

で表される。その逆数 $\tau = \frac{1}{\gamma}$ は今日の言葉で云へば振動状態の平均生命時間を示す量である。

かくして放射された光の場の強さの振幅はその電気能率 p に比例して、後者は次の如き表現を取る。

$$p = eH = p_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot e^{\pm i\omega_0 t}, \dots\dots\dots(32.12)$$

或は實數的表現にて

$$p = p_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot \cos(\omega_0 t + \delta) \dots\dots\dots(32.13)$$

こゝで δ は位相である。かくの如き振動によつて放出される波を分光器にかければそのスペクトル線は幾何學的線でなく有限の幅を持つて居る。それを了解するために、(32.13) なる函数をフーリエの法則に従つて純調和成分に分けねばならない。その振動子が $t = -\infty$ から $t = 0$ まで静止して居て $p(t) = 0$, $t = 0$ の瞬間から $t = +\infty$ までのその p は(32.13) で與へられる様な不連続な函数が収斂フーリエ積分で表されて

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu \dots\dots\dots(32.14)$$

となり、このフーリエ係數 $q(\nu)$ は

$$q(\nu) = \int_0^{\infty} p(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \dots\dots\dots(32.15)$$

で與へられる。若し $p(t)$ が實數なら、勿論

$$q(\nu) = q^*(-\nu) \dots\dots\dots(32.16)$$

である。

観測し得る程の光の強さがある以上數多くのかくの如き刺戟過程と衰褪過程とが相續いて起り、その個々の過程がその時間を通して互に別れ、前の過程が實質的に衰褪して了つてから新しい次の過程が起るとすれば、時間的平均にて放射されるエネルギーは

$$\bar{p}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T p^2(t) dt = \frac{n}{N} \sum_{k=1}^N \int_{t_k}^{t_{k+1}} p^2(t) dt \dots\dots\dots(32.17)$$

に比例す可く、こゝで n は 1 秒間の刺戟の數、 N は T 時間内のそれに對應した刺戟の數を表す。従つて

$$nT = N$$

である。更に $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ はその刺戟の時間點である。處が今こゝでなした假定に従つて(32.17) 中の積分は全體として互に等しく、即ち

$$\int_0^{\infty} p^2(t) dt = \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\nu p(t) q(\nu) e^{2\pi i \nu t} = 2 \int_0^{\infty} q(\nu) \cdot q^*(\nu) d\nu$$

に等しいから、結局(32.17) は

$$\bar{p}^2 = n \int_0^{\infty} p^2(t) dt = 2n \int_0^{\infty} |q(\nu)|^2 d\nu \dots\dots\dots(32.18)$$

となる。従つて(32.7) により平均で單位時間に放射されるエネルギーは

$$\bar{\eta} = \frac{2}{3} \frac{\omega_0^4}{c^3} \bar{p}^2 = \frac{4}{3} n \frac{16\pi^4}{c^3} \nu_0^4 \int_0^{\infty} |q(\nu)|^2 d\nu = n \int_0^{\infty} \epsilon_\nu d\nu \dots\dots(32.19)$$

で與へられる。こゝで ϵ_ν は

$$\epsilon_\nu = \frac{64\pi^4}{3c^3} \nu_0^4 \cdot |q(\nu)|^2 \dots\dots\dots(32.20)$$

を意味し、それは振動數範圍 $d\nu$ の而して一刺戟に就いての光の平均強さである。 $p(t)$ に対する實數表現(32.13) を(32.15) に入れ、餘弦を二つの指數函数で表し、 $\omega_0 = 2\pi\nu_0$, $\omega = 2\pi\nu$ を考へに入れて容易に簡単な積分の結果

$$|q(\nu)|^2 = \frac{p_0^2}{4} \left\{ \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} + \frac{1}{(\omega_0 + \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} - 2 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}) \cos 2\delta + \gamma \omega_0 \sin 2\delta}{(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\gamma^2}{4})^2 + \omega_0^2 \gamma^2} \right\} \dots\dots(32.21)$$

を得る。この式は個々の共鳴子のスペクトル光分布を示して居る。その共鳴子は $t = 0$ にて任意の位相 δ を持つてその振動を始めるのであるが、こゝで考へて居る光の放射は最短観測時間内にも非常に屢々刺戟過程が同じ原子内にしろ又は多くの等しい原子内にしろ行はれ、観測にはたゞ δ に關して平均された値だけが入つて來て (32.21) 式の位相に關する最後の項は消える。更に γ は ω_0 に比して非常に小であるから、(32.21) 式中の第二項は $\frac{1}{\omega_0^2}$ 位の大さ以上には決してならず、第一項は $\omega = \omega_0$ の近所で $1/\gamma^2$ 位にはなり得るから、スペクトル放射に對して近似的に次の如く取れる。

$$\begin{aligned} \epsilon_\nu &= \frac{16\pi^4}{3c^3} \nu_0^4 p_0^2 \frac{1}{4\pi^2(\nu_0 - \nu)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \\ &= \frac{4\pi^2}{3c^3} \nu_0^2 p_0^2 \frac{1}{(1-x)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \dots\dots\dots(32.22) \end{aligned}$$

こゝで $x = \frac{\nu}{\nu_0}$, $\Gamma = \frac{\gamma}{2\pi\nu_0} = \frac{\gamma}{\omega_0}$ を示す。瓦斯の細いスペクトル線では Γ は $10^{-3} - 10^{-4}$ 位である。 $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2}$ なる函数は $x = 1$ の

左右にて對稱的で、 $x \geq 0$ の部分だけに物理的意味がある。この共鳴位置 $x = 1$ に近い處で $f(x)$ は相當の値を取り、他では小さい。 $x = 1$ に於ける極大値は $f(1) = \frac{4}{\Gamma^2} = \frac{16\pi^2\nu_0^2}{\gamma^2}$ で與へられる。この極大値の半分になる (その $f(x)$ 曲線にて) 場所の x の値は $\frac{1}{(1-x_h)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} = \frac{2}{\Gamma^2}$ から

出せて、その x_h 値は

$$1 - x_h = \pm \frac{1}{2}\Gamma \dots\dots\dots(32.23)$$

で與へられる。かくして定められた振動數間の距離を半値幅と稱して x 尺度では $\Delta x = \Gamma$, ω 尺度, ν 尺度では次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta\omega &= \omega_0\Delta x = \omega_0\Gamma = \gamma, \\ \Delta\nu &= \frac{1}{2\pi}\Delta\omega = \frac{\gamma}{2\pi}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32.24)$$

總光強度は ν 或は x に互つて積分して得られるが、 $x - 1 = \frac{1}{2}\xi\Gamma$ として F の積分極限值 $-\infty/\Gamma$ の代りに $-\infty$ を取つて、 $\int_0^\infty f(x) dx = \frac{2}{\Gamma} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 + 1} = \frac{2\pi}{\Gamma}$ であるから、總放射は

$$\epsilon = \int_0^\infty \epsilon_\nu d\nu = \frac{4\pi^2}{3c^3} \nu_0^3 p_0^2 \int_0^\infty f(x) dx = \frac{8\pi^3}{3c^3} \frac{\nu_0^3}{\Gamma} p_0^2 = \frac{16\pi^4}{3c^3} \frac{\nu_0^4}{\gamma} p_0^2 \dots\dots\dots(32.25)$$

で、これは刺戟強度 p_0 (共鳴子の最初の電氣能率) の共鳴子によつて (刺戟位相に互つて平均された) 放射される總エネルギーを與へる。

§ 33. 制振過程 (輻射制振, ドップラー効果, 衝突制振及びその他の制振作用)

種々なる物理的原因によつて制振作用が起つて放射線の幅が伸張されることは前節で注意した通りであるが、この節ではそれを今少し詳細に説明しやう。

制振が輻射放射によるエネルギー漏出にのみによつて起つて他の線幅伸張の原因がなければ、(32.25)にて與へられるエネルギーは刺戟時 $t = 0$ に於ける共鳴子内に存在する總エネルギーと一致せねばならない。(32.13)によつてその電氣能率の最初の振幅は $p = p_0 \cos \delta$, 従つて刺戟の振幅及びその瞬間に於ける時間的變化は

$$u = u_0 \cos \delta, \quad \frac{du}{dt} = -u_0 \omega_0 \sin \delta$$

で與へられ、その振動體の最初のエネルギーは

$$W = \frac{m}{2} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{a}{2} u^2 = \frac{m}{2} \omega_0^2 u_0^2 \sin^2 \delta + \frac{a}{2} u_0^2 \cos^2 \delta$$

$$= \frac{a}{2} u_0^2 = \frac{m \omega_0^2}{2e^2} p_0^2 \dots\dots\dots (33.1)$$

となる (32.25) と (33.1) とを比較して輻射制振常數 γ_0 に對して次の表現を得る。

$$\gamma_0 = \frac{8}{3} \pi^2 \frac{e^2}{m c^3} \nu_0^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m c^3} \omega_0^2 = \frac{1}{\tau_0} \dots\dots\dots (33.2)$$

前節の如く電氣能率をフーリエ分解しなくても、輻射によるエネルギー漏出が小であるとすれば、調和振動體の平均ポテンシャルエネルギー $\frac{a}{2} \bar{u}^2$ と平均運動のエネルギー $\frac{m}{2} \left(\frac{du}{dt} \right)^2$ とが等しいことより容易に $\bar{p}^2 = \frac{W e^2}{m \omega_0^2}$ となつて、單位時間のエネルギー損失は $\eta = -\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^2}{m c^3} W$ で與へられることが判る。この微分方程式は時間と共に遅く變化する振動子のエネルギー W に對する式であつて、その解は $W = W_0 e^{-\gamma_0 t}$ で與へられ、こゝで γ_0 は (33.2) と一致した表現になる。この γ_0 は古典的に自然線幅、嚴密には半値幅 (ω 尺度で) と云はれる。 τ_0 は自然平均生命時間で、相對的自然線幅は

$$\Gamma_0 = \frac{\gamma_0}{\omega_0} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m c^3} \omega_0 = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{m c^2} \frac{1}{\lambda_0} \dots\dots\dots (33.3)$$

