直十軍[illegible]技術複習指導

升學　參考必備

高中平面幾何復習指導

錢洪翔編

北新書局印行

1951

高中平面幾何復習指導

目　次

高中平面幾何複習指導

一　導　言

1．何謂幾何學？

〔解〕幾何學者，乃研究形狀、大小及位置之科學也。

2．幾何學分幾部？

〔解〕分初等幾何學及高等幾何學兩部。

3．何謂初等幾何學？

〔解〕凡研究點線面所合成之幾何圖形，且線祇限於直線及圓，面祇限於直線或圓所成者之學科，謂之初等幾何學。

4．何謂高等幾何學？

〔解〕凡研究任何點線面合成之幾何圖形，一般之曲線及曲面所成之幾何圖形，皆在其討論之列之學科，稱爲高等幾何學。

5．初等幾何學分幾部？

〔解〕分兩部：(1)平面幾何學　(2)立體幾何學。

6．何謂平面幾何學？

〔解〕凡所研究之幾何圖形，其圖形上諸點，均在同一平面內者，稱爲平面幾何學。

7．何謂立體幾何學？

〔解〕凡所研究之幾何圖形，圖形上諸點，不必均在同一平面內，易言之，即在許多平面內者，稱爲立體幾何學。

8．研究幾何學之方法爲何？

〔解〕(1)將緊要之定理分類熟記。本書將幾何圖形分成三角形，四邊形等五大類。五大類外，又將有特殊性質之問題，分成面

積、比例等六類問題，每類問題中，均含有上述五大類之幾何圖形，蓋此六類問題，皆係由五大類幾何圖形中分出，以便記憶。讀者宜將每類幾何圖形及每類問題中之定理，擇其緊要者熟記之，則解題時，得手應心，自無茫無頭緒之苦。(2)選擇基本問題，細研其解法及步驟，務使融會貫通，瞭然於胸中，則此後遇相類之問題，自能按步解答，極爲易易。(3)解問題時所作之圖，務求正確，因正確之圖，能將問題主要之關係看出，幫助問題之解答極多，又所畫之圖，應力求普遍，不可畫成特殊情形。例如問題中單云三角形，圖中不能畫成等邊形或等腰三角形，應畫最普遍之不等邊三角形，否則極易陷於錯誤，最宜注意。(4) 倘問題一時無法解答，可假定問題爲已解，往上逆推之，迨其主要之關係既明，則問題亦不難證明矣。

二 點，直線及角

(一) 通 論

【公理】

1. 與某量相等之諸量，彼此必等。
2. 相等之諸量，同時加某量，結果仍彼此相等。
3. 相等之諸量，同時減某量，結果仍彼此相等。
4. 不相等之諸量，同時加某量，結果仍彼此不等，本爲大量者，仍爲大量。不相等之諸量，同時加不相等之諸量，若係大量加大量，小量加小量，結果仍彼此不等，本爲大量者，仍爲大量。
5. 不相等之諸量，同時減某量，結果仍彼此不等，本爲大量者，仍爲大量。相等之諸量同時減不相等之諸量，所減爲大量者，所餘爲小量，所減爲小量者，所餘爲大量。
6. 相等諸量之倍數，彼此必等。不相等諸量之倍數，彼此必不等。

7. 相等諸量之幾分之幾，彼此必等。不相等諸量之幾分之幾，彼此必不等。

8. 全量大於其分量。

9. 全量等於諸分量之和。

【附註】本公理可用代數證明之，甚重要，須熟記之。

【定義】

(a) 點　在空間佔一位置之單位謂之點(point)。幾何上之點，無長、廣及厚，純屬理想，因若有長廣及厚，則作幾何圖形及討論時，時時須顧及此等條件，殊多窒礙也。

(b) 線　點在空間移動，行過後所留之痕跡，謂之線(line)，幾何上之線，有長而無廣及厚，純屬理想。

(c) 面　線在空間移動，行過後所留之痕跡，謂之面(face)，幾何上之面，有長及廣而無厚，純屬理想。

(d) 直線　線之處處在同方向者，謂之直線(straight line)，簡稱曰線。

(e) 曲線　線之處處改變其方面者，謂之曲線 (curve line 或 curve)。

(f) 平面　在面內，任取兩點，以一直線聯之，此線全在此面內者，謂之平面(plane surfac 或plane)。

(g) 曲面　凡面之無一部分爲平面者，謂之曲面 (curved surface)。

(二)　點與直線之關係

【定理】

1. 一點至他點，可作一直線，且僅可作一直線，故兩點可定一直線，此直線可引至無限長。

2. 兩直線有兩公共點，則此兩線必相合而成一線，故兩直線僅能相交於一點。

3. 兩相交線，可定一點。

4. 直線爲兩點間之至短線，此至短線謂之兩點間之距離(dis-

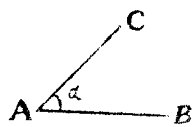
tance)。

(三)　直線與角之關係

【定義】

(A) 角　由一點,引兩直線,其所開之口,謂之平面角(plane angle),簡稱爲角(angle),恆以略號∠表示之,例如

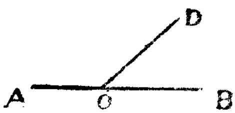
a爲自A點引兩直線AB,AC所成之角,A爲角頂,通常恆以∠BAC表示之,(即將角頂書在中間,其餘依字母之次序排



列,不然書成∠CAB,亦無不可,然甚易錯亂,最宜注意)角之大小,視其兩邊所開之口之廣狹而定,與其邊之長短無關。

(B) 鄰角　設兩角有一公共頂,及一公共邊,則此兩角互爲鄰角(adjacent angles)。例如:

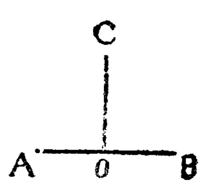
∠AOD爲∠BOD之鄰角,∠BOD爲∠AOD之鄰角。



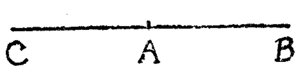
(C) 直角　設兩直線相遇,其所成之兩鄰角相等,此兩隣角,彼此皆稱爲直角(Right angle),恆以略號rt.∠表示之,例如

∠AOC及∠BOC爲兩隣角,且∠AOC=∠BOC,則∠AOC及∠BOC均爲直角。

(D) 平角　設角之兩邊,由其頂點,引在兩反對方向,恰成一直線者,謂之平角(straight angle),例如



角頂爲A。而AC及AB爲兩角邊,BC爲一直線,故∠BAC爲一平角。

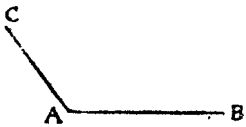


(E) 銳角　小於一直角之角,謂之銳角(acute angle),例如

∠BAC小於一直角，

則 ∠BAC爲一銳角。

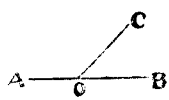
(F) 鈍角 大於一直角之角，謂之鈍角(obtuse angle)，例如∠BAC大於一直角，



則∠BAC爲一鈍角。

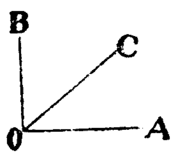
(G) 補角 設兩角之和，等於一平角，則此兩角互爲補角(Supplement of an angle 或supplement)例如：

∠AOC爲∠BOC之補角，∠BOC爲∠AOC之補角。



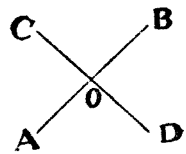
(H) 餘角 設兩角之和，等於一直角，則此兩角互爲餘角 (Complement of an angle 或 Complement)，例如：

∠AOC 爲 ∠BOC之餘角，∠BOC 爲 ∠AOC之餘角。



(I) 對頂角 設兩角有公共頂，而此角之兩邊爲彼角兩邊之引長線，則兩角謂之對頂角，例如

$\angle$AOD及$\angle$BOC爲對頂角，$\angle$AOC及$\angle$BOD爲對頂角。



(J) 角度　將一直角，分成90等分，每1等分，謂之一度(degree)，以1°表示之，每度分成60等分，每1等分謂之一分(Minute)，以1'表示之，每分又分成60等分，每1等分，謂之1秒(second)，以1''表示之。故5度16分7秒可書作5°16'7''

【定理】

5. (a)直角等於平角之半。(b)一平角等於兩直角。

6. 在一平面內，將一直線迴繞一點旋轉一週所成諸角之和，等於兩平角或四直角。

7. 在一平面內，將一直線迴繞一點旋轉半週所成諸角之和，等於一平角，或兩直角。

8. (a)凡平角均等，(b)凡直角均等。

9. (a)同角或等角之補角均等，(b)同角或等角之餘角均等。

10. (a)設兩鄰角之外邊，成一直線，則此兩角互爲補角。(b)設兩鄰角之外邊不成一直線，則此兩角不互爲補角。

11. (a)設兩鄰角互爲補角。則其兩外邊成一直線。(b)設兩鄰角不互爲補角，則其兩外邊，不成一直線。

12. 兩直線相交，其對頂角必等。

13. 設兩直線相交所成之四角中，若一角爲直角，則他三角必皆爲直角。

14. 由一點至一直綫之兩端所作兩線之和，大於在形內依同法所作兩線之和。

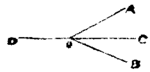
【例題】

1. 二鄰角之度數，分別爲160°及20°，則其二等分線所夾角之度數如何?

〔解〕所求之角 $=\frac{1}{2}(160^\circ+20^\circ)=90^\circ$

2. 角之二邊，與其二等分線之延線成等角。

〔解〕設∠AOB之二等分線為CO，其延線為DO，



求證　∠AOD＝∠BOD。

證　因　∠AOD為∠AOC之補角。

　　　　∠BOD為∠BOC之補角。

　　今　∠AOC＝∠BOC。

　　　　∠AOD＝∠BOD。

【習題】

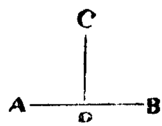
1. 二角AOB、COD公有一頂點O，邊AO與邊BO分別垂直於邊CO與邊DO，則∠AOB或等於∠COD，或為其補角。

(四) 垂　線

【定義】

(a) 垂線　兩直線相交，其所夾之角為直角時，則此兩直線互相垂直，此兩直線稱為垂線(perpendicular)，恆以⊥略號表示之，例如　AB，CD相交於D，∠BDC＝90°，

則　CD垂直於AB(即CD⊥AB)，AB垂直於CD(即AB⊥CD)，又CD為AB之垂線，AB為CD之垂線。



(b) 垂線足　垂線過他線之點，稱為垂線足，例如前圖之D為垂線足。

(c) 平分線　分一角為兩相等部分之線，稱謂角之平分線，簡稱平分線(bisector)

(d) 垂直平分線　一直線垂直於他線，同時並平分他線為兩等分時，則此直線為他直線之垂直平分線。

〔定理〕

15. 於線內一已知點，僅可作一直線，垂直於此線。

16.由線外一已知點，僅可作一直線，垂直於此線。

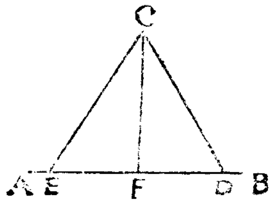
17.(a) 垂線爲由一點至一直線之至短線。

(b) 由一點至一直線之至短線爲垂線。

18.(a) 設由已知線內一點，作兩直線，截已知線於兩點，若此兩點至垂線足之距離相等，則此兩線必相等，且與垂成兩等角。

(b) 設由已知線之垂線內一點，作兩直線截已知線於兩點，若此兩直線相等，或與垂線成兩等角，則此兩點至垂線足之距離亦相等。

即



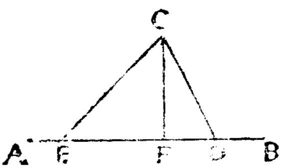
設 CF爲AB之垂線，垂線足爲F，今若 EF＝DF，則 CE＝CD，∠CEF＝∠CDF，若 CE＝CD ∠CEF＝∠CDF，則必 EF＝DF.

19.設由已知線之垂直平分線內一點，作兩直線，至此已知線之兩端，則此兩直線必等。

20.與一線兩端等距離之兩點，可定此線之垂線平分線。

21.設由已知線之垂線內一點，作兩直線，其截已知線之點，至垂線足之距離不等，則距離遠者其線較長。

即



設 CF爲AB之垂線，F爲垂線足，今若EF＞DF，

則 CE＞CD.

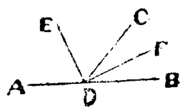
22. 由一點至一直線，僅可作相等兩直線，若作兩不等線，則線長者，其截此直線之點，與垂線足之距離必較遠。

【例題】

1. 設一直線與他直線，成二鄰角，則各角之平分線互爲垂線。

解〕

設AB與CD相交，∠ADC及∠BDC爲兩鄰角，DE 爲 ∠ADC 之平分線，DF爲∠BDC之平分線，



求證　ED及DF互爲垂線

證　∠ADE＝∠CDE　　（定義C）

∠BDF＝∠CDF

相加　∠ADE＋∠BDF＝∠CDE＋∠CDF

兩邊同加　∠EDF，　則

∠ADE＋∠BDF＋∠EDF

＝∠CDE＋∠CDF＋∠EDF

即　∠ADC＋∠BDC＝2∠EDF

但　∠ADC＋∠BDC＝2rt.∠

（補角定義〔5面〕及定理〔6面〕.）

（rt.∠爲直角之略號）

即　2rt.∠＝2∠EDF

∴∠　EDF＝rt.∠

∴ ED及DF互爲垂線（垂線定義〔7面〕）

2. 設二鄰角之平分線，互相垂直，則兩角之外邊成一直線。

〔解〕由上圖

設　∠ADC，及∠BDC爲兩已知角，DE及DF爲兩角之平分線，且DE⊥DF，

求證　AB爲一直線。

證　∠ADC＝2∠CDE

∠BDC＝2∠CDF

相加　∠ADC＋∠BDC＝2∠CDE＋2∠CDF

$=2(\angle CDE+\angle CDF)$

$=2\angle EDF=2rt.\angle$

(因$DE\perp DF$)

$\angle ADC$及$\angle BDC$為兩補角，

(補角定義)

∴ AB為一直線。

(設兩鄰角互為補角，則其兩外邊成一直線〔定理11a〕)

【習題】

1. 由已知直線外一點，向此線所引之一切線中，垂線最短，而與垂線成等角之二線相等，與垂線成大角者，大於與垂線成小角者。

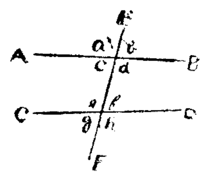
(五) 平行線

【定義】

(a) 平行線 兩直線在一平面內，其交點在無窮遠者謂之平行線(Parallels)。據此定義，平行線在近處，永不相遇。

(b) 截線 一直線截兩直線或數直線者，稱為截線(Transversal)。例如

EF為AB及CD之截線。



(c) 內角 兩直線為一直線所截，截線與兩直線所成之角，在兩直線中間者稱為內角(Interior angle)。如上圖c,d,e,f,皆為內角。

(d) 外角 兩直線為一直線所截，截線與直線所成之角，在兩直線外邊者，稱為外角(Exterior angle)。例如上圖之a,b,g,h,皆為外角。

(e) 內錯角 上圖d與e;c與f稱為內錯角(Alternate interior angle)。

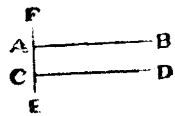
(f) 外錯角 上圖a與h,b與g,稱為外錯角(Alternate exterior angle）

(g) 同位角　上圖a與e，b與f，c與g，d與h稱爲同位角（Corresponding angle）。

【定理】

23. 設兩直線在一平面內，同垂直於一直線，則此兩線必平行。即

AB CD同時垂直EF，則AB與CD平行，通常以AB ∥ CD表示之。



24. 設一直線垂直於兩平行線中之一線，則亦必垂直於其他線。

25. 設兩直線在一平面內，各與第三直線平行，則此兩線亦必平行。

26. 設直線平行於平行線中之一線，則亦必平行於平行線中之他線。

27. 過一已知點，僅可作一直線與一已知線平行。

28. 設兩平行線爲一截線所截，其內錯角必等。

29. 設兩直線在一平面內，爲一截線所截，若其內錯角相等，則此兩線必平行。

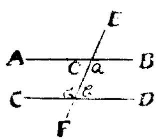
30. 設兩平行線爲一截線所截，其同位角必等。

31. 設兩直線在一平面內，爲一截線所截，若其同位角相等，則此兩線必平行。

32. 設兩平行線爲一截線所截，其一雙外錯角相等，則他雙外錯角亦必相等。

33. 設兩平行線，爲一截線所截，其兩內角在截線之一側者，互爲補角。即

$\angle a+\angle b=180°$，　$\angle c+\angle d=180°$

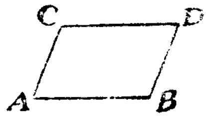


34. 設兩直線在一平面內，爲一截線所截，在截線同側之兩內角，若互爲補角，則此兩線必平行。

35. 平行線界在平行線間者必相等，所成之形爲平行四邊形。

AB ∥ CD，　AC ∥ BD，

則　AB＝CD，　AC＝BD。

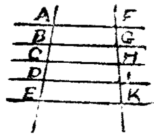


36. 設一線為數平行線所截，其所截之線分若相等，則他線為此數平行線所截者，其所截之線亦必相等。

設數平行線AF，BG，CH，DI，EK為直線AE及FK所截

且　AB＝BC＝CD＝DE

則　FG＝GH＝HI＝IK。



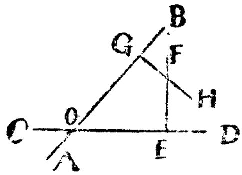
【例題】

1. 與相交二直線分別垂直之二直線，亦必相交。

〔解〕

設　AB，CD相交於O，GH⊥AB，EF⊥CD，

求證　GH與EF相交。



證　設　GH與EF不相交而平行，

即　GH ∥ EF，

則必　GH⊥AB，

EF⊥AB，　（定理24）

但　EF⊥CD，

則必　AB ∥ CD，　（定理23）

但　AB與CD相交而不平行，

則　GH亦不與EF平行，　即

GH與EF相交。

〔習題〕

1. 試述平行線之定義及其公理

2. 試解釋下列各名詞

（1）平行線　（b）平面　（c）直線

三 三角形

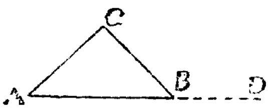
(一) 一般三角形

【定義】

(a) 三角形 三直線所圍成之平面形，稱爲三角形(triangle)，恆以略號△表示之，此三直線稱爲三角形之邊。

(b) 底邊 三角形可設想立於一邊之上，此邊稱爲三角形之底邊。

(c) 延長線 可將三角形任一邊延長之，成一直線，稱爲該邊之延長線，恆以虛線表示之。 例如



BD爲△ABC底邊AB之延長線。

(d) 角 三角形各兩邊所夾之角，稱爲三角形之角。

(e) 頂角 三角形之角對其底者，稱爲頂角，其角之頂，稱爲三角形之頂。

(f) 高 由三角形之頂，至其底或底之延長線之垂線，稱爲三角形之高，或稱三角形之頂垂線。

(g) 中線 由三角形之頂至其對邊中點之線，稱爲三角形之中線。

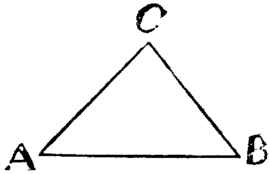
(h) 角之平分線 三角形各角之平分線，稱爲三角形角之平分線。

(i) 邊之平分線 三角形各邊之平分線，稱爲三角形邊之平分線，三角形各邊平分且垂直之線，稱爲三角形邊之垂直平分線。

(j) 周界 三角形三邊之和，稱爲三角形之周界。

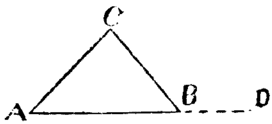
(k) 鄰角 三角形內有一公共邊之兩角，稱爲三角形之鄰角。

例如



∠A及∠B有公共邊AB，故爲鄰角，同樣∠A及∠C，∠C及∠B亦爲鄰角。

(l) 外角　三角形一邊及他邊引長線間之角，稱爲外角，例如

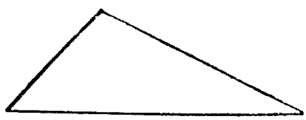


∠CBD爲△ABC之外角。

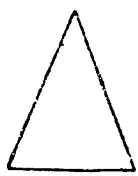
(m) 內角　三角形外角之鄰角，稱爲內角，例如上圖之∠ABC爲內角。

(n) 內對兩角　三角形內除內角外之兩角，稱爲內對兩角，如上圖之　∠BAC　及∠ACB爲內對兩角。

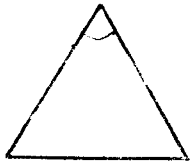
(o) 不等邊三角形　三角形之三邊各不相等者，謂之不等邊三角形。



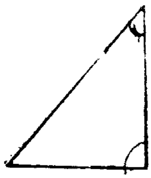
(p) 等腰三角形　三角形有兩邊相等者，謂之等腰三角形。或稱二等邊三角形。



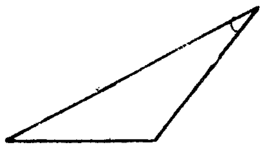
(q) 等邊三角形　三角形之三邊俱等者，謂之等邊三角形。



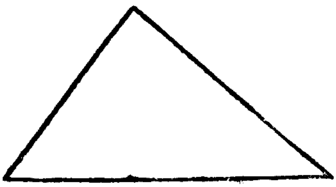
（r） 直角三角形 三角形有一角爲直角者，稱爲直角三角形。



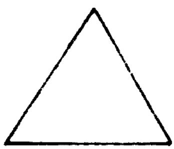
（s） 鈍角三角形 三角形有一角爲鈍角者，稱爲鈍角三角形。



（t） 銳角三角形 三角形之三角俱爲銳角者，稱爲銳角三角形。



（u） 等角三角形 三角形之三角俱等者，稱爲等角三角形。



（v） 相當角及相當邊 設兩三角形之角彼此各相等，則其等角稱爲相當角，其對等角之邊，稱爲相當邊。

【定理】

37. 設兩三角形，有兩角及其夾邊，彼此各相等，則此兩形必等。即

$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，且$AB=DE$，則$\triangle ABC=\triangle DEF$.

38. 設兩三角形有兩邊及其夾角，彼此相等，則此兩形必等。

39. 設兩三角形有兩相當角及一相當邊，彼此各相等，則此兩形必等。

40. 設兩三角形之邊，彼此各相等，則此兩形必等。

41. (a) 兩相等三角形之相當邊相等；(b)兩相等三角形之相當角相等。

42. 設兩三角形有兩邊彼此各相等，但甲形之夾角，大於乙形之夾角，則甲形之第三邊，亦必大於乙形之第三邊。

43. 設兩三角形，有兩邊彼此各相等，但甲形之第三邊，大於乙形之第三邊，則甲形之夾角，必大於乙形之夾角。

44. (a) 設三角形之兩邊不等，則其對不等邊之兩角亦不等，且大角必對大邊。(b)設三角形之兩邊相等，則其對等邊之兩角亦相等。

45. (a) 設三角形之兩角不等，則其對不等角之兩邊亦不等，且大邊必對大角。(b)設三角形之兩角相等，則其對等角之兩邊亦相等。

46. 三角形內三角之和，等於兩直角。

47. 三角形之一外角，等於內對兩角之和。

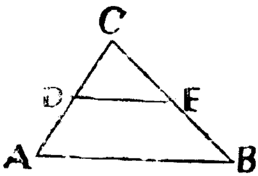
48. 三角形內任兩角之和，小於兩直角。

49. (a) 三角形僅能有一直角或一鈍角。(b)兩三角形有兩角

彼此相等，則第三角亦必彼此相等。

50. 三角形兩邊之和，大於他邊，其差小於他邊。

51. 設一線與一三角形之底平行，且又平分其一邊，則亦平分其他邊，即

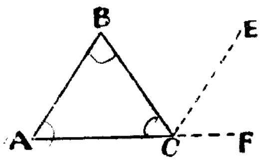


DE ∥ AB，且AD＝CD，則BE＝CE

52. 聯三角形兩邊中點之線，必與第三邊並行，且等於第三邊之半。

【證明】

定理46 ——三角形三角之和，等於兩直角。



設∠ABC，∠BAC，∠ACB爲三角形ABC之三角，

求證 ∠ABC＋∠BAC＋ACB＝2rt.∠。

證 作CE ∥ AB，並引長AC至F，

則 ∠ECF＋∠BCE＋∠ACB＝2rt.∠。 (定理7)

但 ∠BAC＝∠ECF，

(同位角相等)

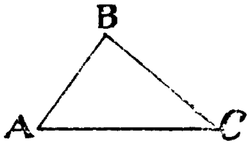
∠ABC＝∠BCE

(內錯角相等)

以 ∠BAC，∠ABC代∠ECF及∠BCE，

則 ∠BAC＋∠ABC＋∠ACB＝2rt.∠。

定理50 ——三角形兩邊之和，大於他邊，其差小於他邊。



求證 AC+BC>AB,

AC−BC<AB.

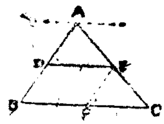
證 AC+BC>AB (定理4)

(直線爲兩點間之至短線)

不等式之兩邊各減BC(公理5)

AC>AB−BC.

定理51——設一線與一三角形之底平行,且又平分其一邊,則亦平分其他邊。



設 DE∥BC,且平分AB,

求證 DE亦平分AC.

證 過A作一線平行DE,

則此線亦必平行BC. (定理26)

此三平行線於截線上截兩等分,

則亦必於截線AC上,截兩等分。

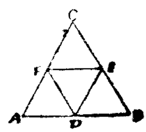
(設一線爲數平行線所截,其所截之線分若相等,則他線爲此數平行線所截者,其所截之線亦必相等)。

即線DE亦平分於BC。

【例題】

1. 連結三角形各邊中點所得之三線段,分原三角形爲四個相等三角形,試證明之。

〔解〕



設ABC爲三角形,而D,E,F爲各邊之中點,

求證。 △ADF=△DEF=△BDE

$=\triangle CEF$.

證 因 $AD=EF$

(聯三角形兩邊中點之線，必與第三邊平行，且等於第三邊之半。)

同樣 $ED=AF$.

FD爲公共線

$\therefore$ $\triangle ADF=\triangle DEF$

同樣可證，$\triangle BDE=\triangle DEF$

$\triangle CEF=\triangle DEF$.

$\therefore$ $\triangle ADF=\triangle CEF=\triangle BDE=\triangle CEF$.

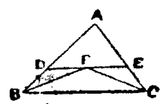
2. 於三角形ABC中，過∠B及∠C之平分角線之交點F，作DE與底線BC平行，截三角形之兩邊於D,E二點，

證 $DE=DB+EC$.

〔解〕

設∠B，∠C之平分角線相交於F．過F點

作$DE \parallel BC$



求證 $DE=DB+EC$

證 $DE \parallel BC$

$\therefore$ $\angle DFB=\angle FBC$

但 $\angle FBC=\angle DBF$

$\therefore$ $\angle DFB=\angle DBF$

$\triangle FDB$爲等腰，$DF=DB$，

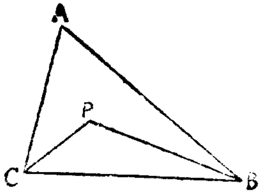
同樣證明 $EF=EC$

故 $DF+EF=DB+EC$

即 $DE=DB+EC$

3. 設ABC爲一任意三角形，$AB>AC$，B角之二等分線與C角之二等分線會於P，求證$BP>CP$。

〔解〕



設 $\triangle ABC$內，$AB>AC$

BP等分$\angle B$，CP等分$\angle C$，兩線相交於P，

求證 $BP>CP$

證： 在$\triangle ABC$內，$AB>AC$

$\therefore$ $\angle C>\angle B$

（三角形內大邊所對之角較大）

$\therefore$ $\frac{1}{2}\angle C>\frac{1}{2}\angle B$

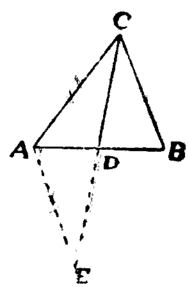
$\therefore$ 在$\triangle BCP$內 $\angle BCP>\angle CBP$

$\therefore$ $BP>CP$

（三角形內大角所對之邊較大）

4. 求證三角形一角至對邊之中線小於他二邊之和之半

〔解〕



設CD為$\triangle ABC$之中線，

求證$CD<\frac{1}{2}(AC+BC)$

證 延長CD至E，使$DE=CD$，

聯AE，

在 $\triangle ADE$及$\triangle BCD$內

$AD=BD$，

$CD=DE$

$\angle ADE=\angle BDC$

$\therefore \triangle ADE = \triangle BCD$。

$\therefore BC = AE$.

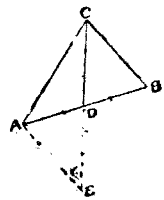
但 $CE < AC + AE$

卽 $2CD < AC + BC$

$$\therefore CD < \frac{1}{2}(AC + BC)$$

5. 三角形之中線與大邊，所夾之角恆較其小邊所夾之角爲小，試證之。

〔解〕



設 $\triangle ABC$中CD爲中線，且$AC > CB$，

求證 $\angle ACD < \angle BCD$

證 延長CD至E，使$DE = CD$，

在 $\triangle BCD$及$\triangle ADE$中

$CD = DE$

$BD = AD$

$\angle BDC = \angle ADE$

$\therefore$ $\triangle BCD = \triangle ADE$

$\therefore$ $\angle BCD = \angle AED$

$BC = AE$。

故在 $\triangle ACE$中

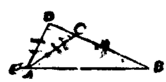
$AE < AC$

$\angle ACE < \angle AEC$

代入卽 $\angle ACD < \angle BCD$。

6. 設$AD = AC = CB$ 且DB及EB爲直線，試證$\angle EAD = 3\angle B$

〔解〕



證 $\angle EAD = \angle ADB + \angle B$。

但 $\angle ADC = \angle ACD$。

$\therefore$ $\angle EAD = \angle ACD + \angle B$。

而 $\angle ACD = \angle BAC + \angle B$。

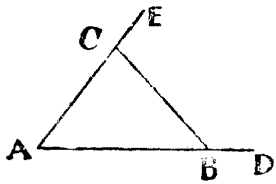
今 $\angle BAC=\angle B$

則 $\angle ACD=\angle B+\angle B=2\angle B$

$\therefore$ $\angle EAD=2\angle B+\angle B=3\angle B$.

7. 三角形之任兩外角和，大於二直角。

〔解〕



設$\angle BCE$及$\angle CBD$爲$\triangle ABC$之兩外角

求證 $\angle BCE+\angle CBD>2rt.\angle$。

證 $\angle BCE=\angle BAC+\angle ABC$

$\angle CBD=\angle ACB+\angle BAC$ （定理47）

（三角形之外角，等於內對兩角之和）

$\angle BCE+\angle CBD=2\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB$，

但 $\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB$

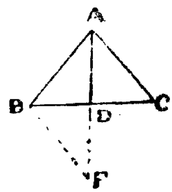
$=2rt.\angle$ （定理46）

（三角形內三角之和等於兩直角）

$\therefore$ $\angle BCE+\angle CBD>2rt.\angle$.

8. 三角形內一點至各角頂之聯線之和，小於周界，大於周界之半。

〔解〕



設AD爲$\triangle ABC$之中線。

求證 $AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$

證 延長AD至F使$AD=DF$，聯BF

在$\triangle BDF$及$\triangle ACD$內

$\angle BDF=\angle ADC$〔定理12（6面）〕

（對頂角相等）。

$BD = DC$

∴　$\triangle BDF = \triangle ACD$　(定理38)

$BF = AC$　(定理41)

但　$AF < AB + BF$　(定理50)

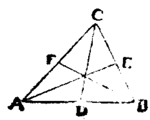
代入　$2AD < AB + AC$

∴　$AD < \frac{1}{2}(AB + AC)$

9. 三角形三個內角等分線交于一點。

〔解〕

設AE,BF,CD爲△ABC之三分角線。



求證　AE,BF及CD相交於一點。

證　設AE及BF相交於O,

則O在AE內,距AB及AC等遠,

同時O在BF內,距AB及AC等遠,

則O距AC及BC亦等遠。

故O必在∠ACB之分角線CD內。

卽　AE,BF及CD必相交於一點O。

【習題】

1. 三角形三高之和,小於三邊之和。

2. 三角形三邊之垂直平分線,必相交於一點。

(二)　直角三角形

【定義】

(a) 弦　直角三角形內,其對直角之邊,稱爲弦。

(b) 腰　直角三角形內,除弦外之兩邊,稱爲腰。

【定理】

53. 設兩直角三角形內,有一腰及一弦,彼此相等,則兩形必等。

54. 設兩直角三角形內,有兩腰彼此相等,則兩形必等。

55. 設兩直角三角形內,有一弦及一銳角,彼此相等,則兩形必等。

56. 設兩直角三角形內,有一腰及一相當銳角彼此相等,則兩形

必等。

57. 設兩直角三角形，有一銳角彼此相等，則他銳角亦相等。

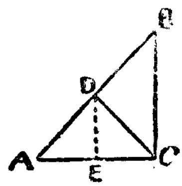
58. (a) 直角三角形內，其兩銳角之和，等於一直角，即90°，(b) 兩直角三角形，若有一銳角相等，則他銳角亦必相等。

59. 直角三角形兩腰之平方和，等於其弦之平方。

60. 直角三角形之一腰之平方，等於弦及其他腰之平方差。

【例題】

1. 試證直角三角形弦之中點，距三頂點等遠。



〔解〕設ABC為直角三角形，D為AB之中點

試證 $AD=BD=CD$

證 作$DE\perp AC$

則$DE\parallel BC$

(若兩直線同垂直於一直線，則此兩線必平行)

$\therefore$ DE平分AC。

(設一線與一三角形之底平行，且又平分其一邊，則亦必平分其他邊。)

即 $AE=CE$

$\therefore$ $\triangle ADE=\triangle DEC$。 (定理54)

$\therefore$ $AD=CD$

但 $AD=BD$

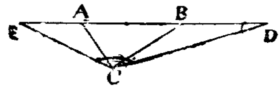
則 $AD=BD=CD$。

2. 將直角三角形ABC之斜邊AB兩端各引長至D與E，使$BD=BC$，$AE=AC$。

求證(a) $\angle DCE=135^\circ$

(b) $\angle DBC+\angle EAC=270^\circ$

〔解〕



設ABC爲直角三角形，AE，BD爲AB之引長線，

且 BD = BC，AE = AC

求證(a) $\angle DCE = 135^\circ$

(b) $\angle DBC + \angle EAC = 270^\circ$

證 (a) $\angle ABC = \angle BDC + \angle BCD$。

$\angle BAC = \angle AEC + \angle ACE$。

(三角形之外角等於內對角之和)

但 $\angle BDC = BCD$

$\angle AEC = \angle ACE$。 (定理44，b)

∴ $\angle ABC + \angle BAC$

$= 2\angle BCD + 2\angle ACE = 90^\circ$ (定理58)

(直角三角形兩銳角之和，必爲90°)

∴ $\angle BCD + \angle ACE = \dfrac{90^\circ}{2}$

但 $\angle ECD = \angle ACB + \angle BCD + \angle ACE$

$= 90^\circ + \dfrac{90^\circ}{2} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$

(b) $\angle EAC + \angle CAB = 180^\circ$ (定理10，a)

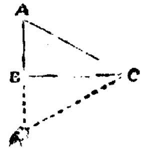
$\angle ABC + \angle DBC = 180^\circ$

相加$\angle EAC + \angle DBC + \angle CAB + \angle ABC = 360^\circ$

但 $\angle CAB + \angle ABC = 90^\circ$

∴ $\angle EAC + \angle DBC = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$

3. 設直角三角形之一銳角，等於他銳角之二倍，則其弦等於最小邊之二倍。



設　直角三角形ABC之銳角BAC等於銳角BCA之二倍，

求證　AC＝2AB

證　延長AB至A'，使BA'＝AB。

聯結A'C，

則　△ABC＝A'BC.

∴　∠BAC＝∠BA'C

∠BCA＝∠BCA'

故　△AA'C之三角皆等於∠BCA之二倍.

∴　∠A'AC為等角三角形，即等邊三角形，

∴　AC＝AA'＝2AB.

但因＜BAC＝2BCA時

AB＜BC.

AC大於其他二邊，

則AB為最小邊，

∴　AC＝2AB.

【習題】

1. 直角三角形之直角頂，至弦之中點所作之直線，分此形為兩等腰三角形。

2. 直角三角形之直角頂，至弦之中線，必分直角成與原三角形相等之兩銳角。

3. 直角三角形之斜邊，大於他邊。

(四) 等腰三角形

【定義】

(a) 腰 等腰三角形相等之兩邊，稱爲腰。

【定理】

61. 等腰三角形內，其對等邊之兩角必等。

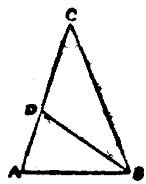
62. 設三角形有兩角相等，則其對等角之兩邊必等，此形卽爲等腰三角形。

63. 由等腰三角形之頂，至其底之垂線，必平分其底，且平分其頂角。

【例題】

1. 若已知等腰三角形之底角等於頂角之二倍。則引一底角之平分線必分原形爲兩個等腰三角形。

〔解〕



設 △ABC爲等腰三角形，$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle ABC$

BD爲∠ABC之平分線。

求證 △BCD 及△ ABD爲等腰三角形

證 $\angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC$

$\therefore\ \angle ACB = \angle CBD$

$\therefore\ BD = CD$

△BCD爲一等腰三角形。

$\angle CDB = \angle ACB + \angle CBD = 2\angle ACB$

(三角形一外角，等於內對二角之和)

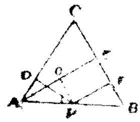
$\therefore\ \angle BAC = \angle ADB.$

AB＝BD

∴　△ABD為一等腰三角形。

2. 由等腰三角形之底內一點，至其兩腰之垂線之和為一定，且等於其一腰上之頂垂線。

〔解〕



設　△ABC為等腰三角形，由底邊AB任一點P

作　PD⊥AC　　PF⊥BC

又　AE為BC之頂垂線為一常數

求證：　PD＋PF＝AE

證：　由　P作PO，令PO ∥ BC

又　OE ∥ PF

（兩直線同垂直於一直線必平行）

∴　□POEF為平行四邊形

∴　OE＝PF

在　Rt•△ADP，及Rt•△AOP中

AP＝AP

∠OPA＝∠CBA

（同位角相等）

∠CBA＝∠DAP

∴　∠OPA＝∠DAP

∴　△ADP＝△AOP

（直三角形有一角一邊相等）

∴　DP＝AO

∴　DP＋PF＝AO＋OE

∴　DP＋PF＝AE

3. 從二等邊三角形ABC之底邊BC兩端，引二直線BD，CE至對邊，此二線相交於O，設∠DBC＝∠ECB，求證

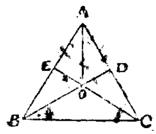
AO為∠BAC之二等分線

BD＝CE

〔解〕

設△ABC爲等腰三角形，AB＝AC.

