# 中等算學月刊



贈閱

第二卷第五期

# 第二卷第五期目錄

# 行列式在立體解析幾何上之應用

龍 季 和

不佞於本刊一卷四期"行列式在平面解析幾何上之應用"一文之篇末，曾聲言將屬此文，惟屢以材料之取捨困難，數度下筆，均未成草；蓋行列式爲解析幾何一重要工具，其在立體解析幾何之應用，較在平面更廣，若一一列入則不勝煩瑣也．今擇較普通數端，稍加討論，其餘讀者不難舉一反三也．

立體幾何論一平面之決定，可由(1)不在一直線上之三點，(2)一直綫及線外一點，(3)兩平行直線，或(4)兩相交直線．決定云者，即在所與條件之下，可作一平面，且祇可作一平面之謂也．今就此等條件所決定之平面之方程式考之．

(一)過不在一直線上三點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$，$P_3(x_3,y_3,z_3)$ 之平面之方程式．

設所求平面之方程式爲

$$Ax+By+Cz+D=0; \qquad (1)$$

內，A，B，C，D 不全爲零(參看討論一)．

此平面旣過 $P_1$ 點，故有

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0. \qquad (2)$$

同理得

$$Ax_2+By_2+Cz_2+D=0, \qquad (3)$$

及

$$Ax_3+By_3+Cz_3+D=0. \qquad (4)$$

由(2)，(3)，(4)三方程式，求出 A，B，C，D 之比，代入(1)即得．但由高等代數知此種手續，可用消去法代之．即由上四方程式消去 A，B，C 及 D，即得平面之方程式爲

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \qquad (5)$$

（討論一）所謂消去A,B,C,D者，意係假定A,B,C,D爲變數，而求出其係數$x,y,z,x_1,y_1,\cdots\cdots$等之關係式，使上四方程式有公解也。由高等代數知欲消去A,B,C,D，則必含一A,B,C,D不全爲零之條件方可，蓋非如此，其係數$x,y,\cdots\cdots$等爲任何數，四方程式均有公解也。而由另一方面言之，則所設$Ax+By+Cz+D=0$之一平面之方程式中，亦非有A,B,C,D不全爲零之條件不可，蓋非如此，所設平面變成$0=0$，不成爲一平面也。

（討論二）若三點在一直綫上，則彼等在各座標平面之射影爲一點，或在一直線之三點（讀者請味此言）。由此知在每個座標平面之三點所成之三角形之面積爲O，故有（請參看本刊一卷四期 p.19）

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0;$$

而三點既在一線上，則此三點與原點所成之四面體之體積爲零，乃有（請參看第七節）

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

由是(5)式變爲恒等於零；換言之，即過一直線，可作無窮個平面也.（附誌：此等平面，稱爲面束Pencil of planes）

（系）四點$P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$，$P_3(x_3,y_3,z_3)$，$P_4(x_4,y_4,z_4)$在一平面上之條件爲

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0$$

(二)過一直線及線外一點之平面之方程式

欲解此題,先視其所與之直綫方程式之形式如何. 如所與之直線方程式為兩點式 (Two-point form), 則可由此兩點及線外之一點, 照上法求之, 例如所與直線為

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{z-z_1}{z_1-z_2},$$

己知點為$P_3(x_3,y_3,z_3)$,則所求之平面之方程式為.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

又如所與直線方程式為普通式(General form),卽

$$\begin{aligned} &Ax+By+Cz+D=0, \\ &A'x+B'y+C'z+D'=0, \end{aligned} \tag{6}$$

則任與 z (當然 x 或 y 均可)兩值,代入(6)而求相當之 x,y, 因而所求兩點,合己知點,又可如上法求之矣.

又如所與直線方程式為對稱式(Symmetric form),卽

$$L:\quad \frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma},$$

則可解之如次. 設所求之平面為

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{7}$$

內 A,B,C,D 不全為 O. 此平面既含 L 綫,則必過其線上之一點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 故有

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0, \tag{8}$$

且有 $$A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma=0, \tag{9}$$

蓋 L 在平面上,可視為與之平行一特例也.既與之平行,當有(9)式.如綫外之己知

點爲 $P_3(x_3, y_3, z_3)$，則有

$$Ax_3+By_3+Cz_3+D=0. \tag{10}$$

由(7)——(10)四式消 A,B,C,D 則得平面之方程式爲

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{11}$$

(討論)若 $P_3$ 在 L 線上，則有

$$\frac{x_3-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y_3-y_1}{\cos\beta}=\frac{z_3-z_1}{\cos\gamma}=k,$$

或 $x_3-x_1=k\cos\alpha \quad y_3-y_1=k\cos\beta \quad z_3-z_1=k\cos\gamma.$

而另一方面，(1')式可變爲

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 & 0 \end{vmatrix}=0, \quad 即 \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 \\ k\cos\alpha & k\cos\beta & k\cos\gamma & 0 \end{vmatrix}=0.$$

由行列式性質知上式變成恆等式，易推知[參看(一)，討論二]平面不定.

(系) 如所與直線之方程式爲

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c},$$

則平面之方程式爲

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ a & b & c & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

(三)過兩平行線之平面之方程式

設兩已知平行線之方程式爲

$$L_1:\ \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c},\qquad L_2:\ \frac{x_2-x}{a}=\frac{y-y_2}{b}=\frac{z-z_2}{c}.$$

如所求之平面之方程式爲

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

則有 $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0,$

又有 $Ax_2+By_2+Cz_2+D=0,$

及 $Aa+Bb+Cc\qquad=0.$

由消去法得平面之方程式爲

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}=0.$$

（討論）若 $P_1 \equiv P_2$,（即 $x_1=x_2, y_1=y_2, z_1=z_2$ 之簡寫），則平面之方程式變成

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}=0$$

又成一恒等式，於是平面又不定矣．而另一方面言之，兩平行線既有一公共之有限點，故必合爲一線，過此線平面有無窮個也．

（四）過兩相交直綫之平面之方程式

設已知相交兩直線之方程式爲

$$L_1:\ \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c},\qquad L_2:\ \frac{x-x_1}{a'}=\frac{y-y_1}{b'}=\frac{z-z_1}{c'}.$$

仿上法易知平面方程式爲

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ a & b & c & 0 \\ a' & b' & c' & 0 \end{vmatrix}=0,\ 或\ \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}=0.$$

（系）兩直線

$$L_1:\ \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c},\qquad L_2:\ \frac{x-x_2}{a'}=\frac{y-y_2}{b'}=\frac{z-z_2}{c'}$$

相交之條件

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}=0.$$

讀者若能了解以上各端，則如"求過一已知直線，與一已知平面平行之平面方程式"，"求過一已知點，並與一已知線垂直之平面之方程式"等問題，不難推得也。

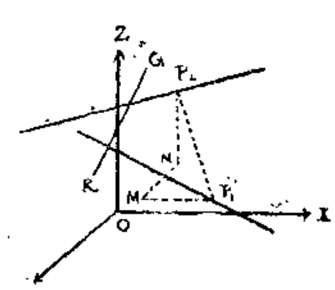
友人嘗示去年浙江大學第二次招考一題，中學課本中未見有，茲便爲述之如次。

（五）試證兩直線

$$L_1:\ \frac{x-x_1}{\cos\beta}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma},\qquad L_2:\ \frac{x-x_2}{\cos\alpha'}=\frac{y-y_2}{\cos\beta'}=\frac{z-z_2}{\cos\gamma'}$$

間之最短距離爲

$$d=\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix}\frac{1}{\sin\theta},$$




內 $\theta$ 爲上兩線之交角。

證： 設兩線之公共垂直線之方向餘弦爲

$\cos\alpha''$，$\cos\beta''$，$\cos\gamma''$，則因 $\cos\alpha\cos\alpha''+\cos\beta\cos\beta''+\cos\gamma\cos\gamma''=0$，

$$\cos\alpha'\cos\alpha''+\cos\beta'\cos\beta''+\cos\gamma'\cos\gamma''=0,$$

故
$$\frac{\cos\alpha''}{\cos\alpha\cos\gamma'-\cos\beta'\cos\gamma}=\frac{\cos\beta''}{\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\gamma'\cos\alpha}$$

$$=\frac{\cos\gamma''}{\cos\alpha\cos\beta'-\cos\alpha'\cos\beta}$$

$$=\sqrt{\cos^2\alpha''+\cos^2\beta''+\cos^2\gamma''}\Big/\sqrt{[(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\beta'\cos\gamma)^2}$$

$$+(\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\alpha'\cos\gamma)^2+(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\alpha'\cos\beta)^2]$$

$=\frac{1}{\sin\theta}$. （此處另用一補題証之） (12)

所求之最短距離爲 $P_1P_2$ 在公共垂線 QR 上之射影．今作一折線 $P_1MNP_2$，使 $P_1M \parallel OX$，$MN \parallel OY$，$NP_2 \parallel OZ$．依射影第二定理，所求最短距離爲 $P_1M$，$MN$，$NP_2$ 在 QR 上之射影之和，又依射第一定理得

$$d=\cos\alpha''(x_1-x_2)+\cos\beta''(y_1-y_2)+\cos\gamma''(z_1-z_2)$$

合(12)，則得

$$d=\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix}\frac{1}{\sin\theta}.$$

（補題）$\sqrt{[(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\beta'\cos\gamma)^2+(\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\gamma'\cos\alpha)^2}$
$\overline{+(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\alpha'\cos\beta)^2]}$

$=\sqrt{[(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)(\cos^2\alpha'+\cos^2\beta'+\cos^2\gamma')-(\cos\alpha\cos\alpha'}$
$\overline{+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma')^2]}$

$=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sin\theta$.

（討論）此題係求距離，與正負號無關，故(12)式中之正負號略而不書也．

（系）若 $L_1$ 及 $L_2$ 相交，則距離爲零，而 $\frac{1}{\sin\theta}\neq 0$（因 $-1\leq\sin^2\theta\leq 1$），故

$$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix}=0,$$

此卽爲 $L_1$ 及 $L_2$ 相交之條件也．

（六）過四點 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2$，$P_3$，$P_4$ 之球之方程式爲

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_1^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

若明上各題之理,此題自易證明.

(七)以 $P_1(x_1,y_1,z_1),P_2,P_3,P_4$ 爲頂點之四面體之體積爲

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

此題証法較長,從略,讀者欲知之,請參看(Bell: Coordinate Geometry of three Dimensions pp.64—66).

# 西姆孫綫之推廣

郭 可 詹

西姆孫線早已膾炙人口,今將其推廣,使其爲此推廣定理下之一特例.爲明瞭起見,先將西姆孫線定義述之如下:

由 $\triangle ABC$ 外接圓周上一點 P,向各邊作垂線,交各邊于 D,E,F,則 D,E,F 三點在一直線上.此直線曰 P 點之西姆孫線.

推廣之定理　由三角形 $\triangle ABC$ 外接圓周上一點 P,向各邊作直線而交之于 D,E,F,若

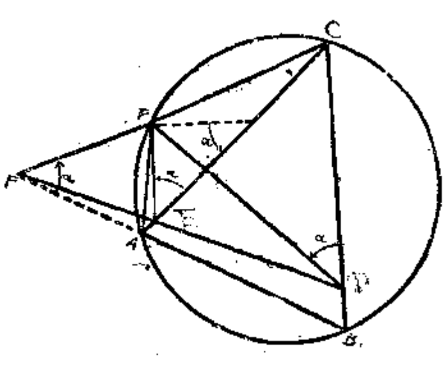
$$\angle CDP=\angle CEP=\angle AFP=\alpha$$

則 D,E,F 三點在一直綫上.

