取施力點 B；則 F 於此第二位置時，固體 N 或者能發生變形爲於 A 點時所未有者，如將其折斷於 XX' 剖面上○

故若欲應用力學之理論於自然界固體中時，宜認自然界之固體爲相似不變形固體○

74 自然界固體之分類 材料強度學中固體之種類，可由其特性而分爲三類：

a 完全彈性固體（perfectly elasticsolide）： 此種固體受力之後，必生變形，若將其所受之力移去，則該固體必完全恢復其原來之形態；例如樹膠帶等○

b 完全受形固體（perfectly plastic solid）： 此種固體受力之後必生變形，若將其所受之力移去，則該固體必仍完全保留其變形之狀態：例如濕陶土，鉛或未嘗凝結前之灰漿等○

c 半彈性固體與半受形固體： 此種固體，是位於前兩種固體之間，半彈性固體是較受形固體有彈質，半受形固體則較彈性固體有受形質（plastic）○

75 棱柱體（Prism） 各種建築物，常由各塊材料集合而成，此各塊材料稱爲棱柱體○

棱柱體的定義 棱柱體是由一面積所產生的體積，此面積爲一不變形或連續變積，於一聯各面積重心點之軸線上垂直移動，此軸線雖不必一定爲一直線，然應爲連續狀；若此軸線爲一弧線則其半徑與剖面積一邊之比，應爲極大值；故棱柱體的形狀，大概較爲直形（Straight），其兩鄰點的垂直剖面（normal section）無大差異，而其構成之每纖維（fibre）皆位在一平面上○

例如有一棱柱體 AB，由各分子線 ab 所組合而成，ab 分子線稱爲纖維○

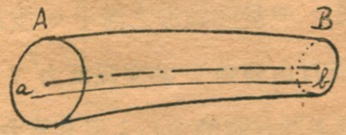


圖 92

棱柱體之中心軸稱爲中心纖維，棱柱體表面上之纖維稱爲極端纖維○

76 外力 外力可分爲二種；一爲直接外力，一爲支點反力；直接外力有集中與均佈之別，支點反力的種類，則依支點之性質而異○

支點反力之尋求，應根據靜力學的原理，於材料強度學上的固體，應取消其支

點而代以反力，使其自由於空間○

各種建築物，皆爲各棱柱體所組成，而有相互聯接的關係；若欲利用靜力學的原理以研究建築物之各部分，則應先取消該部分與其聯接部分的相互關係，而使其完全自由於空間○

但建築物承受外力時，卽將此力傳達於支點；根據動力與反動力的定理，則支點必生一反力與動力相等方位相同而指向相反，以維持該建築物的平衡；故若欲使該棱柱體在空中自由平衡，則於取消其支點時，應加入支點所產生之反力○

如此，該棱柱體則已完全自由於空間，便可應用靜力學的平衡方程式，以求材料強度學上的問題○

77 支點之種類與支點反力 材料強度學之第一問題，爲計算支點反力○然此反力尋求的難易，則視其支點之種類而異○支點之種類於實用上，大約可分爲三類：

a 簡單支點 (Simple supports) 若一梁之兩端自由置於兩支點上者，則其支點稱爲簡單支點，其組織大概爲數鋼鐵圓柱體○

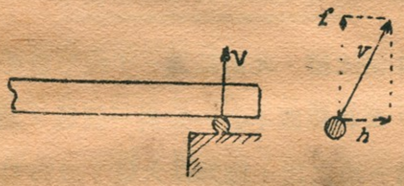


圖 93

現假設簡單支點爲一圓柱體，則其反力的方向必與支點的接觸面積成正角(或垂直)，因若不與其成垂直而爲傾斜，則此反力可分爲二分力；一垂直於支點的接觸平面，一則與該平面平行，如 93 圖之 f 與 h，h 旣與平面平行且能自由移動，則因其轉動的關係，自可使其反力至垂直時止○

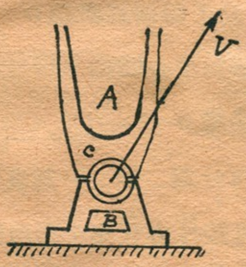


圖 94

b 鉸支點 (hinge) 此支點爲兩部分 A 與 B；A,B 之中間有一圓柱體，置於圓柱形之溝中○支點 B 部爲固定，而 A 部則能自由轉動；其支點反力 V 的施力點爲有一定，卽應經過圓柱體的中心；但其施力方向則無從而知○

c 裝固支點 (restrained support) 其靠托之端爲完全裝固而不能移動，故此支點之反力有二：一爲偶力 (couple)，一爲單力 (force)

因CD之面積上既受一種向下拉力則生一反力 R_A，但同時CD面積上又有旋轉的

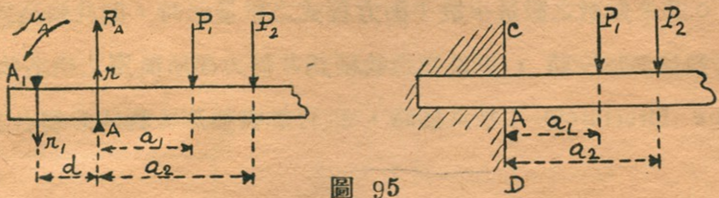


圖 95

趨勢，故其反力力矩 μ_A 實爲阻止其旋轉的實現。

裝固支點之說明可用95圖以表示之。現假設有一梁靠托於兩固定支點A與 A_1 上其距離爲d。若r與 r_1 爲此兩固定支點之反力，而 P_1，P_2，………等爲施於離A支點右邊距離 a_1，a_2，………等之外力；則若書靜力學的平衡方程式：

$$R_A = \sum P = r - r_1$$

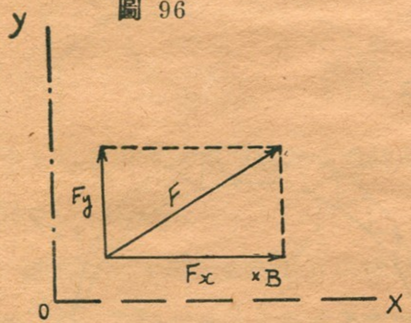
$$\mu_A = \sum Pa = r_1 d$$

因此，可知於裝固支點上，有一裝固反力 R_A 與梁之中心纖維成垂直，及一裝固力矩 μ_A。

78 能由靜力學所定與非靜力學所定之構造物　若欲求支點反力，第一應先使該受力之固體自由平衡於空間。

靜力學中對於不變形固體自由平衡於空間之條件，若該固體的中心纖維各質點同位在一平面上，而外力又位於此平面中，則其平衡條件爲以下三公式：

圖 96



$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_B F = 0$$

F_x 與 F_y 爲F投影於ox軸與oy軸上的投影量，$M_B F$ 爲F關於平面上任何一點B的力矩。此種公式，稱爲普通平衡方程式(universal equations of equil ilrium)。

平衡方程式之數量等於三，則若欲使支點反力能由靜力學決定時，其未知數亦

應等於三；因此，此種構造稱爲能由靜力學所定之構造物 (Statically determinate Structures)。若未知數之數量少於平衡方程式之數量三時，則此構造物必不平衡。若未知數之數量多於三時，則此構造物稱爲非靜力學所能定之構造物 (Statically indeterminate Siructures)；於此類時，則可加書變形方程式以符合其未知數之數量。

舉列 1 試觀一屋架如圖 97，其 A 支點爲簡單支點，B 爲鉸支點，若架上之外力爲斜力 F，則此構造物將爲靜力學公式所能計算。構造物之未知數爲 x,y,z。

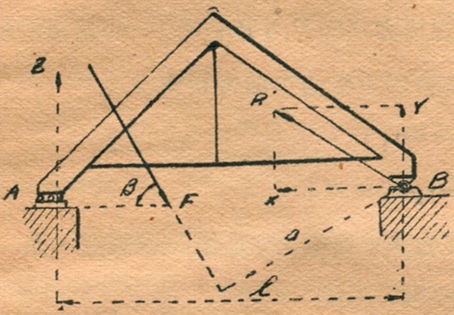


圖 97

平衡方程式：

$$\sum F_X = X - F\cos\beta = 0$$

$$\sum F_y = Z + y - F\operatorname{Sin}\beta = 0$$

$$\sum M_B F = Zl - Fa = 0$$

由公式中可取出：

$$X = F\cos\beta$$

$$Z = \frac{Fa}{l}$$

$$y = F\left(\operatorname{Sin}\beta - \frac{a}{l}\right)$$

若支點 B 爲簡單支點，則構造物之未知數少於平衡方程式之數量，故不能成平衡。

2. 設一鋼鐵拱形，其兩端爲鉸支點(圖 98)。

此支點既皆爲鉸支點，則其未知數爲四：V, V', X, X'，其數量多於平衡方程式，故構造物爲非靜力學所能計算者。若欲使其能由靜力學所計算，則應使其中之一支點爲簡單支點，以減少未知數之數量。

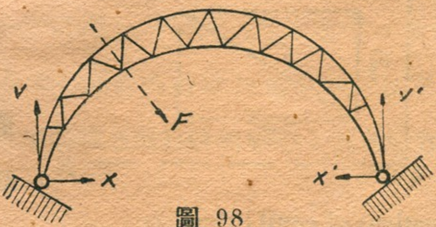


圖 98

3. 設有一懸梁 CA，其 A 端爲裝固支點，C 端自由懸空；此梁可由力學之平衡

方程式解決之，蓋梁上之未知數爲 M_0 與 V，而其平衡方程式亦因外力爲垂直之關係而縮少至等於二：

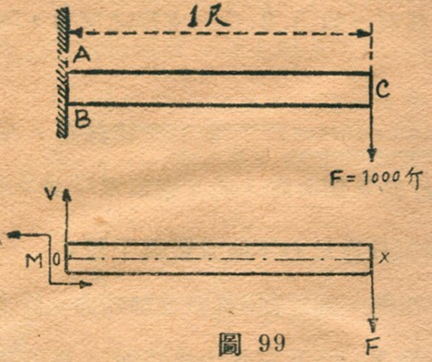


圖 99

$\sum F_x = 0$ （因 F 與 V 皆垂立於 ox）

$\sum F_y = V - 1000 = 0$

$\sum M_0 F M - 1000 \times 1 = 0$

由後兩式，便可求得 V 與 M_0

$V = 1000$ 公斤

$M_0 = 1000$ 公斤尺

4 設有一兩端裝固梁 A A'，此梁非靜力學之平衡方程式所能解決，蓋梁上之外力爲垂直力，故其力學平衡方程式僅有二，而梁之未知數則爲四：V，V'，M，M'（兩垂直反力與兩支點力矩）；故欲解決此問題，則宜加進兩變形方程式

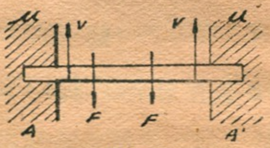


圖 100

於比較不大重要之建築物中，則簡單支點與鉸支點，可僅用生鐵片以代之，此種片爲一端高起，而裝固於圬工(Masonry)上。

101 圖爲一承 F 斜力之屋架，其右端擋對 B 支點之高起部，而左端則可自由伸縮。

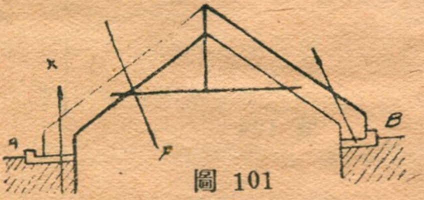


圖 101

若簡畧支點上之磨擦力，則A端生鐵版上之反力爲垂直反力 X。

當選用此種支點時，宜確知所簡畧之磨擦力，不至太大，蓋恐支點成爲鉸支點與 98 圖相同，則其平衡之條件與後者完全不同。

總而言之，若棱柱體能自由變形，而不受阻撓，則可用靜力學之方程式以定支點反力。其理由則因普通平衡之條件與棱柱體之形狀無關，然其支點之存在，則應不能阻撓棱柱體變形之自由。

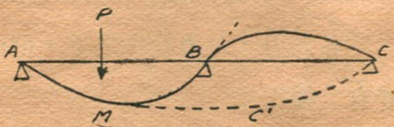


圖 102

例若觀察一有三支點梁 A B C 第一跨徑(Span)梁上，施有一重量 P，由此重量之動作，則若梁之本身重量充足，其中心纖維的變形將如 A M B C。

B 支點防礙梁之自由變形以取 A M C' C 之弧狀。故 A. B. C 三支點之反力，不能由靜力學之公式以解決之。

79 內力或分子力 (Internal forces or molecular forces) 設有一棱柱體，受直接力及支點反力之動作而自由平衡於空間。若於 S 剖面處，將其切斷為 G 與D兩部分，則 G,D 兩部分自己必不能成單獨平衡。

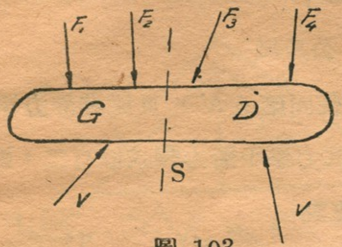


圖 103

若欲使 G 部平衡，則宜在S剖面上加外力，而此外力必須與 G 部的 F_1,F_2,V 三外力成平衡，亦即等於 D 部加於 G 部剖面積 S 上之力。此加於 S 剖面積以維持 G 部平衡力，乃發生於 D 部而加於 G 部者。蓋在未剖斷以前，G 部是處於平衡狀態之下，及在 S 處剖斷之後，G 部乃失去其平衡；則可知，由 D 部之力實與 F_1，F_2,V 三力平衡。

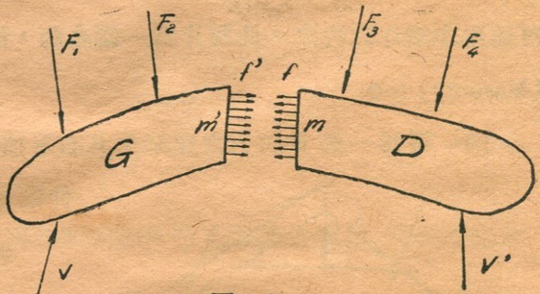


圖 104

於擬想上，多以為 G 部於未剖斷以前，D 部上各分子 m 施於其極鄰近的 G 部分子 m'一極小的力量 f，再據動力與反動力的原理，m' 亦施一反力 f 於 m 分子上。

此種分子力，發生於極微小的面積上，而且極小，若在可量度的面積上（有相當的量積）計算時，則應認為均佈力(uniform by distriduted forces)普遍於全面積上。

在內力，外力動作之下，剖面積應能得着平衡，若以 S 屬於 G 部，則該剖面受有二種力：

1 其鄰近而屬於 D 部的分子外力，

2 G 部本身所受的外力(此外力即鄰近 D 部的分子內力所應抵抗者)；

如此，則該 G 部固體於此二種力平衡之下，自由於空間○

以上二種力的合力，皆可將其分拆成爲單力與偶力，並可使直接外力的分力與反力的分力同在一施力線上而指向相反○

80 分析外力的合力　設 105 圖爲棱柱體的 G 部，R 爲施於該 G 部的合力（F_1, F_2, V）○現擬將 R 合力分拆爲各種分力○

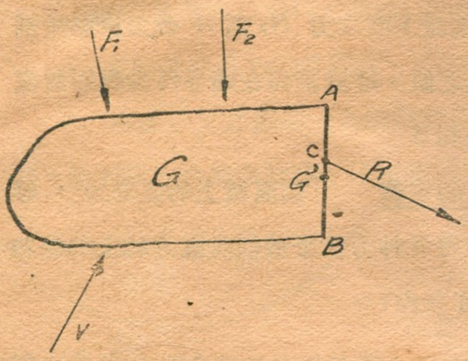


圖　105

若定剖面爲AB，G' 爲該剖面的重心，C 爲 R 合力的施力點，此點亦稱爲壓力中心(Centre of Compressive forces)○

a　撓曲力矩（Bending Moment）若欲將 R 合力，由其施力點 C 移至 AB 剖面的重心點 G'，則爲維持其原來的狀態，宜加入一偶力；此偶力卽爲 R 關於 G' 點的力矩○或不然，則根據合力關于一點之力矩，等於各分力關於該點力矩之和的定理，亦可代以 AB 剖面左邊各力，關於該剖面力矩的總和（反力 V 亦包括在內）○

撓曲力矩的定義　在一棱柱體的剖面上，其撓曲力矩，等於該剖面左邊各力關於該剖面重心點的力矩之總和（反力 V 亦包括在內）○

此撓曲力矩是毫無疑義的，由二力所組成而置於外力平面上○

撓曲力矩符號的決定，爲凡能使重心點上部纖維被擠壓者爲正（+），卽其旋轉方向，與時鏢針移動方向相同○

至位於剖面右邊之內力，則與左邊之力成平衡，自然亦產生一力矩與左邊各力矩相等，而方向相反○

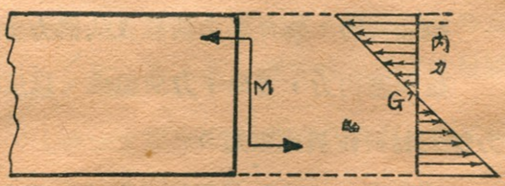


圖　106

故由此推論，可決定右邊的分子力應產生一力矩以反抗左邊各外力的力矩，其力矩之值與左邊各外力力矩之值相等而指向相反○　此剖面的內力是垂立於該剖面上，位於其重心點 G' 上部者則向左，位

於G點下部者則向右。若左邊各力所生的力矩爲負號，則其分子力(內力)的指向與前相反，爲上部向右，下部向左。

b 直立力與剪力(normal forces and shearing forces) 現在各外力既總成爲一合力R，以G'爲施力點，與一力矩(偶力)。

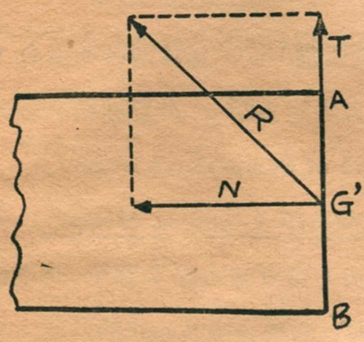


圖 107

則若將合力R分爲兩分力：

1 剖面上直立力 N，爲R 合力投影於剖面上直立軸之值，等於剖面左邊各外力投影於直立軸上之總和。

直立力的定義 剖面積上的直立力，等於該面積左邊各外力投影於剖面直立軸上的總和(支點反力亦在內)。

2 第二分力T則位在剖面中，依剖面與外力平面相交線的方向。此分力稱謂剪力 (Shearing forces)。

剪力的定義 一剖面上的剪力，等於剖面左邊各外力投影於剖面上的總和。

此外力的三種分力，在土木工程的構造上，爲最普通常用。

注意 I 外力的合力，其分力既如此尋求與稱謂，則分子力的組合亦應爲一合力，而可分爲三分力，與外力的分力相等而指向相反。

剖面上各點的分子力，皆可分爲以上三種分力。

各點上所生：

撓曲內力，爲分子力所組成的偶力，以反抗撓曲力矩。

拉與壓內力，爲分子力所組成，以反抗直立力，蓋此種直立力能將材料拉長或壓短。

剪內力，爲分子力所組成以反抗剪力者。

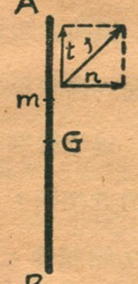


圖 108

材料強度學的主要問題，爲先給一剖面上所承受的撓曲力矩，直立力與剪力；以求剖面上各點的撓曲，拉或壓與剪等三內力。

II 若偶力位於棱柱體之剖面中，其力矩軸垂直於該剖面上，依着棱柱體之中心軸方向，則其趨勢爲使剖面積以中心軸爲中心而旋轉，此偶力稱爲扭轉力矩。(torsion)。

81 材料強度學的臆說 (hypothesis)

a 固體若在其彈限(limit of elasticity)範圍內，能支持其所承受的荷重或外力，而不超過普通所規定的安全限(linlit of safety)，則其變形的程度，常極微小。

b 固體若受外力而生變形，於此變形動作停止之後，則固體必再成一新固體。

c 根據以上二原理，則該固體前後兩種狀態，實無甚差別，因爲變形程度極微，故對該固體前後狀態，可以相似狀態視之。

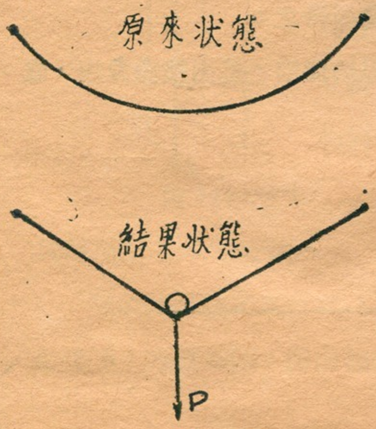


圖 109

以上三原理的結論：爲於材料強度學上，固體受力的變形，實際上極爲微小，故自然界的固體可認爲不變形固體，而適用靜力學的原理。

注意 固體之變形與其各邊之長度的比例有極大之關係，蓋若各邊之比例率極大如繩，版等則其變形極大，故雖然，以上所謂固體的變形極微，然若用此原理於索環固體，則成絕大錯誤；因爲索環上若加以重量，則其原來平衡狀態與最後狀態相差極大，而其變形亦大。

82 剖面爲不變形平面 (invariable plane of section) 上節謂一固體受力後，因其變形極小，故其前後两狀態，可認爲相同而以不變形固體待之。

然若觀察一棱柱體AB，於未受外力之前，以一平面S剪割之，然後加上外力F_1，F_2，F_3，F_4，則此外力必使棱柱體上發生支點反力，並使其變形，而復處於新平衡狀態之下。


圖 110

於此變形狀態影響之下，S平面遂被移動與變形；但由經驗上的証明，因爲

棱柱體變形的程度極微，故可假定於受外力後的平衡狀態之下，剖面積 S 仍為平面。

此種臆說屬於 Navier 與 Bernouilli 兩氏，其述明如下；

一棱柱體全剖面積於承受外力以前若為平面，則於承外力之後亦為平面。

注意　此臆說於直橫梁撓曲中，頗為正確，然於拱形梁中，則不甚正確。

83 力的效用相重疊　試觀一受外力棱柱體的剖平面，此平面上因棱柱體受外力的關係，亦可認為受下列三外力：撓曲力矩，直立力；剪力，此三力於平面上各點，各產生一分子內力。現擬於各點上尋求其分子力的合力。

此問題仍然由變形程度極微的臆說，而推論於分子效用亦屬極小；故可認為若數力有一合力，則此合力的效用將由分力的效用之重疊而得之。

例如，一剖面上之一點，其分子的總效用，或此點的變形，是由撓曲力矩，直立力及剪力等效用或變形之和。

此臆說稱謂力之效用相重疊的臆說。

第二章 拉力與壓力

84 臆說與實驗 (hypothesis and experience) 設有一棱柱體，其剖面上有一拉力或壓力，能拉長或壓縮該棱柱體的長度；現擬尋求此剖面積上各點的分子力。

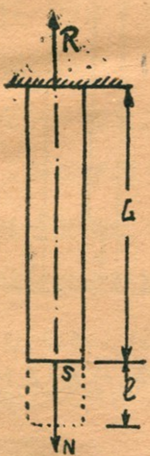


圖 111

設該棱柱體爲長直形，而拉力或壓力則施於其剖面的重心。

於此情况之下，分子內力之尋求方法，應以下面之臆說與經驗爲根據。

臆說 凡一棱柱體，於其剖面的重心點上承受一與該棱柱體中心軸平行力時，則此力必平均的遍佈於全剖面積上。換言之，卽每單位面積之分子內力 n，在全剖面上各點皆相同（此爲 Navier 與 Bernouilli 氏的臆說）。

故若剖面積爲 S，而單位分子面積之分子內力爲 n，則該總面積之內力爲 nS。

現設棱柱體之長度爲 L，其一端之拉力或壓力爲 N，則依據動力與反動力的力量相等，方位相同，指向相反的原理，其平衡公式：

$$\boxed{N = nS = R}$$

N 爲動力，R 爲反動力。

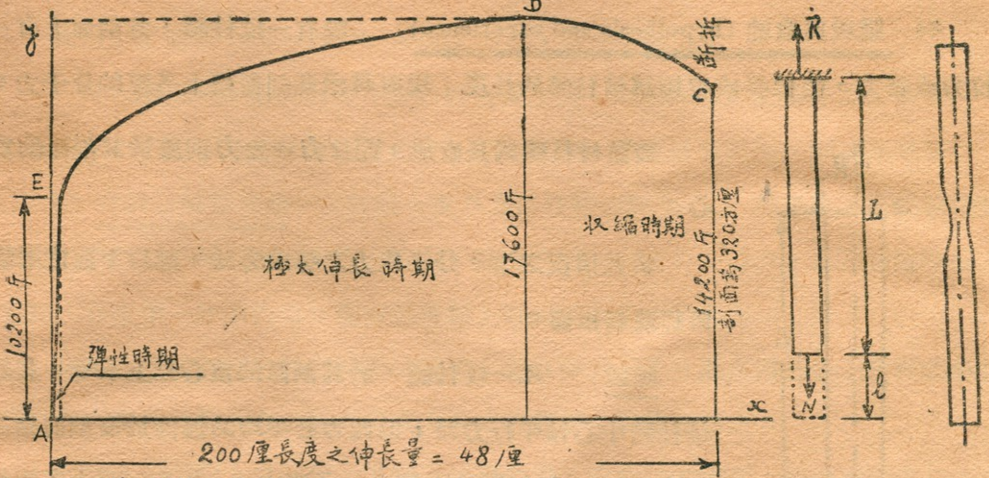
實驗 設如圖 111 有一鋼質棱柱體，其剖面積爲 S，長度爲 L，若於 S 剖面的重心施一拉力 N，則此力將均佈於剖面 S 的各分子面積上，而使該棱柱體伸長，其伸長值爲 l。

若此實驗爲採用一儀器，而能使 N 力量徐徐繼續不斷的增加，且於必要時可以自由停止。

現若定兩座標 ox 與 oy，將每次 N 值置於 oy 軸上，l 值置於 ox 上，便可得拉

力 N 與伸長量 l 的關係代表線○

AEBC之弧線可給大概的印象○由此弧線，可得以下三種狀態：



试驗桿之直徑為22.6厘，剖面積為400方厘，材料為極軟鋼質，桿實長為200厘

圖 112

取 A 點爲弧線之原點（Origine）；由 A 至 E 棱柱體之伸長量極少，AE 爲直線，換言之，伸長量與外力成正比例，而小變形之重疊原理可以適用○

若將其外力移去，則棱柱體再恢復其原來之形狀；此種情況稱爲彈性時期○

由 E 至 B，棱柱體之變形較外力之增加爲速，一小力量之增加可發生極大之伸長量；此種情況稱爲極大伸長時期

E 點可稱爲棱柱體彈限位置，蓋由 E 至 B 棱柱體被外力拉長，若將外力移去，棱柱體不能恢復其原來之形狀，而仍殘留存一部分之變形○

B 點之位置不能一定，依各種材料而異；現若觀察 B 點至 C 點，則可知棱柱體上一小局部的伸長較其他部分伸長量爲大○此種現象之發生，同時亦使剖面積有收縮之發現，故稱爲收縮現象；此時期則稱爲收縮時期○

若收縮現象由一重量而發生，則雖不增加棱柱體上之重量，而收縮現象仍繼續進行，蓋因剖面積逐漸收縮，故外力雖不增加，然內力則逐漸增大○

於收縮時期的終末，棱柱體必生斷折○112 圖上之 B 爲棱柱體之最大強度；C

爲斷折強度。

多數材料如木，鑄鐵，三合土，硬鋼等，不能發生剖面積的收縮現象，故其最大強度與折強度相同。

85 受壓力之棱柱體 若棱柱體之長度比較其剖面之最短邊長度不太大，則稱爲短柱，短柱受壓力之結果與受拉力者同，不過受壓力之柱爲被壓縮而受拉力之柱，則被拉長。

若反之，桿之長度與其剖面積最短邊長度比較太大，例如超過五或六倍，則稱爲長柱；長柱受壓力時，則生側面撓曲，故其壓力常混合有一特別之撓曲現象，以後於長柱中研究之。

各種材料之抵拉力與抵壓力雖多數相同，然尚有許多材料或適於抵壓力而不適於抵拉力(如坊，石等)，或低壓力較抵拉力爲大(如鑄鐵等)。

受壓力之材料必發生短縮，而同時其剖面積必稍爲擴大，若壓力繼續增加則必至膨脹而斷折。

其斷折之形狀依各種材料而異：或被壓成粉碎，或成圓錐體，棱錐體或成片塊。

86 彈限，彈性係數與 Hooke 氏之定律 試觀 112 圖之弧線，拉力或壓力超過 E 點時，則入於極大伸長時期，外力與伸長量不成比例，故達至 E 點之外力稱爲彈限 (limit of elasticity)，而由 A 至 E，其伸長量或壓短量則與外力成比例；若 N 爲外力，S 爲剖面積則：

$$\frac{N}{S} = E\frac{l}{L} \qquad (1)$$

$\frac{N}{S}$ 爲單位面積所受之拉力或壓力，$\frac{l}{L}$ 爲單位長度之伸長量或壓短量（或單位變形）。

若 $\frac{N}{S} = n$，$\frac{l}{L} = i$，將 n, i 兩值置於兩座標 On, Oi 上，便可得：

$\frac{n}{i} = tg\,\alpha = E$　　　E為材料之彈性係數(Coefficient of elasticity)

$$\boxed{n = Ei} \qquad (2)$$

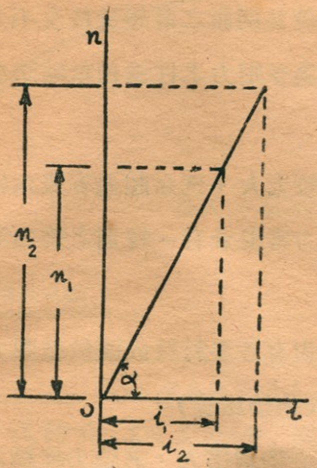


圖 113

n為每單位面積所受的拉力或壓力，i為每單位長度的伸長量或縮短量，故（2）公式為Hooke氏的定律，此定律如下：

凡物體受外力而未超過其彈限時，則其所生的線變形(linear deformation)必以外力的力量為含數(function)。

設由(1)公式 $\frac{N}{S} = E\frac{l}{L}$；

使 $l = L$　　　則 $n = E$

故材料的E是一力，其力量為使該材料棱柱體伸長或縮短至其原來長度時，其橫剖面上的單位力量。

軟鋼及鐵的E值，大概為每方公尺等於 20×10^{9} 公斤。

由實驗所得的結果，同一材料的N與E值，大概為固定數，因此，可定其為各該材料的本性(Caracteristic)。故各種鋼料於建築用途上，多以其彈限與彈性係數為標準。

於材料強度學上，最適用與應特別注意者，僅為彈性時期，蓋對於建築構造，當不應使材料發生永久變形或斷折，故不能使材料承受超出其彈限之力。

於實用上，用於建築之材料，僅能用至發生極少之變形。樹膠桿之變形可以達至2或3倍其原來之長度而不發生表面之損懷，現今用於建築上之鋼桿，則僅能使其伸長至0,0015之原來長度，而不發生損懷。