CE及BD相交於O，且∠CBD＝∠BCE



求證 ∠EAO＝∠DAO.

BD＝CE

證 ∠ABC＝∠ACB

（等腰三角形，對等邊之角必等）

今 ∠CBD＝∠BCE.

∴ ∠ABD＝∠ACE.

即 BD及CE爲∠ABC及△ACB之兩分角線，

∴ AO亦必爲∠BAC之分角線。

（三角形之三分角線，必相遇於一點）

∴ ∠EAO＝∠DAO

又在△CDO及△BOE內

∠BOE＝∠COD.

（對頂角相等）

已知 ∠ABD＝∠ACE,

∴ ∠BEC＝∠BDC.

在 △BCE及△BCD內

BC爲公共邊

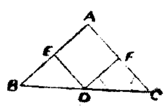
∴ △BCE＝△BCD

（設兩三角形有兩相當角及一相當邊，彼此各相等，則此兩形必等）

∴ BD＝CE

4. 證 自二等邊三角形之底邊之中點作二垂直線於二等邊上，則此二垂直線相等。

〔解〕設 △ABC爲二等邊三角形，D爲底邊之中點。



於D作DF⊥AC，DE⊥AB

求證 DF＝DE

證： 在直角三角形CDF，BDE內

$\angle C=\angle B$，$BD=CD$

（因爲等腰三角形）

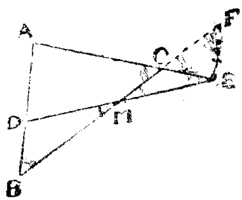
又 $BD=CD$

∴ $\triangle CDF\cong\triangle BDE$

∴ $DE=DF$

5. 設自二等邊三角形 ABC 之端點截取一邊上及他邊之延長線上二等段BD及CE，試證DE綫爲底邊所平分。

〔解〕



求證 $DM=ME$.

證 作 $EF\parallel AB$，延長BC，與EF相遇於F，

$\angle EFM=\angle DBM$

（內錯角相等）

$\angle DBM=\angle ACM$ （題設）

但 $\angle EFM=\angle ACM=\angle FCE$.

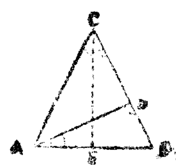
∴ $EF=CE=BD$.

$\triangle BDM\cong\triangle EFM$

∴ $DM=EM$.

6. 從等腰三角形底邊的一端，引其對邊之垂線，證明此垂線與底邊所成之角等於頂角之半。

〔解〕



設AD爲由等腰三角形 ABC 之底邊一端A至對邊BC所引之垂線。

求證 $\angle BAD=\frac{1}{2}\angle ACB$，

證 由 C作$CE \perp AB$，

則$\angle ACE = \angle BCE$ (定理63)

(二等邊三角形之頂垂線，必平分其頂角。)

則 $\angle BCE = \frac{1}{2}\angle ACB$

在 rt.$\triangle ABD$及rt.$\triangle BCE$內，

$\angle ABC$爲公共角，

$\therefore$ $\angle BAD = \angle BCE$ (定理57)

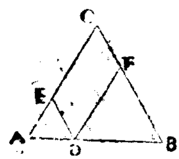
(設兩直角三角形，有一銳角彼此相等，則他銳角亦相等)

$\therefore$ $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle ACB$。

7. 在等腰三角形ABC中，過底邊AB上的一點D，作兩腰的平行線，各遇兩腰於E及F，求證$DF + DE = AC$。

〔解〕

求證$DF + DE = AC$。



證 因$DE \parallel CF$，$CE \parallel DF$

$\therefore$ DFCE爲一平行四邊形

$DF = CE$ (定理35)

$\angle DBF = \angle ADE$ (定理30)

(同位角相等)

$\angle DAE = \angle DBF$ (定理61)

$\therefore$ $\angle ADE = \angle DAE$

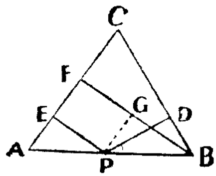
$DE = AE$

(在同三角形內，等角必對等邊)

$\therefore$ $DF + DE = CE + AE = AC$。

8. 在等腰三角形中，從底邊上任意一點，作兩腰的垂線，其和等于一腰上的高。

〔解〕



設△ABC為等腰三角形，P為底邊AB內任一點，PD，PE為由P至兩腰之垂線，BF為AC之高，

求證：PD＋PE＝BF。

證：　作FG⊥BF

EP ∥ FG

EF ∥ PG

（兩直線同垂直於一直線，則此兩線必平行）

∴　PE＝FG　　（定理35）

又在　rt.∠BGP及rt.∠BDP內

∠EAP＝∠GPB

（內位角相等）

∠EAP＝∠DBP

（等邊三角形兩底角相等）

∴　∠GPB＝∠DBP

BP為公共邊，

∴　△BGP＝△BDP

PD＝BG

加之　PD＋PE＝BG＋FG

∴　PD＋PE＝BF。

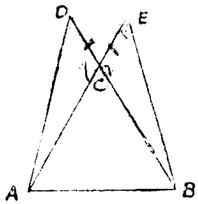
【習題】

1. 等腰三角形中兩底角之平分線相等。
2. 等腰三角形底邊之兩端至兩腰之中線必等。
3. 設由等腰三角形之底之兩端，至其對邊，作兩垂線，則聯此垂線足之線，必與其底平行。

［提示］　應用定理30。

4. 設引長等腰三角形之兩腰過其頂，其兩引長線分相等，則此兩線與其底之兩端之距離必等。

〔提示〕



求證 AD＝BE

（四） 等邊三角形

【定理】

64．(a) 等邊三角形，其角必等，每角等於60° (b)等角三邊形，其邊必等。

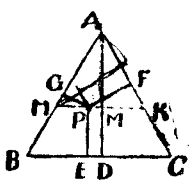
65．等邊三角形之三高相等。

66．等邊三角形之三中線相等.

【例題】

1． 由等邊三角形內一點，至其三邊之垂線之和為一定；且等於其頂垂線。

〔解〕



設△ABC為一等邊三角形，AD為其頂垂線，P為形內任點．PE，PF，PG為三垂線。

求證 $PE+PF+PG=AD$.

證 過P作$HK \parallel BC$，而遇AD於M，

$\angle AHK=\angle ABC=60°$

$\angle AKH=\angle ACB=60°$ （定理30，及定理64）

$\therefore$　$\triangle AHK$為一等邊三角形。　（定理64）

但　$PF+PG=AM$

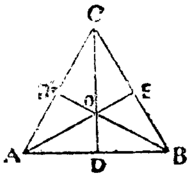
（等腰三角形例題7）

$PE=MD$　（定理35）

$\therefore$　$PE+PF+PG=AM+MD=AD$.

2. 由等邊三角形之頂點，向對邊所引之三垂線相等。

〔解〕



設$\triangle ABC$為等邊三角形，AE，BF，CD為三垂線

求證　$AE=BF=CD$.

證　在rt.$\triangle ABF$及rt.$\triangle ACD$內，

$AB=AC$，　$\angle BAC$公共，

則$\triangle ABF=\triangle ACD$。

$\therefore CD=BF$，

同様可證　$CD=AE$.

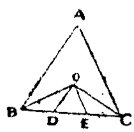
$\therefore$　$AE=BF=CD$。

【習題】

1. 於等邊之各邊上，順次取距其一端等距離之一點，聯結之，則得等邊三角形。

2. 由等邊三角形兩底角之二等分線之交點，所引平行於二邊之二直線，將底三等分。

〔提示〕



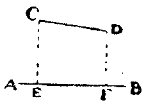
$\angle DOB=\angle ABO=\angle DBO$

$BD=DO$,同樣$EC=EO$。

(五) 總 例 題

【定義】

射影 一線在第二線之射影,爲由第一線之兩端,至第二線所作兩垂線間第二線之線分。 例如:

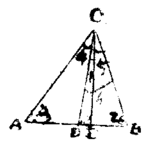


EF爲CD在AB上之射影。

【例題】

1. 三角形一角之平分線,與由此角頂向對邊所引之垂線,所成之角,等於他二角之差之二分之一。

設 $CE\perp AB$,CD爲$\angle C$之平分線,



求證 $\angle DCE=\frac{1}{2}(\angle B-\angle A)$

證 $\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)$

(三角形之內角之和,等於二直角)

但 $\angle C=\angle ACD+\angle BCD$(題設)

∴ $\angle ACD=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A-\angle B)$

又在 $\triangle ACD$內

$\angle A+\angle ACD+\angle DCE=90^\circ$

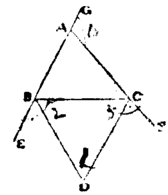
卽 $\angle ACD=90^\circ-\angle A-\angle DCE$

$$90^\circ-\frac{1}{2}\angle A-\frac{1}{2}\angle B=90^\circ-\angle A-\angle DCE$$

$$\angle DCE=\frac{1}{2}\angle B-\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}(\angle B-\angle A)$$

2. ABC爲一任意三角形,其B,C二外角之二等分線所成之角D,等於A之外角之半,試證之。

〔解〕



設$\angle CAG$，$\angle CBE$及$\angle BCF$為$\triangle ABC$之三外角，BD及CD為$\angle CBE$及$\angle BCF$之平分線，相交於D，

求證　$\angle D=\frac{1}{2}\angle CAG$。

證　$\angle CBE=\angle A+\angle C$，

$\angle BCF=\angle A+\angle B$。

（三角形之一外角，等於其內對兩角之和），

相加 $<CBE+\angle BCE=2A+\angle B+\angle C$

但　$\angle CBD+\angle BCD+\angle D=2rt\angle s$，

（三角形三內角之和，等於二直角）

代入　$\angle CBE+\angle BCF=\angle A+2rt\angle s$，

$\frac{1}{2}(\angle CBE+\angle BCE)=\frac{1}{2}\angle A+rt\angle$

即　$\angle CBD+\angle BCD=\frac{1}{2}\angle A+rt\angle$（題設）

因　$\angle D=2rt\angle s-(\angle CBD+\angle BCD)$

$=2rt\angle s-(\frac{1}{2}\angle A+rt\angle)$

$=rt\angle-\frac{1}{2}\angle A$.

又　$\angle CAG=2rt\angle s-\angle A$

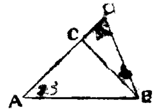
（設兩鄰角之外邊成一直線，則此兩角互為補角）

$\frac{1}{2}\angle CAG=rt\angle-\frac{1}{2}\angle A$.

$\therefore\ \angle D=\frac{1}{2}\angle CAG$.

3．若於等腰三角形$\triangle ABC$之腰CA延長線取一點D，令AD等於底AB，則$\angle C=4\angle D-180°$

［解］



求證 $\angle C=4\angle D-180°$

證 $\angle A=\angle ABC$

$\angle C=180°-(\angle A+\angle ABC)$

$=180°-2\angle A.$

（三角形三內角之和，等於兩直角）

又 $\angle D=\angle ABD$

$\angle A=180°-(\angle D+\angle ABD)$

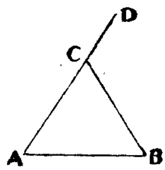
$=180°-2\angle D$

代入 $\angle C=180°-2(180°-2\angle D)$

$=180°-360°+4\angle D$

$=4\angle D-180°$

4. 試證二等邊三角形之底角，等於頂角之外角之半。



證 $\angle BCD$為二等邊三角形頂角之外角，

$\angle A$及$\angle B$為二底角.

求證 $\angle A=\frac{1}{2}\angle BCD.$

證 $\angle BCD=\angle A+\angle B.$

（三角形之外角，等於內對兩角之和）

但 $\angle A=\angle B.$

（二等邊三角形兩底角必等）

代入 $\angle BCD=\angle A+\angle A=2\angle A$

$\therefore \quad \angle A = \frac{1}{2}\angle BCD$.

5. 三角形之三個高，相交於一點。

設AD，BE，CF爲△ABC之三高，

求證 AD，BE，CF相交於一點O，

證 過 A作B'C'∥BC

過 B作A'C'∥AC

過 C作A'B'∥AB

三線相交於A'，B'，C'.

則AD⊥B'C'，BE⊥A'C'，CF⊥A'B'

(一線垂直平行線之一線，必垂直於他線)

又 ACBC'，ABCB'爲兩平行四邊形，

AC'＝BC，AB'＝BC，

∴ A爲B'C'之中點，

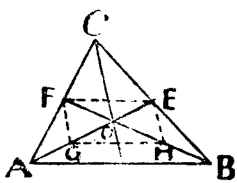
同樣可證B爲A'C'之中點，

C爲A'B'之中點，

∴ AD，BE，CF爲△A'B'C'之三垂直平分線，

∴ AD，BE，CF必相交於一點。

6. 三角形之三中線，必相遇於一點，此點與各頂之距離爲由各頂至其對邊中點之距離之三分之二。



設AE，CD，BF爲△ABC之三中線

求證 AE，CD，BF相交於O。

證 設AE，BF相交於O，

連AO之中點G及BO之中點H作GH，又作FG，EH，EF諸線，

$\therefore$ GH ∥ AB， $GH=\frac{1}{2}AB$。

FE ∥ AB， $FE=\frac{1}{2}AB$。 （定理66）

（聯三角形兩邊中點之綫，必與第三邊平行，且等於第三邊之半）

$\therefore$ GH ∥ FE GH＝FE

$\therefore$ FEHG爲一▱。 （平行四邊形定理）

GO＝EO FO＝HO

（平行四邊形之兩對角綫必彼此平分）

（平行四邊形定理）

$\therefore$ AG＝GO＝EO

BH＝HO＝FO。

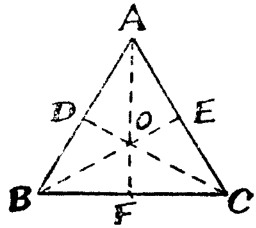
卽$BO=\frac{2}{3}BF$， $AO=\frac{2}{3}AE$。

卽三角形之二中綫必相交於中綫距角頂$\frac{2}{3}$處，則中綫AE與中綫CD亦必相交於中綫距角頂$\frac{2}{3}$處，卽AO。

故AE，CD，BF，必相交於O，且爲各頂至其對邊中點之距離之三分之二。

7. 三角形各邊之垂直二等分綫同交於一點，且此點至三頂點之距離亦等。

〔解〕



設 AF，BE，CD 爲三角形之垂直二等分綫，相交於O，

求證 $OA=OB=OC$

證 在△OEA, OCE內

$\angle OEA=\angle OEC=rt.\angle$

$AE=EC \quad OE=OE$

$\therefore \quad \triangle OEA=\triangle OEC$

(兩直角三角形有兩腰相等，則兩形全等)

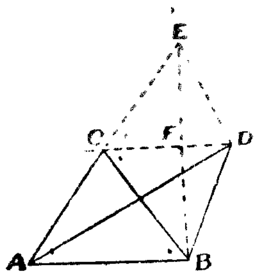
$\therefore \quad OA=OB$

同樣可證明 $OB=OC$

$\therefore \quad OA=OB=OC$

8. 同底同高之諸三角形，周最小者為二等邊三角形，試證明之。

〔解〕



設 △ABC為二等邊三角形，

△ABD為與△ABC同底同高之任意三角形，

求證 $AB+BC+AC<AB+AD+BD$.

證 連 CD,

則 $CD \parallel AB$(題設)

作 $BE\perp AB$

延長 AC於BE相交於E，與 CD 相交於F，連E D，則

$EB\perp CD$,

(一直線垂直於平行線之一線，必垂直於他線)

$\angle DCE=\angle BAC$

(同位角相等)

$\angle BCD = \angle ABC$

(內錯角相等)

但 $\angle BAC = \angle ABC$.

(二等邊三角形，對等邊之角必等)

$\therefore$ $\angle DCE = \angle BCD$

在rt.$\triangle BCF$及rt.$\triangle CEF$內

CF爲公共腰

$\therefore$ rt.$\triangle BCF =$ rt.$\triangle CEF$

$\therefore$ $BF = EF$

$\therefore$ rt.$\triangle BDF =$ rt.$\triangle DEF$

(兩直角三角形有兩腰相等，則兩形必等)

$\therefore$ $BD = DE$

在$\triangle ADE$內

$AE < AD + DE$

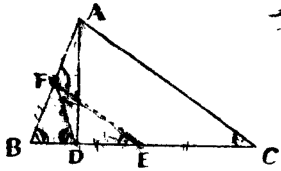
$AC + CE < AD + DE$

$AC + BC < AD + BD$

$AB + AC + BC < AB + AD + BD$

5 三角形ABC中$\angle B = 2\angle C$，E爲BC中點，由A引BC之垂線AD，則$DE = \frac{1}{2}AB$。

〔解〕



設 $\angle B = 2\angle C$，E爲BC之中點，AD爲由A至BC之垂線。

求證 $DE = \frac{1}{2}AB$。

證 F爲AB之中點，聯DF，EF，

$\angle BDF = \angle B = 2\angle C$

(由直角三角形之直角頂至弦之中線，必分直角成與原三角形相等之兩銳角。)

$BF = DF = \frac{1}{2}AB$

又 $EF \parallel AC$

(聯三角形兩邊中點之線，必與第三邊平行)

$\therefore \angle DEF = \angle C$

(同位角相等。)

但 $\angle BDF = \angle DFE + \angle DEF$

(三角形一外角等於內對兩角之和)

則 $\angle DFE = \angle BDF - \angle DEF$

$= 2\angle C - \angle C = \angle C$

$\angle DFE = \angle DEF$

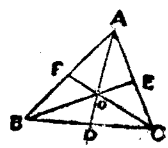
$DE = DF$

但 $DF = \frac{1}{2}AB$,

$DE = \frac{1}{2}AB$。

10. 三角形三中線之和，小於三角形之周界，而大於周界之四分之三。

〔解〕



設 AD,BE,CF為△ABC之三中線，

求證 $AD + BE + CF < AB + BC + AC$,

$AD + BE + CF > \frac{3}{4}(AB + BC + AC)$。

證 因 $AD < \frac{1}{2}(AB + AC)$

(一般三角形例題4)

$BE < \frac{1}{2}(AB + BC)$

$$CF < \frac{1}{2}(BC+AC)$$

故 $AD+BE+CF<AB+BC+AC$,

次設其交點爲O，則

$OB+OC>BC$,

$OC+OA>AC$,

$OA+OB>AB$,

而 OA,OB,OC分別爲AD,BE,CF之$\frac{2}{3}$，

（本例題6）

則 $\frac{2}{3}(AD+BE)>AB$

$\frac{2}{3}(CF+AD)>AC$

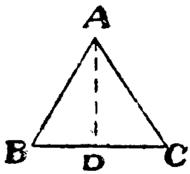
$\frac{2}{3}(BE+CF)>BC$。

因而 $\frac{4}{3}(AD+BE+CF)>AB+BC+AC$

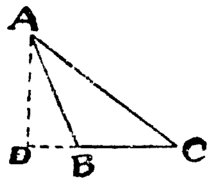
$$AD+BE+CF>\frac{3}{4}(AB+BC+AC)$$

11 三角形銳角對邊之平方，等於他兩邊平方之和，減一邊乘他邊在此邊上射影之二倍。

〔解〕



(A)



(B)

設 ∠C爲三角形ABC之一銳角，CD 爲 AC在BC上之射影

求證 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-2BC\times CD$

證 設D點在三角形之底內(A圖)

$BD=BC-CD$

設D點在三角形之底外(B圖)

$BD=CD-BC$

無論D點在底內或在底外,平方之皆得

$\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2-2BC\times CD$

但 $\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2$

$\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=\overline{AC}^2$

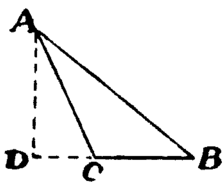
(直角三角形兩腰之平方和,等於其弦之平方)

以 $\overline{AB}^2$ 及 $\overline{AC}^2$ 代入上式,則得

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-2BC\times CD$。

12. 三角形鈍角對邊之平方,等於他兩邊平方之和,加一邊乘他邊在此邊上射影之二倍。

〔解〕



求證 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+2BC\times CD$.

證 $BD=BC+CD$

平方之 $\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+2BC\times CD$

兩邊各加$\overline{AD}^2$

則 $\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2+\overline{CD}^2+2BC\times CD$

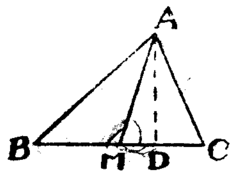
但 $\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2$

$\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=\overline{AC}^2$

代入 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+2BC\times CD$.

13. (a) 三角形兩邊之平方和，等於兩倍他邊折半之平方，加他邊上中線平方之二倍。 (b)三角形兩邊之平方差，等於他邊上之二倍，乘中線在他邊上之射影。

〔解〕



設 AM爲△ABC之中線，MD爲AM在BC上之射影，並設AB>AC

(a) 求證 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{BM}^2+2\overline{AM}^2$

證 因AB>AC

故知∠AMB爲鈍角，∠AMC爲銳角。 (定理43)

$\overline{AB}^2=\overline{BM}^2+\overline{AM}^2+2BM\times DM$. (例題2)

$\overline{AC}^2=\overline{CM}^2+\overline{AM}^2-2CM\times DM$. (例題1)

已知BM=CM,

兩式相加

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{BM}^2+2\overline{AM}^2$

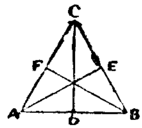
(b) 求證 $\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=2BC\times DM$.

證 將(a)中兩式相減

$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=2BC\times DM$.

14. 三角形三邊平方之和之三倍，等於其中線平方之和之四倍，試證之。

〔解〕



設D,E,F爲△ABC各邊之中點,CD,AEBF爲中線,

求證　$3(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2)=4(\overline{AE}^2+\overline{BF}^2+\overline{CD}^2)$

證　$2\overline{CD}^2+2\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$

$2\overline{BF}^2+2\overline{CF}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

$2\overline{AE}^2+2\overline{BE}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2$

(本例題　13a)

相加　$2(\overline{AE}^2+\overline{BF}^2+\overline{CD}^2)$

$=2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2)-2(\overline{AD}^2+\overline{CF}^2+\overline{BE}^2)$

但　$\overline{AB}^2=(2AD)^2=4\overline{AD}^2$

同樣　$\overline{BC}^2=4\overline{CF}^2$

$\overline{AC}^2=4\overline{CF}^2$

代入　$2(\overline{AE}^2+\overline{BF}^2+\overline{CD}^2)$

$=2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2)-\frac{1}{2}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2)$

$4(\overline{AE}^2+\overline{BF}^2+\overline{CD}^2)=3(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2)$

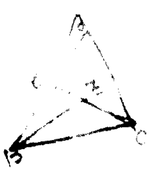
【習題】

1　設直角三角形之一銳角爲他銳角之二倍，則其弦必爲最短邊之二倍,試證之。

2.　三角形ABC中,設角B之二等分線與角C之外角二等分線交於E,則

$\angle$BEC等於$\angle$A之二分之一。

〔提示〕　$\angle COE=\angle OBC+\angle OCB$。



$$=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A。$$

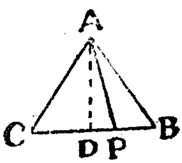
3. 三角形ABC中，角A及角B之平分線相交於O，試證$\angle AOB$，恆大於直角。

4. 在三角形ABC中，引直線AD，令其與AB成等於角C之角，又引直線AE，令其與AC成等於角B之角，則三角形DAE爲二等邊。

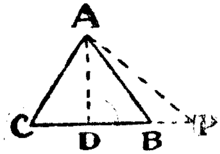
5. P爲等腰△ABC之底BC或其延長線上一點，　求證

$$\pm(\overline{AB}^2-\overline{AP}^2)=BP.CP.$$

〔提示〕



（圖A）



（圖B）

$$\overline{AB}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+2\overline{BP}\cdot\overline{DP}.$$

$$=\overline{AP}^2+BP(BP+2DP)$$

$$CD=BD=BP+DP.$$

四　四　邊　形

(一)　一般四邊形

【定義】

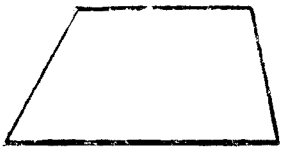
(a) **四邊形**　四直線所圍成之平面形，稱爲四邊形(Tetragram 或 Quadrilateral)。此四直線，稱爲四邊形之邊。

(b) **角**　四邊形各兩邊所成之角，稱爲四邊形之角，其各角之

頂，稱爲四邊形之頂。

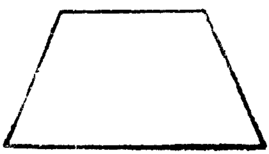
(c) 對角線　聯四邊形兩對頂之直線，稱爲四邊形之對角線。

(d) 不平行四邊形　四邊形無兩邊相平行者，稱爲不平行四邊形。



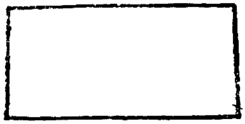
(e) 梯形　四邊形有兩邊相平行者，稱爲梯形。

(f) 等腰梯形　梯形之不平行兩邊相等者，稱爲等腰梯形。

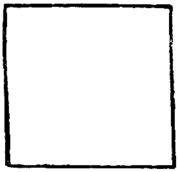


(g) 平行四邊形　四邊形每兩邊平行者，稱謂平行四邊形，通常以略號▱表示之。

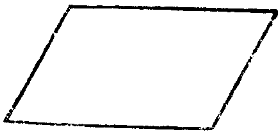
(h) 矩形　平行四邊形之各角皆爲直角者，稱爲矩形，或稱長方形。



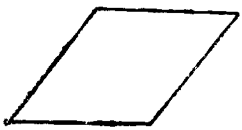
(i) 正方形 矩形之各邊皆相等者，稱爲正方形。



(j) 斜矩形 平行四邊形之各角皆非直角，稱爲斜矩形，實際上即普通之平行四邊形。



(k) 菱形 斜矩形之各邊皆相等者，稱爲菱形。



【定理】

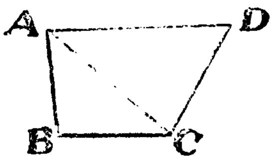
67. 四邊形諸內角之和，等於四直角。

68. 設四邊形之各兩對邊相等，則此形爲平行四邊形。

69. 設四邊形之兩邊相等且平行，則他兩邊亦必相等且平行，則此形爲平行四邊形。

【證明】

定理67——四邊形諸內角之和，等於四直角。



設ABCD爲一四邊形，

求證　$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4\text{rt.}\angle s.$

證　　作對角線AC，

$\therefore$　　$\angle B+\angle ACB+\angle BAC=2\text{rt.}\angle s.$

$\angle D+\angle ACD+\angle CAD=2\text{rt.}\angle s.$

(三角形內三角之和，等於兩直角)

相加　$\angle B+\angle D+\angle ACB+\angle ACD$

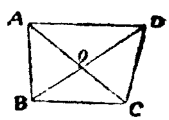
$+\angle BAC+\angle CAD=4\text{rt.}\angle s.$

卽　　$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4\text{rt.}\angle s.$

【例題】

1.　四邊形四邊之和大於兩對角線之和而小於其和之二倍試證明之

設　ABCD爲一任意四邊形，AC，BD 爲兩對角線相交於O。



求證　　$AB+BC+CD+AD>AC+BD$

$AB+BC+CD+AD<2(AC+BD)$

證　$AB+AD>BD$

$BC+CD>BD$

$AB+BC>AC$

$AD+CD>AC$

相加　　$2(AB+BC+CD+AD)>2(AC+BD)$

$\therefore$　$AB+BC+CD+AD>AC+BD$

又　$AB<AO+BO$

$BC<BO+CO$

$CD < CO + DO$

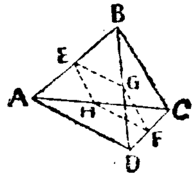
$AD < AO + DO$

相加 $AB + BC + CD + AD < 2(AO + CO + BO + DO)$

$\therefore$ $AB + BC + CD + AD < 2(AC + BD)$

2. 四邊形中二對邊之中點及其二對角線之中點，爲一平行四邊形之頂點試證之。

〔解〕



設 ABCD爲一四邊形，AC，BD爲其對角線，E，F爲一雙對邊之中點，G，H爲對角線之中點

求證 過E，G，F，H可作一平行四邊形

證 連結EH，EG，FH，FG

則 在$\triangle ABC$內 $EH \parallel BC$，

$\triangle BCD$內 $FG \parallel BC$

（連結三角形二邊中點之直線，必與其底邊平行）

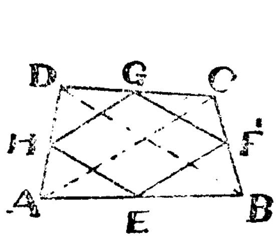
$\therefore$ $EH \parallel FG$ （定理25）

同樣證明 $EG \parallel FH$

$\therefore$ EFGH爲一平行四邊形

3. 連結任意四邊形中點所得之四邊形，爲一平行四邊形，試證明之。

〔解〕



設E，F，G，H爲AB，BC，CD，AD之中點，聯各中點

求證 EFGH爲一平行四邊形。

證 作對角線BD，AC。

在 $\triangle ACD$及$\triangle ABC$內

$GH \parallel AC$ 且 $GH=\frac{1}{2}AC$。

$EF \parallel AC$ 且 $EF=\frac{1}{2}AC$。

(聯三角形兩邊中點之線，必與第四邊平行，且等於第三邊之半)

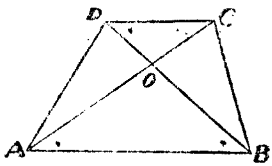
$\therefore$ $GH \parallel EF$, $GH=EF$。

$\therefore$ EFGH爲一平行四邊形。 (定理69)

(設四邊形之兩邊相等且平行，則此形爲平行四邊形)

4. 四邊形的對角線相等，且一雙相對邊亦相等，則此四邊形爲梯形。

〔解〕



設 ABCD爲四邊形。AC, BD爲兩對角線，且

$AC=BD$, $AD=BC$

求證 ABCD爲一梯形。

證 在$\triangle ABC$及$\triangle ABD$中

$AC=BD$, $BC=AD$

AB爲公共邊

$\therefore$ $\triangle ABC=\triangle ABD$

$\therefore$ $\angle BAC=\angle ABD$

同樣可證 $\triangle ACD=\triangle BCD$

$\angle BDC=\angle ACD$

在$\triangle ABO$及$\triangle CDO$中

$\angle COD=\angle AOB$

$\therefore$ $\angle BAC=\angle ABD=\angle BDC=\angle ACD$。

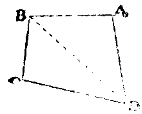
$\therefore$ $AB \parallel CD$

（設兩直線爲另一直線所截若內錯角相等，則兩直線必平行。）

∴ ABCD爲一梯形。

5. 四邊形之任意一邊，小於他三邊之和。

〔解〕



設ABCD爲四邊形，

求證 $CD < BC + AB + AD$.

證 聯BD，

在△BCD中

$CD < BC + BD$。

在△ABD中

$BD < AB + AD$,

$CD + BD < BC + BD + AD$.

即$CD < BC + AB \quad + AD$

【習題】

1. 四邊形相隣二角之二等分線，所夾之角，等於他二角和之二分之一。

2. 四邊形之鄰角皆爲補角，則此四邊形爲平行四邊形。

3. 四邊形之二雙對邊相等，則二雙對角亦等。

(2) 平行四邊形

【定義】

(a) 底 平行四邊形所立之邊及其對邊，總稱爲底；所立之邊，稱爲下底，下底之對邊，稱爲上底。

(b) 高 平行四邊形兩底間之距離，爲平行四邊形之高。

【定理】

70. 設兩平行四邊形，有兩邊及一夾角彼此相等，則兩形必等。

71. 平行四邊形之兩對邊相等。

72. 平行四邊形各兩對角相等。

73. 平行四邊形各兩鄰角，互爲補角。

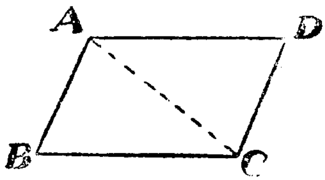
74. 平行四邊形內，有一角爲直角，則其餘三角亦必爲直角，此形爲矩形。

75. 平行四邊形之對角線，平分平行四邊爲兩相等三角形。

76. 平行四邊形之兩對角線相等。

【證明】

定理71——平行四邊形之各兩對邊相等。



設ABCD爲平行四邊形，

試證　$AB=CD$，　$AD=BC$。

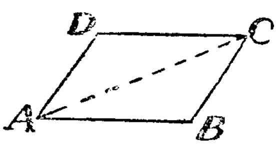
證　連結AC，

則　$\angle ACB=\angle DAC$，$\angle BAC=\angle ACD$

AC爲共有　$\therefore$　$\triangle ABC=\triangle ACD$

$\therefore$　$AB=CD$，　$AD=BC$

定理73——平行四邊形各兩鄰角，互爲補角。



設ABCD爲一▱。

求證　$\angle BAD+\angle ABC=180^\circ$。

證　作AC。

在$\triangle ABC$，$\triangle ADC$內，

$\angle CAD=\angle ACB$。

$\angle BAC=\angle ACD$

（內錯角相等）

$\angle ADC=\angle ABC$

(三角形有兩角相等，第三角必等)

即$\angle CAD+\angle BAC=\angle ACB+\angle ACD$。

$\angle BAD=\angle BCD$。

$\angle ADC+\angle ABC+\angle BAD+\angle BCD=360°$

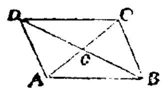
(四邊形內四角之和，等於四直角)

代入 $2\angle BAD+2\angle ABC=360°$

$\therefore$ $\angle BAD+ABC=180°$

定理76——平行四邊形之兩對角線相等。

設ABCD為平行四邊形，AC，BD為兩對角線，相交於O。



求證 $AO=OC$

$DO=OB$。

證 在$\triangle AOB$及$\triangle DOC$內

$AB=DC$

(平行四邊形兩對邊相等)

$\angle OAB=\angle OCD$

$\angle OBA=\angle ODC$。

(內錯角相等)

$\therefore$ $\triangle AOB=\triangle COD$。

(兩三角形有二角及一夾邊相等，則彼此相等)

$AO=OC$

$DO=OB$。

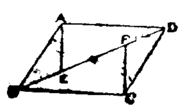
(兩相等三角形相當邊相等)

【例題】

1. 已知ABCD為一平行四邊形。BD為對角線，$BE=DF$

求證 $AE=CF$ $AE \parallel CF$。

〔解〕



設ABCD為一▱，BD為其對角線，

$BE=DF$

求證 $AE=CF$ $AE \parallel CF$

證　在$\triangle ABE$及$\triangle CDF$內

$\angle ABE = \angle CDF$

（內錯角相等）

$AB = CD$

（平行四邊之兩對邊相等）

$\therefore\quad \triangle ABE = \triangle CDF$,

$\therefore\quad AE = CF$

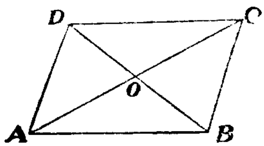
又在$\triangle ABE$及$\triangle CDF$內

$AB \parallel CD,\quad BE \parallel DF$,

$\therefore\quad AE \parallel CF$.

