Attention Scanner:
Foldout in book!

MEMORIE

DELLA REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

SERIE SECONDA

Tomo XX.

TORINO
DALLA STAMPERIA REALE
MDCCCLXIII.

INDICE

CLASSE DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI, E STRANIERI

AL 1.° DI GENNAIO MDCCCLXIII.

ACCADEMICI NAZIONALI.

Presidente

Plana, Barone Giovanni, Senatore del Regno, Regio Astronomo, Professore d'Analisi nella Regia Università, Direttore Generale degli studi nella Regia Accademia Militare, Socio Straniero dell' Istituto di Francia (Accademia delle Scienze), Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, G. Cord. ✻, Cav. e Cons. ✠, Uffiz. della L. d'O. di F., C. della C. F. d'A. di 2.ª classe, e della Stella polare di Svezia.

Vice-Presidente

Ferrero della Marmora, Conte Alberto, Senatore del Regno, Luogotenente-Generale, Membro del Consiglio delle Miniere, della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria e della Commissione superiore di Statistica, G. Cord. ✻, Gr. Uffiz. ✪, Cav. e Cons. ✠, Cav. della L. d'O. di F.

Tesoriere

Peyron, Abate Amedeo, Teologo Collegiato, Professore emerito di Lingue Orientali, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Socio Straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), Accademico corrispondente della Crusca, Gr Cord. ✻, Cav. e Cons. ✠, Cav. della L. d'O. di F.

Tesoriere Aggiunto

Sismonda, Angelo, Senatore del Regno, Professore di Mineralogia e Direttore del Museo Mineralogico della Regia Università, Membro del Consiglio delle Miniere, della Reale Accademia d'Agricoltura di Torino, della Società Geologica di Londra, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Comm ✻, ✠.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Direttore

Moris, Dottore Giuseppe Giacinto, Senatore del Regno, Professore di Botanica nella Regia Università, Direttore del Regio Orto Botanico, Membro delle Reali Accademie di Agricoltura e Medico-Chirurgica di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Gr. Uffiz. ✻, Cav. e Cons. ✠.

Segretario Perpetuo.

Sismonda, Eugenio, Dottore in Medicina, Professore Sostituito di Mineralogia nella R. Università, Professore di Storia Naturale nel Liceo del Carmine di Torino, Membro delle Reali Accademie d'Agricoltura e Medico-Chirurgica di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Uffiz. ✻, ✠.

ACCADEMICI RESIDENTI

Plana, Giovanni, *predetto.*

Moris, Giuseppe Giacinto, *predetto.*

Cantu', Gian Lorenzo, Senatore del Regno, Dottore Collegiato in Medicina, Professore emerito di Chimica generale nella Regia Università, Vice-Presidente del Consiglio delle Miniere, Ispettore presso il Consiglio superiore militare di Sanità, Membro delle Reali Accademie di Agricoltura e Medico-Chirurgica di Torino, Comm. ✻.

Ferrero della Marmora, Conte Alberto, *predetto.*

Botto, Giuseppe Domenico, Professore emerito di Fisica nella Regia Università, Membro della Reale Accademia d'Agricoltura di Torino, Membro ordinario del Consiglio superiore di pubblica Istruzione, Comm. ✻.

Sismonda, Angelo, *predetto.*

Menabrea, Conte Luigi Federigo, Senatore del Regno, Ministro dei Lavori pubblici, Luogotenente-Generale nel Corpo Reale del Genio Militare, Professore emerito di Costruzioni nella Regia Università, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Gr. Uffiz. ✻, ✠, Gr. Cr. ✪, dec. della med. d'oro al valor militare, Gr. Uffiz. della L. d'O. di F., Comm. degli Ordini di S. G. di T., di Carlo III di Sp., del M. Civ. di Sass., e di C. di Port.

Mosca, Carlo Bernardo, Senatore del Regno, Primo Architetto di S. M.,

Primo Ingegnere Architetto dell'Ordine de'Ss. Maurizio e Lazzaro, Ispettore di Prima Classe nel Corpo Reale del Genio Civile, Membro del Consiglio degli Edili, delle Reali Accademie delle Belle Arti e di Agricoltura di Torino, dell'Accademia Pontificia delle Belle Arti denominata di San Luca a Roma e dell'I. e R. Accademia delle Belle Arti di Milano, Comm. ❋, Cav. e Cons. ✠, Uffiz. della L. d'O. di F.

Sismonda, Dottore Eugenio, *predetto*.

Sobrero, Ascanio, Dottore in Medicina ed in Chirurgia, Professore di Chimica docimastica nella scuola di applicazione per gli Ingegneri, Membro del Collegio di Scienze fisiche e matematiche e della Reale Accademia d'Agricoltura di Torino, Uffiz. ❋.

Cavalli, Giovanni, Luogotenente Generale d'Artiglieria, Membro del Consiglio delle Miniere e dell'Accademia delle Scienze militari di Stockolma, Gr. Uffiz. ❋, ✠, Comm. ✪, Uffiz. della L. d'O. di F., dell'O. Militare Portogh. di Torre e Spada, e dell'O. di Leop. del B., Cav. di S. Wl. di R. di 4.ª cl., della Sp. di Sv., dell'A. R. di Pr. di 3.ª cl.

Berruti, Secondo Giovanni, Professore emerito di Fisiologia sperimentale nella R. Università, Membro ordinario del Consiglio superiore di pubblica Istruzione, Membro delle Reali Accademie d'Agricoltura e Medico-Chirurgica di Torino, Membro onorario della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Uffiz. ❋.

Richelmy, Prospero, Professore di Meccanica applicata e Direttore della scuola di applicazione per gli Ingegneri, Uffiz. ❋.

De Filippi, Dottore Filippo, Professore di Zoologia e Direttore del Museo Zoologico della Regia Università, Membro ordinario del Consiglio superiore di pubblica Istruzione, e delle Reali Accademie d'Agricoltura e Medico-Chirurgica di Torino, Uffiz. ❋.

Sella, Quintino, Membro del Consiglio delle Miniere, Uno dei XL della Società italiana delle Scienze residente in Modena, Membro dell'Imp. Società Mineralogica di Pietroborgo, Gr. Uffiz. ❋.

Delponte, Giambatista, Dottore di Medicina e di Chirurgia, Professore Sostituito di Botanica nella Regia Università, Membro delle Reali Accademie d'Agricoltura e Medico-Chirurgica di Torino, ❋.

Piria, Raffaele, Senatore del Regno, Professore di Chimica generale nella Regia Università di Torino, Membro ordinario del Consiglio superiore di pubblica Istruzione, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Comm. ❋, ✠.

Matteucci, Carlo, Senatore del Regno, Ispettore generale dei telegrafi elettrici, Uno dei XL della Società italiana delle Scienze residente in Modena, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia, Comm. ✻, ✠.

Genocchi, Angelo, Professore di analisi superiore nella R. Università di Torino, Membro ordinario del Consiglio superiore di pubblica Istruzione, Uno dei XL della Società italiana delle Scienze residente in Modena, Uffiz. ✻.

Brioschi, Francesco, Professore di Matematica, Direttore dell'Istituto tecnico di Milano, Uno dei XL della Società italiana delle Scienze residente in Modena, Comm. ✻.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Borgnis, Giuseppe Antonio, Ingegnere Civile, Professore emerito di Matematica applicata nella R. Università di Pavia, ✻.

Bertoloni, Antonio, Dottore in Medicina, Professore emerito di Botanica nella Regia Università di Bologna, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, ✠.

Marianini, Stefano, Professore di Fisica sperimentale nella Regia Università di Modena, Presidente della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia, ✻, ✠.

De Notaris, Giuseppe, Dottore in Medicina, Professore di Botanica nella Regia Università di Genova, ✠.

Pareto, Marchese Lorenzo Damaso, Senatore del Regno, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, a Genova.

Mossotti, Ottaviano Fabrizio, Senatore del Regno, Professore di Fisica e di Meccanica celeste nella R. Università di Pisa, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Comm. ✻, ✠, C. di S. G. di T.

Panizza, Bartolomeo, Senatore del Regno, Professore di Anatomia nella R. Università di Pavia, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia, Comm. ✻, ✠, C. C. F. d'A.

Amici, Giovanni Battista, Astronomo al R. Museo di Fisica e di Storia naturale, Professore onorario nell'Istituto superiore di Firenze, Uno dei XL della Società italiana delle Scienze residente in Modena, Uffiz. ✻.

Savi, Paolo, Senatore del Regno, Professore di Anatomia comparata

e Zoologia nella Regia Università di Pisa, Uno dei XL della Società italiana delle Scienze residente in Modena, Uffiz. ✻, Cav. dell' O. di S. G. di T., a Pisa.

ACCADEMICI STRANIERI.

Élie di Beaumont, Giambatista Armando Lodovico Leonzio, Senatore dell' Impero Francese, Ispettore generale delle Miniere, Membro del Consiglio Imperiale dell' Istruzione pubblica, Professore di Storia naturale dei corpi inorganici nel Collegio di Francia, Segretario Perpetuo dell'Accademia delle Scienze dell' Istituto, Comm. ✻, Gr. Uffiz. della L. d'O. di F., a Parigi.

Herschel, Giovanni Federico Guglielmo, Membro della Società Reale di Londra, Socio Straniero dell' Istituto di Francia.

Poncelet, Giovanni Vittorio, Generale del Genio, Membro dell' Istituto di Francia, Gr. Uffiz. della L. d' O. di F., a Parigi.

Faraday, Michele, Membro della Società Reale di Londra, Socio Straniero dell' Istituto di Francia, Comm. della L. d' O. di F., a Londra.

Liebig, Barone Giusto, Professore di Chimica nella R. Università di Monaco (*Baviera*), Socio Straniero dell' Istituto di Francia, ✻, Uffiz. della L. d' O. di F., a Monaco.

Dumas, Giovanni Battista, Senatore dell' Impero Francese, Vice-Presidente del Consiglio Imperiale dell' Istruzione pubblica, Professore di Chimica alla Facoltà delle Scienze di Parigi, Membro dell' Istituto di Francia, Gr. Uffiz. della L. d' O. di F., a Parigi.

Mitscherlich, Eilardo, Professore di Chimica nella R. Università e Membro della R. Accademia delle Scienze di Berlino, Socio Straniero dell' Istituto di Francia, a Berlino.

Brewster, Davide, Preside dell' Università di Edimborgo, Socio Straniero dell' Istituto di Francia, Uffiz. della L. d' O. di F., a Edimborgo.

Billiet, S. Em. Alessio, Cardinale, Arcivescovo di Ciamberì, Presidente Perpetuo onorario dell'Accademia Imperiale di Savoia, Gr. Cord. ✻; già *Accademico nazionale non residente.*

Cerise, Lorenzo, Dottore in Medicina, ✠, Cav. della L. d' O. di F., a Parigi; già *Accademico nazionale non residente.*

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore

Sauli d'Igliano, Conte Lodovico, Senatore del Regno, Consigliere di Legazione, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Accademico d'onore dell'Accademia Reale di Belle Arti, Vice-Presidente del Consiglio del Contenzioso diplomatico, Gr. Uffiz. ✻, Cav. e Cons. ✠.

Segretario Perpetuo

Gorresio, Abate Gaspare, Dottore del Collegio di Belle Lettere e Filosofia, Prefetto della Regia Biblioteca della Università, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), Uffiz. ✻, ✠, Uffiz. della L. d'O. di F.

ACCADEMICI RESIDENTI

Peyron, Amedeo, *predetto.*

Manno, Barone Giuseppe, Senatore del Regno, Ministro di Stato, Primo Presidente della Corte di Cassazione, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, e della Giunta d'Antichità e Belle Arti, Accademico corrispondente della Crusca, G. Cord. ✻, Cav. e Cons. onor. ✠.

Sauli d'Igliano, Conte Lodovico, *predetto.*

Sclopis di Salerano, Conte Federigo, Vice-Presidente del Senato del Regno, Ministro di Stato, Primo Presidente, Presidente della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria e del Consiglio del Contenzioso diplomatico, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze morali e politiche), Gr. Cord. ✻, Cav. e Cons. ✠, C. di S. G. di T. e della L. d'O. di F.

Cibrario, Conte Giovanni Antonio Luigi, Senatore del Regno, Ministro di Stato, Primo Presidente di Corte d'Appello, Primo Segretario di S. M. pel Gran Magistero dell' Ordine de' Ss. Maurizio e Lazzaro, Vice-Presidente della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Membro della

Giunta di Antichità e Belle Arti, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze morali e politiche), Gr. Cord. ✻, ✠, Gr. Uffiz. della L. d'O. di F., Gr. Cr. degli Ord. di Leop. del B., della Concez. di Port., di Carlo III di Sp., del Leone dei P. B., Comm. dell'O. di Cr. di Port., Cav. di Croce in oro del Salv. di Gr., Cav. di S. Gius. di T., dell'Aq. rossa di 3.ª cl. di Pr., di S. Stan. di 2.ª cl. di R., di W. di Sv., freg. dell'O. Ott. del Mejid. di 1.ª cl., e della Gr. Med. d'oro di R. pel merito scientifico e letterario.

Ferrero della Marmora, Conte Alberto, *predetto*.

Baudi di Vesme, Conte Carlo, Senatore del Regno, Segretario della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, ✻, ✠.

Promis, Domenico Casimiro, Bibliotecario di S. M., Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Comm. ✻.

Ricotti, Ercole, Senatore del Regno, Maggiore nel R. Esercito, Rettore e Professore di Storia moderna e d'arte critica nella R. Università, Membro ordinario del Consiglio superiore di pubblica Istruzione, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Comm. ✻, ✠, ☪.

Bon-Compagni, Cavaliere e Presidente Carlo, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Gr. Cord. ✻, ✠.

Promis, Carlo, Professore di Architettura nella scuola di applicazione per gli Ingegneri, Regio Archeologo, Ispettore dei Monumenti d'Antichità, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Accademico d'onore dell'Accademia Reale di Belle Arti, ✻.

Gorresio, Abate Gaspare, *predetto*.

Barucchi, Avvocato Francesco, Professore emerito di Storia antica nella R. Università, Consigliere onorario della pubblica Istruzione, Uffiz. ✻.

Bertini, Giovanni Maria, Professore di Storia della Filosofia antica nella Regia Università, Membro ordinario del Consiglio superiore di pubblica Istruzione, Uffiz. ✻.

Albini, Pietro Luigi, Professore di Filosofia del Diritto nella Regia Università, Membro ordinario del Consiglio superiore di pubblica Istruzione, Uffiz. ✻.

Carutti di Cantogno, Domenico, Ministro residente, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Comm. ✻, ✠, Gr. Cord. dell'O. d'Isab. la Catt. di Sp., Gr. Uffiz. dell'O. di Leop. del Belg.

Varese, Carlo, Dottore in Medicina, ✠.

Fabretti, Ariodante, Professore di Archeologia greco-latina nella Regia Università, Assistente al Museo di Antichità ed Egizio, ✻.

Ghiringhello, Giuseppe, Dottore in Teologia, Professore di Sacra Scrittura nella Regia Università, Uffiz. ❋.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Manzoni, Nob. Alessandro, Senatore del Regno, Accademico della Crusca, a Milano.

Coppi, Abate Antonio, Membro della Pontificia Accademia di Archeologia, ❋, a Roma.

Charvaz, Monsignor Andrea, Arcivescovo di Genova, Gr. Cord. ❋.

Martini, Pietro, Dottore in ambe Leggi, Socio del Collegio di Filosofia, e Presidente della Biblioteca della Regia Università di Cagliari, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, ❋, ✠.

Spano, Giovanni, Dottore in Teologia, Canonico Protonotario Apostolico della Chiesa Metropolitana di Cagliari, Professore emerito di Sacra Scrittura e Lingue Orientali, Rettore della Regia Università di Cagliari, Comm. ❋.

Tola, Pasquale, Consigliere nella Corte d'Appello di Genova, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Uffiz. ❋.

Amari, Michele, Senatore del Regno, Ministro dell'Istruzione pubblica, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), Comm. ❋, ✠.

Cavedoni, Monsignor Celestino, Professore di Sacra Scrittura e Lingua santa nella Regia Università di Modena, Bibliotecario della R. Biblioteca Palatina, Presidente della Deputazione di Storia patria per le provincie Modenesi, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), Uffiz. ❋, ✠.

ACCADEMICI STRANIERI.

Brugière di Barante, Barone Amabile Guglielmo Prospero, Membro dell'Istituto di Francia, Gr. Cr. della L. d'O. di F., Gr. Cord. di S. Aless. Newschi di R., a Parigi.

Thiers, Luigi Adolfo, Membro dell'Istituto di Francia, Gr. Uffiz. della L. d'O., a Parigi.

Boeckh, Augusto, Professore nella Regia Università e Segretario Perpetuo della Reale Accademia delle Scienze di Berlino, Socio Straniero dell'Istituto di Francia, Cav. della L. d'O. di F.

Cousin, Vittorio, Professore onorario di Filosofia della Facoltà delle

Lettere di Parigi, Membro dell' Istituto di Francia, Comm. della L. d' O. di Fr.

Costa di Beauregard, Marchese Leone, Presidente dell' Accademia Imperiale di Savoia, Comm. ❋; già *Accademico nazionale non residente.*

Grote, Giorgio, Membro della Società Reale di Londra, Socio corrispondente dell' Istituto di Francia (Accademia delle Scienze morali e politiche), a Londra.

Mommsen, Teodoro, Professore di Archeologia, Membro della Reale Accademia delle Scienze di Berlino, Socio corrispondente dell' Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), a Berlino.

MUTAZIONI

accadute nel Corpo Accademico dopo la pubblicazione del precedente Volume.

MORTI

22 gennaio 1861.

Tiedemann, Federigo, Professore d'Anatomia e di Fisiologia comparativa nell' Università di Heidelberg, Socio Straniero dell' Istituto Imperiale di Francia, C. della L. d'O. di F., a Heidelberg.

25 ottobre.

Di Savigny, Federigo Carlo, Professore nella Regia Università e Membro della Reale Accademia delle Scienze di Berlino, Socio Straniero dell' Istituto Imperiale di Francia.

18 novembre.

Riberi, Alessandro, Senatore del Regno, Chirurgo Primario di S. M. il Re e della Reale Famiglia, ecc., Professore di Medicina operativa nella Regia Università, Presidente del Consiglio superiore militare di Sanità, Membro del Consiglio superiore dell'Istruzione pubblica e della R. Accademia Medico-Chirurgica di Torino, ecc., ecc., Gr. Uffiz. ✻, e di ✪, Cav. e Cons. ✠, Comm. della L. d' O. di F. e dell' O. di C. di Port.

5 febbraio 1862.

Biot, Giovanni Battista, Professore di Fisica al Collegio di Francia e di Astronomia alla Facoltà delle Scienze di Parigi, Membro dell' Istituto di Francia, Comm. della L. d'O. di F., a Parigi.

7 giugno.

Callery, Giuseppe Maria, Segretario Interprete dell'Imperatore de' Francesi per le lingue della Cina, ✠, Cav. della L. d'O. di F. e dell' O. di Leop. del Belg., Gr. Collare Tartaro dell'Impero Cinese, a Parigi.

29 agosto.

Carlini, Francesco, Primo Astronomo e Direttore del R. Osservatorio di Milano, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia, Comm. ✻, ✠, C. della L. d'O. di F.

NOMINE

Grote, Giorgio, Membro della Società Reale di Londra, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze morali e politiche), a Londra, nominato il giorno 3 gennaio 1861 ad *Accademico Straniero* nella Classe delle Scienze morali, storiche e filologiche.

Mommsen, Teodoro, Professore d'Archeologia, Membro della Reale Accademia delle Scienze di Berlino, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle lettere), a Berlino, nominato il giorno 3 gennaio 1861 ad *Accademico Straniero* nella Classe delle Scienze morali, storiche e filologiche.

Matteucci, Carlo, Senatore del Regno, Ispettore generale dei telegrafi elettrici, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia, Comm. ❋, ✠, a Pisa, nominato il giorno 6 gennaio 1861 ad *Accademico nazionale non residente* nella Classe di Scienze fisiche e matematiche.

Carlini, Francesco, Primo Astronomo e Direttore del R. Osservatorio di Milano, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia, Comm. ❋, ✠, C. della L. d'O. di F., nominato il giorno 6 gennaio 1861 ad *Accademico nazionale non residente* nella Classe di Scienze fisiche e matematiche.

Amici, Giovanni Battista, Astronomo nel R. Museo di Fisica e di Storia naturale e Professore onorario nell'Istituto superiore di Firenze, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Uffiz. ❋, nominato il giorno 6 gennaio 1861 ad *Accademico nazionale non residente* nella Classe di Scienze fisiche e matematiche.

Matteucci, Carlo, Senatore del Regno, Ispettore generale dei telegrafi elettrici, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia, Comm. ❋, ✠, dalla categoria degli *Accademici nazionali non residenti* della Classe di Scienze fisiche e matematiche entrato in quella degli *Accademici residenti* il giorno 1 dicembre 1861.

Savi, Paolo, Professore di Anatomia comparata e Zoologia nella R. Università di Pisa, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Uffiz. ❋, Cav. dell'O. di S. G. di T., nominato il giorno 15 dicembre 1861 ad *Accademico nazionale non residente* nella Classe di Scienze fisiche e matematiche.

Ghiringhello, Giuseppe, Dottore in Teologia, Professore di Sacra Scrittura nella Regia Università, Uffiz. ❋, nominato il giorno 2 gennaio 1862 ad *Accademico residente* nella Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

Amari, Michele, Senatore del Regno, Professore di lingua e letteratura araba nelle scuole superiori pratiche e di perfezionamento in Firenze, Socio corrispondente dell' Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), Comm. ❋, ✠, nominato il giorno 2 gennaio 1862 ad *Accademico nazionale non residente* nella Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

Cavedoni, Monsignor Celestino, Professore di Sacra Scrittura e Lingua santa nella Regia Università di Modena, Socio corrispondente dell' Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), Uffiz. ❋, ✠, nominato il 2 gennaio 1862 ad *Accademico nazionale non residente* nella Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

Genocchi, Angelo, Professore di Analisi superiore nella R. Università di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Uffiz. ❋, nominato il 19 gennaio 1862 ad *Accademico residente* nella Classe di Scienze fisiche e matematiche.

Brioschi, Francesco, Professore di Matematica, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Comm. ❋, nominato il 19 gennaio 1862 ad *Accademico residente* nella Classe di Scienze fisiche e matematiche.

DONI

FATTI

ALLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

DAL 1.° DICEMBRE 1860 AL 1.° SETTEMBRE 1862.

Flora Brasiliensis, sive enumeratio plantarum in Brasilia haetenus detectarum, quas, cura Musei Caes. Reg. Vindobonensis, suis aliorumque botanicorum studiis descriptas et methodo naturali digestas, sub auspiciis Ferdinandi I Austriae Imperatoris et Ludovici I Bavariae Regis edidit Carolus Frid. Phil. De Martius. Fasc. XXVII – XXX. Lipsiae, 1861-1862, fol. fig. — S. M. IL RE D'ITALIA.

Elenco dei giornali e delle opere periodiche esistenti presso pubblici stabilimenti a Milano, compilato da Luciano Dell'Acqua. Milano, Bernardoni, 1861, 8.° — ACQUA (DELL').

Memoria del Professore Angelo Altobelli sulle virtù medicamentose della *Smilace Salsapariglia* in polvere avverso le infiammazioni eritematose e flemmonose. Aquila, 1862, 4.° — ALTOBELLI.

La nuova poesia, carme di Antonio Angeloni-Barbiani. Venezia, 1862, 8.° — ANGELONI BARBIANI.

Problemi del più alto interesse scientifico geometricamente risoluti e dimostrati dal Rev. D. Domenico Angherà. Napoli, 1861, 1 vol. 8.° — ANGHERÀ.

Numismatique Vallaisanne. Époque Mérovingienne, par M. J.-E. D'Angreville. Genève, 1861, 4.° fig. — ANGREVILLE (D')

Grande medicina italica o iatromatematica, di Gaetano Antinori; quinto concetto: Patogenia, fasc. 1.° Piacenza, Solari, 1861, 12.° — ANTINORI.

Sulla locomozione a motori idraulici e ad aria compressa per le ferrovie a forti pendenze; studi e proposte dell'Ingegnere Giuseppe Antonini. Milano, Bernardoni, 1861, 1 vol. 4.° fig. — ANTONINI.

AUCAPITAINE — Étude sur la caravane de la Mecque et le commerce de l'intérieur de l'Afrique; par M. le Baron Henri Aucapitaine. Paris, 1861, 8.°

Étude sur les Druzes; par M. le Baron Henri Aucapitaine, Paris, 1862, 8.°

Mollusques terrestres et d'eau douce observés dans la haute Kabylie; par M. le Baron Henri Aucapitaine. Paris, 1862, 8.°

Notice sur la tribu des Ait Fraoucen; par M. le Baron Henri Aucapitaine. (Extr. du n.° 24 de la *Revue Africaine*).

BABBAGE. — Observations on the discovery in various localities of the remains of human art mixed with the bones of extinct races of animals; by Charles Babbage. London, 1859, 8.°

BALSAMO. — Mémoire communiqué à la Société de Photographie de Paris sur un nouveau procédé; par M. Joseph-Eugène Balsamo. Paris, 8.°

BALUFFI. — Il Corriere delle Marche, N.° 31, 7 febbraio 1862. Ancona, Baluffi, 1862, 1 foglio, fol.°

BANCALARI. — Memoria seconda e terza intorno alle forze molecolari dei corpi; del Prof. Cav. Bancalari. Genova, 1861-62, 8.°

BARBERI. — La scienza nuova dell'armonia de' suoni e sue leggi, raccolte a codice da Americo Bàrberi. Milano, Agnelli, 1861, 1 vol. 4.°

BARRAL. — De l'influence exercée par l'atmosphère sur la végétation; par M. J.-A. Barral. Paris, 1850, 8.°

BARUFFI. — Passeggiate nei dintorni di Torino ai colti e gentili Torinesi; memoria ed ossequio di G. F. Baruffi. Vol. I, II. Torino, Stamperia Reale, 1853-54, 2 vol. 8.°

BEAUMONT (ÉLIE DE) — Éloge historique d'Adrien-Marie Legendre; par M. Élie de Beaumont. Paris, Didot, 1861, 4.°

BELANGER. — Théorie de l'engrenage hyperboloïde; par M. J.-B. Belanger; 4.°, litogr.

BELLAVITIS. — Appendice alle memorie sulla risoluzione numerica delle equazioni; del Prof. Giusto Bellavitis. Venezia, 1860, 4.°

Intorno ad alcune questioni di matematica pura elementare, parecchie delle quali sono proposte e non risolte nei nuovi Annali del Terquem; nota del Prof. Giusto Bellavitis, 8.°

Rivista di alcuni articoli dei *Comptes-rendus* dell'Accademia delle Scienze di Francia; del Prof. Giusto Bellavitis. Venezia, 1860, 8.°

Sposizione dei nuovi metodi di geometria analitica; memoria del Professore Giusto Bellavitis. Venezia, Antonelli, 1860, 1 vol. 4.°

Sul movimento istantaneo intorno ad un punto; nota del Prof. Giusto Bellavitis. Venezia, 1860, 8.°

Sunto dell'opera del Salmon *Lessons introductory to the modern higher algebra* (Dublin, 1859), ossia della teoria delle sostituzioni lineari, compilato dal Prof. Giusto Bellavitis. Venezia, 1861, 4.°

Osservazioni fisiche instituite in parecchi siti delle provincie venete durante l'eclissi solare del 18 luglio 1860, raccolte e discusse dal Dott. Antonio Berti. Venezia, Antonelli, 1861, 8.° fig. BERTI

Sul terremoto di Venezia del 19 luglio 1860; nota del Dott. Antonio Berti. Venezia, Antonelli, 1861, 8.°

Sui modi più acconci di provvedere Venezia d'acqua potabile; memoria di G. Bianco. Venezia, Naratovich, 1862, 1 vol. 8.° BIANCO

Descrizione delle forme cristalline di zolfo delle miniere del Cesenate; memoria del Prof. Cav. Giovanni Giuseppe Bianconi. Bologna, 1861, 4.° BIANCONI

Il diritto naturale applicato agli uomini ed alle nazioni, di Nicola De Blasiis. Napoli, stamperia del Fibreno, 1861, 2 vol. 8.° BLASIIS (DE).

Crónica Catalana de Ramon Muntaner: texto original, y traduccion Castellana, acompañada de numerosas notas por Antonio de Bofarull. Barcellona, Jepús, 1860, 1 vol. 8.° BOFARULL

Bulletin mensuel des séances de la Société centrale d'Agriculture du département de la Savoie; rédigé par M. J. Bonjean, 1861, n. 4, 6, 8. Chambéry, 1861-62, 8.° BONJEAN.

Quatrième Bulletin annuel de la Société centrale d'Agriculture du département de la Savoie etc.; rédigé par J. Bonjean; 5.ème année. Chambéry, 1862, 1 vol. 8.°

Alessandro Riberi; cenni necro-biologici per Giambattista Borelli; edizione coll'aggiunta di annotazioni. Torino, Biancardi, 1861, 8.° BORELLI

Ancona e dintorni; cenni di storia naturale dell'Ingegnere Francesco De Bosis. Ancona, 1860, 8.° BOSIS (DE)

Il clima di Ancona, dedotto dalle osservazioni meteorologiche del Prof. D. Luca Zazzini; studio del Professore Francesco De-Bosis. Ancona. 1862, 8.°

Il Montagnolo; studi ed osservazioni dell'Ingegnere Francesco De-Bosis. Fano, Lana, 1859, 8.°

I minerali utili delle Marche; proposta di studi del Prof. Ingegnere Francesco De-Bosis. 8.°

Le industrie della Provincia d'Ancona; relazione del Prof. Ingegnere Francesco De-Bosis. Firenze, 1861, 8.°

Rapporto ed appendice sulla ampliazione della città d'Ancona; letti nel

pubblico Consiglio comunale il 22 ottobre 1861. Ancona, 1862, 4.° gr., con carta topogr.

Bossa. Ai redentori, municipii ed alla gioventù d'Italia; carmi per Goffredo Alessandro Bossa. Saluzzo, Lobetti-Bodoni, 1861, 1 vol. 8.°

Botta. A discourse on the life, character, and policy of Count Cavour, delivered in the hall of the New York historical Society, february 20, 1862; by Vincenzo Botta. New York, 1862, 8.°

Brighenti. Ricerche geometriche ed idrometriche per la scuola degl'ingegneri in Roma; di Maurizio Brighenti; seconda edizione. Pisa, Nistri, 1862, 1 vol. 4.°

Sulla corrente litorale, di seguito alla Memoria del Comm. Paleocapa; Memoria del Prof. Cav. Maurizio Brighenti. Bologna, Gamberini e Parmeggiani, 1861, 4.°

Bruzzone. I secoli; carme di Pier Luigi Bruzzone. Alessandria, Pagnoni, 1861, 12.°

Burin du Buisson Traité de l'action thérapeutique du perchlorure de fer, considéré à l'extérieur, comme hémostatique etc; par A.-M.-B. Burin du Buisson. Lyon, Rey et Sézanne, 1860, 1 vol. 8.°

Busoni e Rossi. Sul battito del cuore nel vuoto pneumatico; studi sperimentali dei Dottori D. Busoni e L. M. Rossi. Venezia, Antonelli, 1861, 4.° picc.

Caligny. Observations sur les effets de la chaleur dans les siphons renversés à trois branches, qui fonctionnent à Bardonnèche, au mont Cenis et du côté de Modane; notices par le Marquis Anatole de Caligny. Bruxelles, 1861, 8.°

Observations sur les effets de la chaleur dans les siphons renversés à trois branches, qui fonctionnent au mont Cenis; lettre de M. de Caligny. Versailles, 1861, 4.°

Calloud. Rapports de la géologie avec l'hydrologie minérale de la Savoie; par Ch. Calloud. Genève, 1860, 8.°

Campani. Sopra una pioggia d'acqua rossa; lettera al Prof. Comm. Carlo Matteucci scritta dal Professore Giovanni Campani. Siena, 1861, 8.°

Campana e Gabbrielli. Risposta dei Professori G. Campana e S. Gabbrielli allo scritto del Professore C. Toscani, intitolato: *Obbietti agli studi chimici e microscopici sull'acqua rossa caduta in Siena nei giorni* 28 *e* 31 *dicembre* 1860, *e* 1.° *gennaio* 1861. Siena, Porri, 1861, 8.°

Sulla pioggia d'acqua rossa caduta in Siena nei giorni 28 e 31 dicembre 1860, e 1.° gennaio 1861; studi chimici e microscopici dei Dottori G. Campana e S. Gabbrielli. Siena, Porri, 1861, 8.°

Campori. Del concetto politico di Alessandro Tassoni; per Giuseppe Campori; 4.°

Informazioni della R. Università di Modena; per G. Campori. Modena, 1861, 8.°

Relazione degli studi fatti nell'Archivio Palatino di Modena nell'anno 1861, presentata alla Deputazione di Storia patria nella tornata del 17 gennaio 1862; di Giuseppe Campori; 8.°

Relazione di alcuni studi fatti nell'Archivio Estense, presentata alla Deputazione di Storia patria nella tornata del 7 dicembre 1860 da Giuseppe Campori. 12.°

I Gobii del golfo di Genova; memoria del Prof. G. Canestrini. 8.° fig. CANESTRINI

I Pleuronettidi del golfo di Genova; memoria del Prof. G. Canestrini. 8.° fig.

Sopra una nuova specie di *Tetrapturus;* nota di G. Canestrini. 8.° fig.

Catalogo de' tremuoti avvenuti nella parte continentale del Regno delle Due Sicilie, posti in raffronto con le eruzioni vulcaniche ed altri fenomeni cosmici, telluriei e meteorici; di Ernesto Capocci. Napoli, 1859, 4.° CAPOCCI.

Letters to the President, on the foreign and domestic policy of the union, and its effects, as exhibited in the condition of the people and the state; by H. C. Carey. Philadelphia, 1858, 1 vol. 8.° CAREY.

Cenno estratto dal n.° 31 della *Lombardia* sui lavori della Commissione scientifica dei pesi e delle misure a sistema metrico esistente in Milano fin dall'anno 1795. 1/4 di foglio. CARLINI.

Determinazione del tempo e della latitudine geografica dei luoghi coll'uso d'un semplice cannocchiale; di Francesco Carlini. Milano, 1861, 8.°

Dei principii del governo libero, e saggi politici, di Domenico Carutti; nuova edizione riveduta dall'autore. Firenze, Le Monnier, 1861, 1 vol. 8.° CARUTTI.

Un projet de loi sur la propriété littéraire et artistique; par C. Casati. Paris, 1862, 8.° CASATI.

De Abietinearum Carr. floris feminei structura morphologica, dissertatio etc.; auct. Rob. Caspary. Regimonti Pr.; 4.° CASPARY.

Trattato elementare di fisica applicata alle scienze naturali ed alle arti; per Filippo Cassola. Napoli, 1846, 2 vol. 8.° CASSOLA.

Sull'ordinamento del servizio sanitario comunale nel regno d'Italia; lettere del Dott. Pietro Castiglioni al Dott. Gaetano Strambio. Milano, Chiusi, 1861, 8.° CASTIGLIONI

CAVALLERI — Nota sull'esame della semente de' bachi; del Prof. Cavalleri Giovanni. ¼ foglio, 4.° fig.

Osservazioni storiche e comparative sull' Epyornis; del Padre Giovanni M. Cavalleri. 8.°

CAVALLERO — Corso teorico-pratico ed elementare di disegno axonometrico applicato specialmente alle macchine ecc.; per l' Ingegnere Cavallero Agostino. Torino, 1861, 1 vol. 8.°, con atlante, fol.°

CAVEDONI — Cenni autentici intorno alla vita ed agli scritti del Conte Bartolomeo Borghesi; del prof. C. Cavedoni. Modena, eredi Soliani, 1860, 8.°

Monumento sepolcrale cristiano del terzo o quarto secolo, scoperto di recente in Modena; di C. Cavedoni. Modena, 8.°

Nuove osservazioni sopra le antiche monete della Cirenaica; di Celestino Cavedoni. 8.°

Nuovi studi sopra le antiche monete consolari e di famiglie romane; di C. Cavedoni. 8.°

Ragguaglio storico del ritrovamento di un ripostino di monete d'argento dei bassi tempi, fatto a Rosola nella montagna Modenese l'anno 1841; memoria del Prof. D. Celestino Cavedoni. Modena, eredi Soliani, 1860, 4.°

CECCOLI. — Ioduro di ferro in soluzione acquosa indecomponibile con mallo di noci distillato per uso terapeutico, sua preparazione in grande presso l'autore M. Ceccoli. 4.°

CERVETTO. — Le riunioni degli Scienziati Italiani; memoria letta all'Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna il 20 dicembre 1860 da Giuseppe Cervetto. Bologna, 1861, 8.°

Prelezione al nuovo corso di storia della medicina, letta nella R. Università di Bologna da Cervetto Giuseppe il 27 novembre 1860. Bologna, Vitali, 1861, 4.°

CEVASCO. — Manuale pratico pei Giurati del regno d' Italia, compilato dal Cav. Giacomo Cevasco. Genova, 1862, 8.° picc.

CHAMPOLLION-FIGEAC (AIMÉ). — Manuel de l'Archiviste des préfectures, des mairies et des hospices, contenant les lois, décrets etc., relatifs au service des archives etc.; par M. Aimé Champollion-Figeac. Paris, 1860, 8.°

CHAMPOLLION-FIGEAC (J. J.) — Cimetière gaulois de Cély (Seine et Marne): notice des fouilles faites d'après l'ordre de l'Empereur en l'année 1860; par J. J. Champollion-Figeac. Paris, Didot frères et fils, 1861, 8.° fig.

CIBRARIO. — Descrizione e cronaca d' Usseglio fondata sopra documenti autentici; del Conte Luigi Cibrario. Torino, eredi Botta, 1862, 16.°

Lettere inedite di Santi, Papi, Principi, illustri Guerrieri e Letterati, con note ed illustrazioni del Cav. Luigi Cibrario. Torino, eredi Botta, 1861, 1 vol. 8.°

Notizie sulla vita di Carlo Alberto, iniziatore e martire dell'indipendenza d'Italia, date dal Cav. Luigi Cibrario. Torino, eredi Botta, 1861, in 8.°

Delle inscrizioni venezziane, raccolte ed illustrate da Emmanuele Antonio Cicogna. Fasc. 24 e 25; 4.° fig. Cicogna.

Lettere scelte di illustri personaggi, tratte dai monoscritti legati dal Cav. ab. Costanzo Gazzera alla R. Accademia delle Scienze, per cura di Gaudenzio Claretta (Estr. dal vol. I della *Miscellanea di Storia Italiana*); 8.° Claretta

Remarks on the topography and diseases of the gold coast; by R. Clarke. London, 8.° Clarke.

Mémoire sur un nouveau procédé propre à mesurer l'indice moyen et l'écartement des axes optiques dans certaines substances où cet écartement est très-grand, et sur la séparation de plusieurs espèces minérales regardées jusqu'ici comme isomorphes; par M. des Cloizeaux. Paris, 4.° Cloizeaux (Des).

Note sur les modifications temporaires et sur une modification permanente que l'action de la chaleur apporte à quelques propriétés optiques du Feldspath orthose; par M. des Cloizeaux. Paris, 4.°

Notice sur les travaux minéralogiques et géologiques de M. des Cloizeaux. Paris, 1861, 4.°

Compte rendu de l'état de l'enseignement médical et du service de santé civil et militaire de l'Égypte au commencement de mars 1849; par A. B. Clot-Bey. Marseille, 8.° Clot-Bey.

Le percement de l'isthme de Suez; discours de réception prononcé à l'Académie de Marseille etc. par le Docteur Clot-Bey. Marseille, 1860; 8.°

Méhémet-Aly, vice-roi d'Egypte; par M. Clot-Bey. Marseille, 1862, 8.°

Manuale pratico d'idrodinamica, di Francesco Colombani; 3.ª edizione. Milano, Gareffi, 1861, 8.° Colombani.

Sull'edificio di estrazione del nuovo modulo d'acqua; per l'Ingegnere Francesco Colombani. Milano, 1860, 8.° fig.

Il discorso d'Iperide in favore d'Euxenippo, scoperto in Egitto e pubblicato in Inghilterra nel 1853, ora per la prima volta riprodotto Comparetti.

in Italia con un discorso critico e schiarimenti da Domènico Comparetti Pisa, Nistri, 1861, 1 vol. in 4.°, con *fac-simile*.

CONESTABILE — Italie. Spicilegium de quelques monuments écrits ou anépigraphes des Étrusques. Clusium, Orviette, Pérouse, Musées de Rome et Trente; par Giancarlo Conestabile. Paris, 1861, 8.°

COPPI — Annali d'Italia dal 1750, compilati da A. Coppi. Tomo XI, 1849. Firenze, tipogr. Galileiana, 1862, 1 vol. 8.°

CORBIOT — Revue sur le système d'inoculations curatives du Docteur Télèphe Demartis; par J.-B. Corbiot. Bordeaux, 1862, 8.°

CORNALIA — Sui caratteri che presenta il seme sano dei bachi da seta, e come questo si possa distinguere dal seme infetto; osservazioni del Prof. Emilio Cornalia. Milano, 1860, 8.°

CORRIDI — De l'enseignement supérieur en Italie à propos du projet de loi de M. le Sénateur Ch. Matteucci; par M. le Chev. Ph. Corridi, à M. le Docteur Cerise à Paris. Florence, 8.°

CORVO — Estudos economicos e hygienicos sobre os arrozaes; por João de Andrade Corvo. Lisboa, imprensa nacional, 1860, 1 vol. 4.°

COSTA (ACHILLE) — De quibusdam novis insectorum generibus descriptis, iconibusque illustratis, ab Achille Costa, 4.°

Osservazioni sull'allevamento de' bachi da seta del seme chinese portato in Italia dal Castellani, eseguito in Napoli a cura del Reale Istituto d'incoraggiamento; memoria di Achille Costa, 4.° fig.

COSTA (ORONZIO GABRIELE) — Bullettino dell'Accademia degli Aspiranti Naturalisti. Anno 1861, terzo della sesta Olimpiade di sua fondazione. Napoli, Cons, 1860, 8.°

Ittiologia fossile italiana del Prof. Oronzio Gabriele Costa; opera da servire di supplemento alle ricerche sui pesci fossili di L. Agassiz. Napoli, 1853 al 1860, in 4.°

Proposta di una nuova organizzazione e convocazione de' Congressi scientifici italiani; di Oronzio Gabriele Costa. Napoli, 1860, 4.°

Sull'attuale movimento scientifico in Italia per le sole scienze naturali; notizie del Prof. Oronzio Gabriele Costa. Napoli, 1862, 8.°

COSTA SAYA — Del filo di prova, ovvero nuove ricerche critiche intorno alla distribuzione dell'elettricità statica sui conduttori; del Prof. Antonio Costa Saya. Messina, Pastore, 1861, 8.°

CREMONA — Courbes gauches décrites sur la surface d'un hyperboloïde à une nappe; par M. L. Cremona. Rome, 1861, 4.°

Intorno ad una proprietà delle superficie curve, che comprende in sè

come caso praticolare il teorema di *Dupin* sulle tangenti coniugate; nota del Dott. Luigi Cremona. Roma, 1860, 4.°

Intorno alla curva gobba del quart'ordine, per la quale passa una sola superficie di secondo grado; memoria del Prof. Luigi Cremona. Roma, 1862, 4.°

Intorno alla curva gobba del quart'ordine, per la quale passa una sola superficie di secondo grado; sunto di una memoria letta dal Professore L. Cremona all'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna ai 7 di marzo 1861. Bologna, Gamberini e Parmeggiani, 1861, 8.°

Prolusione ad un corso di geometria superiore, letta dal Dott. Luigi Cremona nell'Università di Bologna, 9 novembre 1860. Milano, Agnelli, 1861, 8.°

Sopra un problema generale di geometria; nota del Dott. Luigi Cremona. Roma, 1860, 4.°

Sulle coniche, e sulle superficie di secondo grado congiunte; memoria del Dott. Luigi Cremona. Roma, 1861, 4.°

Sulle superficie di second'ordine omofocali; del Dott. Luigi Cremona. Roma, 1860, 4.°

Sulle superficie gobbe del terz'ordine; memoria del Dott. Luigi Cremona. Milano, 1861, 4.°

Trattato della malattia dominante nella vegetazione, ossia la crittogamologia generale e speciale della vite, gelso e baco, rimedi onde ridurli allo stato normale sano e prospero; di Mariano Crespi. Milano, Albertari, 1862, 8.° CRESPI

Études et expériences synthétiques sur le métamorphisme et sur la formation des roches cristallines; par M. Daubrée. Paris, impr. Impériale, 1860, 1 vol. 4.° DAUBRÉE.

Expériences sur la possibilité d'une infiltration capillaire au travers des matières poreuses, malgré une forte contrepression de vapeur; applications possibles aux phénomènes géologiques; par M. Daubrée. Paris, Martinet, 1861, 8.°

Notices des travaux de M. Daubrée. Paris, 4.°

Note zoologiche di Filippo De-Filippi, 8.° DE FILIPPI

Osservazioni zoologiche; per F. De-Filippi, 1861, 8.°

Théorie du mouvement de la Lune, par Ch. Delaunay; tome 1er. Paris, Mallet-Bachelier, 1860, 1 vol. 4.° DELAUNAY

Recherches sur l'eau dans l'intérieur de la terre; par M. Delesse. Paris, 1862, 8.° DELESSE.

DELESSE et LAUGEL. Revue de géologie pour l'année 1860; par M. Delesse et M. Laugel. Paris, 1861, 1 vol. 8.

DELEUSE De l'azote et des matières organiques dans l'écorce terrestre; par M. Deleuse. Paris, Thunot et Comp., 1861, 1 vol. 8.°

DENOIX DES VERGNES. M. de Cavour; par Mad. Fanny Dénoix des Vergnes. Compiègne, 1861, 8.°

DESPINE. Sanctuaire et abymes de Myans près d'Aix-les-Bains (Savoie); notice historique et archéologique présentée à la Société des Antiquaires de France par le Baron C. Despine. Annecy, Thésio, 1862, 8.°

DESPRES. Traité de l'érysipèle; par le Docteur Armand Desprès. Paris, Martinet, 1862, 1 vol. 8.°

DINI. Della costituzione civile del clero o dell' incameramento dei beni ecclesiastici; discorso di Francesco Dini. Firenze, 1860, 8.°

DIONISOTTI. Memorie storiche della Città di Vercelli, precedute da cenni statistici sul Vercellese; di Carlo Dionisotti. Tomi 1-3. Biella, Amosso, 1861, 8.°

DUPARCQUE. Mémoire sur l'accouchement par dilatation forcée du col de l'utérus; par M. le Docteur Duparcque. Paris, 1861, 8.°

ELLERO. Della critica criminale; di Pietro Ellero. Venezia, tip. del Commercio, 1860, 1 vol. 8.°

Della filosofia del diritto (prelazione all'Accademia scientifico-letteraria di Milano nel dì 9 febbraio 1861); di Pietro Ellero. Milano, 1861, 8.°

Giornale per l'abolizione della pena di morte, diretto da Pietro Ellero, fasc. 1-4. Milano, Redaelli, 1861, 8.°

EVEREST. Rectification of logarithmic errors in the measurements of two sections of the meridional arc of India, in a letter to professor Stokes; by Colonel Everest, 8.°

FALCONCINI. Rivista dei Comuni Italiani, fondata e diretta da Enrico Falconcini; volume I, fasc. 2 e 3. Firenze, Cellini, 1860.

FAVRE. Notice sur la réunion extraordinaire de la Société Géologique de France à Saint-Jean-de-Maurienne (Savoie), le 1.er septembre 1861; par M. Alph. Favre; 1862, 8.° fig.

Observations relatives à la note de M. Emile Benoît sur les terrains tertiaires entre le Jura et les Alpes, par M. Alph. Favre; 8.°

FAYOL. Univers. Dieu et la nature. L'existence consiste dans la création du mouvement et dans l'anéantissement de ce même mouvement; par B. Fayol. Paris, 1860, 2 pag. 8.°

FENICIA. Anacreontica dettata dal Comm. Fenicia nel dì 12 aprile 1861 ecc.; 1/4 di foglio 4.°

Copia dell'epistola alla Santità del Pontefice che reggerà la Santa Sede quando verrà pubblicata la politica del Comm. Fenicia ecc. Napoli, Fattorini, 1862, 8.°

Copia estratta dal primo dei dodici volumi della politica del Comm. Salvatore Fenicia. Napoli, Piscopo, 1861, 8.°

Dissertazione sul tifo colerico del Comm. Salvatore Fenicia. Napoli, Piscopo, 1855, 8.°

Il sogno; componimento estratto dai manoscritti del Comm. Fenicia. Napoli, Piscopo, 1862, 16.°

L'oracolo d'Esculapio d'Epidauro sulla lebbra d'Italia, scritto nel 1845 dal Comm. Fenicia. Napoli, Piscopo, 1861, 8.°

Appello a tutte le Università cospicue d'Europa; di V. Flauti, 8.° FLAUTI.

Esame critico di ciò che l'Arago ebbe scritto sulle invenzioni, scoperte ed opere di Galileo Galilei, poi pubblicato nel vol. III delle sue Biografie nel 1855. Napoli, Nobile, 1856, 4.°

Giunta ad un articolo del Giornale *La Settimana* del 7 giugno 1861, n.° 51; di V. F., in 8.°

Gli uomini illustri dell'Italia una. 8.°

Lettera di Vincenzo Flauti. Napoli, 1861, 4.°

Rivista da un cittadino senza partito di ciò che si è operato per la pubblica istruzione del già regno di Napoli nell'ultimo atto della sua convulsione politica, e pronostico se non si accorre a ripararvi. Bologna, 1861, in 8.°

Observations météorologiques faites à 9 heures du matin à l'observatoire de Lyon du 1er décembre 1857 au 1.er décembre 1859, par M. Aimé Drian, sous la direction de M. Fournet. 8.° FOURNET

Résumé des observations recueillies en 1860 et 1861 dans le bassin de la Saône par les soins de la Commission hydrométrique de Lyon. 4.°

Lettre de M. Fournet à M. Mathéron, Président de la Commission des soies, sur le résultat de ses observations faites en Algérie. 8.°

Preventiva sposizione di taluni monumenti Segestani inediti e di talune nuove ricerche archeologiche; del Cav. Giovanni Fraccia. Palermo, Nocera, 1861, 8.° fig. FRACCIA.

Recht und Rechtspflege in Preussen, betrachtet an einem Beifpiele: von Julius Freese. Berlin, 1858, 8.° FREESE.

Description des monuments de Dehli en 1852, d'après le texte hindoustani de Saiyid Ahmad Khan; par M. Garcin de Tassy. Paris, imprimerie Impériale, 1861, 8.° GARCIN DE TASSY.

Discours de M. Garcin de Tassy à l'ouverture du cours d'hindoustani à l'École impériale et spéciale des langues orientales vivantes, le 7 février et le 2 décembre 1861. Paris, 1861; 2 opusc. 8.°

GARILLI — I fasti di Piacenza, per Raffaele Garilli. Piacenza, Missaghi, 1861, 1 vol. 8.°

GASTALDI (BARTOLOMEO). — Die Wappenrolle von Zürich. Ein heraldisches Denkmal des vierzehnten Jahrhunderts; herausgegeben von der Antiquarischen Gesellschaft in Zurich. Zurich, 1860, in 4.°, tav. n.° 25.

Nuovi cenni sugli oggetti di alta antichità trovati nelle torbiere e nelle marniere dell'Italia; di Bartolomeo Gastaldi. Torino, Marzorati, 1862, 4.° fig.

GENERALI e GHISELLI. — Della febbre tifoidea equina; osservazioni ed esperienze del Dott. fisico Giovanni Generali, e dello zooiatro Antonio Ghiselli, con appendice. Modena, Moneti, 1861, 8.°

GERA. — Della istruzione di cui abbisogna l'Italia; studi di Francesco Dott. Gera. Torino, Franco e figli, 1862, 8.°

GIACOLETTI. — Il vapore, nuovo saggio poetico didascalico latino e italiano, preceduto da riflessioni sullo studio e l'uso della lingua latina; del Professore Giuseppe Giacoletti. Torino, Paravia e Comp., 1861, 8.°

GIBB. — On Canadian Caverns; by George D. Gibb. London, 1861, 8.° fig.

GIBELLINI e GHISELLI. — Cenni storici sopra la R. Scuola zooiatrica di Modena, colla descrizione del rispettivo museo; per il Prof. Lodovico Gibellini e Dott. Antonio Ghiselli. Modena, Moneti, 1862, 4.°

GIUDICE (DEL). — Scritti inediti di Giambattista Vico, tratti da un autografo dell'autore, e pubblicati da Giuseppe Del Giudice. Napoli, stamp. della R. Università, 1862, 8.°

GRAHAM. — A lunar tidal wave in the north American lakes, demonstrated by J. D. Graham. Cambridge, 1861, 8.° fig.

GRANVILLE. — On certain phenomena, facts, and calculations, incidental to or connected with the power and act of propagation in females of the industrial classes in the metropolis etc.; by A. B. Granville, 8.°

Sudden death; by A. B. Granville. London, 1854, 1 vol. 8.°

The mineral springs of Vichy, a sketch of their chemical and physical characters, and of their efficacy in the treatment of various diseases, etc. London, 1859, 1 vol. 8.°

The Sumbul: a New Asiatic remedy of great power against nervous disorders, spasms of the stomach, etc.; by A. B. Granville; 2.d edition. London, 1859, 12.°

Algemeine Theorie der Krümmungeslinien; von J. A. Grunert. 8.° GRUNERT.

De problematis Kepleriani solutionibus. Dissertatio inauguralis astronomico-mathematica quam . . . in alma literarum Universitate Gryphica ad summos in philosophia honores rite obtinendos . . . . cum thesibus adiectis publice defendet auctor Joannes Streit. Gryphisvaldiae, 1861, 8.°

Directe Bestimmung der Durchschnittspunkte der Bahnen Zweier in Kegelschnitten sich um die Sonne bewegender Weltkörper; von J. A. Grunert. Wien, 1861, 4.°

Gnomonik für jede beliebige Ebene in Raume, mit Rücksicht auf die Anwendung der neueren Geometrie zur Ausführung gnomonischer Constructionen; von J. A. Grunert. Greifswald. 8.°

I. Lagenbestimmungen auf der Kugel, eine Ergänzung der sphärischen Trigonometrie, mit besonderer Rücksicht auf Geodäsie. - II. Ueber Länge und Breite, reducirte Länge und reducirte Breite auf dem dreiaxigen Ellipsoid; von J. A. Grunert. Greifswald, 8.°

I. Ueber die Entfernungen der merkwürdigen Punkte des ebenen Dreiecks von einander. – II. Einige merkwürdige Ausdrücke für die dreiseitige Pyramide; von J. A. Grunert. Greifswald, 8.°

Philologie orientale appliquée; note chronologique sur les travaux de l'École vulgarisatrice. Nancy, 1862, 8.° GUERRIER DE DUMAST

Sur l'avenir qui reste à la poésie (décembre, 1860). Nancy, 8.°

Dell'influenza dei prati irrigui, marcite ed ortaglie sulla pubblica igiene; memoria del Geometra Giovanni Guida. Novara, 8.° GUIDA.

Manuale di risocoltura, del Geometra Giovanni Guida, con appendice sulla legislazione delle risaie; nuova edizione. Novara, Rusconi, 1861, 8.°

The Imperial and Royal Geological Institute of the Austrian empire; London international exhibition 1862. Wienn, 1862, 8.° HAIDINGER

Catalogue des végétaux et graines disponibles et mis en vente par la pépinière centrale du Gouvernement au Hamma (près Alger) pendant l'automne 1860 et le printemps 1861; par A. Hardy. Alger, 1860, 8.° HARDY

De la culture du tabac à Java; par M. Hardy, suivant les renseignements fournis par M. Klein. Alger, Bouyer, 1861, 8.°

On some new laws of reflexion of polarized light; by the Rev. Samuel Haughton. 8.° HAUGHTON

On the natural constants of the healthy urine of man, and a theory of work founded thereon; by the Rev. Samuel Haughton. Dublin, 1860, 8.°

On the reflexion of polarized light from the surface of transparent boides; by the Rev. Samuel Haughton. 8.°

On the Solar and Lunar diurnal tides, of the coasts of Ireland; by Rev. Samuel Haughton. 8.°

Short account of experiments made at Dublin, to determine the azimuthal motion of the plane of vibration of a freely suspended pendulum. Dublin, 1851, 8.°

The tides of Dublin bay and the Battle of Clontarf, 23 rd april 1014; by the Rev. Samuel Haughton, and James Henthorn Todd. Dublin, 1861, 8.°

HEUFLER. Die Laubmoose der östorreichischen Torfmoore etc.; won Lud. R. v. Heufler. 8.°

Die Verbreitung von *Asplenium fissum* Kit.; von Ludwig R. v. Heufler. 8.°

Untersuchungen über die Hypneen Tirol's; von Ludwig Ritter von Heufler. Wien, 1860, 8.°

HILLEBRAND. Dino Compagni: Étude historique et littéraire sur l'époque de Dante; par Karl Hillebrand. Paris, 1861, 1 vol 8.°

HOFMANN. Contributions to the history of the phosphorus-bases; by A. W. Hofmann; parts I–III. London, 1861, 4.°

HÖRNES. Die fossilen Mollusken des Tertiar-beckens von Wien; von D.r Moriz Hörnes; Band II, n. 3-4; Bivalven. Wien, 4.° fig.

HUBE. Antiquissimae constitutiones synodales provinciae Gneznensis, maxima ex parte nunc primum e codicibus manu scriptis typis mandatae; editionem curavit Romualdus Hube. Petropoli, 1856, 1 vol 8.°

HURTADO. Munda Pompeiana; memoria escrita por D. José y D. Manuel Oliver Hurtado ecc. Madrid, Galiano, 1861, 1 vol. 8.° gr.

HUXLEY. The oceanic hydrozoa, a description of the calycophoridae and Physophoridae observed during the voyage of H. M. S. *Rattlesnake* in the years 1846–50, with a general introduction by Thomas Henry Huxley. London, 1859, 1 vol. 4.° gr., fig.

KLANDER. Iscrizione in Rozzo d'Istria dell'anno 541, di P. Klander. Trieste, 1860, 12.°

KOKSCHAROW. Beschreibung des Alexandrits; von Nicolai v. Kokscharow. S.t Petersburg, 1862, 4.° fig.

Notiz über die Krystallform und Winkel des Hydrargillits auf den Schischimsker Bergen; von N. v. Kokscharow. 8.°

Ueber den Kotschubeit, eine neue Klinoclorart; von N. v. Kokscharow. 8.°

INZANI e LEMOIGNE. Sulle origini e sull'andamento di vari fasci nervosi del cervello; ricerche anatomiche di G. Inzani e di A. Lemoigne. Parma, Ferrari, in 4.° fig.

Storia della Università di Genova scritta dal P. Lorenzo Isnardi; Parte I.ª, fino al 1773. Genova, 1861, 1 vol. 8.° ISNARDI.

Statistica della istruzione pubblica in Palermo dell'anno 1859; per Federico Lancia di Brolo. Palermo, 1860, 1 vol. 8.° LANCIA DI BROLO.

Essai de classification des suites monétaires de la Géorgie, dépuis l'antiquité jusqu'à nos jours; par M. Victor Langlois. Paris, impr. Impériale, 1860; 1 vol., 4.° fig. LANGLOIS.

Supplément à l'essai de classification des suites monétaires de la Géorgie, depuis l'antiquité jusqu'à nos jours; par Victor Langlois. Bruxelles, 1861; 8.° fig.

Check list of the Shells of north America; by W. G. Binney; second edition. Philadelphia, 8.° LEA.

Observations on the Genus *Unio* together with descriptions of new species, their soft parts and embryonic forms, in the family *Unionidae;* by Isaac Lea. Philadelphia, 4.°

Publications of Isaac Lea on recent conchology, extracted from a list of american Writers on recent conchology; by George W. Tryon J.r Philadelphia. 1861, 8.°

Congrès artistique d'Anvers, août 1861; discours de M. S. E. V. Le Grand de Reulandt. Anvers, 1862, 8.° LE GRAND DE REULANDT

Notice cosmologique; par M. Lenglet. Douai, 1861, 8.° fig. LENGLET.

Commentaire sur le Cratyle de Platon; par Charles Lenormant. Athènes, Coromélas, 1861, 1 vol 8.° LENORMANT

Mémoire sur les antiquités du Bosphore Cimmérien, figurées et décrites dans le grand ouvrage publié en 1854, sous les auspices du Gouvernement Russe; par M. Ch. Lenormant. Paris, imprimerie Impériale, 1861, 4.°

Conférence sur les travaux du canal de Suez, et le sort des ouvriers en Égypte; par M. Ferdinand de Lesseps. Paris, 1862, 8.° LESSEPS (DE)

Conférences sur les travaux du canal de Suez, et sur l'organisation de la compagnie; par M. Ferd. de Lesseps. Paris, 1862, 8.°

La vita nell'universo; di Paolo Lioy. 1861, 8.° LIOY

Sulle scuole serali gratuite instituite dall'Accademia Olimpica di Vicenza a vantaggio degli operai; relazione del Segretario Paolo Lioy. Padova, Bianchi, 1862, 4.°

Delle accensioni volcaniche e della ipotesi del calore centrale della terra; memoria del Prof. Cav. Agatino Longo. Catania, 1862, 8.° LONGO.

MARTINI (DE). Sulla colorazione della vista e dell'urina prodotta dalla santonina; per A. De Martini, 2.ª edizione. Napoli, 1859, 4.°

MASSALONGO (Famiglia). Della vita scientifica del Dottore Abramo Bartolomeo Massalongo; relazione del Prof. Roberto De Visiani. Venezia, Antonelli, 1861, 8.°

MATTEUCCI Manuale di telegrafia elettrica; di Carlo Matteucci. Torino, 1861, 1 vol. 8.° fig.

MÉNANT. Les écritures cunéiformes; exposé des travaux qui ont préparé la lecture et l'interprétation des inscriptions de la Perse et de l'Assyrie; par M. Joachim Ménant. Caen, Hardel, 1860, 1 vol. 8.°

Les noms propres Assyriens; recherches sur la formation des expressions idéographiques par M. Joachim Ménant. Caen, Hardel, 1861, 1 vol. 8.°

Principes élémentaires de la lecture des textes Assyriens; par M. Joachim Ménant. Paris, 1861, 8.°

MESNIL-MARIGNY (Dr.) Les libres échangistes et les protectionnistes conciliés, ou solution complète des principales questions économiques; par J. du Mesnil-Marigny; deuxième édition. Paris, Baçon et C.e, 1860, 1 vol. 8.°

Société d'économie politique; défense des opinions de M. du Mesnil-Marigny. 8.°

MICHELIN. Monographie des Clypéastres fossiles; par M. Hardouin Michelin. Paris, Martinet, 1861, 4.° fig.

MIDRE et CHARIÈRE. Appareil propre à conserver indéfiniment le vide sous les récipients des machines pneumatiques; par MM. Midre et Aristide Charière. 8.°

Expériences de gazodynamique et d'hydrodynamique faites à Ahun (Creuse); par MM. Midre et Aristide Charière. 8.°

Hygromètre à cheveu de Saussure, donnant les *maximum* et *minimum* d'humidité à l'aide d'une seule observation; par MM. Midre et Aristide Charière. 8.

Observations météorologiques faites par MM. Midre et Aristide Charière, pendant l'année 1859, à Ahun (Creuse), à 448m 22c d'altitude; 8.°

MINÀ-PALUMBO Ad Emilia sui cosmetici; di Francesco Minà-Palumbo. Palermo, 1846, 12.°

Catalogo degli uccelli delle Madonie; di Francesco Minà-Palumbo. 4.°

Con quali mezzi si può assistere una donna con bacino viziato dal settimo mese in poi di gravidanza; discorso di Francesco Minà-Palumbo. Messina, 1846, 8.°

Giornale della Commessione d'agricoltura e pastorizia in Sicilia. Palermo, 1860, 8.°

Introduzione alla storia naturale delle Madonie, scritta da Francesco Minà-Palumbo. Palermo, 1844, 8.°

Notizie sui Frassini di Sicilia, e sulla coltivazione dell'Amolleo in Castelbuono; di Francesco Minà-Palumbo. Palermo, 1847, 16.°

Storia naturale delle Madonie; catalogo con appendice dei Lepidotteri diurni; di Francesco Minà-Palumbo. Palermo, 1859, 4.°

Storia naturale delle Madonie; osservazioni ornitologiche di Francesco Minà-Palumbo. Palermo, 1859, 8.°

Studi agrari sulla campagna settentrionale delle Madonie di Francesco Minà-Palumbo; proverbi agrari. Palermo, 1854, 8.°

Sugli effetti dei busti che usano le donne; discorso di Francesco Minà-Palumbo. Palermo, 1841, 8.°

Bullettino archeologico italiano, pubblicato per cura di Giulio Minervini: anno I, n. 1-19. Napoli, stamperia della R. Università, 1861-62, 4.° fig. MINERVINI.

Bullettino archeologico napolitano (nuova serie), pubblicato per cura di Giulio Minervini; anno ottavo, n. 180-181. Napoli, Cataneo, 1860, 4.° fig.

Memorie Accademiche di Giulio Minervini. Napoli, stamperia nazionale, 1862, 1 vol. 4.° fig.

Ueber Alterthuemer des ostindischen Archipels insbesondere die Hindu-Alterthuemer und Tempelruinen auf Java, Madura und Bali, nach Mittheilungen Brumunds und v. Hoevells aus dem Hollaendischen Bearbeitet; von D.r Johannes Mueller. Berlin, 1859, 1 vol. 8 fig. MUELLER

Notice sur Jean-Juste-Noël-Antoine Aunier; par E. Mulsant. Lyon, 1859, 8.° MULSANT.

Notice sur Louis Hasse; par E. Mulsant. Lyon, 1860, 8.°

Geschichte der Kaiserlichen-Leopoldino-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher während des zweiten Jahrhunderts ihres bestehens; von Johann Daniel Ferdinand Neigebaur. Jena, Frommann, 1860, 1 vol. 4.° fig. NEIGEBAUR

On the secular variations and mutual relations of the orbits of the asteroids; by Simon Newcomb. Cambridge, 1860, 4.° NEWCOMB

Histoire médicale du choléra-morbus épidémique qui a régné, en 1854, dans la ville de Gy (Haute-Saône); par P. A. Niobey. Paris, Lahure et C.e, 1858, 1 vol. 8.° NIOBEY.

Essai sur Marc-Aurèle d'après les monuments épigraphiques, précédé d'une notice sur le comte B. Borghesi; par M. Noël des Vergers. Paris, Didot et C.e, 1860, 1 vol. 8.° NOËL DES VERGERS.

Études biographiques sur Horace, par A. Noël des Vergers. Paris, Didot et C.e, 1855, 8.° fig.

NORDMANN Palaeontologie Südrusslands (3-4), von D.r Alexander von Nordmann. Helsingfors, 1850-60, 4.°, con atlante fol.°

NOURRIGAT. Régénération des races des vers-à-soie par les éducations automnales à la température naturelle etc.; par Émile Nourrigat. Montpellier, 1860, 4.° fig.

OCCHINI. Schiarimenti teorico-chimici e theorico-pratici comparativi sull'azione medicamentosa della fuligine, per guarire con felice successo l'uva e le viti dalla crittogama ecc.; memoria del Dott. Pietro Occhini; prima edizione. Arezzo, Bellotti, 1861, 8.°

OMBONI. Cenni sulla carta geologica della Lombardia; del Dott. Giovanni Omboni. Milano, 1861, 8.° fig.

ONDES-REGGIO (D'). Su d'un nuovo metodo d'investigare i veri morali e politici; discorso letto nella R. Università di Genova all'apertura del corso 1859-60, seguito da una appendice; per il Barone Vito d'Ondes-Reggio. Genova, 1859, 8.°

ONETTI. Sanremo e suoi dintorni; discorso topografico-storico-medico-scientifico del Dott. Francesco Onetti. Sanremo, Puppo, 1860, 8.° fig.

Sull'uso moderato del salasso nella flogosi e nella congestione; dialoghi di Francesco Onetti. Genova, 1862, 8.°

PALMIERI. Annali del Real Osservatorio meteorologico Vesuviano, compilati da Luigi Palmieri; anno II, 1862. Napoli, 1862, 8.° gr.

PARNISETTI. Osservazioni meteorologiche fatte in Alessandria alla specola del Seminario, 1861, anno ottavo; del Sac. Parnisetti Pietro. Alessandria, 8.°

PERETTI. Dell'azione chimica dell'acqua sopra i sali e sopra gli acidi; di Paolo Peretti. Roma, 1861, 8.°

Della conicina e dell'azione degli alcali caustici sopra i vegetali; lettera del Prof. Pietro Peretti al Direttore della Corrispondenza scientifica di Roma; 2 pag. 8.°

Di alcune sostanze non ancora determinate dai chimici se appartenenti a quelle che godono proprietà elettro-negative ovvero elettro-positive ecc.; del Prof. Pietro Peretti; 1 pag. ½ 4.°

PETERS. Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher, herausgegeben etc., von C. A. F. Peters: vol. II, III. Altona, Esch, 1860-61, 2 vol. 8.°

PEYRON. Tucidide, della guerra del Peloponneso: libri VIII, volgarizzati ed illustrati

con note ed appendici da Amedeo Peyron. Torino, stamperia Reale, 1861, 2 vol. 8.°

Nuovo sistema di locomozione ad aria compressa ed a vapore, o dell'avvenire industriale e commerciale d'Italia ecc.; per G. B. Piatti. Milano, Salvi e Comp., 1861, in 8.° fig. PIATTI.

Sulle macchine e i lavori di traforo del Cenisio; lettera dell'Ingegnere G. B. Piatti agli editori del *Politecnico*. Milano, 1861, 8.°

Circa le espressioni che ponno essere sviluppate secondo derivate lineari d'ordine crescente positivo ed intero di una medesima funzione; memoria del Dottore Antonio Pievani. Milano, 1862, fol. PIEVANI.

Corso elementare di diritto naturale, o filosofia del diritto; per Luigi Pizzarelli; vol. I. Catania, 1859, 8.° PIZZARELLI.

Note sur les coefficients théoriques, déterminés par Tobie Mayer relativement aux deux inégalités lunaires en longitude, ayant pour argument PLANA.

$$(2E - 2g + c'm)nt\ , \qquad (2E - 2g - c'm)nt\ ;$$

par Jean Plana. Turin, 1860, 4.°

Note sur un cas particulier du mouvement elliptique; par Jean Plana. Turin, 1860, 4.°

Sur la théorie de la Lune; lettres de Jean Plana à M. John W. Lubbock. Turin, 1860, 4.°

Note sur les variations périodiques de la température et de la pression atmosphérique au Grand-St-Bernard; par E. Plantamour. 8.° PLANTAMOUR (E.)

Observations astronomiques faites à l'observatoire de Genève, dans les années 1857 et 1858, par E. Plantamour. Genève, 1861, 4.°

Résumé météorologique de l'année 1860 pour Genève et le Grand-St-Bernard; par E. Plantamour. Genève, 1861, 8.°

Sull'insegnamento dell'economia politica o sociale in Inghilterra; del Professore Baldassare Poli. Milano, 1862, 8.° POLI

Catalogo dei Cefalocotilei italiani e alcune osservazioni sul loro sviluppo; memoria di Antonio Federico Polonio. Milano, 1860, 8.° fig. POLONIO

Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi, en 1822, de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures; par J.-V. Poncelet. Paris, Mallet-Bachelier, 1862, 1 vol. 8.° PONCELET.

Observations et expériences physiques sur la *Bulla lignaria*, l'*Asterias*, l'*Octopus vulgaris* et la *Pinna nobilis*, la reproduction des testacés univalves marins etc.; par Mme Jeannette Power, née de Villepreux. Paris, 1860, 8.° POWER

PROFUMO. De la parole intérieure; par le Docteur Louis Profumo; troisième édition. Genève, 1861, 8.°

PROMIS (DOMENICO). Monete dei Radicati e dei Mazzetti, pubblicate da Domenico Promis. Torino, stamperia Reale, 1860, 8.° fig.

QUETELET. Annuaire de l'observatoire Royal; par le Directeur A. Quetelet, 1861. Bruxelles, Hayer, 1860, 1 vol. 8.° pice.

De la nécessité d'un système général d'observations nautiques et météorologiques; lettre de M. Maury, Directeur de l'observatoire de Washington, à M. Ad. Quetelet. 8.°

Observations des phénomènes périodiques. 4.°

Sur le Congrès international de statistique, tenu à Londres le 16 juillet 1860 et les cinq jours suivants; par Ad. Quetelet. 4.°

REINA. Osservazioni e riflessioni su le fratture complicate; per Euplio Reina; terza edizione corredata di nuovi fatti e di figure. Catania, 1861, 1 vol. 8.°

REINAUD. Mémoire sur le commencement et la fin du royaume de la Mésène et de la Kharacène, et sur l'époque de la rédaction du Périple de la mer Erythrée, d'après les témoignages grecs, latins, arabes, persans, indiens et chinois; par M. Reinaud. Paris, 1861, 1 vol. 8.°

REMY. Essai d'une nouvelle classification de la famille des Graminées; par E.-A. Remy; 1.ère partie, les Genres. Epernay, Fievet, 1861, 1 vol. 8.°

RENDU (EUGENE). Comité de l'enseignement international; rapport présenté au nom de la sous-Commission par M. Eugène Rendu. Paris, 1862, 4.°

M. Ambroise Rendu et l'Université de France; par M. Eugène Rendu. Paris, 1861, 8.°

REYMOND. Études sur l'économie sociale et internationale; par J.-J. Reymond; édition française, vol. II, 2.e livr. Turin, Speirani et fils, 1861, 1 vol. 8.°

L'economista Giovanni Battista Vasco, la sua dottrina e i suoi tempi; discorso del sig. G. G. Reymond. 8.°

Prolusione ad un corso teorico-pratico di economia delle finanze pubbliche; per l'Avv. Coll. Gian Giacomo Reymond. Torino, 1861, 8.°

Teoria del valore; per l'Avv. Gian Giacomo Reymond. Torino, Speirani e figli, 1861, 8.°

RIATTI Sulla probabile esistenza del protossido d'Alluminio sull'economica preparazione degli alluminati alcalini, e sul doppio cianuro d'Alluminio e di Ferro; memoria di Vincenzo Riatti. Reggio, Calderini e Comp., 1860, 8.°

Sulle induzioni elettriche e su di una corrente elettro-magneto-indotta-continua; memoria di Vincenzo Riatti; fasc. 1-2. Reggio, 1860-62, 8.°

Storia della Monarchia Piemontese di Ercole Ricotti. Firenze, Barbèra, 1861, 2 vol. 8.° picc. — RICOTTI

Congresso straordinario delli scienziati italiani; di C. Ridolfi; 2 pag. 12.° — RIDOLFI

El arte latino-bizantina en España y las coronas visigodas de Guarrazar, ensayo historico-critico por D. Jose Amador de Los Rios. Madrid, 1861, 1 vol. 4.° — RIOS (DE LOS)

Venezia nel 1789; di S. Romanin. Venezia, Naratovich, 1860, 1 vol. 8.° — ROMANIN

Genera Italica ordinis Dipterorum ordinatim disposita et distincta, et in familias et stirpes aggregata; auctore Camillo Rondani. Parmae, Stocchi, 1856-59, 3 vol., 12.° fig. — RONDANI

Notice sur la vie et les travaux de M. le Baron A. De Humboldt; par M. de la Roquette. Paris, Martinet, 1860, 4.° — ROQUETTE (DE LA)

Société d'Ethnographie américaine et orientale: l'Orient; par Léon de Rosny. Paris, 1860, 8.° — ROSNY (DE)

Della visione bioculare; nota del Dott. Francesco Rossetti. Venezia, Antonelli, 1861, 4.° — ROSSETTI

Storia del Marchesato di Dolceacqua e dei comuni di Pigna e Castelfranco; del Prof. Gerolamo Rossi. Oneglia, Ghilini, 1862, 1 vol. 8.° — ROSSI

Discours de M. le Vicomte de Rougé pour le sujet du prix ordinaire à décerner en 1862 par l'Institut Impérial de France, 4.° — ROUGE (DE)

Étude sur divers monuments du règne de Toutmès III, découverts à Thèbes par M. Mariette; par M. le Vicomte E. de Rougé. Paris, 1861, 8.°

Note sur les principaux résultats des fouilles exécutées en Egypte par les ordres de S. A. le Vice-Roi; par M. le Vicomte de Rougé. Paris, Didot, 1861, 8.°

Notice de quelques fragments de l'inscription de Karnak contenant les annales du règne de Toutmès III, récemment découverts par M. Mariette: par M. le Vicomte Emmanuel de Rougé. Paris, 1860, 8.° fig.

Documenti circa la vita e le gesta di S. Carlo Borromeo, pubblicati per cura del Can. Aristide Sala; volumi III e IV. Milano, 1861, 8.° fig. — SALA

Raccolta di documenti sul bonificamento delle maremme toscane dal 1828 al 1859, messi in luce ecc. da Antonio Salvagnoli-Marchetti. Firenze, 1861, 1 vol., 8.° fig. — SALVAGNOLI-MARCHETTI

Il punto cardinale delle attuali indagini anatomo-patologiche, presentato — SANGALLI

quale prodromo del corso d'anatomia patologica per l'anno scolastico 1859-60 nella Regia Università di Pavia dal Prof. Sangalli Giacomo. Torino, Zoppis, 1860, 8.°

Storia clinica ed anatomica dei tumori, del Dott. Giacomo Sangalli. Pavia, 1860, 2 vol., 8.° fig.

SAREDO. Principii di diritto costituzionale, per il Prof. Giuseppe Saredo; vol. I, parte 1.ª e 2.ª Parma, Grazioli, 1862, 8.°

SCACCHI. Esperienze sul cambiamento dei cristalli di nitrato di stronziana idrato in cristalli anidri, e di questi in quelli; per Arc. Scacchi. 4.°

Dei solfati doppi di Manganese e Potassa (Estr. dal giornale il *Giambattista Vico*, fasc. 6 giugno 1857); 4.° fig.

Della regione vulcanica del Monte Vulture e del tremuoto ivi avvenuto nel dì 14 agosto 1851; relazione fatta per incarico della R. Accademia delle Scienze da Luigi Palmieri ed Arcangelo Scacchi. Napoli, Nobile, 1852, 1 vol., 4.° fig.

Memoria sull'incendio Vesuviano del mese di maggio 1855, fatta per incarico della Regia Accademia delle Scienze dai soci G. Guarini, L. Palmieri ed A. Scacchi. Napoli, Nobile, 1855, 1 vol., 4.° fig.

Sulla poliedria delle faccie dei cristalli; per Arcangelo Scacchi. Pisa, 1861, 8.° fig.

Sulla poliedria delle faccie dei cristalli; per A. Scacchi. Torino, 1862, 4.° fig.

Sulla scambievole soprapposizione dei cristalli di solfato potassico appartenenti a diversi sistemi; per A. Scacchi. Napoli, 1861; 4.°

SCARPELLINI Bullettino delle osservazioni ozonometriche-meteorologiche, fatte in Roma da Caterina Scarpellini, 1862, gennaio; 4.°

La grande Cometa del 30 giugno 1861; lettera di Caterina Scarpellini al Direttore dell'*Album* di Roma; $^1/_4$ di foglio 8.°

SCHEERER. Die Gneuse des Sächsischen Erzgebirges und verwandte Gesteine nach ihrer chemischen Constitution und geologischen Bedeutung; von D.r Th. Scheerer. Berlin, 1862, 1 vol. 8.°

SCHIAVONI. Sulla misura d'una base geodetica eseguita in Puglia; nota del Cavaliere Federico Schiavoni. Napoli, 1861, 8.°

SCIVOLETTO Metodo per iscoprire prontamente nell'orina ed in varii liquidi animali la presenza degli ioduri alcalini, e deduzioni fisiologiche tratte da varie sperienze sull'economia umana eseguite per siffatto mezzo; memoria del Dott. Pietro Scivoletto. Torino, Favale e Comp., 1862, 8.

Histoire de la législation italienne, par Frédéric Sclopis; traduite en français par Charles Sclopis (de Petreto). Angers, Cosnier et Lachèse, 1861, 2 vol. 8.° SCLOPIS

La domination française en Italie 1800-1814, par Frédéric Sclopis; mémoire lu à l'Académie des Sciences morales et politiques. Orléans, Colas-Gardin, 1861, 1 vol. 8.°

Memorie dell'osservatorio del Collegio romano. Nuova serie, dall'anno 1857 al 1859, pubblicate dal P. Angelo Secchi. Roma, 1859, 1 vol. 4.° fig. SECCHI

Relazione delle osservazioni fatte in Spagna durante l'ecclisse totale del luglio 1860 dal P. Angelo Secchi. Roma, 1860, 8.° fig.

Du genre *Verticordia* Searles Wood; par M. Seguenza. Paris, Tinterlin, 8.° SEGUENZA.

Intorno ad un nuovo genere di Foraminiferi fossili del terreno miocenico di Messina; disquisizioni paleontologiche di Giuseppe Seguenza. Messina, Pastore, 1859, 8.°

Sulle forme cristalline di alcuni sali derivati dall'ammoniaca; per Quintino Sella. Torino, stamperia Reale, 1861, 4.° fig. SELLA (QUINTINO).

Discorso sulla istruzione pubblica ne' secoli XVI e XVII in Sicilia di Bernardo Serio; 4.° SERIO.

Della terra coltivabile; due memorie di Fausto Sestini. Firenze, 1862, 8.° SESTINI.

Sopra la chimica combinazione dello zolfo e dell'iodio; ricerche ed osservazioni di Fausto Sestini. Milano, 1862, 8.°

Sulla preparazione del Permanganato di Potassa; ricerca dei clorati e saggio quantitativo del Clorato di Potassa; di Fausto Sestini. Pisa, Pieraccini, 1861, 8.°

Miscellaneous reports, speeches, and papers on the practicability of the proposed North Atlantic Telegraph; the results of the surveying expedition of 1859. London, 1861, 8.° SHAFFNER

Proceedings of the Royal Geographical Society of Great Britain, january 28 th, and february 11 th, 1861; reports of the surveying expeditions, the Lord Ashburton President. London, 1861, 8.°

The North Atlantic Telegraph; via the Faröe isles, Iceland, and Greenland; Preliminary reports of the surveying expeditions of 1860, on the Deep seas, Landing-places, Land sections. London, 1861, 8.°

Intorno ad una linea di quarto ordine; nota di F. Siacci. Roma, 1861, 8.° fig. SIACCI.

The American journal of Science and Arts, conducted by B. Silliman, SILLIMAN e DANA

B. Silliman Jr., and James D. Dana. Second Series, vol. XXX, XXXI, n. 88-93. New Haven, 1860-61, 8.° fig.

SINIGAGLIA. Modificazione nella costruzione ed uso dei soffietti pella solforazione delle viti; di Pietro Sinigaglia. Padova, 1861, fol. fig.

SOBRERO. Della solforazione delle viti; cenni del Prof. A. Sobrero; 8.°

Delle acque termali di Valdieri, del Prof. A. Sobrero; 8.°

SPANO. Bullettino archeologico Sardo, ossia raccolta dei monumenti antichi in ogni genere di tutta l'isola di Sardegna, diretto dal Can. Cav. Giovanni Spano. Anno VII, genn.-febbr., magg.-giugno, sett.-dic.; anno VIII, genn.-agosto. Cagliari, Timon, 1861-62, 8.° fig.

Guida della città e dintorni di Cagliari; pel Can. Giovanni Spano. Cagliari, Timon, 1861, 1 vol., 8.° fig.

STUDER. Les couches en forme de C dans les Alpes; par M. B. Studer.

TARGIONI-TOZZETTI (ADOLFO). Notizie della vita e delle opere di Pier Antonio Micheli, di Giovanni Targioni-Tozzetti; pubblicate per cura di Adolfo Targioni-Tozzetti. Firenze, Le Monnier, 1858, 1 vol. 8.°

TAVERNA. Cenni intorno alla convenienza di sospendere il perforamento del Moncenisio; di Pietro Taverna. Alessandria, Oviglio, 1862, 8.°

Nuovo sistema di ponte levatoio ad altalena inferiore (*à bascule en dessous*); di Pietro Taverna. Modena, 1861, 8.° fig.

TORCHIO. Città di Torino. Movimento statistico della popolazione di Torino negli anni 1860-61, compilato dal Dott. Cav. Fedele Torchio; 4.°

Movimento statistico della popolazione di Torino nei mesi di nov.-dic. 1860; genn.-dic. 1861; genn.-marzo 1862; compilato dal Dottore Cav. Fedele Torchio; 4.°

TORELLI Dell'avvenire del commercio europeo, ed in modo speciale di quello degli Stati Italiani; ricerche di Luigi Torelli. Firenze, Barbèra, Bianchi e Comp. 1859, 3 vol. 8.°

TOSCANO. Corso elementare di filosofia, per l'Abate Felice Toscano. Napoli, 1857, 1 vol. 8.°

Corso elementare di filosofia del dritto, per l'Abate Felice Toscano; prima edizione, vol. I. Napoli, 1860, 1 vol. 8.°

TOSTI. Prolegomeni alla storia universale della Chiesa, per D. Luigi Tosti. Firenze, Barbèra, 1861, 2 vol. in-8.°

TRISSINO. La Divina Commedia di Dante Allighieri, illustrata dal nobil Conte Francesco Trissino, col testo originale a riscontro. Vicenza, Paroni, 1857-58, 3 vol. 8.°

Le opere di Virgilio letteralmente volgarizzate dal nobil Conte Francesco Trissino. Verona, Zanoni, 1862, 8.° picc.

Al Commend. Benedetto Trompeo in Torino, onorevole corrispondente de' Vecchi Lincei, questa laudazione di Gioachino Taddei, chimico distintissimo, Catterina Scarpellini dal Campidoglio intitola. Torino, 1861, 8.° TROMPEO (B).

Cenno igienico-statistico su Pegli (Circondario di Genova); lettera del Dott. Comm. Benedetto Trompeo al Dott. Prof. G. Du Jardin. Genova, 1861, 8.°

Dell'opportunità di conservare le tradizioni mediche a fine di ovviare ai pericoli degli eccessi dei novatori; del Dott. Comm. B. Trompeo, 8.°

Contribuciones de Colombia a las ciencias i a las artes publicadas con la cooperacion de la Sociedad de Naturalistas Neo-Granadinos; por E. Uricoechea; año primero. Bogota, 1860, 8.° URICOECHEA.

Epistola di Lionardo Vigo a Giuseppe de Spuches su di un codice Aldino del Petrarca del 1501. Palermo, 1837, 8.° VIGO.

La eruzione Etnea del 1852; testimonianza di L. Vigo; 12.°

Lettera di Lionardo Vigo al Duca di Serradifalco intorno al codice Aldino del Petrarca, in risposta alla lettera di Giampieri; 8.°

Lirica di Lionardo Vigo. Palermo, 1855, 1 vol 12.°

Memoria del Sindaco Patrizio d'Aci-Reale per dimostrare la utilità e convenienza di costruirsi un porto sopra il Capo de' Molini. Palermo, 1835, 1 vol. 8.°

Relazione generale dei lavori dell'Accademia di Scienze, Lettere ed Arti dei Zelanti di Aci-Reale, scritta da Lionardo Vigo. Messina, 1841, 1 vol. 8.°

Sulla canzone di Ciullo d'Alcamo; disamina di Lionardo Vigo. Catania, 1859, 8.°

Sulle conchiglie terrestri e fluviali, raccolte dal Prof. Bellardi in Oriente, e su quelle raccolte dal Prof. Roth in Palestina, illustrate dal Prof. Mousson; memorie due, ossia annuncio, note e riflessioni dei fratelli Antonio e Gio. Battista Villa. Milano, 1862, 8.° VILLA (fratelli).

Notice sur la vie et sur les travaux de M. le Doct. Verrollot; par M. A. Viquesnel. Versailles, 1861, 8.° VIQUESNEL.

Del moto rettilineo lungo un sistema di piani diversamente inclinati e contigui; memoria del Prof. Paolo Volpicelli. Roma, 1860, 4.° VOLPICELLI.

Sperienze sull'elettricità atmosferica; nota del Prof. Paolo Volpicelli. Roma, 1861, 4.°

VUY. Jugement rendu par Amédée VIII à Ripaille, le 20 juin 1438, entre l'Abbaye de Saint-Jean-d'Aulps et les Communautés, hommes et habitants du Bourg de Samoëns et de plusieurs hameaux du Haut-Faucigny; document publié avec un avant-propos et des notes par Jules Vuy. Genève, Vaney, 1862, 4.°

WITTE (DE). De quelques médailles supposées: 1. Victorina - 2. Lollianus - 3. L. Ælianus (Extr. de la *Revue Numismatique*, nouv. série, tom. VI, 1861), 8 fig.

Notice sur Charles Lenormant; par J. de Witte. Bruxelles, Hayez, 1861, 12.°

Observations sur Agrippine et Postume; par J. de Witte (Extr. de la *Revue Numismatique*, nouvelle série, tome IV, 1859), 8.°

ZANTEDESCHI. Anno meteorologico torinese ricavato dalle osservazioni d'anni 107, cioè dal 1754 al 1860, colle massime e minime assolute termometriche di alcune stazioni d'Italia; del Prof. F. Zantedeschi. Padova, Bianchi, 1862, 8.°

Intorno allo spettro luminoso considerato come fotodoscopio od analizzatore il più squisito che abbia la scienza; osservazioni critico-storiche del Prof. Francesco Zantedeschi, con appendice. Venezia, Antonelli, 1861, 2 opusc. 8.°

ZÉZAS. Études historiques sur la législation russe ancienne et moderne; par S. G. Zézas. Paris, 1862, 1 vol. 8.°

ZIGNO (DE). Sopra un nuovo genere di Felce fossile; memoria del Barone Achille De Zigno. Venezia, 1861, 8.°

Sulla costituzione geologica dei monti Euganei; memoria del Barone Achille De Zigno. Padova, 1861, 8.°

ZUMAGLINI. Della malattia attuale dell'uva, sue cause e rimedi; di A. M. Zumaglini. Biella, Amosso, 1851, 8.°

Della malattia attuale dell'uva, sue cause e rimedi; memoria seconda di A. M. Zumaglini. Torino, Barera e Ambrosio, 1853, 8.°

Flora Pedemontana, sive species plantarum phanerogamarum in Pedemonte et Liguria sponte nascentium; scripsit Ant. Mauritius Zumaglini; tom. I, II. Augustae Taurinorum, Favale et socii; Bugellae, Ardizzone et socii, 1860, 2 vol. 12.°

SOCIETÀ IMPERIALE D'EMULAZIONE *d'Abbeville*. Mémoires de la Société Impériale d'Émulation d'Abbeville; 1857, 1858, 1859 et 1860. Abbeville, 1861, 1 vol. 8.°

R. ACCAD. DELLE SC. *d'Amsterdam*. Catalogus van de Boekerij der Koninklijke Akademie van Wetenschappen gevestigd te Amsterdam. Deel I, Stuk 2. Amsterdam, 1860, 1 vol. 8.

Hippocratis et aliorum medicorum veterum reliquiae; mandatu Academiae

Regiae disciplinarum quae Amstelodami est, edidit Franciscus Zacharias Ermerins; vol. I. Trajecti ad Rhenum, 1859, 1 vol. 4.°

Jaarboek van der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, gevestigd te Amsterdam voor 1859-60. Amsterdam, 3 vol. in 8.°

Programma certaminis poetici ab Academia R. disciplinarum Nederlandica ex legato Hoeufftiano propositi anno 1861-62. Amstelodami, 4.°

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen (vol. VII, IX). Amsterdam, 1859-61, 2 vol. 4. fig.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Letterkunde; vol I. Amsterdam, 1858, 1 vol. 4.° fig.

Verslag over den Paalworm, uitgegeven door de Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Amsterdam, 1860, 1 vol. 8.°

Verslagen en mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde, Deel V, VIII, IX, XI, XII. Afdeeling Letterkunde; Deel X - Deel IV, Stuk. 1-3. Amsterdam, 1858-61, 7 vol. 8.° fig.

Bijdragen tot de dierkunde uitgegeven door het Koninklijk Zoologisch Genoostchap. *Natura artis magistra*, te Amsterdam; Aflevering 8. Amsterdam, 1859, 4.° gr. fig. — REGIA SOCIETÀ DI ZOOLOGIA *d'Amsterdam.*

Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch Indië, uitgegeven door de Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch Indië; Deel XX, Aflev. 4-6; Deel XXI; Deel XXII, Aflev. 2-4; Deel XXIII, Aflev. 1-3. Batavia, 1860-61, 8.° — GOVERNO NEERLANDESE (*Batavia*).

Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin; aus dem Jahre 1859-60. Berlin, 1860-61, 2 vol., 4.° fig. — R. ACCAD. DELLE SC. *di Berlino.*

Monatsberichte der Königlichen Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin; aus dem Jahre 1860-61. Berlin, 1861, 1 vol. 8.° fig.

Questiones quas Academiae Regiae Scientiarum Borussicae classis physica et mathematica certamini litterario in a. 1864 proponit, promulgatae in conventu sollemni anniversario Leibnitii memoriae dicato d. 4 m. julii a. 1861, 8.°

Register für die Monatsberichte der Königlichen Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin von Jahre 1836 bis 1858. Berlin, 1860, 1 vol. 8.°

Ubersicht der Witterung im nördlichen Deutschland nach den Beobachtung des meteorologischen Instituts zu Berlin; Jahrg. 1859-60, fig.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern auf dem Jahre 1858-61, n. 408-496. Bern, 1858-61, 4 vol. 8 fig. — SOC. DI STORIA NAT. *di Berna.*

Verhandlungen der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft bei ihrer 43 Versammlung in Bern, den 2, 3 und 4 august 1858. Bern, 1859, 1 vol. 8.°

ISTITUTO *di Bologna.*

Memorie della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; tom. XI; XII, parti 1-2; Serie II, tom. I, fasc. 1-3. Bologna 1861-62, 4.° fig.

Rendiconto delle sessioni dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Anni accademici 1860-61, 1861-62. Bologna 1861-62, 8.°

SOCIETÀ MEDICO-CHIRURGICA *di Bologna.*

Appendice al Bullettino delle Scienze Mediche, anno 1861. Sessione semi-pubblica della Società Medico-Chirurgica di Bologna pel 38.° anniversario di sua fondazione. Bologna, 1861, 8.°

Bullettino delle Scienze Mediche della Società Medico-Chirurgica di Bologna; serie IV (da settembre 1860 ad agosto 1862). Bologna, 1860-62, 8.°

Programma di concorso al premio Sgarzi di italiane lire mille per l'anno 1864; mezzo foglio 4.°

SOC. DELLE SCIENZE FISICHE E NATURALI *di Bordeaux.*

Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Tome II. Bordeaux, Gounouilhou, 1861, 1 vol. 8.° fig.

SOCIETÀ AGRARIA *di Breslavia*

Abhandlungen der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Abtheilung für Naturwissenschaften und Medicin: 1861, Heft. 1-3; 1862, Heft 1. Breslau, 1861, 8.° fig.

Abhandlungen der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Philosophisch-historische Abtheilung: 1861, Heft 1; 1862, Heft. 1, 2. Breslau, 1861-62, 8.° fig.

Acht und dreissigster Jahres-Bericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur etc.; im Jahr. 1860-61. Breslau, 1861-62, 4.°

Denkschrift zur feier ihres fünfzigjähringen Bestehens, herausgegeben vor der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Breslau, 1853, 1 vol. 4.° fig.

Die fossile Fauna der silurischen Diluvial-Geschiebe von Sadewitz bei Oels in Nieder-Schlesien; eine paleontologische Monographie von D.r Ferdinand Roemer. Breslau, 1861, 1 vol. 4.° fig.

Grundzüge der Schlesischen Klimatologie; von D.r J. G. Galle. Breslau, 1857, 1 vol. 4.°

XXXVI-XXXVII Jahres-Bericht der Schlesischen Gesellschaft für Vaterländische Cultur; im Jahr. 1858-59. Breslau, 2 vol. 4.° fig.

R. ACCAD. DI SCIENZE LETT. E BELLE-ARTI DEL BELGIO (*Brusselle*).

Alexanders Geesten van Jacob van Maerlant, met Inleiding, varianten van Hss., aanteekeningen en Glossarium etc., uitgegeven door F. A. Snellaert: Eerste Deel. Brussel, Hayez, 1860, 1 vol. 8.°

Bulletins de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique; 29.e année, 2.e série, tome IX. Bruxelles, Hayez, 1860, 8.° fig.

Glossarium op Maerlants Rymbybel etc.; door I. David. Brussel, Hayez, 1861, 1 vol. 8.°

Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique; Tome XXXII. Bruxelles, Hayez, 1861, 4.° fig.

Almanaque nautico para los años 1862-63, calculado de orden de S. M. en el Observatorio de marina de la ciudad de S. Fernando. Cadiz, 1860-61, 2 vol. 4.° picc. — Osservatorio di Marina di S. Fernando (*Cadice*).

Bibliotheca Indica, a collection of oriental works, n. 156, 158, 159, 165, 167, 170. Calcutta, 1860-61, 4.° — Società Asiatica *di Calcutta*.

Bibliotheca Indica, a collection of oriental works, n. 163, 164, 166, 168, 169, 171, 172; new series, n. 1-13. Calcutta, 1860-61, 8.°

Annual Report of the Geological Survey of India, and of the Museum of Geology; for the years 1859-60, 1860-61. Calcutta, 1860-61, 8.° — Società Geologica dell'India (*Calcutta*).

Memoirs of the Geological Survey of India; vol. II, part. 2, vol. III, part. I. Calcutta, 1860-61, 2 vol. 8.° fig.

Proceedings of the American Association for the advancement of science; Fourteenth meeting, held at Newport, Rhode Island, August 1860. Cambridge, 1861, 1 vol. 8.° — Assoc. Americana pel progresso delle Scienze (*Cambridge*).

Proceedings of the American Academy of arts and Sciences; vol. V, fogl. 1-30, 32-57. Cambridge and Boston, 1860, 8.° — Accad. Americana d'Arti e Scienze (*Cambridge e Boston*).

Catalogo sistematico dei prodotti inviati dal Comitato di Catania alla prima esposizione italiana del 1861 in Firenze, col giudizio emesso dai giurati nelle diverse classi. Catania, Galotola, 1862, in fol. — Comitato per l'esposizione di Firenze 1861 (*Catania*).

Mémoires de la Société Impériale des Sciences naturelles de Cherbourg; tomes VII, VIII. Cherbourg, Bedelfontaine et Syffert, 1860-61, 2 vol. 8.° — Società Imperiale delle Scienze nat. *di Cherbourg*.

Documents publiés par l'Académie Impériale de Savoie; 2.ème volume. Chambéry, Puthod fils, 1861, 1 vol. 8.° — Acc. Imp. di Savoia (*Ciamberì*).

Mémoires de l'Académie Impériale de Savoie; seconde série, tomes IV, V. Chambéry, Puthod fils, 1861-62, 2 vol. 8.° fig.

Al-Mufassal, opus de re grammatica arabicum; auctore Abu'l-Kâsim Mahmûd Bin 'Omar-Zamahsario; ad fidem codicum manu scriptorum edidit J. P. Broch. Christiania, 1859, 1 vol. 4.° — R. Università *di Cristiania*

Bidrag til Kundskaben om Middelhavets Littoral-Fauna, Reisebemœrkninger fra Italien, af M. Sars; 1 vol. 8.° fig.

Cantate ved det Norske Universitets Halvhundredaarsfest den 2.den september 1861; 4.°

Cantate ved H. M. Kong Carl den Femtendes og H. M. Dronning Wilhelmine Fredrikke Alexandra Anna Louises Kroning i Throndhjems Domkirke den august 1860; 4.°

Ceremoniel ved deres Majestæter Kong Carl den Femtendes og Dronning Wilhelmine Frederikke Alexandra Anna Louises Kroning i Trondhjems Aar 1860; 4.°

Chronica regvm Manniæ et Insvlarvm. The chronicle of Man and the Sudreys, edited from the manuscript codex in the British Museum and with historial notes; by P. A. Munch. Christiania, 1860, 1 vol. 8.°

De vi logicæ rationis in describenda philosophiæ historia; ad Eduardum Zellerum epistola, quam scripsit Marcus Jacobus Monrad. Christiania, 1860, 8.°

Det Kongelige Norske Frederiks Universitets etc., af M. J. Monrad. Christiania, 1861, 1 vol. 8.°

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Ars 1858-60. Christiania, 1859-61; 8.° fig.

Jattagelser over den postpliocene eller glaciale formation i en del af det sydlige norge; af prof. D.r M. Sars og Lector Th. Kjerulf. Christiania, 1860, 4.°

Karlomagnus Saga ok Kappa Hans etc.; udgivet af C. R. Unger. Christiania, 1860, 1 vol. 8.

Medaglia di bronzo coll'effigie del Re e della Regina di Svezia e Norvegia. Medaglia dorata colla leggenda sul rovescio: *Academiae Regiae Norv. Fridericianae sacra semisecularia d. II. septbr. MDCCCLXI.*

Norges Mynter i Middelalderen, samiede og beskrevne af C. J. Schive, med indledning af C. A. Holmboe. Heft. 1-3. Christiania, 1858-60, fol.° fig.

Om Cirklers Beroring; af C. M. Guldberg. Christiania, 1861, 4.° fig.

Om Kometbanernes indbyrdes beliggenhed; af H. Mohn. Christiania, 1861, 4.° fig.

Om Nordmaendenes Landhusholdning i Oldtiden; af Fr. Chr. Schübeler. Christiania, 1861, 8.°

Om *Siphonodentalium vitreum*, en ny flaegt og art af Dentalidernes familie; af D.r Michael Sars. Christiania, 1861, 4.°

Oversigt af Norges Echinodermer; ved D.r Michael Sars. Christiania, 1861, 1 vol. 8.° fig.

Résumé du Programme de l'Université de Christiania pour le 1.er semestre 1861; introduction par M. le prof. C. Fearnley; 4.°

Solennia academica Universitatis literariae Regiae Fredericianae ante L annos conditae, die II septembris anni MDCCCLXI celebranda indicit Senatus academicus. Christianiae, 1861, 4.°

Ueber die geometrische Repräsentation der Gleichungen zwischen zwei veränderlichen, reellen oder komplexen Grossen; von C. A. Bjerknes, herausgegeben von D.r O. J. Broch. Christiania, 1859, 4.°

Veiledning for Deeltagerne, Kronings processionen ved indtagelsen af deres Pladser i Kirken; 8.°

The Transactions of the Royal Irish Academy; vol. XXIV, part 1, Science. Dublin, 1860, 4.° — R. Accademia Irlandese *di Dublino.*

The journal of the Royal Society Dublin, published quarterly; vol. III, n. 18-23. Dublin, 1860-61, in 8.° fig. — R. Società *di Dublino.*

Journal of the Geological Society of Dublin; vol. IX, part 1. Dublin, 1861, 8.° fig. — Società Geologica *di Dublino.*

Appendix to the makerstoun magnetical and meteorological observations, being a supplement to volume XXII of the Transactions of the Royal Society of Edinburgh, reduced and edited by Balfour Stewart. Edinburgh, 1860, 4.° — R. Società *di Edimborgo.*

Proceedings of the Royal Society of Edinburgh; session 1856-60; vol. IV, n. 50, 53. Edinburgh, 1860-61, 8.°

Transactions of the Royal Society of Edinburgh; vol. XXII, part 2, for the session 1859-60; vol. XXII, part 3, for the session 1860-61. Edinburgh, 1861, 4.° fig.

Catalogue of the Fishes of the eastern coast of north America, from Greenland to Georgia, by Theodore Gill. Jannery, 1861, 8.° — Accad. delle Sc. naturali *di Filadelfia.*

Journal of the Academy of natural Sciences of Philadelphia; new series, vol. IV, part. IV. Philadelphia, 1860, 4.°

Proceedings of the Academy of natural Sciences of Philadelphia; 1860, fogl. 1-6, 42; 1861, fogl. 1-6. Philadelphia, 1861, 8.°

The human Will: a series of posthumous essays on moral accountability, the legitimate object of punishment, and the power of the will, by the late J. P. Espy. Cincinnati, 1860, 8.° — Soc. Filos. Americ. *di Filadelfia.*

Continuazione degli Atti della R. Accademia Economico-Agraria dei Georgofili di Firenze. Nuova serie, vol. VII, disp. 2.ª, vol. VIII, disp. 1.ª-3.ª; vol. IX, disp. 1.ª. Firenze, Cellini e C., 1860-62, 8.° fig. — R. Accademia de' Georgofili *di Firenze.*

R. Accademia Economico-Agraria dei Georgofili di Firenze. Convocazione di uno straordinario congresso scientifico in Firenze nel 1861 all'effetto di rivedere i relativi statuti. Firenze, 1861, 8.°

Rendiconti delle adunanze della R. Accademia Economico-Agraria dei Georgofili di Firenze; triennio IV, anno I, disp. 5.ª; anno II, disp. 1-4. Firenze, Cellini e C., 1860-62, 8.°

ISTITUTO SENCKENBERGIANO *di Francfort.*

Abhandlungen herausgegeben von der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft. Band III, Lief. 2; Band IV, Lief. 1. Frankfurt, 1861-62, 4.° fig.

UNIVERSITÀ *di Gand.*

Théorie de la fonction *gamma;* par Henri Limbourg. Gand, 1859, 8.°

SOCIETÀ LIGURE DI STORIA PATRIA *di Genova.*

Atti della Società Ligure di Storia patria; vol I; vol. II, parte 2.ª Genova, Ferrando, 1858-59, 60-62; 5 vol. 8.° gr.

SOCIETÀ DI FISICA E DI STORIA NATUR *di Ginevra.*

Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève; tome XVI, 1.ère partie. Genève, Fick, 1861, 1 vol. 4.° fig.

SOCIETÀ DELLE SC. *di Gottinga.*

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen; IX Band, von dem Jahre 1860. Gottingen, 1861, 1 vol. 4.° fig.

GOVERNO OLANDESE (*Harlem*).

Carte géologique de la Néerlande; feuilles n. 19, 20.

SOCIETÀ OLANDESE DELLE SCIENZE *di Harlem.*

Extrait du programme de la Société Hollandaise des Sciences à Harlem, pour l'année 1862, 4.°

Natuurkundige Verhandelingen van de Hollandsche Maatschappij der Vetenschappen te Haarlem; vol. XIV-XVI. Haarlem, 1858, 1861-62, 3 vol. 4.° fig.

SOC. DI ST. NAT. E MEDICINA *di Heidelberg.*

Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg; Band II, n. 3-5. Heidelberg, 1860-61; 8.°

SOC. DELLE SCIENZE DI FINLANDIA (*Helsingfors*)

Acta Societatis Scientiarum Fennicae; tomus VI. Helsingforsiae, 1861, 1 vol. 4.° fig.

Bidrag till Finlands Naturkännedom, etnografi och statistik, utgifna af Finska Vetenskaps-Societeten; Häft. 3-6. Helsingfors, 1859-61, 8.°

Bidrag till Kännedom om Finlands Natur och Folk utgifna af Finska Vetenskaps-Societeten. Häft. 1-4. Helsingfors, 1858-61, 8.°

ACCAD. DE' CURIOSI DELLA NATURA *di Jena.*

Novorum Actorum Academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae Naturae Curiosorum; vol. XXVIII, XXIX. Jenae, 1861-62, 2 vol. 4.° fig.

UNIVERSITÀ *di Kiel.*

Schriften der Universität zu Kiel, aus dem Jahre 1860; Band. VII, VIII. Kiel, 1861-62, 4.° picc.

R. SOC. FISICO-ECON. *di Konisberga.*

Schriften der Königl. physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg; 1860-61, 3 vol. 4.° fig.

UNIVERSITÀ *di Leida.*

Annales Academici 1857-58. Lugduni-Batavorum, 1861; 1 vol. 4.°

Beiträge zur Erkenntniss und Kritik der Zeusreligion; von G. Overbeck. Leipzig, 1861, 8.° gr. — R. Società delle Sc. di Lipsia.

Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-Phys. Classe, 1860, Heft. I-III. Philolog.-Hist. Classe, 1860, Heft. III, IV; 1861, Heft I. Leipzig, 1860-61, 8.° fig.

Darstellung der in Deutschland zur zeit der Reformation herrschenden-Nationalökonomischen Ansichten; von D.r Heinrich Wiskemann. Leipzig, 1861, 8.° gr.

Das Stralendorffische Gutachten; von Joh. Gust. Droysen. Leipzig, 1860, 8.° gr.

Die Chronik des Cassiodorus Senator etc.; von Th. Mommsen. Leipzig, 1861, 8.° gr.

Elektrische Untersuchungen, fünfte Abhandlung; von W. G. Hankel. Leipzig, 1861, 8.° gr.

Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen; von W. Hofmeister. Leipzig, 1861, 8.° gr. fig.

Ueber Darstellungen Griechischer Dichter auf Vasenbildern; von Otto Jahn. Leipzig, 1861, 8.° gr. fig.

Ueber das Passivum, eine sprachvergleichende Abhandlung; von H. C. von der Gabelentz. Leipzig, 1860, 8.° gr.

Urkundliche Geschichte der Iglauer Tuchmacher-Zunft; von Karl Wernier. Leipzig, 1861, 8.° gr.

Lendas da India por Gaspar Correa, publicadas de ordem da Classe de sciencias morales, politicas e bellas lettras da Academia Real das Sciencias de Lisboa; tomo II, parti 1.ª e 2.ª Lisboa, 1860-61, 2 vol. 4.° fig. — R. Accad. delle Sc. di Lisbona.

Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa Classe de sciencias mathematicas, physicas e naturales. Nova serie tom. II, parte 2.ª. Lisboa, 1861, 1 vol. 4.° fig.

Portvgaliae Monvmenta historica a saecvlo octavo post Christvm vsqve ad qvintvmdecimvm, ivssv Academiae Scientiarvm Olisiponensis edita, scriptores; volvmen I, fasc. 2-3. Olisipone, 1860-61, f.°

Quadro elementar das relações politicas e diplomaticas de Portugal com as diversas potencias do mundo, desde o principio do XVI seculo da Monarchia Portugueza ate aos nossos dias, colligido e coordenado pelo Visconde de Santarem, e continuado e dirigido pelo socio da

Academia Real das Sciencias de Lisboa Luiz Augusto Rebello da Silva; tom. XVIII. Lisboa, 1860, 1 vol. 8.°

Soc. delle Sc. Med. di Lisbona.

Jornal da Sociedade das Sciencias Medicas de Lisboa, anno de 1861; tomo XXV, n.° 6 Junho. Lisboa, 1861, 8.°

Assoc. Britannica per l'avanzamento delle Scienze (Londra).

Report of the twenty-ninth meeting of the British Association for the advancement of Science held at Aberden in september 1859. London, 1860, 1 vol. 8.°

Governo della Gran Bret. (Londra).

Observations made at the Magnetical and Meteorological observatory at S.t Helena etc.; printed by order of her Majesty's Governement, under the superintendence of Major-General Edward Sabine; vol. II, 1844 to 1849. London, 1860, 1 vol. 4.°

Istituzione Reale della Gr. Bretagna (Londra).

A list of the Members, Officiers etc. with the report of the visitors for the year 1860. London, 1861, 8.°

Notices of the Proceedings at the meetings of the Members of the Royal Institution of Great Britain; part IX; november, 1858; july, 1859; part XI, 1860-61. London, 1859-61, 8.°

R. Societa Asiatica di Londra.

The Journal of the Royal Asiatic Society of Great Britain and Ireland; vol. XVII, part 2; vol. XVIII, parts 1, 2; vol. XIX, parts 1-3. London, 1860-62, 8.° fig.

Soc. Astronomica di Londra.

Memoirs of the Astronomical Society of London; vol. XXVIII, XXIX. London, 1860-61, 2 vol. 4.°

Societa Chimica di Londra.

The Quarterly Journal of the Chemical Society of London; vol. XIII, n. 50, 51; vol. XIV, n. 54-56. London, 1860-62, 8.°

Societa Geologica di Londra.

Address delivered at the anniversary meeting of the Geological Society of London, on the 19th of february 1858. London, 8.°

List of the Geological Society of London. September 1st, 1860, 8.°

The Quarterly Journal of the Geological Society; vol. XV, n. 58-60; vol. XVI, n. 57, 62-64; vol. XVII, n. 65-67; vol. XVIII, n. 69-71. London, 1859-62, 8.°

R. Soc. Linneana di Londra.

Address of Thomas Bell, the President, together with obituary notices of deceased members of the Linnean Society on Monday, mai 24, 1858-59. London, 1858-59, 8.°

Journal of the Proceedings of the Linnean Society of London. Zoology, vol. II, n. 7, 8; vol. III, n. 9-12; vol. IV, n. 13-16; vol. V, n. 17-20. — Botany, vol. II, n. 7, 8; vol. III, n. 9-12; vol. IV, n. 13-16; vol. V, n. 17-20. — Supplement to Botany, n. 1, 2; to vol. IV, to vol. V. London, 1858-59-61, 8.°

List of the Linnean Society of London, 1858-60; 8.°

The Transactions of the Linnean Society of London; vol. XXII, parts 3, 4; vol. XXIII, part 1. London, 1858-60, 4.° fig.

Philosophical Transactions of the Royal Society of London, for the year 1859; vol. 149, parts 1, 2; vol. 150, parts 1-2. London, 1859, 4.° fig. — R. Società di Londra.

Proceedings of the Royal Society of London; n. 37-47. London 1859-60-61, 8.°

The Royal Society, 30th november, 1859 et 1860, 4.°

Transactions of the Royal Society of Literature; second series, vol. VI, parts 1-3. London, 1859, 8.° — R. Società di Letteratura di Londra.

The Proceedings of the Zoological Society of London; n. 392-448. London, 1859-60. — Soc. Zoologica di Londra.

The proceedings of the scientific meeting of the Zoological Society of London 1861; parts 1, 2; january-june; 8.°

Transactions of the Zoological Society of London; vol. IV, part 7, section I. London, 1861, 1 vol. 4.° fig.

Mémoires et documents publiés par la Société d'Histoire de la Suisse Romande; tomes XVIII et XIX (premières livraisons). Lausanne, 1862, 2 vol. 8.° — Soc. di Storia della Svizzera Romanda (*Losanna*).

Annuaire de l'Université Catholique de Louvain 1844 à 1861. Louvain, 18 vol. 12.° — Univers. Cattolica di *Lovanio*.

Discours prononcé à la salle des promotions le 26 janvier 1860 par P. F. X. De Ram pour le repos de l'âme de M. Édouard Joseph Delfortrie. Louvain, 8.°

Société Littéraire de l'Université Catholique de Louvain; choix de mémoires; tom. V-VIII. Louvain, 1850-60, 4 vol. 8.°

Souvenir du XXV.e anniversaire de la fondation de l'Université Catholique (novembre 1859). Louvain, 1860, 8.°

Thèses des Facultés de Théologie, Médecine, Philosophie, Sciences juridiques de l'Université Catholique de Louvain; 8.

Atti della Società Elvetica di Scienze naturali, riunita in Lugano nei giorni 11, 12 e 13 settembre 1860, sessione 44.ª Lugano, Veladini e C., 1861, 1 vol 8.° — Soc. Elvetica di Scienze naturali di *Lugano*.

Memorie e documenti per servire alla storia di Lucca; tomo XI. Lucca, Giusti, 1860, 1 vol. 4.° fig. — R. Accademia di *Lucca*.

Acc. delle Scienze di Madrid.

La botanica y los botanicos de la peninsula Hispano-Lusitana; estudios bibliograficos y biograficos por Don Miguel Colmeiro. Madrid, 1858, 1 vol. 8.° gr.

Mémorias de la Real Academia de Ciencias de Madrid; tom. III-V. Madrid, 1859-61, 3 vol. 4.° fig.

Programa de concurso publicado da la R. Academia de Ciencias de Madrid para la adjudicacion de premios en el año de 1859 y 1863. Madrid, 1858 y 1862, 4.°

Resumen de las Actas de la Real Academia de Ciencias de Madrid en los años academicos de 1853 a 1860; por el Secretario perpetuo Doctor Don Mariano Lorente. Madrid, 1857 a 1862, 8.°

Acc. R. delle Scienze morali e politiche di Madrid.

Discursos pronunciados en la Real Academia de Ciencias morales y politicas con motivo de la recepcion pública del Ill.mo Sr. D. Miguel Sanz y Lafuente en 27 mayo de 1860. Madrid, Tejado, 1860, in 8.°

Memorias de la Real Academia de Ciencias morales y politicas; tomo I, parte I.ª Madrid, imprenta Nacional, 1861, 1 vol. 8.°

Il Governo di Spagna (*Madrid*).

Memoria sobre el eclipse de sol de 18 de julio de 1860; por D. Francisco de Paola Marquez. Madrid, 1861, 1 vol. 4.° fig.

Società Letteraria e Filosofica di Manchester.

Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester; second series, vol. XV. Manchester, 1860, 1 vol. 8.°

R. Istituto Lombardo di Sc., Lett. ed Arti (*Milano*).

Atti del Reale Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti; vol. II, III, fasc. 1-4. Milano, Bernardoni, 1860-62, 4.° fig.

Memorie del Reale Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti; vol. VIII; IX, fasc. 1. Milano, Bernardoni, 1861-62, 4.°

Programma pei concorsi ai premi scientifici che verranno aggiudicati dal R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti; 4.°

Sulla organizzazione sanitaria in Italia. Rapporto steso in nome di una Commissione del Regio Istituto Lombardo ecc. dal Dottor Gaetano Strambio. Milano, 1862, 1 vol. 8.°

Sulla scrofola; memoria del Dottor Giuseppe Milani. Milano, 1862, 1 vol. 8.°

R. Osservatorio di Milano.

Effemeridi astronomiche di Milano per gli anni 1861-62, calcolate da Giovanni Capelli, Curzio Buzzetti ed Ernesto Sergent, con appendice. Milano Regia stamperia, 1861-62, 2 vol. 4.° picc.

Società Italiana di Scienze natur. di Milano.

Atti della Società Italiana di scienze naturali; vol. IV, fasc. 1, 2. Milano, Bernardoni, 1862, 8.°

R. Accad. di Sc., Lettere ed Arti di Modena

Memorie della Reale Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena; tomi I-III. Modena, Soliani, 1833, 1858-61; 4.° fig.

Abhandlungen der Historischen Classe der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Band IX, Abth. 1, 3. München, 1860, 4.° — R. Acc. delle Sc. di Baviera (*Monaco*).

Abhandlungen der Mathemat.-Physikalischen Classe der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Band VIII, Abth. 3; Band. IX, Abth. 1. München, 1860-61, 4.° fig.

Abhandlungen der Philosoph.-Philologischen Classe der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Band. IX, Abth. 1, 2. München, 1860-61, 4.° fig.

Annalen der Königlichen Sternwarte bei München, auf öffentliche Kosten herausgegeben von D.r J. Lamont. Band XIII. München, 1860, 1 vol. 8.

Denkrede auf D.r Georg Thomas v. Rudhart; von Karl August Muffat. München, 1861, 4.°

Denkrede auf Gotthilf Heinrich v. Schubert; von D.r Andreas Wagner. München, 1861, 4.°

Gedächtnissrede auf Friedrich Tiedemann, von D.r Theodor Ludw. Wilh. Bischoff. München, 1861, 4.°

Grenzen und Grenzgebiete der physiologischen Forschung; von D.r E. Harless. München, 1860, 4.°

Medaglia rappresentante l'effigie di Federico Thiersch.

Rede auf Sir Thomas Babington Macaulay; von D.r Georg Thomas von Rudhart. München, 1860, 4.°

Ueber Briefsteller und Formelbücher in Deutschland während des Mittelalters; von D.r Ludwig Rockinger. München, 1861, 4.°

Ueber die lange Dauer und die Entwickelung des chinesischen Reiches; von D.r Joh. Heinrich Plath. München, 1861, 4.°

Verzeichniss der Mitglieder der K. Akademie der Wissenschaften, 1860. München, 1860, 4.°

Von der Bedeutung der Sanskritstudien für die griechische Philologie, von D.r Wilhelm Christ. München, 1860, 4.°

Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou, publié sous la rédaction du Docteur Renard; année 1860, n. 2-4. Mosca, 1860, 8.° fig. — Societa Imperiale dei Naturalisti di *Mosca*.

Nouveaux Mémoires de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou, dédiés à S. M. l'Empereur Alexandre II; tome XIII (formant le tome XIX de la collection), livraison II. Moscou, 1861, 4.° fig.

Rendiconto delle adunanze de' lavori della Reale Accademia delle Scienze di Napoli. Terza serie, anno I. Napoli, stamperia Nazionale, 1861, 4.° — Acc. R. delle Sc. di *Napoli*.

Acc. degli Aspiranti Naturalisti *di Napoli.*

Annali della Accademia degli Aspiranti Naturalisti di Napoli; terza serie, volume 1.° Napoli, 1861, in 8.° fig.

Medaglia d'argento commemorativa pel restauro dell'Accademia degli Aspiranti Naturalisti di Napoli l'anno 1861.

Acc. Pontaniana *di Napoli.*

Intorno all'incendio del Vesuvio cominciato il dì 8 dicembre 1861; relazione per cura dell'Accademia Pontaniana. Napoli, 1862, 8.°

R. Istituto d'Incoraggiamento alle Scienze nat. *di Napoli.*

Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento alle scienze naturali di Napoli; tomo IX. Napoli, 1861, 1 vol. 4.° fig.

Museo Nazionale *di Napoli.*

Hercvlanensivm volvminvm quae svpersvnt collectio altera; tomvs I, fasc. 1-4. Napoli, stamperia della R. Università, 1861-62, 4 fol.°

Società Reale *di Napoli.*

Società Reale di Napoli. Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche; fasc. 1-3. Napoli, 1862, 4.°

Società di Sc. nat. *di Neuchatel.*

Bulletin de la Société des Sciences naturelles de Neuchâtel; tome V, 2.e et 3.e livr. Neuchâtel, 1860-61, 8.° fig.

Liceo di St. nat. *di Nuova-York.*

Annales of the Lyceum of natural history of New-York. Vol. VII, n. 4-9, 8.°

Osservatorio Astronomico *di Oxford.*

Astronomical and metereological observations made at the Radcliffe observatory, Oxford, in the Years 1857-58 under the superintendence of Manuel J. Johnson; vol. XVIII, XIX. Oxford, 1859, 1861, 2 vol. 8.°

The Radcliffe catalogue of 6317 stars chiefly circumpolar, reduced to the epoch 1845-0 etc.; with introduction by the Rev. Robert Main. Oxford, 1860, 1 vol. 8.°

I. R. Accademia di Sc., Lett. ed Arti *di Padova.*

Rivista periodica dei lavori della I. R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova; vol. VIII-X. Padova, 1860-61-62, 3 vol 8.°

Acc. di Sc. e Lett. *di Palermo.*

Atti della Accademia di scienze e lettere di Palermo. Nuova serie, vol. II-III. Palermo, 1853, 1859, 4.°

Soc. di Acclimazione di Sicilia (*Palermo*).

Atti della Società di acclimazione e di agricoltura in Sicilia, fondata il giorno 21 aprile del 1861; tomo I, n. 3, 6-8; tom. II, n. 1-6. Palermo, Ciulla, 1861-62, 8.°

Amministrazione Generale delle Miniere di Francia (*Parigi*).

Annales des Mines etc.; rédigées par les Ingénieurs des mines etc. 5.e Série, tom. XVI, livr. 6.e; tom. XVII, livr. 1.e, 2.e; tom. XVIII, livr. 5.e-6.e, tom. XIX, livr. 1.e-3.e; tom. XX, livr. 5.e-6.e - 6.e Série, tom. I, livr. 1.e-2.e Paris, 1859, 1860-61-62, 8.° fig.

Istituto Imp. di Francia (*Parigi*).

Comptes-rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de l'Institut Impérial de France; par MM. les Secrétaires perpétuels: tomes LII; LIII; LIV; LV, n. 1-10. Paris, 1861, 4.°

Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut Impérial de France, tomes XXVIII, XXXIII. Paris, Mallet-Bachelier, 1860-61, 2 vol. 4.°

Mémoires de l'Académie des Sciences morales et politiques de l'Institut Impérial de France, tome X. Paris, Didot frères, 1860, 4.°

Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres de l'Institut Impérial de France; première série, *Sujets divers d'érudition;* tome VI. Paris, impr. Impériale, 1860, 1 vol. 4 fig.

Carte de la Gaule sous le Proconsulat de César, dressée à l'aide des documents géographiques et topographiques du Dépôt de la Guerre, par la Commission spéciale instituée au Ministère de l'Instruction Publique et des Cultes d'après les ordres de S. M. l'Empereur. 1861; gravée sur pierre par Erhard Schieble, dessinée par Guillet et Chabaud, imprimée à l'imprimerie Impériale. — MINISTERO DELLA ISTR. PUBB. E DEI CULTI IN FRANCIA (*Parigi*).

Comptes-rendus des Séances et Mémoires de la Société de Biologie; 3.e série, tome I, année 1859. Paris, Thunot et C.e, 1860, 1 vol. 8.° — SOCIETÀ DI BIOLOGIA (*Parigi*).

Revue orientale et américaine, publiée sous les auspices de la Société d'Ethnographie; III.e année, n. 26, 27. Paris, Carion, 1860, 8.° fig. — SOC. DI ETNOGRAFIA *di Parigi.*

Bulletin de la Société de Géographie de Paris; 4.e série, tom. XX; 5.e série, tom. I, II. Paris, 1860-61, avec cartes. — SOC. DI GEOGRAFIA *di Parigi.*

Société Philomatique de Paris; extraits des procès-verbaux des séances pendant l'année 1861. Paris, 1861, 8.° — SOC. FILOMATICA *di Parigi.*

Bulletin de la Société Géologique de France; deuxième série, tome XVII; feuilles 45-52; tome XVIII, feuilles 1-43; tom. IX, feuilles 1-32. Paris, 1859, 61-62, 8.° — SOC. GEOLOGICA DI FRANCIA (*Parigi*).

Revue de l'Orient, de l'Algérie et des Colonies. Bulletin de la Société Orientale de France, etc., sous la direction de MM. Edouard Dulaurier et Abel Hureau de Villeneuve; 18.e année, 1860; 19.e année, 1861, janvier, fevrier. Paris, Pommeret et Moreau, Bonnet, 1860-61, 8.° — SOCIETÀ ORIENTALE DI FRANCIA (*Parigi*).

Esercitazioni dell'Accademia Agraria di Pesaro. Anno XII, semestre II; anno XIII, semestre I. Pesaro, Nobili, 1856 e 1861, 2 vol. 8.° — ACCADEMIA AGRARIA *di Pesaro.*

Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de S.t-Petersbourg; tome II, n. 4-8; tome III, n. 1-8; tome IX, n. 1-2. S.t-Pétersbourg, 1860-61, fig. — ACCAD. IMPERIALE DELLE SCIENZE *di Pietroborgo.*

Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de S.t-Pétersbourg; VII.e série, tome III, n. 1-11. S.t-Pétersbourg, 1860-61, 4.° fig.

Prix Rklitzki pour le meilleur ouvrage consacré aux recherches anatomiques et microscopiques sur les parties centrales du système nerveux, avec des applications physiologiques et patologiques, ½ fogl. 4.°

Giunta Imperiale Archeologica *di Pietroborgo.*

Compte-rendu de la Commission Impériale Archéologique pour l'année 1859-60. S.t-Pétersbourg 1860-61, 2 vol. f.° avec atlas in f.° mass.

Osservatorio Fisico Centrale di Russia (*Pietroborgo*).

Annales de l'Observatoire physique central de Russie, publiées par ordre de S. M. Impériale etc.; par A. T. Kupffer; année 1857, n. 1-2; année 1858, n. 1-2. S.t-Pétersbourg, 1860-61, 4.°

Compte-rendu annuel adressé à S. Exc. M. de Knajévitch, Ministre des Finances, par le Directeur de l'Observatoire physique central A.-T. Kupffer. Année 1858-60. – Supplément aux Annales de l'Observatoire physique central, pour l'année 1857. S.t-Pétersbourg, 1859-61, 4.°

Recherches expérimentales sur l'élasticité des métaux, faites à l'Observatoire physique central de Russie, par A.-T. Kupffer, et imprimées par ordre de l'Administration des mines; tome 1. S.t-Pétersbourg, 1860, 1 vol. 4.° fig.

Acc. Pontificia Romana di Archeol. (*Roma*).

Dissertazioni della Pontificia Accademia Romana di Archeologia; tomo XIV. Roma, 1860, 1 vol. 4.°

Acc. Pontificia de' Nuovi Lincei (*Roma*).

Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, compilati dal Segretario. Anno XIII, sessioni 5.a-7.a; anno XV, sessioni 1-2. Roma, 1860-62, 4.° fig.

Programma pel premio Carpi. Roma, 1862, fol.°

Società economica *di Salerno.*

Il Piacentino. Giornale d'agricoltura pratica, arti ed industrie agrarie, che si pubblica dalla Real Società economica del Principato Citeriore; serie 2.a, anno I, fasc. 1, 2, 7-12; anno II, fasc. 1-8. Salerno, Migliaccio, 1861-62, 4.°

Acc. delle Scienze *di S. Luigi.*

The transactions of the Academy of Science of St. Louis; vol. I, fasc. 4. St. Louis (Missouri), 1860, 8.° fig.

Ministro della Pubbl. Istruz. *di Santiago* (*Chili*).

Observaciones astronómicas hechas en el Observatorio nacional de Santiago de Chile en los años de 1853, 1854, i 1855, por el D.r Carlos Guill. Moesta; tomo I. Santiago de Chile, 1859, 1. vol. 4.°

Acc. delle Scienze *di Stoccolma.*

Konglica Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar; tom. II, disp. 1.a, 2.a; tom. III, disp. 1.a Stockholm, 1858, 1 vol. 4.° fig.

Konglica Svenska fregatten Engenies resa omkring jorden under befäl af C. A. Virgin, Aeren 1851-53 etc.; disp. 3, 4, 8-11. Stockholm, 1859-61, 4.° fig.

Meteorologiska Jakttagelser' sverige utgifna af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien, bearbetade af Er. Edlund; vol. I, 1859. Stockholm, 1860, 1. vol. 4.°

Oefversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar; 15-16-17.e Aergängen, 1858-59-60. Stockholm, 1859-60-61, 2 vol. 8.° fig.

Mémoires de la Société des Sciences naturelles de Strasbourg; tome V.e, livr. 1.ère Strasbourg, 1858, 1 vol. 4.° fig. — Soc. di Scienze nat. di Strasborgo.

Giornale delle Scienze Mediche della R. Accademia Medico-Chirurgica di Torino; vol. XXXIX-XLI; vol. XLII; n. 1-17. Torino, 1860-62, 8.° — Acc. Med.-Chirur. di Torino.

Incisione piemontese dei tempi di Carlo Emanuele I, rappresentante la guerra dei giganti, eseguita dall'incisore Sintoun. — Ministero degli Affari Esteri (Torino).

Traités publics de la Royale Maison de Savoie avec les puissances étrangères depuis la paix de Cateau-Cambresis jusqu'à nos jours, publiés par ordre du Roi; tome VIII. Turin, Favale et Comp. 1861; 1 vol. in 4.°

Della legislazione mineraria e delle scuole delle miniere; discorsi due compilati per commissione di S. E. il Ministro d'agricoltura, industria e commercio, da Enrico Poggi e Celso Marzuechi, e da Paolo Savi e Giuseppe Meneghini. Firenze, Le Monnier, 1861, 1 vol. 8.° — Ministero d'Agric., Indus. e Comm. (Torino).

Relazione a S. M. per la convocazione di una Giunta consultiva sulla carta geologica del regno d'Italia in udienza del 28 luglio 1861. Torino Dalmazzo, 1861, 4.°

Relazione intorno all'amministrazione delle RR. miniere e fonderie del ferro in Toscana, con documenti di corredo. Firenze, Mariani, 1861, 1 vol. 8.°

Repertorio delle miniere. Concessioni e permissioni di miniere, torbiere, cave e usine, e notizie diverse dall'anno 1845 all'anno 1857; vol. VII, Torino, Ceresole e Panizza, 1858, 1 vol. 8.°

Repertorio delle miniere. Leggi, decreti, regolamenti, circolari, atti diversi, concernenti le sostanze minerali; serie 2, vol. I. Torino, Dalmazzo, 1861, 1 vol. 8.°

Specchio di leggi ed altri atti di Governo vigenti nel regno d'Italia sulle appartenenze del Ministero dell'Interno. Torino, eredi Botta, 1861, fol.° — Minist. dell'Inter. (Torino).

Annuario dell'istruzione pubblica per l'anno scolastico 1860-61. Torino, G. Marietti, 1 vol. 12. — Ministero dell'Istr. pubbl. (Torino).

I manoscritti Palatini di Firenze, ordinati ed esposti da Francesco Palermo; vol. I-II. Firenze, Cellini e Comp., 1853 e 1860, 2 vol. 4.°

Raccolta delle leggi, ordinanze e regolamenti speciali per Trieste; pubblicata per ordine della Presidenza del Consiglio dal Procuratore civico. Trieste, 1861, 1 vol. 4.° — Comune di Trieste.

Memorie dell'I. R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti; vol. VIII, parte 2.ª; vol IX, parte 1.ª-3.ª; vol. X, parte 1.ª-2.ª. Venezia, 1860-61-62, 4.° fig. — I. R. Istituto Veneto (Venezia).

ACCAD. D'AGRIC., COMM. ED ARTI *di Verona.*

Memorie dell'Accademia d'agricoltura, commercio ed arti di Verona; tom. XXXIII-XXXIX. Verona, 1857-58, 1861-62, in 8.° fig.

Programma di premio pel 1862; 4.°

ACC. IMP. DELLE SC. *di Vienna.*

Almanach der K. Akademie der Wissenschaften; vol. X, 1860; vol. XI, 1861. Wien, 1860-61, 2 vol. 8.°

Archiv für Kunde österreichischer Geschichts-Quellen etc.; Band. XXIV; XXV; XXVI; XXVII, n.° 1. Wien, 1860-61, 8.°

Denkschriften der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe; Band. XVIII, XIX. Wien, 1860-61, 2 vol. 4.° fig.

Denkschriften der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Philosophisch-historische Classe; Band. X, XI. Wien, 1860-61, 2 vol. 4.° fig.

Fontes rerum Austriacarum. Oesterreichische Geschichts-Quellen; herausgegeben von der historischen Commission der K. Akademie der Vissenschaften in Wien. *Diplomataria et acta*, Band. XIX; XX, Abth. 2. Wien, 1860-61, 2 vol. 8.°

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe; Band. XXXIX-XLIII. Wien, 1860-61, 8.°

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Philosophisch-historische Classe; Band XXXIII, n. 2; Band XXXIV, n. 1-3; Band XXXV, n. 1-5; Band XXVI, n. 1-3. Wien, 1860, 8.°

ISTITUTO GEOGR. *di Vienna.*

Mittheilungen der K. K. Geographischen Gesellschaft; Jahrg. III, IV. Wien, 1859, 1860, 2 vol. 8.° gr.

OSSERVATORIO IMP. *di Vienna.*

Jahrbücher der K. K. Central-Anstalt fur Meteorologie und Erdmagnetismus; von Karl Kreil; Band VII, Jahrgang 1855. Wien, 1860, 1 vol. 4.

I. R. ISTITUTO GEOLOGICO *di Vienna.*

Jahrbuch der Kaiserlich-Königlichen Geologischen Reichsanstalt; Band. XI, XII. Wien, 1860-62, 4.° fig.

GOVERNO AMERICANO DEGLI STATI UNITI (*Washington*).

Message from the President of the United States, communicating, in compliance with a resolution of the Senate of July 24, 1854, the fourth meteoroligical report of Prof. James P. Espy. Washington, 1857, 1 vol. 4.°

Report of the Superintendent of the Coast Survey, showing the progress of the Survey during the year 1856. Washington, 1856, 1 vol. 4.°

Reports of explorations and Surveys to ascertain the most practicable and economical route for a railroad from the Mississippi river to the

Pacific Ocean; made under the direction of the Secretary of War, in 1853-55; vol. XII. Washington, 1860, 2 vol. 4 fig.

Report on the history and progress of the America Coast Survey up to the year 1858; 8.°

Second report of a geological reconnoissance of the southern and middle counties of Arkansas, made during the years 1859 and 1860, by David Dale Owen. Philadelphia, 1 vol. 8.°

Second report of the Geological Survey in Kentucky, made during the years 1856 and 1857, by David Dale Owen. Frankfort, Kentucky, 1857, 1 vol. 8.° *con atlante.*

Third report of the Geological Survey in Kentuky, made during the years 1856 and 1857, by David Dale Owen. Frankfort, Kentucky, 1857, 1 vol. 8.° *con atlante.*

Statistical Report on the Sickness and mortality in the Army of the United States, compiled from the records of the Surgeon General's Office, embracing a period of five years, from January 1855, to January, 1860. Washington, 1860, 1 vol. 4.°

Smithsonian Contributions to Knowledge; vol. XII. City of Washington, 1860, 1 vol. 4.° — ISTIT. SMITHSONIANA *di Washington.*

Annual report of the board of Regents of the Smithsonian Institution showing the operations, expenditures, and condition of the Institution for the year 1859. Washington, 1860, 1 vol. 8.°

Report on the chemical analysis of the white sulphur Water of the Artesian Well of Lafayette, Ind., with remarks upon the nature of artesian wells, by Charles M. Wetherill. Lafayette, Ind. 8.°

Contributions to the natural history of the United States of America; by Louis Agassiz; vol. I-III. Cambridge, 1857, 1860, 3 vol. 4.° fig.

Nouveaux Mémoires de la Société Helvétique des Sciences naturelles; vol. XVII, XVIII. Zurich, 1861, 2. vol. 4.° fig. — SOCIETA ELVETICA DI SCIENZE NATURALI *di Zurich.*

SCIENZE

FISICHE E MATEMATICHE

NOTIZIA STORICA

dei lavori fatti dalla Classe di Scienze Fisiche e Matematiche della Reale Accademia delle Scienze negli anni 1860-61

scritta dal Professore

EUGENIO SISMONDA

SEGRETARIO PERPETUO DELLA CLASSE

Letta nell'adunanza del giorno 19 gennaio 1862.

Colleghi Onorevolissimi,

Lunga più del consueto è la *Notizia Storica* dei lavori della Classe, che oggi io ho l'onore di leggervi; ma essa abbraccia un periodo di due anni invece di un solo, cioè incomincia col mese di gennaio dell'anno 1860, e si estende a tutto dicembre del 1861. Nella mia narrazione procederò con ordine cronologico, e senza classificazione alcuna delle materie ricorderò i diversi argomenti stati trattati nelle singole tornate, nel modo medesimo con cui si succedettero. Perciò con reso-conti più o meno particolareggiati richiamerò alla vostra memoria, Colleghi onorevolissimi, i giudizi emessi dalle Giunte accademiche intorno ai lavori che Autori nazionali od esteri rassegnarono all'Accademia per la stampa ne' suoi Volumi; darò sunti delle Memorie che non trovansi stampate in disteso in questo o nei successivi Volumi; riferirò la parte più importante del carteggio, i programmi di concorso, i pareri sul merito dei relativi lavori, il risultamento delle osservazioni meteorologiche fatte alla Specola dell'Accademia, le mutazioni avvenute nel Corpo accademico conseguentemente a decessi od a destinazioni in altre parti del Regno toccate a qualcheduno dei Soci residenti, le nomine di nuovi Membri, e quanto

inoltre può avere qualche importanza pel Corpo accademico o sotto l'aspetto scientifico, o sotto quello de' suoi rapporti col Governo, colle altre Accademie, ecc. ecc.

Per la natura del prescelto metodo di narrazione, questa *Notizia Storica* non potrà riuscire ricca e adorna di quelle sintetiche considerazioni che agevolmente si potrebbero far iscaturire da una trattazione di materie ordinate a seconda della loro analogia, ed esaminate sotto tutti i punti di vista suggeriti dalla loro naturale connessione scientifica; ma essa presenterà invece, voglio lusingarmene ed a questo solo fine ho mirato, i vantaggi inerenti all'altro metodo, e sarà perciò dei lavori della Classe un ragguaglio più fedele, più compiuto, più profondo, corredato all'uopo della citazione di chimiche analisi, di formole, di calcoli e di tanti altri particolari importantissimi, i quali nell'esposizione sistematica sogliono essere sacrificati alla vaghezza del discorso.

8 gennaio 1860.

Con tutto il giorno 31 dicembre del passato anno 1859 essendo spirato il termine pel concorso al premio di L. 6,000 proposto dall'Accademia con i suoi programmi in data 29 aprile 1856, e gennaio 1857 per una *Descrizione idrografica del Regno Sardo*, in questa prima adunanza dell'anno 1860, il Segretario presenta alla Classe i lavori manoscritti pervenuti alla Segreteria accademica entro l'accennato termine.

Questi lavori sono in numero di due; l'uno, distinto col titolo: *Modo di rendere inespugnabili contro la forza delle piene gli argini dei fiumi*, non risponde che ad una delle varie questioni del programma, manca di una delle essenziali condizioni di questo, vale a dire non è contrassegnato da alcuna epigrafe, e porta anzi scritto in tutti caratteri il nome dell'Autore, che è Raffaello Marioni, Avvocato, di Viareggio in Toscana. Inoltre in una lettera parimente sottoscritta ed indirizzata al Corpo accademico, l'Autore dichiara di aver inviato questo suo lavoro non nella mira di concorrere al premio ma *nell' intento di far cosa utile*. Per tutte queste ragioni la Classe non considera il manoscritto del sig. Avv. Marioni come un lavoro di concorso, ma piuttosto come una Memoria da esaminarsi alla maniera di quelle rassegnate dai rispettivi Autori all'Accademia per la stampa ne' suoi Volumi.

Il secondo, che resta perciò l'unico ammesso al concorso, ha per titolo: *Idrografia degli Stati di Terraferma*, ed è distinto coll'epigrafe: *Lasciate ogni speranza voi ch'entrate.* È questo un lavoro molto voluminoso, accompagnato da molte carte topografico-idrografiche generali e parziali del Piemonte, della Savoia e della Sardegna.

La Giunta accademica, che era stata incaricata dell'estensione del Programma, riceve ora dal Presidente l'incarico di esaminare questo manoscritto, colla sola sostituzione del Comm. Mosca al Comm. Giulio, mancato ai vivi nel tempo in cui stette aperto il concorso. Tale Giunta risulta perciò composta degli Accademici Cav. Menabrea, Comm. Mosca, Cav. Cavalli, Cav. Richelmy e Cav. Sismonda Eugenio.

Dopo ciò lo stesso Segretario dà comunicazione del carteggio e legge, tra le altre, una lettera in data 5 dicembre 1859, nella quale il signor Ministro dell'Interno informa il Presidente dell'Accademia, che S. M. in udienza del giorno 4 di detto mese di dicembre erasi degnata di approvare la nuova riconferma del Conte Alberto Della Marmora a Vice-Presidente dell'Accademia, riconferma fatta nell'adunanza tenuta dalle due Classi insieme il giorno 18 del mese di novembre ultimo scorso.

Egli legge ancora una circolare a stampa indirizzata all'Accademia nostra dall'Accademia delle Scienze di Berlino, nella quale, esposto il progetto di stabilire, dirò, una cassa, col titolo di *Fondazione Humboldt*, si fa appello all'Accademia nostra perchè voglia concorrere all'attuazione di essa. Mercè tale fondazione, mentre si renderebbe un nuovo omaggio di onore alla memoria di Alessandro di Humboldt, co'suoi proventi si darebbe appoggio a quegli uomini di provato merito, che potessero abbisognarne o per ricerche scientifiche, o per lontani viaggi intrapresi pure con iscopo scientifico.

22 gennaio.

Nella consueta comunicazione del carteggio leggesi una lettera del sig. Ministro dell'Interno, colla data del giorno 17 corrente gennaio, in cui si notifica al Presidente dell'Accademia che S. M. in udienza del giorno 16 di detto mese erasi degnata di approvare le nomine ad Accademici stranieri fatte dalla Classe nella tornata del giorno 8 gennaio nelle persone degli onorevolissimi scienziati:

Giovanni Battista Biot, Comm. della Legion d'onore, Membro dell' Istituto Imp. di Francia, Prof. di fisica nel Collegio di Francia e di astronomia nella Facoltà delle Scienze di Parigi;

Giovanni Battista Dumas, Grande Ufficiale della Legion d'onore, Senatore dell'Impero, Membro dell' Istituto Imp. di Francia, Prof. di chimica nella Facoltà delle Scienze di Parigi;

Eilardo Mitscherlich, Cav. dell' Ordine del merito di Prussia, Socio straniero dell' Istituto Imp. di Francia, Membro della R. Accademia delle Scienze e Prof. di chimica nella R. Università di Berlino;

Davide Brewster, Ufficiale della Legion d'onore, Socio straniero dell' Istituto Imp. di Francia, Rettore dell' Università di S. Andrea nella Scozia.

Quindi il Presidente Barone Plana legge, per modo di semplice comunicazione, una *Nota sull'ecclisse parziale di Sole visibile in Torino nel giorno* 18 *luglio di quest'anno.*

La grandezza, egli dice, di questo ecclisse sarà di *dieci* sulle *dodici* parti del diametro apparente del Sole, ed ecciterà la curiosità del volgo se sarà secondata dalla serenità del cielo.

Per annunziarlo all'Accademia colla dovuta precisione, il Barone Plana ha fatto il calcolo colle note formole ed ha ottenuto per risultamento:

Principio dell'ecclisse dopo mezzodì alle ..... $2^h. 27'. 26''$;
Massima fase ..... $3^h. 34'$;
Fine ..... $4^h. 40'. 37''$.

Quantità dell'ecclisse *digiti dieci*, cioè, diviso il diametro apparente del Sole in dodici parti, ve ne avranno dieci oscurate verso le ore *tre* e minuti *trentaquattro* pomeridiane.

In tale giorno, soggiugne l'Autore della nota, l'equazione del tempo è di $5', 55''$ all' istante di mezzodì vero; pertanto chi avesse l'orologio regolato sulla meridiana solare, dovrà sottrarre circa sei *minuti* dagli istanti sovraindicati per iscorgere verificato l'annunzio. In detto giorno ed in quell'ora il diametro apparente della Luna essendo di $32', 34''$, e quello del Sole di $31', 31''$, cioè il diametro apparente della Luna superando di $63''$ quello del Sole, avverrà che l'ecclisse, il quale sarà *parziale* per Torino, comparirà totale nella parte boreale della Spagna, ed in particolare nelle città di Oviedo, Santander, Vittoria, Burgos, Saragozza, Valenza e forse Pamplona.

A questo annunzio il Barone Plana ne aggiugne un altro, quello cioè di un ecclisse *annulare* del Sole avente luogo nella notte stessa del 22 al 23 gennaio, e nel quale il disco del Sole sarebbe oscurato da un anello rimanendo come cinto da una corona lucente.

Egli ripete la forma di questo stupendo fenomeno, da lui non mai veduto, dalla circostanza contraria a quella che accompagna l'ecclisse del dì 18 luglio, dalla circostanza vale a dire che oggi (22 gennaio) il diametro del Sole supera quello della Luna di 114″ essendo la Luna prossima al suo *apogeo;* ma quest'ecclisse non potrà essere visibile, egli dice, che nella parte affatto australe del nostro emisfero terrestre.

L'Autore chiude poi la sua nota con queste parole: nella presente età ci deve bastare la soddisfazione di saper calcolare le varie circostanze di siffatti fenomeni. Chi dubitasse di un sempre crescente progresso nelle scienze positive, consideri che i Caldei credevano gli ecclissi di Sole *accidentali*, ed incapaci di assoggettarsi al calcolo, mentre con molta diligenza ed assiduità osservavano gli ecclissi di Luna. Ipparco, nato a Nicea nella Bitinia, che vivea negli anni 127 e 128 innanzi la nostra Era, fu il primo uomo che distrusse quel madornale errore dei Caldei.

Combinando l'idea della rotondità della Terra con quella che, nel medesimo istante, a diversi punti del Cielo corrisponde la Luna a diverse altezze sull'orizzonte, comprese Ipparco, che l'istesso ecclisse di Sole non può essere ugualmente visibile in ogni luogo. Questo grandissimo Astronomo dell'antichità fece sentire tutta la necessità di considerare la rotondità della Terra nei calcoli astronomici di questo genere, onde paragonare i fenomeni osservati alla superficie terrestre con quelli che, per mera ipotesi, sarebbero veduti dal suo centro. Dopo diciannove secoli l'enunciato principio d'Ipparco è stato convenientemente esteso da *Edmondo Halley* ai passaggi di Venere sul disco del Sole, ed esso Halley ne trasse la capitale conseguenza, che, mediante l'osservazione di questa specie di minime o parziali ecclissi di Sole, era possibile di stabilirne l'assoluta sua distanza in chilometri dalla Terra.

Da ultimo il Cav. Cavalli legge: *Mémoire sur la théorie de la résistance statique et dynamique des solides, surtout aux impulsions comme celles de la poudre à canon.*

(Sarà stampata in uno dei prossimi Volumi).

5 febbraio.

Il Socio Cav. Sobrero legge un suo lavoro *Intorno allo espurgamento della seta.*

(È stampato nel Tomo XIX, pag. 425).

Il Segretario legge una Memoria del Dottore in scienze naturali sig. Gioanni Capellini, intitolata: *Cenni geologici sul giacimento delle ligniti della bassa val di Magra*, sulla quale Memoria da apposita Commissione accademica già era stato fatto favorevole rapporto nella tornata del giorno 20 novembre ultimo scorso.

(È stampata nel Tomo XIX, pag. 367).

26 febbraio.

Lo stesso Segretario presenta una Memoria manoscritta, inviata all'Accademia per la stampa ne'suoi Volumi dal sig. Dott. Pietro Savi, Prof. di botanica nell'Università di Pisa, Memoria intitolata: *Considerazioni sul Biophytum sensitivum* DC.

Egli intraprende quindi la lettura di una Memoria pure manoscritta rassegnata all'Accademia dal sig. Avv. Bartolomeo Gastaldi, Memoria col titolo: *Frammenti di geologia Sarda*, ed intorno alla quale già era stato fatto favorevole rapporto da apposita Commissione in una delle precedenti adunanze.

1.° aprile.

Una Giunta accademica composta del Cav. De Filippi, relatore, del Comm. Riberi e del Cav. Berruti, riferisce intorno al merito di un lavoro manoscritto *Sulla presenza di elementi contrattili nelle maggiori corde tendinee delle valvole mitrali umane*, rassegnato all'Accademia dal Dott. sig. E. Oehl, docente istologia ed anatomia microscopica nell'Università di Pavia.

Nella sua relazione la Giunta fa osservare, che, avendo essa intrapreso le opportune ricerche nello scopo di ben chiarire il nuovo fatto anatomico, il quale forma il principale oggetto del lavoro del sig. Oehl, ha potuto verificare la presenza di fibre muscolari rigate nelle nominate corde tendinee, ma che non ha potuto rinvenirle in istato di perfetto isolamento, ed avere piuttosto nelle sue preparazioni riconosciuto il caso, che lo stesso

Oehl dice non raro, in cui tali fibre derivano dalle corrispondenti colonne muscolari.

Nelle conclusioni la Giunta encomia il lavoro del sig. Oehl sia per l'importanza del fatto che tratta, sia pel modo con cui lo svolge, e ne propone la lettura alla Classe.

Un'altra Giunta composta del Cav. Richelmy, relatore, e del Generale Menabrea fa relazione sopra un lavoro eziandio manoscritto, presentato all'Accademia, al fine pure che questa lo stampi ne' suoi Volumi, dal Prof. di matematica sig. Giuseppe Bruno, lavoro intitolato: *Circa alcuni casi d' integrazione della equazione lineare a due variabili.*

Nei primi tre paragrafi della sua Memoria, dice la Commissione, il Prof. Bruno porge il modo di integrare compiutamente o di ridurre almeno ad un ordine minore varie specie di equazioni lineari a due sole variabili, delle quali la integrazione fatta coi metodi finora conosciuti sarebbe per riescire assai laboriosa; nei paragrafi quarto, quinto ed ultimo egli dimostra teoremi analogi per le equazioni alle differenze parziali, contenenti tre variabili.

Essa non tace che gli ordini di equazioni differenziali trattati dal Prof. Bruno nei tre primi paragrafi entrano in classi più generali già studiate da altri, e particolarmente i due primi dal Prof. Schellbach, di Berlino, in una Memoria stampata nel Giornale di Crelle, Vol. 16.°, ma essa fa ad un tempo osservare, che essendo assai più facile il riconoscere se un dato esempio particolare sia compreso negli ordini contemplati dal Prof. Bruno, che non nelle classi del Professore tedesco e di altri Autori, e per altra parte essendo anche più semplice il risultamento cui conduce il metodo seguito dal nostro concittadino, la sua Memoria merita di essere presa in considerazione per la recata integrazione delle equazioni a due variabili.

Ma dove la Giunta accademica dichiara lo scritto del Prof. Bruno maggiormente degno di lode si è in quelle parti che trattano delle equazioni alle differenze parziali, ed a cui l'Autore estese i teoremi dimostrati nei primi paragrafi per le equazioni a due variabili.

Per gli esposti ed altri pregi di cui è adorna la Memoria del Prof. Bruno, la Giunta conchiude proponendone la lettura alla Classe.

22 aprile.

Il Segretario dà comunicazione del carteggio, e legge, tra le altre, una lettera in data del giorno 5 del corrente mese di aprile, nella quale il sig. Ministro dell' Interno informa il Presidente dell'Accademia di aver trasmesso al Bibliotecario di S. M. il Volume XVIII, serie 2.ª delle *Memorie* dell'Accademia perchè ne fosse fatto omaggio alla prefata M. S.

Quindi il Cav. Delponte, condeputato col Comm. Moris, riferisce intorno al merito della Memoria del sig. Dott. Pietro Savi, Professore di Botanica nella R. Università di Pisa, intitolata: *Considerazioni sul Biophytum sensitivum* DC.

Fa osservare la Giunta che già il De-Candolle avea tolto questo vegetale dal genere *Oxalis* per crearne un nuovo sotto il nome di *Biophytum*, ma che non avendo questo nuovo genere proposto dal De-Candolle ottenuto la sanzione di qualcheduno dei Botanici più eminenti dell'età nostra, il posto sistematico della pianta rimaneva ancora a determinarsi.

Il Prof. Pietro Savi, nella Memoria presentata all'Accademia, risolve questo problema tassonomico, e facendo vedere che oltre la niuna aderenza degli stami, la presenza di due ovoli in caduna loggia, e l'appendice tubolosa del micropilo, gli ovoli essendo ascendenti e ortotropi, presentano ancora una direzione a rovescio di quella che è propria delle Ossalidi, egli dimostra che il genere *Biophytum*, stabilito da De-Candolle, è un genere ben fondato, naturale e non soggetto a contestazione.

Le ricerche fatte dal Prof. Savi arricchiscono la scienza, dice la Giunta, di una descrizione e di una tavola rappresentante il *Biophytum sensitivum* che non lasciano nulla a desiderare sia rispetto all'abito della specie, sia riguardo ai particolari intimi di struttura degli organi di riproduzione della medesima.

Quindi essa Giunta conchiude per la lettura della nominata Memoria del Prof. Savi, e per la stampa della medesima nei Volumi accademici.

Il Cav. Richelmy, condeputato col Generale Menabrea, col Commendatore Mosca e col Generale Cavalli, fa relazione su un lavoro manoscritto dell'Avv. sig. Raffaello Marioni, da Viareggio in Toscana, lavoro col titolo: *Modo di rendere inespugnabili contro la forza delle piene gli argini dei fiumi.*

Premesso che questo manoscritto fu dall'Autore inviato all'Accademia

allo spirare del termine prefisso pel concorso all'*Idrografia del Regno Sardo*, e rammentate alla Classe le ragioni per cui non potè essere ammesso al concorso, la Commissione accademica ne porge un sunto particolareggiato, e con opportune considerazioni dimostra che lo scritto del sig. Avv. Marioni per difetto di tale novità di proposizioni da costituire un vero progresso nella pratica, e per non essere redatto in forma di Memoria accademica, non può, giusta le consuetudini dell'Accademia, essere stampato nei Tomi della medesima.

Il Cav. Eugenio Sismonda, condeputato coi Comm. Moris, Riberi, Mosca e col Cav. Richelmy, fa relazione sulle *modificazioni degli articoli del regolamento accademico relativi alla nomina dei Corrispondenti*, proposte dalla Commissione nominata in seno alla Classe di scienze morali, storiche e filologiche, e da questa già approvate, per la parte che la risguarda.

In questa relazione dichiaransi opportune le considerazioni esposte dall'altra Commissione al fine di dimostrare la convenienza di definire il numero dei Membri corrispondenti di ciascuna Classe, e savie le norme stabilite per l'elezione dei medesimi, e le ragioni di annullamento dell'articolo 73 del regolamento così concepito: *I Soci corrispondenti che lascieranno scorrere sei anni senza comunicare all'Accademia qualche scritto o altra cosa degna di lode, sono tenuti come se avessero rinunziato alla detta qualità di Socio corrispondente.*

Quanto poi al numero di Corrispondenti da associarsi dalla Classe fisico-matematica, la Commissione, considerando la estensione e la moltiplicità delle branche di scienze fisico-matematiche, che formano l'oggetto degli studi della Classe, e la convenienza di strignere e mantenere relazione con quanti scienziati salirono in fama di dotti, e si resero benemeriti nell'una o nell'altra di dette branche di scienze positive, propone che la Classe fisico-matematica fissi il numero de' suoi Corrispondenti a 100.

La Classe approva all'unanimità questo rapporto della Giunta, e dopo una discussione, cui prendono specialmente parte il Cav. Sella ed il Relatore Prof. Eugenio Sismonda, intorno al modo di ripartire questi cento Corrispondenti, alla perfine si stabilisce di dividerli nelle seguenti sezioni e di assegnare a caduna l' infra indicato numero di Soci:

Sezione 1.ª Matematica pura e astronomia ..... 14.
» 2.ª Matematica applicata e scienza dell'Ingegnere civile e militare ..... 10.
» 3.ª Fisica generale e sperimentale ..... 14.
» 4.ª Chimica generale ed applicata ..... 16.
» 5.ª Mineralogia, geologia e paleontologia ..... 18.
» 6.ª Botanica e fisiologia vegetale ..... 12.
» 7.ª Zoologia, anatomia e fisiologia comparata ..... 16.

Il Comm. Angelo Sismonda comunica una lettera in data Grignasco 18 aprile 1860, indirittagli dall'Ingegnere delle miniere del distretto di Genova sig. Costantino Perazzi, per ragguagliarlo del risultamento di studi fatti su miniere di rame esistenti nella contea di Nizza.

In questa sua lettera l'Ingegnere Perazzi, dopo averne rammentata un'altra scritta pure al Prof. A. Sismonda nel mese di dicembre dell'anno 1858 sullo stesso argomento, e stata dal medesimo eziandio comunicata all'Accademia nell'adunanza del giorno 6 febbraio 1859, lo informa ora che i lavori intrapresi intorno alle miniere cuprifere della valle del Varo, sotto la savia direzione dell'Ingegnere Francfort, hanno dato ottimi risultamenti. Due vere miniere, scrive l'Ingegnere Perazzi, già si ottennero nella valle del Varo, ed una società inglese intitolatasi *Società inglese delle miniere del Varo*, sta intraprendendo la costruzione di un'apposita laverìa. I principali lavori trovansi concentrati su quella parte dello strato cuprifero che affiorisce nel comune di Lacroix nel sito detto *Serigiet*, ed in quello di Baluis a *Ubac de Jourdan*, e le miniere sono distinte coi detti nomi di località.

A Serigiet lo strato cuprifero è stato tagliato col mezzo di quattro gallerie, che già sommano tra loro a duecento e più metri di lunghezza; a *Ubac de Jourdan* venne pure scavato per quarantadue metri e con lavori ascendenti e discendenti, ed ovunque questo strato cuprifero si mostrò sì ricco di minerali di rame da costituire un'assai utile coltivazione.

I più importanti minerali incontrati sono: *rame bigio argentifero*, *rame variopinto*, *rame piritoso*, *rame ossidato nero*, *rame carbonato verde e azzurro*, *rame fosfato*, *rame arseniato e rame silicato crisocolo*.

Il potente banco di puddinga con grossi ciottoli di quarzo è in queste regioni profondamente metamorfosato, si direbbe quasi, da una dissoluzione alcalina calda, la quale attaccando la silice, avrebbe prodotto il cemento

cristallino, che ne avvolge i ciottoli. La formazione degli schisti rossi, molto ricca di perossido di ferro, mostrasi in ogni dove attraversata da filoncelli di quarzo e di calcare. In fine tutti i caratteri mineralogici presentati dallo strato metallifero ne indicano, secondo l'Ingegnere Perazzi, la più grande analogia cogli strati cupriferi del terreno permiano del Mansfeld e della Russia.

Lo stesso Accademico Prof. Angelo Sismonda presenta infine alla Classe alcune selci lavorate in forma di punte di lancia, avute in dono dal sig. Dottore Moro, di Arona, e state rinvenute in una torbiera a Mercurago, presso la detta città di Arona. Le quali selci, essendo fattura dell'uomo, concorrono a vieppiù confermare la già nota età diluviale della formazione del combustibile fossile conosciuto sotto il nome di torba.

20 maggio.

Il Segretario presenta un piego suggellato, giunto per la posta alla Segreteria accademica il giorno 27 del passato mese di aprile, inviato dal Prof. Architetto G. B. Toselli, Bresciano, e sul quale sta scritto:

Contiene un nuovo progetto per far ascendere le locomotive pei piani fortemente inclinati.

Tale piego suggellato è accompagnato da una lettera, di cui il Segretario dà lettura, e nella quale il sig. Toselli prega l'Accademia a voler tenere in deposito il piego stesso, siccome già fece per altra consimile segreta sua comunicazione.

Lo stesso Segretario legge quindi la Memoria manoscritta del signor E. Oehl, docente istologia ed anatomia microscopica all'Università di Pavia, Memoria intitolata: *Sulla presenza di elementi contrattili nelle maggiori corde tendinee delle valvole mitrali umane*, e sulla quale, da apposita Giunta Accademica, era stato fatto favorevole rapporto in una delle precedenti tornate.

(È stampata nel Tomo XX, pag. 342).

Da ultimo leggesi la Memoria col titolo: *Considerazioni sul Biophytum sensitivum* DC., rassegnata all'Accademia dal sig. Dott. Pietro Savi, Professore di Botanica nella R. Università di Pisa, e sulla quale, nell'adunanza del 22 aprile, una Commissione Accademica aveva pur fatto favorevole relazione.

(Trovasi stampata nel Tomo XX, p. 429).

3 giugno.

Il Segretario dà comunicazione del carteggio, e legge, insieme a parecchie altre, una lettera d'annunzio della morte del Professore di storia naturale Abramo Massalongo, resosi defunto in Verona il giorno 25 del passato mese di maggio nella giovine età d'anni 35 appena; la Classe, che apprezzando al loro giusto valore le numerose e dotte scritture paleontologiche del Prof. Massalongo, fin dall'anno 1856 avealo nominato a suo Socio corrispondente, ode la notizia della sua morte con grande rammarico, siccome accoglie con non minor dolore la notizia verbalmente datale dal Presidente della pur recentissima e grave perdita fatta dalle scienze fisico-chimiche per la morte del Cav. Giuseppe Belli, Professore di fisica nella R. Università di Pavia, e del Cav. Gioachino Taddei, Prof. di chimica a Firenze, i quali appartenevano eziandio a quest'Accademia, quegli come uno dei dieci Soci nazionali non residenti, questi come Membro corrispondente.

Una Giunta Accademica composta del Generale Cav. Menabrea, relatore, e del Cav. Prof. Richelmy, fa relazione favorevole intorno ad un nuovo teorema sulle sezioni coniche, comunicato all'Accademia dall'Ingegnere idraulico sig. Alessandro Dorna, Prof. di meccanica nell'Accademia militare, e concepito nei seguenti termini: *I seni degli angoli, che la normale alle tre curve di secondo grado fa col raggio vettore e con l'asse focale, sono in un rapporto costante ed eguale al coefficiente di eccentricità.* Nel comunicare questo teorema, il Prof. Dorna fa notare la perfetta analogia che passa fra l'enunciata proprietà delle tre curve e la legge ottica di rifrazione, allorchè si prende per coefficiente di eccentricità l'indice di rifrazione del mezzo diafano.

La Classe, udita la relazione, vota l'inserzione del riferito teorema del Prof. Dorna nel pubblico reso-conto della tornata attuale della Classe, e la riproduzione del medesimo nella *Notizia Storica.*

Un'altra Commissione composta del Cav. De Filippi, relatore, e del Cav. Sismonda Eugenio, riferisce anche favorevolmente sul merito di una Memoria manoscritta rassegnata all'Accademia, per la stampa ne' suoi volumi, dal sig. Prof. Luigi Bellardi, Memoria intitolata *Saggio di Ditterologia Messicana*, che è la continuazione di un lavoro sullo stesso

argomento precedentemente dall'Autore presentato all'Accademia, e che già trovasi stampato nel Vol. XIX delle Memorie accademiche.

Letti dai rispettivi relatori gli accennati rapporti, il Socio Commendatore Angelo Sismonda informa verbalmente la Classe della scoperta di alcuni fossili liassici (*Spirifer rostratus*, *Terebratula variabilis*, *T. cornuta*) in un calcare esistente nella regione *Roncheia* presso Lavriano, i quali chiariscono l'origine delle roccie in ciottoli componenti il conglomerato miocene della nominata regione.

Rammenta il Prof. Sismonda una sua Memoria col titolo: *Osservazioni geologiche sui terreni delle formazioni terziaria e cretacea in Piemonte*, Memoria stampata l'anno 1842 nel Tomo V, Serie 2.ª delle pubblicazioni dell'Accademia, e nella quale è descritto il terreno terziario del Piemonte e sono indicate le formazioni, in cui dividesi, non che la composizione di queste, la loro giacitura ed estensione, ed è inoltre accennata l'origine dei ciottoli costituenti il conglomerato miocene, i quali ciottoli vi si fanno derivare dagli Apennini e da monti conglobati nelle Alpi, ma anteriori alle medesime. In detta Memoria i ciottoli di calcare sono considerati come provenienti dal calcare stratificato delle stesse colline mioceniche; ma ora, conseguentemente alla scoperta dei nominati fossili, il Prof. Angelo Sismonda, sebbene persista a pensare che una parte dei ciottoli calcari costituenti il conglomerato miocene sieno somministrati dal calcare locale, fa però provenire i calcari a struttura cristallina e associati ai ciottoli di porfido, di granito e di altre roccie plutoniche da monti preesistenti ai sollevamenti alpini, e nel caso particolare del calcare fossilifero di Lavriano, lo dichiara corrispondente al calcare di Gozzano e di Arso, al quale rassomiglia sia nei caratteri mineralogici, sia nella natura delle specie di Molluschi fossili, che vi si sono rinvenute.

Da ultimo leggesi la Memoria col titolo: *Studii circa alcuni casi d'integrazione dell'equazione lineare a due variabili* del Prof. di matematica sig. Giuseppe Bruno, sulla quale Memoria, come si è fatto osservare a suo luogo, da apposita Giunta Accademica già era stato fatto favorevole rapporto in una delle precedenti tornate.

(Trovasi stampata a pag. 29 del seguente Tomo XXI).

17 giugno.

Il Socio Cav. Sella legge una Nota del sig. Avvocato Bartolomeo Gastaldi, Segretario del Regio Istituto tecnico, nella quale esso Avv. Gastaldi comunica all'Accademia il risultamento di due escursioni fatte nei dintorni di Arona, la prima in compagnia del Prof. Eugenio Desor, di Neuchatel, la seconda da solo, nell'intendimento di chiarire se nel Lago Maggiore esistano traccie di abitazioni lacustri (celtiche) simili a quelle state, non ha guari, scoperte in alcuni laghi della Svizzera.

Nel render conto di queste escursioni, intraprese sulle indicazioni date dal Prof. Moro, di Arona, persona degna d'ogni maggiore lode pel modo gentile ed intelligente con cui suole agevolare ai naturalisti le loro ricerche sia col fornir loro le opportune indicazioni dei luoghi, sia col donare ai medesimi quegli oggetti da lui rinvenuti, i quali possono tornar utili alla scienza, nel render conto, ripeto, di queste escursioni, l'Autore della Nota ricorda anzi tutto la recente scoperta presso Abbeville ed Amiens di selci lavorate in forma di punte di freccie, di lancie, e frammiste ad ossa dell'*Elephas primigenius* e del *Rhinoceros thicorrhinus;* quella di ascie formate di roccie vulcaniche in alcune caverne della Sicilia e miste ad ossa di Ruminanti ecc. E dopo queste ed altre congeneri citazioni, egli soggiugne che nella torbiera di Mercurago, presso Arona, alla profondità di un metro circa, sonosi trovati alcuni frammenti di vasi di terra e di pietra ollare, non che un *canotto* formato mercè un tronco di albero scavato, un'àncora in legno, una punta di lancia ed uno spillone in bronzo, deducendo da tali reliquie:

Che nel piccolo lago di Mercurago (ora torbiera) sono esistite abitazioni lacustri del genere di quelle scopertesi nel 1854 e negli anni successivi nei laghi della Svizzera, e sulle quali scrissero Keller, Morlot ed altri;

Che all'epoca detta di bronzo spettano i varii oggetti trovati finora nella detta torbiera, non che i vasi ed arnesi in bronzo, che s'incontrano a piccola profondità nella morena della regione detta il *Pennino,* morena che stendesi dalle alture di Mercurago a Borgo-Ticino.

Nella conclusione poi della Nota egli stabilisce, che tutte le torbiere coltivate in Piemonte sono moreniche e divisibili in due ordini, al primo dei quali vanno riferite le torbiere di Avigliana, di Trana e di Angera, torbiere occupanti larghi bacini e di pochi metri elevate al disopra del

fiume, che scorre nella valle; al secondo le torbiere di Mercurago, di Oleggio-Castello, di Borgo-Ticino, di Alice, di San Martino, ecc., le quali occupano bacini assai più ristretti, e posti sul dorso della morena ad altezze maggiori.

Di questa Nota del Gastaldi la Classe incarica il Segretario di rendere conto (come appunto si è fatto) nella *Notizia Storica*.

Lo stesso Accademico Cav. Sella legge poscia un proprio lavoro col titolo: *Memoria sulle forme cristalline di alcuni sali derivati dall'ammoniaca*, sali recentemente scoperti dall' illustre professore Hofmann, e che sono:

1.° Combinazione della Trietilfosfina col solfuro di Carbonio;
2.° Urea solforata trietilica monofenilica ad Azoto e Fosforo;
3.° Urea solforata trietilica monoallilica ad Azoto e Fosforo;
4.° Bromuro di Fosfonio trietilico monobrometilico;
5.° Cloruro di Fosfonio trietilico monoplatinico;
6.° Ioduro di Difosfonio exaetilico monodietilenico;
7.° Bromuro di Difosfonio exactilico monodietilenico;
8.° Cloroplatinato di Difosfonio exaetilico monodietilenico;
9.° Cloroplatinato di Difosfammonio tetraetilico monodietilenico;
10.° Cloroplatinato di Trifosfonio monoetilico monotriformilico;
11.° Combinazione di Joduro di Zinco con Ossicloruro di Trietilfosfina.

19 novembre.

Il Presidente Barone Plana annunzia, con parole di rimpianto, la morte del Prof. Cav. Domenico Capellina, Accademico della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, avvenuta il giorno 12 del corrente mese di novembre.

Il Cav. Richelmy, condeputato col Comm. Mosca, col Cav. Cavalli e col Cav. Sismonda Eugenio, riferisce intorno al merito del lavoro distinto coll'epigrafe: *Lasciate ogni speranza voi ch'entrate*, inviato all'Accademia per concorso al premio di L. 6,000 da questa stabilito per una *Descrizione idrografica del Regno Sardo* col programma di concorso approvato dalla Classe nella tornata del 21 dicembre 1856, il quale fissava il termine al 31 dicembre del passato anno 1859.

Questo rapporto è del tenore seguente:

« Al concorso aperto col programma del 20 aprile 1856 per una descrizione idrografica del Regno Sardo vi è noto, o Signori, che risposero due soli concorrenti, l'uno la cui Memoria venne da voi esclusa dal concorso per le ragioni già da noi sviluppate altra volta, l'altro del cui lavoro dobbiamo in oggi rendervi conto. Non dissimuliamo però, che l'importanza dell'argomento, l'entità del premio, e la mole del lavoro ci rendono assai peritosi nel suggerirvi un giudizio; per il che vi preghiamo della maggiore vostra attenzione, affinchè possiate voi stessi pronunziarlo con conoscenza di causa, e modificare il nostro ove vi paresse non conforme a giustizia.

L'autore dello scritto intitolato *Idrografia degli Stati Sardi*, e portante per epigrafe il verso di Dante *Lasciate ogni speranza voi ch'entrate*, ebbe il coraggio d'intraprendere una descrizione di tutti i corsi d'acqua che bagnavano l'antico Regno Sardo, e divise il lungo suo lavoro in due parti, la prima relativa ai fiumi di terraferma, la seconda contenente i fiumi dell'isola. La prima parte comincia con un quadro sinottico dei fiumi trattati nella medesima, indicante 1.° il nome di ciascuno; 2.° quello del monte o colle da cui prende origine; 3.° il sito ove mette foce; 4.° e 5.° il nome di qualcuna delle terre che esso bagna, e di qualcuna delle valli che forma. Per i primi otto influenti del Po di riva sinistra, e per i loro principali subaffluenti è ancora segnata la lunghezza, e per sei anche la pendenza, però con semplice approssimazione.

Dividesi in seguito questa prima parte in tre sezioni, la prima contenente la descrizione del Po e de'suoi influenti; la seconda quella dei fiumi, che, posti nella Liguria, versano immediatamente nel Mediterraneo, la terza infine quella dei fiumi della Savoia che per mezzo del Rodano versano parimente nel Mediterraneo.

Nella sezione prima, enumerati di bel nuovo tutti gl'influenti delle due rive del Po, viene l'autore, nei 29 capitoli che formano la medesima, ad una assai minuta narrazione, ed alcuna volta descrizione più o men felice dei luoghi dove scaturisce ciascuno di questi fiumi, del nome di tutti i rivi che lo compongono, dei monti da cui sì il primo che questi discendono, delle valli e gole di monti per cui scorrono, dei villaggi dove si congiungono o passano, e simili; ma in mezzo a questi particolari tu cerchi invano le indicazioni che ti dian mezzo di giudicare dell'importanza di cadun fiume, quali sarebbero un indizio più o meno

approssimato della quantità d'acqua portata dal medesimo, un quadro del numero di ettari irrigati od irrigabili con cotest'acqua, dei salti utili (non cascate dilettevoli) che si potrebbero impiegare o che siano già effettivamente impiegati per animare stabilimenti industriali ecc.

Parrà forse alquanto severo questo rimprovero, e potrebbe per avventura esserci opposto, che l'autore ha qua e colà aggiunto alla sua idrografia generale molte esposizioni sull'uso pratico che si fa dell'acqua di canali o gore derivate dai fiumi successivamente descritti, non che sui progetti che vennero proposti o studiati rispetto ai fiumi medesimi; ma a giustificare la nostra severità basterà che più minutamente scendiamo ai particolari.

Da pag. 42 a 46 si discorre di varii progetti di canali navigabili destinati ad unire col Po diversi fiumi del Piemonte; si ritorna sul progetto di unione del Po col Mediterraneo a pag. 508 e 509; si parla ancora di canali navigabili a pag. 328, e finalmente da pag. 291 a 295 l'autore presenta osservazioni in favore di un suo progetto di canale navigabile e ferrovia attraverso alla valle di Vegezzo; ma data un' idea affatto sommaria di ciascuno di questi progetti, e rimandati i lettori alle diverse fonti per più ampi schiarimenti tecnici o scientifici, l'autore insiste unicamente a perorarne economicamente i vantaggi. Propongonsi, è vero, nelle pag. 46 e 47 prescrizioni per la più equa ripartizione delle acque irrigatorie, ma tali proposte, di cui taluna ci pare d'impossibile esecuzione, siccome quella che sarebbe contraria al libero dominio dei proprietari, riguardano tutte ordinamenti legislativi, non tecniche operazioni. Leggesi a pag. 73 una nota relativa allo stabilimento industriale di Luserna, ed è questo forse l'unico stabilimento di tal genere che, se si eccettuino i molini e qualche cartiera, sia citato in tutto lo scritto; or bene dalla lettura di cotesta nota in cui si parla di un canale della forza di 200 e più cavalli, e di parecchie centinaia d'uomini, nasce spontaneo il dubbio che l'autore non conosca troppo che cosa sia un cavallo-vapore, nè come si concepisca o si misuri la forza di un corpo d'acqua. Singolari inoltre ci parvero le parole con cui termina la nota medesima: « Da ciò si vede, ecco queste parole, che ove l'uomo » seppe ritrar profitto dalle acque correnti, ne ritrasse grandi vantaggi, » ed è a desiderarsi che siffatti stabilimenti si fondino in altri luoghi » dello Stato ». Ma l'Accademia chiedeva appunto ai concorrenti che le suggerissero i luoghi acconci a queste fondazioni, che trovassero le

cadute disponibili e facessero vedere come sarebbero state facilmente utilizzabili, non che avessero espresso un desiderio; questo desiderio Ella il manifestò, essi dovevano compierlo per quanto potevano.

Per quello che riguarda l'irrigazione finalmente, trovansi di quando in quando nominati e descritti canali e gore ad essa relativi, come a pag. 119 parecchie derivazioni della Dora Riparia, a pag. 132 il canale di Caluso, a pag. 187 le derivazioni della Dora Baltea, a pag. 199 quelle del Cervo e dell'Elvo, a pag. 228 quelle della Sesia, a pag. 320 quelle del Ticino, a pag. 407 quelle della Stura, della Grana e di altri vicini torrenti, a pag. 493 il canale Carlo Alberto; ma che! talvolta e ben sovente di queste gore non è nemmeno indicata la destinazione, e tutto si riduce per esse a dire: la tal roggia è derivata dal tal fiume, nel tal sito, corre in questa o quell'altra direzione, passa pel tale o tal altro territorio, attraversa quella o questa strada, e va infine a metter foce nel tal fiume o rivo presso al borgo di.....; quando poi si dice che il canale è destinato alla irrigazione, si indicano sommariamente le terre irrigate, senza darne nè il quantitativo, nè il genere di coltura, nè il metodo d'irrigazione, nè tanto meno alcun giudizio con cui si appalesi se quelle terre siano troppo o troppo poco, bene o male irrigate. Una sola lodevole eccezione faremo pel canale Carlo Alberto, rispetto a cui l'autore riferendo i risultati della relazione Negretti, entra in maggiori schiarimenti ed esprime il quantitativo d'acqua portata in oncie milanesi, non che quello delle terre irrigate o che vorrebbero irrigarsi in giornate antiche, e dà le dimensioni della diga di presa d'acqua e del canale.

La 2.ª e 3.ª sezione di questa prima parte sono trattate con un po' più di brevità, ma del resto con lo stesso metodo della prima. Sempre o quasi sempre vi sono notate e talvolta descritte le sorgenti, vallate, influenze e simili, con particolarità anche troppe; vi è negletta quasi affatto la parte assai più importante che riguarda l'uso dell'acqua; e diciamo negletta quasi affatto, poichè non possiamo ritenere come sufficienti gl'indizi dati con parole di questa sorta: « Altro fiumicello per » nome Leira passa accanto al borghetto di Mele frazione di Voltri, » posta a levante, ed è celebre per l'utilità grande che reca al paese » coi molti suoi molini, per le ferriere e fabbriche di carta » (pag. 637).

Alla prima parte del lavoro fa seguito un terzo volume intitolato *Idrografia*, divisa per provincie colle carte rispettive. In questo volume per ognuna delle antiche provincie è, o dovrà esservi (giacchè l'autore,

sopraffatto dal tempo non potè compiere questa parte del lavoro): 1.° l'indicazione del numero dei mandamenti, dei comuni e della quantità di chilometri quadrati componenti la Provincia; 2.° l'enumerazione generale delle acque, che la Memoria dice irrigano (forse sarebbe meglio dire corrono per) la Provincia; 3.° un quadro sinottico di tutti i Comuni, diviso in quattro colonnelli, di cui il primo dà il nome del Mandamento, il secondo quello del Comune, il terzo le acque correnti attraverso a questo, il quarto è di annotazioni. Evvi infine una carta idrografica della Provincia, che rappresenta il corso dei fiumi e torrenti principali che la attraversano, non che la posizione di tutti o quasi tutti i Comuni.

Questo volume avrebbe, a nostro avviso, molto merito se fosse compiuto, mentrechè invece su trentanove provincie il lavoro è solamente compiuto per poche, e per 25 non havvi fuorchè la carta, l'indicazione del numero dei Mandamenti e Comuni, e tutto al più il nome di questi; se in secondo luogo fossero distinte le acque utilizzate nel Comune da quelle che sono unicamente transitanti attraverso al medesimo; del resto le carte sono assai chiare e copiate da buone fonti.

Vorremmo poter fare lo stesso elogio delle carte di maggior mole, che in un atlante separato accompagnano tutta l'opera, ma sgraziatamente sono tutt'altro che nitide, ed in alcune, come quella della conca del Po in grande scala, ovvero quella del corso del Pellice, del Chisone ecc. vedonsi moltiplicate per ogni verso delle linee azzurre a rappresentare gore derivate o suddivise, per modo che non vi si può più riconoscere l'andamento di nessuna; in altre si rappresentarono bensì le conche dei diversi fiumi con varii colori, il che è lodevole, ma questi colori si aumentarono senza necessità, cosicchè la conca di uno stesso fiume ora è gialla, ora è rossa, ora è verde, nè si può più distinguere da quelle dei suoi influenti o recipienti.

La seconda parte del manoscritto, contenente l'idrografia della Sardegna, è compilata collo stesso metodo della prima; l'autore volle tuttavia farla precedere da alcune considerazioni sull'acqua potabile, venne in seguito alla descrizione delle diverse vallate o conche fluviatili, non che degli stagni e delle paludi che esistono nell'isola, poscia terminò il volume con una distinzione delle diverse provincie e delle acque che le percorrono o vi si trovano. Egli stesso conviene, che alcune delle nozioni che si contengono in questa parte di lavoro sono diverse da quelle domandate dal Programma, ma nota che esse devono riguardarsi come

un soprappiù. Per questa ragione noi non faremo alcuna osservazione critica nè sopra i preliminari, nè sopra le molte considerazioni o nozioni fisiche, statistiche, e d'altro genere di cui trovasi arricchita la sezione che riguarda la descrizione delle Provincie, e limitandoci al nostro scopo diremo, che nella descrizione dei fiumi ravvisiamo a un dipresso gli stessi difetti che già rimproveraimmo all' idrografia di terraferma: anche qui troppa minutezza nella descrizione dei luoghi, e nella nomenclatura, troppo poca accuratezza in tutto ciò che concerne l'utile che si ricava o potrebbesi ricavare dalle acque successivamente descritte. Oltre a questo difetto, un altro crediamo avere a rimproverare nella scelta dell'ordine con cui sono descritti i fiumi. Quest'ordine consiste nell'aver distribuiti i fiumi giusta la maggiore o minor lunghezza loro, non nell'averli collocati secondo la loro posizione geografica, ciò che avrebbe reso assai più semplice il confronto tra lo scritto e la carta idrografica, da cui è accompagnato. Un difetto simile avevamo già ravvisato nella descrizione idrografica della Savoia.

Riassumendo adunque quanto siamo venuti finora discorrendo, noi crediamo che questo scritto possa bensì riguardarsi (salve le lacune che il tempo impedì di colmare) come a sufficienza compiuto secondo il punto di vista nel quale l'autore si è per avventura collocato; ma crediamo parimente che questo punto di vista sia assai diverso da quello che si propose l'Accademia nell'aprire il concorso.

Basta infatti leggere le sole prime linee del programma per riconoscere quali siano i particolari che l'Accademia voleva notati, quale lo scopo che Essa si era proposto nell'aprire il concorso. Fin dal principio vi vien detto, che le condizioni naturali del Regno Sardo indicano agli abitanti ch'essi debbono valersi delle molte acque del loro paese per fecondare le loro campagne, e per animare le loro officine. Quindi era di tutta importanza che il concorrente indicasse le precipue derivazioni dei fiumi che imprendeva a descrivere, notandone lo scopo od irrigatorio od industriale, ed avvertisse quali sarebbero i miglioramenti che si potrebbero ottenere sotto ciascuno di questi aspetti, corroborando le sue asserzioni col valido appoggio dei fatti, dai quali risultassero indicate colla maggior approssimazione possibile le portate dei fiumi nei varii loro stati di magra, d'acque ordinarie o di piena, le qualità delle acque, le altezze dei salti, ecc. Era dunque espressamente avvertito, e sostanzialmente voluto, che le nozioni inserte nella Memoria fossero precise

il più possibile, e dirette a far conoscere: 1.° l'uso utile che già si fa dell'acqua; 2.° quello migliore o più esteso che se ne potrebbe fare. Era abbastanza notato, che volevansi escluse le nozioni vaghe ed indeterminate, le quali potevano bensì servire ad una descrizione più o meno amena dei fiumi del Regno, non mai a produrre nel lettore un aumento di cognizioni scientifiche o praticamente utili. E perchè l'Accademia riconobbe ella stessa la grande estensione del quesito, indicò il mezzo con cui si sarebbe potuto ridurlo a più ristretti confini senza uscir fuori da quell'andamento rigoroso e preciso che solo sarebbe stato veramente utile: tal mezzo consisteva nel limitare la descrizione a qualche fiume particolare, dando per esso quella esatta idrografia che forse mal si poteva da un uomo solo compilare rispetto a tutti i corsi d'acqua dello Stato.

A fronte di cotesta dissomiglianza fra il quesito accademico e la risposta datane dall'autore del manoscritto, la vostra Commissione è dolente di non potere proporre la collazione del premio all'autore medesimo, e diciamo dolente, imperciocchè ella riconosce e si fa debito di dichiarare che un tanto lavoro costò senza dubbio gravissima fatica a chi se lo addossò, e dimostra in lui coraggio e fermezza di proposito non comuni. È questo il motivo per cui noi non abbiamo voluto nemmeno far cenno di molte mende di locuzione, di lingua, di stile, sfuggite certamente all'autore per l'incalzare del tempo, e che ben potevansi far scomparire in una accurata rivista del manoscritto ».

Conseguentemente all'approvazione della conclusione negativa del parere, a norma del terz'ultimo alinea del Programma, abbruciasi, senza aprirlo, il biglietto sigillato portante l'epigrafe distintiva del manoscritto: *Lasciate ogni speranza voi ch'entrate.*

Dopo ciò il Cav. Richelmy, predetto, condeputato col Cav. Sella, riferisce ancora sul merito di una Memoria manoscritta presentata all'Accademia dal sig. Ingegnere Gioanni Schiaparelli, Secondo Astronomo nel R. Osservatorio di Brera in Milano, Memoria *Sulla trasformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla trasformazione iperbolica.*

Questo rapporto, che or legge il Cav. Richelmy, è un rapporto steso dal Prof. Cav. Francesco Brioschi, di Pavia, Socio corrispondente dell'Accademia, ed a cui uno dei Membri della Giunta accademica avea comunicato la nominata Memoria del sig. Schiaparelli prima che fosse rassegnata all'Accademia. Esso è così concepito:

« Lo strumento più potente nelle ricerche di geometria moderna, ed al quale essa deve i principali suoi progressi è la *trasformazione delle figure*. Le trasformazioni geometriche sono infinite in numero, come le analitiche, infinita essendo la serie delle diverse relazioni che si ponno supporre fra la figura data e la sua trasformata. Fra tutte le trasformazioni possibili la più semplice, e forse la più feconda di conseguenze, è quella nella quale si suppone che a ciascun punto della figura data corrisponda un solo ed individuato punto nella trasformata, e reciprocamente.

Il sig. Schiaparelli nella Memoria presentata all'Accademia si propone di studiare in tutta la sua generalità questa famiglia di trasformazioni, la quale egli opportunamente denomina trasformazioni di primo ordine. Dobbiamo notare che il Geometra tedesco Magnus erasi pure proposto la soluzione di questo problema nella Memoria *Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes en géométrie*, pubblicata nel tomo 8.° del giornale di Crelle, pag. 51, ma che sebbene in questo lavoro, senza dubbio sfuggito alla molta erudizione del sig. Schiaparelli sull'argomento, si trovino alcuni dei risultati da lui ottenuti, ciò non diminuisce l'importanza della Memoria presentata. Infatti è in essa che per la prima volta viene completamente risolto il problema della trasformazione di primo ordine nel piano, colla riduzione di tutte le trasformazioni ai tre tipi irreduttibili di trasformazioni *lineare*, *omografica*, *conica*; quest'ultimo tipo (dovuto al sig. Schiaparelli) risultando dal complesso delle tre trasformazioni denominate dall'Autore ciclica, parabolica, iperbolica. Nuovo ed interessantissimo è inoltre il risultato ottenuto dall'Autore che la più generale trasformazione di primo ordine nel piano è riducibile ad una delle tre trasformazioni coniche, combinata con due trasformazioni omografiche.

L'Autore occupasi anche delle trasformazioni di primo ordine nello spazio, ma in questa parte, come egli stesso nota, i suoi risultati sono meno completi. Egli considera i tre casi particolari già contemplati nella trasformazione nel piano, cioè le trasformazioni lineare, omografica, conica; quest'ultima riducibile a cinque tipi semplicissimi, fra i quali i più interessanti sono le trasformazioni sferica ed iperbolica. Sono questi i soli casi di trasformazione di primo ordine nello spazio? L'Autore limitasi a mostrare che la soluzione di questo problema dipende dallo studio di una famiglia di superficie di terzo ordine.

Nella seconda parte della Memoria l'Autore, lasciate da banda le trasformazioni ciclica e sferica che coincidono colla nota denominata da

Thomson *per raggi vettori reciproci*, occupasi specialmente della trasformazione iperbolica nel piano e della iperboloidica nello spazio, mostrando l'uso di queste trasformazioni in molte quistioni. Notiamo fra le proprietà della trasformazione iperbolica quella denominata dall'Autore *similitudine supplementare*, per la sua analogia colla proprietà principale della proiezione stereografica.

La memoria del sig. Schiaparelli, pregevole in tutte le sue parti, termina con una bella applicazione delle formole della trasformazione iperbolica alla soluzione di una questione di analisi indeterminata.

Conchiudendo opinano i Commissari, che la memoria del signor Schiaparelli sia meritevole dell'approvazione della Classe, epperò essi propongono la lettura della medesima alla Classe, perchè venga quindi inserta nei volumi dell'Accademia ».

9 dicembre.

Il Vice-Presidente Conte Alberto Della Marmora invita la Classe a nominarsi un Direttore, essendo il Comm. Moris scaduto da tale carica triennale fin dal giorno 16 novembre del passato anno 1859. Si dà perciò mano alle schede segrete, dalle quali il Comm. Moris, predetto, risulta all'unanimità confermato per la terza volta e per un nuovo triennio nell'accennata carica di Direttore della Classe.

L'Accademico Generale Cavalli legge: *Mémoire sur les causes des éclatements des bouches à feu, sur le calcul de leur résistance vive, et sur les moyens d'en prolonger la durée.*

(Sarà stampata in uno dei prossimi Volumi).

23 dicembre.

Il Segretario comunica il carteggio e legge, insieme a varie altre, una lettera del sig. Ministro dell' Interno, nella quale al Presidente dell'Accademia, che lo aveva informato dell'esito del concorso per un'*Idrografia del Regno Sardo*, e lo aveva ad un tempo interpellato se l'Accademia nell'aprire altri concorsi avrebbe potuto fare assegnamento sulle L. 3,000, con cui il Ministero avea contribuito per formare il premio di L. 6,000 proposto dall'Accademia per la detta Idrografia, la quale

somma, per la non avvenuta collazione del premio, sarebbe rimasta disponibile, si risponde affermativamente, ma si manifesta il desiderio che sia rimesso a concorso lo stesso tema. La Classe, tuttochè riconoscente a tale liberalità del sig. Ministro dell'Interno, non crede di poterne accettare la condizione, il cattivo risultamento della prima prova avendola fatta persuasa che un'*Idrografia del Regno Sardo* non è un tema da concorso, perchè lavoro esigente l'opera di molti, e che il solo Governo può ordinarlo somministrandone i mezzi d'esecuzione. Sulla proposizione del Vice-Presidente s'incarica intanto la Giunta nominata a suo tempo per l'esame dei lavori di concorso a formolare una risposta al sig. Ministro dell'Interno, nella quale sieno esposte le ragioni, per cui la Classe non istima conveniente di riproporre il tema dell'Idrografia.

Il Presidente Barone Plana presenta quindi e legge in parte tre brevi sue Memorie relative alla teoria della luna, e le quali hanno per titolo, una:

Note sur un cas particulier du mouvement elliptique, l'altra:

Note sur les coefficients théoriques déterminés par Tobia Mayer *relativement aux deux inégalités lunaires etc.*, la terza:

Sur la théorie de la lune; Lettres à M. John W. Lubbock.

(Sono stampate la 1.ª a pag. 433, la 2.ª a pag. 447 e la 3.ª a pag. 399 del Tomo XIX).

Da ultimo il Segretario Prof. Eugenio Sismonda incomincia la lettura della *Notizia storica* dei lavori fatti dalla Classe nel periodo del passato anno 1859.

20 gennaio 1861.

Il Comm. Riberi condeputato col Cav. Berruti e col Cav. De Filippi, fa relazione intorno al merito di una Memoria manoscritta *Sulla parziale ed innata occlusione dell'appendice vermiforme nell'uomo*, inviata all'Accademia dal sig. E. Oehl, docente Istologia ed Anatomia microscopica nella Regia Università di Pavia.

L'anomalia, dice la Giunta Accademica, osservata dal sig. Oehl, e la cui descrizione forma il soggetto di questo suo scritto, consiste in ciò che la nominata appendice invece di mantenersi costantemente cava in tutta la sua lunghezza, come si è finora universalmente creduto, presentasi talvolta pervia e coperta dalla membrana mucosa in forma di un bor-

sellino per un tratto solamente, essendo il resto della sua estremità libera impervio, e ridotto alla forma di un funicolo solido, terminante non rare volte in una espansione oblunga, appianata, soda, fino ad un certo punto simile per figura e dimensioni ad una piccola fava. Tale funicolo risulterebbe formato dalle due tonache sierosa e muscolare, la prima nelle sue condizioni naturali, la seconda grandemente inspessita. Nell'accennata porzione solida convenientemente preparata e mercè l'uso del microscopio l'Autore avrebbe incontrato i seguenti elementi istologici: epitelio pavimentoso semplice a cellule nucleate – zonula acistica sottoepitelica – tonaca peritoneale – spazi interfibrillari - strato sottoperitoneale – tessuto centrale dell'appendice cecale – tonaca muscolare. Alla descrizione di simile anomalia il sig. Oehl aggiunse, siccome notano i Commissari, alcune sue particolari considerazioni dirette a far comprendere il meccanismo embriologico della medesima, e a dimostrarne il rapporto, quanto all'origine, colle naturali varietà di svolgimento delle tonache intestinali.

La Giunta accademica, senza tacere che altri anatomici, e specialmente l'illustre nostro Olando, già parlarono del progressivo restringimento dell'appendice cecale umana, riconoscono nell'Autore di questa Memoria il merito di avere pel primo osservato, studiato e descritto il caso della sua parziale occlusione; quindi conchiude proponendo di tale Memoria la lettura alla classe.

L'Accademico Cav. Sella legge quindi un lavoro *Sulle forme cristalline di alcuni sali derivati dall'ammoniaca*, sali stati studiati, per quel che risguarda la composizione chimica, dal Prof. L. Hofmann di Londra.

Di questa sua scrittura il Cav. Sella già aveva comunicato la prima parte alla Classe nella tornata del giorno 17 del mese di giugno 1860, nella quale prima parte presentava la descrizione cristallografica di undici di siffatti sali; in questa seconda parte egli tratta di altri undici sali egualmente derivati dall'ammoniaca, e che sono:

1.° Solfuro di Trietilfosfina.
2.° Bromuro di Arsonio monobromoetilico trietilico.
3.° Ioduro di Fosfonio tetraetilico.
4.° Bromuro di Fosfonio monobromoetilico trimetilico.
5.° Cloroplatinato di Fosfonio tetraetilico.
6.° Cloroplatinato di Fosfonio monometilico trietilico.

7.° Cloroplatinato di Fosfonio monoossietilico trietilico.
8.° Cloroplatinato di Fosfonio monobromoetilico trietilico.
9.° Cloroplatinato di Fosfarsonio monoetilenico exaetilico.
10.° Cloroplatinato di Fosfammonio monoctilenico trietilico.
11.° Combinazione di Ossicloruro di Trictilfosfina con bicloruro di Platino.

17 febbraio.

Il Segretario dà comunicazione di una lettera del sig. Ministro dell'Interno in data 22 gennaio p. p., nella quale si notifica al Presidente dell'Accademia che S. M. in udienza del giorno 16 di detto mese si è degnata di approvare le nomine fatte dalla Classe dei sigg. Comm. Prof. Carlo Matteucci, Comm. Francesco Carlini, e Cav. Gio. Battista Amici ad Accademici nazionali non residenti per la Classe di Scienze fisiche e matematiche.

Dopo ciò il socio Cav. Defilippi legge, a titolo di semplice comunicazione, due note di argomento zoologico.

La prima tratta di un nuovo genere di Pesci (*Lebistes*) della famiglia dei Ciprinodonti, avente per tipo alcuni pesciolini dell'isola Barbados, affini alle Pecilie ed ai Xifofori, portati viventi fino a Tremezzo sul lago di Como dal Sacerdote sig. Arnaboldi.

La seconda risguarda una nuova specie di Cirripedi del Mediterraneo, chiamata dall'Autore *Dichelaspis Darwinii*, e comunissima come parasita delle branchie dell'Aragosta.

Quindi il Segretario predetto legge una Memoria del Cav. Luigi Bellardi, intitolata *Saggio di Ditterologia messicana*, da apposita Giunta accademica già favorevolmente giudicata in una delle precedenti adunanze.

In questa Memoria, che è la continuazione di un lavoro sullo stesso argomento e dallo stesso Autore prima d'ora rassegnato all'Accademia, si presenta la descrizione di centodue specie di Ditteri, di cui nove in aggiunta alla prima parte, e novantatre come materiale di questa seconda Memoria.

(È stampata nel Tomo XXI, pag. 103).

Da ultimo leggesi la Memoria dell'Ingegnere sig. Giovanni Schiaparelli, secondo Astronomo nel Regio Osservatorio di Brera a Milano, *Sulla trasformazione geometrica delle figure, ed in particolare sulla trasformazione iperbolica*, intorno al quale lavoro in una delle antecedenti adunanze era eziandio già stata fatta favorevole relazione da una Giunta accademica.

(È stampata nel Tomo XXI, pag. 227).

3 marzo.

Assistono a questa tornata i Senatori Comm. Carlo Matteucci, Socio nazionale non residente, il Prof. Arcangelo Scacchi, il Cav. Annibale De Gasparis, Socii corrispondenti, il Prof. Ernesto Capocci, il Deputato al Parlamento Dott. Giustiniano Nicolucci, ed il Marchese Federico Lanza di Brolo, Segretario dell'Accademia di Scienze e Lettere di Palermo.

Il Segretario dà comunicazione di una lettera del sig. Ministro dell'Istruzione pubblica, colla data del giorno 21 febbraio p. p., in cui s'informa il Presidente dell'Accademia, che con Decreto Reale del 31 gennaio di quest'anno la Reale Accademia delle Scienze di Torino è stata posta sotto la dipendenza del Ministero dell'Istruzione pubblica, e conseguentemente s'invita lo stesso Presidente a volersi d'ora innanzi rivolgere al Ministero predetto per tutte le esigenze dell'Accademia.

Dopo ciò il Comm. Matteucci, cui il Presidente cede gentilmente la sua volta di leggere, ragguaglia la Classe intorno ai *principali risultamenti di una serie di ricerche intraprese per determinare qual è l'influenza della contrazione sul potere elettro-motore dei muscoli.*

Questo scritto del Socio Matteucci, dalla cui conclusione si rileva che il potere elettro-motore dei muscoli dipende dagli atti chimici della nutrizione, per cui un muscolo, il quale si è contratto per un certo tempo, ed ha perduto le sue proprietà vitali, deve perdere eziandio il potere elettro-motore per il consumo delle azioni chimiche che ha avuto luogo durante la contrazione, questo scritto dico, del Socio Matteucci sarà stampato in uno dei prossimi Volumi accademici.

Il Socio corrispondente Cav. Annibale De Gasparis legge quindi, per modo di semplice comunicazione da accennarsi nella *Notizia storica* e non come materiale d'una Memoria accademica, la prima parte di una

Relazione intorno alla scoperta del nuovo pianeta Ausonia, da lui fatta in Napoli la sera del giorno 10 del passato mese di febbraio.

In questa stessa adunanza il Presidente Barone Plana legge un suo lavoro col titolo: *Mémoire sur les équations différentielles du mouvement de la Lune, exprimé par les composants de la force perturbatrice du Soleil, considérées par* Newton.

L'Autore si è qui proposto di stabilire, mercè l'analisi, proposizioni analoghe a quelle del terzo libro dei Principii di Newton, e di usare a tal fine considerazioni geometriche e meccaniche conformi ai due principii fondamentali della dinamica per esprimere le velocità e le forze motrici, principii da Newton tacitamente seguiti ma non formolati in lingua di calcolo, alla quale circostanza debbesi probabilmente attribuire l'opinione di Clairaut, che Newton *a voulu rompre tous les chemins par lesquels il avait passé, et jeter un voile entre la postérité et lui*, immemore forse che se un genio può aprire una via ignota, un altro genio può ritrovarla quando siasene smarrita la traccia. Le ricerche intraprese per questo lavoro condussero il Barone Plana ad esaminare la parte storica del problema sulle variazioni secolari delle orbite dei Pianeti, e gli porsero opportunità di mettere in evidenza tutto il pregio dell'opera di uno dei più benemeriti fondatori di quest'Accademia, voglio dire dell'opera di Lagrange *Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter, causées par leur attraction mutuelle*, opera stata coronata nell'anno 1766 dall'Accademia di Parigi, l'anno stesso in cui il celebre geometra lasciava Torino, sua patria, per recarsi a Berlino ad assumervi la direzione di quell'Accademia.

Finalmente il Generale Comm. Menabrea, pregato dal Cav. Sella a dare alla Classe qualche ragguaglio intorno all'effetto dei cannoni Cavalli nell'assedio di Gaeta, nella cui espugnazione esso Generale Menabrea si è coperto di molta gloria, gentilmente arrendendosi a tale invito del collega, fa una verbale esposizione del merito dell'accennata artiglieria.

Nel suo improvvisato ragguaglio il Socio Menabrea non entra nei particolari delle molteplici e lunghe operazioni state fatte per l'espugnazione di quella piazza, che qualifica come singolare, e delle quali operazioni egli dice che sarà a suo tempo reso conto con ponderate relazioni, ma limitasi a discorrere dei cannoni Cavalli, distinguendo primieramente

i rigati caricantisi al modo ordinario per la bocca, da quelli rigati caricantisi per la culatta, che sono i cannoni dai giornali e dal pubblico più specialmente attribuiti al Cavalli, mentre è sua invenzione anche la rigatura dei cannoni ordinari.

Assevera il Generale Menabrea, che ambedue queste maniere di cannoni hanno prodotto un effetto rimarchevole; quelli da 40 caricantisi per la bocca, alla distanza di 3600 metri, e quelli caricantisi dalla culatta, alla distanza di 5200 metri avrebbero dato un risultamento sorprendente sia per l'effetto, sia per l'esattezza nella direzione. Questi ultimi, egli soggiugne, furono anche adoperati, nello scopo di aprire una breccia, alla distanza di 900 metri, e gli effetti corrisposero pienamente all'aspettazione. I cannoni caricantisi dalla bocca potrebbero probabilmente avere portate uguali a quelle degli altri; tuttavia non converrebbe fare indistintamente uso degli uni o degli altri, perchè quelli caricantisi dalla culatta, per le loro particolari disposizioni, richiedono località adattate, e sono più specialmente destinati alla difesa delle piazze ed alla marina. Il Generale Menabrea non tace che alcuni di siffatti cannoni scoppiarono, ma egli fa osservare che simile inconveniente, dovuto forse ad imperfezione nel caricamento o nella fusione stessa dei pezzi, non è proprio dei cannoni caricantisi dalla culatta, ma in generale dei cannoni formati di ferro fuso, ond'è, che non scema punto il merito dell'invenzione. Conchiude il socio Menabrea, che i cannoni rigati del Generale Cavalli, fin dal 1856 esistenti in Piemonte, cioè molto tempo prima che in altri paesi si pensasse alle artiglierie rigate, formano un perfezionamento importantissimo; e che dall'assedio di Gaeta, dove i cannoni rigati di varie specie furono per la prima volta adoperati sopra larga scala per l'espugnazione e difesa di una fortezza, si può arguire che l'impiego di tali armi avrà per conseguenza un radicale mutamento nelle regole tanto della difesa quanto dell'attacco delle piazze.

17 marzo.

Il Socio corrispondente Cav. D. Annibale De Gasparis, compiendo, per così dire, la sua relazione intorno alla scoperta del nuovo Pianeta Ausonia fatta in Napoli la sera del giorno 10 del passato mese di febbraio, e di cui avea letto alla Classe la prima parte nella precedente tornata del giorno 3 del corrente mese di marzo, comunica ora la seconda,

contenente il *calcolo dell'orbita* di detto Pianeta, e le *corrispondenti formole*. Queste relazioni del Cav. De Gasparis sono così concepite:

(Relazione prima, 3 marzo 1861).

« *Signori Colleghi*,

Il breve ragguaglio che ho l'onore di presentarvi intorno alla scoperta da me fatta in Napoli la sera del 10 febbraio scorso di un nuovo pianeta, avrà un carattere alquanto differente da quelli che soglionsi fare in simili circostanze. Ed invero, per fortunata combinazione, nel periodo di quindici giorni dall'epoca della scoperta, il nuovo astro è passato pel nodo discendente della sua orbita nel mattino del giorno 13 del passato febbraio, e si è trovato in opposizione nel giorno 2 del corrente marzo. L'insieme di questi due fatti, preziosi per l'uso che può farsene onde ottenere con calcoli semplicissimi un valore assai approssimato di alcuni degli elementi dell'orbita, mi pongono in grado di aggiungere altri dettagli oltre quelli ordinari e relativi alla determinazione delle coordinate geocentriche mercè l'osservazione diretta. Avendo infatti rilevato dalle misure dei giorni 1 e 2 marzo, che la diminuzione diurna della longitudine geocentrica del pianeta era circa 63 secondi in tempo, ho potuto da una formola approssimata

$$r = \frac{1}{2} \cdot \left\{ 1 + 2 \cdot \frac{\Delta l}{\Delta \alpha} - \sqrt{1 + 4 \cdot \frac{\Delta l}{\Delta \alpha}} \right\}$$

in cui Δl, $\Delta \alpha$ *sono le variazioni diurne delle longitudini della terra e dell'astro*, determinare il valor prossimo del raggio vettore, che ho trovato essere 2, 3. La variazione diurna della longitudine abbastanza forte, d'accordo col piccolo raggio vettore calcolato, mostrano che il pianeta si aggira in vicinanza delle zone de' pianeti Flora, Melpomene, Armonia ed Arianna, purchè la circostanza, poco probabile, di fortissima eccentricità non renda illusorio simile ravvicinamento. In qualunque modo la conoscenza approssimata del raggio vettore fornisce per ora il vantaggio di poter correggere, in massima parte, le posizioni geocentriche dagli effetti della aberrazione e parallasse, per le osservazioni che di pochi giorni precedono o seguono l'opposizione, prima d'intraprendere il calcolo definitivo dell'orbita. Inoltre il passaggio pel nodo pochi giorni prima dell'opposizione mi ha offerto il destro, col conoscere entro stretti limiti la distanza del pianeta dal Sole, di poter calcolare la longitudine del

nodo ascendente, che ho trovato eguale a 337.° Aggiungo che la conoscenza di questo elemento mi ha fornito non solo un controllo della non identità del pianeta del 10 febbraio con alcuno di quelli prima conosciuti, ma rimosso altresì ogni dubbiezza di possibile identità co' pianeti ora perduti Dafne e Pseudo-Dafne. Per persuadersi di ciò basta riflettere, che per quanto si vogliano supporre grossolanamente determinate le orbite di questi due ultimi pianeti, mai non potrà supporsi un errore enormissimo di circa 160° ne' loro nodi; chè tale dovrebbe essere il caso a temere.

Conchiudo col dichiarare che debbo attribuire la scoperta di questo nuovo ospite celeste alla eminente esattezza delle zone di Chacornac; ed alla affettuosa gentilezza del ch.mo Barone Plana, che ha messo a mia disposizione l'osservatorio, e fornitomi tutti i mezzi necessari, lo averlo, direi quasi, riscoperto dopo la lunga interruzione di quindici giorni a cagione del continuo cattivo tempo. L'apparenza è quella di una stellina di decima grandezza, e dalla traccia apparente del suo cammino si può conchiudere dover essere assai piccola la inclinazione della sua orbita al piano dell'orbita della Terra.

Osservazioni del Pianeta del 10 *febbraio.*

	Tempo medio di Napoli	Asc. retta app.	Declin. app.
1861 Febbraio 10	14h 33m 18s	11h 11m 42s.5	+ 5° 18′ 59″
12	11 49 45	11 10 13 .9	+ 5 23 43
13	9 32 9	11 9 29 .8	+ 5 25 49
14	10 40 0	11 8 37 .1	+ 5 28 52
	Tempo medio di Torino		
28	10h 0 »	10 55 15	+ 6 13 (stima)
Marzo 1	8 30 30	10 54 18 .6	+ 6 16 33
2	7 58 20	10 53 16 .8	+ 6 19 59

(Relazione seconda, 17 marzo 1861).

Chiarissimi Colleghi,

Nella sessione del giorno 3 corrente marzo ebbi l'onore di trattenervi intorno alla scoperta ed osservazioni del pianeta Ausonia, e presentai alcune determinazioni numeriche approssimate della sua orbita. Il calcolo diretto

di questa ha confermato la giustezza di que' primi valori relativi al raggio vettore, al nodo ed alla inclinazione. Le molto piccole latitudini osservate nel moto geocentrico di questo pianeta mi convinsero che non si sarebbe tentato con successo il calcolo de' suoi elementi adoperando tre osservazioni complete, ma che invece miglior partito sarebbe stato quello di adottare quattro osservazioni mancanti delle latitudini estreme. Ora avendo nel 1857 presentato un metodo di mia invenzione, ed inseritolo nel n.° 1111 delle *Astronomische Nachrichten*, troverete naturale, Colleghi chiarissimi, che io abbia pensato di adoperarlo invece di servirmi dell'altro notissimo e di provata giustezza dato dal celebre Gauss nella sua immortale opera *Theoria motus corporum coelestium*. Mi affretto però a soggiungere, che l'amor proprio di autore non mi ha accecato a segno da preferire il mal noto ed incerto al notissimo ed esattissimo. Prima di adoperare le mie formole ho voluto *saggiarle* applicandole ad un tipo numerico preso dallo stesso Gauss per l'orbita di Vesta, esempio di nota difficoltà per la molta distanza frapposta fra le osservazioni. Sono rimasto contento del risultato al di là di ogni mia speranza, come apparisce dalla inesorabile logica de' numeri ottenuti nel modo seguente.

Comincio col riportare le sole formole necessarie al calcolo dell'orbita, anche perchè in quelle del citato giornale tedesco sono incorsi degli errori di stampa.

Siano adunque:

t, t', t'', t''' i tempi delle osservazioni.

l, l', l'', l'''; R, R', R'', R''' le longitudini e raggi vettori della terra.

α, α', α'', α''' le longitudini geocentriche del pianeta, e

β', β'' ne siano le latitudini corrispondenti alla 2.ª e 3.ª osservazione.

Si faccia (ponendo $log.k = 8.235581 4$),

$$k(t'-t)=\theta'', \quad k(t''-t)=\theta', \quad k(t''-t')=\theta,$$
$$k(t'''-t')=\theta_0, \quad k(t'''-t'')=\theta_1.$$

Dopo ciò si calcolino le costanti a, b ecc. dalle equazioni:

$$a=\frac{\theta R \operatorname{sen.}(l-\alpha)}{\theta'' \operatorname{sen.}(\alpha''-\alpha)}, \quad b=-\frac{\theta' R' \operatorname{sen.}(l'-\alpha)}{\theta'' \operatorname{sen.}(\alpha''-\alpha)}, \quad c=\frac{R'' \operatorname{sen.}(l''-\alpha)}{\operatorname{sen.}(\alpha''-\alpha)},$$

$$d=\frac{\theta R''' \operatorname{sen.}(l'''-\alpha''')}{\theta_0 \operatorname{sen.}(\alpha''-\alpha''')}, \quad e=-\frac{R'' \operatorname{sen.}(l''-\alpha''')}{\operatorname{sen.}(\alpha''-\alpha''')}, \quad f=\frac{\theta_1 R' \operatorname{sen.}(l'-\alpha''')}{\theta_0 \operatorname{sen.}(\alpha''-\alpha''')},$$

$$g=\frac{\theta' \operatorname{sen.}(\alpha'-\alpha)}{\theta'' \operatorname{sen.}(\alpha''-\alpha)}, \quad h=-\frac{\theta_1 \operatorname{sen.}(\alpha'-\alpha''')}{\theta_0 \operatorname{sen.}(\alpha''-\alpha''')};$$

e si ponga:

$$A = a + b + c + d + e + f \;;$$

$$B = a(\theta''^2 - \theta^2) + b(\theta''^2 - \theta'^2) + d(\theta_0^2 - \theta^2) + f(\theta_0^2 - \theta_1^2) \;;$$

$$C = g + h \;, \qquad D = g(\theta''^2 - \theta'^2) + h(\theta_0^2 - \theta_1^2) \;;$$

$$B'^2 = R'^2 - R'^2 \cos.^2\beta' \cos.^2(l' - \alpha') \;, \qquad C' = R' \cos.(l' - \alpha') \cos.^2\beta' \;;$$

$$\frac{A}{C} = A' \;, \qquad \frac{D}{6C} - \frac{B}{6A} = e' \;,$$

$$\frac{A' + C'}{B' \cos.\beta'} = m \;, \qquad \frac{A' e'}{B'^4 \cos.\beta'} = n \;;$$

e si presenterà a risolvere l'equazione

$$m = y + n(y^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \;,$$

dalla quale si trarrà il valore numerico di y con l'aiuto della tavola inserita a n.° 1102 *Astron. Nachr.* Ottenuto il valore di y, si otterrà il raggio vettore r' corrispondente alla seconda osservazione, come ancora ρ' distanza accorciata del pianeta per la stessa epoca dalle equazioni

$$\rho' = B' \cos.\beta' y - C' \;, \qquad r' = B'(y^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \;.$$

A queste ultime calcolazioni può servir di controllo l'altra equazione:

$$r'^2 = \rho'^2 \sec^2\beta' + R'^2 + 2\rho' R' \cos.(l' - \alpha') \;.$$

Per la scelta di y sarà buono tener presenti le relazioni:

$$B' = R' \operatorname{sen.}\delta' \;, \qquad r' = \frac{R' \operatorname{sen.}\delta'}{\operatorname{sen.} z'} \;, \qquad \operatorname{sen.} z' = (y^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \;;$$

pe' simboli ρ', z' vedi Gauss *Th. mot.* pag. 157, ed il rapporto fra z' ed y servirà per far adottare il valore di y che fa al caso, conoscendosi le norme per la scelta di z'.

Ottenuto r' si calcolino i simboli $\frac{n\,12}{n\,01}$ ecc. dalle equazioni

$$\frac{n\,12}{n\,01} = \frac{\theta}{\theta''} \cdot \frac{6r'^3 - \theta^2}{6r'^3 - \theta''^2} \;, \qquad \frac{n\,02}{n\,01} = \frac{\theta'}{\theta''} \cdot \frac{6r'^3 - \theta'^2}{6r'^3 - \theta''^2} \;,$$

$$\frac{n\,12}{n\,13} = \frac{\theta}{\theta_0} \cdot \frac{6r'^3 - \theta^2}{6r'^3 - \theta_0^2} \;, \qquad \frac{n\,23}{n\,13} = \frac{\theta_1}{\theta_0} \cdot \frac{6r'^3 - \theta_1^2}{6r'^3 - \theta_0^2} \;;$$

quindi le due che seguono dovranno accordarsi, entro stretti limiti, a dare lo stesso valore per ρ'', e serviranno di riprova ai calcoli precedenti.

Si ha adunque:

$$-\rho'' = a \cdot \frac{\theta''}{\theta} \cdot \frac{n\,12}{n\,01} + h \cdot \frac{\theta''}{\theta'} \cdot \frac{n\,02}{n\,01} + c - g \cdot \frac{\theta''}{\theta'} \cdot \frac{n\,02}{n\,01} \cdot \rho' \,,$$

$$\rho'' = d \cdot \frac{\theta_0}{\theta} \cdot \frac{n\,12}{n\,13} + e + f \cdot \frac{\theta_0}{\theta_1} \cdot \frac{n\,23}{n\,13} - h \cdot \frac{\theta_0}{\theta_1} \cdot \frac{n\,23}{n\,13} \cdot \rho' \,;$$

adottando il medio dei due valori ottenuti di ρ'', si avrà r'' da

$$r''^2 = \rho''^2 \sec.^2 \beta'' + R''^2 + 2 R'' \rho'' \cos.(l'' - \alpha'') \,.$$

Conoscendo r', r'' ed il tempo interposto; ρ', ρ'', e quindi le coordinate eliocentriche, si potrebbero calcolare gli elementi dell'orbita. È necessario però procedere ad una seconda approssimazione, allorchè le osservazioni non sono tra loro vicinissime, come nel caso attuale. In questa seconda approssimazione si terrà conto fino ai termini moltiplicati per le quarte potenze del tempo inclusi nello sviluppo delle coordinate eliocentriche in funzione l'una dell'altra. Per procedervi si ponga:

$$\theta''^2 + \frac{\theta''^3}{2\theta} \cdot \left(1 - \frac{r'^3}{r''^3}\right) = L \,, \qquad \theta'^2 - \frac{\theta'^2(\theta - \theta'')}{2\theta} \cdot \left(1 - \frac{r'^3}{r''^3}\right) = M \,,$$

$$\theta_0^2 - \frac{\theta_0^3}{2\theta} \cdot \left(1 - \frac{r'^3}{r''^3}\right) = N \,, \qquad \theta_1^2 - \frac{\theta_1^2(\theta_0 + \theta)}{2\theta} \cdot \left(1 - \frac{r'^3}{r''^3}\right) = P \,,$$

$$\theta^2 - \frac{\theta^2}{\theta}\left(1 - \frac{r'^3}{r''^3}\right) = Q \,,$$

$$b' = a \cdot (L - Q) \cdot \left(1 + \frac{L}{6r'^3}\right) + b \cdot (L - M) \cdot \left(1 + \frac{L}{6r'^3}\right) \,,$$

$$d \cdot (N - Q) \cdot \left(1 + \frac{N}{6r'^3}\right) + f \cdot (N - P) \cdot \left(1 + \frac{N}{6r'^3}\right) \,,$$

$$d' = g \cdot (L - M) \cdot \left(1 + \frac{L}{6r'^3}\right) + h \cdot (N - P) \cdot \left(1 + \frac{N}{6r'^3}\right) \,;$$

e fatto

$$\frac{d'}{6C} - \frac{b'}{6A} = e'' \,, \qquad n' = \frac{A' e''}{B'^4 \cos.\beta'} \,,$$

si risolverà nuovamente l'equazione

$$m = y + n'(y^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \,,$$

e si avranno successivamente i valori corretti di r', ρ', ρ'', r''.

Le coordinate eliocentriche si avranno da

$$x' = \rho' \cos.\alpha' + R' \cos.l' \,, \quad y' = \rho' \operatorname{sen.}\alpha' + R' \operatorname{sen.} l' \,, \quad z' = \rho' \operatorname{tang.}\beta' \,,$$

$$x'' = \rho'' \cos\alpha'' + R'' \cos.l'' \,, \quad y'' = \rho'' \operatorname{sen.}\alpha'' + R'' \operatorname{sen.} l'' \,, \quad z'' = \rho'' \operatorname{tang.}\beta'' \,.$$

tenendo presente che i valori corretti di $\frac{n\,12}{n\,0\,1}$ ecc. si hanno da

$$\frac{n\,12}{n\,0\,1}=\frac{\theta}{\theta''}\cdot\frac{6r'^3-Q}{6r'^3-L}\,,\qquad \frac{n\,0\,2}{n\,0\,1}=\frac{\theta'}{\theta''}\cdot\frac{6r'^3-M}{6r'^3-L}\,,$$

$$\frac{n\,12}{n\,13}=\frac{\theta}{\theta_0}\cdot\frac{6r'^3-Q}{6r'^3-N}\,,\qquad \frac{n\,23}{n\,12}=\frac{\theta_1}{\theta_0}\cdot\frac{6r'^3-P}{6r'^3-N}\,.$$

Dopo ciò si avrà il nodo e l'inclinazione da

$$\text{tang.}\,i\,\text{sen.}\,\Omega=\frac{y'z''-y''z'}{x'y''-x''y'}\,,\qquad \text{tang.}\,i\cos.\,\Omega=\frac{x'z''-x''z'}{x'y''-x''y'}\,;$$

e chiamando con λ', λ'' gli angoli formati da r', r'' con la linea de' nodi si avrà

$$\text{sen.}\,(\lambda''-\lambda')=\frac{y'z''-y''z'}{r'r''\,\text{sen.}\,i\,\text{sen.}\,\Omega}=\frac{x'z''-x''z'}{r'r''\,\text{sen.}\,i\cos.\,\Omega}\,:$$

e ponendo

$$\frac{y'}{x'}=\text{tang.}\,\omega'\,,\qquad \frac{y''}{x''}=\text{tang.}\,\omega''\,.$$

verrà

$$\text{cotg.}\,\lambda'=\text{cotg.}\,(\omega'-\Omega)\cos.\,i\,,\qquad \text{cotg.}\,\lambda''=\text{cotg.}\,(\omega''-\Omega)\cos.\,i\,.$$

Il valore di $n\,12$ sarà dato da

$$n\,12=r'r''\,\text{sen.}\,(\lambda''-\lambda')\,,$$

e quindi sarà facile avere il valor numerico de' simboli $n\,0\,1$, $n\,0\,2$ ecc.

Il parametro sarà fornito dall'equazione

$$\sqrt{p}=\frac{1}{\theta\theta'\theta''}\cdot\frac{\theta^4 n\,0\,1+\theta''^4 n\,12}{\theta^2-\theta\theta''+\theta''^2-\frac{\theta^2\theta''^2}{6r'^3}}\,,$$

alla quale servirà di controllo l'altra

$$\sqrt{p}=\frac{1}{\theta\theta_0\theta_1}\cdot\frac{\theta_1^4 n\,12+\theta^4 n\,23}{\theta_1^2-\theta\theta_1+\theta^2-\frac{\theta^2\theta_1^2}{6r''^3}}\,.$$

Finalmente la longitudine del perielio, l'eccentricità ed il semiasse si avranno dalle

$$\frac{p}{r'}=1+e\cos.(\lambda'-\pi),\qquad \frac{p}{r''}=1+e\cos.(\lambda''-\pi),\qquad p=a(1-e^2),$$

e si potrà, colle notissime formole, calcolare il sesto elemento, cioè la longitudine o anomalia media per un'epoca qualunque.

Venendo ora agli esempi numerici, pel tipo desunto da Gauss ho trovato:

Log. A = 0. 511825 —	Log. e' = 0. 080950
Log. B = 1. 390666	m = 2. 4828
Log. C = 0. 273855 —	n = 3. 2758
Log. D = 9. 800443	y = 2. 2562
Log. A' = 0. 237970	Log. r' = 0. 344934
Log. B' = 9. 952609	z' = 23°. 54'. 14".
Log. C' = 9. 664390.	

Col metodo di Gauss alla prima approssimazione si trova z' = 23° 38' 17", Log. r' = 0. 34951, ed i valori esatti sono rispettivamente 23° 48' 16". 7 e 0. 346638. Colla prima delle precedenti formole ho trovato il Log. del parametro eguale a 0. 369532, mentre il valore esatto è 0. 369520.

Pel calcolo dell'orbita di Ausonia ho adoperato i dati seguenti:

	T. m. Grec.	Long. Terra	Log. Ragg. vett. Terra	Long. Aus. app.	Lat. Aus. app.
1861 Febb.	10, 56687	142° 22' 25". 4	9. 994498	166° 49' 29". 2	
	14, 40486	146 15 5. 7	9. 994829	166 3 8. 0	—0° 1' 37". 8
Marzo	1, 31493	161 14 47. 9	9. 996324	162 27 43. 3	—0 39 51. 5
	6, 27097	166 12 28. 2	9. 996897	161 10 17. 3	

ho ottenuto:

Log. A = 9. 114911 —	Log. e' = 0. 149027
Log. B = 9. 891794	m = 7. 8588
Log. C = 9. 662380 —	n = 190. 935
Log. D = 9. 277588 —	y = 7. 4003
Log. A' = 0. 230682	r' = 0. 397884
Log. B' = 9. 524706	z' = 7°. 41'. 45".
Log. C' = 9. 968362.	

I due valori di ρ'' sono risultati 1. 4874 e 1. 4870; volendomi attenere alla sola prima approssimazione, vista la vicinanza delle osservazioni, ho ritenuto ρ'' = 1. 4872. Dalle due formole del parametro ho avuto Log. $\sqrt{p}$ = 0. 185954, e 0. 185951. Ecco infine l'orbita calcolata

Epoca febbraio	14. 40486 t. m. Grec.
M	234° 36' 48"
π	295 17 16
Ω	338 11 50
i	6 1 36
φ	7 51 33
u	954". 660 ».

Il Presidente Barone Plana legge un suo lavoro col titolo: *Note sur la configuration originaire des anneaux, dont la matière existe actuellement dans l'espace, transformée en plusieurs planètes, circulant autour du Soleil entre Mars et Jupiter.*

L'Autore rammenta anzi tutto la comunicazione già fatta alla Classe nell'adunanza 2 marzo 1856 di una Nota *Sur la formation probable de la multitude des Astéroïdes, qui, entre Mars et Jupiter, circulent autour du Soleil*, nella quale egli riferiva l'ipotesi di Laplace sull'origine e sulla formazione di essi Asteroidi. Egli fa poscia lettura dell'accennato suo nuovo scritto (che verrà stampato in uno dei prossimi volumi), col quale aggiugne, per così dire, alla Nota sopra mentovata la dichiarazione di un'ipotesi probabile relativamente alla configurazione stessa degli anelli, i quali spezzatisi, secondo Laplace, in più frammenti, si sono trasformati in altrettanti piccoli pianeti. Esaminando le distanze medie dal Sole e le inclinazioni sull'eclittica delle orbite di questi pianeti, il Barone Plana pervenne a distribuirli in cinque gruppi, eccettuati solamente i due scopertisi gli ultimi, gli elementi delle cui orbite ellittiche, per essere meglio determinati, vogliono forse ulteriori osservazioni. Fissata così la posizione degli anelli, ne consegue che ogni distanza di un nuovo Asteroide dal Sole verrà più facilmente conosciuta perchè ristretta entro angusti limiti.

Dopo questa lettura il Presidente parla di alcuni sperimenti accennati nei *Comptes-rendus* 4 *mars* 1861, fatti dal sig. Faye sulle scintille di induzione e sopra il fenomeno della mutua saldatura di due cilindri di ferro ad alta temperatura.

A tale proposito il Socio Comm. Matteucci fa osservare che le esperienze del sig. Faye dirette a dimostrare una certa forza ripulsiva emanante dalle superficie incandescenti, possono ricevere una interpretazione molto più semplice e deducibile da fatti già conosciuti. L'ultima esperienza di Faye consiste, egli dice, nel far vedere che un filo di ferro riscaldato a rosso per il passaggio di una corrente elettrica, si può saldare con un altro filo egualmente riscaldato se si opera nel vuoto, ma che la saldatura non avviene operando nell'aria. Non vi è nissuna difficoltà a concepire, nota il Prof. Matteucci, che questa differenza sia dovuta all'ossidazione la quale impedisce l'adesione e la saldatura. La migliore controprova, che doveva fare l'Autore, era di sostituire al filo di ferro un filo di platino, nel qual

caso è molto probabile che, facendo l'esperienza bene, la differenza non si sarebbe verificata.

Egualmente dubbiose sono le conseguenze che Faye deduce dalle esperienze fatte accostando una superficie metallica riscaldata alla luce elettrica ottenuta colla macchina di Ruhenkorff. Vi possono essere molti modi di intendere la ripulsione che egli dice osservarsi fra quella superficie e la luce elettrica, ed è buona regola di esaurire tutte le spiegazioni fondate sopra principii noti prima di immaginare una forza nuova, che dovrebbe secondo il sig. Faye entrare in azione coll'attrazione universale e spiegare alcune proprietà delle code delle comete.

Queste considerazioni, soggiugne il Socio Matteucci, mi sono suggerite dalla lettura or ora fatta dall'illustre nostro Presidente relativamente all'applicazione della celebre ipotesi di Laplace per ispiegare la formazione dei piccoli pianeti. Le sue osservazioni sono forse il migliore appoggio che fin qui sia dato a quella ipotesi e conducono direttamente ad una conseguenza teoricamente molto importante, che cioè la materia nebulosa è materia come l'altra, e soggetta all'attrazione universale, imperocchè dalla condensazione di essa hanno origine i pianeti.

Da ultimo il Segretario comunica la seguente *Nota* manoscritta indirizzata all'Accademia dal sig. E. Oehl, Professore straordinario di istologia ed anatomia microscopica nella R. Università di Pavia, *Sui caratteri differenziali dei muscoli bianchi e rossi.*

« Il fenomeno del colore più o meno intensamente rosso dei muscoli è legato ad istologiche proprietà sì caratteristiche, da venirne legittimo il dubbio che nella universale parsimonia dei vasi muscolari, non possano essi in alcuna specie di muscoli a tal grado mancare da determinarne, per sè soli, la quasi totale negazione del color muscolare, come avviene per le candide fibre dei muscoli pettorali e degli arti superiori nei gallinacci. È di fatto in questi ultimi che le differenze istologiche fra i muscoli *rossi* (quelli per es. degli arti inferiori), ed i *bianchi* raggiungono, per quanto mi permettono di asserirlo le osservazioni fino ad ora instituite, il massimo grado di sicura e comparativa dimostrabilità.

Assoggettando infatti all'osservazione le sezioni longitudinali delle due specie di muscoli sì freschi che secchi e trattati previamente con $\overline{A}$ $^{10}/_{00}$, ponno agevolmente notarsi fra essi le seguenti differenze:

1.° Il numero dei nuclei nelle fibre muscolari rosse non oltrepassa sensibilmente quello fino ad ora conosciuto, e veggonsi questi nuclei regolarmente e longitudinalmente disposti a contatto del sarcolemma, raro verificandosi il caso che qualcuno di essi trovisi sepolto nella sostanza della fibra più o meno lontano dall'asse della medesima. Pei muscoli bianchi invece, oltre ai periferici, veggonsi nuclei in *numero sorprendente* dispersi nello spessore della sostanza capita dal sarcolemma, e quivi non solo in direzione longitudinale, ma anche obliquamente e trasversalmente disposti. Ne viene di conseguenza che nelle sezioni trasverse delle due specie di fibre si veggono pei muscoli rossi degli scarsi nuclei periferici, pei bianchi invece delle sezioni più o meno trasverse od obbliqué di abbondantissimi nuclei disseminati nel campo della sezione muscolare. L'aspetto che per tale circostanza deriva tanto alle longitudinali quanto alle trasverse sezioni delle due specie di muscoli è caratteristicamente diverso e tale si mantiene per tutto il tempo (molti giorni) che conservando inumidito il preparato non avviene la decomposizione di esso.

2.° Le zone alterne di sarcoelementi e di sostanza omogenea sono molto più grosse pei muscoli rossi che pei bianchi. È tale la differenza da risultarne una proporzione media di 5 a 3; nel mentre cioè una divisione del micrometro comprende tre sole zone pei muscoli rossi, ne comprende cinque pei muscoli bianchi. Ne deriva che la struttura dei muscoli bianchi appaia al microscopio molto più fina e delicata di quella dei muscoli rossi.

3.° La sostanza muscolare capita dal sarcolemma dei muscoli bianchi è meno solida di quella contenuta nei rossi. Lacerando il sarcolemma delle fibre muscolari bianche ed applicando $\overline{A}$ $^{20}/_{00}$ vedesi la sostanza muscolare uscire in parte dalla fibra e tenersi agglomerata quasi avesse una consistenza gelatinosa. Non perde fuoruscendo la sua struttura trasversalmente striata e sprigiona alcuni dei suoi nuclei i quali si ponno vedere inallora perfettamente isolati. Anche molti giorni dopo, conservando il preparato colle debite cautele, si può vedere la sostanza fuoruscita con persistenza della sua struttura e con nuclei in parte racchiusi, in parte isolati da essa.

Sto ora indagando se le differenze testè accennate caratterizzino pure nei mammiferi le due specie di muscoli, sia che la qualità del colore trovisi inerente alla natura dell'animale (muscoli bianchi del coniglio), sia che dipenda dall'età.

I risultati ulteriori raccolti cogli attuali in una Memoria più particolareggiata ed illustrata, mi farò onore di comunicare a codesta Reale Accademia ».

7 aprile.

Il Socio Cav. Sella legge una sua *Memoria sull'Attrito*, e chiama all'uopo l'attenzione della Classe sopra un Tripsometro da lui fatto eseguire dal sig. Froment a Parigi; inoltre coll'assistenza del sig. Ingegnere Montefiore egli sperimenta sotto gli occhi della Classe l'attrito presentato dal quarzo e da altri cristalli, e fa così apprezzare quei fatti, sui quali sono fondati i principi teorici e le leggi sull'attrito, enunciate nel corso dell'accennata Memoria.

(Verrà stampata in uno dei prossimi Volumi).

Il Comm. Matteucci, premesse le proprie considerazioni in proposito, comunica una lettera del Professore Luigi Palmieri, indiritta colla data di Napoli 4 aprile 1861 al Professore Arcangelo Scacchi, e nella quale esso Prof. Palmieri rende conto dei risultamenti di alcuni suoi studi e sperimenti sull'elettricità atmosferica.

La parte scientifica di tale lettera è così concepita:

« Da che Alessandro Volta tentò di provare che l'acqua passando allo stato aeriforme svolge elettricità, un gran numero di abili sperimentatori italiani e stranieri con mirabile concordia lo negò dietro svariati esperimenti condotti con ogni diligenza. Per la qual cosa sembrerà forse audacia la mia di avere osato tornare sopra una materia che sembrava autorevolmente giudicata; ma la natura con troppa eloquenza mi parlava in contrario ne' miei lunghi studi sull'elettricità atmosferica, e mi sforzava a meglio interrogarla. E veramente il mio nuovo apparecchio a conduttore mobile (coronato dall'Accademia delle Scienze di Lisbona) e la opportunità del sito in cui è collocato, mi han fatto vedere ciò che avea dovuto sfuggire a coloro che mi precedettero nelle stesse indagini; per tal modo mi è stato possibile combattere non pochi accreditatissimi errori e scoprire le vere leggi della elettricità atmosferica. (V. Lezioni di meteorologia, Annali dell'Osservatorio Vesuviano ecc.).

Studiando dunque la elettricità atmosferica mi era occorso tra le altre cose di notare: 1.° che le tensioni crescono col crescere della umidità relativa dell'aria quantunque questa possa durare per qualche tempo

e le tensioni elettriche debbano prontamente scemare; 2.° che le forti tensioni capaci a tradursi in vivaci scintille sopra i conduttori esposti all'aria libera corrispondono solo e sempre alla caduta di pioggia, grandine o neve, o sul luogo delle osservazioni, o ad una certa distanza da esso che può essere di molte miglia con le grandi pioggie tuttochè tranquille e non temporalesche.

Laonde a me parve chiaro che il condensamento di vapori era accompagnato da svolgimento di elettricità positiva, la quale induce intorno a sè elettricità negativa secondo la legge da me scoperta e dal Quetelet rifermata. Il fumo del Vesuvio finalmente con le sue vigorose tensioni positive e quello delle fumarole da me condensato per distillazione mi confortavano nella medesima sentenza.

Tutti coloro che mi aveano preceduto si erano rivolti a cercare la elettricità svolta dalla generazione de' vapori nella coppa di platino in cui ponevasi l'acqua, ma dovendo escludere ogni combustione come sorgente calorifica, per cagione dell'elettricità che con essa si manifesta, si ricorse alle coppe rese prima incandescenti, le quali dal canto loro presentarono parecchie difficoltà; perocchè da prima lo stato sferoidale, poscia i rapidi scrosci di bollimento con manifestazioni elettriche di dubbia origine per cagione dell'attrito, e finalmente la difficoltà di poter ottenere una regolare ebollizione per qualche tempo, furono tali cagioni da non permettere alcuna legittima conclusione.

Ciò posto, io pensai da prima di rivolgermi a cercare la elettricità che dovea ottenersi condensando i vapori, per cui mentre l'acqua bolliva lentamente in una coppa di platino non isolata raccoglieva il vapore in apposito refrigeratore di platino collocato ad un'altezza di circa 6 decimetri dalla superficie dell'acqua, e per mezzo dell'elettroscopio condensatore mi assicurai della elettricità positiva che manifestavasi. Preso animo da questi risultamenti favorevoli, cercai la elettricità negativa della coppa di platino isolata e messa in comunicazione col piattello inferiore dell'elettroscopio condensatore, concentrando sull'acqua distillata in essa contenuta i raggi solari per mezzo di una lente di circa un piede di diametro; ebbi così una ebollizione superficiale appena visibile ed elettricità negativa nella coppa. Ho variato le esperienze in più modi, ho sperimentato su diversi liquidi, e tutto il lavoro sarà pubblicato negli *Annali* ».

21 aprile.

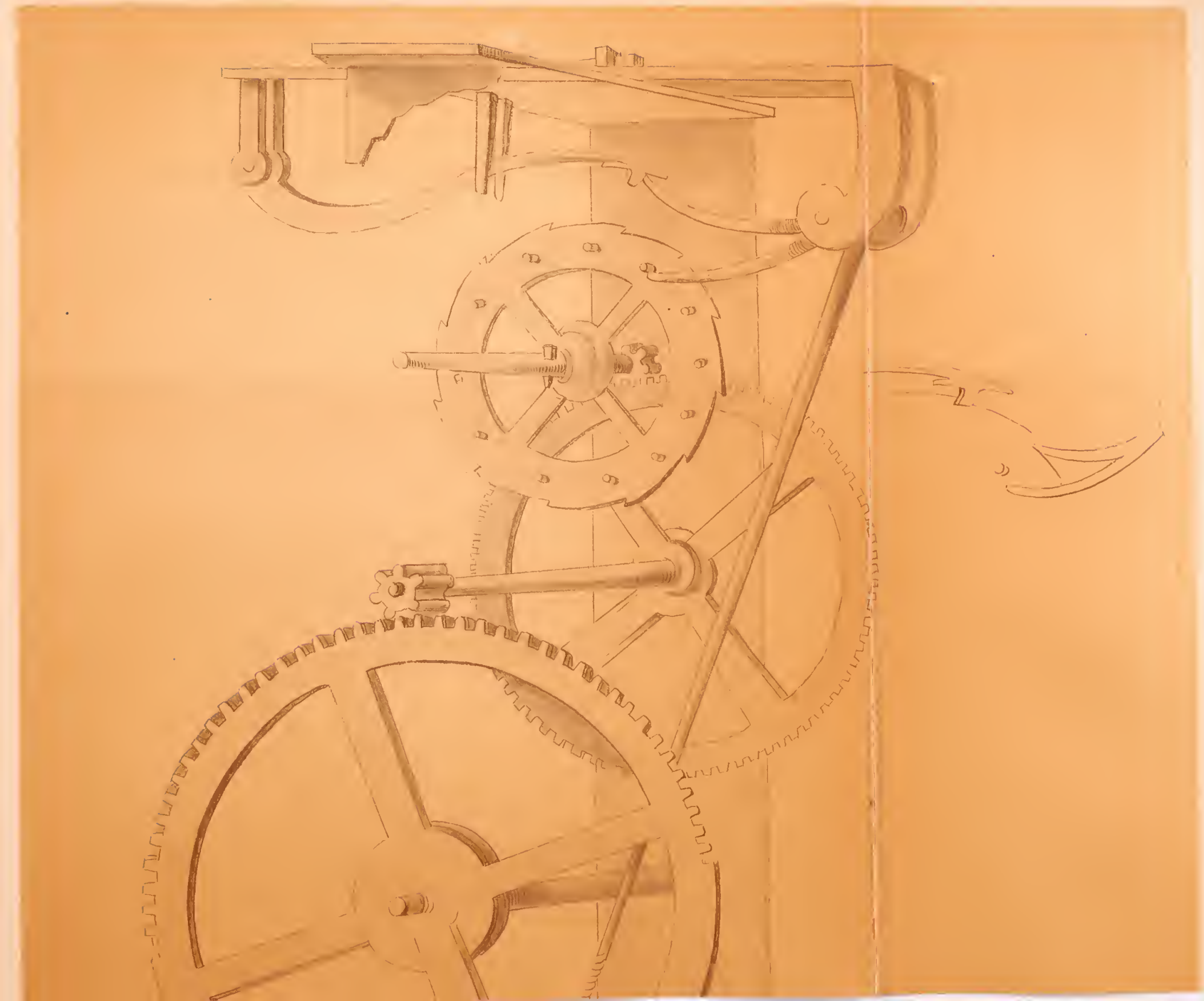
Il Segretario dà comunicazione del carteggio e legge una lettera in data Bologna 6 aprile 1861, colla quale la vedova sig.ra Carlotta Alessandrini annunzia la morte del suo marito Professore Antonio Alessandrini, avvenuta nel detto giorno 6 aprile, annunzio che la Classe riceve con vivo dolore, perchè nella persona dell'Alessandrini essa rimpiange uno de' suoi Membri corrispondenti più benemeriti della scienza.

Dopo ciò una Giunta accademica composta del Cav. De Filippi, relatore, e del Prof. Eugenio Sismonda riferisce favorevolmente sul merito di una Memoria manoscritta *Sopra alcuni pesci poco noti del Mediterraneo*, inviata all'Accademia dal sig. G. Canestrini, Professore nel R. Liceo di Genova, ed Assistente a quel R. Museo di storia naturale.

Il Socio Comm. Matteucci espone il sunto di una *Serie di ricerche sperimentali intraprese all'oggetto di studiare la legge dell' imbibizione.*

Incomincia col dimostrare che l' imbibizione è indipendente dalla gravità; infatti basta, egli dice, di toccare un piano omogeneo capace di imbibizione e tenuto verticale, con un filo costantemente imbevuto d'acqua, di alcoole o d'olio, per iscorgere che nel piano verticale si forma una macchia per feltramento circolare, la quale va sempre crescendo di diametro. L'Autore si propone di fare esperienze sopra lamine di corpi cristallizzati, non appartenenti al sistema regolare, nell' idea che la capillarità si manifesti in questi corpi con effetti dipendenti dalla cristallizzazione. Intanto nelle sue ricerche il Prof. Matteucci ha già trovato che l' innalzamento di un liquido per imbibizione in masse porose di densità diversa cresce proporzionalmente alla detta densità, lasciando però a questi fenomeni tutto il tempo necessario per giugnere ad uno stato di equilibrio.

Partendo poi da una certa analogia esistente nelle condizioni meccaniche fra l' imbibizione e la propagazione del calore in una verga, egli ha eziandio fatto sperimenti in proposito, ed ha osservato che una porzione del calore è perduta per l' irraggiamento dalla superficie, come una porzione d'acqua fugge per evaporazione. Nel caso della verga, annettendovi dei termometri in punti equidistanti, si scorge che gli eccessi di temperatura sono tali che la loro somma, presi a due a due, divisa per l'eccesso di temperatura del punto intermedio, dà un quoziente costante. Dice il



Prof. Matteucci di aver pure determinato la quantità d'acqua per 100 che esiste in una pianta nella stagione invernale prendendo il legno da studiare a diverse altezze equidistanti fra loro, e di aver rilevato che le quantità d'acqua per tal modo trovate confermerebbero l'esposta singolare analogia. Soggiugne inoltre che promovendo l'imbibizione in uno spazio di aria satura di vapore avviene, almeno entro certi limiti, che l'acqua sollevata per imbibizione è la stessa a diverse altezze.

Il Socio corrispondente Marchese Cosimo Ridolfi presenta alla Classe un disegno (di cui il qui unito è copia fedele) che dice rappresentare il primo concetto dell'applicazione del pendolo all'oriuolo, dettato da Galileo, già cieco, al figlio Vincenzo e al discepolo Viviani, ed il quale disegno sarebbe stato lucidato sull'originale esistente nei manoscritti Galileiani della Palatina. Insieme a questo disegno, che si osserva essere alquanto diverso da quello pubblicato dall'Alberi, il Marchese Ridolfi presenta pure, descrive e mette in moto uno *scappamento* eseguito sul detto disegno, e del quale anzi il pendolo, una ruota ed un rocchetto sarebbero ancora pezzi dell'orinolo fatto costruire dallo stesso Galileo.

Da ultimo il Segretario Prof. Eugenio Sismonda legge una Nota sopra la *Palaeomyra bispinosa* di Alfonso Milne-Edwards, e fa conoscere i caratteri sì generici che specifici di questo nuovo Crostaceo fossile della collina di Torino.

5 maggio.

Il Prof. Eugenio Sismonda, predetto, condeputato col Comm. Moris, col Comm. Angelo Sismonda e col Cav. De Filippi, legge un parere, steso in forma di lettera, intorno all' importanza scientifica delle collezioni di oggetti di storia naturale lasciate dal defunto Prof. Abramo Massalongo, di Verona, e da' suoi eredi offerte, perchè le comperi, al Governo di S. M. il Re d'Italia, tale essendo il desiderio manifestato dallo stesso Prof. Massalongo nelle sue disposizioni testamentarie. In questo suo parere la Commissione accademica dichiara, che la raccolta Massalongo, siccome appare dal catologo e siccome consta particolarmente ad uno dei Membri della Giunta, che ebbe l'opportunità di vederla e di esaminarla, è una raccolta incontestabilmente pregevolissima per molti rispetti, ma particolarmente:

Pel numero considerevole di oggetti di cui si compone, contenendo essa tra gli altri fossili di minor importanza, una stupenda serie di impronte vegetali o Filliti, ricca di non meno di 6,000 esemplari rappresentanti, quantunque molti sieno duplicati, un numero di specie diverse non facili a raccogliersi; inoltre un Erbario racchiudente 235 diversi generi di Licheni, molte Alghe, alcuni Muschi e non pochi esemplari di frutti di Conifere dell'epoca attuale; infine una non ispregevole serie di Roccie e di Ittioliti.

Perchè parecchi esemplari di Filliti sono veramente di una peregrina conservazione e grandezza, come bellissimi sono eziandio vari Carpoliti.

Perchè la massima parte delle specie proviene dal monte Bolca, da Chiavone, da Salcedo, da Novale, da Roncà, da Sinigallia e da altre località della penisola, sicchè è una collezione che non può a meno di accrescere il lustro di un Museo italiano; infine perchè contiene i tipi delle moltissime specie nuove, di Filliti particolarmente, pubblicate dal defunto Prof. Massalongo.

Per tutte queste considerazioni la Giunta si mostrò di parere, che non convenga lasciar sfuggire quest'occasione di procacciare al Museo ed all'Orto botanico di Torino le nominate collezioni, la cui aggiunta a quelle già esistenti concorrerebbe potentemente a mantenere i detti scientifici stabilimenti all'altezza dei tempi ed a farli degni di questa capitale del Regno d'Italia.

E quando, per le gravi condizioni in cui versano le finanze dello Stato, il Governo stimasse di limitare l'acquisto ad una parte solamente delle collezioni offerte dagli eredi Massalongo, in tale caso essere la raccolta delle piante e dei frutti fossili (Filliti e Carpoliti) quella che per trovarsi di tutte la più compiuta e più ricca di specie nuove, meriterebbe la preferenza.

Ma siccome siffatta raccolta fallirebbe al suo scopo qualora non venisse disposta in modo a poter soddisfare alla curiosità del pubblico, e ad essere esaminata e studiata dai cultori delle naturali discipline, e per altra parte le sale dei Regii Musei attualmente più non bastano a capire la sempre crescente suppellettile di oggetti naturali, che vi si adunano, la Giunta accademica e seco lei la Classe fece sentire la convenienza di rappresentare al Governo, che ove si acquistino le collezioni Massalongo, sarebbe mestieri:

1.° Che alla somma d'acquisto, da convenirsi cogli eredi Massalongo,

si aggiungano otto o dieci mila lire per spese non solo d' imballaggio, trasporto, collocamento, ecc. della collezione, ma eziandio per la costruzione delle vetrine in cui debbe venir riposta ed esposta.

2.° Che si provveda all'ampliamento dei Musei, od annettendovi alcune delle sale attualmente occupate dagli Archivi delle finanze, o facendo eseguire la già progettata galleria nel cortile lunghesso il muro di cinta a ponente od almeno invitando il Direttore del Museo d'antichità a cedere, mediante indennità, il suo alloggio al Museo zoologico, sicchè col trasferire nel detto alloggio gli studj ed i lavoratori zoologici, si possa il Museo ampliare colle camere ora destinate a simili usi. Quando il Governo non acconsentisse ad ampliare i Musei nell'uno o nell'altro dei tre accennati modi, od in un altro qualsivoglia acconcio al bisogno, il vantaggio scientifico dell'acquisto di nuove raccolte andrebbe in gran parte perduto, perchè queste sarebbero condannate a rimaner sepolte nei magazzini.

Lo stesso Segretario legge quindi a nome di altra Giunta accademica composta del Cav. Sobrero, relatore, del Comm. Cantu' e del Cav. Piria un parere intorno ad una questione proposta all'Accademia dal Ministero di Agricoltura, Commercio ed Industria, la questione cioè se particelle di zinco nella proporzione oscillante tra un millesimo ed un millesimo e mezzo circa, rinvenute in una lega monetaria fissata a 96 di rame e 4 di stagno, possano considerarsi come accidentali e dovute alla naturale impurità del rame e dello stagno commerciale, ovvero se tale proporzione di zinco sia stata introdotta volontariamente nell'accennata lega, e se possa nuocere alla medesima.

La Commissione facendo considerare essere cosa difficile il procurarsi dal commercio metalli veramente *chimicamente puri;* trovarsi i minerali di rame spesso in natura accompagnati dalla blenda o solfuro di zinco; essere la proporzione dello zinco nella lega in questione non superiore ad un millesimo od un millesimo e sei decimi, conchiude dichiarando non sembrarle che la presenza delle accennate particelle di zinco possa essere capace di alterare i caratteri voluti nella stessa lega, le cui qualità dipendono dal suo tenore in rame e stagno, tenore che non viene alterato entro i limiti di una ragionevole tolleranza, per la riferita piccola proporzione di zinco.

Tolta occasione dalla lettura di questo parere, il Socio Cav. Piria fa osservare che quando vuolsi stabilire il tenore di una qualche lega per

monetazione, invece di fare studiare il tenore delle leghe adottate attualmente presso i varii Governi esteri, sarebbe più utile di far procedere all'analisi di quelle monete e medaglie antiche greche e romane, le quali ognun sa essersi meglio di tutte le altre conservate attraverso ai secoli e ad ogni maniera di cause di distruzione; il risultamento di simili ricerche analitiche comparative suggerirebbe certamente, per avviso del Cav. Piria (al quale l'intiera Classe si associa), un tenore di leghe monetarie preferibile a quelli oggigiorno sanciti e per la durata e per la mondezza e per tutte quelle altre qualità che ordinariamente più si apprezzano nella monetazione.

Da ultimo lo stesso Cav. Piria, relatore, condeputato coi Professori Angelo e Eugenio Sismonda, fa rapporto sul merito di una Memoria manoscritta rassegnata all'Accademia, per la stampa ne' suoi Volumi, dal sig. Prof. Giuseppe Missaghi, Memoria contenente l'*Analisi di un aerolite caduto nelle vicinanze di Alessandria.*

La caduta di tale bolide avvenne, dice la Giunta, il giorno 2 febbraio 1860, 15 minuti prima di mezzodì, nel sobborgo di S. Giuliano vecchio, distante da Alessandria 14 chilometri circa, ed il rumore compagno della meteora fu contemporaneamente udito in Alessandria, Novi, Tortona, Piacenza, Novara e Milano. Oltre a due pezzi rinvenuti nella località anzidetta alla sola profondità di 30 centimetri, perchè allora il suolo era ancora indurito dal gelo, altri cinque frammenti sono stati trovati nei dintorni del nominato luogo, e questi pezzi raccolti e raffrontati coi due primi, loro rassomigliano siffattamente da non lasciar dubbio che sieno parti di una stessa massa aerolitica.

Nella Memoria sottoposta al giudizio dell'Accademia il Prof. Missaghi fa la storia di questo fenomeno meteorologico, porge un'accurata descrizione dell'aerolite, ed espone i risultamenti dell'analisi chimica da lui fattane, mercè la quale analisi egli vi rinvenne: ferro, parte allo stato metallico, parte allo stato di ossido, e parte allo stato di solfuro, silice, magnesia, calce, allumina, piccole quantità di cromo e di nichelio, qualche traccia di manganese e di cobalto.

Quantunque la Commissione lamenti nel suo parere che il sig. Missaghi non abbia determinato in modo rigoroso, ma per semplice approssimazione, le proporzioni del ferro allo stato metallico, di ossido e di solfuro, tuttavia loda l'accuratezza con cui il lavoro è condotto, e fa notare come

esso rechi nuova conferma all'importante fatto, che negli aeroliti il ferro trovasi in massima parte allo stato metallico.

26 maggio.

Finita per parte del Segretario la comunicazione del carteggio, il Socio Cav. Sobrero, condeputato col Comm. Cantu' e col Cav. Sella, fa relazione sul merito di una Memoria manoscritta rassegnata all'Accademia dall'Ingegnere sig. Celestino Rossi, Maggiore in ritiro del Genio militare, Memoria intitolata: *Recherches sur les quantités de chaleur qui sont effectivement produites dans le foyer par la combustion des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, sur la grille des fours à réchauffer pour la fabrication et le travail du fer.*

Le conclusioni di questa relazione essendo che un breve sunto della Memoria dell'Ingegnere Rossi compilato dall'Autore stesso e limitato alle sole cose più importanti venga stampato nella *Notizia Storica* dei lavori della Classe di quest'anno, soddisfaccio a quelle conclusioni inserendo qui immediatamente il sunto del citato lavoro che l'Autore mi ha trasmesso, e nella compilazione del quale dichiaro di non aver avuto parte alcuna.

« L'emploi d'un combustible minéral est une nécessité impérieuse que notre industrie nationale du fer aurait dû s'avouer depuis longtemps, car, ne trouvant plus dans les forêts qui l'alimentaient par le passé des moyens suffisants de fabrication et de production à bon marché, cette industrie est dans un état de ruine que nos intérêts généraux du pays bien entendus ne peuvent et ne doivent plus laisser se continuer: que si, au premier abord, on remarque encore sur quelque point, dans quelques localités de nos montagnes, des Alpes surtout, des forêts qui par leur étendue paraissent pouvoir fournir à notre industrie du fer de grands moyens de fabrication et de production, on ne peut et on ne doit point ignorer que, tenant compte du temps voulu pour la reproduction après leurs coupes, une grande fabrication et une production à bon marché, conditions impérieuses aujourd'hui plus que jamais pour l'industrie du fer, conséquemment la création d'usines à grands produits, ne sauraient être assurées dans leur avenir, l'épuisement de ces forêts étant inévitable dans un temps plus ou moins éloigné.

« La houille, dit l'auteur du Mémoire, a fourni à l'industrie du fer

en Angleterre, en France, en Belgique des moyens puissants pour une grande fabrication et pour une production à bon marché qui n'auraient jamais été et ne sauraient être fournis par l'emploi des combustibles végétaux, et c'est à cet emploi de la houille que l'industrie du fer anglaise, française et belge doit l'immense développement et la prospérité qu'elle a acquis, surtout depuis quelques années.

» Nous ne possédons pas la houille, du moins jusqu'à ce jour nous ne l'avons point rencontrée dans notre pays et nous n'avons aucune donnée géologique qui puisse nous faire présumer de pouvoir la rencontrer: ainsi les quelques usines ou industries qui dans notre pays réclament l'emploi d'un combustible minéral sont-elles obligées de le demander à l'étranger d'où il nous arrive par mer pour être ensuite transporté par la voie de terre aux usines qui l'emploient: il s'ensuit conséquemment que le prix de revient de ce combustible minéral étranger est par trop élevé pour qu'il puisse être employé par les industries dont les produits doivent être livrés à bon marché à la consommation, parmi lesquelles l'industrie du fer doit être classée en première ligne.

» En fait de combustibles minéraux nous possédons des anthracites, des lignites et des tourbes, et si les premiers ne se rencontrent que sur quelques points dans les Alpes et en Sardaigne et les dernières dans quelques localités de nos plaines et de nos vallées, nous ne pouvons et nous ne devons pas ignorer que nous possédons dans toute la chaîne des Apennins qui sépare l'Italie en deux bassins un dépôt puissant de lignite déjà découvert et reconnu sur différens points de cette chaîne: un dépôt de lignite a également été découvert et reconnu en Sardaigne ».

C'est donc sur ce combustible minéral que nous possédons que notre industrie nationale du fer doit porter toute son attention et suivre sur cette question l'exemple de l'Angleterre lorsque l'épuisement de ses forêts entraînant la ruine de son industrie du fer, elle dut recourir à la houille et rechercher dans l'emploi de ce combustible minéral une nouvelle voie de prospérité et d'avenir pour cette industrie: l'Angleterre, la France, la Belgique possédant la houille l'emploient à la fabrication de la fonte et du fer: nous ne possédons que des lignites, employons-les, à défaut de houille, à la même fabrication.

Tel est le but de ce Mémoire et d'autres du même auteur auxquels il fait suite, précédemment présentés à cette Académie Royale des Sciences et dont elle a ordonné l'impression par extrait dans ses Volumes annuels;

parmi ces Mémoires il y a celui de 1856 se référant aux fours à réchauffer triplés et septuplés pour la fabrication du fer et des rails, et que j'ai proposés pour obtenir une diminution dans la consommation du combustible par cette fabrication et rendre plus facile l'emploi des lignites en en diminuant la dépense.

L'emploi de nos lignites par notre industrie du fer doit donc être étudié et examiné en substitution à la houille, employée par l'industrie du fer anglaise, française et belge.

L'emploi en substitution d'un combustible à un autre, par une industrie quelconque, surtout par celle du fer, doit reposer sur la condition formelle que le combustible substituant satisfasse aux conditions de fabrication et de production du combustible substitué, et en prenant pour base de cette condition la quantité en poids à consommer de ce dernier dans des conditions déterminées de fabrication et de production, on doit déterminer la quantité en poids du premier à consommer dans ces mêmes conditions, et conséquemment déterminer la valeur utile calorifique effective de ces deux combustibles afin de pouvoir, en les comparant entre eux dans cet élément basique, en déduire la quantité en poids et les conditions de l'emploi du combustible substituant.

Partant de cette base, l'auteur du Mémoire, après avoir déduit des compositions théoriques de la houille anglaise généralement consommée en Piémont et des lignites de Cadibona, de Nocetto et de Gonnesa, les deux premiers appartenant au dépôt dans les Apennins et le dernier de la Sardaigne, les pouvoirs calorifiques de ces combustibles, il déduit d'après ces données les quantités en poids de chacun des trois lignites à substituer à une quantité en poids donnée du premier dans un foyer quelconque de l'industrie du fer.

Il fait ensuite remarquer que :

« Les tentatives qui ont été faites pour arriver à l'emploi de ces lignites en substitution à la houille anglaise, partant des pouvoirs calorifiques théoriques ainsi formulés, pour ces quatre combustibles, n'ont jamais confirmé ces inductions de la théorie, et que sans examiner les causes de cette anomalie entre la théorie et les faits pratiques on en a déduit la conséquence que nos lignites ne peuvent être employés par l'industrie du fer (en l'étendant à tous autres foyers et même aux locomotives des chemins de fer), et cette opinion ainsi formulée fait repousser nos lignites par cette industrie.

» Que les quantités de chaleur développées par la combustion des combustibles, au moyen desquelles on exprime les pouvoirs calorifiques de ces derniers, sont proportionnelles aux quantités des élémens combustibles utiles, producteurs de cette chaleur, se rencontrant dans le composé, abstraction faite de toute autre circonstance et des élémens et des substances dans le composé et de la combustion,

» Ne saurait plus être admise comme suffisamment exacte, ni même comme assez approximative, pour formuler les rapports des pouvoirs calorifiques et diriger les applications pratiques, et tous les jours ces dernières viennent nous démontrer l'inexactitude, ou si l'on veut mieux, l'insuffisance de ce principe, quand, en le prenant rigoureusement pour règle, on veut en déduire les conditions de l'emploi d'un combustible ou de la substitution d'un combustible à un autre dans les foyers de l'industrie du fer, et dans ces applications pratiques au lieu de remonter au principe qui les règle on accuse les combustibles.

» Il faudrait donc, pour pouvoir donner une solution à la question ci-dessus posée pour l'emploi des lignites en substitution aux houilles, il faudrait, disons-nous, connaître les quantités de chaleur qui sont effectivement produites par la combustion de ces combustibles minéraux en nature dans les foyers de l'industrie du fer ».

Faisant une distinction dans l'expression *quantité de chaleur* l'auteur la sépare en trois espèces :

1.° *Chaleur théorique.* – Il définit ainsi la quantité de chaleur qui serait produite par la combustion effective et complète des proportions totales des élémens combustibles utiles producteurs (carbone et hydrogène en excès), données par les compositions élémentaires théoriques des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, combustion effective et complète posée par la théorie comme base de l'expression, pouvoir calorifique.

2.° *Chaleur effective ou vraie.* – La quantité de chaleur qui est effectivement produite par la combustion des proportions des élémens combustibles utiles qui sont effectivement et complètement brûlées, soit de la quantité partielle en poids de ces combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, qui est effectivement et complètement brûlée dans ces foyers, tandis que par la *chaleur théorique* on entend la combustion effective et complète de toute la quantité en poids du combustible porté dans ces foyers.

3.° *Chaleur utile.* – La quantité de chaleur qui par la combustion

de ces combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, est effectivement transmise au profit de l'opération métallurgique à effectuer.

La recherche de la quantité de chaleur effective ou vraie est le but spécial du Mémoire dont il est ici question, l'auteur se réservant de traiter dans un Mémoire subséquent et distinct de la Recherche de la quantité de chaleur utile, se limitant dans ces deux Mémoires aux fours à réchauffer pour la fabrication et le travail du fer en général, et comprenant dans ce dernier la fabrication des rails pour les chemins de fer.

Par cette recherche sur la quantité de chaleur effective ou vraie, produite par la combustion des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, sur la grille des fours à réchauffer, l'auteur a voulu fournir à la pratique de l'industrie du fer une marche à suivre pour l'emploi de ces combustibles, soit directement, soit en substitution les uns des autres, et éviter dans les applications pratiques les erreurs qui sont inévitables en suivant les principes et les bases posés par la théorie qui est adoptée et suivie tous les jours pour formuler la valeur calorifique utile de ces combustibles et en déduire les conditions de leur emploi, en se posant pour condition première de généraliser pour tout combustible minéral en nature, houille ou lignite, les résultats de cette Recherche de la quantité de chaleur effective ou vraie sans s'arrêter à un combustible quelconque de ces deux espèces.

Il fait ensuite une application des calculs et des résultats génériques ainsi déduits aux trois combustibles, à la houille anglaise appartenant à la 1.ère catégorie de la division des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, adoptée par l'auteur de ce Mémoire, et aux lignites de Gonnesa en Sardaigne appartenant à la 2.ème catégorie de la même division, et de Nocetto appartenant à la 3.ème catégorie de cette dernière, pour démontrer et trouver la confirmation des inductions déduites génériquement.

Cette application n'est donc qu'une question secondaire du Mémoire dont il est ici question, et de laquelle il est inutile de s'occuper dans cet extrait.

Avant d'entrer en matière l'auteur donne les définitions de quelques expressions desquelles il se sert dans le cours du Mémoire pour en préciser le sens et le but, et il serait trop long de les rapporter toutes ici; toutefois il ne sera pas hors de propos de donner la division de ces combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, en trois catégories,

adoptée par l'auteur, et les motifs sur lesquels il se fonde à cet égard.

« Dans l'acte de la combustion des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, on remarque la production de deux phénomènes distincts, différemment caractérisés, séparant en quelque sorte cet acte en deux phases reliées entre elles par une succession immédiate.

» 1.° Combustion à production d'une flamme longue, rougeâtre ou jaunâtre-brun, fuligineuse, plus ou moins colorée, avec une fumée plus ou moins dense, plus ou moins noirâtre, résultant de matières faisant partie du composé de ces combustibles minéraux en nature, à propriétés spéciales, se séparant du composé par la décomposition de ce dernier sous l'action du calorique et brûlant à l'état gazeux.

» 2.° Combustion du résidu à l'état solide de la combustion précédente, se produisant par incandescence sans flamme ni fumée: c'est le complètement de la combustion de ces combustibles minéraux en nature, houilles et lignites.

» La production de ces deux phénomènes de la combustion de ces combustibles minéraux en nature varie dans ses proportions dans le même rapport des proportions des élémens producteurs dans le composé: ces derniers peuvent donc exprimer les premiers.

» Par la première combustion, soit par la combustion des matières à production de flamme et de fumée, les matières à combustion par incandescence, soit le résidu à l'état solide de la première combustion, pendant que cette dernière s'opère et par les effets que cette combustion produit sur le résidu à l'état solide, ce dernier:

» 1.° Acquiert un volume plus grand que celui du combustible à l'état cru, si ce dernier est à augmentation dans les volumes, soit à coke boursouflé.

» 2.° Conserve le volume du combustible à l'état cru, si ce dernier est à conservation dans les volumes, soit à coke fritté.

» 3.° Diminue de volume, soit son volume est moindre que celui du combustible à l'état cru, si ce dernier est à diminution dans les volumes, soit à coke pulvérulent.

» C'est en vertu de ces deux phénomènes de la combustion et des effets du premier sur le résidu à l'état solide de la première combustion que l'auteur sépare les combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, en trois catégories:

» 1.ère Catégorie - Combustibles à augmentation dans les volumes - houilles;

» 2.ème Catégorie – Combustibles à conservation dans les volumes – houilles et lignites ;

» 3.ème Catégorie - Combustibles à diminution dans les volumes - houilles et lignites ».

Ces définitions sont suivies de quelques remarques sur la composition effective de ces combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, pour leur emploi dans les foyers de l'industrie du fer, constatant que tous les combustibles minéraux en nature à leur état d'emploi dans ces foyers renferment deux substances desquelles la théorie ne tient aucun compte dans les compositions théoriques, mais que les applications pratiques ne peuvent écarter, ces deux substances se trouvant en présence avec les autres élémens dans les foyers.

1.° L'eau hygroscopique, soit interposée à son état normal qui, d'après l'auteur, a deux origines :

La première dans le dépôt même de ces combustibles dans la croûte du globe, qu'ils renferment au moment de leur extraction et dont la proportion diminue par leur exposition à l'air : on remarque qu'en général la proportion de cette eau interposée à son état normal dans le composé est plus grande dans les lignites que dans les houilles.

La seconde dans la propriété dont jouissent tous les combustibles minéraux en nature et qui se continue pour leurs charbons, d'absorber l'humidité atmosphérique avec une plus ou moins grande énergie. La proportion d'eau ainsi absorbée, abstraction faite de toute autre circonstance, varie en raison des moyens employés pour leur conservation : on remarque qu'elle augmente en raison inverse des volumes des fragmens des combustibles.

La propriété d'absorption de l'humidité atmosphérique, ajoute l'auteur, est plus énergique dans les combustibles à plus grande proportion d'eau interposée dans leurs dépôts dans la croûte du globe : conséquemment cette propriété d'absorption serait en général plus énergique dans les lignites que dans les houilles.

2.° Le soufre constituant les pyrites ou le sulfure de fer.

» La théorie adoptée et suivie tous les jours, dit l'auteur, pour formuler la valeur calorifique utile d'un combustible quelconque, repose sur deux conditions formelles explicites :

» 1.° La combustion effective et complète formelle de la quantité totale des élémens combustibles utiles se rencontrant dans le composé du

combustible et donnés par les compositions de ces derniers, soit sur la combustion effective et complète de toute la quantité en poids du combustible porté dans les foyers;

» 2.° Le plus grand effet utile de la combustion du combustible, ce plus grand effet utile exigeant pour se produire le plus grand volume d'air qui puisse être consommé par cette combustion ».

S'arrêtant en premier lieu à la première condition théorique, l'auteur fait remarquer que les faits pratiques de tous les jours, et pour toute espèce de fours et foyers de l'industrie du fer, démontrent formellement que cette combustion effective et complète de toute la quantité en poids du combustible porté dans ces fours et foyers et surtout sur la grille des fours à réverbère n'a jamais eu et ne saurait avoir lieu, cette combustion complète ne pouvant s'effectuer effectivement que sur une partie de cette quantité totale en poids du combustible porté sur la grille de ces derniers fours par suite des circonstances qui se développent pendant et par la combustion et qui dépendent soit de la nature ou espèce et de la constitution du combustible, soit du fonctionnement de ces fours, soit des conditions mêmes d'établissement et de fonctionnement de ces mêmes fours.

La différence entre la quantité totale en poids du combustible porté sur la grille des fours à réverbère et la quantité en poids du combustible qui est effectivement et complètement brûlé sur cette grille et sous le rapport des effets de la combustion et du fonctionnement de cette dernière, se partage en trois parties distinctes, à consommation différente :

1.° Combustible non brûlé, tombant de la grille à l'état cru, désigné par la pratique sous le nom de *menu;*

2.° Combustible incomplètement brûlé, tombant également de la grille, désigné par la pratique sous le nom de *coke menu ou escarbilles;*

3.° Combustible incomplètement brûlé également, mais réduit à l'état de parcelles très-fines sous l'action du courant d'air alimentant la combustion et entraîné à cet état dans le courant des produits de la combustion, dans lequel sa combustion, pour les fours à réchauffer et pour les fours à réverbère de la 2.ème fusion de la fonte, ne peut, ou du moins ne doit pas avoir lieu par défaut d'oxygène, mais qui peut et doit avoir lieu, au moins partiellement dans d'autres fours à réverbère en raison des conditions de fonctionnement de ces derniers.

Constatant ces faits pratiques de tous les jours, l'auteur du Mémoire en déduit que, si la quantité partielle en poids de combustible non brûlé

tombant de la grille à l'état cru, ne développe aucune quantité de chaleur, perdant seulement les substances vaporisables incombustibles:

Les deux autres quantités partielles en poids de combustible incomplètement brûlé, savoir: coke menu ou escarbilles; charbon en parcelles très-fines, développent la quantité de chaleur qui peut être produite par la combustion des substances volatiles combustibles qui les constituent, se séparant du composé par sa décomposition sous l'action du calorique.

La quantité de chaleur ainsi produite par la combustion incomplète de ces deux quantités partielles du combustible porté sur la grille de ces fours s'ajoute conséquemment à la quantité de chaleur qui est produite par la quantité en poids de combustible qui est effectivement et complètement brûlé sur cette grille dans tous ses élémens combustibles utiles.

« Mais en même temps, dit l'auteur, que la pratique a dû constater ces faits, elle a dû reconnaître aussi que ces quantités partielles constituant la quantité totale en poids du combustible porté sur la grille de ces fours, savoir:

» Combustible effectivement et complètement brûlé dans tous ses élémens combustibles;

» Combustible incomplètement brûlé ou charbon à l'état de parcelles très-fines;

» Combustible incomplètement brûlé ou charbon à l'état de coke menu ou escarbilles;

» Combustible non brûlé à l'état cru ou menu;

doivent varier et varient en effet dans leurs proportions en raison des conditions de constitution, soit de la consistance du combustible porté sur la grille de ces fours et des effets de la combustion des substances volatiles combustibles sur le résidu à l'état solide de cette dernière, abstraction faite de toute autre circonstance dépendante des dispositions de la grille et des conditions, soit constantes, soit accidentelles de la combustion et du fonctionnement des fours qui peuvent en faire varier les proportions ».

Relativement à la consistance du combustible l'auteur du Mémoire fait remarquer:

« Que la quantité partielle en poids du combustible qui est effectivement et complètement brûlé diminue avec la consistance du combustible en même temps que les autres quantités partielles augmentent: conséquemment la première est d'autant moindre et les dernières sont d'autant plus

grandes que le combustible est moins résistant ou plus friable: conséquemment encore la quantité de chaleur effectivement produite par la combustion d'un combustible minéral en nature, houille ou lignite, sur la grille d'un four à réverbère est en raison inverse de sa friabilité, toute autre circonstance égale.

» Les effets de la combustion des substances volatiles combustibles, ajoute l'auteur, sur le résidu à l'état solide de cette même combustion qualifié dans le Mémoire par carbone solide à l'état de charbon, *effets qui ont motivé de la part de l'auteur la division en trois catégories des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites*, doivent faire comprendre les variations qui ont lieu et doivent en effet avoir lieu sur les quantités partielles en poids de la quantité totale en poids du combustible porté sur la grille de ces fours à combustion différente, comme ils doivent faire comprendre les conditions de faire varier les vides à laisser entrer les barreaux de la grille en raison des catégories des combustibles ci-dessus indiqués, afin de rester dans les limites *minima* des proportions du combustible non brûlé, du combustible incomplètement brûlé, tombant de la grille par le chargement, par le nettoyage et même par le fonctionnement de cette dernière ».

La recherche des quantités partielles de combustible ci-dessus indiquées à combustion différente sur la grille des fours à réchauffer pour la fabrication du fer et des rails a donc dû être une étude spéciale de l'auteur du Mémoire, qui, partant de l'opinion que s'agissant de faits et de résultats pratiques à établir et à déduire, les expériences spéciales entraînent le plus souvent à des erreurs qu'on cherche inutilement à expliquer, et qu'on se place plus près du vrai en s'en tenant aux faits pratiques mêmes pour en suivre toutes les conditions, toutes les phases, tous les effets, a adopté le système d'observations nombreuses sur la conduite et sur le fonctionnement des fours à réchauffer entre les mains de l'ouvrier, dans différentes usines anglaises, françaises surtout, et résumant les élémens nombreux que ces observations lui ont fournis, il en a déduit les bases suivantes que des expériences postérieures faites autant que possible dans les mêmes conditions des usines, ont confirmées, pour l'évaluation en moyenne générale des proportions de ces quantités partielles en poids de combustible à combustion différente sur la grille des fours à réchauffer :

	COMBUSTIBLES		
	de la 1.ère catégorie	de la 2.ème catégorie	de la 3.ème catégorie
« Menu tombant de la grille à l'état cru, soit non brûlé; quantité dont la combustion n'a lieu sur aucun des élémens combustibles qui la constituent, ne perdant que les substances vaporisables incombustibles	0,035 x	0,045 x	0,060 x
» Coke menu ou escarbilles; quantité en poids de combustible tombant de la grille incomplètement brûlé, soit réduit à l'état de charbon par la combustion des substances volatiles combustibles qui la constituent	0,040 x	0,045 x	0,055 x
» Charbon en parcelles très-fines entraîné dans le courant des produits de la combustion; quantité en poids de combustible dans les mêmes conditions du précédent par la combustion des substances volatiles combustibles	0,065 x	0,075 x	0,090 x
	0,025 x	0,030 x	0,055 x
» Totaux	0,100 x	0,120 x	0,150 x

» x représentant ou exprimant la quantité totale en poids du combustible porté sur la grille des fours à réchauffer par opération, par heure, ou par tout autre espace de temps pris pour terme de comparaison, soit pour une quantité quelconque en poids de combustible également pris pour terme de comparaison.

» Ainsi d'après ces données et en moyenne générale pour les combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, les faits pratiques, les observations nombreuses sur ces derniers dans les usines et les expériences faites dans les mêmes conditions de ces faits pratiques, nous démontrent que la combustion effective et complète du combustible porté sur la grille des fours à réchauffer à opérations métallurgiques de l'industrie du fer ne s'effectue que sur les proportions suivantes des deux élémens combustibles constituant ces combustibles minéraux en nature, carbone solide à l'état de charbon et matières volatiles combustibles :

» 1.ère catégorie des combustibles :

» Carbone solide à l'état de charbon :

» Les 0,90 de la proportion totale constituant la quantité en poids x du combustible.

» Matières volatiles combustibles :

» Les 0, 965 de la proportion totale constituant la quantité en poids x du combustible.

» 2.ème catégorie des combustibles :

» Carbone solide à l'état de charbon :

» Les 0, 88 de la proportion totale constituant la quantité en poids x du combustible.

» Les 0, 955 de la proportion totale constituant la quantité en poids x du combustible.

» 3.ème catégorie des combustibles :

» Carbone solide à l'état de charbon :

» Les 0, 85 de la proportion totale constituant la quantité en poids x du combustible.

» Matières volatiles combustibles :

» Les 0, 94 de la proportion totale constituant la quantité en poids x du combustible.

Il faut donc déduire de ces faits pratiques que :

» Pour déterminer d'une manière approximative assez rigoureuse pour les applications pratiques la quantité de chaleur qui peut être produite par la combustion des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, sur la grille des fours à réchauffer, il faut la déduire des proportions des élémens combustibles utiles dont la combustion a lieu et s'opère effectivement et complètement sur cette grille et non des proportions totales de ces mêmes élémens combustibles utiles constituant le composé de ces combustibles minéraux en nature dans la quantité en poids du combustible porté sur la grille de ces fours, proportions totales données par les compositions soit théoriques, soit complètes, et il faut conséquemment déterminer les proportions de ces élémens combustibles utiles qui sont effectivement et complètement brûlés.

» La valeur de ces proportions des élémens combustibles ne peut être déterminée que par le concours des compositions techniques et élémentaires de ces combustibles, ce qui au reste est démontré par les considérations qui suivent sur ces deux compositions et sur celle générique de ces combustibles minéraux en nature, houilles et lignites.

» La composition technique d'un combustible minéral en nature se déduit de l'analyse par la litharge.

» Par la décomposition d'un combustible minéral en nature par la

litharge on détermine les proportions du carbone solide à l'état de charbon et des matières volatiles, combustibles et incombustibles, qui constituent le composé de ce combustible minéral en nature : ces dernières sans distinction dans leur nature ou espèce, ni dans la nature ou espèce et proportions des élémens qui dans les combustibles donnent lieu à leur production : déterminant ensuite la valeur utile de ces matières volatiles combustibles en l'exprimant par leur équivalent en carbone, on l'ajoute au carbone solide à l'état de charbon : cette quantité totale de carbone ainsi déterminée et exprimée, représente la quantité totale des élémens combustibles utiles qui se rencontrent dans le composé de ces combustibles et concourent à constituer ces derniers, et qui par leur combustion effective et complète produiraient la quantité totale de chaleur qui serait produite par leur combustion ; et cette quantité totale de chaleur exprimée en calories représente le pouvoir calorifique du combustible.

» La composition élémentaire d'un combustible minéral en nature se déduit de l'analyse chimique en procédant par la décomposition de ce dernier par une combustion conditionnelle.

» Par cette décomposition chimique du combustible, ainsi effectuée, on détermine les proportions de tous les élémens constituant le composé de ce combustible, en les séparant par nature ou espèce, au moyen desquels on détermine, également exprimée en calories, la quantité totale de chaleur qui serait produite par la combustion effective et complète des proportions totales des élémens combustibles utiles dans le composé, représentant par cette expression, comme par l'analyse par la litharge, le pouvoir calorifique théorique du combustible.

» Il s'ensuit conséquemment et nécessairement que la quantité de chaleur qui serait produite par la combustion de ce combustible minéral en nature, soit le pouvoir calorifique théorique de ce dernier, serait égale par ces deux moyens d'induction.

» Les compositions élémentaires et techniques d'un combustible minéral en nature ont donc entre elles des corrélations telles et suffisantes à pouvoir se contrôler et s'expliquer l'une par l'autre, surtout pour les applications pratiques de l'industrie du fer : ce sera donc par leur concours que l'on pourra étudier et s'expliquer les phénomènes et les effets qui se produisent par la combustion des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, et qui caractérisent leur combustion. Par le concours de ces deux compositions on pourra déduire les élémens combustibles et leurs proportions

qui par leur combustion donnent lieu à la production de ces phénomènes et effets, et en même temps la quantité de chaleur qui est produite par chacun de ces élémens, conséquemment la quantité totale de chaleur qui est effectivement produite par la combustion de ces combustibles ».

Retournant sur les deux phénomènes, différemment caractérisés, qui se produisent par la combustion des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, combustion à production de flamme et de fumée, combustion se produisant par incandescence, l'auteur fait remarquer que nécessairement et conséquemment il y a dans le composé de ces combustibles minéraux en nature deux élémens à composition et à combinaison spéciales et distinctes producteurs de ces deux phénomènes : que l'élément producteur de la dernière, qui complète la combustion de ces combustibles, est le carbone solide à l'état de charbon, dont la proportion ou quantité totale dans le composé de ces derniers est donnée assez exactement pour les applications pratiques par l'analyse, soit la décomposition du combustible par la litharge, et que l'élément producteur de la combustion à production de flamme et de fumée est fourni par des matières indépendantes du carbone solide à l'état de charbon, faisant partie du composé de ces combustibles désignés dans la composition technique sous le nom de matières volatiles, dont la valeur utile calorifique dans ses proportions dans le composé, exprimée en équivalent en carbone, est déduite également dans la composition technique. Ces matières volatiles comprenant l'hydrogène dans la proportion qu'il est effectivement brûlé par la combustion de ces combustibles minéraux en nature, soit de l'hydrogène en excès désigné ou qualifié par l'auteur d'hydrogène actif attendu son intervention dans la quantité de chaleur qui serait produite par cette combustion, tandis qu'il qualifie d'hydrogène passif l'hydrogène qui se produit en même temps que l'oxygène par la décomposition de ces combustibles minéraux en nature par leur combustion, se combinent à l'état naissant avec le dernier gaz au même état, faisant remarquer, que si la combinaison de ces deux gaz dans ces deux circonstances et conditions différentes donne toujours pour produit la vapeur d'eau, cette combinaison est différemment caractérisée; car, tandis que par la combinaison de l'hydrogène en excès ou actif avec l'oxygène du courant d'air alimentant la combustion de ces combustibles, il y a production du phénomène de la combustion et dégagement de chaleur, la combinaison de ces deux gaz à l'état naissant se produit et s'effectue sans phénomène aucun qui la caractérise, et sans dégagement de chaleur.

« L'analyse, soit la décomposition chimique par la litharge, dit l'auteur, détermine la quantité totale des élémens combustibles, qui par leur combustion produisent flamme et fumée, élémens désignés génériquement dans la composition technique, déduite de cette analyse par la litharge, par matières volatiles combustibles desquelles on exprime la valeur utile calorifique par un équivalent en carbone ; mais cette quantité totale des élémens est déterminée sans aucune distinction dans la nature et dans les proportions des élémens, qui par leur combustion donnent lieu à la production de ces deux phénomènes flamme et fumée.

» La combustion de l'hydrogène se caractérise par le phénomène de la production d'une flamme courte, claire, presque transparente et peu éclairante.

» La production d'une flamme jaunâtre et rougeâtre-brun, plus ou moins longue, précédée et accompagnée d'une fumée plus ou moins noirâtre, plus ou moins dense, ces deux productions en raison de la nature ou espèce et des proportions de leurs élémens producteurs ayant lieu avec la combustion de l'hydrogène en excès ou actif, est donc due à des matières à composition et à combinaison spéciales et indépendantes des autres élémens combustibles dans le composé.

» Les produits de la combustion des matières volatiles combustibles dans le composé des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, combustion à production de flamme et de fumée, sont la vapeur d'eau et l'acide carbonique.

» La première, ou la vapeur d'eau, est le produit de la combustion de l'hydrogène, soit de la combinaison de ce dernier gaz avec l'oxygène.

» Le dernier, duquel par l'analyse chimique, par la décomposition du combustible, par une combustion conditionnelle on déduit le carbone basique qui le constitue, le comprenant dans le carbone total déduit de cette analyse et donné par la composition élémentaire, le déduisant également de l'analyse chimique par la litharge, en le comprenant dans l'équivalent en carbone des matières volatiles déduites de cette analyse, le dernier, disons-nous, est donc le produit de la combustion de ces matières ou substances à production de flamme et de fumée : cette combustion se produisant simultanément avec celle de l'hydrogène en excès ou actif.

» Ce sont donc des matières carbonées, soit à base de carbone à composition spéciale.

» Les proportions en volume de cette flamme et de cette fumée dans le courant des produits de la combustion de ces combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, seront, toute autre circonstance égale de leur production, d'autant plus grandes que leurs élémens producteurs seront en plus grandes proportions dans le composé : elles sont dans le même rapport de ces dernières dans ce composé.

