Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2019/2020

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 23

Injektive Moduln

Definition 23.1. Es sei R ein kommutativer Ring. Ein R-Modul I heißt *injektiv*, wenn es für jeden R-Modul M, jeden Untermodul $N \subseteq M$ und jeden R-Modul-Homomorphismus $\varphi \colon N \to I$ eine Fortsetzung

$$\tilde{\varphi} \colon M \longrightarrow I$$

gibt.

Über einem Körper ist jeder Vektorraum injektiv, da jeder Untervektorraum in einem Vektorraum ein direktes Komplement besitzt, und die lineare Abbildung auf dem Komplement irgendwie fortgesetzt werden kann. Für $R = \mathbb{Z}$ wird die Sache schon komplizierter.

Definition 23.2. Eine kommutative Gruppe G heißt *divisibel*, wenn es zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ und jedem $g \in G$ ein $h \in G$ mit $g = nh$ gibt.

Die Gruppe $\mathbb{Z}$ selbst ist nicht divisibel, dagegen ist $\mathbb{Q}$ als kommutative Gruppe divisibel, da ja zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ die Multiplikationsabbidung

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},\, x \longmapsto nx,$$

surjektiv ist (man kann durch n dividieren, daher der Name divisibel).

Lemma 23.3. *Zu einer divisiblen Gruppe D ist auch jede Restklassengruppe D/H divisibel.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Für jedes $d \in D$ gibt es $e \in D$ mit $d = ne$. Dann gilt auch $[d] = n[e]$ in D/H. □

Lemma 23.4. *Zu jeder kommutativen Gruppe G gibt es eine divisible Gruppe D mit $G \subseteq D$.*

Beweis. Wir schreiben $G = \mathbb{Z}^{(J)}/H$ mit einer geeigneten Indexmenge J, die ein Erzeugendensystem von G indiziere. Die freie Gruppe $\mathbb{Z}^{(J)}$ kann man in die divisible Gruppe $\mathbb{Q}^{(J)}$ einbetten. Daher gibt es eine Einbettung

$$G \subseteq \mathbb{Q}^{(J)}/H$$

und letztere ist nach Lemma 23.3 divisibel. □

Ohne Beweis erwähnen wir das folgende Resultat.

Lemma 23.5. *Eine kommutative Gruppe G ist genau dann divisibel, wenn sie injektiv ist.*

Lemma 23.6. *Es sei I ein injektiver Modul über einem kommutativen Ring R. Dann spaltet jede kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

von R-Moduln.

Beweis. Zur Identität $\mathrm{Id}_I\colon I \to I$ gibt es eine Fortsetzung $\varphi\colon B \to I$. Diese vermittelt die Spaltung. □

Lemma 23.7. *Es sei R ein kommutativer Ring, S eine kommutative R-Algebra und I ein injektiver R-Modul. Dann ist auch der S-Modul $\operatorname{Hom}_R(S, I)$ injektiv.*

Beweis. Es seien $A \subseteq B$ S-Moduln und

$$\varphi\colon A \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(S, I),\ a \longmapsto \varphi_a,$$

ein S-Modulhomomorphismus. Dies bedeutet explizit, dass $\varphi_a(s) = \varphi_{as}(1)$ gilt. Wir betrachten A und B als R-Moduln und wir betrachten den R-Modulhomomorphismus

$$A \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Hom}_R(S, I) \xrightarrow{\theta \mapsto \theta(1)} I\,.$$

Aufgrund der Injektivität von I als R-Modul gibt es eine R-lineare Fortsetzung $\tilde{\varphi}\colon B \to I$ dieser Hintereinanderschaltung. Wir behaupten, dass die Abbildung

$$B \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(S, I),\ b \longmapsto (s \mapsto \tilde{\varphi}(sb)),$$

ein S-Modulhomomorphismus ist. Zunächst ist klar, dass die Abbildung

$$S \xrightarrow{1 \mapsto b} B \xrightarrow{\tilde{\varphi}} I$$

zu $\operatorname{Hom}_R(S, I)$ gehört. Die Gesamtzuordnung ist S-linear aufgrund der S-Modulstruktur von $\operatorname{Hom}_R(S, I)$. Für $a \in A$ gilt $\tilde{\varphi}(sa) = \varphi_{as}(1) = \varphi_a(s)$, so dass in der Tat eine Fortsetzung gegeben ist. □

Injektive Auflösungen

Korollar 23.8. *Zu einem R-Modul M über einem kommutativen Ring R gibt es einen injektiven Modul I mit $M \subseteq I$.*

