table if the two ladies (i) sit together, (ii) are separated?

31. In how many ways can 5 different Latin books, 4 different Greek books, 3 different French books be arranged on a shelf so that the books in each language come togther?

32. In how many ways can 6 ladies and 6 gentlemen be arranged at a round table, if two particular ladies must not sit next to one particular man, all the men being separated?

33. Find the number of arrangements that can be made out of the letters of the words (i) **independence;** (ii) **superstitious;** (iii) **institutions.**

34. A room is to be decorated with fourteen flags; if 2 of them are blue, 3 red, 2 white, 3 green, 2 yellow, and 2 purple, in how many ways can they be hung?

35. How many numbers greater than a million can be formed with the digits 2, 3, 0, 3, 4, 2, 3?

36. I have counters of n different colours, red, white, blue, ..., in how many ways can I make an arrangement consisting of r counters, supposing that there are at least r of each different colour?

37. In how many ways can five things be divided between two persons?

38. A letter lock consists of three rings each marked with fifteen different letters; find in how many ways it is possible to make an unsuccessful attempt to open the lock.

39. A library has **a** copies of one book, **b** copies of each of two books, **c** copies of each of three books, and single copies of **d** books. In how many ways can these books be distributed, if all are out at once?

40. How many numbers less than 10000 can be made with the eight digits 1, 2, 3, 0, 4, 5, 6, 7 (digits may be repeated)?

41. In how many ways can 7 person form a ring? In how many ways can 7 Englishmen and 7 Americans sit down at a round table, no two Americans being together?

42. Find the number of different ways of dividing mn things into n equal groups.

43. How many signals can be made by hoisting 4 flags of different colours one above the other, when any number of them may be hoisted at once? How many with 5 flags?

44. There are p points in a plane, no three of which are in the same straight line with the exception of p, which are all in the same straight line; find the number (i) of straight lines (ii) of triangles which result from joining them.

45. There are n different books, and p copies of each; find the number of ways in which a selection can be made from them.

46. Find the number of selections and of arrangements that can be made by taking 4 letters from the word **Expression.**

47. Find the sum of all numbers greater than 10000 formed by using the digits 1, 3, 5, 7, 9, no digit being repeated in any number.

48. If of p + q + r things p be alike, and p are alike, and the rest different; find the total number of combinations.

49. How many whole numbers are factors of $2^6 . 3^4 . 5^2 . 7 . 11$, not counting 1 or the number itself?

50. Two similar dice with faces numbered 1 to 6 are thrown. How many different (i) throws (ii) totals are possible?

51. What is the greatest number of points of intersection made by m straight lines and n circles?

52. From 4 officers and 8 privates, in how many ways can 6 be chosen (i) to include exactly one officer, (ii) to include at least one officer?

คำตอบ

1. 54
2. 1000
3. 720
4. 60
5. 224
6. 40320 ; 6375600
7. 720 ; 210 ; 56
8. (i) $\frac{|\underline{10}}{|\underline{7}}$; (ii) $\frac{|\underline{13}}{|\underline{9}}$; (iii) $\frac{|\underline{n}}{|\underline{n-3}}$ (iv) $\frac{|\underline{n+3}}{|\underline{n-1}}$; (v) $\frac{|\underline{n+3}}{|\underline{n-4}}$; (vi) $\frac{|\underline{n+r}}{|\underline{n-1}}$
9. 6720
10. 15
11. 5040 ; 720 ; 120
12. 40320 ; 1440
13. 48
14. (a) 1440 ; (b) 90
15. (a) 15; (b) 7; (c) 14
16. 10626 ; 11628
17. (a) 6 ; (b) 1140 ; 231
18. 1440
19. (i) 360 ; (ii) 114
20. 11760
21. (i) 66 ; (ii) 72 ; (iii) 95
22. 1848
23. 26393687892
24. 144
25. 360000
26. 2052000
25. 2520

28. 630

29. 30240 ; 4320

30. (i) 240 ; (ii) 480

31. 103680

32. 34560

33. (i) 1663200 ; (ii) 129729600 ; (iii) 3326400

34. 151351200

35. 360

36. n^r

37. 30

38. 3374

39. $\dfrac{(a+2d+3c+d)!}{a!\,(b!)^2\,(c!)^3}$

40. 4095

41. 721 ; 3628800

42. $\dfrac{(mn)!}{(m!)^n\, n!}$

43. 64 ; 325

44. (i) $\dfrac{p(p-1)}{2} - \dfrac{q(q-1)}{2} + 1$; (ii) $\dfrac{p(p-1)(p-2)}{6} - \dfrac{q(q-)(q-2)}{6}$

45. $(p-1)^n - 1$

41. 113 ; 2190

47. 6666655

48. $(p+1)(q+1)2^r - 1$

49. 418

50. (i) 21 ; (ii) 11

51. $\frac{1}{2}m(m-1) + n(2m+n-1)$ หรือ $(m+n)(m+n-1) - \frac{1}{2}m(m-1)$

52. (i) 224 ; (ii) 896

บทที่ 12

ความน่าจะเป็น (Probaility)

ความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ใด คือ อัตราส่วนระหว่างจำนวนวิธีที่เหตุการณ์นั้นอาจเกิดขึ้นได้จากการทดลองกับจำนวนวิธีทั้งหมดที่เป็นไปได้ในการทดลองนั้น ๆ โดยที่แต่ละวิธีมีทางเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน

หรือ ถ้าการทดลองครั้งหนึ่งอาจเกิดผลได้ n ชนิดโดยแต่ละชนิดมีทางเกิดขึ้นได้เท่ากัน ในจำนวน n ชนิดนั้น มีอยู่ s ชนิดที่ทำให้สมหวัง และผลชนิดอื่นทำให้ผิดหวัง เราจะกล่าวว่า ความน่าจะเป็น p ของความสมหวังเท่ากับ $\frac{s}{n}$

ตัวอย่างที่ 1 โยนเหรียญเที่ยงตรงอันหนึ่ง (คำว่าเที่ยงตรงในที่นี้หมายความว่าการที่จะขึ้นหัวหรือก้อยมีทางเกิดขึ้นได้เท่ากัน) ผลที่อาจเกิดขึ้นได้มี 2 ชนิด คือหัวและก้อย ถ้าเราให้การขึ้นหัวเป็นผลที่ทำให้สมหวัง (หรือเหตุการณ์หนึ่งเป็นการขึ้นหัว) ซึ่งมีเพียง 1 ชนิด ความน่าจะเป็นของความสมหวัง (ของการเกิดเหตุการณ์นั้น หรือขึ้นหัว จะเท่ากับ $\frac{1}{2}$)

ตัวอย่างที่ 2 ทอดลูกเต๋าเที่ยงตรงลูกหนึ่งซึ่งมี 6 หน้า คือ 1, 2, 3, 4, 5 และ 6

(i) ความน่าจะเป็นที่จะขึ้นหน้า 3 $= \frac{1}{6}$

(ii) ความน่าจะเป็นที่จะขึ้นหน้า 1 หรือ 2 $= \frac{2}{6}\ \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

(iii) ความน่าจะเป็นที่จะขึ้นหน้าซึ่งมีค่ามากกว่า 2 (คือหน้า 3, 4, 5 หรือ 6)

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ตัวอย่างที่ 3 จากถุงใบหนึ่งซึ่งมีลูกบอลล์สีขาว 4 ลูก และสีดำ 5 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะสุ่มหยิบขึ้นมา 3 ลูก เป็นสีดำหมด

วิธีทำ มีลูกบอลล์อยู่ 9 ลูก สุ่มหยิบขึ้นมา 3 ลูก อาจทำให้ ${}^{9}C_3$ วิธี มีลูกบอลล์สีดำ 5 ลูก หยิบขึ้นมา 3 ลูก ทำได้ ${}^{5}C_3$ วิธี

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบขึ้นมา 3 ลูกเป็นสีดำหมด $= \dfrac{{}^{5}C_3}{{}^{9}C_3} = \dfrac{10}{84} = \dfrac{5}{42}$.

(การทดลองครั้งนี้เป็นการสุ่มหยิบลูกบอลล์ขึ้นมา 3 ลูก จากลูกบอลล์ 9 ลูก ผลที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดจึงเท่ากับ ${}^{9}C_3$ แต่ผลที่จะทำให้สมหวัง คือเป็นสีดำทั้ง 3 ลูกนั้นได้แก่การเลือกลูกบอลล์สีดำ 3 ลูก จากลูกบอลล์สีดำ 5 ลูกซึ่งมี ${}^{5}C_3$ วิธี)

หมายเหตุ 1. ถ้าผลที่ได้จากทดลองเป็นชนิดหนึ่งหรือวิธีหนึ่งซึ่งรวมอยู่ในเหตุการณ์ใด เราจะกล่าวได้ว่าเหตุการณ์นั้นเกิด เช่นในตัวอย่างที่ 2 (iii) มีเหตุการณ์คือ ขึ้นหน้าซึ่งมีค่ามากกว่า 2 มีอยู่ 4 หน้าคือ 3, 4, 5 หรือ 6 ถ้าการทดลองได้หน้าใดหน้าหนึ่งใน 4 หน้านี้ ก็กล่าวได้ว่าเหตุการณ์นั้นเกิด คือ ขึ้นหน้าซึ่งมีค่ามากกว่า 2

2. คำว่าความน่าจะเป็น (Probability) บางครั้งอาจเรียกว่า โอกาส (chance)

ข้อสังเกต 1. ความน่าจะเป็น เป็นอัตราส่วนระหว่างจำนวนวิธีที่เหตุการณ์หนึ่งอาจเกิดขึ้นได้จากการทดลองกับจำนวนวิธีทั้งหมดที่เป็นไปได้ในการทดลองนั้น ๆ โดยที่แต่ละวิธีมีทางเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน ฉะนั้น ความน่าจะเป็นจะมีค่าเกิน 1 ไม่ได้ และเนื่องจากจำนวนวิธีเป็นลบไม่ได้ ฉะนั้น ความน่าจะเป็นจึงมีค่าน้อยกว่า 0 ไม่ได้ นั่นคือ

$$0 \leq \text{ความน่าจะเป็น} \leq 1$$

เหตุการณ์ใดมีความน่าจะเป็นที่จะเกิดมาก ย่อมหมายความ เศษของอัตราส่วนมาก คือจำนวนวิธีที่เหตุการณ์นั้นจะเกิดมีมาก ดังนั้นเหตุการณ์ที่มีความน่าจะเป็นที่จะเกิดมากย่อมมีโอกาสเกิดขึ้นได้มาก ในทางตรงข้ามเหตุการณ์ที่มีความน่าจะเป็นที่จะเกิดน้อยย่อมมีโอกาสเกิดขึ้นได้น้อย

2. ความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ใด $= 1$ หมายความว่า เหตุการณ์นั้นจะต้องเกิดขึ้นทุกครั้งที่ทำการทดลอง

3. ความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ใด $= 0$ หมายความว่า เหตุการณ์นั้นเป็นไปไม่ได้ หรือจะไม่เกิดขึ้นเลยไม่ว่าจะทำการทดลองมากมายเพียงใด

4. ถ้า $p = \frac{s}{n}$ เป็นความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์แล้ว ความน่าจะเป็นของการไม่เกิดเหตุการณ์นั้น (q) จะเท่ากับ $1 - p$ หรือ $p + q = 1$

พิสูจน์ ความน่าจะเป็นของการไม่เกิดเหตุการณ์นั้น $(q) = \dfrac{\text{จำนวนวิธีที่เหตุการณ์นั้นไม่เกิด}}{\text{จำนวนวิธีทั้งหมดที่เป็นไปได้}}$

$$= \frac{n-s}{n}$$

$$= 1 - \frac{s}{n}$$

$$= 1 - p$$

หรือ $p + q = 1$

ตัวอย่างที่ 4 (i) ความน่าจะเป็นของการขึ้นหน้า 3 จากการทอดลูกเต๋า 1 ลูก

$$= \frac{1}{6}$$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นของการได้หน้าอื่นต่างจากหน้า 3 (ไม่ได้หน้า 3)

$$= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

(ii) ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลล์สีดำ 3 ลูก ในการสุ่มหยิบลูกบอลล์ 3 ลูก จากถุง ซึ่งมีลูกบอลล์สีขาว 4 ลูก และสีดำ 5 ลูก

$$= \frac{5}{42}$$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นของการไม่ได้ลูกบอลล์สีดำ 3 ลูก (คือได้ 0, 1 หรือ 2 ลูก) $= 1 - \frac{5}{42}$

$$= \frac{37}{42}$$

ตัวอย่างที่ 5 ทอดลูกเต๋า 2 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้

(i) ผลบวกของหน้าทั้งสองที่ขึ้นเท่ากับ 7

(ii) ขึ้นหน้า 1 อย่างน้อย 1 ลูก

วิธีทำ (i) ทอดลูกเต๋าแต่ละลูกอาจเกิดผลได้ 6 วิธี

$\therefore$ ทอดลูกเต๋า 2 ลูก ผลที่อาจเกิดขึ้นได้มี $6 \times 6 = 36$ วิธี

วิธีที่จะได้ผลบวกของหน้าทั้งสองที่ขึ้นเท่ากับ 7 มี

16, 25, 34, 43, 52, และ 61 รวม 6 วิธี

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลบวกของหน้าทั้งสองที่ขึ้นเท่ากับ $7 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$

(ii) ผลที่เป็นไปได้ทั้งหมดมี $6 \times 6 = 36$ วิธี

จำนวนวิธีที่เรียกว่า ขึ้นหน้า 1 อย่างน้อย 1 ลูก หาได้ดังนี้ คือ

กรณีที่ 1 ถ้าลูกที่หนึ่งขึ้นหน้า 1 ลูกที่สองจะขึ้นหน้าอะไรก็ใช้ได้ ฉะนั้นมี $1 \times 6 = 6$ วิธี

กรณีที่ 2 ถ้าลูกที่หนึ่งขึ้นหน้าอื่นซึ่งมีอยู่ 5 วิธี ลูกที่สองจะต้องขึ้นหน้า 1 จึงจะใช้ได้ ฉะนั้น กรณีที่ 2 มี $5 \times 1 = 5$ วิธี

รวมทั้ง 2 กรณีมี $6 + 5 = 11$ วิธี

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะขึ้นหน้า 1 อย่างน้อย 1 ลูก $= \frac{11}{36}$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาความน่าจะเป็นที่จะขึ้นหน้า 6 อย่างน้อย 1 ลูก จากการทอดลูกเต๋า 3 ลูก

วิธีทำ ลูกเต๋าแต่ละลูกจะขึ้นหน้าอื่นที่ไม่ใช่หน้า 6 ได้ 5 วิธี

$\therefore$ การทอดลูกเต๋า 3 ลูกโดยไม่ขึ้นหน้า 6 เลยมี $5^3 = 125$ วิธี

แต่ผลจากการทอดลูกเต๋า 3 ลูกมี $6^3 = 216$ วิธี

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะไม่ขึ้นหน้า 6 เลย $= \frac{125}{216}$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะขึ้นหน้า 6 อย่างน้อย 1 ลูก $= 1 - \frac{125}{216}$

$$= \frac{91}{216}$$

(ตัวอย่างที่ 6 อาจหาจำนวนวิธีที่ทำให้สมหวังโดยตรงก็ได้โดยหาจำนวนวิธีที่ขึ้นหน้าหก 1 ลูก, 2 ลูก และ 3 ลูกแล้วจึงนำมาบวกกัน แต่วิธีนี้สลับซับซ้อนมาก)

