Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Maß- und Integrationstheorie

Arbeitsblatt 5

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 5.1. Wir betrachten die beiden Rechtecke

$$Q = [-1, 2] \times [1, 4] \text{ und } L = [1, 5] \times [3, 6]$$

im $\mathbb{R}^2$. Schreibe den Durchschnitt und die Differenzmengen als disjunkte Vereinigung von Rechtecken. Schreibe die Vereinigung der beiden Mengen auf mehrere Arten als disjunkte Vereinigung von Rechtecken. Welche Darstellung ist eine Verfeinerung einer anderen Darstellung? Wie sieht ein „Raster“ aus, mit dem man alle beteiligten Mengen ausdrücken kann? Bestätige, dass die Summe der beteiligten Rechteckinhalte stets gleich ist.

Aufgabe 5.2. Zeige, dass das durch die drei Punkte $(0, 0), (0, 1)$ und $(1, 0)$ gegebene abgeschlossene Dreieck nicht zum Produktpräring von $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$ und $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$ gehört.

Aufgabe 5.3. Es seien $(M, \mathcal{A})$ und $(N, \mathcal{B})$ Messräume und es sei μ das in $x \in M$ konzentrierte Dirac-Maß auf M und ν das in $y \in N$ konzentrierte Dirac-Maß auf N. Zeige, dass $\mu \otimes \nu$ das in (x, y) konzentrierte Dirac-Maß auf $M \times N$ ist.

Aufgabe 5.4.*

Es seien M und N zwei abzählbare Mengen, die beide mit der σ-Algebra aller Teilmengen und mit dem Zählmaß (genannt μ bzw. ν) versehen seien.

a) Zeige, dass M und N σ-endliche Maßräume sind.

b) Zeige, dass das Produktmaß $\mu \otimes \nu$ auf $M \times N$ ebenfalls das Zählmaß ist.

Aufgabe 5.5. Es seien $(M, \mathcal{A})$ und $(N, \mathcal{B})$ Messräume und es sei μ das zur Belegungsfunktion

$$b \colon M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\, x \longmapsto b_x,$$

gehörige Maß auf M und ν das zur Belegungsfunktion

$$c \colon N \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\, y \longmapsto c_y,$$

gehörige Maß auf N (diese Maße seien als σ-endlich angenommen). Zeige, dass $\mu \otimes \nu$ das zur Belegungsfunktion

$$M \times N \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq},\, (x,y) \longmapsto b_x c_y,$$

gehörige Maß auf $M \times N$ ist.

Aufgabe 5.6. Es seien $(M_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(M_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei σ-endliche Maßräume, es seien $(N_1, \mathcal{B}_1)$ und $(N_2, \mathcal{B}_2)$ zwei Messräume und es seien

$$\varphi_1 \colon M_1 \longrightarrow N_1$$

und

$$\varphi_2 \colon M_2 \longrightarrow N_2$$

zwei messbare Abbildungen, unter denen die Bildmaße $(\varphi_1)_*\mu_1$ und $(\varphi_2)_*\mu_2$ σ-endlich seien. Zeige, dass für das Bildmaß unter der Produktabbildung $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2$ die Gleichung

$$\varphi_*(\mu_1 \otimes \mu_2) = ((\varphi_1)_*\mu_1) \otimes ((\varphi_2)_*\mu_2)$$

gilt.

Aufgabe 5.7.*

Es seien $(M, \mathcal{A}, \mu)$ und $(N, \mathcal{B}, \nu)$ endliche Maßräume und $(M \times N, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ ihr Produktmaßraum. Zeige, dass das Bildmaß von $\mu \otimes \nu$ unter der Projektion

$$M \times N \longrightarrow M,\, (x,y) \longmapsto x,$$

gleich (dem umskalierten Maß) $\nu(N) \cdot \mu$ ist.

Aufgabe 5.8. Man gebe ein Beispiel für endliche Maßräume und einem Maß λ auf $(M \times N, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, das nicht das Produktmaß ist, das aber

$$\lambda(S \times N) = \mu(S) \times \nu(N)$$

und

$$\lambda(M \times T) = \mu(M) \times \nu(T)$$

für alle messbaren Teilmengen $S \subseteq M$ und $T \subseteq N$ erfüllt.