で與へられる。こゝで λ_0 はその線重心の波長である。 $e = 4.77 \cdot 10^{-10}$ 靜電單位、 $\frac{e}{m c} = 1.76 \cdot 10^7$ 靜電單位なる數値 (電子の電荷 e と質量 m) を用ひて (33.2), (33.3) より次の如き與へられた振動數のスペクトル線に對する公式を得る。

$$\frac{1}{\gamma_0} = \tau_0 = 4.53 \lambda_0^2, \quad \Gamma_0 = 1.17 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{1}{\lambda_0} \dots\dots\dots (33.4)$$

可視光線の平均波長約 $\lambda_0 = 5.10 \cdot 10^{-5}$ cm に對しては、光振動時間は $\frac{\lambda_0}{c} = 1.67 \cdot 10^{-15}$ sec で、遙かに自然生命時間 $\tau_0 = 1.13 \cdot 10^{-8}$ sec より短い

ことが判る。従つて前節の假定が無理でないことを知り、その假定の成立は $\tau_0 \nu_0 \gg 1$ を要求し、 $2\pi \Gamma_0 \ll 1$, 即ち (33.4) より $\lambda_0 \gg 7.36 \cdot 10^{-12}$ cm であるから、 $5 \cdot 10^{-10}$ cm 位の波長の X 光線に對しても充分その必要條件は滿されて居る。最も短波長の γ 線 (10^{-11} cm 位) に到つてこゝの方法は、使用不可能になる。猶共鳴子と光場とのカップリングの以上の如き古典理論は決して根本的に正しいものでなく量子理論によつて修正さる可き性質のもので、かくの如く簡単な振動數のみに據る一般公式は得られない。然し量子理論でも今日の處波長が電子の古典的半徑位の長さ (10^{-13} cm) になればその偉力を失つて了ふ。

τ_0 を直接測定することは原理上ヴィーン (Wien) のカナル線の方法で可能であるが、この方法では衝突制振は起らず (非常に良い真空のために)、そのカナル線の光輝を失ふまでの長さを測定して時間と共に光強度の減少するのをカナル線の速度 (ドップラー効果から計算した) から推定出来る。かくして得た τ_0 の實驗値は理論的値と大體等しいが、決して λ_0 のみの函數でなくその絶對値も一致しない。それは光源の古典的模型が正當でないことから當然の結果である。平均生命時間が 10^{-8} sec より著しく大なることがあつて、量子理論ではこれを準安定状態と稱してそれから低い状態へ概して遷移しない状態の概念を以て説明し得る。それは四重極子の振動によつて遅いエネルギー放出が起る場合である。これは螢光の殘光を測定して實驗的に求められる。自然線幅の測定は他方分散曲線 (後節參照) を正確に測つても出来る。

以上の如きエネルギー損失の計算でなく、所謂消散力 \mathfrak{R} を (32.1) なる振動方程式に附加して

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + a u = \mathfrak{R} \dots\dots\dots (33.5)$$

と書いて電氣能率の衰褪を表現する式が得られる。或時間内に輻射制振に

よつてなされる仕事と同じ時間内のエネルギー損失とが等しいことより (32.6) を利用して,

$$R = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d^3 u}{dt^3} \dots\dots\dots(33.6)$$

と書き得ることが判り,

$$u = u_0 e^{\mu t} \dots\dots\dots(33.7)$$

と置いて, (33.5) と (33.6) とから近似的に (附加項が小として) 次の表現を得る。

$$\mu = i\omega_0 \sqrt{1 + i \frac{\gamma_0}{\omega_0}} = i\omega_0 - \frac{\gamma_0}{2} \dots\dots\dots(33.8)$$

この平方根の符號は μ の實數部分が負になる様に擇ばれて居て, 振動が衰褪することを示す様にする。従つて

$$p = p_0 e^{-\frac{\gamma_0 t}{2}} e^{\pm i\omega_0 t} \dots\dots\dots(33.9)$$

となつて (32.12) と一致した結果を得る。この表現は (32.8) 中の常數 b に次の値を取ればその普通の制振項を持つ微分方程式を満足する。

$$b = m\gamma_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega_0^2 \dots\dots\dots(33.10)$$

ドップラー効果:—

スペクトル線の自然幅は放射する雙極子が静止して居るとの暗々裡の假説の下に計算されて居たので, 實際は原子又は分子は外力が働かなくても温度に據る運動のため大なる速度を持つて居ることから自然幅は實測には掛り難い。静止観測者は放射中心と共に運動する観測者とは異つた振動數を測定すると云ふ有名なドップラー効果が起つて來る。例へば x 方向に相對的速度 v で運動する二體系にて, 第一體系では光波 (真空中) は振動數 ν , その波動法線は x 軸と θ なる角をなすとし, 第二體系ではそれ等に對應する量を ν', θ' とすれば, 所謂ローレンツ (Lorentz) 變換

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{1}{\alpha} (x - vt), \quad y' = y, \quad z = z', \quad t' = \frac{1}{\alpha} \left(t - \frac{v}{c^2} x \right); \\ \alpha &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots(33.11)$$

に對してその波の位相は不變量で次の如き式を得る。

$$\nu \left(t - \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{c} \right) = \nu' \left(t' - \frac{x' \cos \theta' + y' \sin \theta'}{c} \right) \dots\dots(33.12)$$

$\frac{v}{c}$ の一次まで取れば $\alpha = 1$ と出來, x, y, t の係數を比較して容易に

$$\nu = \nu' \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right), \quad \sin \theta = \sin \theta' \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right) \dots\dots(33.13)$$

が得られる。振動子のある體系が第二體系であれば, $\nu' = \nu_0, \xi = v \cos \theta$ (観測者への方向の光源運動の成分が ξ で, ν_0 は静止振動數) であつて, (33.13) の第一式より

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{\xi}{c} \right), \quad \lambda = \lambda_0 \left(1 - \frac{\xi}{c} \right) \dots\dots\dots(33.14)$$

が得られる。第二式の θ と θ' との関係は光の錯行の法則を示す。

温度平衡にある瓦斯を考へてその各分子が ω_0 なる振動數の振動子一個を持つて居るとすれば, x 方向の速度が ξ と $\xi + d\xi$ との間にある確率は, マックスウエルの分布法則に従つて

$$dw = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} e^{-\beta \xi^2} d\xi, \quad \beta = \frac{\mu}{2RT} \dots\dots\dots(33.15)$$

で與へられる。こゝで $R = 8.313 \cdot 10^7$ erg/度 は絶対瓦斯常數, μ は分子量を表し, 總確率が 1 になる様に常數因子が定められて居る ($\int_{-\infty}^{\infty} dw = 1$) ドップラー効果の式 (33.14) に従つて速度成分 ξ と振動回數 ω との関係が定められて居るから, 上記分布法則にて ξ の代りに ω を用ひ

$$dw = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} e^{-\beta \frac{c^2}{\omega_0^2} (\omega - \omega_0)^2} \frac{c}{\omega_0} d\omega \dots\dots\dots(33.16)$$

と書ける。各原子が共に運動して居る體系に對して同じエネルギーを放射

するとすれば、観測される光強度は従つて次の如くなる。

$$J = J_0 \cdot e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\delta/2}\right)^2} \dots\dots\dots (33.17)$$

こゝで半分ドップラー幅 $\delta/2$ は (33.16) によつて

$$\frac{\delta}{2} = \frac{\omega_0}{c\sqrt{\beta}} = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \dots\dots\dots (33.18)$$

で與へられる。

γ, Γ と類似に振動数尺度には無関係な量

$$\Delta = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \dots\dots\dots (33.19)$$

を導入し、 $\frac{d\nu}{\nu} = \left| \frac{d\lambda}{\lambda} \right|$ であるから、 Δ なる量は波長尺度に於ける相対的線幅を與へる。R と c にその數値を入れれば、(33.19) より

$$\Delta = 8.60 \cdot 10^{-7} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \dots\dots\dots (33.20)$$

なる公式を得る。常温 ($T = 292$)、空氣 ($\mu = 29$) に對して $\Delta = 2.73 \cdot 10^{-6}$ であるから、 $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ cm に對する先の $\Gamma_0 = 2.34 \cdot 10^{-8}$ に比して約 100 倍位大きい。放射線に於けるドップラー効果の制振作用はマイケルソン (Michelson)、シェンロック (Schönrock)、ファブリー・ブイソン (Fabry et Buisson) 等によつて測定され、理論より計算した値と相當一致した値を得て居るが、後に述べる電場による線幅伸張を除くことが仲々困難であるから多少の不一致は致方ない。

次に線幅伸張の原因として輻射制振とドップラー効果とを同時に考へれば、原子と共に運動する體系にての振動回数を ω' として、観測者の體系にての振動回数が ω の近所に観測される確率は (33.16) により

$$dw = \frac{2}{\sqrt{\pi}\delta} e^{-\left(\frac{\omega - \omega'}{\delta/2}\right)^2} d\omega' \dots\dots\dots (33.21)$$

で固有振動回数 ω_0 の振動子の強度は (32.22) によつて共に運動する

體系内の振動回数 ω' に對して

$$J = J_0 \frac{(\gamma/2)^2}{(\omega_0 - \omega')^2 + (\gamma/2)^2} \dots\dots\dots (33.22)$$

