特種絕對向心運動之軌道方程式

特種絕對向心運動之軌道方程式

王應

質點P當運動時。受力之作用。而其力之方向。常在P與定點O之連結直線上。則運動。特稱之為向心運動。O點謂為力心。(Center)向心運動之種類。不一而足。彼ton之萬有引力定律。及Kepler之天體運行法則。皆不過向心運動之一種。普通重學書中所載。大都係相對的向心運動。即假定力心O為靜止體。以求動點P對於力心之種種性質已耳。泛而言之。吾人棲息於地球。地球上之品類繁殊。幾不可以臆度。然其一動一靜。無時不受地心之吸引力。覺亦係一種之向心運動。然苟將地球自轉及公轉二條件。同時納入吾人思想中。且自地球以外。視察地球上庶類之動作。其情狀果何若耶。月繞地球而行。地球又繞日而行。則月之運行於空間。其情狀又奚若耶。抑未始非極饒趣味之問題也。由一般論法。假定力心O點循任意之曲綫而行。動點P對於O點為向心運動。則P點在空間所經過之徑路。實為吾人應考究之事項。即所謂絕對的向心運動。在運動學上。有重要之關係。自不待言矣。

由數理方面。用直角立體坐標。以論究絕對的向心運動。且以(X, Y, Z)表動點P之位

置。則X, Y, Z均為時間t之函數。而其軌道之方程式。可如次形。

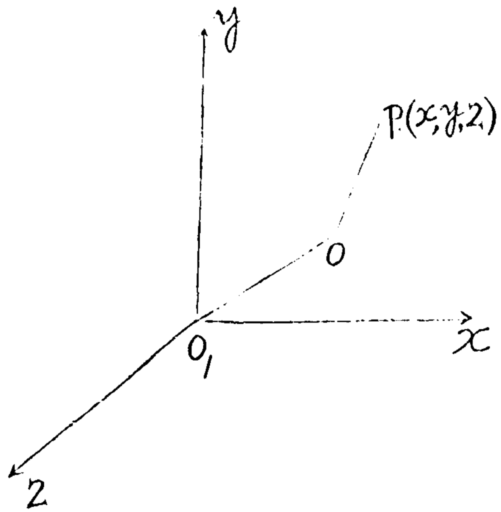
$$(X, Y, Z, t) = 0 \qquad \varphi(X, Y, Z, t) = 0 \qquad \psi(X, Y, Z, t) = 0$$

此軌道方程式。不外將運動微分方程式。而施以積分之結果而已。若力心O與動點P。均在同一平面上運動。則軌道方程式如次形。

$$F_1(X, Y, t) = 0 \qquad F_2(X, Y, t) = 0$$

在一般之例。雖經前賢之種種研究。然欲求是等微分方程式之解。洵非易事。則其間題之複雜困難。不言而喻。僅不揣固陋。就其特種之例。即假定力心O循直綫等速運動。動點P對於O點。則準引力自乘逆比之原則。成向心運動。以為本篇之基礎的條件。章成是篇。願

（甲　圖）



竊附於前賢之末。續貂之譏。固所不免焉。

如(甲)圖。O點爲力心。在直線O_1O上等速運動。其速度爲V。O_1爲原點。動點P對於O點爲向心運動。然則準引力中心之定律。P對於O爲平面運動也明矣。今先假定P點之質量爲1。O點之速度V。在X,Y,Z三方向之分速度爲U,V,W。由開始運動經若干時間t後。O由O_1點移至圖中之位置。則O之坐標當爲O(ut, vt, wt)。又P之坐標爲P(X,Y,Z)。直線OP之方向餘弦爲$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$。則準距離自乘逆比之假定。其運動方程式如次。

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{r^2}\cos\alpha \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{k}{r^2}\cos\beta \qquad \frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{k}{r^2}\cos\gamma$$

上式中之k爲常數。與O點之質量及其性質有關係。惟由圖所示。

$$OP^2=(x-ut)^2+(y-vt)^2+(z-wt)^2$$

及

$$\cos\alpha=\frac{x-ut}{\sqrt{(x-ut)^2+(y-vt)^2+(z-wt)^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{y-vt}{\sqrt{(x-ut)^2+(y-vt)^2+(z-wt)^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{z-wt}{\sqrt{(x-ut)^2+(y-vt)^2+(z-wt)^2}}$$

由是方程式如次形。

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k(x-ut)}{\left(\sqrt{(x-ut)^2+(y-vt)^2+(Z-wt)^2}\right)^3}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{k(y-vt)}{\left(\sqrt{(x-ut)^2+(y-vt)^2+(Z-wt)^2}\right)^3}\quad\cdots\cdots(1)$$
$$\frac{d^2Z}{dt^2}=-\frac{k(Z-wt)}{\left(\sqrt{(x-ut)^2+(y-vt)^2+(Z-wt)^2}\right)^3}$$