87 單位斷折伸長或短縮與斷折載重　　斷折總長度，為材料受力折斷之後，將其兩部聯接所量得的長度。若L'為材料斷折總長度，L為原來長度，則折斷伸長或短縮度的比例，稱為單位斷折伸長或短縮。

$$單位斷折伸長或短縮 = \frac{L'-L}{L}$$

至單位斷折荷重，則為使該材料斷拆的重量，而被原來橫剖面積除得的商數。

$$單位斷折荷重 = \frac{N\text{（使材料斷折力）}}{S.\text{（材料原來的橫剖面積）}}$$

88 橫變形與縱變形之比 由實驗上觀察所求得，若使一桿受拉力，則其縱軸之方向上被拉長，而同時其橫剖面之面積則被縮小。同樣的，若使一桿受壓力，則其縱軸之方向上被壓短，而同時其橫剖面積則被膨脹。若此拉力或壓力，未嘗超出彈限之外，則橫剖面積之變形將與拉力或壓力成比例，與縱軸方向之變形的法則相同。此兩方向上之變形，既皆與外力成比例，則此兩變形之比亦將為常數。此橫剖面變形與縱軸方向變形的比例稱為 Poisson 係數：

$$\text{Poisson 係數} = \frac{橫剖面變形}{縱軸方向變形} = m$$

由物質組織之概念的認識， Poison, Navier 與 Cauchy 定 $m = \frac{1}{4}$。由經驗之所得， Wertheim 求得 m 值是依據物體之性質及其物理的狀態而變，其值與 $\frac{1}{3}$ 相近。由 Kirchkoff 於金屬材料上所得之實驗，則 m 值是位於 $\frac{1}{4}$ 與 $\frac{1}{3}$ 間。至於玻璃，則 Cornu 求得其 m 值極近於 $\frac{1}{4}$

最近實驗之所得，則定多數建築材料之 m 值為 0,3。

Boyd 之材料強度學中，則定鑄鐵之 Poisson 係數平均值為 0,25 揀鐵與鋼則大概為 0,30 ，黃銅與赤銅則大概為 0,33。

89 拉力與壓力之內力方程式 材料強度學於彈性時期中，材料之剖面積上受外力之影響而生分子內力，其公式：

$$\boxed{n = \frac{N}{S}}$$

若材料為木料及圬料 (masonry)，則 S 面積的單位為方公分；若為金屬類，則 S 的單位為方公厘，至 N 則無論何種材料皆以公斤為單位。

單位伸長$\frac{l}{L}$是常以i代之，其公式：

$$n = Ei$$

i爲一數目字(一材料伸長的總量等L×i)，故由上公式，n與E應選同一單位。

90　安全荷重與安全係數　材料強度學的目的，是在尋求材料的橫剖面積，設先知荷重的力量與材料的種類(彈限等)，則橫剖面積：

$$\boxed{S = \frac{N}{n}}$$

於經濟的原則上，依此公式，應盡量的縮小S面積而增加分子內力n。

但是分子內力n爲有限制的，而不能超過一定之值，蓋不如此，則恐超出其彈限而失去安全的狀態。

於理論上，n值是可以達至其彈限，然根據以下種種的觀察和研究，則於實際上，不能使用至彈限之值，其理由如下：

1 材料強度學的原理，多根據實驗的結果，故尙有不正確的缺憾。

2 試驗材料彈限時，恐尙有數目字的錯誤。

3 建築構造上所用的材料，其樣式構造雖極精確，然尙不及用於實驗者的準確。

4 實際上，工廠的出品及工場的材料，其製造各有不完善之處。

5 爲簡單計算起見，在設計方面，有必要時，尙可免去次要力。

6 在一定部分材料上，尙有意外的力量變化情狀發生。

根據以上種種理由，故於實用上，分子內力的限度，不能超過彈限內的一定限度。

此彈限內的一定限度，稱爲安全限 (limit of safety)

安全限與彈限的比例，稱爲安全係數 (Coefficient of safety)。

分子內力安全限的大小，由各建築物之受力，與建築物的性質之不同而異；此種規定的責任，應由工程師考察實際情形而定。

然於實用上，金屬的安全限，大概是等於$\frac{1}{2}$或$\frac{1}{4}$彈限，而木與石類，因其構成屬於自然界，多不一律與均勻 (homogenous)，故定其等於$\frac{1}{10}$彈限。

注意　金屬類中同一材料，其拉力與壓力之彈限，彈性係數，斷折荷重與安全限等大概相等，然鑄鐵則用於抵抗壓力較用於拉力强。

91　棱柱體受力超過彈限時之抵抗量　若物體受力超過其彈限，則其所組成之分子，當外力移去時，不能再恢復其原來之位置，物體上仍殘留一永久變形，而成爲一新平衡之物體。

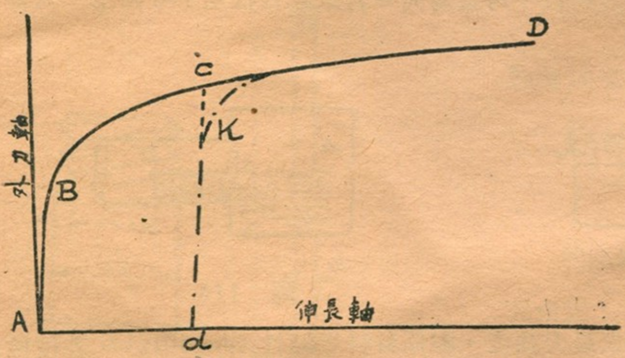


圖　114

現若再將此新平衡之物體使其收壓力或拉力，則實際上，其彈性與原來之彈性互異。

設 ABD 弧線，爲一棱柱體之變形圖，其試驗如下：

取一棱柱體，使其受外力，由 A 至 B 爲該棱柱體之彈性時期，變形與外力成比例；現若使其繼續受力至 C，則由實驗之結果，可由 C 引 Cd 與 AB平行而定 d 點，Ad 爲該棱柱體受力後之永久變形，換言之卽使棱柱體受力至 C 點時，然後將力移去，則棱柱體逐漸依沿 Cd 之直線而恢復其長度，但仍保留一部分之伸長量 Ad。因此，若再使已變形之棱柱體受力，則其變形弧線之原點不位於 A 而爲 d，而其變形之新弧線大概爲 dKD。

由此兩弧線之比較可得其結論：若一棱柱體受外力超過將其彈限，然後將其外力移去而成新平衡之棱柱體；此新棱柱體之彈限與斷折載重則較原來者爲增加，但其至斷折時之伸長量則較原來者爲短。

若欲使已成永久變形之金屬材料恢復其原來之彈性性質，則宜使其經過再燒 (annealing) 之手續，方能得其原來之性質而增加其斷折伸長量。

92　棱柱體之形狀影響於其最大強度　由 84 節，若外力施於棱柱體剖面之

重心並與其中心軸同方向，則其外力將均佈於剖面積上○但此臆說之証實僅屬於一等剖面積之棱柱體，與離施力點有相當距離之剖面上○此距離之長度，由 A. Mesnager 之實驗，爲應大於棱柱體之最大邊，但由 Boyd 之材料強度學中，則若測驗長度 (gage length) 爲 8 英寸，其等剖面積之長度不宜短於 9 英寸○若試驗桿之兩端剖面積較中部爲大，則其面積之改變應爲漸變形如 115 圖，115 圖與 116 圖中之斷線代表桿中之內力○於 C 剖面處其斷線群聚於表面○若測驗長度以 C 爲起點，則桿之伸長量必較高，因其內力將較平均值爲大○若試驗桿採用 116 圖形，其伸長量之錯誤將更大○

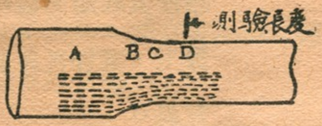


圖 115

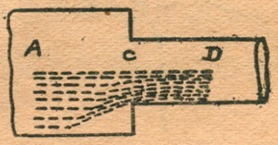


圖 116

棱柱體之異形剖面上一點之最大強度，關係材料之延性 (ductility)○若棱柱體爲鑄鐵或缺乏延性之材料如 115 圖形時，則於 C 剖面積處，因內力之集中，故較疲弱○若剖面之急差較大，則其內力亦更集中與易於斷折○

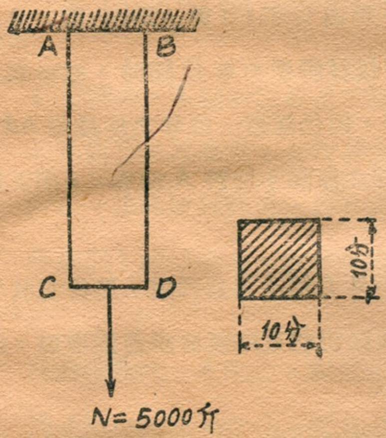


圖 117

93 例題 a 設有一木條，其剖面爲正方形，AB 端爲裝固式，而 C D 剖面的重心上，則懸重 5000 公斤，現擬求該木的剖面積○

木之安全限爲每方公分 60 公斤，故其剖面積：

$$S > \frac{5000}{60} = 83{,}3 \text{ 方公分}$$

若決定其剖面各邊長度爲 10 公分則：

$$S = 10 \times 10 = 100 \text{ 方公分}$$

分子內力； $n = \frac{N}{S} = \frac{5000}{100} = 50$ 公斤（安全限 60 斤）

注意　　公式的列明，應注意下數點：

1 先列字式（letter）後，再將字代以數目字。

2 內力力量 n 値，求至第一或第二位小數則已足。

3 最後宜註明所規定之安全限。

b 懸吊鐵條（tie-beam）　設有一懸吊鐵條，吊重 10000 公斤，其上端係由螺旋線裝固。

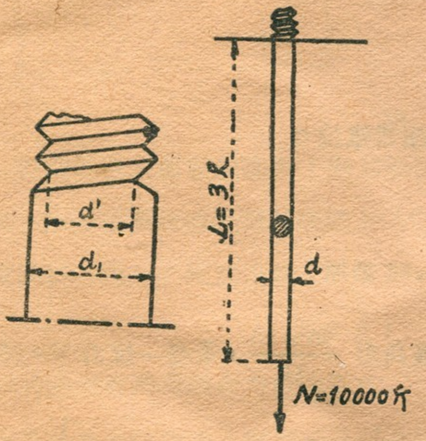


圖 118

鐵料在房屋建築上，其安全限為每方公厘 10 公斤，故其剖面積；

$$S > \frac{10000}{10} = 1000 \text{ 方公厘}$$

此鐵條既為圓形，其直徑可用下列公式求之：

$$\frac{\pi d^2}{4} = 1000; \qquad d = \sqrt{\frac{4000}{\pi}}$$

$$d = 35{,}7 \text{ 公厘}$$

由此可定鐵條直徑為 36 公厘。

其內力：

$$n = \frac{N}{S} = \frac{10000}{\frac{\pi \times \overline{36}^2}{4}} = 9{,}82 \text{ 公斤（安全限為 10 公斤）}$$

36 公厘乃螺旋部分的直徑 d'，故其本身直徑 d_1 應較 d' 為大，於實用上；

$$d' = 0{,}8 d_1$$

故；

$$d_1 = \frac{36}{0{,}8} = 45 \text{ 公厘。}$$

現再算此鐵懸條受力後之伸長度。

$$\frac{l}{L} E = \frac{N}{S} \qquad (1)$$

S 爲鐵條本身的剖面積，其公式：

$$S=\frac{\pi\times\overline{45}^2}{4}=1593\text{ 方公厘}$$

(1) 公式的第二部，是以公斤與公厘爲單位，故 E 值亦應以公斤與方公厘爲單位，鐵的 E 值爲 20,000 公斤每方公厘，故：

$$\frac{l}{L}\times 20000=\frac{10000}{1593}$$

或

$$\frac{l}{L}=\frac{1}{2\times 1593}$$

因 l 值極小，故宜將公式中各數，皆取公厘爲單位。

$$L=3000\text{ 公厘}$$

$$l=\frac{3000}{2\times 1593}=0,94\text{ 公厘}$$

c 算角形 (angie iron) 設有一鋼質等邊角形 $\frac{80\times 80}{10}$，承受一拉力 N＝3000 公斤，此角形由一鉚釘 (rivet) 直徑 r 裝固。　r＝20 公厘。

角形的最小剖面積，應爲由 ab 切下的面積，因其經過鉚釘的空洞。

故　$S=(80-20+80-10)\times 10$

$\quad\quad=1300$ 方公厘

若定鋼的安全限爲每方公厘12公斤；

$$n=\frac{N}{S}=\frac{3000}{1300}=2,3\text{ 公斤}$$(安全限爲 12 公斤)

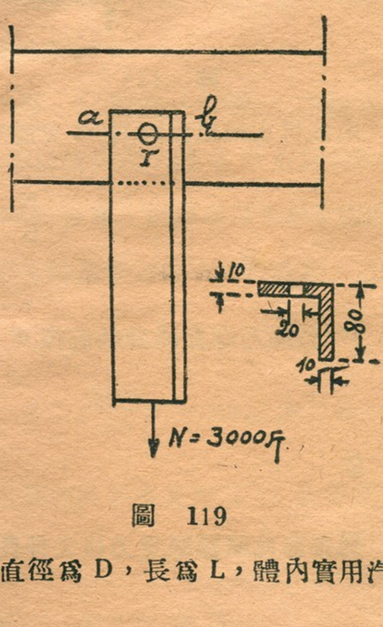


圖 119

D 薄壁汽鍋的計算　試觀一圓筒，其內直徑爲 D，長爲 L，體內實用汽壓，每單位面積爲 p 公斤。

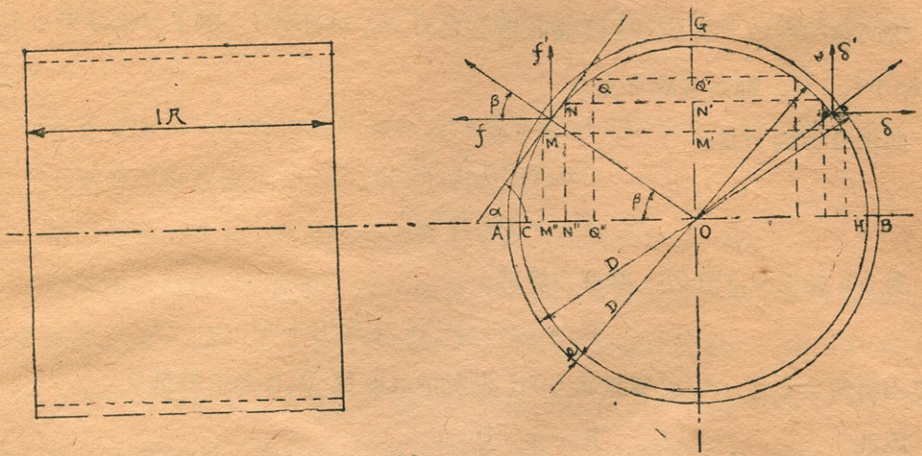


圖 120

1 設若於縱剖面發生斷折，則其斷折必依一直徑，半圓筒 AGB 因此必得如下的平衡：內面積所受的汽壓及薄壁上 AC 與 HB 所發生的抵抗力。

設鋼於各點上之抵抗力爲 t，則其一公尺長的圓筒上之抵抗力爲：

$$2et \times 1$$

此抵抗力必宜與外力的合力成平衡。

欲求此外力的合力，試觀一分子弧線 MN；其一公尺縱條面積所受之壓力爲：

$$p \times \overline{MN} \times 1$$

此壓力是垂直於弧形面積上，可將其分爲兩力 f 與 f'，f 與直徑 AB 平行，f' 則與 AB 垂直；若定 α 爲 MN 弧線上的正切與 AB 所成之角度則：

$$f = p \times \overline{MN} \operatorname{Sin} \alpha \times 1$$

$$f' = p \times \overline{MN} \cos \alpha \times 1$$

α 與 β 二角之和爲 90 度，但：

$$MN \operatorname{Sin} \alpha = M'N'$$

$$MN \cos \alpha = M''N''$$

因此可得：

$$f = p \times M'N'$$

$$f' = p \times M''N''$$

依同樣的理由，施於NQ縱條面積上之力，亦可分爲 f_x 與 f'_x 兩分力。f_x 與AB軸平行，f'_x 則與其成垂立。

此兩分力的力量：

$$f_x = p \times N'Q'$$

$$f'_x = p \times N''Q''$$

與AB軸垂直之分力，其合力等於：

$$R = p \times 1(M''N'' + N''Q + \cdots\cdots\cdots)$$

括弧內所包含之値，等於半圓周CGH投影於其直徑D上之投影量。

因此；　$R = p \times D \times l$

至於與AB平行力的合力則等於零，因此種力爲每對各個相等而指向相反。故圓筒的平衡公式：

$$pD = 2\,et\,; \qquad t = \frac{pD}{2e}\,; \qquad e = \frac{pD}{2t}\,。$$

薄壁的厚度，應於e公式中代入　$t = R$

故　$t = \dfrac{pr}{e}$；　$e = \dfrac{pr}{R}$；

r = 內半徑；　R = 安全限；

2 假設於橫剖面積上發生斷折，則其斷折必依 xx' 軸的垂直剖面如A'B'，故可將右部取開，而代以A'B'剖面上的右部抵抗力（內力），以維持其原來的平衡。因此，左部汽鍋應於汽壓合力及右部內力合力之下得着平衡。

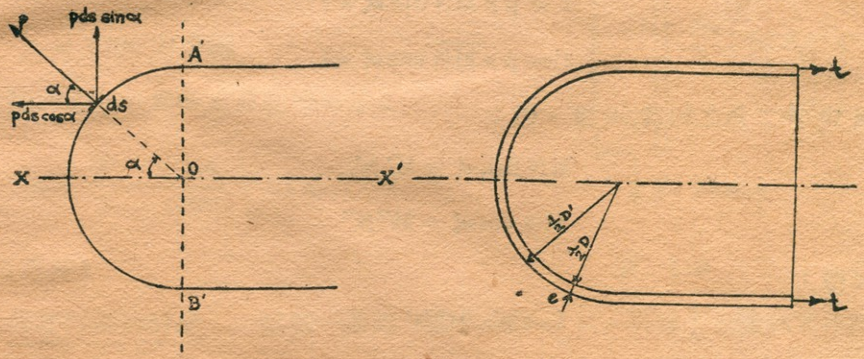


圖 121

若左部的平衡能得實現，則各力投影於圓柱體縱軸 XX' 上的投影總值應等於零。

a 右部分子力的合力等於 2π ret，其投影於 XX' 軸上的投影值，亦等此量。

b 實用汽壓力投影於 XX' 的投影量尋求法：

於圓柱體的壁上，其內汽壓與壁成垂直，故其合力等於零。

在半球形部分，若觀察一分子面積 ds，則其面積上之汽壓 pds 可分為二，一與 XX' 成垂立為，pds Sinα，其投影於 XX' 上的投影量等於零。一與 XX' 軸平行 pds cosα。全半球形面積上所受之汽壓力，因此，等於 $\sum$pds cosα = p$\sum$ ds cosα。但是，ds cosα 等於分子面積 ds 投影於 A'B' 平面上之投影量；故 $\sum$ds cosα 等於 A'B' 平面的圓面積 πr^2。

因此，汽壓力投影於 XX' 上之力量等於 $p\pi r^2$；而其平衡公式：

$$2\pi re \times t = p\pi r^2。$$

故；

$$t = \frac{pr}{2e}$$

$$t \leq R \qquad R \text{ 為安全限。}$$

若定安全限 R 的值，則可求得厚度 e

$$e = \frac{pr}{2R}$$

薄壁的厚度，依縱長剖面計算為 $\frac{pr}{R}$；若依橫剖面計算，則為 $\frac{pr}{2R}$；但薄壁的厚度應為一律同樣，故宜取 $e = \frac{pr}{R}$。

注意　汽鍋的厚度，必宜與內汽壓力及內直徑成比例，而不與汽鍋長度生關係；故在實用上，多採用長形汽鍋。

受熱汽鍋壁於習慣上，宜加多一公厘，故；

$$e = \frac{pr}{R} + 1 \text{ 公厘}$$

此外尚須預算鉚釘裝置對於鍋壁的損壞，故 e 尚與鉚釘係數(Coeffient of rivets)

生關係○

若l為兩鉚釘中心的距離，d' 為鉚釘洞的直徑，則；

$$\beta = \frac{l - d'}{l}$$

故薄壁熱汽鍋的公式為：

$$e = \frac{pr}{\beta t} + 1 \text{ 公厘}$$

例如： r＝600 公厘； p＝14 公斤(每方公分)； $\beta = 0.7$； t＝10 公斤

$$e = \frac{14 \times 600}{100 \times 0.7 \times 10} + 1 = 13 \text{ 公厘}$$

94 傾斜剖面上之分子內力 上面所計算之分子內力，其剖面是與外力成垂直，現若於棱柱體上取一斜剖面不與外力成垂直，亦不與其成正切方向，而求其面積上之分子內力○

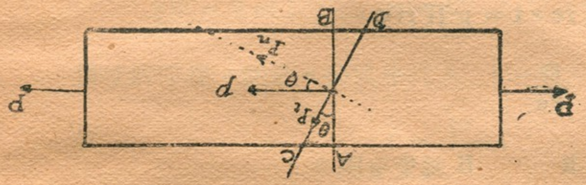


圖 122

設有一棱柱體如圖 122 受一拉力 P，現若取一斜剖面 CD 與 AB 垂直剖面成一角度θ，則其剖面重心點上之 P力，可分為兩分力 P_n 與 P_t 垂直與位於斜剖面 CD 上○此垂直於斜剖面上之 P_n 為剖面上之拉力或壓力，至位於剖面上之 P_t 則為剪力○

斜剖面上之垂直力： $P_n = P \operatorname{Cos}\theta$

其正切力 (tangential force)： $P_t = P \operatorname{Sin}\theta$

至 CD 剖面之面積則等於： $A' = A \operatorname{Sec}\theta$

A' 為 CD 剖面之面積，A 則為 AB 剖面之面積○

因此，斜剖面 CD 上之單位面積的垂直內力：

$$p_n = \frac{P \operatorname{Cos}\theta}{A \operatorname{Sec}\theta} = \frac{P}{A} \operatorname{Cos}^2\theta = p \operatorname{Cos}^2\theta$$

而其單位面積正的切內力：

$$p_t = \frac{P \operatorname{Sin}\theta}{A \operatorname{Sec}\theta} = \frac{P}{A} \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta = p \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\theta = \frac{p}{2} \operatorname{Sin}2\theta$$

p 爲垂直剖面 A 面積上之單位內力。

p_t 之最大値是依着 $\operatorname{Sin}2\theta$ 之最大値，但 $\operatorname{Sin}2\theta$ 之最大値爲 1，故 θ 爲 45°，而 p_t 之最大値爲 $\frac{p}{2}$。

各斜剖面上能發生最大正切內力時，則與其中心軸所成之角度應爲 45°，故有許多不適合於抵抗正切內力之材料，當其受拉力或壓力而生破裂，其破裂之痕跡當與中心軸成 45° 角，然若不成 45° 角者，則因組織該材料之分子有相互的磨擦力以阻撓其滑動。

95 例題 設有一吊懸鐵桿 (tie－bar)，其剖面積上每方公分之內力爲 1000 公斤；現擬求一剖面上之正切內力，與垂直內力，此剖面積之垂直軸與鐵條之縱軸成 40° 角；此外再求於鐵桿之縱軸方向上，剖面積之正切內力與垂直內力之合力。

觀察桿之一部，於縱軸之方向上其每方公分面積受力爲 1000 公斤。與縱軸成垂直之每 1 方公分面積投影於斜剖面上，其投影面積爲：

$(1 \times \operatorname{Sec} 40^\circ)$ 方公分

而位於斜剖面上之總力則爲 1000 公斤，投影於斜剖面上之投影量：

$(1000 \times \operatorname{Sin} 40^\circ)$ 公斤

因此，斜剖面上每單位面積之正切內力爲：

$$\frac{1000 \times \operatorname{Sin} 40^\circ}{\operatorname{Sec} 40^\circ} = 1000 \operatorname{Sin} 40^\circ . \operatorname{Cos} 40^\circ = 1000 \times 0{,}6428 \times 0{,}766 = 492 \text{ 公斤}$$

至斜剖面上每單位面積之垂直內力則爲：

$$\frac{1000 \times \operatorname{Cos} 40^\circ}{\operatorname{Sec} 40^\circ} = 1000 \times \operatorname{Cos}^2 40^\circ = 1000 \times \overline{0{,}766}^2 = 586 \text{ 公斤}$$

其每單位面積於鐵桿縱軸方向上之合力爲：

$$\frac{1000}{\mathrm{Sec}\ 40^{\circ}}=1000\ \mathrm{Cos}\ 40^{\circ}=1000\times 0{,}766=766\ \text{公斤}$$

用於拉力的材料抵抗力

（單位：公斤及方公厘）

材料名稱	彈性係數 E	彈限	斷折荷重	安全限 R
	公斤	公斤	公斤	公斤
軋鐵（rolling iron）	18至20000	20至24	32至 36	6 至10
鋼線	20至22000	45至80	60至140	20 至25
軋鋼	20至22000	24至45	35至 85	8 至12
鑄鐵（cast iron）	10至11000	4 至 8	10至 20	1,5至 3
鑄鋼(cast steel)	20至22000	20至30	35至 60	8 至12
橡樹	900至 1300	2,5	4至 8	0,6至0,8
松樹	800至 1200	2	4至 8	0,6至0,8
柳樹	500	1	2至 3	0,2至0,3

96　坊工類（Masonry）　在拉力中，坊工材料，於習慣上法制上的規定，沒有適用於拉力的可能。蓋因其混合物及其製造法常能發生缺點；而且坊工材料的接痕，更無抵抗拉力的可能。

至於壓力中，則石料類的彈限荷重，實與斷折荷重相近，但根據拉力中所述的種種理由，壓力安全限的決定，應取實驗室中所得結果的 $\frac{1}{10}$ 或 $\frac{1}{20}$

坊工材料的彈性係數 $E=2{,}5\times 10^{7}$ 斤每方公尺。

舉例　設有一石柱高爲10公尺，若其剖面積上每方公分的荷重爲20公斤，則此柱的短縮：

$$=L\times\frac{R}{E}=10\ \frac{200000}{2{,}5\times 10^{9}}=0{,}0008\ \text{公尺}$$

若爲同高度的鐵柱，其剖面積上每方公厘荷重爲6公斤，則其短縮度：

$$l' = L\frac{R}{E} = 10 \times \frac{6000000}{18 \times 10^9} = 0{,}0033 \text{ 公尺}$$

石料類	安全限
	（每方公分公斤數）
硬石黏士敏士	15至30
磚	6至10
軟石	6至15
普通石	6至12
士敏士的三合士	6至12
沙質地	2至 6
石碎地	5至 8
黏士地	4至 6

木料類		彈限	斷折荷重	安全限	彈性係數 E
橡木或松木	壓力與纖維平行	2至3	6至8	0,6至0,8	900至1300
	壓力與纖維成垂直		0,6至1	0,1	

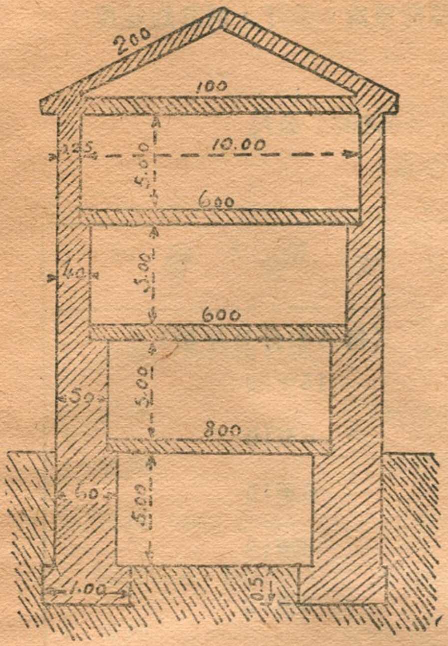


圖 123

97 例題 設有一兩層樓房屋，其牆壁距離為10公尺。樓板及屋頂每方公尺的荷重(材料重量與荷重)則如圖上所註明。兩牆壁剖面積，由屋頂逐漸增大至地基而止。

現擬檢查牆壁各剖面積的單位面積壓力，是否不超過所規定的安全限。

若觀察1公尺寬的牆壁，算定牆料的密度 (densitie) 為2000公斤，則可得以下各部的重量：

	重量			面積
二樓	屋頂	200公斤 × 5 = 1000公斤	4000公斤	25 × 100 = 2500方公分
	樓板	100 × 5 = 500		$R = \frac{4000}{2500} = 1,6$公斤
	牆	500 × 5 = 2500		
一樓	二樓	4000公斤	11000公斤	40 × 100 = 4000方公分
	樓板	600 × 5 = 3000		$R = \frac{11000}{4000} = 2,8$公斤
	牆	800 × 5 = 4000		
地面	樓上	11000公斤	19000公斤	50 × 100 = 5000方公分
	樓板	600 × 5 = 3000		$R = \frac{19000}{5000} = 3,8$公斤
	牆	1000 × 5 = 5000		
地下	上面	19000公斤	29000公斤	60 × 100 = 6000方公分
	地板	800 × 5 = 4000		$R = \frac{29000}{6000} = 4,9$公斤
	牆	1200 × 5 = 6000		

$$\text{地基}\left\{\begin{array}{ll}\text{上面} & 29000\text{公斤}\\ \text{地基} & 2000\times 0.5=1000\end{array}\right\}30000\text{公斤}\qquad \begin{array}{l}100\times100=10000\text{方公分}\\ R=\frac{30000}{10000}=1\ \text{公斤}\end{array}$$

98 氣候變化的影響　在氣候變化情況之下，材料長度亦生變化，尤其是金屬材料。

設有一橫梁，其一端裝固他端可自由移動，則其伸縮完全跟着氣候溫度的增降而異。

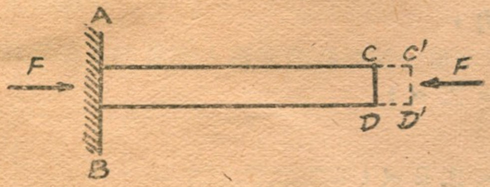


圖 124

如圖 124 橫梁 ABCD，AB 端爲裝固，而 CD 端則可自由移動；若氣候溫度增高，則其沒有裝固之 CD 端必能伸長至 C'D'。若此橫梁兩端皆裝固，則在氣候溫度增高情況之下，亦發生同一的狀態，故其端的裝具必生一反動力 F，因此，該橫梁必受擠壓，而 AB 剖面上必產生一與 F 相反而力量相等力。