[證]如圖,連 FE,ED.　$\because \angle CDP=\angle CEP=\alpha$

$\therefore$ 四邊形 DCEP 內於接圓;　　$\because \angle CEP=\angle AFP=\alpha$

$\therefore$ 四邊形 EPFA 內接於圓,更因 A B C P 內接於圓,故有 $\angle DEP=180^\circ-\angle PCD$, $\angle PEA=180^\circ-\angle AFP$, $\angle PEF=\angle PAF=\angle PCB=\angle PCD$.



因之 $\angle DEC=\angle DEP-\angle CEP=180^\circ-\angle PCD\alpha$,

$\angle FEA=\angle PEA-\angle PEF=180^\circ-\alpha-\angle PCD$,

$$\therefore \quad \angle DEC=\angle FEA.$$

又因 CEA 爲一直線,易證 D,E,F 在一直綫上.　　(證訖)

(編者按)由線外一點作通例可作兩直線與該線成一定角,本文宜規定角之正負:例 $\angle CDP$ 表由 C D 旋轉至 P D 之角,旋轉方向如與時鐘運動相反則定之正否則定之負.如是則不致混也.

# 三角形相關諸圓半徑與邊角之關係

李　季　白

任意三角形均可作外接圓內切圓各一個，旁切圓三個．惟普通幾何三角教本對外接內切旁切諸圓半徑與邊角及其相互關係，鮮有論及．爰博採載籍艸成斯篇，用供教者學者之參考．

本篇所用之符號如下．

三角形三邊：—$a, b, c$．

三角：—$A, B, C$．

三高：—$h_a, h_b, h_c$．

面積：—$S$

半周界：—$p\left[=\frac{1}{2}(a+b+c)\right]$

外接圓半徑：—$R$

內切圓半徑：—$r$

旁切圓半徑：—$r_a, r_b, r_c$．

1．$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}.$$

此為正弦定律，任何教本均有之，證從略．

2．$$R=\frac{abc}{4S}.$$

[證] $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab.\frac{c}{2R}=\frac{abc}{4R}$，　$\therefore R=\frac{abc}{4S}$．

3．$$R=\frac{p}{\sin A+\sin B+\sin C},$$

[證]　由(1)，　$R(\sin A+\sin B+\sin C)=\frac{1}{2}(a+b+c)=p$，

$$\therefore\ R=\frac{p}{\sin A+\sin B+\sin C}.$$

4. $r=\frac{S}{p}$.

[証] $S=\triangle ABI+\triangle BCI+\triangle CAI$

$=\frac{1}{2}r.c+\frac{1}{2}r\cdot a+\frac{1}{2}r\cdot b.$

$=\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}rp,\qquad \therefore\quad r=\frac{S}{p}$.

5. $r_a=\frac{S}{p-a}$.

[證] $S=\triangle ABI'+\triangle ACI'-\triangle BCI'$

$=\frac{1}{2}r_a(b+c-a)=r_a(p-a),\qquad \therefore\quad r_a=\frac{S}{p-a}$.

同理得, $r_b=\frac{S}{p-b}$, 及 $r_c=\frac{S}{p-c}$.

6. $R\cdot r=\frac{S}{\sin A+\sin B+\sin C}$.

[證] 由(4)及(3).

$S=r\cdot p=r\cdot R(\sin A+\sin B+\sin C),\quad \therefore R\cdot r=\frac{S}{\sin A+\sin B+\sin C}$.

7. $R^2=\frac{S}{2\sin A\sin B\sin C}$.

[證] $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}(2R\sin A)(2R\sin B)\sin C$.

$=2R^2\sin A\sin B\sin C$.

$\therefore\quad R^2=\frac{S}{2\sin A\sin B\sin C}$.

8. $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

[證] $4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{abc}{S}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}$

$\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{S}=\frac{S^2}{ps}=\frac{S}{p}=r$

9. $$r_a=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

[證] $$4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{abc}{S}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}$$

$$\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}=\frac{p(p-b)(p-c)}{S}=\frac{S^2}{(p-a)S}=\frac{S}{p-a}=r_a.$$

同理得， $$r_b=4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2},$$

及 $$r_c=4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}.$$

10. $rr_ar_br_c=S^2$

[證] $$rr_ar_br_c=\frac{S}{p}\cdot\frac{S}{p-a}\cdot\frac{S}{p-b}\cdot\frac{S}{p-c}.$$

$$=\frac{S^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{S^4}{S^2}=S^2.$$

11. $r_ar_b+r_br_c+r_cr_a=p^2$

[證] $$r_ar_b+r_br_c+r_cr_a=\frac{S}{p-a}\cdot\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-b}\cdot\frac{S}{p-c}+\frac{S}{p-c}\cdot\frac{S}{p-a}.$$

$$=S^2\left[\frac{(p-c)+(p-a)+(p-b)}{(p-a)(p-b)(p-c)}\right]=\frac{S^2p^2}{S^2}=p^2.$$

12. $$\frac{b-c}{r_a}+\frac{c-a}{r_b}+\frac{a-b}{r_c}=0.$$

[證] 左邊$$=\frac{b-c}{\frac{S}{p-a}}+\frac{c-a}{\frac{S}{p-b}}+\frac{a-b}{\frac{S}{p-c}}=\frac{1}{S}[(b-c)(p-a)+(c-a)(p-b)$$

$$+(a-b)(p-c)]=0$$

13. $$r_ar_br_c=r^3\cot^2\frac{A}{2}\cot^2\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}$$

[證] $$r_ar_br_c=\frac{S}{p-a}\cdot\frac{S}{p-b}\cdot\frac{S}{p-c}=\frac{S^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}=pS;$$

$$r^3\cot^2\frac{A}{2}\cot^2\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}=\frac{S^3}{p^3}\cdot\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}\cdot\frac{p(p-b)}{(p-c)(p-a)}$$

$$\cdot\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}=\frac{S^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}=pS.$$

$$\therefore\quad r_ar_br_c=r^3\cot^2\frac{A}{2}\cot^2\frac{B}{2}\cot^2\frac{C}{2}.$$

14. $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}.$

[証] 左邊$=\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{3p-a-b-c}{S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}.$

15. $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}.$

[證] $\because\ 2S=2pr=ah_a=bh_b=ch_c,$

$$\therefore\quad 2p:\frac{1}{r}=a:\frac{1}{h_a}=b:\frac{1}{h_b}=c:\frac{1}{h_c}$$

$$\therefore\quad 2p:\frac{1}{r}=(a+b+c):\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}.$$

16. $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r_c}.$

[證] $\because\ 2S=ah_a=bh_b=ch_c.$

$$\therefore\quad \frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r_c}.$$

同理; $-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r_a}$ 及 $\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r_b}.$

17. $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{1}{2Rr}.$

[證] $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{2p}{abc};$

$$\frac{1}{2Rr}=\frac{1}{2\left(\frac{S}{p}\right)\left(\frac{abc}{4S}\right)}=\frac{2p}{abc}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{1}{2Rr}.$$

18. $h_a=2rr_a:(r_a-r)$

[証] $\because\ 2S=ah_a=2pr,\qquad \therefore\ a(h_a-r)=(b+c)r,$

$\because\ 2S=ah_a=2(p-a)r_a,\ \therefore\ a(h_a+r_a)=(b+c)r_a.$

$\therefore\quad (h_a-r):(h_a+r_a)=r:r_a$

$\therefore\quad h_a=2rr_a:(r_a-r)$

同理 $h_b=2rr_b:(r_b-r)$ 及 $h_c=2rr_c:(r_c-r)$

19. $h_a=2r_br_c:(r_b+r_c)$

[證] $\because\ 2S=ah_a=(a+c-b)r_b,\quad 2S=ah_a=(a+b-c)r_c,$

$\therefore\ a(h_a-r_b)=(c-b)r_b,\ a(r_c-h_a)=(c-b)r_c.$

$\therefore (h_a-r_b):(r_c-h_a)=r_b:r_c,$

$\therefore h_a=2r_br_c:(r_b+r_c)$

同理 $h_b=2r_cr_a:(r_c+r_a)$ 及 $h_c=2r_ar_b:(r_a+r_b)$

20. $r_a+r_b+r_c=4R+r$

[證] $$r_a+r_b+r_c-r=S\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}-\frac{1}{p}\right)=Sc\left[\frac{1}{(p-a)(p-b)}+\frac{1}{p(p-c)}\right]$$

$$=Sc\cdot\frac{2p^2-(a+b+c)p+ab}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{c(2p^2-2p^2+ab)}{s}=\frac{abc}{s}=4R.$$

$$\therefore\quad r_a+r_b+r_c=4R+r.$$

# 三角函數定義推廣時的一點注意

H. C. L.

我在本刊二卷一期"$\sin^{-1}2=?$"一文裡,曾經把三角函數定義和諸位討論了一下. 可是忘記把一個很重要的問題,列入討論之列,這諸位也許早已想到、不過為完成我底責任計,不得不補述一下.

這問題是什麼? 就是"公式之追認".

拿個最淺的例來說吧!

$$\cos^2 A+\sin^2 A=1$$

這裡的 A 是銳角. 要証明這公式,我們祇要利用銳角的三角函數定義:因

$$\cos A=\frac{b}{c}\qquad \sin A=\frac{a}{c}$$

$$\therefore\qquad \cos^2 A+\sin^2 A=\frac{b^2}{c^2}+\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2+a^2}{c^2}$$

但是依 Pythagoras 定理(即勾股弦定理)可知

$$a^2+b^2=c^2$$

$$\therefore\qquad \cos^2 A+\sin^2 A=\frac{c^2}{c^2}=1.$$

定義推廣到一般實數角去了,究竟這公式是否還對呢? 我們不敢馬上回答,還得重新証明一下. 因 $\cos\theta=\frac{x}{r}\qquad \sin\theta=\frac{y}{r}$

$$\therefore\qquad \cos^2\theta+\sin^2\theta=\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=\frac{x^2+y^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2}=1\qquad \text{(Pythagoas 定理)}$$

定義若是推廣到複數去,這公式仍舊是對的,祇要依那新定義証去. 因

$$\cos z=\tfrac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})\qquad \sin z=\tfrac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$$

$$\cos^2 z+\sin^2 z=\tfrac{1}{4}(e^{2iz}+2+e^{-2iz})-\tfrac{1}{4}(e^{2iz}-2+e^{-2iz})$$

$$=\tfrac{1}{4}\cdot 4$$

$$=1$$

餘的公式,請各位一一証去吧!