で與へられる。 J_0 はその極大強度を意味する。各 ω' が静止體系にて観測される振動回数 ω に關與して、その綜合として (33.21) と (33.22) から

$$J = J_0 \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \frac{2}{\sqrt{\pi}\delta} \int_0^\infty \frac{e^{-\left(\frac{\omega - \omega'}{\delta/2}\right)^2}}{(\omega_0 - \omega')^2 + (\gamma/2)^2} d\omega' \dots (33.23)$$

を得る。そこで

$$\frac{\omega - \omega_0}{\gamma/2} = \frac{4\pi(\nu - \nu_0)}{\gamma} = x, \quad \frac{\omega' - \omega_0}{\gamma/2} = \frac{4\pi(\nu' - \nu_0)}{\gamma} = y, \quad \frac{\delta}{\gamma} = \eta \dots\dots (33.24)$$

と置けば、(33.23) は

$$J = J_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{x-y}{\eta}\right)^2}}{y^2 + 1} dy \dots\dots\dots (33.25)$$

と書ける。こゝで下の積分極限 $-\frac{\omega_0}{\gamma/2}$ は非常に大なる絶対値を持つから $-\infty$ と置いてある。この積分は吸収問題、分散問題に出て来て、これ等と密接な關係にあることは後節にて述べる。スペクトル線の中心から相當に離れた距離 x にて η の各値に對して (33.25) は簡単に $J = J_0 \frac{1}{1+x^2}$ となり、先の制振振動體の放射曲線と同じになる。従つて線中心から遠く隔つた處の光強度狀況を檢べて制振常數 γ が定められる。

衝突制振:—

ドップラー効果によつて起る線幅は明かに一定の温度ならば瓦斯の密度或はその壓力には無關係であるが、實驗上等温的壓力變化がスペクトル線の幅及び形に著しい影響を及ぼすことが判つて居る。これは光を放射する原子又は分子が互に衝突することに起因して居る。この分子力は瓦斯理論にて確められて居る様に二種類に分けられ、一つは衝突の際に於ける直接

の作用にのみ有効なものと、他はその到達距離が有限である様なものである。先づこの第一種の力に就いて取扱ふ。丁度瓦斯理論に於けると同様に原子を理想的弾性的球と粗い近似で考へて光振動への衝突の影響を表せる。各衝突で、電気能率の存在して居た振動が瞬間的に止り、その瞬間に新しい振動が任意の位相と振幅を持つて起ると假定するのである。その場合二つの極限の場合が特に大切である。即ち衝突によつてその振動が完全に中絶され、その全振動エネルギーが衝突する粒子の並進運動エネルギーに變ずる場合と、近所を通る粒子によつて少しのエネルギー損失を伴つた振動の影響の場合とである。この第二の場合にその衝突時間の間粒子が互に接近して、その擾亂のために振動の振動数が變化し、その衝突後には振動子は再び最初の振動数を持つて振動するが、その位相は異つて来る。その衝突時間内の振動數變化は短時間のために直接觀察出來ず、かくの如き影響はたゞ統計理論に従つて位相變化のみに現れる。この二つの場合の差違は特に例へば瓦斯體の螢光の如く衝突或は光吸収によつて原子の刺戟が衰褪する場合に見られる。即ち第一の場合には衝突數が増せば光放射が弱るに反し第二の場合には然らず。

先づ他種の制振及びドップラー効果がなければ、この兩場合に綜合的振動現象は固有振動回數 ω_0 の調和振動の一群よりなり、その振幅 a_k 、位相 δ_k は時間點 t_1, t_2, \dots にて任意に飛躍するので、その電気能率の一成分は $t_k \leq t < t_{k+1}$ に對して

$$p(t) = a_k \cos(\omega_0 t + \delta_k) \quad k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (33.26)$$

で與へられる。そのフーリエ係數は

$$\begin{aligned} q(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\nu t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \{ e^{i[(\omega_0 - \omega)t + \delta_k]} + e^{-i[(\omega_0 + \omega)t + \delta_k]} \} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{2} \left\{ \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t_{k+1}} - e^{i(\omega_0 - \omega)t_k}}{i(\omega_0 - \omega)} e^{i\delta_k} - \frac{e^{-i(\omega_0 + \omega)t_{k+1}} - e^{-i(\omega_0 + \omega)t_k}}{i(\omega_0 + \omega)} e^{-i\delta_k} \right\} \end{aligned} \quad (33.27)$$

で與へられて、スペクトルの分布を計算するには $|q(\nu)|^2$ を作つて位相に互つて平均値を取らねばならない。その内で異つた k を持つ項の凡ての積は消えて結局次の如くなる。

$$\begin{aligned} |q(\nu)|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k^2}{4} \left\{ \left| \frac{1 - e^{i(\omega_0 - \omega)\tau_k}}{\omega_0 - \omega} \right|^2 + \left| \frac{1 - e^{i(\omega_0 + \omega)\tau_k}}{\omega_0 + \omega} \right|^2 \right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k^2}{2} \left(\frac{1 - \cos(\omega_0 - \omega)\tau_k}{(\omega_0 - \omega)^2} + \frac{1 - \cos(\omega_0 + \omega)\tau_k}{(\omega_0 + \omega)^2} \right), \\ &\tau_k = t_{k+1} - t_k. \end{aligned} \quad (33.28)$$

τ_k は一つの分子が受ける二つの衝突間の時間を意味して、それはその衝突間の自由行路に比例する。従つて τ_k は自由行路と同じ統計法則を満足して、 τ_k が τ と $\tau + d\tau$ 間にある確率は

$$dw = \frac{1}{\bar{\tau}} e^{-\frac{\tau}{\bar{\tau}}} d\tau, \quad (33.29)$$

で、こゝで

$$\int_0^{\infty} \tau dw = \bar{\tau} \quad (33.30)$$

は二衝突間の平均時間又は擾亂されない振動繼續時間である。 a_k^2 の平均値を a^2 として (33.28) は (33.29) を用ひて容易に次の如く書けることが判る。

$$\begin{aligned} |q(\nu)|^2 &= \frac{a^2}{\bar{\tau}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{\bar{\tau}}} \left\{ \frac{1 - \cos(\omega_0 - \omega)\tau}{(\omega_0 - \omega)^2} + \frac{1 - \cos(\omega_0 + \omega)\tau}{(\omega_0 + \omega)^2} \right\} d\tau \\ &= \frac{a^2}{\bar{\tau}} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2} \left(\bar{\tau} - \frac{1/\bar{\tau}}{(\omega_0 - \omega)^2 + 1/\bar{\tau}^2} \right) \\ &\quad + \frac{a^2}{\bar{\tau}} \frac{1}{(\omega_0 + \omega)^2} \left(\bar{\tau} - \frac{1/\bar{\tau}}{(\omega_0 + \omega)^2 + 1/\bar{\tau}^2} \right) \\ &= \frac{a^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + 1/\bar{\tau}^2} + \frac{a^2}{(\omega_0 + \omega)^2 + 1/\bar{\tau}^2} \quad (33.31) \end{aligned}$$

(32.22) を得たと同様の理由でこの第二項を棄て、

$$\left. \begin{aligned} |q(\nu)|^2 &= \frac{a^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma_s/2)^2}, \\ \frac{\gamma_s}{2} &= \frac{1}{\tau} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(33\cdot32)$$

を得る (量子共鳴子の平均寿命時間は $\tau_s = \frac{1}{\gamma_s} = \frac{1}{2} \tau$ である)。然るに分子の平均速度は

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}, \dots\dots\dots(33\cdot33)$$

であるから、 l を自由行路として $\tau\bar{v} = l$ が成立ち、衝突制振常數として

$$\frac{\gamma_s}{2} = \frac{1}{\tau} = \frac{\bar{v}}{l} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \dots\dots\dots(33\cdot34)$$

を得る。瓦斯混合の場合には勿論 μ の代りに有效分子量 $\frac{mM}{m+M}$ を用ふ可きである。相対的半分衝突幅は (33·34) より

$$\Gamma_s = \frac{\gamma_s}{\omega_0} = \frac{\gamma_s}{2} \frac{\lambda_0}{\pi c} = \frac{\lambda_0}{l} \frac{1}{\pi c} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \dots\dots\dots(33\cdot35)$$

で與へられる。ドップラー幅 (33·19) と比較すれば、

$$\frac{\Delta}{\Gamma_s} = \pi^{3/2} \cdot \frac{l}{\lambda_0} = 5.57 \frac{l}{\lambda_0} \dots\dots\dots(33\cdot36)$$

となり、兩効果は自由行路が光の波長と殆んど等しいなら (可視光線、室温度の場合に然り) 殆んど等しい。壓力が衝突幅に及ぼす影響は、自由行路に対するマックスウェルの公式

$$l = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p} \dots\dots\dots(33\cdot37)$$

(σ は分子の直徑) を用ひて、モルのロシュミット數 N を導入して

$$\gamma_s = 8\sqrt{\pi} \frac{N\sigma^2 p}{\sqrt{R\mu T}} = 9.43 \cdot 10^{20} \frac{p\sigma^2}{\sqrt{\mu T}} \dots\dots\dots(33\cdot38)$$

で表される。1.0133·10⁶ を乗じて壓力單位を氣壓に直して相対的衝突幅は

$$\Gamma_s = \frac{\gamma_s}{2\pi c} \lambda_0 = 5.08 \cdot 10^{15} \lambda_0 \frac{p\sigma^2}{\sqrt{\mu T}} \dots\dots\dots(33\cdot39)$$