เหตุการณ์ต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้วในตัวอย่างต่าง ๆ เป็นเหตุการณ์ที่เกิดจากการทดลองเพียงครั้งเดียว เหตุการณ์เช่นนี้เรียกว่า เหตุการณ์เดี่ยว (simple event) เมื่อนำเหตุการณ์เดี่ยวหลาย ๆ เหตุการณ์มารวมกันเข้าจะกลายเป็นเหตุการณ์อันหนึ่งเรียกว่าเหตุการณ์รวม (Compound event) เช่น ถุงใบหนึ่งมีลูกบอลล์สีขาว 4 ลูก และสีดำ 5 ลูก การหยิบลูกบอลล์ 3 ลูกให้ได้สีดำทั้ง 3 ลูก เป็นเหตุการณ์เดี่ยว ถ้าให้หยิบอีก 3 ลูกให้ได้สีขาวทั้ง 3 ลูก (หยิบเป็นครั้งที่สอง) การหยิบครั้งที่ 1 และครั้งที่ 2 รวมกันเข้าเป็นเหตุการณ์รวม หรือการทอดลูกเต๋าแต่ละครั้ง (จำนวนเท่าไรก็ได้) ผลที่ได้เป็นเหตุการณ์เดี่ยว ถ้าทอดหลาย ๆ ครั้ง ผลที่ได้ในแต่ละครั้งเมื่อนำมารวมกันจะกลายเป็นเหตุการณ์อีกอันหนึ่งซึ่งเป็นเหตุการณ์รวม

เหตุการณ์อิสระ (Independent events) หมายถึงเหตุการณ์หลายเหตุการณ์ซึ่งแต่ละเหตุการณ์มีจำนวนวิธีที่จะเกิดขึ้นคงที่ไม่ว่าเหตุการณ์อื่นจะเกิดหรือไม่เกิดก็ตาม (คือจำนวนวิธีจะเกิดแต่ละเหตุการณ์ไม่ขึ้นกับการเกิดหรือไม่เกิดของเหตุการณ์อื่น) ตัวอย่าง เช่นการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูก 2 ครั้ง ไม่ว่าการทอดลูกเต๋าครั้งที่หนึ่งจะขึ้นหน้าอะไรก็ตามการทอดครั้งที่สองจะเกิดได้ทุกหน้าเหมือนกัน ฉะนั้น ถ้าให้เหตุการณ์หนึ่งคือ ทอดลูกเต๋าครั้งที่หนึ่งได้หน้า 3 และอีกเหตุการณ์หนึ่งคือทอดลูกเต๋าครั้งที่สองได้หน้า 5 จะเห็นได้ว่าไม่เหตุการณ์ที่หนึ่งจะเกิด (คือขึ้นหน้า 3) หรือไม่ก็ตาม เหตุการณ์ที่สองก็มีโอกาสเกิดได้ (หรือมีความน่าจะเป็นที่จะเกิดขึ้น) เท่ากับ $\frac{1}{6}$ เท่ากัน ฉะนั้นเหตุการณ์สองเหตุการณ์นี้จึงเป็นอิสระต่อกัน และเป็นเหตุการณ์อิสระหรือในการหยิบลูกบอลล์จากถุง 2 ครั้ง โดยหยิบครั้งหนึ่งแล้วใส่ลูกบอลล์ที่หยิบขึ้นมาคืนลงในถุงก่อนหยิบครั้งที่สอง จะเห็นได้ว่าครั้งที่หนึ่งจะได้ลูกบอลล์ลูกใดก็ตาม ครั้งที่สองก็อยู่ในฐานะเดียวกับการหยิบครั้งที่หนึ่ง (เพราะคืนลูกบอลล์ที่หยิบขึ้นมาลงในถุงแล้ว) ฉะนั้น เหตุการณ์ที่เกิดจากการหยิบลูกบอลล์ครั้งที่หนึ่งกับเหตุการณ์ที่เกิดจากการหยิบลูกบอลล์ครั้งที่สองย่อมเป็นอิสระต่อกัน และสองเหตุการณ์นี้เป็นเหตุการณ์อิสระ

เหตุการณ์ไม่อิสระ (Dependent events) หมายถึงเหตุการณ์หลายเหตุการณ์ ซึ่งจำนวนวิธีที่เหตุการณ์หนึ่งจะเกิดขึ้นได้เปลี่ยนแปลงไปตามผลของการทดลองอื่น ๆ (คือจำนวนวิธีที่เหตุการณ์หนึ่งจะเกิดขึ้นได้ขึ้นอยู่กับการเกิดหรือไม่เกิดของเหตุการณ์อื่น) ตัวอย่าง เช่น การหยิบลูกบอล์ 2 ครั้ง ๆ ละ 3 ลูกจากถุงใบหนึ่ง ซึ่งมีลูกบอลล์สีขาว 4 ลูก และลูกบอลล์สีดำ 5 ลูก ให้เหตุการณ์หนึ่ง คือ หยิบครั้งที่หนึ่งได้ลูกบอลล์สีดำ 3 ลูก และอีกเหตุการณ์หนึ่งคือการหยิบครั้งที่สองได้สีขาวทั้ง 3 ลูก จะเห็นได้ว่า ในการหยิบครั้งที่สองนั้นจะได้ผลดังที่ต้องการ (เหตุการณ์จะเกิดขึ้นได้) ยากหรือง่ายย่อมขึ้นอยู่กับการหยิบ (การทดลอง) ครั้งที่หนึ่ง ถ้าผลของการทดลองครั้งที่หนึ่งปรากฏว่าได้ลูกบอลล์สีดำทั้ง 3 ลูก (เหตุการณ์ที่หนึ่งเกิด) ในการหยิบครั้งที่สองนั้น จะมีลูกบอลล์สีขาวอยู่ 4 ลูก สีดำ 2 ลูก ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ทั้งสองจะเกิดเท่ากับ $\frac{{}^4C_3}{{}^6C_8} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ แต่ถ้าเหตุการณ์ที่หนึ่งไม่เกิด คือ ได้ลูกบอลล์สีดำไม่ถึง 3 ลูก ซึ่งหมายความว่าจะต้องได้ลูกบอลล์สีขาวด้วย เช่น ได้สีดำ 2 ลูกกับสีขาว 1 ลูก ในการหยิบครั้งที่สองจะมีลูกบอลล์สีขาว 3 ลูก และสีดำ 3 ลูก ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ที่สองจะเกิดเท่ากับ $\frac{{}^3C_3}{{}^6C_8} = \frac{1}{20}$ และถ้าครั้งที่หนึ่งได้ลูกบอลล์สีขาวเกิน 1 ลูก ในการหยิบครั้งที่สองจะมีลูกบอลล์สีขาวไม่ถึง 3 ลูก ซึ่งทำให้เหตุการณ์ที่สองไม่มีทางเกิดขึ้นได้เลย ฉะนั้น เหตุการณ์ที่สองจึงขึ้นอยู่กับเหตุการณ์ที่หนึ่ง และเหตุการณ์ทั้งสองเป็นเหตุการณ์ไม่อิสระ

การหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์อิสระสองเหตุการณ์พร้อมกัน เมื่อทราบความน่าจะเป็นที่จะเกิดแต่ละเหตุการณ์

สมมติว่าในการทดลองครั้งที่หนึ่งอาจเกิดผลได้ n_1 วิธี โดยแต่ละวิธีมีทางเป็นไปได้เท่า ๆ กัน และผลที่จะทำให้เกิดเหตุการณ์ที่หนึ่งมี s_1 วิธี

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ที่หนึ่ง p_1 เท่ากับ $\frac{s_1}{n_1}$

การทดลองครั้งที่สองอาจเกิดผลได้ n_2 วิธีโดยแต่ละวิธีทางเป็นไปได้เท่า ๆ กัน และผลที่ทำให้เกิดเหตุการณ์ที่สองมี s_2 วิธี

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ที่สอง p_2 เท่ากับ $\frac{s_2}{n_2}$

เนื่องจากเหตุการณ์ทั้งสองเป็นอิสระต่อกัน เหตุการณ์ทั้งสองจะเกิดขึ้นพร้อมกันได้ $s_1 \times s_2$ วิธี และผลจากการทดลอง 2 ครั้งพร้อมกันมี $n_1 \times n_2$ วิธี ฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์อิสระสองเหตุการณ์พร้อมกันเท่ากับ $\frac{s_1 \times s_2}{n_1 \times n_2}$ หรือ $\frac{s_1}{n_1} \times \frac{s_2}{n_2}$ หรือผลคูณของความน่าจะเป็นที่จะเกิดแต่ละเหตุการณ์

ในทำนองเดียวกันจะได้

ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ที่หนึ่งแต่ไม่เกิดเหตุการณ์ที่สอง

$$= p_1 \times \left(1 - p_2\right)$$

ความน่าจะเป็นที่จะไม่เกิดเหตุการณ์ที่หนึ่งแต่เกิดเหตุการณ์ที่สอง

$$= \left(1 - p_1\right) \times p_2$$

ความน่าจะเป็นที่จะไม่เกิดเหตุการณ์ทั้งสอง

$$= \left(1 - p_1\right)\left(1 - p_2\right)$$

สังเกตด้วยว่า $\left(1 - p_1\right)$ และ $\left(1 - p_2\right)$ คือความน่าจะเป็นที่จะไม่เกิดเหตุการณ์ที่หนึ่ง และความน่าจะเป็นที่จะไม่เกิดเหตุการณ์ที่สองตามลำดับ

หมายเหตุ วิธีการนี้ใช้ได้กับเหตุการณ์อิสระหลาย ๆ เหตุการณ์ คือ

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์อิสระหลายเหตุการณ์ = ผลคูณของความน่าจะเป็นที่จะเกิดแต่ละเหตุการณ์นั้น

ตัวอย่างที่ 1 กล่องที่หนึ่งมีดินสอสีแดง 5 แท่ง ดินสอสีดำ 6 แท่ง กล่องที่สองมีปากกาสีแดง 5 ด้าม ปากกาสีดำ 4 ด้าม หยิบปากกาขึ้นมาด้ามหนึ่งกับดินสอแท่งหนึ่ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้สีดำทั้งสองอย่าง

วิธีทำ การที่จะได้ดินสอสีดำจะต้องหยิบจากกล่องที่หนึ่ง ซึ่งมีดินสอทั้งหมด 11 แท่ง เป็นสีดำ 6 แท่ง

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบดินสอขึ้นมา 1 แท่งเป็นสีดำ $= \frac{6}{11}$ $\frac{{}^{6}C_{1}}{{}^{11}C_{1}}$

การที่จะได้ปากกาจะต้องหยิบจากกล่องที่สองซึ่งมีปากกาอยู่ 9 ด้าม เป็นสีดำ 4 ด้าม

∴ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบปากกาขึ้นมา 1 ด้ามเป็นสีดำ $= \frac{4}{9}$

ฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่จะหยิบปากกาหนึ่งด้ามกับดินสอหนึ่งแท่งเป็นสีดำทั้งสองอย่าง

$$= \frac{4}{9} \times \frac{6}{11}$$

$$= \frac{8}{33}$$

ตัวอย่างที่ 2 ถุงใบหนึ่งมีบัตรสีขาว 5 ใบ และบัตรสีแดง 8 ใบ หยิบบัตรขึ้นมา 3 ใบ คืนบัตรลงไปในถุงแล้วหยิบขึ้นมาอีก 3 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ครั้งที่หนึ่งเป็นสีขาวทั้ง 3 ใบ และครั้งที่สองเป็นสีแดงทั้ง 3 ใบ

วิธีทำ การหยิบทั้งสองครั้งเป็นอิสระต่อกัน เพราะผลการหยิบครั้งที่หนึ่งไม่กระทบกระเทือนถึงการหยิบครั้งที่สอง

มีบัตรอยู่ทั้งหมด $5 + 8 =$ ใบ เป็นสีขาว 5 ใบ และสีแดง 8 ใบ

∴ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบครั้งที่หนึ่ง 3 ใบได้บัตรสีขาวทั้ง 3 ใบ

$$= \frac{{}^{5}C_{3}}{{}^{13}C_{3}}$$

$$= \frac{5}{143}$$

และความน่าจะเป็นที่จะหยิบครั้งที่สอง 3 ใบได้บัตรสีแดงทั้ง 3 ใบ

$$= \frac{{}^{8}C_{3}}{{}^{13}C_{3}}$$

$$= \frac{28}{143}$$

ฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้ครั้งที่หนึ่งเป็นสีขาวทั้ง 3 ใบ และครั้งที่สองเป็นสีแดงทั้ง 3 ใบ

$$= \frac{5}{143} \times \frac{28}{143}$$

$$= \frac{140}{20449}$$

ตัวอย่างที่ ๓ จากตัวอย่างที่ 2 จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ครั้งที่หนึ่งเป็นบัตรสีขาว 2 ใบ และครั้งที่สองเป็นบัตรสีดำอย่างน้อย 1 ใบ

วิธีทำ มีบัตรสีขาว 5 ใบ สีดำ 8 ใบ รวมเป็น 13 ใบ

$\therefore$ หยิบครั้งละ 3 ใบ ทำได้ ${}^{13}C_3$ วิธี

หยิบครั้งที่หนึ่งให้ได้บัตรสีขาว 2 ใบ ทำได้ ${}^{5}C_2 \times {}^{8}C_1$ วิธี (ต้องคูณด้วย ${}^{8}C_1$ เพราะการหยิบ 3 ใบได้สีขาว 2 ใบ หมายความว่าต้องมีสีอื่นอีก 1 ใบ)

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบครั้งแรกได้บัตรสีขาว 2 ใบ $= \dfrac{{}^{5}C_2 \times {}^{8}C_1}{{}^{13}C_3}$

$$= \frac{40}{143}$$

หยิบครั้งที่สองไม่ได้บัตรสีดำเลย (คือได้บัตรสีขาวทั้ง 3 ใบ) ทำได้ ${}^{5}C_3$ วิธี

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบครั้งที่สองไม่ได้บัตรสีดำเลย $= \dfrac{{}^{5}C_3}{{}^{13}C_3}$

$$= \frac{5}{143}$$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบครั้งที่สองได้บัตรสีดำอย่างน้อย 1 ใบ

$$= 1 - \frac{5}{143}$$

$$= \frac{138}{143}$$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบ 2 ครั้ง ได้ครั้งที่หนึ่งเป็นบัตรสีขาว 2 ใบ และครั้งที่สองเป็นบัตรสีดำอย่างน้อย 1 ใบ $= \dfrac{40}{143} \times \dfrac{138}{143}$

$$= \frac{5520}{20449}$$

ตัวอย่างที่ 4 ทอดลูกเต๋าลูกหนึ่ง 5 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ ครั้งที่หนึ่งขึ้นหน้าคู่ ครั้งที่สองขึ้นหน้าคี่ ครั้งที่สามขึ้นหน้า 2 ครั้งที่สี่ไม่ขึ้นหน้า 2 และครั้งที่ห้าไม่ขึ้นหน้า 5 หรือ 6

วิธีทำ ความน่าจะเป็นที่จะได้ครั้งที่หนึ่งขึ้นหน้าคู่ $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ความน่าจะเป็นที่จะได้ครั้งที่สองขึ้นหน้าคี่ $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ความน่าจะเป็นที่จะได้ครั้งที่สามขึ้นหน้า 2 $= \frac{1}{6}$

ความน่าจะเป็นที่จะได้ครั้งที่สี่ไม่ขึ้นหน้า 2 $= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