於溫度降低的時候，則相反之形態亦隨之而生，該橫梁所受之力爲拉力。

由上的觀察，可以計算：

1 CD 移動的長度（若非裝固之端）

設 l_0 爲橫梁原來的長度，t 爲溫度增高的度數，α 爲物理學上的長度膨脹係數（一公尺長的桿，在溫度增加一度時的膨脹量），如此，則橫梁的膨脹量：

$$+l_0\alpha t$$

在溫度降低時則其縮量：

$$-l_0\alpha t$$

故若氣候的變化溫度爲 t° 而其膨脹係數爲 α，則：

a 長度的增減爲；　$l'=\pm l_0\alpha t$

b 於氣候變化後的總長度；　$L=l_0\pm l'=l_0(1\pm\alpha t)$

2 兩端裝固直桿中所生的內力

直桿伸縮的長度爲 $l' = \pm l_0 \alpha t$

長度伸縮率：

$$\frac{l'}{l_0} = \pm \alpha t$$

若材料的彈性係數 E，則其伸縮率：

$$i = \frac{n}{E}$$

n 爲直桿中任何剖面上一點的分子內力，

故； $$\frac{n}{E} = \pm \alpha t$$

或； $$n = \pm E \alpha t$$

由此公式，可以計算每剖面上各點的分子內力。

設 S 爲直桿的剖面積，則其各端所產生的總力：

$$F = nS$$

$$F = \pm ES \alpha t$$

關於各數的單位應知道： t 是以度計算，

α 是一數字係數，在各專册中可以檢出。金屬類的變化極微，鐵的係數爲 0,000012（其變差是由 0,000010 至 0,000018）；αt 爲長度伸縮率（單位伸長率），爲一數字係數；故 n 與 E 應採用同一單位（如公斤與方公厘）。

膨脹係數

材料名稱	華氏度	攝氏度
鑄鐵……………………………	0,0000060	0,0000108
熟鐵……………………………	0,0000067	0,0000121
鋼……………………………	0,0000065	0,0000117
黃銅……………………………	0,0000105	0,0000190
紫銅……………………………	0,0000093	0,0000168
混凝土……………………………	0,0000079	0,0000143
玻璃……………………………	0,0000044	0,0000080

99 建築物伸縮上必需的器具　因氣候的寒暖變化，而影響於材料的伸縮，其伸縮所生的結果，能使其發生極大的內力。然在實際上所應注意者，爲材料若不緊貼住於支點，若准其微少的移動，自能減少許多的內力。但無論如何，應當計算或備必須的佈置，確定材料有自由伸縮的可能。

因此，樓板的桁不能裝固於兩壁上；至於長桿，鐵軌，鐵欄等亦宜安置有空隙以便其伸縮。

若鐵橋上的重梁，則宜將其置於金屬面積上，使其能自由滑動(如 AB 面)。

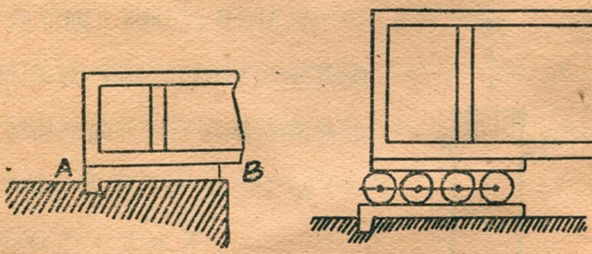


圖 125

若爲極重要之工程，則大概在兩平面之間，可安入聯結的圓柱體，稱爲脹縮器。

100 例題　設有一工字形鐵梁，長爲 5 公尺，剖面形如下圖；若氣候溫度增加 30° 時，試求其膨脹長度？

$$l' = l_0 \alpha t = 5 \times 0{,}000012 \times 30 = 1{,}8 \text{ 公厘}$$

若將此梁兩端裝固，現試求其兩端所生之內力。

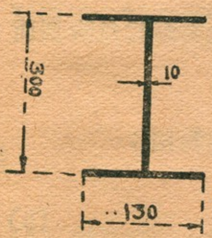


圖 126

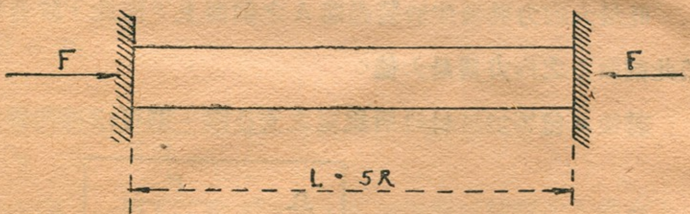


圖 127

剖面上各點的分子力：　$n = E\alpha t$

若採 n 爲每方公厘斤數，則 E 亦應取同一單位，故 E = 20000

$$n = 20000 \times 0{,}000012 \times 30 = 72 \text{ 公斤}$$

各端所生的內力 $F = nS$

$S = 6600$ 方公厘

$F = 6600 \times 72 = 47520$ 公斤

101 受拉力或壓力之等剖面積桿　設如圖 128 一直軸線與等剖面積Ω之垂直懸掛桿 AB，其 A 端裝固，而 B 端之荷重 P 則與軸線之方向相同；L 為 AB 之長度，D 為其單位體積之重量。

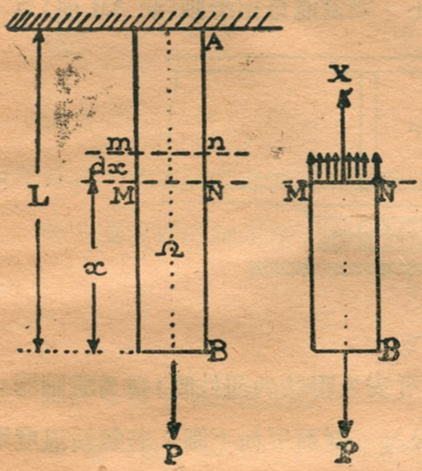


圖 128

將 MNB 部分開，則位於 MN 剖面上之內力合力 X，將等於 P 力與 MNB 部分體積之重量的合力，其方向則相反。

故；

$$X = P + \Omega x D$$

而單位內力則為；

$$n_x = \frac{X}{\Omega} = \frac{P}{\Omega} + xD \qquad (1)$$

最大單位內力將適合於 $x = L$，其值；

$$\boxed{n = \frac{P}{\Omega} + LD} \qquad (2)$$

此最大內力將發生於裝固端 A 之剖面上，因此，故有時稱此剖面為危險剖面，蓋此剖面上之內力為最大值。

若使 n 值等於該材料所規定之安全限，則可求得此桿之橫剖面積；

$$\boxed{\Omega = \frac{P}{n - LD}} \qquad (3)$$

若欲求此桿受力後之伸長量，則可觀察一最小部分 MNmn，其單位伸長量；

$$i_x = \frac{n_x}{E} = \frac{P}{E\Omega} + \frac{xD}{E}$$

此小部分之伸長度爲：　$i_x\, dx = \dfrac{P}{E\Omega}\, dx + \dfrac{D}{E}\, x\, dx$

而全桿之總伸長度則爲：

$$\boxed{l = \int_0^L i_x\, dx = \frac{L}{E}\left(\frac{P}{\Omega} + \frac{LD}{2}\right)} \qquad (4)$$

若桿之B端沒有荷重，則 P = o　而(2)與(4)方程式成爲：

$$(5) \quad n = DL \qquad\qquad (6) \quad l = \frac{DL^2}{2E} = \frac{n^2}{2ED}$$

102 例題　設有一鐵桿，則斷折荷重爲 35 公斤，彈限爲 20 公斤而安全限則爲 8 公斤。現擬求桿之長度，以使其僅有本身材料重量時，其剖面積上之單位內力爲 8 公斤。鐵之重量爲每立方公尺 7800 公斤。

應用(5)方程式：

$$8 = \frac{7800}{1000\,000\,000} \times L$$

因此；　$L = 1025641$ 公厘

應用(6)方程式以求其總伸長量；

$$l = \frac{DL^2}{2E} = \frac{7800}{2\,000\,000\,000} \times \overline{\frac{1025641}{19500}}^{\,2} = 210 \text{ 公厘}$$

現擬再求能使桿斷折時之長度；則由(5)式：

$$LD = 35$$

可得：　$L = \dfrac{35 \times 1000\,000\,000}{7800} = 4487180$ 公厘

103 剖面積等量抵抗力之桿　由 101 節之敘述，可知等剖面積桿中，僅有上端A剖面之內力等於所規定之安全限，至由 A 至 B 全桿長度上之他剖面之內力則少於安全限；因此全桿之長度各剖面太過於安全，故亦工程師所應計劃而避免之。

此外，桿之下部剖面，不僅材料受力太少，且因材料過重之緣故，而使上部剖

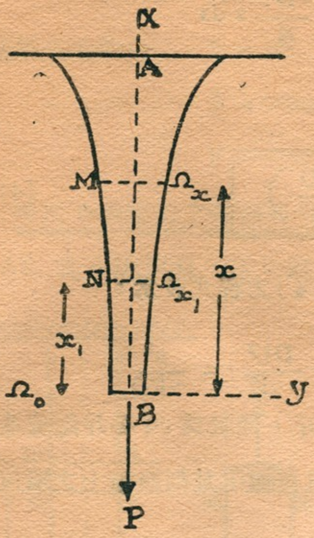


圖 129

面受無益之荷重。

因此，等剖面積之桿，於材料之應用上爲不經濟。

關於材料之量值，由理論上之改進，可使桿上之各剖面的內力皆等於所規定之安全限，此等桿稱爲剖面等量抵抗力桿。

現擬求此桿的形狀方程式：設 129 圖爲一垂直軸線桿 AB，A 端裝固，而 B 端則有一重量 P；一剖面積上之總內力是等於 P 重量加 MB 段材料本身之重量；若欲求重量之值，則可觀察一任何剖面 N與其最小之部分，其重量：

$$D\Omega_{x_1}\,dx_1$$

而 MB 部分之重量則爲；
$$\int_0^x D\Omega_{x_1}\,dx_1$$

M 剖面上之總內力爲；
$$P+\int_0^x D\Omega_{x_1}\,dx_1$$

因此，M 剖面上之單位內力公式：

$$\frac{P}{\Omega_x}=\frac{1}{\Omega_x}\int_0^x D\Omega_{x_1}\,dx_1$$

此內力應等於安全限 R，故其方程式：

$$\frac{P}{\Omega_x}+\frac{1}{\Omega_x}\int_0^x D\Omega_{x_1}\,dx_1=R$$

此方程式爲拉力或壓力之等量抵抗力方程式，他可書爲下式：

$$P+\int_0^x D\Omega_{x_1}\,dx_1=R\Omega_x$$

取其引數，並注意其積分數是以 x 爲函數而不是 x_1：

$$D\,\Omega_x\,dx = R\,d\Omega_x$$

由此；
$$Ddx = \frac{Rd\Omega_x}{\Omega_x}$$

$$Dx = R\,l.\Omega_x + C$$

若指Ω_o為B端之剖面積則：

$$C = -R\,l.\Omega_o$$

將此值代入方程式中，則：

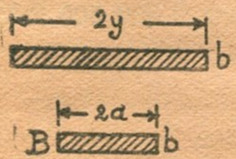
$$(1)\qquad Dx = R\,(l.\Omega_x - l.\Omega_o) = R\,l.\frac{\Omega_x}{\Omega_o}$$

因此；
$$l.\frac{\Omega_x}{\Omega_o} = \frac{Dx}{R}$$

或 (2)
$$\boxed{\Omega_x = \Omega_o\, e^{\frac{Dx}{R}}}$$

此方程式卽Ω_x以 x 為函數之變差剖面，以求得等抵抗力剖面桿○

若剖面為長方形，其等量厚度為 b，則；



$$\Omega_x = 2by,\qquad \Omega_o = 2ba$$

而其側面之方程式遂成：

$$Dx = R\,l.\frac{y}{a}$$

圖 130

以普通對數為函數； $Dx = 2.3\,R\,(\lg y - \lg a)$ (3)

此等量抵抗力剖面之側面為一對數弧線○

104 例題 設有一鐵桿垂直懸掛，除其材料本身重量之外，尙有一荷重 1000 公斤；現若假定其剖面為長方形，其等量厚度為 20 公厘，安全限 R = 8 公斤每方公厘，材料重量 $D = \frac{7800}{1000\,000\,000}$ 每立方公厘，桿之下端剖面為 2ba，現擬求桿之側面形，其方程式為：

$$2a \times 20 \times 8 = 10000 \text{ 公斤}$$

由此；　　$a = 31,25$ 公厘

將此值置入(3)方程式中而演算之，可得：

$$\lg y = 0,0000004239x + 1,49485$$

若使	$x = 100$ 公尺	則可得	$y = 34,45$ 公厘
	$x = 200$ 公尺		$y = 37,99$ 公厘
	$x = 300$ 公尺		$y = 41,80$ 公厘
	$x = 400$ 公尺		$y = 46,18$ 公厘
	$x = 500$ 公尺		$y = 50,91$ 公厘

使剖面積爲整數，則可得各面積；

若	$x = 0$	面積爲	20×63 方公厘
	$x = 100$ 公尺	,,	20×70 ,,
	$x = 200$,,	,,	20×76 ,,
	$x = 300$,,	,,	20×84 ,,
	$x = 400$,,	,,	20×92 ,,
	$x = 500$,,	,,	20×102 ,,

若欲知此剖面等抵抗力桿材料之經濟，則可與一荷重 1000 公斤及500公尺長之等剖面積桿相比較，此等剖面積桿應爲 20×122 方公厘。

剖面等抵抗力桿於其全長度上有一等伸長係數，其公式：

$$i = \frac{\sigma}{E} = \frac{8}{19500}$$

因此，其總伸長量：

$$l \times \frac{8 \times 500000}{19500} = 205 \text{ 公厘}$$

至等剖面積桿之總伸長量則由101節之(4)公式

$$l = \frac{500000}{19500}\left(\frac{10000}{20 \times 122} + \frac{500000 \times 7800}{2000\,000\,000}\right) = 155 \text{ 公厘}$$

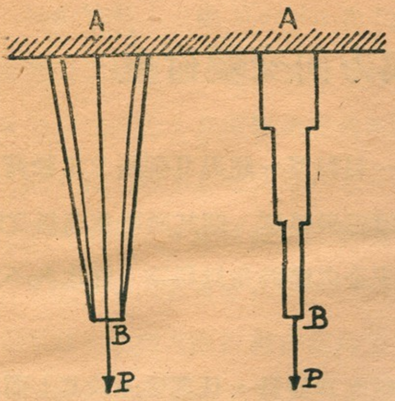


圖 131

現在所定之等抵抗力剖面桿之形狀，實在能減少很多之材料，但於人工之製造上則不經濟，因爲彫刻一鐵桿而使其成對數弧線形，並不是一容易之工作，因此，於實用上，多以相近之形狀以代正確理論之形狀，如梯形或級狀形，(圖 131) 蓋求其便於工作，故雖於材料上失去多少經濟，然可取償於工值。

第三章　變量重複荷重與方向交變荷重

105 常數荷重　由 Thurston 教授之經驗，一材料受一超過其彈限之常數荷重，則似乎於一定之時間內能使其斷折，此荷重若離彈限較遠，則其所發生斷折之時間亦較短；反之，凡常數荷重少於彈限時，則其安全之時間為無窮遠，而永久不至發生斷折。

106 變量重複荷重　材料上之外力不為常數而為變量，且重複施於其上而同方位及同指向者，稱為變量重複荷重 (repetition load)。

107 臆說　當研究拉力時，已知用何種觀察以定安全限及安全係數的選擇。若於此觀察中，將材料上所受之力變量，則影響於其所選擇之安全限與安全係數。

經驗的事實，若以兩不同方向力繼續曲摺一鐵線而使其斷折，則使其斷折的力量，必與普通唯一方向的力量者不同。

蓋因一物體受力於較長的時隙 (interval) 中，則其分子有充分的時間以恢復其原有的地位，且若其所受之力不超過該物體的彈限，則該物體的抵抗量未受改變。

但若反之，一物體於短時隙中，繼續受力，則於此兩繼續力情勢之下，物體不能再取得其原來的形狀與內部的組織；於第一次施力之後，物體已成為變形，故第二次力所加之物體，實為已變形之物體，其分子的損害，當較第一次受力時為大。

因此，可估計一棱柱體，若受常數載重，如樓板的小桁；或受變量載重，如鐵橋上格梁的鐵杆；其平衡的條件自然不同。同時，更應估計着其最不利的狀態，不僅屬於載重的變值，而尤以力的指向不同為尤甚，蓋因格梁鐵杆忽受擠壓，忽受拉引。

此外，棱柱體所受的損壞，亦與交變往還的次數有密切關係。因此，應該深刻的研究此問題，以便於各種狀態之下，定其安全係數。

此問題至今，尚未能由計算法可以得着較滿意的解決。但僅能尋實驗所求得者，而復經審核認為証實的公式。

108 實驗　由 Woehler 與 Spangenberg 二氏之實驗，似乎一金屬桿能荷一由 0 至彈限之變量力，而其重複次數為無窮大而不至斷折，換言之，為能荷一每方公厘 n 公斤之拉力，其重複次數為無窮大，而每加力之時間距離，則為將力移開之時間，然 n 值始終不超過彈限。若 n 超過彈限，則於一定重複次數之後，必至發生斷折，若 n 值較大，則使斷折之重複次數較少。

Woehler 氏之實驗於 1857 年舉行，其試驗之材料為 Phenix 公司所製造之鐵車軸 (axle)，此鐵之斷折荷重為每方公厘 32,7 公斤。

其試驗之結果如下表：

拉力於每方公厘上之公斤數量		使材料斷折之重複次數
最小值	最大值	
0	35,28 公斤	800
0	32,34 公斤	106900
0	29,40 公斤	340853
0	26,46 公斤	409481
0	26,46 公斤	480851
0	23,52 公斤	10141645
14,7 公斤	32,34 公斤	2273424
17,64 公斤	32,34 公斤	4000000

由此表可以觀察着：

1 此鐵車軸能承受一變量重複力 35,28 公斤每方公厘，而至 800 重複次數方行斷折；因此，其抵抗力大於普通之斷折荷重。此種現象似乎為不可能之事，但其實不然，確有解釋之理由；實在的，Woehler 氏作此實驗時，其施力之時間極短為 12 秒，故每力加於車軸上時沒有充足的時間可以使全車軸之材料感覺着其全部力量，而亦沒有充足的時間以使材料上纖維之損壞，故宜使材料中之纖維受 800 次之重複荷重時，方能發生斷折。

2 使鐵車軸斷折之次數，若其最大荷重減輕，則此次數應增加，而於每方公厘荷重 23,52 公斤時，其次數忽然的應極大增加。

132 圖爲上表之圖示，其縱軸線上內力比例尺爲每 2 公厘代表 1 公斤，於橫軸線上重複次數之比例尺爲每 1 公厘代表 100000 次，此弧線於縱距上自 18 至 20 公斤時，則近於垂直線而成漸近線 (asymptote)，此卽証明着，若最大內力由 18 至 20 公斤間，無論重複之次數如何大，而材料始終不至斷折。Woehler 氏雖無求所用鐵料之彈限，但他推測其彈限大概近於普通所採用之值 20 公斤。

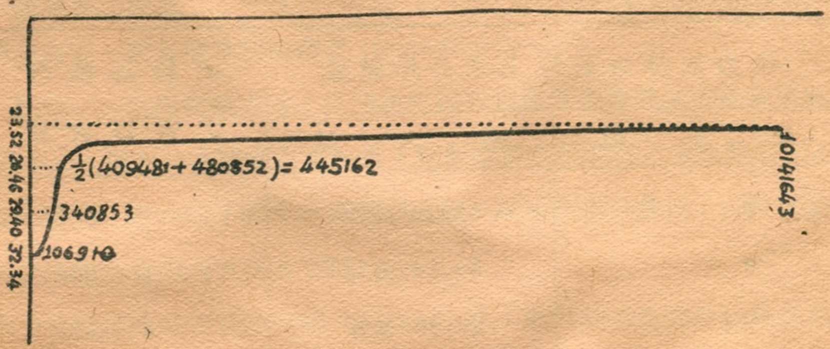


圖 132

重複荷重之變量與其由最小值等於零至最大值，亦可取其最小值等於一較大荷重，若如此，則其最大值超過彈限時其斷折更不可避免的，但其使斷折之重複次數則較多，例如上表所表示者，荷重之變量由 0 至 32,34 公斤時，其重複次數僅爲 106900 次，則發生斷折；但於同一鐵軸上，若荷重變量由 14,7 公斤至 22,34 公斤時，則其使鐵軸斷折之重複次數爲 2273424 次，若荷重變量由 17,64 公斤至 32,34 公斤，則其重複次數爲 4000000 次。

109 方位相同指向交變力　重複變量力可施於一同方位與同指向上，然亦可施於一指向相反的方位上，換言之，爲變量力之發生由壓力而至拉力；因此，卽由負號而至正號，故稱之爲方位相同指向交變力。

Woehler 氏用同上之 Phenix 鐵車軸爲實驗，此鐵料之斷折載重爲 32,7 公斤，而其彈限則大概爲 20 公斤左右；當實驗時，此車軸置於其枕墊(Cushion)上而旋轉

，其兩端則置有一常數荷重，因此車軸上聯續不斷的受一撓曲力矩；因車軸之旋轉，其各纖維則受同力量之拉力與壓力的交變力，此正為鐵路上車軸荷重時之現象。

由此實驗所得之結果，Woehler 氏尋得：若鐵料中之內力為 11,7 公斤每方公厘時，則無論其指向交變力於車軸重複次數之如何大，而不能使車軸斷折；若內力超過 11,7 公斤時，則經過一定重複次數之指向交變力之後，車軸必發生斷折。

下表為其實驗所得之結果：

由拉力與壓力所生之內力以公斤與方公厘為單位其計算之公式 $n=\frac{MV}{I}$	使車軸發生斷折之同方位而指向交變力的重複次數
23,52 公斤	56430
22,05	99000
20,58	183145
19,11	479490
17,64	909810
16,17	3632588
14,70	4917992
13,23	19186791
11,76	至 132250000 仍不發生斷折

若將此表用圖示出，將內力置於縱軸線上，重複次數置於橫軸線上，則可得着一弧線，於 11 公斤時近垂直線為漸近線，換言之，於指向交變力中，內力於此值之鄰近時，方能求着不斷折之界限；然此不斷折界限極近於材料彈限之一半。

由上實驗所得之結果，無論何種荷重，皆有一定之最大內力 n_1，於未超過此 n_1 時則無論重複加力之次數如何大，亦不至使材料發生斷折。此 n_1 值 Considere 氏名為危險限 (dangerous limit)。

110 <u>Woelher 氏的定律</u>　由此實驗的結果，若定 A 與 B 為各指向的最大力量

，則可歸納得 “Woelher 氏定律” 如下：

1 若載重爲永久 (permanent) 及常數 (A＝B)，則其危險限等於斷折載重○

2 若兩力變量由 A＝O 至 B，則其危險限等於彈限（力量變量而方位指向相同)○

3 若 A＝－B，卽兩最大力量相等而方位相同指向相反，則其危險很大概等於彈限之一半○

由 Woelher 氏定律所歸納的結果，尙有討論的價值；蓋由最近 Bauschinger 氏由實驗所得 R_1 之值，則較 Woelher 氏所得者爲高，其表如下：

材料名稱	斷折載重（以方公厘爲單位）	變量的斷折載重（以方公厘爲單位）	方向交變的斷折載重 (A＝－B)（以方公厘爲單位）
	斤	斤	斤
揀鐵 (puddling iron)	34,80	20	17,7
輭鋼（各類）	43,6	24	19,8
輭鋼（各類）	40,5	22	19,8
輭鋼（各類）	40,2	24	22,6
Thomas 鋼	61,2	30	30
鐵軌鋼	59,4	28	28
汽鍋鋼板	45,5	34	19
鋼板 (plate of steel)	33,5	22	16

由上表，可察出方向交變的斷折載重與彈限載重頗爲鄰近，然由 Woelher 氏所得的經驗，則僅得彈限載重之一半○

111 Woelher 氏定律的應用　　現爲安全起見可以危險限之值代彈限○而定其安全限○

德國工程師多採取 $\frac{1}{3}$ 之係數於危險限中以定其安全限○

法國 1891 年的法規，則用他法以定此安全限○ 他是於普通習慣的安全限中，

加增或減去一係數；此係數的變量是依據材料上所受之最大絕對值 A 與 B。

設 A 爲直接外力的最小數，B爲最大數，則法國1891年之法規所定的安全限：

	單位內力	
	同指向	不同指向
鋼	$R=8+4\dfrac{A}{B}$	$R=8-4\dfrac{A}{B}$
鐵	$R=6+3\dfrac{A}{B}$	$R=6-3\dfrac{A}{B}$

下列之表爲金屬材料用於建築上之安全限，其值以方公厘與公斤爲單位。

表中之三種荷重：

A　靜力荷重

B　變量荷重，由零值繼續增加至最大值，或由最大值至零值。

C　變量荷重，由負號之最大值繼續增加至正號之最大值，或爲相反之變值。

Woehler 氏定此三種荷重的安全限之關係：

A	B	C
3	2	1

實用上之安全限表

材料之名稱	拉力 R_e			壓力 R_p	
	A 靜力荷重	B 由零至最大值之變值荷重	C 由負號最大值至正號最大值之變值荷重	A 靜力荷重	B 由零至最大值之變值荷重
煉鐵	9	6	3	9	6
最輭之鋼	9	6	3	9	6
極輭之鋼	10,5	7	3,5	10,5	7
輭鋼	12	8	4	12	8
半硬鋼	13,5	9	4,5	13,5	9
硬鋼	15	10	5	15	10
輭鑄鐵(機械用)	3	2	1	9	6
鑄鋼	6至9	4至6	2至3	9至12	6至9

112 例題　設有一鐵橋格梁，其鐵杆受橋本身重量拉力 4000 公斤；當火車至橋之一端時，則增多一拉力3000公斤；若火車至橋之他端時，則再受一壓力6000公斤。現擬求鐵杆之 R。

鐵杆之最大內力：

當火車於第一位置時，其最大外力爲 4000＋3000＝7000 公斤。

當火車於第二位置時，其最小外力爲 4000－6000＝－2000 公斤。

故其總對值 (obsolute value)：

$A=2000$；　　$B=7000$；

此 A，B 二力爲方向相反；而梁料爲鐵，故其安全限公式；

$$R=6-3\frac{A}{B}$$

$$R=6-3\times\frac{2000}{7000}=5,14\text{ 公斤}$$

第四章　壓力與拉力中之分子工作

113 分子工作　當一桿受拉力或壓力時，則桿必發生伸長或縮短之變形，當其伸長或縮短時所生之抵抗工作稱爲分子工作或動力抵抗；由此工作可以和緩外力之衝擊 (Shock)；外力若少於彈限時，則此工作可用分析與圖解法以尋求之，若外力超過彈限時，則其工作之值僅能用圖解法以求之。

設如圖 133，有一桿長爲 L，此桿受一拉力之影響而發生一伸長量 x，於此時

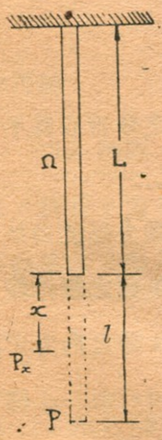


圖 133

桿上之外力爲 P_x，若 P_x 使桿再生一最小伸長量 dx，則其最小工作爲 $P_x\,dx$，而其至 l 伸長量之總工作則爲：

$$(1)\qquad \boxed{\mathfrak{z} = \int_0^l P_x\,dx}$$

此即爲拉力動力抵抗力之普通公式，至壓力之工作亦與此同。

因有此種抵抗力，故桿能抵抗衝擊之動力，或驟加之荷重，或迅速變值之外力。

若外力小於彈限，而桿之剖面變量法亦能先知，則可求 P_x 值以 x 爲函數幷解求積分數，因此，便可由分析法而求得動力抵抗值。

現設桿之剖面爲常數Ω，則：

$$n_x = Ei_x = E\frac{x}{L} = \frac{P_x}{\Omega}$$

因此；

$$P_x = \frac{E\Omega}{L}x$$

而；

$$(2)\qquad \boxed{2 = \int_0^l P_x\,dx = \frac{E\Omega}{L}\int_0^l x\,dx = \frac{E\Omega\, l^2}{2L} = E\Omega\frac{l}{L}\cdot\frac{l}{2} = P\frac{l}{2} = \frac{\Omega L}{2E}n^2}$$

n 爲最大內力，當伸長量達至 l 時剖面上之單位內力。

由此方程式，可知若桿之剖面爲等面積時，其分子工作等於最大力量P乘其一半之最大伸長的積數○

若桿發生伸長之變形由 x 至 l 時，其分子工作將拉長由 x 至 l，則其內力由 n_x 至 n 之公式：

$$\mathfrak{T} = \int_x^l P_x \, dx = \frac{E\Omega}{2L}\left(l^2 - x^2\right) = \frac{\Omega L}{2E}\left(n^2 - n_x^2\right) \tag{3}$$

若觀察桿中之一纖維，其剖面積爲 dw 長爲 dz，則此段之纖維分子工作當內力由 n_1 至 n_2 時之普通公式；

$$dT = \frac{dw \, dz}{2E}\left(n_2^2 - n_1^2\right) \tag{4}$$

若桿發生最大伸長量 l 時而 n 內力超過彈限，則(1)方程式之分析法爲不可能，而宜用相近之積分法○

設現擬求一1公尺長與1方公釐剖面積鋼桿(車廂之簧鋼)之動力抵抗力○若於

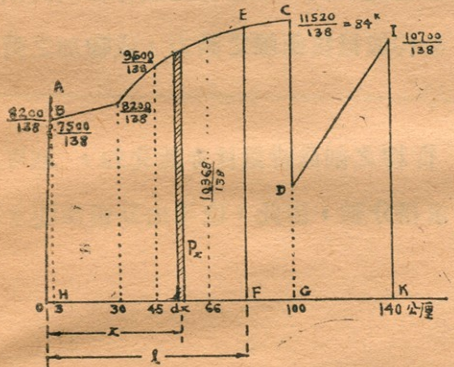


圖　134

1公尺長與1方公釐剖面之鋼桿變形圖線中，置伸長量等於 x 時之內力 P_x，則其分子工作爲 $[P_x \, dx]$ 由一小梯形所代表；因此，若桿之總伸長量爲 l，則其分子工作等於 OABEFO 之面積○

若桿之長爲 L 公尺，剖面積爲 Ω 方公釐，則其伸長量爲前桿 L 倍大，而 P_x 力亦比前桿 Ω 倍大，故同一最後之內力，而其工作則 $L\Omega$ 倍大；

$$\int_0^l P_x \, dx = \text{OABEFO}\,(\text{面積}) \times L\Omega$$

斷折之總工作等於134圖中之面積乘桿之體積 ΩL；故其公式爲：

$$\Omega L \times \text{OABCDG}\,(\text{面積})$$

114 內位能（internal Potential energy）　變形桿中所儲蓄之工作 $\int P_x\,dx$ 亦稱爲此桿之內位能。

內力於彈限之下，所儲蓄之全部內位能，可由機械能（mechanical energy）以歸償之；但若內力大於彈限，則一大部之變形工作消散爲磁化（Magnetize），電，熱與永久變形。

若給：　T_e 爲桿上外力之工作

T_i 爲有效的內位能

T_c 爲桿變形時所失去之工作

則可得；　$$\boxed{Te = Ti + Tc}$$

115 例題　斷折工作（Resilience）　現擬計算一鋼桿（車廂之簧鋼）長1公尺，剖面1方公釐，其變形圖如134圖；其工作若至彈限，則可得OAH三角形，其面積代表動力彈性抵抗力：

$$\frac{8200 \times 0{,}003}{2 \times 138} = 0{,}09 \text{ 公斤尺}$$

第113節之（2）公式可給其同植：

$$\frac{E\mathit{\Pi}\lambda^2}{2L} = \frac{20000000000 \times 0{,}000001 \times 0{,}003}{2 \times 1\text{尺}} \; 0{,}09 \text{ 公斤尺}$$