2. 平行四邊形四邊平方之和，等于兩對角線平方之和，試證之。

〔解〕



設　ABCD為一平行四邊形，AC BD為其兩對角線。

求證　$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$

證　在$\triangle ABD$中

$BO = DO$

（平行四邊形兩對角線，互相平分）

則AO為$\triangle ABD$之中線，

$\therefore\quad \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = 2\overline{BO}^2 + 2\overline{AO}^2$

（三角形二邊上正方形之和，等於第三邊之半及對於第三邊之中線上正方形之和之二倍）

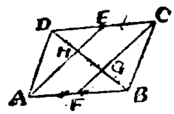
同樣　$\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 2\overline{DO}^2 + 2\overline{CO}^2$

$\therefore\quad \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = 2\overline{BO}^2 + 2\overline{DO}^2$

$2\overline{AO}^2+2\overline{CO}^2=4\overline{BO}^2+4\overline{AO}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$

3. 試證由平行四邊形之兩對頂點引至兩對邊中點之綫，必三等分連其他兩頂點之對角線。

〔解〕



設BD爲平行四邊形ABCD之對角線，E爲CD之中點，F爲AB之中點，連AE，CF，與BD相交於G及H。

求證 BG＝GH＝DH

證 CD＝AB，CE＝AF

且 CE ∥ AF

∴ AFCE爲一平行四邊形。 （定理69）

∴ AE ∥ CF

在 △CDG中 CE＝DE

∴ DH＝GH

（設一線與一三角形之底平行，且又平分其一邊，則亦必平分其他邊）

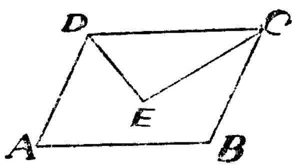
在 △BAH中 BF＝AF

BG＝GH

∴ BG＝GH＝DH

4. 證明平行四邊形兩鄰角之平分綫，互相垂直。

〔解〕



設ABCD爲平行四邊形，DE爲∠ADC之平分綫，CE爲∠BCD之平分綫，相交於E。

求證 ∠CED＝90°

證 ∠ADC＋∠BCD＝180° （定理73）

(平行四邊形兩鄰角必相補)

卽　$2\angle CDE+2\angle DCE=180°$

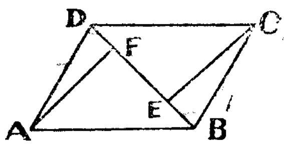
$\angle CDE+\angle DCE=90°$

$\angle CED=180°-(\angle CDE+\angle DCE)$

$=180°-90°=90°$

5. 由平行四邊形相對二頂點至他對角綫之垂綫相等。

〔解〕



設ABCD爲一平行四邊形，BD爲對角線，AF，及CE爲由A及C至BD之垂線。

求證　AF=CE

證　在rt.△ADF及rt.△BCE內

AD=BC　(定理71)

(平行四邊形之對邊相對。)

$\angle ADF=\angle CBE$

(內錯角相等)

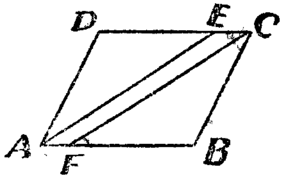
∴　△ADF=△BCE

(兩直角三角形一弦及一銳角相等，則兩三角形相等。)

∴　AF=CE

6. 求證斜矩形之兩平分線亦平行。

〔解〕



設AE及CF爲斜矩形ABCD對角之兩平分線

求證　AE∥CF

證　∠BAD＝∠BCD　（定理72）

∴　∠BAE＝∠DCF

（因皆爲等角之半）

但　∠BAE＝∠AED。

（內錯角相等）

則　∠AED＝∠DCF。

∴　AE ∥ CF。

（內位角相等，兩線必平行）

【習題】

1. 設平行四邊形之對角線將角二等分，則平行四邊形爲菱形。

2. 設平行四邊形之兩對角線相等，則此形爲矩形。

〔提示〕　應用定理69

3. 聯結平行四邊形對邊中點之直線，將對角線二等分。

(3) 矩形正方形及菱形

【定理】

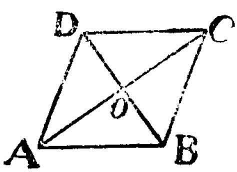
77. 等底且等高之矩形或正方形相等。

78. 矩形或正方形之兩對角線相等。

79. 菱形或正方形之兩對角線，必彼此垂直，且必平分其各角。

【證明】

定理79——菱形或正方形之兩對角線，必彼此垂直，且必平分其各角。



設ABCD爲一菱形，AC，BD爲其對角線，相交於O

求證　AC⊥BD，且平分各角。

證 在△ABO及△ADO內

$AD=AB$, (見菱形之定義)

$DO=BO$ (定理75)

AO公用。

$\therefore \triangle ABO=\triangle ADO$

$\therefore \angle AOB=\angle AOD$ (定理41)

但$\angle AOB+\angle AOD=180°$ (定理10)

$\therefore \angle AOB=90°$

$\angle COD=90°$ (定理13)

$\therefore$ $AC\perp BD$

又 $\angle BAO=\angle DAO$ (定理41)

同樣可證 $\angle ADO=\angle CDO$,

$\angle DCO=\angle BCO$

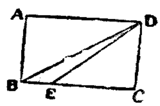
$\angle CBO=\angle ABO$。

$\therefore$ AC及BD平分各角。

【例題】

1. 矩形之對角線大於其兩對邊所夾任意之直線。

〔解〕



設 ABCD爲矩形,DB爲對角線。

DE爲矩形兩對邊所夾任意一直線。

求證 $BD>DE$

證 $\because$ △BDC與△EDC皆爲直角三角形,

$\angle C$爲直角

又 $BC>EC$ (公理8)

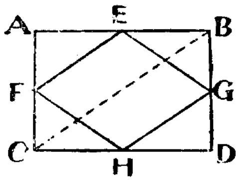
但 $BD=\sqrt{\overline{CD}^2+\overline{BC}^2}$

$DE=\sqrt{\overline{CD}^2+\overline{CE}^2}$ (定理59)

$\therefore$ $BD>ED$

2. 順次聯結矩形各邊的中點,則諸聯結線成一菱形。

〔解〕



設ABCD爲一矩形，E，F，G，H爲各邊之中點。

求證　EFHG爲菱形

證：在$\triangle$s AEF，BEG，CFH，DGH內

$AE=BE=CH=DH$

$AF=CF=BG=DG$

又　$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=rt.\angle$

$\therefore$　$\triangle AEF=\triangle BEG=\triangle CFH=\triangle DGH$

（因直角三角形有兩腰相等）

$EF=EG=FH=GH$

又連結BC，則在$\triangle ABC$內

$EF \parallel BC$

（聯三角形兩腰中點之直線，必與其底平行）

$\triangle BCD$內　$GH \parallel BC$

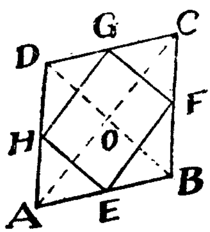
$\therefore$　$EF \parallel GH$

同樣證明　$EG \parallel FH$

$\therefore$　EFHG爲菱形

3．順次聯菱形各邊中點之線必圍成一矩形。

〔解〕



設ABCD爲一菱形，E，F，G，H爲各邊之中點，順次聯之，

求證　EFGH為一矩形

證　　作對角線AC，BD，相交於O，

在$\triangle ABC$內

$EF \parallel AC$，　$EF = \frac{1}{2}AC$，

（聯三角形兩邊中點之線必與第三邊平行，且等於第三邊之半）

在$\triangle ACD$內

$GH \parallel AC$，　$GH = \frac{1}{2}AC$，

$\therefore$　$EF \parallel GH$，　$EF = GH$.

則　EFGH為一▱

又$\angle DOC = rt.\angle$

$\angle FGH = rt.\angle$

又菱形之對角線不相等，　卽$AC > BD$，

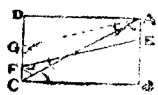
則必$EF > FG$.

則　EFGH為一矩形，　　　　　　（定理74）

（平行四邊形內，有一角為直角，則其餘三角必為直角，此形為矩形。）

4.　矩形之對角線，大於兩邊間之任意直線。

〔解〕



設矩形ABCD之對角線為AC，其兩邊間任意直線為EF，

求證　$AC > EF$

證　　引$AG \parallel EF$，

則　　AEFG為▱，

故　　$AG = EF$，

而　　$\angle D = 90°$

故　　$\angle AGC > 90°$

因而　$\angle AGC > ACG$，

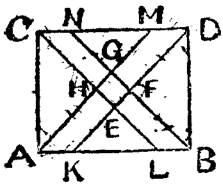
故　　$AC > AG$，

$\therefore$　　$AC > EF$.

【習題】

1. 矩形之諸角之平分線，必圍成一正方形。

〔提示〕



$\angle AHC = rt.\angle$

$AM = DK$，

$EF = DK - DF - EK = GH$

$= AM - AH - GM$

2. 順次聯正方形各邊中點之線，必圍成一正方形。

(4) 梯 形

【定義】

(a) 底　梯形所立之邊及與此邊平行之對邊，總稱爲底，所立之邊，稱爲下底，下底之對邊，稱爲上底。

(b) 腰　梯形不平行之兩邊，稱爲兩腰。

(c) 高　梯形兩底間之垂直距離，爲梯形之高。

(d) 中線　聯梯形兩腰中點之線，稱爲梯形之中線。

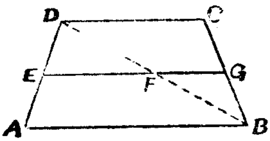
【定理】

80. 梯形之中線，必與其兩底平行，且等於其兩底之半和。

81. 等腰梯形之各底，與其兩腰成兩等角。

【證明】

定理80——梯形之中線必與其兩底平行，且等於兩底之半和。



設ABCD爲一梯形，EG爲梯形之中線

求證　EG ∥ AB ∥ CD．且 EG $=\frac{1}{2}$(AB＋CD)

證　作對角綫BD，F爲BD之中點

在△ABD內，聯AD之中點E於BD之中點F，則

EF ∥ AB　　且　EF $=\frac{1}{2}$AB．

(聯三角形兩邊中點之綫，必與第三邊平行，且等於第三邊之半)

又在△BCD內，聯BD之中點F於BC之中點點G，則

FG ∥ CD 且 FG $=\frac{1}{2}$CD．

但過F，僅可作一綫，與AB平行

(過一已知點，僅可作一直綫，與一已知直綫平行)

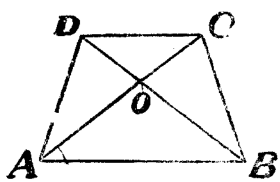
故　FG爲EF之引長綫，

∴　EG ∥ AB ∥ CD

且　EG $=\frac{1}{2}$(AB＋CD)

【例題】

1．梯形下底若相等於上底之二倍，則對角線之交點，必正當各該線三分之二處，試證之。



設　ABCD爲一梯形 AC，BD爲其對角線，相交於O，AB ＝2DC．

求證 $AO=\frac{2}{3}AC$

$BO=\frac{2}{3}BD$

證 $\angle BAO=\angle DCO$

$\angle ABO=\angle CDO$

（內錯角相等）

$\therefore\quad \triangle ABO\backsim\triangle DCO$

$\therefore\quad \frac{CO}{AO}=\frac{DO}{BO}=\frac{CD}{AB}=\frac{1}{2}$

$2CO=AO$

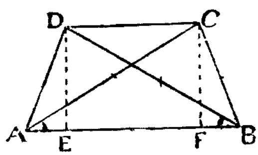
$2DO=BO$

$\therefore\quad AO=\frac{2}{3}AC$

$BO=\frac{2}{3}BD$

2. 梯形之對角線相等者必等腰，試證之。

〔解〕



設 ABCD爲一梯形，AB ∥ CD；AC，BD爲其對角線，且 AC＝BD

求證 AD＝BC。

證 作$DE\perp AB$，$CF\perp AB$，

$\therefore$ DE ∥ CF。

（兩直線同垂直於一直線，則兩線必平行）

且 DE＝CF。

（平行線界在兩平行線間者，必相等）

在 rt.$\triangle$ACF及rt.$\triangle$BDE中

$DE=CF$

$BD=AC$

$\therefore\ \triangle ACF=\triangle BDE$

$\angle CAF=\angle ABD.$

在$\triangle$ABC及$\triangle$ABD中

$AC=BD$

AB為公共邊

$\angle CAF=\angle ABD$

$\triangle ABC=\triangle ABD.$

$\therefore\ AD=BC.$

【習題】

1. 等腰梯形之兩對角線必等。

五 多邊形

【定義】

(a) 多邊形　多數直線圍成之平面形，稱爲多邊形，此多數直線爲多邊形之邊。

(b) 周界　多邊形諸邊之和稱爲多邊形之周界。

(c) 角　多邊形每兩邊所夾之角，稱爲多邊形之角，角之頂，爲多邊形之頂。多邊形之邊數必等於其角數，故多邊形有時亦稱爲多角形。

(d) 對角線　聯多邊形不相鄰兩頂之線，爲多邊形之對角線。

(e) 互等角多邊形　設兩多邊形之角，依同次序，彼此各相等，則此兩形爲互等角多邊形。

(f) 互等邊多邊形　設兩多邊形之邊，依同次序，彼此各相等，則此兩形爲互等邊多邊形。

(g) 相當邊　兩互等角多邊形之各等角，稱爲相當角，其所夾之邊，稱爲相當邊。

〔附註〕

1. 兩多邊形，可互等角而不互等邊。

例如

2. 兩多邊形，除三角形外可互等邊而不互等角。

(h) 有法多邊形 等邊互等角之多邊形，稱爲有法多邊形。例如等邊三角形及正方形卽爲有法多邊形。有法多邊形，恆以'正'字冠之，如等邊三角形，可稱正三角形，有法五邊形，可稱正五邊形等是。

【定理】

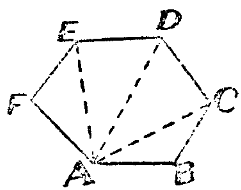
82. 多邊形之諸內角之和，等於以邊數減二乘兩直角之積。

83. 順次引長多邊形之各邊，所作諸外角之和，等於四直角。

84. n邊之多邊形，其對角線數爲$\frac{1}{2}n(n-3)$

【證明】

定理82——多邊形之諸內角之和，等於以邊數減二乘兩直角之積。

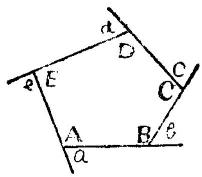


設ABCDEF爲一多邊形，n爲邊數，n＝6

求證 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=(n-2)2\text{rt.}\angle$

證　由A作對角線AE，AD，AC，將多邊形分成諸三角形，
則諸三角形內角之和，卽等於此多邊形諸內角之和。
今三角形有4個，卽(n－2)個。
又三角形三內角之和，等於二直角。
則多邊形諸內角之和
$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=(n-2)2rt.\angle s$

定理83——順次引長多邊形之各邊，所作諸外角之和，等於四直角。



設ABCDE爲多邊形，順次引長其各邊得a，b，c，d，e諸外角
求證　$\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e=4rt.\angle s$
證　$\angle A+\angle a=2rt.\angle s$
$\angle B+\angle b=2rt.\angle s$　　(定理10a)
(設兩鄰角之外邊成一直線，則兩角互爲補角)
同理　$\angle C+\angle c=2rt.\angle s$
$\angle D+\angle d=2rt.\angle s$
$\angle E+\angle e=2rt.\angle s$
則n邊之多邊形，其諸內角及諸外角之和等於$2nrt.\angle s$
但諸內角之和$=(n-2)2rt.\angle s$　　(定理82)
則諸外角之和$=2nrt.\angle s-(n-2)2rt.\angle s=4rt.\angle s$。

【例題】

1．多邊形之內角中，銳角數不多於三。　(綏遠會考)

〔解〕若多角形之內角中，有多於三之銳角，
則因各外角爲鈍角，故外角之內，有多於三之鈍角，
因而其外角之和大於$4rt.\angle s$，
然多邊形外角之和，恆等於$4rt.\angle s$，

故多邊形不能有多於三之銳角。

2. 有一多邊形，其內角之和爲外角之和之二倍；問該形有邊若干？

〔解〕因多邊形諸內角之和 $=(n-2)2\text{rt.}\angle s$

多邊形諸外角之和 $=4\text{rt.}\angle s$

今 $(n-2)2\text{rt.}\angle s=2\times4\text{rt.}\angle s$

$$n=\frac{8\text{rt.}\angle s+4\text{rt.}\angle s}{2\text{rt.}\angle s}=6$$

答該形有六邊。

3. 某正多邊形之一外角，等於正十邊形之一內角之十二分之五，求其邊數。

〔解〕因正多邊形之各角相等，則

正十邊形之一內角 $=\frac{1}{10}\times(10-2)2\text{rt.}\angle s$

$$=\frac{16}{10}\text{rt.}\angle s=\frac{8}{5}\text{rt.}\angle s$$

故所求之正多角形之一外角 $=\frac{5}{12}\times\frac{8}{5}\text{rt}=\angle\frac{2}{3}\text{rt.}\angle s$

則所求正多邊形之外角數 $=4\text{rt.}\angle s\div\frac{2}{3}\text{rt.}\angle s=6$

但邊數與外角數相同，則

此多邊形爲正六邊形。

【習題】

1. 一多邊形諸內角之和，十倍其諸外角之和，問該形有邊若干？

2. 五邊形中，得引對角線若干，又n邊多邊形中如何？

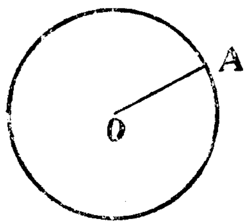
六　圓

(1) 一　圓

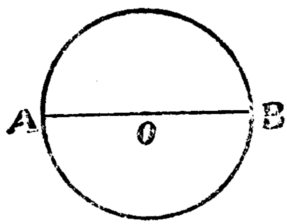
【定義】

(a) 圓　圓者，平面之一部分，以一曲線為界，此曲線內諸點與中央一定點之距離皆相等者也。恆以略號O表之。此中央一定點，稱為圓心，此曲線稱為圓周。

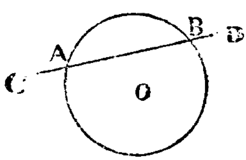
(b) 半徑　自圓心至圓周內之直線，稱為圓之半徑。例如O為圓心，OA為半徑。



(c) 直徑　過圓心作直線，使其兩端與圓周相交，則此直線在圓周內之部分，稱為直徑，例如
O為圓心，AB為直徑。

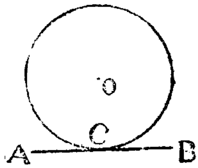


(d) 割線　一無限長之直線，截圓周於兩點，此直線稱為割線，
例如
CD為圓之割線。



(e) 切線(1)一無限長之直線，與圓有一公共點，且僅有一公共

點，此直線稱爲切線，此圓可稱與此直線相切，此公共點，稱爲切點，例如：



AB爲圓之切線，切點爲C。

(2) 由圓外一點至此圓之切線，爲此點及切線間之切線部分。

(f) 弧 圓周之一部分，謂爲弧，通常以略號⌒表示之。

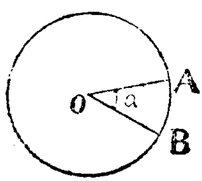
(g) 共軛弧 兩弧之和，等於一圓周，則此兩弧稱爲共軛弧，兩共軛弧若相等，則每一共軛弧，等於圓周之半，稱爲半周。

(h) 優弧與劣弧 兩共軛弧若不等，則一共軛弧必較半周爲大，稱爲優弧，其他一共軛弧，必較半周爲小，稱爲劣弧，劣弧每簡稱爲弧。

(i) 弦 直線之兩端在圓周內者，此直線稱爲弦。依此定義，直徑實爲弦之一特例。

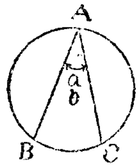
(j) 圓心角 設角之頂在圓心，邊爲半徑，則此角稱爲圓心角。例如

a爲圓心角，恆以∠AOB表示之。



(k) 圓周角 設角之頂在圓周，邊爲兩弦，則此角稱爲圓周角，一稱內切角。 例如

a為圓周角，恆以∠BAC表示之。



(l) 弧之度數　分圓周為三百六十等分，每一等分稱為一度，以1°表示之。每度弧分成六十等分，每等分稱為一分，以1'表示之，每分弧又分成六十等分，每等分稱為一秒，以1" 表示之。

(m) 圓心角之度數　每一度弧所對之圓心角，稱為1度，以1° 表示之。每一分弧所對之圓心角，稱為一分，以1'表示之。每一秒弧所對之圓心角，稱為一秒，以1"表示之。圓周角亦用度，分，秒表示之，惟以所對之弧之半度之。

【定理】

85. (a) 同圓或等圓之諸半徑相等，(b)同圓或等圓之諸直徑相等。(c)直徑等於半徑之二倍。

86. (a) 在同圓或等圓內等圓心角必對等弧，若兩圓心角不等則大角必對大弧，(b)在同圓或等圓內等圓周角必對等弧，若兩圓周角不等則大角必對大弧。

87. (a) 在同圓或等圓內等弧必對等圓心角，若兩弧不等則大弧必對大圓心角，(b)在同圓或等圓內等弧必對等圓周角，若兩弧不等則大弧必對大圓周角。

88. 在同圓或等圓內等弧必對等弦，若兩弧不等則大弧必對大弦。

89. 在同圓或等圓內等弦必對等弧，若兩弦不等則大弦必對大弧。

90. 在同圓或等圓內，等弦與圓心之距離必等。

91. 在同圓或等圓內，與圓心等距離之弦必等。

92. 在同圓或等圓內若兩弦不等，則其與圓心之距離亦不等，而

弦大者其距離近。

93. (a) 在同圓或等圓內與圓心距離不等之弦必不等，而距離近者其弦大；(b)在同圓或等圓內直徑必大於其他各弦。

94. 垂直於弦之直徑必平分此弦及其所對之弧。

95. 直徑必平分圓周及其圓。

96. 平分弦之直徑必垂直於弦。

97. 弦之垂直平分線必過圓心且平分此弦所對之弧。

98. 在一圓周上兩平行線所截之弧必等。

99. 一直線僅能與圓周相交兩點。

100. 於半徑接圓周之一端作半徑之垂線必爲圓周之切線。

101. 圓之切線必垂直於至切點之半徑。

102. 在切點上垂直於切線之直線必過圓心。

103. 由圓心垂直於切線之直線必過切點。

104. 過不在一直線上之三點可作一圓周且僅可作一圓周。

105. 由圓外一點至此圓之兩切線必等且與聯此點及圓心之線成兩等角。

106. 圓心角可以其所截之弧度之。

107. 圓周角可以其兩邊所截之弧之半度之。

108. 圓周角等於同弧上圓心角之半。

109. 半圓之內切角必爲直角。

110. 大於半圓之圓分之內切角必爲銳角。

111. 小於半圓之圓分內切角必爲鈍角。

112. 同圓分或等圓分之內切角必等。

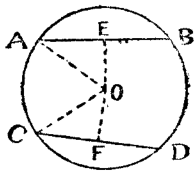
113. 設兩弦於圓周相交，其所成之角可以其所截之弧之和之半度之。

114. 切線及由切點所作之弦所成之角可以其所截之弧之半度之。

115. 設由圓外一點至此圓作兩割線或兩切線或一割線一切線其所成之角均可以其所截弧之差之半度之。

【證明】

定理90——在同圓或等圓內，等弦與圓心之距離必等。



設AB，CD爲已知圓之兩弦，且AB＝CD。

且　　OE⊥AB，　　OF⊥CD。

求證　OE＝OF。

證　作OA，及OC。

　　AE＝BE

　　CF＝DF　　　　　　　　　　（定理94）

（垂直於弦之直徑，必平分此弦）

∴在rt.△AEO及rt.△CFO內

　　AE＝CF.

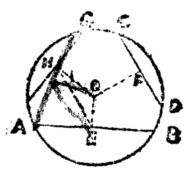
　　CO＝AO

（圓之半徑必等）

∴△AEO＝△CFO

∴　OE＝OF。

定理92——在同圓或等圓內，若兩弦不等，則其與圓心之距離亦不等，而弦大者，其距離近。



設一圓之圓心爲O，弦AB大於弦CD，EO垂直於AB，FO垂直於CD，

求證　　EO＜FO

證　作　AG等於CD，HO⊥AG，

作 EH

∴ EO平分AB，HO平分AG， (定理94)

今 AB$>$CD，

但 CD$=$AG

∴ AB$>$AG

AE$>$AH (公理7)

$\angle$AHE大於$\angle$AEH

$\angle$EHO($\angle$AHE之餘角)小於

$\angle$HEO($\angle$AEH之餘角)

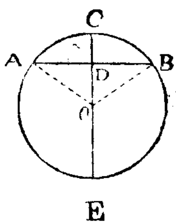
∴ EO$<$HO

但 HO$=$FO (定理90)

(在同圓或等圓內，等弦與圓心之距離必等)

∴ EO$<$FO

定理94——垂直於弦之直徑，必平分此弦及其所對之弧。



設AB為弦，O為圓心，CE為直徑，且CE$\perp$AB

求證 AD$=$BD，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$

證 作 AO，BO，

在 rt.$\triangle$ADO及rt.$\triangle$BDO內

AO$=$BO (定理85a)

DO為公共邊

∴$\triangle$ADO$=\triangle$BDO

∴ AD$=$BD

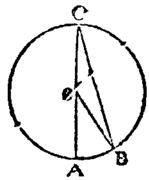
又$\angle$AOD$=\angle$BOD

$\therefore \quad \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$ (定理86)

$\angle ADO=\angle BDO$

$\therefore \quad \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$

定理108——圓周角等於同弧上圓心角之半。



設$\angle ACB$爲圓周角，$\angle AOB$爲圓心角，對同弧AB。

求證 $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$。

證 $BO=CO$

(同圓之半徑相等)

$\therefore \angle BCO=\angle CBO$

(等腰三角形內，其對等邊之兩角必等)

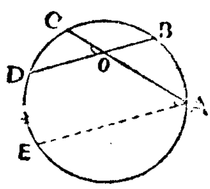
又 $\angle AOB=\angle BCO+\angle CBO$

(三角形之一外角，等於內對兩角之和)

$\therefore \angle AOB=2\angle BCO=2\angle ACB$。

$\therefore \angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$。

定理113——設兩弦於圓周相交，其所成之角，可以其所截之弧之和之半度之。



設弦AC及BD於圓周內相交於O，

求證 $\angle COD$可以$\frac{1}{2}$(弧CD＋弧AB)度之。

證 作AE ∥ BD。

則 弧AB＝弧DE （定理93）

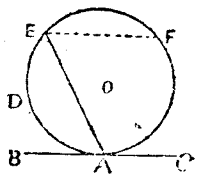
$\angle COD=\angle CAE$。

（同位角相等）

但 $\angle CAE$以$\frac{1}{2}$(弧CD＋弧DE)度之，（定理107）

代入 $\angle COD$可以$\frac{1}{2}$(弧CD＋弧AB)度之。

定理114——切線及由切點所作之弦，所成之角，可以其所截之弧之半度之。



設圓O與AB相切於A，AE爲由切點所作之弦

求證 $\angle BAE$可以$\frac{1}{2}$弧ADE度之。

證 作EF ∥ BC，

則弧ADE＝弧AF （定理93）

但 $\angle BAE=\angle AEF$

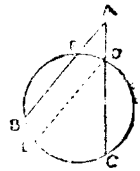
（內錯角相等）

又 $\angle AEF$以$\frac{1}{2}$弧AF度之。 （定理107）

代入 $\angle BAE$可以$\frac{1}{2}$弧ADE度之，

定理115——設由圓外一點，至此圓作兩割線，或兩切線，或一割線一切線，其所成之角，均可以其所截弧之差之半度之。

設A爲圓外一點，作兩割線AB及AC，



求證　$\angle$BAC以$\frac{1}{2}$(弧BC－弧DF)度之。

證　由D作DE ∥ AB.

∴　弧BE＝弧DF　(定理98)

弧CE＝弧BC－弧BE＝弧BC－弧DF

但　$\angle$BAC＝$\angle$CDE　(同位角相等)

$\angle$CDE以$\frac{1}{2}$弧CE度之。　(定理107)

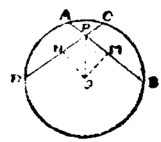
代入　$\angle$BAC可以$\frac{1}{2}$(弧BC－弧DF)度之。

同樣可證兩切線或一割線一切線所成之角，可以其所截之弧之半度之。

【例題】

1. 圓內之兩等弦相交割，其所割相當之部份各相等。

〔解〕



設　圓O二等弦AB，CD相交於P

求證：　PA＝PC，PB＝PD

證：　聯OP

作OM⊥AB於M，ON⊥CD於N

則　∵　OP＝OP

$\angle$OMP＝$\angle$ONP＝rt$\angle$

OM＝ON

∴　△OMP＝△ONP

∴　PM＝PN

但　MB＝ND

∵　PB＝PM＋MB

PD＝PN＋ND。

∴　PB＝PD

∵　PA＝BA－BP

　　PC＝DC－DP

但　BA＝DC

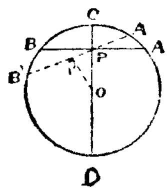
∴　PA＝PC

2. 經過圓內一點作一弦，若此弦與經過此點之直徑相垂直，證此弦爲經過此點之最短之弦。

〔解〕設　P爲圓內任意一點，CD爲直徑，

於P點作AB弦，使AB⊥CD

求證　AB爲經過P點之最短弦



證：　作弦A'B'與CD斜交，並於O點作OP'⊥A'B'

則　OP'＜OP

（直角三角形之一腰，必小於其弦）

但　OP爲弦AB與圓心之距離；OP'爲弦A'B'與圓心之距離。今OP'＜OP

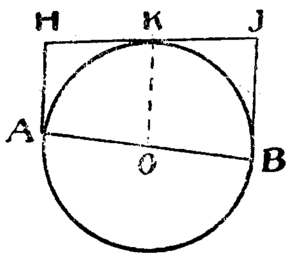
則　A'B'＞AB

（在同圓內，與圓心距離不等之弦必不等，而距離近者，其弦大）

故　AB較任何其他經過P點之弦爲短。

3. 從直徑兩端點引隨便一切線之垂線，此二垂線之和，等於此圓之直徑。

〔解〕



設AB爲O圓之直徑，HJ爲切線，切O圓於K點，

$AH \perp HJ$,　　$BJ \perp HJ$

求證　$AH+BJ=AB$

證　連接切點K與圓心O,作半徑OK

$\because$　AH, OK, BJ俱垂直HJ

$\therefore$　$AH \parallel OK \parallel BJ$　　(定理23)

又　$AO=BO$　　(半徑相等)

$\therefore$　$HK=JK$　　(定理35b)

ABJH爲不等邊梯形

且　$OK=\frac{1}{2}(AH+BJ)$　　(定理77)

(梯形之中線,必與其兩底平行,且等於其兩底之半和)

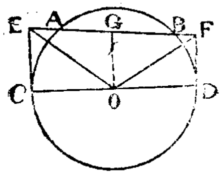
但　$AB=2OK$　　(定理35c)

(直徑等於半徑之二倍)

$\therefore$　$AB=AH+BJ$

4.　由圓之直徑之兩端,至弦或弦之引長線作二垂線,則此二垂線足與圓心等距離,試證之。

〔解〕



設　CD爲圓之直徑,AB爲弦,由C,D作垂線CE,DF垂直AB之延長線,垂點爲E,F,聯EO,FO,

求證　$EO=FO$

證　作$GO \perp EF$。

則　$CE \parallel DF \parallel GO$

(兩直線同垂直於一直線,則兩線必平行)

$CO=DO$

（半徑相等）

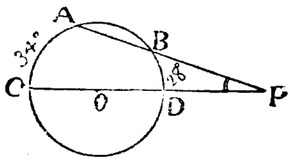
∴ EG＝FG

（設一線為數平行線所截，其所截之線分若相等，則他線為此數平行線所截者，其所截之線分亦相等。）

∴ GO為EF之垂直平分線

∴ EO＝FO。 （定理18b）

5. 自圓外一點，至圓引二割線，此二割線所夾之弧，一為28°，一為34°，問二割線之交角若干度？



設P為圓外一點，AP，CP為自P點所引之二割線，AP及CP所夾之弧AC＝34°，BD＝28°

求 $\angle$APC等於若干度，

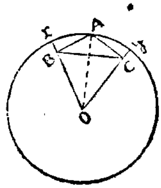
因 $\angle$ APC以$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$度之。 （定理115）

（設由圓外一點，至此圓作兩割線，其所成之角，可以其所截弧之差之半度之）

則 $\angle APC=\frac{1}{2}(34°-28°)=3°$

6. 在中心為O之圓周上，取任意點A，由A至二定半徑引垂線AB，AC，則聯結其足B，C之直線有定長。

〔解〕



設Ox，Oy為圓O之定半徑，A為圓周上任一點，作AB⊥Ox，

$AC\perp Oy$，聯BC，

求證　BC爲一定。

證　因　$\angle ABO=\angle ACO=rt\angle$

則以OA爲直徑，過B，C可作一圓。

故直線BC恆對定角xOy或其補角。

而同圓或等圓內，圓周角相等。

或互爲補角，則所對之弦亦等。

故BC爲一定。

【習題】

1. 一直線與圓周之交點，不多於二。

2. 以直角三角形之弦爲直徑所作之圓，必過直角頂。

3. 設AB，CD爲圓內不相交之二弦，延長之令交於圓外一點E，則角AEC等於弧AC及BD所對中心角之差之半分。

4. 設相交之二弦，與過其交點之直徑成等角，則此二弦必等。

(2)　二　圓

【定義】

(a) 內切及外切　設兩圓於同點與一直線相切，則此兩圓彼此亦相切；其一圓在他圓之內者，稱爲內切，在他圓之外者稱爲外切。

(b) 聯心線　聯兩圓心之線，稱爲聯心線。

(c) 公切線　設一直線與兩圓相切，稱爲此兩圓之公切線，公切線不截兩圓之聯心線者，稱爲外公切線，公切線截兩圓之聯心線者，稱爲內公切線。

(d) 公弦　兩圓相交，聯相交點之直線，稱爲兩圓之公弦。

(e) 同心圓　自同一圓心，以不同之半徑畫數圓，此數圓，稱爲同心圓。

【定理】

116.(a) 等半徑之兩圓必等。 (b) 兩等圓之半徑必等。

117.兩圓周僅能相交於二點。

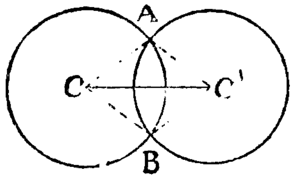
118.兩圓相交，其聯心線爲公弦之垂直平分線。

119.兩圓相切，其聯心線，必過切點。

【證明】

1. 兩圓相交，其聯心線爲公弦之垂直平分線 —— 定理118.

〔證明〕



設C及C'爲兩圓心，AB爲公共弦，CC'爲聯心線。

求證 CC'爲AB之垂直平分線

作CA，CB，C'A，C'B.

證 CA＝CB C'A＝C'B.

(半徑相等)

∴ C，C'與AB之距離各相等，

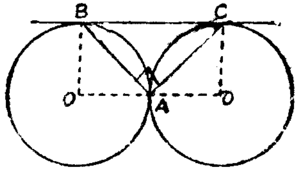
故 CC'爲AB之垂直平分綫

(自一線兩端等距離之兩點，可定此線之垂直平分線)

【例題】

1. 兩圓相外切於 A，又一外公切線切兩圓於 B 和 C，試證∠BAC爲直角。

〔解〕



設兩圓相切於A，BC爲兩圓之外公切線，切兩圓於B 及 C

聯AB，AC

求證　$\angle BAC = rt.\angle$

證　作OO'，OB及O'C

$OB \perp BC$　　$O'C \perp BC$

（圓之切線，必垂直於至切點之半徑）

則　$OB \parallel O'C$

（設兩直線在一平面內，同垂直於一直線，則此兩線必平行）

$\angle AOB + \angle AO'C = 180°$

（兩平行線，爲一截線所截，其兩內角在截線之一側者，互爲補角）

但　$\angle AOB + \angle AO'C$以（AB弧＋AC弧）度之

（圓心角以所對之弧度之）

$\therefore$　AB弧＋AC弧＝180°

但　$\angle BAC$以$\frac{1}{2}$（AB弧＋AC弧）度之，

（切線及由切點所作之弦，所成之角，可以其所截之弧之半度之）

$\therefore$　$\angle BAC = 90° = rt.\angle$.

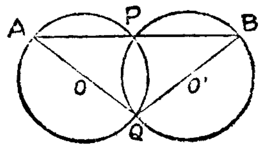
2. 設二等圓交於PQ兩點，過P作任意割線交圓於兩點A及B，試證弦AQ等於弦BQ.

［解］求證　$AQ = BQ$

證　$\angle PAQ = \angle PBQ$

（因同以等弧之二分之一度之）

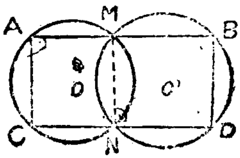
$\therefore$　$AQ = BQ$



（三角形內，等角必對等邊）

3. 兩圓相交於M，N，過其交點M，N，各引直線AMB，CND交圓周於A，B，C，D，求證AC與BD平行。（暨南大學入學）

［解］求證　AC ∥ BD.



證　作MN，

$\angle CAM+\angle CNM=180°$

（因以圓周之半度）。

即　$\angle CAM=180°-\angle CNM$

但　$\angle DNM=180°-\angle CNM$

∴　$\angle CAM=\angle DNM$

同樣　$\angle DBM=180°-\angle DNM=180°-\angle CAM$

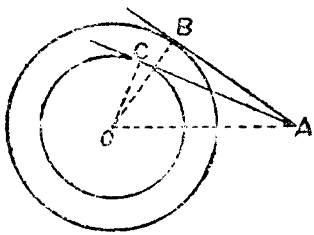
即　$\angle DBM+\angle CAM=180°$

∴　AC ∥ BD

（一直線與他二直線相交；若同側內角相補，則二線必平行）

4. 從一定點引切線至若干同心圓，則其切點皆在一定圓之周上，試證明之。

［解］



設A爲一定點，AC，AB爲自A至兩同心圓之切線，

求證　B，C在同一圓周上。

證　連AO，BO，CO，

$CO\perp AC$

$BO\perp AB$

（切線垂直於至切點之半徑）

$\angle ACO=\angle ABO=rt.\angle.$

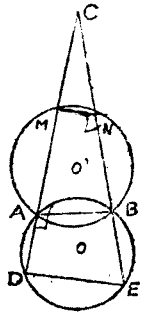
∴　以AO爲直徑，所作之圓周，必過B，及C，

（半圓之內切角必爲直角）

$\therefore$ B,C在同一圓周上。

5. 過三角形ABC之A,B二頂點任畫二圓周與AC,BC二邊分別相交于D,E及M,N,求證DE直線與MN直線平行。

〔解〕求證 $MN \parallel DE$。



證 $\angle BNM + \angle BAM = 180°$

(因以圓周之半度之)

即 $\angle BNM = 180° - \angle BAM$

又 $\angle BAD = 180° - \angle BAM$

$\therefore$ $\angle BNM = \angle BAD$.

但 $\angle BED = 180° - \angle BAD$.

$= 180° - \angle BNM$

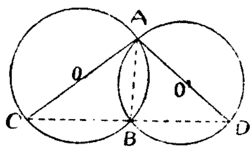
則 $\angle BED + \angle BNM = 180°$

$\therefore$ $MN \parallel DE$

(兩直線為另一直線所截,若同側之內角相補,則兩直線必平行)。

6. 設相交二圓,從一交點引各圓之直徑,則此二徑之他端,與又一交點共線。

〔解〕



設OO'為兩圓心,A,B,為兩交點,AC,AD為自A所作兩圓之直徑。

求證 C,B,D同在一直線上

證 作BC,BD,AB,

$\angle ABC = 90°$

$\angle ABD = 90°$

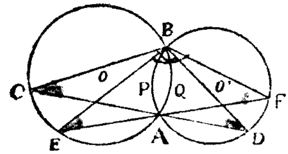
(半圓之內切角必為直角)。

則 $\angle ABC$及$\angle ABD$相補,CBD為一直線,(定理11a)

∴　C,B D在一直線上。

7. 兩圓交於A,B,過A作一直線交二圓於C,D,復作一直線交二圓於E,F,求證：∠CBD＝∠EBF。

〔解〕設兩圓相交,A,B,爲其交點,過A作兩弦EF,CD,聯 BE,BD,BC,BF。



求證　∠CBD＝∠EBF

證　在△CBD及△EBF內

∠ADB＝∠AFB

（因同以$\frac{1}{2}$APB弧度之）。

∠AEB＝∠ACB

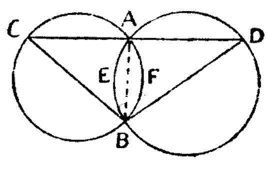
（因同以$\frac{1}{2}$AQB弧度之）。

∠CBD＝∠EBF　　　（定理49b）

（兩三角形有兩角彼此相等，則第三角亦必彼此相等）

8. 兩圓相交於AB二點,過 A 任作一線交兩圓於 C，D，試證∠CBD爲定角。

〔解〕



設兩圓相交於A,B兩點,過A點作一線,遇兩圓於C,D,連結BC,BD,

求證　∠CBD爲定角(即CD之位置無論如何變，∠CBD不變。)

證　兩圓相交,AEB弧及AFB弧一定,不能變動,

則∠ADB爲定角(以其爲定弧AEB所對之圓周角)

∠ACB亦爲定角（以其爲定弧AFB所對之圓周角)

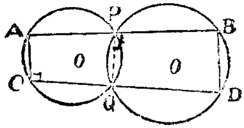
但$\angle ADB+\angle ACB+\angle CBD=180°$ （定理46）

今$\angle ADB$及$\angle ACB$皆爲定角

則$\angle CBD$亦必爲定角無疑。

9. 兩圓相交於P,Q兩點，過P引APB，過Q引CQD，遇兩圓周於A,B,C,D，若聯AC及BD，求證AC ∥ BD

〔解〕



證 作PQ.

