Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Elliptische Kurven

Arbeitsblatt 27

Aufgaben

AUFGABE 27.1. Es sei $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$. Zeige, dass f genau dann schwach modular vom Gewicht k ist, wenn sie die beiden Bedingungen $f(z+1) = f(z)$ und $f(-\frac{1}{z}) = z^k f(z)$ für alle $z \in \mathbb{H}$ erfüllt.

AUFGABE 27.2. Es sei $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine Modulfunktion vom Gewicht k und $g\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine Modulfunktion vom Gewicht ℓ. Zeige, dass $\frac{f}{g}$ eine Modulfunktion vom Gewicht $k - \ell$ ist.

AUFGABE 27.3.*

Zeige, dass die Exponentialfunktion

$$f\colon \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto e^{2\pi \mathrm{i} z},$$

zu keinem $k \in \mathbb{Z}$ schwach modular ist.

AUFGABE 27.4. Skizziere das Bild des Fundamentalbereiches $D \subseteq \mathbb{H}$ zur Modulsubstitution unter der Exponentialfunktion

$$\mathbb{H} \longrightarrow U(0,1) \setminus \{0\},\, z \longmapsto e^{2\pi z \mathrm{i}}.$$

AUFGABE 27.5. Bestimme den Index der Kongruenzuntergruppe zur Stufe 2, also $\Gamma(2)$, in der vollen Modulgruppe.

AUFGABE 27.6.*

Bestimme auf zwei Arten ein Repräsentantensystem in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ für die Restklassengruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma(2)$ zur Hauptkongruenzuntergruppe zur Stufe 2.

(1) Durch Angabe von Matrizen.
(2) Als Kombination der beiden Erzeuger $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (vergleiche Satz 9.2).

Aufgabe 27.7. Bestimme auf zwei Arten ein Repräsentantensystem in

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

für die Restklassengruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma(3)$ zur Hauptkongruenzuntergruppe zur Stufe 3.

(1) Durch Angabe von Matrizen.
(2) Als Kombination der beiden Erzeuger $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (vergleiche Satz 9.2).

Aufgabe 27.8.*

Es sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper (mit q Elementen). Bestimme die Anzahl der Elemente in

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)\,.$$

Aufgabe 27.9. Es sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper. Bestimme die Anzahl der Elemente in

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)\,.$$

Aufgabe 27.10.*

Es sei p eine Primzahl. Zeige, dass es zu je zwei vom Nullvektor verschiedenen Elementen $u, v \in \mathbb{Z}/(p) \times \mathbb{Z}/(p)$ eine Matrix $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/(p))$ mit $v = Mu$ gibt.

Aufgabe 27.11. Es sei p eine Primzahl. Zeige, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/(p))$ von den Matrizen $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt wird.

Aufgabe 27.12. Es sei p eine Primzahl. Zeige, dass die natürliche Abbildung

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/(p))$$

surjektiv ist.

in den folgenden Aufgaben kann es einfacher sein, sich auf eine Primzahl N zu beschränken.

Aufgabe 27.13. Es sei $N \in \mathbb{N}$. Bestimme den Index der Untergruppe $\Gamma(N)$ in $\Gamma_1(N)$.

Aufgabe 27.14. Es sei $N \in \mathbb{N}$. Bestimme den Index der Untergruppe $\Gamma_1(N)$ in $\Gamma(N)$.

Aufgabe 27.15. Es sei $N \in \mathbb{N}$. Bestimme den Index der Untergruppe $\Gamma_0(N)$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Aufgabe 27.16. Es sei N eine positive natürliche Zahl. Es sei $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und sei u, v eine reelle Basis von $\mathbb{C}$ mit dem zugehörigen Gitter Λ und dem zugehörigen komplexen Torus $\mathbb{C}/\Lambda$. Es sei u', v' die mit M transformierte Basis. Zeige, dass $\frac{v}{N}$ und $\frac{v'}{N}$ genau dann die gleiche Untergruppe von $\mathbb{C}/\Lambda$ der Ordnung N definieren, wenn M zur Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(N)$ gehört.

Aufgabe 27.17. Es sei N eine positive natürliche Zahl. Es sei $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und sei u, v eine reelle Basis von $\mathbb{C}$ mit dem zugehörigen Gitter Λ und dem zugehörigen komplexen Torus $\mathbb{C}/\Lambda$. Es sei u', v' die mit M transformierte Basis. Zeige, dass $\frac{v}{N}$ und $\frac{v'}{N}$ genau dann das gleiche N-Torsionselement von $\mathbb{C}/\Lambda$ definieren, wenn M zur Kongruenzuntergruppe $\Gamma_1(N)$ gehört.

Abbildungsverzeichnis