2, 3, 4

ความน่าจะเป็นที่จะได้ครั้งที่ห้าไม่ขึ้นหน้า 5 หรือ 6 $= 1 - \boxed{\frac{2}{6}} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลทั้ง 5 ครั้งตามที่ต้องการ

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{5}{216}$$

ตัวอย่างที่ 5 คน 5 คนวิจารณ์หนังสือเล่มหนึ่ง โดยให้อัตราของความดีกับความไม่ดีของหนังสือเล่มนี้ ปรากฏว่ามีความเห็นแตกต่างกันดังนี้ คนที่หนึ่งให้อัตราส่วน 5 : 2 คนที่สองให้ 4 : 3 และคนที่สามให้ 3 : 4 จงหาความน่าจะเป็นที่ 2 คนแรกจะมีความเห็นว่าหนังสือเล่มนี้ดีแต่คนที่สามมีความเห็นตรงข้าม

วิธีทำ ความน่าจะเป็นที่คนที่หนึ่งจะมีความเห็นว่าหนังสือเล่มนี้ดี $= \frac{5}{7}$

ความน่าจะเป็นที่คนที่สองจะมีความเห็นว่าหนังสือเล่มนี้ดี $= \frac{4}{7}$

ความน่าจะเป็นที่คนที่สามจะมีความเห็นว่าหนังสือเล่มนี้ไม่ดี $= \frac{4}{7}$

$\because$ ความเห็นของแต่ละคนเป็นอิสระต่อกัน

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่ 2 คนแรกจะมีความเห็นว่าหนังสือเล่มนี้ดี แต่คนที่สามมีความเห็นว่าหนังสือเล่มนี้ไม่ดี $= \frac{5}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{4}{7}$

$$= \frac{80}{343}$$

หมายเหตุ สำหรับเหตุการณ์ไม่อิสระ 2 เหตุการณ์ ความน่าจะเป็นที่จะเกิดขึ้นหาได้โดยหาอัตราส่วนระหว่างจำนวนวิธีที่เกิดเหตุการณ์เหล่านั้นกับจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ในการทดลองสองครั้งพร้อมกัน หรืออาจได้จากผลคูณของความน่าจะเป็นที่จะเกิดขึ้นแต่ละเหตุการณ์โดยดัดแปลงสูตรเล็กน้อยดังนี้

ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ทั้งสองเท่ากับผลคูณระหว่างความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ที่หนึ่งกับความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ที่สองโดยมีเหตุการณ์ที่หนึ่งเกิดขึ้นแล้ว

ตัวอย่าง มีลูกหินสีดำ 4 ลูก และสีขาว 5 ลูก ใส่รวมกันในถุง ถ้าหยิบลูกหินขึ้นมาสองครั้ง ๆ ละ 2 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ครั้งที่หนึ่งเป็นสีดำทั้งสองลูก และครั้งที่สองได้สีขาว 1 ลูก (กับสีดำ 1 ลูก)

วิธีทำ **วิธีที่ 1** ในการหยิบครั้งที่หนึ่งให้ได้สีดำ 2 ลูก ทำได้ ${}^4C_2$ วิธี

ในการหยิบครั้งที่สองให้ได้สีขาว 1 ลูก (เมื่อครั้งที่หนึ่งสมหวัง) $= {}^2C_1 \times {}^5C_1$ วิธี

$\therefore$ ในการหยิบสองครั้งให้ได้ผลตามที่ต้องการ ทำได้ ${}^4C_2 \times {}^2C_1 \times {}^5C_1$ วิธี

แต่การหยิบสองครั้ง ๆ ละ 2 ลูกจะทำได้ ${}^9C_2 \times {}^7C_2$ วิธี

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบ 2 ครั้งได้ผลตามที่ต้องการ

$$= \frac{{}^4C_2 \times {}^2C_1 \times {}^5C_1}{{}^9C_2 \times {}^7C_2}$$

$$= \frac{6 \times 2 \times 5}{36 \times 21}$$

$$= \frac{5}{63}$$

วิธีที่ 2 การหยิบครั้งที่หนึ่ง 2 ลูก ทำได้ ${}^9C_2$ วิธี

แต่การหยิบครั้งที่หนึ่ง 2 ลูกเป็นสีดำ ทำได้ ${}^4C_2$ วิธี

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบครั้งที่หนึ่งได้สีดำ 2 ลูก $= \frac{{}^4C_2}{{}^9C_2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

ถ้ากำหนดว่าหยิบครั้งที่หนึ่งได้ผลตามที่ต้องการ

ในการหยิบครั้งที่สอง ให้ได้สีขาว 1 ลูก ทำได้ ${}^2C_1 \times {}^5C_1$ วิธี

แต่การหยิบครั้งที่สอง 2 ลูกทำได้ ${}^{7}C_2$ วิธี

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบครั้งที่สองได้สีขาว 1 ลูก สีดำ 1 ลูก

$$= \frac{{}^{2}C_1 \times {}^{5}C_1}{{}^{7}C_2}$$

$$= \frac{2 \times 5}{21}$$

$$= \frac{10}{21}$$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบสองครั้งได้ผลตามที่ต้องการ $= \frac{1}{6} \times \frac{10}{21}$

$$= \frac{5}{63}$$

เหตุการณ์แยกกันเด็ดขาด (Mutually exclusive events) คือเหตุการณ์หลายเหตุการณ์ของการทดลองอันหนึ่ง ซึ่งแต่ละเหตุการณ์มีวิธีเกิดแตกต่างกันไม่มีซ้ำกันเลย ตัวอย่างเช่น ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก ให้เหตุการณ์หนึ่งคือการได้ผลบวกของหน้าทั้งสองที่ขึ้นมากกว่า 8 และอีกเหตุการณ์หนึ่งคือได้ผลบวกของหน้าทั้งสองที่ขึ้นน้อยกว่า 5 เหตุการณ์ที่หนึ่งเกิดขึ้น 10 วิธี คือ 36, 45, 46, 54, 55, 56, 63, 64, 65, 66 เหตุการณ์ที่สองเกิดขึ้นได้ 6 วิธี คือ 11, 12, 13, 21, 22, 31. จะเห็นได้ว่า วิธีที่จะเกิดเหตุการณ์ทั้งสองไม่มีซ้ำกันเลย เหตุการณ์ทั้งสองนี้จึงแยกกันเด็ดขาด

จำนวนวิธีที่จะเกิดเหตุการณ์หนึ่งเหตุการณ์ใดในจำนวนหลายเหตุการณ์การที่แยกกันเด็ดขาดย่อมเท่ากับผลบวกของจำนวนวิธีที่จะเกิดแต่ละเหตุการณ์ และเนื่องจากเหตุการณ์ของการทดลองเดียวกัน จำนวนวิธีที่เป็นไปได้เท่ากัน ฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่จะเป็นที่เกิดเหตุการณ์ใดในจำนวนหลายเหตุการณ์ที่แยกกันเด็ดขาดเท่ากับผลบวกของความน่าจะเป็นที่จะเกิดแต่ละเหตุการณ์

ตัวอย่าง ทอดลูกเต๋า 2 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ผลบวกของหน้าทั้งสองที่ขึ้นมากกว่า 8 หรือน้อยกว่า 5

วิธีทำ **วิธีที่ 1** ทอดลูกเต๋า 2 ลูก ผลที่จะเกิดขึ้นได้มี $6 \times 6 = 36$ วิธี

ผลบวกของหน้าทั้งสองที่ขึ้นมากกว่า 8 มี 10 วิธี

ผลบวกของหน้าทั้งสองที่ขึ้นน้อยกว่า 5 มี 6 วิธี

$\therefore$ ผลบวกของหน้าทั้งสองที่ขึ้นมากกว่า 8 หรือน้อยกว่า 5 มี

$10 + 6 = 16$ วิธี

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลบวกของหน้าทั้งสองที่ขึ้นมากกว่า 8 หรือน้อยกว่า 5

$$= \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

วิธีที่ 2 ทอดลูกเต๋า 2 ลูก ผลที่จะเกิดขึ้นได้มี $6 \times 6 = 36$ วิธี

ผลบวกของหน้าทั้งสองที่ขึ้นมากกว่า 8 มี 10 วิธี

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลบวกของหน้าทั้งสองที่ขึ้นมากกว่า 8 $= \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

ผลบวกของหน้าทั้งสองที่ขึ้นน้อยกว่า 5 มี 6 วิธี

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลบวกของหน้าทั้งสองที่ขึ้นน้อยกว่า 5 $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลบวกของหน้าทั้งสองที่ขึ้นมากกว่า 8 หรือน้อยกว่า 5

$$= \frac{5}{18} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{4}{9}$$

พิจารณาเหตุการณ์ของการทอดลูกเต๋า 2 ลูกต่อไปนี้ คือ เหตุการณ์หนึ่งได้ผลบวกเป็นเลขคู่ ซึ่งมีวิธีที่จะเกิดขึ้นได้ 18 วิธีคือ 11, 13, 15, 22, 24, 26, 31, 33, 35, 42, 44, 46, 51, 53, 55, 62, 64, 66 กับเหตุการณ์หนึ่งได้ผลบวกมากกว่า 8 ซึ่งมีวิธีที่จะเกิดขึ้นได้ 10 วิธีคือ 36, 45, 46, 54, 55, 56, 63, 64, 65, 66. จะเห็นได้ว่า

วิธีที่จะเกิดเหตุการณ์ทั้งสองมีซ้ำกัน คือ 46, 55, 64, และ 66 (ถ้าการทดลองได้ผล 4 อย่างนี้ก็จะได้ว่าเหตุการณ์ทั้งสองเกิดขึ้นพร้อมกัน) ฉะนั้นเหตุการณ์ทั้งสองแยกกันไม่เด็ดขาด และวิธีที่จะเกิดเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งในสองเหตุการณ์ (เกิดอย่างน้อยหนึ่งเหตุการณ์ หรืออาจกล่าวอีกอย่างได้ว่า "เกิดเหตุการณ์ที่หนึ่งหรือเหตุการณ์ที่สอง") มี $18 + 10 - 4 = 24$ วิธี (การที่ลบ 4 ออกเพราะมีซ้ำกัน 4 วิธี) และความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งใน 2 เหตุการณ์เท่ากับ $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$ จากจำนวนวิธีที่จะเกิดเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งจะเห็นได้ว่า ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งใน 2 เหตุการณ์เท่ากับผลบวกของความน่าจะเป็นที่จะเกิดแต่ละเหตุการณ์หักออกเสียด้วยความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ทั้งสองพร้อมกัน ดังตัวอย่างข้างบน ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลบวกเป็นเลขคู่หรือผลบวกมากกว่า 8 จะเท่ากับ ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลบวกเป็นเลขคู่ บวกกับความน่าจะเป็นที่จะได้ผลบวกมากกว่า 8 ลบด้วยความน่าจะเป็นที่จะได้ผลบวกเป็นเลขคู่และมากกว่า 8 หรือความน่าจะเป็นที่จะได้ผลบวกเป็นเลขคู่หรือมากกว่า 8

$$= \frac{18}{36} + \frac{10}{36} - \frac{4}{36}$$

$$= \frac{24}{36}$$

$$= \frac{2}{3}$$

ตัวอย่าง มีบัตร 20 ใบเขียนเลขไว้ตั้งแต่ 1 ถึง 20 ดึงบัตรขึ้นมา 1 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้

ก. เลขบนบัตรหารได้ลงตัวด้วย 3 หรือ 7

ข. เลขบนบัตรหารได้ลงตัวด้วย 3 หรือ 5

วิธีทำ ก. เลข 1 ถึง 20 ที่หารได้ลงตัวด้วย 3 คือ 3, 6, 9, 12, 15, 18, และเลขที่หารได้ลงตัวด้วย 7 คือ 7, 14.

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะได้เลขบนบัตรหารได้ลงตัวด้วย 3 $= \frac{6}{20}$

ความน่าจะเป็นที่จะได้เลขบนบัตรหารได้ลงตัวด้วย 7 $= \frac{2}{20}$ และเหตุการณ์ทั้งสองแยกกันเด็ดขาด

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะได้เลขบนบัตรหารได้ลงตัวด้วย 3 หรือ 7

$$= \frac{6}{20} + \frac{2}{20} = \frac{2}{5}$$

ข. จากข้อ ก. ความน่าจะเป็นที่จะได้เลขบนบัตรหารได้ลงตัวด้วย 3 $= \frac{6}{20}$

เลข 1 ถึง 20 ที่หารได้ลงตัวด้วย 5 คือ 5, 10, 15, 20

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะได้เลขบนบัตรหารได้ลงตัวด้วย 5 $= \frac{4}{20}$

เลข 1 ถึง 20 ที่หารได้ลงตัวด้วย 3 และ 5 คือ 15

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะได้เลขบนบัตรหารได้ลงตัวด้วย 3 และ 5 $= \frac{1}{20}$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะได้เลขบนบัตรหารได้ลงตัวด้วย 3 หรือ 5

$$= \frac{6}{20} + \frac{4}{20} - \frac{1}{20}$$

$$= \frac{9}{20}$$

การหาความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์หนึ่งเกิดขึ้น r ครั้ง ในการทดลองซ้ำกัน n ครั้ง เมื่อทราบความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์นั้นจะเกิดขึ้นในการทดลองแต่ละครั้ง

ให้ p เป็นความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์นั้นจะเกิดขึ้นในการทดลองแต่ละครั้ง

q เป็นความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์นั้นจะไม่เกิดขึ้นในการทดลองแต่ละครั้ง

$$\therefore \quad q = 1 - p$$

ในการทดลองซ้ำกัน n ครั้ง การทดลองแต่ละครั้งจะไม่มีผลต่อการทดลองอื่น ๆ คือการทดลองทั้ง n ครั้งเป็นอิสระต่อกัน ถ้าเรากำหนดวิธีหนึ่งที่จะมีเหตุการณ์เกิดขึ้น r ครั้ง ในการทดลอง n ครั้ง เช่น กำหนดว่าเหตุการณ์เกิดในการทดลองครั้งที่ 1, 2, 3, ... และ r ครั้งอื่น ๆ ไม่เกิด

เนื่องจากแต่ละเหตุการณ์เป็นอิสระต่อกัน ฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลตามวิธีนี้ เท่ากับผลคูณของ p, r ตัวและ q อีก n−r ตัว หรือ $p^r q^{n-r}$ แต่การที่จะเกิดเหตุการณ์ r ครั้งจากการทดลอง n ครั้งมีวิธีอื่น ๆ อีก จำนวนวิธีที่จะเกิดเหตุการณ์ r ครั้งจากการทดลอง n ครั้ง เท่ากับจำนวนวิธีจะเอา n ครั้งมาแบ่งเป็น 2 พวก ๆ หนึ่ง r ครั้ง สำหรับการเกิดเหตุการณ์ และอีกพวกหนึ่ง n−r ครั้งสำหรับการไม่เกิดเหตุการณ์ (หรือเลือก r ครั้งจาก n ครั้งสำหรับเกิดเหตุการณ์) ซึ่งเท่ากับ $\frac{|\underline{n}}{|\underline{r}\;|\underline{n-r}}$ หรือ ${}^nC_r$ และแต่ละวิธีนี้แยกกันเด็ดขาด

∴ ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ r ครั้งในการทดลองซ้ำกัน n ครั้ง

$$= {}^nC_r\, p^r\, q^{n-r}$$

ตัวอย่างที่ 1 โยนเหรียญเที่ยงตรง 3 อัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะขึ้นหัว 2 อัน