$\angle BPQ+\angle BDQ=180°$

（圓之內切四形邊必相補）

又 $\angle APQ+\angle BPQ=180°$

$\angle BPQ+\angle BDQ=\angle APQ+\angle BPQ$

$\angle BDQ=\angle APQ.$

同理可證 $\angle ACQ=\angle BPQ$

相加 $\angle BDQ+\angle ACQ=\angle APQ+\angle BPQ$

但 $\angle APQ+\angle BPQ=180°$

∴ $\angle BDQ+\angle ACQ=180°$

∴ AC ∥ BD. （定理34）

（設兩直線在一平面內，爲一截線所截，在截線同側之兩內角，若互爲補角，則此兩線必平行）

10. 設在二同心圓較大之一個圓中，作兩弦與較小之圓相切，則此兩弦必相等。

〔解〕設二圓爲同心圓

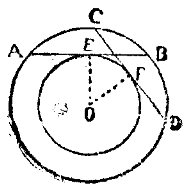
AB,CD爲大圓之弦，而切小圓於E,F.

求證 AB＝CD.

證 連OE,OF

則 OE⊥AB,

OF⊥CD （定理101）



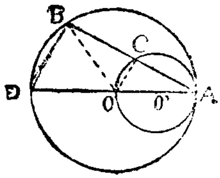
又 $\because OE=OF$ （定理85a）

故 AB，CD二弦與圓心之距離相等

$\therefore$ $AB=CD$ （定理91）

11．兩圓內切，小圓徑爲大圓徑之半，自切點任作大圓之弦，必爲小圓平分，試證之。

〔解〕設兩圓相切於A，O爲大圓之圓心，O'爲小圓之圓心，$AO=\frac{1}{2}AD$，AB爲過A所作大圓之任意弦。截小圓圓周於C。



求證 $AC=BC$。

證 因$AO=\frac{1}{2}AD$，

則小圓之圓周必過大圓之圓心O。

作 OC，OB。

在 $\triangle ACO$及$\triangle BCO$內，

$AO=BO$

（因爲大圓之半徑）

CO爲公共邊，

$\angle ACO=rt.\angle$。

（半圓之內切角必爲直角）

$\therefore$ $\triangle ACO=\triangle BCO$

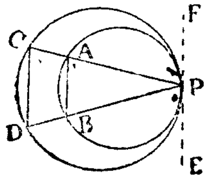
（兩直角三角形，有一腰及一弦相等，則兩形必等）

$\therefore$ $AC=BC$。

（兩相等三角形，相當邊相等）

12．設兩圓內切於P，由P作大圓之兩弦PC，PD，各交小圓於A，B兩點，則$AB \parallel CD$；試證之。

〔解〕



求證　AB ∥ CD

證　於切點P，作兩圓之切線EF，

$\angle DCP=\angle DPE$

（因皆以$\frac{1}{2}$DP弧度之）

$\angle BAP=\angle BPE$

（因皆以$\frac{1}{2}$BP弧度之）

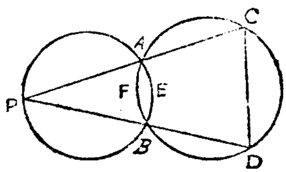
∴　$\angle BAP=\angle DCP$

∴　AB ∥ CD

（設兩直線爲另一直線所截，若其同位角相等，則兩線必平行.）

13. 二圓相交於A，B二點。自第一圓上任何一點P作PA，PB二線。PA延長線交第二圓於C，PB延長線交第二圓於D，證CD之長爲常數。

【解】



求證　CD爲一常數

證　兩圓相交，弧AEB及弧AFB爲一定，不能變動，

$\angle APB$爲一定

（因以定弧AEB之半度之）

但　$\angle APB$以$\frac{1}{2}$（弧CD－弧AFB）度之

（設由圓外一點至此圓作兩割線，其所成之角，可以其兩截弧之差之半度之）

今　弧AFB爲一定，

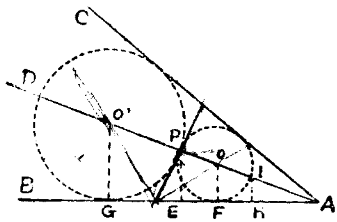
則　弧CD亦必爲一定，

則　弦CD亦為一定。

即　CD為常數。

14. 作二圓切二相交線並過此二線之平分角線(Bisecter)上之一點。

〔解〕



設AB及CD為兩直線相交於A，AD為∠BAC之平分線，P為AD上一點，求過P點，作兩圓與AB及AC相切。

作圖，由P作PE⊥AB，

將AE三等分之，得F，H.

由F作FO ∥ PE，與AD相交於O，

以PO為半徑，O為圓心，則得圓O，

次以E為圓心，AE為半徑，

截AB於G，

由G作GO' ∥ PE，與AD相交於O'

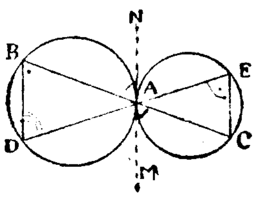
以O'為圓心，PO'為半徑作圓，則得圓O'

圓O及圓O'為求作之二圓

【習題】

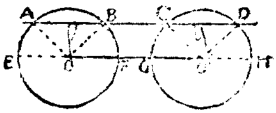
1. 設二圓互相外切於A，經A點作二直線，一線與二圓相交於B及C，他一線與二圓相交於D及E．求證BD ∥ EC。

〔提示〕



2. 二等圓之圓心爲O及O'，若與其連心線平行作一直線，截各圓周於A，B及C，D，則AB＝CD。

〔提示〕

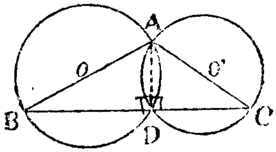


先證　$\widehat{AE}=\widehat{DH}=\widehat{BF}=\widehat{CG}$

次證　$\angle AOB=\angle CO'D$.

3. 以銳角三角形之二邊爲直徑作圓，其圓周交於第三邊上。

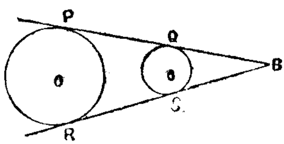
〔提示〕



4. 以菱形之各邊爲直徑所作之四圓過同點。

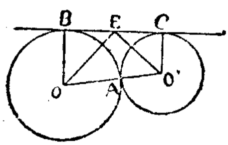
5. 兩圓外公切線上切點間之長相等。

〔提示〕



求證　PQ＝RS。

6. 設圓心爲O及O'之兩圓，外切於A，引此二圓之外公切線，命其切點爲B，C，則角AOB，及AO'C之平分線EO及EO'交BC上一點E且EO⊥EO'



(3) 圓之內接直線形及外切直線形

【定義】

(a) 直線形 凡以直線圍成之平面形，稱爲直線形，如三角形，四邊形，多邊形等皆爲直線形，與圓等曲線形相對而言。

(b) 內接直線形 凡直線形之各角頂，在一圓周上者，則稱此直線形爲圓之內接直線形，此圓周稱爲外接圓。

(c) 外切直線形 凡直線形之各邊，與一圓周相切者，則稱此直線形爲圓之外切直線形，此圓周稱爲內切圓。

(d) 內接有法多邊形 凡有法多邊形之各角頂，在一圓周上者，則此直線形爲圓之內接有法多邊形，此圓稱爲外接圓。

(e) 外切有法多邊形 凡有法多邊形之各邊，與一圓周相切者，則稱此直線形爲圓之外切有法多邊形，此圓周稱爲內切圓。

【定理】

120. 圓之內接四邊形兩對角，互爲補角。

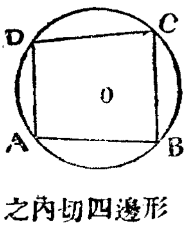
121. 圓之內接梯形必等腰。

122. 圓之內接等邊多邊形，必爲有法多邊形。

【證明】

1. 圓之內接四邊形兩對角，互爲補角。 定理120

〔證明〕



設ABCD爲圓之內切四邊形

求證 $\angle BAD+\angle BCD=180°$

$\angle ABC+\angle ADC=180°$

證 $\angle BAD$以$\frac{1}{2}$BCD弧度之

$\angle BCD$以$\frac{1}{2}$BAD弧度之

(圓周角可以兩邊間所截之弧之半度之)

∴　$\angle BAD+\angle BCD$以

$\frac{1}{2}$(BCD弧+BAD弧)

即$\frac{1}{2}$圓周度之。

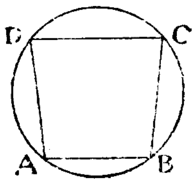
但圓周$=360°$

∴　$\angle BAD+\angle BCD=\frac{1}{2}\times 360°=180°$

同樣可證　$\angle ABC+ADC=180°$

2.　圓之內接梯形，必等腰(湖南會考)——定理121.

〔證明〕



設ABCD爲圓之內切梯形，$AB \parallel CD$

求證　$AD=BC$.

證　AD弧$=$BC弧。

(在一圓周上，兩平行線所截之弧必等)。

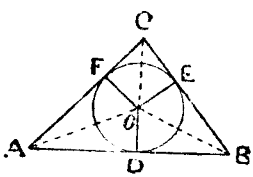
∴　$AD=BC$.

(在同圓或等圓內，等弦必對等弧)。

【例題】

1.　試證：等邊三角形之內切圓之半徑，等於此三角形之高之三分之一.

〔解〕



設△ABC爲等邊三角形，EFD 爲內切圓，與三角形相切於

D,E F OD爲切內圓之半徑;CD爲$\triangle ABC$之高。

求證 $OD=\frac{1}{3}CD$.

證 由圓心O至切點作OD,OE,OF,至各頂作 OC,OA,OB,

則在四邊形DBEO內

$\angle OEB=\angle ODB=rt\angle$

(切線必垂直於至切點之半徑)

$\angle EBD=60°$

(等邊三角形三角必等,且各等於60°)

∴ $\angle EOD=180°-60°=120°$

(四邊諸內角之和,等於四直角)

又 $BD=BE$

(由圓外一點至同圓至兩切線必等

$EO=DO$

(半徑相等)

∴ $\triangle BDO=\triangle BEO$

∴ $\angle BOE=\angle BOD=\frac{120°}{2}=60°$

同樣可證

$\angle COE=\angle COF=60°$

$\angle AOD=\angle AOF=60°$

則在 $\triangle BOD$及$\triangle AOD$內

$\angle BOD=\angle AOD$

OD爲公共邊

∴ $\triangle BOD=\triangle AOB$

∴ $AD=BD$

又 $\angle AOD+\angle AOF+\angle COF$

$=60°+60°+60°=180°$

故CD爲過圓心O之直線

∴ CD爲$\angle C$至AB之中線,

因CD垂直AB，故又爲△ABC之高

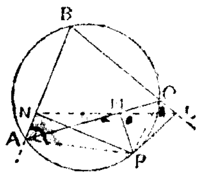
同樣可證 AE爲∠A至BC之中線

BF爲∠B至AC之中線，

∴ $OD=\frac{1}{3}CD$.

(三角形之三中線必相遇於一點，此點與頂之距離爲由各頂至其對邊之中點之距離之三分之二)

2. 由三角形ABC之外接圓周上一點P向三邊各作垂線PL，PM，PN，則三垂足L，M，N，同在一直線上。



設圓APCB爲△ABC之外接圓，P爲圓周上一點，自P至三角形之三邊AB，BC，AC作三垂線PN，PM，PL，得垂點N，M，L，

求證 NML在一直線上

證：作 AP，CP，LN

∠PMA＝∠PNA＝rt.∠s

過A，P，N，M，可作一圓周，即A，P，N，M在一圓周上

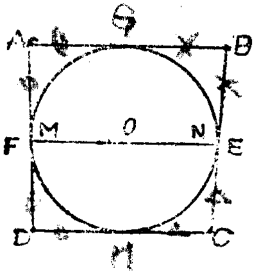
(因半圓之內切角必爲直角，AP爲直徑)

同樣 ∠PMC＋∠PLC＝2rt.∠s

∴ P，M，C，L，在一圓周上。

3. 外接於圓之梯形，其中線之長，等於梯形各邊之和四分之一，試證明之。

〔解〕



設ABCD爲圓O之外接梯形，EFGH爲切點，MN爲梯形之中線

求證 $MN=\frac{1}{4}(AB+BC+CD+AD)$

證 $MN=\frac{1}{2}(AB+CD)$

（梯形之中線，必等於其兩底之半和）

但 $AG=AF$,

$BG=BE$

$DH=DF$

$CH=CE$

（由圓外一點至此圓之兩切綫必等）

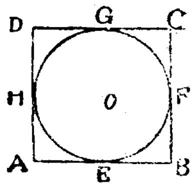
相加 $AG+GB+DH+CH=AF+BE+DF+CE$

$AB+CD=AD+BC$。

∴ $MN=\frac{1}{4}(AB+BC+CD+AD)$

4. 圓外切四邊形，兩對邊之和，必等於其他兩對邊之和。

〔解〕設ABCD爲圓O之外切四邊形，其切點爲E，F，G，H.



求證 $AB+CD=AD+BC$。

證 $AE=AH$

$BE=BF$

$CG=CF$

$DG=DH$ （定理105）

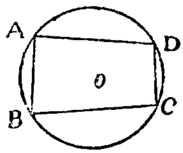
（由圓外一點至此圓之兩切線必等）

相加　$AE+BE+CG+DG=AH+BF+CF+DH$

則　$AB+CD=BC+AD$.

5. 設ABCD爲圓之內接四邊形,$A=80°$, $B=90°$,求C及D.

〔解〕



設ABCD爲圓之內接四邊形,$\angle A=80°$, $\angle B=90°$

求$\angle C$及$\angle D$.

因　$\angle A+\angle C=180°$

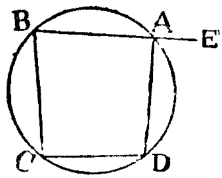
$\therefore$　$\angle C=180°-80°=100°$　(定理120)

因　$\angle B+\angle D=180°$

$\therefore$　$\angle D=180°-90°=90°$

6. 圓之內接四邊形,其外角等於內角之對角,試證之.

〔解〕



設ABCD爲一內接四邊形;$\angle DAE$爲一外角

求證　$\angle EAD=\angle BCD$

證　$\angle EAD+\angle BAD=2rt\angle s$

但　$\angle BCD+\angle BAD=2rt\angle s$　(定理113)

(圓之內切四邊形之對角必相補)

$\therefore$　$\angle EAD+\angle BAD=\angle BCD+\angle BAD$.

$\therefore$　$\angle EAD=\angle BCD$.

7. 有圓內接四邊形ABCD.其對角線之交點爲E.今作三角形AEB之外接圓,又過E點作此外接圓之切線,則此切線與CD平行.

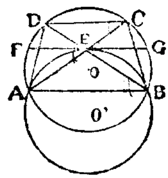
〔解〕求證　FG ∥ CD.

證　∠AEF＝∠ABE

（因同以$\frac{1}{2}$AE弧度之）

又∠ABE＝∠ACD

（因同以$\frac{1}{2}$AD弧度之）



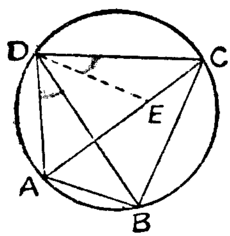
∴　∠AEF＝∠ACD

∴　FG＝CD.

(設兩直線爲一截線所截，若其同位角相等，則此兩線必平行)

8. 在圓之內切四邊形內　其兩對角線之積等於其各兩對邊之積之和。

〔解〕



設ABCD爲圓之內切四邊形，AC及BD爲其二對角線

求證　AC×BD＝CD×AB＋AD×BC.

證　作DE，使∠CDE＝∠ADB

在△ADE及△BCD內

∠ADE＝∠BDC

∠DAC＝∠DBC

∴　(等弧必對等圓周角)

∴　AD：BD＝AE：BC.

即　AD×BC＝BD×AE

又在　△CDE及△ABD內

$\angle CDE=\angle ADB$

$\angle DCE=\angle ABD$

（同以弧$\frac{1}{2}$AD度之）

$\therefore$ $\triangle CDF\backsim\triangle ABD$

$\therefore$ $CD:BD=CE:AB$

卽 $CD\times AB=BD\times CE$.

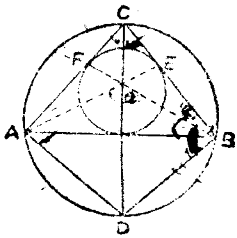
相加則

$$CD\times AB+AD\times BC=BD\times CE+BD\times AE$$

$$=BD(CE+AE)=BD\times AC.$$

9. 三角形之一角平分線，遇外接圓於一點，此點距三角形他兩頂點及內接圓圓心等距離。

〔解〕



設 ADBC爲$\triangle ABC$之外切圓

EF爲$\triangle ABC$之內切圓，其圓心爲O

CD爲$\angle ACB$之平分線

求證 $AD=BD=DO$

證 過O作AE，BF.

因 $\angle ACD=\angle BCD$

$\therefore$ 弧AD＝弧BD.

$\therefore$ $AD=BD$

(等弧必對等弦)

又O爲三角平分線之交點

(因爲內切圓之圓心)

在 $\triangle BDO$內

$\angle DOB = \angle BCD + \angle CBO$

(三角形之外角,等於內對二角之和)

$\angle DBO = \angle DBA + \angle ABO$

但　$\angle BCD = \angle DAB$

(對等弧之角必等)

又　$\angle CBO = \angle ABO$

$\therefore$　$\angle BCD + \angle CBO = \angle DBA + \angle ABO$

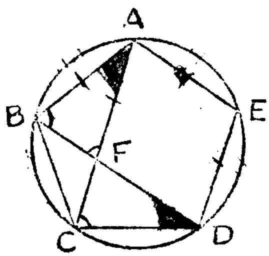
$\therefore$　$\angle DOB = \angle DBO$

$\therefore$　$DB = DO$

$\therefore$　$AD = DB = DO$。

10. 正五邊形之兩對角線相交,各截爲二段,則其大段等于五邊形之一邊,試證明之。

〔解〕



設ABCDE爲正五邊形,AC及BC爲兩邊角線,相交於F,

求證　$AF = AB$,

證　$\angle ABD = \dfrac{\overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{ED}}{2} = \dfrac{75^\circ + 75^\circ}{2} = 75^\circ$

(圓周角以所對之弧之半度之)

$\angle AFB = \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2} = \dfrac{75^\circ + 75^\circ}{2} = 75^\circ$

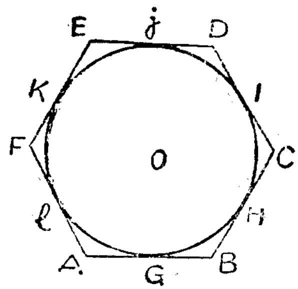
(設兩弦於圓周內相交,其所成之角,可以其所截之弧之和之半度之)

∴ $\angle ABD=\angle AFB$

∴ $AF=AB$.

11. 外切于圓之任意六邊形，其相隔三邊和與其他三邊之和相等，試證明之。

〔解〕



設ABCDEF爲一任意六邊形與內切圓相切於G,H,I,J,K,L

求證　$AB+CD+EF=BC+DE+AF$

證　$AG=AL$

(由圓外一點至此圓之兩切線必等)

同樣　$BG=BH$

$CI=CH$

$DI=DJ$

$EK=EJ$

$FK=FL$

相加　$AG+BG+CI+DI+EK+FK$

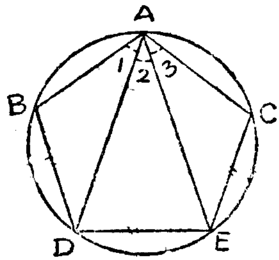
$=Al+BH+CH+DJ+EJ+FL$

即　$AB+CD+EF=BC+DE+AF$

12. 從圓內接正五邊形一角之頂點，作諸對角線，求證諸對角線分此角爲三等分。

〔解〕設ABCDE爲一正五角形

AD,AE為對角線



求證 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$

$BD=DE=CE$

證 $\because$ $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{CE}$

(等弧必對等弦)

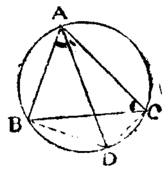
$\therefore$ $\angle 1=\angle 2=\angle 3$

(等弧所對圓周角相等)

【習題】

1. 設ABC為銳角三角形,其外接圓之直徑為AD,則角BAD、CAD分別為ACB、ABC之餘角.

〔提示〕



求證 $\angle BAD+\angle ACB=90°$

$\angle CAD+\angle ABC=90°$

2. 設圓之內接四邊形中,一雙對邊相等,則他雙對邊平行.

3. 圓之內接平行四邊形必為矩形.

4. 圓之內接等邊五邊形之各對角線,平行於一邊。

〔提示〕 應用定理120及34.

(4) 直線形之外接圓及內切圓

【定義】

(a) 外接圓 過直線形之各角形,所畫之圓,稱為直線形之外接圓。(Circumscribed circle)

(b) 內切圓 切於直線形各邊之圓,稱為直線形之內切圓。(Inscribed circle)

(c) 傍切圓　切於三角形之一邊及他二邊之延長線之圓，謂之傍切圓(Escribed circle 或Excribed circle,或Ex-circle)
(d) 外心　外接圓之圓心，謂之外心(Circumcentre)
(e) 內心　內切圓之圓心，謂之內心 (Incentre)
(f) 傍心　傍切圓之中心，謂之傍心 (Excentre)
(g) 垂心　由三角之各角頂，向其對邊引三垂線，其交點稱為三角形之垂心 (Orthocentre)
(h) 重心　三角形三中點之交點，稱爲三角形之重心(Centroid 或 Center of gravity)。

【定理】

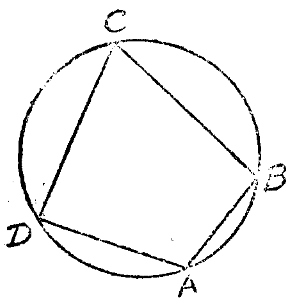
123.設四邊形兩對角互爲補角，則過此四邊形之各頂，可作一外接圓。

124.有法多邊形，可作一外接圓及一內切圓。

125.(a) 三角形外接圓之圓心，爲三角形二邊垂直平分線之交點。 (b) 三角形內切圓之圓心，爲三角形二角平分線之交點 (c) 三角形傍切圓之圓心，爲三角形二外角平分線之交點。

【證明】

1. 設四邊形之兩對角之和等於兩直角，則可作一外接圓，試證明之。　　定理123



設ABCD爲四邊形，∠A，∠C，爲兩對角，等於兩直角，

求證　四邊形ABCD可作一外接圓。

證　設ABCD之外接圓爲已作，

$\angle A$以弧BCD之半度之

$\angle C$以弧BAD之半度之，

則($\angle A+\angle C$)以(弧BCD+弧BAD)之半度之，即以圓周之半度之，

但圓周爲$360°$，

則 $\angle A+\angle C$爲$\frac{1}{2}\times 360°=180°=2rt\angle$

故若$\angle A$及$\angle C=2rt\angle s$，則$\angle A$及$\angle C$之兩角頂，必在圓周上，

若$\angle A$及$\angle C$大於或小於$2rt\angle s$，則必有一角頂不在圓周上，

但　$\angle A+\angle C+\angle B+\angle D=4rt\angle s$

（四邊形四角之和等於四直角）

$\therefore$　$\angle B+\angle D=4rt\angle s-2rt\angle s=2rt\angle s$

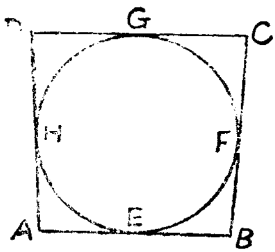
則　B及D亦必在圓周上。

$\therefore$　四邊形ABCD可作一外接圓。

【例題】

1．在四邊形 ABCD 中，若$AB+CD=AD+BC$，則該形必有一內切圓

〔解〕



設ABCD爲一四邊形，可作一內切圓EFGH

必有　$AB+CD=AD+BC$。

令　$AE=AH$

$BE=BF$

$CG=CF$

$$DG=DH$$

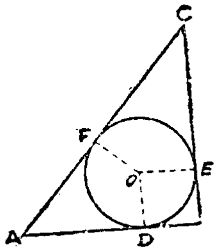
$$AE+BE+CG+DG=AH+BF+CF+DH$$

即 $AB+CD=AD+BC$

則在四邊形ABCD中可作一內切圓。

2. 直角三角形之內切圓之直徑，等於此三角形兩腰之和與斜邊之差。

〔解〕



設△ABC爲直角三角形，∠B爲直角，D，E，F爲諸切點。

求證　圓之直徑 $=AB+BC-AC$。

證　自O，作DO，EO，FO，

$EO\perp BC$，$DO\perp AB$，

（圓之切點，必垂直於至切點之半徑。）

∴ $DO\parallel BE$，$EO\parallel BD$，

（設兩直線在一平面內，同垂直於一直線，則此兩線必平行）

∴ $DO=BE$　　$EO=BD$

（平行綫界在兩平行綫間者必等）

相加　$DO+EO=BE+BD=(BC-CE)+(AB-AD)$

但　$CE=CF$　　$AD=AF$.

（由圓外一點至此圓之兩切線必等）

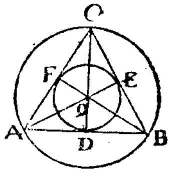
代入　$DO+EO=BC-CF+AB-AF$

$=BC+AB-(CF+AF)$

$=AB+BC-AC$.

圓之直徑 $=AB+BC-AC$

3. 證明等邊三角形中內心、外心、垂心、重心四點相合。



設 AE, BF, CD 爲等邊三角形之三垂線，相遇於 O，即 O 爲 △ABC之垂心

求證　O爲垂心，重心，內心，外心。

證　已知O爲△ABC之垂心，則

在rt.△ABF及rt.△BCF內

AB＝BC

∠BAC＝∠ACB.

(等邊三角形必等角)

∴　△ABF＝△BCF.

∴　AF＝CF.

∴　BF爲AC之垂直平分線

同樣可證　AE, CD爲BC及AB之垂直平分綫。

三垂直平分線相遇於一點O，則O點爲△ABC之重心

因　AE＝BF＝CD

AO＝BO＝CO

(三角形總例題6)

∴　以O爲圓心，以CO爲半徑，可作△ABC之一外接圓；

∴　O爲△ABC之外心

又因　△ABF＝△BCF

∴　∠ABF＝∠CBF

則BF爲∠ABC之分角綫

同樣可證　CD, AE爲∠ACB及∠BAC之兩分角綫。

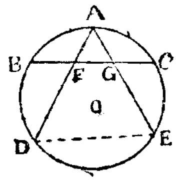
三分角綫相遇一點O，　(三角形例題6)

則以O爲圓心，以OE爲半徑，可作一△ABC之內切圓，

∴　O為△ABC之內心。

4. BC為圓O之一弦，由此弦所對弧之中點A引任意二弦AD，AE交BC於F，G；則D，E，F，G在同一圓周上。

〔解〕求證　D，E，G，F在同一圓周上



證　作DE

$\angle$DFG以$\frac{1}{2}$（CED弧＋AB弧）度之，

（兩弦於圓周內相交，其所成之角可以其所截之弧之和之半度之）

$\angle$GED以$\frac{1}{2}$（BD弧＋AB弧）即

$\frac{1}{2}$（BD弧＋AC弧）度之，

（圓周角以所截之弧之半度之）。

則　$\angle$DFG＋$\angle$GED以$\frac{1}{2}$（CED弧＋AB弧＋BD弧＋AC弧）；

即$\frac{1}{2}$圓周度之。

但圓周＝360°

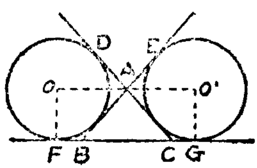
∴　$\angle DFG+\angle GED=\frac{1}{2}\times 360^\circ=180^\circ$

四邊形DEGF可作一外接圓，　　　（定理123）

∴　D，E，G，F在同一圓周上。

5. 三角形之二傍切圓相等，則此三角形為等腰。

〔解〕



設圓O及圓O'為△ABC之傍切圓，且圓O等於圓O'

求證　AB＝AC。

證　作聯心線OO'，

由O作FO， 由O'作GO'

則 $FO \perp FG$ $GO' \perp FG$， （定理104）

$FO \parallel GO'$ （定理23）

又 $FO = GO'$ （定理116b）

∴ FOO'G爲一平行四邊形 （定理69）

$OO' \parallel FG$.

又 O必在∠BAD之平分線上，O'必在∠CAE之平分線上，

（定理125C）

但 ∠BAD及∠CAE爲對頂角

則 OO'必過A點.

今 $\angle DAO = \angle ACB$.

（同位角相等）

$\angle BAO = \angle ABC$

（內錯角相等）

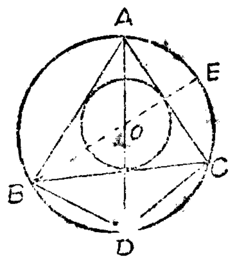
但 $\angle DAO = \angle BAO$

∴ $\angle ACB = \angle ABC$

∴ $AB = AC$ （定理45b）

6. 設三角形ABC內切圓之圓心爲O，過O及三角形之頂點A，引一直線，命其與三角形外接圓之交點爲D，則BD，DO，CD相等。

〔解〕



求證 $BD = DO = CD$.

證 作BO，延長之與外接圓相交於E，

因O爲△ABC之內心，則O必在

∠A之平分線內 （定理125b）

即　$\angle BAD=\angle CAD$

弧BD＝弧CD　　(定理86b)

(同圓內，等圓同角必對等弧)

$\therefore$　BD＝CD.　　(定理88)

(同圓內，等弧必對等弦)

同樣　$\angle ABE=\angle CBE$

弧AE＝弧CE

今　$\angle BOD$以$\frac{1}{2}$(弧BD＋弧AE)度之　　(定理113)

$\angle DBE$以$\frac{1}{2}$(弧CD＋弧CE)度之　　(定理107)

代入　$\therefore$　$\angle BOD=\angle DBE$

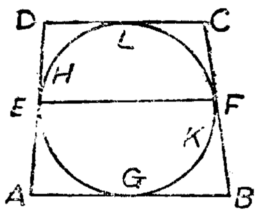
$\therefore$　BD＝DO　　(定理45b)

(在三角形內，對等角之邊必等)。

$\therefore$　BD＝DO＝CD.

7. 圓之外切梯形之中線，等於其周界之四分之一(廣西會考)

〔解〕



設ABCD為一外切梯形，G,H L,K為切點，EF為中線，

求證　$EF=\frac{1}{4}(AB+BC+CD+AD)$

證　AG＝AH

BG＝BF

CL＝CF

DL＝DH

(由圓外一點至此圓之切線必等)

相加　AG＋BG＋CL＋DL＝AH＋BF＋CF＋DH

即 $AB+CD=BC+AD.$

但 $EF=\frac{1}{2}(AB+CD)$

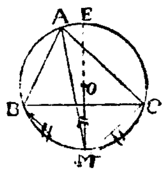
(梯形之中線，必等於兩底之半和)

$\therefore$ $EF=\frac{1}{4}(AB+CD+BC+AD)$

【習題】

1. 聯等腰三角內切圓之切點所得之三角形，必爲等腰。
2. 設三角形ABC之外心爲O，弧BC之中心爲M，則角AMO等於角B，C之差之半。

〔提示〕



求證 $\angle AMO=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$

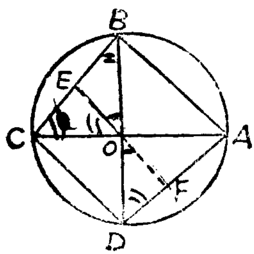
$DM\perp BC$ (定理94)

弧BE＝弧CE

弧AE $=\frac{1}{2}$(弧AC－弧AB)

3. 設三角形之內切圓及外切圓爲同心，則此三角形必等邊。
4. 圓之內接四邊形，若二對角線互相垂直，則自交點至一邊之垂線，必平分其對邊。

〔提示〕



求證 $AF=DF.$

證 $\angle ACB=\angle ADB$

$\triangle CEO\backsim\triangle BEO$

次證 $\angle DOF=\angle FDO$

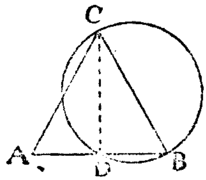
$FO=AF.$

(5)　圓與直線形之關係

【例題】

1. 將等腰三角形之一邊爲直徑作圓，證明圓周必平分此三角形之底邊。

〔解〕



設△ABC爲等腰三角形，BC，AC爲兩腰，以BC爲直徑作圓過AB於D，

求證　AD＝BD，

證　聯CD，

$\angle BDC = 90°$

（半圓之內切角必爲直角）

$CD \perp AB$，

$AC = BC$

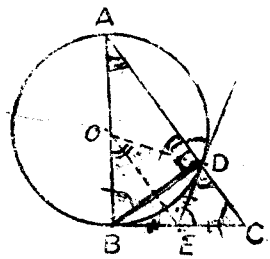
CD爲公共邊

$\therefore$　$\triangle ACD = \triangle BCD$

（直角三角形有一腰一弦相等，則兩三角形必等）

$\therefore$　$AD = BD$.

2. 設直角三角形ABC之一腰AB爲圓之直徑，此圓與斜邊AC相交於D，求證在D點上所作之切線平分其他一腰BC。



〔解〕求證 BE＝CE.

證 自O作DO及EO.

∴ ∠BOE＝∠DOE.

（由圓外一點至此圓之兩切線必等，且聯切點與圓心之線及聯此點及圓心之線，成兩等角）

但 ∠BOD＝∠DAO＋∠ADO.

（三角形之一外角等於內對兩角之和）

在 △ADO內

因 AO＝DO

（圓之半徑必等）

∴ ∠DAO＝∠ADO

則 ∠BOD＝2∠DAO

又 ∠BOD＝∠BOE＋∠DOE＝2∠BOE.

∴ ∠DAO＝∠BOE.

∴ AC ∥ EO

（因同位角相等）

因 AO＝BO

∴ BE＝CE.

（設一線為數平行線所截，其所截之線分若相等，則他線為此數線所截者，其所截之線分亦相等）

【習題】

1. 設ABC為等腰三角形，以底邊AB為直徑作圓，截兩腰於E及F，D為AB之中點，試證△ADE＝△EDF

2. 試用另一方法，證例題2.

∠BDC為直角
DE=DE.

(七) 比例問題

【前言】 幾何學上之比例問題,大部分係由相似形而來,故本章先述相似形,次及圓形之比例,至於比例之演算,希讀者參閱高中代數複習指導比例章,以資熟習.

(1) 相似形

【定義】

1. 相似多邊形 設兩多邊形之諸相當角相等,諸相當邊成比例,則此兩多邊形相似,(通常恆以略號∽表示之),並稱此兩多邊形爲相似多邊形。

【定理】

126. 兩互等角三角形必相似。

127. (a)設兩三角形,有兩角彼此相等,則此兩形必相似,(b)設兩直角三角形,有一銳角彼此相等,則此兩形必相似.

128. 設兩三角形有一角彼此相等,且兩夾邊成比例,則此兩形必相似。

129. 設兩三角形之諸邊成比例,則此兩形必相似。

130. (a)設兩三角形之諸邊,彼此各平行或彼此各垂直,則此兩形必相似,(b)兩三角形之邊,彼此平行或彼此垂直者爲相當邊。

131. (a)設兩多邊形相似,則可分爲同數三角形,彼此各相似,且在相似位置,(b)同邊數之兩有法多邊形必相似。

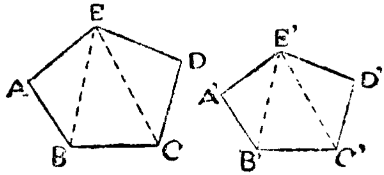
132. 設兩多邊形可分爲同數三角形,彼此各相似,且在相似位置,則此兩多邊形必相似。

133. 設由直角三角形之直角頂至其弦,作垂線,則所成之兩三角形,與原三角形相似,且彼此相似。

〔證明〕

1. 設兩多邊形相似，則可分為同數三角形，彼此各相似，且在相似位置——定理130a.

〔證明〕



設兩多邊形ABCDE及A'B'C'D'E'相似，由兩相當頂如E及E'作諸對角線BE,B'E',CE及C'E'等，

求證 $\triangle ABE \backsim \triangle A'B'E'$

$\triangle BCE \backsim \triangle B'C'E'$

$\triangle CDE \backsim \triangle C'D'E'$

證 在$\triangle ABE$及$\triangle A'B'E'$內

$\angle A = \angle A'$

$AE : A'E' = AB : A'B'$

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle A'B'E'$ （定理128）

（設兩三角形，有一角彼此相等，且兩夾邊成比例，則此兩形必相似）

但 $\angle ABC = \angle A'B'C'$

$\angle ABE = \angle A'B'E'$

相減 $\angle EBC = \angle E'B'C'$

今 $BE : B'E' = AB : A'B'$

$BC : B'C' = AB : A'B'$

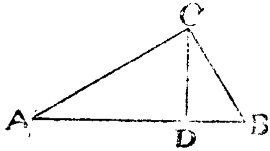
$\therefore$ $BE : B'E' = BC : B'C'$

$\therefore$ $\triangle BCE \backsim \triangle B'C'E'$

同樣可證 $\triangle CDE \backsim \triangle C'D'E'$

2. 設由直角三角形之直角頂至其弦，作垂線，則所成之兩三角形，與原三角形相似，且彼此相似。——定理133.

〔證明〕



設CD爲由直角頂C至弦AB所成之垂線，

求證　△ABC，△ACD，△BCD相似

證　rt.△ABC及rt.△ACD有一公共角∠A，

∴　△ABC∽△ACD　　(定理127b)

又　rt.△ABC及rt.△BCD有一公共角∠B，

∴　△ABC∽△BCD　　(定理127b)

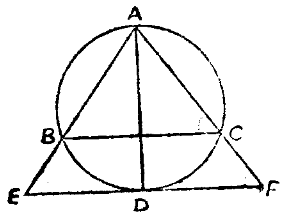
∴　△ACD∽△BCD

△ABC，△ACD、△BCD相似。

例題】

1. AB及AC爲由圓周上任一點A所引之二弦。AD爲直徑，於D點作切線。交AB及AC之延長線於E及F，試證兩三角形ABC及AEF爲相似。

〔解〕



求證　△ABC∽△AEF.