Beweis. Für die kommutative Gruppe M gibt es nach Lemma 23.4 eine divisible Gruppe D und eine Einbettung $M \subseteq D$. Nach Lemma 23.5 ist D ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul. Nach Lemma 23.7 ist dann auch der R-Modul $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$

injektiv. Es liegt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D) \end{array}$$

vor, wobei die vertikalen Abbildungen durch $v \mapsto (r \mapsto rv)$ gegeben sind. Alle Abbildungen sind injektiv. Die linke vertikale Abbildung und die untere horizontale Abbildung sind R-Modulhomomorphismen, daher liegt insgesamt ein R-Untermodul $M \subseteq \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ vor. □

Definition 23.9. Eine *injektive Auflösung* eines R-Moduls M über einem kommutativen Ring R ist ein exakter Komplex

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \ldots$$

von R-Moduln, wobei die I_n, $n \geq 0$, injektive Moduln sind.

Lemma 23.10. *Ein R-Modul M über einem kommutativen Ring R besitzt eine injektive Auflösung.*

Beweis. Nach Korollar 23.8 gibt es einen injektiven Modul I_0 mit $M \subseteq I_0$. Für den Restklassenmodul I_0/M gibt es entsprechend einen injektiven Modul I_1 mit $I_0/M \subseteq I_1$, u.s.w. □

Lemma 23.11. *Es seien L und M R-Moduln über einem kommutativen Ring R. Es sei*

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow L_0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow \ldots$$

ein exakter Komplex,

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \ldots$$

eine injektive Auflösung und

$$\varphi\colon\ L \longrightarrow M$$

ein R-Modulhomomorphismus. Dann gibt es R-Modulhomomorphismen

$$\varphi_n\colon\ L_n \longrightarrow I_n,$$

die mit den Homomorphismen in den Komplexen kommutieren.

Beweis. Die Existenz der kommutierenden Homomorphismen wird durch Induktion über n bewiesen. Zum Homomorphismus $L \to M \subseteq I_0$ gibt es wegen $L \subseteq L_0$ und der Injektivität von I_0 einen kommutierenden Homomorphismus

$$\varphi_0\colon\ L_0 \longrightarrow I_0,$$

dies sichert den Induktionsanfang. Sei nun die Existenz der Homomorphismen bis φ_n bereits bewiesen. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} L_{n-1} & \longrightarrow & L_n & \longrightarrow & L_{n+1} \\ \varphi_{n-1} \downarrow & & \varphi_n \downarrow & & \downarrow \\ I_{n-1} & \longrightarrow & I_n & \longrightarrow & I_{n+1} \end{array},$$

wobei der rechte vertikale Pfeil zu konstruieren ist. Es liegt eine Injektion

$$L_n / \operatorname{bild} L_{n-1} \longrightarrow L_{n+1}$$

vor, und wegen der Kommutativität wird L_{n-1} insgesamt auf 0 nach I_{n+1} hinein abgebildet. Daher liegt ein Homomorphismus

$$L_n / \operatorname{bild} L_{n-1} \longrightarrow I_{n+1}$$

vor und dieser besitzt eine Fortsetzung nach L_{n+1}. □

Im Allgemeinen gibt es in der vorstehenden Situation mehrere Homomomorphismen von Kettenkomplexen. Allerdings sind sie zueinander homotop.

Lemma 23.12. *Es sei M ein R-Modul über einem kommutativen Ring R. Es sei*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow L_0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow \ldots$$

ein exakter Komplex und es sei

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \ldots$$

ein Komplex, wobei die Moduln I_n injektiv seien. Es seien

$$\varphi, \psi \colon L_\bullet \longrightarrow I_\bullet$$

Homomorphismen von Kettenkomplexen. Dann sind φ und ψ homotop.

Beweis. Wir definieren induktiv die Homotopien

$$\Theta_n \colon L_{n+1} \longrightarrow I_n$$

und legen

$$\Theta_{-1} \colon L_0 \longrightarrow M = I_{-1}$$

als die Nullabbildung fest (M ist aber im Allgemeinen nicht injektiv). Nehmen wir nun an, dass die Homotopien bis einschließlich Θ_{n-1} schon konstruiert seien. Es liegt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} L_{n-1} & \xrightarrow{d_n} & L_n & \xrightarrow{d_{n+1}} & L_{n+1} \\ \downarrow & \Theta_{n-1} \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\ I_{n-1} & \xrightarrow{e_n} & I_n & \xrightarrow{e_{n+1}} & I_{n+1} \end{array}.$$

vor, und es gilt

$$\varphi_{n-1} - \psi_{n-1} \,=\, e_{n-1} \circ \Theta_{n-2} + \Theta_{n-1} \circ d_n .$$