又令　$x-ut=x_1$　$y-vt=y_1$　$Z-wt=Z_1$　$x_1^2+y_1^2+Z_1^2=r_1^2$

則得　$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{d^2(x-ut)}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}$　$\frac{d^2y_1}{dt^2}=\frac{d^2(y-vt)}{dt^2}=\frac{d^2y}{dt^2}$　$\frac{d^2Z_1}{dt^2}=\frac{d^2(Z-wt)}{dt^2}=\frac{d^2Z}{dt^2}$

及　$\frac{d^2x_1}{dt^2}=-\frac{k}{r_1^3}X_1$　$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{k}{r_1^3}Y_1$　$\frac{d^2Z_1}{dt^2}=-\frac{k}{r_1^3}Z_1\quad\cdots\cdots(A)$

(A)式之形。與求相對的向心運動之方程式。毫無所異。惟因P點對於力心O爲平面運動。今若假定坐標軸之(X,Y)平面。與該平面平行。且以O_1爲力心運動之起點。即得

$$Z-wt=0\quad\cdots\cdots(2)$$

從而　$\frac{d^2Z_1}{dt^2}=\frac{d^2Z}{dt^2}=0$。故以$-y_1$乘(A)之第一式。以$X_1$乘(A)之第二式相加而積分之。即

得 $x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_1}{dt} = C$

C爲常數。然因 $\frac{d}{dt}\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = \frac{d}{dt}(\mathrm{tg}\,\theta_1) = \frac{x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_1}{dt}}{x_1^2} = \frac{\frac{d\theta_1}{dt}}{\mathrm{Cos}\,\theta_1}$

及 $x_1 = r_1\,\mathrm{Cos}\,\theta_1$ 將此等關係。代入於前式中。即得

$$x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_1}{dt} = r_1^2\frac{d\theta_1}{dt} = C \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

此式即表示P對於O點關係變位之面積速度。爲一定焉。

次以 $\frac{dx_1}{dt}$ 乘(A)之第一式。以 $\frac{dy_1}{dt}$ 乘(A)之第二式相加。且由 $x_1^2 + y_1^2 = r_1^2$ 之關係。得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2\Big] = -\frac{k}{r_1^3}\frac{d}{dt}(x_1^2 + y_1^2) = 2\frac{d}{dt}\left(\frac{k}{r_1}\right) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

更由 $x_1 = r_1\mathrm{Cos}\,\theta_1$ $y_1 = r_1\mathrm{Cos}\,\theta_2 = r_1\mathrm{Sin}\,\theta_1$ 及(3)式得

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 + r_1^2\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r_1^2}$$

代入於(B)式中。且由積分法。得 $\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r_1^2}\right\} = \frac{k}{r_1} + e$

故得 $$\frac{dr_1}{dt} = \sqrt{2e + \frac{2k}{r_1} - \frac{c^2}{r_1^2}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3')$$

由(3)(3')兩式消去dt。得　$d\theta_1 = \dfrac{c}{r_1^2\sqrt{2\varepsilon + \dfrac{2k}{r_1} - \dfrac{c^2}{r_1^2}}}dr_1$

更令$Z' = \dfrac{1}{r_1}$且由積分法。得　$\theta_1 + \theta_0 = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\dfrac{Z' - \dfrac{k}{c^2}}{\sqrt{\dfrac{2\varepsilon}{c^2} + \dfrac{k^2}{c^4}}}\right)$　(θ_0 = 常數)

仍以$\dfrac{1}{r_1}$代其Z'。且令　$\sqrt{1 + \dfrac{2\varepsilon c^2}{k^2}} = E$　$\dfrac{c^2}{k} = \rho$

即得　$$r_1 = \frac{\rho}{1 + E\mathrm{Cos}(\theta_1 + \theta_0)} \cdots\cdots (4)$$

卽　$$\sqrt{(x-ut)^2 + (y-vt)^2} = \frac{\rho}{1 + E\dfrac{(x-ut)\mathrm{Cos}\theta_0 - (y-vt)\mathrm{Sin}\theta_0}{\sqrt{(x-ut)^2 + (y-vt)^2}}}$$

即　$$\sqrt{(x-ut)^2 + (y-vt)^2} = \rho - E\{(x-ut)\mathrm{Cos}\theta_0 - (y-vt)\mathrm{Sin}\theta_0\} \cdots\cdots (C)$$

上式由t之種種值。表示以二次曲綫爲母綫之壔面群。其與(x,y)平面之平行平面相交。則成二次曲綫之一群。而力心在其焦點之位置。其曲綫之種類。則準乎E之值而定。卽E = 1爲拋物綫群。E＜1或E＞1則爲橢圓群或雙曲綫群也。

