Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 17

Übungsaufgaben

Aufgabe 17.1. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 3 der rationalen Funktion
$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 5}{x - 2}$$
im Entwicklungspunkt 0.

Aufgabe 17.2. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 4 der Funktion
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \sin x \cos x,$$
im Nullpunkt.

Aufgabe 17.3. Bestimme sämtliche Taylor-Polynome der Funktion
$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$
im Entwicklungspunkt $a = 3$.

Aufgabe 17.4. Bestimme das Polynom
$$f(z) = z^3 + 3z^2 - 7z - 4.$$
in der neuen Variablen $z - 2$ (also das umentwickelte Polynom) auf zwei verschiedene Arten, nämlich

a) direkt durch Einsetzen,

b) über das Taylor-Polynom im Entwicklungspunkt 2.

Aufgabe 17.5. Bestimme die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion für einen beliebigen Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 17.6.*

Wir betrachten die Funktion
$$f(x) = \frac{1}{\sin x}$$
im Reellen.

a) Bestimme den Definitionsbereich von f.

b) Skizziere f für x zwischen -2π und 2π.

c) Bestimme die ersten drei Ableitungen von f.

d) Bestimme das Taylor-Polynom der Ordnung 3 von f im Punkt $\frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 17.7. Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ im Punkt $a = 3$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 3 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Aufgabe 17.8.*

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 3 zur Funktion

$$f(x) = x \cdot \sin x$$

im Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 17.9.*

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $a = 2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 2 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Aufgabe 17.10. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Vergleiche die polynomiale Interpolation zu $n+1$ gegebenen Punkten und die Taylor-Polynome vom Grad n zu einem Punkt.

Aufgabe 17.11. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine im Punkt a n-fach differenzierbare Funktion. Zeige, dass das n-te Taylor-Polynom zu f im Punkt a, geschrieben in der verschobenen Variablen $x - a$, gleich dem n-ten Taylor-Polynom der Funktion $g(x) = f(x+a)$ im Nullpunkt (geschrieben in der Variablen x) ist.

Aufgabe 17.12. Man mache sich klar, dass man zu einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das n-te Taylor-Polynom von f im Entwicklungspunkt b nicht aus dem n-ten Taylor-Polynom in einem Entwicklungspunkt a bestimmen kann.

Aufgabe 17.13. Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynome n-ten Grades und es seien $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ Punkte und $n_1, \ldots, n_k \geq 1$ natürliche Zahlen mit

$$\sum_{j=1}^{k} n_j > n.$$

Die Ableitungen von f und g in den Punkten a_j sollen bis einschließlich zur $(n_j - 1)$-ten Ableitung übereinstimmen. Zeige $f = g$.

Man mache sich zuerst die Aussage bei $k = 1$ und $n_1 = n + 1$ und bei $k = n + 1$ und $n_j = 1$ für alle j klar.

Aufgabe 17.14. Es sei $f(x) := \frac{x^2-x+5}{x^2+3}$. Bestimme ein Polynom h vom Grad ≤ 3, das in den beiden Punkten $x = 0$ und $x = 1$ die gleichen linearen Approximationen wie f besitzt.

Aufgabe 17.15.*

Es sei $f(x) = \sin x$. Bestimme Polynome P, Q, R vom Grad ≤ 3, die jeweils folgende Bedingungen erfüllen.

(a) P stimmt mit f an den Stellen $-\pi, 0, \pi$ überein.

(b) Q stimmt mit f in 0 und in π bis zur ersten Ableitung überein.

(c) R stimmt mit f in $\pi/2$ bis zur dritten Ableitung überein.

Aufgabe 17.16.*

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t) = t^2 e^{-t}.$$

Aufgabe 17.17. Es sei $p \in \mathbb{R}[Y]$ ein Polynom und

$$g\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto g(x) = p\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass die Ableitung $g'(x)$ ebenfalls von der Form

$$g'(x) = q\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

mit einem weiteren Polynom q ist.

Aufgabe 17.18. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}$ die Eigenschaft

$$\lim_{x \in \mathbb{R}_+,\, x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$$

besitzt.

Aufgabe 17.19. Bestimme das Taylor-Polynom der dritten Ordnung zur Funktion $\frac{1}{x^2+1}$ im Nullpunkt mit dem in Bemerkung 17.9 beschriebenen Potenzreihenansatz.

Aufgabe 17.20. Bestimme das Taylor-Polynom bis zur vierten Ordnung der Umkehrfunktion des Sinus im Punkt 0 mit dem in Bemerkung 17.11 beschriebenen Potenzreihenansatz.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 17.21. (4 Punkte)

Bestimme die Taylor-Polynome im Entwicklungspunkt 0 bis zum Grad 4 der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \sin(\cos x) + x^3 \exp\left(x^2\right).$$

Aufgabe 17.22. (4 Punkte)

Es sei $f(x) := \frac{x^2+2x+1}{x^2+5}$. Bestimme ein Polynom h vom Grad ≤ 3, das in den beiden Punkten $x = 0$ und $x = -1$ die gleichen linearen Approximationen wie f besitzt.

Aufgabe 17.23. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der Funktion

$$f\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = (\sin x)(\cos x),$$

hinsichtlich Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraphen.

Aufgabe 17.24. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der Funktion

$$f\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \sin^3 x - \frac{1}{4}\sin x,$$

hinsichtlich Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraphen.

Aufgabe 17.25. (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom bis zur vierten Ordnung des natürlichen Logarithmus im Punkt 1 mit dem in Bemerkung 17.11 beschriebenen Potenzreihenansatz aus der Potenzreihe der Exponentialfunktion.

Aufgabe 17.26. (6 Punkte)

Zu $n \geq 3$ sei A_n der Flächeninhalt eines in den Einheitskreis eingeschriebenen gleichmäßigen n-Eckes. Zeige $A_n \leq A_{n+1}$.

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5