» L'intensité de la flamme, sa couleur même et la densité de la fumée seront d'autant plus grandes que leurs élémens producteurs seront en plus grandes proportions dans le composé de ces matières carbonées : elles sont donc dans le même rapport de ces élémens producteurs dans ce composé.

» Les actions de cette flamme et de cette fumée sur la température de la combustion des combustibles, sur la quantité de chaleur utile, sur la température des fours, sur les actions, directe et indirecte, du calorique dans les opérations métallurgiques à effectuer dans ces fours, sur ces mêmes opérations métallurgiques, sont également dans le même rapport des élémens producteurs de cette flamme et de cette fumée dans le composé de ces combustibles, et de l'intensité de la flamme et de la densité de la fumée, toute autre circonstance égale ».

Par la composition élémentaire d'un combustible minéral en nature, dit l'auteur, on connaît la quantité totale de l'hydrogène constituant ce combustible. Il en est de même pour l'oxygène dans le composé du combustible.

Cette quantité totale de cet hydrogène se partage en passif et en actif ou en excès.

La proportion du premier ou hydrogène passif, se déduit de la proportion totale de l'oxygène, ces deux gaz, dans les circonstances de la combustion des combustibles minéraux en nature, se combinant entre eux à l'état naissant dans des conditions et dans des proportions déterminées et constantes, qui sont encore celles de la combinaison de l'hydrogène à l'état libre avec l'oxygène de l'air atmosphérique.

La proportion du dernier, ou hydrogène actif, sera conséquemment la différence entre l'hydrogène total constituant le combustible minéral en nature et l'hydrogène passif, dont la proportion se déduit ainsi qu'il est dit ci-dessus.

L'auteur du Mémoire fait remarquer ici que quelles que soient les circonstances sous l'action desquelles par la combustion des combustibles

minéraux en nature, il se produit la combinaison de l'hydrogène et de l'oxygène, le produit de cette combinaison est toujours la vapeur d'eau : conséquemment la proportion ou quantité en poids et en volume de vapeur d'eau qui se rencontre dans le courant des produits de la combustion des combustibles minéraux en nature est formulée par la proportion totale de l'hydrogène constituant ces derniers; à cette quantité totale de vapeur d'eau par l'hydrogène on doit ajouter celle qui peut être produite par l'eau interposée ou hygroscopique.

Afin de rendre plus exactement les idées et les pensées de l'auteur dans le reste du Mémoire, nous nous en tiendrons au texte du Mémoire même.

« Reste donc à déterminer la proportion, dans le composé de ces combustibles minéraux en nature, de ces matières ou substances à production d'une flamme jaunâtre ou rougeâtre-brun et de fumée, et donnant de l'acide carbonique par leur combustion, conséquemment de matières à base de carbone indépendantes du carbone solide producteur du charbon dans le composé de ces combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, matières qui sont volatilisées par la décomposition de ces derniers par la litharge.

» La décomposition, soit l'analyse chimique, au moyen de laquelle on formule la composition d'un combustible quelconque, détermine la quantité totale d'acide carbonique qui pourrait être produite par la combustion effective et complète de ce combustible quels que soient les élémens ou substances qui produisent ce gaz dans le composé de ce dernier : on en déduit conséquemment la quantité totale du carbone basique dans le composé, quels que soient l'état, le mode et les conditions de combinaison du carbone dans ce composé.

» Cette quantité totale de carbone basique dans le composé de ces combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, ainsi déterminée et donnée par la composition élémentaire comprend donc :

» 1.° Le carbone solide producteur du charbon, à combinaison spéciale du carbone dans le composé et dont la proportion est donnée par la composition technique déduite de la décomposition du combustible par la litharge;

» 2.° Le carbone basique constituant les matières carbonées se rencontrant et faisant partie du composé de ces combustibles minéraux en nature, à production d'acide carbonique par leur combustion, cette dernière

se caractérisant par la production d'une flamme jaunâtre ou rougeâtre-brun accompagnée de fumée.

» La proportion dans le composé des combustibles minéraux en nature de ces matières carbonées à production de flamme et de fumée, en l'exprimant en équivalent en carbone, sera par conséquent la différence entre le carbone total donné par la composition élémentaire et le carbone solide producteur du charbon donné par la composition technique.

» Cette expression en équivalent en carbone de ces matières carbonées pourra être employée, pour représenter soit simultanément la proportion totale de flamme et de fumée, soit séparément chacun de ces produits, quoique simultanés, de la combustion de ces combustibles minéraux en nature, dans le cas de comparaison entre différens combustibles entre eux.

» Il pourrait se faire que cette évaluation de ces matières carbonées ne fût pas rigoureusement exacte, que le carbone solide producteur du charbon donné par la composition technique, ou la décomposition du combustible par la litharge, ne fût pas l'expression exacte du carbone solide, soit par une volatilisation partielle de ce dernier, soit comme pouvant encore renfermer de ces matières carbonées.

» Mais si cette évaluation des matières carbonées n'était pas rigoureusement exacte sous le rapport scientifique, elle peut être suffisamment approximative dans les applications pratiques pour les conditions à en déduire pour ces dernières, surtout dans le cas de comparaison entre différens combustibles.

» Afin de rendre plus facile à saisir ce système d'évaluation pour la solution de la question posée, nous en ferons l'application à un combustible quelconque minéral en nature, houille ou lignite, en la généralisant afin de la rendre applicable à tout combustible quel qu'il soit appartenant à ces deux espèces.

» Posons en premier lieu les élémens suivans :

» Les proportions d'hydrogène et d'oxygène qui se combinent entre eux, soit à l'état naissant, soit par la combustion du premier, et donnant la vapeur d'eau produite de cette combinaison, sont :

hydrogène . .	11. 13	représenté par	m ;
oxygène	88. 87	»	n .

» Conséquemment pour 1. 00 en poids d'hydrogène,
oxygène 7. 98475 en poids.

» Ces proportions ou quantités sont constantes.

» L'unité-volume de vapeur d'eau se compose de

1. 00 unité-volume d'hydrogène. . .	poids correspondant	0. 0896
0. 50 unité-volume d'oxygène	» »	0. 7146
	Poids de l'unité-volume de vapeur d'eau. . .	0. 8042

» Ainsi 1. 00 en poids d'hydrogène en se combinant avec l'oxygène en production de vapeur d'eau consomme 7. 98475 en poids de ce dernier gaz et produit 8. 98475 en poids de vapeur d'eau, correspondant à un volume de $\frac{8.\ 93475}{0.\ 8042} = 11.\ 174$ unité-volume ».

Pouvoirs calorifiques du carbone et de l'hydrogène.

Il est constant qu'il y a divergence parmi les hommes de la science qui se sont spécialement occupés de cette question, sur les pouvoirs calorifiques de ces deux élémens producteurs de la chaleur dans les combustibles en général, et sans rechercher les causes de cette divergence, qui peuvent résulter du mode suivi pour déterminer ces pouvoirs calorifiques, des conditions qui ont dirigé les expériences, des élémens mêmes de production des deux gaz, l'auteur du Mémoire s'est arrêté à une moyenne entre les évaluations données par Dulong et par Péclet pour déduire l'équivalent en carbone de l'hydrogène sous le rapport des pouvoirs caloriques.

Cette moyenne d'après l'auteur est:

Carbone	7485	calories
Hydrogène	29191	»

» Cette dernière expression étant 3. 90 fois la première.

L'équivalent en carbone de l'hydrogène sera conséquemment 3. 90 c.

Cette évaluation de l'équivalent en carbone de l'hydrogène adopté par l'auteur du Mémoire, d'après les bases qu'il s'est posées, est confirmée par les évaluations que différents expérimentateurs en donnent.

Pour le carbone :

D'après	Dulong.	7170	calories	moyenne 7717 calories.
»	Despretz.	7816	»	
»	Grassi.	7714	»	
»	Favre et Sibermann.	8086	»	
»	Péclet.	7800	»	

Pour l'hydrogène ;

D'après	Dulong	34742 calories	moyenne 30174 calories.
»	Lavoisin et Clément	23640 »	
»	Grassi	34660 »	
»	Favre et Sibermann	34186 »	
»	Péclet	23642 »	

L'expression de l'hydrogène est 3. 91 fois celle du carbone.

L'équivalent en carbone de l'hydrogène sera conséquemment 3. 91 c.; équivalent qui, à un centième près, est égal à celui donné par l'auteur du Mémoire.

Conséquemment il y aurait une différence à peine sensible dans les inductions que l'auteur déduit en faisant usage de l'expression 3. 90 c.

L'auteur du Mémoire a adopté comme constante dans tous ses calculs la moyenne 7485 : il aurait pu tout aussi bien adopter comme moyenne l'expression 7717, sans que par l'emploi de cette dernière ses inductions génériques fussent modifiées ou changées.

Constatons donc que, dès l'instant que l'auteur s'était posé la condition de généraliser les inductions des recherches sur les quantités de chaleur, il aurait pu représenter par une lettre générique la quantité de chaleur produite par la combustion du carbone, au lieu de faire usage d'une expression numérique conséquemment restreinte ; et comme il résulte des évaluations du pouvoir calorifique de l'hydrogène donnée par des hommes, qui forment autorité dans la science, que ce pouvoir calorifique est 3. 90 fois celui du carbone, l'équivalent en carbone de l'hydrogène sous ce rapport aurait été exprimé par 3. 90 u, u exprimant génériquement le pouvoir calorifique du carbone.

Ces observations étant posées, reprenons textuellement le Mémoire.

» *Composition élémentaire, théorique, générique d'un combustible minéral en nature, houille ou lignite.*

Carbone	C	X poids total = 100. 00.
Hydrogène	H	
Oxygène	O	
Azote	A	
Cendres	T	

» La proportion de l'eau interposée étant représentée par e.

» La proportion du soufre des pyrites étant représentée par s.

Nous déduirons conséquemment la composition élémentaire générique complète, soit comprenant ces deux dernières substances non comprises dans la composition élémentaire, théorique, générique du même combustible minéral en nature, au moyen de la formule $\frac{z[X-(e=5)]}{X}$, dans laquelle on exprime par

z, tous les élémens successivement et séparément des compositions théoriques;

e, la proportion de l'eau interposée;

s, la proportion du soufre des pyrites;

X, le poids total du combustible $=100.00$.

» *Composition élémentaire, générique, complète du même combustible minéral.*

Carbone	c	x poids total $=X=100.00$;
Hydrogène	h	
Oxygène	o	
Azote	a	
Eau interposée	e	
Soufre des pyrites	s	
Cendres	t	

dans laquelle, en la rapportant à la composition élémentaire, théorique, générique, nous avons:

$c=\frac{C[100-(e+s)]}{100}$, de laquelle nous déduirons $C=\frac{100c}{100-(e+s)}$,

$h=\frac{H[100-(e+s)]}{100}$ » » » $H=\frac{100h}{100-(e+s)}$,

$o=\frac{O[100-(e+s)]}{100}$ » » » $O=\frac{100o}{100-(e+s)}$,

$a=\frac{A[100-(e+s)]}{100}$ » » » $A=\frac{100a}{100-(e+s)}$,

$t=\frac{T[100-(e+s)]}{100}$ » » » $T=\frac{100t}{100-(e+s)}$.

De la composition élémentaire, générique, complète nous déduirons:

Hydrogène passif... $h'=\frac{mo}{n}$,

Hydrogène actif.... $h''=h-h'=h-\frac{mo}{n}=\frac{nh-mo}{n}$.

» L'équivalent en carbone de l'hydrogène passif sera conséquemment $3.90\frac{mo}{n}$.

L'équivalent en carbone de l'hydrogène actif sera conséquemment $3.90\left(\frac{nh-mo}{n}\right)$.

Retenant que n est une quantité constante 88.87, l'équivalent en carbone de l'hydrogène passif pourra être exprimé par

$$h' = 3.90\frac{mo}{n} = \frac{3.90}{0.8887}mo = 4.3895\,mo\ ;$$

l'équivalent en carbone de l'hydrogène actif pourra être exprimé par

$$h'' = 3.90\left(\frac{nh-mo}{n}\right) = \frac{3.90}{0.8887} = 4.3895\,(nh-mo)\ .$$

» *Composition technique, théorique, générique du même combustible minéral.*

Carbone solide à l'état de charbon	D	X poids total $= 100.00$.
Matières volatiles	V	
Cendres	T	

» Équivalent en carbone des matières volatiles P.

» Au moyen de la formule précédemment donnée $\frac{z[X-(e+5)]}{X}$, nous déduirons la

» *Composition technique, générique complète du même combustible minéral.*

Carbone solide à l'état de charbon	d	x poids total $= X = 100.00$.
Matières volatiles	v	
Eau interposée	e	
Soufre des pyrites	s	
Cendres	t	

» Équivalent en carbone des matières volatiles p.

» Dans laquelle, en la rapportant à la composition technique, théorique, générique, nous avons :

$d = \frac{D[100-(e+s)]}{100}$, de laquelle nous déduirons $D = \frac{100d}{100-(e+s)}$,

$v = \frac{V[100-(e+s)]}{100}$ » » » $V = \frac{100v}{100-(e+s)}$,

$p = \frac{P[100-(e+s)]}{100}$ » » » $P = \frac{100p}{100-(e+s)}$.

» Nous référant pour les calculs qui suivent aux compositions, élémentaire et technique, complètes de ce combustible minéral en nature, sauf à rapporter les résultats que ces compositions fournissent aux compositions théoriques, élémentaire et technique, correspondantes pour en déduire les résultats correspondans de ces dernières, nous remarquerons:

» Par la composition élémentaire complète, le carbone total est exprimé par c;

» Par la composition technique complète, le carbone solide à l'état de charbon est exprimé par d;

» Conséquemment $c-d=c'$ exprimant la différence entre ces deux quantités représentera en équivalent en carbone la proportion totale, dans le composé de ce combustible minéral en nature, des matières carbonées à production de flamme et de fumée par leur combustion.

» En rapportant ces valeurs ainsi exprimées dans la composition technique complète pour en déduire la proportion totale exprimée en équivalent en carbone des matières volatiles combustibles dans les deux élémens qui les constituent, on aura:

» Carbone solide à l'état de charbon d:

» Matières volatiles combustibles en équivalent en carbone

Élémens constituans { Hydrogène actif ..... $h''=4.3895(nh-mo)$:
Matières carbonées ... c';

» Total en équivalent en carbone $p=4.3895(nh-mo)+c'$.

La quantité ou proportion totale de carbone qui, d'après la composition technique complète, constitue les élémens combustibles utiles producteurs de la chaleur théorique par la combustion de ce combustible minéral en nature, au moyen de laquelle on exprime le pouvoir calorifique de ce dernier, sera exprimée par

$$d+p=d+4.3895(nh-mo)+c'.$$

» La quantité totale de chaleur théorique qui, d'après la composition technique complète, serait produite par la combustion de ce combustible minéral en nature, se déduit de cette expression en la multipliant par le nombre 7485 (*a*), exprimant moyennement le nombre de calories produites

(*a*) L'auteur du Mémoire, au lieu d'employer ce nombre explicite de 7485 calories, aurait pu employer, ainsi qu'on l'a fait remarquer ci-dessus dans cet Extrait, le nombre générique u.

par la combustion de l'unité-poids de carbone, soit le pouvoir calorifique de ce dernier.

» On aura pour la quantité totale de chaleur théorique produite l'expression

$$7485[d+4.3895(nh-mo)+c'] .$$

» Par la composition élémentaire complète de ce combustible minéral en nature, la quantité ou proportion totale des éléments combustibles utiles producteurs de la chaleur théorique, si l'on formule ainsi le pouvoir calorifique théorique, est exprimée par

$$c+h''=c+4.3895(nh-mo) .$$

» La quantité totale de chaleur théorique qui, d'après la composition élémentaire complète serait produite par la combustion de ce combustible minéral en nature, se déduit en multipliant le premier terme de cette expression par 7485, pouvoir calorifique moyen de l'unité-poids de l'oxygène, et le second terme par 29191 pouvoir calorifique moyen de l'unité-poids de l'hydrogène.

» On aura ainsi pour la quantité de chaleur théorique produite l'expression :

$$7485c+29191h''=7485c+29191.\left(\frac{nh-mo}{u}\right) .$$

» Retenant encore ici que n est une quantité constante 88. 87.

» Substituant, cette expression deviendra :

$$7485c+\frac{29191}{0.8887}.(nh-mo)=7485c+32858(nh-mo) .$$

» Nous avons fait remarquer précédemment que la quantité totale de chaleur théorique déduite de la composition technique d'un combustible minéral en nature doit être égale à la quantité totale de chaleur théorique déduite de la composition élémentaire du même combustible.

» On aura ainsi :

$$7485[d+4.3895(nh-mo)+c']=7485c+32858(nh-mo) ;$$

on pourra donc se servir de celle de ces deux expressions de la quantité de chaleur théorique qui pourra mieux, soit plus explicitement, déterminer et expliquer la quantité de chaleur théorique qui serait produite par la combustion d'un combustible minéral en nature, houille ou lignite, sur la grille d'un four à réchauffer.

» Cette évaluation de la quantité totale de la chaleur théorique, conséquemment du pouvoir calorifique théorique d'un combustible minéral en nature, est déduite du principe général posé par la théorie, s'appliquant à tous les combustibles en général, quels qu'ils soient, sans aucune distinction entre eux et sans qu'on tienne compte d'aucune circonstance qui pourrait en faire varier la valeur, soit dépendante des foyers et fours, soit résultante des effets de la combustion des substances, à production de flamme et de fumée, c'est-à-dire de la condition formelle théorique de la combustion effective et complète de toute la quantité en poids de combustible porté dans ces fours et foyers.

Résumant on aura:

D'après la théorie.

» *Pour tous les combustibles et pour tous foyers indistinctement.*

» 1.° Élémens producteurs de la chaleur:

Carbone solide à l'état de charbon . . . . . d ;

Équivalent en carbone des matières volatiles . . . . p ;

Total en carbone . . . . . $d+p$:

$$p = 4.3895\,(nh - mo) + c' .$$

» Substituant cette valeur de p, on aura:

Total en carbone . . . . . $d + 4.3895\,(nh - mo) + c'$.

» 2.° Quantité totale de chaleur théorique exprimée en calories:

$$7485\,[d + 4.3895\,(nh - mo) + c'] \ (^b).$$

» Retenant les circonstances et les effets de la combustion des matières volatiles à production de flamme et de fumée sur le résidu solide de cette même combustion;

» Appliquant les inductions précédemment déduites, et recourant à la composition technique ci-dessus formulée en corrélation avec la composition élémentaire, nous déduirons les quantités totales de chaleur, qui seraient effectivement produites par la combustion des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, sur la grille des fours à réchauffer en raison des catégories auxquelles ces combustibles appartiennent.

(*b*) Retenant les observations faites précédemment qui ont motivé la note (*a*), on peut exprimer cette quantité totale de chaleur par l'expression générique $u\,[d + 4.3895\,(nh - mo) + c']$.

» *D'après les faits pratiques sur la grille des fours à réchauffer.*

» 1.ère Catégorie – Combustibles à augmentation dans les volumes – *houilles.*

» 1.° Élémens producteurs de la chaleur :

Carbone solide à l'état de charbon ..... 0. 90 d ;

Équivalent en carbone des matières volatiles..... 0. 965 p ;

Total en carbone ..... 0. 90 d + 0. 965 p ;

$$p = 4.3895\,(nh - mo) + c' .$$

» Substituant cette valeur de p, on aura :

Total en carbone 0. 90 d + 0. 965 [4. 3895 $(nh - mo) + c'$].

» Soit réduisant :

Total en carbone 0. 90 d + 4. 2359 $(nh - mo)$ + 0. 965 c' .

» 2.° Quantité totale de chaleur effective en calories :

$$7485\,[0.90\,d + 4.2359\,(nh - mo) + 0.965\,c'] .$$

» Soit plus génériquement :

$$u\,[0.90\,d + 4.2359\,(nh - mo) + 0.965\,c'] .$$

» 2.me Catégorie – Combustibles à conservation dans les volumes – *houilles et lignites.*

» 1.° Élémens producteurs de la chaleur :

Carbone solide à l'état de charbon ..... 0. 88 d ;

Équivalent en carbone des matières volatiles .... 0. 955 p ;

Total en carbone ..... 0. 88 d + 0. 955 p ;

$$p = 4.3895\,(nh - mo) + c' .$$

» Substituant cette valeur de p, on aura :

Total en carbone 0. 88 d + 0. 955 [4. 3895 $(nh - mo) + c'$].

» Soit réduisant :

Total en carbone 0. 88 d + 4, 1320 $(nh - mo)$ + 0. 955 c' .

» 2.° Quantité totale de chaleur effective exprimée en calories :

$$7485\,[0.88\,d + 4.1820\,(nh - mo) + 0.955\,c'] .$$

» Soit plus génériquement :

$$u\,[0.88\,d + 4.1820\,(nh - mo) + 0.955\,c'] .$$

» 3.me Catégorie – Combustibles à diminution dans les volumes – *houilles et lignites.*

» 1.° Élémens producteurs de la chaleur :

Carbone solide à l'état de charbon ..... $0.85p$:

Équivalent en carbone des matières volatiles..... $0.94p$:

Totale en carbone ..... $0.85d + 0.94p$;

$$p + 4.3895(nh - mo) + c' .$$

» Substituant cette valeur de p, on aura :

Total en carbone $0.85d + 0.94[4.3895(nh - mo) + c]$;

» Soit réduisant :

Total en carbone $0.85d + 4.1261(nh - mo) + 0.94c'$

» 2.° Quantité totale de chaleur effective exprimée en calories :

$$7485[0.85d + 4.1261(nh - mo) + 0.94c'] .$$

» Soit plus génériquement :

$$u[0.85d + 5.1261(nh + mo) + 0.94c'] .$$

» Résumant :

» *Expressions génériques de la quantité totale de chaleur.*

» 1.° D'après la théorie.

» Pour tous les combustibles et pour tous foyers indistinctement :

$$u[d + 4.3895(nh - mo) + c'] .$$

» 2.° D'après les faits pratiques.

» Pour les combustibles minéraux en nature, houilles et lignites :

1.ère	Catégorie des combustibles		$u[0.90d + 4.2359(uh - mo) + 0.965c']$;
2.me	id.	id.	$u[0.88d + 4.1820(nh - mo) + 0.955c']$;
3.me	id.	id.	$u[0.85h + 4.1261(uh - mo) + 0.94\ c']$;

» Ces expressions de la quantité totale de chaleur, soit :

» La première, d'après la théorie générale adoptée pour un combustible quelconque et pour tout foyer sans distinction ;

» Les trois dernières, d'après les faits pratiques sur la grille des fours à réchauffer et pour les houilles et les lignites en nature, sont

déduites des compositions élémentaires et techniques complètes, soit comprenant tous les élémens et substances de toute nature qui peuvent se rencontrer dans le composé de ces combustibles en nature, conséquemment considérant les mêmes combustibles à leur état d'emploi dans les foyers de l'industrie du fer, composition qui n'est point celle qui est prise pour base par la théorie générale pour déterminer la quantité totale de la chaleur, théorie générale reposant sur les compositions théoriques déduites des analyses chimiques-théoriques dans des conditions différentes de composition des combustibles, ainsi que nous l'avons fait remarquer précédemment.

» L'expression théorique, soit la première expression, repose en outre sur la condition ou principe théorique de la combustion effective et complète de toute la quantité en poids du combustible porté dans les fours et foyers; elle est constante pour tous les combustibles minéraux en nature, sans aucune distinction dans leur espèce, dans leurs qualités, et dans leurs propriétés, ainsi que pour toute espèce de feux, de fours, de foyers, quels qu'ils soient, sans aucune distinction dans leur destination spéciale, et dans le fonctionnement dans ces derniers pour les opérations métallurgiques à effectuer.

» Les expressions des quantités totales de chaleur déduites des faits pratiques, soit résultant des compositions vraies des combustibles et de la quantité en poids de combustible qui est effectivement brûlé sur la grille des fours à réchauffer, variable en raison des catégories des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, démontrent que pour les applications pratiques de l'industrie du fer on ne saurait s'en référer au principe général sur lequel repose la théorie, soit sur la combustion effective et complète de toute la quantité en poids de combustible porté sur la grille des fours à réchauffer, et que, si cette induction est déjà formelle pour ces derniers fours, dont le fonctionnement est uniforme, régulier dans ses actions et au plus grand effet utile de la combustion du combustible, on doit constater et reconnaître qu'on saurait encore moins s'en rapporter au principe général de la théorie pour toute autre espèce de fours à réverbère de la fabrication du fer, dont le fonctionnement ne serait point dans les conditions de régularité, d'uniformité et d'effet utile des fours à réchauffer, conditions qui peuvent avoir pour effet d'augmenter les proportions du combustible non brûlé et du combustible incomplètement brûlé.

» De ces faits pratiques de tous les jours formulant les quantités totales de chaleur qui sont effectivement produites par la combustion de ces combustibles minéraux en nature sur la grille des fours à réchauffer pour la fabrication et le travail du fer, en raison des catégories auxquelles ces combustibles appartiennent, nous déduirons une première induction, savoir :

» A poids égaux de ces combustibles minéraux en nature des trois catégories, houilles et lignites, abstraction faite de la nature ou espèce des élémens combustibles producteurs de la chaleur dans leurs proportions générales et relatives dans le composé de ces combustibles, la quantité totale de chaleur effectivement produite par leur combustion sur la grille des fours à réchauffer n'est et ne saurait être dans le rapport des proportions des élémens combustibles producteurs, ni même être égale pour les trois catégories des combustibles quand même les quantités totales des élémens combustibles producteurs de la chaleur seraient égales et même identiques dans leurs composans : elle serait la plus grande pour les combustibles de la première catégorie, moindre cependant que celle résultant du principe général théorique : diminuant pour les combustibles des deux autres catégories : étant la moindre pour les combustibles de la 3.ème catégorie.

» Les quantités de chaleur effectivement produites par la combustion des combustibles des trois catégories sur la grille des fours à réchauffer, même dans le cas d'égalité et d'identité des élémens combustibles producteurs de la chaleur, seraient donc entre elles dans le rapport direct de la consistance de ces combustibles sur la grille de ces fours, soit en raison inverse de la friabilité des combustibles ;

» Ainsi, dans le cas de substitution, à la condition d'égalité des effets utiles calorifiques sur la grille des fours à réchauffer, des combustibles des deux dernières catégories à un combustible de la première, indépendamment de toute autre circonstance et condition qui pourrait encore imposer une augmentation dans la quantité en poids des premières, à porter sur la grille des fours à réchauffer pour la production d'une égale quantité de chaleur, et s'arrêtant seulement à la proportion de cette quantité totale en poids de combustible porté sur la grille qui est effectivement et complètement brûlé, la quantité en poids des combustibles des deux dernières catégories à porter sur la grille de ces fours en substitution à la première, doit être augmentée dans le rapport de la différence

en poids de ces combustibles, dont la combustion a lieu, et s'opère effectivement et complètement sur cette grille.

» Remarquons maintenant:

» Dans ces expressions de la quantité totale de la chaleur produite d'après les faits pratiques sur la grille des fours à réchauffer, non-seulement les proportions ou quantités d, h, o, c', exprimant les proportions des élémens constituant le composé des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, sont variables en raison des catégories de ces derniers et souvent même pour des combustibles de la même catégorie, mais encore leurs coefficiens numériques varient en raison de ces mêmes catégories.

» Tandis que dans l'expression théorique de la quantité de chaleur produite, les coefficiens numériques de ces mêmes quantités d, h, o, c', sont constants pour tous les combustibles minéraux en nature, sans distinction dans leurs espèces, ni des catégories, déduites des effets de la combustion des matières volatiles sur le résidu solide de cette même combustion, effets qui doivent exercer et exercent réellement une très-grande influence sur le mode de combustion de ces combustibles, conséquemment sur les conditions de cette combustion, soit plus explicitement, ces coefficiens numériques sont constans quelle que soit la friabilité de ces combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, friabilité qui exerce une très-grande influence sur le mode de combustion de ces derniers, conséquemment sur les conditions de cette combustion sur la grille des fours à réverbère et sur la quantité totale de chaleur, qui peut être produite par cette combustion.

» Nous avons déduit précédemment, que l'hydrogène actif ou en excès peut être representé par un équivalent en carbone, dont l'expression théorique générique serait $4.3895\ (nh - mo)$.

» Dans cette expression les quantités m et n sont constantes: mais, tandis que d'après la théorie le coefficient numérique de cette expression générique de l'équivalent en carbone de l'hydrogène actif est constant pour tout combustible minéral et pour toute espèce de fours et foyers, quels qu'ils soient sans distinction, d'après les faits pratiques, et pour les fours à réchauffer, ce coefficient numérique devient:

4. 2359	pour les combustibles	de la	1.ère	catégorie
4. 1820	»	»	2.me	»
4. 1261	»	»	3.me	»

soit qu'il diminue dans sa valeur, non-seulement pour les combustibles des deux dernières catégories, mais pour ceux même de la première.

» Les quantités h et o, représentant les proportions d'hydrogène et d'oxygène qui peuvent être produites par la décomposition de ces combustibles minéraux en nature par leur combustion, sont variables.

» Cette variabilité est plus grande pour l'oxygène que pour l'hydrogène, car, tandis que pour les houilles et pour les lignites, ne comprenant ici et dans ces derniers que les espèces et les variétés qui peuvent être employées sur la grille des fours à réverbère, excluant même, ainsi qu'on l'a fait remarquer précédemment, les lignites passant au bitume, on peut admettre qu'en moyenne générale

» La proportion de l'hydrogène a pour limites :

Minima 4. 25
Maxima ..... 5. 80.

» La proportion de l'oxygène a pour limites :

Maxima 38. 00 pour les combustibles de la 3.me catégorie.
Minima 4. 40 » » 1.ère »

» Cette augmentation dans la proportion de l'oxygène a lieu principalement aux dépens du carbone, c'est-à-dire l'on remarque qu'en moyenne générale la proportion de o augmentant, celle de c de la composition élémentaire et celle de d de la composition technique diminuent dans le même rapport à une petite différence près qui se porte sur l'hydrogène h.

» A mesure que o augmente dans sa valeur dans le composé, celle de u des matières volatiles de la composition technique augmente également.

» A mesure que o augmente dans sa valeur dans le composé, celle de h' hydrogène passif augmente également, même dans le cas d'une diminution dans la valeur de h hydrogène total; celle de h'' hydrogène actif ou en excès diminue; la valeur de h' sera d'autant plus grande, et celle de h'' sera d'autant moindre que la valeur de o sera plus grande dans le composé; la valeur de h' sera dans un rapport direct, et la valeur de h'' sera en raison inverse avec la valeur de o dans le composé.

» Il s'ensuit conséquemment que, par l'augmentation dans la valeur de o il y a une diminution non-seulement dans la valeur de d de la composition technique, mais encore dans celle de p de la même composition, représentant en équivalent en carbone les matières volatiles combustibles, quoique la proportion de o des matières volatiles génériques soit augmentée.

» La quantité p se compose de la quantité M $(nh - mo)$, équivalent en carbone de l'hydrogène actif ou en excès h'' (M coefficient numérique, qui a pour valeur 4. 3895 : 4. 2359 : 4. 1320 : 4. 1261), et de la quantité c' équivalent en carbone des matières carbonées à production de flamme et de fumée par leur combustion.

» Il s'ensuit conséquemment qu'en moyenne générale la quantité h' diminuant, la quantité c' augmente proportionnellement, même dans le cas d'une diminution dans la quantité p.

» La proportion des terres ou cendres t varie dans les combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, et si l'on ne peut établir moyennement et proportionnellement les limites approximatives, *maxima* et *minima*, dans lesquelles se renferme cette proportion t, et pour ces combustibles, on remarque cependant qu'en général, et considérant la division faite de ces derniers en trois catégories, la valeur de t est plus grande dans les combustibles des deux dernières catégories, que dans ceux de la première, et que relativement aux deux dernières catégories la valeur de t est plus grande dans la troisième que dans la seconde catégorie.

» Nous pourrons donc en déduire, que la proportion des terres productrices des cendres t doit exercer une action directe sur la consistance des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, et sur les effets de la combustion des matières volatiles sur le résidu solide de cette combustion, c'est-à-dire, que la friabilité de ces combustibles, soit la consistance ou la résistance de ces derniers sur la grille des fours à réverbère, diminue avec l'augmentation dans la proportion des terres ou cendres t, abstraction faite de toute autre circonstance soit dépendante, soit indépendante de la nature et des proportions des élémens producteurs de ces cendres, qui pourraient augmenter ou diminuer cette action.

» Nous avons fait remarquer précédemment, que la proportion ou quantité o est la plus grande dans les combustibles de la troisième catégorie.

» L'augmentation dans la quantité o, dans le cas d'égalité dans la quantité t, exerce donc une action directe sur la consistance des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, sur la grille des fours à réverbère, et en général les combustibles minéraux en nature de ces deux espèces à plus grande proportion d'oxygène dans leur composé sont moins consistans, ou en d'autres termes, la friabilité de ces combustibles sur la grille de ces fours augmente avec la proportion d'oxygène dans leur composé.

» La proportion ou quantité des matières volatiles v varie dans les combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, en raison des catégories auxquelles ils appartiennent; elle est la plus grande dans les combustibles de la 3.me catégorie; diminue dans ceux de la 2.me et de la 1.ère, et dans cette dernière la quantité v est la moindre.

» La proportion ou quantité c' des matières carbonées dans le composé des mêmes combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, varie en raison des catégories de ces derniers: elle est la plus grande dans les combustibles de la 1.ère catégorie, diminuant dans ceux des 2.me et 3.me catégories: dans cette dernière elle est la moindre: cette proportion des matières carbonées varie en raison inverse de celle de l'oxygène dans le composé.

» On pourrait donc en général, pour les houilles et pour les lignites, présumer de la friabilité de ces combustibles sur la grille des fours à réverbère par la proportion o, soit de l'oxygène, donnée par la composition élémentaire, soit de la proportion des matières volatiles v donnée par la composition technique, soit encore par l'équivalent en carbone des matières carbonées c' déduit de ces deux compositions, comme on pourrait inversement arguer en quelque sorte de la friabilité, soit de la consistance d'une houille ou d'une lignite sur la grille des fours à réverbère, soit du rapport de l'oxygène qu'il peut dégager par sa combustion, soit de celui des matières volatiles, soit enfin de l'équivalent en carbone des matières carbonées, conséquemment du rapport dans la proportion du carbone, toute autre circonstance égale.

» Représentant par f la proportion de flamme développée par la combustion de l'hydrogène actif;

» D'après les inductions et les observations précédemment déduites et développées, nous en inférerons:

» Que, si la proportion de l'hydrogène total h, ne présente pas de très-grandes différences dans le composé des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, des trois catégories, ces combustibles étant à poids égaux, la proportion de l'hydrogène passif h' sera d'autant plus grande et la proportion de l'hydrogène actif h'', et conséquemment le volume de la flamme f seront d'autant moindres que la proportion de o sera plus grande dans le composé.

» Conséquemment les actions et les effets de ces quantités partielles de l'hydrogène passif h', de l'hydrogène actif h'', soit de la flamme f sur

la température de la combustion, sur les actions du calorique, sur les opérations métallurgiques à effectuer dans ces fours, seront pour le premier en raison directe, et pour les derniers en raison inverse avec la quantité ou proportion o dans le composé.

» Conséquemment encore la quantité de chaleur due à la combustion de l'hydrogène, se produisant et se dégageant par la décomposition, par la combustion des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, sera d'autant plus grande que la proportion d'oxygène sera moindre dans le composé : elle est donc dans un rapport inverse avec cette proportion o de l'oxygène produit par la décomposition de ces combustibles par leur combustion, conséquemment dans le composé de ces combustibles.

» Représentant par g la proportion totale de flamme et de fumée;
» » » g' la proportion séparée de la flamme;
» » » g'' la proportion séparée de la fumée
se produisant par la combustion des matières carbonées faisant partie du composé des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, matières à combustion spéciale du carbone solide producteur du charbon ou carbone solide à l'état de charbon donné par la composition technique, et nous en référant encore à cet égard aux inductions et aux observations précédemment déduites et développées, nous en inférerons que :

» Les quantités g, g', g'' seront d'autant plus grandes que, rapportées à la quantité o dans le composé et à la quantité ou proportion du carbone solide producteur du charbon d, la quantité o sera plus grande dans le composé de ces combustibles, toute autre circonstance égale.

» La proportion g' de la flamme, considérée séparément, sera d'autant plus colorée et plus dense, et la proportion g'' sera d'autant plus noirâtre et plus dense, que la proportion h'' dans le composé du combustible sera moindre, toute autre circonstance égale.

» Conséquemment les actions et les effets utiles et nuisibles, exercées les premières et produits les derniers par la flamme et par la fumée, dues à la combustion de ces matières carbonées, sur la température de la combustion, sur les actions, directe et indirecte, du calorique, dans les fours à réverbère, sur les opérations métallurgiques à effectuer dans ces derniers, seront les premières ou utiles en raison inverse, et les derniers ou nuisibles en raison directe avec la quantité o dans le composé de ces combustibles et de la quantité h'' dans le même composé.

» Nous avons fait remarquer précédemment que le principe général

posé par la théorie pour formuler la quantité totale de chaleur qui peut être produite par la combustion des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, soit le pouvoir calorifique de ces mêmes combustibles, repose en même temps sur la combustion au plus grand effet utile des proportions totales de carbone et d'hydrogène en excès se rencontrant et constituant le composé du combustible, et ce plus grand effet utile de cette combustion exige pour condition première, absolue, l'arrivée au lieu de la combustion d'un volume d'air tel et suffisant à transformer le carbone total en acide carbonique, soit à produire la combustion effective et complète du carbone total en production d'acide carbonique et à fournir à la combustion de l'hydrogène.

» Mais, en même temps que l'on doit constater l'exigence de cette condition première, absolue, on doit constater aussi que parmi les conditions du fonctionnement des fours à réchauffer on doit remarquer, en première ligne également, celle d'éviter la production d'un élément oxydant dans le courant des produits de la combustion, production qui serait déterminée dans ce courant par l'oxygène du courant d'air arrivant au lieu de la combustion qui ne serait pas consommé par cette dernière, et si déjà par le fonctionnement de ces fours et par les circonstances de ce dernier cette production peut être déterminée quand le courant d'air alimentant la combustion est réglé dans les conditions voulues, elle serait inévitable et d'autant plus grande que le volume d'air arrivant au lieu de la combustion serait en excès sur celui qui est rigoureusement exigé pour la combustion au plus grand effet utile du combustible.

» Si la condition du volume d'air à faire arriver au lieu de la combustion sur la grille de ces fours doit être subordonnée à celle d'éviter un excès dans ce volume d'air, on doit en même temps éviter dans ce dernier un défaut qui aurait pour conséquence immédiate de diminuer l'effet utile de la combustion des combustibles, et si pour les fours à réchauffer il vaut mieux pécher par défaut que par excès, il faut cependant que le volume d'air à faire arriver au lieu de la combustion ne soit pas trop inférieur à celui qui est exigé pour la combustion au plus grand effet utile du combustible, soit que le défaut dans le volume d'air reste dans les limites à ne pas trop diminuer cet effet utile.

» A cet égard, si l'on tient compte du mode d'arrivée du courant d'air au lieu de la combustion sur la grille des fours à réverbère en général, de sa division déterminée par les barreaux de la grille, de son choc contre

ces derniers, on doit constater que le courant d'air éprouve ou subit des contractions qui diminuent son volume, qui dans un temps donné arrive effectivement au lieu de la combustion: en tenant compte de ces circonstances et de ces effets on restera dans les limites exigées en déterminant ce volume d'air d'après les proportions des élémens combustibles utiles dont la combustion se produit effectivement et complètement sur la grille de ces fours.

» Remarquons ici un fait de la combustion des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, duquel il nous importe de tenir compte pour constater et nous expliquer les conséquences d'un défaut dans le volume d'air arrivant au lieu de la combustion sur l'effet utile du combustible.

» La décomposition d'un combustible minéral en nature par sa combustion s'opère en premier lieu sur les substances vaporisables et gazéifiables, soit sur les matières volatiles ainsi désignées dans la composition technique, l'action décomposante du calorique étant plus énergique et plus rapide sur ces substances que sur celles à état normal solide dont la décomposition exige le concours de l'action désagrégeante qui ne s'exerce qu'après celle décomposante des matières ou substances vaporisables et gazéifiables. L'hydrogène fait partie de ces dernières substances et sa gazéification qui le sépare du composé précède conséquemment la vaporisation du carbone producteur du charbon, cette dernière exigeant une plus haute température que la gazéification de l'hydrogène combiné, dont le dégagement du composé précède la combustion du carbone combiné producteur du charbon, qui ne peut se produire qu'autant qu'il est vaporisé: les mêmes effets se produisent pour et sur les matières carbonées à production de flamme et de fumée par leur combustion, cette dernière se produisant pour ces matières carbonées en même temps que celle de l'hydrogène, ce gaz et pour la proportion dite active ou en excès étant combiné, suivant nous, avec ces mêmes matières carbonées; car ces matières sont un composé de carbone et d'hydrogène dans des conditions spéciales, et dont la combustion s'opère simultanément sur les deux élémens combustibles qui les constituent, et la proportion de ce même gaz que nous désignons par hydrogène passif constitue avec l'oxygène se rencontrant dans le composé de ces combustibles minéraux en nature une combinaison distincte dans des conditions telles et suffisantes à constituer de l'eau qui par ces motifs est à l'état de combinaison dans le composé. Il s'ensuivra conséquemment que le défaut dans le volume d'air fourni en arrivant au

lieu de la combustion réagira sur la combustion du carbone producteur du charbon, qui, par ces causes et dans ces circonstances, ne se produira pas au plus grand effet utile de la quantité totale de cet élément combustible, soit qu'il y aura une proportion de ce carbone total producteur du charbon dont la combustion aura lieu en production d'oxyde de carbone au lieu d'acide carbonique.

» Mais, si la combustion en production d'oxyde de carbone par défaut dans le volume d'air ne pouvait avoir lieu par la combustion des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, sur la grille des fours à réverbère par défaut dans les conditions voulues pour cette production, le défaut dans le volume d'air aurait pour conséquence immédiate d'augmenter les proportions du combustible non brûlé ou menu et du combustible incomplètement brûlé ou coke menu soit escarbilles, et conséquemment d'apporter une diminution dans la quantité totale de la chaleur qui serait produite.

» Retenant que,

» L'unité-poids de carbone pour sa combustion au plus grand effet utile, soit en production d'acide carbonique, exige un volume d'air de 8. 93 mètres cubes à o température et à $0^m,76$ de pression;

» L'unité-poids d'hydrogène exige pour sa combustion un volume d'air de 25. 73 mètres cubes dans les mêmes conditions de température et de pression.

» L'on peut traduire l'hydrogène en son équivalent en carbone;

» D'après les calculs précédemment dressés les proportions des élémens combustibles producteurs de la chaleur dans le foyer pour un combustible minéral en nature, houille ou lignite, duquel il a été donné les compositions, élémentaire et technique, génériques, complètes, applicables à tous les combustibles de ces deux espèces sans distinction entre eux, sont données par les expressions suivantes:

» D'après la théorie:

Pour tout foyer sans distinction..... $d + 4.3895(nh - mo) + c'$.

» D'après les faits pratiques,

» Pour les fours à réchauffer:

1.ère Catégorie des combustibles. $0.90\,d + 4.2359(nh - mo) + 0.965\,c'$;
2.me » » . $0.33\,d + 4.1820(nh - mo) + 0.955\,c'$;
3.me » » . $0.84\,d + 4.1261(nh - mo) + 0.94\,c'$.

» Nous en déduirons conséquemment que,

» Le volume d'air à fournir à la combustion, au plus grand effet utile de ces quantités d'élémens combustibles utiles producteurs de la chaleur dans le foyer, doit être

» D'après la théorie :

Pour tout foyer sans distinction..... $8.93\,[d + 4.3895\,(nh - mo) + c']$.

» D'après les faits pratiques,

» Pour les fours à réchauffer :

1.ère Catégorie des combustibles $8.93\,[0.90d + 4.2359(nh - mo) + 0.965c']$;

2.me » » $8.93\,[0.88d + 4.1820(nh - mo) + 0.955c']$;

3.me » » $8.93\,[0.85d + 4.1261(nh - mo) + 0.94\ c']$.

» Remarquons encore, en ce qui concerne le volume d'air à fournir à la combustion dans tout foyer quel qu'il soit, que la théorie établit, que ce volume d'air doit être calculé à 0 température et à $0^m,76$ de pression. La théorie, devant formuler une règle ou principe général, a dû partir d'une base fixe, uniforme pour tous les cas, applicable à toutes les localités, sans s'occuper des variations ou circonstances de la température atmosphérique de ces dernières, qui pour un même volume d'air peuvent faire varier son action combinante.

» Mais dans les applications pratiques ces circonstances de température atmosphérique ne peuvent être écartées, car, à volumes égaux d'air atmosphérique, la proportion en poids de l'oxygène constituant ce dernier varie avec la température possédée par l'air atmosphérique, et cette température a deux extrêmes résultant de l'été et de l'hiver. Il faut donc recourir à une moyenne entre ces deux températures extrêmes ; cette température moyenne de l'année, pour nos climats et pour les localités de nos usines en général, peut être admise de 20° centigrades.

» A cette température le volume d'air ci-dessus donné de 8.93 mètres cubes pour la combustion de l'unité-poids de carbone au plus grand effet utile devient $8.93\,(1 + 0.004 \times 20) = 8.93 + 0.71 = 9.64$.

» Le volume d'air à fournir dans les applications pratiques à la combustion de ces quantités totales des élémens combustibles utiles producteurs de la chaleur dans les foyers devra donc être :

» D'après la théorie,

Pour tout four et foyer ..... $9.64\,[d + 4.3895\,(nh - mo) + c']$

» Pour les fours à réchauffer :

1.ère Catégorie des combustibles $9.64[0.90d+4.2359(nh-mo)+0.965c']$;

2.me » » $6.64[0.88d+4.1820(nh-mo)+0.955c']$;

3.me » » $9.64[0.85d+4.1261(nh-mo)+0.94\ c']$.

» Comparant les trois dernières expressions du volume d'air exigé par les faits pratiques à la première du volume d'air théorique, soit sous le rapport de la température dans les applications pratiques, nous constaterons que :

» Le volume d'air qui serait déduit du principe général théorique et qui devrait être fourni au plus grand effet utile de la combustion d'une quantité en poids donnée x de combustible porté sur la grille des fours à réchauffer, excéderait celui qui serait effectivement et complètement consommé par cette quantité en poids x de combustible, et que le volume d'air qui devrait être effectivement fourni devrait être réglé en raison des trois catégories des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, ne pouvant et ne devant pas être celui de la théorie, ni être égal et constant pour les trois catégories.

» C'est-à-dire, qu'en s'en référant à la théorie pour le volume d'air à faire arriver au lieu de la combustion du combustible sur la grille des fours à réchauffer, on déterminerait la production d'un élément oxydant, conséquemment d'une action oxydante dans le courant des produits de la combustion.

» Conséquemment et pour les fours à réverbère en général :

» *L'aire totale des vides qu'on doit laisser entre les barreaux de la grille déterminant le volume d'air qui, dans un temps donné, arrive au lieu de la combustion, abstraction faite de la vitesse acquise par le courant des produits de la combustion en raison des dimensions et de la disposition de l'échappement et de la cheminée des ces fours et du fonctionnement de ces derniers, vitesse qui détermine celle, avec laquelle le courant d'air arrive au lieu de la combustion sur la grille, la considérant égale pour les trois catégories des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, déterminant, disons-nous, le volume d'air qui dans un temps donné arrive au lieu de la combustion, nous en déduirons que :*

» *L'aire totale des vides qu'on doit laisser entre les barreaux de la grille ne doit pas et ne saurait être déduite d'après la théorie, soit d'après l'expression du volume d'air constante pour tous les combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, sans aucune distinction entre eux,*

mais elle doit être déterminée et réglée d'après l'expression variable pour les trois catégories de ces combustibles formulée d'après les faits pratiques pour chaque catégorie.

» *Conséquemment, abstraction faite de toute autre circonstance et sous le rapport du volume d'air à fournir au plus grand effet utile de la combustion, les combustibles des trois catégories étant à poids égaux, la section de la grille ne saurait être égale pour leur emploi, mais elle devra résulter de l'aire totale des vides qu'on doit laisser entre les barreaux de la grille des fours à réchauffer exigée pour chaque catégorie, c'est-à-dire que les conditions d'établissement et de fonctionnement de la grille de ces fours ne sauraient être égales pour tous les combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, sans aucune distinction entre eux, ainsi que le formule la théorie comme principe général.*

» Les conséquences ci-dessus déduites de la comparaison entre les quantités totales :

» Des proportions des élémens combustibles utiles entre les quantités totales ;

» De cette même chaleur ;

» Du volume d'air à fournir au plus grand effet utile de la combustion sur la grille des fours à réchauffer ;

» Résultant des compositions complètes des combustibles portés sur la grille de ces fours, et des faits pratiques de la combustion sur cette même grille, ces conséquences, disons-nous, sont bien plus catégoriquement démontrées, en s'en référant aux compositions théoriques élémentaires et techniques, soit à la théorie générale adoptée et appliquée.

» En effet, rapportant les expressions en équivalent en carbone des élémens combustibles utiles producteurs de la chaleur dans le foyer, déduites des compositions complètes, aux expressions correspondantes, déduites des compositions théoriques, et retenant que les proportions ou quantités e et s, la première de l'eau interposée, la dernière du soufre des pyrites, comprises dans les compositions complètes, ne sont point comprises dans les compositions théoriques correspondantes, que par conséquent les proportions des élémens constituant ces dernières sont $\frac{100}{100-(e+s)}$ les proportions des élémens correspondans constituant les compositions complètes, soit plus explicitement :

» D'après les compositions théoriques précédemment données d'un

combustible minéral en nature quelconque, houille ou lignite, l'expression en équivalent en carbone des élémens combustibles utiles producteurs de la chaleur dans le foyer serait :

$$D+P=D+4.3895(nH-mo)+C'.$$

» Mais, d'après ce qui a été posé précédemment, savoir que :

$$D=\frac{100d}{100-(e+s)},\quad P=\frac{100p}{100-(e+s)},\quad H=\frac{100h}{100-(e+s)},$$

$$O=\frac{100o}{100-(e+s)},\quad C'=\frac{100c'}{100-(e+s)},$$

en substituant ces valeurs dans l'expression ci-dessus, cette expression deviendra :

$$(d+p).\frac{100}{100-(e+s)}=[d+4.3895(nh-mo)+c'].\left(\frac{100}{100-(e+s)}\right).$$

Retenant en même temps que dans les expressions ci-dessus déduites des faits pratiques nous avons :

$$4.2359(nh-mo)+0.965c'=0.965[4.3895(nh-mo)+c'];$$
$$4.1820(nh-mo)+0.955c'=0.955[4.3895(nh-mo)+c'];$$
$$4.1261(nh-mo)+0.\ 94c'=0.\ 94[4.3895(nh-mo)+c'].$$

» La quantité totale ou proportion totale des élémens combustibles utiles producteurs de la chaleur dans le foyer, en l'exprimant en équivalent en carbone, est représentée par les expressions suivantes :

$$\frac{100}{100-(e+s)}.d+\frac{100}{100-(e+s)}.[4.3895(nh-mo)+c']:$$
$$d+[4.3895(nh-mo)+c'];$$
$$0.90d+0.965[4.3895(nh-mo)+c'];$$
$$0.88d+0.955[4.3895(nh-mo)+c'];$$
$$0.85d+0.\ 94[4.3895(nh-mo)+c'];$$

» La première, d'après la théorie générale adoptée que nous appelons théorie abstraite, générique, incomplète, comme étant déduite des compositions théoriques, incomplètes dans les élémens et substances se rencontrant dans le composé des combustibles minéraux en nature.

» La deuxième, d'après la théorie générale complétée que nous appelons théorie abstraite, générique, complète, comme étant déduite des

compositions complètes comprenant tous les élémens et substances qui peuvent se rencontrer dans le composé de ces combustibles minéraux en nature.

» Ces deux premières expressions s'appliquant à tous les combustibles minéraux en nature de toute espèce et pour tous les fours et foyers, sans aucune distinction dans les premiers ni dans les derniers, ni entre les opérations métallurgiques à effectuer, sont conséquemment applicables aux fours à réchauffer pour la fabrication et le travail du fer en général, et reposent sur le principe général posé par la théorie de la combustion effective et complète de toute la quantité en poids de combustible porté dans ces fours et foyers.

» Les trois dernières expressions d'après les faits pratiques ou la théorie vraie pour les trois catégories des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, sur la grille des fours à réchauffer, sont déduites des compositions complètes de ces combustibles, et partant de la quantité en poids de combustible qui est effectivement et complètement brûlé sur la grille de ces fours.

» Les différences que l'on remarque dans la valeur de ces expressions, en équivalent en carbone de la quantité totale des élémens combustibles utiles producteurs de la chaleur dans le foyer, se répètent pour la quantité totale de cette chaleur et pour le volume d'air à fournir au plus grand effet utile de la combustion de ces élémens combustibles.

» Remarquons en ce qui concerne les expressions ci-dessus déduites de la quantité totale des élémens combustibles utiles producteurs de la chaleur dans le foyer, que :

» Les quantités d et $4.3895(nh-mo)$, sont constantes dans ces expressions ; mais leurs coefficiens numériques varient : pour les deux premières, en raison des bases ou principes de leur induction ; pour les trois dernières, non-seulement en raison des principes de leur induction, mais encore en raison des catégories des combustibles.

» Ainsi tandis que dans la 2.ème expression ces coefficiens numériques sont l'unité, pour la 1.ère expression ils sont plus grands que l'unité et ils sont moindres que l'unité dans les trois dernières expressions, diminuant en raison des catégories des combustibles.

» Les quantités totales de chaleur produite dans le foyer, en les déduisant des expressions ci-dessus données des quantités des élémens combustibles utiles producteurs de cette chaleur, seront donc exprimées ainsi qu'il suit :

$$7485.\left[\frac{100}{100-(e+s)}.d+\frac{100}{100-(e+s)}.[4.3895(nh-mo)+c']\right];$$

$$7485.\left[d+4.3895(nh-mo)+c'\right];$$

$$7485.\left[0.90\,d+0.965[4.3895(nh-mo)+c']\right];$$

$$7485.\left[0.88\,d+0.955[4.3895(nh-mo)+c']\right];$$

$$7485.\left[0.85\,d+0.94[4.3895(nh-mo)+c']\right].$$

» Soit plus génériquement sous le rapport de la base pouvoir calorifique de l'unité-poids de carbone, et se référant à la note *a* de cet extrait, en exprimant par U ce pouvoir calorifique :

$$U.\left[\frac{100}{100-(e+s)}.d+\frac{100}{100-(e+s)}.[4.3895(nh-mo)+c']\right]:$$

$$U.\left[d+4.3895(nh-mo)+c'\right];$$

$$U.\left[0.965[4.3895(nh-mo)+c']\right];$$

$$U.\left[0.955[4.3895(nh-mo)+c']\right];$$

$$U.\left[0.94[4.3895(nh-mo)+c']\right].$$

» Ces quantités totales de chaleur produites dans le foyer ne sont pas égales. La quantité totale de chaleur est la plus grande dans la première expression et diminue successivement dans les autres expressions : elle est la moindre expression dans la dernière : la diminution dans la quantité de chaleur est dans le même rapport que celle des coefficiens numériques des quantités des élémens combustibles utiles producteurs de cette chaleur.

» La dissidence qui existe entre ces expressions explique les anomalies que l'on remarque entre la théorie et les applications pratiques et peut justifier l'opposition qui est faite par les dernières à la première.

» Examinons maintenant ces expressions de la quantité totale de chaleur produite dans le foyer pour en déduire les conséquences qui sont formulées par ces mêmes expressions sur la quantité de chaleur totale effectivement produite dans le foyer.

» La première expression de cette chaleur repose sur deux conditions formelles :

» 1.° La composition exceptionnelle du combustible telle qu'elle est déduite des analyses chimiques théoriques qui ne déterminent que les proportions des principes élémentaires et les terres constituant tous les combustibles en général, faisant abstraction pour les combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, de l'eau interposée et du soufre des pyrites

que ces derniers peuvent renfermer à l'état de nature, conséquemment à l'état de leur emploi dans les foyers de l'industrie du fer.

» 2.° La combustion effective et complète de toute la quantité en poids de combustible porté sur la grille des fours à réverbère en général, comprenant les fours à réchauffer dans ces derniers.

» La première condition ne saurait être observée ou obtenue dans les applications pratiques de l'industrie du fer, car, la composition de ces combustibles minéraux en nature, soit à leur état d'emploi dans les foyers de cette industrie, n'est pas et ne saurait être celle qui est considérée et posée théoriquement, et cette différence dans la composition doit nécessairement faire varier pour un poids égal de combustible porté dans le foyer les proportions des élémens combustibles utiles producteurs de la chaleur.

» Cette dernière n'est donc pas et ne saurait être celle qui est formulée par la théorie.

» En ce qui concerne la dernière condition, les faits pratiques de tous les jours nous démontrent que cette combustion effective et complète de toute la quantité en poids de combustible porté sur la grille des fours à réchauffer n'a jamais lieu et ne saurait avoir lieu, et que la quantité en poids de combustible qui est effectivement et complètement brûlé sur cette grille n'est point celle sur laquelle repose la théorie, et varie même en raison des catégories des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, toute autre circonstance égale.

» Conséquemment encore sous ce rapport la quantité de la chaleur produite dans le foyer n'est et ne saurait être celle sur laquelle se fonde la théorie.

» Nous en déduirons conséquemment que :

» *La quantité totale de chaleur qui est effectivement produite sur la grille des fours à réchauffer par la combustion des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, n'est point et ne saurait être celle que la théorie déduit des compositions théoriques pour formuler le pouvoir calorifique de ces combustibles.*

» *Les applications pratiques de l'industrie du fer ne peuvent et ne sauraient d'après ces données théoriques formuler les conditions de l'emploi de ces combustibles comme étant incomplètes, et si déjà il y a erreur pour les applications pratiques à partir de ces données théoriques, en tant qu'il s'agit d'un seul combustible pour son emploi dans les*

foyers de l'industrie du fer, cette erreur serait bien plus grande à partir de ces mêmes données théoriques pour formuler les conditions de la substitution des combustibles de catégories différentes dans les mêmes foyers.

» 2.° La deuxième expression de la quantité totale de chaleur déduite des compositions complètes ou vraies des combustibles, soit comprenant tous les élémens et toutes les substances faisant partie du composé de ces combustibles à l'état de nature tels qu'ils sont employés, c'est-à-dire portés dans les foyers de l'industrie du fer, repose sur la condition formelle théorique de la combustion effective et complète de toute la quantité en poids de combustible porté dans les fours et foyers quels qu'ils soient.

» Or, ainsi que nous l'avons fait remarquer précédemment, cette combustion effective et complète de toute la quantité en poids de combustible porté dans les fours et foyers n'a jamais lieu dans les applications pratiques, conséquemment sur la grille des fours à réchauffer. Ainsi la quantité de chaleur effectivement produite dans ces fours et foyers n'est point et ne saurait être celle qui est donnée par cette expression que par ce fait j'appelle théorique.

» Nous en déduirons que :

» *On ne saurait dans les applications pratiques de l'emploi des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, sur la grille des fours à réchauffer, s'en référer à cette expression de la quantité totale de chaleur pour en déduire les conditions de l'emploi de ces combustibles, et nous répéterons ici que, s'il y a déjà erreur pour les applications pratiques à s'en référer à cette expression en tant qu'il s'agit d'un seul combustible, cette erreur serait bien plus grande si l'on voulait des données de cette expression formuler ou déduire les conditions de la substitution des combustibles de catégories différentes dans les mêmes foyers.*

» 3.° Les trois dernières expressions de la quantité totale de chaleur, spéciales pour les fours à réchauffer, reposent sur deux conditions formelles :

» Les compositions complètes ou vraies des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, soit comprenant tous les élémens et toutes les substances qui se rencontrent dans le composé de ces combustibles à cet état de nature ;

» La quantité en poids du combustible qui est effectivement et

complètement brûlé sur la grille des fours à réchauffer en raison des catégories de ces combustibles.

» Conséquemment :

» *On détermine par ces expressions se rapportant aux trois catégories des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, la quantité totale de chaleur qui est effectivement produite par la combustion de ces combustibles sur la grille des fours à réchauffer en raison de ces mêmes catégories.*

» Nous déduirons de cet examen des expressions de la quantité totale de la chaleur produite par la combustion de ces combustibles minéraux en nature, non-seulement sur la grille des fours à réchauffer, mais encore de tous les fours à réverbère en général que :

» *L'emploi des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, soit considéré isolément et séparément pour chaque combustible, soit en substitution des uns aux autres sur la grille des fours à réchauffer, et de tout autre four à réverbère, devant être réglé d'après la quantité de chaleur qu'ils peuvent effectivement produire par leur combustion sur cette grille, c'est aux faits pratiques qu'il faut recourir pour déduire cette quantité de chaleur effectivement produite, et non aux expressions de la quantité de chaleur, soit le pouvoir calorifique qui est formulé par la théorie abstraite générique incomplète, ou complète.*

» Résumant l'exposé ci-dessus sur les *recherches de la quantité de chaleur* qui peut être effectivement produite dans le foyer par la combustion des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, sur la grille des fours à réchauffer nous dirons que :

» *La quantité de chaleur effectivement produite n'est point et ne saurait être celle qui se déduit de la théorie adoptée et appliquée tous les jours pour formuler la valeur utile calorifique, soit le pouvoir calorifique de ces combustibles minéraux en nature.*

» Conséquemment que :

» *Les bases posées par la théorie pour formuler le pouvoir calorifique des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, soit considérés séparément, soit pour les comparer entre eux, et en déduire les conditions de leur emploi, soit séparément, soit en substitution des uns aux autres dans les foyers de l'industrie du fer, sont insuffisantes pour déduire les conditions des applications pratiques de cet emploi, de cette substitution comme reposant sur des données incomplètes.*

» *Réduisant sous la forme de formule les proportions des élémens combustibles utiles producteurs de la chaleur dans le foyer pour exprimer le pouvoir calorifique, soit la quantité totale de chaleur qui peut être produite par la combustion d'un combustible minéral en nature, houille ou lignite, sur la grille d'un four à réchauffer, ce ne serait pas à la formule théorique générique*

$$\frac{100}{100-(e+s)}\cdot d+\frac{100}{100-(e+s)}\cdot[4.3895(nh-mo)+c'],$$

applicable à tous les combustibles minéraux en nature et à tous les fours et foyers quels qu'ils soient, qu'il faudrait recourir pour déterminer et déduire la quantité totale de chaleur qui peut être effectivement produite, mais c'est aux formules génériques

$$0.90\,d+0.965\,[4,3895\,(nh-mo)+c'],$$
$$0.88\,d+0.955\,[4.3895\,(nh-mo)+c'],$$
$$0.85\,d+0.\ 94\,[4.3895\,(nh-mo)+c'],$$

déduites des faits pratiques sur la grille des fours à réchauffer formulant les proportions des élémens combustibles utiles, constituant ces combustibles minéraux en nature qui sont effectivement et complètement brûlés sur cette grille en moyenne générale pour les trois catégories de ces combustibles, dans lesquelles nous avons divisés ces derniers, afin de rendre ces formules applicables à tous les combustibles minéraux en nature, houilles et lignites.

» Reste la question de la dépense, question qui est toujours mise en avant par les opposans à l'emploi des lignites par l'industrie du fer, et qui n'est pas sans raison, soit pour le prix de revient de ces combustibles minéraux en nature en Piémont, soit pour la quantité en poids de ces mêmes combustibles qui d'après la théorie générale adoptée, designée dans ce Mémoire par théorie abstraite, générique, incomplète, doit être portée dans les foyers en substitution à la houille, et la quantité en poids déduite des faits pratiques sur la grille des fours à réchauffer pour la même substitution ».

Cette question n'a point échappé à l'auteur, et a motivé son Mémoire, présenté à cette Académie des Sciences, et imprimé en extrait dans son Volume de l'année 1858, ayant pour titre: *Systèmes à fours triplés et septuplés pour la fabrication du fer et des rails dans les fours à*

réchauffer avec l'emploi de la houille et des lignites de Nocetto, de Cadibona et de Gonnesa.

D'après ces systèmes de fours, proposés par l'auteur de ce Mémoire, desquels il a été donné la description détaillée, accompagnée des calculs relatifs à l'emploi de la houille et des trois lignites ci-dessus désignés, dans les Annales des mines de France, 5.e et 6.e livraisons, 1856, sous le titre de *Nouveaux fours à réverbère pour la fabrication du fer et des rails*, la consommation en combustible ne serait:

Par le système à fours triplés que les ..... o. 67;

Par le système à fours septuplés que les ..... o. 57,

de celle qui a lieu aujourd'hui par l'emploi des fours à réchauffer en usage.

C'est-à-dire que par cette économie dans la consommation de ces combustibles minéraux en nature, on peut complètement faire face au prix de revient d'aujourd'hui de ces derniers en Piémont, prix de revient qui sera bien certainement diminué, soit par la création des lignes de chemins de fer qui en diminueront les frais de transport, soit parce que la consommation qui sera faite de ce combustible par l'industrie du fer et par d'autres industries métallurgiques développera l'exploitation sur une grande échelle et sur plusieurs points de nos Apennins, exploitation qui aujourd'hui n'est qu'à son début étant découragée par l'opposition qui est faite systématiquement à l'emploi de nos lignites par les industries métallurgiques et par les chemins de fer ».

Il Presidente Barone Plana legge: *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles relatives au mouvement des Comètes, établies suivant l'hypothèse de la force répulsive définie par M. Faye, et suivant l'hypothèse d'un milieu résistant dans l'espace.*

Questo scritto, intieramente d'analisi matematica, tende a dimostrare che delle enunciate due ipotesi, quella del sig. Faye non è conforme ai risultamenti dell'osservazione per le due comete periodiche di 1205 e 2718 giorni, mentre l'ipotesi d'un mezzo resistente conduce, riguardo a queste due stesse comete, a risultamenti assai vicini a quelli ottenuti da Encke e Axel Möller.

(È stampata nel Tomo XXI, pag. 11).

Lo stesso Barone Plana comunica poscia la copia di una lettera che egli indirizzava a Poisson il 13 giugno 1823 nell'occasione che questi

aveva pubblicato nel marzo dell' istesso anno 1823 un lavoro col titolo: *Extrait d'un Mémoire sur la propagation du mouvement dans les fluides élastiques*, lavoro che trovasi stampato negli *Annales de chimie et de physique* par MM. Gay-Lussac et Arago. Tomo 22, pag. 250.

Nel dare alla Classe comunicazione di siffatta lettera il Barone Plana fa osservare che in quell'anno il Poisson abbandonò il pensiero di pubblicare la Memoria originale quale aveala presentata il dì 24 marzo 1823 all'Accademia delle Scienze di Parigi, e che soltanto sette anni dopo, cioè nel 1830 pubblicava nel Tomo X degli Atti di detta Accademia due scritti col titolo l'uno di *Mémoire sur le mouvement de deux fluides élastiques superposés*, e l'altro di *Mémoire sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques*, ponendo appiè della prima pagina del primo di questi lavori una *Nota* in cui è detto: *Ce Mémoire est une partie de celui que j'ai lu à l'Académie le 24 mars 1823, sous le titre de* Mémoire sur la propagation du mouvement dans les fluides élastiques.

Dalle mentovate comunicazioni e considerazioni fattele dal Barone Plana la Classe ha potuto apprezzare quali fossero le idee del medesimo quando scrisse al Poisson l'accennata lettera, relativamente al gran problema delle vibrazioni dell'etere, mercè cui il nostro occhio prova la sensazione della luce come l'orecchio prova quella del suono per via delle vibrazioni aeree.

Finalmente in questa stessa adunanza leggesi dal Segretario una Memoria manoscritta *Sulla parziale ed innata occlusione dell'appendice vermiforme nell'uomo*, appartenente al sig. E. Oehl, docente istologia ed anatomia microscopica nella R. Università di Pavia, e sulla quale Memoria da apposita Giunta accademica già era stato fatto favorevole rapporto in una delle precedenti tornate.

(Sarà stampata in uno dei prossimi Tomi).

9 giugno.

Il Segretario legge la Memoria manoscritta col titolo: *Sopra alcuni Pesci poco noti o nuovi del Mediterraneo*, inviata all'Accademia dal signor G. Canestrini, Professore nel R. Liceo di Genova, e già favorevolmente giudicata da apposita Commissione accademica.

(Verrà stampata nel Tomo XXI).

Il Barone Plana, il quale nella precedente adunanza avea comunicato alla Classe, come si è testè riferito, la copia di una lettera che egli scriveva a Poisson il 13 giugno 1823, nell'occasione che questi avea pubblicato nel marzo del medesimo anno 1823 un lavoro col titolo: *Extrait d'un Mémoire sur la propagation du mouvement dans les fluides élastiques*, comunica ora la relativa risposta indirizzatagli allora dal Poisson.

Di queste due lettere la Classe avendo deliberato la stampa nella *Notizia Storica*, esse vengono ambedue inserite qui sotto.

Turin ce 13 Juin 1823.

Monsieur,

Je viens de lire avec le plus grand intérêt l'Extrait de votre beau Mémoire sur la propagation du mouvement dans les fluides élastiques. Je désire vivement d'étudier l'analyse que vous avez employée dans cette recherche très-épineuse, et j'ose vous prier de m'envoyer un exemplaire de ce Mémoire aussitôt qu'il sera imprimé. Je suis persuadé, qu'en suivant le fil de vos idées vous parviendrez à faire ressortir du système des ondulations tous les principaux phénomènes qu'il peut admettre, conformément aux lois fondamentales de la mécanique des fluides. J'attends de vous seul la décision des questions que vous attendez des travaux futurs des Physiciens et des Géomètres. Au point où vous avez amené la théorie des ondulations il serait imprudent de vouloir l'adopter exclusivement, et l'on tomberait peut-être dans une faute plus grande en voulant la rejeter. Ce serait perdre de vue que les phénomènes de la diffraction parlent hautement en faveur de ce système.

Je ne me lasse pas d'admirer la force des argumens avec lesquels vous démontrez l'insuffisance des démonstrations de M.r Fresnel qui m'avaient toujours paru inadmissibles, en les considérant comme des démonstrations mathématiques. Il faudra maintenant accorder, que ces démonstrations géométriques, par lesquelles on croyait pouvoir établir la première loi de la catoptrique, et la loi de Descartes, ne sont dans le fond, que des représentations défigurées d'effets produits par des causes absolument différentes de celles que l'on voulait y trouver par un fatal amour d'une fausse simplicité. Je pense de même à l'égard des rapports qui lient les vitesses propres à l'onde transmise et réfléchie avec la vitesse propre à l'onde incidente perpendiculairement. Si vous n'aviez pas démontré ces rapports dans votre précédent Mémoire, il serait impossible d'admettre la

démonstration de M.r Young, fondée sur la comparaison tout-à-fait illusoire du choc entre les billes élastiques. Pour sentir combien de telles conceptions sont divergentes, et qu'elles ne sauraient guider avec sûreté dans l'explication des phénomènes compliqués, il suffit de remarquer que la véritable explication de ce qui se passe dans le phénomène des anneaux colorés a été vainement cherchée par ceux qui n'avaient pas saisi toute la force de votre démonstration. Et il est à croire, que nous en serions encore fort éloignés, si vous ne l'aviez pas publiée dernièrement avec toute la rigueur que l'on peut exiger dans le cas particulier que vous avez considéré.

J'attends avec impatience votre Mémoire, afin de comprendre clairement, pourquoi l'onde sphérique qui se propage dans un premier fluide en engendre une autre dans un second fluide semblable, qui cesse d'être sphérique, ainsi que vous l'annoncez à la page 260 de votre Extrait. Ayez la bonté de me donner quelques éclaircissemens sur ce point, et de me dire surtout, si la forme qu'affecte l'onde ainsi transmise est comprise dans la forme ellipsoïde, ou, si elle est toute autre, comme je suis enclin à le soupçonner, en réfléchissant que, d'après vos recherches, la production de la forme ellipsoïde suppose une inégale élasticité suivant les différentes directions. Pour dissiper mes doutes à cet égard il me faudrait reprendre la considération d'un fluide unique et homogène, par rapport à son élasticité, et concevoir la possibilité d'un ébranlement primitif, tel, que les ondes qui en naîtraient auraient une figure différente de la sphérique. Il me semble, que l'hypothèse de cet état initial est aussi bien admissible que celui, en vertu duquel la communication du mouvement ne peut avoir lieu qu'*en avant*, nullement en arrière, comme cela arriverait si l'on savait constituer une onde secondaire à l'origine même du mouvement. D'après mon raisonnement, je ferai rentrer le cas des ondes non sphériques dans le cas singulier et très-remarquable, où le centre de l'ébranlement primitif se trouve placé sur la surface commune de séparation des deux fluides, puisque le mouvement de l'onde incidente sphérique peut être considéré comme faisant fonction d'un ébranlement primitif par rapport à la propagation du mouvement dans le second fluide.

Permettez-moi de vous demander, si le phénomène de la dispersion ne pourrait pas être produit en totalité, ou en partie, par la lame mince que vous définissez à la page 267. Je sens cependant qu'il faut aussi analyser les effets dus à la cause dont vous parlez à la page 263, mais je me garde bien de croire qu'un tel problème puisse être facile.

En admettant que dans le cristal d'Irlande l'éther s'y trouve condensé avec des degrés différens d'élasticité, je suis persuadé que votre analyse vous fera découvrir la loi de la réfraction extraordinaire qui peut exister conformément à cette hypothèse: admettons que cette loi s'accorde avec celle d'Huygens, alors vous aurez ajouté un puissant argument de plus en faveur du système des ondulations. En attendant, pour avoir une idée claire de l'existence simultanée des deux réfractions, je vous prie de me dire, s'il est exact de concevoir une onde *unique* dans laquelle le système des molécules en mouvement peut être partagé en deux systèmes, dont un s'il existait seul présenterait le phénomène de la réfraction ordinaire, et l'autre s'il existait seul présenterait le phénomène de la réfraction extraordinaire. Ce sera, si l'on veut, deux ondes en parlant d'une manière figurée ; mais dans le fait il ne peut y avoir qu'une onde unique dans l'éther qui remplit le cristal, engendrée par l'onde sphérique incidente. Je vous fais cette demande, parce que la comparaison que vous faites à la page 257 avec l'atmosphère ne me paraît pas tout-à-fait exacte. Ici l'on voit dans le même espace deux fluides, l'air et l'éther, en même tems que les deux ondulations, mais dans le cristal il n'y a qu'un seul fluide. Je vous demande en outre, si en anéantissant par la pensée le cristal, et laissant subsister l'éther tel qu'il s'y trouvait, l'on aurait absolument les mêmes phénomènes qui ont lieu avec la présence du cristal. En éclaircissant ce point on saura qu'il ne peut y avoir dans l'éther qui remplit le cristal aucune onde excitée par les vibrations des parties matérielles du cristal. Ces demandes vous démontrent que je n'ai pas pénétré fort avant dans cette théorie ; mais je tâcherai de porter à l'avenir mon instruction plus loin dans cette matière, en marchant, à une grande distance, sur les traces que vous avez tracées à l'aide du calcul et de l'expérience.

J. PLANA.

Paris, ce 3 juillet, 1823.

Monsieur,

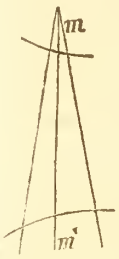
J'ai reçu votre lettre du 13 juin dans laquelle vous me parlez principalement de la théorie des ondes. Je vois que vous inclinez vers cette théorie, et je vous avoue que je suis dans le même cas, tout en pensant qu'elle est encore loin d'être établie d'une manière qui puisse satisfaire les Géomètres. Ici je suis entre M. Laplace qui tient toujours à l'émission et ne peut pas souffrir la théorie des ondes, et M. Fresnel qui croit que

tout est fait et bien fait dans cette théorie. S'il fallait se décider par le poids des opinions, le choix ne serait ni douteux, ni difficile; mais il faut se convaincre soi-même, et cela n'est pas aussi aisé en pareille matière. Je ne manquerai pas de vous envoyer mon Mémoire quand il sera imprimé; mais ce ne sera pas de sitôt. Si la théorie des ondes est la vérité, je ne voudrais pas rester en si beau chemin, et laisser quelqu'autre terminer ce que j'ai commencé. Je voudrais pouvoir déduire du calcul tous les phénomènes généraux de l'optique, et il me manque encore la dispersion et les lois de la réflexion, quant aux quantités de lumière. Je pense comme vous que la lame mince qui sépare les deux milieux, doit influer sur la dispersion bien plus que la cause à laquelle M. Fresnel l'attribue et que j'ai citée à la page 263. Je me propose donc de reprendre ce travail et d'essayer de le compléter après les examens du mois de septembre; à présent j'en ai la tête un peu fatiguée, et je ne suis pas fâché de penser à quelqu'autre chose. Je vois avec bien du plaisir que vous repoussez aussi ces constructions géométriques et ces comparaisons incomplètes, avec lesquelles on croit pouvoir résoudre les problèmes les plus compliqués de la mécanique des fluides. Il ne me sera pas difficile de répondre à la réponse que M. Fresnel vient de me faire. Je vais écrire encore une petite note sur ce sujet, et ce sera tout, car les Géomètres ont sans doute fait de leur côté les réflexions que j'ai rédigées à sa prière, et je ne pense pas que la science puisse beaucoup gagner à la prolongation de cette discussion. D'ailleurs je vois par quelques phrases de la lettre (qu'il a imprimée, du reste, sans me l'avoir montrée), et par sa manière avec moi, qu'il est piqué; la discussion ne tarderait pas à s'aigrir, ce que je veux surtout éviter. Voici maintenant des réponses à quelques questions de votre lettre.

Je n'ai pas indiqué la forme des ondes réfractées, mais il est aisé de former l'équation de leur surface, d'après la loi de la réfraction qui détermine la direction de chaque rayon, et je vois bien que cette surface ne sera pas celle d'un Ellipsoïde, comme vous l'observez. Je n'ai pas bien compris ce que vous dites pour attribuer les deux réfractions du spath d'Islande, à une même onde qui produirait, ce me semble, deux sensations différentes. Je ne me suis pas encore occupé de la double réfraction; ce n'est que pour une extension immédiate de mon analyse que j'ai indiqué la forme des ondes dans un milieu dont les élasticités sont différentes en différens sens; et ce n'est qu'historiquement, et en

citant l'opinion de Huygens, que j'ai parlé de deux milieux co-existans dans un même espace: Huygens, en effet, attribue l'une des réfractions à l'Éther, et l'autre à un milieu formé du cristal et de l'Éther; mais, je le répète, je n'ai pas encore suffisamment examiné ce phénomène dans l'hypothèse des ondulations.

Le résultat de Biot dont vous me parlez n'est point inexact. La chose est mal expliquée, et il y a surtout à la page 651, ligne 9 du Tome IV de son Traité de Physique publié en 1816, une phrase qui ne signifie rien. Voici très-succinctement comme j'entends la communication de la chaleur à distance. Soient deux points m et m' très-voisins des surfaces des corps auxquels ils appartiennent; la quantité de chaleur que m' envoie à m ne dépend nullement des inclinaisons de $m'm$ sur ces surfaces: elle est fonction de la distance qui sépare ces points et de leurs enfoncemens au de-là de ces surfaces.



Je la représenterai par $\frac{k}{r^2}$; k étant une fonction de ces enfoncemens qui décroît très-rapidement à mesure que chacune de ces profondeurs augmente, et r désignant la distance mm', ou, si l'on veut, la partie de cette droite comprise entre les surfaces. Maintenant, la quantité de chaleur reçue par le point m de tous les points tels que m', à travers un élément ds' de la surface du corps auquel m' appartient, sera de la forme $\frac{h \cos.\theta\, ds'}{r^2}$, h étant une fonction de l'enfoncement de m, et θ l'angle que mm' fait avec la normale à ds': c'est ce qu'on voit par le raisonnement que Biot rapporte au bas de la page 650 (Tome 4 du Traité de Physique). Enfin la quantité de chaleur reçue par tous les points tels que m à travers l'élément ds' de la 1.ère surface et l'élément ds de la surface du corps auquel le point m appartient, sera de la forme $\frac{a \cos.\theta \cos.\theta'\, ds\, ds'}{r^2}$; a étant coeff. const., et θ' l'angle compris entre la ligne mm' et la normale à ds: c'est aussi ce que l'on verra par le même rais.t cité par Biot, *c.a.d.*, en partageant la petite portion du corps qui reçoit la chaleur en deux autres, dont l'une est infiniment petite du troisième ordre et doit être négligée. La quantité $\frac{h \cos.\theta\, ds'}{r^2}$ est ce qu'on appelle la chaleur envoyée par un élément ds' à un point m; la quantité $\frac{a \cos.\theta \cos.\theta'\, ds\, ds'}{r^2}$ est ce qu'on entend par la chaleur envoyée d'un

élément à un autre ; mais dans tout cela le vrai principe physique est que la chaleur envoyée d'un point matériel à un autre, ne dépend que de leurs profondeurs et de leur distance mutuelle, et nullement de l'inclinaison des surfaces que cette chaleur traverse. Dans la démonstration que j'ai donnée de l'égalité de température en tous les points d'un espace fermé, je n'ai considéré que la chaleur reçue par un point quelconque de cet espace, et il m'a suffi de l'expression $\frac{h \cos.\theta\, ds'}{r^2}$; mais quand on veut calculer la chaleur reçue par un corps de dimensions finies, à travers une portion déterminée de la surface, il faut faire usage de l'autre expression. Quant à la décomposition de chaleur que Biot fait, d'après Fourier, à la page 649, elle est tout-à-fait insignifiante. On y peut suppléer; mais ce serait trop long pour l'expliquer clairement dans une lettre.

J'ai reçu votre ouvrage sur les réfractions. Je l'ai lu avec plaisir, et je vous en remercie bien. Je trouve que vous avez donné trop d'importance aux formules empiriques de Navier. Quoiqu'il en soit les Géomètres vous sauront gré d'avoir réuni sous un même point de vue toutes les données physiques de cette question, avec les différentes méthodes que l'on a suivies pour la traiter, la critique de ces méthodes et les développements que vous leur avez ajoutés. La question en valait la peine, et en cherchant bien, on en trouverait peut-être encore d'autres qui mériteraient un pareil honneur.

Le 19 cahier du journal de l'École va enfin paraître. M. Cauchy nous a retardé plus de six mois, pour imprimer sept ou huit feuilles qui, selon moi, ne valent pas grande chose. L'article sur la vitesse du son que vous avez vu dans les Annales de physique et de chimie, est une partie d'un Mémoire sur le même sujet que l'on imprime dans la Connaissance des Temps de 1826, où j'ai taché de justifier les équations du mouvement de l'air des reproches que M. Laplace leur a adressés.

Agréez, Monsieur, etc.

POISSON.

7 luglio.

Il Segretario dà comunicazione del carteggio e legge, tra le altre, una lettera del Rettore dell'Istituzione Reale Britannica signor Calvers, colla data del giorno 4 del corrente mese di luglio, nella quale si invita l'Accademia alla riunione, che l'Associazione britannica terrà il giorno 4 del prossimo mese di settembre.

Il Cav. Richelmy, condeputato coi Comm. Menabrea e Mosca ad esaminare una Memoria rassegnata all'Accademia dal sig. Carlo Resio, Prof. di matematica nel R. Liceo di Genova, e contenente la descrizione di un *Nuovo sistema di locomozione a colonna d'acqua*, riferisce che:

Il Prof. Resio, occupato da lungo tempo nello studio dei sistemi di locomozione sulle ferrovie colla mira di trovare un supplemento alla costosa forza del vapore acqueo, nel recente accennato lavoro tratta simile argomento, ma lo tratta sotto l'aspetto più industriale che scientifico; non potersi conseguentemente consigliare l'Accademia a stamparlo per intiero nei proprii Volumi; tuttavia sulla considerazione del vantaggio che potrebbe forse ottenersi dalla pratica attuazione del proposto sistema, essere conveniente che della Memoria, in cui questo trovasi descritto, s'inserisca un breve sunto nella *Notizia Storica* dei lavori della Classe.

In soddisfazione di tale proposizione della Giunta, accettata dalla Classe, si porge qui del mentovato lavoro il seguente sunto, compilato dalla Giunta stessa:

Il propulsore idraulico del sig. Resio consiste in una specie di dentiera o rastelliera a palmette curve posta al disotto di parecchi vagoni consecutivi del convoglio. Essa è formata da due lastre piane ed orizzontali collocate nel senso longitudinale, e comprendenti fra loro una serie di palmette curve simili a quelle impiegate in molte ruote idrauliche, per esempio nelle turbini centrifughe, onde è che il sig. Resio la paragona ad una turbine di raggio infinito. Lungo la strada corre un grosso tubo comunicante a monte con un recipiente d'acqua, e questo tubo per mezzo di certi emissari, che si ripetono a brevi intervalli, spinge l'acqua contro la rastelliera. Il vagone nel suo passaggio apre da sè ciascun emissario; questo poi ritorna a chiudersi quando la rastelliera termina di passarvi davanti. La distanza fra un emissario ed il consecutivo è minore della lunghezza della rastelliera onde avviene che un complesso di palmette è costantemente esposto all'azione dell'acqua.

La teoria che il sig. Resio applica al suo propulsore ha molta somiglianza colla teoria delle turbini e segnatamente di quelle dette tangenziali; l'artifizio col quale rende il suo sistema automotore è analogo a quello impiegato nelle macchine a colonna d'acqua da Reichenbach in Baviera e da Juncker in Francia.

Certamente questo sistema abbisogna per essere applicato in grande scala di felici condizioni del sito, del suffragio dell'esperienza e delle

modificazioni che la medesima sarà per suggerire; però quanto ad un primo studio pare che l'Autore l'abbia fatto a sufficienza compiuto.

Da ultimo il Socio Comm. Giovanni Cavalli legge una sua Memoria col titolo: *Aperçu sur les canons rayés se chargeant par la bouche et par la culasse, et sur les perfectionnements à apporter à l'art de la guerre en* 1861.

(È stampata nel Tomo XXII pag. 1).

10 novembre.

Il Segretario presenta un piego suggellato, stato depositato presso la Segreteria accademica il giorno 30 del passato mese di agosto dal Cav. signor Gioanni Minotto, Capo di Divisione al Ministero dei lavori pubblici, sul quale piego sta scritto: *Mezzo per impedire gli inconvenienti della induzione nelle linee sottomarine e simili telegrafiche.*

Dopo ciò il Cav. Sobrero, a nome proprio e dei condeputati Comm. Cantu' e Cav. Delponte riferisce sul merito di una breve Memoria manoscritta inviata all'Accademia, per la stampa ne' suoi Volumi, dal signor Fabre Volpelière, di Arles, Memoria col titolo di: *Note sur une nouvelle altération frauduleuse du Safran.*

Le ricerche fatte dal sig. Fabre Volpelière per iscoprire la natura dei materiali adoperati per adulterare lo zafferano nel particolare caso, che forma il soggetto della sua Nota, l'avrebbero convinto che tali materiali erano un legno colorante rosso e radice di curcuma in proporzioni difficili a stabilirsi, e che la quantità di zafferano legittimo era assai piccola. Ma la Commissione senza impugnare il giudizio emesso dall'Autore della Nota, fa osservare che i mezzi di ricerca da lui adoperati per conoscere la frode non sono tali da allontanare ogni dubbio, e da veramente persuadere che l'allegata e non altra fosse la mescolanza dell'esaminato zafferano; inoltre fa ancora osservare che non tutti i mezzi d'investigazione posseduti dalla chimica furono tentati dall'Autore, e che fu affatto trasandato l'esame al microscopio. Per queste ragioni la Giunta conchiude, e la Classe approva, che della Nota del sig. Fabre Volpelière si faccia, come qui sen fa, semplice menzione nella *Notizia Storica.*

Il Prof. Moleschott comunica i seguenti risultamenti di studi da lui intrapresi a Zurigo insieme col sig. Hufschmid all'oggetto di chiarire *l'influenza del midollo allungato e del midollo spinale sulla frequenza del polso.*

Pensando all' alta autorità di quest' illustre Accademia ed alla mia poca pratica del bell' idioma d' Italia, non avrei avuto l'ardire di presentarmi alla vostra chiarissima adunanza, se non fossi stato animato dall' invito d'un vostro Membro illustrissimo ed incitato dal pensiero, che la nuova carica della quale venni onorato nell' Università di Torino, mi toglieva per qualche tempo l'occasione di mandar innanzi una ricerca, in cui stava occupato nelle ultime settimane del mio soggiorno a Zurigo, e mercè cui già sono giunto a risultati che, come fatti almeno, meritano d'essere conosciuti dai fisiologi. Più tardi, se l'Accademia me ne vorrà accordare l'onore, le presenterò una Memoria generale intorno la dipendenza della frequenza dei battiti cardiaci dal sistema nervoso.

Nella lotta che già da tanti anni va prolungandosi fra i partigiani di Edoardo Weber, i quali fanno del nervo vago l' impeditore dei movimenti cardiaci, e Maurizio Schiff, le cui ricerche, meno che non meritano notate, conducono a riguardare il nervo vago come nervo motore del cuore, ma come nervo motore che facilmente si stanca, spero aver fatto un passo innanzi, giustificato da sperienze che si trovano descritte nel mio giornale di fisiologia (*). Non solo mi è successo di provare, in confermazione della tesi prodotta dallo Schiff, che l' irritazione del vago, sia elettrica, meccanica, chimica o termica, purchè abbastanza debole, aumenta il numero dei battiti cardiaci al minuto, ma ho trovato di più, che questo effetto s'ottiene dal nervo tagliato, quando ne vien irritata la parte periferica, mentrechè un irritamento egualmente debole, applicato al moncone centrale, non agisce punto. Donde s' inferisce che l'effetto della debole irritazione del vago non è un'azione riflessa, ma diretta, procedente nella via centrifuga, dal nervo al cuore. Il nervo vago, esaminato al moltiplicatore, coi mezzi eccellentissimi recentemente raccomandati da un illustrissimo Membro dell'Accademia, dal Senatore Matteucci, mostra sotto l' influenza delle stesse irritazioni che aumentano la frequenza del polso, l'oscillazione negativa scoperta da Dubois Reymond, ovvero l'oscillazione positiva trovata da me stesso, oscillazioni indicanti il movimento molecolare cagionato dall' irritazione efficace d'un nervo motore. In una col numero dei battiti cardiaci cresce la pressione idraulica colla quale il sangue s'appoggia sulla parete delle arterie.

(*) Untersuchungen zur Naturlehre des Menschen und der Thiere, herausgegeben von Jac. Moleschott, Bd. VII et VIII.

Quando il vago viene irritato da correnti troppo forti, i movimenti del cuore diventano più radi o s'arrestano del tutto; allora la corrente del nervo il più delle volte non determina alcuna oscillazione dell'ago del galvanometro, mentrechè la pressione del sangue va diminuendosi: cessata poi l'irritazione, il polso a passo a passo torna alla frequenza d'innanzi. Fu stancato il nervo e si ristora pel riposo.

È vero che il cuore ricomincia a battere anche durante l'irritazione, la cui fortezza paralizzava poco innanzi la contrazione ritmica delle sue fibre muscolari. Ma questo fenomeno, spiegato dal Weber come una conseguenza di soverchia irritazione, si spiega naturalmente o per un'azione riflessa che stimola il cuore mediante gli altri nervi di esso (giacchè ho trovato, senza finora averlo pubblicato, che un forte irritamento del moncone centrale d'un vago tagliato rende più frequente il polso), o per la morte della parte del nervo sottomessa a correnti troppo forti. Nell'ultimo caso, come fu già descritto da Schiff, l'irritazione ripetuta, ed applicata alla medesima parte del nervo, riesce vana, anche dopo un riposo d'alcuni minuti, che basterebbe a ristorare le forze del nervo, mentrechè basta di avvicinarsi un poco più del cuore, scendendo cogli elettrodi lungo il nervo, per fermare di nuovo il cuore nella diastole.

Credo d'aver confutato a forza di sperienze anche gli altri appoggi della teoria che suppone una virtù impeditiva nel nervo vago, e principalmente l'idea che il taglio dei due vaghi, o l'applicazione d'una corrente costante sul nervo intero, in virtù d'una loro azione paralizzante, aumenterebbero la frequenza dei movimenti cardiaci. Avendo già pubblicato il risultato di quegli sperimenti fatti a Zurigo insieme coi miei scuolari Gascard, Hufschmid, Nauwerck, Oesterlen e Schlatter, e sperando più tardi procacciarmi l'onore di sottomettere all'esame di questo illustrissimo Corpo la mia teoria toccante l'innervazione del cuore, non voglio per adesso trattenerne l'Accademia più a lungo. Preferisco affrettarmi per entrare nella materia nuova che voglio comunicare all'Accademia nel mio nome e nel nome d'un mio distinto allievo, Hufschmid d'Argovia.

Bisogna però premettere che, secondo le mie indagini, la relazione del simpatico col cuore è la stessa che quella del vago, vale a dire che anche il simpatico, irritato debolmente, aumenta, e trattato con irritamenti soverchi, diminuisce il numero dei movimenti cardiaci nell'unità di tempo.

Questi fatti presentano il cuore come un organo ricchissimo di nervi, gli

uni coadiutori degli altri, tutti quanti composti di fibre sensibili e motrici, nessuno impeditore, e questa ricchezza è tanto più importante, quanto meglio è consolidato il fatto, che i nervi del cuore – e più dei simpatici i vaghi – si stancano facilmente allorquando vengono attaccati da forti irritamenti.

Non ho voluto contentarmi però dei fatti trovati, la fisiologia differendo dalle scienze che meglio di lei meritano il nome d'esatte in un punto essenziale. Il punto è questo: il fisico, il chimico, non che il matematico, stabilito un fatto, ne possono tranquillamente dedurre tutto quello che, se non fosse, basterebbe a negare l'esistenza del fatto medesimo. Il fisiologo non può mai affidarsi nei fatti che s'inferiscono da una qualunque serie d'osservazioni, è obbligato piuttosto di mettere a cimento ognuna conseguenza che paia derivare da un fatto trovato come punto di partenza, innanzi di accettarla come ben stabilita. Così è sempre spinto avanti dalla vita, i cui enigmi lo tengono avvolto, dalla vita che spinge perchè non s'arresta mai. Il fisico talvolta trova risposte affatto soddisfacenti come ricompensa della sua investigazione; il fisiologo non trova per così dire se non questioni.

Ebbene – la notomia insegnandoci che il nervo vago proviene dal midollo allungato, e che la parte del simpatico, che innerva il cuore, proviene dal midollo spinale – poi il fisiologo avendo trovato, che i vaghi ed i simpatici ambidue a deboli irritamenti rispondono coll'aumentare, ai forti col diminuire, ed eziandio coll'arrestare i battiti del cuore – pare necessario d'indurne, che l'irritazione del midollo allungato e quella del midollo spinale producano i medesimi effetti. Nondimeno il metodo, al quale deve sottomettersi il fisiologo, se vuol comprendere la vita come un compendio di fenomeni, tutti legati per reciproca influenza, richiede che si faccia la ricerca se questa conseguenza, per quanto paia naturale, meriti il nome di un fatto. Per tale cagione ho istituito col Hufschmid le indagini necessarie, nelle quali venivamo aiutati dal Dottore Fudakowski e dal candidato di medicina Bleuler. Non descriverò in questa comunicazione succinta i metodi che abbiamo scelti, perchè in altra occasione ne parlerò distesamente. I risultati, ai quali siamo giunti, sono questi:

Un'irritazione debole del midollo allungato rende più frequente il polso, mentrechè un soverchio irritamento lo rende più raro, o l'arresta anche affatto. I simpatici essendo tagliati, l'effetto dell' irritazione rimane lo stesso; all' incontro svanisce quando prima d' irritare il midollo allungato furono tagliati i vaghi. Effettuata quest'ultima operazione, nè un fiacco, nè un

forte irritamento del midollo allungato cambia la frequenza del polso, siano recisi i simpatici, o siano interi. Dunque l'irritazione del midollo allungato riesce efficace mediante i nervi vaghi e non agisce per la via dei simpatici.

Quando poi s' irrita il midollo spinale con correnti deboli, il numero dei battiti del cuore va aumentandosi, e l'effetto si mantiene, purchè o i simpatici o i vaghi siano conservati interi. L' irritazione riesce vana allora solamente che ambedue le paia di nervi furono recise.

L' irritazione del midollo spinale deve dunque la sua efficacia non solo ai simpatici, ma ancora ai vaghi. L' intercessione dei vaghi, quando l' irritazione del midollo spinale aumenta il numero dei movimenti cardiaci, benchè fossero tagliati i simpatici, potrebbe, per quanto sembrami, spiegarsi in triplice modo. A taluni forse aggradirebbe l'ipotesi, che i filamenti dei vaghi scendessero più profondamente nel midollo che non l'asserisce finora la notomia, ma questa ipotesi sarebbe quasi gratuita, poichè oggidì è forse impossibile di decidere fino a qual punto scendano daddovero le fibre del vago nella midolla. Un'altra spiegazione del fatto potrebbe derivare dal va e viene dello stato elettrotonico del midollo allungato, causato dall' irritazione diretta del midollo spinale per le correnti indotte. Contrastano però a questa supposizione le sperienze del mio chiarissimo amico Van Deen, le quali provano che le correnti elettriche applicate al centro spinale non riescono efficaci se non toccano la parte del centro, che sta vicina ai nervi dai quali dipende l'effetto (*). Resta un terzo modo di dichiarare il fatto, voglio dire per l'azione riflessa, cagionata direttamente dall' irritazione delle fibre sensibili del midollo spinale e trasmessa da queste alle fibre motrici del vago nel midollo allungato.

Per una forte irritazione del midollo spinale il numero dei battiti cardiaci vassi diminuendo. Con tutto ciò le sperienze, dalle quali si deduce questa asserzione, riescono meno appariscenti nei conigli che nelle rane; imperocchè nelle rane è facile d'arrestare i movimenti del cuore per un soverchio irritamento applicato sul midollo spinale solo; nei conigli abbiamo soltanto potuto osservare una diminuzione nella frequenza del polso, perchè questi animali non sopportano per un tempo abbastanza lungo una soverchia irritazione del midollo spinale. Dopo una diminuzione nella frequenza del polso, diminuzione di dieci o venti battiti al minuto, abbiamo, nel tempo di ristoro, veduto tornare il cuore al primitivo numero dei suoi movimenti.

(*) Van Deen in Untersuchungen etc. herausgegeben von Jac. Moleschott, Bd. VII.

Tuttavolta però che l'irritamento produceva un polso vieppiù raro, il cuore, nè anche cessante l'elettrizzazione, non saliva più alla frequenza d'innanzi. Nondimeno è certo che per un'irritazione del midollo spinale ben regolata il cuore lascia costringersi a movimenti più frequenti o più rari come si vuole.

Non è salda dunque la dottrina che il Budge, alcuni anni fa, ha prodotta intorno all'influenza dei centri nervosi sul cuore, attribuendo esclusivamente al midollo spinale il potere di spingere, al midollo allungato il potere di rallentare il polso. Questa dottrina corrispondeva bensì alla teoria, che faceva del vago l'antagonista del simpatico quanto alla loro influenza nel numero dei battiti cardiaci (infatti, irritando il midollo allungato è più facile di produrre una diminuzione, irritando il midollo spinale è più facile di produrre un aumento nella frequenza del polso); ma giova notare che tanto dal midollo allungato quanto dallo spinale si può ottenere aumento o diminuzione, purchè si sappia regolare convenientemente il grado dell'irritazione. Insomma tutto quello che ho trovato intorno alla correlazione che esiste fra il vago ed il simpatico, per quanto innervano il cuore con fibre motrici, s'applica in modo simile ai relativi centri del vago e del simpatico, vale a dire al midollo allungato ed al midollo spinale.

Un centro impeditivo pei movimenti del cuore non c'è, siccome non esiste un nervo impeditore per essi.

Il Socio Cav. De Filippi legge, per modo di semplice comunicazione, *Alcune riflessioni generali sullo sviluppo dell'uovo e sulla formazione dell'embrione degli animali.*

Da osservazioni intorno allo sviluppo dei Cirripedi comunicate alla Classe in altra tornata, il Prof. De Filippi trae ora occasione per istituire un confronto tra le uova con segmentazione totale, e quelle con segmentazione parziale, e cerca di dimostrare come vi siano passaggi dalle une alle altre, e conseguentemente come la accennata distinzione perda ogni reale importanza. Egli è d'accordo con Gegenbaur nel riconoscere nell'uovo degli uccelli tutte le condizioni di un'unica cellula, epperciò non vi ammette due tuorli distinti, uno nutritivo, l'altro evolutivo; ma nello stesso tempo è d'accordo con Baer e con E. Meckel nel trovare una perfetta analogia tra il liquido del follicolo di Graf dei mammiferi ed il tuorlo dell'uovo degli uccelli. La formazione della cicatricola in questo

dee spiegare, egli dice, l'isolarsi dell'uovicino dei mammiferi dal liquido del follicolo.

Il Prof. De Filippi considera pure la posizione che nello svilupparsi dell'uovo prendono rispettivamente il centro di formazione dell'embrione ed il cotiledone (tuorlo nutritivo). Adottando il principio di classificazione di Van Beneden conserva le due prime divisioni del regno animale secondo questo Autore, ma scompone la terza in quattro distinte, così che la classificazione risultante è la seguente:

Animali	ipocotiledonei	—	Vertebrati.
»	epicotiledonei	—	Articolati.
»	procotiledonei	—	Cefalopodi.
»	metacotiledonei	—	Molluschi.
»	mesocotiledonei	—	Vermi.
»	acotiledonei	—	Molluscoidi?
			Echinodermi.
			Celenterati.
			Protozoi.

Da ultimo il Socio nazionale non residente Comm. Matteucci legge la prima parte di una sua Memoria col titolo di *Ricerche sulle polarità secondarie sviluppate nei nervi e sulla loro applicazione ai fenomeni elettro-fisiologici.*

L'Autore incomincia coll'esporre alcune nuove esperienze sul fenomeno generale della polarità secondaria, e stabilisce così che la resistenza presentata alla corrente elettrica da diafragmi metallici è intieramente dipendente dalle polarità secondarie; infatti uno strato liquido anche diviso in compartimenti da molti diafragmi di zinco amalgamato e immersi in una soluzione di solfato di zinco non presenta alla corrente maggior resistenza dello strato stesso senza diafragmi. Egli espone quindi i fenomeni della polarità secondaria ottenuti sui corpi porosi ed umidi. Queste polarità sono manifestamente dovute ai prodotti dell'azione elettro-chimica che si fissano sul corpo poroso in contatto degli elettrodi. I nervi indipendentemente dallo stato di eccitabilità sono dotati di un gran potere elettromotore secondario, ed è importante, dice il Prof. Matteucci, di vedere che un lungo filamento nervoso acquista per il passaggio della corrente, che dura una porzione piccolissima di secondo, un potere elettro-motore

che persiste molto tempo e che genera correnti in direzioni determinate nelle varie parti del nervo. Tali effetti si ottengono sul nervo anche molte ore dopo la perdita della sua vitalità, e costituiscono un fenomeno fisico puro e semplice sul quale l'Autore della Memoria si fonda per ispiegare lo stato elettro-tonico dei nervi, e le contrazioni che si svegliano negli animali vivi assoggettati alla corrente, nel momento in cui si apre il circuito.

1.° dicembre.

Il Presidente Barone Plana apre la seduta annunziando alla Classe la morte dell'accademico Comm. Alessandro Riberi, avvenuta la sera del giorno 18 del passato mese di novembre, e questo annunzio egli fa con parole di profondo dolore e di altissima stima e riconoscenza verso l'illustre trapassato. La morte, egli dice, del Prof. Riberi è una pubblica sciagura, ed una perdita gravissima per la scienza medico-chirurgica, che professava con singolare perizia a sollievo di chi soffriva, e ad illustrazione del proprio nome non solo, ma del nome italiano.

Il Segretario dà comunicazione del carteggio, leggendo, tra le altre, una lettera del Socio nazionale non residente Comm. Matteucci, colla data del giorno 1.° dicembre 1861, nella quale esso informa il Presidente dell'Accademia che dovendo compiere in Torino le funzioni di Ispettore generale dei telegrafi del Regno, ha quivi stabilmente fissato la sua dimora. La Classe prende atto di questa dichiarazione del Socio Matteucci, ed applicagli immediatamente l'articolo 40 dei Regolamenti accademici, in cui è detto: *Un Accademico nazionale non residente coll'acquistare stabile domicilio in Torino acquista a un tempo istesso la qualità di Accademico residente, e prende posto fra i venti Accademici ond' è composta la Classe alla quale egli apparteneva; se il numero di venti trovasi già compiuto, prenderà il primo posto che diventerà vacante, e intanto interverrà ad ogni adunanza, con tutti i diritti e carichi che spettano agli Accademici residenti.*

Il Barone Plana, predetto, legge un suo lavoro intitolato: *Osservazione del passaggio di Mercurio sul disco del Sole fatta al R. Osservatorio di Torino la mattina del 12 novembre 1861.*

Egli accenna primieramente quali sono gli elementi indispensabili affinchè siffatte osservazioni possano riuscire conformi al vero movimento del pianeta, mentre si vede per proiezione sul disco solare a guisa di una piccola macchia nera di figura perfettamente circolare, il cui centro descrive una corda dello stesso disco apparente. Di tali elementi, che sarebbero: 1.° un pendolo regolato sul tempo sidereo, e di cui sia conosciuto l'andamento con tutta precisione mediante osservazioni fatte col passaggio al meridiano del sole e di alcune principali stelle; 2.° un cannocchiale acromatico di ragguardevole distanza focale ed apertura, munito di un oculare atto ad avere un conveniente ingrandimento; 3.° uno stato atmosferico favorevole per una chiara visibilità che renda possibile la precisa fissazione degli istanti sui quali è concentrata la maggiore attenzione dell'osservatore; di tali elementi, dico, il Barone Plana ha potuto disporre benissimo dei due primi, possedendo l'Osservatorio un pendolo della precisione di una frazione di secondo, ed un cannocchiale acromatico fatto dal celebre Fraunhofer avente una distanza focale di circa due metri ($1^m, 796$), ed un'apertura di 120 millimetri; ma il terzo elemento, che per sua natura non si piega all'umano desiderio, fu assai sfavorevole all'osservazione per l'intervallo di circa due ore e venti minuti, intervallo che abbraccia appunto l'intiera durata del passaggio.

Ad onta però di sì grave ostacolo, il Barone Plana ha potuto determinare i due principali istanti del fenomeno, quello cioè del contatto interno dei due lembi di Mercurio e del Sole, che sarebbe avvenuto a

$$13^h.\ 16'.\ 19''\ \text{(di tempo sidereo)},$$

e quello del loro contatto esterno, effettuatosi a

$$13^h.\ 18'.\ 2''\ \text{(di tempo sidereo)}.$$

15 dicembre.

Una Giunta composta del Comm. Sella, relatore, del Comm. Sismonda Angelo e del Cav. Sismonda Eugenio, riferisce intorno al merito di un lavoro manoscritto, rassegnato all'Accademia per la stampa ne' suoi Volumi, dal Socio corrispondente sig. Arcangelo Scacchi, Professore di mineralogia nella R. Università di Napoli, lavoro distinto col titolo di: *Memoria sulla poliedria delle faccie dei cristalli.*

Questa relazione è così concepita:

« Ella è sorte comune a tutte le leggi, le quali compendiano e

generalizzano le osservazioni fatte dall'uomo sui fenomeni naturali o sulle esperienze dei laboratori, che esse appaiano semplici ed esatte allorquando le osservazioni sono poco numerose, o grossolane, ma che si mostrino poscia od assai più complicate, ovvero infirmate da molte cause perturbatrici allorquando le osservazioni si fanno e più numerose e più accurate.

Si potè credere da antichi astronomi, che le curve descritte dai centri dei pianeti fossero sezioni coniche, ma presto si vide che erano curve d'incredibile complicazione. La legge di Mariotte sulla relazione tra il volume dei gassi e le loro pressioni e temperature, quella di Proust sui rapporti tra gli equivalenti dei corpi semplici erano ben presto dimostrate prossime sì, ma non coincidenti col vero; e lo stesso si può dire, o col tempo si dirà, di ogni altra analoga legge.

I fatti noti in cristallografia si compendiano dicendo che a costante temperatura costanti sono gli angoli diedri delle stesse faccie di cristalli appartenenti alla medesima sostanza, e che in essi razionali sono inoltre i rapporti per le ragioni delle distanze a cui due faccie qualsiensi tagliano gli assi risultanti dall'intersezione di tre o più faccie qualunque. Ma le accurate misure di angoli, che da qualche tempo si fanno, dimostrano che anche in cristalli assai perfetti essi angoli vanno più o meno scostandosi da ciò che conseguirebbe dalle leggi precedenti: vale a dire che variano alcun poco gli angoli di diversi cristalli della stessa sostanza, e che le faccie dello stesso cristallo non obbediscono sempre esattamente alla legge di razionalità.

Nè v'ha a far meraviglia di codeste variazioni, imperocchè se malgrado la semplicità della legge Newtoniana l'azione di tutti i corpi celesti sovra ciascun pianeta cangia l'elisse, che questo descriverebbe attorno al sole in curva complicatissima, ben è evidente che comunque semplici possano essere le leggi di attrazione molecolare, la quantità di molecole, che concorrono a formare un cristallo, la presenza di molecole eterogenee, le continue variazioni di temperie, di condizioni del dissolvente, ecc. debbono pure alterare la semplicità delle forme cristalline. V'ha questa differenza fra l'astronomia e la cristallografia, che in quella essendo nota la legge di attrazione dei corpi celesti, lo studio delle perturbazioni del loro moto permette di scoprire pianeti, che non si erano ancor visti, e che in questa si è ridotti a studiare le perturbazioni delle forme cristalline per tentare se per questo lato si possa giungere alla scoperta di

quelle leggi di attrazione molecolare che rimasero finora ribelli all'ingegno umano.

Egli è perciò che in parecchi dei recenti lavori dei cristallografi si tiene minuto conto di queste variazioni, od almeno si cerca di seeverare da queste la vera forma che spetterebbe ai cristalli di ciascuna sostanza. Basti citare tra i più indefessi investigatori il Kokscharow ed il Dauber. Vennero ancora fatte più ipotesi per dar conto di queste perturbazioni. Lo Schroeder suppone che i cristalli di Datolite constino di due individui non affatto paralleli, di ciascuno dei quali rimanga traccia sopra ciascuna faccia del cristallo. Il Breithaupt a dar ragione delle dissimetrie di parecchi cristalli, per cui e sono disuguali gli angoli che dovrebbero essere identici, ed appaiono traccie di un asse ottico in cristalli monometrici, ovvero di due assi ottici in cristalli romboedrici e dimetrici, suppone che si debba crescere il numero di sistemi cristallini, e portarlo a tredici invece dei sei finora ammessi. Ed uno di noi nel rendervi conto dei cristalli dell'Argento rosso, che presentano faccie vicinissime e parallele ad una zona, le quali costituiscono quasi una superficie cilindrica, supponeva che al variare delle circostanze della formazione del cristallo insensibile fosse la variazione delle forze per cui una faccia dovrebbe essere parallela ad una data zona, e sensibilissima fosse per contro la variazione delle forze per cui la faccia dovrebbe essere parallela ad altre zone trasversali, in guisa che la faccia riesciva perfetta per ciò che riguardava la prima, ed intieramente incurvata per ciò che riguardava le seconde.

Il nostro Scacchi, a cui la mineralogia debbe tanti classici lavori, è da lungo tempo entrato in quest'arringo e basti ricordare i suoi lavori sulla Humite e sui cristalli emiedrici. Egli ci presenta ora una Memoria della più alta importanza, la quale è intieramente consacrata allo studio delle variazioni di posizione della faccia di un cristallo. Partendo dall'osservazione che una faccia riflette spesso più immagini di un oggetto che gli stia davanti, conchiude che una faccia può assumere nello stesso cristallo posizioni non affatto identiche, e dà il nome di *poliedria* delle faccie a codesto fatto per cui al posto suo si ha un poliedro ottusissimo. Entrando poi in un minutissimo ed accuratissimo studio dei cristalli di parecchie sostanze, egli descrive i varii e curiosissimi fatti di poliedria che vi ha osservati e determinati mediante difficili e faticose misure angolari.

La Memoria è divisa in tre parti. Nella prima tratta della poliedria nelle direzioni di due o più zone, cioè dei cristalli al posto delle cui faccie

vi sono ottusi poliedri formati da superficie piane o quasi piane parallele a due o più zone. Discorre in essa della Fluorite, nella quale crede doversi considerare come poliedrie del cubo quei tetracisesaedri ottusissimi i cui angoli erano dal Phillips detti di 5°. 20′ e di 20′, il cui simbolo era dal Kenngott determinato in 32, 1, 0 ed i cui angoli trova lo Scacchi quasi insensibilmente variabili da 1°. 49′ a 8°. 52′. Tratta inoltre della Galena e dell'Analcimo, sulle cui faccie cubiche la poliedria prende abito di icositetraedri per la prima, e di esacisottaedri per la seconda; della Diottasia e della Tormalina ove la poliedria ha caratteri emiedrici; della Cabasite sulle cui faccie romboedriche la poliedria ha prossimamente un grado di simmetria corrispondente al sistema romboedrico; e dell'Armotomo colle specie ad esso affini.

Nè lo Scacchi si è limitato a cristalli naturali, ma ha fatto cristallizzare parecchie sostanze coll'intendimento di studiarne la poliedria e le variazioni che essa subisce col variare delle circostanze di cristallizzazione. Ed in questa prima parte della Memoria espone le sue investigazioni sopra Solfati doppi di manganese e potassa, in uno dei quali crescendo la rapidità della cristallizzazione riescì a far crescere l'angolo del poliedro sostituito ad una faccia da 0°. 6′ a 1°. 54′; espone quelle sull'Allume, sul Tartrato acido di stronziana trimetrico, e specialmente sul Solfato di potassa in un col Cromato di potassa e col Solfato di ammoniaca.

Nel Solfato di potassa trimetrico ottenne l'Autore bellissimi geminati tripli, quadrupli, ecc., nei quali egli potè studiare curiosissimi esempi di deviazione, o (come egli dice) di poliedria della faccia di geminazione. Imperocchè in questa sostanza, la quale si presenta in prismi, il cui angolo poco si scosta da 120°, tre cristalli qualche volta si associano secondo faccie non esattamente coincidenti con quelle del prisma, in guisa da formare cristalli quasi identici con quelli del sistema romboedrico. Ed è questa analogia tanto più ammirevole, che lo stesso Solfato di potassa in presenza del Solfato di soda cristallizza nel sistema romboedrico in guisa da presentare cristalli quasi identici coi trigeminati trimetrici, di cui testè si diceva.

La seconda parte della Memoria tratta dei fenomeni di poliedria nella direzione di una sola zona, cioè dei casi in cui alla faccia si sostituisce una superficie prismatica ottusissima parallela ad una data zona. Vi tratta della Pirite, della Tormalina, del Corindone e di alcune sostanze artificialmente cristallizzate, cioè del Solfato di soda e zinco, del Tartrato acido

di stronziana monoclino, del Tartrato e del Paratartrato acido di soda. Anche la poliedria in una sola zona si mostra per lo più con un certo grado di simmetria dipendente dal sistema cristallino e dalla emiedria propria della sostanza.

Finalmente nella terza parte tratta l'Autore delle faccie curve dei cristalli, ove considera specialmente il Diamante ed il Gesso, e degli aggruppamenti raggianti dei cristalli, fenomeni che egli attribuisce ad una poliedria che chiama indeterminata.

Lo Scacchi conchiude in generale che la poliedria si manifesta con determinate direzioni e con determinati modi per ciascuna specie di faccia; che è spesso in relazione coll'emiedria, colla geminazione, colla esistenza di angoli molto ottusi, e che pare favorita dalla rapidità d'ingrandimento dei cristalli.

La vostra Giunta prescinde dal discutere se veramente i poliedri ottusissimi che sostituiscono o circondano una faccia di un cristallo abbiano a dirsi variazioni di posizione della faccia stessa, piuttosto che faccie distinte, od almeno dal trattare dei limiti sino a cui codesta supposizione potrebbe ammettersi; essa si limita a dichiarare che nel suo concetto il lavoro dello Scacchi è per ciò che riguarda lo studio delle perturbazioni delle faccie cristalline della più alta importanza, e che esso contiene una doviziosissima messe di fatti od intieramente nuovi, o molto più accuratamente determinati di quanto il siano stati dai precedenti osservatori, dacchè se il Dauber dà molte variazioni di angoli, non indica il senso in cui avvengano, e se lo Schanff discorre delle poliedrie della Fluorite, della Galena e della Pirite, non corrobora le sue descrizioni con alcuna misura.

La Giunta non debbe tacere che la Memoria dello Scacchi contiene ancora la determinazione di nuove faccie, di nuove geminazioni, ed anche di nuovi sali e dei loro sistemi cristallini, cioè di altri fatti degni per sè di speciale memoria, e conchiude emettendo il voto che questo classico lavoro venga stampato nei Volumi dell'Accademia ».

Da ultimo il Socio Sella, predetto, comunica ancora una Nota del sig. Costantino Perazzi, Ingegnere delle miniere del distretto di Genova, e Reggente di quello di Torino, *Sulla esistenza di un sistema di filoni piombiferi negli schisti di Brovello e dell'alta valle dell'Agogna* (Pallanza). Tale Nota dell'Ingegnere Perazzi può essere così riassunta:

« Importanti lavori stati fatti nel corrente anno dal Cav. Francfort, cui la mineralogia italiana già va debitrice di varie utili scoperte,

dimostrarono, pella prima volta, la esistenza di un sistema di filoni piombiferi nei vaghi monti situati fra il lago d'Orta, la Strona, la Toce ed il Lago Maggiore.

Micaschisti nei quali il Mica è sovente surrogato dal Talco, oppur dalla Clorite, attraversati in ogni senso da piccole vene di Quarzo e di Calcite rosea, sono le rocce che compongono questi terreni, i cui strati giacciono quasi orizzontalmente con lieve inclinazione al N O.

L'eruzione dei Graniti di Baveno li attraversa in direzione quasi N S.; la stessa direzione hanno i filoni testè scoperti, come altresì una infinità di piccole fessure rivestite da cristalletti di Quarzo e Ferro spatico cuneiforme.

L'aspetto generale litologico di questi schisti, nei quali finora non si rinvennero esseri fossili, ed il fatto che in molte località racchiudono filoni di Quarzo e Pirite di ferro alquanto auriferi, inducono l'Ingegnere Perazzi, per analogia di questi caratteri con quelli del Silurio inferiore di altri paesi, a collocarli fra i più antichi della scala geologica, cioè nella formazione siluriana inferiore.

Le prime ricerche vennero fatte nel letto del torrente Peel che scorre al fondo di un piccolo bacino tutt'all' intorno circondato da monticelli poco elevati; posizione che le *analogie* dimostrano favorevolissima ai filoni di Piombo.

Il giacimento attraversa gli strati quasi verticalmente con lieve inclinazione più o meno sentita all'Ovest, cioè verso l'eruzione granitica; segue la direzione N S., direzione di quasi tutti i più importanti filoni piombiferi conosciuti.

Gli schisti incassanti vennero dall'azione chimica del filone trasformati in uno schisto argilloso il quale alle *salbande* diviene una vera Argilla, in cui si ritrova disseminato in nuclei il Quarzo che si segregò.

La disposizione dei minerali nel filone è per liste; la prima è occupata dalla Blenda: vien quindi la Calcite, mentre la Galena, che è il minerale principale, occupa generalmente il centro. Contiene geodi rivestite di bellissimi cristalli di Blenda, di Galena, di Calcite, di Quarzo e raramente di Selenite e d'un Talco color di zolfo. La distribuzione del minerale lunghesso il filone è a zone le quali, mentre pendono verso il N., si vanno allargando in profondità verso il S.

Altre importanti ricerche vennero fatte all'*Alpe Agogna* e *Motto Piombino*, località che distano fra di loro di 800^{m} circa, e che con tutta probabilità sono sul' prolungamento di un medesimo filone, parallelo al sopra descritto.

La sua direzione è N. 20° O, taglia quasi ad angolo retto la stratificazione degli schisti, inclinando leggermente all'O.

A *Motto Piombino* la metamorfosi degli schisti incassanti è profondissima, l'eliminazione dell'Allumina è quasi completa, così che hassi piuttosto una Quarzite che l'ordinario Schisto. Le mostre del filone alla superficie sono a liste parallele di Ferro spatico, Calcopirite, Blenda, Pirite di ferro e Quarzo; a soli tre metri di profondità scompaiono affatto lo Spato ferroso e la Calcopirite, ed il filone si compone di Galena purissima con traccie di Blenda e Pirite di ferro, Quarzo cristallino tinto dalla Piromorfite e Schisto decomposto; ad una profondità maggiore havvi quasi esclusivamente Galena.

All'*Alpe Agogna* contiene Blenda, Galena, Pirite di ferro, Quarzo, Dolomite ed una roccia argillo-talcosa che sembra essere stata introdotta nella fessura dalla scomposizione delle pareti durante la formazione del filone. Bellissimi cristalli di Cerusite, di Anglesite, di Blenda e di Dolomite decorano le piccole geodi che vi si trovano in grande abbondanza.

Il valore industriale di così importante scoperta del Cav. Francfort verrà in seguito meglio dimostrato; resta però fin d'ora accertato il fatto dell'esistenza di un sistema di filoni piombiferi negli Schisti delle indicate località che son eziandio quelli racchiudenti i filoni auriferi della valle Anzasca e della valle Toppa ».

Qui termina, Colleghi onorevolissimi, il resoconto dei lavori fatti dalla Classe nel periodo dei due anni 1860 e 1861; ma questa relazione sarebbe meno compiuta delle precedenti quando non facesse conoscere il risultamento delle osservazioni meteorologiche state fatte alla Specola dell'Accademia durante il nominato biennale periodo; perciò io vi aggiungo le Tavole mensili di tali osservazioni, limitate sinora alle barometriche, termometriche, anemoscopiche, igrometriche, ietometriche, atmidometriche, ed allo stato dell'atmosfera. Inoltre valendomi, per così dire, dell'opportunità, vi aggiungo ancora una breve Nota comunicatami dal nostro Presidente Barone Plana, la quale mentre stabilisce la cifra rappresentante il clima di questa capitale, corregge una menda sfuggita a pag. LXXII del Tomo XIV, Serie II, nella stampa di una tavola indicante la temperatura del fiume Po e della fontana del real castello del Valentino, ove detta temperatura è espressa in gradi del termometro di Reaumur in vece di esserlo in scala centigrada. La Nota è quella che segue:

« La température climatérique de Turin est de + 13°, 04 cent.; si l'on

veut la température du sol hors de la ville, au jardin du Valentino par exemple, il faut ajouter 0°, 267.

Cette fraction est due au rayonnement de la Terre vers le Ciel. La température + 13°, 04 est celle qui serait marquée par un thermomètre placé au nord, à l'ombre, à la hauteur de cinq ou six mètres au dessus de la terre.

La température de la fontaine du Valentino est inférieure de deux degrés; car elle est + 11°, 0 ainsi qu'on le voit par les observations rapportées à la page LXXII du Vol. XIV, Série II des Mémoires de cette Académie des Sciences, où, par méprise, on a qualifié les degrés de Réaumur, tandis qu'ils sont *Centigrades*. Cette différence entre la température climatérique et celle des sources a été remarquée depuis longtemps, et a lieu pour la Norvège et pour l'Italie; et sur le versant des Pyrénées, CORDIER a trouvé une source qui avait une température plus froide de 4 degrés comparativement à la température moyenne de la localité. Il ne faut pas perdre de vue, que pour obtenir la température moyenne d'un lieu avec précision, il faut plusieurs années d'observations, mais n'ayant pas ces observations avec toute confiance, j'ai préféré de déduire la température moyenne de Turin d'une formule empirique exprimée par $(45°, 95) \cos. \theta - (9°, 02)$; où θ désigne la latitude.

Cette formule est applicable à toute l'Italie et même aux latitudes comprises entre 49 et 30 degrés. Je l'ai déduite de trois températures moyennes observées à Paris pendant 29 années, à Milan pendant 70 années, et d'une observation très-importante faite au Caire à l'aide d'un thermomètre placé dans le puits de Joseph à 65 mètres de profondeur, sans aucun contact avec l'eau du puits. La formule de la température moyenne $A \cos. \theta - B$ est celle qu'a été indiquée par BREWSTER; mais il ne faut pas croire qu'elle soit applicable à des zones fort éloignées de l'équateur, et pour chaque zone il faut déterminer les deux coefficients. Celle que je viens de proposer, donnerait des températures moyennes tout-à-fait fausses pour les latitudes boréales qui dépassent 50 degrés. En un mot ces limites sont 49 et 30 degrés.

La température moyenne de Paris est + 10°, 822 C.; celle de Milan + 12°, 20 C.; celle du Caire + 22°, 34 C.

Sur la différence entre la température des sources et la moyenne d'un lieu, M.r DE BUCH a tenté de donner une explication tirée de la quantité de pluie qui tombe en hiver et en été dans la même localité.

A Turin, à la latitude de 45°. 4′, la température *moyenne*, due à

la *seule* chaleur *Solaire* serait $+25^\circ, 46$; tandis que le refroidissement *moyen*, causé par le rayonnement *stellaire*, le rayonnement de *l'atmosphère*; et par l'*échange* de chaleur entre la Terre et les couches atmosphériques monte à $-12^\circ, 40$. La différence $25^\circ, 46 - 12^\circ, 40 = +13^\circ, 06$ de ces deux températures inégales et de sens contraire constitue la quotité de la température climatérique.

En Egypte, au Caire, où la latitude est de 30°. 2′, la différence analogue est $30^\circ, 34 - 8^\circ, 00 = 22^\circ, 34$.

A S.t-Pétersbourg, où la latitude est de 59°. 56′, la différence correspondante est de $19^\circ, 6 - 16^\circ, 1 = 3^\circ, 5$.

On voit par ces exemples la part avec laquelle chacune des deux causes, l'une échauffante et l'autre refroidissante, concourent au maintien perpétuel de la température climatérique à Turin, au Caire, et à S.t-Pétersbourg.

Sur le cercle polaire *arctique*, à la latitude de 66°. 32′, où la chaleur solaire est égale à $+13^\circ, 32$, il y a des localités dans lesquelles elle est presque entièrement détruite par les deux causes refroidissantes (stellaire et atmosphérique), si l'on doit estimer la température *moyenne*, non d'après la Table de Kaemtz, mais d'après celle qu'on voit à la page 522 du Tome 5 des *Notices Scientifiques* d'Arago.

Osservazioni meteorologiche fatte alla Specola dell'Accademia R. delle Scienze di Torino, elevata m. 284,50 sopra il livello del mare, nel mese di ottobre 1860

GIORNI del MESE	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE SERA ore 3	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MATTINO ore 9	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MEZZODÌ	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *minima*	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *massima*	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 direzione	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 forza	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ direzione	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ forza	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 direzione	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 forza	IGROMETRO MATTINO ore 9	IGROMETRO MEZZODÌ	IGROMETRO SERA ore 3	IETOMETRO MATTINO ore 9	IETOMETRO MEZZODÌ	IETOMETRO SERA ore 3	ATMIDOMETRO MATTINO ore 9
	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	direzione	forza	direzione	forza	direzione	forza	gr. cent.	gr. cent.	gr. cent.	millim.	millim.	millim.	millim.
1	744,40	743,72	742,52	743,06	742,26	740,90	+16,2	+17,2	+18,5	+15,9	+15,8	+15,0	+14,5	+16,0	+11,5	+12,8	+16,4	N.O.	5	O.S.O.	6	S.E.	5	46,0	47,0	46,0	pioggia 20	pioggia 2		0
2	738,78	739,30	739,36	737,47	737,34	737,12	16,1	21,5	23,8	17,9	23,0	27,0	15,0	20,5	21,7	11,4	21,2	O.S.O.	5	O.S.O.	10	S.E.	5	47,0	39,0	37,0	3			0
3	745,34	745,52	745,48	743,84	743,15	742,83	17,5	24,8	27,1	17,6	25,0	23,6	17,2	20,0	20,8	11,4	21,8	S.O.	5	E.	0	S.	5	36,0	31,0	28,0				13
4	742,26	742,30	741,54	740,84	740,40	739,37	17,0	21,0	23,2	15,8	19,8	20,0	15,0	17,1	18,5	9,0	20,8	S.O.	3	N.E.	5	S.E.	5	39,0	35,0	34,0				5
5	746,24	744,66	744,30	744,95	743,01	742,22	15,8	18,8	22,4	13,1	20,9	22,5	12,1	17,0	18,0	9,6	18,8	N.N.E.	5	E.N.E.	15	N.E.	5	41,0	40,0	38,0				6
6	744,46	744,70	744,18	743,87	742,62	741,76	16,6	22,4	25,2	15,0	23,0	21,1	14,0	19,0	19,2	6,6	19,6	O.S.O.	5	S.S.O.	6	N.E.	5	43,0	41,0	36,0				13
7	748,54	748,40	747,76	746,91	746,22	745,29	18,6	23,2	25,6	17,9	24,5	22,8	16,9	24,0	19,5	9,8	24,4	S.O.	3	N.N.E.	2	E.N.E.	5	44,0	40,0	35,0				6
8	744,26	743,44	741,68	742,81	741,15	739,21	17,1	24,1	25,6	16,9	24,0	22,5	15,0	20,1	20,0	9,0	20,6	O.S.O.	3	E.S.E.	2	O.	5	43,0	41,0	35,0				4
9	735,66	733,50	731,44	734,15	731,64	729,50	17,8	20,8	21,6	17,8	19,9	18,3	15,5	19,0	17,7	9,4	20,4	N.N.E.	3	S.O.	10	O.	5	43,0	40,0	37,0				7
10	738,02	739,14	739,60	736,84	737,33	737,72	15,0	20,2	20,8	17,0	20,4	21,0	14,5	16,0	15,8	9,0	16,0	N.N.O.	15	S.	15	N.N.E.	25	31,0	26,0	25,0				10
11	738,64	737,60	736,72	737,60	736,23	735,16	13,8	16,5	18,2	12,1	13,4	12,8	10,4	11,5	12,0	3,6	15,1	E.N.E.	3	E.N.E.	3	N.E.	2	33,0	33,0	30,0				9
12	727,46	725,80	724,90	726,63	724,76	723,89	12,2	14,0	13,8	8,0	10,5	9,0	7,8	10,0	8,3	4,4	10,8	O.S.O.	5	N.	3	O.	6	36,0	36,0	35,0	6		pioggia 3	6
13	734,78	737,00	737,28	733,86	735,56	735,65	12,8	17,2	18,8	12,0	16,4	15,5	10,0	14,0	13,7	9,8	14,2	E.S.E.	5	O.	5	N.E.	5	37,0	36,0	29,0				4
14	739,24	738,00	737,18	738,46	736,85	736,00	11,6	14,7	15,0	9,9	14,5	12,1	8,1	11,8	11,0	3,4	14,0	N.E.	5	E.N.E.	10	N.E.	15	37,0	37,0	34,0				5
15	737,82	738,98	739,32	737,16	737,38	737,22	10,6	18,5	22,6	7,2	18,0	17,2	7,0	14,0	14,8	1,6	14,2	S.O.	10	O.	10	O.N.O.	5	40,0	39,0	34,0				2
16	743,40	743,54	743,70	742,61	741,80	741,43	11,6	19,5	23,9	13,5	18,3	19,5	11,0	14,9	16,6	4,2	15,2	O.S.O.	3	N.E.	5	O.	5	39,0	39,0	34,0				4
17	743,40	743,70	743,64	742,49	741,54	741,30	12,6	23,0	24,5	13,5	20,0	19,0	10,3	16,5	15,6	4,2	17,0	O.S.O.	3	O.S.O.	5	N.E.	5	40,0	38,0	34,0				6
18	743,60	743,84	743,12	742,62	741,78	740,72	13,2	22,2	25,0	13,0	20,2	19,8	11,8	16,1	16,3	5,4	16,6	O.S.O.	5	N.N.O.	2	N.	5	40,0	39,0	35,0				2
19	741,06	741,96	742,20	740,03	740,04	739,99	13,7	21,1	23,5	15,1	18,9	18,0	13,0	17,5	17,1	6,6	18,2	O.S.O.	5	S.O.	7	O.S.O.	5	40,0	40,0	38,0				1
20	743,92	744,20	743,90	742,82	742,05	741,62	14,2	22,9	24,0	14,9	21,4	18,8	13,0	18,0	17,4	6,6	18,2	E.S.E.	2	O.N.O.	4	N.O.	5	42,0	41,0	39,0				5
21	746,00	745,64	745,36	745,02	744,40	743,87	13,2	15,3	17,4	21,3	15,0	15,0	10,5	14,0	14,9	7,8	15,2	N.E.	5	E.N.E.	5	S.O.	5	43,0	43,0	43,0				3
22	745,50	745,48	745,42	744,46	743,98	743,69	13,7	17,5	19,4	14,3	18,0	17,4	13,2	16,5	17,0	11,0	17,0	O.S.O.	3	N.N.E.	3	E.S.E.	5	45,0	44,0	42,0				3
23	747,14	747,10	747,18	745,89	745,23	744,80	15,4	20,6	24,8	16,3	22,3	21,0	15,0	18,0	18,5	11,4	19,6	S.O.	8	O.	6	O.	5	43,0	41,0	31,0				1
24	746,64	746,52	746,50	745,43	744,48	744,10	15,1	22,0	25,0	16,5	21,0	20,8	13,0	18,0	17,5	6,2	19,0	O.S.O.	5	S.S.O.	15	O.	5	42,0	40,0	40,0				3
25	746,90	746,36	746,16	745,70	744,21	743,80	15,0	22,9	24,7	14,5	18,7	20,5	11,8	16,0	17,4	5,8	17,8	S.O.	5	N.E.	0	N.	3	42,0	40,0	38,0				4
26	747,00	746,38	746,64	746,02	744,80	744,78	13,2	18,2	20,5	10,8	17,5	16,4	10,3	15,0	15,2	9,0	17,2	O.	8	N.	5	E.N.E.	5	43,0	43,0	42,0				4
27	746,26	746,04	745,84	745,25	745,41	743,86	13,4	18,6	21,5	11,3	18,2	17,0	10,5	15,5	16,6	8,2	17,0	N.E.	3	O.S.O.	7	O.	5	45,0	45,0	42,0				0
28	745,22	745,06	744,98	744,14	743,35	742,61	14,0	19,2	24,7	12,0	19,0	20,0	11,5	15,9	17,1	10,8	17,8	S.O.	10	O.N.O.	10	O.	5	44,0	44,0	40,0	1			3
29	743,44	743,50	743,18	742,38	742,12	741,60	13,8	16,5	18,2	12,5	15,9	15,6	11,7	15,0	15,3	9,4	17,3	N.E.	5	E.	3	E.	5	45,0	45,0	44,0				1
30	744,00	743,78	743,52	742,87	742,22	741,93	14,4	18,0	18,3	15,5	17,2	15,7	14,0	15,0	15,4	11,8	17,6	O.	5	N.N.O.	5	O.S.O.	5	45,0	44,0	42,0				3
31	745,60	744,96	744,38	744,75	744,09	743,45	12,1	12,3	12,6	7,0	8,3	8,1	7,0	7,5	7,8	6,4	13,8	N.E.	10	N.N.E.	15	N.E.	5	45,0	45,0	45,0	4			0

STATO DELL'ATMOSFERA

GIORNI del MESE	MATTINO A ORE 9	MEZZODÌ	SERA A ORE 3
1	Annuvolato. – *Poi pioggia.*	Pioggia.	Annuvolato. – *Poi pioggia.*
2	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Nuvole squarciate.
3	Sereno puro.	Sereno.	Sereno con vapori.
4	Quasi coperto.	Nugoli sottili.	Sereno con vapori.
5	Mezzo annuvolato.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
6	Sereno.	Sereno puro.	Sereno puro.
7	Sereno con vapori.	Sereno.	Sereno con vapori.
8	Sereno con vapori.	Sereno.	Sereno con vapori.
9	Nugoli sottili.	Cielo velato.	Nugoli sottili.
10	Sereno ventoso.	Sereno con vapori.	Sereno ventoso.
11	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.	Coperto chiaro. – *Poi pioggia.*
12	Quasi coperto.	Annuvolato. – *Poi pioggia.*	Pioggia.
13	Sereno.	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.
14	Mezzo coperto.	Nuvole sparse.	Annuvolato.
15	Sereno con nebbia.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
16	Sereno con nebbia.	Nugoli sottili.	Nuvolette.
17	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
18	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
19	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.
20	Sereno con nebbia.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.
21	Coperto nebbioso.	Coperto.	Coperto.
22	Coperto nebbioso.	Coperto.	Coperto.
23	Coperto.	Nuvole rotte.	Nuvolette.
24	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
25	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
26	Nebbia folta.	Coperto chiaro.	Nugoli sottili.
27	Coperto con nebbia.	Coperto chiaro.	Nuvole rotte. - *Poi poca pioggia.*
28	Nuvole rotte.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
29	Coperto.	Coperto.	Coperto.
30	Coperto.	Coperto chiaro.	Annuvolato. - *Poi pioggia.*
31	Annuvolato.	Annuvolato.	Annuvolato.

Osservazioni meteorologiche fatte alla Specola dell'Accademia R. delle Scienze di Torino, elevata m. 284, 50 sopra il livello del mare, nel mese di novembre 1860

Giorni del mese	Barometro — Altezze osservate: mattino ore 9	Altezze osservate: mezzodì	Altezze osservate: sera ore 3	Altezze ridotte: mattino ore 9	Altezze ridotte: mezzodì	Altezze ridotte: sera ore 3	Termom. centigrado unito al barometro: mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	Termom. centigrado al mezzodì: mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	Termometro centigrado a tramontana: mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	*minima*	*massima*	Anemoscopio: mattino ore 9 — direzione	forza	mezzodì — direzione	forza	sera ore 3 — direzione	forza	Igrometro: mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	Ietometro: mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	Atmidometro — mattino ore 9
	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	direzione	forza	direzione	forza	direzione	forza	gr. cent.	gr. cent.	gr. cent.	millim.	millim.	millim.	millim.
1	742, 46	742, 00	741, 48	741, 74	741, 16	740, 75	+11, 1	+12, 1	+11, 2	+ 8, 0	+ 9, 0	+ 9, 0	+ 7, 4	+ 8, 2	+ 8, 6	+ 6, 6	+ 9, 2	N.E.	5	N.N.E.	6	N.E.	5	46, 0	46, 0	45, 0				3
2	741, 38	740, 64	740, 40	740, 60	739, 55	738, 80	11, 6	15, 1	18, 5	11, 3	15, 0	14, 0	8, 6	12, 1	11, 9	5, 4	13, 2	S.O.	10	O.	5	E.N.E.	5	46, 0	45, 0	43, 0				4
3	739, 20	739, 18	738, 68	738, 45	737, 97	737, 09	11, 4	15, 2	16, 4	9, 2	15, 0	14, 1	7, 0	11, 9	11, 2	2, 0	12, 2	S.	3	O.S.O.	5	O.N.O.	5	45, 0	44, 0	42, 0				0
4	740, 34	740, 16	739, 74	739, 99	739, 65	739, 20	8, 8	9, 3	9, 6	5, 0	6, 1	6, 1	5, 0	5, 7	5, 8	3, 0	6, 0	N.E.	10	E.N.E.	12	N.E.	10	43, 0	43, 0	43, 0				3
5	741, 18	741, 30	740, 92	740, 81	740, 73	740, 28	8, 1	9, 8	10, 5	6, 0	9, 0	8, 3	5, 2	8, 0	7, 4	4, 4	8, 6	N.N.E.	3	E.	5	N.N.E.	3	45, 0	45, 0	44, 0				1
6	738, 56	737, 40	737, 44	738, 25	737, 05	737, 15	7, 6	8, 0	7, 5	4, 1	4, 0	1, 5	4, 2	4, 0	1, 3	3, 6	4, 2	N.E.	5	N.	12	N.	25	45, 0	45, 0	44, 0		pioggia 3		2
7	734, 86	734, 36	734, 40	734, 50	733, 58	733, 60	8, 1	11, 6	11, 8	5, 5	10, 1	7, 8	4, 8	6, 0	6, 5	0, 6	7, 0	O.	7	N.	3	E.N.E.	25	45, 0	44, 0	41, 0	pioggia 5			
8	735, 62	735, 46	736, 00	735, 34	735, 03	735, 19	7, 4	8, 7	11, 9	3, 0	9, 9	10, 6	1, 3	6, 1	6, 5	- 3, 6	6, 6	O.S.O.	5	S.O.	6	S.O.	4	42, 0	39, 0	39, 0				
9	735, 64	734, 66	734, 62	735, 72	734, 05	733, 57	4, 4	10, 2	13, 9	4, 1	11, 2	10, 0	1, 2	7, 2	7, 5	4, 7	7, 5	O.	5	S.O.	8	S.O.	15	39, 0	39, 0	36, 0				
10	738, 66	739, 74	739, 46	738, 70	738, 72	738, 31	4, 7	13, 6	14, 7	7, 0	12, 0	10, 0	4, 2	8, 3	7, 9	2, 3	8, 3	O.S.O.	10	S.S.O.	10	S.O.	8	40, 0	39, 0	35, 0				
11	739, 26	738, 50	737, 38	739, 33	738, 44	737, 04	4, 4	5, 6	7, 9	3, 5	7, 6	6, 5	3, 0	5, 7	6, 0	2, 2	8, 4	N.N.E.	3	N.O.	2	E.N.E.	5	41, 0	41, 0	41, 0				
12	738, 90	738, 54	738, 46	738, 91	738, 32	738, 02	5, 0	6, 9	8, 6	5, 0	7, 0	7, 0	4, 5	6, 3	6, 5	+ 2, 8	6, 6	N.E.	2	E.	4	E.S.E.	5	41, 0	42, 0	42, 0				
13	737, 00	736, 66	736, 20	736, 92	736, 19	735, 24	5, 7	9, 1	13, 2	5, 1	9, 0	10, 2	5, 0	8, 3	9, 0	3, 6	9, 2	S.O.	5	S.S.O.	10	S.O.	5	42, 0	44, 0	44, 0	11	1		
14	736, 44	736, 16	736, 08	736, 28	735, 66	735, 33	6, 4	9, 3	11, 4	6, 9	9, 0	9, 2	6, 0	8, 9	9, 1	4, 0	9, 8	S.O.	1	E.	0	O.	5	45, 0	45, 0	45, 0	13			
15	734, 72	734, 74	734, 92	734, 42	733, 60	733, 45	7, 6	14, 6	17, 5	8, 7	13, 5	14, 0	6, 0	10, 1	11, 6	1, 8	10, 6	S.S.E.	2	O.S.O.	6	S.O.	5	46, 0	46, 0	43, 0				
16	733, 94	734, 48	734, 24	733, 71	733, 49	733, 20	7, 0	13, 4	13, 8	6, 1	15, 5	10, 7	5, 8	11, 3	10, 4	1, 8	11, 8	S.O.	6	O.S.O.	3	O.S.O.	5	46, 0	46, 0	46, 0				
17	733, 86	733, 40	732, 92	733, 60	732, 38	732, 12	7, 3	8, 6	11, 8	5, 5	8, 0	9, 2	5, 5	7, 7	9, 0	4, 6	8, 0	O.S.O.	3	S.O.	10	O.S.O.	5	46, 0	46, 0	46, 0				
18	724, 28	726, 90	727, 82	723, 71	726, 30	727, 23	10, 0	10, 3	10, 2	12, 9	12, 5	11, 1	9, 7	10, 5	9, 2	6, 8	10, 6	O.N.O.	50	O.N.O.	65	O.N.O.	30	44, 0	40, 0	36, 0	1			
19	735, 90	735, 70	736, 40	735, 54	735, 15	735, 83	8, 1	9, 7	9, 9	10, 8	11, 0	9, 5	9, 0	9, 3	8, 7	3, 3	9, 5	O.N.O.	35	O.N.O.	60	N.O.	45	34, 0	30, 0	30, 0				
20	740, 28	740, 60	740, 56	740, 22	739, 76	739, 47	5, 6	12, 1	14, 3	5, 0	10, 0	10, 0	3, 1	8, 1	7, 2	- 0, 4	8, 3	O.S.O.	5	N.	2	S.S.E.	5	38, 0	37, 0	35, 0				
21	739, 98	740, 62	740, 38	740, 08	739, 80	739, 46	4, 2	12, 0	12, 8	3, 8	10, 7	10, 6	2, 0	7, 0	7, 5	3, 1	7, 8	O.S.O.	5	O.S.O.	10	O.N.O.	5	40, 0	37, 0	37, 0				
22	739, 08	738, 04	737, 86	739, 18	737, 98	737, 50	4, 2	5, 6	8, 1	3, 0	4, 5	5, 2	2, 5	4, 5	5, 1	0, 6	4, 8	N.N.E.	4	O.	8	S.O.	5	40, 0	40, 0	40, 0				
23	733, 56	732, 40	731, 96	733, 62	732, 38	731, 89	4, 6	5, 3	5, 7	2, 0	3, 1	3, 1	1, 5	3, 0	3, 2	+ 0, 6	3, 4	N.E.	10	O.N.O.	5	E.	5	42, 0	43, 0	43, 0	6			
24	728, 60	728, 74	730, 44	728, 69	728, 50	729, 86	4, 4	7, 2	10, 0	3, 0	10, 0	6, 6	2, 5	6, 1	6, 2	0, 5	6, 8	O.	10	O.	5	E.	5	44, 0	45, 0	45, 0	17			
25	728, 84	728, 50	728, 96	728, 75	728, 24	728, 62	5, 9	7, 4	8, 1	4, 9	6, 6	6, 1	4, 5	5, 0	5, 6	1, 8	7, 4	S.O.	10	N.	8	E.	5	45, 0	45, 0	45, 0	11			
26	731, 84	731, 16	730, 88	731, 80	731, 06	730, 71	5, 4	6, 0	6, 6	5, 0	5, 8	5, 0	4, 2	5, 1	4, 8	3, 6	6, 2	N.	10	E.N.E.	2	N.N.E.	5	45, 0	46, 0	46, 0	7	2		
27	729, 34	729, 62	730, 38	729, 33	729, 35	729, 88	5, 2	7, 4	9, 4	4, 0	7, 0	6, 7	4, 0	6, 3	6, 5	3, 0	7, 0	O.S.O.	5	O.S.O.	5	S.O.	5	46, 0	46, 0	46, 0	7			
28	734, 30	736, 06	737, 40	734, 11	735, 28	736, 65	6, 7	11, 6	11, 4	6, 8	12, 3	9, 0	6, 0	10, 0	8, 5	4, 4	10, 0	N.E.	5	S.E.	5	O.S.O.	6	46, 0	45, 0	47, 0				
29	743, 54	743, 40	742, 94	743, 11	742, 52	742, 34	8, 6	9, 8	10, 0	9, 0	9, 5	9, 1	8, 1	9, 1	8, 8	7, 8	9, 6	E.N.E.	5	E.S.E.	3	S.S.E.	5	47, 0	47, 0	47, 0		5		
30	740, 32	739, 18	739, 14	739, 79	738, 58	738, 50	9, 5	10, 1	10, 5	9, 0	10, 0	9, 2	9, 0	9, 1	8, 9	8, 4	9, 8	E.N.E.	10	N.E.	10	N.N.E.	5	47, 0	47, 0	47, 0		12		

Per causa del gelo non si è tenuto conto dell'evaporazione.

STATO DELL'ATMOSFERA

GIORNI del MESE	MATTINO A ORE 9	MEZZODÌ	SERA A ORE 3
1	Annuvolato.	Annuvolato.	Annuvolato.
2	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.
3	Sereno con nebbia.	Sereno con vapori.	Sereno.
4	Coperto.	Coperto.	Coperto.
5	Coperto.	Coperto.	Coperto. – *Poi poca pioggia.*
6	Pioggia.	Pioggia.	Pioggia.
7	Sereno con vapori.	Nuvolette.	Nuvole sparse.
8	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno.
9	Sereno con vapori.	Sereno.	Sereno.
10	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
11	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.	Coperto.
12	Coperto nebbioso.	Coperto.	Coperto. – *Poi pioggia.*
13	Pioggia.	Coperto chiaro.	Nugoli sottili. - *Poi pioggia.*
14	Coperto piovigginoso.	Coperto nebbioso.	Coperto.
15	Nebbia bassa.	Nuvole a liste.	Nugoli sottili.
16	Sereno con nebbia.	Nugoli sottili.	Coperto.
17	Nebbia folta.	Coperto nebbioso.	Coperto. – *Poi pioggia.*
18	Sereno e vento.	Sereno e vento.	Sereno e vento.
19	Sereno e vento.	Sereno e vento.	Sereno e vento.
20	Sereno con nebbia.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
21	Sereno con nebbia.	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.
22	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.	Coperto. – *Poi pioggia.*
23	Coperto oscuro.	Annuvolato.	Annuvolato piovigginoso. – *Poi pioggia.*
24	Annuvolato.	Nuvole rotte.	Annuvolato. - *Poi pioggia.*
25	Nuvole rotte.	Nuvole rotte.	Annuvolato. - *Poi pioggia.*
26	Annuvolato piovigginoso. - *Poi pioggia.*	Annuvolato piovigginoso.	Annuvolato piovigginoso. - *Poi pioggia.*
27	Coperto nebbioso.	Coperto chiaro.	Annuvolato.
28	Sereno con nebbia.	Nuvole rotte.	Coperto.
29	Coperto nebbioso. – *Poi pioggia.*	Pioviggina.	Coperto piovigginoso.
30	Pioggia.	Annuvolato.	Annuvolato. – *Poi pioggia.*

Osservazioni meteorologiche fatte alla Specola dell'Accademia R. delle Scienze di Torino, elevata m. 284,50 sopra il livello del mare, nel mese di dicembre 1860

GIORNI del MESE	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE SERA ore 3	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MATTINO ore 9	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MEZZODÌ	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *minima*	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *massima*	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 direzione	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 forza	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ direzione	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ forza	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 direzione	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 forza	IGROMETRO MATTINO ore 9	IGROMETRO MEZZODÌ	IGROMETRO SERA ore 3	IETOMETRO MATTINO ore 9	IETOMETRO MEZZODÌ	IETOMETRO SERA ore 3	ATMIDOMETRO MATTINO ore 9
	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	direzione	forza	direzione	forza	direzione	forza	gr. cent.	gr. cent.	gr. cent.	millim.	millim.	millim.	millim.
1	738,94	737,60	737,40	738,71	737,08	736,54	+ 7,0	+ 9,4	+12,3	+ 4,3	+11,2	+ 9,4	+ 3,5	+ 8,7	+ 8,9	+ 2,0	+10,0	O.S.O.	8	O.	10	E.N.E.	5	48,0	48,0	49,0	pioggia 5			
2	736,46	735,10	735,18	736,28	734,73	734,74	6,6	8,2	8,8	4,0	7,0	6,2	3,2	6,0	6,1	2,4	9,4	N.E.	3	N.E.	2	N.N.E.	4	49,0	49,0	49,0				
3	736,84	736,64	737,14	736,66	736,30	736,75	6,6	8,0	8,4	6,1	7,0	7,0	6,0	6,5	6,6	4,6	7,2	O.N.O.	5	N.N.E.	3	N.	5	49,0	49,0	50,0				
4	732,94	731,82	731,46	732,79	731,64	731,21	6,4	6,6	7,2	4,0	5,8	5,5	3,9	5,2	5,4	3,6	5,8	O.S.O.	10	S.O.	4	N.O.	5	49,0	51,0	51,0	14	pioggia 6		
5	731,84	731,64	732,38	731,69	731,25	731,78	6,4	8,4	10,2	6,1	8,0	8,5	5,9	7,1	7,4	4,2	7,6	N.N.E.	5	E.	2	S.S.E.	5	51,0	51,0	51,0	11			
6	735,52	735,72	736,10	735,44	735,11	735,03	5,7	12,0	14,1	5,1	10,0	8,6	3,5	8,0	8,1	0,0	8,4	O.S.O.	5	O.S.O.	6	O.S.O.	3	52,0	51,0	51,0				
7	734,72	732,82	732,18	734,66	732,71	732,08	5,6	6,0	5,9	4,1	4,5	4,0	4,0	4,2	3,5	2,5	4,4	N.N.E.	4	N.E.	2	N.N.O.	6	51,0	51,0	52,0	2	13	pioggia 12	
8	725,18	724,08	723,66	725,15	723,93	723,71	5,4	6,4	6,6	4,3	5,0	5,0	4,0	4,5	5,0	2,0	5,6	O.S.O.	4	O.N.O.	4	N.N.E.	5	52,0	52,0	52,0	18			
9	715,20	713,18	713,12	715,21	713,12	712,87	5,1	5,8	7,4	3,7	5,5	6,6	3,5	5,3	6,0	3,0	5,8	S.O.	10	O.N.O.	10	S.O.	5	52,0	53,0	53,0	19	8		
10	721,74	723,22	724,82	721,34	722,66	724,08	8,6	10,0	11,6	13,0	15,0	14,6	12,0	13,0	13,1	5,0	13,2	N.O.	35	N.O.	45	O.N.O.	55	49,0	43,0	42,0				
11	725,62	724,10	725,44	725,51	723,71	725,00	6,1	8,5	8,9	4,0	9,0	6,1	4,0	7,1	6,0	2,2	7,6	E.N.E.	25	N.N.E.	30	E.S.E.	3	43,0	43,0	44,0				
12	728,76	728,52	728,82	728,78	727,85	727,94	5,0	10,8	12,6	2,0	10,0	12,0	1,5	8,3	9,5	- 0,6	9,6	O.S.O.	6	S.O.	15	S.O.	6	48,0	45,0	43,0				
13	731,30	732,10	732,58	731,43	731,69	731,78	4,0	8,6	11,9	3,0	10,0	9,2	2,0	7,1	7,0	1,0	9,0	O.S.O.	5	O.S.O.	7	S.O.	15	47,0	46,0	41,0				
14	736,26	736,42	736,70	736,24	735,83	735,90	5,2	10,0	11,8	4,2	11,0	8,1	3,8	7,9	6,7	+ 1,0	8,0	S.O.	8	S.O.	18	O.S.O.	10	44,0	43,0	41,0				
15	737,12	737,34	737,62	737,27	737,23	737,37	3,8	6,0	7,2	1,1	6,3	4,5	1,0	4,0	4,1	- 1,4	6,4	N.N.E.	10	E.N.E.	10	N.N.E.	15	46,0	45,0	45,0				
16	736,10	734,30	733,22	736,22	734,31	733,16	4,1	5,0	5,6	2,0	4,0	3,0	2,0	3,1	3,0	+ 1,0	3,8	E.N.E.	6	E.	5	E.N.E.	5	47,0	48,0	48,0				
17	728,26	726,62	726,54	728,47	726,72	726,39	3,3	4,3	6,4	0,9	3,0	3,0	0,5	2,0	2,9	0,0	4,1	N.E.	3	E.	3	S.O.	5	50,0	50,0	49,0				
18	727,70	727,84	728,66	728,04	728,08	728,91	2,2	3,1	3,0	- 1,0	- 1,0	- 1,5	- 1,3	- 1,2	- 1,0	- 4,2	- 1,0	N.O.	0	O.S.O.	8	O.S.O.	5	51,0	51,0	51,0				
19	733,64	731,88	731,06	734,13	732,27	731,44	1,0	1,8	1,9	2,0	1,0	1,0	2,5	1,5	1,0	5,8	1,0	N.E.	8	N.E.	15	N.N.O.	15	51,0	51,0	52,0		neve 37	neve 40	
20	726,80	727,52	728,70	727,38	727,47	728,36	0,2	5,6	8,0	+ 3,5	+ 5,1	+ 6,0	+ 0,8	+ 3,0	+ 3,1	10,6	+ 4,0	O.S.O.	25	O.S.O.	30	O.S.O.	5	49,0	41,0	42,0	neve 75			
21	731,30	730,16	729,42	731,99	730,61	729,79	- 0,8	1,3	2,0	- 4,2	0,9	- 1,3	- 4,3	0,9	- 1,5	8,4	2,2	O.S.O.	5	S.O.	5	O.S.O.	6	46,0	46,0	45,0				
22	725,80	724,54	724,22	726,65	725,25	724,82	2,2	- 1,0	0,0	8,5	- 5,9	5,3	8,5	- 7,0	6,0	12,3	- 6,0	O.S.O.	5	N.E.	5	S.S.O.	0	46,0	46,0	45,0				
23	729,00	729,70	730,60	730,07	730,32	730,71	4,0	0,2	4,2	6,4	+ 2,3	+ 0,6	7,0	1,0	1,1	11,5	1,0	E.	3	O.	4	N.E.	0	46,0	47,0	44,0				
24	731,40	729,76	729,80	732,40	730,52	730,47	3,4	1,4	- 0,6	5,0	- 3,0	- 4,5	5,0	3,0	4,9	9,6	2,4	S.O.	8	O.N.O.	4	O.	6	46,0	46,0	44,0	11	7		
25	728,80	727,82	727,44	729,73	728,49	728,00	2,8	0,6	+ 0,4	3,0	0,0	0,4	3,0	1,0	0,3	7,4	+ 0,2	O.S.O.	5	O.S.O.	5	S.O.	5	45,0	46,0	46,0				
26	730,48	730,74	731,08	731,22	731,33	731,65	1,2	+ 0,1	0,3	1,0	1,0	1,0	2,0	2,1	1,2	2,8	0,6	O.N.O.	10	N.E.	5	O.N.O.	5	46,0	47,0	47,0	35			
27	732,44	731,62	731,46	733,18	732,04	731,80	1,2	1,5	2,2	0,5	+ 1,0	+ 1,3	0,7	+ 0,8	+ 1,3	6,8	1,6	O.S.O.	5	O.S.O.	5	O.S.O.	5	48,0	48,0	48,0				
28	729,50	729,14	728,76	730,28	729,83	729,48	1,6	- 0,8	- 1,0	4,0	- 0,4	- 1,1	4,2	- 1,0	- 1,5	6,6	1,2	S.O.	3	O.S.O.	0	S.O.	5	49,0	50,0	51,0				
29	739,00	741,14	741,82	739,83	741,24	741,71	2,0	+ 4,2	+ 6,0	1,5	+ 4,5	+ 4,9	1,7	+ 2,6	+ 3,5	9,0	3,0	O.S.O.	3	S.O.	25	S.O.	5	51,0	46,0	37,0				
30	744,30	742,74	741,76	745,11	743,23	741,98	1,8	1,0	3,2	+ 0,1	1,0	1,0	0,2	0,3	0,4	6,2	0,5	N.E.	10	E.N.E.	10	N.N.E.	3	46,0	45,0	45,0				
31	735,00	734,16	734,46	735,81	734,27	734,49	1,8	4,2	4,8	- 1,0	2,0	1,0	1,7	0,0	- 0,6	7,8	0,2	S.O.	5	E.	3	O.	5	47,0	45,0	45,0				

Per causa del gelo non si è tenuto conto dell'evaporazione.

STATO DELL'ATMOSFERA

GIORNI del MESE	MATTINO A ORE 9	MEZZODÌ	SERA A ORE 3
1	Nebbia bassa.	Sereno.	Nugoli sottili.
2	Nebbia folta.	Coperto.	Nuvole rotte.
3	Coperto.	Pioviggina.	Pioviggina. – *Poi pioggia.*
4	Pioggia.	Pioggia.	Pioggia.
5	Coperto nebbioso.	Annuvolato.	Nuvole rotte.
6	Sereno con nebbia.	Nuvole a liste.	Coperto chiaro. – *Poi pioggia.*
7	Pioggia.	Pioggia.	Pioggia.
8	Coperto.	Annuvolato.	Annuvolato. – *Poi pioggia.*
9	Pioggia.	Pioggia.	Annuvolato.
10	Nuvole a liste.	Sereno con vapori e vento.	Sereno con vapori e vento.
11	Nuvole a strati.	Quasi annuvolato. - *Poi pioggia.*	Annuvolato.
12	Nuvole sparse.	Nuvole a liste.	Nuvole a liste.
13	Sereno con nebbia.	Sereno puro.	Sereno con vapori.
14	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
15	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
16	Annuvolato.	Annuvolato.	Annuvolato.
17	Coperto nebbioso.	Coperto.	Nuvole sparse.
18	Nebbia folta.	Nebbia folta.	Nebbia folta.
19	Coperto nebbioso. - *Poi neve.*	Neve.	Neve.
20	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
21	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.	Nugoli sottili.
22	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.
23	Sereno con nebbia.	Sereno con nebbia.	Sereno con vapori. – *Poi neve.*
24	Neve.	Neve.	Nugoli sottili.
25	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.	Nevischio. – *Poi neve.*
26	Nebbia folta.	Nebbia folta.	Nebbia folta.
27	Nebbia folta.	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.
28	Nebbia folta.	Nebbia folta.	Nebbia folta.
29	Sereno.	Sereno.	Sereno con vapori.
30	Coperto.	Coperto.	Quasi coperto.
31	Sereno con nebbia.	Sereno con nebbia.	Sereno con nebbia.

Osservazioni meteorologiche fatte alla Specola dell'Accademia R. delle Scienze di Torino, elevata m. 284, 50 sopra il livello del mare, nel mese di maggio 1860

GIORNI del MESE	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE SERA ore 3	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MATTINO ore 9	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MEZZODÌ	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *minima*	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *massima*	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 direzione	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 forza	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ direzione	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ forza	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 direzione	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 forza	IGROMETRO MATTINO ore 9	IGROMETRO MEZZODÌ	IGROMETRO SERA ore 3	IETOMETRO MATTINO ore 9	IETOMETRO MEZZODÌ	IETOMETRO SERA ore 3	ATMIDOMETRO — MATTINO ore 9
	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	direzione	forza	direzione	forza	direzione	forza	gr. cent.	gr. cent.	gr. cent.	millim.	millim.	millim.	millim.
1	739, 40	738, 72	738, 34	738, 62	737, 86	737, 46	+11, 6	+12, 3	+12, 4	+11, 0	+11, 4	+11, 2	+10, 3	+11, 1	+11, 0	+ 9, 6	+11, 2	N.N.E.	20	N.E.	10	E.N.E.	18	43, 0	44, 0	44, 0	pioggia 15	pioggia 11	pioggia 10	0
2	736, 44	736, 16	735, 94	735, 59	734, 79	734, 24	12, 2	16, 6	19, 4	12, 0	15, 8	17, 5	11, 9	15, 6	16, 1	10, 0	17, 6	S.S.E.	7	S.O.	5	N.N.E.	10	47, 0	44, 0	44, 0	50			0
3	734, 60	733, 58	733, 00	733, 29	731, 49	730, 61	16, 1	22, 7	25, 2	16, 2	21, 0	22, 8	16, 0	19, 9	20, 0	10, 1	20, 0	S.S.O.	20	O.S.O.	5	S.O.	18	43, 0	38, 0	36, 0				4
4	736, 20	736, 14	735, 94	734, 53	734, 03	733, 51	19, 1	23, 7	25, 6	18, 0	19, 3	19, 0	16, 8	18, 1	19, 0	11, 0	21, 0	N.N.E.	15	N.N.E.	5	S.S.E.	15	39, 0	35, 0	36, 0				5
5	738, 60	738, 30	737, 58	736, 91	735, 85	734, 91	19, 2	25, 5	27, 4	16, 3	24, 0	23, 1	15, 9	21, 0	21, 5	9, 8	21, 8	N.E.	5	O.S.O.	10	S.O.	5	36, 0	34, 0	32, 0				12
6	735, 32	735, 42	735, 48	733, 27	732, 73	732, 64	22, 4	27, 8	29, 0	19, 8	24, 8	27, 9	19, 5	22, 3	24, 0	10, 7	24, 8	O.N.O.	7	O.S.O.	8	S.O.	5	36, 0	33, 0	29, 0				5
7	740, 40	740, 28	739, 70	739, 02	738, 70	737, 82	16, 6	18, 3	20, 8	12, 0	16, 0	16, 0	11, 8	14, 2	15, 5	11, 8	16, 4	N.E.	25	N.E.	5	E.N.E.	8	36, 0	37, 0	35, 0				12
8	738, 50	737, 84	738, 14	737, 15	737, 27	736, 35	16, 4	18, 2	20, 0	14, 5	17, 4	20, 0	13, 7	15, 2	16, 8	12, 4	17, 2	N.N.O.	10	N.E.	15	N.N.E.	15	40, 0	40, 0	39, 0	1			0
9	741, 88	742, 44	741, 94	740, 45	740, 38	739, 77	17, 0	22, 3	23, 2	15, 0	18, 0	19, 2	14, 0	18, 0	19, 3	11, 5	19, 8	E.N.E.	10	E.	5	N.E.	15	40, 0	39, 0	36, 0				8
10	743, 28	743, 92	743, 42	741, 30	741, 35	740, 52	21, 5	26, 4	29, 2	18, 5	20, 1	25, 9	17, 3	20, 0	23, 2	13, 0	24, 0	N.O.	5	E.	5	O.N.O.	5	39, 0	35, 0	36, 0				8
11	744, 66	744, 46	743, 88	742, 26	741, 51	740, 82	25, 0	29, 6	30, 4	21, 2	24, 0	23, 5	20, 0	22, 9	23, 5	13, 6	26, 2	E.	5	N.E.	3	N.E.	3	36, 0	35, 0	31, 0				4
12	741, 34	740, 56	739, 22	739, 08	737, 82	736, 52	24, 0	28, 0	27, 6	22, 3	23, 6	20, 7	21, 1	23, 5	20, 0	16, 0	25, 0	N.N.E.	10	N.E.	5	N.	30	34, 0	32, 0	30, 0				9
13	736, 40	736, 54	736, 42	734, 83	734, 77	734, 50	18, 3	20, 0	21, 3	13, 2	16, 1	17, 3	12, 8	15, 1	16, 0	12, 9	20, 4	N.	15	N.E.	10	N.E.	10	40, 0	41, 0	40, 0	7	4		3
14	736, 76	737, 14	736, 38	735, 20	734, 85	734, 32	18, 2	24, 4	22, 5	19, 0	20, 5	20, 0	17, 9	19, 3	18, 0	10, 9	23, 6	O.S.O.	6	E.S.E.	15	N.	15	42, 0	35, 0	34, 0				3
15	735, 86	735, 64	735, 68	733, 90	733, 45	733, 39	21, 6	23, 6	24, 4	20, 5	21, 3	21, 0	20, 0	20, 4	20, 2	10, 4	21, 0	O.	4	N.E.	20	E.N.E.	10	39, 0	34, 0	32, 0				8
16	737, 80	737, 84	737, 54	735, 62	734, 97	734, 61	23, 5	29, 3	29, 8	21, 6	25, 2	28, 0	20, 0	24, 6	25, 8	15, 0	27, 2	N.N.E.	5	S.O.	5	S.O.	5	37, 0	32, 0	27, 0				10
17	738, 70	738, 40	737, 43	736, 47	735, 52	734, 43	23, 7	29, 1	30, 2	20, 9	24, 0	26, 8	20, 1	23, 5	24, 9	14, 9	25, 6	N.N.E.	15	E.N.E.	10	N.E.	10	31, 0	30, 0	26, 0				10
18	737, 48	736, 90	735, 88	735, 25	734, 30	733, 23	23, 9	27, 0	27, 5	21, 0	27, 0	19, 3	19, 9	23, 7	20, 2	16, 2	25, 0	N.E.	18	N.	4	E.S.E.	25	32, 0	31, 0	28, 0				11
19	736, 44	736, 46	736, 96	734, 53	733, 91	734, 93	21, 2	26, 6	22, 2	18, 9	19, 5	14, 5	18, 0	19, 8	14, 1	12, 8	21, 0	N.N.E.	6	E.N.E.	10	N.N.O.	3	36, 0	32, 0	31, 0	3		7	5
20	737, 48	738, 50	738, 86	735, 94	736, 94	737, 31	18, 0	18, 2	18, 1	14, 5	14, 1	13, 9	14, 1	13, 3	13, 5	12, 0	15, 6	E.S.E.	5	N.N.O.	20	S.O.	15	40, 0	42, 0	42, 0	13	7	7	4
21	742, 00	742, 16	742, 06	739, 81	739, 26	738, 87	23, 4	29, 3	31, 8	20, 5	27, 5	29, 2	22, 0	25, 4	27, 0	13, 0	26, 4	S.S.E.	2	O.	5	O.	5	42, 0	36, 0	31, 0	9			2
22	741, 54	741, 52	741, 20	739, 04	738, 35	738, 08	26, 8	31, 6	31, 2	23, 5	28, 1	25, 0	23, 0	27, 8	24, 7	15, 8	28, 2	E.N.E.	10	S.	5	N.N.O.	5	31, 0	28, 0	26, 0				12
23	741, 76	741, 02	740, 88	739, 38	738, 06	737, 65	25, 0	29, 8	32, 1	20, 5	28, 5	27, 0	21, 1	26, 0	24, 3	15, 2	26, 0	E.N.E.	16	N.N.E.	5	N.E.	10	32, 0	31, 0	28, 0				6
24	740, 00	740, 34	739, 74	737, 62	737, 22	736, 34	25, 0	31, 2	33, 6	23, 1	30, 0	30, 0	22, 0	27, 9	25, 5	17, 0	27, 9	N.	10	S.S.O.	4	N.O.	5	34, 0	33, 0	30, 0				11
25	740, 80	740, 50	739, 54	738, 36	737, 67	736, 37	25, 5	28, 7	31, 6	22, 0	28, 0	26, 0	21, 0	25, 4	27, 3	15, 6	27, 7	N.E.	5	N.E.	5	S.E.	5	33, 0	32, 0	29, 0				9
26	735, 50	734, 40	733, 00	733, 28	732, 75	730, 19	23, 8	27, 4	28, 8	20, 0	24, 9	24, 0	20, 0	22, 9	24, 0	15, 4	25, 2	E.S.E.	10	E.N.E.	20	E.S.E.	10	35, 0	32, 0	30, 0				7
27	733, 66	732, 84	732, 80	731, 47	730, 62	730, 50	23, 6	23, 8	24, 5	21, 9	23, 4	23, 0	21, 9	22, 8	22, 2	13, 4	23, 2	O.S.O.	80	O.N.O.	80	O.N.O.	85	25, 0	18, 0	18, 0				15
28	740, 16	738, 88	737, 42	737, 98	736, 37	734, 67	23, 3	26, 0	28, 0	19, 7	23, 4	23, 0	19, 5	22, 6	22, 5	10, 3	24, 0	N.E.	3	E.N.E.	10	O.	10	23, 0	19, 0	18, 0				18
29	738, 24	738, 94	738, 60	736, 08	736, 6[illegible]	736, 05	23, 1	24, 5	26, 4	18, 7	23, 0	23, 0	19, 1	21, 6	21, 1	15, 2	21, 8	E.S.E.	20	S.O.	15	O.N.O.	10	17, 0	16, 0	16, 0				15
30	740, 10	738, 62	738, 64	738, 12	736, [illegible]	736, 13	21, 6	24, 8	26, 1	19, 0	23, 2	23, 1	17, 1	21, 2	21, 0	10, 0	22, 1	O.N.O.	10	O.	5	O.	15	20, 0	15, 0	15, 0				11
31	738, 12	737, 78	737, 54	736, 08	735, [illegible]	734, 63	22, 1	27, 3	29, 4	18, 3	23, 6	24, 1	19, 1	23, 4	22, 5	10, 4	25, 4	E.N.E.	3	S.S.E.	5	S.S.E.	25	22, 0	20, 0	17, 0				12

STATO DELL'ATMOSFERA

GIORNI del MESE	MATTINO A ORE 9	MEZZODÌ	SERA A ORE 3
1	Pioggia.	Pioggia.	Pioggia.
2	Pioggia.	Quasi annuvolato.	Annuvolato.
3	Nuvole sparse.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
4	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.
5	Sereno.	Sereno.	Sereno.
6	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
7	Annuvolato.	Annuvolato.	Annuvolato. - *Poi pioggia.*
8	Annuvolato.	Nuvole a gruppi.	Nuvole sparse.
9	Annuvolato.	Annuvolato.	Quasi annuvolato.
10	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.	Nuvolette.
11	Nuvole sparse.	Nuvole a gruppi.	Quasi annuvolato.
12	Nugoli sottili.	Nuvole oscure.	Annuvolato. - *Poi pioggia.*
13	Pioggia.	Annuvolato.	Coperto chiaro.
14	Sereno con vapori.	Nuvole sparse.	Nuvole a liste.
15	Sereno con vapori.	Nuvole rotte.	Nuvole a gruppi.
16	Sereno con vapori.	Nuvole sparse.	Nugoli sottili.
17	Sereno con vapori.	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.
18	Nugoli sottili.	Nuvole a gruppi.	Pioggia.
19	Nugoli sottili.	Quasi annuvolato. - *Poi pioggia.*	Annuvolato piovigginoso.
20	Annuvolato.	Pioggia.	Pioggia.
21	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.
22	Sereno con vapori.	Nuvole sparse.	Mezzo annuvolato.
23	Sereno con vapori.	Nuvole a gruppi.	Nuvolette.
24	Nugoli sottili.	Nuvole a gruppi.	Nuvolette.
25	Nugoli sottili.	Nuvole rotte.	Nuvole squarciate.
26	Sereno con vapori.	Nuvole a gruppi.	Nuvole squarciate. – *Poi vento nella notte.*
27	Sereno con vapori e vento.	Nugoli sottili e vento.	Sereno con vapori e vento.
28	Sereno con velo.	Nugoli sottili.	Sereno con vapori. – *Poi vento nella notte.*
29	Sereno.	Sereno.	Sereno puro.
30	Sereno.	Sereno con vapori.	Sereno puro.
31	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Nuvole sparse.

Osservazioni meteorologiche fatte alla Specola dell'Accademia R. delle Scienze di Torino, elevata m. 284,50 sopra il livello del mare, nel mese di giugno 1860

GIORNI del MESE	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE SERA ore 3	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MATTINO ore 9	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MEZZODÌ	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *minima*	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *massima*	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 direzione	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 forza	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ direzione	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ forza	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 direzione	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 forza	IGROMETRO MATTINO ore 9	IGROMETRO MEZZODÌ	IGROMETRO SERA ore 3	IETOMETRO MATTINO ore 9	IETOMETRO MEZZODÌ	IETOMETRO SERA ore 3	ATMIDOMETRO — MATTINO ore 9
	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	direzione	forza	direzione	forza	direzione	forza	gr. cent.	gr. cent.	gr. cent.	millim.	millim.	millim.	millim.
1	737,72	737,44	737,56	735,82	735,09	734,96	+21,1	+24,9	+27,0	+16,7	+26,4	+22,1	+17,0	+24,0	+23,1	+13,0	+24,8	E.	3	S.O.	5	E.S.E.	2	28,0	26,0	24,0				8
2	737,76	737,36	737,20	735,61	734,82	734,62	23,2	26,6	26,8	21,0	24,5	22,0	21,0	22,4	21,7	15,4	23,5	N.E.	5	E.N.E.	10	E.N.E.	8	29,0	26,0	25,0				5
3	737,18	737,00	735,42	734,87	734,37	732,65	24,6	27,3	28,4	21,5	26,0	23,5	20,9	25,1	23,3	15,0	25,4	N.N.E.	3	E.S.E.	8	S.E.	10	31,0	38,0	25,0				6
4	736,50	736,38	736,30	734,07	733,42	733,14	25,6	30,0	31,7	23,0	28,8	28,0	22,3	25,0	25,5	14,4	27,0	N.E.	5	N.E.	5	E.N.E.	12	32,0	27,0	25,0				8
5	738,62	738,82	738,92	736,20	736,01	735,82	25,3	28,6	31,0	21,8	28,0	27,0	22,5	26,6	25,7	12,8	26,4	N.E.	3	O.N.O.	5	S.	15	30,0	22,0	20,0				12
6	742,00	741,80	741,42	739,76	739,27	738,87	23,8	26,2	26,4	19,0	24,0	21,0	18,0	22,0	20,0	12,2	25,6	N.N.E.	15	N.N.O.	8	N.N.E.	12	26,0	25,0	23,0				7
7	738,90	738,94	738,40	737,14	737,17	736,50	19,8	19,9	21,0	14,0	14,0	18,1	13,5	13,7	17,0	13,0	20,0	N.N.O.	8	N.E.	4	E.N.E.	2	35,0	36,0	36,0	pioggia 5	pioggia 8	pioggia 5	6
8	740,34	740,12	740,24	738,49	737,82	737,14	20,5	24,3	29,2	17,4	24,5	26,5	18,0	23,8	24,0	12,8	24,4	O.S.O.	10	S.	5	O.	10	37,0	34,0	32,0				4
9	740,50	740,04	739,32	738,16	737,10	736,22	24,6	29,7	31,0	21,1	25,0	24,0	20,0	24,0	23,5	14,1	26,2	E.	8	N.E.	5	N.E.	3	31,0	28,0	25,0				4
10	736,68	736,28	736,32	734,63	733,83	733,94	22,4	25,8	25,2	19,0	22,7	20,0	19,1	21,3	18,0	14,4	23,6	E.	5	N.E.	18	N.O.	35	33,0	30,0	29,0				10
11	738,06	738,48	738,42	735,61	735,38	735,35	25,6	31,0	30,8	23,1	28,1	28,1	24,5	27,0	26,7	13,8	27,6	O.S.O.	4	S.S.O.	5	S.S.O.	5	35,0	28,0	24,0				6
12	740,10	739,72	739,54	737,76	736,83	736,52	24,6	29,2	30,3	21,0	27,6	26,9	19,1	26,9	25,0	15,0	27,0	N.E.	8	E.S.E.	5	E.S.E.	10	31,0	29,0	27,0				9
13	738,70	738,08	737,40	736,41	735,24	734,61	24,2	28,8	28,4	22,0	25,0	26,2	20,2	24,5	24,2	15,6	25,8	N.N.E.	20	N.N.E.	15	E.N.E.	10	34,0	29,0	28,0				7
14	733,48	732,52	731,56	731,63	730,60	729,58	20,7	21,3	21,8	15,0	17,0	15,1	14,7	16,0	15,0	14,4	17,6	E.	10	N.E.	5	E.N.E.	18	38,0	39,0	39,0	29	5		6
15	731,18	731,70	731,20	729,28	729,35	728,71	21,2	25,0	26,2	19,0	21,2	21,0	19,0	21,5	21,0	11,1	23,6	S.S.O.	15	N.E.	15	E.S.E.	25	39,0	37,0	31,0	14			0
16	732,56	732,52	732,48	730,97	730,79	730,55	18,6	19,8	21,5	14,0	19,0	16,6	13,5	17,2	15,8	12,8	21,4	N.N.O.	15	E.N.E.	5	E.N.E.	20	39,0	40,0	39,0	11	2		6
17	734,46	734,44	734,20	732,48	731,79	731,17	21,8	27,4	30,6	20,5	24,5	25,0	20,0	25,0	23,9	11,0	26,4	S.O.	12	S.	5	S.	10	40,0	35,0	24,0				4
18	735,72	736,76	736,84	733,57	733,97	733,88	23,2	28,6	30,0	23,0	26,0	27,1	21,8	24,5	24,2	12,7	25,0	E.N.E.	3	S.	10	S.S.O.	15	34,0	24,0	26,0				8
19	740,20	740,38	740,44	738,32	737,81	737,77	20,8	26,5	27,4	17,2	23,6	21,5	16,6	22,0	21,8	13,6	24,2	N.N.E.	5	N.E.	5	E.N.E.	2	32,0	29,0	27,0				13
20	739,82	739,84	739,10	737,89	737,76	737,04	21,2	22,5	22,3	17,0	19,0	16,2	16,5	18,2	16,0	16,2	22,8	N.E.	5	N.N.E.	20	N.	10	34,0	36,0	35,0				6
21	740,10	741,02	740,60	738,20	739,55	738,45	21,0	25,7	23,1	22,1	21,3	15,3	19,0	21,7	16,1	15,0	24,0	N.N.O.	3	S.E.	5	E.S.E.	2	39,0	36,0	33,0	21		3	0
22	739,22	739,32	740,26	737,38	737,68	737,21	20,4	27,1	30,6	21,0	27,0	26,7	20,8	25,2	23,5	14,2	25,8	O.S.O.	5	S.	5	E.N.E.	10	39,0	37,0	32,0				4
23	741,60	741,58	741,82	739,45	738,69	738,63	23,0	29,2	31,8	20,9	28,8	25,0	21,0	25,2	24,5	15,6	25,4	E.N.E.	15	S.E.	5	N.E.	12	39,0	33,0	32,0				10
24	742,16	742,34	742,10	739,30	738,82	738,41	29,0	34,5	36,0	25,2	31,3	29,8	25,0	30,5	28,2	17,8	31,6	E.S.E.	2	S.O.	5	S.E.	1	32,0	29,0	26,0				10
25	742,50	743,08	742,74	739,92	739,55	738,94	26,6	34,6	36,9	24,1	31,2	33,5	24,5	28,0	31,0	18,0	32,6	E.	2	N.E.	5	S.S.E.	5	32,0	27,0	25,0				11
26	744,20	743,70	743,64	741,32	739,97	739,71	29,0	36,0	37,7	26,1	32,6	30,1	27,5	30,1	30,5	18,7	32,8	O.S.O.	3	N.E.	5	S.S.E.	8	31,0	27,0	23,0				13
27	741,90	741,72	741,38	738,77	737,97	737,46	31,3	36,5	37,9	28,5	34,8	34,9	28,0	33,7	32,0	20,2	33,8	N.E.	5	S.E.	10	E.	0	30,0	24,0	23,0				8
28	741,00	740,30	740,36	737,90	736,81	736,76	31,0	34,3	35,2	29,0	31,5	32,2	27,9	29,6	31,0	21,8	31,8	E.N.E.	15	N.E.	5	N.	8	30,0	27,0	27,0				17
29	738,56	737,52	736,62	735,86	734,33	733,24	27,6	31,8	33,4	23,3	31,0	31,1	22,5	30,0	28,5	19,2	31,6	N.N.E.	8	O.S.O.	6	N.E.	5	31,0	29,0	25,0				10
30	735,90	735,20	735,26	733,25	732,21	732,42	27,4	30,3	29,4	25,0	28,0	27,2	24,7	26,8	26,5	19,0	27,0	N.E.	5	O.N.O.	65	O.N.O.	80	23,0	18,0	15,0				17

STATO DELL'ATMOSFERA

GIORNI del MESE	MATTINO A ORE 9	MEZZODÌ	SERA A ORE 3
1	Annuvolato.	Quasi annuvolato.	Quasi annuvolato.
2	Nuvolette.	Quasi annuvolato.	Annuvolato.
3	Nuvole a gruppi.	Nuvole sparse.	Nuvole a gruppi.
4	Sereno con vapori.	Nuvolette.	Nuvolette.
5	Sereno.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
6	Nuvolette.	Quasi annuvolato.	Pioggia.
7	Pioggia.	Pioggia.	Annuvolato. – *Poi sole.*
8	Quasi annuvolato.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
9	Nuvolette.	Nuvole a gruppi.	Annuvolato.
10	Nugoli sottili.	Nuvole sparse.	Pioggia.
11	Sereno con vapori.	Nuvole sparse.	Nuvolette.
12	Sereno con vapori.	Nuvole rotte.	Nuvole a gruppi. – *Poi poca pioggia.*
13	Nugoli sottili.	Nuvole sparse.	Nuvole sparse. – *Poi pioggia.*
14	Pioggia.	Annuvolato.	Pioggia.
15	Sereno con vapori.	Nuvole a gruppi.	Quasi annuvolato. – *Poi pioggia.*
16	Pioggia.	Nuvole rotte.	Nuvole sparse.
17	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.
18	Sereno puro..	Sereno con vapori.	Sereno.
19	Coperto.	Nuvole sparse.	Nuvole a gruppi.
20	Annuvolato.	Annuvolato.	Pioggia.
21	Nuvole rotte.	Annuvolato. – *Poi pioggia.*	Pioggia.
22	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Nuvolette.
23	Nugoli sottili.	Nuvole a gruppi.	Nuvolette.
24	Nuvole sparse.	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.
25	Sereno con vapori.	Nuvole sparse.	Nuvole a gruppi.
26	Sereno.	Nuvole sparse.	Nuvolette.
27	Sereno.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
28	Sereno con vapori.	Sereno con velo.	Nuvolette.
29	Sereno.	Nuvolette.	Nuvolette.
30	Sereno.	Sereno con vapori e vento.	Sereno con vapori e vento.

Osservazioni meteorologiche fatte alla Specola dell'Accademia R. delle Scienze di Torino, elevata m. 284,50 sopra il livello del mare, nel mese di luglio 1860

GIORNI del MESE	BAROMETRO altezze osservate mattino ore 9	BAROMETRO altezze osservate mezzodì	BAROMETRO altezze osservate sera ore 3	BAROMETRO altezze ridotte mattino ore 9	BAROMETRO altezze ridotte mezzodì	BAROMETRO altezze ridotte sera ore 3	TERMOM. CENTIGRADO unito al barometro mattino ore 9	TERMOM. CENTIGRADO unito al barometro mezzodì	TERMOM. CENTIGRADO unito al barometro sera ore 3	TERMOM. CENTIGRADO al mezzodì mattino ore 9	TERMOM. CENTIGRADO al mezzodì mezzodì	TERMOM. CENTIGRADO al mezzodì sera ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO a tramontana mattino ore 9	TERMOMETRO CENTIGRADO a tramontana mezzodì	TERMOMETRO CENTIGRADO a tramontana sera ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO a tramontana minima	TERMOMETRO CENTIGRADO a tramontana massima
	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.
1	741,60	741,56	741,26	739,12	738,77	738,28	+25,8	+28,4	+30,0	+21,0	+25,0	+26,9	+21,0	+24,9	+25,0	+12,6	+26,3
2	744,64	744,14	743,70	741,94	741,21	740,41	27,5	29,4	32,3	23,2	27,0	29,8	23,5	26,0	27,3	14,1	28,0
3	745,26	743,96	744,14	742,62	741,11	741,01	27,0	28,7	31,0	23,0	27,5	29,9	24,0	25,6	25,9	15,0	26,8
4	741,90	741,14	740,20	739,37	738,32	737,08	26,2	28,6	31,2	21,7	29,0	29,0	21,3	27,8	26,1	15,0	29,6
5	737,20	737,28	737,40	734,51	734,25	733,91	27,8	30,6	34,5	28,0	35,4	32,3	27,0	28,0	30,1	16,6	31,2
6	738,32	737,52	736,66	735,62	734,46	733,51	27,6	30,7	31,4	23,5	31,5	30,1	23,0	28,5	28,0	18,2	29,2
7	740,44	740,40	740,08	737,50	737,09	736,74	29,6	32,8	33,0	25,8	30,9	30,1	25,5	30,0	30,1	18,3	30,8
8	741,36	741,32	740,30	738,67	738,34	737,02	27,5	30,0	32,6	23,6	27,2	31,0	23,0	25,0	28,6	18,2	29,8
9	741,60	740,38	740,26	739,15	737,77	737,52	25,5	26,9	28,0	20,0	23,5	23,1	19,9	21,0	22,5	18,6	26,4
10	737,30	736,20	735,54	735,09	733,96	732,94	23,7	24,0	27,0	18,1	19,0	27,8	18,0	19,0	23,2	16,8	24,8
11	735,58	735,22	734,82	733,21	732,48	731,95	25,1	28,2	29,3	23,0	27,6	28,0	22,5	25,7	27,0	16,4	27,8
12	735,70	735,62	734,80	733,15	732,84	731,83	26,6	28,5	30,1	22,6	30,0	30,1	23,0	26,9	27,0	15,4	28,4
13	733,42	732,98	732,60	731,14	730,32	729,72	24,3	27,5	29,4	22,1	28,1	29,1	22,0	26,0	27,1	17,0	27,8
14	736,20	736,44	737,16	733,72	733,88	734,16	26,0	26,7	30,4	23,1	25,0	31,0	25,0	25,4	27,0	15,6	27,4
15	741,46	741,40	741,14	738,79	738,52	738,15	27,4	29,2	30,1	25,0	27,1	28,0	25,3	25,9	27,3	17,0	30,2
16	740,64	740,34	739,16	737,77	737,03	735,64	29,0	32,8	34,5	27,0	31,0	34,0	28,2	30,3	30,1	19,2	31,4
17	739,30	738,70	738,40	736,50	735,33	734,85	28,5	33,3	34,8	27,2	32,3	35,0	29,0	30,5	30,0	19,6	33,0
18	738,50	737,84	736,76	735,59	734,77	733,57	29,4	30,8	32,0	26,7	31,0	27,8	26,0	29,1	28,0	20,0	33,0
19	736,80	736,32	735,72	734,08	733,36	732,25	28,0	30,0	34,3	25,5	29,5	29,0	25,0	29,1	27,5	16,4	30,8
20	735,62	735,34	735,16	733,00	732,65	732,30	27,2	27,8	29,2	23,5	27,2	27,5	23,0	25,0	25,7	18,8	28,4
21	739,80	739,52	739,32	737,33	736,98	736,61	25,7	26,3	27,7	21,9	24,4	28,9	20,8	22,9	23,5	16,6	27,4
22	739,42	739,06	738,00	736,79	735,94	735,14	27,0	31,2	29,0	25,0	28,3	25,0	22,6	26,9	25,7	16,8	29,0
23	738,20	737,52	737,82	735,78	734,92	734,82	25,3	26,8	30,2	23,0	26,8	26,7	23,0	26,2	24,3	15,4	26,4
24	738,52	737,60	736,40	736,11	734,89	733,58	25,2	27,7	28,6	22,0	25,6	23,7	21,5	25,7	24,5	16,4	27,0
25	733,74	733,72	733,50	731,45	731,06	730,63	24,4	27,5	28,4	23,3	26,3	27,1	22,7	25,1	25,2	16,4	26,0
26	736,10	735,40	734,66	733,83	732,98	732,13	24,2	25,5	26,4	20,1	26,5	22,0	21,5	23,4	22,0	15,4	24,8
27	736,10	735,94	735,42	734,14	733,78	733,09	21,6	23,3	25,6	16,8	25,0	23,0	16,0	22,8	20,7	14,0	24,2
28	736,42	735,92	734,80	734,44	733,77	732,63	21,8	23,2	23,4	18,0	20,0	21,2	17,0	19,5	20,0	14,3	21,8
29	733,76	732,60	732,34	731,85	730,38	729,99	22,0	23,8	24,9	19,0	23,0	23,8	19,3	21,0	23,0	13,4	23,6
30	734,06	734,24	734,22	732,22	731,87	731,58	20,6	25,1	27,4	19,9	24,9	26,9	19,0	22,0	24,5	10,8	25,2
31	735,90	735,56	735,92	734,01	733,33	732,77	21,0	23,9	26,6	20,1	27,2	25,0	19,3	24,5	25,0	11,4	26,2

GIORNI del MESE	ANEMOSCOPIO mattino ore 9 direzione	ANEMOSCOPIO mattino ore 9 forza	ANEMOSCOPIO mezzodì direzione	ANEMOSCOPIO mezzodì forza	ANEMOSCOPIO sera ore 3 direzione	ANEMOSCOPIO sera ore 3 forza	IGROMETRO mattino ore 9	IGROMETRO mezzodì	IGROMETRO sera ore 3	IETOMETRO mattino ore 9	IETOMETRO mezzodì	IETOMETRO sera ore 3	ATMIDOMETRO mattino ore 9
							gr. cent.	gr. cent.	gr. cent.	millim.	millim.	millim.	millim.
1	S.S.O.	10	N.N.E.	5	N.O.	5	23,0	20,0	19,0				16
2	E.N.E.	10	S.E.	2	S.S.O.	6	21,0	19,0	17,0				12
3	N.E.	5	N.E.	5	N.E.	5	22,0	19,0	19,0				12
4	E.N.E.	10	S.S.E.	5	N.N.E.	5	26,0	25,0	21,0				13
5	S.	3	N.E.	5	S.O.	5	29,0	24,0	22,0				10
6	N.E.	12	N.E.	5	E.	10	27,0	26,0	25,0				10
7	N.N.E.	8	N.O.	3	S.E.	10	27,0	23,0	17,0				11
8	E.N.E.	10	E.N.E.	7	N.N.O.	5	27,0	25,0	23,0				10
9	N.E.	5	N.N.O.	20	N.E.	10	29,0	29,0	28,0				13
10	E.N.E.	3	N.E.	0	N.E.	0	37,0	37,0	34,0	pioggia 20	pioggia 5		6
11	N.E.	5	N.	5	E.S.E.	5	35,0	32,0	27,0				7
12	E.	6	N.N.E.	5	S.E.	12	22,0	24,0	21,0	3			9
13	O.N.O.	7	O.	5	S.O.	10	30,0	23,0	22,0				11
14	O.S.O.	10	N.N.O.	5	S.	5	29,0	28,0	26,0				13
15	E.	3	N.E.	5	E.	5	29,0	25,0	23,0				10
16	S.S.E.	15	S.	3	S.S.O.	5	27,0	22,0	20,0				11
17	S.O.	10	S.E.	5	O.S.O.	3	26,0	23,0	20,0				13
18	E.N.E.	13	E.	10	E.	5	27,0	25,0	23,0				13
19	O.S.O.	3	E.	5	N.E.	15	30,0	26,0	22,0				6
20	E.	15	N.E.	5	E.S.E.	8	31,0	30,0	27,0				5
21	N.E.	18	N.E.	10	E.S.E.	5	32,0	28,0	27,0	3			19
22	E.	3	E.S.E.	10	E.N.E.	20	31,0	25,0	25,0				8
23	S.E.	2	S.	3	E.S.E.	20	34,0	30,0	27,0	6			9
24	N.E.	3	S.S.E.	10	S.	10	33,0	30,0	27,0				10
25	S.S.O.	2	E.	3	O.N.O.	5	37,0	24,0	22,0	20			5
26	E.	3	N.E.	5	N.E.	10	28,0	24,0	23,0				13
27	N.E.	5	S.S.E.	3	N.E.	5	35,0	32,0	28,0	5			7
28	N.N.E.	18	N.E.	15	E.S.E.	5	36,0	34,0	33,0	2			7
29	N.E.	5	N.E.	8	E.N.E.	5	37,0	34,0	32,0				8
30	S.O.	5	E.N.E.	10	O.S.O.	10	37,0	31,0	28,0	3			1
31	O.S.O.	5	S.O.	10	S.O.	7	34,0	29,0	24,0	»			11

STATO DELL'ATMOSFERA

GIORNI del MESE	MATTINO A ORE 9	MEZZODÌ	SERA A ORE 3
1	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
2	Sereno puro.	Sereno.	Sereno.
3	Sereno puro.	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.
4	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.	Sereno con vapori.
5	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
6	Nuvolette.	Nuvolette.	Sereno con vapori.
7	Sereno.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.
8	Nuvole sparse.	Nuvolette.	Nuvolette.
9	Annuvolato.	Nuvole sparse.	Quasi annuvolato. - *Poi pioggia, lampi e tuono.*
10	Annuvolato. - *Poi pioggia.*	Annuvolato.	Nuvole sparse.
11	Sereno con vapori.	Nuvole sparse.	Nugoli sottili. - *Poi pioggia.*
12	Sereno con vapori.	Nuvole sparse.	Sereno con vapori.
13	Quasi coperto.	Sereno con vapori.	Nuvolette.
14	Nugoli sottili.	Nuvole sparse.	Nuvolette.
15	Sereno.	Nuvole sparse.	Quasi annuvolato.
16	Sereno.	Sereno.	Sereno.
17	Sereno.	Sereno con vapori.	Nuvolette.
18	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.	Annuvolato. Ecclisse del sole. – *Poi poca pioggia, lampi e tuono.*
19	Sereno.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.
20	Nuvole sparse.	Nuvole squarciate.	Nuvole a gruppi. – *Poi pioggia.*
21	Nuvole a gruppi.	Nuvole sparse.	Nuvole sparse.
22	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.	Nuvole sparse. – *Poi pioggia.*
23	Nuvole a gruppi.	Sereno con vapori.	Nuvolette.
24	Nuvole sparse.	Nuvole rotte.	Annuvolato. – *Poi pioggia.*
25	Nugoli sottili.	Sereno.	Sereno ventoso.
26	Sereno con vapori.	Nuvolette.	Quasi annuvolato. – *Poi pioggia.*
27	Nuvole rotte.	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi. – *Poi pioggia.*
28	Nuvole sparse.	Nuvole oscure.	Nuvole a gruppi.
29	Nuvole a gruppi.	Nuvole sparse.	Nuvole oscure. – *Poi pioggia, lampi e tuono.*
30	Sereno.	Nugoli sottili.	Nuvole sparse.
31	Nuvole a liste.	Sereno con vapori.	Mezzo annuvolato.

Osservazioni meteorologiche fatte alla Specola dell'Accademia R. delle Scienze di Torino, elevata m. 284, 50 sopra il livello del mare, nel mese di agosto 1860

GIORNI del MESE	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE SERA ore 3	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MATTINO ore 9	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MEZZODÌ	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *minima*	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *massima*	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 direzione	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 forza	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ direzione	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ forza	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 direzione	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 forza	IGROMETRO MATTINO ore 9	IGROMETRO MEZZODÌ	IGROMETRO SERA ore 3	IETOMETRO MATTINO ore 9	IETOMETRO MEZZODÌ	IETOMETRO SERA ore 3	ATMIDOMETRO MATTINO ore 9
	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	direzione	forza	direzione	forza	direzione	forza	gr. cent.	gr. cent.	gr. cent.	millim.	millim.	millim.	millim.
1	739, 54	739, 64	739, 66	737, 35	736, 82	736, 66	+23, 4	+28, 6	+30, 2	+23, 0	+27, 2	+25, 0	+22, 2	+24, 5	+23, 0	+13, 6	+25, 0	E.S.E.	5	E.N.E.	5	N.N.E.	15	31, 0	26, 0	24, 0				10
2	740, 44	739, 90	739, 10	738, 27	737, 52	736, 56	23, 2	25, 0	26, 3	20, 2	25, 0	24, 0	19, 0	22, 0	23, 1	13, 2	24, 0	E.	5	N.E.	10	N.N.E.	8	31, 0	28, 0	27, 0				10
3	738, 40	736, 76	735, 92	736, 47	734, 63	733, 56	22, 0	23, 1	25, 0	17, 3	21, 6	24, 9	17, 0	21, 2	22, 5	13, 6	23, 2	E.	10	E.	10	N.E.	10	32, 0	33, 0	31, 0				11
4	733, 56	733, 32	733, 24	731, 57	731, 01	730, 64	21, 9	24, 6	27, 0	20, 0	26, 0	25, 0	19, 1	23, 8	24, 5	15, 4	25, 4	N.	5	E.	5	E.	5	36, 0	33, 0	30, 0				6
5	735, 50	735, 92	736, 16	733, 15	733, 37	733, 18	24, 9	26, 6	30, 2	22, 5	25, 5	25, 0	22, 2	24, 2	25, 0	15, 2	26, 8	N.E.	5	E.N.E.	10	S.S.E.	10	35, 0	33, 0	27, 0				9
6	737, 94	737, 60	736, 90	735, 68	735, 12	734, 36	24, 1	26, 0	26, 5	21, 6	24, 1	23, 2	21, 5	22, 8	23, 0	17, 3	26, 2	O.N.O.	8	N.E.	5	S.S.O.	5	34, 0	32, 0	31, 0				10
7	736, 32	735, 34	734, 40	733, 97	732, 69	731, 44	24, 9	27, 4	30, 0	23, 0	27, 5	29, 5	21, 8	24, 4	26, 5	16, 7	27, 1	N.N.E.	3	N.	3	O.	5	37, 0	33, 0	30, 0				3
8	739, 54	739, 50	739, 60	737, 16	736, 78	736, 61	25, 0	27, 8	30, 1	22, 8	27, 6	28, 0	22, 0	25, 5	25, 0	14, 0	25, 8	S.S.O.	10	S.	8	E.S.E.	2	30, 0	24, 0	21, 0				14
9	740, 96	739, 90	739, 40	738, 81	737, 44	736, 91	23, 0	25, 6	25, 9	22, 3	25, 8	23, 1	20, 9	23, 4	22, 6	15, 5	24, 1	S.E.	15	N.N.E.	10	N.N.E.	20	29, 0	29, 0	29, 0				12
10	739, 42	738, 94	738, 72	737, 32	736, 76	736, 27	22, 6	23, 3	25, 5	18, 3	22, 4	24, 2	18, 0	20, 6	22, 5	15, 0	23, 4	N.E.	8	N.E.	5	E.N.E.	10	34, 0	34, 0	31, 0				7
11	738, 02	737, 52	737, 56	735, 74	734, 77	734, 44	24, 1	28, 1	31, 2	21, 3	28, 0	29, 5	20, 4	24, 2	25, 9	14, 6	27, 4	N.O.	4	E.	5	O.	5	37, 0	31, 0	29, 0				7
12	737, 52	736, 60	735, 84	737, 32	736, 76	736, 28	24, 0	24, 8	27, 6	21, 3	24, 5	28, 0	20, 9	24, 0	24, 8	16, 4	26, 8	O.	6	E.	3	E.S.E.	5	34, 0	34, 0	30, 0				9
13	738, 32	738, 30	738, 28	735, 26	734, 77	734, 44	23, 9	25, 8	25, 9	21, 3	27, 5	25, 0	22, 7	24, 0	23, 0	14, 4	25, 0	S.	15	N.N.E.	5	E.S.E.	10	37, 0	31, 0	29, 0				10
14	737, 52	736, 58	736, 74	735, 47	734, 37	734, 24	22, 4	23, 7	26, 2	16, 8	23, 1	23, 0	16, 2	19, 6	22, 5	16, 0	23, 8	E.N.E.	7	N.E.	5	E.	3	37, 0	36, 0	34, 0	pioggia 8			6
15	738, 74	738, 80	738, 64	736, 38	735, 99	735, 78	24, 8	28, 6	29, 0	23, 2	29, 9	26, 1	22, 0	26, 1	25, 0	17, 2	27, 8	E.N.E.	6	N.E.	5	N.E.	5	38, 0	31, 0	30, 0				7
16	738, 56	737, 28	736, 86	736, 09	734, 80	734, 35	25, 9	26, 0	26, 2	23, 5	23, 6	23, 2	22, 9	23, 4	22, 8	18, 2	25, 6	N.N.E.	8	N.E.	10	N.E.	10	36, 0	35, 0	34, 0				8
17	734, 26	734, 36	733, 92	731, 99	732, 06	731, 42	24, 2	24, 5	26, 2	22, 0	19, 8	27, 9	21, 8	19, 5	24, 4	18, 6	25, 2	N.E.	3	O.N.O.	5	S.E.	10	38, 0	39, 0	37, 0				3
18	740, 78	741, 02	740, 90	738, 40	738, 36	737, 99	25, 0	27, 3	29, 4	24, 0	27, 2	26, 0	21, 9	25, 0	24, 5	14, 2	25, 6	N.	5	S.	10	N.E.	15	34, 0	28, 0	23, 0				12
19	742, 80	742, 88	742, 82	740, 39	739, 92	739, 72	25, 2	29, 8	31, 0	23, 1	28, 9	28, 1	22, 0	26, 1	25, 0	13, 4	26, 8	N.E.	8	O.	5	N.E.	5	33, 0	27, 0	24, 0				7
20	742, 92	742, 32	741, 74	740, 74	739, 74	738, 95	23, 3	26, 6	28, 4	20, 3	26, 5	26, 6	20, 0	24, 0	25, 2	14, 8	26, 6	N.E.	8	E.N.E.	3	N.E.	12	31, 0	29, 0	26, 0				9
21	737, 00	737, 34	737, 54	734, 74	734, 99	735, 50	24, 2	24, 9	22, 3	21, 3	21, 0	16, 1	20, 8	19, 9	15, 3	17, 6	17, 0	N.E.	18	N.	5	N.N.O.	8	32, 0	32, 0	34, 0			pioggia 33	7
22	738, 80	738, 30	738, 18	736, 68	735, 93	735, 48	22, 8	24, 9	27, 6	19, 0	27, 8	25, 1	18, 1	23, 2	23, 0	12, 0	24, 8	N.E.	8	S.S.E.	5	E.	3	39, 0	35, 0	30, 0				3
23	739, 54	739, 62	739, 50	737, 27	736, 77	736, 54	24, 0	28, 9	29, 8	21, 5	27, 3	25, 5	21, 3	25, 4	24, 0	14, 8	26, 4	S.	2	E.S.E.	5	N.E.	10	37, 0	33, 0	28, 0				8
24	741, 80	741, 58	741, 10	739, 47	738, 67	737, 86	24, 6	29, 4	32, 2	22, 0	27, 5	30, 0	22, 5	26, 2	27, 2	14, 6	28, 0	O.S.O.	5	E.	5	O.S.O.	6	37, 0	31, 0	25, 0				6
25	742, 00	741, 82	742, 24	739, 47	738, 82	738, 77	26, 2	30, 2	34, 1	24, 0	29, 8	29, 6	24, 5	28, 0	27, 3	15, 2	29, 0	S.	10	O.N.O.	5	E.S.E.	10	35, 0	30, 0	25, 0				10
26	742, 86	742, 80	742, 18	740, 28	739, 51	738, 94	26, 6	32, 6	32, 2	24, 0	31, 0	29, 0	23, 0	27, 8	26, 5	17, 0	29, 6	N.N.E.	2	S.E.	5	N.N.E.	3	35, 0	30, 0	26, 0				9
27	743, 20	743, 04	741, 76	740, 89	739, 90	738, 60	24, 3	31, 1	31, 5	23, 1	31, 0	27, 5	23, 3	29, 0	26, 2	18, 0	30, 2	E.	3	S.S.E.	15	E.N.E.	5	35, 0	31, 0	26, 0				10
28	739, 22	739, 20	738, 54	736, 63	736, 34	735, 63	26, 7	29, 0	29, 4	23, 0	30, 0	27, 0	22, 9	26, 8	26, 1	19, 8	29, 6	N.E.	15	N.E.	5	N.N.E.	10	35, 0	32, 0	31, 0				6
29	736, 46	736, 28	735, 58	734, 08	733, 52	732, 49	25, 2	28, 4	31, 1	25, 0	29, 0	29, 5	22, 5	26, 0	26, 6	18, 2	27, 8	N.N.E.	5	N.E.	2	N.N.E.	5	37, 0	35, 0	31, 0				9
30	738, 40	738, 34	737, 86	735, 76	735, 27	734, 50	27, 1	30, 8	33, 2	26, 0	31, 0	30, 5	24, 9	29, 0	29, 3	17, 8	30, 2	N.E.	3	S.S.O.	3	S.	5	38, 0	32, 0	28, 0				10
31	738, 60	737, 74	737, 72	735, 92	734, 81	734, 95	27, 5	29, 6	28, 2	25, 2	28, 1	25, 0	24, 5	27, 0	24, 9	19, 4	28, 6	N.E.	5	E.	5	N.E.	3	34, 0	31, 0	31, 0				11

STATO DELL'ATMOSFERA

GIORNI del MESE	MATTINO A ORE 9	MEZZODÌ	SERA A ORE 3
1	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.
2	Sereno.	Nuvolette.	Coperto.
3	Annuvolato.	Quasi annuvolato.	Coperto chiaro.
4	Nuvole sparse.	Nuvole squarciate.	Nuvole a gruppi.
5	Sereno.	Nuvole a gruppi.	Mezzo annuvolato.
6	Quasi annuvolato.	Nuvole rotte.	Pioggia.
7	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.	Sereno con vapori.
8	Sereno puro.	Sereno con vapori.	Sereno puro.
9	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.
10	Annuvolato.	Quasi annuvolato.	Nuvole rotte.
11	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Nuvole a gruppi.
12	Annuvolato. - *Poi poca pioggia.*	Nuvole rotte.	Nuvole sparse. - *Poi poca pioggia.*
13	Nuvolette.	Nuvole rotte.	Nuvole sparse. - *Poi pioggia.*
14	Pioggia.	Nuvole rotte.	Nuvole sparse.
15	Nuvolette.	Nuvole a gruppi.	Nuvole sparse.
16	Nugoli sottili.	Nuvole rotte.	Nuvole rotte.
17	Annuvolato. - *Poi poca pioggia.*	Pioggia.	Sereno con vapori.
18	Sereno puro.	Sereno.	Sereno.
19	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno.
20	Sereno puro.	Nuvolette.	Nuvolette.
21	Sereno con vapori.	Annuvolato. - *Poi pioggia dirotta e gragnuola.*	Annuvolato. - *Poi poca pioggia.*
22	Nuvole sparse.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
23	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Nuvolette.
24	Nuvolette.	Nuvolette.	Nuvolette.
25	Sereno con vapori.	Nuvole sparse.	Nugoli sottili.
26	Sereno.	Sereno.	Sereno.
27	Nuvole rotte.	Nuvolette.	Nugoli sottili.
28	Nuvole sparse.	Nuvole sparse.	Nuvolette.
29	Sereno con vapori.	Nuvolette.	Sereno con vapori.
30	Sereno con vapori.	Nuvolette.	Nuvolette.
31	Nugoli sottili.	Nuvole sparse.	Annuvolato.

Osservazioni meteorologiche fatte alla Specola dell'Accademia R. delle Scienze di Torino, elevata m. 284,50 sopra il livello del mare, nel mese di gennaio 1860

GIORNI del MESE	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE SERA ore 3	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MATTINO ore 9	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MEZZODÌ	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *minima*	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *massima*	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 direzione	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 forza	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ direzione	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ forza	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 direzione	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 forza	IGROMETRO MATTINO ore 9	IGROMETRO MEZZODÌ	IGROMETRO SERA ore 3	IETOMETRO MATTINO ore 9	IETOMETRO MEZZODÌ	IETOMETRO SERA ore 3	ATMIDOMETRO — MATTINO ore 9
	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	direzione	forza	direzione	forza	direzione	forza	gr. cent.	gr. cent	gr. cent.	millim.	millim.	millim.	millim.
1	741,76	741,46	742,40	742,56	741,30	741,82	- 1,7	+ 6,4	+ 9,9	- 2,3	+ 5,0	+ 6,1	- 3,5	+ 2,0	+ 4,0	- 8,4	+ 4,4	S.O.	10	S.O.	10	S.O.	3	46,0	43,0	44,0				
2	742,90	742,16	742,60	743,43	742,37	742,72	+ 0,6	3,4	4,0	+ 0,7	3,5	3,0	+ 0,2	3,1	3,0	3,7	3,8	O.S.O.	9	O.S.O.	8	O.S.O.	10	46,0	47,0	47,0				
3	741,96	740,44	740,14	742,29	740,48	740,12	2,3	4,7	5,2	2,7	3,0	3,9	2,0	2,8	3,5	+ 0,4	3,8	S.O.	2	S.O.	5	E.	2	47,0	48,0	49,0				
4	726,84	726,38	725,82	727,26	726,65	725,65	1,5	2,8	6,1	1,0	4,2	3,2	0,7	3,1	2,9	- 0,2	3,6	N.N.O.	5	S.O.	5	S.O.	12	48,0	49,0	49,0	neve 8			
5	721,70	721,24	719,70	722,02	721,50	719,84	2,4	3,8	4,0	3,0	3,5	5,0	2,2	2,9	4,1	0,4	4,2	S.S.O.	10	S.O.	20	S.S.O.	25	49,0	49,0	49,0				
6	722,64	724,00	725,88	722,52	723,34	724,96	6,2	10,8	13,0	10,2	14,9	13,0	8,5	11,0	10,0	0,9	11,0	S.O.	15	O.S.O.	10	O.	15	48,0	39,0	36,0				
7	735,70	737,46	738,86	735,58	736,28	738,10	6,1	15,0	11,6	10,0	16,6	12,5	7,5	11,0	10,0	0,5	11,0	S.S.E.	5	N.O.	5	N.O.	20	42,0	37,0	38,0				
8	747,78	748,92	749,80	748,07	748,64	748,89	2,6	7,3	12,5	3,0	9,1	9,5	1,2	5,5	5,9	3,0	6,4	S.O.	20	S.O.	5	S.O.	5	40,0	40,0	37,0				
9	751,66	751,32	751,46	752,15	751,27	750,90	0,9	5,4	9,6	0,0	6,8	4,0	- 0,8	2,0	2,1	5,6	2,1	S.O.	2	S.O.	0	E.	2	44,0	44,0	42,0				
10	747,90	746,44	746,84	748,46	746,75	746,93	0,3	2,4	4,2	0,0	1,5	1,9	1,7	1,2	1,9	5,2	1,9	S.O.	10	O.S.O.	5	O.S.O.	5	46,0	46,0	46,0				
11	746,30	745,50	745,66	746,88	745,87	745,87	0,2	1,9	3,2	- 1,9	2,5	0,1	2,0	0,0	0,0	3,8	1,6	N.E.	5	N.E.	8	N.E.	5	46,0	46,0	45,0				
12	743,90	744,14	744,42	744,57	744,11	744,08	- 0,6	5,2	7,8	0,2	4,7	2,1	2,5	1,0	1,1	6,0	1,0	O.S.O.	3	E.	2	E.	3	48,0	48,0	47,0				
13	743,00	742,98	742,84	743,68	742,89	742,27	0,7	5,8	9,8	+ 1,3	7,0	6,9	0,2	3,2	3,8	5,2	3,8	S.O.	15	S.O.	5	S.O.	8	48,0	45,0	45,0				
14	743,84	743,60	743,98	744,59	743,90	743,68	1,3	2,5	7,5	- 1,5	4,0	2,0	2,0	1,5	1,7	5,4	2,9	S.O.	3	S.O.	6	S.O.	1	48,0	49,0	49,0				
15	745,10	745,40	745,74	745,77	745,57	745,16	0,6	3,6	9,8	+ 0,5	5,0	4,0	0,3	1,8	2,0	3,8	3,2	N.O.	2	N.O.	2	N.O.	0	48,0	48,0	48,0				
16	747,26	746,48	747,38	747,96	746,73	746,90	0,8	2,9	9,0	- 1,0	6,8	5,0	2,0	3,0	3,1	5,0	3,4	S.O.	8	O.S.O.	5	O.S.O.	5	49,0	49,0	49,0				
17	745,66	744,30	743,62	746,34	744,73	743,66	0,7	1,4	4,7	2,0	3,0	3,0	2,1	2,5	2,9	4,8	3,4	S.O.	10	S.O.	5	O.S.O.	7	50,0	51,0	51,0				
18	739,30	738,56	738,62	739,88	738,53	738,23	+ 0,2	5,3	8,3	+ 1,3	6,5	4,5	+ 1,2	3,0	3,5	1,4	3,6	S.O.	5	S.O.	0	S.O.	5	50,0	50,0	49,0				
19	739,32	739,36	739,46	739,79	739,61	739,49	1,1	3,0	4,8	1,8	2,9	3,1	1,8	2,5	3,0	0,4	3,8	E.N.E.	0	O.S.O.	5	O.S.O.	5	49,0	49,0	49,0				
20	739,70	738,38	738,08	740,08	738,50	738,15	1,9	4,0	4,4	2,9	3,8	2,0	2,1	3,0	2,0	+ 0,5	2,4	S.S.O.	4	E.	5	E.N.E.	4	49,0	49,0	49,0				
21	737,20	735,62	734,72	737,57	735,70	734,69	2,0	4,4	5,3	2,0	3,9	3,1	1,8	3,9	3,0	0,3	3,2	O.S.O.	10	S.O.	0	S.O.	2	49,0	50,0	50,0				
22	728,84	729,70	729,42	729,18	729,57	729,15	2,2	6,2	7,4	3,5	12,1	12,0	2,9	9,5	9,7	- 1,0	9,8	O.	15	O.S.O.	45	O.N.O.	65	50,0	45,0	42,0				
23	726,30	726,96	727,46	726,63	727,19	727,45	2,3	3,2	5,2	1,0	3,5	7,0	1,0	3,1	4,2	0,6	5,0	N.E.	5	N.O.	5	S.O.	15	44,0	45,0	45,0				
24	729,22	727,70	725,60	729,61	727,82	725,49	1,8	4,1	6,1	2,0	5,2	3,0	0,9	3,0	2,5	2,2	3,4	N.N.E.	5	N.E.	25	E.N.E.	25	46,0	46,0	45,0				
25	723,12	722,60	724,20	723,57	722,84	724,22	1,3	3,1	5,0	- 2,0	0,0	1,8	- 2,5	- 1,9	0,1	4,0	0,9	N.N.E.	10	N.N.E.	15	E.N.E.	5	48,0	48,0	47,0				
26	733,48	734,84	736,16	733,96	734,82	735,35	1,0	5,2	11,9	+ 3,0	12,0	11,5	+ 3,0	+ 9,1	9,3	5,4	10,2	N.N.O.	25	N.N.O.	40	E.	20	49,0	45,0	43,0				
27	736,70	735,56	734,84	737,02	735,51	734,76	2,4	5,5	5,7	5,0	4,6	5,9	3,3	3,5	3,8	3,1	6,8	S.	3	N.N.E.	5	E.N.E.	2	44,0	43,0	42,0				
28	732,70	732,38	733,68	733,06	731,95	733,17	2,0	7,9	9,4	3,2	10,6	5,8	0,6	6,2	4,3	4,0	5,4	N.E.	4	S.E.	5	N.E.	20	44,0	44,0	43,0				
29	740,20	739,10	738,18	740,61	738,69	737,74	1,6	8,5	8,7	2,7	7,0	5,9	1,0	4,1	4,0	3,1	4,4	E.N.E.	5	N.E.	10	N.N.E.	10	43,0	43,0	43,0				
30	731,38	731,12	729,70	731,72	730,64	729,11	2,2	9,2	10,0	4,5	5,0	7,0	2,5	3,9	4,0	2,4	4,9	S.O.	6	E.N.E.	5	N.E.	3	43,0	43,0	43,0				
31	721,90	721,26	720,28	722,36	721,63	720,42	1,2	2,0	4,0	- 0,5	- 0,3	2,1	- 0,9	- 0,6	1,1	4,4	1,3	S.O.	3	O.	10	S.S.E.	10	46,0	45,0	46,0	10			Per causa del gelo non si è tenuto conto dell'evaporazione.

STATO DELL'ATMOSFERA

GIORNI del MESE	MATTINO A ORE 9	MEZZODÌ	SERA A ORE 3
1	Nugoli sottili.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
2	Coperto nebbioso.	Coperto.	Coperto.
3	Nebbia folta.	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso. - *Poi neve.*
4	Neve.	Coperto chiaro.	Quasi coperto.
5	Coperto nebbioso.	Coperto chiaro.	Coperto chiaro.
6	Nuvolette.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
7	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno.
8	Sereno.	Sereno.	Sereno.
9	Coperto nebbioso.	Sereno.	Sereno con vapori.
10	Coperto nebbioso.	Coperto chiaro.	Coperto nebbioso.
11	Coperto nebbioso.	Nugoli sottili.	Coperto chiaro.
12	Sereno con nebbia.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
13	Sereno.	Sereno con vapori.	Sereno.
14	Nebbia folta.	Sereno con nebbia.	Nugoli sottili e nebbia.
15	Nebbia folta.	Sereno con nebbia.	Sereno con nebbia.
16	Coperto nebbioso.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.
17	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.
18	Coperto nebbioso.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.
19	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.
20	Annuvolato piovigginoso.	Annuvolato piovigginoso.	Pioviggina.
21	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso. – *Poi neve.*
22	Sereno con vapori.	Sereno e vento.	Sereno e vento.
23	Nevischio.	Pioviggina.	Nugoli sottili.
24	Coperto chiaro.	Nuvole sparse.	Nuvole sparse.
25	Nebbia folta.	Coperto nebbioso.	Sereno con vapori.
26	Sereno ventoso.	Sereno ventoso.	Sereno ventoso.
27	Sereno con nebbia.	Coperto chiaro.	Sereno con vapori.
28	Sereno con nebbia.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
29	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con velo.
30	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.	Sereno con vapori. – *Poi neve nella notte.*
31	Coperto chiaro.	Coperto nebbioso.	Sereno con vapori.

Osservazioni meteorologiche fatte alla Specola dell'Accademia R. delle Scienze di Torino, elevata m. 284,50 sopra il livello del mare, nel mese di febbraio 1860

GIORNI del MESE	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE SERA ore 3	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MATTINO ore 9	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MEZZODÌ	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *minima*	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *massima*	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 direzione	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 forza	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ direzione	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ forza	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 direzione	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 forza	IGROMETRO MATTINO ore 9	IGROMETRO MEZZODÌ	IGROMETRO SERA ore 3	IETOMETRO MATTINO ore 9	IETOMETRO MEZZODÌ	IETOMETRO SERA ore 3	ATMIDOMETRO MATTINO ore 9
	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	direzione	forza	direzione	forza	direzione	forza	gr. cent.	gr. cent.	gr. cent.	millim.	millim.	millim.	millim.
1	726,16	726,90	727,32	726,21	726,09	726,26	+ 4,7	+12,1	+14,2	+ 8,1	+12,2	+12,0	+ 4,9	+ 9,0	+ 8,5	− 0,4	+ 8,6	N.N.E.	0	S.O.	18	S.O.	15	38,0	36,0	34,0				
2	729,24	729,30	729,66	729,60	729,32	729,55	2,0	4,9	6,0	2,0	5,2	4,0	1,3	4,1	3,0	2,1	7,2	N.N.E.	3	E.N.E.	5	N.N.E.	15	38,0	38,0	38,0				
3	733,78	735,96	737,50	734,30	735,66	736,89	0,7	7,6	10,2	0,2	8,2	4,9	− 2,2	3,0	2,9	6,6	3,7	N.E.	2	S.O.	5	N.E.	5	42,0	42,0	42,0				
4	743,94	744,72	744,36	744,49	744,45	743,72	0,4	7,2	10,3	0,3	7,3	7,0	0,0	3,5	3,1	6,8	3,4	S.S.O.	5	S.O	12	E.	8	43,0	41,0	41,0				
5	741,20	740,46	739,90	741,73	740,27	739,26	0,6	6,6	14,0	3,0	8,0	9,0	+ 0,1	4,2	4,9	6,1	5,6	S.O.	4	O.S.O.	7	N.N.E.	3	42,0	40,0	39,0				
6	732,04	731,18	729,54	732,58	731,09	728,82	0,5	5,9	11,2	2,4	8,0	10,3	0,4	4,6	6,5	5,0	7,6	S.O.	5	O.S.O.	5	N.N.O.	3	40,0	38,0	37,0				
7	740,10	739,34	738,84	740,10	739,20	738,37	5,0	6,2	9,0	7,0	10,6	11,3	4,8	7,7	8,5	+ 2,0	8,6	N.N.O.	15	O.N.O.	30	N.N.E.	30	32,0	29,0	29,0				
8	740,12	739,46	738,10	740,46	740,06	737,46	2,2	7,6	14,0	4,1	9,0	9,0	1,0	5,9	6,5	− 4,3	8,4	O.S.O.	5	S.O.	10	N.E.	10	34,0	34,0	31,0				
9	731,24	729,54	728,80	731,63	729,59	728,78	1,8	4,7	5,3	2,9	3,5	3,1	2,1	3,5	3,0	3,2	3,8	S.O.	5	O.S.O.	5	O.S.O.	5	36,0	37,0	36,0				
10	722,56	722,46	723,06	722,93	722,70	723,19	2,0	3,1	4,0	1,0	2,5	3,0	1,0	2,5	3,0	1,8	3,6	O.S.O.	6	S.O.	15	S.O.	10	39,0	39,0	39,0				
11	726,44	726,48	726,88	726,76	726,59	726,54	2,4	4,2	8,0	2,0	5,1	4,0	1,9	5,0	3,9	+ 0,4	5,6	N.N.O.	3	O.S.O.	6	N.E.	5	38,0	38,0	37,0				
12	728,50	728,44	728,50	728,84	728,60	728,55	2,2	3,7	4,7	0,0	3,0	3,1	− 0,3	1,8	2,0	− 1,6	4,0	N.E.	5	S.	10	S.O.	20	40,0	40,0	39,0	neve 19			
13	731,76	731,72	731,86	732,14	731,82	731,87	1,9	4,3	5,0	1,5	4,5	3,0	+ 1,2	3,3	2,5	2,8	4,0	S.O.	5	O.	5	E.N.E.	10	42,0	42,0	41,0				
14	736,38	736,84	736,64	736,72	736,97	736,46	2,2	4,0	6,6	1,0	2,9	5,0	0,8	2,7	3,2	1,0	3,6	O.N.O.	6	S.S.O.	20	O.S.O.	8	43,0	43,0	42,0	32			
15	739,18	739,12	737,68	739,52	739,41	737,95	2,2	2,6	2,8	0,8	0,8	0,5	0,3	0,5	0,0	1,6	3,0	N.	5	N.E.	5	N.N.E.	15	45,0	45,0	45,0				
16	730,00	728,52	728,20	730,58	728,92	728,46	0,2	1,7	2,9	− 2,0	− 0,8	0,0	− 2,1	− 1,5	0,0	5,8	1,0	S.S.E.	5	N.N.O.	5	S.O.	3	48,0	48,0	47,0				
17	735,02	736,48	737,34	735,54	736,82	737,67	0,7	2,2	2,3	0,0	+ 1,8	1,0	0,5	+ 1,0	0,3	3,4	0,5	N.	15	S.O.	15	S.S.O.	45	48,0	47,0	46,0	27			
18	736,16	736,36	736,10	736,71	736,51	735,93	0,4	3,8	6,5	+ 0,8	5,1	5,8	2,5	1,9	2,2	5,7	2,6	S.O.	4	S.O.	10	S.O.	10	47,0	43,0	40,0				
19	736,50	735,93	734,80	737,12	735,58	734,13	− 0,2	8,0	10,7	0,0	5,8	6,8	1,5	3,0	3,3	8,2	3,6	S.O.	4	E.N.E.	8	O.S.O.	10	45,0	45,0	41,0				
20	723,22	720,98	720,60	723,81	721,37	720,90	+ 0,1	1,8	2,6	0,1	0,5	4,0	0,6	0,2	0,7	5,2	3,1	S.O.	5	E.N.E.	5	N.E.	5	44,0	44,0	43,0				
21	720,00	720,80	720,82	720,52	721,13	721,04	0,7	2,3	3,3	0,3	2,0	4,0	0,0	0,5	2,0	2,0	2,2	S.O.	20	S.O.	20	S.S.O.	25	47,0	46,0	45,0	91			
22	725,60	726,30	727,16	726,13	726,29	726,58	0,6	5,2	11,0	2,0	7,1	8,0	1,9	2,8	3,6	7,8	4,0	S.O.	6	O.S.O.	8	S.O.	12	42,0	40,0	35,0				
23	735,10	736,36	736,80	735,62	736,51	736,71	0,7	3,8	5,8	0,0	4,0	4,1	0,2	3,1	3,5	2,4	4,0	O.S.O.	9	S.O.	25	O.S.O.	15	40,0	39,0	39,0				
24	743,74	745,10	744,82	744,14	744,48	744,41	1,7	10,2	8,4	1,3	9,1	4,1	1,0	5,2	4,0	2,6	5,6	O.S.O.	5	O.S.O.	10	S.O.	15	40,0	36,0	37,0				
25	744,86	745,24	745,22	745,17	744,56	744,21	2,4	10,7	13,4	2,6	11,0	10,1	1,7	6,5	6,1	4,0	6,2	O.S.O.	5	S.O.	5	S.O.	15	41,0	41,0	37,0				
26	744,48	744,32	743,46	745,20	743,85	742,86	2,3	8,9	10,0	2,0	6,0	8,0	0,5	5,6	5,8	4,4	6,0	O.S.O.	8	S.O.	15	O.S.O.	10	40,0	41,0	40,0				
27	731,16	727,88	724,26	731,48	727,98	724,37	2,4	4,3	4,2	1,0	2,8	2,0	1,0	2,5	2,0	1,0	5,4	O.	5	O.S.O.	10	N.	15	41,0	42,0	42,0	40			
28	737,20	737,54	737,60	736,97	736,00	735,97	7,0	15,5	18,8	10,0	14,4	13,0	6,0	10,5	10,0	0,0	10,4	N.N.E.	5	E.N.E.	5	E.N.E.	5	40,0	38,0	35,0				
29	734,66	735,96	737,52	734,57	734,68	735,75	5,8	15,8	20,0	9,0	14,6	16,0	5,0	10,6	11,8	0,6	12,0	O.S.O.	5	E.N.E.	5	N.N.E.	5	38,0	37,0	35,0				

Per causa del gelo non si è tenuto conto dell'evaporazione.

STATO DELL'ATMOSFERA

GIORNI del MESE	MATTINO A ORE 9	MEZZODÌ	SERA A ORE 3
1	Sereno con vapori.	Sereno.	Sereno puro.
2	Coperto nebbioso.	Nuvole rotte.	Nuvole sparse. - *Brina nella notte.*
3	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno. - *Brina nella notte.*
4	Sereno con vapori.	Sereno.	Sereno.
5	Sereno con vapori.	Sereno.	Sereno.
6	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori. - *Poi vento.*
7	Sereno.	Sereno con vapori e ventoso.	Sereno e ventoso.
8	Sereno con nebbia.	Sereno.	Sereno.
9	Coperto nebbioso.	Coperto.	Coperto nebbioso.
10	Coperto nebbioso.	Nevischio.	Coperto.
11	Coperto nebbioso.	Coperto.	Coperto. – *Poi neve nella notte.*
12	Neve.	Coperto chiaro.	Nugoli sottili.
13	Nevischio. – *Poi neve.*	Coperto.	Coperto. – *Poi neve nella notte.*
14	Nevischio.	Coperto.	Nuvolette.
15	Coperto.	Coperto.	Coperto. – *Poi brina nella notte.*
16	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.	Coperto. – *Poi neve nella notte.*
17	Neve.	Neve.	Coperto e ventoso.
18	Sereno con nebbia.	Sereno.	Sereno.
19	Sereno con nebbia.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
20	Coperto nebbioso.	Coperto.	Nugoli sottili. – *Poi neve nella notte.*
21	Neve.	Coperto.	Nugoli sottili.
22	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno.
23	Nugoli sottili.	Coperto.	Coperto.
24	Coperto nebbioso.	Sereno con vapori.	Coperto.
25	Nuvolette.	Sereno con vapori.	Sereno.
26	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili. – *Poi neve verso il mattino.*
27	Neve.	Coperto.	Coperto.
28	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno.
29	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno.

Osservazioni meteorologiche fatte alla Specola dell'Accademia R. delle Scienze di Torino, elevata m. 284,50 sopra il livello del mare, nel mese di marzo 1860

GIORNI del MESE	BAROMETRO altezze osservate mattino ore 9	BAROMETRO altezze osservate mezzodì	BAROMETRO altezze osservate sera ore 3	BAROMETRO altezze ridotte mattino ore 9	BAROMETRO altezze ridotte mezzodì	BAROMETRO altezze ridotte sera ore 3	TERMOM. CENTIGRADO unito al barometro mattino ore 9	TERMOM. CENTIGRADO unito al barometro mezzodì	TERMOM. CENTIGRADO unito al barometro sera ore 3	TERMOM. CENTIGRADO al mezzodì mattino ore 9	TERMOM. CENTIGRADO al mezzodì mezzodì	TERMOM. CENTIGRADO al mezzodì sera ore 3	TIRMOMETRO CENTIGRADO a tramontana mattino ore 9	TIRMOMETRO CENTIGRADO a tramontana mezzodì	TIRMOMETRO CENTIGRADO a tramontana sera ore 3	TIRMOMETRO CENTIGRADO a tramontana *minima*	TIRMOMETRO CENTIGRADO a tramontana *massima*	ANEMOSCOPIO mattino ore 9 direzione	ANEMOSCOPIO mattino ore 9 forza	ANEMOSCOPIO mezzodì direzione	ANEMOSCOPIO mezzodì forza	ANEMOSCOPIO sera ore 3 direzione	ANEMOSCOPIO sera ore 3 forza	IGROMETRO mattino ore 9	IGROMETRO mezzodì	IGROMETRO sera ore 3	IETOMETRO mattino ore 9	IETOMETRO mezzodì	IETOMETRO sera ore 3	ATMIDOMETRO — mattino ore 9
	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	direzione	forza	direzione	forza	direzione	forza	gr. cent.	gr. cent.	gr. cent.	millim.	millim.	millim.	millim.
1	740,56	741,72	741,20	740,40	740,41	739,61	+ 6,4	+16,0	+18,4	+ 7,0	+14,2	+12,8	+ 5,8	+10,0	+ 9,9	+ 1,2	+11,6	O.S.O.	5	N.E.	5	N.E.	20	37,0	36,0	32,0				
2	743,14	744,16	743,82	742,83	742,67	742,38	7,6	17,4	17,0	12,0	12,2	10,9	9,1	11,0	10,0	1,4	12,8	O.S.O.	10	N.E.	5	N.N.E.	5	39,0	38,0	37,0				
3	744,94	745,28	745,20	744,72	743,83	743,34	6,8	17,1	20,5	7,2	16,8	15,8	5,1	12,2	11,7	0,5	12,8	O.S.O.	5	S.O.	5	S.E.	8	40,0	38,0	37,0				
4	746,16	746,18	745,48	745,87	744,88	743,65	7,4	15,8	20,3	8,2	15,8	13,5	4,9	10,7	10,1	− 0,6	12,4	N.E.	10	E.N.E.	5	N.E.	10	39,0	39,0	34,0				
5	734,30	734,80	736,06	734,00	734,20	735,23	7,6	10,1	12,0	6,0	10,8	13,4	5,3	8,5	10,0	0,4	11,0	E.	10	E.	20	O.N.O.	80	41,0	39,0	32,0				
6	739,70	738,82	739,10	739,21	738,02	738,21	9,2	11,8	12,5	10,0	14,4	14,3	8,3	11,2	11,0	+ 3,4	11,8	N.E.	15	N.N.E.	35	N.E.	30	31,0	26,0	27,0				
7	738,50	737,54	735,60	738,17	736,67	734,55	7,8	12,4	13,9	8,9	12,1	10,9	5,8	8,0	8,5	− 1,2	11,4	S.O.	15	S.E.	10	S.	10	30,0	29,0	28,0				
8	730,78	729,16	727,96	730,72	728,60	727,20	5,6	9,9	11,5	5,0	7,5	7,4	3,3	7,9	6,5	1,4	8,6	N.N.E.	5	S.O.	5	O.S.O.	15	32,0	32,0	29,0				
9	726,86	726,42	726,16	726,92	726,21	725,78	4,6	6,9	8,4	0,5	6,6	7,3	0,3	4,0	3,5	3,4	6,2	S.O.	15	S.S.O.	15	S.O.	10	36,0	35,0	32,0	neve 83			
10	729,50	729,40	729,54	729,55	729,07	728,84	4,7	7,9	11,0	3,1	6,0	6,9	− 0,5	2,2	3,1	5,4	3,2	N.N.E.	5	E.	5	S.	25	36,0	34,0	32,0				
11	732,00	732,30	731,54	732,18	732,15	731,06	3,6	6,4	9,2	1,5	4,3	6,3	0,7	1,0	2,0	6,6	2,2	N.E.	8	E.N.E.	10	N.E.	8	34,0	34,0	33,0				
12	733,18	733,38	732,74	733,50	733,46	732,76	2,4	4,4	4,9	− 0,3	1,2	0,7	1,4	1,0	0,0	4,5	2,0	N.E.	9	N.E.	7	N.E.	8	36,0	36,0	35,0				
13	732,20	731,94	731,60	732,54	731,96	731,44	2,2	4,9	6,5	+ 2,0	4,0	3,7	+ 0,5	1,5	1,7	5,0	2,6	O.	5	N.N.E.	5	N.E.	8	38,0	37,0	35,0				
14	729,84	729,74	729,14	729,97	729,05	727,97	4,0	10,9	15,0	5,1	12,1	9,5	3,7	7,8	7,0	2,0	8,2	S.O.	7	S.O.	5	E.	12	38,0	37,0	35,0				
15	728,30	728,52	729,30	728,46	728,53	729,01	3,8	5,0	7,6	2,0	5,0	6,0	1,9	4,2	5,1	+ 1,0	7,0	N.E.	3	N.E.	3	E.S.E.	4	37,0	37,0	37,0				
16	733,26	734,20	734,00	733,28	733,33	733,02	4,9	12,4	13,3	7,2	10,2	10,0	6,5	9,6	8,2	1,2	10,0	E.N.E.	1	S.E.	25	N.O.	20	39,0	37,0	34,0				
17	740,68	741,70	741,90	740,40	740,36	740,22	7,4	16,3	19,1	7,6	16,0	14,0	5,8	10,4	11,1	− 1,5	11,4	N.E.	2	N.	5	E.	5	40,0	33,0	33,0				
18	746,00	746,36	745,04	745,52	745,15	743,11	9,0	15,1	18,6	8,0	13,0	16,0	6,9	9,3	10,0	+ 1,2	11,6	N.N.E.	4	E.S.E.	5	N.	6	34,0	33,0	30,0				
19	741,96	742,64	741,78	741,58	741,12	739,69	8,2	17,8	22,5	9,0	16,3	14,2	8,0	12,7	12,0	1,3	14,4	S.O.	3	S.O.	15	E.	15	34,0	30,0	30,0				
20	746,26	746,76	746,40	745,40	744,92	744,14	12,2	20,3	23,8	11,7	18,7	18,8	11,3	14,1	15,5	1,3	16,4	E.N.E.	0	S.E.	5	S.O.	10	34,0	32,0	26,0				
21	743,70	743,00	742,02	743,03	741,78	740,02	10,6	15,2	21,8	10,0	16,0	15,1	8,9	12,6	14,0	3,2	15,4	N.N.E.	5	N.N.E.	8	E.	3	33,0	32,0	32,0				
22	736,36	735,70	734,60	735,54	734,19	732,41	11,9	17,8	23,5	11,0	13,5	17,9	9,9	12,0	14,5	3,0	15,6	N.E.	6	N.N.E.	8	N.E.	10	34,0	34,0	32,0				
23	739,66	739,40	739,00	738,81	737,82	737,19	12,2	18,3	20,2	13,0	16,8	18,0	11,1	14,0	14,1	3,2	16,0	O.S.O.	6	E.N.E.	20	N.O.	7	35,0	31,0	29,0				
24	733,00	730,90	729,70	732,45	730,07	728,78	9,7	12,1	12,9	8,0	10,3	11,7	6,5	9,0	9,8	1,9	10,0	E.N.E.	20	N.E.	20	E.N.E.	15	32,0	32,0	36,0				
25	724,42	723,96	724,50	724,01	723,16	723,56	8,7	12,0	13,2	6,0	15,2	14,1	6,0	13,0	12,1	2,4	12,2	O.S.O.	20	O.S.O.	90	O.N.O.	45	38,0	34,0	30,0				
26	730,12	730,48	730,92	729,55	729,61	729,93	9,9	12,5	13,5	10,0	15,6	14,0	7,4	13,0	12,8	3,2	13,0	O.N.O.	75	O.N.O.	80	O.N.O.	65	26,0	24,0	22,0				
27	732,32	733,16	732,20	732,00	731,54	730,01	7,8	18,8	23,7	9,9	18,2	20,2	6,7	13,0	16,0	0,8	16,0	N.	10	N.	3	O.N.O.	5	27,0	25,0	24,0				
28	736,24	736,36	735,50	735,35	734,74	733,43	12,5	18,7	22,5	13,4	19,9	20,3	12,0	16,8	17,5	2,6	17,6	O.S.O.	7	S.O.	8	O.S.O.	6	27,0	26,0	24,0				
29	735,48	734,74	734,50	734,80	733,21	732,40	13,3	17,9	23,7	13,8	17,5	22,0	13,0	15,0	18,0	4,3	19,4	S.S.O.	20	S.O.	15	N.	5	30,0	30,0	29,0				
30	730,84	730,86	730,40	729,75	728,81	727,94	14,3	22,5	26,0	13,1	21,0	22,2	11,5	18,1	19,0	7,3	19,0	N.E.	15	S.O.	12	S.O.	10	30,0	29,0	25,0				
31	733,84	732,50	732,30	732,87	731,32	730,63	13,2	15,0	19,3	10,8	14,8	16,0	9,9	12,0	14,1	7,8	18,8	N.N.E.	18	N.N.O.	5	N.O.	3	34,0	34,0	33,0				

Per causa del gelo non si è tenuto conto dell'evaporazione.

STATO DELL'ATMOSFERA

GIORNI del MESE	MATTINO A ORE 9	MEZZODÌ	SERA A ORE 3
1	Sereno con vapori.	Sereno.	Sereno con vapori.
2	Nuvole sparse.	Nuvole sparse.	Quasi annuvolato.
3	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.	Nuvole sparse.
4	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Nuvolette.
5	Nugoli sottili.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori e vento.
6	Sereno.	Sereno ventoso.	Sereno ventoso.
7	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.
8	Coperto.	Nugoli sottili.	Nuvole sparse. – *Poi neve nella notte.*
9	Coperto.	Coperto chiaro.	Nugoli sottili.
10	Nugoli sottili.	Sereno con vapori.	Sereno.
11	Nugoli sottili.	Sereno con vapori.	Nuvole sparse. - *Poi neve nella notte.*
12	Neve.	Nevischio.	Coperto.
13	Coperto nebbioso.	Coperto chiaro.	Coperto chiaro.
14	Sereno con vapori.	Sereno.	Sereno. - *Poi neve verso il mattino.*
15	Neve. – *Poi pioggia.*	Pioviggina.	Annuvolato.
16	Coperto chiaro.	Nugoli sottili.	Nuvole sparse.
17	Sereno con vapori.	Sereno puro.	Sereno.
18	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
19	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Nuvole sparse.
20	Sereno con vapori.	Sereno.	Sereno con vapori.
21	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.
22	Sereno con vapori.	Nuvole sparse.	Nuvolette.
23	Sereno con vapori.	Sereno.	Sereno.
24	Coperto chiaro.	Annuvolato.	Coperto chiaro.
25	Coperto nebbioso.	Sereno con vapori e vento.	Sereno con vapori e vento.
26	Sereno con vapori e vento.	Sereno con vapori e vento.	Nugoli sottili e vento.
27	Sereno.	Sereno.	Sereno.
28	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
29	Sereno.	Nugoli sottili.	Sereno con vapori.
30	Sereno con vapori.	Nuvolette.	Sereno.
31	Annuvolato.	Annuvolato.	Nuvole rotte.

Osservazioni meteorologiche fatte alla Specola dell'Accademia R. delle Scienze di Torino, elevata m. 284, 50 sopra il livello del mare, nel mese di aprile 1860

GIORNI del MESE	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE SERA ore 3	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MATTINO ore 9	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MEZZODÌ	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *minima*	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *massima*	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 direzione	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 forza	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ direzione	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ forza	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 direzione	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 forza	IGROMETRO MATTINO ore 9	IGROMETRO MEZZODÌ	IGROMETRO SERA ore 3	IETOMETRO MATTINO ore 9	IETOMETRO MEZZODÌ	IETOMETRO SERA ore 3	ATMIDOMETRO — MATTINO ore 9
	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.							gr. cent.	gr. cent.	gr. cent.	millim.	millim.	millim.	millim.
1	730, 10	729, 92	729, 50	728, 99	727, 97	727, 86	+14, 5	+21, 6	+19, 0	+13, 2	+18, 9	+14, 0	+12, 3	+18, 0	+13, 5	+ 8, 4	+18, 8	N.E.	10	O.S.O.	5	N.	10	35, 0	33, 0	31, 0				3
2	732, 94	733, 16	733, 40	732, 03	731, 72	731, 42	12, 8	17, 2	21, 8	11, 9	19, 1	19, 5	10, 6	15, 0	16, 0	7, 0	+16, 0	S.O.	5	S.O.	4	N.E.	8	38, 0	37, 0	37, 0	pioggia 5			3
3	734, 52	733, 30	732, 64	733, 50	731, 89	730, 82	13, 6	16, 9	20, 4	12, 0	14, 5	19, 0	10, 3	13, 4	15, 5	4, 8	16, 6	N.E.	7	E.N.E.	5	N.E.	8	38, 0	35, 0	35, 0				5
4	737, 30	737, 36	736, 96	736, 40	736, 25	735, 90	12, 6	14, 4	14, 0	10, 0	12, 5	11, 0	9, 1	12, 0	10, 7	6, 4	15, 2	N.E.	25	N.E.	20	N.E.	18	38, 0	38, 0	37, 0				7
5	738, 20	738, 16	738, 34	737, 46	737, 34	737, 51	11, 3	11, 9	12, 0	8, 1	9, 2	9, 1	8, 0	8, 8	8, 6	7, 2	11, 0	N.	15	N.N.E.	10	E.N.E.	15	43, 0	44, 0	44, 0	10	pioggia »	pioggia 1	1
6	737, 66	737, 14	735, 90	736, 93	736, 36	735, 08	11, 2	11, 6	11, 9	10, 0	10, 2	10, 0	9, 1	9, 7	9, 9	8, 6	10, 2	N.N.E.	10	N.N.E.	12	N.E.	14	46, 0	47, 0	47, 0	8	8	13	0
7	734, 76	733, 98	733, 10	734, 00	733, 13	732, 19	11, 4	12, 2	12, 7	10, 5	11, 5	12, 5	10, 0	11, 2	11, 9	9, 2	12, 4	E.	4	N.	5	O.N.O.	2	48, 0	48, 0	47, 0	23	»	4	0
8	733, 66	733, 34	732, 94	732, 83	732, 39	731, 76	12, 0	13, 0	15, 0	11, 2	12, 5	16, 0	10, 4	11, 8	14, 5	10, 7	15, 0	N.N.E.	15	N.N.E.	4	N.E.	25	49, 0	49, 0	46, 0	42	3	»	0
9	731, 10	730, 44	729, 92	729, 77	728, 62	727, 64	16, 4	20, 5	24, 4	15, 4	19, 5	18, 1	14, 2	16, 4	18, 0	10, 6	19, 4	E.N.E.	3	N.E.	5	N.	5	47, 0	43, 0	42, 0				7
10	728, 82	727, 80	727, 00	727, 45	725, 98	725, 12	16, 7	20, 5	21, 0	15, 6	20, 4	20, 5	14, 0	18, 3	17, 5	7, 8	18, 3	E.N.E.	3	O.S.O.	5	O.	5	42, 0	32, 0	32, 0				7
11	731, 16	732, 00	732, 14	730, 57	731, 34	731, 49	10, 1	10, 7	10, 6	4, 0	5, 8	7, 5	3, 5	5, 5	7, 0	1, 6	7, 6	N.N.O.	20	N.	5	S.O.	25	39, 0	41, 0	41, 0	27	5	2	4
12	737, 22	736, 78	736, 62	736, 12	735, 23	734, 74	14, 3	18, 1	20, 9	13, 0	17, 5	16, 7	13, 0	15, 7	15, 1	3, 1	16, 4	S.O.	7	S.O.	10	O.	8	43, 0	34, 0	34, 0				0
13	739, 60	739, 16	738, 10	738, 59	737, 58	736, 24	13, 5	18, 3	20, 6	12, 0	15, 4	15, 3	11, 2	14, 5	14, 7	4, 5	15, 2	N.N.E.	20	O.	5	O.N.O.	8	36, 0	30, 0	32, 0				13
14	737, 62	737, 74	737, 46	737, 01	736, 77	736, 28	11, 0	13, 2	15, 0	8, 0	12, 2	15, 0	7, 8	11, 6	12, 0	5, 4	15, 2	N.N.E.	12	O.S.O.	20	S.O.	15	37, 0	36, 0	35, 0	7			2
15	740, 80	741, 02	740, 70	739, 80	739, 27	739, 11	13, 4	19, 7	18, 4	12, 7	18, 0	15, 1	11, 0	16, 5	13, 8	3, 6	17, 4	N.N.E.	5	S.S.E.	6	N.E.	8	38, 0	35, 0	32, 0				10
16	742, 00	742, 10	741, 68	740, 78	740, 33	739, 64	15, 3	19, 9	22, 1	15, 0	19, 5	20, 5	15, 0	16, 8	17, 0	7, 8	17, 4	O.S.O.	18	S.S.O.	15	S.O.	15	35, 0	30, 0	31, 0				2
17	743, 86	742, 54	741, 56	742, 95	741, 44	740, 45	12, 6	14, 3	14, 4	10, 4	13, 9	13, 0	9, 7	12, 4	12, 1	8, 5	15, 1	E.N.E.	85	N.E.	30	N.E.	35	33, 0	35, 0	34, 0				11
18	737, 40	736, 18	734, 70	736, 63	735, 29	733, 76	11, 5	12, 5	12, 9	8, 0	9, 3	11, 0	7, 8	8, 8	10, 0	7, 5	12, 4	N.	15	N.	10	N.O.	5	40, 0	40, 0	40, 0	6	2	1	2
19	726, 18	724, 52	722, 44	725, 29	722, 97	720, 68	12, 7	18, 4	20, 2	12, 1	16, 5	15, 0	11, 9	15, 0	13, 1	6, 4	17, 7	S.O.	10	O.S.O.	12	E.	10	43, 0	39, 0	34, 0	4			2
20	722, 40	723, 28	723, 38	721, 75	722, 36	722, 45	10, 7	13, 0	13, 1	6, 6	10, 1	8, 5	7, 0	9, 5	8, 6	3, 4	11, 2	O.N.O.	5	E.S.E.	20	E.S.E.	5	38, 0	37, 0	36, 0	12	»	3	5
21	727, 96	728, 14	728, 68	727, 15	726, 95	727, 18	12, 0	15, 2	17, 8	9, 3	11, 9	13, 8	7, 5	10, 2	11, 1	0, 4	13, 9	N.N.E.	6	E.N.E.	10	N.	5	41, 0	36, 0	34, 0	2			3
22	733, 16	734, 12	734, 46	732, 44	732, 81	732, 85	11, 9	16, 1	18, 6	10, 0	15, 0	15, 0	10, 0	12, 9	12, 2	1, 6	13, 0	O.S.O.	20	S.S.O.	18	O.N.O.	45	39, 0	33, 0	31, 0				7
23	737, 64	737, 66	736, 90	736, 79	736, 00	735, 06	12, 2	19, 0	20, 6	9, 0	15, 3	18, 1	10, 5	12, 1	15, 0	2, 6	15, 5	E.N.E.	6	N.	10	S.O.	15	32, 0	31, 0	26, 0				7
24	736, 46	735, 34	734, 16	735, 66	734, 43	733, 33	11, 8	13, 6	12, 0	9, 3	10, 5	6, 9	9, 0	10, 1	6, 3	5, 0	15, 4	N.E.	25	E.N.E.	10	N.E.	3	31, 0	31, 0	31, 0	3			3
25	727, 60	728, 84	730, 10	727, 18	728, 40	729, 65	8, 8	8, 8	8, 9	5, 8	6, 2	6, 0	5, 0	5, 5	5, 3	2, 0	5, 5	N.N.E.	55	N.N.E.	30	N.N.E.	25	41, 0	44, 0	43, 0	74	8	7	0
26	734, 18	734, 40	734, 50	733, 74	733, 51	733, 16	8, 8	12, 5	16, 3	7, 5	13, 1	13, 4	6, 8	9, 9	11, 1	4, 2	11, 6	N.N.O.	3	N.	5	N.E.	2	45, 0	44, 0	42, 0	17			0
27	733, 82	733, 58	733, 30	732, 46	731, 62	731, 14	16, 5	21, 6	23, 3	14, 5	18, 0	20, 0	14, 0	15, 8	17, 2	5, 0	17, 4	O.S.O.	4	S.O.	5	S.S.O.	25	39, 0	36, 0	34, 0				7
28	738, 66	738, 74	738, 80	737, 97	737, 92	737, 97	10, 8	11, 9	12, 0	8, 1	7, 5	8, 7	7, 8	8, 6	8, 1	6, 4	8, 6	N.E.	10	E.N.E.	5	N.E.	25	36, 0	38, 0	38, 0	2	»	4	8
29	743, 50	743, 22	742, 56	742, 88	742, 42	741, 25	10, 2	11, 7	15, 9	8, 0	11, 0	17, 5	8, 0	10, 1	13, 8	4, 4	13, 8	N.N.E.	20	N.O.	18	N.	10	42, 0	43, 0	42, 0	4	2		2
30	743, 26	743, 62	743, 04	742, 44	742, 62	742, 09	11, 8	13, 3	12, 9	12, 5	12, 2	11, 2	11, 9	12, 0	11, 0	9, 4	11, 4	O.S.O.	5	O.S.O.	10	S.O.	15	39, 0	40, 0	42, 0	1			4

STATO DELL'ATMOSFERA

GIORNI del MESE	MATTINO A ORE 9	MEZZODÌ	SERA A ORE 3
1	Nuvolette.	Nuvole sparse.	Nuvole oscure. – *Poi pioggia, vento e tuono.*
2	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.	Sereno con vapori.
3	Coperto chiaro.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.
4	Pioggia.	Annuvolato.	Pioggia.
5	Pioviggina.	Pioviggina.	Annuvolato piovigginoso.
6	Pioggia.	Pioggia.	Pioggia.
7	Pioggia.	Pioggia.	Annuvolato. - *Poi pioggia.*
8	Pioggia.	Pioggia.	Nuvole squarciate.
9	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.	Coperto chiaro.
10	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.	Quasi annuvolato. - *Poi pioggia, vento e neve.*
11	Pioggia.	Pioggia.	Annuvolato.
12	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.
13	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili. – *Poi pioggia.*
14	Pioviggina.	Annuvolato.	Nuvole a gruppi.
15	Sereno con vapori.	Nuvole sparse.	Nuvole sparse.
16	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Nuvolette.
17	Annuvolato e ventoso.	Nuvole rotte.	Annuvolato. - *Poi pioggia.*
18	Pioggia.	Pioviggina.	Pioggia.
19	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.	Nuvole rotte. - *Poi pioggia.*
20	Annuvolato.	Annuvolato. – *Poi pioggia e gragnuola.*	Pioggia.
21	Nuvole a liste.	Nuvole a gruppi.	Nuvole sparse.
22	Sereno.	Nuvolette.	Nuvolette e ventoso.
23	Sereno con vapori.	Nuvolette.	Nuvole sparse. – *Poi pioggia.*
24	Nuvole a gruppi.	Annuvolato. - *Poi pioggia.*	Pioggia.
25	Pioggia.	Pioggia.	Pioggia.
26	Annuvolato.	Nuvole rotte.	Nuvole a gruppi.
27	Sereno.	Sereno con vapori.	Nuvole sparse. – *Poi pioggia.*
28	Annuvolato.	Annuvolato piovigginoso. – *Poi pioggia.*	Pioggia.
29	Pioggia.	Annuvolato.	Nuvole sparse. – *Poi pioggia.*
30	Annuvolato.	Annuvolato piovigginoso.	Annuvolato. – *Poi pioggia.*

Osservazioni meteorologiche fatte alla Specola dell'Accademia R. delle Scienze di Torino, elevata m. 284,50 sopra il livello del mare, nel mese di gennaio 1861

GIORNI	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE SERA ore 3	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MATTINO ore 9	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MEZZODÌ	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *minima*	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *massima*	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 direzione	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 forza	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ direzione	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ forza	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 direzione	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 forza	IGROMETRO MATTINO ore 9	IGROMETRO MEZZODÌ	IGROMETRO SERA ore 3	IETOMETRO MATTINO ore 9	IETOMETRO MEZZODÌ	IETOMETRO SERA ore 3	ATMIDOMETRO MATTINO ore 9
	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	direzione	forza	direzione	forza	direzione	forza	gr. cent.	gr. cent.	gr. cent.	millim.	millim.	millim.	millim.
1	730,14	728,12	727,46	731,02	728,58	727,77	− 2,4	+ 1,2	+ 2,5	− 3,5	0,0	− 0,5	− 4,3	− 1,0	− 0,8	− 8,0	− 0,4	O.	15	O.S.O.	5	N.O.	5	47,0	48,0	46,0				Per causa del gelo non si è tenuto conto dell'evaporazione.
2	729,20	730,98	733,38	729,89	731,42	733,68	0,8	1,4	2,6	3,0	+ 2,0	+ 1,5	3,0	0,8	+ 1,2	6,6	+ 10,4	E.S.E.	5	E.N.E.	10	E.N.E.	5	42,0	42,0	42,0				
3	735,76	736,32	736,28	736,18	736,44	736,55	+ 1,6	4,1	2,8	+ 1,0	0,2	− 1,1	0,5	0,0	− 1,3	1,2	1,0	N.O.	5	N.N.E.	5	N.	5	45,0	44,0	44,0	neve 19			
4	736,94	735,58	735,40	737,89	736,00	735,60	− 3,0	1,5	3,4	− 6,5	0,0	1,2	7,0	1,5	2,5	12,0	− 1,2	S.O.	5	O.S.O.	5	S.O.	10	48,0	49,0	48,0				
5	734,50	733,84	734,22	735,57	734,71	734,98	4,0	− 2,3	− 1,4	7,0	− 3,7	2,2	7,8	4,5	3,0	12,2	3,0	E.N.E.	5	N.E.	5	N.E.	10	50,0	50,0	50,0				
6	732,00	731,52	731,80	732,90	731,74	731,72	2,6	+ 3,2	+ 5,8	1,5	+ 3,5	+ 2,0	1,9	+ 1,0	+ 0,5	5,8	+ 0,8	S.O.	10	O.S.O.	5	S.O.	20	49,0	49,0	46,0				
7	735,46	735,80	735,48	736,54	736,31	736,09	4,1	0,8	− 0,1	7,0	− 2,0	− 1,6	7,5	− 2,5	− 2,1	9,6	0,0	S.O.	5	O.S.O.	20	O.S.O.	5	49,0	47,0	47,0				
8	739,16	739,32	739,86	739,83	739,63	740,09	0,6	2,4	+ 3,1	0,1	+ 1,0	+ 1,1	0,9	+ 1,5	+ 0,8	3,4	1,6	N.N.O.	7	N.E.	3	O.S.O.	5	48,0	49,0	50,0	11		neve 1	
9	742,40	742,18	742,26	742,79	742,51	742,36	+ 1,8	2,3	4,2	+ 2,0	2,6	3,2	+ 1,5	2,2	3,0	0,2	3,4	O.S.O.	5	S.O.	30	O.S.O.	5	51,0	51,0	51,0	40			
10	742,84	743,50	742,90	743,27	742,86	742,40	1,4	10,4	9,2	2,2	7,0	2,8	2,0	4,5	2,6	0,2	5,4	N.	3	N.E.	0	S.O.	5	50,0	52,0	50,0				
11	740,92	739,90	739,38	741,54	740,39	739,75	− 0,2	1,0	2,0	− 0,5	0,0	− 0,6	− 1,0	− 0,3	− 0,7	4,0	− 0,1	O.S.O.	5	N.N.E.	5	E.N.E.	5	52,0	52,0	51,0				
12	737,26	736,70	736,52	737,86	737,19	737,05	0,0	1,0	0,6	0,5	0,0	0,0	0,8	0,0	0,3	3,4	+ 0,1	N.E.	0	N.E.	5	N.E.	8	52,0	52,0	52,0				
13	737,54	736,98	736,70	738,16	737,08	736,53	0,2	4,2	6,5	0,0	2,5	2,0	0,9	+ 0,1	0,0	3,9	0,7	N.E.	2	N.E.	0	O.S.O.	15	52,0	52,0	50,0				
14	734,40	733,90	733,68	735,07	734,46	734,07	0,6	0,3	1,8	1,0	0,8	+ 0,8	1,0	0,1	+ 0,6	5,6	0,6	S.O.	8	O.S.O.	15	S.O.	5	52,0	52,0	52,0				
15	733,12	733,20	733,48	733,67	733,26	733,52	+ 0,4	4,6	4,8	0,0	3,0	1,1	0,5	1,1	0,8	3,0	2,0	S.S.E.	2	E.	5	E.N.E.	5	52,0	52,0	49,0				
16	735,16	733,40	732,92	735,73	733,76	733,00	0,3	2,0	4,4	1,5	0,2	2,0	2,0	0,5	0,9	3,4	1,0	N.N.E.	0	O.S.O.	5	O.	10	52,0	52,0	48,0	62			
17	737,04	736,70	737,42	737,66	737,02	737,46	− 0,2	2,4	4,8	1,3	1,0	2,2	1,5	0,0	0,1	4,0	− 0,6	N.	5	O.	7	O.S.O.	10	51,0	50,0	50,0				
18	738,94	738,80	739,60	739,89	739,31	739,61	3,0	0,8	5,0	8,7	0,9	1,2	11,0	− 1,5	− 0,8	13,0	0,8	O.S.O.	8	O.S.O.	7	O.S.O.	5	51,0	51,0	48,0				
19	743,24	742,76	743,10	744,20	743,36	743,46	3,0	0,0	2,0	5,5	0,0	− 0,9	6,3	3,0	3,0	10,0	2,0	S.O.	5	O.S.O.	10	O.	15	51,0	51,0	50,0				
20	740,18	739,48	740,84	741,23	740,29	741,06	3,8	− 1,8	3,2	7,5	− 2,0	0,5	7,8	2,0	0,5	13,4	0,0	O.S.O.	15	O.S.O.	5	O.S.O.	5	50,0	51,0	51,0				
21	749,60	749,58	750,56	750,59	749,70	749,92	3,2	+ 4,0	10,3	2,0	+ 4,0	+ 3,0	3,6	+ 0,2	+ 1,1	10,8	+ 1,6	S.O.	6	S.O.	5	O.S.O.	6	50,0	49,0	47,0				
22	741,70	740,26	739,52	742,61	740,53	739,38	2,6	2,8	6,2	+ 0,2	5,2	9,0	1,0	4,2	5,7	8,2	6,0	S.O.	25	O.S.O.	45	O.S.O.	5	46,0	45,0	43,0				
23	740,60	742,50	743,44	740,99	742,63	743,42	+ 1,8	4,0	5,2	3,5	4,0	6,1	+ 2,8	3,0	3,1	2,4	4,8	O.S.O.	15	S.O.	10	N.E.	5	44,0	42,0	43,0				
24	747,28	747,90	748,40	748,02	747,90	747,97	− 1,2	5,0	8,6	− 2,0	4,3	4,0	− 3,5	2,5	2,1	7,8	3,6	O.S.O.	5	O.S.O.	3	O.S.O.	4	47,0	48,0	48,0				
25	749,20	749,84	450,60	750,07	749,53	749,64	2,3	7,6	13,0	6,0	9,0	9,0	6,0	3,9	5,8	9,4	5,8	S.O.	10	O.S.O.	5	O.S.O.	5	49,0	48,0	46,0				
26	747,86	747,64	747,22	748,53	747,69	746,98	0,6	4,6	7,0	1,0	5,0	5,0	1,3	4,0	4,8	7,4	4,8	O.	10	N.N.E.	5	S.S.O.	3	48,0	50,0	50,0				
27	744,54	743,94	743,90	744,84	743,67	743,08	+ 2,5	7,2	11,8	+ 2,0	7,0	6,1	+ 2,0	3,5	4,6	3,4	5,0	O.	3	N.E	5	O.N.O.	4	49,0	49,0	48,0				
28	743,30	744,34	744,96	743,15	744,12	744,34	6,2	6,8	10,2	5,8	8,1	7,2	3,1	5,0	6,1	1,0	6,2	N.E.	15	E.	8	E.N.E.	5	46,0	46,0	46,0				
29	747,86	746,52	745,80	748,29	746,84	746,10	1,4	2,3	2,5	0,2	1,0	0,9	0,0	1,0	0,9	3,4	1,0	O.	5	O.S.O.	5	O.S.O.	6	48,0	48,0	48,0				
30	744,02	743,30	743,32	744,56	743,78	743,74	0,5	1,0	1,5	− 2,5	− 2,0	− 1,4	− 3,2	− 2,2	− 1,5	4,0	0,2	O.	0	E.N.E.	0	O.N.O.	0	50,0	51,0	51,0				
31	748,72	748,80	749,38	749,27	748,70	748,70	0,4	5,8	10,7	0,0	+ 6,2	+ 6,1	0,5	+ 2,9	+ 3,5	3,2	3,5	S.O.	10	O.S.O.	8	O.S.O.	5	52,0	52,0	49,0				

STATO DELL'ATMOSFERA

GIORNI del MESE	MATTINO A ORE 9	MEZZODÌ	SERA A ORE 3
1	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.
2	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Coperto. - *Poi neve nella notte.*
3	Sereno.	Nugoli sottili.	Coperto nebbioso.
4	Nebbia folta.	Sereno con nebbia.	Sereno con nebbia.
5	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.	Annuvolato.
6	Coperto.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
7	Sereno con nebbia.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili. – *Poi neve nella notte.*
8	Neve.	Neve.	Neve.
9	Coperto nebbioso.	Coperto	Coperto nebbioso.
10	Nebbia folta.	Nebbia folta.	Nugoli sottili.
11	Nebbia folta.	Nebbia folta.	Nebbia folta.
12	Nebbia folta.	Coperto nebbioso.	Pioviggina.
13	Coperto nebbioso.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
14	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.	Nevischio.
15	Coperto nebbioso.	Sereno con nebbia.	Coperto.
16	Neve.	Coperto.	Sereno con vapori.
17	Coperto.	Nugoli sottili.	Sereno con vapori.
18	Sereno con vapori.	Sereno.	Sereno.
19	Sereno con nebbia.	Sereno.	Sereno.
20	Nugoli sottili.	Coperto nebbioso.	Nugoli sottili.
21	Sereno con nebbia.	Sereno con vapori.	Sereno.
22	Sereno con vapori.	Nuvole a liste.	Sereno con vapori.
23	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.
24	Nebbia.	Nebbia.	Nebbia.
25	Nebbia folta.	Sereno con nebbia.	Sereno con nebbia.
26	Quasi coperto.	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.
27	Sereno con nebbia.	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.
28	Sereno con nebbia.	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.
29	Coperto con nebbia.	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.
30	Nebbia folta.	Nebbia folta.	Nebbia folta.
31	Coperto.	Sereno con nebbia.	Sereno con vapori.

Osservazioni meteorologiche fatte alla Specola dell'Accademia R. delle Scienze di Torino, elevata m. 284, 50 sopra il livello del mare, nel mese di febbraio 1861

GIORNI del MESE	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE SERA ore 3	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MATTINO ore 9	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MEZZODÌ	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *minima*	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *massima*	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 direzione	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 forza	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ direzione	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ forza	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 direzione	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 forza	IGROMETRO MATTINO ore 9	IGROMETRO MEZZODÌ	IGROMETRO SERA ore 3	IETOMETRO MATTINO ore 9	IETOMETRO MEZZODÌ	IETOMETRO SERA ore 3	ATMIDOMETRO — MATTINO ore 9
	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	direzione	forza	direzione	forza	direzione	forza	gr. cent.	gr. cent.	gr. cent.	millim.	millim.	millim.	
1	748, 80	748, 20	748, 00	749, 40	748, 70	748, 43	0, 0	+ 0, 8	+ 1, 4	− 3, 0	− 1, 0	− 1, 0	− 3, 7	− 1, 3	− 1, 0	− 4, 6	− 1, 0	O.S.O.	8	S.O.	3	S.O.	3	51, 0	52, 0	52, 0				
2	745, 78	745, 96	746, 50	746, 43	745, 88	745, 86	− 0, 4	5, 7	13, 0	1, 3	+ 4, 0	+10, 0	1, 5	+ 3, 0	+ 6, 9	6, 4	+ 6, 9	O.S.O.	5	E.N.E.	0	E.N.E.	0	53, 0	52, 0	50, 0				
3	748, 16	748, 34	748, 18	748, 22	747, 52	747, 02	+ 4, 5	11, 8	14, 7	+ 3, 5	10, 8	8, 3	+ 3, 0	6, 7	6, 1	3, 8	7, 4	S.O	5	S.O.	3	E.N.E.	8	48, 0	48, 0	46, 0				
4	744, 50	744, 70	744, 84	744, 78	743, 93	743, 57	2, 7	11, 4	15, 6	3, 6	10, 0	10, 7	2, 3	5, 3	6, 6	4, 6	6, 9	O.S.O.	5	O.S.O.	10	S.O.	4	47, 0	45, 0	43, 0				
5	744, 66	744, 20	744, 32	745, 04	744, 10	743, 67	1, 8	5, 8	10, 4	1, 4	8, 0	8, 6	1, 3	4, 9	5, 7	3, 0	6, 6	S.O.	6	O.	10	O.	5	47, 0	47, 0	44, 0				
6	742, 76	742, 20	741, 66	743, 09	742, 37	741, 58	2, 3	3, 6	5, 7	2, 0	3, 0	3, 8	1, 8	2, 0	2, 7	1, 0	3, 6	O.S.O.	5	N.E.	15	N.E.	5	47, 0	47, 0	47, 0				
7	739, 60	738, 38	738, 00	739, 90	738, 58	738, 17	2, 5	3, 4	3, 6	1, 0	2, 0	1, 7	1, 0	1, 9	1, 3	+ 0, 2	3, 0	N.N.E.	3	N.E.	3	N.N.E.	8	48, 0	48, 0	48, 0		pioggia e neve 5	pioggia 1	
8	737, 20	736, 70	736, 30	737, 52	736, 81	736, 24	2, 4	4, 1	5, 6	2, 5	4, 8	4, 1	2, 0	4, 0	3, 9	0, 0	5, 0	O.S.O.	5	S.O.	5	O.N.O.	5	50, 0	50, 0	51, 0	pioggia 1	pioggia 3		
9	729, 70	728, 74	729, 12	729, 78	728, 79	729, 16	4, 4	4, 7	4, 8	4, 3	5, 0	2, 9	4, 0	5, 0	2, 8	3, 0	5, 0	N.N.E.	10	N.N.E.	15	S.O.	5	51, 0	52, 0	52, 0	52	11	8	
10	737, 20	736, 98	737, 40	737, 21	738, 85	738, 43	5, 0	10, 6	13, 0	4, 9	11, 0	11, 1	3, 0	7, 2	7, 9	0, 8	8, 2	O.S.O.	8	O.	10	S.O.	20	53, 0	52, 0	50, 0	11			
11	726, 74	723, 18	721, 42	726, 93	723, 02	720, 77	3, 5	6, 5	10, 7	3, 0	7, 9	8, 5	2, 3	5, 5	5, 8	− 0, 4	8, 6	N.E.	2	S.O.	5	S.O.	10	51, 0	51, 0	50, 0				
12	728, 20	730, 12	731, 34	728, 38	729, 63	730, 67	3, 6	9, 3	10, 8	2, 5	10, 0	10, 0	2, 0	7, 0	7, 1	2, 4	7, 2	O.S.O.	2	S.O.	15	O.S.O.	15	50, 0	50, 0	44, 0				
13	741, 12	741, 36	741, 40	741, 23	740, 91	740, 93	4, 1	8, 8	9, 0	4, 0	7, 0	6, 0	2, 7	7, 0	6, 0	0, 8	7, 8	O.S.O.	6	S.O.	2	S.O.	6	50, 0	51, 0	47, 0				
14	744, 32	744, 90	745, 10	744, 58	744, 21	744, 08	2, 8	10, 8	13, 5	2, 9	11, 8	10, 0	2, 2	8, 0	8, 0	2, 8	8, 6	O.S.O.	6	S.O.	10	S.O.	20	50, 0	47, 0	45, 0				
15	745, 62	745, 22	744, 54	745, 79	745, 05	744, 21	3, 6	6, 4	7, 8	3, 1	5, 5	5, 0	2, 5	5, 0	5, 1	0, 6	5, 8	N.E.	4	O.S.O.	4	O.S.O.	2	48, 0	48, 0	49, 0				
16	741, 40	740, 40	740, 72	741, 61	740, 41	740, 68	3, 3	5, 0	5, 4	3, 0	4, 0	4, 0	3, 0	3, 5	3, 5	+ 0, 8	4, 6	S.O.	6	N.	5	N.N.E.	2	49, 0	49, 0	50, 0		2	1	
17	739, 60	739, 30	738, 62	739, 70	738, 64	737, 26	4, 2	10, 6	16, 5	5, 0	12, 5	12, 5	4, 5	9, 0	9, 4	2, 0	9, 9	S.O.	15	S.O.	5	O.S.O.	6	51, 0	51, 0	44, 0				
18	735, 68	735, 98	736, 70	735, 68	735, 77	735, 70	5, 1	6, 8	13, 5	3, 9	9, 1	12, 0	3, 9	8, 0	9, 0	0, 0	10, 2	S.O.	4	O.S.O.	8	O.S.O.	15	49, 0	50, 0	46, 0				
19	739, 20	740, 08	739, 88	738, 95	738, 85	738, 43	7, 1	15, 4	17, 2	8, 2	15, 8	10, 0	6, 2	11, 5	9, 5	3, 4	13, 5	O.S.O.	7	S.O.	1	N.E.	10	48, 0	48, 0	44, 0				
20	742, 26	742, 14	741, 96	742, 03	741, 83	741, 61	7, 0	7, 6	8, 0	6, 0	6, 5	8, 0	5, 3	6, 0	7, 0	4, 8	7, 4	N.N.O.	10	N.	8	N.N.E.	18	46, 0	46, 0	47, 0	12	6	1	
21	744, 62	744, 74	745, 00	744, 24	743, 60	743, 46	8, 1	14, 5	17, 8	8, 0	13, 0	13, 0	7, 0	11, 0	10, 3	4, 2	12, 0	S.O.	10	S.S.E.	15	N.N.E.	3	48, 0	48, 0	47, 0	2			
22	744, 48	743, 96	744, 10	744, 09	742, 98	742, 73	8, 2	13, 2	16, 4	8, 3	12, 0	14, 0	8, 0	12, 0	11, 9	5, 4	13, 4	O.S.O.	5	O.S.O.	5	N.N.E.	5	47, 0	47, 0	47, 0				
23	742, 92	742, 62	741, 68	742, 49	742, 17	741, 22	8, 6	8, 8	8, 9	7, 5	7, 8	7, 3	7, 0	7, 2	7, 0	6, 8	8, 2	E.N.E.	5	N.E.	8	N.E.	15	46, 0	47, 0	47, 0		4	4	
24	738, 70	738, 72	738, 78	738, 43	738, 32	738, 31	7, 3	8, 4	9, 0	6, 0	8, 0	7, 5	5, 9	7, 1	6, 8	4, 6	8, 0	S.O.	6	E.S.E.	5	E.N.E.	25	51, 0	51, 0	51, 0	43	1		
25	737, 88	737, 30	737, 26	737, 66	737, 06	736, 96	6, 9	7, 1	7, 6	4, 5	6, 9	8, 0	4, 3	6, 2	8, 0	4, 0	8, 0	S.O.	8	N.N.E.	30	E.N.E.	35	52, 0	52, 0	52, 0	23	9	3	
26	738, 66	738, 96	738, 62	738, 28	738, 52	738, 03	8, 2	8, 7	10, 0	7, 9	8, 3	11, 0	8, 0	8, 2	10, 3	7, 0	11, 0	N.E.	20	N.N.E.	28	O.S.O.	15	52, 0	52, 0	52, 0	8	5		
27	739, 20	739, 58	739, 42	738, 81	738, 59	738, 10	8, 3	13, 4	16, 1	9, 0	13, 0	13, 2	7, 2	12, 0	12, 4	3, 6	12, 6	N.E.	4	E.N.E.	10	E.N.E.	8	51, 0	50, 0	49, 0				
28	738, 70	738, 40	737, 70	738, 21	737, 52	736, 67	9, 1	12, 4	13, 7	9, 5	10, 5	11, 6	9, 0	10, 5	10, 0	6, 8	11, 6	N.N.E.	0	E.N.E.	2	N.E.	2	47, 0	48, 0	47, 0				

Per causa del gelo non si è tenuto conto dell'evaporazione.

STATO DELL'ATMOSFERA

GIORNI del MESE	MATTINO A ORE 9	AL MEZZODÌ	SERA A ORE 3
1	Nebbia folta.	Nebbia folta.	Nebbia folta.
2	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.	Nugoli sottili.
3	Sereno con nebbia.	Sereno con nebbia.	Sereno con vapori.
4	Sereno con nebbia.	Sereno.	Sereno con vapori.
5	Coperto nebbioso.	Nuvolette.	Sereno con vapori.
6	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.	Coperto.
7	Annuvolato piovigginoso. - *Poi pioggia e neve.*	Nevischio.	Pioviggina. - *Poi neve.*
8	Coperto nebbioso.	Pioggia.	Annuvolato piovigginoso. - *Poi pioggia.*
9	Pioggia.	Pioggia.	Pioggia.
10	Annuvolato.	Nuvole sparse.	Nuvole sparse.
11	Nebbia folta.	Coperto nebbioso.	Sereno con vapori.
12	Sereno con vapori.	Sereno.	Sereno con vapori.
13	Annuvolato.	Coperto.	Coperto.
14	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
15	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.
16	Pioviggina.	Pioggia.	Pioggia.
17	Annuvolato.	Nugoli sottili.	Sereno con vapori.
18	Annuvolato.	Coperto chiaro.	Sereno con vapori.
19	Coperto chiaro.	Sereno con vapori.	Annuvolato.
20	Pioggia.	Pioggia.	Pioviggina.
21	Coperto nebbioso.	Nuvole sparse.	Nuvole sparse.
22	Coperto chiaro.	Coperto.	Annuvolato.
23	Pioggia.	Pioggia.	Pioggia.
24	Pioggia.	Annuvolato.	Annuvolato.
25	Pioggia.	Pioggia.	Pioggia.
26	Pioggia.	Pioggia.	Annuvolato.
27	Sereno con vapori.	Nuvolette.	Nugoli sottili. - *Poi lampi, tuono, pioggia e gragnuola.*
28	Coperto.	Annuvolato piovigginoso.	Coperto chiaro.