วิธีทำ ความน่าจะเป็นที่จะขึ้นหัวในการโยนเหรียญแต่ละอัน $= \frac{1}{2}$

ความน่าจะเป็นที่จะขึ้นก้อยในการโยนเหรียญแต่ละอัน $= \frac{1}{2}$

∴ ความน่าจะเป็นที่จะขึ้นหัว 2 อัน $= {}^3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2}$

$$= 3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{8}$$

ตัวอย่างที่ 2 ทอดลูกเต๋า 2 ลูก 5 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้หน้าซ้ำ 3 ครั้ง

วิธีทำ ความน่าจะเป็นที่จะได้หน้าซ้ำในการทอดแต่ละครั้ง $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

∴ ความน่าจะเป็นที่จะไม่ได้หน้าซ้ำในการทอดแต่ละครั้ง $= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

∴ ความน่าจะเป็นที่จะได้หน้า 3 ครั้ง $= {}^5C_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-3}$

$$= 10 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$= \frac{125}{3888}$$

แบบฝึกหัด

1. In a single throw with two dice find the probability of throwing (a) five; (b) six.
2. From a pack of 52 cards two are drawn at random; find the chance that one is a jack and the other a queen.
3. A bag contains 5 white, 7 black, and 4 red balls: find the probability that three balls drawn at random are all white.
4. If four coins are tossed, find the chance that there should be two heads and two tails.
5. Out of a group of ten girls, three have blue eyes. If two of the girls are selected at random, what is the probability that both will have blue eyes?
6. Eight light bulbs are to be chosen from eleven which are on hand and are to be connected in series; that is, none will light unless all do. If two of the eleven bulbs are burned out, what is the probability that those chosen will not light?
7. The letters of the word **Probability** are written on cards, one letter to a card. The cards are shuffld and laid face up one after another. What is the probability that they spell **probability?**
8. If four hands of thirteen cards each are dealt from a deck of fifty–two cards, what is the probability that there will be thirteen hearts in one hand?
9. Three cards are drawn at random from an ordinary pack: finds the chance that they will consist of a jack, a queen, and a king,
10. At a time of a certain marriage, the probabilities that the man and the woman will live fifty more years are 0.352 and 0.500, respectively. (a) What is the probability that both will be alive fifty years later? (b) If the probability that the marriage will not be dissolved is 0.846, what is the probability that they will have a fiftieth wedding anniversary?
11. If four throws of a die are made in succession, find the probability that (a) the first two throws will each result in a six but the other two will not; (b) exactly two sixes will appear; (u) two consecutive sixes, and no other sixes, will appear.
12. Four persons each draw a card from an ordinary pack: find the chance (1) that a card is of each suit, (2) that no two cards are of equal value.

13. Find the chance of throwing six with a single die at least once in five trials.

14. In three throws with a pair of dice, find the probability of throwing doublets at least once.

15. If 4 whole numbers taken at random are multiplied together show that the chance that the last digit in the product is 1, 3, 7, or 9 is $\frac{16}{625}$

16. If 8 coins are tossed, what is the chance that one and only one will turn up head?

17. A, B, C, in order cut a pack of cards, replacing them after each cut, on condition that the first who cuts a spade shall win a prize: find their respective chances.

18. A is one of 6 horses entered for a race, and is to be ridden by one of two jockeys B and C. It is 2 to 1 that B rides A in which case all the horses are equally likely to win; if C rides A, his chance is trebled: what is the probability of his winning?

19. In a certain game A's skill is to B's as 3 to 2: find the chance of A winning 3 games at least out of 5.

20. A coin whose faces are marked 2, 3 is thrown 5 times: what is the chance of obtaining a total of 12?

21. Find the probability of throwing 10 exactly in one throw with 3 dice.

22. In five throws with a single die what is the chance of throwing (i) exactly, three aces (ii) at least three aces.

23. In a plane crash it was reported that three person out of the total of twenty passengers were injured. Three newspapermen were in this plane. What is the probability that the three reported injured were the newspapermen?

24. Six persons seat themselves at a round table. What is the probability that two given persons are adjacent?

25. Four letters are chosen at random from the word MISSISSIPPI. Determine the probability that (a) at least three I's are chosen, (b) at most two consonants are chosen.

26. What is the probability of getting at least one 11 in 3 throws with a pair of dice?

27. In ten tosses of a coin, what is the probability of getting not less than 3 heads and not more than 6 heads?

คำตอบ

1. $\frac{1}{9}$; (b) $\frac{5}{36}$ 2. $\frac{8}{663}$ 3. $\frac{1}{56}$ 4. $\frac{3}{8}$

5. $\frac{1}{15}$ 6. $\frac{28}{55}$ 7. $\frac{1}{9979200}$ 8. $\frac{4}{{}^{52}C_{13}}$

9. $\frac{16}{5525}$ 10. (a) 0.176 ; (b) 0.149 11. (a) $\frac{25}{1296}$; (b) $\frac{25}{216}$; (c) $\frac{25}{432}$

12. (a) $\frac{2197}{20825}$; (b) $\frac{2816}{4165}$ 13. $\frac{4651}{7776}$ 14. $\frac{91}{216}$ 15. $\frac{1}{32}$

16. $\frac{16}{37}$; $\frac{12}{37}$; $\frac{9}{37}$ 17. $\frac{5}{18}$ 18. $\frac{2133}{3125}$ 19. $\frac{5}{16}$

20. $\frac{1}{8}$ 21. (i) $\frac{125}{3888}$; (ii) $\frac{23}{648}$ 22. $\frac{1}{1140}$ 23. $\frac{2}{5}$

24. (a) $\frac{29}{330}$; (b) $\frac{31}{66}$ 25. $\frac{919}{5832}$ 26. $\frac{99}{128}$

บทที่ 13

ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem)

131. ทฤษฎีบททวินามสำหรับเลขชี้กำลังที่เป็นจำนวนเต็มบวก

พิจารณา $(x+a_1)(x+a_2) = x^2 + a_1x + a_2x + a_1a_2$ จะเห็นว่าผลคูณของ $(x+a_1)(x+a_2)$ เป็นผลบวกของเทอมทั้งหลายซึ่งเป็นผลคูณของอักษร 2 ตัว ๆ หนึ่งจากแฟคเตอร์หน้าและตัวหนึ่งจากแฟคเตอร์หลัง และเมื่อจัดพวกตามกำลังของ x จากมากไปน้อยแล้วจะได้

$$(x+a_1)(x+a_2) = x^2 + (\boxed{a_1+a_2})x + a_1a_2$$

ในทำนองเดียวกัน $(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)$ เท่ากับผลบวกของเทอมทั้งหลายซึ่งเป็นผลคูณของอักษร 3 ตัว โดยเลือกจากแฟคเตอร์ทั้งสาม แฟคเตอร์ละ 1 ตัว และจัดพวกใหม่ได้

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3) = x^3 + (\underline{a_1+a_2+a_3})x^2 + (a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1)x + a_1a_2a_3$$

ในทำนองเดียวกัน

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4) = x^4 + (a_1+a_2+a_3+a_4)x^3 + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4)x^2 + (a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4)x + a_1a_2a_3a_4$$

หรืออาจเขียนเป็น

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4) = x^4 + s_1x^3 + s_2x^2 + s_3x + s_4,$$

ในเมื่อ s_1 = ผลบวกของ a_1, a_2, a_3, a_4

s_2 = ผลบวกของผลคูณของ a_1, a_2, a_3, a_4 โดยเลือกมาครั้งละ 2 ตัว

s_3 = ผลบวกของผลคูณของ a_1, a_2, a_3, a_4 โดยเลือกมาครั้งละ 3 ตัว

s_4 = ผลคูณของ a_1, a_2, a_3, a_4 ทั้ง 4 ตัว

ถ้าเราเพิ่มขึ้นทีละแฟคเตอร์ จนถึง n แฟคเตอร์ เราจะเขียนได้ว่า

$$(x+a_1)\ (x+a_2)\ (x+a_3) \ldots\ldots\ldots (x+a_n) = x^n + s_1\ x^{n-1} + s_2$$

$$x^{n-2} + s_3\ x^{n-3} + \ldots\ldots\ldots + s_{n-1}\ x + s_n\ .$$

ในเมื่อ s_1 = ผลบวกของ n เทอม คือ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots a_n$

s_2 = ผลบวกของ ${}^nC_2$ เทอม คือ $a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}\ a_n$

(เท่ากับจำนวนการเลือกคราวละ 2 สิ่งจากสิ่งของ n สิ่งซึ่งไม่ซ้ำกันเลย)

s_3 = ผลบวกของ ${}^nC_3$ เทอม คือ $a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + \ldots\ldots\ldots + a_{n-2}\ a_{n-1}\ a_n$

$\vdots$

ดังนั้นถ้า $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots\ldots\ldots a_n = a$ เราจะได้

$$(x+a_1)\ (x+a_2)\ (a+a_3) \ldots\ldots\ldots (x+a_n) = (x+a)^n$$

และ $s_1 = a + a + a + \ldots\ldots\ldots$ ถึง n เทอม $= n\,a$ หรือ ${}^nC_1\ a$

$s_2 = a^2 + a^2 + a^2 + \ldots\ldots\ldots$ ถึง ${}^nC_2$ เทอม $= {}^nC_2\ a^2$

$s_3 = a^3 + a^3 + a^3 + \ldots\ldots\ldots$ ถึง ${}^nC_3$ เทอม $= {}^nC_3\ a^3$

$\vdots$

ฉะนั้น สำหรับ n ซึ่งเป็นเลขจำนวนเต็ม จะได้

$$(x+a)^n = x^n + {}^nC_1\ \boxed{x^{n-1}\ a} + {}^nC_2\ x^{n-2}\ a^2 + {}^nC_3\ x^{n-3}\ a^3 + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ {}^nC_r\ x^{n-r}\ a^r + \ldots\ldots\ldots + a^n$$

หรือ $(x+a)^n = x^n + n\,x^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\,x^{n-2}\,a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\,x^{n-3}\,a_3 + ...$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)......n-r+1}{\underline{|r}}\,x^{n-r}\,a^r + ... + a^n$$

สูตรนี้เรียกว่า ทฤษฎีบททวินามสำหรับเลขชี้กำลังที่เป็นเลขจำนวนเต็มบวก และนิพจน์ (Expression) ขวามือเรียกว่า รูปกระจาย (Expansion) ของ $(x+a)^n$.

คุณสมบัติของรูปกระจายของทวินาม (Binomial expansion) สำหรับเลขชี้กำลังที่เป็นจำนวนเต็มบวก

1. รูปกระจายของ $(x+a)^n$ มี $n+1$ เทอม และเทอมทั่วไปคือเทอมที่ $r+1$ จะเท่ากับ ${}^nC_r\,x^{n-r}\,a^r$

เทอมที่ $r+1$ นับจากท้าย**จะเท่ากับ** ${}^nC_{n-r}\,x^r\,a^{n-r}$ โดยมี ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

2. ถ้า n เป็นเลขคู่ จะมีเทอมกลาง 1 เทอม หาได้โดยแทนค่า $r = \frac{n}{2}$ ใน ${}^nC_r\,x^{n-r}\,a^r$ ซึ่งเท่ากับ ${}^nC_{\frac{n}{2}}\,x^{\frac{n}{2}}\,a^{\frac{n}{2}}$

ถ้า n เป็นเลขคี่ จะมีเทอมกลาง 2 หาได้โดยแทนค่า r ด้วย $\frac{n-1}{2}$ และ $\frac{n+1}{2}$ ตามลำดับ ซึ่งเท่ากับ ${}^nC_{\frac{n-1}{2}}\,x^{\frac{n+1}{2}}\,a^{\frac{n-1}{2}}$ และ ${}^nC_{\frac{n+1}{2}}\,x^{\frac{n-1}{2}}\,a^{\frac{n+1}{2}}$

3. ถ้าสลับที่ระหว่าง x กับ a และแทนค่า $a = 1$ จะได้

$$(1+x)^n = 1 + {}^nC_1\,x + {}^nC_2\,x^2 + ... + {}^nC_r\,x^r + ... + x^n$$
$$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\,x^2 + ... + \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{\underline{|r}}\,x^r$$
$$+ ...... + x^n$$

4. ถ้าเปลี่ยน a เป็น $-a$ จะได้

$$(x-a)^n = x^n + {}^nC_1\,x^{n-1}\,(-a) + {}^nC_2\,x^{n-2}\,(-a)^2 + ... +$$
$${}_nC_r\,x^{n-r}\,(-a)^r + ... + (-a)^n$$

$$= x^n - {}^nC_1\, x^{n-1} + {}^nC_2\, x^{n-2}\, a^2 - \ldots\ldots + (-1)\, {}^nC_r\, x^{n-r}\, a^r$$
$$+ \ldots\ldots (-1)^n\, a^n$$

หรือ $$(x-a)^n = x^n - nx^{n-1}\,a + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\, x^{n-2}\, a^2 - \ldots\ldots$$
$$+ (-1)^r \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{\lfloor r}\, x^{n-r}\, a^r + \ldots\ldots + (-1)^n\, a^n.$$

ตัวอย่างที่ 1 จงกระจาย $(x+y)^6$

$\frac{6\times5\times4}{\lfloor 3}$ $\frac{6\times5\times4\times3}{\lfloor 4}$

วิธีทำ $$(x+y)^6 = x^6 + {}^6C_1\, x^5\, y + {}^6C_2\, x^4\, y^2 + {}^6C_3\, x^3\, y^3 + {}^6C_4\, x^2\, y^4$$
$$+ {}^6C_5\, x\, y^5 + y^6$$
$$= x^6 + 6\,x^5\,y + 15\,x^4\,y^2 + 20\,x^3\,y^3 + 15\,x^2\,y^4 +$$
$$6\,x\,y^5 + y^6$$

ตัวอย่างที่ 2 จงกระจาย $(a-2x)^7$

วิธีทำ $$(a-2x)^7 = a^7 - 7a^6\,(2x) + \frac{7.6}{1.2}\,a^5\,(2x)^2 -$$
$$\frac{7.6.5.}{1.2.3.}\,a^4\,(2x)^3 + \ldots\ldots - (2x)^7$$
$$= a^7 - 7\,a^6\,(2x) + 21\,a^5\,(2x)^2 - 35\,a^4\,(2x)^3 +$$
$$35\,a^3\,(2x)^4 - 21\,a^2\,(2x)^5 + 7\,a\,(2x)^6 - (2x)^7$$
$$= a^7 - 14a^6\,x + 84a^5\,x^2 - 280a^4\,x^3\ 560a^3\,x^4 - 672a^2\,x^5$$
$$+ 448ax^6 - 128x^7$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $(a+\sqrt{a^2-1})^7 + (a-\sqrt{a^2-1})^7$

วิธีทำ $$(a+\sqrt{a^2-1})^7 = a^7 + 7a^6\,(\sqrt{a^2-1}) + \frac{7.6}{1.2}\,a^5\,(\sqrt{a^2-1})^2 +$$
$$\frac{7.6.5.}{1.2.3.}\,a^4\,(\sqrt{a^2-1})^3 + \ldots\ldots (\sqrt{a^2-1})^7$$
$$(a-\sqrt{a^2-1})^7 = a^7 - 7a^6\,(\sqrt{a^2-1}) + \frac{7.6}{1.2}\,a^5\,(\sqrt{a^2-1})^2 -$$
$$\frac{7.6.5.}{1.2.3.}\,a^4\,(\sqrt{a^2-1})^3 + \ldots\ldots (\sqrt{a^2-1})^7$$

$$\therefore \quad \left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^7+\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^7 = 2\left\{a^7+\frac{7.6}{1.2}a^5\left(\sqrt{a^2-1}\right)^2+\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}a^3\left(\sqrt{a^2-1}\right)^4+\ldots\ldots+\frac{7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6}a\left(\sqrt{a^2-1}\right)^6\right\}$$

$$= 2\left\{a^7+21a^5\left(a^2-1\right)+35a^3\left(a^2-1\right)^2+7a\left(a^2-1\right)^3\right\}$$

$$= 2a\left(64a^6-112a^4+56a^2-7\right)$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาเทอมที่ 5 ของ $\left(a+2x^3\right)^{17}$

วิธีทำ เทอมที่ 5 $= {}^{17}C_4\, a^{17-4}\left(2x^3\right)^4$

$$= \frac{17.16.15.14}{1.2.3.4}\times 16\, a^{13}\, x^{12}$$

$$= 38080\, a^{13}\, x^{12}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาเทอมที่ 14 ของ $(3-a)^{15}$

วิธีทำ เทอมที่ 14 $= {}^{15}C_{13}\,(3)^2\,(-a)^{13}$

$$= {}^{15}C_2\times\left(-9a^{13}\right)$$

$$= -945\, a^{13}$$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาสัมประสิทธิ์ x^{16} จากการกระจาย $(x-2x)^{10}$

วิธีทำ $\left(x^2-2x\right)^{10} = \left(x^2\right)^{10}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{10}$ (ดึงตัวร่วม x^2 ออกเพื่อให้ติด x ไว้เพียงเทอมเดียวซึ่งสะดวกแก่การพิจารณากำลังของ x จากการกระจาย) เนื่องจาก $\left(x^2\right)^{10}$ หรือ x^{20} คูณทุกเทอมในรูปกระจายของ $\left(1-\frac{2}{x}\right)^{10}$ ฉะนั้นเทอมที่มี x^{15} คือเทอมที่มี x^{16-20} หรือ $\frac{1}{x^4}$ จากการกระจาย $\left(1-\frac{2}{x}\right)^{10}$ ซึ่งเท่ากับ ${}^{10}C_4\left(-\frac{2}{x}\right)^4 = \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}\times\frac{16}{x^4}$

$$= \frac{3360}{x^4}$$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ x^{16} จากการกระจาย $\left(x^2-2x\right)^{10} = 3360$.