# $3n^\circ$ 之三角函數表

H. C. L.

本文之目的，是要做出一張每隔 $3^\circ$ 的三角函數來．通常的三角函數表有每隔 $1^\circ$ 的，每隔 $10'$ 的，有每隔 $1'$ 的，甚至有可求至秒的．$3n^\circ$ 的三角函數，都可以包括在那些表裡，何必再要做一張呢？諸位知道，以上所述那些表都是近似值，以下要做的表乃是正確值，用平方根式表出來啊！

由三角法易知：任何三角函數都可以用一特殊三角函數表出．拿正弦來做例吧！請看

$$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x},$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}},\qquad \cot x=\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x},$$

$$\sec x=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}},\qquad \csc x=\frac{1}{\sin x},$$

由以上五個式子知，只要將 $\sin 3n^\circ$ $(n=1,2,3,\cdots 30)$ 求出，其餘 $\cos 3n^\circ$，$\tan 3n^\circ\cdots$ 等，不難迎刃而解了．

我們更知道：$\sin n\theta$ 可以展成一級數(下面再述)．假如 $\theta=3^\circ$ 這級數便變成

$$\sin 3^\circ\times n=n\cos^{n-1}3^\circ\sin 3^\circ-\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\cos^{n-3}3^\circ\sin^3 3^\circ+\cdots\cdots.$$ (項數有限)

假使求出 $\sin 3^\circ$，便易推出 $\sin^k 3^\circ$，$\cos^k 3^\circ$ $(k=1,2,\cdots\cdots n-1)$ 了．所以我們的問題變成．求 $\sin 3^\circ$ 的問題了．

$0^\circ,30^\circ,45^\circ,60^\circ,90^\circ$ 的正弦　由三角法易知

$$\sin 0^\circ=0,\qquad \sin 30^\circ=\tfrac{1}{2},\qquad \sin 45^\circ=\tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\sin 60^\circ=\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\qquad \sin 90^\circ=1.$$

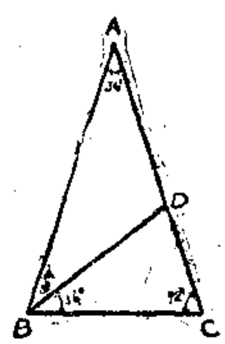
由這些結果，再利用和角公式，$15^\circ$ 和 $75^\circ$ 的正弦又求出了，因為

$$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$$
$$=\sin 45^\circ\sin 60^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ$$
$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}$$
$$=\tfrac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

由樣， $\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$

同以上七個結果(先前五個,併現在兩個)，單靠和角公式，似難往下求別的角度之正弦了.於是我們用別的方法求出

18°的正弦　求法是作一等腰三角形 ABC 令頂 A 等於 36°，則底角 B, C，各等於 72°了.又作 B 角之平分綫 BD，則 BD=BC=AD.又因 $\triangle BCD\sim\triangle ABC$，乃有 $\overline{BC}^2=AC\times CD$.令 AD: AC=x，則




$$1-x=1-\frac{AD}{AC}=\frac{AC-AD}{AC}=\frac{DC}{AC}$$
$$=\frac{CD\times AC}{AC^2}=\frac{\overline{BC}^2}{AC^2}=\frac{\overline{AD}^2}{AC^2}=x^2.$$

解方程式　$1-x=x^2$ 而取正號，得　$x=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

但是　$\sin 18^\circ=\frac{1}{2}\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}\frac{AD}{AC}=\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1).$

又　$\sin 72^\circ=\cos 18^\circ=\sqrt{1-\sin^2 18^\circ}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$

有了這兩結果，便不難求

3°的正弦　因 $\sin 3^\circ=\sin(18^\circ-15^\circ)$
$$=\sin 18^\circ\cos 15^\circ-\cos 18^\circ\sin 15^\circ$$
$$=\sin 18^\circ\sin 75^\circ-\sin 72^\circ\sin 15^\circ$$
$$=\frac{1}{16}[(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}].$$

目的既達，我們再補述

$\sin n\theta$ 之展開　棣美弗定理說

$$(\cos\theta+i\,\mathrm{sis}\,\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

用二項式定理，將左邊展開，便有

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=\cos^n\theta+in\cos^{n-1}\theta\sin\theta+i^2\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+$$

$\cdots\cdots$.　(項數有限)

這裏我們所用的 n 是正整數，所以展開式的項數是有限的．諸位可記得虛數裏有一基本定理：　若　$A+Bi=A'+B'i$，　則　$A=A'$　及　$B=B'$.

依此定理，便可先將右邊整理一下，成 $C+Di$ 形式，和左邊一比較便得

$$\sin n\theta=n\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+\cdots\cdots$$

$$=n\sin^{n-1}(90^\circ-\theta)\sin\theta-\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\cos^{n-3}(90^\circ-\theta)\sin^3\theta$$

$+\cdots$.　(項數有限)

有這公式和 $\sin 3^\circ$ 之值，不是 $\sin 3n^\circ$ 可以求出嗎？我們的表不是亦做成了嗎？諸位可自己求之看，求出結果，再證這裏的

## 附　表

| | |
|---|---|
| $\sin(3^\circ=\frac{1}{60}\pi)$ | $\frac{1}{16}\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\}$ |
| $\sin(6^\circ=\frac{1}{30}\pi)$ | $\frac{1}{8}(\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1)$ |
| $\sin(9^\circ=\frac{1}{20}\pi)$ | $\frac{1}{8}(\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5-\sqrt{5}})$ |
| $\sin(12^\circ=\frac{1}{15}\pi)$ | $\frac{1}{8}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3})$ |
| $\sin(15^\circ=\frac{1}{12}\pi)$ | $\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ |
| $\sin(18^\circ=\frac{1}{10}\pi)$ | $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ |
| $\sin(21^\circ=\frac{7}{60}\pi)$ | $\frac{1}{16}\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)\}$ |
| $\sin(24^\circ=\frac{2}{15}\pi)$ | $\frac{1}{8}(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}})$ |

| | |
|---|---|
| $\sin(27^\circ=\frac{3}{20}\pi)$ | $\frac{1}{8}(2\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{10}+\sqrt{2})$ |
| $\sin(30^\circ=\frac{1}{6}\pi)$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\sin(33^\circ=\frac{11}{60}\pi)$ | $\frac{1}{16}\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)+2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\}$ |
| $\sin(36^\circ=\frac{1}{5}\pi)$ | $\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ |
| $\sin(39^\circ=\frac{13}{60}\pi)$ | $\frac{1}{16}\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}\}$ |
| $\sin(42^\circ=\frac{7}{30}\pi)$ | $\frac{1}{8}\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1)$ |
| $\sin(45^\circ=\frac{1}{4}\pi)$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\sin(48^\circ=\frac{4}{15}\pi)$ | $\frac{1}{8}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3})$ |
| $\sin(51^\circ=\frac{17}{60}\pi)$ | $\frac{1}{16}\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)\}$ |
| $\sin(54^\circ=\frac{3}{10}\pi)$ | $\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$ |
| $\sin(57^\circ=\frac{19}{60}\pi)$ | $\frac{1}{16}\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\}$ |
| $\sin(60^\circ=\frac{1}{3}\pi)$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\sin(63^\circ=\frac{7}{20}\pi)$ | $\frac{1}{8}(2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{10}-\sqrt{2})$ |
| $\sin(66^\circ=\frac{11}{30}\pi)$ | $\frac{1}{8}(\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1)$ |
| $\sin(69^\circ=\frac{23}{60}\pi)$ | $\frac{1}{16}\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)+2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}\}$ |
| $\sin(72^\circ=\frac{2}{5}\pi)$ | $\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ |
| $\sin(75^\circ=\frac{5}{12}\pi)$ | $\frac{1}{4}\sqrt{6}+\sqrt{2}$ |
| $\sin(78^\circ=\frac{13}{30}\pi)$ | $\frac{1}{8}(\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1)$ |
| $\sin(81^\circ=\frac{9}{20}\pi)$ | $\frac{1}{8}(\sqrt{10}+\sqrt{2}+2\sqrt{5-\sqrt{5}})$ |
| $\sin(84^\circ=\frac{14}{30}\pi)$ | $\frac{1}{8}(\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}})$ |
| $\sin(87^\circ=\frac{29}{60}\pi)$ | $\frac{1}{16}\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\}$ |

# 尤 拉 氏 數

龍 季 和

1.定義　吾人讀三角和三角函數得以其角之級數表之,所謂尤拉氏數(Euler's number 或 Eulerian number)者,卽

$$\sec x = 1 + E_1\frac{x^2}{\underline{|2}} + E_2\frac{x^4}{\underline{|4}} + \cdots\cdots + E_r\frac{x^{2r}}{\underline{|2r}} + \cdots\cdots$$

展開式中之$E_1, E_2, \cdots$等值也。尤拉首將此介紹於解析學,世稱尤拉氏數。其求法,應用,均在級數論討論,此間不過將其實值及一二性質介紹耳。

2.實值　尤拉曾將首九個算出,茲表列如下

| | | | |
|---|---|---|---|
| $E_1=$ | 1 | $E_6=$ | 2702765 |
| $E_2=$ | 5 | $E_7=$ | 199360981 |
| $E_3=$ | 61 | $E_8=$ | 19391512145 |
| $E_4=$ | 1385 | $E_9=$ | 2404879661671 |
| $E_5=$ | 50521 | | |

但表中$E_9$之值爲尤拉所算錯,後爲Rothe所校正,實爲2404879675441。後經H. F. Scherk繼續計算至$E_{15}$, Glaisher 計算至 $E_{27}$, S.A.Joffe 計算至 $E_{50}$, $E_{50}$ 爲一127位之數。

3.性質

(1) $E_n$皆爲正整數,且爲奇數.

(2) $E_n$與n俱增,如n趨近無窮大,$E_n$亦趨近無窮大.

(3) $E_n$相隣兩項之和必爲三之倍數.

(4) 若n爲奇數,$E_n-1$必爲三之倍數.

(5) 若n爲偶數,$E_n+1$必爲三之倍數.

(6) $E_n$末位數必爲1或5

4.注意　有所謂尤拉常數(Euler's constant)者,與此不同,不可混亂。尤拉常數通常記以$\gamma$,爲 $1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\log n$ 之極限値,其値爲 0·577215664901532……

# 巴斯喀

## (Blaise Pascal 1623—1662 A.D.)

瘦桐

讀者諸君,想早巳學過代數學中的二項式定理了,一個二項式某乘冪的展開各項間係數的求法,非常麻煩,如果我們引用下面的擬形數(Figurate numbers),可以很輕易的把任何乘冪展開式的係數馬上寫了下來,這是多麼巧妙啊!

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ………… |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ………… |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | ………… |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 25 | ………… |
| 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | ………… |
| ………… | | | | | |

這個擬形數的作法是:"凡橫列中任一數,是由在牠上面的一個數和這數同列左邊諸數一齊相加成功的".比方第四列中的20,是由10+6+3+1得來的.在這縱橫數裡,若自右上方向左下方畫一條斜線,便從原形割下一個三角形來.這斜線上的數,就是二項展開式的係數呢. 譬如上圖中第五斜線上之數 1, 4, 6, 4, 1 即是$(a+b)^4$展開式的係數.

這三角形數我們稱做巴斯喀算術三角形,是和笛喀兒同時代的一位法國的天才算學家名叫巴斯喀在1653年發明的.他又曾使用牠去求m個物件中,每取出n個的組合數即$(n+1)(n+2)(n+3)\cdots\cdots m/(m-n)!$,並利用牠去解決他的朋友博奕瑟發雷得梅列(Chevalier de Mêrê)求教於他的一個確率學上的問題.

巴斯喀是1623年6月19日生於克勒芒(Clermont),1662年8月19日死於巴黎.他的父親曾做過裁判所的法官,頗有學問.因爲只有這一個特具資質的兒子,爲了

使他便於受些優良敎育的緣故,特地移居來到巴黎.