Osservazioni meteorologiche fatte alla Specola dell'Accademia R. delle Scienze di Torino, elevata m. 284,50 sopra il livello del mare, nel mese di marzo 1861

GIORNI del MESE	BAROMETRO — ALTEZZE OSSERVATE — MATTINO ore 9	MEZZODÌ	SERA ore 3	BAROMETRO — ALTEZZE RIDOTTE — MATTINO ore 9	MEZZODÌ	SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO — MATTINO ore 9	MEZZODÌ	SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ — MATTINO ore 9	MEZZODÌ	SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA — MATTINO ore 9	MEZZODÌ	SERA ore 3	*minima*	*massima*	ANEMOSCOPIO — MATTINO ore 9 direzione	forza	MEZZODÌ direzione	forza	SERA ore 3 direzione	forza	IGROMETRO — MATTINO ore 9	MEZZODÌ	SERA ore 3	IETOMETRO — MATTINO ore 9	MEZZODÌ	SERA ore 3	ATMIDOMETRO — MATTINO ore 9
	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.							gr. cent.	gr. cent.	gr. cent.	millim.	millim.	millim.	millim.
1	737,60	737,64	737,92	737,25	736,77	736,37	+ 8,0	+12,4	+18,1	+ 6,0	+16,0	+17,0	+ 6,0	+11,7	+13,0	+ 1,6	+13,2	O.S.O.	4	O.S.O.	10	S.O.	10	51,0	49,0	42,0				2
2	739,12	739,50	740,00	738,67	738,84	738,60	8,8	10,6	16,8	7,5	11,0	14,5	7,0	8,0	11,0	4,4	12,4	N.E.	5	E.N.E.	8	S.E.	5	47,0	47,0	46,0				2
3	743,10	743,30	742,10	742,71	742,29	740,64	8,2	13,4	17,2	7,5	14,0	14,5	7,0	11,0	12,0	2,6	12,4	O.S.O.	3	O.	5	O.S.O.	15	44,0	44,0	42,0				2
4	735,60	734,50	733,02	735,25	732,77	731,56	8,0	19,6	17,4	6,5	18,0	14,0	5,0	14,0	14,0	0,6	14,0	N.N.E.	1	E.S.E.	2	N.O.	90	44,0	42,0	34,0				3
5	739,30	739,98	740,00	738,85	739,20	739,35	8,8	11,6	14,8	8,5	12,3	12,9	8,0	10,5	10,5	2,8	10,8	N.N.E.	12	N.N.E.	35	N.E.	30	33,0	31,0	31,0				11
6	743,60	743,22	742,86	743,29	742,21	741,48	7,6	13,4	16,5	4,2	13,0	14,0	3,5	9,2	10,6	− 0,4	10,9	N.E.	8	E.N.E.	3	O.S.O.	5	35,0	35,0	33,0				6
7	732,36	732,00	731,60	732,08	731,33	730,70	7,4	10,7	11,9	2,3	13,0	14,1	2,5	9,3	10,2	0,3	12,4	N.E.	20	E.N.E.	1	O.N.O.	90	37,0	37,0	28,0				9
8	742,38	742,80	742,94	741,93	741,37	741,13	8,8	17,0	20,2	8,5	16,1	17,0	8,3	13,4	13,8	+ 0,2	13,9	O.S.O.	7	O.S.O.	20	S.S.O.	7	32,0	30,0	27,0				5
9	740,34	740,38	740,88	739,84	738,72	738,49	9,2	19,0	25,0	9,1	22,0	23,2	8,5	17,6	21,7	1,8	22,0	O.S.O.	20	O.S.O.	5	N.N.E.	25	31,0	29,0	21,0				6
10	743,26	742,24	740,64	742,41	740,60	738,52	12,1	18,7	22,8	12,0	18,1	18,7	11,0	16,5	17,5	3,0	20,2	O.S.O.	5	O.	15	O.	5	24,0	23,0	22,0				16
11	730,56	727,44	725,88	729,89	726,16	724,43	10,8	16,1	17,5	14,1	21,1	21,0	14,0	19,5	19,1	3,2	19,6	S.O.	15	O.N.O.	90	O.	90	29,0	21,0	15,0				6
12	724,36	723,40	721,94	723,77	722,60	721,17	10,2	12,0	11,8	9,1	9,0	8,0	9,0	8,9	7,5	7,2	11,0	N.O.	6	O.N.O.	5	O.N.O.	20	33,0	23,0	24,0				16
13	723,86	724,20	724,84	723,33	723,40	723,87	9,7	12,0	13,4	9,0	13,9	13,0	8,2	11,3	12,0	4,1	12,0	N.O.	30	N.	25	O.N.O.	80	28,0	22,0	20,0				6
14	736,74	737,62	737,44	736,14	736,44	735,75	10,1	15,0	19,3	8,1	15,2	12,0	8,0	12,0	10,8	7,6	12,6	E.	6	E.S.E.	2	N.N.E.	15	26,0	25,0	23,0				9
15	742,08	741,80	741,82	741,60	740,89	740,48	9,1	12,7	16,3	6,6	11,9	14,0	6,0	9,0	11,0	− 0,8	11,0	O.S.O.	5	S.S.O.	5	S.S.O.	3	24,0	24,0	22,0				8
16	743,50	743,40	742,80	743,04	742,03	741,26	8,8	16,4	18,0	6,5	13,9	15,1	6,0	10,5	12,0	1,7	12,0	N.N.E.	2	O.N.O.	7	O.S.O.	15	28,0	26,0	23,0				6
17	740,18	739,36	738,82	739,84	738,23	737,06	7,9	14,5	19,8	5,5	13,1	16,0	5,0	11,3	12,1	+ 0,8	11,9	N.E.	15	O.	5	S.	5	28,0	28,0	24,0				5
18	729,42	728,22	727,34	729,03	727,36	726,37	8,4	12,4	13,3	4,1	15,1	16,1	3,8	11,9	11,8	0,0	12,0	E.	8	O.N.O.	25	N.N.O.	30	31,0	30,0	22,0				4
19	725,88	725,46	723,30	725,42	724,18	721,79	9,2	16,1	18,1	8,3	13,1	14,5	8,0	10,3	11,9	0,8	12,2	O.N.O.	10	E.	2	O.	5	29,0	27,0	22,0				6
20	726,16	729,00	730,92	725,33	728,07	729,89	12,2	13,0	13,8	12,0	15,0	15,0	11,5	13,5	13,1	2,4	13,6	N.	8	N.N.O.	85	O.N.O.	80	29,0	22,0	19,0				5
21	734,52	733,84	731,38	733,91	732,39	729,51	10,2	17,3	21,0	9,0	15,0	17,2	9,0	12,3	14,8	3,0	15,0	E.S.E.	4	N.N.E.	10	S.S.O.	15	25,0	25,0	20,0				9
22	729,60	731,20	731,78	728,66	730,15	730,62	13,1	14,0	14,9	14,0	17,1	16,0	12,0	14,2	14,0	3,0	14,3	N.	35	O.N.O.	80	O.N.O.	75	24,0	19,0	18,0				10
23	739,74	740,52	740,42	738,94	738,73	738,30	11,8	20,0	22,8	12,0	16,1	19,0	11,5	14,0	14,2	1,4	14,6	O.S.O.	8	O.	30	S.S.E.	3	24,0	20,0	19,0				10
24	742,84	742,74	741,70	742,03	741,17	739,53	11,9	18,2	23,2	9,1	16,1	20,0	9,0	13,8	15,2	3,0	14,0	E.	15	N.N.E.	5	N.E.	5	24,0	23,0	20,0				5
25	742,60	741,28	740,78	741,91	740,03	739,59	10,8	15,5	15,0	9,1	13,5	12,9	8,5	12,4	12,0	3,6	14,4	E.	5	N.E	5	N.E.	5	26,0	25,0	23,0				8
26	737,60	736,80	736,08	737,01	736,19	735,47	10,0	10,2	10,2	6,5	7,1	5,3	6,0	6,1	5,5	5,2	8,6	N.	10	N.	20	E.N.E.	12	31,0	37,0	37,0	pioggia 5	pioggia 5	pioggia 4	0
27	731,92	731,80	731,30	731,39	730,82	730,24	9,6	13,4	14,1	8,0	12,9	11,0	7,5	11,1	11,0	4,6	12,2	O.S.O.	5	N.N.E.	5	E.	3	40,0	39,0	36,0	20			3
28	732,10	732,34	732,00	731,50	731,40	731,07	10,1	13,0	12,9	9,0	11,0	10,5	9,0	10,8	11,0	7,6	11,8	O.N.O.	5	N.E.	8	N.E.	5	38,0	38,0	38,0	2	1	1	1
29	733,48	733,62	732,80	732,82	732,92	731,93	10,6	11,0	12,4	9,0	10,5	12,5	8,9	10,0	11,9	7,8	12,0	E.N.E.	25	N.E.	25	N.N.E.	15	43,0	44,0	44,0	20			0
30	734,10	733,10	733,70	733,50	732,45	733,03	10,1	10,5	10,7	8,0	9,3	9,0	7,5	9,0	8,9	7,0	9,2	N.N.E.	10	N.E.	15	E.N.E.	6	47,0	48,0	48,0	28	4	9	0
31	734,34	734,04	733,74	733,61	732,95	732,70	11,2	14,2	13,8	11,0	13,0	11,1	10,0	11,5	10,7	6,9	12,2	N.N.E.	5	E.N.E.	10	E.N.E.	15	49,0	45,0	43,0	7			4

STATO DELL'ATMOSFERA

GIORNI del MESE	MATTINO A ORE 9	MEZZODÌ	SERA A ORE 3
1	Nebbia folta.	Sereno con vapori.	Sereno puro.
2	Annuvolato.	Nuvole sparse.	Sereno con vapori.
3	Sereno con vapori.	Sereno.	Sereno.
4	Sereno con vapori.	Sereno.	Sereno e vento.
5	Sereno.	Sereno puro e ventoso.	Sereno puro e ventoso.
6	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.	Sereno con vapori.
7	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori e vento.
8	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
9	Sereno.	Sereno puro.	Sereno puro.
10	Sereno.	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.
11	Sereno con vapori.	Sereno e vento.	Sereno e vento.
12	Coperto.	Coperto.	Coperto.
13	Quasi coperto.	Nuvole sparse.	Nuvole sparse e vento.
14	Sereno puro.	Sereno puro.	Nuvole sparse.
15	Nuvole a liste.	Nuvole a liste.	Nugoli sottili.
16	Sereno.	Sereno puro.	Sereno puro.
17	Nuvole a liste.	Sereno con vapori.	Sereno.
18	Quasi annuvolato.	Sereno con vapori.	Nuvole sparse.
19	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.
20	Sereno con vapori.	Sereno e vento.	Sereno e vento.
21	Nugoli sottili.	Nuvolette.	Sereno con vapori.
22	Sereno con vapori.	Sereno e vento.	Sereno e vento.
23	Sereno puro.	Sereno.	Sereno con vapori.
24	Sereno puro.	Sereno.	Sereno con vapori.
25	Annuvolato.	Annuvolato.	Annuvolato. - *Poi pioggia.*
26	Pioggia.	Annuvolato piovigginoso.	Pioggia.
27	Annuvolato.	Annuvolato.	Annuvolato.
28	Pioggia.	Pioggia.	Annuvolato piovigginoso. - *Poi pioggia dirotta nella notte.*
29	Annuvolato.	Annuvolato.	Annuvolato. - *Poi pioggia dirotta nella notte.*
30	Pioggia.	Pioggia.	Pioggia.
31	Annuvolato.	Annuvolato.	Annuvolato. - *Poi pioggia nella notte.*

Osservazioni meteorologiche fatte alla Specola dell'Accademia R. delle Scienze di Torino, elevata m. 284,50 sopra il livello del mare, nel mese di aprile 1861

GIORNI del MESE	BAROMETRO altezze osservate: mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	BAROMETRO altezze ridotte: mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	TERMOM. CENTIGRADO unito al barometro: mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	TERMOM. CENTIGRADO al mezzodì: mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO a tramontana: mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	minima	massima
	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.
1	733,30	735,00	736,36	732,74	734,25	735,32	+ 9,8	+11,4	+13,8	+ 7,3	+12,0	+12,2	+ 7,0	+ 9,3	+10,5	+ 5,0	+11,0
2	741,54	741,94	741,46	740,87	740,75	740,18	10,7	15,0	15,8	11,0	13,0	13,1	9,0	11,7	12,0	4,8	12,4
3	742,26	742,20	741,44	741,10	740,54	739,44	14,8	19,0	21,8	12,5	18,1	14,0	11,0	15,0	13,5	7,6	17,2
4	740,40	741,16	741,26	739,58	739,36	738,99	12,0	20,1	24,0	12,0	16,0	19,8	11,9	15,5	16,9	6,4	17,0
5	739,90	739,70	739,20	738,93	738,38	737,79	13,2	16,1	16,9	11,1	15,1	14,2	10,5	14,3	13,5	8,6	16,8
6	738,40	738,50	738,30	737,17	736,33	735,92	15,4	23,2	25,0	15,5	21,0	22,0	15,0	19,0	19,1	6,8	19,4
7	739,00	738,44	738,66	737,47	735,90	735,87	17,9	26,3	28,4	16,3	21,2	23,6	16,1	19,2	21,0	8,5	22,0
8	739,60	739,92	739,54	738,34	738,54	738,00	15,6	16,6	18,0	13,0	16,0	13,5	12,0	12,9	13,0	10,4	15,0
9	741,78	741,90	741,40	740,99	741,07	740,52	11,7	12,0	12,4	7,0	9,0	7,1	7,0	7,5	6,5	5,2	8,2
10	744,68	744,24	743,90	743,85	743,21	742,95	11,9	13,6	12,9	10,0	11,9	8,0	9,0	9,1	8,0	4,0	10,4
11	742,80	742,00	741,06	741,91	740,75	739,66	12,5	15,5	16,8	10,5	16,0	14,6	10,2	14,1	14,0	5,8	14,8
12	739,94	739,20	738,12	738,56	737,36	735,76	16,6	20,4	24,8	16,2	18,0	20,5	13,0	15,0	17,0	5,6	17,4
13	739,26	739,50	739,20	738,09	737,98	737,17	14,9	17,8	22,0	13,5	18,1	17,9	12,3	14,8	15,3	7,4	16,4
14	739,62	738,86	738,62	738,13	736,69	736,21	17,6	23,2	25,2	16,5	21,0	21,9	16,0	18,2	19,5	6,4	19,6
15	739,14	739,74	739,40	737,89	738,24	737,60	15,5	17,6	20,1	14,0	17,5	20,0	12,8	16,0	16,5	7,0	17,0
16	747,66	747,84	747,52	746,36	745,99	745,23	15,8	20,4	24,1	14,0	15,5	18,0	13,1	14,8	15,0	7,8	16,6
17	746,04	745,34	744,40	744,66	743,37	742,12	16,5	21,4	24,0	14,3	21,0	22,0	14,0	18,0	19,0	6,0	19,0
18	742,00	740,70	740,10	740,21	738,24	737,47	20,0	25,6	27,0	17,0	24,0	23,5	16,0	20,5	20,8	6,4	21,0
19	736,96	736,16	734,72	735,35	733,98	732,42	18,6	23,5	24,5	17,5	23,0	23,3	16,0	20,2	20,9	7,6	21,0
20	735,40	737,90	739,74	733,91	736,39	738,49	17,6	17,8	15,6	14,0	13,0	6,6	13,0	12,2	7,0	7,2	12,4
21	739,70	738,00	736,30	738,63	736,73	734,88	14,0	15,7	17,0	10,0	16,5	12,8	9,5	13,0	11,4	4,8	13,0
22	729,64	728,44	727,24	728,73	727,04	725,69	12,8	17,0	18,2	12,0	15,3	15,0	12,0	12,3	12,1	7,4	13,8
23	727,14	727,32	726,82	726,10	726,05	725,32	14,0	16,0	18,0	14,0	15,0	16,0	11,5	13,0	14,5	6,6	15,0
24	731,20	731,80	731,52	729,18	729,92	729,41	13,8	21,0	23,0	11,8	19,9	16,1	12,0	16,5	16,0	7,2	17,4
25	737,50	738,30	737,52	736,13	736,36	735,33	16,6	21,3	23,4	14,0	19,0	19,0	13,0	15,2	17,0	6,4	17,4
26	738,72	738,26	737,74	737,14	736,21	735,20	18,3	22,2	26,3	16,8	22,0	23,0	17,2	20,0	21,0	7,0	21,2
27	737,52	737,20	736,30	735,95	735,00	733,63	18,3	23,7	27,6	16,9	23,5	22,7	17,1	21,6	21,9	8,0	22,4
28	733,06	732,40	731,76	731,53	730,44	729,34	18,0	21,7	25,6	15,0	18,1	22,2	14,1	17,0	19,8	8,4	21,0
29	733,72	734,60	734,00	732,14	732,62	731,71	18,4	21,8	24,4	15,0	19,7	21,0	14,0	17,1	17,0	8,3	17,6
30	741,90	741,84	741,26	740,68	740,37	739,26	15,3	17,4	21,8	11,1	15,1	19,0	10,2	12,5	15,3	8,5	16,2

GIORNI del MESE	ANEMOSCOPIO mattino ore 9: direzione	forza	mezzodì: direzione	forza	sera ore 3: direzione	forza	IGROMETRO mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	IETOMETRO mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	ATMIDOMETRO mattino ore 9
							gr. cent.	gr. cent.	gr. cent.	millim. pioggia	millim.	millim.	millim.
1	N.E.	20	N.N.E.	10	E.N.E.	30	48,0	47,0	43,0	17			2
2	E.N.E.	5	N.N.E.	10	N.E.	20	46,0	43,0	41,0				2
3	N.E.	0	N.N.E.	3	N.N.E.	5	43,0	42,0	35,0	1			4
4	N.	1	N.E.	0	S.O.	10	40,0	41,0	35,0				4
5	N.E.	8	N.E.	8	N.N.E.	8	37,0	38,0	37,0				6
6	S.O.	6	S.O.	6	O.	10	41,0	35,0	33,0				2
7	O.	5	N.N.E.	5	O.S.O.	10	39,0	35,0	32,0				8
8	E.N.E.	35	N.E.	25	N.	15	40,0	38,0	37,0	16			4
9	E.N.E.	40	N.O.	25	N.E.	5	42,0	41,0	40,0	17			5
10	N.O.	10	N.N.O.	15	O.S.O.	18	42,0	36,0	34,0				0
11	S.O.	10	S.S.O.	15	O.S.O.	10	40,0	38,0	32,0				4
12	O.N.O.	5	O.N.O.	10	S.O.	5	38,0	31,0	29,0				6
13	E.N.E.	10	E.N.E.	15	E.S.E.	5	31,0	30,0	29,0				8
14	O.S.O.	5	O.	15	S.	18	31,0	27,0	26,0				7
15	N.E.	20	E.N.E.	25	E.N.E.	25	31,0	30,0	30,0				10
16	N.O.	3	N.N.O.	5	N.	3	37,0	33,0	32,0	10			3
17	O.S.O.	5	S.S.O.	15	S.O.	17	36,0	34,0	29,0				12
18	E.N.E.	6	O.	8	O.S.O.	12	33,0	27,0	26,0				9
19	S.O.	10	O.S.O.	6	O.S.O.	20	32,0	30,0	26,0				8
20	N.N.E.	10	N.N.E.	35	N.E.	80	34,0	31,0	31,0				7
21	O.	10	N.N.O.	5	E.N.E.	5	36,0	34,0	31,0				6
22	O.S.O.	5	S.	5	N.N.E.	15	34,0	29,0	28,0				1
23	N.O.	8	N.E.	3	O.S.O.	15	32,0	31,0	27,0				5
24	O.N.O.	4	S.E.	15	O.S.O.	5	32,0	31,0	29,0				3
25	N.	5	O.N.O.	5	O.S.O.	8	30,0	27,0	23,0				9
26	N.	1	O.S.O.	12	S.O.	18	29,0	25,0	24,0				7
27	O.S.O.	25	S.O.	18	E.S.E.	20	29,0	27,0	24,0				5
28	E.N.E.	30	N.	5	N.O.	12	32,0	30,0	28,0				10
29	E.	18	S.E.	25	N.E.	5	29,0	26,0	25,0				10
30	N.N.E.	7	N.N.E.	5	N.E.	15	25,0	24,0	23,0				11

STATO DELL'ATMOSFERA

GIORNI del MESE	MATTINO A ORE 9	MEZZODÌ	SERA A ORE 3
1	Pioviggina.	Nuvole sparse.	Nuvole sparse.
2	Nuvole rotte.	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi. - *Poi pioggia nella notte.*
3	Nuvole sparse.	Nuvole a gruppi.	Annuvolato.
4	Nugoli sottili.	Mezzo annuvolato.	Nuvole sparse.
5	Annuvolato.	Annuvolato.	Annuvolato.
6	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno.
7	Nugoli sottili.	Nuvole sparse.	Sereno con vapori } *Poi pioggia*
8	Annuvolato.	Nuvole rotte.	Annuvolato } *nella notte.*
9	Pioggia.	Annuvolato.	Annuvolato. – *Poi pioggia.*
10	Annuvolato.	Annuvolato.	Annuvolato. – *Poi pioggia nella notte.*
11	Annuvolato.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.
12	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.	Sereno con vapori.
13	Nuvolette.	Nuvolette.	Sereno con vapori.
14	Sereno con vapori.	Sereno.	Sereno.
15	Nugoli sottili.	Nuvole sparse.	Nuvole a gruppi. – *Poi pioggia nella notte.*
16	Nuvole sparse.	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.
17	Sereno con vapori.	Sereno puro.	Sereno puro.
18	Sereno puro.	Sereno puro.	Sereno puro.
19	Sereno puro.	Sereno.	Sereno.
20	Nuvolette.	Annuvolato.	Pioggia e vento.
21	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.	Annuvolato.
22	Annuvolato.	Nuvole rotte.	Nuvolette. - *Poi pioggia nella notte.*
23	Annuvolato.	Annuvolato pioviggìnoso.	Nugoli sottili.
24	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi. - *Poi pioggia nella notte.*
25	Sereno puro.	Sereno con vapori.	Sereno puro.
26	Sereno con vapori.	Sereno.	Sereno.
27	Sereno puro.	Sereno.	Sereno con vapori.
28	Nuvolette.	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.
29	Sereno con vapori.	Nuvole a gruppi.	Nuvolette.
30	Annuvolato.	Nuvolette.	Nuvolette.

Osservazioni meteorologiche fatte alla Specola dell'Accademia R. delle Scienze di Torino, elevata m. 284,50 sopra il livello del mare, nel mese di giugno 1861

GIORNI del MESE	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE SERA ore 3	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MATTINO ore 9	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MEZZODÌ	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *minima*	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *massima*	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 direzione	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 forza	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ direzione	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ forza	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 direzione	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 forza	IGROMETRO MATTINO ore 9	IGROMETRO MEZZODÌ	IGROMETRO SERA ore 3	IETOMETRO MATTINO ore 9	IETOMETRO MEZZODÌ	IETOMETRO SERA ore 3	ATMIDOMETRO — MATTINO ore 9
	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	direzione	forza	direzione	forza	direzione	forza	gr. cent.	gr. cent.	gr. cent.	millim.	millim.	millim.	millim.
1	739,50	739,12	736,88	737,39	736,71	734,49	+22,7	+25,4	+25,2	+23,0	+24,9	+22,3	+23,0	+22,2	+21,9	+15,0	+26,8	S.S.E.	5	N.E.	4	N.N.O.	10	38,0	33,0	30,0				4
2	735,90	735,30	734,26	733,60	733,12	731,15	24,5	23,5	26,3	21,5	23,5	24,0	20,3	24,8	22,0	12,8	25,0	N.E.	4	E.	0	N.E.	15	38,0	39,0	30,0	pioggia 14			7
3	737,82	738,30	738,24	735,53	735,75	735,18	24,2	26,4	30,7	23,0	27,5	27,7	23,5	26,0	25,0	12,0	27,0	S.S.E.	10	E.S.E.	5	S.O.	5	34,0	28,0	24,0				7
4	742,24	741,32	740,82	740,22	738,89	738,27	22,0	25,4	26,4	20,0	21,3	21,2	19,5	21,0	21,1	13,2	24,4	E.	10	E.N.E.	10	N.E.	8	33,0	27,0	25,0				3
5	738,98	738,38	738,16	737,10	736,51	736,25	20,8	20,7	21,0	16,0	16,0	16,0	15,8	16,1	16,0	13,8	19,8	N.E.	5	N.E.	10	N.	8	32,0	32,0	32,0				13
6	733,70	734,20	733,78	731,88	731,57	731,06	20,4	27,3	28,0	19,3	22,5	23,2	20,2	22,2	22,8	12,4	25,3	S.O.	15	E.	10	S.E.	10	32,0	31,0	28,0				1
7	736,90	737,22	737,10	734,73	734,89	734,71	23,2	24,5	25,0	20,0	21,0	22,0	19,5	20,3	21,5	13,2	22,6	E.	5	N.E.	10	E.	15	34,0	29,0	29,0				7
8	738,88	738,90	738,56	736,85	736,59	736,09	22,0	24,4	25,7	19,9	23,9	23,0	18,6	21,5	22,2	13,0	22,2	N.E.	10	E.N.E.	5	N.N.E.	3	37,0	32,0	30,0	4			1
9	738,38	738,64	737,44	736,13	736,06	734,72	23,9	26,6	27,8	22,0	24,0	23,6	21,2	22,9	23,0	14,8	24,8	E.N.E.	10	E.	10	E.S.E.	12	35,0	30,0	30,0				9
10	738,82	738,84	738,92	736,71	736,35	736,13	23,5	25,9	28,4	21,3	23,0	26,8	19,5	22,0	22,5	13,2	25,0	N.E.	7	E.S.E.	10	N.E.	10	38,0	31,0	29,0	22			3
11	741,60	741,42	741,46	739,24	738,44	738,16	24,8	30,0	32,7	23,0	26,9	27,8	22,5	26,3	26,0	14,2	27,5	S.S.O.	5	O.S.O.	10	S.	2	30,0	26,0	24,0				3
12	743,00	743,42	742,52	740,59	740,46	739,42	25,2	29,8	31,0	24,0	27,1	28,5	23,8	26,3	25,5	17,4	28,4	S.	10	E.S.E.	5	N.	7	24,0	22,0	17,0				12
13	742,20	742,24	741,70	739,57	739,26	738,31	27,0	30,0	33,4	26,5	28,0	29,0	25,8	27,0	28,0	15,8	29,0	E.S.E.	5	O.N.O.	5	S.S.O.	10	25,0	20,0	19,0				10
14	743,00	742,40	741,58	740,33	739,59	738,36	27,2	28,6	32,0	25,0	29,0	29,0	24,5	28,3	28,5	15,8	29,6	S.S.O.	8	S.O.	7	S.O.	10	28,0	24,0	20,0				11
15	741,46	741,44	740,78	738,96	738,54	737,82	26,0	29,3	29,8	23,2	29,0	29,5	23,0	26,2	27,0	16,8	28,4	E.	20	N.N.E.	15	E.N.E.	7	25,0	24,0	23,0				10
16	741,52	740,98	739,80	738,93	738,26	736,95	26,7	27,8	28,9	25,0	28,0	29,5	24,0	27,4	27,2	17,8	28,8	N.E.	10	N.N.E.	2	N.N.E.	10	28,0	24,0	22,0				11
17	739,50	738,90	738,32	736,89	736,12	735,36	26,9	28,3	29,8	24,0	29,1	30,0	23,1	28,1	27,4	17,6	30,0	N.E.	5	N.	3	N.N.E.	6	28,0	27,0	26,0				12
18	741,44	741,20	741,00	738,82	738,25	738,14	27,0	29,7	29,0	26,0	29,6	24,8	24,0	27,5	23,6	18,0	29,8	N.E.	6	N.E.	10	O.S.O.	6	30,0	28,0	28,0				11
19	743,70	743,60	743,04	740,91	740,47	740,15	28,2	31,0	29,1	25,0	30,0	23,5	24,5	29,3	23,0	18,4	31,0	N.E.	6	E.N.E.	2	E.S.E.	15	34,0	30,0	28,0	10		pioggia 1	6
20	745,30	745,00	744,40	742,35	741,96	741,27	29,6	30,3	31,0	27,2	32,0	32,0	26,7	30,1	30,0	18,0	32,2	E.S.E.	2	E.N.E.	5	N.N.E.	5	33,0	27,0	25,0				6
21	745,66	745,44	744,42	742,83	742,29	741,10	28,6	31,2	32,6	26,5	29,0	31,3	26,0	29,0	29,9	20,4	31,3	N.E.	4	N.E.	7	N.E.	10	30,0	26,0	23,0				12
22	742,44	742,64	741,44	739,34	739,33	737,90	31,0	32,8	34,7	28,5	32,2	35,2	28,0	30,5	31,3	20,2	32,8	E.N.E.	3	E.N.E.	6	N.O.	7	28,0	23,0	19,0				11
23	738,80	738,30	737,36	735,82	735,23	734,07	30,0	30,8	32,6	25,0	28,5	31,2	25,0	27,0	29,0	18,8	30,8	E.N.E.	10	N.E.	8	N.E.	15	25,0	23,0	21,0				17
24	738,40	738,34	737,84	735,44	735,30	734,69	29,8	30,5	31,4	26,5	29,8	30,5	25,4	27,9	29,0	19,6	30,0	E.N.E.	5	E.	20	N.E.	5	27,0	27,0	26,0				10
25	739,16	738,62	738,00	736,24	735,62	734,71	29,5	30,2	32,6	25,6	29,9	31,9	25,0	28,8	29,1	20,0	30,2	E.N.E.	6	N.N.E.	10	E.N.E.	5	29,0	27,0	25,0				10
26	737,68	735,98	734,20	734,85	732,99	731,57	28,7	30,3	27,3	25,2	29,5	20,6	24,0	28,1	21,0	17,2	29,8	N.N.O.	6	S.E.	7	N.E.	15	33,0	27,0	27,0	15			7
27	730,68	730,58	731,40	728,03	728,49	729,24	27,6	22,8	23,4	23,9	20,0	18,5	25,2	18,5	18,0	17,6	19,0	S.S.E.	10	N.	75	N.N.E.	15	36,0	34,0	33,0	2			6
28	733,36	733,22	733,58	731,31	730,95	730,94	22,4	24,2	27,3	17,0	22,0	24,5	16,3	21,5	23,0	15,0	24,0	N.E.	10	S.S.E.	10	S.O.	25	38,0	36,0	28,0				5
29	737,30	737,50	736,60	734,89	734,63	733,36	25,4	29,3	32,4	24,8	28,9	29,9	23,3	28,2	27,5	13,5	29,2	S.O.	12	S.S.O.	11	E.S.E.	5	34,0	26,0	21,0				8
30	735,10	734,70	734,60	732,58	731,98	731,94	26,3	28,0	27,5	24,0	29,9	27,9	23,1	27,0	26,0	14,8	27,9	E.	6	O.N.O.	10	O.N.O.	50	32,0	18,0	16,0				8

STATO DELL'ATMOSFERA

GIORNI del MESE	MATTINO A ORE 9	MEZZODÌ	SERA A ORE 3
1	Sereno con vapòri.	Novolette.	Nuvolette.
2	Sereno con vapori.	Nuvole a gruppi.	Nuvolette.
3	Nugoli sottili.	Coperto chiaro.	Sereno con vapori.
4	Annuvolato.	Sereno con vapori e vento.	Sereno con vapori e vento.
5	Annuvolato pioviggìnoso.	Annuvolato pioviggìnoso. - *Poi pioggia.*	Pioggia.
6	Mezzo annuvolato.	Quasi annuvolato.	Quasi annuvolato.
7	Sereno.	Sereno puro.	Sereno puro.
8	Nuvolette.	Nuvole sparse. - *Poi pioggia.*	Quasi annuvolato.
9	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.
10	Mezzo annuvolato.	Annuvolato.	Annuvolato.
11	Nugoli sottili.	Nuvole sparse.	Annuvolato. - *Poi pioggia.*
12	Annuvolato.	Annuvolato.	Nugoli sottili. - *Poi pioggia nella notte.*
13	Annuvolato.	Annuvolato.	Coperto chiaro.
14	Nuvolette.	Nuvolette.	Nuvolette. - *Poi poca pioggia.*
15	Sereno con vapori.	Nuvole sparse.	Nuvole a gruppi. - *Poi pioggia, lampi e tuono nella notte.*
16	Sereno con vapori.	Nuvole a gruppi.	Nuvolette.
17	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.
18	Sereno puro.	Sereno.	Nugoli sottili.
19	Nuvolette.	Nuvole a gruppi.	Quasi annuvolato.
20	Nuvolette.	Nuvolette.	Sereno con vapori.
21	Sereno puro.	Sereno.	Sereno.
22	Nugoli sottili.	Coperto chiaro.	Sereno con vapori.
23	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori. - *Poi poca pioggia.*
24	Annuvolato pioviggìnoso.	Sereno con vapori.	Nuvolette.
25	Nugoli sottili.	Sereno con vapori.	Nuvolette.
26	Nuvole sparse.	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.
27	Annuvolato. - *Poi poca pioggia.*	Sereno con vapori.	Nuvolette.
28	Coperto chiaro.	Annuvolato.	Annuvolato. - *Poi pioggia.*
29	Mezzo annuvolato.	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.
30	Coperto chiaro.	Nuvole a gruppi.	Nuvole oscure.
31	Nugoli sottili.	Coperto.	Annuvolato pioviggìnoso.

Osservazioni meteorologiche fatte alla Specola dell'Accademia R. delle Scienze di Torino, elevata m. 284, 50 sopra il livello del mare, nel mese di agosto 1861

GIORNI del MESE	BAROMETRO altezze osservate			BAROMETRO altezze ridotte			TERMOM. CENTIGRADO unito al barometro			TERMOM. CENTIGRADO al mezzodì			TERMOMETRO CENTIGRADO a tramontana					ANEMOSCOPIO						IGROMETRO			IETOMETRO			ATMIDOMETRO
	Mattino ore 9	Mezzodì	Sera ore 3	Mattino ore 9	Mezzodì	Sera ore 3	Mattino ore 9	Mezzodì	Sera ore 3	Mattino ore 9	Mezzodì	Sera ore 3	Mattino ore 9	Mezzodì	Sera ore 3	*minima*	*massima*	Mattino ore 9		Mezzodì		Sera ore 3		Mattino ore 9	Mezzodì	Sera ore 3	Mattino ore 9	Mezzodì	Sera ore 3	Mattino ore 9
	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	direzione	forza	direzione	forza	direzione	forza	gr. cent.	gr. cent.	gr. cent.	millim.	millim.	millim.	millim.
1	743, 56	743, 60	742, 94	740, 33	740, 27	739, 45	+31, 8	+33, 5	+34, 0	+28, 0	+32, 9	+32, 0	+27, 5	+30, 0	+30, 4	+20, 4	+31, 7	E.N.E.	4	N.E.	15	N.E.	10	27, 0	24, 0	22, 0				11
2	743, 52	743, 06	742, 74	740, 39	740, 18	739, 48	31, 0	29, 0	32, 1	28, 5	25, 0	31, 0	27, 0	26, 0	30, 8	20, 5	32, 0	E.N.E.	9	E.S.E.	5	O.S.O.	5	29, 0	27, 0	25, 0				11
3	741, 44	740, 40	739, 76	738, 41	737, 06	736, 34	30, 4	33, 0	33, 7	28, 0	32, 5	32, 8	27, 8	30, 0	31, 0	19, 6	32, 2	E.S.E.	3	E.N.E.	10	N.N.O.	7	30, 0	25, 0	23, 0				10
4	744, 64	744, 60	744, 40	741, 70	741, 46	741, 19	29, 5	31, 1	31, 7	24, 7	30, 1	31, 0	24, 5	28, 0	28, 2	16, 4	29, 8	N.E.	5	N.	10	N.	20	28, 0	23, 0	20, 0				12
5	746, 52	746, 16	745, 00	743, 64	743, 03	741, 60	29, 0	31, 0	33, 2	24, 9	30, 2	31, 0	24, 8	27, 9	28, 0	18, 0	29, 6	N.E.	5	N.	7	N.E.	10	26, 0	24, 0	22, 0				13
6	744, 56	744, 10	743, 56	741, 47	740, 63	739, 91	30, 7	33, 8	35, 3	28, 0	34, 0	35, 3	27, 3	32, 5	31, 2	20, 0	34, 0	N.	3	E.S.E.	3	O.N.O.	5	28, 0	23, 0	20, 0				12
7	743, 64	743, 20	741, 86	740, 41	739, 80	738, 19	31, 8	33, 2	35, 8	28, 0	32, 5	34, 9	27, 8	30, 1	31, 2	21, 6	32, 8	N.E.	4	N.E.	12	N.N.E.	2	27, 0	24, 0	22, 0				14
8	741, 24	740, 00	739, 10	738, 00	736, 35	735, 42	32, 2	35, 6	35, 9	29, 0	37, 0	34, 8	28, 5	32, 0	32, 2	21, 8	34, 8	N.E.	4	N.N.E.	10	E.N.E.	7	29, 0	25, 0	23, 0				13
9	739, 94	739, 96	739, 36	736, 74	736, 23	735, 59	31, 9	36, 3	36, 7	28, 2	36, 0	37, 3	28, 6	33, 0	34, 0	20, 0	36, 4	E.	3	N.E.	7	N.	5	30, 0	23, 0	20, 0				15
10	740, 08	739, 42	738, 86	736, 70	735, 83	735, 01	33, 4	35, 1	37, 3	32, 7	35, 0	37, 0	33, 0	34, 0	34, 1	22, 0	36, 0	E.S.E.	6	O.	5	N.N.O.	5	26, 0	20, 0	17, 0				16
11	741, 96	742, 10	741, 64	738, 74	738, 79	738, 04	32, 0	32, 8	35, 2	30, 3	32, 7	34, 9	28, 5	30, 0	32, 0	22, 8	35, 4	N.N.E.	15	N.E.	18	N.E.	12	24, 0	22, 0	20, 0				16
12	744, 48	744, 00	743, 40	741, 24	740, 56	739, 79	31, 9	33, 6	35, 0	27, 7	33, 0	35, 0	27, 0	30, 0	32, 0	21, 0	33, 2	N.E.	5	N.E.	5	N.E.	5	28, 0	25, 0	23, 0				19
13	744, 30	743, 60	742, 50	740, 90	740, 03	738, 70	33, 3	34, 7	36, 6	29, 3	35, 0	35, 8	28, 7	31, 7	33, 0	23, 4	34, 8	N.E.	5	N.N.E.	8	N.N.E.	5	28, 0	26, 0	22, 0				16
14	743, 28	742, 94	741, 48	739, 84	739, 17	737, 56	33, 6	36, 3	37, 9	30, 0	36, 2	35, 3	31, 5	35, 5	34, 2	23, 6	37, 4	N.O.	0	S.O.	6	N.	5	27, 0	23, 0	19, 0				17
15	741, 54	740, 84	740, 14	738, 15	737, 24	736, 44	33, 4	35, 2	36, 0	31, 0	35, 7	37, 0	31, 0	33, 0	34, 1	23, 4	35, 8	N.E.	5	N.E.	15	N.N.E.	5	26, 0	20, 0	18, 0				15
16	740, 40	739, 54	738, 86	737, 12	736, 16	735, 34	32, 5	33, 4	34, 5	28, 5	35, 9	35, 3	27, 7	32, 2	33, 0	22, 4	35, 0	E.N.E.	10	N.	20	N.N.E.	10	27, 0	24, 0	20, 0				12
17	739, 54	738, 62	738, 64	736, 31	735, 28	735, 23	32, 1	33, 0	33, 6	30, 7	34, 8	34, 3	30, 5	32, 0	31, 9	22, 2	34, 8	N.N.E.	5	N.N.E.	8	N.N.E.	30	25, 0	22, 0	20, 0				17
18	742, 10	741, 42	740, 60	738, 81	738, 04	737, 14	32, 6	33, 4	34, 0	31, 0	35, 0	34, 9	30, 7	32, 3	32, 5	20, 6	35, 4	S.O.	6	E.N.E.	12	N.E.	15	26, 0	18, 0	15, 0				14
19	741, 56	740, 38	739, 30	738, 47	737, 16	735, 84	31, 0	32, 0	34, 0	26, 0	27, 9	33, 5	25, 0	30, 0	31, 1	21, 3	32, 2	N.E.	23	N.N.E.	12	E.N.E.	10	23, 0	23, 0	22, 0				16
20	740, 28	739, 38	738, 56	737, 25	736, 31	735, 56	30, 4	30, 8	30, 2	26, 5	30, 8	25, 0	25, 2	28, 0	22, 0	22, 0	30, 4	N.E.	15	N.E.	20	O.N.O.	10	29, 0	25, 0	25, 0				12
21	739, 78	739, 30	738, 46	736, 78	736, 25	735, 29	30, 2	30, 6	31, 6	27, 0	29, 3	29, 9	25, 1	27, 8	27, 7	20, 2	29, 4	O.	12	N.E.	10	N.E.	12	29, 0	22, 0	20, 0				10
22	743, 38	743, 26	742, 84	740, 50	740, 28	739, 75	29, 0	29, 8	30, 7	23, 9	26, 9	27, 5	21, 5	24, 1	25, 0	17, 2	26, 0	N.N.O.	15	N.E.	8	E.N.E.	12	27, 0	25, 0	22, 0				13
23	745, 54	744, 40	743, 68	743, 00	741, 59	740, 53	26, 2	28, 4	31, 2	20, 9	27, 0	28, 5	20, 0	24, 3	25, 5	14, 8	26, 7	N.E.	15	N.E.	15	E.N.E.	10	28, 0	25, 0	23, 0				10
24	741, 52	739, 20	737, 52	738, 79	736, 18	734, 34	27, 9	30, 4	31, 7	23, 5	30, 0	30, 7	22, 1	28, 0	28, 2	15, 6	30, 4	N.	5	S.S.O.	10	N.E.	11	29, 0	25, 0	21, 0				7
25	738, 60	738, 00	737, 54	736, 07	735, 33	734, 65	26, 2	27, 4	29, 2	21, 1	24, 8	26, 3	20, 1	22, 3	24, 5	18, 0	28, 6	N.N.E.	18	E.N.E.	15	E.S.E.	5	27, 0	23, 0	20, 0				14
26	742, 08	742, 16	741, 74	739, 57	739, 44	738, 80	26, 0	27, 8	29, 6	23, 0	27, 0	28, 0	22, 3	25, 1	25, 7	14, 6	26, 2	S.	10	S.O.	7	O.S.O.	12	22, 0	17, 0	15, 0				10
27	744, 74	744, 46	744, 06	742, 20	741, 58	740, 98	26, 2	29, 0	30, 6	24, 0	30, 0	30, 3	23, 0	27, 1	27, 0	14, 2	28, 2	E.S.E.	3	S.	7	S.	3	22, 0	17, 0	15, 0				10
28	744, 92	743, 84	743, 52	742, 40	741, 03	740, 49	26, 0	28, 4	30, 2	21, 1	29, 0	31, 1	20, 1	26, 0	27, 2	14, 0	28, 0	N.E.	8	E.N.E.	5	N.	5	24, 0	22, 0	20, 0				13
29	745, 96	745, 30	744, 42	743, 40	742, 48	741, 37	26, 3	28, 5	30, 3	23, 0	29, 0	30, 1	21, 5	26, 0	27, 0	15, 2	28, 2	N.E.	10	N.E.	0	N.N.O.	10	26, 0	24, 0	23, 0				11
30	746, 16	745, 10	744, 64	743, 48	741, 88	741, 22	27, 3	31, 8	33, 4	23, 9	31, 5	34, 7	23, 0	29, 3	30, 0	17, 0	31, 4	N.	5	S.O.	10	S.O.	10	28, 0	22, 0	21, 0				9
31	744, 12	743, 26	742, 34	741, 36	740, 00	738, 73	28, 0	32, 1	35, 0	25, 9	33, 5	36, 7	25, 0	30, 0	32, 8	18, 0	33, 8	N.E.	2	N.N.O.	5	O.	10	28, 0	24, 0	20, 0				14

STATO DELL'ATMOSFERA

GIORNI del MESE	MATTINO A ORE 9	MEZZODÌ	SERA A ORE 3
1	Quasi annuvolato.	Annuvolato piovigginoso.	Annuvolato piovigginoso. - *Poi pioggia dirotta e vento.*
2	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.
3	Nuvolette.	Nuvole a gruppi.	Sereno con vapori.
4	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.	Quasi annuvolato. - *Poi pioggia nella notte.*
5	Annuvolato.	Annuvolato piovigginoso.	Annuvolato piovigginoso. - *Poi pioggia.*
6	Nuvolette.	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.
7	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi. } *Poi pioggia.*
8	Nuvole a gruppi.	Quasi annuvolato.	Annuvolato. } *Poi pioggia.*
9	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.	Nuvole squarciate. - *Poi lampi, tuono e pioggia dirotta.*
10	Nuvole a gruppi.	Nuvole squarciate.	Nuvole sparse.
11	Sereno.	Sereno.	Sereno con vapori. – *Poi poca pioggia.*
12	Sereno.	Sereno.	Sereno.
13	Sereno con vapori.	Nuvolette.	Nuvole a gruppi. – *Poi poca pioggia.*
14	Sereno.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
15	Sereno con vapori.	Nuvole sparse.	Sereno con vapori.
16	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.
17	Sereno.	Nuvolette.	Nuvolette.
18	Sereno.	Nuvole sparse.	Nuvole sparse. - *Poi pioggia.*
19	Sereno con vapori.	Nuvole a gruppi. - *Poi pioggia.*	Annuvolato.
20	Sereno.	Nuvolette.	Sereno.
21	Sereno.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.
22	Sereno.	Sereno.	Sereno.
23	Sereno.	Sereno.	Sereno.
24	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Nuvolette.
25	Nuvolette.	Nuvolette.	Nuvole a gruppi. } *Poi pioggia.*
26	Sereno con vapori.	Nuvole a gruppi.	Annuvolato. } *Poi pioggia.*
27	Nuvole a gruppi.	Nuvole sparse e vento.-*Poi pioggia.*	Annuvolato piovigginoso.
28	Pioviggina.	Nuvole sparse.	Quasi annuvolato. - *Poi poca pioggia.*
29	Sereno.	Nuvole a liste.	Nugoli sottili.
30	Sereno.	Nuvolette.	Nuvole sparse e vento.

Osservazioni meteorologiche fatte alla Specola dell'Accademia R. delle Scienze di Torino, elevata m. 284,50 sopra il livello del mare, nel mese di settembre 1861

GIORNI del MESE	BAROMETRO altezze osservate			BAROMETRO altezze ridotte			TERMOM. CENTIGRADO unito al barometro			TERMOM. CENTIGRADO al mezzodì			TERMOMETRO CENTIGRADO a tramontana					ANEMOSCOPIO						IGROMETRO			IETOMETRO			ATMIDOMETRO
	mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	*minima*	*massima*	mattino ore 9		mezzodì		sera ore 3		mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	mattino ore 9
	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	direzione	forza	direzione	forza	direzione	forza	gr. cent.	gr. cent.	gr. cent.	millim.	millim.	millim.	millim.
1	742,32	741,78	741,08	739,70	738,87	737,72	+27,0	+29,4	+33,2	+23,7	+30,1	+32,0	+23,0	+27,0	+29,0	+17,0	+32,8	E.N.E.	5	N.	7	N.N.E.	5	28,0	26,0	24,0				16
2	741,92	741,48	741,00	739,21	738,38	737,66	27,7	31,0	33,0	22,7	32,1	33,1	23,2	28,0	29,1	18,6	30,8	E.N.E.	5	N.	0	N.N.O.	5	30,0	27,0	24,0				8
3	742,18	741,80	740,90	739,46	738,76	737,63	27,8	30,5	32,4	25,1	30,8	31,6	23,7	28,0	29,0	18,8	30,2	E.N.E.	5	N.E.	20	N.N.E.	5	32,0	28,0	26,0				14
4	743,32	742,58	741,98	740,55	739,40	738,78	28,2	31,7	31,9	26,2	32,0	29,5	24,3	28,0	28,7	18,0	31,2	O.	10	N.N.E.	8	N.N.E.	10	32,0	27,0	26,0				10
5	741,86	741,36	740,40	739,07	738,31	736,94	28,4	30,6	34,1	26,1	32,1	34,9	25,0	29,2	31,0	17,8	32,2	O.S.O.	10	O.N.O.	5	O.	10	33,0	30,0	22,0				16
6	742,18	741,56	740,70	739,41	738,57	737,53	28,2	30,1	31,6	27,0	31,5	31,3	24,3	28,5	29,1	18,6	30,6	E.N.E.	5	N.E.	8	N.N.E.	20	29,0	27,0	25,0				9
7	738,50	737,30	736,20	735,76	734,08	733,05	28,0	32,0	31,5	27,3	34,0	32,1	25,5	31,0	30,2	19,0	32,2	O.S.O.	25	S.S.O.	7	O.N.O.	80	31,0	25,0	11,0				12
8	742,86	742,18	740,80	740,26	739,48	737,88	26,8	27,6	29,5	20,0	26,3	27,7	19,0	23,0	24,5	15,1	25,0	N.E.	20	N.	10	N.	6	20,0	20,0	19,0				20
9	743,72	742,74	741,64	741,19	740,00	738,71	26,2	28,0	29,6	21,5	28,0	28,0	20,0	24,9	25,0	13,2	25,6	N.E.	10	E.N.E.	10	N.	5	26,0	24,0	22,0				10
10	740,20	739,40	738,42	737,91	736,95	736,00	24,2	25,5	25,3	17,5	20,0	20,5	17,2	19,5	20,0	15,4	25,4	E.N.E.	15	N.	12	N.	8	32,0	30,0	30,0	pioggia 4			5
11	732,98	733,78	734,12	730,81	731,22	731,35	23,5	26,8	28,6	18,5	24,2	24,9	17,5	21,0	22,1	14,4	22,8	E.N.E.	5	E.N.E.	5	N.E.	2	36,0	31,0	29,0	20			5
12	739,52	739,82	740,54	737,37	737,41	737,98	23,0	25,2	26,5	21,0	25,0	23,5	19,8	22,5	22,9	15,4	24,0	E.N.E.	5	N.N.E.	15	N.N.E.	5	34,0	29,0	27,0				10
13	745,06	744,60	744,24	742,86	742,16	741,60	23,3	25,3	27,0	19,0	22,0	24,0	18,5	21,2	22,5	13,5	23,8	N.E.	20	N.E.	5	E.N.E.	7	33,0	32,0	30,0				5
14	743,84	742,46	741,22	741,63	740,04	738,83	23,4	25,3	25,0	19,1	23,9	23,0	18,8	23,1	21,2	14,4	23,2	N.E.	5	N.E.	7	N.N.O.	5	35,0	32,0	29,0				6
15	737,02	736,08	735,56	734,90	733,70	732,96	23,0	25,2	27,0	19,0	23,0	26,5	18,1	20,5	22,5	15,6	22,6	N.E.	13	N.E.	10	N.E.	5	35,0	30,0	28,0				7
16	737,70	736,66	736,42	735,84	734,39	733,97	20,8	24,2	25,7	19,1	23,0	22,9	16,6	19,8	20,1	11,6	21,6	N.N.E.	5	N.E.	5	N.N.E.	10	28,0	23,0	22,0				10
17	737,22	737,16	736,92	735,29	734,85	734,23	21,4	24,6	27,8	19,0	25,5	26,4	18,0	22,3	22,5	9,4	23,2	S.	5	O.N.O.	2	N.N.E.	10	27,0	24,0	20,0				7
18	739,72	739,94	739,30	737,81	737,70	736,71	21,0	23,8	26,7	20,7	24,1	26,1	18,5	22,0	22,9	11,0	23,0	S.	10	S.	10	S.	10	23,0	20,0	18,0				11
19	742,64	742,00	741,52	740,71	739,82	739,06	21,2	23,3	25,6	19,5	23,2	23,3	17,5	20,0	20,9	9,6	23,0	N.E.	8	N.E.	12	N.N.E.	4	25,0	22,0	21,0				10
20	742,62	741,72	741,08	740,71	739,50	738,46	21,0	23,6	27,0	16,7	23,0	24,0	16,3	20,1	22,0	10,6	24,0	N.E.	10	N.N.E.	8	E.N.E.	8	28,0	27,0	24,0				8
21	740,80	740,00	739,08	738,91	737,79	736,85	20,8	23,5	23,7	19,0	22,3	20,5	16,3	21,0	20,3	11,3	22,8	N.E.	5	N.E.	7	N.N.E.	8	31,0	29,0	27,0				5
22	738,50	738,16	738,00	736,79	736,17	735,89	19,4	21,7	22,7	16,0	21,0	19,4	15,0	18,9	19,0	14,0	20,8	N.E.	7	E.	7	N.E.	4	38,0	36,0	34,0	15			2
23	740,64	740,40	740,16	738,92	738,38	737,93	19,5	21,9	23,7	17,1	23,0	21,0	16,2	19,5	20,4	14,2	21,6	N.E.	3	N.E.	2	N.E.	3	40,0	39,0	35,0				4
24	739,50	738,18	737,48	737,66	735,96	735,05	20,4	23,6	25,4	18,4	23,8	22,5	17,7	21,3	22,1	14,6	23,4	N.E.	8	E.	6	N.N.E.	7	40,0	37,0	34,0				5
25	733,54	732,98	731,32	731,58	730,87	729,09	21,6	22,9	24,0	19,0	25,0	22,0	18,7	20,5	21,6	14,4	22,6	N.E.	3	N.N.E.	20	N.E.	12	40,0	39,0	37,0				3
26	732,90	732,66	732,26	731,11	730,67	730,25	20,2	21,9	22,0	17,0	22,5	21,3	16,2	19,6	20,0	14,8	22,2	N.E.	10	N.N.E.	12	N.	15	41,0	41,0	39,0	3			7
27	733,40	734,20	734,84	731,85	732,52	733,10	18,1	19,2	19,7	13,0	16,0	14,2	13,0	16,0	14,0	12,2	17,2	O.S.O.	12	S.O.	15	S.S.E.	4	44,0	44,0	42,0	48			0
28	739,98	739,70	739,72	738,46	737,99	737,90	17,8	20,2	23,0	16,5	21,2	23,5	15,7	19,0	20,0	11,2	20,8	N.N.O.	2	O.	15	S.O.	7	46,0	43,0	38,0	5			2
29	741,40	741,70	741,48	739,59	739,48	738,80	20,2	23,6	27,5	20,1	24,9	25,6	18,4	22,0	22,2	11,4	22,8	S.	5	S.S.O.	3	N.O.	2	43,0	41,0	36,0				6
30	741,62	741,20	740,48	739,81	738,89	737,72	20,2	24,4	28,1	20,6	25,9	28,0	19,9	23,0	24,9	12,8	25,0	O.	7	O.	5	O.	6	42,0	39,0	34,0				5

STATO DELL'ATMOSFERA

GIORNI del MESE	MATTINO A ORE 9	MEZZODÌ	SERA A ORE 3
1	Sereno puro.	Sereno.	Sereno.
2	Sereno.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
3	Nuvole a liste.	Sereno con vapori.	Nuvole sparse.
4	Quasi annuvolato.	Quasi annuvolato.	Quasi annuvolato. - *Poi pioggia.*
5	Annuvolato.	Pioggia.	Annuvolato.
6	Nuvole a gruppi.	Mezzo annuvolato.	Nuvole sparse.
7	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.	Nuvole sparse.
8	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori. - *Poi pioggia.*
9	Nuvole sparse.	Sereno con vapori. - *Poi pioggia.*	Nuvole sparse.
10	Sereno.	Sereno.	Nuvolette.
11	Sereno puro.	Nuvolette.	Sereno con vapori.
12	Nuvolette.	Nuvolette. - *Poi poca pioggia.*	Annuvolato.
13	Nugoli sottili.	Annuvolato. - *Poi pioggia.*	Pioggia.
14	Nuvole sparse.	Nuvole a gruppi.	Nuvole sparse.
15	Annuvolato.	Annuvolato. - *Poi poca pioggia.*	Nuvole squarciate. - *Poi pioggia.*
16	Annuvolato.	Nuvole sparse.	Sereno con vapori.
17	Sereno puro.	Sereno.	Sereno.
18	Quasi annuvolato.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
19	Sereno con vapori.	Nuvolette.	Nuvolette.
20	Nuvole sparse.	Annuvolato.	Annuvolato. - *Poi poca pioggia.*
21	Sereno con vapori.	Nuvole sparse.	Nuvolette.
22	Nuvole ondeggianti.	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.
23	Sereno.	Nuvole a gruppi.	Annuvolato. - *Poi pioggia e vento.*
24	Sereno.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
25	Sereno.	Nuvole a gruppi.	Nuvolette.
26	Sereno con vapori.	Nuvole a gruppi.	Quasi annuvolato.
27	Nuvolette.	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.
28	Quasi annuvolato. – *Poi poca pioggia.*	Nuvole sparse.	Sereno puro e vento.
29	Sereno puro.	Sereno puro.	Sereno puro.
30	Sereno puro.	Sereno puro.	Sereno puro.
31	Sereno puro.	Sereno.	Sereno con vapori.

Osservazioni meteorologiche fatte alla Specola dell'Accademia R. delle Scienze di Torino, elevata m. 284,50 sopra il livello del mare, nel mese di ottobre 1861

GIORNI del MESE	BAROMETRO altezze osservate: mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	BAROMETRO altezze ridotte: mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	TERMOM. CENTIGRADO unito al barometro: mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	TERMOM. CENTIGRADO al mezzodì: mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO a tramontana: mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	*minima*	*massima*	ANEMOSCOPIO mattino ore 9: direzione	forza	mezzodì: direzione	forza	sera ore 3: direzione	forza	IGROMETRO mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	IETOMETRO mattino ore 9	mezzodì	sera ore 3	ATMIDOMETRO mattino ore 9
	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	direzione	forza	direzione	forza	direzione	forza	gr. cent.	gr. cent.	gr. cent.	millim.	millim.	millim.	millim.
1	738,80	738,90	738,54	736,87	736,30	735,86	+21,2	+26,8	+27,5	+20,1	+26,0	+25,9	+18,3	+23,0	+23,1	+13,2	+24,8	N.N.E.	2	N.E.	7	N.E.	5	40,0	37,0	35,0				3
2	740,40	739,90	739,20	738,56	737,80	736,85	20,4	22,6	24,7	20,0	23,1	22,8	19,9	21,6	21,2	15,2	23,6	S.S.E.	3	O.S.O.	7	O.	10	41,0	40,0	39,0				10
3	740,16	740,42	740,24	738,19	738,03	737,67	21,5	25,0	26,6	21,9	24,9	22,9	20,0	24,0	22,3	14,4	25,0	N.	2	O.	8	N.N.E.	10	44,0	40,0	37,0				2
4	742,20	742,06	741,56	740,15	739,70	739,00	22,2	24,8	26,5	21,1	24,8	25,0	20,9	22,1	22,7	14,4	23,4	N.N.E.	2	E.N.E.	8	N.N.E.	12	44,0	39,0	34,0				4
5	744,98	744,70	744,54	742,99	742,36	741,92	21,6	24,5	26,8	20,1	25,5	26,1	18,9	22,2	22,9	15,2	23,8	N.E.	6	N.E.	5	N.E.	5	42,0	39,0	35,0				8
6	746,82	746,54	746,04	744,95	744,07	743,27	20,6	25,6	28,1	19,4	26,8	27,0	18,3	23,5	23,6	15,6	24,4	O.N.O.	0	E.S.E.	2	S.O.	6	42,0	39,0	35,0				3
7	745,90	745,52	745,26	744,10	743,10	742,60	20,0	25,2	27,2	19,0	26,7	25,8	16,9	24,1	23,3	14,2	25,0	O.N.O.	0	O.S.O.	3	O.S.O.	10	42,0	39,0	32,0				5
8	744,84	744,40	744,00	743,07	742,29	741,76	19,8	22,6	23,7	16,0	22,5	20,7	15,5	20,3	20,5	14,8	23,8	N.E.	7	N.E.	0	N.E.	5	41,0	38,0	35,0				5
9	746,30	746,36	745,96	744,45	744,15	743,59	20,4	23,4	24,8	18,4	23,0	21,6	17,2	20,5	20,9	16,0	22,2	N.	5	N.E.	20	N.E.	5	41,0	38,0	35,0				4
10	746,66	745,80	745,00	744,89	743,86	742,89	19,8	21,2	22,6	15,7	18,0	20,5	15,5	17,0	19,0	15,0	21,2	N.E.	5	N.E.	5	N.E.	5	41,0	42,0	40,0				5
11	742,70	741,48	741,80	741,01	739,71	740,09	19,2	19,9	19,4	17,0	17,0	14,3	16,5	17,0	14,5	15,2	19,0	N.E.	2	E.N.E.	5	E.N.E.	8	44,0	45,0	45,0			pioggia 7	0
12	744,06	744,36	744,60	742,34	742,32	742,13	19,3	22,0	25,6	18,8	25,0	25,8	18,0	20,1	21,3	13,8	22,0	N.N.E.	0	N.N.O.	3	O.	3	46,0	44,0	40,0	pioggia 11			3
13	747,38	746,46	745,72	745,57	744,15	743,10	20,1	24,3	26,8	19,3	25,3	24,5	18,1	22,2	22,0	12,2	22,4	E.S.E.	2	S.O.	3	O.	5	46,0	41,0	37,0				5
14	745,50	745,32	744,80	743,95	743,64	742,82	17,9	19,0	21,5	14,0	16,5	19,1	13,6	16,0	18,8	12,2	19,4	E.N.E.	4	E.N.E.	5	E.N.E.	4	45,0	46,0	42,0				4
15	745,68	746,10	745,80	744,22	744,53	744,24	17,2	18,1	18,0	14,3	15,9	17,0	14,5	16,0	16,5	13,8	16,8	O.S.O.	5	N.	12	N.N.E.	15	46,0	49,0	47,0				1
16	746,40	745,32	744,72	744,84	743,47	742,69	18,0	20,4	21,9	16,0	20,8	19,5	14,0	16,6	16,8	11,2	17,4	N.E.	0	N.N.E.	12	N.	5	47,0	40,0	38,0				1
17	743,32	742,90	742,10	741,88	741,20	740,18	17,0	19,2	21,0	16,5	19,3	18,0	15,3	16,0	16,3	11,4	17,2	S.O.	2	E.N.E.	2	E.N.E.	5	44,0	42,0	38,0				5
18	742,60	742,10	741,80	741,26	740,39	739,87	16,3	19,4	21,2	14,9	18,0	18,0	12,0	16,2	17,0	5,6	18,0	S.E.	2	O.S.O.	10	N.N.E.	5	45,0	40,0	38,0				2
19	741,52	740,86	740,26	740,29	739,28	738,30	15,4	18,3	21,4	13,2	19,0	20,5	11,6	16,9	17,0	5,3	17,6	S.O.	5	O.S.O.	5	O.N.O.	4	45,0	41,0	37,0				2
20	741,56	741,62	741,20	740,43	740,40	739,95	14,6	15,3	15,6	9,6	11,7	11,5	9,2	10,8	11,2	9,0	12,2	N.E.	15	N.E.	12	N.E.	5	42,0	40,0	39,0				5
21	744,34	743,84	743,70	743,07	742,05	741,98	15,6	19,9	19,3	17,0	20,1	15,5	14,0	16,0	15,0	8,8	17,1	O.S.O.	3	E.S.E.	3	E.S.E.	3	43,0	36,0	34,0				4
22	745,54	745,36	745,56	744,46	744,12	744,33	14,0	15,3	15,2	12,5	14,0	14,1	12,0	13,5	13,0	11,0	14,0	S.S.O.	3	O.S.O.	5	S.O.	3	41,0	40,0	40,0				1
23	745,74	744,94	745,00	744,65	743,50	743,37	14,1	17,0	18,6	14,3	17,4	16,5	13,5	15,7	15,9	11,2	17,0	O.S.O.	2	N.N.E.	6	N.E.	3	43,0	40,0	37,0				1
24	744,70	744,62	744,50	743,68	743,49	743,25	13,5	14,4	15,4	11,0	12,2	14,0	10,5	11,6	12,0	10,0	12,4	N.N.E.	4	E.N.E.	15	N.E.	3	43,0	45,0	43,0	3			1
25	744,58	744,12	743,56	743,72	742,87	742,00	12,2	15,4	18,0	9,0	17,1	16,1	7,8	12,5	13,1	2,4	13,8	O.S.O.	3	N.E.	0	N.N.E.	3	45,0	43,0	39,0				3
26	743,60	743,08	742,46	742,69	741,88	741,15	12,6	15,0	15,9	11,5	15,5	12,9	9,2	12,0	12,1	1,8	13,2	O.S.O.	2	N.N.E.	5	N.E.	7	45,0	41,0	37,0				3
27	739,32	738,44	737,64	738,56	736,99	736,17	11,5	17,2	17,4	10,4	16,9	15,1	8,2	13,0	13,3	2,2	13,4	S.O.	5	E.S.E.	10	E.N.E.	6	43,0	41,0	36,0				5
28	735,08	734,70	734,62	734,23	733,48	733,25	12,2	15,3	16,6	8,1	16,8	15,0	7,1	13,8	13,1	1,4	14,0	S.S.O.	10	O.S.O	4	N.N.E.	7	42,0	40,0	36,0				3
29	732,54	732,94	733,52	731,88	732,14	732,73	10,6	11,8	11,7	8,0	9,0	9,0	7,5	8,8	8,9	6,4	8,9	S.O.	5	N.E.	8	N.N.E.	5	43,0	44,0	44,0	13			1
30	733,10	732,66	732,42	732,46	731,93	731,67	10,4	11,2	11,4	8,9	10,1	10,0	8,2	9,9	10,0	8,0	10,4	E.N.E.	5	O.S.O.	4	N.N.O.	3	46,0	47,0	47,0	10	pioggia 6	2	0
31	731,46	732,00	731,82	730,72	731,02	730,76	11,4	13,4	14,1	11,0	10,1	12,8	10,0	12,0	11,0	9,3	12,2	N.E.	5	N.	5	N.	10	47,0	48,0	46,0	16	»	7	0

STATO DELL'ATMOSFERA

GIORNI del MESE	MATTINO A ORE 9	MEZZODÌ	SERA A ORE 3
1	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Nuvole sparse.
2	Sereno con vapori.	Pioggia.	Nuvolette.
3	Nuvole ondeggianti.	Nuvolette.	Nuvole sparse.
4	Sereno puro.	Sereno puro.	Sereno puro.
5	Sereno.	Nuvolette.	Nuvolette.
6	Sereno.	Sereno.	Sereno con vapori.
7	Sereno.	Nuvolette.	Nuvolette.
8	Sereno con vapori.	Sereno.	Sereno con vapori.
9	Sereno.	Sereno con vapori.	Sereno.
10	Sereno.	Sereno puro.	Sereno puro.
11	Sereno.	Sereno puro.	Sereno puro.
12	Sereno.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
13	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
14	Sereno.	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.
15	Sereno puro.	Sereno puro.	Sereno puro.
16	Sereno.	Sereno.	Sereno con vapori.
17	Sereno.	Sereno con vapori.	Nuvole sparse. - *Poi poche goccie di pioggia.*
18	Sereno puro.	Sereno puro.	Sereno puro.
19	Sereno puro.	Sereno con vapori.	Sereno puro.
20	Quasi annuvolato.	Nuvole sparse.	Pioggia.
21	Nuvolette.	Nuvole sparse.	Sereno con vapori.
22	Nuvolette.	Nuvole sparse.	Sereno con vapori.
23	Sereno.	Sereno.	Sereno puro.
24	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
25	Nugoli sottili.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
26	Sereno con vapori.	Sereno puro.	Sereno puro.
27	Sereno con vapori.	Sereno puro.	Sereno puro.
28	Sereno puro.	Sereno puro.	Sereno puro.
29	Sereno puro.	Sereno puro.	Sereno.
30	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
31	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.

Osservazioni meteorologiche fatte alla Specola dell'Accademia R. delle Scienze di Torino, elevata m. 284,50 sopra il livello del mare, nel mese di novembre 1861

GIORNI del MESE	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE SERA ore 3	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MATTINO ore 9	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MEZZODÌ	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *minima*	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *massima*	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 direzione	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 forza	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ direzione	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ forza	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 direzione	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 forza	IGROMETRO MATTINO ore 9	IGROMETRO MEZZODÌ	IGROMETRO SERA ore 3	IETOMETRO MATTINO ore 9	IETOMETRO MEZZODÌ	IETOMETRO SERA ore 3	ATMIDOMETRO MATTINO ore 9
	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	direzione	forza	direzione	forza	direzione	forza	gr. cent.	gr. cent.	gr. cent.	millim.	millim.	millim.	millim.
1	731,00	730,62	730,44	731,60	729,62	729,08	+12,2	+13,6	+16,6	+10,1	+15,7	+14,9	+ 8,7	+12,0	+13,0	+ 3,6	+14,0	N.E.	1	O.S.O.	5	S.S.E.	5	50,0	47,0	42,0				4
2	727,04	725,54	725,18	726,38	724,48	723,99	10,7	14,2	15,3	9,0	15,8	14,5	8,5	12,0	11,7	6,4	13,0	O.N.O.	3	S.S.O.	10	S.O.	3	47,0	45,0	44,0				1
3	729,70	730,20	730,90	729,20	729,18	729,69	9,4	13,7	15,4	8,0	16,6	12,0	6,9	11,3	11,1	0,8	11,6	S.S.O.	5	O.	4	O.	3	48,0	44,0	40,0				1
4	736,44	736,36	736,16	735,79	735,54	735,01	10,5	12,0	14,7	9,5	11,3	12,0	8,3	10,2	9,9	1,8	11,3	S.O.	10	S.O.	10	S.S.O.	5	44,0	42,0	40,0				2
5	744,48	744,60	744,64	743,97	743,76	743,53	9,2	12,0	14,3	8,0	12,8	13,0	5,3	10,0	11,1	− 0,2	11,2	N.E.	8	N.N.E.	5	N.N.E.	5	41,0	40,0	37,0				5
6	744,10	743,52	742,72	743,61	742,54	741,48	9,1	13,2	15,3	9,0	16,8	13,2	7,0	12,0	10,8	+ 1,0	12,0	S.S.O.	6	S.O.	3	N.N.E.	5	44,0	43,0	37,0				3
7	738,60	737,14	736,28	738,13	736,29	735,15	9,0	12,2	14,6	11,0	14,5	12,7	7,0	10,0	10,3	2,0	11,2	S.O.	3	O.N.O.	3	O.S.O.	4	44,0	43,0	39,0				2
8	734,92	734,10	733,58	734,68	733,67	733,04	7,1	8,7	9,6	5,1	7,3	7,9	5,0	7,3	7,5	− 0,2	7,6	N.N.E.	0	O.S.O.	3	N.N.E.	5	45,0	45,0	45,0				0
9	727,68	725,96	724,50	727,30	725,49	723,91	8,4	9,2	10,2	7,9	8,4	9,9	7,2	8,0	9,0	+ 7,0	9,2	N.E.	3	E.N.E.	5	N.N.E.	3	45,0	45,0	46,0	pioggia 1			0
10	737,80	738,82	739,14	737,45	738,19	738,04	8,0	10,3	14,3	8,5	12,0	11,5	7,1	10,0	11,5	1,8	12,2	S.O.	3	N.E.	5	N.E.	0	43,0	42,0	42,0				0
11	740,00	740,44	740,78	739,58	739,61	739,60	8,6	12,0	15,0	6,9	13,0	13,2	6,0	11,0	11,1	4,2	11,8	O.S.O.	6	S.O	10	O.S.O.	5	42,0	40,0	40,0				1
12	742,36	741,92	741,36	742,06	741,21	740,27	7,5	11,0	14,2	4,7	12,5	14,0	5,0	10,3	11,0	1,8	11,4	E.S.E.	5	O.S.O.	5	O.	5	46,0	45,0	42,0				1
13	741,32	740,20	739,90	740,93	739,25	738,58	8,3	13,0	16,1	7,0	17,0	16,1	6,5	12,1	13,0	0,0	13,0	S.O.	3	S.O.	5	S.O.	5	46,0	44,0	43,0				2
14	730,50	729,10	728,64	730,03	728,33	727,50	9,1	11,6	14,8	8,0	11,0	12,2	7,6	10,0	10,2	7,0	12,2	N.N.E.	2	N.N.E.	4	E.N.E.	5	44,0	44,0	44,0				0
15	727,88	727,94	728,40	727,49	727,19	727,53	8,4	11,4	12,5	4,0	13,0	14,5	3,9	12,0	12,2	0,4	13,0	N.E.	0	O.	70	O.	60	46,0	38,0	35,0				3
16	731,22	731,40	731,68	730,95	730,70	730,82	7,4	11,0	12,4	4,0	9,7	10,0	4,0	8,3	8,5	1,4	12,2	E.N.E.	5	N.N.E.	10	N.E.	10	37,0	35,0	35,0				7
17	733,32	733,50	733,80	733,18	732,94	732,95	6,2	9,8	12,2	3,0	11,8	9,0	3,0	8,0	7,5	− 0,4	8,6	O.S.O.	5	E.	6	N.E.	5	43,0	43,0	41,0				3
18	737,42	738,94	739,84	737,32	738,47	739,10	5,9	9,0	11,3	4,9	11,5	9,1	4,5	7,8	8,6	+ 0,5	8,8	E.N.E.	0	O.	0	E.N.E.	5	46,0	46,0	43,0				0
19	748,94	750,08	750,06	748,69	749,71	749,52	7,0	8,1	9,4	6,0	8,0	8,0	6,0	7,0	6,3	4,4	9,2	N.N.E.	5	N.N.E.	5	N.E.	5	45,0	45,0	45,0	1			1
20	750,08	748,82	748,78	749,95	748,13	748,14	6,0	10,7	12,4	4,8	10,5	8,7	4,0	6,0	6,5	0,0	7,4	S.O.	5	O.N.O.	5	O.S.O.	5	47,0	45,0	43,0				0
21	745,38	744,24	743,42	745,52	744,16	743,13	3,8	5,7	7,4	− 0,3	3,1	5,2	− 0,5	3,0	5,0	− 4,2	5,0	O.S.O.	5	S.O.	8	S.O.	5	48,0	48,0	47,0				
22	742,16	741,08	740,46	742,30	740,79	739,82	3,9	7,5	10,4	+ 1,6	8,5	10,1	+ 2,0	7,1	7,9	3,2	7,9	S.	4	S.O.	4	O.S.O.	5	49,0	49,0	47,0				
23	734,84	733,26	732,38	734,70	732,90	731,94	6,2	8,1	8,8	6,2	7,3	7,3	6,0	7,0	7,0	+ 5,0	7,8	E.N.E.	3	E.N.E.	5	E.N.E.	5	47,0	47,0	47,0				
24	728,18	728,94	730,52	728,03	727,89	729,20	6,4	14,0	16,3	6,5	15,0	14,7	6,0	12,0	13,5	4,6	14,8	S.O.	5	E.S.E.	5	S.S.O.	3	48,0	47,0	38,0				
25	742,42	742,80	743,28	742,24	742,03	742,30	6,5	11,4	13,2	5,0	14,0	11,0	4,9	9,7	8,8	1,4	10,5	S.O.	20	S.S.O.	5	S.O.	5	45,0	45,0	42,0				
26	743,70	742,80	742,14	743,65	742,51	741,74	5,4	7,4	8,3	2,8	8,5	6,0	2,0	4,9	5,2	− 0,6	6,0	N.N.E.	5	O.	6	S.S.O.	5	47,0	47,0	47,0				
27	741,94	740,56	740,30	741,94	740,35	739,80	5,0	6,8	9,2	2,7	9,0	6,0	2,5	5,4	5,6	+ 0,6	5,9	O.S.O.	10	O.	8	O.S.O.	3	49,0	48,0	48,0				
28	739,20	738,40	738,44	739,30	737,64	737,30	4,2	11,4	14,6	2,5	12,5	9,3	2,0	8,1	8,0	− 1,2	8,6	O.S.O.	0	S.O.	6	S.O.	5	49,0	49,0	46,0				
29	740,50	741,48	742,20	740,48	740,60	741,56	5,2	12,4	18,8	4,7	16,0	17,9	3,5	10,4	12,2	1,0	12,8	O.S.O.	5	O.S.O.	5	S.O.	2	49,0	47,0	45,0				
30	744,82	745,22	744,76	744,75	744,34	743,71	5,6	12,3	13,7	6,0	12,5	8,5	4,0	9,0	7,8	0,4	10,0	O.N.O.	0	S.E.	0	E.N.E.	5	48,0	48,0	46,0				

Per causa del gelo non si è tenuto conto dell'evaporazione.

STATO DELL'ATMOSFERA

GIORNI del MESE	MATTINO A ORE 9	MEZZODÌ	SERA A ORE 3
1	Sereno puro.	Sereno puro.	Sereno puro.
2	Sereno puro.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
3	Sereno con vapori.	Nuvole sparse.	Nuvolette.
4	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.
5	Sereno.	Sereno.	Sereno.
6	Sereno.	Sereno.	Sereno con vapori.
7	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori e vento.
8	Nuvole a liste.	Nuvolette.	Sereno con vapori.
9	Sereno.	Nuvolette.	Sereno con vapori. – *Poi poca pioggia nella notte.*
10	Nuvole squarciate.	Annuvolato.	Nuvole squarciate. - *Poi pioggia.*
11	Nuvole squarciate.	Nuvole sparse.	Sereno con vapori.
12	Nugoli sottili.	Nuvole sparse.	Nuvole sparse.
13	Nuvole sparse.	Nuvole a gruppi.	Nuvole a gruppi.
14	Quasi annuvolato.	Nuvole a gruppi.	Quasi annuvolato.
15	Nuvolette.	Nuvolette.	Nuvolette.
16	Nuvole a liste.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
17	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
18	Sereno puro.	Sereno con vapori.	Sereno puro.
19	Sereno puro.	Sereno puro.	Sereno.
20	Sereno con vapori.	Nuvole sparse.	Nuvolette.
21	Nugoli sottili.	Nuvole squarciate.	Annuvolato.- *Poi pioggia dirotta.*
22	Annuvolato.	Nuvole a gruppi.	Nuvole rotte.
23	Coperto.	Nuvole rotte.	Nuvole squarciate.
24	Nuvole rotte.	Nuvole a gruppi.	Nuvole squarciate.
25	Annuvolato.	Nuvole a gruppi.	Nuvole squarciate } *Poi pioggia*
26	Quasi annuvolato.	Nuvole rotte.	Nuvole squarciate } *nella notte.*
27	Pioggia.	Annuvolato piovigginoso.	Pioggia.
28	Coperto chiaro.	Nuvolette.	Sereno con vapori.
29	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
30	Sereno puro.	Sereno puro.	Sereno puro.

Osservazioni meteorologiche fatte alla Specola dell'Accademia R. delle Scienze di Torino, elevata m. 284, 50 sopra il livello del mare, nel mese di dicembre 1861

GIORNI del MESE	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE OSSERVATE SERA ore 3	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MATTINO ore 9	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE MEZZODÌ	BAROMETRO ALTEZZE RIDOTTE SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO UNITO AL BAROMETRO SERA ore 3	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MATTINO ore 9	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ MEZZODÌ	TERMOM. CENTIGRADO AL MEZZODÌ SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MATTINO ore 9	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA MEZZODÌ	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA SERA ore 3	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *minima*	TERMOMETRO CENTIGRADO A TRAMONTANA *massima*	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 direzione	ANEMOSCOPIO MATTINO ore 9 forza	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ direzione	ANEMOSCOPIO MEZZODÌ forza	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 direzione	ANEMOSCOPIO SERA ore 3 forza	IGROMETRO MATTINO ore 9	IGROMETRO MEZZODÌ	IGROMETRO SERA ore 3	IETOMETRO MATTINO ore 9	IETOMETRO MEZZODÌ	IETOMETRO SERA ore 3	ATMIDOMETRO — MATTINO ore 9
	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	millimetri	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	gr. dec.	direzione	forza	direzione	forza	direzione	forza	gr. cent.	gr. cent.	gr. cent.	millim.	millim.	millim.	millim.
1	741, 46	741, 00	741, 04	741, 56	740, 72	739, 90	+ 4, 2	+ 7, 4	+ 14, 6	− 0, 3	+ 9, 0	+ 12, 0	− 0, 5	+ 5, 6	+ 8, 0	− 3, 0	+ 8, 3	S.O.	5	O.S.O.	5	O.S.O.	4	50, 0	50, 0	47, 0				
2	742, 96	743, 66	744, 58	743, 15	742, 88	743, 12	3, 4	11, 5	17, 2	+ 3, 6	15, 0	13, 3	+ 2, 5	9, 4	10, 5	2, 9	10, 5	S.O.	15	S.O.	5	O.S.O.	5	50, 0	50, 0	44, 0				
3	744, 84	743, 94	742, 84	744, 90	743, 24	742, 02	4, 2	10, 8	11, 8	6, 0	12, 0	10, 3	3, 4	8, 0	7, 2	0, 2	8, 4	N.E.	0	O.	8	S.O.	15	49, 0	45, 0	44, 0				
4	743, 64	742, 44	741, 76	743, 88	742, 63	741, 86	3, 0	3, 4	4, 2	0, 0	2, 1	1, 5	0, 0	2, 0	1, 2	4, 8	2, 6	E.N.E.	10	N.E.	0	S.O.	10	49, 0	49, 0	49, 0				
5	739, 44	737, 66	736, 84	739, 67	737, 87	736, 43	3, 1	3, 3	3, 4	1, 0	2, 0	1, 0	1, 0	1, 1	1, 0	0, 0	2, 0	O.	0	S.O.	2	O.S.O.	5	50, 0	50, 0	50, 0				
6	733, 52	734, 18	734, 52	733, 86	734, 45	734, 79	2, 2	2, 8	2, 8	1, 0	1, 0	1, 0	1, 0	1, 0	0, 8	1, 8	1, 0	N.	5	N.N.E.	5	N.N.E.	4	51, 0	51, 0	51, 0				
7	733, 50	732, 30	732, 84	733, 83	732, 17	732, 56	2, 3	6, 2	7, 4	2, 0	7, 3	4, 0	1, 4	5, 0	3, 5	1, 2	5, 0	S.O.	12	S.O.	10	S.	3	51, 0	51, 0	50, 0				
8	736, 50	737, 44	738, 42	736, 86	737, 12	738, 21	2, 0	7, 8	6, 8	3, 0	5, 0	5, 5	0, 6	5, 0	4, 0	2, 8	5, 6	E.N.E.	2	E.S.E.	2	S.	3	51, 0	51, 0	50, 0				
9	745, 40	745, 52	745, 62	745, 66	745, 24	745, 36	2, 8	7, 3	7, 2	3, 5	8, 2	5, 0	1, 0	5, 6	5, 0	2, 4	6, 0	S.	7	S.S.O.	8	S.O.	7	51, 0	50, 0	49, 0				
10	744, 82	744, 28	744, 14	745, 03	743, 60	743, 30	3, 2	10, 7	12, 0	2, 2	10, 1	7, 8	1, 2	8, 0	7, 2	1, 0	8, 6	O.S.O.	8	O.S.O.	5	S.O.	3	51, 0	50, 0	49, 0				
11	744, 30	744, 86	745, 16	744, 59	743, 86	743, 94	2, 6	13, 3	15, 2	2, 0	13, 0	9, 3	0, 0	8, 5	8, 1	1, 8	8, 6	S.O.	5	O.S.O.	4	O.N.O.	0	50, 0	49, 0	48, 0				
12	745, 52	745, 24	745, 58	745, 84	744, 70	744, 07	2, 3	9, 5	12, 6	2, 8	11, 0	7, 1	− 0, 8	5, 9	6, 0	3, 4	6, 0	S.S.E.	3	O.S.O.	5	O.S.O.	4	51, 0	50, 0	48, 0				
13	742, 40	742, 16	742, 64	742, 75	741, 89	742, 20	2, 1	7, 3	8, 7	− 1, 2	5, 5	5, 5	2, 6	4, 1	4, 4	4, 6	5, 4	S.O.	5	S.E.	2	S.E.	0	51, 0	51, 0	51, 0				
14	744, 76	744, 46	744, 96	745, 02	744, 10	744, 36	2, 8	8, 0	10, 0	+ 3, 5	12, 0	8, 0	+ 2, 7	8, 0	7, 2	2, 2	8, 3	S.O.	5	S.O.	10	S.O.	10	51, 0	50, 0	47, 0				
15	744, 90	743, 52	742, 70	745, 14	742, 80	741, 86	3, 0	11, 0	12, 0	5, 5	11, 0	7, 0	1, 8	8, 1	6, 1	1, 4	8, 2	N.N.E.	0	N.E.	2	N.N.E.	0	52, 0	53, 0	50, 0				
16	737, 66	737, 40	737, 50	737, 81	736, 86	736, 63	3, 8	9, 6	12, 4	3, 0	12, 0	10, 5	2, 2	7, 8	7, 3	0, 4	8, 2	S.O.	15	S.O.	10	S.O.	5	52, 0	49, 0	47, 0				
17	737, 60	735, 90	736, 76	737, 81	735, 53	736, 12	3, 3	8, 2	10, 4	4, 9	11, 5	8, 0	0, 6	7, 6	7, 0	2, 6	8, 6	S.O.	3	O.S.O.	25	E.N.E.	5	51, 0	46, 0	48, 0				
18	732, 62	729, 42	728, 78	732, 98	729, 71	729, 10	2, 0	2, 6	2, 4	− 3, 0	− 1, 0	− 1, 3	− 4, 2	− 2, 6	− 2, 5	4, 6	− 1, 4	N.	0	N.N.E.	5	N.E.	5	51, 0	51, 0	51, 0				
19	730, 52	731, 32	731, 66	731, 00	731, 74	732, 00	1, 0	1, 5	1, 5	2, 0	1, 0	1, 0	2, 4	1, 9	1, 4	4, 8	0, 6	S.O.	0	N.E.	3	S.O.	0	52, 0	53, 0	53, 0				
20	738, 10	738, 24	738, 50	738, 63	738, 72	738, 82	0, 6	1, 0	2, 4	2, 8	1, 0	+ 2, 0	3, 2	1, 6	1, 0	3, 8	0, 4	S.O.	10	S.O.	10	O.S.O.	10	53, 0	53, 0	53, 0				
21	744, 64	744, 10	743, 80	745, 20	744, 53	744, 21	0, 3	1, 4	1, 6	0, 7	+ 0, 5	0, 0	2, 0	0, 4	0, 5	3, 4	0, 0	S.	5	O.S.O.	8	O.S.O.	5	53, 0	54, 0	53, 0				
22	743, 90	742, 94	741, 56	744, 57	743, 53	742, 09	− 0, 6	0, 1	0, 6	3, 0	− 2, 0	− 2, 0	4, 6	3, 2	3, 0	6, 0	0, 2	S.O.	10	O.	8	O.S.O.	8	54, 0	54, 0	54, 0				
23	738, 56	738, 00	738, 76	739, 45	738, 43	738, 79	2, 4	1, 4	4, 8	5, 5	+ 2, 0	+ 2, 1	7, 8	1, 9	1, 8	9, 0	0, 6	S.O.	10	S.O.	5	S.O.	7	55, 0	55, 0	51, 0				
24	742, 74	742, 94	742, 72	743, 56	743, 47	743, 19	1, 8	0, 6	1, 1	2, 0	1, 0	1, 0	− 5, 0	2, 2	1, 2	8, 2	0, 6	E.N.E.	5	N.E.	8	E.	0	53, 0	53, 0	53, 0				
25	744, 32	743, 80	743, 92	745, 12	744, 14	743, 68	1, 7	2, 2	7, 0	1, 0	4, 0	4, 0	2, 0	1, 0	+ 0, 4	4, 4	+ 0, 8	N.N.E.	0	N.N.E.	3	S.	6	53, 0	53, 0	50, 0				
26	744, 60	743, 50	742, 14	745, 42	743, 62	742, 25	1, 8	4, 0	4, 1	0, 5	3, 0	3, 5	3, 0	+ 0, 8	0, 0	8, 0	1, 4	O.N.O.	1	S.O.	6	S.O.	15	53, 0	53, 0	51, 0				
27	744, 52	744, 68	745, 74	745, 34	745, 08	746, 14	1, 8	1, 7	1, 7	1, 0	2, 3	1, 0	2, 9	− 0, 1	0, 0	6, 4	1, 2	S.O.	15	E.N.E.	4	S.S.E.	8	53, 0	53, 0	52, 0				
28	747, 70	747, 16	747, 14	748, 11	747, 39	747, 26	+ 1, 6	3, 1	4, 0	3, 0	4, 0	2, 5	+ 1, 5	+ 2, 4	1, 2	0, 8	3, 0	O.S.O.	4	N.E.	0	N.E.	3	52, 0	52, 0	52, 0				
29	743, 78	742, 82	742, 54	744, 49	742, 48	741, 89	− 0, 9	7, 8	10, 4	0, 0	8, 5	9, 0	− 1, 6	4, 0	4, 6	6, 6	4, 8	S.O.	5	O.S.O.	5	S.O.	5	52, 0	51, 0	47, 0				
30	741, 46	742, 24	743, 22	742, 18	742, 08	742, 45	1, 0	6, 4	11, 4	− 0, 2	10, 0	7, 9	2, 8	3, 8	4, 0	6, 0	5, 8	S.O.	6	S.O.	5	O.	0	52, 0	51, 0	48, 0				
31	747, 80	747, 36	746, 98	748, 28	747, 00	746, 35	+ 1, 0	8, 0	10, 3	+ 4, 5	8, 5	4, 0	+ 0, 7	3, 6	2, 6	2, 4	4, 2	N.E.	0	E.N.E.	5	S.E.	2	49, 0	47, 0	47, 0				

Per causa del gelo non si è tenuto conto dell'evaporazione.

STATO DELL'ATMOSFERA

GIORNI del MESE	MATTINO A ORE 9	MEZZODÌ	SERA A ORE 3
1	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.
2	Coperto chiaro.	Nugoli sottili.	Sereno con vapori.
3	Sereno con vapori.	Nuvolette.	Nuvole sparse.
4	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
5	Nuvolette.	Nuvolette.	Sereno con vapori.
6	Annuvolato.	Nuvolette.	Nuvolette.
7	Nuvolette.	Nuvolette.	Nuvolette.
8	Annuvolato.	Mezzo annuvolato.	Nuvole rotte.
9	Nuvole rotte.	Nuvole sparse.	Nuvole sparse.
10	Annuvolato. - *Poi pioggia.*	Nuvole squarciate.	Nuvole sparse.
11	Annuvolato.	Annuvolato. - *Poi pioggia.*	Pioggia.
12	Nuvole sparse.	Nuvole sparse.	Nuvole sparse.
13	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
14	Coperto nebbioso.	Annuvolato.	Nuvole sparse.
15	Coperto nebbioso.	Annuvolato pioviggìnoso.	Nuvole rotte.
16	Sereno.	Nuvolette.	Sereno con vapori.
17	Nuvole rotte.	Nuvole sparse.	Sereno con vapori.
18	Sereno con vapori.	Nuvole sparse.	Nugoli sottili.
19	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
20	Annuvolato.	Annuvolato.	Annuvolato.
21	Nugoli sottili.	Nuvole sparse.	Nuvole sparse.
22	Coperto nebbioso.	Annuvolato.	Annuvolato.
23	Coperto.	Coperto chiaro.	Nuvole rotte. - *Poi pioggia.*
24	Pioviggina.	Annuvolato.	Nuvole sparse.
25	Sereno con nebbia.	Sereno con vapori.	Sereno.
26	Sereno con vapori.	Nuvolette.	Nugoli sottili.
27	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno.
28	Sereno con vapori.	Sereno.	Sereno con vapori. - *Poi pioggia.*
29	Annuvolato.	Annuvolato.	Pioviggina.
30	Pioviggina.	Pioggia.	Pioviggina.
31	Annuvolato.	Annuvolato. - *Poi pioggia.*	Nuvole squarciate. - *Poi arco baleno.*

STATO DELL'ATMOSFERA

GIORNI del MESE	MATTINO A ORE 9	MEZZODÌ	SERA A ORE 3
1	Nuvolette.	Sereno con vapori.	Nuvole sparse.
2	Coperto nebbioso.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
3	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.
4	Nugoli sottili.	Nuvolette.	Nugoli sottili.
5	Nuvole a liste.	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.
6	Sereno con nebbia.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
7	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
8	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.	Coperto. – *Poi pioviggina.*
9	Coperto nebbioso.	Pioviggina.	Nuvole squarciate.
10	Cielo velato.	Cielo velato.	Annuvolato.
11	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.
12	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.	Sereno con vapori.
13	Sereno con nebbia.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
14	Coperto nebbioso.	Nuvole rotte.	Sereno con vapori.
15	Sereno con vapori.	Nugoli sottili e vento.	Sereno con vapori e vento.
16	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.
17	Quasi coperto.	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.
18	Coperto con nebbia.	Nugoli sottili e nebbia.	Nuvole rotte. – *Poi pioggia.*
19	Annuvolato.	Annuvolato.	Nugoli sottili.
20	Sereno.	Sereno.	Sereno con vapori.
21	Nebbia bassa.	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.
22	Sereno con nebbia.	Quasi coperto.	Nugoli sottili.
23	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.
24	Sereno con nebbia.	Sereno.	Sereno con vapori.
25	Sereno.	Sereno.	Nugoli sottili.
26	Coperto con nebbia.	Sereno con nebbia.	Coperto.
27	Coperto nebbioso.	Nuvolette.	Nugoli sottili.
28	Nebbia folta.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
29	Sereno con vapori.	Sereno.	Sereno con vapori.
30	Sereno con nebbia.	Sereno con nebbia.	Nugoli sottili.

STATO DELL'ATMOSFERA

GIORNI del MESE	MATTINO A ORE 9	MEZZODÌ	SERA A ORE 3
1	Sereno con nebbia.	Nugoli sottili e nebbia.	Sereno con vapori.
2	Sereno.	Sereno.	Sereno con vapori.
3	Sereno con nebbia.	Sereno.	Sereno.
4	Nebbia folta.	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.
5	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.
6	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.	Coperto nebbioso.
7	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.
8	Nugoli sottili e nebbia.	Nugoli sottili e nebbia.	Nugoli sottili.
9	Sereno con nebbia.	Sereno con vapori.	Nugoli sottili.
10	Nugoli sottili e nebbia.	Nugoli sottili e nebbia.	Nugoli sottili e nebbia.
11	Sereno con nebbia.	Sereno con vapori.	Sereno con nebbia.
12	Sereno con nebbia folta.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
13	Sereno con nebbia.	Sereno con nebbia.	Nugoli sottili e nebbia.
14	Annuvolato.	Nugoli sottili.	Sereno con vapori.
15	Sereno con nebbia.	Sereno con nebbia.	Nugoli sottili e nebbia.
16	Nugoli sottili e nebbia.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
17	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
18	Nebbia folta.	Nebbia folta.	Nebbia folta.
19	Nebbia folta.	Nebbia folta.	Nebbia folta.
20	Nebbia folta.	Nuvole rotte e nebbia.	Sereno con vapori.
21	Nebbia folta.	Nebbia folta.	Nebbia folta.
22	Nebbia folta.	Nebbia folta.	Nebbia folta.
23	Nebbia folta.	Sereno con nebbia.	Sereno con vapori.
24	Sereno con vapori.	Nuvole sparse.	Quasi annuvolato.
25	Nebbia folta.	Nugoli sottili.	Sereno con vapori.
26	Sereno con nebbia.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
27	Nugoli sottili.	Nugoli sottili.	Coperto.
28	Coperto con nebbia.	Coperto con nebbia.	Nugoli sottili.
29	Sereno con nebbia.	Sereno.	Sereno.
30	Sereno con nebbia.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.
31	Sereno con nebbia.	Sereno con vapori.	Sereno con vapori.

MÉMOIRE

Sur le mouvement du centre de gravité d'un corps solide lancé vers la Terre entre les centres de la Lune et de la Terre, supposés fixes immédiatement après l'impulsion

PAR

JEAN PLANA

» Namque improviso vibratus ab aethere fulgor
» Cum sonitu venit, et ruere omnia visa repente.
» .....
» .....
» Arma inter nubem, Coeli in regione serena;
» Per sudum rutilare vident, et pulsa tonare.

(VIRGILE. *Enéïde* Liv. VIII, vers 524-529).

Lu dans la Séance du 26 juin 1859.

Quelle que soit l'origine des aérolithes, l'hypothèse qu'ils puissent être des masses solides projetées vers la Terre par une force d'explosion émanée des Volcans Lunaires, mérite d'être développée au-de-là de ces aperçus fort simples, qui naissent de la considération du principe de la force vive. Il est à la fois intéressant et curieux d'entrer dans les détails de l'intégration, afin de mettre en évidence les lois de ce mouvement, jusqu'à la réduction d'un calcul numérique. Alors on conçoit clairement jusqu'à quel point la question est compliquée, même dans le cas purement hypothétique, que les centres de gravité de la Lune et de la Terre soient, par la pensée, rendus fixes dans l'espace absolu. Le concours de l'action simultanée et permanente de ces deux centres d'attraction, est la cause qui présente des difficultés assez graves, lesquelles ne peuvent être surmontées que par une profonde application de la Théorie des transcendantes elliptiques, surtout, si l'on exige le calcul du temps correspondant à l'espace parcouru, soit dans le mouvement rectiligne, soit dans le mouvement curviligne de la masse lancée vers la Terre depuis la surface de la Lune. Quoique la question ainsi limitée soit fort éloignée de la réalité, il est indispensable d'en avoir une solution explicite, appliquée à des conditions

initiales, choisies de manière que les rayons vecteurs de la masse mobile puissent conserver une valeur finie. Alors on voit naître plusieurs résultats assez surprenants, impossibles à prévoir sans un calcul rigoureux, et on acquiert la conviction que ce problème de pure Dynamique est éminemment propre à entretenir dans les esprits mathématiques cette noble fermentation qui les pousse vers l'agrandissement de la véritable Philosophie naturelle.

La vitesse de projection dans le sens perpendiculaire au rayon vecteur de la Lune, due à son mouvement autour de la Terre, étant d'environ 1020 mètres par seconde, et, en outre, absolument inséparable de la vitesse de projection due à l'explosion volcanique, j'ai voulu comparer le mouvement curviligne qui naît de cette cause initiale avec le mouvement rectiligne qui s'établit, lorsqu'on en fait abstraction. Les résultats rapportés dans les §§ V et XII offrent une frappante différence à l'égard des temps requis pour atteindre la surface de la Terre: au point que 1744 heures suffisent avec une vitesse initiale de 2374 mètres par seconde dans le cas du mouvement *rectiligne*, tandis que dans le cas du mouvement curviligne, le mobile, ayant reçu une vitesse initiale de 2700 mètres par seconde suivant la ligne qui joint les centres de la Lune et de la Terre, décrit une courbe, telle qu'il ne peut jamais atteindre la Terre; ce qui paraît incroyable sans avoir suivi tous les calculs qui conduisent à ce résultat.

Il faut, ce me semble, n'avoir aucune notion un peu précise sur la mesure des faits inhérents au mouvement des aérolithes, considérés comme lancés de la surface de la Lune pour avancer, comme Arago, « *que les hommes situés sur la Lune pourraient se mettre en communi-* » *cation journalière avec la Terre à l'aide des projectiles* ». L'impossibilité d'une assertion aussi extraordinaire devient manifeste dès que l'on prend en considération le mouvement nécessairement curviligne du projectile. (Lisez la page 218 du Tome IV de l'Astronomie Populaire).

L'hypothèse de l'origine lunaire des pierres météoriques, considérée d'après les principes de la Dynamique, cesse d'être probable par des argumens beaucoup plus positifs que ceux fondés sur leur composition chimique.

L'existence de l'anneau formé par des corps circulants autour du Soleil est aujourd'hui assez bien établie. Néanmoins l'analyse des mouvemens hypothétiques, que j'ai considérés et calculés dans ce Mémoire pourra contribuer à mieux diriger la détermination des mouvemens

curvilignes que l'on observe à l'égard des *bolides*, ou globes de feu, qui, sans atteindre la surface de la Terre, apparaissent subitement et disparaissent tout-à-coup après avoir répandu une brillante lumière.

En considérant le mouvement des *bolides* avec les idées clairement exprimées par Arago aux pages 280-285 du Vol. que je viens de citer, on reconnaît qu'il s'agit d'un grand problème de Dynamique, qui exige une théorie fort compliquée et des données souvent difficiles à tirer de l'observation.

L'hypothèse, la moins improbable sur la cause physique de l'inflammation des bolides, me paraît être celle publiée par Poisson en 1837. Mais, sur ce point, il faut méditer les idées émises par Arago aux pages 316-322 du Volume déjà cité.

La complication des formules propres à obtenir des résultats numériques m'a fait connaître la nécessité d'une solution détaillée en traitant à part les différens cas qui sont enveloppés dans l'intégrale unique, qui, pour le mouvement rectiligne, les comprend tous sans laisser appercevoir d'autre possibilité que celle d'une réduction aux transcendantes elliptiques. Le passage des généralités aux cas spéciaux exige des considérations fort délicates. C'est de quoi la lecture de ce Mémoire donnera une idée complète. La manière nouvelle dont je calcule les transcendantes elliptiques de troisième espèce, ainsi que l'emploi des formules inverses de Jacobi, pour soumettre à l'analyse le mouvement curviligne, seront considérées, je pense, comme une addition importante faite à l'analyse de Legendre, publiée en 1817. La connexion entre le temps et l'espace parcouru est exprimée au moyen des transcendantes elliptiques; mais il faut savoir les transformer avec les variétés convenables pour que la solution ait toute la simplicité qui peut être obtenue pour chacun de ces problèmes.

Au § III j'ai donné une explication complète de la cause qui rend le temps *infini* dans le cas particulier considéré par Poisson à la page 257 du 1.er Volume de son *Traité de Mécanique*. Et par l'analyse exposée au § XI, on concevra que la proposition énoncée à la page 260 du même Vol., « *que le mobile ne viendra plus tomber sur la surface de* » *la Terre* », est appuyée sur des conséquences inhérentes au mouvement curviligne qui s'établit par la nature de l'impulsion initiale.

Il ne sera pas inutile de faire observer ici, que le problème devient beaucoup plus difficile, lorsqu'on veut considérer le mouvement de la Lune autour de la Terre. Même en la supposant mue uniformément dans

un cercle dans le plan de l'Ecliptique, on aurait, pour déterminer la courbe décrite par l'aérolithe, en plaçant l'origine des coordonnées au centre de la Terre, les équations;

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{Bx}{r^3}-\frac{A\{a.\cos.nt-x\}}{\Delta^3}+A.\frac{\cos.nt}{a^2}=0\ ;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{By}{r^3}-\frac{A\{a.\sin.nt-y\}}{\Delta^3}+A.\frac{\sin.nt}{a^2}=0\ ;$$

$$\Delta^2=(a.\cos.nt-x)^2+(a.\sin.nt-y)^2\ ;\qquad r^2=x^2+y^2\ ;$$

où a représente la distance constante de la Lune à la Terre; nt son moyen mouvement angulaire; x, y les coordonnées de l'aérolithe; A et B les masses de la Lune et de la Terre. En imaginant fixe la Lune et la Terre on a, au lieu de ces équations, les équations

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{Bx}{r^3}-A.\frac{(a-x)}{\Delta'^3}=0\ ;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{By}{r^3}+\frac{Ay}{\Delta'^3}=0\ ;$$

$$\Delta'^2=(a-x)^2+y^2\ ;\qquad r^2=x^2+y^2\ ;$$

lesquelles permettent la réduction aux quadratures, tandis que cette réduction est impossible pour les précédentes.

Ce rapprochement me paraît nécessaire pour infirmer l'opinion émise par Lagrange, en 1767, que le problème des deux centres fixes « *a un* » *rapport immédiat avec celui des trois corps* » (Voyez la page 188 du Tome IV des *Miscellanea Taurinensia*).

Les trajectoires décrites par les bolides dépendent des formules du mouvement elliptique, combinées avec celles de l'Astronomie sphérique, si on veut les considérer comme des corps soumis, pendant leur apparition, à la seule gravité de la Terre. Le rayon vecteur, la vitesse et sa direction, étant des quantités connues par l'observation pour un instant déterminé, les lois du mouvement seront celles que l'on tire de l'intégration des deux équations;

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{-Bx}{\rho^3}\ ;\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{-By}{\rho^3}\ .$$

On jugera, par la *discussion* des résultats particuliers ainsi déduits, si l'hypothèse est ou n'est pas compatible avec les phénomènes.

§ I.

Exposition des formules générales.

Soient F et G les deux centres fixes d'attraction en raison inverse du carré de la distance; centres, que je suppose être les centres mêmes de deux masses sphériques A et B, séparées par l'intervalle $FG=a$. Je désigne par $FA=\alpha$, $GB=r$ les rayons des deux sphères, et par A, B, respectivement, les intensités de leur attraction à l'unité de distance.

Supposons que $FM=h$ soit la distance initiale du centre de gravité du corps mobile au centre F, et que $FM'=x$ soit sa distance au même centre à un instant quelconque t du mouvement.

L'impulsion initiale ayant été dirigée de M vers G, il est clair, que

$$[1] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{B}{(a-x)^2}-\frac{A}{x^2}$$

est l'équation différentielle de ce mouvement. En multipliant par dx et intégrant, l'on a;

$$[2] \quad \ldots\ldots \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{A}{x}+\frac{B}{a-x}-\frac{A}{h}-\frac{B}{a-h}+\frac{1}{2}V^2\ ;$$

V désignant la vitesse initiale.

Supposons, pour fixer tout-à-fait les idées, $B>A$; en faisant

$$[3] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \frac{C}{a}=\frac{A}{h}+\frac{B}{a-h}-\frac{1}{2}V^2\ ,$$

l'équation entre la vitesse $\frac{dx}{dt}$, et l'espace x parcouru dans le temps t, sera

$$[4] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}v^2=\frac{A}{x}+\frac{B}{a-x}-\frac{C}{a}\ .$$

La valeur de $\frac{C}{a}$ pourra être, positive, négative ou nulle.

En intégrant l'équation [4] depuis $t=0$ et $x=h$, il est évident que l'on a;

$$[5]\ldots \quad \frac{t.\sqrt{2}}{\sqrt{a}} = \int \frac{dx.x(a-x)}{\sqrt{x(a-x)[Aa^2+(B-A-C)ax+Cx^2]}}.$$

De sorte que, la seule inspection de cette intégrale, suffit pour en conclure que, en général, l'équation entre t et x ne peut être exprimée que par le concours des *trois* transcendantes elliptiques.

Legendre a traité cette question dans le second Vol. de ses *Exercices de Calcul Intégral*, publié en 1817. Mais les cas particuliers que j'ai en vue, et le calcul numérique des formules exigent l'analyse spéciale exposée dans ce Mémoire.

Si la direction de l'impulsion initiale était oblique à la ligne qui joint les centres F et G, et faisait un angle aigu, μ, avec la ligne MG; sa composante perpendiculaire à la droite MG serait $V\sin.\mu$, tandis que $-V\cos.\mu$ serait sa composante dirigée vers le centre G. Alors le mouvement du point mobile serait nécessairement curviligne. Soient x, y les coordonnées de cette courbe plane; l'origine étant fixée au centre F, les deux équations différentielles de ce mouvement seraient alors

$$(\alpha)\ldots \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = B\dfrac{(a-x)}{\rho^3} - \dfrac{Ax}{\rho'^3}\ ; & \rho^2 = (a-x)^2+y^2\ ; \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{By}{\rho^3} - \dfrac{Ay}{\rho'^3}\ ; & \rho'^2 = x^2+y^2\ ; \end{cases}$$

où ρ désigne le rayon vecteur de la courbe tiré du centre G, et ρ' le rayon vecteur tiré du centre F. Ces deux équations du second ordre fournissent immédiatement les deux équations du premier ordre;

$$(\alpha')\ldots \begin{cases} \dfrac{1}{2}v^2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dx^2+dy^2}{dt^2}\right) = \dfrac{A}{\rho'} + \dfrac{B}{\rho} + \dfrac{C}{a}\ ; \\ \left(y\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dy}{dt}\right)\left\{y\dfrac{dx}{dt} + (a-x)\dfrac{dy}{dt}\right\} = C'a - Aa.\dfrac{x}{\rho'} - aB\dfrac{(a-x)}{\rho}\ ; \end{cases}$$

où C et C' sont les deux constantes arbitraires introduites par l'intégration.

Les valeurs initiales de x et y étant exprimées par $x = \dfrac{am}{1+m}$, $y=0$; $m<1$; l'on a

$$\rho = \frac{a}{1+m}, \qquad \rho' = \frac{am}{1+m},$$

pour les valeurs initiales de ρ et ρ'. Cela posé, les constantes C et C' seront déterminées par les équations

$$(\alpha'') \ldots\ldots\ldots \begin{cases} C = \frac{1}{2} a V^2 - \frac{(1+m)}{m}(A+Bm) \; ; \\ C' = A + B - \frac{am}{(1+m)^2} \cdot V^2 \sin.^2 \mu \; . \end{cases}$$

Maintenant, si à la place des variables primitives x et y, on introduit deux nouvelles variables p et q, telles que

$$x = \frac{a(q^2-p^2)}{(1-p^2)(1+q^2)} \; ; \qquad y = \frac{2apq}{(1-p^2)(1+q^2)} \; ;$$

l'on aura;

$$(\beta) \ldots\ldots \begin{cases} \rho = \frac{a}{1-p^2} - \frac{aq^2}{1+q^2} \; ; \qquad \rho + \rho' = \frac{a(1+p^2)}{1-p^2} \; ; \\ \rho' = \frac{a}{1-p^2} - \frac{a}{1+q^2} \; ; \qquad \rho - \rho' = \frac{a(1-q^2)}{1+q^2} \; ; \end{cases}$$

et entre p et q l'équation différentielle, à variables séparées,

$$(\beta') \ldots\ldots \begin{cases} \frac{dp}{\sqrt{P}} = \frac{dq}{\sqrt{Q}} \; ; \\ P = \frac{1}{2}(A+B)(1-p^4) + Cp^2 - \frac{1}{2} C'(1-p^2)^2 \; ; \\ Q = \frac{1}{2}(A-B)(1-q^4) + Cq^2 + \frac{1}{2} C'(1+q^2)^2 \; . \end{cases}$$

Le temps t sera déterminé par l'équation

$$(\beta'') \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \frac{t}{a.\sqrt{2a}} =$$

$$\int \frac{dp}{(1-p^2)^2.\sqrt{P}} - \int \frac{dp}{(1-p^2).\sqrt{P}} - \int \frac{dq}{(1+q^2)^2.\sqrt{Q}} + \int \frac{dq}{(1+q^2).\sqrt{Q}} \; ;$$

les valeurs initiales de p^2 et q^2, correspondantes à $t=0$, étant $p^2=0$, $q^2=m$.

Le polynome P (nous supposons $B > A$) est réductible à la forme

$$(\beta^{\text{III}}) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} P = M(\beta - p^2)(\beta' + p^2) \ ; \\ M = \frac{1}{2}(B + A) + \frac{1}{2}C' \ ; \\ M.\beta\beta' = \frac{1}{2}(B + A) - \frac{1}{2}C' \ ; \\ M(\beta - \beta') = C + C' \ ; \end{cases}$$

les deux quantités réelles et positives β et β' étant déterminées par les équations

$$(\gamma) \ldots \begin{cases} 2M\beta = \quad C + C' + \sqrt{C(C + 2C') + (B + A)^2} \ ; \\ 2M\beta' = -C - C' + \sqrt{C(C + 2C') + (B + A)^2} \ . \end{cases}$$

En introduisant les racines β et β', à l'aide des équations (β^{III}), dans les coefficiens du polynome Q, l'on aura l'équation

$$(\gamma^{\text{I}}) \ldots Q(1 + \beta\beta') = (B - A.\beta\beta')q^4 + (\beta - \beta')(A + B)q^2 + A - B.\beta\beta' \ .$$

Maintenant, si l'on fait

$$c^2 = \frac{\beta}{\beta + \beta'} \ ; \qquad p = \frac{\sqrt{\beta'}.c \sin.\psi}{\sqrt{1 - c^2.\sin.^2\psi}} \ ,$$

l'on aura:

$$(\gamma^{\text{II}}) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{dp}{\sqrt{P}} = \dfrac{c}{\sqrt{M\beta}} \cdot \dfrac{d\psi}{\sqrt{1 - c^2.\sin.^2\psi}} \ ; \\ \displaystyle\int \frac{dp}{\sqrt{P}} = \frac{c}{\sqrt{M\beta}} \cdot \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - c^2.\sin.^2\psi}} \ . \end{cases}$$

Quels que soient les facteurs du polynome Q, il y a des formules propres à donner la transformation

$$\frac{dq}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{\sqrt{M'}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin.^2\varphi}} \ ;$$

M' et. $k^2 < 1$ étant des quantités connues. Il suit de là que, en désignant par φ' la valeur initiale de φ, l'on aura l'équation

$$\frac{c}{\sqrt{M\beta}}\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2.\sin.^2\psi}}=\frac{1}{\sqrt{M'}}\int_{\varphi'}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}},$$

qui donne

$$(\gamma^{\text{III}})\ \ldots\ldots\ldots\qquad \frac{c.\sqrt{M'}}{\sqrt{M\beta}}\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2.\sin.^2\psi}}=$$

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}}-\int_0^{\varphi'}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}}=\int_0^{\varpi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}};$$

en posant

$$\varpi=\omega-\omega',$$

et déterminant les angles ω, ω' par les équations

$$(\gamma^{\text{IV}})\ \ldots\ldots\ldots\qquad \begin{cases}\text{tang.}\,\varphi.\sqrt{1-k^2\sin.^2\varphi'}=\text{tang.}\,(\varpi+\omega');\\ \text{tang.}\,\varphi'.\sqrt{1-k^2\sin.^2\varphi}=\text{tang.}\,\omega'.\end{cases}$$

En donnant l'amplitude ψ, et par conséquent la valeur de p, le premier membre de l'équation (γ^{III}) sera une quantité connue; en la désignant par

$$(\gamma^{\text{V}})\ \ldots\ldots\ldots\qquad N=\frac{c.\sqrt{M'}}{\sqrt{M\beta}}\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2\sin.^2\psi}},$$

on tirera de l'équation

$$N=\int_0^{\varpi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin.^2\varphi}}$$

la valeur de l'amplitude par les formules inverses de Jacobi. En faisant $k'^2=1-k^2$;

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin.^2\varphi}};\qquad K'=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin.^2\varphi}};$$

$$u=e^{-\frac{\pi K'}{K}};$$

ces formules donnent

$$(\gamma^{\text{VI}})\ldots\left\{\begin{aligned}
&\frac{kK}{2\pi}\cdot\sin.\varpi=\frac{\sqrt{u}}{1-u}\cdot\sin.\left(\frac{\pi N}{2K}\right)+\frac{\sqrt{u^3}}{1-u^3}\cdot\sin.\left(\frac{3\pi N}{2K}\right)\\
&\qquad\qquad+\frac{\sqrt{u^5}}{1-u^5}\cdot\sin.\left(\frac{5\pi N}{2K}\right)+\text{etc.}\ ;\\
&\frac{kK}{2\pi}\cdot\cos.\varpi=\frac{\sqrt{u}}{1+u}\cdot\cos.\left(\frac{\pi N}{2K}\right)+\frac{\sqrt{u^3}}{1+u^3}\cdot\cos.\left(\frac{3\pi N}{2K}\right)\\
&\qquad\qquad+\frac{\sqrt{u^5}}{1+u^5}\cdot\cos.\left(\frac{5\pi N}{2K}\right)+\text{etc.}\ ;\\
&\sqrt{1-k^2\sin.^2\varpi}=\frac{\pi}{2K}\left\{\begin{aligned}&1+\frac{4u}{1+u^2}\cdot\cos.\frac{\pi N}{K}+\frac{4u^2}{1+u^4}\cdot\cos.\frac{2\pi N}{K}\\&+\frac{4u^3}{1+u^6}\cdot\cos.\frac{3\pi N}{K}+\text{etc.}\end{aligned}\right\}\ ;\\
&\frac{\varpi}{2}=\frac{\pi N}{4K}+\frac{u}{1+u^2}\cdot\sin.\frac{\pi N}{K}+\frac{u^2}{2(1+u^4)}\cdot\sin.\frac{2\pi N}{K}\\
&\qquad+\frac{u^3}{3(1+u^6)}\cdot\sin.\frac{3\pi N}{K}+\frac{u^4}{4(1+u^8)}\cdot\sin.\frac{4\pi N}{K}+\text{etc.}\ (*)
\end{aligned}\right.$$

En connaissant ϖ on calculera la valeur de φ, à l'aide des deux équations (γ^{IV}), ou bien à l'aide de l'équation unique

$$\cos.\varpi=\cos.\varphi'.\cos.\varphi+\sin.\varphi'.\sin.\varphi.\sqrt{1-k^2\sin.^2\varpi}\ .$$

qu'on peut facilement réduire à une équation du second degré, en posant $X=\text{tang.}\,\frac{1}{2}\varphi$; ce qui donne

$$\sin.\varphi=\frac{2X}{1+X^2}\ ;\qquad\qquad \cos.\varphi=\frac{1-X^2}{1+X^2}\ .$$

$$(\gamma^{\text{VII}})\ldots\ \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\varphi=\frac{\sin.\varphi'.\sqrt{1-k^2\sin.^2\varpi}+\sin.\varpi.\sqrt{1-k^2\sin.^2\varphi'}}{\cos.\varphi'+\cos.\varpi}\ .$$

La somme $\rho+\rho'$ des deux rayons vecteurs, dans ce cas, demeure toujours *finie*, puisque l'on a

---

(*) Voyez page 101, équations (19) et (21); page 102, équation (24); page 103, équation (25), de l'ouvrage *Fundamenta nova Theoriae Functionum Ellipticarum.*

$$\rho+\rho'=\frac{a(1+p^2)}{1-p^2}\ ; \qquad \rho+\rho'<\frac{a(1+\beta)}{1-\beta}\ .$$

Et leur différence, $\rho-\rho'$, qui est nulle lorsque $q^2=1$, devient négative pour des valeurs de q^2 plus grandes que l'unité, puisque l'on a l'équation

$$\rho-\rho'=-a\left(1-\frac{2}{1+q^2}\right)\ .$$

Le polynome Q peut présenter les quatre formes suivantes

$$(\gamma^{\text{VIII}})\ \ldots\ldots \begin{cases} Q=(M-A)(q^2-\lambda)(q^2-\lambda')\ ; \\ Q=(M-A)(q^2-f)(q^2+f')\ ; \\ Q=(M-B)(1+q^2.\varepsilon)(1+q^2.\varepsilon')\ ; \\ Q=(M-B)(1+2\gamma.\cos.\theta.q^2+\gamma^2.q^4)\ ; \end{cases}$$

où λ, λ'; f, f'; ε, ε', γ seront des nombres *positifs*.

Les expressions correspondantes de q^2 et k^2 seront respectivement;

$$1.^{\circ}\ldots\ldots\ q^2=\frac{\lambda}{\sin.^2\varphi}\ ; \quad \lambda>\lambda'\ ; \quad k^2=\frac{\lambda'}{\lambda}\ ;$$

$$2.^{\circ}\ldots\ldots\ q^2=\frac{f}{\cos.^2\varphi}\ ; \qquad k^2=\frac{f'}{f+f'}\ ;$$

$$3.^{\circ}\ldots\ldots\ q^2=\frac{\text{tang.}^2\varphi}{\varepsilon}\ ; \quad \varepsilon>\varepsilon'\ ; \quad k^2=\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{\varepsilon}\ ;$$

$$4.^{\circ}\ldots\ldots\ q^2=\frac{\text{tang.}^2\,\frac{1}{2}\varphi}{\gamma}\ ; \qquad k^2=\sin.^2\,\tfrac{1}{2}\theta\ .$$

La valeur de q^2 ne peut croître depuis $q^2=m$ jusqu'à $q^2=\infty$ que dans le 3.ème et 4.ème cas des équations (γ^{VIII}); alors à $q^2=\infty$ répond $\rho-\rho'=-a$. Pour caractériser plus explicitement l'un et l'autre de ces deux cas, nous ferons

$$L=(A+B)(\beta-\beta')\ ; \quad L'=B-A\beta\beta'\ ; \quad L''=A-B\beta\beta'\ ;$$

ce qui donne

$$Q=\frac{L''}{1+\beta\beta'}\left\{1+\frac{L}{L''}q^2+\frac{L'}{L''}q^4\right\}=\frac{L'}{1+\beta\beta'}\left\{q^4+\frac{L}{L'}q^2+\frac{L''}{L'}\right\};$$

$$\frac{L''}{1+\beta\beta'}=\frac{2MA-B(B+A-C')}{2M+B+A-C'}=M-B;$$

$$\frac{L'}{1+\beta\beta'}=\frac{2MB-A(B+A-C')}{2M+B+A-C'}=M-A;$$

et démontre qu'en supposant $L'>0$, $L''>0$, on tombera sur le 3.ème ou le 4.ème cas, suivant que l'on aura

$$\frac{L^2}{4L'L''}>1; \qquad \text{ou} \qquad \frac{L^2}{4L'L''}<1;$$

ce qui donnera

$$\varepsilon=\frac{L+\sqrt{L^2-4L'L''}}{2L''}; \qquad \varepsilon'=\frac{L-\sqrt{L^2-4L'L''}}{2L''}$$

pour le 3.ème cas; et

$$\gamma=\sqrt{\frac{L'}{L''}}; \qquad \cos.\theta=\frac{L}{2.\sqrt{L'L''}}$$

pour le 4.ème

Pour le premier cas, les conditions

$$L<0; \qquad L'>0; \qquad L''>0,$$

étant satisfaites, l'on aura

$$\lambda=\frac{-L+\sqrt{L^2-4L'L''}}{2L''}; \qquad \lambda'=\frac{-L-\sqrt{L^2-4L'L''}}{2L''}.$$

Et pour le second, si les trois conditions

$$L<0; \qquad L'>0; \qquad L''<0$$

sont remplies, on prendra;

$$f=\frac{-L+\sqrt{L^2-4L'L''}}{2L'}; \qquad f'=\frac{-L-\sqrt{L^2-4L'L''}}{2L'}.$$

Aux points d'intersection de la courbe avec l'axe FG, l'on a

$$p=0, \quad \rho+\rho'=a, \quad \rho=\frac{a}{1+q^2}, \quad \rho'=\frac{aq^2}{1+q^2};$$

et par conséquent $\psi=\pi$, 2π, 3π, etc., ce qui donne pour ces points, d'après la formule (γ^{v});

$$N=2N'.F^{1}(c)\ ; \qquad N=4N'.F^{1}(c)\ ;$$

et, en général (i étant un nombre entier),

$$N=2i.N'F^{1}(c)\ ;$$

en faisant

$$N'=\frac{c.\sqrt{M'}}{\sqrt{M\beta}}\ ; \qquad F^{1}(c)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-c^{2}.\sin.^{2}\psi}}\ .$$

En éliminant du second membre de l'équation (β^{II}) les facteurs $\frac{1}{(1-p^{2})^{2}}$, $\frac{1}{(1+q^{2})^{2}}$, soumis au signe intégral, à l'aide de la formule connue (Voyez p. 12 du 1.er Vol. du Traité des Fonctions Elliptiques de Legendre), et ayant égard aux équations (β^{III}), ainsi qu'à l'expression de Q par les coefficients L, L', L'', on réduira l'équation (β^{III}) aux trois suivantes, après avoir fait $t=t'+t''+t'''$, savoir

$$(\beta^{\text{IV}})\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{t'}{a.\sqrt{2a}}=\frac{p.\sqrt{P}}{2C(1-p^{2})}-\frac{1}{2(A+B-C-C')}\left\{\frac{q.\sqrt{Q}}{1+q^{2}}-\frac{\sqrt{m}}{1+m}.\sqrt{Q'}\right\}\ ;\\
&\frac{t''}{a.\sqrt{2a}}=\frac{-(B+A)}{2C}\int_{0}^{p}\frac{dp}{(1-p^{2}).\sqrt{P}}+\frac{(A+B+C)}{4C}\int_{0}^{p}\frac{dp(1-p^{2})}{\sqrt{P}}\ ;\\
&\frac{t'''}{a.\sqrt{2a}}=\frac{(3A-2C')}{2(A+B-C-C')}\int_{\sqrt{m}}^{q}\frac{dq}{(1+q^{2}).\sqrt{Q}}\\
&\qquad+\frac{(C'+B-A)}{4(A+B-C-C')}\int_{\sqrt{m}}^{q}\frac{dq(1+q^{2})}{\sqrt{Q}}\ ;
\end{aligned}\right.$$

où l'on a fait

$$Q'=\frac{L''}{1+\beta\beta'}\left(1+\frac{L}{L''}m+\frac{L'}{L''}m^{2}\right)\ .$$

Maintenant, si l'on fait $\Delta=\sqrt{1-c^{2}.\sin.^{2}\psi}$; $n=1+\beta'$, on aura, en vertu des équations

$$\frac{dp}{\sqrt{P}}=\frac{c}{\sqrt{M\beta}}\cdot\frac{d\psi}{\Delta}\ ; \qquad p=\sqrt{\beta'}\cdot\frac{c\sin.\psi}{\Delta}\ ;$$

$$\frac{1}{1-p^2}=\frac{1}{n}\left\{1+\frac{\beta'}{1-nc^2\sin^2\psi}\right\}\ ;$$

$$1-p^2=\frac{1-nc^2\sin.^2\psi}{\Delta^2}=\frac{1+n(\Delta^2-1)}{\Delta^2}=n-\frac{\beta'}{\Delta^2}\ ;$$

$$\int\frac{dp}{(1-p^2).\sqrt{P}}=\frac{c}{n.\sqrt{M\beta}}\int\frac{d\psi}{\Delta}+\frac{\beta'c}{n.\sqrt{M\beta}}\int\frac{d\psi}{(1-nc^2\sin.^2\psi)\Delta}\ ;$$

$$\int\frac{dp(1-p^2)}{\sqrt{P}}=\frac{cn}{\sqrt{M\beta}}\int\frac{d\psi}{\Delta}-\frac{\beta'c}{\sqrt{M\beta}}\int\frac{d\psi}{\Delta^3}$$

$$=\frac{\beta'c^3}{(1-c^2)\sqrt{M\beta}}\cdot\frac{\sin.\psi\cos.\psi}{\Delta}-\frac{\beta'c}{(1-c^2)\sqrt{M\beta}}\int d\psi\,\Delta+\frac{cn}{\sqrt{M\beta}}\int\frac{d\psi}{\Delta}\ ;$$

et par conséquent

$$(\beta^{\text{v}})\ \ldots\ldots\quad \frac{t''.2nC.\sqrt{M\beta}}{a.\sqrt{2a}}=\frac{n\beta'c^3(A+B+C)}{2(1-c^2)}\cdot\frac{\sin.\psi\cos.\psi}{\Delta}$$

$$-c\left\{A+B-\frac{n^2}{2}(A+B+C)\right\}\int_0^\psi\frac{d\psi}{\Delta}$$

$$-\frac{cn\beta'}{2(1-c^2)}\cdot(A+B+C)\int_0^\psi d\psi\,\Delta$$

$$-c\beta'(A+B)\int_0^\psi\frac{d\psi}{(1-nc^2.\sin.^2\psi)\Delta}\ .$$

En posant $\Delta'=\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}$, l'équation

$$\frac{dq}{\sqrt{Q}}=\frac{1}{\sqrt{M'}}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta'}\ ,$$

donnera

$$(\beta^{\text{vi}})\ \ldots\ldots\ldots\ldots\quad \frac{t'''.\sqrt{M'}}{a.\sqrt{2a}}=$$

$$\frac{(3A-2C')}{2(A+B-C-C')}\int_{\varphi'}^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+q^2)\Delta'}+\frac{(C'+B-A)}{4(A+B-C-C')}\int_{\varphi'}^{\varphi}\frac{d\varphi(1+q^2)}{\Delta'}\ ;$$

où il faudra substituer, pour q^2 et la quantité constante M', les expressions conformes à chacun des quatre cas qui conviennent aux valeurs de Q, définies par les équations (γ^{VIII}).

Legendre a donné l'analyse de ces deux cas aux pages 482, 494 du 1.er Volume de son Traité des Fonctions Elliptiques. Mais elle me paraît considérablement simplifiée par l'introduction des nouvelles formules (γ^{VI}) et (γ^{VII}).

Au reste mon intention n'est pas de développer ici toutes les particularités de la théorie de ce mouvement curviligne; j'ai voulu seulement rapprocher les formules générales du mouvement, soit rectiligne, soit curviligne, afin de faire mieux sentir que, abstraction faite des cas particuliers qui doivent être traités à part, la distance qui sépare ces deux problèmes est fort diminuée par les formules que je viens d'exposer.

Je reprends la considération de l'équation [5] pour obtenir une solution numérique dans le cas hypothétique d'un corps mobile entre la Lune et la Terre, en supposant leurs centres fixes dans l'espace.

§ II.

Analyse du cas, où $A=0$.

Lorsqu'on suppose $A=0$, le mouvement dépend de l'attraction du seul centre B, et, *a priori*, on peut faire $h=0$. Alors l'on a;

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{B}{(a-x)^2}\ ;\quad \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{B}{a-x}-\frac{C}{a}\ ;\quad \frac{C}{a}=\frac{B}{a}-\frac{1}{2}V^2\ ;$$

et en posant

$$X=(a-x)\left[(B-C)a+Cx\right]\ ;$$

on obtient l'équation

$$\frac{t.\sqrt{2}}{\sqrt{a}}=\int\frac{dx(a-x)}{\sqrt{X}}\ .$$

Il suit de là, que

$$\frac{t.\sqrt{2}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{X}}{C}-\frac{a.\sqrt{B-C}}{C}+\frac{aB}{2C}\cdot\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{X}}\ ,$$

où le radical $\sqrt{X}$ est censé toujours pris avec le signe positif.

Mais en posant

$$\sin.\psi = \frac{2Cx - a(2C-B)}{aB} \; ; \qquad \sin.\psi' = \frac{B-2C}{B} \; ,$$

nous avons

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{C}}(\psi - \psi') \; ;$$

et par conséquent

$$\frac{t.\sqrt{2}}{a.\sqrt{a}} \cdot \frac{2C.\sqrt{C}}{B} = \psi - \psi' - \frac{2.\sqrt{B-C}}{B} \cdot \sqrt{C} + \frac{2.\sqrt{C}}{aB} \cdot \sqrt{X} \; ;$$

d'où l'on tire

$$[6] \ldots \; t = \frac{a.\sqrt{a}}{\sqrt{8B}} \left(\frac{B}{C}\right)^{\frac{3}{2}} \left\{ \psi - \psi' - 2.\sqrt{\frac{C}{B}} \cdot \sqrt{1 - \frac{C}{B}} + \frac{2}{a} \cdot \sqrt{\frac{C}{B}} \cdot \sqrt{\frac{X}{B}} \right\} .$$

Remarquons maintenant, que l'expression précédente de $\sin.\psi$ donne :

$$\cos.\psi = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{\frac{C}{B}} \cdot \sqrt{\frac{X}{B}} \; ; \qquad \cos.\psi' = 2 \cdot \sqrt{\frac{C}{B}} \cdot \sqrt{1 - \frac{C}{B}} \; ;$$

$$\frac{C}{B} = \sin.^2\left(\frac{\psi'}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \; ; \qquad \frac{C}{B}\left(1 - \frac{x}{a}\right) = \sin.^2\left(\frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) .$$

Donc, en faisant

$$\sin.\theta = \sqrt{\frac{x}{a}} \; ; \qquad \frac{V.\sqrt{a}}{\sqrt{2B}} = \sin.\omega \; ; \qquad \cos.\theta.\cos.\omega = \cos.\varphi \; ;$$

nous aurons

$$\sin.\left(\frac{\psi'}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{C}{B}} = \sqrt{1 - \frac{aV^2}{2B}} = \cos.\omega = \sin.\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) \; ;$$

$$\sin.\left(\frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos.\theta.\cos.\omega = \cos.\varphi = \sin.\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \; ;$$

d'où l'on tire

$$\psi' = \frac{3}{2}\pi + 2\omega \; ; \qquad \psi = \frac{3}{2}\pi + 2\varphi \; ;$$

$$\cos.\psi' = \sin.2\omega \; ; \qquad \cos.\psi = \sin.2\varphi \; .$$

En posant

$$M = \frac{a.\sqrt{a}}{\sqrt{8B}} \cdot \frac{1}{\cos.^3\omega} = \frac{M'}{\cos.^3\omega} ,$$

l'équation [6] devient;

$$[7] \ldots\ldots \qquad t = M \left\{ 2\varphi - 2\omega + \sin. 2\varphi - \sin. 2\omega \right\} .$$

Et d'après l'équation [4], la vitesse $v = \frac{dx}{dt}$ sera déterminée par l'équation

$$[8] \ldots\ldots \qquad v = \sqrt{\frac{2B}{a}} \cdot \sqrt{\text{tang.}^2\theta + \sin.^2\omega} = \sqrt{\frac{2B}{a}} \cdot \frac{\text{tang.}\,\theta}{\cos.\,\omega'} :$$

en faisant

$$[9] \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{tang.}\,\omega' = \frac{\sin.\,\omega}{\text{tang.}\,\theta} .$$

Lorsque la vitesse initiale V est *nulle*, l'on a $\omega = 0$, $\omega' = 0$, $\varphi = \theta$; et par conséquent (en écrivant t' au lieu de t):

$$[10] \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \begin{cases} t' = M'(2\theta + \sin. 2\theta) , \\ v = \sqrt{\frac{2B}{a}} \cdot \text{tang.}\,\theta . \end{cases}$$

Pour rendre ces formules immédiatement applicables à la chute des corps solides vers la surface de la Terre, suivant la direction de la verticale, nous ferons $B = g.r^2$; g étant la force accélératrice de la gravité à cette même surface, en prenant la seconde du temps moyen pour unité de temps, et le mètre pour unité de longueur. Alors l'on a;

$$r = \frac{2}{\pi}(10)^7. \text{(mètres)} ; \qquad g = 9^{\text{m}}, 80896 ;$$

$$\text{Log.}\sqrt{2gr} = 4, 0482673 ; \qquad \text{Log.}\sqrt{\frac{r}{8g}} = 2, 4545826 .$$

En mesurant les distances a et x par le rayon r de la Terre, on fera;

$$a = mr ; \quad x = \mu r ; \quad M' = m.\sqrt{m}.\sqrt{\frac{r}{8g}} ; \quad \sqrt{\frac{2B}{a}} = \frac{\sqrt{2gr}}{\sqrt{m}} :$$

ce qui donne

$$\sin.\theta = \sqrt{\frac{\mu}{m}} ; \qquad \sin.\omega = \frac{V.\sqrt{m}}{\sqrt{2gr}} .$$

Il faudra supposer, que la distance $a-x$ ne peut jamais devenir plus petite que le rayon r de la Terre: car, dans l'*intérieur* de sa masse sphérique, la force accélératrice de la gravité cesse d'être exprimée par

$$\frac{gr^2}{(a-x)^2}.$$

Cela posé, pour une comparaison qui sera faite plus loin, j'applique ces formules, en y faisant

$$m=54\ , \qquad \mu=53\ ; \qquad V=961^{\mathrm{m}},8\ .$$

D'après cela on obtient

$$\omega=39^\circ.13'.47''\ ; \qquad \theta=82^\circ.10'.45''\ ; \qquad \varphi=65^\circ.11'.16''\ ;$$

$$2\varphi+\sin.2\varphi=3,037298\ ; \qquad 2\omega+\sin.2\omega=2,3491586\ ;$$

$$t=\frac{M'}{\cos.^3\omega}(3,037298-2,3491586)\ ; \qquad t=\frac{M'}{\cos.^3\omega}(0,6881394)\ ;$$

$$\mathrm{Log.}\ \frac{M'}{3600.\cos.^3\omega}=1,8295591\ ; \qquad t=47^{\mathrm{h}},477\ .$$

Pour un second exemple je fais

$$m=54\ ; \qquad \mu=53\ ; \qquad V=83^{\mathrm{m}}\ .$$

D'après cela on obtient;

$$\theta=82^\circ.10'.45''\ : \qquad \omega=3^\circ.7'.43''\ ; \qquad \varphi=82^\circ.11'.13''\ :$$

$2\omega=0,109209$ (en parties du rayon);

$$\sin.2\omega+2\omega=0,218182\ ; \qquad \sin.2\varphi=0,269359\ ;$$

$$2\varphi=2,8688657\ ; \qquad 2\varphi+\sin.2\varphi=3,1382247\ ;$$

$$t=M.(2,9200427)\ .$$

$$\mathrm{Log.}\,M'=5,0531733\ ; \qquad \mathrm{Log.}\,M=5,0550164\ .$$

Pour avoir le temps t exprimé en *heures*, il faudra diviser M' et M par 3600, ce qui donne

$$\mathrm{Log.}\ \frac{M'}{3600}=1,4968708\ ; \qquad \mathrm{Log.}\ \frac{M}{3600}=1,4987139\ .$$

Comme nous avons

$$2\theta = 2,868729 \; ; \qquad \sin. 2\theta = 0,269620 \; ;$$

les formules [10] donnent

$$t' = M'(3,139349) \; .$$

De sorte que l'on a;

$$t = 92^h,066 \; ; \qquad t' = 98^h,562 \; .$$

En faisant $\mu = 1$, on aura le temps t requis pour parcourir le premier intervalle égal au rayon r de la Terre, et on trouve $t = 11^h,521$; ce qui est digne de remarque. En effet, la valeur de θ correspondante à $\mu = 1$ est $\theta = 7°.49'.16''$; partant l'on a: $\varphi = 8°.25'.10''$;

$$\sin. 2\varphi = 0,289682 \; ; \qquad 2\varphi = 0,2938938 \; ;$$

$$2\varphi + \sin. 2\varphi - 2\omega - \sin. 2\omega = 0,3653938 \; ;$$

$$t = \frac{M}{3600}(0,3653938) = 11^h,521 \; ;$$

$$2\theta = 0,2730082 \; ; \qquad \sin. 2\theta = 0,2696290 \; :$$

$$t' = \frac{M'}{3600}(0,5426372) = 17^h,037 \; .$$

Avec une vitesse uniforme de 83 mètres par seconde, le rayon r de la Terre, en partant d'un point éloigné de $54.r$ de son centre, serait parcouru dans un nombre d'heures exprimé par

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{(10)^7}{3600.83} = 21^h,306 \; .$$

Pour mieux fixer les idées, voici les résultats obtenus, en donnant au coefficient μ les différentes valeurs suivantes:

Pour $\mu = 2$, l'on a $\theta = 11°.5'.45''$; $\varphi = 11°.31'.20''$;

$$\sin. 2\varphi = 0,391445 \; ; \qquad \sin. 2\theta = 0,377705 \; ;$$

$$t = M(0,575464) = 18^h,144 \; ;$$

$$t' = M'(0,765022) = 24^h,018 \; .$$

Pour $\mu = 3$, l'on a $\theta = 13°.37'.59''$; $\varphi = 13°.58'.50''$;

$$\sin. 2\varphi = 0,468970 \; ; \qquad \sin. 2\theta = 0,458124 \; ;$$

$$t = M\,(0,7388014) = 23^{h},294\ ;$$

$$t' = M'(0,9340074) = 29^{h},324\ .$$

Pour $\mu = 4$, l'on a $\theta = 15^{\circ}.\,47'.\,36''$; $\varphi = 16^{\circ}.\,5'.\,30''$;

$$\sin.2\varphi = 0,53263\ ; \qquad \sin.2\theta = 0,523790\ ;$$

$$t = M\,(0,876153) = 27^{h},624\ ;$$

$$t' = M'(1,075081) = 33^{h},753\ .$$

Pour $\mu = 10$, l'on a $\theta = 25^{\circ}.\,29'.\,20''$; $\varphi = 25^{\circ}.\,40'.\,2''$;

$$\sin.2\varphi = 0,780806\ ; \qquad \sin.2\theta = 0,776902\ ;$$

$$t = M\,(1,458579) = 45^{h},988\ ;$$

$$t' = M'(1,666632) = 52^{h},325\ .$$

Pour $\mu = 20$, l'on a $\theta = 37^{\circ}.\,29'.\,13''$; $\varphi = 37^{\circ}.\,35'.\,54''$;

$$\sin.2\varphi = 0,966808\ ; \qquad \sin.2\theta = 0,965808\ ;$$

$$t = M\,(2,061055) = 64^{h},984\ ;$$

$$t' = M'(2,274349) = 71^{h},405\ .$$

Pour $\mu = 26,6$, l'on a $\theta = 44^{\circ}.\,34'.\,32''$; $\varphi = 45^{\circ}.\,20'.\,17''$;

$$\sin.2\varphi = 0,999930\ ; \qquad \sin.2\theta = 0,999890\ ;$$

$$t = M\,(2,3643446) = 74^{h},536\ ;$$

$$t' = M'(2,5558704) = 80^{h},243\ .$$

Pour $\mu = 30$, l'on a $\theta = 48^{\circ}.\,11'.\,26''$; $\varphi = 48^{\circ}.\,16'.\,0''$;

$$\sin.2\varphi = 0,993506\ ; \qquad \sin.2\theta = 0,993802\ ;$$

$$t = M\,(2,4601484) = 77^{h},567\ ;$$

$$t' = M'(2,6759696) = 84^{h},014\ .$$

Pour $\mu = 40$, l'on a $\theta = 59^{\circ}.\,23'.\,28''$; $\varphi = 59^{\circ}.\,26'.\,30''$;

$$\sin.2\varphi = 0,875605\ ; \qquad \sin.2\theta = 0,876456\ ;$$

$$t = M\,(2,7323286) = 86^{h},148\ ;$$

$$t' = M'(2,9495968) = 92^{h},605\ .$$

La formule [7] ne comprend pas le cas particulier où l'on aurait $\omega = 90°$, et par conséquent $V = \frac{\sqrt{2B}}{\sqrt{a}}$; et $\frac{C}{a} = 0$. Mais alors l'on a directement

$$[11] \ldots\ldots \quad t.\sqrt{2B} = \int dx(a-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\left\{a^{\frac{3}{2}} - (a-x)^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

Si la vitesse initiale V surpassait cette limite des valeurs positives de $\frac{C}{a}$, et les rendait négatives, il faudrait exécuter l'intégration par les Logarithmes, ce qui donnerait

$$[12] \ldots \frac{t.\sqrt{2}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{X}}{C} - \frac{a.\sqrt{B-C}}{C}$$
$$+ \frac{aB}{2C.\sqrt{-C}} \text{Log.} \left\{\frac{(2C-B)a - 2Cx + 2.\sqrt{-C}.\sqrt{X}}{(2C-B)a + 2a.\sqrt{-C}.\sqrt{B-C}}\right\}.$$

L'équation [11] est semblable à celle que l'on rencontre dans la théorie du mouvement parabolique des Comètes. Mais dans le mouvement rectiligne, dont il est ici question, l'on aurait

$$t = \frac{2}{3}.\frac{a}{V}\left\{1 - \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right\},$$

en supposant que $\frac{aV^2}{2} = B = gr^2$ soit l'intensité de la force attractive à l'unité de distance du centre de la masse sphérique qui la produit. On peut remarquer que ces formules analytiques sont préférables aux constructions données par Newton par les Propositions XXXVI et XXXVII du premier Livre des *Principia*.

§ III.

Analyse des cas, où C est exprimé par $(\sqrt{B} \pm \sqrt{A})^2$.

Reprenons la considération de la formule [5]. En y faisant

$$2.\sqrt{AC} = B - A - C ;$$

c'est-à-dire

[13] ..... $$C=(\sqrt{B}+\sqrt{A})^2,$$

elle se réduit à

[14] ..... $$\frac{t.\sqrt{2}}{\sqrt{a}}=\int\frac{dx.\sqrt{x(a-x)}}{x.\sqrt{C}-a.\sqrt{A}}.$$

Et en y faisant

$$C=C'=(\sqrt{B}-\sqrt{A})^2,$$

la même équation [5] se réduit à

[15] ..... $$\frac{t.\sqrt{2}}{\sqrt{a}}=\int\frac{dx.\sqrt{x(a-x)}}{x.\sqrt{C'}+a.\sqrt{A}}.$$

Par la division on obtient

$$\frac{x(a-x)}{x.\sqrt{C}-a.\sqrt{A}}=-\frac{x}{\sqrt{C}}+\frac{a.\sqrt{B}}{C}\left\{1+\frac{a.\sqrt{A}}{x.\sqrt{C}-a.\sqrt{A}}\right\};$$

$$\frac{x(a-x)}{x.\sqrt{C'}+a.\sqrt{A}}=-\frac{x}{\sqrt{C'}}+\frac{a.\sqrt{B}}{C'}\left\{1-\frac{a.\sqrt{A}}{x.\sqrt{C'}+a.\sqrt{A}}\right\}.$$

Cela posé, si l'on observe que,

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x(a-x)}}=-\sqrt{x(a-x)}+\frac{a}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}},$$

l'équation [14] deviendra

[16]... $$\frac{t.\sqrt{2C}}{a.\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{x}{a}\left(\frac{a-x}{a}\right)}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{B}-\sqrt{A}}{\sqrt{B}+\sqrt{A}}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}}$$
$$-a.\sqrt{\frac{AB}{C}}\int\frac{dx}{(a.\sqrt{A}-x.\sqrt{C}).\sqrt{x(a-x)}}:$$

et l'équation [15] deviendra

[17]... $$\frac{t.\sqrt{2C'}}{a.\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{x}{a}\left(\frac{a-x}{a}\right)}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{B}+\sqrt{A}}{\sqrt{B}-\sqrt{A}}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}}$$
$$-a.\sqrt{\frac{AB}{C'}}\int\frac{dx}{(a.\sqrt{A}+x.\sqrt{C'}).\sqrt{x(a-x)}}.$$

En exécutant l'intégration, depuis $x=h$, si l'on fait

$$\sqrt{\frac{x}{a}}=\sin.\theta\ ; \qquad \sqrt{\frac{h}{a}}=\sin.\theta'\ ;$$

$$\text{tang.}\,\Omega=\frac{x.\sqrt{C}-a.\sqrt{A}}{2.\sqrt[4]{AB}.\sqrt{x(a-x)}}\ ;$$

$$\text{tang.}\,\Omega'=\frac{h.\sqrt{C}-a.\sqrt{A}}{2.\sqrt[4]{AB}.\sqrt{h(a-h)}}\ ;$$

$$N=\frac{a.\sqrt{a}}{\sqrt{8C'}}.\sqrt{\frac{C}{C'}}\ ;$$

l'équation [17] donne

$$[18]\ldots\ldots\ t=N\left\{\begin{array}{l}2\theta-2\theta'-\dfrac{2.\sqrt[4]{AB}}{\sqrt{C}}(\Omega-\Omega')\\ \qquad\qquad+\sqrt{\dfrac{C'}{C}}.(\sin.2\theta-\sin.2\theta')\end{array}\right\}.$$

Et il est facile de voir que l'on a

$$[19]\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\text{tang.}\,\Omega=\dfrac{\sqrt{C'}-\sqrt{C}.\cos.2\theta}{2.\sqrt[4]{AB}.\sin.2\theta}\ ;\\[2ex] \text{tang.}\,\Omega'=\dfrac{\sqrt{C'}-\sqrt{C}.\cos.2\theta'}{2.\sqrt[4]{AB}.\sin.2\theta'}\ .\end{array}\right.$$

Avant d'aller plus loin appliquons les formules [18] et [19] au mouvement du centre de gravité d'une masse, lancée de la surface de la Lune vers la Terre, suivant la ligne droite qui joint leurs centres, dans le cas purement hypothétique, que la Terre et la Lune soient fixes dans l'espace. Pour cela, nous ferons

$$B=gr^2\ ; \qquad A=\frac{B}{81}\ ; \qquad a=mr=60.r\ ;$$

$$x=\mu r\ ; \qquad h=\alpha=\mu'.r=\frac{3}{11}r=0,272726.r\ ;$$

ce qui donne

$$\frac{\sqrt{C'}}{\sqrt{C}}=\frac{4}{5}\ ; \qquad \sqrt[4]{AB}=\frac{1}{3}.\sqrt{B}=3.\sqrt{A}\ ;$$

$$\frac{\sqrt[4]{AB}}{\sqrt{C}}=\frac{3}{10}\ ; \qquad N=\frac{45}{32}m.\sqrt{m}.\sqrt{\frac{r}{8g}}=\frac{45}{32}.M'\ ;$$

$$[20]\ldots\begin{cases}\text{tang.}\,\Omega=\dfrac{4-5\cos.2\theta}{3\sin.2\theta}\ ; \qquad \text{tang.}\,\Omega'=\dfrac{4-5.\cos.2\theta'}{3\sin.2\theta'}\ ;\\ t=\dfrac{45}{32}M'\left\{2\theta-2\theta'+\dfrac{4}{5}(\sin.2\theta-\sin.2\theta')-\dfrac{3}{5}(\Omega-\Omega')\right\}.\end{cases}$$

Cela posé si l'on fait $\mu=59$, l'on aura

$$\sin.\theta=\sqrt{\frac{59}{60}}\ ; \qquad \theta=82^\circ.34'.56''\ ; \qquad \sin.2\theta=0,256514\ :$$

$$\sin.\theta'=\sqrt{\frac{3}{11}.\frac{1}{60}}\ ; \qquad \theta'=3^\circ.43'.57''\ ; \qquad \sin.2\theta'=0,134534\ ;$$

$$\Omega=85^\circ.21'.24''\ ; \qquad \Omega'=112^\circ.9'.5''\ ;$$

$$\frac{3}{5}(\Omega'-\Omega)=15^\circ.4'.36''\ ; \qquad 2\theta-2\theta'+\frac{3}{5}(\Omega'-\Omega)=172^\circ.46'.34''\ ;$$

$$t=M'.\frac{45}{32}(0,097584+3,0155121)\ ;$$

$$t=\frac{45}{32}.M'(3,113096)\ ;$$

$$\text{Log.}\frac{45}{32}.\frac{M'}{3600}=1,6449323\ ;$$

$$t=137^{\text{heures}},444\ .$$

La formule [3], en y faisant $C=C'=(\sqrt{B}-\sqrt{A})^2$, donne

$$[21]\ \ldots\ldots \qquad V^2=\frac{2A}{h}+\frac{2B}{a-h}-\frac{2}{a}(\sqrt{B}-\sqrt{A})^2\ ;$$

d'où l'on tire avec les valeurs numériques précédentes;

$$V^2=2gr\left\{\frac{1}{\mu'.81}+\frac{1}{60-\mu'}-\frac{64}{60.81}\right\}\ ;$$

$$V^2=2gr\left\{0,0452676+0,016743-0,013169\right\}\ :$$

$$V^2=2gr(0,0488416)\ ;$$

[22] ..... $V = 2468^{m},80$.

La formule [4] donne en général (pour $C = C'$) :

[23] ..... $v^2 = \frac{2A}{x} + \frac{2B}{a-x} - \frac{2}{a}\left(\sqrt{B} - \sqrt{A}\right)^2$;

ou bien

[24] ..... $v^2 = 2gr\left\{\frac{1}{\mu.81} + \frac{1}{60-\mu} - \frac{64}{60.81}\right\}$.

En y faisant $\mu = 6$, cette équation donne:

$$v^2 = 2gr(0,0020571 + 0,0185185 - 0,0131687) ;$$

$$v^2 = 2gr(0,0074069) ;$$

[25]... $v = \sqrt{2gr}.\sqrt{0,0074069} = 961^{m},80$.

Ainsi, une masse lancée de la surface de la Lune suivant la ligne qui réunit son centre avec celui de la Terre, avec une force d'impulsion capable d'imprimer à son centre de gravité une vitesse de $2468^{m},8$ *par seconde*, ne tombe sur la surface de la Terre qu'après $137^{h},424$.

Au moment où le centre de gravité de cette masse se trouve éloigné du centre de la Lune de *six rayons terrestres*, sa vitesse, en vertu des actions contraires de la Lune et de la Terre, est réduite à $961^{m},8$ par seconde. En ce point, la force attractive de la Lune est égale à celle de la Terre. En effet, si l'on égale à zéro le second membre de l'équation [1] l'on a

$$\frac{\sqrt{B}}{a-x} = \frac{\sqrt{A}}{x} \text{ ; c'est-à-dire } x = \frac{a.\sqrt{A}}{\sqrt{B}+\sqrt{A}} ,$$

pour la distance x au centre de la Lune, où tout point matériel est également attiré vers la Lune et vers la Terre. Or, en faisant $a = 60.r$; $B = 81.A$, on tire de là $x = 6.r$. Le mouvement continue vers la Terre, en vertu de la vitesse restante de $961^{m},8$ par seconde; qui devient la vitesse initiale depuis le point éloigné de 54 rayons terrestres du centre de la Terre. Pour avoir le temps requis pour franchir le premier intervalle de six rayons terrestres, il faut calculer la valeur de l'angle θ correspondante à $\mu = 6$; ce qui donne

$$\sin.\theta = \sqrt{\frac{6}{60}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\ ; \qquad \theta = 18^\circ.26'.5''\ .$$

Et comme à cette valeur de μ répond tang. $\Omega = 0$, et $\Omega = \pi$: en observant que la formule [20] peut être écrite ainsi; savoir

$$[26] \ldots\ldots \quad t = \frac{45}{32}M'\left\{2\theta + \frac{4}{5}\sin.2\theta + 0,9365265 - \frac{3}{5}\Omega\right\},$$

l'on aura pour cette valeur de θ;

$$t = \frac{45}{32}M'\left\{2,0603013 - \frac{3}{5}\pi\right\} = \frac{45}{32}M'(0,1753473)\ .$$

c'est-à-dire $t = 8^h,1064$. De sorte que

$$137^h,444 - 8^h,106 = 129^h,338$$

est le nombre d'heures requises pour franchir l'intervalle des 53 rayons terrestres compris entre le point d'égale attraction de la Lune et de la Terre, et le point où le mobile tombe sur la surface de la Terre.

On a vu dans le § précédent, que ce même intervalle de 53 rayons terrestres, serait parcouru en $47^h,477$; la vitesse initiale étant de $961^m,8$ par seconde. L'action contraire de la Lune produit donc un retard de $81^h,861$. Ainsi, on doit concevoir par ce calcul, quoique fondé sur l'hypothèse de la fixité de la Terre et de la Lune, que l'action de la Lune doit produire un mouvement, soit sur l'atmosphère qui entoure la Terre, soit sur l'Océan qui couvre en partie sa surface. Remarquons maintenant, que l'équation [3], en y faisant $\sqrt{C} = \sqrt{B} + \sqrt{A}$, donne, en remplaçant V par V',

$$[27] \ldots\ldots \qquad V'^2 = \frac{2A}{h} + \frac{2B}{a-h} - \frac{2}{a}(\sqrt{B} + \sqrt{A})^2\ ;$$

et en remplaçant v par v', l'équation [4] donne

$$[28] \ldots\ldots \qquad v'^2 = \frac{2A}{x} + \frac{2B}{a-x} - \frac{2}{a}(\sqrt{B} + \sqrt{A})^2\ .$$

Or, il est évident, que le second membre de cette équation devient *nul* pour la distance

$$[29] \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad x = \frac{a.\sqrt{A}}{\sqrt{B} + \sqrt{A}}\ .$$

Ainsi en faisant, comme dans le cas précédent, $h=z=\mu' r=\frac{3}{11}.r$; $a=mr=60.r$; $B=81.A$, et déterminant la vitesse initiale V' d'après l'équation [27], l'on aurait:

$$V'^2=2gr\left\{\frac{1}{\mu'.81}+\frac{1}{60-\mu'}-\frac{100}{60.81}\right\};$$

$$V'^2=2gr\left\{0,045267 6+0,016743-0,020576 2\right\};$$

$$V'^2=2gr\,(0,0414344);$$

$$[30]\ldots\quad V'=\sqrt{2gr}.\sqrt{0,0414344}=2274^{m},83\ .$$

Et comme avec une telle vitesse initiale, la force accélératrice et la vitesse v' seraient l'une et l'autre nulle à la distance x déterminée par l'équation [29], il faut en conclure que le mobile doit à ce point cesser de se mouvoir. Mais il n'est pas évident que cette distance ne sera atteinte que dans un *temps infini*. Pour avoir une explication claire de ce phénomène, il faut exécuter les intégrations indiquées dans le second membre de l'équation [16]. Par là on obtient

$$[31]\ldots\quad \frac{t.\sqrt{2C}}{a.\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{x}{a}\left(\frac{a-x}{a}\right)}-\sqrt{\frac{h}{a}\left(\frac{a-h}{a}\right)}+(X-H')\frac{\sqrt{C'}}{\sqrt{C}}$$
$$+\frac{\sqrt[4]{AB}}{\sqrt{C}}\text{Log.}\left\{\left[\frac{a.\sqrt{A}-x.\sqrt{C}}{a.\sqrt{A}-h.\sqrt{C}}\right]\frac{H'}{X'}\right\},$$

en posant pour plus de simplicité

$$\sin.\theta=\sqrt{\frac{x}{a}}\ ;\qquad \sin.\theta'=\sqrt{\frac{h}{a}}\ ;$$

$$[32]\ldots\ldots\quad\begin{cases}\text{tang.}X'=1-\frac{\sqrt{C'}}{\sqrt{C}}\cos.2\theta-\frac{\sqrt[4]{AB}}{\sqrt{C}}.\sin.2\theta\ ;\\[2ex] \text{tang.}H'=1-\frac{\sqrt{C'}}{\sqrt{C}}\cos.2\theta'-\frac{\sqrt[4]{AB}}{\sqrt{C}}.\sin.2\theta'\ .\end{cases}$$

Or il est manifeste que cette équation donne $t=$ *infini* pour $x=\frac{a.\sqrt{A}}{\sqrt{C}}$,

et qu'elle donne pour t une valeur imaginaire, si l'on y fait $x > \frac{a.\sqrt{A}}{\sqrt{C}}$. Cela signifie que le mobile paraîtra sensiblement stationnaire aux approches de la distance $\frac{a.\sqrt{A}}{\sqrt{C}}$; mais, mathématiquement parlant, il y aura toujours mouvement, puisqu'on ne peut avoir $x = \frac{a.\sqrt{A}}{\sqrt{C}}$ sans faire $t = \infty$.

En supposant la distance initiale h du mobile plus grande que $\frac{a.\sqrt{A}}{\sqrt{C}}$, et la vitesse initiale V' déterminée conformément à l'équation [30], la formule [31] donnerait pour t une valeur finie, puisque, pour $x > h$ la fraction $\frac{x.\sqrt{C} - a.\sqrt{A}}{h.\sqrt{C} - a.\sqrt{A}}$ a toujours une valeur positive plus grande que l'unité.

Il me paraît qu'il était nécessaire d'achever ainsi la solution de ce cas singulier pour faire disparaître l'obscurité qui peut rester dans l'esprit en lisant la page 257 du 1.er Volume du Traité de Mécanique de Poisson (édition de 1833).

§ IV.

Analyse du cas, où $(A+B-C)^2 < 4AB$.

La formule [5] peut être écrite ainsi ;

$$[33] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{t.\sqrt{2}.\sqrt[4]{AB}}{a.\sqrt{a}} =$$

$$\int \frac{\frac{dx}{a}.\left(\frac{a-x}{x}\right).\sqrt{\frac{A}{B}}}{\sqrt{\left(\frac{a-x}{x}\right).\sqrt{\frac{A}{B}}\left[1+\frac{(A+B-C)}{\sqrt{AB}}\left(\frac{a-x}{x}\right).\sqrt{\frac{A}{B}}+\frac{A}{B}\left(\frac{a-x}{x}\right)^2\right]}}.$$

Pour faire disparaître les puissances impaires de la variable sous le radical, on pourrait faire

$$u^2 = \left(\frac{a-x}{x}\right) \cdot \sqrt{\frac{A}{B}} \; ;$$

mais alors la valeur de u^2, correspondante à $x = 0$, serait $u^2 = \infty$. Pour introduire une nouvelle variable qui soit nulle avec x, nous ferons

$$[34] \ldots \left\{ y^2 = \sqrt{\frac{B}{A}} \cdot \frac{x}{a-x} \; ; \quad \text{ce qui donne} \quad x = \frac{a.\sqrt{A}.y^2}{\sqrt{B}+\sqrt{A}.y^2} \right\}.$$

Cela posé, si l'on fait

$$[35] \ldots\ldots \qquad Y = 1 + \frac{(A+B-C)}{\sqrt{AB}} \cdot y^2 + y^4 \; ,$$

l'on aura transformé l'équation [33] en celle-ci ;

$$[36] \ldots \quad \frac{t.(AB)^{\frac{1}{4}}}{a.\sqrt{a}} = \int \frac{dy}{\left(1+y^2.\sqrt{\frac{A}{B}}\right)\sqrt{Y}} - \int \frac{dy}{\left(1+y^2.\sqrt{\frac{A}{B}}\right)^2 \cdot \sqrt{Y}} \; .$$

D'après une formule de Legendre (Voyez p. 12 du 1.er Volume du Traité des Fonctions Elliptiques) l'on a

$$\frac{y.\sqrt{Y}}{1+y^2.\sqrt{\frac{A}{B}}} = \frac{2C}{A} \cdot \int \frac{dy}{\left(1+y^2.\sqrt{\frac{A}{B}}\right)^2 \sqrt{Y}} + \frac{B}{A} \cdot \int \frac{dy\left(1+y^2.\sqrt{\frac{A}{B}}\right)}{\sqrt{Y}}$$

$$+ \left(1 - \frac{B}{A} - \frac{2C}{A}\right) \int \frac{dy}{\left(1+y^2.\sqrt{\frac{A}{B}}\right)\sqrt{Y}} \; .$$

Il suit de là, que l'équation précédente donne

$$[37] \ldots \quad \frac{t.C.\sqrt{2}.(AB)^{\frac{1}{4}}}{A.a.\sqrt{a}} = \frac{-y.\sqrt{Y}}{1+y^2.\sqrt{\frac{A}{B}}} + \frac{B}{A} \cdot \int \frac{dy\left(1+y^2.\sqrt{\frac{A}{B}}\right)}{\sqrt{Y}} \; .$$

$$+ \frac{(B+4C-A)}{A} \int \frac{dy}{\left(1+y^2.\sqrt{\frac{A}{B}}\right)\sqrt{Y}} \; .$$

Cette formule générale se simplifie dans le cas particulier de

[38] ..... $C = A + B$.

Alors l'équation [35] se réduit à $Y = 1 + y^4$, et la formule [3] (en écrivant V'' au lieu de V), donne

[39] ..... $$V''^2 = \frac{2A}{h} + \frac{2B}{a-h} - \frac{2}{a}(A+B) .$$

Cette valeur de V''^2 surpasse celle fournie par l'équation [30] de

$$\frac{4.\sqrt{AB}}{a} = \frac{2gr}{270} = 2gr(0,0037037) .$$

De sorte que nous avons

$$V''^2 = 2gr(0,041434 + 0,0037037) = 2gr(0,0451389) :$$

[40]... $$V'' = \sqrt{2gr}.\sqrt{0,045138} = 2374^{m},35 ;$$

$$V'' - V' = 99^{m},52 .$$

Cette différence suffit pour passer du cas où $t = \infty$ à celui où $t = 137^{h},444$. Il est intéressant de connaître avec précision la valeur de t, qui, dans ce cas, doit être déterminée par l'équation [37] réduite à celle-ci;

[41]... $$\frac{t(A+B).\sqrt{2}.(AB)^{\frac{1}{4}}}{A.a.\sqrt{a}} = \frac{-y.\sqrt{1+y^4}}{1+y^2.\sqrt{\frac{A}{B}}} + \frac{B}{A}\int\frac{dy\left(1+y^2.\sqrt{\frac{A}{B}}\right)}{\sqrt{1+y^4}}$$
$$+\left(3+\frac{5B}{A}\right)\int\frac{dy}{\left(1+y^2.\sqrt{\frac{A}{B}}\right).\sqrt{1+y^4}} .$$

Nous allons traiter le cas plus général de l'équation [37], en le limitant par la condition $(A+B-C)^2 < 4AB$.

Alors, on peut faire

[42] ..... $$\begin{cases} (A+B-C) = 2.\sqrt{AB}.\cos.\theta ; \\ Y = 1 + 2y^2.\cos.\theta + y^4 . \end{cases}$$

Nous donnons l'exclusion aux valeurs extrêmes de θ; $\theta = 0$, $\theta = 180°$: ces deux cas ayant été analysés à part dans le § III.

Maintenant, si l'on fait

$$y = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\varphi\ ; \qquad c^2 = \sin.^2\tfrac{1}{2}\theta\ ; \qquad \Delta = \sqrt{1 - c^2.\sin.^2\varphi}\ ;$$

l'on a

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}\ ;$$

et l'équation [37] devient

$$\frac{t.C.\sqrt{2}.(AB)^{\frac{1}{4}}}{A.a.\sqrt{a}} = \frac{-y.\sqrt{Y}}{1+y^2\sqrt{\frac{A}{B}}} + \frac{B}{2A}\cdot\int\frac{d\varphi}{\Delta}\left[1+\sqrt{\frac{A}{B}}\,\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\varphi\right]$$

$$+\frac{(B+4C-A)}{2A}\int\frac{d\varphi}{\left(1+\sqrt{\frac{A}{B}}\cdot\text{tang.}^2\frac{1}{2}\varphi\right)\Delta}.$$

Mais on sait que

$$\int\frac{d\varphi.\text{tang.}^2\frac{1}{2}\varphi}{\Delta} = 2\,\Delta\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}\varphi + \int\frac{d\varphi}{\Delta} - 2\int\Delta\,d\varphi\ ;$$

donc en substituant nous aurons

$$[43]\ldots\ \frac{t.C.\sqrt{2}.\sqrt[4]{AB}}{A.a.\sqrt{a}} = \frac{-y.\sqrt{Y}}{1+y^2.\sqrt{\frac{A}{B}}} + \sqrt{\frac{B}{A}}\cdot\text{tang.}\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$-\sqrt{\frac{B}{A}}\int\Delta\,d\varphi + \tfrac{1}{2}.\sqrt{\frac{B}{A}}\left(1+\sqrt{\frac{B}{A}}\right)\int\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$+\frac{(B+4C-A)}{2A}\int\frac{d\varphi}{\left(1+\sqrt{\frac{A}{B}}\cdot\text{tang.}^2\frac{1}{2}\varphi\right)\Delta}.$$

A l'aide de l'équation

$$\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{1-\cos.\varphi}{1+\cos.\varphi}\ ,$$

on trouve, après les réductions qui se présentent,

$$\sqrt{Y} = \frac{\Delta}{\cos.^2\frac{1}{2}\varphi}\ ;$$

$$\frac{y.\sqrt{Y}}{1+y^2.\sqrt{\frac{A}{B}}}=\frac{\Delta.\text{tang.}\frac{1}{2}\varphi}{\cos.^2\frac{1}{2}\varphi+\sqrt{\frac{A}{B}}.\sin.^2\frac{1}{2}\varphi};$$

$$\sqrt{\frac{B}{A}}.\Delta\,\text{tang.}\frac{1}{2}\varphi-\frac{y.\sqrt{Y}}{1+y^2.\sqrt{\frac{A}{B}}}=\frac{\sqrt{\frac{B}{A}}.\left(\sqrt{\frac{B}{A}}-1\right)\Delta\sin.\varphi}{\left(\sqrt{\frac{B}{A}}+1\right)+\left(\sqrt{\frac{B}{A}}-1\right)\cos.\varphi}.$$

Et en posant

[44] ..... $$n=\frac{1}{4}.\sqrt{\frac{B}{A}}\left(1-\sqrt{\frac{A}{B}}\right)^2,$$

l'on aura

$$\int\frac{d\varphi}{\left(1+\sqrt{\frac{A}{B}}.\text{tang.}^2\frac{1}{2}\varphi\right)\Delta}=\frac{1}{2}.\int\frac{d\varphi\cos.\varphi}{(1+n\sin.^2\varphi)\Delta}$$

$$+\frac{1}{2}.\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin.^2\varphi)\Delta}$$

$$+\frac{1}{4}.\left(\sqrt{\frac{B}{A}}-1\right)\int\frac{d\varphi.\sin.^2\varphi}{(1+n\sin.^2\varphi)\Delta}.$$

Et comme

$$\int\frac{d\varphi\sin.^2\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta}=\frac{1}{n}.\int\frac{d\varphi}{\Delta}-\frac{1}{n}\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin.^2\varphi)\Delta},$$

l'on a

$$\int\frac{d\varphi}{\left(1+\sqrt{\frac{A}{B}}.\text{tang.}^2\frac{1}{2}\varphi\right)\Delta}=\frac{1}{2}.\int\frac{d\varphi\cos.\varphi}{(1+n\sin.^2\varphi)\Delta}+\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{A}}.\int\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$-\frac{(\sqrt{B}+\sqrt{A})}{2(\sqrt{B}-\sqrt{A})}.\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin.^2\varphi)\Delta}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation [43] l'on aura;

$$[44] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{t.C.\sqrt{2}.\sqrt[4]{AB}}{A.a.\sqrt{a}} =$$

$$\frac{\sqrt{B}.(\sqrt{B}-\sqrt{A}).\Delta \sin.\varphi}{\left[(\sqrt{B}+\sqrt{A})+(\sqrt{B}-\sqrt{A})\cos.\varphi\right]\sqrt{A}} + \frac{(B+4C-A)}{4A}\int\frac{d\varphi \cos.\varphi}{(1+n\sin.^2\varphi)\Delta}$$

$$-\sqrt{\frac{B}{A}}\int\Delta d\varphi + \frac{\sqrt{B}.(B+2C-A)}{A(\sqrt{B}-\sqrt{A})}\int\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$-\frac{(B+4C-A)(\sqrt{B}+\sqrt{A})}{4A(\sqrt{B}-\sqrt{A})}\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin.^2\varphi)\Delta}.$$

Suivant la notation de Legendre, si l'on fait

$$\Pi(n)=\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin.^2\varphi)\Delta}\ ; \qquad \Pi\left(\frac{c^2}{n}\right)=\int\frac{d\varphi}{\left(1+\frac{c^2}{n}\sin.^2\varphi\right)\Delta}\ ;$$

$$p=\frac{\text{tang.}\,\varphi}{\Delta}\ ; \qquad k=(1+n)\left(1+\frac{c^2}{n}\right)\ ;$$

l'on a l'équation

$$\Pi(n)=-\Pi\left(\frac{c^2}{n}\right)+\int\frac{d\varphi}{\Delta}+\int\frac{dp}{1+kp^2}.$$

Donc, en désignant par $f(\varphi)$ la partie algébrique qui entre dans le second membre de l'équation [44], l'on aura;

$$[45] \ldots\ldots \quad f(\varphi)=\frac{\sqrt{B}(\sqrt{B}-\sqrt{A})\Delta \sin.\varphi}{\sqrt{A}\left[\sqrt{B}+\sqrt{A}+(\sqrt{B}-\sqrt{A})\cos.\varphi\right]}$$

$$+\frac{(B+4C-A)}{4A}\int\frac{d\varphi \cos.\varphi}{(1+n\sin.^2\varphi)\Delta}$$

$$-\frac{(B+4C-A)(\sqrt{B}+\sqrt{A})}{4A(\sqrt{B}-\sqrt{A})}\int\frac{dp}{1+kp^2}\ ;$$

$$[46] \ldots\ldots \quad \frac{t.C.\sqrt{2}.\sqrt[4]{AB}}{A.a.\sqrt{a}} = f(\varphi) - \sqrt{\frac{B}{A}}.\int \Delta d\varphi$$

$$+ \left\{ \frac{C}{A} + \frac{(\sqrt{B}+\sqrt{A})(3.\sqrt{B}-\sqrt{A})}{4A} \right\} \int \frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$+ \frac{(B+4C-A)(\sqrt{B}+\sqrt{A})}{4A(\sqrt{B}-\sqrt{A})} \Pi.\left(\frac{c^2}{n}\right)$$

$+$ *constante arbitraire.*

Pour déterminer cette constante, remarquons qu'en nommant φ' la valeur initiale de φ, l'on a

$$\text{tang.}\frac{1}{2}\varphi = \sqrt[4]{\frac{B}{A}}.\sqrt{\frac{x}{a-x}} \; ; \qquad \text{tang.}\frac{1}{2}\varphi' = \sqrt[4]{\frac{B}{A}}.\sqrt{\frac{h}{a-h}} \; ;$$

or, en posant

$$\Delta' = \sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi'} \; ;$$

$$\text{tang.}\psi = \frac{\Delta'.\text{tang.}\varphi - \Delta.\text{tang.}\varphi'}{1 + \Delta.\Delta'.\text{tang.}\varphi.\text{tang.}\varphi'} \; ;$$

$$q = \sin.\varphi'.\sin.\varphi.\sin.\psi \; ;$$

$$q' = \cos.\varphi'.\cos.\varphi.\cos.\psi \; ;$$

nous avons par les formules de Legendre;

$$\int_{\varphi'}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta} - \int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi}{\Delta} = \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\Delta} \; ;$$

$$\int_{\varphi'}^{\varphi} d\varphi.\Delta = -c^2.q + \int_0^{\psi} d\varphi.\Delta \; ;$$

$$\int_{\varphi'}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\left(1 + \frac{c^2}{n}\sin.^2\varphi\right)\Delta} = \frac{-1}{\sqrt{k}} \text{arc.} \left\{ \text{tang.} = \frac{c^2.\sqrt{k}.q}{n + c^2 - c^2 q'} \right\}$$

$$+ \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\left(1 + \frac{c^2}{n}\sin.^2\varphi\right)\Delta} \; .$$

Maintenant si l'on fait

$$\Gamma(\varphi)=+\sqrt{\frac{B}{A}}\cdot c^2 q$$

$$-\frac{(B+4C-A)(\sqrt{B}+\sqrt{A})}{4A(\sqrt{B}-\sqrt{A})\sqrt{k}}\text{arc.}\left\{\text{tang.}=\frac{c^2.\sqrt{k}.q}{n+c^2-c^2q'}\right\},$$

l'on pourra remplacer l'équation [46] par celle-ci;

$$[47]\ \ldots\ldots\quad \frac{t.C.\sqrt{2}.\sqrt[4]{AB}}{A.a.\sqrt{a}}=f(\varphi)-f(\varphi')+\Gamma(\varphi)-\sqrt{\frac{B}{A}}\int_0^{\psi}\Delta\, d\varphi$$

$$+\left\{\frac{C}{A}+\frac{(\sqrt{B}+\sqrt{A})(3.\sqrt{B}-\sqrt{A})}{4A}\right\}\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$+\frac{(B+4C-A)(\sqrt{B}+\sqrt{A})}{4A(\sqrt{B}-\sqrt{A})}\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\left(1+\frac{c^2}{n}\sin.^2\varphi\right)\Delta}.$$

Il est évident que le second membre de cette équation devient nul en y faisant $\varphi=\varphi'$, puisque alors $\psi=0$, $\Gamma(\varphi')=0$. Il n'est pas moins clair, qu'en posant $\Delta'.\text{tang.}\varphi=\text{tang.}\omega$; $\Delta.\text{tang.}\varphi'=\text{tang.}\omega'$, l'on a $\psi=\omega-\omega'$.

Afin d'avoir préparées toutes les formules nécessaires pour le calcul numérique, nous ajouterons que l'on a :

$$\int\frac{d\varphi\cos.\varphi}{(1+n\sin.^2\varphi)\Delta}=\frac{1}{\sqrt{n+c^2}}\text{arc.}\left\{\text{tang.}=\frac{\sqrt{n+c^2}.\sin.\varphi}{\Delta}\right\};$$

$$\int\frac{dp}{1+kp^2}=\frac{1}{\sqrt{k}}\text{arc.}\left\{\text{tang.}=\frac{\sqrt{k}.\text{tang.}\varphi}{\Delta}\right\};$$

$$\frac{c^2}{n}=\frac{C-(\sqrt{B}-\sqrt{A})^2}{(\sqrt{B}-\sqrt{A})^2};$$

$$\sqrt{n+c^2}=\frac{C}{2.(\sqrt{B}-\sqrt{A}).\sqrt[4]{AB}};$$

$$\sqrt{k}=\frac{\sqrt{C}.(\sqrt{B}+\sqrt{A})}{2.(\sqrt{B}-\sqrt{A}).\sqrt[4]{AB}};$$

$$\Gamma(\varphi) = +\sqrt{\frac{B}{A}}\cdot c^2 q$$

$$-\frac{(B+4C-A).\sqrt[4]{AB}}{2A.\sqrt{C}}\,\text{arc.}\left\{\text{tang.}=\frac{c^2.\sqrt{k}.q}{n+c^2-c^2q'}\right\};$$

$$f(\varphi) = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}}\cdot\frac{(\sqrt{B}-\sqrt{A})\,\Delta\sin.\varphi}{(\sqrt{B}+\sqrt{A})+(\sqrt{B}-\sqrt{A})\cos.\varphi}$$

$$+\frac{(B+4C-A).\sqrt[4]{AB}}{2AC.(\sqrt{B}+\sqrt{A})}\,\text{arc.}\left\{\text{tang.}=\frac{\sqrt{n+c^2}.\sin.\varphi}{\Delta}\right\}$$

$$-\frac{(B+4C-A).\sqrt[4]{AB}}{2A.\sqrt{C}}\,\text{arc.}\left\{\text{tang.}=\frac{\sqrt{k}.\text{tang.}\varphi}{\Delta}\right\}.$$

Lorsque l'angle ψ surpasse 90° on fera $\psi = 180^\circ - \lambda$, et l'on aura, après avoir fait,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta} = F'(c)\;; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Delta\, d\varphi = E'(c)\;;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\left(1+\frac{c^2}{n}\sin.^2\varphi\right)\Delta} = \Pi'\left(c, \frac{c^2}{n}\right);$$

les equations

$$\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta} = 2F'(c) - \int_0^{\lambda}\frac{d\varphi}{\Delta}\;;$$

$$\int_0^{\psi} d\varphi\,\Delta = 2E'(c) - \int_0^{\lambda}\Delta\, d\varphi\;;$$

$$\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\left(1+\frac{c^2}{n}\sin.^2\varphi\right)\Delta} = 2\Pi'\left(c, \frac{c^2}{n}\right) - \int_0^{\lambda}\frac{d\varphi}{\left(1+\frac{c^2}{n}\sin.^2\varphi\right)\Delta}.$$

En posant

$$\frac{c^2}{n}=\cot.^2\beta\ ; \qquad \Delta''=\sqrt{1+c^2\sin.^2\beta}\ ,$$

l'on a, par la formule de LEGENDRE (Voyez p. 134 du 1.er Vol. des Fonctions Elliptiques);

$$\Pi^1\left(c,\ \frac{c^2}{n}\right)=\left\{\frac{\pi}{2}+F^1(c)\int_0^\beta\frac{d\varphi}{\Delta}\right\}\frac{\sin.\beta\cos.\beta}{\Delta''}+F^1(c).\sin.^2\beta$$

$$-\frac{\sin.\beta\cos.\beta}{\Delta''}\left\{F^1(c)\int_0^\beta d\varphi\,\Delta+E^1(c)\int_0^\beta\frac{d\varphi}{\Delta}\right\}.$$

Nous avons

$$\sin.^2\beta=\frac{(\sqrt{B}-\sqrt{A})^4}{C^2}\ ;$$

$$\sin.^2\beta.\frac{(B+4C-A)(\sqrt{B}+\sqrt{A})}{4A.(\sqrt{B}-\sqrt{A}}=\frac{(B+4C-A)(B-A).(\sqrt{B}-\sqrt{A})^2}{4AC^2}\ ;$$

$$\frac{\sin.\beta.\cos.\beta}{\Delta''}.\frac{(B+4C-A)(\sqrt{B}+\sqrt{A}}{4A.(\sqrt{B}-\sqrt{A})}=$$

$$\frac{(B-A)(B+4C-A)}{4AC}.\frac{\sqrt{C^2-(\sqrt{B}-\sqrt{A})^4}}{\sqrt{C^2-c^2.(\sqrt{B}-\sqrt{A})^4}}\ .$$

Maintenant si l'on fait

$$\Omega(\varphi)=+\sqrt{\frac{B}{A}}\int_0^\varphi d\varphi\,\Delta$$

$$-\left\{\frac{C}{A}+\frac{(\sqrt{B}+\sqrt{A})(3.\sqrt{B}-\sqrt{A})}{4A}\right\}\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$-\frac{(B+4C-A)(\sqrt{B}+\sqrt{A})}{4A.(\sqrt{B}-\sqrt{A})}\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\left(1+\frac{c^2}{n}\sin.^2\varphi\right)\Delta}\ ;$$

$$P=\frac{2C}{A}+\frac{(\sqrt{B}+\sqrt{A})(3.\sqrt{B}-\sqrt{A})}{2A}$$

$$+\frac{(B+4C-A)(B-A)(\sqrt{B}-\sqrt{A})^2}{2AC^2}\ :$$

$$P' = \frac{(B-A)(B+4C-A)}{4AC} \cdot \frac{\sqrt{C^2-\sqrt{B}-\sqrt{A})^4}}{\sqrt{C^2-c^2.(\sqrt{B}-\sqrt{A})^4}} ;$$

l'équation [47] deviendra ;

$$[48] \ldots \frac{t.C.\sqrt{2}.\sqrt[4]{AB}}{A.a.\sqrt{a}} = -\pi P' + f(\varphi) - f(\varphi) - f(\varphi') + \Gamma(\varphi) - \Omega(\varphi)$$

$$+ P.F^1(c) + 2.\sqrt{\frac{B}{A}}.E^1(c)$$

$$- 2P'\left\{F^1(c)\int_0^\beta \frac{d\varphi}{\Delta} - F^1(c)\int_0^\beta d\varphi\,\Delta - E^1(c)\int_0^\beta \frac{d\varphi}{\Delta}\right\}.$$

§ V.

Application de la formule [48] *au cas de* $C = A + B$.

J'adopte les élémens numériques donnés dans le § III. Ici, nous avons $c^2 = \sin.^2 45° = \frac{1}{2}$, et la formule [35] donne

$\text{tang.}\,\frac{1}{2}\varphi = 3.\sqrt{59}$; $\qquad \varphi = 175°.\ 2'.\ 0''$;

$\text{tang.}\,\frac{1}{2}\varphi' = 3.\sqrt{\frac{\mu'}{60-\mu'}}$; $\qquad \varphi' = 22°.\ 55'.\ 20''$;

$\Delta = \sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi} = \sin.(85°.\ 34'.\ 0'')$;

$\Delta' = \sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi'} = \sin.(74°.\ 0'.\ 50'')$;

$\text{tang.}\,\omega = \Delta'.\text{tang.}\,\varphi$; $\qquad \omega = 180° - (4°.\ 47'.\ 36'')$;

$\text{tang.}\,\omega' = \Delta.\text{tang.}\,\varphi'$; $\qquad \omega' = 22°.\ 51'.\ 40''$;

$\psi = \omega - \omega' = 152°.\ 20'.\ 44'' = 180° - (27°.\ 39'.\ 16'')$;

$\lambda = 27°.\ 39'.\ 16''$; $\qquad \frac{c^2}{n} = \cot.^2\beta = \frac{2.\sqrt{81}}{64} = \frac{9}{32}$;

$\beta = 62°.\ 3'.\ 42''$;

$P = 449,337 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Log. } 2,6525722$;

$$P' = \frac{4080}{41} \cdot \sqrt{\frac{657}{1169}} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Log. } 1,8727517 \;;$$

$$\frac{A.a.\sqrt{a}}{C.\sqrt{2}.\sqrt[4]{AB}} = \frac{180.\sqrt{60}}{41} \cdot \sqrt{\frac{r}{8g}} = G \;;$$

$$\text{Log.} \frac{G}{3600} = 0,4298443 \;;$$

$$\Omega(\varphi) = -9.\int_0^{\lambda} d\varphi\,\Delta - 147.\int_0^{\lambda} \frac{d\varphi}{\Delta} + \frac{255}{2} \cdot \int_0^{\lambda} \frac{d\varphi}{\left(1 + \frac{c^2}{n}\sin.^2\varphi\right)\Delta} \;;$$

$$\sqrt{n+c^2} = \frac{41}{24} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Log. } 0,2325727 \;:$$

$$\sqrt{k} = \frac{5.\sqrt{82}}{24} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Log. } 0,2756657 \;;$$

$$\text{Log.}\, q = 8,1961657 \;; \quad \ldots\ldots \text{Log.}\, q' = 9,9099597 \;;$$

$$n + c^2 - c^2 q' = 2,512023 \;; \quad \ldots\ldots \text{Log.} \ldots\; 0,4000230 \;;$$

$$\text{Log.}\left(\frac{c^2.\sqrt{k}.q}{n + c^2 - c^2 q'}\right) = 7,7707784 = \text{Log. tang.}\,(0^\circ.\ 20'.\ 17'')$$

$$0^\circ.\ 20'.\ 17'' = (0,0059001) \;; \quad \ldots\ldots \text{Log. } 7,7708594 \;.$$

$$\frac{(B + 4C - A).\sqrt[4]{AB}}{2A.\sqrt{C}} = \frac{612}{\sqrt{82}} \ldots\ldots\ldots \text{Log. } 1,8298445 \;;$$

$$\Gamma(\varphi) = +0,070693 - 0,398753 = -0,328060 \;;$$

$$\text{Log.}\, F'(c) = 0,2681272 \;; \qquad \text{Log.}\, E'(c) = 0,1305408 \;;$$

$$PF'(c) = 833,104 \;; \qquad 2.\sqrt{\frac{B}{A}} \cdot E'(c) = 24,3116 \;;$$

$$\pi P' = 234,370 \;;$$

$$-\pi P' + \Gamma(\varphi) + PF'(c) + 2.\sqrt{\frac{B}{A}} \cdot E'(c) = 622,718 \;;$$

$$f(\varphi) = \frac{36.\Delta \sin.\varphi}{5 + 4\cos.\varphi} + \frac{153}{205} \cdot \text{arc.}\left\{\text{tang.} = \frac{\sqrt{n+c^2}.\sin.\varphi}{\Delta}\right\}$$

$$- \frac{612}{\sqrt{82}} \cdot \text{arc.}\left\{\text{tang.} = \frac{\sqrt{k}.\text{tang.}\,\varphi}{\Delta}\right\} \;:$$

$$5+4\cos.\varphi=1,01520 \ldots\ldots \text{Log. } 0,0065516 \;;$$

$$\frac{36.\Delta\sin.\varphi}{5+4\cos.\varphi}=3,0609 \;; \qquad \text{Log.}\frac{\sqrt{n+c^2}.\sin.\varphi}{\Delta}=9,171724 \;;$$

$$\text{arc.}\left\{\text{tang.}=\frac{\sqrt{n+c^2}.\sin.\varphi}{\Delta}\right\}=8^\circ.\,26'.\,17''=(0,1472718) \;;$$

$$\text{Log.}\frac{\sqrt{k}.\text{tang.}\varphi}{\Delta}=9,2159992\,(-) \;;$$

$$\text{arc.}\left\{\text{tang.}=\frac{\sqrt{k}.\text{tang.}\varphi}{\Delta}\right\}=170^\circ.\,39'.\,43''=(2,978610) \;;$$

$$f(\varphi)=3,0609+0,10992-201,307=-198,136 \;;$$

$$f(\varphi')=1,5529+\frac{153}{205}(34^\circ.\,41'.\,18'')-\frac{612}{\sqrt{82}}(39^\circ.\,41'.\,17'') \;;$$

$$f(\varphi')=1,5529+0,45180-46,8147=-44,8100 \;;$$

$$f(\varphi)-f(\varphi')=-153,326 \;.$$

La table IX de Legendre donne

$$\int_0^\lambda \frac{d\varphi}{\Delta}=0,4920838 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Log. } 9,6920391 \;;$$

$$\int_0^\lambda d\varphi\,\Delta=0,4735598 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Log. } 9,6753750 \;.$$

$$\Omega(\varphi)=+4,2620-72,326+\frac{255}{2}\cdot\int_0^\lambda \frac{d\varphi}{\Delta\left(1+\frac{c^2}{n}\sin.^2\varphi\right)} \;;$$

$$\frac{255}{2}\cdot\int_0^\lambda \frac{d\varphi}{\Delta}=62,7407 \;;$$

$$\frac{c^2}{n}\cdot\int_0^\lambda \frac{d\varphi\sin.^2\varphi}{\Delta}=\frac{9}{32}\cdot\int_0^\lambda \frac{d\varphi\sin.^2\varphi}{\Delta}=\frac{18}{32}\left\{\int_0^\lambda \frac{d\varphi}{\Delta}-\int_0^\lambda d\varphi\,\Delta\right\} \;;$$

$$-\frac{255}{2}\cdot\frac{c^2}{n}\int_0^\lambda \frac{d\varphi\sin.^2\varphi}{\Delta}=-1,32852 \;;$$

$$\Omega(\varphi) = -68,064 + 62,7407 - 1,32852 = -6,651 .$$

La formule [48] donne donc

$$\frac{t.C.\sqrt{2}.\sqrt[4]{AB}}{A.a.\sqrt{a}} = 462,701 + 2P'E'(c)\int_0^\beta \frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$-2P'F'(c)\left\{\int_0^\beta \frac{d\varphi}{\Delta} - \int_0^\beta d\varphi\,\Delta\right\} .$$

La table IX de Legendre donne

$$\int_0^\beta \frac{d\varphi}{\Delta} = 1,1877892 \;; \qquad \int_0^\beta d\varphi\,\Delta = 0,9932206 \;;$$

partant nous avons

$$\frac{t.C.\sqrt{2}.\sqrt[4]{AB}}{A.a.\sqrt{a}} = 462,741 - 53,825 + 239,368 = 648,284 \;;$$

$$t = \frac{G}{3600} = (648,284) = 1744^{h}.26 .$$

Ainsi, un corps lancé de la surface de la Lune avec une vitesse initiale de $2374^{m},55$ par seconde, ne parvient à la surface de la Terre qu'après 1744 heures, tandis qu'avec une vitesse initiale de $2468^{m},8$ par seconde, il parcourt le même espace en 137,444 heures. Avec une vitesse inférieure à $2274^{m},83$, il retombe vers la Lune. Mais le temps t est déterminé en fonction de la vitesse initiale par des formules trop compliquées pour que son évaluation puisse être faite par des aperçus simples. L'examen des cas suivants fixera encore mieux les idées sur la relation entre le temps et l'espace parcouru.

§ VI.

Analyse du cas, où $\frac{C}{a}=0$.

Dans ce cas, la formule [5] donne

$$[49] \ldots\ldots \quad \frac{t.\sqrt{2}}{\sqrt{a}}=\int\frac{dx.x(a-x)}{\sqrt{x(a-x)[Aa^2+(B-A)ax]}} .$$

En y faisant $x=a\cos.^2\varphi$, et $c^2=1-\frac{A}{B}$ on obtient

$$[50] \ldots\ldots \quad \frac{t.\sqrt{B}}{a.\sqrt{2a}}=-\int\frac{d\varphi\sin.^2\varphi(1-\sin.^2\varphi)}{\Delta} ,$$

où $\Delta=\sqrt{1-c^2.\sin.^2\varphi}$.

Mais on sait que

$$\int\frac{d\varphi\sin.^4\varphi}{\Delta}=\frac{\Delta.\sin.\varphi\cos.\varphi}{3c^2}+\frac{2}{3}.\frac{(1+c^2)}{c^2}\int\frac{d\varphi\sin.^2\varphi}{\Delta}-\frac{1}{3c^2}\int\frac{d\varphi}{\Delta} ;$$

$$\int\frac{d\varphi\sin.^2\varphi}{\Delta}=\frac{1}{c^2}\int\frac{d\varphi}{\Delta}-\frac{1}{c^2}\int d\varphi\Delta ;$$

partant l'on a

$$\frac{t.3c^2.\sqrt{B}}{a.\sqrt{2a}}=\Delta.\sin.\varphi\cos.\varphi+2.\frac{(1-c^2)}{c^2}\int\frac{d\varphi}{\Delta}-\frac{(2-c^2)}{c^2}\int d\varphi\Delta ;$$

$+$ *constante arbitraire.*

Pour déterminer cette constante, il faut remarquer que la valeur initiale de x étant $x=h$, l'on a $\cos.\varphi'=\sqrt{\frac{h}{a}}$ pour la valeur initiale φ' de φ. Donc, en faisant $\Delta'=\sqrt{1-c^2.\sin.^2\varphi'}$, l'on a;

$$[51] \ldots\ldots \quad \frac{t.3c^2.\sqrt{B}}{a.\sqrt{2a}}=\Delta.\sin.\varphi.\cos.\varphi-\Delta'.\sin.\varphi'.\cos.\varphi'$$
$$+\frac{2(1-c^2)}{c^2}\int_{\varphi'}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}-\frac{(2-c^2)}{c^2}\int_{\varphi'}^{\varphi}\Delta d\varphi .$$

En posant

$$\Delta'.\tang.\varphi = \tang.\omega \;; \qquad \Delta.\tang.\varphi' = \omega' \;;$$

$$\psi = \omega - \omega' \;; \qquad q = \sin.\varphi'\sin.\varphi.\sin.\psi \;;$$

nous avons

$$\int_{\varphi'}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta} = \int_{0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta} - \int_{0}^{\varphi'}\frac{d\varphi}{\Delta} = \int_{0}^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta} \;;$$

$$\int_{\varphi'}^{\varphi} d\varphi\,\Delta = +c^2.q - \int_{0}^{\psi} d\varphi\,\Delta \;;$$

donc en substituant l'on aura

$$[52] \;\ldots\; \frac{t.3c^2.\sqrt{B}}{a.\sqrt{2a}} = \Delta.\sin.\varphi.\cos.\varphi - \Delta'.\sin.\varphi'.\cos.\varphi' - (2-c^2)q$$
$$+\frac{2(1-c^2)}{2}\int_{0}^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta} + \frac{(2-c^2)}{c^2}\int_{0}^{\psi}\Delta\,d\varphi \;.$$

L'équation $C=0$ donne

$$V^2 = \frac{2A}{h} + \frac{2B}{a-h} \;.$$

En y faisant

$$h = \alpha = \mu'.r = \frac{3}{11}r \;; \qquad a = mr = 60.r \;;$$

$$B = 81.A = gr^2 \;; \qquad V^2 = 2gr\left(\frac{1}{81.\mu'} + \frac{1}{60-\mu'}\right) \;;$$

$$V^2 = 2gr(0,0452676 + 0,016743) = 2gr(0,0620106) \;;$$

$$V = \sqrt{2gr}.\sqrt{0,0620106} = 2782^{m},92 \;;$$

$$\frac{a.\sqrt{2a}}{3.c^2.\sqrt{B}} = \frac{4m.\sqrt{m}}{3.\left(1-\frac{A}{B}\right)}.\sqrt{\frac{r}{8g}} = 81.\sqrt{60}.\sqrt{\frac{r}{8g}} \;.$$

$$\text{Log.}\frac{a.\sqrt{2a}}{3600.3c^2.\sqrt{B}} = 1,6954407 \;;$$

$$\text{Log.}\,c = 9,9973025 \;; \qquad c = \sin.(83^\circ.37'.10'') \;.$$

L'équation [52] donne

$$[53] \ldots\ldots \quad \frac{t.3c^2.\sqrt{B}}{a.\sqrt{2a}} = \Delta \sin.\varphi.\cos.\varphi - \Delta' \sin.\varphi'.\cos.\varphi' - q\left(1+\frac{A}{B}\right)$$
$$+\frac{2A}{B-A}\cdot\int_0^\psi \frac{d\varphi}{\Delta} + \left(\frac{B+A}{B-A}\right)\cdot\int_0^\psi \Delta\, d\varphi\,.$$

En appliquant ces formules au cas considéré dans le § III, nous aurons:

$\varphi = \frac{\pi}{2} - (82^\circ.34'.56'')$; $\varphi' = \frac{\pi}{2} - (3^\circ.43'.57'')$;

$\Delta = \cos.(7^\circ.22'.18'')$; $\Delta' = \cos.(82^\circ.36'.50'')$;

$\omega = 179^\circ.2'.4''$; $\omega' = 93^\circ.45'.49''$;

$\psi = \omega - \omega' = 85^\circ.16'.15''$.

$\Delta.\sin.\varphi.\cos.\varphi = -0,126955$; $\Delta'.\sin.\varphi'.\cos.\varphi' = -0,083510$;

$q = 0,129976$.

Par la Table IX de Legendre ;

$\int_0^\psi \frac{d\varphi}{\Delta} = 2,90157$; $\int_0^\psi \Delta\, d\varphi = 1,01166$;

$\frac{1}{40}\cdot\int_0^\psi \frac{d\varphi}{\Delta} = 0,072539$; $\frac{41}{40}\cdot\int_0^\psi \Delta\, d\varphi = 1,036951$.

Le second membre de l'équation [53] est donc égal à

$$-0,126955 + 0,083510 - 0,131581 + 0,072539 + 1,036951$$
$$= 0,934464\,.$$

Le temps t exprimé en heures sera donc

$$t = 49^h,641\,(0,934464) = 46^h,388\,.$$

Pour avoir la valeur de t requise pour parcourir le premier intervalle de *six* rayons terrestres, il faut faire

$\varphi = \frac{\pi}{2} + (18^\circ.26'.5'')$;

$\Delta = \cos.(35^\circ.56'.10'')$; $\quad$ Log. $\Delta = 9,908309$;

$\omega = 158^\circ.54'.30''$; $\quad$ $\omega' = 94^\circ.36'.25''$;

$\psi = \omega - \omega' = 64^\circ.18'.5''$; $\quad$ $q = 0,85304$;

$\Delta.\sin.\varphi.\cos.\varphi = -0,24290$; $\quad$ $q\left(1+\frac{A}{B}\right) = 0,86304$.

§ VII.

Analyse du cas, où $(A+B-C)^2 > 4AB$.

En posant

$$\frac{4AB}{(A+B-C)^2} = \sin.^2\theta ,$$

l'expression de Y donnée au § IV devient

$$Y = (y^2 + \text{tang.}\tfrac{1}{2}\theta)\left(y^2 + \frac{1}{\text{tang.}\frac{1}{2}\theta}\right) .$$

Nous supposons $\theta < 90^\circ$; le cas de $\theta = 90^\circ$ ayant été traité à part. Maintenant si l'on fait

$$y = \frac{\text{tang.}\varphi}{\sqrt{\text{tang.}\frac{1}{2}\theta}} ; \qquad c^2 = 1 - \text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\theta ,$$

l'on aura

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \sqrt{\text{tang.}\tfrac{1}{2}\theta}.\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2.\sin.^2\varphi}} .$$

Et l'équation [37] donnera

$$[54]\ldots\ldots\ldots \quad \frac{t.C.\sqrt{2}.\sqrt[4]{AB}}{A.a.\sqrt{a}} = \frac{-y.\sqrt{B}.\sqrt{Y}}{\sqrt{B}+y^2.\sqrt{A}}$$

$$+\frac{B}{A}.\sqrt{1-c^2}\int\frac{d\varphi}{\Delta}\left\{1+\sqrt{\frac{A}{B}}.\frac{\text{tang.}^2\varphi}{\sqrt{1-c^2}}\right\}$$

$$+\frac{(B+4C-A)}{A}.\sqrt{1-c^2}\int\frac{d\varphi}{\Delta}.\frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{A}{B}}.\frac{\text{tang.}^2\varphi}{\sqrt{1-c^2}}\right)} .$$

en faisant $\Delta = \sqrt{1-c^2.\sin.^2\varphi}$. Mais

$$(1-c^2)\int\frac{d\varphi.\text{tang.}^2\varphi}{\Delta}=\text{tang.}\varphi-\int d\varphi\,\Delta\ ;$$

partant nous avons

$$\frac{t.C.\sqrt{2}.\sqrt[4]{AB}}{A.a.\sqrt{a}}=\frac{-y.\sqrt{B}.\sqrt{Y}}{\sqrt{B}+y^2.\sqrt{A}}+\sqrt{\frac{B}{A}}.\frac{\Delta\,\text{tang.}\varphi}{1-c^2}$$

$$+\frac{B}{A}.\sqrt{1-c^2}\int\frac{d\varphi}{\Delta}-\sqrt{\frac{B}{A}}.\frac{1}{1-c^2}\int d\varphi\,\Delta$$

$$+\frac{(B+4C-A)}{A}(1-c^2)\int\frac{d\varphi\cos.^2\varphi}{\left[\sqrt{1-c^2}.\cos.^2\varphi+\sqrt{\frac{A}{B}}\sin.^2\varphi\right]\Delta}\ .$$

Soit

$$\frac{\sqrt{1-c^2}-\sqrt{\frac{A}{B}}}{\sqrt{1-c^2}}=n\ ,$$

l'on aura

$$\frac{(B+4C-A)}{A}(1-c^2)\int\frac{d\varphi\cos.^2\varphi}{\left(\sqrt{1-c^2}.\cos.^2\varphi+\sqrt{\frac{A}{B}}.\sin.^2\varphi\right)\Delta}$$

$$=\frac{(B+4C-A)}{A}.\sqrt{1-c^2}.\int\frac{d\varphi\cos.^2\varphi}{\Delta(1-n\sin.^2\varphi)}$$

$$=\frac{(B+4C-A)}{A}.\sqrt{1-c^2}.\int\frac{d\varphi}{\Delta}.\frac{1}{1-n\sin.^2\varphi}$$

$$+\frac{(B+4C-A)}{An}.\sqrt{1-c^2}.\int\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$-\frac{(B+4C-A)}{An}.\sqrt{1-c^2}.\int\frac{d\varphi}{\Delta(1-n\sin.^2\varphi)}$$

$$=\frac{(B+4C-A)}{A}.\sqrt{1-c^2}.\left(1-\frac{1}{n}\right).\int\frac{d\varphi}{\Delta(1-n\sin.^2\varphi)}$$

$$+\frac{(B+4C-A)}{An}.\sqrt{1-c^2}.\int\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$=-\frac{(B+4C-A)}{An}.\sqrt{\frac{A}{B}}.\int\frac{d\varphi}{\Delta(1-n\sin.^2\varphi)}$$

$$+\frac{(B+4C-A)}{An}.\sqrt{1-c^2}.\int\frac{d\varphi}{\Delta}\ .$$

Il suit de là que

$$[55] \ldots\ldots \quad \frac{t.C.\sqrt{2}.\sqrt[4]{AB}}{A.a.\sqrt{a}} = \frac{-y.\sqrt{B}.\sqrt{Y}}{\sqrt{B}+y^2.\sqrt{A}} + \sqrt{\frac{B}{A}}.\frac{\Delta\,\text{tang.}\varphi}{1-c^2}$$

$$-\sqrt{\frac{B}{A}}.\frac{1}{1-c^2}.\int \Delta\, d\varphi$$

$$+\left[\frac{B}{A}+\frac{(B+4C-A)}{An}\right].\sqrt{1-c^2}.\int\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$-\frac{(B+4C-A)}{An}.\sqrt{\frac{A}{B}}.\int\frac{d\varphi}{\Delta(1-n\sin.^2\varphi)}$$

$$+\textit{constante arbitraire.}$$

Nous avons

$$\sqrt{Y}=\frac{\Delta}{\cos.^2\varphi.\text{tang.}\frac{1}{2}\theta}\ ; \qquad y.\sqrt{Y}=\frac{\Delta\,\text{tang.}\varphi}{\cos.^2\varphi.(\text{tang.}\frac{1}{2}\theta)^{\frac{3}{2}}}\ ;$$

$$1+\sqrt{\frac{A}{B}}.y^2=1+\sqrt{\frac{A}{B}}.\frac{\text{tang.}^2\varphi}{\text{tang.}\frac{1}{2}\theta}\ ;$$

$$\frac{-y.\sqrt{Y}}{1+\sqrt{\frac{A}{B}}.y^2}=\frac{-\Delta\,\text{tang.}\varphi}{\cos.^2\varphi.\sqrt{\text{tang.}\frac{1}{2}\theta}\left\{\text{tang.}\frac{1}{2}\theta+\sqrt{\frac{A}{B}}.\text{tang.}^2\varphi\right\}}$$

$$=\frac{-\Delta\,\text{tang.}\varphi}{(\text{tang.}\frac{1}{2}\theta)^{\frac{3}{2}}\left\{1-n\sin.^2\varphi\right\}}\ .$$

L'on a donc, en faisant $\Delta'=\sqrt{1-c^2.\sin.^2\varphi'}$, et désignant par φ' la valeur de φ correspondante à $t=0$;

$$[56] \ldots \quad \frac{t.C.\sqrt{2}.\sqrt[4]{AB}}{A.a.\sqrt{a}} = \frac{n.\sqrt{\frac{A}{B}}}{1-c^2}.\left\{\frac{\Delta\sin.\varphi.\cos.\varphi}{1-n\sin.^2\varphi}-\frac{\Delta'\sin.\varphi'.\cos.\varphi'}{1-n\sin.^2\varphi'}\right\}$$

$$-\sqrt{\frac{B}{A}}.\frac{1}{(1-c^2)}\int_{\varphi'}^{\varphi}\Delta\, d\varphi$$

$$+\sqrt{1-c^2}\left\{\frac{B}{A}+\frac{(B+4C-A)}{nA}\right\}.\int_{\varphi'}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$-\sqrt{\frac{A}{B}}.\frac{(B+4C-A)}{nA}.\int_{\varphi'}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta(1-n\sin.^2\varphi)}\ .$$

Soit

$$\Delta'.\text{tang.}\varphi = \text{tang.}\omega\ ; \qquad \Delta.\text{tang.}\varphi' = \text{tang.}\omega'\ ;$$

$$q = \sin.\varphi'.\sin.\varphi.\sin.\psi\ ; \qquad q' = \cos.\varphi'.\cos.\varphi.\cos.\psi\ ;$$

$$\psi = \omega - \omega'\ ; \qquad k = (1-n)\left(1-\frac{c^2}{n}\right)\ ; \qquad \text{tang.}\Omega = \frac{-n.\sqrt{k}.q}{1-n+nq'}\ ,$$

l'on aura

$$\int_{\varphi'}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta} = \int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta}\ ; \qquad \int_{\varphi'}^{\varphi}\Delta\, d\varphi = -c^2 q + \int_0^{\psi} d\varphi\,\Delta\ ;$$

$$\int_{\varphi'}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta(1-n\sin.^2\varphi)} = +\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta(1-n\sin.^2\varphi)} - \frac{1}{\sqrt{k}}.\Omega\ .$$

Il suit de là que

$$[57]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{t.C.\sqrt{2}.\sqrt[4]{AB}}{A.a.\sqrt{a}} =$$

$$\frac{n.\sqrt{\frac{B}{A}}}{1-c^2}.\left\{\frac{\Delta\sin.\varphi.\cos.\varphi}{1-n\sin.^2\varphi} - \frac{\Delta'\sin.\varphi'.\cos.\varphi'}{1-n\sin.^2\varphi'}\right\}$$

$$+\sqrt{\frac{B}{A}}.\frac{c^2 q}{1-c^2} + \sqrt{\frac{A}{B}}.\frac{(B+4C-A)}{nA.\sqrt{k}}.\Omega$$

$$-\sqrt{\frac{B}{A}}.\frac{1}{1-c^2}\int_0^{\psi} d\varphi\,\Delta$$

$$+\sqrt{1-c^2}\left\{\frac{B}{A} + \frac{(B+4C-A)}{A}\right\}.\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$-\sqrt{\frac{A}{B}}.\frac{(B+4C-A)}{nA}.\left\{\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta(1-n\sin.^2\varphi)} - \int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta}\right\}.$$

Et comme nous avons

$$\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{(1-n\sin.^2\varphi)\Delta} = \int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta} - \int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\left(1-\frac{c^2}{n}.\sin.^2\varphi\right)\Delta} + \frac{1}{\sqrt{k}}.\Omega'\ .$$

en posant $\text{tang.}\,\Omega' = \sqrt{k}\cdot\frac{\text{tang.}\,\psi}{\Delta}$, il est évident, que l'équation [57] donne

$$[58] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{t.C.\sqrt{2}.\sqrt[4]{AB}}{A.a.\sqrt{a}} =$$

$$\frac{n.\sqrt{\frac{B}{A}}}{1-c^2}\cdot\left\{\frac{\Delta\sin.\varphi.\cos.\varphi}{1-n\sin.^2\varphi} - \frac{\Delta'\sin.\varphi'.\cos.\varphi'}{1-n\sin.^2\varphi'}\right\}$$

$$+\sqrt{\frac{B}{A}}\cdot\frac{c^2 q}{1-c^2} + \sqrt{\frac{A}{B}}\cdot\frac{(B+4C-A)}{nA.\sqrt{k}}(\Omega-\Omega')$$

$$-\frac{\sqrt{\frac{B}{A}}}{1-c^2}\cdot\int_0^{\psi} d\varphi\,\Delta + \sqrt{1-c^2}\left\{\frac{B}{A} + \frac{(B+4C-A)}{nA}\right\}\cdot\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$-\sqrt{\frac{A}{B}}\cdot\frac{(B+4C-A)}{nA}\cdot\left\{\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta} - \int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\left(1-\frac{c^2}{n}\sin.^2\varphi\right)\Delta}\right\};$$

où la relation entre les variables x et φ est donnée par l'équation

$$[59] \ldots\ldots \quad \text{tang.}\,\varphi = \sqrt[4]{\frac{B}{A}}\cdot\sqrt{\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\theta}\cdot\sqrt{\frac{x}{a-x}}\,.$$

§ VIII.

Application de ces formules au cas de

$$h > \frac{a.\sqrt{A}}{\sqrt{B}+\sqrt{A}}, \quad \text{et} \quad V = 0\,.$$

Nous faisons

$$a = 60.r\,; \qquad h = \mu'.r = 6,25.r\,;$$

$$C = A.\frac{a}{h} + \frac{Ba}{a-h} = A.\frac{60}{6,25} + \frac{B.60}{53,75}\,;$$

$$\sin.^2\theta = \frac{4AB}{\left(A+B-A.\frac{60}{6,25}-\frac{B.60}{53,75}\right)^2} = \frac{4.81}{\left(\frac{53,75}{6,25}+\frac{81.6,25}{53,75}\right)^2}\,;$$

$$\sin.^2\theta = \frac{4.81.(6,25.53,75)^2}{[(53,75)^2+81.86,25)^2]^2} ;$$

$$\sin.\theta = \frac{18.6,25.53,75}{(53,75)^2+81.(6,25)^2} = \frac{6046,88}{6053,14} ;$$

$\text{Log.}\sin.\theta = 9,9995503$; $\theta = 87°.23'.40''$;

$\frac{1}{2}\theta = 43°.41'.50''$; $\text{Log.}\tang.\frac{1}{2}\theta = 9,9802434$;

$c^2 = 1 - 0,913034 = 0,086966$; $\text{Log.}\sqrt{1-c^2} = 9,9802434$;

$n = 1 - \frac{1}{9.\sqrt{1-c^2}} = 0,883728$; $\text{Log.}n = 9,9463137$;

$\text{Log.}\frac{c^2}{n} = 9,1447074$; $\frac{c^2}{n} = 0,139543$;

$k = (1-n)\left(1-\frac{c^2}{n}\right) = 0,883728.0,901591$;

$\text{Log.}k = 9,9013233$; $\text{Log.}\sqrt{k} = 9,9506616$;

$\text{Log.}c^2 = 8,9393495$; $\text{Log.}c = 9,4696747$;

$c = \sin.(17°.9'.6'')$;

$\tang.\varphi' = 3.\sqrt{\tang.\frac{1}{2}\theta}.\sqrt{\frac{6,25}{53,75}}$; $\varphi' = 44°.21'.53''$;

$\tang.\varphi = 3.\sqrt{\tang.\frac{1}{2}\theta}.\sqrt{\frac{53,75}{6,25}}$; $\varphi = 83°.12'.58''$;

$\text{Log.}\Delta = 9,9805319$; $\text{Log.}\Delta' = 9,9905708$;

$\omega = 83°.4'.7''$; $\omega' = 43°.3'.54''$; $\psi = 40°.0'.13''$;

$\text{Log.}\sin.\psi = 9,8081001$; $\text{Log.}\cos.\psi = 9,8842303$;

$\text{Log.}q = 9,6495351$; $\text{Log.}q' = 8,8109422$;

$\sqrt{\frac{B}{A}}.\frac{c^2q}{1-c^2} = 0,382508$; $nq' = 0,0571815$;

$1-n+nq' = 0,1734635$; $\text{Log.}\tang.\psi = 9,9238660$;

$\Omega = 116°.14'.8''$; $\text{Log.}\tang.\Omega = 0,3073036$;

$\Omega' = 38°.4'.33''$;

$$\Omega - \Omega' = 78^\circ . 9' . 35'' = 1,3641445 \ldots \text{Log.}(0,1348602) \; ;$$

$$\frac{B+4C-A}{A} = \frac{233,75}{6,25} + 81 . \frac{293,75}{53,75} = 480,074 \; ;$$

$$\text{Log.} \frac{(B+4C-A)}{nA} = 2,7349943 \; ;$$

$$\text{Log.} \sqrt{\frac{A}{B}} . \frac{(B+4C-A)}{nA.\sqrt{k}} = 1,4302902 \; ;$$

$$\sqrt{\frac{A}{B}} . \frac{(B+4C-A)}{nA.\sqrt{k}} . (\Omega - \Omega') = 36,7310 \; ;$$

$$\text{Log.} \sqrt{\frac{B}{A}} . \frac{1}{1-c^2} = 0,9937557 \; ;$$

$$\text{Log.} \sqrt{1-c^2} . \left\{ \frac{B}{A} + \frac{(B+4C-A)}{nA} \right\} = 2,7790804 \; ;$$

$$\text{Log.} \sqrt{\frac{A}{B}} . \frac{(B+4C-A)}{nA} = 1,7807518 \; ;$$

$$\text{Log.} n . \sqrt{\frac{B}{A}} . \frac{1}{1-c^2} = 9,9400694 \; .$$

$$\text{Log.} \; \Delta \sin. \varphi . \cos. \varphi = 9,0498215 \; ; \quad \text{Log.} \, n \sin.^2 \varphi = 9,9402111 \; ;$$

$$\text{Log.} \frac{\Delta \sin. \varphi . \cos. \varphi}{1 - n \sin.^2 \varphi} = 9,9405400 \; ;$$

$$\frac{\sqrt{\frac{B}{A}}}{1-c^2} . \frac{\Delta \sin. \varphi . \cos. \varphi}{1 - n \sin.^2 \varphi} = 0,759644 \; ;$$

$$\text{Log.} \; \Delta' \sin. \varphi' . \cos. \varphi' = 9,6894281 \; ; \quad \text{Log.} \, n \sin.^2 \varphi' = 9,6352863 \; ;$$

$$\text{Log.} \frac{\Delta' \sin. \varphi' . \cos. \varphi'}{1 - n \sin.^2 \varphi'} = 9,9349269 \; ;$$

$$\frac{\sqrt{\frac{B}{A}}}{1-c^2} . \frac{\Delta' \sin. \varphi' . \cos. \varphi'}{1 - n \sin.^2 \varphi'} = 0,749890 \; .$$

La Table IX de Legendre donne

$$\int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\Delta} = 0,7026817 \ldots\ldots \quad \text{Log. } 9,8467584 \; ;$$

$$\int_0^{\psi} d\varphi\,\Delta = 0,6936328 \ldots\ldots \text{Log. } 9,8411297 \; ;$$

$$\sqrt{\frac{B}{A}} \cdot \frac{1}{1-c^2} \cdot \int_0^{\psi} d\varphi\,\Delta = 6,8373 \; ;$$

$$\sqrt{1-c^2} \cdot \left\{ \frac{B}{A} + \frac{(B+4C-A)}{nA} \right\} \cdot \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\Delta} = 418,650 \; ;$$

$$\int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\Delta\left(1-\frac{c^2}{n}\sin.^2\varphi\right)} = \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\Delta} + \frac{c^2}{n} \cdot \int_0^{\psi} \frac{d\varphi.\sin.^2\varphi}{\Delta} \; ;$$

$$\int_0^{\psi} \frac{d\varphi.\sin.^2\varphi}{\Delta} = \frac{1}{c^2} \cdot \left(\int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\Delta} - \int_0^{\psi} d\varphi\,\Delta \right) = \frac{0,0090489}{c^2} \; ;$$

$$\sqrt{\frac{A}{B}} \cdot \frac{(B+4C-A)}{nA} \cdot \frac{c^2}{n} \cdot \int_0^{\psi} \frac{d\varphi.\sin.^2\varphi}{\Delta} = 0,61806 \; ;$$

$$\frac{C}{A} = \frac{60}{6,25} + \frac{81.60}{53,75} \; ; \qquad \frac{C}{6.A} = 10.\left(\frac{1}{6,25} + \frac{81}{53,75}\right) \; ;$$

$$\frac{C}{A} \cdot \frac{\sqrt{2}.\sqrt[4]{AB}}{a.\sqrt{a}} = \frac{C}{A} \cdot \frac{1}{6.60.\sqrt{60}.\sqrt{\frac{r}{8g}}} = \frac{C}{A.794360} \; ;$$

$$\text{Log. } \frac{A.a.\sqrt{a}}{C.\sqrt{2}.\sqrt[4]{AB}} \cdot \frac{1}{3600} = 0,3398101 \; ; \qquad \text{Nombre } 2^h,1868 \; .$$

La formule [58] donne donc (en heures)

$$t = 2^h,1868 \left\{ \begin{array}{l} 0,759644 - 0,749890 + 0,382508 + 36,731 \\ -6,8373 + 418,650 - 0,618 = 449,554 \end{array} \right\} ;$$

$$t = 983^h,08 \; .$$

On a vu dans le § II que, par la seule action de la Terre, cet espace serait parcouru en $98^h, 562$.

Si on voulait exécuter ce calcul avec la valeur de la différence

$$\int_0^\psi \frac{d\varphi}{(1-n\sin.^2\varphi)\Delta} - \int_0^\psi \frac{d\varphi}{\Delta},$$

qu'on voit dans le dernier terme du second membre de l'équation [57], il faudrait observer, que le paramètre n est immédiatement réductible à la forme de ceux qu'on nomme *circulaires*: car, en posant $1-c^2=b^2$, et $\sin.^2\alpha = b^{-3}.\sqrt{\frac{A}{B}}$, l'on a $n=1-b^2.\sin.^2\alpha$. De sorte que, nos valeurs numeriques donnent;

$$\alpha = 20^\circ.\,54'.\,30'' \;; \qquad c = \sin.\,17^\circ.\,9'.\,0'' \;; \qquad b = \sin.\,(72^\circ.\,51'.\,0'')\,.$$

Donc, en faisant $\Delta' = \sqrt{1-b^2.\sin.^2\varphi}$

$$F'(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta} \;; \qquad F'(b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta'} \;; \qquad E'(b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\Delta' \;;$$

$$F(c,\psi) = \int_0^\psi \frac{d\varphi}{\Delta} \;; \qquad F(c,\alpha) = \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\Delta} \;; \qquad F(b,\alpha) = \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\Delta'} \;;$$

$$E(b,\alpha) = \int_0^\alpha d\varphi\,\Delta' \;; \qquad \mathrm{a} = \frac{F(c,\psi)}{F'(c)} \;; \qquad \mathrm{a}' = \frac{F(c,\alpha)}{F'(c)} \;;$$

$$q = e^{-\pi.\frac{F'(b)}{F'(c)}} \;; \qquad r = e^{-\pi.\frac{F'(c)}{F'(b)}} \;;$$

$$\text{tang.}\,\Omega_{(1)} = \frac{q(q^{-\mathrm{a}'}-q^{\mathrm{a}'})\sin.\pi\mathrm{a} - q^4(q^{-2\mathrm{a}'}-q^{2\mathrm{a}'})\sin.\,2\pi\mathrm{a} + \text{etc.}}{1-q(q^{-\mathrm{a}'}+q^{\mathrm{a}'})\cos.\pi\mathrm{a} + q^4(q^{-2\mathrm{a}'}+q^{2\mathrm{a}'})\cos.\,2\pi\mathrm{a} - \text{etc.}},$$

nous avons, d'après la formule [75], posée à la page 146 du Tome 3.ème du Traité de Legendre,

$$\int_0^\psi \frac{d\varphi}{(1-n\sin.^2\varphi)\Delta} - \int_0^\psi \frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{k}}.\left\{\text{arc. tang.} = \left[\frac{\sqrt{1-c^2.\sin.^2\psi}}{\cot.\psi}.\frac{1-n}{\sqrt{k}}\right] - \Omega_{(1)}\right\}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{k}}.\left\{\left(1-\frac{E'(b)}{F'(b)}\right)F(b,\alpha) - E(b,\alpha)\right\}F(c,\psi)\,.$$

À l'aide des Tables I et IX du même Auteur, et de la Table des *Logarithmes Tabulaires* de $\frac{1}{q}$, que j'ai publiée, on obtient

$$\text{Log.}\, F'(c) = 0,2059402 \; ; \qquad \text{Log.}\, F'(b) = 0,4222734 \; ;$$

$$\text{Log.}\, E'(b) = 0,0389780 \; ;$$

$$F(c, \alpha) = 0,3654479 \; ; \qquad F(b, \alpha) = 0,3723654 \; ;$$

$$E(b, \alpha) = 0,3574458 \; ;$$

$$\mathrm{a} = 0,43734 \; ; \qquad \mathrm{a}' = 0,22745 \; ; \qquad \pi\mathrm{a} = 78^\circ,72 \; ;$$

$$\text{Log.}\, q = 7,7547347 \; ; \qquad \text{Log.}\, r = 9,1709108 \; .$$

Cette valeur de q étant beaucoup plus petite que la valeur de r, on doit, dans ce cas, préférer la formule [75] à la formule [78], conformément au précepte exprimé par LEGENDRE à la page 152 du Tome cité.

Sur cela, je dois faire remarquer, que, pour évaluer de la même manière la transcendante elliptique de troisième espèce, qui entre dans le second membre de l'équation [48], il conviendra, en général, d'employer l'équation (Voyez la page 144 du même Tome 3.ème):

$$\int_0^\lambda \frac{d\varphi}{\left(1 + \frac{c^2}{n}\sin.^2\varphi\right)\Delta} = \frac{\Omega_{(2)}}{\sqrt{k}} + \left(\frac{n}{n+c^2} - \frac{b^2}{k}\right)\int_0^\lambda \frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$- \frac{b^2}{k} \cdot \left\{ \int_0^\lambda \frac{d\varphi}{(1 - n'\sin.^2\varphi)\Delta} - \int_0^\lambda \frac{d\varphi}{\Delta} \right\} ;$$

après avoir fait: $b^2 = 1 - c^2$; $\frac{1}{n} = \text{tang.}^2\alpha$; $n' = 1 - b^2\sin.^2\alpha$;

$$\text{tang.}\, \Omega_{(2)} = \frac{\sqrt{1 - c^2 . \sin.^2\lambda}}{\cot.\lambda} \cdot \sqrt{\frac{n + c^2}{n(n+1)}} \; .$$

Alors la partie qui ne peut pas être calculée par les Tables I et IX des transcendantes elliptiques, pourra être évaluée avec toute la précision que l'on voudra par la série analogue qui donne la valeur de tang. $\Omega_{(1)}$.

§ IX.

Analyse du cas, où $\frac{A}{h}+\frac{B}{a-h}<\frac{1}{2}V^2$.

Dans ce cas la valeur de $\frac{C}{a}$ exprimée par l'équation [3] est *négative*. En changeant le signe de $\frac{C}{a}$, et écrivant

$$[3]' \ldots\ldots\ldots \qquad \frac{C}{a}=\frac{1}{2}V^2-\frac{A}{h}-\frac{B}{a-h},$$

l'équation [4] devient

$$[4]' \ldots\ldots \qquad \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}v^2=\frac{A}{x}+\frac{B}{a-x}+\frac{C}{a}.$$

Et l'équation [5] devient

$$[5]'\ldots \quad \frac{t.\sqrt{2}}{\sqrt{a}}=\int\frac{dx.x(a-x)}{\sqrt{x(a-x)[Aa^2+(B-A+C)ax-Cx^2]}}.$$

Maintenant, si l'on fait

$$[6]' \ldots\ldots\ldots \qquad x=\frac{M}{1+y^2};$$

et si l'on détermine M d'après l'équation

$$[7]' \ldots\ldots\ldots \quad M^2-(B-A+C)\cdot\frac{aM}{C}-\frac{Aa^2}{C}=0,$$

en posant

$$[8]' \ldots\ldots \quad Y=(a-M+ay^2)(Aa^2+CM^2+Aa^2y^2),$$

l'on aura

$$\frac{t.\sqrt{2}}{2M.\sqrt{M}.\sqrt{a}}=-\int\frac{dy(a-M+ay^2)}{(1+y^2)^2.\sqrt{Y}};$$

c'est-à-dire

$$[9]'\ldots \quad \frac{t.\sqrt{2}}{2M.\sqrt{M}.\sqrt{a}}=M\int\frac{dy}{(1+y^2)^2.\sqrt{Y}}-a\int\frac{dy}{(1+y^2).\sqrt{Y}}.$$

Cela posé, si nous faisons

$$[10]' \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} q^2 = \dfrac{M-a}{a} \; ; \\ p^2 = \dfrac{Aa^2}{Aa^2 + CM^2} \; ; \end{cases}$$

l'on aura

$$Y' = (y^2 - q^2)(1 + p^2 y^2) \; ;$$

$$Y = \frac{Aa^3}{p^2} \cdot Y' \; ;$$

$$\frac{1}{\sqrt{Y}} = \frac{p}{a.\sqrt{a}.\sqrt{A}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y'}} \; ;$$

$$\frac{t.a.\sqrt{A}}{M^2.\sqrt{2M}.p} = \int \frac{dy}{(1+y^2)^2.\sqrt{Y'}} - \frac{a}{M} \cdot \int \frac{dy}{(1+y^2).\sqrt{Y'}} \; .$$

En multipliant les deux membres de cette équation par

$$2(1-p^2) + 2(1+p^2)q^2 \; ,$$

et ajoutant de part et d'autre $\dfrac{y.\sqrt{Y'}}{1+y^2}$, nous aurons

$$\frac{t.\sqrt{2}.a.\sqrt{A}.\{(1-p^2)+(1+p^2)q^2\}}{M^2.\sqrt{M}.p} + \frac{y.\sqrt{Y'}}{1+y^2}$$

$$= \frac{y.\sqrt{Y'}}{1+y^2} + 2\{(1-p^2)+(1+p^2)q^2\}\int \frac{dy}{(1+y^2)^2.\sqrt{Y'}}$$

$$- \frac{2a}{M}\{(1-p^2)+(1+p^2)q^2\}\int \frac{dy}{(1+y^2).\sqrt{Y'}} \; .$$

Mais on sait que

$$\frac{y.\sqrt{Y'}}{1+y^2} + 2\{(1-p^2)+q^2(1+p^2)\}\int \frac{dy}{(1+y^2)^2.\sqrt{Y'}}$$

$$= \{2 + q^2 - p^2(3+2q^2)\}\int \frac{dy}{(1+y^2).\sqrt{Y'}} + p^2 \cdot \int \frac{dy(1+y^2)}{\sqrt{Y'}} \; .$$

Donc en substituant et remarquant que $\dfrac{2a}{M} = \dfrac{2}{1+q^2}$, l'on aura

$$\frac{t.\sqrt{2}.a.\sqrt{A}\{(1-p^2)+(1+p^2)q^2\}}{M^2.\sqrt{M}.p}+\frac{y.\sqrt{Y'}}{1+y^2}$$

$$=\left\{2+q^2-p^2(3+2q^2)-\frac{2}{1+q^2}\left(1+q^2-p^2(1-q^2)\right)\right\}.\int\frac{dy}{(1+y^2).\sqrt{Y'}}$$

$$+p^2.\int\frac{dq(1+y^2)}{\sqrt{Y'}}$$

$$=\left\{q^2-p^2(3+2q^2)+2p^2\frac{(1-q^2)}{1+q^2}\right\}.\int\frac{dy}{(1+y^2).\sqrt{Y'}}$$

$$+p^2.\int\frac{dq(1+y^2)}{\sqrt{Y'}}.$$

Et comme $\frac{1}{1+y^2}=1-\frac{y^2}{1+y^2}$, nous écrirons

$$\frac{t.\sqrt{2}.a.\sqrt{A}\{(1-p^2)+(1+p^2)q^2\}}{M^2.\sqrt{M}.p}+\frac{y.\sqrt{Y'}}{1+y^2}$$

$$=\left\{q^2-2p^2(1+q^2)+\frac{2p^2(1-q^2)}{1+q^2}\right\}\int\frac{dy}{\sqrt{Y'}}+p^2.\int\frac{y^2dy}{\sqrt{Y'}}$$

$$-\left\{q^2-p^2(3+2q^2)+2p^2\frac{(1-q^2)}{1+q^2}\right\}.\int\frac{dy}{\sqrt{Y'}.\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}$$

$$=q^2\left\{1-\frac{2p^2(3+q^2)}{1+q^2}\right\}.\int\frac{dy}{\sqrt{Y'}}+p^2.\int\frac{y^2dy}{\sqrt{Y'}}$$

$$-\left\{q^2-p^2(3+2q^2)+\frac{2p^2(1-q^2)}{1+q^2}\right\}.\int\frac{dy}{\sqrt{Y'}.\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}.$$

En faisant pour plus de simplicité;

$$G=\frac{\sqrt{2}.a.\sqrt{A}\{1+q^2+p^2(q^2-1)\}}{M^2.\sqrt{M}.p};$$

$$H=q^2\left\{1-\frac{2p^2(3+q^2)}{1+q^2}\right\};$$

$$H'=q^2-p^2(3+2q^2)+\frac{2p^2(1-q^2)}{1+q^2};$$

l'on aura

$$[11]'\ldots\ Gt=\frac{-y.\sqrt{Y'}}{1+y^2}+H.\int\frac{dy}{\sqrt{Y'}}+p^2.\int\frac{y^2dy}{\sqrt{Y'}}-H'.\int\frac{dy}{\sqrt{Y'}.\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}.$$

Maintenant si l'on fait

$$y=\frac{q}{\cos.\varphi}\ ;\qquad c^2=\frac{1}{1+p^2q^2}\ ;\qquad \Delta=\sqrt{1-c^2.\sin.^2\varphi}\ ,$$

l'on aura

$$\frac{dy}{\sqrt{Y'}}=c.\frac{d\varphi}{\Delta}\ ;\qquad p^2.\int\frac{y^2dy}{\sqrt{Y'}}=p^2q^2.c\int\frac{d\varphi}{\Delta\cos.^2\varphi}\ ;$$

$$p^2.\int\frac{y^2dy}{\sqrt{Y'}}=\frac{p^2q^2.c}{1-c^2}.\Delta\,\text{tang.}\varphi+cp^2q^2\int\frac{d\varphi}{\Delta}-\frac{cp^2q^2}{1-c^2}\int\Delta d\varphi\ :$$

$$\frac{y.\sqrt{Y'}}{1+y^2}=\frac{q^2}{c}.\frac{\Delta\,\text{tang.}\varphi}{q^2+\cos.^2\varphi}\ ;$$

$$Gt=-\frac{q^2}{c}.\frac{\Delta\,\text{tang.}\varphi}{q^2+\cos.^2\varphi}+\frac{p^2q^2c}{1-c^2}.\Delta\,\text{tang.}\varphi$$

$$+(cH+cp^2q^2)\int\frac{d\varphi}{\Delta}-\frac{cp^2q^2}{1-c^2}\int\Delta d\varphi-cH'.\int\frac{d\varphi}{\Delta\left(1+\frac{\cos.^2\varphi}{q^2}\right)}\ ;$$

$$[12]'\ldots\ldots\qquad Gt=\Delta\,\text{tang.}\varphi\left\{\frac{cp^2q^2}{1-c^2}-\frac{q^2}{c(q^2+\cos.^2\varphi)}\right\}$$

$$+(cH+cp^2q^2)\int\frac{d\varphi}{\Delta}-\frac{cp^2q^2}{1-c^2}\int\Delta d\varphi-\frac{cH'q^2}{1+q^2}.\int\frac{d\varphi}{\Delta\left(1-\frac{\sin.^2\varphi}{1+q^2}\right)}.$$

En désignant par φ' la valeur initiale de φ nous aurons donc

$$[13]'\ldots\ Gt=\frac{cp^2q^2}{1-c^2}(\Delta\,\text{tang.}\varphi-\Delta'\,\text{tang.}\varphi')-\frac{q^2}{c}.\left\{\frac{\Delta\,\text{tang.}\varphi}{q^2+\cos.^2\varphi}-\frac{\Delta'\text{tang.}\varphi'}{q^2+\cos.^2\varphi'}\right\}$$

$$+(cH+cp^2q^2)\left\{\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}-\int_0^{\varphi'}\frac{d\varphi}{\Delta}\right\}-\frac{cp^2q^2}{1-c^2}.\left\{\int_0^{\varphi}\Delta d\varphi-\int_0^{\varphi'}\Delta d\varphi\right\}$$

$$-\frac{cH'q^2}{1+q^2}.\left\{\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-n\sin.^2\varphi)\Delta}-\int_0^{\varphi'}\frac{d\varphi}{(1-n\sin.^2\varphi)\Delta}\right\}\ ;$$

où $n=\frac{1}{1+q^2}$; $\Delta'=\sqrt{1-c^2.\sin.^2\varphi'}$.

Nous avons

$$1-c^2=\frac{p^2q^2}{1+p^2q^2}=p^2q^2c^2\ ; \qquad \frac{cp^2}{1-c^2}=\frac{1}{q^2}\ ;$$

partant l'équation [13]′ donne

$$[14]'\ldots\quad Gt=\frac{q^2}{c}\cdot\left\{\frac{\Delta\sin.\varphi.\cos.\varphi}{q^2+\cos.^2\varphi}-\frac{\Delta'\sin.\varphi'.\cos.\varphi'}{q^2+\cos.^2\varphi'}\right\}$$

$$-c\left\{H+p^2q^2\right\}\left\{\int_0^{\varphi'}\frac{d\varphi}{\Delta}-\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}\right\}+\frac{1}{c}\cdot\left\{\int_0^{\varphi'}d\varphi\,\Delta-\int_0^{\varphi}d\varphi\,\Delta\right\}$$

$$+\frac{cH'q^2}{1+q^2}\cdot\left\{\int_0^{\varphi'}\frac{d\varphi}{(1-n\sin.^2\varphi)\Delta}-\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-n\sin.^2\varphi)\Delta}\right\}.$$

Puisque $c=\frac{1}{\sqrt{1+p^2q^2}}$, si l'on fait $pq=\text{tang.}\beta$, l'on aura

$$c=\cos.\beta=\sin.\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right).$$

Soit

$$\Delta\,\text{tang.}\varphi'=\text{tang.}\omega'\ ; \qquad \Delta'\,\text{tang.}\varphi=\text{tang.}\omega\ ; \qquad \psi=\omega'-\omega\ ;$$

l'on aura

$$\int_0^{\varphi'}\frac{d\varphi}{\Delta}-\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}=\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta}\ ;$$

$$\int_0^{\varphi'}d\varphi\,\Delta-\int_0^{\varphi}d\varphi\,\Delta=\int_0^{\psi}d\varphi\,\Delta-c^2.\sin.\varphi'.\sin.\varphi.\sin.\psi\ ;$$

partant l'équation [14]′ donne

$$[15]'\ldots\ldots\quad Gt=\frac{-q^2}{2c}\cdot\left\{\frac{\Delta'\sin.2\varphi'}{q^2+\cos.^2\varphi'}-\frac{\Delta\sin.2\varphi}{q^2+\cos.^2\varphi}\right\}-c.\sin.\varphi'.\sin.\varphi.\sin.\psi$$

$$-c(H+p^2q^2)\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta}+\frac{1}{c}\int_0^{\psi}d\varphi\,\Delta$$

$$+\frac{cH'q^2}{1+q^2}\cdot\left\{\int_0^{\varphi'}\frac{d\varphi}{(1-n\sin.^2\varphi)\Delta}-\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-n\sin.^2\varphi)\Delta}\right\}.$$

Nous avons

$$[16]'\ldots\quad \frac{1}{G}=\frac{p.a.\sqrt{a}}{\sqrt{2A}}\cdot\frac{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}}{1-\frac{p^2(1-q^2)}{1+q^2}}=\frac{p}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{B}{A}}\cdot\frac{a.\sqrt{a}}{\sqrt{B}}\cdot\frac{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}}{1-\frac{p^2(1-q^2)}{1+q^2}}.$$

Soit $n=\frac{1}{1+q^2}=c^2.\sin.^2\theta$, l'on aura (en observant que $p^2<1$):

$$\sin.\theta=\sqrt{\frac{1+p^2q^2}{1+q^2}}\ ;\qquad \tang.\theta=\frac{\sqrt{1+p^2q^2}}{q.\sqrt{1-p^2}}\ ;$$

$$\Delta''=\sqrt{1-c^2.\sin.^2\theta}\ ;\qquad \frac{\tang.\theta}{2\Delta''}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{(1+p^2q^2)(1+q^2)}}{q^2.\sqrt{1-p^2}}.$$

D'après la formule posée dans la page 77 du 1.er Vol. de Legendre (en y changeant le signe de ψ) l'on a:

$$[17]'\ldots\ldots\int_0^{\varphi'}\frac{d\varphi}{(1-n\sin.^2\varphi)\Delta}-\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-n\sin.^2\varphi)\Delta}$$

$$=\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{(1-n\sin.^2\varphi)\Delta}+\frac{1}{2q^2}\cdot\sqrt{\frac{(1+p^2q^2)(1+q^2)}{1-p^2}}\,\mathrm{Log.}\left(\frac{1-c^2u'}{1-c^2u''}\right);$$

où l'on a;

$$u'=\sin.\theta.\sin.\varphi'.\sin.\psi.\sin.\Omega'\ ;\qquad u''=\sin.\theta.\sin.\varphi'.\sin.\psi.\sin.\Omega''\ ;$$

$$\tang.\lambda=\Delta.\tang.\theta\ ;\quad \tang.\lambda'=\Delta''.\tang.\varphi\ ;\quad \Omega'=\lambda-\lambda'\ ;\quad \Omega''=\lambda+\lambda'\ ;$$

$$H+p^2q^2=q^2\left\{1-\frac{p^2.(5+q^2)}{1+q^2}\right\}.$$

La combinaison des deux équations [15]′ et [17]′ donne

$$[18]'\ldots\quad Gt=\frac{-q^2}{2c}\cdot\left\{\frac{\Delta'\sin.2\varphi'}{q^2+\cos.^2\varphi'}-\frac{\Delta\sin.2\varphi}{q^2+\cos.^2\varphi}\right\}-c\sin.\varphi'.\sin.\varphi.\sin.\psi$$

$$+\frac{1}{c}\int_0^{\psi}d\varphi\Delta-c(H+p^2q^2)\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$+\frac{cH'q^2}{2(1+q^2)}\cdot\frac{\sqrt{(1+p^2q^2)(1+q^2)}}{q^2.\sqrt{1-p^2}}\,\mathrm{Log.}\left(\frac{1-c^2u'}{1-c^2u''}\right)$$

$$+\frac{cH'q^2}{1+q^2}\cdot\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{(1-n\sin.^2\varphi)\Delta}.$$

L'équation [7]′ donne

$$M=\frac{a(B-A+C)}{2C}+\frac{a}{2C}\cdot\sqrt{4AC+(B-A+C)^2}\ .$$

Puisque $C>0$ et $B>A$ (par hypothèse), il est facile de démontrer que $M>a$. Car nous avons

$$M=\frac{a}{2}\cdot\left(\frac{B-A+C}{C}\right)\left\{1+\sqrt{1+\frac{4AC}{(B-A+C)^2}}\right\}\ ;$$

$$M=a\cdot\left(1+\frac{B-A}{C}\right)\left\{1+\frac{1}{2}\cdot\left[\sqrt{1+\frac{4AC}{(B-A+C)^2}}-1\right]\right\}\ ;$$

ou bien

$$M=a+a\left(\frac{B-A}{C}\right)+\frac{a}{2}\cdot\left(1+\frac{B-A}{C}\right)\left\{\sqrt{1+\frac{4AC}{(B-A+C)^2}}-1\right\}\ ;$$

et par conséquent $M>a$, puisque $B-A>0$, $C>0$.

Nous avons donc

$$[19]'\ldots\left\{\begin{array}{l} q^2=-\frac{1}{2}+\frac{A}{2C}\cdot\left(\frac{B}{A}-1\right)+\frac{A}{2C}\cdot\sqrt{\frac{4C}{A}+\left(\frac{B}{A}-1+\frac{C}{A}\right)^2}\ ; \\ \frac{1}{p^2}=1+\frac{CM^2}{Aa^2}=1+\frac{C}{A}(1+q^2)^2\ ; \end{array}\right.$$

$$\sin.\theta=\frac{1}{\cos.\beta.\sqrt{1+q^2}}\ .$$

L'équation [18]′ peut être écrite plus simplement;

$$[20]'\ldots\ldots\quad Gt=\frac{-q^2}{2c}\cdot\left\{\frac{\Delta'\sin.2\varphi'}{q^2+\cos.^2\varphi'}-\frac{\Delta\sin.2\varphi}{q^2+\cos.^2\varphi}\right\}$$

$$-c\sin.\varphi'.\sin.\varphi.\sin.\psi+\frac{H'}{2.\sqrt{(1-p^2)(1+q^2)}}\,\mathrm{Log.}\left(\frac{1-c^2u'}{1-c^2u''}\right)$$

$$+\frac{1}{c}\cdot\int_0^{\psi}d\varphi\,\Delta-c(H+p^2q^2)\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta}+\frac{cH'q^2}{1+q^2}\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{(1-n\sin.^2\varphi)\Delta}\ .$$

Pour évaluer la transcendante elliptique, *non complète*, de troisième espèce, dont le paramètre $n=c^2.\sin.^2\theta$ est *logarithmique*, on a d'abord la formule;

$$[21]' \ldots\ldots\ldots \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1-n\sin.^2\varphi)\Delta} - \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta} =$$

$$\frac{\text{tang.}(\theta)}{\Delta(\theta)} \cdot \left\{ E(c,\theta) - \frac{E^1(c)}{F^1(c)} \cdot F(c,\theta) \right\} F(c,\varphi)$$

$$- \frac{2\,\text{tang.}\,\theta}{\Delta(\theta)} \cdot \sum_1^{\infty} \cdot \frac{q^i}{i(1-q^{2i})} \sin. \left\{ i\pi \cdot \frac{F(c,\theta)}{F^1(c)} \right\} \sin. \left\{ i\pi \cdot \frac{F(c,\varphi)}{F^1(c)} \right\} ;$$

où l'on a: $\Delta(\theta) = \sqrt{1 - b^2 . \sin.^2\theta}$; $\quad b^2 = 1 - c^2$;

$$E(c,\theta) = \int_0^{\theta} d\varphi\,\Delta \; ; \qquad E^1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,\Delta \; ; \qquad F^1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta} \; ;$$

$$F^1(b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - b^2 . \sin.^2\varphi}} \; ; \quad F(c,\theta) = \int_0^{\theta} \frac{d\varphi}{\Delta} \; ; \quad F(c,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta} \; ;$$

$$q = e^{-\pi . \frac{F^1(b)}{F^1(c)}} .$$

Je la trouve, à l'aide des équations [49], et [87], données par LEGENDRE aux pages 132 et 154 du Tome 3.ème du Traité des Fonctions Elliptiques. En effet, si l'on fait

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta} \cdot E(c,\varphi) = \Upsilon(c,\varphi) \; ,$$

on aura, en multipliant par $dx = \frac{\pi}{2F^1(c)} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta}$, le second membre de l'équation [49], et intégrant ensuite depuis $\varphi = 0$ et $x = 0$;

$$[22]' \ldots \quad \Upsilon(c,\varphi) = \frac{E^1(c)[F(c,\varphi)]^2}{2F^1(c)} + 4 . \sum_1^{\infty} \cdot \frac{q^i}{i(1-q^{2i})} \sin.^2 \left\{ i . \frac{\pi}{2} \cdot \frac{F(c,\varphi)}{F^1(c)} \right\} ;$$

où le signe $. \sum_1^{\infty} .$ indique qu'on doit faire $i = 1, 2, 3 \ldots\ldots \infty$, et prendre la totalité des termes ainsi formés. Donc, en employant cette formule pour obtenir la valeur de la différence $-\frac{1}{2}\Upsilon(c,\varphi'') + \frac{1}{2}\Upsilon(c,\varphi')$, qu'on

voit dans le second membre de l'équation [87], et observant que l'on a, en général:

$$\sin.^2 A - \sin.^2 B = \sin.(A+B).\sin.(A-B) \ ,$$

on aura l'équation [21]'.

La combinaison des deux équations [21]' et [22]' fait voir, que, dans le cas particulier de $\varphi = \theta$, on a l'égalité

$$[23]'\ldots \tfrac{1}{2}\Upsilon(c,\theta_2) = E(c,\theta).F(c,\theta) - \frac{\Delta(\theta)}{\text{tang.}\,\theta}\cdot\left\{\int_0^\theta \frac{d\varphi}{(1-n\sin.^2\varphi)\Delta} - \int_0^\theta \frac{d\varphi}{\Delta}\right\},$$

pourvu que l'amplitude θ_2 soit déterminée conformément à l'équation $F(c,\theta_2) = 2F(c,\theta)$; c'est-à-dire par l'équation

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\theta_2 = \text{tang.}\,\theta.\sqrt{1-c^2.\sin.^2\theta} \ ,$$

de laquelle on tire

$$\sin.\theta = \frac{\sqrt{2}.\sin.\tfrac{1}{2}\theta_2}{\sqrt{1+c\sin.\theta_2}+\sqrt{1-c\sin.\theta_2}} \ .$$

Cette égalité, ainsi déduite fort simplement de la formule [87] de Legendre, s'accorde avec celle que je vois à la page 140 de l'ouvrage déjà cité de Jacobi.

En faisant $\varphi = \frac{\pi}{2}$, l'équation [22]' donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi.E(c,\varphi)}{\Delta} = \tfrac{1}{2}.E'(c).F'(c) + 4\cdot\sum_1^\infty.\frac{q^{2i-1}}{(2i-1)(1-q^{4i-2})} \ .$$

D'un autre côté, en développant le Logarithme du second membre de la troisième des équations [8], qu'on voit à la page [97] du Tome 3.ème de Legendre, on obtient l'équation

$$[24]'\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{Log.}\sqrt{1-c^2.\sin.^2\varphi}$$

$$= -8.\sum_1^\infty.\frac{q^{2i-1}}{(2i-1)(1-q^{4i-2})}\sin.^2\left\{\frac{\pi}{2}(2i-1).\frac{F(c,\varphi)}{F'(c)}\right\} ,$$

qui, en y faisant $\varphi = \frac{\pi}{2}$, donne

$$[25]' \ldots\ldots \qquad \text{Log.}\sqrt{b} = -4 \,.\, \sum_{1}^{\infty} \,.\, \frac{q^{2i-1}}{(2i-1)(1-q^{4i-2})} \,.$$

Il suit de là que nous avons sous forme finie,

$$[26]' \ldots\ldots \qquad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi . E(c,\varphi)}{\Delta} = \tfrac{1}{2} E'(c) . F'(c) + \tfrac{1}{2} \text{Log.}\left(\frac{1}{b}\right) .$$

Cela posé, je remarque que, au moyen de l'équation [24]', on peut remplacer l'équation [21]' par une autre, où la série soumise au signe $\sum_{1}^{\infty}$ sera *plus convergente*. Car, en séparant dans le second membre de l'équation [22]' les termes donnés par i nombre *pair*, et par i nombre *impair*, on aura par sa combinaison avec l'équation [24]';

$$[27]' \ldots\ldots \quad \Upsilon(c,\varphi) = \frac{E'(c).[F(c,\varphi)]^2}{2F'(c)} - \tfrac{1}{2} \text{Log.}\sqrt{1-c^2.\sin.^2\varphi}$$

$$+ 2 \,.\, \sum_{1}^{\infty} \,.\, \frac{q^{2i}}{i(1-q^{4i})} \sin.^2 \left\{ i\pi . \frac{F(c,\varphi)}{F'(c)} \right\} .$$

Donc nous avons

$$\tfrac{1}{2}\Upsilon(c,\varphi') - \tfrac{1}{2}\Upsilon(c,\varphi'') = -\frac{E'(c)}{F'(c)} . F(c,\theta) . F(c,\varphi) - \tfrac{1}{4} \text{Log.} \frac{\sqrt{1-c^2.\sin.^2\varphi'}}{\sqrt{1-c^2.\sin.^2\varphi''}}$$

$$- \sum_{1}^{\infty} \,.\, \frac{q^{2i}}{i(1-q^{4i})} \sin.\left\{ 2i\pi . \frac{F(c,\theta)}{F'(c)} \right\} \sin.\left\{ 2i\pi . \frac{F(c,\varphi)}{F'(c)} \right\} .$$

Maintenant, si l'on remplace le rapport $\sqrt{1-c^2.\sin.^2\varphi'} : \sqrt{1-c^2.\sin.^2\varphi''}$ par sa valeur en fonction de φ et θ, la formule [87] citée plus haut, donnera, au lieu de l'équation [21]';

$$[28]' \ldots\ldots \qquad \int_{0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1-n\sin.^2\varphi)\,\Delta} - \int_{0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta} =$$

$$\frac{\text{tang.}\theta}{4.\Delta(\theta)} \text{Log.} \left\{ \frac{\Delta.\Delta(\theta) - c^2.\sin.\varphi.\sin.\theta.\cos.\varphi.\cos.\theta}{\Delta.\Delta(\theta) + c^2.\sin.\varphi.\sin.\theta.\cos.\varphi.\cos.\theta} \right\}$$

$$+ \frac{\text{tang.}\theta}{\Delta(\theta)} . \left\{ E(c,\theta) - \frac{E'(c)}{F'(c)} . F(c,\theta) \right\} . F(c,\varphi)$$

$$- \frac{\text{tang.}\theta}{\Delta(\theta)} . \sum_{1}^{\infty} . \frac{q^{2i}}{i(1-q^{4i})} \sin.\left\{ 2i\pi . \frac{F(c,\theta)}{F'(c)} \right\} \sin.\left\{ 2i\pi . \frac{F(c,\varphi)}{F'(c)} \right\} .$$

La partie soumise au signe $.\sum_{1}^{\infty}.$ procédant suivant les puissances de q^2, q^4, q^6, etc., il conviendra de préférer cette formule à la formule [21]′. qui procède suivant les puissances de q, q^2, q^3, q^4, etc., dans l'évaluation numérique de la transcendante elliptique de troisième espèce, qui entre dans le second membre de l'équation [20]′.

§ X.

Application de ces formules en prenant

$$h=\alpha=\frac{3}{11}\cdot r\ ;\qquad a=mr=60.r\ ;\qquad g=9^{m},80896\ ;$$

$$B=gr^2\ ;\qquad A=\frac{B}{81}\ ;\qquad V=3000^{m}.$$

L'équation

$$C=\tfrac{1}{2}aV^2-A.\frac{a}{h}-B.\frac{a}{a-h}$$

donne

$$C=27.(10)^7.r-\frac{B}{81}.\frac{11.60}{3}-\frac{B.60}{60-\frac{3}{11}}\ ;$$

et comme $r=\frac{2}{\pi}(10)^7$, l'on a

$$C=gr^2.N,\ \text{en posant}\ N=\frac{27}{g}.\frac{\pi}{2}-\frac{11.60}{3.81}-\frac{60}{60-\frac{3}{11}}\ ;$$

$$N=4,32373-2,71605-1,00457=0,60311\ ;$$

$$\text{Log.}\,N=9,7803965\ ;\qquad \text{Log.}\frac{1}{N}=0,2196035\ ;$$

$$\frac{A}{C}=\frac{gr^2}{81.C}=\frac{1}{81}.\frac{1}{N}\ ;\qquad \text{Log.}\frac{A}{C}=8,3111185\ ;$$

$$\frac{C}{A}=48,8519\ ;\qquad \text{Log.}\frac{C}{A}=1,6888815\ ;$$

$$\frac{4C}{A}=195,4076\ ;\qquad \frac{B}{A}+\frac{C}{A}-1=56,8519\ ;$$

$$\frac{A}{2C}.\left(\frac{B}{A}-1\right)=0,0818801\ ;\qquad -\tfrac{1}{2}+\frac{A}{2C}.\left(\frac{B}{A}-1\right)=-0,4181199\ ;$$

$$\left(\frac{B}{A}+\frac{C}{A}-1\right)^2 = 3232,14$$
$$195,4076$$
$$3427,5476\ ;$$
$$\text{Log.}\ldots 3,5349835$$
$$\tfrac{1}{2}\ldots 1,7674917$$
$$\text{Log.}\frac{A}{C}\ldots 8,3111185$$
$$0,0786102$$
$$\text{Log. } 2\ldots 0,3010300$$
$$9,7775802\ ;$$
$$\text{Log.}\frac{1}{p^2} = 1,8397746\ ;$$
$$\text{Log.}\,p^2 = 8,1602254\ ;$$
$$\text{Log.}\,p = 9,0801127\ ;$$
$$p^2 = 0,014462\ ;$$
$$1-p^2 = 0,985538\ ;$$
$$\text{Log.}(1-p^2) = 9,9936734\ ;$$

$$q^2 = -0,4181199+0,599212\ ;$$
$$q^2 = 0,181092\ ;$$
$$\text{Log.}\,q^2 = 9,2588575\ ;$$
$$\text{Log.}\,q = 9,6294286\ ;$$
$$\text{Log.}(1+q^2) = 0,0722832\ :$$
$$\text{Log.}(1+q^2)^2 = 0,1445664$$
$$\text{Log.}\frac{C}{A} = 1,6888815$$
$$1,8334479\ ;$$
$$\frac{1}{p^2} = 1+68,1472 = 69,1472\ ;$$
$$\text{Log.}\,p^2q^2 = 7,4190829\ ;$$
$$\text{Log.}\,pq = 8,7095414 = \text{Log. tang.}\,\beta\ :$$
$$\beta = 2^\circ.\,55'.\,58''\ ;$$
$$c = \sin.(87^\circ.\,4'.\,2'')\ ;$$
$$\text{Log.}\sqrt{1-p^2} = 9,9968367\ ;$$

$$\sin.\theta = \frac{1}{\cos.\beta.\sqrt{1+q^2}}\ ;\qquad \text{Log.}\sin.\theta = 9,9644288\ ;$$
$$\theta = 67^\circ.\,7'.\,30''\ ;$$

$$\cos.\varphi' = \frac{q.\sqrt{\frac{3}{11}.\frac{1}{60}}}{\sqrt{1+q^2-\frac{3}{11}.\frac{1}{60}}}\ ;\qquad \cos.\varphi = \frac{q.\sqrt{\frac{59}{60}}}{\sqrt{1+q^2-\frac{59}{60}}}\ ;$$

$$\cos.\varphi' = \frac{q.\sqrt{\frac{3}{11}.\frac{1}{60}}}{\sqrt{1,181092-\frac{3}{11}.\frac{1}{60}}} = q.\sqrt{\frac{0,004545}{1,176547}}\ ;$$

$$\text{Log.}\cos.\varphi' = 8,4229127\ ;\qquad \varphi' = 88^\circ.\,28'.\,57''\ ;$$

$$\cos.\varphi = \frac{q.\sqrt{59}}{\sqrt{1+q^2.60}} = q.\sqrt{\frac{59}{10,885}}\ ;\qquad \text{Log.}\cos.\varphi = 9,9963502\ ;$$
$$\varphi = 7^\circ.\,25'.\,4''\ ;$$

$$\text{Log. sin.}\varphi = 9,1109049 \;;$$
$$\text{Log. tang.}\varphi = 9,1145542 \;.$$

Soit
$$c \sin.\varphi = \cos.\varpi \;;$$
$$c \sin.\varphi' = \cos.\varpi' \;;$$
$$\text{Log. } c \ldots 9,9994308$$
$$\text{Log. sin.}\varphi \ldots 9,1109049$$
$$\text{Log. cos.}\varpi = 9,1103357 \;;$$
$$\varpi = 82^\circ.35'.33'' \;;$$
$$\text{Log. cos.}\varpi' = 9,9992786 \;;$$
$$\varpi' = 3^\circ.\ 18'.\ 10'' \;;$$
$$\frac{5+q^2}{1+q^2} = 5,181092 \;;$$
$$\text{Log.}\left(\frac{5+q^2}{1+q^2}\right) = 0,6420540$$
$$\text{Log. } p^2 = 8,1602254$$
$$8,8022794 \;;$$
$$\text{N.}^{\text{e}} \ldots 0,063428 \;;$$
$$1 - 0,063428 = 0,936572 \;;$$
$$\text{Log. } \ldots 9,9715411$$
$$\text{Log. } q^2 \ldots 9,2588575$$
$$\text{Log.}(H + p^2q^2) = 9,2303986 \;;$$
$$3 + 2q^2 = 3,362184 \;;$$
$$1,386700$$
$$H' = q^2 + p^2(-1,975484) \;;$$
$$H' = q^2 - 0,028569 = 0,152523 \;;$$
$$\text{Log. } H' \ldots 9,1833354$$
$$\text{Log. } c \ldots 9,9994308$$
$$\text{Log. } q^2 \ldots 9,2588575$$
$$8,4416237 \;;$$
$$\text{Log. } 1+q^2 \ldots 0.0722832 \;;$$

$$\Delta = \sin.\varpi \;;$$
$$\Delta' = \sin.\varpi' \;;$$
$$\text{Log. } \Delta = 9,9963603 \;;$$
$$\text{Log. } \Delta' = 8,7605162 \;;$$
$$\text{Log. tang.}\varphi' = 1,5768925$$
$$\text{Log. } \Delta = 9,9963603$$
$$1,5732528$$
$$\omega' = 88^\circ.\ 28'.\ 11'' \;;$$
$$\text{Log. tang.}\varphi \ldots 9,1145542$$
$$\text{Log. } \Delta' \ldots 8,7605162$$
$$7,8750704 \;;$$
$$\omega = 0^\circ.\ 25'.\ 47'' \;;$$
$$\psi = \omega' - \omega = 88^\circ.\ 2'.\ 24'' \;;$$
$$9,2303986$$
$$c \ldots 9,9994308$$
$$\text{Log. } c(H + p^2q^2) = 9,2298294 \;;$$
$$\text{Log. } \Delta'' = \text{Log.} \frac{q}{\sqrt{1+q^2}} = 9,5932871 \;;$$
$$H' = q^2 - p^2(3 + 2q^2) + \frac{2p^2(1-q^2)}{1+q^2} \;;$$
$$\frac{2(1-q^2)}{1+q^2} = \frac{1,637816}{1,181092} = 1,3867 \;;$$
$$\text{Log. } p^2 \ldots 8,1602254$$
$$1,97 \ldots 0,2956748$$
$$8,4559002 \;;$$
$$\text{Log.}\sqrt{1-p^2} = 9,9968367$$
$$\text{Log.}\sqrt{1+q^2} = 0,0361416$$
$$0,0329783$$
$$2 \ldots 0,3010300$$
$$0,3340083 \;;$$

$$\text{Log.}\frac{cH'.q^2}{1+q^2} = 8,3693405 \;;$$

$$\text{Log.}\,H' \ldots 9,1833354$$

$$0,3340083$$

$$\text{Log.}\frac{H'}{2.\sqrt{(1-p^2)(1+q^2)}} = 8,8493271 \;;$$

$$\text{Log. sin.}\,2\varphi \ldots 9,4083175$$

$$\text{Log.}\,\Delta \ldots 9,9963603$$

$$\text{Log.}\,\Delta\,\text{sin.}\,2\varphi = 9,4046778 \;;$$

$$\cos.^2\varphi = 0,98333$$

$$q^2 = 0,18109$$

$$q^2 + \cos.^2\varphi = 1,17442 \;;$$

$$\text{Log.}\,q^2 \ldots 9,2588575$$

$$\text{Log.}\,2c \ldots 0,3004608$$

$$\text{Log.}\frac{q^2}{2c} \ldots 8,9583967 \;;$$

$$2\varphi' = 176^\circ.57'.54'' \;;$$

$$\text{Log.}\cos.^2\varphi' = 6,8458254 \;;$$

$$\cos.^2\varphi' = 0,00070117$$

$$q^2 = 0,181072$$

$$q^2 + \cos.^2\varphi' = 0,181793 \;;$$

$$\text{Log.}\,\text{tang.}\,\lambda = 0,3711483 \;;$$

$$\lambda = 66^\circ.57'.\ 9''$$

$$\lambda' = 2^\circ.55'.\ 6''$$

$$\Omega' = 64^\circ.\ 2'.\ 3'' \;;$$

$$\Omega'' = 69^\circ.52'.15'' \;;$$

$$\text{Log.}\,c \ldots 9,9994308$$

$$\text{Log. sin.}\,\varphi' \ldots 9,9998478$$

$$9,9992786$$

$$\text{Log. sin.}\,\psi \ldots 9,9997456$$

$$9,9990242$$

$$\text{Log. sin.}\,\varphi \ldots 9,1109049$$

$$\text{L.}\,c\,\text{sin.}\,\varphi'.\,\text{sin.}\,\varphi.\,\text{sin.}\,\psi.\ 9,1099291 \;;$$

$$c\,\text{sin.}\,\varphi'.\,\text{sin.}\,\varphi.\,\text{sin.}\,\psi = 0,128702 \;;$$

$$9,4046778$$

$$0,0698234$$

$$9,3348544$$

$$\text{Log.}\frac{q^2}{2c} \ldots 8,9583967$$

$$8,2932511 \;;$$

$$\frac{q^2}{2c}\cdot\frac{\text{sin.}\,2\varphi.\,\Delta}{q^2+\cos.^2\varphi} = 0,0196450 \;;$$

$$\text{Log. sin.}\,2\varphi' \ldots 8,7238329$$

$$\text{Log.}\,\Delta' \ldots 8,7605162$$

$$7,4843491$$

$$\text{Log.}\frac{q^2}{2c} \ldots 8,9583967$$

$$6,4427458$$

$$\text{Log.}(q^2+\cos.^2\varphi') \ldots 9,2595700$$

$$7,1831758 \;;$$

$$\frac{q^2}{2c}\cdot\frac{\text{sin.}\,\varphi'.\,\Delta'}{q^2+\cos.^2\varphi'} = 0,0015247 \;;$$

$$\text{Log.}\,\text{tang.}\,\lambda' = 8,7073881 \;;$$

$$\text{Log. sin.}\,\Omega' = 9,9537867 \;;$$

$$\text{Log. sin.}\,\Omega'' = 9,9726283 \;;$$

$$\text{Log. sin. } \theta \ldots 9,9644288$$
$$\text{Log. sin. } \varphi' \ldots 9,9998478$$
$$\text{Log. } c \sin. \psi \ldots 9,9997456$$
$$9,9640222$$
$$9,9537887$$
$$9,9178089$$
$$\text{Log. } c^2 \ldots 9,9998616$$
$$\text{Log. } c^2 u' \ldots 9,9176705 \;;$$
$$c^2 u' = 0,82734 \;;$$
$$1 - c^2 u' = 0,17206 \;;$$

$$9,9640292$$
$$9,9726283$$
$$9,9366505$$
$$\text{Log. } c^2 \ldots 9,9998616$$
$$\text{Log. } c^2 u'' \ldots 9,9365121 \;;$$
$$c^2 u'' = 0,86400 \;;$$
$$1 - c^2 u'' = 0,13600 \;;$$
$$\frac{1 - c^2 u'}{1 - c^2 u''} = \frac{0,17266}{0,13600} \;;$$
$$\text{Log. hyp.}^{\text{e}} \left(\frac{1 - c^2 u'}{1 - c^2 u''} \right) = 0,23867 \,.$$

La formule [20]′ donne donc

$$Gt = -0,09371 + \frac{1}{c} \cdot \int_0^{\psi} \Delta d\varphi - c(H + p^2 q^2) \cdot \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\Delta} + \frac{cH' q^2}{1+q^2} \cdot \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{(1 - n \sin.^2 \varphi)\Delta} \;;$$

où

$$-0,09371 = -0,001524 + 0,19645 - 0,128702 + 0,01687 \,.$$

Nous avons

$$G = 18.p.\frac{60.\sqrt{60}.\sqrt{r}}{\sqrt{8g}} \cdot \frac{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}}{1 - p^2.\frac{(1-q^2)}{1+q^2}} \;;$$

$$\text{Log. } 18.p.\frac{60.\sqrt{60}.\sqrt{r}}{\sqrt{8g}} = 5,4571956 \;;$$

$$\text{Log. } (1+q^2)^{\frac{3}{2}} = 0,1084248 \;; \qquad \text{Log. } \frac{p^2(1-q^2)}{1+q^2} = 8,001173 \;;$$

$$\text{Log. } \frac{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}}{1 - p^2.\frac{(1-q^2)}{1+q^2}} = 0,1128028 \;; \qquad \text{Log. } \left(\frac{1}{G.3600} \right) = 2,0136949 \,.$$

D'après la Table IX de Legendre, l'on a;

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\Delta} = 3,734856 \;; \qquad \int_0^{\psi} d\psi \, \Delta = 1,0032287 \;;$$

$$\frac{1}{c}\cdot\int_0^{\psi} d\psi\,\Delta = 1,00455\ ; \qquad c(H+p^2q^2)\cdot\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\Delta} = 0,63402\ :$$

partant

$$Gt = 0,27682 + \frac{cH'q^2}{1+q^2}\cdot\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{(1-n\sin.^2\varphi)\,\Delta}\ .$$

Maintenant, voici le calcul du dernier terme par la formule [28]', après avoir fait $\varphi=\psi=88^\circ.\,2'.\,24''$. Par les Tables I et IX, l'on a;

$$E(c,\theta) = 0,92220\ ; \qquad \text{Log.}\,F(c,\theta) = 0,2026470\ ;$$

$$\frac{E'(c)}{F'(c)}\cdot F(c,\theta) = 0,36712\ ; \quad E(c,\theta) - \frac{E'(c)}{F'(c)}\cdot F(c,\theta) = 0,55508\ :$$

$$\text{Log.}\,F(c,\psi) = \text{Log.}\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\Delta} = 0,572234\ ;$$

$$\text{Log.}\,(0,55508\,.\,0,572234) = 0,3166290\ ;$$

$$\text{Log. tang.}\,\theta = 0,3747880\ ; \qquad \text{Log.}\,\Delta(\theta) = 9,9995169\ ;$$

$$\text{Log.}\,\frac{\text{tang.}\,\theta}{\Delta(\theta)} = 0,3752711\ ; \qquad 0,3166290 + 0,3752711 = 0,6919001\ ;$$

$$4,69566 = \frac{\text{tang.}\,\theta}{\Delta(\theta)}\cdot\left\{E(c,\theta) - \frac{E'(c)}{F'(c)}\cdot F(c,\theta)\right\}\cdot F(c,\psi)\ ;$$

$$\text{Log.}\,\Delta\,.\,\Delta(\theta) = 9,9958772\ ; \qquad \Delta\,.\,\Delta(\theta) = 0,990552\ ;$$

$$\text{Log. sin.}\,2\psi = 8,8348246\ ; \qquad \text{Log. sin.}\,2\theta = 9,8550961\ ;$$

$$\text{Log.}\,\frac{c^2}{4}\cdot\sin.2\psi.\sin.2\theta = 8,0867223\ ; \quad \frac{c^2}{4}\cdot\sin.2\psi.\sin.2\theta = 0,0122102\ ;$$

$$\frac{\Delta\,.\,\Delta(\theta) - \frac{c^2}{4}\cdot\sin.2\psi.\sin.2\theta}{\Delta\,.\,\Delta(\theta) + \frac{c^2}{4}\cdot\sin.2\psi.\sin.2\theta} = \frac{0,978342}{1,002762}\ ;$$

$$\text{Log. hyp.}^{\text{e}}\left(\frac{0,978342}{1,002762}\right) = -0,024652\ ;$$

$$-0,024652\,.\,\frac{\text{tang.}\,\theta}{4\,\Delta(\theta)} = -0,014624\ .$$

La formule [28]' donne donc;

$$\int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{(1-n\sin.^2\varphi)\,\Delta} = 3,7348564 - 0,014624 + 4,69566$$

$$- \frac{\text{tang.}\,\theta}{\Delta(\theta)} \cdot \sum_1^{\infty} . \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 8,415896 - \frac{\text{tang.}\,\theta}{\Delta(\theta)} \cdot \sum_1^{\infty} . \;\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour calculer cette dernière partie, remarquons, qu'ayant;

$$\text{Log.}\,F(c,\theta) = 0,2026470\;; \qquad \text{Log.}\,F(c,\psi) = 0,5722340\;;$$

$$\text{Log.}\,F'(c) = 0,6400429\;; \quad \text{et} \quad c = \sin.(87^\circ.\,4'.\,2'')\;:$$

l'on a;

$$\text{Log.}\,q = 9,5082500\;; \qquad 360^\circ.\,\frac{F(c,\theta)}{F'(c)} = 131^\circ.\,29'.\,35''\;;$$

$$360^\circ.\,\frac{F(c,\psi)}{F'(c)} = 307^\circ.\,57'.\,32''\;; \qquad \text{Log.}\,\frac{\text{tang.}\,\theta}{\Delta(\theta)} = 0,3752711\;.$$

Cela posé on obtient;

$$\sum_1^{\infty} . \;\ldots\ldots = -0,0680198 + 0,0051934 - 0,000083653 + \text{etc.}$$

$$= -0,062910\;;$$

$$-\frac{\text{tang.}\,\theta}{\Delta(\theta)} \cdot (-0,062910) = +0,14928\;;$$

$$\int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{(1-n\sin.^2\varphi)\,\Delta} = 8,565176 \ldots\ldots \text{Log.}\,0,9327363\;;$$

$$\frac{cH'q^2}{1+q^2} \cdot (8,565176) = 0,200482\;;$$

$$Gt = 0,27682 + 0,200482 = 0,47730\;;$$

$$t = 49^{\text{h}},259\;.$$

Le temps t est ici le produit des deux nombres $103,204 \times 0,47730$, tandis que, dans le cas du § VI, la valeur de t était exprimée par le produit $49,641 \times 0,93446$. Ainsi, en augmentant la vitesse de projection

depuis $2782^m, 92$ jusqu'à 3000^m par seconde, on augmente le premier et on diminue le second des deux facteurs. Telle est la cause que l'on trouve ici $t = 49^h, 259$, tandis que dans le § VI l'on avait $t = 46^h, 388$. L'équation

$$v^2 = \frac{2A}{x} \cdot \left(1 + \frac{B}{A} \cdot \frac{x}{a-x} + \frac{C}{A} \cdot \frac{x}{a}\right),$$

en y faisant $x = 59.r$; $a = 60.r$, donne

$$v = \sqrt{2gr} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{81.59} + \frac{48,8519}{81.60}} = \sqrt{2gr} \cdot \sqrt{1,0102610}$$

pour la vitesse de la masse au moment où elle atteint la surface de la Terre. De sorte que cette vitesse serait de 11233^m, abstraction faite de la résistance de l'air.

§ XI.

Application des formules générales établies dans le 1.er paragraphe *au cas du mouvement curviligne.*

Pour plus de simplicité, je vais considérer le cas particulier, où la composante de la vitesse de projection initiale, perpendiculaire à la ligne qui joint les centres de la Lune et de la Terre, est égale à la vitesse qui naît du mouvement même de la Lune autour de la Terre, en le supposant circulaire et uniforme. Alors l'on a

$$aV^2 . \sin.^2 \mu = B = gr^2 ;$$

ce qui réduit les valeurs des constantes $2M$, C et C' à

$$C = \tfrac{1}{2} aV^2 - A - B - \frac{A}{m} - Bm ; \qquad C' = A + B - \frac{m}{(1+m)^2} B ;$$

$$2M = A + B + C' .$$

De sorte que, en faisant

$$N' = \frac{aV^2}{2B} - \frac{A}{mB} - m - \left(1 + \frac{A}{B}\right) = \frac{C}{B} ;$$

l'on a;

$$\frac{C+2C'}{B}=N'+2.\left(1+\frac{A}{B}\right)-\frac{2m}{(1+m)^2};$$

$$\frac{C+C'}{B}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{aV^2}{B}-m-\frac{A}{Bm}-\frac{m}{(1+m)^2}.$$

Maintenant, si l'on fait $a=60.r$, en prenant $\rho'=\frac{am}{1+m}=\frac{3}{11}\cdot r$ pour la valeur initiale de ρ', nous avons $m=\frac{1}{219}$. Donc, en faisant $\frac{A}{B}=\frac{1}{81}$, l'on aura,

$$\frac{C+C'}{B}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{aV^2}{B}-2,712991\ ;\qquad N'=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{aV^2}{B}-3,72061\ ;$$

$$\frac{C+2C'}{B}=\frac{aV^2}{2B}-1,70498\ ;\qquad \frac{2M}{B}=2,02016\ .$$

Cela posé, la première des deux équations, désignées par (γ) dans le premier §, donne

$$\beta=\frac{\frac{aV^2}{2B}-2,712791+\sqrt{1,02484+\left[\frac{aV^2}{2B}-3,72061\right]\left[\frac{aV^2}{2B}-1,70498\right]}}{2,02016};$$

Or, il est évident que, pour avoir une valeur de β *plus petite que l'unité*, on doit supposer la vitesse initiale V telle, que l'on ait

$$\frac{aV^2}{2B}<3,72061\ ;$$

c'est-à-dire

$$V<\sqrt{2gr}.\sqrt{\frac{1}{60}}.\sqrt{3,72061}\ ;$$

$$V<2782^{m},91\ .$$

Ainsi, en prenant $V=2500^{m}$; les deux rayons vecteurs ρ et ρ' auront une valeur *finie* pour tous les points de la trajectoire (*). Avec cette valeur de V, on obtient

(*) On verra ci-après que, la vitesse initiale étant de 2500 mètres par seconde, le mobile ne peut pas atteindre la surface de la Terre.

$$\beta = \frac{0,289809 + \sqrt{0,093136}}{2,02016} = 0,294527 \quad ;$$

$$\beta' = \frac{-0,289809 + \sqrt{0,093136}}{2,02016} = 0,0076098 \quad ;$$

$$c^2 = \frac{\beta}{\beta + \beta'} = \frac{0,294527}{0,302137} \quad ; \qquad c = \sin.(80^\circ.\,52'.\,5'') \; .$$

Les équations

$$\frac{L}{B} = \frac{82}{81} \cdot (0,286917) \; ; \qquad \frac{L'}{B} = \left(1 - \frac{\beta\beta'}{81}\right) \; ; \qquad \frac{L''}{B} = \frac{1}{81} - \beta\beta' \; ;$$

donnent

$$\cos.\theta = \frac{L}{2.\sqrt{L'L''}} = \cos.(62^\circ.\,48'.\,50'') \; ; \qquad k = \sin.(31^\circ.\,24'.\,25'') \; ;$$

$$\text{Log.}\gamma = \text{Log.}\sqrt{\frac{L'}{L''}} = 0,9977374 \; ; \quad \frac{M-B}{B} = 0,01008 \; ; \quad \gamma = 9,94804 \; .$$

Donc l'équation différentielle

$$\frac{dp}{\sqrt{P}} = \frac{dq}{\sqrt{Q}}$$

sera, dans le cas actuel;

$$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{M}} \cdot \frac{dp}{\sqrt{(\beta - p^2).(\beta' + p^2)}} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{M-B}} \cdot \frac{dq}{\sqrt{1 + 2\gamma.\cos.\theta.q^2 + \gamma^2.q^4}} \; .$$

En faisant

$$p = \frac{\sqrt{\beta'}.c\sin.\psi}{\sqrt{1 - c^2.\sin.^2\psi}} \; ; \qquad q = \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{\gamma}} \; ,$$

cette équation devient;

$$\frac{\sqrt{B}.c}{\sqrt{MB}} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{1 - c^2.\sin.^2\psi}} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{M-B}.\sqrt{\gamma}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2.\sin.^2\varphi}} \; .$$

En intégrant on tire de là l'équation

$$\int_0^{\varpi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2.\sin.^2\varphi}} = c.\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \cdot \sqrt{\frac{0,01008}{1,01008}} \cdot \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - c^2.\sin.^2\psi}} \; .$$

On a donc

$$N=\int_0^{\varpi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}}=0,05726 27.\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2.\sin.^2\psi}}\ .$$

Telle est l'équation entre les deux variables ϖ et ψ, de laquelle, en donnant ψ, on tire la valeur de ϖ par les formules (7^{vi}); et ensuite la valeur de φ par les formules

$$\text{tang.}\,\varphi'.\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varpi}=\text{tang.}\,\Omega'\ ;\qquad \text{tang.}\,\varpi.\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi'}=\text{tang.}\,\Omega''\ :$$

$$\varphi=\Omega'+\Omega''\ ,$$

après avoir déterminé celle de φ' par l'équation

$$m=\frac{1}{219}=\frac{\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\varphi'}{7}\ ,$$

qui donne $\varphi'=24^\circ.\,3'.\,46''$.

En donnant la valeur de φ, on aura celle de ϖ par l'équation $\varpi=\lambda-\lambda'$, après avoir fait;

$$\text{tang.}\,\lambda=\text{tang.}\,\varphi.\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi'}\ ;\qquad \text{tang.}\,\lambda'=\text{tang.}\,\varphi'.\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}\ .$$

Nous avons

$$\text{Log.}\,F'(c)=0,5087452\ ;\qquad F'(c)=3,2266\ ;$$

$$\text{Log.}\,0,05726 27.F'(c)=9,2666167=\text{Log.}\,N\left(\text{pour }\psi=\frac{\pi}{2}\right)\ :$$

$$\text{Log.}\,F'(k)=0,2306073\ ;\qquad \text{Log.}\,u=8,3023256\ .$$

Aux points d'intersection de la trajectoire avec la ligne a, qui joint les deux centres d'attraction, l'on a $p=0$, et $\psi=\pi$, 2π, 3π etc.; en général $\psi=2i\pi$. Donc, d'après la $4^{\text{ème}}$ des formules (7^{vi}), l'on a à ces points

$$\frac{\varpi_{(i)}}{2}=45^\circ.\frac{i.2N}{F'(k)}+\sum_1^{\infty}.\frac{u^n}{n(1+u^{2n})}\sin.\frac{180^\circ.ni.2N}{F'(k)}\ ,$$

en désignant par $\varpi_{(i)}$ les valeurs correspondantes de ϖ. En faisant $i=1$, l'on a

$$45^\circ.\frac{2N}{F'(k)}=97^\circ,881=97^\circ.\,51'.\,40''\ ;$$

$$\frac{\varpi_{(1)}}{2}=97^\circ.\,51'.\,40''+0^\circ.\,35'.\,58''+0^\circ.\,0'.\,37''+\text{etc.}\ :$$

$$\varpi_{(1)}=196^\circ.\,56'.\,30''\ ;\qquad \Omega'=23^\circ.\,48'.\,55''\ ;$$

$$\Omega''=16^\circ.\,34'.\,35''\ ;\qquad \varphi=\Omega'+\Omega''=40^\circ.\,23'.\,30''\ ;$$

$$\frac{7}{\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\varphi}=73,5200\ .$$

Les distances $x_{(i)}$ des points d'intersection de la trajectoire au centre de la Lune, à cause de $p=0$, sont données par la formule

$$x_{(i)}=\frac{aq^2}{1+q^2}=\frac{a}{1+\frac{\gamma}{\text{tang.}^2\frac{1}{2}\varphi}}.$$

Donc, pour le premier point d'intersection, l'on a

$$x_{(1)}=\frac{60.r}{74,5971}=0,80515.r.$$

En faisant $i=2$, nous avons

$$\frac{\varpi_{(2)}}{2}=195^\circ.\,43'.\,20''+0^\circ.\,59'.\,11''+39''+\text{etc.};$$

$$\varpi_{(2)}=33^\circ.\,26'.\,20'';$$

$$\Omega'=23^\circ.\,9'.\,29''; \qquad \Omega''=32^\circ.\,49'.\,59''; \qquad \varphi=55^\circ.\,59'.\,28'';$$

$$x_{(2)}=\frac{60.r}{36,2008}=1,65743.r.$$

En faisant $i=3$, nous avons

$$\frac{\varpi_{(3)}}{2}=292^\circ.\,5'.\,0''+1^\circ.\,8'.\,56''+2''+\text{etc.};$$

$$\varpi_{(3)}=228^\circ.\,27'.\,56'';$$

$$\Omega'=22^\circ.\,21'.\,4''; \qquad \Omega''=47^\circ.\,48'.\,27''; \qquad \varphi=70^\circ.\,9'.\,31'';$$

$$x_{(3)}=\frac{60.r}{21,1712}=2,8343.r;$$

etc.

En traçant une ellipse, dont le grand axe soit égal à

$$\rho+\rho'=\frac{a(1+\beta)}{1-\beta}$$

et l'excentricité soit égale à la distance a des deux centres d'attraction, il est évident que la trajectoire, dont il est ici question, sera placée dans le plan même de l'orbite de la Lune, et comprise dans l'espace terminé par le périmètre de cette ellipse. En outre elle lui sera tangente

à tous les points de sa plus grande élévation ou de son plus grand abaissement par rapport au grand axe. Car, en différentiant les deux équations

$$\rho'+\rho=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+(a-x)^2}=\frac{a(1+p^2)}{1-p^2}\ ;$$

$$\rho'-\rho=\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{y^2+(a-x)^2}=\frac{a(q^2-1)}{q^2+1}\ ;$$

par rapport aux variables x, y, p et q on obtient deux équations de la forme

$$\frac{y.\frac{dy}{dx}+x}{\rho'}+\frac{y.\frac{dy}{dx}-(a-x)}{\rho}=f(p)dp\ ;$$

$$\frac{y.\frac{dy}{dx}+x}{\rho'}+\frac{-y.\frac{dy}{dx}+(a-x)}{\rho}=f^1(q)dq\ ;$$

lesquelles, étant divisées, donnent

$$\frac{(\rho+\rho')\left(x+\frac{dy}{dx}.y\right)-\rho'a}{(\rho-\rho')\left(x+\frac{dy}{dx}.y\right)+\rho'a}=\frac{f(p)}{f^1(q)}.\frac{dp}{dq}\ .$$

Mais

$$\frac{dp}{dq}=\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{Q}}=\frac{\sqrt{M}.\sqrt{(\beta-p^2).(\beta'+p^2)}}{\sqrt{Q}}\ ;$$

donc, en faisant $p^2=\beta$, on doit avoir

$$(\rho+\rho')\left(x+y.\frac{dy}{dx}\right)-\rho'a=0\ ;$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{\beta}.(1-q^2)}{q(1+\beta)}\ ,$$

après avoir fait $p^2=\beta$.

Les valeurs de y et $\frac{dy}{dx}$ seront par conséquent les *mêmes* pour la trajectoire et pour l'ellipse aux points de ses plus grandes excursions. Cette propriété, jointe à la position des points d'intersection avec l'axe, offre une idée assez précise de la figure serpentante de la trajectoire dans l'espace terminé par l'ellipse, sans qu'il soit nécessaire de la tracer avec un fort grand nombre de points.

L'expression générale des coordonnées x, y, et celle de $\frac{dy}{dx}$, *aux points de contact de la trajectoire avec l'ellipse*, sera, en fonction de la variable φ;

$$x = \frac{a}{1-\beta} \cdot \frac{\{\text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}\varphi - \beta\gamma\}}{\gamma + \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}\varphi} \; ; \qquad y = \frac{2a.\sqrt{\beta\gamma}.\text{tang.}\tfrac{1}{2}\varphi}{(1-\beta).(\gamma + \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}\varphi)} \; :$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\beta}.(\gamma - \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2}\varphi)}{\sqrt{\gamma}.(1+\beta)\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}\varphi} \; .$$

On doit déterminer l'angle φ d'après la condition, que les valeurs de ψ correspondantes aux points de contact sont $\psi = \frac{1}{2}.\pi$, $\frac{2}{3}.\pi$, $\frac{7}{2}.\pi$, etc. De sorte qu'on aura ici la formule

$$\frac{\varpi_{(i)}}{2} = 45^\circ.(2i-1).0,573214$$
$$+ \sum_1^\infty . \frac{u^n}{n(1+u^{2n})} . \text{sin.} \{180^\circ.(2i-1)n.0,573214\} \; .$$

Aux points d'intersection de la trajectoire avec l'axe a, nous avons:

$$y = 0 \; ; \qquad x = x_{(i)} = \rho' \; ; \qquad \rho = a - x_{(i)} = a - \rho' \; .$$

Donc les deux équations (α'), posées dans le premier §, donnent

$$\frac{\frac{2x_{(i)}}{a}(a - x_{(i)}).\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{A + B - C'}{\frac{C}{a} + \frac{A}{x_{(i)}} + \frac{B}{a - x_{(i)}}} \; ;$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{A + B - C'}{2A + \frac{2x_{(i)}}{a}(B - A) + \frac{2C}{a} . \frac{x_{(i)}}{a}(a - x_{(i)})} \; .$$

En substituant pour $\frac{C}{a}$ sa valeur fournie, par la première des deux équations (α^{VI}), l'on aura:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{A+B-C'}{\frac{x_{(i)}}{a}(a-x_{(i)}).V^2 + 2A.\left\{1-\frac{x_{(i)}}{a}-\frac{(1+m)}{m}.\frac{x_{(i)}}{a}.\left(1-\frac{x_{(i)}}{a}\right)\right\} - 2B.\frac{x_{(i)}}{a}m\left\{1-\frac{(1+m)}{m}.\frac{x_{(i)}}{a}\right\}}.$$

Mais dans ce cas nous avons

$$A+B-C' = \frac{m}{(1+m)^2}.B.$$

Donc, pour les points d'intersection de la trajectoire avec l'axe, on a cette formule générale

$$\frac{m}{(1+m)^2}.\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{V^2}{B}.\frac{x_{(i)}}{a}(a-x_{(i)}) + 2\left\{1-\frac{(1+m)}{m}.\frac{x_{(i)}}{a}\right\}.\left\{\frac{A}{B}.\left(1-\frac{x_{(i)}}{a}\right)-2m.\frac{x_{(i)}}{a}\right\}.$$

En y faisant $m=\frac{1}{219}$, et $\frac{aV^2}{2B}=3,0026$, on obtiendra les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, qui conviennent aux points dont les abscisses sont $x_{(1)}$, $x_{(2)}$, etc.

La première des deux équations (α'), données dans le premier §, démontre que le carré v^2 de la vitesse, à ces mêmes points, est exprimé par

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \tfrac{1}{2}V^2 - A\left\{\frac{(1+m)}{ma}-\frac{1}{x_{(i)}}\right\} - B\left\{\frac{(1+m)}{a}+\frac{1}{a-x_{(i)}}\right\}.$$

De sorte que l'on a :

$$\tfrac{1}{2}.\frac{av^2}{B} = \tfrac{1}{2}.\frac{aV^2}{B} - 3,72061 + \frac{a}{x_{(i)}}.\frac{1}{81} - \frac{1}{1-\frac{x_{(i)}}{a}}.$$

En prenant $V=2500^m$ l'on a $\tfrac{1}{2}.\frac{aV^2}{B}=3,00208$; partant

$$\tfrac{1}{2}.\frac{av^2}{B} = -0,71853 + \frac{a}{x_{(i)}}.\frac{1}{81} - \frac{1}{1-\frac{x_{(i)}}{a}}.$$

Pour $a=60.r$ et $x_{(1)}=0,80515.r$ l'on aurait

$$\tfrac{1}{2}.\frac{av^2}{B} = -0,71853 - \frac{1}{1-\frac{0,8050}{60}} + 0,92000,$$

c'est-à-dire une valeur *imaginaire* pour la vitesse v. Donc, avec la vitesse de 2500^{m} par seconde, la mobile ne peut pas atteindre la distance $0,80515.r$ du centre de la Lune.

D'après l'équation (β''), établie dans le premier §, on ne voit pas que la valeur du temps t devienne imaginaire avec l'expression de la vitesse v. Mais, en observant que ds étant l'élément de la courbe, l'on a, $t=\int\frac{ds}{v}$, il est évident que la valeur de t ne peut être réelle que pour la somme des élémens, dont chacun correspond à une valeur réelle de v. Pour rétablir cette évidence, lorsqu'on substitue aux variables primitives les variables p et q, il faut remarquer que l'on a séparément :

$$ds=2a.dp.\frac{\sqrt{(p^2+q^2)(1+p^2q^2)}}{(1-p^2)^2(1+q^2)^2}.\sqrt{\frac{P(1+q^2)^2+Q(1-p^2)^2}{P}}\ ;$$

$$v^2=\frac{2}{a}.\frac{P(1+q^2)^2+Q(1-p^2)^2}{(p^2+q^2)(1+p^2q^2)}\ ;$$

et que par conséquent ces deux égalités sont incompatibles dès que la valeur de v^2 devient *négative*. On doit donc rejeter l'équation (β'') pour calculer le temps requis pour atteindre la distance $x_{(i)}$, si la valeur de v^2 correspondante à cette distance est négative. Sans cette précaution on trouverait pour t des valeurs réelles tout-à-fait illusoires, dont la fausseté serait déclarée par l'énormité de leur grandeur.

En général pour avoir la valeur du temps t, depuis le commencement du mouvement jusqu'à l'instant d'une intersection connue de la trajectoire avec l'axe a, il faut calculer les trois parties $t'+t''+t'''$ de t avec les formules posées dans le premier §. Pour cela, en faisant $1-c^2=b^2$, l'on a $nc^2=1-b^2.\sin.^2\mu$. Cela posé, la formule générale de Legendre (Voyez page 138 du 1.er Vol. des Fonctions Elliptiques), donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{(1-nc^2.\sin.^2\psi)\Delta}-F'(c)=\frac{\pi}{2}.\frac{c.\sqrt{n}}{b^2.\sin.\mu.\cos.\mu}$$

$$+\frac{c.\sqrt{n}}{b^2.\sin.\mu.\cos.\mu}\left\{F'(c)F(b,\mu)-E'(c)F(b,\mu)-F'(c)E(b,\mu)\right\}.$$

L'expression de q^2 étant $q^2 = \frac{\text{tang.}^2 \frac{1}{2}\varphi}{\gamma}$, l'on a

$$\int \frac{d\varphi(1+q^2)}{\Delta'} = \frac{2}{\gamma}\Delta'.\text{tang.}\tfrac{1}{2}\varphi + \frac{(1+\gamma)}{\gamma}.\int\frac{d\varphi}{\Delta'} - \frac{2}{\gamma}.\int d\varphi\,\Delta' :$$

$$\int_{\varphi'}^{\varphi} \frac{d\varphi(1+q^2)}{\Delta'} = \frac{2}{\gamma}\left\{\Delta'.\text{tang.}\tfrac{1}{2}\varphi - \Delta''.\text{tang.}\tfrac{1}{2}\varphi'\right\}$$

$$+\frac{(1+\gamma)}{\gamma}.\int_{\varphi'}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta'} - \frac{2}{\gamma}.\int_{\varphi'}^{\varphi} d\varphi\,\Delta' ;$$

où $\Delta'' = \sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi'}$. Donc, en faisant

$$\text{tang.}\,\zeta = \Delta''.\text{tang.}\,\varphi ; \qquad \text{tang.}\,\zeta' = \Delta'.\text{tang.}\,\varphi' ; \qquad \zeta'' = \zeta - \zeta' :$$

l'on aura

$$\int_{\varphi'}^{\varphi} \frac{d\varphi(1+q^2)}{\Delta'} = \frac{2}{\gamma}\left\{\Delta'.\text{tang.}\tfrac{1}{2}\varphi - \Delta''.\text{tang.}\tfrac{1}{2}\varphi' + k^2.\sin.\varphi.\sin.\varphi'.\sin.\zeta''\right\}$$

$$+\frac{(1+\gamma)}{\gamma}.\int_0^{\zeta''}\frac{d\varphi}{\Delta'} - \frac{2}{\gamma}.\int_0^{\zeta''} d\varphi\,\Delta' .$$

Pour évaluer la première partie de l'expression précédente de t''', il faut d'abord observer, que, en opérant ici comme au § IV, si l'on fait

$$n' = \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma} = \cot.^2\alpha ; \qquad \text{tang.}\,\Omega_{(3)} = \frac{\sqrt{n+k^2}.\sin.\varphi}{\Delta'} ,$$

on aura d'abord;

$$\int \frac{d\varphi}{\left(1+\frac{1}{\gamma}.\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\varphi\right)\Delta'} = \frac{\Omega_{(3)}}{2.\sqrt{n+k^2}} + \frac{\gamma}{\gamma-1}.\int\frac{d\varphi}{\Delta'}$$

$$-\tfrac{1}{2}.\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right).\int\frac{d\varphi}{(1+n'.\sin.^2\varphi)\Delta'} .$$

Maintenant, si l'on fait $k'^2 = 1-k^2$; $n'' = 1-k'^2.\sin.^2\alpha$;

$$\text{tang.}\,\Omega_{(4)} = \sqrt{n''}.\frac{\sin.\varphi.\cos.\varphi}{\Delta'.\text{tang.}\,\alpha} ;$$

par la formule donnée à la page 73 du 1.er Vol. de LEGENDRE, on obtient;

$$\int \frac{d\varphi}{(1+n'.\sin.^2\varphi)\Delta'} = \frac{\sin.\alpha.\cos.\alpha.\Omega_{(4)}}{\sqrt{n''}} + \frac{k^2.\sin.^2\alpha}{n''}.\int\frac{d\varphi}{\Delta'}$$

$$+k'^2.\frac{\sin.^2\alpha.\cos.^2\alpha}{n''}.\int\frac{d\varphi}{(1-n''.\sin.^2\varphi)\Delta'}.$$

Et par la formule posée à la page 75 du même Volume, on a

$$\int_{\varphi'}^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-n''.\sin.^2\varphi)\Delta'} = \frac{-\Omega_{(5)}.\sqrt{n''}}{k'^2.\sin.\alpha.\cos.\alpha} + \int_0^{\zeta''}\frac{d\varphi}{(1-n''.\sin.^2\varphi)\Delta'};$$

où

$$\text{tang.}\,\Omega_{(5)} = \frac{\sqrt{n''}.k'^2.\sin.\alpha.\cos.\alpha.\sin.\varphi.\sin.\varphi'.\sin.\zeta''}{1+n''-n''.\cos.\varphi.\cos.\varphi'.\cos.\zeta''}.$$

Donc nous avons

$$\int_{\varphi'}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\left(1+\frac{1}{\gamma}.\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\varphi\right)\Delta'} =$$

$$\frac{\Omega_{(3)}-\Omega'_{(3)}}{2.\sqrt{n+k^2}} - \frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}.\frac{\sin.\alpha.\cos.\alpha}{\sqrt{n''}}.\left\{\Omega_{(4)}-\Omega'_{(4)}\right\}$$

$$+\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}.\frac{\sqrt{n''}.\Omega_{(5)}}{k'^2.\sin.\alpha.\cos.\alpha} + \left\{\frac{\gamma}{\gamma-1} - \frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}.\frac{k^2.\sin.^2\alpha}{n''}\right\}.\int_0^{\zeta''}\frac{d\varphi}{\Delta'}$$

$$-\tfrac{1}{2}.\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right).\int_0^{\zeta''}\frac{d\varphi}{(1-n''.\sin.^2\varphi)\Delta'};$$

où $\Omega'_{(3)}$, $\Omega'_{(4)}$, sont les valeurs de $\Omega_{(3)}$; $\Omega_{(4)}$, en y faisant $\varphi=\varphi'$. Le dernier terme de cette équation peut être facilement calculé par la formule que j'ai déjà employée dans le § VIII. De sorte que, en faisant

$$\text{tang.}\,\Omega_{(6)} = \frac{(1-n'').\sqrt{n''}}{k'^2.\sin.\alpha.\cos.\alpha}.\frac{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\zeta''}}{\cot.\zeta''};$$

$$\text{tang.}\,\Omega_{(7)} = \frac{u(u^{-\mathrm{a}'}-u^{\mathrm{a}'})\sin.\pi\mathrm{a} - u^4(u^{-2\mathrm{a}'}-u^{2\mathrm{a}'})\sin.2\pi\mathrm{a} + \text{etc.}}{1-u(u^{-\mathrm{a}'}+u^{\mathrm{a}'})\cos.\pi\mathrm{a} + u^4(u^{-2\mathrm{a}'}+u^{2\mathrm{a}'})\cos.2\pi\mathrm{a} - \text{etc.}},$$

$$\mathrm{a} = \frac{F(k,\zeta'')}{F'(k)}; \qquad \mathrm{a}' = \frac{F(k,\alpha)}{F'(k)},$$

l'on aura

$$(\beta^{\text{VII}}) \ldots\ldots \quad \int_{\varphi'}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\left(1+\frac{1}{\gamma}\,\text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\,\varphi\right)\Delta'} =$$

$$\frac{\Omega_{(3)}-\Omega'_{(3)}}{2.\sqrt{n+k^2}} - \frac{(\gamma+1)\sin.\alpha.\cos.\alpha.\{\Omega_{(4)}-\Omega'_{(4)}\}}{2.(\gamma-1).\sqrt{n''}}$$

$$+\tfrac{1}{2}.\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right).\frac{\sqrt{n''}}{k'^2.\sin.\alpha.\cos.\alpha}\left\{\Omega_{(5)}-\Omega_{(6)}+\Omega_{(7)}\right\}$$

$$+\left\{\tfrac{1}{2}-\frac{k^2.\sin.^2\alpha.(\gamma+1)}{2.(\gamma-1)}\right\}.\int_0^{\xi''}\frac{d\varphi}{\Delta'}$$

$$-\tfrac{1}{2}.\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right).\left\{\left(1-\frac{E'(k')}{F'(k')}\right)F(k',\alpha)-E(k',\alpha)\right\}.\int_0^{\xi''}\frac{d\varphi}{\Delta'}\,.$$

Pour nous rapprocher davantage de la limite des valeurs qu'on peut donner à V, sans que le mobile puisse parvenir de la Lune à la Terre, je vais exposer dans le § suivant le calcul relatif à la vitesse $V=2700^{\text{m}}$.