ตัวอย่างที่ 7 จงหาเทอมที่ไม่มี x ของรูปกระจายของ $\left(3x - \frac{5}{x^3}\right)^8$

วิธีทำ เทอมทั่วไปของรูปกระจาย คือ ${}^8C^r \; (3x)^{8-r} \left(-\frac{5}{x^3}\right)^r$ ซึ่งมีกำลังของ x

เท่ากับ $(8-r) - (3r) = 8 - 4r.$

ฉะนั้นเทอมที่ไม่มี x จะมีค่า $r = 2$ (คือ $8 - 4r = 0$)

นั่นคือ เทอมที่ไม่มี x $= {}^8C_2 \, (3x)^{8-2} \left(-\frac{5}{x^3}\right)^2$

$$= \frac{8.7}{1.2} \cdot 3^6 \cdot 5^2$$

$$= 700 \times 3^6$$

$$= 510300$$

หมายเหตุ ตัวอย่างที่ 6 และตัวอย่างที่ 5 อาจสลับวิธีทำกันได้ คือทำได้ 2 วิธี

การหาค่าสัมประสิทธิ์ที่มีค่ามากที่สุดจากการกระจาย $(1 + x)^n$ เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก

เราทราบแล้วว่า สัมประสิทธิ์ของเทอมทั่วไปของ $(1+x)^n$ คือ ${}^nC_r$ ฉะนั้น ในการหาค่าสัมประสิทธิ์ที่มีค่ามากที่สุดก็คือ การหาค่า ${}^nC_r$ ซึ่งมีค่ามากที่สุดและอาศัยความรู้จากเรื่องการเลือก (Combination) เราสรุปได้ว่า

ถ้า n เป็นเลขคู่ สัมประสิทธิ์ที่มีค่ามากที่สุดคือ ${}^nC_{\frac{n}{2}}$

และถ้า n เป็นเลขคี่ สัมประสิทธิ์ที่มีค่ามากที่สุดมี 2 เทอมคือ ${}^nC_{\frac{n-1}{2}}$ และ ${}^nC_{\frac{n+1}{2}}$

การหาเทอมที่มีค่ามากที่สุดจากการกระจาย $(1+x)^n$ เมื่อ x มีค่าเป็นจำนวนบวกและ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก

ให้ u_r และ u_{r+1} แทนเทอมที่ r และเทอมที่ r + 1 ของ $(1+x)^n$

$$\therefore \; u_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)(n-r+1)}{1.2.3\ldots(r-1).r} \; x^r$$

และ $u_r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)}{1.2.3\dots(r-1)} x^{r+1}$

$$\frac{u_{r+1}}{u_r} = \frac{n-r+1}{r} x$$

$$u_{r+1} = u_r \times \frac{n-r+1}{r} x$$

$\therefore u_{r+1} > u_r$ ถ้า $(n-r+1)x > r$

หรือ $nx - rx + x > r$

หรือ $r + rx < nx + x$

หรือ $r(1+x) < (n+1)x$

หรือ $r < \frac{(n+1)x}{1+x}$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $u_{r+1} < u_r$ ถ้า $r > \frac{(n+1)}{1+x} x$

ฉะนั้นจึงสรุปได้ว่า

(i) ถ้า $\frac{(n+1)x}{1+x}$ เป็นเลขจำนวนเต็ม. ให้เท่ากับ q จะได้ว่า $u_{q+1} = u_q$ และ 2 เทอมนี้มีค่ามากกว่าเทอมอื่น ๆ

(ii) ถ้า $\frac{(n+1)x}{1+x}$ ไม่เป็นเลขจำนวนเต็ม ให้มีค่าอยู่ระหว่าง q กับ $q+1$ (q เปน เลขจำนวนเต็ม จะได้ว่า

เมื่อ $r \leq q$. $u_{r+1} > u_r$ คือ $u_1 < u_2 < \dots\dots < u_q < u_{q+1}$

เมื่อ $r \geqslant q+1$, $u_{r+1} < u_r$ คือ $u_n < u_{n-1} < \dots\dots < u_{q+2} < u_{q+1}$

ฉะนั้น u_{q+1} เป็นเทอมที่มีค่ามากที่สุด

หมายเหตุ 1. สำหรับ $(1-x)^n$ เราหาเทอมที่ใหญ่ที่สุด (คำว่าใหญ่ที่สุดในบทนี้หมายความว่ามีค่าตัวเลขมากที่สุดโดยไม่คิดเครื่องหมาย) ได้อย่างเดียวกันโดยคิดเหมือนกับว่าเป็น $(1+x)^n$

2. ในการหาเทอมที่มีค่ามากที่สุดของ $(a+x)^n$ เมื่อ a, x เป็นเลขจำนวนบวกและ

n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก เราทำได้อย่างวิธีข้างบนโดยดึงตัวร่วม a ออกเสียก่อน เป็น $a^n \left(1+\frac{x}{a}\right)^n$ แล้วคิดเฉพาะ $\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$ ได้

$$u_{r+1} = u_r \times \frac{n-r+1}{r} \cdot \frac{x}{a}$$

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า $x = \frac{1}{3}$ จงหาเทอมที่มีค่ามากที่สุดจากการกระจาย $(1+4x)^8$

วิธีทำ ให้ u_r และ u_{r+1} แทนเทอมที่ r และเทอมที่ r + 1 ตามลำดับ

$$u_{r+1} = u_r \times \frac{8-r+1}{r} \times 4x$$

$$= u_r \times \frac{9-r}{r} \times \frac{4}{3}$$

$\therefore$ $u_{r+1} > u_r$ ถ้า $\frac{9-r}{r} \times \frac{4}{3} > 1$

หรือ $36-4r > 3r$

หรือ $36 > 7r$

หรือ $r < \frac{36}{7} = 5\frac{1}{7}$

$\therefore$ เทอมที่มีค่ามากที่สุดคือ เทอมที่ $5+1 = 6$ ซึ่งมีค่า

$$= {}^8C_5 \times \left(\frac{4}{3}\right)^5$$

$$= \frac{57344}{243}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาเทอมที่ใหญ่ที่สุด (โดยไม่คิดเครื่องหมาย) ในรูปกระจายของ $(3-2x)^9$ เมื่อ $x = 1$

วิธีทำ $(3-2x)^9 = 3^9\left(1-\frac{2x}{3}\right)^9$

พิจารณาเฉพาะแฟคเตอร์หลังคือ $\left(1-\frac{2x}{3}\right)^9$

$$u_{r+1} = u_r \times \frac{9-r+1}{r} \times \frac{2x}{3}$$

$$= u_r \times \frac{10-r}{r} \times \frac{2}{3}$$

$\therefore\ u_{r+1} > u_r$ ถ้า $\frac{10-r}{r} \times \frac{2}{3} > 1$

หรือ $20 - 2r > 3r$

หรือ $20 > 5r$

หรือ $r < 4$

และเมื่อ $r = 4$ จะได้ $u_{r+1} = u_r$ $\left(\text{คือ } \frac{10-r}{r} \times \frac{2}{3} = 1\right)$

$\therefore$ เทอมที่ 4 = เทอมที่ 5 มีค่ามากกว่าเทอมอื่น

$\therefore$ เทอมที่ใหญ่ที่สุดของ $(3-2x)^9 = 3^9\left(1-\frac{2x}{3}\right)^9$ คือเทอมที่ 4 และเทอมที่ 5 ซึ่งมีค่าตัวเลขเท่ากับ $3^9 \times {}^9C_3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$

$$= 3^6 \times 84 \times 8$$

$$= 489888$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาเทอมที่ใหญ่ที่สุดในรูปกระจายของ $(5-4x)^{12}$ เมื่อ $x = \frac{2}{3}$

วิธีทำ $(5-4x)^{12} = 5^{12}\left(1-\frac{4x}{5}\right)^{12}$

$\therefore\ u_{r+1} = u_r \times \frac{12-r+1}{r} \cdot \frac{4x}{5}$

$= u_r \times \frac{13-r}{r} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2}$

$\therefore\ u_{r+1} > u_r$ ถ้า $\frac{13-r}{r} \cdot \frac{8}{15} > 1$ หรือ $104 - 8r > 15r$

$\therefore\ u_{r+1} > u_r$ ถ้า $104 > 23r$ หรือ $r < \frac{104}{23} = 4\frac{12}{23}$

$\therefore\ u_5 > u_4 > u_3 > \ldots\ldots$ และในทำนองเดียวกัน $u_5 > u_6 > u_7 \ldots\ldots$

$\therefore\ u_5$ เป็นเทอมที่ใหญ่ที่สุดและมีค่าตัวเลขเท่ากับ

$$5^{12} \times {}^{12}C_4 \times \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}\right)^4$$

$$= \frac{88 \times 10^9}{9}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ทวินาม (Binomial Coefficients)

จาก $(1+x)^n = 1 + {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 + \ldots\ldots + {}^nC_r\, x^r + \ldots\ldots + {}^nC_n\, x^n$

ถ้าเขียน $c_0, c_1, c_2, \ldots\ldots$ แทน ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2,$ ตามลำดับ จะได้

$$(1+x)^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots + c_r x^r + \ldots\ldots + c_n x^n$$

$c_0, c_1, c_2, \ldots\ldots c_n$ เรียกว่า สัมประสิทธิ์ทวินาม

ในการกระจาย $(1+x)^n$ จะได้

(i) ผลบวกของสัมประสิทธิ์เท่ากับ 2^n

(ii) ผลบวกของสัมประสิทธิ์ของเทอมคี่จะเท่ากับผลบวกของสัมประสิทธิ์ของเทอมคู่และต่างก็เท่ากับ 2^{n-1}

พิสูจน์ (i) จากรูปกระจายของ $(1+x)^n$

$$(1+x)^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots + c_n x^n$$

แทนค่า $x = 1$ จะได้

$$(1+1)^n = c_0 + c_1 + c_2 + \ldots\ldots + c_n$$

$$\therefore\ c_0 + c_1 + c_2 + \ldots\ldots + c_n = 2^n$$

(ii) จากรูปกระจายของ $(1-x)^n$ แทนค่า $x = 1$ ได้

$$(1-1)^n = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \ldots\ldots + (-1)^n c_n$$

$$\therefore\ c_0 + c_2 + c_4 + \ldots\ldots = c_1 + c_3 + c_5 + \ldots\ldots$$

แต่ผลบวกของสัมประสิทธิ์ทั้งหมด $= 2^n$

$$\therefore\ c_0 + c_2 + c_4 \ldots\ldots = c_1 + c_3 + c_5 + \ldots\ldots = \frac{1}{2} \times 2^n = 2^{n-1}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงกระจาย $(x^2 + 2x-1)^3$

วิธีทำ $(x^2+2x-1)^3 = (x^2+\overline{2x-1})^3$

$$= (x^2)^3 + 3(x^2)^2(2x-1) + 3(x^2)(2x-1)^2 + (2x-1)^3$$

$$= x^6 + 6x^5 + 9^4 - 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$$

หมายเหตุ รวม $2x - 1$ เป็นเทอมเดียวกันเพื่อให้เหลือเพียง 2 เทอมแล้วใช้ทฤษฎีบททวินาม

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวกของอนุกรม $c_0 + 2c_1 x + 3c_2 x^2 + \ldots\ldots + (n+1) c_n x^n$ และจากผลที่ได้นี้จงหาค่าของ $c_0 = 2c_1 + 3c_2 + \ldots\ldots + (n+1) c_n$

วิธีทำ อนุกรมที่กำหนดให้ $= (c_0+c_1 x+c_2 x^2+\ldots\ldots+c_n x^n) + (c_1 x+2c_2x^2 + \ldots\ldots + nc_n x^n)$

วงเล็บแรก $= (1+x)^n$

วงเล็บหลัง $= nx + 2 . \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 + 3 . \frac{n(n-1)(n-2)}{1.3.2} x^3 + \ldots\ldots + nx^n$

$$= nx \left\{ 1 + (n-1) x + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} x^2 + \ldots\ldots + x^{n-1} \right\}$$

$$= nx (1+x)^{n-1}$$

$\therefore$ ผลบวกของอนุกรม $= (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1}$

ค่าของ $c_0=2c_1+3c_2+\ldots\ldots+(n+1) c_n$ หาได้โดยการแทนค่า $x=1$ ในอนุกรมที่กำหนดให้

$$\therefore c_0 + 2c_1 + 3c_2 + \ldots\ldots + (n+1) c_n = (1+1)^n + n \times 1 \times (1+1)^{n-1}$$

$$= 2^n + n . 2^{n-1}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ (i) $c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + \ldots\ldots + c_n^2$ (ii) $c_0 c_1 + c_1 c_2 + c_2 c_3 + \ldots\ldots + c_{n-1} c_n$

วิธีทำ จาก $\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots + c_n x^n\right)\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots + c_n x^n\right) \equiv (1+x)^n (1+x)^n \equiv (1+x)^{2n}$

(i) สัมประสิทธิ์ของ x^n ทางซ้ายมือ

$$= c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} + \ldots\ldots + c_n c_0$$

$$= c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + \ldots\ldots + c_n^2 \quad (\text{เพราะ } c_r = c_{n-r})$$

$\therefore$ $c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + \ldots\ldots + c_n^2$ เท่ากับสัมประสิทธิ์ของ x^n ใน $(1 + x)^{2n}$ ซึ่งเท่ากับ

$$^{2n}C_n = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \; \lfloor n}$$

$$\therefore \; c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + \ldots\ldots + c_n^2 = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \; \lfloor n}$$