以上之計算及說明。爲現今學者所熟知。即世所稱爲 Kepler 之定律者也。

次由(3)(4)兩式得 $Cdt = \frac{\rho^2}{\{1+E\cos(\theta_1+\theta_0)\}^2}d\theta_1$

今令 $\varepsilon = tg\frac{\theta_1+\theta_0}{2}$ 則 $2tg^{-1}\varepsilon = \theta_1+\theta_0$ $d\theta_1 = \frac{2d\varepsilon}{1+\varepsilon^2}$ $\cos(\theta_1+\theta_0) = \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}$

故令 $\sqrt{\frac{1+E}{1-E}} = \alpha$ 即得 $Cdt = \frac{\rho^2 d\theta_1}{\{1+E\cos(\theta_1+\theta_0)\}^2} = \frac{2\rho^2(1+\varepsilon^2)}{(1-E)^2(\alpha^2+\varepsilon^2)^2}d\varepsilon$

由積分 $Ct+\beta = \frac{2\rho^2}{(1-E)^2}\int\frac{1+\varepsilon^2}{(\alpha^2+\varepsilon^2)^2}d\varepsilon$ ……………………(D)

β為常數。(D)式之積分。其值由E之值而異。今先就 $E=1$ 之例設論。即(C)式與(x,y)面之平行平面相交成拋物綫群之時。則

$$(1-E)^2(\alpha^2+\varepsilon^2)^2 = (1-E)^2\left(\frac{1+E}{1-E}+\varepsilon^2\right)^2 = \{(1+E)+(1-E)\varepsilon^2\}^2 = 4$$

由是得 $Ct+\beta = \frac{\rho^2}{2}\int(1+\varepsilon^2)d\varepsilon = \frac{\rho^2}{2}\left(\varepsilon+\frac{\varepsilon^3}{3}\right) = \frac{\rho^2}{2}\left(tg\frac{\theta_1+\theta_0}{2}+\frac{1}{3}tg^3\frac{\theta_1+\theta_0}{2}\right)$

由坐標軸方向之撰擇法。可令 $\tau_0=0$。即動點P與力心O相距最近時為時之起點。($t=0$)以其時力心之位置為原點。x軸之方向。與二次曲綫之長軸相一致。則 θ_0 之值。自不可不等於零矣。由是得 $Ct+\beta = \frac{\rho^2}{2}\left(\tan\frac{\theta_1}{2}+\frac{1}{3}\tan^3\frac{\theta_1}{2}\right)$

更以 $E=1,\ \theta_0=0$ 代入於(C)式中。得

$$\sqrt{(x+ut)^2+(y-vt)^2}=\rho-(x-ut) \quad \text{或} \quad (y-vt)^2=\rho^2-2\rho(x-ut)$$

故由 $$\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta_1}{1+\cos\theta_1}}=\sqrt{\frac{\sqrt{(x-ut)^2+(y-vt)^2}-(x-ut)}{\sqrt{(x-ut)^2+(y-vt)^2}+(x-ut)}}=\sqrt{\frac{\rho-2(x-ut)}{\rho}}$$

得 $$\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\theta_1}{2}=\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\theta_1}{2}\right)=\sqrt{\frac{\rho-2(x-ut)}{\rho}}\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{\rho-2(x-ut)}{\rho}\right)$$

故 $$Ct+\beta=\frac{1}{3\rho^2}\sqrt{\rho^2-2\rho(x-ut)}\,[2\rho-(x-ut)]=\frac{1}{3}(y-vt)(2\rho-x+ut)$$

此式中之常數β。得由最初之條件決定之。即於式中令 $y=0$ $t=0$。即得 $\beta=0$。將是等之式。與(2)式相組合。得軌道之方程式如次。

$$(y-vt)^2+2\rho(x-ut)=\rho^2$$

$$(y-vt)(2\rho-x+ut)=3Ct$$

$$Z-wt=0$$

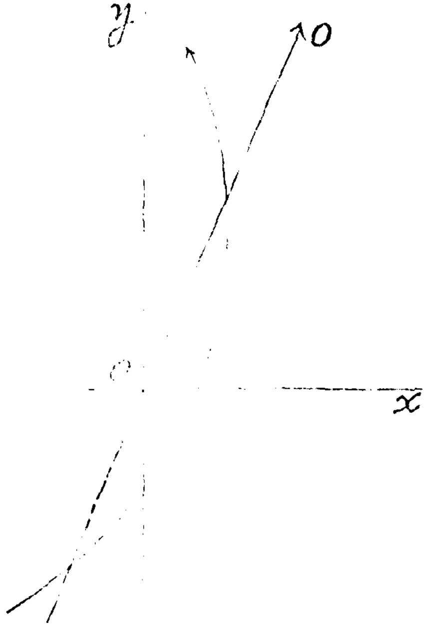
或由上式消去t。則得

$$(wy-vz)^2+2w\rho(wx-uz)=w^2\rho^2$$
$$(wy-vz)(2w\rho-wx+uz)=3Cwz \quad \cdots\cdots(5)$$