§ XII.

Application des formules du paragraphe précédent en supposant la vitesse de projection telle, que $\frac{aV^2}{2B}=3,502225$.

D'après cette équation, l'on a $V=2700^{\text{m}}$, et

$$\beta = \frac{0,789434+\sqrt{0,63234}}{2,02016} = 0,784409\ ;$$

$$\beta' = \frac{-0,789434+\sqrt{0,63234}}{2,02016} = 0,0028532\ ;$$

$$c^2 = \frac{\beta}{\beta+\beta'} = \frac{0,784409}{0,787262}\ ; \qquad c=\sin.(86^\circ.\,32'.\,55'')\ ;$$

$$\frac{L}{B}=\frac{82}{81}(0,781556)\ :\quad \frac{L'}{B}=1-\frac{\beta\beta'}{81}\ ;\quad \frac{L''}{B}=\frac{1}{81}-\beta\beta'\,.$$

Comme ici l'on a $\frac{L^2}{4L'L''} > 1$, il faut prendre

$$Q = (M-B)(1+q^2\varepsilon)(1+q^2\varepsilon') ;$$

$$\varepsilon = \frac{L}{2L''}\left\{1+\sqrt{1-\frac{4L'L''}{L^2}}\right\} = 39,1392\left\{1+\sqrt{0,9354172}\right\} ;$$

$$\varepsilon' = \frac{L}{2L''}\left\{1-\sqrt{1-\frac{4L'L''}{L^2}}\right\} = 39,1392\left\{1-\sqrt{0,9354172}\right\} ;$$

$$\varepsilon = 76,9936 ; \qquad \varepsilon' = 1,28494 ;$$

$$k^2 = \frac{\varepsilon-\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{75,7087}{76,9936} ; \qquad k = \sin.(82^\circ.\,34'.\,40'') .$$

Maintenant, si l'on fait $q = \frac{\text{tang.}\varphi}{\sqrt{\varepsilon}}$, l'on aura

$$\frac{dq}{\sqrt{Q}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(M-B)}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}} ;$$

$$\frac{\sqrt{B.c}}{\sqrt{MB}} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2.\sin.^2\psi}} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{M-B}.\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}} .$$

En intégrant on tire de là l'équation

$$\int_0^{\varpi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}} = c.\sqrt{\frac{\gamma}{B}} \cdot \sqrt{\frac{0,01008}{1,01008}} \cdot \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2.\sin.^2\psi}} ;$$

laquelle donne

$$N = \int_0^{\varpi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}} = 0,098775 \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2.\sin.^2\psi}} ;$$

où l'amplitude φ doit être déterminée par les formules du § précédent, en observant qu'ici l'équation $\text{tang.}\varphi' = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{219}}$ donne $\varphi' = 30^\circ.\,39'.\,54''$.

Nous avons

$$\text{Log.}\, F'(c) = 0,6232215 \; ; \qquad F'(c) = 4,19973 \; ;$$

$$\text{Log.}\, 0,098775 . F'(c) = 9,6178685 = \text{Log.}\, N \left(\text{pour } \psi = \frac{\pi}{2}\right) ;$$

$$\text{Log.}\, F'(k) = 0,5369025 \; ; \qquad \text{Log.}\, u = 9,3748579 \; .$$

Pour déterminer les points d'intersection de la trajectoire avec l'axe on a ici les équations

$$\frac{\varpi_{(i)}}{2} = 45^\circ . \frac{i\, 2N}{F'(k)} + \sum_1^\infty . \frac{u^n}{n(1+u^{2n})} . \sin. \frac{180^\circ . ni . 2N}{F'(k)} \; ;$$

$$\frac{\varpi_{(i)}}{2} = i(10^\circ . 50' . 40'') + \sum_1^\infty . \frac{u^n}{n(1+u^{2n})} . \sin. (43^\circ . 22' . 40'')\, ni \; ;$$

$$x_{(i)} = \frac{aq^2}{1+q^2} = \frac{60 . r}{1 + \frac{\varepsilon}{\text{tang.}^2 \varphi}} \; .$$

En faisant $i = 1$ cette formule donne :

$$\varpi_{(1)} = 21^\circ . 41' . 20'' + 2(31795'', 6 + 5768'', 2 + 700'', 3) = 42^\circ . 56' . 48'' \; ;$$

Mais nous avons ;

$$\text{Log.}\, \sqrt{1 - k^2 . \sin.^2 \varphi'} = 9,9358524 \; ;$$

$$\text{Log.}\, \text{tang.}\, \Omega' = 9,6406247 \; ; \qquad \text{Log.}\, \text{tang.}\, \Omega'' = 9,9046978 \; ;$$

$$\Omega' = 23^\circ . 36' . 45'' ; \quad \Omega'' = 38^\circ . 45' . 48'' ; \quad \varphi = \Omega' + \Omega'' = 62^\circ . 22' . 33'' ;$$

$$\frac{\varepsilon}{\text{tang.}^2 \varphi} = 21,0861 \; ; \qquad x_{(1)} = \frac{60 . r}{22,0861} = 2,71664 . r \; ;$$

Donc l'équation

$$\tfrac{1}{2} . \frac{av^2}{B} = 3,502225 - 3,72061 + \frac{a}{x_{(i)}} . \frac{1}{81} - \frac{1}{1 - \frac{x_{(i)}}{a}} \; ,$$

en y faisant, $\frac{a}{x_{(i)}} = 22,0861$, devient

$$\tfrac{1}{2} . \frac{av^2}{B} = -0,21839 + 0,272668 - \frac{1}{0,95472} \; :$$

et comme elle donne pour v^2 une valeur *négative*, il faut en conclure

que le mobile ne peut pas couper l'axe à la distance $2,71664 . r$ du centre de la Lune. Par là, il est démontré que, avec une vitesse initiale de 2700 mètres par seconde, aucune masse lancée de la surface de la Lune vers la Terre ne peut tomber sur la Terre, lorsqu'on tient compte de la composante $V \sin. \mu$ de la force de projection qui naît du mouvement de la Lune autour de la Terre, en supposant que le centre de gravité de la Lune devient *fixe* immédiatement *après* la projection de la masse.

En donnant à la vitesse initiale V des valeurs plus grandes que 2783 mètres, on pourrait rendre positif le second membre de l'équation

$$\tfrac{1}{2} v^2 = \tfrac{1}{2} V^2 - A \left\{ \frac{(1+m)}{ma} - \frac{1}{x_{(i)}} \right\} - B \left\{ \frac{1+m}{a} + \frac{1}{a - x_{(i)}} \right\} ;$$

mais alors l'expression du polynome P, donnée dans le premier paragraphe, cesserait d'être réductible à la forme

$$P = M(\beta - p^2)(\beta' + p^2) ,$$

avec des valeurs *positives* et plus *petites* que l'unité pour β et β' ; condition nécessaire pour que les rayons vecteurs

$$\rho = \frac{a}{1-p^2} - \frac{aq^2}{1+q^2} ; \qquad \rho' = \frac{a}{1-p^2} - \frac{a}{1+q^2}$$

de la trajectoire, ne puissent pas acquérir des valeurs *infinies*.

RÉFLEXIONS

Sur la préface d'un Mémoire de LAGRANGE *intitulé :*

SOLUTION D'UN PROBLÈME D'ARITHMÉTIQUE

PUBLIÉ DANS LE TOME IV DES *MISCELLANEA TAURINENSIA* *

PAR

JEAN PLANA

Lues dans la séance du 18 décembre 1859.

Ce Mémoire, daté de Berlin du 20 septembre 1768, est une des productions les plus remarquables du génie de LAGRANGE, alors âgé de 32 ans. En relisant la préface historique, j'ai reconnu qu'il serait intéressant d'y ajouter aujourd'hui les réflexions suivantes, qui me paraissent nouvelles, par la nature des rapprochemens que je vais exposer.

Le but *principal*, que l'Auteur avait en vue, était de démontrer, que $A=a^2+b$, étant un nombre entier non carré, donné à volonté, la solution de l'équation

$$x^2-Ay^2=1\ ,$$

en nombres entiers, est *toujours possible*.

LAGRANGE y parvient, en imaginant développée par les *fractions continues* la racine carrée du nombre A. L'idée est certainement originale, et il croyait alors (en 1768) l'avoir conçue le premier. Mais on sait maintenant que, EULER, vers l'année 1765, avait eue la même idée avant LAGRANGE. En effet au Tome XI des *Novi Commentarii* de l'Académie de S.t-Pétersbourg

* Lisez les pages 41 et 42.

publié en 1767, il y a un Mémoire d'Euler, relatif à la solution de la même équation en nombres entiers, où on lit ce passage:

« Operationes quibus Pellius est usus, aliunde quidem satis sunt » notae, egoque jam eas alia occasione fusius descripsi (au Chap. VII » du second Volume de son Traité d'Algèbre): ex quo eo minus opus » est, ut iis denuo explicandis hic immorer, cum totam Analysin hic » longe alia ratione sum instituturus. Ejus scilicet principium ex hoc » fonte hauriо, quod cum sit $x^2 = Ay^2 + 1$, proxime fiat, $\frac{x}{y} = \sqrt{A}$; ex » quo manifestum est $\frac{x}{y}$ ejusmodi esse fractionem, quae valorem irratio- » nalem $\sqrt{A}$ tam prope exprimat, seu eum tam parum excedat, ut id, » nisi majoribus numeris adhibendis, accuratius fieri nequeat. Quod pro- » blema, olim scilicet a Wallisio solutum, equidem quoque jam dudum » per *fractiones continuas* multo commodius expedivi ».

Cette idée est analogue à celle de Lagrange, qui, après la préface, commence son Mémoire en disant: « Qu'on tire la racine carrée de A » par approximation, et l'on aura une fraction décimale, qu'on pourra » changer par les méthodes connues, en une *fraction continue*, laquelle » ira nécessairement à l'infini, à cause que $\sqrt{A}$ est une quantité irra- » tionnelle par l'hypothèse ».

Euler, dans son Mémoire, donne les formules très-simples, propres à la formation, soit des quotients successifs en nombres entiers, soit des *quotients-complets* qui leurs correspondent, en observant que la forme invariable de ces derniers, dont la répétition est régulièrement *périodique*, est

$$\frac{\sqrt{A} + I}{D};$$

où I et D sont des nombres entiers positifs, dont le premier ne peut pas surpasser a, et le second ne peut pas excéder le double $2a$. Remarques importantes, que le même Euler n'avait pas faites dans ses Mémoires antérieurs publiés aux Tomes VI et IX des *Commentarii* de la même Académie de S.t-Pétersbourg. De sorte que, c'est seulement après un laps de temps, d'environ *trente années*, que Euler s'est aperçu que l'on pouvait appliquer à la solution de l'équation $x^2 - Ay^2 = 1$ sa théorie des fractions continues. Cet intervalle est une circonstance d'autant plus

frappante que, dès l'année 1732, il avait reconnu que l'on pouvait appliquer le rapport $\frac{p}{q}$ des deux nombres p et q qui résolvent l'équation $p^2 - Aq^2 = 1$ à l'expression approchée de $\sqrt{A}$; et il en donne l'exemple pour $A = 6$ et $A = 61$, en posant

$$\sqrt{6} = \frac{4656965}{1901198}, \qquad \sqrt{61} = \frac{1766319049}{226153980}.$$

(Voyez la page 185 du Tome VI des *Commentarii*). Et la périodicité des quotients (qui est un point capital) n'a été reconnue par Euler, que, *par induction*, vers l'année 1737. A la page 117 du Tome IX des mêmes *Commentarii*, Euler s'exprime en ces termes: « Quamvis enim » non constet ex *ipsa divisione*, utrum quoti hac lege ulterius progre- » diantur, tamen id non solum probabile videtur, sed etiam sequenti » modo demonstrari potest etc. »

La rencontre fortuite entre les idées d'Euler et de Lagrange, à une distance d'un petit nombre d'années, me paraît digne d'être méditée par les Lecteurs Philosophes; surtout à cause de la singulière différence avec laquelle le même principe a été employé par l'un et par l'autre. Euler cherchait les moyens les plus faciles pour trouver les solutions de l'équation $x^2 - Ay^2 = 1$: Lagrange visait alors à établir seulement d'une manière incontestable la possibilité de cette solution en général.

Les mêmes Lecteurs seront, peut-être, fort aises d'apprendre que, en reculant au-de-là d'un siècle (en 1634) on acquiert la conviction, que Albert Girard, doué d'un esprit très-pénétrant, avait réduit les racines carrées des nombres en *fractions continues* dans son Commentaire sur les œuvres de Simon Stevin; ce qui a donné occasion à Robert Simson, en 1754, de signaler l'application des fractions rationnelles de A. Girard à la solution de l'équation $x^2 - Ay^2 = 1$. Voici comment R. Simson dans un Mémoire publié en 1754 avec le titre « An explication of on *obscure* » passage in Albert Girard *Commentary upon* Simon Stevius Works » (Voyez le Volume XLVIII, part. I des *Philosophical Transactions* de la Société Royale de Londres), parle de ces quatre exemples relatifs aux nombres

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad \sqrt{2}, \quad \text{et} \quad \sqrt{10},$$

donnés par A. Girard. Pour plus de clarté je vais les exposer ainsi qu'il suit.

On sait que les *quotients* et les *fractions convergentes* peuvent être disposés de cette manière:

$$\text{Pour } \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2\sin.\left(\frac{36^\circ}{2}\right),$$

Quotients	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1, ...
Fract.s converg.s...	$\frac{0}{1}$,	$\frac{1}{1}$,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{3}{5}$,	$\frac{5}{8}$,	$\frac{8}{13}$,	$\frac{13}{21}$,	$\frac{21}{34}$, ...

$$\text{Pour } \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 2\sin.(54^\circ) = 2\sin.\left(\frac{180^\circ - 72^\circ}{2}\right),$$

Quotients	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1, ...
Fract.s converg.s...	$\frac{1}{0}$,	$\frac{1}{1}$,	$\frac{2}{1}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{5}{3}$,	$\frac{8}{5}$,	$\frac{13}{8}$,	$\frac{21}{13}$,	$\frac{34}{21}$, ...

Pour $\sqrt{2}$,

Quotients	1,	2,	2,	2,	2,	2,	2,	2,	2,
Fract.s converg.s.	$\frac{1}{0}$,	$\frac{1}{1}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{7}{5}$,	$\frac{17}{12}$,	$\frac{41}{29}$,	$\frac{99}{70}$,	$\frac{239}{169}$,	$\frac{577}{408}$,
Quotients	2,	.....							
Fract.s converg.s.	$\frac{1393}{985}$,	.....							

Pour $\sqrt{10}$,

Quotients	3,	6,	6,	6,	6,	6,	6,
Fract.s converg.s.	$\frac{1}{0}$,	$\frac{3}{1}$,	$\frac{19}{6}$,	$\frac{117}{37}$,	$\frac{721}{228}$,	$\frac{4443}{1405}$,	$\frac{27379}{8658}$,
Quotients	6,	6,	6, ...				
Fract.s converg.s.	$\frac{168717}{53353}$,	$\frac{1039681}{328776}$,	.....				

À l'égard des deux premiers, A. Girard avait reconnu la propriété des nombres

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, etc.;

d'être tels, que le carré d'un quelconque de ces nombres, diminué du produit de celui qui le précède par celui qui le suit, constitue une différence alternativement égale à l'unité positive ou négative; c'est-à-dire que,

$$5^2-3.8=+1\ ;\quad 8^2-5.13=-1\ ;\quad 13^2-8.21=+1\ ;\quad \text{etc.}$$

La démonstration, que R. Simson entreprend de donner de cette propriété, n'est point satisfaisante. Mais il est facile d'y suppléer. En effet; soit y_x le terme général de cette suite de nombres; puisque

$$y_x=y_{x-1}+y_{x-2}\ ;$$

si l'on fait $y_x=m^x$ l'on aura $1=\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}$: donc en posant, pour plus de simplicité,

$$m'=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ,\qquad m''=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\ ,$$

on aura

$$y_x=C.m'^{x-1}+C'.m''^{x-2}\ ;$$

C et C' étant deux constantes arbitraires. En faisant successivement $x=2$, $x=1$, on doit avoir les équations

$$1=Cm'+C'\ ;\qquad 0=C+\frac{C'}{m''}\ ;$$

d'où l'on tire; $C=\frac{1}{\sqrt{5}}$; $C'=\frac{-m''}{\sqrt{5}}$; et par conséquent

$$y_x=\frac{m'^{x-1}-m''^{x-1}}{\sqrt{5}}\ ;$$

$$y_{x+1}=\frac{m'^{x}-m''^{x}}{\sqrt{5}}\ ;\qquad y_{x-1}=\frac{m'^{x-2}-m''^{x-2}}{\sqrt{5}}\ .$$

Il suit de là (en observant que $m'.m''=-1$), que

$$y_x^2=\frac{m'^{2x-2}+m''^{2x-2}+2(-1)^x}{5}\ ;$$

$$y_{x+1}.y_{x-1}=\frac{m'^{2x-2}+m''^{2x-2}-3(-1)^x}{5}\ ;$$

$$y_x^2-y_{x+1}.y_{x-1}=(-1)^x\ ;$$

c'est-à-dire l'égalité aperçue par Albert Girard. On trouvera de la même manière que

$$y_x = \frac{(1+\sqrt{2})^{x-1} + (1-\sqrt{2})^{x-1}}{2}$$

est la loi de la progression

$$1, \quad 1, \quad 3, \quad 7, \quad 17, \quad 41, \quad 99, \quad \text{etc.};$$

et que

$$y_x = \frac{(1+\sqrt{2})^{x-1} - (1-\sqrt{2})^{x-1}}{2.\sqrt{2}}$$

est la loi de la progression

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 5, \quad 12, \quad 29, \quad \text{etc.}$$

Ces formules démontrent, qu'en désignant par $\frac{p_x}{q_x}$ la fraction convergente vers $\sqrt{2}$ placée au rang x, l'on a

$$\frac{p_x}{q_x} = \frac{\left\{(1+\sqrt{2})^{x-1} + (1-\sqrt{2})^{x-1}\right\}.\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^{x-1} - (1-\sqrt{2})^{x-1}}.$$

En faisant x nombre *impair*, exprimé par $2x-1$, cette formule donne les valeurs de p_{2x-1} et q_{2x-1}, qui satisfont à l'équation

$$p^2_{2x-1} - 2.q^2_{2x-1} = +1.$$

Et en faisant x nombre *pair*, exprimé par $2x$, l'on aura

$$p^2_{2x} - 2.q^2_{2x} = -1.$$

Robert Simson dit après cela que, Albert Girard, dans son Commentaire, fait mention qu'il avait un procédé propre à fournir la série des fractions rationnelles qui convergent vers la racine carrée d'un nombre proposé. Mais, il ajoute, que Albert Girard ne déclare nullement ce procédé, et qu'il donne seulement ces deux exemples:

« viz: He says, $\sqrt{2}$ is equal nearly to $\frac{577}{408}$: or, if you would have » is nearer, to $\frac{1393}{985}$ ».

« His other example is of $\sqrt{10}$, wich, he saye is nearly equal to

» $3+\frac{53353}{328776}$; i. e. to $\frac{1039681}{328776}$ ».

Ainsi il est manifeste que, A. Girard, sans prononcer les mots de *fraction continue*, trouvait précisément les mêmes fractions que nous obtenons par nos procédés de calcul.

Son assertion est conçue d'une manière encore plus générale: la voici avec ses propres mots, conformes à la langue française vers le quart du 17.ème siècle.

« J'adjousteray encor deux ou trois particularitez non encor par cy » devant practiquées, comme d'explicquer les radicaux extrêmement près, » par certains nombres à ce plus aptes et idoines que les autres, tellement » que si l'on entreprenoit les mesmes choses par des autres nombres, » ce ne seroit sans grandement augmenter le nombre des characteres; . . . » en somme la manière de remettre en petits nombres une raison ex- » pliquée par grands nombres, et ayant tres pres la mesme vigueur, » et sous un mesme genre, cōme le 7 à 22 d'Archimedes (*) ».

R. Simson n'a pas deviné le procédé général, dont A. Girard était en possession pour former les fraetions convergentes vers la racine carrée d'un nombre entier donné. Ses propositions sont fondées sur le *postulatum* que: si l'on connaît les deux nombres entiers p et q qui satisfont à l'équation $p^2-Aq^2=1$, obtenus, dit il, par la méthode de Lord Brounker, exposée dans le *Commercium Epistolicum* du D.r Wallis, on pourra en obtenir immédiatement deux autres p' et q', en posant $p'=p^2+Aq^2$; $q'=2pq$; car l'on a aussi $p'^2-Aq'^2=1$, en observant que $(p^2-Aq^2)^2=1$.

Avec cela, R. Simson trouve les fractions convergentes vers $\sqrt{A}$,

$$\frac{p}{q}, \quad \frac{p_{(1)}}{q_{(1)}}, \quad \frac{p_{(2)}}{q_{(2)}}, \quad \text{etc.}$$

éloignées de l'intervalle déterminé par la *période des quotients*; et *non* les fractions convergentes *consécutives*

$$\ldots\ldots \frac{p^{oo}}{q^{oo}}, \quad \frac{p^{o}}{q^{o}}, \quad \frac{p}{q}, \quad \frac{p'}{q'}, \quad \frac{p''}{q''}, \quad \text{etc.},$$

(*) A. Girard paraît (d'après ce passage) avoir fait, avant Huygens, la découverte de la propriété caractéristique des fractions continues; car l'opuscule d'Huygens *Descriptio Automati Planetarii* date de 1682. A. Girard a commenté le v.e et le vi.e Livre de Diophante vers 1634, sans avoir connaissance du Commentaire sur Diophante de Bachet de Méziriac qui avait paru en 1621.

qu'on obtient à l'aide des quotients (indéfiniment), par la répétition de leur période, suivant la méthode donnée par EULER en 1765. R. SIMSON n'a pas reconnu que, ayant les deux premiers nombres p et q, il pouvait former les fractions (*per saltum*) qu'il envisage, avec les formules

$$x = \frac{(p+q.\sqrt{A})^m + (p-q.\sqrt{A})^m}{2} \;;$$

$$y = \frac{(p+q.\sqrt{A})^m - (p-q.\sqrt{A})^m}{2.\sqrt{A}} \;;$$

en donnant à l'exposant m des valeurs entières et positives *impaires* ou *paires*, suivant que l'on a, $p^2 - Aq^2 = -1$, ou $p^2 - Aq^2 = +1$. Au lieu de ces formules, R. SIMSON a remarqué, que le produit $(x^2 - Ay^2)(x'^2 - Ay'^2)$ étant égal à $(xx' \pm Ayy')^2 - A(y'x \pm x'y)^2$, l'on aura une troisième solution

$$x''^2 - Ay''^2 = \pm 1 \,,$$

en prenant

$$x'' = xx' \pm Ayy' \;; \qquad y'' = y'x \pm x'y \;;$$

et $+1$, ou -1, pour le second membre de cette équation, suivant que les deux facteurs du produit auront une valeur égale de même signe, ou de signe contraire.

Cette remarque de R. SIMSON coïncide avec le *Lemme* donné par LAGRANGE à la page 46 de son Mémoire. Elle constitue un théorême très-important, qu'EULER avait trouvé plus tard de son côté. Certes il n'avait pas connaissance de ce Mémoire de R. SIMSON, lorsque, aux pages 26 et 27 du Tome IX des *Novi Commentarii* publié en 1764, il écrivait: « Hinc ergo consecuti sumus hoc Theorema eximium, quod fundamentum » superiorum solutionum in se complectitur ..... cum sit

» $$p = bb - \alpha.aa \;; \qquad q = dd - \alpha.cc \;;$$

» hinc erit

» $$pq = (bb - \alpha.aa)(dd - \alpha.cc) \,,$$

» quae expressio reducitur ad hanc

» $$pq = (bd \pm \alpha.ac)^2 - \alpha(bc \pm ad)^2 \text{ » ,}$$

ce qui revient à l'égalité que R. SIMSON avait trouvée le premier.

L'application qu'il en a fait à l'équation $x^2 - 13y^2 = 1$, en posant $p = 18$; $q = 5$; et par conséquent $p^2 - 13q^2 = -1$, lui donne, à la page 376 du Volume 48 des Transactions Philosophiques, les fractions convergentes

$$\frac{18}{5}, \quad \frac{649}{180}, \quad \frac{23381}{6485}, \quad \text{etc.},$$

lesquelles donnent alternativement

$$p^2 - 13q^2 = -1, \quad p'^2 - 13q'^2 = +1, \quad p''^2 - 13q''^2 = -1; \quad \text{etc.}$$

Cet exemple démontre d'une manière incontestable, que les véritables fractions convergentes vers $\sqrt{13}$ n'ont pas été données par R. Simson. Car l'on a

Pour $A = 13$,

Quotients	3,	1,	1,	1,	1,	6,	1,	1,	1,
Fract.s converg.s.	$\frac{1}{0}$,	$\frac{3}{1}$,	$\frac{4}{1}$,	$\frac{7}{2}$,	$\frac{11}{3}$,	$\frac{18}{5}$,	$\frac{119}{33}$,	$\frac{137}{38}$,	$\frac{256}{71}$,
Quotients	1,	6,	1,	1,	1,	1,			
Fract.s converg.s.	$\frac{393}{109}$,	$\frac{649}{180}$,	$\frac{4287}{1189}$,	$\frac{4936}{1369}$,	$\frac{9223}{2528}$,	$\frac{14159}{3927}$,			
Quotients	6,	1,	.....						
Fract.s converg.s.	$\frac{23382}{6485}$,	.....							

De sorte que les fractions

$$\frac{4}{1}, \quad \frac{7}{2}, \quad \frac{11}{3}, \quad \frac{18}{5}, \quad \frac{119}{33}, \quad \frac{137}{38}, \quad \text{etc.}$$

sont celles qu'A. Girard aurait obtenues par sa méthode, malheureusement perdue, et nullement rétablie par R. Simson. Il est permis de croire qu'il a écrit son Mémoire en 1753, sans avoir connaissance du Mémoire antérieur (de 1737) publié par Euler dans le Tome IX des *Commentarii* de l'Académie de S.t-Pétersbourg, où il y a les deux formules

$$\sqrt{a^2+1}=a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2a+\text{etc.}}}}\;; \qquad \sqrt{a^2+\frac{2a}{b}}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{2a+\text{etc.}}}}}\;,$$

dont la première s'applique facilement à $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, et la seconde à $\sqrt{3}$, $\sqrt{11}$.

Quoiqu'il en soit sur ce point, il est certain, que ce Mémoire de R. Simson (antérieur à celui d'Euler de 1765, et à celui de Lagrange de 1768) avait signalé la connexion existente entre les quantités rationnelles obtenues par la réduction en fraction continue de la racine carrée des nombres entiers, et les nombres entiers x, y propres à fournir (en nombre infini) les solutions de l'équation $x^2-Ay^2=1$. Il est vrai que, de là, à la démonstration de Lagrange, sur la possibilité de la solution de cette équation, en général, il y a un immense vide qu'il fallait remplir. La démonstration d'Euler, fondée sur une induction fort entraînante, devient facilement rigoureuse en y faisant une légère addition, c'est-à-dire en la présentant comme Legendre dans sa 1.ère édition (de 1797) de la Théorie des Nombres. Sur cela il faut observer que

$$p=37951\ 64009\ 06811\ 93063\ 80148\ 96080\;;$$

$$q=\ 1205\ 57357\ 90331\ 35954\ 74425\ 38767\;;$$

étant les *plus petites* valeurs de x et y qui résolvent l'équation

$$x^2-991.y^2=1\;,$$

il est manifeste que le principe de l'induction n'est pas à l'abri de toute objection en pareil cas; ce qui met dans son plein jour, que la démonstration d'Euler, présentée par Legendre, était indispensable. Elle me paraît tout-à-fait rigoureuse pour la racine carrée des nombres *entiers:* et la remarque critique de Lagrange, publiée en 1770 à la page 143 du Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1768 a cessé de lui être applicable, après la démonstration que Legendre, en 1797, avait donné (au § XII de sa *Théorie des Nombres*) « que la fraction $\frac{x}{y}$ est toujours comprise parmi les fractions convergentes vers $\sqrt{A}$ ».

MONTUCLA, à la page 717 du second Volume de son *Histoire des Mathématiques*, rapporte l'invention de A. GIRARD et les recherches de R. SIMSON, dont j'ai parlé, de manière à faire croire qu'il n'a pas saisi au juste le caractère qui les distingue. Son assertion, que, Robert SIMSON « *avait recherché et démontré la méthode qui avait conduit Albert* GIRARD » est tout-à-fait erronée.

Ainsi que je l'ai dit au commencement de ces réflexions, la date du Mémoire de LAGRANGE, dont il est ici question, est du 20 septembre 1768. En l'examinant dans ses détails, rien n'y indique une méthode régulière pour former les *quotients entiers* convergens vers $\sqrt{A}$. D'après les trois exemples qu'il donne, pour $\sqrt{13}$, $\sqrt{19}$, $\sqrt{109}$, on pourrait croire que, *dans le moment*, il n'avait pas encore trouvé les formules propres à cet objet. Il se borne à dire que, en poussant l'approximation jusqu'à *neuf caractères*, à l'aide des grandes Tables d'ULACQ, l'on a;

$$(*)\left\{\sqrt{13}=\frac{36055195}{(10)^7}\;;\quad \sqrt{19}=\frac{435889494}{(10)^8}\right\}\;;\quad \sqrt{109}=\frac{104403065}{(10)^8}\;;$$

et c'est de-là qu'il tire les quotients entiers, en réduisant ces fractions rationnelles en *fractions continues* par la méthode ordinaire. Il obtient de cette manière les nombres qu'il désigne par R aux pages 82, 84 et 85 de son Mémoire.

A l'égard du nombre premier $109=(10)^2+(3)^2$ de la forme $4n+1$, on sait *a priori* qu'il suffit d'avoir les *premiers huit* quotients entiers;

$$2,\ 3,\ 1,\ 2.\ 4,\ 1,\ 6,\ 6,\ 1.\ 4,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 20$$

qui lui correspondent, pour obtenir deux valeurs voisines, égales et de signe contraire, du nombre R. Et ces *huit* premiers quotients sont identiques aux huit premiers;

$$2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 4,\ 1,\ 6,\ 6,\ 2,\ 8,\ 4,\ 1,\ 3;$$

que donne la réduction en fraction continue de la fraction $\frac{104403065}{(10)^8}$;

(*) Il faut remplacer ces nombres par

$$\sqrt{13}=\frac{360555127}{(10)^8}\;;\qquad \sqrt{19}=\frac{435889962}{(10)^8}.$$

D'après cela, il est évident que l'aberration des *quotients* 2, 8, 4, 1, 3 des véritables 1, 4, 2, 1, 3, 2, 20 ne saurait être un obstacle pour trouver les deux nombres $p = 8890182$, $q = 851525$ qui donnent $p^2 - 109 . q^2 = -1$. Après cela on forme facilement les nombres p' et q' qui donnent $p'^2 - 109 . q'^2 = +1$, en posant $p' = 2p^2 + 1$; $q' = 2pq$.

Mais il est manifeste qu'un tel procédé ne serait pas appliquable à $\sqrt{991}$ sans avoir cette racine avec un très-grand nombre de chiffres décimales. Cela n'empêche pas que la démonstration de LAGRANGE sur la possibilité, en général, de l'équation $x^2 - Ay^2 = 1$ ne soit rigoureuse. Il faudra seulement la faire précéder *de la condition*, que les *quotients* de la fraction continue doivent être obtenus par la méthode générale, et non par la réduction en fraction continue de la racine obtenue avec un nombre déterminé de chiffres décimales.

Pour expliquer l'espèce de lacune laissée par LAGRANGE dans son Mémoire, il faut se rappeler que le 24 novembre de la *même* année 1768 il avait présenté à l'Académie de Berlin un autre Mémoire « Sur la » solution des problèmes indéterminés du second degré » où il exposait sa *Théorie* générale de la solution des équations du second degré en nombres entiers. Et cette solution offre une démonstration beaucoup plus complète sur la possibilité de l'équation $x^2 - Ay^2 = 1$ (Voyez les pages 272-274 du Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1767). C'est là qu'on lit ce passage:

« J'avais déjà donné ailleurs (Voyez le 4.ème Tome des Mémoires de la Société de Turin) une démonstration de cette proposition, que toute équation de la forme $1 = p^2 - Bq^2$, B, étant positif non carré, est toujours possible en nombres entiers d'une infinité de manières; et j'y avais aussi joint une méthode générale pour trouver en même temps toutes les solutions dont une telle équation peut être susceptible: celle que je viens de donner (qui date du 24 novembre 1768) est non-seulement plus directe et plus simple, mais elle a encore l'avantage de faire voir que l'équation, dont il s'agit, est toujours résoluble quel que soit B, ce que je n'avais pu démontrer alors (le 20 septembre 1768) que par un assez long circuit ».

En rapprochant ce Mémoire, imprimé à Berlin, de celui imprimé à Turin, on conçoit que LAGRANGE a continué ses recherches sur la résolution de l'équation $x^2 - Ay^2 = 1$, et sur la Théorie des fractions

continues *périodiques*, immédiatement après avoir expédié à Turin son Mémoire destiné à paraître dans le Tome IV des *Miscellanea Taurinensia*.

Toutefois la phrase « *J'ai donné ailleurs la méthode etc.* » qu'on lit à la page 92 de ce Volume, est propre à faire présumer, que, en septembre de 1768, il était déjà en possession de plusieurs de ses résultats publiés postérieurement dans les Volumes de l'Académie de Berlin pour les années 1767 et 1768.

Pour pousser plus loin ces réflexions, je ferai observer que les nombres p et q qui résolvent l'équation $x^2 - 991 . y^2 = 1$ peuvent être écrits d'une manière plus simple, en les cherchant d'après la loi clairement exprimée par Euler au Tome XI des *Novi Commentarii*, qui lie le quotient *moyen* de la première période avec le dernier quotient. Cette loi est telle que les quotients *entiers* sont disposés ainsi:

$$a,\ \alpha_{(1)},\ \alpha_{(2)} \ldots \alpha_{(n-1)},\ \alpha_{(n)},\ \alpha_{(n-1)},\ \alpha_{(n-2)} \ldots \alpha_{(2)},\ \alpha_{(1)},\ 2a,$$

si la période $\alpha_{(1)}, \alpha_{(2)} \ldots 2a$ est *paire*. Et si elle est *impaire*, il y a deux quotients *moyens égaux*; de sorte que leur disposition est celle-ci:

$$a,\ \alpha_{(1)},\ \alpha_{(2)} \ldots \alpha_{(n-1)},\ \alpha_{(n)},\ \alpha_{(n)},\ \alpha_{(n-1)},\ \alpha_{(n-2)} \ldots \alpha_{(2)},\ \alpha_{(1)},\ 2a.$$

En désignant par

$$1,\ D_{(1)},\ D_{(2)} \ldots D_{(n-1)},\ D_{(n)},\ D_{(n-1)},\ D_{(n-2)} \ldots D_{(2)},\ D_{(1)},\ 1$$

les dénominateurs des quotients-complets correspondants dans le premier cas; et par

$$1,\ D_{(1)},\ D_{(2)} \ldots D_{(n-1)},\ D_{(n)},\ D_{(n)},\ D_{(n-1)},\ D_{(n-2)} \ldots D_{(2)},\ D_{(1)},\ 1$$

dans le second, nous pouvons écrire les fractions convergentes ainsi qu'il suit:

$$a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2a$$

$$\frac{1}{0},\ \frac{p_{(1)}}{q_{(1)}},\ \frac{p_{(2)}}{q_{(2)}} \ldots \frac{p_{(n-1)}}{q_{(n-1)}},\ \frac{p_{(n)}}{q_{(n)}},\ \frac{p_{(n+1)}}{q_{(n+1)}},\ \frac{p_{(n+2)}}{q_{(n+2)}},\ \frac{p_{(2n-1)}}{q_{(2n-1)}},\ \frac{P}{Q}$$

dans le premier cas; et

$$a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2a$$

$$\frac{1}{0},\ \frac{p_{(1)}}{q_{(1)}},\ \frac{p_{(2)}}{q_{(2)}} \ldots\ldots \frac{p_{(n-1)}}{q_{(n-1)}},\ \frac{p_{(n)}}{q_{(n)}},\ \frac{p_{(n+1)}}{q_{(n+1)}} \ldots\ldots \frac{p_{(2n)}}{q_{(2n)}},\ \frac{P}{Q}$$

dans le second (*). Cela posé, si la période est *paire* l'on a les formules

$$P = \frac{2p^2_{(n)}}{D_{(n)}} - (-1)^n ; \qquad Q = p_{(n)} \cdot q_{(n)} .$$

Et si la période est *impaire* on a les formules

$$P = p_{(n)} \cdot q_{(n)} + p_{(n-1)} \cdot q_{(n-1)} , \qquad Q = q^2_{(n)} + q^2_{(n-1)} .$$

(Voyez les pages 68 et 70 du premier Volume de la *Théorie des Nombres* de LEGENDRE, édition de 1830).

Dans le cas de $A = 991 = (31)^2 + 30$ la période est paire; les valeurs de $\alpha_{(1)}$, $\alpha_{(2)}$, $\alpha_{(3)}$ ..... $\alpha_{(n)}$ sont:

2, 12, 10, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 6, 1, 1, 1, 1,
3, 1, 8, 4, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 20, 6, 4, 31,

et l'on trouve

$$p_{(n)} = 61604\ 90247\ 59241 \qquad P = p^2_{(n)} - 1 ;$$
$$q_{(n)} = 1956\ 94422\ 12887 \qquad Q = p_{(n)} \cdot q_{(n)} .$$

Les dénominateurs $D_{(1)}$, $D_{(2)}$, ... $D_{(n)}$ sont

30, 5, 6, 25, 22, 21, 30, 29, 23, 9, 35, 26, 27, 33, 14, 45, 7, 13, 39, 18, 35, 21, 15, 42, 11, 50, 3, 10, 15, 2.

Les nombres $p_{(1)}$, $q_{(1)}$; $p_{(2)}$, $q_{(2)}$, etc. sont tels que l'on a, en général, les équations

---

(*) Peut être je me trompe, mais il paraît que la loi de la formation des quotients était inconnue à LAGRANGE au 20 septembre 1768, époque de l'expédition de son Mémoire à l'Académie des Sciences de Turin; autrement il n'aurait pas dit à la page 85 du Tome IV des *Miscellanea Taurinensia*; où $A = 109$ « qu'il faudrait pousser la série assez loin pour trouver les valeurs de x et » de y, qui donnent $R = 1$ ». Car, la première partie de la période étant

2, 3, 1, 2, 4, 1, 6, 6,

la seconde partie doit être

1, 4, 2, 1, 3, 2, 20.

C'est dans son Mémoire daté du 24 novembre 1768 qu'il a développé la loi de la formation de ces quotients avec une grande sagacité. En bornant ses formules, trouvées postérieurement, au cas de la racine carrée des nombres entiers on reconnaît qu'elles s'accordent avec celles d'EULER (Voyez les pages 132-149 du Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1768).

$$p^2_{(k)} - Aq^2_{(k)} = (-1)^k D_{(k)} \;;$$

$$I^2_{(k)} = A - D_{(k)} \cdot D_{(k-1)} \;;$$

$$I_{(k+1)} = \alpha_{(k)} D_{(k)} - I_{(k)} \;;$$

en désignant par

$$\frac{\sqrt{A} + I_{(k)}}{D_{(k)}}$$

un quotient-complet quelconque, correspondant au quotient entier $\alpha_{(k)}$, et se rappelant que, en posant $A = a^2 + b$, l'on a :

$$I_{(1)} = a \;, \qquad D_{(1)} = b \;; \qquad p_{(1)} = a \;, \qquad q_{(1)} = 1 \;;$$

$$\alpha_{(1)} = \frac{2a}{b} \text{ (en prenant seulement la partie entière) ;}$$

$$p_{(2)} = a\alpha_{(1)} + 1 \;; \qquad q_{(2)} = \alpha_{(1)} \;.$$

Sans la connaissance de ces formules générales, il est facile de démontrer *a priori* que la quantité

$$\frac{2p_{(2)}}{q_{(2)}} = 2a + \frac{b}{a}$$

est la limite des nombres entiers $p^2_{(k)} - Aq^2_{(k)}$. C'est en mettant cette propriété en évidence, que Lagrange, au commencement de son Mémoire, établissait l'existence incontestable d'un nombre indéfini de valeurs *égales* pour la différence $x^2 - Ay^2$, en prenant pour x et y des valeurs convenables dans la série

$$\frac{p_{(1)}}{q_{(1)}} \;\ldots\ldots\; \frac{p_{(2n)}}{q_{(2n)}} \;, \quad \frac{p_{(2n+2)}}{q_{(2n+2)}} \;, \quad \frac{p_{(2n+3)}}{q_{(2n+3)}} \;, \quad \text{etc.}$$

des fractions convergentes vers $\sqrt{A}$, continuée indéfiniment.

Lorsqu'on forme les valeurs de $D_{(k)}$ et $I_{(k)}$, en prenant pour $p_{(k)}$, $q_{(k)}$ les nombres nés de la réduction en fraction continue de la quantité fractionnaire obtenue par l'extraction de la racine carrée du nombre A, on reconnaît bientôt que les conditions $D_{(k)} < 2a$, $I_{(k)} < a$; ne sont pas remplies. Dans le cas de $A = 109$, par exemple, si l'on borne l'approximation à huit ciffres décimales, l'on a:

$$\sqrt{109} = \frac{10440306}{(10)^6} = \frac{261009}{25000} \;;$$

et les quotients entiers sont après 10; 2, 3, 1, 2, 4, 11, 1, 5, 3. D'après cela l'on obtient $\frac{12779}{1224}$ à la suite de $\frac{1138}{109}$: ce qui donne

$$(12779)^2 - 109.(1224)^2 = +401657 \;;$$

résultat inadmissible.

Pour avoir la période entière des quotients par la réduction de la racine carrée de 109 en fraction continue, il faut prendre:

$$\sqrt{109} = 10,44030\ 65089\ 10550\ 17975 \;;$$

$$\sqrt{109} = \frac{41761\ 22603\ 56422\ 00719}{4.(10)^{18}} .$$

Après 10, les *quinze premiers quotients* sont:

2, 3, 1, 2, 4, 1, 6, 6, 1, 4, 2, 1, 3, 2, 20 .

Mais le *seizième* quotient est 22, et non 2. De sorte, qu'il faut pousser l'approximation au de là de 20 chiffres décimales pour voir au moins le commencement de la *seconde* période des quotients. J'ai voulu rapporter les nombres fournis par cet exemple pour mieux faire sentir que l'on doit écarter la considération des racines carrées, approchées avec les chiffres décimales, si l'on veut conserver à cette démonstration de Lagrange toute la rigueur et toute la généralité qui lui est inhérente.

La série des quotients

$$\alpha_{(1)},\quad \alpha_{(2)} \cdots\cdots \alpha_{(n-1)},\quad \alpha_{(n)},\quad \alpha_{(n-1)} \cdots\cdots \alpha_{(2)},\quad \alpha_{(1)}$$

étant *symétrique*, c'est-à-dire telle qu'ils sont égaux à la même distance des extrêmes, on sait (Voyez pages 26 et 27 du Tome premier de la *Théorie des Nombres* de Legendre) que la fraction convergente

$$\frac{P}{Q} = \frac{p_{(2n)}}{q_{(2n)}}$$

peut être obtenue en sommant la fraction continue

$$\frac{P'}{Q'}=\frac{1}{\alpha_{(1)}+\frac{1}{\alpha_{(2)}+\frac{1}{\alpha_{(3)}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{1}{\alpha_{(2)}+\frac{1}{\alpha_{(1)}}}}}}\ ;$$

et faisant ensuite

$$a+\frac{P'}{Q'}=\frac{P}{Q}=\frac{aQ'+P'}{Q'}\ ;$$

d'où l'on tire

$$Q=Q'\ ;\qquad P=aQ'+P'\ .$$

C'est sous cette forme que LAGRANGE, à la page 273 du Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1767, obtient les valeurs de P et Q qui résolvent l'équation

$$1=P^2-AQ^2=(P'+aQ')^2-AQ'^2\ .$$

En appliquant ces formules à l'équation

$$x^2-431.y^2=1\ ,$$

pour laquelle $a=20$, $b=31$, $I_{(1)}=20$, on trouve

1, 3, 5, 1, 2, 7, 1, 19, 1, 7, 2, 1, 5, 3, 1

pour la série des quotients $\alpha_{(1)}$, $\alpha_{(2)}$ etc. ;

31, 10, 7, 25, 14, 5, 35, 2, 35, 5, 14, 25, 7, 10, 31

pour la série correspondante des dénominateurs $D_{(1)}$, $D_{(2)}$, etc. ;

11, 19, 16, 9, 19, 16, 19, 19, 16, 19, 9, 16, 19, 11

pour la série $I_{(2)}$, $I_{(3)}$, $I_{(4)}$ etc.

Les fractions convergentes $\frac{p_{(1)}}{q_{(1)}}$, $\frac{p_{(2)}}{q_{(2)}}$ etc., sont :

$$\frac{20}{1},\ \frac{21}{1},\ \frac{83}{4},\ \frac{436}{21},\ \frac{519}{25},\ \frac{1474}{71},\ \frac{10837}{522},\ \frac{12311}{593},\ \frac{244746}{11789},$$

$$\frac{257057}{12382}, \frac{2044145}{98463}, \frac{4345347}{209308}, \frac{6389492}{307771}, \frac{36292807}{1748163}, \frac{115267913}{5552260};$$

$$\frac{(12311)^2-1}{12311.593}=\frac{151560720}{7300423}=\frac{P}{Q}=\frac{p_{(16)}}{q_{(16)}}.$$

La valeur de $\frac{P'}{Q'}$, et celles des fractions convergentes, qui la précèdent, sont :

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{16}{21}, \frac{19}{25}, \frac{54}{71}, \frac{397}{522}, \frac{451}{593}, \frac{8966}{11789}, \frac{9417}{12382}, \frac{74885}{98463},$$

$$\frac{159187}{209308}, \frac{234072}{307771}, \frac{1329547}{1748163}, \frac{4222713}{555260};$$

$$\frac{5552260}{7300423}=\frac{P'}{Q'}.$$

Il ne sera pas inutile de faire observer qu'en prenant

$$\sqrt{431}=20,76053\ 94920\ 26,$$

et réduisant cette quantité fractionnaire en fraction continue, on aurait, après 20, les quotients entiers :

1, 3, 5, 1, 2, 7, 1, 19, 1, 7, 2, 1, 9, etc.

De sorte que le *treizième* quotient 9 cesse d'être égal au quotient 5 de la première période.

Pour simplifier autant que possible de tels calculs, il faut remarquer :

1.° Que l'équation $x^2-Ay^2=1$ est résolue, si l'on trouve deux nombres x', y' tels que $x'^2-Ay'^2=\pm 2$. Car, en posant $y=x'y'$, l'on a

$$Ay^2=Ay'^2x'^2=(x'^2\mp 2)x'^2,$$

et par conséquent

$$x^2=1+Ay^2=1+x'^4\mp 2x'^2=(x'^2\mp 1)^2.$$

2.° Il faut observer que l'équation $x^2-Ay^2=\pm 1$ est résolue si l'on trouve deux nombres impairs x', y' qui donnent

$$x'^2-Ay'^2=\pm 4.$$

Car en posant $y = y'\left(\frac{x'^2 \mp 1}{2}\right)$ on en tire

$$Ay^2 = \frac{(x'^2 \mp 4)(x'^2 \mp 1)^2}{4} ;$$

$$x^2 = 1 + Ay^2 = \frac{x'^2(x'^2 \mp 3)^2}{4} .$$

Le nombre x' étant impair, il est clair que $\frac{x'^2 \mp 1}{2}$, $\frac{x'^2 \mp 3}{2}$ sont des nombres entiers. Par un enchaînement tout-à-fait remarquable, les formules que je viens d'exposer, en y faisant un changement initial, qui porte principalement sur les deux premiers quotients, s'adaptent à la solution, en nombres entiers, de toute équation de la forme $B = x^2 - Ay^2$, si elle est possible, le nombre B étant $< \sqrt{A}$, et en démontrent l'impossibilité dans le cas contraire par l'absence du nombre B parmi les dénominateurs des quotients-complets. En supposant le nombre $B > \sqrt{A}$, délivré de tout facteur carré, et premier à y, si l'on fait $x = Ny - Bz$; le nombre N étant plus petit que $\frac{B}{2}$, et tel que $\frac{N^2 - A}{B}$ soit un nombre entier, on aura la transformée

$$D_{(0)}y^2 - 2I_{(0)}yz + Bz^2 = 1 ;$$

où, par symétrie, je fais:

$$I_{(0)} = N , \qquad D_{(0)} = \frac{I^2_{(0)} - A}{B} .$$

Cela posé, si l'on réduit en fraction continue la racine

$$X = \frac{\sqrt{A} + I_{(0)}}{D_{(0)}}$$

de l'équation du second degré

$$D_{(0)}X^2 - 2I_{(0)}X + B = 0 ,$$

on tombera sur un des quotients-complets dont le dénominateur sera égal à l'unité, si l'équation $B = x^2 - Ay^2$, ou $-B = x^2 - Ay^2$ est possible.

Pour appliquer cette méthode à la solution d'une équation de la forme

$$B = Lx^2 - Ay^2 \;;$$

où le nombre B est délivré de tout facteur carré, et de tout facteur commun avec le nombre L, il faut distinguer deux cas: celui de $B < \sqrt{LA}$, et celui de $B > \sqrt{LA}$. Dans le premier cas, on réduit en fraction continue la racine $\frac{\sqrt{AL}}{L}$ de l'équation $LX^2 - A = 0$; et le nombre B doit se trouver parmi les dénominateurs des quotients-complets, si l'équation est possible. Alors le numérateur de la fraction convergente qui lui correspond donne la valeur de x, et le dénominateur la valeur de y.

Dans le second cas on fera $x = Ny - Bz$, et on cherchera (si cela est possible) un nombre $N < \frac{B}{2}$, tel que $\frac{LN^2 - A}{B}$ soit un nombre entier. En désignant par $D_{(0)}$ ce nombre entier, il faudra réduire en fraction continue les racines de l'équation

$$D_{(0)}X^2 - 2LNX + B = 0 \;,$$

et voir si l'on rencontre l'*unité* parmi les dénominateurs des quotients-complets. Cette seconde condition étant remplie, le numérateur de la fraction convergente, qui lui correspond, donnera la valeur de y, et le dénominateur la valeur de z. La valeur de $x = Ny - Bz$ sera par là aussi connue.

On trouve dans l'ouvrage de Legendre tous les développemens nécessaires pour cette solution. Elle est due à Lagrange qui l'a donnée dans le Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1768 (Lisez les pages 233–240).

A la page 92 du Tom. IV des *Miscellanea Taurinensia* il avait donné une simple indication relative à la possibilité de cette équation. La sphère de ces réflexions comporte seulement de faire observer, que le théorême énoncé au commencement de cette page offre un *criterium* certain d'impossibilité absolue, lorsqu'il n'est pas vérifié. Alors il n'y a aucun nombre N capable de rendre $N^2 - A$ divisible par B. C'est une proposition dont Lagrange a donné la démonstration à la page 282 du Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1767. Mais cette condition ne suffit pas; elle pourrait être satisfaite et l'équation $B = x^2 - Ay^2$ être néanmoins impossible. C'est de quoi l'équation $101 = x^2 - 79 \cdot y^2$

offre un exemple. Ici l'on a $33^2 - 79 = 101 . 10$; et cependant aucune des deux racines de l'équation

$$10 . X^2 - 66 . X + 79 = 0 ,$$

réduites en fractions continues, présente un dénominateur égal à l'unité dans la suite des quotients-complets (*). Cette seconde condition n'est pas énoncée dans le Tome IV des *Miscellanea Taurinensia*; LAGRANGE en a fait la découverte plus tard: on la trouve dans son Mémoire lu à l'Académie de Berlin le 21 juin 1770 (Voyez les pages 183, 247-249 du Volume pour l'année 1768). C'est dans ce Mémoire qu'on voit les efforts de LAGRANGE couronnés d'un succès complet. Lui seul était capable de tirer un parti aussi avantageux de ses propres recherches et de celles d'EULER, et d'amener la solution de ce problème d'arithmétique à son dernier terme de perfection.

Pour mieux faire apprécier cette théorie je vais terminer ces Réflexions en l'appliquant à l'équation

$$101 = x^2 - 991 . y^2 .$$

Ici le concours des deux conditions a lieu. En effet, si l'on prend $N = 48$; l'on a $48^2 - 991 = 101 . 13$, et

$$13 . X^2 - 96 . X + 101 = 0$$

pour l'équation du second degré dont les racines sont

$$X' = \frac{\sqrt{991} + 48}{13} , \qquad X'' = \frac{\sqrt{991} - 48}{-13} .$$

En réduisant la valeur de X' en fraction continue, on trouve que le

(*) Néanmoins l'équation $x^2 - 79 . y^2 = 101 . z^2$ est résoluble en nombres entiers par quatre systèmes de formules absolument distincts. Le premier système est tel que l'on a:

$$x = 1854 . p^2 + 2286 . q^2 + 3126 . pq ;$$
$$y = 148 . p^2 + 207 . q^2 + 462 . pq ;$$
$$z = 130 . p^2 - 135 . q^2 + 30 . pq ;$$

le second système est tel que l'on a;

$$x = 927 . p^2 + 4572 . q^2 + 3126 . pq ;$$
$$y = 74 . p^2 + 414 . q^2 + 462 . pq ;$$
$$z = 65 . p^2 - 270 . q^2 + 30 . pq .$$

On peut prendre *à volonté* les nombres entiers p et q, positivement ou négativement. Donc, en prenant pour p des valeurs positives, et pour q des valeurs négatives, on formera le *troisième* et le *quatrième* système de formules. À leur aide on obtient *toutes les solutions rationnelles* dont l'équation $101 = x^2 - 79 . y^2$ est susceptible.

dix-neuvième quotient-complet a l'unité pour dénominateur. Les q notients entiers se succèdent dans cet ordre :

6, 8, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 6, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 10, 12, 2, 62 :

et les fractions convergentes correspondantes sont :

$$\frac{1}{0}, \frac{6}{1}, \frac{49}{8}, \frac{55}{9}, \frac{214}{35}, \frac{269}{44}, \frac{483}{79}, \frac{752}{123}, \frac{1235}{202}, \frac{8162}{1335}, \frac{17559}{2872},$$

$$\frac{25721}{4207}, \frac{43280}{7079}, \frac{112281}{18365}, \frac{267842}{43809}, \frac{647965}{105983}, \frac{6747492}{1103639}, \frac{81617869}{13349651},$$

$$\frac{169983230}{27802941} = \frac{y}{z}.$$

Il suit de là que l'on a

$$x = 48.y - 101.z = 53510\ 97999 = F\ ;$$

$$y = 169983230 = G$$

pour les plus petites valeurs de x et y qui satisfont à l'équation

$$101 = x^2 - 991.y^2.$$

Elles sont, comme l'on voit, beaucoup plus petites que celles rapportées plus haut, relativement à l'équation $1 = p^2 - 991.q^2$.

D'après les valeurs de F, G, p, q, il est facile de former les expressions générales de x et y.

La rapidité des communications de nos jours augmente la surprise, en acquérant la certitude que cette découverte analytique de Lagrange était inconnue à Saint-Pétersbourg, même à Euler, quatre années après sa publication à Berlin. En considérant l'admirable candeur de son caractère, je ne puis m'expliquer autrement l'existence de la solution du problème, déjà complétement résolu par Lagrange, donnée, sans citer son nom, à la page 237 du Tome XVIII des *Novi Commentarii*. Le Sécretaire de l'Académie, à la page 25 de ce Volume, en parle comme d'une méthode tout-à-fait nouvelle. Par les dates, que je viens de rapprocher, il est évident que, sur ce point, l'opinion des Savans est fixée depuis longtemps.

ADDITION HISTORIQUE

À LA PRÉFACE D'UN MÉMOIRE DE LAGRANGE,

publié dans le Tome IV des Miscellanea Taurinensia (*)

PAR

JEAN PLANA

Lue dans la séance du 18 décembre 1859.

C'est un fait remarquable, celui de la non-citation de Jean Bernoulli dans ce Mémoire de Lagrange, daté de Berlin, comme le précédent et du même jour 20 Septembre 1768. Cependant, dès le mois de Juin de l'année 1695, J. Bernoulli, dans une de ses lettres à Leibnitz, il lui communiquait une idée analytique *tout-à-fait originale*, qui ne mérite pas l'oubli; et d'autant moins qu'elle s'accorde avec le mode d'intégration retrouvé 73 années plus tard par Lagrange et publié par Lui aux pages 100 et 101 de son Mémoire.

En effet, voici le morceau de la lettre de J. Bernoulli, tel qu'il a été publié en 1745 aux pages 59 et 60 du 1.er Volume du *Commercium Philosophicum et Mathematicum*.

« Summo jure objecisti *Fratri* meo, quod putaverit unicam tantum » dari transcendentem, videl. Logarithmicam, cujus puncta quotvis per » communem Geometriam inveniri possint; egregie enim notasti alteram » transcendentem pro sectionibus Anguli, cujus puncta etiam per com- » munem Geometriam facillime habentur. Ego nullus dubito plures alias » hujusmodi dari, pro quibus autem methodum excogitare nondum vacavit: » saltem jam video illam in eo consistere, ut inveniatur aequatio diffe- » rentialis constans duobus membris omnino inter se similibus et non » integralibus, quae tamen aequatio sit pro curva algebraïca, qualis est haec:

$$\frac{dx}{\sqrt{aa+xx}}=\frac{dy}{\sqrt{aa+yy}},$$

(*) Lisez les pages 98-103.

» ubi duo membra $\frac{dx}{\sqrt{aa+xx}}$ et $\frac{dy}{\sqrt{aa+yy}}$ sunt similia; id est, dx
» cum a et x, eodem modo componitur, ac dy cum a et y; non autem
» sunt integrabilia, quia eorum integralia, vel summae, dependent a qua-
» dratura hyperbolae. Interim aequatio differentialis comprehendit [praeter
» rectam, quam omnes huiusmodi aequationes necessario comprehendunt,
» quam autem hic non puto] aliam curvam algebraïcam, quam sic invenio:

$$\frac{dx}{\sqrt{aa+xx}}=\frac{dy}{\sqrt{aa+yy}}$$

» dat

$$\frac{y.xdx}{\sqrt{aa+xx}}=\frac{x.ydy}{\sqrt{aa+yy}},$$

» eorumque summae

$$y.\sqrt{aa+xx}-\int dy.\sqrt{aa+xx}=x.\sqrt{aa+yy}-\int dx.\sqrt{aa+yy}\pm bb.$$

» Est autem

$$dy.\sqrt{aa+xx}=dx.\sqrt{aa+yy},$$

» per aequationem datam: ergo etiam

$$\int dy.\sqrt{aa+xx}=\int dx.\sqrt{aa+yy}:$$

» illis itaque destitutis, manebit aequatio algebraïca

$$y.\sqrt{aa+xx}=x.\sqrt{aa+yy}\pm bb:$$

» quae determinat modum spatium hyperbolicum dividendi in quotvis
» partes aequales; ex qua divisione ipsa Logarithmica producitur.

» Sic ex aequatione differentiali membrorum similium, et non sum-
» mabilium

$$\frac{dx}{\sqrt{aa-xx}}=\frac{dy}{\sqrt{aa-yy}}$$

» invenio curvam algebraïcam

$$y.\sqrt{aa-xx}=x.\sqrt{aa-yy}\pm bb,$$

» qua ostenditur etiam circuli divisiones producere curvam transcendentem,
» cujus puncta quotvis algebraïce possunt inveniri, quae ipsa Tua est
» curva sectionum anguli. Idem praestari potest, si inveniatur curva

» algebraïca, quando alterum membrum aequationis differentialis similis, » per quemvis numerum multiplicatur, ut si fiat

$$\text{»} \quad \frac{n.dx}{\sqrt{aa-xx}} = \frac{dy}{\sqrt{aa-yy}} \text{ »}.$$

Il est curieux de rapprocher ce morceau, écrit l'année 1695, de la demande que Lagrange se faisait en 1768, au sujet de l'intégration algébrique de ces mêmes équations par ces mots:

« Mais si d'un côté cette méthode est un peu plus directe que la » précédente, de l'autre, elle a aussi l'inconvénient de dépendre des » quantités transcendantes; en effet, puisque l'intégrale de l'équation » proposée est absolument algébrique, n'est-il pas naturel de penser » qu'il y a aussi une voie purement algébrique par y parvenir? » Cette voie est précisément celle qui avait été imaginée par J. Bernoulli.

Au reste, le trait de génie qui caractérise, dans son ensemble, le Mémoire de Lagrange, dont il est ici question, ne dérive point de l'artifice imaginé par Jean Bernoulli. Il est fondé sur le principe, que la différentiation combinée avec l'intégration peut, dans quelques cas, surmonter les obstacles que présente la seule intégration. Euler a admiré cette production de Lagrange, en déclarant son opinion par ces mots mémorables: « penitus obstupui cum mihi nunciaretur in Volumine quarto » Miscellaneorum Taurinensium ab illustri Lagrange talem methodum esse » expositum ».

Je saisis l'occasion de cette singulière rencontre de deux hommes de génie, pour en faire remarquer une autre non moins innocente, relative au théorème symbolique de Calcul Différentiel;

$$d^m.(xy) = d^m x.d^0 y + m d^{n-1} x.dy + \text{etc.};$$

$$d^m.(xy) = (dx + dy)^m,$$

communiqué, comme nouveau, en 1754 au Comte Giulio Fagnani par le jeune Louis Lagrange.

Lagrange ignorait alors que, dès l'année 1695, ce même théorème avait été signalé par Leibnitz dans une de ses lettres à J. Bernouilli (Voyez la page 99 du 1.er Volume du *Commercium*).

MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE DES NOMBRES

PAR

JEAN PLANA

« Toutes les vérités mathématiques sont liées les unes
» aux autres, et tous les moyens de les découvrir
» sont également admissibles ».

LEGENDRE, page 70 du Tome 2
de la *Théorie des Nombres*.

Lu dans la séance du 20 novembre 1859.

§ I.

Parmi les propriétés générales qui caractèrisent les nombres premiers de l'une ou de l'autre des deux formes $2n+1$, $2n-1$, les deux principales sont : 1.°, que le produit $1.2.3.4.....2n$, ou le produit $1.2.3.4.....2n-2$, augmenté de l'unité, doit être divisible par le nombre donné, si effectivement il est premier; 2.°, que tout nombre a, non divisible par un nombre premier déterminé, étant élevé à la puissance $2n$, ou $2n-2$ offre un nombre a^{2n}, ou a^{2n-2}, nécessairement divisible par ce nombre premier, après avoir été diminué de l'unité. Si le nombre premier est un peu considérable, la vérification de ces deux propriétés par le calcul ordinaire, devient à-peu-près impraticable. Du moins abstraction faite de la célèbre loi de *réciprocité* découverte par LEGENDRE. Mais on sait, que les deux propriétés, que je viens de définir, ont été rationnellement démontrées vraies par LAGRANGE et EULER, d'une manière tout-à-fait indépendante, non-seulement de toute induction, mais aussi de la grandeur des nombres auxquels elles sont applicables. A cette démonstration d'une simple possibilité, j'ai voulu ajouter celle de l'expression analytique du quotient, qui n'a pas encore été publiée, du moins à ma connaissance.

L'équation, fort remarquable par sa singularité,

$$1.2.3.4\ldots\ldots m =$$

$$m^m - m(m-1)^m + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^m$$

$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(m-3)^m \ldots\ldots - m(-1)^m,$$

vraie pour tout nombre entier m, pair ou impair, a été signalée par Euler, dès l'année 1755, comme un des résultats, obtenu dans la théorie des différences, susceptible d'être appliqué au perfectionnement de la Théorie des Nombres. Il pensait alors qu'une méthode « quae in con- » sideratione differentiarum continetur ad multa numerorum arcana viam » sit patefactura » (page 82 du Tome VII des *Novi Commentarii* Academiae Petropolitanae). A cette idée originale d'Euler, l'histoire de la Science ajoutera celle, encore plus féconde, qui lui a fait découvrir les propriétés des racines *primitives* des nombres premiers. L'étendue de ses vues sur l'arithmétique transcendante était à la fois vaste et inépuisable. En 1770, dans le Tome XIV des *Novi Commentarii* et vers les dernières années de sa vie, il a signalé la suite infinie

$$1 + x^1 + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + \text{etc.};$$

où les exposans de x sont les carrés des nombres naturels 1, 2, 3, 4, etc., comme éminemment propre pour démontrer, d'une manière sensible, par le développement de sa *quatrième puissance*, un théorême capital énoncé la première fois en 1631 par Bachet dans son Commentaire à la Proposition 31.ème du IV.ème Livre de Diophante: que tout nombre entier est la somme de quatre, où d'un nombre moindre de carrés. Mais il y avait là un obstacle insurmontable sans le secours des découvertes postérieures faites par Jacobi, lesquelles, par la plus heureuse des rencontres, ont révélé l'existence d'un enchaînement entre la Théorie des Transcendantes elliptiques et la Théorie des Nombres.

Après avoir obtenu des développemens fort différens par leur forme pour la même fonction d'une variable, et remarqué que la série

$$1 + 8\left(\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \text{etc.}\right),$$

ordonnée suivant les puissances de x, devait, par son origine, devenir

identique au développement de la fonction

$$(1+2x+2x^4+2x^9+2x^{16}+\text{etc.})^4,$$

Jacobi a pu trouver la loi de ce développement en imitant un procédé exposé par Euler dans le Tome V des *Novi Commentarii*. On verra dans ce Mémoire de quelle manière cette question se rattache à celle d'Euler, relative à la loi de la somme des diviseurs des nombres.

La nouvelle application que je fais dans ce Mémoire de ce puissant artifice analytique, à l'égard du carré de la série

$$1+x^1+x^4+x^9+x^{16}+x^{25}+\text{etc.},$$

mettra dans toute son évidence le théorême de Fermat: que tout nombre entier de la forme $4n+1$ est susceptible d'être décomposé en deux carrés d'une seule manière s'il est premier, et de plusieurs manières s'il n'est pas premier. C'est ainsi, par exemple, que $73=8^2+3^2$; et que $85=9^2+2^2=7^2+6^2$. Il est satisfaisant pour un esprit qui étudie, en philosophe, la Science des Nombres, de pouvoir affirmer que tout nombre, pair ou impair, susceptible d'être décomposé en *deux* carrés, doit avoir la forme

$$2^X(4Y-1)^2(4Z+1);$$

X, Y, Z étant des nombres entiers positifs, sous la condition expresse que les facteurs premiers du nombre $4Z+1$ soient de cette même forme; et de tirer de la même source la démonstration de la propriété non moins capitale, que tout nombre entier peut être décomposé soit en quatre carrés, soit en quatre ou en trois nombres triangulaires.

Telles sont les propositions que j'ai entrepris d'analyser d'une manière nouvelle dans le Mémoire que je présente aujourd'hui à notre Académie. J'ai fait tous les efforts dont je suis capable pour essayer d'ajouter quelques développemens à une partie des recherches profondes sur l'Arithmétique, publiées, il y a environ un siècle, par son immortel fondateur Louis Lagrange.

§ II.

En m'appuyant sur le premier artifice analytique imaginé par Euler en 1755, j'ai appliqué la transformation du produit $1.2.3\ldots m$ au cas où l'on prend pour m un nombre pair $p-1$, tel que p soit un nombre premier. Alors on a d'abord l'équation

$$1.2.3.4\ldots\ldots\ldots p-1=$$

$$(p-1)^{p-1}-(p-1)(p-2)^{p-1}+\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}(p-3)^{p-1}\ldots-(p-1)(1)^{p-1};$$

dont le second membre peut être écrit ainsi; savoir:

$$\left[(p-1)^{p-1}-1\right]-(p-1)\left[(p-2)^{p-1}-1\right]+\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}\left[(p-3)^{p-1}-1\right]$$

$$-\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3}\left[(p-4)^{p-1}-1\right]\ldots\ldots-(p-1)\left[(1)^{p-1}-1\right]$$

$$+1-(p-1)+\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}-\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3}\ldots\ldots-(p-1).$$

Mais nous avons

$$1-(p-1)+\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}\ldots\ldots-(p-1)=(1-1)^{p-1}-1=-1;$$

partant il est manifeste que l'on a:

$$1.2.3.4\ldots\ldots\ldots(p-1)=$$

$$-1+\left[(p-1)^{p-1}-1\right]-(p-1)\left[(p-2)^{p-1}-1\right]$$

$$+\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}\left[(p-3)^{p-1}-1\right]-\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3}\left[(p-4)^{p-1}-1\right]$$

$$+\frac{(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{1.2.3.4}\left[(p-5)^{p-1}-1\right]$$

. . . . . .

. . . . . .

$$+\frac{(p-1)(p-2)(p-3)\ldots\ldots 3}{1.2.3\ldots\ldots p-3}\left[2^{p-1}-1\right].$$

Et il n'est pas moins clair, que cette équation revient à dire, que

$$1.2.3.4\ldots\ldots(p-1)+1=$$

$$\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}\left[2^{p-1}-1\right]-\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3}\left[3^{p-1}-1\right]$$

$$+\frac{(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{1.2.3.4}\left[4^{p-1}-1\right]$$

$$-\frac{(p-1)(p-2)\ldots\ldots(p-5)}{1.2.3.4.5}\left[5^{p-1}-1\right]$$

. . . . . .

. . . . . .

$$-(p-1)\left[(p-2)^{p-1}-1\right]+\left[(p-1)^{p-1}-1\right].$$

Cela posé, il est facile de démontrer, que chacun des termes du second membre de cette équation est divisible par p. En effet, nous avons

$$2^p = (1+1)^p = 1 + p + \frac{p(p-1)}{1.2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} \ldots\ldots + 1 \;;$$

et par conséquent

$$2^p - 2 = p + \frac{p(p-1)}{1.2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} \ldots\ldots + p \;;$$

ou bien

$$2(2^{p-1} - 1) = p \left\{ 1 + \frac{p-1}{2} + \frac{(p-1)(p-2)}{2.3} \ldots\ldots + 1 \right\} .$$

Chacun des dénominateurs 2; 2.3; $2.3.4$; etc. étant le produit de nombres *inférieurs* au nombre premier p, il est impossible, que le facteur p soit détruit dans aucun des nombres qui composent le second membre de cette équation, lesquels sont nécessairement entiers d'après la théorie des combinaisons. Donc cette équation subsiste en ce sens, que le nombre

$$1 + \frac{p-1}{2} + \frac{(p-1)(p-2)}{2.3} \ldots\ldots + 1$$

est nécessairement divisible par 2; de sorte que l'on a:

$$2^{p-1} - 1 = p \cdot q_{(2)} \;;$$

$q_{(2)}$ désignant un nombre entier. Maintenant si l'on observe que

$$3^p = (2+1)^p = 2^p + p \cdot 2^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} 2^{p-2}$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{2.3} 2^{p-3} \ldots\ldots + 1 \;;$$

$$3^p - 3 = 2^p - 2 + p \cdot 2^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} 2^{p-2}$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{2.3} 2^{p-3} \ldots\ldots + p \cdot 2 \;;$$

$$3(3^{p-1} - 1) = p \left\{ \begin{array}{l} 2q_{(2)} + 2^{p-1} + \frac{(p-1)}{2} 2^{p-2} \\ + \frac{(p-1)(p-2)}{2.3} 2^{p-3} \ldots\ldots + 2 \end{array} \right\} ;$$

on démontrera par un raisonnement semblable, que le nombre entier

$$2q_{(2)}+2^{p-1}+\frac{(p-1)}{2}2^{p-2}\ldots\ldots+2$$

doit être divisible par 3; de sorte que l'on a: $3^{p-1}-1=p.q_{(3)}$; où $q_{(3)}$ désigne un nombre entier. Il est évident, qu'à l'aide des équations:

$$4^p=(3+1)^p\ ;\quad 5^p=(4+1)^p\ ;\quad 6^p=(5+1)^p\ ;\quad \text{etc.},$$

et de la formule du binome, on démontrera de la même manière, que l'on a:

$$4^{p-1}-1=p.q_{(4)}\ ;\quad 5^{p-1}-1=p.q_{(5)}\ ;\quad \ldots\ldots(p-1)^{p-1}-1=p.q_{(n-1)}\ ;$$

$q_{(4)}$, $q_{(5)}\ldots\ldots q_{(n-1)}$ désignant des nombres entiers. Telle est la manière de mettre en évidence, que le nombre

$$1.2.3.4\ldots\ldots(p-1)=2^{\beta_{(1)}}.3^{\beta_{(2)}}.5^{\beta_{(3)}}.7^{\beta_{(4)}}\ldots\ldots$$

composé des facteurs premiers 2, 3, 5, 7, etc., chacun inférieur au nombre premier p, et par conséquent non divisible par p, change entièrement de nature par l'addition de l'unité positive, puisque, par là, la somme

$$1+2^{\beta_{(1)}}.3^{\beta_{(2)}}.5^{\beta_{(3)}}.7^{\beta_{(4)}}\ldots\ldots$$

est susceptible d'être décomposée en $p-2$ parties entières, chacune divisible par le même nombre premier p.

Je préfère cette démonstration, qui met en évidence non-seulement la possibilité, mais aussi la véritable décomposition du binome

$$1+2^{\beta_{(1)}}.3^{\beta_{(2)}}.5^{\beta_{(3)}}.7^{\beta_{(4)}}\ldots\ldots$$

de manière qu'il devient égal à un produit de la forme

$$p\left\{A_{(1)}+A_{(2)}+A_{(3)}\ldots\ldots A_{(p-2)}\right\}\ ;$$

où $A_{(1)}$, $A_{(2)}$, $A_{(3)}\ldots A_{(p-2)}$ sont nécessairement des nombres entiers.

La démonstration d'Euler (lisez les pages 329, 330 du 1.er Volume de ses *Opuscula Analytica* publié en 1783), bornée à la simple possibilité, est sans doute la plus concise; mais celle que je viens de donner, puisée comme celle de Lagrange, dans la transformation du produit $1.2.3\ldots m$, rappelée aux Géomètres par Euler en 1755, me paraît plus lumineuse.

Rien n'indique que cette propriété de tout nombre premier ait été trouvée par une voie démonstrative par Jean Wilson, qui, le premier,

en a fait la communication à WARING. Il est probable que WILSON aura seulement remarqué que le produit $1.2.3\ldots(n-1)$ étant nécessairement divisible par n, à l'égard de tout nombre n, *qui n'est pas premier*, et par conséquent *non* divisible par n, si on lui ajoute l'unité, il n'était pas impossible de voir naître une propriété *contraire*, à l'égard des nombres premiers, ainsi que cela se vérifie aisément en faisant

$$n=3\,,\quad n=5\,,\quad n=7\,,\quad n=11\,,\quad n=13\,;$$

nombres pour lesquels l'on a:

$$1.2+1=3\,;\quad 1.2.3.4+1=25\,;\quad 1.2.3.4.5.6+1=7.13\,;$$

$$1.2.3.4.5.6.7.8.9.10+1=11.329891\,;$$

$$1.2.3.4\ldots\ldots12+1=13.36846277=13\left\{(5919)^2+(1346)^2\right\}.$$

D'après ce simple aperçu, WILSON aura généralisé la proposition, sans être en état de la démontrer vraie, quelle que soit la grandeur du nombre premier. Et WARING en la publiant (en 1770) dans la première Édition de son ouvrage intitulé *Meditationes Algebraicae* aurait donné à entendre, que l'*Armiger* WILSON, qu'il qualifie de « *vir clarissimus, re-* » *ramque mathematicarum peritissimus* » avait voulu garder le secret de la démonstration. Mais l'hypothèse gratuite que je viens de faire est démentie par l'aveu fait par WARING dans sa préface à la *troisième* Édition de ce même ouvrage publiée en 1782, où on lit (page XXXII): « Datur » etiam demonstratio elegantis proprietatis primorum numerorum postea » traditae, viz. quod numerus $1.2.3.4\ldots\ldots(n-1)+1$ semper erit » divisibile per n, si n sit primus numerus: *hujusce theorematis demon-* » *strationem elegantem prius invenit* LAGRANGE ».

Ce passage de la préface, allusif à la démonstration donnée par LAGRANGE, dans le Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1771, fait un singulier contraste avec la réproduction en 1782 de sa pensée fort stérile de 1770, qu'on lit à la page 380, conçue en ces termes:

« Demonstrationes vero hujusmodi Propositionum eo magis difficiles » erunt, quod nulla fingi potest notatio quae primum numerum exprimit ». C'est en vain qu'on chercherait une notation particulière pour démontrer que tout nombre entier N est réductible à quatre carrés $a^2+b^2+c^2+d^2$.

§ III.

La démonstration précédente est intimément liée avec le théorême de Fermat; et comme ce théorême est ordinairement démontré sans rien statuer sur l'expression analytique du quotient qui lui correspond, j'ai voulu chercher une formule propre à le mettre en évidence.

Soit M un nombre quelconque *non* divisible par le nombre premier p. On sait que si l'on fait

$$f(M)=(M-1)+\frac{(p-1)}{2}(M-1)^2+\frac{(p-1)(p-2)}{2.3}(M-1)^3$$

$$+\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{2.3.4}(M-1)^4\ldots\ldots+(M-1)^{p-1},$$

l'on a l'équation

$$M^p-M-\{(M-1)^p-(M-1)\}=pf(M).$$

Donc, en écrivant successivement $(M-1)$, $(M-2)$, $(M-3)$, etc. au lieu de M, cette équation donne

$$(M-1)^p-(M-1)-\{(M-2)^p-(M-2)\}=pf(M-1);$$

$$(M-2)^p-(M-2)-\{(M-3)^p-(M-3)\}=pf(M-2):$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(M-N)^p-(M-N)-\{(M-N-1)^p-(M-N-1)\}=pf(M-N).$$

Il suit de là, qu'en faisant la somme de ces équations l'on aura:

$$M^p-M-\{(M-N-1)^p-(M-N-1)\}=$$

$$p\{f(M)+f(M-1)+f(M-2)\ldots\ldots+f(M-N)\}.$$

Maintenant, si l'on fait $M-1=N$, cette équation donne

$$M^p-M=p\{f(M)+f(M-1)+f(M-2)\ldots\ldots+f(1)\},$$

ou bien

$$\frac{M\{M^{p-1}-1\}}{p}=f(1)+f(2)+f(3)\ldots\ldots+f(M).$$

Donc, en faisant

$$S_{(1)} = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + (M-1) \;;$$

$$S_{(2)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + (M-1)^2 \;;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_{(i)} = 1^i + 2^i + 3^i + 4^i + \ldots\ldots + (M-1)^i \;;$$

il est clair que, d'après la forme du polynome $f(M)$, nous avons:

$$\frac{M\{M^{p-1}-1\}}{p} = S_{(1)} + \frac{(p-1)}{2}\cdot S_{(2)} + \frac{(p-1)(p-2)}{2.3}\cdot S_{(3)}$$
$$+ \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{2.3.4}\cdot S_{(4)} \ldots\ldots + S_{(p-1)} \,.$$

On sait que l'on a :

$$S_{(1)} = \frac{M(M-1)}{2} \;;$$

$$S_{(2)} = \frac{M(2M-1)(M-1)}{2.3} \;;$$

$$S_{(3)} = \frac{M^2(M-1)^2}{4} \;;$$

et en général

$$(M-1)^{i+1} - 1^{i+1} = (i+1)\left[S_{(i)} - (M-1)^i\right] + \frac{(i+1)i}{2}\left[S_{(i-1)} - (M-1)^{i-1}\right]$$
$$+ \frac{(i+1)i(i-1)}{2.3}\left[S_{(i-2)} - (M-1)^{i-2}\right]$$
$$+ \frac{(i+1)(i-1)(i-2)}{2.3.4}\left[S_{(i-3)} - (M-1)^{i-3}\right]$$
$$\text{etc.} \;;$$

partant

$$(M-1)^{i+1} - 1^{i+1} + (i+1)(M-1)^i + (i+1)i(M-1)^{i-1}$$
$$+ (i+1)i(i-1)(M-1)^{i-2} + \frac{(i+1)i(i-1)(i-2)}{2.3.4}(M-1)^{i-3} + \text{etc.}$$
$$= (i+1)S_{(i)} + \frac{(i+1)i}{2}S_{(i-1)} + \frac{(i+1)i(i-1)}{2.3}S_{(i-2)}$$
$$+ \frac{(i+1)i(i-1)(i-2)}{2.3.4}S_{(i-3)} + \text{etc.}$$

Mais

$$\left[(M-1)+1\right]^{i+1} =$$
$$(M-1)^{i+1} + (i+1)(M-1)^i + \frac{(i+1)i}{2}(M-1)^{i-1} + \ldots\ldots + (1)^{i+1} \;:$$

donc l'on a :

$$M^{i+1}-1^{i+1}=(i+1)S_{(i)}+\frac{(i+1)i}{2}S_{(i-1)}+\frac{(i+1)i(i-1)}{2.3}S_{(i-2)}$$
$$+\frac{(i+1)i(i-1)(i-2)}{2.3.4}S_{(i-3)}+\ldots\ldots+S_{(0)}\,.$$

Actuellement, si l'on observe que $S_{(0)}=M-1$, cette équation revient à dire que

$$M^{i+1}-M=(i+1)S_{(i)}+\frac{(i+1)i}{2}S_{(i-1)}+\frac{(i+1)i(i-1)}{2.3}S_{(i-2)}$$
$$+\frac{(i+1)i(i-1)(i-2)}{2.3.4}S_{(i-3)}+\ldots\ldots+(i+1)S_{(1)}\,.$$

Donc, les valeurs de $S_{(1)}$, $S_{(2)}$, $S_{(3)}\ldots\ldots S_{(p-1)}$ sont des nombres entiers, chacun divisible par M.

En groupant les sommes affectées du même coefficient, on aura l'équation

$$\frac{M^{p-1}-1}{p}=\frac{1}{M}\left\{\begin{array}{l}\left[S_{(1)}+S_{(p-1)}\right]+\frac{(p-1)}{2}\left[S_{(2)}+S_{(p-2)}\right]\\ +\frac{(p-1)(p-2)}{2.3}\left[S_{(3)}+S_{(p-3)}\right]\\ +\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{2.3.4}\left[S_{(4)}+S_{(p-4)}\right]\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\frac{(p-1)(p-2)(p-3)\ldots\left(p-\frac{(p-1)}{2}+1\right)}{2.3.4\ldots\ldots\frac{(p-1)}{2}}\left[S_{\frac{(p-1)}{2}}+S_{\frac{(p+1)}{2}}\right].\end{array}\right.$$

Telle est l'expression analytique du quotient fourni par le théorême de Fermat.

§ IV.

Le caractère des nombres entiers, susceptibles d'être décomposés en deux carrés, d'une seule ou de plusieurs manières, peut être déterminé par l'analyse suivante. Soit

$$X=1+2x^1+2x^4+2x^9+2x^{16}+2x^{25}+\text{etc.}\ ;$$

c'est-à-dire une suite infinie ordonnée suivant les puissances de x, ayant pour exposant tous les carrés de la suite naturelle des nombres 1, 2, 3, etc. Il est évident, que le carré X^2, de cette série, étant ordonné suivant les puissances de x, sera de la forme

$$X^2 = 1 + A_{(1)} x^{(1)} + A_{(2)} x^{(2)} + A_{(3)} x^{(3)} \ldots\ldots + A_{(m)} x^{(m)} + \text{etc.},$$

en indiquant par $A_{(m)}$ le coefficient, et par (m) l'exposant d'une puissance quelconque de x, susceptible de se trouver dans ce développement. Si l'on fait

$$X' = 1 + x^1 + x^4 + x^9 + x^{16} + \text{etc.},$$

il est clair que l'on a

$$X'^2 = \left(\frac{X+1}{2}\right)^2 = X' + \tfrac{1}{4}\left\{A_{(1)} x^{(1)} + A_{(2)} x^{(2)} + A_{(3)} x^{(3)} + \text{etc.}\right\}.$$

Or il est démontré, par la théorie des transcendantes elliptiques, que le développement X^2 doit être identique à celui du second membre de l'équation

$$X^2 = 1 + \frac{4x}{1-x} - \frac{4x^3}{1-x^3} + \frac{4x^5}{1-x^5} - \frac{4x^7}{1-x^7} + \text{etc.},$$

ordonné suivant les puissances de x. De sorte que nous avons

$$X^2 = 1 + 4 \cdot \overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}} \cdot \frac{x^{4n+1}}{1-x^{4n+1}} - 4 \cdot \overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}} \cdot \frac{x^{4n-1}}{1-x^{4n-1}};$$

où la caractéristique $\cdot \overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}} \cdot$ indique que l'on doit donner à n toutes les valeurs $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots \infty$; la caractéristique $\cdot \overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}} \cdot$ toutes les valeurs $1, 2, 3 \ldots\ldots \infty$, et prendre la somme des séries ainsi formées. En développant les fonctions soumises à ces signes, il est clair que l'on a;

$$\begin{aligned} X^2 = 1 &+ 4(x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots + x^\infty) \\ &+ 4 \cdot \overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}} \cdot \left\{x^{4n+1} + x^{2(4n+1)} + x^{3(4n+1)} + \ldots\ldots + x^{\infty(4n+1)}\right\} \\ &- 4 \cdot \overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}} \cdot \left\{x^{4n'-1} + x^{2(4n'-1)} + x^{3(4n'-1)} + \ldots\ldots + x^{\infty(4n'-1)}\right\}. \end{aligned}$$

Donc, tout terme $4x^N$, qui se trouve dans la *première* de ces trois séries, sera détruit par un autre terme égal, affecté d'un signe contraire,

qui se trouve dans la *troisième* série, si le nombre N est égal à un produit de la forme $(4n'-1).N'$. Il suit de là qu'aucun exposant de cette dernière forme ne peut se trouver dans ce développement de X^2, sauf le cas où l'on aurait $N'=(4n'-1).N''$; $N=(4n'-1)^2.N''$: car alors le nombre $(4n'-1)^2=4(4n'^2-2n'+1)$, donnerait un terme qui se trouverait dans la *seconde* série, tandis que le même terme serait détruit dans la somme algébrique de la première et de la troisième série. Le même raisonnement a lieu pour tout nombre N qui serait de la forme $N=2^\alpha.(4\lambda-1)^2N''$: il serait détruit par la première et la troisième série, en observant que $N=(4\lambda-1).2^\alpha.N''(4\lambda-1)$, et se trouverait dans la seconde série. Donc, en excluant de la première série tous les termes dont l'exposant renferme un facteur simple de la forme $4\lambda-1$, ou carré de la forme $(4\lambda-1)^2$, il faudra écrire l'équation

$$\begin{aligned} X^2 = 1 &+ 4\left(x+x^2+x^4+x^8+x^{16}+x^{32}\ldots\ldots+x^{2^\alpha}\right) \\ &+ 4\cdot\sum_1^\infty.\left\{x^{(4g+1)}+x^{2(4g+1)}+x^{3(4g+1)}\ldots+x^{i(4g+1)}+\text{etc.}\right\} \\ &+ 4\cdot\sum_1^\infty.\left\{x^{(4n+1)}+x^{2(4n+1)}+x^{3(4n+1)}\ldots+x^{i(4n+1)}+\text{etc.}\right\} ; \end{aligned}$$

sous la condition expresse que l'on doit écarter tous les exposans $k(4g+1)$, susceptibles d'avoir un facteur carré impair de la forme $(4\lambda-1)^2$. De sorte qu'on doit, par exemple, écarter l'exposant $4g+1=9=(4.1-1)^2$, l'exposant $4g+1=49=(4.2-1)^2$; et tous les exposans semblables. Alors les exposans écartés dans la seconde série se trouveront seulement dans la troisième. A l'égard de tous les autres exposans, ayant des facteurs *premiers* de la forme $(4k+1)^\beta$, $(4k'+1)^{\beta'}$, $(4k''+1)^{\beta''}$, etc., ils se trouveront *une seule fois* dans la *seconde* ligne, ayant été pris dans la série

$$4(x+x^2+x^3+x^4+\text{etc.}) ;$$

mais, dans la troisième série ils s'y trouveront autant de fois qu'il y a d'unités dans le produit

$$(1+\beta)(1+\beta')(1+\beta'')\ldots\ldots\ldots$$

diminué de l'unité, puisque, en faisant

$$4k+1=p' ; \qquad 4k'+1=p' ; \qquad 4k''+1=p'' ; \qquad \text{etc.} ;$$

les différens termes du produit

$$(1+p+p^2+\ldots p^\beta)(1+p'+p'^2+\ldots p'^{\beta'})(1+p''+p''^2+\ldots p''^{\beta''})\ldots,$$

peuvent et doivent être pris pour les valeurs de $4n+1$, à l'exclusion de l'unité qui répondrait à $n=0$. En supposant

$$N=2^\alpha(4\lambda-1)^2.\,p^\beta.\,p'^{\beta'}.\,p''^{\beta''}\ldots\ldots;$$

ce raisonnement démontre que le coefficient de x^N dans le développement X^2 sera égal à

$$1+(1+\beta)(1+\beta')(1+\beta'')\ldots\ldots-1=(1+\beta)(1+\beta')(1+\beta'')\ldots\ldots$$

Cette conclusion étant appliquée à la valeur précédente de X'^2 on aura:

$$X'^2=X'+\left|(1+\beta)(1+\beta')(1+\beta'')\ldots\ldots\right|x^N=1+\Sigma.A_{(m)}x^{(m)}.$$

Pour plus de clarté j'ajouterai que, a raison du facteur $2^\alpha(4\lambda-1)^2$, le nombre des termes donnés par la troisième série

$$\sum_1^\infty.(x^{4n+1}+\text{etc.}),$$

devient égal à

$$(1+\beta)(1+\beta')(1+\beta'')\ldots\ldots-1+1=(1+\beta)(1+\beta')(1+\beta'')\ldots\ldots$$

Ce coefficient indique en combien de manières l'exposant N peut être décomposé en deux carrés. Mais, dans ce nombre, tout binome a^2+b^2 est accompagné du binome b^2+a^2; de sorte que, il faut prendre la moitié

$$\tfrac{1}{2}(1+\beta)(1+\beta')(1+\beta'')\ldots\ldots,$$

si l'on veut énumérer seulement le nombre de ces binomes différens. C'est ainsi, par exemple, que pour le nombre $1105=5.13.17$, l'on a $(1+1)(1+1)(1+1)=8$, et la moitié 4 indique que la décomposition en deux carrés différens a lieu de *quatre* manières. Effectivement l'on a

$$1105=33^2+4^2=32^2+9^2=31^2+12^2=24^2+23^2.$$

Cette analyse démontre aussi que l'on doit remplacer la fraction $\frac{1}{2}$ par l'unité, lorsque le produit $(1+\beta)(1+\beta')(1+\beta'')\ldots\ldots$ est un nombre impair; car cette circonstance répond à un binome a^2+b^2 qui n'est pas associé à un autre binome égal b^2+a^2.

La formule générale est donc (en excluant les exposans carrés compris dans la série X'):

$$X'^2=(1+x^1+x^4+x^{16}+\text{etc.})^2=\left[\tfrac{1}{2}(1+\beta)(1+\beta')(1+\beta'')\ldots\ldots\right]x^N;$$

pourvu que l'on ait:

$$N = 2^{\alpha}(4\lambda - 1)^{2}(4k+1)^{\beta}(4k'+1)^{\beta'}(4k''+1)^{\beta''} \ldots\ldots$$

Et pour tout nombre N, qui n'est pas compris dans cette forme, l'on a nécessairement

$$X'^{2} = 0 \,.\, x^{N} \;.$$

Tel est le type des nombres entiers, susceptibles d'être décomposés en deux carrés, pourvu que $4k+1$, $4k'+1$, $4k''+1$ etc. soient des nombres premiers. C'est un caractère général de la forme *binaire* des nombres. Le type des nombres, qui ne sont pas décomposables en deux carrés, est $M(4A-1)$; M étant un nombre quelconque et $4A-1$ un nombre premier.

On sait que ce théorême est dû à Fermat. La démonstration que je viens d'en donner est indépendante de toute autre propriété des nombres. Et c'est en cela que consiste son caractère distinctif. Car, en s'appuyant sur l'ensemble de la Théorie des Nombres, on parvient à démontrer que tout nombre N composé, tel que ses facteurs premiers soient, de la forme (A étant un nombre positif):

$$4k+1 = x^{2} + Ay^{2} \;; \qquad 4k'+1 = x'^{2} + Ay'^{2} \;;$$
$$4k''+1 = x''^{2} + Ay''^{2} \;; \qquad \text{etc.} \;,$$

peut être exprimé par un binome de la forme $X^{2} + AY^{2}$ en

$$\tfrac{1}{2}(\beta+1)(\beta'+1)(\beta''+1)$$

manières, si l'on a;

$$N = (x^{2} + Ay^{2})^{\beta}(x'^{2} + Ay'^{2})^{\beta'}(x''^{2} + Ay''^{2})^{\beta''} \ldots\ldots$$

C'est de quoi on peut voir la démonstration dans le premier Volume (page 314) de la Théorie des Nombres de Legendre.

Pour décomposer, sans tâtonnement, en deux carrés un nombre donné A, qui aurait la forme réquise, il faudra réduire en fraction continue la racine carrée de chacun de ses facteurs premiers de la forme

$$4k'+1 = A' = a'^{2} + b' \;; \qquad 4k''+1 = A'' = a''^{2} + b'' \;; \qquad \text{etc.}$$

Les périodes des quotients

$$a' \ldots\ldots 2a' \;; \qquad a'' \ldots\ldots 2a'' \;; \qquad \text{etc.}$$

seront *paires*. Chacune renfermera *deux* quotients *moyens égaux*. En désignant par

$$\frac{\sqrt{A'}+I'}{D'}\ ; \qquad \frac{\sqrt{A''}+I''}{D''}\ ; \qquad \text{etc.}$$

le *second* des *quotients-complets* qui leurs correspondent, on aura, d'après un principe connu,

$$A'=D'^2+I'^2\ ; \qquad A''=D''^2+I''^2\ ; \qquad \text{etc.}\ ;$$

ce qui transforme le nombre A en

$$A=2^X(4Z-1)^2(D'^2+I'^2)^\beta(D''^2+I''^2)^{\beta'}\ \ldots\ldots$$

Maintenant, à l'aide des formules

$$2(M^2+N^2)=(M+N)^2+(M-N)^2\ ;$$

$$(M^2+N^2)(M'^2+N'^2)=(MM'\pm NN')^2+(MN'\mp NM')^2\ ;$$

$$(P^2+Q^2)^\beta=G^2+H^2\ ;$$

$$G=P^\beta-\frac{\beta(\beta-1)}{2}P^{\beta-2}Q^2+\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3)}{2.3.4}P^{\beta-4}Q^4+\text{etc.}\ ;$$

$$H=\beta P^{\beta-1}Q-\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{2.3}P^{\beta-3}Q^3+\frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-4)}{2.3.4.5}P^{\beta-5}Q^5-\text{etc.},$$

on pourra composer les différentes transformations du nombre A en deux carrés.

Les nombres de la forme a^4+b^4 peuvent aussi être compris parmi ceux qui sont la somme de deux carrés: mais à l'égard de leurs diviseurs impairs, il faut observer que la forme $4k+1$ ne leur convient qu'autant que k soit un nombre pair. Car, d'après le théorême de Fermat, si p est un nombre premier, et A, B deux nombres premiers entre eux, non divisibles par p, la différence $A^{p-1}-B^{p-1}$ est divisible par p; tandis que, ni B^{p-1}; ni $2B^{p-1}$ est divisible par p. Donc, la somme $A^{p-1}-B^{p-1}+2B^{p-1}=A^{p-1}+B^{p-1}$, ne sera pas divisible par p. Or, en faisant $p=4(2i-1)+1$, l'on a

$$A^{p-1}+B^{p-1}=(A^4)^{2i-1}+(B^4)^{2i-1}\ ;$$

c'est-à-dire un binome divisible par A^4+B^4.

Il est donc impossible que ce facteur de $A^{p-1}+B^{p-1}$ soit divisible par p. Il suit de là que les diviseurs linéaires et premiers de a^4+b^4 doivent être de la forme $4.2m+1=8m+1$. Un raisonnement analogue démontre que les nombres de la forme

$$a^8+b^8\,,\qquad a^{16}+b^{16}\,,\qquad \ldots\ldots a^{2^i}+b^{2^i}\,,$$

ne peuvent avoir que des diviseurs premiers impairs de la forme

$$4.4m+1\,;\qquad 4.8m+1\,;\qquad \ldots\ldots 4.2^{i-1}m+1\,.$$

Cette remarque est nécessaire pour modifier la généralité du principe à l'égard des diviseurs *linéaires* de la somme de deux carrés compris dans la formule

$$\left(a^{2^{i-1}}\right)^2+\left(b^{2^{i-1}}\right)^2\,;$$

où a et b sont des nombres premiers entre eux.

D'après ce théorème, le nombre $2^{32}+1$, ne peut avoir d'autres diviseurs premiers que ceux compris dans la formule $64.x+1$. En essayant successivement les diviseurs 193, 257, 449, 577, 641; 769, 1153, 1217, 1409; 1601, 2113, 2333, 2909; ..... 65537, compris entre les limites

$$193=64.3+1\,;\qquad \sqrt{2^{32}+1}=2^{16}+1=65537\,,$$

on est surpris de voir que la division réussit à la *cinquième* division. Mais cette facilité n'est pas un argument favorable pour d'autres cas. Pour s'en convaincre il suffit d'observer, que, entre ces limites, il y a, en réalité, 205 nombres premiers, conformément à une formule de Legendre; savoir

$$\frac{2}{64}\cdot\frac{2^{16}}{\text{Log. hyp.}^{e}\,2^{16}-1,08366}=\frac{2048}{10,0068}=205\,.$$

(Voyez page 101 du second Volume de la Théorie des Nombres). C'est de quoi il importe d'être averti pour écarter toute illusion dans d'autres applications de la formule générale, et sentir à quoi tient la cause de la facilité avec laquelle Euler a pu décider que l'assertion de Fermat, touchant les nombres de la forme $2^{2^i}+1$, n'était pas admissible (Voyez les pages 32 et 33 du Tome 1.er des *Novi Commentarii*).

Pour le nombre $2^{31}-1$, par exemple, quoique l'on sache que ses diviseurs premiers soient de l'une ou de l'autre des deux formes $248.x+1$, $248.x+63$, il a fallu essayer les *quarante* nombres premiers de cette forme, compris entre les limites 311 et 46337, pour acquérir la certitude que $2^{31}-1$ est un nombre premier.

Pour plus de clarté, j'ajouterai que, suivant le principe général, la forme des diviseurs linéaires du nombre $2^{31}-1$ est $62.x+1$. Mais, si l'on remarque, que ces mêmes diviseurs doivent convenir à son double

$$2^{32}-2=(2^{16})^2-2.1^2\ ,$$

on en tirera la conséquence, que leur forme *quadratique* étant $A^2-2.B^2$, on doit accorder la forme linéaire $62.x+1$ avec celle des nombres premiers $8n+1$, ou $8n+7$ qui est, en général, celle des nombres de la forme $t^2-2.u^2$. Or il est clair que, pour remplir cette condition, on doit faire $x=4x'$, ou $x=1+4x''$. Alors

$$62.x+1=8.31.x'+1=248.x'+1\ ;$$

$$62(1+4x'')+1=8.31.x''+8.7+7=8(7+31.x'')+7=248x''+63\ .$$

A cette réflexion, il ne sera pas inutile de joindre la suivante. Les diviseurs premiers du nombre $2^{41}-1$ doivent être de la forme $82.x+1$; et à cause de son double

$$2^{42}-2=(2^{21})^2-2.1^2\ ;$$

on doit ici faire $x=4x'$, ou $x=3+4x''$; ce qui donne

$$82.x+1=328.x'+1\ ;\qquad 82.x+1=328.x''+247\ .$$

En général, si $\frac{\beta-1}{4}$ est nombre entier, on aura:

$$2\beta x+1=8n+7\ ,$$

en posant

$$x=3+4z\ ;\qquad n=\beta z+3\frac{(\beta-1)}{4}\ .$$

Et si $\frac{\beta-3}{4}$ est nombre entier, on fera

$$x=1+4z\ ;\qquad n=\beta z+\frac{\beta-3}{4}\ .$$

Mais, entre les limites 1231 et $\sqrt{2^{41}-1}=1048573$ (*proxime*) il y a 513 nombres premiers, soit de l'une, soit de l'autre de ces deux formes, en vertu du principe de l'*égale* distribution des nombres premiers pour des progressions arithmétiques ayant la même différence. Néanmoins, par un heureux hasard il arrive que, en essayant les premiers diviseurs

1231, 1559, (*)2297, 2543, (*)2953, 3527, 5167, 6151, (*)7873, 8447, 9103, 9431, (*)10169, 11071, 11399, (*)13121, 13367, 15991, (*)16073, ... 1048573, on trouve à la *dix-septième* division que le nombre $2^{41}-1$ est composé de ces deux facteurs *premiers;* savoir

$$2^{41}-1=21990.23255.551=13367\times 16451353\ .$$

Le second étant de la forme $8n+1$, doit être réductible à la forme x^2+y^2; et on reconnaît facilement, que

$$16451353=(683)^2+(12808)^2\ .$$

A la page 76 du Tome 2 des *Novi Commentarii* ce nombre est qualifié premier, avec la réserve du doute. Ce que je viens d'avancer démontre avec certitude la composition de ce nombre.

La composition du nombre $2^{41}-1$ avait échappé à Euler en 1732. Du moins, on ne peut pas interpréter autrement ce qu'il a dit, sur ce point, à la page 106 du Tome VI des anciens *Commentarii.* C'est vers la fin de la page 104 de ce même Volume que, Euler, avec son ingénuité ordinaire, déclare qu'il a reconnu la composition du nombre $2^{32}+1$ « *his diebus, longe alia agens* »; ce qui est fort différent d'une simple application de sa formule $64x+1$, établie *douze* années plus tard.

§ V.

La considération de la *quatrième* puissance du polynome X, défini dans le précédent §, va nous conduire à la démonstration du théorème de Bachet; que tout nombre entier est susceptible d'être décomposé en quatre, ou en un moindre nombre de carrés. La fonction

$$X^4=(1+2x^1+2x^4+2x^9+2x^{16}+2x^{25}+\text{etc.})^4\ ,$$

a la propriété d'être identique au développement de la fonction

$$X^4=1+8\left\{\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{1+x^2}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\frac{4x^4}{1+x^4}+\frac{5x^5}{1-x^5}+\text{etc.}\right\}\ ,$$

(*) L'astérisque indique, que les six nombres 2297, 2953, 7873, 10169, 13121, 16073 sont les seuls, jusqu'à 16073, de la forme $8n+1$.

ordonné suivant les puissances de x. C'est de quoi on trouve la démonstration dans la Théorie des Transcendantes Elliptiques.

Cela posé, remarquons que cette série peut être partagée dans les trois séries

$$X^4 = 1 + 8\left\{\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \text{etc.}\right\}$$

$$- 8\left\{\frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \frac{6x^6}{1-x^6} + \frac{8x^8}{1-x^8} + \text{etc.}\right\}$$

$$+ 8\left\{\frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \frac{6x^6}{1+x^6} + \frac{8x^8}{1+x^8} + \text{etc.}\right\}.$$

Or il est clair, que, en combinant le signe Logarithmique avec le signe différentiel, l'on a

$$X^4 = 1 - 8x\left\{\frac{d.\text{Log.}(1-x)}{dx} + \frac{d.\text{Log.}(1-x^2)}{dx} + \frac{d.\text{Log.}(1-x^3)}{dx} + \text{etc.}\right\}$$

$$+ 8x\left\{\frac{d.\text{Log.}(1-x^2)}{dx} + \frac{d.\text{Log.}(1-x^4)}{dx} + \frac{d.\text{Log.}(1-x^6)}{dx} + \text{etc.}\right\}$$

$$+ 8x\left\{\frac{d.\text{Log.}(1+x^2)}{dx} + \frac{d.\text{Log.}(1+x^4)}{dx} + \frac{d.\text{Log.}(1+x^6)}{dx} + \text{etc.}\right\}.$$

Donc, en faisant $x^2 = u$, l'on a:

$$X^4 = 1 - 8x\frac{d.}{dx}\text{Log.}\left\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots\ldots\right\}$$

$$+ 16u\frac{d.}{du}\text{Log.}\left\{(1-u)(1-u^2)(1-u^3)(1-u^4)\ldots\ldots\right\}$$

$$+ 16u\frac{d.}{du}\text{Log.}\left\{(1+u)(1+u^2)(1+u^3)(1+u^4)\ldots\ldots\right\};$$

ce qui revient à dire que,

$$X^4 = 1 - 8x\frac{d.}{dx}\text{Log.}\left\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots\ldots\right\}$$

$$+ 16u\frac{d.}{du}\text{Log.}\left\{(1-u^2)(1-u^4)(1-u^6)(1-u^8)\ldots\ldots\right\};$$

ou bien, en posant $u^2 = x^4 = v$;

$$X^4 = 1 - 8x\frac{d.}{dx}\text{Log.}\left\{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots\ldots\right\}$$

$$+ 32v\frac{d.}{dv}\text{Log.}\left\{(1-v)(1-v^2)(1-v^3)(1-v^4)\ldots\ldots\right\}.$$

Il suit de là que si l'on fait, pour plus de simplicité,

$$U = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots\ldots:$$

$$V = (1-v)(1-v^2)(1-v^3)(1-v^4)\ldots\ldots;$$

nous avons l'équation

$$X^4 = 1 - \frac{8x}{U}\cdot\frac{dU}{dx} + \frac{32.v}{V}\cdot\frac{dV}{dv}.$$

Euler a démontré, dans le Tome V des *Novi Commentarii*, que, en général, la factorielle

$$P = (1-p)(1-p^2)(1-p^3)(1-p^4)\ldots\ldots$$

étant développée, suivant les puissances ascendantes de p, donne

$$P = \sum_0^\infty .(-1)^n p^{\frac{3n^2-n}{2}} + \sum_0^\infty .(-1)^n . p^{\frac{3n^2+n}{2}};$$

et que le développement de la fonction

$$p\frac{d.\text{Log.}P}{dp} = -\frac{p}{P}\cdot\frac{dP}{dp},$$

suivant les puissances de p est tel que l'on a

$$-\frac{p}{P}\cdot\frac{dP}{dp} = pS_{(1)} + p^2S_{(2)} + p^3S_{(3)}\ldots\ldots + p^mS_{(m)} + \text{etc.},$$

où $S_{(m)}$ représente la somme des diviseurs de l'exposant m: de sorte que, si l'on fait

$$m = 2^k.\alpha^g.\alpha'^{g'}.\alpha''^{g''}.\alpha'''^{g'''}\ldots\ldots;$$

α, α', α'', etc. étant les facteurs premiers du nombre m, l'on a

$$S_{(m)} = \frac{2^{k+1}}{2-1}\cdot\frac{\alpha^{g+1}-1}{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha'^{g'+1}-1}{\alpha'-1}\cdot\frac{\alpha''^{g''+1}-1}{\alpha''-1}\ldots\ldots$$

L'application de cette formule à l'expression précédente de X^4 donne:

$$X^4 = 1 + 8\left\{ x\,S_{(1)} + x^2 S_{(2)} + x^3 S_{(3)} + \text{etc.} \right\}$$
$$- 32\left\{ v\,S_{(1)} + v^2 S_{(2)} + v^3 S_{(3)} + \text{etc.} \right\} ;$$

ou bien (en remplaçant v par x^4) :

$$X^4 = 1 + 8\left\{ x\,S_{(1)} + x^2 S_{(2)} + x^3 S_{(3)} + \text{etc.} \right\}$$
$$- 32\left\{ x^4 S_{(1)} + x^8 S_{(2)} + x^{12} S_{(3)} + \text{etc.} \right\} .$$

En séparant les puissances impaires de x des puissances paires, il est aisé de voir que cette expression de X^4 peut être partagée dans les quatre parties suivantes; savoir:

$$X^4 = 1 + 8\left\{ x S_{(1)} + x^3 S_{(3)} + x^5 S_{(5)} \ldots\ldots + x^{2i+1} S_{(2i+1)} + \text{etc.} \right\}$$
$$+ 8\left\{ \begin{array}{l} x^2 S_{(2)} + x^4 (S_{(4)} - 4 . S_{(1)}) + x^8 (S_{(8)} - 4 . S_{(2)}) \\ + x^{16} (S_{(16)} - 4 . S_{(4)}) + x^{32} (S_{(32)} - 4 . S_{(8)}) + \text{etc.} \end{array} \right\}$$
$$+ 8\left\{ \begin{array}{l} x^6 S_{(6)} + x^{10} S_{(10)} + x^{14} S_{(14)} + x^{18} S_{(18)} \\ + x^{22} S_{(22)} + x^{26} S_{(16)} + \text{etc.} \end{array} \right\}$$
$$+ 8\left\{ \begin{array}{l} x^{12} (S_{(12)} - 4 . S_{(3)}) + x^{20} (S_{(20)} - 4 . S_{(5)}) \\ + x^{24} (S_{(24)} - 4 . S_{(6)}) + x^{28} (S_{(28)} - 4 . S_{(7)}) \\ + x^{36} (S_{(36)} - 4 . S_{(9)}) + x^{40} (S_{(40)} - 4 . S_{(29)}) \\ + \text{etc.} \end{array} \right\} .$$

Actuellement, si l'on observe que

$$S_{(1)} = 1 ; \quad S_{(2)} = 3 ; \quad S_{(2^m)} = 2^{m+1} - 1 ; \quad S_{(2^{m-2})} = 2^{m-1} - 1 ;$$
$$S_{(2^m)} - 4 . S_{(2^{m-2})} = 3 ;$$
$$S_{(2)} = 3 . S_{(1)} ; \quad S_{(6)} = S_{(2)} . S_{(3)} = 13 . S_{(3)} ; \quad S_{(14)} = 3 . S_{(7)} ;$$
$$S_{(18)} = 3 . S_{(9)} ; \quad S_{(22)} = 3 . S_{(11)} ; \quad S_{(26)} = 3 . S_{(13)} ; \quad \text{etc.} ;$$
$$S_{(30)} = 3 . S_{(15)} ; \quad S_{(34)} = 3 . S_{(17)} ; \quad S_{(38)} = 3 . S_{(19)} ; \quad \text{etc.} ;$$
$$S_{(12)} = 7 . S_{(3)} ; \quad S_{(20)} = 7 . S_{(5)} ; \quad S_{(24)} = 15 . S_{(3)} ;$$
$$S_{(28)} = 7 . S_{(7)} ; \quad S_{(12)} - 4 . S_{(3)} = 3 . S_{(3)} ; \quad S_{(20)} - 4 . S_{(5)} = 3 . S_{(5)} ;$$
$$S_{(24)} - 4 . S_{(6)} = 3 . S_{(3)} ; \quad S_{(28)} - 4 . S_{(7)} = 3 . S_{(7)} ;$$
$$S_{(36)} - 4 . S_{(9)} = 3 . S_{(9)} ; \quad \text{etc.} ,$$

on en conclura, que le développement de X^4 peut être disposé de manière que l'on a

$$X^4 = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} +8 \\ +8.3 \\ +8.3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x\,S_{(1)} + x^3 S_{(3)} + x^5 S_{(5)} + x^7 S_{(7)} + \ldots\ldots + x^{2i+1} S_{(2i+1)} + \text{etc.} \\ x^2 S_{(1)} + x^4 S_{(1)} + x^8 S_{(1)} + x^{16} S_{(1)} + x^{32} S_{(1)} + \text{etc.} \\ x^6 S_{(3)} + x^{10} S_{(5)} + x^{12} S_{(3)} + x^{14} S_{(7)} + x^{18} S_{(9)} \\ + x^{20} S_{(5)} + x^{22} S_{(11)} + x^{24} S_{(13)} + \text{etc.} \end{array} \Bigg\} .$$

Donc, k désignant un nombre impair quelconque de la série 1, 3, 5, 7 etc., on peut écrire, sous forme concise, l'équation

$$X^4 = 1 + 8 . \bar{\Sigma} . S_{(k)} . \sum_1^{\infty} . \left\{ x^k + 3x^{2k} + 3x^{4k} + 3x^{8k} \ldots\ldots + 3x^{2^\infty k} \right\} .$$

Ce développement de $\frac{X^4 - 1}{8}$ offre un singulier contraste par le rapprochement de la série de Lambert :

$$X_{(1)} = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \frac{x^4}{1-x^4} + \frac{x^5}{1-x^5} + \text{etc.}$$

publiée à la page 507 de son *Essai Architectonique*. Celle-ci, étant développée suivant les puissances de x, donne la série

$$X_{(1)} = x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 2x^5 + 4x^6 \ldots\ldots + G_{(m)} . x^m + \text{etc.} ,$$

telle, que, en décomposant l'exposant m dans ses facteurs *premiers;* si l'on fait

$$m = 2^k . \alpha^g . \alpha'^{g'} . \alpha''^{g''} \ldots\ldots$$

l'on a

$$G_{(m)} = (k+1)(g+1)(g'+1)(g''+1) \ldots\ldots :$$

de sorte que, pour tout exposant m premier, l'on a

$$G_{(m)} = 2 .$$

Pour former le développement de

$$X'^4 = (1 + x^1 + x^4 + x^9 + x^{16} + \text{etc.})^4 ,$$

remarquons, que l'on a

$$X'^4 = \frac{(X+1)^4}{16} = \frac{X^4 - 1}{16} + \tfrac{1}{2} X' + \tfrac{1}{2} X'^2 + 2(X' - 1) X'^2 .$$

Donc en posant

$$X' = 1 + \sum_1^\infty . x^{ii} \; ; \qquad X'^2 = 1 + \Sigma . A_{(m)} . x^{(m)} \; ;$$

le signe $\Sigma . A_{(m)} . x^{(m)}$ indiquant les termes formés d'après la formule donnée au § IV, nous aurons

$$X'^4 = 1 + \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^\infty . x^{ii} + \Sigma . A_{(m)} . x^{(m)} \\ + \Sigma . S_{(k)} . \sum_1^\infty . \left\{ x^k + 3x^{2k} + 3x^{4k} + 3x^{8k} \ldots\ldots + 3x^{2^\infty k} \right\} \end{array} \right\}$$

$$+ 2 . \sum_1^\infty . x^{ii} + 2 . \sum_1^\infty . x^{ii} . \Sigma . A_{(m)} . x^{(m)} \; ;$$

ou bien

$$X'^4 = 1 + \tfrac{5}{2} . \sum_1^\infty . x^{ii} + \tfrac{1}{2} . \Sigma . A_{(m)} . x^{(m)} + 2 . \sum_1^\infty . x^{ii} . \Sigma . A_{(m)} . x^{(m)}$$

$$+ \tfrac{1}{2} . \Sigma . S_{(k)} . \sum_1^\infty . \left\{ x^k + 3x^{2k} + 3x^{4k} + 3x^{8k} \ldots\ldots + 3x^{2^\infty k} \right\} .$$

Cette formule démontre que le développement X'^4 renferme *toutes* les puissances de x; de sorte que, en posant

$$X'^4 = 1 + \sum_1^\infty . H_{(m)} . x^m \; ,$$

le coefficient $H_{(m)}$ de x^m déterminera en combien de manières le nombre m peut être formé par quatre nombres de la série 0, 1, 9, 16, 25, 36, 49, etc., en tenant compte des variétés qui ont lieu, non seulement par la différence des parties, mais aussi par le changement de place occupée par le même nombre. Cette double variété est la cause de la grandeur des coefficiens qu'on voit naître dans ce développement.

Pour former ce développement jusqu'à la puissance x^{19}, inclusivement, on prendra

$$\tfrac{5}{2} . \sum_1^\infty x^{ii} = \tfrac{5}{2} (x + x^4 + x^9 + x^{16}) \; ;$$

$$\Sigma . A_{(m)} . x^{(m)} = 2x + x^2 + 2x^4 + 2x^5 + x^8 + 2x^9 + 2x^{10}$$
$$+ 2x^{13} + 2x^{16} + 2x^{17} + x^{18} \; ;$$

$$\Sigma . S_{(k)} . \sum_1^\infty = x + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 6x^5 + 12x^6 + 8x^7$$
$$+ 3x^8 + 13x^9 + 18x^{10} + 12x^{11} + 12x^{12}$$
$$+ 14x^{13} + 24x^{14} + 24x^{15} + 3x^{16} + 18x^{17}$$
$$+ 39x^{18} + 20x^{19} \; ;$$

$$\overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}} \cdot x^{ii} . \Sigma . A_{(m)} . x^{(m)} = 2x^2 + x^3 + 4x^5 + 3x^6 + 2x^8 + 3x^9 + 4x^{10}$$
$$+ 3 . x^{11} + x^{12} + 4x^{13} + 6x^{14} + 7x^{17} + 5x^{18}$$
$$+ 3x^{19} ;$$

ce qui donnera

$$X'' = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 12x^5 + 12x^6 + 4x^7 + 6x^8$$
$$+ 16x^9 + 18x^{10} + 12x^{11} + 8x^{12} + 16x^{13} + 24x^{14} + 12x^{15}$$
$$+ 5x^{16} + 24x^{17} + 30x^{18} + 16x^{19} .$$

La démonstration que nous venons d'exposer n'a rien de commun avec celle de Lagrange. Et on ne saurait croire que, l'une ou l'autre, ait quelque analogie avec celle, perdue, de Fermat. Une réflexion semblable peut être appliquée à la démonstration trouvée par Cauchy à l'égard des nombres polygones. Peut-être ces démonstrations sont plus rigoureuses, quoique moins simples que celles dérivées « *ex multis variis et abstrusissimis numerorum mysteriis* » dont Fermat entendait parler dans une de ses Notes sur Diophante.

Au reste, il me paraît qu'il n'est pas facile d'admettre la généralité des démonstrations de Fermat : c'est-à-dire de croire, que ses raisonnemens étaient justes, quelle que soit la grandeur des nombres dont il énonce les propriétés. Sa manière de nous faire savoir, que les diviseurs premiers des trois nombres $2^{11} - 1$; $2^{23} - 1$; $2^{37} - 1$, étaient, respectivement, 23, 47, 233 (lisez les pages 163, 164 de son ouvrage posthume *Opera varia*) offre, si je ne me trompe, une preuve qu'il n'avait pas les doubles formules générales des diviseurs de ces nombres. Car, en les désignant par D', D'', elles sont :

pour $2^{11} - 1$ ..... $\left\} D' = 88 . z + 1 ; \quad D'' = 88 . z + 23 ;\right.$

» $2^{23} - 1$ ..... $\left\} D' = 184 . z + 1 ; \quad D'' = 184 . z + 47 ;\right.$

» $2^{37} - 1$ ..... $\left\} D' = 296 . z + 1 ; \quad D'' = 296 . z + 223 .\right.$

Or, *a priori*, on ne peut pas dire, que, en faisant $z = 0$, les valeurs de D'' seront les diviseurs de ces nombres. Pour s'en convaincre il faut observer que ces doubles diviseurs sont;

pour $2^{29}-1$ ..... $\left\{ D'=232.z+1 \; ; \right.$ $D''=232.z+175$;

» $2^{41}-1$ ..... $\left\{ D'=328.z+1 \; ; \right.$ $D''=328.z+247$;

» $2^{43}-1$ ..... $\left\{ D'=344.z+1 \; ; \right.$ $D''=344.z+87$;

» $2^{47}-1$ ..... $\left\{ D'=376.z+1 \; ; \right.$ $D''=376.z+95$;

» $2^{53}-1$ ..... $\left\{ D'=424.z+1 \; ; \right.$ $D''=424.z+319$;

» $2^{59}-1$ ..... $\left\{ D'=472.z+1 \; ; \right.$ $D''=472.z+119$;

» $2^{73}-1$ ..... $\left\{ D'=584.z+1 \; ; \right.$ $D''=584.z+439$;

» $2^{83}-1$ ..... $\left\{ D'=664.z+1 \; ; \right.$ $D''=664.z+177$;

» $2^{89}-1$ ..... $\left\{ D'=712.z+1 \; ; \right.$ $D''=712.z+535$;

» $2^{97}-1$ ..... $\left\{ D'=776.z+1 \; ; \right.$ $D''=776.z+195$;

» $2^{101}-1$ ..... $\left\{ D'=808.z+1 \; ; \right.$ $D''=808.z+607$.

De sorte que, en faisant $z=0$, il n'y a que la valeur de $D''=439$, qui soit effectivement diviseur du nombre $2^{73}-1$. Sur l'existence de ces exceptions, Fermat ne donne aucune explication. La partie constante de D'' est un nombre *premier*, dans les quatre cas pour lesquels on obtient un diviseur. Mais le nombre $2^{101}-1$ dément la généralité d'une telle règle, en observant que 607 n'est pas diviseur de

$$2^{101}-1=25353.01200.45645.90077.93406.41075.1 \; .$$

Le nombre $\frac{3^{29}-1}{2}$ ne peut être divisible que par les nombres premiers compris dans les formules

$$D'=348.z+1 \; ; \qquad D''=348.z-289 \; .$$

A priori on ne voit pas que, en faisant $z=1$, ce qui donne $D''=59$, on aura un diviseur. Mais il est facile de s'assurer que 59 divise effectivement le nombre

$$\frac{3^{29}-1}{2}=34315.18868.2441 \; ,$$

ainsi que cela est affirmé par Fermat à la page 164 de l'ouvrage que je viens de citer. Cette coïncidence entre les formules générales et les nombres obtenus en ajoutant l'unité au double de l'exposant, à l'égard

des trois nombres $2^{11}-1$, $2^{23}-1$, $3^{29}-1$, arrive, à cause que les produits

$$(2^{11}-1)(2^{11}+1)\ ;\quad (2^{23}-1)(2^{23}+1)\ ;\quad (3^{29}-1)(3^{29}+1)$$

étant divisibles, respectivement, par 23, 47, 59, il faut que la division ait lieu pour le premier de ces deux facteurs, étant impossible pour le second: car leurs diviseurs sont de cette forme:

$$\text{pour}\quad 2^{11}+1\left\{D' = 88.z-21\ ;\quad D''=3\ ;\right.$$

$$\text{»}\quad 2^{23}+1\left\{D' = 184.z-45\ ;\quad D''=3\ ;\right.$$

$$\text{»}\quad 3^{29}+1\left\{D' = 174.z+1\ ;\quad D''=4\ ;\right.$$

où il faut observer que

$$\frac{2^{23}+1}{3} = 2796203 = \text{Nombre } \textit{premier};$$

$$\frac{3^{29}-1}{2.59} = 58161.33614.99\ ;$$

$$\frac{3^{29}+1}{4} = 17157.59434.1221\ .$$

Le même nombre 59 devant diviser

$$2^{58}-1 = (2^{29}-1)(2^{29}+1) = 536870911 \times 536870913\ ,$$

et la division étant impossible pour le premier de ses deux facteurs, elle a lieu pour le second; effectivement l'on trouve

$$\frac{2^{29}+1}{3.59} = 3033169 = \text{Nombre } \textit{premier};$$

tandis que

$$2^{29}-1 = 233 \times 2304167 = 233 \times 1103 \times 2089\ .$$

En m'appuyant sur ces remarques, je ne puis croire, que Fermat ait été en possession d'une démonstration rationnelle de la plus grande partie de ses propositions. Sa bonne foi ne permet pas d'élever le moindre doute sur ses assertions. Mais dès qu'il est question de prononcer sur la rigueur de ses démonstrations, il est permis, ce me semble, de conserver quelques scrupules.

Cette opinion mérite d'autant plus d'être pesée qu'elle est analogue à celle émise par LEGENDRE à la page 514 du Volume de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1785. Sa pensée est ainsi exprimée: « On doit regretter beaucoup que FERMAT, qui avait cultivé avec un » grand succès la Théorie des Nombres, ne nous ait pas laissé la dé- » monstration des théorêmes auxquels il était parvenu. A la vérité, » M.rs EULER et DE-LA-GRANGE, qui n'ont pas dédaigné ce genre de » recherches, ont démontré la plupart de ces théorêmes et *ont même* » *substitué des théories très-étendues aux propositions isolées de* FERMAT; » mais il en est plusieurs qui ont résisté à leurs efforts, soit que FERMAT » *n'en eut pas réellement une démonstration solide*, ce qui est difficile » à croire, soit que l'instrument pour y parvenir nous soit encore tout- » à-fait inconnu ». En reproduisant aujourd'hui ces paroles de LEGENDRE, il est juste d'ajouter que, Lui-même a rempli plusieurs des lacunes dont il voyait avec peine l'existence en 1785.

Le nombre $\frac{3^{29}+1}{4}$, n'est pas premier; en faisant $z=35$, la formule $D'=174.z+1$ donne $D'=6091$; et en exécutant la division par ce nombre *premier*, on obtient:

$$\frac{3^{29}+1}{4.6091}=281687643 1 .$$

Ce nombre est *premier*. En effet, sa racine carrée est égale à 53074: et aucun des 88 nombres *premiers* donnés par la formule

$$D'=174.z+1$$

(en commençant par $z=42$) ne divise le nombre 2816 . . . . 31.

Pour faciliter la vérification de cette assertion, voici les 88 diviseurs que j'ai éprouvés:

6961	7309	8179	8353	9049	9397	10093
10267	10789	11311	11833	12007	12703	13399
13747	15139	15313	15661	16183	16879	17053
17401	17749	17923	18097	18793	19141	19489
20011	20359	20533	20707	21577	21751	22273
22447	22621	23143	24709	25057	25579	26449
28537	28711	29059	29581	30103	31147	31321
32191	32713	32887	33409	33757	33931	35149
35323	35671	36541	38281	38629	38803	38977
39499	39847	40543	41413	41761	42283	42457
42979	44371	44893	45589	45763	46633	46807
49069	49417	49939	50287	50461	51157	51679
51853	52027	52201	53419 .			

Si le nombre

$$\frac{3^{29}-1}{2.59}=58161.33614.99$$

n'est pas premier, je puis affirmer que le plus petit nombre premier par lequel il serait divisible doit surpasser le nombre premier 52259. De sorte que, il faudra chercher les diviseurs qu'il pourrait avoir, en posant $z=1, 2, 3$, etc. dans les formules

$$D'=52201+348.z\ , \qquad D''=52259+348.z\ ;$$

où

$$52201=348\times 150+1\ ; \quad 52259=348\times 151-289\ .$$

Sur cela il importe d'observer, que la racine carrée de ce nombre étant 762636, la formule déjà citée de Legendre (voyez p. 101 du Tome 2 de sa *Théorie des Nombres*) en y faisant

$$k=\frac{1}{2}.348\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{29}\right)=112\ ; \qquad nA=762636\ ,$$

donne

$$\frac{2}{112}.\frac{762636}{\text{Log. hyp.}^{e}(762636)-1,08366}=1092$$

pour la *totalité* des nombres premiers qu'on obtient depuis $z=1$ jusqu'à $z=\frac{762636}{348}=2192$ par les deux progressions $348.z+1$, $348.z-289$.

La même formule donne

$$\frac{2}{112} \cdot \frac{52259}{\text{Log. hyp.}^{e}(52259) - 1,08366} = 95 ,$$

pour la totalité des nombres premiers, qui doivent être compris entre 59 et 52259; ce résultat, ainsi établi *a priori*, est d'un admirable précision, ayant trouvé effectivement 95 nombres premiers entre ces deux limites. Les nombres premiers, qu'on trouve après 52259, sont les 79 suivans, en poussant leur calcul jusqu'à 103357:

53593	54347	55333	55681	56087	56377	56783
57073	57131	59219	59509	59567	60611	60901
62003	62351	62989	63337	63743	64033	64091
64381	64439	65831	66179	68209	68963	70297
71341	71399	72733	74531	74821	75169	75227
76213	76561	78301	78649	78707	79693	80447
80737	81839	82129	82883	83231	83579	83869
84913	85667	86711	87407	87697	88741	88799
90191	90481	90887	91583	91873	92221	92569
92627	93323	94309	95063	95701	97151	97441
97499	97789	97847	98543	99181	99529	99877
102023	103357 .					

Le nombre total de ces diviseurs premiers est égal à $95 + 79 = 174$. La formule générale de Legendre donne:

$$\frac{2}{112} \cdot \frac{102761}{\text{Log. hyp.}^{e}(102761) - 1,08366} = 175,56 .$$

Il y a donc un accord très-satisfaisant entre le calcul effectif, et le résultat fourni par cette formule.

Les nombres premiers, qui suivent les deux derniers 102023, 103357, doivent être calculés par les formules

$$D' = 103357 + 348 . z \; ; \qquad D'' = 102023 + 348 . z ,$$

en y faisant $z = 1, 2, 3$, etc.

Si le nombre

$$2^{53} - 1 = 90071 . 99254 . 74099 . 1$$

n'est pas premier, on doit chercher les diviseurs, qu'il peut avoir à l'aide des deux formules

$$D' = 49927 + 424.z \; ; \qquad D'' = 50033 + 424.z \; ;$$

en y faisant $z = 1, 2, 3$, etc. Car j'ai reconnu qu'il n'est pas divisible par aucun nombre premier inférieur à 50033.

§ VI.

En posant

$$X'^4 = 1 + A'_{(1)}x + A'_{(2)}x^2 + A'_{(3)}x^3 \ldots\ldots + A'_{(m)}x^m + \text{etc.}$$

$$X'^3 = 1 + B_{(1)}x + B_{(2)}x^2 + B_{(3)}x^3 \ldots\ldots + B_{(m)}x^m + \text{etc.} \; ,$$

on a l'équation

$$X'^4 = X'^3(1 + x^1 + x^4 + x^{16} + x^{25} + \text{etc.}) \; .$$

Donc, en comparant les coefficiens des mêmes puissances de x, on aura:

$$A'_{(m)} = B_{(m)} + B_{(m-1)} + B_{(m-4)} + B_{(m-9)} + B_{(m-16)} + \text{etc.} \; :$$

d'où l'on tire les équations

$$B_{(1)} + 1 = A'_{(1)} \; ; \qquad B_{(2)} + B_{(1)} = A'_{(2)} \; ;$$

$$B_{(3)} + B_{(2)} = A'_{(3)} \; ; \qquad B_{(4)} + B_{(3)} + 1 = A'_{(4)} \; ;$$

$$B_{(5)} + B_{(4)} + B_{(1)} = A'_{(5)} \; ; \qquad \text{etc.} \; ,$$

lesquelles donnent

$$B_{(1)} = 3 \; ; \quad B_{(2)} = 3 \; ; \quad B_{(3)} = 1 \; ; \quad B_{(4)} = 3 \; ; \quad B_{(5)} = 6 \; ;$$

$$B_{(6)} = 3 \; ; \quad B_{(7)} = 0 \; ; \quad B_{(8)} = 3 \; ; \quad B_{(9)} = 6 \; ; \quad B_{(10)} = 6 \; ;$$

$$B_{(11)} = 3 \; ; \quad B_{(12)} = 1 \; ; \quad B_{(13)} = 6 \; ; \quad B_{(14)} = 6 \; ; \quad B_{(15)} = 0 \; ;$$

$$B_{(16)} = 3 \; ; \quad B_{(17)} = 9 \; ; \quad B_{(18)} = 6 \; ; \quad B_{(19)} = 3 \; ; \quad \text{etc.}$$

Les exposans m, qui se trouvent dans le développement de X'^3, seront ceux de tous les nombres compris dans l'une des quatres formes, $4n$, $4n+1$, $4n+2$ (*), $8n+3$, lesquelles appartiennent à la totalité des

(*) Les nombres de la forme $4n+2$ comprennent les nombres de la forme

nombres susceptibles d'être décomposés en trois carrés. Et comme les nombres de la forme $8n+7$ ne peuvent pas être décomposés en trois carrés, on aura $B_{(m)}=0$ pour les coefficiens affectés à des exposans qui auraient cette dernière forme. En outre on aura aussi $B_{(m)}=0$, si l'exposant est de la forme $4^k(8n+7)$. Car, l'impossibilité de l'équation $8n+7=x^2+y^2+z^2$ entraîne celle de l'équation

$$2^{2k}(8n+7)=(2^k.x)^2+(2^k.y)^2+(2^k.z)^2.$$

De sorte que

$$4^X(8Y+7)$$

est le type des nombres qui ne sont pas décomposables en trois carrés, quelques soient les facteurs premiers de $8Y+7$. Les nombres de cette forme ne peuvent pas être décomposés en deux carrés, si l'on observe que l'équation

$$4^X(8Y+7)=2^{X'}(4Z'-1)^2(4Y'+1)$$

est impossible en nombres entiers et positifs.

La série des coefficiens $B_{(m)}$ est du nombre de celles qu'on nomme *récurrentes:* elle est analogue à la série qui donne la somme des diviseurs des nombres naturels 1, 2, 3, 4, etc. Les nombres *premiers*, de la forme $8n+3$, sont réductibles à la forme *quadratique* q^2+2r^2. On aura $B_{(m)}=3$ pour tout nombre premier m de la forme $8n+3$.

$$2(8m-1)=16m-4+2=4(4m-1)+2.$$

Or on sait, que tout nombre de la forme $4n+2$ est réductible à la somme de trois carrés: donc cette proposition revient à dire que le double des nombres impairs de la forme $8m-1$ peuvent être réduits à la somme de trois carrés. FERMAT avait énoncé cette propriété en la *limitant* aux nombres *premiers* de la forme $8m-1$. « Duplum cujuslibet numeri primi unitate minoris quam » multiplex octonarii componitur *ex tribus quadratis.* Esto quilibet numerus primus unitate minor » quam octonarii multiplex (ut sont 7, 23, 31, 47, etc.), eorum duplum ut 14, 46, 62, 94, » componitur ex tribus quadratis ». Telles sont les paroles de FERMAT, qu'on lit dans une de ses lettres à M. DIGBY, publiée par VALLIS (page 858 du Tome II de ses OEuvres). Cette même lettre est citée par LAGRANGE aux pages 338 et 355 du Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1775. Mais, par une altération que je ne puis m'expliquer, la proposition de FERMAT est enoncée par LAGRANGE avec ces mots ..... « Quant aux nombres de la forme $8m-1$ M. FERMAT » assure que le double de chacun de ces nombres est toujours aussi la somme *d'un carré et du* » *double* d'un carré; mais ce dernier théorême est du nombre de ceux qui restent à démontrer ».

Comme la proposition de FERMAT revient à dire, que la moitié de la somme $x^2+y^2+4z^2$ des trois carrés, donne $8m-1=p^2+q^2+2z^2$, en posant $x=p+q$, $y=p-q$; je soupçonne que LAGRANGE entendait qualifier la même proposition par ces mots, savoir: « Quant aux nombres » de la forme $2(8m-1)$, M. FERMAT assure que la *moitié* de chacun de ces nombres (c'est-à-dire » $8m-1$) est toujours aussi la somme de *deux* carrés et du double d'un carré ». Je livre cette simple conjecture de ma part avec toute la réserve qui est commandée par le nom de LAGRANGE.

En effet, soient A, B, C trois nombres, qui, pris dans la série des carrés 0, 1, 4, 9, 16, etc., donnent $A+B+C=8n+3$. Il est démontré que la forme quadratique de ce même nombre doit être $p^2+2.q^2$; p et q n'ayant aucun diviseur commun. Et si ce nombre est *premier*, cela ne peut avoir lieu que d'une *seule* manière. Car, un nombre composé N de la forme

$$N=(2a^2+b^2)(2c^2+d^2)$$

est tel que l'on a

$$N=(2ac\pm bd)^2+2(ad\mp bc)^2 :$$

de sorte que l'on a la double égalité

$$N=p^2+2q^2=p'^2+2q'^2 .$$

Maintenant remarquons que, dans le développement du carré X'^2, il y a seulement les trois termes

$$x^{A+B}, \qquad x^{A+C}, \qquad x^{B+C}$$

capables de produire des exposans égaux à $8n+3$, en formant le produit de X'^2 par

$$1+x^1+x^4+x^{16}\ldots\ldots+x^C\ldots\ldots+x^B\ldots\ldots+x^A+\ldots\ldots$$

Mais, deux des trois nombres A, B, C doivent être égaux, afin que, le même nombre N, puisse être produit sans le concours d'aucun autre nombre différent des trois primitifs, désignés par A, B, C; donc l'on aura

$$B_{(m)}=B_{(8n+3)}=3 ,$$

pour tout nombre premier de la forme $8n+3$.

Les nombres premiers de la forme $8n+1$, participent à la fois aux *deux* formes quadratiques p^2+q^2; x^2+2y^2. Cette duplication de forme quadratique les distingue des nombres premiers de la forme $8n+3$. L'on aurait aussi $B_{(m)}=0$, pour des nombres m de la forme

$$4.2n+1=8n+1 ;$$

tels que, $8n'+3$, $8n''+3$, étant des nombres *non* premiers, l'on eût $8n+1=m=(8n'+3)(8n''+3)$. Car, dans ce cas, les nombres $8n'+3$, $8n''+3$, sont, chacun, décomposables en trois carrés *inégaux*: de sorte que, en posant

$$8n'+3=p'^2+q'^2+r'^2 ; \qquad 8n''+3=p''^2+q''^2+r''^2 ,$$

l'on a $m=(p'^2+q'^2+r'^2)(p''^2+q''^2+r''^2)$; c'est-à-dire

$$m =$$
$$(p'p''+q'q''+r'r'')^2+(p'q''-q'p'')^2+(p'r''-p''r')^2+(q'r''-r'q'')^2.$$

Donc, le nombre m, étant nécessairement composé de *quatre* carrés, ne peut pas se trouver dans le développement de X'^3, et l'on doit faire

$$B_{(m)} = B_{(8n+1)} = 0 \ .$$

Un nombre quelconque de la forme $8n+3$ est décomposable en trois carrés *impairs*. En effet, il sera démontré dans le § suivant, que tout nombre N est égal à la somme de trois nombres *triangulaires:* et avec une légère réflexion on reconnaît, que l'équation

$$N = \left(\frac{x^2+x}{2}\right)+\left(\frac{y^2+y}{2}\right)+\left(\frac{z^2+z}{2}\right)$$

revient à dire, que

$$8N+3 = (2x+1)^2+(2y+1)^2+(2z+1)^2 .$$

Mais, ce nombre, ne peut être premier à moins que deux des trois carrés ne soient égaux. Cependant, il ne faut pas perdre de vue, qu'il y a une infinité de nombres impairs non premiers de la forme $4n+1$ décomposables en trois carrés. Pour en saisir la possibilité, avec une certaine généralité, remarquons que, tout nombre *impair*, sans exception, $2n+1$, satisfait à l'équation $2n+1 = x^2+y^2+2z^2$. Donc, en prenant pour z un nombre tel, que $2n+1-2.z^2$, soit de la forme $4k+1$; et que, de plus, les facteurs premiers de $4k+1$ soient de la forme $4g+1$; $4g'+1$, etc., l'on sera certain que $2n+1-2.z^2 = x^2+y^2$. Par exemple

$$17765 = 2.(12)^2+17477 = 2.(6)^2+17693 \ ;$$
$$17477 = (106)^2+(79)^2 \ ; \qquad 17693 = (133)^2+2^2 \ .$$

De là on tire:

$$17765-2^2 = 17761 = (60)^2+(119)^2 \ ;$$
$$17765-(106)^2 = 6529 = (65)^2+(48)^2 \ ;$$

et par conséquent

$$17765 = 2^2+(60)^2+(119)^2 = (48)^2+(65)^2+(106)^2 \ ;$$

mais il y a des nombres impairs pour lesquels une semblable transformation est impossible.

En excluant les nombres de la forme $4n$, et considérant les nombres compris dans les trois formes $4n+1$, $4n+2$, $8n+3$, le coefficient

$B_{(m)}$ indiquera en combien de manières on pourra disposer les trois carrés qui composent le nombre m. Si ce nombre, décomposé dans ses facteurs premiers, est de la forme

$$m = (2k+1)^{\beta}.(2k'+1)^{\beta'}.(2k''+1)^{\beta''} \ldots\ldots;$$

c'est-à-dire, tel que g soit le nombre de ses facteurs premiers et inégaux, $2k+1$, $2k'+1$, $2k''+1$, etc., on peut démontrer, que le coefficient $B_{(m)}$, réduit aux formes *trinaires différentes*, sera nécessairement un multiple de 2^{g-2}. Pour le nombre $17765 = 5.11.17.19$ l'on a $g=4$; et pour le nombre $9225 = 3^2.5^2.41$ l'on a $g=3$.

Les efforts faits par Euler, pour démontrer que les nombres *premiers*, de la forme quadratique $x^2+2.y^2$, ont, exclusivement, la forme *linéaire* $8n+3$, sont attestés par un de ses Mémoires, publié en 1761 dans le Tome VI des *Novi Commentarii*, avec le titre paradoxal « *Specimen de usu observationum in Mathesi pura* ». Ces efforts, d'un homme doué d'un génie analytique éminemment vaste et profond, sont propres à relever le mérite de la grande découverte, sur la Théorie des Nombres, publiée par Lagrange dans les Volumes de l'Académie de Berlin pour les années 1773, 1775. Le même Euler a commenté (vers l'année 1780) cette découverte par un Mémoire intitulé: « *De insigni promotione Scientiae Numerorum* », où il dit: « Eximia omnino sunt quae celeberr. La-Grange demonstravit, et maximam lucem in scientia Numerorum, quae etiam nunc tantis tenebris est involuta, accendunt ». Euler voyait dans ce travail de Lagrange l'accomplissement du vœu qu'il avait exprimé, quelques années auparavant, à la page 128 du Tom. VIII des *Novi Commentarii*, où il cite quelques propriétés des Nombres « *et plura alia quae* (dit-il) *tamen nondum video quomodo demonstrari queant* ». Ces paroles, et surtout les théorêmes énoncés par Euler, en 1746, dans le Tome XIV des anciens *Commentarii*, suffisaient pour exciter le génie de Lagrange, et lui indiquer clairement que les propriétés des Nombres, compris dans la forme quadratique du trinome $Bt^2+Ctu+Du^2$, devaient être fécondes pour reculer les limites de cette branche des Mathématiques pures.

§ VII.

Soit

$$X'' = 1 + x^1 + x^3 + x^6 + x^{10} \ldots\ldots + x^{\frac{n(n+1)}{2}} + \text{etc.}$$

La *quatrième* puissance X''^4 de cette série devient identique au développement de la fonction

$$X''^4 = \frac{1}{1-x} + \frac{3x}{1-x^3} + \frac{5x^2}{1-x^5} + \frac{7x^3}{1-x^7} \cdots\cdots + \frac{(2n+1)x^n}{1-x^{2n+1}} + \text{etc.},$$

après avoir développé chacun de ses termes suivant les puissances de x. C'est de quoi on rencontre la démonstration dans la théorie des transcendantes elliptiques. Or en écrivant

$$X''^4 = \sum_0^\infty . \frac{(2n+1).x^n}{1-x^{2n+1}},$$

et développant la fonction soumise au signe $.\sum_0^\infty.$ l'on a

$$X''^4 = \sum_0^\infty . (2n+1)x^n \left\{ 1 + x^{2n+1} + x^{2(2n+1)} + x^{3(2n+1)} + \text{etc.} \right\}.$$

Les premiers termes de cette série sont

$$X''^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 8x^3 + 13x^4 + 12x^5 + 14x^6 + 24x^7$$
$$+ 18x^8 + 20x^9 + 32x^{10} + \text{etc.}$$

D'après la table qui donne les valeurs de $S_{(n)}$ on reconnaît aussitôt, que l'on peut écrire

$$X''^4 = 1 + xS_{(2.1+1)} + x^2S_{(2.2+1)} + x^3S_{(2.3+1)} + x^4S_{(2.4+1)}$$
$$+ x^5S_{(2.5+1)} + \cdots\cdots + x^nS_{(2.n+1)} + \text{etc.}$$

Donc un nombre quelconque n peut être décomposé en *quatre* nombres *triangulaires* autant de fois qu'il y a d'unités dans le coefficient $S_{(2.n+1)}$. Il est facile de tirer de là le développement du cube X''^3. En effet, soit

$$X''^3 = 1 + x[1] + x^2[2] + x^3[3] \cdots\cdots + x^m[m] + \text{etc.},$$

en multipliant cette série par

$$X'' = 1 + x^1 + x^3 + x^6 + x^{10} + \text{etc.},$$

on doit reproduire celle de X''^4: donc, par la comparaison des deux coefficiens de x^m, on aura l'équation générale

$$S_{(2m+1)} = [m] + [m-1] + [m-3] + [m-6] + [m-10]$$
$$+ [m-15] + [m-21] + \text{etc.};$$

où l'on doit retenir, dans le second membre, les seuls termes, pour

lesquels la différence $m - \frac{n(n+1)}{2}$ ne sera pas négative, et avoir l'attention de faire $[0]=1$. On forme, en conséquence, les équations successives (en partant de $[1]=3$) ;

$$[2]+3=S_{(5)}=6 \;;$$
$$[3]+[2]+1=S_{(7)}=8 \;;$$
$$[4]+[3]+3=S_{(9)}=13 \;;$$
$$[5]+[4]+[2]=S_{(11)}=12 \;;$$

etc.

Les exposans m seront de la forme

$$m=\left(\frac{m'^2+m'}{2}\right)+\left(\frac{m''^2+m''}{2}\right)+\left(\frac{m'''^2+m'''}{2}\right) \;;$$

et de là on tire l'équation

$$8m+3=(2m'+1)^2+(2m''+1)^2+(2m'''+1)^2 \,,$$

par laquelle il est démontré que tout nombre de la forme $8A+3$ peut être décomposé en trois carrés impairs.

§ VIII.

Solution, en nombres entiers, de l'équation
$M^X-1=NY$;
M et N étant deux nombres premiers entre eux, donnés à volonté.

L'équation qui termine le § III donne toujours

[1] ..... $M^{p-1}=1+pQ$;

où p désigne un nombre premier; M un nombre non divisible par p, et Q un nombre entier. Pour un autre nombre premier p', on aura de même:

[2] ..... $M^{p'-1}=1+p'Q'$;

pourvu que M soit aussi premier à p'. En élevant à la puissance $p'-1$ les deux membres de l'équation [1], et à la puissance $p-1$ les deux membres de l'équation [2], on tire de là cette double égalité:

$$M^{(p-1)(p'-1)} = (1 + pQ)^{p'-1} \; ; \qquad M^{(p-1)(p'-1)} = (1 + p'Q')^{p-1} \, .$$

En développant le binome qui constitue le second membre de la première de ces deux équations, il est évident que p demeure un facteur commun à tous les termes qui suivent l'unité : donc la différence

$$M^{(p-1)(p'-1)} - 1$$

est nécessairement divisible par p. Par la même raison, appliquée à la seconde équation, la même différence doit être divisible par p'. Or, cela ne peut avoir lieu sans que cette différence soit divisible par le produit pp'. Ainsi, en posant

[3] ..... $M^{(p-1)(p'-1)} = 1 + pp' . Q''$,

il faudra regarder Q'' comme un nombre entier. En considérant un troisième nombre premier p'', qui soit premier à M, on a l'équation

[4] ..... $M^{p''-1} = 1 + p'' . Q'''$.

Des deux équations [3] et [4] on tire

$$M^{(p-1)(p'-1)(p''-1)} = (1 + pp' . Q'')^{p''-1} \; ;$$

$$M^{(p-1)(p'-1)(p''-1)} = (1 + p'' . Q''')^{(p-1)(p'-1} \, .$$

Donc, en développant ces deux binomes, il est manifeste que la différence

$$M^{(p-1)(p'-1)p''-1} - 1 \; ,$$

doit être divisible, soit par pp', soit par p'' ; et par conséquent par le produit $pp'p''$ des trois nombres premiers p, p', p''. Rien n'empêche de prolonger cette démonstration, et d'en conclure que l'équation

$$M^X - 1 = NY$$

sera résolue, si ayant $N = p . p' . p'' . p''' \ldots\ldots$ on prend

$$X = (p-1)(p'-1)(p''-1)(p'''-1) \ldots\ldots \, .$$

Ce raisonnement est applicable à un nombre composé quelconque

$$N = p^k . p'^{k'} . p''^{k''} . p'''^{k'''} \ldots\ldots$$

En effet, reprenons les deux équations [1] et [2] : en élevant les deux membres de la première à la puissance p^{k-1}, et les deux membres de la seconde à la puissance $p'^{k'-1}$, l'on aura

$$M^{p^{k-1}(p-1)} = (1 + pQ)^{p^{k-1}} \; ;$$

$$M^{p'^{k'-1}(p'-1)} = (1 + p'Q')^{p'^{k'-1}} \; ;$$

c'est-à-dire :

$$M^{p^{k-1}(p-1)} = 1 + p^k . U \; ; \qquad M^{p'^{k'-1}(p'-1)} = 1 + p'^{k'} . U' \; ;$$

U et U' désignant des nombres entiers. De là on tire la double égalité

$$M^{p^{k-1}(p-1).p'^{k'-1}(p'-1)} = (1 + p^k.U)^{p'^{k'-1}(p'-1)} ;$$

$$M^{p^{k-1}(p-1).p'^{k'-1}(p'-1)} = (1 + p'^{k'}.U')^{p^{k-1}(p-1)} ;$$

et la conséquence, que la différence

$$M^{p^{k-1}(p-1).p'^{k'}(p'-1)} - 1$$

est divisible à la fois par p^k et par $p'^{k'}$. De sorte que l'on a

[5] ..... $M^{p^{k-1}(p-1).p'^{k'-1}(p'-1)} = 1 + p^k.p'^{k'}.G$;

G désignant un nombre entier.

En élevant les deux membres de l'équation [4] à la puissance $p''^{k''-1}$, on a par le développement du binome

[6] ..... $M^{p''^{k''-1}(p''-1)} = 1 + p''^{k''}.G'$;

G' désignant un nombre entier.

Les équations [5] et [6] étant élevées, la première à la puissance $p''^{k''}.(p''-1)$; la seconde à la puissance $p^{k-1}.(p-1).p'^{k'-1}.(p''-1)$, il devient manifeste, que l'on aura

$$M^{p^{k-1}(p-1).(p'^{k'-1}(p'-1).p''^{k''-1}(p''-1)} = 1 + p^k.p'^{k'}.p''^{k''}.V ;$$

V désignant un nombre entier.

Cela posé, il est démontré que ayant

$$N = p^k.p'^{k'}.p''^{k''}.p'''^{k'''} \ldots\ldots$$

on aura la solution de l'équation

$$M^X - 1 = N.Y$$

en posant

$$X = N\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p'}\right)\left(1 - \frac{1}{p''}\right)\left(1 - \frac{1}{p'''}\right)\ldots\ldots$$

Cette solution est, comme l'on voit, une conséquence tout-à-fait directe du théorême de Fermat. On sait, d'un autre côté, que cette valeur de X exprime combien il y a de nombres plus petits que N, qui sont premiers au même nombre. Mais cette coïncidence ne constitue pas un argument nécessaire pour parvenir à la valeur de l'exposant X; et c'est en éliminant cette considération à la fois intime et étrangère, que l'on simplifie considérablement la solution du problème énoncé par Euler à la page 75 du Tom. VIII des *Novi Commentarii* (Lisez la page 104 de ce Volume).

RÉFLEXIONS

Sur les Objections soulevées par Arago *contre la* priorité *de* Galilée *pour la double découverte des taches solaires noires, et de la rotation uniforme du globe du Soleil*

PAR

JEAN PLANA

« Mens sibi conscia recti ».

Lues dans la séance du 15 mars 1860.

La validité de ces objections ayant été combattue par quelques savans, j'ai voulu les examiner avec toute l'impartialité, et toute l'attention dont je suis capable. Le résultat de cet examen, de ma part, est, dans son ensemble, favorable à la priorité de Galilée. Les argumens, que je vais produire dans cet écrit, démontrent, ce me semble, qu'Arago n'a pas épuisé la question sous le double rapport scientifique et historique. En fixant bien les dates dans cette discussion, avec toute la précision comportée par les documens existans, il me paraît d'avoir atteint la vérité d'une manière incontestable : je l'ai cherchée à travers quelques nuages « *absque ira et studio, quorum causas procul habeo* ».

Si en concentrant mes recherches sur une seule des découvertes astronomiques de Galilée, j'ai pu mettre en évidence quelques lacunes dans l'historique d'Arago, et les remplir, je crois avoir produit mes preuves sans jamais m'écarter des égards dus à sa mémoire. J'admire le génie inventif d'Arago, et la vastité de ses connaissances, sans me laisser toujours entraîner par la séduisante facilité de son argumentation.

La publication, en 1611, de l'Opuscule de Jean Fabricius, avec le titre *Narratio de Maculis in Sole observatis*, Vitembergae 1611, 4 Junii, *quinque plagulis*, est un fait notoire qui n'admet aucun doute. Mais il m'a été impossible de découvrir aucun document, propre à démontrer, d'une manière incontestable, que quelqu'exemplaire de cet Opuscule soit

parvenu à Venise, à Florence ou à Rome, dans l'intervalle compris entre le 4 Juin 1611 et le 4 Mai 1612, qui sont les limites entre lesquelles on doit d'abord traiter cette question, avant de parler des documens antérieurs au 4 Juin 1611. Et si, considérant la continuité des relations commerciales et diplomatiques entre l'Alemagne et l'Italie, surtout à une époque aussi rapprochée de l'assassinat d'Henry IV par un sombre fanatique, on voulait nier la possibilité, que l'Opuscule de Fabricius n'ait pas été transporté en-deça des Alpes en dix mois depuis sa publication, je ferais remarquer, que la *troisième* lettre pseudonyme du jésuite Scheiner (avec le titre *Epistolae Apellis post Tabulam latentis*) a la date du 25 Juillet 1612; et que les *trois* lettres *imprimées* avaient été expédiées à Kepler par Velser, célèbre Magistrat d'Augsbourg, le 22 Octobre de l'année 1612, avec cette lettre: *Mitto quas vides Apellis mei epistolas, de quibus si sententiam, quod tuo commodo fiat, aperire voles, me tibi magnopere devincies. De me tibi quaecumque in mea potestate sita sunt, liberrime omnia promitte, iis utere, et abutere. Vale. Aug. Vin.* 22 *Oct.* 1612 (Voyez la page 776 du second Volume des *Opera Omnia* de Kepler publié en 1858 par Ch. Frisch). Mais Kepler avait reçu *auparavant* (c'est-à-dire entre le 25 Juillet et le 22 Octobre) ces mêmes lettres d'Apelle par Wackher, Conseiller de l'Empereur d'Autriche, auquel, sur le sujet de ces lettres, il a adressé lui-même, en 1612, une longue épître, en lui exprimant son étonnement de n'avoir *pas encore vu à Prague* un exemplaire de l'ouvrage de Jean Fabricius. Car il lui dit: *Tandem igitur nobis credendum est non frustra fuisse promissionem Jo. illius Fabricii, qui proximis mundinis indice catalogo* Maculas Solares *nobis est pollicitus? Et o nos Pragae segnes, qui* Lipsiam vicinam *cum habeamus, ne nunc quidem ullum vidimus hujus libelli exemplar.* Ainsi l'argument d'Arago: « que, au 4 » Mai 1612, l'ouvrage de Fabricius était dans les mains du public depuis » plus de *dix mois* » (Voyez les pages 280, 281 du Tome troisième de ses Biographies) peut être au moins affoibli, si l'on réfléchit, que Kepler ne l'avait pas encore reçu à Prague, *après* le mois de Juillet de 1612. Je me borne à dire *après*, parceque la date du mois et du jour ne se trouve pas dans cette lettre imprimée de Kepler: mais elle doit être *postérieure* au 25 Juillet 1612 (date de la *troisième* lettre d'Apelle), puisque, lui-même, en accuse la réception en disant: *Tertia epistola valido me quatit ariete, ut jam supra confessus sum.* Au reste, dans une lettre postérieure de Kepler du 18 Juillet 1613, adressée au

jésuite Odo MALCOTIO, il parle de celle-ci en disant: *Scripsi sub finem anni* 1612, etc. Ainsi il est probable qu'elle a été écrite au Conseiller WACKHER au mois de décembre 1612.

Cette épître de KEPLER (véritable PROTOGÈNE dans cette réponse à APELLE) est de nature à exiger au moins plus d'un jour pour être écrite; et il paraît, que, peu d'heures avant de l'expédier à WACKHER, il avait reçu l'opuscule de FABRICIUS. En effet après sa signature ainsi conçue :

« Illustri Dominationi Tuae
» *A crepidis paratissimus*
» Sutor ante Tabulam *Apellis* » ;

il ajoute ce remarquable *Post Scriptum* :

Hem tibi opportunissimo tempore etiam FABRICIUM *de Solis maculis testantem. Videbis, si taedium legendi ambagiosas verborum lacunas superaveris, consensum non contemnendum* (Voyez la page 563 du Volume publié en 1718 avec le titre: *Epistolae Joannis* KEPPLERI *aliorumque mutuae*).

Par cette discussion, il me paraît au moins très-probable, que, GALILÉE (abstraction faite de sa bonne foi), pendant les derniers mois de l'année 1611, ne pouvait pas avoir eu vision de l'Opuscule de FABRICIUS. Et, pour élever cette probabilité au degré d'une certitude, j'observe qu'il y a une lettre de GALILÉE, datée de Florence du *premier Octobre* 1611 à Lodovico CARDI CIGOLI résident à Rome, où on lit ce morceau:

« Ho caro che il sig. PASSIGNANO vada osservando il Sole e le sue » rivoluzioni: ma bisogna che V. S. li dica, che avvertisca che la parte » del Sole la qual nel nascere è la più bassa, nel tramontare poi è la » più alta; per lo che gli potrebbe parere che perciò il Sole avesse » qualche altro rivolgimento in se stesso, oltre a quello *che veramente* » *credo ch' egli abbia, e che mi pare di osservare mediante le mutazioni* » *delle sue macchie:* averò molto caro l' osservazioni fatte in ciò dal » sig. Cavaliere per confrontarle con le mie » (CIGOLI et PASSIGNANO étaient deux Peintres Toscans, amis de GALILÉE et amateurs d'Astronomie).

J'ai marqué les mots *che veramente* etc. parceque (en abrégé) ils renferment toute la découverte attribuée à FABRICIUS par ARAGO, et ils la renferment à la date du 1.er Octobre 1611; qui est assez rapprochée du 4 Juin 1611 pour rendre, à mon avis, impossible la production

d'un document authentique, capable de prouver, que, dans le moment, GALILÉE avait déjà connaissance de l'Opuscule de FABRICIUS. Et pour remonter de plusieurs jours avant la date du premier Octobre 1611, si cela était jugé nécessaire, voici ce que le même CIGOLI écrivait à GALILÉE, de Rome le 23 Septembre 1611 :

« Le dissi già come il Cav.e PASSIGNANI ha fatto le osservazioni del » Sole la mattina e la sera, e che le macchie che vi sono le vede in » diversi aspetti, e sì ha viste e notate già molte, e mi dice che le vuol » mandare a V. S.; e che oltre alle diversità degli aspetti le vede più » apparenti e più nere nei lembi che se siano nella superficie di verso » noi; e poi girando ora verso il mezzo, ora verso la circonferenza per » linee spirali nel corpo luminoso (*). Io non so, non ho visto, e mal » volontieri mi risolvo e m'ardisco a tentare se l'occhio mi serve, seb- » bene egli dice che guarda un pochetto, e sì gli si levi la vista, ma » poi ritorna da quinci a un poco e vede benissimo e quanto egli vuole ». Il y a un autre fait non moins essentiel qu'il faut établir.

GALILÉE, de retour de Padoue à Florence, pour s'y fixer définitivement, les premiers jours de Septembre de l'année 1610, en était parti le 23 Mars 1611 pour Rome, où il a été forcé de se rendre pour y faire voir, avec son Télescope, ses découvertes astronomiques, publiées à Venise au commencement de Mars de l'année 1610 par son ouvrage intitulé: *Nuncius Sidereus*. Il y séjourna pendant les deux mois d'Avril et de Mai, et ne fut de retour à Florence, alors chargé de gloire et de haine, que dans les premiers jours de Juin suivant. Comme la date de la publication de son ouvrage « Istoria e dimostrazioni intorno alle » Macchie Solari etc. » est de l'année 1613 : pour écarter tous les doutes, relativement aux taches solaires observées à Rome en Avril et Mai 1611, dont ARAGO parle (avec l'accent du doute) à la page 280 de sa Biographie, il suffira de produire le témoignage d'une lettre, écrite à KEPLER par le jésuite Odo MALCOTIO, datée de Bruxelles le 11 Décembre 1612; par laquelle il lui demande son opinion sur les taches solaires, et les conséquences qu'on en tirait alors. Voici les paroles de MALCOTIO :

Nihilne novi Dominationi Tuae circa motum illum Solis in centro suo maculae illae solares aperuerunt? Quas etsi mihi Romae GALILAEUS

(*) Dans une autre lettre du 16 septembre 1611 il lui disait, que PASSIGNANO considérait les taches comme des corps infusés plus ou moins dans le globe lumineux.

et in Germania alii ostendissent (ne oculum ureret specillum, tecum veritus) observare neglexi, donec eas lecto tuo artificio, eoque nonnihil immutato facilius contemplari didici in tabella aut charta a Sole aversus: transmisso nimirum per arundinem Dioptricam debite diductam et utroque suo vitro cavo et convexo instructam ipso radio Solis. Miro valde, hasce maculas non recurrere eodem situ et ordine, si motu moventur epicyclico, cum tamen sub Sole ad occidentem eadem velocitate tendere videantur. Quaeso D. T. quid de his sentiat, et si quid aliud novi occurrat verbo uno ipsi D. Scillerio *insinuare dignetur; is enim quae a D. T. audierit mihi scribere non gravabitur* (Voyez la page 555 du Volume *Epistolae* Kepleris déjà cité).

On peut présumer que ce jésuite était fort avancé dans l'étude de l'Astronomie en remarquant que, vers le commencement de cette même lettre, il parle du plus sublime, de l'immortel ouvrage de Kepler, *De Stella Martis*, en s'exclamant: *Deus bone! quam sublimia et mira in illo latent opere; et quam bene, non modo de* Copernico, *sed etiam de* Tychone *et* Ptolomaeo *eorumque assectis mereris.*

S'il fallait prouver qu'Odo Malcotio était à Rome en 1611, je ferais observer que son nom se trouve inscrit à la page 289 de l'ouvrage de Nelli, comme un des quatre Professeurs, jésuites *du Collegio Romano*, qui le 24 avril 1611 ont rédigé la réponse à la lettre impérative du 19 avril 1611, adressée par le « Cardinal Roberto Bellarmino, ai Molto » Reverendi Padri del Collegio Romano, per accertarsi della verità e » sussistenza delle celesti scoperte di un valente Matematico per mezzo » d'un instrumento chiamato Cannone ovvero Occhiale ecc. ».

Nelli rapporte la signature des quatre jésuites avec cette forme singulière, et par malheur fidèle; la voici:

« Dal Collegio Romano 24 Aprile 1611.

» Indegni servi in Cristo
» Cristoforo Clavio
» Cristoforo Griemberger
» Odo Malcotio
» Gio. Paolo Lembo ».

Il est pénible de voir ici le nom de ce Malcotio, qui, en 1612, a été capable d'exprimer à Kepler son admiration pour ses ouvrages, tandis que, à Rome, en 1611, il n'a pas eu le courage de refuser sa

signature à un acte qui n'est pas louable en lui-même; à un acte qui atteste l'ignorance et la lâche complaisance des premiers Professeurs du *Collegio Romano*, et livre à la postérité la preuve qu'il annonçait l'aurore de la persécution, sans cesse continuée par le Corps des jésuites, et poussée à son dernier comble en 1633, sous le Pontificat d'Urbain VIII, de Maffeo Barberini, à une époque antérieure, admirateur du talent de Galilée.

Nelli remarque avec raison que, considérant la lettre du Cardinal et la réponse « potrebbe credere taluno di ritrovarvi il disprezzo col » quale i Gesuiti trattavano i laici i più eminenti del secolo, tacendo » il nome di Galileo, come se fosse a loro ignoto; quando, ed al » Bellarmino per essere Toscano, e trovarsi allora questo insigne Filosofo » in Roma, ed a Gesuiti Professori con i quali aveva talvolta carteggiato, » doveva essere notissimo ».

D'après ces documens, on ne peut pas dire que le phénomène des taches solaires était nouveau pour Galilée en Avril et Mai de 1611, lorsqu'il les montrait dans le jardin Bandini à Rome. On ne peut pas affirmer que leur existence lui avait été révélée par l'Opuscule de Fabricius publié le 4 Juin de la même année; ce qui est conforme aux attestations des Monsignori Dini, Agucchia, et le Bibliothécaire des Lincei Angelo De Filiis. L'objection que fait Arago, à la page 280 de sa Biographie, sur le silence de Galilée, à propos des interrogations pressantes qu'on lui adressait dans le jardin Bandini pour lui arracher son opinion sur l'essence des taches solaires, me paraît détruite en produisant, pour expliquer son imperturbable silence, le passage suivant de la Biographie de Galilée écrite en 1654 par Viviani, c'est-à-dire *douze* années après la mort de Galilée. Alors Viviani, âgé de 32 ans, avait déjà acquis une grande célébrité comme Géomètre, et une réputation de probité irréprochable; ce qui imprime à son récit tous les caractères de la fidélité. On sait qu'il est mort à Florence en 1703, comblé d'honneurs et de gloire.

Pour plus de clarté, il ne faut pas perdre de vue que Galilée a quitté le séjour de Padoue vers la fin du mois d'Août 1610; ses deux dernières lettres écrites de Padoue sont: une du 19 Août à Kepler à Prague; l'autre du 20 à Belisario Vinta Secrétaire du Gran Duc de Toscane, par laquelle il lui annonce son prochain départ. Il est curieux pour nous, maintenant habitués plutôt à voler qu'à voyager, à l'aide, non de la force musculaire des animaux, mais à l'aide de la force développée par de l'eau réduite en vapeur, d'entendre après deux siècles et demi

comment voyageait alors un Galilée entouré de la faveur Ducale noblement acquise. Il dit: « La prossima settimana invierò i miei arnesi a » Venezia per consegnarli al conduttore, e il primo o il secondo di set- » tembre, piacendo al Signore, mi metterò in viaggio per cotesta volta, » e in carozza mi condurrò fino a Bologna. Il resto del cammino, non » comportando la mia indisposizione che io lo possa fare per sì lunga » e faticosa strada a cavallo, supplico V. S. Ill.ma ad impetrarmi dal » Serenissimo nostro Signore tanto favore e onore, che io possa farlo » in una delle sue lettighe, sì come più altre volte ho fatto, di che a » S. A. S. e a V. S. Ill.ma terrò obbligo particolare. Sono per arrivare » a Bologna alli 5 di settembre, dove alloggerò col sig. Magini matema- » tico di quello studio, convenendomi di trattar seco di molti particolari » scrittimi da diverse parti d'Europa sopra li nuovi Pianeti, li quali » hanno promossa tra gli uomini tanta confusione ».

Après cette espèce de digression, commandée par l'inexorable argument des lieux et des Dates, voici le passage en question de Viviani:

« Proseguendo (in Padova) col Telescopio le osservazioni Celesti *nel* » *principio di Luglio* 1610, dandone avviso ad alcuni matematici d'Italia » e di Germania .....
» .....
» .....
» Vide ancora nella faccia del Sole alcuna delle macchie; ma per allora » non volle pubblicare quest'altra novità, che poteva tanto più concitargli » l'odio di molti ostinati Peripatetici (conferendola solo ad alcuno de' suoi » più confidenti di Padova, di Venezia, ed altrove, i quali sono Monsign. » Gualdo; Mons. Pignoria; D. Benedetto Castelli; Fra Paolo Sarpi » Servita; Fra Fulgenzio Micanzio Servita; Sig.r Filippo Contarini; » Sig.r Sebastiano Veniero, e Monsig. Agucchia), per prima assicurarsene » con replicate osservazioni e per poter intanto formar concetto della » essenza loro, e con qualche probabilità almeno pronunciarne la sua » opinione ».

On apprend par là: 1.° que Galilée avait réellement vues les taches solaires en 1610 vers le mois de Juillet; 2.° qu'en Avril et Mai de 1611, étant à Rome, il ne voulait pas encore dévoiler son opinion sur les causes productrices de ce singulier phénomène.

Ainsi Galilée, au jardin Bandini, cherchait encore les réponses aux interpellations qu'on lui faisait, et ne voulait pas se hasarder à les

présenter sous une forme, de sa part, plus ou moins indécise. Il voulait attendre pour les présenter sous une forme qui aurait le pouvoir de lui concilier l'approbation des *Savans*, et même des hommes peu versés dans la manière de faire ressortir la vérité des apparences sensibles. Il visait dans son âme à la marche progressive de la science et des siècles, et à l'antique maxime *Opinionum commenta delet dies.* GALILÉE était donc louable de persister dans son silence; et vouloir l'interpréter (comme ARAGO à la page 280) comme une espèce de preuve d'une complète ignorance de sa part, relativement au fait capital de la rotation du Soleil en insinuant le doute par la phrase: « Au jardin BANDINI en Avril et Mai » 1611, le savant illustre n'avait donc rien dit de la *rotation du Soleil* », me paraît un sentiment injuste envers un homme de génie, doué d'un talent extraordinaire pour juger les causes et les effets d'une perspective céleste. D'ailleurs, en présence de la lettre écrite par GALILÉE le 1.er Octobre 1611 au peintre CIGOLI, où la rotation du Soleil est indiquée d'une manière incontestable, il serait absurde de croire que cette découverte a été faite par lui dans ce même jour: on est forcé de lui attribuer une date antérieure, et de regarder cette lettre comme la manifestation d'un fait conclu par une longue suite d'observations élaborées par une savante discussion. Alors nous remontons facilement du 1.er d'Octobre 1611 avant le mois de Juin de la même année, et où la priorité de GALILÉE sur FABRICIUS a un puissant degré de probabilité.

Je puis même renforcer cette probabilité en faisant porter l'attention sur l'Introduction à l'ouvrage de GALILÉE *intorno i Galleggianti* où on trouve une espèce de réponse prophétique à l'objection formulée par ARAGO à la page 276 de sa Biographie.

ARAGO remarque que « GALILÉE était loin de se montrer indifférent » sur le droit de propriété en fait de découvertes ». Et en lui attribuant, avec plus ou moins de raison, de tels sentimens, il est assez naturel de se demander, pourquoi profitant d'une occasion, soit en 1610, soit en 1611, il n'a pas assuré la priorité de ses découvertes, faites en observant le disque du Soleil, par un acte public plus ou moins explicite, analogue à celui relatif aux phases de Vénus qui furent annoncées aux Savans par les mots signifiants, que

Cinthiae figuras aemulatur mater amorum.

Cette objection est conçue en ces termes: « Pourquoi GALILÉE pro- » fitant de l'occasion n'aurait-il pas imité ce qu'il avait fait pour ses

» observations sur *Vénus* et *Saturne* pour s'assurer la priorité de sa dé-
» couverte *autrement capitale, autrement inattendue* des taches du Soleil;
» si cette découverte eût remonté aux derniers temps du séjour de GALILÉE
» à Venise; c'est-à-dire au mois d'Août 1610? ».

Ces paroles remarquables sont suivies de cette espèce d'apostrophe, qui semble adressée aux admirateurs *passionnés de* GALILÉE : « *Cette* » *difficulté restera certainement sans réponse satisfaisante* ».

Eh bien; si je ne me trompe, il y en a une qui me paraît assez fondée. Voici en quoi elle consiste. En lisant la page 304 de l'ouvrage de NELLI, cité par ARAGO à la page 277, on apprend que, depuis le mois d'Octobre de l'année 1611, GALILÉE s'était livré, d'après une invitation fort pressante du Gran-Duc de Toscane, à la composition de son célèbre « *Discorso intorno alle cose che stanno sull'acqua, o che in* » *quella si muovono* », lequel n'a pu être livré au public, imprimé, que vers le commencement du mois d'Août de l'année 1612. Pour fixer avec plus de précision l'époque où GALILÉE était occupé de cet ouvrage *intorno i Galleggianti*, je puis faire remarquer que, au commencement de sa lettre à CIGOLI du premier Octobre 1611, il y a ce morceau : « Sono in obbligo di rispondere a due gratissime di V. S., ma perchè » sono occupatissimo per finire una scrittura di 15 fogli, in proposito » di certa contesa stata fra certi di questi filosofi peripatetici e me questi » giorni passati, la quale fo per il G. D., e *forse si stamperà*, mi è » forza esser brevissimo con lei ».

Ainsi, il est par là manifeste, que GALILÉE devait être occupé de la rédaction de ce manuscrit de 120 pages, depuis le commencement du mois de *Septembre* au moins. Son titre, tel que je viens de le rapporter, n'annonce pas un sujet où il puisse être question des taches solaires. Cependant ARAGO, qui en donne une très courte analyse à la page 270 du troisième Volume de ses Biographies déjà cité, ne paraît pas avoir arrêté son attention sur un morceau de l'Introduction à ce *Discorso*, qui peut être considéré comme la réponse à l'objection qu'il a voulu soulever à la page 276. Car, pour rendre raison au Gran-Duc du retard de sa confection, GALILÉE s'excuse en disant qu'il a été causé par les observations sur les satellites de Jupiter, qu'il se propose de continuer *sino all'occultazion di Giove* (nous dirions avec plus de clarté jusqu'au coucher héliaque de Jupiter), « le quali (dit-il) dovranno essere » a bastanza per l'intera cognizione de' movimenti, e delle grandezze degli

» orli di essi Pianeti, e di alcune altre conseguenze assieme ». Après ces paroles on voit GALILÉE, par un abrupte qu'on dirait aujourd'hui prophétique, saisir l'occasion de cet ouvrage pour y déposer le résultat de ses observations et de ses méditations sur les taches solaires par ce morceau que je copie textuellement:

« Aggiungo a queste cose l'osservazione di alcune macchiette oscure » che si scorgono nel corpo solare, le quali, mutando positura in quello » porgono grande argomento; *o che il Sole si rivolga in se stesso;* o » che forse altre stelle, nella guisa di Venere e Mercurio, e solo visibili » quando s'interpongono tra il Sole e l'occhio nostro; o pur danno segno » che sia vero e questo e quello; la certezza delle quali cose non debbe » disprezzarsi o trascurarsi ».

Par la phrase *o che il Sole si rivolga in se stesso*, qu'on lit ici, on voit que, au mois de Septembre 1611 au plus tard, la conséquence du mouvement de rotation du Soleil tirée de ses observations sur les taches, n'était pas tout-à-fait ignorée par lui. Mais il faut ajouter à cette narration le fait, que le manuscrit de GALILÉE a obtenu l'approbation de l'impression le *deux* Avril 1612, et que sa publication a eu lieu vers le commencement du mois d'Août de la même année; ce qui est conforme à la vérité, et avoué par GALILÉE lui-même dans sa lettre du 14 Août 1612, écrite à VELSER d'Augsbourg, auquel il lui en annonce l'expédition d'un exemplaire par ces mots « ..... insieme con una copia di un mio » trattatello intorno alle cose che stanno sopra l'acqua, o che in essa » discendono, *che pur ora si è finito di stampare* ».

La première édition de cet ouvrage, imprimée à Florence par Cosimo GIUNTI, qui est un de ceux qui font plus d'honneur au talent profond de GALILÉE, a été épuisée dans un mois. Aussitôt il en a entrepris une seconde, où il a *ajouté, dans l'introduction*, ce très-remarquable morceau pour détruire tous les doutes sur la rotation du Soleil, et enlever toute la force qu'on voudrait attribuer à sa phrase *e che forse altre stelle* etc., qu'on lit dans la période précédente. Dans la seconde édition cette période est suivie de celle-ci:

« Hannomi finalmente le *continuate osservazioni accertato*, tali mac- » chie esser materie contigue alla superficie del corpo solare, e quivi » continuamente prodursene molte, e poi dissolversi, altre in più brevi, » ed altre in più lunghi tempi, ed essere dalla *conversione del Sole in* » *se stesso, che in un mese lunare in circa finisce* il suo periodo *portate*

» *in giro* ». Ici le grand Philosophe perce l'avenir, et ferme sa période additionnelle par ces paroles mémorables: « accidente per se grandissimo » e maggiore per le sue conseguenze ». J'évoque les ombres de WILSON, de HERSCHEL et d'ARAGO pour leur demander jusqu'à quel point on peut pénétrer la profondeur de cette réflexion de GALILÉE, à lui inspirée par l'inspection des taches *noires* solaires.

VIVIANI, qui appréciait toute l'importance de l'addition que je viens de rapporter, n'a pas manqué d'avertir qu'elle se trouvait dans la seconde et non dans la première édition, quoique postérieure d'un seul mois. Voici la remarquable déclaration de VIVIANI « ..... quell'erudito » *Discorso sopra le cose che stanno in acqua, e che in quella si muovono* » è dedicato al suddetto Serenissimo, e stampato in Firenze nell'agosto » del 1612; nell'ingresso di quel Trattato diede *pubblicamente* notizia » delle novità delle Macchie Solari; e poco dopo ristampandosi il Discorso » con alcune addizioni, nella *prima* di esse inferì il parer suo circa il » luogo, essenza e moto di dette macchie; avvisando in oltre d'aver per » mezzo di quelle osservato il primo un moto o revoluzione del corpo » solare in sè stesso nel tempo di circa un mese lunare: accidente benchè » nuovo in astronomia, eterno nondimeno in natura, a cui perciò il » sig.r GALILEO referiva, come a men remoto principio, le cagioni fisiche » d'effetti e conseguenze maravigliose ».

La circonstance de la durée de la rotation du globe du Soleil, *in un mese lunare in circa*, ici prononcée pour la première fois, détruit complétement l'hypothèse injurieuse, qu'alors GALILÉE avait devant ses yeux l'ouvrage de FABRICIUS; où (à part tout ce que j'ai avancé pour établir l'impossibilité qu'il en fût alors déjà parvenu un exemplaire en Italie) il n'y a rien qui spécifie la *durée* de cette rotation. Car, quoique dépourvu de l'Opuscule original de FABRICIUS, voici ce que je puis rapporter en copiant la traduction de LALANDE (page 279 du 3.ème Volume de son Astronomie, édition de 1792):

FABRICIUS dit: « Nous invitons les amateurs des vérités physiques à » profiter de l'ébauche que nous leur présentons. Ils soupçonneront sans » doute que le Soleil a un mouvement de conversion, comme l'a dit » Jordano BRUNO (c'est celui qui fut brûlé en 1600, comme convaincu » d'athéisme ou d'irréligion), et, en dernier lieu, KEPLER dans son livre » sur les mouvemens de Mars; car, sans cela, je ne sais ce que nous » ferions de ces taches » (Quelle énorme différence entre cette pensée et

celle de GALILÉE – *accidente grandissimo ecc.* – que j'ai rapportée plus haut).

« Je ne suis pas d'avis que ce soient des nuages, je ne suis pas non » plus de l'avis de ceux qui ont placé les comètes dans le Soleil, comme » des émissaires destinés à y revenir bientôt: j'aime mieux me taire sur » tout cela que de parler au hasard; je suis même tenté de regarder ce » mouvement du Soleil comme la cause des autres mouvemens célestes, » suivant les paroles d'ARISTOTE, qui dit, dans ses problèmes, que le » Soleil est le père et l'auteur des mouvemens ».

La citation de KEPLER dans ce passage est allusive à ce qu'il avait imaginé au Chapitre XXXIV de son ouvrage *De stella Martis*, intitulé: *Corpus Solis esse Magneticum et in suo spatio converti*, où, d'après l'hypothèse et les calculs de KEPLER, on lit que la durée de la rotation du Soleil devrait être de trois jours, *Solem triduo circiter gyrari.*

FABRICIUS ne voyait donc pas que la durée du mouvement des taches solaires était incompatible avec cette profonde déduction de KEPLER. GALILÉE qui a dit – *in un mese lunare in circa* –; c'est-à-dire en 29 jours et demi, voyait donc, avec beaucoup plus de justesse, la conséquence manifestée par les taches, touchant la durée de la rotation du Soleil. Sa locution – *in un mese lunare in circa* – accuse une détermination de la révolution *synodique* des taches assez grossière: car on sait aujourd'hui, avec toute certitude, qu'elle est de 27 jours et demi, et non de 29 jours et demi. Mais ses paroles - *in un mese lunare in circa* - sont suffisantes pour enlever à ARAGO le droit de son assertion qu'on lit au commencement de la page 280: « Que GALILÉE n'a pas la moindre ap- » parence de droit à la découverte du mouvement de rotation du Soleil ».

Pour être à la fois strictement juste envers GALILÉE, et un peu généreux, il aurait pu faire observer que plus tard, dans sa *troisième* lettre à VELSER du premier Décembre 1612, il avait lui-même discuté les observations des taches faites par SCHEINER à Ingolstadt, et qu'il concluait sa discussion avec des paroles et des sentimens honorables; vrais alors comme après deux siècles et demi. Je me plais à les copier:

« E perchè, come ho detto, ancora questo è punto principalissimo » in questa materia, e la differenza tra APELLE e me è grande (poichè » le conversioni delle macchie a me pajono *tutte eguali*, e traversare il » disco solare in giorni 14 e mezzo in circa; e, ad esso, tanto ineguali, » che alcuna consumi in tal passaggio giorni 16 e più, ed altra 9 solamente),

» parmi che sia molto necessario il tornar con replicato esame a ricercar
» l'esatto di questo particolare: ricordandoci, che la Natura, sorda ed
» inesorabile ai nostri preghi, non è per alterare o per mutare il corso
» de' suoi effetti, e che quelle cose che noi procuriamo adesso d'inve-
» stigare e poi persuadere agli altri, non sono state solamente una volta,
» e poi mancate, ma seguitano e seguiteranno gran tempo il loro stile,
» sicchè da molti e molti saranno credute ed osservate; il che ci dee
» essere gran freno per renderci tanto più circospetti nel pronunziare le
» nostre proposizioni, e nel guardarci, che qualche affetto, o verso noi
» stessi, o verso altri, non ci faccia punto piegare dalla mira della pura
» verità ».

Galilée, non content d'avoir établi le fait du mouvement de rotation uniforme du Soleil par la discussion des apparences présentées par les taches noires, il a senti qu'il pouvait renforcer sa démonstration par sa découverte des *facules*, qui sont des espèces de *taches lumineuses*, dont la priorité lui est accordée par Arago. C'est un passage admirable celui-ci qu'on lit dans la 3.ème lettre de Galilée à Velser du 1.er Décembre 1612:

« . . . . . e crederò ch'ei non sia per metter difficoltà non solo
» nella massima vicinanza delle macchie al globo solare, ma nè anco
» nella rivoluzione in sè medesimo: in confermazione di che posso ag-
» giungere alle ragioni, che scrissi nella seconda lettera a V. S. che nella
» medesima faccia del Sole si vedono tal volta *alcune piazzette più chiare*
» del resto, nelle quali, con diligenza osservate, si vede il *medesimo*
» *movimento che nelle macchie;* e che queste sieno nell' istessa superficie
» del Sole, non credo che possa restar dubbio ad alcuno, non essendo
» in verun modo credibile che si trovi fuor del Sole sostanza alcuna più
» di lui risplendente; e se questo è, non mi par che rimanga luogo di
» poter dubitare del rivolgimento del globo solare in sè medesimo. E tale
» è la connessione de' veri che di qua poi corrispondentemente ne seguita
» la contiguità delle macchie alla superficie del Sole, e l'esser dalla sua
» conversione menate in volta; non sapendo veruna probabile ragione,
» come esse (quando fossero per molto spazio separate dal Sole) do-
» vessero seguitare il di lui rivolgimento ».

Et si on voulait avancer l'opinion, que dans cette lettre de Galilée il y a le germe des découvertes faites par Herschel et Arago sur la constitution de la photosphère et de la matière gazeuse qui entoure le globe solide et noir du Soleil, on pourrait dire que, vers la fin, il énonce sa

conclusion avec ces paroles: « dico bastarmi per ora l'aver dimostrato, » che le macchie non sono stelle, nè materie consistenti, nè locate lon- » tane dal Sole, ma che si producono e dissolvono intorno ad esso, con » maniera non dissimile a quella delle nugole o altre fumosità intorno alla » Terra ».

Kepler avait aussitôt approuvé cette hypothèse de Galilée en lui faisant ce commentaire: *An autem ex ignitissimo illo Solaris corporis titione expirent atrae hae fuligines, Deus novit: nam analogia ulterius non tuto extendi potest:* Maestlinus *quidem existimat, se visu indice affirmare posse, corpus Solis non esse rotundum exactissime: sed puto ipsum opticis fallaciis decipi, et caussam vel in instrumento inesse* « vel » in partium Solis inaequali claritate, de qua etiam Galilaeus monet » (Lintz, 18 Juillet 1613).

Galilée, je le dis à regret, mérite le reproche de n'avoir pas assez senti toute l'importance de l'ouvrage de Kepler *De stella Martis*, publié en 1609 à *Prague* une année avant son *Sidereus Nuncius*. Il serait injuste, au suprême degré, de lui reprocher de n'avoir pas deviné, comme Newton, qu'il y avait là la grande découverte du vrai système du monde. Mais, on peut reprocher à Galilée de n'avoir pas signalé qu'il avait au moins lu le Chapitre xxxiv, dont j'ai parlé précédemment, et de n'avoir pas dit que la profonde pénétration de Kepler avait dévancé la découverte du mouvement de rotation du Soleil, auquel il faut faire une grande correction relativement à la durée, et surtout éviter de confondre (comme Kepler) la cause qui l'a produit avec celle, tout-à-fait différente, qui a engendré le mouvement elliptique des Planètes. Alors Galilée pouvait signaler la méprise de Kepler en 1607 (le 28 Mai), d'avoir cru qu'il voyait *Mercure* (et non une tache) traverser le disque du Soleil. Mais il se serait abstenu de ne rien prononcer sur ce mémorable Chapitre xxxiv, quoique fondé sur une conception erronée, et il aurait modifié le jugement conforme aux paroles qu'on lit vers la fin de sa seconde lettre à Velser, datée du 14 Août 1612; savoir: « Se questo scoprimento (des taches) » fosse seguito alcuni anni avanti, avrebbe levato al Keplero la fatica » d'interpretar questo luogo (relatif à de grandes taches solaires vues » du temps de Charle-Magne) colle alterazioni del testo ed altre emen- » dazioni de' tempi: sopra di che io non istarò al presente ad affaticarmi, » sicuro, che detto autore, come vero filosofo, e non renitente alle cose » manifeste, non prima sentirà queste mie osservazioni e discorsi, che gli » presterà tutto l'assenso ».

Sans doute, dès l'année 1612, KEPLER avait eu connaissance des observations sur les taches, comme on le voit par sa lettre à WACKHER, que j'ai déjà rapportée; et il écrivait de Lintz, le 18 Juillet 1613 au jésuite Odo MALCOTIO, une lettre propre à nous éclairer sur la lenteur des communications scientifiques dans ce temps là. En effet, voici une partie de cette lettre:

..... *sed fulgor immensus radiorum collectorum et speciei exilitas mihi obstiterunt, ut maculas nullas cernerem. Quare curam inquirendi maculas deposui. Assumsit autem eas quidam* FABRICIUS *Vitembergae* (ce mot *quidam* donne à entendre que l'Opuscule de FABRICIUS n'avait pas fait grand bruit en Allemagne dans l'intervalle du 4 Juin 1611 au 18 Juillet 1613), *libellumque super hac re vulgavit mense Junio anni* 1611: *quem secutus est Augustanus quidam Anonymus seu ficto nomine* APELLES: *quam ad famam ego ad Telescopium redii, ususque utroque vitro maculas tandem et ipse detexi. Satis tamen diu me latuit, deducenda esse vitra paulo longius. Ex eo varia judicia prodierunt de his maculis; inter ceteras vero accurata discussio* GALILAEI, « cujus copia mihi facta » est hoc ipso die: nondum itaque pervolvi ».

Donc l'ouvrage de GALILÉE: *Istoria e dimostrazioni intorno alle Macchie Solari etc.*, publié à Rome par Giacomo MASCARDI in-4.° vers la fin de Mars 1613, n'est parvenu entre les mains de KEPLER qu'après trois mois et demi le 18 Juillet 1613. Sur cela il y a une lettre du Prince Federico CESI, datée de Rome 22 Mars 1613, ainsi conçue:

« Avendo poche ore fa compito il lavoro lo stampatore e supplito » quello de' rami per un poco di numero, non è stato a tempo un fagotto » che ora se ne mandava a V. S., che il procaccio abbia voluto riceverlo. » Verranno in buon numero per lo seguente. Quelli che ebbe Monsignor » di Bamberga furono frettolosamente anticipati, e senza la prefazione ».

KEPLER continue sa lettre ainsi:

In summa motum seu (en grec, qui signifie *Solis motus circa axem*) *Solis in suo spatio manentis satis clare ponunt ob oculos; et qualitate quidem eandem, quam ego tanto ante tradidi in Commentariis Martis*, « quantitate vero diversam a conjecturis meis ». *Illud quidem demonstratio mea requirebat, ut celerius Sol periodum unam absolveret quam Mercurius, celerius igitur quam* 88 *diebus. Et ita rem habere maculae testantur: diebus enim* 14 *ad summum manent in facie Solis apparente;* « totidem » *igitur etiam in latente. Igitur inter dies* XXV *et* XXVIII

versatur una periodus (quelle remarquable déduction ! la moyenne $\frac{25+28}{2} = 26^{\text{jours}},5$ est plus exacte que celle de GALILÉE 29^{jours}). *Sunt igitur reliquae meae* « conjecturae irritae de triduo aut de unica die » convolutiones hujus ».

Néanmoins, même après deux siècles et demi, on ne peut s'empêcher d'admirer l'activité d'une intelligence qui voyait l'identité dans le sens du mouvement de rotation du Soleil et dans le sens du mouvement de révolution de toutes les planètes, comme la conséquence nécessaire d'une même cause mécanique. En rapprochant l'hypothèse de KEPLER *Illam in plagam feruntur corpora planetarum perpetuo, in quam virtus ista ex Sole contendit* de celle de LAPLACE, exprimée par les mots : « L'identité » du sens des mouvements de rotation du Soleil et de révolution des » planètes découlent de l'hypothèse que nous proposons », on se tromperait si en cela on voulait voir une identité dans les deux hypothèses; mais il est permis de trouver là le germe d'une grande idée, qui, de nos jours, a reçu un imposant développement.

KEPLER continue sa lettre en lui disant : *Scripsi sub fine anni* 1612 (*) *quid de substantia macularum harum sentirem, et parum quod mutem ex posterioribus observationibus invenio. Numirum non sunt omnes ejusdem omnino celeritatis*, « nec viam Eclipticae parallelam incedunt ».

Par ces derniers mots on reconnaît que KEPLER avait jugé mieux que GALILÉE la position de l'*Equateur solaire* : il ne prononce rien sur la grandeur de son inclinaison par rapport au plan de l'Ecliptique. Mais cela est préférable à la fausse conjecture de GALILÉE, qui au 1.er décembre 1612 (date de sa troisième lettre à VELSER) sur ce point s'exprime en ces termes : « . . . . . Ed alcune cose mi restano ancora non ben digerite, » nè determinate a modo mio; delle quali una principale è l'incidenza » delle macchie sopra luoghi particolari della solar superficie, e non altrove : » perchè rappresentandoci i progressi di tutte le macchie sotto specie di » linee rette (argomento necessario *l'asse di tali conversioni essere eretto* » *al piano che passa per i centri del Sole e della Terra, il quale è il* » *solo cerchio dell'Ecclitica*) resta per mio parere degno di gran con- » siderazione onde avvenga ch'elle caschino solamente dentro ad una zona,

(*) Par faute typographique il y a 1611, en caractères romains, au lieu de 1612, à la page 555 du Volume *Epistolae* KEPLERIS; et cette énorme faute est fidèlement reproduite en 1858 à la page 783 du second Volume des *Opera Omnia*.

» che per larghezza non si allontana più di 29 o 30 gradi di qua e di
» là dal cerchio massimo di tal conversione: sicchè appena delle molte
» una trasgredisca, e ben di poco, tali confini ».

La petitesse de l'inclinaison de l'Equateur solaire (7°. 9′) avait trompé Galilée, même à travers un grand nombre d'observations qu'il avait faites pendant les années 1611 et 1612; ce qui, avec la variété des saisons, amenait des variétés dans la marche des taches, projetée sur le disque apparent du Soleil. Si, Galilée, avait pris en considération ce que Cigoli lui disait dans sa lettre du 23 Septembre 1611, que son ami, le peintre Passignani, voyait marcher les taches *per linee spirali*, il aurait pu soupçonner par l'épithète *spirali* qu'il y avait là quelque courbure. Effectivement, entre Juillet et Septembre, les courbes apparentes décrites par les taches, qui étaient sensiblement rectilignes en Juin, s'ouvrent davantage: leur convexité est dirigée vers la partie australe de l'Ecliptique; en même temps leur inclinaison change. Au commencement de Septembre, les points du disque solaire, où les taches paraissent, sont aussi élevés que ceux où elles disparaissent. Parvenues à ce terme, les ovales se resserrent et tournent leurs convexités dans le sens contraire. Le peintre Passignani, qui voulait parler, non d'une seule tache, mais de la marche parallèle de plusieurs, a exprimé sa conception par les mots de *linee spirali*. Il ne pouvait pas saisir ni la signification des ovales, ni les variations dans leurs inflexions. Mais Galilée, s'il avait arrêté son attention sur cette indication fournie par le Peintre à l'Astronome, il aurait pu, dès l'année 1612, faire par lui-même la découverte de l'inclinaison de l'Equateur solaire au plan de l'Ecliptique, sans différer de 20 années la publication de ce fait important dans la troisième Journée de ses Dialogues, à une époque (1632), où la même découverte était déjà publiée depuis deux ans dans la *Rosa Ursina* du P. Scheiner, avec l'addition importante, soit de la longitude 70° pour le nœud, soit de 7° pour l'inclinaison de l'Equateur solaire à l'Ecliptique.

L'omission volontaire, ou involontaire, de Galilée de ces deux élémens, qui déterminent la position de l'Equateur solaire, est un fait, qui rend non-seulement très-incomplète sa description du mouvement des taches, tel qu'on la lit dans ses Dialogues: mais ce même fait démontre, que Galilée n'a jamais entrepris de les déterminer théoriquement par des observations faites à des époques arbitraires de l'année, sans attendre celles où la marche apparente des taches est rectiligne. Alors, il aurait

senti que l'inclinaison de l'Equateur solaire sur l'Ecliptique augmente considérablement la difficulté de la solution de ce problème, et il aurait apprécié davantage le résultat obtenu *expérimentalement* par le jésuite SCHEINER, à l'aide d'observations pénibles continuées pendant 18 années. Maintenant, trois observations comprises dans l'intervalle d'un petit nombre de jours sont, à la rigueur, suffisantes pour déterminer les élémens de l'Equateur solaire et la durée de sa rotation. SALVIATI, qui fait une énumération assez prolixe de quatre merveilles *(quattro maraviglie)* qu'il voyait dans ce phénomène, serait bien plus étonné s'il pouvait avoir connaissance de cette *quinta maraviglia* d'un calcul fait avec autant de rapidité par l'analyse moderne.

Il me reste à prouver la fidélité des *trois* récits de GALILÉE sur la date de sa découverte des taches solaires. Le plus ancien est celui du 4 Mai 1612. Dans sa *première* lettre à VELSER, il lui dit en parlant de ces taches: « Ed io le ho *osservate* da 18 mesi in qua, avendole fatte » vedere a diversi miei intrinseci, e pur l'anno passato, appunto in questi » tempi, le feci osservare in Roma a molti Prelati ed altri Signori ». Cette déclaration transporte l'observation de ces taches au commencement de Novembre 1611, à Florence, où il était établi depuis la moitié de Septembre, en y revenant de Padoue. Mais l'épithète *osservate* et non *vedute*, doit être entendue comme le commencement d'observations régulières faites dans le but de découvrir les lois du mouvement de ces taches, et autres particularités appartenantes, soit à leur forme, soit à leurs changemens.

D'après cela, le mois de Novembre 1611 n'est pas celui de la *première vision* des taches par GALILÉE sur le disque du Soleil. Mais le *second* récit fait par GALILÉE dans une de ses lettres, datée de Florence 23 Juin 1612, à Giuliano DE MEDICI Ambassadeur du Gran-Duc de Toscane à Prague, il y a une donnée fort essentielle pour cette discussion: « Sappia » di più V. S. Illustrissima come gli scoprimenti celesti non hanno ancora » finito, ma sono circa 23 (vingt-trois) (*) mesi e *più* che *cominciai a*

(*) Par faute typographique on lit à la page 100 de l'ouvrage *Keppleri Epistolae: Sono circa 11 mesi e più ecc.* Mais dans la lettre originale, *conservée à Vienne*, il y a le nombre 23 *mesi*, quoique écrit d'une manière un peu obscure. Souvent, dans cet ouvrage, on emploie les *caractères romains:* je soupçonne qu'on a voulu imprimer XXII, et que l'omission des deux XX n'a pas été remarquée. L'écriture de GALILÉE du même nombre 23 est reproduite dans la date de sa lettre 23 *di giugno* 1612.

» *vedere nel Sole alcune* macchie oscure, e pur l'anno passato del mese
» d'Aprile essendo in Roma le feci vedere a diversi Prelati ed altri Signori ».

Il suit de là que le commencement de la vision des taches date du 23 Août 1610. Et comme il y a le mot *e più*, il est permis de transporter cette première vision au commencement du mois d'Août et même à la fin de Juillet 1610; ce qui s'accorde avec le passage de la Biographie de Viviani, que j'ai rapporté plus haut textuellement. J'observe en outre que, Galilée dans une de ses lettres du 30 Décembre 1610 *al Padre Benedetto* Castelli *a Brescia*, écrite de Florence, il lui dit: « Sappia adunque,
» che io circa *tre mesi fa* (donc vers la fin de Septembre, et à Florence
» où il était fixé depuis la moitié de Septembre) cominciai ad osservar
» Venere collo strumento, e la vidi di figura rotonda ed assai piccola:
» andò di giorno in giorno crescendo in mole e mantenendo pure la
» medesima rotondità, finchè finalmente venendo in assai gran lontananza
» dal Sole cominciò a scemare della rotondità dalla parte orientale, ed
» in pochi giorni si ridusse al mezzo cerchio. In tal figura si è mantenuta
» molti giorni, ma però crescendo in mole. Ora comincia a vedersi *Falcata* ».

Ainsi la date de la vision de *Vénus, en Croissant*, par Galilée peut être fixée vers la fin de Décembre de l'année 1610. La date de la vision de Saturne, comme un composé de trois étoiles, est *antérieure* d'environ *cinq mois*. En effet, il y a une lettre de Galilée, écrite de Padoue le

---

Voici les deux *fac simile*, que je dois à la complaisance de M. C. L. Littrow, Directeur de l'Observatoire Impérial à Vienne:

Venturi en 1818 a, le premier, altéré cette pensée de Galilée, en publiant: *sono circa quindici mesi ecc.* à la page 174 du premier Volume de son ouvrage *Memorie e Lettere inedite di* Galileo. Ensuite, la même faute a été reproduite en 1847 à la page 188 du Tome VI de la dernière édition des *Opera Omnia* de Galilée publiée à Florence.

La date de cette lettre serait plutôt de l'année 1615, conformément à l'écriture de Galilée: et c'est effectivement à cette année qu'elle est rapportée à la page 100 de l'ouvrage *Keppleri Epistolae*. Mais dans le corps de la lettre il y a la phrase: « e pur l'anno passato del mese d'Aprile essendo » in Roma ecc. ». Or, il est certain que Galilée faisait voir les taches solaires à Rome en 1611: donc on doit lire 1612 et non 1615. D'ailleurs, plusieurs lettres attestent que Galilée n'a pas quitté Florence en 1614.

Pour renforcer l'explication que je viens de donner, j'observe que, à la page 94 du même Volume *Keppleri Epistolae*, on y lit: *Quos quidem Planetas a V Julii jam cum Jove etc.*; c'est-à-dire le caractère romain V au lieu de XXV (25) *Luglio*, qui est le nombre qu'on lit dans la lettre originale de Galilée *autografa*, conservée à Florence (Lisez la note à la page 114 du Volume VI déjà cité).

30 Juillet 1610 à Belisario Vinta, Secrétaire du Gran-Duc de Toscane, où il lui dit: « Ho cominciato il dì 25 stante a rivedere Giove orientale » mattutino con la sua schiera de' Pianeti Medicei, e più ho scoperto » un'altra stravagantissima maraviglia, la quale desidero che sia saputa » dalla LL. AA. e da V. S., tenendola però occulta, finchè nell'opera » che ristamperò sia da me pubblicata: ma ne ho voluto dar conto alle LL. AA. Serenissime acciò se altri l'incontrasse, sappiano che niuno » l'ha osservata avanti di me, sebben tengo per fermo che niuno la vedrà » se non dopo che ne l'avrò fatto avvertito. Questo è che la Stella di » Saturno non è *una sola, ma un composto di tre*, le quali quasi si » toccano, nè mai tra di loro si muovono o mutano: e sono poste *in fila* » secondo la lunghezza del zodiaco, essendo *quella di mezzo* circa *tre* » *volte maggiore dell'altre due laterali* e stanno situate in questa forma » ○⬭○, siccome quanto prima farò vedere alle LL. AA. essendo in » questo autunno per aver bellissima comodità di osservare le cose celesti » con i Pianeti tutti sopra l'orizzonte ».

Galilée qui pouvait ainsi voir Saturne à Padoue, *avec sa lunette*, au mois de Juillet 1610, pouvait certainement voir les taches solaires vers la même époque, soit à Padoue, soit à Venise, et même les voir en Avril et Mai de la même année, ce qui offrait plus de facilité par la moindre intensité des rayons solaires, et s'accorde avec le troisième récit fait par Galilée en 1632; récit qu'on lit vers le milieu de la *Giornata terza* de ses Dialogues. Ici, Salviati, répond à une demande de Sagredo, en lui disant: « Sentite dunque l'altra nuova maraviglia ».

» Fu il primo scopritore e osservatore delle macchie solari, siccome » di tutte le altre novità celesti il nostro Accademico Linceo; e queste » scoperse egli l'anno 1610, trovandosi ancora alla lettura delle mate- » matiche nello studio di Padova; e quivi e in Venezia ne parlò con » diversi, dei quali ne vivono ancora: e un anno dopo le fece vedere » in Roma a molti Signori, come egli asserisce nella prima delle sue » lettere al Signor Marco Velsero, Duumviro d'Augusta ».

Voilà donc la *primitive* découverte fixée aux mois d'Avril et de Mai de 1610, ce qui s'accorde avec les deux récits antérieurs, si l'on veut bien accorder qu'ici il n'était pas nécessaire de fixer précisément le mois; mais seulement l'année. Si Arago avait fait ces trois rapprochemens, il aurait senti que l'Académicien Linceo est sans cesse dans les limites de la pure vérité, et que Galilée ne méritait pas le reproche de

contradiction et de confusion qu'il lui adresse vers la fin de la page 277 et le commencement de la page 278 par ces paroles:

« Ce n'est pas tout: près de l'événement, comme on vient de le voir, » au commencement de 1612, GALILÉE donnait lui-même à l'observation » des taches une date postérieure à celle de son départ de Venise. Et » voilà que vingt ans plus tard, dans les *Dialogues*, SALVIATI dit que » l'Académicien LINCEO fit cette découverte pendant qu'il professait encore » les mathématiques à Padoue. Qui pourrait en présence de ces contra- » dictions, de ces confusions ne pas proclamer que l'Historien des Sciences » doit se laisser guider seulement par des publications authentiques ».

Cela est vrai; et je crois m'être conformé à cette juste maxime d'ARAGO dans l'exposition que je viens de faire. Je la livre au public sans crainte. J'ai la confiance d'avoir rempli un devoir en repoussant l'assertion d'ARAGO, qu'on lit à la page 106 du second Volume de son *Astronomie Populaire*, conçue en ces termes:

« La découverte des taches solaires a renversé de fond en comble » un des principes fondamentaux de l'astronomie péripatéticienne, savoir » le principe de l'incorruptibilité des cieux. Je pense donc qu'on sera » curieux de connaître le premier Astronome qui a constaté, par des » observations non équivoques, l'existence de ces taches. D'après une » opinion généralement convenue, surtout en Italie, cet Astronome serait » GALILÉE; mais je crois que c'est là une erreur ».

A cela je réponds que l'erreur est dans l'*opinion contraire*. A cela je réponds que GALILÉE dans sa lettre du 23 Juin 1612 à l'Ambassadeur Giuliano DE MEDICI résident à Prague, que j'ai citée plus haut, il a eu la sincérité de lui dire: « Ma da poi sendosi sparso questo grido, » sono state (les taches solaires) in molti luoghi osservate, e dette e scritte » diverse opinioni intorno a questo particolare, ma tutte lontane dal vero. » Io mi sono finalmente accertato di quello, che nel primo aspetto gli » parrà forse stravagante, ed è che tali macchie sono non pur vicine al » Sole ma contigue alla superficie di quello, dove continuamente altre » se ne producono e altre se ne dissolvono, essendo altre di breve e altre » di lunga durazione; cioè alcune si disfanno in due, tre o quattro giorni, » e altre duran quindici, venti, trenta e ancor più. Vannosi mutando di » figura, le quali figure sono per lo più irregolarissime, si condensano » e si distraggono, sendo talora alcune oscurissime e altre non così negre: » spesso una si divide in tre o quattro, ed altra volta due o tre o più

» si aggregano in una sola: hanno poi un movimento regolato, secondo
» il quale uniformemente vengono tutte portate in giro dall'istesso corpo
» solare, il qual si muove in sè stesso in un mese lunare in circa, con
» moto simile a quelli delle sfere celesti, cioè da occidente verso oriente.
» Tali macchie non cascano mai vicine ai poli del rivolgimento del Sole,
» ma solamente intorno al cerchio mosso di mezzo, nè da quello se ne
» trovano in maggior lontananza di ventotto o ventinove gradi in circa,
» tanto verso l'uno quanto verso l'altro polo; il quale spazio risponde
» giusto alla zona torrida, o per meglio dire a quella fascia che comprende
» le massime declinazioni dei pianeti. Furon scritte circa sei mesi fa alcune
» lettere in questa materia al signor Marco Velsero in Augusta, e poi
» si stamparono sotto nome finto di Apelles, e il medesimo signor Velsero
» me le mandò, pregandomi che io dovessi scrivergli il parer mio sopra
» tali lettere: il che feci reprobando l'opinione del detto Apelle, e ac-
» cennando la mia. Ora gliene scrivo un'altra più risoluta, e fra pochi
» giorni farò che V. S. Illustrissima vegga l'una e l'altra. Intanto voglio
» finir di tediarla, e con baciargli reverentemente le mani, gli prego da
» Dio ogni maggior felicità ».

La troisième lettre de Galilée à Velser sur les taches solaires, datée du 1.er Décembre 1612, offre le sujet d'une autre discussion, qui n'est pas sans connexion avec tout ce que j'ai exposé jusqu'ici. Car il importe d'examiner jusqu'à quel point Galilée pouvait voir les phénomènes célestes avec ses télescopes, d'un foible grossissement (les plus forts grossissaient environ 30 fois les dimensions linéaires des astres), pour mieux acquérir la conviction que, dès l'année 1610, en pointant le disque du Soleil, il a dû nécessairement remarquer l'existence des taches.

Nous avons déjà dit, que sa découverte de Saturne *tricorps* date de Juillet 1610. On sait maintenant par la théorie, que la disparition de l'anneau de Saturne (à raison du passage du plan central de l'anneau par le Soleil) devait avoir lieu vers la fin de Décembre de l'année 1612. Alors, il ne reçoit de lumière que sur son épaisseur: ce qui le rend invisible avec les lunettes ordinaires, et Saturne paraît *rond*, et sans aucune trace capable d'indiquer l'existence de l'anneau. Eh bien, Galilée, dans cette lettre à Velser, il lui dit qu'il a été détourné de ses projets « per
» l'inaspettata maraviglia colla quale Saturno è venuto ultimamente a
» perturbarmi; di che voglio dar conto a V. S. Già le scrissi, come
» circa a tre anni fa, scopersi con mia grande ammirazione Saturno essere

» tricorporeo, cioè un aggregato di tre stelle disposte in linea retta parallela
» all'equinoziale, delle quali la media era assai maggiore delle laterali:
» queste furono credute da me esser immobili tra di loro: nè fu la mia
» credenza irragionevole, poichè, avendole nella prima osservazione vedute
» tanto propinque, che quasi mostravano di toccarsi, e tali essendosi conser-
» vate per più di due anni senza apparire in loro mutazione alcuna, ben do-
» veva io credere che elle fossero tra di sè totalmente immobili; perchè un
» solo minuto secondo (movimento incomparabilmente più lento di tutti
» gli altri, anco delle massime sfere) si sarebbe in tanto tempo fatto
» sensibile, o col separare, o coll'unire totalmente le tre stelle. *Triforme*
» ho veduto ancora Saturno quest'anno (1612) *circa il Solstizio estivo*,
» e avendo poi intermesso di osservarlo più di due mesi (c'est-à-dire
» jusqu'au mois de Septembre), come quelli che non metteva dubbio
» sopra la sua costanza; finalmente tornato a rimirarlo *i giorni passati*
» (c'est-à-dire vers la seconde moitié du mois de Novembre), *l'ho ritro-*
» *vato solitario* senza *l'assistenza* delle consuete stelle, ed in somma per-
» fettamente rotondo e terminato, come Giove, e tale si va tuttavia man-
» tenendo. . . . . Io non ho che dire cosa risoluta in caso così strano,
» *inopinato* e *nuovo*: la brevità del tempo, l'accidente senza esempio, la
» debolezza dell'ingegno, e il timore dell'errore mi rendono grandemente
» confuso ».

Galilée a donc vu la disparition de l'anneau de Saturne en 1612 vers *la fin de Novembre;* et en *Juin* de la même année, vers le Solstice, il l'*avait vu* avec sa forme ordinaire, c'est-à-dire de Saturne *tricorporeo*. La théorie fixe cette disparition au 30 Décembre 1612; mais il n'est pas surprenant que, d'après le récit de Galilée, elle ait été anticipée d'environ un mois, à raison du foible pouvoir pénétrant du télescope dont son œil était armé. Pour expliquer la phrase de Galilée « *e tale si va tuttavia* » *mantenendo* », il faut savoir, que la *réapparition* de l'anneau ne pouvait avoir lieu que vers la moitié de Février de l'année suivante 1613.

Néanmoins, ce même fait offre une démonstration sensible, que le télescope de Galilée devait avoir une force plus que suffisante pour apercevoir les taches solaires. Huygens a apprécié toute la portée de cette observation de la phase *ronde* de Saturne par Galilée; et c'est en la rapprochant, par la pensée, de celle qu'il avait lui-meme observée en 1655 avec de plus puissans télescopes, qu'il a conquis la gloire incontestable d'avoir, le *premier*, pénétré la véritable cause de toutes les apparences

de Saturne. Dans sa narration, il n'oublie pas de rendre à GALILÉE un juste tribut d'éloges, en disant: *Anno autem* 1612 *a* GALILAEO *primo omnium rotunda facie animadversus est.*

DIONIS DU SÉJOUR, célèbre Conseiller au Parlement de Paris, qui, en 1776, a entrepris de soumettre au calcul cette observation de GALILÉE, n'a pas examiné avec attention les détails du récit que je viens de rapporter. Par une altération du texte, qui paraît incroyable, la phrase: « avendo poi intermesso di esaminarlo per più di due mesi », est interprétée par DU SÉJOUR comme une déclaration de GALILEE « d'avoir vu » la disparition des anses vers le commencement de Septembre »; tandis que le véritable sens des paroles de GALILÉE est, d'avoir encore vues les anses *après* les deux mois écoulés depuis le Solstice d'été et le commencement de Septembre. C'est entre Septembre et la moitié de Novembre, que GALILÉE a cessé de pointer sur Saturne son télescope « come quelli che » non metteva dubbio sopra la sua costanza » et son étonnement en le voyant *rond* vers les derniers jours de Novembre, est exprimé par la phrase: « finalmente tornato a rimirarlo i giorni passati ecc. ». De sorte que, on ne saurait tirer de là la conséquence, que GALILÉE a réellement *observé en Septembre* de l'année 1612 *la disparition* des anses de Saturne, ainsi que cela est affirmé par DU SÉJOUR dans ce morceau de la page 134 de son ouvrage:

« Ces observations de GALILÉE, quoique précieuses, puisque ce sont » les premières de ce genre, n'ont pas toute l'exactitude nécessaire pour » pouvoir être employées à des déterminations précises ». Cela est vrai sans doute; mais il est faux d'ajouter:

« Je remarquerai aussi qu'il est singulier que GALILÉE *ait cessé de* » *voir les anses de Saturne dès le mois de Septembre* 1612, temps auquel, » d'après le calcul, l'anneau était assez éloigné de disparaître, et qu'il » l'ait vu vers le Solstice d'été, temps auquel il était infiniment plus près » de la disparition ». Contre cette objection relative à la vision des anses par GALILÉE, au mois de Juin, vers la proximité du passage de son plan par le centre du Soleil, on peut répondre avec LALANDE « qu'il suffit que » le Soleil l'ait dépassé de trois minutes pour qu'il paraisse éclairé ».

Le phénomène de la disparition de l'anneau a eu lieu plusieurs fois depuis 1612, et il sera reproduit, avec des circonstances analogues à une époque qui n'est pas fort éloignée. Dans deux ans, vers la moitié de Mai de l'année 1862, la disparition de l'anneau offrira une nouvelle preuve

de la justesse de la théorie qui détermine ses phases pour les siècles passés et futurs.

Depuis 1612 jusqu'à 1640, Galilée n'a pas cessé entièrement de spéculer sur les apparences de Saturne. En effet, réveillé sur ce point par une lettre du P. Castelli datée de Rome le 4 Août 1640, où il lui annonce d'avoir tourné vers Saturne son télescope, et de l'avoir vu « con » grande stupore che era una stella rotonda con due altre stelle rotonde » dalle parti, distese da levante a ponente e non più con quei due ciuffetti » attaccati al corpo di Saturno, *conforme alle prime osservazioni* di V. S. ». A cette annonce voici la réponse de Galilée datée d'*Arcetri* 28 Août 1640 :

« La prima vista che ebbi di Saturno, fu di tre stelle rotonde di- » sposte in linea retta da ponente a levante, quella di mezzo maggiore » assai delle due laterali; tale continuai a vederlo per alcuni mesi ed » avendo poi intermessa la sua osservazione per alcuni altri mesi tornai a » riguardarlo e lo trovai solitario, cioè la stella grande di mezzo sola : » maravigliato di ciò andai meco medesimo pensando, come potesse stare » tale mutazione, e immaginandomi un certo mio modo particolare, presi » ardire di dire che di là a cinque o sei mesi che veniva il tempo del Solstizio » estivo, sarebbero ritornate le due piccole stelle laterali, *e così segnì* » *e si videro poi per lungo tempo.* Dopo avendo di nuovo intermessa » l'osservazione mentre stette sotto i raggi del Sole, tornai di nuovo a » riguardarlo, e lo vidi con due mitre in luogo delle stelle rotonde, le » quali lo riducevano in figura d'oliva (la comparaison est heureuse ; elle » peint la vérité inhérente à la foiblesse de la lunette). Vedevasi però » la palla di mezzo assai comodamente distinta, e massime da due macchie » oscurissime poste nel mezzo dell'attaccature delle mitre, o vogliam dire » degli orecchi. Tale si è osservato per molti anni, ed ora V. P. Rev. » scrive, che le mitre si vedono trasformate in due globetti rotondi, e » così ancora mi riferiscono altri amici miei, e potrebbe essere che da » tre anni in qua (depuis 1637) che io non l'ho potuto vedere, sia » un'altra volta restato solitario e che poi sia tornato al primo stato, nel » quale da principio io l'osservai. Toccherà per l'avvenire ad altri il fare » l'osservazioni, registrando il tempo delle mutazioni, *che sicuramente si* » *troveranno i loro periodi* (prédiction remarquable), quando vi sian » persone che abbiano curiosità di fare quello, che io per non saper far » di meglio ho fatto per tanto tempo ».

A côté de cet intéressant et original récit de Galilée, plaçons

maintenant ce morceau de l'Historique d'ARAGO, qu'on lit aux pages 442 et 443 du Tome *quatrième* de son *Astronomie Populaire*. ARAGO dit: « Il arriva une époque (en 1612) où les deux étoiles latérales ne se mon-
» trèrent plus à GALILÉE. La planète lui sembla alors parfaitement ronde;
» il paraît que cette circonstance le découragea au plus haut degré; il alla
» même jusqu'à imaginer que dans toutes ses observations antérieures, les
» verres de ses lunettes avaient pu le tromper, et transformer en un objet
» réel ce qui n'était qu'une illusion. On peut voir l'expression de ce dé-
» couragement dans sa lettre à VELSER de 1612. *Ce qu'il y a de certain*
» c'est qu'à partir de *cette époque* GALILÉE *ne s'occupa plus de Saturne* ».

Le découragement dont ARAGO parle ici n'avait rien de réel; c'est une ironie adressée aux ennemis du Système de COPERNIC. Mais il abandonne bientôt l'hypothèse imaginée pour les rendre plus ridicules, et il finit son raisonnement en assurant la réapparition de Saturne comme il l'avait déjà vu, en ajoutant: « che questa stella, e forse non men che l'apparenza di
» Venere cornicolata con ammirabil maniera concorre all'accordamento
» del gran sistema Copernicano, al cui palesamento universale veggonsi
» propizj venti indirizzarci con tanto lucide scorte che omai poco ci resta
» da temere tenebre o traversie ».

GALILÉE avait raison: car KEPLER avait déjà publié, depuis trois ans, son ouvrage *De stella Martis*; monument éternel de son génie; et lui-même méditait la publication de la loi de la chute des graves à la surface de la Terre, ainsi que la véritable conception des forces accélératrices.

Si la priorité de la découverte des taches solaires et de la rotation du globe du Soleil, doit être attribuée à GALILÉE par tous les argumens que j'ai exposés jusqu'ici, il est juste de reconnaître en même temps, que Jean FABRICIUS avait, de son côté, vues les taches solaires vers les premiers mois de l'année 1611, et qu'il en avait tiré la conséquence, que le globe du Soleil a un mouvement de rotation, sans toutefois rien prononcer sur sa durée périodique. Jusque-là, on ne saurait lui contester d'en avoir été averti par le bruit retentissant de ces mêmes découvertes faites par GALILÉE, puisqu'elles ne sont nullement annoncées dans le *Sidereus Nuncius*, publié à Venise en Mars de l'année 1610. FABRICIUS, en cédant la priorité à GALILÉE, peut avouer à sa conscience qu'il ne lui doit aucune communication sur le fait primordial de l'existence de ces taches. D'ailleurs, son récit est aussi vrai que naïf. Il dit: « Après que
» les lunettes ont été découvertes en Hollande, on a commencé à regarder

» la Lune, ensuite Jupiter et Saturne, et GALILÉE y a trouvé des choses » singulières. Poussé par la même curiosité, je m'occupais à regarder le » Soleil, dont les bords me paraissent avoir des inégalités remarquables, » que mon père David FABRICIUS avait déjà remarquées etc. etc. ».

Cet exorde n'est pas celui d'un homme qui invente après, en marchant sciemment sur les traces d'un autre. KÉPLER lui-même, qui, en 1613, l'avait qualifié de *quidam* FABRICIUS dans sa lettre à MALCOTIO, a compris plus tard que ce nom serait immortel. Au point que, en 1619, en apprenant sa mort avenue en 1617, il en a exprimé sa douleur au père David avec ces paroles: *Quin etiam lecto tuo Prognostico in annum* 1618, *ex quo de immaturo ejus obitu certior factus sum, significationem addo publicam doloris mei; quod et te amicum filio frugi et philosophiam curatore solertissimo, veritatis et liberae sententiae amantissimo et me deliciis meis orbatum intelligam. Sed nimirum extat ejus libellus de Maculis Solaribus anno* 1611 *editus*, « quovis elogio epitaphiove honorifi- » centior, qui et famae illius posthumae praesidium et communis nostri » doloris lenimentum continet ».

Alors (en 1619) KEPLER avait lues toutes les lettres de GALILÉE sur les taches solaires, et néanmoins il comprenait que le nom de FABRICIUS devait être mis à côté de celui de GALILÉE dans l'Historique de cette découverte. Il a fait plus. Pour lui assurer la priorité, relativement au P. SCHEINER, qui, avec tous les torts, prétendait à la priorité pour la découverte des taches solaires; KEPLER dans une lettre publiée dans les *Ephemerides*, écrite à David FABRICIUS, il lui disait: *Maculas Solis a filio tuo, longe ante* APELLEM *visas; si harum vindiciarum satagis, et testatus sum Pragae multis et testor etiam nunc.*

Ces attestations sont antérieures à l'année 1614. Car KEPLER ne quitta le séjour de Prague qu'après la mort de RODOLPHE II, qui l'avait fixé auprès de lui, d'après la puissante recommandation de TYCHO-BRAHE, mort à Prague le 24 Octobre de l'année 1601. L'Empereur MATHIAS appela KEPLER, en 1613, à la Diète de Ratisbone pour l'aider à régler la correction du Calendrier, alors odieuse aux Protestans par son origine papale. Le protestant KEPLER voyait cette correction comme tout-à-fait raisonnable; mais il ne pouvait faire taire les passions malheureuses, qui, depuis plusieurs années agitaient les esprits; lui-même, en 1600, avait éprouvé l'effet des persécutions religieuses en Styrie: au point qu'il fut compris dans le nombre des Professeurs protestants expulsés du Collége

de Gratz. Le 19 Septembre 1600, il écrivait au célèbre MAESTLINUS, devenu son ami après avoir été son disciple à Tubingue: *Ordinem sequor eventuum. Calendis Augusti mille amplius civibus et provincialium ministris in urbe hac, inter hos et mihi perpetuum est indictum exilium, intra dies quadraginta quinque ..... facile est et mori pro religione.*

En 1600, le jugement de la postérité à été bravé par CLÉMENT VIII envers KEPLER, alors déjà célèbre en Allemagne. Triste exemple qui a été renouvelé par URBAIN VIII, en 1633, envers GALILÉE.

RODOLPHE II, Empereur et Roi des Romains depuis 25 ans, sans cesse subjugué par l'éducation religieuse qu'il avait reçu en Espagne, sous les yeux de l'intolérant et sanguinaire PHILIPPE II, n'a pas eu ni la volonté, ni assez de talent pour organiser sa puissance de manière à empêcher les écarts des factions contraires en présence; écarts qui lui sont reprochés par l'inexorable histoire. RODOLPHE II, quoique passioné pour l'Astrologie et avide d'horoscopes, ne pouvait pas entrevoir dans l'aspect des astres, à la distance d'un siècle et demi, qu'il aurait JOSEPH II pour successeur à l'Empire. Le génie de KEPLER était impuissant pour lui inspirer une telle divination.

Le témoignage honorable rendu par KEPLER à l'Opuscule de FABRICIUS, ne l'a pas empêché de sentir toute la supériorité de GALILÉE, sous le rapport de l'exposition des détails du phénomène, et en écrivant à David il lui disait: « *Non satis*, FABRICII *circumspexisti circumstantias omnes; oblitus es motum macularum in medio Solis corpore velociorem esse quam in marginibus;* .....

Nihil hic circa Solis maculas reliquum tuis vel meis curis fecit accuratissima GALILAEI *diligentia, cujus epistolas ad Marcum* VELSERUM « propria manu » *italico scriptas idiomate suadeo a bibliopolis requisitas diligenter perlegas: dignae omnino sunt, quae et latine legantur.*

En arrêtant ma pensée sur tous ces détails exigés par la nature du sujet que je traite, je ne puis me défendre de faire remarquer que, ni KEPLER, ni GALILÉE ont alors établi la distinction entre la durée de la révolution *synodique* d'une tache, et la durée de sa révolution *sydérale* qui est plus courte d'environ *deux jours*; et cependant c'est une différence inhérente au phénomène, même en raisonnant d'après le mouvement apparent et annuel du Soleil; puisque S étant la durée de la révolution synodique observée, on peut prendre $S.\frac{360}{360+28}$ pour la durée de la

révolution sydérale, à fort peu-près à raison de la petitesse de l'inclinaison de l'Equateur solaire.

Galilée et Kepler croyaient au mouvement annuel de la Terre autour du Soleil, et ils auraient pu voir dans le mouvement des taches une confirmation du système de Copernic. Le globe du Soleil était par eux envisagé comme coupé par un plan perpendiculaire à son axe de rotation: et la tache parcourait la périphérie du cercle résultant de cette section. Par l'observation de ce mouvement, ils auraient pu déterminer, au moins par approximation, la différence d'ascension droite, et de déclinaison entre la tache et le centre du Soleil: de là conclure la longitude et la latitude de la tache; c'est-à-dire du point placé à l'intersection du rayon visuel tiré de la Terre au centre de la tache. Mais la traduction de cette conception géométrique en langage algébrique, et sa combinaison avec le principe, que trois points suffisent pour fixer la position d'un plan, était un problème alors trop difficile pour être traité avec succès. La véritable solution *analytique* de ce problème a été donnée la première fois par Lagrange en 1764; précisément deux siècles après la naissance de Galilée. Ses formules comportent une telle généralité, qu'elles sont applicables même à déterminer le mouvement de rotation de la Lune. A l'égard des taches solaires on peut les simplifier en leur conservant cette symétrie qui facilite les calculs. L'occasion que j'ai eue ici d'étudier de nouveau cette question sous ses différentes faces, m'a fait voir, qu'on pouvait comprendre sa solution complète dans les formules suivantes, qui me paraissent, à quelques égards, une nouvelle et utile transformation de celles de Lagrange.

Formules pour déterminer la position de l'Equateur solaire, et la durée de sa rotation par trois observations d'une même tache.

Soit:

$a =$ rayon du globe du Soleil;

$\Delta =$ demi diamètre apparent du Soleil;

$\lambda =$ latitude géocentrique du centre de la tache à un instant donné, par rapport à l'Ecliptique;

$L =$ longitude géocentrique de la tache au même instant;

$\Theta =$ longitude correspondante du centre du Soleil.

En posant:

$$[1] \ldots \begin{cases} \sin.^2\psi = \cos.^2\lambda.\cos.^2(\Theta - L) - \cos.^2\Delta \ ; \\ \sin.^2\psi = \sin.(\Delta + \Theta - L)\sin.(\Delta - \Theta + L) - \sin.^2\lambda.\cos.^2(\Theta - L) \ ; \end{cases}$$

$$[2] \ldots \begin{cases} H = \quad \sin.L.\sin.(\Theta - L) \\ \qquad - \sin.^2\lambda.\cos.L.\cos.(\Theta - L) - \cos.\lambda.\cos.L.\sin.\psi \ ; \\ M = - \cos.L.\sin.(\Theta - L) \\ \qquad - \sin.^2\lambda.\sin.L.\cos.(\Theta - L) - \cos.\lambda.\sin.L.\sin.\psi \ ; \\ N = \quad \cos.\lambda.\cos.(\Theta - L) - \sin.\psi \ ; \end{cases}$$

si l'on exprime par x, y, z les trois coordonnées rectangulaires et héliocentriques de la tache on obtient:

$$[3] \ldots \left\{ x = \frac{a.H}{\sin.\Delta} \ ; \qquad y = \frac{a.M}{\sin.\Delta} \ ; \qquad z = \frac{a.N\sin.\lambda}{\sin.\Delta} \right\} .$$

Cela posé, si l'on désigne par I l'inclinaison de l'équateur solaire par rapport au plan de l'Ecliptique, et par φ la longitude de son nœud, on trouvera que, en désignant par D la déclinaison de la tache par rapport à l'Equateur solaire, l'on a:

$$[4] \ldots \begin{cases} \sin.D = \dfrac{\sin.\theta}{\sin.\Delta} \ ; \\ \sin.\theta = \sin.I.\sin.(\Theta + \varphi) + N \left\{ \cos.I.\sin.\lambda - \sin.I.\cos.\lambda.\sin.(L + \varphi) \right\} . \end{cases}$$

Maintenant, si nous désignons par

$$x, \ y, \ z \ ; \qquad x', \ y', \ z' \ ; \qquad x'', \ y'', \ z'' \ ;$$

les neuf coordonnées d'une même tache, observées aux instans

$$0^{\text{jours}} \ ; \qquad T'^{\text{jours}} \ ; \qquad T''^{\text{jours}} \ ;$$

et par

$$\lambda, \ \lambda', \ \lambda'' \ ; \qquad L, \ L', \ L'' \ ; \qquad \Theta, \ \Theta', \ \Theta'' \ ;$$

$$H, \ H', \ H'' \ ; \qquad M, \ M', \ M'' \ ; \qquad N, \ N', \ N'' \ ;$$

les valeurs correspondantes de

$$\lambda, \ L, \ \Theta \ ; \qquad H, \ M, \ N \ ;$$

on trouvera que, A', A'' étant les arcs de cercle parcourus par la tache dans son parallèle à l'Equateur solaire; dans l'intervalle de la *première* à la *seconde* observation; et dans l'intervalle de la *première* à la *troisième* observation, l'on a:

$$(2\sin.\tfrac{1}{2}A')^2=\frac{(H-H')^2+(M-M')^2+(N\sin.\lambda-N'\sin.\lambda')^2}{\sin.^2\Delta-\sin.^2\theta}\ ;$$

$$(2\sin.\tfrac{1}{2}A'')^2=\frac{(H-H'')^2+(M-M'')^2+(N\sin.\lambda-N''\sin.\lambda'')^2}{\sin.^2\Delta-\sin.^2\theta}\ .$$

De sorte que, si nous faisons pour plus de simplicité,

$$[5]\ \ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\sin.^2\varpi=HH'+MM'+NN'.\sin.\lambda.\sin.\lambda'\ ;\\ \sin.\zeta=\dfrac{\sin.\varpi}{\sin.\Delta}\ ;\end{array}\right.$$

$$[6]\ \ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\sin.^2\varpi'=HH''+MM''+NN''.\sin.\lambda.\sin.\lambda''\ ;\\ \sin.\zeta'=\dfrac{\sin.\varpi'}{\sin.\Delta}\ :\end{array}\right.$$

l'on aura:

$$[7]\ \ldots\ldots\left\{\sin.\tfrac{1}{2}A'=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\cos.\zeta}{\cos.D}\ ;\qquad \sin.\tfrac{1}{2}A''=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\cos.\zeta'}{\cos.D}\right\}.$$

Donc, en supposant le mouvement des taches uniforme, si l'on nomme T la durée de la rotation *sydérale* du globe du Soleil, l'on aura:

$$T=\frac{360^\circ}{A'}\cdot T'\ ;\qquad T=\frac{360^\circ}{A''}\cdot T''\ .$$

Les erreurs inévitables des observations, et en outre les petits mouvemens propres que les taches peuvent avoir, empêchent l'égalité mathématique de ces deux expressions de T; en conséquence, pour avoir une valeur de T plus approchante de la vérité, et moins influencée par des causes étrangères, nous prendrons la moyenne, c'est-à-dire:

$$[8]\ \ldots\ldots\ldots\qquad T=\frac{180^\circ}{A'}\cdot\left\{T'+\frac{A'}{A''}\cdot T''\right\}.$$

L'inclinaison I, et la longitude φ se déterminent par les formules

$$[9]\ \ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\text{tang.}\,\varphi=-\dfrac{G}{Q}\ ;\\ \text{tang.}\,I=\dfrac{G}{Q}\cdot\dfrac{1}{\sin.\varphi}=\dfrac{\sqrt{G^2+Q^2}}{Q'}\ ;\end{array}\right.$$

où l'on fait:

$$[10]\left\{\begin{array}{l}G=(M'-M'')N\sin.\lambda+(M''-M)N'\sin.\lambda'+(M-M')N''\sin.\lambda''\ ;\\ Q=(H''-H')N\sin.\lambda+(H-H'')N'\sin.\lambda'+(H'-H)N''\sin.\lambda''\ ;\\ Q'=(H''-H')M+(H-H'')M'+(H'-H)M''\ .\end{array}\right.$$

Soient l, l', l'' les longitudes héliocentriques de la tache aux instans correspondans aux trois observations; et μ, μ', μ'' les trois latitudes héliocentriques. Nous avons:

$$\text{tang.}\, l = \frac{y}{x} = \frac{M}{H}\ ; \qquad \text{tang.}\, l' = \frac{M'}{H'}\ ; \qquad \text{tang.}\, l'' = \frac{M''}{H''}\ ;$$

$$\text{tang.}\, \mu = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{N \sin.\, \lambda}{\sqrt{H^2+M^2}}\ ;$$

d'où l'on tire:

$$\text{tang.}\,(l'-l) = \frac{M'H - MH'}{HH' + MM'}\ ; \qquad \text{tang.}\,(l''-l) = \frac{M''H - MH''}{HH'' + MM''}\ .$$

Il est clair que $l'-l$ est la projection sur l'Ecliptique, de l'arc A', parcouru par la tache dans le temps T'; et que $l''-l$ est la projection, sur l'Ecliptique, de l'arc A'' parcouru dans le temps T''. En posant $l'-l = A'_{(1)}$; $l''-l = A''_{(1)}$ nous avonc donc

$$[11] \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \text{tang.}\, A'_{(1)} = \dfrac{M'H - MH'}{HH' + MM'}\ ; \\[2ex] \text{tang.}\, A''_{(1)} = \dfrac{M''H - MH''}{HH'' + MM''}\ . \end{cases}$$

Ces formules étant générales, rien n'empêche de les appliquer au cas, où, la seconde observation serait faite à l'instant que la projection, sur l'Ecliptique, de l'arc parcouru par la tache serait égal à $360° + A'_{(1)}$; la Terre étant transportée sur un autre point de son orbite, duquel la position *apparente* de la tache, sur le disque du Soleil, serait la même qu'à l'instant de la première observation. Alors, si, pour l'instant de la première observation, nous faisons:

a = ascension-droite du centre du Soleil;

d = déclinaison du centre du Soleil;

$a + v$ = ascension-droite du centre de la tache;

$d + u$ = déclinaison du centre de la tache;

ω = inclinaison de l'Ecliptique;

nous aurons:

$$[12]\ldots\begin{cases}\text{tang.}\,d=\text{tang.}\,\omega\,.\,\text{sin.}\,a\ ;\\ \text{tang.}\,a=\cos.\,\omega\,.\,\text{tang.}\,\Theta\ ;\\ \text{sin.}\,\lambda=-\sin.\,\omega\,.\cos.\,(d+u)\,.\,\text{sin.}\,(a+v)+\cos.\,\omega\,.\,\text{sin.}\,(d+u)\ ;\\ \text{tang.}\,L=\dfrac{\sin.\,\omega\,.\,\text{tang.}\,(d+u)}{\cos.\,(a+v)}+\cos.\,\omega\,.\,\text{tang.}\,(a+v)\ .\end{cases}$$

Donc, en éliminant d et a de la troisième et de la quatrième de ces équations, à l'aide des deux premières, il est clair que l'on aura un résultat de cette forme

$$\text{sin.}\,\lambda=\text{fonct.}\,(\Theta,\ u,\ v)\ ;\qquad \text{tang.}\,L=\text{Fonct.}\,(\Theta,\ u,\ v)\ .$$

Mais, dans la seconde position de la Terre, les valeurs de u et de v sont, par hypothèse, les mêmes que dans la première : partant, nous exprimerons cette condition en écrivant les équations

$$\text{sin.}\,\lambda'=\text{fonct.}\,(\Theta',\ u,\ v)\ ;\qquad \text{tang.}\,L'=\text{Fonct.}\,(\Theta',\ u,\ v)\ .$$

Il suit de là que les valeurs primitives de H, M, N étant réduites à la forme

$$H=F^{\text{I}}(\Theta,u,v)\ ;\qquad M=F^{\text{II}}(\Theta,u,v)\ ;\qquad N=F^{\text{III}}(\Theta,u,v)\ ;$$

on aura, par le seul changement de Θ en Θ' :

$$H'=F^{\text{I}}(\Theta',u,v)\ ;\qquad M'=F^{\text{II}}(\Theta',u,v)\ ;\qquad N'=F^{\text{III}}(\Theta',u,v)\ .$$

Cela posé, en nommant n l'arc parcouru par le centre de gravité de la Terre dans un jour solaire moyen, par son mouvement annuel autour du Soleil, on peut ici (sans erreur sensible) exprimer par $nT_{(1)}$ l'arc parcouru par la Terre dans le temps $T_{(1)}$. Et, si ce temps est celui requis pour une entière révolution *synodique* de la tache, il faudra que $360^\circ+nT_{(1)}$ soit la projection, sur le plan de l'Ecliptique, de l'arc parcouru par la tache dans le temps $T_{(1)}$. D'après la formule [11] on aura donc l'équation

$$\text{tang.}\,(360^\circ+nT_{(1)})=\text{tang.}\,nT_{(1)}=\frac{\dfrac{M'}{H'}-\dfrac{M}{H}}{1+\dfrac{M.M'}{H.H'}}\ ;$$

et par conséquent

$$[13]\ \ldots\ \text{tang.}\,nT_{(1)}=\frac{\Pi(\Theta+nT_{(1)},\ u,\ v)-\Pi(\Theta,\ u,\ v)}{1+\Pi(\Theta,u,v).\Pi(\Theta+nT_{(1)},\ u,\ v)}\ ,$$

en posant pour plus de simplicité

$$\frac{F''(\Theta, u, v)}{F'(\Theta, u, v)} = \Pi(\Theta, u, v) ;$$

et observant que $\Theta' = \Theta + nT_{(1)}$.

Maintenant, si nous faisons

$$nT_{(1)} - nT = nX ; \qquad \Theta + nT = \Omega ;$$

$$[14] \ldots\ldots \begin{cases} P = \Pi(\Omega + nX, u, v) - \Pi(\Theta, u, v) , \\ P' = \Pi(\Omega + nX, u, v) \,.\, \Pi(\Theta, u, v) , \end{cases}$$

l'équation [13] donnera

$$[15] \ldots\ldots\ldots \quad \text{tang.}\, nX = \frac{P - (1 + P')\,\text{tang.}\, nT}{(1 + P') + P.\,\text{tang.}\, nT} .$$

L'arc nX étant une fraction fort petite, on peut développer P et P' suivant les puissances de nX. Ainsi en faisant

$$[16] \ldots\ldots \begin{cases} P = U + U'.nX + U''(nX)^2 + \text{etc.} : \\ P' = V + V'.nX + V''(nX)^2 + \text{etc.} ; \end{cases}$$

l'on pourra déterminer nX par l'équation

$$[17] \ldots \text{tang.}\, nX = \frac{U - (1 + V)\,\text{tang.}\, nT + W'.nX + W''.(nX)^2 + \text{etc.}}{(1 + V) + U\,\text{tang.}\, nT + K'.nX + K''.(nX)^2 + \text{etc.}} ,$$

où W', W'', etc.; K', K'', etc. sont des coefficiens que l'on peut déduire des équations [14], [15] et [16]. En faisant

$$[18] \ldots\ldots \quad \text{tang.}\, \Phi = \frac{U}{1 + V} = \frac{\Pi(\Omega, u, v) - \Pi(\Theta, u, v)}{1 + \Pi(\Theta, u, v)\,\Pi(\Omega, u, v)} ,$$

si l'on néglige les termes de l'ordre du carré de nX, l'équation [17] donne

$$\text{tang.}\, nX = \frac{\text{tang.}\, \Phi - \text{tang.}\, nT}{1 + \text{tang.}\, \Phi \,.\, \text{tang.}\, nT} ;$$

c'est-à-dire

$$[19] \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad nX = \Phi - nT .$$

Maintenant, si l'on fait

$$[20] \ldots \begin{cases} \text{tang.}\, \Phi' = \dfrac{F''(\Theta, u, v)}{F'(\Theta, u, v)} ; \qquad \text{tang.}\, \Phi'' = \dfrac{F''(\Theta + nT, u, v)}{F'(\Theta + nT, u, v)} , \end{cases}$$

l'équation [18] revient à dire, que

$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{\text{tang.}\,\Phi'' - \text{tang.}\,\Phi'}{1 + \text{tang.}\,\Phi'.\,\text{tang.}\,\Phi''}\ ;$$

partant nous avons

$$\Phi = \Phi'' - \Phi'\ ;$$

et

$$n\,\Lambda = \Phi'' - \Phi' - u\,T\ ;$$

d'où l'on tire :

$$[21]\ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad T_{(1)} = \Lambda + T = \frac{\Phi'' - \Phi'}{n}\ .$$

Remarquons actuellement, que, en posant

$$[22]\ \ldots \begin{cases} p = \sin.\,\omega\,.\,\sin.\,(d+u) + \cos.\,\omega\,.\,\cos.\,(d+u)\,.\,\sin.\,(a+v)\ ; \\ q = \cos.\,(d+u)\,.\,\cos.\,(a+v)\ ; \end{cases}$$

les valeurs de H et M peuvent être réduites à la forme

$$[23] \begin{cases} H = -(1-q^2)\cos.\,\Theta + pq\sin.\,\Theta - q\,.\sqrt{[q\cos.\,\Theta + p\sin.\,\Theta]^2 - \cos.^2\Delta}\ ; \\ M = -(1-p^2)\sin.\,\Theta + pq\cos.\,\Theta - p\,.\sqrt{[q\cos.\,\Theta + p\sin.\,\Theta]^2 - \cos.^2\Delta}\ . \end{cases}$$

De sorte que la fonction

$$[24]\ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Pi(\Theta,\ u,\ v) = \frac{M}{H}$$

est explicitement connue par les équations [23]. Pour en tirer la valeur de $\Pi(\Theta + nT,\ u,\ v)$, on calculera d' et a' par les formules

$$\text{tang.}\,d' = \text{tang.}\,\omega\,.\,\sin.\,a'\ ; \qquad \text{tang.}\,a' = \cos.\,\omega\,.\,\text{tang.}\,(\Theta + nT)\ ;$$

ensuite en nommant p' et q' ce que deviennent les valeurs de p et q par le changement de a et d en a' et d' ; et H', M' les valeurs de H, M, l'on aura

$$\Pi(\Theta + nT,\ u,\ v) = \frac{M'}{H'}\ .$$

Le calcul du second membre de l'équation [21] peut donc être exécuté à l'aide des formules [20], [22], [23], [24]. Dans les applications on pourra les simplifier, si l'on peut disposer du choix des deux quantités u et v. Mais un tel détail serait étranger à ce Mémoire. Il suffit d'avoir établi la solution générale de ce problème sans rien statuer sur la grandeur de l'inclinaison de l'équateur solaire au plan de l'Ecliptique. Il importe de remarquer, que, d'après la formule [21], l'expression de $T_{(1)}$ doit être de la forme

$$T_{(1)} = \text{Fonct.}(\Theta + n\,T,\ u,\ v) - \text{Fonct.}(\Theta,\ u,\ v)\ .$$

Or, abstraction faite, soit des erreurs des observations, soit des petits mouvemens propres des taches, le second membre de cette équation n'exprime pas une quantité absolument constante: il doit être variable, suivant la longitude Θ du Soleil, même en supposant invariables les valeurs de u et v. Néanmoins, les valeurs de $T_{(1)}$, calculées avec des observations faites à des époques différentes d'une même année, présenteront des différences assez petites, pour pouvoir en conclure (par une moyenne) que l'on a:

$T_{(1)}$ = durée de la révolution *synodique* des taches $= 27^{\text{jours}},31$;

T = durée de la révolution *sydérale* des taches $= 25^{\text{jours}},42$.

La séparation des deux quantités T et $T_{(1)}$ n'a pas été faite, ni par Galilée, ni par Kepler. L'un et l'autre, en 1611, 1612, 1613, croyaient au double mouvement, diurne, et annuel de la Terre; mais rien ne prouve qu'ils aient connue la différence, d'environ *deux jours*, qu'il y a entre $T_{(1)}$ et T; et Galilée, en 1632, s'exprimait, dans la troisième journée de ses Dialogues, de manière à manifester, sur ce point, des conceptions erronées. Kepler, mort en 1630, avait démontré depuis 1620, dans son ouvrage *Epitome Astronomiae Copernicanae*, qu'il fallait supprimer le troisième mouvement, que Copernic avait attribué gratuitement à la Terre en 1543. Mais, Galilée, qui ne paraît pas avoir senti toute la force de cette modification faite par Kepler au système de Copernic, n'a pas su l'adopter pour le Soleil, et démêler les effets d'une illusion optique qui altérait la véritable durée de la révolution sydérale des taches. Il la confondait avec celle qui ramène le centre apparent du Soleil sur une seconde visuelle différente de la première. En outre, il donnait un mouvement conique à l'axe de rotation du Soleil autour de l'axe de l'Ecliptique, pour expliquer les apparences, présentées par le mouvement des taches, dans l'hypothèse de la Terre fixe; le centre du Soleil étant mobile sur le plan de l'Ecliptique.

Galilée supposait que la visuelle tirée de la Terre au plan des deux axes (de l'Ecliptique et de l'Equateur solaire) devait faire toujours le *même* angle; tandis que cet angle est *variable*, précisément à cause que le plan des deux axes demeure toujours parallèle à lui-même: de sorte que leurs pôles répondent toujours aux mêmes étoiles à une distance infinie.

Par un instinct de son génie, GALILÉE sentait qu'il y avait de l'obscurité dans sa réponse à l'objection de SIMPLICIUS, et il concluait son raisonnement en lui disant:

» So che questo, che dico al presente, è assai oscuro; ma vi si » farà manifesto, quando parleremo del *terzo* moto annuo assegnato » dal COPERNICO alla Terra. Ora quando questi *quattro* moti tanto tra » di loro incongruenti (li quali tutti per necessità converrebbe attribuire » all'istesso corpo del Sole) si possano ridurre a un solo e semplicissimo, » assegnato al Sole sopra un asse, non mai alterabile, e che senza innovar » cosa veruna nei movimenti per tanti altri rincontri assegnati al globo » terrestre si possan così agevolmente salvar tante stravaganti apparenze » nei movimenti delle macchie solari, par veramente che il partito non » sia da recusarsi ».

Cette solution du bon sens appuyée sur le principe des causes finales, ordinairement placé par l'esprit humain aux bornes de ses connaissances, devait être la véritable; mais il a fallu dilater singulièrement la sphère des idées pour la rendre incontestable, et acquérir le droit de dire, comme NEWTON: *Hypotheses non fingo.* Toutefois il est juste d'observer, que la combinaison de la géométrie et du calcul algébrique, nécessaire pour embrasser toutes les circonstances de la question dans un petit nombre de formules, était à-peu-près impossible à réaliser avant la moitié du 17.ème siècle.

Tel est l'ensemble des faits et des rapprochemens que j'ai cru indispensable de consigner dans ce Mémoire. Si, en les exposant j'ai penché plutôt vers la prolixité que vers la brièveté, j'espère d'être excusé, si l'on veut bien réfléchir que je ne pouvais abréger la narration sans nuire à la clarté de mes argumens. Je respecte trop le génie d'ARAGO pour croire que je pouvais, *facilement*, tenter d'établir une opinion scientifique contraire à la sienne.

MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE DES TRANSCENDANTES ELLIPTIQUES

PAR

JEAN PLANA

Lu dans la séance du 24 juin 1860.

Les résultats que j'ai obtenus dans ce Mémoire ont été déduits *a priori* de la considération des fonctions *symétriques* de l'amplitude; c'est-à-dire de l'arc qui constitue la seconde limite de ces intégrales; la première étant égale à zéro. L'exacte définition de ces fonctions est celle-ci. Soit k le *module* et φ l'amplitude d'une transcendante elliptique de première espèce, désignée par ξ, ou par $F(k, \varphi)$, l'on aura:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}} = F(k, \varphi) = \xi \ .$$

Si l'on fait $k^2 + k'^2 = 1$;

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}} \ ; \qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2.\sin.^2\varphi}} \ ;$$

$$\xi + \frac{4n}{p}.K = \int_0^{\zeta_{(n)}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}} \ ,$$

le produit d'un nombre *impair* p (pris à volonté) de facteurs simples, de la forme

$$1 \mp \sin.\,\text{Amp.}^{e}\left(\xi + \frac{4n}{p}.K\right) = 1 \mp \sin.\,\zeta_{(n)} \ ,$$

obtenus, en faisant successivement $n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots p-1$, est la fonction symétrique sur laquelle ces recherches sont fondées. On verra que cette dénomination est suggérée par la plus simple des propriétés inhérentes à cette fonction.

La *double* expression analytique dont sont susceptibles ces fonctions symétriques conduit à la conséquence capitale, qu'il existe une équation algébrique de la forme:

$$\Pi(x) \mp \frac{x}{\mu} \cdot \Pi'(x) = (1 \mp x) \left[\Pi''(x)\right]^2,$$

qui se vérifie *par identité* pour toute valeur réelle ou imaginaire de x; où le coefficient $\frac{1}{\mu}$ est constant, et $\Pi(x)$, $\Pi'(x)$, $\Pi''(x)$ désignent trois polynomes entiers et rationnels; les deux premiers du degré $p-1$, et le troisième du degré $\frac{p-1}{2}$. Les facteurs ambigus $1 \mp x$, $\mp \frac{x}{\mu}$ seront pris avec le signe supérieur ou inférieur, suivant que le nombre impair p sera de la forme $4i+1$, ou $4i-1$.

Le facteur $\frac{1}{\mu}$ n'est pas arbitraire; on verra qu'il est une fonction *sui generis* des quantités constantes qui entrent dans la composition des trois polynomes $\Pi(x)$, $\Pi'(x)$, $\Pi''(x)$.

L'identité, que je viens de définir, est la conséquence d'une autre identité plus générale qui peut être écrite ainsi, savoir:

$$\Theta(x) - \frac{(x \mp x')}{g} f(x') \cdot \zeta(x) = (1 \mp x) \cdot f(x') \left[\Omega(x)\right]^2;$$

où $\Theta(x)$, $\zeta(x)$, $\Omega(x)$ sont aussi des polynomes entiers et rationnels. Mais le cas particulier de $x' = 0$, qui rend égale à l'unité la fonction de x' désignée par $f(x')$, est celui qui a un contact plus immédiat avec les transcendantes elliptiques.

L'application de cette identité à la transformation des fonctions elliptiques de première espèce en d'autres semblables, dont le rapport de leurs différentielles soit constant, devient en quelque sorte spontanée. Car, il est facile de la réduire à une autre identité de la forme:

$$\left\{[\Omega(x)]^2 - [\Omega'(x)]^2\right\}\left\{[\Omega(x)]^2 - h^2[\Omega'(x)]^2\right\} = G^2(1-x^2)(1-k^2x^2)[\Omega''x)]^2,$$

où h et G sont des quantités constantes; et d'en conclure que les trois

polynomes $\Omega(x)$, $\Omega'(x)$, $\Omega''(x)$, entiers et rationnels sont tels que l'on a :

$$\Omega''(x) = \Omega(x)\frac{d.\Omega'(x)}{dx} - \Omega'(x)\frac{d.\Omega(x)}{dx} \;;$$

ce qui constitue le principe de cette transformation. On ne pouvait pas prevoir *a priori*, par des calculs d'une exécution prompte et facile, une conséquence aussi éloignée de la conception de toute fonction symétrique de l'amplitude. Mais, après avoir ainsi soulevé le voile qui cachait une telle vérité par des calculs accessibles à toute intelligence qui possède les découvertes antérieures faites par Euler et Legendre, on conçoit que, en voulant prendre pour point de départ la démonstration d'un résultat *heureusement rencontré*, on doit nécessairement imprimer à la démonstration l'apparence de plusieurs difficultés intermédiaires, plus ou moins difficiles à surmonter, lesquelles peuvent être, de prime abord, éliminées en suivant la marche indiquée pour achever la solution du problème relatif à l'expression des fonctions symétriques de l'amplitude, telles que nous les avons définies.

C'est ainsi, par exemple, que l'on aurait à vaincre une assez grande difficulté, en voulant démontrer directement, que, par une approximation indéfinie, on a l'équation:

$$\text{Log. hyp.}^{e}\, N = \frac{\pi}{r}\left\{ M.M_{o}.M_{oo}.M_{ooo}\ldots\ldots 1 \right\} \;;$$

N étant un nombre pris à volonté, r un exposant assez grand pour que $\frac{12}{N^{r}}$ soit une quantité inférieure à la fraction $\frac{1}{(10)^{7}}$, qui marque l'ordre des décimales que l'on veut négliger; et M, M_{o}, M_{oo}, M_{ooo}, etc. une suite décroissante de nombres compris entre 3 et 1 déterminés par les équations :

$$M = 3 - 12.N^{-r} \;; \qquad M_{o} = \frac{9}{M}\left\{ 1 + \sqrt[3]{9M^{-2} - 1} \right\}^{-2} \;;$$

$$M_{oo} = \frac{9}{M_{o}}\left\{ 1 + \sqrt[3]{9M_{o}^{-2} - 1} \right\}^{-2} \;;$$

$$M_{ooo} = \frac{9}{M_{oo}}\left\{ 1 + \sqrt[3]{9M_{oo}^{-2} - 1} \right\}^{-2} \;; \qquad \text{etc.} \;;$$

tandis que cette égalité *rencontrée*, et non cherchée *a priori*, découle naturellement d'une autre question qui lui paraît absolument étrangère (Voyez la page 233 du 1.er Volume du Traité des Fonctions elliptiques de Legendre).

Après cette digression, qui ne me paraît pas dépourvue d'utilité, je reprends l'exposition des questions traitées dans ce Mémoire.

Par la manière dont j'ai établi l'équation

$$F(k, \varphi) = \mu . F(h, \psi) ,$$

qui représente, sous forme transcendante, une intégrale particulière de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{\mu . dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}} ,$$

en posant $x = \sin.\varphi$, $y = \sin.\psi$, il était facile d'en conclure, que l'équation différentielle devant subsister, même pour des valeurs imaginaires de x, y, de la forme $X.\sqrt{-1}$, $Y.\sqrt{-1}$, il était permis de remplacer x par $x.\sqrt{-1}$, et y par $y.\sqrt{-1}$; ce qui, en supprimant le facteur commun $\sqrt{-1}$, donne l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+k^2x^2)}} = \frac{\mu . dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+h^2y^2)}} .$$

Or il est évident, qu'en faisant ici

$$x = \text{tang.}\,\omega \; ; \quad y = \text{tang.}\,\lambda \; ; \quad k'^2 = 1 - k^2 \; ; \quad h'^2 = 1 - h^2 ,$$

l'on aura l'intégrale

$$F(k', \omega) = \mu . F(h', \lambda) .$$

De sorte que, entre les deux couples de transcendantes

$$F(k, \varphi) , \quad F(k', \omega) \; ; \quad F(h, \psi) , \quad F(h', \lambda) ,$$

dont les modules sont complémentaires, il y a l'équation

$$\frac{F(k, \varphi)}{F(k', \omega)} = \frac{F(h, \psi)}{F(h', \lambda)} .$$

Maintenant, si l'on réfléchit que cette conclusion subsiste, *quelle que soit la grandeur du nombre impair* p, qui entre dans la formation de l'équation

$$F(k, \varphi) = \mu . F(h, \psi) ,$$

il sera naturel de passer du *fini* à l'*infini*, pour voir, si, par là, on parvient à déterminer les *constantes auxiliaires*, qui ont été employées pour le succès de la transformation. Effectivement, ces constantes, de la forme $\sin.\alpha_m$, $\cos.\alpha_m$; m étant un nombre entier quelconque, sont

alors susceptibles d'être déterminées par les formules

$$\sin.\alpha_m = \frac{1-q^m}{1+q^m}, \qquad \cos.\alpha_m = \frac{2q^{\frac{m}{2}}}{1+q^m},$$

où la lettre q représente la transcendante

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}};$$

e désignant à l'ordinaire la base des Logarithmes hyperboliques. Sur cela une explication philosophique me paraît nécessaire.

S'il était question de déterminer l'amplitude β, telle que l'on eût l'équation

$$\int_0^{\beta} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}} = \frac{1}{p}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}};$$

p étant un nombre entier donné à volonté, on ne pourrait pas y parvenir par les anciennes formules d'Euler, ou de Legendre, quelle que soit la valeur du module k. Mais, dans le cas particulier où la valeur de k serait fort approchante de l'unité, on pourrait croire qu'il suffit de prendre

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}} = \text{Log.}\left(\frac{4}{\sqrt{1-k^2}}\right);$$

$$\int_0^{\beta} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\beta}} = \text{Log. tang.}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right);$$

ce qui donnerait

$$\left(\frac{4}{\sqrt{1-k^2}}\right)^{\frac{1}{p}} = \text{tang.}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1+\sin.\beta}{\cos.\beta};$$

et par conséquent

$$\cos.\beta = \frac{2\left(\frac{4}{\sqrt{1-k^2}}\right)^{\frac{1}{p}}}{1+\left(\frac{4}{\sqrt{1-k^2}}\right)^{\frac{2}{p}}},$$

ou bien

$$\cos.\beta = \frac{2.\sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{1-k^2}}\right)^{\frac{2}{p}}}}{1+\left(\frac{4}{\sqrt{1-k^2}}\right)^{\frac{2}{p}}} = \frac{2.\sqrt{\left(\frac{16}{1-k^2}\right)^{\frac{1}{p}}}}{1+\left(\frac{16}{1-k^2}\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

Dans cette formule la valeur de k est censée demeurer toujours plus petite que l'unité, quoique sa valeur doive toujours en différer d'une quantité très-petite. De sorte que, si l'on donne au nombre p une valeur déterminée, même fort grande, on peut concevoir à la fraction $1-k^2$ une petitesse telle, que le rapport des deux nombres par lesquels la valeur de $\cos.\beta$ est ainsi exprimée, sera une très-petite fraction. Ainsi, *sans varier* p, et donnant à $1-k$ des valeurs successivement plus petites, on doit regarder comme égale à zéro la limite vers laquelle converge la valeur définitive de $\cos.\beta$. Telle est la conséquence forcée lorsque cette formule a été obtenue sans établir aucune connexion entre les deux quantités k^2 et p. Dans cet état d'indépendance, si l'on demande ce que devient la valeur de $\cos.\beta$, lorsqu'on fait à la fois $k^2=1$ et $p=\infty$, on pourrait remarquer que l'expression algébrique

$$\cos.\beta = \frac{\sqrt[2\infty]{\infty}}{1+\sqrt[\infty]{\infty}}$$

ne peut être interprétée autrement que par zéro. Mais, la nouvelle théorie des transcendantes elliptiques a établi une connexion entre le nombre p, et *deux* modules k et h. En vertu de cette connexion, si l'on fait $k^2+k'^2=1$, $h^2+h'^2=1$, l'on a l'équation

$$\frac{1}{p}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-h^2.\sin.^2\varphi}} . \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2.\sin.^2\varphi}}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\varphi}}}.$$

D'après cela, si l'on égale le second membre de cette équation à l'intégrale

$$\int_0^\beta \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}},$$

on trouve que, en prenant $\text{tang.}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)$ pour la valeur de cette intégrale correspondante à $k^2=1$, on aura (en posant $p=\infty$) pour $\cos.\beta$ une valeur délivrée du module h, et telle que l'on a:

$$\cos.\beta=\frac{2.\sqrt{q}}{1+q};$$

en faisant

$$K'=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2.\sin.^2\varphi}}; \quad K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}}; \quad \text{et} \quad q=e^{-\frac{\pi K'}{K}}.$$

D'après cette explication il n'est pas surprenant si le symbole

$$\frac{\sqrt[2\infty]{\infty}}{1+\sqrt[\infty]{\infty}}$$

doit être remplacé, non-seulement par une valeur finie et déterminée, mais, outre cela, par une valeur variable avec celle du module k. En considérant à la fois l'équation entre p et les quatre transcendantes elliptiques complètes, ainsi que l'équation

$$\int_0^\beta \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}}=\frac{1}{p}.K,$$

on obtient pour $\cos.\beta$ la valeur $\frac{2.\sqrt{q}}{1+q}$, par un raisonnement qui réunit la clarté et la rigueur mathématique.

Ce résultat très-remarquable est celui par lequel, Jacobi, est parvenu à des séries convergentes, propres à déterminer l'amplitude par la valeur de la transcendante censée connue; ce qui a contribué à reculer les bornes des applications du Calcul Intégral à la Mécanique. Par exemple, une équation entre les deux variables φ et ψ de la forme

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}}=M\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2.\sin.^2\psi}};$$

où la valeur de l'amplitude ψ est censée donnée, sera résolue en évaluant le second membre par les Tables de LEGENDRE, et déterminant ensuite l'amplitude φ par la série de JACOBI

$$\varphi = \frac{\pi}{2} X + 2 . \sum_{1}^{\infty} . \frac{q^n}{n(1+q^{2n})} \sin.(n\pi X) \; ;$$

où, pour plus de simplicité, l'on a fait

$$X = \frac{M \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - c^2 . \sin.^2 \psi}}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 . \sin.^2 \varphi}}} .$$

Le signe $. \sum_{1}^{\infty} .$ indique que l'on doit former les termes successifs de la série en y faisant $n = 1, 2, 3, 4$ etc.

Il peut être utile de faire remarquer, que l'ancienne formule de LAGRANGE pour le retour des suites, donne pour φ une série de la même forme; mais avec des coefficiens, qui, au lieu d'être *finis*, sont composés par des suites *infinies*, impossibles à sommer sans le secours de la nouvelle transcendante q dont JACOBI a fait connaître les nombreuses propriétés. Il est clair en effet que, de l'équation connue

$$F(k, \varphi) = \frac{2}{\pi} K . \varphi - A_{(1)} \sin. 2\varphi + A_{(2)} \sin. 4\varphi - A_{(3)} \sin. 6\varphi + \text{etc.} \; ,$$

on peut tirer les expressions de φ, $\sin.\varphi$, $\cos.\varphi$, par des séries périodiques ayant pour argument $\frac{\pi}{2} . \frac{F(k, \varphi)}{K}$. Car, en faisant

$$\mathrm{a} = \frac{\pi}{2} . \frac{F(k, \varphi)}{K} \; ,$$

et $$\Pi(\varphi) = \frac{\pi}{2K} (A_{(1)} \sin. 2\varphi - A_{(2)} \sin. 4\varphi + A_{(3)} \sin. 6\varphi - \text{etc.}) \; ,$$

on tire de l'équation $\varphi = \mathrm{a} + \Pi(\varphi)$, les séries

$$\varphi = \mathrm{a} + \Pi(\mathrm{a}) + \frac{1}{1.2} \frac{d.[\Pi(\mathrm{a})]^2}{d\mathrm{a}} + \frac{1}{1.2.3} . \frac{d^2.[\Pi(\mathrm{a})]^3}{d\mathrm{a}^2} + \text{etc.} \; ;$$

$$\sin.\varphi = \sin.\mathrm{a} + \cos.\mathrm{a}\,.\,\Pi(\mathrm{a}) + \frac{1}{2}\cdot\frac{d.\left\{\cos.\mathrm{a}\,[\Pi(\mathrm{a})]^2\right\}}{d\mathrm{a}}$$
$$+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{d^2.\left\{\cos.\mathrm{a}\,[\Pi(\mathrm{a})]^3\right\}}{d\mathrm{a}^2} + \text{etc.}\ ;$$

$$\cos.\varphi = \cos.\mathrm{a} - \sin.\mathrm{a}\,.\,\Pi(\mathrm{a}) - \frac{1}{2}\cdot\frac{d.\left\{\sin.\mathrm{a}\,[\Pi(\mathrm{a})]^2\right\}}{d\mathrm{a}}$$
$$-\frac{1}{2.3}\cdot\frac{d^2.\left\{\sin.\mathrm{a}\,[\Pi(\mathrm{a})]^3\right\}}{d\mathrm{a}^2} - \text{etc.}\ ;$$

lesquelles sont évidemment de la forme

$$\varphi = \mathrm{a} + \sum_1^\infty . f_{(i)}(k).\sin.2i\mathrm{a}\ ;$$
$$\sin.\varphi = \sum_1^\infty . f'_{(i)}(k).\sin.(2i-1)\mathrm{a}\ ;$$
$$\cos.\varphi = \sum_1^\infty . f''_{(i)}(k).\cos.(2i-1)\mathrm{a}\ ;$$

où les coefficiens sont représentés par des fonctions infinies du module k. Néanmoins, de là, a la conséquence, que l'on peut avoir:

$$f_{(i)}(k) = \frac{2q^i}{i(1+q^{2i})}\ ; \qquad f'_{(i)}(k) = \frac{2\pi.\sqrt{q}}{kK}\cdot\frac{q^{i-1}}{1-q^{2i-1}}\ ;$$
$$f''_{(i)}(k) = \frac{2\pi.\sqrt{q}}{kK}\cdot\frac{q^{i-1}}{1+q^{2i-1}}\ ;$$

ainsi que Jacobi l'a démontré (voyez les équations [24], [19], [21] données aux pages 101 et 102 de son ouvrage *Fundamenta nova Theoriae Functionum Ellipticarum*), il y a un obstacle qui paraît impossible à surmonter directement. Mais Jacobi, en élargissant avec une grande sagacité la sphère des découvertes de Legendre, a pu tomber sur ce résultat qui étonne par sa simplicité.

Cette valeur de φ en fonction de a est un résultat d'autant plus remarquable qu'il est déduit d'une équation entre

$$\sqrt{-1}.\tang.\varphi \quad \text{et} \quad \sqrt{-1}.\tang.\mathrm{a}\ ,$$

telle que l'on a

$$\frac{1+\sqrt{-1}.\tang.\varphi}{1-\sqrt{-1}.\tang.\varphi} = \left(\frac{1+\sqrt{-1}.\tang.\mathrm{a}}{1-\sqrt{-1}.\tang.\mathrm{a}}\right)\cdot\frac{\Omega(-\sqrt{-1}.\tang.\mathrm{a})}{\Omega(\ \sqrt{-1}.\tang.\mathrm{a})}\ ;$$

en posant $$\sin.\alpha_{(2i-1)} = \frac{1-q^{2i-1}}{1+q^{2i-1}} ;$$

$$\Omega(\sqrt{-1}.\text{tang.a}) = \left(1 - \frac{\sqrt{-1}.\text{tang.a}}{\sin.\alpha_1}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{-1}.\text{tang.a}}{\sin.\alpha_3}\right)^2$$
$$\left(1 - \frac{\sqrt{-1}.\text{tang.a}}{\sin.\alpha_5}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{-1}.\text{tang.a}}{\sin.\alpha_7}\right)^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ à l'infini ;}$$

tandis que l'expression de $\sin.\varphi$ est déduite d'une équation entre $\sin.\varphi$ et $\sin.\text{a}$ telle que

$$\sqrt{\frac{1-k\sin.\varphi}{1+k\sin.\varphi}} = \left(\frac{1-2.\sqrt{q}.\sin.\text{a}+q}{1+2.\sqrt{q}.\sin.\text{a}+q}\right) \cdot \left(\frac{1-2.\sqrt{q^3}.\sin.\text{a}+q^3}{1+2.\sqrt{q^3}.\sin.\text{a}+q^3}\right)$$
$$\left(\frac{1-2.\sqrt{q^5}.\sin.\text{a}+q^5}{1+2.\sqrt{q^5}.\sin.\text{a}+q^5}\right) \ldots\ldots\ldots \text{ à l'infini,}$$

par le passage de l'égalité entre deux quantités à celle de l'égalité entre leurs logarithmes.

Les lecteurs de ce Mémoire, qui auront médité sur le mode d'argumentation de Legendre et de Jacobi, verront, peut-être avec intérêt, que la manière nouvelle d'envisager la théorie des fonctions elliptiques offre une frappante facilité pour faire découvrir et démontrer les principaux résultats qui lui sont inhérens, sans faire aucune de ces transitions trop détournées, qui ne paraissent pas puisées dans la nature du sujet, à moins de l'avoir étudié et approfondi suivant toutes les faces qu'il peut présenter. La multitude des formules qui exigent la valeur numérique de la transcendante q, m'a décidé à placer ici la Table du Logarithme Tabulaire de $\left(\frac{1}{q}\right)$.

Il me semble qu'il conviendrait de nommer *Exponentielles Elliptiques* les quantités

$$\left(\frac{1}{q}\right)^a = e^{\frac{a\pi F'(b)}{F'(c)}} ,$$

pour les distinguer des *Exponentielles Logarithmiques* e^n; où l'exposant n peut avoir une valeur quelconque, sans être, exclusivement, une transcendante numérique, formée par le rapport des transcendantes elliptiques *complètes de première espèce*, dont les deux modules sont *complémentaires*. Alors la Table que nous donnons ici serait la Table qui fournit les Logarithmes Tabulaires des Exponentielles Elliptiques.