(ii) สัมประสิทธิ์ของ x^{n-1} ทางซ้ายมือ

$$= c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + c_2 c_{n-3} + \ldots\ldots c_{n-1} c_0$$

$$= c_0 c_1 + c_1 c_2 + c_2 c_3 + \ldots\ldots + c_{n-1} c_n$$

$= $ สัมประสิทธิ์ของ x^{n-1} ใน $(1 + x)^{2n}$

$$= {}^{2n}C_{n-1} = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n-1 \; \lfloor n+1}$$

$$\therefore \; c_0 c_1 + c_1 c_1 + c_2 c_3 + \ldots\ldots + c_{n-1} c_n = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n-1 \; \lfloor n+1}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $c_1^2 + 2c_2^2 + 3c_3^2 + \ldots\ldots + n\,c_n^2$

วิธีทำ วิธีที่ 1

จาก $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots + c_n x^n \equiv (1+x)^n$

และจากตัวอย่างที่ 2 $\qquad c_1 x + 2c_2 x^2 + 3c_3 x^3 + \ldots\ldots + nc_n x^n$

$$\equiv nx\,(1+x)^{n-1}$$

$$\therefore\ (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots + c_n x^n)\,(c_1 x + 2c_2 x^2 + 3c_3 x^3 + \ldots\ldots + nc_n x^n) \equiv nx\,(1+x)^{2n-1}$$

สัมประสิทธิ์ของ x^n ทางซ้ายมือ $= c_{n-1} c_1 + 2c_{n-2} c_2 + 3c_{n-3} c_3 + \ldots\ldots + nc_0 c_n$

$$= c_1^2 + 2c_2^2 + 3c_3^2 + \ldots\ldots + nc_n^2$$

สัมประสิทธิ์ของ x^n ทางขวามือ $= n\,.\ {}^{2n-1}C_{n-1}$

$$= n\,.\ \frac{|\underline{2n-1}}{|\underline{n-1}\ |\underline{n}}$$

$$= \frac{|\underline{2n-1}}{|\underline{n-1}\ |\underline{n-1}}$$

$$\therefore\ c_1^2 + 2c_2^2 + 3c_3^2 + \ldots\ldots + nc_n^2 = \frac{|\underline{2n-1}}{|\underline{n-1}\ |\underline{n-1}}$$

วิธีที่ 2

จาก $c_1 x + 2c_2 x^2\ 3c_3 x^3 + \ldots\ldots + nc_n x^n \equiv nx\,(1+x)^{n-1}$

เปลี่ยนค่า x เป็น $\frac{1}{x}$ ได้

$$\frac{c_1}{x} + \frac{2c_2}{x^2} + \frac{3c_3}{x^3} + \ldots\ldots + \frac{nc_n}{x^n} \equiv \frac{n}{x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n-1}$$

และ $\quad c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots + c_n x^n \equiv (1+x)^n$

$$\therefore\ (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots + c_n x^n)\left(\frac{c_1}{x} + \frac{2c_2}{x^2} + \frac{3c_3}{x^3} + \ldots\ldots + \frac{nc_n}{x^n}\right)$$

$$\equiv (1+x)^n\,.\,\frac{n}{x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n-1}$$

$$\equiv \frac{n}{x}\left(1 + x\right)^n \left(\frac{x+1}{x}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{n}{x^n} \left(1 + x\right)^{2n-1}$$

เทอมที่ไม่มี x ทางซ้ายมือ $= c_1^2 + 2c_2^2 + 3c_3^2 + nc_n^2$

เทอมที่ไม่มี x ทางซ้ายมือ $= n \,.\, {}^{2n-1}C_n$

$$= n \,.\, \frac{\lfloor 2n-1}{\lfloor n \; \lfloor n-1}$$

$$= \frac{\lfloor 2n-1}{\lfloor n-1 \; \lfloor n-1}$$

$$\therefore \; c_1^2 + 2c_2^2 + 3c_3^2 + \ldots\ldots + nc_n^2 = \frac{\lfloor 2n-1}{\lfloor n-1 \quad \lfloor n-1}$$

13.2 ทฤษฎีบททวินามสำหรับเลขชี้กำลังที่เป็นจำนวนตักยะ (Rational numbers)

สมมติว่ามีนิพนธ์ (Expressions) อยู่สองนิพนธ์ ซึ่งจัดเรียงตามลำดับกำลังของ x คือ

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} x^3 + \ldots\ldots \quad (1)$$

และ

$$1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} x^3 + \ldots\ldots \quad (2)$$

ผลคูณของนิพจน์ทั้งสองจะเป็นอนุกรมซึ่งเรียงลำดับกำลังของ x ได้ ในรูป

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots$$

โดยที่ A, B, C, D, ... เป็นฟังค์ชั่นของ m และ n ดังนั้นค่าของ A, B, C, D, ... ขึ้นอยู่กับค่าของ m และ n แต่วิธีที่สัมประสิทธิ์ของ x ใน (1) และ (2) รวมกันเป็น A, B, C, D, ... ย่อมไม่ขึ้นกับค่า m และ n นั่นคือไม่ว่า m และ n จะมีค่าเท่าไรก็ตาม A, B, C, D, ... จะมีรูปเป็นฟังค์ชั่นของ m และ n อย่างเดียวกันเสมอ ดังนั้น ถ้าเราสามารถหารูปของ A, B, C, D, ... สำหรับค่าใดค่าหนึ่งของ m และ n เราจะสรุปได้ว่า A, B, C, D,...... จะมีรูปอย่างเดียวกันนั้นสำหรับทุกค่าของ m และ n

การพิสูจน์ทฤษฎีบททวินามสำหรับเลขชี้กำลังที่มีค่าเป็นจำนวนตักยะบวก

ให้ $f(m) \equiv 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + ...$ โดยที่ m มีค่าเป็นจำนวนตักยะใด ๆ (บวก, ลบ, เลขจำนวนเต็มหรือเศษส่วน)

$\therefore$ ถ้า n เป็นเลขจำนวนตักยะจะได้ $f(n) \equiv 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + ...$

ถ้าเราคูณอนุกรมทั้งสองนี้เข้าด้วยกัน จะได้ผลเป็นอีกอนุกรมหนึ่งซึ่งเรียงลำดับกำลังของ x ซึ่งสัมประสิทธิ์เหล่านี้จะไม่เปลี่ยนรูปเลยไม่ว่า m และ n จะเปลี่ยนค่าอย่างไรก็ตาม

ในการหารูปซึ่งไม่เปลี่ยนแปลงของผลคูณนี้ เราอาจให้ m และ n มีค่าเท่าไรก็ได้ เพื่อความสะดวก สมมติให้ m และ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก ซึ่งกรณีนี้ f (m) จะเป็นรูปกระจายของ $(1 + x)^n$ และ f (n) เป็นรูปกระจายของ $(1 + x)^n$ และจะได้ว่า

$$f(m) \times f(n) = (1+x)^m \times (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$$

แต่เมื่อ m และ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก รูปกระจายของ $(1+x)^{m+n}$ จะเท่ากับ

$$1 + (m+n)x + \frac{(m+n)(m+n-1)}{1.2}x^2 + ...$$

และรูปกระจายนี้จะเป็นผลคูณของ f (m) × f (m) สำหรับทุกค่าของ m และ n และเขียนแทนได้ด้วย f (m+n)

$$\therefore \quad f(m) \times f(n) = f(m+n)$$

$$\text{และ} \quad f(m) \times f(n) \times f(p) = f(m+n) \times f(p)$$

$$= f(m+n+p)$$

ทำเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จะได้

f (m) × f (n) × f (p) ...... ถึง k แฟคเตอร์ = f (m + n + p + ... ถึง k เทอม)

ถ้า m, n, p, ... เท่ากันและต่างเท่ากับ $\frac{h}{k}$ โดย h และ k เป็นเลขจำนวนเต็มบวก

จะได้ $\left\{ f\left(\frac{h}{k}\right) \right\}^k = f\left(h\right)$

แต่ h เป็นเลขจำนวนเต็มบวก $f\left(h\right) = \left(1+x\right)^h$

$$\therefore \left(1+x\right)^h = \left\{ f\left(\frac{h}{k}\right) \right\}^k$$

$$\therefore \left(1+x\right)^{\frac{h}{k}} = f\left(\frac{k}{h}\right)$$

แต่ $f\left(\frac{h}{k}\right)$ แทนอนุกรม $1+\frac{h}{k}x+\frac{\frac{h}{k}\left(\frac{h}{k}-1\right)}{1.2}x^2+......$

$$\therefore \left(1+x\right)^{\frac{h}{k}} = 1+\frac{h}{k}x+\frac{\frac{h}{k}\left(\frac{h}{k}-1\right)}{1.2}x^2+......$$

นั่นคือ $\left(1+x\right)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+......$ สำหรับ n ที่เป็นเลขจำนวนตักยะบวก

การพิสูจน์ทฤษฎีบททวินามสำหรับเลขชี้กำลังที่มีค่าเป็นจำนวนตักยะลบ

เราได้พิสูจน์แล้วว่า

$f\left(m\right) \times f\left(n\right) = f\left(m+n\right)$ สำหรับทุกค่าของ m และ n แทนค่า m ด้วย $-n$ (ในที่นี้ให้ n มีค่าเป็นบวก) จะได้

$$f\left(-n\right) \times f\left(n\right) = f\left(-n+n\right)$$

$$= f\left(0\right)$$

$$= 1$$

($\therefore$ เทอมอื่นนอกจากเทอมที่หนึ่งเป็นศูนย์หมด)

$$\therefore \quad \frac{1}{f(n)} = f(-n)$$

แต่ $f(n) = (1+x)^n$ สำหรับค่าบวกใด ๆ ของ n

$$\therefore \quad \frac{1}{(1+x)^n} = f(-n)$$

หรือ $(1-x)^{-n} = f(-n)$

แต่ $f(-n)$ แทนอนุกรม $1 + (-n)x + \frac{(-n)(-n-1)}{1.2}x^2 + \ldots\ldots$

$$\therefore \quad (1+x)^{-n} = 1 + (-n)x + \frac{(-n)(-n-1)}{1.2}x^2 + \ldots\ldots$$

นั่นคือ $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \ldots\ldots$ สำหรับ n ที่เป็นเลขจำนวนตักกะลบ

ฉะนั้น $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \ldots\ldots$ สำหรับ n ที่เป็นเลขจำนวนตักยะใด ๆ

ข้อควรจำ ถ้าเลขชี้กำลังเป็นเลขจำนวนเต็มบวก รูปกระจายจะเป็นอนุกรมซึ่งมีจำนวนเทอมจำกัด แต่ถ้าเลขชี้กำลังเป็นเลขจำนวนตักยะอื่นซึ่งไม่ใช่เลขจำนวนเต็มบวก รูปกระจายจะเป็นอนุกรมซึ่งมีจำนวนเทอมไม่จำกัด

ตัวอย่างที่ 1 จงกระจาย $(1-x)^{\frac{3}{2}}$ ถึง 4 เทอม

วิธีทำ

$$(1-x)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}(-x) + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{1.2}(-x)^2 + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)}{1.2.3}(-x)^3 + \ldots\ldots$$

$$= 1 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \ldots\ldots$$

ตัวอย่างที่ 2 จงกระจาย $(2+3x)^{-4}$ ถึง 4 เทอม

วิธีทำ $(2+3x)^{-4} = 2^{-4}\left(1+\frac{3x}{2}\right)^{-4}$

$$= \frac{1}{2^4}\left\{1+(-4)\left(\frac{3x}{2}\right)+\frac{(-4)(-4-1)}{1\,.\,2}\left(\frac{3x}{2}\right)^2+\frac{(-4)(-4-1)(-4-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{3x}{2}\right)^3 + \ldots\ldots\right\}$$

$$= \frac{1}{16}\left(1 - 6x + \frac{45}{2}x^2 - \frac{135}{2}x^3 + \ldots\ldots\right)$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาเทอมทั่วไปของรูปกระจายของ $(1+x)^{\frac{1}{2}}$

วิธีทำ จากสูตร เทอมที่ $r+1 = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^r$

$$\therefore \text{ เทอมทั่วไป (เทอมที่ } r+1) = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{2}-r+1\right)}{\underline{|r}}x^r$$

$$= \frac{1(-1)(-3)(-5)\ldots\ldots(2r+3)}{2^r\,\underline{|r}}x^r$$

$$= (-1)^{r-1}\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots\ldots(2r-3)}{2^r\,\underline{|r}}x^r$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาเทอมทั่วไปของรูปกระจายของ $(1-nx)^{\frac{1}{n}}$

วิธีทำ เทอมที่ $r+1 = \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{n}-r+1\right)}{\underline{|r}}(-nx)^r$

$$= \frac{1(1-n)(1-2n)\ldots\ldots)(1-\overline{r-1}\,.\,n)}{n^r\,\underline{|r}}(-1)^r n^r x^r$$

$$= (-1)^r\,\frac{1(1-n)(1-2n)\ldots\ldots(1-\overline{r-1}\,.\,n)}{\underline{|r}}x^r$$

$$= (-1)^r(-1)^{r-1}\ \frac{(n-1)(2n-1)\ldots\ldots(\overline{r-1}\,.\,n-1)}{\underline{|r}}\ x^r$$

$$= -\frac{(n-1)\ (2n-1)\ldots\ldots(\overline{r-1}\,.\,n-1)}{\underline{|r}}\ x^r$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาเทอมทั่วไปของรูปกระจายของ $(1-x)^{-3}$

วิธีทำ เทอมที่ $r + 1$

$$= -\frac{(-3)(-4)(-5)\ldots\ldots(-3-r+1)}{\underline{|r}}(-x^r)$$

$$= (-1)^r\ \frac{3\ .\ 4\ .\ \ldots\ldots(r+2)}{\underline{|r}}\ (-1)^r x^r$$

$$= (-1)^{2r}\ \frac{3\ .\ 4\ .\ 5\ldots\ldots(r+2)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots\ldots r}\ x^r$$

$$= \frac{(r+1)\ (r+2)}{1\ .\ 2}\ x^r$$

การหาค่าของ x ที่ทำให้ $(1+x)^n$ (เมื่อ n เป็นเลขจำนวนตักยะอื่นที่ไม่ใช่จำนวนเต็มบวก) มีรูปกระจาย

พิจารณา

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots \qquad (1)$$

ลองแทนค่า $x = 2$ เราจะได้ว่า

$$(-1)^{-1} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots$$ ซึ่งไม่เป็นความจริง

แสดงว่า $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,x^2 + \ldots\ldots$ มิได้เป็นจริงสำหรับทุกค่าของ x

คราวนี้ลองพิจารณาสูตรของก้าวหน้าเรขาคณิต (Geometric progression) เราทราบว่าผลบวกของ r เทอมแรกของอนุกรม (1)

$$= \frac{1-x^r}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{x^r}{1-x}$$

เมื่อ x มีค่าเล็กกว่า 1 (ไม่คิดเครื่องหมาย) เราจะทำให้ $\frac{x^r}{1-x}$ มีค่าเล็กเท่าไรก็ได้โดยการเพิ่มค่าของ r ฉะนั้น ถ้าบวกจำนวนเทอมให้มากเพียงพอ ผลบวกของอนุกรมจะมีค่าเกือบเท่ากับ $\frac{1}{1-x}$ แต่เมื่อ x มีค่าใหญ่กว่า 1 การเพิ่มค่า r จะทำให้ $\frac{x^r}{1-x}$ มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่จำกัด ฉะนั้น $\frac{1}{1-x}$ ไม่ใช่ค่าประมาณของอนุกรม $1+x+x^2+x^3+......$