若P及O均在同平面上運動。則 $Z=0$, $w=0$ 其方程式如次。

$$(y-vt)^2+2\rho(x-ut)=\rho^2$$
$$(y-vt)(2\rho-x+ut)=3Ct \quad \cdots\cdots(5')$$

由t之種種值。(5')之第一式。係表示拋物綫之羣。第二式表示雙曲綫之羣。準消去法之結果。x或y之代數學上之根。各有三種。而在本問題。僅一質點在曲綫上運動。無寧取兩曲綫羣種種之交點而連結之。其軌道曲線之形。略如(乙)



(乙圖)

圖。又該曲綫爲(5)式之平面上射影。自不待言矣。

若 $E<1$。則(C)與(x,y)坐標面之平行平面相交。成橢圓之劵。而(I)式之積分。得如次之計算。

$$Ct+\beta=\frac{2\rho^2}{(1-E)^2}\int\frac{1+\varepsilon^2}{(\alpha^2+\varepsilon^2)^2}d\varepsilon=\frac{2\rho^2}{(1-E)^2}\int\left\{\frac{1}{(\alpha^2+\varepsilon^2)^2}+\frac{\varepsilon^2}{(\alpha^2+\varepsilon^2)^2}\right\}d\varepsilon$$

$$=\frac{2\rho^2}{\alpha^2(1-E)^2}\int\left\{\frac{\alpha^2+\varepsilon^2}{(\alpha^2+\varepsilon^2)^2}+\frac{(\alpha^2-1)\varepsilon^2}{(\alpha^2+\varepsilon^2)^2}\right\}d\varepsilon$$

$$=\frac{2\rho^2}{\alpha^2(1-E)^2}\int\frac{1}{\alpha^2+\varepsilon^2}d\varepsilon+\frac{2\rho^2(\alpha^2-1)}{\alpha^2(1-E)^2}\int\frac{\varepsilon^2}{(\alpha^2+\varepsilon^2)^2}d\varepsilon$$

然因　$$\frac{d}{d\varepsilon}\left\{-\frac{\varepsilon}{2(\alpha^2+\varepsilon^2)}\right\}=-\frac{1}{2(\alpha^2+\varepsilon^2)}+\frac{\varepsilon^2}{(\alpha^2+\varepsilon^2)^2}$$

故　$$\int\frac{\varepsilon^2}{(\alpha^2+\varepsilon^2)^2}d\varepsilon=-\frac{\varepsilon}{2(\alpha^2+\varepsilon^2)}+\int\frac{d\varepsilon}{2(\alpha^2+\varepsilon^2)}$$

由是得　$$Ct+\beta=-\frac{\rho^2(\alpha^2-1)}{\alpha^2(1-E)^2}\frac{\varepsilon}{\alpha^2+\varepsilon^2}+\left\{\frac{2\rho^2}{\alpha^2(1-E)^2}+\frac{\rho^2(\alpha^2-1)}{\alpha^2(1-E)^2}\right\}\int\frac{1}{\alpha^2+\varepsilon^2}d\varepsilon$$

$$=-\frac{\rho^2(\alpha^2-1)}{\alpha^2(1-E)^2}\frac{\varepsilon}{\alpha^2+\varepsilon^2}+\frac{\rho^2(\alpha^2+1)}{\alpha^3(1-E)^2}tg^{-1}\frac{\varepsilon}{\alpha}$$

$$=A\,tg^{-1}\frac{\varepsilon}{\alpha}-B\frac{\varepsilon}{\alpha^2+\varepsilon^2}$$

上式中之 $A=\dfrac{\rho^2(\alpha^2-1)}{\alpha^2(1-E)}=\dfrac{2\rho^2}{(1-E^2)^{\frac{3}{2}}}$　　$B=\dfrac{\rho^2(\alpha^2-1)}{\alpha^2(1-E)^2}=\dfrac{2E\rho^2}{(1-E)^2(1+E)}$ 仍准同法。由 $\theta_0=0$ 之條件。則(C)式如次形。

$$(1-E^2)(x-ut)^2+(y-vt)^2+2\rho E(x-ut)=\rho^2\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(F)}$$

及

$$\varepsilon=\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta_1}{1+\cos\theta_1}}=\sqrt{\frac{\sqrt{(x-ut)^2+(y-vt)^2}-(x-ut)}{\sqrt{(x-ut)^2+(y-vt)^2}+(x-ut)}}$$

$$=\sqrt{\frac{\rho-(1+E)(x-ut)}{\rho+(1-E)(x-ut)}}=\frac{\rho-(1+E)(x-ut)}{\sqrt{\{\rho-E(x-ut)\}^2-(x-ut)^2}}=\frac{\rho-(1+E)(x-ut)}{y-vt}$$

$$\frac{\varepsilon}{\alpha^2+\varepsilon^2}=\frac{\sqrt{\dfrac{\rho-(1+E)(x-ut)}{\rho+(1-E)(x-ut)}}}{\alpha^2+\dfrac{\rho-(1+E)(x-ut)}{\rho+(1-E)(x-ut)}}=\frac{\sqrt{\{\rho-(1+E)(x-ut)\}\{\rho+(1-E)(x-ut)\}}}{\rho(\alpha^2+1)+\{\alpha^2(1-E)-(1+E)\}(x-ut)}$$

$$=\frac{\sqrt{\{\rho-E(x-ut)\}^2-(x-ut)^2}}{\rho(\alpha^2+1)}=\frac{y-vt}{\rho(\alpha^2+1)}$$