證　∠AEF以$\frac{1}{2}$(弧AD－弧BD)度之

(設由圓外一點至此圓作一割線一切線，其所成之角，可以其所截弧之差之半度之)

但AD爲直徑

則弧ACD＝弧ABD

代入　則　∠AEF以$\frac{1}{2}$(弧ABD－弧BD)

即 $\frac{1}{2}$弧AB度之。

但 $\angle ACB$亦以$\frac{1}{2}$AB弧度之

（圓周角以所截之弧之半度之）

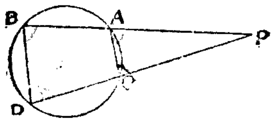
$\therefore$ $\angle AEF=\angle ACB$

$\angle EAF$為公共角。

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle AEF$

2. 由圓周外一點P，作兩割線PAB和PCD，與圓周交於A,B,C,D，求證$\triangle PAC \backsim \triangle PBD$

〔解〕



求證： $\triangle PAC \backsim \triangle PBD$

證： $\because \angle ABD=180^\circ-\angle ACD$

（因$\angle ABD$與$\angle ACD$互為補角，因以圓周之半度之）

$\angle ACP=180^\circ-\angle ACD$

（$\angle ACP$與$\angle ACD$互為補角）

$\therefore$ $\angle ABD=\angle ACP$

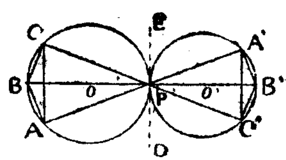
同樣可證 $\angle BDC=\angle CAP$

$\angle P$為公共角

$\therefore$ $\triangle PAC \backsim \triangle PBD$ （定理126）

3. 設兩圓相切于P，過P，作三直線交一圓周于A，B，C，又交他圓周于A'B'C'。則$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，

〔解〕求證 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。



證 過P作兩圓之切線DE，

$\angle CPE=\angle CAP$

（各以$\frac{1}{2}$CP弧度之）

$\angle CPE = \angle C'PD$

(對頂角相等)

又　$\angle C'PD = \angle C'A'P$

∴　$\angle CAP = \angle C'A'P$

∴　$AC \parallel A'C'$

(內錯角相等,則兩線必平行)

同樣可證　$AB \parallel A'B'$

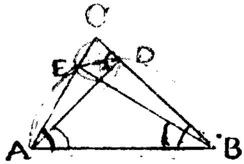
$BC \parallel B'C'$

∴　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$　(定理130a)

(兩三角形之諸邊,彼此各平行,則兩形必相似)

4. 銳角三角形ABC中,由A及B至對邊引垂線AD,BE,則三角形CDE,ABC相似。

〔解〕



求證　$\triangle CDE \backsim \triangle ABC$

證　$\angle AEB = \angle ADB = rt\angle$.

則過A,B,D,E可作一圓,　(定理103)

(半圓之內切角,必爲直角)

ABDE爲一圓之內接四邊形,

∴　$\angle CDE = \angle BAC$　(圓之內接直線形例題6)

(圓之內接四邊形,其外角等於內對一角)

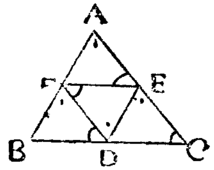
同樣　$\angle CED = \angle ABC$

∴　$\triangle CDE \backsim \triangle ABC$.　(定理127a)

(設兩三角形,有兩角彼此相等,則此兩形必相似)

5. 聯結三角形三邊中點而得之三角形,與原三角形相似。

〔解〕



設D,E,F爲△ABC各邊之中點,聯之。

求證 △DEF∽△ABC.

證 EF ∥ BC (定理52)

(聯三角形兩邊中點之線,必與第三邊平行)

同樣 DE ∥ AB

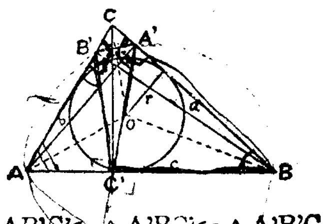
DF ∥ AC,

∴ △DEF∽△ABC. (定理130a)

(設兩三角形之諸邊彼此各平行,則此兩形必相似)

6. 三角形ABC之三垂線爲 AA',BB',CC', 內切圓半徑爲r,試證 三角形AB'C',A'BC'爲相似三角形。

〔解〕



求證 △AB'C'∽△A'BC'∽△A'B'C

證 因∠AB'B=∠AA'B=rt∠

則過ABA'B'可作一外接圓。

∠ABC =∠CB'A'

∠BAC=∠B'A'C.

(圓之內接四邊形,其外角等於內對角)

∴ △A'B'C∽△ABC.

同樣可證

△A'BC'∽△ABC.

△AB'C'∽△ABC.

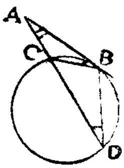
∴ $A'B'C \backsim \triangle A'BC' \backsim \triangle AB'C'$

【習題】

1. 平行於三角形之一邊之直線，截一三角形與原三角形相似。

2. 設由圓外一點A，引圓之切線AB，及割線ACD，則三角形ABC，ABD相似。

〔提示〕



(2) 比 例

【定義】

1. 內分比　設已知線AB，於其兩端A及B間，有一點M，則稱M內分此線為兩線分AM及BM．若此兩線分中有一線分為全線及他一線分之比例中項，則稱M分AB為內分比．例如

AB內分於M，設$AB : AM = AM : BM$則M分AB為內分比。

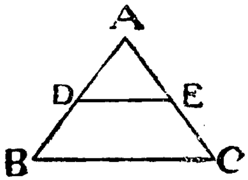
2. 外分比　設一已知線AB，於其延長線內，有一點N，則稱N外分此線為兩線分AN及BN．若此兩線分中有一線分為全線及他一線分之比例中項，則稱N分AB為外分比。例如

AB外分於N，設$AB : AN : = AN : BN$．則稱N分AB為外分比。內分比及外分比，合稱內外分。

【定理】

134．設過三角形之兩邊，作一線與第三邊平行，必分此兩邊成比

例，如



DE ∥ BC

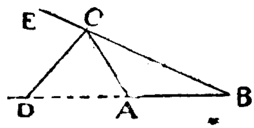
則 AD : DB = AE : EC.

135. 設三角之兩邊爲與其底平行之一直線所截，則其一邊比其一線分，若其他邊比其相當線分。

136. 設一直線，分三角形之兩邊成比例，則必與第三邊平行。

137. 三角形之一角之平分線，分其對邊成兩線分，與其兩鄰邊爲比例。

138. 三角形之外角之平分線，外分其對邊成兩線分，與其兩鄰邊爲比例。如



CD爲△ABC之外角∠ACE之平分線，遇AB之延線於D，則

AD : BD = CA : BC.

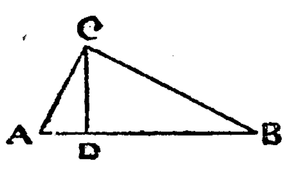
139. 兩相似三角形之相當高之比，等於其相當邊之比。

140. (a)設由直角三角形之直角頂至其弦作垂線，則垂線爲弦上兩線分之比例中項。(b)設由直角三角形之直角頂至其弦作垂線，則直角三角形之腰，爲弦及其鄰線分之比例中項。如

CD爲rt.△ABC之直角頂C至AB之垂線，則(a) AD : CD = CD : BD.

(b) AB : AC = AC : AD

AB : BC = BC : BD



141. 設兩線爲數平行線所截，則其諸相當線分成比例。

142. (a)設兩平行線爲過同點之數截線所截，則其諸相當線分成比例。(b)設兩平行線爲數不平行線所截，其諸相當線分成比例，則此數截線必過同點。

143. 設由圓外一點至圓作一切線一割線，則此切線爲割線及割線圓外線分之比例中項。

144. (a)由圓周上一點，至直徑之垂線，爲所分直徑上兩線分之比例中項。(b)由圓周上一點，至直徑之各端之弦，爲直徑及其鄰線分之比例中項。

145. 同邊數之兩有法多邊形之周界之比，等於其外切圓之半徑之比，亦等於其內切圓之半徑之比。

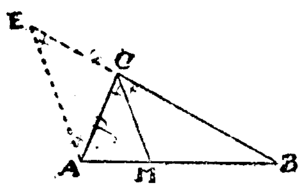
146. 兩圓周之比，等於其半徑之比。

147. 兩相似弧之比，等於其半徑之比。

【證明】

1. 三角形之一角之平分線，分其對邊成兩線分，與其兩鄰邊爲比例　　　　定理137.

〔證明〕



設CM平分△ABC之∠C,

求證　AM : BM = AC : BC.

證　作AE ∥ CM遇BC之延長線於E,

則AM : BM = CE : BC.

(設過三角形之兩邊作一線，與第三邊平行，必分其兩邊成比例)

但　∠ACM = ∠CAE

∠BCM = ∠AEC

∴　∠CAE = ∠AEC

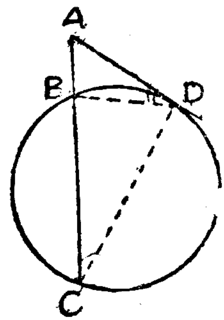
$\therefore \quad CE = AC.$

代入 $AM : BM = AC : BC.$

2. 設由圓外一點至圓，作一切線一割線，則此切線爲割線及割線圓外線分之比例中項。

—— 定理143.

〔證明〕



設AD爲由點A至圓BCD之切線，AC爲割線，

求證 $AC : AD = AD : AB.$

證 作CD及BD.

在$\triangle ABD$及$\triangle ACD$內

$\angle A$爲公共角

$\angle ACD = \angle ADB.$

（因同以$\frac{1}{2}$BD弧度之）

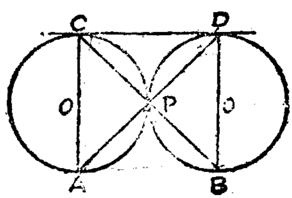
$\therefore \quad \triangle ABD \backsim \triangle ACD$

$\therefore \quad AC : AD = AD : AB.$

【例題】

1. 若兩圓相切，其外公切線爲兩直徑之比例中項。

〔解〕



設圓O與圓O'相切於P.

CD爲其外公切線，AC，BD爲兩圓之直徑。

求證 $AC : CD = CD : BD$

證 連結AP，BP，CP，DP.

則以 $\angle BPD = \angle R, \angle CPD = \angle R$

$\therefore$ $\angle BPD + \angle CPD = 2\angle R$

故 BP，CP在一直線上。

同理 AP，DP亦在一直線上。

於是 在rt.$\triangle$ACD，BCD內，

$\because$ $\angle BCD = \angle CAD$

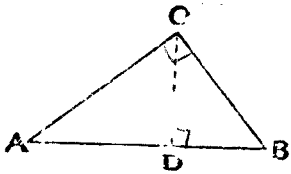
（一切線與一弦所成之角，等於該弦所對弧上之圓周角）

$\therefore$ rt.$\triangle ACD \backsim$ rt.$\triangle BCD$

$AC : CD = CD : BD$

2. 直角三角形兩腰之平方和，等於其弦之平方。

〔解〕



設ABC爲直角三角形，$\angle ACB$爲直角。

求證 $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$

證 作$CD \perp AB$.

在rt.$\triangle$ABC及rt.$\triangle$ACD內

$\angle CAD$爲公共角

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle ACD$. （定理127b)

$AD : AC = AC : AB$.

$AD \cdot AB = \overline{AC}^2$

同樣可證 $\triangle BCD \backsim \triangle ABC$.

$BD : BC = BC : AB$

$BD \cdot AB = \overline{BC}^2$

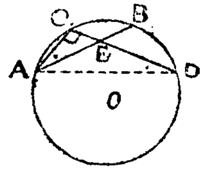
相加 $AD \cdot AB + BD \cdot AB = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$

$AB(AD + BD) = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2$

$\therefore \quad \overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$.

3. 若C是弧AB的中點，又弦CD和AB相交於一點E，則CE：CA＝CA：CD.

〔解〕證：作 AD



則 在△ACE，ACD中

$\angle CAE=\angle ADC$

(因弧AC＝弧DC)

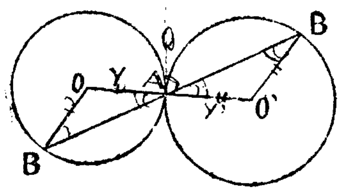
$\angle ACD$為公共角，

$\therefore \quad \triangle ACE\sim\triangle ACD$ (定理127a)

CE：CA＝CA：CD

4. 若經過二外切圓的切點作一割線，則所成二弦之比等於二圓半徑之比。

〔解〕



設圓O及圓O'相切於A，BB'為過點A所作之弦，OO'為兩圓之聯心線。

求證 AB：AB'＝r：r'

證 OO'必過A點。 (定理119)

(兩圓相切，其聯心線必過切點)

在 △ABO及△AB'O中，

$\angle BAO=\angle B'AO'$ (對頂角相等)

BO＝AO，AO'＝B'O

(半徑相等)

$\therefore \quad \angle ABO=\angle BAO$,

$\angle B'AO'=\angle AB'O'$

(對等邊之角必等)

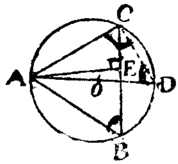
$\therefore$ $\angle ABO = \angle AB'O'$

$\therefore$ $\triangle BAO \backsim \triangle B'AO'$ （定理127a）

$\therefore$ $AB : AB' = r : r'$

5. 三角形兩邊之積，等於其外接圓之直徑與立於第三邊上之高之積。

〔解〕設圓ABCD爲△ABC之外切圓，AE爲BC上之高，AD爲直徑，



求證 $AB \cdot AC = AD \cdot AE$

證 作CD，

$\angle ACD$爲直角

（半圓之內切角必爲直角）

在rt.△ABE及rt.△ACD內

$\angle ABE = \angle ADC$

（因同以$\frac{1}{2}$AC弧度之）

$\therefore$ $\triangle ABE \backsim \triangle ACD$ （定理127a）

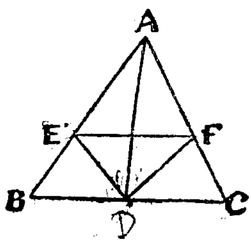
$\therefore$ $AB : AD = AE : AC$

$AB \cdot AC = AD \cdot AE$

【習題】

1. 設D爲BC之中點，DE平分ADB；DF平分ADC，求證EF平行BC。

〔提示〕



$AE : BE = AD : BD$.

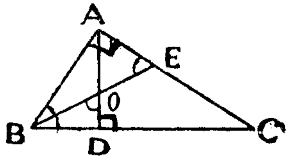
$AF : CF = AD : CD$ （定理137）

次證 $AE : BE = AF : CF$.

2. 直角三角形ABC自直角頂A，引BC之垂線AD，而角B之平分線BE與AC相交於E，與AD相交於O，

則DO：AO＝AE：CE.

〔提示〕



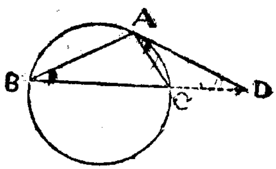
因　BO爲∠B之平分線，

　　BD：AB＝DO：AD

又　△ABD∽△ABC.

3. 圓之內接三角形ABC，作角A之切線，與BC之延線相交於D，則$CD : BD = \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2$

〔提示〕



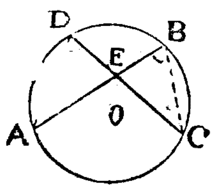
$\overline{CD}^2 : \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2$

$CD : AD = AD : BD.$　　　　(定理141)

即　$\overline{AD}^2 = CD \cdot BD.$

4. 設兩弦於圓內相交，其兩線之積，彼此相等。

〔提示〕



求證　$AE \times BE = CE \times DE$

$\triangle ADE \backsim \triangle BCE.$

（八） 面積問題

【前言】 幾何學上之面積問題，大部分係由面積之比而來，故本章先述面積之比，次述平面形之面積。

(1) 面積之比

【定義】

A. 面積之單位 其邊為單位長度之正方形，為面積之單位。如一平方寸，即每邊一寸之正方形也。

B. 面積 平面形內所含面積單位之數，稱為幾何圖形之面積。

【定理】

148.(a)等底之兩三角形面積之比，等於其高之比。(b)等高之兩三角形面積之比，等於其底之比。(c)兩三角形面積之比，等於其底高相乘積之比。

149.(a)等底之兩矩形面積之比，等於其高之比，(b)等高之兩矩形面積之比，等於其底之比，(c)兩矩形面積之比等於其底高相乘積之比。

150.(a)等底之兩平行四邊形面積之比，等於其高之比。(b)等高之兩平行四邊行面積之比，等於其底之比。(c)兩平行四邊形面積之比，等於其底高相乘積之比。

151.設兩三角形，有一角彼此相等，則此兩形之面積之比，等於夾此角之兩邊之積之比。

152.兩相似三角形面積之比，等於任兩相當邊之平方之比。

153.(a) 兩相似多邊形面積之比，等於其任兩相當邊之平方之比。

(b) 兩相似多邊形之相當邊之比，等於其面積平方根之比。

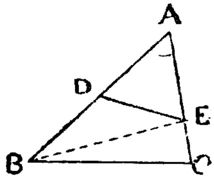
154.同邊數之兩有法多邊形面積之比，等於其外切圓半徑之平方之比，亦等於其內切圓之半徑之平方之比。

155. 兩圓面積之比，等於其半徑之平方之比。

【證明】

1. 設兩三角形，有一角彼此相等，則此兩形之面積之比，等於夾此角之兩邊之積之比。—— 定理151

【證明】



設兩三角形ABC及ADE有公共角A

求證 $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle ADE}=\dfrac{AB\times AC}{AD\times AE}$

證 作BE

則 $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle ABE}=\dfrac{AC}{AE}$ （定理145b）

（等高之兩三角形之比　於其底之比。）

$\dfrac{\triangle ABE}{\triangle ADE}=\dfrac{AB}{AD}$

（等高之兩三角形之比，等於其底之比。）

兩式相乘則

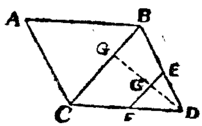
$\dfrac{\triangle ABC}{\triangle ADE}=\dfrac{AB\times AC}{AD\times AE}$

【例題】

1. 聯一平行四邊形兩鄰邊之中點，成一三角形；求此三角形與此平行四邊形面積之比。

〔解〕設 ABCD爲一平行四邊形

E爲BD之中點，F爲CD之中點



作 DG⊥BC

$EF=\dfrac{1}{2}BC$, $EF \parallel BC$

（聯三角形兩邊中點之線，必與第三邊平行，且等於第三邊之半）

∴ $DG'=\dfrac{1}{2}DG$

面積$\triangle DEF=\dfrac{1}{2}EF\cdot DG'$

面積$\triangle BCD \backsimeq \frac{1}{2}\times 2DG' \times 2 \times EF = \frac{1}{2}\times 4 \times DG' \times EF$

∴　$\triangle BCD \backsimeq 4\triangle DEF$

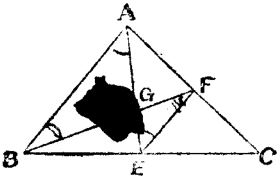
但　$\square ABCD \backsimeq 2\triangle BCD$

∴　$\square ABCD \backsimeq 8\triangle DEF$

即　$\square ABCD : \triangle DEF = 8 : 1$

2. 三角形ABC之中線AE，BF相交于G，求三角形AGB與三角形EGF之面積之比。

〔解〕



設　AE，BF爲△ABC之中線相交於G，聯FE，

求　△ABG及△EFG面積之比，

因　$EF \parallel AB$，$EF = \frac{1}{2}AB$

（聯三角形中點之線，必與第三邊平行，且等於第三邊之半）

∵　$\angle BAE = \angle AEF$

$\angle ABF = \angle BFE$

（內錯角相等）

∴　$\triangle ABG \backsim \triangle EFG$

∴　$\triangle ABG : \triangle EFG = \overline{EF}^2 : \overline{AB}^2$

（兩相似三角形之面積之比，等於任兩相當邊之平方之比，）

即　$\angle ABG : \angle EFG = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 : \overline{AB}^2$

$\triangle ABG : \triangle EFG = \frac{\overline{AB}^2}{4} : \overline{AB}^2$

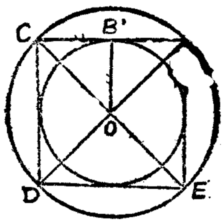
$$\therefore \quad \frac{\triangle ABG}{\triangle EFG} = \frac{\frac{\overline{AB}^2}{4}}{\overline{AB}^2} = \frac{1}{4}$$

即 $\triangle ABG : \triangle EFG = 1 : 4$

3. 有圓內容一方形，再於其正方形內容一圓，再求兩圓之面積之比。

$$\frac{A_2}{A_1} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

〔解〕



作直徑BD，再作直徑CE⊥BD，得B，C，D．E四點，聯之得正方形，由O作OB⊥BC，以OB爲半徑作圓，則得正方形之內切圓。

因 $B'O = \sqrt{\overline{CO}^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2} = \sqrt{\overline{CO}^2 - \frac{1}{4}\overline{BC}^2}$

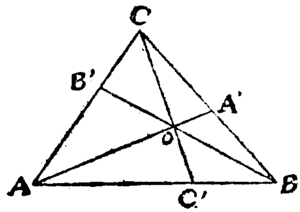
$$= \sqrt{\overline{CO}^2 - \frac{1}{4}(2CO^2)} = \frac{CO}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\left(\frac{CO}{\sqrt{2}}\right)^2 \pi}{(CO)^2 \pi} = \frac{1}{2}$$

4. 設由三角形ABC之三頂至其對邊作三直線AA'，BB'，CC' 且此三直線同過三角形內之一點O；試證

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1$$

〔解〕



設O爲三角形ABC內一點，過O作AA'BB'及CC'

求證 $\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}=1$

證 $\frac{OC'}{CC'}=\frac{\triangle AC'O}{\triangle ACC'}=\frac{\triangle BC'O}{\triangle BCC'}$

(同高之三角形面積之比，等於其底邊之比)

$\therefore\quad \frac{OC'}{CC'}=\frac{\triangle AC'O+\triangle BC'O}{\triangle ACC'+\triangle BCC'}=\frac{\triangle AC'O+\triangle BC'O}{\triangle ABC}$

同樣可證 $\frac{OB'}{BB'}=\frac{BA'O+\triangle CA'O}{\triangle ABC}$

$\frac{OA'}{AA'}=\frac{\triangle CB'O+\triangle AB'O}{\triangle ABC}$

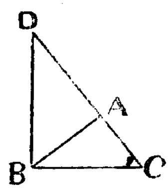
相加 $\frac{OA'}{AA}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}$

$=\frac{\triangle AC'O+\triangle BC'O+\triangle BA'O+\triangle CA'O+\triangle CB'O+\triangle AB'O}{\triangle ABC}$

$=\frac{\triangle ABC}{\triangle ABC}=1$

5. 設兩三角形ABC，BCD有公共角C及公共邊BC，且BD⊥BC，AB⊥CD，則三角形ABC與BCD之比等於AC與CD之比。

〔解〕



求證 $\triangle ABC:\triangle BCD=AC:CD$

證 $\angle CBD=\angle BAC=rt\angle$.

$\angle C$爲公共角

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle BCD$. (定理127b)

$\triangle ABC:\triangle BCD=\overline{BC}^2:\overline{CD}^2$ (定理149)

(兩相似三角形面積之比，等於任兩相當邊之平方之比)

又 $AC:BC=BC:CD$.

(相當邊成比例)

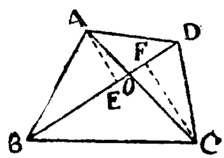
$\overline{BC}^2=AC\cdot CD$.

代入 $\triangle ABC:\triangle BCD=AC\cdot CD:\overline{CD}^2$

$=AC:CD$.

6. 四邊形ABCD兩對角線之交點爲O，則△ABD及△BCD之比，等於AO及CO之比。

〔解〕



求證 $\triangle ABD:\triangle BCD=AO:CO$

證 作$AE\perp BD$，$CF\perp BD$.

$\angle AOE=\angle COF$

(對頂角相等)

∴ $\triangle AEO\backsim\triangle CFO$

$AO:CO=AE:CF$

但 $\triangle ABD:\triangle BCD=AE:CF$ (定理148a)

(等底兩三角形面積之比，等於其高之比)

∴ $\triangle ABD:\triangle BCD=AO:CO$

【習題】

1. 四邊形之兩對角線，分四邊形成四個三角形，互成比例。

〔提示〕 應用定理148b

2. 由直角三角形ABC之直角頂A，至弦引垂線AD，則$\triangle ABC : \triangle ABD = \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2$，$\triangle ABC : \triangle ACD = \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2$.

3. 在圓O內，弦AB＝弦AC，OD⊥AB及OF⊥AC，試證$\triangle ADO \cong \triangle AEO$

〔附註〕 ≌爲相似且相等之符號

(2)　面　積

【定義】

1. 頂心距　多邊形之外切圓之半徑，過多邊形之角頂及圓心者，稱爲多邊形之頂心距。

2. 邊心距　多邊形之內切圓半徑，過內切圓之切點及圓心者，稱爲多邊形之邊心距。

3. 中心　多邊形內切圓及外切圓之圓心相同時，此公心稱爲多邊形之中心。

4. 中心角　由多邊形之中心，至一邊之兩端之兩頂心距間之角，稱爲多邊形之中心角。

【定理】

156. 三角形之面積，等於其底高相乘積之半。

175. 設a，b，c爲三角形之三邊$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，則三角形之面積等於　$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

158. 平行四邊形之面積，等於其底高相乘之積。

159. 矩形之面積，等於其底高相乘之積。

160. 梯形之面積，等於其兩底之半和乘高之積。

161. 梯形之面積，等於其中線乘高之積。

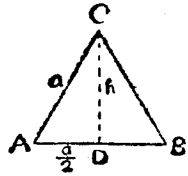
162. 有法多邊形之面積，等於其邊心距及周界相乘積之半。

163. 圓之面積等於其半徑之平方，乘π之積（$\pi=3.1416$）

【例題】

1. 已知等邊三角形之一邊爲a，試求其高及其面積。

〔解〕設△ABC爲等邊三角形，已知其一邊爲a，h表其高，S爲其面積。求其高及其面積，



因 $AD=BD=\frac{1}{2}a$

(因rt.△ACD＝rt.△BCD.)

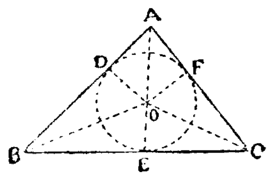
$\therefore\quad h=\sqrt{a^2-(\frac{1}{2}a)^2}$ (定理59)

$=\sqrt{\frac{3}{4}a^2}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$

$S=\frac{1}{2}a\times h=\frac{a}{2}\times\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (定理156)

2. 三角形之面積，等於其周界及其內切圓之半徑相乘積之半。

〔解〕



設DEF爲△ABC之內切圓；D，E，F爲切點；O爲圓心，聯DO，EO，FO，

求證 $\triangle ABC$之面積$=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)\times DO$

證 作AO，BO，CO

$DO\perp AB$，$EO\perp BC$，$FO\perp AC$

(圓之切線，必垂直於至切點之半徑。)

$DO=EO=FO$

(同圓之半徑相等。)

$\triangle ABO$之面積$=\frac{1}{2}AB\cdot DO$ (定理156)

(三角形之面積，等於高底相乘積之半。)

$$\triangle BCO 之面積 = \frac{1}{2} BC \cdot EO$$

$$\triangle ACO 之面積 = \frac{1}{2} AC \cdot FO$$

$$\therefore \quad (\triangle ABO + \triangle BCO + \triangle ACO) 之面積$$

$$= \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \times DO$$

即 $\quad \triangle ABC 之面積 = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \times DO$

3. 甲等邊三角形之一邊爲4尺，乙等邊三角形之高爲4尺，求甲乙兩三角形面積之比。

〔解〕$S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$

$$S_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{4\sqrt{3} \times 3}{16\sqrt{3}} = \frac{3}{4}.$$

4. 正三角形之周界(三邊長之總和)爲12寸，求其面積。

〔解〕正三角形之每邊 $= \frac{12}{3}$ 寸 $= 4$寸

正三角形之高 $= \sqrt{4^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2}$ 寸 $= \sqrt{12}$ 寸 $= 2\sqrt{3}$ 寸

$\therefore$ 正三角形之面積 $= \frac{1}{2}(4 \times 2\sqrt{3})$ 方寸 $= 4\sqrt{3}$ 方寸

5. 三角形之三邊爲104尺，111尺，175尺，求其面積。

〔解〕$S = \frac{104 + 111 + 175}{2} = 195$尺

$\therefore$ 面積 $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{195(195-104)(195-111)(195-175)}$$

$$= \sqrt{195 \times 91 \times 84 \times 20} = 5460 方尺$$

6. 有一梯形上底爲45尺，下底爲35尺，兩底之垂直距離爲45

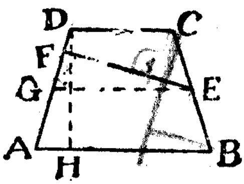
尺，求其面積。

〔解〕梯形之面積 $=\frac{1}{2}\times 45\times(45+55)$

$$=\frac{1}{2}\times 45\times 100=2250\text{平方尺}$$

7. 試證梯形面積等於其一腰乘他腰中點至此腰之垂線。

〔解〕



設EF爲自BC之中點E至對邊所作之垂線，

求證　ABCD之面積 $=AD\times EF$.

證　作梯形之中線EG，自D作 $DH\perp AB$.

則　$EG\parallel AB$.

(梯形之中線，必與其兩底平行)

在rt.$\triangle ADH$及rt.$\triangle EFG$內

$\angle BAD=\angle DGE$

(同位角相等)

$\therefore$　$\triangle ADH\backsim\triangle EFG$.

(兩直角三角形有一銳角相等，則兩形相似)

$\therefore$　$AD:EG=DH:EF$.

(兩相似三角形，相當邊成比例)

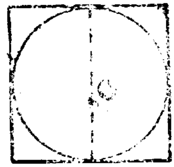
$\therefore$　$AD\times EF=EG\times DH$

但　ABCD梯形之面積 $=EG\times DH$　　(定理161)

$\therefore$　ABCD梯形之面積 $=AD\times EF$.

8. 正方形的面積是 $12\frac{1}{4}$ 平方吋，求其內切圓的面積。

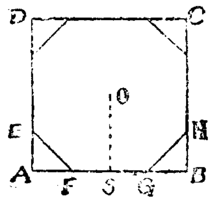
〔解〕正方形之內切圓之面積 $=\pi\left(\sqrt{12\frac{1}{4}}\div 2\right)^2$.



$$=\pi\left(\frac{7}{2}\div 2\right)^2=\pi\left(\frac{7}{4}\right)^2=\frac{49\pi}{16}.$$

9. 每邊四寸之正方形，截其四隅而作正八邊形，求其面積若干？

〔解〕設ABCD爲每邊四寸之正方形，EFGH爲截其四隅而成之正八邊形。



則 $\overline{EF}^2=\overline{EA}^2+\overline{AF}^2=2\overline{AF}^2$

$\therefore$ $EF=\sqrt{2}\,\overline{AF}$

但 $AF+FG+GB=4$寸

$\therefore$ $EF+2AF=(2+\sqrt{2})\overline{AF}=4$寸

$\therefore$ $AF=\dfrac{4}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{4(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=(4-2\sqrt{2})$寸

但 EFGH之面積 $=\overline{AB}^2-4\times\frac{1}{2}AE\times AF$

$=\overline{AB}^2-2\overline{AF}^2$

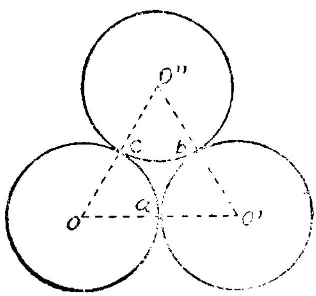
$=[16-(4-2\sqrt{2})^2]$方寸

$=(16\sqrt{2}-8)$方寸 $=8(2\sqrt{2}-1)$方寸

新作成之正八邊形之面積爲$8(2\sqrt{2}-1)$方寸

10. 以 R 爲公共半徑作彼此相切之三等圓，試求此三圓間所含之面積。

〔解〕



設圓O圓O'及圓O''為三等圓，半徑為R，

求三圓間部之面積，

連OO' $O'O''$ $O''O$，

則此三線必過切點a，b及c，

（兩圓之聯心線必過切點）

則 $OO'=O'O''=O''O=2R$.

$\triangle OO'O''$為等邊三角形，

則 $\triangle OO'O''$之面積$=R^2\sqrt{3}$

又 $\angle O=60^\circ$

則 扇形oac圓O之$\frac{1}{6}$，

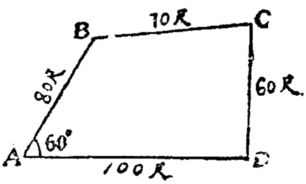
即 每扇形為圓積之$\frac{1}{6}$，

則 三圓中間之面積$=R^2\sqrt{3}-3\times\frac{1}{6}\pi R^2$

$$=\frac{1}{2}R^2(2\sqrt{3}-\pi)$$

11. 已知四邊形ABCD之A角為60°，其四邊之長為AB＝80尺 BC＝70尺，CD＝60尺，DA＝100尺求此四邊形之面積。

〔解〕



$$\overline{BD}^2=\overline{80}^2+\overline{100}^2-2\times 80\times 100\times\cos 60^\circ$$

$$=6400+10000-8000=8400$$

$\therefore$ BD＝80尺

$\triangle ABD$之面積$=\frac{1}{2}\times 100\times 80\times\sin 60^\circ$

$$=\frac{1}{2}\times 100\times 80\times 0\cdot 866=3464\text{平方尺}$$

△BCD之面積 $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

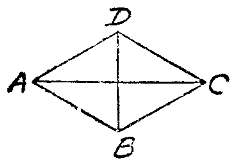
$$=\sqrt{105(105-80)(105-70)(105-60)}$$

$$=\sqrt{105\times 25\times 35\times 45}=2033\cdot 3\text{平方尺}$$

∴ ABCD之面積 $=3464+2033\cdot 3=5497\cdot 3$平方尺

12. 菱形之面積，等於其兩對角線相乘積之半。

[解]



設ABCD為一菱形，AC，BD為兩對角線

求證　AC⊥BD。

(菱形兩對角線，彼此垂直)

但　$\triangle ABC=\frac{1}{2}(AC\times BO)$

(三角形之面積，等於高底相乘積之半)

同樣　$\triangle ACD=\frac{1}{2}(AC\times DO)$

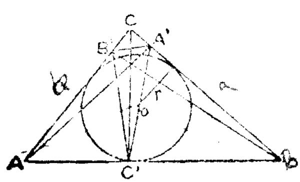
相加　$\triangle ABC+\triangle ACD=\frac{1}{2}AC(BO+DO)$

$$=\frac{1}{2}(AC\times BC)$$

13. 三角形ABC之三垂線為AA',BB',CC'內切圓半徑為r，試證

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{AA'}+\frac{1}{BB'}+\frac{1}{CC'}$$

[解]



求證 $\frac{1}{r}=\frac{1}{AA'}+\frac{1}{BB'}+\frac{1}{CC'}$

證 聯AO，BO，CO，

$\triangle ABC$之面積$=s=\frac{1}{2}a\overline{AA'}=\frac{1}{2}b\overline{BB'}=\frac{1}{2}c\overline{CC'}$

（三角形之面積，等於高底相乘積之半）

則 $\triangle AOB=\frac{1}{2}rc$

$\triangle AOC=\frac{1}{2}rb$

$\triangle BOC=\frac{1}{2}ra'$

$\therefore$ $\triangle ABC=s=\triangle AOB+\triangle AOC+\triangle BOC$

$=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

但 $AA'=\frac{2s}{a}$， $BB'=\frac{2s}{b}$， $CC'=\frac{2s}{c}$，

$$\frac{1}{AA'}+\frac{1}{BB'}+\frac{1}{CC'}=\frac{a}{2s}+\frac{b}{2s}+\frac{c}{2s}=\frac{1}{25}(a+b+c)$$

$$=\frac{1}{2\times\frac{1}{2}r(a+b+c)}(a+b+c)=\frac{1}{r}$$

【習題】

1. 正六邊形一邊長爲4寸，求此正六角形之面積。

（答） $24\sqrt{3}$ 平方寸

2. 已知三角形之三邊 $a=3$寸；$b=5$寸，$c=6$，求其面積

（答） $2\sqrt{14}$ 方寸

3. 圓之直徑爲6尺，求其面積。

〔提示〕 半徑$=\frac{6}{3}=2$尺

（答） 28•2744方尺。

4. 已知等腰三角形之底及一腰，求此三角形之面積。

5. 有梯形田一塊，上底長24步，下底長32步，中高18步，問此田面積爲幾畝幾方步

〔提示〕 1畝＝240方步

6. 設直角三角形之斜邊爲十寸，一腰爲六寸，求其面積。

(答) 24方寸。

(3) 等 積

【定義】

1. 等積形 諸面積相等之平面形，稱爲等積形，等積形不必相似，諸邊亦不必密合，惟求其所含面積單位之數相等而已。等積恆以略號⇔表示之。

【定理】

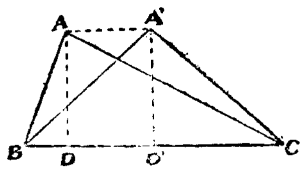
164.等底且等高之兩三角形必等積。

165.等底且等高之兩平行四邊形必等積。

【例題】

1. 試證同底之三角形，且在同平行線內，其面積相等。

〔解〕



設△ABC與A'BC同底，A'A ∥ BC

求證 △ABC與A'BC等積

證 由A作AD⊥BC於D

由A'作A'D'⊥BC於D'.

則∵AA' ∥ BC

∴ AD＝A'D'

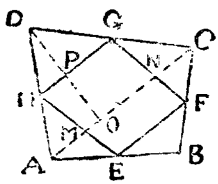
$$\triangle ABC=\frac{1}{2}AD\cdot BC$$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}A'D\cdot BC$$

$$\because\quad \triangle ABC=\triangle A'BC$$

2. 依次聯四邊形各邊中點所成之平行四邊形必與原形之半為等積。

〔解〕



設ABCD為一四邊形，E，F，G，H為各邊之中點，聯EF，FG，GH，EH則得平行四邊形EFGH.

求證 $\square EFGH \approx \frac{1}{2}$ABCD四邊形。

證 作對角線AC及AC上之垂線DO，

$HG \parallel AC$

(聯三角形兩邊中點之線，必與第三邊平行)

又 $GN=HM$ (題設)

$\therefore$ HGNM為一平行四邊形。

$\square$HGNM之面積$=HG\times PO$

$\triangle$ACD之面積$=\frac{1}{2}(AC\times DO)$

但 $DP=PO$

(設一線為數平行線所截，其所截之線分若相等，則他線為此數平行線所截者，其所截之線分亦相等。)

$$PO=\frac{1}{2}DO$$

又 $HG=\frac{1}{2}AC$

(聯三角形兩邊中點之線，必等於第三邊之半)

代入 $\square$HGNM之面積$=\frac{1}{2}AC\times\frac{1}{2}DO=\frac{1}{4}AC\times DO$

∴ $\square$HGNM之面積$\backsimeq\frac{1}{2}\triangle$ACD之面積

同樣可證 $\square$EFNM$\backsimeq\frac{1}{2}\triangle$ABC之面積

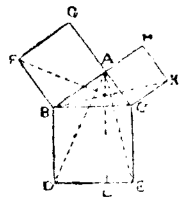
相加 ($\square$HGNM$+\square$EFNM)之面積

$\backsimeq\frac{1}{2}(\triangle ACD+\triangle ABC)$之面積

∴ $\square$EFGH$\backsimeq\frac{1}{2}$ABCD四邊形。

3. 直角三角形之弦上之正方形，與其兩腰上兩正方形之和爲等積。

〔解〕設BE，AF，CH爲直角三角形ABC三邊上之正方形。



求證 BE$\backsimeq$CH＋AF.