で與へられる。例へば窒素 ($\mu = 28$, $\sigma = 3.1 \cdot 10^{-8}$ cm), 可視光線 ($\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ cm) にて $\Gamma_s = 4.60 \cdot 10^{-5} \frac{p}{\sqrt{T}}$ となり、常溫 ($T = 300$), 1 氣壓にて $\Gamma_s = 2.66 \cdot 10^{-6}$ であるから、先に計算した Δ の値と殆んど等しい。(33·4) と (33·39) とから衝突制振と輻射制振の比 Γ_s/Γ_0 は

$$\frac{\Gamma_s}{\Gamma_0} = 4.34 \cdot 10^{27} \cdot \lambda_0^2 \frac{p\sigma^2}{\sqrt{\mu T}} \dots\dots\dots(33\cdot40)$$

で、可視光線常溫にて窒素に對して

$$\frac{\Gamma_s}{\Gamma_0} = 115 \cdot p \dots\dots\dots(33\cdot41)$$

となる。従つて $\frac{1}{200}$ 氣壓にて既に衝突制振は輻射制振より小になる。

以上の如きローレンツの衝突制振作用の理論の證明をフュヒトバウアー (Füchtbauer) 等がなした。光學的の分子直徑と瓦斯運動上の分子直徑とは異つて出て來た。即ち $\sigma_{光學}/\sigma_{運動}$ は 2 と 3 との間にある値を取る。この有效斷面の差異を説明するにはローレンツの理論を固持して光學現象に對しては有效斷面が瓦斯運動的衝突に對するより數倍大であると假定するか、他に線幅伸張の原因を求めらるかである。光を放射する原子の振動が衝突によつて中絶して、その後新しく刺戟されるならば、總放射は弱る譯で、實際他の瓦斯を附加することによつて螢光は消滅することが認められる。かくの如き現象を満足に説明するには量子力學的取扱をせねばならないからこの篇の論ずる範圍でない。既に述べた様に各瓦斯は入射光を凡ての方向へ散亂するが、それは一般に非常に弱い。然し入射光の振動數が散亂する分子の固有振動と一致すればそれは強くなる。總入射エネルギーが散亂光になつて了ふ様な特別なスペクトル線がある (共鳴線)。他の瓦斯を附加すればこの共鳴線は弱められ、この効果はそのスペクトル線及び

附加瓦斯の種類によつて著しく變化する。總じて光學的有效断面が瓦斯運動的有效断面の數十乃至數百倍である。

衝突制振による線幅伸張は以上の如き消滅にのみは據らず、既に述べた様な位相だけを擾亂する場合にも起る。衝突する原子が附近を通過して光を放射する原子の位相を變化させ得る最大距離を計算して光學的有效断面を出せるが、それは瓦斯運動的の値よりも大きい。特に溫度によつて如何に變るかは注意を要し、遅い運動の場合には弱い相互作用でも充分位相變化を起し得るから、溫度が低いと光學的有效断面は大になる。(33·38)では σ の溫度による關係を考へて居ないので、その式は要するに近似的のものである。

シュタルク (Stark) 効果, その他の制振作用: -

光を放射する原子又は分子の近所にある分子に起因する電場の作用によつて線幅伸張が起り得ることは所謂シュタルク効果のためで、スペクトル線が電場にて變位し、分割する現象に據るのである。スペクトル線の非對稱的幅、同じスペクトル系列内の線幅伸張 (系列項數が増すに従つて幅が擴がる)、一定の波長に對して $\Gamma \frac{\sqrt{T}}{p}$ が各瓦斯に就いて一定なる可き處それに多少の變化が起ること等がこの効果によつて説明出来る。詳細な記述はホルツマルク (Holtmark) とシュテルン (Stern) の論文を見るところではその概要を述べるにとどめる。

各原子又は分子の周圍に電場 \mathcal{E}_n があるが、荷電粒子イオンの場合にそれは最も強く、中性粒子にても矢張存在して、電荷の分布によつて雙極子、四重極子等の場として存在する。光を放射する粒子の場所に於けるそれ等の場の綜合場は $\mathcal{E} = \sum_{n=1}^N \mathcal{E}_n$ と考へられる。光を放射する電子の振動運動に比して \mathcal{E} は遅く變化して一定と假定出來、又原子の範圍では大體均等と假定されるならば、それによつて起る線幅は普通のシュタルク効果と同

様に計算出来る。勿論これ等の假定は嚴密なものではない。然し可視光線にて餘り溫度が高くなければ、分子による電場は分子の直径の 10 倍位に互つて居て (10^{-7} cm), 平均分子速度は 10^3 cm/sec 位としてその電場を通過する時間は最大 10^{-12} sec であるが、可視光線の範圍で光振動は 10^{-15} sec を要する。従つて光振動を相當の數なす間その電場は一定と見做し得るのである (その場の不均等性をシュテルンは考へに入れて居る)。その電場 \mathcal{E} の成分が $X_0 - \frac{1}{2} \Delta X$ と $X_0 + \frac{1}{2} \Delta X, \dots$ の間にある様な確率 $W(X_0, Y_0, Z_0) \cdot \Delta X \cdot \Delta Y \cdot \Delta Z$ を位相空間にて計算するに當つて、 $r_s = (x_s, y_s, z_s)$ に電荷 ϵ_s がある様な分子にて受働點 $r = (x, y, z)$ に於けるポテンシャルは

$$\varphi = \sum_s \frac{\epsilon_s}{R_s}, \quad R_s = (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots (33 \cdot 42)$$

$$= r^2 \left\{ 1 + \left(\frac{r_s}{r} \right)^2 - 2 \frac{r r_s}{r^2} \right\}$$

で與へられるから、展開して

$$\varphi = \frac{\sum \epsilon_s}{r} + \frac{r \sum \epsilon_s r_s}{r^3} - \frac{1}{2 r^3} \left\{ \sum \epsilon_s r_s^2 - 3 \sum \epsilon_s \frac{(r r_s)^2}{r^2} \right\} + \dots (33 \cdot 43)$$

と書ける。第一項は綜合電荷 $\epsilon = \sum \epsilon_s$ のクーロン場であつて、それが零でなければイオンの場合で、第二項その他は無視出来る。第一項が零ならば、第二項が有效になつて、それは雙極子 (その電氣能率が $p = \sum \epsilon_s r_s$) の場を意味する。この項も消えれば ($p = 0$)、第三項の四重極子のポテンシャルが有效になる。このポテンシャル φ から $\mathcal{E} = -\text{grad } \varphi$ にて \mathcal{E} が得られるから上記の確率 $W(F)$ も計算出來、

$$J(\nu) = \int_0^\infty J(F', \nu) W(F') dF' \dots \dots \dots (33 \cdot 44)$$

によつて観測される光の強さが與へられる。シュタルク効果の大きさ即ち振動數尺度に於ける強度分布 $J(F', \nu)$ を知らねばならないが、これは一般

に非常に複雑である。然しこゝで取扱つて居る様な近似的理論では $J(F, \nu)$ は或振動数範囲に於てのみ零でなく、そこでは一定であると見做せるから、

$$J(F, \nu) = \begin{cases} \frac{J_0}{2\sigma} & |\nu - \nu_m| < \sigma, \\ 0 & |\nu - \nu_m| > \sigma \end{cases} \dots\dots\dots(33.45)$$

と置ける。こゝでスペクトル線中央の振動数 ν_m もその中央からシュタルク分割に於ける外側成分の振動数 ν_a までの距離 $\sigma = \nu_a - \nu_m$ も電場の強さ F の函数と見られる。従つて (33.44) は

$$J(\nu) = \frac{J_0}{2} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{W(F')}{\sigma(F')} dF' = \frac{J_0}{2} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{W(f')}{\sigma(\bar{F}f')} df' \dots\dots(33.46)$$

と書ける。こゝで $F = \bar{F}f$ は $2(\nu - \nu_m)$ なる擴張を來らす電場の強さである。シュタルク効果は量子論的に解かる可き現象であるが、i) 水素原子類似のスペクトル線に見る如く ν_m が電場には無関係で電場なしの ν_0 と等しく σ が F に比例する場合、

$$2\sigma = aF, \dots\dots\dots(33.47)$$

ii) 水素原子非類似の線に見る如く一方へ變位して、その變位が F^2 に比例する場合、

$$\nu_m - \nu_0 = bF^2 \dots\dots\dots(33.48)$$

(σ は一定で非常に小さい) 等の二種類の場合が區別される。前者は光を出す電子が原子の他の部と弛くカップルして居る場合で、後者は密接にカップルされた場合である。後者の場合は今の理論に餘り重大でない。この兩者の區別が線幅に重大な關係のあることは分光學にて古くから用ひられて居る系列の名稱たる主系列, 彌散 (diffuse) 副系列, 尖鋭 (sharp) 副系列に現れて居て、今日量子論にてもスペクトル項を s (sharp), p (principal), d (diffuse) 項等に區別して論ずる。 s 項は楕圓性の強い電子軌道に相當して原子核に近く來り、それと強くカップルされて、外電場の影響を受け

難い。従つてそのエネルギーのずれは非常に小で、前記第二の場合に相當する。 d -項は圓軌道に近く原子内部へ深入せず、それと弛くカップルされて、外電場の影響を受け易い。従つて第一の場合の如く F に比例してエネルギーのずれが起る。 p 項はその中間である。(ps) 結合によるスペクトル線が尖鋭、(pd) 結合が彌散副系列を形成するので、この s, d 項がそのスペクトル線の姿を定めるものである。

線的シュタルク効果 (33.47) の場合には

$$J(\nu) = \frac{J_0}{a\bar{F}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{W(f')}{f'} df', \quad f = \frac{2(\nu - \nu_0)}{a\bar{F}} \dots\dots\dots(33.49)$$