Table de la fonction

$$m\pi.\frac{F^1(\cos.\theta)}{F^1(\sin.\theta)}=\frac{m\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\cos.^2\theta.\sin.^2\varphi}}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin.^2\theta.\sin.^2\varphi}}}=\text{Log. Tab.}^{\text{e}}\left(\frac{1}{q}\right)$$

calculée avec dix décimales pour tous les angles du module sin.θ *de dixième en dixième de degré depuis* 0° *jusqu'à* 90° ; π *étant le rapport* 3, 14159 ... *de la circonférence au diamètre, et* $m=0,43429$ ... *le Logarithme Tabulaire de la base e des Logarithmes Hyperboliques;*

$$m\pi=1,36437.634\ldots \qquad \text{Log. Tab.}^{\text{e}}\,m\pi=0,1349342\ldots;$$

$$\textit{pour}\ \theta=90^\circ,\ \text{Log. Tab.}^{\text{e}}\left(\frac{1}{q}\right)=\text{zéro}.$$

θ	Log. Tab.$^{\text{e}}\left(\frac{1}{q}\right)$	θ	Log. Tab.$^{\text{e}}\left(\frac{1}{q}\right)$	θ	Log. Tab.$^{\text{e}}\left(\frac{1}{q}\right)$
0°,0	infini	2°,0	4,11821 70439	4°,0	3,51589 22198
0 ,1	6,72036 50269	2 ,1	4,07582 94022	4 ,1	3,49442 66022
0 ,2	6,11830 43741	2 ,2	4,03541 31449	4 ,2	3,47347 02068
0 ,3	5,76612 07535	2 ,3	3,99679 29079	4 ,3	3,45302 03016
0 ,4	5,51624 17369	2 ,4	3,95981 57281	4 ,4	3,43303 26435
0 ,5	5,32241 97264	2 ,5	3,92434 73842	4 ,5	3,41349 33093
0 ,6	5,16405 48089	2 ,6	3,89026 94539	4 ,6	3,39438 25703
0 ,7	5,03015 83620	2 ,7	3,85747 69279	4 ,7	3,37568 19711
0 ,8	4,91417 11617	2 ,8	3,82587 62582	4 ,8	3,35737 42218
0 ,9	4,81186 23682	2 ,9	3,79538 37477	4 ,9	3,33944 31023
1°,0	4,72034 31974	3°,0	3,76592 42147	5°,0	3,32187 33756
1 ,1	4,63755 31964	3 ,1	3,73742 98718	5 ,1	3,30465 07098
1 ,2	4,56207 60472	3 ,2	3,70983 94024	5 ,2	3,28776 16084
1 ,3	4,49244 12771	3 ,3	3,68309 71334	5 ,3	3,27119 33457
1 ,4	4,42806 59562	3 ,4	3,65715 23909	5 ,4	3,25493 39102
1 ,5	4,36813 31140	3 ,5	3,63195 89057	5 ,5	3,23897 19673
1 ,6	4,31206 88301	3 ,6	3,60747 43198	5 ,6	3,22329 67317
1 ,7	4,25940 36746	3 ,7	3,58365 97576	5 ,7	3,20789 80851
1 ,8	4,20974 87879	3 ,8	3,56047 94542	5 ,8	3,19276 63751
1 ,9	4,16277 84355	3 ,9	3,53790 04351	5 ,9	3,17789 24596

θ	Log. Tab.^{e} $\left(\frac{1}{q}\right)$	θ	Log. Tab.^{e} $\left(\frac{1}{q}\right)$	θ	Log. Tab.^{e} $\left(\frac{1}{q}\right)$
6°,0	3,16326 76574	10°,0	2,71815 00654	14°,0	2,42374 77887
6 ,1	3,14888 37181	10 ,1	2,70946 39318	14 ,1	2,41750 35199
6 ,2	3,13473 27935	10 ,2	2,70085 97929	14 ,2	2,41130 04749
6 ,3	3,12080 74123	10 ,3	2,69234 00417	14 ,3	2,40514 10408
6 ,4	3,10710 04592	10 ,4	2,68390 17129	14 ,4	2,39902 36167
6 ,5	3,09360 51374	10 ,5	2,67554 32394	14 ,5	2,39294 76142
6 ,6	3,08031 49801	10 ,6	2,66726 30982	14 ,6	2,38691 24571
6 ,7	3,06722 38000	10 ,7	2,65905 98095	14 ,7	2,38091 75810
6 ,8	3,05432 56876	10 ,8	2,65093 19348	14 ,8	2,37496 24331
6 ,9	3,04161 49925	10 ,9	2,64287 80751	14 ,9	2,36904 64716
7°,0	3,02908 63080	11°,0	2,63489 68701	15°,0	2,36316 91654
7 ,1	3,01673 44577	11 ,1	2,62698 69961	15 ,1	2,35732 99968
7 ,2	3,00455 44821	11 ,2	2,61914 71653	15 ,2	2,35152 74485
7 ,3	2,99254 16271	11 ,3	2,61137 61238	15 ,3	2,34576 40276
7 ,4	2,98069 13328	11 ,4	2,60367 26513	15 ,4	2,34003 62405
7 ,5	2,96899 92226	11 ,5	2,59603 55592	15 ,5	2,33434 46086
7 ,6	2,95746 10940	11 ,6	2,58846 36897	15 ,6	2,32868 86601
7 ,7	2,94607 29092	11 ,7	2,58095 59151	15 ,7	2,32306 81626
7 ,8	2,93483 07869	11 ,8	2,57351 11363	15 ,8	2,31748 19578
7 ,9	2,92373 09939	11 ,9	2,56612 82819	15 ,9	2,31193 03263
8°,0	2,91276 99380	12°,0	2,55880 63076	16°,0	2,30641 29844
8 ,1	2,90194 41608	12 ,1	2,55154 41950	16 ,1	2,30092 80815
8 ,2	2,89125 03313	12 ,2	2,54434 09508	16 ,2	2,29547 70035
8 ,3	2,88068 52394	12 ,3	2,53719 56061	16 ,3	2,29006 83607
8 ,4	2,87024 57906	12 ,4	2,53010 72154	16 ,4	2,28467 19352
8 ,5	2,85992 90002	12 ,5	2,52307 48562	16 ,5	2,27931 73288
8 ,6	2,84973 19880	12 ,6	2,51609 76277	16 ,6	2,27399 41520
8 ,7	2,83965 19741	12 ,7	2,50917 46508	16 ,7	2,26870 20193
8 ,8	2,82968 62734	12 ,8	2,50230 50668	16 ,8	2,26344 05549
8 ,9	2,81983 22922	12 ,9	2,49548 80373	16 ,9	2,25789 74270
9°,0	2,81008 75235	13°,0	2,48872 27430	17°,0	2,25300 81567
9 ,1	2,80044 95436	13 ,1	2,48200 83838	17 ,1	2,24783 65020
9 ,2	2,79091 60082	13 ,2	2,47534 41774	17 ,2	2,24269 40746
9 ,3	2,78148 46489	13 ,3	2,46872 93596	17 ,3	2,23758 05375
9 ,4	2,77213 72702	13 ,4	2,46216 41832	17 ,4	2,23249 55214
9 ,5	2,76291 97461	13 ,5	2,45564 49177	17 ,5	2,22743 87272
9 ,6	2,75378 20178	13 ,6	2,44917 38363	17 ,6	2,22240 98127
9 ,7	2,74473 80900	13 ,7	2,44274 92772	17 ,7	2,21740 84591
9 ,8	2,73578 60292	13 ,8	2,43637 05201	17 ,8	2,21243 43494
9 ,9	2,72692 39604	13 ,9	2,43003 69087	17 ,9	2,20748 71720

θ	Log. Tab.^{e} $\left(\frac{1}{q}\right)$	θ	Log. Tab.^{e} $\left(\frac{1}{q}\right)$	θ	Log. Tab.^{e} $\left(\frac{1}{q}\right)$
18°,0	2,20256 65210	22°,0	2,02460 03941	26°,0	1,87502 29864
18 ,1	2,19767 23977	22 ,1	2,02055 93226	26 ,1	1,87156 60030
18 ,2	2,19280 42000	22 ,2	2,01653 55652	26 ,2	1,86812 12932
18 ,3	2,18794 47431	22 ,3	2,01252 89130	26 ,3	1,86468 85974
18 ,4	2,18314 46381	22 ,4	2,00853 92256	26 ,4	1,86126 77123
18 ,5	2,17835 39618	22 ,5	2,00456 63409	26 ,5	1,85785 94482
18 ,6	2,17358 59640	22 ,6	2,00061 01046	26 ,6	1,85446 23898
18 ,7	2,16884 36446	22 ,7	1,99667 02448	26 ,7	1,85107 72518
18 ,8	2,16412 56668	22 ,8	1,99274 69706	26 ,8	1,84770 37580
18 ,9	2,15943 17989	22 ,9	1,98883 97745	26 ,9	1,84434 18328
19°,0	2,15476 17499	23°,0	1,98494 86299	27°,0	1,84099 05975
19 ,1	2,15011 52718	23 ,1	1,98107 33925	27 ,1	1,83765 22241
19 ,2	2,14549 21155	23 ,2	1,97721 39198	27 ,2	1,83432 43973
19 ,3	2,14089 20321	23 ,3	1,97337 00709	27 ,3	1,83100 77675
19 ,4	2,13631 47778	23 ,4	1,96954 17071	27 ,4	1,82769 38232
19 ,5	2,13176 01120	23 ,5	1,96572 86911	27 ,5	1,82440 59193
19 ,6	2,12722 77981	23 ,6	1,96193 08875	27 ,6	1,82112 71794
19 ,7	2,12271 76032	23 ,7	1,95814 81626	27 ,7	1,81784 24204
19 ,8	2,11822 92977	23 ,8	1,95438 03843	27 ,8	1,81458 95323
19 ,9	2,11376 26554	23 ,9	1,95062 74223	27 ,9	1,81133 82841
20°,0	2,10931 74749	24°,0	1,94688 91478	28°,0	1,80809 76305
20 ,1	2,10489 34736	24 ,1	1,94316 54337	28 ,1	1,80486 78860
20 ,2	2,10049 04984	24 ,2	1,93945 61542	28 ,2	1,80091 54758
20 ,3	2,09610 81060	24 ,3	1,93576 11853	28 ,3	1,79843 85564
20 ,4	2,09174 67141	24 ,4	1,93208 04045	28 ,4	1,79523 95467
20 ,5	2,08740 54906	24 ,5	1,92841 36907	28 ,5	1,79205 07500
20 ,6	2,08308 43339	24 ,6	1,92476 09243	28 ,6	1,78887 20900
20 ,7	2,07878 33567	24 ,7	1,92112 19871	28 ,7	1,78520 34913
20 ,8	2,07450 20487	24 ,8	1,91749 67624	28 ,8	1,78254 48789
20 ,9	2,07024 03192	24 ,9	1,91388 51349	28 ,9	1,77939 61788
21°,0	2,06599 79785	25°,0	1,91028 69906	29°,0	1,77625 73156
21 ,1	2,06177 48288	25 ,1	1,90670 22168	29 ,1	1,77312 82228
21 ,2	2,05757 06915	25 ,2	1,90313 07023	29 ,2	1,77000 88226
21 ,3	2,05338 53799	25 ,3	1,89957 23370	29 ,3	1,76689 90564
21 ,4	2,04921 87118	25 ,4	1,89602 70099	29 ,4	1,76379 58221
21 ,5	2,04507 05085	25°,5	1,89249 46190	29 ,5	1,76070 80817
21 ,6	2,04094 05932	25 ,6	1,88897 50563	29 ,6	1,75762 67509
21 ,7	2,03682 87917	25 ,7	1,88546 82139	29 ,7	1,75455 48209
21 ,8	2,03273 49323	25 ,8	1,88197 39897	29 ,8	1,75149 20738
21 ,9	2,02865 88453	25 ,9	1,87849 22812	29 ,9	1,74843 85734

θ	Log. Tab.^{e} $\left(\frac{1}{q}\right)$	θ	Log. Tab.^{e} $\left(\frac{1}{q}\right)$	θ	Log. Tab.^{e} $\left(\frac{1}{q}\right)$
30°,0	1,74539 42379	34°,0	1,63042 99642	38°,0	1,52658 12973
30 ,1	1,74235 89719	34 ,1	1,62771 04737	38 ,1	1,52410 41052
30 ,2	1,73933 27503	34 ,2	1,62499 78338	38 ,2	1,52163 22189
30 ,3	1,73631 54182	34 ,3	1,62229 19995	38 ,3	1,51916 56055
30 ,4	1,73330 70022	34 ,4	1,61959 29261	38 ,4	1,51670 42324
30 ,5	1,73030 74092	34 ,5	1,61690 05696	38 ,5	1,51424 80669
30 ,6	1,72731 65754	34 ,6	1,61421 48861	38 ,6	1,51179 70770
30 ,7	1,72433 44418	34 ,7	1,61153 58322	38 ,7	1,50935 12306
30 ,8	1,72136 09441	34 ,8	1,60886 33648	38 ,8	1,50691 04959
30 ,9	1,71839 43577	34 ,9	1,60617 52507	38 ,9	1,50447 48413
31°,0	1,71543 96166	35°,0	1,60353 80187	39°,0	1,50204 42356
31 ,1	1,71249 16669	35 ,1	1,60088 50606	39 ,1	1,49961 86476
31 ,2	1,70955 21142	35 ,2	1,59823 85108	39 ,2	1,49719 80463
31 ,3	1,70662 08998	35 ,3	1,59559 83404	39 ,3	1,49478 24012
31 ,4	1,70369 79659	35 ,4	1,59296 68086	39 ,4	1,49237 16816
31 ,5	1,70078 32549	35 ,5	1,59033 69663	39 ,5	1,48996 58574
31 ,6	1,69787 67097	35 ,6	1,58771 57323	39 ,6	1,48756 48985
31 ,7	1,69497 82741	35 ,7	1,58510 06100	39 ,7	1,48516 87749
31 ,8	1,69208 78920	35 ,8	1,58249 17167	39 ,8	1,48277 74570
31 ,9	1,68920 55081	35 ,9	1,57988 89464	39 ,9	1,48039 09155
32°,0	1,68633 10674	36°,0	1,57729 22786	40°,0	1,47800 91213
32 ,1	1,68346 45155	36 ,1	1,57470 16674	40 ,1	1,47743 56428
32 ,2	1,68060 57985	36 ,2	1,57211 70745	40 ,2	1,47325 96571
32 ,3	1,67775 48596	36 ,3	1,56953 84614	40 ,3	1,47089 19296
32 ,4	1,67491 16559	36 ,4	1,56696 57904	40 ,4	1,46852 88339
32 ,5	1,67207 61249	36 ,5	1,56439 90238	40 ,5	1,46617 03422
32 ,6	1,66924 82178	36 ,6	1,56183 81241	40 ,6	1,46381 64253
32 ,7	1,66642 78832	36 ,7	1,55928 30542	40 ,7	1,46146 70556
32 ,8	1,66361 50698	36 ,8	1,55673 37776	40 ,8	1,45912 22064
32 ,9	1,66080 97271	36 ,9	1,55419 02575	40 ,9	1,45678 52037
33°,0	1,65801 18048	37°,0	1,55165 24578	41°,0	1,45444 59544
33 ,1	1,65522 12532	37 ,1	1,54912 03424	41 ,1	1,45211 46656
33 ,2	1,65243 80229	37 ,2	1,54659 38757	41 ,2	1,44978 74551
33 ,3	1,64966 20632	37 ,3	1,54407 30223	41 ,3	1,44746 47943
33 ,4	1,64689 33309	37 ,4	1,54155 77470	41 ,4	1,44514 64892
33 ,5	1,64413 17727	37 ,5	1,53904 80147	41 ,5	1,44283 25145
33 ,6	1,64137 73425	37 ,6	1,53654 37911	41 ,6	1,44052 38533
33 ,7	1,63862 99933	37 ,7	1,53404 50416	41 ,7	1,43821 74502
33 ,8	1,63588 96781	37 ,8	1,53155 17319	41 ,8	1,43591 63096
33 ,9	1,63315 63504	37 ,9	1,52906 38283	41 ,9	1,43361 93915

θ	Log. Tab.^{e} $\left(\frac{1}{q}\right)$	θ	Log. Tab.^{e} $\left(\frac{1}{q}\right)$	θ	Log. Tab.^{e} $\left(\frac{1}{q}\right)$
42°, 0	1, 43132 88807	46°, 0	1, 34278 39459	50°, 0	1, 25949 99351
42 , 1	1, 42900 82840	46 , 1	1, 34064 29935	50 , 1	1, 25745 35653
42 , 2	1, 42675 33482	46 , 2	1, 33850 52719	50 , 2	1, 25542 96843
42 , 3	1, 42417 31638	46 , 3	1, 33637 07704	50 , 3	1, 25340 82767
42 , 4	1, 42219 73636	46 , 4	1, 33423 94963	50 , 4	1, 25138 93254
42 , 5	1, 41992 51228	46 , 5	1, 33211 13466	50 , 5	1, 24944 84003
42 , 6	1, 41765 68953	46 , 6	1, 32998 63841	50 , 6	1, 24735 87228
42 , 7	1, 41539 31955	46 , 7	1, 32786 45612	50 , 7	1, 24534 70373
42 , 8	1, 41313 31478	46 , 8	1, 32574 58580	50 , 8	1, 24333 77397
42 , 9	1, 41087 67131	46 , 9	1, 32363 02547	50 , 9	1, 24133 08128
43°, 0	1, 40862 49396	47°, 0	1, 32151 77315	51°, 0	1, 23932 62369
43 , 1	1, 40637 67645	47 , 1	1, 31943 83459	51 , 1	1, 23732 40041
43 , 2	1, 40413 24915	47 , 2	1, 31730 18473	51 , 2	1, 23532 40885
43 , 3	1, 40189 20979	47 , 3	1, 31519 84473	51 , 3	1, 23332 64763
43 , 4	1, 39965 55584	47 , 4	1, 31309 80494	51 , 4	1, 23133 11509
43 , 5	1, 39742 28507	47 , 5	1, 31100 06345	51 , 5	1, 22933 80955
43 , 6	1, 39519 39506	47 , 6	1, 30890 61833	51 , 6	1, 22734 72936
43 , 7	1, 39296 87346	47 , 7	1, 30681 46768	51 , 7	1, 22535 87285
43 , 8	1, 39074 74806	47 , 8	1, 30472 60958	51 , 8	1, 22337 23837
43 , 9	1, 38852 98653	47 , 9	1, 30264 04214	51 , 9	1, 22138 82427
44°, 0	1, 38631 59444	48°, 0	1, 30055 66348	52°, 0	1, 21940 62901
44 , 1	1, 38410 57574	48 , 1	1, 29847 77172	52 , 1	1, 21742 65065
44 , 2	1, 38195 35281	48 , 2	1, 29640 03484	52 , 2	1, 21544 88785
44 , 3	1, 37969 63290	48 , 3	1, 29432 64141	52 , 3	1, 21347 33886
44 , 4	1, 37749 70657	48 , 4	1, 29225 49915	52 , 4	1, 21150 00207
44 , 5	1, 37530 14008	48 , 5	1, 29018 63634	52 , 5	1, 20952 87590
44 , 6	1, 37310 93187	48 , 6	1, 28812 05114	52 , 6	1, 20755 95860
44 , 7	1, 37092 07937	48 , 7	1, 28605 74173	52 , 7	1, 20559 24808
44 , 8	1, 36873 52232	48 , 8	1, 28399 70628	52 , 8	1, 20362 74448
44 , 9	1, 36655 43337	48 , 9	1, 28193 94296	52 , 9	1, 20166 44439
45°, 0	1, 36438 89200	49°, 0	1, 27988 53659	53°, 0	1, 19970 36923
45 , 1	1, 36220 18448	49 , 1	1, 27783 22548	53 , 1	1, 19774 45012
45 , 2	1, 36003 07856	49 , 2	1, 27578 26771	53 , 2	1, 19578 75274
45 , 3	1, 35786 31546	49 , 3	1, 27373 57488	53 , 3	1, 19383 25307
45 , 4	1, 35569 89307	49 , 4	1, 27169 14518	53 , 4	1, 19187 94951
45 , 5	1, 35353 80926	49 , 5	1, 26964 97684	53 , 5	1, 18992 84048
45 , 6	1, 35138 06193	49 , 6	1, 26761 06809	53 , 6	1, 18797 92438
45 , 7	1, 34922 64897	49 , 7	1, 26557 41716	53 , 7	1, 18603 19963
45 , 8	1, 34707 56831	49 , 8	1, 26354 02229	53 , 8	1, 18408 66466
45 , 9	1, 34492 81786	49 , 9	1, 26150 88173	53 , 9	1, 18214 31788

θ	Log. Tab.^{e} $\left(\frac{1}{q}\right)$	θ	Log. Tab.^{e} $\left(\frac{1}{q}\right)$	θ	Log. Tab.^{e} $\left(\frac{1}{q}\right)$
54°, 0	1, 18020 13054	58°, 0	1, 10388 93078	62°, 0	1, 02954 77374
54 , 1	1, 17826 18260	58 , 1	1, 10201 08719	62 , 1	1, 02770 57866
54 , 2	1, 17632 39096	58 , 2	1, 10013 36536	62 , 2	1, 02586 44181
54 , 3	1, 17438 78122	58 , 3	1, 09825 76374	62 , 3	1, 02402 36153
54 , 4	1, 17245 35183	58 , 4	1, 09638 28081	62 , 4	1, 02218 33612
54 , 5	1, 17052 10121	58 , 5	1, 09450 91501	62 , 5	1, 02034 36392
54 , 6	1, 16859 02780	58 , 6	1, 09263 66481	62 , 6	1, 01850 44323
54 , 7	1, 16666 13005	58 , 7	1, 09076 52865	62 , 7	1, 01666 57235
54 , 8	1, 16473 40641	58 , 8	1, 08889 50500	62 , 8	1, 01482 74959
54 , 9	1, 16280 85532	58 , 9	1, 08702 59530	62 , 9	1, 01298 97334
55°, 0	1, 16088 27518	59°, 0	1, 08515 78899	63°, 0	1, 01117 24158
55 , 1	1, 15896 26446	59 , 1	1, 08329 09355	63 , 1	1, 00931 55289
55 , 2	1, 15704 22172	59 , 2	1, 08142 50440	63 , 2	1, 00747 90544
55 , 3	1, 15512 34528	59 , 3	1, 07956 02000	63 , 3	1, 00564 29751
55 , 4	1, 15320 63363	59 , 4	1, 07769 63877	63 , 4	1, 00380 72733
55 , 5	1, 15129 08522	59 , 5	1, 07583 35917	63 , 5	1, 00197 19316
55 , 6	1, 14937 69853	59 , 6	1, 07397 17963	63 , 6	1, 00013 69325
55 , 7	1, 14746 47199	59 , 7	1, 07211 09859	63 , 7	0, 99830 22583
55 , 8	1, 14555 40408	59 , 8	1, 07025 11447	63 , 8	0, 99646 78912
55 , 9	1, 14364 49324	59 , 9	1, 06839 22571	63 , 9	0, 99463 38135
56°, 0	1, 14173 73795	60°, 0	1, 06653 41635	64°, 0	0, 99280 00070
56 , 1	1, 13983 13666	60 , 1	1, 06467 72798	64 , 1	0, 99096 64540
56 , 2	1, 13792 68784	60 , 2	1, 06282 11584	64 , 2	0, 98913 31362
56 , 3	1, 13602 38995	60 , 3	1, 06096 59275	64 , 3	0, 98730 00356
56 , 4	1, 13412 24145	60 , 4	1, 05911 15712	64 , 4	0, 98546 71339
56 , 5	1, 13222 24080	60 , 5	1, 05725 80737	64 , 5	0, 98363 44126
56 , 6	1, 13032 38648	60 , 6	1, 05540 54189	64 , 6	0, 98180 18534
56 , 7	1, 12842 67695	60 , 7	1, 05355 35911	64 , 7	0, 97996 94376
56 , 8	1, 12653 11067	60 , 8	1, 05170 25740	64 , 8	0, 97813 71466
56 , 9	1, 12463 68612	60 , 9	1, 04985 23518	64 , 9	0, 97630 49617
57°, 0	1, 12274 40173	61°, 0	1, 04800 29083	65°, 0	0, 97447 28641
57 , 1	1, 12085 25603	61 , 1	1, 04615 42275	65 , 1	0, 97264 06105
57 , 2	1, 11896 24743	61 , 2	1, 04430 62931	65 , 2	0, 97080 88541
57 , 3	1, 11707 37441	61 , 3	1, 04245 90890	65 , 3	0, 96897 69037
57 , 4	1, 11518 63545	61 , 4	1, 04061 25989	65 , 4	0, 96714 49640
57 , 5	1, 11330 02900	61 , 5	1, 03876 68066	65 , 5	0, 96531 30154
57 , 6	1, 11141 55354	61 , 6	1, 03692 16956	65 , 6	0, 96348 10386
57 , 7	1, 10953 20752	61 , 7	1, 03507 72497	65 , 7	0, 96164 90138
57 , 8	1, 10764 98941	61 , 8	1, 03323 34524	65 , 8	0, 95981 69212
57 , 9	1, 10576 88663	61 , 9	1, 03139 02871	65 , 9	0, 95798 47410

θ	Log. Tab.^{e} $\left(\frac{1}{q}\right)$	θ	Log. Tab.^{e} $\left(\frac{1}{q}\right)$	θ	Log. Tab.^{e} $\left(\frac{1}{q}\right)$
66°, 0	0, 95615 24532	70°, 0	0, 88252 37905	74°, 0	0, 80710 74791
66 , 1	0, 95432 00375	70 , 1	0, 88066 78602	74 , 1	0, 80518 12001
66 , 2	0, 95248 74736	70 , 2	0, 87881 08241	74 , 2	0, 80325 23491
66 , 3	0, 95065 47412	70 , 3	0, 87695 26535	74 , 3	0, 80132 08784
66 , 4	0, 94882 18197	70 , 4	0, 87509 33193	74 , 4	0, 79938 67393
66 , 5	0, 94698 86883	70 , 5	0, 87323 27922	74 , 5	0, 79744 98826
66 , 6	0, 94515 53263	70 , 6	0, 87137 10424	74 , 6	0, 79551 02582
66 , 7	0, 94332 17125	70 , 7	0, 86950 80400	74 , 7	0, 79356 78154
66 , 8	0, 94148 78259	70 , 8	0, 86764 37547	74 , 8	0, 79162 25024
66 , 9	0, 93963 20091	70 , 9	0, 86577 81558	74 , 9	0, 78967 42667
67°, 0	0, 93781 91489	71°, 0	0, 86391 12123	75°, 0	0, 78772 30551
67 , 1	0, 93598 43154	71 , 1	0, 86204 28928	75 , 1	0, 78576 88134
67 , 2	0, 93414 91229	71 , 2	0, 86017 31656	75 , 2	0, 78381 14864
67 , 3	0, 93231 35495	71 , 3	0, 85830 19986	75 , 3	0, 78185 10181
67 , 4	0, 93047 75730	71 , 4	0, 85642 93593	75 , 4	0, 77988 73516
67 , 5	0, 92864 11713	71 , 5	0, 85455 52150	75 , 5	0, 77792 04291
67 , 6	0, 92680 43218	71 , 6	0, 85267 95324	75 , 6	0, 77595 01915
67 , 7	0, 92496 70019	71 , 7	0, 85080 22778	75 , 7	0, 77397 65790
67 , 8	0, 92312 91887	71 , 8	0, 84892 34179	75 , 8	0, 77199 95306
67 , 9	0, 92129 08594	71 , 9	0, 84704 29161	75 , 9	0, 77001 89843
68°, 0	0, 91945 19907	72°, 0	0, 84516 07397	76°, 0	0, 76803 48770
68 , 1	0, 91761 25592	72 , 1	0, 84327 68527	76 , 1	0, 76604 71444
68 , 2	0, 91577 24956	72 , 2	0, 84139 12192	76 , 2	0, 76405 57212
68 , 3	0, 91393 19133	72 , 3	0, 83950 38032	76 , 3	0, 76206 05406
68 , 4	0, 91209 06512	72 , 4	0, 83761 45678	76 , 4	0, 76006 15350
68 , 5	0, 91024 87308	72 , 5	0, 83572 34759	76 , 5	0, 75805 86352
68 , 6	0, 90840 61277	72 , 6	0, 83383 04900	76 , 6	0, 75605 17708
68 , 7	0, 90656 28173	72 , 7	0, 83193 55719	76 , 7	0, 75404 08703
68 , 8	0, 90471 87746	72 , 8	0, 83003 86828	76 , 8	0, 75202 58603
68 , 9	0, 90287 39747	72 , 9	0, 82813 97838	76 , 9	0, 75000 66668
69°, 0	0, 90102 83924	73°, 0	0, 82623 88351	77°, 0	0, 74798 32135
69 , 1	0, 89918 20020	73 , 1	0, 82433 57964	77 , 1	0, 74595 54231
69 , 2	0, 89733 47777	73 , 2	0, 82243 06270	77 , 2	0, 74392 32168
69 , 3	0, 89548 66936	73 , 3	0, 82052 32855	77 , 3	0, 74188 65140
69 , 4	0, 89363 77234	73 , 4	0, 81861 37301	77 , 4	0, 73984 52327
69 , 5	0, 89178 78405	73 , 5	0, 81670 19181	77 , 5	0, 73779 92869
69 , 6	0, 88993 70183	73 , 6	0, 81478 78065	77 , 6	0, 73574 85973
69 , 7	0, 88808 52296	73 , 7	0, 81287 13515	77 , 7	0, 73369 30705
69 , 8	0, 88623 24472	73 , 8	0, 81095 25088	77 , 8	0, 73163 26195
69 , 9	0, 88437 86434	73 , 9	0, 80903 12332	77 , 9	0, 72956 71533

θ	Log. Tab.^{e} $\left(\frac{1}{q}\right)$	θ	Log. Tab.^{e} $\left(\frac{1}{q}\right)$	θ	Log. Tab.^{e} $\left(\frac{1}{q}\right)$
78°, 0	0, 72749 65788	82°, 0	0, 63909 02386	86°, 0	0, 52945 95583
78 , 1	0, 72542 08014	82 , 1	0, 63669 42919	86 , 1	0, 52616 59762
78 , 2	0, 72333 97239	82 , 2	0, 63428 62570	86 , 2	0, 52282 92590
78 , 3	0, 72125 32472	82 , 3	0, 63186 58404	86 , 3	0, 51944 74254
78 , 4	0, 71916 12701	82 , 4	0, 62943 27383	86 , 4	0, 51601 83191
78 , 5	0, 71706 36890	82 , 5	0, 62698 66359	86 , 5	0, 51253 96193
78 , 6	0, 71496 03979	82 , 6	0, 62452 72076	86 , 6	0, 50900 88232
78 , 7	0, 71285 12885	82 , 7	0, 62205 41154	86 , 7	0, 50542 32261
78 , 8	0, 71073 62501	82 , 8	0, 61956 70093	86 , 8	0, 50177 98974
78 , 9	0, 70861 51692	82 , 9	0, 61706 55259	86 , 9	0, 49807 56555
79°, 0	0, 70648 79297	83°, 0	0, 61454 92883	87°, 0	0, 49430 70356
79 , 1	0, 70435 44129	83 , 1	0, 61342 87517	87 , 1	0, 49047 02550
79 , 2	0, 70221 44969	83 , 2	0, 60947 09684	87 , 2	0, 48656 11716
79 , 3	0, 70006 80572	83 , 3	0, 60690 80577	87 , 3	0, 48257 52349
79 , 4	0, 69791 49661	83 , 4	0, 60432 87283	87 , 4	0, 47850 74290
79 , 5	0, 69575 50928	83 , 5	0, 60173 25263	87 , 5	0, 47435 22049
79 , 6	0, 69358 83031	83 , 6	0, 59911 89732	87 , 6	0, 47010 33995
79 , 7	0, 69141 44595	83 , 7	0, 59648 75716	87 , 7	0, 46575 41378
79 , 8	0, 68923 34210	83 , 8	0, 59383 78029	87 , 8	0, 46129 67168
79 , 9	0, 68704 50429	83 , 9	0, 59116 91257	87 , 9	0, 45672 24609
80°, 0	0, 68484 91768	84°, 0	0, 58848 09748	88°, 0	0, 45221 54597
80 , 1	0, 68264 56703	84 , 1	0, 58577 27593	88 , 1	0, 44718 27803
80 , 2	0, 68043 43669	84 , 2	0, 58304 38610	88 , 2	0, 44219 33299
80 , 3	0, 67821 51060	84 , 3	0, 58029 36332	88 , 3	0, 43703 83690
80 , 4	0, 67598 77226	84 , 4	0, 57752 13979	88 , 4	0, 43180 00451
80 , 5	0, 67375 20470	84 , 5	0, 57472 64447	88 , 5	0, 42714 22228
80 , 6	0, 67150 79050	84 , 6	0, 57190 80283	88 , 6	0, 42039 18490
80 , 7	0, 66925 51172	84 , 7	0, 56906 53648	88 , 7	0, 41436 77613
80 , 8	0, 66699 34994	84 , 8	0, 56619 76312	88 , 8	0, 40805 23163
80 , 9	0, 66472 28617	84 , 9	0, 56330 39610	88 , 9	0, 40140 19367
81°, 0	0, 66244 30090	85°, 0	0, 56038 34416	89°, 0	0, 39436 17565
81 , 1	0, 66015 37403	85 , 1	0, 55743 51105	89 , 1	0, 38686 11968
81 , 2	0, 65785 48485	85 , 2	0, 55445 79519	89 , 2	0, 37880 70813
81 , 3	0, 65554 61203	85 , 3	0, 55145 08922	89 , 3	0, 37007 24114
81 , 4	0, 65322 73359	85 , 4	0, 54841 27956	89 , 4	0, 36047 69708
81 , 5	0, 65089 82687	85 , 5	0, 54534 24589	89 , 5	0, 34975 12279
81 , 6	0, 64855 86847	85 , 6	0, 54223 86059	89 , 6	0, 33746 21570
81 , 7	0, 64620 83428	85 , 7	0, 53909 98813	89 , 7	0, 32283 79901
81 , 8	0, 64384 69940	85 , 8	0, 53592 48435	89 , 8	0, 30425 46956
81 , 9	0, 64147 43812	85 , 9	0, 53271 19572	89 , 9	0, 27699 72802

§ I.

Exposition des formules générales.

[1] Le produit W (où la lettre A tient lieu du mot *amplitude*)

$$W=\left[1\mp\sin.A(\xi)\right]\left[1\mp\sin.A\left(\xi+\frac{4K}{p}\right)\right]\left[1\mp\sin.A\left(\xi+\frac{8K}{p}\right)\right]$$
$$\left[1\mp\sin.A\left(\xi+\frac{12K}{p}\right)\right]\ldots\ldots\left[1\mp\sin.A\left(\xi+\frac{4p-4}{p}K\right)\right],$$

ayant la propriété de conserver la *même* valeur, en y remplaçant ξ par $\xi+\frac{4K}{p}$; par $\xi+\frac{8K}{p}$; par $\xi+\frac{12K}{p}$ ..... ; par $\xi+\frac{4p-4}{p}K$, je nomme *symétriques* les fonctions de l'amplitude φ ainsi formées. Cela est évident, en observant que l'on a, en général, pour tout nombre entier i ;

(1) ..... $\sin.A(u)=\sin.A(u\pm 4iK)$;

de sorte que, tandis que le premier facteur de W devient

$$1\mp\sin.A\left(\xi+\frac{4K}{p}\right),$$

le dernier devient

$$1\mp\sin.A\left(\xi+\frac{4p-4}{p}K+\frac{4K}{p}\right)=1\mp\sin.A(\xi+4K)=1\mp\sin.A(\xi).$$

Par la même raison, en remplaçant ξ par $\xi+\frac{8K}{p}$, le dernier et l'avant dernier facteur de W deviennent respectivement ;

$$1\mp\sin.A\left(\xi+\frac{4p-4}{p}K+\frac{8K}{p}\right)=1\mp\sin.A\left(\xi+\frac{4K}{p}\right);$$

$$1\mp\sin.A\left(\xi+\frac{4p-8}{p}K+\frac{8K}{p}\right)=1\mp\sin.A(\xi).$$

Il est manifeste, que cette démonstration s'applique à toute permutation de ξ en $\xi+\frac{4i}{p}K$ dans les p, facteurs du produit désigné par W.

D'après les formules générales publiées par LEGENDRE en 1792 si l'on fait:

$$\alpha_m = A\left(\frac{m}{p}K\right) \; ; \; \sqrt{1-k^2.\sin.^2\alpha_m} = \Delta(\alpha_m) \; ; \; \sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi} = \Delta(\varphi) \; ;$$

l'on a:

$$(2) \ldots \sin.A\left(\xi + \frac{m}{p}K\right) = \frac{\sin.\varphi.\cos.\alpha_m.\Delta(\alpha_m) + \cos.\varphi.\sin.\alpha_m.\Delta(\varphi)}{1-k^2\sin.^2\varphi.\sin.^2\alpha_m} \; ;$$

$$(3) \ldots \cos.A\left(\xi - \frac{m}{p}K\right) = \frac{\sin.\varphi.\cos.\alpha_m.\Delta(\alpha_m) - \cos.\varphi.\sin.\alpha_m.\Delta(\varphi)}{1-k^2\sin.^2\varphi.\sin.^2\alpha_m} \; ;$$

Donc, en appliquant la première de ces deux formules au second, au troisième, etc. facteur de W, il est clair que l'expression de W sera réduite à la forme

$$W = (1 \mp \sin.\varphi)\frac{f_{(1)}\cdot\left(\sin.\varphi, \cos.\varphi, \Delta(\varphi)\right)}{f_{(2)}(\sin.\varphi)} \; ;$$

où le numérateur $f_{(1)}\cdot$ est une fonction des trois quantités $\sin.\varphi$, $\cos.\varphi$, $\Delta(\varphi)$, et le dénominateur $f_{(2)}\cdot$ une fonction de $\sin.\varphi$ seulement. La réduction de W à une fonction de la variable φ est, par là, démontrée possible de prime abord. Mais l'exécution de cette transformation, conduite jusqu'à son dernier terme, exige les considérations délicates que je vais exposer.

[2] Avant d'aller plus loin, remarquons, que les formules (2) et (3) ont lieu en remplaçant $\frac{m}{p}K$ par

$$\xi' = \int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin.^2\varphi}} \; ,$$

et α_m par φ'. Alors, en faisant $\varphi' = 2i\pi$, l'on a $\xi' = 4iK$;

$$\sin.A(\xi \pm 4iK) = \sin.\varphi = \sin.A(\xi) \; ;$$

c'est-à-dire la formule désignée par (1). Les mêmes formules démontrent que, en faisant $\varphi' = \pi$, l'on a $\xi' = 2K$; et

$$\sin.A(\xi \pm 2K) = -\sin.\varphi = -\sin.A(\xi) \; ;$$

ou bien

$$(4) \ldots\ldots \quad \sin.A(u) = -\sin.A(u \pm 2K) \; .$$

L'emploi fréquent que nous ferons des formules (1) et (4) est ainsi justifié d'une manière tout-à-fait claire.

Les amplitudes α_1, α_2, α_3, ... α_m étant censées des quantités constantes connues, nous allons faire voir que, en exclnant de W le premier facteur, on peut, en groupant convenablement les autres, d'abord, deux à deux, et ensuite quatre à quatre, parvenir à l'expression générale de W, dégagée, non-seulement de $\cos.\varphi$, mais aussi de $\sqrt{1-k^2\sin.^2\varphi}$. Pour cela, il faudra avoir égard aux différens couples de deux amplitudes *complémentaires* α_m, α_{p-m}, entre lesquels on a l'équation

$$(5) \ldots\ldots \quad F(\alpha_m)+F(\alpha_{p-m})=\frac{m}{p}K+\frac{p-m}{p}K=K\ ;$$

et l'égalité

$$(6) \ldots\ldots \quad \frac{\sqrt{1-k^2\sin.^2\alpha_m}}{\cos.\alpha_m}=\frac{\Delta(\alpha_m)}{\cos.\alpha_m}=\frac{1}{\sin.\alpha_{p-m}}\ .$$

[3] Cela posé, si nous faisons

$$\zeta=A\left(\xi+\frac{m}{p}K\right)\ ; \qquad \lambda=A\left(\xi-\frac{m}{p}K\right)\ ,$$

la somme des équations (2) et (3), et leur produit donnera immédiatement:

$$\sin.\zeta+\sin.\lambda=\frac{2\sin.\varphi.\cos.\alpha_m.\Delta(\alpha_m)}{1-k^2\sin.^2\varphi.\sin.^2\alpha_m}\ ;$$

$$\sin.\zeta.\sin.\lambda=\frac{\sin.^2\varphi-\sin.^2\alpha_m}{1-k^2\sin.^2\varphi.\sin.^2\alpha_m}\ .$$

De là on tire pour la valeur de

$$(1\mp\sin.\zeta)(1\mp\sin.\lambda)=1\mp(\sin.\zeta+\sin.\lambda)+\sin.\zeta.\sin.\lambda\ :$$

les équations

$$(1-\sin.\zeta)(1-\sin.\lambda)=\frac{\left[\cos.\alpha_m-\sin.\varphi.\Delta(\alpha_m)\right]^2}{1-k^2\sin.^2\varphi.\sin.^2\alpha_m}\ ;$$

$$(1+\sin.\zeta)(1+\sin.\lambda)=\frac{\left[\cos.\alpha_m+\sin.\varphi.\Delta(\alpha_m)\right]^2}{1-k^2\sin.^2\varphi.\sin.^2\alpha_m}\ .$$

En divisant les deux membres par $\cos.^2\alpha_m$, et ayant égard à la formule (6), l'on aura

$$\frac{(1-\sin.\zeta)(1-\sin.\lambda)}{\cos.^2\alpha_m}=\frac{\left(1-\frac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_{p-m}}\right)^2}{1-k^2\sin.^2\varphi.\sin.^2\alpha_m}\ ;$$

$$\frac{(1+\sin.\zeta)(1+\sin.\lambda)}{\cos.^2\alpha_m}=\frac{\left(1+\frac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_{p-m}}\right)^2}{1-k^2\sin.^2\varphi.\sin.^2\alpha_m}\ .$$

Donc, en remplaçant α_m par α_{p-m}, et α_{p-m} par α_m, ces formules donnent :

$$\frac{\left[1-\sin.A\left(\xi+\frac{p-m}{p}K\right)\right]\left[1-\sin.A\left(\xi-\frac{p-m}{p}K\right)\right]}{\cos.^2\alpha_{p-m}}=\frac{\left(1-\frac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_m}\right)^2}{1-k^2\sin.^2\varphi.\sin.^2\alpha_{p-m}};$$

$$\frac{\left[1+\sin.A\left(\xi+\frac{p-m}{p}K\right)\right]\left[1+\sin.A\left(\xi-\frac{p-m}{p}K\right)\right]}{\cos.^2\alpha_{p-m}}=\frac{\left(1+\frac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_m}\right)^2}{1-k^2\sin.^2\varphi.\sin.^2\alpha_{p-m}}.$$

Ces équations ont lieu, sans que la valeur de m soit la même dans l'une et dans l'autre.

Maintenant, si l'on convient de prendre pour m des nombres impairs seulement, on passera d'une valeur de m à la consécutive par le changement de m en $m+2$.

Ce changement étant fait dans la seconde de ces équations, et non dans la première ; en posant

$$(7)\begin{cases} R_{(m)}=\dfrac{\left(1-\dfrac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_m}\right)^2}{1-k^2\sin.^2\varphi.\sin.^2\alpha_{p-m}}; & R'_{(m)}=\dfrac{\left(1+\dfrac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_{m+2}}\right)^2}{1-k^2\sin.^2\varphi.\sin.^2\alpha_{p-m-2}}; \\ Q_{(m)}=R_{(m)}\cos.^2\alpha_{p-m}; & Q'_{(m)}=R'_{(m)}\cos.^2\alpha_{p-m-2}; \end{cases}$$

après avoir remplacé

$$\xi-\frac{p-m}{p}K \quad \text{par} \quad \xi+4K-\frac{p-m}{p}K;$$

et

$$\xi-\frac{p-m-2}{p}K \quad \text{par} \quad \xi+4K-\frac{p-m-2}{p}K$$

(ce qui est permis conformément à la formule (1)), l'on aura

$$(8)\ldots\ Q_{(m)}=\left[1-\sin.A\left(\xi+\frac{p-m}{p}K\right)\right]\left[1-\sin.A\left(\xi+\frac{3p+m}{p}K\right)\right];$$

$$(9)\ldots\ Q'_{(m)}=\left[1+\sin.A\left(\xi+\frac{p-m-2}{p}K\right)\right]\left[1+\sin.A\left(\xi+\frac{3p+m+2}{p}K\right)\right].$$

Pour rendre la seconde de ces équations tout-à-fait semblable à la première, on écrira $\xi+2K+\frac{p-m-2}{p}K$ dans le premier facteur,

et $\xi - 2K + \frac{3p+m+2}{p}K$ dans le second (ce qui est permis d'après la formule (4)). Alors l'on a

$$(10) \ldots Q'_{(m)} = \left[1 - \sin.A\left(\xi + \frac{3p-m-2}{p}K\right)\right]\left[1 - \sin.A\left(\xi + \frac{p+m+2}{p}K\right)\right].$$

En appliquant le même changement à l'équation (8), l'on aura

$$(11) \ldots Q_{(m)} = \left[1 + \sin.A\left(\xi + \frac{3p-m}{p}K\right)\right]\left[1 + \sin.A\left(\xi + \frac{p+m}{p}K\right)\right].$$

Il suit de là: 1.° que, en multipliant les équations (8) et (10), l'on a:

$$(12) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad Q_{(m)} \cdot Q'_{(m)} =$$

$$\left[1 - \sin.A\left(\xi + \frac{p-m}{p}K\right)\right]\left[1 - \sin.A\left(\xi + \frac{3p+m}{p}K\right)\right]$$

$$\left[1 - \sin.A\left(\xi + \frac{3p-m-2}{p}K\right)\right]\left[1 - \sin.A\left(\xi + \frac{p+m+2}{p}K\right)\right];$$

2.° que, en multipliant les équations (9) et (11), l'on a:

$$(13) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad Q_{(m)} \cdot Q'_{(m)} =$$

$$\left[1 + \sin.A\left(\xi + \frac{p-m-2}{p}K\right)\right]\left[1 + \sin.A\left(\xi + \frac{3p+m+2}{p}K\right)\right]$$

$$\left[1 + \sin.A\left(\xi + \frac{3p-m}{p}K\right)\right]\left[1 + \sin.A\left(\xi + \frac{p+m}{p}K\right)\right].$$

[4] Remarquons maintenant, que tout nombre impair de la forme $2g+1$ deviendra de la forme $4i+1$ en prenant pour g des nombres pairs, et deviendra de la forme $4i-1$, en prenant pour g des nombres impairs de la forme $2n-1$. Dans le cas de $p = 4i+1$, les quatre numérateurs

$$p-m, \quad 3p+m, \quad 3p-m-2, \quad p+m+2,$$

qu'on voit dans le second membre de l'équation (12), seront des multiples de 4, si l'on donne à m les valeurs impaires

$$1, \quad 5, \quad 9, \quad 13, \quad \ldots\ldots\ldots p-4.$$

Le nombre total des facteurs ainsi formés, quatre à quatre, sera $4i$, si $p=4i+1$; et sera $4(i-1)$, si $p=4i-1$. Les coefficiens de K dans le second membre de l'équation (12), seront de la forme $\frac{4\mu}{p}$: on les formera en donnant à μ les valeurs $1, 2, 3, \ldots\ldots p-1$. Donc, en multipliant par $1-\sin.\varphi$ le produit

$$Q_{(1)}Q'_{(1)}\cdot Q_{(5)}Q'_{(5)}\cdot Q_{(9)}Q'_{(9)}\cdots\cdots Q_{(p-4)}Q'_{(p-4)},$$

on aura la valeur de W, définie au commencement du N.° [1], en prenant le signe *supérieur* du facteur ambign. Je désigne ce produit par W'. De sorte que, en posant

$$(14)\ldots\ W'=(1-\sin.\varphi)Q_{(1)}Q'_{(1)}\cdot Q_{(5)}Q'_{(5)}\cdot Q_{(9)}Q'_{(9)}\cdots Q_{(p-4)}Q'_{(p-4)};$$

le second membre de cette équation deviendra une fonction explicite de φ, au moyen des formules (7). Lorsque $p=4i-1$, l'on a

$$p-4=4(i-1)-1\ ;\qquad p-6=4(i-2)+1\ .$$

En donnant à m les valeurs

$$1, 5, 9, 13, \ldots\ldots p-6,$$

la formule (13) donnera les $i-1$ facteurs

$$Q_{(1)}Q'_{(1)}\cdot Q_{(5)}Q'_{(5)}\cdot Q_{(9)}Q'_{(9)}\cdots\cdots Q_{(p-6)}Q'_{(p-6)},$$

composés chacun de quatre facteurs simples: et la formule (9), en y faisant $m=p-4$, donnera

$$Q'_{(p-4)}=\left[1+\sin.A\left(\xi+\frac{2}{p}K\right)\right]\left[1+\sin.A\left(\xi+\frac{4p-2}{p}K\right)\right];$$

c'est-à-dire, d'après la formule (7);

$$(15)\ldots\ Q'_{(p-4)}=R'_{(p-4)}\cos.^2\alpha_2=\frac{\left(1+\frac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_{p-2}}\right)^2\cos.^2\alpha_2}{1-k^2\sin.^2\varphi.\sin.^2\alpha_2}\ .$$

Donc, en multipliant $Q'_{(p-4)}$ par $1+\sin.\varphi$, il est clair que le produit

$$(1+\sin.\varphi)Q'_{(p-4)}\cdot Q_{(1)}Q'_{(1)}\cdot Q_{(5)}Q'_{(5)}\cdot Q_{(9)}Q'_{(9)}\cdots\cdots Q_{(p-6)}Q'_{(p-6)},$$

sera composé de $1+2+4(i-2)=4i-1=p$ facteurs simples correspondants à la valeur de W, lorsqu'on prend le signe *inférieur* du

facteur ambigu. Je désigne ce produit par W'' : de sorte que

$$(16)\ldots\quad W''=(1+\sin.\varphi)Q'_{(p-4)}.Q_{(1)}Q'_{(1)}.Q_{(5)}Q'_{(5)}\ldots Q_{(p-6)}Q'_{(p-6)}\ ;$$

le second membre de cette équation étant une fonction explicite de φ, d'après les équations (7) et (15). Maintenant, si l'on remplace $Q_{(m)}$ et $Q'_{(m)}$ par leurs valeurs

$$R_{(m)}\cos.^2\alpha_{(p-m)}\ ;\qquad R'_{(m)}\cos.^2\alpha_{p-m-2}\ ;$$

et si l'on fait

$$(17)\ldots\qquad D=\cos.^2\alpha_2.\cos.^2\alpha_4.\cos.^2\alpha_6\ldots\cos.^2\alpha_{p-1}\ ;$$

on verra que l'on a

$$(18)\begin{cases} W'=D(1-\sin.\varphi).R_{(1)}R'_{(1)}.R_{(5)}R'_{(5)}\ldots\ldots\ldots R_{(p-4)}R'_{(p-4)}\ ;\\ W''=D(1+\sin.\varphi).R'_{(p-4)}.R_{(1)}R'_{(1)}.R_{(5)}R'_{(5)}\ldots R_{(p-6)}R'_{(p-6)}\ .\end{cases}$$

En posant

$$(19)\begin{cases} U^2_{(m)}=\left(1-\dfrac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_m}\right)^2\ ;\qquad U'^2_{(m)}=\left(1+\dfrac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_{m+2}}\right)^2\ ;\\ T_{(m)}=1-k^2\sin.^2\varphi.\sin.^2\alpha_{p-m}\ ;\quad T''_{(m)}=1-k^2\sin.^2\varphi.\sin.^2\alpha_{p-m-2}\ ;\end{cases}$$

nous avons

$$(20)\left\{R_{(m)}=\frac{U^2_{(m)}}{T_{(m)}}\ ;\quad R'_{(m)}=\frac{U'^2_{(m)}}{T''_{(m)}}\ ;\quad R'_{(p-4)}=\frac{\left(1+\dfrac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_{p-2}}\right)^2}{1-k^2\sin.^2\varphi.\sin.^2\alpha_2}\ .\right.$$

Donc, si l'on fait

$$(21)\begin{cases} \Omega\ (\sin.\varphi)=U^2_{(1)}U'^2_{(1)}.U^2_{(5)}U'^2_{(5)}.U^2_{(9)}U'^2_{(9)}\ldots U^2_{(p-4)}U'^2_{(p-4)}\ ;\\ \Omega'(\sin.\varphi)=U^2_{(1)}U'^2_{(1)}.U^2_{(5)}U'^2_{(5)}.U^2_{(9)}U'^2_{(9)}\ldots U^2_{(p-6)}U'^2_{(p-6)}\ ;\\ \Pi\ (\sin.\varphi)=T_{(1)}T'_{(1)}.T_{(5)}T'_{(5)}.T_{(9)}T'_{(9)}\ldots\ldots T_{(p-4)}T''_{(p-4)}\ ;\end{cases}$$

les équations (18) pourront être écrites ainsi; savoir

$$(22)\begin{cases} W'=D(1-\sin.\varphi).\dfrac{\Omega(\sin.\varphi)}{\Pi(\sin.\varphi)}\ ;\\ W''=D(1+\sin.\varphi)\left(1+\dfrac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_{p-2}}\right)^2.\dfrac{\Omega'(\sin.\varphi)}{\Pi(\sin.\varphi)}\ ;\end{cases}$$

la première de ces formules ayant lieu pour $p=4i+1$, et la seconde

pour $p = 4i - 1$. Il est évident que $\Pi(\sin.\varphi)$, $\Omega(\sin.\varphi)$, sont, par rapport à $\sin.\varphi$, deux polynomes entiers et rationnels du degré $p - 1$, tandis que $\Omega'(\sin.\varphi)$ est du degré $p - 3$.

Actuellement, si l'on remplace φ par $A\left(\xi + \frac{4n}{p}K\right)$ dans le second membre des équations (22), les valeurs de W', W'' ne subiront *aucun changement*, en donnant à n les valeurs

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots p - 1 .$$

Donc on doit avoir les équations

$$W' = D\left\{1 - \sin.A\left(\xi + \frac{4n}{p}K\right)\right\} \cdot \frac{\Omega\left\{\sin.A\left(\xi + \frac{4n}{p}K\right)\right\}}{\Pi\left\{\sin.A\left(\xi + \frac{4n}{p}K\right)\right\}} ;$$

$$W'' = D\left\{1 + \sin.A\left(\xi + \frac{4n}{p}K\right)\right\}\left\{1 + \frac{\sin.A\left(\xi + \frac{4n}{p}K\right)}{\sin.\alpha_{p-2}}\right\} \times$$

$$\frac{\Omega'\left\{\sin.A\left(\xi + \frac{4n}{p}K\right)\right\}}{\Pi\left\{\sin.A\left(\xi + \frac{4n}{p}K\right)\right\}} .$$

Et comme rien n'empêche de substituer ici pour W', W'' leurs valeurs calculées avec les formules qu'on voit dans le second membre des équations (22); l'amplitude φ étant censée donnée: si l'on fait

$$(23) \ldots\ldots \begin{cases} N' = \Pi(\sin.\varphi) ; \\ M' = (1 - \sin.\varphi)\Omega(\sin.\varphi) ; \\ M'' = (1 + \sin.\varphi)\left(1 + \frac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_{p-2}}\right)^2 \Omega'(\sin.\varphi) ; \end{cases}$$

l'on aura

$$(24) \ldots\ldots \left\{ W' = D.\frac{M'}{N'} ; \qquad W'' = D.\frac{M''}{N'} . \right.$$

De sorte que, en supprimant le facteur commun D, nous aurons; si

$$p = 4i + 1 ,$$

l'équation

$$(25)\ldots\ldots\quad 0 = M'\Pi\left\{\sin.A\left(\xi+\frac{4n}{p}K\right)\right\}$$
$$-N'\left\{1-\sin.A\left(\xi+\frac{4n}{p}K\right)\right\}\Omega\left\{\sin.A\left(\xi+\frac{4n}{p}K\right)\right\};$$

et si

$$p = 4i - 1,$$

l'équation

$$(26)\ldots\ldots\quad 0 = M''\Pi\left\{\sin.A\left(\xi+\frac{4n}{p}K\right)\right\}$$
$$-N'\left\{1+\sin.A\left(\xi+\frac{4n}{p}K\right)\right\}\left\{1+\frac{\sin.A\left(\xi+\frac{4n}{p}K\right)}{\sin.\alpha_{p-2}}\right\}^2\Omega'\left\{\sin.A\left(\xi+\frac{4n}{p}K\right)\right\},$$

où M', M'', N' sont trois quantités constantes que l'on peut toujours évaluer.

Maintenant si l'on fait :

$$\theta_n = A\left(\xi+\frac{4n}{p}K\right);$$

c'est-à-dire

$$(27)\ldots\ldots\quad \xi+\frac{4n}{p}K = \int_0^{\theta_n}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin.^2\varphi}};$$

en écrivant θ au lieu de $A\left(\xi+\frac{4n}{p}K\right)$ dans les deux équations précédentes, on pourra affirmer que, ayant

$$p = 4i + 1,$$

l'équation

$$(28)\ldots\ldots\quad M'\Pi(\sin.\theta) - N'(1-\sin.\theta)\Omega(\sin.\theta) = 0$$

du degré p, par rapport à $\sin.\theta$, aura p racines réelles, exprimées par

$$\sin.\theta = \sin.\varphi;\qquad \sin.\theta = \sin.\theta_1;\qquad \sin.\theta = \sin.\theta_2;$$
$$\sin.\theta = \sin.\theta_3;\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\qquad \sin.\theta = \sin.\theta_{p-1};$$

que l'on peut calculer à l'aide de l'équation (27). Et si

$$p = 4i - 1,$$

on pourra affirmer que l'équation

$$(29)\ldots\quad M''\Pi(\sin.\theta)-N'(1+\sin.\theta)\left(1+\frac{\sin.\theta}{\sin.\alpha_{p-2}}\right)^2\Omega'(\sin.\theta)=0\ ,$$

du degré p, par rapport à $\sin.\theta$, a, de même, p racines réelles évaluées à l'aide de l'équation (27) en faisant

$$\sin.\theta=\sin.\varphi\ ;\quad \sin.\theta=\sin.\theta_1\ ;\quad \ldots\ldots\ldots\ \sin.\theta=\sin.\theta_{p-1}\ .$$

[5] En désignant par $\Gamma(\sin.\theta)$ le premier membre de l'équation (28), on pourra donc le décomposer en ses facteurs réels du premier degré, et établir l'équation

$$(30)\ldots\quad \Gamma(\sin.\theta)=G(\sin.\theta-\sin.\varphi)(\sin.\theta-\sin.\theta_1)$$
$$(\sin.\theta-\sin.\theta_2)\ldots\ldots\ldots(\sin.\theta-\sin.\theta_{p-1})\ ,$$

G étant un facteur indépendant de θ.

En nommant $\Gamma'(\sin.\theta)$ le premier membre de l'équation (29), on aura de même l'équation

$$(31)\ldots\quad \Gamma'(\sin.\theta)=-G'(\sin.\theta-\sin.\varphi)(\sin.\theta-\sin.\theta_1)$$
$$(\sin.\theta-\sin.\theta_2)\ldots\ldots\ldots(\sin.\theta-\sin.\theta_{p-1})\ ,$$

G' étant un facteur indépendant de θ.

Pour déterminer le coefficient G, faisons $\sin.\theta=1$ dans les deux équations (28) et (30) : alors en faisant

$$h=(1-\sin.\varphi)(1-\sin.\theta_1)(1-\sin.\theta_2)\ldots\ldots\ldots(1-\sin.\theta_{p-1})\ :$$

il est clair que l'on a :

$$M'\Pi(1)=Gh\ ;$$

où $\Pi(1)$ doit être égal à ce que devient le second membre de la troisième des équations (21), lorsqu'on fait $\sin.\varphi=1$; c'est-à-dire, que

$$(32)\ldots\quad \Pi(1)=(1-k^2\sin.^2\alpha_2)(1-k^2\sin.^2\alpha_4)(1-k^2\sin.^2\alpha_6)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots(1-k^2\sin.^2\alpha_{p-1})\ .$$

La première des deux équations (24) revient à dire, que

$$h=\frac{DM'}{\Pi(\sin.\varphi)}=\frac{M'\Pi(1)}{G}\ ;$$

donc, en supprimant le facteur commun M', il est clair que l'on a

$$(33)\ldots\ldots\quad G=\frac{\Pi(1).\Pi(\sin.\varphi)}{D}\ .$$

Pour déterminer G', faisons $\sin.\theta = -1$ dans les deux équations (29) et (31). Il est d'abord clair que l'on a :

$$M''\Pi(-1) = G'.h',$$

en posant

$$h' = (1+\sin.\varphi)(1+\sin.\theta_1)(1+\sin.\theta_2)\ldots(1+\sin.\theta_{p-1}),$$

et remarquant que le nombre des facteurs du second membre de l'équation (31), y compris $-G'$, est pair. Dans la seconde des équations (24), nous avons

$$h' = \frac{DM''}{\Pi(\sin.\varphi)} = \frac{M''\Pi(-1)}{G'} :$$

donc, en supprimant le facteur commun M'', et observant que

$$\Pi(-1) = \Pi(1),$$

on tire de là la conséquence que $G' = G$.

Les couples d'amplitudes α_1, α_{p-1} ; α_3, α_{p-3} ; α_5, α_{p-5} ; etc. étant *complémentaires*, nous avons les équations :

$$\sin.^2\alpha_1 = \frac{\cos.^2\alpha_{p-1}}{1-k^2\sin.^2\alpha_{p-1}} ; \qquad \sin.^2\alpha_3 = \frac{\cos.^2\alpha_{p-3}}{1-k^2\sin.^2\alpha_{p-3}} ;$$

$$\sin.^2\alpha_5 = \frac{\cos.^2\alpha_{p-5}}{1-k^2\sin.^2\alpha_{p-5}} ; \qquad \text{etc.}$$

Il suit de là que si l'on fait

$$(34) \ldots\ldots \quad D' = \sin.^2\alpha_1.\sin.^2\alpha_3.\sin.^2\alpha_5 \ldots\ldots\ldots \sin.^2\alpha_{p-2} ;$$

l'on a, en vertu de l'équation (17),

$$(35) \ldots\ldots \quad \left\{ \Pi(1) = \frac{D}{D'}, \quad \text{et} \quad G = \frac{\Pi(\sin.\varphi)}{D'} \right\}.$$

Maintenant, si l'on fait

$$(36) \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} D'' = \sin.\theta_1.\sin.\theta_2.\sin.\theta_3 \ldots\ldots \sin.\theta_{p-1} ; \\ \zeta(\sin.\theta) = \left(1-\dfrac{\sin.\theta}{\sin.\theta_1}\right)\left(1-\dfrac{\sin.\theta}{\sin.\theta_2}\right)\ldots\ldots\left(1-\dfrac{\sin.\theta}{\sin.\theta_{p-1}}\right), \end{array} \right.$$

l'on aura

$$(37) \ldots\ldots \quad \Gamma(\sin.\theta) = \frac{D''}{D'}(\sin.\theta - \sin.\varphi)\Pi(\sin.\varphi)\zeta(\sin.\theta) ;$$

où le nombre premier p doit être de la forme $4i+1$. Cette fonction

de θ devant être égale au premier membre de l'équation (28), nous avons

$$(38)\ldots\ldots\left\{\begin{aligned}&M'\Pi(\sin.\theta)-N'(1-\sin.\theta)\,\Omega(\sin.\theta)\\&=\frac{D''}{D'}(\sin.\theta-\sin.\varphi)\,\Pi(\sin.\varphi)\,\zeta(\sin.\theta)\ .\end{aligned}\right.$$

En changeant le signe du second membre de l'équation (37), et supposant ensuite qu'il soit formé avec un nombre premier p de la forme $4i-1$, il deviendra égal à la fonction $\Gamma'(\sin.\theta)$. Donc en égalant cette fonction de θ au premier membre de l'équation (29), nous aurons:

$$(39)\ldots\left\{\begin{aligned}&M''\Pi(\sin.\theta)-N'(1+\sin.\theta)\left(1+\frac{\sin.\theta}{\sin.\alpha_{p-2}}\right)^2\Omega'(\sin.\theta)\\&=-\frac{D''}{D'}(\sin.\theta-\sin.\varphi)\,\Pi(\sin.\varphi)\,\zeta(\sin.\theta)\ .\end{aligned}\right.$$

En divisant l'équation (38) par

$$M'\,\Pi(\sin.\theta)\ ,$$

et l'équation (39) par

$$M''\,\Pi(\sin.\theta)\ ,$$

nous aurons :

$$(40)\ldots\ldots\left\{\begin{aligned}&1-\frac{D''}{D'}\cdot\frac{\Pi(\sin.\varphi)}{M'}(\sin.\theta-\sin.\varphi)\frac{\zeta(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}\\&=\frac{N'}{M'}(1-\sin.\theta)\cdot\frac{\Omega(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}\ ;\end{aligned}\right.$$

$$(41)\ldots\ldots\left\{\begin{aligned}&1+\frac{D''}{D'}\cdot\frac{\Pi(\sin.\varphi)}{M''}(\sin.\theta-\sin.\varphi)\frac{\zeta(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}\\&=\frac{N'}{M''}(1+\sin.\theta)\left(1+\frac{\sin.\theta}{\sin.\alpha_{p-2}}\right)^2\cdot\frac{\Omega'(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}\ .\end{aligned}\right.$$

En substituant pour N', M', M'' leurs valeurs données par les équations (23), l'équation (40) devient:

$$(42)\ldots\ldots\left\{\begin{aligned}&1-\frac{D''}{D'}\cdot\frac{(\sin.\theta-\sin.\varphi)}{(1-\sin.\varphi)}\cdot\frac{\Pi(\sin.\varphi)}{\Omega(\sin.\varphi)}\cdot\frac{\zeta(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}\\&=\left(\frac{1-\sin.\theta}{1-\sin.\varphi}\right)\cdot\frac{\Pi(\sin.\varphi)}{\Omega(\sin.\varphi)}\cdot\frac{\Omega(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}\ ;\end{aligned}\right.$$

et l'équation (41) devient:

$$1+\frac{D''}{D'}\cdot\frac{(\sin.\theta-\sin.\varphi)}{(1+\sin.\varphi)\left(1+\frac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_{p-2}}\right)^2}\cdot\frac{\Pi(\sin.\varphi)}{\Omega'(\sin.\varphi)}\cdot\frac{\zeta(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}$$

$$=\frac{1+\sin.\theta}{1+\sin.\varphi}\cdot\frac{\left(1+\frac{\sin.\theta}{\sin.\alpha_{p-2}}\right)^2}{\left(1+\frac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_{p-2}}\right)^2}\cdot\frac{\Pi(\sin.\varphi)}{\Omega'(\sin.\varphi)}\cdot\frac{\Omega'(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}.$$

Mais, d'après les équations (21), nous avons

$$(43)\ \ldots\ldots\ \Pi(\sin.\varphi)=(1-k^2\sin.^2\varphi.\sin.^2\alpha_2)(1-k^2\sin.^2\varphi.\sin.^2\alpha_4)$$
$$(1-k^2\sin.^2\varphi.\sin.^2\alpha_6)\ldots\ldots(1-k^2\sin.^2\varphi.\sin.^2\alpha_{p-1});$$

$$(44)\ \ldots\ldots\quad \Omega(\sin.\varphi)=$$
$$\left(1-\frac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_1}\right)^2\cdot\left(1+\frac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_3}\right)^2\cdot\left(1-\frac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_5}\right)^2\cdot\left(1+\frac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_7}\right)^2$$
$$\left(1-\frac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_9}\right)^2\cdot\left(1+\frac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_{11}}\right)^2\ldots\ldots\left(1-\frac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_{p-4}}\right)^2\cdot\left(1+\frac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_{p-2}}\right)^2;$$

$$\Omega'(\sin.\varphi)=$$
$$\left(1-\frac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_1}\right)^2\cdot\left(1+\frac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_3}\right)^2\ldots\ldots\left(1-\frac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_{p-6}}\right)^2\cdot\left(1+\frac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_{p-4}}\right)^2;$$

donc, on peut éliminer la fonction Ω', et remplacer l'équation précédente par celle-ci; savoir

$$(45)\ldots\ldots\left\{\begin{aligned}&1+\frac{D''}{D'}\cdot\frac{(\sin.\theta-\sin.\varphi)}{(1+\sin.\varphi)}\cdot\frac{\Pi(\sin.\varphi)}{\Omega(\sin.\varphi)}\cdot\frac{\zeta(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}\\&=\left(\frac{1+\sin.\theta}{1+\sin.\varphi}\right)\cdot\frac{\Pi(\sin.\varphi)}{\Omega(\sin.\varphi)}\cdot\frac{\Omega(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}.\end{aligned}\right.$$

Les équations (42) et (45) doivent être regardées comme vraies par identité; en ce sens, que, ayant un polynome $F(\sin.\theta)$, décomposé en ses facteurs

$$(m\sin.\theta+n)(m'\sin.\theta+n')\ldots\ldots\ldots$$

on écrirait ensuite l'équation

$$F(\sin.\theta)=(m\sin.\theta+n)(m'\sin.\theta+n')\ldots\ldots\ldots$$

Suivant cette manière de voir, il est clair, que rien n'empêche de

remplacer $\sin.\theta$ par $\frac{1}{k\sin.\theta}$: par-là on formera deux autres équations également vraies. Pour effectuer ce changement, nous ferons

$$D''' = \sin.^2\alpha_2 . \sin.^2\alpha_4 . \sin.^2\alpha_6 \ldots\ldots\ldots \sin.^2\alpha_{p-1} ;$$

$$(46) \ldots\ldots \qquad \zeta_{(1)} . (\sin.\theta) =$$

$$(1 - k\sin.\theta_1 . \sin.\theta)(1 - k\sin.\theta_2 . \sin.\theta) \ldots\ldots (1 - k\sin.\theta_{p-1} . \sin.\theta) ;$$

$$(47) \ldots \Pi_{(1)}(\sin.\theta) = \left(1 - \frac{\sin.^2\theta}{\sin.^2\alpha_2}\right) . \left(1 - \frac{\sin.^2\theta}{\sin.^2\alpha_4}\right) \ldots\ldots \left(1 - \frac{\sin.^2\theta}{\sin.^2\alpha_{p-1}}\right) ;$$

$$(48) \ldots \Omega_{(1)}(\sin.\theta) = (1 - k\sin.\alpha_1 . \sin.\theta)^2 (1 + k\sin.\alpha_3 . \sin.\theta)^2$$
$$(1 - k\sin.\alpha_5 . \sin.\theta)^2 (1 + k\sin.\alpha_7 . \sin.\theta)^2$$
$$\ldots\ldots (1 - k\sin.\alpha_{p-4} . \sin.\theta)^2 (1 + k\sin.\alpha_{p-2} . \sin.\theta)^2 ;$$

ce qui donne

$$\zeta\left(\frac{1}{k\sin.\theta}\right) = \frac{\zeta_{(1)}(\sin.\theta)}{D''.k^{p-1}(\sin.\theta)^{p-1}} ;$$

$$\Pi\left(\frac{1}{k\sin.\theta}\right) = \frac{D'''.\Pi_{(1)}(\sin.\theta)}{(\sin.\theta)^{p-1}} ;$$

$$\Omega\left(\frac{1}{k\sin.\theta}\right) = \frac{\Omega_{(1)}(\sin.\theta)}{D'.k^{p-1}(\sin.\theta)^{p-1}} ;$$

$$\frac{\zeta\left(\frac{1}{k\sin.\theta}\right)}{\Pi\left(\frac{1}{k\sin.\theta}\right)} = \frac{1}{D'D'''k^{p-1}} . \frac{\zeta_{(1)}(\sin.\theta)}{\Pi_{(1)}(\sin.\theta)} ;$$

$$\frac{\Omega\left(\frac{1}{k\sin.\theta}\right)}{\Pi\left(\frac{1}{k\sin.\theta}\right)} = \frac{1}{D'D'''k^{p-1}} . \frac{\Omega_{(1)}(\sin.\theta)}{\Pi_{(1)}(\sin.\theta)} ;$$

et transforme les équations (42) et (45) en celles-ci ;

$$(49) \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} & 1 - \frac{1}{k^p D'D'''} . \frac{(1 - k\sin.\varphi . \sin.\theta)}{(1 - \sin.\varphi)} . \frac{\Pi(\sin.\varphi)}{\Omega(\sin.\varphi)} . \frac{\zeta_{(1)}(\sin.\theta)}{\sin.\theta\,\Pi_{(1)}(\sin.\theta)} \\ & = \frac{-1}{k^p D'D'''} . \frac{(1 - k\sin.\theta)}{(1 - \sin.\varphi)} . \frac{\Pi(\sin.\varphi)}{\Omega(\sin.\varphi)} . \frac{\Omega_{(1)}(\sin.\theta)}{\sin.\theta\,\Pi_{(1)}(\sin.\theta)} ; \end{aligned} \right.$$

$$(50)\ldots\left\{\begin{aligned}&1+\frac{1}{k^p D' D'''}\cdot\frac{(1+k\sin.\varphi.\sin.\theta)}{(1+\sin.\varphi)}\cdot\frac{\Pi(\sin.\varphi)}{\Omega(\sin.\varphi)}\cdot\frac{\zeta_{(1)}(\sin.\theta)}{\sin.\theta\,\Pi_{(1)}(\sin.\theta)}\\&=\frac{1}{k^p D' D'''}\cdot\left(\frac{1+k\sin.\theta}{1+\sin.\varphi}\right)\cdot\frac{\Pi(\sin.\varphi)}{\Omega(\sin.\varphi)}\cdot\frac{\Omega_{(1)}(\sin.\theta)}{\sin.\theta\,\Pi_{(1)}(\sin.\theta)}\,.\end{aligned}\right.$$

Actuellement, si l'on fait

$$(51)\ldots\left\{Y=\frac{D''}{D'}\cdot\frac{\sin.\theta\,\zeta(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}\;;\qquad Y'=\frac{D''}{D'}\cdot\frac{\sin.\theta\,\Pi_{(1)}(\sin.\theta)}{\zeta_{(1)}(\sin.\theta)}\;,\right.$$

les équations (42) et (49) appartenantes au cas de

$$p=4i+1$$

deviendront

$$(52)\ldots\left\{\begin{aligned}&1-Y\frac{\left(1-\frac{\sin.\varphi}{\sin.\theta}\right)}{1-\sin.\varphi}\cdot\frac{\Pi(\sin.\varphi)}{\Omega(\sin.\varphi)}=\left(\frac{1-\sin.\theta}{1-\sin.\varphi}\right)\cdot\frac{\Pi(\sin.\varphi)}{\Omega(\sin.\varphi)}\cdot\frac{\Omega(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}\;;\\&1-\frac{D''}{k^p D'^2 D'''}\cdot\frac{1}{Y'}\cdot\frac{(1-k\sin.\varphi.\sin.\theta)}{(1-\sin.\varphi)}\cdot\frac{\Pi(\sin.\varphi)}{\Omega(\sin.\varphi)}\\&=\frac{-1}{k^p D' D'''}\cdot\left(\frac{1-k\sin.\theta}{1-\sin.\varphi}\right)\cdot\frac{\Pi(\sin.\varphi)}{\Omega(\sin.\varphi)}\cdot\frac{\Omega_{(1)}(\sin.\theta)}{\sin.\theta\,\Pi_{(1)}(\sin.\theta)}\;;\end{aligned}\right.$$

et les équations (45), (50) appartenantes au cas de

$$p=4i-1$$

deviendront

$$(53)\ldots\left\{\begin{aligned}&1+Y\frac{\left(1-\frac{\sin.\varphi}{\sin.\theta}\right)}{1+\sin.\varphi}\cdot\frac{\Pi(\sin.\varphi)}{\Omega(\sin.\varphi)}=\left(\frac{1+\sin.\theta}{1+\sin.\varphi}\right)\cdot\frac{\Pi(\sin.\varphi)}{\Omega(\sin.\varphi)}\cdot\frac{\Pi(\sin.\theta)}{\Omega(\sin.\theta)}\;;\\&1+\frac{D''}{k^p D'^2 D'''}\cdot\frac{1}{Y'}\cdot\frac{(1+k\sin.\varphi.\sin.\theta)}{(1+\sin.\varphi)}\cdot\frac{\Pi(\sin.\varphi)}{\Omega(\sin.\varphi)}\\&=\frac{1}{k^p D' D'''}\cdot\left(\frac{1+k\sin.\theta}{1+\sin.\varphi}\right)\cdot\frac{\Pi(\sin.\varphi)}{\Omega(\sin.\varphi)}\cdot\frac{\Omega_{(1)}(\sin.\theta)}{\sin.\theta\,\Pi_{(1)}(\sin.\theta)}\,.\end{aligned}\right.$$

L'amplitude φ étant donnée, on aura la valeur de

$$\xi=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}}\;;$$

ensuite, à l'aide de l'équation (27),

$$\xi + \frac{4n}{p} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 . \sin.^2 \varphi}} = \int_0^{\theta_n} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 . \sin.^2 \varphi}} ,$$

on pourra déterminer les amplitudes θ_1, θ_2, ... θ_{p-1}. Le coefficient D'' deviendra par là une quantité connue, ainsi que les différens coefficiens de $\sin.\theta$, qu'on voit dans le second membre des équations (36) et (46). Les fractions rationnelles désignées par Y et Y' seront non-seulement connues, mais, de plus, leur numérateur et leur dénominateur se présentera comme une fonction entière et rationnelle de $\sin.\theta$, décomposée dans ses facteurs réels. Et comme, outre cela, ces mêmes fractions sont assujetties aux deux équations (52) ou (53), suivant que le nombre p sera de la forme $4i+1$, ou $4i-1$, on conçoit, que cette double circonstance pourra faire découvrir des propriétés qui seraient autrement inconnues, ou du moins fort difficiles à mettre en évidence. C'est de quoi on aura un exemple remarquable dans le paragraphe suivant.

§ II.

Application des formules générales au cas particulier de $\varphi = 0$.

[6] En faisant $\varphi = 0$, l'on a $\Pi(\sin.\varphi) = 1$, $\Omega(\sin.\varphi) = 1$; ce qui réduit les équations (52), relatives au cas de

$$p = 4i + 1 ,$$

à

$$(54) \ldots \begin{cases} 1 - Y = (1 - \sin.\theta) . \dfrac{\Omega(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)} ; \\ 1 - \dfrac{D''}{k^p D'^2 D'''} \cdot \dfrac{1}{Y'} = \dfrac{-1}{k^p D' D'''} \cdot \dfrac{(1 - k \sin.\theta)}{\sin.\theta} \cdot \dfrac{\Omega_{(1)}(\sin.\theta)}{\Pi_{(1)}(\sin.\theta)} ; \end{cases}$$

et les équations (53), relatives au cas de

$$p = 4i - 1 ,$$

à

$$(55)\ldots \begin{cases} 1+Y=(1+\sin.\theta).\dfrac{\Omega(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}\ ; \\ 1+\dfrac{D''}{k^p D'^2 D'''}.\dfrac{1}{Y'}=\dfrac{1}{k^p D' D'''}.\dfrac{(1+k\sin.\theta)}{\sin.\theta}.\dfrac{\Omega_{(1)}(\sin.\theta)}{\Pi_{(1)}(\sin.\theta)}\ ; \end{cases}$$

où les expressions de Y et Y' sont celles déterminées par les équations (51). Et pour cela il faut, avant d'aller plus loin, avoir les valeurs de $\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots \theta_n$ correspondantes à $\varphi=0$.

D'après l'équation (27), il est clair que, ayant $\varphi=0$, $\xi=0$, on doit avoir $\theta_n=\alpha_{4n}$, partant nous avons

$$\theta_1=\alpha_4\ ;\quad \theta_2=\alpha_8\ ;\quad \theta_3=\alpha_{12}\ ;\quad \ldots\ldots\ \theta_{p-1}=\alpha_{4(p-1)}.$$

Mais

$$\sin.\alpha_{4(p-1)}=\sin.A\left(\frac{4p-4}{p}K\right)=\sin.A\left(4K-\frac{4K}{p}\right)\ ;$$

donc, en vertu des formules (1) et (4), l'on a :

$$\sin.\alpha_{4(p-1)}=-\sin.\alpha_4\ ;\qquad \sin.\theta_{p-1}=-\sin.\alpha_4=-\sin.\theta_1\ .$$

De sorte que les valeurs extrêmes de $\sin.\theta_1$ et $\sin.\theta_{p-1}$ sont égales et de signe contraire; de manière que

$$\sin.\theta_1=\sin.\alpha_4\ ;\qquad \sin.\theta_{p-1}=-\sin.\alpha_4\ .$$

On démontre de même, que

$$\sin.\theta_2=\sin.\alpha_8\ ;\qquad \sin.\theta_{p-2}=-\sin.\alpha_8\ ;$$

$$\sin.\theta_3=\sin.\alpha_{12}\ ;\qquad \sin.\theta_{p-3}=-\sin.\alpha_{12}\ .$$

D'après la formule (4), l'on a

$$\sin.A\left(\frac{4n}{p}K\right)=-\sin.A\left(\frac{4n}{p}-2\right)K=\sin.\alpha_{2p-4n}\ ;$$

et d'après la formule (1), nous avons

$$\sin.A\left(\frac{4n}{p}K\right)=\sin.A\left(\frac{4n}{p}-4\right)K=-\sin.\alpha_{4p-4n}\ .$$

Donc, à l'aide des formules

$$\sin.\theta_n=\sin.\alpha_{4n}\ ;\qquad \sin.\theta_n=\sin.\alpha_{2p-4n}\ ;$$

$$\sin.\theta_n=-\sin.\alpha_{4n-2p}\ ;\qquad \sin.\theta_n=-\sin.\alpha_{4p-4n}\ ;$$

$$\sin.\theta_{p-n}=-\sin.\alpha_{2p-4n}\ ;\qquad \sin.\theta_{p-n+\lambda}=-\sin.\alpha_{4n-4\lambda p}$$

le nombre $p-1$ des *sinus*

$$\sin.\theta_1\,,\quad \sin.\theta_2\,,\quad \sin.\theta_3\,,\quad \ldots\ldots\ \sin.\theta_{p-1}$$

sera exprimé par le nombre $p-1$ des *sinus*

$$\begin{array}{lllll} \sin.\alpha_2\,, & \sin.\alpha_4\,, & \sin.\alpha_6\,, & \ldots\ldots & \sin.\alpha_{p-1}\,, \\ -\sin.\alpha_2\,, & -\sin.\alpha_4\,, & -\sin.\alpha_6\,, & \ldots\ldots & -\sin.\alpha_{p-1}\,, \end{array}$$

lesquels sont égaux deux à deux et de signe contraire.

Il suit de là que les équations (36) peuvent être changées dans celles-ci :

$$D''=(-1)^{\frac{p-1}{2}}.\sin.^2\alpha_2.\sin.^2\alpha_4.\sin.^2\alpha_6\ \ldots\ldots\ \sin.^2\alpha_{p-1}\ ;$$

$$\zeta(\sin.\theta)=\left(1-\frac{\sin.^2\theta}{\sin.^2\alpha_2}\right).\left(1-\frac{\sin.^2\theta}{\sin.^2\alpha_4}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{\sin.^2\theta}{\sin.^2\alpha_{p-1}}\right)\ ;$$

et que l'équation (46) peut être écrite ainsi :

$$\zeta_{(1)}(\sin.\theta)=(1-k^2\sin.^2\alpha_2.\sin.^2\theta)(1-k^2\sin.^2\alpha_4\sin.^2\theta)(1-k^2\sin.^2\alpha_6.\sin.^2\theta)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1-k^2\sin.^2\alpha_{p-1}.\sin.^2\theta)\ .$$

Donc, dans le cas de $\varphi=0$, nous avons

$$\zeta(\sin.\theta)=\Pi_{(1)}(\sin.\theta)\ ;\qquad \zeta_{(1)}(\sin.\theta)=\Pi(\sin.\theta)\ .$$

Les deux équations (51) sont par là réduites à l'unique équation

$$(56)\ldots\ldots\qquad \frac{Y'}{D''}=\frac{1}{D'}.\frac{\sin.\theta\,\Pi_{(1)}(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}\ .$$

Les équations (54) donnent

$$(57)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} 1-Y=(1-\sin.\theta).\dfrac{\Omega(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}\ ; \\[2ex] 1-\dfrac{1}{k^pD'^2.Y}=\dfrac{-1}{k^pD'D'''}.\dfrac{(1-k\sin.\theta)}{\sin.\theta}.\dfrac{\Omega_{(1)}(\sin.\theta)}{\Pi_{(1)}(\sin.\theta)}\ ; \end{array}\right.$$

c'est-à-dire

$$(58)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} Y=\dfrac{D'''}{D'}.\sin.\theta.\dfrac{\Pi_{(1)}(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}\ ; \\[2ex] 1-Y=(1-\sin.\theta).\dfrac{\Omega(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}\ ; \\[2ex] 1-hY=(1-k\sin.\theta).\dfrac{\Omega_{(1)}(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}\ ; \end{array}\right\}\ p=4i+1\ ;$$

en posant

$$(59) \ldots\ldots \quad h = k^p D'^2 = k^p (\sin.\alpha_1 . \sin.\alpha_3 . \sin.\alpha_5 \ldots\ldots \sin.\alpha_{p-2})^2$$

Les équations (55) donnent

$$(60) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} 1 + Y = (1 + \sin.\theta) \cdot \dfrac{\Omega(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)} \; ; \\[2ex] 1 + \dfrac{1}{k^p D'^2 . Y} = \dfrac{1}{k^p D' D'''} \cdot \dfrac{(1 + k \sin.\theta)}{\sin.\theta} \cdot \dfrac{\Omega_{(1)}(\sin.\theta)}{\Pi_{(1)}(\sin.\theta)} \; ; \end{array} \right.$$

c'est-à-dire

$$(61) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} Y = \dfrac{D'''}{D'} \cdot \sin.\theta \cdot \dfrac{\Pi_{(1)}(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)} \; ; \\[2ex] 1 + Y = (1 + \sin.\theta) \cdot \dfrac{\Omega(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)} \; ; \\[2ex] 1 + hY = (1 + k \sin.\theta) \cdot \dfrac{\Omega_{(1)}(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)} \; ; \end{array} \right\} \; p = 4i - 1 \; ;$$

où la valeur de h doit être calculée par la formule (59), conformément au nombre impair $p = 4i - 1$.

Les fonctions de $\sin.\theta$ représentées par $\Pi_{(1)}(\sin.\theta)$, $\Pi(\sin.\theta)$ étant des fonctions de $\sin.^2\theta$ deviennent les mêmes par le changement de $\sin.\theta$ en $-\sin.\theta$. Et comme les équations (58) et (61) doivent se vérifier par identité, il est permis d'en conclure, que pour le nombre *impair*

$$p = 4i + 1$$

on a les cinq équations

$$(A) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} Y = \dfrac{D'''}{D'} \cdot \sin.\theta \cdot \dfrac{\Pi_{(1)}(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)} \; , \\[2ex] 1 - Y = (1 - \sin.\theta) \cdot \dfrac{\Omega(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)} \; , \\[2ex] 1 + Y = (1 + \sin.\theta) \cdot \dfrac{\Omega(-\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)} \; , \\[2ex] 1 - hY = (1 - k \sin.\theta) \cdot \dfrac{\Omega_{(1)}(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)} \; , \\[2ex] 1 + hY = (1 + k \sin.\theta) \cdot \dfrac{\Omega_{(1)}(-\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)} \; ; \end{array} \right.$$

et que pour le nombre *impair*

$$p = 4i - 1$$

on a les cinq équations

$$Y = \frac{D'''}{D'} \cdot \sin.\theta \cdot \frac{\Pi_{(1)}(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)},$$

$$(A') \ldots\ldots \begin{cases} 1 + Y = (1 + \sin.\theta) \cdot \dfrac{\Omega(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}, \\ 1 - Y = (1 - \sin.\theta) \cdot \dfrac{\Omega(-\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}, \\ 1 + hY = (1 + k\sin.\theta) \cdot \dfrac{\Omega_{(1)}(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}, \\ 1 - hY = (1 - k\sin.\theta) \cdot \dfrac{\Omega_{(1)}(-\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}; \end{cases}$$

les valeurs de D', D''', h étant calculées dans l'un et l'autre cas d'après les formules:

$$(B) \ldots\ldots \begin{cases} D' = (\sin.\alpha_1 . \sin.\alpha_3 . \sin.\alpha_5 \ldots\ldots \sin.\alpha_{p-2})^2, \\ D''' = (\sin.\alpha_2 . \sin.\alpha_4 . \sin.\alpha_6 \ldots\ldots \sin.\alpha_{p-1})^2, \\ h = k^p (\sin.\alpha_1 . \sin.\alpha_3 . \sin.\alpha_5 \ldots\ldots \sin.\alpha_{p-2})^4. \end{cases}$$

Les quatre fonctions de $\sin.\theta$

$$\Pi_{(1)}(\sin.\theta), \quad \Pi(\sin.\theta), \quad \Omega_{(1)}(\sin.\theta), \quad \Omega(\sin.\theta)$$

sont composées ainsi qu'il suit:

$$(C) \ldots\ldots \begin{cases} \Pi_{(1)}(\sin.\theta) = \left(1 - \dfrac{\sin.^2\theta}{\sin.^2\alpha_2}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{\sin.^2\theta}{\sin.^2\alpha_4}\right) \ldots\ldots \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left(1 - \dfrac{\sin.^2\theta}{\sin.^2\alpha_{p-1}}\right); \\ \Pi(\sin.\theta) = (1 - k^2\sin.^2\alpha_2 . \sin.^2\theta)\,(1 - k^2\sin.^2\alpha_4 . \sin.^2\theta) \\ \qquad (1 - k^2\sin.^2\alpha_6 . \sin.^2\theta) \ldots (1 - k^2\sin.^2\alpha_{p-1} . \sin.^2\theta); \\ \Omega_{(1)}(\sin.\theta) = (1 - k\sin.\alpha_1 . \sin.\theta)^2 (1 + k\sin.\alpha_3 . \sin.\theta)^2 \\ \qquad (1 - k\sin.\alpha_5 . \sin.\theta)^2 (1 + k\sin.\alpha_7 . \sin.\theta)^2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad (1 - k\sin.\alpha_{p-4} . \sin.\theta)^2 (1 + k\sin.\alpha_{p-2} . \sin.\theta)^2; \\ \Omega(\sin.\theta) = \left(1 - \dfrac{\sin.\theta}{\sin.\alpha_1}\right)^2 \cdot \left(1 + \dfrac{\sin.\theta}{\sin.\alpha_3}\right)^2 \cdot \left(1 - \dfrac{\sin.\theta}{\sin.\alpha_5}\right)^2 \\ \qquad \left(1 + \dfrac{\sin.\theta}{\sin.\alpha_7}\right)^2 \cdot \left(1 - \dfrac{\sin.\theta}{\sin.\alpha_9}\right)^2 \cdot \left(1 + \dfrac{\sin.\theta}{\sin.\alpha_{11}}\right)^2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots \left(1 - \dfrac{\sin.\theta}{\sin.\alpha_{p-4}}\right)^2 \cdot \left(1 + \dfrac{\sin.\theta}{\sin.\alpha_{p-2}}\right)^2. \end{cases}$$

[7] Il importe de remarquer, avant d'aller plus loin, que, en faisant $\sin.\theta = 1$, la seconde des équations (A), donne immédiatement $Y = 1$, tandis que la première donne

$$Y = \frac{D'''}{D'} \cdot \frac{\Pi_{(1)}(1)}{\Pi(1)} :$$

où $\Pi_{(1)}$, et $\Pi(1)$ sont des quantités exprimées chacune par un nombre $\frac{p-1}{2}$ de facteurs tels que

$$\Pi_{(1)}(1) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot \frac{\cos.^2\alpha_2}{\sin.^2\alpha_2} \cdot \frac{\cos.^2\alpha_4}{\sin.^2\alpha_4} \cdot \frac{\cos.^2\alpha_6}{\sin.^2\alpha_6} \cdots\cdots \frac{\cos.^2\alpha_{p-1}}{\sin.^2\alpha_{p-1}} :$$

$$\Pi(1) = (1 - k^2\sin.^2.\alpha_2).(1 - k^2\sin.^2\alpha_4).(1 - k^2\sin.^2\alpha_6)\ldots(1 - k^2\sin.^2\alpha_{p-1}) :$$

donc, en remplaçant D''', D' par leurs valeurs, celle de Y peut être écrite ainsi ; savoir

$$Y = \frac{\cos.^2\alpha_2}{\sin.^2\alpha_{p-2}(1 - k^2\sin.^2\alpha_2)} \cdot \frac{\cos.^2\alpha_4}{\sin.^2\alpha_{p-4}(1 - k^2\sin.^2\alpha_4)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \frac{\cos.^2\alpha_{p-1}}{\sin.^2\alpha_1(1 - k^2\sin.^2\alpha_{p-1})} .$$

Pour chaque couple α_2, α_{p-2} ; α_4, α_{p-4} ; ..... α_1, α_{p-1} des amplitudes complémentaires, chacun des facteurs qu'on voit dans le second membre de cette équation est égal à l'unité; donc il est clair que les deux premières des équations (A) donnent, l'une et l'autre, $Y = 1$, lorsque $\sin.\theta = 1$. Au reste cela est aussi démontré par les équations (17) et (35), puisqu'elles donnent

$$D'''\Pi_{(1)}(1) = D : \qquad \Pi(1) = \frac{D}{D'} .$$

Cela posé il est évident, que la première et la troisième des équations (A) donnent $Y = -1$, en y faisant $\sin.\theta = -1$. Il est évident que la quatrième des mêmes équations donne $Y = \frac{1}{h}$ en y faisant $\sin.\theta = \frac{1}{k}$. Et pour démontrer que la première donne aussi $Y = \frac{1}{h}$, il faut observer que l'on a

$$\Pi\left(\frac{1}{k}\right) = \cos.^2\alpha_2 . \cos.^2\alpha_4 . \cos.^2\alpha_6 \ldots\ldots \cos.^2\alpha_{p-1} = D :$$

$$\Pi_{(1)}\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}} . (1 - k^2\sin.^2\alpha_2)(1 - k^2\sin.^2\alpha_4)\ldots\ldots(1 - k^2\sin.^2\alpha_{p-1})}{D'''\, k^{p-1}} :$$

donc, en ayant égard à l'équation (59), nous avons

$$Y = \frac{1}{h} \cdot \frac{D'}{D} \cdot (1 - k^2 \sin.^2 \alpha_2)(1 - k^2 \sin.^2 \alpha_4) \ldots\ldots (1 - k^2 \sin.^2 \alpha_{p-1}) :$$

mais dans le cas de $\sin. \theta = 1$, on a démontré que

$$\frac{D'}{D} \cdot (1 - k^2 \sin.^2 \alpha_2)(1 - k^2 \sin.^2 \alpha_4) \ldots\ldots (1 - k^2 \sin.^2 \alpha_{p-1}) = 1 :$$

partant $Y = \frac{1}{h}$.

Maintenant il est clair, que la première et la cinquième des équations (A), donnent, l'une et l'autre, $Y = -\frac{1}{h}$, en faisant $\sin. \theta = -\frac{1}{k}$. Il serait superflu de démontrer, que les équations (A') présentent le même accord.

[8] En substituant pour Y sa valeur, soit dans la seconde des équations (A), soit dans la seconde des équations (A'), on obtient une équation de la forme

$$\Pi(x) \mp \frac{x}{\mu} \Pi'(x) = (1 \mp x) \left[\Pi''(x)\right]^2 ,$$

qui doit être *identiquement vraie*, ainsi que cela a été annoncé dans le préambule de ce Mémoire.

D'après la quatrième des formules (C), si l'on fait

$$(62) \ldots\ldots \Pi_{(2)}(\sin. \theta) = \sqrt{\Omega(\sin. \theta) . \Omega(-\sin. \theta)} ,$$

il est évident que l'on a

$$(63) \ldots\ldots \Pi_{(2)}(\sin. \theta) = \left(1 - \frac{\sin.^2 \theta}{\sin.^2 \alpha_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{\sin.^2 \theta}{\sin.^2 \alpha_3}\right) \ldots \left(1 - \frac{\sin.^2 \theta}{\sin.^2 \alpha_{p-2}}\right) .$$

Et d'après la troisième des mêmes formules (C), si l'on fait

$$(64) \ldots\ldots \Omega_{(2)}(\sin. \theta) = \sqrt{\Omega_{(1)}(\sin. \theta) . \Omega_{(1)}(-\sin. \theta)} :$$

l'on a :

$$(65) \ldots\ldots \Omega_{(2)}(\sin. \theta) = (1 - k^2 \sin.^2 \alpha_1 . \sin.^2 \theta)(1 - k^2 \sin.^2 \alpha_3 . \sin.^2 \theta)$$
$$(1 - k^2 \sin.^2 \alpha_5 . \sin.^2 \theta) \ldots (1 - k^2 \sin.^2 \alpha_{p-2} . \sin.^2 \theta) .$$

Il suit de là et des formules (A) qu'on peut établir ces trois formules générales, savoir :

$$(\mathrm{A}^{\mathrm{II}})\ldots\ldots\left\{\begin{aligned} Y &= \frac{D'''}{D'}\cdot\sin.\theta\cdot\frac{\Pi_{(1)}(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}\ ;\\ \sqrt{1-Y^2} &= \cos.\theta\ .\frac{\Pi_{(2)}(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}\ ;\\ \sqrt{1-h^2Y^2} &= \sqrt{1-k^2\sin.^2\theta}\cdot\frac{\Omega_{(2)}(\sin.\theta)}{\Pi(\sin.\theta)}\ ;\end{aligned}\right.$$

où $\Pi(\sin.\theta)$, $\Pi_{(1)}(\sin.\theta)$, $\Pi_{(2)}(\sin.\theta)$, $\Omega_{(2)}(\sin.\theta)$ sont quatre fonctions entières et rationnelles de $\sin.^2\theta$, chacune du degré $\frac{p-1}{2}$ par rapport à cette variable.

En faisant $\sin.\theta=1$, et $Y=1$, la première et la troisième de ces équations donnent

$$1=\frac{D'''}{D'}\cdot\frac{\Pi_{(1)}(1)}{\Pi(1)}\ ;\qquad \frac{h'}{k'}=\frac{\Omega_{(2)}(1)}{\Pi(1)}\ ;$$

partant il est évident que l'on a :

$$\frac{h'}{k'}\cdot\frac{D'''}{D'}=\frac{\Omega_{(2)}(1)}{\Pi_{(1)}(1)}=\frac{D'''.\Omega_{(2)}(1)}{D}\ .$$

Le produit $D'''.\Omega_{(2)}(1)$ est composé du produit des facteurs

$$(1-k^2\sin.^2\alpha_1)\sin.^2\alpha_{p-1}\ ;\qquad (1-k^2\sin.^2\alpha_3)\sin.^2\alpha_{p-3}\ ;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1-k^2\sin.^2\alpha_{p-2})\sin.^2\alpha_2\ ;$$

lesquels sont égaux, respectivement, à $\cos.^2\alpha_1$, $\cos.^2\alpha_3$, ... $\cos.^2\alpha_{p-2}$. Donc, on peut établir l'équation

$$\frac{h'}{k'}\cdot\frac{D'''}{D'}=\left(\frac{\cos.\alpha_1.\cos.\alpha_3.\cos.\alpha_5\ldots\ldots\cos.\alpha_{p-2}}{\cos.\alpha_2.\cos.\alpha_4.\cos.\alpha_6\ldots\ldots\cos.\alpha_{p-1}}\right)^2,$$

tandis que les équations (B) donnent

$$\frac{h}{k}\cdot\frac{D'''}{D'}=k^{p-1}\left(\frac{\sin.\alpha_2.\sin.\alpha_4.\sin.\alpha_6\ldots\ldots\sin.\alpha_{p-1}}{\sin.\alpha_1.\sin.\alpha_3.\sin.\alpha_5\ldots\ldots\sin.\alpha_{p-2}}\right)\ .$$

Il est manifeste que ces formules sont applicables dans le cas de $p=4i+1$, comme dans le cas de $p=4i-1$. De sorte que, pour toute valeur *impaire* du nombre p on a l'équation

$$(\mathrm{A}^{\mathrm{III}})\ldots\ldots\left\{\begin{aligned}&\sqrt{(1-Y^2)(1-h^2Y^2)}=\\ &\cos.\theta.\sqrt{1-k^2\sin.^2\theta}\cdot\frac{\Pi_{(2)}(\sin.\theta).\Omega_{(2)}(\sin.\theta)}{\left|\Pi(\sin.\theta)\right|^2}\ .\end{aligned}\right.$$

En réfléchissant sur la forme de cette équation on est naturellement conduit à penser qu'elle peut renfermer le principe de la transformation des transcendantes elliptiques de première espèce. Voici comment cette propriété peut être mise en évidence.

[9] Soit $\frac{D'''}{D'} = \frac{1}{\mu}$; $\sin.\theta = x$: et

$$(\mathrm{A}^{\mathrm{IV}}) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{c} U = \Pi_{(1)}(x) = \\ \left(1 - \frac{x^2}{\sin.^2\alpha_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\sin.^2\alpha_4}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\sin.^2\alpha_6}\right) \ldots \left(1 - \frac{x^2}{\sin.^2\alpha_{p-1}}\right) : \\ P' = \Pi_{(2)}(x) = \\ \left(1 - \frac{x^2}{\sin.^2\alpha_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\sin.^2\alpha_3}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\sin.^2\alpha_5}\right) \ldots \left(1 - \frac{x^2}{\sin.^2\alpha_{p-2}}\right) ; \\ Q' = \Omega_{(2)}(x) = \\ (1 - k^2x^2\sin.^2\alpha_1) \cdot (1 - k^2x^2\sin.^2\alpha_3) \ldots\ldots (1 - k^2x^2\sin.^2\alpha_{p-2}) ; \\ V = \Pi(x) = \\ (1 - k^2x^2\sin.^2\alpha_2) \cdot (1 - k^2x^2\sin.^2\alpha_4) \ldots\ldots (1 - k^2x^2\sin.^2\alpha_{p-1}) ; \end{array} \right.$$

l'on aura

$$(\mathrm{A}^{\mathrm{V}}) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{c} Y = \frac{1}{\mu} \cdot x \cdot \frac{U}{V} ; \\ \sqrt{(1 - Y^2)(1 - h^2Y^2)} = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)} \cdot \frac{P'Q'}{V^2} . \\ \sqrt{1 - h^2Y^2} = \sqrt{1 - k^2x^2} \cdot \frac{Q'}{V} : \\ \sqrt{1 - Y^2} = \sqrt{1 - x^2} \cdot \frac{P'}{V} ; \end{array} \right.$$

Maintenant, si l'on fait

$$X = \frac{1}{\mu} \cdot x\, U ,$$

la seconde des équations $(\mathrm{A}^{\mathrm{V}})$ donnera, après avoir remplacé Y par $\frac{X}{V}$;

$$(\mathrm{A}^{\mathrm{VI}}) \ldots\ldots \qquad \frac{(V^2 - X^2)(V^2 - h^2X^2)}{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)} = (P'Q')^2 .$$

Avec une légère réflexion on conçoit, que le numérateur du premier membre de cette équation doit être divisible par $(1 - x^2)(1 - k^2x^2)$. En effet, soit pour un moment :

$$V = 1 + M_{(1)} x^2 + M_{(2)} x^4 \ldots\ldots + M_{\left(\frac{p-1}{2}\right)} \cdot x^{p-1} ;$$

$$X = \frac{x}{\mu}\left(1 + N_{(1)} x^2 + N_{(2)} x^4 \ldots\ldots + N_{\left(\frac{p-1}{2}\right)} \cdot x^{p-1}\right) .$$

Nous avons démontré au N.° [7], que l'on doit avoir $V = 1$, et par conséquent $\frac{X}{V} = 1$, lorsque $x = 1$. Donc le polynome $V - X$ devient égal à zéro, lorsque $x = 1$; de sorte que l'on a:

$$0 = 1 + M_{(1)} + M_{(2)} + M_{(3)} \ldots\ldots + M_{\left(\frac{p-1}{2}\right)}$$
$$- \frac{1}{\mu}\left\{1 + N_{(1)} + N_{(2)} + N_{(3)} \ldots\ldots + N_{\left(\frac{p-1}{2}\right)}\right\} .$$

En retranchant cette quantité nulle de $V - X$, on obtient l'équation

$$V - X = \frac{1}{\mu}(1 - x) + \frac{1}{\mu} N_{(1)} (1 - x^3) + \frac{1}{\mu} N_{(2)} (1 - x^5)$$
$$+ \frac{1}{\mu} N_{(3)} (1 - x^7) \ldots\ldots + \frac{1}{\mu} N_{\left(\frac{p-1}{2}\right)} (1 - x^p)$$
$$- M_{(1)} (1 - x^2) - M_{(2)} (1 - x^4) \ldots\ldots - M_{\left(\frac{p-1}{2}\right)} (1 - x^{p-1}) ,$$

qui, par sa forme, démontre que le polynome $V - X$ doit être divisible par $1 - x$. On démontre de la même manière, que $V + X$ est divisible par $1 + x$; que $V - hX$ et $V + hX$ sont, respectivement, divisibles par $1 - kx$ et $1 + kx$. Car on a vu précédemment, qu'en faisant $x = \frac{1}{k}$ on doit avoir $\frac{X}{V} = \frac{1}{h}$, et par conséquent $V - hX = 0$; c'est-à-dire

$$0 = 1 + M_{(1)} \cdot \frac{1}{k^2} + M_{(2)} \cdot \frac{1}{k^4} + \ldots\ldots\ldots + M_{\left(\frac{p-1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{k^{p-1}}$$
$$- \frac{h}{\mu}\left\{1 + N_{(1)} \cdot \frac{1}{k^2} + N_{(2)} \cdot \frac{1}{k^4} + \ldots\ldots\ldots + N_{\left(\frac{p-1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{k^{p-1}}\right\} .$$

Donc, en retranchant cette quantité nulle de $V - hX$ l'on a l'équation

$$V - hX = \frac{h}{\mu} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{N_{(1)}}{k^2}(1 - k^2 x^2) + \frac{N_{(2)}}{k^4}(1 - k^4 x^4) \\ + \frac{N_{(3)}}{k^6}(1 - k^6 x^6) \ldots\ldots\ldots + \frac{N_{\left(\frac{p-1}{2}\right)}}{k^{p-1}}(1 - k^{p-1} x^{p-1}) \end{array} \right\}$$
$$- \frac{M_{(1)}}{k^2}(1 - k^2 x^2) - \frac{M_{(2)}}{k^4}(1 - k^4 x^4) \ldots - \frac{M_{\left(\frac{p-1}{2}\right)}}{k^{p-1}}(1 - k^{p-1} x^{p-1}) ;$$

qui met en évidence la divisibilité du polynome $V-hX$ par $1-kx$. Il est clair que le polynome $V+hX$ doit être divisible par $1+kx$.

Le premier membre de l'équation (A^{VI}) est donc équivalent à un polynome entier et rationnel du degré $4p-4$, formé par les puissances paires de x. Et comme ce polynome doit être identique au second membre de la même équation, il faut le considérer comme formé par le carré d'un polynome en x^2 du degré $2p-2$. Il suit de là que en faisant

$$V-X=(1-x)X'^2\ ; \qquad V+X=(1+x)X''^2\ ;$$

$$V-hX=(1-kx)X'''^2\ ; \qquad V+hX=(1+kx)X^{IV\,2}\ ;$$

il faudra considérer X', X'', X''', X^{IV} comme des polynomes du degré $\frac{p-1}{2}$ tels que, en vertu de l'équation (A^{VI}), l'on a

$$G(X'.X''.X'''.X^{IV})=P'Q'\ ;$$

G désignant un coefficient constant. Mais il est facile de démontrer que $G=1$, en observant, que les équations (A^{IV}) donnent $P'Q'=1$, lorsque $x=0$, et que les polynomes

$$X'^2=\frac{V-X}{1-x}\ ; \qquad X''^2=\frac{V+X}{1+x}\ ;$$

$$X'''^2=\frac{V-hX}{1-kx}\ ; \qquad X^{IV\,2}=\frac{V+hX}{1+kx}\ ;$$

se reduisent à l'unité lorsque $x=0$. Il est par là démontré que

$$(A^{VII})\ \ldots\ldots \qquad P'Q'=X'.X''.X'''.X^{IV}\ .$$

Cette égalité offre le moyen d'exprimer autrement le produit $P'Q'$: car, en différentiant par rapport à x l'équation $Y=\frac{X}{V}$, on a l'équation

$$V^2.\frac{dY}{dx}=V.\frac{dX}{dx}-X.\frac{dV}{dx}\ ,$$

où le second membre est un polynome du degré $2p-2$; c'est-à-dire du même degré que le produit $P'Q'$. Or, en écrivant l'équation identique

$$V.\frac{dX}{dx}-X.\frac{dV}{dx}=(V-X).\frac{dX}{dx}-X.\frac{d.(V-X)}{dx}\ ;$$

et remplaçant $V-X$ par sa valeur $(1-x)X'^2$, on obtient facilement l'équation

$$V.\frac{dX}{dx}-X.\frac{dV}{dx}=X'.\left\{XX'+X'(1-x).\frac{dX}{dx}-2(1-x)X.\frac{dX'}{dx}\right\}.$$

par laquelle on voit, que le polynome $V.\frac{dX}{dx}-X.\frac{dV}{dx}$ est nécessairement divisible par X'. On démontrera que ce même polynome est aussi divisible par X''; par X'''; par X^{IV}, en considérant les identités

$$V.\frac{dX}{dx}-X.\frac{dV}{dx}=(V+X).\frac{dX}{dx}-X.\frac{d.(V+X)}{dx};$$

$$V.\frac{dX}{dx}-X.\frac{dV}{dx}=(V-hX).\frac{dX}{dx}-X.\frac{d.(V-hX)}{dx};$$

$$V.\frac{dX}{dx}-X.\frac{dV}{dx}=(V+hX).\frac{dX}{dx}-X.\frac{d.(V+hX)}{dx}.$$

Donc, il doit être divisible par $X'.X''.X'''.X^{\text{IV}}$ et ne peut différer de $P'Q'$ que par un facteur constant, puisque l'un et l'autre sont du même degré. Soit G' ce facteur constant: l'équation

$$V.\frac{dX}{dx}-X.\frac{dV}{dx}=G'P'Q',$$

devant se vérifier pour toute valeur de x; si l'on fait $x=0$ dans les deux membres, l'on a $P'Q'=1$, $V=1$, et $G'=\frac{1}{\mu}$. De sorte que l'on a

$$P'Q'=\mu\left(V.\frac{dX}{dx}-X.\frac{dV}{dx}\right);\qquad V^2.\frac{dY}{dx}=\frac{P'Q'}{\mu}.$$

Par cette dernière équation nous voyons que la seconde des équations (A^{V}) revient à dire que

$$\frac{\sqrt{(1-Y^2)(1-h^2Y^2)}}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\mu.\frac{dY}{dx}.$$

Et par là nous en concluons, que l'équation différentielle

$$(\text{A}^{\text{VIII}})\ldots\quad\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{\mu.dY}{\sqrt{(1-Y^2)(1-h^2Y^2)}}$$

sera identiquement satisfaite, en y faisant

$$y = \frac{1}{\mu} . x \frac{U}{V} ;$$

U et V étant deux polynomes entiers et rationnels en x, du degré $p-1$, déterminés par les équations (A^{IV}): et les constantes μ et h étant déterminées par les équations

$$\mu = \frac{D'}{D'''} , \qquad h = k^p . D'^2 ,$$

et par les équations (B).

Ce résultat, tout-à-fait remarquable, n'a rien de surprenant, si l'on réfléchit qu'il a été *rencontré*, et non cherché *a priori*, par la manière dont notre analyse a été conduite. Dès que l'on a vu l'existence des équations (A), il était naturel d'en dériver l'équation (A^{VI}). Et le passage de cette équation à l'équation différentielle (A^{VIII}) était facile à prévoir, ayant la connaissance des recherches publiées par Legendre en 1825 sur la transformation des transcendantes elliptiques.

Il est probable que Jacobi se sera proposé le problème relatif à la formation générale de deux équations de la forme

$$\sin.\psi = \sin.\theta . \frac{f(\sin.\theta)}{f'(\sin.\theta)} ; \qquad \cos.\psi = \cos.\theta . \frac{f''(\sin.\theta)}{f'(\sin.\theta)} ,$$

de manière que $f(\sin.\theta)$, $f'(\sin.\theta)$, $f''(\sin.\theta)$ soient des fonctions entières et rationnelles de $\sin.\theta$ du même degré, et que, en écartant tout-à-fait la considération des polynomes formés avec des coefficiens indéterminés, il ait trouvé les équations (A). Ce premier obstacle une fois franchi, l'idée d'élargir la sphère des recherches de Legendre était naturelle, mais la difficulté de réaliser un tel projet ne pouvait être surmontée que par une connaissance approfondie de toutes les branches de l'analyse algébrique, et l'éminent talent de savoir appliquer les artifices qu'elle enseigne avec la variété conforme aux différentes circonstances qui naissent dans le progrès des recherches mathématiques.

L'opinion émise par Legendre, à la page 77 du troisième Volume de sa Théorie des Fonctions Elliptiques, me paraît moins probable, quoiqu'il soit à-peu-près impossible de deviner les artifices que Jacobi aura employés dans le commencement de ses recherches sur la Théorie des Fonctions Elliptiques. Euler, seul, aurait légué à la postérité le récit de ses tentatives, et même des hasards, qui, par leur réunion, auraient contribué au succès complet d'une semblable découverte.

[10] La seule inspection de la seconde des équations (A) ou (A') suffit pour démontrer, que, pour toute valeur positive de $\sin.\theta = x$, on doit avoir pour Y une valeur positive plus petite que l'unité. De sorte qu'il est permis de faire

$$(66) \ldots\ldots \qquad Y = \sin\psi = \frac{1}{\mu}.\sin.\theta.\frac{U}{T} ;$$

ce qui transforme l'équation (A^{VIII}) en

$$(67) \ldots\ldots \qquad \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\theta}} = \frac{\mu d\psi}{\sqrt{1-h^2.\sin.^2\psi}} ;$$

d'où l'on tire, en intégrant depuis $\theta = 0$, et $\psi = 0$,

$$(68) \ldots\ldots \qquad F(k, \theta) = \mu F(h, \psi) .$$

D'après l'équation (66) il est évident, que à $\theta = 0$ répond $\psi = 0$: mais il n'est pas aussi évident, que à $\theta = \frac{\pi}{2}$, doit répondre le multiple $p.\frac{\pi}{2}$ pour la valeur de ψ. En effet, la quatrième des équations (C) et la seconde des équations (A) démontrent que l'on a $\Omega(\sin.\theta) = 0$, et par conséquent $Y = 1$, pour toutes les valeurs positives de $\sin.\theta$ exprimées par

$$\sin.\theta = \sin.\alpha_1 ; \quad \sin.\theta = \sin.\alpha_5 ; \quad \sin.\theta = \sin.\alpha_9 : \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sin.\theta = \sin.\alpha_{p-4} .$$

Mais, pour l'amplitude α_1, la valeur $F(k, \alpha_1)$ du premier membre de l'équation (68) étant égale à $\frac{1}{p}.K$, l'on a

$$\frac{1}{p}.K = \mu F\left(h, \frac{\pi}{2}\right) = \mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-h^2.\sin.^2\psi}} = \mu H :$$

puisque la marche progressive des valeurs de ψ depuis $\psi = 0$, nous fait voir que l'arc $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ est le premier de ceux qui donnent $Y = 1$.

Pour l'amplitude $\theta = \alpha_5$, l'on a

$$F(k, \alpha_5) = \frac{5}{p}.K :$$

et par conséquent l'équation (68), donne

$$\frac{5}{p}.K=\mu F\left(h, 5\frac{\pi}{2}\right)=\mu.5H.$$

Donc, les amplitudes α_1, α_5, α_9, etc. étant toutes plus petites que $\frac{\pi}{2}$, il est manifeste que l'équation

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)=K=\mu F(h, \psi)$$

ne peut s'accorder avec les précédentes sans faire $\psi=p.\frac{\pi}{2}$.

Au reste on peut démontrer cette propriété de l'amplitude ψ d'une manière plus analytique, à l'aide d'une formule de LEGENDRE, qui consiste dans l'équation

$$\psi=\theta+2\theta_{(2)}+2\theta_{(4)}+2\theta_{(6)}\ldots\ldots\ldots+2\theta_{(p-1)}\ ;$$

les arcs $\theta_{(2)}$, $\theta_{(4)}$, etc. étant tels que

$$\text{tang.}\,\theta_{(2m)}=\sqrt{1-k^2.\sin.^2\alpha_{(2m)}}.\text{tang.}\,\theta=\Delta_{(2m)}.\text{tang.}\,\theta\ .$$

(Voyez la page 26 du Tome 3.ème de son Traité).

D'après la série de LAMBERT, l'on a

$$\theta_{(2m)}=\theta-\left(\frac{1-\Delta_{(2m)}}{1+\Delta_{(2m)}}\right)\sin.2\theta+\frac{1}{2}.\left(\frac{1-\Delta_{(2m)}}{1+\Delta_{(2m)}}\right)^2\sin.4\theta$$
$$-\frac{1}{3}.\left(\frac{1-\Delta_{(2m)}}{1+\Delta_{(2m)}}\right)^3\sin.6\theta+\text{etc.}\ ;$$

ou bien

$$\theta_{(2m)}=\theta-\frac{k^2\sin.^2\alpha_{2m}}{[1+\Delta_{(2m)}]^2}\sin.2\theta+\frac{1}{2}.\frac{k^4\sin.^4\alpha_{2m}}{[1+\Delta_{(2m)}]^4}\sin.4\theta$$
$$-\frac{1}{3}.\frac{k^6\sin.^6\alpha_{(2m)}}{[1+\Delta_{(2m)}]^6}\sin.6\theta+\text{etc.}$$

Donc nous avons

(66)' . . . . . $\psi=$

$$p\theta-k^2\left\{\frac{\sin.^2\alpha_2}{[1+\Delta_{(2)}]^2}+\frac{\sin.^2\alpha_4}{[1+\Delta_{(4)}]^2}+\ldots\ldots+\frac{\sin.^2\alpha_{p-1}}{[1+\Delta_{(p-1)}]^2}\right\}\sin.2\theta$$
$$+\frac{1}{2}k^4\left\{\frac{\sin.^4\alpha_2}{[1+\Delta_{(2)}]^4}+\frac{\sin.^4\alpha_4}{[1+\Delta_{(4)}]^4}+\ldots\ldots+\frac{\sin.^4\alpha_{p-1}}{[1+\Delta_{(p-1)}]^4}\right\}\sin.4\theta$$
$$-\frac{1}{3}k^6\left\{\frac{\sin.^6\alpha_2}{[1+\Delta_{(2)}]^6}+\frac{\sin.^6\alpha_4}{[1+\Delta_{(4)}]^6}+\ldots\ldots+\frac{\sin.^6\alpha_{p-1}}{[1+\Delta_{(p-1)}]^6}\right\}\sin.6\theta$$
$$+\text{etc.}$$

Ainsi il est manifeste que à $\theta = \frac{\pi}{2}$ répond $\psi = p.\frac{\pi}{2}$. D'après les équations (A^{v}) il est évident que

$$(69) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \cos.\psi = \cos.\theta.\frac{P'}{V} ;$$

$$(70) \ldots\ldots\ldots \quad \sqrt{1 - h^2.\sin.^2\psi} = \sqrt{1 - k^2.\sin.^2\theta}.\frac{Q'}{V} .$$

En donnant l'arc θ, on peut calculer la valeur correspondante de l'arc ψ à l'aide des formules (66) et (69). Mais pour cela, il faut avoir préparées les valeurs des amplitudes

$$\alpha_1 , \quad \alpha_2 , \quad \alpha_3 , \quad \alpha_4 \ldots\ldots\ldots \alpha_{p-1} .$$

Si on avait seulement les valeurs des amplitudes

$$\alpha_1 , \quad \alpha_3 , \quad \alpha_5 , \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha_{p-2} ,$$

on pourrait calculer la valeur de ψ par la formule suivante. En divisant la seconde des équations (A) par la troisième, et remplaçant $\Omega(\sin.\theta)$ par son expression donnée par la quatrième des équations (C), il est évident que l'on a:

$$\frac{1 - \sin.\psi}{1 + \sin.\psi} = \left(\frac{1 - \sin.\theta}{1 + \sin.\theta}\right).\left(\frac{\sin.\alpha_1 - \sin.\theta}{\sin.\alpha_1 + \sin.\theta}\right)^2.\left(\frac{\sin.\alpha_3 + \sin.\theta}{\sin.\alpha_3 - \sin.\theta}\right)^2 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \left(\frac{\sin.\alpha_{p-4} - \sin.\theta}{\sin.\alpha_{p-4} + \sin.\theta}\right)^2.\left(\frac{\sin.\alpha_{p-2} + \sin.\theta}{\sin.\alpha_{p-2} - \sin.\theta}\right)^2 .$$

Mais

$$\frac{1 - \sin.\psi}{1 + \sin.\psi} = \left(\frac{\cos.\frac{1}{2}\psi - \sin.\frac{1}{2}\psi}{\cos.\frac{1}{2}\psi + \sin.\frac{1}{2}\psi}\right)^2 = \tang.^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right) :$$

$$\frac{\sin.A - \sin.B}{\sin.A + \sin.B} = \frac{\tang.\frac{1}{2}(A - B)}{\tang.\frac{1}{2}(A + B)} .$$

Donc, par l'application de ces deux formules, il est clair que, en extrayant la racine carrée des deux membres de l'équation précédente, l'on a:

$$(71) \ldots\ldots \qquad \tang.\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right) = \tang.\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \times$$

$$\frac{\tang.\frac{1}{2}(\alpha_1 - \theta).\tang.\frac{1}{2}(\alpha_3 + \theta).\tang.\frac{1}{2}(\alpha_5 - \theta)\ldots\ldots\tang.\frac{1}{2}(\alpha_{p-2} + \theta)}{\tang.\frac{1}{2}(\alpha_1 + \theta).\tang.\frac{1}{2}(\alpha_3 - \theta).\tang.\frac{1}{2}(\alpha_5 + \theta)\ldots\ldots\tang.\frac{1}{2}(\alpha_{p-2} - \theta)} .$$

Cette formule, déduite des équations (A), est applicable au cas où

$p=4i+1$. Dans le cas de $p=4i-1$, il faut employer les formules (A'), lesquelles, par la division de la troisième par la seconde équation, donnent :

$$(72)\ \ldots\ldots\quad \text{tang.}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\psi}{2}\right)=\text{tang.}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times$$

$$\frac{\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha_1+\theta).\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha_3-\theta).\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha_5+\theta)\ldots\ldots\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha_{p-2}-\theta)}{\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\theta).\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha_3+\theta).\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha_5-\theta)\ldots\ldots\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(\alpha_{p-2}+\theta)}.$$

Toutefois il importe de remarquer ici, qu'il faut avoir sous les yeux les trois premières des équations (A) et (A'), pour saisir, sans aucun calcul, que la marche progressive des deux amplitudes θ et ψ est conforme à ces valeurs correspondantes; savoir:

$$\theta\ldots\ldots 0,\quad \alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3,\quad \alpha_4,\quad \alpha_5,\quad \alpha_6,\ \ldots\ldots\alpha_{p-1};$$

$$\psi\ldots\ldots 0,\quad \frac{\pi}{2},\quad \pi,\quad \frac{3\pi}{2},\quad 2\pi,\quad \frac{5\pi}{2},\quad 3\pi,\ \ldots\ldots p\frac{\pi}{2}.$$

§ III.

Passage du réel à l'imaginaire.

[11] L'équation (A^{VI}) étant vraie par identité, on peut y remplacer x par une quantité imaginaire. Soit donc $x=u.\sqrt{-1}$: alors les équations (A^{V}) donneront $y=v.\sqrt{-1}$;

$$(73)\ldots\ldots\quad\left\{\begin{aligned} v&=\frac{1}{\mu}.u\frac{U_{(1)}}{V_{(1)}}\ ;\\ \sqrt{1+v^2}&=\sqrt{1+u^2}\cdot\frac{P'_{(1)}}{V_{(1)}}\ ;\\ \sqrt{1+h^2v^2}&=\sqrt{1+k^2u^2}\cdot\frac{Q'_{(1)}}{V_{(1)}}\ ;\end{aligned}\right.$$

en posant

$$(74)\ldots\quad\left\{\begin{aligned} U_{(1)}&=\left(1+\frac{u^2}{\sin.^2\alpha_2}\right)\cdot\left(1+\frac{u^2}{\sin.^2\alpha_4}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{u^2}{\sin.^2\alpha_{p-1}}\right)\ ;\\ P'_{(1)}&=\left(1+\frac{u^2}{\sin.^2\alpha_1}\right)\cdot\left(1+\frac{u^2}{\sin.^2\alpha_3}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{u^2}{\sin.^2\alpha_{p-2}}\right)\ ;\\ Q'_{(1)}&=(1+k^2u^2\sin.^2\alpha_1)(1+k^2u^2\sin.^2\alpha_3)\ldots(1+k^2u^2\sin.^2\alpha_{p-2})\ ;\\ V_{(1)}&=(1+k^2u^2\sin.^2\alpha_2)(1+k^2u^2\sin.^2\alpha_4)\ldots(1+k^2u^2\sin.^2\alpha_{p-1})\ .\end{aligned}\right.$$

Et l'équation différentielle (A^{VIII}), en y faisant

$$x = u.\sqrt{-1}\ , \qquad Y = v.\sqrt{-1}\ ,$$

deviendra, après avoir supprimé le facteur commun $\sqrt{-1}$;

$$(75) \ldots\ldots \quad \frac{du}{\sqrt{(1+u^2)(1+k^2u^2)}} = \frac{\mu\, dv}{\sqrt{(1+v^2)(1+h^2v^2)}}\ .$$

Maintenant, si l'on fait

$$(76) \ldots \begin{cases} u = \text{tang.}\,\varphi\ ; \qquad v = \dfrac{1}{\mu}\,\text{tang.}\,\varphi\,.\,\dfrac{U'_{(1)}}{V'_{(1)}} = \text{tang.}\,\omega\ ; \\ U'_{(1)} = \left(1 + \dfrac{\text{tang.}^2\varphi}{\sin.^2\alpha_2}\right).\left(1 + \dfrac{\text{tang.}^2\varphi}{\sin.^2\alpha_4}\right) \ldots\ldots \left(1 + \dfrac{\text{tang.}^2\varphi}{\sin.^2\alpha_{p-1}}\right)\ ; \\ V'_{(1)} = (1 + k^2\text{tang.}^2\varphi\,.\,\sin.^2\alpha_2)(1 + k^2\text{tang.}^2\varphi\,.\,\sin.^2\alpha_4) \ldots\ldots\ldots \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1 + k^2\text{tang.}^2\varphi\,.\,\sin.^2\alpha_{p-1})\ ; \end{cases}$$

l'équation différentielle (75), en posant

$$k'^2 = 1 - k^2\ ; \qquad h'^2 = 1 - h^2\ ,$$

deviendra

$$(77) \ldots\ldots \quad \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2\sin.^2\varphi}} = \mu.\frac{d\omega}{\sqrt{1 - h'^2\sin.^2\omega}}\ .$$

En intégrant les deux membres de cette équation depuis $\varphi = 0$ et $\omega = 0$, l'on a donc, suivant la notation ordinaire de Legendre,

$$(78) \ldots\ldots \quad F(k', \varphi) = \mu.F(h', \omega)\ ;$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2\sin.^2\varphi}} = \mu.\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - h'^2\sin.^2\omega}}\ .$$

Comme à $\varphi = \frac{\pi}{2}$ répond $\omega = \frac{\pi}{2}$, si l'on fait

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2\sin.^2\varphi}} = K'\ ; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - h'^2\sin.^2\omega}} = H'\ ;$$

l'équation (78) démontre que l'on a

$$(79) \ldots\ldots \quad K' = \mu.H'\ .$$

Nous avons fait voir dans le numéro précédent, que l'équation (68) donne

$$(80) \ldots\ldots\ldots \qquad K = p\mu . H .$$

Ainsi, le facteur μ disparaît dans l'expression du rapport $\frac{K'}{K}$, et l'on a l'équation transcendante

$$(81) \ldots\ldots\ldots \qquad \frac{K'}{K} = p . \frac{H'}{H} ,$$

entre le couple des modules complémentaires k, k'; et h, h'.

Les équations (73) donnent :

$$(82) \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} \sin.\omega &= \frac{\sin.\varphi}{\mu} . \frac{U'_{(1)}}{P'_{(2)}} ; \\ \cos.\omega &= \cos.\varphi . \frac{V'_{(1)}}{P'_{(2)}} ; \\ \sqrt{1 - h'^2 \sin.^2\omega} &= \sqrt{1 - k'^2 \sin.^2\varphi} . \frac{Q'_{(2)}}{P'_{(2)}} , \end{aligned} \right.$$

en posant

$$(83) \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} P'_{(2)} &= \left(1 + \frac{\tang.^2\varphi}{\sin.^2\alpha_1}\right) . \left(1 + \frac{\tang.^2\varphi}{\sin.^2\alpha_3}\right) \ldots\ldots \left(1 + \frac{\tang.^2\varphi}{\sin.^2\alpha_{p-2}}\right) ; \\ Q'_{(2)} &= (1 + k^2 \tang.^2\varphi . \sin.^2\alpha_1) . (1 + k^2 \tang.^2\varphi . \sin.^2\alpha_3) \ldots . \\ &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1 + k^2 \tang.^2\varphi . \sin.^2\alpha_{p-2}) . \end{aligned} \right.$$

[12] Les équations (A), en y remplaçant V par $\sqrt{-1} . \tang.\omega$, et $\sin.\theta$ par $\sqrt{-1} . \tang.\varphi$, donnent

$$(84) \ldots \quad \frac{1 + \tang.\omega . \sqrt{-1}}{1 - \tang.\omega . \sqrt{-1}} = \left(\frac{1 + \tang.\varphi . \sqrt{-1}}{1 - \tang.\varphi . \sqrt{-1}}\right) . \frac{\Omega(-\tang.\varphi . \sqrt{-1})}{\Omega(\tang.\varphi . \sqrt{-1})} ;$$

$$(85) \ldots \quad \frac{1 + h \tang.\omega . \sqrt{-1}}{1 - h \tang.\omega . \sqrt{-1}} = \left(\frac{1 + k \tang.\varphi . \sqrt{-1}}{1 - k \tang.\varphi . \sqrt{-1}}\right) . \frac{\Omega_{(1)}(-\tang.\varphi . \sqrt{-1})}{\Omega_{(1)}(\tang.\varphi . \sqrt{-1})} .$$

La série ordinaire pour développer $\text{Log.}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, en y écrivant $x . \sqrt{-1}$ au lieu de x, donne

$$\text{Log.}\left(\frac{1 + x . \sqrt{-1}}{1 - x . \sqrt{-1}}\right) = 2 . \sqrt{-1} . \text{arc.}(\tang. = x) ;$$

$$\frac{1 + x . \sqrt{-1}}{1 - x . \sqrt{-1}} = e^{2 \sqrt{-1} . \text{arc.}(\tang. = x)} .$$

En appliquant cette formule au Logarithme hyperbolique des deux membres

de l'équation (84), après avoir fait

$$\frac{\text{tang.}\,\varphi}{\sin.\,\alpha_1} = \text{tang.}\,\varphi_1\ ;\quad \frac{\text{tang.}\,\varphi}{\sin.\,\alpha_3} = \text{tang.}\,\varphi_3\ ;\quad \ldots\ldots\quad \frac{\text{tang.}\,\varphi}{\sin.\,\alpha_{p-2}} = \text{tang.}\,\varphi_{p-2}\ :$$

il est évident que l'on en tire:

$$(86)\ \ldots\quad 2\omega = 2\varphi + 4(\varphi_1 - \varphi_3 + \varphi_5 - \varphi_7 + \ldots\ldots - \varphi_{p-2})\ .$$

En posant

$$h\,\text{tang.}\,\omega = \text{tang.}\,\omega_{(1)}\ ;\qquad k\,\text{tang.}\,\varphi = \text{tang.}\,\varphi_{(1)}\ ;$$

$$k\,\text{tang.}\,\varphi\,.\,\sin.\,\alpha_1 = \text{tang.}\,\varphi'_1\ ;\qquad k\,\text{tang.}\,\varphi\,.\,\sin.\,\alpha_3 = \text{tang.}\,\varphi'_3\ ;$$

$$k\,\text{tang.}\,\varphi\,.\,\sin.\,\alpha_5 = \text{tang.}\,\varphi'_5\ ;\quad \ldots\ldots\ldots\ k\,\text{tang.}\,\varphi\,.\,\sin.\,\alpha_{p-2} = \text{tang.}\,\varphi'_{p-2}\ ;$$

et prenant le Logarithme hyperbolique des deux membres de l'équation (85), l'on aura

$$(87)\ \ldots\quad 2\omega_{(1)} = 2\varphi_{(1)} + 4(\varphi'_1 - \varphi'_3 + \varphi'_5 - \varphi'_7 + \ldots\ldots - \varphi'_{p-2})\ .$$

Les équations (86) et (87) sont écrites en supposant le nombre p de la forme $4i+1$; s'il était de la forme $4i-1$, leur premier terme serait -2φ, $-2\varphi_{(1)}$; et le dernier terme serait $+4\varphi_{p-2}$, $+4\varphi'_{p-2}$: ce qui est manifeste par les équations (A').

Ces équations ayant lieu pour toute valeur de l'arc φ, en y supposant l'arc φ infiniment petit on en tire, pour les deux quantités constantes h et μ, une expression dont la forme est différente de celle donnée par les équations (B). En effet, la première des équations (82) donne

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\sin.\,\omega}{\sin.\,\varphi}\cdot\frac{P'_{(2)}}{U'_{(1)}}\ ,$$

et comme, par les équations (76) et (83), il est évident, que le rapport $\frac{P'_{(2)}}{U'_{(1)}}$ se réduit à l'unité en négligeant les termes multipliés par le carré de φ, on peut réduire cette équation à

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\sin.\,\omega}{\sin.\,\varphi}\ .$$

Mais l'équation (86) démontre que l'arc ω devient infiniment petit avec l'arc φ: donc nous avons l'équation

$$\frac{1}{2\mu} = \frac{\omega}{2\varphi} = \frac{1}{2} + \frac{\varphi_1}{\varphi} - \frac{\varphi_3}{\varphi} + \frac{\varphi_5}{\varphi} - \frac{\varphi_7}{\varphi}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ - \frac{\varphi_{p-2}}{\varphi}\ ;$$

où les rapports $\frac{\varphi_1}{\varphi}$, $\frac{\varphi_3}{\varphi}$, etc. sont tels, que dans ce cas particulier l'on a :

$$\frac{\varphi_1}{\varphi}=\frac{1}{\sin.\alpha_1}\ ;\quad \frac{\varphi_3}{\varphi}=\frac{1}{\sin.\alpha_3}\ ;\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ \frac{\varphi_{p-2}}{\varphi}=\frac{1}{\sin.\alpha_{p-2}}\ .$$

Il suit de là, que

$$(88)\ldots\quad \frac{1}{2\mu}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sin.\alpha_1}-\frac{1}{\sin.\alpha_3}+\frac{1}{\sin.\alpha_5}-\frac{1}{\sin.\alpha_7}\ \ldots\ldots-\frac{1}{\sin.\alpha_{p-2}}\ ,$$

lorsque $p=4i+1$; et que

$$(89)\ldots\quad \frac{1}{2\mu}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sin.\alpha_1}-\frac{1}{\sin.\alpha_3}+\frac{1}{\sin.\alpha_5}-\frac{1}{\sin.\alpha_7}\ \ldots\ldots+\frac{1}{\sin.\alpha_{p-2}}\ ,$$

lorsque $p=4i-1$.

L'équation

$$h=\frac{\text{tang.}\,\omega_{(1)}}{\text{tang.}\,\omega}$$

donne $h=\frac{\omega_{(1)}}{\omega}$, dans le cas où l'arc φ est infiniment petit : donc nous avons

$$h=\frac{\omega_{(1)}}{2\varphi}\cdot\frac{2\varphi}{\omega}=\frac{\omega_{(1)}}{2\varphi}\cdot 2\mu\ ;$$

et en substituant pour $\omega_{(1)}$ sa valeur donnée par l'équation (87), l'on a

$$h=2\mu\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\varphi_{(1)}}{\varphi}+\frac{\varphi_1'}{\varphi}-\frac{\varphi_3'}{\varphi}+\frac{\varphi_5'}{\varphi}-\frac{\varphi_7'}{\varphi}\ \ldots\ldots\ -\frac{\varphi'_{p-2}}{\varphi}\right)\ :$$

mais dans le cas de φ infiniment petit, nous avons les équations

$$\frac{\varphi_{(1)}}{\varphi}=k\ ;\quad \frac{\varphi_1'}{\varphi}=k\sin.\alpha_1\ ;\quad \frac{\varphi_3'}{\varphi}=k\sin.\alpha_3\ ;\quad \ldots\quad \frac{\varphi'_{p-2}}{\varphi}=k\sin.\alpha_{p-2}\ ,$$

donc

$$(90)\ \ldots\quad h=2k\mu\left(\tfrac{1}{2}+\sin.\alpha_1-\sin.\alpha_3+\sin.\alpha_5\ \ldots\ldots\ -\sin.\alpha_{p-2}\right)\ ,$$

si $p=4i+1$; et

$$(91)\ \ldots\quad h=2k\mu\left(-\tfrac{1}{2}+\sin.\alpha_1-\sin.\alpha_3+\sin.\alpha_5\ \ldots\ldots\ +\sin.\alpha_{p-2}\right)\ ,$$

si $p=4i-1$.

D'après les équations (B) l'on a :

$$h = k^p (\sin.\alpha_1 . \sin.\alpha_3 . \sin.\alpha_5 \ldots\ldots\ldots \sin.\alpha_{p-2})^4 \ ;$$

$$\mu = \frac{D'}{D'''} = \left(\frac{\sin.\alpha_1 . \sin.\alpha_3 . \sin.\alpha_5 \ldots\ldots\ldots \sin.\alpha_{p-2}}{\sin.\alpha_2 . \sin.\alpha_4 . \sin.\alpha_6 \ldots\ldots\ldots \sin.\alpha_{p-1}}\right)^2 .$$

Donc, le nombre impair p étant de la forme $p = 4i + 1$, on a l'équation

$$\frac{h}{k\mu} = k^{p-1} (\sin.\alpha_1 . \sin.\alpha_2 . \sin.\alpha_3 . \sin.\alpha_4 \ldots\ldots \sin.\alpha_{p-1})^2$$
$$= -1 + 2\sin.\alpha_1 - 2\sin.\alpha_3 + 2\sin.\alpha_5 \ldots\ldots - 2\sin.\alpha_{p-2} \ ;$$

et

$$\frac{h}{k\mu} = k^{p-1} (\sin.\alpha_1 . \sin.\alpha_2 . \sin.\alpha_3 . \sin.\alpha_4 \ldots\ldots \sin.\alpha_{p-1})^2$$
$$= -1 + 2\sin.\alpha_1 - 2\sin.\alpha_3 + 2\sin.\alpha_5 \ldots\ldots + 2\sin.\alpha_{p-2} \ ;$$

dans le cas de $p = 4i - 1$.

L'équation (86) peut être écrite ainsi :

$$\omega = \varphi + 2(\varphi_1 - \varphi) - 2(\varphi_3 - \varphi) + 2(\varphi_5 - \varphi) \ldots\ldots \mp 2(\varphi_{p-2} - \varphi) \ ;$$

c'est-à-dire sans ambiguité à l'égard du premier terme.

Nous avons

$$\text{tang.}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{\text{tang.}\varphi_1 - \text{tang.}\varphi}{1 + \text{tang.}\varphi . \text{tang.}\varphi_1} = \frac{(1 - \sin.\alpha_1)\sin.2\varphi}{(1 + \sin.\alpha_1) - (1 - \sin.\alpha_1)\cos.2\varphi} \ ;$$

$$\text{tang.}(\varphi_3 - \varphi) = \frac{(1 - \sin.\alpha_3)\sin.2\varphi}{(1 + \sin.\alpha_3) - (1 - \sin.\alpha_3)\cos.2\varphi} \ ;$$

$$\text{tang.}(\varphi_5 - \varphi) = \frac{(1 - \sin.\alpha_5)\sin.2\varphi}{(1 + \sin.\alpha_5) - (1 - \sin.\alpha_5)\cos.2\varphi} \ ;$$

etc.

Maintenant, si l'on fait

$$\varphi_1 - \varphi = \psi_1 \ ; \qquad (1 - \sin.\alpha_1) = A \ ; \qquad (1 + \sin.\alpha_1) = B \ ,$$

on a l'équation

$$\text{tang.}\psi_1 = \frac{A\sin.2\varphi}{B - A\cos.2\varphi} = \frac{\frac{A}{B}\sin.2\varphi}{1 - \frac{A}{B}\cos.2\varphi} .$$

En faisant pour un moment $\frac{A}{B} = \beta$ l'on a

$$\text{tang.}\psi_1 = \frac{\beta\sin.2\varphi}{1 - \beta\cos.2\varphi} \ ;$$

en différentiant on tire de là

$$d\psi_1 = \frac{1}{(1+\text{tang.}^2\psi_1)} \cdot \left\{ \frac{\beta \cos. 2\varphi - \beta^2}{(1-\beta\cos. 2\varphi)^2} \right\} 2\,d\varphi \;;$$

$$d\psi_1 = \frac{2\,d\varphi \,.\, (\beta \cos. 2\varphi - \beta^2)}{1 - 2\beta\cos. 2\varphi + \beta^2} \;.$$

La formule

$$\frac{2p\cos.\theta - 2p^2}{1 - 2p\cos.\theta + p^2} = 2p\cos.\theta + 2p^2\cos. 2\theta + 2p^3\cos. 3\theta + \text{etc.} \;;$$

$$\frac{p\cos.\theta - p^2}{1 - 2p\cos.\theta + p^2} = p\cos.\theta + p^2\cos. 2\theta + p^3\cos. 3\theta + \text{etc.}$$

donne

$$d\psi_1 = 2\,d\varphi \left\{ \beta\cos. 2\varphi + \beta^2\cos. 4\varphi + \beta^3\cos. 6\varphi + \beta^4\cos. 8\varphi + \text{etc.} \right\} .$$

En intégrant on tire de là

$$\psi_1 = \beta\sin. 2\varphi + \frac{\beta^2}{2} . \sin. 4\varphi + \frac{\beta^3}{3} . \sin. 6\varphi + \frac{\beta^4}{4} . \sin. 8\varphi + \text{etc.} \;,$$

c'est-à-dire

$$\psi_1 = \left(\frac{1-\sin.\alpha_1}{1+\sin.\alpha_1}\right)\sin. 2\varphi + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1+\sin.\alpha_1}{1-\sin.\alpha_1}\right)^2\sin. 4\varphi$$
$$+ \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1-\sin.\alpha_1}{1+\sin.\alpha_1}\right)^3\sin. 6\varphi + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1-\sin.\alpha_1}{1+\sin.\alpha_1}\right)^4\sin. 8\varphi \;;$$
$$+ \text{etc.}$$

Donc, en posant

$$\frac{1-\sin.\alpha_m}{1+\sin.\alpha_m} = \beta_{(m)} \;,$$

l'équation

$$\omega = \varphi + 2(\varphi_1 - \varphi) - 2(\varphi_3 - \varphi) + 2(\varphi_5 - \varphi) \;\ldots\ldots\ldots\; \mp 2(\varphi_{p-2} - \varphi)$$

donnera

$$\omega = \varphi + 2\sin. 2\varphi\,(\beta_{(1)} - \beta_{(3)} + \beta_{(5)} - \beta_{(7)} \ldots\ldots \mp \beta_{(p-2)} + \text{etc.})$$
$$+ \tfrac{2}{2}\sin. 4\varphi\,(\beta^2_{(1)} - \beta^2_{(3)} + \beta^2_{(5)} - \beta^2_{(7)} \ldots\ldots \mp \beta^2_{(p-2)} + \text{etc.})$$
$$+ \tfrac{2}{3}\sin. 6\varphi\,(\beta^3_{(1)} - \beta^3_{(3)} + \beta^3_{(5)} - \beta^3_{(7)} \ldots\ldots \mp \beta^3_{(p-2)} + \text{etc.})$$
$$+ \tfrac{2}{4}\sin. 8\varphi\,(\beta^4_{(1)} - \beta^4_{(3)} + \beta^4_{(5)} - \beta^4_{(7)} \ldots\ldots \mp \beta^4_{(p-2)} + \text{etc.})$$
$$+ \tfrac{2}{5}\sin. 10\varphi\,(\beta^5_{(1)} - \beta^5_{(3)} + \beta^5_{(5)} - \beta^5_{(7)} \ldots\ldots \mp \beta^5_{(p-2)} + \text{etc.})$$
$$+ \text{etc.}$$

Ainsi, pour tout nombre impair p (quelle que soit sa grandeur), à l'arc $\varphi = \frac{\pi}{2}$ répond l'amplitude $\omega = \frac{\pi}{2}$. Cette conséquence distingue la transformation dont il est ici question de celle développée au N.° [10]; où l'amplitude ψ deviendrait infinie $\left(p.\frac{\pi}{2}\right)$ si le nombre impair p était infiniment grand. Cette circonstance est la cause radicale de l'existence des séries infinies introduites (sous plusieurs formes différentes) par Jacobi dans la Théorie des Transcendantes Elliptiques.

Dans le cas particulier où l'on aura $p = \infty$ et $\beta_{(m)} = q^m$ ces séries sont immédiatement sommables, et l'on a

$$\omega = \varphi + \frac{2q}{1+q^2}\sin.2\varphi + \frac{2q^2}{2(1+q^4)}\sin.4\varphi + \frac{2q^3}{3(1+q^6)}\sin.6\varphi$$
$$+ \frac{2q^4}{4(1+q^8)}\sin.8\varphi + \text{etc.}$$

[13] L'équation (68), savoir

$$F(k, \theta) = \mu F(h, \psi) = \frac{D'}{D'''} F(h, \psi) \ ,$$

associée aux équations (B), (66), (69), (70), et à l'équation

$$F(k, \alpha_m) = \frac{m}{p} K$$

est celle, qui, par le passage du réel à l'imaginaire, nous a conduit à l'équation (78), savoir

$$F(k', \varphi) = \mu F(h', \omega) \ ,$$

associée aux équations (76), (82), et (83). Donc, en déterminant les angles auxiliaires $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots\ldots \beta_{p-1}$, d'après l'équation

$$(92)\ldots\ldots \qquad F(h', \beta_m) = \frac{m}{p}.H' = \frac{m}{p}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{1-h'^2\sin.^2\omega}} \ ,$$

il est clair, que la même analyse conduirait, au lieu de l'équation (68), à l'équation

$$(93)\ldots\ldots \qquad F(h', \theta') = \mu'.F(k', \psi') \ ,$$

où l'on aurait :

$$k' = h'^{p}(\sin.\beta_1 . \sin.\beta_3 \ldots\ldots \sin.\beta_{p-2})^4 \ ;$$

$$(94) \ldots\ldots \quad \mu' = \left(\frac{\sin.\beta_1 . \sin.\beta_3 . \sin.\beta_5 \ldots\ldots \sin.\beta_{p-2}}{\sin.\beta_2 . \sin.\beta_4 . \sin.\beta_6 \ldots\ldots \sin.\beta_{p-1}}\right)^2 \ ;$$

$$\frac{1}{\mu'} = \pm 1 + \frac{2}{\sin.\beta_1} - \frac{2}{\sin.\beta_3} + \frac{2}{\sin.\beta_5} \ldots\ldots \pm \frac{2}{\sin.\beta_{p-2}} \ ;$$

$$\frac{k}{h\mu'} = \left(\frac{\cos.\beta_1 . \cos.\beta_3 . \cos.\beta_5 \ldots\ldots \cos.\beta_{p-2}}{\cos.\beta_2 . \cos.\beta_4 . \cos.\beta_6 \ldots\ldots \cos.\beta_{p-1}}\right)^2 .$$

En appliquant à l'équation (93) le passage du réel à l'imaginaire, comme dans le N.° [11], on obtiendrait l'équation

$$(95) \ldots\ldots \qquad F(h, \varphi') = \mu' F(k, \omega') \ ,$$

associée, conformément aux formules (76), (82), (83), aux équations

$$(96) \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} \sqrt{1 - k^2 \sin.^2\omega'} &= \sqrt{1 - h^2 \sin.^2\varphi'} \cdot \frac{Q'_{(3)}}{P'_{(3)}} \ ; \\ \sin.\omega' &= \frac{\sin.\varphi'}{\mu'} \cdot \frac{U'_{(2)}}{P'_{(3)}} \ ; \\ \cos.\omega' &= \cos.\varphi' \cdot \frac{V'_{(2)}}{P'_{(3)}} \ ; \end{aligned} \right.$$

$$(97) \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} P'_{(3)} &= \left(1 + \frac{\tang.^2\varphi'}{\sin.^2\beta_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{\tang.^2\varphi'}{\sin.^2\beta_3}\right) \ldots\ldots \left(1 + \frac{\tang.^2\varphi'}{\sin.^2\beta_{p-2}}\right) \ ; \\ Q'_{(3)} &= (1 + h'^2 \tang.^2\varphi' . \sin.^2\beta_1) . (1 + h'^2 \tang.^2\varphi' . \sin.^2\beta_3) \ldots\ldots \\ &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1 + h'^2 \tang.^2\varphi' . \sin.^2\beta_{p-2}) \ ; \\ U'_{(2)} &= \left(1 + \frac{\tang.^2\varphi'}{\sin.^2\beta_2}\right) \cdot \left(1 + \frac{\tang.^2\varphi'}{\sin.^2\beta_4}\right) \ldots\ldots \left(1 + \frac{\tang.^2\varphi'}{\sin.^2\beta_{p-1}}\right) \ ; \\ V'_{(2)} &= (1 + h'^2 \tang.^2\varphi' . \sin.^2\beta_2) . (1 + h'^2 \tang.^2\varphi' . \sin.^2\beta_4) \ldots\ldots \\ &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1 + h'^2 \tang.^2\varphi' . \sin.^2\beta_{p-1}) \ . \end{aligned} \right.$$

L'expression de $\tang.\omega'$ démontre, que, en faisant $\varphi' = \frac{1}{2}\pi$, on doit avoir $\omega' = \frac{1}{2}\pi$. Donc l'équation (95) donne

$$(98) \ldots\ldots \qquad H = \mu' K \ .$$

De sorte que nous avons

$$\frac{k}{h}\cdot\frac{K}{H}=\left(\frac{\cos.\beta_1.\cos.\beta_3.\cos.\beta_5\ \ldots\ldots\ \cos.\beta_{p-2}}{\cos.\beta_2.\cos.\beta_4.\cos.\beta_6\ \ldots\ldots\ \cos.\beta_{p-1}}\right)^2 .$$

Cette valeur de H étant substituée dans l'équation (80), on en tire

(99) ..... $$1=p\mu\mu' .$$

La déduction de cette équation exige que le module, ici désigné par k', soit précisément égal à la quantité $\sqrt{1-k^2}$, déterminée par le module primitif k. Si on avait quelques doutes sur ce point il est facile de les faire disparaître. Soit, pour un moment, $k'_{(1)}$ au lieu de k', et $k_{(1)}$ au lieu de k. Alors les équations (93) et (95) donneront

$$H'=p\mu' K'_{(1)} ; \qquad H=\mu' K_{(1)} ;$$

et par conséquent

$$\frac{H'}{H}=p\cdot\frac{K'_{(1)}}{K_{(1)}} .$$

Donc, en substituant cette valeur de $\frac{H'}{H}$ dans l'équation (81), on en tirera $\frac{K'}{K}=\frac{K'_{(1)}}{K_{(1)}}$; ce qui ne saurait subsister sans avoir

$$k'_{(1)}=\sqrt{1-k^2} \quad \text{et} \quad k_{(1)}=k .$$

En remplaçant μ' par $\frac{1}{p\mu}$, l'équation (95) devient

(100) ..... $$F(k,\omega')=p\mu.F(h,\varphi') .$$

Le rapport

$$\frac{kK}{H}=h\left(\frac{\cos.\beta_1.\cos.\beta_3.\cos.\beta_5\ \ldots\ldots\ \cos.\beta_{p-2}}{\cos.\beta_2.\cos.\beta_4.\cos.\beta_6\ \ldots\ldots\ \cos.\beta_{p-1}}\right)^2$$

converge donc vers $\frac{2kK}{\pi}$ à mesure que l'on augmente le nombre p, puisque la valeur de H converge vers $\frac{\pi}{2}$. Il suit de là que le carré qui multiplie h est implicitement le produit de deux facteurs dont un converge vers l'infini, tandis que l'autre converge vers une quantité finie, dépendante de la valeur du module k. Cela deviendra manifeste dans le § suivant.

Donc, en faisant $\varphi'=\psi$, l'amplitude correspondante ω' sera déterminée par les formules (96) et (97), après avoir écrit ψ au lieu de φ'. Par là, l'équation (100) devient

$$(101) \ldots\ldots \qquad F(k, \omega') = p\mu . F(h, \psi) \ ,$$

et sa comparaison avec l'équation (68), donne

$$(102) \ldots\ldots \qquad F(k, \omega') = p . F(k, \theta) \ .$$

L'amplitude θ étant donnée, l'amplitude ω' est déterminée en fonction de ψ par les équations :

$$(103) \ldots \left\{ \begin{array}{l} \sin.\omega' = \dfrac{\sin.\psi}{\mu'} \cdot \dfrac{U'_{(3)}}{P'_{(4)}} = p\mu . \sin.\psi . \dfrac{U'_{(3)}}{P'_{(4)}} \ ; \\ \cos.\omega' = \cos.\psi . \dfrac{V'_{(3)}}{P'_{(4)}} \ ; \\ \sqrt{1 - k^2 . \sin.^2\omega'} = \sqrt{1 - h^2 . \sin.^2\psi} \cdot \dfrac{Q'_{(4)}}{P'_{(4)}} \ ; \end{array} \right.$$

où $P'_{(4)}$, $Q'_{(4)}$, $U'_{(3)}$, $V'_{(3)}$ représentent, respectivement, le second membre des équations (97), après y avoir écrit ψ au lieu de φ'. Et comme les équations (66), (69) et (70) fournissent les expressions de $\sin.\psi$, $\cos.\psi$, $\sqrt{1 - h^2 . \sin.^2\psi}$ en fonction de θ, on peut regarder les formules (103) comme renfermant la loi de l'amplitude ω' en fonction de θ, propre à la solution générale de l'équation

$$(104) \ldots\ldots \qquad \int_0^{\omega'} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 . \sin.^2\theta}} = p \cdot \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 . \sin.^2\theta}} \ ;$$

p étant un nombre entier impair, donné à volonté. Pour cela il faut préalablement calculer h' par les formules

$$(105) \ldots \left\{ \begin{array}{l} h' = \sqrt{1 - h^2} \ ; \\ h = k^p (\sin.\alpha_1 . \sin.\alpha_3 . \sin.\alpha_5 \ldots\ldots \sin.\alpha_{p-1})^2 \ ; \end{array} \right.$$

et ensuite les amplitudes β_m conformément à l'équation (92).

Pour mieux fixer les idées sur le mode d'existence des équations

$$(106) \ldots \left\{ F(k, \theta) = \mu F(h, \psi) \ ; \qquad F(k, \omega') = p F(k, \theta) \ ; \right.$$

j'ajouterai que, entre les trois amplitudes θ, ψ, et ω' on a les équations

$$(107) \ldots \left\{ \sin.\psi = \frac{\sin.\theta}{\mu} \cdot \frac{U}{V} \ ; \qquad \sin.\omega' = p\mu . \sin.\psi . \frac{U'_{(3)}}{P'_{(4)}} \ ; \right.$$

où les deux fonctions de θ désignées par U et V sont telles que l'on a:

$$(108)\ldots\ldots\begin{cases} U=\left(1-\dfrac{\sin.^2\theta}{\sin.^2\alpha_2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{\sin.^2\theta}{\sin.^2\alpha_4}\right)\ldots\ldots\left(1-\dfrac{\sin.^2\theta}{\sin.^2\alpha_{p-1}}\right); \\ V=(1-k^2\sin.^2\theta.\sin.^2\alpha_2)(1-k^2\sin.^2\theta.\sin.^2\alpha_4)\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1-k^2\sin.^2\theta.\sin.^2\alpha_{p-1}); \end{cases}$$

et les deux fonctions de ψ désignées par $U'_{(3)}$ et $P'_{(4)}$ sont telles que l'on a:

$$(109)\ldots\ldots\begin{cases} U'_{(3)}=\left(1+\dfrac{\tang.^2\psi}{\sin.^2\beta_2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{\tang.^2\psi}{\sin.^2\beta_4}\right)\ldots\ldots\left(1+\dfrac{\tang.^2\psi}{\sin.^2\beta_{p-1}}\right); \\ P'_{(4)}=\left(1+\dfrac{\tang.^2\psi}{\sin.^2\beta_1}\right)\cdot\left(1+\dfrac{\tang.^2\psi}{\sin.^2\beta_3}\right)\ldots\ldots\left(1+\dfrac{\tang.^2\psi}{\sin.^2\beta_{p-2}}\right). \end{cases}$$

Et comme nous avons

$$(110)\ldots\ldots\begin{cases} \tang.\psi=\dfrac{1}{\mu}\tang.\theta.\dfrac{U}{P'}; \\ P'=\left(1-\dfrac{\sin.^2\theta}{\sin.^2\alpha_1}\right)\cdot\left(1-\dfrac{\sin.^2\theta}{\sin.^2\alpha_3}\right)\ldots\ldots\left(1-\dfrac{\sin.^2\theta}{\sin.^2\alpha_{p-2}}\right), \end{cases}$$

en vertu des formules (69) et (A^{IV}), il est clair que le *sinus* de l'amplitude ω', propre à la solution de l'équation (104), est déterminé par ces formules *explicitement*, en fonction de l'amplitude θ. C'est en décomposant ainsi le problème exprimé par l'équation

$$\sin.\omega'=\text{Fonct.}(\sin.\theta),$$

en deux autres équations équivalentes de la forme

$$\sin.\omega'=\text{fonct.}(\sin.\psi);\qquad \sin.\psi=\text{Fonct.}(\sin.\theta);$$

que l'on a pu trouver la solution de ce problème à l'aide des amplitudes auxiliaires $\alpha_{(m)}$ et $\beta_{(m)}$ qui dépendent de la division des fonctions complètes de première espèce en parties égales. Sans l'emploi de ces auxiliaires, les efforts d'Euler et de Legendre sont un puissant argument pour faire croire que la solution de ce problème serait impossible.

La possibilité de l'équation transcendante

$$\int_0^{\omega'}\frac{d\omega'}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\omega'}}=\frac{K}{H}\cdot\int_0^{\varphi'}\frac{d\varphi'}{\sqrt{1-h^2.\sin.^2\varphi'}}$$

par l'intermédiaire d'une équation *algébrique* entre $\sin.\omega'$, $\sin.\varphi'$, $\tang.^2\varphi'$, telle que les deux amplitudes ω' et φ' demeurent toujours renfermées

entre les *mêmes limites* 0° et 90°, est un résultat de JACOBI d'autant plus remarquable que le module h peut être diminué à volonté par l'augmentation du nombre impair p. On pouvait le rencontrer, mais non le prévoir *a priori*. En réfléchissant sur les nombreuses conséquences qui seront développées dans le § suivant, ce résultat me rappelle la phrase figurée d'ARAGO: « Si l'on songe qu'en matière de science l'imprévu » forme toujours la part du Lion », que je lis à la page 44 du second Volume de son *Astronomie Populaire*.

Mais, sur ce point il y a une autre réflexion qui mérite d'être exposée ici avant d'aller plus loin. L'équation entre $\sin.\omega'$ et $\sin.\theta$, dont nous venons d'indiquer la formation, sera du degré p^2, et telle que l'on aura

$$\sin.\omega' = \frac{A_{(1)}\sin.\theta + A_{(3)}\sin.^3\theta + A_{(5)}\sin.^5\theta + \ldots\ldots + A_{(p^2)}\sin.^{p^2}.\theta}{B_{(0)} + B_{(2)}\sin.^2\theta + B_{(4)}\sin.^4\theta + \ldots\ldots + B_{(p^2-1)}\sin.^{p^2-1}.\theta}.$$

Donc, l'amplitude ω' étant donnée, il y aura p^2 racines, ou valeurs de $\sin.\theta$, qui, analytiquement parlant, seront admissibles comme solutions de l'équation

$$F(k,\theta) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\theta}} = \frac{1}{p}\cdot\int_0^{\omega'} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\theta}} = \frac{1}{p}F(k,\omega').$$

A priori on conçoit, que les p amplitudes

$$\omega',\quad \omega'+2\pi,\quad \omega'+4\pi,\quad \omega'+6\pi,\quad \ldots\ldots\ \omega'+(p-1)2\pi,$$

ayant le même *sinus*, on doit trouver pour $\sin.\theta$ un nombre p de valeurs réelles, correspondantes à

$$\frac{1}{p}\cdot F(k,\omega');\quad \frac{1}{p}\cdot F(k,\omega'+2\pi);\quad \frac{1}{p}\cdot F(k,\omega'+4\pi);\quad \text{etc.}$$

De sorte, que l'équation entre $\sin.\omega'$ et $\sin.\theta$ étant du degré p^2 doit avoir p^2-p racines imaginaires. A quoi tient l'existence de ces racines imaginaires? On pourrait penser qu'elle tient à des facteurs étrangers qui se sont introduits dans l'équation du problème par un vice inhérent au procédé suivi pour sa formation. Cette conception serait fautive. Car on peut démontrer que l'expression de $\sin.\omega'$ est, par sa nature, une telle fonction de $F(k,\omega')$ qu'elle demeure invariable par le changement de $F(k,\omega')$ en $F(k,\omega')+2i.\sqrt{-1}.K'$; i étant un nombre quelconque entier, et

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin.^2\theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin.^2\theta}} .$$

De là il arrive que l'équation propre à déterminer les sinus appartenans aux amplitudes des quantités $\frac{1}{p}\cdot F(k, \omega'+n.2\pi)$ doit aussi comprendre les valeurs imaginaires conformes à l'équation

$$\int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\theta}} = \frac{1}{p}\cdot\left\{F(k, \omega') + 2i.\sqrt{-1}.K'\right\} .$$

C'est de quoi je donnerai la démonstration plus loin. Pour le moment il suffit d'avoir anticipé cette remarque importante pour éclairer la théorie des transcendantes elliptiques.

Par le rapprochement des formules correspondantes aux équations

$$F(k, \theta) = \mu\, F(h, \psi) \; ; \qquad F(k, \alpha_m) = \frac{m}{p} K \; ; \qquad \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \; ; \\ \psi = p\cdot\frac{\pi}{2} \; ; \end{cases}$$

$$F(k, \omega') = \frac{1}{\mu'} F(h, \varphi') \; ; \qquad F(h', \beta_m) = \frac{m}{p} H' \; ; \qquad \begin{cases} \omega' = \frac{\pi}{2} \; ; \\ \varphi' = \frac{\pi}{2} \; ; \end{cases}$$

$$\mu = \left(\frac{\sin.\alpha_1.\sin.\alpha_3.\sin.\alpha_5 \;\ldots\ldots\; \sin\alpha_{p-2}}{\sin.\alpha_2.\sin.\alpha_4.\sin.\alpha_6 \;\ldots\ldots\; \sin.\alpha_{p-1}}\right)^2 ;$$

$$\mu' = \left(\frac{\sin.\beta_1.\sin.\beta_3.\sin.\beta_5 \;\ldots\ldots\; \sin.\beta_{p-2}}{\sin.\beta_2.\sin.\beta_4.\sin.\beta_6 \;\ldots\ldots\; \sin.\beta_{p-1}}\right)^2 ;$$

nous avons:

$$\sin.\psi = \frac{\frac{1}{\mu}.\sin.\theta\left(1-\frac{\sin.^2\theta}{\sin.^2\alpha_2}\right)\cdot\left(1-\frac{\sin.^2\theta}{\sin.^2\alpha_4}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{\sin.^2\theta}{\sin.^2\alpha_{p-1}}\right)}{(1-k^2\sin.^2\alpha_2.\sin.^2\theta)(1-k^2\sin.^2\alpha_4.\sin.^2\theta)\ldots(1-k^2\sin.^2\alpha_{p-1}.\sin.^2\theta)} ;$$

$$\sin.\omega' = \frac{\frac{1}{\mu'}.\sin.\varphi'\left(1+\frac{\tang.^2\varphi'}{\sin.^2\beta_2}\right)\cdot\left(1+\frac{\tang.^2\varphi}{\sin.^2\beta_4}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{\tang.\varphi'}{\sin.^2\beta_{p-1}}\right)}{\left(1+\frac{\tang.^2\varphi'}{\sin.^2\beta_1}\right)\cdot\left(1+\frac{\tang.^2\varphi'}{\sin.^2\beta_3}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{\tang.^2\varphi'}{\sin.^2\beta_{p-2}}\right)} .$$

§ IV.

Passage du fini à l'infini.

[14] En supposant le module donné k fort approchant de l'unité, on peut, *a priori*, déterminer les valeurs de $\sin.\alpha_m$, $\cos.\alpha_m$, conformes à l'équation

$$F(k, \alpha_m) = \frac{m}{p} K .$$

En effet, si l'on remplace $\frac{K}{p}$ par sa valeur $K'.\frac{H}{H'}$, donnée par l'équation (81), l'on a:

$$(111) \ldots\ldots \qquad F(k, \alpha_m) = m\frac{H}{H'}\cdot K' .$$

L'équation (78), en y substituant pour μ sa valeur $\frac{K'}{H'}$ donnée par l'équation (79) devient

$$(112) \ldots\ldots \qquad F(k', \varphi) = \frac{K'}{H'}\cdot F(h', \omega) .$$

Le module k' sera d'autant plus petit que la valeur de k s'approchera de l'unité, puisque $k' = \sqrt{1-k^2}$. La formule (b), qu'on voit à la page 97 du 3.ème Volume des *Exercices de Calcul Intégral* par LEGENDRE, donne

$$(113) \ldots \quad F(k', \varphi) = \frac{1}{k'}\text{Log.}\,\text{tang.}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k'\varphi\right) = \frac{1}{2k'}\text{Log.}\left(\frac{1+\sin.k'\varphi}{1-\sin.k'\varphi}\right) ,$$

en négligeant les termes multipliés par φ^5. Donc, d'après la série

$$\text{Log.}\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2\left(u + \frac{1}{3}\cdot u^3 + \frac{1}{5}\cdot u^5 + \text{etc.}\right) ,$$

nous avons:

$$F(k', \varphi) = \frac{1}{k'}\left(\sin.k'\varphi + \frac{1}{3}\cdot \sin.^3 k'\varphi\right) .$$

Mais, en négligeant les termes multipliés par φ^5, l'on a:

$$\sin.k'\varphi = k'\varphi - \frac{1}{6}\cdot k'^3\varphi^3 ; \qquad \sin.^3 k'\varphi = k'^3\varphi^3 ;$$

partant

$$F(k', \varphi) = \varphi - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)k'^2\varphi^3 = \varphi + \frac{1}{6}\cdot k'^2\varphi^3 ;$$

c'est-à-dire:

$$F(k', \varphi) = \varphi + \frac{(1-k^2)}{6}\varphi^3 .$$

Le second terme de cette formule sera d'autant plus petit que le module k s'approchera de l'unité. Donc, si rien ne limite la petitesse du facteur $(1-k^2)$, on pourra réduire cette équation à

$$F(k', \varphi) = \varphi ;$$

et l'équation (112) deviendra

(114) ..... $$\varphi = \frac{K'}{H'} \cdot F(h', \omega) .$$

Les formules (82) donneront donc le *sinus* et le *cosinus* de l'amplitude ω, en connaissant le module h' (pour calculer H') et la valeur de la fonction $F(h', \omega)$. Mais, pour cela, il faut connaître les quantités auxiliaires α_m.

En appliquant la formule (113) à la fonction $F(k, \alpha_m)$, l'équation (111) devient

$$\frac{1}{2k}\text{Log.}\left(\frac{1+\sin. k\alpha_m}{1-\sin. k\alpha_m}\right) = \frac{mH}{H'} \cdot K' ;$$

d'où l'on tire:

$$\frac{1+\sin. k\alpha_m}{1-\sin. k\alpha_m} = q^{-m} ,$$

en posant

$$q = e^{-2k.K'.\frac{H}{H'}} ;$$

la lettre e désignant à l'ordinaire la base des Logarithmes hyperboliques. Il suit de là que l'on a:

$$\sin. k\alpha_m = \frac{1-q^m}{1+q^m} , \qquad \cos. k\alpha_m = \frac{2q^{\frac{m}{2}}}{1+q^m} .$$

Rien n'empêche de supposer le module k aussi approchant de l'unité qu'on voudra, et alors l'on a $K' = \frac{\pi}{2}$; ce qui réduit ces dernières formules à celles-ci;

(115) ... $$\left\{\begin{array}{lll} q = e^{-\pi\frac{H}{H'}} ; & & \\ \sin. \alpha_m = \frac{1-q^m}{1+q^m} ; & \frac{1-\sin. \alpha_m}{1+\sin. \alpha_m} = q^m ; & \\ \cos. \alpha_m = \frac{2q^{\frac{m}{2}}}{1+q^m} ; & \varphi = \frac{\pi}{2H'} \cdot F(h', \omega) ; & \mu = \frac{\pi}{2H'} . \end{array}\right.$$

Il est essentiel d'observer que la valeur du nombre p correspondante à ces formules est l'*infini*. Car ayant d'abord fait $\frac{K}{p} = K'\frac{H}{H'}$ et ensuite $K' = \frac{\pi}{2}$, l'on a

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin.^2\theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos.\theta} = \text{Log. tang.}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right),$$

$$\frac{1}{p} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{H}{H'} \cdot \frac{1}{\text{Log. tang.}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0 = \frac{1}{\infty}.$$

Pour la juste interprétation de l'équation

$$F(k, \alpha_1) = \frac{1}{p} \cdot K,$$

dans le cas où l'on fait, simultanément, k quantité très-approchante de l'unité, et p très-approchante de l'infini, il faut remarquer que cette équation revient à dire que l'on a

$$\int_0^{\alpha_1} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 . \sin.^2\theta}} = \frac{1}{p} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin.^2\theta}}.$$

Mais le premier membre de cette équation devient égal à

$$\int_0^{\alpha_1} \frac{d\theta}{\cos.\theta} = \text{Log.} \sqrt{\frac{1 + \sin.\alpha_1}{1 - \sin.\alpha_1}},$$

lorsque la valeur de k est très-approchante de l'unité, et le second membre devient égal à

$$\text{Log.}\left(\frac{4}{k'}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Cette quantité devant être égale à $\frac{H}{H'} . K' = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{H}{H'}$, conformément au second membre de l'équation (111), on a donc l'équation

$$\text{Log.} \sqrt{\frac{1 + \sin.\alpha_1}{1 - \sin.\alpha_1}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{H'}{H} = \text{Log.}\, e^{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{H}{H'}} = \text{Log.} \frac{1}{\sqrt{q}};$$

c'est-à-dire

$$\frac{1+\sin.\alpha_1}{1-\sin.\alpha_1}=\frac{1}{q}=q^{-1}\ ;$$

d'où l'on tire

$$\sin.\alpha_1=\frac{1-q}{1+q}\ .$$

Le succès de cette remarquable transformation, dans le passage du *fini* à l'*infini*, tient donc à l'existence des trois équations (79), (80) et (81), préalablement démontrées.

[15] La dernière des équations (115), en vertu de l'équation (88), donne

$$\frac{2H'}{\pi}=\frac{1}{\mu}=1+\frac{2}{\sin.\alpha_1}-\frac{2}{\sin.\alpha_3}+\frac{2}{\sin.\alpha_5}-\frac{2}{\sin.\alpha_7}+\text{etc.}\ :$$

donc, en substituant pour $\sin.\alpha_1$, $\sin.\alpha_3$, etc. leurs valeurs en fonction de q, il est clair que l'on obtient cette série fort remarquable; savoir

$$(116)\ldots\ \frac{2H'}{\pi}=1+\frac{2(1+q)}{1-q}-\frac{2(1+q^3)}{1-q^3}+\frac{2(1+q^5)}{1-q^5}-\frac{2(1+q^7)}{1-q^7}+\text{etc.}$$

Et comme l'on a :

$$\frac{2(1+q)}{1-q}=2+\frac{4q}{1-q}\ ;\qquad \frac{2(1+q^3)}{1-q^3}=2+\frac{4q^3}{1-q^3}\ ;\qquad \text{etc.}\ ;$$

il est clair que cette équation donne

$$(117)\ldots\ldots\ \frac{2H'}{\pi}=1+\frac{4q}{1-q}-\frac{4q^3}{1-q^3}+\frac{4q^5}{1-q^5}-\frac{4q^7}{1-q^7}+\text{etc.}$$

En développant ces fonctions l'on a :

$$\begin{aligned}\frac{2H'}{\pi}=1&+4q\,(1+q+q^2+q^3+q^4+\text{etc.})\\&-4q^3(1+q^3+q^6+q^9+q^{12}+\text{etc.})\\&+4q^5(1+q^5+q^{10}+q^{15}+q^{20}+\text{etc.})\\&-4q^7(1+q^7+q^{14}+q^{21}+q^{28}+\text{etc.})\\&+\text{etc.}\end{aligned}$$

Donc, en sommant les lignes verticales de ces fonctions de q, nous aurons :

$$(118)\ldots\ldots\ \frac{2H'}{\pi}=1+\frac{4q}{1+q^2}+\frac{4q^2}{1+q^4}+\frac{4q^3}{1+q^6}+\frac{4q^4}{1+q^8}+\text{etc.}$$

[16] Pour exprimer facilement le second membre des équations (82) en fonction de la nouvelle transcendante q, remarquons que l'on a:

$$1+\frac{\text{tang.}^2\varphi}{\sin.^2\alpha_m}=\frac{\frac{1}{2}(2\sin.^2\alpha_m+\cos.^2\alpha_m)-\frac{1}{2}\cos.^2\alpha_m.\cos.2\varphi}{\sin.^2\alpha_m.\cos.^2\varphi}$$

$$=\frac{1-2q^m.\cos.2\varphi+q^{2m}}{(1+q^m)^2.\sin.^2\alpha_m.\cos.^2\varphi}=\frac{1-2q^m.\cos.2\varphi+q^{2m}}{(1-q^m)^2.\cos.^2\varphi};$$

$$1+\text{tang.}^2\varphi.\sin.^2\alpha_m=\frac{\sin.^2\alpha_m+\cos.^2\alpha_m.\cos.^2\varphi}{\cos.^2\varphi}=\frac{1+2q^m.\cos.2\varphi+q^{2m}}{(1+q^m)^2.\cos.^2\varphi};$$

$$\frac{1+\dfrac{\text{tang.}^2\varphi}{\sin.^2\alpha_m}}{1+\dfrac{\text{tang.}^2\varphi}{\sin.^2\alpha_{m-1}}}=\left(\frac{1-q^{m-1}}{1-q^m}\right)^2.\left(\frac{1-2q^m.\cos.2\varphi+q^{2m}}{1-2q^{m-1}.\cos.2\varphi+q^{2m-2}}\right);$$

$$\frac{1+\text{tang.}^2\varphi.\sin.^2\alpha_m}{1+\dfrac{\text{tang.}^2\varphi}{\sin.^2\alpha_{m-1}}}=\left(\frac{1-q^{m-1}}{1+q^m}\right)^2.\left(\frac{1+2q^m.\cos.2\varphi+q^{2m}}{1-2q^{m-1}.\cos.2\varphi+q^{2m-2}}\right);$$

$$\frac{1+\text{tang.}^2\varphi.\sin.^2\alpha_m}{1+\dfrac{\text{tang.}^2\varphi}{\sin.^2\alpha_m}}=\left(\frac{1-q^m}{1+q^m}\right)^2.\left(\frac{1+2q^m.\cos.2\varphi+q^{2m}}{1-2q^m.\cos.2\varphi+q^{2m}}\right).$$

Cela posé, en faisant $k=1$ dans les valeurs de $V'_{(1)}$ et $Q'_{(2)}$, les formules (82) seront transformées dans celles-ci; savoir:

$$(\mathrm{T})\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{aligned}\sin.\omega&=\frac{2H'}{\pi}A^2_{(1)}.\sin.\varphi.\frac{f(q,\varphi)}{\Pi'(q,\varphi)};\\ \cos.\omega&=B^2_{(1)}.\cos.\varphi.\frac{f\left(q,\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}{\Pi'(q,\varphi)};\\ \sqrt{1-h'^2.\sin.^2\omega}&=D^2_{(1)}.\frac{\Pi\left(q,\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}{\Pi'(q,\varphi)};\end{aligned}\right.$$

où l'on a fait pour plus de simplicité

$$f(q,\varphi)=$$
$$(1-2q^2\cos.2\varphi+q^4).(1-2q^4.\cos.2\varphi+q^8).(1-2q^6.\cos.2\varphi+q^{12})\ldots\ldots;$$
$$\Pi'(q,\varphi)=$$
$$(1-2q\cos.2\varphi+q^2).(1-2q^3.\cos.2\varphi+q^6).(1-2q^5.\cos.2\varphi+q^{10})\ldots\ldots;$$

$$(\mathrm{T}')\ \ldots\ldots\ldots \begin{cases} A_{(1)} = \dfrac{1-q}{1-q^2}\cdot\dfrac{1-q^3}{1-q^4}\cdot\dfrac{1-q^5}{1-q^6}\cdot\dfrac{1-q^7}{1-q^8}\ldots\ldots; \\ B_{(1)} = \dfrac{1-q}{1+q^2}\cdot\dfrac{1-q^3}{1+q^4}\cdot\dfrac{1-q^5}{1+q^6}\cdot\dfrac{1-q^7}{1+q^8}\ldots\ldots; \\ D_{(1)} = \dfrac{1-q}{1+q}\cdot\dfrac{1-q^3}{1+q^3}\cdot\dfrac{1-q^5}{1+q^5}\cdot\dfrac{1-q^7}{1+q^7}\ldots\ldots; \end{cases}$$

l'arc φ étant déterminé par l'équation

$$(\mathrm{T}'')\ \ldots\ldots\ldots \qquad \varphi = \frac{\pi}{2H'}\cdot F(h', \omega)\ .$$

[17] Remarquons maintenant que, en posant

$$1 - h'\sin.\omega = D^2_{(1)}\cdot\frac{f(\varphi)}{f'(\varphi)}\ ; \qquad 1 + h'\sin.\omega = D^2_{(1)}\cdot\frac{f(-\varphi)}{f'(-\varphi)}\ ;$$

l'on a les trois équations

$$1 - h'^2\sin.^2\omega = D^4_{(1)}\cdot\frac{[f(\varphi)\cdot f(-\varphi)]}{[f'(\varphi)\cdot f'(-\varphi)]}\ ;$$

$$\frac{1 - h'\sin.\omega}{1 + h'\sin.\omega} = \frac{f(\varphi)}{f(-\varphi)}\cdot\frac{f'(-\varphi)}{f'(\varphi)}\ ;$$

$$\sqrt{\frac{1 - h'\sin.\omega}{1 + h'\sin.\omega}} = \sqrt{\frac{f(\varphi)}{f(-\varphi)}\cdot\frac{f'(-\varphi)}{f'(\varphi)}}\ .$$

Les facteurs, qu'on voit dans le second membre de la troisième des équations (T), étant décomposés, l'on a:

$$1 + 2q\cos.2\varphi + q^2 = (1 + 2.\sqrt{q}.\sin.\varphi + q)(1 - 2.\sqrt{q}.\sin.\varphi + q)\ ;$$

$$1 - 2q\cos.2\varphi + q^2 = (1 - q)^2 + 4q\sin.^2\varphi\ ;$$

où en remplaçant q, successivement, par q^3, q^5, q^7, etc. on obtient des équations semblables pour les autres facteurs qui multiplient et divisent $D^2_{(1)}$. Il est donc évident que $f'(\varphi) = f'(-\varphi)$; et que par conséquent nous avons

$$\sqrt{1 - h'^2\sin.^2\omega} = D^2_{(1)}\cdot\frac{\sqrt{f(\varphi)\cdot f(-\varphi)}}{f'(\varphi)}\ ;$$

$$\sqrt{\frac{1 - h'\sin.\omega}{1 + h'\sin.\omega}} = \sqrt{\frac{f(\varphi)}{f(-\varphi)}}\ .$$

Il suit de là et de la troisième des équations (T), que l'on doit avoir:

$$f(\varphi).f(-\varphi)=$$
$$(1+2q\cos.2\varphi+q^2)^2(1+2q^3\cos.2\varphi+q^6)^2(1+2q^5\cos.2\varphi+q^{10})^2\ldots\ldots;$$

c'est-à-dire

$$f(\varphi).f(-\varphi)=$$
$$(1-2.\sqrt{q}.\sin.\varphi+q)^2(1+2.\sqrt{q}.\sin.\varphi+q)^2(1-2.\sqrt{q^3}.\sin.\varphi+q^3)^2$$
$$(1+2.\sqrt{q^3}.\sin.\varphi+q^3)^2(1-2.\sqrt{q^5}.\sin.\varphi+q^5)^2(1+2.\sqrt{q^5}.\sin.\varphi+q^5)^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

etc. ;

et par conséquent

$$f(\varphi)=$$
$$(1-2.\sqrt{q}.\sin.\varphi+q)^2(1-2.\sqrt{q^3}.\sin.\varphi+q^3)^2(1-2.\sqrt{q^5}.\sin.\varphi+q^5)^2\ldots;$$
$$f'(\varphi)=$$
$$(1-2q\cos.2\varphi+q^2)(1-2q^3\cos.2\varphi+q^6)(1-2q^5\cos.2\varphi+q^{10})\ldots\ldots$$

Nous avons donc ces trois équations

$$(\mathrm{T}_1)\left\{\begin{array}{l} 1-h'\sin.\omega=D^2_{(1)}.\dfrac{(1-2.\sqrt{q}.\sin.\varphi+q)^2(1-2.\sqrt{q^3}.\sin.\varphi+q^3)^2\ldots}{(1-2q\cos.2\varphi+q^2)(1-2q^3\cos.2\varphi+q^6)\ldots};\\[2ex] 1+h'\sin.\omega=D^2_{(1)}.\dfrac{(1+2.\sqrt{q}.\sin.\varphi+q)^2(1+2.\sqrt{q^3}.\sin.\varphi+q^3)^2\ldots}{(1-2q\cos.2\varphi+q^2)(1-2q^3\cos.2\varphi+q^6)\ldots};\\[2ex] \sqrt{\dfrac{1-h'\sin.\omega}{1+h'\sin.\omega}}=\dfrac{(1-2.\sqrt{q}.\sin.\varphi+q)(1-2.\sqrt{q^3}.\sin.\varphi+q^3)\ldots}{(1+2.\sqrt{q}.\sin.\varphi+q)(1+2.\sqrt{q^3}.\sin.\varphi+q^3)\ldots}.\end{array}\right.$$

Les deux premières des équations (T) fournissent trois équations analogues. Car en écrivant

$$\cos.\omega=\sqrt{(1+\sin.\omega)(1-\sin.\omega)}=B^2_{(1)}\cos.\varphi.\frac{\Pi(\varphi)}{\Pi'(\varphi)};$$

$$\sin.\omega=\frac{2H'}{\pi}A^2_{(1)}.\sin.\varphi.\frac{\Pi\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}{\Pi'(\varphi)};$$

$$\begin{aligned}\Pi(\varphi)=&(1-2q\sin.\varphi+q^2)(1+2q\sin.\varphi+q^2)\\&(1-2q^2\sin.\varphi+q^4)(1+2q^2\sin.\varphi+q^4)\\&(1-2q^3\sin.\varphi+q^6)(1+2q^3\sin.\varphi+q^6)\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

l'on a

$$1-\sin.\omega=\frac{\Pi'(\varphi)-\frac{2H'}{\pi}A^2_{(1)}.\sin.\varphi.\Pi\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}{\Pi'(\varphi)}.$$

Et comme nous avons $1-\sin.\omega=0$ pour toute valeur de φ qui donne $\cos.\varphi=0$, on $\Pi(\varphi)=0$; si l'on fait

$$1-\sin.\omega=(1-\sin.\varphi)B^2_{(1)}.\frac{\Gamma(\varphi)}{\Pi'(\varphi)};$$

$$1+\sin.\omega=(1+\sin.\varphi)B^2_{(1)}.\frac{\Gamma(-\varphi)}{\Pi'(\varphi)};$$

l'on aura

$$\sqrt{(1-\sin.\omega)(1+\sin.\omega)}=B^2_{(1)}.\cos.\varphi.\frac{\sqrt{\Gamma(\varphi).\Gamma(-\varphi)}}{\Pi'(\varphi)};$$

et par conséquent

$$\Pi(\varphi)=\sqrt{\Gamma(\varphi)\Gamma(-\varphi)}.$$

D'après l'expression de $\Pi(\varphi)$, il est évident que l'on a:

$$\Gamma(\varphi)=(1-2q\sin.\varphi+q^2)(1-2q^2\sin.\varphi+q^4)(1-2q^3\sin.\varphi+q^6)\ldots\ldots$$

Nous avons donc les trois équations

$$(\mathrm{T}_2)\left\{\begin{array}{l}
1-\sin.\omega=B^2_{(1)}(1-\sin.\varphi)\times\\
\dfrac{(1-2q\sin.\varphi+q^2)^2(1-2q^2\sin.\varphi+q^4)^2(1-2q^3\sin.\varphi+q^6)^2\ldots\ldots}{(1-2q\cos.2\varphi+q^2)(1-2q^3\cos.2\varphi+q^6)(1-2q^5\cos.2\varphi+q^{10})\ldots\ldots};\\
1+\sin.\omega=B^2_{(1)}(1+\sin.\varphi)\times\\
\dfrac{(1+2q\sin.\varphi+q^2)^2(1+2q^2\sin.\varphi+q^4)^2(1+2q^3\sin.\varphi+q^6)^2\ldots\ldots}{(1-2q\cos.2\varphi+q^2)(1-2q^3\cos.2\varphi+q^6)(1-2q^5\cos.2\varphi+q^{10})\ldots\ldots};\\
\sqrt{\dfrac{1-\sin.\omega}{1+\sin.\omega}}=\sqrt{\dfrac{1-\sin.\varphi}{1+\sin.\varphi}}\times\\
\dfrac{(1-2q\sin.\varphi+q^2)(1-2q^2\sin.\varphi+q^4)(1-2q^3\sin.\varphi+q^6)\ldots\ldots}{(1+2q\sin.\varphi+q^2)(1+2q^2\sin.\varphi+q^4)(1+2q^3\sin.\varphi+q^6)\ldots\ldots}.
\end{array}\right.$$

[18] Considérons maintenant les fonctions $f(q,\varphi)$, $\Pi'(q,\varphi)$ exprimées en facteurs trinomes dans les trois équations (T). En exécutant le produit $\sin.\varphi.f(q,\varphi)$, on trouvera qu'il est de la forme:

$$A'_{(1)}\sin.\varphi-q^2A'_{(3)}\sin.3\varphi+q^6A'_{(5)}\sin.5\varphi-q^{12}A'_{(7)}\sin.7\varphi+\text{etc.},$$

où les coefficiens $A'_{(1)}$, $A'_{(3)}$, $A'_{(5)}$, $A'_{(7)}$, etc. sont des fonctions de q

exprimées par des séries infinies. Mais, avec une légère réflexion, on reconnaît, que le coefficient $A'_{(2i+1)}$ est multiplié par $(-1)^i q^{i(i+1)}$; i étant un nombre quelconque entier et positif. De sorte que la série précédente peut être représentée par

$$\sum_0^\infty . (-1)^i q^{i(i+1)} A'_{(2i+1)} \sin.(2i+1)\varphi \ .$$

En multipliant par $2.\sqrt{-1}$, on aura par les exponentielles imaginaires (en faisant $X = e^{\varphi.\sqrt{-1}}$) :

$$2.\sqrt{-1}.\sin.\varphi.f(q,\varphi) = (X - X^{-1}).f'(q, X).f'(q, X^{-1}) \ ,$$

en observant, que, d'après la formule

$$1 - 2q^m \cos.2\varphi + q^{2m} = (1 - q^m X^2)(1 - q^m X^{-2}) \ ;$$

si l'on fait

$$f'(q, X) = (1 - q^2 X^2)(1 - q^4 X^2)(1 - q^6 X^2)(1 - q^8 X^2) \ldots\ldots ;$$

$$f'(q, X^{-1}) = (1 - q^2 X^{-2})(1 - q^4 X^{-2})(1 - q^6 X^{-2})(1 - q^8 X^{-2}) \ldots :$$

l'on a

$$f(q,\varphi) = f'(q, X).f'(q, X^{-1}) \ .$$

En faisant de même le produit des facteurs trinomes qui composent la fonction $\Pi'(q,\varphi)$ on verra que l'on a une série de la forme

$$\begin{aligned} & 2B'_{(0)} - 2qB'_{(2)} \cos.2\varphi + 2q^4 B'_{(4)} \cos.4\varphi - 2q^9 B'_{(6)} \cos.6\varphi \\ & \quad + 2q^{16} B'_{(8)} \cos.8\varphi - 2q^{25} B'_{(10)} \cos.10\varphi + \text{etc.} \\ & = \sum_0^\infty . (-1)^i 2q^{ii}.\cos.2i\varphi = \sum_0^\infty . (-1)^i q^{ii} B_{(2i)} (X^{2i} + X^{-2i}) \\ & = \Pi''(q, X).\Pi''(q, X^{-1}) \ ; \end{aligned}$$

en posant

$$\Pi''(q, X) = (1 - qX^2)(1 - q^3 X^2)(1 - q^5 X^2)(1 - q^7 X^2) \ldots\ldots ;$$

$$\Pi''(q, X^{-1}) = (1 - qX^{-2})(1 - q^3 X^{-2})(1 - q^5 X^{-2})(1 - q^7 X^{-2}) \ldots ;$$

ce qui donne

$$\Pi'(q,\varphi) = \Pi''(q, X).\Pi''(q, X^{-1}) \ .$$

Tous les coefficiens $A'_{(3)}$, $A'_{(5)}$, etc. sont égaux au premier $A'_{(1)}$: et tous les coefficiens $B'_{(2)}$, $B'_{(4)}$, etc. sont égaux au premier $2B'_{(0)}$. Mais, pour démontrer cette égalité il faut reprendre les équations (T) et établir un autre principe.

[19] Les formules (T) vérifient explicitement ce principe; savoir: que en remplaçant φ par $\varphi+\frac{\pi H}{H'}\cdot\sqrt{-1}$ l'expression de $\sin.\omega$, par le second membre de la première des équations (T), ne subit aucun changement. En effet, en posant $X=e^{\varphi\cdot\sqrt{-1}}$, nous avons

$$\sin.\varphi=\frac{X-X^{-1}}{2.\sqrt{-1}}\;;\qquad \sin.\left(\varphi+\frac{\pi H}{H'}\cdot\sqrt{-1}\right)=\frac{qX-q^{-1}X^{-1}}{2.\sqrt{-1}}\;,$$

de sorte que il faut remplacer X par qX pour exécuter ce changement. Alors l'on a

$$f'(q,qX)=\frac{f'(q,X)}{1-q^2X^2}\;;\quad f'(q,q^{-1}X^{-1})=(1-X^{-2}).f'(q,X^{-1})\;;$$

$$\Pi''(q,qX)=\frac{\Pi''(q,X)}{1-qX^2}\;;\quad \Pi''(q,q^{-1}X^{-1})=(1-q^{-1}X^{-2}).\Pi''(q,X^{-1})\;;$$

et par conséquent

$$2.\sqrt{-1}.\sin.\left(\varphi+\frac{\pi H}{H'}\cdot\sqrt{-1}\right)\cdot\frac{f\left(q,\varphi+\frac{\pi H}{H'}\cdot\sqrt{-1}\right)}{\Pi'\left(q,\varphi+\frac{\pi H}{H'}\cdot\sqrt{-1}\right)}$$

$$=\frac{(qX-q^{-1}X^{-1})(1-X^{-2})(1-qX^2)}{(1-q^2X^2)(1-q^{-1}X^{-2})}\cdot\frac{f'(q,X).f'(q,X^{-1})}{\Pi''(q,X).\Pi''(q,X^{-1})}$$

$$=\frac{(q^2X^2-1)(1-X^{-2})(1-qX^2)}{(1-q^2X^2)(qX^2-1)X^{-1}}\cdot\frac{f'(q,X).f'(q,X^{-1})}{\Pi''(q,X).\Pi''(q,X^{-1})}$$

$$=(X-X^{-1}).\frac{f(q,\varphi)}{\Pi'(q,\varphi)}=\sin.\varphi.\frac{f(q,\varphi)}{\Pi'(q,\varphi)}\cdot 2\cdot\sqrt{-1}\;.$$

Donc, en supprimant le facteur commun $2.\sqrt{-1}$, l'on aura:

$$(119)\ldots\begin{cases}\sin.\omega=\frac{2H'}{\pi}A^2_{(1)}\sin.\left(\varphi+\frac{\pi H}{H'}\cdot\sqrt{-1}\right)\cdot\frac{f\left(q,\varphi+\frac{\pi H}{H'}\cdot\sqrt{-1}\right)}{\Pi'\left(q,\varphi+\frac{\pi H}{H'}\cdot\sqrt{-1}\right)}\;;\\ \sin.\omega=\frac{2H'}{\pi}A^2_{(1)}\sin.\varphi.\frac{f(q,\varphi)}{\Pi'(q,\varphi)}\;;\end{cases}$$

c'est-à-dire l'égalité qu'il s'agissait de démontrer.

D'après la formule (T''), ce principe revient à dire, que, en posant $\xi=F(h',\omega)$, l'on a les deux équations

$$\varphi = \frac{\pi}{2H'}\xi \; ; \qquad \varphi + \frac{\pi H}{H'}\cdot\sqrt{-1} = \frac{\pi}{2H'}\left\{\xi + 2H.\sqrt{-1}\right\} \; ;$$

ou en d'autres termes, que

$$\sin.\Delta(\xi) = \sin.\Delta(\xi + 2H.\sqrt{-1}) = \sin.\Delta(\xi + 4H') \; ,$$

les deux modules h et h' étant complémentaires, c'est-à-dire tels que $h'^2 + h^2 = 1$. Maintenant, si l'on change ξ en $\xi + 4H'$ on aura

$$\sin.\Delta(\xi + 4H') = \sin.\Delta(\xi + 8H') = \sin.\Delta(\xi + 12H') \; ,$$

et en général ;

(120) ..... $\sin.\Delta(\xi) = \sin.\Delta(\xi + 4iH')$;

i étant un nombre entier. Par le changement de ξ en $\xi + 2H.\sqrt{-1}$, l'on aura

$$\sin.\Delta(\xi + 2H.\sqrt{-1}) = \sin.\Delta(\xi + 4H.\sqrt{-1}) = \sin.\Delta(\xi + 6H.\sqrt{-1}) \; :$$

et en général

(121) ..... $\sin.\Delta(\xi) = \sin.\Delta(\xi + 2iH.\sqrt{-1})$.

C'est en vertu des équations (120) et (121), que l'on peut dire, que les fonctions ξ ont *deux* périodes; l'une réelle, égale à $4H'$; l'autre imaginaire, égale à $2H.\sqrt{-1}$.

Il résulte de ces deux mêmes équations que l'on a, en général,

$$\sin.\Delta(\xi + 4mH' + 2m'H.\sqrt{-1}) = \sin.\Delta(\xi) \; ;$$

m et m' étant des nombres entiers positifs ou négatifs. Cette équation est ainsi démontrée d'une manière fort claire. Ce théorême peut être trouvé facilement d'une toute autre manière, sans l'emploi des équations (T): mais, pour éviter toute obscurité et rendre raison du mode de son existence, j'ai préféré la démonstration que je viens d'exposer. Il faut consulter les pages 91 et 92 du 3.ème Volume des Fonctions Elliptiques de Legendre, pour voir son application à la division de la fonction donnée ξ en un nombre n de parties égales. Il suffit ici d'avoir démontré le principe qui sert de fondement aux résultats dont j'ai parlé au N.° [13] après l'équation (110).

Si dans la même première des trois équations (T) on y remplace φ par $\varphi + \frac{\pi H}{2H'}\cdot\sqrt{-1}$, en désignant par $\omega_{(1)}$ la valeur que prend ω par

ce changement l'on aura :

$$(122) \ldots \sin.\omega_{(1)} = \frac{2H'}{\pi} A^2_{(1)} \sin.\left(\varphi + \frac{\pi H}{2H'}\cdot\sqrt{-1}\right) \cdot \frac{f\left(q, \varphi + \frac{\pi H}{2H'}\cdot\sqrt{-1}\right)}{\Pi'\left(q, \varphi + \frac{\pi H}{2H'}\cdot\sqrt{-1}\right)} .$$

Ainsi les équations (119) et (122) démontrent, que, par une même fonction, fonct.(φ), l'on peut écrire les deux équations

$$\sin.\omega = \frac{2H'}{\pi} A^2_{(1)} \text{fonct.}(\varphi) ;$$

$$\sin.\omega_{(1)} = \frac{2H'}{\pi} A^2_{(1)} \text{fonct.}\left(\varphi + \frac{\pi H}{2H'}\cdot\sqrt{-1}\right) ;$$

lesquelles étant multipliées donnent

$$\sin.\omega.\sin.\omega_{(1)} = \left(\frac{2H'}{\pi}\right)^2 . A^4_{(1)} \text{fonct.}(\varphi).\text{fonct.}\left(\varphi + \frac{\pi H}{2H'}\cdot\sqrt{-1}\right) .$$

Le produit de ces deux fonctions de φ est une quantité indépendante de la variable φ, dont la valeur est précisément égale à $\frac{1}{4\cdot\sqrt{q}}$. En effet en faisant $X = e^{\varphi\cdot\sqrt{-1}}$ l'on a

$$2.\sqrt{-1}.\sin.\varphi = X - X^{-1} ;$$

$$2.\sqrt{-1}.\sin.\left(\varphi + \frac{\pi H}{2H'}\cdot\sqrt{-1}\right) = X.q^{\frac{1}{2}} - X^{-1}.q^{-\frac{1}{2}}.$$

En remplaçant X par $X.q^{\frac{1}{2}}$ dans les équations précédentes

$$f(q, \varphi) = f'(q, X).f'(q, X^{-1}) ;$$

$$\Pi'(q, \varphi) = \Pi''(q, X).\Pi''(q, X^{-1}) ;$$

on verra que l'on a;

$$f'\left(q, Xq^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\Pi''(q, X)}{1 - qX^2} ; \quad f'\left(q, X^{-1}q^{-\frac{1}{2}}\right) = \Pi''(q, X^{-1}) ;$$

$$\Pi''\left(q, Xq^{\frac{1}{2}}\right) = f'(q, X) ; \quad \Pi''\left(q, X^{-1}q^{-\frac{1}{2}}\right) = (1 - X^{-2})f'(q, X^{-1});$$

et par conséquent

$$\frac{f(q,\varphi)}{\Pi'(q,\varphi)}\cdot\frac{f\left(q,\varphi+\frac{\pi H}{2H'}\cdot\sqrt{-1}\right)}{\Pi'\left(q,\varphi+\frac{\pi H}{2H'}\cdot\sqrt{-1}\right)}$$

$$=\frac{f'(q,X).f'(q,X^{-1}).\Pi''(q,X).\Pi''(q,X^{-1})}{\Pi''(q,X).\Pi''(q,X^{-1}).f'(q,X).f'(q,X^{-1})}\cdot\frac{1}{(1-X^{-2})(1-qX^2)}$$

$$=\frac{1}{(1-X^{-2})(1-qX^2)}.$$

Mais

$$\sin.\varphi.\sin.\left(\varphi+\frac{\pi H}{2H'}\cdot\sqrt{-1}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}(1-X^{-2})X^2q^{\frac{1}{2}}(1-X^{-2}q^{-1})=\frac{(1-X^{-2})(1-qX^2)}{4.\sqrt{q}}.$$

Donc il est démontré que l'on a l'équation

$$(123)\ \ldots\ldots\qquad \sin.\omega.\sin.\omega_{(1)}=\left(\frac{2H'}{\pi}\right)^2\cdot\frac{A'_{(1)}}{4.\sqrt{q}}.$$

Maintenant, remarquons que la formule (T″) donne

$$\varphi+\frac{\pi H}{2H'}\cdot\sqrt{-1}=\frac{\pi}{2H'}F(h',\omega_{(1)});$$

ou bien

$$\frac{2H'.\varphi}{\pi}+H.\sqrt{-1}=F(h',\omega_{(1)}).$$

Cette équation, écrite avec le signe intégral, revient à dire que

$$(124)\ldots\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\omega}}+\sqrt{-1}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega}{\sqrt{1-h^2.\sin.^2\omega}}=\int_0^{\omega_{(1)}}\frac{d\omega}{\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\omega}}.$$

Or en posant

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-h'^2x^2)}}=F(x);$$

si l'on remplace x par $x.\sqrt{-1}$ l'on a

$$\sqrt{-1}.\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+h'^2x^2)}}=F(x.\sqrt{-1}).$$

Donc en faisant $x = \text{tang.}\theta$, l'on aura

$$\sqrt{-1}\,.\int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1-h^2.\sin.^2\theta}} = F(\text{tang.}\theta.\sqrt{-1})\ ;$$

et par conséquent

$$\sqrt{-1}\,.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-h^2.\sin.^2\theta}} = F(\infty.\sqrt{-1})\ .$$

L'équation (124) peut donc être remplacée par l'équation

$$(125)\ldots \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\omega}} + \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\theta}} = \int_0^{\omega_{(1)}} \frac{d\omega}{\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\omega}}\ ;$$

pourvu que la seconde de ces intégrales soit évaluée en y faisant

$$\sin.\theta = \infty.\sqrt{-1}\ .$$

Mais, entre trois amplitudes ω, θ, $\omega_{(1)}$, relatives au même module h', l'on a, en général, l'équation

$$\cos.\omega.\cos.\theta - \sin.\omega.\sin.\theta.\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\omega_{(1)}} = \cos.\omega_{(1)}\ ,$$

qui donne

$$\left(\sin.\omega.\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\omega_{(1)}}\right)^2 = \left(\frac{\cos.\omega.\cos.\theta - \cos.\omega_{(1)}}{\sin.\theta}\right)^2,$$

et par conséquent

$$h'^2.\sin.^2\omega.\sin.^2\omega_{(1)} = \sin.^2\omega - \left(\frac{\cos.\omega.\cos.\theta - \cos.\omega_{(1)}}{\sin.\theta}\right)^2.$$

Donc, en remplaçant $\sin.\theta$ par $u.\sqrt{-1}$, on aura

$$h'^2.\sin.^2\omega.\sin.^2\omega_{(1)} = \sin.^2\omega + \frac{1}{u^2}\left(\cos.\omega.\sqrt{1+u^2} - \cos.\omega_{(1)}\right)^2,$$

d'où l'on tire :

$$h'^2.\sin.^2\omega.\sin.^2\omega_{(1)} = 1 + \frac{\cos.^2\omega + \cos.^2\omega_{(1)}}{u^2} - \frac{2\cos.\omega.\cos.\omega_{(1)}.\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}}{u}\ .$$

Maintenant, si l'on fait $u = \infty$, il est clair que l'on a

$$h'^2 . \sin.^2\omega . \sin.^2\omega_{(1)} = 1 \;;$$

ce qui démontre que l'équation (124) [ou son équivalente (125)] ne peut avoir lieu sans avoir l'équation

$$(126) \;\ldots\ldots\ldots \qquad \sin.\omega . \sin.\omega_{(1)} = \frac{1}{h'} \;.$$

Elle revient à dire que, en général,

$$(127) \;\ldots\ldots\ldots \quad \sin. A(\xi + H.\sqrt{-1}) = \frac{1}{h'.\sin. A(\xi)} \;.$$

De cette équation on tire l'équation (121). Car en y remplaçant ξ par $\xi + H.\sqrt{-1}$ l'on a

$$\sin. A(\xi + 2H.\sqrt{-1}) = \frac{1}{h'.\sin. A(\xi + H.\sqrt{-1})} = \sin. A(\xi) \;;$$

mais cette manière rapide de parvenir à l'équation (121) me paraît peu satisfaisante. En remplaçant ξ par $\xi + 2H.\sqrt{-1}$ dans l'équation (127) l'on aura

$$\sin. A(\xi + 3H.\sqrt{-1}) = \sin. A(\xi + 5H.\sqrt{-1}) = \frac{1}{h'\sin. A(\xi)} \;,$$

et, en général,

$$\sin. A\left[\xi + (2n-1)H.\sqrt{-1})\right] = \frac{1}{h'\sin. A(\xi)} \;;$$

$2n-1$ étant un nombre entier.

Il suit de là et de l'équation (123), que

$$(128) \;\ldots\ldots \quad \left\{ \frac{1}{h'} = \left(\frac{2H'}{\pi}\right)^2 . \frac{A^4_{(1)}}{4.\sqrt{q}} \;; \quad A^2_{(1)} . \frac{2H'}{\pi} = \frac{2.\sqrt[4]{q}}{\sqrt{h'}} \;. \right.$$

Je ne puis m'empêcher d'ajouter ici, que la découverte des deux principes exprimés par les équations (121) et (127) était facile, après avoir trouvé la première des trois équations (T). Il suffisait de remarquer: 1.° que l'expression générale de φ qui donne $\sin.\varphi . f(q, \varphi) = 0$ est

$$\varphi = \frac{\pi}{2H'}(4iH' + 2mH.\sqrt{-1}) \;;$$

m et i étant des nombres entiers positifs ou négatifs; 2.° que l'expression générale de φ qui donne $\Pi'(q, \varphi) = 0$, est

$$\varphi = \frac{\pi}{2H'}\left\{4iH' + (2m-1).H.\sqrt{-1}\right) \;.$$

C'est de quoi on a la preuve par la considération des équations

$$\cos. 2\varphi = \frac{q^{2m} + q^{-2m}}{2} \; ; \qquad \cos. 2\varphi = \frac{q^{(2m-1)} + q^{-(2m-1)}}{2} \; .$$

Après cela il était naturel de décomposer les facteurs trinomes en facteurs binomes pour compléter cette découverte analytique.

[20] Ces mêmes formules renferment une autre conséquence importante, qui ne doit pas être exposée plus loin; elle consiste en cela que, si l'on fait $\omega = \frac{\pi}{2}$, on a, d'après les équations (124) et (126);

$$H' + H.\sqrt{-1} = \int_0^{\frac{1}{h'}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-h'^2x^2)}} = F\left(\frac{1}{h'}\right) .$$

Or, en posant $h'x = u$, cette équation devient

$$h'(H' + H.\sqrt{-1}) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\left(1-\frac{u^2}{h'^2}\right)}} = h'F\left(\frac{1}{h'}\right) .$$

Donc on peut établir ce principe: que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-h'^2x^2)}} = H' \; , \qquad \text{devient} \qquad h'(H' + H.\sqrt{-1})$$

par le changement de h' en $\frac{1}{h'}$: ce qui revient à dire que

$$(129) \; \ldots\ldots \; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \frac{\sin.^2\omega}{h'^2}}} = h'(H' + H.\sqrt{-1}) \; .$$

Ce même changement étant introduit dans l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-h^2x^2)}} = H \; ; \qquad \text{où} \qquad h^2 = 1 - h'^2 \; ;$$

elle deviendra égale au produit $h'H$. Car, en faisant $1 - x^2 = y^2$, l'on aura, par le changement de h^2 en $-\frac{h^2}{h'^2}$,

$$\int_0^1 \frac{h'dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-h^2y^2)}} = h'H :$$

ce qui revient à dire, que

$$(130) \ldots\ldots\ldots \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1+\frac{h^2}{h'^2}x^2\right)}} =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{h'd\omega}{\sqrt{h'^2+h^2.\cos.^2\omega}} = h'.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{1-h^2.\sin.^2\omega}} = h'H .$$

Donc, en échangeant h' en h et h et h', on aura, par les mêmes raisons,

$$(131) \ldots \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{h^2}\right)}} = h(H+H'.\sqrt{-1}) ; \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1+\frac{h'^2}{h^2}x^2\right)}} = hH' . \end{array} \right.$$

Le rapport $\frac{H}{H'}$, considéré comme une fonction du module complémentaire h; par le changement de h en $\frac{1}{h}$ devient

$$\frac{h(H+H'.\sqrt{-1})}{hH'} = \frac{H}{H'} + \sqrt{-1} .$$

Et la quantité q devient

$$(132) \ldots \quad e^{-\pi\left(\frac{H}{H'}+\sqrt{-1}\right)} = q(\cos.\pi + \sqrt{-1}.\sin.\pi) = -q .$$

Il suit de là que l'équation

$$\varphi = \frac{\pi}{2H'} F(h', \omega) ,$$

devient, par le changement de h en $\frac{1}{h}$;

$$\varphi_{(1)} = \frac{\pi}{2hH'} F\left(\frac{h'}{h}.\sqrt{-1}, \omega\right) = \frac{\pi}{2H'}.\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{h^2 + h'^2.\sin.^2\omega}} :$$

c'est-à-dire

$$\varphi_{(1)} = \frac{\pi}{2H'}.\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - h'^2.\sin.^2\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)}} = \frac{\pi}{2H'}\left\{H' - F(h', \omega)\right\} .$$

Donc, par le changement simultané de h, q, φ, en $\frac{1}{h}, -q, \varphi_{(1)} = \frac{\pi}{2} - \varphi$, respectivement, les deux amplitudes correspondantes seront ω et $\frac{\pi}{2} - \omega$. Ainsi, une équation de la forme

$$\sin.\omega = \text{fonct.}(\varphi, q, h', h, H', H)$$

donnera une seconde équation de la forme

$$\sin.\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) =$$

$$\text{fonct.}\left\{\frac{\pi}{2} - \varphi, -q, \frac{h'}{h}.\sqrt{-1}, \frac{1}{h}, h'.H, h'(H' + H.\sqrt{-1})\right\} .$$

En écrivant seulement

$$\sin.\omega = \text{fonct.}(\varphi, q, h) ,$$

pour plus de simplicité; la seconde équation sera

$$\sin.\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \text{fonct.}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, -q, \frac{1}{h}\right) .$$

De sorte qu'on aura l'équation

$$1 = \sin.^2\omega + \sin.^2\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) =$$

$$\left[\text{fonct.}(\varphi, q, h)\right]^2 + \left[\text{fonct.}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, -q, \frac{1}{h}\right)\right]^2 .$$

En finissant le N.° [12] j'ai établi l'équation

$$\omega = \varphi + 2.\sum_1^{\infty}.\frac{q^i}{i(1 + q^{2i})}.\sin.2i\varphi .$$

Donc, en y appliquant le principe précédent, il viendra

$$\frac{\pi}{2} - \omega = \frac{\pi}{2} - \varphi - 2.\sum_1^{\infty}.\frac{(-1)^i.q^i}{i(1 + q^{2i})}\cos.i\pi.\sin.2i\varphi ;$$

mais $\cos. i\pi = (-1)^i$: donc

$$\frac{\pi}{2} - \omega = \frac{\pi}{2} - \varphi - 2 . \sum_1^\infty . \frac{q^i}{i(1+q^{2i})} \cdot \sin. 2i\varphi \ ;$$

ce qui redonne la même valeur pour ω, et offre le plus simple cas où la vérité du principe est mise en évidence.

Le changement de signe, qui peut ainsi affecter la quantité q par l'intermédiaire des quantités imaginaires, est un fait analytique tout-à-fait digne de remarque. Il rappelle une phrase heureuse de Jean Bernoulli qui disait, en 1712, dans un cas analogue: « quae per se sunt impos- » sibilia inserviunt tamen ad inveniendum quod est possibile et ad scopum » nostrum facit, idque levi et extemporanea quantitatum substitutione » (page 512 du 1.r Tome de ses œuvres).

[21] Cela posé, voici comment on peut démontrer, que tous les coefficiens $A'_{(3)}$, $A'_{(5)}$, $A'_{(7)}$, etc. sont égaux au premier $A'_{(1)}$. En remplaçant φ par $\varphi + \frac{\pi H}{H'} . \sqrt{-1}$, cela revient à remplacer X par qX; et on vient de voir au N.° [19] que, par là, on a l'équation

$$f'(q, qX) . f'(q, q^{-1}X^{-1}) = \frac{(1-X^{-2})}{1-q^2X^2} . f'(q, X) . f'(q, X^{-1}) \ ;$$

d'où l'on tire:

$$(qX - q^{-1}X^{-1}) . f'(q, qX) . f'(q, q^{-1}X^{-1}) = -\frac{(X - X^{-1})}{qX^2} . f'(q, X) . f'(q, X^{-1}).$$

Donc la série

$$2 . \sqrt{-1} \, (A'_{(1)} \sin. \varphi - A'_{(3)} \sin. 3\varphi + \text{etc.}) \ ,$$

exprimée par

$$(X - X^{-1}) f'(q, X) . f'(q, X^{-1})$$

au N.° [18], étant multipliée par $-q^{-1} . X^{-2}$, doit devenir identique avec celle que l'on obtient par le changement de X en qX; ce qui fournit l'équation

$$\begin{aligned}
& -A'_{(1)} (q^{-1}X^{-1} - q^{-1}X^{-3}) + q^2 A'_{(3)} (q^{-1}X - q^{-1}X^{-5}) \\
& -q^6 A'_{(5)} (q^{-1}X^3 - q^{-1}X^{-7}) + q^{12} A'_{(7)} (q^{-1}X^5 - q^{-1}X^{-9}) \\
& -q^{20} A'_{(9)} (q^{-1}X^7 - q^{-1}X^{-11}) + \text{etc.} \\
= & A'_{(1)} (qX - q^{-1}X^{-1}) - q^2 A'_{(3)} (q^3X^3 - q^{-3}X^{-3}) \\
& + q^6 A'_{(5)} (q^5X^5 - q^{-5}X^{-5}) - q^{12} A'_{(7)} (q^7X^7 - q^{-7}X^{-7}) \\
& + q^{20} A'_{(9)} (q^9X^9 - q^{-9}X^{-9}) - \text{etc.}
\end{aligned}$$

Or, en égalant les coefficiens des mêmes puissances de X, on trouve immédiatement :

$$A'_{(3)} = A'_{(1)} \; ; \quad A'_{(5)} = A'_{(3)} \; ; \quad A'_{(7)} = A'_{(5)} \; ; \quad \text{etc.}$$

Donc l'on a

$$(133) \ldots \quad \sin.\varphi . f(q, \varphi) = A'_{(1)} . \sum_{1}^{\infty} . (-1)^{i-1} q^{i(i-1)} . \sin.(2i-1)\varphi =$$

$$A'_{(1)} \left\{ \sin.\varphi - q^2 . \sin.3\varphi + q^6 . \sin.5\varphi - q^{12} . \sin.7\varphi + q^{20} . \sin.9\varphi - \text{etc.} \right\} .$$

En faisant $\varphi = \frac{\pi}{2}$, la première expression de $f(q, \varphi)$ donne :

$$f\left(q, \frac{\pi}{2}\right) = (1+q^2)^2 (1+q^4)^2 (1+q^6)^2 \ldots\ldots\ldots ;$$

et de là on tire

$$(134) \ldots\ldots \quad A'_{(1)} = \frac{(1+q^2)^2 . (1+q^4)^2 . (1+q^6)^2 \ldots\ldots}{1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}+\text{etc.}} .$$

Maintenant, si nous reprenons les équations obtenues vers la fin du N.° [18], on verra que, en remplaçant φ par $\varphi + \frac{\pi H}{H'} . \sqrt{-1}$, l'on a

$$\Pi''(q, qX) . \Pi''(q, q^{-1}X^{-1}) = \left(\frac{1-q^{-1}X^{-2}}{1-qX^2}\right) \Pi''(q, X) . \Pi''(q, X^{-1})$$

$$= \frac{-1}{qX^2} . \Pi''(q, X) . \Pi''(q, X^{-1}) .$$

Donc, en multipliant la série

$$2B'_{(0)} - 2qB'_{(2)} \cos.2\varphi + \text{etc.}$$

par $-q^{-1}.X^{-2}$, on doit avoir une quantité identiquement égale à celle que l'on obtient par le changement de X en qX ; ce qui fournit l'équation

$$-2B'_{(0)} q^{-1}X^{-2} + qB'_{(2)} (q^{-1} + q^{-1}X^{-4}) - q^4 B'_{(4)} (q^{-1}X^2 + q^{-1}X^{-6})$$
$$+ q^9 B'_{(6)} (q^{-1}X^4 + q^{-1}X^{-8}) - q^{16} B'_{(8)} (q^{-1}X^6 + q^{-1}X^{-10}) + \text{etc.}$$
$$= 2B'_{(0)} - qB'_{(2)} (q^2X^2 + q^{-2}X^{-2}) + q^4 B'_{(4)} (q^4X^4 + q^{-4}X^{-4})$$
$$- q^9 B'_{(6)} (q^6X^6 + q^{-6}X^{-6}) + q^{16} B'_{(8)} (q^8X^8 + q^{-8}X^{-8}) - \text{etc.} ,$$

laquelle, en égalant les coefficiens des mêmes puissances de X, donne

$$B'_{(2)} = 2B'_{(0)} = B'_{(4)} = B'_{(6)} = B'_{(8)} = \text{etc.}$$

Donc nous avons

$$(135)\quad \begin{cases} \Pi'(q,\varphi) = 2B'_{(0)} \left\{ \begin{array}{l} 1 - 2q\cos.2\varphi + 2q^4\cos.4\varphi - 2q^9\cos.6\varphi \\ + 2q^{16}\cos.8\varphi \ldots + 2(-1)^i q^{ii}\cos.2i\varphi + \text{etc.} \end{array} \right\} ; \\ \Pi'(q,\varphi) = 2B'_{(0)} - 4B'_{(0)} . \sum_1^\infty . (-1)^{i-1} . q^{ii}\cos.2i\varphi \ . \end{cases}$$

En faisant $\varphi = \frac{\pi}{2}$, cette équation donne

$$(136)\ \ldots\ldots\quad 2B'_{(0)} = \frac{(1+q)^2(1+q^3)^2(1+q^5)^2\ldots\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\text{etc.}} .$$

Il suit de là, et de l'équation (134), que si l'on fait

$$(137)\ldots \begin{cases} Q = 1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}\ldots\ldots+2q^{ii}+\text{etc.} = \sum_0^\infty . q^{ii} : \\ Q' = 1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}+q^{30}\ldots\ldots+q^{i(i+1)}+\text{etc.} = \sum_1^\infty . q^{i(i-1)} : \end{cases}$$

l'on a l'équation

$$(138)\ \ldots\ldots\quad \frac{A'_{(1)}}{2B'_{(0)}} = \frac{Q}{Q'} . \left\{ \frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)(1+q^8)\ldots\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)(1+q^7)\ldots\ldots} \right\}^2 .$$

Par l'analyse que je viens d'exposer, on ne voit pas que l'on doive avoir l'égalité $2B'_{(0)} = A'_{(1)}$: mais elle sera démontrée directement ci-après. LEGENDRE, à la page 102 de son 3.ème Volume, a éludé cette difficulté par un artifice particulier, qui devient naturel lorsqu'on sait d'ailleurs l'existence de cette équation. Néanmoins, j'ai voulu l'éviter, pour conserver à cette transformation la simplicité qui lui est inhérente.

[22] Remarquons maintenant que, par le rapprochement de l'équation (118), il y a lieu de penser que le carré Q^2 de la série $1+2q+$ etc. est égal à $\frac{2\Pi'}{\pi}$. Relativement à la valeur de Q' il faut observer que, en écrivant $Q = f(q)$, l'on a :

$$Q = f(q) = 1 + 2(q^4+q^{16}+q^{36}+\text{etc.}) + 2(q+q^9+q^{25}+\text{etc.}) .$$

La première de ces deux séries peut être exprimée par $f(q^4)$; donc

$$(139)\ \ldots\ldots\quad f(q) - f(q^4) = 2(q+q^9+q^{25}+\text{etc.}) .$$

Cela posé, si l'on remplace q par $q^{\frac{1}{4}}$, il est clair que nous avons

$$f(q^{\frac{1}{4}}) - f(q) = 2(q^{\frac{1}{4}}+q^{\frac{9}{4}}+q^{\frac{25}{4}}+\text{etc.}) .$$

Mais la valeur de Q' peut être écrite ainsi :

$$Q' = q^{-\frac{1}{4}}\left(q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}} + \text{etc.}\right) ;$$

partant il est clair que l'on a :

$$f\left(q^{\frac{1}{4}}\right) - f(q) = 2\,q^{\frac{1}{4}}.\,Q' \; ; \qquad \frac{Q'}{Q} = \left[\frac{f\left(q^{\frac{1}{4}}\right)}{f(q)} - 1\right] \cdot \frac{1}{2(q)^{\frac{1}{4}}} .$$

En supposant l'amplitude ω infiniment petite, la valeur de φ sera aussi infiniment petite; et en vertu de l'équation (T″) l'on a le rapport $\frac{\omega}{\varphi} = \frac{2H'}{\pi}$. Les équations (T) sont donc satisfaites par identité, en y faisant $\cos.2\varphi = 1$. Mais, en posant $\omega = \frac{\pi}{2}$, l'équation (T″) donne aussi $\varphi = \frac{\pi}{2}$; et par conséquent $\cos.2\varphi = -1$; ce qui réduit la troisième des équations (T) à

$$(140) \ldots\ldots\ldots \qquad \sqrt{1 - h'^2} = h = D'_{(1)} .$$

Cela posé, il est clair, que la première et la troisième des équations (T′) donnent

$$(141) \ldots \frac{A^2_{(1)}}{D^2_{(1)}} = \frac{A^2_{(1)}}{\sqrt{h}} = \left\{\frac{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)(1+q^7)\ \ldots\ldots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ \ldots\ldots}\right\}^2 .$$

La seconde des équations (T) donne l'expression du rapport $\frac{\cos.\omega}{\cos.\varphi}$ en fonction de φ: et ce rapport, pour le cas particulier de $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$, devient égal à

$$B^2_{(1)}\left(\frac{1-q^2}{1+q}\right)^2\left(\frac{1-q^4}{1+q^3}\right)^2\left(\frac{1-q^6}{1+q^5}\right)^2 \ldots\ldots\ldots$$

Mais d'un autre côté la fraction $\frac{\cos.\omega}{\cos.\varphi}$ devenant égale à $\frac{0}{0}$, on doit, conformément au principe général du Calcul Différentiel, prendre

$$\frac{d.\frac{\cos.\omega}{d\varphi}}{d.\frac{\cos.\varphi}{d\varphi}} = \frac{d\omega}{d\varphi}\cdot\frac{\sin.\omega}{\sin.\varphi} = \frac{d\omega}{d\varphi}\cdot\frac{\sin.\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin.\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{d\omega}{d\varphi}$$

pour sa valeur. Et comme en différentiant l'équation (T″), l'on a

$$\frac{d\omega}{d\varphi}=\frac{2H'}{\pi}\cdot\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\omega}\ ,$$

si l'on fait $\omega=\frac{\pi}{2}$, l'on aura $\frac{d\omega}{d\varphi}=\frac{2H'}{\pi}\cdot h$. Il suit de là que

$$(142)\ \ldots\quad \frac{2H'}{\pi}\cdot h=B^2_{(1)}\left\{\left(\frac{1-q^2}{1+q}\right)\left(\frac{1-q^4}{1+q^3}\right)\left(\frac{1-q^6}{1+q^5}\right)\ldots\ldots\right\}^2.$$

Donc, par la comparaison de cette équation avec la précédente, l'on a

$$\frac{2H'}{\pi}\cdot h=B^2_{(1)}\cdot\frac{\sqrt{h}}{A^2_{(1)}}\ ;$$

d'où l'on tire

$$(143)\ \ldots\ldots\quad B^2_{(1)}=\frac{2H'}{\pi}\cdot\sqrt{h}.A^2_{(1)}=2(q)^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{\frac{h}{h'}}\ .$$

Les trois équations (T), en y substituant pour $A^2_{(1)}$, $B^2_{(1)}$, $D^2_{(1)}$ leurs valeurs donnés sous forme finie par les équations (128), (139), (136), deviennent

$$(T_3)\ \ldots\ldots\quad \left\{\begin{aligned}
&\sin.\omega=\frac{2(q)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{h'}}\cdot\frac{\sin.\varphi.f(q,\varphi)}{\Pi'(q,\varphi)}\ ;\\
&\cos.\omega=2(q)^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{\frac{h}{h'}}\cdot\frac{\cos.\varphi.f\left(q,\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}{\Pi'(q,\varphi)}\ ;\\
&\sqrt{1-h'^2\sin.^2\omega}=\sqrt{h}.\frac{\Pi'\left(q,\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}{\Pi'(q,\varphi)}\ .
\end{aligned}\right.$$

L'équation (142) revient à dire que

$$\frac{2H'h}{\pi}=B^2_{(1)}\cdot\frac{B^2_{(1)}}{A^2_{(1)}}\cdot\frac{\beta'^2}{\beta^2}\ ,$$

en posant

$$\beta=(1+q)(1+q^3)(1+q^5)(1+q^7)\ \ldots\ldots\ ;$$
$$\beta'=(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)(1+q^8)\ \ldots\ldots\ .$$

Mais

$$\frac{B^4_{(1)}}{A^2_{(1)}}=\frac{4.\sqrt{q}.\frac{h}{h'}}{A^2_{(1)}}=4(q)^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{H'}{\pi}\cdot\frac{h}{\sqrt{h'}}\ ,$$

partant nous avons l'équation

$$\frac{\beta'^2}{\beta^2}=\frac{\sqrt{h'}}{2(q)^{\frac{1}{4}}}\ .$$

D'un autre côté l'on a

$$\frac{A'_{(1)}}{2B'_{(0)}}=\frac{Q}{Q'}\cdot\frac{\beta'^2}{\beta^2}\ .$$

Donc

$$\frac{A'_{(1)}}{2B'_{(0)}}=\frac{Q}{Q'}\cdot\frac{\sqrt{h'}}{2(q)^{\frac{1}{4}}}\ .$$

En outre nous avons l'équation

$$\frac{1}{D_{(1)}}=\frac{1}{(h)^{\frac{1}{4}}}=\frac{\beta}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots\ldots}=\beta^2.\beta'=\frac{\beta^2}{\beta'^2}\cdot\beta'^3\ .$$

Donc l'on a:

$$\beta'^3=\frac{\sqrt{h'}}{2(hq)^{\frac{1}{4}}}\ ;\qquad \beta^3=\frac{\sqrt{h'}}{2(hq)^{\frac{1}{4}}}\cdot\left(\frac{2(q)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{h'}}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{2}.q^{\frac{1}{8}}}{(hh')^{\frac{1}{4}}}\ ;$$

$$(\beta\beta')^3=\frac{q^{-\frac{1}{8}}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(h')^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{h}}\ .$$

On verra ci-après que $\frac{Q}{Q'}=\frac{2(q)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{h'}}$: donc l'on a

$$2B'_{(0)}=A'_{(1)}=\frac{\beta'^2}{Q'}=\beta'^2.q^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{\frac{2\pi}{h'H'}}=\frac{q^{\frac{1}{12}}}{(2hh')^{\frac{1}{6}}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{H'}}\ .$$

En faisant

$$\alpha=(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ ;$$

$$\alpha'=(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

l'on a

$$\alpha=\beta(h)^{\frac{1}{4}}\ ;\qquad \alpha'=\frac{\alpha}{A_{(1)}}=\beta(hh')^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{\frac{H'}{\pi}}\cdot q^{-\frac{1}{8}}\ ;$$

partant

$$\alpha\alpha'=\beta^2.\sqrt{h}.(h')^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{\frac{H'}{\pi}}\cdot q^{-\frac{1}{8}}\ ;\quad \frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'}=\frac{1}{\sqrt{h}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2H'}}\ .$$

On sait que, en développant suivant les puissances de q, l'on a:

$$\alpha'=\sum_0^\infty.(-1)^i.q^{3i^2\pm i}\ ;\qquad \alpha\alpha'=\sum_0^\infty.(-1)^i.q^{\frac{3i^2\pm i}{2}}\ .$$

Donc, q étant une fraction positive donnée, l'on aura, sous forme finie,

$$\sum_0^\infty . (-1)^i q^{3i^2 \pm i} = q^{-\frac{1}{12}} . \sqrt{\frac{2H'}{\pi}} . \left(\frac{hh'}{4}\right)^{\frac{1}{6}} ;$$

$$\sum_0^\infty . (-1)^i q^{\frac{3i^2 \pm i}{2}} = q^{-\frac{1}{24}} . \sqrt{\frac{2H'}{\pi}} . \frac{h^{\frac{1}{3}} h'^{\frac{1}{12}}}{\sqrt[6]{2}} .$$

C'est un fait analytique bien remarquable celui que l'on rencontre ici: de pouvoir sommer ces deux suites infinies en transformant la fraction donnée, q, de manière qu'elle soit égale à l'exponentielle $e^{-\frac{\pi H}{H'}}$, où l'on a:

$$H' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - h'^2 . \sin.^2\theta}} ; \qquad H = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - h^2 . \sin.^2\theta}} ;$$

et $h' + h'^2 = 1$; ce qui est facile à l'aide de la table des valeurs de $\text{Log.}\left(\frac{1}{q}\right)$ que j'ai donnée au commencement de ce Mémoire.

En faisant $\omega = \frac{\pi}{2}$ l'on a $\varphi = \frac{\pi}{2}$; ce qui réduit la première et la troisième des équations (T_3) à

$$\sqrt{h'} = 2 q^{\frac{1}{4}} . \frac{\beta^2}{\beta'^2} ; \qquad \sqrt{h} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} .$$

Il suit de là et de l'équation $h^2 + h'^2 = 1$, que

$$16 q . \beta'^8 + \alpha^8 = \beta^8 ;$$

ce qui s'accorde avec les valeurs précédentes de α, β, β', sous forme finie, et démontre facilement l'identité, qualifiée « *satis abstrusa* » par Jacobi à la page 90 de son ouvrage.

Si l'on observe que

$$\beta^8 - \alpha^8 = (\beta - \alpha) \left[(\beta + \alpha)(\beta^2 + \alpha^2)(\beta^4 + \alpha^4) \right] ;$$

et que le facteur $\beta - \alpha$ est composé par des puissances *impaires* de q, et les trois autres facteurs par des puissances *paires* de q, on saisira, sans calcul, la possibilité de cette identité. Le nombre 2 étant un multiplicateur commun à chacun de ces quatre facteurs, il est clair que $\beta^8 - \alpha^8$ sera divisible par 16.

[23] En vertu de la transformation exécutée dans le N.° [18], il est

clair que, en faisant $\varphi = \frac{\pi}{2}$, la troisième des équations (T) donne

$$(144)\ldots \quad 1 = \frac{\sqrt{h}.(1+2q+2q^4+2q^9+\text{etc.})}{1-2q+2q^4-2q^9+\text{etc.}} = \frac{\sqrt{h}.f(q)}{f(-q)}.$$

Il suit de là, que

$$(1+\sqrt{h})f(q) = f(q)+f(-q) = 2f(q^4);$$

d'où l'on tire:

$$(145)\ldots\ldots\ldots \quad \frac{f(q)}{f(q^4)} = \frac{2}{1+\sqrt{h}} = \frac{2}{1+(1-h'^2)^{\frac{1}{4}}}.$$

Soient h', h'', h''' trois modules consécutifs *décroissans*, calculés suivant l'ancienne échelle: de sorte que

$$h'' = \frac{1-\sqrt{1-h'^2}}{1+\sqrt{1-h'^2}}; \qquad h''' = \frac{1-\sqrt{1-h''^2}}{1+\sqrt{1-h''^2}}.$$

La première de ces deux équations donne

$$\sqrt{1-h''^2} = \frac{2(1-h'^2)^{\frac{1}{4}}}{1+\sqrt{1-h'^2}}; \qquad 1+\sqrt{1-h''^2} = \frac{\left(1+(1-h'^2)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{1+\sqrt{1-h'^2}}:$$

partant nous avons

$$(1+h'')(1+h''') = \frac{4}{(1+\sqrt{1-h'^2})(1+\sqrt{1-h''^2})} = 4\left(1+(1-h'^2)^{\frac{1}{4}}\right)^{-1};$$

et par conséquent

$$(146)\ldots\ldots \quad \frac{f(q)}{f(q^4)} = \sqrt{(1+h'')(1+h''')}.$$

Suivant la notation de Legendre, les trois modules *décroissans* successifs étant c, c^0, c^{00}, l'on écrirait

$$\frac{f(q)}{f(q^4)} = \sqrt{(1+c^0)(1+c^{00})}.$$

En écrivant $q^{\frac{1}{4}}$ au lieu de q, il faudra appliquer cette formule aux trois modules décroissans consécutifs c'', c', c; ce qui donne

$$\frac{f(q^{\frac{1}{4}})}{f(q)} = \sqrt{(1+c)(1+c')};$$

mais $c' = \frac{2.\sqrt{c}}{1+c}$; $1+c' = \frac{(1+\sqrt{c})^2}{1+c}$; partant

$$\frac{f(q^{\frac{1}{4}})}{f(q)} = 1 + \sqrt{c}\ .$$

Cette valeur étant substituée dans celle de $\frac{Q'}{Q}$, et écrivant h' au lieu de c, l'on aura

(147) ..... $$\frac{Q'}{Q} = \frac{1}{2} \cdot q^{-\frac{1}{4}} . \sqrt{h'}\ .$$

Il est maintenant facile de démontrer la vérité de la conjecture $Q = \sqrt{\frac{2H'}{\pi}}$, faite d'après l'équation (118); car l'équation (146) est équivalente à l'équation

$$\frac{f(q)}{f(q^4)} = \sqrt{\frac{F'(h')}{F'(h''')}}\ ,$$

d'après les formules qu'on voit à la page 83 du 1.er volume de LEGENDRE. Mais, en écrivant

$$\frac{f(q)}{\sqrt{F'(h')}} = \frac{f(q^4)}{\sqrt{F'(h''')}}\ ,$$

il est manifeste, que ce rapport est *indépendant* de q: et comme en faisant $h' = 0$, l'on a

$$F'(h') = \frac{\pi}{2}\ : \qquad q = 0\ : \qquad f(q) = 1\ ;$$

on tire de là la conséquence que, en général,

$$\frac{f(q)}{\sqrt{F'(h')}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ ;$$

ce qui donne

(148) ... $$\left\{\begin{aligned}
&Q = f(q) = 1 + 2 . \sum_1^\infty . q^{ii} = \sqrt{\frac{2H'}{\pi}}\ ;\\
&Q' = \sum_1^\infty . q^{i(i-1)} = \frac{Q}{2} . q^{-\frac{1}{4}} . \sqrt{h'} = q^{-\frac{1}{4}} . \sqrt{\frac{h'H'}{2\pi}}\ ;\\
&f(-q) = 1 + 2 . \sum_1^\infty . (-1)^i q^{ii} = \sqrt{\frac{2hH'}{\pi}}\ ;\\
&1 + 2 . \sum_1^\infty . q^{4 . ii} = \left(\frac{1+\sqrt{h}}{2}\right) . \sqrt{\frac{2H'}{\pi}}\ ;\\
&\sum_1^\infty . q^{(2i-1)(2i-1)} = \left(\frac{1-\sqrt{h}}{2}\right) . \sqrt{\frac{2H'}{\pi}}\ .
\end{aligned}\right.$$

D'après les équations (133), (135), et l'équation

$$2B'_{(0)} = A'_{(1)} = q^{\frac{1}{12}}(2hh')^{-\frac{1}{6}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{H'}},$$

on peut transformer les équations (T_3) en celles-ci :

$$(T_4) \ldots \begin{cases} \sin.\omega = \dfrac{2(q)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{h}} \cdot \dfrac{\sum\limits_1^\infty (-1)^{i-1} q^{i(i-1)} \sin.(2i-1)\varphi}{1 - 2.\sum\limits_1^\infty (-1)^{i-1} q^{ii}.\cos.2i\varphi}; \\[2ex] \cos.\omega = 2(q)^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\dfrac{h}{h'}} \cdot \dfrac{\sum\limits_1^\infty q^{i(i-1)} \cos.(2i-1)\varphi}{1 - 2.\sum\limits_1^\infty (-1)^{i-1} q^{ii}.\cos.2i\varphi}; \\[2ex] \sqrt{1 - h'^2.\sin.^2\omega} = \dfrac{\sqrt{h}.\left\{1 + 2.\sum\limits_1^\infty q^{ii}.\cos.2i\varphi\right\}}{1 - 2.\sum\limits_1^\infty (-1)^{i-1} q^{ii}.\cos.2i\varphi}. \end{cases}$$

§ V.

Expressions de sin.ω, cos.ω, *et de l'arc Elliptique*

$$\int d\omega.\sqrt{1 - h'^2.\sin.^2\omega}$$

par des séries en termes trigonométriques, dont les argumens sont les multiples de l'arc $\varphi = \frac{\pi}{2H'} \cdot F(h', \omega)$.

(24) La troisième des équations (T_1) posée dans le N.° [17], en faisant, pour plus de simplicité,

$$\Omega(\sqrt{q}, \varphi) = (1 - 2.\sqrt{q}.\sin.\varphi + q)(1 - 2.\sqrt{q^3}.\sin.\varphi + q^3) \ldots\ldots,$$

peut être écrite ainsi :

$$\sqrt{\frac{1 - h'.\sin.\omega}{1 + h'.\sin.\omega}} = \frac{\Omega(\sqrt{q}, \varphi)}{\Omega(\sqrt{q}, \varphi + \pi)}.$$

En différentiant par rapport à φ le Logarithme des deux membres de cette équation, l'on aura

$$\frac{d.}{d\varphi}\text{Log.}\sqrt{\frac{1-h'.\sin.\omega}{1+h'.\sin.\omega}}=\frac{-h'.\cos.\omega}{1-h'^2.\sin.^2\omega}\cdot\frac{d\omega}{d\varphi}=\frac{-2h'H'}{\pi}\cdot\frac{\cos.\omega}{\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\omega}};$$

$$\frac{d.}{d\varphi}\text{Log.}\left\{\frac{\Omega(\sqrt{q},\varphi)}{\Omega(\sqrt{q},\varphi+\pi)}\right\}=-2.\sqrt{q}.\cos.\varphi.\sum_1^\infty.\frac{q^{i-1}}{1-2.\sqrt{q^{2i-1}}\sin.\varphi+q^{2i-1}}$$

$$-2.\sqrt{q}.\cos.\varphi.\sum_1^\infty.\frac{q^{i-1}}{1+2.\sqrt{q^{2i-1}}\sin.\varphi+q^{2i-1}}.$$

Donc, en observant que l'équation

$$F(h',\omega)+F(h',\zeta)=H',$$

donne

$$\sin.\zeta=\frac{\cos.\omega}{\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\omega}},$$

l'on aura

$$\frac{h'H'}{\pi}\sin.\zeta=$$

$$\sqrt{q}.\cos.\varphi\left\{\sum_1^\infty.\frac{q^{i-1}}{1-2.\sqrt{q^{2i-1}}.\sin.\varphi+q^{2i-1}}+\sum_1^\infty.\frac{q^{i-1}}{1+2.\sqrt{q^{2i-1}}.\sin.\varphi+q^{2i-1}}\right\}.$$

Mais l'équation

$$\varphi=\frac{\pi}{2H'}F(h',\omega)=\frac{\pi}{2H'}\left\{H'-F(h',\zeta)\right\}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2H'}F(h',\zeta)$$

démontre que l'on peut ici, après avoir écrit $\frac{\pi}{2}-\varphi$ au lieu de φ, remplacer ζ par φ dans le premier membre, et alors l'on a

$$(149)\ldots\quad\frac{h'H'}{2\pi}\sin.\omega=\sin.\varphi.\sqrt{q}.\sum_1^\infty.\frac{q^{i-1}(1+q^{2i-1})}{1-2q^{2i-1}\cos.2\varphi+q^{4i-2}}.$$

En appliquant à chacun des termes du second membre de cette équation la formule

$$\frac{(1+a)\sin.\theta}{1-2a\cos.2\theta+a^2}=\sum_1^\infty.a^{i-1}\sin.(2i-1)\theta,$$

l'on aura les séries horizontales

$$\begin{aligned}
&\sqrt{q}\quad\left\{\sin.\varphi+q\sin.3\varphi+q^2\sin.5\varphi+q^3\sin.7\varphi+\text{etc.}\right\}\\
&+\sqrt{q}.q\quad\left\{\sin.\varphi+q^3\sin.3\varphi+q^6\sin.5\varphi+q^9\sin.7\varphi+\text{etc.}\right\}\\
&+\sqrt{q}.q^2\left\{\sin.\varphi+q^5\sin.3\varphi+q^{10}\sin.5\varphi+q^{15}\sin.7\varphi+\text{etc.}\right\}\\
&+\text{etc.};
\end{aligned}$$

lesquelles étant sommées dans le sens vertical produisent la série:

$$\sqrt{q}\cdot\left\{\frac{\sin.\varphi}{1-q}+\frac{q}{1-q^3}\sin.3\varphi+\frac{q^2}{1-q^5}\sin.5\varphi+\frac{q^3}{1-q^7}\sin.7\varphi+\text{etc.}\right\}.$$

De sorte que l'équation (149) devient équivalente à celle-ci; savoir

$$(150)\ \ldots\ldots\ \frac{h'H'}{2\pi}\sin.\omega=\sqrt{q}\,.\sum_1^\infty.\frac{q^{i-1}\sin.(2i-1)\varphi}{1-q^{2i-1}}.$$

Cela posé, si l'on remplace ω et φ par $\frac{\pi}{2}-\omega$ et $\frac{\pi}{2}-\varphi$; en écrivant $-q$ au lieu de $+q$; $\frac{h'}{h}.\sqrt{-1}$, hH', au lieu de h' et H' respectivement, nous aurons, d'après le théorême démontré au N.° [20], les deux équations correspondantes

$$(151)\ \left\{\begin{array}{l}\frac{h'H'}{2\pi}\cos.\omega=\cos.\varphi\,.\sqrt{q}\,.\sum_1^\infty.\frac{(-1)^{i-1}.q^{i-1}(1-q^{2i-1})}{1-2q^{2i-1}\cos.2\varphi+q^{4i-2}};\\ \frac{h'H'}{2\pi}\cos.\omega=\sqrt{q}\,.\sum_1^\infty.\frac{q^{i-1}.\cos.(2i-1)\varphi}{1+q^{2i-1}}.\end{array}\right.$$

[25] La série

$$(152)\ \ldots\ldots\ \omega=\varphi+2\,.\sum_1^\infty.\frac{q^i}{i(1+q^{2i})}\sin.2i\varphi,$$

que j'ai obtenue en finissant le N.° [12] de ce Mémoire, donne l'amplitude ω par l'arc φ par des termes périodiques analogues à ceux de l'expression de $\sin.\omega$.

En différentiant cette équation on obtient la série

$$\frac{d\omega}{d\varphi}=1+4\,.\sum_1^\infty.\frac{q^i}{1+q^{2i}}\cdot\cos.2i\varphi;$$

et comme

$$\frac{d\omega}{d\varphi}=\frac{2H'}{\pi}\cdot\sqrt{1-h'^2\sin.^2\omega},$$

nous avons

$$(153)\ldots\ \frac{2H'}{\pi}\cdot\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\omega}=1+4\,.\sum_1^\infty.\frac{q^i}{1+q^{2i}}\cos.2i\varphi.$$

Donc, en multipliant le premier membre de cette équation par $d\omega$, et le second par

$$d\varphi\left\{1+4\,.\sum_1^\infty.\frac{q^i}{1+q^{2i}}\cos.2i\varphi\right\},$$

l'on aura (en intégrant), cette expression de l'arc elliptique,

$$(154) \ldots\ldots \quad \int_0^\omega d\omega . \sqrt{1 - h'^2 . \sin.^2\omega} = E(h', \omega) \; ;$$

savoir:

$$(155) \ldots \quad E(h', \omega) = \frac{\pi}{2H'} \cdot \int d\varphi \left\{ 1 + 4 . \sum_1^\infty . \frac{q^i}{1 + q^{2i}} \cos. 2i\varphi \right\}^2 .$$

En formant le carré ici indiqué, l'on aura une série de la forme

$$\left[1 + 4 . \sum_1^\infty . \frac{q^i}{1 + q^{2i}} \cos. 2i\varphi \right]^2 = 1 + 8 . \sum_1^\infty . \frac{q^{2i}}{(1 + q^{2i})^2}$$
$$+ C' \cos. 2\varphi + C'' \cos. 4\varphi + C''' \cos. 6\varphi + \text{etc.}$$

Les coefficiens C', C'', C''', etc. sont donnés immédiatement par des suites infinies, lesquelles, étant sommées, se réduisent chacune à une expression fort simple; car on trouve:

$$C' = 8 . \frac{q}{1 - q^2} \; ; \qquad C'' = 8 . \frac{2q^2}{1 - q^4} \; ; \qquad C''' = 8 . \frac{3q^3}{1 - q^6} \; ;$$

et, en général,

$$C^{(n)} = 8 . \frac{nq^n}{1 - q^{2n}} .$$

Voici la démonstration de ce résultat. Nous avons

$$C' = \frac{8q}{1 + q^2} + \frac{16 . q^3}{(1 + q^2)(1 + q^4)} + \frac{16 . q^5}{(1 + q^4)(1 + q^6)} + \frac{16 . q^7}{(1 + q^6)(1 + q^8)} + \text{etc.}$$

En décomposant ces fractions, d'après la formule

$$(156) \ldots \quad \frac{q^m}{(1 + q^{m-1})(1 + q^{m+1})} = \frac{q}{1 - q^2} \cdot \left\{ \frac{q^{m-1}}{1 + q^{m-1}} - \frac{q^{m+1}}{1 + q^{m+1}} \right\} ,$$

il est clair que cette valeur de C' peut être écrite ainsi:

$$C' = \frac{8q}{1 + q^2} + \frac{16q}{1 - q^2} \cdot \sum_1^\infty . \frac{q^{2i}}{1 + q^{2i}} - \frac{16q}{1 - q^2} \cdot \sum_1^\infty . \frac{q^2 . q^{2i}}{1 + q^2 . q^{2i}} \; ;$$

de sorte que l'on a:

$$C' = \frac{8q}{1 + q^2} + \frac{16q . q^2}{1 - q^2 . 1 + q^2} + \frac{16q}{1 - q^2} \cdot \sum_1^\infty . \frac{q^2 . q^{2i}}{1 + q^2 . q^{2i}} - \frac{16 . q}{1 - q^2} \cdot \sum_1^\infty . \frac{q^2 . q^{2i}}{1 + q^2 . q^{2i}} .$$

On voit par là que les parties infinies de cette valeur de C' se détruisent. Cela posé, si l'on remarque que

$$\frac{8q}{1+q^2}=\frac{-8q}{1-q^2}\cdot\left(\frac{2q^2}{1+q^2}-1\right),$$

il devient manifeste que

$$C'=\frac{8.q}{1-q^2}.$$

La forme primitive du coefficient C'' est

$$C''=\frac{8q^2}{1+q^4}+\frac{8q^2}{(1+q^2)^2}+\frac{16q^4}{(1+q^2)(1+q^6)}+\frac{16q^6}{(1+q^6)(1+q^8)}+\text{etc.}$$

En décomposant ces fractions par une formule semblable à celle désignée par (156), qui revient à faire

$$\frac{q^m}{(1+q^{m-2})(1+q^{m+2})}=\frac{q^2}{1-q^4}\cdot\left\{\frac{q^{m-2}}{1+q^{m-2}}-\frac{q^{m+2}}{1+q^{m+2}}\right\},$$

on aura d'abord

$$C''=\frac{8q^2}{1+q^4}+\frac{8q^2}{(1+q^2)^2}+\frac{16q^2}{1-q^4}\cdot\sum_1^\infty\cdot\frac{q^{2i}}{1+q^{2i}}-\frac{16q^2}{1-q^4}\cdot\sum_1^\infty\cdot\frac{q^4.q^{2i}}{1+q^4.q^{2i}},$$

d'où l'on tire (après avoir supprimé les deux parties infinies qui se détruisent) :

$$C''=\frac{8q^2}{1+q^4}+\frac{8q^2}{(1+q^2)^2}+\frac{16q^2}{1-q^4}\cdot\left(\frac{q^2}{1+q^2}+\frac{q^4}{1+q^4}\right).$$

Mais

$$\frac{8q^2}{1+q^4}=\frac{-8q^2}{1-q^4}\cdot\left(\frac{2q^4}{1+q^4}-1\right);\qquad\frac{8q^2}{(1+q^2)^2}=\frac{-8q^2}{1-q^4}\cdot\left(\frac{2q^2}{1+q^2}-1\right);$$

partant l'on a : $C''=8.\dfrac{2q^2}{1-q^4}$.

Par un procédé semblable, les séries infinies

$$C'''=\frac{8q^3}{1+q^6}+\frac{16q^3}{(1+q^2)(1+q^4)}+\frac{16q^5}{(1+q^2)(1+q^8)}+\frac{16q^7}{(1+q^4)(1+q^{10})}+\text{etc.};$$

$$C^{\text{IV}}=\frac{8q^4}{1+q^8}+\frac{8q^4}{(1+q^4)^2}+\frac{16q^4}{(1+q^2)(1+q^6)}+\frac{16q^6}{(1+q^2)(1+q^{10})}+\frac{16q^8}{(1+q^4)(1+q^{12})}+\text{etc.};$$

etc.

seront d'abord réduites à la forme finie

$$C^{\text{III}} = \frac{8q^3}{1+q^6} + \frac{16q^3}{(1+q^2)(1+q^4)} + \frac{16q^3}{1-q^6}\cdot\left\{\frac{q^2}{1+q^2} + \frac{q^4}{1+q^4} + \frac{q^6}{1+q^6}\right\};$$

$$C^{\text{IV}} = \frac{8q^4}{1+q^8} + \frac{8q^4}{(1+q^4)^2} + \frac{16q^4}{(1+q^2)(1+q^6)}$$

$$+ \frac{16q^4}{1-q^8}\cdot\left(\frac{q^2}{1+q^2} + \frac{q^4}{1+q^4} + \frac{q^6}{1+q^6} + \frac{q^8}{1+q^8}\right);$$

$$C^{\text{V}} = \frac{8q^5}{1+q^{10}} + \frac{16q^5}{(1+q^2)(1+q^8)} + \frac{16q^5}{(1+q^4)(1+q^6)}$$

$$+ \frac{16q^5}{1-q^{10}}\cdot\left(\frac{q^2}{1+q^2} + \ldots\ldots + \frac{q^{10}}{1+q^{10}}\right);$$

$$C^{\text{VI}} = \frac{8q^6}{1+q^{12}} + \frac{8q^6}{(1+q^6)^2} + \frac{16q^6}{(1+q^2)(1+q^{10})} + \frac{16q^6}{(1+q^4)(1+q^8)}$$

$$+ \frac{16q^6}{1-q^{12}}\cdot\left(\frac{q^2}{1+q^2} + \frac{q^4}{1+q^4} + \ldots\ldots + \frac{q^{12}}{1+q^{12}}\right);$$

$$C^{\text{VII}} = \frac{8q^7}{1+q^{14}} + \frac{16q^7}{(1+q^2)+(1+q^{12})} + \frac{16q^7}{(1+q^4)(1+q^{10})} + \frac{16q^7}{(1+q^6)(1+q^8)}$$

$$+ \frac{16q^7}{1-q^{14}}\cdot\left(\frac{q^2}{1+q^2} + \frac{q^4}{1+q^4} + \ldots\ldots + \frac{q^{14}}{1+q^{14}}\right);$$

$$C^{\text{VIII}} = \frac{8q^8}{1+q^{16}} + \frac{8q^8}{(1+q^8)^2} + \frac{16q^8}{(1+q^2)(1+q^{14})} + \frac{16q^8}{(1+q^4)(1+q^{12})}$$

$$+ \frac{16q^8}{(1+q^6)(1+q^{10})} + \frac{16q^8}{1-q^{16}}\cdot\left(\frac{q^2}{1+q^2} + \frac{q^4}{1+q^4} + \cdots + \frac{q^{16}}{1+q^{16}}\right);$$

etc.

Maintenant par l'application des formules

$$\frac{8q^m}{1+q^{2m}} = \frac{-8q^m}{1-q^{2m}}\cdot\left(\frac{2q^{2m}}{1+q^{2m}} - 1\right);$$

$$\frac{8q^m}{(1+q^m)^2} = \frac{-8q^m}{1-q^{2m}}\cdot\left(\frac{2q^m}{1+q^m} - 1\right);$$

il sera facile de trouver

$$C^{\text{III}} = 8.\frac{3q^3}{1-q^6}; \qquad C^{\text{IV}} = 8.\frac{4q^4}{1-q^8}; \qquad C^{\text{V}} = 8.\frac{5q^5}{1-q^{10}};$$

et d'en conclure par une évidente induction

$$C^{(n)} = 8 \cdot \frac{n q^n}{1 - q^{2n}} .$$

Il suit de là que, en posant pour plus de simplicité,

$$A = 1 + 8 \cdot \sum_1^\infty \cdot \frac{q^{2i}}{(1 + q^{2i})^2} ,$$

l'on a

$$E(h', \omega) = \frac{\pi\varphi . A}{2H'} + \frac{4\pi}{H'} \cdot \int_0^\varphi d\varphi . \sum_1^\infty . \frac{i q^i}{1 - q^{2i}} . \cos. 2i\varphi ;$$

c'est-à-dire, en exécutant l'intégration indiquée,

$$(157) \ldots\ldots \quad E(h', \omega) = \frac{\pi\varphi . A}{2H'} + \frac{2\pi}{H'} . \sum_1^\infty . \frac{q^i}{1 - q^{2i}} \cdot \sin. 2i\varphi .$$

Cette équation donne la valeur de A sous forme finie. En effet, si l'on fait $\omega = \frac{\pi}{2}$, l'on a $\varphi = \frac{\pi}{2}$; et

$$E\left(h', \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \frac{A}{H'} ;$$

ce qui donne

$$(158) \ldots \quad E(h', \omega) = \frac{2}{\pi}\varphi . E\left(h', \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2\pi}{H'} . \sum_1^\infty . \frac{q^i}{1 - q^{2i}} . \sin. 2i\varphi .$$

Et comme $\varphi = \frac{\pi}{2H'} . F(h', \omega)$ on tire de là

$$(159) \ldots \quad \frac{2H'}{\pi} . E(h', \omega) - \frac{2}{\pi} . E\left(h', \frac{\pi}{2}\right) . F(h', \omega) = 4 . \sum_1^\infty . \frac{q^i}{1 - q^{2i}} . \sin. 2i\varphi .$$

Cette équation est susceptible d'une transformation remarquable. Car on sait: 1.° que le second membre est équivalent à la fonction

$$4 \sin. 2\varphi . \sum_1^\infty . \frac{q^{2i-1}}{1 - 2q^{2i-1} \cos. 2\varphi + q^{4i-2}} ;$$

2.° que cette fonction est équivalente au coefficient différentiel du Logarithme de la fonction $\Pi'(q, \varphi)$ pris par rapport à φ. Donc, en formant ce coefficient différentiel d'après l'équation (135), nous aurons l'équation

$$(160) \ldots\ldots \quad \frac{H'}{\pi} . E(h', \omega) - \frac{1}{\pi} . E\left(h', \frac{\pi}{2}\right) . F(h', \omega) =$$

$$\frac{2 . \sum_1^\infty . (-1)^{i-1} . i q^{ii} . \sin. 2i\varphi}{1 - 2 . \sum_1^\infty . (-1)^{i-1} q^{ii} . \cos. 2i\varphi} .$$

Cette série est plus convergente que la précédente; mais cette dernière offre le grand avantage d'une intégration très-facile par rapport à φ; ce qui permet d'en faire l'application au développement analogue des transcendantes elliptiques de *troisième espèce*. L'équation (160), que nous venons d'établir, coïncide avec l'équation (45) donnée par LEGENDRE à la page 129 de son 3.ème Volume. Les difficultés qu'il a rencontrées pour la démontrer, sont éliminées par notre analyse. C'est un fait digne de ne pas être passé sous silence, que les équations (150), (151), (152), (153) ont échappées à LEGENDRE.

[26] Les équations (T_3) donnent

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{1}{\sqrt{h}}.\,\text{tang.}\,\varphi\,\frac{f(q,\varphi)}{f\left(q,\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}\;;$$

et d'ici on peut tirer une série analogue aux précédentes. En effet l'on a:

$$\text{tang.}\,\omega.\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\omega} = \text{tang.}\,\varphi.\frac{f(q,\varphi)}{f\left(q,\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}.\frac{\Pi'\left(q,\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}{\Pi'(\varphi,\varphi)}\;.$$

Or, en posant

$$\text{tang.}\,\omega.\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\omega} = \text{tang.}\,\psi\;,$$

on sait que si l'on fait

$$F(h',\omega_{(2)}) = 2F(h',\omega)\;,$$

l'on a $\psi = \frac{1}{2}\omega_{(2)}$. Mais l'équation $\varphi = \frac{\pi}{2H'}.F(h',\omega)$ devient

$$\varphi = \frac{\pi}{2H'}.\frac{F(h',\omega_{(2)})}{2}\;.$$

Donc on peut remplacer $\omega_{(2)}$ par ω pourvu que φ soit remplacé par $\frac{\varphi}{2}$; ce qui donne

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\varphi.\frac{f(q,\varphi)}{f\left(q,\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}.\frac{\Pi'\left(q,\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}{\Pi'(q,\varphi)}\;.$$

En disposant les facteurs trinomes qui composent les fonctions f, Π', suivant les puissances successives de q, les facteurs trinomes du numérateur seront:

$$(1+2q\cos.\varphi+q^2)(1-2q^2\cos.\varphi+q^4)(1+2q^3\cos.\varphi+q^6)$$
$$(1-2q^4\cos.\varphi+q^8)(1+2q^5\cos.\varphi+q^{10})(1-2q^6\cos.\varphi+q^{12})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

et les facteurs correspondans du dénominateur seront:

$$(1-2q\cos.\varphi+q^2)(1+2q^2\cos.\varphi+q^4)(1-2q^3\cos.\varphi+q^6)$$
$$(1+2q^4\cos.\varphi+q^8)(1-2q^5\cos.\varphi+q^{10})(1+2q^6\cos.\varphi+q^{12})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cela revient à dire que l'on a:

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\omega=\frac{\sin.\dfrac{\varphi}{2}\,.\,\text{fonct.}(q,\varphi)}{\sin.\left(\dfrac{\varphi+\pi}{2}\right).\,\text{fonct.}(q,\varphi+\pi)}\;.$$

Maintenant, pour rendre invariable le signe du second terme des facteurs trinomes, nous ferons $q=-q'$. Alors, on a

$$\sin.\,\tfrac{1}{2}\,\varphi\,.\,\text{fonct.}(q',\varphi)=$$
$$\sin.\,\tfrac{1}{2}\,\varphi\,.(1-2q'\cos.\varphi+q'^2)(1-2q'^2\cos.\varphi+q'^4)(1-2q'^3\cos.\varphi+q'^6)\ldots\ldots$$

Mais nous avons trouvé au N.° [21]:

$$\sin.\varphi\,.\,\text{fonct.}(q^2,2\varphi)=$$
$$\sin.\varphi\,.\,(1-2q^2\cos.2\varphi+q^4)(1-2q^4\cos 2\varphi+q^8)\ldots\ldots\ldots$$
$$=A'_{(1)}\left\{\sin.\varphi-q^2\sin.3\varphi+q^6\sin.5\varphi-q^{12}\sin.7\varphi+\text{etc.}\right\}\;.$$

Donc, en remplaçant q^2 par q, et 2φ par φ l'on a:

$$\sin.\frac{\varphi}{2}\,.\,\text{fonct.}(q,\varphi)=$$
$$\sin.\frac{\varphi}{2}\,.\,(1-2q\cos.\varphi+q^2)(1-2q^2\cos.\varphi+q^4)\ldots\ldots\ldots$$
$$=A''_{(1)}\left\{\sin.\frac{\varphi}{2}-q\sin.\frac{3\varphi}{2}+q^3\sin.\frac{5\varphi}{2}-q^6\sin.\frac{7\varphi}{2}+\text{etc.}\right\}\;;$$

où $A''_{(1)}$ désigne ce que devient $A'_{(1)}$ par le changement de q^2 en q. Maintenant, si nous faisons ici $q=q'$, l'on aura

$$\sin.\frac{\varphi}{2}\,.\,\text{fonct.}(q',\varphi)=$$
$$A'''_{(1)}\left\{\sin.\frac{\varphi}{2}-q'\sin.\frac{3\varphi}{2}+q'^3\sin.\frac{5\varphi}{2}-q'^6\sin.\frac{7\varphi}{2}+\text{etc.}\right\}\;;$$

en nommant $A'''_{(1)}$ ce qui devient $A''_{(1)}$, après y avoir écrit q' au lieu de q. Cette formule donne

$$\sin.\left(\frac{\varphi+\pi}{2}\right)\text{fonct.}(q',\varphi+\pi)=$$

$$A'''_{(1)}\left\{\sin.\left(\frac{\varphi+\pi}{2}\right)-q'\sin.3\left(\frac{\varphi+\pi}{2}\right)+q'^3\sin.5\left(\frac{\varphi+\pi}{2}\right)-\text{etc.}\right\}$$

$$=A'''_{(1)}\left\{\cos.\frac{\varphi}{2}+q'\cos.\frac{3\varphi}{2}+q'^3\cos.\frac{5\varphi}{2}+q'^6\cos.\frac{7\varphi}{2}+q'^{10}\cos.\frac{9\varphi}{2}+\text{etc.}\right\}.$$

Cela posé, il est clair que l'on a

$$\text{tang.}\frac{\omega}{2}=\frac{\sin.\frac{\varphi}{2}-q'\sin.\frac{3\varphi}{2}+\text{etc.}}{\cos.\frac{\varphi}{2}+q'\cos.\frac{3\varphi}{2}+\text{etc.}}.$$

Donc, en observant que q' tient la place de $-q$, l'on aura en fonction de q:

$$\text{tang.}\frac{\omega}{2}=\frac{\sin.\frac{\varphi}{2}+q\sin.\frac{3\varphi}{2}-q^3\sin.\frac{5\varphi}{2}-q^6\sin.\frac{7\varphi}{2}+q^{10}\sin.\frac{9\varphi}{2}+\text{etc.}}{\cos.\frac{\varphi}{2}-q\cos.\frac{3\varphi}{2}-q^3\cos.\frac{5\varphi}{2}+q^6\cos.\frac{7\varphi}{2}+q^{10}\cos.\frac{9\varphi}{2}-\text{etc.}}.$$

Cette équation s'accorde avec celle donnée par LEGENDRE à la page 103 de son 3.ème Volume. La manière dont elle est ici déduite me paraît à la fois plus directe et plus simple. C'est de quoi on sera convaincu, en examinant l'analyse de LEGENDRE.

(27) Avant de terminer ce Mémoire, je dois démontrer deux résultats applicables à la Théorie des Nombres.

En développant sur une ligne horizontale chacune des fractions qui composent le second membre de l'équation (118), et faisant ensuite la sommation des séries dans le sens vertical, l'on a

$$\frac{2H'}{\pi}=1+4.\sum_1^\infty.\frac{(-1)^{i-1}.q^{2i-1}}{1-q^{2i-1}}.$$

Et comme, par la première des équations (148), l'on a

$$(162)\ \ldots\ldots\qquad \frac{2H'}{\pi}=\left(1+2.\sum_1^\infty.q^{ii}\right)^2,$$

on tire de là l'égalité

$$(163) \ldots\ldots \quad 1+4.\sum_{1}^{\infty}.\frac{(-1)^{i-1}.q^{2i-1}}{1-q^{2i-1}}=\left(1+2.\sum_{1}^{\infty}.q^{ii}\right)^2.$$

En faisant le carré des deux membres de l'équation (153), et remplaçant ensuite le second membre par sa valeur

$$1+8.\sum_{1}^{\infty}.\frac{q^{2i}}{(1+q^{2i})^2}+8.\sum_{1}^{\infty}.\frac{iq^i}{1-q^{2i}}.\cos.2i\varphi\ ,$$

on voit aussitôt, que si l'on fait $\omega=0$, et $\varphi=0$, on doit avoir l'équation

$$\left(\frac{2H'}{\pi}\right)^2=1+8.\sum_{1}^{\infty}.\frac{q^{2i}}{(1+q^{2i})^2}+8.\sum_{1}^{\infty}.\frac{iq^i}{1-q^{2i}}\ ,$$

équivalente à celle-ci:

$$(164) \ldots\ldots \quad \left(\frac{2H'}{\pi}\right)^2=1+8.\sum_{1}^{\infty}.\frac{q^{2i}}{(1+q^{2i})^2}+8.\sum_{1}^{\infty}.\frac{q^{2i-1}}{(1-q^{2i-1})^2}\ ;$$

ou bien à celle-ci:

$$\left(\frac{2H'}{\pi}\right)^2=1+8.\sum_{1}^{\infty}.(q^{2i-1}+q^{2i})+8.2.\sum_{1}^{\infty}.(q^{4i-2}-q^{4i})$$
$$+8.3.\sum_{1}^{\infty}.(q^{6i-3}+q^{6i})+8.4.\sum_{1}^{\infty}.(q^{8i-4}-q^{8i})+\text{etc.}$$

Maintenant, par la sommation de ces séries il est clair que l'on a:

$$(165) \ldots \quad \left(\frac{2H'}{\pi}\right)^2=1+8\left(\frac{q}{1-q}+\frac{2q^2}{1+q^2}+\frac{3q^3}{1-q^3}+\frac{4q^4}{1+q^4}+\text{etc.}\right).$$

Donc, en vertu de cette équation, et de l'équation (162), on peut établir l'égalité:

$$(166) \ldots \quad \left(1+2.\sum_{1}^{\infty}.q^{ii}\right)^4=1+8.\sum_{1}^{\infty}.\frac{(2i-1)q^{2i-1}}{1-q^{2i-1}}+8.\sum_{1}^{\infty}.\frac{2iq^{2i}}{1+q^{2i}}\ .$$

On peut voir l'application que j'ai faite des deux équations (163), (166) dans mon Mémoire « Sur la Théorie des Nombres ».

En faisant le carré de l'équation (153), et remplaçant ensuite $\left(\frac{2H'}{\pi}\right)^2$ par sa valeur fournie par l'équation (164), l'on aura

$$(167) \ldots \quad \left(\frac{2H'h'}{\pi}\right)^2.\sin.^2\omega=8.\sum_{1}^{\infty}.\frac{q^{2i-1}}{(1-q^{2i-1})^2}-8.\sum_{1}^{\infty}.\frac{iq^i}{1-q^{2i}}.\cos.2i\varphi\ .$$

Mais à $\omega=\frac{\pi}{2}$, répond $\varphi=\frac{\pi}{2}$: donc l'on a

$$(168)\ldots\quad \left(\frac{2H'h'}{\pi}\right)^2 = 8\cdot\sum_1^\infty\cdot\frac{q^{2i-1}}{(1-q^{2i-1})^2} + 8\cdot\sum_1^\infty\cdot\frac{(-1)^{i-1}.iq^i}{1-q^{2i}}\ .$$

En retranchant de cette équation la précédente, on en tire

$$(169)\ldots\quad \left(\frac{2H'h'}{\pi}\right)^2.\cos.^2\omega = 8\cdot\sum_1^\infty\cdot\frac{(-1)^{i-1}iq^i}{1-q^{2i}} + 8\cdot\sum_1^\infty\cdot\frac{iq^i}{1-q^{2i}}.\cos.2i\varphi\ .$$

De sorte que, par les équations (167), (169), on peut avoir immédiatement le développement, en termes périodiques, du carré des séries qui constituent le second membre des équations (150), (151).

NOTE

relative à l'équation (126), $h'\sin.\omega.\sin.\omega_{(1)} = 1$.

Cette équation paraît difficile à découvrir par la manière dont j'ai voulu la déduire des idées primitives, sans faire aucune transition rapide. Néanmoins il est intéressant d'observer, que cette même équation est *évidente*, d'après la forme de l'intégrale complète donnée par Euler à la page 453 du 1.er Volume de son Calcul Intégral. Car, en posant $y=\infty$, son équation du Corollaire 2 se réduit à $1-Eb^2x^2=0$; c'est-à-dire à $1-h'^2\sin.^2\omega.\sin.^2\omega_{(1)}=0$, en y faisant

$$A=1\ ,\quad C=-(1+h'^2)\ ,\quad E=h'^2\ ,\quad x=\sin.\omega\ ,\quad b=\sin.\omega_{(1)}\ .$$

Il y a plus: cette même intégrale d'Euler, si l'on y fait: $b=\sin.\mu$, $x=\sin.\varphi$, $y=\sin.\psi$, devient

$$(1)\ \ldots\ldots\quad 0=\sin.^2\varphi+\sin.^2\psi-\sin.^2\mu-h'^2\sin.^2\mu.\sin.^2\varphi.\sin.^2\psi$$
$$+2\cos.\mu.\sin.\varphi.\sin.\psi.\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\mu}\ .$$

Mais

$$\cos.^2\varphi.\cos.^2\psi=1-\sin.^2\varphi-\sin.^2\psi+\sin.^2\varphi.\sin.^2\psi\ ;$$

partant

$$\cos.^2\mu=\cos.^2\varphi.\cos.^2\psi-\sin.^2\varphi.\sin.^2\psi(1-h'^2.\sin.^2\mu)$$
$$-2\cos.\mu.\sin.\varphi.\sin.\psi.\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\mu}\ .$$

Cette équation peut être écrite ainsi:

$$\cos.^2\mu - \left(\cos.\varphi.\cos.\psi + \sin.\varphi.\sin.\psi.\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\mu}\right)^2$$

$$= -2\sin.\varphi.\sin.\psi.\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\mu}.\left[\begin{array}{l}\cos.\mu + \cos.\varphi.\cos.\psi \\ + \sin.\varphi.\sin.\psi.\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\mu}\end{array}\right].$$

Donc, en supprimant le facteur (qui ne peut pas être nul)

$$\cos.\mu + \cos.\varphi.\cos.\psi + \sin.\varphi.\sin.\psi.\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\mu},$$

commun aux deux membres de l'équation, l'on aura

$$(2) \ldots\ldots \quad \cos.\mu = \cos.\varphi.\cos.\psi - \sin.\varphi.\sin.\psi.\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\mu}.$$

Telle est la forme de l'intégrale *complète* de l'équation différentielle

$$(3) \ldots\ldots \quad \frac{d\varphi}{\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\varphi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\psi}} = 0,$$

donnée par Legendre en 1786, et souvent citée dans ses ouvrages. En faisant disparaître le radical, l'équation (2) donne

$$(4) \ldots\ldots\ldots \quad \sin.^2\varphi + \sin.^2\psi + 2\cos.\mu.\cos.\varphi.\cos.\psi$$
$$= 1 + \cos.^2\mu + h'^2(\sin.\mu.\sin.\varphi.\sin.\psi)^2.$$

Cela posé, il est assez facile de trouver, que les deux variables φ et ψ étant liées par l'équation (4), la différentielle

$$d\varphi.\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\varphi} + d\psi.\sqrt{1-h'^2.\sin.^2\psi}$$

doit être exactement *intégrable*. Mais cette intégration est loin d'être évidente. Au point que, Legendre, au § XVI de son Mémoire publié dans le Volume de l'Académie des Sciences de Paris, il dit, que cette différentielle doit être intégrable algébriquement « *au moins pour cer-* » *taines valeurs de la constante arbitraire* μ ». Ensuite il ajoute: « *Or* » *on trouve que l'intégration réussit quel que soit* μ ». C'est de quoi Euler avait déjà donné la preuve en 1761, à la page 24 de son Mémoire publié dans le Tome VII des *Novi Commentarii*. Là on y voit l'équation

$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\mu) = h'^2.\sin.\mu.\sin.\varphi.\sin.\psi,$$

qui est précisément celle dont parle Legendre, avec les expressions de $\sin.\varphi$, $\sin.\psi$, en fonction de la constante arbitraire μ, déduites de l'équation (1). Cette même équation (1) donne la valeur de $\sin.^2\varphi + \sin.^2\psi$

en fonction du produit $\sin.\varphi.\sin.\psi$, et par là on conçoit que toute différentielle de la forme

$$\text{fonct.}(\sin.^2\varphi + \sin.^2\psi, \sin.\varphi.\sin.\psi)\,d.(\sin.\varphi.\sin.\psi)$$

doit être intégrable; ce qui est le fondement de l'équation analogue à celle des arcs elliptiques, relativement à trois transcendantes elliptiques de la *troisième espèce*. LEGENDRE a publié ce théorême dans son Mémoire de 1792. Mais cette extension avait été déjà faite par EULER en 1781 dans son Mémoire publié dans le Tome V (Partie II) des *Acta* de l'Académie de S.t-Pétersbourg.

Les remarques de FAGNANI (voyez les pages 344, 369, 372 du Tome second de ses *Produzioni Matematiche* publié en 1750 et le Tome VI des *Novi Commentarii* de l'Académie de S.t-Pétersbourg), que

$$x = -\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}}\,, \quad x = \frac{\sqrt{1+y^4}-y.\sqrt{2}}{1-y^2}\,; \quad x = \frac{\sqrt{1+y^4}+y.\sqrt{2}}{1-y^2}\,,$$

sont, respectivement, des intégrales particulières des équations différentielles

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}\,, \quad \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1+y^4}} = 0\,, \quad \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1+y^4}}\,,$$

ont fait deviner à EULER que

$$y = \frac{C.\sqrt{1+Ex^4} - x.\sqrt{1+EC^4}}{1-EC^2x^2}\,,$$

était l'intégrale *complète* de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{1+Ex^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1+Ey^4}} = 0\,,$$

en y regardant C comme une constante arbitraire. Au reste, on peut simplifier ces intégrales en distinguant le cas de E positif de celui de E négatif. Dans le premier on aura

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+Ex^4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{E}} \cdot \int \frac{d\omega}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin.^2\omega}}\,,$$

en posant

$$x.\sqrt[4]{E} = \text{tang.}\,\omega.\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin.^2\omega}\,;$$

et dans le second on aura:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-Ex^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt[4]{E}} \cdot \int \frac{d\omega}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin.^2\omega}} ;$$

en posant

$$x.\sqrt{2}.\sqrt[4]{E} = \frac{\sin.\omega}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin.^2\omega}} ;$$

ce qui les réduit l'une et l'autre à la rectification de la Lemniscate.

C'est en cela que consiste le germe de la théorie de la comparaison des transcendantes elliptiques. LAGRANGE, à la page 85 de sa « Théorie » des fonctions » (édition de 1796) a donné par une intégration *directe* l'intégrale (2), afin d'offrir une application de sa méthode originale publiée dans le Tome IV des *Miscellanea Taurinensia*.

Post Scriptum.

La divination d'EULER, dont je viens de parler, a été faite entre les années 1756 et 1757; et, probablement, fort peu de temps après avoir composé le *Scholion* 2 de son premier Mémoire, publié dans le Tome VI des *Novi Commentarii*, relatif aux remarques analytiques de FAGNANI. En voyant que $x^2+y^2+x^2y^2=1$ était une intégrale *particulière* de l'équation

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} ,$$

il était naturel, pour un Analyste aussi éminent, d'essayer l'équation

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x^2+y^2+Ax^2y^2 = C^2+2Mxy ,$$

en y regardant A, C, M comme trois constantes indéterminées, afin de voir si elle conduisait à la même équation différentielle en laissant *arbitraire* une de ces trois constantes. Or en différentiant cette équation l'on a

$$(3) \ldots \quad dx(x+Axy^2-My)+dy(y+Ayx^2-Mx)=0 :$$

et, en la résolvant, on en tire

$$(4) \ldots\ldots \begin{cases} y = \dfrac{Mx+\sqrt{M^2x^2+(C^2-x^2)(1+Ax^2)}}{1+Ax^2} ; \\[2ex] x = \dfrac{My-\sqrt{M^2y^2+(C^2-y^2)(1+Ay^2)}}{1+Ay^2} . \end{cases}$$

Donc l'équation (3) est équivalente à celle-ci :

$$\frac{dx}{\sqrt{C^2+(AC^2+M^2-1)x^2-Ax^4}}=\frac{dy}{\sqrt{C^2+(AC^2+M^2-1)y^2-Ay^4}}.$$

Cela posé, si nous faisons

$$AC^2+M^2-1=0\,,\qquad \text{et}\qquad A=C^2\,,$$

on rend cette équation identique avec l'équation (1), et les équations (4) deviennent

$$(5)\ \ldots\ldots\ldots\ \begin{cases} y=\dfrac{C.\sqrt{1-x^4}+x.\sqrt{1-C^4}}{1+C^2x^2}\,; \\[2ex] x=\dfrac{-C.\sqrt{1-y^4}+y.\sqrt{1-C^4}}{1+C^2y^2}\,; \end{cases}$$

où C est une constante arbitraire. Ce pas, une fois franchi, il était facile de démontrer que l'équation différentielle

$$(6)\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{dx}{\sqrt{1+Ax^2+Bx^4}}=\frac{dy}{\sqrt{1+Ay^2+By^4}}\,,$$

avait pour intégrale *complète*

$$(7)\ldots\ldots\ x^2+y^2-BC^2.x^2y^2=C^2+2xy.\sqrt{1+AC^2+BC^4}\,.$$

Alors, Euler, a composé le Mémoire intitulé : « *De Integratione aequa-* » *tionis differentialis*

$$»\qquad \frac{mdx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{ndy}{\sqrt{1-y^4}}\quad »\,,$$

qui a été publié dans le même Tome VI des *Novi Commentarii* en 1761. Il me paraît qu'on doit le regarder comme un espèce de continuation du Mémoire intitulé : « Observationes de comparatione arcuum curvarum » irrectificabilium ». Ainsi, la phrase de Lagrange, que « cette inté- » gration remarquable est due à une espèce de *hasard heureux* » (Voyez page 103 du Tome IV des *Miscellanea Taurinensia*) ne me paraît pas conforme à la succession fort claire et lumineuse des idées d'Euler.

FRAMMENTI DI GEOLOGIA DEL PIEMONTE

SUGLI ELEMENTI CHE COMPONGONO I CONGLOMERATI MIOCENI DEL PIEMONTE

PER

BARTOLOMEO GASTALDI

SEGRETARO DELLA SCUOLA DI APPLICAZIONE DEGLI INGEGNERI IN TORINO

Memoria letta ed approvata nell'adunanza del 10 maggio 1860.

> I have no faith in violent currents of sea-water (such as have been sometimes assumed to result from imagined sudden great upheavals of land) wasingh across hundreds or thousands of square miles, and bearing along and scattering vast accumulations of debris far from the parent rochs. This is an assumption without proof.
>
> RAMSAY: *Permian breccia.*

Scoprire i mezzi impiegati dalla natura per operare il deposito di un terreno, di uno strato o di una serie di strati, non è sempre un problema insolubile, quando si conoscono la composizione, la forma e particolarmente il luogo di origine degli elementi di cui quel terreno, quella serie di strati o quello strato sono composti.

Scoprire il luogo di origine degli elementi che entrano nella composizione di un dato strato è talvolta facile, ma tal altra più o meno difficile, in ragione dello spazio percorso dagli elementi e della estensione che ha, in posto, la madre roccia.

I Geologi svizzeri, e particolarmente il sig. GUYOT, pervennero a fissare il punto di partenza di quasi tutte le roccie che compongono l'*erratico* della Svizzera, non ostanti le gravi difficoltà offerte a tal genere di osservazioni da un paese la cui orografia è molto complicata.

La regolarità somma, che è carattere speciale della orografia, della valle del Po fa sì che tali osservazioni riescano meno difficili in Piemonte, quantunque la geologia delle valli del versante meridionale delle Alpi sia men nota di quella del versante settentrionale.

Ho detto in altro lavoro (1) che la potente ed estesa massa di *diluvium* da cui è coperta la valle del Po si può decomporre in tanti *diluvium* parziali, quante sono le valli che, discendendo dalle Alpi, sboccano nella pianura del Piemonte e del Lombardo Veneto, e che ognuno di questi *diluvium* parziali è composto delle roccie che trovansi in posto nella valle da cui quello è uscito.

A conferma della mia asserzione citerò le osservazioni testè pubblicate dal sig. De Mortillet (2), il quale verifica l'esistenza a valle del lago di Iseo di un potentissimo strato *diluviale* i cui elementi trovansi in posto al di là del lago nelle parti superiori della valle Camonica.

Ciò che si è detto riguardo al *diluvium* è applicabile all'*erratico*; così che noi troviamo esclusivamente sulle morene di Rivoli i serpentini, le anfiboliti, le eufotidi, le dolomiti, ecc. della valle della Riparia; troviamo esclusivamente sulle morene di Ivrea le protogine, i micascisti granatiferi e le dioriti della valle della Baltea, e sulle morene del lago di Orta e dei dintorni di Arona i caratteristici graniti bianchi e rosei che i ghiacciai dell'Anza e del Toce vi hanno trasportati. Il più attento osservatore cercherebbe invano sulla non lontana serra di Ivrea un ciottolo di tali graniti, come cercherebbe invano sulle colline di Rivoli una protogina od una diorite della valle di Aosta.

Prima di giungere nella vallata del Po i ghiacciai del Ticino e del Toce si confondevano assieme nel bacino del Verbano e perciò non hanno potuto lasciare un *erratico* così regolare e ben definito come quello lasciato dai ghiacciai della Baltea e della Riparia; tuttavia colui che intraprendesse lo studio dei depositi di quei ghiacciai (3), troverebbe probabilmente che le morene dei dintorni di Varese sono composte di roccie provenienti dalla valle del Ticino e che quelle che si protendono tra Arona, Belgirate, Stresa

(1) Essai sur les terrains superficiels de la vallée du Pô. *Bull. de la Soc. géol. de France* 1850.

(2) Note géologique sur Palazzolo et le lac d'Iseo. *Bull. de la Soc. géol. de France* 1859.

(3) Lo studio di quelle morene venne, alcuni anni sono, iniziato dal sig. Zollikofer (*Géologie des environs de Sesto-Calende; Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences naturelles*), e testè ripreso con molto successo dal sig. Omboni (*Sul terreno erratico della Lombardia; Atti della Società Italiana di Scienze naturali. Vol. II, 1859-60*).

e Baveno sono formate di roccie provenienti dalla valle Formazza e dalla valle Anzasca.

Il fatto su cui insisto, la localizzazione cioè degli elementi che compongono l'erratico, venne altresì messo in rilievo dal sig. Omboni nella sua *Série des terrains sédimentaires de la Lombardie* (1), ove dice: *La nature minéralogique des blocs correspond en général à celle des roches que l'on voit en place dans les vallées, devant lesquelles les blocs se trouvent déposés. Ainsi ils sont de gneiss, de syénite, de micaschiste, etc. entre les fleuves Tessin et Olona; dans la vallée de l'Olona ils sont de mélaphyre, de porphyre rouge, de granite rouge et de gneiss, roches qui se trouvent en place au N. de Varese; au S. de Como et dans la Brianza ils sont de serpentine, de granite ordinaire, de granite porphyroïde, roches qui forment des montagnes au N. du lac de Como vers le Splugen et dans la Valtelline, et ainsi de suite.*

Questa distribuzione, dirci, topografica degli elementi del *diluvium* e dell'*erratico*; questa correlazione facile a scoprirsi fra gli elementi stessi ed i luoghi delle rispettive loro provenienze, furono utilissime per lo studio del fenomeno, a cui si deve il deposito di tali terreni. La notata distribuzione è un fatto di altissima importanza, perciocchè essa prova che il deposito dell'*erratico* e del suo inseparabile compagno il *diluvium* è dovuto ad agenti che hanno esercitato la loro influenza nei limiti delle singole valli alpine, e non è l'effetto di un generale cataclisma, di cui l'azione sarebbe stata quella di confondere e di lasciare alla rinfusa deposti insieme tutti i diversi elementi svelti alle Alpi. Lo spettacolo che presentano le migliaia di giganteschi trovanti sparsi sulle antiche morene, è in vero sorprendente; e può dirsi che non vi abbia terreno di cui l'aspetto sia più cataclistico di quello del terreno erratico. Tuttavia, siccome questo terreno ha, rispetto agli altri, il vantaggio di essere recentissimo, e di trovarsi quasi sempre nelle forme e nelle condizioni sue primitive, si poterono perciò usufruire tutti i dati e tutti i caratteri di cui esso è ricchissimo, per giungere a stabilire questa verità in apparenza paradossale, cioè che il deposito, di cui l'aspetto è il più cataclistico, è dovuto ad un agente il quale non opera mai che lentissimamente.

Più volte, in questi ultimi anni, vennero segnalati altri ordini di terreni

(1) Bull. de la Soc. géol. de France 1855.

i quali, assai più antichi dell'*erratico*, hanno comune con esso di racchiudere quantità grandissima di massi giganteschi.

Se ci volle mezzo secolo di lavoro per stabilire su salde basi il principio dell'origine glaciale del *terreno erratico*, quali difficoltà non dovrannosi incontrare per trovare una plausibile spiegazione dei mezzi di cui la natura si è servita per operare il trasporto dei massi, per esempio, del terziario e di altri terreni ben più antichi!

Tuttavia alcuni Geologi, fra i quali è degno di particolare menzione il sig. Prof. Ramsay, affrontarono coraggiosamente la questione.

Il sig. Cumming sin dal 1848 ed il sig. Godwin-Austen dal 1850 esternarono l'idea che i massi contenuti nell'antico e nel nuovo Grè-rosso abbiano potuto essere trasportati da zattere galleggianti di ghiaccio, e nel 1855 il sig. Prof. Andrew C. Ramsay trattò a lungo la questione dei massi erratici dei terreni antichi nell'eccellente sua Memoria *On the occurence of angular, subangular, polished and striated fragments and boulders in the Permian breccia of Shropshire, Worcestershire, etc.; and on the probable existence of glaciers and icebergs in the Permian breccia (Quarterly journal of the Geological Society of London for August* 1855*)* da cui trassi la epigrafe posta in fronte di questo scritto.

In Piemonte noi troviamo massi giganteschi nei potentissimi conglomerati dell'epoca miocenica; il Brongniart nel classico suo lavoro sui terreni di sedimento del Vicentino, il Sismonda A. in parecchie delle sue Memorie sulla geologia del Piemonte ed io stesso in alcuni miei scritti citammo quelli dei conglomerati della collina di Torino. Tali massi furono per me, in questi ultimi anni, oggetto di particolare studio, al fine di arrivare a meglio chiarire la provenienza di molti dei trovanti che incontransi sparsi alla superficie della collina stessa, trovanti ch'io già considerai come erratici; e questo studio mi condusse mano mano ad estendere le mie osservazioni sopra un campo molto più vasto, cioè su quello dei conglomerati miocenici marini che occupano ampii tratti sulle falde del nostro Apennino.

Emersero da queste osservazioni tali fatti, e da questi tali corollarii che mi parvero degni di particolare considerazione, come quelli che, a mio avviso, potranno forse concorrere allo svolgimento ed alla soluzione della questione riguardante il trasporto dei *massi erratici antichi.*

Conglomerati miocenici della collina di Torino.

Le località nelle quali possono vedersi tali conglomerati su grande scala sono:

1.° I valloni da cui discende il rio Sassi e particolarmente la cava di pietra da calce, chiamata la cava Golzio;

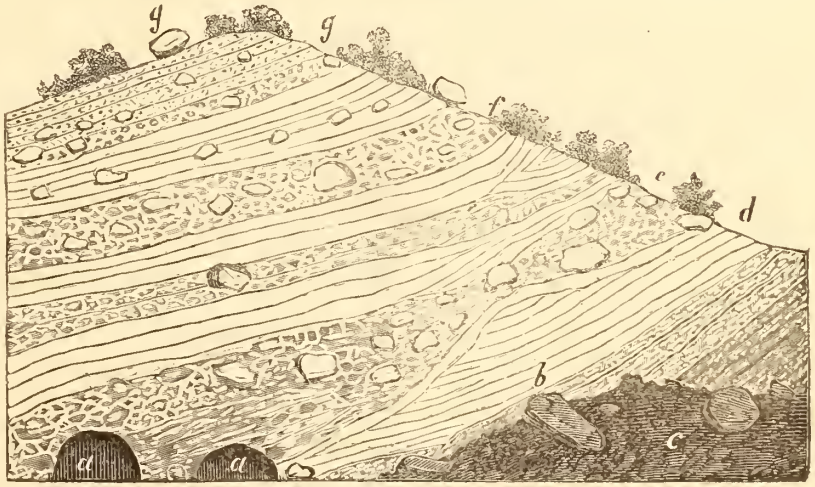
2.° La cava di pietra calcare aperta a destra della strada che conduce a Superga, a due terzi circa della salita;

3.° Le cave di pietra calcare aperte lungo il rio Dora;

4.° Il rio Perteng o di San Raffaele;

5.° La valle dei Ceppi la quale dalla punta detta di *Palouc* discende verso Chieri, e particolarmente un dirupo posto a 500 metri a monte del casale denominato *tetti dei Civera*; la stessa punta di *Palouc*, quella conosciuta col nome di *Mon-Cervet* e parecchi altri siti.

Fig. 1. — *Veduta di parte della cava di pietra calcare aperta presso Superga.*



a, *a*, gallerie per l'estrazione della pietra calcare.
b, masso di micascisto (diametro 3^m, 50).
c, *c*, materiali estratti dalle gallerie.
d, sabbia e banchi di argilla sabbiosa sfogliata.
e, ciottoli e massi.
f, sabbia, argilla sabbiosa sfogliata con massi.
g, ghiaia e ciottoli con massi

Questi conglomerati sono strati marini del mioceno; la loro potenza supera in alcuni siti i 40 ed anche i 50 metri. La distribuzione degli elementi vi è irregolarissima. Ora è un banco di 4 o 5 metri di spessore

composto esclusivamente di ciottoli di ogni volume che sottostà ad un banco di grossi massi, il quale è ricoperto da uno strato di sabbia cui si sovrappone, a sua volta, un altro banco di massi; ora è un'alternanza (cava di Superga) di banchi di ciottoli e massi e di sabbia; ora è un banco di ciottoli che copre un potente strato di ghiaia o di sabbia in cui incontransi rari e solitarii massi di gran volume; ora finalmente è un banco enorme (bric Palouc, Mon-Cervet) esclusivamente formato di ciottoli di ghiaia e di sabbia. Molti dei ciottoli e dei massi sono poco rotolati, talchè esaminando da una certa distanza uno spaccato di questi conglomerati, e facendo astrazione dalla loro qualità di strati marini, ti pare di vedere uno di quei tagli di terreno, che incontransi, per esempio, a Pianezza, nei quali si vede l'*erratico* confondersi col *diluvium*.

Quantunque lo studio della stratigrafia della nostra collina sia molto più difficile che non possa sembrare a prima vista, tuttavia parmi vi si trovino due grandi orizzonti di conglomerati uno *inferiore* e l'altro *superiore*. Può studiarsi l'orizzonte *inferiore* nelle località indicate qui sopra ai numeri 1 a 4, e l'orizzonte *superiore* in quelle indicate al n.° 5.

È bene notare sin d'ora che vi ha una grande differenza nella natura mineralogica degli elementi che compongono questi due orizzonti; così per non citare che una sola roccia, il calcare è frequentissimo nell'orizzonte *inferiore* e molto raro nel *superiore*, e ciò ci dà la spiegazione della frequenza delle fornaci da calce nei dintorni del poggio di Superga ove affiorano i conglomerati *inferiori*, e dell'assoluta assenza di tali fornaci a partire dal borgo detto la Madonna del Pilone sino a Moncalieri, tratto lungo il quale affiorano li conglomerati *superiori* (1).

Dissi or ora che osservando in massa i conglomerati miocenici della collina si trova loro quell'aspetto che presentano, nel loro punto di riunione, l'*erratico* ed il *diluvium*: soggiungerò che tale analogia è tanto più grande in quanto che, in questi conglomerati, all'eccezione di alcuni ciottoli e massi calcari bucati dalle litodome (2), non si incontra traccia

(1) Trovasi accidentalmente qualche temporanea fornace da calce anche in quest'ultimo tratto della collina, ma la pietra che vi si cuoce è molto diversa da quella chiamata di Superga; essa è un calcare sabbioso e cavernoso che trovasi, non, come nei conglomerati, in ciottoli e massi per lo più rotolati, ma in strati alternanti con arenaria ed è chiamata, nel paese, *murso*. Quando nel fare i fossi per la piantagione delle viti incontrano quel calcare che è durissimo, i lavoranti sono obbligati di romperlo coi picconi e colle masse; ridotto in pezzi viene ordinariamente utilizzato per ottenerne calce, la quale però è di qualità molto inferiore a quella detta di Superga.

(2) Ho spaccato moltissimi dei ciottoli bucherati dalle *litodome* a fine di trovarne i gusci; una sol

alcuna di fossili; sono gli strati di sabbia e ghiaia posti al disotto ed al disopra dei conglomerati *superiori* che fornirono la massima parte dei fossili delle nostre collezioni; i conglomerati e particolarmente gli *inferiori* possono dirsi affatto sterili. Le località della nostra collina conosciute per la loro ricchezza in fossili sono il rivo detto della Batteria ove trovansi nella sabbia; i dintorni della villa Forzano, ove sono altresì nella sabbia; il *termo fourà* ove incontransi in strati di sabbia, ghiaia e ciottoli; il rivo di Baldissero in strati analoghi, ed altre consimili. Accade tuttavia qualche volta, che nelli strati fossiliferi sovrapposti o subordinati ai conglomerati superiori incontransi veri massi fra i ciottoli e la ghiaia; ciò succede particolarmente al *termo fourà* e nel rivo di Baldissero.

Generalmente parlando, gli elementi (ghiaia, ciottoli, massi) di cui sono composti i conglomerati della collina di Torino differiscono considerevolmente dalle roccie che costituiscono quel tratto delle Alpi che, a pochi chilometri di distanza, corre parallelamente ad essa. Questa differenza salta all'occhio alla semplice ispezione dei cumuli di ciottoli e di pietrizzo che vedonsi disposti lungo li stradali di Orbassano, di Rivoli, della Venaria, di Milano, di Ivrea, ecc., e di quelli che vedonsi lungo la strada che dalla Madonna del Pilone mette a Chieri, e da questa città a Villanuova d'Asti. I ciottoli dei primi provengono dai *diluvium* esciti dalle valli del Sangone, della Dora Riparia, della Stura, ecc., e rappresentano le roccie che si incontrano in *posto* nei bacini di quei torrenti: i secondi rappresentano le roccie che, allo stato di massi e di ciottoli, compongono i conglomerati della collina. A motivo della predominanza dei scisti micacei, delle dolomie, delle quartziti, ecc., il colore dei cumuli di pietrizzo proveniente dai varii *diluvium* è grigiastro, mentre il colore di quelli composti di ciottoli provenienti dai conglomerati è verde-nerastro a motivo della predominanza dei serpentini e delle eufotidi; pessimo è il pietrizzo che dà il *diluvium*, e ne è prova la polvere che in estate, e la fanga che nell'inverno copre quelle strade; ottimo è quello che si ottiene dai ciottoli dei conglomerati.

Se poi si discende a più minuto esame, si vede che, oltre a molte roccie comunissime nelle Alpi, trovansi in grande abbondanza, particolarmente nei conglomerati *inferiori*, porfidi, graniti, protogini, diaspri, arenarie

---

volta mi è accaduto di rinvenire i resti della conchiglia. Generalmente il buco è ripieno di sabbia compenetrata di sugo calcareo, ed indurita a segno da far corpo colla pietra.

porfiriche, melafiri, calcari, ecc. che non vennero mai incontrati nei letti dei torrenti alpini posti fra il Po e la Baltea, nè segnalati nei loro bacini.

Farebbe un lavoro interessantissimo colui che imprendesse a descrivere esattamente tutte le varietà di roccie che entrano nella composizione dei conglomerati tante volte citati. Non potendo io disporre del tempo necessario a tal lavoro, mi limiterò a far cenno di alcune delle principali.

Elementi dei conglomerati miocenici della collina di Torino.

1.° *Arenaria con combustibile fossile.* Ho trovato nella cava di pietra calcare aperta presso Superga (V. fig. 1) un masso del volume di un metro cubo attraversato da uno straticello di carbone fossile. Questo masso era composto di un'arenaria molto dura ed in gran parte silicea, avente molta analogia con quelle dei terreni antichi, talchè pareva, a prima vista, che quel masso provenisse dagli strati antracitiferi delle Alpi. Noterò che l'arenaria in discorso non è rara nei conglomerati.

2.° *Diorite* identica a quella che trovasi in posto presso Ivrea, e nelle valli del Cervo, della Sesia e del Gesso. Ne ho trovato dei ciottoli aventi $0^m,60$ di diametro.

3.° *Granito* qualche volta porfiroide a feldspato bianco o roseo pallido con molto quarzo affumicato e mica nerastra.

4.° Parecchie varietà di *porfido* a pasta di colore rosso-cupo con cristalli di un bel roseo; la pasta è tempestata di piccoli cristallini di quarzo e di laminette di una sostanza verde ch'io credo essere clorite.

5.° È affine a questa roccia un altro *porfido quarzifero* con pasta abbondantissima di pietra cornea, ordinariamente rossastra tempestata di cristallini di quarzo. Il *porfido* trovasi generalmente in ciottoli rotolati, e quando trovasi in massi, questi sono composti di una pudinga durissima, i cui elementi sono grossi ciottoli di porfido di diverso colore.

6.° Molti massi di una roccia granitica composta di feldspato rosso, qualche volta di rosso e di bianco, di quarzo grigiastro e di lamelle della sostanza verde già segnalata nel porfido; il feldspato è generalmente dominante. Questa roccia trovasi in ciottoli ed in massi enormi nel rio di San Raffaele e sulla sommità del poggio detto *Costa del Vay*.