巴斯喀幼年的時候,他父親恐怕他用功過度有傷腦力,只許學習些語言之學,像算學一類的學科,是絕對不許問津的.可是他父親雖說禁之綦嚴,然而那束縛思想的敎育方法,却反激起這小子好奇的心理,使他學習算學的願望愈加濃厚.12歲時曾提出「幾何學究竟是什麼」的疑問.他的老師隨便地答應他說:"這是一門求作精密的圖形且决定牠的各部份間之比例的學問."自此以後,他遂暗地裡偸習幾何學,遊戲時是他自習的時間,屋角是他自習的塲所.數週之內,居然自已創見圖形的許多性質.特別的關於「三角形三內角之和等於兩直角」一定理,好像在某書上記載過:他用一個三角形的紙片,把三個角頂折向內切圓的中心去證明牠.又曾從這三角形紙片最大角向對邊作垂線,將三個角頂折向這垂足去證明.慚愧得很,當我們初讀幾何學的時候,何嘗聯想到這樣地去驗證啊!

他父親看見他的志向,頗爲感動,知道過去的敎育方法,適足以防碍天才的進展,是完全失敗了.轉過來特取一本歐幾里得幾何原本敎給他讀.這一下他得着了思想上的解放,如同皇恩大赦眞快活極了,一氣呵成不上幾天便把牠唸完了.他14歲時,對於幾何學已有相當的研究,得參加羅伯發(Roberval),麥森內(Mersenne),密多治(Mydorge)等幾何學家所組織的週會爲會員.16歲時發明後世所謂巴斯喀的定理:「內接於圓錐曲線作六邊形,其對邊之交點必位於同一直線上.」18歲時復創作一種算術的器械.少年成名,他的確是一位令人敬佩的天才算學家.

巴斯喀關於算學的著述有1639年寫的'幾何圓錐曲線法',1658年完成的擺線論(Cycoid).此外有1858年出版拉休耳(Lahire)氏所搜集他的一些雜著.據說當他寫擺線論之前,齒痛不能安眠,一自著述擺線論的念頭發生後,齒痛立卽停止,他以爲這是天命,於是無間斷不休息的費了八天功夫把牠草就了.

巴斯喀有一個時期,研究物理學頗有興味.讀者諸君在物理學敎科書上流體力學裡遇着的液體傳達壓力的原理,也是他的勞績啊!

# 科學之女王

E. T. Bell 原著 乙閣譯

## 第五章 論變換

### 變與不變

算學中重要的發明,溯其來源,大都不外用新的方法,研究舊的事物.有時一種事實,知之已數百年,但絕少進展,或雖有進展而研究之者不甚感覺興趣,一旦經天才卓越之士,用新的眼光考察,立卽生面別開,覺其中有無盡寶藏. 此等寶藏之開發,誠非一朝一夕之功,然途徑旣開,則新事物發見之速度,輒有增無已. 算學中兩種主要概念,其發展之經過,卽與此相彷彿. 此等概念維何卽'羣'(group)與'不變性'(invariant)是已.

此等概念之起因甚早,在巴比侖人及希臘人之著述中,卽有端倪可尋,其時競尚美術,磚瓦建築上種種有規則的模型,極爲美觀,惜彼等對於此種模型之抽象的意義,迄未有所知耳.又自第九世紀至十五世紀間亞刺伯代數學者,對於此等概念,亦曾接近,特漫不經心,未獲其樞紐所在,其後歐洲算學家,亦復失之交臂,直至十九世紀上半期終了,此種重要的概念,依然眞相未明.

晚近有算學家一人,由模型之規則性,悟及其中有羣之理論.一種事物,施以某種變換(transformation),卽成另一種事物.此等變換之集合,稱爲一羣. 一事物經變換後成他一事物,若將羣中各種變換,一一施行,所得各事物中,恒有共通不變之性.以專門術語言之,是爲在某一變換羣下之不變性.

今請就己知事實,說明此等名詞之意義.在學校代數中,解二次方程式時,每用'配方法'. 此法將一般二次方程,變爲$y^2=k$之形狀,因可立時解之得 $y=\pm\sqrt{k}$.
方程式 $ax^2+2bx+c=0$ 經配方後變爲

$$\left(x+\frac{b}{a}\right)^2=\frac{b^2-ac}{a^2},$$

與 $b^2=k$ 之形式正同．此中宜注意者，為 $b^2-ac$ 之一式．此式有一種重要性質．吾人卽將論及，不變式之全部理論，可由此開其端．

玆再舉簡單之二例，其一屬於代數方面，其他屬於幾何方面，不變性之概念，由此可以見其來源．

於 $ax^2+2bxy+cy^2$ 中，令 $x=pX+qY$，$y=rX+sY$，代入而化簡之，得

$$AX^2+2BXY+CY^2$$

之結果，就中 $A,B,C$ 皆為含有 $a,b,c,p,q,r,s$ 之式，卽

$$A=ap^2+2bpr+cr^2,$$

$$B=apq+b(ps+qr)+crs,$$

$$C=aq^2+2bqs+cs^2.$$

讀者若稍事計算，卽知新 $A,B,C$ 與舊 $a,b,c$ 間，有一奇異之關係，卽

$$B^2-AC=(ps-qr)^2(b^2-ac).$$

總括言之，以上經過，可書如

$$\left.\begin{array}{l} x\longrightarrow pX+qY \\ y\longrightarrow rX+sY \end{array}\right\},$$

$$ax^2+2bxy+cy^2\longrightarrow AX^2+2BXY+CY^2,$$

$$B^2-AC\longrightarrow(ps-qr)^2(b^2-ac).$$

符號 $\longrightarrow$ 應讀作"變為"．因 $x,y$ 與 $X,Y$ 之關係式為一次的，此種變換名之曰一次變換(linear transformation)．至 $ps-qr$ 之一式，僅與關係式中係數 $p,q,r,s$ 有關，名之曰此種變換之模式(modulus of the transformation)．

試考上節之意義，乃謂屬於 $ax^2+2bxy+cy^2$ 之 $b^2-ac$ 一式，與屬於 $AX^2+2BXY+CY^2$ 之 $B^2-AC$ 一式，祇差一個因數，卽模式之平方是也．因此之故 $b^2-ac$ 謂之為 $ax^2+2bxy+cy^2$ 在一次變換羣下之相對不變式(relative invariant)，，相對云者，非絕對不變之意．但若取 $p,q,r,s$ 之值，令 $(ps-qr)^2=1$，則 $b^2-ac$ 與 $B^2-AC$ 形同而值亦同．而 $b^2-ac$ 乃為 $ax^2+2bxy+cy^2$ 在一次變換羣下之絕對

不變式(absolvte invariant)矣.代數式經變換後而不改變者,此似為其第一例.

習算之士,乍見 $b^2-ac$ 與 $B^2-AC$ 之此種關係,若覺無驚訝之表示,則其人不言而知其為庸碌者流.此習見之事實與全部不變式理論相較,乃如垤垤之比泰山,行潦之比河海.近代物理學中,愛因斯坦氏所舉之原理.所謂"物理律之協變性"(covariance of physical laws)者,即由此變化而來.高斯在其不朽之作 Disquisitiones Arithmeticae(1801年出版)中,已下其種子,灌溉培植俾成大樹,則1846至1897數十年間,揆力,西徵士德,及其他諸人之力也.

幾何方面之例,則不用代數.試取一書於燈前轉弄之,而觀察其在牆上所現之影.書移動時,其影之大小位置,隨時變動.然亦有不變者在焉,書有四角,影亦有之,書緣平直,影亦如之.若舍書而易以鐵絲之網,則見影中鐵絲之交角,及交點間鐵絲之長度,均隨網動而變.但影中鐵絲相交之狀態,與網上無不相同,且鉄絲直者其影亦直.

將鐵絲之網,視作幾何圖形,則見在此種投影變換之下,直線之'直'為不變性之一,再則交點之數,及在同一直線上交點之次序,亦為不變者.猶憶中學幾何中所論,概為關於長度,面積,角度之大小比較及度量,例如半圓內之含角為一直角等皆是也.若問此等性質經投影後將若何,則立知其非不變者,蓋圓經投影即成橢圓,直角之性質亦不能保存也.

幾何圖形之性質,經投影而生變化者,謂之度量的性質(metric property),因其與度量有關也.其經投影而不變者,則謂之投影的性質(projective property).此僅言其大概.並非詳舉其義,然為吾人目前計,為事已足,但尚有可得而言者,即若取複數為點之座標,則全部度量幾何學亦可重述為投影幾何之一片段,又普通所謂非歐幾何,在投影方面亦自有其地位也.

## 幾何上之一問題

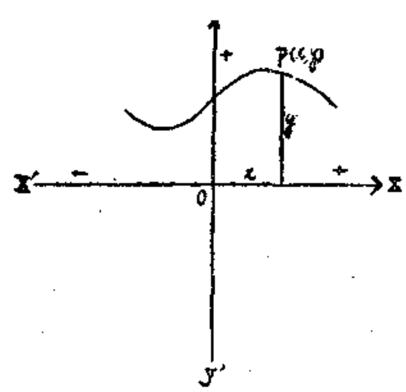
由上舉二例,得兩個普遍的問題,其一為代數的,其他為幾何的.後一問題,較易陳述;即設有一幾何圖形於此,試求其一切經投影後不生變化之性質是也.

此問題之範圍立卽可以推廣. 蓋投影不過爲變換之一種,他如有延展性之曲面,在不扯碎之範圍內,可以引伸摺轉,亦爲變換之一種,此等曲面在此種變換下之不變性,吾人亦可研究. 故上之幾何的問題乃爲:設有幾何的形體(圖形,曲面,立體及一切有幾何定義之任何事物皆可)及一組之變換於此,可施行於該形體之上,試求其在此組變換下一切不變之性質.

此問題用代數及解析之方法,亦得解之. 所謂解析者,乃算學之一部分,略言之,卽與連續變數有關之一部分也. 變數爲一記號或文字,例如x,在同一問題或討論中,可以繼續取得種種不同之數值. 如物體下墜時之速度,卽爲變數之一例;其數值自零起(卽開始下墜時)連續增加,至降落地前之一刹那,其值最大.

關於變數之意義,請恕予言之大略. 欲詳述變數之爲何,勢必另編一書,無論卷帙浩繁,難以卒讀,卽詮釋變數之涵義,亦槪牽涉及算學之基本槪念,疑竇滋多,令人望而却步. 讀者姑就字面上意義,將變數視作可以變化之數,暫亦無妨. 如是則連續實變數者,其值在一定範圍內可以變化,例如從零至十間各數,彼皆得取其值,或自零至無窮亦然.

笛卡兒於1637年發表其劃分時代之著作,卽所謂解析幾何學者,當時算學家利用斯法以研究幾何,比希臘幾何學者成績邁進. 欲知不變性之槪念在代數解析及幾何兩方面之關係,須先知解析幾何之爲用.




如右圖所示,於平面上作垂直兩線 XOX' 及 YOY',各稱曰 x 軸及 y 軸. 平面上一點 P 之坐標爲(x,y),x 係沿 x 軸而量者,y 則平行於 y 軸而量之. 自 O 向右量之 x 爲正,向左量者爲負;自 XOX' 向上量之 y 爲正,向下量者爲負. 坐標旣定,點之位置亦隨之而一定.