となり、雙極子の場合を取つてホルツマルクによれば $\frac{\gamma}{2} = a\bar{F}\pi$ として

$$J(\nu) = \frac{4J_0}{\gamma} \frac{\left(\frac{\gamma}{4\pi}\right)^2}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{4\pi}\right)^2} \dots\dots\dots(33.50)$$

と書け、 γ なる制振に於けると全く同じ強度分布になる。而して γ なる量は $\omega = 2\pi\nu$ 尺度に於ける半値幅を表す。ホルツマルクはイオン、雙極子四重極子の場合にこの半値幅を計算して線的シュタルク効果の時にその常数 a に半値幅は比例し、擾亂を起す分子の電荷常数にも比例し、分子の數即ち密度の $\frac{2}{3}$ 乗、1 乗、 $\frac{4}{3}$ 乗にそれぞれ比例することを示した。而してこれを實驗値と比較して壓力による線幅の變化を満足に説明し得た。

最後に注意すべきはスペクトル線に及ぼす磁場に就いてである。調和振動子 (共鳴子) なる光源の模型は永年の間凡ての要求を満足して居たが、所謂ゼーマン効果なる磁場によつてスペクトル線が分割する現象が 1896 年に發見されてこの模型は一大障害に直面した。ローレンツ (H. A. Lorentz) はこの現象を説明するに彼の電子理論を應用した。磁場 H 内にて $-e$ なる電荷を持つ陰電子が受ける力 R は電子の速度 v と H とに直角で、その電荷に比例するから、靜電單位にて表して次の如くなる。

$$\mathcal{R} = -\frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathcal{H} \dots\dots\dots(33.51)$$

この項を振動方程式 (33.5) の右邊に代入して、制振項を無視し、 $\frac{e}{m}$ を乗ずれば、

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} + \omega_0^2 \mathbf{p} + \frac{e}{mc} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \times \mathcal{H} = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{a}{m} \dots\dots\dots(33.52)$$

を得る。この式を解くに當つてゼーマン効果の尺度になる所謂ラーモル (Larmor) 振動回數

$$\omega_L = \frac{e}{2mc} H \dots\dots\dots(33.53)$$

を導入し、 z 軸が磁場に平行なる如く座標を取つて (33.52) を書き換えれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 p_x}{\partial t^2} + \omega_0^2 p_x + 2\omega_L \frac{\partial p_y}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial^2 p_y}{\partial t^2} + \omega_0^2 p_y - 2\omega_L \frac{\partial p_x}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial^2 p_z}{\partial t^2} + \omega_0^2 p_z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(33.54)$$

となる。磁力線に平行な振動成分は變化せず、その振動回數は擾亂されない原子の振動回數 ω_0 に等しいが、磁場に直角な成分は變化する。

$$p_x = a e^{i\omega t}, \quad p_y = b e^{i\omega t} \dots\dots\dots(33.55)$$

として (a, b は一般に複素常數であつて、振動の振幅と位相とを定めるものである)、(33.54) の初めの二式を解けば、

$$a(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega_L \omega b = 0, \quad b(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\omega_L \omega a = 0 \dots\dots(33.56)$$

を得る。この聯立方程式のデルタミナントを零と置いて次の ω^2 の二次式を得る。

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 = 4\omega_L^2 \omega^2 \dots\dots\dots(33.57)$$

この二つの解の小なる方を ω' 、大なる方を ω'' とすれば、容易に

$$\omega' = -\omega_L + \sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2}, \quad \omega'' = \omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2} \dots\dots(33.58)$$

なることが判る。この兩スペクトル線の間隔は

$$\nu'' - \nu' = 2\nu_L = \frac{e}{2\pi mc} H \dots\dots\dots(33.59)$$

で、最初の振動回數 ω_0 は ω' と ω'' の丁度中間にはないが、近似的に ω_0^2 に対して ω_L^2 を無視すれば、

$$\omega' = \omega_0 - \omega_L, \quad \omega'' = \omega_0 + \omega_L \dots\dots\dots(33.60)$$

と書けて ω_0 は ω' 、 ω'' の中央にあることになる。

ω' 、 ω'' に屬する振動の形は (33.56) より判る如く

$$\frac{b'}{a'} = \frac{\omega'^2 - \omega_0^2}{2i\omega_L \omega'} = i, \quad \frac{b''}{a''} = \frac{\omega''^2 - \omega_0^2}{2i\omega_L \omega''} = -i \dots\dots(33.61)$$

であるから、兩振動は圓偏光性で、遅い振動に於ては y 軸が x 軸に移る様に圓運動をなし、 z 軸の周りの負廻轉を示す。磁場の正方向の側に居る観測者にはその圓振動は時計の針の方向に廻轉する様に見える、右圓振動である。速い振動はそれと逆でその観測者に対して左圓振動と見える。

實際光源が磁場にあつて任意の方向から観測する場合に如何になるかと云ふ問題に對して、磁場に平行と直角の方向が特に主要な観測方向であつて、縦ゼーマン効果、横ゼーマン効果の問題が起る。既に注意した如く観測方向に直角な $\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2}$ の成分のみが考へられて、この縦観測にては振動の x, y 成分による波のみが観測され、スペクトルは二重線になり、磁力線を逆に見れば、長波長成分は右圓、短波長成分は左圓偏光性である。横観測にては、観測方向が x 軸に平行ならば、それに直角な平面は yz 平面で、放射光は z 方向に平行に振動する ν_0 の成分と y 軸に平行な二振動からなつて、この二振動は兩圓振動の yz 平面上への投影で、その振動數は ν' 、 ν'' である。従つて三重線が観測される。その中央線は磁力線に平行に振動し、他の二つはそれに直角に振動する。これ等の正規三重線が理論上豫期される通りに最初観測されたのは偶然とも云へ、實際多くの場合に複雑なスベ

クトル線分割をなすのである。加之その分割距離も簡単にラーモル振動数で常に與へられるとは行かず、所謂異常ゼーマン効果、パーシェン(Paschen)バック(Back)効果等量子理論によらねば了解出来ない現象を呈する。然も原子構造と深い関係にあるスペクトル線の多重性とも關聯して量子光學篇にて論ず可き分光學の重大な問題となるのである。

参 考:—

- W. Wien: Kanalstrahlen, Handb. d. Radiol. Bd. IV. 2 Aufl. 1923.
 O. Stern u. M. Vollmer: Phys. ZS. Bd. 20 (1919), 183.
 M. Abraham: Theorie der Elektrizität, 5 Aufl. Leipzig 1923.
 G. A. Schott: Electromagnetic Radiation and the Mechanical Reactions Arising from it. Cambridge 1912.
 Ch. Doppler: Abh. d. K. Böhmischen Ges. d. Wiss. Bd. II (1842), 465.
 A. A. Michelson: Phil. Mag. Bd. 34 (1892), 280; Astrophys. J. Bd. 2 (1895), 251.
 O. Schönrock: Ann. d. Phys. Bd. 20 (1906), 995.
 Ch. Fabry et H. Buisson: C. R. Bd. 154 (1912), 1224, 1500.
 H. A. Lorentz: Versl. Afd. Natuurk. Akad. Wet. Amsterdam. Bd. 14 (1905), 518, 577; Proc. Acad. Amsterd. Bd. 18 (1915), 134; La théorie électromagnétique de Maxwell. Leiden 1892.
 J. H. Jeans: Dynamical Theory of Gases. Cambridge Press.
 Chr. Füchtbauer u. W. Hofmann: Ann. d. Phys. Bd. 43 (1914), 96.
 J. Stark: Elektrische Spektralanalyse chemischer Atome, Leipzig 1914.
 J. Holtzmark: Ann. d. Phys. Bd. 58 (1919), 577; Phys. ZS. Bd. 25 (1924), 73; ZS. f. Phys. Bd. 31 (1925), 803; 34 (1925), 722.
 O. Stern: Phys. ZS. Bd. 23 (1922), 476.
 R. Ladenburg: Die Starkeffekte höherer Atome. Phys. ZS. Bd. 30(1929), 369.
 P. Zeeman: Akad. Wet. Amsterd. Bd. 5 (1896), 181, 242; Phil. Mag.

Bd. 43 (1897), 226; Bd. 44 (1897), 265.

C. Runge u. F. Paschen: Berl. Ber. 1902, 380, 720.

W. Voigt: Magneto-und Elektrooptik. Leipzig 1908.

§ 34. 共鳴子の強制振動

光源の模型として今迄役立つ調和振動子は光傳播(屈折率)に及ぼすその影響及び光の吸収を説明する原子の器官とも見做さる可きである。

先づ簡単な等方的共鳴子を考へて、純週期的場の強さ $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$ を持つ電磁波に出會つたとする。 $e\mathcal{E}$ なる力をうけた場合、その共鳴子の振動方程式は次の如くなる。

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + a u + b \frac{du}{dt} = 2\mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \dots\dots\dots (34.1)$$

こゝで制振の原因即ち常數 b の物理的意味を明にすれば、輻射制振もローレンツの衝突制振も放射の場合と全く同様に吸収の場合にも $b \frac{du}{dt}$ で表されたとする。ドップラー効果の影響は (34.1) には考へられて居らないが容易に導入し得る。

(34.1) 式の一般解は容易に得られるが、適當に長い時間後には入射波と同期のもののみが残つて、 $u = u_0 e^{i\omega t}$ と置けば、 u_0 に對して

$$u_0(-m\omega^2 + a + ib\omega) = e\mathcal{E}_0 \dots\dots\dots (34.2)$$

なる線的方程式を得る。非制振の自由振動子の固有振動回數 $\omega_0 = \sqrt{\frac{a}{m}}$ (32.2), 制振常數 $\gamma = b/m$ (32.9) を導入すれば、電氣能率 $p = p_0 e^{i\omega t}$ の振幅 p_0 に對する表現として

$$p_0 = eu_0 = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega_0} \mathcal{E}_0 \dots\dots\dots (34.3)$$