7.° Una *brecciola porfirica* molto varia nella sua composizione, in quanto che alcune volte, nello stesso masso, prende l'aspetto di un'arenaria, di una breccia ed anche di una pudinga a componenti di granito, di

diaspro, ecc. Il colore di questa roccia, molto frequente nei conglomerati ed i cui massi hanno altresì proporzioni gigantesche, è, alcune volte, rosso violacco con macchie verdi, altre volte verdastro con macchie rossigne. Predomina il feldspato, ora in forma regolare o quasi di cristalli, ora in frantumi più o meno minuti, associato qualche volta a quarzo grigio ed a sostanza verde, la quale dà sovente il colore alla massa. Pare vi sia correlazione fra questa brecciola ed il granito citato al n.° 3, poichè essa ne racchiude frequentemente ciottoli.

La *brecciola* con aspetto di *porfido*, di cui abbiamo parlato, si confonde qualche volta con una brecciola a componenti di calcare alterato e siliceo, di serpentina, di feldspato in grani e di quarzo (1). Finalmente trovasi non di rado questa brecciola allo stato di vera arenaria durissima, a elementi di feldspato e di quarzo, la quale poi sovente è cavernosa, presenta cioè alla superficie dei vani di forma molto irregolare, vani che sono dovuti alla scomparsa per dissoluzione di frammenti di calcare.

8.° *Calcare*. Questa roccia, di molto la più importante dal lato industriale, trovasi in gran copia, e varia moltissimo sia nel colore che nella grana e nella composizione. Essa trovasi in ciottoli d'ogni grossezza, e frequentemente in massi, parecchi dei quali pare abbiano fatto parte di strati di molta potenza, in quantochè non presentano traccia alcuna di sfaldatura (2). In tali massi, più che in altri, la roccia ha l'apparenza di un calcare alquanto metamorfico, generalmente a grana molto fina ed a frattura ora largamente concoidale, ora finamente scheggiosa, in ragione probabilmente della quantità di silice che contiene. Il suo colore è o bianco di latte, o grigio, o verde pallido, o rosso, o azzurrognolo scuro, o nerastro; quando veste in special modo i caratteri di metamorfismo, è generalmente attraversato da quantità di vene spatiche; non è sempre omogeneo, ma prende sovente lo stato di breccia o di pudinga calcarea a cemento di spato ferrifero o di spato più o meno puro o di una sostanza argillo-calcarea finamente spolverata di verde. In alcuni rari casi fra gli interstizii della pseudo-pudinga vedesi una sostanza nerissima,

---

(1) Nell' *Essai sur les terrains superficiels de la vallée du Pô* noi abbiamo riunito queste brecciole coi veri porfidi quarziferi.

(2) Mi è qualche volta occorso di trovare frammenti di calcare a spigoli ed angoli vivi, profondamente improntati su tutte le faccie dalla ghiaia serpentinosa che li circondava.

lucida, in lamine sottilissime e come spalmata a mo' di vernice sulla superficie degli elementi componenti la roccia (1).

In generale il calcare dei nostri conglomerati ha, e per tinta e per grana e per altre particolarità, caratteri tali che facilmente lo distinguono dai calcari che s' incontrano sul nostro versante delle vicine Alpi; il solo calcare alpino che, a mia conoscenza, presenti caratteri quasi identici a quello dei conglomerati della nostra collina, trovasi sul versante savoiardo a la *Cheniaz* presso San Gingolph nel Chiablese. Io considerai già i calcari della collina di Torino (2) come privi affatto di fossili, ma

---

(1) Un saggio operato su questa sostanza dal sig. Professore Valerico CAUDA, alla cui cortesia e perizia io ricorsi, ha dato li seguenti risultati:

Carbonio	54,50;
Ceneri	38,59;
Materie volatili	6,91,

che hanno una grande analogia con quelli ottenuti dallo stesso sig. CAUDA analizzando il combustibile contenuto nell'arenaria di cui si è parlato al num. 1, e che sono:

Carbonio	52,22;
Ceneri	45,06;
Materie volatili	5,72.

(I prodotti volatili e le ceneri di entrambe le sostanze trovaronsi quasi identici).

(2) *Essai sur les terrains superficiels etc.* — Alcuni esemplari di questa Memoria, stampati in 4.°, hanno, sui conglomerati della collina e di altre località, una nota ch' io credo dover qui riprodurre. — « On trouve aussi dans les mêmes couches miocènes des blocs de serpentine qui ont plusieurs mètres de diamètre. Les blocs et cailloux calcaires, la serpentine, le porphyre quartzifère, les jaspes et les granits sont toujours associés ensemble dans les conglomérats, de façon que la présence de ces dernières roches indique le voisinage des cailloux calcaires. La liaison entre certaines serpentines, le calcaire et le porphyre quartzifère est encore plus intime; ainsi on trouve des blocs calcaires colorés en vert et pénétrés par des infiltrations serpentineuses; d'un autre côté on rencontre des brèches plutoniques renfermant des fragments de ce même calcaire. Il est donc très-probable, que ces trois roches proviennent toutes de la même région. Les connaissances que l'on possède sur la géologie du Piémont, ne permettent guère de placer cette région ailleurs que sur les montagnes qui entourent Biella, Varallo, Arona, etc. sur les Alpes maritimes, ou sur les Apennins de la Ligurie.

» Le calcaire en blocs et cailloux est assez fréquemment silicifère; dans ce cas, il est aussi très-tenace et à cassure esquilleuse; mais quand il se présente dans l'état normal de calcaire argilleux, alors il se sépare facilement en gros morceaux, et sa cassure est un peu concoïdale. Les fragments de cette nature sont fréquemment perforés par des litophages et des vers marins du miocène. Ce calcaire a des teintes *très-variées*; elles passent du rouge au violet, et à l'azur foncé, du blanc au jaune et au vert émeraude. Nous n'avons jamais trouvé trace de fossiles dans l'intérieur des blocs et des cailloux. Cette dernière circonstance, ainsi que l'intime association du calcaire à la serpentine et au porphyre quartzifère indique une grande analogie avec les masses calcaires des Alpes, qui, ou par suite du métamorphisme, ou par des particularités de gisement, sont très-souvent dépourvues de corps organiques.

» L'existence de gros blocs erratiques dans une formation neptunienne, n'est pas un fait isolé

recentemente, e dopo di aver rotti centinaia di ciottoli, mi riescì di trovarvi un frammento del modulo interno di una bivalva (*Trigonia* o *Inoceramus*) e molte impronte di *Fucus*. Debbo osservare che quel frammento, di modulo, è formato di sabbia finissima, locchè mi fa supporre che esso abbia fatto parte di strati più antichi prima di essere racchiuso nel calcare nel quale troverebbesi perciò allo stato di ciottolo rotolato.

In altre varietà di *calcari fissili*, a grana più grossa ed a tinte altresì variatissime, scopersi un *Nemertilite*. Tutti questi calcari sono più o meno argillosi, e da essi si ottiene un' eccellente calce forte.

Registrerò in ultimo, e la lista è lungi dall'essere compinta, una varietà di *calcare* molto duro, siliceo, refrattorio, il quale incontrasi d'ordinario in grossi massi; e parecchie varietà molto compatte a tinte grigio-scure ed altre saccaroidi o dolomitiche a tinte variatissime: quest'ultime varietà danno calce dolce.

Conglomerati miocenici dell'Apennino Ligure.

I conglomerati miocenici sono molto sviluppati nell'Apennino Ligure ove non solo mostransi in banchi e strati potentissimi, ma qualche volta

---

dans la science et propre à la colline de Turin. Sur les pentes élevées du Bolgen, montagne située au fond de la vallée de Sonthofen, dans la Bavière méridionale, MM. B. STUDER [Ueber erratische Bloecke der secundaerzeit (Mitteilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern 1845, pag. 93)], et A. ESCHER de la Linth, ont vu des blocs de gneiss à angles aigus et à arêtes vives ayant plusieurs mètres de diamètre, et contenus dans un conglomérat faisant partie des couches que leurs fossiles rangent dans la période crétacée. Ces blocs sont originaires des montagnes gneissiques du Tyrol; or, plusieurs chaînes calcaires et un espace fort large les séparent de leur point de départ: ils n'ont pu être amenés dans leur gite actuel, ni par des glaciers, ni par des courants, et leur transport doit remonter au-delà de la période crétacée, à une époque où les chaînes calcaires n'existaient point encore.

» Dans la vallée de Habkeren, qui s'ouvre en face de Unterseen (canton de Berne), on voit dans le lit du Tranbach et du Lombach des blocs de granit, dont plusieurs ont un décamètre de longueur. L'un d'eux, situé en face du village de Habkeren, surpasse dix fois en grosseur les blocs gigantesques de Monthey et de Steinhof. Le granit qui le compose est *totalement inconnu dans les Alpes*, aucune roche de la Suisse n'a la plus légère ressemblance avec lui. Des blocs du même genre, mais moins gros se retrouvent dans des schistes de la vallée appartenant à la craie supérieure.

» Au-dessus de Sepey, dans le val des Ormonds (canton de Vaud), des conglomérats faisant partie des couches secondaires de la chaîne de Niesen, renferment des blocs d'un à deux mètres de diamètre: la plupart sont des gneiss et des schistes micacés, qu'on ne trouve en place qu'au sud de Saint-Maurice; quelques blocs sont calcaires et paraissent provenir des montagnes voisines. Ces faits rapprochés de ceux que nous avons cités, ouvrent un vaste champ aux spéculations géologiques»

formano intere montagne ora esclusivamente composte di ciottoli, ora di ciottoli e di massi disposti in strati più o meno regolari.

Località interessantissime a vedersi sono Pozzuolo del Groppo, Croce Fieschi, Voltaggio, Mornese, Lerma, Belforte, Sassello, Piana ed altre molte poste fra il Tanaro e la Staffora.

In questo capitolo noi percorreremo rapidamente alcune di queste località, dando su esse quelle notizie che ci parranno poter maggiormente mettere in rilievo l'importanza dei conglomerati miocenici.

Croce Fieschi. – Partendo da Busalla coll'intenzione di salire a Croce Fieschi, passando per Semino, si cammina, sino a quest'ultimo villaggio, sopra li scisti nerastri (parte media del macigno secondo il Pareto), attraversati dalla galleria dei Giovi, e s'incontrano quindi enormi masse di conglomerati che accompagnano il viaggiatore sino a Croce Fieschi; a metà costa si lascia a sinistra, e a qualche distanza, il monte Repasso, (fig. 2) interamente composto di pudinga dal piede alla punta, la quale si eleva certamente più di 100 metri al disopra del letto del torrente. La strada che si percorre è tagliata nella stessa pudinga e, ad un certo punto, fiancheggia alti e scoscesi dirupi, inoltrandosi in un burrone stretto e profondo, talchè il geologo può, a suo agio, e senza troppo sviarsi, osservare gli elementi che compongono il suolo; può infatti prima di tutto verificare che la pudinga non contiene grossi massi,

Fig. 2. — *Veduta del monte Repasso*

1, monte Repasso.
2, Castel Vecchio.

locchè già doveva presentire dal non vederne alcuno sparso sulla superficie del suolo, quantunque l'occhio suo possa, rada, stentata e quasi nulla essendo la vegetazione, abbracciare largo tratto di paese. Il masso più

grosso ch'io abbia osservato era lungo da 80 a 90 centimetri: sono del resto frequentissimi i ciottoli del diametro di 30, 40, 50 e più centimetri. La roccia la più abbondante è il scisto nerastro più o meno sfogliato, più o meno micaceo su cui si è camminato a partire da Busalla sino a Semino; trovansi inoltre in gran numero i calcari or a tinte chiare e a grana finissima, or a tinta scura e a grana grossa che vedonsi in posto nelle parti superiori della valle; sono i soliti calcari a fucoidi che occupano gran parte delle vicine valli del Currone, della Staffora, ecc.; finalmente frequentissimi incontransi altresì i serpentini, le eufotidi, i diaspri, ecc.

La massa della pudinga o conglomerato è assolutamente priva di fossili e se la sua stratificazione, considerata in grande, non fosse così regolare; se non si sapesse, per altri argomenti, che quel conglomerato è marino, lo si direbbe un deposito torrenziale analogo a quelli che trovansi alla base delle Alpi, poichè in vero non è possibile trovare qualche cosa che più somigli ad un *diluvium* rimaneggiato.

Una strada aperta nel calcare a fucoidi *(alberese)* sul dosso del monte che separa il versante del torrente Seminella da quello del torrente Fabio e da quello della Brevena, conduce il viaggiatore (che vuol discendere a Busalla, per un cammino diverso da quello pel quale è salito) da Croce Fieschi a Siorrive e Savignone, ove egli incontra una bellissima strada, per cui in breve tempo può giungere al luogo da cui è partito.

Fig. 3. — *Sovraposizione del conglomerato miocenico al calcare a fucoidi, veduta presa sulla strada da Siorrive a Savignone.*

a, monte Schigonzo - calcare a fucoidi.
b, *c*, Costa-Saja e monte Moro - conglomerato miocene.
1, Siorrive. 2, Nenno. 3, Carezza - villaggi.

Prima di arrivare a Siorrive vede il calcare a fucoidi internarsi sotto altra enorme massa di pudinga (fig. 3), a' piè della quale il viaggiatore

cammina, volgendole il fianco destro; questa massa porta il nome di monte Costa-Saja: viene in seguito altra massa, più imponente ancora, denominata il monte Moro, sulla falda meridionale del quale la strada, girando, prima di discendere a Savignone, offre sul rivolto un punto, da cui si può molto chiaramente scorgere la relativa posizione della pudinga e del calcare a fucoidi. Discendendo a Savignone si ritrovano li scisti sfogliati sui quali si cammina sino a Busalla.

Paragonando i conglomerati delle località suaccennate con quelli di tanti altri punti dell'Apennino si nota essere essi fra i più sviluppati in potenza che si conoscano e nello stesso tempo non contenere massi di gran volume, locchè, a quanto pare, è cosa piuttosto comune nei conglomerati che trovansi sulla destra della Scrivia, nei quali anzi credetti per un tempo non ve ne esistessero punto, e solo cangiai pensiero quando da lungi vidi, nella valle della Staffora, alcuni massi superficiali, veramente di gran mole, giacere sui conglomerati dei dintorni di Pozzuolo del Groppo.

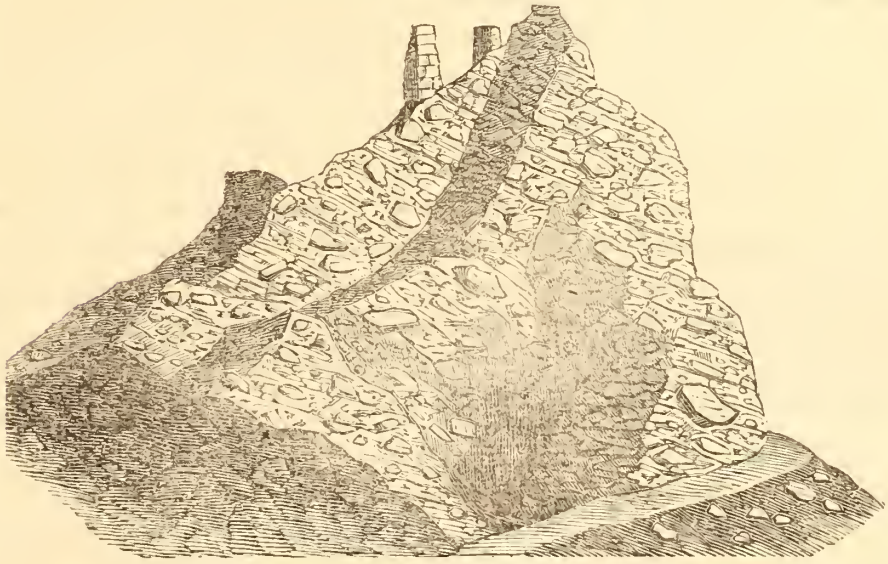
Pozzuolo del Groppo. – Il villaggio che porta questo nome trovasi situato sulla estrema punta della catena di colline che separa la imboccatura della valle della Staffora da quella del Currone; esso è fabbricato sopra un enorme (per non ripetere troppo frequentemente gli appellativi di enorme, potentissimo, ecc. diremo per una volta sola che parlando del conglomerato è inteso che esso non ha mai meno di 20 o 30 metri di potenza, ed il più sovente ne ha 60, 80 ed anche 100) strato di conglomerato, il quale attraversa le due valli suaccennate; riparleremo di questa località all'occasione in cui ci occuperemo del luogo di origine di alcuni degli elementi che compongono il conglomerato della collina di Torino.

Ritornando alle considerazioni generali relative ai conglomerati posti sul versante destro della Scrivia, dirò ancora che i loro elementi hanno, per così esprimermi, un'aria di famiglia, poichè, quantunque vi predominino li serpentini (sempre predominanti in tutti indistintamente li conglomerati del Piemonte), vi si trovano frequenti li stessi calcari (a fucoidi), li stessi scisti, li stessi diaspri, ecc., sia nella valle della Staffora, che in quella del Currone, che nelle altre di minor importanza.

E tali calcari, scisti e diaspri sono di già molto meno frequenti, anzi molto rari nel conglomerato che vedesi a Fiaccone, uno dei punti culminanti della catena che separa la Scrivia dal Lemmo.

Fiaccone. - Si può da Busalla salire comodamente a Fiaccone rimontando il torrente *Traversa.* Nella parte inferiore del suo corso e pel tratto appunto che si deve percorrere, questo torrente taglia i scisti sfogliati nerastri già più volte menzionati; a Casazze però, punto in cui il sentiero abbandona il torrente per salire la costa, esce, da mezzo i scisti, una testata di serpentino verde-chiaro, dalla quale venne estratta una gran quantità di pietrame all'occasione in cui si costruirono le opere d'arte del tratto di strada ferrata fra Serravalle e Genova. Durante la salita si vedono spuntare di sotto al terreno vegetale affioramenti di scisti; giunti poi alla cima si rimane come meravigliati all'aspetto di un'aguzza rocca, che porta le rovine dell'antico castello di Fiaccone.

Fig. 4. — *Conglomerato di Fiaccone.*



Questa rocca, alta più di 40 metri, è formata di un solo strato di conglomerato, i cui elementi sono grossi ciottoli e massi di gran mole aventi un metro ed anche più di diametro. Durissimo è il cemento che ritiene agglomerati gli elementi e consiste in sabbia serpentinosa compenetrata probabilmente da sughi silicei; questo fa sì che la rocca ha potuto ritenere una forma piramidale, aguzza, ardita e quale s'addirebbe piuttosto ad un pizzo di roccia viva, che ad una punta di conglomerato; ed in vero colui il quale si contentasse di prendere nota della punta di Fiaccone, vedendola a 500 metri di distanza, non troverebbe difficoltà a scrivere sul suo taccuino

che essa è composta di serpentino in massa, tanto più che il conglomerato, formato quasi esclusivamente di elementi serpentinosi, ha preso quella tinta scura bronzata, che svela anche da lungi il serpentino massiccio.

Esaminando questo conglomerato non potei a meno di rammentarmi che le stesse particolarità in esso notate osservansi altresì sulla punta detta di Palouc, posta al S. E. di Superga; la sola differenza che vi è, consiste in ciò, che la punta di Palouc è composta esclusivamente di ciottoli (non di ciottoli e massi giganteschi) anch'essi però, senza alcuna eccezione, di serpentino.

Ritornando al conglomerato di Fiaccone, noterò che i serpentini di cui è formato, sono di natura molto varia, cioè a dire compatti, scistosi, asbestiformi, con o senza diallaggia, ecc.; locchè fa vedere che essi provengono non da un solo, ma da diversi punti; la particolarità poi di essere così duro potrebbe forse attribuirsi alla prossimità del sottostante serpentino in posto, serpentino però, per quanto mi parve, di natura diversa da quello degli elementi del conglomerato stesso.

Discendendo da Fiaccone verso i molini vedonsi sulle praterie a prossimità della Chiesa parrocchiale massi giganteschi, l'uno dei quali ha forse 9 metri di diametro; non v'ha dubbio che tali massi provengano dal conglomerato, poichè affioramenti di esso scorgonsi qua e là spuntare dal suolo. A metà costa, per calare a Voltaggio, incontransi scisti molto micacei alternare con strati di calcare che sembra, in parte almeno, essere ancora il calcare a fucoidi.

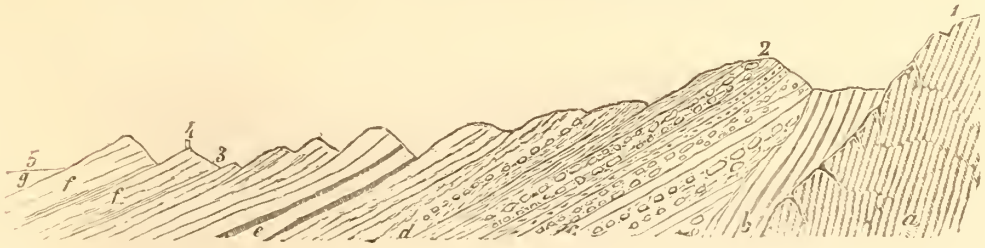
Voltaggio, monte Brisco. – Ad un chilometro circa a valle di Voltaggio ricompare il conglomerato; è ivi un'alternanza di strati di ghiaia, di ciottoli e di massi sovente giganteschi, molti dei quali non sono rotolati; non vi ha traccia di fossili nè qui, nè a Fiaccone. La massa del conglomerato si disagrega facilmente, si sfascia e si rompe in parallelepipedi dando luogo, come a Mornese e Lerma, a enormi spostamenti. Gli elementi sono, come d'ordinario, di serpentino; trovansi tuttavia alcuni ciottoli e massi di calcare a fucoidi; questo calcare, di già raro sulla catena che separa la Scrivia dal Lemmo, cessa di farsi vedere a partire dalla sinistra di quest'ultimo torrente e marciando verso occidente. Il calcare stesso che scavasi a Voltaggio in prossimità della sorgente minerale; quello che si estrae, in diversi siti, dietro il monte Brisco e più verso il monte Tobbio, han caratteri molto diversi da quello di cui parliamo; così pure li scisti che trovansi sulle falde della Barlettina, salendo al Brisco, paiono

più antichi di quelli che sottostanno ordinariamente al calcare a fucoidi.

Per dare un' idea generale della differenza che vi ha, nella loro costituzione geologica, fra gli Apennini posti alla destra e quelli posti alla sinistra della Scrivia, dirò che sulla destra si ha serpentino - scisti e calcari a fucoidi del macigno (questa zona è moltissimo sviluppata sia in superficie che in potenza) - argille molassiche, conglomerato e marne cineree del mioceno - marne, argille e sabbie del mioceno superiore e del pliocene. Sulla sinistra si ha: serpentino - scisti e calcari (parte inferiore del macigno, secondo il sig.r Pareto) inferiori al calcare a fucoidi (questa zona è di lievissima importanza sia in superficie che in potenza) - argille, conglomerati e marne cineree del mioceno - marne, argille e sabbie del mioceno superiore e del pliocene.

La generale costituzione geologica del paese posto sulla sinistra della Scrivia meglio apparirà dal seguente spaccato secondo una linea che, partendo dal monte Tobbio taglia il monte Brisco, passa pel Lemmo e Gavi, e termina nella pianura di Alessandria.

Fig. 5. — *Spaccato tra il monte Tobbio e la pianura d'Alessandria.*



a, serpentino.
b, scisti e calcari più antichi del calcare a fucoidi.
c, conglomerati.
d, ghiaie e sabbie nummulitifere con massi.
e, argille e marne cineree.
f, sabbie, argille e marne.
g, argille e sabbie del plioceno.
1, monte Tobbio. - 2, monte Brisco. - 3, Lemmo. - 4, Gavi. - 5, pianura alessandrina.

La massa del monte Brisco è tutta composta di conglomerato a grossi massi; verso la base però incominciansi a vedere, alternanti cogli strati di conglomerato, banchi di ghiaia e di arenaria, i quali presso Mornese mostransi fossiliferi (con molti nummuliti). Alternano poi colle arenarie banchi di argilla sfogliata con impronte vegetali. Le ghiaie fossilifere, le arenarie e le argille sfogliate sono soprastanti ai conglomerati, tuttavia qualche volta contengono rari bensì ma grossi massi, locchè succede altresì a Sassello, Belforte ed anche, come già lo notammo, sulla collina di

Torino. A Sassello e Belforte tali massi sono come collegati assieme da grossi polipai che si estendono a guisa di *récifs* su aree di alcune centinaia di metri quadrati. Il mio amico sig. Avv. G. Michelotti mi faceva osservare che questi polipai appartengono al gruppo dei fissipari, gruppo che più non trovasi sulla collina di Torino, ove infatti non vedesi traccia di tali *récifs*; i più grossi polipai che incontransi sulla nostra collina sono grosse astree del diametro di 50 a 60 centimetri.

Mornese, valle del Corsente, Lerma - La valle del Corsente è forse il luogo ove il conglomerato a massi giganteschi raggiunge la massima sua potenza. Alla cappella di S. Carlo presso Mornese, vedesi un masso di gneiss, che ha 4 metri di lunghezza e 3 ½ di altezza; calando verso il torrente Besegli, si cammina in mezzo ad una grande quantità di massi lasciati allo scoperto dall'alterarsi e disfarsi di alcuni strati di marna e di sabbia molto ricchi in fossili marini e particolarmente in nummuliti. Un masso colossale (fig. 6), esso pure di gneiss, giace presso al molino nel

Fig. 6. — *Masso presso il molino di Mornese, gran diametro metri 8.*

letto stesso del torrente (questo masso staccossi e cadde, alcuni anni sono, dall'alto della sponda destra del torrente interamente formata di

conglomerato), lungo al quale, discendendo sino al confluire col Corsente e quindi lungo quest'ultimo sino a Lerma, vedonsi continuamente li stessi conglomerati (1).

A Lerma incontransi di nuovo le sabbie nummulitifere posanti sopra uno strato a grossi massi e coperte dalle argille sfogliate e dalle marne cineree; vi ha perciò qui la ripetizione di parte dello spaccato secondo la linea che partendo dal monte Tobbio tocca Gavi e la pianura di Alessandria.

Io non farei che ripetere le stesse cose se imprendessi a descrivere le altre località dell'Apennino in cui vedonsi i conglomerati; nominerò solo Malvicino e Sassello nella valle dell'Erro; Stella e Cadibona sul versante che discende al Mediterraneo; Dego, Spigno e Piana nella valle della Bormida. Farò altresì parola, quantunque non l'abbia visitato, del conglomerato di Portofino, servendomi delle notizie su esso dateci dal sig.r Marchese L. Pareto nella descrizione di Genova e del Genovesato (vol. I, pag. 56. Genova, 1846). Egli segnala in quel luogo uno strato di pudinga della potenza di più di 100 metri, priva di fossili, ed i cui ciottoli hanno qualche volta una mole molto considerevole; alcuni di essi poi appartengono a roccie che non si trovano nel loro posto ordinario se non in luoghi assai distanti (2).

Giova in ultimo osservare, che gli strati a massi dell'Apennino, o meglio li strati di ghiaia e di sabbia che immediatamente li coprono

---

(1) Trovandomi sopra un'altura, da cui l'occhio poteva abbracciare un buon tratto della valle del Corsente, ed osservando con meraviglia i cumuli di ciottoli di cui è letteralmente coperta la stretta zona di suolo piano, la quale corre parallelamente al torrente, supposi che là era stato praticato, in antico, un lavaggio di oro a mo' di quello che i Romani eseguirono alla Bessa, al piede settentrionale della Serra d'Ivrea. Ebbi in seguito la soddisfazione di constatare che non mi era sbagliato; il sig.r Primard, già direttore delle miniere d'oro del Corsente, ed ora di quelle di Belforte (valle della Stura), mi mostrò antichi utensili trovati in quel tratto di terreno, e mi disse che nel letto del torrente scorgonsi ancora oggidì avanzi di apparecchi in pietra destinati al lavaggio dell'oro. Il sig.r Baldracco, Ingegnere di miniera, in un suo rapporto manoscritto sulla statistica mineralogica del distretto di Genova, così si esprime in proposito: « Sulla distesa di qualche chilometro il suolo di alcun breve spazio di pianura affacciasi, verso sopratutto il molino di Casaleggio, quasi ovunque formato di ciottoli e massi di varia grossezza, e per tal guisa sconvolti e talora ammucchiati, da farci chiaramente palese essere ciò l'opera dell'uomo anzichè semplicemente delle acque. Siccome poscia fin da tempi assai remoti, da alcuno dei più industriosi contadini di quella sterilissima valle sono lavate, con adatti strumenti, le sabbie del torrente ond'è percorsa per estrarne i contenuti granellini d'oro, egli è verosimile siasi ad uno stesso fine operato in antichi tempi il dislocamento dei ciottoli e massi sopradetti ».

(2) Per i conglomerati dell'Apennino vedi altresì li eccellenti spaccati pubblicati dallo stesso Autore nella sua *Note sur le terrain nummulitique du pied des Apennins*, e quelli del sig.r A. Sismonda annessi alle *Osservazioni geologiche sui terreni della formazione terziaria e cretacea in Piemonte.*

e che contengono ancora buon numero di massi, sono generalmente altrettanto fossiliferi che li analoghi della collina di Torino. Però le località ricche di fossili sono bensì estese in superficie, ma non nel senso verticale: cioè a dire che i fossili trovansi solamente in certi strati, i quali, quantunque siano contigui alla massa dei conglomerati, tuttavia per la loro esigua potenza sono insignificanti comparativamente a quella. Infatti, come nelle cave di pietra calcare della collina di Torino non vi ha, si può dire, traccia di fossili, così non ve ne ha laddove negli Apennini i conglomerati sono potenti e ad elementi voluminosi.

A riassunto di quanto abbiamo esposto nell' intero capitolo diremo: 1.° che su quella parte dell'Apennino, la quale si estende a destra della Scrivia, notasi un enorme sviluppo di conglomerati per lo più formati di soli ciottoli, soprastanti al calcare a fucoidi (alberese), calcare di cui contengono a dovizia ciottoli; 2.° che sulla sinistra della Scrivia notasi altresì un enorme sviluppo di conglomerati per lo più racchiudenti massi giganteschi, quasi esclusivamente serpentinosi, e riposanti non più sull'alberese, calcare che più non vedesi da questa parte della Scrivia, ma bensì su calcari e scisti più antichi.

Luogo d'origine di alcune delle roccie che entrano come elementi nella composizione dei conglomerati della collina di Torino.

Visti di corsa i punti principali dell'Apennino, nei quali il conglomerato miocenico presentasi molto sviluppato, io fo ritorno ai conglomerati della collina di Torino. Fin dall'epoca in cui incominciai ad occuparmi di essi io aveva sperato di arrivare un giorno a conoscere il luogo di origine di alcuni degli elementi di cui sono composti, ed in particolare dei calcari, come quelli che per tinta e per grana presentano caratteri esterni di non poco rilievo.

Passarono tuttavia 10 anni senza che si avverassero le mie speranze, quantunque io avessi avuto tutto l'agio, massime a partire dal 1854, di consultare la collezione statistico-mineralogica ordinata dal Barelli, in cui sonovi i campioni della maggior parte dei calcari coltivati in Piemonte; nell'autunno scorso (1858) riescii finalmente nel mio intento.

Posso ora con tutta certezza affermare che molti dei calcari, le breccie

porfiriche ed alcuni dei graniti che si incontrano nei conglomerati inferiori della nostra collina provengono dall'alta valle della Staffora o meglio dal gruppo degli Apennini da cui discendono verso il Piemonte la Borbera, il Grue, la Staffora ed il Currone, gruppo che dista da Torino circa 100 chilometri in linea retta.

Devo in gran parte questa scoperta alle eccellenti note di cui il sig.r Barelli fregiò il suo catalogo (1) della collezione statistico-mineralogica sopra nominata.

Percorrendo il citato catalogo aveva trovato a pag. 374 del 2.° volume, quanto segue:

« N.° 2908 – Granito composto di quarzo vitreo e di feldispato ros-
» siccio, biancastro e verdognolo, e di mica nericcia – apparisce in massi
» colossali avventizii lungo la sponda destra del rivo *Montagnola*, ad un
» quarto d'ora circa a levante della Staffora. Esso è pregevole per la sua
» solidità e per le masse colossali che può fornire, fra cui havvene del
» volume di oltre 700 metri cubi, che in complesso offrono il quantitativo
» di circa 2500 metri cubi, che è quanto dire, esserci una cava di granito
» fra gli Apennini Liguri tuttochè non consti giacere tale roccia fra quelle
» di cui generalmente si compongono ».

Invogliato dalla lettura di questa nota io visitai il rivo Montagnola coll'idea di trovarvi un altro punto, in cui, sugli Apennini, si mostrassero strati marini con massi giganteschi, non col pensiero di scoprirvi, come mi accadde, il punto di partenza di alcuni degli elementi dei nostri conglomerati.

Discende la Staffora dalle alture di quella catena di monti che collega la punta del Penice (1458 metri) con quella di Asireigo o Chiappo, e dopo di aver corso per qualche tratto dal S. al N., e quindi dall'E. all'O., prende a Bagnara la direzione di S. E. – N. O. che più non abbandona sino al suo sbocco a Rivanazzano nella pianura vogherese. A partire dal punto in cui riceve sulla destra sponda il rio Montagnola, il suo letto cala con dolcissimo pendio ed ha l'aspetto di un largo piano di color bianchiccio a motivo della grande quantità di ciottoli calcarei a tinte chiare che lo ingombrano.

Maestosa apresi la valle a chi, lasciando le ubertose campagne del vogherese, risale la Staffora; e la strada che conduce sino a Varzi, non

(1) Cenni di statistica mineralogica degli Stati di S. M. il Re di Sardegna. Torino, 1835.

di monte, ma si direbbe strada di pianura. Fiancheggiano il torrente colline che si elevano, generalmente, con dolci pendenze verso il Penice, sin sulla punta del quale ascende la coltura del grano. La sua larghezza, la sua esposizione, il lieve pendio del torrente che la percorre, la forma dei monti in mezzo ai quali si apre, renderebbero questa valle bellissima, se l'occhio non fosse troppo sovente ferito dalla nudità del suolo, dal quale gli abitanti estirparono ed estirpano tuttora (ma al dì d'oggi sui più alti gioghi) ogni sorta di piante arboree, non già, a quanto pare, per accrescere la superficie del terreno arativo, e dar lavoro alle braccia, ma bensì per amore di subito e temporario guadagno poichè la superficie del terreno, affatto o quasi, incolto è forse dieci volte maggiore di quella del terreno coltivato (1).

Nelle poche ore che passai a Varzi salii col mio amico G. Michelotti, che volle essermi compagno in questa corsa, sopra una collina che si eleva al N. di quel luogo, e vi trovai molti massi di calcare grigio-giallastro con impronte di *Fucus*, massi che io non so bene se facciano parte del suolo, o se provengano da punti più elevati.

Partendo da Varzi e risalendo la Staffora per recarmi nel rio Montagnola io rimaneva da principio meravigliato di vedere quanto pochi fossero i ciottoli di serpentino e di altre roccie eruttive che incontrava nel letto del torrente, il quale discende in vero con sì dolce declivio da non permettere, se non nelle più grandi piene, che l'acqua strascini fin là i frammenti provenienti dalle alture. Tuttavia, a misura che io m'inoltrava, più frequente occorrevami di trovare tali sorta di pietre, ed in ispecie l'eufotide e due varietà di granito, una rosea e l'altra grigia. Giunto al disotto di S.ta Margherita, nel punto d'incontro della sponda destra del

(1) Nell'Apennino Ligure trovansi ancora oggidì viventi, nei siti più alti, e nei recessi più freschi, alcuni individui del *Larice*; una volta però quest'albero era frequentissimo sui gioghi di quelle montagne. L'Autore dell'articolo *Regno vegetale* inserito nella descrizione di Genova e del Genovesato, in una nota (pag. 14) dice: *Le travi di abete ond'è contesta la soffitta dell'antica chiesa di San Colombano di Bobbio, provengono verosimilmente dai monti vicini, sebbene al presente non vi si trovino abeti. Mi è stato assicurato che in più parti dell'Apennino si scavano anche oggi dei grossi tronchi di conifere benissimo conservati, che debbono essere stati sepolti in qualche scoscendimento avvenuto in epoca non ha guari lontana.* Aggiungerò che un Ingegnere francese, il sig.r D'Adhémar mi ha assicurato che il fondo del lago Agoraja, presso il monte Penna (1731 m.), è affatto coperto di tronchi di conifere accatastati confusamente gli uni sugli altri; il legno di questi tronchi è così bene conservato, che gli esemplari, graziosamente donatimi dal detto sig.r D'Adhémar, paiono staccati da piante recentemente atterrate; egli pretende inoltre che la valle di Aveto tragga il suo nome dalle foreste di abeti che in gran parte la coprivano.

rio che discende da quel luogo, con quella della Staffora, osservai escire dal suolo grossi massi di granito roseo alquanto alterato, alcuni dei quali, profondamente interrati nel mobile letto del torrente, hanno più l'aspetto di testate di roccia in posto che di massi liberi.

Rimontai per qualche tempo ancora la Staffora, incontrando di quando in quando *fucoidi* nei ciottoli calcarei ch'io andava rompendo, finchè giunsi al sito in cui il rio Montagnola immette nella Staffora, lasciando la quale e risalendo il sassoso e difficile letto del primo, giunsi dopo mezz'ora di marcia a scoprire i cercati massi.

Uno di essi ha il volume di quello di Pianezza, misurando quasi 30 metri in lunghezza (1); e molti altri che coprono la destra sponda del rio, o ne ingombrano il letto, hanno dimensioni di poco inferiori. Sono generalmente composti di una brecciola contenente, intimamente cementati, ciottoli di ogni grossezza delle due già menzionate varietà di granito grigio e roseo, del quale trovansi a dovizia nel torrente massi di gran mole.

A pochi passi dal più grosso dei trovanti che sorge in mezzo a radi e secolari cerri, io staccava da un masso di calcare un campione, il quale mi sembrò, per i suoi caratteri esteriori, molto simile al calcare di Superga, e balenatami nella mente l'idea che i ciottoli e massi calcari dei nostri conglomerati avessero potuto venire da quei siti, trovai attorno di me più di un fatto che mi confermava in essa; ed invero ad ogni colpo di martello scopriva, od in massi od in posto, qualcuna delle varietà dei nostri calcari, ed osservava inoltre che gli stessi giganteschi trovanti, di cui ho dapprima parlato, sono composti di una roccia somigliantissima a quella che sì frequente incontrasi nelle cave del rio Sassi e del rio Dora.

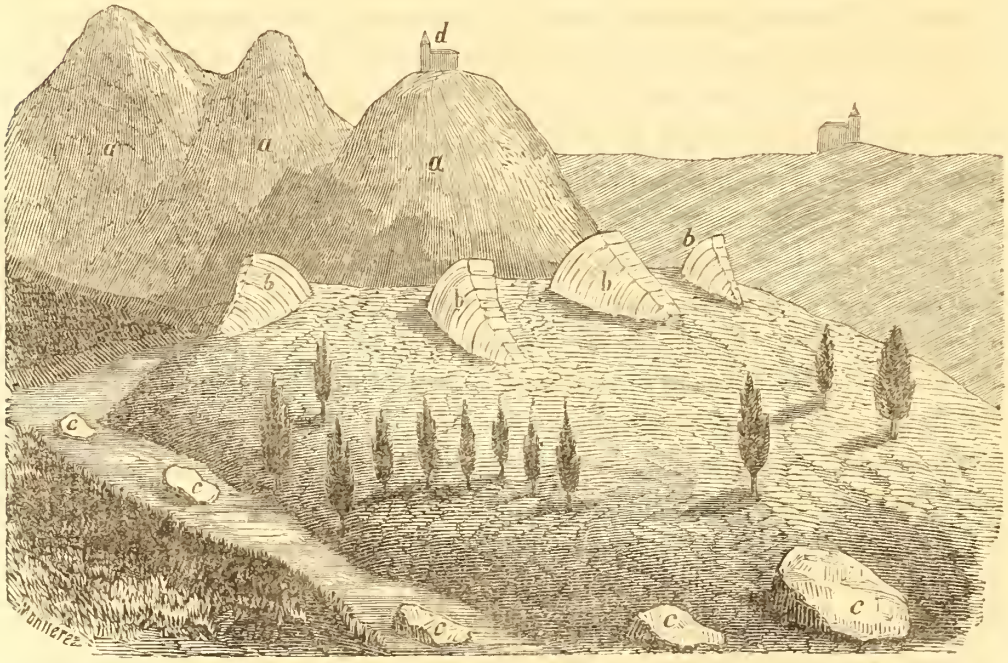
Lasciato il rio Montagnola, dopo di aver fatto buona messe di esemplari delle diverse roccie colà trovate, salii a S.ta Margherita, ove nuovo ma non men interessante spettacolo mi attendeva. Il luogo di S.ta Margherita, e specialmente il castello, giace sopra una massa di serpentino diallaggico, la quale esce di mezzo agli strati di calcare (V. fig. 7).

Sembra che grande sia stato lo sforzo fatto dal serpentino onde aprirsi una strada e venire all'aperto, poichè i banchi di calcare sono qua e là

(1) Credo che il PARETO alluda a questo gran trovante quando, parlando dei massi di granito incastrati nelle breccie che accompagnano i serpentini, dice: « ma il più notevole tra loro che io » m'abbia osservato per la sua mole si è quello, che vedesi legato colla serpentina a S.a Margherita » presso Brallo in valle Staffora » (PARETO: Della posizione delle roccie pirogene ed eruttive dei periodi terziario, quaternario ed attuale in Italia).

squarciati e ricurvati in modo da dare un' idea della sofferta violenza Qui, come al rio Montagnola io mi trovava in mezzo a vecchie conoscenze sia che prendessi ad esame i grossi massi di granito e di brecciola da cui è ingombro il rio che discende nella Staffora, sia che prendessi ad esame il serpentino, sia che portassi la mia attenzione sui diversi calcari. Ricorderò che nel 1850, parlando degli elementi dei conglomerati della collina di Torino (1) io diceva: *La liaison entre certaines serpentines, le calcaire et le porphyre quartzifère* (chiamai indistintamente con questo nome i veri porfidi quarziferi e la roccia che ora chiamo col nome di brecciola) *est encore plus intime; ainsi on trouve des blocs calcaires*

Fig. 7. — *Veduta del luogo detto S.ª Margherita nella valle della Staffora.*



a, serpentino verde scuro diallaggico.
b, calcare a fucoidi.
c, massi di brecciola e di granito.
d, castello di S.ª Margherita.

colorés en vert et pénétrés par des infiltrations serpentineuses; d'un autre côté on rencontre des brèches plutoniques renfermant des fragments du même calcaire; il est donc probable que ces trois roches proviennent

(1) Vedi la nota a pag. 12.

toutes de la même région. Or bene, questa mia previsione io la vedeva, non senza mia grande sorpresa, pienamente avverata in quantochè, sul poggio di S.ta Margherita rinvenni e le brecciole ed i graniti, e tutte le varietà dei nostri calcari, ma specialmente quella metamorfosata dal serpentino cioè resa scleiosa, tinta in verde e spalmata da quella stessa sostanza che osservata sui massi dei nostri conglomerati mi faceva dire che erano ..... *pénétrés par des infiltrations serpentineuses.*

La serie di campioni, portati a Torino dall'alta valle della Staffora, confermarono appieno l'analogia che aveva trovato esservi fra essi ed alcune delle roccie dei nostri conglomerati; per non poche di esse, ma particolarmente per i calcari, l'analogia diventa assoluta identità: al punto che, se i diversi campioni non fossero controsegnati, essi potrebbero egualmente considerarsi o come provenienti tutti dalle cave di Superga o come provenienti dalla collina di S.ta Margherita.

Ho già detto che le brecciole porfiriche di rio Montagnola e di S.ta Margherita racchiudono ciottoli di granito di varia grossezza; dirò ora che le stesse brecciole sono collegate coi calcari, trovandosi massi composti di grossi frammenti di calcare, impastati assieme da una roccia molto simile a quelle; si può perciò considerare le brecciole come roccie in posto, in quanto che la loro presenza, o per meglio dire la loro apparizione in questi siti ed in molti altri delle circostanti valli pare essere dovuta all'azione esercitata dal serpentino nell'emergere dal disotto degli strati calcari; come altresì giova credere che al disotto degli strati calcari trovinsi banchi di massi e ciottoli granitici (1). Mi duole che il breve tempo di cui poteva disporre non mi abbia permesso di meglio studiare sul sito questa quistione, la quale d'altronde fu già trattata, or sono parecchi anni, dal Geologo che meglio conosce e descrisse gli Apennini Liguri (2);

---

(1) In alcuni siti della Svizzera vedonsi, come nell'Apennino, massi di granito e breccioie granitiche o porfiriche collegati coi scisti e calcari a fucoidi ossia col *flysch.* Ma v'ha più; ho paragonato i graniti e le brecciole dell'Apennino con alcuni esemplari di roccie provenienti dalla Svizzera ed ho trovato che vi è una notevole analogia tra i primi ed i graniti di Julier, nonchè tra le seconde e certi esemplari la cui scritta porta *ciment du conglomérat à blocs de granite, flysch.* Habkernthal. Locchè ci fa credere essere non solo probabile che nell'Apennino, al disotto dei calcari a fucoidi, vi siano strati di conglomerato della stessa natura e della stessa epoca di quelli di alcune regioni della Svizzera, ma altresì che i massi dei conglomerati apenninici siano, per natura mineralogica, identici a quelli che trovansi nella celebre località di Habkeren (V. in fine la nota D).

(2) Il PARETO parlando delle breccie e dei graniti degli Apennini Liguri (vedi *Descrizione di Genova e del Genovesato*, Vol. I, pag. 132), dice: « Ma il fenomeno più notevole che accompagna queste serpentine che sono all'origine della Sturla, e quelle di S. Stefano d'Aveto, di Arpe piana,

per ora basta a me poter ripetere ciò che già prima ho annunziato, essere cioè alcuni degli elementi dei conglomerati *inferiori* della nostra collina provenuti dai monti che circondano il Penice.

Nel discendere, partendo da Varzi, la valle della Staffora, lasciai dietro di me, dopo breve tratto di strada, i calcari a fucoidi, e dopo di aver camminato buona pezza sopra arenarie, marne ed argille fissili nelle quali trovai la *Ptichina biplicata*, la *Operculina complanata*, la *Lucina*

---

di Rovegno sul versante N., si è la grandissima quantità di breccie ed aggregati che per così dire avviluppano e fasciano in alcuni punti questa serpentina medesima. Tali breccie sono composte di cogoli mediocremente rotondati delle roccie molteplici, che si trovavano sul passaggio della serpentina al momento del suo trabocco, e delle quali essa portò seco i numerosi rottami, legandoli tra loro della propria pasta o indurendo e mutando quasi in diaspro o in un'argilla assai dura quella melma o quella riunione di particelle più attenuate che si interponevano fra i pezzi più grossi, e che quasi di cemento a loro dovevano servire. Tra questi rottami vi sono molte calcaree le quali, diventate e compattissime e qualche poco silicee, sovente hanno preso una tinta verde chiara, e le parti che le collegano, quando non siano di serpentina, della qual roccia nelle breccie esistono pure delle parti ben determinate, sono di una specie di scisto rosso bruno diasproide; a Rovegno alcuni cristalli di felspato roseo o carnicino pur vi si trovano, e questi in pari modo hanno apparenza di essere stati staccati da roccie preesistenti e non di essersi formati in mezzo alla pasta della breccia medesima: in questo luogo detto di Rovegno in val di Trebbia, la breccia è accompagnata dal diaspro, e la serpentina che l'ha generata ha un aspetto nero compatto e contiene della diallagia.

Ma quello che rende più interessante ancora molte delle località dell'Apennino nostro in cui si trovano delle serpentine, si è il presentarsi presso di loro un fatto, che riprodottosi in epoca più recente su grandissima scala, intorno alle alte e grandi catene di montagne, tanto ha esercitato la fervida immaginazione de' Geologi a ricercare la probabile cagione che l'abbia prodotto; io voglio parlare di massi erratici, cioè della presenza dei grandi o piccoli massi di roccie di una data natura, delle quali, nella regione ove si incontrano questi viaggiatori, non v'è indizio alcuno apparente che esistano *in situ* montagne o masse grandiose da cui sono state staccate: anco dunque le nostre montagne hanno i loro massi erratici, ma tutto indica che sono di diversa origine, siccome di epoca diversa da quelli per esempio che sono ai piedi delle Alpi in molti punti della gran valle svizzera, che sta tra quei monti e la catena del Giura, diversi da quelli che sul versante italiano delle medesime Alpi si trovano accumulati, e ad altezze considerabili, allo sbocco delle principali valli che scendono da quei monti, come presso il lago di Como, sui colli della Brianza, ecc. Anco i nostri massi dell'Apennino sono, come molti di quelli delle Alpi, di granito, e noi non abbiamo granito in posto più a levante di Albissola, nè la disposizione dei monti può permettere che si suppongano venuti e staccati dai piccoli lembi che trovansi presso Savona, e portati da forze superficiali ad altezze tre o quattro volte maggiori di quelle che hanno i monti dai quali si vorrebbero far provenire; nè per altra parte i massi dell'Apennino somigliano, quanto alla qualità del granito, a quelli più generalmente sparsi nelle Alpi, onde nè anche da queste per nessuna maniera può immaginarsi che siano provenuti. La sola spiegazione probabile di tal fenomeno si è, che al disotto delle formazioni sedimentose della Liguria orientale, esistano non visibili, delle grandi masse di quel peculiare granito di cui sono generalmente composti i massi erratici della Liguria, e che questi all'epoca dell'uscita della serpentina sieno da lei stati portati in alto, come perfettamente lo fa credere la loro posizione sempre legata colla serpentina che spesso gli avviluppa,

Taurinensis, ecc., fossili caratteristici delli strati miocenici della nostra collina, incontrai a Cuminello, subordinato a tali argille fissili, un potentissimo strato di conglomerato, il quale attraversa la valle discendendo dal castello di Pozzuolo del Groppo. Questo strato, composto di un'alternanza di banchi di pudinga e di banchi di ghiaia e di sabbia, ha forse la grossezza di 100 metri, e richiama alla mente, per la natura mineralogica, il colore e la grossezza degli elementi, l'aspetto dei conglomerati della collina di Torino. Dissi per la natura mineralogica, poichè abbondantissimi vi sono i calcari a fucoidi, li diaspri, li serpentini, ecc.

Estensione dei conglomerati in Piemonte.

Il punto più occidentale dell'Apennino in cui io abbia visto potenti conglomerati con grossi massi trovasi tra Ceva e Millesimo: partendo da questo punto e marciando verso levante si rivedono a Dego, Piana, Spigno, Sassello, Morncse, Voltaggio, Casella, Crocc-Fieschi ed in parecchi altri siti delle valli del Currone e della Staffora. Questi punti descrivono un arco diretto da ponente a levante e levante-settentrione, e direbbesi che essi segnano il perimetro dell'Adriatico all'epoca miocena se non fosse dimostrato e patente che a Cadibona e Sassello vi era uno stretto per cui l'Adriatico comunicava col Mediterraneo, e se i conglomerati di Casella e Croce-Fieschi da una parte, e quelli di Portofino dall'altra non rendessero probabile l'esistenza di un secondo stretto in quei siti (1).

Li strati terziarii dell'Apennino, epperciò anche i conglomerati, hanno sul versante dell'Adriatico la loro pendenza generale verso il N. ed il

---

e l'essere dessi ordinariamente riuniti alle breccie, la formazione delle quali alla medesima roccia dobbiamo attribuire.

Che questa particolare specie di granito col felspato ordinariamente color di rosa o carnicino, colla mica di un aspetto brillantissimo nero, di cui sono formati i massi erratici della Liguria, esista realmente al disotto delle formazioni secondarie di questa regione, ne è anche una prova un certo banco frammentario trovato fra gli strati delle argille e della calcarea a fucoidi del macigno nelle vicinanze di Borgo-Ratto nel Vogherese, il quale banco è tutto composto di rottami che si vedono venuti poco da lungi, perchè quasi angolari di un granito assolutamente identico a quello dei massi erratici, e di questo banco ve ne sono altri esempi verso le valli della Trebbia e della Nura; regioni nelle quali principalmente è meno raro il fenomeno de' massi erratici, che noi collo STUDER chiameremo secondarii, perchè nell'epoca dell'apparizione della serpentina devono essere venuti alla superficie, mentre quelli del piede delle Alpi in un'epoca più recente sono stati portati o dalle correnti o dai ghiacciai nel posto in cui ora si trovano ».

(1) V. PARETO loc. cit.

N. O.; ora siccome i conglomerati che da Moncalieri si estendono a Superga e ad Albugnano hanno, sul versante che guarda l'Apennino, la loro pendenza fra S. E. e S. O., pare si dovrebbe conchiudere che i conglomerati dell'Apennino e quelli della nostra collina non sono che affioramenti delli stessi strati, od in altri termini che vi è continuità di conglomerati fra i due punti. Questa continuità è più che probabile esista fra i nostri conglomerati inferiori (Superga, rio Dora, ecc.) e quelli di Pozzuolo del Groppo, poichè noi abbiamo infatti visto che ambedue sono in parte composti delli stessi elementi. È dunque naturale ammettere che da Pozzuolo del Groppo a Superga vi ha un letto continuo di conglomerato; in caso contrario converrebbe supporre che parecchi degli elementi del nostro conglomerato sono partiti di balzo dagli Apennini per venir a cadere come bombe presso Superga. I fossili trovati (la *Ptichina biplicata*, la *Operculina complanata*, la *Lucina Taurinensis*) in strati contigui ai conglomerati di Pozzuolo del Groppo sono un argomento di più per provare l'intima relazione che vi è fra tali conglomerati e quelli della nostra collina.

Ma noi abbiamo veduto che fra i conglomerati di Pozzuolo del Groppo, di Croce-Fieschi, ecc. posti sulla destra, e quelli di Mornese, Lerma, ecc. posti sulla sinistra della Scrivia, vi è una differenza di qualche rilievo consistente in ciò che nei primi trovansi frequenti calcari a fucoidi, diaspri ed altre varietà di roccie che mancano nei secondi; ora se ben riflettiamo a quanto abbiamo detto sulla analoga differenza che vi è fra i conglomerati inferiori e superiori della collina, parrà naturale il conchiudere che se i nostri conglomerati inferiori concordano per la natura dei loro elementi con quelli di Pozzuolo del Groppo, di Croce-Fieschi, ecc. posti sulla destra della Scrivia, i superiori concordano per le stesse ragioni con quelli di Mornese, Lerma, Belforte, ecc. posti sulla sinistra. V' ha più: noi abbiamo detto che la maggior copia dei fossili trovati nella nostra collina proviene da strati di sabbia, ghiaia e ciottoli subordinati o soprapposti al conglomerato superiore, conglomerato che potrebbesi chiamare serpentinoso per eccellenza. Ora è a notarsi che la massima quantità dei fossili mioceni trovati sinora sull'Apennino proviene dalle località poste a sinistra della Scrivia e da strati di sabbia, ghiaia e ciottoli contigui al conglomerato privo di calcari a fucoidi, od in altri termini al conglomerato serpentinoso. V' ha più ancora, alle sabbie e ghiaie fossilifere della collina di Torino sovrappongonsi enormi strati di argilla sfogliata, di marna

cinerea, ecc. e quindi le marne, le argille e le sabbie del pliocene; lo stesso succede nella parte degli Apennini sovra citata (V. la fig. 5). Ecco infine un fatto che viene altresì a prova di quanto diciamo. Se noi partiamo da Stradella e veniamo a Bra passando per Broni, Casteggio, Voghera, Tortona, Alice d'Acqui, Nizza, Guarene, ecc. noi troviamo una zona di gessi (orizzonte con cui termina il miocene superiore) la quale descrive un arco concentrico, ma di minor raggio, a quello dei conglomerati miocenici. Ora l'affioramento di queste masse gessose si ritrova sulle nostre colline e sullo stesso orizzonte a Moncalvo, Montiglio, Murisengo, Casale, Castelnuovo d'Asti, Moncucco ecc.

Tali sono li argomenti che militano in favore della continuità delli strati di conglomerato, li affioramenti dei quali noi troviamo e sulla collina e sull'Apennino. Ora ragion vuole che facciamo parola dell'argomento contrario.

Li strati di ghiaia e sabbia sovrapposti ai conglomerati dell'Apennino contengono a Mornese, Belforte, Cassinelle, Sassello, Dego, Carcare, ecc., oltre ad una grande quantità di fossili identici a quelli della nostra collina, un certo numero di molluschi e di polipai con forme particolari al tipo eocenico e di più contengono abbondantissimi nummuliti, circostanza che loro valse per parte di alcuni Geologi l'appellativo di nummulitici.

L'argomento dedotto dalla presenza di tali fossili nelli strati che accompagnano i conglomerati dell'Apennino e dall'assenza di essi da quelli della nostra collina è tale da distruggere le ragioni da noi addotte in favore della continuità di quei due conglomerati? Noi non vogliamo per ora entrare in tale discussione, ed amiamo meglio ammettere che ulteriori e più precise osservazioni richiedonsi, per poter bene coordinare fra loro tutti i conglomerati di cui si è fatto parola, quelle che ora possediamo essendo insufficienti all'uopo. Tuttavia abbiamo voluto esporre in proposito alcune idee, forse affatto insignificanti, tendenti però allo scopo propostoci di mettere in rilievo l'importanza dei conglomerati miocenici (1), e qui noteremo che la superficie del quadrilatero avente per vertici i punti nei quali esistono potenti conglomerati, cioè Superga, Millesimo, Portofino, e Pozzuolo del Groppo è di circa 6000 chilometri quadrati. L'estensione e la potenza di tali conglomerati denota all'epoca del miocene l'azione di

(1) Vedi in fine la nota A.

fenomeni che cessarono quasi interamente, e per lungo tempo, di operare (1), essendo certo che conglomerati, in qualche modo paragonabili a quelli, non incontransi più nè nel mioceno superiore, nè nel pliocene, nè nel pleistoceno e solo ricompaiono nell'epoca *erratico-diluviale.*

Cenni sul trasporto degli elementi che compongono i conglomerati della collina di Torino e dell'Apennino.

Considerando gli elementi che compongono i conglomerati della collina di Torino dal lato della loro provenienza, noi possiamo dividerli in due grandi categorie, l'una delle quali comprende quelli che vennero dalle Alpi, e l'altra quelli che vennero dall'Apennino.

Possono in special modo dirsi originarii delle Alpi i protogini; le dioriti, alcune delle quali sono identiche a quelle di Ivrea, della Valle-Sesia e dei dintorni di Vinadio, ed altre a quelle della valle di Susa; li porfidi quarziferi, la madre roccia dei quali trovasi a Masserano, Currino, Sostegno, Orta, Varese, ecc.; il granito con feldspato rosso, che io citai al N.° 6.° (ved. pag. 10), il quale ha grandissima analogia con quello che trovasi in posto a Valperga nel Canavese, e finalmente i ciottoli calcarei trovati dal sig. A. Sismonda nei conglomerati di Lavriano, ciottoli che provengono da Gozzano ed Alzo sul lago di Orta (2).

La quasi totalità dei massi e ciottoli calcari è per contro originaria di quella parte dell'Apennino che a destra della Scrivia si protende nel Parmigiano, nel Modenese, nel Bolognese ed oltre (3). Essi appartengono al calcare così detto a fucoidi (4), e, fra le tante varietà di struttura

---

(1) Vedi in fine la nota B.

(2) Vi ha assoluta identità fra tali ciottoli ed il calcare che si trova sulle sponde del lago di Orta; essi d'altronde racchiudono lo *Spirifer rostratus* e parecchie specie di *Terebratule*, fra le quali la *variabilis* e la *cornuta*, fossili che frequentissimi incontransi nel calcare di Gozzano. V. Rendiconto della seduta 3 giugno 1860 della R. Accademia delle Scienze; Gazzetta ufficiale del Regno, N.° 135, anno 1860.

(3) I calcari ed i diaspri dei conglomerati di Superga sono in tutto simili anche a quelli della Porretta, del colle Serrabottini, di monte Catini e di rocca Tederighi.

(4) Sulle colline del Monferrato, le quali fanno seguito alla collina detta di Torino o di Superga, trovansi, e particolarmente nei dintorni di Casale, a Montesacco, Coniolo, S. Giorgio, Boglio, Torello, Quarti, Montemagno, Mirabello, Ozzano, ecc. potenti strati di un calcare terroso con fucoidi. Più presso a Superga, vicino a Gassino, vi sono altresì strati di un calcare con struttura concrezionata ed a forma di pudinga che contiene nummuliti. Parrebbe naturale il credere che i ciottoli calcarei dei nostri conglomerati provengano da quelli strati; debbo però dire che non mai

e di tinta che presentano, sono degne di speciale osservazione la già citata pseudo-breccia con infiltrazioni bituminose ed una breccia con cemento rosso, capace di prendere una bellissima pulitura; roccie affatto identiche trovansi in posto nei monti di Bobbio. Traggono la loro origine dalla stessa parte degli Apennini le breeciole porfiriche e parecchi dei graniti, nonchè le arenarie con combustibili fossili, e molti dei diaspri; consimili roccie vedonsi subordinate ai calcari a fucoidi, ed a contatto coi serpentini, nelle valli della Staffora, della Trebbia, ecc.

Tutti questi ciottoli e massi alpini ed apenninici hanno dovuto percorrere distanze di 50, 60, 80, 100 e più chilometri per venirsi a trovare insieme nei paraggi in cui depositavansi li strati che poscia, elevandosi, formarono la nostra collina.

Una cosa parmi degna di seria considerazione ed è, che nei conglomerati, e particolarmente negli inferiori, sono rare quelle roccie che trovansi comunissime nelle alte Alpi, voglio dire i *gneiss*, i *micascisti*, i *scisti argillosi*, i *calcari saccaroidi*, ecc., e sono al contrario meno rari i *porfidi quarziferi*, il *granito con feldspato rosso*, le *dioriti*, alcune varietà di calcari, quello di Gozzano, per esempio, roccie che trovansi nella poco elevata zona che forma l'ultimo gradino delle Alpi verso il Piemonte, e che, a partire da Pinerolo, per Trana, Avigliana, Lanzo, Valperga, Ivrea, Biella, Orta, si estende sino al Lago Maggiore e più oltre verso il Nord. Pare finalmente che, massime nei conglomerati inferiori, rari siano gli elementi provenienti dalle Alpi, ed in grande maggioranza all' incontro quelli venuti dall'Apennino.

Esternando le mie idee sulla provenienza di alcuni degli elementi che compongono i conglomerati della collina di Torino, io mi limitai a far parola delle roccie di più marcata fisionomia e tralasciai quelle che a motivo della loro abbondanza in tutti i nostri monti non potevano essere prese ad esame per determinarne la provenienza. Così non parlai dei serpentini poichè essi incontransi frequentissimi su tutto il grande arco di montagne che circonda il Piemonte, a partire dalla punta del Gries fino ai monti di Bobbio.

---

mi occorse di trovare nei conglomerati di Superga ciottoli che presentassero qualche analogia coi calcari in posto di Casale e di Gassino. Vi ha però nella valle di S. Bartolomeo presso Alessandria e più particolarmente alla cascina *la Milana* un calcare che, per i suoi caratteri mineralogici, molto rassomiglia a quello dei nostri conglomerati.

Tuttavia è evidente che buona parte dei serpentini dei conglomerati provengano altresì dagli Apennini. E prima di tutto ciò è facile ad ammettersi per i serpentini dei conglomerati inferiori ove essi sono accompagnati dai calcari, dalle brecciole porfiriche e da parecchie altre roccie dell'Apennino. Nei conglomerati superiori poi, divenendo rari i calcari e le brecciole porfiriche, la pressochè totalità degli elementi consta di serpentini; ora se questi serpentini provenissero tutti esclusivamente dalle Alpi, sarebbero necessariamente seco loro venuti ed ora loro sarebbero compagni li gneiss, li scisti micacei e tante altre roccie cristalline comuni, anzi, più che lo stesso serpentino, comunissime nelle Alpi: ma queste roccie sono molto rare in tali conglomerati e a ciò devesi la differenza di colore già da noi detto esservi fra un mucchio di pietre prese a caso nei conglomerati della collina ed un mucchio di ciottoli del *diluvium*.

Io considererò adunque i serpentini dei nostri conglomerati come provenienti in parte dalle Alpi ed in gran parte dall'Apennino, e lo stesso farò per quelle altre roccie le quali sprovviste di caratteri esteriori rilevanti e tali da differenziarle facilmente dalle altre, sono per altra parte abbondanti in tutte le catene di monti in cui ai terreni sedimentarii vanno unite roccie eruttive e metamorfiche.

Da quanto venimmo esponendo devesi conchiudere che all'epoca miocena, nei siti nei quali ora sorge la collina di Torino, allora coperti dal mare, erano trasportate da diversi e lontani punti quantità grandissime di ciottoli e massi giganteschi; e se noi bene ricordiamo ciò che dissimo sulla assenza di fossili nei conglomerati, dovremo altresì ammettere che pel tempo per cui operavasi questo trasporto di ciottoli e di massi non vivevano in quei paraggi nè i molluschi, nè quei tanti altri animali che ordinariamente popolano il fondo del mare.

È qui il luogo di chiedersi di quale veicolo la natura siasi servita per trasportare nel mare mioceno e lontano dalle sue sponde sì grande quantità di materiali svelti alle Alpi ed all'Apennino. I Geologi, che per spiegare il trasporto dei recenti massi erratici ricorrono all'azione di smisurate correnti, hanno almeno in loro favore e la forza che l'acqua acquistava pel fatto stesso che scendeva in massa dai monti incassata fra le strette pareti delle valli, e quella che le dava la melma in essa disciolta. Ma in un mare aperto, l'idea di una corrente d'acqua capace di strascinare per decine di chilometri, sul fondo del mare, massi di parecchi metri cubi, non solo non può sostenersi, ma direi quasi non può concepirsi.

Il mare acquista una forza straordinaria quando, nelle tempeste e nelle alte maree irrompe contro scogliere tagliate a picco; in tali circostanze le onde staccano, spostano, sollevano, è vero, grossissimi massi, tanto più se la scogliera è formata di strati di diversa resistenza; ma ciò succede entro i limiti di una stretta zona lungo le sponde; al largo i marosi perdono di molto la loro forza, massime se il mare è profondo. Noi non potremo dunque attribuire nè all'azione delle correnti marine, nè a quella delle onde in tempo di burrasca o di grande marea il trasporto dei massi che compongono i conglomerati miocenici. Quand'anche questi massi non dall'Apennino Ligure, dalle Alpi marittime o da altri lontani siti, ma provenissero dalle più vicine montagne, come per esempio dalla catena del Musinè, non potrebbesi, per spiegare il loro trasporto, ragionevolmente ricorrere all'opera del mare stesso. Le acque dell' Oceano disperdono e depositano a considerevoli distanze in alto mare la melma che i grandi fiumi loro arrecano; trasportano e livellano lungo le coste la ghiaia ed i ciottoli che i torrenti trascinano alle loro foci, ma non trasportano massi se non nel caso in cui questi, racchiusi nelle zattere di ghiaccio, galleggiano con esse. Un deposito di massi trasportati dalle zattere galleggianti di ghiaccio sta oggidì formandosi sulle coste dell'Atlantico poste ai confini polari delle zone temperate, ed è a questo genere di fenomeno che parmi potersi attribuire il trasporto dei massi che compongono i potenti conglomerati del mioceno (1).

Ma, mi si dirà, nei conglomerati del mioceno trovansi fossili, e fra questi fossili vi sono a dovizia *coni*, *cipree*, *ancillarie*, *olive*, *fasciolarie*, *pleurotomi*, *ecc.*; ora come potete voi supporre che animali di tal genere abbiano vissuto in acque nelle quali operavasi la fusione di zattere di ghiaccio tali da portare con sè massi di parecchie tonnellate? A questa difficoltà io ho preventivamente risposto notando che le località in cui i conglomerati sono molto potenti e contengono massi, non vi sono fossili. Che se a questa regola vi ha qualche eccezione, non è egli possibile

(1) Quest'autunno avendo avuto occasione di leggere le Memorie geologiche del VENTURI, distinto Ingegnere idraulico ed Autore di molti e pregiati lavori scientifici e storici, fui lieto di trovarvi i pensieri di un uomo che strenuamente combattè contro la teorica dei cataclismi e seppe adoperare le conoscenze che si possedono sul modo in cui oggidì operano ed agiscono certi fenomeni naturali per spiegare i fatti geologici. Nella sua Memoria *Intorno ad alcuni fenomeni geologici* letta nell'Instituto di Scienze ed Arti in Milano nel luglio del 1816 (Giornale di fisica ecc. compilato dal BRUGNATELLI. Tomo X. Pavia, 1817), discorrendo dei massi erratici, egli, premesso che il mare una volta si

spiegarla col supporre che gli animali, i quali ora trovansi fossili nei conglomerati, non sono venuti ad abitare in mezzo ai massi se non molto tempo dopo il deposito di questi e quando la temperatura, resa più mite, permetteva loro di vivere in quei paraggi nei quali prima potevano galleggiare zattere di ghiaccio?

Proviamoci per un momento a fare intervenire, nel trasporto dei massi miocenici, anche l'azione diretta dei ghiacciai terrestri e vediamo, per esempio, cosa succederebbe se il mare Adriatico venisse a rioccupare il terreno che occupò già nell'epoca pliocenica. Noi supporremo perciò che la valle del Po si abbassi di quanto in essa si elevano gli strati pliocenici al disopra del mare attuale, cioè di 250 a 300 metri, e supporremo altresì, se si vuole, che detto abbassamento si operi lentissimamente.

Ciò accadendo, le acque dell'Adriatico rimonterebbero la valle del Po a misura che il suolo di essa si abbasserebbe e finirebbero per giungere alle antiche morene di Ivrea, le quali si inoltrano nella pianura di più di 20 chilometri; qui le acque dell'Adriatico si troverebbero in parte arrestate da alte colline composte di sabbia, melma e massi, la distruzione delle quali ora lenta nella bonaccia, ora rapida nelle tempeste, progredirebbe sempre a motivo della poca resistenza che, per sua natura, può opporre alle acque del mare il terreno erratico. Si formerebbe in tal modo in mezzo al braccio di mare che occuperebbe la valle del Po un deposito di ghiaia, ciottoli e massi molto simile a quello dei conglomerati mioceni, e gli animali che ora abitano nell'Adriatico verrebbero a vivere frammezzo ai massi della morena, lasciando accanto ad essi le loro spoglie. E qui

---

elevava sino ai piedi dei ghiacciai alpini, trova naturale che da questi siensi staccate grandi masse di ghiaccio, le quali, galleggiando sulle acque marine, abbiano trasportato al largo i trovanti di cui erano caricate: ecco le sue parole che a me pare meritino di essere citate per l'epoca in cui furono scritte: « Ho esaminato più volte i ghiacciai e sembrommi sin d'allora che la prima origine » e la cagion principale del trasporto di una buona parte dei sassi di formazione primitiva debba » ripetersi appunto da tali masse di ghiaccio che anche anticamente strisciando giù dalle valli e » dal pendio degli alti monti prima di giungere al più basso termine di esse valli trovarono il mare » d'allora e su d'esso andarono nuotando all'arbitrio de' venti e del flusso ordinario, portando » lungi con seco di quei sassi medesimi, che oggi recano giù dalle superiori montagne. Il sig. VREDE » ed il sig. HALL (Edimbourgh's Transactions 1813) mi hanno prevenuto nel pubblicar quest'idea; » con tutto ciò io credo di dover ritornarvi sopra, per metterla in sempre maggior lume, e per » liberarla dalle obbiezioni, che un egregio scrittore preoccupato in favore dei furiosi cataclismi » ha stimato di poter con ragione eccitarle contro ». Egli ricorre poi alla stessa azione delle zattere galleggianti di ghiaccio per spiegare il trasporto degli elementi costituenti i conglomerati miocenici che nella provincia di Reggio (Modena) incontransi sui fianchi dell'Apennino (V. VENTURI *Storia di Scandiano*; Modena, 1829).

giova notare, che se l'abbassamento supposto della valle del Po si estendesse su parte dell'Europa, e particolarmente della settentrionale, basterebbe ciò per elevare la temperatura media del nostro clima e per sostituire alla Fauna che ora vive nell'Adriatico, e che verrebbe ad abitare la nostra valle una Fauna con aspetto e caratteri più meridionali. Supponiamo ora che dopo un certo tempo la valle del Po si rialzi di quanto, e se si vuole, del doppio e del triplo di quanto l'abbiamo abbassata, e chiediamoci cosa direbbe il Geologo il quale, dopo trascorso il numero di secoli necessario alla fossilizzazione delle spoglie marine, venisse a studiare gli strati formatisi nel sito in cui vi sono le morene di Ivrea e di Rivoli.

In mezzo ad enormi strati di ciottoli, di ghiaia e di massi giganteschi egli incontrerà fossili appartenenti a specie che più non vivranno nel clima cui sarà allora sottoposto il Piemonte, e gli sarà certamente difficile indovinare in qual modo, per esempio, furono trasportati nel mezzo della valle del Po e ad 80 chilometri dal loro punto di partenza i massi di protogina del monte Bianco che ora fanno parte della morena frontale (a Cavaglià), ed accanto ai quali egli incontrerà resti di animali marini.

Un fatto del genere di quello da noi esposto a titolo di semplice ipotesi non può essere accaduto all'epoca miocena? Niuno crediamo vorrà tacciare la nostra supposizione di assolutamente gratuita, poichè essa ha per oggetto una delle eventualità, non direi possibilissima, ma delle più ovvie in geologia.

Un fatto di tal genere spiegherebbe molto bene, conviene ammetterlo, il deposito dei conglomerati dell'Apennino, in proposito dei quali mi si potrebbe dire, è vero, che gli elementi di cui sono composti non provengono da punti molto distanti e che per conseguenza non è necessario far intervenire l'azione diretta od indiretta del ghiaccio per spiegarne il trasporto. A questa obbiezione io risponderò che ignoro affatto a quale distanza precisa sono posti i punti da cui partirono tali elementi, non avendo io potuto studiare i conglomerati dell'Apennino colla stessa diligenza e riescita colla quale studiai quelli della collina. Egli è però fuori dubbio che la grande zona dei conglomerati dell'Apennino dista dal giogo stesso della catena ossia dal sito da cui probabilmente provenne la maggior parte degli elementi che la compongono, di quanto distino dalle prime giogaie delle Alpi le morene ed il *diluvium*. Ora siccome niun Geologo pensò mai ad attribuire il deposito del *diluvium* e dell'*erratico* alla debole azione di torrenti come quelli che ora discendono dalle Alpi, ma si dovette

ricorrere, per spiegarlo, a cause straordinarie, così niuno vorrà credere che conglomerati, la cui potenza eccede sovente i 100 metri e contenenti a dovizia massi angolari di parecchi metri di diametro siano stati deposti da torrenti simili in forza a quelli di oggidì. Converrà perciò, anche per tali conglomerati ch'io chiamerò col nome di *diluvium* e di *erratico* del mioceno (poichè e per la loro potenza e pel volume di molti dei loro elementi e per tanti altri caratteri fra i quali quello di essere privi di fossili, essi sono paragonabili al *diluvium* ed all'*erratico* moderni) ricorrere ad agenti straordinarii, ed ecco che noi ricadiamo, salvo il caso che si scopra altro potentissimo agente di trasporto, o sull'azione delle correnti o su quella del ghiaccio. Gli effetti di tali agenti furono già discussi e sono oggidì molto noti.

Non terminerò queste brevi osservazioni sul trasporto dei massi erratici del mioceno senza notare che nei nostri conglomerati marini si trovano ciottoli che possono considerarsi come rigati e che vi si trovano molti massi e ciottoli, la forma dei quali indica sufficientemente che non furono rotolati. Certamente si avranno a vincere moltissime difficoltà per riescire ad una diretta dimostrazione dell'origine glaciale di quei conglomerati, tanto più che sinora poco noti sono i caratteri dei depositi che le zattere galleggianti di ghiaccio stanno oggidì operando nei mari australi e boreali.

In ogni caso io confido di aver raggiunto lo scopo propostomi nel pubblicare questo mio scritto (1), di segnalare cioè la importanza grandissima dei nostri conglomerati mioceni. Amo credere che otterrò di invogliare geologi di maggior vaglia a riprendere lo studio di tali conglomerati per tanti titoli, ma particolarmente per la loro estensione, interessantissimi.

È in ultimo probabile che nuove ed accurate osservazioni sui *terreni erratici antichi*, e la scoperta di nuovi fatti ad essi relativi ci conducano tosto o tardi a convincerci che *in tutte le grandi epoche geologiche vi furono ghiacciai e che essi sono sempre stati il più potente agente naturale di trasporto dei grossi massi.*

---

(1) La maggior parte delle cose contenute in questo lavoro ed in particolare quelle relative al trasporto dei massi del mioceno furono scritte nel 1848 e dovevano prender posto nella Memoria da me pubblicata (*Essai sur les terrains superficiels de la vallée du Pô etc.*) in comune col sig. Prof. Martins nel 1850. Si credette inopportuno muovere in quell'epoca tale questione; la notizia stampata nel 1855 dal sig. Prof. Ramsay e la scoperta del luogo di origine dei calcari dei nostri conglomerati mi invogliarono a farle ora di pubblica ragione.

Massi superficiali della collina di Torino.

Sulla collina di Torino, oltre a quelli che fanno ancora parte dei conglomerati, si trovano, ed in gran numero, massi che giacciono superficialmente sul suolo; parecchi di tali massi vennero già da noi considerati come erratici nella Memoria intitolata: *Essai sur les terrains superficiels de la vallée du Pô.*

Dopo la pubblicazione di tale Memoria io non omisi tuttavia di rivolgere la mia attenzione a tali massi, tutte le volte che le mie occupazioni me lo permisero, ed oggidì, in seguito a nuove osservazioni ed alla scoperta di nuovi fatti, sono indotto a credere che essi sono residui di banchi di conglomerato stati distrutti ed esportati dalle acque.

Nell'epoca in cui preparava gli elementi per la pubblicazione della Memoria qui sopra citata, avendo osservato che la natura mineralogica dei trovanti giacenti su quella parte della collina di Torino che sta di faccia all'imboccatura della valle di Susa è analoga, anzi, in buona parte identica ai trovanti che posano sulle morene di Rivoli e di Caselette, ed avendo inoltre tenuto conto della brevissima distanza che, in questo punto, separa la collina dalle morene di Rivoli, distanza di molto inferiore a quella che separa il Giura dall'opposto versante delle Alpi, era naturale che io considerassi tali trovanti come erratici, tanto più che essi non sono punto sempre collegati coi conglomerati, anzi in molti casi lontani dagli affioramenti di questi.

Bramando però riprendere ad esame gli argomenti che militar potessero contro l'opinione da noi emessa riguardo a tali trovanti, e specialmente di estendere le mie osservazioni sopra quella parte della collina di Torino posta di rimpetto alla imboccatura della valle di Aosta, io ragionai nel seguente modo. Se ho trovati sui poggi che fronteggiano l'imboccatura della valle di Susa massi superficiali di natura analoga a quelli delle morene di Rivoli e se quei massi vi furono portati dall'antico ghiacciaio della valle di Susa dovrò necessariamente trovare sulle alture poste in faccia all'imboccatura della valle di Aosta, massi per natura identici a quelli delle morene di Ivrea. Ma recatomi sui poggi di San Raffaele o meglio sulla collina detta Costa del Vay, invece di incontrarvi la protogina del monte Bianco, i scisti micacei e granatiferi della valle di Aosta, vi trovai bensì massi giganteschi di un granito il quale ha stretta

analogia con quello che giace in posto nelle Alpi, a Valperga, ma non vidi alcun masso, per natura mineralogica, simile a quelli della Serra e delle altre morene di Ivrea. Accertatomi che parecchi dei massi osservati sulla Costa del Vay trovansi ancora incassati in strati marini (benchè la maggior parte giaccia superficialmente sul suolo) mi accorsi che l'argomento tratto dalla natura mineralogica dei massi, argomento di cui aveva tenuto gran contò, e che mi aveva deciso a considerare come erratici i massi superficiali giacenti su quella parte della nostra collina che è prospiciente alla apertura della valle di Susa, mi accorsi, dico, che tale argomento, militando contro il mio modo di vedere quando si trattava di portare giudizio sui massi superficiali giacenti su quella parte della collina che fronteggia la valle di Aosta, non era decisivo.

In quell'epoca io riferiva tutti i conglomerati della collina ad un solo orizzonte e perciò mi stupiva che in alcuni punti essi fossero ricchi di ciottoli calcari, ed in altri poverissimi. Vidi in seguito che i conglomerati possono, come già ho detto nel decorso di questa Memoria, dividersi in due grandi orizzonti separati fra di loro da una potente massa di argilla sfogliata con tinte cineree e che il conglomerato superiore è quasi interamente composto di elementi serpentinosi (serpentino, eufotidi, dioriti con anfibola fibrosa, anfiboliti, ecc.). Questo fatto mi spiegò il perchè la maggior parte dei massi superficiali di alcune regioni della collina sono di natura serpentinosa, e la scoperta posteriormente fatta di un affioramento di questo conglomerato superiore, a poche centinaia di metri di distanza dal masso da me raffigurato nella citata Memoria (Bulletin de la Soc. Géolog. de France 2.ª serie, Vol. XI, pag. 583) mi ha poi fatto persuaso che quel masso ha potuto appartenere a tale conglomerato.

Infatti prolungando mentalmente lo strato di conglomerato *d* (fig. 8) in modo che si protenda da destra a sinistra sulla valle, è facile convincersi che, i tre massi *a*, *b*, *c* abbiano potuto essere lasciati nei punti che ora essi occupano quando le acque che erosero li strati, scavando la valle, distrussero sino in *d* lo strato di conglomerato; il masso *a* che ha alla base 16 metri di circonferenza, ed il masso *c* il quale ha più di 3 metri di diametro sono angolosi, mentre il masso *b*, lungo anch'esso circa 3 metri e proveniente probabilmente dallo stesso strato, non ha più angoli ed è interamente arrotondato, contribuendo probabilmente a renderlo tale la posizione che occupa nel letto del torrente. Vedendo adunque che la presenza dei mentovati trovanti può, senza che sia necessario di

Fig. 8. — *Veduta della parte superiore della valle dei Ceppi (collina di Torino), dimostrante la relazione di posizione fra alcuni massi superficiali ed il conglomerato superiore.*

a, masso raffigurato nella Memoria *Essai sur les terrains etc.*
b, masso arrotondato.
c, masso chiamato *pietra alta.*
d, affioramento del conglomerato superiore.
e, rio Tepice o rio Morto.

ricorrere ad altre spiegazioni, naturalmente attribuirsi alla maggior estensione che una volta aveva il non lontano strato di conglomerato *superiore;* vedendo che i massi posti sulle alture di San Raffaele, che fan fronte all'imboccatura della valle d'Aosta, non sono stati trasportati dal ghiacciaio escito da quella valle perchè in essa non esiste o non è noto sinora esistere la roccia di cui sono composti, io inclinerei a considerare tutti indistintamente gli altri trovanti superficiali della collina come residui di conglomerati distrutti ed esportati dalle acque. Tuttavia debbo confessare che in molti siti ove gran quantità di massi superficiali serpentinosi trovansi associati o vicino a potenti masse di *lehm*, la provenienza di tali massi non cessa di parermi problematica, poichè la presenza del *lehm*, che or tutti ammettono essere un prodotto dei ghiacciai, viene in certo qual modo a complicare la questione.

Il *lehm* copre qua e là molti tratti della collina, e se pare meno esteso

di quello che in realtà lo sia, ciò ha luogo perchè esso è ordinariamente coperto da rigogliosa vegetazione. Vedesi tuttavia molto sviluppato a San Vito in faccia al Valentino, sviluppatissimo a Cavoretto, Truffarello, Pecetto, ecc. Io ho messo, debbo dirlo, tutto l' impegno per trovar modo di ragionevolmente considerare questo *lehm* come un deposito locale e prodotto dall' alterarsi e disaggregarsi degli strati che costituiscono la massa della collina e particolarmente delli strati marnosi ed argillosi, ma non potei riescire ad altro che a convincermi del contrario. La collina è composta di un'alternanza molte volte ripetuta di strati di ghiaia, di sabbia, di ciottoli, di argille indurite e di marna, e non mi pare possibile che l'alterazione di tali elementi possa aver dato origine ad una roccia così omogenea per grana, per composizione e per tinta, quale si è il *lehm* in discorso. Persisto perciò a considerarlo come un deposito estraneo alla collina stessa e dovuto agli agenti che produssero l'*erratico* ed il *diluvium*; siccome poi questo *lehm* propriamente detto passa in alcuni siti insensibilmente ad una sabbia finissima grigiastra e bianca, così persisto pure a considerare le dune di Cambiano come parte del *lehm* stesso. Quello che vi ha di singolare si è che questo deposito si eleva, in certi punti, di molto sul livello della valle del Po. Onde se si ammette che fu depositato, non direttamente da ghiaceiai poggianti sulla collina, ma da torrenti che escirono da ghiacciai soffermantisi nella pianura, allora, per rendersi ragione dell'altezza cui oggidì si incontra sulla collina conviene supporre che essa fosse, all'epoca della massima estensione dei ghiacciai alpini, meno elevata di quello lo sia oggidì. L'idea che il suolo di alcune contrade sia stato sottoposto a movimenti (Vedi in fine la nota C) di elevazione posteriormente all'epoca *erratico-diluviale* non è nuova; ammettendola per il Piemonte non solo verremmo a dare un'accettabile spiegazione dell'altezza cui ora troviamo il *lehm* sulla collina di Torino, ma altresì della elevazione cui giunge il livello del *diluvium* (delle terrazze) relativamente ai torrenti che lo hanno sì profondamente solcato e delle enormi erosioni del Tanaro, le quali diedero luogo ai poggi che ora chiamiamo colline dell'Astigiana.

NOTA A.

Se è vero, come a me pare molto probabile, che li conglomerati della collina siano in continuità con quelli dell'Apennino, essi devono attraversare, sotto suolo, tutta la bassa valle del Tanaro (ad una profondità che non è difficile determinare approssimativamente) formando un grande cunicolo i cui fianchi si elevano, da un lato contro l'Apennino e dall'altro contro le colline di Torino e del Monferrato.

La superficie degli affioramenti dei conglomerati essendo, sia sull'Apennino che sulle colline di Torino e del Monferrato, veramente grandissima, ognuno può figurarsi quale enorme quantità di acqua debbasi raccogliere nel fondo di battello formato da tali conglomerati al disotto della bassa valle del Tanaro. Ciò tenderebbe a far credere che forando un pozzo in detta valle fra Asti ed Alessandria, per esempio, si potrebbero ottenere acque che risalgano sul livello del suolo.

NOTA B.

È degna di particolar attenzione la serie di terreni che, a partire dai calcari a fucoidi, ascende sino alle alluvioni moderne. Eccone i tratti più marcati. A questo calcare, la cui massa è enorme, succede una massa, non meno potente, di conglomerati i cui elementi, divenendo mano a mano più piccoli, la fanno passare ad un'alternanza di strati di ciottoli e di ghiaia e finalmente a strati di sabbia più o meno fina, più o meno argillosa. Però, sia negli strati a grossi elementi, sia in quelli di ciottoli, di ghiaia o di sabbia, in tutti indistintamente predomina il serpentino, e tutti hanno perciò un colore verde più o meno intenso.

Alle sabbie serpentinose le quali da se sole costituiscono strati di considerevole grossezza succede una serie potentissima di banchi di una roccia i cui elementi sono tenuissimi; voglio parlare delle argille or più or meno calcaree, ora dure e qualche volta fissili, ora tenere, bianco-cineree, riducentisi in esilissimi frantumi. Nell'Apennino questa zona di argille è molto estesa talchè da essa sovente il paese prende il suo aspetto; sono alte, nude e sfiancate colline sulle quali non si vede macchia alcuna di castagni o di cerri: tristi solitudini con rari e non ombreggiati casolari.

Queste argille sono coperte da altra zona potentissima ora di sabbia ora di marna argillosa o grigia o turchina o gialliccia; è la zona dei gessi, è il termine,

il tetto del mioceno. Estesissima altresì è questa zona la quale corre fra Bra e Stradella da una parte, da Chieri a Valenza dall'altra. Buona parte di questa zona presenta strati di acqua dolce fra i quali debbonsi annoverare i gessi stessi. Infatti, quantunque visti da qualche distanza i gessi di Stradella, di S.ª Agata, di Alice (Acqui), ecc. abbiano la forma di grandi e protuberanti masse, se si guardano da vicino si vedono per lo più disposti in letti regolarissimi, alternanti sovente con marne ed argille; conosciutissime sono le magnifiche impronte vegetali che incontransi nella massa stessa del gesso di Stradella e di altre località. È dunque probabile che questi gessi, nonchè le masse calcaree da cui sono qualche volta accompagnati, debbano la loro origine a sorgenti minerali.

In alcuni siti occorrono altresì nella zona gessifera banchi di ghiaia e di ciottoli, dei quali fo cenno non perchè per la loro potenza od estensione o per la grossezza dei loro elementi meritino speciale attenzione, ma li cito come una eccezione in tanta massa di strati formati di elementi tenuissimi.

Arriviamo ora al plioceno composto di argille, di marne e di strati enormi di sabbia, in altre parole composto esso pure di elementi molto tenui. Il plioceno, per la massima parte marino, è coperto da un altro potente strato di ghiaia, di marna e di argilla di origine fluvio-lacustre in cui incontransi frequenti scheletri di proboscidei e di altri grossi pachidermi. Questi strati sono alla loro volta coperti da un deposito argilloso che presenta alla base sottili banchi di calcare grossolano, verso la parte superiore grosse concrezioni calcaree e ferro pisolitico e che finalmente termina con un'argilla simile al *lehm*.

Però sulla sinistra del Po le argille plioceniche sono per lo più direttamente coperte dal *diluvium*. Generalmente formato di ciottoli rotolati, e molto potente, questo deposito torrenziale occupa in gran parte il sito prima occupato dalle sabbie plioceniche le quali non hanno potuto a meno di essere rimaneggiate, erose, esportate da quei torrenti che furono capaci di rotolare e strascinare sino alla distanza di parecchi chilometri dalle montagne da cui proviene tanta congerie di ciottoli. Non ci stupiremo perciò se rari e ristretti siano i lembi di deposito pliocenico che si vedono al piede delle Alpi. Al *diluvium* vanno unite ed in parte sono sovrapposte le gigantesche morene dei dintorni di Arona, Ivrea, Rivoli, ecc.

Eccoci giunti ad un'altra enorme massa di conglomerati od in altri termini di grossi frammenti provenienti dai monti e dispersi sul suolo a considerevoli distanze dalla madreroccia. Quantunque i conglomerati marini del *mioceno* ed i conglomerati torrenziali e *morenici* del *diluvium* e dell'*erratico* si presentino a noi sotto ben diverso aspetto, tuttavia non è possibile non rivolgere la mente alle relazioni di origine che possono fra essi esistere.

I conglomerati dell'*erratico-diluviale* e quelli del mioceno sono i punti estremi di una non piccola serie di terreni (mioceno superiore, plioceno e post-plioceno) i quali non contengono un solo strato di ciottoli degno di essere paragonato, vuoi per potenza di massa, vuoi per grossezza di elementi, col minimo dei banchi dell'uno o dell'altro dei conglomerati stessi.

Il plioceno poi, in tutti i siti in cui fu osservato, sia al piede delle Alpi, sia

al piede degli Apennini, sempre fu trovato formato di sabbia, di marna e di argilla, talchè si direbbe che, all'epoca in cui fu depositato, non vi erano torrenti che da quelle catene discendessero al mare.

Se dunque è vero che la tenuità degli elementi di cui è composto un terreno indica che durante il deposito di esso certe forze della natura rimasero inattive od in altre parole che non succedettero subitanee rivoluzioni geologiche, il più dichiarato cataclista non potrà a meno di ammettere che per tutto il tempo trascorso fra il deposito del miocene medio e quello dell'erratico-diluviale regnò nella valle Padana la più profonda quiete, quantunque in questo frattempo essa sia stata abitata da quattro diverse e successive faune, quella marina cioè del miocene superiore, quella marina altresì del pliocene, quella terrestre delle alluvioni plioceniche e quella dei depositi post-pliocenici.

Avendo nel decorso di questa Memoria sufficientemente parlato dei conglomerati del miocene, io non terminerò questa nota senza esporre altresì alcune considerazioni sul più recente conglomerato erratico-diluviale e particolarmente sulla posizione del *diluvium* relativamente all'*erratico*. Il *diluvium* è, in Piemonte, subordinato alle morene; per convincersi di questo fatto basta esaminare i tagli di Alpignano, di Pianezza, di Mazzè, di Caluso, di Borgo-Ticino, ecc., in ciascuno dei quali vedonsi assieme l'*erratico* ed il *diluvium*, quello a questo sovrapposto.

Instando sulla sovrapposizione dell'*erratico* al *diluvium* non vorrei se ne arguisse che questi orizzonti siano l'uno dall'altro indipendenti; dirò perciò che in tutti i luoghi in cui, nello stesso taglio, si possono vedere ambedue i depositi, sempre si trova che vi ha passaggio insensibile fra l'uno e l'altro, a segno, per esempio, che a Pianezza, nella parte superiore dello spaccato, s'incontrano, anche frequentemente, ciottoli rigati, ed invano se ne cercano 20 metri più basso ossia nel *diluvium*.

Nell'interno dell'anfiteatro formato dalle morene, od in altri termini, nell'interno del poligono mistilineo tracciato dalle morene laterali e frontali non vi ha, si può dire, *diluvium*; esso al contrario è potentissimo sotto alle morene e particolarmente sotto alle frontali; a partire poi dal piede esterno di queste, il *diluvium* con pendio oltremodo dolce si abbassa, e si inoltra nella pianura sino al Po ed in certi siti, come sarebbe nei dintorni di Torino, anche al di là. I ciottoli di cui è composto si impiccioliscono a misura della loro distanza dalle Alpi, diminuisce la potenza dello strato, ed il *diluvium* terminerebbe in molti luoghi toccando il Po, se il *lehm*, questo terzo e superiore orizzonte del gran deposito *erratico-diluviale*, non venisse a sostituirlo, a prenderne il posto per estendersi molto più lungi ancora.

Il *lehm* è potentissimo alla base esterna delle morene ed al piede delle Alpi, nei punti in cui non vi sono aperture di valli; come il *diluvium*, il *lehm* non è punto separato dall'*erratico*, che anzi al suo punto di partenza, alla sua origine fa corpo con quello; esso copre con strato or più or meno grosso il *diluvium*, col quale altresì fa corpo, e sopravanzandolo in estensione vela, si può dire, tutta la valle del Po. È infatti probabile, come già lo lasciammo presentire, che appartenga al *lehm* quello strato di argilla giallo-rossa, tenacissima quando ammollata dall'acqua,

durissima quando secca, ricca di ferro pisolitico e di concrezioni calcaree (Arignano, Monbello, San Paolo, Pralormo, ecc.) che si incontra discendendo le falde meridionali delle colline del Monferrato e che forma il suolo superficiale dell'Astigiano, dell'Alessandrino, ecc., coprendo ora direttamente le sabbie post-plioceniche, ora lembi di depositi più recenti. Nella valle del Po, come in altre valli non meno importanti per estensione, il *lehm* presenta poi questa singolarità di elevarsi in alcuni siti molto al disopra del livello del *diluvium*.

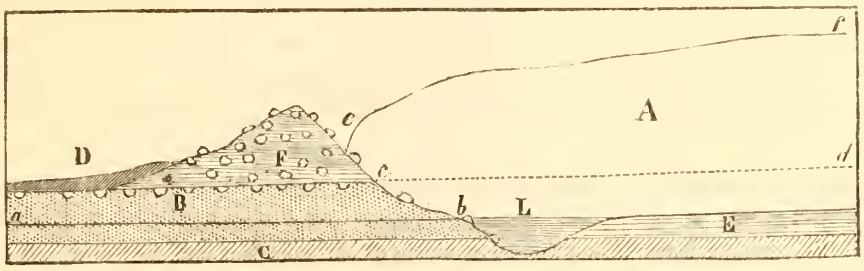
Ho di già detto che il gran deposito *erratico-diluviale* è formato di tre orizzonti, il *diluvium*, l'*erratico* ed il *lehm* e che vi ha una certa zona, quella delle morene, in cui tutti e tre questi orizzonti fanno corpo insieme, stando però, il *diluvium* sempre in basso, l'*erratico* in mezzo e superiormente il *lehm*. Constatando questo fatto io non voglio punto inferirne che vi sia stata un'epoca diluviale e quindi un'epoca di grande estensione dei ghiacciai susseguita da una seconda irruzione acquea cui si debba riferire il deposito del *lehm*; a me pare al contrario che tutti e tre questi orizzonti debbano considerarsi come costituenti un solo terreno, ammettendo però che il deposito del *diluvium* ha dovuto esigere speciali condizioni e forse buona parte del tempo per cui durò l'epoca *erratico-diluviale*.

Egli è chiaro che durante il deposito delli strati plioceni non discendevano dalle Alpi grossi torrenti; giacchè noi non troviamo banchi di ciottoli neanche in quei tratti di strati plioceni che si sono depositati presso lo sbocco della Baltea, della Valchiusella, del Cervo, ecc., ed i quali oggidì tagliati ed erosi da questi stessi torrenti, sono da essi coperti di potenti banchi di ciottoli. Se non vi erano in quell'epoca grossi torrenti, necessariamente non vi erano ghiacciai o non esistevano, proporzionatamente a quelli di oggidì, che allo stato rudimentale. Dobbiamo adunque ammettere che i ghiacciai incominciarono a formarsi od almeno ad ingrandirsi di molto posteriormente al deposito del plioceno e che col formarsi ed ingrandirsi dei ghiacciai incominciò il deposito del *diluvium* nella pianura che si estende al piede delle Alpi. A partire poi dal giorno in cui i ghiacciai post-pliocenici avevano raggiunto le proporzioni di quelli di oggidì sino a quello in cui, escendo dalle valli alpine discesero sino nella grande valle del Po, taluni di essi, come quello della valle di Aosta, allungandosi di oltre 80 chilometri, dovettero trascorrere forse centinaia di secoli. Ma, in tutto questo enorme spazio di tempo vi fu annualmente ablazione dei sempre crescenti ghiacciai, epperciò torrenti temporarii sempre più grossi, sempre più impetuosi. Questi torrenti sboccando, dalle valli alpine, nella pianura piemontese formarono ciascuno un cono di deiezione o di *sbocco* il quale dilatandosi crebbe a segno da congiungersi lateralmente con quello costrutto all'imboccatura della vicina valle e da sospingere il perimetro della sua base sino a molti chilometri di distanza dal piede delle Alpi.

Allorquando poi il piede di alcuno di quei ghiacciai venne a protendersi oltre la valle alpina nella pianura, esso venne ad occupare il vertice del cono di deiezione, ed allora formaronsi le estreme morene che oggidì ancora vediamo quasi intatte. Pare intanto che per un processo non ancora noto la parte del vertice del cono di deiezione su cui posò per secoli il piede del ghiacciaio venne erosa ed

esportata (il sig. De-Mortillet dà a questo processo il nome di *affouillement du glacier*. V. *Note sur Palazzolo et le lac d'Iseo*. Bull. de la Soc. Géol. de France 1860), onde la singolare profondità che gli anfiteatri circoscritti dalle antiche morene hanno relativamente al livello del piano che incomincia esteriormente alla morena stessa.

Fig. 9. — *Taglio attraverso una parte dell'anfiteatro chiuso dalle morene dell'antico ghiacciaio della valle d'Aosta, la morena frontale ed una parte della pianura che, dal piede esterno della morena stessa, discende al Po.*



A, porzione dell'anfiteatro. - *B*, diluvium. - *C*, argille plioceniche. - *D*, lehm. - *E*, depositi erratici, palustri e torbosi. - *F*, morena frontale. - *L*, lago di Viverone.
a, *b*, livello attuale del letto della Dora Baltea. - *c*, *d*, profilo della parte superiore del cono diluviale di deiezione. - *e*, *f*, profilo dell'estremità terminale dell'antico ghiacciaio della valle di Aosta.

Veniamo ora a renderci conto, per quanto possibile, della ritirata del ghiacciaio giunto ai limiti della sua massima estensione, e per spiegarci con qualche chiarezza prendiamo a considerare l'antico ghiacciaio della valle di Aosta.

Le morene di Ivrea formano un arco continuo in cui non vi ha che un solo gran taglio, quello di Mazzè, per cui oggidì esce la Dora Baltea. Vi ha bensì, poco lungi da questo taglio, una regione (da me non ancora studiata) chiamata nel paese *Dora morta*, denominazione che farebbe supporre essere stata quella regione un antico alveo della Dora; tuttavia anche ciò ammettendo, non è men vero che quest'antico canale non ha nè la profondità nè la larghezza di quello in cui corre oggidì la Baltea.

Ciò posto, diremo che il ghiacciaio non si ritirò subitamente, poichè la massa d'acqua che sarebbe stata prodotta dalla fondita repentina di un sì enorme volume di ghiaccio avrebbe distrutto, in parte almeno, la morena frontale ed avrebbe colle materie seco travolte riempito l'anfiteatro esistente allo sbocco della valle nell'interno delle morene, compresovi il piccolo lago di Viverone situato a brevissima distanza dal letto attuale della Dora e dalla regione detta *Dora morta*. Ma l'arco della morena è tuttora intero: vediamo tuttora la singolare profondità dell'anfiteatro intermorenico e di più, buona parte del fondo del lago di Viverone è seminato di massi erratici, non punto coperti di depositi torrenziali, ma liberi al pari di quelli che vedonsi sul dosso della vicina morena.

Il ghiacciaio si è dunque ritirato lentamente e, conviene ammetterlo, con lentezza tale da permettere che le acque provenienti dalla sua ablazione, invece di

spandersi, come lo facevano durante l'epoca del suo progresso, sul cono di deiezione, siano tutte e sempre escite fuori dall'arco delle antiche morene, passando pel canale attuale e forse, in alcune circostanze di straordinaria crescciuta, anche pel canale suppletivo detto *Dora morta.*

Estendendo il campo di osservazione noi troviamo che là, ove il fondo dell'anfiteatro intermorenico è occupato da un gran lago, come sarebbe il lago Maggiore, il lago di Garda, ecc., le morene che lo circondano sono anch'esse intiere, continue, all'eccezione del taglio per cui passa l'emissario del lago, e troviamo di più che il lago conserva una grande profondità, locchè non avrebbe luogo, se i depositi torrenziali, provenienti dagli antichi ghiacciai in ritirata del Ticino, del Toce, dell'Anza, del Mincio e dell'Adige, potessero, in ordine al loro volume, paragonarsi al cono diluviale o di sbocco che vediamo a valle dei laghi stessi.

Visto perciò questa grande differenza che vi esiste fra gli effetti del *progresso* e del *regresso* del ghiacciaio è forza convenire che durante il primo intervennero condizioni speciali favorevoli alla formazione del *diluvium* e che le stesse condizioni più non accompagnarono il secondo. Fra tali condizioni poi potrebbesi citare anche questa che cioè il ghiacciaio avanzandosi ha dovuto prepararsi, per così esprimermi, il fondo della valle, spingere cioè davanti a sè passo a passo tutti i materiali mobili che già la ingombravano e quelli che esso stesso staccava nel suo cammino, mentre nel *regresso* dovette deporre quelli che portava e lasciarli sul fondo della valle. Forse anche si è col *regresso* dei ghiacciai che incominciarono le erosioni dei coni di sbocco (formazione delle terrazze) le quali dovevano poi mano mano raggiungere le gigantesche proporzioni che ora hanno.

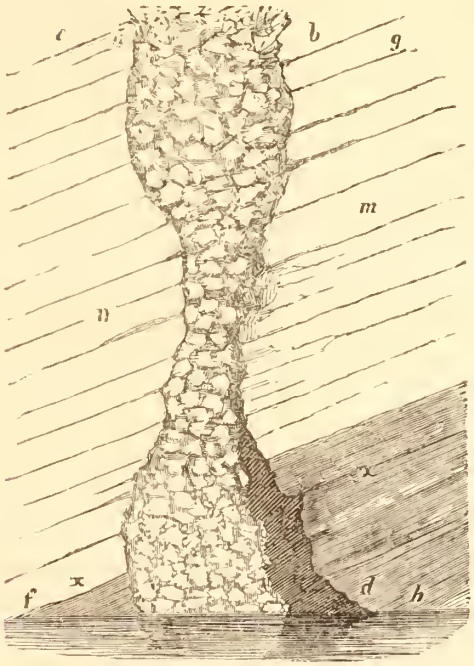
I fenomeni che, durante l'epoca *erratico-diluviale* produssero l'enorme estensione dei ghiacciai alpini, fecero sentire la loro influenza anche sulla catena delle Alpi marittime e su quella degli Apennini. Ho scoperto antiche e conservatissime morene nella valle del Po ai piedi del Monviso e son persuaso di trovarne in valli aperte ancora più verso il Sud. Ho poi notato che in tutte le valli che discendono al Po dall'Apennino si trova un *diluvium* parecchie decine di metri elevato al disopra del livello del torrente attuale.

NOTA C.

Questi frammenti di geologia essendo particolarmente rivolti a preparare gli elementi di una monografia delle colline di Torino e del Monferrato, ho creduto dover fare fin d'ora menzione di uno *spostamento* osservato in una delle valli che dalla punta *Palouc* discendono a Chieri, conosciuta col nome di valle dei Ceppi. Lo

spostamento taglia la riva destra del rivo presso il casale detto *Tetti dei Civera*. In questo sito li strati sono composti di una marna argillosa *m* (fig. 9) alternanti con sabbia *x* serpentinosa ed incoerente.

Fig. 9. — *Spostamento a forma di filone negli strati miocenici della collina di Torino sulla sponda destra del rivo Tepice.*



Il taglio ha l'apparenza di un filone, consistendo in due pareti *a c*, *b d*, perfettamente levigate e finamente striate, le quali intersecano li strati, formando coll'orizzonte un angolo retto; il loro andamento è ondulatorio, talchè fra l'una e l'altra vi è una distanza, ora di $0^m,50$, ora di un metro ed anche più, e l'intervallo frapposto è riempiuto della stessa marna ma frantumata. Come già dissi, la levigatura delle pareti è perfetta, ed è tale, non solo sugli strati di marna, ma ben anche su quello composto di sabbia incoerente, nel quale la superficie di levigazione è come spalmata di una vernice finamente rigata che, allorquando si stacca un esemplare della roccia, ritiene bensì, ma solo per qualche istante, fra loro collegati i granelli di sabbia. Per quanto può vedersi, la direzione in cui corre il taglio o spaccatura è N. S., quella degli strati essendo N. E.-S. O. La parte *e a f c* si è depressa relativamente a quella *b g d h* di $0^m,60$ o $0^m,70$; però questo spostamento non ha lasciato di sè traccie molto apparenti sulle pareti levigate: il moto principale fu alternativo e nel senso orizzontale; dico alternativo perchè vi sono sulle pareti levigate parecchie serie di strie le quali si tagliano ad angoli acuti. I frammenti di marna che riempiono l'interstizio sono pur essi striati, ma in direzioni indipendenti da quelle delle pareti.

NOTA D.

Questo granito che, nel nostro Apennino, incontrasi in massi per lo più incassati nelle breccie poste fra il serpentino e l'albercse, pare trovisi in posto nell'Apennino del Parmigiano. Vedo infatti, in una nota rimessami alcuni anni sono dal mio amico sig. G. Michelotti, quanto segue: « Rilevai dal sig. Prof. Piroli » di Parma che nel monte detto *Gruppo del Vescovo* esiste un'eruzione granitica, » situata a due chilometri circa all' E. del vertice degli Apennini, nel luogo de- » nominato *la Cisa* ». Lo stesso fatto vennemi confermato dal sig. Strobel, Professore di Storia naturale nell' Università di Parma, il quale fecemi inoltre vedere una serie di roccie da lui raccolte in detta località, ed ho potuto convincermi, che tali roccie, ma particolarmente il granito, i calcari, ecc., sono identici a quelli del nostro Apennino.

SULLA PRESENZA
DI ELEMENTI CONTRATTILI
NELLE MAGGIORI CORDE TENDINEE DELLE VALVOLE MITRALI UMANE

DI

E. OEHL

DOCENTE ISTOLOGIA ED ANATOMIA MICROSCOPICA ALL'UNIVERSITA' DI PAVIA

Letta nell'adunanza del 20 maggio 1860.

Gli studi di anatomia umana e comparata che nel corso del presente anno io instituiva sul cuore, mi condussero a due fatti che sono nuovi nelle scienze anatomiche e la importanza dei quali non è, a mio giudizio, lieve se vengano applicati alle dottrine fisiologiche.

È il primo di questi fatti la costante presenza di un apparato cartilagineo nelle valvole semilunari degli uccelli. La descrizione anatomica di questo apparato e la ragione fisiologica di sua esistenza venne, a mezzo del Professore Hyrtl, comunicata alla Imperiale Accademia delle Scienze in Vienna nella seduta 24 marzo 1859.

L'altro fatto di anatomia umana, che io mi pregio di trasmettere a questa Regia Accademia, e che potrebbe forse non riuscire discaro alle teorie fisiologiche, è quello della presenza di elementi contrattili nelle corde tendinee delle valvole mitrali dell'uomo.

È cosa nota, come dai muscoli papillari dei ventricoli (e in parte anche dal setto interventricolare pel ventricolo destro) emergano le corde tendinee che trovano i loro attacchi alla esterna superficie ed ai margini liberi delle valvole tricuspidali e mitrali. La loro disposizione anatomica è tale che, da due muscoli papillari vicini sorgano sempre le corde distribuentisi ai lati di uno dei comparti principali delle valvole, comparti che risultano dall'addentellatura dei loro margini liberi. I comparti secondari invece, che sono intermedi ai comparti principali, danno sempre

attacco a corde tendinee emergenti da una sola papilla. Per una tale disposizione deriva che da ogni muscolo papillare dei ventricoli emergano tre gruppi di tendini, di cui i due laterali appartengono ai guardantisi margini di due maggiori comparti valvolari, mentre il gruppo mediano si distribuisce al comparto secondario interposto ai due primi.

Ogni comparto valvolare principale riceve, fra le altre, due *corde maggiori*, le quali si attaccano alla esterna superficie valvolare, ma soltanto in vicinanza al labbro dell'apertura auricolo-ventricolare. Egli è da queste che partono molte delle *corde minori*, le quali, insieme alle altre provenienti dalle papille muscolari, si disperdono a tutta la esterna superficie delle valvole; ed è da queste ultime e dalle prime finalmente che dipartono altre *minime corde*, le quali si attaccano ai margini liberi delle valvole.

I maggiori dei tendini ora menzionati vengono tesi dalla contrazione dei muscoli papillari, i minori lo vengono dall'innalzamento delle valvole verso l'apertura auricolo-ventricolare, i minimi finalmente dal dispiegarsi degli accartocciati margini valvolari.

Ora egli è appunto nello spessore dei tendini maggiori delle valvole mitrali che ho *sempre* trovato delle fibre muscolari trasversalmente striate, e *molte volte* un vero muscoletto che trovasi a metà decorso dal tendine.

Fino dal 1840 comunicava il Kürschner nelle *Notizie di Froriep* la esistenza di fibre muscolari nelle valvole auricolo-ventricolari. Secondo l'Autore sarebbero desse in diretta continuazione colle fibre muscolari delle orecchiette e si estenderebbero nelle valvole fino in vicinanza ai punti d'attacco delle minori corde tendinee. A malgrado delle obbiezioni mossegli da Theile persiste il Kürschner nell'affermare la esistenza di tali fibre non solo nelle valvole auricolo-ventricolari dei mammiferi, ma anche in quelle degli uccelli. Mi permetto di richiamare questo fatto, già prima di Kürschner riconosciuto, almeno pel cuore del bue, da Reid, allo scopo di ben stabilire la differenza che passa tra le fibre muscolari osservate da questi Autori fra le pagine delle valvole auricolo-ventricolari e quelle sulle quali ho io l'onore di richiamare ora l'attenzione, siccome esistenti nello spessore delle maggiori corde tendinee delle valvole mitrali umane.

Distendendo le valvole mitrali e lasciandole essiccare insieme alle rispettive corde tendinee ed ai muscoli papillari, si vede, dopo avvenuto l'essiccamento, che al di là del limite di apparente terminazione del

muscolo papillare, limite contraddistinto dalla cessazione del rosso carneo e dal cominciamento del bianco tendineo, si prolunga lungo le corde maggiori un coloramento rossastro, il quale non è dovuto ad imbibizione d'ematina, perchè non cede minimamente alla macerazione e nemmeno alla cottura. Sottoponendo ad indagine microscopica questo tratto rossastro delle corde maggiori, vi si osserva uno striamento trasverso determinato dal prolungarsi nelle medesime di alcune tra le fibre muscolari che costituiscono il muscolo papillare.

Quasi tutte queste fibre si arrestano con bella estremità appuntata al principio della corda tendinea, determinando quivi un margine colorato, che al microscopio appare giallo e che indica l'avvenuta loro terminazione e l'incipiente prevalenza del tessuto unitivo che entra in massima parte alla composizione delle corde. Alcune però tra le fibre dei muscoli papillari e specialmente quelle che corrispondono all'asse della corda, s'avanzano in essa con tutta evidenza trasversalmente striate e determinanti anzi un aspetto striato nella corda fino a metà lunghezza della medesima. Queste fibre che osservate cumulativamente impartono, come vedemmo, un aspetto rossigno alla corda tendinea, vedute isolatamente nello spessore della medesima, vi appaiono affatto incolore e vanno sempre impicciolendosi mano mano che dal muscolo papillare procedono verso la valvola mitrale.

In queste fibre muscolari, il cui diametro trasverso misura da 0,016 a 0,02^{mm}, si osserva che le zone trasverse più e meno rifrangenti si avvicendano assai numerose in causa della loro esilità, ed osservasi pure che il loro margine oscuro e ben demarcato assume un aspetto seghettato per delle piccole procidenze convesse delle zone più rifrangenti che sono anche le più grosse. Alterando la distanza focale scompare lo striamento trasverso e manifestasi invece un evidente striamento longitudinale, nella cui direzione presentansi pure dei nuclei allungati, quali appunto soglionsi osservare nelle fibre muscolari.

La fig. 3 rappresenta un piccolo fascio di tre fibre muscolari osservate in una delle corde tendinee maggiori delle valvole mitrali umane.

In seguito a quanto dicemmo fino ad ora però, non d'altro tratterebbesi che di un prolungamento nelle corde tendinee di poche delle fibre componenti i muscoli papillari.

Avviene però molte volte (non sempre) che essiccando nel modo anzidetto le valvole mitrali, appaiano perfettamente trasparenti ed incolore le due estremità, papillare e valvolare, delle corde tendinee maggiori,

e che solo in corrispondenza della loro parte mediana osservisi un coloramento carneo ed un certo quale oblungo rigonfiamento del tendine.

Tale oblungo rigonfiamento è un piccolo muscolo, che raccolto co' suoi elementi contrattili nello spessore della corda, va facendosi appuntato verso le due estremità della medesima di tal guisa, che fra le due terminazioni del muscolo e la papilla carnea del ventricolo e la valvola resti ancora un piccolo tratto di corda che mantiene la sua natura esclusivamente tendinea. È quindi un vero muscolo isolato, che presenta il suo massimo spessore verso la parte mediana della corda e che termina appuntato verso le due estremità della medesima (Vedi fig. 1 *ee*). Più di frequente si osserva questo piccolo muscolo nelle corde maggiori che spiccantisi da due diverse papille carnose si dirigono ai lati della valvola mitrale limitante l'orificio aortico dal cavo ventricolare.

Senza bisogno di ricorrere all'esame microscopico, si può determinare se nelle corde tendinee maggiori esista o meno il muscolo in discorso. Poichè, oltre al colore carneo ed al rigonfiamento mediano che si osserva nella corda, mettendo quest'ultima a macerare e tentando quindi di longitudinalmente spartirla con degli aghi, si osserva, che quando il muscolo esiste, si ottiene con tutta facilità il fendimento longitudinale della corda, come appunto si verifica quando si dissecchino nella stessa direzione le fibre muscolari, mentre invece quando il muscolo non esiste, la corda sulla quale si agisce cogli aghi tiensi agglomerata in un ciuffo di fibre smagliate, quale osservasi appunto nelle minute preparazioni dei tessuti unitivo ed elastico.

L'indagine microscopica però è quella che toglie su tale proposito ogni dubbiezza. Poichè assoggettando al microscopio un'esile sezione longitudinale della corda si determina con incontrastabile certezza la natura muscolare del tessuto che la compone. Le fibre da cui risulta costituito il muscolo in discorso non solo presentansi trasversalmente striate come le fibre cardiache, ma offrono pure, a guisa di queste ultime, delle biforcazioni, delle ramificazioni e delle reciproche anastomosi (fig. 2, *b*). La cottura e il successivo trattamento colla glicerina o coll'acido pirolegnoso rende più evidenti queste loro proprietà. Hanno desse un diametro medio di $0,014^{mm}$ e non misurano quindi che un terzo delle fibre cardiache prima però che queste ultime siensi impicciolite in seguito alle avvenute biforcazioni.

Nei molti casi, nei quali mi avvenne di poter esaminare il muscolo

in discorso io mi sono convinto colla diretta osservazione microscopica, che le impicciolite fibre terminali del medesimo, nè si tengono in rapporto con quelle del muscolo papillare da una parte, nè penetrano dall'altra nel tessuto delle valvole cui appartiene la corda. Tengo fra gli altri un preparato (riprodotto a fig. 2), il quale oltre al dare la più assoluta certezza sull'esistenza del muscolo, dimostra nel modo il più conveniente la nessuna relazione ch'esso tiene colle fibre terminali del muscolo papillare, intercedendo fra i due sistemi di fibre un lungo tratto di corda che mantiene la sua natura esclusivamente tendinea.

Noi abbiamo adunque nelle maggiori corde tendinee delle valvole mitrali umane un apparato muscolare, che è meno forte quando sia costituito dal prolungarsi nella corda delle fibre dei muscoli papillari, più forte invece quando lo sia da un muscolo distinto che trovasi nello spessore della corda. Sarebbe ora interessante il sapere se un apparato muscolare nelle maggiori corde tendinee delle valvole riesca favorevole al migliore adempimento delle loro funzioni.

Se noi nel cuore esportato dal cadavere esercitiamo una trazione sui muscoli papillari per modo da imitare la loro contrazione durante la sistole ventricolare (1), troviamo che, di tutte le corde emergenti dalla stirata papilla, le maggiori soltanto si tendono (quelle cioè che s'attaccano alla valvola in vicinanza all'apertura auricolo-ventricolare) restando invece senza tensione le minori e le minime. Quando per la trazione esercitata sui muscoli papillari si tendono le corde maggiori, può aversi la tensione delle altre cercando di portare e di dispiegare le valvole verso l'orificio auricolo-ventricolare; il che facendo invece senza esercitare trazione sui muscoli papillari non ottiensi tensione delle corde maggiori. Questo fatto è quello che ci conduce alla migliore teoria dell'atto valvolare, teoria che venne diffusamente esposta da Kürschner nel Dizionario fisiologico di Wagner. Se le sole corde maggiori vengono tese in seguito alla contrazione dei muscoli papillari, bisogna pure che da qualche altro agente vengano messe in istato di tensione le corde minori e minime, e questo agente dev'essere tale da esercitare la sua influenza direttamente sulle valvole, elevando queste ultime verso l'orificio auricolo-ventricolare e quivi

(1) È cosa nota fino dai tempi di Haller che durante la sistole dei ventricoli i muscoli papillari si contraggono con tanta forza da ritirarsi e scomparire quasi intieramente nello spessore delle pareti ventricolari.

dispiegandole. Ad elevare ora le valvole non può bastare l'onda sanguigna spinta verso l'orificio dalla sistole ventricolare, poichè trovandosi le valvole fra due opposte pressioni, la esterna esercitata dal sangue contenuto nel ventricolo, la interna dispiegata dallo stesso liquido che trovasi nel cilindro valvolare, verrebbero le valvole fissate nella posizione che assunsero durante la diastole dei ventricoli. Era necessario adunque che la pressione esercitata sulla esterna superficie delle valvole, fosse maggiore della opposta spiegata sulla interna superficie delle medesime, e a rendere prevalente la prima può benissimo concorrere, come opina il Kürschner, la contrazione delle fibre muscolari da lui scoperte nello spessore del tessuto valvolare. Portate una volta le valvole ad assumere, per la contrazione di queste fibre, una direzione meno verticale nel rispettivo ventricolo, presentano alla compressa onda sanguigna una estesa superficie, per la quale può il sangue, a guisa di vento in vela, esercitare la sua azione dispiegatrice delle valvole. È in allora che i minori e minimi tendini vengono dalle innalzate e dispiegate valvole stirati e tesi. Questa forza che agisce nella direzione del ventricolo all'orecchietta, aveva bisogno di una forza antagonistica che valesse a rattenere le valvole e ad impedirne l'arrovesciamento nelle cavità auricolari non solo, ma di una forza eziandio che, fissando e tendendo le valvole, mettesse queste ultime in condizioni più favorevoli a risentire la pressione della corrente sanguigna. A tale funzione sono chiamate le maggiori corde tendinee, le quali, siccome quelle che si attaccano alle parti laterali delle valvole e in vicinanza alla loro inserzione all'orlo dell'orificio auricolo-ventricolare, sono nelle migliori condizioni per tenderle in una direzione trasversa, oltrechè per la loro robustezza e per la estensione dei loro attacchi alla superficie valvolare sono le più idonee a frenare gli effetti soverchi della irrompente onda sanguigna. Se le minori e minime corde tendinee sono adunque stirate nella direzione del ventricolo all'orecchietta, lo sono le corde maggiori in una direzione opposta, epperò erano i muscoli papillari quelli che ne doveano eseguire la trazione.

Le più ovvie leggi della meccanica ci dicono ora come cresca la forza tracente sulle corde, col diminuire fino ad un dato grado la distanza che passa fra il punto d'applicazione della forza e quello della resistenza, col diminuire in una parola la lunghezza della corda e col togliere quindi alla sua elasticità. Senza bisogno di perderci in dimostrazioni scientifiche sovra un punto della più elementare meccanica, ricorre tosto alla mente

la perfetta identità che passa fra l'azione del piccolo ed isolato muscolo esistente nello spessore delle corde maggiori e l'aiuto che presta una mano applicata ad una corda al disopra di una forza traente. Ma in tale argomento entra un'altra considerazione desunta dalle leggi della contrazione muscolare, poichè, se, come la diretta osservazione delle fibre contraentisi il dimostra, il muscolo contratto perde un quinto della lunghezza che aveva nello stato di riposo, riusciva convenevole di estendere nelle maggiori corde tendinee l'attività muscolare allo scopo di diminuire la lunghezza della parte inattiva non solo, ma di accrescere la forza e di ottenere, oltre agli effetti secondari devoluti alla contrazione dei muscoli papillari, gli effetti primitivi di raccorciamento devoluti all'atto stesso del contrarsi dei muscoli esistenti nella corda.

Se ora non può dirsi costante la esistenza di un muscolo distinto ed isolato a metà decorso delle maggiori corde tendinee, può dirsi però che sia colla presenza di esso, sia col prolungarsi nelle corde delle fibre dei muscoli papillari, cercò sempre la natura di diminuire nelle medesime la lunghezza della parte non contrattile, ravvicinando così queste corde alla valvola intieramente carnosa del ventricolo destro degli uccelli. Egli è perciò che l'azione del muscoletto isolato essendo analoga perfettamente a quella delle fibre papillari innoltrantisi nelle corde, io propongo per esso la denominazione di *muscolo contrattore delle corde* volendo con questo significare come sia funzione sua di trarre le corde in accomunata azione coi muscoli papillari.

Fino ad ora non mi fu dato di riscontrare i muscoli contrattori se non nelle maggiori corde delle valvole mitrali, nè, per quanto ripetessi le indagini, mi avvenne mai di ritrovarli in quelle delle valvole tricuspidali. Quanta però è la certezza di loro, sebben non costante, esistenza nella prima specie di valvole, altrettanta non può essere quella di loro assenza nelle valvole tricuspidali, poichè potrebbe avvenire che in queste ultime fosse la loro presenza più rara che non nelle valvole mitrali. La fisiologica considerazione di queste valvole però ci trae a pensare che, più per esse che non per le valvole tricuspidali abbisognasse d'ingagliardire l'azione delle maggiori corde tendinee. La maggiore energia colla quale deve contrarsi il ventricolo sinistro per la grande estensione del suo campo d'attività, energia rivelata eziandio dalla robustezza delle sue pareti muscolari, è già argomento valevole a far supporre che in seguito a tale più energica contrazione debba l'urto del sangue compresso essere maggiore contro le

valvole del sinistro, che non contro quelle del destro ventricolo. V'è però un'altra considerazione ad aggiungere. L'apertura auricolo-ventricolare sinistra, posta immediatamente al di dietro dell'aorta, trovasi allo stesso livello e nella medesima direzione in cui trovasi l'orificio che conduce a quest'ultima. Il sangue compresso dalla contrazione ventricolare è spinto direttamente contro i due orifici, e per quanto l'ordine che regna nella natura ci debba trarre alla supposizione, che le fibre muscolari del ventricolo sieno di tal guisa disposte, da dirigere preferibilmente la corrente del sangue contro l'orificio aortico, pure la più fina anatomia non è giunta ancora a constatare la presenza di un apparato speciale destinato ad impartire alla corrente del sangue una direzione determinata. Nel ventricolo destro invece l'apertura che conduce all'arteria polmonare mette all'infundibolo, ossia ad una parte del cavo ventricolare che forma un angolo acuto colla cavità principale. L'infundibolo è limitato anteriormente dalla parete anteriore del cuore e questa parete anteriore è costituita da fibre muscolari che provenute dalla metà posteriore dell'orificio venoso destro passano in direzione obliquo-ascendente da destra a sinistra per procedere quindi a formare lo strato muscolare esterno del ventricolo sinistro. Una tale disposizione delle fibre muscolari del ventricolo destro rende per sè evidente che, durante la contrazione di questo ventricolo, il sangue compresso dovrà essere di preferenza diretto verso l'infundibolo, e verso l'orificio polmonare, e che minore dovrà essere quindi lo sforzo esercitato contro le valvole tricuspidali.

Sì adunque per la più energica contrazione del ventricolo sinistro, che per la disposizione anatomica de' suoi orifici, debbono le valvole mitrali sottostare ad un urto molto più forte che non le valvole tricuspidali, e molto più robusti quindi doveano essere i mezzi impiegati dalla natura per impedire un arrovesciamento delle valvole durante la sistole ventricolare. Epperò non solo vediamo più sviluppato l'apparato papillare e più grosse le corde tendinee nel ventricolo sinistro, ma vediamo eziandio come la natura disponesse che la parte inattiva delle corde destinate al rattenimento delle valvole, fosse al più possibile diminuita, sia col prolungare nel loro interno le fibre dei muscoli papillari, sia col dotare queste corde di un *muscolo contrattore* sceverato e distinto. Checchè vogliasi opporre del resto alle teorie fisiologiche esposte nella presente Memoria, è incontrastabile il fatto anatomico: che per le corde tendinee maggiori del ventricolo sinistro o si prolungano in esse delle fibre

trasversalmente striate dei muscoli papillari, ovvero esiste a metà decorso circa delle medesime un oblungo ed isolato muscoletto che noi proponiamo nuovamente di chiamare *muscolo contrattore delle corde tendinee.*

Ella è cosa nota, che quando le valvole degli orifici venosi sono pendenti e rilasciate durante la diastole ventricolare, i margini di queste valvole, lungi dall'essere distesi e stirati, sono all'invece per buon tratto arricciati ed accartocciati.

È una tale circostanza dovuta alla grande elasticità delle minori, ma più specialmente delle minime corde tendinee, le quali cimentate in questa loro proprietà dall'urto che contro le valvole esercita la corrente sanguigna, si raccorciano tosto che su di esse sia cessata la forza traente e prestano di tal guisa colla stessa loro elasticità un ostacolo valevole ad ingagliardire nella corrente sanguigna l'azione dispiegatrice delle valvole.

Due condizioni istologiche favoriscono in sommo grado la elasticità delle minori e minime corde, condizioni istologiche delle quali è nota l'una come spettante a tutti gli organi eminentemente elastici, la prevalenza cioè del tessuto elastico; mi risulta l'altra esistente nelle corde tendinee, senza che fino ad ora abbia avuto campo di verificare se la si trovi eziandio negli altri organi dotati di molta elasticità.

È la seconda di tali condizioni, che i molti fasci unitivi amorfi che entrano alla composizione delle minori e minime corde tendinee invece di decorrere rettilinei e non ramosi, come avviene generalmente di vederli nei tendini, vanno nel loro decorso tortuosi e sempre ramificati, e le loro ramificazioni veggonsi assai volte terminare nello spessore della corda in esilissima punta (Vedi fig. IV *a*). Per un tale tortuoso decorso dei fasci unitivi che compongono la corda tendinea, viene a crescere naturalmente la loro lunghezza e con questa uno degli elementi che entrano nel calcolo per determinare la elasticità delle corde stirate nel senso della lunghezza.

La ramificazione poi dei fasci unitivi lascia campo nello spessore della corda ad una grande quantità di tessuto elastico, nel quale sono ben rimarchevoli delle grandissime cellule (fig. 5) prolungantisi e confluenti reciprocamente in fibre elastiche. Queste cellule disposte col loro massimo diametro in un senso longitudinale, hanno una legger tendenza al giallastro, sono grossamente granulose nell'interno e il loro nucleo più o meno prolungato consta di più grosse granulazioni accumulate lungo l'asse delle cellule, i cui limiti sono ben demarcati, oscuri e qualche volta

dentellati. Non è raro incontrarne di assai vicine (fig. 5 *a*), le quali si uniscono fra di loro per un prolungamento tortuoso intermedio, che è una vera fibra elastica, mentre le due altre opposte estremità prolungansi pure in una fibra della stessa natura. Alcune di queste cellule, che sono le più gigantesche fra quante mai cellule di tessuto elastico io abbia rimarcate, veggonsi formare sopra se stesse delle circonvoluzioni (fig. V *e*) che hanno molta analogia con quelle degli intestini e che parlano abbastanza chiaramente sulla influenza ch'esse debbono avere nel determinare il grado di elasticità delle corde tendinee. Le numerose fibre di tessuto elastico che entrano alla composizione delle minori e minime di queste corde s'aggirano, come osservasi generalmente, a lunghe spire al dintorno dei fasci unitivi. Bollendo però nell'acqua una corda, ed osservando quindi una sezione longitudinale della medesima si vede essersi avvicinati d'assai i giri spirali delle fibre elastiche.

Per le osservazioni prodotte nella presente Memoria, giova togliere gli attachi delle valvole al margine degli orifici, metterle e lasciarle per qualche tempo nell'alcool, distenderle quindi sovra una lamina di gutta-perka e tenerne con degli aghi sceverate le corde onde poterne distinguere la classe. Essiccate che sieno s'instituiscono le sezioni, le quali si rammolliscono dapprima con acqua e si trattano quindi coi reagenti che più convengono. Come dissi più addietro, la stessa facilità colla quale si arriva a sceverare longitudinalmente le fibre del preparato ci avverte della presenza del muscoletto contrattore.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE.

Fig. I. Rappresenta la valvola mitrale che divide nell'uomo l'orificio aortico dall'orificio venoso. La valvola è sciolta da' suoi attacchi, esportata coi rispettivi muscoli papillari e distesa col mezzo di aghi. Vedesi in *a* il margine d'attacco della valvola all'orificio venoso; in *b b* due corde maggiori che partite da due diversi muscoli papillari si inseriscono ai margini laterali delle valvole; in *c c* due corde tendinee minori; in *d d* due corde minime non tese a malgrado della trazione esercitata dagli aghi sui muscoli papillari; in *e e* i muscoletti contrattori esistenti a metà decorso delle corde tendinee maggiori.

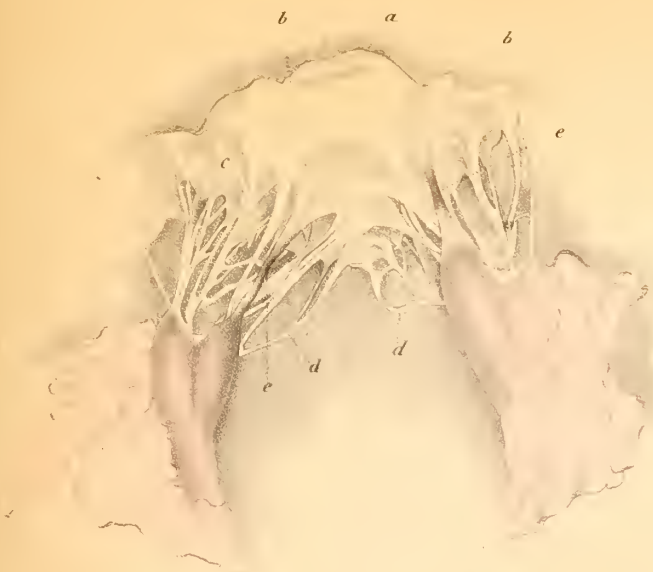
Fig. II. Rappresenta la sezione longitudinale di una corda tendinea maggiore, sezione longitudinale che dimostra la mancante continuazione tra le fibre del muscolo papillare e quelle del contrattore (Il pezzo naturale fa parte della mia collezione di preparati microscopici); *a* terminazione appuntata delle fibre del muscolo papillare; *c* parte di corda tendinea esistente tra le fibre terminali dei due muscoli papillare e contrattore; *b* terminazione appuntata delle ramificate ed anastomizzantisi fibre del contrattore. Ingr. 100 d.

Fig. III. Piccolo gruppo di tre fibre muscolari trasversalmente striate, che dal muscolo papillare si prolungano nello spessore di una corda tendinea maggiore. Ingr. 500 d.

Fig. IV. Fasci unitivi amorfi e ramosi che si osservano nelle minime corde tendinee; *a* terminazione ad esilissima punta di uno dei fasci unitivi. Ingr. 500 d.

Fig. V. Cellule di tessuto elastico a forma varia osservate nelle minime corde tendinee. Le due cellule in *a* rappresentano un caso di reciproca fusione per la formazione delle fibre elastiche. Di queste due cellule è la minore rimarchevole pel suo margine elegantemente seghettato. In *b*, *c*, *d* trovansi rappresentate le varie gradazioni di allungamento delle cellule per la costituzione delle fibre elastiche, un diretto passaggio nelle quali si osserva per le cellule *a*, *d*, *e*. Rappresentasi in *e* una cellula di tessuto elastico formante delle circonvoluzioni che hanno qualche analogia con quelle degli intestini. Ingr. 600 d.

Fig. I.



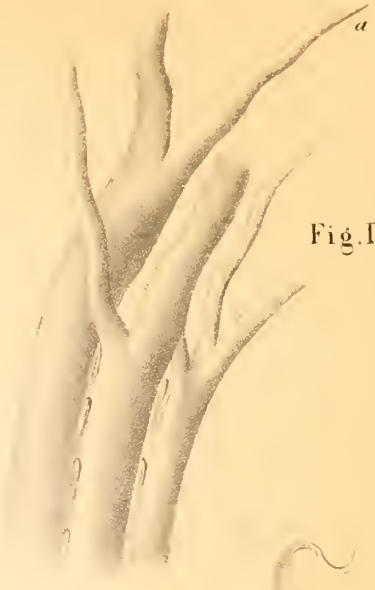


Fig. IV.

Fig. II.

Fig. III.

Fig. V.

Torino, Lit. Fm Doyen

SULLE FORME CRISTALLINE

DI

ALCUNI SALI DERIVATI DALL' AMMONIACA

PER

QUINTINO SELLA

Memoria letta nelle sedute del 17 *giugno* 1860 *e del* 20 *gennaio* 1861

INTRODUZIONE.

Vi è noto, o chiarissimi Signori, come oggetto e risultato delle più recenti investigazioni della Chimica organica sia stato di mostrare come la costituzione di gran parte delle svariatissime ed innumerevoli sostanze spettanti ai regni vegetale ed animale sia analoga a quella dei più semplici corpi del regno minerale, come dell' acqua, del salmare, e dell' ammoniaca. Il gruppo dei composti, che si possono riferire all'ammoniaca, è forse quello che offre maggior interesse, a cagione dell' immenso numero e varietà di corpi che comprende, e dei vincoli ben conosciuti che legano tra loro i membri dello stesso gruppo.

Indi consegue, che è attualmente di alta importanza lo studio delle proprietà geometriche e fisiche dei sali derivati dall'ammoniaca. Ed infatti giova anzitutto lo indagare se pro o contro la ipotesi fatta dai chimici, che tali sali abbiano costituzione analoga, parlino le loro forme cristalline, ed i loro assi di elasticità. Giova quindi far tesoro delle forme cristalline dei sali derivati dall'ammoniaca a più alto fine.

Non è inverosimile che a risolvere il problema del nesso, che lega la composizione e costituzione chimica di un corpo alle sue forme cri-

stalline ed alle sue proprietà fisiche, meglio ci aiuti lo studio di composti, i quali, come appunto gli organici, passino per lievi differenze dall'uno all'altro, anzichè lo studio dei corpi della chimica minerale, i quali al mutarsi dell'acido o della base che li forma vengono alterati in tanta parte di loro stessi, che ne rimangono repentinamente e profondamente alterate le essenziali proprietà. Suppongansi questi nessi rappresentati da curve, egli è chiaro che più agevolmente se ne scoprirà l'indole, qualora ne siano determinati molti punti non molto lontani, come sembraci atta a somministrare la chimica organica, anzichè punti isolati assai discosti l'uno dall'altro, quali risultano dalla chimica inorganica.

E dell'essere la cosa in questi termini abbiamo chiarissima conferma dai vincoli già scoperti tra la composizione e costituzione chimica di alcune classi di corpi organici, e qualcuna delle loro proprietà fisiche. Basti il rammentare a modo d'esempio la legge di Kopp, per cui dai gradi di temperie a cui bollono due corpi omologhi di una serie, si può desumere il grado di ebullizione di qualsiasi composto spettante alla stessa serie (1).

Già altra volta ebbi, Signori, l'onore di parlarvi delle forme cristalline di alcuni sali derivati dall'ammoniaca, cioè dei sali di platinodiamina di Reiset e Peyrone (2). Vengo oggi a discorrervi di sali derivati pure dall'ammoniaca, ai quali è essenzialmente per base una fosfina, vale a dire una ammoniaca NH_3 nella quale al posto dell'azoto v'ha fosforo, ed in cui al posto dell'idrogeno vi sono spesso altri radicali, e specialmente l'etile C_2H_5. I sali descritti furono scoperti da uno dei più attivi ed ingegnosi indagatori, di cui si vanti oggidì la Chimica organica, cioè da A. W. Hofmann. A questo illustre chimico debbo i cristalli da me studiati, e pel favore che egli mi fece dandomi agio di esaminare sì interessanti corpi, sono in dovere di attestargli pubblicamente la mia gratitudine.

La memoria sarà divisa in due parti. Nella prima si indicheranno le forme cristalline ed alcune delle proprietà ottiche di 22 sostanze finquì

(1) Siano t e t' i gradi di ebullizione di due sostanze omologhe le cui formole chimiche differiscano di nCH_2 si ha

$$t' = t + an$$

ove a è una costante positiva o negativa, che varia da una serie all'altra, ma che rimane la stessa per una medesima serie di corpi omologhi.

(2) Sulle forme cristalline di alcuni sali di Platino. Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino. Serie II. Tom. XVII. pag. 337.

inesplorate; inoltre sul modo di prepararle, e sul loro punto di fusione e di ebullizione si darà qualche cenno desunto o dalle memorie dell'Hofmann, o da private informazioni di cui egli ci fu cortese.

Le forme cristalline si poterono nella maggior parte dei casi determinare con qualche rigore, a cagione della perfezione dei cristalli. Gli angoli osservati, che vennero registrati dirimpetto ai calcolati, sono le medie di tutte le osservazioni fatte sopra i diversi cristalli misurati. In generale le osservazioni si ripeterono sovra un numero di cristalli tanto maggiore, quanto minore era la loro perfezione, poichè l'esperienza ci ha ammaestrati come anche da cristalli imperfetti, mediante osservazioni assai moltiplicate, e sottile criterio di calcolo, si ottengano risultati molto più accurati di quanto a prima vista possa parere.

Gli angoli dati per caratteristici del sistema cristallino di ciascuna sostanza furono talvolta somministrati direttamente dall'osservazione, ma risultano per lo più da calcoli fondati sopra gli angoli fatti dalle faccie più nitide. Trattandosi di cristalli imperfetti si ebbe cura di poggiare questi calcoli giusta il metodo dei minimi quadrati sopra un numero di angoli maggiore di quello, che era strettamente necessario alla determinazione degli angoli caratteristici.

Stante la somma piccolezza della maggior parte dei cristalli, i caratteri ottici non si ottennero in generale che con mediocre, e talora grossolana approssimazione. L'esame di questi caratteri si riconobbe tuttavia per importantissimo, giacchè dava alla determinazione del sistema cristallografico quella certezza, che talvolta non risulta dalle sole misure degli angoli. Ed infatti senza il soccorso dei caratteri ottici, e quello non meno prezioso delle sfaldature, sarebbero state in questa memoria descritte come trimetriche tre sostanze, le quali si riconobbero invece col sussidio di tali caratteri come monocline.

Gli indici di rifrazione, di cui si parlerà, si riferiscono alla parte dello spettro, che è tra il rosso ed il giallo. Le misure degli angoli fatti dagli assi ottici si riferiscono alla luce bianca.

Nella seconda parte della memoria si discorrerà di alcune analogie evidenti tra le forme dei sali descritti, e le forme conosciute di altri sali ammoniacali.

AVVERTENZA ESSENZIALE

In tutte le formole chimiche inserite nel testo, e nelle figure di questa memoria ci siamo conformati alle viste di Hofmann ed altri odierni chimici, ed abbiamo assunto per equivalenti

$$H = 1 ; \quad O = 16 ; \quad S = 32 ; \quad C = 12 .$$

Indi segue, che per esprimere le nostre formole cogli antichi equivalenti debbonsi raddoppiare i numeri di atomi relativi all'ossigeno, allo zolfo ed al carbonio.

PARTE PRIMA

DESCRIZIONE DELLE FORME CRISTALLINE DI CIASCUN SALE

CAPO I.

Solfuro di trietilfosfina.

$$P(C_2H_5)_3S.$$

Si prepara questo sale aggiungendo poco a poco fiori di zolfo ad una soluzione eterea di trietilfosfina. Svaporando l'etere, e ripigliando con acqua, questa lascia deporre per raffreddamento, e svaporazione lenta il solfuro di trietilfosfina.

Fonde a 94°. Assai più solubile nell'acqua calda, che nella fredda (1).

Sistema romboedrico:

$$100, 111 = 54°.35';$$

Forme osservate:

$$10\bar{1}, 2\bar{1}\bar{1}, 210 \quad \text{(Fig. 31)}.$$

Angoli		Calcolati	Osservati
$10\bar{1}, 01\bar{1}$	=	60°. 0′	60°. 1′
$10\bar{1}, 2\bar{1}\bar{1}$	=	30 . 0	29 . 59
$10\bar{1}, 210$	=	50 . 56	51 . 0
$10\bar{1}, 120$	=	71 . 38	71 . 34
$2\bar{1}\bar{1}, 210$	=	56 . 55	
$2\bar{1}\bar{1}, 120$	=	90 . 0	
210, 120	=	36 . 44	36 . 50
210, 021	=	66 . 10	66 . 20
210, 012	=	78 . 9	

Secondo Naumann:

$$R = 90°.13';$$

Forme osservate:

$$\infty P2, \infty R, \tfrac{2}{3}P2.$$

(1) Hofmann e Cahours, Recherches sur les bases phosphorées. — Ann. de Chim. et Phys. 3.e série. Tome LI, pag. 28.

Secondo Weiss:

$$a = 0,8211 ;$$

Forme osservate:

$$a : \tfrac{1}{2} a : a : \infty c ; \quad \infty a : a : a : \infty c ; \quad a : \tfrac{1}{2} a : a : \tfrac{1}{3} c .$$

Secondo Levy:

$$PP = 90^\circ . 13' ;$$

Forme osservate:

$$d', e^2, b^2 .$$

Combinazioni osservate:

$$10\bar{1}, 210 \quad (\text{Fig. } 30);$$

$$10\bar{1}, 210 ; \quad 2\bar{1}\bar{1} .$$

I cristalli hanno abito aghiforme di lunghi prismi esagonali, le cui faccie laterali sono assai brillanti. Le estremità sono in generale mal terminate, ed i prismi sono spesso vuoti all'interno, per cui di rado si osservano faccie 210 un po' nitide. Si osservarono una volta sola traccie distinte di $2\bar{1}\bar{1}$. Si osservò talvolta la faccia 111 ma assai imperfetta.

A temperie un po' alta, per esempio nell'estate, i cristalli son teneri, e flessibili: si riesce a piegarli di 180° senza romperli. A temperie meno elevata sono più duri e molto meno flessibili, ma sono tuttora settili.

I cristalli sono otticamente positivi. Si può misurare la minima deviazione tra le faccie del prisma esagono, e se ne conchiude che gli indici di rifrazione sono per il raggio straordinario $\varepsilon = 1,65$, e per il raggio ordinario $\omega = 1,59$.

CAPO II.

Combinazione della trietilfosfina col bisolfuro di carbonio.

$$P(C_2H_5)_3 , \quad CS_2 .$$

Aggiungendo solfuro di carbonio ad una soluzione alcoolica od eterea di trietilfosfina si ha un precipitato di cristallini rossi talmente caratteristici, che il solfuro di carbonio può dirsi delicato reattivo atto a scoprire le più piccole traccie di trietilfosfina, purchè allo stato libero, ovvero posta in libertà per opera di un alcali, ed inversamente la trietilfosfina è il miglior reattivo per svelare la presenza del solfuro di carbonio.

La composizione dei cristallini rossi è indicata dalla formola $P(C_2H_5)_3CS_2$, la quale ricorda quella dell'acido solfo carbamico NH_3CS_2, e quella dell'acido carbamico NH_3CO_2, che unendosi all'ammoniaca forma, ciò che men propriamente dicesi carbonato di ammoniaca anidra $(NH_3)_2, CO_2$.

Insolubile nell'acqua, poco solubile nell'etere, meglio nel bisolfuro di carbonio, ed anche di più nell'alcole sopratutto se scaldato. I migliori cristalli si ottengono coll'etere, e giungono fino ad avere più di un millimetro di lato.

Fonde a 95°, e si volatilizza a 100°.

Si conserva in tubo suggellato, e privo di umidità. In presenza di poca umidità si scompone, per cui in un tubo ordinario non si conserva che pochi mesi (1).

Sistema monoclino:

$100,101 = 29°.41'\frac{1}{2}$; $010,111 = 74°.4'$; $001,101 = 27°.7'\frac{1}{2}$;

Forme osservate:

100, 010, 001, 110, $\bar{1}01$ (Fig. 5).

Angoli		Calcolati	Osservati
100, 010	=	90°. 0'	90°. 5'
100, 001	=	56 . 49	56 . 49
100, 110	=	27 . 39	27 . 39
100, $\bar{1}01$	=	114 . 2	114 . 2
010, 001	=	90 . 0	90 . 6
010, 110	=	62 . 21	62 . 21
010, $\bar{1}01$	=	90 . 0	90 . 0
001, 110	=	61 . 0	60 . 55
001, $\bar{1}01$	=	57 . 13	57 . 13
110, $\bar{1}10$	=	124 . 41	124 . 42
110, $\bar{1}01$	=	111 . 9	110 . 55

Secondo Naumann il sistema cristallino deriva da una piramide monoclina (Fig. 1) dove

$OA:OB:OC::a:b:c::0,9205:1:1,5970$; $AOB = \gamma = 56°.49'$;

(1) Hofmann Researches on the Phosphorus-Bases. — Proceedings of the royal Society. Vol. IX. Pag. 290.

Forme osservate:

$$\infty \breve{P} \infty, \quad \infty \bar{P} \infty, \quad 0P, \quad \infty P, \quad \bar{P} \infty.$$

Secondo Weiss sarebbe (Fig. 1):

$$OB' : OC : OA :: a : b : c :: 1 : 1,5970 : 0,9205; \quad B'OA = aoc = 123^\circ. 11';$$

Forme osservate:

$$a : \infty b : \infty c; \ \infty a : b : \infty c; \ \infty a : \infty b : c; \ a : b : \infty c; \ -a : \infty b : c.$$

Secondo Levy i cristalli deriverebbero dal prisma romboidale obliquo (Fig. 2), in cui

$$MM = 124^\circ. 41'; \quad MP = 119^\circ;$$
$$AE : AO :: b : h :: 1 : 0,4885;$$

Forme osservate:

$$h', g', P, M, a'.$$

Combinazioni osservate:

100, 110, $\bar{1}01$;

100, 110, 001, $\bar{1}01$ (Fig. 3);

100, 110, 001, $\bar{1}01$; 010 (Fig. 4).

I cristalli si presentano in tavole rettangolari, che hanno apparenza di trimetriche.

Sfaldature 010 facilissima e nitidissima, sebbene talvolta incurvata; 100 facile e fibrosa.

Faccie brillanti ad eccezione di $\bar{1}01$ talvolta appannata, e quasi sempre distinta da 001 per il minore splendore.

Strie delicate sopra 100 e 110 parallele alla loro intersezione.

I cristalli sono otticamente positivi. È mediana principale [010], cioè l'asse di simmetria. Il piano degli assi ottici sembra poco lungi dall'essere parallelo a 001, e solo di qualche grado se ne scosta per avvicinarsi alla perpendicolare a 100.

Gli assi ottici fanno angolo assai aperto, per cui sottoponendo al microscopio polarizzatore una lastra parallela a 010 si veggono i principii degli anelli, ma non se ne scorge il centro.

Fissando invece la lastra contro un prisma isoscele di vetro, i cui angoli eguali sono di 54°. 14′ ed il cui indice di rifrazione è 1,508, si possono scorgere i centri degli anelli, e gli assi ottici si mostrano allora sotto angolo di 72°. Da ciò si desume anzitutto, che gli assi ottici non

emergono dalla lastra nell'aria libera. Inoltre siccome da misure di deviazioni prese tra prismi in sensi diversi si ebbero 1,7 e 1,8 per indici di rifrazione, si può presumere, che gli assi ottici emergano dalla lastra per entrare nel vetro in guisa, che l'indice di rifrazione spettante alla lastra non sia molto lontano da 1,75. Dalle quali premesse risulterebbe, che l'angolo interno degli assi ottici non debbe gran fatto scostarsi da 70°.

Alla luce polarizzata questa sostanza presenta uno dei più rimarchevoli esempi di polieroismo. Guardando nel microscopio polarizzatore una lastra sottilissima parallela a 010, e facendo girare questa, il suo colore varia a seconda della posizione dal giallo puro al rosso scuro.

L'asse di minima elasticità, cioè [010] ha un colore rosso violaceo scurissimo.

L'asse di massima elasticità, il quale non è lungi dall'essere parallelo a [100] è rosso dello stesso genere, ma assai meno intenso.

L'asse di elasticità media è giallo chiaro.

Indi risulta che anche alla luce ordinaria si ha un dicroismo distinto, poichè le lastre parallele a 100 sono di colore rosso intenso, mentre le lastre parallele a 010 sono di colore rosso arancio assai meno intenso, ed anzi assai chiaro se lo spessore della lastra è piccolo.

Durezza minore di quella del gesso.

CAPO III.

Urea solforata monofenilica trietilica ad azoto e fosforo.

$$NP\left[(C_2H_5)_3(C_6H_5)(CS)''\right].$$

Hofmann ottiene questa sostanza mescolando trietilfosfina e solfocianuro di fenile in presenza di una quantità notevole di etere, onde evitare gli inconvenienti di una troppo violenta combinazione. Si svapora l'etere, e si purifica il prodotto della reazione sciogliendolo con etere caldo, e lasciandolo cristallizzare una o due volte. Lo svaporamento spontaneo della soluzione somministra discreti cristalli.

Insolubile nell'acqua, solubilissima nell'alcole.

Anche secca e pura si altera poco a poco. In un tubo chiuso dopo qualche settimana si appanna e liquefà. Emette un particolare odore spiacevolissimo simile a quello dell'acido cianidrico.

Questa sostanza contiene gli elementi di una molecola di trietilfosfina $P(C_2H_5)_3$, e di una molecola di solfocianuro di fenile $NCSC_6H_5$, ma dal suo modo di comportarsi giudica Hofmann, che si debba riguardare composta come la urea ordinaria:

$$N_2\left[H_4(CO)''\right]$$

nella quale il fosforo sostituisca un equivalente di azoto, lo zolfo sostituisca l'ossigeno, e dei quattro equivalenti d'idrogeno tre siano sostituiti dall'etile C_2H_5, ed uno dal fenile C_6H_5. Indi la denominazione e la formola poste in principio del presente capo (1).

Sistema monoclino:

$$100, 001 = 61^\circ. 2'; \quad 010, 110 = 44^\circ. 27';$$

Forme osservate:

100, 010, 001, 110 (Fig. 9).

Angoli		Calcolati	Osservati
100, 010	=	90°. 0′	90°. 0′
100, 001	=	61 . 2	60 . 53
100, 110	=	45 . 33	45 . 33
010, 001	=	90 . 0	
010, 110	=	44 . 27	44 . 27
001, 110	=	70 . 10	70 . 24
110, $\bar{1}$10	=	88 . 54	88 . 54

Secondo Naumann:

$$b:c::1:0,8583; \quad \gamma = 61^\circ. 2';$$

Forme osservate:

$$\infty P\infty; \quad \infty P\infty; \quad 0P; \quad \infty P.$$

Secondo Weiss:

$$a:b::1:0,8583; \quad a\,o\,c = 118^\circ. 58';$$

Forme osservate:

$$a:\infty b:\infty c; \quad \infty a:b:\infty c; \quad \infty a:\infty b:c; \quad a:b:\infty c.$$

Secondo Levy:

$$MM = 88^\circ. 54'; \quad MP = 109^\circ. 50';$$

Forme osservate:

$$h', g', P, M.$$

(1) Da lettera privata dell'Hofmann.

Combinazioni:

110, 001 (Fig. 6);
110, 001, 100 (Fig. 7);
110, 001, 100, 010 (Fig. 8).

I cristalli hanno abito di aghi quadrangolari, le cui faccie laterali sono assai brillanti. La faccia 001 è assai più appannata.

All'aria si appannano rapidamente, e diventano opachi, ma riacquistano splendore e trasparenza se rimessi tosto in un tubo chiuso, che ne contenga parecchi.

Sfaldature 100 assai facile, e 110 un po' fibrosa.

Colore giallo misto di verzigno.

Da embrioni di anelli visti alla luce polarizzata tra le faccie 110 si potè conchiudere, che il piano degli assi ottici contiene [010] asse cristallografico di simmetria, e che la bisettrice si trova nel piano di simmetria 010, ed è compresa tra la perpendicolare a 100, e la perpendicolare a 001.

Durezza prossima a quella del gesso.

CAPO IV.

Urea solforata monoallilica trietilica ad azoto e fosforo.

$$NP\left[(C_2H_5)_3(C_3H_5)(CS)''\right].$$

Hofmann ottiene questa urea combinando la trietilfosfina coll'essenza di mostarda, o solfo cianuro di allile $NCSC_3H_5$. Per evitare la troppa violenza della combinazione, si fa questa in presenza dell'etere, e si purifica allora agevolmente il prodotto della reazione, lavandolo con etere freddo, e sciogliendo poi con etere caldo, dal quale si ottengono con somma agevolezza bellissimi cristalli, i quali pervengono anche ad una lunghezza prossima ad un centimetro.

Fonde a 68° e si solidifica a 61°. A più alta temperie si scompone come l'urea fenilica. Alla temperie ordinaria si conserva inalterata, senza perdere del suo splendore e della sua trasparenza.

Essa contiene gli elementi di una molecola di trietilfosfina $P(C_2H_5)_3$, e di una molecola di solfocianuro di allile $NCSC_3H_5$, ma per il suo modo di combinarsi con altri corpi la considera l'Hofmann come urea

analoga alla fenilica testè descritta $NP\left[(CS)''(C_3H_5)_3(C_6H_5)\right]$ in cui al posto del fenile C_6H_5 abbiasi l'allile C_3H_5 (1).

Sistema monoclino :

$100, 101 = 35^\circ. 42'$; $010, 111 = 39^\circ. 22'$; $001, 101 = 29^\circ. 3'$;

Forme osservate :

$100, 001, 110, \bar{1}01, \bar{2}01, \bar{1}12$ (Fig. 15).

Angoli		Calcolati	Osservati
$100, 001$	=	$64^\circ. 45'$	$64^\circ. 45'$
$100, 110$	=	$66 . 14$	$66 . 14$
$100, \bar{1}01$	=	$114 . 9$	$114 . 9$
$100, \bar{2}01$	=	$143 . 50$	$143 . 54$
$100, \bar{1}12$	=	$89 . 32$	$89 . 13$
$001, 110$	=	$80 . 6$	$80 . 10$
$001, \bar{1}01$	=	$49 . 24$	$49 . 25$
$001, \bar{2}01$	=	$79 . 5$	$79 . 7$
$001, \bar{1}12$	=	$51 . 2$	$51 . 17$
$110, \bar{1}10$	=	$47 . 33$	$47 . 31$
$110, \bar{1}01$	=	$99 . 30$	$99 . 30$
$110, \bar{2}01$	=	$109 . 0$	$108 . 54$
$110, \bar{1}12$	=	$48 . 23$	$48 . 41$
$110, 11\bar{2}$	=	$48 . 52$	$48 . 34$
$\bar{1}01, \bar{2}01$	=	$29 . 41$	$29 . 38$
$\bar{1}01, \bar{1}12$	=	$51 . 7$	$51 . 2$
$\bar{2}01, \bar{1}12$	=	$66 . 20$	$67 . 5$
$\bar{1}12, 11\bar{2}$	=	$87 . 31$	$87 . 55$

Secondo Naumann :

$a:b:c :: 0,8321:1:0,3984$; $\gamma = 64^\circ. 45'$;

Forme osservate :

$\infty \bar{P} \infty$, $0P$, ∞P, $\bar{P} \infty$, $2 \bar{P} \infty$, $\frac{1}{2}P$.

Secondo Weiss :

$a:b:c :: 1:0,3984:0,8321$; $a0c = 115^\circ. 15'$;

Forme osservate:

$a:\infty b:\infty c$; $\infty a:\infty b:c$; $a:b:\infty c$; $-a:\infty b:c$; $-\frac{1}{2}a:\infty b:c$; $-a:b:\frac{1}{2}c$.

(1) Da lettera privata dell'Hofmann.

Secondo Levy :

$$MM = 47^\circ.\,33' \; ; \quad MP = 99^\circ.\,54' \; ; \quad b:h::1:0,7730 \; ;$$

Forme osservate :

$$h', \; P, \; M, \; a', \; a^{\frac{1}{2}}, \; b' .$$

Combinazioni osservate :

001, 100, 110	(Fig. 10) ;
001, $\bar{1}$01, 110	(Fig. 11) ;
100, 001, $\bar{1}$01, 110	(Fig. 12) ;
100, 001, $\bar{1}$01, 110; $\bar{1}$12	(Fig. 13) ;
100, 001, $\bar{1}$01, 110, $\bar{2}$01; $\bar{1}$12	(Fig. 14).

I cristalli hanno talvolta abito di trimetrici come nella Fig. 12, talvolta invece, come nelle Fig. 10 e 11, hanno abito di lamelle parallele a 001, le quali non di rado sono assai allungate nella direzione [010].

Le faccie $\bar{1}$12 sono quasi sempre rotondate, e sul goniometro danno luogo a più immagini, per cui dal quadro degli angoli appaiono divarii notevoli tra i risultati del calcolo, e le medie delle osservazioni riguardanti tali faccie. Si poterono tuttavia riconoscere bene le due zone indicate dalla Fig. 15, sulle quali le faccie come $\bar{1}$12 sono collocate.

Lo sviluppo delle faccie $\bar{1}$12 non è sempre lo stesso : si osservarono parecchi cristalli come quelli della Fig. 14, in cui delle quattro faccie della forma $\bar{1}$12 esistono solo le due fiancheggianti una delle faccie 001.

Le faccie $\bar{1}$01 sono talvolta rotondate.

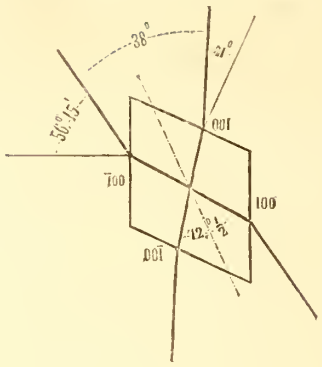
Sfaldature 100 e 001 facili e nitide.

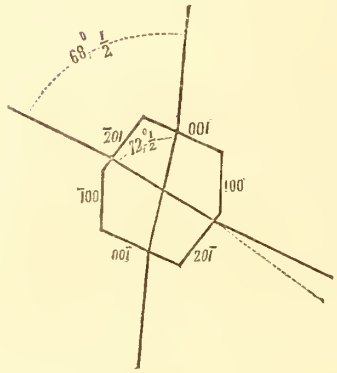
I cristalli contengono spesso nell' interno piccole cavità piene di liquido, che la sfaldatura sprigiona, e che emette fortissimo odore.

I cristalli sono otticamente negativi.

Gli assi ottici sono nel piano di simmetria, cioè 010. L'indice di rifrazione dei raggi, le cui vibrazioni sono parallele all'asse di simmetria [010], risultò 1,658 per un prisma di angolo di 64°. 45', di 1,658 e 1,645 per un angolo di 49°. 24' e di 1,666 per un angolo di 36°. 7'. Si può quindi conchiudere, che tale indice, il quale dei tre principali riesce l'intermedio, è $\beta = 1,657$.

Gli assi ottici si veggono assai bene attraverso le faccie 001 e 100. L'angolo loro apparente è di 38°. Gli angoli fatti dagli assi ottici apparenti colle normali delle faccie 001 e 100 sono di 21° e di 56°. 15'





giusta l'adiacente figura. Essi vennero determinati sfaldando lamelle parallele a 001, e collocandoli sopra un vetro dopo averne girata una di 180° rispetto all'altra.

Ammesso $\beta = 1,657$ se ne conchiuse che l'angolo interno degli assi ottici è di 72°. ½, e che la bisettrice fa angolo di 113°. 40′ colla normale a 100, vale a dire che essa è prossimamente normale a $\bar{1}01$. Si verificò direttamente tale conclusione con una lastra tagliata parallelamente a 010.

Si verificarono anche meglio le conclusioni precedenti per la osservazione dell'angolo degli assi ottici apparenti, che emergevano in alcuni cristalli da 001 e $\bar{2}01$. L'osservazione diede per tale angolo 68°. ½ circa, mentre il calcolo fondato sui dati precedenti somministra 68°. 8′.

CAPO V.

Bromuro di fosfonio monobromoetilico trietilico.

$$P\left[(C_2H_5)_3(C_2H_4Br)\right]Br\ .$$

Hofmann ottiene questo sale mescolando soluzioni eteree di trietilfosfina, e di bibromuro di etilene. Sciogliendo il precipitato nell'alcole assoluto, precipitandonelo poi coll'etere, e quindi ripetendo tale operazione alcune volte, si ottiene il sale abbastanza puro.

Solubilissimo nell'acqua, ed anche nell'alcole assoluto, insolubile nell'etere. Fonde e si scompone a 235°.

Questo sale risulta dalla riunione di un equivalente di trietilfosfina $P(C_2H_5)_3$ con un equivalente di bibromuro di etilene $C_2H_4Br_2$, ed Hofmann lo considera come analogo ad un bromuro di ammonio NH_4Br, nel quale l'azoto sia sostituito dal fosforo, e dei quattro equivalenti di idrogeno tre siano sostituiti dall'etile C_2H_5, ed il quarto da un etile, in cui al posto di un equivalente di idrogeno sia un equivalente di bromo,

cioè da C_2H_4Br, che si può denominare bromoetile. Ed infatti il nitrato di argento non precipita che la metà del bromo contenuto in questo sale, e lascia intatto il bromo contenuto nel bromoetile (1).

Sistema monometrico;

Forme osservate:

110 (Fig. 16).

Angoli		Calcolati	Osservati
110, $\bar{1}10$	=	90°. 0′	89°. 45′
110, 101	=	60 . 0	59 . 45
110, $01\bar{1}$	=	60 . 0	60 . 4
110, 011	=	60 . 0	59 . 34
110, $10\bar{1}$	=	60 . 0	60 . 19
$\bar{1}10$, 011	=	60 . 0	60 . 3
$1\bar{1}0$, 101	=	60 . 0	60 . 4 .

I cristalli sono talvolta allungati in guisa da prendere aspetto di cristalli dimetrici (Fig. 17). Altra volta (Fig. 18) una delle faccie $\bar{1}10$ è per giunta tanto più sviluppata della parallela, in guisa che non esiste guari più della metà dei cristalli della Fig. 17.

Sulle faccie scorgonsi talvolta vuoti a tramoggia, i cui lati sono paralleli agli spigoli del rombododecaedro.

Splendore grasso.

Durezza minore di quella del gesso.

Si riconobbe, che i cristalli non influiscono sulla luce polarizzata.

CAPO VI.

Bromuro di Arsonio monobromoetilico trietilico.

$$As\left[(C_2H_5)_3(C_2H_4Br)\right]Br.$$

Hofmann ottiene questo sale facendo digerire nell'alcole, ed a temperie non più elevata di 50 a 60°, trietilarsina $As(C_2H_5)_3$ e bibromuro di etilene $C_2H_4Br_2$ in grande eccesso.

È un po' meno solubile del bromuro, di cui al capo precedente.

(1) Hofmann. Researches on the Phosphorus Bases. — Proceedings of the royal Society, Vol. IX. pag. 287.

La costituzione di questo sale è dall' Hofmann ritenuta analoga a quella del bromuro descritto nel precedente paragrafo, in cui al fosforo si sostituisca l'arsenico, ed analoga perciò al bromuro di ammonio NH_4Br in cui all'azoto si sostituisca l'arsenico, ed ai quattro equivalenti di idrogeno si sostituisca per tre equivalenti l'etile, e pel quarto equivalente il bromoetile (1).

Sistema monometrico;

Forme osservate:

110 (Fig. 16).

Angoli		Calcolati	Osservati
110, $\bar{1}10$	=	90°. 0′	90°. 3′
110, 101	=	60 . 0	60 . 0
110, $01\bar{1}$	=	60 . 0	60 . 8 .

L'abito dei cristalli è talvolta affatto identico a quello del bromuro di fosfonio sopra descritto.

Si riconobbe pure, che i cristalli non influiscono sulla luce polarizzata.

CAPO VII.

Ioduro di fosfonio tetraetilico.

$$P(C_2H_5)_4I\ .$$

Si prepara questo bellissimo sale aggiungendo ad una soluzione eterea di trietilfosfina ioduro di etile, giusta la seguente equazione:

$$\underset{\text{Trietilfosfina}}{P(C_2H_5)_3} + \underset{\text{Ioduro di etile}}{(C_2H_5)I} = P(C_2H_5)_4I \quad (2).$$

Si ricava pure questo sale dal biioduro di difosfonio monoetilenico exaetilico, di cui al capo XI, cioè $P_2\left[(C_2H_5)_6(C_2H_4)''\right]I_2$. A tale effetto col mezzo dell'ossido di argento si precipita l'iodio da una soluzione di questo biioduro; si ottiene sotto forma di liquido caustico un idrato di biossido corrispondente, cioè $P_2\left[(C_2H_5)_6(C_2H_4)''\right]\left.\begin{matrix}\\ H_2\end{matrix}\right\}O_2$.

(1) Da lettera privata dell'Hofmann.

(2) Hofmann e Cahours. Recherches sur les Bases Phosphorées. Ann. de Phys. et de Chim. 1857, tom. LI, pag. 19.

Scaldando quindi questo biidrato si ottengono parecchi prodotti, e ad un certo punto la scomposizione si fa in guisa da somministrare idrato di fosfonio tetraetilico, e ossido di trietilfosfina giusta la seguente equazione

$$P_2\left[(C_2H_5)_6(C_2H_4)''\right]\left.\begin{matrix}\\ H_2\end{matrix}\right\}O_2 = P(C_2H_5)_4\left.\begin{matrix}\\ H\end{matrix}\right\}O + P(C_2H_5)_3O \ .$$

L'idrato di fosfonio tetraetilico si converte poi in ioduro coll'acido iodidrico (1).

Solubilissimo nell'acqua, meno solubile nell'alcole, ed affatto insolubile nell'etere.

La costituzione di questo sale viene considerata come identica a quella del ioduro di ammonio PH_4I, in cui il fosforo sia sostituito dall'azoto, e l'idrogeno dall'etile.

Sistema romboedrico:

$$111, 100 = 59^\circ. 32' \ .$$

Forme osservate:

$$111, 10\bar{1}, 100, 110, 210, 31\bar{1} \quad (\text{Fig. } 79).$$

Angoli		Calcolati	Osservati
$111, 10\bar{1}$	=	$90^\circ. 0'$	$89^\circ. 29'$
111, 100	=	59 . 32	
111, 110	=	40 . 22	40 . 22
111, 210	=	44 . 28	44 . 28
$111, 31\bar{1}$	=	63 . 0	63 . 2
$10\bar{1}, 01\bar{1}$	=	60 . 0	60 . 7
$10\bar{1}, 100$	=	41 . 43	41 . 44
$10\bar{1}, 010$	=	90 . 0	90 . 20
$10\bar{1}, 110$	=	55 . 53	55 . 58
$10\bar{1}, 101$	=	90 . 0	89 . 59
$10\bar{1}, 210$	=	45 . 32	45 . 30
$10\bar{1}, 120$	=	69 . 30	69 . 33
$10\bar{1}, 31\bar{1}$	=	27 . 0	26 . 58
$10\bar{1}, 13\bar{1}$	=	63 . 33	63 . 33
100, 010	=	96 . 34	96 . 31
100, 110	=	48 . 17	48 . 15

(1) Da lettera privata dell'Hofmann.

Angoli		Calcolati	Osservati
100, 011	=	99°. 54′	
100, 210	=	27 . 47	27°. 48′
100, 120	=	68 . 47	68 . 42
100, 021	=	99 . 16	
100, 31$\bar{1}$	=	26 . 27	26 . 26
100, 13$\bar{1}$	=	76 . 42	76 . 5
100, $\bar{1}$31	=	115 . 47	
110, 101	=	68 . 14	68 . 3
110, 210	=	20 . 30	20 . 27
110, 201	=	57 . 3	
110, 102	=	81 . 19	
110, 31$\bar{1}$	=	32 . 16	
110, 3$\bar{1}$1	=	69 . 46	
110, 1$\bar{1}$3	=	98 . 51	
210, 120	=	41 . 0	40 . 54′
210, 201	=	41 . 0	
210, 021	=	74 . 41	
210, 012	=	88 . 56	
210, 31$\bar{1}$	=	18 . 32	18 . 34
210, 13$\bar{1}$	=	50 . 30	
210, $\bar{1}$31	=	89 . 20	
31$\bar{1}$, 13$\bar{1}$	=	52 . 55	52 . 52
31$\bar{1}$, 3$\bar{1}$1	=	52 . 55	52 . 59
31$\bar{1}$, $\bar{1}$31	=	101 . 0	101 . 2
31$\bar{1}$, $\bar{1}$13	=	126 . 0	126 . 4 .

Secondo Naumann :

$$R = 83°.\ 26' \ ;$$

Forme osservate :

$$0R\ ,\ \infty P2\ ,\ R\ ,\ -\tfrac{1}{2}R\ ,\ \tfrac{2}{3}P2\ ,\ \tfrac{4}{3}P2\ .$$

Secondo Weiss :

$$a = 0{,}6793\ ;$$

Forme osservate :

$\infty a : \infty a : \infty a : c$; $a : \frac{1}{2}a : a : \infty c$; $\infty a : a : a : c$; $\infty a' : a' : a' : \frac{1}{2}c$; $a : \frac{1}{2}a : a : \frac{1}{3}c$; $a : \frac{1}{2}a : a : \frac{2}{3}c$.

Secondo Levy :

$$PP = 83^\circ. 26' ;$$

Forme osservate :

$$a', \; d', \; P, \; b', \; b^2, \; e_3 .$$

Combinazioni osservate :

$31\bar{1}$; 100, $10\bar{1}$	(Fig. 80);
$31\bar{1}$, 111 ; 100	(Fig. 81);
$31\bar{1}$, 111, $10\bar{1}$; 100	(Fig. 82);
$31\bar{1}$, 110, 100 ; $10\bar{1}$, 210	(Fig. 83 e 84);
$31\bar{1}$, 100, 110 ; $10\bar{1}$, 210, 111.	

I cristalli preparati trattando la trietilfosfina coll'ioduro di etile mostrarono la forma delle Fig. 83 e 84 talvolta arricchite di traccie di 111.

I cristalli invece preparati sottomettendo il bifosfonio idrato all'azione del calore mostrarono la forma della Fig. 80 allorquando giallastri, e più grossi, quelle delle Fig. 81 e 82 se bianchi puri e piccini.

È degno di nota l'irregolarità di sviluppo delle faccie del prisma $10\bar{1}$ nei cristalli indicati dalla Fig. 82. Questa irregolarità si manifestò in quasi tutti i cristalli di questo genere, i quali parevano aver aderito alle pareti del vaso, in cui la cristallizzazione si operava, per una delle faccie del prisma anormalmente estesa.

Cristalli assai nitidi. Splendore vivacissimo su tutte le faccie, meno quelle della base 111.

Cristalli otticamente positivi. Si ebbero gli indici di rifrazione misurando la deviazione minima attraverso le faccie della piramide esagonale $31\bar{1}$, che s'incontrano secondo uno spigolo parallelo alla base 111. Si trovò così per i raggi ordinarii $\omega = 1,660$, e per i raggi straordinarii $\varepsilon = 1,668$.

Durezza maggiore di quella del gesso

CAPO VIII.

Cloruro di fosfonio monoplatinico trietilico.

$$P\left[(C_2H_5)_3Pt\right]Cl .$$

Hofmann ottiene questo bellissimo sale nel modo seguente. Aggiungendo bicloruro di platino ad una soluzione alcoolica di trietilfosfina, e scaldando, si osserva che ad un certo punto la soluzione da gialla come

era si scolora, e lascia raffreddandosi un deposito cristallino avente la composizione $P\left[(C_2H_5)_3Pt\right]Cl$, il quale si forma giusta la equazione

$$\underset{\text{Trietilfosfina}}{3\left[P(C_2H_5)_3\right]} + \underset{\text{Bicloruro di Platino}}{2(PtCl_2)} = 2\left\{P\left[(C_2H_5)_3Pt\right]Cl\right\} + \underset{\text{Bicloruro di Trietilfosfina.}}{P(C_2H_5)_3Cl_2}$$

Trattando il deposito cristallino con etere, se ne scioglie una parte, e la soluzione eterea somministra i bei cristalli gialli da noi descritti. La parte insolubile nell'etere si scioglie per contro nell'alcole, e la soluzione alcoolica dà cristalli bianchi aventi la stessa composizione dei gialli. Il sale giallo si converte nel bianco se scaldato qualche tempo da 140° a 150°, e si direbbe che tra l'uno e l'altro vi siano relazioni analoghe a quelle del sale verde di Magnus NH_3PtCl col sale giallo di Peyrone, che gli è isomero, ed ha anche la composizione NH_3PtCl.

I cristalli gialli da noi descritti sono insolubili nell'acqua, difficilmente solubili nell'alcole, insolubili nell'etere. Fondono a 140° circa (1).

Sistema monoclino:

100, 101 = 26°. 48′; 010, 111 = 59°. 38′; 001, 101 = 31°. 28′;

Forme osservate:

001, 110, $\bar{1}01$, $\bar{1}12$ (Fig. 24).

Angoli		Calcolati	Osservati
001, 110	=	67°. 38′	67°. 38′
001, $\bar{1}01$	=	68 . 20	68 . 20
001, $\bar{1}12$	=	46 . 47	46 . 50
110, $\bar{1}10$	=	92 . 40	92 . 40
110, $\bar{1}01$	=	115 . 33	115 . 33
110, $\bar{1}12$	=	70 . 15	70 . 12
110, $11\bar{2}$	=	65 . 35	65 . 32
$\bar{1}01$, $\bar{1}12$	=	45 . 18	45 . 21
$\bar{1}12$, $11\bar{2}$	=	114 . 4	114 . 10 .

Secondo Naumann:

a:b:c::1, 1577:1:0, 8909; γ = 58°. 16′;

Forme osservate:

0P, ∞P, P∞, ½P.

(1) Ricerche dell'Hofmann tuttora inedite.

Secondo Weiss:

$$a:b:c::1:0,8909:1,1577\ ;\quad a\wedge c=121^\circ.44'\ ;$$

Forme osservate:

$$\infty a:\infty b:c\ ;\quad a:b:\infty c\ ;\quad -a:\infty b:c\ ;\quad -a:b:\tfrac{1}{2}c\ .$$

Secondo Levy:

$$MM=92^\circ.40'\ ;\quad MP=112^\circ.22'\ ;\quad b:h::1:0,8644\ ;$$

Forme osservate:

$$P,\quad M,\quad a',\quad b'.$$

Combinazioni osservate:

110, 001	(Fig. 19);
110, 001; $\bar{1}12$	(Fig. 20);
110, 001, $\bar{1}12$, $\bar{1}01$	(Fig. 21).

La forma $\bar{1}12$ è quasi sempre incompleta: delle quattro faccie spettanti alla medesima manca talvolta una faccia sola, ma per lo più mancano due faccie non parallele. Le due faccie rimanenti sono ora ad uno dei capi del prisma 110, come nella Fig. 23, ed ora l'una in alto e l'altra in basso, come nella Fig. 22.

Sfaldature 110 un po' difficili, e non molto nitide.

Splendore vetroso vivace: i cristalli sono assai nitidi.

Colore giallo chiaro con lieve tinta verdiccia.

Cristalli otticamente negativi.

Gli assi ottici sono in un piano il quale è parallelo all'asse di simmetria [010], e la mediana principale è tra la perpendicolare a 001, e la perpendicolare a $\bar{1}02$.

Durezza minore di quella del gesso.

È noto come i cristalli monometrici di cloruro di ammoniaca NH_4Cl (1) abbiano sovente abito di cristalli dimetrici. Se ora noi assumiamo cristalli contenenti quattro delle faccie del cubo 100, e otto delle faccie dell'icositetraedro 112, le quali siano disposte giusta quel che indica la Fig. 25, avremo cristalli assai simili a quelli del cloruro di fosfonio monoplatinico trietilico indicati dalla Fig. 21. Ecco infatti gli angoli delle due specie di cristalli:

NH_4Cl		$P[Pt(C_2H_5)_3]Cl$	
100, 010 =	90°. 0′	110, $\bar{1}10$ =	92°. 40′
100, $1\bar{1}2$ =	65 . 54	110, 001 =	67 . 38

(1) Rammelsberg. Handbuch der Krystallographischen Chemie. — Berlin, 1855, pag. 41.

100, 112 =	65°. 54′	110, $\bar{1}$12 =	70°. 15′
100, 1$\bar{1}\bar{2}$ =	65 . 54	110, 10$\bar{1}$ =	64 . 27
100, 11$\bar{2}$ =	65 . 54	110, 11$\bar{2}$ =	65 . 35
1$\bar{1}$2, 112 =	48 . 12	001, $\bar{1}$12 =	46 . 47
1$\bar{1}\bar{2}$, 11$\bar{2}$ =	48 . 12	10$\bar{1}$, 11$\bar{2}$ =	45 . 18
1$\bar{1}$2, 1$\bar{1}\bar{2}$ =	109 . 28	001, 10$\bar{1}$ =	111 . 40
112, 11$\bar{2}$ =	109 . 28	$\bar{1}$12, 11$\bar{2}$ =	114 . 4 .

CAPO IX.

Bromuro di fosfonio monobromoetilico trimetilico.

$$P\left[(CH_3)_3(C_2H_4Br)\right]Br\ .$$

Hofmann prepara questo sale seguendo una via identica a quella indicata al capo V per preparare il corrispondente sale etilico. Si mescolano soluzioni eteree di trimetilfosfina $P(CH_3)_3$ e di bibromuro di etilene $C_2H_4Br_2$, le quali reagiscono vivacissimamente. Si scioglie il precipitato nell'alcole, e quindi si precipita coll'etere, e si giunge dopo qualche ripetizione dell'operazione ad un sale puro.

Proprietà analoghe a quelle del bromuro del capo V.

Costituzione anche analoga a quella di $P\left[(C_2H_5)_3(C_2H_4Br)\right]Br$, non correndo altro divario se non che i tre equivalenti di etile C_2H_5 sono sostituiti da altrettanti equivalenti di metile CH_3 (1).

Sistema trimetrico :

$$100, 110 = 60°.\ 24'\ ;\quad 001, 101 = 22°.\ 9'\ .$$

Forme osservate :

100, 010, 001, 110, 211 (Fig. 85).

Angoli		Calcolati	Osservati
100, 010	=	90°. 0′	90°. 2′
100, 001	=	90 . 0	89 . 58
100, 110	=	60 . 24	60 . 26
100, 211	=	56 . 30	56 . 27

(1) Da lettera privata dell'Hofmann.

Angoli		Calcolati	Osservati
010, 001	=	90°. 0′	90°. 6′
010, 110	=	29 . 36	29 . 36
010, 211	=	60 . 56	60 . 55
001, 110	=	90 . 0	89 . 55
001, 211	=	47 . 19	47 . 17
110, $\bar{1}$10	=	59 . 12	59 . 12
110, 211	=	45 . 59	45 . 45
110, $\bar{2}$11	=	81 . 23	81 . 21
211, $\bar{2}$11	=	67 . 0	67 . 6
211, 2$\bar{1}$1	=	58 . 7	58 . 10
211, $\bar{2}\bar{1}$1	=	94 . 39	94 . 34 .

Secondo Naumann :

$$a:b:c::0,4071:1:0,5681\ ;$$

Forme osservate :

$$\infty\breve{P}\infty\ ,\ \infty\bar{P}\infty\ ,\ 0P\ ,\ \infty P\ ,\ 2\breve{P}2\ .$$

Secondo Weiss :

$$a:b:c::1:0,5681:0,4071\ ;$$

Forme osservate :

$$a:\infty b:\infty c\ ;\ \infty a:b:\infty c\ ;\ \infty a:\infty b:c\ ;\ a:b:\infty c\ ;\ \tfrac{1}{2}a:b:c\ .$$

Secondo Levy :

$$MM = 120°.\ 48'\ ;\quad b:h::1:0,3539\ ;$$

Forme osservate :

$$g'\ ,\ h'\ ,\ P\ ,\ M\ ,\ e_3\ .$$

Combinazioni osservate :

100, 010, 001 ; 110		(Fig. 86) ;
100, 010, 001 ; 110, 211		(Fig. 87) ;
110, 001 ; 100		(Fig. 88) ;
110, 001 ; 100, 010, 211		(Fig. 89) ;
001, 010, 211		(Fig. 90).

I cristalli hanno abito di tavole talvolta rettangolari come nelle Fig. 86 e 87, ma più spesso romboidali come nelle Fig. 88 e 89, od esagone come nella Fig. 90.

Altre volte sono invece allungati nella direzione [001] e spesso si osserva allora una rimarchevole ineguaglianza nello sviluppo delle faccie. Le Fig. 91 e 92 e le Fig. 93 e 94 ne somministrano due rimarchevolissimi esempi. Si è osservato, che nel cristallo delle Fig. 91 e 92 la faccia $\bar{1}\bar{1}0$ era men piana ed alcun po' a tramoggia, e che lo stesso fenomeno si mostrava sulla faccia $\bar{1}00$ del cristallo indicato colle Fig. 93 e 94, come se tali faccie fossero quelle, per cui il cristallo aderiva alle pareti del vaso nel quale si operò la cristallizzazione.

Le faccie della forma 211 sono spesso molto inegualmente sviluppate, e di frequente alcune mancano. Il cristallo delle Fig. 91 e 92 e quello delle Fig. 93 e 94 non avevano che due delle otto faccie della forma 211, le quali fossero un po' ampie: le altre od erano appena indicate, o mancavano affatto mostrando la emiedria detta indeterminata dallo Scacchi.

Le faccie 001 hanno splendore vetroso traente al perlaceo. Le altre faccie hanno splendore meno vivo, e traente al grasso. Le faccie 211 somministrano in generale più immagini.

Sfaldatura 001 facile e discretamente perfetta. Sfaldature 110 facili e fibrose; sfaldatura 100 meno chiara.

Gli assi di elasticità ottica sono per ordine di grandezza [001], [100], [010].

CAPO X.

Bibromuro di difosfonio monoetilenico exametilico.

$$P_2\left[(CH_3)_6(C_2H_4)''\right]Br_2 .$$

Hofmann ottenne una volta questo sale trattando il bibromuro di etilene $C_2H_4Br_2$ con grande eccesso di trimetilfosfina $P(CH_3)_3$. Sciogliendo quindi nell'alcole, e lasciando svaporare all'aria si ottennero i cristallini qui descritti. Malgrado tutti gli sforzi non si riescì ad ottenere una seconda volta cristalli della stessa natura ben formati.

Assai solubile nell'acqua e nell'alcole, insolubile nell'etere.

La costituzione di questo sale si ritiene dall' Hofmann come analoga a quella di un bibromuro di ammonio biatomico $N_2H_8Br_2$ in cui l'azoto sia sostituito dal fosforo, e degli otto equivalenti di idrogeno; sei siano sostituiti da altrettanti equivalenti di metile CH_3, e due da un equivalente di etilene C_2H_4, il quale è qui biatomico (1).

(1) Da lettera privata dell'Hofmann.

Sistema monoclino :

100, 101 = 17°. 45′ ; 010, 111 = 57°. 47′ ; 001, 101 = 20°. 4′.

Forme osservate :

001, 110, $\bar{1}01$ (Fig. 96) .

Angoli		Calcolati	Osservati
001, 110	=	58°. 22′	58°. 22′
001, $\bar{1}01$	=	80 . 52	80 . 50
110, $\bar{1}10$	=	83 . 13	83 . 12
110, $\bar{1}01$	=	108 . 35	108 33 .

Secondo Naumann :

a:b:c::1,1255:1:0,5445 ; γ = 37°. 49′ ;

Forme osservate:

0P , ∞P , P∞ .

Secondo Weiss:

a:b:c::1:0,5445:1,1255 ; a0c = 142°. 11′ ;

Forme osservate :

∞a:∞b:c ; a:b:∞c ; —a:∞b:c .

Secondo Levy:

MM = 83°. 13′ ; MP = 121°. 38′ ; b:h::1:0,9884 ;

Forme osservate:

P, M, a′ .

Combinazioni osservate :

110, 001 (Fig. 95).

La faccia $\bar{1}01$ non si osservò direttamente, ma si ottenne colla sfaldatura. V'ha anche una sfaldatura 001 nitida e facile come la precedente.

CAPO XI.

Biioduro di difosfonio monoetilenico exaetilico.

$$P_2\left[(C_2H_5)_6(C_2H_4)''\right]I_2 .$$

Hofmann ad ottenere questo sale lascia digerire in presenza dell'alcole bibromuro di etilene e trietilfosfina nella proporzione di un equivalente

del primo e due della seconda. Si ottiene in tal guisa il bibromuro di difosfonio monoetilenico exaetilico giusta la equazione

$$C_2H_4Br_2 + 2\left[P(C_2H_5)_3\right] = P_2\left[(C_2H_5)_6(C_2H_4)''\right]Br_2 .$$

Sciogliendo quindi la massa cristallina così ottenuta nell'acqua, trattando con ossido di argento, e filtrando il bromuro di argento, si ha il biidrato di biossido di difosfonio monoetilenico exaetilico

$$P_2\left[(C_2H_5)_6(C_2H_4)''\right]\left\{\begin{matrix} \\ H_2 \end{matrix}\right\}O_2 .$$

Saturata quindi la dissoluzione alcalina del biidrato con acido iodidrico si ottiene il biioduro qui descritto, il quale cristallizza facilmente per poco che si concentri la soluzione. Ridisciogliendo con acqua bollente e lasciando raffreddare si ottengono lunghi aghi determinabili.

Hofmann ritiene, che questo sale abbia una costituzione analoga a quella di un biioduro di ammonio biatomico $N_2H_8I_2$ in cui l'azoto sia sostituito dal fosforo, e degli otto equivalenti di idrogeno, sei siano sostituiti da altrettanti equivalenti di etile C_2H_5, e due da un equivalente di etilene C_2H_4. Inoltre osserva l'Hofmann come l'etilene biatomico in questo e negli altri sali biatomici, che nella memoria si descrivono, sia come il cemento il quale avvinghia due molecole di trietilfosfina in guisa da produrre composti stabili, ed a meglio esprimere la sua idea rappresenta il biioduro, di cui ragioniamo, colla formola

$$\left[(C_2H_4)''\left\{\begin{matrix} P(C_2H_5)_3 \\ P(C_2H_5)_3 \end{matrix}\right\}\right]I_2 .$$

100 parti di acqua bollente sciolgono 458 parti del sale, e 100 di acqua a 12° ne ritengono solo 3 parti.

Poco solubile nell'alcole, ed insolubile nell'etere.

Fonde a 231° senza alterarsi (1).

Sistema trimetrico :

$$100, 110 = 60°.\ 18' \ ; \quad 001, 101 = 45°.\ 9' \ ;$$

Forme osservate :

110, 101 (Fig. 29).

(1) Da lettera privata dell'Hofmann. Vedi anche Researches on the Phosphorus Bases. — Proceedings of the Roy. Soc. 24 febbr. 1859.

Angoli		Calcolati	Osservati
110, $\bar{1}10$	=	59°. 24′	59°. 22′
110, 101	=	69 . 26	69 . 21
101, $\bar{1}01$	=	90 . 18	90 . 16

Secondo Naumann:

$$a:b:c::1,0052:1:0,5704\ ;$$

Forme osservate :

$$\infty P\ ,\quad \breve{P}\infty\ .$$

Secondo Weiss :

$$a:b:c::1:0,5704:1,0052\ ;$$

Forme osservate :

$$a:b:\infty c\ ;\quad a:\infty b:c\ .$$

Secondo Levy :

$$MM = 120°.\ 36'\ ;\quad b:h::1:0,8732\ ;$$

Forme osservate :

$$M\ ,\quad e'\ .$$

Combinazioni osservate :

110, 101 (Fig. 26 e 27);

110, 101 con altre faccie rotondate, come nella Fig. 28, di cui non si riescì a determinare il simbolo.

Le faccie 110 sono talvolta assai inegualmente sviluppate come nella Fig. 27.

I cristalli hanno abito di aghi allungati nella direzione [010] i quali se piccini sono trasparenti, ma sono lattiginosi e vuoti all'interno se più grossi.

Sfaldature 110, 101 facili e nitide.

Le faccie 110 hanno splendore vetroso : le faccie 101 lo hanno invece perlaceo.

I cristalli come quelli della Fig. 27, e sono così in maggior numero, hanno abito monoclino, ma le misure degli angoli 110, 101 e $\bar{1}10$, $\bar{1}01$ diedero risultati sì vicini, da non confermare questo dubbio. Inoltre il piano di polarizzazione della luce passante per le faccie 101, $\bar{1}0\bar{1}$ ovvero $10\bar{1}$, $\bar{1}01$ parallelamente allo spigolo [010] del prisma fatto da esse faccie non cangia, locchè non succederebbe ove l'asse cristallografico [010] non fosse perpendicolare agli altri due.

L'angolo 101, 10$\bar{1}$ è sì vicino a 90°, che i cristalli si potrebbero ritenere come dimetrici emiedri. Noi però nol crediamo probabile, giacchè non si trovarono che le due sfaldature 110, $\bar{1}$10 invece delle quattro corrispondenti al sistema dimetrico, ed inoltre le misure dell'angolo 101, $\bar{1}$01 diedero sempre un risultato maggiore dell'angolo retto.

CAPO XII.

Cloroplatinato di fosfonio tetraetilico.

$$P(C_2H_5)_4Cl + PtCl_2 .$$

Trattando una soluzione di ioduro di fosfonio tetraetilico $P(C_2H_5)_4I$ con ossido di argento, se ne precipita tutto lo iodio, e la soluzione filtrata contiene un corrispondente ossido di fosfonio tetraetilico. Aggiungendo acido cloridrico l'ossido si converte in cloruro, ed aggiungendo ancora bicloruro di platino si ottiene un precipitato, che è appunto il cloroplatinato, del quale ragioniamo.

Solubile con difficoltà nell'acqua bollente, insolubile nell'alcole e nell'etere (1).

Sistema monometrico;

Forme osservate:

100, 111 (Fig. 34).

Angoli		Calcolati	Osservati
—		—	—
001, 111	=	54°. 44′	54°. 40′
111, 11$\bar{1}$	=	70 . 32	70 . 36 .

Le faccie del cubo 100 sono assai brillanti: quelle dell'ottaedro 111 presentano spesso delle cavità a tramoggia.

Niuna influenza sulla luce polarizzata.

Colore arancio rosso.

---

(1) Hofmann e Cahours. Recherches sur les bases phosphorées. Ann. de Chim. et de Phys. 1857. Tom. LI. pag. 21.

CAPO XIII.

Cloroplatinato di fosfonio monometilico trietilico.

$$P\left[(C_2H_5)_3(CH_3)\right]Cl + PtCl_2 .$$

Ad una soluzione eterea di trietilfosfina aggiungendo ioduro di metile ottiensi ioduro di fosfonio monometilico trietilico, cioè :

$$P\left[(C_2H_5)_3(CH_3)\right]I .$$

Separando poscia l'iodio con ossido di argento, ottiensi in soluzione un ossido di fosfonio monometilico trietilico, il quale si converte in cloruro coll'acido cloridrico. Aggiungendo finalmente alla soluzione di questo cloruro del bicloruro di platino si ha un precipitato, che è appunto il cloroplatinato, del quale ragioniamo.

Solubile nell'acqua bollente, insolubile nell'alcole e nell'etere (1).

Sebbene gli autori di questo sale indichino nella loro memoria, che esso è in cuboottaedri, si credette tuttavia necessario il verificare questa asserzione mediante misure di angoli, ed esame dei caratteri ottici.

Sistema monometrico;

Forme osservate :

100, 111 .

Angoli		Calcolati	Osservati
$111, 11\bar{1}$	=	70°. 32′	70°. 26′
$11\bar{1}, \bar{1}1\bar{1}$	=	70 . 32	71 . 0
$\bar{1}1\bar{1}, \bar{1}11$	=	70 . 32	70 . 45
$\bar{1}11, 111$	=	70 . 32	70 . 20
100, 111	=	54 . 44	54 . 15 .

Si trovano ottaedri (Fig. 32), e cuboottaedri (Fig. 33), ma le faccie del cubo sono poco sviluppate.

Le faccie mostrano talvolta vuoti a tramoggia.

Sfaldatura 111.

Niuna influenza sulla luce polarizzata.

Colore arancio rossigno - Splendore vivo.

---

(1) Hofmann e Cahours. Recherches sur les bases phosphorées. Ann. de Chim. et de Phys. 1857. Tom. LI. pag. 31.

CAPO XIV.

Cloroplatinato di fosfonio monoossietilico trietilico.

$$P\left[(C_2H_5)_3(C_2H_5O)\right]Cl + PtCl_2 .$$

Ad ottenere ed intendere questo sale procede e ragiona l'Hofmann come segue:

Trattando con ossido di argento il bromuro di fosfonio bromoetilico trietilico, di cui al capo V, si precipita non solo il bromo, che ivi è combinato al fosfonio bromoetilico trietilico $P\left[(C_2H_5)_3(C_2H_4Br)\right]$, ma ben anco il bromo contenuto nel bromoetile C_2H_4Br del fosfonio. Al bromo di questo bromoetile si sostituisce in tale reazione HO cioè il residuo dell'acqua H_2O, giusta la equazione

$$C_2H_4Br + \left(\begin{matrix}Ag\\H\end{matrix}\right)O = C_2H_4(HO) + AgBr ;$$

si ha così nella dissoluzione l'idrato dell'ossido di un fosfonio, la cui costituzione e completa formazione è indicata dalla equazione

$$P\left[(C_2H_5)_3(C_2H_4Br)\right]Br + 2.\left(\begin{matrix}Ag\\H\end{matrix}\right)O = 2.AgBr + \left.\begin{matrix}P\left[(C_2H_5)_3(C_2H_4HO)\right]\\H\end{matrix}\right\}O .$$

Il fosfonio, di cui si ha così l'ossido idrato, si può ritenere come analogo al fosfonio tetraetilico $P(C_2H_5)_4$, in uno dei cui equivalenti di etile C_2H_5 un atomo di idrogeno H sia sostituito dal residuo dell'acqua, cioè da HO. Il nuovo radicale $C_2H_4HO = C_2H_5O$ potrà dirsi ossietile, e monoossietilico trietilico si dirà il fosfonio ottenuto.

Aggiungendo acido cloridrico alla soluzione dell'ossido idrato, lo si converte nel cloruro corrispondente, ed aggiungendo ancora bicloruro di platino, si ha il cloroplatinato, che imprendiamo a descrivere.

Insolubile nell'alcole e nell'etere. Mediocremente solubile nell'acqua calda, da cui cristallizza senza scomporsi (1).

Sistema monometrico;

Forme osservate:

111 (Fig. 35).

---

(1) Da lettera privata dell'Hofmann.

Angoli		Calcolati	Osservati
111, 11$\bar{1}$	=	70°. 32′	70°. 7′
11$\bar{1}$, $\bar{1}$1$\bar{1}$	=	70 . 32	70 . 33
$\bar{1}$1$\bar{1}$, $\bar{1}$11	=	70 . 32	70 . 16
$\bar{1}$11, 111	=	70 . 32	71 . 4
111, $\bar{1}$1$\bar{1}$	=	109 . 28	109 . 32
$\bar{1}$11, 11$\bar{1}$	=	109 . 28	109 . 44

Gli ottaedri sono minutissimi, e non mostrano influenza sulla luce polarizzata.

Colore arancio.

CAPO XV.

Cloroplatinato di fosfonio monobromoetilico trietilico.

$$P\left[(C_2H_5)_3(C_2H_4Br)\right]Cl + PtCl_2 .$$

Hofmann prepara questo sale aggiungendo alla dissoluzione di $P\left[(C_2H_5)_3(C_2H_4Br)\right]Br$, di cui al capo V, nitrato di argento in guisa da precipitare il bromo combinato col fosfonio trietilico bromoetilico. Filtrando, e precipitando con acido cloridrico l'argento si ottiene un cloruro corrispondente al predetto bromuro, ed aggiungendo alla soluzione filtrata una soluzione di bicloruro di platino si ha un precipitato, che è appunto il cloroplatinato del quale ragioniamo. Sciogliendolo con acqua bollente, ed anche meglio con acido cloridrico, si hanno col raffreddamento bellissimi aghi (1).

Sistema monoclino:

100, 101 = 55°. 59′; 010, 111 = 60°. 37′; 001, 101 = 33°. 3′;

Forme osservate:

100, 010, 110, 101, $\bar{1}$01, 011, 111, $\bar{1}$11, $\bar{2}$11 (Fig. 70).

Angoli		Calcolati	Osservati
100, 010	=	90°. 0′	
100, 110	=	45 . 55	45°. 57′

(1) Hofmann. Researches on the Phosphorus Bases. — Proceedings of the Royal Society Vol. IX. pag. 287.

Angoli		Calcolati	Osservati
—		—	—
100, 101	=	55°. 59′	55°. 51′
100, $\bar{1}$01	=	122 . 40	122 . 40
100, 011	=	89 . 12	89 . 12
100, 111	=	60 . 50	61 . 1
100, $\bar{1}$11	=	117 . 56	117 . 50
100, $\bar{2}$11	=	137 . 4	136 . 54
010, 110	=	44 . 5	
010, 101	=	90 . 0	
010, $\bar{1}$01	=	90 . 0	
010, 011	=	55 . 49	55 . 49
010, 111	=	60 . 37	
010, $\bar{1}$11	=	60 . 14	
010, $\bar{2}$11	=	67 . 30	
110, $\bar{1}$10	=	88 . 11	88 . 7
110, 101	=	67 . 6	67 . 8
110, $\bar{1}$01	=	112 . 3	111 . 53
110, 011	=	65 . 35	65 . 29
110, 01$\bar{1}$	=	66 . 48	66 . 50
110, 111	=	46 . 15	46 . 6
110, $\bar{1}$1$\bar{1}$	=	89 . 14	
110, $\bar{1}$11	=	88 . 15	
110, 11$\bar{1}$	=	46 . 57	
110, $\bar{2}$11	=	103 . 33	
110, 21$\bar{1}$	=	38 . 21	
101, $\bar{1}$01	=	66 . 41	66 . 49
101, 011	=	46 . 6	46 . 2
101, 111	=	29 . 23	29 . 18
101, $\bar{1}$11	=	69 . 54	
101, $\bar{2}$11	=	86 . 42	
$\bar{1}$01, 011	=	46 . 28	46 . 24
$\bar{1}$01, 111	=	69 . 49	
$\bar{1}$01, $\bar{1}$11	=	29 . 46	
$\bar{1}$01, $\bar{2}$11	=	29 . 36	
011, 01$\bar{1}$	=	111 . 38	111 . 37
011, 111	=	28 . 22	28 . 11

Angoli	Calcolati	Osservati
$011, \bar{1}1\bar{1}$	= 109°. 11′	
$011, \bar{1}11$	= 28 . 44	28 . 36
$011, 11\bar{1}$	= 108 . 36	
$011, \bar{2}11$	= 47 . 52	47°. 42′
$011, 21\bar{1}$	= 103 . 56	
$111, \bar{1}1\bar{1}$	= 121 . 14	121 . 23
$111, \bar{1}11$	= 57 . 7	56 . 49
$111, 11\bar{1}$	= 93 . 12	
$111, \bar{2}11$	= 76 . 14	75 . 53
$111, 21\bar{1}$	= 82 . 5	
$\bar{1}11, 11\bar{1}$	= 120 . 28	
$\bar{1}11, \bar{2}11$	= 19 . 7	19 . 4
$\bar{1}11, 21\bar{1}$	= 124 . 23	
$\bar{2}11, 21\bar{1}$	= 134 . 59	

Secondo Naumann :

$$a:b:c::0,6580:1:0,9685 \quad \gamma = 89°.\ 2' \ ;$$

Forme osservate :

$\infty \mathfrak{P} \infty$, $\infty \mathfrak{P} \infty$, ∞P , $-\mathfrak{P} \infty$, $\mathfrak{P} \infty$, $\mathfrak{P} \infty$, $-P$, P , $2 \mathfrak{P} 2$.

Secondo Weiss :

$$a:b:c::1:0,9685:0,6580 \ ; \quad a \circ c = 90°.\ 58' \ ;$$

Forme osservate :

$a:\infty b:\infty c$; $\infty a:b:\infty c$; $a:b:\infty c$; $a:\infty b:c$;
$-a:\infty b:c$; $\infty a:b:c$; $a:b:c$; $-a:b:c$; $-\frac{1}{2}a:b:c$.

Secondo Levy :

$$MM = 88°.\ 11' \ ; \quad MP = 90°.\ 40' \ ; \quad b:h::1:0,4726 \ ;$$

Forme osservate :

h' , g' , M , o' , a' , c' , $d^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{1}{2}}$, a_3 .

Combinazioni osservate :

$110, 011$; $100, \bar{1}11, \bar{1}01$	(Fig. 71) ;
$110, 011, 100$; $101, \bar{1}01$	(Fig. 77 e 78) ;
$110, 011$; $100, \bar{1}11, \bar{2}11, \bar{1}01$	(Fig. 72) ;
$110, \bar{1}11$; $100, \bar{1}01, 011, 111$	(Fig. 73) ;
$110, 011$; $100, \bar{1}11, \bar{2}11, 111, 101$	(Fig. 74) ;
$110, 011, 100$; $010, 011, \bar{1}01, \bar{2}11$	(Fig, 75 e 76).

I cristalli hanno abito di prismi allungati nella direzione [001]. Le faccie della forma 011 sono spesso assai inegualmente sviluppate, come appare dall' esempio indicato nelle Fig. 75 e 76, ed in quello delle Fig. 77 e 78. Le forme 111, $\bar{1}11$ e $\bar{2}11$ non hanno sempre in tali casi tutte le loro faccie, come mostra l'esempio delle Fig. 75 e 76 per la forma $\bar{2}11$.

Sfaldature 100, 110.

Splendore vetroso vivace.

Il piano degli assi ottici è parallelo all' asse di simmetria [010], giacchè attraverso le faccie del prisma 110 scorgonsi anelli, i cui centri sono simmetricamente disposti rispetto a [010], e sono collocati in un piano più prossimo a 100, che non a 001. La mediana principale è perpendicolare a [010].

Colore arancio volgente al giallo negli aghi minuti, ed al rosso nei cristalli più grossi.

CAPO XVI.

Cloroplatinato di difosfonio monoetilenico exaetilico.

$$P_2\left[(C_2H_5)_6(C_2H_4)''\right]Cl_2 + 2\,(PtCl_2)\ .$$

Hofmann prepara questo sale precipitando per mezzo dell'ossido di argento l'iodio contenuto in una soluzione del biioduro di cui al capo XI, cioè $P_2\left[(C_2H_5)_6(C_2H_4)''\right]I_2$. Trattando poi la soluzione con acido cloridrico, ed aggiungendo bicloruro di platino, si ottiene un precipitato, che è il cloroplatinato qui descritto. Sciogliendolo in acido cloridrico concentrato, e lasciando raffreddare si ottiene in aghi determinabili (1).

Sistema monoclino:

$$100, 001 = 82^\circ.\ 36'\ ;$$

Forme osservate:

100, 010, 001 (Fig. 37).

Angoli		Calcolati	Osservati
100, 010	=	90°. 0′	90°. 3′
100, 001	=	82 . 36	82 . 36
010, 001	=	90 . 0	89 . 57 .

(1) Hofmann. Researches on the Phosphorus Bases. — Proceedings of the Roy. Soc. 24 feb. 1859.

Secondo Naumann:

$$\gamma = 82^\circ.\ 36'\ ;$$

Forme osservate:

$$\infty \breve{P} \infty\ ,\quad \infty \bar{P} \infty\ ,\quad 0P\ .$$

Secondo Weiss:

$$a0c = 97^\circ.\ 24'\ ;$$

Forme osservate:

$$a:\infty b:\infty c\ ;\quad \infty a:b:\infty c\ ;\quad \infty a:\infty b:c\ .$$

Secondo Levy:

$$h'P = 97^\circ.\ 24'\ ;$$

Forme osservate:

$$h',\quad g',\quad P\ .$$

Combinazione osservata:

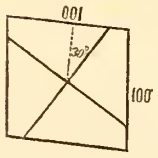
100, 010, 001 (Fig. 36).

I cristalli hanno abito di aghi assai allungati nella direzione [010], i quali senza il soccorso dei caratteri ottici si scambierebbero per trimetrici. Sono vuoti all'interno, se le loro dimensioni giungono a mezzo millimetro, ed il vuoto ha foggia di piramide a tramoggia, cui è base 010, e che scende fino al centro del cristallo, in guisa che la faccia 010 si riduce spesso ad esilissimo anello parallelogrammico. La punta opposta del cristallo è irregolare, come se per essa avesse il cristallo aderito alle pareti del vaso, nel quale ebbe luogo la cristallizzazione.

La faccia 001 è sovente alquanto più ampia di 100, ed i cristalli pigliano allora abito di lamelle.

Sfaldature 100, 010, 001 nitide e facili, specialmente 010.

Cristalli otticamente negativi. Il primo degli assi ottici è parallelo alla linea di simmetria [010] e la mediana principale è perpendicolare a tale linea, e fa angolo di circa 30° colla normale alla faccia 001. Infatti in una lastra parallela a 010 la luce si estingue nelle direzioni indicate nella adiacente figura, e tra esse la linea prossima alla bisettrice dell'angolo 100, 001 si mostra col quarzo di maggiore elasticità. Inoltre si veggono gli anelli attraverso le faccie 001 ed in un piano parallelo alla linea di simmetria 010 ed assai inclinato alla normale a tale faccia. L'angolo degli assi ottici visti in tal guisa attraverso le faccie 001 appare prossimo a 110°.



Splendore vetroso vivace. Colore arancio assai bello.

CAPO XVII.

Cloroplatinato di fosfarsonio monoetilenico exaetilico.

$$PAs\left[(C_2H_5)_6(C_2H_4)''\right]Cl_2+(PtCl_2)_2 .$$

Hofmann ad ottenere questo sale fa digerire durante 24 ore, in un tubo suggellato, ed alla temperie di 100°, la trietilarsina col bromuro di fosfonio bromoetilico trietilico. Si ha così una massa salina, che è un bibromuro di fosfarsonio monoetilenico exaetilico, giusta la seguente equazione

$$P\left[(C_2H_5)_3(C_2H_4Br)\right]Br+As(C_2H_5)_3=PAs\left[(C_2H_5)_6(C_2H_4)''\right]Br_2 .$$

Trattando questo bibromuro a freddo (chè a caldo la reazione dà risultati affatto diversi) coll'ossido di argento, si precipita il bromo, e lo si converte in un ossidrato corrispondente, il quale alla sua volta si cangia in cloruro coll'aggiunta dell'acido cloridrico, e somministra quindi il cloroplatinato qui descritto, ove gli si aggiunga bicloruro di platino.

Quasi insolubile nell'acqua; solubile nell'acido cloridrico bollente, dal quale si depone per raffreddamento in cristalli determinabili (1).

Sistema triclino:

$100, 010 = 81°. 52'$; $100, 001 = 88°. 14'$; $010, 001 = 89°. 9'$; $100, \bar{1}11 = 120°. 18'$; $010, \bar{1}11 = 64°. 4'$:

Forme osservate:

$100, 010, 001, 011, 02\bar{1}, \bar{1}11$ (Fig. 50).

Angoli		Calcolati	Osservati
—		—	—
100, 010	=	81°. 52'	81°. 52'
100, 001	=	88 . 14	88 . 14
100, 011	=	83 . 48	83 . 52
$100, 02\bar{1}$	=	84 . 14	
$100, \bar{1}11$	=	120 . 18	120 . 18
010, 001	=	89 . 9	89 . 9
010, 011	=	53 . 3	

(1) Da lettera privata dell'Hofmann.

Angoli		Calcolati	Osservati
—		—	—
010, 02$\bar{1}$	=	34°. 25′	34°. 28′
010, $\bar{1}$11	=	64 . 4	63 . 53
001, 011	=	36 . 6	
001, 02$\bar{1}$	=	123 . 34	123 . 38
001, $\bar{1}$11	=	46 . 54	46 . 37 .
011, 02$\bar{1}$	=	87 . 29	
011, $\bar{1}$11	=	36 . 30	
02$\bar{1}$, $\bar{1}$11	=	91 . 15	

Secondo Naumann :

a:b:c:: 0,8533 : 1,1689 : 1

$\alpha = 81°. 53'$; $\beta = 88°. 20'$; $\gamma = 90°. 36'$;

Forme osservate :

$\infty\bar{P}\infty$; $\infty\breve{P}\infty$; 0P ; $\breve{P}'\infty$; $2\breve{P}_{/}\infty$; P′ .

Secondo Weiss :

a:b:c:: 1 : 1,1689 : 0,8533

aob = 98°. 7′ ; boc = 90°. 36′ ; coa = 91°. 40′ ;

Forme osservate :

a:∞b:∞c ; ∞a:b:∞c ; ∞a:∞b:c ; ∞a:b:c ; ∞a:b:—2c ; —a:b:c .

Secondo Levy :

MT = 98°. 8′ ; MP = 90°. 51′ : PT = 91°. 46′

D:F:H:: 1 : 1,1689 : 0,8533 ;

Forme osservate :

T , M , P , d′, $c^{\frac{1}{2}}$, e′ .

Combinazioni :

100, 010, 001	(Fig. 46);
100, 010, 001 ; $\bar{1}$11	(Fig. 47);
100, 010, 001 ; $\bar{1}$11, 02$\bar{1}$	
100, 010, 001 ; $\bar{1}$11, 02$\bar{1}$, 011	(Fig. 48).

Geminati ad asse di geminazione [001] Fig. 49. Si potè accertare per osservazioni di zone e misure di angoli , che l'asse di geminazione

è veramente parallelo allo spigolo [001], e non perpendicolare ad una faccia del sistema cristallino. Infatti nel geminato della Fig. 49 la sola zona [001] è comune ai due gemelli, ed inoltre le faccie $\bar{1}00$ e $(\bar{1}00)$ dei due gemelli, come pure 010 e $(0\bar{1}0)$ si mostrarono prossimamente parallele.

Nel geminato della Fig. 49 la linea di congiunzione dei gemelli sulle faccie 010 è parallela a [001], ma se ne rinvenne un altro, in cui la linea di congiunzione è quasi perpendicolare a [001], ed il cui abito è quindi assai diverso dal geminato della Fig. 49.

I cristalli hanno abito di piccolissimi prismi talvolta allungati nella direzione [001].

Sfaldature 100 e 001 nitide, e così facili, che talvolta si manifestano durante la misura forse a cagione del calore irradiante dalla faccia, che per la estrema piccolezza dei cristalli è forza avvicinar loro di moltissimo.

Colore arancio rossigno.

Nei geminati, come quelli della Fig. 49, esaminati al microscopio polarizzatore normalmente a 010, il piano di polarizzazione non è alterato nella direzione di due linee, che fanno angolo di 26° circa coll'asse di geminazione. Una lastra di quarzo parallela al proprio asse svolge colori, se posta secondo le direzioni predette.

CAPO XVIII.

Cloroplatinato di fosfammonio monoetilenico tetraetilico.

$$NP\left[H_2(C_2H_5)_4(C_2H_4)''\right]Cl_2 + 2(PtCl_2)\ .$$

Hofmann ottiene questo sale facendo agire la etilamina $N\left[H_2(C_2H_5)\right]$ sul bromuro di fosfonio monobromoetilico trietilico, di cui al capo V. Le due sostanze si combinano con svolgimento di calore, e danno un bibromuro di fosfammonio monoetilenico tetraetilico, giusta la equazione

$$P\left[(C_2H_5)_3(C_2H_4Br)\right]Br + N\left[H_2(C_2H_5)\right] = NP\left[H_2(C_2H_5)_4(C_2H_4)''\right]Br_2\ .$$

Trattando questo bibromuro con ossido di argento per eliminarne il bromo, ed aggiungendo poscia acido cloridrico, e finalmente bicloruro di platino, si ha il cloroplatinato qui descritto.

La sua costituzione è analoga a quella di un cloroplatinato di ammonio biatomico $N_2H_8Cl_2 + 2(PtCl_2)$, nel quale un equivalente di azoto sia sostituito dal fosforo, quattro equivalenti di idrogeno da altrettanti di etile, e due altri equivalenti di idrogeno da un equivalente di etilene biatomico.

Solubile nell'acqua bollente, da cui si ottiene in cristalli determinabili (1).

Sistema monoclino :

100, 101 = 43°. 35′ ; 010, 111 = 55°. 36′ ; 001, 101 = 43°. 17′ ;

Forme osservate :

100, 001, 110, 011 (Fig. 42).

Angoli		Calcolati	Osservati
100, 001	=	86°. 52′	86°. 52′
100, 110	=	44 . 55	45 . 8
100, 011	=	87 . 47	87 . 38
001, 110	=	87 . 47	87 . 53
001, 011	=	44 . 46	44 . 47
110, $\bar{1}$10	=	90 . 10	90 . 10
110, 011	=	58 . 21	58 . 5
110, 01$\bar{1}$	=	61 . 59	62 . 11
011, 01$\bar{1}$	=	90 . 29	90 . 29 .

Secondo Naumann :

a : b : c : : 0,9945 : 1 : 1,0013 ; γ = 86°. 52′ ;

Forme osservate :

∞P̄∞ , 0P , ∞P , P̄∞ .

Secondo Weiss :

a : b : c : : 1 : 1,0013 : 0,9945 ; a o c = 93°. 8′ ;

Forme osservate :

a : ∞b : ∞c ; ∞a : ∞b : c ; a : b : ∞c ; ∞a : b : c .

(1) Da lettera dell'Hofmann.

Secondo Levy :

$$MM = 90^\circ.\ 10' \ ; \quad MP = 92^\circ.\ 13' \ ; \quad b:h::1:0{,}7027 \ ;$$

Forme osservate :

$$h', \ P, \ M, \ c'.$$

Combinazioni osservate :

110, 011	(Fig. 41);
110, 011 ; 001	(Fig. 40);
100, 001, 110, 011	(Fig. 38 e 39).

I cristalli sono emiedri. Le faccie 100 e 001 hanno le loro parallele, ma delle quattro faccie delle forme 110 e 011 non si osservarono mai che due non parallele, come indicano le citate figure.

Tutti i cristalli osservati hanno le faccie $110, \bar{1}10$ e le faccie $0\bar{1}1, 0\bar{1}\bar{1}$ come nelle Figure 38, 40 e 41. Un solo cristallo (Fig. 39) mostrò per contro le faccie $\bar{1}\bar{1}0, 1\bar{1}0$ e le faccie $011, 01\bar{1}$. È chiaro che il cristallo della Fig. 39 è simmetrico, ma non sovrapponibile al cristallo della Fig. 38.

I cristalli hanno spesso abito di tavole triangolari come nelle Fig. 38 e 39; talvolta invece sono tetraedri (Fig. 41), o tetraedri con troncature come nella Fig. 40.

Le faccie sono assai brillanti, ma sempre alquanto o molto rotondate, per cui danno al goniometro più immagini e misure disparate. Giovino ad esempio di queste discrepanze le osservazioni fatte sopra due cristalli.

Angoli osservati		Sul 1.° cristallo	Sul 2.° cristallo	Calcolati
—		—	—	—
100, 001	=	86°. 30′	87°. 24′	86°. 52′
100, 110	=	45 . 7	44 . 39	44 . 55
$\bar{1}00, \bar{1}10$	=	45 . 2	45 . 47	
$100, 0\bar{1}1$	=	87 . 10	88 . 0	87 . 47
$\bar{1}00, 0\bar{1}\bar{1}$	=	87 . 27	87 . 55	
001, 110	=	87 . 30	88 . 10	87 . 47
$00\bar{1}, \bar{1}10$	=	87 . 38	87 . 38	
$001, 0\bar{1}1$	=	44 . 2	45 . 16	44 . 46
$00\bar{1}, 0\bar{1}\bar{1}$	=	45 . 43	44 . 52	
$110, \bar{1}10$	=	90 . 41	90 . 25	90 . 10

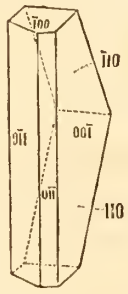
Angoli osservati	Sul 1.° cristallo	Sul 2.° cristallo	Calcolati
$110, 0\bar{1}1$	= 117°. 20′	118°. 10′	118°. 1′
$\bar{1}10, 0\bar{1}\bar{1}$	= 118 . 13	117 . 24	
$110, 0\bar{1}\bar{1}$	= 121 . 43	121 . 49	121 . 39
$\bar{1}10, 0\bar{1}1$	= 121 . 24	122 . 30	
$0\bar{1}1, 0\bar{1}\bar{1}$	= 90 . 15	89 . 52	90 . 29 .

E vuolsi notare, che nel quadro precedente si assunse la media delle letture fatte corrispondentemente a 100 ed alla sua parallela $\bar{1}00$, come pure a 001 ed alla sua parallela $00\bar{1}$, poichè altrimenti le differenze tra gli angoli, che dovrebbero essere eguali, riescono anche maggiori di ciò, che appare dal quadro precedente.

Gli angoli registrati nel quadro della pag. 343 come risultanti dalla osservazione sono le medie delle misure prese sopra sei cristalli diversi, alle quali si diedero pesi diversi a seconda della perfezione dei cristalli. È degno di nota, come codeste medie non si scostino molto dai risultati del calcolo, quando si assumano per esatte le osservazioni degli angoli $100, 001$; $110, \bar{1}10$; $011, 01\bar{1}$.

Un'altra difficoltà, che si incontra nell'esatta determinazione di questi cristalli, è il piccolo divario tra gli angoli delle zone [001] e [100], ossia la quasi identità dei tre assi a, b, c di Naumann e Weiss. Infatti $110, \bar{1}10 = 90°. 10'$; $011, 01\bar{1} = 90°. 29'$ sono i risultati delle medie delle osservazioni, ma le discrepanze fra le misure speciali sono assai superiori ai 19′ di cui differiscono tali angoli. E così a modo di esempio si osserva nel quadro delle misure prese sopra i due cristalli della pagina precedente, che in essi è mediamente (precisamente all'opposto di ciò che dovrebbe essere) $110, \bar{1}10 > 90°. 29'$, e $011, 01\bar{1} < 90°. 10'$.

A ciò si aggiunge ancora, che girando uno di questi cristalli per esempio quello della Fig. 38 di 180° attorno [100] e poscia di 86°. 52′ attorno [010], esso viene ad occupare una posizione come quella dell'adiacente Figura, le cui faccie sarebbero omninamente parallele a quelle della Fig. 38 se fosse $110, \bar{1}10 = 0\bar{1}1, 0\bar{1}\bar{1}$. Ora siccome il divario fra questi due angoli non è con sicurezza discernibile stante la imperfezione delle faccie dei cristalli, così ne nasce, che dalle misure degli angoli non si ha criterio sicuro per distinguere le faccie 110 dalle faccie 011, e per orientare i cristalli.



Il solo criterio, che in realtà ci guidò nella orientazione dei cristalli non fu altro che il seguente, il quale a dir lo vero è non poco debole. Si osservò infatti in tutti i cristalli tabulari come quelli della Fig. 38, che mentre le due faccie ivi simboleggiate con 110 e $\bar{1}10$ erano pressochè egualmente sviluppate, delle due faccie posteriori simboleggiate con $0\bar{1}1$ e $0\bar{1}\bar{1}$ l'una $0\bar{1}1$ era assai più sviluppata dell'altra $0\bar{1}\bar{1}$. Un simile fatto si osserva pure nei cristalli tetraedrici come quelli della Fig. 41, benchè vi sia meno distinto. Si ammise quindi, che in tutti questi cristalli le coppie di faccie egualmente sviluppate appartenessero alla forma 110, e le coppie di faccie inegualmente sviluppate alla forma 011. Ma egli è chiaro che, se la ineguaglianza di sviluppo delle faccie non risultasse che dalla posizione del cristallo nell'atto della sua formazione, e non fosse conseguenza della sua intima struttura, come l'esperienza ha in tanti casi dimostrato, il criterio da noi adottato sarebbe fallace. Quindi è, che non possiamo neppure con sicurezza affermare quale dei due angoli 110, $\bar{1}10$ ovvero 011, $01\bar{1}$ sia il maggiore.

La piccolezza dei cristalli fu di ostacolo allo studio delle sfaldature.

Colore arancio rossigno.

Il piano di polarizzazione della luce non cangia nel passare attraverso le faccie 001, $00\bar{1}$ e le faccie 100, $\bar{1}00$ nella direzione [010].

CAPO XIX.

Cloroplatinato di fosfammonio monoetilenico trietilico.

$$NP\left[H_3(C_2H_5)_3(C_2H_4)''\right]Cl_2 + 2(PtCl_2)\ .$$

Aggiungendo ammoniaca alla soluzione alcoolica del bromuro di fosfonio monobromoetilico trietilico, di cui al Capo V, ottenne Hofmann un bromuro di fosfammonio etilenico trietilico, giusta la seguente equazione:

$$P\left[(C_2H_5)_3(C_2H_4Br)\right]Br + NH_3 = NP\left[H_3(C_2H_5)_3(C_2H_4)''\right]Br_2\ ;$$

la cui costituzione sarebbe analoga a quella di un dibromuro di ammonio diatomico $N_2H_8Br_2$, in cui un equivalente di azoto sarebbe sostituito dal fosforo, e degli otto equivalenti di idrogeno sarebbero due sostituiti da un equivalente di etilene diatomico, tre da tre equivalenti di etile, e tre rimarrebbero intatti.

Precipitando il bromo mediante l'ossido di argento, trattando la soluzione con acido cloridrico, e poscia aggiungendo bicloruro di platino si ottiene un precipitato, che è il cloroplatinato descritto. Ripigliandolo poscia con acqua bollente, si ponno avere cristalli determinabili (1).

Sistema trimetrico:

$$100, 110 = 59^{\circ}.\ 50' \ ; \quad 001, 101 = 70^{\circ}.\ 38' \ ;$$

Forme osservate:

100, 010, 110, 101 (Fig. 45).

Angoli		Calcolati	Osservati
100, 010	=	90°. 0′	89°. 40′
100, 110	=	59 . 50	59 . 55
100, 101	=	19 . 22	19 . 27
010, 110	=	30 . 10	
010, 101	=	90 . 0	
110, $\bar{1}$10	=	60 . 20	60 . 10
110, 101	=	61 . 42	61 . 37
101, 10$\bar{1}$	=	38 . 44	38 . 54 .

Secondo Naumann:

$$a:b:c::2,8449:1:0,5812 \ ;$$

Forme osservate:

$$\dot{\infty}\breve{P}\infty \ , \ \infty\bar{P}\infty \ , \ \infty P \ , \ \breve{P}\infty \ .$$

Secondo Weiss:

$$a:b:c::1:0,5812 \ ; \ 2,8449 \ ;$$

Forme osservate:

$$a:\infty b:\infty c \ ; \ \infty a:b:\infty c \ ; \ a:b:\infty c \ ; \ a:\infty b:c \ .$$

Secondo Levy:

$$MM = 119^{\circ}.\ 40' \ ; \quad b:h::1:2,4596 \ ;$$

Forme osservate:

$$g' \ , \ h' \ , \ M \ , \ c' \ .$$

Combinazioni osservate:

100, 110, 101 (Fig. 43);
100, 110, 101 ; 010 (Fig. 44).

---

(1) Hofmann. Researches on the Phosphorus Bases. Proceedings of the Roy. Soc. N.° 36, 1859.

I cristalli hanno abito di tavole rettangolari allungate nel senso [001]. Le faccie 101 sono appannate, le altre sono invece brillanti.

Sfaldatura 010 imperfetta.

Cristalli otticamente negativi - Gli assi ottici sono nel piano 001, e la bisettrice parallela a [100], cioè perpendicolare alla faccia 100. L'angolo esterno degli assi ottici pare vicino a 60°.

Colore arancio rossigno.

Durezza maggiore di quella del gesso.

CAPO XX.

Cloroplatinato di trifosfonio monoformilico nonoetilico.

$$P_3\left[(C_2H_5)_9(CH)'''\right]Cl_3 + 3\,(PtCl_2)\,.$$

Aggiungendo poco a poco cristalli di iodoformio alla trietilfosfina finchè la temperie più non si elevi, ottiensi una massa viscosa, che trattata con alcole dà un precipitato cristallino, il quale sarebbe un triioduro di trifosfonio monoformilico nonoetilico, giusta l'equazione

$$\underset{\text{Trietilfosfina}}{3\,P(C_2H_5)_3} + \underset{\text{Iodoformio}}{(CH)I_3} = \underset{\text{Nuovo triioduro.}}{P_3\left[(C_2H_5)_9(CH)'''\right]I_3}$$

Il nuovo triioduro avrebbe una costituzione analoga a quella di un triioduro di ammonio triatomico $N_3H_{12}I_3$ nel quale all'azoto si sostituisse fosforo, a nove equivalenti di idrogeno altrettanti equivalenti di etile, ed ai tre rimanenti equivalenti di idrogeno un equivalente di formile $(CH)'''$ triatomico.

Trattando la soluzione del triioduro con ossido di argento per separarne l'iodio, ed aggiungendo poscia acido cloridrico, si converte il triioduro in tricloruro. Alla dissoluzione del tricloruro aggiungendo finalmente bicloruro di platino si ha il cloroplatinato triatomico qui descritto.

Insolubile nell'acqua, solubile nell'acido cloridrico bollente (1).

Sistema monoclino:

100, 101 = 46°. 2′ ; 010, 111 = 48°. 27′ ; 001, 101 = 43°. 28′ ;

---

(1) Hofmann. Researches on the Phosphorus Bases. Proceed. of the Roy. Soc. Vol. X pag. 189.

Forme osservate:

100, 010, 001, 101, 111 (Fig. 55).

Angoli		Calcolati	Osservati
100, 010	=	90°. 0′	90°. 4′
100, 001	=	89 . 30	89 . 30
100, 101	=	46 . 2	46 . 2
100, 111	=	58 . 42	58 . 47
010, 001	=	90 . 0	89 . 56
010, 101	=	90 . 0	90 . 7
010, 111	=	48 . 27	48 . 27
001, 101	=	43 . 28	43 . 28
001, 111	=	57 . 6	57 . 7
101, 111	=	41 . 33	41 . 47
111, $\bar{1}1\bar{1}$	=	96 . 54	

Secondo Naumann:

a:b:c::0,9558:1:0,7762 ; γ=89°. 30′ ;

Forme osservate:

∞P∞ ; ∞P∞ ; 0P ; —P∞ , —P .

Secondo Weiss:

a:b:c::1:0,7762:0,9558 ; γ=90°. 30′ ;

Forme osservate:

a:∞b:∞c ; ∞a:b:∞c ; ∞a:∞b:c ; a:∞b:c ; a:b:c .

Secondo Levy:

MM=75°. 38′ ; MP=90°. 18′ ; b:h::1:0,7550 ;

Forme osservate:

h′ , g′ , P , o′ , $d^{\frac{1}{2}}$.

Combinazioni:

100, 010, 001 (Fig. 51 e 53);

100, 010, 001 ; 101, 111 (Fig. 52).

I cristalli hanno abito di piccoli prismi allungati nella direzione [010] come nelle Fig. 51 e 52, ma talora si mostrano in tavole rettangolari come nella Fig. 53.

Geminati ad asse di geminazione [001] Fig. 54. I cristalli geminati sono assai più frequenti dei semplici, e giovano ad accertare il sistema

cristallino della sostanza, poichè con un nuovo angolo rientrante rendono evidente, che l'angolo 100, 001 non è retto.

Sfaldature 100, 010, 001 facili e perfette.

Alla luce polarizzata si scopre come oltre a [010] siano assi di elasticità due rette l'una quasi normale, e l'altra quasi parallela alla faccia 101.

Splendore vetroso maggiore sopra 100 e 010 che non sopra 001.

Colore arancio rosso.

CAPO XXI.

Combinazione dell'ossido di trietilfosfina coll'ioduro di zinco.

$$P(C_2H_5)_3\,O, ZnI\ .$$

Hofmann ottiene questo composto mescolando una dissoluzione di ossido di trietilfosfina con una dissoluzione di ioduro di zinco; si forma così un precipitato cristallino, che ridisciolto con alcole si depone da questo in bei cristalli.

Fonde a 99°. Facilmente solubile in acqua calda, ed anche più nell'alcole (1)

Sistema monoclino:

100, 101 = 34°. 25′ ; 010, 111 = 50°. 16′ ; 001, 101 = 48°. 48′ .

Forme osservate:

100, 010, 001, 110, 011, 111 (Fig. 69).

Angoli		Calcolati	Osservati nei geminati	Osservati nei cristalli semplici
100, 010	=	90°. 0′		
100, 001	=	83 . 13	82°. 57′	83°. 23′
100, 110	=	47 . 39	47 . 48	47 . 42
100, 011	=	86 . 10	86 . 10	
100, 111	=	50 . 37	50 . 21	
010, 001	=	90 . 0		

(1) Da lettera privata dell' Hofmann.

Angoli		Calcolati	Osservati nei *geminati*	Osservati nei *cristalli semplici*
010, 110	=	42°. 21′		42°. 19′
010, 011	=	34 . 24		
010, 111	=	50 . 16		
001, 110	=	85 . 26	85°. 18′	85 . 23
001, 011	=	55 . 36	55 . 44	
001, 111	=	59 . 34	59 . 39	
110, $\bar{1}$10	=	84 . 42	84 . 29	84 . 38
110, 011	=	49 . 6		
110, 01$\bar{1}$	=	55 . 37		
110, 111	=	25 . 52	25 . 30	
110, $\bar{1}$1$\bar{1}$	=	87 . 25		
011, 01$\bar{1}$	=	68 . 48	68 . 32	
011, 111	=	35 . 33	35 . 44	
011, $\bar{1}$1$\bar{1}$	=	76 . 3		
111, $\bar{1}$1$\bar{1}$	=	100 . 32	100 . 37	

Secondo Naumann:

a:b:c::1,3312:1:0,9052 ; γ=83°. 13′ ;

Forme osservate:

$\infty\bar{P}\infty$; $\infty\bar{P}\infty$; 0P ; ∞P ; $\bar{P}\infty$; —P.

Secondo Weiss:

a:b:c::1:0,9052:1,3312; a0c=96°. 47′ ;

Forme osservate:

a:∞b:∞c ; ∞a:b:∞c ; ∞a:∞b:c ; a:b:∞c ; ∞a:b:c ; a:b:c .

Secondo Levy;

MM=84°. 42′ ; MP=94°. 34′ ; b:h::1:0,9869 ;

Forme osservate:

h′, g′, P, M, e′, $d^{\frac{1}{2}}$.

Combinazioni osservate:

110, 001 (Fig. 59);

110, 001 ; 100 (Fig. 60). Talvolta le due faccie 110 e $\bar{1}$10 sono molto inegualmente sviluppate come nella Fig. 61.

110, 001 ; 100, 010 (Fig. 62);

001, 100, 110, 111

001, 100, 110, 111 ; 011

001, 100, 110, 111 ; 011, 010 (Fig. 63).

Geminati cui è asse di geminazione [100], ovvero faccia di geminazione 001 = oP (Naumann) = ∞a : ∞b : c (Weiss) = P (Levy).

I geminati sono talvolta semplici come nella Fig. 64, e sono invece tal altra difficilissimi a distinguersi dai cristalli trimetrici, come nella Fig. 67. Abbiasi un gruppo di quattro cristalli girati gli uni rispetto agli altri di 180° attorno [100] come nella Fig. 65. Tolte le linee di congiungimento dei piani coincidenti, e supposto riempiuto l'intervallo fra i quattro cristalli, il gruppo avrà, come nella Fig. 66, i caratteri geometrici di un cristallo trimetrico. Da analogo gruppo sono costituiti i geminati della Fig. 67.

Succede qualche volta, che più gruppi come quelli della Fig. 67 si congiungano tra loro secondo 001 e siano sempre girati gli uni rispetto agli altri di 180° attorno a [100].

È degno di nota, come i cristalli delle Fig. 59, 60, 61, 62, 64 siansi ottenuti in presenza dell'acido cloridrico, e che soluzioni scevre da questo acido abbiano somministrato soltanto cristalli come quelli della Fig. 67, in cui si scorge bene sulle faccie 001 qualche traccia della linea di congiungimento dei gemelli, ma che senza il soccorso della sfaldatura, e dei caratteri ottici si riterrebbero per trimetrici.

Sfaldature 001 nitidissima e facilissima, e 110 nitida e secca. I gruppi di geminati come quello della Fig. 67 sfaldati secondo 110 presentano scanalature analoghe a quelle dei feldispati triclini.

Splendore vetroso nelle fratture e nelle sfaldature, grasso nelle faccie.

Durezza di poco superiore a quella del gesso.

Cristalli otticamente positivi: è mediana principale l'asse di simmetria cioè [010]. Si vedono gli anelli colorati attraverso le faccie di sfaldatura 110, ed il piano degli assi ottici sembra perpendicolare allo spigolo del prisma 110. Attraverso le faccie di sfaldatura dei geminati della Fig. 67 si vedono due sistemi di anelli piuttosto vicini, i quali si riferiscono ai due ordini di gemelli, che costituiscono il geminato.

L'angolo degli assi ottici visti attraverso le faccie 110 e $\bar{1}10$ è di circa 74°. In un esemplare si poterono grossolanamente determinare gli indici di rifrazione attraverso 001 e $01\bar{1}$. Si trovò il minimo indice di rifrazione $\gamma = 1,58$ circa, e siccome gli assi ottici esterni si scostano solo di 5°. 21′

dalle normali alle faccie 110 e $\bar{1}10$, per cui non si avrà divario notevole sostituendo all'indice medio l'indice minimo di rifrazione, si può conchiudere, che l'angolo interno degli assi ottici non si scosta molto da 78°.

CAPO XXII.

Combinazione di ossicloruro di trietilfosfina con bicloruro di platino.

$$\left[P(C_2H_5)_3O\right]_3\left[P(C_2H_5)_3Cl_2\right] + 2(PtCl_2) .$$

Hofmann ottiene questo bellissimo sale aggiungendo ossido anidro di trietilfosfina $P(C_2H_5)_3O$ ad una soluzione concentrata di bicloruro di platino nell'alcole assoluto. Per svaporazione spontanea dalla soluzione alcoolica si ottengono bellissimi cristalli tabulari aventi talvolta quasi un centimetro di lunghezza.

I cristalli all'aria si appannano, e si rivestono di uno straterello bianchiccio. Sono solubilissimi nell'acqua, assai solubili nell'alcole, ed insolubili nell'etere (1).

Sistema monoclino:

100, 101 = 27°. 19′ ; 010, 111 = 41°. 4′ ; 001, 101 = 46°. 23′ ;

Forme osservate :

100, 001, 110, $\bar{1}01$, $\bar{1}11$, $\bar{1}12$ (Fig. 58).

Angoli		Calcolati	Osservati
100, 001	=	73°. 42′	73°. 30′
100, 110	=	56 . 41	
100, $\bar{1}01$	=	143 . 30	
100, $\bar{1}11$	=	116 . 39	
100, $\bar{1}12$	=	108 . 18	
001, 110	=	81 . 8	81 . 8
001, $\bar{1}01$	=	69 . 48	69 . 48
001, $\bar{1}11$	=	78 . 54	78 . 51
001, $\bar{1}12$	=	61 . 15	61 . 14

(1) Da lettera privata dell' Hofmann.

Angoli		Calcolati	Osservati
—		—	—
$110, \bar{1}10$	=	66°. 38′	66°. 38′
$110, \bar{1}01$	=	116 . 12	116 . 23
$110, \bar{1}11$	=	63 . 26	
$110, 11\bar{1}$	=	19 . 59	
$110, \bar{1}12$	=	63 . 26	
$110, 11\bar{2}$	=	37 . 37	
$\bar{1}01, \bar{1}11$	=	56. 6	
$\bar{1}01, \bar{1}12$	=	52 . 46	52 . 32 .
$\bar{1}11, 11\bar{1}$	=	67 . 49	
$\bar{1}11, \bar{1}12$	=	17 . 39	
$\bar{1}11, 11\bar{2}$	=	73 . 52	
$\bar{1}12, 11\bar{2}$	=	84 . 17	

Secondo Naumann:

$$a:b:c::1,5776:1:0,6308 \quad \gamma = 73°.\ 42' ;$$

Forme osservate:

$$\infty \bar{P} \infty ;\ 0P ;\ \infty P ;\ \bar{P} \infty ;\ P ;\ \tfrac{1}{2}P .$$

Secondo Weiss:

$$a:b:c::1:0,6308:1,5776 ;\ a\,o\,c = 106°.\ 28' ;$$

Forme osservate:

$$a:\infty b:\infty c ;\ \infty a:\infty b:c ;\ a:b:\infty c ;\ -a:\infty b:c ;\ -a:b:c ;\ -a:b:\tfrac{1}{2}c .$$

Secondo Levy:

$$MM = 66°.\ 38' ;\quad MP = 98°.\ 52' ;\quad b:h::1:1,3343 ;$$

Forme osservate:

$$h',\ P,\ M,\ a',\ b^{\frac{1}{2}},\ b' .$$

Combinazioni osservate:

$001, 100, 110$ (Fig. 56);

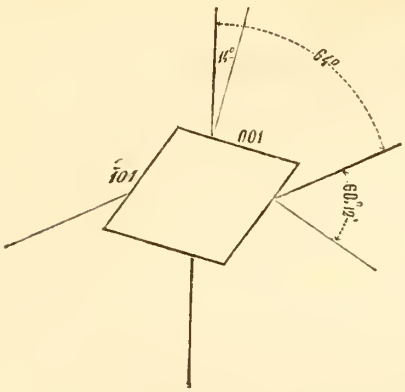
$001, 110, \bar{1}12, \bar{1}01$

$001, 110, \bar{1}12, \bar{1}01 ;\ 100, \bar{1}11$ (Fig. 57).

Sfaldature $\bar{1}01$ e 110 nitide e facili.

Colore rosso arancio.

Gli assi ottici sono entro 010, cioè nel piano di simmetria: si veggono attraverso le faccie 001, e le sfaldature $\bar{1}01$, e fanno allora angolo esterno di circa 64°. Gli angoli fatti dagli assi ottici colle normali alle faccie $10\bar{1}$ e 001 sono prossimamente, quali appaiono dalla adiacente Figura, di 60°. 12′ circa e di 14° circa. La posizione di questi assi rispetto alle faccie si determinò col metodo adottato dal S. di Senarmont (1). Si produsse cioè un geminato artificiale coll'appiccicare con balsamo del Canadà due cristalli secondo 001, e dopo averne girato uno di 180° attorno alla normale a 001, si ebbe l'angolo fatto dai due assi ottici emergenti da $\bar{1}01$.



(1) H. de Senarmont. Recherches sur les propriétés optiques biréfringentes des corps isomorphes. XXXIII. Annales de Chimie et de Physique 3.e Série.

PARTE SECONDA

PARAGONE TRA LE FORME CRISTALLINE DEI SALI DESCRITTI

Non è per certo nostro intendimento di trarre dai fatti osservati troppo ampie conclusioni sulla costituzione dei sali esaminati, ed anche meno sulle forme dei sali di costituzione analoga. Tra le migliaia di corpi cristallizzati, che la chimica organica ha in pochi lustri scoperto, neppure quattrocento vennero finquì cristallograficamente determinati. Quindi è che ad ogni generale ragionamento mancando ampia base di fatti osservati, ogni generale conclusione sarebbe per lo meno avventatissima. Nel nostro lavoro ebbimo per essenziale oggetto quello modestissimo di portare il nostro sassolino all'edificio, che si potrà più tardi elevare sulla conoscenza delle proprietà geometriche e fisiche dei sali. Ciò non ostante non credemmo di mancare al debito di riserva, cui si è nell'attuale miseria di conoscenze astretti, ponendo in rilievo alcune interessantissime analogie, le quali mentre corroborano le viste di Hofmann e Cahours sulla natura di alcuni dei sali esaminati, gettano pure viva luce sulle proprietà di alcune classi di sali.

§ 1.

Sulle diamine e sulle diamidi.

Le diamine e le diamidi, cioè le sostanze derivate da due molecole di ammoniaca N_2H_6, comprendono parecchi corpi di molta importanza, e specialmente le uree. La urea ordinaria $N_2[H_4(CO)'']$ cristallizza nel sistema dimetrico, mentre le uree di cui ai capi III e IV cristallizzano nel sistema monoclino. Non vuolsene però inferire, che le uree da noi studiate siano senza analogie tra i membri del gruppo delle diamine e delle diamidi, posciachè tra queste parecchie se ne annoverano, le quali sono monocline. Scegliamo tra esse la Ossamide e la Tiosinamina, e ne

paragoniamo le forme con quelle delle urce dei capi III e IV al quadro primo posto al fine della memoria (Ved. pag. 414 e 415).

Ivi si scorge come la ossamide si allontani alquanto dalle tre urce, ma che strettissima è l'analogia tra la tiosinamina, cioè $N_2\left|H_3(C_3H_5)(CS)''\right|$, e le urce da noi determinate, e specialmente la urea solforata monoallilica trietilica ad azoto e fosforo, cioè $NP\left|(C_2H_5)_3(C_3H_5)(CS)''\right|$. Quest'ultima urea differisce dalla tiosinamina solo in ciò, che dei due equivalenti di azoto uno è sostituito dal fosforo, ed i tre equivalenti dell' idrogeno sono sostituiti dall'etile. Ora le forme delle due sostanze non solo derivano da assi, i quali nè per grandezza nè per inclinazione molto non si scostano tra loro, ma hanno in buona parte lo stesso simbolo. Le sfaldature possono pure ridursi ad avere simbolo identico, e nota il Schabus come i cristalli di tiosinamina siano allungati nella direzione [010] e talvolta tabulari per lo sviluppo di 001, come per lo appunto notammo succedere per i cristalli della urea allilica del capo IV.

Anche più vicine sono le due urce fenilica ed allilica descritte nei capi III e IV per ciò che riguarda l'angolo 100, 001, ed i rapporti degli assi a e b. Circa l'asse c nulla si può dire, perchè nell'urea fenilica non si trovarono faccie, che il determinassero. La bisettrice degli assi ottici è per ambe le urce nel piano 010, ma il piano degli assi ottici è 010 nell'urea allilica, mentre è perpendicolare a 010 nell'urea fenilica.

Vi sono ancora altre basi della famiglia delle amine, come la Huanokina, la Cinconina, l'Armina, la Cincotina ecc., le quali cristallizzano nel sistema monoclino. Però siccome è ancora dubbia la vera costituzione di questi corpi (1), e le loro forme si scostano alquanto da quelle delle quattro sovracitate sostanze, non crediamo prudente lo spingere oltre questo paragone.

Per le stesse ragioni omettiamo di accennare alle diamine e diamidi trimetriche, e ci limitiamo a prendere nota di un gruppo di diamine e diamidi cristallizzanti in prismi monoclini, in cui 100, 001 è prossimo a 60°, e ad accennare, che questo gruppo comprende tutte le urce solforate, di cui ci sia finquì nota la determinazione cristallografica.

---

(1) Hofmann. On Ammonia and its derivatives. London 1859. Pag. 14.

§ 2.

Sui sali aloidi.

Nella prima parte di questa memoria discorriamo di sali aloidi dal capo V al capo XI. I primi cinque sono creduti monoatomici ed analoghi perciò a NH_4Cl, e gli ultimi due sono creduti biatomici, vale a dire analoghi a $N_2H_8Cl_2$. Faremo qualche confronto relativamente agli uni ed agli altri:

(*a*) ***Sali aloidi monoatomici.*** La maggior parte dei sali aloidi ritenuti anche oggidì per monoatomici cristallizzano nel sistema monometrico. Citiamo specialmente (1) KCl, KBr, KI; $NaCl$, $NaBr$, NaI; NH_4Cl, NH_4Br, NH_4I; A_gCl, A_gBr, ed anche Cu_2Cl, che molti degli odierni chimici (2), raddoppiando l'equivalente del rame, intendono composto di una molecola di rame ed una di cloro. A questo gruppo vengono ora ad aggiungersi il bromuro di fosfonio monobromoetilico trietilico, $P[(C_2H_5)_3(C_2H_4Br)]Br$ ed il bromuro di arsonio monobromoetilico trietilico $As[(C_2H_5)_3(C_2H_4Br)]Br$, i quali come si vide ai capi V e VI sono monometrici.

Il Marignac (3) qualche anno fa poneva in luce le relazioni esistenti fra sostanze monometriche, e sostanze romboedriche derivanti da romboedri, il cui angolo è prossimo al retto. Basti rammentare a modo di esempio i corpi semplici, di cui la maggior parte spetta od al sistema monometrico, od al romboedrico, od anche ad entrambi; ed i solfuri ad un equivalente di zolfo ed uno di metallo, i quali or sono monometrici come la Galena, l'Argentite, la Blenda, l'Alabandina, ed ora romboedrici esagonali come la Pirrotina, la Millerite, la Greenockite. Nè sia lecito il tacere sulla recente scoperta del dotto ginevrino (4) di fluosilicati, fluostannati, e fluotitanati romboedrici NH_4Fl, $SiFl_2$; $NaFl$, $SiFl_2$; NH_4Fl, $SnFl_2$;

---

(1) Vedi per le forme dei sali, per cui non si cita autore, Rammelsberg Handbuch der Krystallographischen Chemie. Berlin 1855, e Die neuesten Forschungen in der Krystallographischen Chemie. Leipzig 1857.

(2) Cannizzaro. Sunto di un corso di filosofia chimica. Nuovo Cimento tom. 7, pag. 347.

(3) Sur les relations existant entre certains groupes de formes crystallines appartenant à des systèmes différents. Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, tomo XLV, 1857, pag. 650.

(4) Vedi le Memorie del Marignac. Annales des Mines 5.ª Serie, tom. XII, pag. 18 e 20. — Ibid. tom. XV, pag 224, 228 e 238. — Annales de Physique et de Chimie 3.ª Serie, tom. LX, pag. 45.

NH_4Fl, $TiFl_2$; $NaFl$, $TiFl_2$ e di fluosilicati romboedrici KFl, $SiFl_2$, ed il già citato NH_4Fl, $SiFl_2$, che a legare le due serie si mostra molto opportunamente dimorfo (1).

I sali aloidi non si sottraggono alla legge della doppia serie, e senza parlare di $FeCl$, $MgCl$, CdI, PbI che furono trovati in lamine esagonali ad un solo asse ottico dal Senarmont e dal Descloizeaux (2), poichè non essendone state determinate geometricamente le forme, non è possibile il vedere fino a qual segno derivino da un romboedro prossimo al cubo, basti citare la Iodite o Ioduro di argento determinato dal Descloizeaux. All'Ioduro di argento si associa ora intimamente il Ioduro di fosfonio tetraetilico, di cui al capo VII, come risulta dal quadro secondo posto al fine della memoria (V. pag. 414 e 415).

Appare infatti dalle misure del valente mineralista francese, che l'angolo del romboedro spettante all'Ioduro di argento non si allontana di 1°. 30′ da quello del romboedro spettante all'Ioduro di tetraetilfosfonio; che di cinque forme osservate nell'Ioduro di argento tre hanno lo stesso simbolo di altrettante forme trovate nell'Ioduro di tetraetilfosfonio; e che entrambe le sostanze sono otticamente positive. È degno di nota come i cristalli di Ioduro di argento abbiano abito esclusivamente esagonale, poichè constano puramente di prismi e piramidi esagonali colla loro base, mentre i cristalli di Ioduro di fosfonio tetraetilico intanto che fanno mostra di prismi e piramidi esagonali, sono inoltre ricchi di faccie romboedriche.

Il Cloruro di fosfonio monoplatinico $P|(C_2H_5)_3Pt|Cl$ di cui al capo VIII si scosta dai precedenti sali aloidi, poichè è monoclino. Chi ritiene che si debba raddoppiare l'equivalente del Platino, e ritener quindi per biatomico il cloruro di cui ragioniamo, potrà cercare in tal fatto la discrepanza tra la sua forma e quella dei sali precedenti. Chi crede invece, che debba rimanere inalterato l'equivalente del Platino, e che monoatomico sia il Cloruro in discorso, potrà rilevare l'osservazione fatta alla pag. 375, che cioè le forme sue molto non si scostano da quelle del Cloruro di ammonio, ed annoverare anche questo tra quei casi di sali analoghi assumenti forme vicine sebbene spettanti a sistemi diversi.

---

(1) Si assunse nelle formole precedenti $Si = 14$, in guisa che SiO^2 è il simbolo della Silice.

(2) Descloizeaux. De l'emploi des propriétés optiques biréfringentes en Minéralogie. Ann. des Mines 5.ª Serie, tom. XI, pag. 306 e 307.

(*b*) *Sali aloidi biatomici.* Dei sali di questo genere da noi descritti ai capi X e XI l'uno è monoclino, e l'altro trimetrico. Lasciamo in disparte il primo, che una volta sola si ottenne, e che non si potè convenientemente studiare, ed occupiamoci invece dell'ultimo.

Si conoscono le forme di parecchi cloruri metallici anidri, i quali si mostrano in cristalli trimetrici. Si può chiedere se il paragone delle forme cristalline di questi corpi con quelle del Biioduro di bifosfonio exaetilico monoetilenico $P_2 \left| (C_2H_5)_6 (C_2H_4)'' \right| I_2$ il quale è biatomico, infermi o corrobori le viste di coloro, i quali credono doversi raddoppiare gli equivalenti di tutti i metalli ad eccezione degli alcalini, e dell'argento, e doversi perciò ritenere i loro sali aloidi come biatomici.

Si può quindi osservare come anche trimetrico sia il Bromuro di fosfonio trimetilico monobromoetilico $P \left| (CH_3)_3 (C_2H_4Br) \right| Br$, e chiedere se per ventura non abbia questo sale una costituzione chimica diversa da quella indicata dalla formola, e non sia invece biatomico.

Alle due dimande risponda, per quel che può, il quadro terzo posto al fine della memoria (V. pag. 416 e 417).

Da codesto quadro potrebbero trarsi delle ragioni per ritenere il Bromuro di fosfonio monobromoetilico trimetilico come biatomico. Si potrebbe credere, che biatomici siano pure i cloruri metallici, ove si considerino il cloruro di Piombo, quello di Zinco ammoniacale, e quello di Mercurio (cui paiono isomorfi il Bromuro, ed il Ioduro giallo): ma a contraria sentenza si inclinerebbe considerando i Cloruri Zinco-ammonico e Zinco-potassico. Potrebbero finalmente trarsi dal nostro quadro argomenti per credere biatomiche la Papaverina e la Tialdina.

Ma noi dobbiamo osservare, che le forme di queste sostanze spettano a quel gruppo di cristalli trimetrici, che si mostrano in prismi, il cui angolo od è prossimo a 60°, o per semplicissime relazioni ne deriva. Ora questo gruppo, come già parecchi osservarono, e di recente il Marignac confermò (1), comprende sostanze di composizione e costituzione disparatissima. Quindi è, che ci limitiamo a presentare ai cristallografi il quadro precitato più ad incentivo allo studio di composti analoghi, i quali meglio possano risolvere le proposte quistioni, che per la saldezza delle conclusioni, a cui potrebbe condurre.

---

(1) Ann. des Mines Serie 5.ª, tom. 12, pag. 14.

§ 3.

Sui Cloroplatinati.

Dei dieci Cloroplatinati da noi determinati, quattro mostrano associato al Bicloruro di Platino un Cloruro monoatomico, quattro un Cloruro biatomico, uno un Cloruro triatomico, ed uno, quello descritto al capo XXII, ha una costituzione non sufficientemente studiata.

Dobbiamo prescindere dal parlare dell'ultimo perchè mal noto, e del Cloroplatinato a Cloruro triatomico, poichè è per quanto ci consta il solo di analoga costituzione, che finquì sia stato determinato.

E neppure dei Cloroplatinati a Cloruro biatomico possiamo dire gran fatto, perchè dei quattro da noi determinati uno è trimetrico, un altro è triclino, ed i due rimanenti sono bensì monoclini e quindi comparabili, ma la povertà delle faccie di quello descritto al capo XVI avendone resa impossibile la completa determinazione, mancano i termini al paragone. Nè conosciamo sali di questo genere da altri misurati, salvo per coloro che annoverano la Huanokina tra le diamine, il Cloroplatinato della medesima studiato da Hahn (1). Noteremo semplicemente come il Cloroplatinato di Huanokina sia trimetrico, come lo è pure quello di fosfammonio monoetilenico trietilico descritto al capo XIX.

A qualche conseguenza possiamo invece pervenire fermandoci sui Cloroplatinati a Cloruro monoatomico. Nella cristallografia chimica del Rammelsberg, nel supplemento alla medesima, nella memoria del Schabus coronata dall'Accademia di Vienna, e nelle memorie di Marignac troviamo le determinazioni di ventidue sali la cui formola chimica è

$$AB + A'B_2 ;$$

ove $A = K$ ovvero NH_4 ;

$A' = Pt$ ovvero Pd, ovvero Ir, ovvero Sn, ovvero Si (2) ;

oppure Ti ;

$B = Cl$ oppure Fl .

Di codesti sali dieci sono monometrici, uno è o dimetrico, o monometrico (le misure lasciano qualche incertezza), sei sono romboedrici,

(1) Kopp e Will Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie für 1858, pag. 372

(2) Si intende sempre $Si = 14$.

uno è dimorfo, cioè monometrico e romboedrico (Ved. pag. 408), tre sono trimetrici, ed uno è monoclino.

Tra i sali da noi determinati

$$P(C_2H_5)_4Cl + PtCl_2 \;;$$

$$P\left[(C_2H_5)_3(CH_3)\right]Cl + PtCl_2 \;;$$

$$P\left[(C_2H_5)_3(C_2H_5O)\right]Cl + PtCl_2 \;;$$

sono anche monometrici, e confermando per la loro forma le viste di Hofmann sulla loro costituzione vengono a schierarsi a lato degli undici sali sovraindicati, e specialmente del Cloroplatinato di ammonio trimetilico $N\left[H(CH_3)_3\right]Cl + PtCl_2$ determinato dal Schabus (1).

Il Cloroplatinato di Fosfonio monobromoetilico trietilico P da noi trovato monoclino, cioè $P\left[(C_2H_5)_3(C_2H_4Br)\right]Cl + PtCl_2$ non è senza analogia al solo Cloroplatinato monoclino, che fino ad ora si conoscesse, cioè al Cloroplatinato di Ammonio bietilico $N\left[H_2(C_2H_5)_2\right]Cl + PtCl_2$. Infatti l'angolo 100, 001 è in questo di 85°. 40′ (2), mentre è di 89°. 2′ nel sale, di cui al capo XV.

§ 4.

Conclusioni.

Esposte nel quadro quarto (Ved. pag. 418 e 419) le forme dei sali descritti nella memoria possiamo riassumere i risultati del loro paragone dicendo:

1.° Che v'ha un gruppo di diamine e diamidi monocline, le cui forme tra loro si avvicinano, gruppo il quale comprende specialmente la Tiosinamina, le Uree solforate trietiliche ad azoto e fosforo, l'una fenilica, e l'altra allilica;

2.° Che al gruppo dei sali aloidi monometrici conviene associare i Bromuri di fosfonio ed arsonio monobromoetilico trietilico;

3.° Che il Ioduro di tetraetilfosfonio è affatto isomorfo coll'Ioduro di argento;

---

(1) Bestimmung der Krystallgestalten in chemischen Laboratorien erzeugter Producte. Vienna 1855. Pag. 13.

(2) Schabus. Krystallologische Untersuchungen. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften. Vienna, Tom. XV. Pag. 206.

4.° Che al gruppo dei Cloroplatinati, Cloropalladati ecc. monometrici debbonsi associare i Cloroplatinati di fosfonio tetraetilico, monometilico trietilico, monoossietilico trietilico;

5.° Che le forme cristalline dei sali precitati confermano nel modo il più splendido le viste di Hofmann sulla loro costituzione;

6.° Che non senza meraviglia scopresi col goniometro, come talvolta la posizione di equilibrio delle molecole di un sale, come ad esempio dell'Ioduro di argento, di assai poco si muta, allorquando ad una molecola creduta semplice, qual è quella dell'Argento, si sostituisca una molecola evidentemente complicatissima, qual è quella del tetraetilfosfonio $P(C_2H_5)_4$, la quale secondo le nuove notazioni consta di 29, e secondo le notazioni antiche di 37 altre molecole alla loro volta credute semplici.

NOTA

sul Quadro quarto pag. 418 *e* 419.

La prima colonna indica il capo della memoria, in cui è descritto il sale ivi considerato.

La quarta colonna indica le forme osservate nei cristalli di ciascuna sostanza, ed i simboli delle forme, parallelamente alle cui faccie si osservarono sfaldature, sono sottolineate.

Le ultime colonne riassumono i caratteri ottici osservati, e mostrano anzitutto se la sostanza sia otticamente positiva o negativa, poscia quale sia la posizione del piano degli assi ottici, e quella della loro mediana principale, e finalmente la grandezza degli indici di osservazione, e l'ampiezza dell'angolo degli assi ottici. I segni # e ⊥ indicano, che una linea od un piano è parallela ovvero perpendicolare ad altra linea o piano ivi citato. L'angolo degli assi ottici è indicato da 2V, se si riferisce agli assi dentro al cristallo, e da 2E se si riferisce agli assi emergenti da una lastra a faccie parallele perpendicolare alla loro mediana principale.

QUADRO

Sopra alcune diamidi

Sostanza	Composizione	100, 001
Ossamide	$N_2[H_4(C_2O_2)'']$	57°. 15′
Tiosinamina	$N_2[H_3(C_3H_5)(CS)'']$	59 . 50
Urea fenilica del Capo III	$NP[(C_2H_5)_3(C_6H_5)(CS)'']$	61 . 2
Urea allilica del Capo IV	$NP[(C_2H_5)_3(C_3H_5)(CS)'']$	64 . 45

(1) In questo e nei seguenti quadri vennero sottolineati i simboli delle faccie parallelamente all quali i cristalli si sfaldano.

QUADRO

Iodur

Sostanza	Composizione	111, 100
Ioduro di Argento.....	AgI	58°. 26′
Ioduro di Fosfonio tetraetilico.....	$P(C_2H_5)_4I$	59 . 32

(1) Descloizeaux. Note sur la forme cristalline de l'Iodure d'Argent. Ann. de Phys. et de Chi 3.ª Serie, Tom. XL, pag. 85.

Alle forme b^2, $b^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{1}{3}}$ del Descloizeaux corrispondono qui $321, 31\bar{1}, 51\bar{3}$.

PRIMO

e diamine monocline

Secondo Weiss a:b:c =	Forme e sfaldature (1)	Osservatore
1:3. 0,4515:0,7591	100, 001, 110, $\bar{1}11$	Schabus (2)
1: 0,4433:0,8607	100, 001, $\bar{2}01$, 012, $\bar{2}12$	Schabus (2)
1:2. 0,4291 : x	100, 010, 001, 110	Sella
1: 0,3984:0,8321	100, 001, 110, $\bar{1}01$, $\bar{2}01$, $\bar{1}12$	Sella

(1) Schabus. Bestimmungen der Krystallgestalten in chemischen Laboratorien erzeugter Producte. Vienna 1855. Pag. 165 e 167. Nella Tiosinamina si cangiò la posizione degli assi assunti dal Schabus in guisa che 100 e 001 fossero i simboli delle sfaldature, come tali si erano assunti nell'urea allilica del Capo IV. I simboli delle faccie u, o, P, v, p di Schabus divennero quindi 100 001, $\bar{2}01$, 012, $\bar{2}12$.

SECONDO

romboedrici

Secondo Naumann R =	Forme osservate	Indici di rifrazione	Osservatore
84°. 54′	111, $10\bar{1}$, 321, $31\bar{1}$, $51\bar{3}$	$\varepsilon > \omega$	Descloizeaux (1)
83 . 26	111, $10\bar{1}$, 100, 110, 210, $31\bar{1}$	$\varepsilon = 1,668$; $\omega = 1,660$	Sella

(1) Per i caratteri ottici vedi Descloizeaux. De l'emploi des propriétés optiques biréfringentes en Minéralogie. Ann. des Mines, 5.ª Serie, Tom XI, pag. 300.

QUADRO

Sopra alcuni Sali

Sostanza	Composizione
Bromuro di Fosfonio monobromoetilico trimetilico	$P[(CH_3)_3(C_2H_4Br)]Br$
Biioduro di Difosfonio monoetilenico exaetilico	$P_2[(C_2H_5)_6(C_2H_4)'']I_2$
Bicloruro di Mercurio	H_gCl
Cloruro di Zinco ammoniacale	NH_3ZnCl
Cloruro di Piombo	$PbCl$
Cloruro Zinco-ammonico	NH_4ZnCl_2
Cloruro Zinco-potassico	$KZnCl_2$
Cloridrato di Papaverina	$N(C_{20}H_{21}O_4)HCl$
Cloridrato di Tialdina	$N(C_6H_{13}S_2)HCl$

(1) Poggendorf. Annalen der Physik und Chemie Tom. 28, pag. 118. Vedi Rammelsberg. Hand. d Kryst. Chem. pag. 51. Alle faccie ivi notate b, c, p, r, q, r^2, q^2, $q_{/2}$, o si diedero i simbol 100, 010, 101, 011, 110, 012, 210, 120, 111. Nelle grandezze degli assi dati dal Rammelsber incorsero alcuni errori di stampa.

(2) Ann. des Mines 5.ª Serie, Tom. 12, pag. 8. Alle faccie ivi indicate M, P, a, e, si assegnaron i simboli 110, 001, 101, 011.

(3) Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften. Vienna 1850 - Vedi Rammelsberg op. cit pag. 48. Alle forme ivi notate b, c, q, q^1, o, o^2 si diedero i simboli 100, 001, 101, 401 111, 221.

TERZO

aloidi trimetrici

Secondo Weiss a:b:c =	Forme e Sfaldature	Osservatore
1: 0,5681 : $\frac{2}{5}$. 1,0177	100, 010, 001, 110, 211	Sella
1: 0,5704 : 1,0052	110, 101	Sella
1 : 2 . 0,5343 : $\frac{3}{4}$. 0,9672	100, 010, 110, 101, 011, 012, 210, 120, 111	Mitscherlich (1)
1 : 2 . 0,5450 : 1,0377	001, 110, 101, 011	Marignac (2)
1: 0,5943 : $\frac{1}{2}$. 1,1899	100, 001, 101, 401, 111, 221	Schabus (3)
1: 0,5654 : $\frac{3}{4}$. 0,9640	100, 001, 110, 101, 201, 310, 111	Marignac (4)
1: 0,5836 : $\frac{3}{4}$. 0,9569	100, 001, 110, 101, 301, 302, 111	Marignac (5)
1: 0,5851 : 0,8391	001, 110, 101, 111	Kopp (6)
1: 0,6432 : 0,9827	100, 001, 110, 101	Rammelsberg (7)

(4) Ann. des Mines 5.ª Serie, Tom. 12, pag. 13. Alle forme ivi indicate A, E, M, N, e, e^3, m si diedero i simboli 001, 100, 101, 201, 110, 310, 111 .

(5) Ann. des Mines 5.ª Serie, Tom, 12, pag. 15. Alle forme ivi indicate A, E, M, R, S, e, m si diedero i simboli 001, 100, 101, 302, 301, 110, 111 .

(6) Annalen der Chemie und Pharmacie LXVI pag. 127 - Vedi Rammelsberg op. cit. pag. 383, le forme a, p, q, o ivi indicate sono quì 001, 101, 110, 111 .

(7) Rammelsberg. Die neuest. Forsch. in d. Kryst. Chem. pag. 187. Le forme ivi indicate a, b, p, q sono quì 001, 100, 101, 110 .

QUADRO

RIASSUNTO delle forme dei Sali

Capo	Sostanza	Sistema	Forme e sfaldature osservate
I.	$P(C_2H_5)_3\ S$	Romboedrico	$10\bar{1}$, $2\bar{1}\bar{1}$, 210
II.	$P(C_2H_5)_3\ CS_2$	Monoclino	$\underline{100}$, $\underline{010}$, 001, 110, $\bar{1}01$
III.	$NP\left[(C_2H_5)_3(C_6H_5)(CS)''\right]$	Id.	$\underline{100}$, 010, 001, $\underline{110}$
IV.	$NP\left[(C_2H_5)_3(C_3H_5)(CS)''\right]$	Id.	$\underline{100}$, $\underline{001}$, 110, $\bar{1}01$, $\bar{2}01$, $\bar{1}12$
V.	$P\left[(C_2H_5)_3(C_2H_4Br)\right]Br$	Monometrico	110
VI.	$As\left[(C_2H_5)_3(C_2H_4Br)\right]Br$	Id.	110
VII.	$P(C_2H_5)_4\ I$	Romboedrico	111, $10\bar{1}$, 100, 110, 210, $31\bar{1}$
VIII.	$P\left[(C_2H_5)_3Pt\right]Cl$	Monoclino	001, $\underline{110}$, $\bar{1}01$, $\bar{1}12$
IX.	$P\left[(CH_3)_3(C_2H_4Br)\right]Br$	Trimetrico	$\underline{100}$, 010, $\underline{001}$, $\underline{110}$, 211
X.	$P_2\left[(CH_3)_6(C_2H_4)''\right]Br_2$	Monoclino	$\underline{001}$, 110, $\underline{\bar{1}01}$
XI.	$P_2\left[(C_2H_5)_6(C_2H_4)''\right]I_2$	Trimetrico	$\underline{110}$, $\underline{101}$
XII.	$P(C_2H_5)_4Cl + PtCl_2$	Monometrico	100, 111
XIII.	$P\left[(C_2H_5)_3(CH_3)\right]Cl,\ PtCl_2$	Id.	100, $\underline{111}$
XIV.	$P\left[(C_2H_5)_3(C_2H_5O)\right]Cl,\ PtCl_2$	Id.	111
XV.	$P\left[(C_2H_5)_3(C_2H_4Br)\right]Cl,\ PtCl_2$	Monoclino	$\underline{100}$, 010, $\underline{110}$, $10\bar{1}$, $\bar{1}01$, 011, 111, $\bar{1}11$, $\bar{2}11$
XVI.	$P_2\left[(C_2H_5)_6(C_2H_4)''\right]Cl_2 \cdot (PtCl_2)_2$	Id.	$\underline{100}$, $\underline{010}$, $\underline{001}$
XVII.	$PAs\left[(C_2H_5)_6(C_2H_4)''\right]Cl_2,\ (PtCl_2)_2$	Triclino	$\underline{100}$, 010, $\underline{001}$, 011, $02\bar{1}$, $\bar{1}11$
XVIII.	$NP\left[H_2(C_2H_5)_4(C_2H_4)''\right]Cl_2,\ (PtCl_2)_2$	Monoclino	100, 001, 110, 011
XIX.	$NP\left[H_3(C_2H_5)_3(C_2H_4)''\right]Cl_2,\ (PtCl_2)_2$	Trimetrico	100, $\underline{010}$, 110, 101
XX.	$P_3\left[(C_2H_5)_9(CH)'''\right]Cl_3,\ (PtCl_2)_3$	Monoclino	$\underline{100}$, $\underline{010}$, $\underline{001}$, 101, 111
XXI.	$P(C_2H_5)_3O,\ ZnI$	Id.	100, 010, $\underline{001}$, $\underline{110}$, 011, 111
XXII.	$\left[P(C_2H_5)_3O\right]_3\left[P(C_2H_5)_3Cl_2\right]_2(PtCl_2)_2$	Id.	100, 001, $\underline{110}$, $\underline{\bar{1}01}$, $\bar{1}11$, $\bar{1}12$

QUARTO

descritti in questa memoria (*Vedi pag.* 413).

Angoli caratteristici	Caratteri ottici approssimativi			
	Segno	Piano assiale	Mediana	Indici e Angolo assiale
111, 100 = 54°. 35′.	+			ω = 1, 59 ; ε = 1, 65
100, 101 = 29°. 41′½; 010, 111 = 74°. 4′ ; 001, 101 = 27°. 7′½.	+	001	[010]	μ = 1, 75 ; 2V = 70°
100, 001 = 61°. 2′ ; 010, 110 = 44°. 27′.		# [010]	⊥ [010]	
100, 101 = 35°. 42′ ; 010, 111 = 39°. 22′ ; 001, 101 = 29°. 3′.	—	010	⊥ $\bar{1}$01	β = 1,657; 2V = 72°.30′
111, 100 = 59°. 32′.	+			ω = 1, 660; ε = 1, 668
100, 101 = 26°. 48′ ; 010, 111 = 59°. 38′ ; 001, 101 = 31°. 28′.	—	# [010]	⊥ [010]	
100, 110 = 60°. 24′ ; 001, 101 = 22°. 9′.				[001] > [100] > [010]
100, 101 = 17°. 45′ ; 010, 111 = 57°. 47′ ; 001, 101 = 20°. 4′.				
100, 110 = 60°. 18′ ; 001, 101 = 45°. 9′.				
100, 101 = 55°. 59′ ; 010, 111 = 60°. 37′ ; 001, 101 = 33°. 3′.		# [010]	⊥ [010]	
100, 001 = 82°. 36′.	—	# [010]	⊥ [010]	
100, 010 = 81°. 52′ ; 100, 001 = 88°. 14′ ; 010, 001 = 89°. 9′ ; 100, $\bar{1}$11 = 120°. 18′; 010, $\bar{1}$11 = 64°. 4′.				
100, 101 = 43°. 35′ ; 010, 111 = 55°. 36′ ; 001, 101 = 43°. 17′.				
100, 110 = 59°. 50′ ; 001, 101 = 70°. 38′.	—	001	[100]	2E = 60°
100, 101 = 46°. 2′ ; 010, 111 = 48°. 27′ ; 001, 101 = 43°. 28′.				
100, 101 = 34°. 25′ ; 010, 111 = 50°. 16′ ; 001, 101 = 48°. 48′ ;	+	⊥ [001]	[010]	γ = 1, 58 ; 2V = 78°
100, 101 = 27°. 19′ ; 010, 111 = 41°. 4′ ; 001, 101 = 46°. 23′.		010		

INDICE

$P(C_2H_5)_3CS_2$

$$NP\begin{cases}(CS)''\\(C_2H_5)_3\\C_6H_5\end{cases}$$

$$NP\begin{cases}(CS)''\\(C_2H_5)_3\\C_3H_5\end{cases}$$

$$P\begin{cases}(C_2H_5)_3\\C_2H_4Br\end{cases}Br$$

Fig. 1.

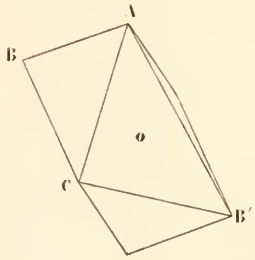


Fig. 2.

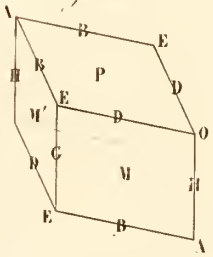


Fig. 3.

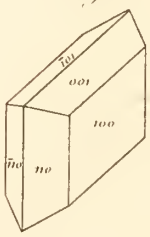


Fig. 4.

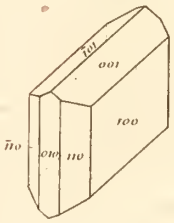


Fig. 5.

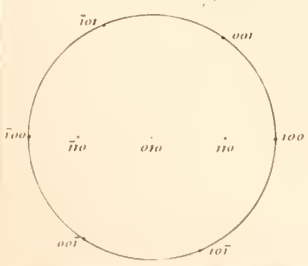


Fig. 6.

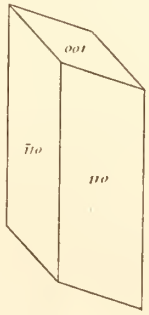


Fig. 7.

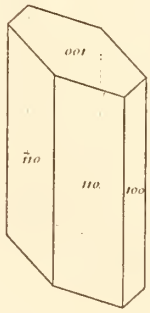


Fig. 8.

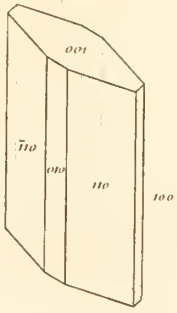


Fig. 9.

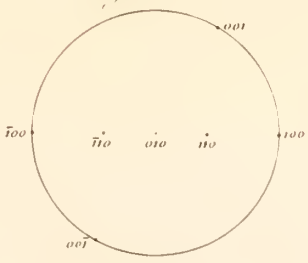


Fig. 10.

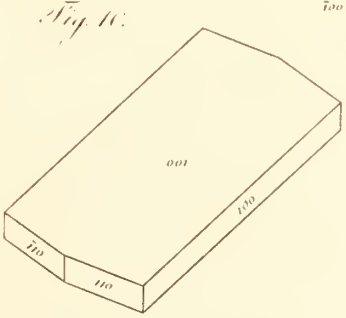


Fig. 11.

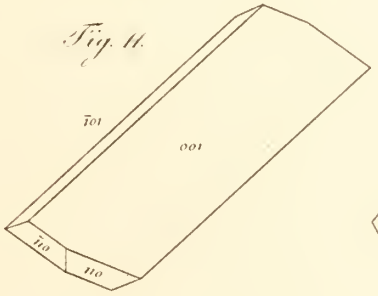


Fig. 12.

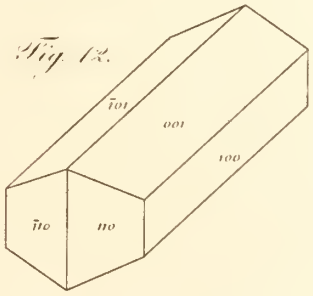


Fig. 13.

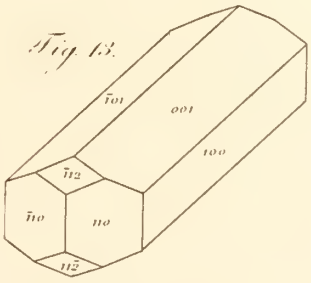


Fig. 14.

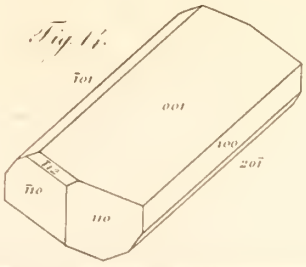


Fig. 15.

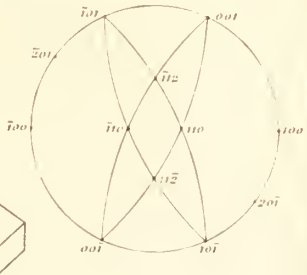


Fig. 16.

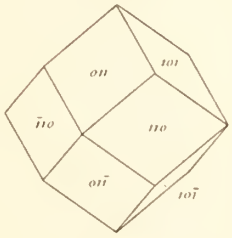


Fig. 17.

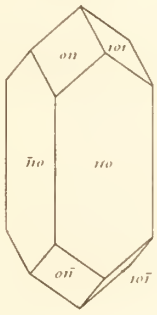
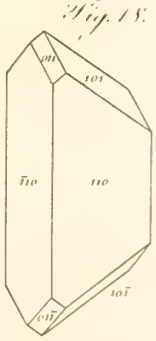


Fig. 18.



Vissa inc.

$$P\left\{\begin{matrix}(C_2H_5)_5\\ Pt\end{matrix}\right\}Cl$$

Fig. 19.

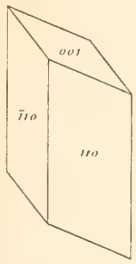


Fig. 20.

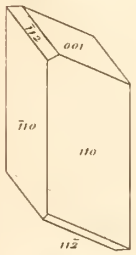


Fig. 21.

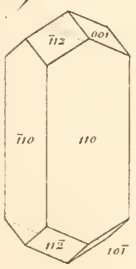


Fig. 22.

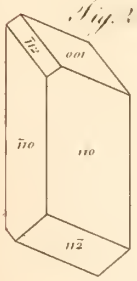


Fig. 23.

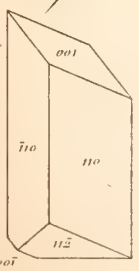
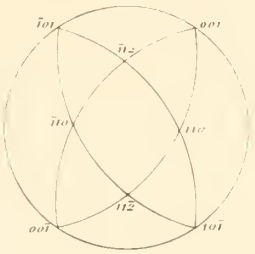
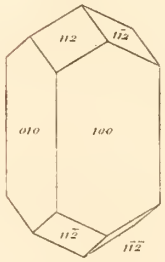


Fig. 24.



$$NH_4Cl$$

Fig. 25.



$$P_2\left\{\begin{matrix}(C_2H_5)_6\\ (C_2H_7)''\end{matrix}\right\}I_2$$

Fig. 26.

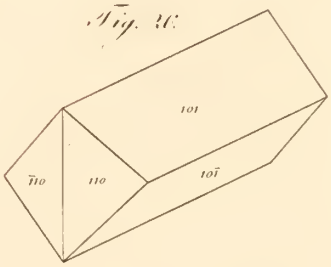


Fig. 27.

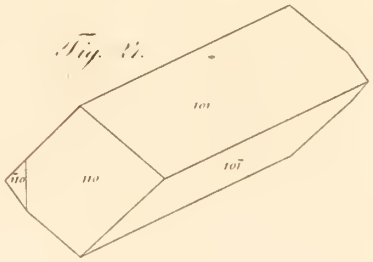


Fig. 28.

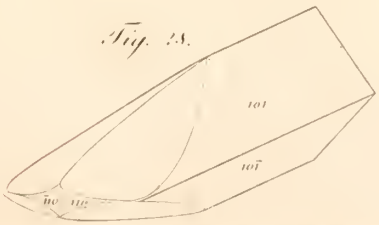
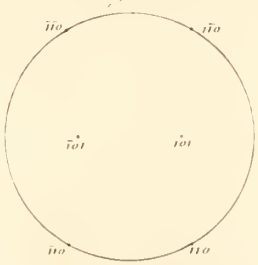


Fig. 29.



$$P(C_2H_5)_5S$$

Fig. 30.

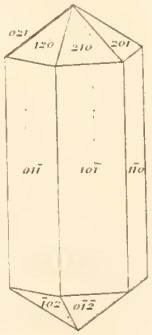
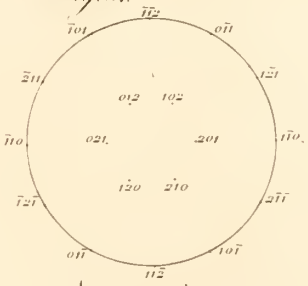


Fig. 31.



$$P\left\{\begin{matrix}(C_2H_5)_5\\ CH_3\end{matrix}\right\}Cl,PtCl_2$$

Fig. 32.

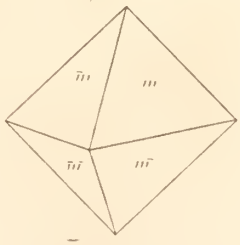
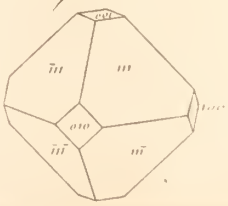
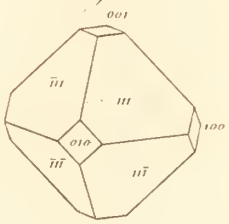


Fig. 33.



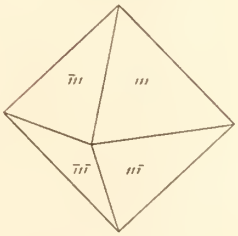
$$P(C_2H_5)_4Cl,PtCl_2$$

Fig. 34.



$$P\left\{\begin{matrix}(C_2H_5)_5\\ C_2H_5O\end{matrix}\right\}Cl,PtCl_2$$

Fig. 35.



$$P_2\left\{\begin{matrix}(C_2H_5)_6\\ (C_2H_7)_2\end{matrix}\right\}Cl_2,(PtCl_2)_2$$

Fig. 36.

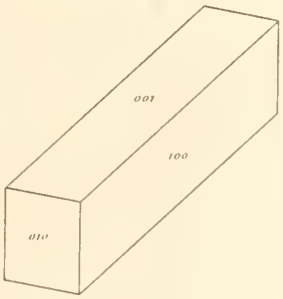
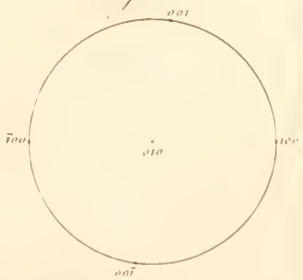


Fig. 37.



$$PN\left\{\begin{matrix}(C_2H_5)_4\\ H_2\\ (C_2H_4)''\end{matrix}\right\}Cl_2(PtCl_2)_2$$

Fig. 38.

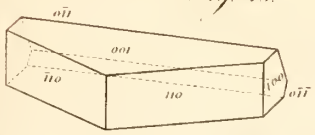


Fig. 39.

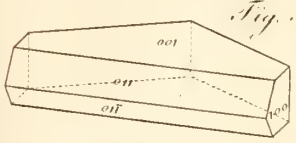


Fig. 40.

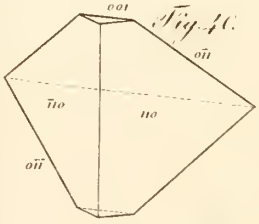


Fig. 41.

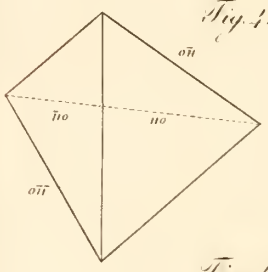
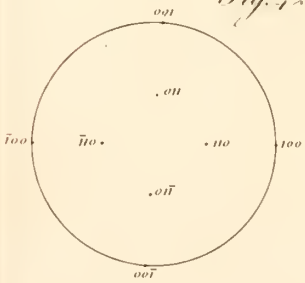


Fig. 42.



$$PN\left\{\begin{matrix}(C_2H_5)_3\\ H_3\\ (C_2H_4)''\end{matrix}\right\}Cl_2(PtCl_2)_2$$

Fig. 43.

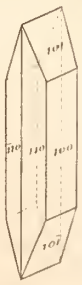
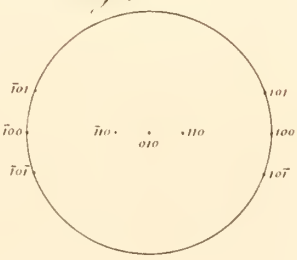


Fig. 44.

Fig. 45.



$$PAs\left\{\begin{matrix}(C_2H_5)_6\\ (C_2H_4)''\end{matrix}\right\}Cl_2(PtCl_2)_2$$

Fig. 46.

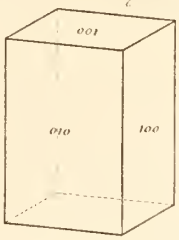


Fig. 47.

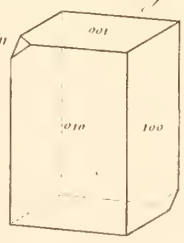


Fig. 48.

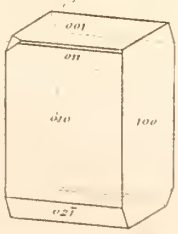


Fig. 49.