證 自A點作AL∥CE，並作AD，及CF，AE及BK.

因 ∠BAC，∠BAG，∠CAH皆爲直角，

故 CAG，BAH皆爲直線，

（設兩鄰角互爲補角，則其兩外邊成一直線）

今考 $\triangle$ABD及矩形BL

皆以BD爲底，以DL爲高

∴ 矩形BL$\backsimeq2\triangle$ABD.

（矩形之面積等於高底相乘之積，三角形之面積等於高底相乘積之半）

又正方形AF及$\triangle$FBC

皆以FB爲底，以AB爲高

∴ 正方形AF$\backsimeq2\triangle$FBC.

又因 BD＝BC

BA＝BF

∠ABD＝∠FBC

（因皆爲一直角與∠ABC之和）

∴ $\triangle ABD = \triangle FBC$。

故 矩形BL≎正方形AF。

同樣可證 矩形CL≎2△ACE

正方形CH≎2△BCK。

但 $\triangle ACE = \triangle BCK$。

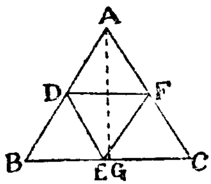
∴ 矩形CL≎正方形CH。

∴ 矩形BL＋矩形CL≎正方形CH＋正方形AF

即 BE≎CH＋AF。

4． 聯三角形各邊中點所成之三角形爲原三角形之四分之一。

〔解〕



設△DEF爲聯各三角形之中點所成之三角形

求證 △DEF之面積 $= \frac{1}{4}$ △ABC之面積。

證 作 $AG \perp BC$

∴ △ABC之面積 $= \frac{1}{2} BC \times AG$。

又 $DF \parallel BC$， $DF = \frac{1}{2} BC$。

（聯三角形兩邊中點之線必與第三邊平行，且等於第三邊之半）

在 △ADF及△ABC內

$\angle ADF = \angle ABC$， $\angle AFD = \angle ACB$。

$\angle BAC$爲公共角

∴ $\triangle ADF \backsim \triangle ABC$

∴ $AD : AB = AH : AG$ （定理139）

（兩相似三角形相當邊之比，等於相當高之比）

令 $AD = 1$。

則 $1:2=AH:AG$

$$AH=\frac{1}{2}AG$$

∴ $\triangle ADF$之面積$=\frac{1}{2}DF\times AH$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{AG}\right)\left(\frac{1}{2}BC\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}BC\times AG\right)=\frac{1}{4}\triangle ABC\text{之面積。}$$

同樣可證 $\triangle CEF$之面積$=\frac{1}{4}\triangle ABC$之面積

$\triangle BDF$之面積$=\frac{1}{4}\triangle ABC$之面積

∴面積$\triangle ADF+$面積$\triangle CEF+$面積$\triangle BDF$

$$=\frac{1}{4}\text{面積}\triangle ABC+\frac{1}{4}\text{面積}\triangle ABC+\frac{1}{4}\text{面積}\triangle ABC$$

$$=\frac{3}{4}\text{面積}ABC$$

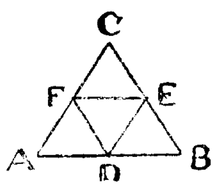
∴面積$\triangle DFE=$面積$\triangle ABC-\frac{3}{4}$面積$\triangle ABC$

$$=\frac{1}{4}\text{面積}\triangle ABC.$$

〔又證〕

設E, F, D為$\triangle ABC$三邊之中點，

聯DE, DF, EF.



求證 $\triangle DEF=\frac{1}{4}\triangle ABC.$

在$\triangle ADF$及$\triangle DEF$內

證 $AD=EF$

$AF=DE$

(聯三角形兩邊中點之線，必與第三邊平行 且等於第三邊之半)

DF爲公共邊

∴ $\triangle ADF=\triangle DEF$.

同樣可證 $\triangle BDE=\triangle DEF$

$\triangle CEF=\triangle DEF$

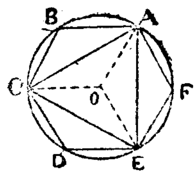
但 $\triangle DEF+\triangle ADF+\triangle BDE+\triangle CEF=4\triangle DEF$

$\triangle ABC=4\triangle DEF$

∴ $\triangle DEF=\frac{1}{4}\triangle ABC$.

5. 試證內接有法六邊形之面積，必爲同圓內之內接等邊三角形之面積之二倍。

〔解〕設 ABCDEF 爲圓之內切有法六邊形，$\triangle ACE$爲圓之內切等邊三角形。



求證 ABCDEF$\backsimeq 2\triangle ACE$.

證 作AO，CO，EO，

則$AB=BC=AO=CO$，

（圓之內切有法六邊形之一邊，等於圓之半徑）

∴ $\triangle ABC=\triangle ACO$

同樣可證 $\triangle CDE=\triangle CEO$

$\triangle AEF=\triangle AEO$，

相加 $\triangle ABC+\triangle CDE+\triangle AEF$

$\backsimeq\triangle ACO+\triangle CEO+\triangle AEO$

兩邊加 $(\triangle ACO+\triangle CEO+\triangle AEO)$

$\triangle ABC+\triangle CDE+\triangle AEF+\triangle ACO+\triangle CEO$

$+\triangle AEO\backsimeq 2(\triangle ACO+\triangle CEO$

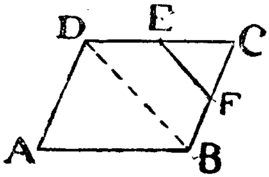
$+\triangle AEO)$

∴ 正六邊形ABCDEF$\backsimeq 2\triangle ACE$.

【習題】

1. 設聯平行四邊形之兩鄰邊之中點，所成之三角形，與此平行四邊形之八分之一爲等積.

〔提示〕

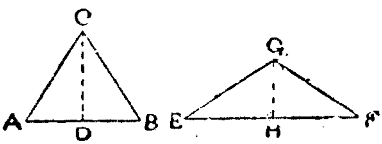


求證 $\triangle CEF \approx \frac{1}{8} \square ABCD$,

$\triangle CEF : \triangle BCD = CE \times CF : CD \times BC$.(定理148)

2. 設兩等腰三角形之腰,彼此相等,而此形之高,等於彼形之底半,則此兩形爲等積。

〔提示〕



$AC = BC = EG = FG$.

$GH = \frac{1}{2} AB = AD$.

(九) 軌跡問題

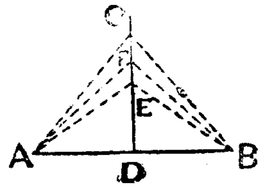
【定義】

1. 點之軌跡 在一平面內,有許多適合某條件之點,則此等點集合而成之圖形,謂之適合此條件之點之軌跡。

【定理】

166. 一已知線之垂直平分線,爲與此線兩端有等距離之點之軌跡。如

CD爲AB之垂直平分線，E F,H，爲垂直平分線內之任意三點。依定理，必AE＝BE,AF＝BF,AH＝BH，若AE≒BE,AF≒BF,AH≒BH,則E,F,H 諸點必不在垂直平分線CD內，易言之 卽在線外，故CD爲E,F,H等與AB兩端有等距離之點之軌跡。



〔附註〕 ≒乃表示兩者不等之記號，以下倣此。

167.--已知角之平分線，爲與此角兩邊有等距離之點之軌跡。

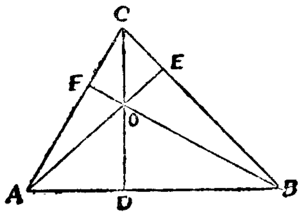
168.圓周爲與一定點等距離之點之軌跡。

169.直角三角形直角頂之軌跡，爲以其弦爲直徑所作之圓周。

【例題】

1. 三角形之底邊及頂角均一定。求其垂心之軌跡。

〔解〕



設△ABC之AB及∠ACB爲一定，AE,CD,BF 爲三邊之垂線，O爲垂心。

求垂心O之軌跡

在四邊形CEOF中，∠CEO及∠CFO爲二直角則

∴ ∠ECF＋∠EOF＝180°

(四邊形之四內角之和爲四直角)

但 ∠EOF＝∠AOB

(對頂角相等)

∴ ∠ECF＋∠AOB＝180°

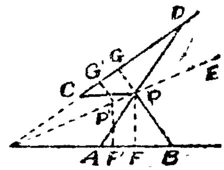
但 ∠ECF爲一定

$\therefore$ $\angle AOB$亦爲一定

故O點之軌跡，爲以AB爲弦過O點所作之圓弧。

2. 求與已知點A,B,C,D成等積三角形PAB及PCD之P點之軌跡。

〔解〕設ABCD爲四已知點，



$\triangle ABP \approx \triangle CDP$.

求P之軌跡。

求軌跡 延長CD及AB相交於O，

過P作OE，

$\therefore$ OE爲所求之軌跡.

證 作$GP \perp CD$， $FP \perp AB$，

設 $\dfrac{GP}{FP}=\dfrac{m}{n}$

(因$\triangle ABP \approx \triangle CDP$三角形之面積，等於高底相乘積之半，今AB,CD爲一定，故GP及FP之比亦必爲一定)

又 設P'爲OE上之任一點，

作 $G'P' \perp CD$， $F'P' \perp AB$.

$\therefore$ $\triangle GOP \backsim \triangle G'OP'$

$\therefore$ $\dfrac{GP}{G'P'}=\dfrac{OP}{OP'}$

又 $\triangle FOP \backsim \triangle F'OP'$

$\therefore$ $\dfrac{FP}{F'P'}=\dfrac{OP}{OP'}$

$\therefore$ $\dfrac{GP}{G'P'}=\dfrac{FP}{F'P'}$

即 $\dfrac{GP}{FP}=\dfrac{G'P'}{F'P'}$

但 $\dfrac{GP}{FP}=\dfrac{m}{n}$

$\therefore$ $\dfrac{G'P'}{F'P'}=\dfrac{m}{n}$

∴ $\triangle ABP \backsimeq \triangle CDP'$

∴ P'爲P之軌跡上之一點。

OE爲P之軌跡

討論 倘$AB \parallel CD$

則P之軌跡爲過P平行AB及CD之直線。

3. 三角形之底邊BC一定且二邊AB，AC所夾之角亦一定求頂點之軌跡。

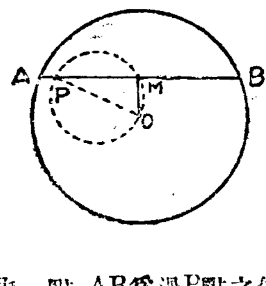
〔解〕其頂點之軌跡爲以三角形之底爲弦，過三角形頂點之圓弧，因圓弧內之三角形之頂角，恆以所對之弧之半度之也。

4. 一定長直線之一端，與一定圓相切，設其切點可以移動，問此直線之他端點之軌跡爲何？

〔解〕命該線之長爲l，圓之半徑爲r，則因圓之切線常與過切點之半徑相垂直，故此直線之他端與圓心之距離常爲$\sqrt{r^2+l^2}$。因 與一定點等距離點之軌跡爲圓，故此直線他端之軌跡爲圓，此圓爲已知圓之同心圓，其半徑爲$\sqrt{r^2+l^2}$。

5. 求通過定圓內一定點之弦之中點之軌跡。

〔解〕



設P爲圓內一點，AB爲過P點之任意弦，M爲AB弧之中點，求M點之軌跡。

連 OM及OP，

以OP爲直徑作圓，

則所得在圓周內之圓弧爲所求之軌跡

證 $OM \perp AB$

（平分弦之直徑，必垂直於弦）

$\therefore$ $\angle OMP = rt\angle$.

$\therefore$ M點必在所作之圓弧上，

(半圓之內切角，必爲直角)

又M點不能在圓外

故其軌跡必在圓內。

6. 有定長2a之直線AB，其兩端A及B各溜動於一定圓上，

(a) 問不論定圓之大小，上述之事必爲可能否?

(b) 此定長直線AB上之中點之軌跡爲何?

(c) 此定長直線AB上之各點之軌跡爲何?

又此定長直線之兩端A及B，若各溜動於垂直相交兩直線OX及OY之上，則

(d) 此定長直線之中點之軌跡何以必爲一圓?

(e) 此軌跡之作圖法爲何?

(f) 上述之AB與垂直兩直線之交點O所成之三角形AOB其面積極大時AB應在何位置?

(g) 上述三角形AOB之面積，等於上述圓(AB之中點之軌跡)之面積之四分之一時，OA之長若干?

〔解〕(a) 設r代表定圓之半徑，只須 $a \not> r$，此事卽屬可能。

(b) 設定圓爲$\odot(O,OA)$，圓心爲O，AB爲定長2a之任一位置，M爲其中點。

作OM，OA

因 $AM = MB$,

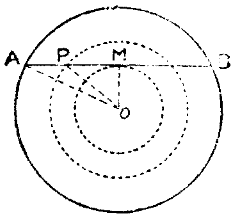
$\therefore$ $OM \perp AB$, $\angle OMA = 90°$

$\therefore$ $\overline{OM}^2 + \overline{AM}^2 = \overline{OA}^2$

$$OM = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AM}^2} = \sqrt{r^2 - a^2}$$

但 $\sqrt{r^2 - a^2}$爲一常量，故M點之軌跡爲圓$\odot(O, OM)$

此圓與$\odot(O,OA)$同心，半徑爲$\sqrt{r^2 - a^2}$ 卽OM。



(c) 設P爲AB上任意一點，並以m，n表AP及BP。

於△OPM中，∠OMP＝rt∠

∴ $OP=\sqrt{\overline{OM}^2+\overline{PM}^2}$

但 $OM=\sqrt{r^2-a^2}, PM=a-n$

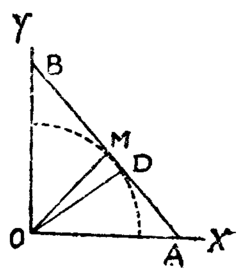
∴ $OP=\sqrt{r^2-a^2+(a-n)^2}$

因 $\sqrt{r^2-a^2+(a-n)^2}$ 爲常量，故 P 點之軌跡爲圓⊙(O，OP)，此圓與⊙(O，OA)同心，半徑爲 $\sqrt{r^2-a^2+(a-n)^2}$，即OP線。

(d) 因 ∠BOA＝90°， ∴ AM＝BM＝OM

但 AM＝a， ∴ OM＝a。

O即爲定點，a爲定量之長，故M點之軌跡，必爲以O爲心，a爲半徑之圓。



(e) 平分AB于M，AM＝a

以O爲圓心，AM爲半徑作圓，此圓即AB中點之軌跡。

(f) 作OD⊥AB

$$\triangle AOB=\frac{1}{2}AB\cdot OD$$
$$=a\cdot OD$$

故 △AOB之面積爲極大時，OD亦必爲極大。

$OD=\sqrt{a^2-\overline{AM}^2}$

a^2又爲常量，故須M，D二點重合，即須△AOB爲等腰。

故△AOB面積爲極大時，∠OAB須爲45°.

(g) △AOB之面積＝$\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}OA\sqrt{4a^2-\overline{OA}^2}$

而上述圓之面積＝πa^2

故若△AOB與圓O之四分之一等積

則　$2\overline{OA}\sqrt{4a^2-\overline{OA}^2}=\pi a^2$

或　$4\overline{OA}^4-16a^2\overline{OA}^2+\pi^2a^4=0$

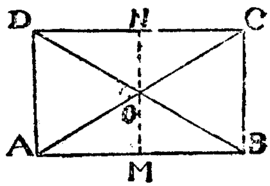
$$\overline{OA}^2=\frac{16a^2\pm4\sqrt{16a^4-\pi^2a^4}}{8}$$

$$=\frac{a^2}{2}(4\pm\sqrt{16-\pi^2})$$

即須　$OA=\pm\frac{a}{2}\sqrt{8\pm2\sqrt{16-\pi^2}}$

7. 某長方形之底邊有固定位置，則其對角線之交點之軌跡若何？

〔解〕



設AC，BD為長方形ABCD之兩對角線，AB 為一定，O為交點。

求O點之軌跡。

因AB為一定，則CD亦必為一定，而AD及BC不絕變動。

今　AO＝CO，　BO＝DO.

(平行四邊形之對角線，彼此平分)

但　AC＝BD.

(矩形之兩對角線相等)

∴　AO＝BO，　DO＝CO

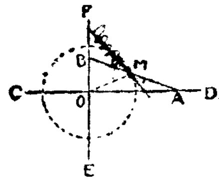
設CD無限趨近AB，或無限離開AB，

則O點之軌跡為AB之垂直平分線MN　　(定理166)

(一已知線之垂直平分線為與此線兩端有等距離之點之軌跡)

8. 一條定長之直線，移動其兩端，常觸彼此垂直相交之兩直線，求此定長直線中點之軌跡。

〔解〕設AB為定長直線，M為其中點，CD及EF垂直相交於O，



求M之軌跡

今因AOB為一直角三角形，

作MO，

則A，B，同在以M為圓心，AB為直徑之圓周上，（定理169）

（直角三角形直角頂之軌跡，為以其弦為直徑所作圓周）

MO，BM，AM為半徑，

∴ MO＝BM＝AM

但 BM為一定 （題設）

∴ MO亦為一定，

O為定點，

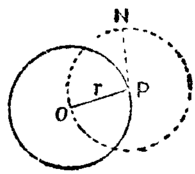
則M之軌跡，為以O為圓心，MO為半徑所作之圓周。

（定理168）

（圓周為與一定點等距離之點之軌跡）

9. 設有一圓，已知半徑r及過一已知P，求圓心之軌跡。

〔解〕設已知圓之圓心為O，半徑為r，P為圓周上一已知點，



求O之軌跡。

今以P為圓心，r為半徑所作之圓周，為O之軌跡。

證 在所作圓周上任取一點N

聯NP，

則 NP＝OP＝r，

（同圓之半徑相等）

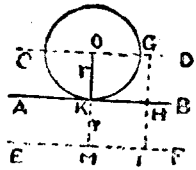
則以N為圓心，r為半徑所作之圓周必過P點，

故所作之圓周為O之軌跡。

10. 設有一圓，已知半徑r，及與一已知線AB相切，求圓心之軌

跡。

〔解〕



設已知圓之半徑爲r，圓心爲O，與已知直線AB相切於K，求O之軌跡

今於AB之兩傍，作CD及EF平行AB，使AB與CD，AB與EF間之距離等於r，

則CD及EF爲O之軌跡。

證 由CD內任一點G，作GH⊥AB，

HI⊥EF，

因OK⊥AB，

GH⊥AB ∴ OK ∥ GH

（兩直線同垂直於一直線，必平行）

GH＝OK＝r

（界於平行線間之平行線必相等）

同樣可證 HI＝KM＝r，

則以G及I爲圓心，r爲半徑所作之圓，必與AB相切於H。

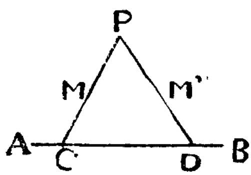
則CD及EF爲O點之軌跡。

【習題】

1. 距已知圓周等距離之點之軌跡。

2. 求自一定點，至一定直線，所引直線之中點之軌跡。

〔提示〕



P爲一定點，AB爲一定直線，M爲PC之中點，M' 爲PD之中

點，求M之軌跡。

3. 設有一圓，過二已知點P及Q，求圓心之軌跡。

4. 在已知圓ABC內，引等於已知長之弦AB，命其兩端上之切線之交點爲P，則P之軌跡若何？

〔提示〕 乃以O爲圓心，定長OP爲半徑之圓周，何故，試證之。

（十） 極大極小問題

（1） 極　　大

【定義】

1. 極大　凡適宜於一定條件之諸幾何量中，最大者，稱爲極大。例如　直徑爲圓中最大之弦，故一圓之直徑，爲諸弦之極大。

2. 等周多邊形　凡等周界之諸多邊形，稱爲等周多邊形。

【定理】

170. 有兩已知邊之諸三角形中，以此兩已知邊夾一直角之三角形爲極大。

171. 同底之諸等周三角形中，等腰三角形爲極大。

172. 已知其諸邊之諸多邊形中，圓之內切多邊形爲極大。

173. 同邊數之諸等周多邊形中，有法多邊形爲極大。

174. 諸等周有法多邊形中，以邊數最多之多邊形爲極大。

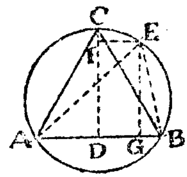
175. 除一未定邊外，其餘諸邊爲已知之諸多邊形中，以未定邊爲直徑之半圓之內切多邊形爲極大。

176. 圓內之弦以直徑爲極大。

【例題】

1. 圓之內接三角形中，等邊三角形爲極大。

〔解〕設ABC爲圓之內接等邊三角形。



求證 △ABC爲極大。

證 作任意圓之內接不等邊三角形ABE，CD及EG爲兩三角形之高，

由 E作EF ∥ AB。

在 △ABC及△ABE內

CD ∥ EG (定理23)

(設兩直線在一平面內，同垂直於一直線，則此兩線必平行)

EF ∥ DG (題設)

∴ FD＝EG (定理35a)

(平行線界在平行線間者必相等)

但 CD＞FD,

即 CD＞EG

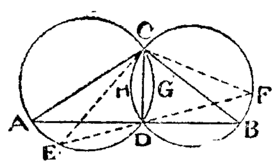
∴ △ABC＞△ABE (定理148a)

(等底之兩三角形之面積之比，等於其高之比)

∴ △ABC爲極大。

2. 兩圓相交，過其一交點，作一直線，遇兩圓周於兩點，聯其他一交點及此兩點所成之三角形，以底邊垂直於公弦者爲極大。

〔解〕



設兩圓相交於C及D，過D作AB與兩圓周相交於A及B，聯AC，BC，而CD爲公弦。

且 CD⊥AB.

求證 △ABC爲極大。

證 過D作任意直線EF，使EF不垂直於CD，遇圓周於E

及F，聯CE及CF，

在△ABC及△CEF內，

$\angle A=\angle E$

（因同以$\frac{1}{2}$CGD弧度之）

$\angle B=\angle F$

（因同以$\frac{1}{2}$CHD弧度之）

$\therefore\quad \triangle ABC \backsim \triangle CEF$ （定理127a）

（設兩三角形，有兩角彼此相等，則此兩形必相似）

$\therefore\quad \triangle ABC:\triangle CEF=\overline{AC}^2:\overline{CE}^2$ （定理153a）

（兩相似多邊形面積之比，等於其任兩相當邊之平方之比）

但 $\angle ADC=rt\angle.$ （題設）

$\therefore$ AC爲直徑

（半圓之內切角必爲直角）

$\therefore\quad AC>CE$ （定理154）

（圓內之弦，以直徑爲極大。）

$\therefore\quad \triangle ABC>\triangle CEF$

則 △ABC爲極大。

【習題】

1. 由任意弦所對之弧之中點，至弦之兩端所作之三角形爲極大。

2. 分已知直線爲二線分，則其各線分所包之矩形，在二等分時爲極大。

(2) 極 小

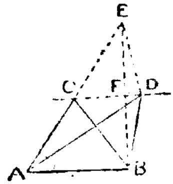
【定理】

177. 面積相同之諸有法多邊形中，邊數最多之多邊形，其周界爲極小。

【例題】

1. 同底同高之諸三角形中，以等腰三角形之周界爲極小。

〔解〕設△ABC爲一等腰三角形，△ABD爲與△ABC同底同高之任一三角形。



求證 △ABC之周界爲極小

證 聯CD

作BE⊥AB，與AC之延長線相交於E，與CD相交於F，聯DE

CD ∥ AB （題設）

∠DCE＝∠BAC

（同位角相等）

∠BCD＝∠ABC

（內錯角相等）

但 ∠BAC＝∠ABC

（等腰三角形之兩底角必等）

∴ ∠DCE＝∠BCD.

又 EF⊥CD,

（一直線垂直於平行線中之一線，必垂直於他線）。

∴ △BCE＝△CEF.

（直角三角形有一腰及一銳角相等，則兩形必等）。

∴ EF＝BF.

CD爲BE之垂直平分線，

∴ CE＝BC, DE＝BD.

（一線之垂直平分線內一點至此線兩端之距離必等）

今 AE＜AD＋DE

（三角形之一邊小於其他兩邊之和）

即 AC＋CE＜AD＋DE

代入 AC＋BC＜AD＋BD.

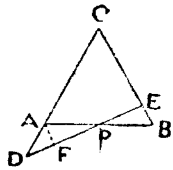
加AB，則

AC＋BC＋AB＜AD＋BD＋AB

故　△ABC之周界爲極小

2. 有同一角頂之諸三角形，其底皆過已知之一點，則其底被已知點二等分之三角形爲極小。

〔解〕設 △ABC及 △CDE 同角 C，其底邊AB及DE皆過一點 P，且 AP＝BP，DP≠EP



求證　△ABC爲極小。

證　作AF ∥ BC.

∠PAF＝∠PBE

（內錯角相等）

∠APF＝∠BPE

（對頂角相等）

AP＝BP　（題設）

∴　△AFP＝△BEP.

∴　四邊形ACEF＝△ABC.

但　四邊形ACEF＜△CDE

即　△ABC＜△CDE

則　△ABC爲極小。

【習題】

1. 等底等積之諸平行四邊形，以矩形之周界爲極小。

〔提示〕 應用定理17a.

2. 分已知直線爲二線分，則其各線分上正方形之和，在二等分時爲極小。

（十一） 作圖問題

【定義】

作圖問題（Problem of construction）者，乃藉直尺及圓規，作一適合於某條件之幾何圖形也。依此定義，凡非用直尺及圓規所作之圖形，不能謂係作圖問題，例如以分角器分

角爲數等分，以三角板畫平行線等是也。

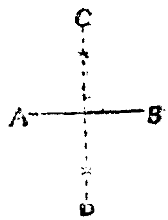
(1)　直線及角

【例題】

1. 求平分一已知直線。

〔解〕設AB爲已知直線，

求平分之



作圖　以A及B爲圓心，取大於$\frac{1}{2}$AB之等半徑作兩弧，相遇於C及D，聯CD，與AB相交於E，

則　AE＝BE.

證　AC，BC，AD，及BD之距離相等，

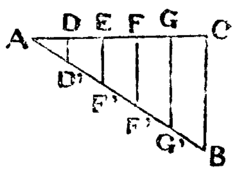
則　CD爲AB之垂直平分線　(定理18d)

∴　AE＝BE.

2. 試將一直線分爲五等分，並證明之。

〔解〕設AB爲一已知直線

求五等分之



作圖　作AC與AB成適宜之角，以任意之長AD爲單位，等分AC爲五等分，得D，E，F，G及C諸點，聯BC，由G，F，E，D諸點作諸線與BC平行，截AB於G'，F'，E'，D'諸點，

則　AD'＝D'E'＝E'F'＝F'G'＝G'B.

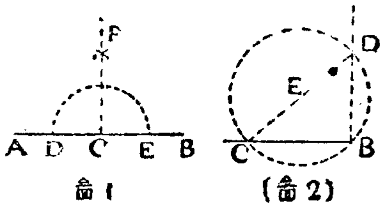
證　因　AD＝DE＝EF＝FG＝GC，

則　AD'＝D'E'＝E'F'＝F'G'＝G'B.(定理35b)

(設一線爲數平行線所截，其所截之線分若相等，則他線分爲此數平行線所截者，其所截之線亦必相等)

3. 求於線內一已知點，作一直線，垂直於此線。

［解］



(圖1)

設AB為一已知線，C為AB內一已知點，

求作一直線，於C點垂直於AB.

作圖　以C點為圓心，任意半徑作弧，截AB於D及E，

以D及E為圓心，取大於CE之等半徑作弧，相交於 F，

聯　CF，

則　CF⊥AB.

證　聯　DF及EF，

因　DF＝EF，　CD＝CE，

(同圓之半徑相等)

CF為公共邊

∴　△CDF＝△CEF.

∠DCF＝∠ECF

但　∠DCF＋∠ECF＝2rt.∠　　(定理107)

(設兩鄰角之外邊，成一直線，則此兩角互為補角)

∠DCF＝rt.∠.

∴　CF⊥AB.

(圖2)

設AB為一已知線，已知點B在AB之端B，

求作一直線，於B點垂直於AB.

作圖　於線外任一點E，以BE為半徑作圓，與AB相交於 C，

聯　CE，遇圓周於D.

作　BD，

則　BD⊥AB.

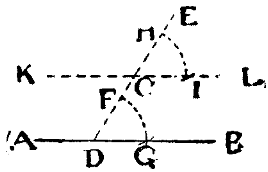
證　∠CBD＝rt.∠

(半圓之內切角必為直角)

∴　BD⊥AB.

4. 求過線外一已知點，作一直線與此線平行。

〔解〕



設AB為一已知直線，C為線外一已知點，

求過C點作一直線與AB平行

作圖　過C作一直線ED與AB成一適宜之角。

以D為圓心，任意半徑作弧，與ED相交於F，與AB相交於G，

次以C為圓心，與上項相等之半徑作弧，與ED相交於H，

以H為圓心，FG為半徑作弧，與上列所作之弧相交於I，

聯　CI並延長之。

則　KL與AB平行

證　聯　FG及HI，

DF＝DG＝CH＝CI

FG＝HI

∴　△DFG＝△CHI

∠HCI＝∠FDG，

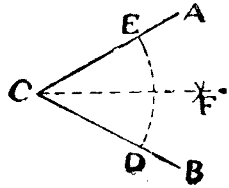
KL∥AB　(定理31)

(設兩直線為另一直線所截，若其同位角相等，則此兩線必平行)

5. 求平分一已知角。

〔解〕設∠ACB爲已知角

求平分之。



作圖 以C爲圓心，任意半徑作弧，截AC於E，截BC於D，

以D及E爲圓心，相等之任意半徑作弧，相交於F，

聯 CF，

則 ∠ACF＝∠BCF．

證 聯 EF，DF，

因 CE＝CD，EF＝DF

（同圓之半徑相等）

CF爲公共邊

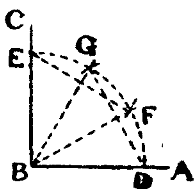
∴ △CEF＝△CDF．

∴ ∠ACF＝∠BCF．

6． ABC爲一直角形，問如何分其爲三等分，並證之。

〔解〕設ABC爲一直角。

求三等分之。



作圖 以直角B爲圓心，任意長爲半徑作弧與AB相交於D，與BC相交於E，

以E爲圓心，BE爲半徑作弧，二弧相交於F，

以D爲圓心，BD爲半徑作弧，二弧相交於G，

聯 BF，BG，

∴ ∠ABF＝∠FBG＝∠EBG

證 聯 EF，DG，

BE＝BF

（半徑相等）

BE＝EF

∴ △BEF爲等邊三角形

同樣可證 △DBG爲等邊三角形。

$\angle EBF=60^\circ$

$\angle DBG=60^\circ$

∴　$\angle EBG=90^\circ-\angle DBG=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

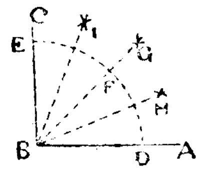
$\angle DBF=90^\circ-\angle EBF=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

$\angle FBG=90^\circ-\angle EBG-\angle DBF=30^\circ$

∴　$\angle EBG=\angle DBF=\angle FBG$。

7. ABC爲一直角形，問如何分其爲四等分，並證之。

〔解〕設$\angle ABC$爲直角。



求四等分之。

作圖　以B爲圓心，取適宜之半徑作弧截AB於D，BC於E，

以D及E爲圓心，大於$\frac{1}{2}$DE之等半徑作弧相交於G，

聯BG與圓周相交於F，

以E，F爲圓心，大於$\frac{1}{2}$EF之等半徑作弧，相交於I，

聯BI.

以D，F爲圓心，大於$\frac{1}{2}$DF之等半徑作弧，相交於H，

聯BH。

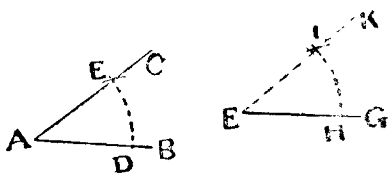
則得$\angle CBI$，$\angle IBG$，$\angle GBH$，$\angle ABH$，

且$\angle CBI=\angle IBG=\angle GBH=\angle ABH$.

證　　同例題5.

8. 由線內一已知點，作一角，等於一已知角。

〔解〕



設EG爲一已知線，E爲一已知點，$\angle BAC$爲一已知角，

求　過E點作一角與∠BAC相等。

作圖　以A爲圓心，任意半徑作弧，截AB於D，截AC於E，以與此相等之半徑，將E爲圓心，作弧，與EG相交於H，以DE之距離爲半徑，將H爲圓心，作弧，與前作之弧，相交於I，

聯　EI，

則　∠GEK＝∠BAC.

證　作　DE及HI.

因　AD＝AE＝EH＝EI

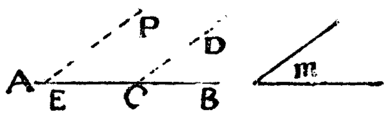
DE＝HI

△EHI＝△ADE

∴　∠GEK＝∠BAC.

9. 過已知線外之一點，作一線，與已知線所成之角等於一已知角。

〔解〕



設P爲已知直線AB外一已知點，m爲已知角，求過P點作一直綫與AB所成之角等於∠m，

作圖　在AB上任一點C，作∠BCD＝∠m，　(例題5)

過P點作EP ∥ CD，與AB相交於E，

∴　EP爲所求之直綫

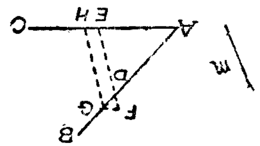
證　∠BEP＝∠BCD＝∠m

(同位角相等)

∴　EP爲所求之直綫。

10. 求作一直線，使其兩端接於一已知角之兩邊，並令其平行且等於一已知線段。

〔解〕



設∠BAC爲已知角，m爲已知直線；

求作一線，使其兩端接於已知角之兩邊，且平行及等於m。

作圖　由已知角之邊AC內任一點E作EF平行m，

取EF＝m，得F點，

由F作FG ∥ AC，與AB相交於G，

由G作GH ∥ EF與AC相交於H，

∴　GH爲所求作之線。

證　EFGH爲平行四邊形，

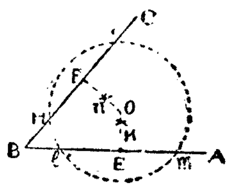
∴　GH＝EF＝m，　卽　GH＝m

GH ∥ EF ∥ m　　卽　GH ∥ m

則　GH爲所求之線。

11. 設AB與BC爲兩條直線相遇於一點B，另一已知點爲O，求自此已知點作垂直線於兩條直線，問如何作法，並證之。

〔解〕



設AB，BC兩直線相遇於一點B，O爲一已知點。

求　自O作垂直BC及AB兩直線

作圖　以O爲圓心，取適宜之半徑作圓，截AB於l，及 m，截BC於H及I。

以H及I爲圓心，取適宜之半徑作弧，相交於一點n，

聯On，延長之遇BC於F，則得IH上之垂線OF

以l及m爲圓心，取適宜之半徑作弧，相交於一點k，

聯OK，延長之，遇AB於E，則得AB上之垂線OE。

證　同例題3圖1

【習題】

1. 求分一直線爲七等分，並證之。

~~2. 求分一已知角爲六等分。~~

3. 由已知直線外一已知點，引此線之垂線。

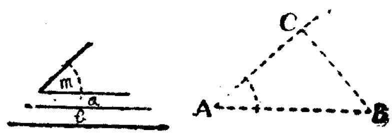
4. 求作與三定點等遠之點x。

(2)　三角形

【例題】

12. 已知三角形之兩邊及一夾角，求作此三角形。

〔解〕



設a，b爲兩已知邊，m爲已知角，

求作一三角形

作圖　先作任意直線AB，再作∠BAC等於∠m，

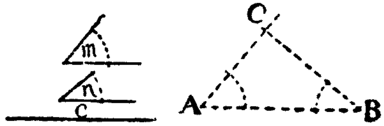
於AB上截取AB等於b，於AC上截取AC等於a，

聯BC，

∴　△ABC爲所求之三角形。

13. 已知三角形之一邊及兩角，求作此三角形。

〔解〕



設已知一邊c，及兩已知角m及n，

求作一三角形

作圖　作AB等於c，

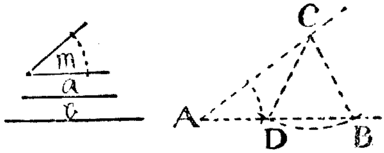
於A作∠BAC等於∠m

於B作∠ABC等於∠n，AC及BC相交於C，

則　△ABC爲所求之三角形。

14. 已知三角形之兩邊及其一邊之對角，求作此三角形。

〔解〕



設已知三角形之兩邊a及b，a之對角m，並設a＜b，

求作一三角形

作圖　作∠BAC等於∠m

於AC上取AC等於b，

以C爲圓心，a爲半徑作弧，與AB相交於B及D，

聯CD及BC，

則　△ACD及△ABC爲求作之三角形。

故本題有兩解。

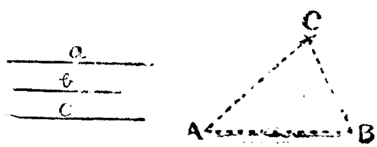
〔討論〕

1. 設a等於C點至AB之垂線，則此題祇有一解，所求之三角形爲直角三角形。

2. 設a小於C點至AB之垂線，則此題無解，即此題爲不可能。

15. 已知三角形之三邊，求作此三角形。

〔解〕



設已知三角形之三邊a，b c，

求作此三角形，

作圖　作AB等於a，

以A爲圓心，c爲半徑作弧，再以B爲圓心，b爲半徑作弧，相交於C，

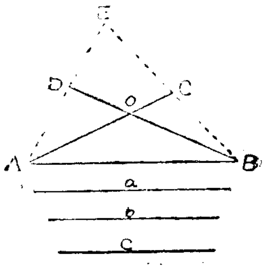
聯AC及BC，

則　△ABC爲所求之三角形。

16. 已知三角形之底邊及過底邊兩端之中線，求作三角形。

[解]設已知三角形之底邊 a，底邊兩端之中線b及c，

求作此三角形



作圖　作AB＝a

在 B 取$\frac{2}{3}$b作弧，

在 A 取$\frac{2}{3}$c作弧

兩弧相交於O

過O點作BD＝b，AC＝c

聯AD及BC並延長之，相交於E。

∴　△ABE爲所求之三角形

證　因三角形三中線必相遇於一點，此點與各頂之距離爲由各頂至其對邊之中點之距離之三分之二，卽

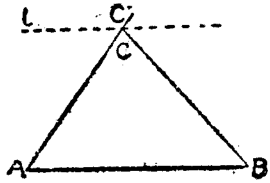
$$BO=\frac{2}{3}BD$$

$$AO=\frac{2}{3}AC$$

∴　△ABE爲所求之三角形。

17. 已知三角形之底邊，高，及一底角。求作此三角形。

[解]（作法）　作AB等於所設底邊之長，∠A等於所設之底角，並延長其他邊至C'。作$l \parallel$ AB，使l與AB之距離等於所設之高，與AC'相交於C點。連結



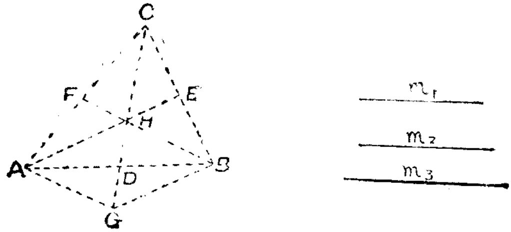
BC。

則　　ABC卽爲所求之三角形

證　　讀者自證之。

18. 已知三中線，求作此三角形。

〔解〕



設三角形三中線m_1，m_2，m_3爲已知，

求作此三角形

作圖　以$\frac{2}{3}m_1$，$\frac{2}{3}m_2$，$\frac{2}{3}m_3$爲三邊作△AGH，延長GH上之中線AD至B，使

AD = BD

延長GH至C，使CH = GH

聯AC，及BC，

則　△ABC爲所求之三角形。

證　$CH = GH = \frac{2}{3}m_1$

$AH = \frac{2}{3}m_3$

AGBF爲平行四邊形

$BH = AG = \frac{2}{3}m_2$

∴　H爲△ABC三中線之交點。

（三角形之三中線必相遇於一點，此點與各頂之距離，爲由各頂至其對邊之點之距離之三分之二）

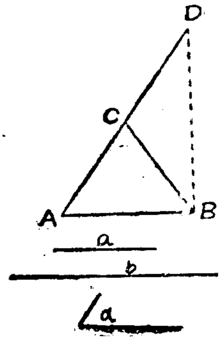
∴　△ABC爲所求之三角形

19. 已知三角形之一邊，一鄰角及其他二邊之和，試作此三角

形。

〔解〕設a爲三角形之一邊，α 爲其一鄰角，b爲其他二邊之和。

求作此三角形。



作圖　作直線AB，其長等於 a. 自A端作直線AD，使其角等於∠DAB，其長等於b，連D,B，作直線BC，令∠CBD＝∠BDC

則　△ABC卽所求三角形。

證　因　∠CBD＝∠CDB

故　BC＝CD，

（等角必對等邊）

AD＝AC＋CD＝AC＋BC

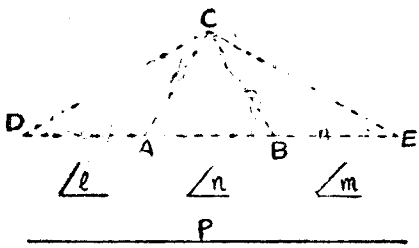
故　AC＋BC＝b

又　∠CAB＝α

故　△ABC爲所求三角形

20．設三角形之各角及周長爲已知，求作此三角形。

〔解〕



設l，n，m，爲三角形之三已知角，P爲已知之周長。

求作此三角形。

作圖　作DE等於P

由D作CD使∠CDE＝$\frac{1}{2}$∠n，

由E作CE使∠CED＝$\frac{1}{2}$∠m，與CD相交於C，

由C作AC，使$\angle ACD=\frac{1}{2}\angle n$，與DE相交於A，

由C作BC，使$\angle BCE=\frac{1}{2}\angle m$，與DE相交於B，

∴ △ABC爲求作之三角形。

證 $\angle A=\angle CDE+\angle ACD=\frac{1}{2}\angle n+\frac{1}{2}\angle n=n$.