を得る。こゝで $\gamma\omega$ を $\gamma\omega_0$ と置いたのは γ が ω, ω_0 に比して小さいからである。(34.3) で與へられる量は複素數であるから、この強制された振

動は入射波に対して位相に於てずれて居ることが判る。

原子分子及びその集合體（結晶）と光との相互作用はかくの如き簡単な理論では充分證明出來ないのは勿論であるが（量子光學篇参照），その原子等を多くの調和振動子より成る一體系と考へ，その各振動子の固有振数は量子理論的に定められると考へて多くの現象が説明出来る。然しその振動子の常数は (32.1) にて示す如く電子の電荷と質量とのみでなく，ラーデンブルグ等が考へた様に e^2/m にその振動子の強さを表す因子 f を乗ぜねばならない。この固有振動数と強さ f とを原子常數として量子力學の決定すべき量とする。かくして (34.3) の代りに

$$p_0 = e u_0 = \frac{f \frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \mathcal{E}_0 \dots\dots\dots (34.4)$$

なる表現を取る可きである。

更に純輻射制振だけを考へる場合 f なる強さの共鳴子に對して， γ_0 を取らず $f\gamma_0$ と取らねばならない。エネルギー恆存則よりしてその共鳴子によつて單位時間に入射波から奪去されるエネルギー W_a は同じ時間に，それから放射されるエネルギー W_s に等しくなくてはならない。その振動子によつてなされる平均に於ける仕事は $W_a = \frac{\partial p}{\partial t} \mathcal{E}$ で，放射されるエネルギーは (32.6) に従つて $W_s = \frac{2}{3c^3} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right)^2$ であるから，(34.4) によつてこれ等の量を計算すれば（但實數部で計算して），電氣能率は

$$p = \mathcal{E}_0 \frac{e^2}{m} f \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + \gamma \omega_0 \sin \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega_0^2}, \dots\dots\dots (34.5)$$

W_a は時間的平均を取つて

$$W_a = \mathcal{E} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0^2 f \frac{e^2}{m} \frac{\gamma \omega_0^3}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega_0^2}, \dots\dots\dots (34.6)$$

次に $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\omega^2 p$ であるから W_s は

$$W_s = \frac{2}{3c^3} \overline{\left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right)^2} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0^2 \frac{2}{3c^3} f^2 \frac{\left(\frac{e^2}{m} \right)^2 \omega_0^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega_0^2} \dots\dots\dots (34.7)$$

となる。これ等の分數の分子にて ω を ω_0 としてある（その理由は既述の通り）。純輻射制振の場合には $W_a = W_s$ であるから，(34.6) と (34.7) を比較して

$$f \frac{e^2}{m} \gamma \omega_0^2 = \frac{2}{3c^3} f^2 \left(\frac{e^2}{m} \right)^2 \omega_0^4,$$

即ち (33.2) を用ひて

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m} \frac{\omega_0^2}{c^3} f = \gamma_0 f \dots\dots\dots (34.8)$$

を得て，上記のことが證明されたことになる。

こゝで量子論的注意を一言する必要がある。原子の假想的振動子（無限に多くある）を古典的に考へれば， Z 個の電子よりなる力學的體系の運動をフーリエ級數に展開したその倍音振動に各振動子は相當して居る。量子力學的にはその倍音振動は調和的でなく振動數條件によつて定まる性質のものである。この光を放射，吸收するに役立つ電子の數 Z に相應した $Z \frac{e^2}{m}$ はそれに對應した假想振動子に適當に分布されると見られる。 k をその振動子の番號として，その振動子の各に強さ因子 f_k を配し， $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ の代りに $\omega_k = 2\pi\nu_k$ がそれに屬する振動回數であつて，それに對應した制振は γ_k となる。純輻射制振に於ては凡ての γ_k は γ_0 に比例するが， $\gamma_k = f_k \gamma_0$ (f_k は (34.4) で定義された考へて居るスペクトル線の強さ因子) とは出來ない。何となれば既に考へた如く，入射光線から吸收したエネルギーを完全に同じ振動數で放射するとの假定の下にそれは出されたが，量子論よりすれば一般に（共鳴スペクトル線は例外）然らずして，入射光線によつて高いエネルギー状態に刺戟され，許されたる量子飛躍をなして多くの低い状態へ移つて光放射をなすのである。従つて放射によるエネル

ギー漏出は多くのスペクトル線に分配される。その各スペクトル線 $n \rightarrow m$ に分散公式 (34.6) 中の強さ因子が属して、 f_{nm} と書かる可きである。この f_{nm} を一定の n にてその體系の凡てのエネルギー状態 E_m に互つて加へれば、所謂トーマス (W. Thomas)・ターン (W. Kuhn) の加法法則なる

$$\sum_{E_m > E_n} f_{mn} - \sum_{E_m < E_n} f_{nm} = Z \dots\dots\dots (34.9)$$

を得るのである。

個々の振動子の制振常數とその生命時間との關係は既述の如くであるが、各エネルギー状態 n に一定の生命時間 τ_n があつてそれに對應して或スペクトル線幅 $\gamma_n = \frac{1}{\tau_n}$ が配せられる。 f_{nm} を n から放射で到達する低い m 状態への遷移で出来るスペクトル線凡ての強さ因子として、 $\gamma_n = \gamma_0 \sum f_{nm}$ であつて、一つのスペクトル線 ν_{nm} ($n \rightarrow m$) は自然線幅として

$$\gamma_{nm} = \gamma_n + \gamma_m = \gamma_0 \left\{ \sum_l f_{nl} + \sum_k f_{mk} \right\} \dots\dots\dots (34.10)$$

を持つ。即ち始原状態と終止状態の幅から加法で得られることを示して居る。基本状態は無限長の生命時間を持つて居て、その幅は零である。その上の次の状態は基本状態と一つの許された飛躍で結ばれて居て、 $f_{1,0}$ を持ち、 γ_0 に乗じてそれに對應したスペクトル線 (共鳴線) $\nu_{1,0}$ の線幅が與へられる。かくしてその次のは $\gamma_0(f_{2,0} + f_{2,1})$ で、三つの可能なスペクトル線 $\nu_{1,0}$ は $\gamma_0 f_{1,0}$ 、 $\nu_{2,0}$ は $\gamma_0(f_{2,0} + f_{2,1})$ 、 $\nu_{2,1}$ は $\gamma_0(f_{2,0} + f_{2,1} + f_{1,0})$ なる線幅を持つことになる。

次に衝突制振、ドップラー効果の影響を考へて見やう。これ等は放射の場合 (§ 33) と全く同様に取扱はれる。輻射制振だけをうける静止共鳴子では (34.1) が成立つて、 b は輻射制振常數を意味するが、その振動子が自

由に強制振動されず、他の分子との衝突のために位相、振幅の不規則な變化を起せば、(34.3) なる入射波と定常共振動をなす共鳴子に對する解は用ひられない。或時間點 t_0 にて振動が衰褪して新しく刺戟されるとすれば、

$$u(t_0) = 0, \quad \frac{d}{dt} u(t_0) = 0 \dots\dots\dots (34.11)$$

なる始原條件を満足する解を求めねばならない。而してこの刺戟時間點は自由行路の法則に従つた頻度を持つて起る。(34.1) の一般的解として (32.9)

$$u = u_0 e^{-\frac{\gamma_0}{2}t} e^{\pm i\omega_0 t} \dots\dots\dots (34.12)$$

にならつて

$$\omega_1 = \omega_0 + i \frac{\gamma_0}{2} \dots\dots\dots (34.13)$$

と -1 を乗じた共軛複素 $-\omega_1^*$ を導入して

$$u = A e^{i\omega t} + \beta_1 e^{i\omega_1 t} + \beta_2 e^{-i\omega_1^* t} \dots\dots\dots (34.14)$$

を採用する。 u の方向に於ける光ベクトル \mathcal{E} の成分を $E = E_0 e^{i\omega t}$ として

$$A = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega_0 \gamma_0} E_0, \dots\dots\dots (34.15)$$

β_1, β_2 は積分常數であつて、(34.11) の條件から

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= -A \frac{\omega + \omega_1^*}{2\omega_0} e^{i(\omega - \omega_1^*)t_0} \\ \beta_2 &= A \frac{\omega - \omega_1}{2\omega_0} e^{i(\omega + \omega_1)t_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34.16)$$

となる。 $t - t_0 = \tau$ として (34.14) は

$$u = A e^{i\omega t} \left\{ 1 - \frac{\omega + \omega_1^*}{2\omega_0} e^{-i(\omega - \omega_1^*)\tau} + \frac{\omega - \omega_1}{2\omega_0} e^{-i(\omega + \omega_1)\tau} \right\} \dots\dots (34.17)$$

と書ける。

e を乗じて p を作るのであるが、共鳴子は等方性であるから、ベクト

ルで計算出来、電氣能率は次の如き表現で表せる。

$$p = \frac{e^2}{m} \mathcal{E} \Phi(\tau), \dots\dots\dots(34.18)$$

$$\Phi(\tau) = \frac{1 - \frac{\omega + \omega_1^*}{2\omega_0} e^{-i(\omega - \omega_1)\tau} + \frac{\bar{\omega} - \omega_1}{2\omega_0} e^{-i(\omega + \omega_1^*)\tau}}{(\omega_1 - \omega)(\omega_1^* + \omega)} \dots\dots(34.19)$$

こゝで分母は γ_0 が小であるから (34.15) による $\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_0$ である可きだが $(\omega_1 - \omega)(\omega_1^* + \omega) = \omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_0 + \frac{\gamma_0^2}{4}$ と一致すると見做される。