由彈限至起初發生收縮變形時之工作，則爲多角HBCGH之面積：

$$\frac{7500+8200}{2\times 138} \times 0{,}027 + \frac{8200+9600}{2\times 138} \times 0{,}015 + \frac{9600+11520}{2\times 138} \times 0{,}055 = 6{,}712 \text{斤尺}$$

從起初收縮變形之後，桿之動力抵抗力極微，故可以忽畧之。

最後之尋求可得着1公尺長與1方公釐剖面桿的總動力抵抗力爲：

$$0{,}09 + 6{,}712 = 6{,}802 \text{ 公斤尺}$$

其値比較動力彈性抵抗力約大75倍。

若桿之長爲L公尺，剖面積爲Л方公釐，則其總動力抵抗力之公式：

6,8[illegible]公斤尺。

外力達至使桿斷折時之總工作或總動力抵抗力，稱為斷折工作（Resileince）

116 凹口之影響　假設如前節之桿，於其剖面積表面上削一深溝等其剖面積10%，則於此深溝之剖面積上，其發生收縮現象時之荷重：

$$\frac{1}{138}\left(11520-\frac{11520}{10}\right)=\frac{10368}{138}\text{公斤}$$

於 135 圖上，此荷重符合一總伸長量每尺長 66 公釐；因此，凹口桿每公尺長與每方公釐剖面之斷折工作

$$0,09\times\frac{7500+8200}{2\times138}\times0,027+\frac{8200+9600}{2\times138}\times0,015+\frac{9600+10368}{2\times138}\times0,021$$

$$=4,112\text{ 公斤尺}$$

故剖面積上之凹口雖僅為桿之剖面10%，而其動力斷折抵抗力則由 6,802 減至 4,112 公斤尺；其減少之成份為 39%，然靜力學之抵抗量則僅減少 10%。

若桿長為 1 公尺與 100 方公釐之剖面，但剖面上之凹口處為 90 方公釐，則其動力斷折抵抗力為 411 公斤尺；至於與其長度相等，而沒有凹口之剖面為 61 方公釐桿，其動力斷折抵抗力則大概與其相等；實在的為；

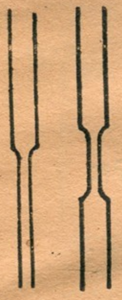


圖 135

$$61\times6,8=415\text{ 公斤尺}$$

若將 100 方公釐剖面而有凹口 10% 剖面積之桿代以一 90 方公釐等剖面積桿，則其動力斷折抵抗力將為：

$$90\times6,8=612\text{ 公斤尺}$$

此各種數目字表示着，雖一細微之凹口，其於動力抵抗力上，發生損壞之影響極大，換言之，為影響於其抵抗衝擊，震動與任何動力的能力。

117 衝擊（Shock）　設如圖 136，一重量 P 由 h 高度墜下，置於一長 L 與等剖面積Λ之桿上，其受力後之最大伸長為 l。

現可簡畧桿之質量（mass）與其分子之震動，而僅觀察其衝擊質量 $\frac{P}{g}$；並假定

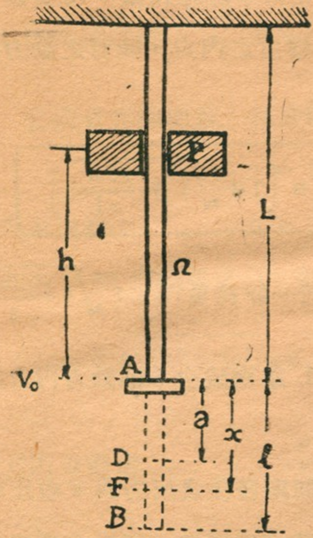


圖 136

衝擊之效力卽刻傳達於全桿上，而使桿發生抗抵衝擊之工作；應用動力方程式於 P 重量之質量，由 A 至伸長量 l 之 B，可得：

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_o^2}{2}=\int_A^B Q\,ds\cos\alpha$$

V_o 爲 P 質量於 A 點時之速率；

$$V_o=\sqrt{2gh}$$

V 爲此同質量於B 點時之速率，此速率等於零。

$\int_A^B Q\,ds\cos\alpha$ 爲施於 $m=\frac{P}{g}$ 質量上各力由 A至 B 之工作總數，此等力爲重量 P與桿之反力；P 之工作爲正號[$+Pl$]，蓋因 α 等於零；桿反力之工作爲動力抵抗力 R_v 如前節 113 所求之值，此工作爲負號，因 α 等 180°。

若將各值代入普通動力方程式中，則可得：

$$-Ph=+Pl-R_v$$

若 l 之伸長量符合於彈限之內力，則可得：

$$R_v=\frac{E\quad l^2}{2L}$$

因此；

$$-Ph=+Pl-\frac{E\Omega}{2L}l^2$$

或者；

$$l^2=2\frac{PL}{E\Omega}l-2\frac{PL}{E\Omega}h=o$$

但是，$\frac{PL}{E\Omega}$ 爲 P 重量於靜力學時使桿所發生之伸長量 a，因此可得；

$$l^2=2al-2ah=o$$

故：

$$\boxed{l=a+\sqrt{a^2+2ah}\;;\quad 或\ \frac{l}{a}=1+\sqrt{1+\frac{2h}{a}}}$$

此卽 P 重量由 h 高度墜下時所發生之動力伸長量，以靜力學之伸長量 a 爲函數；於彈限之下，其內力是與伸長量成比例，故可得 Pb 衝擊力之內力，換言之動力內力之値：

$$\boxed{n_1=\frac{P}{\Omega}\times\frac{l}{a}=\frac{P}{\Omega}\left[1+\sqrt{1+\frac{2h}{a}}\right]=n\left[1+\sqrt{1+\frac{2Eh}{nL}}\right]}$$

此公式表示着一衝擊力Pb,對於在彈限內內力之效力，等於一靜荷重$P\left[1+\sqrt{1+\frac{2h}{a}}\right]$之效果，上式之$n=\frac{P}{\Omega}$爲靜力之內力；且可察出若 L 逐漸減少，則動力內力依着逐漸增加○

上面解說的理由，是假定衝擊質量$\frac{P}{g}$與被衝擊桿間所發生之反力與 x 成比例（圖 136），故由零爲起首而逐漸增加；此僅於和緩衝擊時尚稱正確，遲緩之衝擊可認爲一連續靜力動作；但於一猛力衝擊（如槍彈之射擊）時，則此理論爲不正確，因他集中其效能於一衝擊點，然前面之理由則假定其效能卽刻傳達於被擊之全桿上○

118 驟加荷重　驟加荷重，是與一重量 P，下墜高度 h 等於零之衝擊同一作用，換言之，爲 P 力置於桿上時沒有速率；若於前節之公式中使；

$$h=o,\qquad l=2a$$

故其伸長量兩倍於一力在靜力之狀態時，施於桿上所發生之伸長量○亦卽表示着，驟加荷重所發生之內力爲兩倍於靜荷重所發生之內力○

於此類時 $V_0=o$；而外力工作爲；P. 2a 比 113 節大 4 倍○而內力工作亦大 4 倍；

$$\mathfrak{T}_i=\frac{E\Omega}{2L}l^2=\frac{E\Omega}{2L}(2a)^2$$

此增大 4 倍的原因，卽由 P 在起首置於桿上時已有全力量之作用○

119 例題　設有 1000 公斤重量施於一長 10 公尺，剖面積寬 250 方公厘之鐵桿上；若其荷重爲靜狀態，則其伸長量：

$$a=L\times\frac{P}{S\times E}=10000\times\frac{1000}{250\times 20000}=2\text{ 公厘}$$

而其內力則達至；　$n = Ei = 20000 \times \frac{2}{10000} = 4$ 公斤

若荷重爲驟加重，則其最大伸長爲；

$$l = 2a = 2 \times 2 = 4 \text{ 公厘}$$

而內力則爲；　$n_1 = 2n = 2 \times 4 = 8$ 公斤

若1000公斤重量由1公分之高度墜下，則可得；

$$l = a + \sqrt{a^2 + 2ah} = 0{,}002 + \sqrt{0{,}002^2 + 2 \times 0{,}002 \times 0{,}01} = 0{,}0086 \text{ 公尺}$$

而其內力則爲；　$\frac{P}{\Omega} \times \frac{l}{a} = 4 \times \frac{8{,}6}{2} = 17{,}2$ 公斤

第五章　剪力

120 剪力與剪內力　當一物體受兩位於同一方位上而為分離指向之力時，則該物體上必發生拉力。若此兩力位於同一方位上而為相向之指向，則該物體上必發生壓力。若兩力各位於一平行線或一平行平面上，則於此兩力之間，必發生剪內力與撓曲內力。如圖 137，A 部裝固於 B 部，而於 C 部上則施一力 P 與 B 平行，因此，B 部上亦發生一反力施於 A 部與 P 相等而方向相反。故位於 B 部之上平面與 GFE 平面間之 A 部材料，承一對等量與指向相反之平行力，使此部材料發生剪內力與撓曲內力。剪內力之大小，是依據其外力之力量與 A 材料之剖面積的大小而異。至撓曲內力，則依據外力力量與 A 剖面積之外，尚與兩力之分隔距離有關。若 C 部與 B 部極相近，則 P 與 P' 兩平行力之距離極短而可將其忽畧，其單位撓曲內力因之極小將近於零；然單位剪內力則不因此而有所變更。此種僅使材料受 P 剪力而沒有撓曲力矩之外力，稱為簡單剪力。此剪力 P 大概是平均的分佈於 A 之剖面中，故若稱 t 為單位剪內力，S 為 A 之剖面積則：

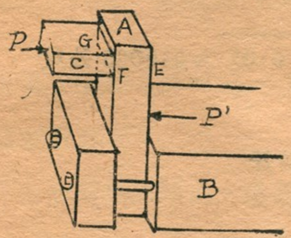


圖　137

$$\boxed{t = \frac{P}{S}}$$

於拉力與壓力中，單位分子力是等於外力之總量被其垂直剖面積所除得之商數。然於剪力中則反是，其單位分子力是等於外力之總量被其平行剖面積所除得之商數。

121 剪力之彈性係數　試觀察兩鄰剖面積 AB 與 CD，其距離為△S，若 AB 為固定剖面(圖 138)，則其受剪力 T 之影響時，CD 被移至 C'D'。若稱 i 為剪力之單位變形其公式：

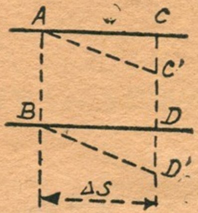


圖　138

$$i' = \frac{DD'}{\Delta S}$$

由經驗上所求得，証明着 i' 與 T 值之關係，是如拉力中所求得之公式：

$$\frac{T}{S} = F' \frac{DD'}{\Delta S} \quad 或 \quad \boxed{t = E' i'}$$

E' 稱爲剪力的彈性係數，其值之變差是由 $\frac{2}{5}$ 至 $\frac{1}{3}$ E，E 爲拉力中之彈性係數。

故：

$$\frac{1}{3} E < E' < \frac{2}{5} E$$

122 <u>立體積變值與立體積彈性係數</u>　若一立體於一方向上受力，則該立體必稍變其體積。若其外力爲壓力，則其施力方向之長度必短縮，而垂直於力之方向的剖面積變大；若其外力爲拉力，則得相反之結果。

若一單位立體積受一拉力，而使其施力方向上之長度爲 1+i，至其橫剖面上各邊之長度爲 1−mi，　m 爲 Poisson's 係數，i 爲單位長度變形。

因此，剖面之面積爲：

$$(1 - mi)^2 = 1 - 2\,mi + (mi)^2$$

因 $(mi)^2$ 之值甚小，永不大於 0,001，故其自乘值亦更小，遂可將其簡畧，其概值：

$$\boxed{剖面積 = 1 - 2\,mi} \qquad (1)$$

乘以長度：

立體積 $=(1-2\,mi)\,(1+i) - 1 + (1-2\,m)\,i - 2\,mi^2$ 最後項之 $2\,m.i^2$ 亦可簡畧，故其：

$$\boxed{體積概值 = 1 + (1-2\,m)\,i} \qquad (2)$$

$$\boxed{增加之體積 = (1 - 2\,m)\,i} \qquad (3)$$

以上各公式僅能適合於外力未嘗超過材料彈限以外之變形。

因 m 之係數常小於 0,50（其值之變差由 0,25 至 0,35），故一立體積受拉力之結果，爲增加其立積，然亦卽減小其密度（Density）。至受壓力之立體積則得相反之結果，爲減少立積與增加其密度。

立體積彈性係數　現設有一立體積置入於一液體中，其各面皆受液體之壓力，而使體積變形，其縮少之立體積值爲 v，其單位立體積變形 $\frac{\delta v}{v}$ 除單位面積上壓力 p 之商數，稱爲立體積彈性係數其符號爲 E_v，故：

$$\boxed{E_v = \frac{p}{\left(\frac{\delta v}{v}\right)} = \frac{pv}{\delta v}} \qquad (4)$$

例如有一立方公分之固體，其各方向所受之壓力爲每方公分 10000 公斤，受力後其立體積減少爲 0,9995 立方公分，則其立體積彈性係數：

$$E_v = \frac{10000}{0{,}0005} = 2 \times 10^{-7} \text{ 公斤每方公分}$$

注意 I　縱長方向上之變形與橫剖面上方向之變形的比例 m 可書爲 $\frac{i'}{i} = m$；

$$i' = mi = m\frac{n}{E}$$

若橫剖面上一任何邊之長度爲 λ，則其總變形：

$$\Delta\lambda = m\frac{n}{E}\lambda = m\frac{P}{ES}\lambda$$

大概之普通定律，可定 m 與 E 之值於各方向上皆爲常數，亦卽假定材料之組織於每點之四周各方向上爲同位元素（Isotrope）；此種相同之組織，若擴張至全部之材料，則此材料稱爲均勻物質（homogeneous matter）。

實在的，日常所用之固體，無一爲均勻物質與同位元素物質，但工程師則於計算上認其爲均勻物質。

II　若有一立方體邊長爲 a，其各面上受力之後，邊長爲：

$$a \pm \delta a$$

δa 之數為極小值，邊之直線變形為 $\frac{\delta a}{a}$，立體積之變值為 $(a \pm \delta a)^3 - a^3$，或可

簡畧 δa^3 與 δa^2 而書為：

$$\pm 3a^2 \delta a$$

因此，其變值為：

$$\frac{3a^2 \delta a}{a^3} = 3\frac{\delta a}{a}$$

比直線變形大三倍。

123 例題　設有一鐵桿，其長為 120 公厘，剖面積為 20×10 方公厘（如圖 139），若桿所受之拉力為 2000 公斤與桿軸平行。現擬求桿受力後之新寬度。

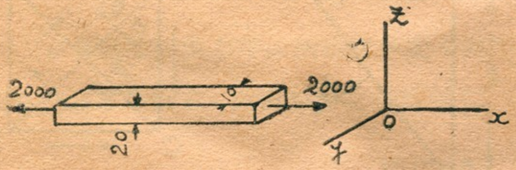


圖　139

桿之剖面積：

$$S = 10 \times 20 = 200 \text{ 方公厘}$$

故每方公厘面積上之力：

$$n = \frac{P}{S} = \frac{2000}{200} = 10 \text{ 公斤}$$

縱軸方向上之變形；

$$i = \frac{n}{E} = \frac{10}{20000} = 0{,}0005 \text{ 公厘}$$

桿縱軸上之總變形為：　$il = 0{,}0005 \times 120 = 0{,}06$ 公厘

鋼料之 Poisson 係數為 0,3 故；

$$m = \frac{i'}{i} = 0{,}3$$

oy 軸方向上之總變形　$\Delta\lambda = m\frac{n}{E}\lambda = 0{,}3\frac{10}{20000} \times 10 = 0{,}0015$ 公厘

oz 軸方向上之總變形：　$\Delta\lambda_1 = m\frac{n}{E}\lambda_1 = 0{,}3\frac{10}{20000} \times 20 = 0{,}003$ 公厘

剖面積 $S_1 = (10 - 0{,}0015)(20 - 0{,}003) = 199{,}94$ 方公厘

立體積 $V_1 = 199{,}94\,(120+0{,}06) = 24004{,}7964$ 立方公厘

若用(1),(2)兩方程式,則:

$$S_1 = 200\,(1-2\times0{,}3\times0{,}0005) = 199{,}94 \text{ 立方公厘}$$

$$V_1 = 24000\,[1+(1-2\times0{,}3)\,0{,}0005] = 24004{,}8 \text{ 立方公厘}$$

其所求得之數相同。

124 <u>橫剪力與縱剪力之等值</u> 若一立體上受單純之剪力(其物體上除由剪力所產生之壓力或拉力外,無壓力或拉力之外力), 則其平衡之成立,應有兩組剪力之存在,而此兩組剪力之力量必相等,換言之,爲橫剪力應等於縱剪力。

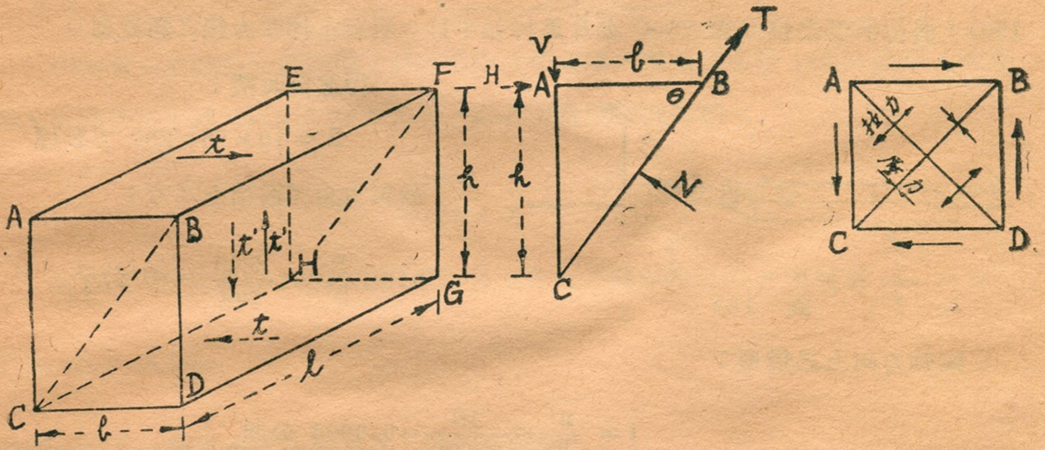


圖 140

設有 ABCDEFGH 之立體,其 ABEF 面上所受之單位剪力爲 t,指向向右,而 CDGH 面上之單位剪力亦爲 t,指向向左,此水平方向之剪力稱爲縱剪力,此組剪力之作用, 爲使立體向左旋轉,故若欲使立體成平衡,則於 ACEH 與 BDGF 兩平面上亦應有垂直剪力之存在,以發生一作用相等,指向相反之旋轉力矩,此垂直剪力稱爲橫剪力。

若欲証明 $t = t'$,則可書 ABEF, CHGD, ACEH 與 BFGD 各面上之總剪力爲: tbl, tbl, $t'hl$, $t'hl$;故:

$$h \times tbl = b \times t'hl$$

$$\boxed{t = t'}$$

125 由剪力所產生之壓力與拉力　設如前圖有一長方形立體僅受單純之剪力，其立體之平衡是由橫剪力與縱剪力之維持。現可觀察由CDFG之對角平面將其分為兩部，並使其左部之三角立體，由其各平面上之力而得着自由平衡。此種力共有四：上面向右水平剪力H，左面向下垂直與剪力V與斜平面上之垂直壓力N與對角線CB之平行力T。

若t為水平剪力及垂直剪力之力量則：

$$H = tbl \qquad\qquad V = thl$$

現可求斜平面上之垂直力：

$$N = H\,\mathrm{Sin}\,\theta + V\,\mathrm{Cos}\,\theta = tbl\,\mathrm{Sin}\,\theta + thl\,\mathrm{Cos}\,\theta \tag{1}$$

θ為斜平面與水平線所成之角度。斜平面上之單位壓力是等於其面積除N之商數。若稱CB為C，則斜平面之面積為Cl，將其除(1)方程式：

$$t_p = \frac{tb\,\mathrm{Sin}\,\theta}{C} + \frac{th\,\mathrm{Cos}\,\theta}{C} \tag{2}$$

因，$$\mathrm{Cos}\,\theta = \frac{b}{C}\,,\quad \mathrm{Sin}\,\theta = \frac{h}{C}\,,$$

故；$$\boxed{t_p = 2t\,\mathrm{Sin}\,\theta\,\mathrm{Cos}\,\theta = t\,\mathrm{Sin}\,2\theta} \tag{3}$$

若θ為45°角，則斜平面上之壓力為最大壓力，而其值等於剪內力；

$$\boxed{t_p = t}$$

若斜平面為ADEG，則其平面上所受之力為拉力與(3)方程式相同。其最大值與壓力最大值之方向成正角。若立體上僅受單純剪力，則於與剪力方向成45°角之平面上之壓力等於其相反之45°角的方向上之拉力，如140圖上所註明者。圖之下面剪力指向為向左，與右傾之對角方向成45°角，此對角平面上垂直着最大壓力，而最大拉力，則垂直於向左傾之對角平面上。

126 **彈性係數間之關係** 設如前取 E 爲縱向之彈性係數，E' 爲橫向之彈性係數，E_v 爲立體之彈性係數，現擬求其間之關係。

若一單位立方體，於各軸方向上各受一單位壓力，則與力平行之邊短縮一變形 $\frac{n}{E}$，而於與壓力成正角之邊，則拉長一變形 $m\frac{n}{E}$，故每邊上所受之變形爲一短縮變形 $\frac{n}{E}$ 與兩拉長變形 $2m\frac{n}{E}$；因此，各邊之長度總變形：

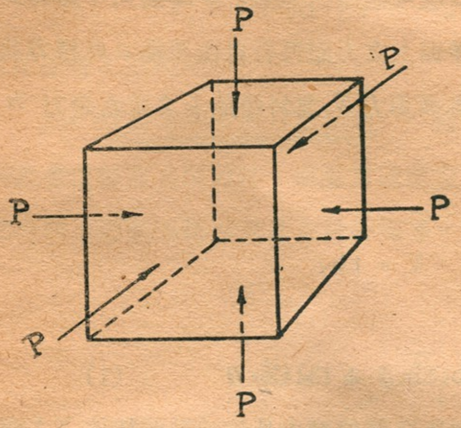


圖 141

$$\frac{n}{E}(1-2m)=i$$

各邊之長度遂成 $1-\frac{n}{E}(1-2m)$，而其立體積於變形後則爲：

$$\left\{1-\frac{n}{E}(1-2m)\right\}^3=1-\frac{3n}{E}(1-2m)+\frac{3n^2}{E^2}(1-2m)^2-\frac{n^3}{E^3}(1-2m)^3$$

因 $\frac{n}{E}$ 之値極小，故其高級乘積之項可以簡畧，而成：

$$1-\frac{3n}{E}(1-2m)$$

原來之立體積爲一單位，故其縮減量爲 $\frac{3n}{E}(1-2m)$

立體積彈性係數之定義爲：

$$E_v=\frac{n}{\frac{3n}{E}(1-2m)}=\frac{E}{3(1-2m)} \qquad (1)$$

或；

$$\boxed{E=E_v\cdot 3(1-2m)} \qquad (2)$$

現再求橫彈性係數與縱彈性係數間之關係。

設142圖爲一受剪力之立體積的四方正面。其受剪力之單位移動爲HI與HI'之角度θ的正切。於142圖之c類，其移轉角度爲剪力角度之一半。此位置中之對

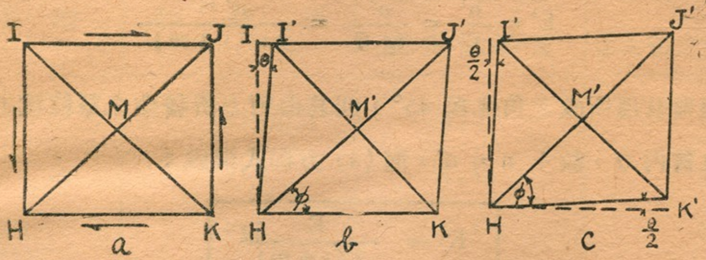


圖 142

角線與水平線成45°角。對角線之長度則改變，然其方向則仍與142圖之a類相同。此兩種變形之名稱不同，前者稱爲簡單剪，後者稱爲純粹剪。

若欲求剪力變形與直線變形間之關係，則宜尋求對角線HJ'與I'K'對於$\frac{\theta}{2}$角度間之關係

剪力加於此四方正面上之結果，是引長對角線HJ至HJ'，並縮短對角線IK至I'K'。一半之對角線HM與MK，其所受之變形亦與全對角線同。

若i爲單位拉內力所發生之單位變形，則沿HJ之伸長爲i(1+m)。此伸長量是由沿HJ對角線上之拉力所發生之i，及由沿IK對角線上之壓力所發生之mi等伸長量之總值。由同樣之狀況，沿IK對角線上之單位壓力的變形爲i(1+m)。

142圖之C類，其$\frac{\theta}{2}$角度爲45°與ϕ角兩值之差。ϕ角度之正切爲M'K'與HM'之比：

$$\operatorname{tg}\phi=\frac{M'K'}{HM'}=\frac{MK[1-i(1+m)]}{HM[1+i(1+m)]}=\frac{1-i(1+m)}{1+i(1+m)} \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\operatorname{tg}(45^\circ-\phi)=\frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}\phi}{1+\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}\phi}=i(1+m) \qquad (2)$$

若角度之值極小，則　$\operatorname{tg}\theta=2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=2i(1+m)$　(3)

因；
$$i=\frac{n}{E}\ ;\quad tg\theta=\frac{2n(1+m)}{E}$$

$$E'=\frac{n'}{i'}=\frac{n'}{tg\theta}=\frac{n'E}{2n(1+m)} \tag{4}$$

若對角線與其邊所成之角度爲 45°，則其由剪力所發生之單位拉力與單位壓力，各等於單位剪內力，故；$n=n'$，而(4)方程式遂成：

$$\boxed{E'=\frac{E}{2(1+m)}}$$

若　$m=0{,}25$　　$E'=\frac{2}{5}E$

　　$m=0{,}33$　　$E'=\frac{3}{8}E$

127 各種材料之剪力抵抗質　由經驗上之証明，關於金屬材料，其剪力之彈限，是等於 $\frac{4}{5}$ 之簡單拉力的彈限；因此，可取 $\frac{4}{5}$ 拉力之安全限爲剪力之安全限。

至他種材料之抵抗剪力斷折重量則如下表：

橡　木	剪力與其纖維成垂直	150至250 公斤	每方公分
	剪力與其纖維平行	90 公斤	每方公分
松　木	剪力與其纖維成垂直	200 公斤	每方公分
石灰岩		40 公斤	每方公分
士敏土泥漿		1,5 公斤	每方公分
石　膏		2,5 公斤	每方公分
混凝土		10至 15 公斤	每方公分

於實用上，大概若剪力垂直於其纖維上時，則取橡木與松木之安全限等於其 $\frac{4}{5}$R 之拉力安全限。

若剪力與其纖維平行，則橡木取 $\frac{1}{4}$R，而松木則取 $\frac{1}{10}$ R。

實用上所定之剪力安全限

材料名稱	靜荷重	由零至最大值之變值荷重	由正號最大值至負號最大值之變值荷重
揀　鐵	7,2公斤	4,8	2,4
最輭鋼	7,2	4,8	2,4
極輭鋼	8,4	5,6	2,8
輭　鋼	9,6	6,4	3,2
半硬鋼	10,8	7,2	3,6
硬　鋼	12	8	4
輭鑄鐵(機械材料)	3	2	1
鑄　鋼	4,8至8,4	3,2至5,6	1,6至2,8

注意　若材料上同時承有撓曲力矩與剪力，則此剪力不平均的遍佈於材料之剖面上；後面方論述其分佈之定律。

128 例題 a　計算一 Polonceau 屋架懸吊鐵條的交义器中之大頭釘，設此屋架懸吊鐵條的交义器中之裝置如 143 圖，其大頭釘之直徑為 20 公厘。

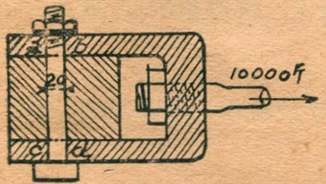


圖　143

若欲使大頭釘斷折，則宜剪斷其 ab 與 cd 兩剖面；故此大頭釘，稱為兩倍剖面工作之大頭釘。

剪力既為 10000 公斤；則每方公厘之剪內力將為：

$$t = \frac{10000}{\frac{2\pi d^2}{4}} = \frac{10000}{2 \times 706} = 7,1 \text{ 公斤}$$

此材料之拉力安全限，既定為每方公厘 10 公斤，則剪力安全限將為：

$$\frac{4}{5} \times 10 = 8 \text{ 公斤}$$

(b) 計算一蓋縫上所需之鉚釘　設有一鐵版 180 × 10 承一外力 14400 公斤，此鐵版爲兩部所構成，而用蓋縫及 釘將其裝聯(圖 144)。

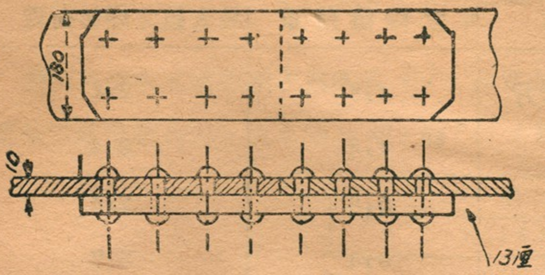


圖 144

關於計算蓋縫之鉚釘時，大概不可預算着由鉚釘之緊固所發生的黏力，而僅以其應抵抗之剪力來定其直徑。

若用 $d = 20$ 公厘直徑之鉚釘(直徑等於版之厚度的2倍)，則於蓋縫中置兩行。由釘孔之中心可至蓋縫之邊緣的距離，不能少於 1,5 d，而兩鄰釘孔的中心距離，則大概應少於 5 d 與大於 3 d；鐵版之剖面積爲1800 方厘。

若欲使蓋縫能代已斷之鐵版，則宜；

1 蓋縫之淨橫剖面積，最少宜等於已斷鐵版之剖面。蓋縫之斷折將於釘行之剖面上，故應：

$$\Omega_j = (180 - 2 \times 20)\ e_j \geq 1800 \text{ 方公厘}$$

$$e_j \geq \frac{1800}{180 - 2 \times 20} = 12{,}8 \text{ 公厘}，\quad \text{可取整數 } 13 \text{ 公厘}$$

2 蓋縫上每邊之鉚釘數量，宜足以使其剪內力僅等於鐵版上所准許的$\frac{4}{5}$內力：

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{14400}{1800} = 6{,}5 \text{ 公斤}$$