$\angle B=\angle CED+\angle BCE=\frac{1}{2}\angle m+\frac{1}{2}\angle m=m$,

(三角形之外角，等於內對兩角之和)

又 $AC=AD$, $BC=BE$。

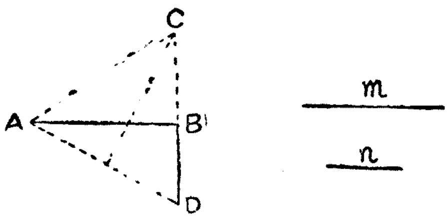
(三角形內，對等角之邊必等)

∴ $AC+BC+AB=AD+BE+AB=P$

∴ △ABC爲所求之三角形。

21. 知直角三角形夾直角之一邊，及他邊與斜邊之差，求作此三角形。

〔解〕



設m爲已知夾直角一邊之長；n爲斜邊與他邊之差。

求作一直角三角形。

作圖 作AB等於m，

作$BD\perp AB$，使$BD=n$，

聯AD，

引AD之垂直平分線，使與BD之延長線相交於C，

聯AC，

△ABC爲所求之直角三角形。

證 $\angle ABC = rt\angle$.

$AC = CD$

(一已知線之垂直平分線,爲與此線兩端有等距離之點之軌跡)。

$\therefore AC - BC = CD - BC = BD$,

$\therefore \triangle ABC$爲所求之直角三角形。

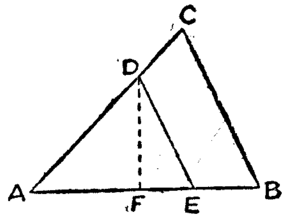
24. 已知三角形之三角及其面積,求作其圖。

[解]設已知正方形之面積C^2,角A',B',C'.

求作$\triangle ABC$,令$\angle A = \angle A'$,$\angle B = \angle B'$,$\angle C = \angle C'$,

且其面積等於C^2.

分析



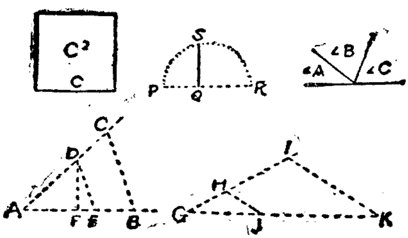
設$\triangle ABC$爲求作之三角形。

任作$DE \parallel BC$,命AE爲b',AC爲b,$DF \perp AE$命爲h'.

則 $\dfrac{\triangle ADE}{C^2} = \dfrac{b'^2}{b^2}$.

$$\therefore \quad b = \sqrt{\frac{c^2 b'^2}{\triangle ADE}} = \frac{cb'}{\sqrt{\frac{1}{2} b'h'}}.$$

作法:



作△ADE，令∠A＝∠A'，∠D＝∠B'，∠E＝∠C'.

作OF⊥AE，任作直線PR，截$PQ=\frac{1}{2}AE$，QR＝DF.

以PR爲直線作半圓，由Q作QS交半圓于S，令SQ⊥PR.

任作GI，GK線，截GH＝SQ，HI＝C，GJ＝AE，

聯HJ，作IK交GK于K，令IK∥HJ.

于AE上取AC＝JK，作CB∥DE.

則△ABC卽爲求作之三角形。

證：
$$SQ=\sqrt{PQ\cdot QR}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2}AE\cdot DF}$$
$$=\sqrt{\triangle ADE}$$

$$\frac{GH}{HI}=\frac{GJ}{JK}.$$

$$\therefore\quad JK=\frac{HI\cdot GJ}{GH}$$
$$=\frac{C\cdot AE}{SQ}$$
$$=\frac{C\cdot AE}{\sqrt{\triangle ADE}}$$

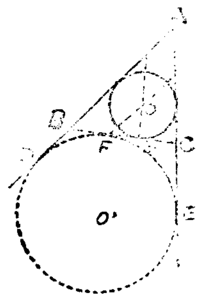
卽 $$b=\frac{C\cdot AE}{\sqrt{\triangle ADE}}$$

或 $$\frac{b^2}{AE^2}=\frac{C^2}{\triangle ADE}$$

△ADE與△ABC相似，且，AE，b各爲其一邊

$$\therefore\quad \triangle ABC=C^2.$$

23. 已知三角形之一角，內接圓半徑，及其周之長，試作此三角形。



〔解〕設　三角形一角∠A，內接圓半徑γ，周界為a＋b＋c為已知。求作此三角形。

作圖　作∠DAE＝∠A

在AD及AE上取D，及E使AD

$=AE=\dfrac{a+b+c}{2}=S$

作圓O'切∠DAE於D及E，

在∠EAD內作一線平行AB，使與BA之距離等於γ

在∠DAE，作一線平行AC，使與AC之距離等於γ

兩平行線相交於O

以O為圓心，γ為半徑作圓。

作圓O及圓O'之內公切線與AD及AE相交於B及C，

∴　△ABC為所求之三角形。

證　AD＝AE＝S

AD＋AE＝2S＝a＋b＋c

但　BD＝BF

CE＝CF

（由圓外一點至此圓之切線必等）

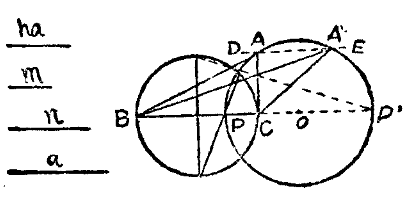
∴　AB＋AC＋BC＝a＋b＋c

∴　△ABC為所求之三角形。

24. 既知三角形一邊a及他二邊之比 b:c 與a邊上之頂垂線ha求作三角形ABC.

設定a；c：c(m：n)ha

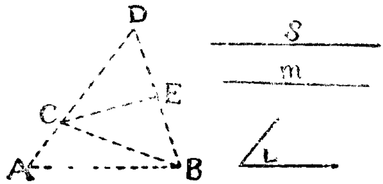
求作△ABC



作法　作BC＝a，分BC於P及P'
令　BP：CP＝BP'：CP'＝c：b以PP'爲直徑作⊙O，
作　DE ∥ BC，且相距ha
若　⊙O交DE於A，聯AB，AC，則△ABC卽爲所求之三角形。
證　⊙O爲距離B，C二點之比爲c：b之點之軌跡。
又　DE上各點與BC之距離皆爲ha（因CE ∥ BC）
⊙O與DE之交點A兼有此二性質。
故　△ABC之底，腰之比及高皆等於所與之值，而爲所求之形。

25. 已知一底邊，一底角及其他二邊之和，求作三角形。

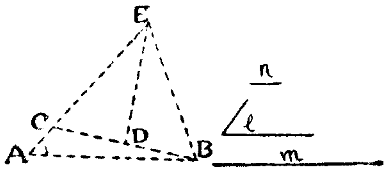
〔解〕



設底角L，底邊m其他兩邊之和S爲已知，
求作一三角形。
作圖　以m，S爲兩邊，∠L爲兩邊之夾角，作△ABD，使AB＝m，AD＝S，∠A＝∠L，　（例題12）
作BD之垂直平分線CE，與AD相交於C，
聯BC。
則　△ABC爲所求之三角形。
證　CD＝BC
（一已知線之垂直平分線爲與此線兩端有等距離之點之軌跡）
∴　AC＋BC＝AC＋CD＝S
∴　△ABC爲所求之三角形。

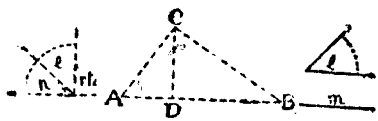
26. 求作一三角形，已知其一角，此角之一邊，及其他兩邊之差。

〔解〕



設l爲已知角，m爲已知邊，n爲其他兩邊之差，
求作一三角形
作圖　作AB＝m，∠BAC＝l，AC＝n，
聯BC
於BC之中點D作BC之垂直平分線DE與AC之延長線相遇於E，
聯BE
則　△ABE爲所求之三角。
證　CE＝BE
(一已知線之垂直平分線，爲與此線兩端有等距離之點之軌跡)
∴　AE－BE＝AC＋CE－BE＝AC＝n，
∴　△ABE爲所求之三角形。

27. 求作一直角三角形，已知其斜邊上之高及一銳角。
〔解〕



設銳角l，及其斜邊上之高m爲已知，
求作直角三角形
作圖　直角三角形，已知一銳角 則可得他銳角n，
作CD＝m，∠ADC＝rt.∠，∠ACD＝∠n，
則得△ACD.
作BC⊥AC，與AD之延長線相交於B
∴　△ABC爲所求之三角形。
△ACD∽△ABC.　　　　(定理133)

∴ $\angle ACD=\angle AEC$.

∴ $\triangle ABC$爲所求之三角形。

【習題】

1. 已知三角形之二邊及第三邊上之中線，求作此三角形。

2. 設已知二等邊三角形兩等邊，且知其長爲$1\frac{1}{2}$寸，求作此三角形。

3. 已知其高及底，求作一等腰三角形。

4. 已知一腰及弦上之高，求作一直角三角形。

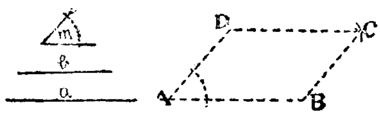
5. 已知弦上之高及其中線，求作此直角三角形。

(3) 四形邊

【例題】

28. 已知平行四邊形之兩邊及一夾角，求作此形。

〔解〕



設已知兩邊a及b，及a，b之夾角m，

求作一平行四邊形。

作圖　作AB等於a，於A點作∠BAD等於∠m，

取AD等於b，得D點；

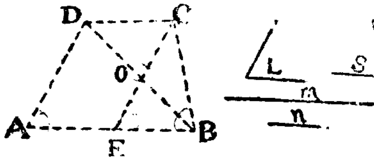
以D及B爲圓心，a及b爲半徑作弧，相交於C，

連CD，及BC，

則　ABCD爲求作之平行四邊形。

29. 已知梯形之兩底角，一對角線，及上下底之差，求作其形。

〔解〕



設梯形之上下底之差n，一對角線m，及兩底角L及S爲已知求作一梯形

作圖　以n爲底邊，∠L及∠S爲兩底角，作△BCE

由C作CD ∥ BE

以B爲圓心，m爲直徑作弧與CD相交於D，

由D作AD ∥ CE，與BE之延長線相遇於A，

則ABCD爲求作之梯形。

證　∠BAD＝∠BEC＝∠L　　（同位角相等）

又　AECD爲一平行四邊形

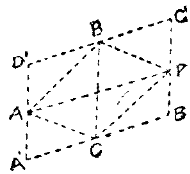
BE＝AB－AE＝AB－DC＝n，

∴　ABCD爲所求之梯形。

30．已知平行四邊形三邊之中點，求作此平行四邊形。

〔解〕設A，B，C爲平行四邊形三邊之中點，

求作此平行四邊形



作圖　連A，B，C，三點成一三角形。

由B作BD平行AC，由C作CD平行AB，相交於D，

連AD，

過A作A'B' ∥ BC，過D作C'D' ∥ BC'過B作B'C' ∥ AD，

過C作A'D' ∥ AD

四平行線相交於A'B'C'D'四點，

則A'B'C'D'爲所求之平行四邊形。

【習題】

已知長及寬，求作一矩形。

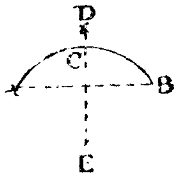
(4)　圓

【例題】

31　求平分一已知弧。

［解］設AB爲已知弧

求平分之。



作圖　以A及B爲圓心，取大於$\frac{1}{2}$ AB

弧之等半徑作兩弧，相遇於D及E，

聯DE，與弧AB相交於C，

則弧AC＝弧BC.

證　作AB，則DE爲AB之垂直平分線

∴　弧AC＝弧BC.　　　　　　（定理97）

（弦之垂直平分線，必過圓心，且平分此弦所對之弧

32.（a）求過一已知點，作一已知圓之切線。

［解］

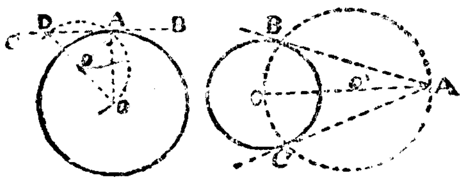


圖1　　圖2

（圖1）

設已知圓之圓心爲O，A爲已知點，且在已知圓周上，

求過A點作已知圓之切線。

作圖　聯AO，

以AO之垂直平分線內任一點 O' 爲圓心，O'A爲半徑作圓，必過O點。（例題1及定理98c）

聯OO'與所作圓周相交於D，

作AD並延長之

則BC爲所求之切線

證　∠DAO＝rt.∠

（半圓之內切角必爲直角）

∴　BC爲所求之切線。　　　　（定理100）

(於半徑接圓周之一端，作半徑之垂線，必為圓周之切線。)

(圖2)

設已知圓之圓心為O，已知點A在圓外。

求過A點作已知圓之切線，

作圖 聯AO，

以AO為直徑作圓，與已知圓周相交於B及C，

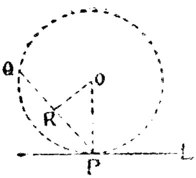
聯AB及AC，

則AB及AC為所求之切線，故本題有兩解。

證 同圖1.

33. 求作一圓，過一已知直線外一定點，且切于此直線上的一定點。

〔解〕設L為一已知線，P為L上一定點，Q為線外一已知點。



求作一圓過Q與L相切於P，

作圖 聯PQ

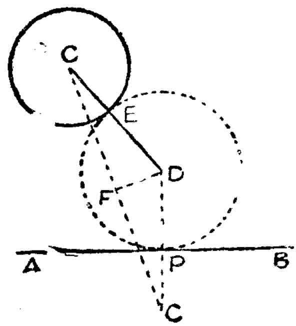
於P作OP⊥L，

於PQ之中點R，作OR⊥OP，與OP相交於O，

以O為圓心，OP為半徑作圓，即為求作之圓。

34. 求作一圓，切一已知圓，并切一已知直線於一已知點。

〔解〕設已知圓O及已知直線AB，及AB上一已知點P，



求作一圓與AB相切於P，且與圓O相切。

分析 設圓為已作，其圓心為D，

則D點必在於P點垂直AB之垂線DP內，

(在切點上垂直於切線之直線，必過圓心)

延DP至C，使CP＝EO，

作CO，

∵DO＝CD，

即D必在CO之垂直平分線內，

故D必為AB在P點之垂線及CO垂直平分線之交點。

作圖 於P作DP⊥AB，

延長DP至C，使CP等於已知圓之半徑，

聯CO，

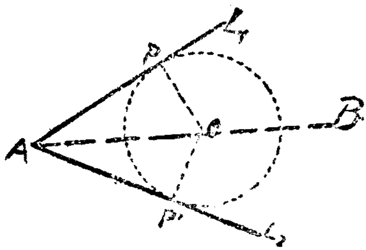
作CO之垂直平分線DF，與DP相交於D，

以D為圓心，DP為半徑作圓，

則得所求之圓。

35 有二相交直線及直線上一點P，求作一圓，須與此二線相切并經過此P點

〔解〕



設二線L_1L_2相交於A，P為L_1上一點。

求：過P而與L_1L_2相切之圓。

作圖：過A作L_1L_2所成角之分角線AB，再過P作L_1之垂線與AB交於O，則以O為圓心，OP為半徑作圓，即所求。

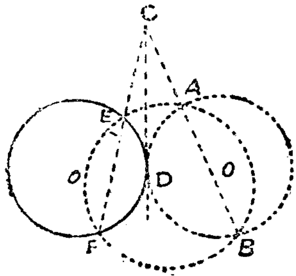
證：O至L_1L_2之距離相等且均為OP

（分角綫上各點與兩邊等遠）

故圓O切於L_1L_2。

36. 過二定點AB作一圓與一已知圓O相切。問其一般之作法如何？

〔解〕



設 A,B爲兩已知點,圓O爲一已知圓,求作一圓過A,B並與圓O相切。

作圖 過A、B作任意圓ABEF,與圓O相交於E及F,

作AB,EF兩直線,並延長之,相遇於C

由C作圓O之切線CD,與圓O相切於D,

過A、B、D三點作圓ABD,

則圓ABD爲求作之圓。

證 在圓ABEF內

$CE \cdot CF = CA \cdot CB$.

(由圓外一點至此圓作兩割線,則割線與圓外線分之積,彼此相等)。

在圓O內

$CE \cdot CF = \overline{CD}^2$

(設由圓外一點,作一切線一割線;則此切線,爲割線及其圓外線分之比例中項)。

∴ $CA \cdot CB = \overline{CD}^2$

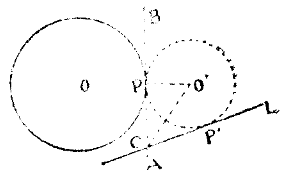
故CD亦爲圓ABD之切線,與圓ABD相切於D,

∴ 圓O與圓ABD相切於D.

37. 求作一圓與已知圓切於一已知點,並與一已知直線相切。

〔解〕設O為已知圓之圓心，L為已知線，P為已知圓周上一點。

求作一圓，與已知圓相切於P，且與已知線L相切。



(例題50)

作圖　作切線AB，切已知圓於P，與L相交於C，

作∠PCP'之分角線CO'，

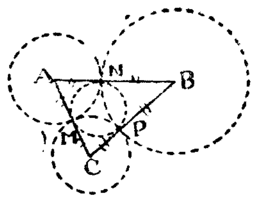
於P點作垂線PO'⊥AB，與CO'相交於O'

以O'為圓心，PO'為半徑作圓，

則得求作之圓。

38. 以三角形三頂點為圓心，求作三圓彼此相切。

〔解〕



設ABC為已知三角形，A,B,C為其三頂，求以A,B,C為圓心，作三圓彼此相切，

作圖　作△ABC之內切圓，切△ABC於M,N,P.

以A,B,C為圓心，AM,CP,BN為半徑，作三圓，

則三圓相切，為求作之三圓。

證　AN＝AM

CM＝CP

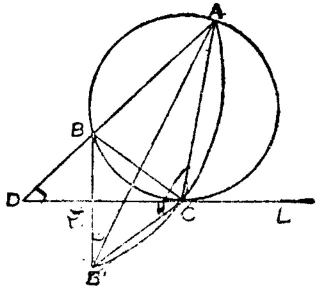
BN＝BP.

(自圓外任一點至圓之切線必等)

∴　三圓必相切於M,N,P.

39. 求作通過二定點且切于一定直線之圓。

〔解〕



設A、B爲二定點，L爲一定直線，

求作一圓過二定點並與L相切。

作圖　聯結AB並延長之，與L相交於D，

作BB'⊥L，並使BE＝BE'作AB'

以AB'爲弦作弧ACB'與L相交於C，

過A、B、C三點作圓ABC，

則圓ABC爲求作之圓。

證　設C爲圓與L之切點，

作B'C、AC、BC。

因　$\angle D+\angle DCA+\angle A=2\,rt\angle s$

$\angle B'CD=\angle BCD=\angle A.$

（因同以$\frac{1}{2}$弧BC度之）

故　$\angle D+\angle DCA+\angle B'CD=2\,rt\angle s$，

即　$\angle D+\angle B'CA=2\,rt\angle s$，

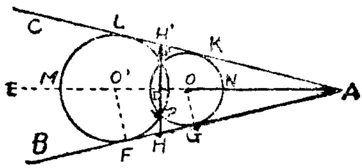
故　$\angle B'CA$爲一定，且爲$\triangle AB'C$內之一角，

故以A'B爲弦，作含定角之圓弧，必得C點，

故此圓在C點與直線相切。

40. 求作一圓過定點P，並與二相交直線相切。

〔解〕



設P為一定點，AB及AC為相交兩直線，

求作一圓，過P點並與AB及AC相切，

作圖　作∠BAC之分角線AE，

作PD⊥AE，並延長至P'，使DP'＝DP。

延長DP與AB相交於H，

分HP'為內外比，得比例中項Q．

（即HP'：Q＝Q：HP．）

截取GH＝Q，FH＝Q．

作GO⊥AB，F'O⊥AB與AE相交於O及O'

以O為圓心，OP為半徑作圓，得圓PP'NG，

以O'為圓心，O'F為半徑作圓，作圓PP'MF，

∴　圓PP'NG及圓PP'MF為求作之圓。

證　H'P：GH＝GH：HP　　（題設）

∴　GH與圓PP'NG相切於G，

（設由圓外一點作一切線一割線，則此切線為割線及圓外線分之比例中項）

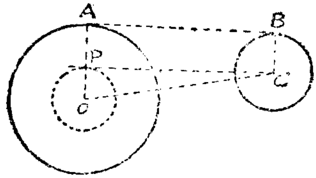
因O在∠BAC之分角線上，則

圓PP'NG必與AC相切於K．

同樣可證　圓PP'MF與AB及AC相切於F及L．

41．作兩已知圓之外公切線。

〔解〕



設已知圓O及圓O'

求作一外公切線．

作圖　作任意半徑AO及BO'以O為圓心，AO－BO' 為半徑作一小圓，

由O'作小圓之切線O'P，與小圓相切於P，

聯OP，延長之，與圓O相交於A，

由O'作O'B平行OA，與圓周相交於B，

聯AB

則AB為所求之外公切線。

證　$OP \perp O'P$．

（切線必垂直於至切線之半徑）

即　$AP \perp O'P$

而　$BO' \perp OP'$

（設一直線垂直於兩平行線之一線，則亦必垂直於其他線）

又　$AP = BO'$　（題設）

則　ABO'P為一平行四邊形，

（設四邊形之兩邊相等且平行，則此形為平行四邊形）

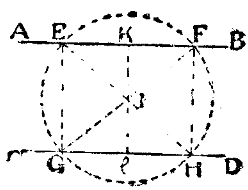
∴　$AB \parallel PO'$

$AP \perp AB$，　$BO' \perp AB$，

則　AB為所求之外公切線。

42．求作一圓，在所設二平行線上截取相等之弦。

〔解〕設$AB \parallel CD$，



求作一圓在此兩平行線上，截取相等之弦。

作圖　由AB上任兩點EF作

$EG \perp CD$，

$FH \perp CD$，

∵　$FH \parallel EG$

EFHG為矩形，

作矩形之對角線EH，FG，相交於I，

以I為圓心，IE為半徑作圓，

截AB於E及F，CD於G及H，

∴ 圓EFHG為所求之圓。

證 過I作KL⊥AB，

必KL⊥CD，

（設一線垂直於平行線之一線，亦必垂直於他線）

在rt.△EIK及rt.△LIH內，

EI＝HI，

（矩形之兩對角線，必彼此平分）

∠EIK＝∠HIL

△EIK＝LIH

IK＝IL

EF＝GH

（在同圓內，與圓心等距離之弦必等）

圓EFHG為求作之圓。

【習題】

1． 過不在一直線上之三點，作一圓。

〔提示〕 先聯三點成兩直線，再求此兩線之垂直平分線之交點，此交點即為所求圓之圓心。

2 設一直線與二平行線相交 求切此三直線之二圓。

3． 求作一圓，有已知半徑，且過兩已知點。

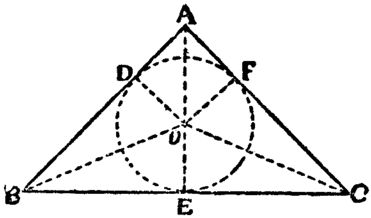
4． 求作一圓，已知其半徑，且與一已知角之兩邊相切。

5． 求作切二圓及一直線之圓。

（5） 內切形及外接形

【例題】

● 43． 求作已知三角形之內切圓



設△ABC為已知三角形，

求作一內切圓。

作圖　作△ABC三內角之平分綫交於一點O，

以O為圓心，O點至各邊之距離為半徑作圓，則此圓即為所求之內切圓。

（證）　由O點向AB，BC，AC各作垂綫OD，OE，OF，

因　$\angle DAO = \angle FAO$

$\angle ADO = \angle AFO = rt.\angle$；AO共有

∴　$\triangle AOD = \triangle AOF$，

∴　$OD = OF$

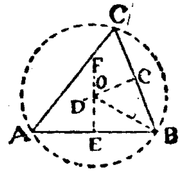
同理可證　$OE = OF$。　　∴　$OD = OE = OF$。

故圓O為△ABC之內接圓。

44．求作一已知三角形之外接圓。

［解］設△ABC為已知三角形，

求作一外接圓。



作圖　作AB之垂直平分線EF，

作BC之垂直平分線CD，與EF相交於O，

作BO

以O為圓心，BO為半徑，作圓

則得所求之外接圓。

證　作　CO；AO，

因　$AO = BO$

$BO = CO$　　（定理18c）

∴　$AO = BO = CO$。

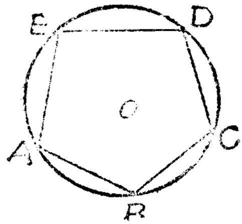
故以O爲圓心，BO爲半徑作圓，必過三角形之三頂點A B,C.

45. 求作一圓之內接五邊形。

〔解〕設O爲一圓

求作圓之內切五邊形，

作圖　於圓周上任取五點A,B，C,D,E，將相隣之點連之，則得所求之內接五邊形。



46. 於已知圓中，畫一正內接六邊形。

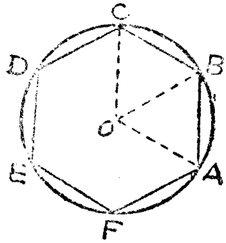
〔解〕設O爲已知圓之圓心，

求作此圓之內接正六邊形

作圖　由O作半徑OA，以A爲圓心，OA爲半徑作一弧交圓周於B，再以B爲圓心，OA爲半徑作弧與圓周相交於C，同樣得D，E，F諸點，

聯AB，BC，CD，EF，AF，

則ABCDEF爲所求之內接六邊形。



證　連AO，BO，CO，

△ABO爲一等邊三角形，　　(題設)

$\therefore\quad \angle AOB=\frac{180°}{3}=\frac{360°}{6}$

同樣可證　$\angle BOC=\frac{360°}{6}$，

$\therefore\quad \angle AOB=\angle BOC$，

$\overset{\frown}{AB}=BC$

(等圓心角，必對等弧)

AB＝BC，

(等弧必對等弦)

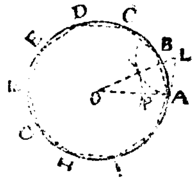
同樣可證　BC＝CD＝DE＝EF，

則　　ABCDEF為正六邊形。

（圓之內切等邊多邊形，爲有法多邊形）

47. 試作一已知圓之內接正十邊形。

〔解〕設已知圓O



求作一內切正十邊形，

作圖　作任意半徑AO

作AO之內分點P使$\overline{OP}^2 = AO \times AP$，以A爲圓心，PO爲半徑，作弧截圓周於B。

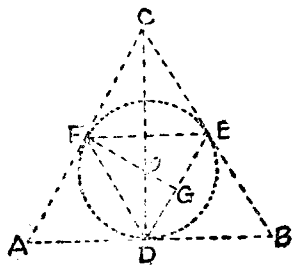
聯AB，

則AB爲圓之內切正十邊形之一邊，以B爲圓心，AB爲半徑，截圓周於C，同樣可作D，E，F，G，H，I，J諸點。

順次聯諸點，則得求作之內切正十邊形。

已知圓之半徑爲5公分，求作一外切等邊三角形，並求其面積。

〔解〕設已知圓之半徑爲5公分，



求作一外切等邊三角形。

求圖　以5公分爲半徑作圓，

以半徑等分圓周爲六等分，

聯相隔之等分點，則得圓之內切等邊三角形DEF，

在D，E，F作三切線，相交於A，B，C三點，

∴△ABC爲所求之三角形。

計算　因等邊三角形之內切圓圓心，爲該等邊三角形之重心，

則$DO = \frac{1}{3}CD = 5$公分

$\therefore CD=15$公分

又O爲內切等邊三角形DEF之重心，則FG爲DE上之中線

且$FG\perp DE$

$\therefore GO=\frac{1}{3}FG=\frac{1}{2}FO=\frac{5}{2}$

$\therefore DG=\sqrt{5^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}\sqrt{3}$

$DE=2\,DG=5\sqrt{3}$

但　$\angle DFE=\angle BDE=60°$

（因同以$\frac{1}{2}$ DE弧度之）

$\angle B=60°$

$\therefore \triangle BDE$爲一等邊三角形，

$\therefore BD=DE=5\sqrt{3}$

$AB=2\,DE=10\sqrt{3}$

$\therefore \triangle ABC$之面積$=\frac{1}{2}\times 15\times 10\sqrt{3}$

$=75\sqrt{3}$平方公分

【習題】

1. 求作一已知矩形之外接圓。
2. 求作一已知圓之內接正方形。
3. 求作一已知圓之內接正十二邊形

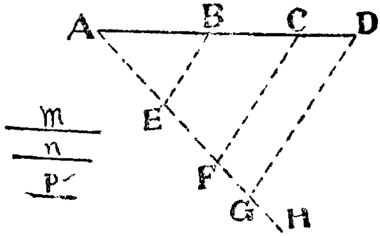
〔提示〕 先作正六邊形

(6)　比　例

【例題】

49. 求分一已知直線，爲若干分，與若干已知直線爲比例。

〔解〕



設AD,m,n,p,為已知直線

求分AD為三份,與m,n,p為比例。

作圖 作AH,與AD成適宜之角,於AH上,取AE等於m,EF等於n,FG等於P.

聯DG,

由F作CF平行DG,與AD相交於C,

由E作BE平行CF,與AD相交於B,

則AD分為AB,BC,CD三分,

且AB : m = BC : n = CD : p.

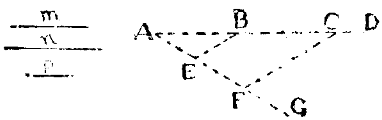
證 AB : AE = BC : EF = CD : FG (定理141)

(設兩線為數平行線所截,則其諸相當線分成比例。)

代入 AB : m = BC : n = CD : p

50 求三已知直線之第四比例項。

〔解〕



設已知m,n,P三線,

求m,n,P之第四比例項。

作圖 作任意線AD及AG,成一適宜之角。

於AD上取AB等於m,BC等於n,

於AG上取AE等於P,

聯BE,

由C作CF平行BE，與AG相交於F，

則EF爲所求之第四比例項。

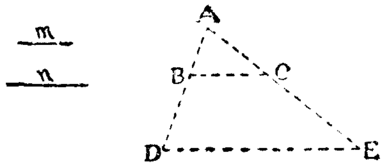
證　AB：AE＝BC：EF　（定理134）

（設過三角形之兩邊，作一線與第三邊平行，必分此兩邊成比例。）

代入則m：n＝P：EF.

51. 求兩已知直線之第三比例項。

〔解〕



設m及n爲兩已知直線，

求m及n之第三比例項。

作圖　作任意線AD及AE，成一適宜之角，

於AD上取AB等於m，

於AE上，取AC等於n，

作BC.

於AB上自B點取BD等於AC，

由D作DE平行BC，與AE相交於E，

則CE爲所求之第三比例項。

證　AB：BD＝AC：CE　（定理134）

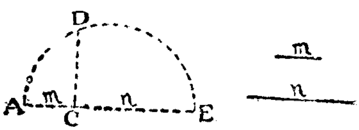
（設過三角形之兩邊，作一線與第三邊平行，必分此兩邊成比例。）

因BD＝AC　（題設）

代入　則m：n＝n：CE.

2. 求作兩已知直線的比例中項。

〔解〕



設m及n爲兩已知線

求m及n之比例中項

作圖　於直線AE上

取AC＝m，　CE＝n，

以AE爲直徑作半圓，

由C作CD⊥AE，遇圓周於D，

則CD爲所求之比例中項。

證　AC：CD＝CD：CE　（定理144a）

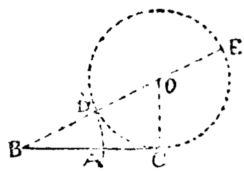
（由圓周上一點至直徑之垂線，爲直徑上兩線分之比例中項）

以m，n代入，則

m：CD＝CD：n

53．求分直線BC爲內分比之點A，卽使$\overline{AB}^2$＝BC•AC。

〔解〕



設BC爲一已知線

求於BC上作一A點，使$\overline{AB}^2$＝BC•AC

作圖　在BC一端引垂線CO，使CO＝$\frac{1}{2}$BC，

以O爲圓心，CO爲半徑，畫圓。

連結BO，與圓交于D

次以B爲圓心，BD爲半徑，畫弧，交BC于A

則　$\overline{AB}^2$＝BC•AC

證　延長BO遇圓周於E

∴　BE：BC＝BC：BD　（定理143）

（設由圓外一點，作一切線一割線，則此切線爲割線

及其圓外線分之比例中項)

$\overline{BC}^2 = BE \times BD$

$= (BD + DE)BD$

$= \overline{BD}^2 + DE \cdot BD$

移項 $\overline{BC}^2 - DE \cdot BD = \overline{BD}^2$

$\overline{BC}^2 - BC \cdot AB = \overline{AB}^2$

$BC(BC - AB) = \overline{AB}^2$

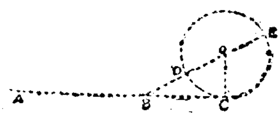
$\overline{AB}^2 = BC \cdot AC.$

〔附註〕 $\overline{AB}^2 = BC \cdot AC$

卽 $BC : AB = AB : AC.$

54. 求分 已知直線爲外分比。

〔解〕



設BC爲一已知線

求作此直線之外分比。

作圖 作$CO \perp BC$，並使$CO = \frac{1}{2}BC.$

以O爲圓心，CO爲半徑作圓，

聯BO，並延長之，與圓周相交於E，

延長BC至A，使$AB = BE$，

則A分BC爲外分比

證 $BE : BC = BC : BD.$ (定理143)

$\overline{BC}^2 = BE \cdot BD$

$= AB \cdot (AE - DE)$

$= AB(AB - BC)$

$=\overline{AB}^2-AB\cdot BC.$

移項 $\overline{BC}^2+AB\cdot BC=\overline{AB}^2$

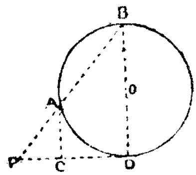
$BC(BC+AB)=\overline{AB}^2$

$BC\cdot AC=\overline{AB}^2$

即 $AC:AB=AB:BC.$

55. 求自圓外一已知點P，作此圓之割線PAB，使$\overline{AB}^2=PA\times PB$

〔解〕



作圖 由P作已知圓之切線PD， (例題30)

將PD分為內分比，使$PD:CD=CD:PC$得C點 (例題49)

以P為圓心，CD為半徑作圓，與已知圓周相交於A，

聯PA並延長之與已知圓周相交於B，

則PAB為所求之割線。

證 作AC，BD

$PA:PD=PD:PB$ (定理143)

又 $PC:PA=PA:PD$ (題設)

∴ $PC:PA=PD:PB$

∴ $AC \parallel BD.$ (定理136)

（設一直線分三角形之兩邊成比例，則必與第三邊平行）

$PC:PA=CD:AB$

即 $PC:PA=PA:AB.$

(設過三角形之兩邊，作一線與第三邊平行，必分此兩邊成比例)

但已知PC：PA＝PA：PD

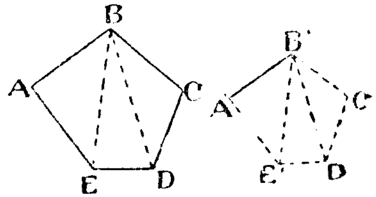
兩者相較必PD＝AB.

代入 PA：AB＝AB：PB.

即 $\overline{AB}^2 = PA \times PB$.