そこで衝突の頻度従つて τ の値の分布に關して (33.29) を取れば、 Φ の平均値は容易に

$$\int \Phi(\tau) d\omega = \frac{1}{\tau} \int_0^\infty e^{-\tau i \tau} \Phi(\tau) d\tau = \frac{1}{(\omega_1 - \omega + \frac{i}{\tau})(\omega_1^* + \omega - \frac{i}{\tau})} \dots\dots(34.20)$$

と與へられることが判る。この分母にて ω^2, ω_0^2 に比して小なる項を無視して、 $\gamma = \gamma_0 + \gamma_s, \gamma_s = \frac{2}{\tau}$ として

$$\begin{aligned} (\omega_1 - \omega + \frac{i}{\tau})(\omega_1^* + \omega - \frac{i}{\tau}) &= \omega_0^2 - \omega^2 + i(\gamma_0 + \frac{2}{\tau})\omega \\ &= \omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega \dots\dots(34.21) \end{aligned}$$

と取れる。(34.18) によつて平均電氣能率は

$$\bar{p}_0 = \frac{e^2}{m} \mathcal{E}_0 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \dots\dots\dots(34.22)$$

となる。處が一般に γ は ω_0 に對して非常に小であるから、 ω の範圍を $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ なる處に限れば、分母の $\omega_0^2 - \omega^2$ は $2\omega_0(\omega_0 - \omega)$ と置換えられ (34.22) は

$$\bar{p}_0 = \frac{e^2}{m} \frac{1}{2\omega_0} \mathcal{E}_0 \frac{1}{\omega_0 - \omega + i\frac{\gamma}{2}} \dots\dots\dots(34.23)$$

と書ける。

次にドップラー効果を考へる。光線の方向に於ける速度成分が ξ ならばドップラー効果にて變化した振動回数は (33.14) によつて

$$\omega' = \omega \left(1 + \frac{\xi}{c}\right) \dots\dots\dots(34.24)$$

で、その振動子は上記共鳴曲線 (34.22) に従つて

$$\bar{p}_0 = \frac{e^2}{m} \mathcal{E}_0 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega'^2 + i\gamma\omega_0} \dots\dots\dots(34.25)$$

なる電氣能率を持つて振動する。その共鳴子によつて放射される二次波は入射波の方向にて共に運動する體系に關しては振動回數 ω' を持ち、静止體系に關しては矢張最初の振動回數 ω を持つ。従つて振動數の變形は起らず、たゞかくの如き共振動の強さが入つて來るのみである。速度の分布法則として (33.15) を假定すれば、その共鳴子が丁度振動回數 ω' を持ち、その平均電氣能率を與へる様な確率は (33.21) となる。従つて凡ての速度に互つて平均された電氣能率の表現として

$$\bar{p}_0 = \frac{e^2}{m} \mathcal{E}_0 \frac{2}{\sqrt{\pi} \delta} \int_0^\infty \frac{e^{-\left(\frac{\omega - \omega'}{\delta/2}\right)^2}}{\omega_0^2 - \omega'^2 + i\gamma\omega_0} d\omega' \dots\dots\dots(34.26)$$

を得る。

ドップラー幅 δ は大約制振幅 γ と同じ位の大さで、 γ, δ は共に ω_0 に對して非常に小さい。それ故 $|\omega_0 - \omega'| \ll \omega_0$ の如き ω' の範圍内で (34.26) の指數函數は相當の値を積分に與へる。この場合には上記の近似的表現即ち $\omega_0^2 - \omega'^2$ を $2\omega_0(\omega_0 - \omega')$ と置換え得る。そこで (33.24) と同様の x, y, η を用ひて

$$\bar{p}_0 = -\frac{e^2}{m} \mathcal{E}_0 \frac{1}{\sqrt{\pi} \delta} \frac{1}{\omega_0} \int_{-\infty}^\infty e^{-\left(\frac{x-y}{\eta}\right)^2} \frac{dy}{y-i}, \dots\dots\dots(34.27)$$

或は實數、虚數部を分けて次の如く書ける。

$$\bar{p}_0 = -\frac{e^2}{m} \epsilon_0 \frac{1}{\sqrt{\pi} \delta} \frac{1}{\omega_0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-y}{\gamma}\right)^2} \frac{y dy}{y^2+1} + i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-y}{\gamma}\right)^2} \frac{dy}{y^2+1} \right\} \dots\dots(34.28)$$

こゝで下の積分極限は既に屢々なせし如く $-\infty$ と取つてある。放射を表す(33.25)と同じ積分が入つて来る。而して後に判る如く吸収の状況は全く放射の一致するのである。

参 考:

R. Ladenburg: ZS. f. Phys. Bd. 4 (1921), 451; Naturwiss. Bd. 11 (1923), 584.
 W. Thomas: Naturwiss. Bd. 13 (1925), 627.
 W. Kuhn: ZS. f. Phys. Bd. 33 (1925), 408.
 F. Reiche u. W. Thomas: ZS. f. Phys. Bd. 34 (1925), 510.
 V. Weisskopf u. E. Wigner: ZS. f. Phys. Bd. 63 (1930), 54; Ann. d. Phys. Bd. 9 (1931), 23.

§ 35. 吸 收 分 散

個々のスペクトル線による分散, 吸収状況を種々なる假定の下に計算する際に何れの場合にも

$$p_0 = \alpha \epsilon_0 \dots\dots\dots(35.1)$$

なる形の表現が成立つ。既に前節にて得た如く, 輻射制振, 衝突制振に對して α は同じ函数となり ((34.3) と (34.25)), シュタルク効果による線幅に對しても亦雙極子の場合に類似のものとなつて實用上同一と見做し得る。これ等の場合を同様に取扱つてその起因が何れにせよ制振常数を γ とする。而して前節に述べた理由で上記公式に強さ因子 f を乗じ更に近似的公式(34.23)を用ふることとする。しかる時はドップラー効果を無視すれば

$$\alpha = f \frac{e^2}{m} \frac{1}{2\omega_0} \frac{1}{\omega_0 - \omega + i\frac{\gamma}{2}} = -f \frac{e^2}{m} \frac{1}{2\omega_0} \left\{ \frac{\omega - \omega_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} + i \frac{\gamma/2}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \right\} \dots\dots(35.2)$$

ドップラー効果を考へれば

$$\alpha = -f \frac{e^2}{m} \frac{1}{2\omega_0} \frac{2}{\gamma} \left\{ \varphi\left(\frac{\omega - \omega_0}{\gamma/2}, \eta\right) + i \psi\left(\frac{\omega - \omega_0}{\gamma/2}, \eta\right) \right\}, \quad \eta = \frac{\delta}{\gamma} \dots\dots(35.3)$$

こゝで

$$\varphi(x, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \eta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y e^{-\left(\frac{x-y}{\eta}\right)^2}}{y^2+1} dy, \quad \psi(x, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \eta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{x-y}{\eta}\right)^2}}{y^2+1} dy \dots\dots(35.4)$$

§ 25 にて説明した分極度テンソル α_{xy} をこゝで用ふる模型に對して解釋すれば, その模型の等方性に相當して

$$\alpha_{yz} = \alpha_{zx} = \alpha_{xy} = 0, \quad \alpha_{xx} = \alpha_{yy} = \alpha_{zz} = \alpha \dots\dots(35.5)$$

である。更に(28.14)に従つて直ちに光學的電媒常數或は屈折率が與へられるが, 先づ瓦斯體を考へれば(單位體積の分子數 N は相對的に小), 簡單な公式(28.17)

$$n^2 = 1 + 4\pi N \alpha \dots\dots\dots(35.6)$$

が成立つ。 n は(21.7)に導入された複素屈折率

$$n = n(1 - i\kappa) \dots\dots\dots(35.7)$$

を意味し, κ は吸収率である。こゝで α に對しては分子の凡ての共鳴子の持前を加へたものを代入せねばならない。

簡單のため個々の共鳴位置 ω_0 の近所だけを取扱ふとして, その固有振動回數 ω_0 は互に遠く隔り, その線幅は狭く, 他の線凡てが今考へて居る

線の近所へ及ぼす影響は實用上一定であると考へる。實際 α の虚數部は實數部に對して小であるから、凡ての他の線の持前の和を實數値 n_0^2 なる常數で表して、(35.6) の代りに

$$n^2 = n_0^2 + 4\pi N\alpha \dots\dots\dots (35.8)$$

と書き、 α に対しては (35.2) 或は (35.3) を直接用ひれば良い。

A. ドップラー効果を無視した場合:—

ドップラー効果が無視出来る位に低い温度の場合には(35.2)が用ひられ、毎秒の振動數 ν に書換えて、更に

$$\rho = Nf \frac{e^2}{\pi m}, \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} \dots\dots\dots (35.9)$$

として、(35.7) と (35.8) を (35.2) と比較して直ちに

$$\left. \begin{aligned} n^2(1 - \kappa^2) &= n_0^2 + \frac{1}{2\nu_0} \frac{\rho(\nu_0 - \nu)}{(\nu_0 - \nu)^2 + (\gamma/4\pi)^2}, \\ 2n^2\kappa &= \frac{\gamma}{8\pi\nu_0} \frac{\rho}{(\nu_0 - \nu)^2 + (\gamma/4\pi)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35.10)$$

を得る。この第二と放射スペクトル線の強さ分布の式(32.22)とを比べれば、兩者に於て ν に同様な形で關係することが見られる。凡ての物質に當嵌まる一般的曲線で屈折、吸収を表すために、

$$\frac{4\pi(\nu - \nu_0)}{\gamma} = \frac{\omega - \omega_0}{\gamma/2} = x, \dots\dots\dots (35.11)$$

$$M = \frac{2\pi\rho}{\nu_0\gamma} = \frac{2Nfe^2}{\gamma\nu_0 m} \dots\dots\dots (35.12)$$