今就一切能適合方程式 $f(x,y)=0$ 之 $(x,y)$ 而考之,則見其所代表之點,槪在一直線或一曲線之上,而方程式 $f(x,y)=0$ 則稱爲此曲線之方程式. 例如圓心在O半徑爲 5 之圓,其方程式卽爲 $x^2+y^2=25$.

希臘算學家研究曲線及曲面，必先畫出圖形，自笛氏幾何發明以後，此層卽可省去，祇須將該曲線或曲面之方程式寫出，其餘卽爲代數的工作．迨得結果之後，復用幾何解釋之，解析幾何之爲用，盡於斯矣．

斯法神通廣大，頗足驚人．用希臘舊法或綜合法研究曲綫之性質，其疑難之足使希臘大算學家疾首蹙額者，若改用解析新法，則今之大學一年級生，卽已遊刃有餘．然此非謂大學一年級生，較之歐幾里得，亞波羅里斯，或柏樸士諸賢之造詣更深，特工具較爲進步耳．

解析幾何之功効，尙不止此．蓋由此而引出許多奇異之曲綫及曲面，爲前人夢想所不及者．此中有許多在實用上，極爲重要．再則自經解析幾何發明之後，許多代數上或解析上之問題，僉可用幾何的語言陳述之，例如二元二次方程式，槪可稱爲圓錐曲綫，任意一個三元方程式，卽可稱爲一種曲面，此誠算學上之一大進步也．最後關於空間度數之限制，亦由是而得免除，此雖爲本世紀中成功之事實，然種其因者，終爲笛卡兒氏．代數方程式中之變數，原不必限爲三個，卽 n 個亦未始不可．此際仍用幾何說法，乃有所謂"n 度空間幾何學"．此種幾何在實際上爲用甚大，并非理論上之空談．例如剛體力學，卽爲六度空間幾何學之一種，又氣體動力學，可謂爲一種 6n 度幾何學，其 n 爲氣體所占體積中分子之個數．

## 何爲幾何學?

吾人今可提出一恰當的問題，卽在近代的眼光中，幾何學究爲何物?在希臘時，幾何已有其黃金時代，迨至最近二十年間，又二次度其黃金時代，入於嶄新的狀態中，其範圍之廣，功用之宏，爲從來所未有．本書所言，殆未及其萬一，而且在物理學上，極爲重要．自1872年起，以迄1922年，此期間幾何學之精神，由克萊因氏之一言可以見之．其言乃至爲的當，無可增減．舉凡此半世紀中幾何方面驚人之發明及其分支之龐雜，由克氏所取之觀點察之，則見其渾成一體，井然有序，不獨過去一切，瞭如指掌，卽未來發展，亦在望中．克氏之言曰：

"設有許多事物及可施行於此等事物上之一羣變換，將此等事物在此羣下一切不變之性質，發爲理論，是卽爲幾何學"．

此言簡而意賅，可不必再加解釋，致貽畫蛇添足之誚．但亦有不能不略述者．所謂n度組者，卽一組之事物，其中每個事物，須有n個條件始能決定者．例如平面可認爲二度點組，因其中各點，若知其坐標x及y，便可決定也．同樣立體空間爲三度點組，又爲四度直綫組，其理由俟讀者自思之．常人言及四度空間，輒以爲奇，此理旣明，當可釋然矣．

前述變換，乃將組中之每一事物，易以同組或他組中一定事物之意．例如在通常立體空間內，有使直線變爲直線之變換，亦有使直綫變爲球面之變換，因通常立體空間，旣爲四度直線組，亦爲四度球面組也．(欲決定一球面，須有四數，其中三數定球心之座標，一數定半徑之長度)．是故空間之度數，須視其所由組成之事物如何而定，此等事物，或爲點，或爲直線，或爲平面，或爲球面，或爲圓，或爲其他，欲決定之，所需條件之數各有不同，未可一概論也．

依克萊因氏之說，則所謂變換，必須成爲一羣．羣之定義，將於次章述之，但因羣之概念，在克氏理論中，居首要地位，故其重要性質，有立時說明之必要．

試設想有一組事物及一組變換，可施行於各事物之上．若組中某事物，施行某變換之後，結果仍爲組中之一事物，則此組事物，對於此種變換而言，爲有羣性(group property)，而爲自滿之一組．例如正整數之組，對於加法而言，爲有羣性，因任何二正整數之和，仍爲正整數也．對於乘法言亦然，但對於減法及除法則否．

克氏理論中之不變性，卽一切經此等變換後仍能繼續保持之性質，例如正整數之性質，在加乘之運算下，卽爲不變性．

不過組之度數，並未言及，或爲有限，或爲無窮，均無不可．

克氏之理論，其果僅爲夢想歟？抑一種無謂的推論歟？此大謬之說也．自克氏之觀點出發，一切射影幾何學，各種度量幾何學，歐氏幾何與無數之非歐幾何，任何度數之幾何學，等等，悉呈融洽一致之觀．此不僅爲前世紀之偉大的成就，亦算學史上至可紀念之一椿事實也．時至今日，學術進步，有加無已，見地自較克氏更高，然克氏理論所居地位之高尙，固絲毫無所減損也．　（第五章完全書待續）

# 教科書難題解答

## 甲. 范氏高等代數學(Fine: College Algebra)

肇　　父

31.囊中納球16,白者7,黑者6,紅者3.(1)若單取1球爲白,黑或紅者之適遇如何?(2)若取2球,全爲黑者之適遇如何?又一白一紅之適遇如何?(3)若取3球全爲紅者,全無紅者,一白一黑一紅者之適遇各如何?(4)若取4球,則一爲白者而餘非白者之適遇如何?又兩爲白者而餘非白者之適遇如何?(5)若取10球則5白3黑2紅之適遇如何?(414面5題)

[解](1)取1白球之方法等於在囊中7白球取1個所得之組合,即$C_1^7$.已知囊中有球16,則可取1球之總數爲$C_1^{16}$.故其適遇爲$C_1^7/C_1^{16}$或爲7/16.

同理1球爲黑之適遇爲$C_1^6/C_1^{16}$即3/8,又1球爲紅之適遇爲$C_1^3/C_1^{16}$即3/16.

(2)同上理全爲黑者之適遇爲$C_2^6/C_2^{16}$即1/8.一紅一白之適遇爲$C_1^7.C_1^3/C_2^{16}$=7/40.

(3)全爲紅者之適遇爲$C_3^3/C_3^{16}$即1/560全非紅者之適遇$C_3^{13}/C_3^{16}$即143/280.一白一黑一紅者之適遇爲$C_1^7.C_1^6.C_1^3/C_3^{16}$即9/40.

(4)一爲白球而餘非白球者之適遇爲$C_1^7.C_3^9/C_4^{16}$即21/65.兩爲白球而餘非白者之適遇爲$C_2^7.C_2^9/C_4^{16}$即27/65.

(5)所求之適遇爲$C_5^7.C_3^6.C_2^3/C_{10}^{16}$即45/286.

32.某箱藏1號至9號之入場券9張.若一次取入場券2張則其號數之積爲偶數或爲奇數之適遇各如何?(415面10題)

[解]取9張入場券之方法有$C_2^9$種.若一張之號數爲奇數而其他一張之號數爲偶數則其可能配合必爲5×4即20種.又若兩張之號數均爲偶數則其可能配合必爲$C_2^4$.故取2張號數之積爲偶數之適遇爲$(20+C_2^4)/C_2^9$即13/18.

又取2張所得號數之積爲奇數之適遇爲$C_2^5/C_2^9$即5/18.

33.若從藏有1至9號入場券之箱中取出5張,則1,2,及3均取出時之適遇如何?又在1,2,及3中僅取1張時之適遇如何?又所取各號中全無1,2,及3者之適遇如

何？

[解] (1) $\dfrac{C_2^6}{C_5^9}=\dfrac{15}{126}=\dfrac{5}{42}$,

(2) $\dfrac{C_1^3 \cdot C_4^6}{C_5^9}=\dfrac{45}{126}=\dfrac{5}{14}$,

(3) $\dfrac{C_5^6}{C_5^9}=\dfrac{6}{126}=\dfrac{1}{21}$.

34. 若從全副52張紙牌中取出4張，則其為A，K，Q及J之適遇如何？又同為A，K，Q，及J之適遇如何？(415面12題)

[解](1) $\dfrac{C_1^4 \cdot C_1^4 \cdot C_1^4 \cdot C_1^4}{C_4^{52}}=\dfrac{256}{270725}$,

(2) $\dfrac{4C_4^4}{C_4^{52}}=\dfrac{4}{270725}$.

35. 一手紙牌備有4張勝牌其餘每3張各成1組，其適遇如何？(415面13題)

[解] $\dfrac{C_4^{13} \cdot C_3^{13} \cdot C_3^{13} \cdot C_3^{13}}{C_{13}^{52}}$

$=\dfrac{4\times 10\times(143)^4\times 13!\times 39!}{52!}$

36. 一擲3個骰子共成5點之適遇如何？若少於5點之適遇如何？(415面14題)

[解] 3個骰子所擲成之骰面共有 $6\times 6\times 6$ 即216種。

若共為5點，骰面可成1，1，3及1，2，2，兩種。但骰面轉成1，1，3者有 $P_3^3/1.2$ 即3種，而骰面轉成1，2，2者亦有3種，故其適遇為 $(3+3)/216$ 即 $1/36$.

若骰面轉成1，1，2即共有4點，若轉成1，1，1即共有3點。此兩種排列應各為 $3!/2!$ 及 $3!/3!$ 故其適遇為 $(3+1)/216=1/54$.

37. 袋中有5角鈔票5張，1元鈔票4張，5元鈔票3張，某君在袋中一次取出2張鈔票其所期望之價值如何？(422面3題)

[解] 取出5角鈔票2張之期望為 $\$1\times C_2^5/C_2^{12}=\$5/33$.

取出1元鈔票2張之期望為 $\$2\times\dfrac{C_2^4}{C_2^{12}}$ $=\$2/11$.

取出5元鈔票2張之期望為 $\$10\times\dfrac{C_2^3}{C_2^{12}}$ $=\$10\times\dfrac{3}{66}=\$5/11$.

取出5角鈔票1張及1元鈔票1張之期望為 $\$1.5\times\dfrac{C_1^5 \cdot C_1^4}{C_2^{12}}=\$\dfrac{20\times 1.5}{66}\ \$5/11$.

取出5角鈔票1張及5元鈔票1張之期望為 $\$5\cdot 5\times\dfrac{C_1^5 \cdot C_1^3}{C_2^{12}}=\$6\cdot 5\times\dfrac{15}{66}=\$\dfrac{27\cdot 5}{22}$

取出1元鈔票1張及5元鈔票1張之期望為 $\$6\times\dfrac{C_1^4 \cdot C_1^3}{C_2^{12}}=\$\dfrac{12}{11}$

故其總期望之價值為

$\$\dfrac{5}{33}+\$\dfrac{2}{11}+\$\dfrac{5}{11}+\$\dfrac{5}{11}+\$\dfrac{27\cdot 5}{22}$

$+\$\dfrac{12}{11}=\$\dfrac{236\cdot 5}{66}=\$3\cdot 583$.

38. 茲有三樁不同事件其適遇各為 $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$ 及 $\frac{3}{4}$。若無諸事件發生其適遇若何？若僅有一件發生其適遇若何？若僅有兩件

發生其適遇若何？若此三事件均發生其適遇若何？(422面5題)

[解](1) $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{2}{3})(1-\frac{3}{4})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$.