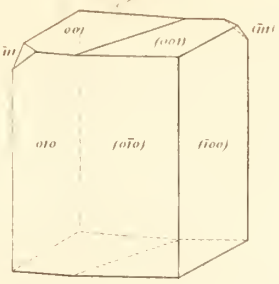
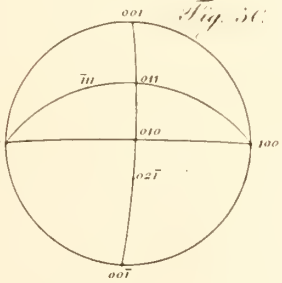


Fig. 50.



$$\left.\begin{matrix}(P(C_2H_5)_3O)_3\\ P(C_2H_5)_3Cl_2\end{matrix}\right\}(PtCl_2)_2$$

$$P_3\left\{\begin{matrix}(C_2H_5)_9\\ (C_2H_4)'''\end{matrix}\right\}Cl_3(PtCl_2)_3$$

Fig. 51.

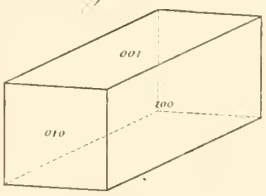


Fig. 52.

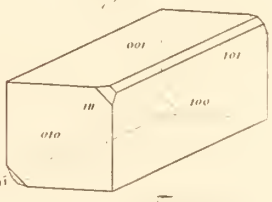


Fig. 53.

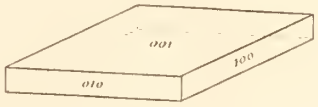


Fig. 54.

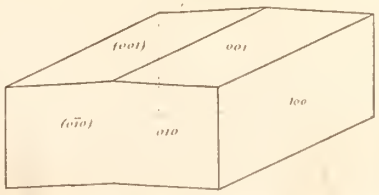


Fig. 55.

Fig. 56.

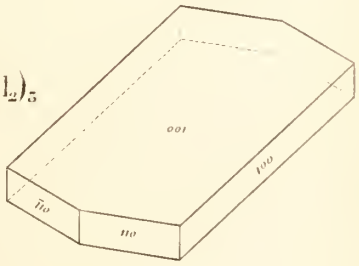


Fig. 57.

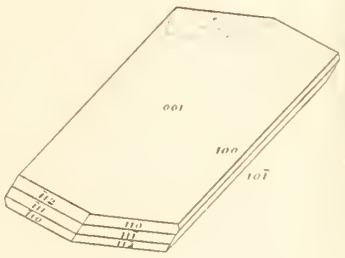
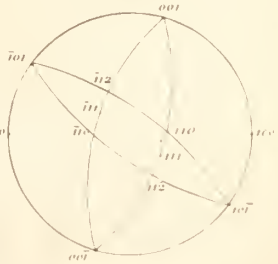


Fig. 58.



$P(C_2H_5)_5O.ZnI$

Fig. 59.

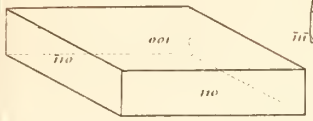


Fig. 60.

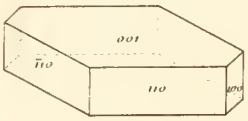


Fig. 61.

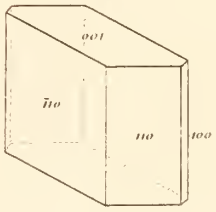


Fig. 62.

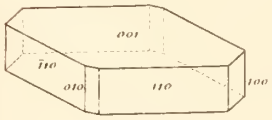


Fig. 63.

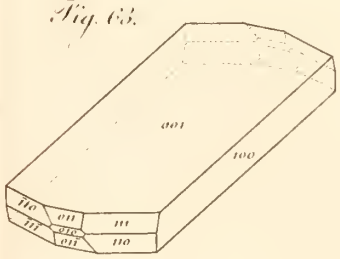


Fig. 64.

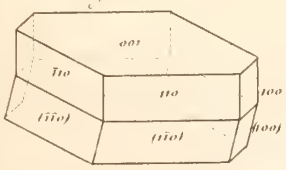


Fig. 65.

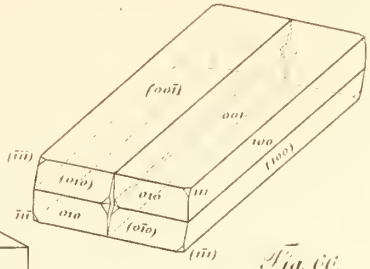


Fig. 66.

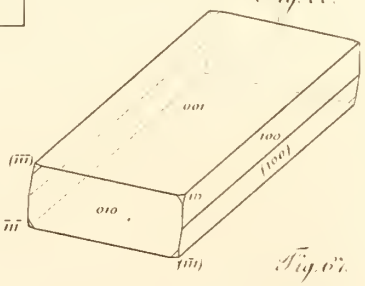


Fig. 67.

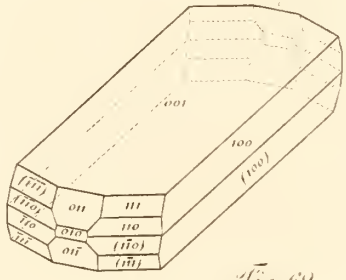
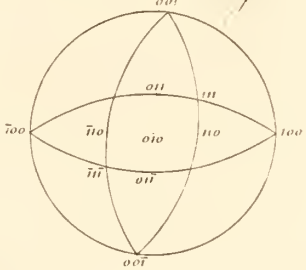


Fig. 68.



$P\left\{\begin{matrix}(C_2H_5)_5\\C_2H_4Br\end{matrix}\right\}Cl.PtCl_2$

Fig. 70.

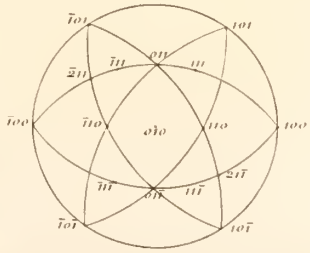


Fig. 71.

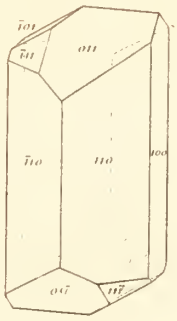


Fig. 72.

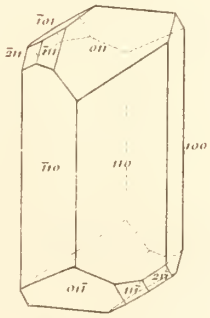


Fig. 73.

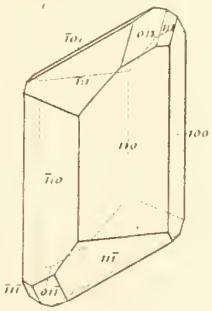


Fig. 74.

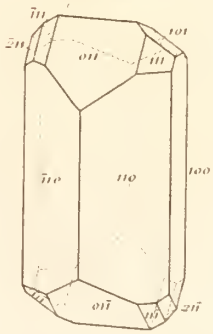


Fig. 75.

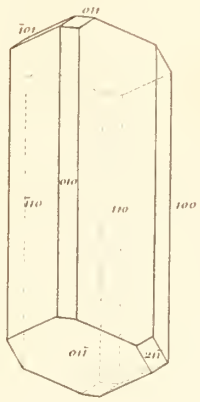


Fig. 76.

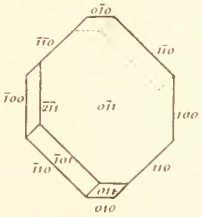


Fig. 77.

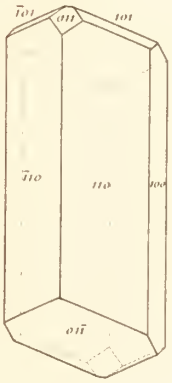
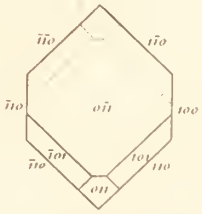


Fig. 78.



$P(C_2H_5)_4I$

Fig. 13.

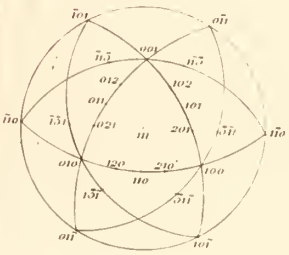


Fig. 14.

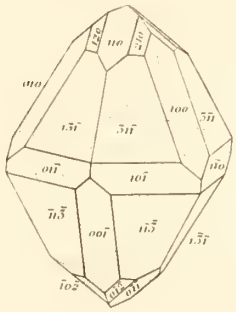


Fig. 15.

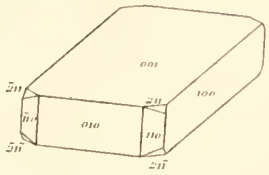


Fig. 16.

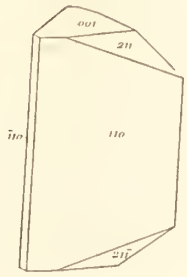


Fig. 17.

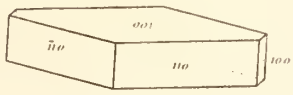


Fig. 18.

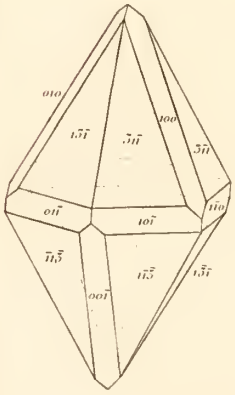


Fig. 19.

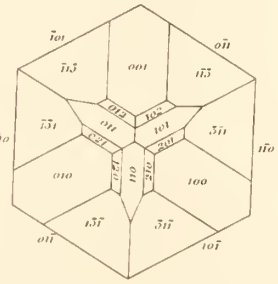


Fig. 20.

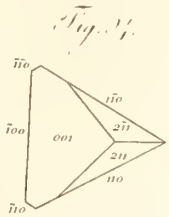
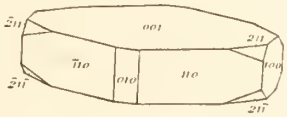


Fig. 21.



$P_2\left\{\begin{matrix}(CH_3)_6\\(C_2H_4)''\end{matrix}\right\}Br_2$

$P\left\{\begin{matrix}(CH_3)_3\\(C_2H_4Br)\end{matrix}\right\}Br$

Fig. 22.

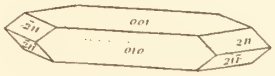


Fig. 23.

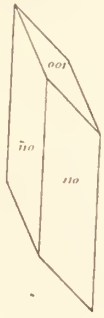


Fig. 24.

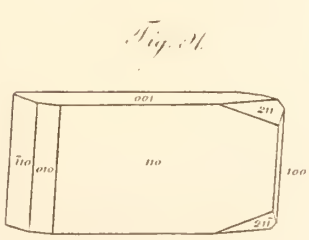


Fig. 25.

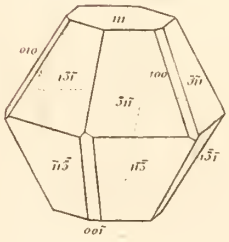


Fig. 26.

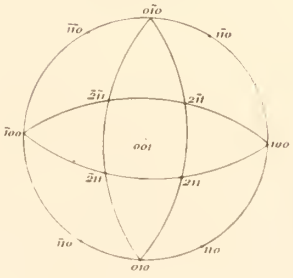


Fig. 27.

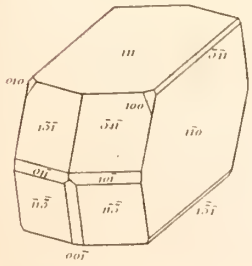


Fig. 28.

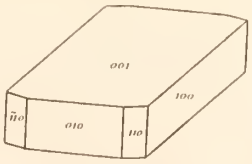


Fig. 29.

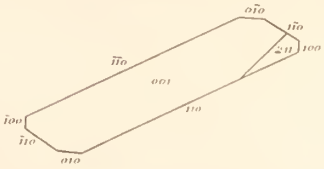
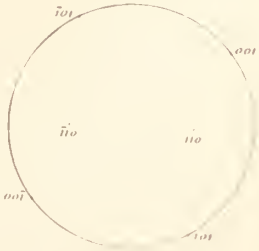


Fig. 30.



$P(C_2H_5)_4I$

Fig. 1.

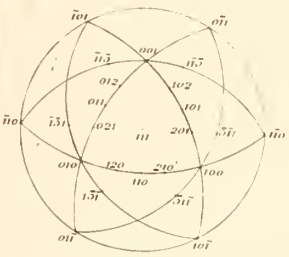


Fig. 3.

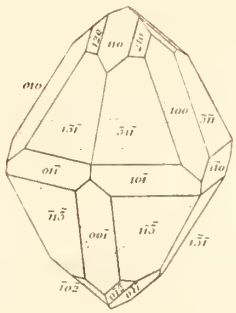


Fig. 5.

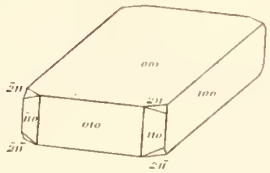


Fig. 13.

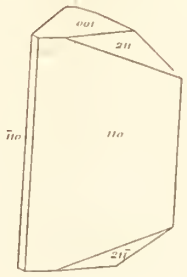


Fig. 6.

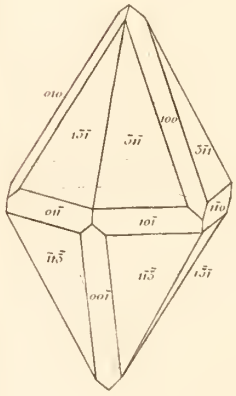


Fig. 4.

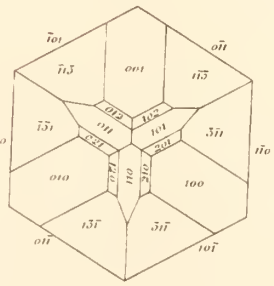


Fig. 8.

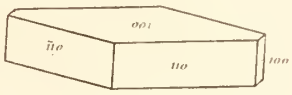


Fig. 9.

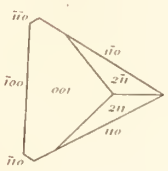
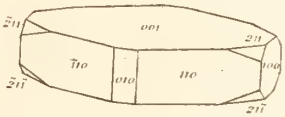


Fig. 7.



$P_2\left\{\begin{matrix}(CH_3)_6\\(C_2H_4)''\end{matrix}\right\}Br_2$

$P\left\{\begin{matrix}(CH_3)_5\\(C_2H_4Br)\end{matrix}\right\}Br$

Fig. 11.

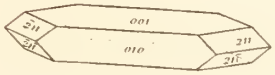


Fig. 15.

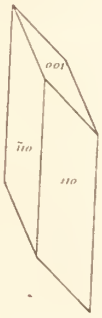


Fig. 1.

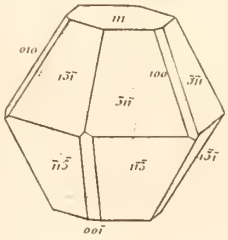


Fig. 3.

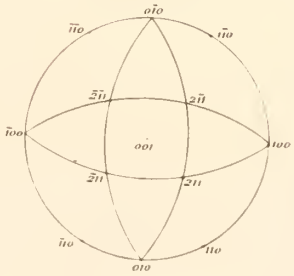


Fig. 4.

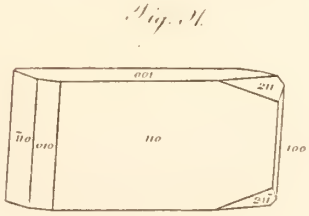


Fig. 2.

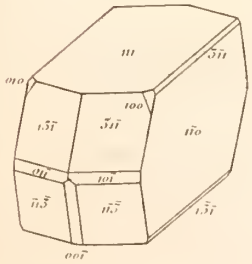


Fig. 10.

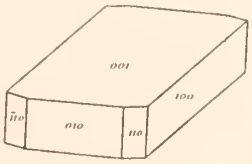


Fig. 12.

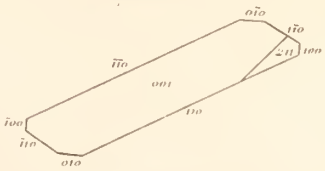


Fig. 16.

NOTE

Sur l'origine de la fonction W définie au commencement du premier § du Mémoire

Sur la Théorie des Transcendantes Elliptiques

PAR

JEAN PLANA

Lue dans la séance du 24 juin 1860.

Le 15 Juin de l'année 1828, peu de temps après la publication des théorêmes découverts par Jacobi sur les Transcendantes Elliptiques, j'ai présenté à l'Académie de Turin une Méthode élémentaire pour démontrer ces théorêmes, qui a paru dans le Tome XXXIII de la première Série de ses Volumes. Depuis j'ai remarqué que, à l'aide de l'addition suivante faite aux §§ VIII et IX de mon Mémoire, on pouvait trouver l'origine de toutes les nombreuses conséquences qui étaient implicitement inhérentes à la théorie nouvelle de Jacobi. Voici cette Addition, présentée dans son état primitif.

Après avoir fait

$$(1)\ldots\quad p\sin.\varphi = U = x(m + A_1x^2 + A_2x^4 + A_3x^6 \ldots\ldots + A_ix^{2i})\ ;$$

$$(2)\ldots\quad q = V = 1 + B_1x^2 + B_2x^4 + B_3x^6 \ldots\ldots\ldots + B_ix^{2i}\ ;$$

on a établi à la page 17 les deux équations

$$(3)\ldots\quad \frac{V-U}{1-x} = \left[(1+\beta_1x)(1+\beta_2x)(1+\beta_3x)\ldots\ldots(1+\beta_ix)\right]^2\ ;$$

$$(4)\ldots\quad \frac{V-\lambda U}{1-kx} = \left[\left(1+\frac{kx}{\beta_1}\right)\left(1+\frac{kx}{\beta_2}\right)\left(1+\frac{kx}{\beta_3}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{kx}{\beta_i}\right)\right]^2.$$

D'après cela on conçoit que les coefficiens A_1, A_2, A_3, ... A_i doivent

dépendre de ceux désignés par B_1, B_2, B_3, ... B_i. Et voici comment on peut exprimer les premiers par les seconds. Soit

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \frac{V-U}{1-x}=f'(x) .$$

En changeant x en $\frac{1}{kx}$, l'équation (3) donne le produit

$$x^{2i}k^i.\sqrt{\frac{\lambda}{k}}.f'\left(\frac{1}{kx}\right)=$$

$$\frac{(\beta_1.\beta_2.\beta_3\ldots\beta_i)^2}{k^i}.\sqrt{\frac{\lambda}{k}}.\left\{\left(1+\frac{kx}{\beta_1}\right)\left(1+\frac{kx}{\beta_2}\right)\left(1+\frac{kx}{\beta_3}\right)\ldots\left(1+\frac{kx}{\beta_i}\right)\right\}^2 ;$$

donc, en vertu de l'équation (4), l'on a

$$(6) \ldots \quad x^{2i}k^i.\sqrt{\frac{\lambda}{k}}.f'\left(\frac{1}{kx}\right)=\frac{(\beta_1.\beta_2.\beta_3\ldots\beta_i)^2}{k^i}.\sqrt{\frac{\lambda}{k}}.\left(\frac{V-\lambda U}{1-kx}\right) .$$

En désignant par V' et U' ce que devient V et U par le changement de x en $\frac{1}{kx}$, l'on a

$$f'.\left(\frac{1}{kx}\right)=\frac{V'-U'}{1-\frac{1}{kx}} ;$$

donc, d'après les équations (1) et (2), nous avons

$$(7) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad x^{2i}k^i.\sqrt{\frac{\lambda}{k}}.f'.\left(\frac{1}{kx}\right)=$$

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}-\sqrt{\frac{\lambda}{k}}.kx\left\{x^{2i}k^i+x^{2i-2}.B_1k^{i-2}+x^{2i-4}.B_2k^{i-4}+\ldots+B_ix^{2i-2i}k^{i-2i}\right\}\\+\sqrt{\frac{\lambda}{k}}\left\{mk^i.x^{2i}+A_1k^{i-2}x^{2i-2}+A_2k^{i-4}x^{2i-4}+\ldots\ldots A_ik^{i-2i}x^{2i-2i}\right\}\end{array}\right\}}{1-kx} .$$

Par le rapprochement des équations (6) et (7), on doit avoir ;

$$\sqrt{\frac{\lambda}{k}}.\frac{(\beta_1^2.\beta_2^2.\beta_3^2\ldots\beta_i^2)}{k^i}\left\{1+B_1x^2+B_2x^4+B_3x^6+\ldots+B_ix^{2i}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{\lambda}{k}}.\left\{mk^i.x^{2i}+A_1k^{i-2}.x^{2i-2}+A_2k^{i-4}.x^{2i-4}\ldots+A_ik^{i-2i}.x^{2i-2i}\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{\lambda}{k}}}{k^i}.\left\{A_i+A_{i-1}.k^2x^2+A_{i-2}.k^4x^4+A_{i-3}.k^6x^6+\ldots+mk^{2i}.x^{2i}\right\} .$$

Il suit de là que

(8) ..... $m = (\beta_1^2 . \beta_2^2 . \beta_3^2 \ldots \beta_i^2) . \frac{B_i}{k^{2i}} = \frac{A_i B_i}{k^{2i}}$;

(9) ..... $A_i = \beta_1^2 . \beta_2^2 . \beta_3^2 \ldots \beta_i^2$;

et que, en général,

(10) ..... $A_{i-n} = \frac{A_i B_n}{k^{2n}}$;

d'où l'on tire

(11) ..... $U =$

$$A_i x . \left\{ \frac{B_i}{k^{2i}} + \frac{B_{i-1}}{k^{2i-2}} x^2 + \frac{B_{i-2}}{k^{2i-4}} x^4 \ldots + B_2 . \frac{x^{2i-4}}{k^4} + B_1 . \frac{x^{2i-2}}{k^2} + x^{2i} \right\} ;$$

ou bien

(12) ..... $U =$

$$\frac{(\beta_1 . \beta_2 . \beta_3 \ldots \beta_i)^2}{k^i} . \left\{ \frac{B_i}{k^i} + \frac{B_{i-1}}{k^{i-2}} x^2 + \frac{B_{i-2}}{k^{i-4}} x^4 \ldots + B_1 . x^{2i-2} k^{i-2} + k^i . x^{2i} \right\} .$$

Mais la formule (3)′, posée au § IX, donne

(13) ..... $\sqrt{\frac{k}{\lambda}} = \frac{\beta_1^2 . \beta_2^2 . \beta_3^2 \ldots \beta_i^2}{k^i}$;

donc nous avons

(14) ..... $U =$

$$\sqrt{\frac{k}{\lambda}} . x \left\{ \frac{B_i}{k^i} + \frac{B_{i-1}}{k^{i-2}} x^2 + \frac{B_{i-2}}{k^{i-4}} x^4 + \ldots + B_1 k^{i-2} x^{2i-2} + k^i x^{2i} \right\} ,$$

tandis que

(15) ..... $V = 1 + B_1 x^2 + B_2 x^4 + B_3 x^6 + \ldots + B_i x^{2i}$.

Ces deux polynomes doivent donner, conformément aux équations (3) et (4):

(16) ..... $\sqrt{V^2 - U^2} =$

$$\sqrt{1 - x^2} \left\{ (1 - \beta_1^2 x^2)(1 - \beta_2^2 x^2)(1 - \beta_3^2 x^2) \ldots (1 - \beta_i^2 x^2) \right\} ;$$

(17) ..... $\sqrt{V^2 - \lambda^2 U^2} =$

$$\sqrt{1 - k^2 x^2} \left\{ \left(1 - \frac{k^2 x^2}{\beta_1^2}\right) \left(1 - \frac{k^2 x^2}{\beta_2^2}\right) \left(1 - \frac{k^2 x^2}{\beta_3^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{k^2 x^2}{\beta_i^2}\right) \right\} .$$

Ainsi, en posant $x = \sin.\varphi$ et $y = \sin.\psi$, si l'on fait $y = \frac{U}{V} = \sin.\psi$, l'on aura

$$(18) \ldots \cos.\psi = \frac{\cos.\varphi \left\{ (1 - \beta_1^2.\sin.^2\varphi)(1 - \beta_2^2.\sin.^2\varphi) \ldots (1 - \beta_i^2.\sin.^2\varphi) \right\}}{V};$$

$$(19) \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \sqrt{1 - \lambda^2.\sin.^2\psi} =$$

$$\sqrt{1 - k^2.\sin.^2\varphi} \cdot \left\{ \left(1 - \frac{k^2.\sin.^2\varphi}{\beta_1^2}\right)\left(1 - \frac{k^2.\sin.^2\varphi}{\beta_2^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{k^2.\sin.^2\varphi}{\beta_i^2}\right) \right\}.$$

Les polynomes U et V étant décomposés dans leurs facteurs, ils seront de cette forme:

$$(20) \ldots \quad U = mx\left(1 - \frac{x^2}{\theta_1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\theta_2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\theta_3^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x^2}{\theta_i^2}\right);$$

$$(21) \ldots \quad V = (1 - k^2\theta_1^2 x^2)(1 - k^2\theta_2^2 x^2)(1 - k^2\theta_3^2 x^2) \ldots (1 - k^2\theta_i^2 x^2).$$

En outre l'on aura:

$$(22) \left\{ \begin{aligned} & m = (\beta_1^2.\beta_2^2.\beta_3^2 \ldots \beta_i^2)(\theta_1^2.\theta_2^2.\theta_3^2 \ldots \theta_i^2); \\ & \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda}} = \frac{k^i}{\beta_1^2.\beta_2^2.\beta_3^2 \ldots \beta_i^2}; \\ & \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - \lambda^2 y^2)}} = \frac{m\,dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}; \\ & \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \lambda^2.\sin.^2\psi}} = \frac{m\,d\varphi}{\sqrt{1 - k^2.\sin.^2\varphi}}. \end{aligned} \right.$$

L'équation (3) revient à dire que

$$(23) \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1 - \frac{U}{V} =$$

$$(1 - \sin.\varphi)\frac{\{1 + \beta_1.\sin.\varphi\}^2}{(1 - k^2\theta_1^2.\sin.^2\varphi)} \cdot \frac{\{1 + \beta_2.\sin.\varphi\}^2}{(1 - k^2\theta_2.\sin.^2\varphi)} \ldots \frac{(1 + \beta_i.\sin.\varphi)^2}{(1 - k^2\theta_i.\sin.^2\varphi)}.$$

Chacun des facteurs qui suivent $1 - \sin.\varphi$ ayant une forme semblable à celle qui constitue le second membre de l'équation

$$(1 \mp \sin.\zeta)(1 \mp \sin.\zeta') = \cos.^2\alpha_m \cdot \frac{\left\{1 \mp \frac{\sin.\varphi}{\sin.\alpha_{p-m}}\right\}^2}{1 - k^2.\sin.^2\alpha_m.\sin.^2\varphi},$$

où l'on a:

$$\alpha_m = \text{Amplitude}\left(\frac{m}{p}K\right); \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}};$$

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= \text{Amplitude}\left(\xi + \frac{m}{p}K\right) \\ \zeta' &= \text{Amplitude}\left(\xi - \frac{m}{p}K\right) \end{aligned}\right\}; \qquad \xi = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}};$$

il est naturel de chercher, si en prenant

$$\beta_m = \mp \frac{1}{\sin.\alpha_{p-m}}; \qquad \theta_m = \sin.^2\alpha_m,$$

on obtiendra par le développement des produits

$$(1-\sin.\varphi)(1-\sin.\zeta)(1-\sin.\zeta')(1-\sin.\zeta_{(1)})(1-\sin.\zeta'_{(1)})\ldots\ldots$$

une équation propre à identifier les équations (20), (21) et (23). C'est d'après cette considération que l'on a choisi la fonction W, définie au commencement du premier § de ce Mémoire pour obtenir une solution générale du problême exprimé par les équations (22). Car, les moyens ordinaires suffisent pour $2i+1=3$, et $2i+1=5$. Mais pour $2i+1=7$, $2i+1=11$, etc. il fallait introduire les amplitudes α_m (censées connues) comme quantités auxiliaires.

SUL *BIOPHYTUM SENSITIVUM* D. C.

OSSERVAZIONI

DEL DOTTORE

PIETRO SAVI

PROFESSORE DI BOTANICA NELL'UNIVERSITÀ DI PAVIA

Memoria approvata nell'adunanza del giorno 20 maggio 1860.

La pianta di cui si tratta in questo scritto e che successivamente è stata conosciuta coi nomi di *Herba viva* dall'Acosta, di *Todda vaddi* dai Redattori dell'*Hortus malabaricus*, edito dal Reede, di *Herba viva foliis Polypodii* dal Bauh., di *Herba sentiens* dal Rumph., ed infine d'*Oxalis sensitiva* dal Linneo, è un'erba di forma elegante, di lunga fioritura, singolare per la mobilità manifesta delle sue parti.

Simile ad una piccola Palma per il portamento, offre al pari di questa all'estremità di un fusto semplice, nudo, dritto, onde un ciuffo di circa trenta foglie, che sono composte, paripinnate, e dal cui mezzo sorgono circa altrettanti gambi terminati da gruppi di fiori che sbocciano successivamente e ad un per giorno, onde alquanto dopo incominciata la fioritura ogni gruppo o capolino mostra bocce di differente grandezza, un fiore sbocciato, frutti in via di maturazione, altro aperto, altro o altri col gambo disarticolato, adesi tuttora mercè la viscbiosità dei peli glandolosi, ma che o presto o tardi cadono sotto l'urto dei venti.

Il successivo aprirsi e chiudersi tanto dei fiori quanto dei frutti avviene regolarmente in certi dati momenti del giorno, i quali nel cuor dell'estate coincidono colle nove del mattino per l'aprirsi, con le quattro della sera per il chiudersi, entro il qual tempo nei fiori succede l'egresso del polline, nei frutti il getto dei semi.

Non minore attività dimostrano le foglie.

Desse in fatto nel giorno, sotto l'azione della luce solare diretta o diffusa, vedonsi orizzontali, o leggermente ascendenti con le coppie delle

foglioline distese in un medesimo piano; tramontato il sole si presentano piegate verticalmente in basso, avendo ciascheduna coppia a contatto le pagine inferiori, essendosi il picciolo comune abbassato di circa quaranta gradi. Inoltre, se a sole alto sull'orizzonte venga ad agire sopra di esse un esterno stimolo prodotto o da urto di corpo solido, o di goccia d'acqua, o dal soffio di vento, o da scottatura parziale (1), o da cambiamento notevole e repentino nell'intensità della luce, immediatamente con vivace movimento pari in celerità a quello della Sensitiva, le foglioline abbandonano la posizione diurna onde comporsi in quella che tengono la notte.

I fenomeni di sensibilità de' quali ho tenuto parola, non sono nella Famiglia delle Ossalidacee propri al solo *Biophytum*, ed ognun sa che da molto tempo conoscevansi ancora nell'*Averrhoa*. Quindi nel 1840 il Chiar.mo Professore Giovanni Brignoli di Brunhoff, di sempre onorata e reverita ricordanza, scriveva al sig. Carlo Morren di Liegi come unitamente a due dei suoi discepoli avevano riscontrato mobilità, benchè lentissima, nelle foglie dell'*Oxalis stricta* quando la fosse stata tormentata con ripetuti urti, ed infine il prelodato sig. Morren nel Volume 14 della 2.a serie *des Annales des Sciences naturelles* referisce di aver notato consimile fenomeno nelle foglie di molte altre specie di *Oxalis* come l'*Acetosella*, la *purpurea*, la *carnosa*, la *tortuosa*, la *Deppei*.

La vivacità dei movimenti con i quali il *Biophytum* fa mostra di godere di una specie di sensibilità sotto gli esterni eccitamenti nel tempo che forma uno dei fatti più inesplicabili della fisiologia vegetale, suscita presso gl'Indigeni delle regioni ove esso è spontaneo (Messico, Malabar, Ceylan, Molucche) delle superstiziose credenze, e gli induce ad attribuirgli naturali e soprannaturali virtù. Limitandomi ad esporre solo le prime, dirò che l'adoprano per sanare le ferite posandovelo sopra soppesto, che ammaccato e impastato con burro l'applicano sui postemi onde maturarli,

---

(1) Tale sarebbe il calore dello spettro solare concentrato mediante lente convessa, o quello ancora d'un sottil ferro rovente. Il moto indotto dal calore dei raggi solari concentrati, non vi ha dubbio che sia dovuto alla sola azione urente dei medesimi, restando esclusa l'idea che possa attribuirsi all'urto, idea la quale potrebbe nascere, quando si usasse un corpo riscaldato. Prevalendosi di questo focolare d'energico calore concentrato dalla lente ustoria per scottare in qualche punto la lamina d'una fogliolina di *Biophytum*, questa e la sua opposta immediatamente si abbassano. Egualmente scottando nella sua metà o con lente ustoria, o con ferro rovente il picciolo comune tosto si abbassano tutte le sue foglioline, quindi in capo ad un certo tempo le coppie inferiori alla scottatura tornano alla primitiva posizione, mentre l'altre restano immobili e presto seccano.

bevuto con l'olio *Sirgelim* (vedi Rheede *Hortus malabaricus*), si ha fede che arresti la gonorrea. Il decotto della radice è usato come litontrittico, ed ancora per curare le punture degli Scorpioni.

Con facilità riproducesi spargendo i semi a fin di maggio su terra di brughiera ed appena ricuoprendoli. Rinasce spontanea nei vasi prossimi; prospera nei luoghi aprici.

Descrizione della pianta.

Radice a fittone non bulbifera, lunga da dieci a dodici centimetri, terete, flessuosa, disordinatamente ramificata, con ramificazioni che in altre minori si suddividono, terminando in peli radicali. Tanto il fittone quanto le branche nei tratti più grossi si mostrano colorati in rosso più o meno intenso.

Caule erbaceo assolutamente semplice, non di rado inferiormente sdraiato, superiormente verticale, lungo circa nove centimetri, sovente con leggiere successive strozzature, più grosso alla sommità che alla base, lucido, coperto di minuti peli rivolti in basso che sono più fitti e più lunghi mano mano che si avvicinano all'apice del fusto; la di lui epidermide manca di stomi, è formata da cellule poligone, allungate, ripiene d'un liquido di color roseo.

Stipole nulle.

Foglie composte paripennate; allo stato gemmario godono di fogliazione arricciolata in fuori, a sviluppo basifugo. Giunte al loro perfetto sviluppo hanno una lunghezza di quattro a otto centimetri, e sono disposte in rosetta sulla dilatazione terminale del caule. Picciolo semicilindrico nella faccia inferiore, appena convesso nella superiore, reso come alato da due sottili cordoncini che si estendono per tutta la lunghezza dei margini laterali in contiguità della faccia superiore che è di color rossastro, inferiormente, mediante un ingrossamento, si articola sopra una prominenza o mensoletta del caule trasversalmente corrugata, è nudo nel quarto inferiore, nel resto della sua lunghezza è coperto da nove a dodici coppie di foglioline, terminando in un esile mucrone di consistenza erbacea. Foglioline disposte a coppia, a margini brevemente sovrapposti, quasi quadrilatere, allungate, ottuse nella sommità, troncate alla base, incurvate leggermente nei margini laterali, onde appariscono falcate a concavità rivolta verso l'estremità della foglia, divise longitudinalmente in due parti

ineguali da una piccola costoletta incurvata prolungata nell'apice in breve ed esile punta, nervature secondarie molte, pinnate, a lor volta ramificate nell'estremità, piccioletti brevissimi depressi, inseriti sul picciolo comune lungo il margine inferiore dei due cordoncini longitudinali.

La sostanza dei piccioletti è formata, oltre che da esili fibre vascolari che ne occupano l'asse, da un ammasso di cellule esagone allungate a grosse pareti piene di linfa con grani d'apparenza feculacea, e di grandezza varia, strette insieme, senza interporre meati, in serie parallele, con la loro maggior lunghezza normale alla direzione della serie, essendo questa parallela al picciolo primario. La faccia esterna delle cellule che formano lo strato superficiale in ambedue le pagine è disegnata da rughe fitte, prominenti, dirette tutte parallelamente all'asse del piccioletto e della fogliolina. Siffatta particolarità di conformazione per essere unicamente propria a questa parte che è l'organo motore delle foglioline dà giusto motivo di credere che abbia una qualche relazione con il meccanismo mercè del quale si sviluppa la forza produttrice del movimento. Le foglioline hanno un'epidermide formata in ambedue le pagine di cellule a contorno meandriforme, dotate di stomi che maggiormente abbondano sulla pagina inferiore. Le cellule del parenchima corrispondenti all'epidermide della pagina superiore sono conformate in cilindretti, e tutte ripiene di clorofilla.

Infiorazione definita, in cima dicotomica, ad assi estremamente corti disarticolabili presso alla base dopo la fioritura, onde ne resta un quasi impercettibile vestigio in forma di mozzicone, persistendo le bratteole cui erano ascellari. La breve dimensione longitudinale dei peduncoli dà all' infiorazione l'apparenza d'un capolino sorretto da un asse primario a estremità ingrossata e bratteata; brattee ovato-lanceolate, acuminate, a margini ciliati da lunghi peli conici, lamina quasi membranacea incolora, meno che nella linea mediana longitudinale, la quale è percorsa da una nervatura vascolare. Resultando da più e diverse cime coacervate, non presenta fioritura centripeta, come nemmeno l'offre centrifuga, e ciò perchè, atteso la vicinanza estrema dell' inserzione dei peduncoli, non è possibile il conoscere il rapporto con il quale stanno fra loro le diverse generazioni cui appartengono.

Frattanto il manifesto carattere di cime dicotomiche che riscontrasi nelle infiorazioni dell'*Oxalis primulaefolia* Raddi, della *megalorhiza*, della *stricta*, non che il graduato passaggio di tali cime ad ombrelle visibile

nell'*Oxalis rosea*, *crassicaulis*, *floribunda* e *sericea*, ne prova la giustezza della qualificazione di infiorazione determinata, o cima capolino, data alla disposizione dei fiori del *Biophytum sensitivum*, poichè dall'ombrella delle summentovate *Oxalis* al capolino del *Biophytum sensitivum* non sussiste altra differenza essenziale che nell'essere in quest'ultimo i peduncoli più corti.

Fiori completi, perfetti, pentameri, regolari, effimeri.

Calice regolare, persistente, formato da cinque sepali acuminati, con tre a sette nervature longitudinali, disposti in bocciamento quincunciale.

Corolla pentapetala regolare, campanulato-ippocrateriforme, a bocciamento contorto, a fioritura diurna, breve (dura da sei a otto ore), dopo di che il lembo appassendo si gualcisce, il tubo disarticolasi alla base, e per l'ingrossare dei contenuti ovari vien sospinto a poco a poco in alto e finisce col cadere. Petali smarginati, quasi bilobi uniti pei margini della porzione superiore delle unghie, percorsi longitudinalmente da tre nervature che partendosi dal mezzo dell'inserzione dell'unghia procedono divergendo sino al margine superiore della lamina.

Nella loro prima età, appartenendo cioè a una boccia un terzo in grandezza di quella che è per fiorire, i petali sono incolori, eguali in lunghezza agli stami, privi di nervature. Queste compariscono gradatamente con sviluppo basifugo, sono formate da trachee, il numero delle quali aumenta dal basso all'alto. Il resto del tessuto è un ovatenchima del quale gli otrelli corrispondenti alla superficie sono, nei petali perfettamente sviluppati, ovati, allungati, diretti nel senso longitudinale del petalo, muniti nell'estremità inferiore d'un ripiegamento della membrana sporgente in forma di papilla, ripieno, al pari dell'otrello stesso, d'un liquore d'un bel giallo cromo. In grazia di queste papille acquista la superficie del petalo un'apparenza vellutata, e uno speciale gatteggiamento che grandemente contribuisce a darle quella venustà che è compatibile con la piccolezza del fiore e la volgarità del colore.

Androceo di dieci stami, tutti liberi, disposti in due verticilli a elementi fra loro alternanti in ogni verticillo eguali, quelli dell'inferiore più corti, opposti ai petali, alla base del lato esterno muniti di una glandoletta. Antere cordate, eguali, bilobe, a lobi prodotti al di sotto del connettivo dorsale, dehiscenti per sutura longitudinale, laterale-interna, sostenute da un filamento impiantato alla base del connettivo, erette nel fiore in boccia, orizzontali nel fiore aperto, nel seguito disarticolate dal

filamento, e trascinate colla corolla nelle grinze del cui lembo restano involte. Polline ellittico.

Gineceo gamopistillare formato di cinque pistilli connessi incompletamente pei lati dei rispettivi ovari. Stili brevissimi, terminati da stimmi compressi bilobi. Parte ovulifera del gineceo internamente quinqueloculare, a logge contenenti quattro uovicini ascendenti attaccati mediante funicolo ombelicale all'angolo interno di ogni loggia. Uovicini ascendenti ortotropi con testa prolungata nell'apice in un piccolo collo incurvo volto verso la placenta.

Funicolo ombelicale corto, adeso alla parte inferiore dell'uovicino, ove si inserisce ad angolo.

L'ortotropia propria agli uovicini del *Biophytum* offre un carattere di massima importanza onde distinguere questo genere dall'*Oxalis* ove gli uovicini sono anatropi o quasi anatropi, ed ove per conseguenza il rafe è sempre assai più lungo della metà dell'uovicino. In quanto poi al ritrovarsi nella stessa famiglia naturale specie ad uovicini anatropi, ed altre ad uovicini ortotropi o quasi ortotropi non deve sorprendere essendo un fatto già conosciuto. Esempio ne porgono le Cistacee ove nel Genere *Helianthemum* vi ha il *niloticum* con uovicini ortotropi, ed il *vulgare* che gli ha anatropi (Vedi Brongniart Adolphe: *Observations sur le mode de fécondation des Orchidées et des Cistinées;* Annales des sciences naturelles. Paris, serie 1.ª, T. 14, pag. 113, tav. 11-12). Le Zigofillacee, tanto affini alle Ossalidacee, esse pure presentano nel *Guaiacum* degli uovicini semianatropi, nella *Fagonia* degli uovicini ortotropi (V. Agardh Jac. Georg.: *Theoria systematis plantarum et Familiarum Phanerogamarum in series naturales dispositio.* Lundae, 1858. Tav. 18, fig. 11-12).

Per quello che spetta all'allungarsi in tubetto dell'apertura micropilare avvertirò che una conformazione simile si riscontra negli uovicini dell'*Helianthemum laevipes* ove sono anatropi pendenti dalla placenta cui si approssima l'apice micropilare prodotto in tubo del testa (Vedi Brong. luogo citato, T. 14, tav. 10, fig. 4). Nell'*Acorus Calamus* al contrario il tubetto micropilare proviene dall'integumento interno (Vedi Agardh Jac. Georg. luogo cit., tav. II, fig. 5-9).

Frutto allungato, a cinque coste rilevate ottuse, coperto di peli glandolosi, colorato di rossastro presso la sommità, più corto dei sepali che lo involgono senza aderirvi essendo autocarpico; il pericarpio cartaceo all'epoca della perfetta maturità si apre in cinque valve eguali regolari

(mediastini D. C.) terminate dai resti degli stimmi, munite d'un setto longitudinale, mediano, placentifero nel margine interno, cui da ogni lato sono attaccati due semi. Endocarpo incoloro nella parte superiore di ciascheduna valva applicato immediatamente all'epicarpo, inferiormente disgiunto mediante un mesocarpo formato di ampli otrelli a membrana esile e trasparente, alla di cui interna superficie aderiscono piccoli granuli ovoidei o sferici immersi entro la linfa che ne riempie la cavità. In grazia di questo tessuto otricellare la parte inferiore delle due mezze carpelle che formano ogni valva, e di queste segnatamente la porzione che forma il setto si mostrano rigonfie, onde le dicci turgescenze cui danno luogo premendosi a vicenda reagiscono sulle valve, e ne producono il vicendevole discostarsi, nel che appunto consiste la deiscenza; in fatto il notato turgore comparisce nel tessuto mesocarpico gradatamente all'approssimarsi della perfetta maturazione del frutto, sparisce completamente dopo l'emissione dei semi, prosciugandosi allora le valve e tornando ad approssimarsi; ed è pure fatto comprovato che l'igroscopicità dei tessuti pericarpici nulla influisce sulla posizione che essi prendono durante la disseminazione, poichè anche del tutto immersi nell'acqua le valve si mantengono discoste come lo erano nell'aria.

Semi ascendenti, lisci, lucidi, color di marrone, sostenuti all'estremità di un funicolo ombelicale che s'inserisce a grandissima vicinanza della loro base organica, ovali, acuminati nell'apice ove persiste il tubo esostomico piegato in basso a guisa d'oncino. Tre ore dopo subito il contatto dell'aria, appariscono disegnati trasversalmente da striscie bianco-cenerine; in capo a cinque ore essi sono o totalmente scomparsi di sulle placente o veramente ne rimane il vestigio in forma d'una buccetta bianca, leggera, aggrovigliata sopra se stessa. Questa è una conseguenza di quel particolare modo di disseminazione, conosciuto da lungo tempo come proprio alle *Oxalis*, il quale consiste nel fendersi il loro esterno involucro lungo il margine opposto al punto d'attacco, nel reflettersi bruscamente in due valve che separandosi dal contenuto seme si arricciolano in fuori puntando sull'interna superficie del pericarpio, ed in tal modo reagendo sul seme stesso lo scagliano ad una distanza più o meno grande. L'invoglio che, arricciolandosi con subitaneo moto pari allo scattare d'una molla è causa immediata dello sparpagliamento dei semi, è stato per lungo tempo qualificato dai Botanici per un *arillo*. L'improprietà di questa denominazione dopo i lavori d'Augusto Saint-Hilaire (*Morphologie*

pag. 751), dello SCHLEIDEN, e del Prof. Adolfo TARGIONE TOZZETTI (1) è divenuta così manifesta e notoria che mi dispensa dal trattenermi a dimostrarla, limitandomi a dire che è costituito da quella parte degli invogli spermici che è detta testa o guscio.

Il fendersi e lo scattare di questo integumento è un fenomeno derivante da un processo vegetativo dei tessuti, nè può referirsi alle vicende igroscopiche dell'Ammosfera, poscia che avviene indistintamente tanto essendo i semi circondati da questa, quanto essendo sommersi nell'acqua.

Il seme rimasto libero del suo integumento elastico, si presenta scavato superficialmente da solchi trasversali separati da spigoli leggermente bernoccoluti, ha un'endopleura sottile color di ruggine intimamente adesa a un perisperma granulare, carnoso, oleoso. L'embrione è cilindrico assile, antitropo con radicina cioè diametralmente opposta all' ilo.

Tutto il sistema aereo della pianta è leggermente pubescente in grazia di brevi peli di due diverse specie che lo ricuoprono; alcuni linfatici che predominano sugli organi della vegetazione, altri glandolosi che si vedono più frequenti sugli organi florali e sui frutti.

I peli linfatici sogliono essere i più corti, sono unicellulati, aguzzi, dotati di grossa parete, cavi con cavità ripiena d'aria o di un liquido giallastro, incurvi, o sivvero bruscamente inflessi presso la base la quale assottigliandosi bruscamente s' impianta sulla cuticola restando incassata ed inceppata in mezzo alle testate rigonfie delle cellule cuticolari che ad essa fan capo, e che le formano come un rincalzo ed un appoggio. Abbondano nella porzione superiore del fusto, e sull' intiera lunghezza di questo si mostrano con la punta volta in basso; esistono sui peduncoli, e sulla faccia superiore del picciolo, sono rari sopra i sepali, mancano sui frutti, i quali invece sono ricoperti dai peli glandulosi. Questi resultano da più cellule di lunghezza diversa attestate l'una dopo l'altra in semplice serie, sono limitate da una membrana liscia, trasparente, ripiene tutte meno che la terminale da linfa limpida, incolora, ove sono

(1) Saggio di studi intorno al guscio dei semi del Dott. Adolfo TARGIONI TOZZETTI di Firenze, 1854; inserito nel T. XV, Serie 2.ª delle Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino. A pag. 66 di detto Saggio si legge quanto appresso:

« Nei semi di *Oxalis* la membrana propria alla loro parete cellulare è grossissima, ed elastica » oltre misura ..... Le cellule ad essa sottoposte per il maturare sviluppate in massimo » grado, e prese delle forme più globose di quelle che avevano in principio, esercitano su di lei » una violenta pressione dall'interno all'esterno, finchè essa rompendosi porta seco il tessuto cui » aderisce, forma di sè e del tessuto asportato un glomerulo incoloro del quale la cuticola occupa » il centro ». Tav. I, fig. 10, 11, 12, 20, 29, 30; Tav. IV, fig. 4, 5, 6.

immersi dei grani incolori a superficie bernoccoluta. La cellula terminale costituisce l'apparecchio secernente ossia la vera glandula; è ripiena d'una sostanza granulare giallastra, e limitata da una tenuissima membrana da cui trasuda l'umore secreto.

A comodo dei Botanici i quali non hanno tempo per leggere lunghe descrizioni terminerò questa notizia ricpilogando i fatti, a parer mio, più importanti che vi sono espressi.

1.° Il *Biophytum sensitivum* è un'Ossalidacea annua priva di bulbi e di radici avventizie.

2.° È dotata di una eccitabilità sotto gli esterni stimoli qualunque essi siansi, non minore di quella propria alla *Mimosa pudica*.

3.° A differenza delle vere specie di *Oxalis*, che hanno foglie digitate con fogliazione rivolta in basso *(foliatio reclinata)*, il *Biophytum sensitivum* ha foglie pinnate con fogliazione arricciolata *(foliatio circinalis)* non in dentro ma in fuori, il che costituisce un fatto che a notizia mia non trovasi ripetuto in altre piante (1).

4.° L'infiorazione è una cima accorciata in capolino definito.

5.° L'androceo resulta da elementi liberi sino alla base.

6.° Il gineceo ha cinque stili brevissimi con stimmi spatolati bilobi.

7.° Gli uovicini sono ortotropi con sommità esostomica dell'integumento prolungata in tubetto ricurvo in modo da approssimarsi alla placenta.

8.° Il frutto maturo è deiscente in cinque valve, che portano i semi attaccati al margine del loro setto mediano longitudinale. Particolarità di struttura che con le altre sopra notate validamente sanziona il partito preso dal De-Candolle di separare questa specie dalle *Oxalis* formandone un genere a parte.

9.° La deiscenza delle valve è effetto di uno stato di turgore in cui si atteggia nel maturar del frutto il tessuto otricolare mesocarpico della loro parte inferiore.

10.° L'aprirsi dei frutti, l'espulsione dei semi avviene indistintamente e senza divario alcuno, tanto essendo dette parti emerse, quanto sommerse nell'acqua.

---

(1) Anton Lorenzo De Jussieu nel suo *Genera plantarum* menziona questo carattere dicendo: *folia rarius abrupte pinnata, iuniora Filicum more in spiram involuta*, ma tale espressione starebbe a mostrare che egli non ebbe occasione di osservare sul vivo questa fogliazione, poichè in tal caso avrebbe notato che è diretta in senso inverso a quello delle Felci.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

rappresentanti l'analisi del Biophytum sensitivum.

N.° 1. Infiorazione parziale: alla sommità del peduncolo si vedono le brattee che vi formano un piccolo invoglio. Ingr. 1 e ½ del nat.

» 3. Profilo del fiore sbocciato. Ingr. 2.

» 2. Lo stesso fiore visto dall'alto.

» 4. Corolla fenduta longitudinalmente estesa da un lato; mostra libere le unghie e la sommità delle lamine. Ingr. 3.

» 6. Calice involvente il frutto quasi maturo. Ingr. 3.

» 5. Frutto nello stato di naturale deiscenza. In *a* si vede uno dei rigonfiamenti basilari ai tramezzi, mercè dei quali succede il discostarsi delle valve. Ingr. 5.

» 8. Stame estratto da un fiore in boccia, visto nella faccia ventrale. Ingr. 15.

» 9. Lo stesso visto nella faccia dorsale.

» 7. Androceo, resultante dalla riunione di dieci stami disposti in due verticilli con le antere che si piegano sull'estremità del filamento, e di verticali si sono ridotte oblique. Esso appartiene ad un fiore sbocciato. Ingr. 2.

» 10. Gineceo, o gruppo dei cinque pistilli raccolti in verticillo, e uniti per la faccia ventrale. Appartiene ad un fiore in boccia. Ingr. 10.

» 11. Uovicino appartenente ad una giovanissima boccia di fiore. In *a* vedesi il tubetto micropilare proveniente dall'allungamento del testa. In *b* il funicolo ombelicale. Ingr. 50.

» 12. Seme maturo. In *a* ombelico. Ingr. 18.

» 13. Lo stesso, dopo che il guscio si è distaccato: mostra la superficie dell'endopleura solcata e bernoccoluta. Ingr. 20.

» 14. Lo stesso sezionato longitudinalmente e rappresentato in posizione inversa al precedente, cioè con l'apice in basso. In questa figura apparisce l'embrione assile, e il perisperma periferiale.

» 15. Brattea. Ingr. 17.

» 17-18. Foglie quali si presentano nel loro primo stato giovanile. Ingr. 5.

» 16. Altra maggiormente sviluppata. Ingr. 3.

» 19. Pelo capitato glandoloso. Ingr. 30.

» 20. Pelo linfatico. Ingr. 20.

Pietro Ferrini dis

Torino, 1.° Ann.

Ferrini dis.

INDICE

GENERALE ED ALFABETICO

DELLE

MEMORIE CONTENUTE NELLA PARTE FISICO-MATEMATICA

DEI TOMI XI A XX SERIE II

DELLE

MEMORIE DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

INDICE GENERALE

degli Autori delle Memorie contenute nella parte Fisico-Matematica dei Tomi XI a XX Serie II delle Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino.

N. B. Il numero romano indica il Volume della Serie II.
Il numero romano minore manda alla **Notizia Storica** di ciascun Volume.
Il numero arabico segna la pagina.

Cavalli. = Memoria su vari perfezionamenti militari che comprende alcuni cenni sui cannoni caricantisi dalla culatta e sui cannoni rigati per l'artiglieria da fortezza, d'assedio, campale e di mare, e dissertazioni relative ai mezzi di accrescere la mobilità dell'artiglieria, e di semplificare l'amministrazione ed il carreggio tutto, e sul conseguente aumento della potenza degli eserciti di terra e delle armate di mare. XVII, I.

— Parere sopra una domanda di privilegio per un meccanismo detto *embouchoir mécanique*. XIII, CIV.

Cavalli e Botto. = Parere intorno ad una domanda di privilegio per una nuova foggia di molle od elastici ad uso di mobili. XII, LXXIII.

— Parere su una domanda di privilegio per l'introduzione in questi RR. Stati di un telaio da velluto, capace di fabbricare due pezze contemporaneamente. XV, CIV.

— Parere su una domanda di privilegio per materassi elastici di nuova forma. XVI, LXXIV.

Cavalli, Botto e Sismonda *Angelo*. = Parere sopra una domanda di privilegio per un nuovo metodo di sospendere ai pali i fili dei telegrafi elettrici. XIII, CVI.

Cavalli, Cantu' e Botto. = Parere su una domanda di privilegio per un nuovo meccanismo per lavare la biancheria. XIII, LIV.

Cavalli e Carena. = Parere su una domanda di privilegio per fabbricare maglie con un nuovo telaio. XI, XLVI.

— Parere sopra una domanda di privilegio per la fabbricazione di un morso di nuova foggia. XIII, CV.

— Parere intorno ad una domanda di privilegio per la fabbricazione di cordami di zinco. XIII, CVI.

Cavalli e Menabrea. = Parere su una domanda di privilegio per un nuovo sistema di sospensione e di trazione dei veicoli in uso sulle ferrovie. XV, CIV.

— Parere su una domanda di privilegio per nuove aggiunte al sistema già privilegiato di sospensione e trazione dei veicoli ad uso delle ferrovie. XVI, LXXV.

Cavalli, Menabrea e Giulio. = Parere su una Memoria manoscritta del sig. Conte Paolo di S. Roberto, intitolata: *Del moto dei proietti nei mezzi resistenti*. XV, CX.

Cavalli, Menabrea e Mosca. = Parere su una domanda di privilegio

Plana. = Mémoire sur un rapprochement nouveau entre la théorie moderne de la propagation *linéaire du son*, dans un tuyau cylindrique horizontal d'une longueur indéfinie, et la théorie des *pulsions*, exposée par Newton dans les deux Propositions xlvii et xlix du second Livre des *Principes*. XVIII, 319.

— Nota sull'ecclisse parziale di Sole visibile in Torino nel giorno 18 luglio 1860. XX, lxx.

— Note sur la formation probable de la multitude des Astéroïdes qui entre Mars et Jupiter circulent autour du Soleil. XVII, cxix.

— Note sur l'application des formules de Lagrange à la Comète de l'année 1769, faite par Pingré à la page 306 du second Volume de sa *Cométographie*. XVIII, 134.

— Note sur la Proposition LXXI du premier Livre des *Principes* de Newton. XI, 391.

— Note sur la réduction de l'intégrale quadruple

$$z = -\frac{hll'}{g\pi^2}\cdot\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}(1-s^2)\,s\,ds\,d\psi\,d\omega.\,R\,du\ ;$$

$$R = \cos.(up\cos.\omega)\cos.(t.\sqrt{gu})\ ,$$

obtenue par Poisson à la page 156 de son Mémoire *Sur la Théorie des Ondes*, à une autre équation entre des intégrales définies simples. XVIII, 375.

— Note sur la théorie de la lumière polarisée. XVIII, lxii.

— Note sur le mouvement des Ondes excitées dans un canal rectangulaire indéfini; la profondeur et la largeur du fluide étant fort petite et constante dans toute la longueur du canal. XVIII, 353.

— Note sur le N.° 44 (page 55) du second Volume de la Mécanique analytique de Lagrange. XVIII, 88.

— Seconde Note sur le N.° 44 du second Volume de la Mécanique analytique de Lagrange. XVIII, 117.

— Note sur le N.° 46 du second Volume de la Mécanique analytique de Lagrange, relative à la détermination de l'orbite parabolique des Comètes. XVIII, 91.

— Deuxième Note sur le N.° 46. Formation de l'équation finale en ayant égard à la *quatrième* puissance du temps dans l'expression des trois fonctions V, V', V''. XVIII, 105.

manoscritta del Prof. Filippo De Filippi, intitolata: *Osservazioni sopra un nuovo genere di Anellidi della famiglia delle sanguisughe.* XI, v.

Sismonda *Eugenio*, Carena e Moris. = Parere su una Memoria manoscritta del sig. Guérin-Méneville, col titolo: *Résumé des études séricicoles faites en* 1851, *avec le concours de M.r* Robert *à la magnanerie de Sainte-Tulle.* XIII, lxxxviii.

Sismonda *Eugenio* e Demichelis. = Parere sopra una Memoria manoscritta del Dottore Giuseppe De-Natale, col titolo: *Ricerche anatomiche sullo Scinco variegato in rapporto ai principali tipi d'organizzazione dei Rettili.* XIII, lxvi.

Sismonda *Eugenio* e De Filippi. = Parere su una Memoria manoscritta del Barone Enrico Aucapitaine, col titolo: *Notice sur les Mollusques lithophages.* XVI, lxxii.

— Parere su una Memoria manoscritta del Prof. Eugenio Truqui, col titolo: *Anthicini insulae Cypri et Syriae.* XVI, lxxv.

— Parere su una Memoria manoscritta del sig. Pellegrino Strobel, intitolata: *Essai d'une distribution orographico-géographique des Mollusques terrestres dans la Lombardie.* XVII, cxxxiv.

Sismonda *Eugenio* e Della Marmora. = Parere intorno ad una Memoria manoscritta dei fratelli Schlagintweit, intitolata: *Observations sur la hauteur du Mont-Rose et des points principaux de ses environs.* XIII, cviii.

Sismonda *Eugenio*, Della Marmora e De Filippi. = Parere su una Memoria manoscritta dell'Avv. Bartolomeo Gastaldi, intitolata: *Cenni sui vertebrati fossili del Piemonte.* XVII, clxii.

Sismonda *Eugenio*, Della Marmora e Sismonda *Angelo.* = Parere intorno ad una Memoria manoscritta del Dott. Giovanni Capellini, intitolata: *Cenni geologici sul giacimento delle ligniti della bassa val di Magra.* XIX, xc.

Sismonda *Eugenio* e Moris. = Parere su una Memoria manoscritta dei Professori Roberto De-Visiani e Abramo Massalongo, col titolo di: *Flora dei terreni terziarii di Novale nel Vicentino.* XV, cxi.

Sismonda *Eugenio*, Moris, Riberi, Mosca e Richelmy. = Relazione sulle modificazioni degli articoli del Regolamento Accademico relativo alla nomina dei corrispondenti. XX, lxxv.

Sismonda *Eugenio*, Moris, Sismonda *Angelo* e De Filippi. = Parere intorno

Sobrero e Cantu'. = Parere su una domanda di privilegio per un nuovo metodo di fabbricare le candele di sego. XIV, xcvi.

— Parere su una domanda di privilegio per l'introduzione in questi Regii Stati del metodo inventato dal sig. Arteman per fabbricare carta e cartone colla fibra legnosa. XIV, cxxv.

— Parere su una domanda di privilegio per un nuovo metodo di conciar le pelli. XV, lxxix.

— Parere su una domanda di privilegio per l'introduzione in questi Regii Stati di un apparecchio inserviente all'estrazione dei principii coloranti dai legni adoperati nella tintoria. XV, lxxx.

— Parere su una domanda di privilegio per la carbonizzazione della torba e per la contemporanea preparazione di diversi prodotti chimici. XV, xciv.

— Parere su una domanda di privilegio per procedimenti diversi a concentrare e carbonizzare la torba, e ad estrarre dalla medesima vari prodotti chimici, e gaz illuminante. XV, xciv.

— Parere su una domanda di privilegio per uno speciale metodo di estrazione del gaz illuminante dal legno e dalla torba. XV, cii.

— Parere su una domanda di privilegio per la fabbricazione di un concime particolare denominato *Lingottina*. XVI, lxvi.

— Parere su una domanda di privilegio per una nuova foggia di forni ad uso della fabbricazione del vetro. XVI, lxxi.

Sobrero, Cantu' e Delponte. = Parere su una Memoria manoscritta del sig. Fabre-Volpelière, di Arles, intitolata: *Note sur une nouvelle altération frauduleuse du safran*. XX, clxxi.

Sobrero, Cantu' e Sella. = Parere su una Memoria manoscritta dell'Ingegnere Celestino Rossi, intitolata: *Recherches sur les quantités de chaleur qui sont effectivement produites dans le foyer par la combustion des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, sur la grille des fours à réchauffer pour la fabrication et le travail du fer*. XX, cxiii.

Sobrero, Cantu' e Sismonda *Angelo*. = Parere intorno ad una Memoria manoscritta del Prof. Francesco Selmi su *alcuni nuovi composti di ossigeno, cloro e mercurio*. XII, ci.

— Parere sopra una domanda di privilegio per un nuovo metodo di separazione dell'argento dal piombo. XIII, civ.

Sobrero e Cavalli. = Parere sopra una domanda di privilegio per

l'introduzione di un nuovo sistema di fabbricazione di vari generi d'utensili in ferro smaltato. XIII, LI.

SOBRERO e DE FILIPPI. = Parere su una domanda di privilegio per una nuova maniera di cuocere i mattoni. XV, LXXXVI.

SOBRERO e MENABREA. = Parere sulla prima parte d'una Memoria manoscritta del sig. Celestino ROSSI, intitolata: *De la fabrication des rails en général, et plus spécialement par les usines à fer du Piémont avec emploi de nos lignites.* XVII, LXVII.

— Parere sulla seconda parte della Memoria manoscritta del sig. Celestino ROSSI, intitolata: *De la fabrication des rails en général, et plus spécialement par les usines à fer du Piémont avec emploi de nos lignites.* XVII, LXX.

SOBRERO e MORIS. = Parere su una domanda di privilegio per una nuova foggia di torchio destinato all'estrazione dell'olio dalle olive. XIV, LXIII.

— Parere su una domanda di privilegio per una macchina da smallare le olive. XV, CIII.

SOBRERO, MOSCA e CAVALLI. = Parere su una domanda di privilegio per un nuovo metodo di prosciugamento delle case di recente costrutte e per la preparazione di un combustibile artificiale. XIV, LXXVIII.

— Parere su una domanda di privilegio per una nuova foggia di stufe, mercè cui ottengonsi tre effetti ad un tempo, cioè calore per cuocere vivande, aria calda che condotta nelle camere attigue alla stufa le riscalda, inoltre gaz illuminante. XIV, XCV.

SOBRERO e SISMONDA *Angelo*. = Parere su una domanda di privilegio per l'introduzione nei RR. Stati di un nuovo metodo per perfezionare la fabbricazione dell'acciaio. XII, LVII.

— Parere su una Memoria manoscritta dell' Ing. Giuseppe SIGNORILE, intitolata: *Nuove ricerche sulle calci idrauliche.* XIII, LIII.

— Parere su una domanda di privilegio per un procedimento diretto ad estrarre cianuri ed altre materie utili dalle calci, che già hanno servito alla depurazione del gaz-luce. XIII, C.

— Parere su una domanda di privilegio per una nuova foggia di forni a gaz, destinati alla lavorazione del ferro. XIV, LXXIV.

— Parere su una domanda di privilegio per la fabbricazione di un combustibile artificiale. XVI, LXIX.

— Parere su una domanda di privilegio per una nuova foggia di forno per la fabbricazione del vetro. XVI, LXXIV.

INDICE GENERALE

delle materie contenute nella parte Fisico-Matematica dei Tomi XI a XX, Serie II, delle Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino.

agro Byzantino et Hellenico, nonnullisque aliis Orientis regionibus, annis 1849-1850 collectarum. Clementi. XVI, 239.

Botanica. = Stirpium exoticarum rariorum vel forte novarum pugillus. Delponte. XIV, 393.

Chimica. = Comunicazione di una *Nota intorno ad una nuova base contenente ossido di Mercurio, e gli elementi dell'alcoole.* Sobrero. XIII, lx.

— Id. di un nuovo metodo per preparare l'acido idrobromico. Cantu'. XIII, lxxxix.

— Id. intorno alla coesistenza del bromo e dell' iodio in tutti i prodotti naturali, in cui si trova il cloro, ed intorno alla presenza dell' iodio nelle acque medicinali distillate. Cantu'. XIII, xlviii.

— Id. intorno alla parziale scomposizione delli ioduri per mezzo delle materie ossigenate. Cantu'. XIII, li.

— Id. dei risultamenti di alcune esperienze dirette a rintracciare le minime quantità di arsenico, ecc. Cantu'. XIV, lxxvi.

— Id sull'arsenico contenuto nell'acido solforico e nell'acido cloridrico, ed osservazioni intorno al procedimento chimico oggidì praticato nella ricerca dell'arsenico associato a materie organiche. Cantu'. XVI, xciv.

— Id. sull' istantanea reazione chimica del gaz cloro e del gaz idrogeno mediante la luce elettrica. Cantu'. XVI, xcii.

— Diritto di priorità che compete al Prof. Cantu' contro il sig. Chatin nella scoperta dell'associazione del cloro, del bromo e dell' iodio nelle piante non marine, ecc. Cantu'. XII, lxxvii.

— Lettera sulla fosforescenza del Valerianato di Chinina. Calloud. XVIII, lxxi.

— Intorno all'azione del cloro sui cloruri metallici nelle soluzioni dei cloruri alcalini. Sobrero e Selmi. XI, 345.

— Metodo comparativo per determinare gli acidi, gli alcali, i sali ed i corpi semplici nelle loro soluzioni. Sella. XII, cvii.

— Memoria intorno ai prodotti della reciproca decomposizione degli acidi solforoso e solfidrico. Sobrero e Selmi. XI, 407.

— Monografia sulla cristallizzabilità della soluzione di solfato di soda. Selmi. XI, 325.

— Nota intorno ad alcune esperienze dirette a definire la natura della fermentazione amigdalica. Selmi. XII, lxxiii.

sphérique d'une sphère creuse de métal, et à la surface d'une autre sphère conductrice électrisée que l'on tient isolée dans sa cavité. Plana. XVI, 57.

Fisica. = Mémoire sur l'application du principe de l'équilibre magnétique à la détermination du mouvement qu'une plaque horizontale de cuivre tournant uniformément sur elle-même, imprime par réaction : ou à une aiguille aimantée, assujettie à lui demeurer parallèle ; ou à une aiguille d'inclinaison mobile dans un plan vertical fixe. Plana. XVII, 101.

— Mémoire sur la théorie de l'action moléculaire appliquée à l'équilibre des fluides et à la pression qu'ils exercent contre les surfaces planes ou courbes. Plana. XIV, 1.

— Mémoire sur le mouvement conique, *à double courbure*, d'un pendule simple, dans le vide, abstraction faite de la rotation diurne de la Terre. Plana. XVIII, 401.

— Mémoire sur le mouvement du centre de gravité d'un corps solide lancé vers la Terre entre les centres de la Lune et de la Terre, supposées fixes immédiatement après l'impulsion. Plana. XX, 1.

— Mémoire (troisième) sur les volumes atomiques. Détermination des nombres affinitaires des différents corps élémentaires par la seule considération de leur volume atomique et de celui de leurs composés. Avogadro. XI, 231.

— Mémoire (quatrième) sur les volumes atomiques. Détermination des volumes atomiques des corps liquides à leur température d'ébullition : nombres affinitaires qui s'en déduisent pour quelques-uns des corps élémentaires. Avogadro. XII, 39.

— Mémoire sur les conséquences qu'on peut déduire des expériences de M.r Regnault sur la loi de compressibilité des gaz. Avogadro. XIII, 171.

— Mémoire sur un rapprochement nouveau entre la théorie moderne de la propagation *linéaire du son*, dans un tuyau cylindrique horizontal d'une longueur indéfinie, et la théorie des *pulsions*, exposée par Newton dans les deux Propositions xlvii et xlix du second Livre des *Principes*. Plana. XVIII, 319.

— Note sur la théorie de la lumière polarisée. Plana. XVIII, lxii.

— Note sur le mouvement des Ondes excitées dans un canal rectangulaire indéfini ; la profondeur et la largeur du fluide étant fort petite et constante dans toute la longueur du canal. Plana. XVIII, 353.

per l'introduzione in questi RR. Stati di un telaio da velluto, capace di fabbricare due pezze contemporaneamente. Cavalli e Botto. XV, civ.

Macchine e Strumenti. = Parere su una domanda di privilegio del sig. Bouvier per l'introduzione d'un nuovo sistema di ventilazione artificiale da applicarsi alla filatura da seta ed alle bigattiere. Richelmy e Botto. XIII, cxii.

— Id. su una domanda di privilegio del sig. Buttet per un meccanismo detto *embouchoir mécanique*. Cavalli. XIII, civ.

— Id. su una domanda di privilegio del sig. Chabert per l'introduzione in questi Regii Stati di una macchina destinata alla compressione dell'aria. Menabrea e Botto. XV, cxii.

— Id. su una domanda di privilegio del sig. Chabert per modificazioni arrecate ad un apparecchio inserviente a carbonizzare la torba, la lignite, ecc. Sismonda Angelo e Cantu'. XV, xcix.

— Id. su una domanda di privilegio del sig. Chiavacci per l'introduzione in questi Regii Stati di un metodo di scali a rotaie di ferro pel pronto ed economico tiramento a terra e raddobbo dei bastimenti. Della Marmora e Richelmy. XIV, cv.

— Id. su una domanda di privilegio del sig. Crovo per l'introduzione in questi Regii Stati di un apparecchio inserviente all'estrazione dei principii coloranti dai legni adoperati nella tintoria. Sobrero e Cantu'. XV, lxxx.

— Id. su una domanda di privilegio del sig. Defontaine-Moreau per un apparecchio gassogeno, atto alla riduzione di certe sostanze in gaz combustibili, e per la maniera di abbruciare questi gaz. Sismonda Angelo e Sobrero. XV, lxxxiv.

— Id. su una domanda di privilegio dei signori Demonte e Vanino per la costruzione e collocazione di un nuovo sistema di ruote idrauliche. Richelmy, Giulio e Mosca. XIII, ci.

— Id. su una domanda di privilegio dei signori Detrez e Legrand per una nuova foggia di trombe a mantice dette *soffietti idraulici*. Botto e Avogadro. XI, l.

— Id. su una domanda di privilegio dei signori Dolques e Peyre per una macchina inserviente a garzare e cimare simultaneamente i panni-lani. Giulio e Botto. XV, lxxxii.

— Id. su una domanda di privilegio del sig. Dupasquier per una nuova

Matematica. = Note sur la Proposition LXXI du premier Livre des *Principes* de Newton. Plana. XI, 391.

— Note sur l'application des formules de Lagrange à la Comète de l'année 1769, faite par Pingré à la page 306 du second Volume de sa *Cométographie*. Plana. XVIII, 134.

— Note sur la réduction de l'intégrale quadruple

$$z = -\frac{hll'}{g\pi^2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} (1 - s^2)\, s\, ds\, d\psi\, d\omega . R\, du \;;$$

$$R = \cos.(up \cos.\omega) \cos.(t.\sqrt{gu}) \;,$$

obtenue par Poisson à la page 156 de son Mémoire *Sur la Théorie des Ondes*, à une autre équation entre des intégrales définies simples. Plana. XVIII, 375.

— Note sur le N.° 44 (page 55) du second Volume de la Mécanique analytique de Lagrange. Plana. XVIII, 88.

— Seconde Note sur le N.° 44 du second Volume de la Mécanique analytique de Lagrange. Plana. XVIII, 117.

— Note sur le N.° 46 du second Volume de la Mécanique analytique de Lagrange, relative à la détermination de l'orbite parabolique des Comètes. Plana. XVIII, 91.

— Deuxième Note sur le N.° 46 etc. Formation de l'équation finale en ayant égard à la *quatrième* puissance du temps dans l'expression des trois fonctions V, V', V''. Plana. XVIII, 105.

— Note sur les coefficients théoriques déterminés par Tobie Mayer relativement aux deux inégalités lunaires en longitude, ayant pour argument $(2E - 2g + c'm)nt$, $(2E - 2g - c'm)nt$. Plana. XIX, 447.

— Note sur les pages 68, 69 et 75 du second Volume des *Opuscula analytica* d'Euler publié en 1785. Plana. XVIII, 499.

— Note sur les propositions LXXX et LXXXIV du premier Livre de Newton. Plana. XI, 399.

— Note sur l'évaluation numérique des quantités $\frac{Q}{G}$, $\frac{Q_1}{G}$, $\frac{Q_2}{G}$, $\frac{Q_1}{Q}$, $\frac{Q_2}{Q}$, nécessaires à la détermination de l'orbite des Comètes par les formules de Lagrange, adaptées au cas où l'on prend l'Écliptique pour le plan fixe de projection. Plana. XVIII, 127.

Mineralogia e Metallurgia. = Lettera intorno all'esistenza nella provincia di Nizza di una *Formazione cuprifera contemporanea al terreno inferiore al calcare liassico.* Perazzi. XIX, lxvii.

— Lettera sovra studi fatti intorno a miniere di rame esistenti nella Contea di Nizza. Perazzi. XX, lxxvi.

— Nota sull'esistenza di un sistema di filoni piombiferi negli schisti di Brovello e dell'alta valle dell'Agogna (Pallanza). Perazzi. XX, clxxxiii.

— Parere sopra una domanda di privilegio del sig. Carron du Villards per un nuovo metodo di separazione dell'argento dal piombo. Sobrero, Cantu' e Sismonda Angelo. XIII, civ.

— Id. su una Memoria manoscritta del sig. Ingegnere Celestino Rossi, intitolata: *De la refonte du fer cru dans les fours à réverbère pour la fabrication des bouches à feu.* Cavalli, Sobrero e Provana di Collegno. XIV, cix.

— Id. su due Memorie manoscritte del sig. Celestino Rossi, intitolate l'una: *Principes généraux de la combustion du charbon de bois dans les fours de l'industrie du fer, suivis des principes généraux de la carbonisation du bois*, l'altra: *De la production de la fonte aciéreuse et de la refonte du fer cru dans les fours à réverbère pour la fabrication des bouches à feu.* Cavalli, Sobrero e Provana di Collegno. XV, lxxxix.

— Id. sulla prima parte d'una Memoria manoscritta del sig. Celestino Rossi, intitolata: *De la fabrication des rails en général, et plus spécialement par les usines à fer du Piémont avec emploi de nos lignites.* Sobrero e Menabrea. XVII, lxvii.

— Id. sulla seconda parte della Memoria manoscritta del sig. Celestino Rossi, intitolata: *De la fabrication des rails en général, et plus spécialement par les usines à fer du Piémont avec emploi de nos lignites.* Sobrero e Menabrea. XVII, lxx.

— Id. su una Memoria manoscritta del sig. Celestino Rossi, intitolata: *Recherches sur les quantités de chaleur qui sont effectivement produites dans le foyer par la combustion des combustibles minéraux en nature, houilles et lignites, sur la grille des fours à réchauffer pour la fabrication et le travail du fer.* Sobrero, Cantu' e Sella XX, cxiii.

— Id. su una Memoria manoscritta del Prof. Arcangelo Scacchi, intitolata: *Memoria sulla poliedria delle facce dei cristalli.* Sella, Sismonda Angelo e Sismonda Eugenio. XX, clxxiv.

arrecati alla costruzione delle ferrovie. Menabrea e Mosca. XV, cxiii.

Strade ferrate. = Parere sopra una domanda di privilegio del signor di Longrie per un nuovo sistema di *urtatoi (buttoirs)* da applicarsi alle carrozze delle strade ferrate. Menabrea e Mosca. XIII, xciv.

— Id. su una domanda di privilegio del sig. Maneglia per un nuovo sistema di sospensione e di trazione dei veicoli in uso sulle ferrovie. Cavalli e Menabrea. XV, civ.

— Id. su una domanda di privilegio del sig. Maneglia per nuove aggiunte al sistema già privilegiato di sospensione e trazione dei veicoli ad uso delle ferrovie. Cavalli e Menabrea. XVI, lxxv.

— Id. su una domanda di privilegio del sig. Manera per una *Tavola* movibile, destinata a diminuire le disgrazie nei deviamenti dei convogli dalle ruotaie sulle vie ferrate. Mosca e Botto. XI, lvii.

— Id. su una domanda di privilegio del sig. Masserano e Socii per un nuovo sistema di locomozione (locomozione menattrita). Mosca e Avogadro. XI, xlvii.

— Id. su una domanda di privilegio del sig. Mulkay per un particolare metodo di riscaldare l'acqua generatrice del vapore nelle locomotive, ed anche nelle macchine fisse. Menabrea e Mosca. XV, ci.

— Id. su una domanda di privilegio del sig. Nepven per un nuovo metodo d'unione delle rotaie delle ferrovie. Menabrea e Mosca. XV, cxiii.

— Id. su una domanda di privilegio del sig. Pastor per una nuova locomotiva costrutta giusta il metodo Engerth, per salire le forti pendenze e percorrere le curve di breve raggio. Menabrea e Mosca. XV, cii.

— Id. su una domanda di privilegio del sig. Piatti per un nuovo sistema di ferrovie a propulsione d'aria compressa. Cavalli, Menabrea e Mosca. XV, cxiv.

— Id. su una domanda di privilegio del sig. Spencer per perfezionamenti arrecati alle molle delle varie maniere di carrozze e carri adoperati sulle ferrovie. Menabrea e Mosca. XV, xciii.

— Id. su una domanda di privilegio del sig. Spencer per una nuova foggia di appoggiatoi o sostegni delle rotaie delle ferrovie. Menabrea e Mosca. XV, xciii.

— Id. su una domanda di privilegio del Barone Du Theil per una maniera di fissare le rotaie delle ferrovie. Menabrea e Mosca. XIV, cxxvi.

— Protesta per rivendicare a sè la priorità dell'idea di costrurre telegrafi

SCIENZE

MORALI STORICHE E FILOLOGICHE

MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

SERIE II. — TOM. XX.

SCIENZE MORALI STORICHE E FILOLOGICHE

TORINO
DALLA STAMPERIA REALE
MDCCCLXIII.

DISCORSO

SULLA STORIA DELL'ERMENEUTICA EGIZIA

ACCOMPAGNATO

DA UNA INTERPRETAZIONE RAGIONATA DI ALCUNI MONUMENTI

del Professore

PIER CAMILLO ORCURTI

Letta nell'adunanza del 5 gennaio 1860.

PARTE PRIMA

STORIA DELL'ERMENEUTICA EGIZIA

I. *Scopo del discorso.*

Un duplice e contrario ostacolo si oppone all'avanzamento della egiptologia; una troppa confidenza nelle interpretazioni senza sollecitudine per la solidità delle basi, ed una eccessiva incredulità, che nega il suo assenso a qualsiasi proposta senza por mente alle ragioni. Quindi vediamo alcuni trascurare o tenere in poco conto gli argomenti storici tratti dalla lettura dei monumenti, mentre altri leggermente si contenta di traduzioni generiche ed indeterminate. A me pare che questo male possa trovare un sicuro rimedio nella versione letterale e ragionata d'intiere iscrizioni. Perciò reputai di pubblicare la interpretazione di alcuni monumenti del Museo di Torino.

II. *Metodo seguito.*

Proponendomi ad esempio le analisi del signor De-Rougé, giustamente lodato per la solidità delle sue versioni, il mio lavoro si compone d'una trascrizione in lettere romane, d'una interpretazione letterale latina, d'un commento nel quale se ne assegnano le ragioni. Inoltre seguono alcune osservazioni sulle materie delle quali si tratta, provandomi d'illustrarle colle citazioni di monumenti somiglianti, e con passi d'Autori che a quelli paiono riferirsi.

III. *In qual senso si propugna il sistema di Champollion.*

Ma siccome io giudico molto importante il dileguare ogni dubbio intorno al sistema ermeneutico seguito dai moderni egiptologi, manderò innanzi un breve sunto de' varii sistemi d'interpretazione dei geroglifici egizii. Questa parte del mio lavoro intende di dimostrare che la discrepanza stessa degli avversarii avendo origine nella ristrettezza delle loro vedute, milita in favore del sistema di Champollion, che con picciole modificazioni è quello seguito da tutti gli egiptologi d'Europa. E qui mi sia lecito di dichiarare dentro quali limiti io intenda farmi propugnatore di questo sistema. Un egiptologo tedesco Uhlemann, ardente seguace d'una scuola germanica iniziata da Sthol e da Seyffarth, nel suo libro che ha per titolo: *Handbuch der gesammten aegyptischen alterthumskunde*, non solo combatte l'ermeneutica di Champollion, ma ciò che è più strano, sostiene che tutti i Champollionisti moderni tengono in gran parte le dottrine di Seyffarth. Io poi sono annoverato tra coloro che seguono ora l'uno, ora l'altro sistema, perchè in alcuni gruppi mi discosto dalle letture dell'egiptologo francese. A questo punto io osservo che per sistema di Champollion non intendo tutte le interpretazioni date da lui, ma piuttosto i principii sui quali sono fondate. Altro è il principio d'un sistema, altro l'applicazione nei casi particolari.

Sarebbe una stoltezza il credere immutabili tutte le applicazioni d'un sistema date da qualunque scienziato, e questa immobilità d'una dottrina parmi che sarebbe un argomento della sua falsità. Vero è quel sistema che, mantenendo intatti i suoi principii, lascia campo ad un ulteriore svolgimento e ad una svariata applicazione. Ora siccome i principii da me seguiti, come si vedrà più innanzi, sono i medesimi di Champollion,

credo ch'io possa annoverarmi tra suoi scuolari quantunque qualche gruppo sia da me diversamente interpretato. Ma questo punto riescirà più chiaro quando si porrà in rilievo la differenza di questo dagli altri sistemi.

Trattanto io mi farò ad esporre la storia delle principali opinioni che si spacciarono intorno all' interpretazione dei geroglifici fino dai primi tempi che si cominciò a dirigere l'attenzione sopra questa materia. A ciò mi spinge una ferma credenza, che l'esame di tutti i sistemi ermeneutici, anche molto discosti dal vero, possa giovare al miglioramento del metodo d' interpretazione.

IV. *La varietà dei sistemi non deve scemar fede alla scienza.*

È comune pregiudicio che quanto è maggiore il numero de' sistemi in una scienza, tanto minore debba essere il suo avanzamento. Anzi v' ha chi più oltre spingendo le sue conclusioni, ne argomenta la impossibilità della scienza. A me pare che questa conclusione non posi troppo sul sodo.

I sistemi non essendo che una serie d' idee legate tra loro, non possono mai essere intieramente falsi. Quindi per grande che sia il loro numero non potranno aver luogo che questi due casi: 1.° che alcuno di essi più da vicino s'accosti al vero; 2.° che tutti abbiano una parte di vero mista ad elementi negativi. Ma qualunque dei due casi si avveri, il combattimento e la discordia di questi sistemi non da altro può derivare che dal guardare che ciascuno fa la materia da diverso lato e da un prospetto non troppo alto. A misura che la nostra considerazione s' innalza, s'allarga la nostra veduta, e più facile ne riesce la conciliazione dei pareri contrarii: cosicchè si giunge finalmente al punto più culminante, dove le diverse opinioni che dal basso considerate ci apparivano discordi e lottanti, si compongono in un solo ed armonioso sistema. Per significar meglio il mio concetto sotto un simbolo matematico dirò, che così l'eclettismo non risulta nè da una somma di più sistemi, nè da una sottrazione fatta su ciascuno del buono che può contenere, ma piuttosto dalla elevazione ad una potenza superiore nella quale le radici contrarie o neganti diventano positive.

Ma lasciamo oramai la troppo faticosa erta della speculazione per discendere nell'amena piaggia dei fatti.

V. *Fino a che epoca durasse la scrittura geroglifica.*

Trovando scritto in caratteri geroglifici il nome di Caracalla (dopo Cristo 211), di Geta e di Decio (dopo Cristo 249-51) (1), e leggendo riferita nei libri di Ammiano Marcellino (lib. XVII) l'interpretazione d'uno degli obelischi fatta da Hermapione, è facile il congetturare che fino al terzo secolo dopo l'era durasse in qualche collegio sacerdotale d'Egitto una benchè imperfetta notizia di quella scrittura. I cenni che si trovano nei libri de' filosofi alessandrini, ne' primi Padri greci, nei libri ermetici, e l'Opera d'Horapollo mostrano invece quanto ne fosse annebbiata la tradizione, ed a quegli scritti venisse per un mezzo non troppo fedele.

VI. *Quale dovesse essere il metodo d'investigazione: e come invece i primi cominciassero a cercare la chiave de' geroglifici nei testi antichi.*

Smarritasi così la conoscenza di quella scrittura, si dovette ricorrere alla scienza per ritrovarne la chiave: e questa avrebbe forse risposto sufficientemente alle loro inchieste, ove non si fossero a lei accostati per una falsa via, e con preconcette opinioni.

Ciascuno vede che sarebbe stato ragionevole, facendo capo dall'osservazione dei monumenti, raccogliere ed enumerare tutti i segni geroglifici per venire poi da ultimo ad un'esatta classificazione. Ma la naturale impazienza che spesso ci fa deviare, unita alla mancanza de' monumenti, sospinse i primi investigatori a frugare nei testi greci e romani, ed alcuni pure in quelli d'Arabia per trarre dalle loro tradizioni la conoscenza del sistema di questa scrittura. Il metodo era vizioso: poichè chiedeva il segreto dei geroglifici a tali che forse nol conoscevano che imperfettamente, e che quand'anche lo possedessero, solo ne parlavano sui generali ed alla sfuggita. Quindi nascono le contraddizioni che mal si potrebbero conciliare da chi prima non avesse già attinta una qualche notizia di quella scrittura. Laonde con ragione lo Zoega scriveva nel 1796 (*De origine et usu obeliscorum*, pag. 423) queste singolari parole: « De Aegyptiae scripturae » indole, varietate et ortu diversimode disceptatum est a viris doctis: » nec certum quid et omnibus probatum emersit hactenus ».

---

(1) Lepsius Königsbuch zweite abtheilung, Tav. LXVII, num. 751, 752, 753.

Ma siccome io non amo di ripetere le cose già ottimamente dette da altri, così rimanderò il mio lettore al capo 2.° della sezione IV del medesimo libro di Zoega (1).

VII. *Cagioni dei contrarii pareri degli antichi intorno ai geroglifici.*

Dalla lettura di questi passi d'Autori di varie età niun chiaro concetto ci potremo noi formare della scrittura geroglifica. Nè dobbiamo farcene meraviglia quando si rifletta alle cause di queste contraddizioni. Noi conosciamo ora dalla lapide di Rosetta quale differenza corra tra la demotica e la geroglifica scrittura. Inoltre comparando i rituali funerarii ben presto ci accorgiamo che il ieratico non è che un geroglifico abbreviato. Ma chi si poneva a trattare una tale quistione senza avere osservato altri monumenti che quelli pubblicati da Caylus (*Recueil d'antiq.* T. V, tav. 26-29), correva pericolo di confondere coi tre generi di scrittura egizia, quello che non era che una varietà del geroglifico, cioè il profilare.

E siccome tra i geroglifici stessi ve ne sono di diverso genere, molti facevano dell'allegorico, che ne è una sola partizione, una differenza di scrittura. A ciò aggiungi infine che non è improbabile che altri confondesse gli anaglifi, o rappresentazioni simboliche, coi caratteri geroglifici. Perciò nessuno potrà più stupirsi che ne derivassero pareri così discordi.

VIII. *I geroglifici non erano scrittura criptica.*

Tuttavia non credo fatica gittata il dare un'occhiata a queste citazioni d'antichi (2). Poichè si deduce chiaramente che gli Egiziani ebbero una

(1) Quivi troverà raccolti tutti i testi degli antichi che fecero parola di queste scritture: quello di Clemente Alessandrino che visse circa il fine del II secolo, degli Stromati lib. V (Zoega p. 424), d'Antonio Diogene scrittore di favole presso Porfirio nella vita di Pitagora (Zoega p. 426), d'Erodoto lib. II, cap. 36 (pag. 428), di Diodoro (o meglio dell'Autore da lui copiato) lib. I, cap. 81 (p. 430), e lib. III, cap. 3 e seguenti, di Strabone lib. XVI, pag. 1113, e lib. XVII, pag. 1139 (Zoega p. 431), quello di Tacito, ann. lib. II, cap. 60, lib. XI, cap. 14 (Zoega p. 432), di Plinio lib. VII, cap. 56, lib. XXXVI, cap. 8, di Lucano Pharsaliae lib. III, vers. 221-25 (pag. 432), di Marziano Capella Satyrici lib. II, d'Ammiano Marcellino lib. XVII e lib. XXII, d'Heliodoro Aetiop. lib. II, pag. 116, lib. IV, pag. 174, di Ruffino histoir. Eccles. lib. V, cap. 7, Sozomen hist. Eccl. lib. VII, cap. 15, Theophan chronog. pag. 61 (Zoega p. 432), dell'Interprete d'Origene, del luogo del libro di Maneth presso il Sincello (nella cronograf. pag. 40, ediz. di Goar), di Apuleio, Metamorphos. lib. XI (Zoega p. 434), d'Aristide orat. aegypt. p. 360, tom. 2 (Zoega p. 436), di Plutarco nel trattato d'Iside ed Osiride, e nei conviv. problem. lib. IX, cap. 2, di Demetrio Falereo pag. 68, ediz. Viet. Florent, 1594.

(2) Quelli fra gli antichi che credono di scorgere un linguaggio mistico nella scrittura degli

scrittura non già arcana e da sottrarsi ai profani, ma volgare come quella degli altri popoli. Nè ciò deve solo intendersi della demotica, che ne ha il nome, ma pur anche delle altre due scritture anteriori. Se queste furono coll'andar del tempo ignote al volgo, come leggiamo in una stele recata da Prisse, dove un sacerdote si vanta: « io conosco l'arcano della scrittura » degli Dei »; ciò accadeva per la grande difficoltà del sistema di questa scrittura. Per la stessa ragione ben pochi dotti dei nostri giorni saprebbero leggere un libro scritto nel carattere del medio evo. Ma pare affatto priva di ragioni la sentenza di chi crede la scrittura geroglifica degli Egizii veramente *cripzia* (1), cioè inventata per non lasciar travedere l'arcano che conteneva. Prima di tutto, scrittura ed arcano sono affatto opposti: e per mantenere un segreto non vi ha via più semplice e più sicura che di tenerselo in petto, oppure di comunicarlo solamente a bocca a qualche iniziato. Inoltre dai passi più sopra citati appare che (come si vede pure nell'uso fattone sui monumenti), la scrittura geroglifica era posta sulle pubbliche statue e sugli edifizii, non certamente per celare altrui il significato di quelle parole. Tanto meno si può credere quando leggiamo invocazioni del defunto a coloro che passano sulla sua tomba; giacchè non troverei cosa più ridicola che un' invocazione ad una persona che non m' intende.

Quindi appare che questo pregiudizio di una scrittura segreta ritrovata appunto per nascondere l'incomparabile sapienza degli antichi fu una delle cause che facevano deviare gl' investigatori dal vero metodo d' interpretazione.

IX. *La chiave di qualunque scrittura è trovabile.*

Non potendo trovare nell'autorità lo scioglimento di questo problema, conveniva ricorrere al discorso. Ma prima di procedere innanzi, dirà qualche bell'ingegno, è uno questo dei problemi solubili, oppure è da mettersi insieme colla quadratura del circolo? Questo dubitare è privo d'ogni ragione; poichè se è noto che si può scoprire la chiave di qualunque

---

Egizii geroglifica sono specialmente i filosofi della scuola Alessandrina, come Iamblico, Proclo, Porfirio e Plotino. Vedi un passo di quest'ultimo nell' Enneadi: ediz. Didot, lib. VIII, pag. 353, § V e VI col commento e versione latina di Ficino.

(1) Vedi Aug. Lobek nel suo libro *Aglaophamus*, dove dimostra che non vi erano arcani nelle antiche religioni della Grecia.

scrittura in cifra, quantunque non se ne conosca la lingua, perchè ciò non potrà avverarsi delle scritture egizie?

L'unica condizione che necessariamente si richiede, e che qui non manca di certo, è che della scrittura che si vuole interpretare si abbiano molti saggi affinchè i medesimi caratteri (o gruppi) siano più volte ripetuti e tra segni diversi. Le molte relazioni che un segno od un gruppo ha verso degli altri, sono quelle che giovano a svelarne il significato.

Poichè il rapporto dell'idea col segno non può essere non dipendente dall'altro, come tra segno e segno. Invero la cognizione d'un oggetto non essendo che la scienza del maggior numero dei rapporti che questo ha con tutti gli altri, ne segue che una serie di rapporti implicitamente gli altri racchiude, e si può per via di discorso dall'uno all'altro passare. Ma ciò sia detto come per incidenza.

Ora tornando in via, dirò che il ragionamento stesso ci dimostra che quel problema che si proponevano non era al di là dei termini dell'intelletto umano.

X. *Al metodo ermeneutico si ascrivono gli errori de' sistemi.*

Al solo metodo quindi deve assegnarsi la colpa delle male riuscite indagini. Coloro che lasciando i testi degli antichi Greci e Latini si diedero alla osservazione de' monumenti, non potevano tuttavia spogliare la preconcetta opinione che qualche importante segreto della natura o dell'arte si celasse sotto quei durevoli massi.

Inoltre veggendo che tutti i segni, le cui traduzioni erano riferite dagli antichi, non uscivano dalla cerchia degli ideografici anzi de' simbolici, si ponevano a meditare colla ferma credenza che ciascun geroglifico fosse rappresentativo, e per lo più simbolico d'un'idea.

Oltre a queste opinioni, guidati dall'istinto che ha l'uomo di mirare le cose da un solo prospetto per apprenderle con maggior facilità, andavano in cerca d'un principio unico che tutte spiegasse le varietà della scrittura presso gli Egiziani. Non trovandolo nei fatti, ricorrevano all'imaginativa, che più facilmente s'accordava ai loro voti. E questo fu il metodo di Pierius, di Kirker e di molti loro seguaci. Quindi non è meraviglia se erano tanto lontani dal dubitare che vi fossero segni fonetici nei geroglifici, che nessuno de' primi indagatori osò farne cenno avanti a Zoega e Barthelemy.

Il sano metodo (che è quello che si appoggia all'esperienza e ragiona sui fatti) avrebbe richiesto che si valessero di tutti o della maggior parte dei monumenti che si potevano radunare per far levare il numero e la classificazione dei segni che vi erano sopra dagli Egiziani incisi, dipinti o disegnati. Il paragone ben tosto li avrebbe condotti a distinguere la varietà del medesimo segno dai segni diversi. Così facendo avrebbero veduto che non risalendo oltre mille il numero dei segni, non potevasi credere ragionevolmente che ciascuna idea fosse da un segno rappresentata. E poniamo pure che ciascun segno bastasse a designare anche dieci idee diverse, il numero era tuttavia troppo piccolo perchè si giudicasse che il sistema non fosse basato sopra una combinazione di segni, oppure sull'uso di alcuni segni di suono. Ma lasciando i fatti per andar dietro ai sogni della loro imaginazione, per l'interpretazione de' segni non si valevano che della figura dei caratteri, cercando un'attinenza più o meno rimota tra l'oggetto e l'idea che loro pareva rappresentare.

XI. *Considerazioni sulla scrittura e linguaggio mistico degli Egiziani.*

Un'altra ragione che fece deviare anche grandi intelletti (1) dietro al linguaggio mistico degli Egiziani, è che questa opinione contiene un elemento non dispregevole di scienza. Poichè ci fa concepire il mondo ossia la riunione di tutti gli oggetti d'ogni classe, come diverse serie che si rispondono tra loro nello stesso modo che le divisioni del decimetro a quelle del metro, o meglio come le note musicali d'una scala inferiore a quelle d'una scala superiore. Imagina una serie di suoni umani primordiali, o di combinazioni di suoni che stiano in proporzione con una serie qualunque d'oggetti, l'imagine dell'oggetto sarà l'espressione del suono, il suono il termine dell'oggetto. Qui vedi in breve l'origine del linguaggio e della scrittura, e l'attinenza che queste hanno colle idee e colla storia.

XII. *Enumerazione di coloro che seguirono questo sistema.*

Saremmo troppo lunghi se volessimo enumerare tutti i varii spropositi che si misero in corso partendo dal doppio principio che i geroglifici

(1) Tra primi intendo il Vico, Scienza nuova lib. I, pag. 134, § XXVIII.

eran tutti simbolici e contenenti una dottrina misteriosa. Basti accennare i principali ermeneutici che seguirono questo sistema.

Pierius. - Prima di tutti ci si offre Pierius (nel suo libro *Hieroglyphica, sive de sacris Aegyptiorum literis commentarii*, Basiliae 1556 in fol.). Roscoe, parlando di lui, dice che nei 58 commentarii, dei quali si compone il suo libro, vi è spiegata molta erudizione ed ingenuità; ma per disavventura l'una è male adoperata, l'altra si risolve in assurdi e stravaganze. Un' idea di questo suo lavoro si può ricavare da queste parole, che Pierius indirizza al suo lettore: « Habes in hisce commentariis non » solum variarum historiarum, numismatum, veterumque iscriptionum » explicationem, verum etiam praeter Aegyptiaca et alia pleraque mystica, » tum locorum communium ingentem magna cum oblectatione sylvam, » tum sacrarum literarum, in quibus haud et Christum ipsum et Apostolos, » Prophetasque hujusmodi locutionibus usos fuisse videmus exquisitam » interpretationem; ut sane vero non temere Pythagoram, Platonem, » aliosque summos viros ad Aegyptios doctrinae gratia profectos intelligas: » quippe cum hieroglyphice loqui nihil aliud sit, quam divinarum huma- » narumque rerum naturam aperire ».

Le sue spiegazioni per lo più tolte da un Autore Greco di tardi tempi, sono molto strane e ridicole; come il leone che divora la scimmia, preso per simbolo del rimedio della febbre, la grù per custodia. Per lo più prende il linguaggio metaforico letteralmente, lo trasferisce in una imagine visibile che descrive minutamente, e dalla quale deduce lunga serie di conseguenze.

XIII. *Kirker.*

Circa un secolo dopo succedeva a Pierius il Padre Kirker, il quale invece di limitarsi all' interpretazione di simboli staccati, arditamente si dava a spiegare i monumenti medesimi: e per una strana mistura di scienza cabalistica con istravaganti fantasie di un sistema di demonismo, pretendeva di dare la versione dei segni dei quali erano ricoperti. Le sue opere sono: *Obeliscus Pamphilius*, che era pubblicata in Roma l'anno 1650; poi l'*Oedipus Aegyptiacus vel Theatrum hieroglyphicum* pubblicata in Roma l'anno 1654 in quattro volumi in folio. Opera nella quale la copia dell'erudizione non può compensarti della stranezza degli assurdi. Nell'*Oedipus Aegyptiacus* Kirker professa di voler dare una nuova interpretazione degli obelischi e di altri geroglifici monumenti vuoi dell' Egitto, vuoi di

Roma, vuoi di altro più celebre museo. Un esempio del suo sistema colle sue mistiche stravaganze si trova nell'Opera, comparsa due anni dopo l'*Oedipus*, la quale ha per titolo *Obelischi Aegyptiaci nuper inter Isoei Romani rudera effossi interpretatio.* Questi sei volumi in folio contengono rappresentazioni fedeli, sebbene non eleganti, dei principali monumenti dell'arte egizia che erano stati portati in Europa prima di Kirker. Secondo il suo sistema d'interpretazione egli riesce egualmente bene, cominciando dal principio, dalla metà, o dal fine d'un' iscrizione. Secondo il Kirker, gli obelischi, le mummie, gli amuleti contengono misteriose dottrine di religione o di metafisica, ed egli prosegue sempre le sue spiegazioni senza alcun intoppo, come se fosse il mistagogo dell'antico Egitto. Così nell'ovale, cartello od anello dell'obelisco Panfilio che contiene il titolo *Autocrator* espresso in caratteri fonetici, l'imaginoso Kirker scopre il seguente oracolo: « Osiris faecunditatis et totius vegetationis author est, » cujus generationis facultatem e coelo in suum regnum sacer Mophta » trahit ». Nello stesso modo il cartello od anello del medesimo obelisco che contiene in caratteri fonetici le parole: « Caesar Domitianus » Sebastos », sono da Kirker interpretate (pag. 559): « Generationis » beneficus praeses, coelesti dominio quadripotens, aërem per Mophta » beneficum humorem aëreum committit Ammoni inferiora potentissimo » qui per simulacrum et caerimonias appropriatas trahitur ad potentiam » exerendam ». Questo basti a dare un' idea degli assurdi e stravaganze di Kirker, il quale tuttavia trovava una turba di ammiratori e di seguaci.

XIV. *Warburton.*

L'unico che sapesse esaminare da capo la questione con qualche buon senso è il Vescovo Warburton nella sua Opera che ha per titolo: *The Divine Legation of Moses demonstrated.* Il dotto prelato discuteva i diversi testi che riguardano il metodo di scrittura usato dagli Egiziani: distingueva teoricamente le diverse specie di caratteri da loro adoperati, e ne deduceva (ciò che era affatto verificato) che il *carattere sacro* o *geroglifico* non era così chiamato perchè esclusivamente atto ai soggetti sacri, ma che come stabiliva al principio del suo trattato, costituiva un reale linguaggio scritto, che si adoperava tanto negli argomenti storici e della vita comune, quanto in quelli di religione e di mitologia. Nondimeno egli s' ingannava nell'asserire che ciascuno dei tre generi di segni del carattere geroglifico,

formasse un distinto ed indipendente sistema di scrittura. Ma non cercando la conferma delle sue conclusioni nell'applicarle ai monumenti, il suo errore era inevitabile; tuttavia se i dotti avessero tenuto nella debita stima le osservazioni del Warburton, forse un secolo prima si sarebbe scoperta la chiave di questa scrittura. Ma quasi tutti riscaldati dal metodo di Kirker, non indagavano che i simboli e le dottrine nascoste. Laonde apparve cosa affatto nuova quando Zoega (*De origine et usu obeliscorum* p. 454. Romae, 1797 in fol.) parlava di caratteri fonetici: « Sed satis est exem-
» plorum classis aenigmaticae, superest quinta classes *notarum phoneti-*
» *carum* ». E neppure allora si fece grande attenzione a questa scoperta.

XV. *Alessandro Gordon.*

Un'altra Opera apparve a questi tempi che ha per titolo: *An essay towards explaining the Hieroglyphical figures on the Coffin of the Ancient Mummy beloging to Captain William Lethieullier, by Alexander Gordon, A. M.* London, 1737 in folio. A questa teneva dietro un'altra Opera del medesimo Autore che ha per titolo: *An essay towards explaining the Ancient Hieroglyphical etc.* Questi due saggi sono accompagnati da 25 incisioni in rame, nelle quali, oltre le differenti vedute della cassa o cassetta della mummia, si vedono delineati con mediocre esattezza gli *apices* di diversi obelischi con altre antichità egizie del museo Ahsmoleo copiate dai monumenti, gruppi, amuleti, figure d'Iside e Canopo, imagini mortuarie di legno, urne ed altri antichi resti; ai quali s'aggiunge una tavola di caratteri trovati sui monumenti egizii, ora in Inghilterra, che ascendono a 248. Il testo del signor Gordon è principalmente descrittivo e critico; ma mostra eguale erudizione e buon senso nelle sue osservazioni sui testi antichi. Ma, ad esempio de' suoi predecessori, egli non pensa ad altro che a simboli, ed in nessun caso fa anche il più piccolo ravvicinamento riguardo alla interpretazione d'un carattere o gruppo che gli antichi scrittori non abbiano spiegato. Il paragrafo che chiude il saggio sulla mummia di Lethieullier basterà per dare un'idea ai lettori del suo metodo: « L'intiero
» dunque di questa mummia, egli dice, sembra principalmente consistere
» in molti simboli fisici che rappresentano i diversi poteri o proprietà
» del capo, il Dio Osiride o il sole in quanto opera sulle diverse parti
» della natura: e che è sul dorso della mummia una combinata figura
» d'Osiride e d'Iside, che simboleggiano l'universale natura. E ciò che

» è più curioso su questa mummia sono il flagellum d' Osiride, e la falx
» messoria d' Iside rappresentante in vicinanza delle loro mutue figure
» perchè sono il caratteristico segno o meglio il trofeo delle loro inven-
» zioni, cioè dell'uso del grano e dell'agricoltura: l'uno lo strumento per
» mietere, l'altro per battere la biada; invenzioni per le quali furono
» deificati, invenzioni alle quali il lavoro deve il primo progresso della
» umanità alla società, invenzioni alle quali la religione, le arti, la scienza
» e tutto ciò che è più pregievole fra gli uomini deve la loro origine ».
Si osservi che forse il nostro antiquario prendeva il *lituus* per la falce messoria, e lo scettro a testa di sciakal per il *flagellum*.

XVI. *Si accennano altri sistemi più stravaganti.*

Ma ben più strani sono gli errori che si trovano in altri libri. L'Abate Pluche nel suo libro: *Histoire du ciel*, non vede nelle iscrizioni che emblemi relativi all'astronomia, al calendario ed ai lavori dell'agricoltura. In un libro anonimo che si stampava in Genova nel 1821 si sostiene che l'obelisco Flaminio conserva la memoria del trionfo sugli empi ottenuto dagli adoratori della SS. Trinità e del Verbo Eterno, sotto il governo del XVI o XVII re d' Egitto al XVI secolo dopo il diluvio. Nove anni prima (nel 1812) un anonimo stampava un' Opera in cinque volumi: *De l'étude des hiéroglyphes*, nella quale afferma che sul portico del gran tempio di Dendera vi è una traduzione del salmo 100 di Davide. Un altro anonimo nel suo *Essai sur les hiéroglyphes égyptiens*, Bordeaux, 1821, crede che la lingua ebraica debba fornire un ottimo mezzo per decifrare i geroglifici. Egli opina che la simbologia egizia sia fondata su questo principio che rappresentano qualunque idea astratta per mezzo d'un' imagine sensibile, il cui nome abbia un suono alquanto simile alla parola che in ebraico viene adoperata a significar quell' idea. Così trovando sopra una cassa mortuaria del museo di Vienna la foglia persea che in arabo dicesi *lebak*, crede che sia stata posta per indicare un uomo morto che in ebraico dicesi *lebaka*. Con tale sistema gli Italiani potrebbero coll' imagine del fico esprimere il fuoco, con quella d'una pera il verbo perire e simili. Ciò non di meno contiene qualche cosa di vero: poichè gli Egizii ponevano un occhio detto nel dialetto sacro *iri* per esprimere il verbo fare, *eire*: se non che questo era solo un procedimento secondario nelle

scritture egizie: ed il sistema di quest'Autore era falsato dal pregiudicio che la lingua ebraica fosse identica alla egiziana (1).

XVII. *Deguignes.*

Il primo che, lasciando le ipotesi dei simboli, si accostava al vero metodo delle osservazioni dei fatti fu il francese Degnignes. Egli indagando l'origine degli alfabeti e delle lingue veniva alla conclusione che tutti derivassero da un solo per mezzo di varie modificazioni, fondandosi sul passo del Genesi: « Erat autem terra labii unius et sermonum eorundem ». Quindi classificando le scritture conosciute, le partiva in tre classi, quelle dei geroglifici egizii, che derivava dalle etiopiche (Diod. lib. III); quelle chinesi e quelle fenicio-greche. Pare considerasse tutte le scritture diverse, come varii passi fatti dall'uomo in questa scoperta; nella stessa guisa che più tardi il Jouffroi considerava la varietà delle specie animali ed anche i mostri come tanti anelli della catena naturale. Inoltre il Degnignes, conoscendo la scrittura e la lingua chinese, che giusta la sua opinione era mediana tra i geroglifici egizii e gli alfabeti fenicio-greci, pensava che dall'esame del chinese si potesse ottenere la chiave del sistema egizio. Quindi entrando più innanzi nell'argomento trova prima di tutto i caratteri che noi chiamiamo ideografici, cioè che esprimono le idee coll'imagine naturale dell'oggetto: « La plus grande partie de ces caractères sont » très-simples, et donnent la représentation des choses corporelles que » l'on voulait exprimer; ainsi lorsque les Chinois vouloient représenter » une montagne, le soleil, la lune et ils traçaient les figures (7, 8 et 9 » de la pl. I) qui nous donnent la peinture de ces objets ». Anzi in una Memoria posteriore, tom. 34, osserva meglio il fatto della scrittura egizia per paragonarla colla chinese, e ne deduce varie conclusioni importanti:

---

(1) Chi vuol conoscere gli altri scrittori che prima della scoperta della lapida di Rosetta si diedero alla investigazione dei geroglifici, può consultare i seguenti libri: Mercatus, degli obelischi di Roma, capit. II, p. 82-130. Marshamus, Canonis cronici, saec. 1, pag. 37 e seguenti. Freret, Réflections sur les principes généraux de l'art d'écrire, tom. 6, pag. 609; Mém. de l'Acad. Shuckford, Histoire du monde sacrée et profane, trad. de l'angl., tom. I, lib. 4, pag. 218 e seg. Jablonski, Prolegomena ad Pantheon Aegyptiorum, § 50 e seg. Goguet, De l'origine des loix etc., part. I, lib. 2, capit. 6. M. Gibert, Observations sur l'obélisque, tom. 35, p. 670. De Brosses, Mécanisme du langage. M. d'Origny, L'Egypte ancienne, tom. 2, cap. 78, p. 231 e seg. Court de Gibelin, Monde primitif etc., tom. 3, lib. 5, pag. 374 e seg. T. C. Tychsen, Uber die buchstaben schrift der alten Aegypter an 1789, N.° 6, bibliothek etc.

1.° Che vi è il carattere ideografico. 2.° Che il simbolico è parte del geroglifico, e qui corregge ciò che aveva detto in una Memoria antecedente, che questo formasse una scrittura a parte. 3.° Che vi è una scrittura quadra ed una corsiva. Pare che voglia intendere della geroglifica e della ieratica, od almeno della geroglifica profilare. 4.° Distingue le ovali o cartelli (1). 5.° Nota il doppio metodo dello scrivere in linee orizzontali e verticali, ma sempre da destra a sinistra. Qui lo tradisce l'osservazione non troppo compiuta. Poichè non è raro il caso che scrivano pure da sinistra a destra. Ben si può addurre per sua scusa, che ciò è meno frequente, anzi solamente usato sui monumenti, e non sui papiri da lui esaminati. 6.° Osserva pure molte figure riunite per esprimere una sola idea, cioè i gruppi. In questo modo egli scopriva i caratteri ideografici, simbolici ed i fonetici sillabici che derivava dai primi e davano origine agli alfabeti.

Si può dire che i principii importanti erano già tutti rinchiusi nel suo sistema. Ma la conoscenza che egli richiedeva della lingua e scrittura chinese, mista alla idea non chiara della distinzione dei tre generi di scrittura egizia, lasciava infecondi i suoi veri principii. Non potevano questi dar frutto se non erano liberati dall'idea della relazione tra il chinese e l'egizio ed aiutati dallo studio della lingua copta.

XVIII. *Studii sulla lapide di Rosetta.*

Mentre lo studio di questa lingua faceva maggiori progressi in Europa, un caso fortunato ci poneva in grado di ricominciare con maggiore speranza gli studii della scrittura geroglifica. La spedizione militare e scientifica dei Francesi in Egitto dava occasione a questo avvenimento. Mentre una divisione delle truppe francesi occupava la piazza di Rosetta, una parte dei lavoratori adoperata negli scavi per la fondazione del forte di S.t-Julien, scopriva e traeva fuori un grande masso o cippo di basalto

(1) Questa importante scoperta che fu prima provata coi fatti dal Dott. Young, era già stata congetturata dall'Ab. Barthelemy (vedi una sua dissertazione inserita tra les Mém. acad. des inscript.) e dal dotto Zoega (De origine et usu obeliscorum, pag. 465), ove si legge: « Conspiciuntur autem » passim in Aegyptiis monumentis schemata quaedam ovata sive elliptica planae basi insidentia » quae emphatica ratione includunt certa notarum syntagmata, sive *ad propria personarum nomina* » *exprimenda*, sive ad sacratiores formulas designandas ». La stessa osservazione era fatta da Caylus (Recueil d'antiquités, tom. V, p. 79).

nero, che ancora mostrava i resti di tre distinte iscrizioni in diverso carattere. Ma i Francesi ben presto sloggiati dagli Inglesi non ebbero tempo a condur via il monumento che cadde così in loro mano e fu deposto nel museo Britannico.

Appena le impronte della lapide di Rosetta divennero comuni in Europa e per mezzo della società degli Antiquarii, che i dotti si posero con maggior ardore intorno al problema delle scritture egizie. Il testo greco abbastanza chiaramente dimostrava con quelle parole: ΙΕΡΟΙΣ ΚΑΙ ΕΓΧΩΡΙΟΙΣ, ΚΑΓ ΕΛΛΗΝΙΚΟΙΣ ΓΡΑΜΜΑΣΙΝ, *in caratteri sacri encoriali* (del paese) *e greci* che le tre iscrizioni erano l'una la versione dell'altra. Quindi Heyne e Porson, i migliori grecisti di quel tempo, si posero con grande cura a ristorare ed interpretare la iscrizione greca, perchè potesse agevolare la via ai filologi che volessero tentare il testo egizio. Se non che varii errori impedivano questa impresa. Prima di tutto che alcuni ignoravano la rottura della pietra, e quindi la mancanza di alcune linee. In secondo luogo i primi investigatori non tenendo conto dei lavori dello Zoega, credevano che il carattere geroglifico fosse intieramente simbolico: ed il demotico od encoriale affatto alfabetico. Laonde falsamente conchiudevano che la lingua fosse la medesima, variando solo la scrittura. A ciò si aggiungeva che non distinguevano il ieratico dal demotico. Ciò non di meno di grande aiuto sarebbe stato la versione greca se si fosse trovato un punto di paragone tra i due testi.

Questo si poteva ottenere con mezzi meccanici misurando la lunghezza proporzionale delle iscrizioni: od anche scoprire con mezzi filologici distinguendo i gruppi che ricorrono più frequentemente, ed i nomi proprii che in ciascuna versione non possono mutarsi. In questo modo Silvestro De Sacy in una lettera a Chaptal (l'anno 1802) Ministro della Republica faceva osservare tre gruppi che contenevano i nomi di *Tolomeo, Alessandria, Alessandro*. Questo poneva sulla via del progresso il Ministro svedese residente a Parigi.

Il signor Akerblad ripigliando il lavoro dove l'aveva lasciato il De Sacy (in una lettera a lui diretta) e confermando la verità delle sue scoperte col fare l'analisi degli elementi che componevano il gruppo *Alexander*, e quelli de' gruppi che significavano *Tolomeo*, *Berenice*, *Arsinoe* ed altri nomi proprii (salvo alcuni gruppi di parole copte, *Chemi* (Egitto), *Phuro* (re), *Nierpheui* (i tempii), *Neb* (i preti)), giungeva a comporre un alfabeto che conteneva circa 15 caratteri della scrittura demotica. Tuttavia

non potea andar più in là dei nomi proprii, perchè credeva alfabetica l'intiera iscrizione, ed inoltre voleva trovare tutte le vocali che s'incontrano nelle parole dei testi copti. Per nulla poi contribuiva a rischiarare la lettura del primo testo, cioè geroglifico della lapide di Rosetta, se togli un'acuta osservazione sui tre numeri del fine. Ma ad ogni modo a De Sacy e ad Akerblad sono dovuti i primi passi di questa scoperta.

XIX. *D.r Young Thomas.*

Un medico Inglese per nome T. Young fu quegli che il primo passava al testo geroglifico. Egli cominciava dallo studiare il testo encoriale nel 1813 condottovi dalla pubblicazione del *Mithridates di Adelung e padre*, della quale scriveva una dotta rivista (Quarterly Review 1813). Divise i due testi in gruppi coll'aiuto della iscrizione greca. Quindi procacciandosi una conoscenza del copto, intraprendeva un'analisi del testo encoriale per mezzo dell'alfabeto di Akerblad. Ma più di lui vedeva in questa materia, in quanto che credeva che il carattere encoriale contenesse elementi simbolici ed alfabetici. Questo punto gli serviva di mezzo per intraprendere l'analisi del geroglifico testo. Comparando i gruppi dei caratteri colle parole e sentenze ripetute nel testo greco, divideva in paragrafi il testo geroglifico, e nel novembre del 1814 pubblicava: *A conjectural translation of the Egyptian Inscription of the Rosetta Stone.* In due lettere a De Sacy (agosto ed ottobre 1814) stabiliva che si poteva avere una interpretazione della lapide di Rosetta con un metodo diverso da quello di Akerblad, cioè senza curarsi del valore dei caratteri dei quali ciascun gruppo si compone: si accorda con Akerblad in sedici caratteri, ma trova col suo metodo che l'iscrizione contiene segni simbolici, e dà 100 segni diversi. Nella seconda lettera riassume il risultato delle sue ricerche: diciannove lettere di Akerblad, 12 delle proprie, alle quali aggiunge la stella che forma il fine d'un nome proprio e forma così il 13.° Dà cinquanta gruppi di parole, delle quali li tre primi sono gli accennati da De Sacy ed analizzati da Akerblad: quindi sedici parole scoperte ed in parte analizzate dallo Svedese. Tutto il resto è a lui dovuto. A questi aggiungi 150 e più gruppi ai quali trova le parole rispondenti nell'iscrizione greca e nel copto. Ma questa interpretazione è sovente erronea, e non mai confortata da analisi filologica. Nell'anno seguente, 1815, il D.r Young faceva un gran beneficio alla scienza scoprendo colla sua perspicacia l'affinità tra il ieratico ed il geroglifico

da una parte, e tra il ieratico e demotico dall'altra. In tale modo paragonando i varii papiri funerarii scritti ora in ieratico ed ora in geroglifico per mezzo di una tavola di paragone di segni poteva tradurre il demotico in geroglifico. Se la sua scoperta era reale, ne seguiva naturalmente che un gruppo della iscrizione demotica tradotto per mezzo di quella tavola doveva riuscire eguale a qualche gruppo della iscrizione geroglifica. Conoscendo le opinioni di Barthelemy e di Zoega sulle ovali facilmente poteva trovare nel testo geroglifico il nome di Tolomeo e quello di Berenice sopra una porta di Karnak. Ma l'analisi gli riusciva così infelicemente che dei loro trenta segni solamente undici tentava spiegare, e di questi otto congetturava più o meno correttamente.

Troppi falsi giudizii impedivano che potesse avanzarsi in questa via. Prima di tutto non era ben certo se doveva adottare i segni puramente alfabetici, oppure *un certo genere di sistema sillabico*. Inoltre gli erano ignoti gli omofoni, cioè i varii segni usati pel medesimo suono: quantunque a ciò l'avessero potuto condurre le varianti raccolte dal paragone dei papiri funerarii. Aggiungi che non pare che stendesse l'uso dell'alfabeto geroglifico gran fatto al di là dei nomi proprii. Quindi malgrado gli sforzi fatti dappoi per appropriarsi la scoperta di Champollion non si può al Dottore Young attribuire altro che la gloria d'aver perfezionato lo studio del demotico, e per mezzo di congetture agevolata la via allo studio dei geroglifici. Poichè non si può dar vanto del merito d'una scoperta a chi solo per isbaglio e per congettura perviene a qualche felice risultato: ma solamente a colui che vi giunge collo stabilimento di varii principii. Se non che il merito di questo dotto filologo rimane ancora assai grande, che ben può esserne contenta la boria nazionale degli Inglesi.

XX. *Champollion.*

Più m'avvicino ai nostri tempi, e più provo il bisogno di rendere il mio discorso breve e condensato. Non farò qui la storia della scoperta di Champollion che fu già sovente ripetuta: dirò solo qualche parola del suo metodo e de' suoi oppositori. Egli partendo dall'anello di Tolomeo, già spiegato dall' Young, lo paragonava con quello che congetturava essere di Cleopatra per mezzo dell' iscrizione greca del basamento dell'obelisco di File (1). Così otteneva la conferma del valore di dodici segni, e scopriva

(1) Lettre à Dacier sur les hiéroglyphes phonétiques.

il fecondo principio degli omofoni. Applicando questi segni alla lettura di altri cartelli, andava sempre compiendosi il suo alfabeto, cresceva il numero degli omofoni, e si ottenevano non solo i nomi de' Faraoni, ma anche quelli de' Greci e Romani che ebbero dominio in Egitto. Ben tosto ottenne la lettura di altri nomi greci e romani non rinchiusi ne' cartelli ed applicava il suo alfabeto a nomi di divinità ed individui Egiziani.

Finalmente non tardò ad accorgersi che in mezzo a molti simboli che non potevano interpretarsi con questo metodo vi erano molti gruppi fonetici che si spiegavano con radici copte. Tra queste si distinguevano le desinenze e forme grammaticali dei nomi e dei verbi, le preposizioni e le congiunzioni, cosicchè potè darne una compiuta teoria nella sua grammatica.

XXI. *Klaproth e Dujardin.*

Il metodo dello Champollion era assai ragionevole, perchè non procedeva che col paragone del noto coll' ignoto: e nel medesimo tempo le sue conclusioni erano in armonia con quanto si conosceva degli usi e de' costumi egizii. Ma molti per gelosia si diedero ad assalire il suo sistema. Klaproth e Dujardin furono i suoi più accaniti oppositori, il secondo dei quali si ricredette negli ultimi mesi di sua vita.

Klaproth per ispirito d'opposizione prese a sostenere il sistema acrostico ed acrologico di Gulianof, fondato su una mala interpretazione del passo di S. Clemente Alessandrino: διὰ τῶν πρωτῶν στοιχείων, cioè *per mezzo dei primi elementi* (vedi *Collection d'antiq. égypt. etc. précédée d'observations critiques sur l'alphabet hiéroglyphique découvert par M.r Champollion et par M.r J. Klaproth*, Paris 1829). E invero, come sagacemente aveva interpretato Champollion per quella frase, *per mezzo dei primi elementi*, non altro doveva intendersi se non che l'imagine serviva ad esprimere la prima lettera; e non già che tutta la parola s' indichi per qualunque imagine risponda ad un'altra parola cominciante per la medesima lettera. La cosa è sì chiara che io credo che Gulianof ed il suo seguace non avessero la convinzione del loro sistema. Chi potrà persuadersi che una *stella* (la quale secondo Horapollo al cap. 13, lib. I significa anche Dio e tempo), ciò faccia per la somiglianza della lettera colla quale cominciano le parole *cioγ* stella, *cioc* signore e CHOY tempo. Come schivare gli equivoci, ai quali darebbe luogo un tale sistema?

Ben credevano forse questi avversarii di essere più avventurosi nelle

obbiezioni; ma neppur queste reggono alla critica. Le principali obbiezioni mosse da Klaproth e Dujardin, e da altri ripetute, si possono ridurre ad alcune variazioni, contraddizioni, od enunciati posti senza prova nei libri di Champollion, ed alla pretesa differenza della lingua copta da quella degli antichi Egiziani. Ma a ciò ben si può replicare che le mutazioni mantengono sempre saldi i principii del suo sistema: e che la differenza dalle radici copte non può più ora invocarsi come obbiezione, ora che Lepsius provava che il copto ha verso l'antico egizio l'attinenza di dialetto a lingua madre, quale corre per esempio tra il pelvi e lo zend, tra le lingue neolatine ed il latino.

Ma se grandi furono le opposizioni che egli ebbe ad incontrare, molti pur furono coloro che ne seguirono le dottrine. Troppo noti sono i nomi di Lepsius, di Leemans, di Rosellini, di Ungarelli e Migliarini tra suoi contemporanei e di De Rougé, di Brugchs e di Birch, Mariette, Chabas, Lenormant e Bunsen tra moderni, perchè io enumeri minutamente le Opere di quei grandi filologi. Dirò solo che se vi era qualche cosa di vago ed indeterminato nella prima esposizione del sistema del dotto Francese (dovuto interamente al genere de' monumenti troppo moderni sui quali fondava le sue scoperte) in gran parte scomparve nelle analisi di questi dotti seguaci di Champollion.

XXII. *Uhlemann.*

Ben voglio ora fermarmi alquanto sopra alcuni che oggi ancora cercano di contrastare il vanto della scoperta allo Champollion. Tra costoro si distingue il Tedesco Uhlemann, che in molti Opuscoli, e specialmente in quelli intitolati: *Das quousque tandem? der Champollionischen schule und die inschrift von Rosette etc.* Berlin, 1852 e *Quae, qualia, quanta! eine Bestaligung des quousque tandem? etc.* Berlin, 1852 e nella sua Opera che ha per titolo: *Handbuch der gesammten Aegypt etc.* Leipzig, 1857. Le sue obbiezioni sono ricavate in gran parte dal contrasto che crede di trovare tra i varii periodi del sistema di Champollion, oppure tra alcune sue proposizioni e quelle de' suoi seguaci. Ma a queste ho già risposto nel principio di questo discorso; soggiungerò solamente che molte derivano da mala fede, essendo dedotte dal paragone di libri di diversa epoca pubblicati dallo Champollion: e per lo più riguardano proposizioni solo accennate di passaggio. Nè maggior solidità ha il sistema che egli contrappose

a quello di Champollion. Poichè egli prese a sostenere le opinioni di Seyffarth e di Stohl, i quali per ridurre a maggior semplicità il metodo ermeneutico trasformarono tutti i segni simbolici in fonetici. Inoltre ei vuole che i fonetici siano parte alfabetici, parte sillabici e talora esprimano le lettere iniziali, talora le medie e le finali. Farò forse altrove la confutazione di tali errori. Qui basti accennare che quelli da lui chiamati sillabici, non sono che gli iniziali di Champollion, e non ne differiscono che pel nome. Affatto falsa è l'asserzione che talora gli Egizii esprimano le lettere medie e finali, e solo si fonda sopra una cattiva interpretazione dei suoni complementari. L'esclusione poi dei segni simbolici non ha altro argomento che la credenza, che questi segni siano verbali e rappresentino prima il suono e poi l'idea, e non al contrario. Ma ciò si oppone a tutte le tradizioni greco-romane.

XXIII. *Michelangelo Lanci.*

Contrario affatto a questo sistema di Uhlemann è quello di Michelangelo Lanci nel suo libro: *Lettre sur l'interprétation des hiéroglyphes etc.* Paris, 1847. Poichè laddove il Tedesco riduce tutti i segni ai fonetici, il Romano trae ai simboli anche i fonetici. Lanci non contradice alla scoperta di Champollion, ma crede di perfezionarla dando al medesimo segno ad un tempo il valore di simbolo e di suono; egli abusa della conoscenza delle lingue orientali per dedurne le radici che non gli somministra il copto. Anzi non è raro il caso che una parola si spieghi colla combinazione di due radici tratte da lingue diverse. Per dare un esempio del suo metodo citerò la spiegazione del gruppo n. 101 *hes-iri*, secondo il sistema di Champollion si compone della *sedia* che si pronunzia *hes* e dell'*occhio* che si pronunzia *iri*. Lanci invece vuole che il *trono* significhi l'Isa degli Ebrei, cioè la donna per eccellenza, l'Iside di Horapollo. Nel nome d'Osiri legge un segno per trono e l'altro per eguaglianza e giustizia. Quindi le parole di *Is* uomo, e di *Isa* femmina concorsero alla formazione del nome d'Osiride e furono scelte dagli Egizii per ispiegare il principio maschio e femmina come la giustizia. Quindi tenendo conto dell'occhio, crede di trovare questi sensi nel nome d'Osiride: « il trono » della giustizia, l'occhio del trono della giustizia, il trono dell'occhio » della giustizia, ed il trono del sole della giustizia ». Frasi che egli dice piene di grandezza e frequenti nella Bibbia. Poi soggiunge (lettre p. 105):

« Ce nouvel exemple d'analyse hiéroglyphique me confirme dans la pensée
» que tous les emblèmes des divinités égyptiennes portent le signe du
» nom qui les distingue ».

XXIV. *P. Giampietro Secchi.*

A questo in parte s'accosta il sistema del Padre Secchi, il quale pure si fonda sul principio di voler che il medesimo segno sia ad un tempo simbolico e fonetico. Eccone l'esposizione che ne faceva il P. Antonio Angelini (nel suo libro degli studi archeologici del P. G. Pietro Secchi, Roma, 1858, p. 69): « Finalmente ritornava co' suoi studi nei monu-
» menti egiziani, ed accennava una nuova via per leggere le scritture
» geroglifiche: via in parte altra da quella che col suo felice ingegno,
» e colle lodate fatiche aveva sino a questi dì aperta lo Champollion:
» perchè dove questi col suo sistema ci dà le sigle iniziali delle voci, il
» Secchi a rincontro ci porge nomi pieni e intieri: e fortifica la sua sen-
» tenza con due generi d'argomenti: l'uno di autorità, mostrando col
» testimonio d'Orapollo, di Diodoro Siculo, di Clemente Alessandrino,
» di Plotino, di Ammiano Marcellino, che la scrittura geroglifica è verbale,
» non alfabetica: l'altro di fatto, spianandosi con questo metodo molte
» e forti difficoltà, che nell'interpretare le note geroglifiche ti arrestavano
» nell'altro (Bullettino dell'Istituto di corrispondenza archeologica N. V.
» del maggio 1852). Perchè meglio abbracciamo coll'animo il pensiero
» del nostro archeologo, cederò qui a lui il luogo e la parola.

» L'arcano della scrittura geroglifica (apre così la sua mente) consiste
» nella omonimia allegorica, cioè nello scambio dei nomi simili per mezzo
» dello scambio degli oggetti divenuti in questo modo simboli parlanti,
» come accade nei tipi parlanti delle monete, usando un cuore (καρδια)
» per indicare la città di Cardia. Si noti prima che omonimia non è lo
» stesso che sinonimia e sinonimi. Esistono i sinonimi geroglifici, ma questi
» riguardano il significato, e non il senso materiale delle voci: gli uni
» servono a spiegare gli altri quanto al significato della parola e non a
» rappresentare il suono. Secondo che il modo ordinario degli Egiziani
» nell'intendere la scrittura geroglifica era la conoscenza degli oggetti
» rappresentati colla scienza esatta dei nomi loro. Chi non sapeva questo
» nesso di parole e di nomi colle idee degli oggetti non sapea leggere.
» E altrove: la lettura dei geroglifici era una continua versione mentale
» di oggetti in parole, e di parole in oggetti ».

Non occorre che io qui ripeta gli argomenti che già recava contro questa dottrina in un articolo del *Cimento* (Esame del nuovo principio di lettura dei geroglifici egiziani proposto dal P. Secchi fascic. XII, 1852). Dirò che il suo sistema fonetico è contrario alle varianti raccolte non solo dai cartelli dei nomi degli Imperatori Romani, dei Tolomei e dei Faraoni, ma alle stesse parole copte che si riproducono nella lingua egizia. Quanto al senso simbolico che vuole sempre accompagni anche i segni fonetici, non abbiamo ragioni per crederlo reale: e d'altro lato è contrario alle versioni greche di testi egizii.

XXV. *Edward Hinks.*

Un ultimo saggio di sistema di lettura dei geroglifici ci venne da un Irlandese Edward Hinks nella sua Opera che ha per titolo: *An attempt to ascertain the number, names, and Powers of the letters of the hieroglyphic or ancient Egyptian alphabet etc.* Egli si pose a quest'indagine per supplire ad una mancanza che gli pareva di scorgere nel sistema di Champollion (la stessa che fu pure accennata dal Secchi), cioè che egli dà piuttosto l'ossatura delle parole che non le vere parole egizie. Quindi inventava il principio degli *espletivi* che io esporrò colle sue parole tradotte in italiano: « Il principio che io stabilisco (egli dice pag. 10) è » questo. I fonoglifi che compongono l'alfabeto egiziano sono nomi che » constano di se medesimi coll'aggiunta di certi caratteri espletivi, e » questi nomi possono essere, e sovente sono usati in luogo dei semplici » fonoglifi. Se quindi un fonoglifo appartenente all'alfabeto è seguito da » un carattere espletivo che si riferisce a quello, quell'espletivo può essere » e quasi sempre è affatto trascurato ». Ad illustrare questa teoria l'Autore reca l'esempio della parola Roma, la quale scritta coi nomi delle lettere inglesi si dovrebbe leggere *Aroeme*. Questo principio non può sostenere la prova dei fatti: e quantunque il signor Hinks trovi con questo mezzo alcune parole ebraiche nei testi ieratici, gli esempi da lui recati si possono più facilmente spiegare coll'attribuire ad alcuni segni un valore sillabico.

Da questa serie di sistemi apparisce come tutti quelli che precedevano la scoperta dello Champollion peccavano principalmente perchè confondevano i tre generi di scrittura, ignoravano i segni fonetici e la relazione del copto coll'egizio. Quelli poi che vennero dopo, volendo cercar vanto d'originalità, traevano addietro l'ermeneutica, o facendola rimontare ai

simboli, o trasformando tutti i segni in fonetici. In tutti poi predominava un'osservazione incompinta dei monumenti, ed una qualche preconcetta opinione.

Quindi ne segue come il sistema interpretativo di Champollion è veramente come mezzo dialettico tra le contraddicenti opinioni da altri propugnate. Poichè se alcuni vogliono riconoscere il solo elemento ideografico, altri il solo fonetico, non mancano coloro che li ammettono congiunti nel medesimo segno. Laddove il Francese pone i due elementi ideografico e fonetico nella medesima scrittura ed anche nel medesimo gruppo (poichè ammette alcune idee espresse nei due modi ad un tempo); ma non può consentire con coloro che danno ai fonetici anche il valore di simboli nella medesima parola onde ne deriverebbe un doppio senso a tutti gli scritti. Inoltre il fonetismo dello Champollion è mediano tra l'acrologico da un canto, e la teoria degli espletivi dall'altro. Perocchè mentre Guglianoff pretende che basti un' imagine ad esprimere tutte le parole che cominciano per la medesima lettera iniziale: ed Hinks al contrario vuole che ogni imagine abbia oltre al valore del suono iniziale anche quello dei suoni che compiono la parola, e che per iscrivere la parola scrivessero i nomi delle lettere che la compongono; Champollion invece dà a ciascuna figura il valore della lettera, o sillaba iniziale. Così la ragionevolezza medesima di questo principio ci convince della bontà di tale sistema.

PARTE SECONDA

INTERPRETAZIONE RAGIONATA D'ALCUNI MONUMENTI.

Ora che abbiamo posta in chiaro la bontà del metodo ermeneutico da noi propugnato, ci pare ragionevole il farne applicazione ai principali monumenti del nostro museo. Comincierò dall' interpretazione d'una delle steli collocate nel vestibolo, la cui importanza è molto considerevole vuoi per la lunghezza del testo, vuoi per l'antichità alla quale risale.

Scolpita nel calcare, ha l'altezza di metri 1, 75 e la larghezza di 0, 63. Divisa in tre compartimenti, ed arrotondata in cima, contiene nella parte superiore in cinque linee una invocazione ai più celebri personaggi del

paese. È tuttavia da ossservare che la terza linea avendo i determinativi collocati al di sotto di ogni gruppo, può facilmente dare apparenza di una triplice linea. Al lato destro della lapide è un gran personaggio seduto colle insegne della sua carica. Da una piccola iscrizione posta al di sopra appare essere il defunto *Meru*. Dal lato opposto, a sinistra della pietra, è una picciola figura in piedi in atto di pregare che porta il nome di Merra (o Marra) antenato del defunto. Nella quinta linea è il cartello di *Ra-neb-tu* (sole signore della parola) cui non seppesi da principio in che dinastia classificare, finchè trovandosi accompagnato dal nome *Menemotp* (V. De-Rougé, *Annal. de Phil. Chrét.* tom. XV, III série, p. 147) si convenne che appartenevа alle prime dinastie. Ma di questo faremo parola più innanzi. Il testo di mezzo di nove linee orizzontali, non rinchiude altro che una delle solite preghiere funerarie, pregevole per le idee morali che vi sono manifestate. Finalmente nella parte inferiore della lapide si vedono due personaggi a destra. Il primo, come si legge in una triplice linea verticale, è il defunto *Meru*: l'altro il suo padre *Aku*. A sinistra è un altro personaggio che porta il nome di *Mer-to-hau-necht-hem*. Più sotto vedi a destra due figure sedute, il defunto *Meru* e la madre. Innanzi a loro è un altare carico di offerte con un personaggio che tiene in mano alcune oche. Chiude la rappresentazione una seguenza di sette figure. La prima è una donna con un picciolo scabello nella destra ed un paniere o vaso nella sinistra. Le tien dietro un cantore in atto di battere il tempo. Poi sono altre persone con offerte e doni: uno scriba in atto di registrarle sopra una tavoletta, un uomo che porta una coscia di vitello, seguito da uno che conduce per mano una capra, ed un altro che tiene due oche nella destra ed altri doni nella sinistra.

Diamo qui ora la interpretazione letterale latina, tutta di seguito, perchè meglio si possa cogliere l'andamento generale della iscrizione.

(linea 1.ª orizzontale) Anno XLVI.

(linea 2.ª) Ah!

(linea 3.ª) Prophetae, Prophetissae, cantores, cantatrices, Chennu (peculiaris ordo), Chentu (foeminae eiusdem ordinis) cum hominibus omnibus (linea 4.ª) qui estis in Abydo, nomen hoc bonum legitis in festo mensis, festo medii mensis, in festo initii anni (linea 5.ª) in panegyriis omnibus Abydi, factis (τῷ) Tapheru (idest duci viarum) bono, datis Mandu duorum orbium Principi (soli domino eloquii) viventi in aeternum.

Iscrizione scolpita a destra sopra un uomo seduto.

Electus ante Deum magnum dominum Abydi praefectus Hetorum (peculiaris ordo) Meru dictus iustus.

Iscrizione scolpita a sinistra sopra un personaggio in piedi.

Pater eius electus Merra.

(lin. 6.ª) Adoratio data Osiridi residenti in occidente, domino Abydi: oblationes funebres ei in Abydo in domo omni, in statione (lin. 7.ª) Dei in ipsa, regi per amantem eum, praefectum Hetorum, Meru - Dicit: ah! viventes principes duorum orbium (lin. 8.ª) qui estis in ministerio (του) residentis in occidente (του) Tapheru (Ducis viarum), amores, vita, splendores. (lin. 9.ª) Sacerdotes qui pertinent ad Deum magnum, Prophetae omnes in Abydo, optate ut sit devotus vobis ante Osiridem. (lin. 10) Oblationes funebres in pane et vino sint patri, facite et dicite: mille (vasa) lactis, mille vini (lin. 11) mille vituli, mille anseres, mille lintei, mille vestes, mille ex coeteris bonis, muneribus datis Osiridi residenti in Occidente (lin. 12) per Het doctorum principem, praefectum Hetorum Meru sit bonum qui sunt cum vobis: ponite in ore vestro (lin. 13) verba omnia qui estis in ministerio Dei huius. Ego sum amans generationes sanctas, amantes patrem (lin. 14) et dedi panem esurientibus, vestem nudis, amorem qui sunt benedicti ante Deum bonum.

Iscrizione sopra alcuni personaggi in piedi a destra nella parte inferiore della lapide.

Electus ante Deum magnum pater Aku, dictus iustus.

Iscrizione sopra una figura in piedi a sinistra.

Electus ante Deum magnum, Mer-to-han idest praefectus regionum septentrionalium nacht-em.

Tre linee verticali.

(lin. 1.ª) Praefectus Hetorum, domini eius sedes in corde, Meru, dictus iustus. (lin. 2.ª) Dat adorationem Osiridi benefico (?) residenti in mundo, residenti in Occidente (lin. 3.ª) Tapheru, benedictus Meru.

Iscrizioni sopra due figure sedute a destra nella parte inferiore della lapide.

Mater eius benedicta ante Deum magnum Neb-ta electus, praefectus Hetorum a domino eius dilectus, vas eius, Meru.

Oblationes omnes, odores omnes, ingens numerus oblationum, mille vestes, mille lintei, mille anseres, mille vituli, mille panes, mille (vasa) vini (τῳ) Sacerdoti, regis consanguineo propter sacrificium et libationem ob oblationem (του) Meru, domini (vel omnem).

GRUPPI geroglifici	PRONUNZIA	INTERPRETAZIONE	ANALISI
1	ter (rompe)	*Anno*	Gruppo composto del ramoscello di palma, del segmento (ⲧ, articolo femminile) e del disco determinativo delle divisioni del tempo.
2		*XLVI*	Quattro semicircoli che rappresentano le decine, e sei sbarre segni delle unità.
3	a	*Ah!*	De-Rougé pag. 34: « l'homme tenant la main à sa » bouche, c'est un déterminatif de son qui enrichit » souvent l'*A* vague initial.
4	Hen-u	*Prophetae*	Gruppo simbolico composto d'un'ascia e di un vaso, col determinativo triplicato di tre uomini accoccolati. De-Rougé pag. 81 (Ahmès) così scrive: « ces » deux groupes corrélatifs sont déterminés l'un par » un homme, l'autre par une femme. Le caractère » initial est suivant Champollion un vase ren- » versé, symbole des idées de sainteté et de pu- » reté etc. etc. », ed a pag. 82: « le terme peu » usité ϩⲟⲡⲧ *sacerdos* appartient au dialecte mem- » phitique etc. etc. ».
5	Hen-t-u	*Prophetissae*	Questo gruppo non differisce dal precedente che per l'articolo femminile e pel determinativo che è di tre donne. Ciò indica che vi erano donne nelle classi sacerdotali d' Egitto.
6	Hes-u	*Cantores*	Gruppo fonetico, composto di quattro segni, la corda *h*, il dorso di sedia *s*, il braccio *e*, ed il pulcino *u* segno del plurale, e del determinativo triplicato. La radice *hs* risponde alla copta ϩⲱⲥ *cantore*. Il determinativo dell'uomo col braccio alzato ci dimostra che qui si tratta d'una classe particolare di sacerdoti.
7	Hes-t-u	*Cantatrices*	Questo gruppo si distingue dall'antecedente per l'articolo femminile ⲧ e le tre donne.
8	Chen-nu	*(peculiaris ordo)*	Gruppo fonetico, composto di quattro segni, di un vaglio che si pronuncia *ch*, della linea ondulata *nu*, del vaso *n*, del pulcino *u*. Il significato di Chennu deve riguardare un ordine particolare di sacerdoti.
9	Chenn-t-u	*(foeminae eiusdem ordinis)*	Questo gruppo risguarda le sacerdotesse del medesimo ordine. V. De-Rougé pag. 82.
10	hña	*cum*	Gruppo fonetico composto di tre segni: della corda *h*, di un'asta *n*, e del braccio *a*. Risponde alla radice copta ϩⲏⲛ, *essere congiunto*.
11	ret	*hominibus*	Gruppo simbolico formato di due uomini in atto di sedere, e di un fanciullo. Quando è accompagnato dal suono, ha la radice *ret* che significa nascere col determinativo d'un fanciullo. Quindi appare che ha il senso di generazioni od uomini.

GRUPPI geroglifici	PRONUNZIA	INTERPRETAZIONE	ANALISI
12	nev	*omnibus*	Il segno della corba che si pronunzia *nev* è posto dopo il gruppo *ret* per indicare un plurale collettivo. V. De-Rougé pag. 42.
13	nu	*qui estis (in)*	Gruppo fonetico composto della linea ondulata e del pulcino.
14	Ebut	*Abydo*	Gruppo fonetico composto del segno sillabico *Eb* od *Ab*, del determinativo che indica una valle, e di quello delle regioni. Questo gruppo è pure preceduto da quello dell'altare che ha pure il valore della sillaba *ab*.
15	ran	*nomen*	Gruppo fonetico composto della bocca *r* e della linea ondulata *n*: risponde alla radice copta ⲣⲁⲛ nome.
16	pu	*hoc*	Gruppo composto di un rettangolo *p* e del pulcino *u*. La parola *pu* è un pronome derivato dal verbo essere, che si pone dopo il nome.
17	nefer	*bonum*	Segno simbolico che rappresenta il liuto: risponde alla radice copta ⲛⲟⲩϥⲓ *bonum*, buono.
18	skchau-ten	*legitis*	Gruppo fonetico composto di cinque lettere: *s*, *ch*, *k*, *a*, *u*; seguito da *ten* desinenza della seconda persona plurale.
19	em	*in*	Segno fonetico iniziale composto della civetta detta in copto ⲙⲱⲓⲛ: onde ha il valore di *m* lettera iniziale.
20	.....	*festo mensis, festo medii mensis*	Gruppi simbolici composti del segno che si trova usato anche nella tavola di Rosetta in significato di festa: della stella per indicare il mese, e degli altri due segni per indicare il fine e la metà.
21	em	*in*	
22	.....	*festo initio anni*	Gruppo simbolico per indicare il principio dell'anno, come è dimostrato da Lepsius.
23	em	*in*	Segno fonetico iniziale composto della civetta detta in copto ⲙⲱⲓⲛ; onde ha il valore di *m* lettera iniziale.
24	heb-u nev	*panegiriis omnibus*	Gruppo simbolico simile a quello recato più sopra: e la corba *nev* per indicare il plurale collettivo.
25	en Ebut	*in Abydo*	Gruppo già spiegato.
26	cheper-u	*factis*	Gruppo misto, composto dello scarabeo, simbolo molto adoperato dagli Egiziani (V. De-Rougé, Ahmès p. 51-54) seguito da' suoni *ch*, *p* significa *trasformazione*, *mutazione*, *esistenza*.
27	en Tap-her-u	(ⲧⲫ) *Tapheru idest duci viarum*	Nome di divinità, composto dell'articolo ⲧ, del nome *aph* capo, e del segno *her-u* vie: quindi suona « la » guida delle vie ».
28	nufer	*bono*	Vedi più sopra.
29	em er ta	*datis*	Participio del verbo *ta* dare.

GRUPPI geroglifici	PRONUNZIA	INTERPRETAZIONE	ANALISI
30	Mantu-to-ti	*Mandu duorum orbium*	Nome di una divinità, composto di quattro suoni: *m*, *n*, *d*, *u*, coll'aggiunta del simbolo del mondo ripetuto due volte pel duale (De-Rougé p. 141-43).
31	ata	*Principi*	Gruppo composto della foglia *a* e del segno sillabico *ta* più il determinativo, un uomo ritto con un bastone per indicare un personaggio di grand'importanza, come nel gruppo che significa: «magnati».
32	re-nev-tu	*soli domino eloquii*	Cartello composto dei tre segni: il sole, la corba ed una lingua *re-nev-tu*. Vedi quanto al re a cui appartiene il prenome la prima osservazione.
33	get-anch	*viventi in aeternum*	Gruppo composto della chiave del Nilo, o croce ansata, *anch* vita, e dei segni *get* eternità. Una linea orizzontale serve di determinativo.
34	schie-cher	*electus ante*	Il segno si trova usato foneticamente per *sc*; laonde alcuno lo traduce per *electus* o *benedictus*. Il gruppo *cher* risponde alla preposizione *ante*.
35	neter aa neb Ebut	*Deum magnum Dominum Abydi*	Gruppo composto dell'ascia, *Dio* dell'asta, *grande*. La corba significa *Signore*. Il resto del gruppo *Ebut* Abido è già spiegato sopra.
36	mer-het-u	*Praefectus Hetorum*	Il gruppo *mer* si trova sovente con un plurale dopo. Laonde appare che indichi una carica superiore. Questo segno che si legge *het-u*, significa una dignità dello Stato, che aveva una decorazione.
37	meru	*Meru*	Nome del defunto, forse derivato dalla radice *mer*, amare.
38	ma tau	*dictus justus*	Gruppo composto di due simboli, il cubito e la lingua: il primo che si pronunzia *ma* esprime giustizia: il secondo che si pronunzia *tau* esprime *parola* (o secondo altri *cheru*), *giudizio*. Laonde ne risulta il senso di « pronunziato giusto ».
39	atef	*pater ejus*	Gruppo composto di tre suoni *a*, *t*, *f*, che risponde alla radice copta che significa padre.
40	schie	*electus*	Gruppo spiegato più sopra.
41	Merra	*Merra*	Gruppo spiegato nella prima osservazione.
42	suten-hatep	*oblatio*	Gruppo composto del ramoscello e d'un altare che significa spesso le offerte funerarie.
43	ti	*data*	Segno che rappresenta una piramide e si trova nelle varianti del verbo dare.
44	Hes-iri	*Osiridi*	Gruppo composto dell'occhio, della sedia e dell'uomo seduto, determinativo delle divinità.
45	Fent-ement	*residenti in Occidente.*	Gruppo composto de'4 vasi che talora è accompagnato dal suono *fent*, ed esprime residenza: del gruppo che indica l'Amenti, dell'uccello che ne è il determinativo, e dell'immagine d'Osiride.
46	neb-ebut	*Domino Abydi*	Vedi più sopra.

GRUPPI geroglifici	PRONUNZIA	INTERPRETAZIONE	ANALISI
47	her-t-ni	*oblationes funebres*	Gruppo simbolico composto di pane, vino, vitello, ed oca per indicare le offerte funerarie.
48	nef	*ei*	Pronome personale di 3.ª persona.
49	em Ebut	*in Abydo*	Vedi più sopra.
50	em hes-t neb	*in domo omni*	Gruppo composto della sedia *es*, del segmento che è l'articolo femminile, e della corba la quale indica il plurale collettivo.
51	ha-t	*in statione*	Gruppo composto di un segno che ha il valore di *h*, e del braccio che esprime la vocale *a*, e dell'articolo femminile. Risponde alla radice *ha* fermarsi.
52	neter	*Dei*	Vedi più sopra.
53	am-s	*in ipsa*	Gruppo composto di *am* preposizione, e di un segno *s*, che significa un pronome femminile. Vedi vari esempi di questa costruzione nell'ultima opera di De-Rougé.
54	suten	*regi*	Gruppo composto del ramoscello e dei due suoni espletivi *t*, *n*.
55	en	*per*	Vedi più sopra.
56	meri pu	*amantem eum*	Gruppo composto dell'aratro e della doppia foglia che è la desinenza del participio. L'aratro risponde alla radice *mer* o *mai* amare. Segue il prenome *pu* già spiegato più sopra.
57	mer het-u	*praefectum Hetorum*	Vedi più sopra.
58	Meru	*Meru*	Vedi più sopra.
59	giat-f	*dicit ipse*	Gruppo composto del serpe *g* e della mano *t*; *giat* risponde alla radice copta ϫⲱ dire: segue il piccolo serpe che esprime il pronome di terza persona. Vedi la spiegazione di questo gruppo in De-Rougé pag. 59.
60	a	*ah!*	Vedi più sopra.
61	anch-u	*viventes*	Gruppo fonetico composto della chiave *anch*, del pulcino *u* desinenza del plurale e dell'uomo determinativo. Vedi De-Rougé pag. 59.
62	a pu to-ti	*principes duorum orbium*	Gruppo composto della testa e del rettangolo *ap*, del pulcino per indicazione del plurale, più il gruppo già spiegato più sopra.
63	unn-tes	*qui estis*	Gruppo composto della lepre e di due linee ondulate: risponde ad *unn* radice del verbo essere. Segue la desinenza della seconda persona plurale.
64	em	*in*	Vedi più sopra.
65	sces	*ministerio*	Gruppo composto del suono fonetico *sces* e di un determinativo che indica servizio.
66	en	(του)	Vedi più sopra.
67	fent-ement	*residentis in Occidente*	Vedi più sopra.

GRUPPI geroglifici	PRONUNZIA	INTERPRETAZIONE	ANALISI
68	en	(του)	Vedi più sopra.
69	Tap-her-u	*Tapheru*	V. più sopra.
70	merru	*amores*	Gruppo fonetico derivato dalla radice *mer* amare; qui indica una qualità d'un interlocutore, come i due titoli seguenti.
71	anch	*vita*	Risponde al gruppo spiegato più sopra che significa viventi.
72	megegu	*splendentes*	Gruppo composto di un *m*, dei due serpi *gg*, e del disco solare per determinativo.
73	ev-u	*sacerdotes*	Gruppo composto di un vaso e del determinativo.
74	nu	*qui (pertinent ad)*	Gruppo composto di un vaso e del pulcino. Siccome precede un nome pare che abbia il significato della particella *di* in italiano.
75	neter aa	*Deum magnum*	V. più sopra.
76	neter hen-u	*prophetae*	Id.
77	neb	*omnes*	Id.
78	en Ebut	*in Abydo*	Id.
79	m̃ merr-ten	*optate (ut)*	Gruppo composto della radice *merr* desiderare e della desinenza della seconda persona plurale *ten*.
80	unn	*sit*	V. più sopra.
81	schie-ten	*benedictus vobis*	Id.
82	cher Hes-iri	*ante Osiridem*	Id.
83	her-t-u	*oblationes funebres*	Gruppo somigliante a quello già spiegato più sopra.
84	ten	*vestrae*	Id.
85	em sen hek	*in pane et vino*	Gruppo composto del simbolo che serve ad indicare il pane e del gruppo fonetico *hek* per indicare il vino.
86	unn	*sint*	V. più sopra.
87	tef	*patri*	Id.
88	maten	*facite*	Gruppo composto di *ma* fare e la desinenza *ten* della seconda persona plurale.
89	au	*et*	Gruppo fonetico che sovente risponde alla congiunzione *e*.
90	giaten	*dicite*	Gruppo composto della radice *get*, già spiegata, e della desinenza *ten*.
91	.....	*mille vasa (lactis)*	Il segno che si ripete più volte è conosciuto per segno del numero mille; qui poi indica una grande quantità. Il gruppo seguente che qui è ideografico trovasi spesso accompagnato dalla radice che significa latte.
92	.....	*mille vasa vini*	Vedi più sopra.
93	.....	*mille vituli*	Segno ideografico del vitello.
94	.....	*mille anseres*	Segno ideografico dell'oca.
95	.....	*mille lintei*	Gruppo composto del suono *sces* e del determinativo delle fasciature.

GRUPPI geroglifici	PRONUNZIA	INTERPRETAZIONE	ANALISI
96	.....	*mille vestes*	Gruppo composto della radice *mench*, dell'articolo femminile e del determinativo delle vesti.
97	.....	*mille ex cæteris*	Il gruppo *chet neb* ha un significato di residuo collettivo che risponde alla parola *cætera*.
98	.....	*bonis*	V. più sopra.
99	.....	*muneribus*	Id.
100	.....	*datis*	Id.
101	.....	*Osiridi*	Id.
102	.....	*residenti in*	Id.
103	.....	*Occidente*	Id.
104	.....	*per*	Id.
105	Het	*Het*	Id.
106	sav-sa	*doctorum principem*	Gruppo composto del nome *sav* che significa dotto, e del segno che è conosciuto come esprimente la parola *primo*.
107	mer het-u	*praefectum Hetorum*	V. più sopra.
108	Meru	*Meru*	Id.
109	ar	*sit*	Gruppo fonetico, *ar*, *er*, che risponde al verbo essere.
110	nefer	*bonum*	V. più sopra.
111	en	*iis qui*	Id.
112	unn	*sunt (cum)*	Id.
113	ten	*vobis*	Id.
114	ma ten	*facite (ut)*	Gruppo composto del verbo *ma* fare e della desinenza *ten*.
115	giot-ten	*ponatis*	Gruppo composto di *giot* porre e di *ten*.
116	em ro ten	*in ore vestro*	Gruppo composto del segno ideografico della bocca e del pronome *ten*.
117	embu	*verba*	Gruppo fonetico composto di *m*, *b*, *u* che risponde al significato di parola.
118	neb	*omnia*	V. più sopra.
119	unn-ten	*qui estis*	Id.
120	em	*in*	Id.
121	sciams	*ministerio*	Id.
122	en neter pen	*Dei huius*	Gruppo composto dell'ascia e del pronome *pen*.
123	nk̃	*ego*	Gruppo fonetico che esprime il pronome di 1.ª persona.
124	un-t	*sum*	V. più sopra.
125	meri	*amans*	Id.
126	ret	*generationes*	Gruppo composto delle lettere *r*, *t*, che rispondono alla radice germinare del copto. V. De-Rougé p. 41.
127	amach	*sanctas*	Gruppo incerto.
128	eñ mer tef	*amantes patrem*	V. più sopra.
129	an	*et*	Id.
130	ta	*dedi*	Id.
131	sen	*panem*	Id.

GRUPPI geroglifici	PRONUNZIA	INTERPRETAZIONE	ANALISI
132	en hkr	*esurientibus*	Gruppo composto dei segni *h*, *k*, *r*, che rispondono alla radice esurire, e del determinativo che indica un uomo.
133	hbs	*vestem*	Gruppo composto dei segni *h*, *b*, *s*, e del determinativo delle vesti.
134	en hesai	*nudis*	Gruppo composto del segno che rappresenta la sillaba *hes* e della doppia foglia *ai*.
135	en mer-t	*amorem*	V. più sopra.
136	unu	*qui sunt*	Id.
137	scie	*benedicti*	Id.
138	cher neter aa	*ante Deum magnum*	Id.
139	scie	*benedictus*	Id.
140	cher neter aa	*ante Deum magnum*	Id.
141	atef	*pater eius*	Id.
142	Aku	*Aku*	Nome proprio dell'individuo che è detto padre del defunto.
143	ma tau	*dictus iustus*	V. più sopra.
144	scie cher neter aa	*benedictus ante Deum magnum*	Id.
145	Mer to hau	*praefectus regionum septentrionis*	Gruppo composto di *mer* radice già spiegata, del simbolo delle regioni, e del segno che indica settentrione col pulcino per esprimere il plurale.
146	Nacht-em	*Nachtem*	Nome dell'individuo forse parente del defunto.
147	mer-het-u	*praefectus Hetorum*	V. più sopra.
148	neb-ef en hes-et	*domino eius in corde sedens*	Titolo che si trova frequentemente. Vedi gli altri rassomiglianti in De-Rougé pag. 75.
149	Meru	*Meru*	V. più sopra.
150	ma tau	*dictus iustus*	Id.
151	taf	*dat*	Gruppo composto del braccio che ha qualche cosa in mano, e prende il valore del verbo dare e del serpente *f* pronome di terza persona singolare.
152	au	*adorationes*	Gruppo composto della foglia e del pulcino: risponde alla radice copta ϵϞϞϒ gloria, adorazione. Ha per determinativo un uomo in atto di adorare.
153	Hes-iri	*Osiridi*	V. più sopra.
154	s-nefer	*benefico*	Gruppo composto della particella *s* che dà forza di transitivo al verbo, e di un segno che risponde al liuto, significa beneficare e risponde al titolo di Osiride Onofrio.
155	fent-ef	*residenti (in)*	V. più sopra.
156	to	*mundo*	Id.
157	fent-ef	*residenti (in)*	Id.

GRUPPI geroglifici	PRONUNZIA	INTERPRETAZIONE	ANALISI
158	Ement	*Occidente*	V. più sopra.
159	en	(τω)	Id.
160	Taph-er-u	*Tapheru*	Id.
161	scie	*benedictus*	Id.
162	Meru	*Meru*	Id.
163	Maut ef	*mater eius*	Gruppo composto dell'avoltoio: risponde alla radice copta ⲙⲁⲧ, *mater*.
164	scie-t	*benedicta*	V. più sopra.
165	cher neter aa	*ante Deum magnum*	Id.
166	Neb-ta	*Nebta*	Nome proprio della madre.
167	scie	*benedictus*	V. più sopra.
168	mer het-u	*praefectus Hetorum*	Id.
169	neb-ef merri	*a Domino eius dilectus*	Gruppo composto di *mai* o *merri* participio passivo del verbo amare, e della corba *neb* che qui significa signore.
170	i-ef	*vas* (?)	V. più sopra.
171	.....	*eius*	Id.
172	Mer-u	*Meru*	Id.
173	em hatep-t-u	*oblationes*	Vedi più sopra. Qui è triplicato per indicare il plurale.
174	neb-t-u	*omnes*	Vedi più sopra.
175	giaf-u	*odores*	Gruppo composto di *gef* che è il nome geroglifico di un profumo.
176	neb	*omnes*	Vedi più sopra.
177	teb	*XM, idest ingens numerus*	Gruppo composto della mano e di un dito per indicare diecimila, cioè un grandissimo numero, nello stesso modo che in copto si dice ⲧϭⲁ 10000 e ⲧⲉϭ il dito.
178	hatep-t-u scia	*oblationum mille*	Vedi più sopra.
179	.....scia	*vestium mille*	Id.
180	.....scia	*linteorum mille*	Id.
181	.....scia	*anserum mille*	Id.
182	.....scia	*vitulorum mille*	Id.
183	sen-nu scia	*panes mille*	Id.
184	hek-u scia	*vasa (vini) mille*	Id.
185	heb	*sacerdoti*	Gruppo composto delle lettere *h b* che spesso si vedono accompagnate dal determinativo di un uomo.
186	suten-rech	*regis consanguineo*	Titolo frequente nei primi sacerdoti.
187	ka	*(propter) sacrificium*	Segno composto delle due lettere *k a* espresse dalle mani in atto di offerire, e di un altro segno che serve di determinativo.
188	au	*et*	Vedi più sopra.

GRUPPI geroglifici	PRONUNZIA	INTERPRETAZIONE	ANALISI
189	sen sen (?) heb	*libationem*	Gruppo incerto: pare significhi libazione pel suo determinativo, il vaso in atto di versare.
190	en	*ob*	Vedi più sopra.
191	ka	*sacrificium*	Id.
192	en	(*τον*)	Id.
193	Meru	*Meru*	Id.
194	neb	*Domini (vel omne)*	In questo caso la corba si può interpretare come *signore* ed allora si riferisce al defunto *Meru*, oppure come plurale collettivo ed allora si riferisce a *sacrificium*.

Divisione delle osservazioni.

E qui ha termine la versione e l'analisi. Ora par tempo di passare al commento che è da me partito in quattro osservazioni.

La prima riguarda l'epoca della stele, la persona del defunto al quale si riferisce, ed i suoi titoli.

La seconda la forma letteraria dell' iscrizione e specialmente l' invocazione colla quale si dirige ai savi del paese.

La terza esamina la formola funeraria che troviamo sovente riprodotta nei monumenti sepolcrali: particolarmente quanto ai beni che si augurano per l'altra vita.

La quarta finalmente mette in rilievo alcune idee morali degli Egiziani, ricavandole dalle azioni che enumeravano tra le virtù dei trapassati.

Prima osservazione intorno all'epoca della stele e la persona del defunto.

Ciò che rende più pregievole quest' iscrizione, e che agevolmente ci può condurre a fissarne l'epoca con qualche probabilità, è il prenome reale che si trova nell'ultima linea del preambolo (N.° 32) che si legge (re-neb-tu), ossia *il sole signore della parola.* È ben vero che incerti e discordi sono i pareri intorno a questo prenome. Poichè secondo il signor Bunsen (*Egypt's place in universal history*) apparterrebbe alla VII dinastia. Il signor De-Rougé (*Ann. de philosoph. cret.* tom. XV, serie 3.ª, pag. 417) opina che il prenome di questo re sia *Menemotp* e

non *Manduftep* (1) e come il suo nome si trova nella serie di Gournah subito dopo Mene, inclina a crederlo un capo delle famiglie Tebane, ed un personaggio distinto della XVII dinastia. Nel suo libro (*Notice des monuments* n.° 14, p. 47), parlando della stele somigliante recata dal Prisse (pl. VII), dice: « Cette stèle peut être considérée comme un des » chefs-d'œuvre de la gravure égyptienne. La première ligne renferme » la légende d'un roi nommé *Mentouhotep*, dont la place précise n'a pu » encore être déterminée. On sait seulement avec certitude qu'il est » antérieur à la XVIII dynastie. Dans la scène qui occupe le bas de la » stèle, un personnage nommé *Irisenaker* (altri legge *Irisen*) accom- » pagné de son épouse *Hapu*, reçoit les hommages de sa famille; un » de ses fils se nommait *Mentouhotep* comme le souverain régnant ».

Champollion trovando conformità di stile tra questa ed un'altra stele del museo del Louvre (Prisse pl. VII) aveva accoppiati questi due cartelli e sopra di ciò fondava alcune congetture, che in parte solo si sono verificate. Poichè dalle tavole del signor Lepsius (t. IV, bl. 149) si scorge che il nome *Mentuhatep* della stele di Parigi è appunto il nome del nostro *ra-neb-tu* (2). Ma trattandosi di collocare più precisamente questo *re-neb-tu Mentuhatep* acquistano credibilità le congetture del Lepsius, che pone questo cartello nella dinastia XIII. Infatti lo stile può dare argomento ad aggiudicare questa stele e quella del Louvre alle prime dinastie, poichè non vi ha stele nel nostro museo che più di questa si distingua vuoi per l'accuratezza dei geroglifici (3), vuoi per la minutezza dei particolari con cui sono incise le offerte. Esaminando le prime tavole di Lepsius vedi che questo era lo stile delle prime dinastie. E sebbene non

---

(1) Fors'egli si fonda in ciò che il gruppo *Menemhatep* o *Menemotp* non ha che fare col gruppo *Mentuhatep* o *Mentoutp* della stele del Louvre; ma il signor Lepsius ne' suoi monumenti (tom. IV, bl. 149) reca varii frammenti (*a-h*) dai quali appare che il prenome (N.° 32) *re-neb-tu* è considerato come uguale all'altro *re-neb-toti*. In tale caso il gruppo *Menemhatep* di alcuni monumenti sarebbe uguale al *Mentuatep* del Louvre. Quindi si capisce come l'aver trovato nella stessa linea della stele di Torino, dov'è il prenome (*re-neb-tu*) il nome del Dio *Mentu-toti* abbia indotto in errore alcuni archeologi, i quali giudicando quasi che quel nome di divinità fosse un'allusione al nome reale, affermarono che nella stele di Torino si leggeva col prenome accoppiato il nome.

(2) Nel Koenigsbuch di Lepsius si trova nelle tavole XX-XXI tre volte questo prenome *ra-neb-tu* segnato col n.° 159, in primo luogo nel tempio di Ramesse II nella serie di Qurnah, in secondo luogo nella tomba di Qurnah, e finalmente in quella di Medinet.

(3) Intendiamo parlare del disegno originale, poichè le linee del profilo sono talora guaste od oscurate da una tinta azzurra data da chi non leggeva i geroglifici.

basti l'argomento tratto dalla forma d'invocazione che si trova ripetuta in più steli di quei tempi (vedi tre iscrizioni del museo di Leida citate da De-Rougé, *Mémoire sur l'inscription du tombeau* pag. 58-60, ed una stele del museo di Firenze, citata da Migliarini: *Indication succinte etc.* pag. 24, n.° 2561), perchè potrebbe tramandarsi per età diverse (1); tuttavia quest'argomento congiunto cogli altri può almeno favorire coloro che collocano questa stele avanti la XVIII dinastia, ed annullare gli argomenti di Champollion in favore della XXI. Forse alcuno potrebbe opporre che il gruppo (N.° 31) *Ata* non è dato ai sovrani, ma solo ai principi e figli reali. Se non che a questo si può replicare che ai principi non veniva dato il prenome prima di salire al trono, che la data del XLVI anno che si trova in cima della stele, deve naturalmente indicare l'epoca d'un regno, e che il titolo di *Ata*, significando capo o principe può essere stato assegnato a questo re (2), il quale essendo citato subito dopo Mene nella serie di Qurnah, appare dover essere stato considerato come capo delle famiglie Tebane. Ad ogni modo non si può negare anche dai critici più sottili che questa stele appartenga ai tempi compresi tra la XII e la XVIII dinastia.

Veniamo ora a ragionare della persona del defunto. Egli ha nome *Mern* come abbiamo detto più innanzi, ed è rappresentata la sua figura per tre volte. La prima volta nel primo compartimento seduto, la seconda in piedi in atto di pregare, la terza a piè della stele seduto con sua madre dietro. Siccome non si fa menzione di sua moglie, nè si parla de' suoi figli, pare che fosse morto celibe, salvo che si voglia credere che ella sopravvivesse al marito e fosse quella rappresentata nell'ultima serie in atto di portare offerte, uno scabello ed un vaso: nel qual caso gli altri sei che seguitano, dei quali quattro portano varie offerte, e l'uno sembra in atto di cantare, e l'altro di registrare i doni, potrebbero essere membri di sua famiglia e probabilmente figli. Se dobbiamo giudicare dalla stessa stele che più a questa s'avvicina, quella del Louvre, non potrebbesi negare a questa opinione il nostro assenso. Poichè in questa vediamo

(1) E in prova di ciò io vidi un modello in gesso gentilmente mandatomi dal Professore Biondelli di Milano di una tavola in bronzo (la quale certamente non appartiene che ai tempi più bassi dell' Egitto) in cui vi è un frammento d'una formola a questa somigliante.

(2) Infatti noi vediamo nel libro di De-Rougé intitolato *Étude sur une stèle égyptienne*, Paris 1858, che a pagina 26 il gruppo (N.° 31) *Ati*, che si trova nella seconda linea di quella stele è tradotto per *supremus rex*.

nell'ultimo compartimento tre figli, *Sesortasen*, *Mentuhatep*, *Mentuse*, e due figlie *Thanen* ed altra *Kem-nu-uet* pure in atto di portare offerte e di andare quasi per rito solenne per mano nella tomba del padre. Così pure se consultiamo le altre stele vediamo sempre nell'ultimo compartimento che rappresenta il sepolcro raffigurata questa scena di famiglia. Ma per non so quale ragione qui mancano i nomi che ci avrebbero forse giovato anche a fissare l'epoca della stele. Nel secondo compartimento abbiamo il defunto *Meru* col suo padre per nome *Aku*, dietro di lui e dall'altro lato in faccia un uomo che deve pure essere della famiglia, che ha il titolo di « Intendente delle terre di mezzanotte *Nacht-hem* ». Al disopra poi abbiamo in faccia del medesimo *Meru* un individuo in atto di pregare che porta il nome di padre *Merra*. Siccome più abbasso il padre ha nome di *Aku*, si potrebbe credere che *Merra* non sia il nome di quest'individuo: tanto più che non ha dopo nè il determinativo dell'uomo, nè i segni che si pongono dopo il nome dei defunti: anzi pare che si debba interpretare come participio di *mer* amato. Che se si persiste a giudicarlo un nome, come non è probabile che il padre avesse due nomi, si dovrebbe considerare come l'avo. Ben so che in tale caso si deve scrivere *il padre del padre*: ma non sarebbe che incuria dello scriba.

Dai titoli che porta il defunto, e dalle insegne colle quali è rappresentato si deduce che era uno dei primi ufficiali presso la corte di quel re *re-neb-tu Menemhatep*. Uno dei titoli che si ripete più frequentemente è quello di « Intendente degli *Het* ». Questo nome che è composto d'una collana, rappresenta un uomo decorato, e quindi forse nei primi impieghi del regno. Perciò quegli che come il nostro personaggio era insignito del titolo di *Mer-het-u* essendo alla testa di tutti costoro, si deduce che doveva occupare una delle prime cariche della Corte. Nel corso dell'iscrizione è detto « *Het*, e primo dei dotti ». V'ha di più: egli è detto aver *sede nel cuore del suo signore*: modo orientale che troviamo spesso usato negli elogi dei defunti per accennare un intimo confidente: ed in altro luogo è detto *amato dal signore di lui*. Di più s'aggiunge un gruppo che colla metafora di un vaso o d'altro oggetto vuole pure indicare un'intima relazione di questo personaggio col sovrano regnante. Lo stesso si può giudicare del personaggio della stele del Louvre. Poichè oltre che è detto: *aver cantato le lodi del signore di lui*, è pure chiamato *Het intendente della casa*, *incaricato del sigillo reale*, *intendente delle terre del mezzogiorno*. E qui si osservi che uno dei parenti del

nostro defunto è pure detto *intendente delle terre di mezzanotte*. Da tutto questo appare che le due steli furono tratte forse dalla medesima sepoltura d'Abido, come dice il signor Prisse (trouvé également à Abydos peut-être dans la même tombe), ciò fu perchè vi era legame di parentela tra questi due defunti che avevano i primi gradi nella Corte del medesimo re: e si conferma sempre più l'opinione, che delle due steli, l'una contenga il prenome, e l'altra il nome del sovrano.

Osservazione seconda sulla forma letteraria.

Veniamo ora alla forma letteraria. Questo genere d' iscrizioni nelle quali il defunto s' indirizza a tutti gli uomini è molto comune nei tempi più antichi, e lo troviamo nella iscrizione sulla tomba d'Ahmes tradotta e commentata da De-Rougé. Infatti nella seconda linea è scritto: « Io » parlo a voi genere umano intiero, io vi do a leggere i conti delle mie » azioni: io sono stato onorato della collana d'oro ecc. ecc. ». Qui prosegue narrando i casi della sua vita. Il signor De-Rougé così osserva a questo punto (pag. 58): « Cette sorte d'exorde, par une allocution » directement adressée aux hommes, se rencontre assez souvent, et dans » des termes analogues. Au lieu de l'expression générale *ô vous tous*, » *hommes!* on trouve des énumérations fort curieuses. Les auteurs des » inscriptions s'adressent spécialement aux classes instruites qui liront » leur ouvrage ».

Ecco qui varii esempi. Il primo tratto da una stele del museo di Leida V, 14 dice così: « Ah! docte omnis, scriba omnis, sacerdos omnis, » Heb omnis qui transeunt ante sepulchrum hoc etc. ». Un altro tratto della stele V, 2 del medesimo museo dice:

« Ah! viventes principes qui estis in ministerio Osiridis inferni et » Tapheru domini Toser (regionis) prophetae omnes, sacerdotes omnes, « prophetissae, cantores, cantatrices, Chennu, Chen-t-u (foeminae) ho- » mines omnes ».

Un terzo esempio pure del museo di Leida, stele V, 2, porta:

« Ah! magnates, senes, iuvenes, homines omnes, puri omnes, splen- » dentes omnes, dico vobis quid contigerit mihi etc. ».

Un quarto esempio si può vedere nella stele n.° 2561 del catalogo francese dell'egregio professore Migliarini (*Indication succinte des monuments égyptiens*, Florence 1859), della quale gentilmente m' inviava un fac simile. L' iscrizione così comincia:

« Ah! viventes principes, scriba omnis, sacerdos omnis, Heb omnis, » sacerdos oblationum omnis, homines omnes etc. ».

Quest'ultima è quella che più s'avvicina alla nostra. Invero nella linea 2, 3, ecc. è scritto: « dicit: ah! viventes principes duorum orbium, » qui estis in ministerio residentis in occidente (inferno) et Tapheru » (questa frase si trova nel secondo esempio da noi recato da una stele » del museo di Leida) amor, vita, splendentes, sacerdotes Dei magni, » sacerdotes omnes in Abydo, amantes qui sunt benedicti ante Osiridem » (una frase simile si trova nel terzo esempio), puri omnes, splendentes » omnes etc. ». Inoltre vi è in una stele recata dal Prisse, pl. XVII, un esempio che molto si accosta al giro della frase della stele torinese. E invero si legge, lin. 16 e 17:

« Dicit ipse ah! viventes principes qui estis viventes in aeternitate » et in multis diebus, sacerdotes omnes Dei iusti qui transitis ante se- » pulchrum hoc, transite super illud repleti veneratione etc. ».

La singolarità della nostra iscrizione è che nell' invocazione della quale abbiamo finora parlato, si trova altra volta ripetuta nel principio come per esordio; ma in modo che si distingue dal resto dello scritto. Poichè il gruppo della esclamazione è posto solo in una linea: quindi in una seconda linea sono le tre classi dei profeti (maschi e femmine), dei cantori (maschi e femmine), dei Chennu (maschi e femmine) con un gruppo *hna*, che significa *con*.

I determinativi delle due prime classi di ciascun gruppo sono posti al disotto: e per indicare il plurale e nel medesimo tempo secondare una certa armonia di disegno sono triplicati. Quelli della terza hanno il determinativo, e più la triplice figura per indicazione del plurale. Finalmente l'ultimo ha tre figure, due sole delle quali sono eguali col segno della corba.

Da tutto ciò ne lice conchiudere che questa nostra stele dalle altre si discosta specialmente in ciò che cerca l'euritmia del disegno nella scrittura stessa, e converte in imagini le parole: argomento non fallace che la iscrizione appartiene ai tempi più antichi.

Osservazione terza sulla formola funeraria.

Che se vieni considerando il concetto della iscrizione, tu non ci trovi che la formola funeraria che è sovente ripetuta nei monumenti attenenti

nostro defunto è pure detto *intendente delle terre di mezzanotte*. Da tutto questo appare che le due steli furono tratte forse dalla medesima sepoltura d'Abido, come dice il signor Prisse (trouvé également à Abydos peut-être dans la même tombe), ciò fu perchè vi era legame di parentela tra questi due defunti che avevano i primi gradi nella Corte del medesimo re: e si conferma sempre più l'opinione, che delle due steli, l'una contenga il prenome, e l'altra il nome del sovrano.

Osservazione seconda sulla forma letteraria.

Veniamo ora alla forma letteraria. Questo genere d' iscrizioni nelle quali il defunto s' indirizza a tutti gli uomini è molto comune nei tempi più antichi, e lo troviamo nella iscrizione sulla tomba d'Ahmes tradotta e commentata da De-Rougé. Infatti nella seconda linea è scritto: « Io » parlo a voi genere umano intiero, io vi do a leggere i conti delle mie » azioni: io sono stato onorato della collana d'oro ecc. ecc. ». Qui prosegue narrando i casi della sua vita. Il signor De-Rougé così osserva a questo punto (pag. 58): « Cette sorte d'exorde, par une allocution » directement adressée aux hommes, se rencontre assez souvent, et dans » des termes analogues. Au lieu de l'expression générale *ô vous tous*, » *hommes!* on trouve des énumérations fort curieuses. Les auteurs des » inscriptions s'adressent spécialement aux classes instruites qui liront » leur ouvrage ».

Ecco qui varii esempi. Il primo tratto da una stele del museo di Leida V, 14 dice così: « Ah! docte omnis, scriba omnis, sacerdos omnis, » Heb omnis qui transeunt ante sepulchrum hoc etc. ». Un altro tratto della stele V, 2 del medesimo museo dice:

« Ah! viventes principes qui estis in ministerio Osiridis inferni et » Tapheru domini Toser (regionis) prophetae omnes, sacerdotes omnes, « prophetissae, cantores, cantatrices, Chennu, Chen-t-u (foeminae) ho- » mines omnes ».

Un terzo esempio pure del museo di Leida, stele V, 2, porta:

« Ah! magnates, senes, iuvenes, homines omnes, puri omnes, splen- » dentes omnes, dico vobis quid contigerit mihi etc. ».

Un quarto esempio si può vedere nella stele n.° 2561 del catalogo francese dell'egregio professore Migliarini (*Indication succinte des monuments égyptiens*, Florence 1859), della quale gentilmente m' inviava un fac simile. L' iscrizione così comincia:

« Ah! viventes principes, scriba omnis, sacerdos omnis, Heb omnis, » sacerdos oblationum omnis, homines omnes etc. ».

Quest'ultima è quella che più s'avvicina alla nostra. Invero nella linea 2, 3, ecc. è scritto: « dicit: ah! viventes principes duorum orbium, » qui estis in ministerio residentis in occidente (inferno) et Tapheru » (questa frase si trova nel secondo esempio da noi recato da una stele » del museo di Leida) amor, vita, splendentes, sacerdotes Dei magni, » sacerdotes omnes in Abydo, amantes qui sunt benedicti ante Osiridem » (una frase simile si trova nel terzo esempio), puri omnes, splendentes » omnes etc. ». Inoltre vi è in una stele recata dal Prisse, pl. XVII, un esempio che molto si accosta al giro della frase della stele torinese. E invero si legge, lin. 16 e 17:

« Dicit ipse ah! viventes principes qui estis viventes in aeternitate » et in multis diebus, sacerdotes omnes Dei iusti qui transitis ante se- » pulchrum hoc, transite super illud repleti veneratione etc. ».

La singolarità della nostra iscrizione è che nell' invocazione della quale abbiamo finora parlato, si trova altra volta ripetuta nel principio come per esordio; ma in modo che si distingue dal resto dello scritto. Poichè il gruppo della esclamazione è posto solo in una linea: quindi in una seconda linea sono le tre classi dei profeti (maschi e femmine), dei cantori (maschi e femmine), dei Chennu (maschi e femmine) con un gruppo *hna*, che significa *con*.

I determinativi delle due prime classi di ciascun gruppo sono posti al disotto: e per indicare il plurale e nel medesimo tempo secondare una certa armonia di disegno sono triplicati. Quelli della terza hanno il determinativo, e più la triplice figura per indicazione del plurale. Finalmente l'ultimo ha tre figure, due sole delle quali sono eguali col segno della corba.

Da tutto ciò ne lice conchiudere che questa nostra stele dalle altre si discosta specialmente in ciò che cerca l'euritmia del disegno nella scrittura stessa, e converte in imagini le parole: argomento non fallace che la iscrizione appartiene ai tempi più antichi.

Osservazione terza sulla formola funeraria.

Che se vieni considerando il concetto della iscrizione, tu non ci trovi che la formola funeraria che è sovente ripetuta nei monumenti attenenti

ai defunti. Se non che alcune parti ricevono qui un maggiore svolgimento. Poichè questa si compone di quattro parti: 1.° Un atto di adorazione ad alcune divinità; 2.° Un' invocazione alle classi più istrutte del paese; 3.° L'enumerazione dei beni che si domandano; 4.° Le buone azioni che si attribuiscono al defunto.

L'atto di adorazione non è qui indirizzato che ad Osiride, che essendo il Dio dei morti non può mancare in tali preghiere, e ad Anubi, quegli che imbalsama il cadavere e guida il defunto alle regioni infernali. Questi è talvolta nominato Tapheru, cioè il capo delle strade, e risponde perfettamente all' Ermete de' Greci.

Quanto all' invocazione, che è nell' interno della iscrizione, già ne tenemmo parola più addietro. Una cosa piuttosto crediamo dover ora mettere in rilievo, e sono i beni che gli Egiziani domandano per l'altra vita.

Se voi pigliate alla lettera le parole che si leggono in queste iscrizioni funerarie, trovando che si augura al defunto un migliaio di pane, di vino, di vesti, di fascie, di vitelli, di oche, insomma di tuttociò che appartiene alla vita materiale, non vi terrete dal conchiudere che l' Egiziano non avesse un' idea chiara e spirituale della vita immortale. E non di meno il vostro giudizio andrebbe errato. Poichè il loro concetto dell'altra vita comprendeva la felicità che eguaglia ogni desiderio, e la durata senza timore di morte. Ma volendo sotto imagini sensibili descrivere queste idee, ti dipingono la felicità coll'enumerazione dei beni materiali che si possono desiderare in questo mondo, ridotti ad una quantità senza numero. Che tale fosse la loro intenzione si conosce da altri augurii che sovente accompagnano i primi. Talora si desidera « che il defunto beva le acque » alla sorgente di Athur (una fonte delle acque dell' immortalità); che » il vento propizio spiri nelle vele della sua barca e sopratutto che sia » manifestato alla luce del sole, e venga nei campi celesti ». Per porre in evidenza la felicità di questo soggiorno è detto nel rituale, che « le » spighe vi crescono all'altezza di sette cubiti ». Talora fanno consistere la felicità nel godimento di un profumo chiamato *gief* in egizio, e detto κυφι da Plutarco (nel trattato d' Iside ed Osiride ultimo capo).

Secondo il medesimo Autore questo profumo operava sull'anima e sul corpo. Nelle steli funerarie si vedono spesso rappresentate le donne in atto di fiutare il calice di loto, per indicare che dalle nari assorbissero l' immortalità, come nell' Olimpo greco i Dei per mezzo dell'ambrosia. Anzi nel rituale, cap. 72, lin. 4, si vede il *gief* presentato alle nari

degli Dei. In altre iscrizioni si augurano « doni di fiori, l'andare e » venire nel sepolcro, ossia nella regione di Rouen ». Inoltre vi ha una formola che spesso ritorna, la quale dice che si conceda al defunto « splendore nel cielo, potenza sulla terra, e la giustificazione nell'*her-* » *nuter* (oppure la regione degli Dei) ». Ma ciò che più di tutto ci convince è quella frase che riassume il loro concetto. Poichè dopo l'enumerazione dei beni materiali, è detto: « migliaia di tutti i beni puri, » la vita divina per mezzo di essi ». Ciò tradotto nel nostro linguaggio significa tutti quei beni puri nei quali consiste la vita degli Dei. Questa frase tratta dalla stele 2561 del museo di Firenze non ha dopo la particella *am* alcun pronome: ma in altre steli si trova il pronome *su* che significa quelli. Nel coperchio poi d'un sarcofago in basalto del museo di Torino dopo le parole, *la vita degli Dei*, si trova il gruppo *wa*. Ben considerando la sollecitudine colla quale cercavano gli omofoni nel tempo della XXVI dinastia alla quale appartiene questa iscrizione, si spiega facilmente quel gruppo, interpretando che abbiano posta *la barca wa* per *f* che è il pronome di terza persona singolare. Chi poi persistesse in voler credere materiali le credenze degli Egizii, ben potrebbe disingannarsi riflettendo ai tre simboli che adoperavano per significare l'anima, cioè l'ariete, l'incensiere, l'uccello a testa umana. Quindi s'accorgerà che la durata del corpo era ricercata come mezzo senza di cui non potevano ottenersi le trasformazioni: ma non già come se fuori di questo non avessero alcun concetto della vita futura.

Osservazione quarta. Sulle idee morali degli Egiziani.

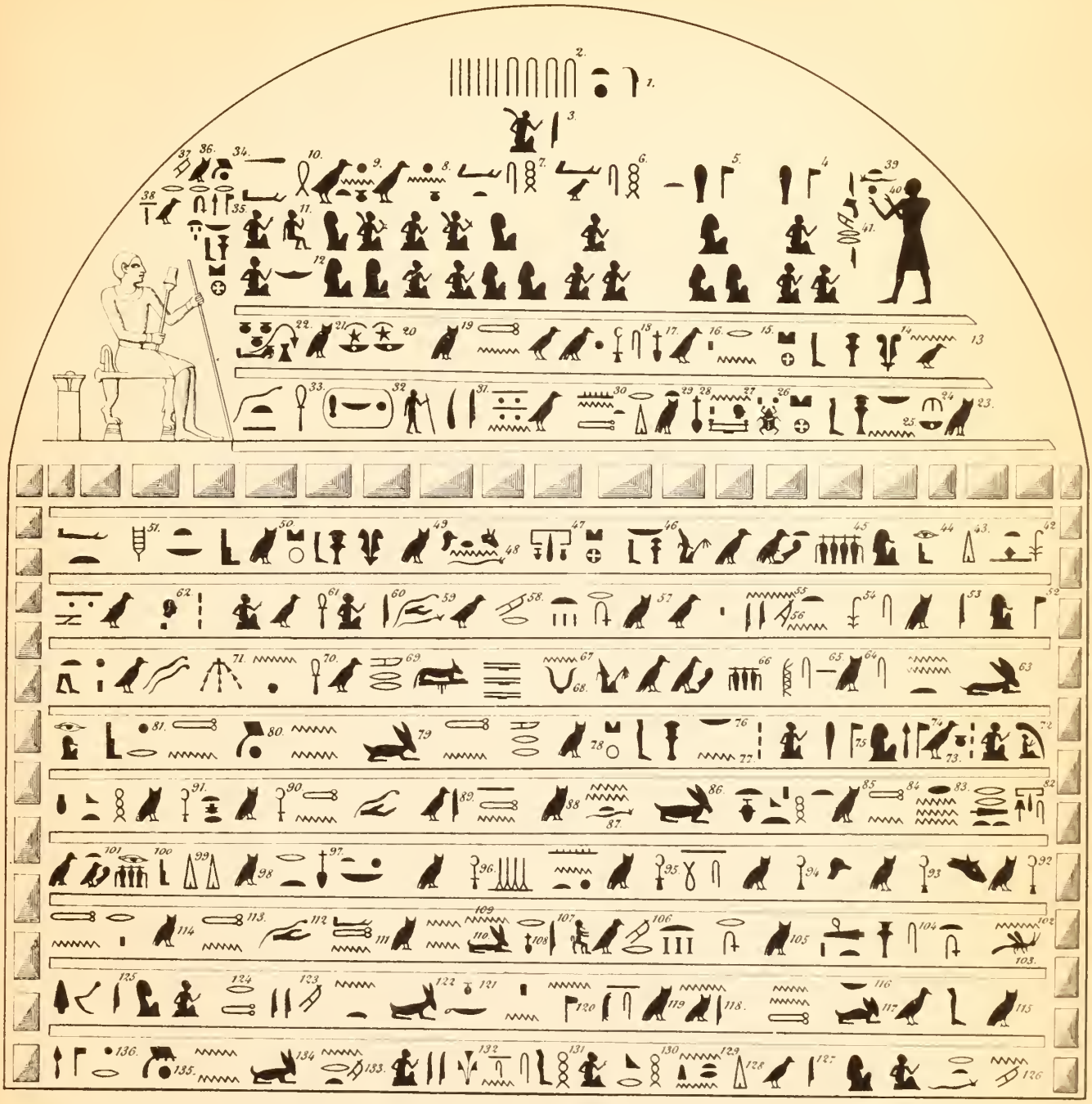
Che se vogliamo persuaderci che l'incivilimento egizio andava più oltre delle idee materiali, sarà utile l'indagare quali fossero le loro idee di moralità. E queste ben facilmente ci appariscono dalle iscrizioni dove si lodano le virtù dei trapassati. Grande lode merita il Cristianesimo perchè condannando gli odii che disgiungevano le varie membra del genere umano, tutte le congiungeva coll'amore e colla carità. Per questo principalmente apparve superiore al paganesimo greco-romano. Or bene raccogliamo alcune iscrizioni egizie, e ci vedremo enumerate tra le azioni buone le opere di misericordia quasi colle medesime parole colle quali sono raccomandate ai Cristiani. Nella nostra stele è detto: « ho dato del pane agli affamati, » delle vesti ai nudi ». Nella stele recata tra i monumenti del sig. Prisse,

pl. XVII, lin 11, si legge: « ho dato del pane all'affamato, della mia » ricchezza a colui che non aveva nulla ». Nel libro dei morti, cap. 127, lin. 37-39, così il defunto è raccomandato agli Dei dell' Occidente: « Egli » ha compiuto le parole degli uomini e la volontà degli Dei: si è con- » ciliato Dio col suo amore: ha dato del pane a colui che aveva fame, » dell'acqua a colui che aveva sete, delle vesti a colui che era nudo: » ha dato un luogo d'asilo a colui che era errante: ha offerto agli Dei » le offerte sacre, e le oblazioni funerarie ai mani ». Le stesse idee appariscono dalla versione del capo 125 della confessione negativa, cioè dall'enumerazione dei peccati che il defunto dice di non aver commesso.

E qui si noti che in una lettera di Porfirio ad Anebo troviamo un passo che è molto conforme a questa formola funeraria. Infatti egli narra che gli Egizii cavate le viscere dal cadavere e postele in una cassa volgevansi al sole (forse si deve intendere *Osiride* od *Oro* od anche *Phré*) dicendo queste parole: « Signore Sole, e voi numi che date la vita ac- » coglietemi e consegnatemi agli Dei infernali, sicchè io entri nel loro » soggiorno, perchè non ho mai lasciato di riverire gli Dei insegnatimi » da' miei parenti; per quanto durò la mia vita sempre onorai quelli che » generarono il mio corpo; non ho mai fatto perire alcuno, non ho negato » il deposito, non ho recato danno ». Ora molte sono le concordanze di questo passo col capo 125 del rituale funerario. Poichè la frase « non » ho recato danno » si può riscontrare con quella della colonna 24, p. XLVII « non ho fatto piangere »; quella così espressa: « Non ho » mai lasciato di riverire gli Dei insegnatimi da' miei parenti », può riscontrarsi o con quella della colonna 31 « non ho indebolito ciò che » appartiene alle cose divine ». Oppure con la proposizione della colonna 34: « non ho trascurato Dio nel cuore ». Che se si vuole trovare una parlata che abbia molta relazione con questa recata da Porfirio, basta leggere la seguente che si trova nella rappresentazione del giudizio (libro pei morti pubblicato da Lepsius L): « Discorso di Osiride *Aufonch* » giustificato ai giudici che sono innanzi a te, o signore dei giorni (il » signore sole di Porfirio): io non ho fatto empietà, non ho fornicato » nè con uomini, nè con donne, non ho fatto tutte le altre colpe, io » ho fatto parole ed azioni che appartenevano al culto divino (risponde » al *non ho mai lasciato di riverire gli Dei*), o salute a te che risiedi » nell'Amenti Dio Onnufre, signore d'Abido, concedi che l'anima penetri » nel cammino tenebroso (*voi Numi che date la vita consegnatemi agli*

» *Dei infernali*), che io sia servo tra' servi tuoi che abitano la dimora
» di gloria (*sicchè io entri nel loro soggiorno*), che io sia manifestato
» in Rouen nella grande sala della regione della doppia giustizia, in *Am-*
» *math* dimora di gloria ». Inoltre si noti che i quarantadue giudici sono chiamati: « Dei che ..... vivono nella vita », pag. XLVI, col. 2, come nella pagina XLVIII, colonna 35, sono detti: « *anch-u-em-ma*, » viventi nella giustizia ». Ma prima di lasciar il discorso sulla moralità degli Egizii non posso rattenermi dal recare la versione di una iscrizione che abbiamo in una lapide del nostro museo, nel quale il sole, cioè Iddio, così è fatto parlare: « Quegli che ha fatto se stesso, che sostiene
» e fonda se stesso nel segreto, fa il cielo, la terra, le acque, le mon-
» tagne, e dà la vita al genere umano ».

TAV. I.ª



Parte superiore d'una
Stele del Museo di Torino
d'un Re anteriore alla XVIII.ª Dinastia?

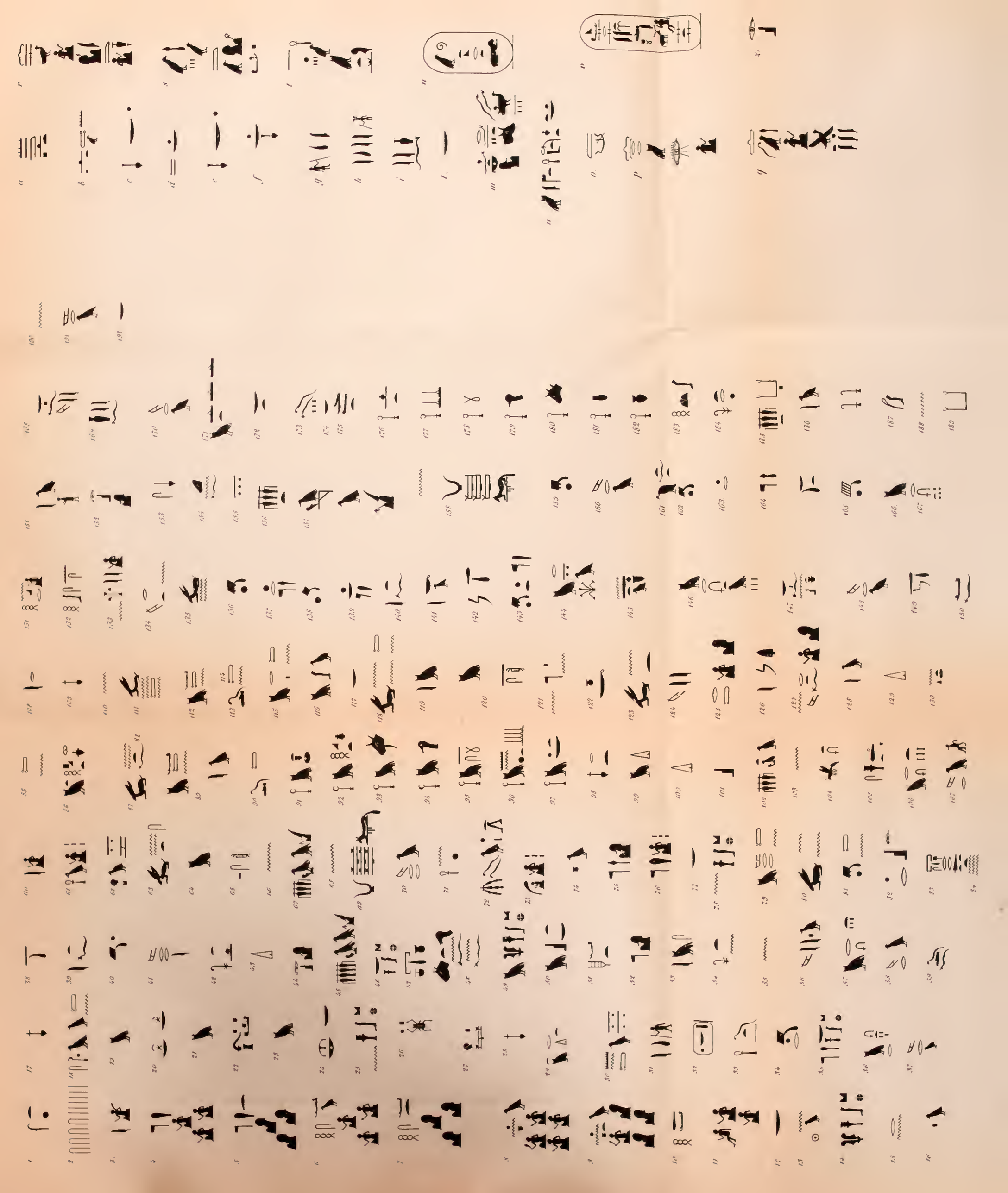
Parte inferiore della Stele.

♦

Foldout

Here

♦



IL DISCORSO
SOPRA L'ACQUISTO DI MILANO

DI

MONSIGNOR CLAUDIO DI SEYSSEL

ARCIVESCOVO DI TORINO

pubblicato ed annotato

DA

DOMENICO CARUTTI

Memoria letta nell'adunanza del 21 di marzo 1861.

Avvertenza.

Il discorso di Monsignor Claudio di Seyssel intorno all'acquisto di Milano parmi degno di essere pubblicato sia per la materia trattata, sia pel nome dell'autore. Non ho infatti trovato menzione alcuna negli storici nazionali o forestieri dei disegni, o, per dir meglio, dei desiderii del buon Duca Carlo III sopra Milano; e l'aver discoperto un documento che li rivela, non è solamente una buona ventura che rallegri i curiosi cercatori degli archivi, ma è un fatto che dee fermare eziandio l'attenzione degli uomini di Stato; perocchè in tal guisa, con questo ripigliarsi dell'impresa mal tentata dal Duca Lodovico sessanta sette anni prima, provasi l'antichità e la continuità della tradizione politica, e si fa palese per quante generazioni trapassi l'arcano dell'impero, e sotto quali diversi aspetti, a seconda dei tempi, si atteggi uno stesso concetto.

Il nome poi di Claudio di Seyssel, illustre per le opere dell'ingegno, autorevole per la gravità delle commissioni diplomatiche esercitate, insigne per le alte dignità ecclesiastiche sostenute, cresce pregio alla scrittura che discorre tema così importante.

Prima di esporne la somma, ricorderò brevemente alcune cose risguardanti la vita di Monsignor Claudio; quindi indicherò in quali circostanze egli dettasse questa memoria.

Claudio, figliuolo naturale del Maresciallo di Savoia Claudio di Seyssel, nacque verso il 1450 ad Aix, o come altri pretende, a Seyssel. Mostrò, fino dai primi anni, ingegno ed amor vivo agli studi, e frequentò le scuole di diritto a Pavia ed a Torino. Se non che, appena conseguita la laurea dottorale, depose la toga e cinse la spada entrando nelle milizie, nelle quali tuttavia poco durò, essendo tostamente ritornato agli studi; laonde nel 1487, in età di trentasette anni, il vediamo leggere giurisprudenza nella Università di Torino. Più tardi professò in quella di Pavia, e le sue lezioni e i suoi commenti legali vennero in tanta fama, che nel 1499, Luigi XII, dopo l'occupazione del Milanese per parte degli eserciti di Francia, lo nominò Membro del Senato che instituì in quel ducato. Poco dopo per domanda del Cardinale Giorgio d'Ambois, principale suo Ministro, il chiamò in Francia e lo creò Consigliere di Stato e Maestro delle Richieste.

Il dotto giureconsulto si risolse allora di entrare negli ordini ecclesiastici, come quelli che a quel tempo aprivano più facile via agli onori e alle grandi dignità. Ed in vero nel 1508 fu mandato Ambasciatore presso Enrico VII d'Inghilterra. L'anno appresso venne eletto Vescovo di Marsiglia, del cui governo i negozi di Stato gl' impedirono di prendere personalmente il possesso; onde fu obbligato di farlo reggere per amministratori, a ciò, secondo il costume, deputati. Nel 1512 intervenne in qualità di Ambasciatore di Francia alla Dieta di Trèves, e nel 1514 al Concilio lateranense. Nel 1515, essendo Luigi XII passato di vita, Claudio di Seyssel abbandonò la Corte e le faccende pubbliche, e si condusse a Marsiglia per consacrarsi alle cure del suo vescovado.

Ma vi attese per breve spazio; chè Francesco I, accintosi all'impresa di Milano nell'anno stesso, mandò Monsignor Claudio Ambasciatore in Piemonte. Ed egli trovavasi in questo ufficio presso Carlo III, quando moriva, sull'uscire del 1516, il Cardinal della Rovere Arcivescovo di Torino. Leone X nominò tosto, in successore dell'Arcivescovo, il Cardinale Innocenzo Cibo, del che il Duca di Savoia mostrò risentimento per due ragioni: la prima, perchè in virtù del Concordato con Nicolò V spettava al Principe la proposta dei vescovadi al Pontefice; la seconda, perchè egli, il Duca, volea, per Arcivescovo della capitale, un suddito suo e non un suddito di altro Principe. La controversia si compose nel principio del 1517 mercè il

cambio delle lor sedi intervenuto fra il Cardinal Cibo e Monsignor di Seyssel che Carlo III volea ritenere in patria (1). Quindi Monsignor Claudio, con bolle pontificie dell'undici di marzo dell'anno stesso, fu nominato Arcivescovo di Torino.

Questa dignità sostenne poco più di tre anni, essendo passato di vita addì trenta di maggio 1520. Durante il pastoral ministero visitò le valli dei Valdesi, che allora erano parte della sua diocesi, aprì pubbliche conferenze per discutere e confutare le dottrine eterodosse professate da quelle appartate popolazioni; quindi, sopra i loro errori, compose una molto lodata opera che tuttodì si consulta da chi pone studio in siffatte materie, e che dal Bossuet e da altri valenti controversisti vedesi mentovata con onore. Ma nè queste nuove fatiche, nè le altre più minute del pontificato il distolsero dalle cure di Stato, giacchè sappiamo che Carlo III avea riposto in lui moltissima fede, confidavagli i suoi più segreti intendimenti, il voleva compagno ne' suoi viaggi e ricercavalo di consiglio sopra i più gravi nègozi. Tantochè Fra Taddeo da Lione, il quale recitò in S. Giovanni l'orazione funebre dell'Arcivescovo, potè dire che egli era verso il Duca *velut alter fidus Achates, cui tuto pectoris sui arcana pandebat, ita ut oculus domini haberetur* (2).

Le opere lasciate da Claudio di Seyssel sono scritte alcune in latino, le altre in francese; ed egli viene lodato come uno dei primi che abbiano adoperata quest'ultima lingua con precisione e nettezza. In essa tradusse Giustino, Eusebio, Tucidide, Appiano, la Ciropedia di Senofonte; in essa dettò pure la relazione della vittoria di Ghiera d'Adda, riportata da Luigi XII contra i Veneziani, la storia dello stesso Re Luigi XII, e finalmente un libro intorno alla monarchia di Francia. In latino scrisse le già citate dispute contro gli errori dei Valdesi, la spiegazione del primo capo dell'Evangelo di S. Luca, e parecchie operette specialmente di argomenti legali, i cui titoli leggonsi registrati nelle Memorie del P. Niceron. Non intendo ragionare del valore di questi scritti, e vengo al discorso inedito che ora presento al pubblico.

Esso trovasi per copia inserito nei registri ducali custoditi negli Archivi

---

(1) Fu per altro convenuta in favore del Cardinal Cibo la clausola del regresso in caso di morte di Monsignor di Seyssel; quindi è che, questi essendo morto nel 1520, il Cibo gli succedette e tenne la diocesi di Torino fino al 1549, senza prenderne per altro il governo, e facendola amministrare da' suoi Vicari. MEYRANESIO *Pedemontium Sacrum*, parte seconda; manoscritto della Biblioteca di S. M.

(2) V. MEYRANESIO loc. cit.

generali del Regno e porta questo nudo titolo: *Le discours du feu Monseigneur de Thurin;* e più sotto: *Certain discours fait par le bon Arcevesque trepassé*, senza verun'altra indicazione. La data del tempo in cui fu scritto, occorre ricavarla dai fatti che l'autore rammenta nel corso della sua Memoria; e, conosciuta questa data, si chiariscono meglio le ragioni che la consigliarono.

Carlo VIII, conquistando e perdendo rapidamente il reame di Napoli su cui vantava diritti come erede degli Angioini, avea riaccese le ambizioni di Francia, e obbligati gli Spagnuoli a prendere più diretto ingerimento nelle cose d' Italia. La sua ritirata poi era stata il frutto della prima colleganza delle potenze europee, le quali univano le loro forze per impedire il soverchiare di un solo Stato, e gettavano così le prime basi del moderno sistema di equilibrio, o almeno lo prenunziavano.

Il Duca di Orleans, succeduto nel 1498 a Carlo VIII, col nome di Luigi XII, non solamente assunse il titolo di Re delle Due Sicilie, ma vi aggiunse quello di Duca di Milano, come pronipote ed erede di Valentina Visconti, e non dissimulò che avrebbe sostenute colle armi le sue pretensioni. I Veneziani, guastatisi con Lodovico il Moro, sollecitarono il nuovo Re a scendere contra Milano, nella guisa stessa che Lodovico avea chiamato Carlo VIII contra Napoli. Luigi XII scendeva infatti nel corso dell'estate, e le sue genti in venti giorni conquistavano il Milanese e Genova, la quale allora ubbidiva ai Duchi di Milano. Lodovico il Moro, implorati invano i soccorsi dell' Imperatore Massimiliano I, presso cui erasi rifugiato, levò col proprio danaro un esercito fra gli Svizzeri, e nel febbraio del 1500 venne alla riscossa; ma, tradito da quei mercenarii al nemico, andava prigioniero oltremonte.

La prima parte del disegno di Luigi XII era compiuta; regnava oggimai sicuro nel nuovo Stato. Rimanea l'altra parte, cioè la conquista di Napoli. A tal fine strinse lega con Ferdinando il Cattolico, dividendo anticipatamente con esso le spoglie del Re Federico; la guerra fu bandita, gli Aragonesi balzati dal trono: se non che la discordia insorse fra i vincitori che vennero fra di loro alle mani, e Napoli in ultimo finì tutto in signoria degli Spagnuoli.

Così due dominazioni straniere si accampavano in Italia, l'una nel mezzogiorno, l'altra nella superior parte della penisola.

Se ai tempi di Carlo VIII una federazione degli Stati italiani potea salvar la penisola dalle cupidità dei nuovi regni fortemente costituitisi

nelle varie provincie d'Europa, siffatta federazione divenne impossibile dopochè Luigi XII e Ferdinando il Cattolico furonsi impadroniti di Milano e di Napoli. Se alcun riparo potea mettersi al pericolo di una intiera soggezione, questo potea soltanto sperarsi dalla preponderanza di uno Stato che assumesse sopra di sè la causa di tutta la nazione. Giulio II la tentò a beneficio della Chiesa; ma la depressione dei Veneziani, unica potenza italiana veramente forte, ottenuta colle armi di tutta cristianità, fu cominciamento pessimo alla restituzione della patria indipendenza.

La Lega Santa emendò quell'errore in alcuna parte. Valendosi del braccio degli Svizzeri, Giulio II levò il famoso grido di *fuori i barbari*. Gli Svizzeri, da lui assoldati, scesero nel Milanese, vi rialzarono le bandiere di Massimiliano Sforza, ne cacciarono i Francesi, ed assunsero l'obbligo di proteggere il dominio di casa Sforza. Se il fiero Pontefice fosse pervenuto a moderare alquanto l'indole sua violenta ed avesse avuta più lunga vita, forse eragli dato di antivenire, se non tutti, molti almeno dei mali che in appresso si avverarono.

Casa Savoia parea dalla natura delle cose chiamata a concorrervi gagliardamente. Ma, turbata e lacerata per trent'anni dalle domestiche discordie, non ebbe forza e neppure la volontà di custodir le Alpi di cui stava a cavaliere. Quando le varcò Carlo VIII, Bianca di Monferrato reggeva lo Stato in nome di Carlo II, fanciullo. Ella festeggiò il monarca che giungeva, e lo festeggiò quando partiva; altro non fece e non potè fare. Quando le varcò Luigi XII nel 1499, regnava Filiberto II, il quale gli concedette il passo mediante compensi. Indi, sposato a Margherita d'Austria, figlia di Massimiliano, seppe resistere alle istanze del Cristianissimo, mantenne una neutralità armata, e già Francia, Spagna ed Austria ne ricercavano non senza premura l'amicizia; primo e lontano segno della favorevole condizione in cui sarebbesi trovata la Corte di Torino nei nuovi tempi che sorgevano, non appena un Principe valente salisse al trono. Ma Filiberto II morì nel 1504, e Carlo III suo fratello, non destinato a regnare, provò regnando che non era idoneo al grave carico. Fra cotanto rumoreggiare di guerre, egli, rappresentante di una famiglia tutta guerriera, non seppe fortificarsi in sulle armi, non seppe essere nè capitano nè soldato; e questo fu il massimo de' suoi errori. Negoziatore e mediatore instancabile, volle piacere a tutti, essere in grazia a tutti, e niuno contentò pienamente. Ebbe una buona idea, quella di allearsi intimamente cogli Svizzeri, ma o colpa di costoro, o propria, o della fortuna, ebbegli quasi sempre nemici.

Egli era evidente che, finchè i Francesi tenevano il Milanese, il Piemonte rimaneva in loro balìa. Perciò fu molto natural cosa che Carlo III aderisse alla Lega Santa, e dovette sentirsi Sovrano libero il giorno in cui le insegne francesi abbandonarono Milano. Allora era il tempo di operare, di armarsi, di cercare alleanze sicure. Nulla fece di ciò, e gli eventi lo colsero sprovveduto.

Luigi XII morì il 1.° di gennaio 1515. Francesco I, succedendogli, assunse incontanente il titolo di Duca di Milano, palesando in tal forma apertamente le sue intenzioni. Incredibile a dirsi, Carlo III le assecondava quantunque si dichiarasse neutrale; per la qual cosa gli Svizzeri che guardavano il Milanese, entrarono in Piemonte come nemici, per occupare gli sbocchi delle Alpi non difesi da chi ne tenea le chiavi. Francesco I girò gli Svizzeri, scendendo dal colle dell'Argentiera, e il 13 di settembre del 1515 li ruppe a Marignano. Il 4 di ottobre Massimiliano Sforza rinunziavagli ogni suo diritto sul Milanese, obbligandosi a vivere il rimanente de' suoi giorni in Francia. Frattanto Carlo III continuava la sua parte di mediatore adoperandosi a pacificare gli Svizzeri con Francesco I, e vi pervenne nel novembre di quell'anno. In tal modo il vincitore di Marignano ebbe incontrastato il possesso di Milano.

Il discorso di Claudio di Seyssel fu scritto in questo tempo. Egli infatti parla di Massimiliano Imperatore e del Re di Spagna suo nipote; accenna che Francesco I era di già partito d'Italia, e che il Contestabile di Borbone governava in suo nome. Ora è noto che Carlo di Lucemburgo, che fu poi Carlo V Imperatore, succedette il 15 di gennaio 1516 nel reame di Spagna a Ferdinando il Cattolico. Francesco I ripassò le Alpi sul finir di gennaio e giunse a Lione i primi giorni di febbraio del 1516; finalmente il Contestabile di Borbone fu richiamato in Francia nel maggio seguente.

Resta dunque provato che Claudio di Seyssel scriveva tra il finir di gennaio e il cader dell'aprile del 1516. Anzi, siccome egli non tocca della discesa di Massimiliano in Italia avvenuta nel mese di marzo, si può con certezza affermare che il discorso fu composto nel mese di febbraio 1516, mentre il Vescovo di Marsiglia trovavasi per l'appunto in Torino in qualità di Legato di Francia.

Le considerazioni che si leggono in questo discorso danno a divedere che nella Corte di Carlo III eravi non lieve preoccupazione pel riacquisto del ducato di Milano compiuto da Francesco I, e così improvvidamente favoreggiato dal Duca. Infatti il nostro prelato mostra bensì vivo desiderio

di veder cresciuto il dominio di Carlo III, ma studia sopratutto di liberare Casa di Savoia da un pericolo di cui ella non avea mai corso il maggiore. Propone perciò di togliere ai Francesi la signoria di Milano e indaga i modi di procurarla a Carlo III, mediante trattati colle varie potenze. Considera impertanto la *possibilità*, la *facilità* e i *mezzi* di compiere siffatta impresa.

Monsignor Claudio la giudica possibile atteso la cresciuta potenza della Casa di Savoia, i suoi parentadi coi maggiori Principi della Cristianità e il malcontento dei Milanesi, intolleranti della signoria francese; ed osserva che se al Conte Francesco Sforza fu agevole, a' suoi tempi, di condurla a buon termine, tanto più debbe riuscirvi il Duca Carlo III.

La crede facile, in primo luogo, perchè i maggiori Principi stanno in gelosia del re di Francia e temono che, assolidandosi la sua conquista, ne corrano pericolo gli Stati da loro posseduti in Italia; 2.° perchè le calamità della guerra e il disordinato governo dei Francesi aumenteranno sempre più l'odio dei Milanesi; 3.° perchè i Francesi, non ricevendo le paghe dal re, si stancheranno presto di un soggiorno dove sono costretti a spendere il loro e dove i pericoli della guerra, della quale essi, dice lo scrittore, prestamente si annoiano, saranno continovi; 4.° perchè gli Svizzeri veggono di mal occhio il dominio di Francia sopra Milano, e si struggono di vendicare la sconfitta di Marignano in cui perdettero tanta buona gente e parte della loro riputazione; dal che tutto si arguisce che il re, avendo l'Imperatore e gli Svizzeri nemici, non potrà tenere un anno intiero il ducato; 5.° perchè se Francia non può tenerlo, molto meno il potrebbe l'imperatore Massimiliano che, oltre al non aver nè consiglio, nè forza sufficiente, a cagione delle sue pretendenze sull'Italia e sulle stesse terre della Chiesa, collegherebbe infallantemente contro di sè tutti gli Stati italiani e gli Svizzeri, che sono naturali nemici della sua Casa.

Più innanzi procedendo, il nostro diplomatico opina che l'imperatore favorirebbe Carlo III sia per la sua devozione all'impero, sia per i vincoli di sangue e di amicizia che stringevano la Casa di Savoia a quella di Borgogna; ma sopra tutto il favorirebbe in contemplazione del matrimonio che si andava negoziando fra il Duca e Maria Beatrice di Portogallo, nipote di Massimiliano. Le quali inclinazioni si potrebbero far più vive mercè le offerte di convenienti somme di danaro di cui era la maestà di Cesare in continuo bisogno. Infine l'imperatore non avrebbe potuto dare

a più giusto titolo l'investitura del ducato ad altri che a Carlo III, essendo egli il più prossimo parente dell' infelice Giovanni Galeazzo Sforza.

Quanto al re di Francia, posto ch'ei non possa mantenersi in Milano, è da credersi che volentieri il cederebbe al Duca. Luigia di Savoia, madre di Francesco e sorella di Carlo, dovrebbe aiutare il negozio. Siccome poi nè il Duca, nè suo fratello Filippo aveano moglie, si potrebbe per segreti patti convenire che in caso di estinzione della linea, non solo Milano, ma la Savoia altresì e il rimanente degli Stati passassero alla Francia.

Gli Svizzeri sopra tutti, prosegue Monsignor di Seyssel, approveranno e caldeggeranno la cessione. Son essi gli alleati naturali di Savoia e sono i guardiani più gelosi del Milanese; molto dee loro importare che l'uno e l'altro Stato ubbidiscano ad un signore solo ed amico. Arrogi che con pensioni, capitolazioni e doni ai personaggi più autorevoli dei Cantoni si potranno agevolmente tenere bene edificati e disposti.

I Principi italiani in ultimo e specialmente il Papa, i Fiorentini e i Veneziani per gelosia dell' ingrandimento di Casa Savoia, forse preferirebbero un Principe particolare a Milano, ma non avrebbero modo alcuno di opporsi alle deliberazioni dell' Imperatore, di Francia e degli Svizzeri. Oltrechè il Papa, per la recente parentela tra Savoia e Medici e per la tradizionale devozione di Savoia alla Santa Sede, inclinerebbe di buon grado agli accordi; e i Fiorentini per la stessa ragione, essendo la somma dell'autorità in quella repubblica raccolta in mano di Casa Medici e perciò di Leone X. I Veneziani tra per la maggiore vicinità e per la controversia intorno a Cipro, saranno più restii, ma nulla certo intraprenderebbero nimichevolmente contro il Duca.

Dopo questa indagine e queste politiche presunzioni, Monsignor Claudio indica il contegno da tenere, gli uffici e le pratiche da introdurre con ciascuno Stato, e termina dicendo che: « *Se a Dio piacesse che questo negozio pervenisse a buon fine, sarebbe così grande ventura ed onore al suo signore e alla sua Casa da non potersi valutare; perchè si formerebbe un così grosso Stato da paragonarsi ai maggiori di Cristianità. Nè tutto finirebbe qui; perchè incontanente Genova verrebbe in sua ubbidienza e non potrebbe fare altrimenti. E tutti i potentati d'Italia si terrebbero bene avventurati di avere amicizia, considerazione e accordo con lui. E per conseguente in ben poco tempo egli potrebbe fare cose grandi assai* ».

Prima di portar giudizio sulla Memoria in se stessa, ci sia lecito

osservare quale singolare ufficio di Ambasciatore debba parere cotesto di cui ci diede esempio Claudio di Seyssel. Legato di Francia in Torino, egli divisa e consiglia i modi di spogliarla di uno Stato pochi mesi prima conquistato! Forse il Seyssel non reputava perfidia il suo operare, perchè poneva per cosa certissima che la Francia non potea tenere a lungo Milano, e perchè giudicava che il tenerlo le tornasse a detrimento, anzichè a vantaggio. Nulladimeno, nè questa scusa, nè l'amor di patria, nè la devozione al principe naturale che faceanlo parlare, bastano ad assolverlo, e non credo ingannarmi supponendo che la cagione per cui fu tolto agli sguardi degli uomini questo documento e le frequenti cassature dei nomi proprii che si veggono nella copia che se ne conserva, sia da ricercarsi nel desiderio di tenere occulto un fatto che non tornava a piena lode dell'autore.

Quanto al valore intrinseco dei ragionamenti, diremo francamente che in essi notasi acume di osservazioni, ingegnosa pittura e notizia accurata delle gare, delle ambizioni e dei sospetti che informavano la politica di quei tempi, ma che si desidera quella intuizione sicura della condizione generale del tempo, intuizione che contrassegna l'uomo di Stato e il profondo diplomatico. Claudio di Seyssel non antivede, per esempio, anzi non vede la nuova e formidabile potenza a cui la Spagna assorge mediante la vicina riunione sopra di un solo capo delle corone di Ferdinando il Cattolico e di Massimiliano I. Non pensa o si schermisce dal considerare che, se era vero che i Principi Italiani e quelli dell'intiera Europa non poteano mirar di buon occhio il dominio francese in Milano, non avrebbero di certo guardato con maggior soddisfazione l'annessione del Ducato agli Stati di Casa Savoia, perchè troppo ella ne sarebbe cresciuta in forza e, com'ei dice per l'appunto, *troppe cose avrebbe potuto fare*. L'Italia e l'Europa avrebbero quindi preferito un Principe particolare in Milano, e solamente avrebbervi sopportato Carlo III, quando questi fosse stato in grado di prenderlo e conservarlo di per se stesso.

Finalmente il nostro scrittore dimentica al tutto di ammonire il suo signore che nei rivolgimenti degli Stati e frammezzo alle lotte degli interessi, delle cupidità, e delle ambizioni, ottime cose sono i negoziati sottili, le graziose profferte e i destreggiamenti fra i varii contendenti, ma non bastano a gran pezza, dove non sieno accompagnati e fatti autorevoli dalle armi. Intorno al che avrebbe dovuto rammemorare come, per questo difetto segnatamente, le pratiche e la guerra del Duca Lodovico, nel 1449,

avessero avuto esito così tristo. A ciò non pose mente, o ciò non seppe fortemente volere il buon Carlo, e i sogni giocondi del suo consigliere sono crudelmente dissipati dalla dolorosa realtà di quel regno infelicissimo.

Nulla di meno, o io m' inganno, questo discorso, rivelandoci gli ascosi pensieri della Corte di Torino, gioverà forse a spiegar meglio la politica della nostra Corte così affannosamente officiosa in quegli anni e nei posteriori.

Debbo alla cortesia della Direzione generale degli Archivi del Regno e specialmente al Cav. Avv. Celestino Combetti l'esatta lezione di questo documento e l' interpretazione di alcune parole che nel manoscritto si veggono cancellate con molto studio, e che ho stampate in carattere corsivo. Per più facile intelligenza del testo ho poste in piè di pagina alcune note brevissime riguardanti, per lo più, i personaggi a cui l'autore accenna talvolta senza nominarli.

DOMENICO CARUTTI.

LE DISCOURS

DU FEU MONSEIGNEUR DE THURIN

CERTAIN DISCOURS FAIT PAR LE BON ARCEUESQUE TREPASSÉ.

Pour l'entreprinse *de Millan* fait a considerer ce que est a considerer en toutes choses de grande importance et que semblent fort difficiles; cest a seauoir;

Premierement la possibilité; car qui ne la verroit clerement, seroit folie dy entendre.

Secundement la facilité; car a chouses trop difficiles lon ne se doit auenturer, sil nya necessité, et mesmement ou il peut auoir dangier a les entreprandre comme ceste cy.

Tiercement les moyens pour y paruenir; et cecy est le tout, car peu vouldroit cognoistre quil est possible et faisable qui nentendroit et auroit les moyens pour y paruenir et encores qui ne les auroit bien consideré, ruminé et preparé telement que a la poursuyte nesi faillit riens; car en telles matieres vng seul point fait souuent perdre le jeu. Et si fault auoir quelques parsonnaiges entendans la matiere et feables, que ayent continuellement loeil et lentendement a cella, car journellement soruient des choses non preueues qui font changer de propos en quelque endroit et requierent aultre consideration et facon de faire que celle que lon a pansé du commencement; tout ainsi quil est expedient a vng malade que le medecin soit tous les jours aupres luy pour donner les remedes sellon les accidans que aduiengnent au patient, et ne souffiroit quil eust du commencement ordonné ce quest conuenable a la maladie. Toutes lesquelles choses biens gardées, il nest chose que ne se puisse faire, quant on lentreprent et se delibereton de le executer.

Pour venir adonc au premier de la possibilité, sans alleguer les exemples des anciennes histoires, il fault seulement considerer que trop plus aisée chose est a vng Duc de Sauoie, puissant, allié et apparenté, dacquerir *vng*

duché de Millan, estant en tel trouble que on le voit, quil na este aux predecesseurs de mondit Seigneur, qui vindrent dAllemaigne et nauoient terre ne cougnoissance des pays de par deca, dacquerir ce quilz y ont acquys par soins, par vertu et par la condition des temps. Et sans sortir de propos, encoures est il plus faisable a mondit seigneur quil nestoit au Comte *Francois Sforza* que estoit de la sorte que chescun scet (1); par quoy ne fault plus desbattre ne doubter que cella ne soit plusque possible.

Si fault donc venir au second point, qui est la facillité, et cella me semble se pouuoir comprehendre par plusieurs raisons bien euidentes: premierement il est impossible ou tres difficile *que le Roy* (2) puisse garder le *dit duché* tant pour la grande gelosie et enuye que ont tous les aultres princes cristiens sur luy, le voyant ainsi agrandir, que pour la crainte quilz ont de luy, sil venoit a prosperer en Italie, principallement Lempereur (3) et le Roy catholique (4) son nepueu qui ont et pretendent droit en plusieurs pays dudite Italie et en veulent auoir la domination; ce quilz ne porroient, tenant *le Roy le dit duché;* ains seroient tousjours en crainte de perdre ce quilz y tiengnent, qui a este la cause que meut le feu roy despaigne (5) a conspirer contre le feu Roy (6). Secundement les subgectz et habitans dudit Duché sont vniuersellement mauuays *francoys* et hayssans la nation plus que jamais; la quelle hayne croistra tous les jours, tant a cause des maulx quilz souffrent pour raison de la guerre comme aussi pour le desordre des francoys en toutes choses, qui est pour empirer plustost que pour amander.

Tiercement les *francoys* qui sont de pardella, senuyeront bien tost dy estre, tant pour leur nature qui est de senuyer bien tost de la guerre, que pour les dangiers quilz y verront journellement; et encoures pour ce que la pluspart y despendent le leur en grant somme et ny peuuent rien gaigner, car ilz sont constraintz tenir pollice pour non irriter de plus en

---

(1) Alla morte di Filippo Maria Visconti (1447) i Milanesi si ricostituirono in repubblica. Ma Francesco Sforza, genero del Visconti, ritenuto ai loro stipendi, non tardò a scoprirsi ed a far valere colle armi i suoi diritti alla successione dello suocero. I Milanesi, dopo lunghe trattative, riconobbero in loro protettore il Duca Lodovico di Savoia, il quale nel 1449 mosse le sue truppe contro lo Sforza e ne fu disfatto. Francesco Sforza fu proclamato Duca di Milano nel febbraio del 1450.

(2) Francesco I re di Francia.

(3) L' imperatore Massimiliano I.

(4) Carlo V re di Spagna nel 1516 e quindi imperatore d'Allemagna nel 1519.

(5) Ferdinando il Cattolico morto il 15 di gennaio 1516.

(6) Luigi XII re di Francia morto il 1 di gennaio 1515

plus les gens du pays et si sont mal payes *du Roy*, et est a croire que monsieur le *conestable* (1), si dieu luy donne la grace de pouuoir sauuer le dit *duché*, a ce couxt ne taschera fors que de soit retirer voiant le pouoir fere a son honneur et le dangier quil a passé, et considerant qui ne fault point si souuent tempter la fortune. A quoy madame (2) ..... le presse et stimule journellement, luy remonstrant que lytalie est la sepulture de ses predecesseurs, car il y sont mors son pere (3) et ses deux freres (4), et si ny reste plus de la maison que luy. Du quel cas est tout certain que, sil abandonoit le pays, tout seroit perdu, tant pour la diuersité et discordance des chiefz et cappitaines que y demouroient, comme aussi pour ce que les gens darmes sen viendroient; la pluspart des gentilhommes et gens de bien que sont demoures pour luy, et ceulx que demorroient, ne tiendroient ordre ny pollice, ne obeyroient aux chiefz; donc le pays mesme en peu de temps seroit constraint soit rebeller et apetir quelque ayde et fauour dailleurs pour chasser les *francoys*, que seroit bien aiséz a trouuer, actendu mesmement que la parte gibelline que est la plus forte audit *duché*, est naturellement ennemye des francoys et Imperiale.

Quartement lon a veu et voit lon euidemment, que messieurs des *ligues* nont point aggreable le *Roy* audit *duché*, cart ilz en on chassé et tenu dehors tant quilz ont peu; et encores maintenant, quelque promesse quil luy ayent fait, en prenant son argent, se declairent asses ny auoir aucune volonte; ains plustost au contraire, et la hayne y est mortelle pour la perte des gens quilz firent a la bataille (5) aueques la reputation dauoir este vaincus, ce quilz nauoient este bien long temps a en tel et si gros nombre. Or est il impossible que le *Roy* puisse garder le dit *duché* vng an, aiant l'empereur et eulx pour ennemys, ensemble la part gibelline et tout le peuple generallement; et quant par aucuns temps le gardera, ce sera a si grans fraiz que le reuenu ne le porra porter et a dangier de perdre les gens quil y aura *francoys*, que seroit la destruction totale

(1) Carlo duca di Borbone.

(2) Non è stato possibile di leggere il nome che trovasi cancellato nel Manoscritto. Forse accenna a Madama Susanna di Borbone, moglie del Contestabile.

(3) Gilberto conte di Montpensier, morto a Pozzuolo nel Napoletano il 5 di ottobre 1496.

(4) Luigi Conte di Montpensier, morto a Napoli il 14 di agosto 1501, e Francesco Duca di Châtellerault, ucciso alla battaglia di Marignano.

(5) La battaglia di Marignano vinta da Francesco I sopra gli Svizzeri il 13 di settembre 1515

du Roiaume, ayant le roy dangleterre pour ennemy que est en armes et puissant, et encores le Roy despaigne; et ledit royaume pouure et desonte, tant la noblesse que le peuple; parquoy, voyant les chouses en tel dengier, ceulx qui manient les afferes, desireront, silz ne sont bien aueugles, que le Roy sen fut deffait en quelque sorte a son honneur; et dautant plus si desdits coustes dangleterre ou despaigne leur estoit leué quelque alarme, que seroit sans point de faulte pour les estonner du tout et faire oblier lytalie, et encores plus si les suisses menassoient.

Quintement, sil est impossible on trop difficile au *Roy* de guarder ledit *duché* par ce que dessus, encores plus difficile seroit a lempereur, tant pour ce quil na la puissance ne la conduite encores telles que les francoys, quelque mauuaise quelle soit, comme aussi par ce quil est trop plus a craindre en Italie, car il pretend que tout soit a luy et mesmes les terres de lesglise. Et aiant ledit duche aueeques les Roiaumes de naples et de sicile, ne fait a doubter quil ne mit le remanent a sa subgection et tous les estatz en seruitude, mesme le pape, les venitiens et les florentins, lesquelz jamais ne souffreront cela a leur pouuoir; et aussi peu le souffreront les suisses que sont les naturelz ennemy de sa maison. Et par effect les princes et estatz, voyant luy et sadite maison si grande, se rallieront contre luy pour le rabaisser; par quoy ne fait a doubter que toute lytallie, les suisses et lallemaigne naymassent trop mieulx vn prince particulier audit *duché* de *millan*, que nul desdits aux grans princes, et quant ilz verront les moyens pour paruenir a ce, ny aydent voulentiers et sur tout les subgectz dudit duche.

Estant adonc les choses en ces termes que lesdits *empereur* et *Roy* voyent ne pouuoir tenir ledit *duché*, seraz bien aisez a mondit seigneur de tenir les moyens pour y paruenir plusque a aultre prince quelcunques, au contentement et du bon gre desdits seigneurs et de messieurs des ligues; car sans cella seroit chose trop dangereuese de lentreprendre, pour les azard que peuuent aduenir, ayant aulcuns des susdits princes et estatz pour ennemys.

Et premierement tant qui touche lempereur, cela luy sera bien aise a persuader, quant il verra ne pouuoir tenir ledit duche, tant pour ce que mondit seigneur est son vassal et tous ses predecesseurs et luy ont tousiours este obeissans et loyaulx a lempereur, et oultre ce ont eu parentaige et grosse amytiè aueeques la maison de bourgoine; mays sur tout y feront condescendre ledit empereur, quant mondit seigneur vouldra

entendre au tracte de mariage (1) dont a este parle. Et dabundant on pourroit audit empereur presenter quelque party raisonnable dargent ou de pension annuelle en faisant lenuestiture. Et par effect quant messieurs des ligues tiendront ce parti, nest a doubter que ledit empereur ne sy renge; car il ne sauroit a qui sadresser mieulx, pourtant que le duc maximilian a renunee et est en france (2), son frere (3) nest pas pour porter ces fars, ne deffendre ledit duche, estant mesmement foulle et destruit comme il est. Et ledit empereur nest pas pour luy bailler sa nyepte comme il seroit a mondit seigneur, ne a cause de soy fier de luy comme de mondit seigneur. Et si aura ledit empereur bone colleur de luy bailler lenuestiture, par ce quil est le plus prouchain parent masle du feu duc Jhan galeaz (4), qui fut esporté par le seigneur ludouic et empoisonne, comme lon dit, et est ausurplus prince dempire, voisin dudit duche dont lempereur et lempire pourront auoir mille seruices.

Au regard du Roy la raison veuldroit encores plus que, non pouuant tenir ledit duche, il le remit es mains de mondit seigneur plustost que de nul aultre, pour la proximité de lignage quil luy atteint; et sur tout madame sa mere y deburoit tacher (5); car par celleey seroit vne gloire perpetuelle dauoir fait ce bien en sa maison mesme que le roy son filz ne puilt garder sans trop grand dangier et la destruction du roiaume; mays encoures oultre ceey luy porrait lon remonstrer que mondit seigneur na que vng frere (6), et lung ne laultre nont femme ny enfans, et sont en la voulente de dieu. Et sil auenoit quelque chose deulx quilz decedissent sans enfans comme il est aduenu de tout plain de leur predecesseurs en bien peu de temps, que dieu ne vueille, nont aultre parent plus prochain que ledit seigneur, et ne vouldroient auoir aultre successeur au duche mesme de sauoye et en toutes les terres quilz tiegnent, et par plus forte raison audit duche de millan; et sur ce porroient fere aucune

(1) Allude al trattato di matrimonio con Maria Beatrice di Portogallo, nipote dell' Imperatore Massimiliano, matrimonio che si effettuò solamente nel 1522.

(2) Il 14 di ottobre 1515 Massimiliano Sforza, primogenito di Lodovico il Moro, rinunziò ogni suo diritto sul Milanese a Francesco I, ne ricevette pensione e si obbligò a dimorare in Francia.

(3) Francesco II Sforza, secondogenito del Moro, che più tardi fu duca di Milano, dopo la battaglia di Marignano erasi ritirato nel Tirolo, dove viveva oscuro e valetudinario.

(4) Giovan Galeazzo, morto il 22 di ottobre 1494 per veleno propinatogli dal Moro, era figlio di Bona di Savoia, sorella del Duca Filippo di Savoia; quindi cugino germano di Carlo III figlio di Filippo.

(5) Louisa di Savoia, Duchessa d'Angoulemme, madre di Francesco I, era sorella di Carlo III.

(6) Filippo detto il bastardo di Savoia, che fu lo stipite dei duchi di Nemours in Francia.

pacte et declaration par escript secretement, si en conduisant laffere lon veoit que cecy seruit au cas. Et oultre ce ancores porroit lon promectre quelque pension annuellement et quelque seruice audit seigneur, et faire capitulation telle, que mondit seigneur et ses successeurs qui tiendront ledit duche seroient plus astraintz au roy et a ses successeurs que a lampereur, reserue de la fidelite; et dauantage ledit sieur porra tousjours estre bien asseheure de mondit seigneur plus quil ne seroit de nul aultre, pour autant que ses pays sont tous enuironnes de ceulx dudit seigneur; parquoy, quant bien il ne voudroit luy tenir promesse et fere la raison, ce quil nest jamays pour refuser, ledit seigneur aurat asses surquoy semprendre pour auoir sa raison.

Item et quant viendra a estraindre lesdits pratiques, mondit seigneur *preparera* aisement les principaulx seruiteurs dudit seigneur par promesses et asschcurances des biens quilz ont dudit seigneur audit duche, et encores lon porra leur offrir de ceulx que mondit seigneur a en france et aultres moiens que lon verra estre expedient.

Et tant qui touche messieurs des ligues, encourcs plus aisee chose semble a leur persuader par les mesmes moyens et raisons, car plus propice voisin ne pourroient auoir audit duche que mondit seigneur, qui est leur allié et nesperera tenir ledit duche ne encores garentir ses aultres pays, terres et signories sinon par le moyen et ayde de mesdits seigneurs; et a ceste cause tasche de soy rallier et restraindre de plus en plus auec eulx et de mectre totallement luy en son estat entre leurs mains, parquoy, ayant ledit duche, ilz en disposeront comme il font de celluy de sauoye tout ainsi quilz vouldront, et le pourront tenir tout ainsi comme vng de leurs cantons; et auecques ce mondit seigneur leur donra en general et en particulier telle pension qui sera aduise par eulx mesmes, et en tous ses afferes ne se seruira daultres gens extrangiers que des leurs, et ausurplus fera telles capitulations auecques eulx qui vouldront. Et dauentaige quant mesdits seigneurs auront vn tel prince tout tel que eulx, qui sera puissant dargent, de viures, de gens, de cheuaulx, de harnoys et de toutes choses, et aura grant pays, bones villes, chasteaulx et passaiges tant en Italie que en Gaule, ne fait a doubter quilz ne soient plus crains et extimes de tous les aultres princes et potentatz du monde quilz ne sont, et ne puissent entreprendre et faire de trop plus grans choses, et par effect quilz ne facent ce quilz vouldront; a quoy mondit seigneur et les siens aideront tousiours volentiers, pourtant quil en sera participant, car sa grandeur

dependra de la leur. Et aussi par leur moyen pourra de son couste estandre sa reputation et ..... et faire obeir ses subgects et craindre ses voisins, silz voullaient estre maunais. Et dabundant il a pouoir et moiens de defendre le dit duche de soy mesmes, sans mectre mes dits seigneurs en daugiers, trauail ne despense, a cause des pays voisins quil tient tant de ça que de la les montz qui sont bon et fertiles et plains de bons subgectz tant nobles que aultres, qui tous sont affectionez a la querelle et devotion dudit seigneur, tellement que en peu de temps on peult retirer gros seruice. Et si tractra les gens dudit duche de millan de sort quilz nauront occasion de vouloir changer seigneur, ains plustost mectront leurs personnes et biens a tous daugiers pour demourer en son obeissance ainsi que seroient ses aultres subgectz; sachent mesmement mondit seigneur auoir lamytié et alliance auec mesdits seigneurs des ligues, toutes lesquelles commodites ne aucune dicelles ne porroient auoir, si ledit estat tomboyt en mains daultre prince quelquil fut.

Et tant qui touche le pape, les venitiens, les florentins et generalement tous les princes et estatz ditalie, il nen ya point que naymet trop mieulx ledit duche entre les mains de mondit seigneur que de lempereur ou de sa maison, ne du Roy. Et combien quil en yeut a lauanture quelcuns quil le voulsissent plustost entre les mains dung prince particulier que de siennes, pour la crainte quilz porroient auoir de sa grandeur, mesmement les venitiens qui sceuent que mondit seigneur a querelle contre eulx a cause du Roiaume de Chippres (1), toutefoys voyant quil nya aultre, excepte lesdits seigneurs, empereur et roy, qui puisse parnenir a cecy que luy, se rengeront aisement aueeques luy pour estre quictes des aultres. Et au pys aller, ayant la voulente desdits seigneurs et de messieurs des ligues, fauldroit bien que lesdits venitiens et aultres estatz ditalie eussent pacience; et si est a croire que les florentins et autres, par plus forte raison le pape (2), y condescendroient facilement, tant a cause de laffinité faicte

(1) Luigi, figlio del Duca Lodovico di Savoia, avea sposato nel 1458 Carlotta di Lusignano erede del Regno di Cipro. Luigi, colla moglie, ne prese possesso; ma poco dopo Giacomo di Lusignano, fratello naturale di Carlotta, glielo tolse colle armi. Giacomo sposò Caterina Coruaro, Veneziana, che fu poi dichiarata, a titolo d'onore, figlia del Senato. Rimasta vedova nel 1473, cedette definitivamente Cipro ai Veneziani che di già l'avevano occupato. Carlotta, dal suo canto, ritiratasi a Roma e vedova anch'essa, cedette i suoi diritti a Carlo I Duca di Savoia. Carlo III pensò a farli rivivere, e un articolo del trattato di Cambrai gli assicurava la restituzione dell'isola. Quindi i mali umori tra la repubblica e Savoia.

(2) Leon X.

auecques la maison de medicis (1), comme aussi par ce que la maison de sauoye na point le bruit dauoir este violente, mays doulce et eumaine auec ses vosins, et obeissante au saint siege apostolique sur tous les princes de kristiente. Et encores dabondant pour obuyer a toutes suspecion et dispouser les choses de plus en plus auec lesdits estatz voisins, seruiroient les pratiques que lon porroit mener par le menu auec vng chascun de susdits princes et estatz, lesquelz lon porroit commancer des a present en partie, et le surplus ainsi que lon verra le temps et lopportunite, de sorte que quant viendra a besognier tout se rencontrera a vng temps.

Et pour fere quelque ouuerture des choses particulieres que lon peut commencer a faire des a present et continuer par cy apres, semble pour ce que le plus facile et seur moyen que soit a cecy, est celluy de messieurs des ligues, que monseigneur doit des a present comencer a pratiquer, dentrer en plus estroite amitié auec eulx par tous les moiens quil porra, sans encoures rien declairer de cecy a personne viuant, mais seulement leur fere entendre qui desire sur toutes choses estre bien et en bonne et estroicte intelligence auec eulx, et a ce tenir les moiens qui ont este bailles par les instructions de celluy qui va audit pays. Et si queleun des gens dudit pays de soy mesmes luy faisoit ouuerture de cecy, mectra les choses en difficulte et monstrera que ce seroit bien difficile et quasi impossible et dangereuse de meetre ..... monseigneur en grosse inimitie auec les princes qui pretendent audit duche, pour tirer de ceulx qui telz propos mectroient en auant, les moiens qui leur semble pouoir tenir pour y paruenir, dont apprés porra aduertir mondit seigneur sans monstre quil y entende aulcunement, et neantmoins dira, comme de soy mesme, ausdits parsonnages que, quant cella se porroit bien conduyre, eulx et ceulx qui sen meslcroient seroient bien asseheure den fere grandement leur proffit, et encores leur remonstrer, comme de soy mesme, le bien que ce seroit pour mesdits seigneurs des ligues, pour les raisons que ont este dittes dessus, lesquelles il diroit auoir pensé en sa fantasie. Et apprés quant en verra le temps, lon fera louuerture a ceulx qui semblera, auec les promesses.

Item et en tractant et faisant ladite amitié et intelligenee auec mesdits seigneurs, ne fault en maniere du monde dire en public ne aultre lieu,

---

(1) Filiberta, sorella di Carlo III, fu promessa nel 1513 e sposata il 20 di febbraio 1515 a Giuliano de' Medici fratello di Leon X. Giuliano morì a Firenze nel 1516 lasciando Filiberta vedova a diciott'anni. Essa morì il 4 di aprile 1524 al castello di Vizieu il Grande nel Bugey.

que puisse estre rapporte, aucune parolle que puisse desplaire a nul des dits princes, mays monstrer que mondit seigneur a deuoir a tous deux; et pour le bien de la krestiente, et aussi pour le sien, desire sur toutes choses quilz soient en bonne paix ensemble et en bonne amitié et intelligence auec mesdits seigneurs; mais bien pourra dire a la diete et la ou sera expedient, que mondit seigneur fait son principal fondement de la seheurté de son estat sur mesdits seigneurs, combien qui se veuille et luy soit besoing viure en bonne amytie auec lesdits princes.

Item et quant aduertira lesdits princes de la practique quil maine auec mesdits seigneurs des ligues, en termes generaulx, destre bien doulx, et de leur fere entendre par tous les moiens quil porra, quil veult bien viure auec eulx et faire son principal fondement sur eulx, touchant la seheurte de son estat. Et dira le faire pour crainte quil a deulx, et doubtant que a lappetit de ses ennemys et hayneux ou pour aulcune suspection quilz eussent de lamitie et du deboir quil a ausdits princes, ne luy fissent quelque mauluais tourt, ainsi quil a este souuent delibere par partie deulx; et que, puys que lesdits grans princes se humilient si for enuers eulx, fault bien que mondit seigneur, qui nest pas a comparer a eulx et qui est du tout entre les mains et de la mercy de mesdits seigneurs, le face; mays quilz peuent bien entendre quil aimeroit trop mieulx soy submectre et renger ausdits princes que a mesdits seigneurs, quant il verroit la saison, et ce quil fait nest que pour crainte et necessite. Et neantmoins, que lamytie et intelligence quil prendra auec eulx, profitera ausdits princes es choses quilz auront a fere ausdites ligues, et aultres telles remonstrances par lesquelles lon contentra aisement lesdits princes; et a tout le moins se justifiera lon enuers eulx.

Item et particulierement quant a lempereur, pour lentretenir et disposer a ladite pratique, seruira sur toutes choses le tracte du mariage que dessus, sil y veult entendre; et, pour abreger, cest la chose que je voit plus necessaire et plus utile a la maison au temps que court et que lon voet venir. Et dauantaige lon porra, par leurs moyens et mesmes des particuliers desdites ligues, faire ce entendre et remonstrer audit empereur, quil est impossible quil tiengne ne quil garde le duche de millan pour luy ne pour ses enfans, pour les raisons susdites et encores pour la partialité du pays, pour linconstance des subgectz et pour la variete des pratiques ditalie et mesmes pour la grosse despence que est necessaire a le garder, a quoy le roy ne peult fournir; Et que le mieulx quil porra

faire, sera de fere tumber ledit duche en mains de quelque prinee a luy feable, qui soit aggreable aux pajx et aux voisins, surtout a mesdits seigneurs des ligues. Et ces remonstranees se porront fere par diuers moiens et de diuers lieux, sans nommer mondit seigneur sil ne vient du propre mouuement dudit empereur, jusques a ee que lon voye les matieres disposees pour executer la chose; car a lors fauldra que louuerture se face ainsi et par la forme et maniere que lon aduisera, selon la disposition des temps, des pratiques et des matieres.

Item et quant au Roy, mondit seigneur monstrera tousiours grande et principalle amytie et confidence en luy et en madame sa seur, pour les raisons et moiens que ont este dit dessus et ennoyees par instructions a monseigneur le viscomte (1). Et leur comuniquera tousiours les afferes a temps et saisons, mesmement touchant le traete des ligues, ainsi que a este dit. Et quil le fait principallement pour seruir a son affere, et de fait tiendra tousiours main a la pratique de lamytie entre luy et lesdites ligues, mays de sorte quilz ne le pregnent que en bone part, ne pareillement lempereur enuers lequel lon porra faire les excuses en suyuant ce que lon a baille par instruction a monseigneur de salenoue (2) Et danantaige que quant le mariage se feroit, ledit empereur peult bien estre esseheure que mondit seigneur ne feroit aucune chose sans son seeu, aduys et bon playsir et aultres telles remonstrances, dont lon sauysera en besognient selon le occourrent des temps et des afferes. Mais ne fault en maniere du monde que le Roy ne madame entendent ladite pratique du mariage, jusques a ce qui soit conclut de le faire; bien porra lon dire, silz en sentront quelque vent, que des long temps mondit seigneur a este presse de cella, mais quil nest pour prandre part la ne aellieurs, sans leur communiquer et auoir leurs aduys comme de ses plus prochanes parens et prencipaulx amys etc. Et quant les choses seront conclutes auec ledit empereur, on tronuera des moyens asses pour persuader ausdit seigneur et dame, que monseigneur ne peult prendre aultre parti et est constraint de ce fer, et neantmoins que cella seruira a laffere dudit seigneur et du roiaume.

Etem et fauldra par diuers moyen dont lon aduisera, faire et remonstrer ausdits seigneur et dame, que le duche de millan est la destruction de france et quil est impossible de la garder sans trop grant daugier et

(1) Il signor di Confignon ambasciatore di Savoia in Francia.

(2) Alessandro signore di Saleneuve plenipotenziario di Savoia presso le Leghe svizzere.

despense, et par ainsi que trop mieulx vauldroit le remectre a quelcun sien amy, ainsi que a este aduise dessus. Et a ceci saccordront tous les saiges gens de france et le conseilleront audit seigneur sil leur en demande conseil; et pour en fere lesdites remonstrances se trouuera gens asses en france ausquelz lon en pourra dresser les propos en termes generaulx et par maniere de deuise; mais, oultre ce, lon porra faire que le pape et les amys du Roy en Italie persuaderoit cela mesmes audit seigneur; desià cy deuant et du temps du feu Roy lon fait, et trop plus aisement le feront a present; mays sur tout seruiront les remonstrances que se feront du conseile des ligues par les particuliers que le Roy tient pour ses amys, ausquelz on le fera faire tant que lon vouldra, tant de bouche que par lettre.

Item et pour parvenir plus facilement a ceste pratique seroit fort requis que le Roy remyst la Comté de nouarre a mondit seigneur en lieu de sa pension, encores quelle ne luy fut daucun reuenu ou de bien petit; car, par ce moyen, il mectroit le pie audit duche, et approcheroit de millan et des pays des ligues, que seroit vng grant point. Et mesmement en tractant ceulx dudit comté de nouarre de la sorte quil on tracte ceulx . . . . . de vercell et entretenant en leur bouche la noblesse et le peuple, comme lon feroit bien aisement, lon gaigneroit bien aisement en peu de jours le cueur des millanais. Et ceste pratique fauldroit que se fit promptement et uant que les francoys fussent chasses du pays, car appres ne seroit plus besoing de ce fere, mais fouldroit penser a aultres moyens. Et cecy se pourra persuader aisement au Roy luy remonstrant que se sera son grant proffit, tant pour ce que par ce moien il se descharge de ladite pension ditalie et de la garde dudite nouarre, comme aussi pour ce que en pregnant mondit seigneur et acceptant cela il soblige sansiblement a la deffense de tout le duche; car si le roy le pert, il est seur de perdre cella, et en tout euenement se desclarera fermement pour ledit seigneur acceptant cella de luy comme duc de millan, la ou jusques icy sest porte pour neustre; et daultre part, si en perdant le roy le reste dudit duche, mondit seigneur pourroit pour pratique garder cella, se seroit vne grosse faueur audit seigneur, car il sen seruiroit en aultres temps ainsi quil a tousjours fait et fait encores a present des aultres terres de mondit seigneur; et par ce moyen auroit tousiours vng pié dedans ledit millan a cause dudite nouarre par le moyen de mondit seigneur, là ou perdant millan na aulcun espoir de le garder.

Et si lon veoit trop grande difficulte a persuader cecy au Roy, lon

porroit meetre en auant que mondit seigneur le print en ceste condition: que quant le roy auroit moyen et faculte de recouurer ledit duche, mondit seigneur remectrat cela, en luy baillant recompense telle qui serat auise, et auec quelque promesse de luy donner passaige, port et faueur toutes en quantes foys il sera dispose de recourer ledit duche. Et par effect ne fault laiser aucune promesse raisonnable a faire pour pervenir a cecy, car appres, le temps et la conduite abillent tout, et nest la maistrise que dentrer vne foys dedans a quelque marché que ce soit.

Item et quant le roy sera content de cecy, ne fait a doubter que on ne le face trouuer bon a messieurs des ligues par les pratiques que lon y dressera des que lon entendra que le roy y preste oreilles. Et sil le fera, lon trouuera bon a lempereur mesmement, tractant le mariage et luy remostrant que mondit seigneur tiendra cela et tout le remanent quil a et quil aura jamays de son fiefz, prestz a luy en faire seruice.

Item et pour dresser ceste pratique en france, lon aduisera que sera propice et quel gens lon y pourra emploier pour remostrer principallement a madame lhonneur que luy sera de faire cecy, en faisant le proffit du roy et du royaume comme a este dit.

Item et quant est tresrequis de bien entretenir notre saint pere le pape et monstrer que mondit seigneur a sa tout elle confiance en luy. Et pour le luy fere mieulx cognoistre, est requis que mondit seigneur luy comunique ses afferes premierement sans declairer ladite pratique jusques au besoing, mais remonstrant le dangier en quoy il est du different desdites princes et ligues; et luy demandant son aduys, de la sorte quil semble a sa Sainctete quil se doibt conduire, disant quil se veult a tousiours gouuerner par son aduys et conseil, et luy suppliant quil luy plaise ambrasser ses afferes comme de son propre filz et aultres telles demonstrations que lon aduisera. Et auec le temps, sellon les occurentz, on luy declayrera plus auant ladite pratique et la luy fera lon trouuer bonne sans difficulte, tenant les moyens que lon meetra lors en auant, mesmement si de son couste se fait quelque ouerture de nouueau mariage ou daultre intelligence.

Item et pareille confidence fault monstrer au cardinal de medici (1) et sainete marie in portieu (2) et au magnifique Laurens (3), de sorte

(1) Il Cardinale Giulio de' Medici che fu poi Papa Clemente VII.
(2) Il Cardinale di Bibiena, Giovanni Tarlato.
(3) Lorenzo de' Medici che fu poi Duca di Urbino.

toutefoiz que ledit saint pere cognoisse que la principalle addresse et confidence est a sa saintete, car il *ahane* cela et ne veult point que lon cuyde quil se laisse gouuerner.

Item et daultre couste, en toutes choses que lon porra, fault que monseigneur monstre auoir amytie et parfaicte confiance en la signorie de florence, et face tous plaisirs et toutes gratuites aux marchans et gens dudit pays en tous les afferez quilz aurontz par deca es pays de monseigneur. Et le semblable fault fere aux geneuoix et encores aux venitiens, et dabondant donner charge a ceulx qui seront en court de rome et de france de part mondit seigneur, de tenir tous bons propos et toutes parolles amyables aux ambassadeurs de ladite sengneurie qui seront la, et leur faire entendre que monseigneur les ayme et desire leur prosperite et leur bien et les tient pour ses bons amys, et aultres telles faczon de faire que puissent estre raportees a ladite segneurie, sans touteffoys venir a trop grande comunication auecques eulx en publie pour non mectre lempereur en suspection, mays bien soit declairez quil est deplaisant du different entre ledit empereur et eulx, et que sil pouuoit y dresser quelque bon appoinctement, il si emploieroit de bon cueur. Et par auanture auec le temps les choses porroient venir de telle sorte que par le moien de mondit seigneur se tractoit ledit appoinctement au gre des deux parties.

Item en faisant lesdites pratiques lon porra par desdits moyens acquerir la bien vueillance du peuble millanais, en retenant des gentilz hommes et marchans dudit millanais es pays de mondit seigneur et les tractant umainement et leur faisant toutes gratuitez et montrant auoir amour en la nation et estre plaignantz de leurs aduersitez et desirer leur deportz et soit offrant de leurs faire tous plaisir et toute courtoysie. Et sur ce, fere courir la bruit dextrement par millan par le moyen des amys de mondit seigneur et mesmement des generaulx dudit millan et de sauoye, et aultres telles demonstrations que peuuent faire gaigner le cuer desdits millanais.

Toutes les choses susdites sont de sorte quelles ont apparence de pouuoir venir a effectz et aysees a conduire sans nul hazardz et sans granz fraiz. Et nen y a une seulle que, quant bien ladite pratique ne viendrat a effect, ne soit utile et prouffitable a mondit seigneur et a son estat et que ne puisse seruir a aulcune chose des a present et plus encores pour laduenir.

Et se dieu vouloit que ceste pratique vint a bon bout, ce seroit vng

si grant bien et honneur a mondit seigneur et a sa maison que luy ne pourroit extimer, car se seroit appres vng si gros estatz que ont le porroit parangonner aux plus grand de kristiente. Et si ne demorroit pas a cella, car incontenent gennes se mettroit a son obeissanee et ne porroit faire aultrement; et tous les potentatz ditalie seroient bien joieulx dauoir amitie, consideration et intelligenee aueeques luy. Et par effeet en bien peu de temps porroit faire de bien grans choses. Et dautant seroit plus grant honneur a mondit seigneur, que dune grande neeessite et du plus grant dangier en quoy jamays fut lestat de sauoye, il auroit par sons sauoir et conduite remys la maison a la plus grande foree, gloire et auetorite quelle fust jamays. Par quoy bien y doibt veiller et trauailler, et sur tout et auant toutes choses auoir son recours et sa confiance en Dieu qui est celluy dont tous biens viengnent, et faire toutes choses que lon eognoistra luy estre plaisantes et soy garder de celles que luy sont desplaisantes; fere ausurplus faire prieres seeretes et publiques par ses pays pour la eonservation de luy et de son estat et mesmes par les eonuens de religion et de relligieuses reformes; Et dauantaige eoutumer a faire halmones et toutes heuures charitable, le plus que lon porra; Experant, moyennent son ayde et faisant de notre eouste ee que nous debuons et pouons faire, paruenir aux fins que dessus; le tout a intention den user bien, et demploire au seruiee de Dieu et de la eristiente toute sa foree quant temps sera; Et ausurplus de faire administrer bone justiee par tous ses pays et de fere eesser toutes blasfemes et tout peehés desplaisant a Dieu de son pouuoir, car aiant eeste bone volunte et confianee a Dieu, je ne foys nul doubte quil ne face paruenir les choses a ee que sera pour le myeulx de mondit seigneur, le quel ne doibt desirer aultre choses ne requerir a Dieu.

DEI NOMI PERSONALI

PRESSO I POPOLI DELL'ITALIA ANTICA

del Professore

ARIODANTE FABRETTI

Memoria approvata nell'adunanza del giorno 14 febbraio 1861.

Una quistione pertinente alla storia ed alla filologia insieme, che gli antichi non avevano dimenticata, si è quella che versa intorno alla ragione dei nomi personali; nella quale gli eruditi moderni non sempre si trovarono concordi, sia nel ricercare il significato dei prenomi, dei gentilizi e dei cognomi, sia nel determinare con quali regole venissero dai Romani adoperati. Anche tra gli antichi non erano in tutto concordi le opinioni riguardo ai primi tempi di Roma; e il contrasto perdura ancora, specialmente ove si tratti dei nomi assunti dai cittadini che abitavano nel prisco Lazio e nelle contrade dei Sabini, degli Equi, degli Ernici, dei Volsci e dei Sanniti. L'oscurità poi pareva divenisse maggiore, allorchè si posava lo sguardo sui monumenti degli Umbri e degli Etruschi; e se l'argomento dei nomi personali fu largamente trattato secondo gli usi ricevuti dagli abitatori di Roma, rimase incompiuto rispetto a quelli dei popoli contermini, e non furono studiate abbastanza, o piuttosto trascurate, le lapidi funerarie degli Etruschi, i marmi ed i bronzi scritti che appartengono alle popolazioni dell' Umbria.

Oltre gli appunti conservati nelle opere di Varrone e di Festo, di Macrobio e di Valerio Massimo, di Appiano, di Dionigi d'Alicarnasso e di Plutarco, riesce preziosissimo l'*Epitome de nominum ratione*, attribuito or a Valerio, or a Giunio Paride; e tra le elucubrazioni dei moderni ebbe singolar pregio l'opera del Cannegieter *De mutata Romanorum nominum sub principibus ratione*, e lo scritto del Sigonio *De nominibus*

Romanorum, che con acconcia erudizione e con ferma critica diede lume agli eruditi nelle storiche investigazioni. Non intendo io ripigliare la questione dei nomi romani, ampiamente svolta dagli archeologi, ma sì bene allargare il campo e portare le ricerche sul terreno dell' Etruria e dell' Umbria, facendomi ad esaminare le molte iscrizioni che per la loro natura funeraria recano i nomi dei defunti con tutte le loro relazioni di parentela e di sangue; le quali ricerche non dovevansi, a mio credere, disgiungere da quelle che appartengono alla Roma antica, ma comprendere in un solo scritto che toccasse dei *nomi italici*.

La sentenza di Varrone, che presso gli antichi, lunge dall'assumere alcun prenome o cognome, con un solo nome si distinguessero tra loro i cittadini (sull'esempio di *Romolo*, di *Remo* e di *Faustolo*), veniva risolutamente contradetta da' suoi stessi contemporanei (1); i quali non solo recavano innanzi la madre e gli avi dei fondatori di Roma, *Rea Silvia*, *Silvio Numitore* e *Amulio Silvio*, ma risalivano agli antichissimi re albani, *Capeto Silvio* e *Agrippa Silvio*, e discendevano ai duci *Mezio Fuffetio* e *Tutore Clelio*; anzi, uscendo dal territorio del Lazio, rammentavano, tra i Sabini, *Tito Tazio* e *Numa Pompilio*, nato da *Pompilio Pompo*, e i duci *Pirtiliano Laviano*, *Volesio Valesio*, *Mezio Curzio*, *Allo Funnisilatico*, e degli Etruschi ricordavano *Larte Porsenna*, degli Equicoli *Settimo Modio* e *Sertore Resio*. Dal che si faceva manifesto, che nel finire del possente regno di Alba e nel primo secolo di Roma l'uso del doppio nome fosse generale tra i popoli Latini, Sabini, Equi ed Etruschi: e l'autore dell'Epitome citato stette fermo nel credere che da questi, e specialmente dagli Albani, avessero preso esempio i Romani nella imposizione dei nomi. Arrunzio Claudio pretendeva per lo contrario che fosse una imitazione, tolta dagli usi dei Greci, e sforzavasi piegare le tradizioni e la storia per ravvisare negli eroi di Omero prenomi, gentilizi e cognomi,

---

(1) Auct. *Epit. de nom. rat.*: « Varro simplicia in Italia fuisse nomina ait, existimationisque suae argumentum refert, quod *Romulus* et *Remus* et *Faustulus* neque *praenomen* ullum, neque *cognomen* habuerunt. Qui ab eo dissentiunt, aiunt matrem eorum *Ream Silviam* vocatam, avum *Silvium Numitorem*; fratrem eius, *Amulium Silvium*; et superiores Albanorum reges, *Capetum Silvium*, *Agrippam Silvium*; posterioresque duces *Metium Suffetium* et *Tutorem Cloelium* vocatos: nec contenti his ad Sabinos transgrediuntur, et *Titum Tatium*, *Numam Pompilium* et patrem eius *Pompum Pompilium*; eiusque denique regionis principes enumerant *Pirtilianum Lavianium*, *Volesum Valesium*, *Metium Curtium*, *Allum Funnisillaticum*. Ex Tuscis recitant, *Lartem Porsennam*; ab Aequicolis, *Septimum Modium* primum regem eorum, et *Sertorem Resium*, qui primus ius feciale instituit. In hunc modum Varronis sententia subruitur ».

come *Achilles Aeacides podoces, Pyrrus Aeacides Neoptolemus, Alexander Dardanius Paris* (1). Ma nè Dionigi di Alicarnasso, nè Plutarco, ragionando de' nomi romani, accennarono mai a regole che fosser venute di Grecia; e Pausania (2) offre contraria testimonianza scrivendo « che i » Romani si chiamano non già col nome del padre, siccome fanno i Greci, » ma si impongono a ciascuno tre nomi almeno, e più ancora ».

La serie dei personaggi, che venivano rammentati a scalzare l'autorità di Varrone, di gran lunga si aumenta col tener conto di que' personaggi che, nati nelle varie provincie d'Italia, per guerresche imprese o per senno civile meritarono di essere tramandati alla memoria della posterità, specialmente nei libri di Tito Livio. Son tali i Sabini *Appius Herdonius*, *Mettus Curtius*, *Modius Fabidius*, Ἄντρων Κοράτιος; i Capuani *Marius Alfius*, *Calavius Ofilius*, *Pacuvius Calavius*, *Calavii Ovius Noviusque*, *Seppius Lesius*, *Statius Mettius;* il Frentano Ὄβλακος Οὐλστίνιος (Dionys. XVIII, 2 sq.); i Nolani *Herius Pettius* e *Vettius Messius;* i Campani *Minius Cerrinius, Herennius Cerrinius;* i Sanniti *Brutulus Papius*, *Comius Castrouius*, *Marius Eguatius*, *Stennius Mettius*, *Staius Minatius*, *Poutius Telesinus;* i Lucani *Marius Statilius* e *Stennius Statilius;* il Volsco *Attius Tullius;* il Marrucino *Herius Atinius;* l'Osco *Messius Ciciurus;* l'Equicolo *Gracchus Cloelius;* e *Tullius Hostilius* di Medullia, *Mustela Tanisius* e

(1) Diomed. pg. 321 ed. Keilii (pg. 307 P.): « Huius modi autem nominum ordinatio, sicut Arruntius Claudius asserit, a Graecis tracta demonstratur. quae quidem ut sit magis intellecta perspicua et ad imaginem illorum esse conposita, exempli gratia haec subicienda decrevi. apud illos *Alexander proonymos* est, quod nos *praenomen* dicimus; hoc gentilicio nomini praeponitur. est autem *gentile nomen Dardanius*, quod originem familiae declarat. tripertita post modum frequentavit conpositio vice cognominis specialiter posita gentilique nomini subiuncta. est autem *cognomen* quod cuiusque personae propriam notat definitionem, nam in eadem gentilitate multi *Dardanii*, sed ad cognoscendam cuiusque proprietatem et quis ex multis intelligi debeat cognomen ostendit, ut est *Paris*. sumuntur autem *cognomina* triplicitер, aut a qualitate vel quantitate corporis, ut est apud nos * vel animi vel facti, sicut apud illos a facto *Paris* est cognominatus. eodem modo *Achilles praenomen*, *nomen Aeacides*, *cognomen* specialiter positum a facto, id est a pedum velocitate, *podoces*. siquis ergo velit haec simul tria copulare, sic ordinet, *Achilles Aeacides podoces*, *Pyrrus Aeacides Neoptolemus*, *Alexander Dardanius Paris*. his etiam unum accedit, *agnomen* ex aliqua virtute forinsecus quaesitum, quod ἐπιγέννητον Graeci dicunt, quo cognomina discriminantur, ut est *Ulixi agnomen polytlas*. nam *praenomen* est, ut ait Ibycus, *Olixes*, *nomen Arsiciades*, *cognomen Odyseus*, et ordinantur sic, *Olixes Arsiciades Odyseus polytlas*. non fere tamen omnia nomina quattuor species admittunt. quaedam enim inveniuntur apud illos *unica* vel *dionyma*, ut *Palaemon Melicertes*, *Astyanax Scamandrios*, et similiter alia, sicut apud nos *Numa Pompilius*, *Tullus Hostilius*, *Ancus Marcius*, *Servius Tullius*, *Marcus Antonius*, *Lucius Paulus*, item alia ».

(2) *Ach.* VII, 8: τοῦτο γὰρ οἱ τῶν ὀνομάτων ἦν τὸ ἐκδηλότατον, ἐπεὶ καλοῦνταί γε οὐ πατρόθεν οἱ Ῥωμαῖοι κατὰ ταὐτὰ Ἕλληνιν, ἀλλὰ καὶ τρία, ὁπότε ἢ ὀλίγιστα, καὶ ἔτι πλέονα ὀνόματα ἑκάστῳ τίθενται.

Laevinus Cispus di Anagni, *Stenius Egnatius* di Acerra, *Octavius Mamilius* di Tuscolo, *Statius Trebius* di Compsa, *Vitruvius Vaccas* di Fundi, e il *Mamurius Veturius* de' carmi saliari. Ma in questi personaggi il primo nome è veramente un prenome, come lo intendevano i Romani? Certo le iscrizioni dell' Italia meridionale ne autorizzano a ritenere alcuni quali veri prenomi, che in Roma divennero nomi di genti (Niebuhr *Hist. rom.* III rem. 217); ma certi altri vogliono essere riguardati come nomi personali accoppiati al gentilizio, se non vogliasi rendere soverchia la serie dei prenomi nelle regioni che circondavano il Lazio. Ed è qui opportuno avvertire, che di prenomi simili a quelli ora menzionati, ci si offrono esempi anche nel territorio degli antichissimi Liguri, sia nella stele della università di Genova che reca *Mezu Nemusus*, *Mettus* o *Mettius Nemusius*, sia nella tavola genovese che finisce col serbar memoria di due personaggi chiamati *Moco Meticanio Meticoni filius* e *Plaucus Peliani Pelioni filius*.

Dell'uso presso i Romani invalso della duplicazione dei nomi due ragioni assegna Prisciano: la prima che coloro i quali in ciascuna famiglia portavano lo stesso nome cominciassero a distinguersi col preporne un altro, chiamato appunto *prenome;* la seconda che per cattivarsi la benevolenza dei Sabini, che Romolo aveva accolto nella città, venissero preposti i nomi Romani ai Sabini, e i Sabini ai Romani (1). Senza toccare delle origini aveva osservato lo storico Appiano (2), che i Romani, come tutti i mortali, ebbero anticamente un nome solo, e che appresso ne ebbero due, e non andò molto che si prese ad aggiungerne un terzo ad alquanti per distinguerli dai casi loro o dalle virtù, secondo che taluni pur dei Greci avevano de' soprannomi oltre dei nomi. E più chiaramente Varrone *De l. l.* IX, 60 pg. 216: « Cum essent duo *Terentii* aut plures, discernendi causa, ut aliquid singulare haberent, notabant: forsitan ab eo qui *mane natus* esset*, ut is *Manius* vocaretur*; qui *luci Lucius;* qui *post patris mortem, Postumus* ». Con le osservazioni dei grammatici latini Prisciano (3),

(1) Prisc. pg. 57 = 577 P.

(2) *Praef.* cap. 13: Καὶ τὰ ὀνόματα Ῥωμαίοις πάλαι μὲν ἦν ἓν, ὥσπερ ἀνθρώποις ἅπασιν, ἑνάστῳ· μετὰ δὲ, ἐγένοντο δύο· καὶ οὐ πολὺς χρόνος, ἐξ οὗ καὶ τρίτον ἤρξατό τισιν, ἐς ἐπίγνωσιν, ἐκ πάθους ἢ ἀρετῆς προστίθεσθαι· κατὰ καὶ τῶν Ἑλλήνων τισὶν, ἐπὶ τὰ ὀνόματα, ἦσαν ἐπικλήσεις.

(3) Prisc. II, 93 sq. = pg. 577 sq. P.: « Nam propria habent species separatim quattuor: *praenomen*, *nomen*, *cognomen*, *agnomen*. *praenomen* est quod *praeponitur* nomini vel differentiae causa vel quod tempore, quo Sabinos Romani asciverunt civitati ad confirmandam coniunctionem, nomina illorum suis praeponebant nominibus et invicem Sabini Romanorum. et ex illo consuetudo tenuit, ut nemo Romanus sit absque *praenomine* ..... *Nomen* est proprie uniuscuiusque suum, ut *Paulus* [proprium]; *cognomen*, cognationis commune, ut *Scipio;* *agnomen* est, quod ab aliquo eventu imponitur, u

Elio Donato (1), Alcuino (pg. 2088 P.) e Diomede (2) concordano le memorie antiche nel distinguere quattro specie di nomi, il *prenome*, il *gentilizio*, il *cognome*, il *soprannome* (agnomen), come in *Lucius Cornelius Scipio Barbatus*, *Cneus Cornelius Scipio Hispanus* e *Publius Cornelius Scipio Africanus*. L'autore *De nominum ratione* scriveva: « Romanos autem arbitrandum est maxime ab Albanis et Sabinis multiplicandorum nominum consuetudinem traxisse, quoniam ab illis orti sunt. Omnia autem, quae ad unumquemque nostrum definiendum excogitata sunt, eamdem vim significandi hominis obtinent. Quod per proprietatem dicitur, hoc distat, quia eo gens cognoscitur, ideoque dicitur *gentilitium*: cetera ordine variantur; nam quod praeponitur, *praenomen*; quod postfertur, *cognomen*; quod ad ultimum adiicitur, *agnomen* est: quorum series non ita, ut exposui, semper servata est. Animadverto enim in consulum fastis perplexum usum praenominum et cognominum; fuisse dictum, *Postumum Cominium Auruncum*, et *Postumum Aebutium Elvam*, et *Vopiscum Iulium*, et *Opitrem Virginium Tricostum*, et *Paullum Fabium Maximum*. Quin etiam quaedam cognomina in nomina versa sunt, ut *Caepio*: namque hoc in Bruto nominis locum obtinuit ».

La erudizione di Varrone portava a presso che trenta i prenomi romani (3), che Dionisio (4) chiama *nomi comuni* (τὸ κοινὸν ὄνομα) e Plutarco (5) *primi nomi* (τὰ πρῶτα ὀνόματα); e ventotto ne enumera il Sigonio: *Agrippa*, *Appius*, *Aulus*, *Caeso*, *Caius*, *Cnaeus*, *Decimus*, *Faustus*, *Hostus*, *Lucius*, *Mamercus*, *Manius*, *Marcus*, *Numerius*, *Opiter*, *Postumus*, *Proculus*,

---

Africanus, *Isauricus*. invenimus tamen multa in his quattuor speciebus propriorum nominum invicem pro se posita, et quae in aliis personis sunt praenomina, haec in aliis loco nominis accipiuntur, ut *Tullius Servilius:* hic *Tullius praenomen* est; *M.* vero *Tullius:* hic *nomen*. similiter et in aliis loco cognominis aliorum agnomina vel contra, ut *Cicero*, qui primus ab habitu faciei nominatus est, *agnomen* hoc habuit, familiae vero eius *cognomen* fuit. similiter *Caesar*, *Scipio* ».

(1) Aelius Donatus pg. 1743 P.: « *Propriorum nominum* secundum Latinos quatuor sunt species *praenomen*, *nomen*, *cognomen*, *agnomen*, ut *Publius Cornelius Scipio Africanus* ».

(2) Diomed. pg. 321 (pg. 306 P.): « Propriorum nominum quattuor sunt species, *praenomen nomen cognomen agnomen*. *praenomen* est quod nominibus gentiliciis praeponitur, ut *Marcus Puplius*. *nomen proprium* est *gentilicium*, id est quod originem familiae vel gentis declarat, ut *Porcius Cornelius cognomen* est quod unius cuiusque proprium est et nominibus gentiliciis subiungitur, ut *Cato Scipio*. ordinatur enim sic, *Marcius Porcius Cato*, *Puplius Cornelius Scipio*. *agnomen* quoque est quod extrinsecus cognominibus adici solet ex aliqua ratione vel virtute quaesitum, ut est *Africanus Numantinus* et similia ».

(3) « Gentilitia nomina Varro putat fuisse innumera, et praenomina circa triginta ». Auct. de nom.

(4) III, 48, 70.

(5) In *C. Mario* I, 1.

Publius, *Quinctus*, *Servius*, *Sextus*, *Spurius*, *Tiberius*, *Titus*, *Tullus*, *Vibus*, *Volero*, *Vopiscus*. Ora di siffatti prenomi è necessario distinguere quelli che furono propri dei Romani e quelli che i Romani stessi ebbero comuni con gli altri popoli italici, particolarmente coi Sabini e co' Sanniti, con gli Etruschi e con gli Umbri. Appartengono ai Romani *Agrippa* (1); *Hostus*, qui peregre apud *hospitem* natus erat (2); *Opiter*, qui patre mortuo avo vivo gignebatur (3); *Postumus*, colui che nasceva dopo la morte del padre (4); *Proculus* (5); *Spurius*, patre incerto genitus (6); *Volero* (7); *Vopiscus* (8); *Caeso*, ex utero matris exsectus (9). Erano comuni ai Romani ed agli Osci o Sanniti: *Decimus* o *Decius* (osco ƧƎƆ *dek*), onde i Capuani *Decius Magius* e *Decius Jubellius*; *Lucius*, osco ⅃ (*l*), ⅃VƆKIƧ (*luvkis*) e ⅃VƆIKIƧ (*luvikis*); *Mamercus* (osco ƎƆƎMMAM *mamerce*), poi contratto in *Marcus*, da *Mamers* antica forma di *Mars*; *Numerius* (osco ƧIIƎMMVIИ *niumeriis*); *Vibius*, osco Ɔ (*v*), onde il peligno *Vibius Accuaeus*. Prenomi de' quali usavano i Sanniti, i Romani e gli Etruschi erano: *Appius*, etrusco ⅃A *ap*, sabino *Attus* od *Attà* (10), onde *Attus Clausus* = *Appius Claudius*; *Cnaeus* o *Gnaeus*, *ob insigne naevi* (11), osco *Gnaevius*, etrusco ƎƎƎИƆ (*cneve*). Tal altro era comune ai Romani, agli Umbri, agli Etruschi ed ai Sanniti, come *Caius*, umbr. Ƙ (*c*), etrusco ƎAƆ (*cae*), osco ⋖ИƆIƧ (*gavis*); ma il maggior numero dei prenomi romani s' incontra nell'epigrafia dell' Etruria. *Aulus* (12), etr. A (*a*) ed Ǝ⅃VA (*aule*); *Faustus*, *a favore* (13), etr. ƎYMA8 (*faśte*); *Publius*, etrusco ⅃V⅃ (*pup*); *Quintus*, etr. ƎtИIƎƆ (*cvinte*); *Sextus*, etr. ƎƧ (*se*); *Tiberius* (14), etrusco IϟƎƎO (*thefri*); *Titus*, etrusco ƎtIt (*tite*), che s' incontra anche nell'umbro con la semplice Y (*t*).

---

(1) Auct. de nom.
(2) Auct. cit.
(3) Auct. cit.
(4) Varr. *De l. l.* IX, 60 pg. 216.
(5) Auct. de nom.
(6) Auct. cit.
(7) « Et *volentibus* nasci liberis parentibus indebatur ». Auct. cit.
(8) Auct. cit.
(9) Paul. pg. 57.
(10) Auct. cit.
(11) Auct. cit.
(12) « *Auli*, qui diis *alentibus* nascuntur ». Auct. cit.
(13) Auct. cit.
(14) « *Tiberii* vocitari coeperunt qui ad *Tiberim* nascebantur ». Auct. cit.

Alcuni prenomi erano speciali di alcuni popoli. Appartenevano ai Volsci ed agli abitatori della Campania e del Sannio: *Egnatius*, volsco EK; forse *Comius* o *Cominius*, osco MK (*km*); *Calavius*, osco KNNK (*kaal*); *Magius*, osco KINM (*mais*); *Mara* o *Marius*, osco OM (*mr*) e MAPA; *Pacius* o *Paquius*, volsco PA, osco KP (*pg*); *Pupius* o *Puplius*, osco PVP (*pup*); *Paulus* o *Paculus*, osco KVKNNP (*paakul*); *Trebius*, osco OT (*tr*); *Statius*, osco KITNTK (*statiis*). Oltre i rammentati *Appius*, *Aulus*, *Gnaeus*, *Caius*, *Faustus*, *Publius*, *Quinctus*, *Sextus*, *Tiberius*, *Titus*, appartengono agli Etruschi *Atius* (⊙A *ath*), *Setrius* (ƎQOƎK *sethre*), *Velius* (KƎF *vel*); ma i più usitati erano *Aruns* (⊙NQA *aruth*) e *Lars* o *Lar* (QAK *lar*, ⊙QAK *larth*), per le donne *Arnutia* e *Lartia*, veri prenomi nazionali, come il muliebre AHAO (*thana*) o *Tannia*, diminutivo KIFKHAO (*thanchvil*) o *Tanaquilla*, de' quali non s'incontra vestigio fuori dell'Etruria. Intorno a questi ultimi, a comprenderne l'origine e il significato, molte cose furono dette dagli archeologi; e taluni si fecero a rintracciarvi titoli di dignità civile, come *domina* nell'usitatissimo *thana*, e lo scozzese *laird* in *Lars*; ma questo ha comune l'origine co' *geni* o *lari* domestici e famigliari, detti *Lares* dagli antichi, che alcuni riconducono alla radice sanscrita *vas* (abitare). Ricordandosi altri dei due figli di Tarquinio Prisco, *Lucio* ed *Arnute*, e di Collatino prima chiamato *Arunte*, poscia *Egerio* a cagione del suo povero stato, congetturarono che *Lartes* si appellassero i primogeniti, e *Aruntes* i nati dipoi; ma, oltrechè il prenome *Aruns* si riporta facilmente alle forme greche ἀρίων, ἀρείον ed ἄριστος, la storia rammenta che da Demarato, greco di Corinto, nascevano nella etrusca città di Tarquinia prima *Arunte*, poi *Lucumone*. E qui cade in acconcio notare, che una iscrizione, la quale si mostra all'ingresso del sepolcro dei Volunni a Perugia, incomincia con le parole MANMIKƎF OQAK ONQA (*aruth larth velimnas*), che suonano *Aruns et Lars Volumnii*; e percorrendo la bella serie delle leggende scolpite ne' cinerari di quello stesso sepolcro troviamo che *Aruns Volumnius* tiene un posto in tra gli altri di sua famiglia distinto e preminente. Constato i fatti; lo spiegarli è opera più ardua, che non paia a prima giunta; dappoichè le iscrizioni etrusche non siano state in sino ad oggi classificate in maniera da agevolare i confronti per trarne quei lumi che gioverebbero a schiarire ed illustrare il vivere civile di un popolo, che prima di Roma salse ad altissima fama.

Egli è certo tuttavia che schierando le iscrizioni etrusche, i due prenomi

che più spesso si veggono imposti ai maschi sono *Larte* ed *Aruntc*, e dei due l'uno con più frequenza ricorre; il che varrebbe a considerare i Larti come i primogeniti nelle famiglie; e tali pare che fossero veramente i famosi *Larte Tolumnio* e *Larte Porsenna*, l'uno re o lucumone de'Veienti, l'altro di Chiusi che fu potente avversario alla fortuna di Roma. Spessissimo i figli recano lo stesso prenome del padre; e ciò li farebbe riguardare in tal caso come i primogeniti. E per vero un frammento di Dione, pubblicato dal Mai (*Script. vet. nov. coll.* II, 541) c'insegna che per legge sancita in Roma l'anno 514, nel consolato di C. Claudio Centone e M. Sempronio Tuditano, ordinavasi che al solo primogenito convenisse portare l'eponimia paterna. Ὅτε ἐπί Μάρκου Κλαυδίου καὶ Τίτου Σεμπρωνίου ὑπάτων μόνῳ τῆς τοῦ πατρὸς ἐπωνυμίας τῷ πρεσβυτέρῳ τῶν παίδων μετέχειν Ῥωμαῖοι παρεκελεύσαντο. Ond' è che, citata avvisatamente la iscrizione milanese edita dall'Apiano pg. 29 e dal Gurtero 775, 1,

QVARTVS COMINIVS C · F · SIBI · ET
TERTIAE PETRONIAE M · F · VXORI · ET
L · COMINIO · C · F · ET
C · COMINIO · C · F ·
FRATRIBVS ET
TERTIAE COMINIAE SORORI · ET
AMPLIATO ET FELICI LIB.

egli è chiaro, dice il ch. Garrucci (*Scop. Falische* pg. 252), che il primogenito tra i fratelli sia colui che porta il prenome del padre, cioè *C. Cominius C. f.*, e poichè alla sorella si dà il prenome di *Tertia* deve indi dedursi che *L. Cominius C. f.* sia il secondogenito; indi viene *Tertia Cominia*, e poscia il quarto tra i figli di Cominio, che perciò si appella conformemente all'antico costume *Quartus Cominius C. f.*

Fuvvi chi mise in dubbio l'uso del prenome appo le donne romane; ma fu condradetto dal Sigonio, e in particolar modo da Pietro Servio, che recò innanzi gran numero d'iscrizioni latine, a provare che alle donne non diniegavasi la facoltà di assumerlo e premetterlo al proprio nome. Le testimonianze degli autori soccorrevano nell'accertare il vero. Scriveva Varrone *De l. l.* IX, 60 pg. 215 sg.: « Tertium genus in praenominibus ideo non fit item, quod haec instituta ad usum singularia, quibus discernerentur nomina gentilicia; ut ab numero *Secunda*, *Tertia*, *Quarta*; in viris ut *Quintus*, *Sextus*, *Decimus*, sic ab aliis rebus ». E poco dopo

(IX, 61): « E quibus, cum item accidisset feminis, proportione ita appellata declinarunt praenomina mulierum antiqui, *Mania*, *Lucia*, *Postuma*. Videmus enim *Maniam* matrem Larum dici; *Luciam Volaminiam* Saliorum carminibus appellari; *Postumam* ab multis post patris mortem etiam nunc appellari ». E Paolo abbreviatore di Festo pg. 224: « Praenominibus feminas esse appellatas testimonio sunt *Caecilia* et *Tarracia*, quae ambae *Gaiae* solitae sint appellari, pari modo *Lucia* et *Titia* ». E l'autore dell'*Epitome de nominum ratione*: « Antiquarum mulierum in usu frequenti praenomina fuerunt, *Rutilla*, *Caesella*, *Rodocella*, *Murcula*, *Burra* a colore dicta. Ista praenomina a viris tracta sunt, *Caia*, *Lucia*, *Publia*, *Numeria*. Caeterum *Caia*, usu super omnia celebrata est. Fertur enim *Caiam Caeciliam* Tarquinii Prisci regis uxorem optimam lanificam fuisse: et ideo institutum esse, ut novae nuptae ante ianuam mariti interrogatae, quaenam vocarentur, *Caiam* esse dicerent ». Dalle quali parole si ricava eziandio che il prenome *Caia*, ch'era comune ai popoli della Campania e dell'Etruria, inchiudeva un significato religioso e solenne ne' matrimoni romani; onde la formola, conservataci da Plutarco (*Quaest. rom.* num. 30), *ubi tu Caius, ego Caia*, che la donna, interrogata chi si fosse, pronunciava nell'accedere alla casa del marito. Gli antichi scrittori derivavano prenome sifatto *a gaudio parentum;* mentre i filologi moderni lo ravvicinano al sanscrito *gâiâ* (uxor); ed a me parve opportuno ricordare la glossa di Esichio, Γαῖος· ὁ ἐργάτης βοῦς, che *Caius* e *Caia* accompagnerebbe al sanscrito *go* col significato di *bos* in amendue i generi, alla qual forma si riconduce eziandio il greco γαῖα, che è quanto dire γῆ ossia la *terra*.