或者，亦可以令受剪力之鉚釘剖面積，最少應等於 $\frac{5}{4}$ 斷折鋼版之剖面積。

設 n 爲單剖面工作之 釘數量，如 144 圖所示者 (因爲，欲使鐵版分離僅宜將鉚釘剪斷一次)，故宜有：

$$n \cdot \frac{\pi d^2}{4} \geq \frac{1800 \times 5}{4}$$

因此：　　$n \geqq 7,1$

可取8鉚釘。

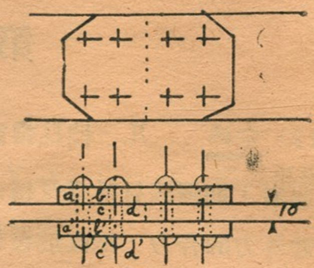


圖 145

若於接縫之上下面各置一蓋縫如145圖，則各鉚釘之被剪剖面爲雙剖面（因爲，若欲將兩部鐵版分離，宜將鉚釘剪斷於ab，a'b'，cd，c'd'），因此鉚釘之數量不用8枝而爲4枝。

第六章 撓曲

129 定義 凡一棱柱體於其長度之一點或數點上施以外力，而使該棱柱體發生彎曲者，則稱該材料爲受撓曲。

若外力的合力，垂直於棱柱體的中心纖維上，並與其剖面之對稱軸相混合者，則其撓曲稱爲簡單平面撓曲，棱錐體受此撓曲時其剖面積上沒有直立力。

若外力的合力位於棱柱體的剖面積的對稱軸平面上，而不與其中心纖維成垂直，則其剖面上，有直立力之存在，如拉力或壓力等，此撓曲稱爲混合平面撓曲。

若外力的平面不與棱柱體的對稱平面相混合，則其所發生之撓曲，稱爲偏倚撓曲；若其外力之合力與棱柱體之縱軸線成垂直，則其偏倚撓曲稱爲簡單偏倚撓曲；若其外力之合力不與其縱軸成垂直，則其偏倚撓曲稱爲混合偏倚撓曲。

簡單平面撓曲

130 剪力與撓曲力矩 於普通建築物上，其所用以抗撓曲的材料，多有一垂直對稱平面(如圖 146)，而外力則垂直於其中心纖維上，並位於其對稱平面中。若此材料爲直形，則其中心纖維爲水平狀，而外力載重則與其成垂直。

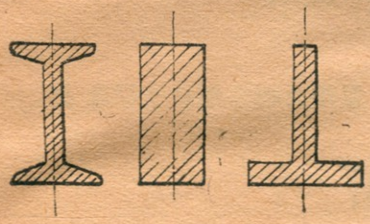


圖 146

設有一梁 AB，置於兩簡單支點上(圖 147)；若用 xy 平面將其剖割，則左邊 G 部施於 D 部分子上之力，在剖面積重心點者爲左邊外力的合力，及其合力關於剖面的力矩。

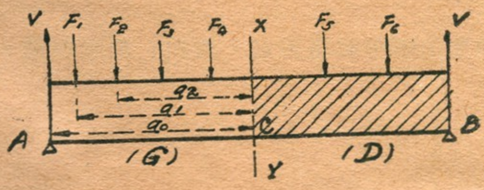


圖 147

若於特別情形之下，如中心纖維爲直形及水平狀，而外力又爲垂直；則剖面左邊 G 部合力的直移力(translation of for) 爲 V, F_1, F_2, F_3, F_4 的代數之和，此

直移力稱爲剪力 (shear)

$$T=\sum_A^C F$$

至於合力的偶力 (Couple)，則等於剖面左邊各力 $V_1, F_1, \cdots\cdots F_4$, 關於剖面積重心點的力矩；此力矩稱謂撓曲力矩 (Bending moment)。

$$M=\sum_A^C Fa = Va_0 - F_1a_1 - F_2a_2 \cdots\cdots$$

很明顯的，假設 G 部固定保留，而將 D 部移去 (圖 148)，則可得一剪力 T' 及一撓曲力矩 M' 與 T 及 M 等量而方向相反。

此爲必然的現象，蓋 AB 梁乃於外力動作平衡之下；因此，可得兩公式如下：

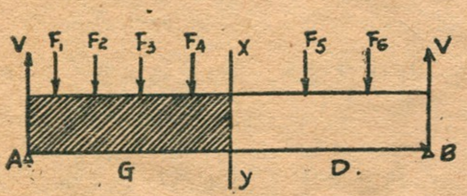


圖　148

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_{xy}F = 0$$

若將此力分爲兩組；其一爲施於 G 部者，其一爲施於 D 部者。

$\sum F_y = 0$　故；　$T + T' = 0$；　$T = -T'$

$\sum M_{xy}F = 0$　故；　$M + M' = 0$　$M = -M'$

M 與 T 指左邊 G 部的撓曲力矩及剪力；M' 與 T' 則指右邊 D 部的撓曲力矩及剪力。

與 T' 及 M' 相等的分子力其指向必相反，蓋根據動力與反動力相等及指向相反的定律，G 部施於 D 部之動力應等於 D 部施於 G 部者，而其指向則相反。

131 Bernouilli 與 Navier 氏之定律及臆說　Navier 氏的臆說，謂凡一材料受外力後，因其變形極微，故其剖面於未受力前若爲平面，則於受力變形後亦爲平面。

試觀梁 AB 的剖面 S，受垂直力 F_1, F_2, F_3, F_4, 的影響之後而撓曲，其中心纖維變成曲線，垂直剖面 S 變成傾斜。此現象的結果：

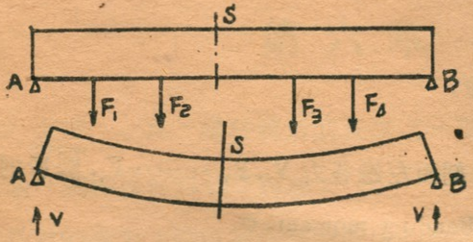


圖 149

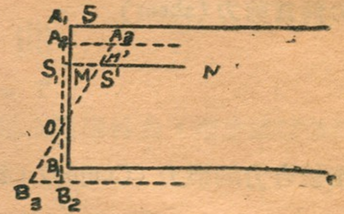


圖 150

1 梁之上部纖維短縮，爲被擠壓；

2 梁之下部纖維伸長，爲被拉引；

3 若將149圖中兩圖相叠置，便可得着150圖；由此可知S剖面由原來的位置而移至S'的位置時，是經過以下兩種程序：

a 剖面自己本身由S位置移至S_1；

b 以O點爲中心，由S_1轉至S'；因此，由O點至A_3各點爲被擠壓；由O點至B_3各點爲被拉引。

此外剖面積S轉至S'時，NM纖維縮短一長度MM'，因此在O以上的纖維皆短縮；而在O點以下的纖維則皆引長；至位於O點或O點水平面的纖維，其長度毫無變更，故稱位於O點之纖維爲中心纖維，而位於O點水平面之纖維則爲中立纖維。

再須明瞭者，則各纖維位於O點以下同一距離者，必伸長同一長度；其在O點之下及以上而同一距離者，其伸長與短縮的長度亦相同。

132 剖面積上，由簡單撓曲所產生的各點分子力　由150圖，S滑至S_1乃受剪力的結果，至由S_1轉至S'則係受撓曲力距的結果。根據力的效用相重疊的定律，先單獨研究撓曲力矩，至於剪力，則留於下章詳論之。

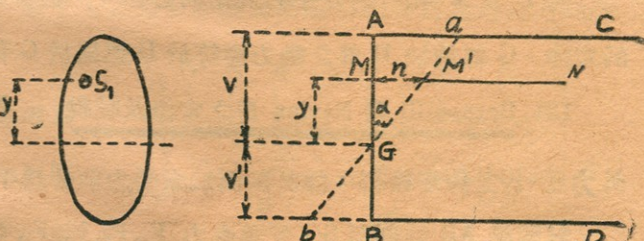


圖 151

剖面的平衡之維持，是由下列各力·

1　梁左部各外力所歸納的撓曲力矩；

2　梁右部各分子面積所產生的分子力。

估計此第二種力：

橫梁的變形，是由於剖面積以O點爲軸而旋轉。

試取一段橫梁，其單位長度 NM 爲一公尺(l＝1 公尺)，此單位橫梁於變形之後其纖維 NM 縮短一長度 MM'。

設 E 爲材料的彈性係數，則於簡單拉力中，已証明纖維 NM 的單位分子內力：

$$n = E \times \frac{MM'}{1} = E \times MM'$$

若 S_1 爲該纖維的剖面積，則纖維端上的分子力：

$$f = n \times s_1 = Es_1 \times MM'$$

由此，各微分面積 $s_1, s_2, s_3 \cdots\cdots\cdots\cdots s_n$ 上的分子力爲 $f_1, f_2, f_3, \cdots\cdots f_n$ 。

將以上各微分面積積分，便可得剖面積 S。

若注意着各分子力 f 皆垂直於剖面積上，則 f 可變爲他種方式；因爲剖面旋轉的角度極微，故剖面移動的直弦，於實際上，常與其 M 起點正切線相混合。

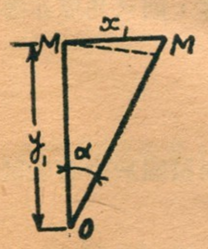


圖　152

故若定；　$MM' = x_1$

$$f_1 = E s_1 x_1$$

若 α 爲剖面的旋轉角度，則：

$$x_1 = y_1 \operatorname{tg} \alpha$$

而最後剖面上任何點的分子力：

$$f_1 = Es_1 y_1 \operatorname{tg} \alpha$$

注意　1　以上關於求分子力各種理論，是採用 Navier 氏的臆說，同時幷擬定各內力是均佈於剖面積上。

2　分子力的公式：　$f = Esy\operatorname{tg}\alpha$，

故單位分子力：　$n = \frac{f}{s} = Ey \operatorname{tg} \alpha$

$E\operatorname{tg}\alpha$ 爲常數，因 E 爲彈性係數，而 $\operatorname{tg}\alpha$ 則無論在剖面上任何點皆爲同值；故可書：

$$\boxed{n = ky}$$

此公式是証明剖面積上各點分子力的大小，是依 y 的距離長短而變。

133 <u>簡單撓曲的內力公式</u>　剖面上分子力，是與外力合力的撓曲力矩成平衡。此組力的平衡公式，宜書總合力與總力矩同時等於零。

若取二直角軸線 Ox，Oy，其一軸位於中立纖維的平面中，其一軸則垂立於剖面積上，故平衡公式僅歸納為二，蓋因 $\sum F_y = 0$。

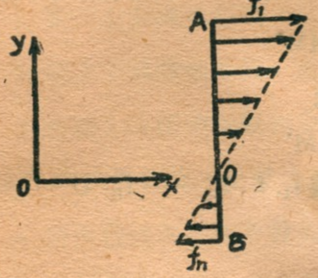


圖　153

此兩方程式：

(1)　　　$f_x = 0$

(2)　　　$M_o f - M = 0$

1　f 力的總數等於零；

2　f 力關於 O 點的撓曲力矩總數等於外力的撓曲力矩 M。

於(1)方程式中若代入 f 之值則：

(1')　$\sum Esy\ tg\alpha = 0$

若將 $Etg\alpha$ 的因數取出，因其不等於零，蓋若此因數等於零，則 α 角度亦等於零，而材料既無變形，因之亦無內力之可能。故；

$$\sum sy = 0$$

此公式為各小面積乘其離中心軸的距離之總數，亦即 S 總面積關於中心軸的力矩。

此力矩等於零，故中心軸必經過剖面的重心，而簡單撓曲內力，為使剖面在經過重心軸的周圍旋轉。

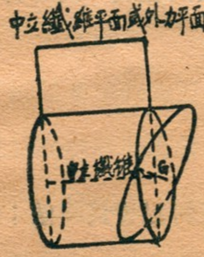


圖　154

若將 f 值代入(2) 方程式中，因其離中心軸距離為 y，

故　$\sum Esy\ tg\alpha \times y - M = 0$　　　(2')

將 $Etg\alpha$ 常數置於前項則：

$$Etg\alpha \sum sy^2 = M$$

$\sum sy^2$ 為各小面積乘其至中心軸距離的兩次方之總數，亦即該剖面積關於其中心軸的慣性力矩。

$$\sum sy^2 = I$$

(2')方程式遂變成：

$$EI tg\alpha = M \qquad (3)$$

此外，分子內力 n 是與 tgα 生密切關係：

$$n = Ey\, tg\alpha$$

故(3)可書爲：　$\frac{In}{y} = M$

因此；　$\boxed{n = \frac{My}{I}}$

此公式極爲緊要，可以求慣性力矩 I 及受外力力矩 M 的剖面積上，離中心軸 y 的各點分子內力。

由此公式，可知 n 的大小，是與 y 成正比例，故 y 若大，n 亦隨之而大。因此，n 的最大值，位於上下兩表面纖維：A,B.

$$\boxed{n = \pm \frac{Mv}{I}}$$

此外尚應知者，爲中心軸以上的 y，是符合於壓力，而在中心軸以下的 y，則

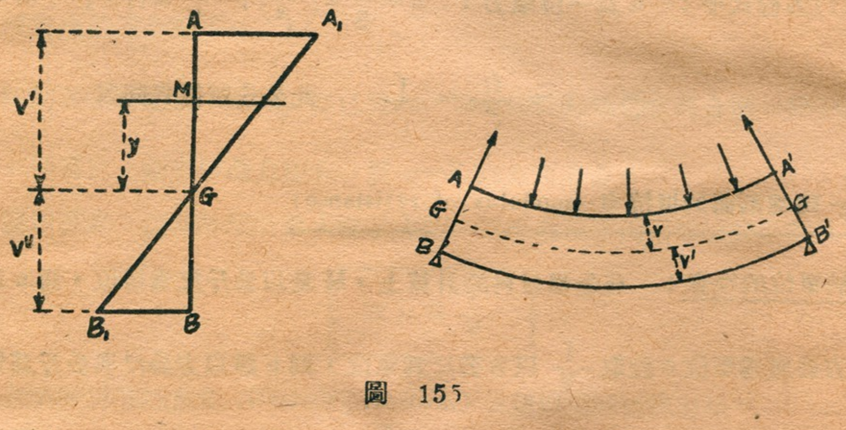


圖　155

符合於拉力。(+)符號指拉力，(—)則指壓力。

134 符號與單位 在選擇符號時，以(＋)號給拉力，而以(－)號給壓力；同時，亦以(＋)號給向上力(↑)，而以(－)號給向下力(↓)；至於力矩的符號，則以使上部纖維擠壓者爲(＋)號，此力矩乃剖面左邊各力所產生的力矩之總數，他能使該剖面依着時鏢針方向而旋轉。

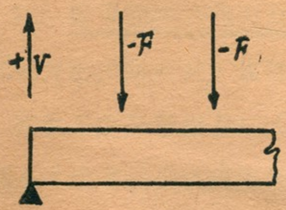


圖 156

抵抗率 (Modulus of Resistance) 試取公式；

$$n = \frac{Mv}{I}$$

在計算方面，M 值常爲問題的先知數，若已求得剖面積，則隨時可以得着 I 及 $\frac{I}{V}$，故公式可寫爲；

$$n = \frac{M}{\left(\frac{I}{V}\right)} \qquad (1)$$

I 爲長度的四次方，V 僅爲一長度，故 $\frac{I}{V}$ 爲長度的三次方，亦即等於一立體積。

於(1)方程式中： n 爲一位單力： $n = \frac{f}{S} = \left(\frac{f}{l^2}\right)$； $\frac{I}{V} = (l^3)$； $M = fl$；

故； $n = \frac{fl}{l^3} = \frac{f}{l^2}$ 此公式單位爲同質

$\frac{I}{V}$ 稱爲剖面的抵抗率 (modulus of resistance)

關於單位的注意： 在金屬材料的計算上，M 是以公斤尺爲單位，而 n 則常用公斤與方公厘爲單位。設取 $\frac{I}{V}$ 以方公尺爲單位，則 n 將以方公尺與公斤爲單位，若欲使 n 的單位爲方公厘與公斤，則宜以 10^{-6} 除 M。

故若 $\frac{I}{V}$ 以公尺爲單位則：

(2) $$n=\frac{M}{10^{-6}\frac{I}{V}}$$ n 爲方公厘面積的公斤值

若材料爲石料或木料，則根據以上同樣的理論，若欲將 n 的單位定爲公斤與方公分時，而 $\frac{I}{V}$ 仍以立方公尺爲單位，則：

(3) $$n=\frac{M}{10^{-4}\frac{I}{V}}$$ n 爲每方公分面積的公斤值

爲簡便計算起見，最好宜將 I，V 與 $\frac{I}{V}$ 以公尺爲單位，然後再擇用(2)，(3)兩公式。

135 剖面積的計算　用以抵抗撓曲力矩的剖面積計算法，是一繼續漸近(Successive approximation)尋求法。

蓋撓曲力矩的分析，是拉引一部分的纖維及擠壓其他部分，故安全限的規定，應與拉力中所規定者同一數量。

$$n=\frac{M}{\frac{I}{V}} \qquad (n<R)$$

n 值宜少於安全限 R。

假使剖面積已先定，而 $\frac{I}{V}$ 亦已先知，則每撓曲力矩宜適合於一分子內力 n 少於 R；換言之，則各撓曲力矩宜少於 n＝R 的力矩之值。

再簡單言之，即剖面積的最大抵抗力矩，爲使其分子內力等於安全限(n＝R)，因此：

$$\boxed{M=R\frac{I}{V}}$$

此力矩稱爲抵抗力矩 (Resisting moment) 或剖面積的抵抗力矩。

普通許多建築上所用鐵料的剖面形多爲工，⊥等，各書籍圖表中常有註明各應

用剖面抵抗力矩之值；故由尋求一剖面以抵抗一力矩，成爲求一剖面的抵抗力矩，高過於已定之外力撓曲力矩○

若剖面形爲一對稱形，則其概算法更爲方便○蓋其公式爲：

$$n = \frac{MV}{I}$$

大概建築物上，常有規定梁的高度，故對稱形的剖面；

$$V' = V'' = \frac{h}{2}$$

$$n = \frac{Mh}{2I}$$

若； $n = \frac{Mh}{2I} \leq R$ 　則 $I \geq \frac{Mh}{2R}$

136 例題　設有一材料，其安全限 R＝9 公斤每方公厘，現需抵抗一撓曲力矩 M＝12000 公斤尺，試求材料的剖面積○

依上面所述的方法，此材料若爲鐵類，則其抵抗率宜取 $\overline{10}^{6} \frac{I}{v}$

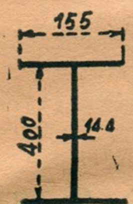


圖 157

故 $\overline{10}^{6} \frac{I}{v} = \frac{12000}{9} = 1333$

1　可於圖表中，取 57 圖的剖面積，其抵抗率爲；

$$\overline{10}^{6} \frac{I}{v} = 1472 \ \overline{公厘}^{3}$$

此剖面積之值是高於其所需要之 1333 $\overline{公厘}^{3}$

故 $n = \frac{M}{\overline{10}^{6} \frac{I}{v}} = \frac{12000}{1472} = 8{,}15$ 公斤（安全限 9 公斤）

其剖面積的抵抗率；

$M_R = 1472 \times 9 = 13178$ 公斤

2　設該剖面爲梁底，角形等部所組成，則由各圖表中，或大概的計算，可取

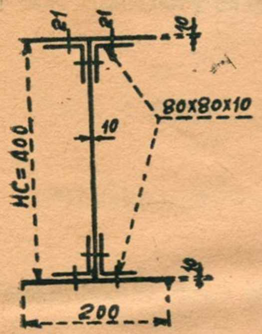


圖　158

158 圖的剖面積，其慣性力矩：

$$I = 344400000\ \overline{公厘}^{6}$$

若以公尺爲單位；

$$I = 0,0003444\ \overline{公尺}^{4}$$

$$V = \frac{400}{2} + 10 = 210公厘，若以公尺計算\ V = 0,21公尺$$

$$\frac{I}{V} = 0,001639\ ;\qquad \overline{10}^{6}\ \frac{I}{V} = 1639$$

故分子內力：

$$n = \frac{M}{\overline{10}^{6}\ \frac{I}{V}} = \frac{1200}{1639} = 7,32\ 公斤（安全限\ 9\ 公斤）$$

剖面的抵抗力　：　$M_R = 1639 \times 9 = 14751$ 公斤

直稜柱體的簡撓變形

137 由撓曲力矩M所發生之撓曲變形的中立纖維微分公式或彈線　此方程式十分重要，因爲，他可用以計算稜柱體荷重時的撓曲度（Deflection）；換言之，爲橫梁撓曲後，中立纖維的最大縱距（ordinate）○ 此外，若梁用於建築上，承受載重之後，其下邊纖維必須成直線時，則若能先知撓曲度，便可以使建築家佈置反撓曲度的設備，以便於受力之後，橫梁仍爲直形○

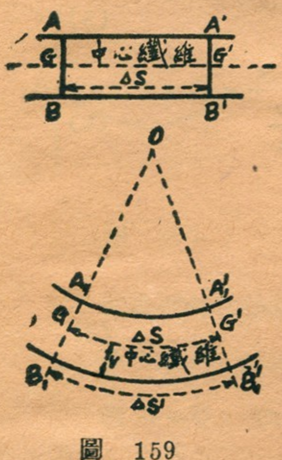


圖　159

現設有一橫直梁，於其原形狀時，取兩剖面 A B，A'B'，距離爲△S○

若此段梁上之外力，位於經過其中心纖維的平面上，則於變形之後，可以察出剖面 A B，A'B' 仍爲平面，而垂立於中心纖維上，至於中心纖維 G G' 的長度則仍爲常數，並等於橫梁原形狀時之長度 △S○而位於中心纖維之上及其下之纖維，則改變其長度○

引長垂直線 A_1B_1 與 $A_1'B_1'$ 至其相遇點 O；若 △S

値極小，則 O 將爲弧線（Curvature）的中心點，而 OG 則爲撓曲中心纖維的弧線半徑（Radius of curvature）○

若書弧線 $B_1 B_1'$ 及 GG' 與其離 O 點的距離成正比例，則其方程式：

$$\frac{\widehat{B_1B_1'}}{\widehat{GG'}} = \frac{OB_1}{OG} \qquad (1)$$

若稱 ρ 爲中心弧線半徑，v 爲中心纖維至極外纖維的距離，$\triangle S'$ 爲極外弧線的長度，則公式(1)成爲：

$$\frac{\triangle S'}{\triangle S} = \frac{\rho + v}{\rho} \qquad (2)$$

將分子減去分母，(2)方程式遂成：

$$\frac{\triangle S' - \triangle S}{\triangle S} = \frac{\rho + v - \rho}{\rho} = \frac{v}{\rho} \qquad (3)$$

但 $\frac{\triangle S' - \triangle S}{\triangle S}$ 爲極外纖維的單位變形，其符號爲 i○此變形與單位面積彈力之關係：

$$n = Ei \qquad (4)$$

E 爲橫梁材料的彈性係數○現若稱 M 爲外力於剖面積上所生之撓曲力矩，則已經証明：

$$n = \frac{Mv}{I} \qquad (5)$$

因此；

$$\frac{\triangle S' - \triangle S}{\triangle S} = i = \frac{n}{E} = \frac{Mv}{EI} \qquad (6)$$

(3)方程式復成：

$$\frac{Mv}{EI} = \frac{v}{\rho}$$

或

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho} \qquad (7)$$

由微分中，$\frac{1}{\rho}$ 數爲矩曲中心纖維的弧線，其方程式：

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}};$$

變形纖維的微分方程式因此爲：

$$\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\pm\sqrt{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}}=\frac{M}{EI}\qquad(8)$$

若力矩 $M>0$，上部纖維爲被擠壓，而下部纖維則爲被拉引；如圖形的座標，其凹形向於 y 的加號。

因此；$\frac{d^2y}{dx^2}>0$（參觀微分課程），故（8）方程式中其分母應取＋號。

此外，於實際上，此變形極爲微少，撓曲中心纖維的正切角度係數 $\frac{dy}{dx}$ 亦極微少，而其自乘積比較單位數亦可以忽畧，故（8）公式可書爲：

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EI}}\qquad(9)$$

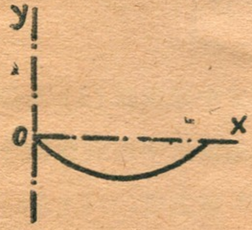


圖　160

此公式乃一二次方的微分公式，其積分時應引進兩任意常數，此兩常數是由問題中的兩特別條件規定之。

注意：I　由（9）公式，若 $M=0$ 則 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 亦將等於零，但在曲線中，僅有迴折點（point of inflexion）適合於 x 值以使 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$。

因此可得其結論：

若 $M>0$，則其凹形向上；

若 $M=0$，則成迴折點

若 $M<0$，則其凹形向下；

II 關於圖解法的應用，可留於下面再論，但可注意者爲$\frac{M}{EI}$的比例適與長度比例相反，因M爲力及長度的積數，E爲力被面積所除的商數，I爲面積與長度自乘積的積數。

因此：

$$\frac{M}{EI}=\frac{FL}{\frac{F}{L^2}L^4}=\frac{1}{L}$$

$\triangle x$ 爲長度，則 $\frac{M}{EI}\triangle x$ 將爲一數字，與所選之單位無關。

138 中立纖維上一點 G (x_1y_1) 的角度移動 (angular deflexion) 與垂直移動

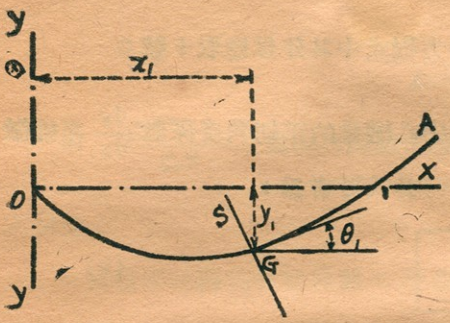


圖 161

設 OGA 爲變形中立纖維，其剖面積S原始爲與水平線成垂直，而現則與變形中立纖維成垂立。若稱中立纖維上 G(x_1y_1) 點處的移動角度爲 θ_1，換言之，即爲中立纖維上G 點之正切線與水平線所成之角度。

再書變形中立纖維的微分方程式：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EI}$$

第一次積分，可得：

$$\theta_1=\frac{dy}{dx}\int_0^{x_1}\frac{M}{EI}dx+C$$

積分的常數C，是等於 $x_1=0$ 時之值：

$$C=\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\theta_0$$

θ_0爲中立纖維上始點O的移動角度。

因此：

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\theta_1=\theta_0+\int_0^{x_1}\frac{Mdx}{EI}} \qquad (1)$$

第二次積分，可得着 G 點的垂直移動：

$$y_1=\theta_0 x_1+\int_0^{x_1}dx\int_0^{x_1}\frac{Mdx}{EI}+C_1$$

若使 $x_1=0$，便可求得常數 $C_1=y_0$

$$y_1=y_0+\theta_0 x_1+\int_0^{x_1}dx\int_0^{x_1}\frac{Mdx}{EI}$$

用部分積分法：

$$\int Mdx\int dx=uv-\int vdu$$

$$u=\int Mdx\,; \qquad dv=dx$$

$$du=Mdx \qquad v=x_1$$

$$y_1=y_0+\theta_0 x_1+x_1\int_0^{x_1}\frac{Mdx}{EI}\int_0^{x_1}\frac{Mxdx}{EI}$$

或

$$\boxed{y_1=y_0+\theta_0 x_1+\int_0^{x_1}\frac{M(x_1-x)dx}{EI}} \qquad (2)$$

公式（1）爲變形中立纖維上 G 點的移動角度；公式（2）爲 G 點的垂直移動。此（2）公式爲變形中立纖維的方程式或稱爲彈線。

（1），（2）公式爲 Bresse 氏公式，最爲常用：

$$(3)\begin{cases}\theta_1=\theta_0+\int_0^{x_1}\frac{Mdx}{EI}\\[2ex] y_1=y_0+\theta_0 x_1+\int_0^{x_1}\frac{M(x_1-x)dx}{EI}\end{cases}$$

139 圖解法　由 137 節，可知，直棱柱體的彈線爲一索狀曲線，其力量爲

$M\frac{dx}{EI}$的連續分佈載重，而極距則爲一單位。

若棱柱體的支點爲固點，則此曲線必置於經過支點垂直線之弦。$G(x_1)$點的垂直移動，將由此索狀曲線及弦中的G點縱距爲長度。

實在的，假設支點爲固點。則橫梁兩端的垂直移動將等於零。

$$y_A = y_0 = 0$$

因此；

$$y_1 = \theta_0 x_1 + \int_0^{x_1} \frac{M(x_1 - x)dx}{EI}$$

試定$\frac{M}{EI}$之量爲梁上的連續分佈載重，則在dx的距離中，其所承負之力爲$\frac{M}{EI}dx$。

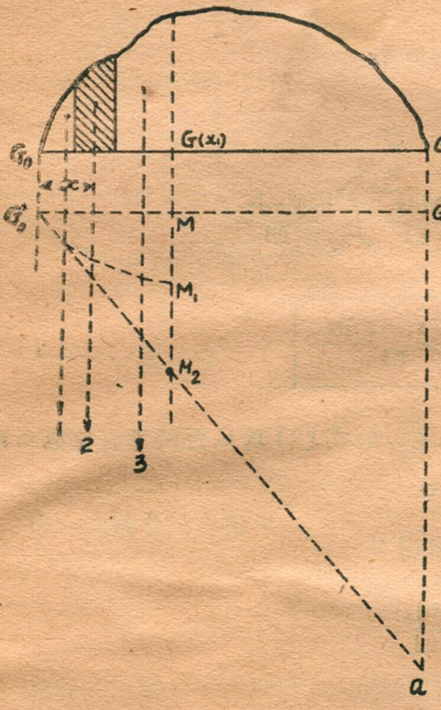


圖 162

其積數$\frac{Mdx}{EI}(x_1 - x)$，代表$\frac{Mdx}{EI}$力量施於x距離上而關於剖面積重心(x_1)的力矩。而$\int_0^{x_1} \frac{M(x_1 - x)}{EI}dx$則爲剖面積左邊各力$\frac{Mdx}{EI}$施於1,2,3……各距離上關於剖面積重心點G的總力矩。

由圖解法中所知道者，若將$\frac{Mdx}{EI}$爲力，以單位長度爲極距，則積分的得數，將由$G(x_1)$點所引下之垂直線，而含於索狀曲線與其第一邊線中之M_1M_2長度所代表。至於$\theta_0 x_1$之數，則等於縱距$(-MM_2)$。

實在的；

$$\theta_0 l = -\int_0^l \frac{M(l - x)dx}{EI}$$

換言之 $\theta_0 l$ 爲以 $\frac{Mdx}{EI}$ 爲力，而施於全梁上，關於 G_1 端的總力矩，亦即G_1'a 之垂直度。

因此：

$$\theta_0 x_1 = -\frac{x_1}{l}\int_0^l \frac{M(l-x)}{EI}\,dx$$

是由垂直長度（$-MM_2$）所代表。故可確定 G（x_1）點的垂直移動 y_1 是等於（$-MM_1$），換言之，即等於以 $\frac{Mdx}{EI}$ 爲力量所求得之索狀多角形，關於經過支點垂直線弦的縱距，此索狀多角形的極距等於一單位。