由最初之條件。$t=0,\ y=0$ 即得 $\varepsilon=0$。從而 $\theta=0$。且由(F)式知其時之 $x=\dfrac{\rho}{1+E}$ 故

得積分式　$Ct+b(y-vt)=A\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{\rho-(1+E)(x-ut)}{\alpha(y-vt)}$　$\left(b=\dfrac{B}{\rho(\alpha^2+1)}=\dfrac{E}{1-E^2}\rho\right)$

卽 $$\rho-(1+E)(x-ut)=\alpha(y-vt)tg\frac{Ct+b(y-vt)}{\lambda}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(G)$$

故 $$x-ut=\frac{1}{1+E}\left(\rho-\alpha(y-vt)tg\frac{Ct+b(y-vt)}{\lambda}\right)$$

代入於(F)式中而整齊之。得

$$(y-vt)^2\left(1+tg^2\frac{Ct+b(y-vt)}{\lambda}\right)-2\rho\left(\frac{\alpha E}{1+E}+\frac{1}{\alpha}\right)(y-vt)tg\frac{Ct+b(y-vt)}{\lambda}+\left(\frac{1}{\alpha^2}-1+\frac{2E}{1+E}\right)\rho^2=0$$

卽 $$(y-vt)\left\{(y-vt)-\frac{\rho}{\sqrt{1-E^2}}Sin\frac{2Ct+2b(y-vt)}{\lambda}\right\}=0$$

此式中因數 $(y-vt)$。可棄去之。何則。除曲線上特別之點以外。$y-vt\neq0$ 故也。由是將 $y-vt=\frac{\rho}{\sqrt{1-E^2}}Sin\frac{2Ct+2b(y-vt)}{\lambda}$ 之關係。代入於(G)式中而變化之。卽得

$$\rho-(1+E)(x-ut)=\frac{2\rho}{1-E}\sin^2\frac{Ct+b(y-vt)}{\lambda}=\frac{\rho}{1-E}\left\{1-\cos\frac{2Ct+2b(y-vt)}{\lambda}\right\}$$

故 $$x-ut=\frac{\rho}{1-E^2}\left(\cos\frac{2Ct+2b(y-vt)}{\lambda}-E\right)$$

將上式與(2)(F)兩式相組合。卽得軌道之方程如次。

$$\begin{cases} (1-E^2)(x-ut)^2+(y-vt)^2+2E\rho(x-ut)=\rho^2 \\ x-ut=\dfrac{\rho}{1-E^2}\left(\cos\dfrac{2Ct+2b(y-vt)}{\lambda}-E\right) \\ Z-wt=o \end{cases}$$

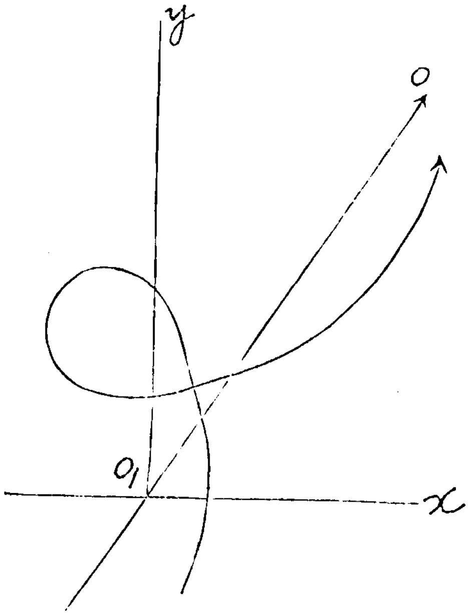
或由上式消去t。則得

$$\begin{cases} (1-E^2)(wx-uz)^2+(wy-vz)^2+2Ew\rho(wx-uz)=w^2\rho^2 \\ wx-uz=\dfrac{W\rho}{1-E^2}\left(\cos\dfrac{2Cz+2b(wy-vz)}{\lambda W}-E\right) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

(6)式係表示螺旋狀之空間曲綫。彼太陽系行星在空間之絕對的徑路。亦在於本式之範圍內。自可推而知之。若P及O兩點在同一平面上運動。則 $W=o$, $Z=o$ 其方程式如次。

$$\begin{cases} (1-E^2)(x-ut)^2+(y-vt)^2+2E\rho(x-ut)=\rho^2 \\ x-ut=\dfrac{\rho}{1-E^2}\left(\cos\dfrac{2Ct+2b(y-vt)}{\lambda}-E\right) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6')$$