56. 設一已知直線，與一已知多邊形之一邊相當，求於此線上作一多邊形，與此已知多邊形相似。

〔解〕



設已知直線A'B'與已知多邊形ABCDE之AB邊相當。

求作一相似多邊形

作圖 由B作對角線BE，BD，

由B'亦作B'E'及B'D'並作B'C'，使

∠A'B'E'＝∠ABE，∠E'B'D'＝∠EBD，∠C'B'D'＝∠CBD.

由A'作A'E'使∠B'A'E'＝∠BAE與B'E'相交於E'

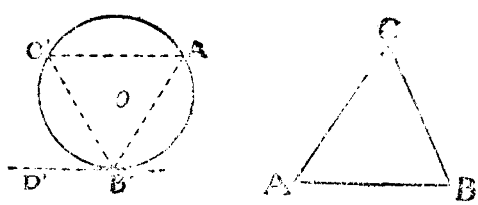
由E'作E'D'使∠B'E'D'＝∠BED，與B'D'相交於D'

由D'作D'C'使∠B'D'C'＝∠BDC與B'C'相交於C'

∴ A'B'C'D'E'為所求之相似多邊形。

57. 在已知圓內作一與已知三角形相似之內接三角形。

〔解〕



設已知三角形ABC及圓O

求作一圓之內切三角形，與△ABC相似

作圖　作切線B'D'與圓相切於B'，

由B'作B'C'弦使∠C'B'D'＝∠BAC與圓周相交於C'

由C'作A'C'，使∠A'C'B'＝∠ACB，與圓周相交於A'

聯A'B'。

則△A'B'C'為求作之三角形。

證　$\angle C'B'D' = \angle B'A'C'$

（同以$\frac{1}{2}$B'C'弧度之）。

$\therefore$　$\angle B'A'C' = \angle BAC$

$\angle A'C'B' = \angle ACB$.

$\therefore$　$\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$.

【習題】

1. 若已知直線a及b，作$\sqrt{ab}$

2. 求自圓外已知點P，作此圓之割線PAB，使PA與AB之比，等於兩已知線m及n之比。

〔提示〕 作已知圓之切線PC，應用例題44，分切線為m：n，然後應用例題47以求之。

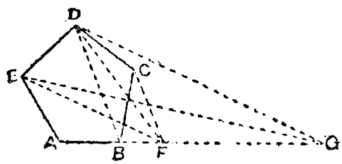
3. 內分三角形之各邊成二段，其比等於其他二邊之比。

(7) 等積

【例題】

58. 求作一三角形，其積與一已知五邊形相等。

〔解〕



設ABCDE為一五邊形

求作一三角形與此五邊形為等積，

作圖　作BD.

由C作CF ∥ BD，與AB之延長線相遇於F，

作DF，及EF

由D作DG ∥ EF，與AB之延長線相遇於G

作EG

則　AEG爲求作之三角形，

證　△BDF≎△BCD.

(等底及等高之三角形必等積)

∴　五邊形ABCDE≎四邊形AFDE

又　△EFG≎△EFG

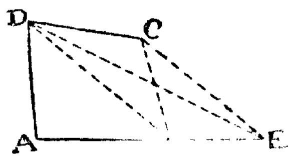
∴　四邊形AFDE≎△AEG

即　五邊形ABCDE≎△AEG

59. 求作一三角形與一已知四邊形爲等積。

〔解〕設ABCD爲已知四邊形，

求作一三角形與此四邊形爲等積。



作圖　作對角線BD，

由C作CE ∥ DB，

延長AB遇CE於E.

作DE，

則△DEA爲所求之三角形，與四邊形ABCD爲等積，

證　在四邊形ABCD及△ADE內

△ABD爲公共部分

今△BCD及△BDE內

BD爲公共底，且其高相等

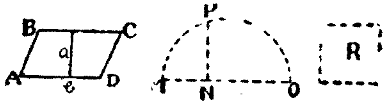
(因在平行線CE及BD內)

∴　△BCD≎△BDE

∴　四邊形ABCD≎△ADE.

60. 求作一正方形，與一已知平行四邊形爲等積。

〔解〕



設ABCD爲已知平行四邊形，

求作一正方形與▱ABCD爲等積。

作圖　於直線MO上，取MN等於▱ABCD之高 a，NO等於▱ABCD之底b，

以MO爲直徑作半圓，於N上作PN⊥MO，與圓周相交於P，

以PN爲正方形之一邊作正方形R，

則R爲所求之正方形。

證　MN：PN＝PN：NO　　　　（定理144a）

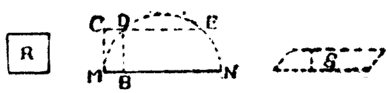
（由圓周上一點，至直徑之垂線爲所分直徑上兩線分之比例中項）

即　$\overline{PN}^2 = MN \times NO = a \times b$

∴　R≎▱ABCD。

61. 求作一平行四邊形，與一已知正方形爲等積，而其底高之和，等於一已知線。

〔解〕



設R爲一已知正方形，MN爲一已知直線

求作一平行四邊形與R爲等積，

作圖　以MN爲直徑作半圓，

於M作CM⊥MN，且使CM等R之一邊，

由C作CE ∥ MN與圓周相交於D，

作DB⊥MN，與MN相交於B

以MB爲高，BN爲底作平行四邊形S，

則S爲所求之平行四邊形。

證 $CM \parallel DB$. （因同垂直於MN）

$\therefore \quad DB = CM$

平方之 $\overline{DB}^2 = \overline{CM}^2 = R.$

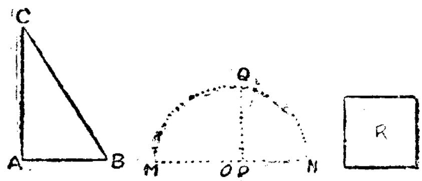
但 $MB : DB = DB : BN$ （定理144a）

$\overline{DB}^2 = MB : BN.$

$\therefore \quad S = R.$

62. 作一正方形，其面積等於已知直角三角形之面積。

〔解〕



設△ABC為一已知直角三角形

求作一正方形與此三角形為等積

作圖 於綫MN上取$MP = AB$，$NP = \frac{1}{2}AC$，

以MN為半徑，作半圓，

於P作$PQ \perp MN$，遇圓周於Q。

以PQ為正方形之一邊，作正方形R，

則正方形R為所求之正方形，

證 $MP : PQ = PQ : NP$

（由圓周上一點，至此圓之直徑之垂綫，為直徑上兩綫分之比例中項）

$\therefore \quad \overline{PQ}^2 = MP \times NP$

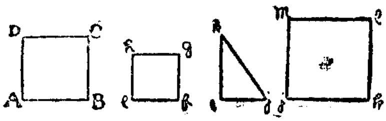
但 $NP = \frac{1}{2}AC.$

$\therefore \quad \overline{PQ}^2 = \frac{1}{2}MP \times AC.$

R≎△ABC。

63. 求作一正方形等于已知二正方形之和。

〔解〕



設ABCD及efgh爲二已知正方形。

求作另一正方形，與此二正方形爲等積。

作圖 作ij=ef，

ik=AB且⊥ij

聯jk

以jk爲一邊作一正方形jklm，

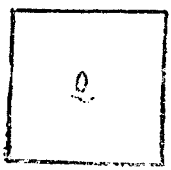
則jklm卽爲所求之正方形。

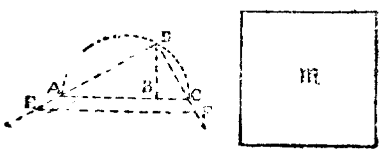
證 $\overline{jk}^2=\overline{ij}^2+\overline{ik}^2$ (定理59)

∴ 正方形jklm≎正方形ABCD+正方形efgh.

64. 作一正方形等於一已知正方形面積之三倍。

〔解〕





設l爲已知正方形。

求作一正方形其面積等於l之三倍，

作圖 作AC，於AC上取BC=1，AB=3，

以AC爲直徑作半圓，

作BD⊥AC，遇圓周於D，
聯AD，CD並延長之
於CD之延長線上，取DF等於 l 之一邊，
由F作EF與AD之延長線相交於E，
以DE為一邊作正方形m，
∴ m為所求之正方形。

證 △ACD∽△EFD。

$$\frac{DF}{DE}=\frac{CD}{AD}$$

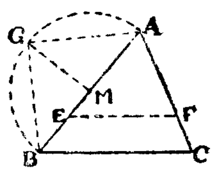
$$\frac{l}{m}=\frac{\overline{DF}^2}{\overline{DE}^2}=\frac{\overline{CD}^2}{\overline{AD}^2}=\frac{BC\cdot AC}{AB\cdot AC}=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{3}$$

（定理140b）

（設由直角三角形之直角頂至其弦作垂線，則直角三角形之腰為弦及其鄰線分之比例中項）。

65. 試由△ABC之AB邊上，作BC之平行線EF，分△ABC成兩等積。（卽△AEF之面積，須與四邊形EFCB之面積相等）

〔解〕求作EF平行BD，且分△ABC為兩等積



作圖 以AB為直徑作半圓，
作 AB 之垂直平分線，遇圓周於G，
聯AG，
在AB上取AE＝AG，
過E作EF∥BC，
則EF為所求之線

證 △ABC∽△AEF

△ABC：△AEF＝$\overline{AB}^2$：$\overline{AE}^2$
（兩相似三角形之面積之比，等於任兩相當邊之平方之比）

聯BG.

$\angle AGB = rt.\angle$

（半圓之內切角必爲直角）

因MG爲AB之垂直平分線，

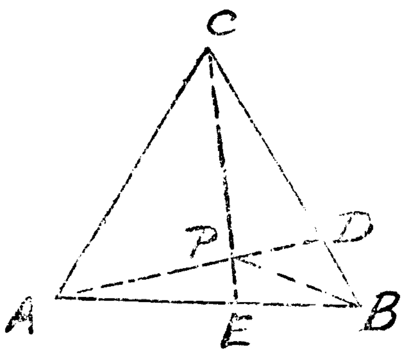
則AG，BG爲內切正方形之兩邊

$\overline{AB}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 = 2\overline{AG}^2 = 2\overline{AE}^2$

代入　$\therefore \triangle ABC : \triangle AEF = 2\overline{AE}^2 : \overline{AE}^2 = 2 : 1$

即　$\triangle AEF \approx$ 四邊形EFCB.

66. 於$\triangle ABC$內求一點P，使$\triangle BPC = 2\triangle APB$，$\triangle APC = 3\triangle APB$.



設已知三角形ABC

求在三角形內作一點使$\triangle BPC = 2\triangle APB$，$\triangle APC = 3\triangle APB$.

作圖　$\triangle APB = \frac{1}{2}\triangle BPC = \frac{1}{3}\triangle APC$

即　$\triangle APB : \triangle BPC : \triangle APC = 1 : 2 : 3$.

於AB上作E，使$BE : AE = 2 : 3$

於BC上作D，使$BD : CD = 1 : 3$

聯CE，AD，相交於P，

則P爲所求之點。

證　作BP

$\triangle BAD : \triangle CAD = BD : CD = 1 : 3$

（等高兩三角形之比，等於底之比。）

$\triangle BPD : \triangle CPD = BD : CD = 1 : 3$

∴ $\triangle BPD : \triangle CAD = \triangle BPD : \triangle CPD = 1:3$

$(\triangle BAD - \triangle BPD) : (\triangle CAD - \triangle CPD)$

$= \triangle BPD : \triangle CPD = 1:3$

即 $\triangle APB : \triangle APC = 1:3$

同樣可證

$\triangle BPC : \triangle APC = BE : AE = 2:3$

∴ $\triangle APB : \triangle BPC : \triangle APC = 1:2:3$

即 $\triangle BPC = 2\triangle APB$,

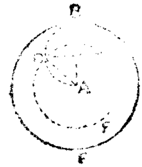
$\triangle APC = 3\triangle APB$

∴ P爲所求之點。

67. 在一定圓內求作一同心圓分定圓成兩相等部分

〔解〕設圓BE爲已知，A爲圓心，

求作一同心圓，分圓BE爲兩相等部份



作圖 作半徑AB

C爲AB之中點，

以AC爲半徑，C爲圓心，作圓，於

C作CD⊥AB，與半圓相遇於D，

作AD，

以A爲圓心，AD爲半徑，作圓DF，則DF爲所求之同心圓。

證 $\overline{CD}^2 = AC \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot \frac{1}{2}AB = \frac{1}{4}\overline{AB}^2$

(由圓周上一點至直徑之垂線，爲直徑上兩線分之比例中項)。

但 $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = \frac{1}{4}\overline{AB}^2 + \frac{1}{4}\overline{AB}^2 = \frac{1}{2}\overline{AB}^2$

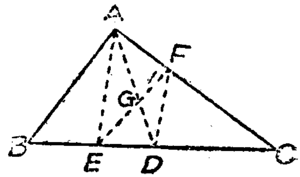
圓DF之面積 $= \pi\overline{AD}^2 = \frac{1}{2}\pi\overline{AB}^2$

圓BE之面積 $= \pi\overline{AB}^2$

∴ 圓DF $\approx \frac{1}{2}$ 圓BE

68. 求於已知三角形底邊之一點作一直線，分原三角形爲二等分。(江蘇會考，江西會考

［解］設ABC為一三角形，E 為BC邊上任意一點



求作一線，經過E，分△ABC為二等分。

作圖　於BC之中點D，作中線AD。

連結　AE，並作DF ∥ AE

連結EF

則　EF卽為所求之線。

證　△ABD＝△ACD　（定理164）

（等底且等高之兩三角形必等積）

△AEF＝△ADE．　（定理35及定理164）

△AEF－△AEG＝△ADE－△AEG

∴　△AFG＝△DEG

∴　四邊形ABEF≏△CEF

【習題】

1. 有矩形，有一邊之長為他邊之二倍，求作一正方形與此矩形為等積。
2. 求作一正方形，與已知二正方形之差為等積。
3. 求三角形一點，設聯此點於各頂，必分此三角形為三等分。

［提示］ 此點為三角形之重心，試證之。

4. 求作一正方形，與等邊三角形為等積。

［提示］ 以$\frac{1}{2}$b＋h為直徑作一半圓，求$\frac{1}{2}$b及h之比例中項。

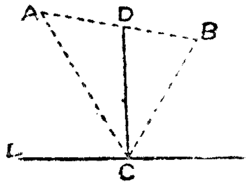
(8　極大極小 //

【例題】

69. 自兩定點至定線內一點作二線分，令兩線分之平方和為最小。

〔解〕設A,B爲兩定點,L爲一定線,

求在L上作一點C,作$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$爲最小,



作圖 連AB

於AB之中點D作一直線

垂直L,得垂點C,

C爲所求之點

證 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2$

(三角形二邊平方之和,等於第三邊之半及對於第三邊之中線兩者平方之和之二倍)

若 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$爲最小,

則 $2\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2$必爲最小,

但 $2\overline{AD}^2$爲一定

故 $2\overline{CD}^2$必爲最小

即 CD必爲最小,

今 CD⊥L,爲D至L之最短線,

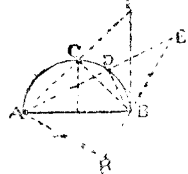
故 CD爲最小

∴ C爲所求之點。

70. 求於已知半圓周內作一點,使此點與直徑之兩端之距離和爲極大。

〔解〕設ACB爲已知半圓。

求於ACB上作一點,使此點與直徑之兩端距離和爲極大。



作圖 作直徑AB之垂直平分線,

與圓周相交於C,

則C爲所求之點。

證 作AC及BD,並延長AC,至F,

使CF=AC 聯BF,

D爲圓周上任一點，作AD及BD，並延長AD至E，使DE＝BD，作BE並引長之，與由A所作之AR相垂直，相交於R，

因　$AC=BC$。　　(定理18a)

(設由已知線之垂直平分線內一點，作兩直線，至此已知線之兩端，則此兩直線必等)

又　$AC=CF$　　(題設)

則　$AC=BC=CF$

∴　F，B，A必在以AF爲直徑之圓周上。

(因半徑相等)

$\angle ABF=rt.\angle$

(因半圓之內切角必爲直角)

$\angle ACB=\angle CBF+\angle F$

(三角形一外角，等於內對兩角之和)

但　$\angle F=\angle CBF$

(對等邊之角必等)

∴　$\angle ACB=2\angle F$

同様　$\angle ADB=\angle DBE+\angle E=2\angle E$

但　$\angle ACB=\angle ADB$.

(因同爲半圓之內切角)

∴　$\angle F=\angle E$

∴　$rt.\triangle ABF\backsim rt.\triangle AER$

$AB:AR=AF:AE$

但　$AB>AR$　　(定理17a)

(垂線爲由一點至一直線之至短線)

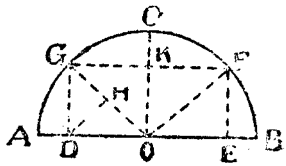
∴　$AF>AE$

卽　$AC+BC>AD+BD$.

則C爲所求之點。

71．求作已知半圓內極大之矩形。

[解]設AGCFB爲已知半圓，圓心爲O，求在此半圓內，作一最大之矩形。



作圖 作半徑CO⊥AB.

作∠AOC及∠BOC之平分線GO及FO，與圓周相交於G及F，

聯FG；

作EF及DG垂直AB，

則DEFG爲所求之矩形。

作 DH⊥GO，

因 ∠GOK＝∠FOK＝45° （題設）

在 △FGO內

GO＝FO （半徑相等）

∴ ∠FGO＝∠GFO

（對等邊之角必等）

但 ∠FOG＝∠GOK＋∠FOK＝90°

∴ ∠FGO＋∠GFO＝180°－90°＝90°

（三角形三內角之和等於兩直角）

即 2∠FGO＝90°

∴ ∠FGO＝∠GFO＝45°

在 △GKO內

∠GKO＝180°－∠FGO－∠GOK＝90°

同樣可證 ∠FKO＝90°

在 rt.△DGO，rt.△GKO，rt.△FKO，及rt.△EFO內，

GO＝FO

∠DOG＝∠GOK＝∠FOK＝∠EOF

∴ △DGO≅△GKO≅△FKO≅△EFO

（直角三角形有一弦及一銳角相等，則三角形全等）。

∴ △DGO＝$\frac{1}{4}$矩形DEFG.

因 $\angle DGO=90°-45°=45°$

∴ $\angle DGO=\angle DOG$

$DO=DG$

∴ rt.$\triangle DGH$＝rt.$\triangle DHO$。

∴ $GH=HO$。

又 $\angle HDO=90°-\angle DOH=45°$

∴ $\angle HDO=\angle DOH$

∴ $DH=HO$

因是得$GH=HO=DH$

故以H為圓心，GO為直徑，所作之圓必過G，D 及O。

但GO為底之內接於半圓GDO之三角形之高，以半徑DH為最大，

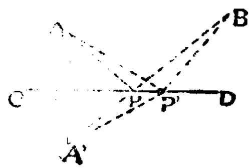
故$\triangle GDO$為極大， （定理141c）

（等底之兩三角形面積之比，等於其高之比）

則矩形DEFG亦為極大。

78 A，B是在定直線CD同側之二點，在CD上求P點，使AP＋BP之值為極小，並證明之。

〔解〕設A及B為在定直線 CD同傍之二點，求在CD上作P點，使 AP＋BP為極小



求圖 作P點使 $\angle APC=\angle BPD$

則P為所求之點。

證 延長BP至A'，使A'P＝AP

聯AA'與CD相交於E。

P'為CD內任一點，

作AP'，BP 及A'P'

在$\triangle AEP$及$\triangle A'EP$內

$AP=A'P$ （題設）

EP為公共邊

$\angle A'PE=\angle BPD$ （對頂角相等）

$\angle BPD=\angle APE$ （題設）

即 $\angle A'PE=\angle APE$

$\triangle APE=\triangle A'PE$

$\therefore\ AE=A'E$

$\therefore$ CD為AA'之垂直平分線

$AP+BP=A'P+BP=A'B$

但 $AP'=A'P'$ （定理18a）

$AP'+BP'=A'P'+BP'$

但 $A'B<A'P'+BP'$ （定理50）

（三角形之一邊小於其他二邊之和）

以 $AP+BP=A'B'$，

$AP'+BP'=A'P'+BP'$代入

則 $AP+BP<AP'+BP'$

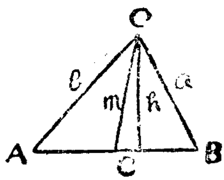
故 $AP+BP$為極小。

【習題】

1. 求作已知半圓內極大之三角形。
2. 求作已知三角形之極大內接矩形。

（十二） 計算問題

【定理】



設三角形之三邊為a，b，c，並命

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

178. 設三角形在c邊上之高為h，則

$$h=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

179.設三角形在c邊上之中線爲m，則

$$m=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$$

180.設三角形C角之平分線爲t，則

$$t=\frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}$$

181.設三角形之外接圓半徑爲R 則

$$R=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

182.設圓周爲C，半徑爲R，則$C=2\pi R(\pi=3.1416)$。

183.設n邊形之對角線數爲L，則

$$L=\frac{1}{2}n(n-3)$$

【證明】

1. 設n邊形之對角線數爲L， 則 $L=\frac{1}{2}n(n-3)$。

定理183.

【證】多邊形之對角線，爲連二不相隣之角頂之線。

由n邊形之一頂點可引(n－3)條對角線。

由n邊形n個頂所引之對角線，兩條相合爲一

故每角有$\frac{1}{2}(n-3)$對角線。

因有n個角頂，故可作$\frac{1}{2}n(n-3)$對角線。

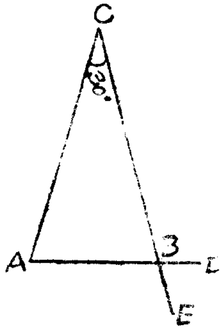
但多邊形之角頂與其邊數同。

則n邊多邊形中，可作$\frac{1}{2}n(n-3)$對角線。

【例題】

1. 設等腰三角形之頂角爲30°，則其一腰與其底之引長線所成之外角爲幾度？

〔解〕設 △ABC爲等腰三角，頂角∠ACB $=30^\circ$，BD爲AB之延長線；BE爲CB之延長線，求∠DBE爲幾度。



因 ∠BAC＝∠ABC

（等腰三角形對等腰之角必等）

但 $\angle ACB+\angle BAC+\angle ABC=180^\circ$

（三角形內三角之和，等於兩直角）

今 $\angle ACB=30^\circ$

∴ $\angle BAC+\angle ABC=180^\circ-30^\circ=150^\circ$

即 $2\angle ABC=150^\circ$

∴ $\angle ABC=75^\circ$

但 ∠DBE＝∠ABC

（對頂角相等）

∴ $\angle DBE=75^\circ$

2. 等腰三角形之底爲8，其腰爲5，求其高。

〔解〕 $h=\dfrac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ （定理178）

今 $s=\dfrac{8+5+5}{2}=9$

∴ $h=\dfrac{2}{8}\sqrt{9(9-5)(9-5)(9-8)}$

$=\dfrac{2}{8}\sqrt{144}=\dfrac{2\times 12}{8}=3$

3. 設等邊三角形之一邊爲a寸，求其高。

〔解〕因三角形之高爲

$h=\dfrac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

今爲等邊三角形則

$a=b=c$，

$$s=\frac{a+a+a}{2}=\frac{3a}{2}$$

$$h=\frac{2}{a}\sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left(\frac{3a}{2}-a\right)}$$

$$=\frac{2}{a}\sqrt{\frac{3a}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}}$$

$$=\frac{2a^2}{4a}\sqrt{3}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$$

4. 三角形之三邊爲7;8;9.求在8邊上之中線

〔解〕 $m=\frac{1}{2}\sqrt{2(7^2+9^2)-8^2}$

$$=\frac{1}{2}\times 14=7$$

5. 等邊三角形之高爲4吋，求其邊之長。

〔解〕三角形之高爲

$$h=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

令 $a=b=c$.

$$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{3a}{2}$$

代入 $\frac{4\times a}{2}$

$$=\sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left(\frac{3a}{2}-a\right)}$$

$$2a=\sqrt{\frac{3a}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}}$$

平方之 $4a^2=\frac{3a}{16}$

$$\frac{4\times 16}{3}=\frac{a^4}{a^2}$$

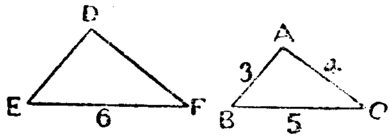
$\therefore\quad a^2=\frac{64}{3}\qquad a=\sqrt{\frac{64}{3}}=8\sqrt{\frac{1}{3}}$

6. 設甲三角形之三邊各爲3尺，4尺，5尺。乙三角形與甲三角形相似，其最長邊爲6尺，求其他邊之長。

〔解〕設$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$.

而AB＝3尺，AC＝4尺，BC＝5尺，EF＝6尺。

求DE及DF之長。



（求法）因$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$

$\therefore\quad AB:DE=BC:EF$

即 $3:DE=5:6$　　$\therefore\quad DE=\frac{3\times6}{5}=3.6$(尺)

$BC:EF=AC:DF$　即 $5:6=4:DF$

$\therefore\quad DF=\frac{4\times6}{5}=4.8$(尺)

7. 已知一矩形之對角線與長邊之和，爲短邊之五倍。又長邊比短邊長三十五尺。問長短邊各幾何？

〔解〕若命長邊爲a，短邊爲b

則 $a+\sqrt{a^2+b^2}=5b$

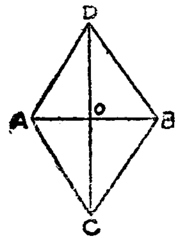
$a-b=35$尺

解之，得

$a=60$尺，　　$b=25$尺，

8. 已知菱形之面積爲120方尺，對角綫之和爲34尺，求邊長。

〔解〕設甲對角線爲x尺乙對角線爲y尺



因菱形面積$=\frac{1}{2}xy$則

$$\begin{cases} xy=2\times120=240 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x+y=34 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

由(2) $x=34-y \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

代入(1) $y(34-y)=240$

$$y^2-34y+240=0$$

$$y=\frac{34\pm\sqrt{(34)^2-4\times240}}{2}$$

$$=\frac{34\pm14}{2}$$

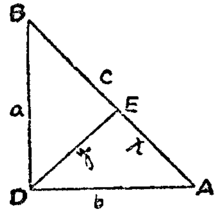
$\therefore$ 代入(3) $\begin{cases} y=24\text{尺} \\ x=10\text{尺} \end{cases}$ $\begin{cases} y=10\text{尺} \\ x=24\text{尺} \end{cases}$

因菱形兩對角線必彼此垂直，且必彼此平分，則

$$\text{邊長}=\sqrt{\left(\frac{24}{2}\right)^2+\left(\frac{10}{2}\right)^2}=\sqrt{196}=14\text{尺}$$

9\. 直角三角形之二邊爲a寸與b寸，弦長c寸。求自直角至弦所作垂綫之長。

〔解〕設DE爲rt.△ABD弦上之頂垂線。



求DE之長。

命 $DE=y, AE=x$，則

$$b^2=x^2+y^2$$

$$a^2=c^2-b^2=(c-x)^2-b^2$$

相加 $a^2+b^2=c^2=2x^2+2y^2+c^2-2cx$

$$=2b^2+c^2-2cx$$

移項 $2b^2-2cx=0$

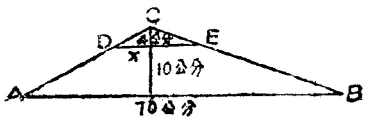
$$x=\frac{b^2}{c}$$

但　$$y=\sqrt{b^2-x^2}=\sqrt{b^2-\frac{b^4}{c^2}}$$

$$=\frac{1}{c}\sqrt{(bc-b^2)(bc+b^2)}$$

10. 三角形之底邊長70公分，高14公分，距底邊10公分作一平行線，求所切成梯形上底之長。

〔解〕



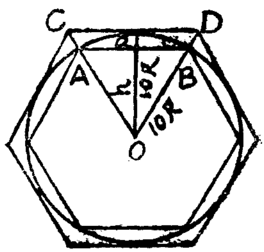
命DE＝x，則

$$\frac{1}{2}\times4\times x+\frac{1}{2}\times10\times(70+x)=\frac{1}{2}\times14\times70$$

$$2x+350+5x=490$$

$$\therefore\quad x=20\text{公分。}$$

11. 已知圓半徑為10尺，求其內外切六邊形之周界及面積。



〔解〕因於有法多邊形可作一外切圓及一內切圓，故所求之六邊形必為有法六邊形。

聯內切有法六邊形之各頂及圓心，則得六個等邊三角形。內切圓之半徑為此等邊三角形之一邊，則內切六邊形之周界＝10×3＝30尺

$$\triangle AOB\text{之面積}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{(10)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{100\sqrt{3}}{4}$$

$$=25\sqrt{3}\text{平方尺。}$$

內切六邊形之面積 $=25\sqrt{3}\times 6=150\sqrt{3}$ 平方尺

$\triangle COD$ 之面積 $=\dfrac{h^2}{3}\sqrt{3}=\dfrac{(10)^2}{3}\sqrt{3}$

$$=\frac{100}{3}\sqrt{3}\text{ 平方尺}$$

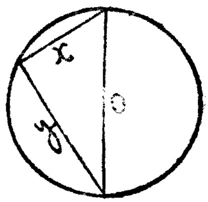
外切六邊形之面積 $=\dfrac{100}{\cancel{3}}\sqrt{3}\times\overset{2}{\cancel{6}}=200\sqrt{3}$ 平方尺。

$$a=\frac{2h}{3}\sqrt{3}=\frac{2\times 10}{3}\sqrt{3}=\frac{20}{3}\sqrt{3}\text{ 尺}$$

外切六邊形之周界 $=\dfrac{20}{3}\sqrt{3}\times 3=20\sqrt{3}$ 尺。

12. 用已知圓之直徑爲弦作一內接直角三角形，若圓之面積爲 $\dfrac{25}{4}\pi$ 方公分，三角形之面積爲6方公分，求三角形其他兩邊之長。

〔解〕設已知圓之內接直角三角形之他兩邊爲x及y，



因 $R^2\pi=\dfrac{25}{4}\pi$

$\therefore\quad R=\dfrac{5}{2}$

$D=2R=5$

則 $$\begin{cases} x^2+y^2=(5)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (1)\\ \dfrac{5xy}{4\times\dfrac{5}{2}}=6\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (2)\end{cases}$$

由(2) $\quad xy=12$

$$y=\frac{12}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

代入(1) $\quad x^2+\left(\dfrac{12}{x}\right)^2=25$

$$x^4-251x^2+144=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

令　$X=x^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

$$X^2-2\ X+144=0$$

(5)代入(4)　$X=\dfrac{25\pm\sqrt{(25)^2-4\times144}}{2}=\dfrac{25\pm7}{2}$

∴　$X=16$　　　or $X=9$

代入(5)　$\begin{cases}x=4\text{公分}\\y=3\text{公分}\end{cases}$　或　$\begin{cases}x=3\text{公分}\\y=4\text{公分。}\end{cases}$

代入(3)

13. 設三角形之三邊為4尺，6尺，8尺，問其外接圓之半徑若干．

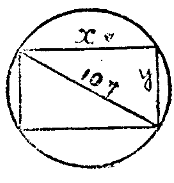
〔解〕　$S=\dfrac{4+6+8}{2}=9$

$$R=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$=\frac{4\times6\times8}{4\sqrt{9\times5\times3\times1}}=\frac{16}{\sqrt{15}}$$

14. 圓內切一矩形，其面積為48平方寸，設圓半徑為5寸，試求矩形兩邊之長。

〔解〕命矩形之一邊為x，他邊為y，則



$$\begin{cases}x^2+y^2=10^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\ xy=48\text{方寸} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)\end{cases}$$

由(2)　$y=\dfrac{48}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

代入　$x^2+\left(\dfrac{48}{x}\right)^2=100 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

$$x^2+\frac{2304}{x^2}=100$$

$$x^4-100x^2+2304=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

令　$x^2=X$

$$X^2-100X+2304=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

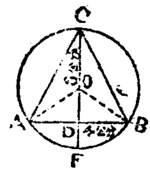
$$X=\frac{100\pm\sqrt{(100)^2-4\times2304}}{2}$$

$$=\frac{100\pm28}{2}=64\text{或}36$$

$$\therefore\ \begin{cases}x=\sqrt{64}=8\\ y=6\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x=6\\ y=8\end{cases}$$

15．以4公分之線段爲底邊作一內接等腰三角形於已知圓內，若圓之直徑爲6公分，求三角形之高。

〔解〕設△ABC爲圓之內切等腰三角形，AB ＝4公分，CF＝6公分，求CD之長。



作AO及BO

AO＝3公分　　BO＝3公分

（因皆爲圓之半徑）

AD＝BD　　　　（定理63）

（由等腰三角形之頂至其底之垂線，必平分其底）

則　CD必過圓心O，　　　　（定理97）

（弦之垂直平分線，必過圓心）

則在△ABO內，

$$DO=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{3+3+4}{2}=5$$

$$DO=\frac{2}{4}\sqrt{5(5-3)(5-3)(5-4)}$$

$$=\frac{2}{4}\sqrt{5\times2\times2\times1}$$

$$=\frac{2\times2}{4}\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

$$CD=CO+DO=3+\sqrt{5}$$

16．圓形之面積等於每邊四尺等邊三角形之面積，求圓形之直徑。

〔解〕等邊三角形之高 $=\frac{a}{2}\sqrt{3}$ （例題3）

等邊三角形之面積 $=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{4}{2}\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

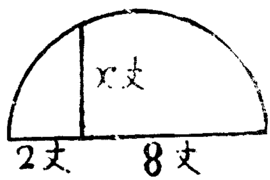
（定理163）

則圓之面積 $=\pi r^2=4\sqrt{3}$

$\therefore\quad r=\sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{\pi}}=\sqrt{2.2053}=1.49$尺

$\therefore$　圓之直徑 $=1.49$尺 $\times 2=2.98$尺

17. 一人站在半圓形的拱橋下，距圓弧的一端爲2丈，他端爲8丈，則自其足至頭頂上的弧高幾丈？



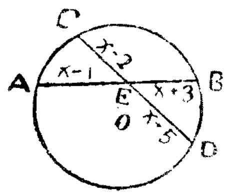
〔解〕　$x^2=2\times 8$　（定理144）

（由圓周上一點，至直徑之垂線，爲所分直徑上兩線分之比例中項）

$x^2=16$

$\therefore\quad x=4$

13. 兩弦相交於圓內，第一弦之兩段爲 $x-1$，與 $x+3$，第二弦之兩段爲 $x-2$，與 $x+5$，求兩弦之長。



〔解〕設AB、CD爲已知圓之兩弦，相交於E，且知各線份之長，求AB，及CD之長。

計算　$AE\times BE=CE\times DE$.

（設兩弦於圓內相交，其兩線分之積，彼此相等）

設　$AE=x-1, BE=x+3, CE=x-2, DE=x+5$

代入　$(x-1)(x+3)=(x-2)(x+5)$

$x^2+2x-3=x^2+3x-10$

$\therefore\quad x=7$

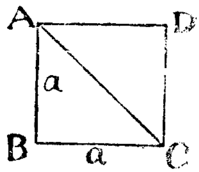
$AB=(x-1)+(x+3)$

$=(7-1)+(7+3)=6+10=$

$$CD=(x-2)+(x+5)=(7-2)+(7+5)$$
$$=5+12=17$$

19. 設正方形之一邊爲a，則對角線之長爲a$\sqrt{2}$，試證明之。

〔解〕設ABCD爲一正方形，每邊之長爲a



求證對角線之長爲a$\sqrt{2}$

證　因$\angle B=rt.\angle$

$$\therefore\quad \overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=a^2+a^2=2a^2$$

(定理59)

$$\therefore\quad AC=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}$$ 。

20. 有正十邊形，取其頂點聯線可得若干個三角形，又可得對角線若干？

〔解〕順次聯十邊形之頂點，可得$n-2=10-2=8$個三角形。

又聯各頂可得$\frac{1}{2}n(n-3)=\frac{1}{2}\times 10\times 7=35$條角線。

(定理182)

21. 一三角形之三邊$\sqrt{3}+1$，$\sqrt{3}-1$，$\sqrt{10}$求其最大角。

此三邊以$\sqrt{10}$爲最大，故所求之角必對該邊，

(三角形內，大角必對大邊)

用　Cosine Low.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

$$(\sqrt{10})^2=(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2-2(\sqrt{3}+1)$$
$$(\sqrt{3}-1)\cos A.$$

$$10=3+2\sqrt{3}+1+3-2\sqrt{3}+1$$
$$-2\times(3-1)\times\cos A$$

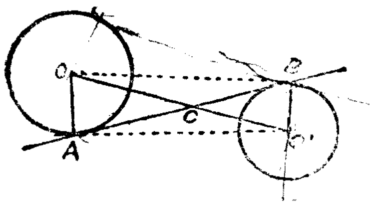
卽　$5y^2-7ay-34a^2=0$

$$(5y-17a)(y+2a)=0$$

$$\therefore\ \text{代入(3)}\quad \begin{cases} y=-2a \\ x=a \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} y=\dfrac{17}{5}a \\ x=-\dfrac{13}{5}a. \end{cases}$$

22: 二圓之半徑爲4寸及5寸，兩圓心之距離爲15寸，求二圓較短之公共切線之長。

〔解〕



設 $OO'=15$, $OA=4$, $O'B=5$,

AB 爲兩圓之內公切線，因內公切線恆較外公切線爲短，今欲求其長。

因 $\angle ACO=\angle BCO'$

$\therefore\ \triangle ACO \backsim \triangle BCO'$

$$\frac{OC}{O'C}=\frac{OA}{O'B}=\frac{4}{5}$$

$$OC=\frac{4}{5}O'C=\frac{4}{5}(15-OC)=12-\frac{4}{5}OC$$

$$\therefore\ OC=\frac{20}{3}$$

又 $O'C=\dfrac{5}{4}\times OC=\dfrac{5}{4}(15-O'C)=\dfrac{75}{4}-\dfrac{5}{4}O'C$

$$O'C=\frac{25}{3}$$

$$AC=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^2-(4)^2}=\frac{16}{3}$$

$$BC=\sqrt{\overline{O'C}^2-\overline{O'B}^2}=\sqrt{\left(\frac{25}{3}\right)^2-(5)^2}=\frac{20}{3}$$

$$\therefore \quad AB = AC + BC = \frac{16}{3} + \frac{20}{3} = 12$$

【習題】

1. 三角形之三邊爲5寸7寸10寸，求在10寸邊上之高。

2. 三角形之三邊爲3,5,8，求8之邊上中線之長。

3. 等邊三角形之周界爲30尺，求其高。

4. 有兩正方形，其邊爲24尺及32尺，復有一正方形與其和爲等積，求此正方形之邊。

5. 直徑爲16寸之圓，求其圓周之長。

6. 有一腳踏車，前輪之直徑爲3尺，後輪之直徑爲2尺，今行若干距離，前後輪之迴轉數共爲2450回，求距離。