梁的彈線是與索狀多角形相同，或較確切言之，則等於其內切 (inscribe) 的曲線。

我們亦可用 Mdx 以代 $\frac{Mdx}{EI}$ 爲力量，而以 EI 代一單位的極距，至 EI 則可爲常數或變數。

140 用力矩面積以求撓曲度之方法　設有一懸梁，其 A 端裝固，B 端自由懸空，梁受荷重後之中心纖維變形如 AC 弧線。

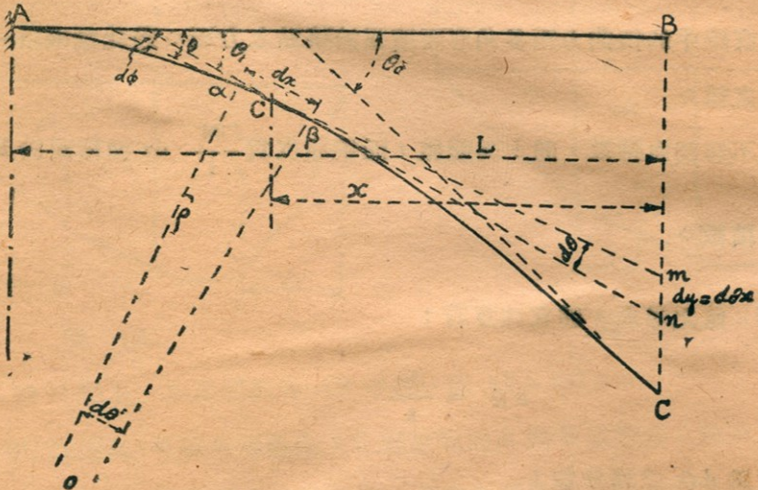


圖 163

現試觀 163 圖上之一小段 dx，其變形後之弧線半徑：

$$\rho = \frac{EI}{M} \tag{1}$$

I 爲 dx 段上之剖面積慣性力矩，M 爲 C 點上之力矩。

由 α 與 β 點，引其正切線 αm 與 βn 垂直於 $o\alpha$ 與 $o\beta$ 上；$\alpha o \beta$ 與 mcn 相等，或 $d\theta = d\theta'$

此兩變形角度之值極小，故可定 $\alpha o \beta$ 與 mcn 兩三角形爲相似三角形。

$$\frac{dy}{x} = \frac{dx}{\rho} \tag{2}$$

若將 ρ 值代入(2)公式中，則可得：

$$dy = \frac{Mx\,dx}{EI}$$

$$y = \int_A^B \frac{Mx\,dx}{EI}$$

Mdx 爲撓矩曲力矩圖之面積，Mx dx 爲撓曲力矩圖面積關於 B 點之力矩，故；若梁爲等剖面積懸梁，其中心纖維上之任何點的垂直移動，等於梁之裝固端垂直線及該點之垂直線中的撓曲力矩多角形面積關於該點之力矩。將此數乘以 $\frac{1}{EI}$ 值，便可得撓曲度之值。

若梁爲不等剖面懸梁，則 I 爲變值，而撓曲度爲 $\frac{M}{I}$ dx 面積關於 B 點之力矩乘 $\frac{1}{E}$ 值之積數。

至於 θ_c 值之尋求，則宜注意着：

$$d\theta = \frac{dy}{x}$$

其 θ_c 角度爲 $d\theta$ 之積分數：

$$\theta_c = \int_A^B d\theta = \int_A^B \frac{dy}{x}$$

若梁之剖面爲變值，則：

$$\theta_c = \int_A^B \frac{M\,dx \cdot x}{EI} \cdot \frac{I}{x} = \frac{1}{E} \int_A^B \frac{M\,dx}{I}$$

而於等剖面積梁時，則：

$$\boxed{\theta_c = \frac{1}{EI} \int_A^B M\,dx}$$

Mdx 爲梁之撓曲力矩圖的面積，故亦可書：

$$\theta_c = \frac{1}{EI} \times \text{撓曲力矩圖之面積}$$

注意　此撓曲度之計算僅求由 M 力矩所發生之撓曲度，而簡畧由 T 所發生之撓曲度。

141 簡單梁中之撓曲度　設一中立纖維變形後如 ADB 之弧線，其最大變形之撓曲度，爲弧線中之最大縱距所代表，換言之爲 CD。

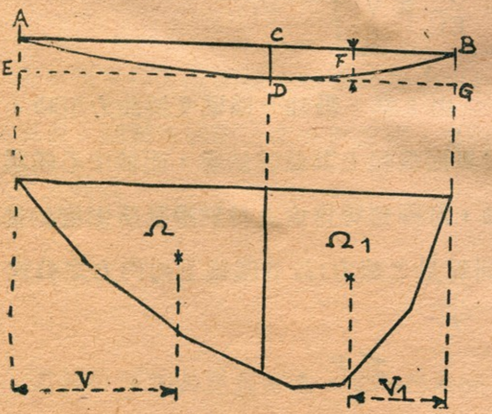


圖　164

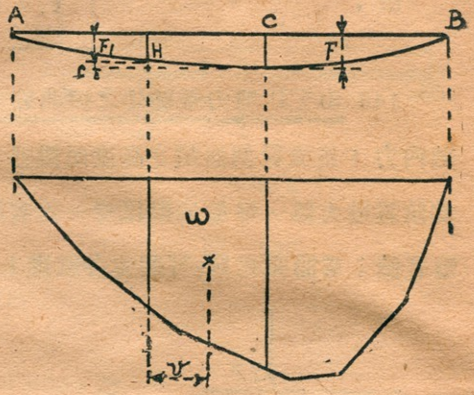


圖　165

但是，於 D 點上，其正切線與 AB 平行，而 AE＝BG。

AC 與 BC 段因此，可認爲兩懸梁，C 點裝固而 A 與 B 點懸空。故其定律如下：

若欲求一等剖面積簡單梁中之撓曲度，可取由撓曲度垂線至支點間之撓曲力矩的面積圖於該支點之力矩。然後乘以 $\frac{1}{EI}$ 便得其值。

如前節之公式，可書撓曲度：

$$\boxed{F_c = \frac{1}{EI}\,\Omega V = \frac{1}{EI}\,\Omega_1 V_1}$$

C 点之位置不能常常先知，但可根據以上之方程式，而定其必要之條件：

$$\Omega V = \Omega_1 V_1$$

142 一任何点上之變形彈線的縱距　尋求一簡單梁跨徑上一任何点之變形彈線縱距是極爲有用。

因此，應注意着梁上之最大撓曲度，其彈線上之正切線爲水平線；若 H 爲所欲求的撓曲度之剖面，則：

$$F_1 = F - f$$

但；

$$f = \frac{1}{EI} W V$$

故；

$$\boxed{F_1 = F - \frac{1}{EI} W V}$$

143 由ΣP 剪力所發生之撓曲變形　由下章，得知一橫梁受撓曲力矩時，其剪內力 t 是依着剖面積之高度而變差，於表面纖維上其值等於零，而於中心纖維上其值爲最大值，每層的纖維受一垂直滑動，然極難尋得由此特別滑動所影響的總變形之值；爲簡便起見，可假定各纖維上受同等量之剪力，故各纖維上剪內力之公式：

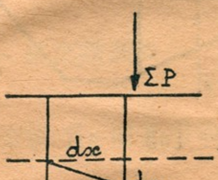


圖 166

$$t = \frac{\Sigma P}{W},$$

其單位變形爲：

$$i' = \frac{t}{E'} = \frac{\Sigma P}{WE'}$$

由166圖：

$$d_y = i'\,dx = \frac{\Sigma P}{WE'}\,dx$$

$$\boxed{y = \int \frac{\sum P}{WE'} dx + C'} \qquad (1)$$

此方程式爲由剪力 $\sum P$ 所發生彈性變形方程式；若將此方程式與 137 節之 (3) 方程式聯合，便可得：

$$\boxed{y_1 = y_0 + \theta_0 x_1 + \int_0^{x_1} \frac{M(x_1 - x)\,dx}{EI} + \int_0^{x_1} \frac{\sum P}{WE'} dx + C'}$$

此方程式爲由 n 與 t 之聯合內力所發生之彈性變形方程式。

現應注意者，若將(1)方程式與 137 節之(3)方程式比較則知其爲極少值，而可忽畧，故僅宜計算由 M 所發生之變形；但若梁之長度極短時，則 $\sum P$ 之影響或者較 M 爲大，而最少亦與其相等，故不能忽畧之。

144 例題　設有一工字形梁長 10 公尺，其中點承一集中重量 P = 10444 公斤；若忽畧梁本身之材料重量，並定其剖面積爲常數，其慣性力矩；

$$I = \frac{0.01305512}{12}$$

若取兩正角度位座標，ox 軸與梁之中心軸相混合，則於 x 橫距上之一剖面積，其彈線微分方程式：

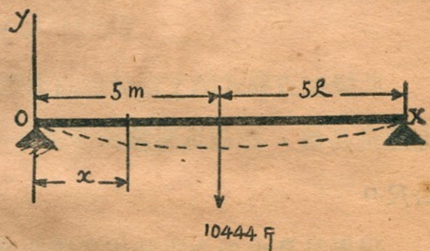


圖 167

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

若取公尺與公斤爲單位，則E = 16000 000 000，故：

$$EI = 13055120 \times \frac{4}{3}$$

此外，

$$M = \frac{Px}{2} = \frac{10444\,x}{2} = 5222\,x$$

將微分方程式積分第一次，則可得：

$$EI\frac{dy}{dx} = 5222\frac{x^2}{2} + C_1$$

梁之承重位於中點，故可先知其變形彈線爲對稱狀，中點上之正切線爲水平狀，若 $x=5$ 公尺，則 $\frac{dy}{dx}=0$； 因此；

$$\frac{5222\times 25}{2} + C_1 = 0 \qquad C_1 = -\frac{5222\times 25}{2}$$

將 C_1 值代入方程式中，則得：

$$EI\frac{dy}{dx} = 2611\,x^2 - 2611\times 25,$$

$$EI\,y = 2611\frac{x^3}{3} - 2611\times 25\,x + C_2$$

於 Ox 軸上， $x=0$ ， $y=0$， 因此 $C_2=0$，若將 EI 之值代入方程式中，則其最後之變形彈性方程式：

$$52220480\,y = 2611x^3 - 195825x$$

此變形方程式的 y 爲受撓曲力矩 M 之結果，此值由 $x=0$ 繼續增加至 $x=5$ 公尺而達最高值，然後再繼續減少至 $x=10$ 公尺而至於零。此撓曲度稱爲 $f = 0{,}0125$ 公尺。

現再計算由剪力所發生之撓曲度：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sum P}{E'\omega} = \frac{5222}{E'\omega}$$

梁之剖面積 ω 爲 0,0242 方公尺，其剪力之彈性係數爲 6,000,000,000 故：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5222}{6\,000\,000\,000\times 0{,}0242}$$

$$y = \frac{5222x}{600\ 000\times 242} + C'$$

若 $x=0$，$y=0$ 故 $C'=0$ 而彈性變形方程式爲：

$$y=\frac{5222\,x}{600\,000\times 242}$$

其最大值符合 x=5 公尺，故撓曲度：

$$f'=\frac{5222\times 5}{6\,000\,00\times 242}=0{,}000\,18\text{ 公尺}$$

若將此兩值比較，則可知此 f' 值可以忽畧。

145 定理　梁上一剖面積中之剪力，是等於撓曲力矩關於剖面積橫距的引數

設 AB 爲一直橫梁，置於兩簡單支點上(此定理適合任何性質之支點)。

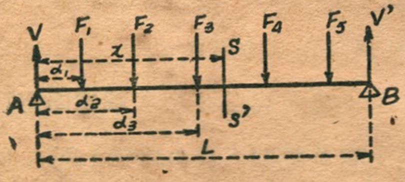


圖 168

若 $F_1, F_2, F_3 \cdots\cdots F_5$ 爲施於橫梁上之力，而 V 與 V' 則爲其支點反力。

試觀察一橫距 x 的剖面積 SS' 位於 F_3 與 F_4 之間，則：

1 剖面積中的撓曲力矩M，是等於此剖面積左邊各力關於此剖面積力矩之和：

$$M_x = Vx - \sum_g F(x-\alpha) \qquad (1)$$

2 剖面中之剪力，T 則等於其左邊各力的代數之和：

$$T_x = V - \sum_g F \qquad (2)$$

若將(1)(2)兩公式演繹，則可得：

$$M_x = Vx - F_1(x-\alpha_1) - F_2(x-\alpha_2) - F_3(x-\alpha_3)$$

$$M_x = Vx - x(F_1+F_2+F_3) + (F_1\alpha_1 + F_2\alpha_2 + F_3\alpha_3 \quad (1')$$

而

$$T = V - (F_1+F_2+F_3) \qquad (2)$$

若將(1')與(2')比較則可知：

$$\boxed{T=\frac{dM}{dx}} \qquad (3)$$

注意　若橫梁上遍佈的載重，在各點上爲均值或變值，依着橫距 x 爲含數，則 M 與 T 的代表線將爲橫距 x 的連續含數(continued function)。若反之，設爲集中

載重，則 M 的含數，在各集中力處變換(change)，因此剪內力之值 T，將依着所取之剖面積，是否位於集中力之左邊或右邊而異，故剪力的曲線，於此狀況，在集中力處表現其急差，我們將於橫梁類的例題中証明之。

2 混合平面撓曲

146 混合平面撓曲之分子力公式　若剖面積上之外力合力 P，位於剖面之對稱平面中，而不與其中心纖維成垂直則可將其分爲兩分力 P_1, P_2。

P_1 分力之施力方向爲棱柱體之縱軸方向，而使固體受拉力或壓力。

P_2 分力之施力方向，則與棱柱體之縱軸成垂直，而使固體受撓曲力矩。

根據力之效用相重疊的原理，可將此兩分力各別分開以求其效用。

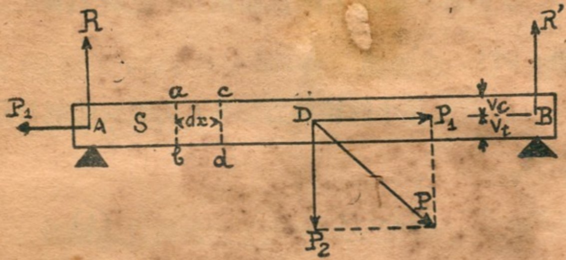


圖 169

現若假定梁之 A 端爲固定點，而 B 端則可自由移動，則 A 端將生一水平支點反力，與 P_1 相等而方向相反，AD 段上將受一均佈拉力，其單位值爲 $\frac{P_1}{S}$。

P_2 於梁上之作用，使 A 與 B 兩支點上發生反力 R 與 R'；R 使 AD 段上各剖面發生撓曲，其離中立軸 y 距離之纖維上發生一內力：

$$n_x = \frac{My}{I}$$

此內力之最大值，由 V_x 之最大值而求得，亦卽：

受拉力之表面纖維　　$n_1 = + \frac{MV_t}{I}$

受壓力之表面纖維　　$n_2 = - \frac{MV_c}{I}$

至由 P_1 所發生之正號或負號內力：

$$n_1 = \pm \frac{P_1}{S}$$

S 代表該橫剖面積，而(+)符號指拉力，(−)符號則指壓力○

若求 n_1 與 n_3，n_2 與 n_3 的代數之和，則可得分子力之最大值：

$$\left.\begin{aligned} \text{最大值 } n &= +\frac{MV_t}{I} \pm \frac{P_1}{S} \\ \text{最大值 } n' &= -\frac{MV_c}{I} \pm \frac{P_1}{S} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

最大值[illegible]應小於 R 安全除○

凡稜柱體承一混合撓曲時，亦可由變形之圖說明之○

設於梁上取兩極鄰近之剖面 ab, cd, 則 P_1 分力於梁上之作用，使 cd 剖面平行的移至 c'd'，（[illegible]之下，則與 ab cd 中之纖維分子力成比例）其拉長量為 oo'，故各纖維上皆平均的受一內力 $\frac{P_1}{S}$ ○

至於撓曲力矩，於 abc[illegible]，則使 ab 移至 a'b'，c'd' 移至 c''d''，而其剖面上 y 高度之纖維內力為 $\frac{My}{I}$ ○

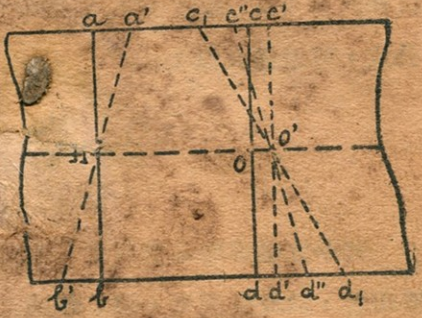


圖　170

在此兩剖面 ab, cd 中之纖維長度變形，因此為一梯形 a'b'c''d''，此梯形亦可用 ab c_1 d_1 以代之，蓋取 c''o'c_1 之角度與 a'Ha 相等○若將此梯形置為171圖，則可知P 外力斜置於中心軸上時，其 y 距離上纖維所受之效果○

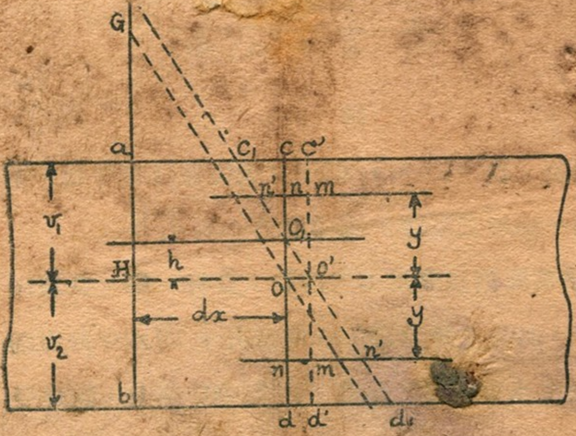


圖　171

1　水平分力 P_1 於纖維上發生一內力 $\frac{P_1}{S}$，而使其拉長 nm,

2　垂直分力 P_2 或撓曲力矩，使纖維上發生一內力 $\frac{My}{I}$，而使其生 mn' 之引長或縮短○

因此，如變形圖上所表示者斜外力 P，於剖面積上之受拉力部：

$$nn' = nm + mn' = \frac{P_1}{S} + \frac{My}{I}$$

而於其受壓力部：

$$nn' = nm - mn' = \frac{P}{S} - \frac{Mv}{I}$$

其結果與（1）公式所得者相同。

171 圖之變形圖表示中立纖維層，不是如簡單平面撓曲者，位於剖面積之中心軸 O，而位於 O_1，爲 c_1d_1 與 cd 之交點，因在此平面上，其纖維與未變形前之長度相同爲 OH；若指 OO_1 之距離爲 h，則由經過 O_1 點的纖維上，其內力等於零之公式，可求得 h 值：

$$\frac{P_1}{S} - \frac{Mh}{I} = 0 \qquad \text{故} \qquad \boxed{h = \frac{P_1 I}{MS}}$$

若中立纖維層爲實有者，則應 $h < v_1$；其極限爲 h　v_1，則其變形如 173 圖所示者，於此情況時，稱其纖維之疲度依照三角形之定律

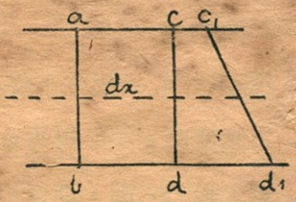


圖 172

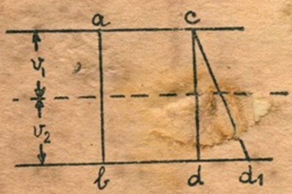


圖 173

蓋三角形 dcd_1 代表纖維長度之變形；若 $h > v_1$，則中立纖維層沒有存在，而 dx 之纖維變形爲 172 圖，其疲度依照一梯形之定律，此梯形爲 cdc_1d_1。

147 <u>例題</u>　斜外力的撓曲，幾乎常使剖面形爲不對稱狀；設有一梁，長爲10公尺，於 D 點處承一斜力 23850 公斤，其垂直分力爲 19580 公斤，而水平分力則爲 13620 公斤；梁之 A 端爲固點以抵抗水平分力之影響，因此 AD 段上，同時受壓力與撓曲力矩。

若此梁由鋼版與角形所組成，而其抵拉力與抵壓力之安全限爲 8 公斤每方公厘，且定梁之剖面爲等面積。

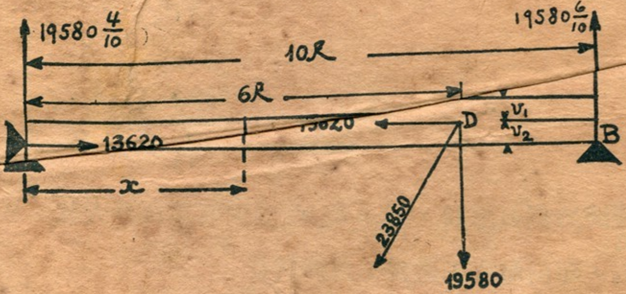


圖 174

現定：Ω 爲梁之剖面積

I 爲梁之慣性力矩

V_1 爲剖面積中心纖維至梁上部表面纖維之距離。

V_2 爲剖面積中心纖維至梁下部表面纖維的距離。

n 與 n' 爲此表面纖維上之內力。

觀察 AD 段上之一 x 橫距剖面積，其上部纖維爲受分力 13620 公斤之壓力，並同時亦受 19580 公斤力之撓曲壓力，至於下部纖維則於受分力 13620 公斤之壓力外，亦受 19580 公斤力的撓曲力，故：

$$n = -\frac{13620}{\Omega} - \frac{19580 \cdot \frac{4}{10}x}{\frac{I}{V_1}}$$

$$n' = -\frac{13620}{\Omega} + \frac{19580\frac{4}{10}x}{\frac{I}{V_2}}$$

Ω, I, V_1 V_2 爲固定值，故 n 與 n' 值之增大，是與 x 值同一性質，其最大值爲 x = 6 公尺，因此，應求 D 剖面積之內力，故：

$$n = -\frac{13620}{\Omega} - \frac{19580 \cdot \frac{4}{10} \cdot 6}{\frac{I}{V_1}}$$

$$n' = -\frac{13620}{\Omega} + \frac{19580 \cdot \frac{4}{10} \cdot 6}{\frac{I}{V_2}}$$

若欲求得經濟的剖面形狀，則 n 與 n' 宜使其達到最大値，8 公斤每方公厘，故 V_1 應少於 V_2，而剖面形亦應爲不對稱狀○

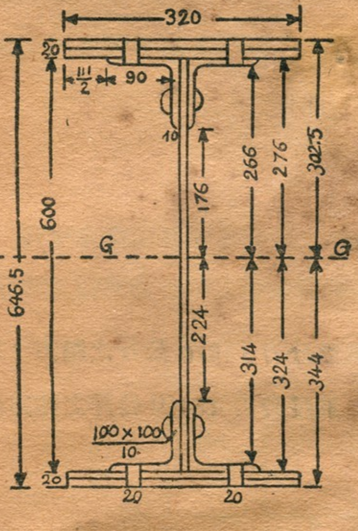


圖 175

剖面積寬度之尋求是用相近法，此法較爲容易，其面積圖形如 175 圖○

$\Omega = 0,025220$ 方公尺　　$I = 0,001912\ \overline{公尺}^4$

$V_1 = 0,3025$ 公尺　　$V_2 = 0,344\ \overline{公尺}$

因此；

$$n = -\frac{13620}{25220} - \frac{19580 \cdot \frac{4}{10} \cdot 6}{6300} = -8 \text{公斤每方公厘}$$

$$n' = -\frac{13620}{25220} + \frac{19580 \cdot \frac{4}{10} \cdot 6}{5500} = +8 \text{公斤每方公厘}$$

此結果可証明剖面積之寬度爲合理，蓋能使用材料之抵抗量至最大値○

148 <u>混合平面撓曲之撓曲度</u>——由 171 圖已定混合平面撓曲之變形弧線半徑：其最小分子 ab c_1 d_1 之弧線中心點爲 G'，而其半徑則爲 $\rho' = O'G'$；由 O 點引一與 c_1 d_1 平行線，此平行線切 ab 於 G 點，他爲分子 abcd 僅受分力 P_2 動作變形時弧線的中心，亦卽爲受簡單平面撓曲之變形，設 ρ 爲弧線之半徑 OG，便可得：

$$\frac{O'G'}{OG} = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{dx + OO'}{dx} = 1 + \frac{OO'}{dx}$$

$$\frac{00'}{dx} = i = \frac{P_1}{SE}$$

故 $$\rho' = \rho\left(1 + \frac{P_1}{SE}\right)$$

以上已求得： $$\rho = \frac{EI}{M}$$

M 為由分力 P_2 所發生之撓曲力矩，因此可得：

$$\rho' = \frac{EI}{M}\left(1 + \frac{P_1}{SE}\right) = \frac{I}{M}\left(E + \frac{P_1}{S}\right)$$

$\frac{P_1}{S}$ 之內力不能超過材料之彈限，故其最高值於鋼料等於 20；此外，材料彈性係數之 E 值，亦非絕對一定，其值之變差是由 18000 至 20000，若以 20 與此值比較則為絕少值，故可以簡畧 $\frac{P_1}{S}$ 之增加值，而不犯着實用上之錯誤，可書：

$$\boxed{\rho' = \frac{EI}{M}}$$

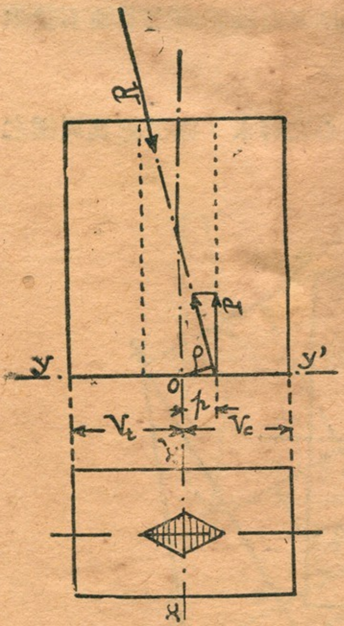


圖 176

149 一定固體受壓力與撓曲力矩時其全部纖維不應受拉力　若欲使固體全部之纖維受壓力，則應尋求各剖面上，外力合力 R，能使中立纖維與極端纖維相混合之跡點 (trace)。

因此，試觀一受外力合力 R 作用之直固形體剖面 yy'。

其關於 o 點之撓曲力矩：

$$R\rho \quad 或 \quad P_p$$

尋求合力 R 能使 yy' 剖面上之極端纖維的拉力等於零之跡點。

由撓曲力矩所發生之內力：

$$n = \frac{M_0 V_t}{I_{xx'}} = \frac{P_p \ V_t}{I_{xx'}}$$

由壓力所發生之內力；

$$n_1 = -\frac{P}{S}$$

故 p 之位置應能使 y 點纖維之拉力等於零：

$$\frac{P_p \ V_t}{I \ x'} - \frac{P}{S} = 0$$

$$p = \frac{I_{xx'}}{SV_t} = \frac{S \ r^2{}_x}{S \ V_t} = \frac{r^2{}_x}{V_t}$$

若定外力方向之跡點位置 p，則可得 176 圖之中心面積，稱爲中核心○若外力合力交一剖面積於其中核心之內，則可確定於此剖面積上，無任何纖維發生拉力（各纖維受同符號之內力）○若交於其中核心之周圍，則其直徑對向之纖維不發生內力○

150 尋求一任何面積之中核心　一任何面積中核心之尋求，應計算其周圍之各點，其 p 值之公式：

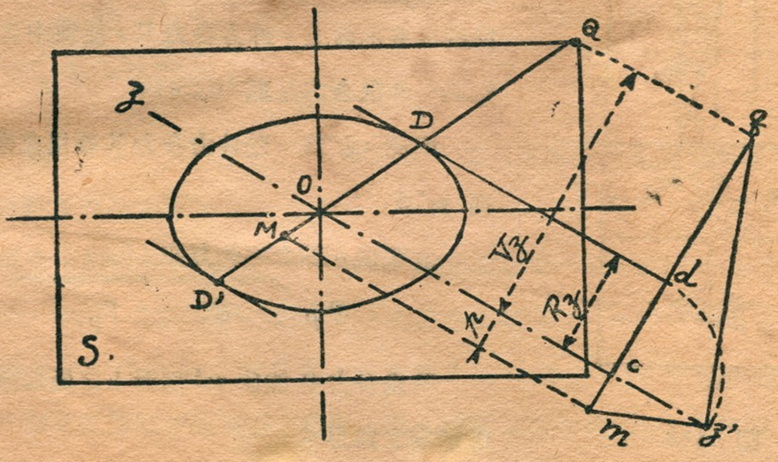


圖 177

$$p = \frac{I}{Sv} = \frac{r^2}{V} \qquad 或 \qquad \boxed{r^2 = Vp}$$

若欲求關於面積周圍Q點的中核心之 M 點，則可畫面積慣性中心橢圓形，並引Q O而伸長之；其所欲求之M點是位於Q O之伸長段上。

現書ZZ'軸與QO相配合，其 V_z 與 R_z 值註明於177圖上。

$$R_z = od, \qquad V_z = oq,$$

但：
$$R^2 = Vp \quad 或 \quad od^2 = oq \times om$$

由三角形之相似：

$$OD^2 = OQ \times OM$$

若引用極點與極線之原理，則此相等式為定 Q 點關於中心橢圓形之反極線。

故中核心中之 M 點，為面積周圍各點Q之反極線與 OQ 交點。

若面積為各直線所組成，則面積周圍各部分直線之反極點，為中核心之頂點，而面積之各頂點的反極線則為中核心之各邊。

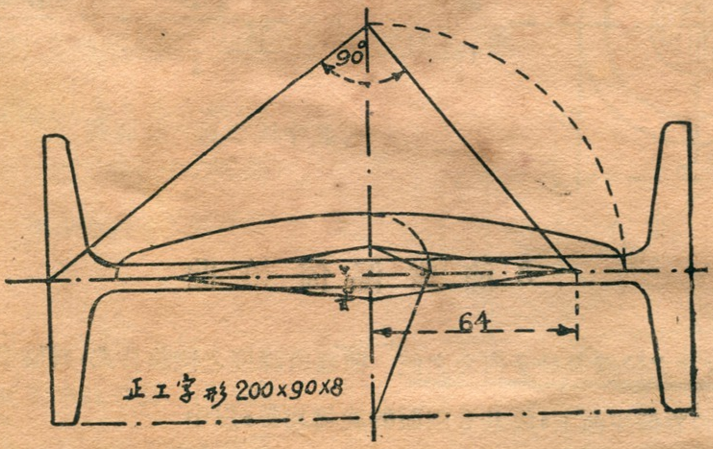


圖　178

例如178圖，為一正工字形剖面之中核心的求法。

151　<u>數簡單面積之中核心</u>　　1　<u>正長方形</u>

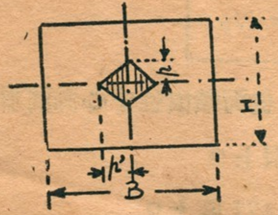


圖 179

$$p=\frac{I}{SV}=\frac{\frac{BH^2}{6}}{BH}=\frac{H}{6}$$

$$p'=\frac{B}{6}$$

其中核心為一正斜方形

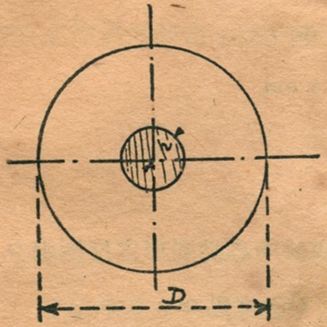


圖 180

2 圓面積

$$p=\frac{\frac{\pi D^3}{32}}{\frac{\pi D^2}{4}}=\frac{D}{8}$$

其中核心為一圓面積

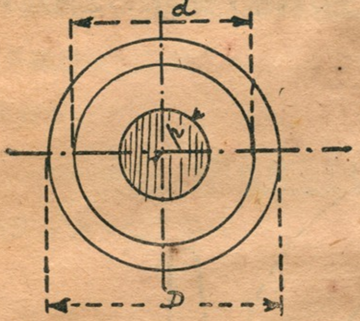


圖 181

3 圓環

$$p=\frac{\frac{\pi(D^4-d^4)}{32D}}{\frac{\pi(D^2-d^2)}{4}}=\frac{D^2+d^2}{8D}$$

其中核心為一圓面積

3 簡單偏倚撓曲

152 中立軸之位置及分子內力之值　前面所課授之撓曲公式，為橫梁上之外力位於其剖面積的對稱平面上，故其各剖面的旋轉趨勢，以中立軸(neutral axis)Gx 為旋轉軸，此軸亦與撓曲力矩軸相混合，並位於剖面上，而經過其重心點G及與 Gy 成垂直。