（丙　　圖）



上式之第一式。係表示橢圓率。第二式表示餘弦曲綫率。由t之種種値。將兩曲線之無數交點連結之。則略如(丙)圖之曲綫。且該曲綫亦即爲(6)式在(xy)平面上之射影也。

若E之値漸次減少。馴至E=0。則A=2ρ², b=0。(6')之第一式表示圓率。

$$(x-ut)^2+(y-vt)^2=\rho^2 \quad \cdots\cdots(H)$$

而(6)式如次形

$$(wx-uz)^2+(wy-vz)^2=w^2\rho^2 \quad \cdots\cdots$$

$$wx-uz=w\rho\,\mathrm{Cos}\frac{z}{w\rho^2} \quad \cdots\cdots(I)$$

以(1)之第二式代入於第一式中。遂得次列二式。

$$wx-uz=w\rho\mathrm{Cos}\frac{Cz}{w\rho^2}\qquad wy-vz=\pm w\rho\mathrm{Sin}\frac{Cz}{w\rho^2}$$

更依同一之計算法。而(6′)式變成次二式。

$$x-ut=\rho\mathrm{Cos}\frac{Ct}{\rho^2}\qquad y-vt=\pm\rho\mathrm{Sin}\frac{Ct}{\rho^2}$$

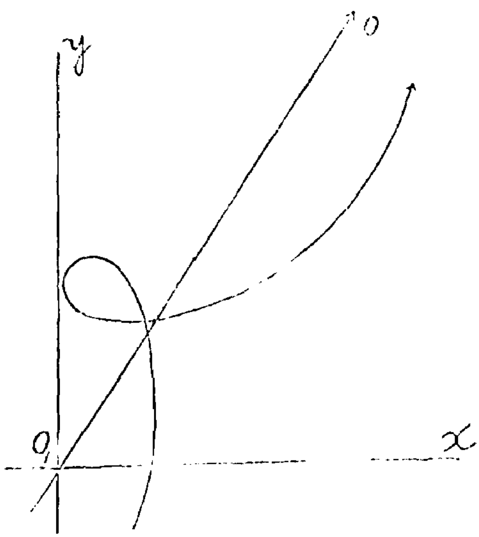
上列各式中。含有複符號之式。係表示對於z與t之二值。而 $Wy-vz$ 及 $y-vt$ 有相等之正負兩值。與之對應也。而在本問題之應用。僅係一質點在曲線上運動。僅取正符號之項足矣。由是得軌道方程式如次形。

$$\left.\begin{aligned}wx-uz&=w\rho\mathrm{Cos}\frac{Cz}{w\rho^2}\\wy-vz&=w\rho\mathrm{Sin}\frac{Cz}{w\rho^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(7)$$

$$\left.\begin{aligned}x-ut&=\rho\mathrm{Cos}\frac{Ct}{\rho^2}\\y-vt&=\rho\mathrm{Sin}\frac{Ct}{\rho^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(7')$$

(7')式係表兩直線之系。由t之種種值。將其交點連結之。如(丁)圖所示。即其軌道曲線。亦即(7)式在(x,y)平面上之射影。彼有名之擺線(Cycloid)在本問題中。為特種之例。從可推知矣。

若E>1。則(C)式與(x,y)坐標面之平行平面相交。成雙曲綫之群。故令$\sqrt{\frac{E+1}{E-1}}=\alpha$。則(D)式之積分。可如



（丁　圖）

次之計算。

$$Ct+\beta=\frac{2\rho^2}{(E-1)^2}\int\frac{1+\xi^2}{(\alpha^2-\xi^2)^2}d\xi$$

$$=\frac{2\rho^2}{(E-1)^2}\int\left(\frac{1+\alpha^2}{4\alpha^2}\frac{1}{(\alpha-\xi)^2}+\frac{1+\alpha^2}{4\alpha^2}\frac{1}{(\alpha+\xi)^2}+\frac{1-\alpha^2}{4\alpha^3}\frac{1}{\alpha-\xi}+\frac{1-\alpha^2}{4\alpha^3}\frac{1}{\alpha+\xi}\right)d\xi$$

$$=\frac{\rho^2(1+\alpha^2)}{2\alpha^2(E-1)^2}\int\left(\frac{1}{(\alpha-\xi)^2}+\frac{1}{(\alpha+\xi)^2}\right)d\xi-\frac{\rho^2(\alpha^2-1)}{2\alpha^3(E-1)^2}\int\left(\frac{1}{\xi+\alpha}-\frac{1}{\xi-\alpha}\right)d\xi$$

$$=\frac{\rho^2(1+\alpha^2)}{2\alpha^2(E-1)^2}\left(\frac{1}{\alpha-\xi}-\frac{1}{\alpha+\xi}\right)+\frac{\rho^2(\alpha^2-1)}{2\alpha^3(E-1)^2}\left(\log(\xi-\alpha)-\log(\xi+\alpha)\right)$$