โดยอาศัยความรู้ทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงกว่านี้ (ในเรื่อง Convergency and Divergency of Series) จะสรุปได้ว่า การกระจายโดยใช้ทฤษฎีบททวินามของ $(1+x)^n$ จะใช้ได้เสมอสำหรับ x ซึ่งมีค่าเล็กกว่า 1

แต่เมื่อ x มีค่าใหญ่กว่า 1 พิจารณาเทอมทั่วไปของอนุกรม

$$1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + ...$$

มี x^r ซึ่งจะมีค่ามากเท่าไรก็ได้ถ้าให้ r มีค่ามากพอ ในการนี้ค่าของอนุกรมจะไม่มีขอบเขต เพราะฉะนั้น $(1+x)^n$ จะเขียนเป็นรูปกระจายไม่ได้

หมายเหตุ สำหรับ n ที่เป็นเลขจำนวนเต็มบวก จำนวนเทอมของรูปกระจายของ $(1+x)^n$ เท่ากับ $n+1$ ฉะนั้นสูตรการกระจายโดยใช้ทฤษฎีบททวินามจึงใช้ได้เสมอสำหรับทุกค่าของ x

การหาสูตรที่ง่ายที่สุดของเทอมทั่วไปของรูปกระจายของ $(1-x)^{-n}$

$$\text{เทอมที่ } r+1 = \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)......(-n-r+1)}{\lfloor r}(-x)^r$$

$$= (-1)^r \frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)}{\lfloor r} (-1)^r x^r$$

$$= (-1)^{2r} \frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)}{\lfloor r} x^r$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)}{\lfloor r} x^r$$

หมายเหตุ จากสูตรนี้จะเห็นได้ว่า สัมประสิทธิ์ของทุกเทอมของรูปกระจายของ $(1-x)^{-n}$ มีค่าบวก เมื่อ n เป็นเลขจำนวนตัก็ยะบวก

ข้อควรจำ $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^r + \ldots\ldots$

$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots + (r+1)x^r + \ldots\ldots$

$(1-x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \ldots\ldots + \frac{(r+1)(r+2)}{1.2} x^r + \ldots\ldots$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาเทอมทั่วไปของรูปกระจายของ $\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}$

วิธีทำ $\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}} = (1-3x)^{-\frac{1}{3}}$

$$\text{เทอมที่ } r+1 = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{1}{3}+2\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{3}+r-1\right)}{\lfloor r} (3x)^r$$

$$= \frac{1.4.7\ldots\ldots(3r-2)}{3^r \lfloor r} . 3^r x^r$$

$$= \frac{1.4.7\ldots\ldots(3r-2)}{\lfloor r} x^r$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาเทอมที่ใหญ่ที่สุดของรูปกระจายของ $(1 + x)^{-n}$ เมื่อ $x = \frac{2}{3}$ และ $n = 20$

วิธีทำ $u_{r+1} = u_r \times \frac{n+r-1}{r} . x$ โดยไม่คิดเครื่องหมาย

$$\left\{ \because -n-r+1 = -(n+r-1) \right\}$$

$$\therefore u_{r+1} = u_r \times \frac{19+r}{r} . \frac{2}{3}$$

$\therefore u_{r+1} > u_r$ ถ้า $\frac{19+r}{r} . \frac{2}{3} > 1$

หรือ $38 + 2r > 3r$

หรือ $r < 38$ ซึ่งเป็นเลขจำนวนเต็ม

และ $u_{r+1} = u_r$ เมื่อ $r = 38$

นั่นคือเทอมที่ 38 เท่ากับเทอมที่ 39 มีค่าใหญ่ที่สุดและ

$$= \frac{20 . 21 . 22 \ldots\ldots (20+37-1)}{\underline{|37}} \left(\frac{2}{3}\right)^{37}$$ โดยไม่คิดเครื่องหมาย

ตัวอย่างที่ 3 จงหา 3 เทอมแรกของรูปกระจายของ $(1 + 3x)^{\frac{1}{2}} (1 - 2x)^{-\frac{1}{3}}$

วิธีทำ กระจายทวินามทั้งสองจนถึงเทอมที่มี x^2 จะได้

$$(1+3x)^{\frac{1}{2}} (1-2x)^{-\frac{1}{3}} = \left(1 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8}x^2 - \ldots\ldots\right)\left(1 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{9}x^2 + \ldots\ldots\right)$$

$$= 1 + x\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\right) + x^2\left(\frac{8}{9} + \frac{3}{2} . \frac{2}{3} - \frac{9}{8}\right) + \ldots\ldots$$

$$= 1 + \frac{13}{6}x + \frac{55}{72}x^2 + \ldots\ldots$$

ตัวอย่างที่ 4 เมื่อ x มีค่าเล็กจนกระทั่งกำลังสองตัดทิ้งได้

จงหาค่าของ

$$\frac{\left(1+\frac{2}{3}x\right)^{-5} + \sqrt{4+2x}}{\sqrt{(4+x)^3}}$$

วิธีทำ (เนื่องจากค่าของ x ที่มีกำลังสองตัดทิ้งได้ ฉะนั้นจึงหา 2 เทอมแรกเท่านั้น)

$$\frac{\left(1+\frac{2}{3}x\right)^{-5} + \sqrt{4+2x}}{\sqrt{(4+x)^3}} = \frac{\left(1+\frac{2}{3}x\right)^{-5} + 2\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{8\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{8}\left\{\left(1-\frac{10}{3}x\right)+2\left(1+\frac{1}{4}x\right)\right\}\left(1+\frac{x}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{8}\left(3-\frac{17}{6}x\right)\left(1-\frac{3}{8}x\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(3-\frac{95}{24}x\right)$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $\frac{1}{\sqrt{47}}$ ถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 4

วิธีทำ

$$\frac{1}{\sqrt{47}} = (47)^{-\frac{1}{2}} = (7^2-2)^{-\frac{1}{2}} = 7^{-1}\left(1-\frac{2}{7^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{7}\left(1+\frac{1}{7^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{7^4}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{7^6}+\ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{1}{7}+\frac{1}{7^3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{7^5}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{7^7}+\ldots\ldots$$

$$= .14280 + .00292 + .00009 + \ldots\ldots$$

$$= .14586 \ldots\ldots$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{47}} = 1459$$

ตัวอย่างที่ 6 จากหากรณฑ์สามของ 126 ถึงทศนิยม 5 ตำแหน่ง

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
(126)^{\frac{1}{3}} &= (5^3+1)^{\frac{1}{3}} \\
&= 5\left(1+\frac{1}{5^3}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= 5\left(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{3}\,\frac{\left(\frac{1}{3}-1\right)}{\lfloor 2}\left(\frac{1}{53}\right)\right. \\
&\qquad \left. +\,\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{\lfloor 3}\left(\frac{1}{5^3}\right)+\ldots\ldots\right. \\
&= 5\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^6}+\frac{5}{81}\cdot\frac{1}{5^9}-\ldots\right. \\
&= 5+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^5}+\frac{1}{81}\cdot\frac{1}{5^7}-\ldots \\
&= 5+\frac{1}{3}\cdot\frac{2^2}{10^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{2^5}{10^5}+\frac{1}{81}\cdot\frac{2^7}{10^7}-\ldots \\
&= 5+\frac{.04}{3}-\frac{.00032}{9}+\frac{.0000128}{81}-\ldots \\
&= 5+.013333\ldots-.000035\ldots+\ldots \\
&= 5.01329
\end{aligned}
$$

การหาเทอมที่ใหญ่ที่สุดของรูปกระจายของ $(1+x)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนตักยะซึ่งไม่ใช่เลขจำนวนเต็มบวก

กรณีที่ 1 เมื่อ n เป็นเลขจำนวนตักยะบวก

จาก $u_{r+1} = u_r \times \frac{n-r+1}{r}\,.\,x$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ u_{r+1} > u_r \text{ ถ้า } \frac{n-r+1}{r}\,. &> 1 \\
\text{หรือ } nx-rx+r &> r \\
\text{หรือ } nx+x &> r+rx \\
\text{หรือ } (n+)\,x &> r(1+x) \\
\text{หรือ } r &< \frac{(n+1)x}{1+x}
\end{aligned}
$$

และ $u_{r+1} < u_r$ ถ้า $r > \frac{(n+1)x}{1+x}$

$\therefore$ ถ้า $\frac{(n+1)x}{1+x}$ เป็นเลขจำนวนเต็ม ให้เท่ากับ p จะได้ว่าเทอมที่ $p+1$ เท่ากับเทอมที่ p และทั้งสองเทอมมีค่าใหญ่กว่าเทอมอื่น

ถ้า $\frac{(n+1)x}{1+x}$ ไม่เป็นเลขจำนวนเต็ม ให้มีค่ามากกว่า p แต่น้อยกว่า $p+1$ โดย p เป็นเลขจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า เทอมที่ $p+1$ เป็นเทอมที่ใหญ่ที่สุด

กรณีที่ 2 เมื่อ n เป็นเลขจำนวนตักยะลบ

สมมติให้ $n = -m$. โดย m เป็นเลขจำนวนตักยะบวก จะได้ว่า

$u_{r+1} = u_r \times \frac{m+r-1}{r} . x$ โดยคิดแต่ค่าตัวเลข ไม่คิดเครื่องหมาย

$\therefore u_{r+1} < u_r$ ถ้า $\frac{m+r-1}{r} . x > 1$

หรือ $mx + rx - x > r$

หรือ $(m-1)x > r(1-x)$

หรือ $r < \frac{(m-1)x}{1-x}$

และ $u_{r+1} < u_r$ ถ้า $r > \frac{(m-1)x}{1-x}$

ถ้า $\frac{(m-1)x}{1-x}$ เป็นเลขจำนวนเต็มบวก ให้เท่ากับ p จะได้ว่าเทอมที่ $p+1$ เท่ากับเทอมที่ p และเทอมทั้งสองใหญ่กว่าเทอมอื่น

ถ้า $\frac{(m-1)x}{1-x}$ เป็นเลขจำนวนบวก แต่ไม่เป็นจำนวนเต็ม ให้มีค่ามากกว่า p แต่น้อยกว่า $p+1$ โดย p เป็นเลขจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า เทอมที่ $p+1$ เป็นเทอมที่ใหญ่ที่สุด

ถ้า $\frac{(m-1)x}{1-x}$ เป็นเลขจำนวนลบ คือ $m < 1$ แสดงว่า $r > \frac{(m-1)x}{1-x}$ เสมอ ฉะนั้น $u_{r+1} < u_r$ เสมอ นั่นคือ เทอมแรกเป็นเทอมที่ใหญ่ที่สุด

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^r ในรูปกระจายของ $\frac{(1-2x)^2}{(1+x)^3}$

วิธีทำ สมมติให้รูปกระจาย $= \left(1 - 4x + 4x^2\right)\left(1 + p_1x + p_2x^2 + \ldots\ldots + p_rx^r + \ldots\ldots\right)$

ฉะนั้น สัมประสิทธิ์ของ x^r หาได้โดยคูณ p_r, p_{r-1}, p_{r-2} ด้วย $1, -4, 4$ ตามลำดับ แล้วบวกเข้าด้วยกัน

$\therefore$ สัมประสิทธิ์ของ $x^r = p_r - 4p_{r-1} + 4p_{r-2}$

แต่ $\frac{1}{(1+x)^3} = \left(1+x\right)^{-3}$

$\therefore \quad p_r = \left(-1\right)^r \frac{(r+1)(r+2)}{1.2}$ จากตัวอย่างที่ 5

$\therefore$ สัมประสิทธิ์ของ $x^r = \left(-1\right)^r \frac{(r+1)(r+2)}{2} - 4\left(-1\right)^{r-1}\frac{r(r+1)}{2} + 4\left(-1\right)^{r-2}\frac{(r-1)r}{2}$.

$$= \frac{(-1)^r}{3}\left[\left(r+1\right)\left(r+2\right) + 4r\left(r+1\right) + 4r\left(r-1\right)\right]$$

$$= \frac{(-1)^r}{2}\left(9r^2 + 3r + 2\right)$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของอนุกรม

$$2 + \frac{5}{\lfloor 2 . 3} + \frac{5.7}{\lfloor 3 . 3^2} + \frac{5.7.9}{\lfloor 4 . 3^3} + \ldots\ldots\ldots$$

วิธีทำ อนุกรมที่กำหนดให้ $= 2 + \frac{3.5}{\lfloor 2} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{3.5.7}{\lfloor 3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{3.5.7.9}{\lfloor 4} \cdot \frac{1}{3^4} + \ldots\ldots$

$$= 2 + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5}}{\lfloor 2} \cdot \frac{2^2}{3^2} + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{\lfloor 3} \cdot \frac{2^3}{3^3} + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}}{4} \cdot \frac{2^4}{3^4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 + \frac{\frac{3}{2}}{1} \cdot \frac{2}{3} + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{\lfloor 2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{\lfloor 3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots\ldots$$

$$= \left(1-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 3^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}$$

ตัวอย่างที่ 3 ถ้า n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก จงพิสูจน์ว่าจำนวนเต็ม (integral part) ของ $(3+\sqrt{7})^n$ เป็นเลขจำนวนคี่

วิธีทำ ให้ I แทนส่วนที่เป็นจำนวนเต็ม และ f แทนส่วนที่เป็นเศษส่วนของ $(3+\sqrt{7})^n$

$$\therefore\ I + f = 3^n + {}^nC_1\, 3^{n-1}\sqrt{7} + {}^nC_2\, 3^{n-2}\,.\,7 + {}^nC_3\, 3^{n-3}\,.\,(\sqrt{7})^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$\therefore\ 3-\sqrt{7}$ เป็นเลขจำนวนบวกมีค่าน้อยกว่า 1

$\therefore\ (3-\sqrt{7})^n$ เป็นเลขจำนวนบวกมีค่าน้อยกว่า 1 เขียนแทนด้วย f'

$$\therefore\ f' = 3^n - {}^nC_1\, 3^{n-1}\sqrt{7} + {}^nC_2\, 3^{n-2}\,.\,7 - {}^nC_3\, 3^{n-3}\,.\,(\sqrt{7})^3 + \ldots$$

$$I + f + f' = 2\left(3^n + {}^nC_2\, 3^{n-2}\,.\,7 + \ldots\ldots\right) \qquad \ldots\ldots\ (1)$$

จะเห็นได้ว่า วงเล็บขวามือเป็นเลขจำนวนเต็ม เมื่อคูณด้วย 2 หน้าวงเล็บจะเป็นเลขจำนวนคู่

แต่ f และ f' ต่างก็เป็นเลขจำนวนบวกซึ่งมีค่าน้อยกว่า 1 ฉะนั้นการที่ (1) จะใช้ได้ $f+f'$ จะต้องเท่ากับ 1

$\therefore\ I + 1$ เป็นเลขจำนวนคู่

นั่นคือ I เป็นเลขจำนวนคี่

แบบฝึกหัด

1. What is the coefficient of x^3 in the expansion of
$(x+a_1)\ (x+a_2)\ (x+a_3)\ (x+a_4)\ (x+a_5)$?
How many terms are there in the coefficient of x^2 ? What are the coefficients of x^3 and x^2 in $(x+a)^5$?