(2) $\frac{1}{2}(1-\frac{2}{3})(1-\frac{3}{4})=\frac{1}{24}$;

$\frac{2}{3}(1-\frac{1}{2})(1-\frac{3}{4})=\frac{1}{12}$;

$\frac{3}{4}(1-\frac{1}{2})(1-\frac{2}{3})=\frac{1}{8}$;

$\therefore\frac{1}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$.

(3) $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times(1-\frac{3}{4})=1/12$;

$\frac{1}{2}\times(1-\frac{2}{3})\times\frac{3}{4}=\frac{1}{8}$;

$(1-\frac{1}{2})\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$;

$\therefore\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{11}{24}$.

(4) $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

39. 如一次擲下兩個骰子，求其對於每次擲7點或11點之失敗傾向。(422面6題)

[解]兩骰子擲下，共得 $6\times6$ 卽 36 種狀態。

若擲7點，其排列爲1,6;6,1;2,5;5,2;3,4;4,3共有6種

若擲11點，其排列爲5,6;6,5;共有2種，

故每次擲7點之失敗傾向爲30比6而每次擲11點之失敗傾向爲34:2.

40. 擲3個骰子共成10點之失敗傾向如何？又擲成大於5之成功傾向如何？(422面7題)

[解] 3個骰子擲下，共得 $6\times6\times6=216$ 種。

若骰面轉成1,3,6;1,4,5;2,2,6;2,3,5;2,4,4;3,3,4，卽得10點總數，但1,5,4;1,3,6;2,3,5每種可有3!種轉成方法而2,4,4;2,2,6;3,3,4可轉成3!/2!種

故成功狀態之總數爲18+9=27. 因之此題之適遇爲27/216=1/8.

所以擲3個骰子成10點總數之失敗傾向爲7比1.

同理擲成大於5之成功傾向爲269比7.

41. A,B兩賭徒，擲兩個骰子爲戲，商定擲得7點爲A贏，擲得10點爲B贏，擲得其他各點則二人均分。試比較其適遇。(422面9題)

[解] 若骰面爲1,6;2,5;3,4卽成7點，其狀態共有 $3\times2=6$ 種

若骰面爲6,4;5,5卽擲成10點，其狀態有3種

若兩個骰子共得 $6\times6=36$ 種狀態故除7點及10點之狀態外，其他各點應有之狀態爲 $36-3-6=27$ 種。

$\therefore$ A之適遇爲 $\frac{6}{36}+\frac{27}{36}\times\frac{1}{2}=\frac{39}{72}$;

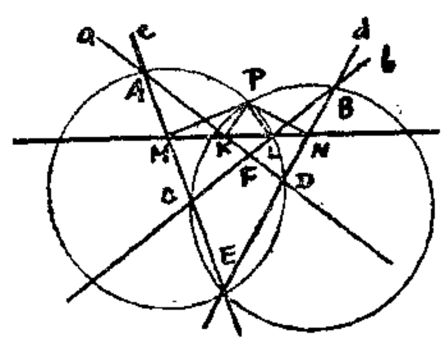
B之適遇爲 $\frac{3}{36}+\frac{27}{36}\times\frac{1}{2}=\frac{33}{72}$

$\therefore A:B=\frac{39}{72}:\frac{33}{72}=13:11$.

# 乙. 吳在淵編： 高級幾何學

迺 樾

25.四直綫無二個相平行者，欲從一點向此四直綫所引垂綫之足在一直綫上，則此點之位置若何？(P.172.Ex.25.)




解：設四直綫a,b,c,d兩兩相交於A,B,C,D,E,F六點。

過a,c,d三綫之交點A,D,E畫圓，過b,c,d三綫之交點B,C,E再畫圓。

既a,b不互平行，故此二圓同除E外，必更有第二交點；設此交點爲P.

∵ P在⊙ADE周上，

∴ 自P至a,c,d之三垂線足K,M,N,必成一直綫；

同理，P又在⊙BCE周上，

∴自P至b,c,d之三垂線足L,M,N,亦成一直綫；

由是知K,L,M,N四點在一直綫上，而P卽爲所求之一點。

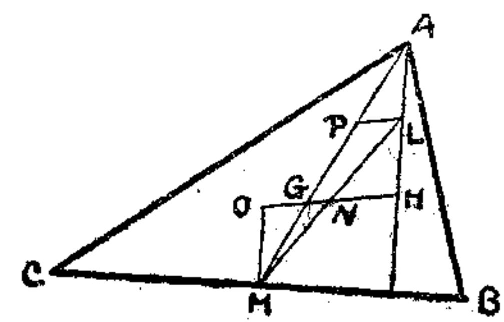
[附註] 兩兩相交之四直綫共可團成 $_4C_3=4$ 個不同之三角形，因此四三角形之外接圓周均過一點P，故本題解數唯限於一，且索解時任作二圓卽可得此P點不必定如解中所指之二圓也。

26.在任一三角形中。

(1)其九點圓心在垂心及外心之正中；

(2)外心，垂心，重心及九點圓心共綫。

(P.172.Ex.26.及27.)




解：設△ABC之外心爲O，垂心爲H重心爲G，九點圓心爲N，

則(1)N在H與O之正中；

又(2)N,H,O,G四點共綫。

證：(1)命AH之中點爲L，BC之中點爲M，聯LM，OH，

則LM爲九點圓之直徑，其中點卽N點。

∵ $LH=\frac{1}{2}AH=OM$，且 $LH \parallel OM$

∴LM，OH互相等分於N，

卽N在H與O之正中。

(2) 聯 OG,GH 及 PL

則∵　$AP=\frac{1}{2}AG=GM$,

$AL=\frac{1}{2}AH=OM$,

$\angle PAL=\angle OMH$,

∴　$\triangle APL\equiv\triangle OHM$,

而　$\angle APL=\angle OHM$.

又∵ $PL /\!/ GH$ ∴$\angle APL=\angle AGH$

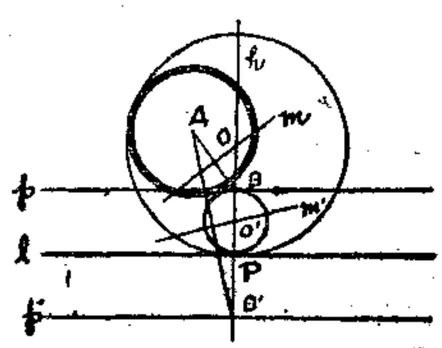
∴　$\angle AGH=\angle OHM$,

而 O,G,H 三點在一直綫上.

由前證知O,N,H三點亦在一直綫上.

由是 N,H,O,G 四點共綫可知.

27.作一圓,令切一所設圓周,且切一所設直線於其上之所設點.(P.173,Ex34.)




解:(A,r)爲所設圓,$\ell$爲所設直線,P 爲所設直線$\ell$上之一所設點.

求作圓切於⊙(A,r),且切$\ell$於P.

作法:作 p,p'$/\!/\ell$,令距$\ell$均爲r.

過P引$h\perp\ell$,交p,p'於B及B'.

聯AB,AB',作其中垂線m及m'.

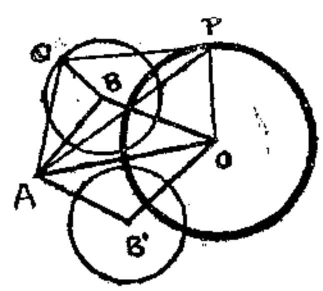
令m,m'與h之交點各爲O及O',則⊙(OP)及⊙(O'P)均爲所求.

證:∵所求之圓切定直線$\ell$於P,∴其圓心應在h線上;

又∵所求之圓切於⊙(A,r),其圓心必又在m及m'兩直線上;

由是所求之圓心乃m,m'與h之兩交點.

28. 一動三角形與所設三角形相似,其一頂點一定,第二頂點常在定圓周上,求其第三頂點之軌跡.(P.119.Ex.8.)




解:XYZ爲定△,(O,r)爲定圓:已知動$\triangle APQ\backsim$定$\triangle XYZ$.而A爲定點,P在⊙O周上移動,求Q點之軌跡.

第一:設Q爲所求軌跡上一點.聯OA.於OA上方作$\triangle AOB\backsim\triangle XYZ$

聯BQ　∵$\triangle APQ\backsim\triangle AOB$,

∴　$AQ:AB=AP:AO$,

又∵　$\angle BAQ=\angle OAP$.

∴　$\triangle BAQ\backsim\triangle OAP$,

而　$AB:AO=BQ:r$.

既OA,AB與r均爲定長,故BQ之長

亦因之而定;又因B為定點,故Q點在以B為圓心以BQ之長為半徑之圓周上.

第二:設於所作圓周上任取一點Q'.

聯AQ',作∠Q'AP'=∠X.

則∠Q'AB=∠P'AO;再於AP'上取P',

令 $AP':AQ'=AB:AO$,

由是 $\triangle ABQ'\backsim\triangle AOP'$,

而 $AB:AO=BQ':OP'$.

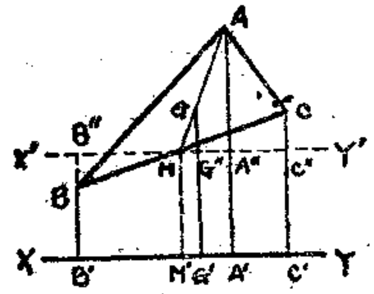
但 $AB:AO=BQ:r$,

且因 $BQ'=BQ$, $\therefore OP'=r$,而P'在圓O周上;故Q'適合於條件.

綜上所證,知所求之軌跡,為以B為心,以BQ定長為半徑之圓.因B可取兩種相異之位置,或在OA上方,或在OA下方,關于OA互相對稱,故軌跡之全部,當為以B及其對稱點B'為心以BQ定長為半徑之兩等圓.

29. △ABC之重心為G,引AA',BB',CC',GG'同垂直於任意直線XY,

則 $GG'=\frac{1}{3}(AA'+BB'+CC')$.




證:令AG與BC之交點為M,則M為BC之中點.過M引X'Y'//XY,各交CC',AA',GG'及BB'之延線於C'',A'',G''及B''四點,則∵ $BB''=CC''$,

又 $B'B''=G'G''=A'A''=C'C''$,

$\therefore G'G''=\frac{1}{3}(A'A''+B'B''+C'C'')$

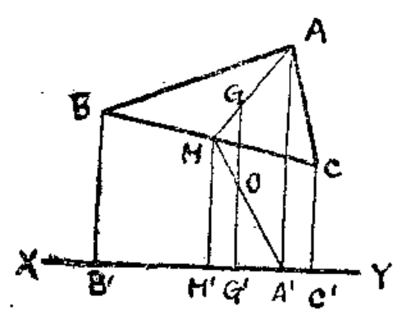
$=\frac{1}{3}(A'A''+BB'+CC')$

又由△AMA'',知 $GG''=\frac{1}{3}AA''$,

$\therefore GG'=GG''+G'G''$

$=\frac{1}{3}(AA''+A'A''+BB'+CC')$

$=\frac{1}{3}(AA'+BB'+CC')$.




再證:過M引MM'⊥XY,交於M'點,則因BB'C'C為一梯形,MM'為其中線,

∵ $MM'=\frac{1}{2}(BB'+CC')$.