Wir betrachten den Homomorphismus $\varphi_n - \psi_n - e_n \circ \Theta_{n-1}$ von L_n nach I_n. Für $x \in L_{n-1}$ gilt dabei

$$\begin{aligned} & (\varphi_n - \psi_n - e_n \circ \Theta_{n-1})(d_n(x)) \\ = \;& (\varphi_n - \psi_n)(d_n(x)) - (e_n \circ \Theta_{n-1})(d_n(x)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\varphi_n - \psi_n)(d_n(x)) - e_n(\Theta_{n-1}(d_n(x))) \\
&= (\varphi_n - \psi_n)(d_n(x)) - e_n(-e_{n-1}(\Theta_{n-2}(x)) + \varphi_{n-1}(x) - \psi_{n-1}(x)) \\
&= \varphi_n(d_n(x)) - \psi_n(d_n(x)) - e_n(\varphi_{n-1}(x)) + e_n(\psi_{n-1}(x)) \\
&= \varphi_n(d_n(x)) - e_n(\varphi_{n-1}(x)) - \psi_n(d_n(x)) + e_n(\psi_{n-1}(x)) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

da ja die φ als auch die ψ mit den Ableitungen kommutieren. Dies bedeutet, dass $\varphi_n - \psi_n - e_n \circ \Theta_{n-1}$ das Bild von d_n auf 0 abbildet. Wir haben also einen induzierten Homomorphismus

$$L_n / \operatorname{bild} d_n \longrightarrow I_n .$$

Da der Komplex $L_\bullet$ exakt ist, liegt eine injektive Abbildung

$$L_n / \operatorname{bild} d_n \longrightarrow L_{n+1}$$

vor, und da I_n injektiv ist, ergibt sich eine Fortsetzung

$$-\Theta_n \colon L_{n+1} \longrightarrow I_n .$$

Dabei gilt

$$\varphi_n - \psi_n - e_n \circ \Theta_{n-1} = -\Theta_n \circ d_{n+1} .$$

□

Injektive und welke Garben

Ein injektiver Modul ist nach Definition durch die Existenz von Homomorphismen in gewissen Situationen gekennzeichnet. Insofern gibt es das entsprechende Konzept (*injektives Objekt*) in jeder Kategorie, in der man von injektiven Homomorphismen sprechen kann. Der übliche Rahmen sind hier die additiven bzw. die abelschen Kategorien, siehe die Anhänge. Die Kategorie der Garben von kommutativen Gruppen auf einem topologischen Raum (und die Kategorie der Garben von Moduln auf einem beringten Raum) bildet eine solche abelsche Kategorie, das haben wir im Wesentlichen in den Vorlesungen 5 und 6 bewiesen. Wir zeigen nun, dass man auch in dieser Situation Garben in injektive Garben einbetten kann.

Lemma 23.13. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und es sei $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann gibt es eine injektive Modulgarbe $\mathcal{I}$ auf X mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{I}$.*

Beweis. Für jede Modulgarbe $\mathcal{M}$ ist

$$\mathcal{M} \longrightarrow \prod_{x \in X} i_* \mathcal{M}_x$$

ein injektiver $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus, wobei (für $x \in X$) $i_* \mathcal{M}_x$ den Vorschub des $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduls $\mathcal{M}_x$ (aufgefasst als Garbe auf $\{x\}$) unter der Einbettung $i \colon \{x\} \to X$ bezeichnet. Nach Korollar 23.8 gibt es zu $\mathcal{M}_x$ einen injektiven $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul I_x auf x. Wir setzen $\mathcal{I} := \prod_{x \in X} i_* I_x$. Somit erhalten wir Inklusionen

$$\mathcal{M} \longrightarrow \prod_{x \in X} i_* \mathcal{M}_x \longrightarrow \prod_{x \in X} i_* I_x$$

von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{I}$ injektiv ist. Seien dazu $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ und ein $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus

$$\varphi\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}$$

gegeben. Dies entspricht nach Aufgabe 3.18 und wegen Lemma Anhang 4.3 einem Element $(\varphi_x) \in \prod_{x \in X} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, i_* I_x) = \prod_{x \in X} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, I_x)$. Zu jedem φ_x gibt es eine Fortsetzung $\tilde{\varphi}_x\colon \mathcal{G}_x \to I_x$ und diese setzen sich zu einer Fortsetzung

$$\tilde{\varphi}\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{I}$$

zusammen. □

Injektive Garben stehen in einem engen Verhältnis zu welken Garben. Diese sind häufig rechnerisch zugänglicher.