$$=-A\frac{\xi}{\xi^2-\alpha^2}+B\log\frac{\xi-\alpha}{\xi+\alpha}$$

上式中之 $A=\frac{\rho^2(\alpha^2+1)}{\alpha^2(E-1)^2}=\frac{2E\rho^2}{(E-1)^2(E+1)}$，　$B=\frac{\rho^2(\alpha^2-1)}{2\alpha^3(E-1)^2}=\frac{\rho^2}{(E^2-1)^{\frac{3}{2}}}$　今仍準同法。由 $\theta_0=0$ 之條件。則(C)式如次形。

$$(y-vt)^2-(E^2-1)(x-ut)^2+2E\rho(x-ut)=\rho^2 \text{.....................} (J)$$

及

$$\frac{\xi}{\xi^2-\alpha^2}=\sqrt{\frac{\rho-(E+1)(x-ut)}{\rho-(E-1)(x-ut)}}\Bigg/\left(\frac{\rho-(E+1)(x-ut)}{\rho-(E-1)(x-ut)}-\alpha^2\right)$$

$$=\frac{\sqrt{\{\rho-(E+1)(x-ut)\}\{\rho-(E-1)(x-ut)\}}}{\rho(1-\alpha^2)+\{\alpha^2(E-1)-(E+1)\}(x-ut)}=-\frac{y-vt}{\rho(\alpha^2-1)}$$

$$\frac{\xi-\alpha}{\xi+\alpha}=\frac{\sqrt{\rho-(E+1)(x-ut)}-\alpha\sqrt{\rho-(E-1)(x-ut)}}{\sqrt{\rho-(E+1)(x-ut)}+\alpha\sqrt{\rho-(E-1)(x-ut)}}=\frac{\left(\sqrt{\rho-(E+1)(x-ut)}-\alpha\sqrt{\rho-(E-1)(x-ut)}\right)^2}{\rho-(E+1)(x-ut)-\alpha^2\{\rho-(E-1)(x-ut)\}}$$

$$=\frac{\rho-(E+1)(x-ut)-\alpha^2\{\rho-(E-1)(x-ut)\}}{\left(\sqrt{\rho-(E+1)(x-ut)}+\alpha\sqrt{\rho-(E-1)(x-ut)}\right)^2}$$

而

$$\frac{\left(\sqrt{\rho-(E+1)(x-ut)}-\alpha\sqrt{\rho-(E-1)(x-ut)}\right)^2}{\rho-(E+1)(x-ut)-\alpha^2\{\rho-(E-1)(x-ut)\}}=\frac{2\alpha(y-vt)+2(E+1)(x-ut)-\rho(\alpha^2+1)}{\rho(\alpha^2-1)}$$

$$\frac{\rho-(E-1)(x-ut)-\alpha^2\{\rho-(E-1)(x-ut)\}}{(\sqrt{\rho-(E-1)(x-ut)}+\alpha\sqrt{\rho-(E-1)(x-ut)})^2}=\frac{\rho(\alpha^2-1)}{-2\alpha(y-vt)+2(E+1)(x-ut)-\rho(\rho^2+1)}$$

故令 $\frac{A}{\rho(\alpha^2-1)}=\frac{E}{E^2-1}=a$ 則得次式。

$$Ct+\beta-a(y-vt)=B\log\frac{2\alpha(y-vt)+2(E+1)(x-ut)-\rho(\alpha^2+1)}{\rho(\alpha^2-1)}$$

故 $2\alpha(y-vt)+2(E+1)(x-ut)-\rho(\alpha^2+1)=\rho(\alpha^2-1)e^{\frac{Ct+\beta-a(y-vt)}{B}}$

依同理 $2\alpha(y-vt)+2(E+1)(x-ut)-\rho(\alpha^2+1)=\rho(\alpha^2-1)e^{-\frac{Ct+\beta-a(y-vt)}{B}}$

由減法 $4\alpha(y-vt)=\rho(\alpha^2-1)\left(e^{\frac{Ct+\beta-a(y-vt)}{B}}-e^{-\frac{Ct+\beta+a(y-vt)}{B}}\right)$

將最初之條件 $t=0,\ y=0$ 代入上式中。得 $e^{\frac{\beta}{B}}-e^{-\frac{\beta}{B}}=0$。故 $\beta=0$。今令 $\frac{\rho(\alpha^2-1)}{4\alpha}=\frac{\rho}{2\sqrt{E^2-1}}=b$。并與(1)(2)相組合。則得軌道之方程式如次。

$$(y-vt)^2-(E^2-1)(x-ut)^2+2E\rho(x-ut)=\rho^2$$

$$y-vt=b\left(e^{\frac{Ct-a(y-vt)}{B}}-e^{-\frac{Ct-a(y-vt)}{B}}\right)$$

$$Z-wt=0$$

或由上式消去t。則得

$$\begin{cases} (wy-vz)^2-(E^2-1)(wx-uz)^2+2Ew\rho(wx-uz)=w^2\rho^2 \\ wy-vz=bw\left(e^{\frac{Cz-a(wy-vz)}{Bw}}-e^{-\frac{Cz-a(wy-vz)}{Bw}}\right) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