聯A'M,交GG'於O,則

∵ $OG:AA'=1:3$, ∴ $3OG=AA'$;

又 $OG':MM'=2:3$, ∴ $3OG'=2MM'$,

由是 $3GG'=AA'+2MM'$

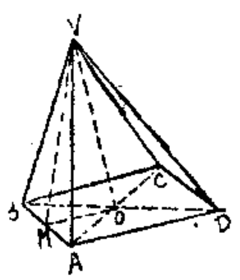
$=AA'+BB'+CC'$,

而 $GG'=\frac{1}{3}(AA'+BB'+CC')$.

# 丙.趙修乾編:新學制高級中學教科書三角術

蕭而廣

25. 有正四角錐,底邊AB$=2a$,斜面與底面間之角VMO$=\theta$,試證高$h=VO=a\tan\theta$,




斜高$S=VM=a\sec\theta$,

斜邊$\ell=VA=a\sec VAM=\sqrt{a^2+VM^2}$,

斜邊與底面間之角$VAO=\sin^{-1}\frac{h}{\ell}$,

斜邊與底邊間之角$VAM=\tan^{-1}\frac{s}{a}$.

(第五章習題十一,23題)

〔證〕依立體幾何之意義,四角錐既為一正角錐,則底面ABCD必為一正方形,且高度VO必通過底面之中心點O.又VMO$\fallingdotseq\theta$既為斜面與底面間之角,則VM$\perp$AB,OM$\perp$AB.故自直角三角形VOM中觀之,

$$VO=MO\tan VMO,\ \text{即}\ h=a\tan\theta;$$

又自同一三角形觀,

$$VM=MO\sec VMO,\ \text{即}\ S=a\sec\theta;$$

再,△VAM亦為一直角三角形,故

$$VA=MA\sec VAM=MA\cdot\frac{\sqrt{a^2+VM^2}}{MA}$$
$$=\sqrt{a^2+VM^2};$$

△VAO為直角三角形,且

$$\sin VAO=VO:VA=h:\ell,$$

$$\therefore\ VAO=\sin^{-1}\frac{h}{\ell};$$

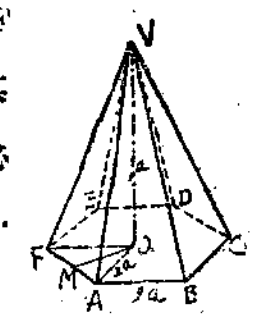
又自△VAM,有

$$\tan VAM=VM:MA=s:a,$$

$$\therefore\ VAM=\tan^{-1}\frac{s}{a}.$$

26. 有正六角錐高a,底邊2a,求斜邊與底邊所夾之角,斜邊與底面所夾之角,斜面與底面所夾之角(同習題24題)

[解]設V−ABCDEF為一正六角錐,則其底面之頂心距OA必等於其邊AF,FE,……之長,今作斜高




VM$\perp$AF,又作底面之邊心距MO$\perp$AF,已知AM$=a$,AO$=2a$,故MO$=a\sqrt{3}$.

又$VM=\sqrt{VO^2+MO^2}=\sqrt{a^2+3a^2}=2a$.

$VA=\sqrt{VO^2+OA^2}=\sqrt{a^2+4a^2}=a\sqrt{5}$.

依23題之同理,可知

$$VAM=\tan^{-1}\frac{VM}{a}=\tan^{-1}\frac{2a}{a}=\tan^{-1}2$$

$=63°26'$;

$VAO=\sin^{-1}\dfrac{a}{VA}=\sin^{-1}\dfrac{a}{a\sqrt{5}}$

$=\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}=26°34'$;

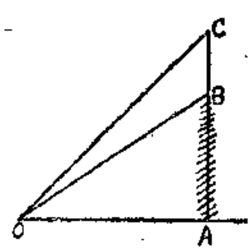
$VMO=\sin^{-1}\dfrac{a}{VM}=\sin^{-1}\dfrac{a}{2a}=\sin^{-1}\frac{1}{2}$

$=30°$.

故斜邊與底邊所夾之角爲 63°26′，斜邊與底面所夾之角爲 26°34′，斜面與底面所夾之角爲30°.

27. 屋頂立25尺之竿在平地上某處測之得竿之上端仰角57°，下端仰角53°，求屋之高.(第五章習題十二，5題)

[解]設AB爲屋頂，BC爲屋頂之竿，O爲平地之某一位置，則依題意，∠COA=57°，




∠BOA=53°. 又設AB=x，則

$$\begin{cases}x=AO\tan 53°,\\ 25+x=AO\cdot\tan 57°.\end{cases}$$

$$\therefore\quad \frac{x}{\tan 53°}=\frac{25+x}{\tan 57°}.$$

即 $25\tan 53°=(\tan 57°-\tan 53°)\cdot x$.

$$\therefore\ x=\frac{25\tan 53°}{\tan 57°-\tan 53°}=\frac{25\sin 53°\cos 57°}{\sin 4°}$$

$$\log x=\log 25+\log\sin 53°+\log\cos 57°-\log\sin 4°$$

$$=1\cdot3979+\overline{1}\cdot9023+\overline{1}\cdot7361-\overline{2}\cdot8436$$

$$=1\cdot0363-\overline{2}\cdot8436=2\cdot1927$$

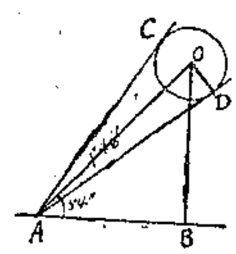
$\therefore\ x=\log^{-1}2\cdot1927=156$.

即屋高爲156尺也.

28. 有圓形氣球，兩端之視線含1°46′之角，其中心之高度爲54°；若球半徑爲10公尺，問球心離地若干公尺?

(同習題，7題)

[解]設氣球之心爲O，兩端視線與球面之切點爲C，D. 則自直角三角形OAB內觀之，




$BO=AO\sin 54°$;

但 $AO=10/\sin 53'$,

$\therefore\ BO=10\sin 54°/\sin 53'$.

$$\log BO=\log 10+\log\sin 54°-\log\sin 53'$$

$$=1+\overline{1}\cdot9080-\overline{2}\cdot1960$$

$$=2\cdot7120$$

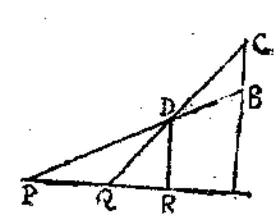
$\therefore\ BO=\log^{-1}2\cdot7120=525$.

即球心離地525公尺也.

29. 太陽之高度自59°移至42°之間，旗竿之影增長85尺；求旗竿之高.

(同習題9題)

設C爲太陽之第一位置，B爲太陽之第



二位置，又設RD為旗竿之高，則

DQR=59°，DPR=42°.

RD=(85+QR)tan42°，

又 RD=QRtan59°，

∴ 由上式消去QR，可得

$$RD=\frac{85\tan42°\tan59°}{\tan59°-\tan42°}$$

$$=\frac{85\sin42°\sin59°}{\sin17°}.$$

$$\log RD=\log85+\log\sin52°+\log\sin59°-\log\sin17°$$

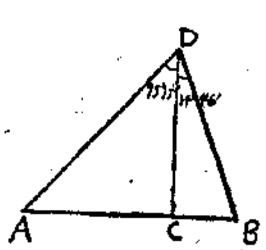
$$=1\cdot9294+\bar{1}\cdot8255+\bar{1}\cdot9331-\bar{1}\cdot4659$$

$$=1\cdot6880-\bar{1}\cdot4659=2\cdot2221$$

∴ $RD=\log^{-1}2\cdot2221$尺.

30．有A,B二地，人跡皆不能到，今欲測其距離，而於AB線上之C點立垂線CD=500尺，自D測∠CDA為75°35′，測∠CDB為34°46′；若(a)C在A,B之間；(b)B在A,C之間；試各求A,B之距離，(同習題12題)

[解](a)BC=500tan34°46′，AC=500tan75°35′：故AB=BC+AC=500(tan34°46′+tan75°35′)，



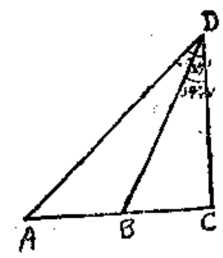

即 $$AB=\frac{500\cos20°21'}{\cos34°46'\cos75°35'}$$

$$\log AB=\log500+\log\cos20°21'-\log\cos34°46'-\log\cos75°35',$$

$$=2\cdot6990+\bar{1}\cdot9720-\bar{1}\cdot9146-\bar{1}\cdot3961=3\cdot3603$$

∴ $AB=\log^{-1}3\cdot3603=2292$尺.

(b)AB=AC−BC．今AC=500tan75°35′，BC=500tan34°46′.




∴AB=500(tan75°35′−tan34°46′)

$$=\frac{500\sin40°49'}{\cos75°35'\cos34°46'}$$

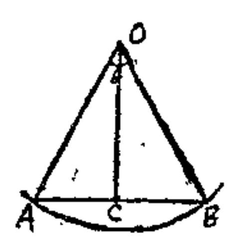
$$\therefore \log AB=\log500+\log\sin40°49'-\log\cos75°35'-\log\cos34°46'$$

$$=2\cdot6990+\bar{1}\cdot8153-\bar{1}\cdot3107=3.2036$$

∴ $AB=\log^{-1}3\cdot2036=1598$尺.

31．鐘擺之最左位置與最右位置相距5.73吋，如擺長39.1吋，問擺過之角為若干度？(同習題13題)

[解] 設OC為擺在靜止時之位置，又設∠AOB=θ，則△AOB為等腰，且△AOC為直角三角形，故 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{2\cdot865}{39\cdot1}$




$$\log\sin\frac{\theta}{2}=\log2\cdot865-\log39.1$$

$$=\bar{2}\cdot8649.$$

∴ $\frac{\theta}{2}=4°12'$. 即 $\theta=8°24'$.