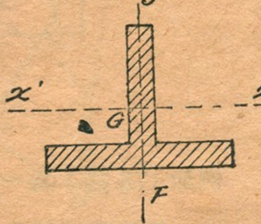


圖 182

現在研究，若各外力位於一經過剖面積重心點 G的平面上(若不然，則將有扭轉力矩之發生)，而此平面與

剖面相交線不與其對稱軸相混合(如圖 183)，則此撓曲種類，稱爲偏倚撓曲(flexion of deviation)。

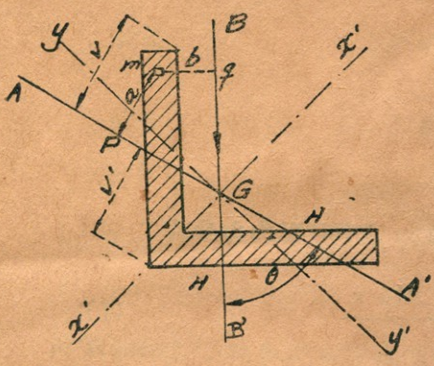


圖 183

剖面積的平面，於此情況之下，在與外力平面的跡線(trace) GB 成一 θ 角度軸 AA' 之周圍旋轉；剖面上各點的內力，仍然與各點至旋轉軸的距離成正比例。

如位於離 GA 距離 mp = a 的分子面積ds，則其內力爲：

$$nds = Kads;$$

由 133 節，nds 的合力必歸納爲一力矩 M，位於垂直平面 GB' 上；故若將此等力投影於 GB' 平面上，其所得的總數必等於零。因此可得：

$$\sum nds = 0 \qquad \text{或} \qquad Kads = K\sum ads = 0$$

由此即可証明，其中立軸 GA' 必經過剖面積的重心

現再求此中立軸的方向，及一點上的分子內力之值

觀察對稱軸 Gx 與其垂立軸 Gy，他爲慣性力矩主要軸及中心橢圓形軸的方向。畫此橢圓形，則可得着：

$$Gc = r_y \qquad GD = r_x$$

外力平面爲垂直平面 GB，撓曲力矩軸，是如 GM 的方向，並與 GB 成垂立。可將其分於 Gx，Gy 兩軸上，而爲 M_x, M_y；因此，則此問題歸納於第一類所研究中。

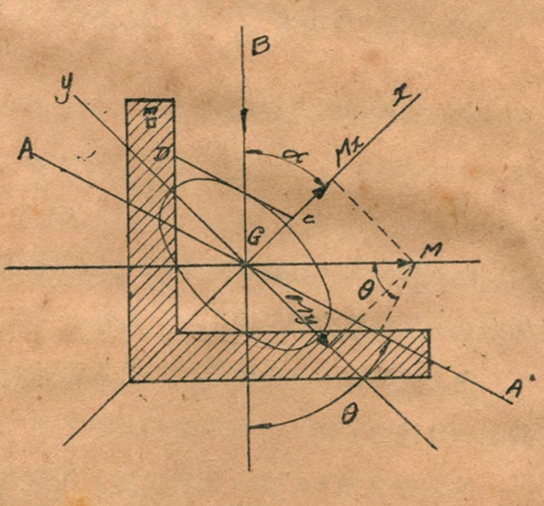


圖 184

前既已求得，受 Mx 撓曲力矩所影響的分子內力值：

$$n_1 = \frac{M_x\ y}{I_x}$$

受M_y撓曲力矩所影響的分子力：

$$n_2 = \frac{M_y\ x}{I_y}$$

若應用力的效用相重叠的定律，則離兩座標 xy 之(m)點內力公式：

$$n = n_1 + n_2 = \frac{M_x\ y}{I_x} + \frac{M_y\ x}{I_y} \tag{1}$$

於中立軸上的分子內力 n = O 故其方程式：

$$n = y\frac{M_x}{I_x} + \frac{x\,M_y}{I_y} = 0$$

至 GA 角度係數 (angular coeifficinr)：

$$\frac{y}{x} = -\frac{I_x}{I_y}\frac{M_y}{M_x} = -\frac{r^2_x}{r^2_y}\frac{M_y}{M_x}$$

GB 的角度係數爲 $\frac{M_x}{M_y}$ 盖 GM 之角度係數爲 $-\frac{M_y}{M_x}$，而 GB 方向則與其成垂直。而中心橢圓形的方程式：

$$\frac{x^2}{r^2_y} + \frac{y^2}{r^2_x} = 1$$

由解析幾何，認識慣性力矩中心橢圓形中 AA' 方向爲 GB 的同屬，換言之，則係中立軸於慣性力矩橢圓形中，與外力平面跡成同屬軸。

內力的公式，是由應用(1)公式而可求得，但此(1)公式中參入中心橢圓形軸線上的分撓曲力矩，故可用他式表明之。

位於中立軸 AA' 的 a 距離之點，其垂立於剖面上之內力：

$n = Ka$ 而， $nds = Kads$

若欲求 K 值，則可書各分子力關於中立軸 AA' 的總力矩，等於 M 力矩投影於

此同軸 AA'，如圖(184)即為 $M \sin\theta$

於是；
$$\sum Kads \times a = K\sum a^2 ds = KIa = M\sin\theta$$

故；
$$K = \frac{M\sin\theta}{Ia}$$

$$\boxed{n = \pm \frac{Ma\sin\theta}{Ia}} \qquad (2)$$

M 為撓曲力矩 Ia 為剖面積關於中立軸的慣性力矩。

由中心橢圓形圖解法中，可以求得關於 AA' 的環動半徑，因之可求得 Ia。

於表面上之纖維，其最大內力，為 $a = v$：

$$(3)\begin{cases} n = +\dfrac{Mv\sin\theta}{I_a} & (\text{拉力}) \\ n = -\dfrac{Mv'\sin\theta}{I_a} & (\text{壓力}) \end{cases}$$

若於(3)公式中，使 $\theta = 90°$；則 $\sin\theta = 1$，便可再尋回由外力位於對稱軸平面上時所生的撓曲類公式。

總之，當外力非位於對稱軸的平面上時，若欲求剖面積上的最大分子內力宜：1　畫一中心橢圓形；2　取剖面積上外力平面跡的同屬直徑，便得中立軸；3　量度此兩直線所成的角度並求 Ia；4　應用(3)公式，而使 v 為離中立軸最遠的距離。

151　注意　由上定理的結論，則無論任何剖面，若其外力平面跡為中心橢圓形之主要軸，則中立軸既為此主要軸的同屬直徑，自然為橢圓形之第二軸，換言之，即為垂立於外力平面跡之直線；故此撓曲的情狀，適如一棱柱體，其外力位於對稱平面上。

此類之表現，如型鐵(凵)及丁放置如 186 圖。

關於偏倚撓曲類，我們僅預備兩公式以計算分子內力，即(1)，(3)。

若用(1)公式，則可以避免畫中心橢圓形。

於將M力矩分折為M_x與M_y之後，再各別的計算此二種力矩所生的分子內力，然後將其得數相加，但宜注意其符號○

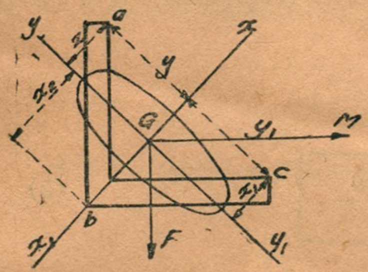


圖 185

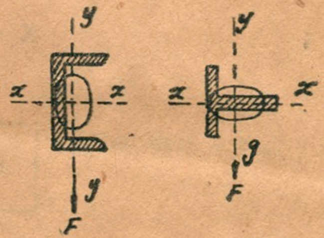


圖 186

例如185的角形，其a，b，c，三點的分子內力如下表：

	由M_x力矩所生的內力	由M_y力矩所生的內力	總　內　力
a 點…………	$\frac{M_x\ y}{I_x}$	$\frac{M_y\ x}{I_y}$	$\frac{M_x\ y}{I_x}+\frac{M_y\ x}{I_y}$
b 點…………	0	$-\frac{M_y\ x_2}{I_y}$	$-\frac{M_y\ x_2}{I_y}$
c 點…………	$-\frac{M_x\ y'}{I_x}$	$+\frac{M_y\ x'}{I_y}$	$-\frac{M_x\ y'}{I_y}+\frac{M_y\ x'}{I_y}$

現再觀一長方形的剖面積，如圖(187)○其放置形狀為其短邊與水平線成一α角度，外力方向為與水平線成垂直，其平面跡為GF○

設M＝GM為外力所產生的撓曲力矩○

分子內力最大值將發生於A點的纖維上，此纖維被M_x與M_y的撓曲力矩所擠壓○

由(1)公式：

$$R=\frac{M_x}{\frac{bh^2}{6}}+\frac{M_y}{\frac{hb^2}{6}}$$

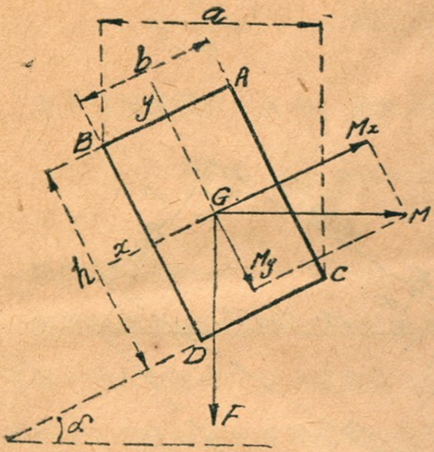


圖 187

或 $$R=\frac{6M\cos\alpha}{bh^2}+\frac{6M\sin\alpha}{b^2h}$$

$$=\frac{6M(b\cos\alpha+h\sin\alpha)}{b^2h^2}$$

若指 a 為 B，C 兩點的距離，則可得

$$a=b\cos\alpha+h\sin\alpha$$

因此： $$R=\frac{6Ma}{b^2h^2}$$

152 例題 設於屋架的構造上，匚型鐵安置於屋架上（金字架），與屋蓋的坡度成垂直（如圖 187）。於此情形，其外力 F（屋蓋重量）為垂直，而不位於對稱平面上：因此，若欲求分子內力，則宜應用上面的定理。

設桁 (Purlin) 之剖面匚為 200 × 70；其慣性主要軸為對稱軸 Gx，而其同屬軸則為垂立軸 Gy。由圖表中查得：

匚鐵的面積 S=2964 方公厘； $I_x\times\overline{10}^{12}=17528000$； $I_y\times\overline{10}^{12}=1348000$：其環動半徑之值：

$$Gb=r_x=\sqrt{\frac{I_x}{S}}=\sqrt{\frac{17528000}{2964}}=77 \text{ 公厘}$$

$$Ga=r_y=\sqrt{\frac{I_y}{S}}=\sqrt{\frac{1348000}{2964}}=21 \text{ 公厘}$$

由此兩值，則很容易的可畫一中心橢圓形，其次復可得外力平面跡線 GF 的同屬軸 Gx_1，Gx_1 則為中立軸。

若假設撓曲力矩為 500 公斤尺，則於圖解法上：

$$Mx_1=M\sin\theta=\overline{GP'}=350 \text{ 公斤尺}$$

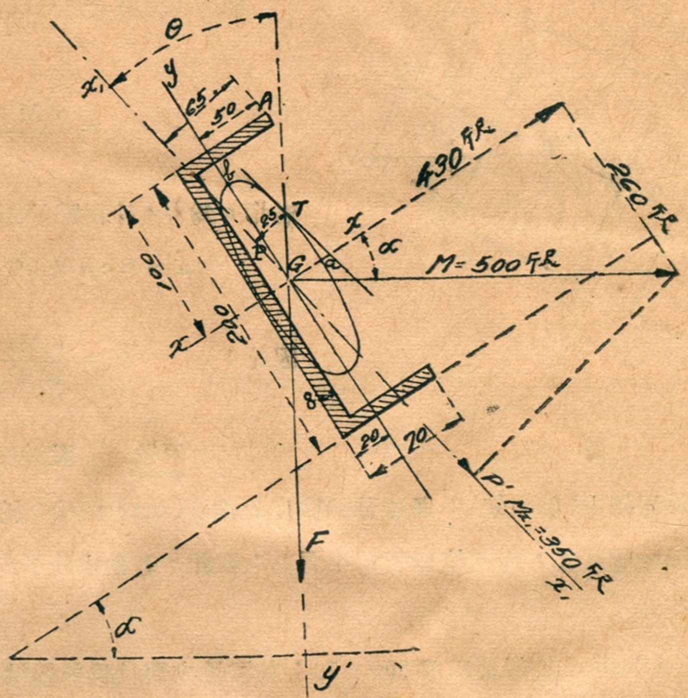


圖 188

慣性力矩：

$$I_{x_1} \times \overline{10}^{12} = 2964 \times \overline{25}^{2} = 1852500$$，(TP 爲環動半徑 $r_x = 25$ 公厘)

最大內力在離中立軸最遠之點A，其距離 v = 65 公厘。此A點每方公厘之內力：

$$n = \frac{M \operatorname{Sin}\theta\, v}{I_{x_1}} = \frac{350 \times 65 \times \overline{10}^{3}}{1852500} = 12,2 \text{ 公斤}$$

若欲避免畫中心橢圓形，則可將500公斤尺的撓曲力矩分於 Gx 與 Gy 的主要軸上，而得：

$M_y = 260$ 公斤尺；　　　$M_x = 430$ 公斤尺；

My 撓曲力矩，於A點發生一內力：

$$n_1 = \frac{M_y\ v_1}{I_y} = \frac{260 \times 1000 \times 50}{1348000} = 9,6 \text{ 公斤}$$

若取公厘爲單位，及 M_x 撓曲力矩，則其內力：

$$n_2 = \frac{M_x\ v_1}{I_x} = \frac{430 \times 1000 \times 100}{17528000} = 2,5 \text{ 公斤}$$

總內力爲 $n = n_1 + n_2 = 9,6 + 2,5 = 12,1$ 公斤，與第一方法所求出者相符合。

若用特別方法阻止 G^x 方向的撓曲，則最大總內力僅爲 $n = 2,5$ 公斤。由此例題可知，外力平面與材料位置關係的重要，故在屋蓋的建築上，若將其放置與水平線成垂立，是較將其放置與屋蓋坡度成直立者爲經濟。

153 簡單偏倚撓曲之撓曲度　求此撓曲度之法可根據下列之定理： 面積上對稱軸的交點 O 的纖維之變形是等於由 P_1 依着 YY' 方向之變形，與 P_2 依着 ZZ' 方向之變形的幾何之和(長方形之對角線)；此定理是由力的效用相重疊之定律而得着相當之証明。

現假設分力 P_1 單獨動作，而由 $EI\frac{dy^2}{dx^2} = M$ 之公式，以定 y 之撓曲度，然後再用同公式以計算由 P_2 之單獨動作所發生之 z 的撓曲度。

將 y 與 z 兩值用比例尺置於圖上，而畫其對角線，則得其眞實之撓曲度依着 OO' 之方向，與等於 OO' 之量值。

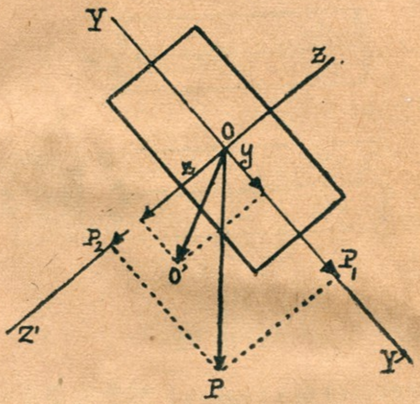


圖 189

若P 力之平面，不經過棱柱體剖面上之兩對稱平面的交點 O，則其撓曲將伴生一扭轉力。

混合偏倚撓曲

154 混合偏倚撓曲之內力　當一棱柱體受混合偏倚撓曲時，其外力的合力與

棱柱體之縱軸成斜度，故剖面積上尚有一垂立分力之存在。

其分子內力因此為：

$$\boxed{n = \pm\left[\frac{M_x\, y}{I_x} + \frac{M_y\, x}{I_y}\right] \pm \frac{P}{S}}$$

最大分子力是由括弧中之最大值而決定。

其中立層不位於棱柱體之縱軸，但於各剖面積中，中立層之跡綫，與外力方向於慣性中心橢圓形的同屬半徑平行。

第七章　梁撓曲時所生之剪力

155 縱剪力 (longitndiral shear)　設有兩同剖面木材，僅相疊置而沒有裝固，若使其荷重，則此兩木材的撓曲形狀，正如將總重量之半，分施於各木材時的狀態，若 M 爲外力的最大撓曲力矩，而 I 爲各木材的慣性力矩，則纖維的最大內力將等於：

$$n = \frac{1}{2}\frac{Mv}{I} = \frac{3M}{bh^2}$$

若木材的剖面積爲正長方形則：　$\frac{I}{v} = \frac{bh^2}{6}$

試觀察 190 圖，則可知其接觸面積互相滑動，因爲(1)木材的下部纖維被拉引而伸長，(2)木材的上部纖維則被擠壓而縮短。

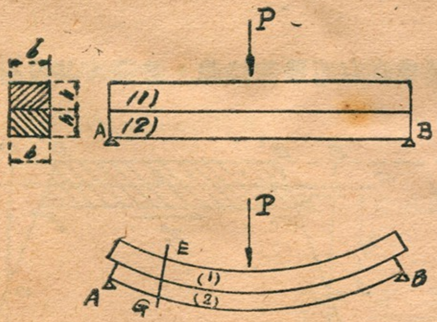


圖　190

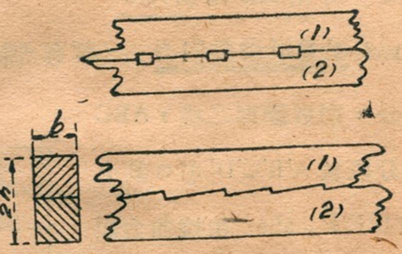


圖　191

若用普通方法以阻此滑動，如於此兩木材中安置尖劈 (wedge)，或於兩接觸面積上刻成鋸齒形(圖 191)，則可觀出其荷同樣力所發生之撓曲度，比較兩木材沒有裝固時特別減少。實在的，若此兩木材被聯固，則其撓曲形狀爲一具有 b 闊，2h 高的剖面之梁的撓曲。

此剖面的慣性力矩等於 $\frac{b(2h)^3}{12} = \frac{8bh^3}{12}$，換言之，I 較未裝固時大四倍；而

其撓曲度亦因之四倍較小，蓋因變形乃與慣性力矩成反比例，至於$\frac{I}{v}$則等$\frac{b(2h)^2}{6} = \frac{4bh^2}{6}$；若兩木材沒有聯固時，其相加之抵抗率爲$\frac{I}{w} = \frac{2bh^2}{6}$，因此，纖維的最大內力亦減少一半○

尖劈或鋸齒於191圖上所表現者，應能抵抗(1)木材於(2)木材上之滑動；因此其剖面積應足以抵抗此滑動力，此力稱爲縱滑動○

此滑動內力，不僅發生於兩木材的接觸面上，並且發生於木材中各纖維；蓋若取一部材料ACEF（圖 192），則AE面上所受撓曲之彈力，與CF面上所受者不同○此彈力實在的，根據撓曲力矩 M 之大小，而 M 力矩之値於 AB 剖面上與 CD 上各不相同○故 ACEF 部分於 EF 面積上滑動，其動力等於 C'－C，稱爲縱滑動力○

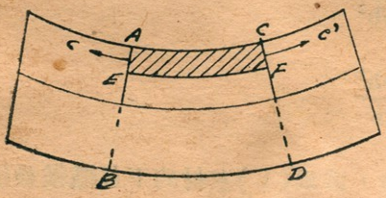


圖 192

156 計算縱滑動內力　設有一材料受垂直力而發生撓曲，若觀察其沒有外力之部分，則於變形之後，ABCD 部分成爲 A'B'C'D' 形○其上部 B'D'E'F'，abef 由撓曲力矩而產生兩力 C 與 C'，此兩力量大小不等，並使其短縮○若 C'＞C 則於（C'－C）力動作之下，此部將發生滑動，而滑動動作則將由 E'F'ef 面上磨擦力所阻，故其面上將發生一滑動單位內力 t○

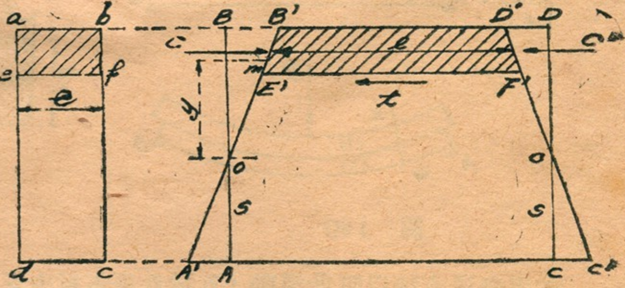


圖 193

此面積爲 ef；故其抵抗力爲 tel；因此其平衡公式：

$$C' - C = tel$$

計算 C'－C　離中心軸距離 y 之 m 點，由撓曲力矩所生之單位分子內力爲：

$$n = \frac{My}{I},$$

設 ds 爲 m 點周圍的小面積，則此點之分子力爲：

$$f = \frac{Myds}{I}$$

M 爲外力的撓曲力矩，I 爲 BA 剖面的慣性力矩；至於 DC 剖面積上則爲 M' 與 I'，

$$C = \sum f = \sum \frac{Myds}{I}$$

若由 AB 至 CD 其剖面不大變差如實際上的情況，則：

$$C' = \sum f' = \sum \frac{M'yds}{I}$$

$$C' - C = \frac{M' - M}{I} \sum yds$$

$\sum yds$ 的總值，施於由 E' 至 B' 的各小面積上，故爲 abef 面積關於中心軸的靜力力矩 (Static moment)。

$$C' - C = \frac{M' - M}{I} M_S = tel$$

$$t = \frac{M' - M}{l} \cdot \frac{M_s}{Ie}$$

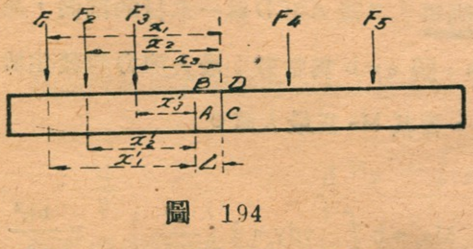


圖 194

現在再觀察橫梁上之 AB,CD 兩剖面，撓曲力矩 M 與 M' 爲：

$$M' = \sum F_1 x_1$$

$$M = \sum F_1 x_1'$$

故：　$M' - M = \sum F_1 (x_1 - x_1') = \sum F_1 l = l \sum F_1$

然：　$\sum F_1 = T$　　因此：　$M - M' = Tl$

應注意者，可書：　$l = \triangle x$，　　　$M' - M = \triangle M$

於是；　　　$T = \dfrac{\triangle M}{\triangle x}$

當 $\triangle x$ 將近於零時；　　　$T = \dfrac{\partial M}{\partial x}$

因此，在沒有集中力處之一點上，橫梁剖面之剪力等於撓曲力矩的引數。

滑動力因此等於：

$$\boxed{C - C' = l\,\frac{T\,Ms}{I}}$$

最後，剪力之公式：　　$\dfrac{c' - c}{S} = \dfrac{l\,T\,Ms}{Iel}$

$$\boxed{t = T\,\frac{Ms}{Ie}}$$

現所應注意者，則此值依着 Ms 而變差，於中心纖維時爲最大值，而於表面纖維時則等於零。

注意　應認識：

1　I 爲全剖面積，關於中心軸的慣性力矩；

2　Ms 爲滑動部分關於心軸的靜力矩；

3　e 爲滑動部分的闊度。

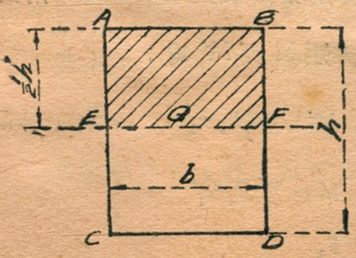


圖　195

157 例題　設 ABCD 爲一木材的剖面，高爲 h，底爲 b，闊 e＝b 爲常數；最大剪力將發生於中心纖維上，蓋其 Ms 爲最大值。

$$Ms = b\int_0^{\frac{h}{2}} y\,dy = d\left(\frac{y^2}{2}\right)_0^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{8}$$

較簡單的算法，則 ABEF 關於 EF 的靜力矩，等

於其面積乘其重心的距離：

$$Ms = \frac{bh}{2} \times \frac{h}{4} = \frac{bh^3}{8}$$

I 值則等於 $\frac{bh^3}{12}$，故其公式：　$t = \frac{TMs}{Ie}$ 遂成；

$$t = \frac{T}{b} \times \frac{\frac{bh^2}{8}}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{bh} \cdot$$

若此木條爲橡木，其寬度爲 23/8，荷剪力 T＝3000 公斤，若取公厘爲單位，則：

$$t = \frac{3}{2} \times \frac{3000}{230 \times 80} = 0{,}24$$ 公斤每方公厘○

158 垂直剪力（vertical shear）　由 141 圖一水平梁承力之後則發生撓曲，而各剖面積遂生垂直滑動，由 S 之位置而至 S_1，此乃受剪力之作用○

此種同時受撓曲力矩與受剪力之剖面，其剪力的分佈並不如受單純剪力時均佈於剖面積上，而乃依照縱剪力之均佈法跟着 M_s 之值而變差，蓋由上面之証明，一纖維上所受之縱剪內力是與垂直剪內力相等○

159 一梁剖面上的靜力矩與剪內力之變差　由上節之証明，凡一橫直梁承荷重之後，則梁上必發生縱剪內力與垂直剪內力，然此兩內力於剖面積上之分佈其法則皆相等○

$$t = t' = \frac{T}{Ie} \int y\,dw$$

此公式証明着剪內力之大小是與靜力矩成比例：

$$M_S = \int y\,dw$$

現可求各種剖面積上之靜力矩 M_S 與 t 內力之變差值；其尋求之值皆爲關於中立軸○

長方形：　其靜力矩之公式

$$M_s=\int_u^{\frac{h}{2}} y\,b\,dy=\left[\frac{by^2}{2}\right]_u^{\frac{h}{2}}=\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-u^2\right)$$

因此：

$$\boxed{t=t'\frac{T}{bI}\cdot\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-u^2\right)=\frac{T}{2I}\left(\frac{h^2}{4}-u^2\right)}$$

此公式証明着於離中立軸之最遠距離的纖維上，其剪內力等於零，而向中立軸上依

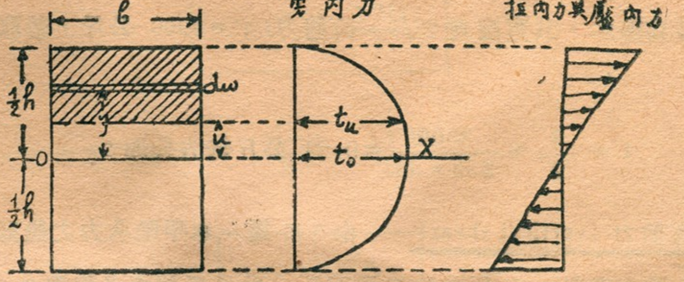


圖 196

照拋物線之縱矩逐漸增加，至中立軸時，則達到最大值，其公式：

$$\boxed{t_o=\frac{T}{2I}\cdot\frac{h^2}{4}=\frac{3}{2}\frac{T}{bh}}$$

由此，可知最大剪內力是達於1,5倍平均剪內力 $\frac{T}{bh}$ 。196圖爲一長方形面積上 t 剪內力之變差值。

至梁受撓曲時，則其剖面積上的拉或壓垂直內力的變差，則爲一直線 $n=\frac{My}{I}$ ，但是其剪內力之變差則爲一二次方公式之變值。

若將剖面積上各剪內力積分，則可得全剖面積上之剪內力與外剪力相等：

$$\boxed{\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} t\,dw=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\frac{T}{2I}\left(\frac{h^2}{4}-u^2\right)b\,du=T}$$

圓面積　　其靜力矩：

$$M_s = \int_u^R ye\,dy = 2\int_u^R y\sqrt{R^2-y^2}\,dy = \frac{2}{3}(R^2-u^2)^{\frac{3}{2}}$$

因此：

$$\boxed{t = \frac{T}{3I}(R^2-u^2)}$$

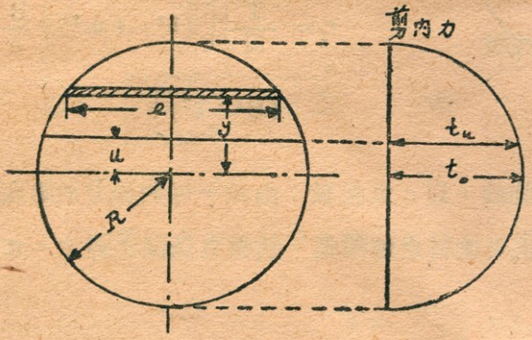


圖　197

由此，可知t值之變差是依着拋物線之法則，於極邊纖維上，剪內力等於零，於中立軸上，其值爲最大值：

$$\boxed{t_o = \frac{T}{3I}\cdot R^2 = \frac{4}{3}\cdot\frac{T}{\pi R^2}}$$

因此剖面積剪內力之最大值，等於I,5 倍其平均值。

三角形　　其靜力矩：

$$M_s = \int_u^{\frac{2}{3}H} y\,dw = \int_u^{\frac{2}{3}H} y\frac{B}{H}\left(\frac{2}{3}H-y\right)dy = \frac{B}{81H}(2H-3u)^2(H+3u)$$