2. How many terms are there in the coefficients of x^{n-2}, x^2, x^r in the expansion of
$(x+a_1)\ (x+a_2)\ (x+a_3)\ \ldots\ldots\ldots\ (x+a_n)$?
What is the coefficients of x^{n-2}, x^2, x^r in $(x+a)^n$?

3. Write down the expansion of the following binomials :

(1) $(x+1)^4$ (2) $(y-1)^4$ (3) $(y+\frac{1}{y})^6$

(5) $(x^2+3y^2)^5$ (5) $(\frac{2}{3}x-\frac{3}{2x})^6$ (6) $(1-\frac{1}{x})^{10}$

4. Find the 4th term in the expansion of

(1) $(2a-5b)^7$; (2) $(1+3x)^n$; (3) $(x+\frac{1}{x})^n$

5. Find (1) the 7th term of $(\frac{4x}{5}-\frac{5}{2x})^9$

(2) the 5th term of $\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}-\frac{y^{\frac{5}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}\right)^8$

(3) the $(r+1)$th term of $(x+y)^n$; $(a-2b)^n$

6. Find the coeffieet of

(1) x^{20} in $(x^2+3x)^{12}$ (2) x^n in $(1+\frac{1}{4}x)^{2n}$ (3) x^{18} in $(x^2+\frac{3a}{x})^{15}$

(4) x^{18} in $(ax^4-bx)^9$ (5) x^{32} and x^{-17} in $(x^4-\frac{1}{x^3})^{15}$

7. Find (1) the term independent of x in $\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x}\right)^9$

(2) the 13th term of $\left(9x - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$

8. If x^p occurs in the expansion of $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{2n}$, prove that its coefficient ii

$$\frac{\lfloor 2n}{\lfloor \frac{1}{3}(4n - p) \; \lfloor \frac{1}{3}(2n + p)}$$

9. Fine the middle term of

(1) $\left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right)^{10}$ (2) $\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{14}$ (3) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n}$

10. What are the two middle terms for (1) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2n+1}$ (2) $\left(3a - \frac{a^3}{6}\right)^9$

11. Find the value of (1) $(x + \sqrt{2})^4 + (x - \sqrt{2})^4$

(2) $\left(\sqrt{x^2 - a^2} + x\right)^5 - \left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right)^5$

(3) $(\sqrt{2} + 1)^6 - (\sqrt{2} - 1)^6$

(4) $\left(2 - \sqrt{1-x}\right)^6 + \left(2 + \sqrt{1-x}\right)^6$.

12. Simplify $x^n (x-1)^n + {}^nC_1 x^{n-1} (x-1)^{n-1} (x+1) + \ldots\ldots +$
${}^nC_r x^{n-r} (x-1)^{n-r} (x+1)^r + \ldots\ldots + (x+1)^n$.

13. In the following expansions find which is the numerically greatest term :

(1) $(x - y)^{30}$ when $x = 11$, $y = 4$

(2) $(2x - 3y)^{28}$ when $x = 9$, $y = 4$

(3) $(3 + 2x)^{15}$ when $x = \frac{5}{2}$

(4) $(7 + x)^{29}$ when $x = 3$

(5) $(ax - by)^{10}$ when $a = 2$, $b = 5$, $x = 3$, $y = \frac{1}{2}$.

14. What is the greatest coefficient in the expansion of

(1) $(1 + x)^{10}$; (2) $(1 + x)^{11}$; (3) $(1 + x)^{4n+3}$?

15. In the following expansions find the value of the greatest term

(1) $(1+x)^n$ when $x = \frac{2}{3}$, $n = 6$

(2) $(a+x)^n$ when $a = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$, $n = 9$

16. Show that the coefficient of the middle term of $(1+x)^{2n}$ is equal to the sum of the coefficients of the two middle terms of $(1+x)^{2n-1}$

17. If A be the sum of the odd terms and B the sum of the even terms in the expansion of $(x+a)^n$, prove that $A^2 - B^2 = (x^2 - a^2)^n$.

18. Find the expansion of (1) $(1+2x-x^2)^4$ (2) $(3x^2-2ax+3a^2)^3$

(3) $(x+\frac{1}{x})^4 \; (x-\frac{1}{x})^3$.

19. If $C_0, C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ denote the coefficients in the epansion of $(1+x)^n$

Prove that

(1) $C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \ldots\ldots\ldots + {}_nC_n = n \cdot 2^{n-1}$;

(2) $C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{C_n}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

(3) $\frac{C_1}{C_0} + \frac{2C_2}{C_1} + \frac{3C_3}{C_2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{{}_nC_n}{C_{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2}$;

(4) $(C_0+C_1)(C_1+C_2)\ldots\ldots\ldots(C_{n-1}+C_n) = \frac{C_1 C_2 \ldots\ldots C_n (n+1)^n}{\lfloor\underline{n}}$;

(5) $2C_0 + \frac{2^2 C_1}{2} + \frac{2^3 C_2}{3} + \frac{2^4 C_3}{4} + \ldots\ldots\ldots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

(6) $C_0 C_r + C_1 C_{r+1} + C_2 C_{r+2} + \ldots\ldots\ldots + C_{n-r} C_n = \frac{\lfloor\underline{2n}}{\lfloor\underline{n-r}\;\lfloor\underline{n+r}}$.

20. Expand to 4 terms the following expansions:

(1) $(1+x)^{\frac{3}{2}}$ (2) $(1-3x)^{-\frac{1}{3}}$ (3) $(4a-8x)^{-\frac{1}{2}}$

21. Find (1) the 10th term of $(1+3a^2)^{\frac{16}{3}}$

(2) the 5th term of $(3a-2b)^{-1}$

(3) the $(r+1)$ th term of $(1+x)^{\frac{11}{3}}$

(4) the 7th term of $(3^{8}+6^{4}x)^{\frac{11}{4}}$.

22. Find the $(r+1)$ th term in each of the following expansions:

(1) $(1+x^{2})^{-3}$; (2) $\sqrt[3]{(a^{3}-x^{3})^{2}}$; (3) $\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$;

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{(1-3x)^{2}}}$; (5) $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^{n}-nx}}$

23. Find the numerically greatest term in each of the following expansion:

(1) $(1+x)^{-7}$ when $x = \frac{4}{15}$; (2) $(1-7x)^{-\frac{11}{4}}$ when $x = \frac{1}{8}$;

(3) $(5-4x)^{-7}$ when $x = \frac{1}{2}$; (4) $(3x^{2}+4y^{3})^{-n}$ when $x = 9$, $y = 2$

$n = 15$

24. Find to five places of decimals the value of

(1) $\sqrt{98}$; (2) $\sqrt[3]{998}$; (3) $\sqrt[4]{2400}$; (4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{128}}$;

(5) $(630)^{-\frac{3}{4}}$; (6) $\sqrt[5]{3128}$

25. If x be so small that its square and higher powers may be neglected find the value of

(1) $(1-7x)^{\frac{1}{3}}(1+2x)^{-\frac{3}{4}}$; (2) $\sqrt{4-x}\,.\,(3-\frac{x}{2})^{-1}$

(3) $\dfrac{(8+3x)^{\frac{2}{3}}}{(2+3x)\sqrt{4-5x}}$; (4) $\dfrac{(1+\frac{2}{3}x)^{-5} \times (4+3x)^{\frac{1}{2}}}{(4+x)^{\frac{3}{2}}}$

(5) $\dfrac{\sqrt[3]{8+3x}-\sqrt[5]{1-x}}{(1+5x)^{\frac{3}{5}}+(4+\frac{x}{2})^{\frac{1}{2}}}$

26. Find the first three terms in the expansion of

(1) $\dfrac{1}{(1+x)^2\sqrt{1+4x}}$; (2) $\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{4}}+\sqrt{1+5x}}{(1-x)^2}$

27. Find the coefficient of

(1) x^{100} in the expansion of $\dfrac{3-5x}{(1-x)^2}$;

(2) x^n in the expansion of $\dfrac{2+x+x^2}{(1+x)^3}$

28. Prove that $1-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1.3}{2.4}\cdot\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\dfrac{1}{2^4}-\ldots\ldots=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

29. Prove that $\sqrt{8} = 1+\dfrac{3}{4}+\dfrac{3.5}{4.8}+\dfrac{3.5.7}{4.8.12}+\ldots\ldots\ldots$

30. Prove that $1+\dfrac{2n}{3}+\dfrac{2n(2n+2)}{3.6}+\dfrac{2n(2n+2)(2n+4)}{3.6.9}+\ldots\ldots\ldots$

$$= 2^n\left\{1+\frac{n}{3}+\frac{n(n+1)}{3.6}+\frac{n(n+1)(n+2)}{3.6.9}+\ldots\ldots\ldots\right\}$$

31. Prove that $7^n\left\{1+\dfrac{n}{7}+\dfrac{n(n-1)}{7.14}+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{7.14.21}+\ldots\ldots\ldots\right\}$

$$= 4^n\left\{1+\frac{n}{2}+\frac{n(n+1)}{2.4}+\frac{n(n+1)(n+2)}{2.4.6}+\ldots\ldots\ldots\right\}$$

32. Show that the integral parts of (1) $(5+2\sqrt{6})^n$; (2) $(8+3\sqrt{7})^n$

are odd, if n be a positive integer.

30. Prove that if n be an even integr :

$$\frac{1}{1!\,(n-1)!}+\frac{1}{3!\,(n-3)!}+\frac{5}{5!\,(n-5)!}+\ldots\ldots+\frac{1}{(n-1)!\,1!}=\frac{2^{n-1}}{n!}\ .$$

34. If $C_0, C_1, C_2, \ldots\ldots C_n$ are the coefficients in the expansion of $(1+x)^n$, when n is a positive integer, prove that

(1) $C_0-C_1+C_2-C_3\ldots\ldots+(-1)^r C_r=(-1)^r\dfrac{(n-1)!}{r!\,(n-r-1)!}$;

(2) $C_0 - 2C_1 + 3C_2 - 4C_3 + \dots\dots + (-1)^n (n+1) C_n = 0$;

(3) $C_0^2 - C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 + \dots\dots + (-1)^n C_n^2 = 0$, or $(-1)^{\frac{n}{2}} C_{\frac{n}{2}}$

according as n is odd or even.

คำตอบ

1. $\sum (a_1 a_2)$; 10 ; 10 a^2, 10 a^3 .
2. ${}^nC_2$, ${}^nC_2$, ${}^nC_r$; ${}^nC_2\, a^2$, ${}^nC_2\, a^{n-2}$, ${}^nC_r\, a^{n-r}$.
3. (1) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ (2) $y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1$

   (3) $y^6 + 6y^4 + 15y^2 + 20 + \frac{15}{y^2} + \frac{6}{y^4} + \frac{1}{y^6}$.

   (4) $x^{10} + 15x^8y^2 + 90x^6y^4 + 270x^4y^6 + 405x^2y^8 + 243y^{10}$

   (5) $\frac{64x^6}{729} - \frac{32x^4}{27} + \frac{20x^2}{3} - 20 + \frac{135}{8x^2} - \frac{243}{8x^4} + \frac{729}{64x^6}$.

   (6) $1 - \frac{10}{x} + \frac{45}{x^2} - \frac{120}{x^3} + \frac{210}{x^4} - \frac{252}{x^5} + \frac{210}{x^6} - \frac{120}{7x} + \frac{45}{x^8} - \frac{10}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}$.
4. (1) $-7000\, a^4b^3$; (2) ${}^nC_3 (2x)^3$; (3) ${}^nC_3\, x^{n-6}$
5. (1) $\frac{10500}{x^3}$; (2) $\frac{70x^6y^{10}}{a^2b^6}$. (3) ${}^nC_r\, x^{n-r} y^r$; ${}^nC_r\, a^{n-r} (-2b)^r$
6. (1) 40095 ; (2) ${}^{2n}C_n \left(\frac{1}{4}\right)^n$; (3) $11^0565\, a^4$; (4) $84\, a^3b^6$;

   (5) 1365, $-$ 1365 ;
7. (1) $\frac{18}{7}$; (2) 18564.
8. (1) 252 ; (2) $-\frac{429}{16} x^{14}$ (3) ${}^{2n}C_n$
9. (1) $(-1)^n\, {}^{2n+1}C_n\, x$, $(-1)^{n+1}$. ${}^{2n+1}C_n \left(\frac{1}{2}\right)$; (2) $\frac{189a^7}{8}$; $-\frac{21}{16} a^{19}$.
10. (1) $2x^4 + 2x^2 + 8$ (2) $2x(16x^4 - 20x^2a^2 + 5a^4)$

    (3) $140\sqrt{2}$ (4) $2(365 - 363x + 63x^2 - x^3)$

12. $(x^2+1)^n$

13. (1) The 9th ; (2) The 12th ; (3) The 10th and 11th ;

(4) Tth 4th and 5th ; (5) The 4th.

14. (1) 252 ; (2) 462 ; (3) $\dfrac{4n+3}{\lfloor 2n+2 \,\lfloor 2n+1}$

15. (1) The 3rd $= 6\frac{2}{3}$; (2) The 4th and the 5th $= \frac{7}{144}$.

18. (1) $1 + 8x + 20x^2 + 8x^3 - 26x^4 - 8x^5 + 20x^6 - 8x^7 + x^8$

(2) $27x^6 - 54ax^5 + 117a^2x^4 - 1167a^3x^3 + 117a^4x^2 - 54a^5x + 26a^6$

(3) $x^7 + x^5 - 3x^3 + 3x^{-1} + 3x^{-3} - x^{-5} - x^{-7}$

20. (1) $1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3$; (2) $1 + x + 2x^2 + \frac{14}{3}x^3$;

(3) $\frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}\left(1 + \frac{x}{a} + \frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{a^2} + \frac{5}{2}\cdot\frac{x^3}{a^3}\right)$

21. (1) $-\frac{1040}{81}a^{18}$; (2) $\frac{16b^4}{243a^5}$; (3) $(-1)^{r-4}\frac{11.8.5.2.1.4\ldots(3r-14)}{3^r\lfloor r}x^r$;

(4) $-\frac{19712}{3}x^6$.

22. (1) $(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)}{\lfloor 2}x^{2r}$; (2) $-\frac{2.1.4\ldots\ldots(3r-5)}{3^r\lfloor r}\frac{x^{3r}}{a^{3r-2}}$;

(3) $(-1)^r\frac{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)}{\lfloor r}x^r$; (4) $\frac{2.5.8\ldots\ldots(3r-1)}{\lfloor r}x^r$;

(5) $\frac{(n+1)(2n+1)\ldots\ldots(r-1.n+1)}{\lfloor r}\;\frac{x^r}{a^{nr+1}}$.

23. (1) The 3rd ; (2) The 23th ; (3) The 4th and 5th ;

(4) The 3rd.

24. (1) 9.89949 ; (2) 9.99333 ; (3) 6.99927 ;

(4) .19842 ; (5) .00795 ; (6) 5.00096.

25. (1) $1-\frac{23x}{6}$ (2) $\frac{2}{3}\left(1+\frac{x}{24}\right)$; (3) $1-\frac{5x}{8}$;

(4) $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}x$; (5) $\frac{1}{3}-\frac{297}{32}x$.

26. (1) $1-4x+13x^2$; (2) $2+\frac{29}{4}x+\frac{297}{32}x^2$.

27. (1) -197 ; (2) $(-1)^n(n^2+2n+2.)$

พิมพ์ที่โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ท่าพระจันทร์ พระนคร
น.ส. อรุณี อินทรสุขศรี บช.บ., พณ.บ., ผู้พิมพ์ ผู้โฆษณา
กรกฎาคม พ.ศ. ๒๕๐๙