# 丁· 斯蓋倪三氏新解析幾何學

## 川　　島

24. 任意直綫被截於雙曲線及其漸近線間之二線分相等.試證之.(107面習題(8))

釋義：設雙曲線爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (\mathrm{I})$$

而其二漸近線爲

$$bx-ay=0, \qquad (\mathrm{II})$$

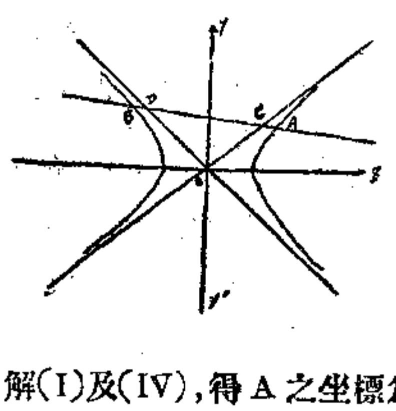
及

$$bx+ay=0. \qquad (\mathrm{III})$$

任意直線

$$y=mx+k \qquad (\mathrm{IV})$$

截雙曲線(I)於A,B二點,截漸近綫(II)於C;(III)於D.則吾人所求証者爲：AC=BD。



証：解(I)及(IV),得A之坐標爲：

$$\left(\frac{a^2mk+ab\sqrt{b^2+k^2-a^2m^2}}{b^2-a^2m^2},\ \frac{b^2k+abm\sqrt{b^2+k^2-a^2m^2}}{b^2-a^2m^2}\right).$$

B之坐標爲

$$\left(\frac{a^2mk-ab\sqrt{b^2+k^2-a^2m^2}}{b^2-a\ m^2},\ \frac{b^2k-abm\sqrt{b^2+k^2-a^2m^2}}{b^2-a^2m^2}\right).$$

由(IV)與(II),得C之坐標

$$\left(\frac{ak}{b-am},\ \frac{bk}{b-am}\right),$$

由(IV)與(III),得D之坐標

$$\left(\frac{-ak}{am+b},\ \frac{bk}{am-b}\right).$$

於是 AC＝

$$\sqrt{\left[\left(\frac{a^2mk+ab\sqrt{b^2+k^2-a^2m^2}}{b^2-a^2m^2}-\frac{ak}{b-am}\right)^2+\left(\frac{b^2k+abm\sqrt{b^2+k^2-a^2m^2}}{b^2-a^2m^2}-\frac{bk}{b-am}\right)^2\right]}$$

$$=\sqrt{\left[\left(\frac{ab\sqrt{b^2+k^2-a^2m^2}-abk}{b^2-a^2m^2}\right)^2+\left(\frac{abm\sqrt{b^2+k^2-a^2m^2}-abmk}{b^2-a^2m^2}\right)^2\right]}$$

$$=\frac{ab\left(\sqrt{b^2+k^2-a^2m^2}-k\right)}{b^2-a^2m^2}\cdot\sqrt{1+m^2}$$

BD＝

$$\sqrt{\left[\left(\frac{a^2mk-ab\sqrt{b^2+k^2-a^2m^2}}{b^2-a^2m^2}+\frac{ak}{b+am}\right)^2+\left(\frac{b^2k-abm\sqrt{b^2+k^2-a^2m^2}}{b^2-a^2m^2}-\frac{bk}{am+b}\right)^2\right]}$$

$$=\sqrt{\left[\left(\frac{ab\sqrt{b^2+k^2-a^2m^2}-abk}{b^2-a^2m^2}\right)^2+\left(\frac{abm\sqrt{b^2+k^2-a^2m^2}-abmk}{b^2-a^2m^2}\right)^2\right]}$$

$$=\frac{ab(\sqrt{b^2+k^2-a^2m^2}-k)}{b^2-a^2m^2}\cdot\sqrt{1+m^2}$$

故　$AC=BD$

25．設以適合$2Ah+Bk+D=0$，$Bh+2Ck+E=0$ 之$(h,k)$爲新坐標之原點則一般二次方程式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

可由移動(translation)簡化爲不含一次項之方程式，而新坐標之原點卽爲方程式所表軌跡之中心．唯當$B^2-4AC=0$時則不可能．試証之．(127面習題(4))

証．設 $x=x'+h$，$y=y'+k$，遂得

$$A(x'+h)^2+B(x'+h)(y'+k)+C(y'+k)^2+D(x'+h)+E(y'+k)+F=0. \quad (1)$$

平方且整理之，

$$Ax'^2+Bx'y'+(2Ah+Bk+D)x'+(Bh+2Ck+E)y'+Cy'^2+h^2+Bhk+k^2+Dh+F=0. \quad (2)$$

若　$2Ah+Bk+D=0$，$Bh+2Ck+E=0$，則(2)遂爲次型

$$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+F'=0. \quad (3)$$

故取適合$2Ah+Bk+D=0$，$Bh+2Ck+E=0$ 之$(h,k)$爲新坐標之原點時，則一般二次方程式可簡化如次型．

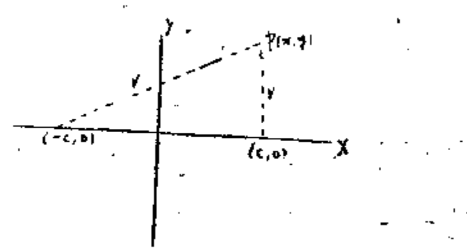
又若經 $\tan^2\theta=\frac{B}{A-C}$之轉換，則(3)可變爲

$$A'x''^2+C'y''^2+F'=0. \quad (4)$$

當 $B^2-4AC\neq0$時，則(4)爲橢圓或雙曲線而以$(h,k)$爲中心．

26．試証橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任一點與其焦點之距離[焦心距(Focal Radii)]爲$a\pm ex$．(131面習題(6))

証：設 $P(x,y)$爲橢圓上一點．




因橢圓之焦點爲$(c,o)$，$(-c,o)$，且$c^2=a^2-b^2$，故P與焦點之距離爲

$$r=\sqrt{(x\pm c)^2+y^2}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2+c^2\pm2cx} \quad (1)$$

但　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，

卽　$y^2=b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}$．

∴由(1)，

$$r=\sqrt{x^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}+(a^2-b^2)\pm2cx}$$

$$=\sqrt{x^2-\frac{b^2x^2}{a^2}\pm 2cx+a^2}$$

$$=\sqrt{a^2\pm 2cx+\frac{c^2}{a^2}x}$$

$$=\sqrt{(a\pm\frac{c}{a}x)^2}$$

$$=a\pm\frac{c}{a}x$$

$$=a\pm ex.$$

故如題所云:

27. 設於橢圓上取三點其橫坐標成算術級數者，則此三點之相當焦心距亦必成算術級數.試証之.(131面習題(7))

証: 設 $x_1,x_2,x_3$ 爲如斯三點之橫坐標,而成算術級數者.

由上題，可知是三點之相當焦心距分別爲 $a\pm ex_1,a\pm ex_2,a\pm ex_3$. 但 $x_1,x_2,x_3$ 係成算術級數者,故必有一公差.設以 d 表其公差,則

$$x_1=x_2+d=x_3+2d,$$

$$ex_1=ex_2+ed=ex_3+2ed,$$

$$\pm ex_1=\pm(ex_2+ed)=\pm(ex_3+2ed),$$

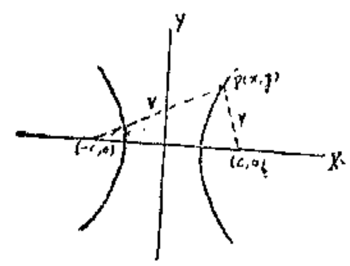
$$a\pm ex_1=a\pm ex_2+ed=a\pm ex_3+2ed.$$

$\therefore a\pm ex_1,a\pm ex_2,a\pm ex_3$ 成算術級數而以 ed 爲公差.

爰得如題所云:

28. 試証雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任一點之焦心距爲 $ex\pm a$.

證



設 P(x,y)爲雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一點,因其焦點爲 (c,o),(−c,o) 且 $c^2=a^2+b^2$.故其焦心距爲

$$r=\sqrt{(x\pm c)^2+y^2}$$

$$=\sqrt{(x^2+y^2)\pm c^2\pm 2xc.} \qquad (1)$$

但 $$y^2=\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)b^2$$

∴ 由(1),

$$r=\sqrt{x^2+\frac{b^2x^2}{a^2}-b^2+a^2+b^2\pm 2cx}$$

$$=\sqrt{\frac{(a^2+b^2)x^2}{a^2}\pm 2cx+a^2}$$

$$=\sqrt{\frac{c^2x^2}{a^2}\pm 2cx+a^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{c}{a}x\pm a\right)^2}$$

$$=\frac{c}{a}x\pm a$$

$$=ex\pm a.$$

# 消夏錄

## 聞許

"日長似小年"的夏天．日間有陽光的照耀，熱得使心頭出火，夜間有蚊蚋的追求，癢得使你身體難安，卽使冰淇淋一杯一杯的進口，電風扇上下左右的吹來．也難以叫暑氣全消．還不如把耐人尋味的問題，在腦中靜思默念一番．便忘了溽暑蚊蠅的侵人，一卷在手，萬念消除．

近讀明朝新安程大位著的算法統宗（清宣城梅瑴成增删本）．有難題兩卷，用詩詞體寫題，很有許多有趣的問題，只須用中等算學的代數或算術，便能解出．旣可以耐人尋味忘却暑熱，而問題也并不難，消夏功効，不在一杯冰淇淋，或一架電風扇之下，特擇錄數題，諸君有此一卷在手，或能消此長夏矣．

難題之前有一段先摘錄數行如下

"……與諸算法中，詩詞歌括總名曰難題，難者，難也．然似難而實非難，惟其詞語巧捏，遂使人一時迷惑，莫知所措手……故凡算難題，惟在明其立法，立法旣明，則迎刄而解，又何難之有哉……"

題十八則如下

一．圓圓三丈一高竿，梢尖頭徑尺二寬．今有鐵箍徑九寸，試問將來何處安．

二．啞子來買肉，難言錢數目，一斤少四十，九兩多十六．試問能算者，合與多少肉．

三．有一公公不記年，手持竹杖在門前，借問公公年幾歲，家中數目記分明，一兩八銖泥彈子，每歲盤中放一丸．日久歲深經雨濕，總然化作一泥團．稱重八斤零八兩，加減方知得幾年．

［註］每兩二十四銖．

四．甲釧九成二兩，乙釵七色相同．李銀舖內偶相逢，各欲改成器用．其子未詳所以，誤將一處銷鎔，當時悶惱李三翁，又把算師擾動．

五. 肆中聽得語吟吟,薄酒名醨厚酒醋.好酒一瓶醉三客.薄酒三瓶醉一人.共同飲了一十九,三十三客醉醺醺,試問高明能算士,幾多醨酒幾多醋?

六. 有個學生資性好,一部孟子三日了,每日增添一倍多.問君每日讀多少.

[註]一部孟子字數爲三萬四千六百八十五.

七. 遠望巍巍塔七層,紅光點點倍加增,共燈三百八十一,請問尖頭幾盞燈.

八. 巍巍古寺在山中,不知寺內幾多僧,三百六十四隻碗,恰合用盡不差爭.三人共餐一碗飯,四人共嘗一碗羹,請問先生能算者,都來寺內幾多僧.

九. 三百六十一隻缸,任君分作幾船裝,不許一船多一隻,不許一船少一缸.

十. 今歲都要納秋糧.僱船搬載去上倉,五萬七千六百石,河中漏濕一船糧.每船負帶一石去,船仍剩得一石糧,秋糧納米已有數,不知原用幾船裝.

十一. 張家三女孝順,歸家頻望勤勞.東鄉大女隔三朝,五日西鄉女到,小女南鄉路遠,依然七日一遭,何朝齊至飲香醪,請問英賢回報.

十二. 廬山山高八十里,山峯峯上一黍米,黍米一轉只三分,幾轉轉到山脚底.

十三. 當年蘇武去北邊,不知去了幾周年,分明記得天邊月,二百三十五番圓.

十四. 三足團魚六眼龜,共同山下一深池,九十三足亂浮水,一百二眼將人窺,或出沒,往東西,倚欄觀看不能知,有人算得無差錯,好酒重斟贈數杯.

十五. 待客攜壺沽酒,不知壺內金波.逢人添信又相和,共飲斗半方可.添飲還經五處.壺中酒盡無多,要知原酒無差訛,甚麼法兒方可,

十六. 今有布絹三十疋,共賣價鈔五百七,四疋絹價九十貫,三疋布價該五十,欲問絹布各幾何,價鈔各該分端的,若人算得無差訛,堪把芳名題郡邑.

十七. 三月清明節氣,衆童鬥放風箏,托量九十五尺繩,被風括去空中,量得上下相應,七十六尺無零,縱橫甚法問先生,算之多少爲平.

十八. 我問開店李三公,衆客都來到店中,一房七客多七客,一房九客一房空.

以上之註文乃摘錄原書中者又第十三題須注意閏月.