若P及O兩點。在同一平面上運動。則 $W=o$, $Z=o$。其方程式如次形。

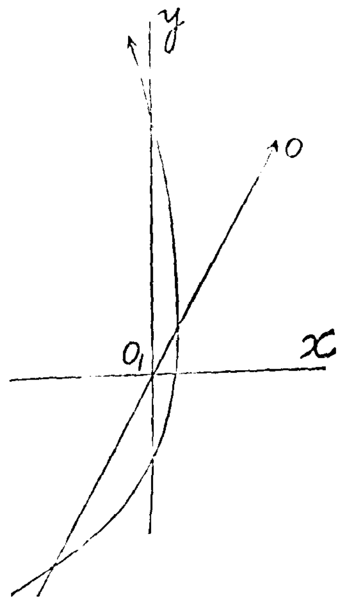
$$\begin{cases} (y-vt)^2-(E^2-1)(x-ut)^2+2E\rho(x-ut)=\rho^2 \\ y-vt=b\left(e^{\frac{Ct-a(y-vt)}{B}}-e^{-\frac{Ct-a(y-vt)}{B}}\right) \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8')$$

(8′)式第二式中y之值。非用代數的解法所能求。無寧用圖解法爲便利。今先令

$$\begin{cases} X'=y-vt \\ X'=b\left(e^{\frac{Ct-a(y-vt)}{B}}-e^{-\frac{Ct-a(y-vt)}{B}}\right) \end{cases}$$

即知上之第一式係表示直線。第二式~~爲~~與有名之懸纏線。(Catenary)式相類似。故由數學上曲綫追跡法。以求二綫之交點。決定y之值。幷由t之種種値而得無限數之v値。故(8′)式係表

示與X軸平行直線群及雙曲線交點之軌跡。亦卽係(8)式在（x,y）平面上之射影。其形略如(戊)圖。



（戊　圖）

綜以上所論。知絕對的向心運動。若力心循直線等速前進。且其力與力心距離之自乘反比。則質點之絕對軌道。可如下四種。

第一、質點對於力心爲拋物線運動。則得

$$\begin{cases}(wy-vz)^2+2w\rho(wx-uz)=w^2\rho^2\\(wy-vz)(2w\rho-wx+uz)=3Cwz\end{cases}$$

（空間軌道）

$$\begin{cases}(y-vt)^2+2\rho(x-ut)=\rho^2\\(y-vt)(2\rho-x+ut)=3Ct\end{cases}$$

（平面上軌道）

第二、質點對於力心爲橢圓運動。則得

$$\begin{cases}(1-E^2)(wx-uz)^2+(wy-vz)^2+2Ew\rho(wx-uz)=w^2\rho^2 \\ wx-uz=\dfrac{w\rho}{1-E^2}\left(\mathrm{Cos}\dfrac{2Cz+2b(wy-vz)}{AW}-E\right)\end{cases}$$ （空間軌道）

$$\begin{cases}(1-E^2)(x-ut)^2+(y-vt)^2+2E\rho(x-ut)=\rho^2 \\ x-ut=\dfrac{\rho}{1-E^2}\left(\mathrm{Cos}\dfrac{2Ct+2b(y-vt)}{A}-E\right)\end{cases}$$ （平面上軌道）

第三、質點對於力心爲圓運動。則得

$$\begin{cases}wx-uz=w\rho\,\mathrm{Cos}\,\dfrac{Cz}{w\rho^2} \\ wy-vz=w\rho\,\mathrm{Sin}\,\dfrac{Cz}{w\rho^2}\end{cases}$$ （空間軌道）

$$\begin{cases}x-ut=\rho\,\mathrm{Cos}\dfrac{Ct}{\rho^2} \\ y-vt=\rho\,\mathrm{Sin}\dfrac{Ct}{\rho^2}\end{cases}$$ （平面上軌道）

第四、質點對於力心爲雙曲綫運動。則得

$$\begin{cases} (wy-vz)^2-(E^2-1)(wx-uz)^2+2Ew\rho(wx-uz)=w^2\rho^2 \\ wy-vz=wb\left(e^{\frac{CZ-a(wy-vz)}{Bw}}-e^{-\frac{CZ-a(wy-vz)}{Bw}}\right) \end{cases}$$ （空間軌道）

$$\begin{cases} (y-vt)^2-(E^2-1)(x-ut)^2+2E\rho(x-ut)=\rho^2 \\ y-vt=b\left(e^{\frac{Ct-a(y-vt)}{B}}-e^{-\frac{Ct-a(y-vt)}{B}}\right) \end{cases}$$ （平面上軌道）

#13
101002

#3

101002