Definition 23.14. Eine Garbe $\mathcal{G}$ auf einem topologischen Raum heißt *welk*, wenn für offene Teilmengen $U \subseteq X$ die Einschränkungsabbildungen

$$\mathcal{G}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

surjektiv sind.

Im Fall einer welken Garbe sind dann für beliebige offene Teilmengen $U \subseteq V$ die Einschränkungsabbildungen $\mathcal{G}(V) \to \mathcal{G}(U)$ surjektiv.

Lemma 23.15. *Es sei X ein topologischer Raum und es sei*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben von abelschen Gruppen. Dann gelten folgende Eigenschaften.

(1) *Wenn $\mathcal{F}$ eine welke Garbe ist, so ist die globale Auswertung*

$$\Gamma(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{H})$$

surjektiv.

(2) *Wenn $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ welk sind, so ist auch $\mathcal{H}$ welk.*

Beweis. (1) Sei $t \in \Gamma(X, H)$ vorgegeben. Wir verwenden das Lemma von Zorn und betrachten die Menge

$$\mathcal{M} = \{(U, s) \mid U \subseteq X \text{ offen und } s \in \Gamma(U, \mathcal{G}),\ s \mapsto t \text{ auf } U\}.$$

Wir führen auf $\mathcal{M}$ durch $(U, s) \preccurlyeq (U', s')$, falls $U \subseteq U'$ und s' eine Fortsetzung von s ist, eine Ordnung ein. Diese Menge ist aufgrund der Garbeneigenschaft induktiv geordnet. Nach dem Lemma von Zorn gibt es somit ein maximales Element (U, s) in $\mathcal{M}$. Es ist zu zeigen, dass $U = X$ ist. Sei also $U \neq X$ angenommen und sei

$x \notin U$. Wegen der Garbensurjektivität $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$ gibt es eine offene Umgebung $x \in V$ und einen Schnitt $r \in \Gamma(V, \mathcal{G})$, der auf (die Restriktion auf V) t abbildet. Daher bildet $s|_{U \cap V} - r|_{U \cap V}$ auf 0 ab und gehört somit zu $\Gamma(U \cap V, \mathcal{F})$. Wegen der Welkheit von $\mathcal{F}$ gibt es einen Schnitt
$$z \in \Gamma(X, \mathcal{F}),$$
der auf $s|_{U \cap V} - r|_{U \cap V}$ einschränkt. Wir ersetzen r durch
$$r' = r + z|_V.$$
Dieses Element wird nach wie vor nach $t|_V$ abgebildet und es ist
$$s|_{U \cap V} - r'|_{U \cap V} = z|_V - z|_V = 0.$$
Somit sind s und r' als Schnitte von $\mathcal{G}$ über U bzw. V verträglich und legen einen Schnitt $s' \in \Gamma(U \cup V, \mathcal{F})$ fest, der nach t abbildet. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von U.

(2) Folgt aus (1).

□

Lemma 23.16. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und $\mathcal{I}$ ein injektiver $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann ist $\mathcal{I}$ welk.*

Beweis. Es sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Wir betrachten die Prägarbe
$$\mathcal{P}(V) := \begin{cases} \mathcal{O}_X(V), & \text{falls } V \subseteq U, \\ 0 \text{ sonst}, \end{cases}$$
und nennen die Vergarbung davon $\mathcal{O}_U$. Der natürliche Prägarbenhomomorphismus $\mathcal{P} \to \mathcal{O}_X$ führt nach Lemma 5.2 (4) zu einem Garbenhomomorphismus
$$\mathcal{O}_U \longrightarrow \mathcal{O}_X.$$
Dieser ist injektiv. Es ist
$$\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_U, \mathcal{I}) = \Gamma(U, \mathcal{I}).$$
Da $\mathcal{I}$ injektiv ist, lässt sich jedes Element daraus zu einem Element aus
$$\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{I}) = \Gamma(X, \mathcal{I})$$
fortsetzen. Dies bedeutet, dass die Restriktionsabbildung $\Gamma(X, \mathcal{I}) \to \Gamma(U, \mathcal{I})$ surjektiv ist. □

Abbildungsverzeichnis