因此；　$t = T\dfrac{4(2H-3u)(H+3u)}{3BH^3}$

t 之最大值，是位於 $u=\dfrac{H}{6}$，其值爲：

$$\boxed{t = \frac{3}{2}\times\frac{T}{\frac{BH}{2}}}$$

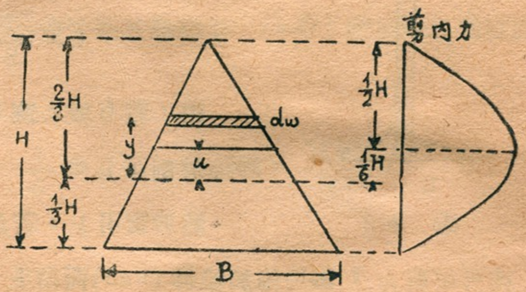


圖　198

t 剪內力之變差，是依照一拋物線之法則；因此，可知其最大值，不是位於剖面積之中立軸，然與其極爲鄰近。

工字形對稱剖面積：　　其靜力矩：

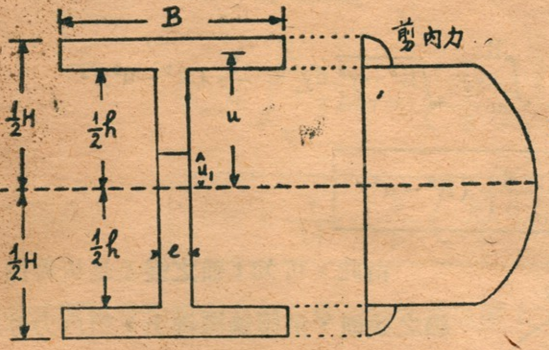


圖 199

$$M_S = \int_u^{\frac{H}{2}} yB\,dy = \frac{B}{8}(H^2-4u^2)$$

故； $$t = \frac{T}{8I}(H^2-4u^2)$$

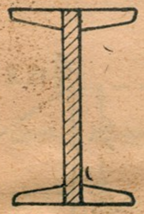
$$M_{S_1} = \frac{e}{8}(h^2-4u_1^2)+\frac{B}{8}(H^2-h^2)$$

$$t_1 = \frac{T}{8I}\left[(h^2-4u_1^2)+\frac{B}{e}(H^2-h^2)\right]$$

t 值之變差是依照着兩二次方之拋物線，以 u 爲函數：由此，可知剪力於梁底上其量極小，而於梁幹上則較大；於梁底與梁幹之連接處，其值爲急促之變差，其最大值發生於中立纖維上，爲：

$$\boxed{t_O = \frac{T}{8\,eI}\left[e\,h^2 + B\,(H^2-h^2)\right]}$$

<u>經驗與臆說</u> 在僅有橫向滑動類時(沒有撓曲)，則可定剪力T是均佈於S剖面上，因此分子工作將爲：



$$t = \frac{T}{S}$$

但，若有加入撓曲力矩時，則此臆說爲不可能，而T並不均佈於剖面上。

圖 200

然於實用上，若計算工字形橫梁，則雖有撓曲力矩加入，亦可認剪力 T 僅均佈於梁幹(web)面積上，其所犯之錯誤並不甚大。

162 <u>例題</u> 設有一鋼工形剖面 200×65×7，承受一剪力 7000 公斤。現擬檢核其縱面及橫面剪抵抗力。此剖面積的慣性力矩：

$$I = 15380000\ \overline{公厘}^4$$

縱面剪力的最大值，是位於中心纖維。

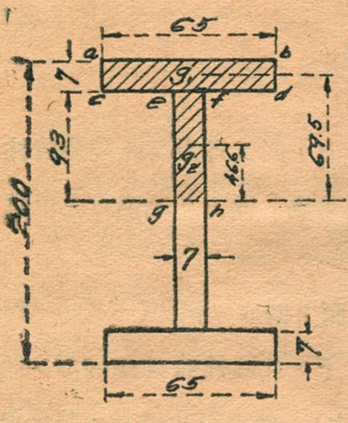


圖　201

至中心纖維上部的 M_s 求法，則可將其面積分為兩部分 abcd,efgh，其重心為 g_1 與 g_2

此兩部面積至中心纖維的力矩，等於該面積乘其重心至中心纖維的距離，因此：

$$M_s = (65 \times 7 \times 96{,}5) + (93 \times 7 \times 46{,}5) = 741790$$

梁幹之厚為 7 公厘，故每方公厘的最大剪內力為：

$$t = \frac{7000 \times 74179}{15380000 \times 7} = 4{,}8 \text{ 公斤}$$

若將剪力平均的分佈於剖面積上，工字形之剖面積為 2213 方公厘，則：

$$t = \frac{7000}{2213} = 3{,}1 \text{ 公斤}$$

然於計算上，若能將剪力均佈於梁幹面積上則已滿足，故在此例題上：

$$t = \frac{7000}{186 \times 7} = 5{,}4 \text{ 公斤每方公厘}$$

此值與用正確計算法所求得者頗相似。

注意　設剖面積為一圓面積，則剪力於極外纖維處 $t=0$；而於中心纖維處亦可用他法計算之：

$$S = \frac{\pi D^2}{8}; \qquad V = \frac{2}{3} D; \qquad \text{故 } M_s = \frac{\pi D^2}{8} \times \frac{2}{3} D;$$

$$I = \frac{\pi D^4}{64}; \qquad e = D$$

因此：

$$t = \frac{T}{I} \frac{M_s}{e} = \frac{T \times \frac{2}{3} D \times \frac{\pi D^2}{8}}{\frac{\pi D^4}{64} \times D} = \frac{4}{3} \frac{T}{\frac{\pi D^2}{4}}$$

第八章　簡單扭轉力

163 概論　凡一材料的剖面，若稱謂受簡單扭轉力，則其外力必非經過棱柱體的中心軸，而位於其左邊或右邊的相當距離，而必須集成一偶力；此偶力之平面與材料之中心軸成垂直。

例如202圖 ABCD 之圓軸，AB 端為裝固，而CD 剖面上則有一偶力(+P)(-P)

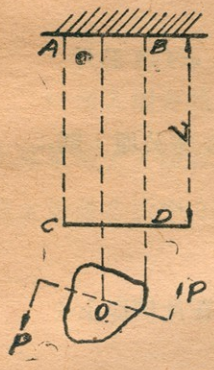


圖　202

在(+P)(-P)偶力動作之下，此圓柱體發生變形，而其內部卽發生正切內力(或剪內力)；此內力的增長，是至與外力(-P)(P)平衡時而止。

於材料強度學上，可假定：

1　圓柱體各剖面於變形之後仍為平面，至其相互的移動，則於其中心軸之周圍旋轉，此軸因此稱為扭轉軸(torsional axis)，經過剖面的重心。扭轉軸乃一不變形纖維，然其他纖維則改變如螺旋形(彈性學中的定理，關於棱柱體受力變形後，保全其剖面平面的假定，僅限於圓形棱柱體)。

2　AB 與CD兩剖面的距離，於未扭轉前及扭轉後，是保守着其原來的距離，

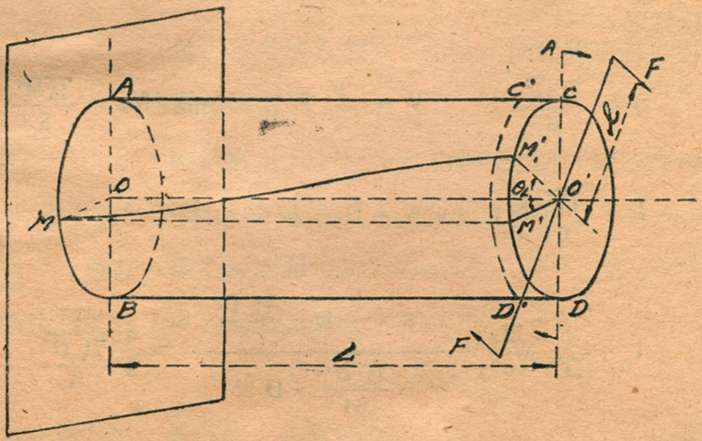


圖　203

故材料的長度 L 是毫無變更○

3　AB,CD 兩剖面扭轉的相關角度，是與兩剖面的距離成正比例

設各剖面積的距離相同，則其關於鄰近剖面的扭轉角度亦因而爲常數，故其結果爲各剖面上所受扭轉力的影響皆同○

164　圓柱體剖面上的簡單扭轉力　　設有兩鄰剖面積 S 與 S' 其距離爲 dx，纖維 mm' 的剖面爲 $d\Omega$，於扭轉偶力 M 動作之下，S' 剖面積關於 S 面積，以 OO' 爲中心軸而轉動，其扭轉角度爲 $d\theta$，換言之，卽係纖維 mm' 的上端 m'，發生一移動距離：

$$m'm'_1 = rd\theta$$

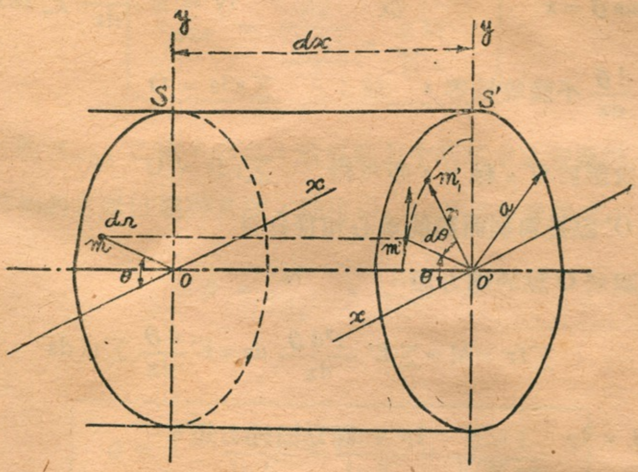


圖　204

兩剖面積相關的單位移動距離爲：

$$g = \frac{rd\theta}{dx}$$

S' 剖面上的圓周正切彈力或圓周正切分子力，則與 O'm' 成直角，其值：

$$t = E'g = E'\frac{rd\theta}{dx} \qquad (1)$$

E' 爲剖面積的扭轉力彈性係數○

若分子面積爲 ds 則其彈力爲：

$$f = tds = E' \frac{rd\theta}{dx} ds.$$

若欲使分子彈力，適合於棱柱體的平衡條件；則 f 等彈力，必須歸納成爲一偶力，換言之；卽各力投影於 Ox 與 Oy 兩軸上的總數必等於零，而其關於一點 O 之力矩總數則等於外力力矩 M。

1　例如 204 圖，若 O'm' 與 O'x 之角度爲 θ，則其投影於 Oy 軸上之力量：

$$\sum f_y = \sum f \cos\theta = \sum E' \frac{rd\theta}{dx} ds \cos\theta = E' \frac{d\theta}{dx} \sum rds \cos\theta = 0 \quad (2)$$

$r\cos\theta = x$　　故　　$fy = E' \frac{d\theta}{dx} \sum xdx = 0$

$E' \frac{d\theta}{dx}$ 不能等於零，　故：　$\sum xds = 0$

若將各力投影於 O'x 軸上，亦可得　$\sum yds = 0$

由此可以証明 O' 點是與剖面積的重心相符合。

2　各力關於 O 點的總力矩：

$$\sum fr = M = \sum E' \frac{r^2 d\theta}{dx} ds = E' \frac{d\theta}{dx} \sum r^2 ds$$

但　$\sum r^2 d = I\rho$　　　$I\rho$ = 極點慣性力矩。

$$E' \frac{d\theta}{dx} I\rho = M$$

$$E' \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{I\rho}, \quad (3)$$

若將 $E' \frac{d\theta}{dx}$ 值代入（1）方程式中，則由扭轉力所產生的分子內力：

$$\boxed{t = E' \frac{rd\theta}{dx} = \frac{Mr}{I\rho}} \quad (4)$$

現應注意者，爲極點慣性力矩的定義：凡一剖面積關於一直軸垂立於該剖面的

極點慣性力矩，是等於關於經過垂立直軸與剖面積相交點，兩成直角的慣性力矩軸之和（卽係關於 Ox 與 Oy 的慣性力矩，Oy 與 Ox 成直角，而 O 點則爲該剖面的重心）。

分子內力 t 的極大值，是跟着 r 長度而增，換言之，卽離中心點 O 最遠的纖維，其 t 值亦最大，因此，於圓柱體的表面上，其纖維離中心點的最遠距離，爲剖面積圓周的半徑，故 r = a；而剖面積的極點慣性力矩則爲：

$$I_p = \frac{\pi a^4}{2}$$

分子扭轉力的最大值：

$$\boxed{t_{max} = \frac{Ma}{\frac{\pi a^4}{2}} = \frac{2M}{\pi a^3}} \qquad (5)$$

於實用上，此 t_{max} 之值，必須小於剪割力中所規定之安全限 R'。

至兩鄰剖面相關之單位旋轉角度，則可由（3）公式中求得之：

$$d\theta = \frac{M}{I_p} \times \frac{dx}{E'}$$

故旋轉角度：

$$\boxed{\theta = \int_0^L \frac{M\,dx}{I_p E'} = \frac{ML}{I_p E'} = \frac{2ML}{E'\pi a^4}}$$

可取 $E' = \frac{4}{10}$ E；E 爲拉引力中長彈性係數。機械上旋轉軸的 θ 角度，大概每公尺不能超過¼度。

165 <u>圓柱體上有數偶力</u>　若圓柱體上不僅有一偶力，而有數偶力如圖 205，則前面之公式皆可適用，然所不同者僅 M 值於各點上變差而不相等。例如：

由 A 至 B　　$M = 2Pl$

由 B 至 C　　$M = 2Pl + 2P_1 l_1$

由 C 至 D　　$M = 2Pl + 2P_1 l_1 - 2P_2 l_2$

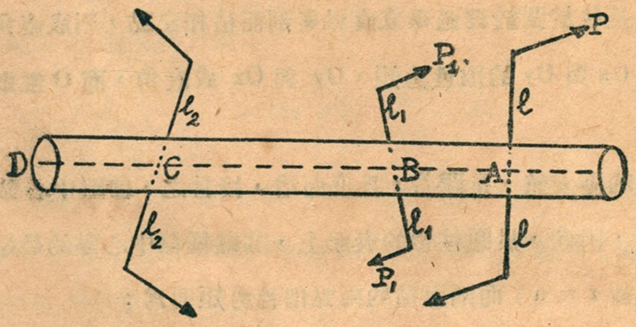


圖 205

如此類推。

若扭轉力於圓柱體之長度上依着一任何法則爲一連續變差力 p，而其力臂 l_x 亦爲變差值，則：

$$M = 2\int l_x\, dp$$

若欲使圓柱體爲一等量抵抗軸，則可將各 M 值置入（4）方程式中而求各剖面之 $\frac{I_p}{r}$ 以使 t 值於各剖上爲一不變常數。

166 圓柱體兩端皆裝固　　設有一圓柱體 AB，其剖面積爲常數而 A, B 兩端則裝固，於 AB 間之 D 點有一偶力其值爲 M，現擬求裝固端之剖面中所發生之 M_1 與 M_2 偶力。

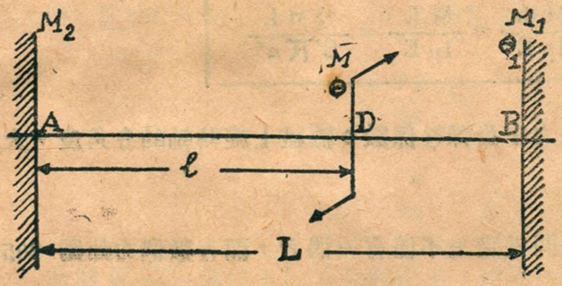


圖 206

將B 端之裝固取消，而代以 M_1 扭轉力矩；設 θ 爲 D 剖面上之扭轉角度；但於B 點上之扭轉角度則等於零，蓋因被裝固而不能移動；現若指 θ_1 爲 B 端受 M_1 所發生之扭轉角度，則 AB 之固定平衡應使：

$$\theta - \theta_1 = 0 \qquad (1)$$

但；　$\theta = \frac{Ml}{I_p E'}$；　$\theta_1 = \frac{M_1 L}{I_p E'}$

將此兩值代入（1）公式中則可得；

$$M_1 = \frac{Ml}{L}$$

由同一理由亦可求得：

$$M_2 = \frac{M(L-l)}{L}$$

並可認識着：　$M_1 + M_2 = M$

注意　a 若棱體的剖面爲空圓心面積，則以上公式尚可適用；若以 a' 爲內半徑 a 爲外半徑則：

$$t = \frac{Mr}{I_p} = \frac{2Ma}{\pi(a^4 - a'^4)},\qquad \text{蓋因 } I_p = \frac{\pi}{2}(a^4 - a'^4)$$

故：

$$\theta = \frac{ML}{I_p E'} = \frac{2ML}{E'\pi(a^4 - a'^4)}$$

167　非圓剖面積棱柱體　a　等邊多角形剖面　等邊多角形剖面積可認爲圓面積之相似剖面，故 163 節中之假說亦可適用於此類剖面棱柱體；故可求其 Ip 與 $\frac{I_p}{v}$ 之值而代入 164 節中之公式以求其分子內力與角度變形。

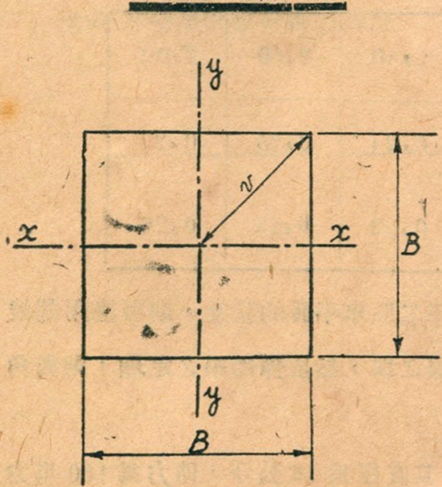


圖　207

若剖面積爲正方形，則其極點慣性力矩：

$$I_p = 2I = \frac{B^3}{6}$$

$$\frac{I_p}{v} = \frac{I_p\sqrt{2}}{B} = \frac{B^3}{3\sqrt{2}}$$

若剖面積爲等邊六角形，D 爲其外切圓周

之直徑，則其極點慣性力矩：

$$I_p = 0,0677D^4 \qquad \frac{I_p}{v} = 0,1354D^3$$

若剖面積爲等邊八角形，則：

$$I_p = 0,798D^4 \qquad \frac{I_p}{v} = 0,1596D^3$$

b 若棱柱體的剖面積爲橢圓形，則此棱柱體變形時，其剖面積並不能保持其原來平面狀態，由彈性學理論的應用，便可得其公式：

$$t = \frac{2M}{\pi a^2 b}\ ; \qquad \theta = \frac{M(a^2+b^2)L}{E'\pi a^3 b^3}\ ;$$

a 爲小半徑，b 爲大半徑，最大分子內力將發生於小軸之一端。

c 若棱柱體剖面積爲長方形，其邊爲 a 與 b，$a<b$，則其公式：

$$t = \frac{2M}{\beta a^2 b}\ ; \qquad \theta = \frac{ML}{\gamma E' a^3 b}\ ;$$

t 的最大內力將發生於長邊 b 之中間；β 與 γ 爲一係數依着 $\frac{b}{a}$ 之比例而變更；其表如下：

$\frac{a}{b}$	1	1,30	1,60	1,80	2,00	3,00
β	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,27
γ	0,14	0,18	0,20	0,22	0,23	0,26

注意　若棱柱體變形之後，其剖面仍保持其原來平面的狀態，則可應用圓棱柱體之公式，因此其最大內力，將發生於對角線之端，然依彈性學之定理，則對角線端之點，其 t 內力則等於零。

168 例題　設一機器上有一軸 (Shaft)，其直徑爲 16 公分，傳力爲 160 馬力，而速度則爲每分鐘 40 轉，試求其最大扭轉內力。

首先應求扭轉偶力 M' 若 Q為滑車(Pulley)周線上之正切力(tängentiel force)，r 爲其半徑，則其每一旋轉之工作爲 $2\pi r Q$，而其每秒鐘工作（若指 n 爲每分鐘之轉數），則等於$\frac{2\pi rnQ}{60}$，因一馬力代表每秒鐘 75 斤尺，故若將其變爲馬力則：

$$A = \frac{2\pi rQn}{60\times 75}$$

扭轉偶力 M 等於 Qr，　　故　$A = \frac{2\pi n}{60\times 75}M$

因此：　$M = \frac{60\times 75\times A}{2\pi n} = 716{,}2\,\frac{A}{n}$

由題中之給數，　A＝160；　n＝40；

故　　$M = 716{,}2\times\frac{160}{40} = 2865$ 公斤尺

最大扭轉內力：　$t = \frac{2M}{\pi a^3} = \frac{2\times 2865}{3{,}1416\times 0{,}08^4} = 3{,}6$ 公斤每方公厘

若以方公尺計算則每方公尺　$t = 3{,}6\times 10^6$ 斤 ＝3600000 公斤

若以方公厘計算則每方公厘　$t = 3{,}6$ 公斤

第九章 編心壓力

169 短柱上之偏心壓力　若外力置於短柱之剖面上，其方向與軸線平行，而不與其相混合，則柱上所受之壓力爲偏心壓力 (eccentric load)。偏心壓力於柱上之作用，爲使其剖面積中之各分子；同時受一壓力與一力矩。

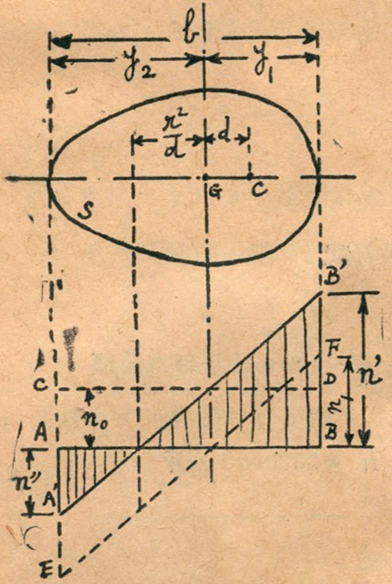


圖 208

設如圖 208，有一短柱剖面 S，其柱上之外力 P 位於 C 點，離重心 G 距離爲 d。

將 P 力移置重心 G，而加進一力矩 Pd，則並不改變外力原來之性質；因此，剖面積上所受之外力爲：壓力 P 與力矩 Pd。

壓力 P 均佈於剖面積上，其單位分子面積內力爲 $\frac{P}{S} = n_0$，其代表圖線爲 ABCD

力矩 Pd 施於剖面積上，其單位分子面積內力爲：　$n_1 = \frac{P\,d.y}{I}$，其代表圖線爲 AEBF。

剖面積上既同時受此二種內力，則其總分子內力爲此二內力之和：

$$n = n_0 + n_1 = \frac{P}{S} \pm \frac{Pd \cdot y}{I} = n_0\left(1 \pm \frac{d \cdot y}{r^2}\right)$$

$$(1)\qquad \begin{cases} n' = n_0\left(1 + \frac{d \cdot y_1}{r^2}\right) \\ n'' = n_0\left(1 - \frac{d \cdot y_2}{r^2}\right) \end{cases}$$

其代表圖線爲 AA'BB'。

若剖面爲對稱面積，則 $y_1 = y_2 = \frac{b}{2}$

$$\begin{cases} n' = n_0\left(1 + \frac{d \cdot b}{2r^2}\right) \\ n'' = n_0\left(1 - \frac{d \cdot b}{2r^2}\right) \end{cases}$$

剖面積受力後中立軸線之尋求，宜使（1）公式之值等於零，而定 y 值

$$n = n_0\left(1 - \frac{d \cdot y}{r^2}\right) = 0$$

$$y = \frac{r^2}{d}$$

170 簡單支托之圓長柱　設有一直縱軸桿或一圓柱 AB，其剖面 S 爲等剖面積，其荷重 P 之施力方向與其縱軸之方向平行，並離其剖面之重心線距離爲 d；P 力位于桿之對稱平面上。

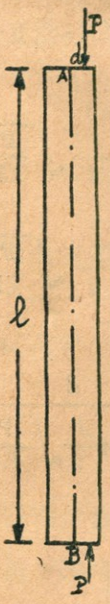


圖　209

圓柱之支點置於 B 基礎上爲自由支點（不裝固）；因圓柱與其基礎的接觸爲自由放置，故 B 之總反力等於 P，同施力線而指向相反。

若欲使圓柱自由於空間，則可以 P 代其支點 B 如 207 圖；圓柱受此兩力之後，即生撓曲變形如 209 圖；將此變形圓柱置於正角度之位座標上，其 Ox 與 P 之施力線相混合；原點 O 置於柱之半高度上；OXY之平面與位有 P 力之對稱平面相混合。

I 爲圓柱剖面積關於一垂直於 OXY對稱平面軸之慣性力矩。

設有一 H 剖面，其重心位置爲(xy)，剖面上承 －P 力與一Py 力矩，因此，其一離重心點距離 Z 之任何纖維的內力公式：

$$n_z = \frac{P}{\omega} \pm \frac{PyZ}{I}$$

若以 v_1 與 v_2 代表離重心最遠纖維，而 n_1 與 n_2 爲此等纖維之內力，則可得：

$$(1)\quad \begin{cases} n_1 = \dfrac{P}{w} + \dfrac{PV_1}{I}y \\ n_2 = \dfrac{P}{w} - \dfrac{PV_2}{I}y \end{cases}$$

此內力依據 y 值而變差，故以圓柱所生之撓曲弧線爲函數；前面已求得此弧線，其微分方程式：

$$(3)\qquad EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Py$$

給 P_y 值以負號之理由，則因由 210 圖其撓曲度爲正號，故爲符合實際之狀況可取負號；(3)方程式爲兩次微方程式，其普通積分式：

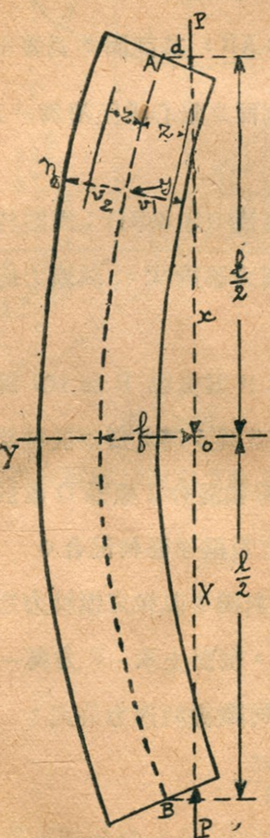


圖 210

$$\boxed{y = A\sin x\sqrt{\frac{P}{EI}} + B\cos x\sqrt{\frac{P}{EI}}}$$

若 $x = +\frac{l}{2}$ 與 $x = -\frac{l}{2}$，則 $y = d$，

故其定常數 A,B 之條件方程式：

$$d = A\sin\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}} + B\cos\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}$$

$$d = -A\sin\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}} + B\cos\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}$$

由此可求得：

$$A = O \qquad B = \frac{d}{\cos\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}}$$

而變形彈性方程式遂成：

$$(4)\qquad \boxed{y = d\,\frac{\cos x\sqrt{\frac{P}{EI}}}{\cos\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}}}$$

於是此 y 值之定數是以已知數爲函數，若其代入(1)，(2)兩方程式中，則可得 H 剖面積之最大拉內力與壓內力。

(4)方程式之最大值爲 $x=o$，亦即爲位於圓柱半高度上之剖面，其撓曲度：

$$(5)\quad \boxed{f=\frac{d}{\operatorname{Cos}\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}}=\frac{d}{\operatorname{Cos}\frac{l}{2r}\sqrt{\frac{P}{Ew}}}=\frac{d}{\operatorname{Cos}\frac{l}{2r}\sqrt{\frac{p}{E}}}}$$

至其最大內力：

$$\begin{cases} n_1=\dfrac{P}{w}=\dfrac{Pv_1}{I}f=\dfrac{P}{w}+\dfrac{Pv_1}{I}\cdot\dfrac{d}{\operatorname{Cos}\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}} & (6)\\ n_2=\dfrac{P}{w}-\dfrac{Pv_2}{I}f=\dfrac{P}{w}-\dfrac{Pv_2}{I}\cdot\dfrac{d}{\operatorname{Cos}\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}} & (7)\end{cases}$$

此兩內力中之最大值爲 n_1，他不宜大過於定之材料安全限；故由此方程式，可以決定圓柱之剖面積或其荷重 P 之力量，實在的，由(6)方程式，可得：

$$(8)\qquad P=\frac{n_1 w}{1+\dfrac{v_1 wd}{I\operatorname{Cos}\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}}}$$

此公式之解決，可用漸近法計算，蓋其兩部皆包含着 P 力。上式有時可將 $\operatorname{Cos}\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}$ 代以其級數之前兩項：

$$(9)\quad \operatorname{Cos}\frac{l}{2r}\sqrt{\frac{P}{E}}=1-\frac{1}{2}\left[\frac{P}{E}\left(\frac{l}{2r}\right)^2\right]+\frac{1}{24}\left[\frac{p}{E}\left(\frac{l}{2r}\right)^2\right]^2\cdots\cdots$$

所應注意者，則上面之公式僅適合於 E 值爲常數；若材料爲鑄鐵則 E 值不能爲常值，但可取其至于 20 公斤。

若圓柱爲鑄鐵，則宜於解決(6)(8)兩方程式之後，再檢查于(7)方程式中，是否不受過量之拉力，蓋鑄鐵之抵拉力，較拉壓力極少。

171 装固圓柱　若圓柱之足爲裝固式，則其撓曲變形如 211 圖，亦卽爲取 210 圖之一半弧線，其撓曲度因此較（5）方程式爲小，可將其公式中 $\frac{l}{2}$ 之值代以 l，故：

$$(10)\qquad \boxed{f=\frac{d}{\operatorname{Cos} l\sqrt{\frac{P}{EI}}}}$$

而（6）與（7）兩方程式之最大內力，亦因之而變。

172 例題　I　試取一例題如 211 圖，圓柱爲充實面積，其直徑爲 20 公分，高爲 4 公尺，其荷重爲 5000 公斤，位於離中心軸之 1 公尺距離上，因此 d 爲 1 公尺。因P 之施力點既位於柱端割面積之外，則其下端應爲裝固式，方能得着平衡。

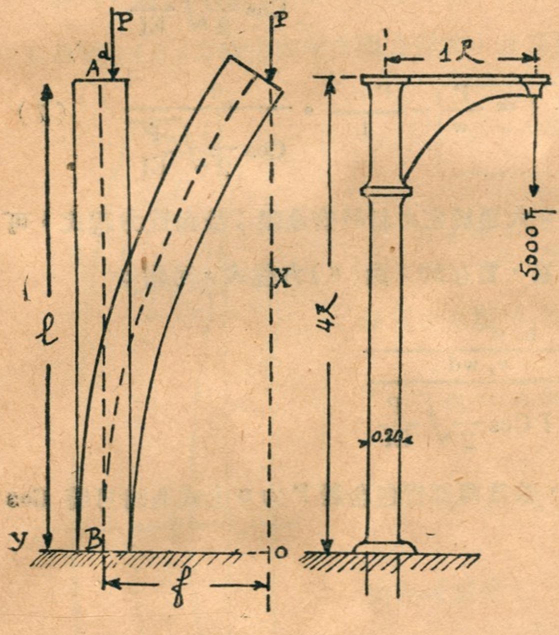


圖　211

$V_1=V_2=0,10$公尺　$W=0,0314$ 方公尺

$$I=\frac{\pi\times0,20^4}{64}=0,0000785$$

$$E=2\times10^{10}$$

$$\frac{P}{EI}=\frac{5000}{2\times10^{10}\times0,0000785}=\frac{1}{314}$$

最大壓內力：

$$n_1==\frac{5000}{0,0314}+\frac{5000\times0,10}{0,0000785}\times\frac{1}{\operatorname{Cos}4\sqrt{\frac{1}{314}}}=6678235\text{ 公斤每方公尺。}$$

最大拉內力：

$$n_2=+159235-6519000=6360000\text{ 公斤每方公尺。}$$