Gli scrittori latini rammentano *Paculla Annia* e *Vestia Oppia*, amendue native di Capua, con prenomi inusitati nelle donne romane; e le iscrizioni ci danno *Dindia Macolnia* nella cista del Museo Kircheriano, *Pola Livia* e *Cesula Atilia* nelle lapidi pesaresi, *Paulla Cornelia* nel sepolcro degli Scipioni. Aggiungansi, quali esempi di prenomi insoliti, ch'altri giudica cognomi preposti al gentilizio: *Maxima*, *Novia*, *Prima*, *Quarta*, *Rettila*, *Sergia*, *Tertia*, *Vibia;* come negli uomini: *Epidius*, *Galerius*, *Herius*, *Occius*, *Olus*, *Percennius*, *Petidius*, *Primus*, *Salvius*, *Tertius*, *Trebius*, *Vibius*. Sono poi notevoli le parole del citato autore *De nominum ratione:* « Pueris non priusquam togam virilem sumerent; puellis, non antequam nuberent, praenomina imponi moris fuisse, Q. Scaevola auctor est ». E Plutarco (*Quest. Rom.* num. 102) affermava che i Romani ai figliuoli maschi imponevano il nome nel nono giorno, e alle femmine nell'ottavo;

del che ricercava le ragioni nella combinazione dei numeri, secondo le dottrine dei Pittagorici.

Considerevole è il novero delle famiglie o gentilizi che si manifestano dai monumenti scritti degli antichissimi popoli italici; ed io mi fermerò solo a considerare le forme dei gentilizi etruschi, come quelli che per le loro desinenze presentano un'indole propria e locale. L'uscita dei nomi latini si discosta dalla terminazione in *ius*, quando essi nomi prendono la vesta toscana od accennano a toscana origine col finimento in *na*, come *Aulinna, Cecina* o *Cecinna, Ergenna, Perpenna, Sisenna, Largenna, Merenna, Spurinna, Tormena, Velcinna, Vibenna, Volusenna*, i quali nelle raccolte epigrafiche si ripresentano con la desinenza propria de' nomi romani. Ove la finale del tema è la sillaba *-na*, i gentilizi etruschi prendono nel caso retto una sibilante, più spesso gutturale che dentale, come *alethnas, thurmnaś, marcnaś, sentinas, spurinas, tarchnaś, velimnaś, vercnaś*, che si restituiscono con le forme romane *Aletinius, Thormenius, Marcanius, Sentinius, Spurinius, Tarquinius, Volumnius, Vercinius*. Cadde spesso la sibilante, come in *larcna* per *Larcanius;* e così in *Porsena* o *Porsenna* appo i Romani, che con la forma primigenia, conservataci dai greci scrittori, era Πορσίνας o Πορσέννας. L'uscita del femminile era in *ei*, come *Ceicnei* (Cecinia), *Larcnei* (Larcania), *Marcnei* (Marcania), *Velimnei* (Volumnia), *Vuisinei* (Volsinia), *Vercnei* (Vercinia). Ma in altri nomi di altra struttura, e che forse accennano ad origine umbra o sabina, mantenute nel secondo genere le desinenze in *i*, in *ei* od in *ia*, hanno nel mascolino l'uscita in *e* od in *iś*: tali sono *aufle - Ofelius, cae - Caius, cafate - Cafatius, senate - Senatius, sentinate - Sentinatius, tantle - Tantilius, tite - Titius, uhtave - Octavius, venete - Venetius, vete - Vetius, acsiś - Axius, ceisis - Caesius, calinis - Calinius, casniś - Casinius, petruniś - Petronius, vipiś - Vibius*. La stessa varietà di desinenze riscontrasi nei nomi greci trasportati nei lidi dell' Etruria; imperocchè se taluni conservano quasi inalterate le greche desinenze, come *aplu* e *aplun* = Ἀπόλλων, *achmemrun* = Ἀγαμέμνων, *charu* e *charun* = Χάρων, *atunis* = Ἅδωνις, *terasiaś* = Τειρεσίας, *peliaś* = Πελίας; più spesso amarono terminare in *e* i nomi greci che uscivano in ευς, αος, ος, ης, come *achle* = Ἀχιλλεὺς, *these* = Θεσεὺς, *nele* = Νηλεὺς, *pele* = Πηλεὺς, *prumathe* = Προμηθεὺς, *tute* = Τυδεὺς, *utuze* = Ὀδυσσεὺς, *pherse* = Περσεὺς, *hamphiare* = Ἀμφιάραος, *menle* = Μενέλαος, *vilae* = Ἰόλαος, *atresthe* = Ἄδραστος, *elachsantre* = Ἀλέξανδρος, *nevtlane* =

Νεοπτόλεμος, *hercle* = Ἡρακλῆς, *pultuce* = Πολυδευκής, *urusthe* = Ὀρέστης.

Spingendo più innanzi le ricerche intorno alla formazione dei nomi etruschi, che Dionisio chiama τὸ συγγενικὸν ὄνομα καὶ πατρονυμικὸν, meriterebbero uno speciale e non fuggevole esame i già menzionati *larcna*, *marcna*, *lemrecna*, *vercna* e simili; i quali, a simiglianza dell'umbro *trutiknos* e con ortografia meno antica *Drutignus* che si scioglie in *Drutigenus*, possono considerarsi come composti da due elementi, il secondo dei quali sia rappresentato dalla radice *cna*, conservata in *genus*, da *gigno*, onde l'antico *cna-tus*, poi *gna-tus*, per *natus*. Così *larcnaś* saria dire *larigenus*, onde il gentilizio *Largenna*, per *Largennius*, conservato nelle iscrizioni romane; e *marcnaś* potria rispondere a *generato da Marte*, e *lemrecna* significare *Lemurum genus*; e *vercna*, *vercnaś* e *vercnei*, che richiama la forma *Verginnaeus* nel tesoro epigrafico del Grutero, ricorderebbe il romano *Vercinius*, poi *Verginius* o *Virginius*, che racchiude il *vir* o *vara* sanscrito che vale *esimio*, *ottimo*, *prestantissimo*.

Altre osservazioni sui gentilizi ci somministra la ricchissima serie delle etrusche iscrizioni; ed io non lasciai di osservare in altra occasione che l'uso di distinguere per cognomi due o più famiglie uscite da una medesima stirpe fosse praticato in Etruria. Men dava argomento il sepolcro dei *Vibi* cognominati *Vercinii*, scoperto a Perugia nel 1852, che offriva non meno di venti leggende, parte scolpite ne' cinerari di marmo, parte incise in lamine di piombo. Talune di queste iscrizioni ricordavano altrettante donne andate a marito ne' Vibi, ed altre facevano menzione di *Larte Vibio*, *Setrio Vibio*, *Aulo Vibio*, *Arunte Vibio*, *Velio Vibio*, tutti cognominati *Vercinii*. La teoria dei doppi prenomi in un solo personaggio, fondata sugli esempi di alquanti marmi romani, non aveva qui fondamento di opportuna applicazione; conciossiachè *vipi* e *vipiś*, *Vibia* e *Vibius*, nella epigrafia etrusca si presentano sempre come gentilizi; e quanto ai veri prenomi etruschi giammai ci vengono innanzi esempi di due accoppiati e preposti ad un nome, tranne nell'*arnth larth velimnaś*, che abbiam reso latinamente *Arnns et Lars Volumnii*, non *Arnns Lars Volumnius*. Era nota per antichi marmi la gente *Vibia*, tra le perugine assai distinta; e da questa forse erano usciti gl'imperatori *Caio Vibio Treboniano Gallo* e *Volusiano*, come congetturava l'illustre Borghesi togliendo a disamina la iscrizione *colonia Vibia* che si legge in un'antichissima porta di Perugia (*Archiv. stor. ital.* vol. XVI, p. I, pag. CIV seg.). Nè solo i *Vercinii* erano discesi dalla gente *Vibia*; ma i *Vibii* col

cognome di *alfa* (A8ИA) in quattro iscrizioni tratte da uno stesso ipogeo perugino; poi i *Vibi Obelsi*, distinti per due sepolcri; e da ultimo i *Vibi Vari*. Così dalle necropoli perugine tornava alla luce la famiglia *Vettia*, distinta dalla *Vettia* che portò il cognome di *Ofellia;* e la *Pomponia*, distinta dalla *Pomponia* cognominata *Plautia;* e la famiglia *Caia*, che non confondevasi con la *Caia Cestia* e con la *Caia Vettia;* e finalmente la gente *Titia*, che in prosieguo dava origine ai *Titii Marcanii* e ai *Titii Vesii*. Altrove si mostrano i cognomi, propri di alcuni uomini, non come attributi di famiglie diverse. E con questi esempi, per compiere i *tria nomina* alla foggia romana, cessa la necessità di supporre che gli Etruschi acconciassero a cognome il nome materno (1).

A differenza degli altri popoli italici, le donne etrusche erano spesso rammentate ai discendenti con un cognome, che or anteposto or posposto al prenome ed al gentilizio, veniva desunto dal nome del marito, modificato con la sillaba *sa;* onde *aulesa*, *cumnisa*, *fraucnisa*, *lecnesa*, *sethresa* era dire *moglie* di *Aulo*, di *Cominio*, di *Fruginio*, di *Licinio*, di *Setrio*. Ma più sovente il nome del coniuge era enunciato al genitivo, come in questa iscrizione:

MAИ↓9AM · IƎИ⋇ƆИƎƎ · I+2A8

(*fasti velcznei marchnaś*), ossia *Fausta Velcinia Marcanii* uxor; e talvolta, se la donna era rimasta vedova, portava la voce *puia*, non sempre accompagnata dal nome del coniuge. Dallo scorgere una *Lartia Vibia vedova* (puia) di *Tito Satinio*, e sepolta nell'ipogeo dei *Vibi Vercinii*, si offrirebbe motivo a congetturare che le donne orbate del marito rientrassero per costume nella casa paterna; il che verrebbe eziandio confermato per altri esempi che le iscrizioni sepolcrali ci mettono sott'occhi.

Per ciò che riguarda alla disposizione dei prenomi, dei gentilizi, dei cognomi e d'ogni altro elemento che concorre a designare una persona co' suoi legami di parentela, i diversi popoli italici ebbero norme e regole proprie, che segnano una differenza, come che non si allontani molto dalle leggi epigrafiche dei Romani, tra gli abitanti delle regioni meridionali d'Italia, dell'Etruria e dell'Umbria. È noto che nell'ordine dei nomi romani al prenome e al gentilizio succedeva il prenome paterno, indi il

(1) Vedi Conestabile *Iscriz. etrusche del Museo di Firenze* pag. LXX segg.

cognome. La stessa regola si rinviene nella epigrafia sannitica od osca; onde abbiamo *c. silli. c.* = *Gaius Sillius Gaii filius*, *v. púpidiis. v.* = *Vibius Popidius Vibii filius*, *v. aadirans. v.* = *Vibius Adiranius Vibii filius*, *ni. trebiis tr.* = *Numerius Trebius Trebii filius*, *mr. atiniis mr.* = *Marius Atinius Marii filius*, *paakul mulukiis marai* = *Paculus Mulucius Marii filius*, ed un bello esempio in due monete battute a Corfinio ai tempi della guerra marsica o sociale, nelle quali si legge: *c. paapi c. mutil embratur* = *Gaius Papius Gaii filius Mutilus imperator*, che fu l'uno dei duci confederati incontro a Roma, rammentato da Velleio Patercolo. Entrando nel paese dei Volsci, ci si presenta il bronzo trovato a Velletri, nel quale si fa menzione di due magistrati detti *meddices*, *Egnatius Cossutius* e *Marcus Tafanius*; ma nella collocazione dei prenomi si segue un uso diverso da quello dei Romani e degli Osci, scrivendosi EK : SE : KOSVTIES : MA : KA : TAFANIES, cioè *Egnatius Sexti* filius *Cossutius* et *Marcus Gaii* filius *Tafanius*. Tale maniera di collocare i prenomi, riunendo immediatamente a quello del personaggio ricordato l'altro che fu del padre, seguiti poscia dal gentilizio, riavvicina ai Volsci le popolazioni dell' Umbria; e per fermo nelle famose tavole dell'antico Iguvium, facendosi menzione di due personaggi, fu scritto: *uhtretie t. t. kastrušiie*. cioè *auctoritate Titi Titi* filii *Castrucii*, e *uhtretie k. t. kluviier* ossia *auctoritate Caii Titi* filii *Cluvii*. E mi piace non intralasciarne altri esempi, cumulati in una preziosissima iscrizione, rinvenuta tra Perugia ed Assisi, al di là del Tevere, epperciò nel territorio degli antichi Umbri, nella quale si manifestano eziandio alcune forme di prenomi che richiamano alla memoria il linguaggio dei Sabini: AGER · EMPS · ET | TERMNAS · OHT | C · V · VISTINIE · NER · T · BABR | MARONATEI | VOIS · NER · PROPARTIE | T · V · VOISIENER | SACRE · STAHV, che voltata in latina favella suona *Ager emptus et terminatus*, *auctoritate Caii Vibii* filii *Vistinii*, *Neronis Titi* filii *Babrii Maronis*, *Voisii Neronis* filii *Propertii*, *Titi Vibii* filii *Voisieni sacrum esto*.

Delle norme seguite dagli Etruschi ho toccato in parte, discorrendo del cognome che le donne derivavano talvolta dal nome del marito. Or rimane a dire, che nella epigrafia dell' Etruria è raro trovare menzionato un uomo senza il prenome, men raro se trattasi di titoletti muliebri: quasi sempre il prenome è anteposto al gentilizio, cui succede talvolta il cognome, indi spessissimo il prenome paterno, e da ultimo il matronimico, del quale le iscrizioni degli altri popoli italici non offrono esempi

somiglianti. Nel che non insorgono dubbiezze, nè per via di congetture si aggiunge la verità, sussidiati essendo gli archeologi da parecchie iscrizioni etrusco-romane, scritte in Etruria in quel periodo di tempo che la lingua e gli usi dei vinti soggiacevano alla prevalenza del parlare e de' costumi dei Romani vincitori. Altri e non men sicuri sussidi ci vengono dalle epigrafi bilingui, come la seguente tratta dal sepolcro dei Volunni:

ꓤꓤIꓶꓠꓤꓤꓤ ꓤꓤ ꓤꓤꓤꓤꓤꓤꓤꓤ ꓤꓤꓤꓤꓤꓤꓤꓤ ꓤꓤꓤ

(*pup velinna au cahatial*)

la quale era scolpita nel coperchio di urna marmorea di squisitissimo lavoro, mentre nel prospetto dell'urna medesima si legge: P · VOLVMNIVS · A · F · VIOLENS CAFATIA · NATVS. All' infuori del cognome *Violens*, che assunse *Publio Volumnio* foggiando agli usi romani il suo nome, tutti gli elementi che compongono la iscrizione latina si riscontrano nella stessa epigrafe espressa con le forme e con l'ortografia nazionale. Ora siffatto monumento, tra i pochi bilingui preziosissimo, distruggeva il sistema di coloro, che, come il William Betham, pretendevano dichiarare i titoletti funebri degli Etruschi col soccorso di favelle straniere alla classica letteratura, e scuoprire in essi funebri e insolite nenie e lamenti allusivi alla vita de' trapassati o al dolore dei superstiti. Il filologo irlandese, vinto dal fatto, e pur volendo distruggerlo, niegava fede al monumento, e contro la testimonianza di mille gridava all' impostura!

Tenendo ferma la veracità di questa e di altre iscrizioni bilingui, riman costatato l'uso dei matronimici e la loro desinenza in *al*, che ripresentasi in cento e cento monumenti sepolcrali dell'Etruria media. Così ꓤꓤꓤꓶꓠꓤꓤ (*arntial*) è reso per ARRIA NATVS, e ꓤꓤꓤꓤꓤ per CAINNIA NATVS. Tuttavolta non deggio pretermettere che siffatti matronimici alcune fiate prolungano la desinenza pigliando il suffisso *isa*, che forse li rendeva diminutivi; onde da *arnthal* si faceva *arnthalisa*, come *larthialisa* da *larthial*, *pumpualisa* da *pumpual*, *tetinalisa* da *tetinal*, *serturialisa* da *serturial*. Per tal modo la forma ꓤꓤꓤꓤꓤꓤꓤꓤꓤ (*varnalisla*) da *varnal* è resa con VARIA NAT[VS]. La corrispondenza tra le due parti non è sempre compiuta nei titoli bilingui; il cognome manca sempre nella parte etrusca, del pari che il nome della tribù; e nella parte latina non sempre si tien conto dei matronimici cui l'uso romano sfuggiva; indizio a giudicare se la donna fosse in maggiore onoranza nell' Etruria che a Roma. Se perfettamente rispondono tra loro il testo etrusco e la versione latina nel

monumento di *Publio Volumnio figlio di Aulo*, come in A · I+I+ · A (*a titi a*) = A · TITIVS · A (*Aulus Titius Auli* filius) di un'urna esistente un tempo a Montepulciano, in [I+]NƎM · Ǝ+NIVƆ (*cuinte senti*) = Q · SENTIVS di una grande urna trovata a Chianciano, e in ƎAƆ · ⅃ (*l. cae*) = LART · CAII di un tegolo del museo di Firenze, convien soggiungere che talvolta gli Etruschi, acquistando la cittadinanza romana, ossivero facendo omaggio servile ai vincitori, mutarono in un prenome romano quello ricevuto al nascer loro; imperocchè un ƎNI⋠NƎꟻ : ⅃Ǝꟻ (*vel venzile*) ossia *Velius Ventius* di Chiusi mutossi in C · VENSIVS; un etruseo IꟻNVꟻƎI⅃ƎA (*aelie fulni*) ossia *Aelius Folnius* aggregato alla tribù Pomptina amò chiamarsi Q · FOLNIVS; un AꟻN⋠NAƆ · OꟻA (*arth canzna*) ossia *Arunus Caesius* si mutò in C · CAESIVS; un Chiusino per nome IꟻꟻA · ⅃ꟻ (*vl alfni*) ossia *Velius Alfius* in C · ALFIVS; e l'Aretino Ɔ · I⋠AƆ · ꟻ (*v. cazi c.*) ossia *Velius Cassius Caii* filius in C · CASSIVS · C · F. Il qual vezzo di convertire il prenome negli uomini etruschi, allorchè adoperarono la nomenclatura romana, mi torna alla memoria le parole di Dionigi d'Alicarnasso, che il discendente di Demarato, condottosi a Roma con sua moglie Tanaquilla, avendo osservato che ogni romano aveva un *nome comune* (prenome) ed inoltre un patronimico e gentilizio, e volendo in ciò conformarsi assunse per suo *nome comune* quello di *Lucio* in luogo di *Lucumone*, e pel gentilizio quello di *Tarquinio*, dalla città dove ebbe i natali e la educazione (1). Il che per altro non fece nella bilingue di Pesaro il L · [CA]FATIVS L · F, ascritto alla tribù *Stellatina*, che conservò inalterato il suo prenome nelle forme etrusche ꟻ⅃ · ꟻ⅃ · ƧƎ+AꟻAƆ (*cafates lr. lr.*) ossia *Cafatius Lars Lartis* filius. Ora in questo esempio son da notare i due prenomi, l'uno proprio di Cafazio e l'altro del padre suo, amendue riuniti, come nelle iscrizioni degli Umbri, ma posti dopo il gentilizio; il qual modo inusitato di collocazione non si rinviene in altre città dell' Etruria, tranne che a Viterbo e a Toscanella, ove scrivevasi talvolta O⅃ · O⅃ · ƧƎ⅃AƆ (*cales lth. lth.*) = *Callius Lars Lartis* filius, e ꟻ · ꟻ · ƧAꟻOƎ⅃A (*alethnas v. v.*) = *Aletinius Velius Velii* filius, e simili.

Fu questionato intorno alla voce *clan*, che s' incontra in più di sessanta iscrizioni etrusche, e segue immediatamente il matronimico; la quale, poichè non lascia dubbio che valga *gnatus*, da *gnascor*, avrebbe potuto assumere il significato di *natu maior*; ma il vederla impiegata eziandio

(1) Dionys. III, 48.

nei titoli muliebri, quantunque più raramente, toglie forza alla congettura del Müller (*Die Etrusker*, I, 445 sgg.). Egli è certo però che per distinguere due persone nate dagli stessi genitori, e portanti un medesimo prenome, l'una reca il *clan*, l'altra la voce *etera*, come in queste due iscrizioni perugine:

VAIИOMƎS · VA

ИAVJAƎDƎЭƎVƎB

(*au semthni au hel vereal clan*) = *Aula Sentinia Auli* filia *Aeliâ Veriâ nata*; e:

JAƎЭƎF · JƎB

AЭƎTƎ : IИOMƎS · VA

(*au semthni au etera hel vereal*) = *Aula Sentinia* ἑτέρα (secunda) *Aeliâ Veriâ nata.*

Accertato il significato di *clan* per *gnatus*, e di *etera* corrispondente al greco ἑτέρα, e ricordate le voci *fia* (AIF) per *figlia*, *thui* e *phuius* per υἱος (filius), *turuce* per δῶρον (donum), *tez* per *dedit* o *dat*, *arse verse* per *ignem averte*, *mi* per ἠμὶ (sum), ed *usil* nome del *sole*, identico all'*ausel* dei Sabini, io abbraccio apertamente la opinione di coloro che la etrusca lingua rannodano all'umbra ed all'osca o sannitica, e che dalle antichissime iscrizioni italiche, non che dal latino arcaico e dalla greca favella, traggono sussidi per le più solide interpretazioni. Guidati dalle leggi che governano le lingue indo-europee, fu consentito ai filologi di ristaurare gran parte della grammatica osco-umbra, e di molte voci etrusche scuoprire le radici, riconoscere certi suffissi ed accertare alcune desinenze. Prendo ad esempio la voce *hinthial* (JAIOИIB), che riavvicinata al gr. ἰνδαλμὸς o ἴνδαλμα spiegasi opportunamente per εἴδωλον, interpostavi la nasale come nel gr. ἰνδάλλομαι per εἰδάλλομαι; onde scaturisce la rad. etrusca *hinth*, che è una stessa cosa colla sanscrita *vid*, greco ϝιδ-ἐίδω, rom. *vid-eo*. Per tal modo rendevasi finalmente ragione dell'*hinthial* posto accanto ad uno specchio che figurava ritrarre le sembianze di Elena; e così spiegavansi le parole *hinthial patrucles*, ossia l'*ombra di Patroclo*, vista nella parete di un sepolcro volcente, e scritte sopra il capo di un eroe che appunto rappresentava lo spettro dell'amico di Achille, ψιχὴ Πατροκλῆος, come dice Omero.

Ad altri piacque percorrere altra via, ed invocare la guida dell'idioma ebraico, giudicato insufficiente per le dotte investigazioni del Lanzi che

avvisatamente tutti gl' italici dialetti ricongiungeva al greco e al latino. Mi suonano ancora all'orecchio i vantati e propalati trionfi che non ha guari otteneva nel collegio Romano l'applicazione dell'ebraico alla tosca favella. Il velo che cuopriva le misteriose leggende sollevavasi come per arte d' incantatore, e nessun vocabolo sfuggiva alla violenza dell'arte rinnovellata: la statua dell'arringatore ch' è nel museo di Firenze, ridiceva che l'oratore ebbe un giorno ad ammutolire, dinanzi a non so quale assemblea, alla vista di un serpente che passogli improvvisamente dinante; e il dettato della iscrizione, appellata di s. Manno, rivelava lo strano caso occorso ad un cittadino romano che per feroce vendetta di un sacerdote etrusco ebbe abbrustolite le membra nel cavo di un toro di bronzo infuocato, esalando l'estremo spirito tra gli scherni di una orientale imprecazione! Nuove e peregrine cose, quantunque cozzanti con le italiche tradizioni, scaturivano poscia dalla pretesa intelligenza del cippo perugino, la maggiore delle etrusche iscrizioni.

Per una singolare coincidenza un valentissimo orientalista di Iena, il dottore Stickel, s' infervorava anch'egli nell' impresa, dirizzato per la medesima via; e inconsapevole dei tentativi del P. Tarquini, nuove maraviglie discuopriva in alcune oscurissime leggende, dirittamente camminando dal principio alla fine di quelle, quasi che nella via non esistessero intoppi da rimuovere. Adocchiando la traduzione dell'uno o dell'altro, il lettore era compreso di maraviglia e di ammirazione. Senonchè col mettere a fronte le due traduzioni di uno stesso monumento, poggiate sui medesimi canoni grammaticali, guidate dalla stessa lingua, ebraica od aramea, dalla quale supponevasi discesa l'etrusca, alla maraviglia del lettore succede rapido il disinganno, quando gli vien fatto di scorgere che i due interpreti pervengono simultaneamente a conchiusioni disparatissime, e che nè pure nel significato di una parola ebbero la fortuna d' incontrarsi! A cui non era nuovo lo studio degli etruschi monumenti, appariva manifesta la fallacia di cotal metodo d' interpretazione; ma i risultati discordi innanzi agli occhi di tutti mettevano in evidenza l'errore, e distruggevano quell'unico e magnificato argomento cavato dalla facilità della traduzione, che pareva progredisse chiara e compiuta. Per verità anche ad un Adriano Scrieck non aveva sembrato men facile rinvenire la lingua dei Belgi in una delle tavole di Gubbio, e all' irlandese Guglielmo Betham tradurre francamente quelle medesime tavole col soccorso della celtica favella, scuoprire una frase in un gentilizio etrusco, e mutare in certe funebri

nenie due nomi propri ed altrettanti prenomi di un titoletto sepolcrale. Contuttociò al Tarquini e allo Stickel, per bocca dell'illustre Gildemeister, i filologi professano sincera riconoscenza per aver dato prove evidentissime della impossibilità d'illustrare e dichiarare le etrusche iscrizioni con l'aiuto delle lingue semitiche.

In grazia delle epigrafi bilingui, la critica è abilitata a giustificare le sue interpretazioni; e là si fa più chiara l'inefficacia dei ristauratori del semitismo nella lingua etrusca. Mentre, a cagion di esempio, nella leggenda su coperchio di urna tratta dal sepolcro della gente *Venetia* troviamo *se. veuete la. lethial clan*, cioè *Sextus Venetius Lartis filius Letiâ natus*, chi vorrà prestar fede alla versione dello Stickel che suona « *zu den Alten kommen wir; zur Erwigkeit steigt er auf* »? Mentre in uno specchio etrusco, ove osservasi graffito, accanto ad Atlante che reca il cielo sulle spalle, Ercole co'suoi notissimi attributi, accompagnato dalla voce *calanice*, chi vorrà ripulsare la interpretazione di καλλινικὸς, il più eloquente epiteto dato ad Ercole dai poeti per le sue splendide imprese? Anzi la forma etrusca *calanice*, meno inalterata di καλλινικὸς, più s'identifica con le forme greche καλὰ doricamente per καλὴ (bella) e νίκη (vittoria). Eppure il Tarquini ne' suoi ultimi tentativi, consegnati nel volume XIV degli Atti dell'Accademia romana di archeologia, non dubita escludere da quella voce la greca origine, e riportarla ad una forma ebraica che significhi *coelum* o *coeli expertus*, ossia *colui che ha portato il peso del cielo*..... E qui mi arresto, avendo già forse troppo deviato dal tema ch'io aveva preso a trattare.

ILLUSTRAZIONE

DI UNA BASE VOTIVA IN BRONZO

CON ISCRIZIONE TRILINGUE

LATINA, GRECA E FENICIA

TROVATA

IN PAULI GERREI

NELL'ISOLA DELLA SARDEGNA

PER

GIOANNI SPANO

Letta ed approvata nell'adunanza del 12 dicembre 1861.

Nei primi lustri del corrente secolo si risvegliò in Sardegna l'amore agli studi archeologici. Ciò si deve al fu re Carlo Felice, il quale allorchè soggiornava in Cagliari nella qualità di vicerè, instituì un privato gabinetto di oggetti antichi che di mano in mano si scoprivano in tutta l'isola. Di questa sua collezione ne fece dono alla R. Università degli studi, la quale diede principio all'attuale Museo che forma l'ornamento della città, ed il trattenimento dei dotti che si fanno a visitarlo (1).

Ma se negli scorsi anni si scopersero monumenti degni di aver esercitato la mente di pochi Sardi e di molti dotti forestieri, questo di cui parliamo è il più prezioso, perchè contiene un'iscrizione trilingue, finora unica, per quanto sappiamo, scolpita sul plinto d'una base di bronzo,

(1) V. Bullettino archeologico sardo, Anno II, 1856, p. 151.

sebbene a' tempi più antichi pare che se ne siano scoperti altri almeno con iscrizioni bilingui (1).

Questo insigne monumento venne sterrato nello scorso mese di febbraio nei dintorni di Pauli Gerrei, dal notaio *Michele Cappai*, nel sito precisamente detto *Santuiaci* (2), distante due miglia circa dalla villa. Nell'atto che i contadini aravano in un tratto di terra di spettanza al sullodato *Cappai*, egli presente, l'aratro di uno si fermò per aver la punta del vomero incontrato un pezzo di bronzo che trasse fuori. Datosi quindi a scalzare il terreno, ad una piccola profondità, disotterrò tanti frammenti di bronzo, tagliati già da tempo molto rimoto, come indicano i segni dell'ossido internato nelle fissure dei colpi di taglio e di punta: così pure raccolse pezzi di corone con molte foglie di alloro parimente di bronzo.

Il possessore mise a nostra disposizione tutti questi frammenti, che, senza le foglie della corona, sommano a dodici, ed avendoli uniti insieme venivano a formare una bella base col principio della colonna, sormontata forse dalla corona che la cingeva da una parte all'altra (3). Nel plinto, ossia nella parte anteriore della base, vi è scolpita la trilingue iscrizione che abbiamo messo separatamente nella tavola, secondo la grandezza dell'originale.

Prima però di passare all' interpretazione, conviene di notare che in questo sito, dove venne scoperta la base, doveva esistere un centro di popolazione non menzionata dagli storici antichi. Nel paese si ha per tradizione che vi esistesse una città o oppido, di cui dicono i vecchi contadini di aver conosciuto le *carceri*, perchè nel residuo d'un edifizio vi si vedevano le catene di ferro. Vi è rimasto il pozzo, detto di *Santuiaci*,

---

(1) Antonio di Tharros, scrittore del secolo VIII, dice che nel palazzo della principessa Sardara, fondato nel Maso, molto prima dai Cartaginesi, esistevano iscrizioni *de literas mediu fenikas et legetsi in lingua greca pro ipsa mixtione de gentes qui venivant una post altera*, le quali iscrizioni aveva spiegato un *Canahim* ebreo. V. MARTINI, Testo di due codici, 1856, p. 26. DELLA MARMORA, Itinerario, 1860, vol. I, p. 362.

(2) Questa scoperta venne annunziata dal cit. Bullettino Sardo [An. VII, p. 57, e dall' Effemeride della Pubblica Istruzione di Torino (An. II, n. 37, p. 622)] nella relazione che, nell'adunanza della Real Accademia delle Scienze, ne fece il Segretario della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

(3) La lettera A, tavola 1.ª, mostra la base nello stato attuale. La lettera B indica la restaurazione, e la lettera C il primitivo stato in cui sarà stata collocata. La spessezza maggiore del bronzo nel plinto è di millim. 5. I frammenti che si sono trovati pesano chilogr. otto, ma ne mancano molti per rendere intiera la base. Così pure mancano molte foglie delle corone, delle quali si sono messi i disegni delle parti più intiere, notate D D D, tavola 2.ª

di antica struttura per esser fabbricato a pietre, in forma rotonda (1).

Tutto il dintorno è sparso di pietre ben lavorate, ed anni sono vi si trovarono una quantità di monete puniche, per quanto ci hanno riferito, e manubrii di vasetti di bronzo, ed armi antiche in forma di martelline. In quella stessa regione furono pure scoperti alcuni sarcofagi in marmo greco, dei quali uno figurato, rappresentante le nove Muse, venne dato in dono dal feudatario della villa al re Carlo Felice che lo trasportò

---

(1) L'acqua di questo pozzo sgorga da un suolo calcareo, secondo il Della Marmora, appartenente al terreno silurio. È perenne in ogni tempo, e nella state è più calda dell'inverno (V. più sotto l'analisi). Non è inverisimile che questa fonte fosse solennemente consacrata alla divinità, come le acque Apollinari di Vicarello (V. La Stipe tributata alla divinità delle acque Apollinari del P. Giuseppe Marchi, Roma 1852).

Il sig. Cugusi Membro del Cagliaritano Collegio di farmacia, avendo sopra una bottiglia di questa acqua istituito un'analisi qualitativa, mi favorì il risultato seguente.

Quanto ai caratteri fisici, l'acqua è perfettamente limpida ed incolora alla temperatura ordinaria; portata però all'ebullizione s'intorbida fortemente, intorbidamento che non scomparisce coll'aggiunta d'altr'acqua. Ha un sapore leggermente alcalino, e dopo qualche momento che si gusta rende la superficie della lingua alquanto rugosa. Non ha alcun odore particolare. Due o tre grammi d'acqua evaporati in una capsula di platino lasciano un residuo bianco, ed in considerevole quantità.

Quanto ai caratteri chimici, la carta tornasole bleu non soffre alcun cambiamento nel suo colore: la carta rossa al contrario dopo alcuni momenti di contatto ridiviene azzurra. — La tintura di sapone la rende fortemente opalina senza però bianco come ciò avviene nelle acque selenitose. — La soluzione alcoolica di tonnino la intorbida alquanto nei primi momenti, dopo 5 o 6 ore di contatto l'intorbidamento è molto più pronunciato, ed assume il miscuglio un coloramento brunastro. — La tintura alcoolica di campeceio non vi manifestò alcuna azione. — Gli acidi minerali vi producono una leggerissima effervescenza, i liquidi però rimangono trasparenti ed incolori. — L'ammoniaca rende l'acqua alquanto lattiginosa; quest'acqua ammoniacale trattata con ossalato d'ammoniaca precipita abbondantemente. — L'idrato di calce e di barite esercitano sull'acqua un'azione pari a quella esercitata dall'ammoniaca, l'intorbidamento dell'acqua però è molto più manifesto con i due primi reattivi. — Il nitrato d'argento acido precipita abbondantemente in contatto di quest'acqua, come ciò ha parimente luogo con l'acetato di piombo neutro e basico. — Acidulata l'acqua con acido cloridrico, e quindi versatevi poche goccie di cloruro di basio, si manifesta del pari un precipitato che però non è molto abbondante. — Con lo stesso reattivo del cloruro di basio, ma con acqua resa alcalina con l'aggiunta di alcune goccie d'ammoniaca si ottiene un copioso precipitato. — Il fosfato sodico ammoniacale dà le reazioni proprie ai sali di magnesia, come pure si hanno le reazioni della potassa mediante il cloruro di platino. L'acido tartarico parimente dà indizio della presenza nell'acqua di sali di potassa. — La poca quantità d'acqua di cui io poteva disporre non mi permise di spinger oltre le mie indagini; dal complesso però delle reazioni accennate puossi facilmente conchiudere: 1.° Che quest'acqua puossi annoverare fra le acque minerali, non già fra le acque dolci. — 2.° Dall'abbondanza del residuo ottenuto per l'evaporazione, come pure dalla gran copia dei precipitati ottenuti per l'azione dei diversi reattivi è mestieri dedurne ch'è un'acqua fortemente mineralizzata, ed i corpi mineralizzatori sono i seguenti: potassa, calce, magnesia, e traccia di ferro, combinati questi agli acidi idroclorico, solforico, cortonico. — 3.° Finalmente avuto riguardo all'azione dell'acqua sulla carta tornasole rossa, ed all'effervescenza che manifesta in contatto degli acidi, la si può classificare fra le acque minerali alcaline bicarbonate.

alla sua villa del castello di Agliè, ove oggi si trova (1). Non è da molto pure che altri vi scoperse una gran sepoltura rettangolare coperta da una lapide tutta di un pezzo, nella quale trovò molti vasetti di stoviglie, ed altri pezzi di bronzo, de' quali, perchè non curati, non possiamo sapere l'uso per cui servirono.

Ma quello che possiamo asserire di positivo si è che quivi fosse innalzato da tempi più rimoti qualche tempio o sacrario dedicato ad *Esmun Fenicio*, l'Asclepio dei Greci, l'Esculapio dei Latini, e che quivi concorressero per isciogliere i loro voti popoli di diverse lingue, consacrando doni in segno di gratitudine al dio, dal quale una vana superstizione dava loro ad intendere di aver ricuperato la salute. Il nome che ha conservato di *Santuiaci*, indica abbastanza che fosse un luogo sacro, come *Santadi* si appellava la regione dove sorgeva il tempio di *Sardopatore* (2).

Premesse queste notizie, che riguardano il ritrovamento della base, ed il sito donde venne disotterrata, passiamo alla dichiarazione delle tre iscrizioni, che, sebbene riguardino un medesimo oggetto, pure non sembrano così facili a spiegarsi: per la qual cosa noi proponiamo le nostre interpretazioni, lasciando il campo ai dotti cultori della scienza di proporne altre migliori.

I.

Iscrizione latina.

Per tener un certo ordine nell'illustrazione di questo interessante monumento, principieremo dall'iscrizione latina, ch'è la prima che comparisce nella facciata della base. Dessa è la più laconica, occupando la prima linea e metà dell'altra, come segue:

CLEON · SALARI · SOC · S · AESCOLAPIO · MERRE · DONVM · DEDIT · LIBENS MERITO · MERENTE

La grande antichità di questa iscrizione viene comprovata dalla voce *Aescolapio*, scritta con *O*, che vi sta per arcaismo, in vece di V, cioè

(1) V. Della Marmora, Voyage vol. 2 (Antichità) p. 518, e tav. XXXV, 33 del grand'atlante.

(2) V. cit. Della Marmora, Itinerario vol. I, p. 353. Anche il *Santadi* del Sulcis sarà stato così appellato per qualche sacrario, esistendovi una sorgente termale presso *Pixinas* (Itiner. cit. p. 258).

Aesculapio (1). Così pure la voce MERENTE, che oltre di starvi per pleonasmo, doveva esser *merenti*, riferendosi ad Esculapio, prova l'arcaismo e la rozzezza dei tempi della lingua.

Cleone adunque aveva offerto questo dono ad Esculapio a nome suo e dei compagni delle saline, perciò proponiamo di leggere le abbreviature in questo modo: CLEON SALARI*orum* SOC*ietatis* SO*dalis* AESCOLAPIO, ecc. Siccome però *Salarius* si può prendere per venditore di cose salate (pizzicagnolo), ed aggettivamente, per cosa che appartiene al sale, rimane il dubbio se Cleone fosse sodale dei pizzicagnoli, o delle saline. È vero che presso il Marini (Frat. Arv. p. 254) si trova l'iscrizione DIVO · CONSTANTINO · AVGVSTO · CORPVS · SALARIORVM · POSVERVNT, ma per essersi trovata l'iscrizione in Sardegna, dove fin dai tempi i più rimoti erano coltivate le saline, e perchè vi si prestano le voci delle altre due iscrizioni, perciò si deve intendere *Salariorum operum*, o *locorum*, cioè compagno del sodalizio delle saline in Sardegna, o del luogo dove si preparava il sale (2).

Al corpo adunque o al sodalizio dei salinatori apparteneva Cleone che fece questo voto. Le saline più celebri in Sardegna al tempo dei Romani erano quelle di Cagliari, dove oggi sorge il vasto stabilimento salifero (3). Esse prima saranno state coltivate dai Cartaginesi, ai quali seguitarono i Romani, essendo noto che se ne faceva un gran trasporto ai magazzini di Roma, che stavano nella via Ostiense. Per la qual cosa è molto probabile che Cleone vivesse in Cagliari, ossia nelle saline, e che di qui abbia portato il voto a nome suo e dei compagni a quel rinomato santuario di Gerrei distante trenta miglia circa (4).

Il nome di Cleone, sebbene adottato nell'epigrafia latina (Murat. p. 1578, 6), è greco, Κλέων, che significa *gloria, fama*, da Κλέος, per cui il ch. Cavedoni, che avevamo consultato sul proposito, crede probabile

---

(1) Nella colonna Duilliana si trova MAGISTRATOS per *magistratus*: così pure in quell'età scrivevasi COSOL per *cosul*, VOLGOS per *vulgus*, SERVOS per *servus*, ecc.

(2) Quelli che lavoravano il sale erano pure chiamati *salinatores* e *salinienses*, come consta dalle iscrizioni che non occorre di citare, bastando quella di Pompei, M. CERRINIUM AEDILEM SALINIENSES ROGANT.

(3) La villa di *Salargius*, vicina allo stagno dove si fabbrica il sale, è una corruzione di *salarium* (Salarius locus). V. Guida della città e dintorni di Cagliari 1861, p. 379.

(4) Tanta era la fede degli antichi che per trovare il rimedio ai mali percorrevano più d'un milione di passi di distanza per portarsi a sciogliere voti in qualche rinomato sacrario, come furono quelli che da Gades si portarono alle acque Apollinari dell'Etruria (V. cit. Marchi, la Stipe, ecc.).

che il nostro Cleone, dedicante della base, fosse greco di nazione, tramutato poi in Sardegna per ragione di commercio, o per altra che vogliasi dire. Ciò però non osta che costui fosse un sardo discendente dalle colonie greche stabilitesi in Sardegna, come diremo più avanti.

Non occorre di trattenerci nelle altre voci, che indicano nell'iscrizione la spontaneità del voto, cioè LVBENS MERITO, essendo formole ben conosciute, salvo la voce MERENTE che vi è per pleonasmo, come dianzi si è detto. Più presto quello che merita speciale attenzione è il titolo che si è dato ad Esculapio, cioè il MERRE, il quale viene ripetuto nelle altre due iscrizioni. Non trovandosi in nessuna delle moltissime iscrizioni latine e greche dedicate allo stesso Esculapio, ci restringiamo a dire per ora che era un cognome speciale col quale Esculapio si venerava in Sardegna, derivato o dal luogo del suo tempio, o da qualche speciale suo attributo, ma che merita d'essere studiato rispetto alla sua etimologia.

II.

Iscrizione greca.

Succede la seconda iscrizione, quasi facendo seguito nella stessa linea, dove termina la latina, come può vedersi nella tavola annessa. Se però l'iscrizione latina è molto laconica, questa greca spiega qualche cosa di più, perchè indica la qualità del voto, ed il mandato avuto da chi lo mise. Essa è nel modo seguente, in una linea e mezzo, come la latina:

ΑΣΚΛΗΠΙΩΙΜΗΡΡΗΑΝΑΘΕΜΑΒΩΜΟΝΕΣΤΗ
ΣΕΚΛΕΩΝΟΕΠΙΤΩΝΑΛΩΝΚΑΤΑΠΡΟΣΤΑΓΜΑ

la quale deve leggersi Ἀσκληπίῳι Μήρρη ἀνάθεμα βωμὸν ἔστησε Κλέων ὁ ἐπὶ τῶν ἁλῶν κατὰ πρόσταγμα, cioè *Aesculapio Merre anathema* (donum) *aram erexit Cleon praepositus salinarum ex jussu* (secundum mandatum).

Dalla quale iscrizione intendiamo che Cleone, preposto alle saline, aveva eretto quest'ara ad Esculapio conforme il comando che aveva ricevuto, cioè dal sodalizio dei salinatori.

Sono da notarsi alcune cose anche in questa iscrizione, e prima di tutto il *iota muto* del dativo scritto accanto e non sottoscritto nella voce

ΑΣΚΛΗΠΙΩΙ, lo che indica l'antichità della lingua d'alcuni secoli prima dell'era nostra, venendo ciò in conferma dell'ortografia latina.

Specifica in secondo luogo la qualità del dono non indicato dalla latina, cioè che Cleone per voto pose una base o un altare (βωμὸν), la qual voce in greco significa *base* ed *altare*. Se non ci fosse pervenuto intiero il monumento, non si sarebbe potuto determinare la cosa votata, la quale è una perfetta base con principio di colonna.

Sebbene si abbiano esempi di offerte fatte alle divinità di vasi, di tripodi, di candellieri, e di altro, pure questo è il primo che annunzia una base di bronzo (1). Il dono veramente per que' tempi era molto grande e prezioso, donde bisogna argomentare l'agiatezza di Cleone e dei compagni. Bisogna pur dire che abbiano ricevuto da quel dio qualche sommo favore, perchè ordinariamente i voti sono in relazione dei doni ricevuti.

III.

Iscrizione punica.

La parte più interessante di questo monumento è l'iscrizione punica o fenicia, che viene appresso alle altre due. Questa è la più diffusa, constando di 92 lettere, comprese in una linea e mezzo, lungo l'ampiezza del plinto di 48 centimetri. Tanto più è interessante in quanto che ci è pervenuta intiera, e scolpita sul bronzo, nel quale non possono insorgere dei dubbi per istabilire la posizione delle lettere; come al contrario succede nelle lapidi, in cui l'asprezza o ineguaglianza del piano, in cui è incisa l'iscrizione, può impedire di poter giudicare con certezza il postamento degli apici delle stesse lettere: nel qual riguardo questo monumento può dirsi unico. Ecco intanto come noi proponiamo di dare il valore alle lettere colla corrispondenza in ebraico:

לאדנלאשמנמארחמזבחנחשתמשקללטרממאתיאשנדראכלינשחנוגמאשבממלהתשמ
לארפיאבותשפטמחמלכתנעבדאשמנבנחמלנ

(1) Sembra strano che Cleone abbia offerto una base al suo dio: ma noi crediamo che l'offerta di basi di colonne, come oggetto sacro, sia molto antica, e che i Gentili l'abbiano preso dalla S. Bibbia. Gli Ebrei offersero a Mosè, che doveva costrurre il Tabernacolo, *bases aeneas* da sottoporsi alle colonne davanti al Propiziatorio (Ex. XXV, XXVI, 37).

Formandone poi la separazione coi seguenti gruppi, ci darebbe la seguente lezione:

לאדן לאשמן מארח מזבח נחשת משקל לטרם מאתי אש נדר אכלין שהן וגם אש בממלהת שמ
ר לארפי אבות שפטם חמל כתן עבדאשמן בן חמלן

che tradotta in latino parola per parola sarebbe: *Domino Hesmun Merech* (Adiutori) *aram aeneam ponderatam Thermis* (sacrario) *donavit vir vovens Haclion qui gratiam accepit, et etiam est vir sodalis salinarum* (eo quod Hesmun) *custodivit infirmos patres Suffetes* (ordinatores, qui iusserunt donum) *sit propitius* (et qui exaravit, fuit): *chithin* (citheus) *Abdesmun filius Chamlonis.*

Avendo sottoposta questa lezione al ch. T. Prof. *Garrucci* in Roma, facendogli avere una copia dell'epigrafe punica, così egli pensa di formare i gruppi della stessa iscrizione con cambiamento di qualche lettera:

לאדן לאשמן מארח מזבח נחשת משקל לטרם מאת ... אש נדר אכלין שהן וגם אש בממלהת שמ
ר לארפי אבות שפטם חמלכתן עבדאשמן בן חמלן

vale a dire: *Domino Esmuno Merre aram aeneam pondo librarum centum ..... voto suscepto Cleon, eo quod exaudivit* (eum) *et ex salinis reduxit. Curator ab actis Patrum Suffetum Himilcathon Esmuni cultor, filius Himelonis.* Il segno che occorre dopo מאת, del quale noi abbiamo formato un *iod*, dice d'esser *una sorta di puntuazione.*

Allo stesso tempo avevamo mandato in Torino al ch. Conte *Alb. Della Marmora* un esatto disegno del monumento, e lo stesso bronzo originale, onde farne il confronto, e conferire intorno alla lezione col ch. Comm. *Amedeo Peyron*, ed ecco come questi formò i gruppi delle lettere, dando diverso valore ad alcune delle medesime lettere coll'ispezione dell'originale.

לאדן לאשמן מארח מזבח נחשת מזקל לטרם מאת ... אש נדר אכלין שהלם גם אש בממלהת שמ[ע]
[ק]ל ארפיא בעת שפטם המלכת ועבדאשמן בן חמלן

vale a dire: *Domino Esmun Merach aram aeneam ornatam* (pondo) *litris centum ... vir vovens Cleon Siculus, etiam vir Salinarum.* (Esmun) *audivit vocem, sanavit. In tempore Iudicum Chamalcuth et Abdesmun, filii Chamlon.*

Ora, dal confronto che si può fare delle tre lezioni di sopra riportate,

ben si rileva, che le prime cinque parole non ammettono contestazione, perchè tali anche noi le avevamo lette a prima vista, cioè

לאדן לאשמן מארח מזבח נחשת

Domino Esmun Merach aram aeneam, dove non occorre altro di notare se non il ל superfluo premesso ad *Esmun*, sebbene se ne abbiano esempi in altre iscrizioni fenicie, come nella prima Maltese לאדנן למלקרת, *al Signor nostro a Melcart*. Il culto dunque di Esculapio era introdotto in Sardegna fin dai tempi remoti (1).

Intorno poi al cognome מארח, *Merach*, dato ad Esculapio, che nè il latino, nè il greco hanno spiegato, potrebbero farsi molte vaghe conghietture, come pure osservarono il Garrucci ed il Peyron. Riferendoci adunque a quanto abbiam detto di sopra nell'iscrizione latina, parleremo di questa voce separatamente, perchè in essa ravvisiamo una di quelle che, attraverso di tanti secoli, dal tempo de' Fenici, si è conservata viva, fra tante altre che passeremo in rassegna, nell'idioma sardo, nella voce *Mere*, per *patronus*, *adiutor*, *subventor*, ecc., detto per eccellenza.

מזקל לטרם מאת ...

Ornatam litris centum. La seconda lettera della prima voce a noi sembrò un ש per cui leggevamo משקל, cioè *ponderatam*. Il Peyron la prende per un ז, perchè simile al ז di מזבח, e legge מזקל, cioè *ornata*. Le altre due voci dal Garrucci e dal Peyron sono spiegate per *litris* (libris) *centum*. Il primo notava intorno alla voce *litrim*, che *entrò nell'uso della lingua punica pel commercio:* ed il Peyron soggiungeva: « io spiego » לטרם plurale del siriaco ליטרא, *litro*, nome indicante un peso. A » queste voci il Michaëlis nel suo *Lexicon Syriacum* del Castelli con sue » aggiunte osserva, che a torto questo peso fu confuso colla libra

(1) Di nessun'altra divinità infatti si sono rinvenuti nell'isola tanti monumenti in bronzo ed in marmo che di questa, e basti di ricordare il vaso di bronzo di *C. Stertinio* (riprodotto nella tavola 2.ª II), del quale abbiamo parlato nel Bullettino (an. II. p. 130), e la statua in marmo del R. Museo (Bullettino an. IV. p. 49); oltre l'iscrizione di *C. Giulio Marione* che conservasi nello stesso R. Museo, dalla quale si rileva che anche in Cagliari fosse eretto un tempio a questo Dio (Bullet. an. III. p. 28). Per la qual cosa, or fa cinque anni, noi conchiudevamo, parlando del culto di questo nume, che *fosse introdotto in Sardegna nel tempo che ne avevano il dominio i Cartaginesi, e forse molto tempo prima per mezzo delle colonie primitive che vi trasportarono i Fenici* (Bull. cit. an. II. pag. 132).

» romana per affinità di suono, e professa d'ignorare qual sia il suo rap-
» porto colla libra. Da ultimo così scrive: *id unum verisimile* לטרא
» *antiquum phoenicum pondus fuisse, unde et nomen graecum Siculis*
» *maxime usitatum. V. Julii Pollucis Lexic. lib. IV*, § 173. *Meminerimus*
» *Phoenicum et Carthaginensium diu fuisse, ut vel ipsa Siculorum numis-*
» *mata, literis phoeniciis insignia, ostendunt Siciliani.* Tralascio quanto
» egli dice delle monete fenico-sicule, ed osservo che nel Nuovo Testa-
» mento abbiamo pure λίτρα. Dacchè Cleone aveva fatto l'egregia spesa
» di una bell'ara di bronzo ornata, era naturale che ne indicasse il peso
» di מאת *cento* e più litri: siccome nel cronico Edesseno leggiamo
» d'un Senatore che aveva offerto una mensa d'argento di 720 ליטרים,
» *litri*. La sigla che succede al מאת nota un numero, frazione d'un
» centinaio ».

אש נדר אכלין שחלס

Vir vovens Cleon Siculus. Intorno alle prime tre voci, nè manco a noi occorse dubbio alcuno; ma nella quarta, prendendo l'ultima lettera per un *nun*, avevamo letto שחן, *qui gratiam accepit:* sospettando però che l'ultima lettera contenesse un nesso. Questo lo trovò il *Peyron*, sciogliendolo per un ל e ס, leggendo שחלס, Σίκελος, colla terminazione greca ος, e soggiunge: « Dalla Sicilia abitata da Greci, da Cartaginesi
» e da Romani era venuto Cleone in Sardegna, e conoscendo egli le
» tre lingue, le volle tutte e tre adoperate nel suo votivo rendimento
» di grazie ».

Noi però, posta questa spiegazione, crediamo che Cleone fosse sardo, ed appartenente agli antichi popoli *Siculenses*, notati da Tolomeo, e collocati dal Della Marmora giustamente nella parte orientale di Cagliari (1); e che intanto mettesse l'iscrizione in tre lingue, in quanto che erano vive in Sardegna a quel tempo, ed affinchè ognuno che si portava a visitare quel santuario potesse leggere il voto fatto da lui.

In quest'ultima voce trovò difficoltà anche il Garrucci, il quale, stando all'apografo che gli avevamo rimesso, confessava che oltre il נס d'esser superfluo, lo ש *nell'uso di caso accusativo, o dativo che sia, non aveva bastevoli esempi.*

Intorno poi alla voce אכלין, che corrisponde al greco Κλέων, osserva

(1) V. Della Marmora, Voyage etc. vol. 2. Antiquité, pag. 414. V. pure la Carta antica della Sardegna, premessa al vol. 2 del suo *Itinerario.*

il Peyron che « ai Semiti non garbavano i vocaboli incominciantì da due » consonanti, non consolate da una vocale intermedia, quindi, per par- » lare dei soli Siri, questi dovendo esprimere colle loro lettere στάδιον, » στοά, etc., vi premettevano un aleph אסתדיון (V. il Lexicon Syriacum » del Michaëlis ad v.) ».

גם אש במלחת

Etiam vir Salinarum. Nè manco in queste tre voci trovammo difficoltà, mentre vengono a spiegare il SALARI*orum* dell'iscrizione latina, e l'ὁ ἐπὶ τῶν ἁλῶν della greca. Nella lingua ebraica il sale dicesi מלח, qui è sostituito l'ה aspirato in cambio del ח gutturale, per cui lo scambio era molto facile. Il *Peyron* soggiunse, che « ciò potè provenire o dalla » nazione fenicia, o dal dialetto sardo-fenicio, od anche da un errore » ortografico dello scrittore. Anzichè attribuir tal permutazione alla na- » zione dei Fenici, la ripeterei dal dialetto sardo, ed anche meglio dalla » cattiva pronunzia dello scrittore che scolpì un ה per un ח. Il sale » dicendosi מלה, il derivato ממלה dee notare *salina* ed in plurale ממלהת » *saline.* Se l'ה fosse stato quiescente e di forma, sarebbe scomparso » nel plurale; ma si conservò, dunque è radicale ed aspirato, ossia » affinissimo al ח. L'אש במלהת vale *uomo nelle saline*, e tal pure » sarebbe stato qualunque infimo lavorante; ma l'ὁ ἐπὶ τῶν ἁλῶν della » greca iscrizione, ci dà ad intendere che Cleone aveva qualche supe- » riore posto nelle saline. La bell'ara di bronzo ornata, basta per parlare » della borsa di Cleone, epperò del grado superiore che aveva fra gli » uomini addetti alle saline ».

שמע קל ארפיא

Audivit vocem, sanavit. Colle prime due lettere della prima voce termina la prima linea dell'iscrizione, le quali lettere noi avevamo unite colla prima della seconda linea, che per essere spezzata, comparendovi solamente l'angolo di sopra, avevamo preso per un ר, formandone la voce שמר, *custodivit;* ma il sullodato Peyron in questo avanzo di lettera vide un ק, e supplendo nella linea antecedente un ע scomparso pel taglio del bronzo, vi legge la solita formola delle iscrizioni votive שמע קל.

Se si fosse trovato il frammento del bronzo che congiungeva l'angolo della base, si sarebbe definito questo punto: ma per quante ricerche siano state fatte ultimamente nel sito dove fu scoperto il monumento, niente venne trovato in materia di bronzo, salvo che si sono estratte

moltissime pietre ben lavorate ad uso di edifizio, frammenti di vasetti di rozzissime stoviglie, e di altri voti in bronzo, ed una quantità di carbone spento, ossia di legno carbonizzato, con molte ossa.

Il Garrucci, conforme le lettere che gli avevamo trascritto, secondo comparivano ai nostri occhi, spiegò *custos mandatorum*, cioè *curator ab actis* delle epigrafi latine, e ciò riferendolo ad *Himilcathon*, che vi si appose *per legalizzare l'atto di donazione*, *secondo le leggi del paese*, come sembra.

בעת שפטם

In tempore iudicum. Noi avevamo preso la seconda lettera della prima voce per un *vav*, ed unendo l'א della precedente lettera avevamo letto אבות שפטם *patres* (maiores) *suffetes* (ordinatores). Anche il Garrucci non si allontanò, appoggiato alle forme delle lettere che gli avevamo trascritto. Ma il sullodato Peyron, col confronto del bronzo avverte che « tal lettera è un ע. Esso, siccome si vede negli alfabeti dell'Hamaker e » del Gesenio, può avere due forme, l'una affatto circolare qual è quella » del עבד seguente, l'altra aperta superiormente come qui. Il בעת שפטם » nota *nel tempo dei Giudici* (essendo Giudici). Come gli Ateniesi se- » gnavano gli anni per mezzo degli Arconti, gli Spartani col nome degli » Efori, ed i Romani citando i Consoli, così i Sardi segnavano gli anni » per mezzo dei loro Suffeti celebri nelle storie ».

Ammessa questa interpretazione, chiaro è, che Cleone era sardo, cioè degli antichi Siculesi, come di sopra abbiamo detto, e che la base è stata fusa e modellata in Sardegna. Se egli fosse venuto di Sicilia col voto ivi preparato, non avrebbe nominato i Suffeti Sardi, sebbene di questi nulla ci abbia tramandato la storia.

חמלכת ועבדאשמן בן חמלן

Chamalcath et Abdesmun filii Chamlon. Seguitano i nomi dei Suffeti o dei Giudici, che noi avevamo preso per nomi propri bensì, ma in diverso senso, cioè per l'artefice del monumento col nome del padre, *Abdesmun figlio di Chamlon.* Come pure dividendo la prima voce, e prendendo per *uun* la prima lettera della voce seguente, leggevamo חמל כתן, nel quale vedevamo uno del sodalizio delle saline (1). La voce

(1) Era la cosa più facile, che forestieri fossero addetti al lavoro delle saline, come lo vediamo al presente, e che l'*Abdesmun* fosse l'artefice o l'incisore dell'epigrafe. Intorno a ciò giova osservare, che l'iscrizione più malamente incisa è la latina: la greca è meno trascurata: la punica poi è la più nitida e scritta con franchezza, da potere stare a confronto della Maltese I, che dai paleografi si cita per modello.

כתן *Cytheus*, dell' isola di Cipro lesse l'*Hamaker* nella Cartaginese VIII, che poi fu emendata dal Gesenius. Nella stessa iscrizione occorre pure il nome di המלכת figlio di Abdesmun, di schiatta רב *principe* (Gesenius pag. 179).

Anche il *Garrucci* vide un nome proprio nelle due voci che avevano separato, leggendo המלכתן *Hamilcathon:* ma il *Peyron* nell'ultima lettera di questo nome vi scorse un *vav* invece d'un *nun*, il qual *vav* congiunge il primo suffete *Chamalcath* col secondo *Abdesmun*, figlio di *Chamlon*. In conseguenza di questi emendamenti fatti dal Peyron, ne nascerebbe la seguente spiegazione del medesimo.

Al Signore Esmun Merach un'ara di bronzo ornata (pesante) *libri cento....* (consacra od innalza) *il votante Cleone Siciliano, e addetto alle saline.* (Il Dio) *udì la voce: sanò. Al tempo dei Giudici* (essendo Suffeti) *Chamalcat ed Abdesmun figlio di Chamlon.*

Stabilita così la lettura dell'ultima iscrizione, occorre finalmente di conghietturare del tempo in cui fu innalzato il monumento. Noi l'avevamo riferito al primo tempo in cui i Romani avevano formato della Sardegna una delle loro Provincie, e per conseguenza al secolo di transizione, quando allo stesso tempo vi soggiornavano i Cartaginesi ed i Greci, cioè i Siculensi e gli Iolaensi, vale a dire allo scorcio del secolo III prima di Cristo. Il ch. Peyron crede che il monumento sia d'una data più recente; ed il ch. *C. Cavedoni*, appoggiato all'arcaica ortografia dell' iscrizione latina e greca, conghiettura che *quel sacrario di Esculapio un secolo e più innanzi dell'era volgare fosse abitato e visitato da paesani e forestieri misti di Punici, di Greci e di Latini* (1).

Quale poi sia stato il tempo in cui questa sacra base venne seppellita, e quale il motivo per cui fu infranta, è naturale il pensarlo. Appena che s'introdusse il cristianesimo, ognuno sa che furono atterrati i tempi dei falsi dei, e le loro statue, con tutto quello che poteva ricordare il loro superstizioso culto; e specialmente dopo che la fede di Cristo venne dominante. Da quel tempo sarà stato atterrato quel celebre santuario, e spezzato insieme il monumento, nel quale sono rimasti tanti segni che indicano manifestamente come sia stato infranto con fanatica rabbia a ripetuti colpi di stromento con punta e con taglio.

---

(1) La lingua latina era la dominante, e perciò crediamo che siasi data ad essa la preminenza nell'iscrizione. I Romani ovunque conducevano le armi, portavano anche la lingua: ma ci volevano dei secoli per fare sparire totalmente la lingua dei vinti.

Se altro fosse stato il motivo della distruzione, avrebbero tolto il metallo, e ne avrebbero fatto altro uso: ma a vece, dopo di aver sfracellato il monumento, e fatto in tanti pezzi quanto hanno potuto, è stato calpestato e seppellito, insieme alle corone dello stesso metallo onde era adorno (1), affinchè se ne perdesse la memoria, nè potesse più in esso comparire ai posteri un oggetto di sacrilega venerazione.

All'illustrazione del bronzo trilingue soggiungo poche parole su tre piccole anticaglie fenicie scoperte nell'antica Tharros, e sinora inedite.

Il monumento designato nella tavola II, e notato colla lettera E, è una pasta dura, rossiccia, e simile a stoviglia cotta, posseduta dall'applicato al R. Museo, V. Crespi. Rappresenta una testa nuda, rivolta a sinistra ed imberbe. All'intorno ha l'iscrizione עבמלקר, nella quale vediamo un nome proprio di *Amilcar* (servus, o cultor Herculis). Il nome è contratto da עבד e מלקרת; mentre si hanno esempi, dai quali si chiarisce, che della prima voce si metteva anche la sola lettera ע, unita a Melcart, è מלך קרת (Re della città) *Ercole* per eccellenza, così chiamato dai Tirii, perchè era il loro Dio tutelare (2). Così pure nella seconda voce si sopprimeva l'ultima lettera ת, quando della stessa divinità si componevano i nomi proprii d'uomo, come *Amilcar*, *Bomilcar*, ecc.

Che cosa poi rappresenti questa testa, e di chi sia questo ritratto, non possiamo conghietturare altro, se non che sia di qualche principe, o duce Tharrense, chiamato *Amilcare;* e che la medesima pasta, in forma di moneta, sia servita per tessera di qualche spettacolo; se pure non debba annoverarsi tra le monete di occasione, o come chiamano *ossidionali*. Finora però è l'unica che siasi scoperta in quella località.

L'altro oggetto segnato colla lettera F di detta tavola, è uno scarabeo in diaspro verde, montato in oro, e posseduto dal Giudice Avv. Francesco Spano. Nella parte piana rappresenta una sfinge rivoltata ad un uomo nudo, collo *pscent* in testa, e pare che sia in atto di fuggire,

---

(1) Non possiamo sapere come erano collocate queste corone, se attorno della base, cioè nella sommità, se ai lati verticalmente, oppure servissero per ornamento del cippo di pietra o di altro che avrà sostenuto la base votiva. È solo da notare, che ai fianchi della medesima vi sono due buchi che, se non erano per tenerla inchiodata sul piedestallo, erano certo il punto da cui partivano le corone (V. lett. I nel dis. A). Anche quest'uso di unire corone alle are crediamo che sia stato preso dalla mensa mosaica e dall'altare del Timiama, che avevano le corone per ornamento (Ex. XXX).

(2) Occorrono esempi di altri nomi coll'aferesi בדאשמן בדעשתרת per עבדעשתרת, ecc. (Vedi Cil. IV. Carthag. III, ed al.).

rivolgendole la parola. Sotto ha tre calici di loto uniti insieme, e nel campo due lettere fenicie בן (1).

Nella parte convessa poi, ossia negli spartimenti delle ali dello stesso scarabeo, nell'ala destra altre due lettere תן, e nella sinistra בעלר. Sul valore delle lettere di questa seconda epigrafe, non cade alcun dubbio; ma la prima lettera della voce precedente occorre la prima volta nei monumenti sardi; crediamo però che sia un ת, che sebbene comparisca nella scrittura numidica, pure occorre della stessa forma nelle monete di Gades.

Più difficile poi ci riesce di fare la riunione di queste tre voci per ricavarne il senso. L'incisore non le ha potute collocare tutte al posto nel piano dello scarabeo, dove naturalmente dovevano essere; perciò noi proponghiamo di congiungerle così בן תנבעלר, formandone un nome proprio, cioè *filius Thenbaal principis*, quasi fosse un amuleto che appartenesse al figlio del principe o del *grande* di Tharros, *Thenbaal*. L'ultima lettera ר pensiamo che vi stia per abbreviatura di רב, *princeps*, *magnus*, ed il תן è lo stesso che il futuro del verbo יִתֵּן, da נתן, *dedit*, come nella Ciziense 14, dove occorre il nome *Baalithèn (quem Baal dedit)* per nome proprio: qui però l'attributo, o il dono di cui è composto il nome, sta in principio, a vece della fine della divinità.

Crediamo adunque che questa singolare iscrizione non abbia nessuna relazione colla scena incisa nel piano dello stesso scarabeo, in cui pare figurato il mito di Edipo colla sfinge che furibonda cerca di ficcargli le zampe addosso per non lasciarlo fuggire, dopo averle strigato il misterioso enigma.

Da noi differisce il dotto P. Garrucci, il quale da noi consultato favorì di risponderci così: « Secondo la trascrizione inviatami, dalla parte piana, » accanto ad una divinità egizia, coperta dello *pscent*, che reca fra le » braccia una figura, forse di donna involta in un panno, ed ha di sotto » i piedi una pianta di loto, si legge בן, e sulle ali dello scarabeo

בן
בעלד

(1) È da notare che le lettere di questo scarabeo sono riportate nel disegno nel modo come sono incise, leggendosi nell'originale nella solita maniera. Al contrario le lettere dello scarabeo G sono messe al rovescio, come compariscono nell'originale. Dalla qual cosa si rileva, che questo era per uso di sigillo, non così il primo.

» Strana è al certo la separazione del בן dalla leggenda più lunga, » ed è più strano ancora che l'estrema parte sia sovrapposta: perocchè » io stimo che la leggenda sia בן־בעלדגן. Non è difficile dare una spie- » gazione a questo simbolo *Ben-baal dagon*, se si ammette che la » penultima lettera sia un *ghimel*. Per tal fine io la invito a cercare » nella paleografia fenicia un esempio di *t* formato come codesto, e posso » assicurarla che ella non lo troverà se non nella numidica, che non è » alfabeto di questa leggenda. Adunque conviene dire, che o sia mal » formato o mal letto.

» Il vocabolo בֵּן spiega ancora *devoto*, come nel nome di *Benadad*, » ed in questo senso lo prendo io qui, leggendo *Ben-baal dagon*, divoto » del dio Dagon. È la prima volta che leggiamo sui monumenti il nome » del sì celebre dio Dagon degli Azotii. Non fa difficoltà l'omissione della » quiescente וֹ in דָגוֹן, perocchè ella sa che invece i Fenicii non usa- » rono di scrivere nè il *vav* nè il *jod* quiescenti, a meno che quest'ultimo » non dovesse significare il suffisso di prima persona ».

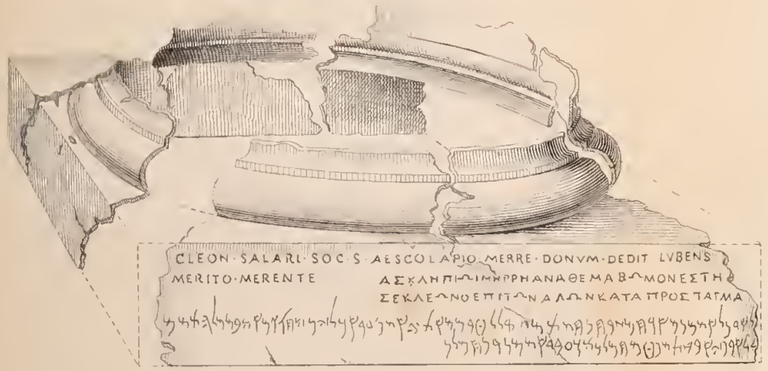
Nel terzo disegno finalmente, segnato colla lettera G, abbiamo messo lo scarabeo in calcedonia della nostra collezione donata al R. Museo (V. Catalogo, custodia I, n.° I, pag. 12). Desso rappresenta una sfinge accoccolata da destra a sinistra col doppio *pscent* in testa, nel campo destro cartello regio ed in faccia il serpente ureo. Sopra il cartello l'incisore ha collocato tre lettere fenicie, che non ha potuto incidere dentro il medesimo cartello, come era naturale per dovergli riuscire molto difficile in sì piccolo spazio (1).

Le lettere ci danno il vocabolo עחר. Noi credevamo che queste lettere formassero il nome del possessore dello scarabeo, del quale si servisse per sigillo (2): ma, avendo mandato un impronto in Roma, al chiar. P. Garrucci, egli sospetta che in quelle tre lettere sia tradotto l'egiziano nome del re *Achor* (V. Bullet. Archeol. Sardo, An VII, pag. 27).

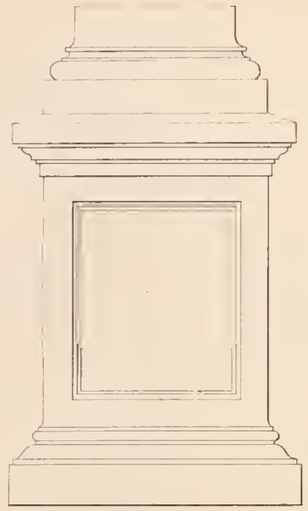
---

(1) Essendo occorso uno sbaglio nella riproduzione del disegno di questo scarabeo G nella tavola II, per cui l'iscrizione punica verrebbe a leggersi a rovescio, cioè da sinistra a destra, si è stimato opportuno di riprodurre qui sotto la medesima figura, ricavata da un'impronta in cera lacca ulteriormente ricevuta.

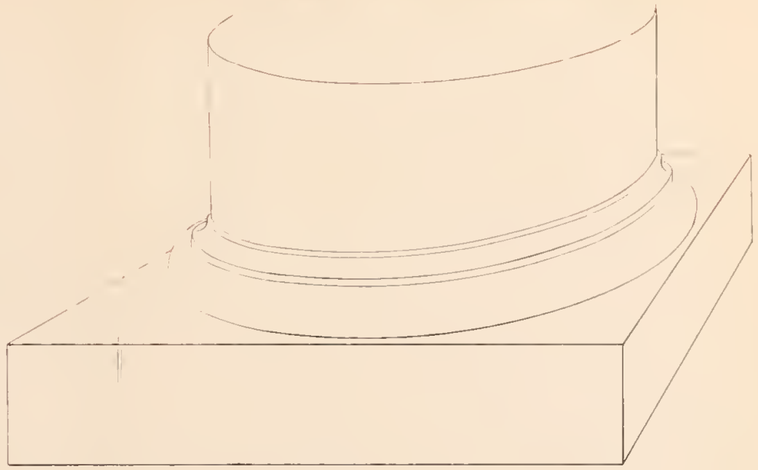
(2) Questo nome era frequente nella Cananea, e basti citare il nome di quel duce degli Ammoniti *Achior* (Judith. V. 5).



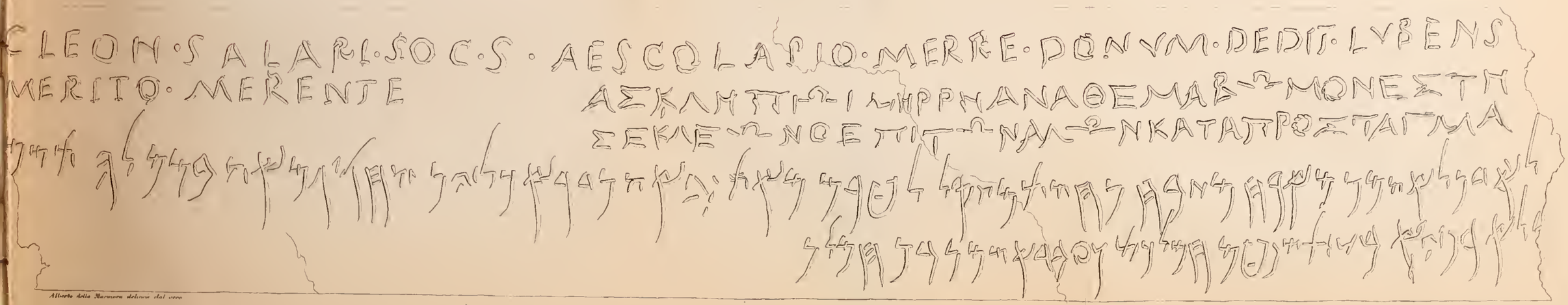
A

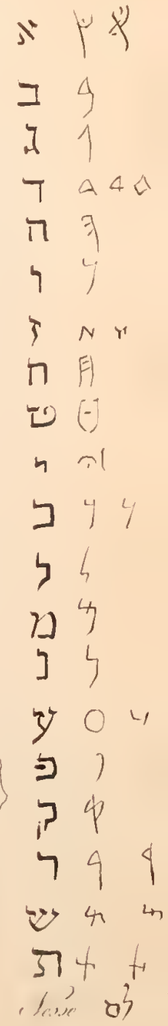


C



B





Alberto Adlis Marmora delineavit ad vivum

APPENDICE

DI

AMEDEO PEYRON

INDIRIZZATA

ALL'AUTORE DELL'ILLUSTRAZIONE PRECEDENTE

Nello scorso agosto Ella volle comunicare a me il bronzo originale dell'iscrizione trilingue scoperta in Pauli Gerrei, unitamente all'abbozzo della prima sua illustrazione di tal monumento, ed io allora villeggiando senza alcun corredo di libri, Le promisi che ritornato in Torino avrei studiato la leggenda fenicia, tanto più rilevante, quanto più andava unita con due leggende, l'una latina e l'altra greca. Rientrato in città nella seconda metà di ottobre mi applicai tosto a spiegare il testo fenicio, e quindi ad alcuni giorni Le inviai il mio parere. Ed Ella, venerando la mia nestorea età, volle nella sua posteriore illustrazione far tal conto della mia lettera da citarne molti brani, e pormi nell'onorevole compagnia degli illustri Cavedoni e Garrucci. Ma perchè questa sua seconda scrittura dee andare alle stampe, e perchè nell'intervallo di quasi due mesi mi sorsero in mente varie riflessioni, che o sono nuove, o meglio spiegano il primo mio parere, mi fermai di accompagnare il dotto suo lavoro con un'appendice, che sottopongo al giudizio di Lei e dei dotti. Così Ella ed io contribuiremo a dimostrare, che, se la buona fortuna offre alla Sardegna ed al Piemonte preziosi monumenti, essa non è affatto cieca, dacchè in questa nostra Accademia trova illustratori, che collo studio e col buon volere procacciano di corrispondere ai favori della dea.

Cominciando dalla calligrafia dell'incisore debbo dirle, che il comune amico Conte Alberto Lamarmora ed io, nel considerare i lineamenti di quelle lettere, riconoscemmo un incisore di poca abilità, il quale con

mano mal ferma maneggiava un grossolano bulino (1). Infatti il secondo R di MERRE, l'O di DONUM e di ΠΡΟΣΤΑΓΜΑ, il B di ΒΩΜΟΝ, oltre ad altre lettere, accusano un artista, che poco destro a formare segmenti circolari preferiva di ridurli a corte linee rette, come fanno i geometri quando per quadrare il circolo ne riducono la periferia a basi infinitesimali di triangoli. Ciò vuol essere avvertito per la lettura specialmente dei ד e dei ר fenicii. Inoltre la mano dell'incisore, volendo menare una linea anche retta, talora esorbitava trascorrendo in tratti soverchiamente lunghi, e talora andava tegnente e scarsa; tali sono le tre lineette orizzontali dei varii E, quella pure orizzontale dei T. Le due lineette laterali degli Ω sono sesquipedali. La M del MHPPH è meschinissima a paragone di quelle di ΒΩΜΟΝ e di ΠΡΟΣΤΑΓΜΑ. Il Σ di questo vocabolo paragonato a quello del ΣΕ, che comincia la seconda linea, sembra un Ξ. Finalmente una stessa linea retta si riconosce sovente tirata con due tratti, ed il secondo non coincide col primo; quindi avvenne che parecchie gambe di lettere greche presentano rappezzature, come vediamo nel Π di ΑΣΚΛΗΠΙΩΙ, nel secondo H di MHPPH che per sopramercato pare un N, così dicasi di altre. A che vado io notando tali minuzie? Per dire che uguali sconciature, difetti ed esorbitanze si incontrano pure nelle lettere fenicie, donde poi necessariamente deriva il dissenso fra Lei e me nella lettura e nell'interpretazione. Che se a questa prima causa si aggiunga la difficoltà d'un dialetto poco noto, niuno dee fare le meraviglie se i filologi discordino fra loro. Se non che nel caso presente la leggenda latina e la greca sono due luci, che nel crepuscolo spandono qualche raggio.

Ma vengo omai alle iscrizioni.

Nella greca Ella, dopo avere egregiamente interpretato il *κατὰ πρόσταγμα secundum mandatum*, crede che la società dei salinatori avesse dato a Cleone il *mandato* d'innalzare l'ara votiva. Io osservo, che ciascuna delle tre iscrizioni dee stare da sè, dacchè contiene e ripete le parti sostanziali d'un'iscrizione, dico il nome del dio, quello del donatore e le principali circostanze del dono. Osservo ancora, che il sodalizio dei salinatori sta nominato nella latina iscrizione solamente come titolo dell'impiego di Cleone; laddove nella greca e nella fenicia i salinatori non sono più menzionati. Epperò parmi incongruo che al *πρόσταγμα* si debba

(1) Il Lamarmora crede che l'incisore nel solcare il bronzo si servisse di un martelletto per picchiare il bulino; dal che derivarono le varie irregolarità.

sottointendere la società, tirandola giù dall' inscrizione latina. Inoltre Cleone offre l'ara ad Esculapio per essere stato risanato, e la grazia ottenuta essendo a lui affatto speciale, non intendo come il sodalizio partecipasse al compimento del voto. Per le quali cose io riferisco il πρόσταγμα al Dio stesso Ἀσκληπίῳ poc'innanzi nominato. Per dichiarare questo ordine e prescrizione del Dio io mi varrò di Aristide.

Questo retore, che si gloriava di essere fervente adoratore del dio [θεραπευτὴς τοῦ Ἀσκληπίου (1)], che niuna cosa o grande o piccola non intraprendeva mai senza il consenso del Dio (2), ed aveva per ordine di lui preso a scrivere i suoi sogni, dei quali aveva già empiuto la bagatella di trecento mila versi (3), questo retore, io dico, è classico quando si tratta d'Esculapio, e merita di essere consultato nei suoi *Sermoni sacri*, tutti composti in onore del dio salutare. Or bene Aristide ci insegna, che Esculapio soleva rivelare i suoi farmachi *talora in visione e talora con parole* [τὰ μὲν ὄψει, τὰ δὲ καὶ λόγῳ] (4). Al primo modo di rivelazione allude la presente iscrizione presso Grutero *Asclepio P. Xelius Polio visu monitus posuit* (5). Al secondo modo io attribuisco il nostro κατὰ πρόσταγμα. Infatti Aristide sovente col verbo προστάσσειν annunzia ciò che il Dio gli aveva *comandato* (6), col sostantivo πρόσταγμα il *comando* stesso (7), e coll'altro προστασία τοῦ θεοῦ esprime quanto egli eseguiva *per ordine del Dio* (8). Che più? Egli in sogno, credendo d'aver compiuto *la prescrizione*, gridava μέγας ὁ Ἀσκλήπιος, τετέλεσται τὸ πρόσταγμα *è grande Esculapio, la prescrizione è compiuta* (9). E voleva dire così: ho compiuta la prescrizione colla quale mi ordinasti il metodo di cura ed i farmachi. Sono risanato. Sei grande, o Esculapio. Di questi mandati esprimenti ciò che volgarmente chiamiamo la prescrizione ossia ricetta del medico, io cito come esempio il frammento d'un marmo presso il Grutero, che contiene parecchie di tali ricette ricevute da Esculapio, e state per minuto descritte sulla tavola votiva dai risanati (10). Tal marmo era un vero ricettario.

(1) *Aelii Aristidis opera* ed. *Jebb.* Oxonii 1722, tom. I, pag. 279.
(2) Pag. 345.
(3) Pag. 291.
(4) Pag. 334.
(5) *Gruteri Inscript. ed. Graevio Amstel.* 1707, pag. LXX. 7.
(6) Pag. 39, 274, 302, 308, 311, 316, 321, 326, 328 ecc.
(7) Pag. 323, 354 ecc.
(8) Pag. 331.
(9) Pag. 292.
(10) Gruteri Inscript. pag. LXXI.

Anche nel tempio di Esculapio in Epidauro molte tavole votive, per attestato di Pausania, esprimevano la qualità della malattia, *ed il modo col quale fu curata* [ὅπως ἰάθη] (1). Io ho distinto con Aristide la visione dal mandato, ma, trattandosi degli *aegri somnia*, dei quali sono pieni zeppi i Sacri Sermoni di Aristide, io non vorrei che la mia distinzione fosse presa in modo assoluto e riciso. Io intendo di dir così: Selio Pollione ringrazia Esculapio per la salute ricuperata *visu monitus*, e Cleone gli rende grazie, perchè risanato κατὰ πρόσταγμα, eseguendo la prescrizione medica significatagli dal Dio. L'ara stessa votiva mi autorizza a sottintendere *risanato*. Che se altri credesse che Cleone innalzò l'ara per un comando del Dio, io osserverei, che nelle molte prescrizioni citate da Aristide non vidi mai che Esculapio esigesse qualche mercede da'suoi divoti; gli dei sono più generosi degli uomini.

Ma entriamo omai nel crepuscolo fenicio illuminato dalle due iscrizioni di lingue notissime.

Sono lietissimo di andar d'accordo con Lei nelle prime parole לאדן מזבח מארח לאשמן, e continuo a tacermi sul מארח, riserbandomi a dire più sotto il motivo del mio silenzio.

Succede una parola, che Ella legge משקל, ed io più che volentieri avrei accettata tal lezione, la quale verrebbe a dire, che l'ara era *pesante litri cento* e più. Nell'iscrizione fenicia di Marsiglia, illustrata dall'Ewald, si incontra due volte il משקל per notare un *peso*, ossia una *somma* di qualche centinaio di זז spezie di moneta, che pagar si doveva ai sacerdoti (2). Ma la forma della seconda lettera parvemi più affine al ז di מזבח, che non ai varii ש dell'iscrizione; bensì l'uno e l'altro ז sono assai strani, ma quello di מזבח è indubitato. Epperò, se assolutamente dobbiamo leggere מזקל, io paragono tal radice זקל colla siriaca סקל e coll'araba צקל, che notano egualmente *polivit, ornavit;* è facile lo scambio delle sibilanti fra loro. Quindi מזקל participio della quarta coniugazione passiva varrebbe *ornatus*, *expolitus*. Infatti l'ara era *ornata*.

Imperocchè, siccome Ella diligentemente notò, insieme ai due pezzi principali di bronzo furono pur trovati *pezzi di corone con molte foglie di alloro parimente di bronzo*. Che anzi Ella volle cortesemente mandarmi una lastra di rame lunga centimetri 25, larga 20, e quattro foglie di

---

(1) Pausania II. 27.

(2) Vedi le *Abhandlungen* della R. Accad. di Gottinga 1850 tom. IV. pag. 93.

alloro lunghe 11 centimetri (1). La lastra, sebbene interrata da diciotto e più secoli, conserva ancora alquanto dell'antica sua curvatura circolare, ed è bucherata a brevi distanze con fori atti a ricevere le gambe delle foglie anzidette. Per essa noi abbiamo, come Ella ben disse, il frammento d'una corona; ed io soggiungo che la corona ristabilita all'antica sua forma circolare, siccome calcolò l'egregio nostro socio Lamarmora, avrebbe avuto un diametro di 50 centimetri almeno (2). All'annunzio di cotanto diametro Ella farà, non ne dubito, le meraviglie altissime; ma le corone, che si dedicavano ad Esculapio, misuravano una ampiezza straordinaria. Infatti Aristide, come egli stesso scrive, sognava di essere in Pergamo, e *di mandare al Dio una di quelle* LUNGHE *corone che si sogliono portare* SPECIALMENTE *ad Esculapio* [*στέφανον πέμπειν τῷ θεῷ τῶν* ΜΑΚΡΩΝ, *οἵ εἰσιν οὓς* ΙΔΙΑΙ *τῷ Ἀσκληπίῳ κομίζουσι*] (3). Poi dice che, proseguendo a sognare, il Dio gli ordinò che *si ponesse sul capo una corona presa dal tempio di Esculapio*, e che così acconciato sorbisse un ovo [*παραθέσθαι στέφανον παρὰ τοῦ θεοῦ . . . . ὁ δὲ στέφανος ἦν ἐκ τοῦ ἱεροῦ τοῦ Διός Ἀσκληπίου*] (4). Fedelmente io tradussi *lunghe* l'epiteto *μακρῶν*, ma trattandosi di corona, ossia di cosa circolare, essa, se era lunga, doveva essere parimente larga. Adunque corone si offrivano ad Esculapio, e queste, secondo il rito speciale, esser dovevano di lungo diametro; tal è appunto il frammento di corona trovato fra i rottami dell'ara. Dunque l'ara era ornata almeno con una vasta corona. Ora siccome i latini in simil caso avrebbero nell'iscrizione aggiunto all'ara la solita frase *cum omni cultu ornata*, Cleone al מזבח *ara* aggiunse il participio passivo מזקל *ornata*.

Conseguitano le parole לטרם מאת *litri cento*, e vien dopo al *cento* tal imbroglio di lineette e di punti staccati, che certamente segnavano una cifra numerica, frazione del centinaio, ma io ricuso di dar le spese al cervello per indovinare tal numero. L'ara pertanto era ornata e pesava litri cento e più. Quanto al לטרם non ripeto ciò che Le scrissi nella mia prima lettera, dacchè Ella ne citò un lungo brano nella sua illustrazione.

Colle cinque lettere אכלין si volle certamente esprimere l'appellativo

(1) Delle altre tre foglie indicate nella tavola 2.ª con punti, non esistono più che le gambe che le univano al ramo principale dal quale furono staccate.

(2) Vedasi lo stesso ramo ridotto ad un ottavo dell'originale, ed i tre circoli, segnati in D nella stessa tavola. Dai particolari della lastra suddetta si rileva, che le foglie laterali della medesima formavano con essa un corpo solo, e che soltanto le foglie centrali furono aggiunte dopo.

(3) Aristide tom. I. pag. 283.

(4) Ivi.

Κλέων. Il jodh vi sta come madre della lezione per notare la vocale *e*, laddove la seconda vocale *o* dobbiamo sottintenderla, il che sempre più dimostra quanto i Fenicii fossero parchissimi nell'adoperare le madri della lezione. Ma ciò che a prima giunta reca meraviglia si è l'א premesso; questo merita speciale illustrazione.

Premetto un fatto. I Siri volendo far trapassare nelle loro scritture i greci vocaboli *κλίμα*, *ξένος*, *στάδιον*, *στοὰ*, *στοιχεῖα*, *στάσις*, *στρατὸς*, *στρόγγυλος*, *σκύφος*, *στατὴρ* ecc., a tutti premettono un א (1), talchè diventano אכלימא, אכסנא ecc. *aclima*, *acseno* ecc. Raramente li scrivono e pronunziano con un *e* brevissimo [direi *scevà*] inserito fra le due consonanti כְּלִימָא *chelima*. Lo stesso osserviamo nei Targumim de' Caldei. Che vuol dir ciò? Ciò ci insegna che il Siro ed il Caldeo rifuggivano dal cominciare un vocabolo con due consonanti addossate l'una all'altra, e per lo più con un א prefisso le dividevano formandone due sillabe, e pronunziavano *estádion*, *estratía* ecc. Ora noi vedendo qui l'appellativo Κλέων arricchito di un א premesso e certamente pronunziato *acléon* od *ecléon*, dobbiamo dire che la lingua e la pronunzia dei Fenicii era per indole pari a quella de' Siri e de' Caldei.

Posto questo innegabile fatto, io vengo ad Esculapio.

Sin da antico si disputò sull'origine di Esculapio. Pausania riferiva tre diverse nascite del Dio, ma tutte greche (2); al contrario Damascio pronunziava che egli non era nè greco, nè egiziano, ma bensì fenicio ed ottavo figlio di Saduc (3). Al che si oppose il Jablonski annoverandolo fra gli dei originari dell'Egitto (4); ed Ella, tenero amatore delle cose fenicie, onde si illustra la Sardegna ed il nome di Spano, vuole che il Dio sia fenicio. Io per me indifferente sulla sua origine, ed incredulo alle mitologiche tradizioni, credo al fatto seguente, che sottopongo all'acuto giudizio di Lei.

V'ha un Esculapio egiziano, venerato ab antico nel Serapeo di Memfi, dove aveva un tempio ed entrate speciali, distinte da quelle di Api (5); e questo Esculapio si chiamava Ϣⲙⲟⲩⲛ, vocabolo pretto egiziano, che

(1) Vedi tutte queste voci coll'aleph premesso nel *Lexicon Syriacum* del Castelli colle aggiunte del Michaëlis.

(2) Pausania lib. II. cap. 26.

(3) Damascio presso Fozio *Biblioth.* cod. 242. Vedi anche Eusebio *Praeparat. Evangel.* lib. I. cap. X.

(4) Jablonski *Pantheon Ægypt.* II. 7. 13.

(5) *Papiri Greci del Museo Britannico illustrati da B. Peyron* nel vol. III. serie II delle *Memorie dell'Accad.* di Torino.

vale anche *otto* ed *ottavo*. Nella Fenicia Esculapio era denominato אשמן, sostantivo che non ha una giusta forma indigena; sostantivo che rispetto allo Ϣⲙⲟⲩⲛ ha un א premesso; sostantivo appellativo d'un Dio, che Damascio seguendo la tradizione fenicia diceva essere l'*ottavo* figlio di Saduc. Ora tra le due appellazioni *semun* ed *escmun*, certamente derivate l'una dall'altra, qual sarà la primitiva? Io per me nell'א prefisso riconosco il legittimo marchio d'un vocabolo stato dall'Egitto introdotto nella Fenicia; e nell'ottavo figlio di Saduc riconosco un'allusione fenicia al valore del primitivo nome Ϣⲙⲟⲩⲛ egiziano. Pronunzierei pertanto, sebbene poco me ne caglia, che Esculapio ebbe i natali in Egitto, ed infatti Aristide chiama egiziano il Dio (1).

La controversia sui natali di Esculapio donde mai derivò? Derivò dall'orgoglio nazionale dei tre popoli, de' quali ciascuno pretendeva che il Dio gli fosse indigeno. Lo stesso orgoglio partorì fra gli stessi popoli tre tradizioni diverse sulla vita, sulle geste e sui titoli del Dio salutare. Che anzi la tradizione greca dee differire dalle altre due, quanto la voce *Asclepios* differisce da *Smun* ed *Esmun*. Ora io leggo nella nostra iscrizione il vocabolo מארח di origine certamente non greca, il quale senza dubbio segna un soprannome di Esculapio, che gli fu dato o per un suo attributo speciale, o per qualche fatto, oppure per il luogo in cui era venerato. Per ispiegarlo ricorrerò io alla Grecia? Questa siccome col suo *Asclepios* volle spenta la denominazione asiatica ed africana, così avrà spente le tradizioni di quei due popoli. Ricorrerò io alla mitologia fenicia? Non la conosco. All'egiziana? La ignoro. Alla sarda? Dubito che possa distare dalle altre, quanto lo storpio *Merre* dista da *Meerach*.

Ed eccole, caro mio collega, perchè io ricuso di spiegare il מארח.

Soggiungerò tuttavia un'ingegnosa dichiarazione, che mi fu proposta dal dotto nostro collega ab. Ghiringhello. La radice ארח vale *ivit, incessit*, donde il derivato אֹרַח *incessus, iter*, e metaforicamente *vivendi agendique ratio*, significato che assume pure il דֶּרֶךְ. Ma l'altro derivato אֲרֻחָה *demensum, portio* ci avverte, che la radice ebraica ארח notava eziandio, come in arabo, *statuit, determinavit*. Riunendo i due significati avremo nel participio מארח *ille qui statuit, determinat vivendi agendique rationem*, e, come i Greci direbbero, *τὴν δίαιταν*; talchè il מארח sarebbe il *διαιτητὴς* nel suo senso letterale, *l'ordinatore della dieta*, cioè di quanto

(1) Aristide tom. II. pag. 19.

far si dee per la salute, e corrisponderebbe per altro verso all'epiteto *Salutare*, che i Greci ed i Latini davano ad Esculapio. Certamente tutti i cento e più *προστάγματα*, che si leggono in Aristide, erano appunto le prescrizioni del vitto, dei rimedi, dei salassi, dei bagni, ed anche di stranissime operazioni ordinate agli infermi come loro *δίαιτα*. La dichiarazione è ingegnosa, rimane che sia la vera.

Oh veda, padron mio, a qual lungo commentario mi abbia condotto un *aleph!*

Al nome di Cleone succede tal voce, nella quale Ella ben vedeva un nesso, ed in questo a me pare di ravvisare un לם, che mi dà שחלם ossia *Σίκελος Siciliano*, patria di Cleone. Ella vi scorge uno dei *Siculenses*, che stabilirono la loro sede sul lido orientale della Sardegna; ed io nei *Siculenses* ravviso una colonia di Siciliani detti *Σίκελοι* dai Greci e *Siculi* dai Latini. Invece del ם io avrei desiderato di trovare un י, onde avere שחלי colla solita terminazione semitica dei nomi gentilizi, ma i lineamenti sottoposti al ל non me lo permisero.

Alla patria di Cleone succede il titolo del suo impiego in Sardegna, e siccome sappiamo dalla latina e dalla greca iscrizione che egli era socio nelle saline, però queste debbono anche incontrarsi nell'iscrizione fenicia. In tutti i dialetti semitici il sale dicesi מלח, e noi qui nel vocabolo ממלחת abbiamo la stessa radice, ma scritta col ה invece del ח. Lo scambio del ה aspirato colla gutturale ח lo attribuirò io alla lingua fenicia, ovvero alla più dolce pronunzia della Sardegna? Nulla io decido, ma la permutazione qui è certissima, e merita di essere notata. L'ה di מלה *sale* talmente era aspirato, e segnato, direi, col *mappik*, che nel derivato plurale feminino ממלחת *saline* non iscadde per la terminazione *oth*.

Cleone qui è detto *uomo nelle saline*, e nella greca iscrizione *ὁ ἐπὶ τῶν ἁλῶν*, che può notare addetto alle saline, ed anche sopraintendente alle saline; ma il vero suo titolo è quello dell'iscrizione latina SALARI. SOC. S. Da Livio sappiamo che sin dall'anno di Roma 246 *vendendi salis arbitrium. . . . . ademptum privatis*, e che nell'anno 548 i censori Livio e Claudio *vectigal novum ex salaria annona statuerunt*, del che sdegnata la plebe diede a Livio il cognome di *Salinator* (1). Adunque la vendita del sale era di privativa dello Stato, che ne tassava il prezzo, e ne dava l'appalto ai salinatori. Infatti secondo Ennio *salinatores aerarii*

(1) Livio II. 9, XXIX. 37.

dicevansi quelli che per far il sale e venderlo pagavano all'erario un tributo (1). Costoro, prendendo dall'erario in appalto le saline d'un dato luogo, formavano una società. Ad essa allude il Digesto, che propone il caso di chi abbia così costituito il suo erede *Titius, qua ex parte mihi socius est in vectigali salinarum, pro ea parte mihi heres esto* (2). Cleone pertanto era nelle saline della Sardegna *salariae societatis socius*. Dico *Salariae*, come i Romani dicevano *via salaria, annona salaria;* e non già *salariorum*, perchè i *salarii* vendevano *salsamenta*, e distinguevansi dai *salinatores*. Alle saline della repubblica romana già note (3) si aggiungano le sarde.

Le due lettere, che stanno in fine della prima linea, sono, come Ella ben vide, שמ; ma io tosto sospettai che la rottura del bronzo avesse pur troncato via qualche lettera, almeno una, che conseguitava. La seconda linea comincia da tal frammento di lettera, che Ella credette un ר, ma potrebbe anche essere un ד. Io spesi più ore nel cavar qualche senso probabile dalle lettere שמ*רל o שמ*דל, dove l'asterisco nota l'assenza della lettera troncata; ma nulla mai potei raccappezzare. Finalmente nel frammento di lettera osservai che la lineetta inferiore [quasi base del triangolo] tendeva trasversalmente all'insù, siccome vediamo nel ק di מזקל ed in tutti i ק fenicii, allora esclamai, codesto è un ק. La lineetta inferiore vi tende diagonalmente all'insù per andar a formare l'apice del triangolo deretano del ק, triangolo che fu spezzato nella rottura del bronzo. Appena io vi riconobbi un ק, tosto supplii un ע, e lessi שמע קל, ossia la frase *il Dio esaudì la voce*, che si incontra in cinque o sei iscrizioni fenicie votive.

Il Dio nell'esaudir la voce di Cleone ארפיא lo *risanò*, nella qual parola io ravviso la quinta coniugazione di רפא certamente attiva. Tal coniugazione in ebreo direbbe הרפיא, ed in caldeo e siro ארפא; si noti che la Fenicia partecipando delle due forme scrive ארפיא.

Nel vocabolo seguente Ella prese la lettera media per un ו, ma il ו avrebbe una lunga gamba; io la credo un ע. Bensì quindi a poco incontriamo un ע affatto circolare, ma l'altra forma del ע aperta superiormente sta pure registrata nell'alfabeto del Gesenio.

---

(1) Ennio presso Servio al lib. IV *Æneid.* v. 244.
(2) Digesto lib. XXVIII, tit. V. 59.
(3) Dureau de la Malle *Econom. des Rom.* tom. II. p. 465.

Come il ק riciso per metà e ereduto un ר, poi il ע scambiato col ו, trassero Lei in tal inganno, che non Le permise di cavare un giusto costrutto di queste parole, e di accordarle colle seguenti; così il ק ed il ע ristabiliti mi lastricarono la via a tradurre con tutta facilità: *Il Dio esaudì la voce. Risanò al tempo dei Suffeti* [essendo Suffeti] *Chamalcut e Abdesmun figlio di Chamlon.* Questi nomi sono già noti per altre iscrizioni, e due appunto sono i Suffeti nella moneta cartaginese pubblicata dal Gesenio *Monumenta Phoenicia* nella tavola 16.

I due Suffeti mi somministrano la seguente osservazione storica e cronologica. I Romani governavano bensì per mezzo di Proconsoli o di Pretori le provincie soggette, a fine di esercitarvi il supremo dominio, conservarle fedeli, e ricavarne i possibili vantaggi; ma quanto all'amministrazione municipale mantenevano quella primitiva, avendo solamente cura di commetterla a persone devote alla repubblica. Quindi è che nelle iscrizioni di greche provincie suddite di Roma noi incontriamo ancora i nomi di Arconti, di Demiurgi, e di Senati, ossia i nomi de' magistrati che dominavano a' tempi dell'indipendenza. Per mezzo di questi le provincie continuavano a segnare gli anni, e non coi nomi de' Consoli romani, mutevoli ogni anno, epperò sovente od incerti od ignoti alle rimote contrade. Ma quando venne l'impero, gli anni cominciarono a notarsi dal regno dell'imperatore. Ciò che avvenne nella Grecia, nell'Asia e nell'Africa io lo credo pure avvenuto nella Sardegna. Questa, essendo caduta sotto i Romani verso l'anno 515 di Roma [secondo Polibio], ritenne il governo municipale già stabilito dai Cartaginesi, dico quello dei Suffeti, i quali erano due come a Cartagine, e come due Consoli comandavano a Roma. Coi nomi dei Suffeti l'isola continuò a segnare gli anni, insino a che ella pure adottò l'èra imperiale. Ciò posto, non v'ha dubbio che i due Suffeti nominati nella nostra iscrizione fossero Sardi ed annui, e che l'iscrizione sia anteriore ai tempi imperiali.

Pertanto l'iscrizione, secondo il mio avviso, vorrebbe essere interpretata così: *Al Dio Esmun Merach un'ara di bronzo ornata* [pesante] *litri cento* * * [consacra] *il votante Cleone Siciliano e addetto alle saline.* [Il Dio] *esaudì la voce, sanò. Al tempo dei giudici* [essendo Suffeti] *Chamalcut ed Abdesmun figlio di Chamlon.*

Al bronzo trilingue Ella volle aggiungere la notizia e l'illustrazione di tre anticaglie, che offrono leggende fenicie, io non Le parlerò che della terza.

Alla vista del vocabolo עחר io inorridii come alla presenza di un solenne mostro. In tutte le sette lingue del *Lexicon* del Castelli due sole parole si incontrano comincianti da עח, l'una samaritana assai dubbia, l'altra araba scritta per עכ. Bensì nel libro di Giuditta v. 5 leggiamo l'appellativo *Achior*, ma in ebreo sarà stato scritto col עכ, siccome nella Bibbia ebraica i simili appellativi *Achor*, *Acan*, *Acsa*, *Acor*, *Acar*, *Ocran*, tutti cominciano da עכ. L'immediata sequela עח è un vero mostro nelle lingue semitiche. Nella sola lingua araba abbiamo la radice rovescia חע, che vale *e gutture sonuit impeditus in cursu*, ed infatti nel pronunziare immediate l'una dopo l'altra queste due gutturali il suono esce impedito e straziante la gola.

Il Garrucci vi ravvisa tradotto il nome egiziano del re *Achor*, ma al dotto Padre, conciliatore benigno, risponderei che qualunque genuino orientale lo avrebbe scritto עכור, come infatti si legge in *Ios.* VII. 24. 26. XV. 7. *Isai* LXV. 10. Il dire poi, che le lettere sono poste a rovescio, perchè codesta anticaglia serviva di sigillo, è altra scusa di cuore benevolo. Io per me vi ravviso, non un sigillo, ma un impostore, il quale, dopo aver riunito una sfinge, un serpente ureo ed un'elissoide, tre emblemi egiziani, vi sovrappose stranamente tre lettere fenicie, le quali urlano contra l'Egitto, contra la Fenicia, e contra l'indole di tutti i dialetti semitici. Il secolo [se non erro] di Traiano ebbe già popolata l'Italia di anticaglie egiziane, fra le quali primeggia la nostra tavola Isiaca, e diffondendole nella Sardegna, vi avrà inoltre destato il vezzo di contraffarle. La Sardegna si guardi dagli impostori antichi e dai moderni.

Se nel sostenere la parte di filologo fenicio io usai tal diligenza, che possa sembrare soverchia e minuta, vogliano i dotti attribuirne la causa alla prestanza del monumento. Sinora noi possedevamo quattro sole iscrizioni bilingui, delle quali la Maltese, la più lunga, ci dava otto parole greche, di cui cinque erano nomi appellativi; e nelle tre Ateniesi noi incontravamo dove tre e dove due sole greche parole, ma tutte di nomi anche appellativi. Eppure noi eravamo lietissimi di possedere sì tenue sussidio per indentrarci nell'alfabeto e nella lingua de'Fenicii. Ma ora nel Sardo monumento trilingue la greca iscrizione conta dodici parole e due soli nomi proprii. Al maggior sussidio, che io aveva per interpretare le parole esprimenti un'idea, doveva in me corrispondere uguale zelo nell'illustrare un cotanto monumento, che fra i fenicii otterrà il primato. Il

Gesenio, pubblicando i *Monumenta Phoenicia*, dava il primo luogo all'iscrizione Maltese bilingue. I Gesenii futuri non dubiteranno di dare il posto d'onore alla Sardegna.

Ella prosegua ad illustrare la Sardegna e sè, e ci mandi un'iscrizione lunga quanto quella di Esmunazar, ma bilingue.

Torino 11 dicembre 1861.

AMEDEO PEYRON.

DICHIARAZIONE

DI

ALCUNE MONETE IMPERIALI DI SICIONE DELL'ACAIA

PER

CELESTINO CAVEDONI

Approvata nell'adunanza del 6 marzo 1862.

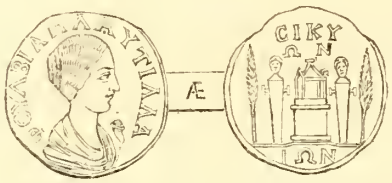
Sicione, città illustre dell'Acaia, segnatamente per aver dato i natali a Lisippo e a tanti altri insigni artefici greci, si rimase povera e quasi priva di monete sue proprie fino al declinare del prossimo passato secolo, cioè fino all'anno 1789, nel quale il sagace nostro Sestini ad essa rivendicò una copiosa serie di belle monete d'argento e di bronzo, portanti le semplici epigrafi ΣΕ e ΣΙ, che eransi fino allora attribuite alle due piccole isole del mare Egeo, Serifo e Sifno. Ciò non ostante, il sommo Eckhel mantenne la primiera pregiudicata attribuzione (*Doctr. num. vet. t. II, p.* 336), benchè da ultimo per poco stesse di non arrendersi alle ragioni del numografo italiano (*Addenda p.* 29); ma ne lo ritenne la grave difficoltà dello scritto ΣΕ, che pareva non prestarsi altrimenti a ravvisarvi le iniziali del nome della città dell'Acaia, che ΣΙΚΥΩΝ è denominata in tutti gli antichi monumenti e presso gli scrittori sì greci come latini. E questa dubbiezza ed incertezza durò fino all'anno 1830, nel quale lo scrivente ed il ch. Müller allegarono contemporaneamente, senza che l'uno sapesse dell'altro (lo che suole essere argomento d'essersi apposti al vero), quelle calzanti parole del grammatico Alessandrino Apollonio (ap. Bekker, *Anecdot. Gr. p.* 555): μεταθεσις ἐγένετο τοῦ Ι εἰς τὸ Ε, καθάπερ καὶ οἱ ἀγχίμαχοι ἀγχέμαχοι, καὶ ἡ Σικυὼν Σεκυὼν παρὰ Σικυωνίοις (cf. Cavedoni, *lettera al prof. Sestini, Mem. di Relig. ser. I,*

t. XVI, *p.* 513-538: E. O. Müller, *Annali dell'Inst. archeol.* 1830, *p.* 336). Se pertanto i Sicionii chiamavan se stessi Σεκυωνίους, bene sta che nelle prime e più belle loro monete leggasi ΣΕ, e ΣΙ nelle posteriori, impresse dopo che prevalse anche presso loro l'altra pronuncia comune al rimanente della Grecia.

Dopo di aver diretti i primi miei studi numismatici alla illustrazione delle monete autonome di Sicione con la precitata mia lettera intitolata al benemerito Sestini, ora mi giovi aggiungere, dopo il decorso di trenta e più anni, la dichiarazione di alcune monete imperiali di Sicione stessa spettanti tutte alla famiglia augusta di Settimio Severo.

L'Eckhel (t. II, p. 263), riguardo a queste, si stette contento ad avvertire, che *typi sunt plerumque variorum numinum Bacchi, Apollinis Actii, Aesculapii, Palladis, Sarapidis, Cupidinis, qui alatus stat d. facem inversam tenens, s. brachio caput sustentans etc.* Ma quello ch'egli appella *Cupido*, seguendo il Vaillant, parmi senza meno imagine del *Sonno*, Ὕπνος, che a detto di Pausania (II, 10, 2) ebbe culto e simulacro in Sicione, come altra volta avvertii (*Lett. al Sestini*, *nota* 8), del pari che tutte le altre suddette deità rappresentate nelle sue monete imperiali. E tanto si conferma pel riscontro di un'antica ed elegante ara di casa Albani, in un lato della quale leggesi: **SOMNO ORESTILLA FILIA**, scritto al disopra di un *giovane nudo alato, che dorme posandosi sopra la face rovesciata* (Marini, *Iscr. Alb.* p. 72).

Assai più notevole ed importante si è il tipo d'altre monete imperiali di Sicione, non avvertito dall'Eckhel, e non rettamente descritto dal Vaillant, dal Mionnet e da altri numografi, che mi giova qui descrivere e dichiarare, attenendomi al buon disegno che ne diede il Dumersan (*Catal. du Cabin. de M. Allier d'Hauteroche pl. VI*, 15):



ΦΟΥΛΒΙΑ ΠΛΑΥΤΙΛΛΑ. *Busto di Plautilla stolata, con piccolo cornucopia apposto dinanzi al petto.*

)(CIKYΩNIΩN *(scritto in tre righe poste l'una sotto l'altra). Edificio consistente di un alto basamento, in sul quale posano quattro colonne*

sostenenti un tetto ornato di due o più frontoncini; di mezzo a due erme barbate e a due pioppi o cipressi che dir si debbano ..... *Æ.* 6.

Il Dumersan vi ravvisava *un petit temple sur un autel entre deux termes et deux peupliers;* ed il Mionnet (*Suppl. t. IV, p.* 172, *n.* 1141, 1142) *un petit temple placé sur un cippe, ou autel, entre deux termes et deux cyprès.* Al Lajard (*Acad. des Inscr. n. ser. t. XX, part. II, p.* 231-233, *pl. VII,* 3) parve similmente tempietto tetrastilo, ma posto in sulla sommità di una roccia; ma quella che nel trascurato suo disegno parer potrebbe *roccia*, nell'accurata incisione del Dumersan è senza meno *basamento di regolare costruzione.*

In altra simile moneta di Sicione, avente nel ritto il busto e i nomi e titoli di Settimio Severo, il Vaillant (*num. Gr.* p. 85) ravvisò *duae mulieres succinctae dexteras adponentes ad templum tetrastylum columnae impositum.* Ma le da lui supposte *duae mulieres succinctae* altro di certo non saranno state che le *due erme*, in parte logore, fornite di quelle due prominenze laterali, che assai pronunciate appaiono nel disegno del Dumersan, e che in origine erano indizio delle braccia mozze della figura umana, e servirono poscia per appendervi corone ed altre offerte (Müller, *Handbuch*, § 67).

Quanto impropria ed inverisimile torni la denominazione di *piccolo tempio* chiaro si pare non solo dal supporlo collocato sopra un'*ara*, o *cippo*, o *colonna*, come lo dissero i sovra citati tre numografi francesi, ma eziandio dal vedere, che il sostegno o basamento di esso riescirebbe più alto e grande che tutto intiero il supposto tempietto medesimo, che inoltre non presenterebbe modo di accedere ad esso da verun lato; senza dire ch'egli è aperto da ogni parte, poichè perfettamente isolate sono le quattro colonne che sostengono un semplice tetto fastigiato.

Altri, forse meno improbabilmente, ravvisar vi potrebbe un *tetrastylum*, ossia τετρακιόνιον, quale si è quello che vedesi rappresentato in monete di Antiochia e d'altre città della Siria (Müller, *ant. Antioch.* p. 39); ma se tale esso fosse, parmi che mancar non dovrebbe il simulacro della deità cui sarebbe consecrato, come non manca nelle ridette monete di Antiochia (cf. *Bull. dell'Inst. arch.* 1839, p. 146-148). Molto meno poi ritener potrebbesi per un *tetrastylum* simile a quello dei fratelli arvali, che loro serviva per luogo di convegno, e che somigliava ad un padiglione (v. *Annali dell'Inst. arch.* 1841, *p.* 121, *tav. d'agg. G*); poichè quello della nostra moneta ha un basamento sì alto, che non dava altrimenti luogo ad accesso, come detto è di sopra.

Nella interpretazione de' monumenti antichi più volte incontra, che torni assai più facile il dimostrare che cosa non possa essere un dato obbietto, di quello che poter comprovare che cosa realmente esso sia. Ma nel caso nostro parmi che si verifichi il detto di un dotto e giudizioso archeologo, che in antiquaria cioè un felice confronto presta di sovente quel sussidio stesso che gli sperimenti in fisica; e che pel riscontro di un luogo opportuno di Pausania vengasi a comprovare, che il supposto *tempietto tetrastilo* delle sovra descritte monete di Sicione altro non è che un *monumento sepolcrale* di forma tutto propria delle usanze dei Sicionii. Narra dunque quel diligente Periegete « che i Sicionii seppellir solevano in un modo tutto lor proprio, e per lo più uniforme, interrando cioè il cadavere e costruendo sopr'esso un basamento composto di pietre, in sul quale ergevansi colonne sostenenti un tetto che massimamente somigliava ai fastigii, o sia frontoni, de' templi » (Paus. II, 7, 3): *αὐτοὶ δὲ Σικυώνιοι τὰ πολλὰ ἐοικότι τρόπῳ θάπτουσι· τὸ μὲν σῶμα γῇ κρύπτουσι, λίθου δὲ ἐποικοδομήσαντες κρηπῖδα, κίονας ἐφιστάσι, καὶ ἐπ' αὐτοῖς ἐπίθημα ποιοῦσι κατὰ τοὺς ἀετοὺς μάλιστα τοὺς ἐν τοῖς ναοῖς.* Queste parole, sebben chiare a bastante, diedero luogo ad interpretazioni assai varie e disparate, ma credo che ogni incertezza e discrepanza ora si cessi pel riscontro delle monete stesse di Sicione, che portano un tipo sì perfettamente conforme al detto di Pausania, che di più non potrebbesi desiderare. A gran torto pertanto il Casaubono, rigettando la voce *basis* colla quale l'Amaseo avea resa la greca *κρηπῖδα*, pretese che questa fosse da Pausania usata in significato di *sepimentum:* nè rettamente in tutto la resero per *petit mur* il Godoyno ed il Clavier, per *muricciuolo* il Ciampi, e per *un piano* il Nibby. Questi prosegue dicendo, che *sopra questo piano ergono due colonne*, e dovea anzi dire *quattro colonne*, come richiedeva il buon gusto, e come ora ne attesta il riscontro delle medaglie de' Sicionii medesimi.

Ad un sepolcro onorario ed insigne ben si addicono i due arbori posti da lato all'edificio, sia che debbansi reputare cipressi, o sia che pioppi cipressini. La pianta del cipresso, detta *atra*, *feralis*, *invisa* da Virgilio, da Orazio, da Ovidio e da altri poeti latini (*Aen. III* 63: *II od. XIV*, 23; *Trist. III eleg. XIII*, 21), fu parimente d'uso funebre generale presso i Greci (v. Lajard, *Mém. de l'Acad. des Inscr.*, *n. ser. t. XX*, *part. II*, *p.* 293). E nell'ustrino di Campo Marzio presso il mausoleo di Augusto verdeggiavano molti bei pioppi, probabilmente cipressini (Strabo, *V. p.* 236: cf. Visconti, *Mus. Pio Clem.*, *t. VII*, *p.* 175, ed. Mil.).

Anche le due erme barbate, poste da lato al monumento, troppo bene si addicono ad un sepolcro pubblico onorario; poichè, a detto di Cicerone (*de Legib. II*, 26), cotali ornamenti erano per appunto riserbati a decorazione dei sepolcri pubblici: *nec* HERMAS *hos, quos vocant, licebat imponi, nec de mortui laude, nisi in sepulcris publicis.* Le due erme delle medaglie de' Sicionii sono entrambe barbate; e quindi verisimilmente simulacri arcaici di Mercurio Χθόνιος (Müller, *Handbuch*, § 379, 1).

Ora resta ad indagare a chi mai fosse dedicato quell' insigne monumento sepolcrale, che meritò di essere rappresentato dai Sicionii sopra la loro moneta in sulla fine del secolo secondo dell'èra nostra, ovvero ne' primi anni del susseguente. Tre sono i precipui monumenti pubblici sepolcrali eretti dai Sicionii a' loro concittadini illustri e benemeriti della patria (*); quello cioè di Epopeo, antico lor re, fondatore di parecchi templi, posto vicino alla porta detta Sacra (*Pausan. II*, 11, 1; *Apollodor.*, *III*, 5, 6); quello di Eufrone, sepolto dai Sicionii nel foro, e venerato quale buon cittadino e duce, ἀρχηγέτης (Xenoph., *Hellen.*, *VII*, 3, 12); e quello di Arato, autore e sostenitore precipuo della confederazione degli Achei, sepolto nel luogo più cospicuo della città (*Pausan.*, *II.*, 8, 1; *Polyb.*, *VIII*, 14; *Plutarch. in Arat.*, *c.* 53). E quest'ultimo monumento sepolcrale, detto *Arateo* Ἀράτειον, posto vicino al Cesarco, o sia sacrario dei divi della casa augusta, credo meritasse, a preferenza degli altri due, di essere rappresentato sopra la moneta imperiale di Sicione a' tempi di Settimio Severo, che mostra aver compartito segnalati beneficii agli Achei; poichè Sicione e parecchie altre città dell'Acaia non ne tramandarono altra loro moneta imperiale che della sola famiglia di Settimio Severo.

Arato, a detto di Polibio, si ebbe dopo morte i meritati onori sì presso tutti gli Achei, e sì presso i Sicionii, suoi concittadini, che gli decretarono sacrifici ed onori eroici, e tutto quanto torna a celebrità e memoria immortale. Arato, al riferir di Plutarco, mancato di vita in Egio, dopo di essere stato eletto stratego della lega Achea per ben diciassette volte, fu compianto da tutta la Grecia confederata; ed i Sicionii, col consenso degli Achei, e con favorevole responso dell'oracolo di Delfo,

(*) Altri aggiunger ne potrebbe un quarto pel riscontro di quelle parole di Varrone (*Frag.*, *p.* 236 *Bip.*): *Sicyonii sacrificant apud sepulcrum septimi sui regis Thurimachi.*

poterono trasportare la venerata salma per seppellirla nel luogo più cospicuo ed onorato entro le mura della loro città. Cangiato pertanto di repente in festa il lutto pubblico, dopo di avere incoronato il corpo del defunto loro liberatore, vestiti a bianco, ne accompagnarono il trasporto con peani e danze, salutandolo fondatore e salvatore della patria. Plutarco stesso ne attesta, che in appresso i Sicionii continuarono per lungo tempo ad offerire in onore di esso lui due annui sacrificii: l'uno, detto σωτήρια, addì 5 del mese di Desio, in memoria della liberazione della loro città, e l'altro nel dì natalizio dell'eroe Arato. Nel primo dei suddetti due giorni festivi il sacro rito compievasi dal sacerdote di Giove Sotere, e nel secondo da quello di Arato medesimo, col capo ricinto di strofio, non tutto candido, ma sibbene bianco-vermiglio; e cantavansi melodie, accompagnate dal suono della cetra, dagli attori dionisiaci, che nella pompa solenne erano seguiti dal ginnasiarca guidante i fanciulli e gli efebi, e dal senato coronato, non che dal popolo che spontaneo interveniva. Soggiunge da ultimo il biografo, che fino a' suoi giorni, cioè sino a' tempi di Traiano, mantenevansi presso i Sicionii alcune traccie di quelle antiche feste e riti sacri in onore di Arato; e che quei primitivi onori vennero in parte a mancare col decorso degli anni per le vicende non favorevoli della nazione.

La memoria di Arato forse venne dai Sicionii onorata anche con altra loro moneta avente nel ritto il busto paludato laureato di Caracalla imberbe, con la scritta ΜΑΡ ΚΑΙ ΑΥΡΗΑΙΟΝ ΑΝΤΩΝΕΙΝΟΝ, e nel rovescio l'epigrafe CIKYΩNIΩN attorno ad una *statua virile loricata e galeata tenente una patera nella d. e l'asta nella s.*, *collocata sopra un piedistallo scanalato* (Sestini, *Lett. num. cont.*, *t. IX*, *p.* 8, *tav.* I, *b.*). Il Sestini la dice *statua di Caracalla paludato*; ma la figura pare armata alla greca anzichè alla romana; e d'altra parte l'attributo della *patera*, simbolo di libazione e di concordia, troppo bene si converrebbe ad Arato primo e precipuo autore e mantenitore della concordia e confederazione degli Achei. Vero è, che la statua di Arato, veduta da Pausania nella scena del teatro di Sicione, era armata di scudo (*Paus.*, *II*, 7, 5); ma quella non sarà stata la sola eretta dai Sicionii in onore del loro eroico liberatore.

Comunque sia per altro di quest'ultima mia congettura, parmi avere a bastante comprovato, che in alcune delle monete imperiali di Sicione vedesi rappresentato un insigne monumento sepolcrale della forma propria

e usitata presso i Sicionii, conforme al detto di Pausania; e che questo si è più probabilmente quello di Arato autore della confederazione degli Achei: con che godo avere fatto una forse non dispregievole giunta alle preclare cose discorse dal chiar. collega Amedeo Peyron nella dotta e giudiziosa sua memoria intorno ai governi federativi della Grecia.

NOTIZIA

DEI LAVORI E DELLA VITA LETTERARIA

DEL CAV. AB. COSTANZO GAZZERA

GIÀ SOCIO E SEGRETARIO DELLA CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE
DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO

PER

GASPARE GORRESIO

SOCIO E SEGRETARIO DELLA STESSA CLASSE

Letta ed approvata nell'adunanza del 10 di aprile 1862.

Mancarono in questi ultimi anni con grave danno delle lettere e vivo dolore di questo Instituto accademico non pochi fra i Membri della Classe di scienze morali, storiche e filologiche, nostri egregi ed onorati Colleghi. Egli è uso non pur solamente di questa nostra Accademia, ma d'altre illustri Società scientifiche, che alla memoria de' Soci estinti si consacri una notizia che raccolga e narri gli studi da lor coltivati, i lavori di cui essi dotarono la scienza, le idee ed i trovati che più specialmente loro appartengono. Tale uso pienamente conforme alla natura delle Società scientifiche e grandemente opportuno a preparare ed ordinar gli elementi della futura e progressiva storia letteraria, venne tra noi da qualche tempo interrotto; onde è nata e tuttor rimane negli atti dell'Accademia una lacuna fra le notizie biografiche dei Soci che ne furono già parte. Prendo ora a compiere tale lacuna, raccogliendo e scrivendo a mano a mano le notizie biografiche dei Soci che non ebbero ancora chi le narrasse. E comincierò da uno la cui perdita è recente, pregiata e cara la memoria ed onorato il nome, che qui sedeva ancora men di tre anni addietro ed al cui ufficio io sono per cortese elezion dei Colleghi succeduto, il Cav. Ab. Costanzo Gazzera.

Poco dirò della sua vita sia pubblica che privata; perchè queste notizie hanno per iscopo principale di rappresentare i pregi dello scrittore piuttosto che le qualità dell'uomo, e di esporre raccolti e ordinatamente descritti gli sparsi suoi lavori scientifici o letterari, piuttosto che i fatti particolari della sua vita.

Il Gazzera nacque in Bene nel 1778 da onorata ed antica famiglia. Entrò, mentr'era ancora in giovanissima età, nell'ordine dei Cappuccini, d'onde uscì sacerdote pochi anni dopo, quando quell'ordine venne con tutti gli altri abolito. Ei si diede allora nel collegio che s'appellava delle Provincie, e dove egli ebbe nel 1802 un posto gratuito, allo studio della filosofia, in cui conseguì il grado di Professore, e la insegnò quindi per più anni prima nei licei d'Alessandria e di Casale, poi, caduto il governo Francese, in Savigliano. Nel 1819 venne dal Conte Prospero Balbo chiamato al posto d'Assistente nella R. biblioteca dell'Università di Torino, posto che ben conveniva al suo amore ed alla sua attitudine per gli studi d'erudizione archeologica e bibliografica. Conosciuti quivi e meglio apprezzati la sua dottrina e il suo ingegno, venne nel 1824 eletto a Socio ordinario dell'Accademia delle Scienze, poi nel 1826 a Segretario aggiunto della Classe di scienze morali, storiche e filologiche, e morto l'illustre Giuseppe Grassi, a Segretario perpetuo della Classe. Nel 1833 il Re Carlo Alberto istituiva la Deputazione sopra gli studi di storia patria e la Giunta di antichità e di belle arti: l'Ab. Gazzera fu d'entrambe Socio e Segretario. Nel 1844 fu innalzato alla carica di Prefetto della biblioteca dell'Ateneo, a cui specialmente lo chiamavano i lunghi suoi studi e che ei resse quanto durò la sua vita, e quasi nel tempo stesso ei venne eletto a Membro del Consiglio Universitario ed a presiedere la Commissione di revisione intorno alle cose di stampa. Eletto a deputato del Parlamento dai suoi concittadini, ci contribuì in uno dei primi Parlamenti piemontesi a maturare l'arduo esercizio di quelle libere e nuove istituzioni che il Re Carlo Alberto aveva dato di recente al Piemonte. Visitò non senza frutto alcune contrade d'Italia, mosso principalmente dall'amor della scienza, e nel 1837 perlustrò con missione scientifica le provincie meridionali della Francia, raccogliendo e notando con amor d'italiano e studio di bibliografo tutto ciò che di cose italiane manoscritte, stampate o incise e sconosciute affatto o poco note si trova disperso nelle biblioteche di quelle città. I lavori scientifici pubblicati dal Gazzera a mano a mano, l'ampia e matura sua erudizione massime in cose d'archeologia, la fama da lui ottenuta gli valsero d'essere

ascritto alle più rinomate Società scientifiche d' Europa. Egli era Membro della Società archeologica di Roma, dell' Ercolanese di Napoli, Socio dell'Accademia di Madrid e di quella di Lisbona e di più altre, e Membro corrispondente dell' Istituto di Francia. Egli ebbe senza ambirle quelle insegne onorifiche, con cui da qualche anno in qua s'usa di premiar fra noi il merito scientifico e civile: fu Officiale dell' Ordine Mauriziano e Cavaliere del Merito civile di Savoia. Ei morì compianto, paziente e forte fra lunghi dolori il dì 5 di maggio dell'anno 1859 nell'età di ottant'un anno.

Era sagace e vivo il suo ingegno, tenacissima la sua memoria, sdegnoso e ardente l'animo suo. Egli amò e coltivò i suoi studi fino all'ultima sua età con tutto l'ardor della giovanezza; e il coltivarli con amore era sovente in altrui titolo alla sua amicizia. Gli era cara la lode, ma non la cercava avidamente. Era piacente e lieto e sovente ammaestrativo il suo conversare, benchè la sua parola fosse piuttosto facile e schietta che splendida ed imaginosa. Semplice nel suo vivere e ne' suoi modi, egli aveva sul volto e negli occhi come l' impronta di una mente sagace e d'un animo onesto. Tale era, e tale io lo conobbi, Costanzo Gazzera.

I suoi lavori sono se non tutti, almeno per la massima parte od archeologici o bibliografici. Li andrò esponendo nell'ordine cronologico in cui vennero pubblicati; perchè mi pare che tal metodo meglio che il disporli per affinità di materie convenga ad una notizia biografico-letteraria e meglio rappresenti il naturale e progressivo andamento delle idee e degli studi dello scrittore.

Uno dei primi lavori letterari, se non forse il primo pubblicato dal Gazzera, è una lettera al Conte Giuseppe Franchi di Pont *intorno alle opere di pittura e di scultura esposte nel palazzo della Regia Università l'estate del* 1820.

Compievasi in quell'anno un secolo dappoichè fu da VITTORIO AMEDEO II ampliata, riordinata e largamente dotata la Regia Università di Torino; e volendosi in particolar modo celebrare la memoria secolare di quel fatto, si ordinò tra l'altre cose nelle sale dell' Università una pubblica esposizione di belle arti.

Quella esposizione descrisse il Gazzera nell'opuscolo sovracitato. Benchè vi si trovi sparsa una conoscenza non mediocre della storia dell'arte, e mostrino finezza di criterio e senso estetico i giudizi da lui portati, nè vi manchi una certa abbondante facilità e perizia di lingua conveniente al tema, tuttavia non si può dire che quel soggetto fosse pienamente

accomodato ai suoi studi; nè si potrebbe quel primo lavoro annoverare fra i migliori del Gazzera.

Più conforme alla natura de' suoi studi è lo scritto che due anni dopo ei pubblicò nel Volume XXVIII, serie 1.ª degli atti dell'Accademia ed ha per titolo: *Osservazioni bibliografiche letterarie intorno ad un'operetta falsamente ascritta al Petrarca.* La prima parte di questo scritto del Gazzera è un lavoro tutto di storia letteraria da lui coltivata con particolare studio. Fra i libri editi nella seconda metà del secolo XV si trova un'operetta che ha per titolo: *Liber Domini Frascici Petrarche Panormitani oratoris celeberrimi de vita solitaria.* Il titolo del libro, le forme dello stile, il modo con cui v'è trattato e sposto l'argomento indussero nel Gazzera certezza che quel libro non poteva essere del Petrarca; e con quell'acume e perseveranza d'indagini che egli usava nelle cose di storia letteraria, postosi a ricercare il vero autore dello scritto ei pervenne a dimostrare con valide prove che l'autore del libro è un tal Lombardo dalla Seta o da Serigo, grande amico del Petrarca e suo compagno nell'amena solitudine d'Arquà, e che quello scritto del Lombardo venne con poco discernimento attribuito al Petrarca, perchè esso nei codici mss. trovavasi per lo più unito al celebre scritto del Petrarca *De vita solitaria.* La seconda parte tutta consiste in ricerche propriamente bibliografiche, tema su cui forse più che sovr'ogni altro largamente si stendeva l'erudizione del Gazzera.

Il libricciuolo soggetto di questa Memoria è privo d'ogni indizio tipografico sia di luogo che di tempo, e vi manca inoltre, siccome avviene in più altri libri del quattrocento, il nome dello stampatore. Il Gazzera colla sua perspicacia di bibliografo giudicò che ei non era opera di tipografia italiana, e dal marchio della carta, dal taglio dei caratteri, dalla simmetria delle linee e da cotali altri indizi congetturò con molta probabilità che quel libro dovette essere stampato in Lione verso l'anno 1495. Stabilita l'origine tipografica del libro, entra il Gazzera a discorrere della bibliografia Lionese, delle prime edizioni fatte in Lione, del nome dei primi suoi tipografi, del titolo dell'opere che vi furono in prima stampate e di tutti que' particolari bibliografici che possono essere di qualche rilievo per la storia letteraria. Imperciocchè tali sottili ricerche, quantunque in apparenza minute ed aride, hanno pur nondimeno nella general disposizione della storia letteraria il loro luogo conveniente e la loro importanza.

Soggetto analogo al precedente trattò con pari dottrina il Gazzera

nella breve memoria che s'intitola: *Notizia d'una sconosciuta edizione piemontese delle Eroidi di Ovidio del secolo XV*, e pubblicata nel Volume XXIX degli atti dell'Accademia. Il libro di cui qui ragiona il Gazzera, venuto alla R. biblioteca dell' Università di Torino dall'antico monastero di Bobbio, i cui codici con tanta dottrina e sagacità di critica descrisse ed illustrò il Peyron, è il solo esemplare che si conosca dell'edizione delle Eroidi d'Ovidio fatta dal Glim. Il Gazzera rintracciò e cercò di determinare la data di tale edizione, e per tutti quegli indizi che sa discernere un occhio esercitato in tali studi, stabilì con sufficiente certezza che quell'edizione del Glim debbe aver preceduto l'edizione delle Eroidi che fecero in Mondovì il Mattia d'Anversa ed il Cordero nel febbraio del 1473, e che oltre all'essere l'edizione principe delle Eroidi, ella s'attiene e si conforma al testo d'un ottimo codice antico, copioso di varie e buone lezioni.

Nel 1824 volle il Gazzera esercitare il suo ingegno e la sua critica sopra un tema appartenente ad un altr' ordine di studi, e pubblicò nel Volume XXIX degli atti dell'Accademia una Memoria, il cui titolo è: *Applicazione delle dottrine del signor Champollion minore ad alcuni monumenti geroglifici del Regio museo Egizio di Torino.* Era recente allora la fama della scoperta del Champollion sul sistema di scrittura praticato dagli Egiziani, e composto, secondo ch'egli dimostrava, di tre diversi elementi adoperati tutti e tre insieme ma con varia ed inegual misura, il fonetico cioè, il figurativo ed il simbolico. Tale scoperta venne descritta e divulgata con grande lucidità d'esposizione dall' illustre Francesco Arago, e fu riputata come la chiave che doveva schiuder l'adito all' interpretazione dei monumenti egizi.

Il Gazzera prese ad esporre nello scritto qui menzionato i nuovi principii scoperti e promulgati dallo Champollion e volle farne prova nell' interpretazione d'alcuni monumenti del Museo egizio di Torino. Dopo il continuo progredir che han fatto in questi ultimi quarant'anni gli studi filologici ed archeologici, quel lavoro del Gazzera non ha ora più certamente pregio di novità scientifica; ma ci dimostra per altro come il Gazzera concorresse volonteroso coll'opera sua al progresso delle singole parti di quella scienza che più gli era cara, e con quanto favore egli accogliesse e s'adoperasse a diffondere le scoperte ed i trovati scientifici che ci giudicava importanti ed utili.

Dopo quel discorso sopra l'antichità egizia ritornò il Gazzera al soggetto costante de' suoi studi, alla bibliografia, e scrisse poco distanti di

tempo l'un dall'altro due opuscoli, l'uno col titolo di *Lettere bibliografiche* pubblicate in Torino l'anno 1827, l'altro intitolato: *Notizie intorno all'origine ed al progresso dell'arte tipografica in Saluzzo ecc.*

Discorre egli nel primo di varie cose, quasi tutte appartenenti alla storia letteraria o alla bibliografia, dell'anno, a cagion d'esempio, in cui venne in diversi luoghi, Savona, Novi, ecc. introdotta l'arte tipografica, dell'età e del luogo a cui s' hanno ad attribuire alcune notevoli edizioni del secolo della stampa, quella, per esempio, del Boezio e del dottrinale del Villadei, che il Gazzera giudica fatte in Savona nel 1474, dei tipografi che esercitaron quell'arte ne' suoi primordi, delle opere da lor pubblicate in varie contrade ecc., tutti soggetti intorno a cui largamente spaziava l'erudizione e la critica del Gazzera. Nel secondo dei due opuscoli sopramentovati prende egli a provare che la città di Saluzzo, sebbene non annoverata dal Tiraboschi nell'elenco delle città dove s'apersero tipografie nel secolo XV, ebbe tuttavia in quel secolo tipografi e produsse edizioni di certa data. L'edizione saluzzese che cita il Gazzera è il *Cato volgarizzato in ritmo da Aloyse Laurenti*, stampato in Saluzzo nel 1498 e dedicato al Marchese Ludovico II. Ma nella dedica che fa il Laurenti del suo libro, egli accenna ad edizioni anteriori che pur si fecero in Saluzzo. « Non è passato ancora, egli scrive, il quarto lustro da che l' è stado imprimido in questa vostra predilecta cita Cato in latin ecc. », dal che appare manifesto, nota il Gazzera, che vent'anni più addietro, vale a dire nel 1479 v'era in Saluzzo una tipografia, da cui uscì il Catone in latino, e molto probabilmente, scrive egli, anche il commento alla grammatica del Villadei del 1479.

L'epigrafia fu pure uno dei rami dell'erudizione archeologica che il Gazzera coltivò con costante affetto, siccome quello che ei giudicava utilissimo agli studi di critica e che solo poteva in certi casi ora correggere, ora compiere, ora chiarire notizie e dati incerti. Dell'erudizione epigrafica del Gazzera mostrava fare grande stima il celebre epigrafista della nostra età, Bartolomeo Borghesi che ebbe col Gazzera frequente commercio epistolare sopra temi d'epigrafia.

Primo lavoro pubblicato dal Gazzera l'anno 1829 sopra soggetto epigrafico è la dissertazione che ha per titolo: *Iscrizione metrica vercellese*, stampata nel Volume XXXIII degli atti accademici. Ragiona egli quivi con dotta critica dell'età del monumento su cui fu trovata l' iscrizione e ch'egli giudica del tempo degli Antonini; parla della famiglia Lollia, alla quale

apparteneva la fanciulla Lollia Procla, cui è dedicata l'epigrafe; mostra come la famiglia Lollia fosse una delle più ragguardevoli ed illustri di Vercelli, e tocca infine, indicandone la ragione, dell'uso frequente d'innestare vocaboli greci nelle iscrizioni latine di quell'età, cui appartiene l'epigrafe vercellese.

I lavori del Gazzera fin qui descritti si possono tutti qual più qual meno rannodare alla critica storica od archeologica, ma più particolarmente vi si attiene lo scritto che s'intitola: *Il castello di Bodincomago diverso dalla città d'Industria*, e che venne stampato nel Volume XXXIV degli atti accademici. In questo lavoro prese il Gazzera a combattere l'opinione d'alcuni archeologi, che indotti da un luogo di Plinio manifestamente corrotto identificarono l'illustre municipio romano posto sulla riva del Po dal lato settentrionale dell'Apennino e chiamato Industria ed un umile borgo situato ivi vicino per nome Bodincomago. Dimostra il Gazzera come non possa credersi altro che erroneo il luogo di Plinio che indusse alcuni a confondere i due castelli, e che il nome di Industria non può essere in alcun modo la traduzione latina del nome Bodincomago, sia questo celtico o d'altra origine. Si rinvengono in questa scrittura que' pregi che sopratutto si richieggono nell'archeologo, accuratezza cioè e copia d'indagini, confronti critici d'autorità e di luoghi di scrittori, erudizione insomma e sagacità.

Due altri lavori pur di tema archeologico ed affini scrisse il Gazzera con egual metodo di sana critica e di sagacità erudita e li pubblicò l'anno 1831 nel Volume XXXV degli atti dell'Accademia. Nel primo che ha per titolo: *Di un decreto di patronato e clientela della colonia Giulia Augusta Usellis e di alcune altre antichità della Sardegna*, ci descrive dapprima ed illustra monumenti di varia specie trovati nell'isola di Sardegna, mosaici, sigilli, sarcofagi di diversa età e di differenti popoli prossimi alle coste del Mediterraneo, Fenici, Etruschi, Greci e Latini che occuparono a mano a mano l'isola e v'ebbero sede più o men lunga. Entra egli quindi a ragionare più particolarmente dell'iscrizione di patronato e clientela che sopra tavola di bronzo era stata pochi anni addietro trovata in Sardegna. « Non v'era, scrive il Gazzera, provincia, prefettura, colonia o municipio, non corpo, non collegio, non clientela che non avesse un patrono almeno: onde il mondo romano poteva esser diviso in due classi, l'una di clienti, l'altra di patroni ». Per ognuno di que' patronati v'avevano almeno due tavole di bronzo, di cui dovea perciò essere tragrande il numero; ma la più gran parte di tali lamine patronali fu distrutta dalle ingiurie del tempo:

poche sono le superstiti e conosciute. La tavola di Usellis, che qui con notizie storiche descrive ed illustra il Gazzera, è uno di que' decreti per cui l'anno 158 dell'era volgare *Colonia Julia Augusta Usellis hospitium fecit cum M. Aristio Albino Atiniano, eumque cum liberis posterisque suis patronum cooptaverunt.* Sul fine di questo scritto descrisse il Gazzera e pubblicò secondo l'ordine cronologico tutte quelle tavole o decreti di patronato, di clientela o di semplice ospizio che pervennero a sua notizia.

Il secondo de' lavori sopracitati ha per titolo: *Notizia di alcuni nuovi diplomi imperiali di congedo militare e ricerche intorno al consolato di Tiberio Catio Frontone.* Seguitando l'esempio del Vernazza, che nel pubblicare più anni sono un diploma imperiale di congedo militare vi unì tutti quegli altri che già erano allora conosciuti, il Gazzera pubblicando in questo suo scritto un nuovo diploma di congedo v' ha aggiunto tutti quelli che dopo il Vernazza vennero descritti ed illustrati. Tali diplomi portano scritti il nome e i titoli dell' imperatore da cui emanarono e di colui che aveva comando militare, il luogo dove stanziava la coorte liberata od a cui apparteneva il soldato graziato e i nomi de' consoli sotto cui venne concesso il congedo militare.

Da tali notizie ebbero sovente indizio ed aiuto gli archeologi epigrafisti per istabilire con certezza nomi di consoli o d'altri pubblici uffiziali, l'età in cui vissero, il luogo dove esercitarono il loro ufficio. E da uno appunto di questi diplomi interpretato con sagace discernimento trasse il Gazzera indizi ed autorevoli dati per accertare il nome del console Tiberio Catio Frontone, di cui non fan menzione i fasti consolari e l'età del suo consolato che fu, secondo che venne da lui dimostrato, l'anno 96 dell'era volgare. Un altro merito particolare di tali bronzi incisi ossia diplomi è, siccome nota il Gazzera, di aprire la via ad un genere di storia tutto nuovo della milizia romana, a quella cioè che concerne gli ausiliari ed i confederati. Di questo lavoro del Gazzera ragionò con lode il Borghesi nel Vol. I delle Memorie dell' Instituto di corrispondenza archeologica.

Proseguendo e dirizzando ad altro tema i suoi studi critici, scrisse il Gazzera e pubblicò l'anno 1832 nel Volume XXXVII degli atti accademici un lavoro intitolato: *Discorsi intorno alle zecche e ad alcune rare monete degli antichi Marchesi di Ceva, d'Incisa e del Carretto.*

In questo scritto d'erudizione storica, la quale più che ad esporre i fatti, a trovarne il secreto vincolo e a coordinarli, mira a rintracciarne ed a stabilirne la verità: prende dapprima il Gazzera a schiarire per mezzo

di dati cronologici e d' induzioni storiche le origini dei sette celebri marchesati Aleramici, tra cui son quelli di Ceva e del Carretto; e li giudica tutti originati da quel marchese Bonifacio, che venuto in lotta col conte Umberto di Savoia s'appropriò gran parte dell'eredità lasciata nel 1091 dalla contessa Adelaide di Susa e la trasmise morendo a sette suoi figli. Ma il vincolo di discendenza che secondo il Gazzera unisce Bonifacio ad Aleramo, fu messo in dubbio da uno de' nostri colleghi, dotto di cose patrie, Giulio di S. Quintino, che tra l'Aleramo ed il marchese Bonifacio non trova documento od altro indizio storico atto a provare la discendenza del secondo dal primo e a rannodare ad Aleramo l'origine dei sette celebri marchesati.

Toccata così brevemente l'origine dei marchesi Aleramici, entra il Gazzera nel tema più speciale delle zecche e delle monete loro.

Nel primo de' suoi discorsi ei prova che la città di Savona non ebbe moneta propria finchè rimase sotto il dominio de' suoi marchesi, e che allora soltanto coniò moneta coll'aquila coronata nel diritto e la croce nel rovescio, quando già s'era sottratta all'autorità marchionale.

Nel discorso secondo ei ragiona del marchesato di Ceva e delle terre sottoposte al suo dominio, e mostra come le successive partizioni che s'ebbero a fare di quel marchesato tra la progenie maschia di cui fu esso sempre fecondo d'età in età, l'avessero ridotto a condizion povera e strema e come venisse poi rialzato e rimesso in istato verso la metà del XIII secolo da Giorgio II detto Nano. Entrando quindi a discorrere delle monete, egli nota come nessuna porti il nome del marchese Giorgio II o gli si possa assegnare, e che il suo successore Guglielmo debb'essere stato il primo che facesse batter moneta in Ceva sul principio del secolo XIV colla leggenda *Gullielmus et Bonifacius marchionibus Ceve.*

Nel discorso terzo ei si stende a parlare dei marchesi del Carretto di Cortemiglia, uno dei rami Aleramici e dei dominii da lor posseduti; narra come il marchesato di Cortemiglia, alienato per vendita l'anno 1322 dal ramo dei marchesi del Carretto, venisse acquistato dai marchesi Aleramici di Saluzzo, da cui venduto poi pochi anni dopo agli Scarampi ricchi mercanti Astigiani rimase fino ai dì nostri in quella famiglia; passa quindi a descrivere e ad illustrare due fra le rare monete coniate nella zecca dei del Carretto di Cortemiglia, che egli attribuisce ad un marchese Oddone del Carretto, al finire cioè del secolo XIII od al principio del XIV.

Nel quarto finalmente di que' discorsi narra dapprima il Gazzera

l'origine dei marchesi d'Incisa e com'ei s'annodino allo stipite Aleramico per mezzo di quel Bonifazio de Wasto, uno degli otto figli del marchese Bonifazio, che diseredato dal padre entrò nel casato degli Incisa e lasciò morendo un figlio per nome Alberto che fu poi quasi nuovo ceppo di quel casato.

Parlando della zecca dei marchesi d'Incisa ei mostra che già sussisteva innanzi all'anno 1310, trovandosi *Incixa* menzionata in una grida dell'Imperatore Enrico VII dell'anno 1310, colla quale vieta il corso delle monete adulterate di varie zecche e fra l'altre di quella d'*Incixa*. Ei nota poi come fatto singolare che essendo uscito dalla zecca d'Incisa buon numero di monete coniate per uso delle genti e terre del marchesato, non se ne trovi tuttavia fatta menzione nelle più pregiate opere numismatiche. Descrive egli infine la piccola moneta d'Incisa da lui pubblicata ed illustrata. Per tal modo egli raccolse e spose in questo suo scritto una erudita monografia feudale parte numismatica, parte storica, che si potrebbe rappiccar facilmente ad una sposizione più distesa e più comprensiva della feudalità in Piemonte.

Usava sovente il Gazzera nel trattar temi speciali di critica archeologica d'esporre in primo luogo tutti quei dati e quelle notizie generali che più si collegano con que' temi e vi si attengono e che possono contribuire a porne in maggior rilievo ed a farne meglio apprezzare la natura. Così egli fece in un suo scritto intitolato: *Dichiarazione di un dittico consolare inedito della chiesa cattedrale d'Aosta*, pubblicato l'anno 1834 nel Volume XXXVIII degli atti accademici. Ei ragiona qui dapprima dei dittici generalmente, ed imperiali e consolari, di quelle tavolette, cioè, d'avorio, bipatenti che usavano i consoli distribuire nell'assumere il consolato e che portavano impressa sovente l'effigie del console, di rado quella dell'imperatore e per lo più inscritti solo i nomi ed i titoli d'amendue; discorre del numero dei dittici conosciuti e della speciale loro importanza per determinare e chiarire nomi e date storiche, e ricorda come la Chiesa cristiana adoperò nei primi secoli dell'era questi dittici ad usi ecclesiastici, quello, per cagion d'esempio, di scrivere sulla loro superficie interna nomi di Santi particolarmente venerati o la serie cronologica de' vescovi. Venendo poscia a discorrere specialmente del dittico consolare d'Aosta, ei lo descrive ed illustra in ogni sua parte, e nota com'esso s'abbia a riputare il più antico fra quanti a noi ne pervennero, e com'egli sia ad un tempo ed imperiale e consolare, sia, cioè, improntato dell'effigie

dell' imperatore Onorio a cui fu dedicato l'anno 406 e porti insieme con essa un' iscrizione che registra il nome del console Probo, che ottenne il consolato quell'anno stesso.

Seguendo l'ordine cronologico ricorderò qui una breve notizia che il Gazzera pubblicò l'anno 1835 ed in cui narra compendiata la storia della Regia biblioteca dell' Università. Non contiene, egli è vero, quel suo scritto che brevi e rapidi cenni storici, ma vi si scorge pur nondimeno l'uomo versato nelle cose d'erudizione, che sa discernere e raccogliere in poche pagine tutto ciò che può illustrare il tema che ci prende a trattare.

Fra i rottami e gli antichi avanzi che si disotterrarono nel sito dove un dì sorgea la città d' Industria di cui parla Plinio, si scoperse alcuni anni sono una piccola statua di bronzo che or si trova, credo, nel gabinetto particolare del Re. Quella statua cercò il Gazzera di dilucidare e di schiarire in una Memoria del 1837, inserita nel Vol. I, serie II.ª degli atti accademici ed intitolata: *Congetture intorno ad una statuina di bronzo del Gabinetto particolare di S. M. il Re* CARLO ALBERTO. Per ingegnose e fondate deduzioni che provano la sua sagacità erudita, congettura il Gazzera che quella piccola statua dovesse rappresentare la Venere pudica Verticordia, il cui nome ed il cui culto vennero introdotti in Roma nell'anno 639 per consiglio dei libri Sibillini, come rimedio e freno alla crescinta ed intemperante libidine.

Nella primavera dell'anno 1837 intraprese il Gazzera, sotto gli auspici del Governo, una peregrinazione scientifica nelle parti meridionali della Francia. Ei percorse tra Lione e Tolosa le città principali, visitò biblioteche e società scientifiche, conversò con persone erudite; e frutto di quel suo viaggio fu una distesa e dotta notizia dei codici manoscritti di cose italiane che si trovano nelle pubbliche biblioteche della Francia meridionale, con alcuni ragguagli sulle principali antichità di quella contrada. Ma nella biblioteca della Facoltà medica di Montpellier rinvenne il Gazzera alcuni scritti inediti di Torquato Tasso; ciò sono: un trattato della dignità, due lettere, dubbi e risposte concernenti la Gerusalemme liberata, varianti lezioni d'un suo poema *Il Mondo creato* e due ottave inedite d'un altro suo poemetto, *Il Monte Oliveto*. Il Gazzera raccolse e pubblicò con religiosa cura tutti que' piccoli scritti inediti del Tasso, raggi dispersi d'una gran mente e vi mise innanzi a modo di preambolo un suo discorso, in cui ragiona d'alcune particolarità della vita del Tasso, e tocca delle sue opere quel tanto che è necessario a rannodare i nuovi scritti inediti alle altre opere del grande epico.

Oltre ai lavori suoi propri, diede anche opera il Gazzera a pubblicare con molta solerzia ed accuratezza d'editore lavori d'altri tuttora inediti e degni d'esser messi in luce.

Ei pubblicò l'anno 1839 nel Vol. 4.° dei *Monumenta historiae patriae* i XXVI libri della storia delle Alpi marittime di Pietro Gioffredo, e vi aggiunse una sua prefazione dov'ei discorre dell' importanza di quell'opera del Gioffredo, corredata di molti documenti storici spettanti a tutta quella regione alpina che « ha per confine l'Apennino a levante, il mare ligustico e gallico a mezzodì, a ponente il territorio di Marsiglia e l'alpi Cozzie a tramontana »; e narra la vita del Gioffredo, descrivendo e particolareggiando i diversi lavori dell' illustre storico dell'alpi marittime.

V' ha una relazione inedita, scritta in lingua latina d'una spedizione navale che partita dalla Schelda l'anno 1189, due anni dopo l' infelice successo della crociata condotta dall' imperator Federico, s'avviò in Oriente ad una nuova impresa contro gli occupatori della Terra Santa. Quella relazione fu scritta da un contemporaneo ed anonimo autore che fu testimonio ed attore di ciò ch'ei narra. Il manoscritto dov'ella trovasi è di pergamena e del secolo XIII. L'autore di nazione tedesco narra ogni particolarità di quella spedizione e racconta come prima di condursi in Oriente, que' crociati si volsero a liberare dai Saraceni una gran parte del regno d'Algarvia per consiglio ed eccitamento di Sanco I che n'era re, strinsero d'assedio Silves città capitale del regno e se ne impadronirono per viva forza.

Il Gazzera pubblicò negli atti dell'Accademia del 1840 quella relazione sotto il titolo di *Narrazione storica contemporanea delle avventure e delle imprese di una flotta di crociati partita dalle foci della Schelda l'anno 1189 per la prima volta pubblicata*, e la corredò delle notizie storiche più opportune a schiarirla, a mostrarne l' importanza ed a compierne la narrazione.

Tornò il Gazzera sul tema delle crociate e ne dilucidò alcuni particolari storici in un suo scritto pubblicato l'anno 1843 negli atti dell'Accademia col titolo di *Esame di alcune carte antiche concernenti ai Piemontesi che agli stipendi del Conte Amedeo IV furono alla quinta crociata.* Trovandosi il Gazzera a Parigi nel 1843 gli venne alle mani una copiosa raccolta di antiche carte genovesi ragguardanti le crociate, le quali contengono ordini di pagamento, ricevute di somme sborsate, scritture d'obbligo ecc. e comprendono lo spazio di tempo che corre dagli ultimi anni

del secolo duodecimo (1190) fin oltre la metà del secolo decimoterzo (1254). Sopra tali carte si trovano registrati nomi di personaggi illustri nella storia de' crociati in Oriente; e fra esse vennero scoperte dal Gazzera sette pergamene, sovra cui stanno scritti nomi d'alcuni nostri compaesani, una lettera del conte Amedeo IV di Savoia, dove ordina che siano pagati gli stipendi a certi *nobili e fedeli suoi* che si trovano *in partibus transmarinis* ed altri simili documenti storici. Con tali documenti prese il Gazzera a dilucidare l'andata di Amedeo IV con buona mano di militi suoi alla quinta crociata condotta e capitanata dal marchese Bonifacio III di Monferrato.

Lo scritto che ha per titolo: *Memorie storiche dei Tizzoni conti di Desana e notizia delle loro monete*, pubblicato l'anno 1841 negli atti dell'Accademia, è fra gli scritti del Gazzera uno de' più notevoli per moltiplicità di ricerche storiche e sagacità di critica archeologica. So che quel lavoro non è esente da alcune mende, massime in quella parte che concerne le monete di Desana; ma l'essere stata fino a quel punto in cui il Gazzera la prese a soggetto de' suoi studi, così poco indagata e svolta la storia particolare de' conti di Desana e della loro zecca, debb'essere scusa sufficiente a que' difetti. Uno de' nostri colleghi, il Cav. Domenico Promis sta ora preparando sullo stesso tema un nuovo lavoro numografico, dove saranno meglio schiarite ed ordinate le monete dei Tizzoni conti di Desana.

Discorre dapprima il Gazzera in questo suo scritto dell'origine dei Tizzoni, ricca e potente famiglia Vercellese Ghibellina ed emula degli Avogadri e degli Alciati e dell'aderire che ei fecero sempre ai marchesi di Monferrato; narra come acquistassero essi la signoria ed il contado di Desana, borgo situato nella Diocesi di Vercelli, e come ne fosse primo investito nel 1411 un Lodovico Tizzone a cui ne venne conferito il dominio dal generale consiglio del comune di Vercelli con quelle singolari formalità simboliche di cui si trova frequente menzione nel giure romano, e che il medio evo conservò ed usò in tali atti solenni, *dando*, cioè, *ipso Ludovico de terra, herba et frondibus .... ponendo de lapidibus et tegulis in manibus ipsius*, ecc. Prosegue egli narrando la storia del borgo e castello di Desana sotto i successori di Ludovico, innestandovi a mano a mano la numografia col discorrere delle monete fatte coniare da ciascun di loro, e conduce la narrazione storica fino all'anno 1676 in cui morto senza prole maschia il conte Carlo e nate liti per la successione, il feudo di Desana

passò prima nelle mani del marchese Tizzone della linea di Crescentino, e fu quindi l'anno 1693 venduto al duca di Savoia Vittorio Amedeo II.

Ho già notato più addietro come l'epigrafia antica fosse uno degli studi particolarmente coltivati dal Gazzera ed indicato i primi suoi lavori sopra tale argomento. Tre altri scritti sopra temi d'epigrafia pubblicò il Gazzera tra l'anno 1842 e il 1852, de' quali sporrò qui un sunto.

Il primo è un opuscolo scritto in francese e pubblicato a Chambéry nel 1842, il cui titolo è: *Lettre sur la fausse interprétation d'une inscription Romaine découverte en Valachie.* Stampò il Gazzera quello scritto per raddrizzare alcuni grossi errori in cui cadde l'interprete d'un'iscrizione latina trovata in Valachia e pubblicata da un giornale francese *L'Echo du monde savant.* L'iscrizione è un congedo militare del tempo dell'imperatore Adriano ed incisa sur una di quelle tavolette di rame, su cui s'usavano incidere i congedi. Le formole consuete di tali iscrizioni o documenti epigrafici, benchè note agli eruditi, vennero dall'interprete francese stranamente alterate e guaste, ed il Gazzera indicò e rettificò nel suo scritto quegli errori.

Seguita a questo un altro lavoro di epigrafia, il più disteso fra tutti e fors'anche il più elaborato che il Gazzera pubblicò l'anno 1847 negli atti dell'Accademia col titolo *Delle iscrizioni cristiane antiche del Piemonte*, al quale si rannodano due appendici che ci v'aggiunse e pubblicò più tardi, l'una nel 1850 col titolo di *Appendice al discorso intorno alle iscrizioni antiche del Piemonte;* l'altra nel 1856 intitolata *Aggiunte e correzioni al capo primo delle iscrizioni cristiane antiche del Piemonte concernenti ai primi vescovi della città d'Alba.* Le iscrizioni che in questi suoi scritti prese ad illustrare il Gazzera appartengono in gran parte alla Chiesa d'Alba; e nell'esporle egli cercò di schiarire col corredo della storia i primi tempi della Chiesa Albese, la serie de' suoi vescovi, fra cui sette rimasi finora o ignoti o dimenticati, la quasi spenta memoria d'alcuni fra i primi e più notevoli seguaci del cristianesimo in quella contrada, i nomi d'alcuni consoli e l'età del loro consolato; così egli pur fece per le iscrizioni appartenenti all'antica città di Pollenzo, ad Aosta, Acqui, Ivrea, Vercelli, Torino ed a più altri luoghi e città del Piemonte. Egli andò investigando a mano a mano e dilucidò con grande utile della storia ecclesiastica di queste regioni subalpine il penetrare e diffondersi del cristianesimo nelle varie contrade del Piemonte, e seminò qua e là in questo suo lavoro fatti e notizie archeologiche di non lieve importanza storica.

Nella prima appendice annessa a questo discorso ci descrisse ed interpretò più iscrizioni mandate da Roma ed incise sopra lapidi parte spezzate, parte intere. Ma il non essere stato da chi le mandò indicato il luogo dov'elle furono scoperte, e il non trovarsi sovr'esse nessuno di que' segni o simboli, come rami di palma o di cipresso, il grappolo d'uva, la colomba, il pesce, che manifestano nelle lapidi cristiane le condizioni della vita e i particolari della morte di colui a cui son dedicate, diminuiscono l'importanza e il valore storico di quelle lapidi romane.

La seconda appendice è principalmente intesa a ricercare se il Dionisio che fu primo vescovo d'Alba e morì nel 380 sia lo stesso che il Dionisio discepolo di S. Eusebio e vescovo di Milano, trasferito dalla Chiesa d'Alba alla Chiesa milanese. Il Gazzera opina e sostiene con buone ragioni la sua opinione, che il Dionisio discepolo d'Eusebio e vescovo di Milano non possa essere lo stesso che il Dionisio primo vescovo d'Alba. Siffatte indagini archeologiche, benchè possano forse parer talora di poca importanza, giovan tuttavia sovente a diradar le tenebre d'età remote e a diffondere qualche raggio di luce sulla storia loro sovente incerta e sulla loro cronologia più incerta ancora.

Un terzo tema pur d'epigrafia ma appartenente a più antica età e ad un altr'ordine d'idee trattò il Gazzera nel discorso che ha per titolo: *Del ponderario e delle antiche lapidi Eporediesi*, e che ei pubblicò negli atti dell'Accademia l'anno 1852. In quest'ultimo suo lavoro discorre dapprima il Gazzera, conforme al suo metodo nelle indagini archeologiche e particolarmente epigrafiche, delle origini della città d'Ivrea, colonia romana, a cui quelle lapidi appartengono. Entra egli quindi a descrivere e ad interpretare le varie epigrafi che ritrovate nella città e nell'agro d'Ivrea si riferiscono o ai tempi romani o alla colonia venuta colà da Roma. Alcune di quelle iscrizioni rammentano offerte e doni fatti agli Iddii; altre onori pubblici conseguiti da cittadini; molte son sepolcrali. Nell'esporre quelle epigrafi della colonia Eporediana venne il Gazzera indicando, secondo che gli occorreva, le varie tribù romane a cui erano aggregati gli abitatori di più colonie subalpine, e mostrò copiosa erudizione storica e piena conoscenza degli usi sia civili che domestici de' Romani. Più particolarmente poi in questo suo discorso si stende egli a descrivere e a chiosare la lapide e l'epigrafe del ponderario. Erano i ponderari, come ognun sa, edifizi particolari, dove per pubblica autorità si custodivano i modelli dei pesi e delle misure, a cui doveva conformarsi ogni

peso ed ogni misura che s'avesse ad usare nelle varie officine di commercio. I modelli o campioni di ciascun ponderario dovevano poi corrispondere ai modelli originali che si conservavano a Roma nel Campidoglio. Corredò il Gazzera quest'epigrafe di più notizie e schiarimenti storici, opportuni ad illustrare questa parte dell'amministrazione romana. A questo scritto furono poi aggiunte quattro appendici, in cui sono descritte ed illustrate altre epigrafi latine e discussi alcuni punti di numismatica e di storia.

Oltre i descritti lavori d'erudizione epigrafica, dettò il Gazzera non poche iscrizioni latine ed italiane, per lo più funebri, nelle quali si possono scorgere imitati le forme, i modi, il fare dell'epigrafia antica, in cui era egli versato.

Due ultimi lavori, l'uno edito, l'altro inedito ancora compiono la serie degli scritti letterari del Gazzera ed appartengono amendue alla bibliografia ossia alla storia bibliografica, dove, come già notai, aveva singolar maestria e dottrina il nostro collega. Uno ha per titolo: *Disquisizioni bibliografiche intorno ad una edizione fiorentina del secolo XV, e di alcune altre stampe di quel secolo*, e venne pubblicato negli atti dell'Accademia l'anno 1858. Con quella accurata esattezza che è condizion principale d'ogni lavoro di bibliografia, esamina egli in questo suo scritto e parte rettifica, parte compie le notizie bibliografiche che diedero sopra un'edizione del secolo della stampa il Fossi e il Denis. Il libro della cui edizione qui si ragiona è la *Dialectica nova* del Padre Giorgio Benigno Salviati, intorno a cui il Fossi e il Denis diedero ragguagli erronei. Il primo non s'accorse che all'esemplare da lui descritto mancava la dedica ed il proemio; ed il secondo errò indicando due edizioni di quel libro, amendue del secolo XV, l'una delle quali, quella che è da lui indicata come la seconda, non fu mai fatta, nè se ne trova nella storia bibliografica alcun vestigio; benchè l'errore del Denis sia stato poi ripetuto e propagato da altri autorevoli bibliografi, il Panzer, l'Hain, ecc. Raddrizzati i due errori bibliografici intorno alla *Dialectica nova* del Salviati, prende il Gazzera ad esaminare e a dimostrare insussistenti e vane due asserzioni del Vernazza che nelle sue *Osservazioni tipografiche sopra libri impressi in Piemonte nel secolo XV*, afferma essere stati stampati in Savigliano nel 1470 da Glim e Beggiamo il *Boezio*, il *Manipulus Curatorum* e lo *Speculum vitae humanae*, ed in un secondo suo scritto: *La tipografia in Alba nel secolo XV*, vuole che si creda stampato in Alba nel 1493 il *Dottrinale del Villadei*. Da lui dissente su amendue i punti il Gazzera

e mostra non aver valore nè autorità le prove o per meglio dire gli indizi sovra cui fonda il Vernazza il suo giudicio.

Lo scritto che rimane inedito del Gazzera è un articolo sulla Stamperia Reale di Torino, che, insieme con una sua prefazione pure inedita doveva pubblicarsi nell'opera del Vernazza che ha per titolo: *Osservazioni letterarie e particolarmente di storia tipografica.* Narra egli in questo ultimo suo scritto l'origine della Real Tipografia, fondata dal Re Carlo Emanuele III l'anno 1740, promossa e sostenuta da tre valenti suoi ministri, il marchese d'Ormea, il conte Bogino e il cav. Morozzo, le leggi ed i regolamenti da cui era retta, i privilegi che le furono accordati e gli obblighi da lei assunti. Enumera quindi le principali opere uscite da' suoi torchi nei primi cinquant'anni e notabili per bellezza di tipi e nitidezza d'esecuzione, ma sopratutto per l'esatta correzione dei testi. L'eccellenza di quelle edizioni le acquistò fama e per mezzo di cambi e di commercio ella potè con gran vantaggio degli studi arricchire di libri preziosi e rari l'apoteca libraria che v'era annessa.

Questi che ho fin qui descritti sono i lavori letterari del Gazzera. Ma a questi soli non si riduce la sua operosità scientifica, e la vita di studio a cui egli fu principalmente dedito ed in cui perseverò costante per lunghi anni. Ei ricopiò con paziente fatica per amor degli studi di storia nostra non poche lettere ed altre cose manoscritte del Terraneo, uno de' primi e de' più solerti investigatori delle cose nostre. Ei ricavò da cronache e da ammassi d'antiche carte or ad uso suo proprio or ad uso altrui documenti che potessero servire agli studi storici. Così egli estrasse, a cagion d'esempio, da un codice del Berardenco o per meglio dire dalle Memorie che sopra quel codice ha lasciato il Meiranesio, e fornì al nostro collega Luigi Provana che li pubblicò nel Volume III dei *Monumenta historiae patriae*, due documenti, l'uno *Fragmenta chronicae antiquae civitatis Pedonae*, l'altro *Vita B. Dalmatii incerti auctoris.* Egli svolse e frugò diligentemente i numerosi manoscritti di diversa natura, lettere, documenti e note che raccolse e lasciò inediti il dotto Vernazza; e ne scelse la parte più importante, di cui divenuto possessore egli fece dono insieme con più altri manoscritti suoi e d'altri e con tutta la sua privata biblioteca alla nostra Accademia.

Fra i testi a penna di varie lingue che si trovano nella R. Biblioteca dell'Ateneo e che vennero raccolti da diverse parti, egli descrisse molti codici italiani e lasciò fra le sue carte brani di copie, schede e note sopra

più altri codici manoscritti e inediti appartenenti alla stessa Biblioteca.

Egli ebbe frequenti e continui e per lo più scientifici commerzi di lettere, parte suoi particolari, parte richiesti dal posto di Segretario della Classe, che egli occupò con onore e zelo per più di ventisett'anni. Ei fu largo di consigli e d'incoraggiamenti a tutti coloro che gli si mostravano disposti ad intraprendere qualche utile lavoro di scienza; e dava loro indirizzo e norma e tutti quelli opportuni ed utili indizi che gli suggeriva la sua perizia di bibliografo e d'erudito: a ciò l'induceva non men che l'amor degli studi, la sua natura schietta e generosa. Qui porrò fine a questa notizia.

Ho cercato con sentimento d'affetto e amor di verità di riunire in queste brevi pagine tutto ciò che mi parve dover contribuire a mettere in rilievo l'ingegno, gli studi, i lavori letterari del Gazzera, la parte insomma scientifica della sua vita, che fu principalmente vita di studio, di ricerche erudite e di operosità intellettuale. Verrò poi successivamente in altre notizie biografico-letterarie sponendo i lavori d'altri nostri defunti colleghi.

DELLA NEUTRALITÀ DELLA SAVOIA

NEL 1703

NARRAZIONE E DOCUMENTI

PUBBLICATI

DA

DOMENICO CARUTTI

Letta ed approvata nell'adunanza del 26 di giugno 1862.

In questi ultimi tempi la diplomazia e i giornali si sono molto vivamente preoccupati degli antichi trattati fra il Piemonte e la Svizzera sopra alcune parti della Savoia, e durante le prolungate controversie vennero particolarmente ricordate le pratiche condotte nel 1703 dal presidente Mellarede per la neutralità della Savoia intera.

Egli è noto che Vittorio Amedeo II, dopo aver liberato sè e il Piemonte dalle pressure e dal vassallaggio francese mercè la guerra del 1690, considerava la imminente successione di Spagna come uno di quegli avvenimenti che doveano porgergli occasione d'ingrandire lo Stato. Se non che Luigi XIV avendo accettato il testamento dell'ultimo re di Spagna, contrariamente agli accordi segreti per lo innanzi passati colle principali potenze, e l'Inghilterra e l'Olanda non avendovi fatta opposizione, il duca di Savoia fu costretto a collegarsi colla Francia ed a muover guerra all'imperatore che non acquetavasi alle ultime volontà di Carlo II.

Con quale animo Vittorio Amedeo II il facesse, egli è agevole indovinarlo, perocchè non solamente cotesta lega gli troncava la speranza di allargarsi, ma collocandolo fra i Borboni di Francia e i Borboni di Spagna,

fatti signori di Milano e delle Due Sicilie, ponevalo a lor mercede. Non è quindi maraviglia se andasse spiando il destro di uscire dai duri nodi, e occultamente si maneggiasse cogli Imperiali che combattevano e cogli Inglesi ed Olandesi che alla lor volta apparecchiavansi a combattere la preponderanza borbonica.

Luigi XIV per molti segni fatto certo che il suo alleato stava per volgersigli contro, ordinò il disarmo delle truppe piemontesi che erano al campo francese a S. Benedetto. Il duca raccolse il guanto, bandì la guerra, levò milizie, armò i popoli, strinse alleanza coll'imperatore, coll'Inghilterra e coll'Olanda. Siccome poi la Savoia, esposta per la prima ai colpi nemici, più difficilmente poteasi difendere dall'occupazione francese, mandò Pietro Mellarede fra gli Svizzeri, portatore di proposizioni, che, quando fossero state accettate, avrebberla posta in salvo.

Questi negoziati io verrò narrando, premettendovi alcuni cenni sulle relazioni anteriori fra la Corona di Savoia e gli Svizzeri.

I.

Gli Svizzeri eransi ab antico mostrati amici a Casa Savoia, vedendo in essa un antemurale contro la Francia che andava a gran passi costituendosi in corpo formidabile di nazione, e che sotto Carlo VII e Luigi XI avea preso ad esercitare un grave protettorato sopra i successori di Amedeo VIII. Eransi perciò adoperati più di una volta in favore del loro vicino, costituendosi quali difensori del ducato di Savoia contro le ambizioni francesi.

Pure anch'essi gli Svizzeri, dopo la parte principale sostenuta nelle guerre d'Italia, essendo venuti in grande sentimento di lor forze, cominciarono ad accarezzare lor disegni ambiziosi. Agognavano il paese di Vaud in quel tempo unito alla Corona di Savoia, e miravano eziandio al Chiablese; la debolezza del governo ducale sotto Lodovico, Amedeo IX, la duchessa Iolanda e Carlo III dava incitamento a pensieri di tal fatta. L'occasione di effettuarli potevasi un bel giorno presentare; la sconcia commedia del falsario Dufour già indicava il desiderio di farla nascere; i casi di Ginevra la porsero.

I diritti di Casa Savoia sopra Ginevra, affermati dagli uni, negati dagli altri, erano plausibili se tengonsi in conto le investiture imperiali in favore dei duchi; riuscivano assai meno chiari, se badasi al contegno e alle

protestazioni dei Ginevrini in ogni tempo, e alla natura del loro governo. Il quale partivasi fra il vescovo, il visdonno ossia luogotenente del vescovo per le cose temporali, e la cittadinanza, senza che ai Duchi di Savoia serbasse alcuna parte di sovranità.

In effetto per altro i Duchi vi teneano signoria, perchè erano pervenuti a far eleggere il vescovo a loro talento, e nominavano direttamente il visdonno. Ma da qualche anno era sorto nella città un partito avverso a quel dominio, partito che veniva occultamente attizzato da Berna e Friburgo. A questo fine Friburgo avea conceduta la comborghesia ossia cittadinanza a' Ginevrini, e Carlo III erasi veduto costretto a rompere colle armi questa unione, obbligando i Ginevrini a rinunziarvi (1519).

Ma il cattivo governo dei ducali e le oscitanze funeste di Carlo III fecero rinvigorire gli umori, e la riforma protestante introdottasi nelle città crebbe forza e audacia agli scontenti. Costoro trovando più vivo favore presso i correligionari di Berna, divennero apertamente rivoltosi; sicchè non solo rinnovarono la comborghesia coi Bernesi e Friburghesi, ma, fatto popolo, cacciarono il vescovo e i ducali, e abolirono il visdonnato, distruggendo per tal forma ogni autorità dei Duchi di Savoia (1526).

La nobiltà dei contorni, abborrente delle novità religiose e dedita al Duca, si strinse in lega la quale fu detta del Cucchiaio, armossi e battagliò contro i ribelli; seguirono sanguinose fazioni di guerra civile e desolazione del paese. Carlo III, quando gli parve tempo, mosse in aiuto della lega a rivendicare i suoi diritti. Allora i Bernesi fecero arme e si opposero. Gli altri Cantoni entrarono di mezzo a mettere pace; dopo molte trattative ebbe luogo l'accordo o Abscheid di S. Giuliano, nel quale il conte di Challand, in nome di Carlo III, stipulò con Berna e Friburgo i seguenti patti:

In primo luogo il Duca non potrebbe nè allora nè poi offendere o permettere che da' suoi si offendesse colle armi o in altro modo la città di Ginevra;

Secondamente, se qualche suo vassallo o suddito offendessela, ed a lui ne fosse data querela, ei dovesse castigare il colpevole;

Per l'osservanza del che il Duca per sè e successori suoi impegnava in forma di malleveria e d'ipoteca ai Bernesi e ai Friburghesi il paese di Vaud con le sue pertinenze; e se egli non facesse giustizia o non punisse gli offensori, e ciò fosse da arbitri riconosciuto, il paese di Vaud cadrebbe in potestà di Berna e Friburgo.

Il Duca ricusò di ratificare la convenzione, anzi vi protestò contro,

dichiarando che il signore di Challand non avea avuta procura per consentire tali condizioni; ma non procedette oltre e non fece guerra. Le nimicizie e le offese continuarono. Due anni dopo si radunò un altro congresso a Payerne (1531) sotto le mediazioni dei Cantoni che non aveano partecipato al conflitto. I Bernesi e i Friburghesi instavano che loro si aggiudicasse il paese di Vaud perchè il Duca avea contravvenuto ai patti di S. Giuliano lasciando offendere Ginevra da' suoi e non castigando i colpevoli; il Duca chiedeva di essere restituito ne' suoi diritti sulla città ribelle, e che la rinnovata concittadinanza con Berna e Friburgo si dissolvesse. I mediatori sentenziarono (31 marzo 1531) che il visdonnato spettava veramente al Duca, ma che la concittadinanza dovea rimaner ferma. Quanto al Vaud non vollero far provvisione, e rimandarono ad altra adunata la sentenza.

Questa venne quattro anni dopo (19 gennaio 1535) pronunziata a Lucerna, dove i mediatori dichiararono che, prima di giudicare il punto, doveansi ridurre le cose in pristino, cioè reintegrare il Duca di Savoia e il Vescovo di Ginevra nella possessione del dominio e della giurisdizione stata lor tolta.

Ma questa sentenza non venne eseguita, e frattanto i Ginevrini incoraggiti e aiutati dalla Francia e da Berna, abolito il culto cattolico (27 agosto 1535), si costituirono in repubblica indipendente di nome e di fatto. Quindi i Bernesi, pretestando sempre le violate stipulazioni di S. Giuliano, d'accordo colla Francia che preparava una nuova discesa in Italia, prendono le armi, e condotti dal capitano generale Hans-franz penetrano nel Vaud. Losanna, ad imitazione di Ginevra, caccia il vescovo e il governatore, e proclama la religione riformata. Berna prosegue la sua marcia vittoriosa, e, non contenta al Vaud, occupa il paese di Gex, il Genevese e parte del Chiablese. Quei di Friburgo e i Vallesani che non aveano trattati da invocare, vedendo l'occasione propizia corsero anch'essi sulla facile preda; i Friburghesi si tolsero la contea di Romont, i Vallesani la parte del Chiablese posta sulla destra della Dransa non stata presa dai Bernesi. Gli uni e gli altri diceano che ciò faceano per impedire l'allargamento di Berna e l'introduzione dell'eresia.

Dal canto suo il re Francesco I, sommovitore dell'impresa di Berna, gettata del tutto la maschera, invadeva gli Stati del Duca. Corsa la Savoia, varcava le Alpi, entrava in Piemonte, e Carlo III rimaneva pressochè senza terra. Queste cose compievansi nei primi mesi del 1536.

II.

Spoliatis arma supersunt, era la leggenda dell'impresa di Emanuel Filiberto; ed egli *pugnando restituit rem*, come leggesi in alcune medaglie coniate dopo la battaglia di S. Quintino.

Ricuperato sopra Francia lo Stato colla spada, con altri modi, cioè coi negoziati, s'ingegnò di ricuperare le provincie che erano state prese dagli Svizzeri.

I Cantoni dopo la riforma eransi divisi in cattolici e protestanti. Il Duca, come cattolico, dovea innanzi tutto restringersi coi primi; ma l'alta sua mente discernea che, posto tra Spagna e Francia, i piccoli Stati divenivano per lui alleati naturali e permanenti, e che perciò non dovea romperla cogli Svizzeri.

Diede principio alle pratiche, trattando coi Cantoni cattolici, e richiese i Friburghesi della restituzione della contea di Romont. Questi risposero che, chiamati dai popoli, erano intervenuti; desiderare quei popoli la loro signoria; il territorio occupato essere di lieve momento; il Duca aggiustasse prima le sue faccende con Berna, poi amichevolmente se la intenderebbero. Non si acquetò il Duca a questa replica che nulla conchiudeva; ma siccome coi Cantoni cattolici dovea procedere con dolcezza, mandò ad altro tempo la questione, ed attese a rinnovare amicizia coi Cantoni delle antiche leghe dette dell'alta Alemagna, cioè Zurigo, Lucerna, Uri, Switz, Unterwalden, Zug e Soletta, coi quali non eranvi dissidii nè grandi nè piccoli da comporre. Al tempo della guerra contro Carlo il Temerario questi aveano in giusta guerra occupato il paese di Vaud (1475); lo restituirono nel 1477, ed in tale circostanza aveano conchiuso con Savoia alleanza perpetua, la quale fu rinnovata da Emanuel Filiberto mediante il trattato dell'undici di novembre 1560. In esso fu stipulato 1.° la libertà del traffico fra gli Stati contraenti; 2.° il divieto di transito pel loro territorio ai nemici che movessero ad offesa dell'una o dell'altra parte; 3.° il componimento per mezzo di arbitri eletti *hinc inde* delle differenze che fossero per insorgere infra di loro; 4.° la consegna dei malfattori rifuggiti: 5.° e finalmente la promessa di non concedere il diritto di cittadinanza ai sudditi che conservassero casa e beni nel territorio dell'altra parte.

In pari tempo il Duca ponea mano alle più difficili trattative con Berna. La riforma erasi distesa nel Chiablese e nel paese di Gex, ed avea

trionfato in quello di Vaud. Il popolo, arricchito delle spoglie della Chiesa, era per interesse affezionato al nuovo ordine di cose. La nobiltà devota a Savoia era stata annichilata nelle fazioni; parte avea emigrato, parte era caduta combattendo. La libertà venuta dietro alla riforma già avea prodotti i suoi benefici frutti; l'industria era cresciuta, e col lavoro l'agiatezza e il benessere delle popolazioni. L'amore verso l'antica Dinastia era estinto.

Ginevra poi in quegli anni avea raddoppiata la popolazione, e divenuta il quartier generale della riforma, gloriavasi del titolo di Roma del calvinismo. L'odio verso l'antica signoria era profondo e vivace. Checchè ne riferissero gli agenti segreti sempre disposti a dire ciò che piace a chi paga, Emanuele Filiberto sentì che colle armi difficilmente sarebbe venuto a capo de' suoi disegni.

Per altra parte le condizioni politiche generali nel 1560 erano diverse da quelle del 1536; sul trono di Savoia non sedeva più il debole ed ambiguo Carlo III; regnava in sua vece uno dei più gloriosi capitani del suo tempo, il quale possedea tutte le parti dell'ottimo principe. Francia non mostravasi inclinata a favorire gli Svizzeri oltre i debiti termini; Spagna accampavasi quale inflessibile sostenitrice del principio cattolico, dal quale Berna, principale fra i Cantoni, erasi dispiccata. I Bernesi e i Friburghesi sentivano essi pure la necessità di un accomodamento. A tale effetto si aprirono conferenze fra i deputati delle parti contendenti sotto la mediazione degli altri Cantoni; prima a Neufchatel nel 1560, poscia a Basilea nel 1561 e 1563.

Emanuel Filiberto chiedeva la restituzione dei paesi usurpati; i Bernesi, allegando il trattato di S. Giuliano, sostenevano che giustamente e a buon diritto li possedeano. I deputati del Duca osservavano che il paese di Vaud come feudo imperiale non potea essere nè ipotecato nè alienato se non per consenso dell'Impero; indi soggiungevano che, anche prescindendo da ciò, e menando buono il trattato di S. Giuliano, se ne erano con mostruoso abuso di forza violate le condizioni; infatti i paesi nominatamente ipotecati non doveano cadere in potestà di Berna se non dopo che gli arbitri, conosciute le offese contro i Ginevrini e il niego di giustizia per parte del Duca, avessero pronunziata sentenza; ora nulla di ciò essere intervenuto, anzi a Payerne avere i mediatori dichiarato che pria di conoscere del litigio doveasi reintegrare l'antico stato di cose, cioè restituire Savoia nei diritti suoi sopra Ginevra; essersi insomma operato

uno spoglio violento quando Carlo III assalito dal re di Francia mal potea difendere il suo; ciò essere così evidente che non solamente il Vaud era stato usurpato, ma altresì Gex, il Genevese e il Chiablese, paesi che non erano mai stati ipotecati.

Questo era veramente il lato debole della causa dei Bernesi, i quali per farvi riparo chiedevano risarcimento dei danni patiti pei fatti dei sudditi del Duca durante gli sconvolgimenti che aveano preceduta l'occupazione del 1536. Obbiettavano i deputati di Savoia che tali danni non erano punto provati, e che ad ogni modo il risarcimento potea dar luogo ai negoziati, e non giustificare mai l'usurpazione e la conquista.

La questione di Ginevra poi offeriva difficoltà insuperabili. Voleva il Duca rimanere libero di rivendicare i suoi diritti sovr'essa, come e quando gli piacesse, e chiedeva quindi che Berna annullasse la cittadinanza conceduta alla città, perchè questo vincolo, oltrechè era lesivo della potestà sovrana, ponea in obbligo i Bernesi di aiutare i Ginevrini nelle loro occorrenze. Berna per contro pretendeva che il Duca dovesse rinunziare all'uso della forza, e che tutte le questioni che si riferivano al diritto di sovranità fossero come pel passato rimesse al giudizio di arbitri.

L'andamento dei negoziati dava a divedere che una parte dei paesi usurpati sarebbe restituita; ma qui sorgevano due altri punti di controversia. Nel Chiablese e nel Genevese, come si è detto, erasi introdotta la religione riformata; i Bernesi domandavano che a tutti gli abitanti ne fosse guarentito l'esercizio sino ad un generale e libero concilio; al che ripugnava Emanuele Filiberto, sia perchè non volea vincolata per convenzione internazionale la prerogativa sovrana in un capo d'interna amministrazione, sia perchè come cattolico ed alleato di Spagna e del Pontefice non potea in così solenne e pubblica forma guarentire ne' suoi Stati la tolleranza delle nuove dottrine. Già troppi rimproveri avea dovuto sopportare da Roma e da Madrid per la convenzione fatta coi Valdesi nel 1561, convenzione che egli non avea ratificata ma bensì osservata.

L'altra questione ragguardava il possesso dei paesi stessi da restituirsi. Instavano gli Svizzeri che il Duca si obbligasse di non cederli in avvenire ad altra Potenza, e chiedevano che niuna nuova fortezza si potesse nei medesimi fabbricare, nè farvisi radunata di gente d'arme. Alle quali domande il Duca mostravasi restío come quelle che sminuivano la libertà del Principe e la indipendenza dello Stato.

Le pratiche pervennero a maturità sul finire del 1564, nel qual anno,

addì 30 di ottobre, sotto la mediazione dei Cantoni, fu sottoscritto coi Bernesi il trattato di Losanna (1).

Questo trattato è disteso in forma di processo verbale in cui espongonsi lungamente le questioni di diritto e di fatto, e le discussioni a cui diedero luogo. La parte dispositiva contiene i seguenti accordi:

Berna restituirebbe al Duca la signoria di Gex, il Chiablese e il Genevese. Per contro il Duca cederebbe a Berna il paese di Vaud colla signoria di Nyon e le sue dipendenze; le acque del lago sarebbero sino alla metà proprie dello Stato ripuario.

Niuna delle parti aliencrebbe in qualsiasi modo la terra restituita o ceduta *per evitare l'una all'altra vicinità straniera ed incomoda;* e niuna di esse alzerebbe nuove fortificazioni in prossimità l'una dell'altra, o farebbe apparecchi d'armi se non a distanza di una lega dalla frontiera (art. XIV e XV).

Le parti conserverebbero libero e sicuro il transito nei paesi come sovra aggiudicati, ben inteso che il passo non servirebbe a disegno od impresa nimichevole.

Restituendosi a Sua Altezza alcuni paesi dove era penetrata la religione riformata, e non potendo gli abitanti emigrarne *senza grande tribolazione,* si lascierebbe alla discrezione dell'Altezza Sua, come signore, di far leggi e dettare regole pel mantenimento della detta religione, salvo al Duca e ai Bernesi la facoltà di più speciali accordi se e quando il riputassero conveniente.

Quanto a Ginevra, essa manterrebbe la cittadinanza di Berna, ma il Duca riterrebbe facoltà di far valere per via di giustizia le sue ragioni per dimostrarla illegale; la stessa facoltà e la stessa via di giustizia riserbavasi pel diritto di sovranità.

Tutte queste disposizioni non doveano tornare in alcuna maniera pregiudicievoli ai diritti ed alle ragioni competenti alle parti e di cui non si era fatta menzione. Questa riserva riferivasi segnatamente alla pendenza con Friburgo e col Vallese.

Questi accordi doveano essere approvati dal Re di Francia e da quello di Spagna, quantunque del primo non trovisi menzione nel corpo del

---

1) I plenipotenziari del Duca erano Pietro di Maillard, governatore di Savoia, Luigi Oddinet signore di Monfort, Luigi Millet, Claudio di Bellegarde, Michele di Villette barone di Chevron e Giovanni Gaspare di Lambert.

trattato. La Francia ratificò senza farvi indugio. Non così Filippo II, il quale si recò a coscienza di consentire ad un patto che conteneva concessione di libertà religiosa ai paesi restituiti. Indarno Emanuele Filiberto rispondeva col testo del trattato stesso che ciò non era vero, e che siffatta materia era lasciata alla prudenza sua; Filippo II obbiettava che tale era l'opinione dei teologi a cui avea commesso l'esame del negozio. Ci vollero tre anni prima che il cupo monarca iberico desse il suo beneplacito.

Il Papa, meglio consigliato, non fece rimostranze. L'assenso dell'Imperatore non fu chiesto, quantunque si trattasse di alienazione di feudo imperiale quale era il Vaud, o se fu chiesto, non fu dato. Per la qual cosa Massimiliano nell'atto d'investitura generale ad Emanuel Filiberto del 1566 comprese specificatamente il Vaud, Ginevra e tutti gli altri paesi che erano stati contemplati nell'investitura di Ferdinando I del 6 di marzo 1562 (1). Siffatta mancanza in processo di tempo servì di appicco ai successori di Emanuel Filiberto per impugnare la validità delle fatte rinunzie sul Vaud.

Le provincie del Genevese e del Chiablese rientrarono tosto sotto il dominio di Savoia, ma il paese di Gex fu ritenuto ancora dai Bernesi sino al 1567, sia per la mancanza delle ratifiche di Spagna, sia perchè a malincuore s'inducessero a quest'ultima restituzione.

Se non che nel detto anno il Duca d'Alba avendo per ordine del Re Cattolico levate truppe in Italia e dovendole condurre nelle Fiandre, ottenne da Emanuel Filiberto il passaggio per Piemonte e Savoia. Berna, temendo che gli Spagnuoli, d'accordo col Duca, colta l'occasione del non eseguito trattato, volgessero l'animo a cose maggiori, restituì allora il paese ancora occupato.

Tolte così di mezzo le cagioni dei conflitti, Emanuele Filiberto contrasse nel 1570 più stretti vincoli colla repubblica. Dopo parecchi abboccamenti a Basilea, Losanna, Nion e Berna, venne infatti stipulata addì 5 di maggio alleanza difensiva in conferma delle leghe anteriori e specialmente di quelle del 1498 e del 1509. I due Stati venendo assaliti doveano prestarsi vicendevole aiuto nella seguente proporzione, cioè Berna

(1) Le investiture imperiali comprendevano il ducato di Savoia, del Chiablese e di Aosta, il vicariato perpetuo del Sacro Romano Impero, il marchesato in Italia, il principato di Piemonte, la contea di Ginevra e del Genevese, di Bauge, di Romont e di Asti, la baronia di Vaud, del Faucigny e di Gex, i dominii di Nizza, della Bressa, di Vercelli, e il marchesato di Ceva.

somministrerebbe cinque al più o tre almeno buoni uomini d'armi al Duca che li pagherebbe del suo; e il Duca somministrerebbe a Berna almeno trecento cavalli e due mila fanti, e al più cinquecento cavalli e tremila fanti; ma gli uni e gli altri sarebbero mantenuti e pagati da lui stesso.

Il soccorso così convenuto dovea essere somministrato un mese al più tardi dopo la richiesta fattane, e la parte che l'avea chiesto ed ottenuto non potea far pace senza inchiudervi l'altra parte che l'avea data, e provvedere alla sicura ritirata del contingente ausiliario.

Promettevasi la consegna dei malfattori e la cacciata dagli Stati rispettivi.

Notevoli appaiono gli articoli sopra la religione. Il soccorso stipulato non era dato in occasione di guerra per cause religiose; dall'obbligo della consegna e della cacciata eccettuavansi espressamente le persone perseguitate per cause siffatte.

Altri articoli riguardavano il commercio e le ragioni dei privati. Le differenze che fossero per insorgere definirebbersi per arbitri *hinc inde* eletti. La lega dovea durar vent'anni.

Il desiderio di buon vicinato e di pacifico commercio cogli Svizzeri si appalesava viemmeglio ancora nella convenzione che nello stesso mentre si negoziava sotto la mediazione e l'amichevole arbitrato dei signori di Berna, e che fu nello stesso giorno della lega sottoscritta con Ginevra.

I Bernesi, consentendolo le parti interessate, pronunziarono intorno alla forma delle relazioni commerciali e personali fra i sudditi del Principe e i Ginevrini, augurando buona pace e concordia fra Sua Altezza e la Città. Circa la questione di sovranità nulla determinavasi, integre rimanendo le ragioni di ciascuna parte; ma Ginevra obbligavasi a non far mutazione alcuna sugli ordini suoi interni per lo spazio di ventitre anni. Inoltre non farebbe nè lega nè macchinazione contro il Duca, nè ricetterebbe armi straniere; e S. A. potrebbe entrar liberamente nella città dove sarebbe stato colle debite onoranze ricevuto egli col seguito e colle guardie sue ordinarie. Niun assembramento armato sarebbe lecito ai sudditi delle due parti a danno degli Stati loro. Dichiaravasi espressamente che non avrebbe luogo la estradizione degli incolpati per cause di religione.

Mentre maneggiavansi gli accordi or descritti, e prima che venissero terminati, eransi composte le differenze coi Vallesani.

Le terre da costoro occupate nel 1536 comprendevano il Governo di

Acquiano dal ponte della Dransa sino al fine del ponte di S. Gingolfo, inclusevi le acque della Morge; più il Governo di Aux, l'abbazia di Abbondanza e il Governo di Monteolo. Pendevano altresì alcune differenze di danaro, portandosi l'una e l'altra parte creditrici di certe somme. Col trattato conchiuso a Thonon il 4 di marzo 1569 i Vallesani restituirono Acquiano, Aux e l'abbazia di Abbondanza, e il Duca cedette definitivamente Monteolo. In compenso ottenne che i Vallesani lasciassero libero il passo alle sue truppe sul loro territorio per traversare il Gran S. Bernardo. Il Duca non potea per altro farvi passare più di mille uomini alla volta, e dovea, oltre il pagamento di una determinata somma, consegnar loro un vassallo che fosse Marchese, Conte o Barone, il quale starebbe a Sion in qualità di ostaggio durante il transito delle truppe savoiarde. Molto notabile fu questa concessione di transito ottenuta dai Vallesani, giacchè per essa le provincie transalpine del Duca venivano poste in comunicazione col ducato di Aosta, e di là col rimanente degli Stati Italiani.

Formavasi in pari tempo alleanza difensiva. In caso di guerra i Vallesani obbligavansi a somministrare al Duca un numero di fanti non maggiore di sette e non minore di quattro coorti composte di trecento uomini; Emanuele Filiberto darebbe lo stesso numero di fanti, ovvero quattro sole coorti e trecento cavalli a scelta dei Vallesani.

Per le somme di danaro controverse le parti spedivansi vicendevole quitanza. Le differenze che fossero per insorgere definirebbersi per mezzo di arbitri *hinc inde* eletti.

Rimanea tuttora insoluta la controversia con Friburgo che continuava nel possesso della contea di Romont.

Terminate tutte le differenze con Berna, rinnovò le istanze per la restituzione; e siccome il territorio di cui trattavasi non era di molta importanza, il Duca offerì nel 1569 di cederlo mediante compenso in danaro. Premevagli altamente in quel punto di stringere coi Cantoni cattolici un'alleanza più stretta ed efficace di quella che avea rinnovata nel 1560; perciò i Friburghesi che il sapevano e molto poteano sugli altri Cantoni della lor fede, replicarono che in premio del loro concorrere nella lega intendevano avere la definitiva cessione della contea. Così stavano ancora le cose nel 1578. In quel tempo il Duca dava indizio ed avea in animo di ravvivare le non estinte sue ragioni sopra Ginevra; Berna e Soleure, per opporvisi, aveano conchiusa alleanza e prenunziavano di nuovo alla lor volta di voler concedere la cittadinanza ai Ginevrini; col qual mezzo si sarebbero

intromessi, come al tempo di Carlo III, nella contesa. Emanuele Filiberto per fortificarsi coll'aiuto dei cattolici rinunziò a Romont, e dopo di ciò venne stipulata la lega generale con Friburgo e gli altri cinque Cantoni cattolici, festeggiata a Torino nel settembre del 1578 e solennemente giurata nel duomo. Si fu in quest'occasione che Emanuele Filiberto formò la compagnia degli alabardieri svizzeri per sua guardia ordinaria.

I trattati di Losanna e di Thonon segnarono verso la Svizzera quei confini che lievemente modificati nel 1815 durarono insino ai giorni nostri.

III.

Più vasti pensieri agitarono Carlo Emanuele I, principe di arditi e smisurati concetti, dei quali la maggior parte, appunto per essere senza misura, non ebbe felice riuscimento.

Avendo agognata la Provenza, la Lombardia, il Monferrato, Genova, la corona di Francia, la corona imperiale, e, se la fama non mente, anche la tiara, non è maraviglia se accesamente procedesse nelle cose degli Svizzeri.

Fino dal 1582 per mezzo del capitano Maurizio Bertingel e del luogotenente Lanche avea tenuto pratiche in Ginevra, cui Emanuele Filiberto negli ultimi anni del viver suo, come si è detto, avea di nuovo rivolte le mire. A tal fine Bernardo di Savoia, signore di Racconigi, erasi con due mila uomini condotto segretamente a Ripaglia; di là dovea penetrare nella città per la porta di S. Gervasio, custodita dal luogotenente Lanche. Il 13 di agosto i nostri giunsero a Ternier, e la notte appresso doveasi operare il colpo. Ma il Lanche erasi indettato con monsignore di Racconigi col solo fine di scovarne i disegni e rivelarli ai Ginevrini. Questi perciò stavano in arme, e mediante sortite a tempo fatte avrebbero debellate le truppe ducali, che in poco numero e credendo di andare a certa vittoria poco sarebbero apparecchiate a battaglia. Già eransi mossi i nostri ed approssimati a Ginevra, quando le guide, che ginevrine erano, disparvero. Il generale entrò in sospetto, si fermò e mandò a riconoscere la piazza. Scoperto l'inganno, ordinò la ritirata dopo qualche vana dimostrazione.

Altra via tentò allora Carlo Emanuele I, e si rivolse al papa. Sisto V parea disposto a prestargli orecchio ed aiuto, trattandosi di ricuperare alla religione cattolica la sede principale del calvinismo. Ma Francesco Fabbri, vescovo di Cava nel regno di Napoli, tanto si adoperò presso il pontefice,

dimostrandogli pericolosa l'impresa e senza profitto ragionevolmente sperabile, che pervenne a stornare il nembo che adunavasi sopra la sua patria.

Nel 1588 le cose aveano mutato aspetto. La Francia era dilaniata dalle guerre civili, cattolici e ugonotti fra di loro contendevano oggimai dell'impero più che della religione. Preponderavano i primi e la Corte ne stava pensosa ed inquieta, tanto formidabile mostravasi la potenza della lega capitanata dal duca di Guisa. Spagna soffiava nell'incendio e dava ai cattolici ardimento ed aiuti, confidando di veder depressa coi Vallesii la fortuna di Francia e forse smembrato il reame stesso. Debole il governo dappertutto e segnatamente nelle parti più dal centro discoste, dubbia la fede dei governatori, i popoli proni alle novità. Bella occasione era cotesta a chi sapesse farne suo pro.

Carlo Emanuele I non era uomo da lasciarla fuggire. Dopo la cacciata di Enrico III da Parigi nella famosa giornata delle barricate (13 di maggio 1588) senza dichiarazione alcuna di guerra s'impadronì del marchesato di Saluzzo, a ciò confortato dalla Spagna e dalla Corte di Roma. Addusse per sua ragione la tutela della religione cattolica e il fece noto per pubblici bandi e per ambasciatori ai Potentati. Presso i Cantoni cattolici della Svizzera mandò il signor di Pressy suo gentiluomo di camera dicendo loro: esser noto che gli ugonotti del Delfinato faceano ogni lor possa per aprirsi il varco di qua dalle Alpi e portare in Piemonte il mal seme di lor setta; avere intelligenze e pratiche nella contrada il Lediguieres, protestante così caldo ed animoso, aiutarli sottomano, e tutto aver preparato per usurpare le fortezze del marchesato. A tanta iattura imminente non esservi altro riparo fuorchè l'antivenire il colpo; ciò aver fatto, occupando Carmagnola, Centallo e Saluzzo a preservazione sopra tutto della religione cattolica, per cui volentieri darebbe gli Stati e la vita.

Ma non al solo marchesato di Saluzzo appagandosi Carlo Emanuele I, s'infervorò tutto nel disegno di ricuperare Ginevra, su cui avea fondamenti di diritto, e il paese di Vaud alla cui perdita non sapea acconciar l'animo. A tal fine avea tese le fila di una macchinazione popolare a Ginevra ed a Losanna, e spedite soldatesche alla frontiera sotto il comando di D. Amedeo di Savoia, marchese di S. Rambaldo, suo fratello naturale. Due galere correvano il lago Lemano, destinate ad operare contro Ginevra. Il barone di Ermanza, potente in quei luoghi, profferivasi ad aiutarlo colle sue genti; il signor di Iacob, spedito dal Duca, erasi accontato con lui a Coppet, ed aveano concordato per iscritto il disegno delle operazioni militari.

I Bernesi n'ebbero sentore per tempo. Il Re di Francia non potendo da sè in quello scompiglio del Regno far guerra al Duca per ricuperare Saluzzo, e cercando di offenderlo per altre guise, mandò a Berna Nicola d'Harlay, signore di Sancy, per confortarli a furar le mosse a Carlo Emanuele I, aggredendo la Savoia. A questo offeriva buon nerbo di truppe.

Berna si armò, e tratti a sè i Cantoni di Basilea, Schiaffusa, San Gallo, il conte di Virtemberg, la città di Argentina e i Vallesi, deliberò di antivenire il colpo minacciato. Nell'aprile del 1589 congiuntisi colle genti francesi condotte dal signor di Sancy, entrarono nel Chiablese e nel Fancigny, presero il castello di Moutonz, Bonneville e San Giorio, feudo del barone di Ermanza. Ivi trovarono le carte sottoscritte dal signor di Iacob e saccheggiarono con grande crudeltà il castello e la terra. Indi proseguirono il cammino, espugnarono il castello di Gex, poi Thonon, Ripaglia ed altri luoghi. Alla lor volta i Vallesani, tentati al solito dall'occasione, presero Evian.

Carlo Emanuele I che già si era condotto di sua persona a Mommegliano, attendeva rinforzi dal governatore di Milano e dai rivoltosi di Francia, coi quali già tenea pratiche. Giunti gli uni e gli altri, uscì in campo a raddrizzare le sorti della guerra.

In questo il signor di Sancy, chiamato da più pressanti bisogni dal re nell'interno della Francia, si ritrasse dal campo dei confederati.

I Vallesani, veduta la mala piega delle faccende, deputarono loro uomini al Duca per dichiarargli che voleano restituirgli Evian e le altre terre, perchè non mai era stata lor mente di aggredirlo, ed eransi mossi soltanto per impedire che i Francesi e i Bernesi conquistassero quei luoghi. Carlo Emanuele I menò buona la spiegazione e rinnovò con essi lega ed amicizia. Nello stesso mentre ordinò la costruzione di una fortezza a Sonzi, due leghe presso Ginevra, per mettere con essa un duro freno alla ribelle città. I lavori furono condotti con tanta sollecitudine che in due mesi la fortezza di S. Catterina, così chiamata in onore della duchessa di Savoia, era in grado di essere difesa.

I Bernesi vedendosi abbandonati mandarono proposte di pace. Il Duca in quel punto già mirava alla Provenza; perciò le accolse, e il conte di Challant fu spedito a Saleneuve per abboccarsi coi deputati della repubblica (4 di luglio 1589).

I Bernesi offerivano, colla restituzione dei luoghi occupati, rinnovazione delle passate leghe, e chiedevano promessa di non essere offesi negli altri

lor possessi. Il Duca per contro dimandava la restituzione dei danni e rifacimento delle spese di guerra; di più la restituzione dei paesi usurpati sopra Carlo III e la promessa di abbandonar Ginevra alla sua sorte, obbligandosi a non soccorrerla in nessun modo od evento.

Non fu possibile intendersi, e si ripresero le armi. Dopo vari scontri, in cui i Bernesi ebbero la peggio, Carlo Emanuele I riebbe i luoghi toltigli dal nemico, e già stava per gettarsi sopra Losanna, allorchè l'ambasciatore di Spagna dichiarò che le genti del Re cattolico erano venute a difesa del Duca, non ad offesa degli Svizzeri, e ricusò che gli Spagnuoli partecipassero alla impresa. Carlo Emanuele I richiese che rimanesse almeno a difesa, mentre egli dal canto suo penetrerebbe colle sue genti nel paese di Vaud; ma anche questo partito fu respinto dall'ambasciatore. Per buona ventura allorchè manifestossi questo dissidio fra il Duca e i suoi alleati, i Bernesi, stanchi della guerra e senza speranza degli aiuti francesi, si risolsero a nuove pratiche di pace separandosi da Ginevra. Nuove conferenze si aprirono, ed il 1.° di ottobre fu stipulato il trattato di Nyon.

Le parti proemiavano dicendo che il trattato di Losanna del 1564 essendo stato alterato per gli avvenimenti del corrente anno, in primo luogo si ristabiliva buona pace e concordia coll'oblio delle ostilità sopraggiunte; in secondo luogo il Duca prometteva di lasciare i signori di Berna nel pieno e pacifico godimento dei paesi ceduti col trattato sopra mentovato, senza poter mai in alcuna occasione e per qualsivoglia causa muoverne richiamo. Espressamente dichiaravasi che le terre dai Bernesi restituite al duca Emanuele Filiberto rimarrebbero quinc'innanzi in piena ed intiera proprietà di Carlo Emanuele I e de' suoi successori *per farne tuttociò che gli piacerà e goderne con tutta quella autorità che ogni principe sovrano può esercitare ne' suoi stati.*

Il Duca concedeva compiuta amnistia a quelli fra i sudditi del Chiablese, di Gex e dei baliaggi di Ternier che durante le ostilità aveano favorito i Bernesi, o portate le armi contro esso Duca. Concedea inoltre e confermava in loro favore l'esercizio della religione riformata.

Il Duca per ultimo riserbavasi formalmente il diritto di far valere colle armi o per via di giustizia le sue ragioni sopra la città di Ginevra, e i Bernesi promettevano di non prestare ai Ginevrini nè aiuto nè favore alcuno.

In questa guisa i signori di Berna ponevano in salvo i loro interessi, ma sacrificando slealmente Ginevra facevano al loro onore una grave

macchia. I Ginevrini, abbandonati da tutti, non abbandonarono se stessi; con ardimento e costanza degna di lode perpetua volsero il viso alla fortuna. Non deposero le armi, non chiesero mercè, si strinsero più fortemente nel fermo proposito di morire sotto le ruine della città piuttostochè cedere. Tanta virtù, tanta generosità non doveano restar senza premio. Non solo procurarono la difesa della lor terra, ma usciti in campo presero il paese di Gex e vi si fortificarono.

La signoria di Berna approvò il trattato di Nyon per lettere del 10 di ottobre, con riserva di mandare ambasciatori a giurarlo solennemente a Ciamberì nelle mani di Carlo Emanuele I. Se non che conosciutosi nella città il brutto abbandono dei Ginevrini, sorse un grido di universale riprovazione, e non appena gli altri Cantoni protestanti n'ebbero contezza, fecero pervenire ai Signori le più acerbe rimostranze; Zurigo, Basilea e Schiaffusa mandarono deputati significando che in virtù di loro lega con Ginevra non poteano nè doveano permettere che questa città alleata fosse oppressa dalle armi, insino a che la sua causa non fosse stata ventilata e decisa per via di libera giustizia.

Incerta e conscia della mala azione, la Signoria cercò il benefizio del tempo, tirando in lungo e differendo la prestazione del giuramento. Sollecitata dal Duca per mezzo del signor di Lambert mandò Ulrico Boestetin e Girolamo d'Erlac in Ciamberì, i quali il 3 di dicembre dopo molto rigirar di frasi supplicarono il Duca di rinunziare all'articolo contra Ginevra, dichiarando che disdirebbero il trattato se prima del giuramento non interveniva un accomodamento al proposito.

Questa era la principale dimanda, a cui altre aggiungeano, e principalmente che libero fosse veramente il culto riformato nei baliaggi di Gex, Thonon e Ternier, mentre in contravvenzione alle antiche e recenti stipulazioni esso veniva solo tollerato in alcune parrocchie. In secondo luogo pretendevano che coloro i quali aveano macchinato contro Losanna e i Bernesi fossero allontanati da quei baliaggi; e finalmente chiedevano che nel trattato s'inserisse la clausola stipulata a Losanna, per la quale era interdetto al Duca di alzar fortezze ad una lega di distanza dai confini degli Stati di Berna.

Carlo Emanuele I rispose che innanzi tratto giurassero il trattato già per lettere solenni approvato; indi ragionerebbesi intorno all'oggetto della loro missione, e stessero certi delle sue buone intenzioni in loro favore.

Privatamente poi fece intendere che non era alieno dall'allontanare

dai baliaggi coloro che aveano avute pratiche in Losanna; soggiunse che essendosi a Nyon modificato il trattato di Losanna circa i diritti sui paesi ceduti e restituiti, egli ne era divenuto libero e pieno signore senza restrizione alcuna; ma che pur tuttavia sarebbesi diportato in ciò per forma da soddisfare i signori Bernesi. Quanto a Ginevra non diede speranza alcuna di compiacerli. Il perchè dopo siffatti discorsi i deputati partirono senz'altra conclusione. In Berna cresceva sempre più il malcontento, reso più vivo dal nobile contegno dei Ginevrini, e la Signoria venne a discoprire che in quel punto altri pensieri divertivano Carlo Emanuele I dai negozi svizzeri, e perciò con lettere del 20 di gennaio e del 3 di marzo disdisse il trattato.

Nulladimeno la repubblica non ripigliò le armi, nè venne in aiuto di Ginevra, la quale perseverò da sola nella lotta. Per la qual cosa il Duca avrebbe probabilmente sottomessa la città, e certamente ricuperato il paese di Gex, ma in quei giorni le sue speranze poggiavano più alto, ed altre mire avea posto a' suoi disegni. Il 4 di agosto 1589 Enrico III, ultimo dei Vallesi, era caduto sotto il pugnale di frate Clemente; la parte di Enrico IV suo successore era più che mai depressa, la lega trionfava, Carlo Emanuele I meditava di costituirsene il capo. L'impresa contro Ginevra non fu proseguita con alacrità, e ai Bernesi non fu chiesta ragione della violata fede.

Ma da quel punto la Corte di Savoia considerò come infermata la validità così del trattato di Losanna come di quello di Nyon, e perciò redivivi i suoi diritti sul paese di Vaud.

IV.

Mi sono disteso alquanto nella analisi dei trattati precedenti, perchè i più non vennero finora pubblicati, e perchè gli storici nostri li rammentano con brevi parole non sempre bastevoli a chiarirne la ragione nè a riassumerne il contenuto. Passerò ora rapidamente sulle convenzioni posteriori.

Nel 1598 Carlo Emanuele I convenne con Ginevra ad alcuni accordi preliminari in forza dei quali la città gli restituì il paese di Gex e la castellania di Gaillard, e il Duca si obbligò ad atterrare il forte di S. Catterina.

Nel 1603, dopo la famosa scalata, fu stipulato il trattato di S. Giuliano,

che metteva pace fra i contendenti e lasciava a Casa di Savoia il diritto di far valere le sue ragioni per via di giustizia. Il Duca obbligavasi di non radunare gente d'arme, nè alzar fortificazioni o tener presidio a quattro leghe di distanza dalla città.

Nel 1617, durante la guerra per la successione del Monferrato, Carlo Emanuele I si collegò con Berna, mediatrici l'Inghilterra e gli Stati Generali d'Olanda, e nella convenzione sottoscritta il 23 di giugno fu confermato il trattato di Losanna del 1564, rinfrescandone le condizioni principali, tranne però quella che proibiva alle parti contraenti di alienare i paesi restituiti o ceduti. La lega del 1617 venne eziandio ratificata e giurata dal Principe di Piemonte che fu poi Vittorio Amedeo I.

Dopo d'allora nè per Ginevra nè pel Vaud insorse contesa che riuscisse a guerra od a palese nimicizia; ma la Corte di Torino, non ostante tante esplicite e formali rinunzie, sotto il Regno di Carlo Emanuele II cavillava sulla loro validità, e negli archivi diplomatici havvi traccia di occulti maneggi tentati per ritogliere ai Bernesi il possesso del Vaud.

Vittorio Amedeo II non risvegliò, nel lungo e glorioso suo regno, una controversia che non era fatta oggimai per avere buoni effetti. Perciò nel 1685, mandando il Conte di Govone ministro fra gli Svizzeri, nella istruzione lo informò dei diritti sopra Ginevra e il Vaud, gli raccomandò di tenerli accesi, ma gli proibì di fare alcun passo, perchè il tempo non si mostrava favorevole a tanto.

Il Conte di Govone risiedette a Lucerna dal 1686 al 1694, e perciò al momento in cui scoppiò fra il Piemonte e la Francia la guerra del 1690. Il Ministro non mancò al debito suo, ed ai primi moti d'arme espose ai Cantoni come l'invasione della Savoia per parte dei Francesi costituisse un pericolo grave pel Corpo Elvetico.

I Cantoni cattolici e il Vallese si radunarono in Dieta nel mese di aprile, ed alle istanze dell'inviato nostro risposero che concorrerebbero, secondo il loro potere, nelle viste del Duca, ma nulla conchiusero. Il 29 del maggio seguente si tenne a Basilea una Dieta generale dei Cantoni, ed in essa il Conte di Govone propose che la Savoia fosse considerata neutrale. Ma Luigi XIV non era rimasto colle mani alla cintola; i Cantoni cattolici, stati da lui imbecherati, proposero bensì la neutralità ma per tutti gli Stati del Duca; proposizione che non potea essere accettabile a Vittorio Amedeo II. Tuttavia i Bernesi dimostravano maggiore calore degli altri in questa faccenda, e sostenevano che l'occupazione francese

era da temersi grandemente e da impedirsi. La Dieta irresoluta si appigliò ad un partito mezzano, e chiese che la Savoia propria, il Genevese e il Chiablese fossero dichiarati neutrali. Luigi XIV, cui ciò non piaceva, rispose che non dissentirebbe, purchè in contraccambio la neutralità si estendesse anche al Delfinato, o per lo meno alla Bressa e al Bugey. Nè il Duca, nè le Potenze marittime, nè l'Imperatore l'avrebbero voluto; quindi i negoziati, non mai ben vivi, cessarono. La Francia s'impadronì della Savoia intera, e trattò col Corpo Elvetico perchè gliene guarentisse il possesso, offerendo in compenso di demolire Monmegliano. La proposta non venne accolta.

Al cominciare della guerra del 1703 gli Svizzeri chiesero a Luigi XIV la neutralità delle sponde del Reno e del lago di Costanza da Basilea a Schiaffusa, e da Schiaffusa a Costanza, compresi i contorni del lago di questo nome.

Vittorio Amedeo II, ciò saputo, e memore del disegno trèdici anni prima formato dal Conte di Govone, sperò di preservare nella stessa guisa la Savoia, mettendo innanzi quei vasti partiti che sembrano dare ai negoziati probabilità di successo. La istruzione data a Pietro Mellarede porta la data del 4 di ottobre 1703; in essa il Duca, ricordata la violenza patita, per opera di Luigi XIV, dimostra come nella presente guerra gl'interessi degli Svizzeri e specialmente di Berna e Zurigo consiglino imperiosamente d'impedire la imminente occupazione della Savoia per parte delle armi francesi. Infatti la Svizzera, e Berna sovra tutto, si troverebbero circondate e serrate da tre lati dalla Francia, il che necessariamente annichilirebbe la loro libertà di azione, e turberebbe quella ponderazione e quel giusto equilibrio degli Stati, di cui il Corpo Elvetico è naturale guardiano e difensore.

Unico modo di riparare a tanto pericolo essere lo estendere alla Savoia la neutralità stessa che il Corpo Elvetico avea chiesta pei dintorni del lago di Costanza, e per ottener la quale si affaticavano ora i Cantoni.

Siccome questa proposizione fatta nell'ultima guerra era stata dalla Francia destramente eliminata, contrapponendovi in pari tempo la neutralità del Piemonte, così, per torre ogni pretesto ad una simile replica e indurre gli Svizzeri ad accogliere e sostenere la domanda del Mellarede, il Duca pensò ad uno spediente che a noi dee parere strano, e che forse sarà parnto tale a chi pur mettevalo innanzi. Vittorio Amedeo per dar prova della sua fiducia agli Svizzeri incarica il suo Inviato di offerire

l'aggregazione della Savoia al Corpo Elvetico, sotto quelle condizioni e con quei patti che sarebbero stati determinati di buon accordo.

Seguiva altra profferta che recherà non minore maraviglia a chi conosce la storia del nostro diritto pubblico interno. A fermar quei patti, a sancire quelle capitolazioni e consacrare gli obblighi che la Savoia dovrebbe assumere quale membro inseparabile del Corpo Elvetico, il Duca esibivasi di radunare gli Stati Generali del paese, quegli Stati Generali che da più di cento e quarant'anni erano caduti in dissuetudine, e di cui nessuno avea più osato parlare se non nei giorni dei rivolgimenti e delle guerre civili.

Dove poi l'unione non fosse effettuabile, il Mellarede dovea chiedere almeno la neutralità nel modo stesso che pei dintorni di Costanza. In tal caso il Duca non molesterebbe i Francesi oltre le Alpi, ed osserverebbe tutte le condizioni che sarebbersi stipulate concordemente.

Il Mellarede avea autorità di soscrivere a tal fine una nuova rinunzia del paese di Vaud, perocchè le anteriori erano difettose e non perfette, mancandovi, fra le altre cose, il consenso dell'Imperatore; ragione per cui quella provincia non era stata compresa nei territori del Corpo Elvetico. Avea pure autorità di rinunziare ai diritti sopra Ginevra. Per altro in una lettera posteriore alla istruzione, Vittorio Amedeo II ingiungeva all'Inviato di tacere di ciò, perchè il tasto di somigliante corda renderebbe mal suono, e susciterebbe diffidenze.

L'Agente piemontese dovea pure negoziare la leva di tre mila uomini, e non badare a spesa a quest'effetto. « *Au cas qu'il ne s'agisse que de l'argent, vous découvrirez à qui il faut en donner pour venir à notre but, ce qu'est la première corde que vous toucherez* ».

Per quest'oggetto come per gli altri della sua commissione Mellarede dovea rivolgersi al Colonnello S.t Saphorin, bernese devoto alla causa del Duca.

L'Inviato piemontese giunse a Berna nell'ottobre del 1703 ed espose il suo mandato. Il Gran Consiglio deputò l'*Avoyer* Seynner, il tesoriere Friching e il signor Banderet de Watteville a conferire con esso. Mellarede fondava le sue argomentazioni sulle indicazioni politiche già riferite, e soggiungeva che lasciando occupare la Savoia dalla Francia, questa cercherebbe ogni mezzo per aggregarla alla Corona. Allora il possesso del paese di Vaud più non sarebbe sicuro, perchè Luigi XIV non tarderebbe a farvi valere sue pretensioni come antica dipendenza dei Duchi di Savoia,

e una nuova Camera di Riunione alla foggia di quella di Metz l'aggindicherebbe senza esitanza all'insaziabile monarca. Ginevra correrebbe gli stessi pericoli per le stesse ragioni. I protestanti poi proverebbero tostamente le molestie e poco appresso le crudeltà del fiero persecutore della religione riformata.

Berna, e per timor della Francia e forse per altri motivi che non isfuggivano a Vittorio Amedeo II, entrò molto caldamente nei concetti del Duca, e in genere i Cantoni protestanti seguivano la stessa corrente. I cattolici per contro vi erano opposti per ragione di coscienza, ma molto più perchè toccavano laute pensioni dalla Francia, e perchè in questa circostanza Luigi XIV largheggiava anche in beveraggi. Vittorio Amedeo dal canto suo mandò cento mila lire per aiutarsi, e promise di pagare alcune antiche pensioni che venivano chieste dai Cantoni cattolici in forza delle antiche convenzioni.

Radunatasi la Dieta a Zurigo, Mellarede ripetè le sue domande in pubblica arringa, e la Dieta, ricorrendo ad uno di quei temperamenti che non guastano nulla, ma non impegnano guari, scrisse all'Ambasciatore di Francia, profferendosi mediatrice per riconciliare le due Corti; il che non riuscendo, adopererebbesi ad assicurare la tranquillità della Savoia; e a questo fine chiedeva una sospensione d'armi fra i belligeranti sino alla riunione di una nuova Dieta.

Il marchese di Puyssieux, Ambasciatore di Francia, rispose all'arringa del Mellarede con una memoria virulenta contro il Duca, invitando i Cantoni a non prestar orecchio alle subdole proposte del Principe piemontese. Il marchese Beretti Landi, Inviato di Filippo Re di Spagna, rispose pur esso con una catilinaria anche più calda. Coloro i quali stupiscono di certe frasi le quali talvolta s'incontrano nei documenti diplomatici dei giorni nostri, leggano quelle memorie e manderanno assolti molti peccati moderni, veggendo ciò che scrivevasi ai tempi del conte di Avaux e del marchese di Torcy.

In quella il Duca La Feuillade entrava in Savoia; Berna e Friburgo, di consenso del Corpo Elvetico, mandarongli oratori insistendo per la domandata sospensione d'armi. I deputati nel loro discorso gli ricordarono l'antica massima degli Svizzeri di volere aver vicini più Principi per non essere in balìa di un solo, e di difendere i paesi che loro servivano di barriera, come era per l'appunto la Savoia, di cui eransi espressamente riservata la difesa nella pace perpetua colla Francia; con tale intendimento

essersi convocata una Dieta a Berna affine di provvedere alle presenti contingenze, e segnatamente di negoziare la neutralità della Savoia.

Il duca della Feuillade rispose naturalmente che egli era soldato e non Ambasciatore o Ministro, e che eseguiva gli ordini del suo Re. Quindi tirò innanzi. Contemporaneamente il marchese di Puyssieux rimise alla Dieta la dichiarazione della neutralità dei Cantoni del lago di Costanza, e poco stante rispose circa la neutralità della Savoia, proponendo al solito la neutralità stessa anche pel Piemonte.

Gli Svizzeri risposero incontanente che essi non prendevano parte alle cose d'oltre Alpe, ma che volevano assicurare sè stessi, assicurando un paese contermine.

Frattanto gli animi si agitavano, e le arti e gl'incitamenti contrari di Vittorio Amedeo, di Luigi XIV e di Filippo V tiravanli in contrarie sentenze. Mellarede il 17 di gennaio 1704 scriveva: *Il n'y eut jamais un si grand mouvement en Suisse que pour la neutralité de la Savoje.*

Puyssieux raddoppiava i suoi sforzi, soffiava nelle passioni, e non perdonava neppure a minaccie. Il Nunzio pontificio venne in suo soccorso e consigliò i Cantoni cattolici di non lasciarsi trascinare dall'ardore dei Bernesi, giacchè nè essi correvano pericolo standosene quieti, nè ricaverebbero altro profitto, movendosi, fuorchè i travagli e le calamità della guerra.

A Soletta si adunò la Dieta addì 18 di febbraio 1704. Puyssieux recitò un lungo discorso, in cui esponeva come al Re fosse impossibile aderire ai desideri dei Cantoni, perchè la neutralità parziale della Savoia non solo gli toglieva le entrate territoriali, ma gli impediva il passo oltremonti, o per lo meno lo costringeva a chiederlo in mercè dal Corpo Elvetico. Dichiarava per altro che il Re volendo testimoniare la sua deferenza pei Cantoni, accondiscendeva a confidar loro la guardia del Chiablese e del Faucigny. Nella sua arringa all'Ambasciatore venne detto, a modo di rimprovero, che gli Svizzeri ricevevano continue grazie del Re, di cui tenevano poco conto e non rifinivano dal chiederne delle altre. Queste parole ferirono la Dieta che se ne risentì gravemente, non ostante la promessa del Chiablese e del Faucigny. Il signor Escher, presidente dell'adunanza, fu incaricato di muoverne all'Ambasciatore solenne rimostranza. Escher presentatosi a Puyssieux, dopo aver ricordate le parole da lui pronunziate, disse: I deputati dei lodevoli Cantoni mi hanno commesso di significarvi che non conoscono che tre sorta di grazie:

quella che si fa ai colpevoli che hanno meritata la morte; quella che un Sovrano concede a un altro Sovrano mercè larghezze e grandi beneficii; finalmente quella che un gran Monarca conferisce a un Sovrano meno potente di lui, non invadendo gli Stati suoi. Quanto alla prima i lodevoli Cantoni non trovandosi in colpa, non credono essere ridotti a chiedere grazia alcuna. Circa la seconda, non si reputano in debito verso il Re di alcun benefizio o larghezza; vi sono trattati che impongono doveri all'una e all'altra parte contraente. L'adempimento reciproco delle obbligazioni non può chiamarsi grazia. Riguardo alla terza noi non crediamo che il Re abbia avuto in animo d'invadere i nostri Stati, ma se, contro ogni nostra credenza, ciò accadesse in seguito, io ho l'ordine di far sapere a V. E. che in tal caso farebbero gli estremi sforzi per convincere S. M. che sono veri patrioti e uomini d'onore che prima di tollerare alcun attentato contro la loro libertà verserebbero fino l'ultima goccia del loro sangue.

La risposta del marchese di Puyssieux fu quale non si aspetterebbe da un Ministro di Luigi XIV. Egli disse: se mi è sfuggita qualche frase o qualche espressione nel calore del discorso, vi prego di non farvi punto attenzione, perchè non ne ho alcun ordine dal Re. E se voi non siete contenti della neutralità e della guardia del Chiablese e del Faucigny, il Re vi rimetterà ancora Mommegliano.

Cotesta dolcezza di modi spiegasi colle ragioni di guerra. Luigi XIV dovea richiamare dalla Savoia molta parte delle sue truppe per mandarle nella contea di Nizza, il che porgeva agio a Vittorio Amedeo di tentare la ricuperazione delle provincie oltre alpine. Infatti nell'aprile i nostri per Val di Aosta e Val di Susa varcarono i monti e non trovarono resistenza. Il Duca che ben sapea di non poter mantenere colà un corpo di esercito sufficiente a fronteggiare i Francesi quando venissero alla riscossa, valendosi tuttavia della occasione propizia ingiungeva a Mellarede di sollecitare una qualche conclusione alle trattative. Dicevagli che lasciasse dall'un de' lati l'aggregazione della Savoia, come negozio per il momento troppo lungo e spinoso: in realtà essa cominciava a parergli troppo grave fatto. Ordinavagli pure di non più toccare degli Stati Generali, perchè il farli intervenire in quella faccenda era uno sminuire l'autorità sovrana; pure, se fosse necessario, non ponesse difficoltà. Ottenesse, dove fosse possibile, la guarentigia degli Svizzeri pel possesso della Savoia; se non fosse gradita la proposta, tutti i pensieri si appuntassero alla neutralità.

Siccome Berna procedea con molto fervore in tutti questi concetti,

tanto zelo parea alquanto sospetto al Duca, cui non erano ignoti gli antichi e non mai bene aperti disegni dei Bernesi sopra il Chiablese. Il rimedio, in tal caso, potea riuscire peggior del male. Mellarede ebbe perciò espresso mandato di starsene in sugli avvisi, di togliere ogni ambiguità nei patti e di fermarli in capitoli chiari e precisi. Nello stesso mentre per non dare sospetto de' suoi sospetti, chiese che gli Svizzeri occupassero la Valle d'Aosta, giacchè se i nemici intercettassero quei passi, sarebbero tagliate le comunicazioni fra i due paesi.

Il Re di Francia giudicò di dover fare un'ultima concessione agli Svizzeri. Il marchese di Puyssieux dichiarò che in nessun caso il Re Luigi unirebbe mai la Savoia alla Corona di Francia. Quest'ultimo impegno calmò gli spiriti accesi. I capitoli della neutralità furono distesi e consegnati all'ambasciatore, il quale ebbe l'accorgimento di non respingerli in principio, ma nella loro applicazione. Si radunò nel maggio una nuova Dieta, le divisioni fra i Cantoni continuarono, ma Vittorio Amedeo II conobbe che non sarebbesi conchiuso nulla. La neutralità del Chiablese e del Faucigny, la promessa di non ritenere la Savoia alla pace, davano a Berna e al Corpo Elvetico le desiderabili guarentigie; il rimanente sarebbe stato un meglio che in politica non vuolsi proseguire ad ogni costo. Il Duca ordinò a Mellarede di lasciar cadere il negoziato, e di adoperarsi per levar uomini, il che gli riuscì più felicemente.

Così terminarono le pratiche del 1703 e del 1704, che mi parvero non immeritevoli di essere tolte dall'oscurità degli archivi in cui giacevano per servire di lume alla storia diplomatica del nostro e dei vicini paesi. Con tale intendimento aggiungo alcuni documenti inediti su cui fondasi la narrazione.

DOMENICO CARUTTI.

DOCUMENTI

INSTRUCTION ORIGINALE *de S. A. R. au Conseiller et Intendant Mellarede pour son voyage en Suisse.*

4 octobre 1703

INSTRUCTION *à vous Conseiller et Intendant* MELLAREDE *pour votre voyage en Suisse.*

Nous vous avons choisi pour vous envoyer au Canton de Berne pour negocier avec ce Canton, dans l'etat present des affaires, pour procurer que ce Canton conjointement avec celui de Zurich, entre dans nos interets, au moins pour mettre à couvert la Savoye des invasions de la France.

Vous partirés donc incessamment pour aller à Berne, où étant vous vous addresserés au Colonel St Saphorin avec qui vous conférerés du suiet de vôtre mission, et à ces fins vous luy remettrés la lettre que nous vous faisons donner pour qu'il puisse avoir la confiance que nôtre service exige qu'il ait en vous, et qu'il puisse vous diriger et introduire d'une manière auprès des principaux des dits Cantons pour reussir par leurs moyens à la fin que nous nous proposons. Vous concerterés donc avec le dit Colonel les manières pour parvenir au but que nous nous proposons, Luy representant que l'interest de sa patrie le doit inviter à donner tous ses soins pour faire reussir nôtre proiet, qui est avantageux au Canton de Berne, et au Corps Helvetique.

Ayant pris langue de luy pour sçavoir à qui vous vous devés plus confier, vous demanderés à parler à l'Avoyer et aux principaux de Berne, à qui vous représenterés le motif de vôtre mission, et la forte intention que nous avons de renouveller, et entretenir cette ancienne alliance qui à toûiours esté entre nôtre Couronne, et le Canton de Berne, et avec quel soin nos Predecesseurs ont soutenu leur interets.

Vous leur representerés que la France nous ayant traitté d'une manière indigne de nôtre naissance, nous nous sommes trouvés engagés à nous declarer contre elle, pour ne rester plus exposés aux insultes qu'elle nous à faites, et qu'en même temps non avons reflechi que la guerre dans laquelle nous entrons, pourroit procurer aux François le moyen, en s'emparant de la Savoye, d'environner et de serrer de plus prez le Corps Helvetique, et principalement le Canton de Berne, et les gener par ce moyen dans cette liberté que leur valeur leur à acquis, et conservé iusqu'à present; que se trouvant dans cet état, ils ne pourroient pas tenir l'equilibre qu'ils ont tenu avec tant d'applaudissement.

Qu'ils ne peuvent pas prévenir un désavantage si considerable au Corps Helvetique, et au Canton de Berne principalement, qu'en prennant des mesures pour empêcher que la France qui les environne de deux parts, ne les environne pas de la troisième.

Que le seul moyen qu'il y a pour l'empecher, est que les Loüables Cantons de Berne, et de Zurich procurent que le Loüable Corps Helvetique fasse en faveur de nos Etats de Savoye les mêmes declarations qu'il a faites pour les Pays qui sont auprès du Lac de Constance, et qu'il fasse les mêmes representations au Roy très Chrétien.

Vous leur representerés que nous voulons bien faire plus pour leur donner des preuves parfaites de nôtre confiance et de l'estime que nous faisons de leur alliance, puisque nous consentons qu'ils aggregent nos dits Etats de Savoye au Loüable Corps Helvetique, et que dez qu'ils y auront consenti, nous ferons assembler les trois Etats du Pays pour passer les promesses, et capitulations necessaires, et de se charger, et obbliger de contribüer leur contingent suivant les regles, et les maximes du Corps dont nos dits Etats seront à l'avenir membres inseparables. Et au cas qu'il ne vous puisse pas reussir d'obtenir cette union, vous representerés que le Corps Helvetique, et principalement le Canton de Berne, ne sçauroit mieux faire que d'éloigner de ses confins une puissance qui ne cherche qu'à les entourer pour les reduire à faire ce qu'elle souhaite, que comme ils sont en état d'empêcher son approche du costé de Savoye, ils le doivent faire par les mêmes raisons qui les ont obligés de s'opposer qu'elle ne s'approchast du costé du Lac de Constance, que les deux endroits sont également ialoux pour leur liberté. Et comme ils pourroient exiger une assurance de notre part qu'on n'inquieteroit point la France du costé de Savoye, vous les en pourrés assurer de nôtre part, et que nous observerons de ce costé toutes les conditions qu'ils pourroient souhaiter pour une parfaite et entière neutralité telle que les Loüables Cantons l'observent eux mêmes.

Et comme il faut prevenir les premieres hostilités, vous leur representerés qu'il est important qu'ils s'interessent de bonne heure à la conservation d'un Païs qui dans la suite, au cas qu'ils veüillent l'aggreger à leur Corps, en augmentera le lustre et l'étendue.

L'interest estant le ressort qui fait remüer ce Corps, vous vous servirés de ce remede à propos, et à ce suiet il y a trois moyens.

Le premier est d'offrir au Canton de Berne une renonciation en sa faveur de tous les droits que nous, et nos successeurs pourroient pretendre sur le Pays de Vaud, et appuyer cette renonciation sur une cause de Couronne pour la rendre plus inébranlable, et plus sûre en leur faveur, et pour leur faire voir la sincérité de nos intentions, vous leur representerés que les renonciations de nos Predecesseurs ne sont pas accompagnés de toutes les circonstances néecessaires pour les rendre irrevocables, ce que les autres Cantons ont reconnu en ce qu'ils n'ont pas voulu declarer le Pays de Vaud compris dans leur Ligne contre et au preiudice de nôtre Couronne, que d'ailleurs l'Empereur n'a pas autorisé ces renonciations, quoique ce pays soit un fief Impérial, dont nos Predecesseurs ont eû les investitures après, tout comme auparavant les renonciations, et eû en même temps la confirmation du Viariat Imperial au dit Pays.

Vous leur dirés que nous nous disposerons de lever ces deux obstacles par le consentement que nous donnerons que le Corps Helvetique reçoive le Pays de Vaud dans la Ligue, ce qu'il ne luy a pas voulu accorder iusques à présent, sur les representations qui lui ont esté faites de la part de cette Couronne, que nous en fairons même faire des instances au Loüable Corps Helvetique.

Et à l'égard de l'Empereur que nous nous chargeons de rapporter son consentement, et son approbation à notre renonciation, par ou nous assûrons irrevocablement ce pays au Canton de Berne.

Que si vous trouvés des difficultés par rapport à Geneve, et si après avoir assûré que nous n'avons iamais eû intention d'inquieter une ville qui est sous leur protection, vous voyés qu'ils exigent des sûretés, vous leurs dirés que notre intention est si sincère, que nous sommes prets de leur faire cession, et renonciation de tous les droits que nous, et nos Successeurs pouvons avoir, et pretendre sur la dite Ville, et même d'en rapporter l'approbation de l'Empereur en leur faveur.

Vous leur proposerés encore de la levée de quelques Regiments iusque à trois mille hommes, et plus pour defendre nos Etats de Savoye, ou de Piemont, et vous en concerterés avec eux les articles, et au cas qu'il ne s'agisse que de l'argent, vous decouvrirés à qui il faut en donner pour venir à nôtre but, ce qui est la première corde que vous toucherez.

Vous aurés soin de nous donner avis de tout ce que vous ferés pour en recevoir nos resolutions.

S'il sera necessaire selon les occurrences d'aller à Zurich, ou en des autres lieux necessaires de Suisse, vous y irés, et nous en donnerés avis.

Nous vous remettons les pleinspouvoirs pour negocier avec le Corps Helvetique, et avec les dits Cantons de Berne, et de Zurich, et les lettres de créance necessaires pour eux, etant persuadés que votre prudence, et votre habileté vous suggereront tout ce que nous pourrions vous dire plus particulièrement sur ce suiet. Nous prions Dieu qu'il vous ait en sa sainte, et digne garde. À Turin ce 4.me octobre 1703.

Firmato : **V. AMEDEO.**

(*L. S.*)

S.T THOMAS.

HARANGUE *de Monsieur de Mellarede Envoyé de Son Altesse Royale M. le Duc de Savoye aux Louables Cantons Suisses prononcée à Zurich le 23 octobre 1703.*

Illustrissimes Seigneurs

Vous avés apris comme le Roy très Chretien oubliant les lois du sang, et la foy des traités qui sembloyent être d'une durée perpetuelle entre luy, et Son Altesse Roiale mon Maitre, a fait indignement desarmer les Troupes qui étoient à son service en Italie, et faire prisonniers ses Officiers: vous êtes aussy informés, Illustrissimes Seigneurs, de la reponse que M. Philipeaux Ambassadeur de France fit à M. le Comte Tarini, lorsqu'il fut luy dire que le Roy aiant fait desarmer les troupes de S. A. R. qui étoient à son service, sa dite A. R. avoit interets de s'assurer de sa personne; vôtre prudence, vôtre penetration, et vos interets vous auront fait faire, et aux autres loüables Cantons, les reflexions que mérite cette reponse dont voiey les termes: Son Altesse Roiale, dit ce Ministre, n'a pas tant de raison de s'asseurer de ma personne, que le Roy en a eu de desarmer ses troupes; devoit elle douter qu'étant à la solde du Roy, ce Monarque ne fut le maitre de sa Personne, de ses troupes, et de ses Etats? Une reponse aussi fiere qui suit de si près un procédé si inoüi, et si injurieux, ferait assez connoitre le genie de la Cour de France, qui est de traitter comme Vassaux, et même comme sujets ses Alliés, ceux qui semblent luy devoir être les plus chers, ceux même dont elle emprunte les forces pour soutenir ses violences, et pour opprimer ses voisins s'il n'etoit deja que trop connu à toute l'Europe qui ne doit par consequent regarder l'elevation de cette Couronne au point ou elle est, que comme un acheminement à la Monarchie universelle, et à l'aneantissement de la tranquilité publique. S. A. Royale, se voiant traiter si indignement, n'a pû du moins, quoiqu'entourrée des armes de la France, de se declarer contre cette Puissance, qui sous des specieux pretextes de paix, et de double alliance, luy a demandé ses meilleures troupes, pour après s'en être servi aussi utilement qu'elle a fait, l'en priver. dans le même tems qu'elle donne ses dispositions pour faire entrer les siennes dans les Etats de S. A. R. Je ne vous parle, Illustrissimes Seigneurs, que des motifs particuliers qui ont engagés S. A. R. à cette declaration. M.rs les Ministres des Hauts et Puissants Alliés vous ont representé si au naturel les motifs que toutes les Puis-

sances de l'Europe auroient d'en faire autant qu'il me serait mal séant de vous repeter, ce qu'ils vous ont dit; je m'arrête uniquement au motif que S. A. R. mon Maitre a eu de m'envoyer au Loüable Corps Helvetique, avec ordre de m'adresser en premier lieu à vôtre Loüable Canton, pour vous assurer de sa part, Illustrissimes Seigneurs, de la confiance qu'elle a à votre amitié, alliance, et confederation, et en celle du Loüable Corps Helvetique et pour luy representer que la France qui vous environne presque de toutes parts, ou par ses Etats, ou par ceux d'Espagne qui dependent de ses ordres, ou par son armée, vous environnera bientôt de la part qui vous reste libre, si vous ne prevenés de bonne heure ses desseins. Il ne vous reste que la Savoye qui vous sert encore de rempart, et à vos chers Alliés; vous pouvés, Illustrissimes Seigneurs, en éloigner les armes de la France, et mettre de ce coté là vos frontieres a couvert, en laissant les mêmes déclarations en faveur de cette Province, que vous avés fait pour les villes forestieres. Le même peril qui vous a engagé pour ces villes vous doit engager pour la Savoye, et demande la même precaution et pour marquer d'autant mieux au Loüable Corps Helvetique combien S. A. R. mon maître estime son alliance combien elle a à cœur la sureté d'une si florissante République, et combien grande est la confiance qu'elle a en elle, elle consent que ses Etats de Savoye soient engagés, et unis a ce L. C. H. qu'ils en soient un membre inséparable, et qu'ils concourent à l'avenir comme les autres à tout ce qui peut regarder la sureté, le repos, et la tranquillité du Louable Corps Helvetique. Vous connoissés trop, Illustrissimes Seigneurs, vos interets pour ne pas embrasser une proposition si avantageuse a vôtre Corps, et a vos chers Alliés, qui n'est point contraire à cette parfaite neutralité que vous voulés conserver, et dans laquelle, la Savoye se trouvera en même tems comprise. Je vous prie d'en faire connoitre l'importance aux autres Loüables Cantons, de même que l'avantage, et le lustre que le Corps en retirera. Je ressent un sensible plaisir, Illustrissimes Seigneurs, d'avoir été honoré de vous faire une si avantageuse proposition, dont l'effet unira inseparablement nos cœurs, comme nos patries sans nous detacher de nôtre Souverain, et assurer d'autant mieux les frontieres de ce Loüable Corps dont je prie le Tout Puissant de maintenir la tranquilité et de le combler, comme tout votre Loüable Canton en particulier, de toutes ses benedictions.

Signé: Mellarede.

---

8 novembre 1703

Le Duc de Sauoye, Roy de Chypre etc.

Très-cher, bien amé et Féal. Vôtre lettre du premier de ce mois qui vient de nous estre rendüe, nous confirme la continuation de vos soins et de votre application pour l'affaire dont vous estes chargé, dont nous vous sçaccons bon gré, ne doutant pas que les auis et les lumières que vous receués de M. de S.t Saphorin, ne vous soient d'un grand secours pour mieux regler vos demarches auprès des personnes d'un genie si different comme le sont celles des Etats Populaires. Pour mieux reussir dans vôtre commission, il faut vous en dresser de vous même un plan juste et vous attacher à l'essentiel qui consiste en ces deux points. Le premier regarde la garantie de la Sauoye. Il n'y a que le Canton de Berne et de Zurig qui puissent y trauailler auec succez, car si l'on met cette affaire en negociation auec tous les Cantons, il y aura des longueurs si grandes à essuyer, qu'auant qu'elles soient finies, la Sauoye sera occupée; car lors qu'il faut que les Cantons délibèrent sur une resolution, ce n'est que dans les Dietes; et dans la première tout s'y passe *ad referendum* selon leur langage, c'est à dire que les

Deputez se chargent seulement d'en faire le rapport à leurs superieurs pour en auoir leur sentimens; après quoy il faut qu'ils assemblent une nouvelle Diète, où bien souvent on ne determine encore rien; par où vous voyés que cette voye entraine des longueurs si grandes, qu'il ne seroit pas possible de sauver la Sauoye par le moyen de la dite garantie. De sort qu'il est important que les deux Cantons de Zurig et de Berne qui sont les principaux et qui donnent le bransle au reste agissent fortement pour la dite garantie, comme y estant les plus interessés. Vous leur en ferés voir les consequences par rapport à leur auantage particulier, et par la consideration du mal qui est pressant et qui ne soufre pas du retardement, attendu que les ennemys s'auancent auec des troupes pour occuper le pais, apres quoy tout seroit inutile.

Le second point principal est celuy d'un secours de troupes. Les Traités, qui etoient anciennement entre notre Maison et le Corps Helvetique, ne subsistent plus. Notre alliance est seulement auec les Cantons Catholiques, et par les Traités faits auec eux, dont le dernier a esté renouvellé auec feu S. A. R. mon pere l'an 1651, ils sont obligés de nous fournir en cas de guerre six mille hommes de pied pour le moins, et douze mille pour le plus. Mais ce n'est que pour en permettre simplement la leuée à nos frais, auec l'auance de trois mois de paye, ce qui emporteroit vne somme considerable, outre celle qu'il faudroit leur payer auparauant des arrerages de leurs pensions, qui monte aussy à vne grosse somme, ainsy que nous vous l'auons écrit hier; d'où il resulte qu'en s'attachant à cette leuée suivant le dit Traité, ce seroit nous plonger dans des dépenses exhorbitantes, dont nous retirerions un tres petit fruit, attendu la longueur qu'il y auroit pour pouvoir faire cette leuée, quand même elle ne seroit que de trois ou quatre mille hommes. De sort qu'il vaut mieux chercher quelques particuliers de la nation qui veulent s'engager à leuer un ou deux regimens par nôtre seruice auec une capitulation auantageuse, ce qui paroit plus aisé que l'autre moyen qui est impraticable.

Quant au passage des François par le Valley, il n'est pas possible de le detourner, à moins que le Canton de Berne ne l'empêche premierement du costé du Pays de Vaud, et en suite auprès de Mess.rs de Valley. Vous l'en sollicitérés vivement, luy remontrant que c'est de son interêt de trauailler sous main à affoiblir une puissance dont les maximes sont si dangereuses pour ses voisins, et que nous esperons de la confiance que nous mettons au dit Canton, qu'il nous fauorisera en cela, et qu'il s'employera efficacement pour la garantie de la Sauoye, ou pour l'incorporer au Corps Helvetique, ce qui est le plus essentiel, car s'il faut entrer en negociation auec les autres Cantons pour ce suiet, l'Ambassadeur de France ne manquera pas de la trauerser, et d'y faire apporter toute sorte d'obstacles.

Vous obseruerés aussy que si les Cantons demandent simplement la neutralité de la Savoye, sous leur garantie, la France ne manquera pas de demander un equivalent, ce qui rendroit cette affaire plus difficile.

Nous vous envoyons une lettre pour mons.r de Wattenille dont vous ferés l'usage que vous iugerés plus à propos, continüant à bien cultiuer les plus accredités pour les attirer dans nos interêts. Et sur ce nous prions Dieu qu'il vous ait en sa sainte et digne garde. A Turin ce 8 novembre 1703.

Signé : **V. AMEDEO.**

Comme m.rs de Valley accordent le passage à la France, il est aussy juste qu'ils n'apportent point d'obstacles au passage des troupes et recrues qui viendront à notre seruice, fermant les jeux ainsy qu'ils ont pratiqué dans la derniere guerre.

Signé : De S.t Thomas

A l'Intendant Mellarede.

EXTRAIT *d'une lettre du Duc de Savoye Roy de Chypre à M. l'Intendant Mellarede en date du 28 x.bre 1703.*

Nous voyons avec beaucoup de plaisir la sagesse et la fermeté du Canton de Berne, sur lequel nous comptons le plus solidement. Pour s'opposer à tems aux desseins de la France, et à la perte entière de la Savoye, il faut qu'ils commencent à prendre leurs mesures afin de les pouvoir exéquter plus promptement dès qu'il sera necessaire.

Nous devons sur cette importante affaire vous faire savoir plus amplement nos intentions afin que vous puissiez vous y conduire avec toutes les réflexions que demande notre service.

Nous avons interest de défendre la Savoye s'il est possible plustôt par la négociation que par le secours des Suisses qui pourroient dans la suite nous estre plus dangereux que les armes mêmes des ennemis par la juste défiance que nous devons avoir surtout des forces, et des veües même du Canton de Berne. Mais comme le succès de cette garantie du Corps Helvetique est fort incertain et la négociation même de trop longue haleine pour sauver la Savoye qui est si exposée, il faut avoir recours au remède le plus prompt, mais avec les précautions necessaires. Vous tâcherez donc en ce cas d'engager du moins tous les Cantons protestans afin de ne pas confier entièrement la Savoye entre les mains de celui de Berne, et surtout le Chablais sur lequel ils ont eu de tout tems quelque dessein.

Mais à l'extremité il faudra se prévaloir des offres et des forces de ce Canton, et il ne sera pas mal qu'ils commencent à faire avancer du monde vers cette frontière.

Il faudra en ce cas que vous donniez toute votre attention pour régler les conditions qui peuvent regarder votre seureté et luy oster les moyens, et les prétextes de retenir cette Province, et il sera bon de les engager par un Traité dont les principales conditions seront les suivantes.

Il faudra en premier lieu qu'ils se chargent de la défence de toute la Savoye, ou du moins du Chablais, Faucigny, et la Tarantaise.

Que le corps qu'ils feront entrer en Savoye sera à notre choix, c'est à dire de trois, quatre, ou cinq mille hommes, et il sera aussy à notre disposition de le garder tout, ou en partie, selon que nous le jugerons néecessaire.

Qu'il sera sondoyé par nous sur le pied que l'on conviendra, tant qu'on puisse rien prétendre pour la levée, et il sera composé de bons officiers à proportion, sur quoi vous tacherez de convenir avec le plus d'avantage qu'il se pourra pour nos Finances.

Que moyennant la paye dont on sera convenu, ils ne commettront aucun désordre, soit pendant leur demeure en Savoye, soit à leur départ.

Qu'ils exécuteront tous nos ordres et tous ceux de notre Commandant Général de la Savoye et de tous nos Généraux, et obéiront aussy aux Gouverneurs de Nos Places, dès qu'on les mettra de garnison.

Signé : V. AMEDEO.

De S.t Thomas.

A M. l'Intendant Mellarede.

HARANGUE *faitte par M. de Murald Deputé du Corps Heluetique à Mons. le Duc de la Feuïllade a Chambery en Sauoye.*

Illustre et Magnifique Seigneur.

Leurs Excellences des deux louâbles Cantons de Berne et de Fribourg, Nos Souverains Seigneurs, nous ont ordonné de presenter à Vôtre Excellence les assurances de leur bien humble seruice, et ensuitte de luy dire qu'apres que les glorieux Ancestres des louâbles Cantons eurent acquis par la valeur de leurs armes la liberté de leurs Estats, ils établirent en suitte, par la sagesse de leurs conseils et les lumieres de leur preuoyance, des maximes pour conserner ce pretieux acquest à leur posterité.

Parmy ces maximes la plus fondamentale consiste dans le soin d'auoir plusieurs Souuerains pour voisins, et de ne point permettre que les pays qui confinent leurs États et qui en font la barriere, tombent sous une même puissance.

Ils ont pour cet effêt pouruû dans tous les traittés conclûs auec les Roys et Princes, par des reserues formelles, pour être en droit de secourir ces pays, sans que pourtant cela deût déroger aux obligations des traittés.

Ils ont regardé ces maximes comme sacrées et inuiolables, ne croyans pas de pouuoir iamais s'en désister, sans manquer à ce qu'ils doivent à Dieu, à la patrie, à leur propre honneur, et à leur posterité.

Ces resolutions ont été si heureuses qu'en diuerses occasions elles ont dissipé les nuâges qui menaçoient la Suisse d'orage et de trouble.

On ne les a pas caché à S. M. T. C. et à son Ministre en Suisse à qui on a déclaré qu'on ne pouuoit voir d'un œil quiet se laisser enuironner par une seule Puissance, et que la Souuerainété des Cantons, qui ne releue que de Dieu, devienne dépendante.

Cecy s'est fait dans la confiance entiere, que S. M. T. C. qui a si souuent déclaré aux Louâbles Cantons, combien elle auoit à cœur leur repos et tranquilité, verra aussy auec plaisir les mesures qu'ils prennent pour s'y conserner.

Il est vray que la bienueüillance dont S. M. T. C. les honore deuroit, à ce qu'il semble, calmer leur inquietude, et leuer tous les ombrages de son voisinage; mais on sçait que tel Prince, qui est auiourdhuy amy d'un État, peut deuenir son ennemy, que par la reuolution du temps les maximes des Princes changent, et que les Successeurs n'entrent pas touiours dans les sentimens d'affection de leurs Predecesseurs; c'est pourquoy on ne croit pas qu'il soit expedient d'oublier et quitter les maximes des Ancestres, qui iusques icy ont conserué le repos et la liberté à la Natiou.

Comme donc ils ont regardé la Sauoye comme vne barriere, et qu'ils ont fait des reserues par le traitté de la paix perpetuelle concluë auec le Roy Francois I.er de glorieuse memoire, et du depuis dans tous les traittés d'alliance, de la pouuoir conserver, il ne faut pas être surpris si auiourdhuy les Cantons entrent à cet égard dans tous les soins de leurs predecesseurs.

Ils ne disent pas que la conqueste d'icelle faitte par les armes de S. M. T. C. ne soit iuste; mais ils ne croyent pas que pour cela ils doiuent négliger les moyens d'asseurer leur repos et leur liberté; c'est pourquoy ils ont conuoqué vne Diete generale à Baden, non seulement pour faire les reflexions connenables sur les reuolutions qui pourroient suruenir en Sauoye par les armes de S. M. T. C., mais particulierement pour y négocier vne neutralité afin d'être dispensés de donner le secours que S. A. R. leur demande en vertu des alliances et de la pressante necessité.

Mais comme cette negociation pourroit deuenir infructueuse et manquer de

sucees, si pendant qu'on y trauaille le Roy s'emparoit de la Sauoye, les deux louâbles Cantons de Berne et de Fribourg munis de l'autorité de tout le Corps Heluetique, fondés dans son consentement et dans l'ancienne et nouvelle prattique, ont iugé necessaire de Nous députer aupres de Vôtre Excellence, comme ayant le commandement des trouppes du Roy, pour la prier tres instamment de vouloir laisser la Sauoye dans l'etat ou elle se trouve presentement, sans pousser plus outre les operations de guerre iusques à la fin de la Diete de Baden.

Cette demande ne preiudicie en rien aux interets de S. M. T. C., elle est conforme aux égards qu'elle a touiours euë pour la Nation Suisse, en vuë des bons seruices rendus à sa Couronne; elle tend à conseruer les égards respectueux pour elle, contre qui S. A. R. demande des secours effectifs; elle est fondée sur des nouueaux exemples qui montrent que dans ces cas pareils on a déferé aux instances des Louâbles Cantons. Nous esperons donc que V. E.ce voudra entrer dans touttes ces raisons, et bonnes considerations pour accorder aux Louâbles Cantons *vn interim* iusques à la fin de la Diete de Baden.

En ce cas nous auons ordre de demander le même délay a mons.r le Marquis de Sales. V. E.ce obligera par là considerablement tout le Corps Heluetique, et en particulier Nos Souerains Seigneurs des deux louâbles Cantons de Berne et de Fribourg qui en conserueront vn digne souuenir dans les occasions qui se presenteront pour le seruice de V. E.ce à qui nous souhaittons toutte prosperité auec offre de nos tres humbles seruices.

Fevrier 1704

M. Escher, President de la Diete, à l'Ambassadeur de France.

Messieurs les Députés des Louables Cantons ayant aperçu que dans le discours que leur fit hier V. E. et dans ceux qu'elle leur a fait ci-devant, elle leur faisait de manière de reproche *de ce que recevant incessamment des grâces du Roi, ils y faisait tres peu d'attention et ne se lassait point de lui en demander;* Ils m'ont donné charge de lui dire qu'ils ne reconnaissaient que trois sortes de grâces; celle qu'on accorde à des criminels qui ont mérité la mort; celle qu'un Souverain accorde à un autre Souverain par des largesses et grandes bénéficences; et celle qu'un grand Monarque accorde à un Souverain moins puissant que lui, en n'envahissant pas ses États. A l'égard de la première les louables Cantons ne se trouvant en rien criminels, n'estiment pas être réduits à demander aucune grace. Pour la seconde, ils ne croyent pas aussi être redevables au Roi d'aucun bienfait ni largesse. Ayant l'honneur d'avoir avec S. M. des Traités, si elle y satisfait de son coté, ils y ont satisfait parfaitement du leur. Ainsi n'étant qu'une exécution d'engagement réciproque, et chacun ayant fait ce à quoi il était engagé, cela ne peut pas s'appeler une grace. Pour le troisième, nous ne croyons pas que le Roi ait eu la pensée d'envahir nos États, mais si la chose arrivait dans la suite, ce qu'ils ne sauraient croire, j'ai ordre expres de dire à V. E. qu'en ce cas ils feraient les derniers efforts pour convaincre S. M. qu'ils sont de véritables compatriotes et gens d'honneur, qui plutot que de permettre qu'on donne quelque atteinte à leur liberté, verseraient jusqu'à la dernière goutte de leur sang.

Reponse de l'Ambassadeur de France.

S'il m'est échappé quelque mot ou quelque expression dans la chaleur du discours, je vous prie de n'y faire aucune attention; car je n'en ai aucun ordre du Roi; et si vous n'êtes pas contents de la neutralité et du Faucigny, le Roi vous remettra encore Montmelian.

PROJET DE NEUTRALITÉ

proposée par la Diète de Baden en 1704.

1.° S. M. T. C. est priée avec tout le respect de vouloir bien évacuer la Savoye de ses Troupes, et de les rappeler s'il y en a encore quelques unes.

2.° De ne point envahir les terres de S. A. R. en deça des Monts sans exception durant cette guerre, ni d'y faire passer des troupes pour attaquer les autres Etats de S. A. R.

3.° En echange de cela S. A. R. est priée de faire la même chose à l'égard de la France, et de ne point incommoder les terres du Roi T. C. par le dit pays.

4.° Comme aussi de rappeler ses troupes de la Savoye s'il y en a encore quelques unes, excepté de Montmeillan dont on parlera ci-après.

5.° Et enfin que ce traité de neutralité, tant pour la sureté de S. M. T. C. que de S. A. R. et de la Suisse soit plus exactement observé, les Cantons enverront dans la Savoye un régiment de 1500, ou 2000 hommes, sous les conditions ci-après.

6.° Le Gouverneur, le Commandant et l'État Major de S. A. R. de Montmeillan demeureront dans leurs postes et commanderont; mais la garnison sera composée de deux tiers de troupes Suisses, et d'un tiers de Savoyards, et le Gouverneur et le Commandant comme les Officiers et Soldats prêteront un serment de vouloir observer ce traité, et de ne point y contrevenir; et afin que cela soit fait plus exactement, on enverra de la part des Cantons un représentant sans le sçu duquel le Gouverneur et le Commandant de S. A. R. ne pourront rien entreprendre, en choses militaires, touchant ce traité.

7.° Ces troupes Suisses demeureront là pendant cette guerre, et seront entretenues des meilleurs et plus surs revenus du pays, mais sans préjudice de la Souveraineté de S. A. R.

8.° Les Cantons qui donneront du monde auront la nomination des Officiers et Soldats qu'ils enverront.

9.° Les troupes Suisses seront obligées d'obéir aux Gouverneurs et Commandants des dites provinces, à la manière et comme on le pratique dans les autres services Suisses; A la matière contraire au traité, ils se conformeront à ce que leurs Souverains et Supérieurs leur auront commandé.

---

3 aprile 1704

A M. l'Intendant Mellarede, le Duc de Savoie, Roi de Chypre.

Très cher bien amé et féal. Le tour que les ennemis nous donnent de recouvrer la Savoye en ayant retiré le plus gros de leurs troupes pour l'attaque de Nice, et n'y en ayant laissé qu'un très petit nombre incapable de resister au premier effort des nostres, nous détermine à prendre ce dessein, et sur la bonne disposition que les Suisses témoignent, et particulièrement le Canton de Berne pour la neutralité de la Savoye, pour le propre intérest qu'ils y ont de ne se laisser pas entourer des armes de la France, qui ne manquerait pas dans la suite de les assujettir et de leur imposer les loix durcs qu'elle pratique à l'égard de tous ses voisins, nous avons resolû d'y envoyer un corps de troupes suffisant, avec l'aide de Dieu pour les en chasser, et remporter quelque avantage sur eux. Il y entrera par la Val d'Aoste et par la Maurienne afin de prendre les ennemis de deux costés en même tems et leur oster les moyens de songer à leur défense.

Nous sommes persuadés que si les Suisses reflechissent bien à leur sureté, qui se rencontre à éloigner les Français de la Savoye, car autrement ils seraient

exposés à leur inuasion de tous costés, ils se porteront volontiers à prendre la garantie de la Savoye ce qui leur sera également aisé, et avantageux. Ce sera une occasion à rehausser leur fermeté dans toutes les Cours de l'Europe et a leur en attirer tous les applaudissemens puisqu'il seroit vray de dire qu'ils surpasseroient la valeur de leurs ancêtres par une action si éclatante à leur nation. S'ils s'engagent donc à la dite garantie, et s'obligent à défendre la Sauoye contre les ennemis pour les motifs cy dessus, nous préférions ce party à la neutralité, car comme la garantie est une chose bien différente, puisque celle cy consiste seulement en la défense du pais, dont nous resterions en pleine possession, comme nous estions avant la guerre, et que nous pourrions en tirer tous les avantages contre les ennemis en pénétrant en France de ce coté là, à la seule réserve que les Suisses y tiendront du monde à notre solde pour le garantir de toute invasion, et que la neutralité a des bornes, comme celle de n'y point faire d'autres hostilités de part ny d'autre, et d'y ne point laisser passer des troupes, outre que nous serions par là privés des avantages qui se rencontreraient en la dite garantie, vous tâcherez de faire en sorte que les Suisses s'y engagent.

Il faudrait qu'ils fournissent un Corps de Troupes tel qu'il le jugeroit à propos, outre les levées qu'ils nous ont déjà accordées et pour le payement de leur solde, qu'on pourroit régler sur le pied des Capitulations que nous avez dressées, nous leurs assignerions les fonds nécessaires sur la Gabelle, où sur les tailles de la Savoye à leur choix, à la reserve pourtant de celles du Chablaix et de Faucigny, mais ils deuront s'obliger à nous rendre entièrement le pais à la paix générale, et s'il leur restoit due quelque chose de leur solde, ils pourroient retirer les fonds assignés jusqu'à l'entier payement. Nous consentirions même de mettre de leurs troupes en garnison à Montmeillan en nombre égal aux notres. Si le projet de la dite guarentie estoit impraticable, nous n'aurions aucune difficulté de consentir à la neutralité, pourveû qu'elle fust observée très exactement selon le proiet, que vous avés envoyé et que nous approuons, et pour marquer aux Cantons notre estime et la confiance que nous avons en leur affection, nous donnerons les mains à ce qu'ils trouveront qu'il sera raisonnable d'y ajouter, mais il faudra reduire les troupes que donneront les Suisses au moindre nombre qu'il se pourra dès qu'elles y seront établies et éviter que les États de la Savoye entrent dans la stipulation de l'exécution du Traité de la neutralité, puisqu'il ne s'est jamais pratiqué que les dits États soient jamais intervenus en de semblables actes solemnels qui ne dépendent uniquement que de la volonté seule du Souverain sans aucun concours de l'aveu de ses peuples ce qui pourtant ne serait pas une difficulté.

Vous serez attentif, soit dans le cas de la garentie ou celuy de la neutralité, qu'on diminue (comme nous l'avons déjà touché cy-dessus), le nombre des troupes des Suisses qui ils envoyeront en Savoye, pour deux considérations, l'une pour la diminution des frais de leur entretien, et l'autre par ce qui en quelque petit nombre qu'elles y soient, les Suisses ayant une fois pris l'engagement, elles y seroient suffisantes; outre qu'y estant en petit nombre, cela pourroit peut être inviter les ennemis à y faire quelque tentative, ce qui seroit même à souhaiter, puisque les Suisses seraient par là dans la necessité de soutenir le party qu'ils auroient pris, et de se déclarer par conséquent contre la France.

Dans ce dessein nous avons destiné pour cette expédition le Baron de S.T Remy pour y entrer par la Maurienne avec trois bataillons, et 500 dragons et le Baron de Schollembourg par la Vallée d'Aoste avec quatre bataillons y compris celui de Bernois.

Le premier a ordre de nous informer exactement de son costé de ce qui se passera, et le Chev. de Lucey en fera de même depuis la cité touchant les opérations du Baron de Schollembourg, jusques à ce que celui-cy se soit joint au dit Baron de S.T Remy. Comme cette affaire est de la dernière importance, il sera bien que vous commenciez à y disposer les esprits dans les discours que vous en tiendrez, en en parlant comme d'une chose à la quelle on devrait bien penser par la facilité que les ennemis en fournissent, afin de sonder par là les Cantons pour

découvrir s'ils seraient portés à entrer dans les vues que nous désirerions, arrivant quelque fois que l'on s'engage dans une affaire quand on croit qu'elle n'arrivera pas, mais dès qu'on y est entré, et qu'elle s'achemine après cela à l'effet, on ne peut plus revenir des engagemens pris, ce qui pourrait bien arriver dans cette conjoncture, en quoy vous vous ménagerez avec l'adresse qu'il faut pour y reussir.

Lorsque vous apprendrez que nos Troupes seront entrées en Savoye, vous en donnerez part à ceux que vous jugerez plus à propos, pour exciter la partialité des Cantons, et particulièrement de celui de Berne comme plus à portée, et l'ardeur qu'ils témoignent pour la neutralité de la Savoye, estant persuadés que vous ne manquerez pas de profiter d'une telle conjoncture pour animer de plus en plus leur bonne disposition leur représentant qu'il est de leur sage conduite de ne laisser pas échapper une si belle occasion de se délivrer des chaines qui les tiennent par là serrés.

Enfin vous mettrez toute votre habileté en usage, pour porter les Cantons au but que vous voyez que nous nous proposons ne doutant pas que le zèle ardent que vous avez pour notre service ne vous fasse agir avec chaleur pour terminer cette affaire avec le bon succès que nous avons lieu d'en attendre nous informant incessamment de ce que vous croirez que nous pourrons véritablement nous en promettre, mais il est à réflechir que cela se doit exéquter promptement, sans quoi l'effet en deviendrait inutile.

Vous suivrez entièrement le contenu de cette lettre et pour le surplus vous vous conformerez à votre projet de la neutralité au cas qu'elle ait lieu, lequel nous vous renvoyons, et sur lequel de même que sur cette lettre vous pourrez conclure le Traité, ne vous envoyant point de nouveaux pleins pouvoirs pour cela, puisque celui que vous avez en date du 4 octobre est suffisant, et vous assurant sur ce du bon gré que nous vous conserverons de toutes ces marques de votre application, nous prions Dieu qu'il vous ait en sa sainte et digne garde, à Turin ce 3 Avril 1704.

V. AMEDEO.

De S.t Thomas.

A l'Intendant Mellarede.

. . . . . .

Le Duc de Savoie Roi de Chypre etc.

Très cher bien amé et féal. — Nous venons de recevoir par le Courrier que vous nous avez dépéché votre lettre du 31 du mois dernier. Vous verrez nos sentimens sur les points qui regardent la neutralité par celle que nous vous écrivions et que nous vous allions envoyer dans le tems que notre dit Courrier est arrivé. Mais quand à l'article touchant l'union à perpetuité de la Savoye au Corps Helvetique, ainsy que nous vous avions permis par nos instructions de l'offrir, il nous parait plus expédient de le laisser à part, et de n'en point parler présentement sauf que les Suisses le proposassent au quel cas vous n'en paraitrez pas éloigné pour ne leur donner aucun ombrage, mais il faut auparavant établir la garantie, où la neutralité à son défaut, qui sont les points principaux et les plus pressens à l'heure qu'il est, l'autre se pouvant faire ensuite, car on pourra en prendre la négociation pour la terminer après d'une manière convenable à nos intérêts et à ceux des Suisses.

Quant aux seuretés de la neutralité nous n'en scavons proposer de meilleures que celles qui sont marquées par notre dite lettre de ce jourd'hui et par le projet que vous avez envoyé lequel nous approuvons, nous le renvoyons à cet effet.

A l'égard du plein pouvoir celui que vous avez eu daté du 4 octobre dernier parait suffisant puisque ce n'est qu'avec les Suisses que vous devez traiter et en

attendant vous presserez vivement les levées et vous nous ménagerez dans l'affaire particulièrement de la garantie, ou de la neutralité avec l'adresse qui vous est naturelle, pour la porter à un succès prenant garde que les vuës de l'Ambassadeur de France ne tendent qu'à éloigner l'effet des dites levées sous le prétexte de donner de vaines espérances pour la neutralité, et sur ce nous prions Dieu qu'il vous ait en sa sainte et digne garde.

V. AMEDEO.

A M. l'Intendant Mellarede

---

12 aprile 1704

Le Duc de Savoie, Roi de Chypre, etc. etc.

Très cher bien amé et féal Nous venons d'apprendre que les ennemis ont entièrement evacué la Savoye, ainsy que le Baron de S.T Remy vous l'aura fait savoir sans qu'ils aient donné lieu à nos troupes à aucune action d'éclat à nous faire plaisir, s'estant toujours retirés à leur approche, sur quoi nous jugeons à propos de vous dépêcher ce Courrier pour vous dire que dans une conjoincture si favorable il faut redoubler tous nos soins auprès des Cantons pour les engager à en profiter.

Et comme nous avons reflechi que la garantie dont nous vous avons écrit par notre lettre du 5.e pourrait n'être pas si bien reçue d'eux, et que peut être il y auroit beaucoup de peine à faire comprendre ce terme aux peuples des dits Cantons, ce qui ne pourrait que tirer en longueur la négociation, nous voulons bien pour faciliter d'avantage la chose que vous offriez de notre part aux dits Cantons que nous leur laisserons la Savoye qui est présentement libre, sous leur garde, soins, tutelle et même sous leur protection pendant la présente guerre, s'ils veulent s'en charger, à quoi vous tacherez de les porter par toutes les fortes raisons que vous leur avez déjà représentées et qu'il est inutile de vous retoucher ici.

Nous nous remettons à eux pour le nombre des troupes qu'ils jugent nécessaire d'y envoyer pour la garde et la défense du païs, lesquelles y seront payées des revenus de la Savoye de la manière que nous vous l'avons déjà écrit, vous devrez pourtant faire en sorte adroitement qu'ils y en envoyent le moins qui se pourra afin que tous les dits revenus n'en soient pas absorbés; outre que nous comptons d'adjouter au Corps qu'ils y auront quelques bataillons de nos suites du dit pays, et dès à présent nous y laisserons les deux bataillons du Régiment de Réding et celuy des Bernois préferablement à nos autres Troupes jusques à ce que les Cantons puissent y faire marcher le monde qu'ils y destineront. Estant informés que le Baillif de Lauzanne est une personne de mérite et d'un grand crédit, vous le proposerez afin que les Cantons le choisissent pour y commander le Corps qu'ils y auront, nous luy donnerons un brevet de Maréchal de camp et comme il désire d'avoir des occasions de se distinguer cela l'animera à s'employer fortement pour faire reussir la chose.

Nous destinerons le Chablais pour le quartier d'assemblée des levées qui se font présentement au lieu de la Val d'Aoste pour donner plus de facilité à leur entrée en Savoye.

Il vous sera aisé de faire remarquer aux Cantons la grande confiance que nous avons en eux, leur remettant la Savoye de la manière cy dessus et même la garde de Montmeillan place de si grande importance, dont la moitié de la garnison sera composée de leurs troupes. L'affaire presse, et ne souffre pas de longueur, car

nous prévoyons que nous ne pourrons pas laisser long tems en Savoye les troupes qui y sont, de sorte que vous devrez mettre en usage toute votre habileté pour porter sans perte de tems cette affaire au bon succés que nous en attendons par vos soins et votre zèle. Et sur ce nous prions Dieu qu'il vous ait en sa sainte et digne garde à Turin ce 12 Avril 1704.

Nous vous ajoutons que comme la Savoye est présentement retournée sous notre domination, et que nous la voulons laisser en garde aux Cantons, il n'est plus question qu'ils y recherchent le consentement de la France, ce qui devra abreger les longueurs ordinaires des négociations des dits Cantons desquels dépend uniquement d'accepter ou non l'offre que nous leur faisons.

V. AMEDEO.

De S.t Thomas.

A M. l'Intendant Mellarede.

---

17 aprile 1704

Le Duc de Savoie, Roy de Chypre etc.

Très cher, bien amé et féal Conseiller. Nous avons reçu par le retour du Courrier Marchisio votre lettre du 11 de ce mois, par la quelle vous nous marques la répugnance que l'on vous a temoignée sur le fait de la garantie de la Savoye, ne pouvant que loüer la prudence avec laquelle vous vous estes ménagé la dessus. Et comme vous aves reconnu que les esprits n'y sont point disposés, que ce seroit détruire en un moment tout ce qui a esté fait jusqu'à présent, et qu'il fallait suivre le sistème commencé de la neutralité, vous deurez vous y attaquer uniquement sans nulle difficulté. Et au cas que la France refuse d'y consentir, vous insisterés auprès des Cantons afin qu'ils s'intéressent pour la garantie, ainsy que vous dites qu'il y a lieu de l'espèrer au dit cas, faisant même tous vos efforts pour les porter à déclarer dez à présent que si la France n'accepte pas la neutralité de la Savoye, ils s'engagent dez à cette heure à en prendre la garantie, et à ce défaut vous n'oublierez rien pour en tirer au moins quelque autre auantage, irritant fortement les esprits contre elle pour la rendre odieuse, et inspirer une haine qui puisse luy porter des coups dangereux, animant les Suisses à le faire. Enfin vous remuerez toute sorte de corde pour les engager à prendre un parti ferme et résolu dans cette conjoncture.

Il est de la dernière importance de terminer cette affaire promptement, nous ne sçaurions laisser long tems nos troupes en Savoye, ainsy que nous vous l'avons deià marqué. Et peut être que nous serons obligés au premier jour d'en rappeler une partie, de sorte qu'il faut vous ménager de telle manière que quand ce cas arrivera il ne produise aucun refroidissement dans l'esprit des Cantons pour le bût que l'on se propose. Comme les longueurs y seraient extrémement nuisibles lesquelles sont si naturelles dans de pareilles négociations, et que la France pourrait en susciter pour gagner plus de tems, il faudra que les Cantons luy fixent un terme pour accepter la dite neutralité et couper par là la racine à tous ses amusemens.

S'ils en viennent à la neutralité, vous vous réglerez au projet qui vous a esté envoyé, auquel nous n'avons rien à ajouter et quant à la solde pour les troupes que les Cantons envoyeront en Savoye elle se payera sur le pied des capitulations que vous avez dressées, ainsi que nous vous l'avons déjà écrit.

Vous pourrez leur donner des assurances positives de notre part que nous conserverons la Savoye sous nôtre domination, que nous ne l'aliénerons point, et

que nous n'en ferons aucun échange avec la France: et nous trouvons si raisonnable la demande des Cantons d'un secours réciproque, puisqu'ils deuront s'engager à défendre la Savoye comme leur propre pays, si elle venoit à estre attaquée, que nous voulons bien nous engager à leur en donner un en cas qu'ils le soient, conformément à ce qui est porté par le Traité d'allianee de l'année 1613 dont vous pourrez insérer l'article tel qu'il est dans celui qui se fera.

A l'égard du désir qu'ils témoignent que les Hauts Alliés et particulièrement l'Angleterre et la Hollande se rendent garants du Traité qui se fera, nous vous disons que quoique la chose ne dépende pas de nous, nous nous y employerons cependant volontiers. Et à cet effet vous pourrez y insérer un article par lequel nous promettrons de prouver efficacement auprès de l'Empereur, de l'Empire et des dites deux Puissances maritimes, pour qu'ils veuillent bien s'en rendre garants, et d'en rapporter leur ratification dans six mois, ainsi que nous auons lieu de nous y attendre par les asseurances que leurs Ministres auprès de nous, nous en ont données, avec la condition aussy qu'il sera inséré dans celuy de la paix générale s'il est nécessaire.

Il sera bien que vous étudiez, ainsy que nous vous l'avons déjà marqué, que les États de la Savoye n'entrent dans le Traitté, et il ne pourra être qu'auantageux de ne point parler, comme vous dites fort bien, d'unir la Savoie au Corps Helvetique conformément au premier projet.

Quant au nombre des troupes, puisqu'il ne s'agit plus présentement de la garantie, il faudra la reduire au moindre nombre qu'il pourra, selon le contenu de notre lettre du 3.eme de ce mois.

Nous convenons, ainsi que vous le suggerez fort prudemment, qu'il est superflu d'exiger des Cantons une promesse qu'ils rendront la Savoie à la paix, puisque nous y mettrons les Gouverneurs et Commandants, et qu'ils n'auront que des troupes en garnison, outre que le Traité de neutralité porte avec soy cet engagement, lequel ne doit durer que pendant le cours de la présente guerre après laquelle ils seront congédiés.

Il n'est pas nécessaire que votre plein pouvoir s'estende pour traiter avec l'Ambassadeur de France, ny signer avec luy le Traité, car nous ne voulons point que vous ayez de commerce avec lui directement ou indirectement, cela n'estant convenable en aucune manière.

Il faudra que les Suisses fassent deux Traittés pour la neutralité, l'un avec la France, et l'autre avec nous qui sera le même, par lequel il sera convenu que pendant le cours de la présente guerre la France observera exactement la dite neutralité conformément au projet qui vous a esté renvoyé, et de nostre costé nous ferons la même promesse, ou bien s'ils trouvent qu'une déclaration de notre part d'observer le dit Traité, soit suffisante, vous la feres, l'y insérant tout au long. Et nous ratifierons ensuite la dite déclaration.

M.r de Catinat, et M.r de Tessé en firent une semblable pour le Traité de Vigevano, par lequel les Plénipotentiaires au nom de leurs maitres s'obligèrent réciproquement à nous, et nous à la Maison d'Autriche d'une part, et au Roy très Chrétien de l'autre pour la neutralité de l'Italie . . . . . .

. . . . . .

Turin ce 17 avril 1704.

V. AMEDEO.

De S.t Thomas.

L'Intendant Mellarede.

27 maggio 1704

Le Duc de Savoye, Roy de Chypre etc.

Tres cher, bien amé, et feal Cons.er La longueur qu'il y a eü iusqu'à present dans l'affaire de la neutralité, et le peu de resolution des Cantons protestans sur ce point, nous ont fait douter depuis longtemps du succez; et après ce que nous venons d'apprendre par votre lettre du 24.e de ce mois sur la reponse que l'Ambassadeur de France a donnée la dessus, nous voyons clairement qu'il n'y faut plus compter, non obstant tous les soins que vous vous estes donnés pour y reüssir, vous ne laisseres pourtant pas d'irriter les esprits, et de les animer contre cette puissance, leur representant la maniere hautaine dont elle les traitte, car ne se moque-t-elle pas d'eux de leur promettre qu'elle n'unira point la Savoye à la paix generale à ses États, comme si cela ne dependoit que d'elle?

A l'égard des troupes que vous dites que les Cantons protestans pourroient nous donner au defaut de la dite neutralité, il est pareillement à craindre, que ce ne soient que de belles esperances pour colorer la feinte ardeur qu'ils ont temoignée pour la dite neutralité, ce qui ne doit pas cependant vous detourner de suivre toûjours le même plan, et vous vous attacherés à presser vivement les levées, qui est ce qu'il y a de plus solide.

Nous avons agréé le feüillet des nouvelles que vous nous avés envoyé, vous continuerés de porter à notre connoissance toutes celles que vous apprendrés, mais il faudra faire une distinction de celles qui ne seront fondées que sur des simples bruits publics, d'avec celles que vous pourrés sçavoir de bon endroit, afin que nous puissions mieux iuger du fondement que l'on y pourra faire, et vous confirmant sur ce les assûrances de nostre bonne volonté, nous prions Dieu qu'il vous ait en sa s.te et digne garde. A Crescentin ce 29.e may 1704.

V. AMEDEO.

De S.t Thomaz.

A l'Intendant Mellarede.

---

3 giugno 1704

Le Duc de Savoye Roy de Chypre etc.

Tres cher bien amé, et féal Cons.er Vostre lettre du 28 du mois dernier, que nous venons de recevoir, ne fait que nous confirmer le mauvais succez de l'affaire de la neutralité, c'est la maxime ordin.re des Suisses d'entamer des negociations, et de les tirer en longueurs sans prendre aucune ferme resolution. Ce dernier memoire, que vous leur avés presenté sur ce sujet, dont nous nous avés envoyé la copie, ne fera pas apparemment plus d'impression sur leurs esprits que tous les precedents que vous leur avés remis, de maniere que nous envisageons cette affaire comme un vain amusement, quoyque, vous n'ayez rien oublié par vos soins, et vos descours pour porter les dits Cantons à s'y interesser plus vivement qu'ils n'ont fait, selon leurs propres avantages, de maniere que nous ne voulons plus semer de l'argent inutilement parmy eux, soit en present, ou en gratification, et si le Canton d'Ury, aprés que vous aurés taché de nouveau de l'engager par vos plus efficaces representations à accepter les deux compagnies sur le même pied des capitulations faites avec les autres, les refuse, vous ne l'en solliciterés

plus, il se trouvera assés des gens qui s'en chargeront, et nous nous reservons d'en disposer à son temps, car aussy bien il s'en passeroit un trop long devant qu'elles fussent levées.

Et comme le point le plus essentiel est presentement celuy des levées, vous les presserés extremement, les envoyant à mesure qu'elles seront faites, afin que nous puissions au moins en tirer quelque utilité avant la fin de la campagne.

Vous aurés aussi le même soin d'envoyer incessemment les armes, dont nous vous avons chargé de faire l'achat, mettant toute vostre application pour accelerer l'un, et l'autre, car vous n'ignorés pas la situation des affaires de ce pais par ce qui vous en a deia esté écrit par le dernier ordinaire.

Les ennemis qui se sont avancés du costé de Suze, se sont rendus maistres de la Ville qui n'estoit pas en état de defense, ils doivent assieger le fort. Nous y avons fait marcher trois bataillons, et mille chevaux, mais ce detachement ne pourra qu'en faire differer la reddition, et difficilement l'empecher. Le Duc de Vandosme a marché le 30 avec son armeé à Desana, ce qui donne lieu de croire qu'il pourroit avoir le dessein de tenter le siege de Verceil, par ou vous voyez combien il nous importe que vous fassiez haster les dites levées sans plus de delay, eu aussy égard à ce que l'Ambassadeur de France affecte de publier touchant leur vûë sur Iurée, quoy qu'il ne soit guere probable.

Nous approuvons que vous aycz donné quatre livres par teste aux deserteurs de l'Armée d'Allemagne, qui sont nos suiets pour leur voyage iusqu'à la Val d'Aoste, vous leur donnerés une personne à l'avenir pour les y conduire quand vous en aurés un nombre suffisant afin qu'ils ne s'evadent pas en chemin et vous les adresserés au Marquis de Ciriè.

Nous avons agréé les nouvelles iointes à vostre lettre, et vous assurant sur ce de la continuation de nostre bonne volonté en vostre endroit, nous prions Dieu qu'il vous ait en sa s.te et digne garde. Au Camp de Crescentin le 3 Juin 1704.

V. AMEDEO.

De S.t Thomaz.

A l'Intendant Mellarede.

---

5 giugno 1704

Le Duc de Savoye, Roy de Chypre etc.

Tres cher bien amé et féal Cons.er Nous avons vû par vôtre lettre du 31 du mois dernier comme au défaut de la Neutralité, vous avés demandé la levée de trois ou quatre mille hommes aux Cantons Protestans, sur quoy nous attendons l'arrivée de M.r de Belcastel qui doit bientost venir pour en conferer avec luy, et vous faire sçavoir ensuite nos sentimens là dessus, y ayant suffisamment du temps pour cela, puisque vôtre proposition n'a esté receüe que ad referendum selon leur maxime ordinaire, et cependant nous vous dirons que nous ne pretendons point entrer dans les frais de cette Levée, ny en faire plus d'autres dans les Cantons que pour les Levées qu'ils nous ont accordées que vous solliciterés incessamment, afinque nous puissions encore en tirer quelque service cette campagne.

Nous avons agréé le feüillet des nouvelles ioint à votre dite Lettre, vous continüerés de nous envoyer toutes celles que vous apprendrés. Et sur ce nous prions Dieu qu'il vous ait en sa s.te et digne garde. Au Camp de Crescentin ce 5 Juin 1704.

V. AMEDEO.

De S.t Thomaz.

A l'Envoyé Mellarede.

4 agosto 1704

Le Duc de Savoye, Roy de Chypre etc.

Tres cher, bien amé, et feal Cons.er L'offre que vous nous marqués que l'Ambassadeur de France à faite de nouveau à la Diette de Bade de la neutralité des Provinces de Chablaix et de Faussigny, n'est qu'un pur amusement, à l'égard même des Cantons: et comme ceux cy ont convenu qu'il ne falloit ny l'accepter ny la refuser, c'est un retour de negociation ambiguë, qui laisse entrevoir un esprit de longueur sans vouloir prendre aucun engagement, de maniere que nous ne trouvons pas à propos que vous ecoutiez une telle proposition, dont nous prevoyons l'execution impraticable par les conditions que la France ne manqueroit pas d'y aioûter, outre que l'effect ne repondroit pas aux mêmes vûës que nous nous proposions dans la neutralité generale de toute la Savoye.....

À Crescentin ce 4 aoust 1704.

V. AMEDEO.

CULLET.

A l'Intendant Mellarede.

INDICE

GENERALE ED ALFABETICO

DELLE

MEMORIE CONTENUTE NELLA PARTE STORICO-FILOLOGICA

DEI TOMI XI A XX SERIE II

DELLE

MEMORIE DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

INDICE GENERALE

degli Autori delle Memorie contenute nei Tomi XI a XX, Serie II, della parte Storico-Filologica delle Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino.

N. B. Il numero romano indica il Volume della Serie II.
Il numero arabico segna la pagina.

INDICE GENERALE

delle materie contenute nei Tomi XI a XX, Serie II, della parte Storico-Filologica delle Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino.

INDICE

CLASSE DELLE SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

V.° Si stampi:

Barone GIOANNI PLANA Presidente.

Cavaliere Eugenio Sismonda
Commendatore Gaspare Gorresio } *Segretarii.*