Aufgabe 5.9.*

Zeige, dass sich die abgeschlossene Einheitskreisscheibe

$$B\,(0,1) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 \right\}$$

nicht durch abzählbar viele abgeschlossene Rechtecke $[a,b] \times [c,d] \subseteq B\,(0,1)$ (mit $a \leq b$ und $c \leq d$) überdecken lässt.

Aufgabe 5.10.*

Man schreibe eine Animation, die die Unabhängigkeit des Maßes von der Quaderzerlegung im Beweis zu Lemma 5.3 (1) am Beispiel des $\mathbb{R}^2$ deutlich macht. Insbesondere soll die Einführung eines Rasters und der Begriff der Verfeinerung sichtbar werden.

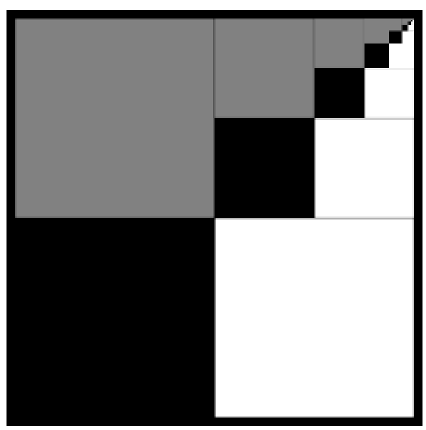
Aufgabe 5.11.

Durch eine Kombination von Produktmaß und Bildmaß kann man die sogenannte Faltung von Maßen definieren.

Zum σ-endlichen Maßen μ und ν auf dem $\mathbb{R}^n$ nennt man das Bildmaß des Produktmaßes $\mu \otimes \nu$ unter der Addition

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (x, y) \longmapsto x + y,$$

die *Faltung* der beiden Maße. Sie wird mit $\mu * \nu$ bezeichnet.



Man erläutere Lemma 5.3 (2) anhand des Bildes.

Aufgabe 5.12. Zeige, dass das Dirac-Maß δ_0 das neutrale Element für die Faltungsverknüpfung ist.

Aufgabe 5.13. Bestimme die Faltung $\delta_P * \delta_Q$ von Dirac-Maßen δ_P, δ_Q zu Punkten $P, Q \in \mathbb{R}^n$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5.14. (5 Punkte)

Zeige, dass die offene Einheitskreisscheibe nicht zum Produktpräring von $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$ und $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$ gehört.

Aufgabe 5.15. (4 Punkte)

Es sei T die Vereinigung der drei Quader

$$Q_1 = [2,7] \times [1,3],\ Q_2 = [1,4] \times [2,5] \text{ und } Q_3 = [3,6] \times [4,6]$$

im $\mathbb{R}^2$. Bestimme

$$T(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in T\}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ und

$$T^a = \{x \in \mathbb{R} \mid \lambda(T(x)) = a\}$$

für jedes $a \in \mathbb{R}$ (dabei ist λ einfach die Summe der Länge der disjunkten Intervalle, aus denen sich $T(x)$ zusammensetzt).

Einen Maßraum mit dem Gesamtmaß 1 nennt man einen Wahrscheinlichkeitsraum. Für die Wahrscheinlichkeitstheorie ist das folgende Konzept enorm wichtig.

Es sei $(M, \mathcal{E}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Man nennt zwei σ-Algebren $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$ *unabhängig*, wenn für jedes $A \in \mathcal{A}$ und jedes $B \in \mathcal{B}$ die Gleichheit

$$\mu(A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$$

gilt.

Aufgabe 5.16. (4 Punkte)

Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei Wahrscheinlichkeitsräume und $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ ihr Produktraum. Zeige, dass die „Zylinderalgebren“

$$\mathcal{Z}_1 = \{S \times \Omega_2 \mid S \in \mathcal{A}_1\} \text{ und } \mathcal{Z}_2 = \{\Omega_1 \times T \mid T \in \mathcal{A}_2\}$$

unabhängig sind.

Abbildungsverzeichnis