を導入して、(35.10) より

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{M} \{n^2(1 - \kappa^2) - n_0^2\} &= -\frac{x}{1+x^2} \dots\dots\dots (35.13_1) \\ \frac{1}{M} 2n^2\kappa &= \frac{1}{1+x^2} \dots\dots\dots (35.13_2) \end{aligned} \right.$$

を得る。純輻射制振の場合にはMは簡単な意味を持つて居る。即ち(34.8)

に従つて

$$\gamma = \frac{8\pi^2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \nu_0^3 f$$

であるから、

$$M = \frac{3}{4\pi^2} \frac{c^3}{\nu_0^3} N = \frac{3}{4\pi^2} \lambda_0^3 N \dots\dots\dots (35.14)$$

となつて、Mは體積 $\frac{3}{4\pi^2} \lambda_0^3$ 中の分子の數を意味することになる。(35.13) なる曲線は第 69 圖に示す如く

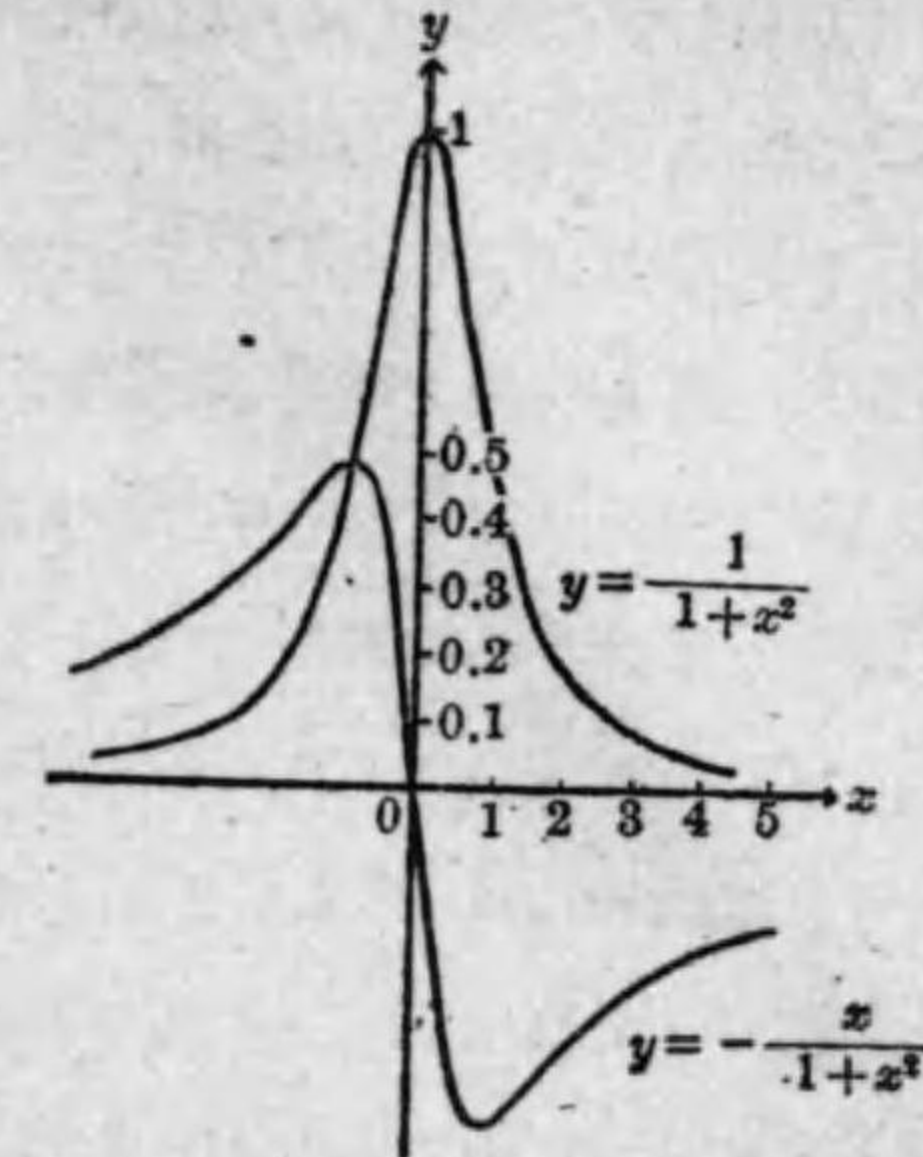
で、(35.13₂) は放射曲線と一致するが、(35.13₁) は左右非對稱である。

M が非常に小であれば、(35.13) の近似的表現として κ^2 を 1 に對して無視し、 $n^2 - n_0^2$ を $2n_0(n - n_0)$ 、 $2n^2\kappa$ を $2nn_0\kappa$ と置いて

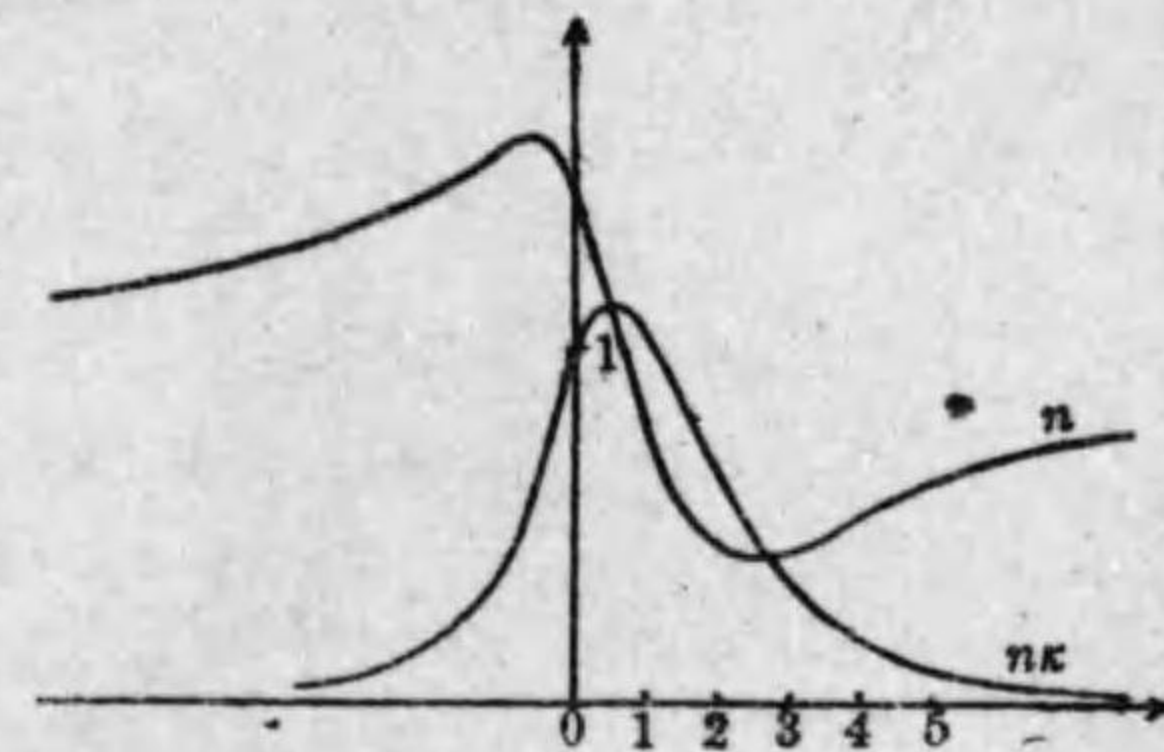
$$\frac{n - n_0}{M/2n_0} = -\frac{x}{1+x^2}, \quad \frac{n\kappa}{M/2n_0} = \frac{1}{1+x^2} \dots\dots\dots (35.15)$$

を得るから、第 69 圖は直接、屈折率と吸収率の一スペクトル線附近に於ける狀況を表すことになる。大なる M の場合には(35.13) から $n, n\kappa$ を

求めねばならない。この壓力のやゝ大なる瓦斯體の一スペクトル線附近に於ける屈折率、吸収率の狀況は $n_0 = 1$ 、 $M = 3$ として第 70 圖に示す如くなる。 $n\kappa$ の極大値は大なる振動數側に變位し、 n 曲線も亦同じ側に變位するこ



第 69 圖 低壓瓦斯のスペクトル線附近に於ける分散及吸収狀況



第 70 圖 高壓瓦斯のスペクトル線附近に於ける分散及び吸収狀況

とが見られる。この變位と線幅伸張とは、(35.12)によつて M が單位體積中の分散分子の數 N に比例するから、その瓦斯體の壓力によつて變り、M が 1 或はそれより大になるとそれ等が著しくなる。かくの如くしてローレンツの衝突制振とは全く異なる密度の影響が現れるが、それは單に光の電場が單位體積の凡ての分子の電氣能率に互つての平均値であると云ふことに關係して居るのである。これで共鳴幅擴の意味が初めて了解される。個々の原子共鳴子の相互作用を正確に考慮に入れればそれは完全に判るのである。これ等のカップリングは既にローレンツ・ローレンツの公式中に含まれて居て、それは等しい共鳴子の相對する放射が平均電氣能率に及ぼす作用を表す表現に他ならない。その公式はこゝでは (34.4) に従つて次の如き表現を取る。

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} N\alpha = \beta, \quad \beta = \frac{4\pi^2}{3} \rho \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega_0} \dots (35.16)$$

従つて

$$n^2 - 1 = \frac{4\pi^2 \rho}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega_0} \dots (35.17)$$

こゝで

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}_0 &= \omega_0 \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 \rho}{3\omega_0^2}} = \omega_0 \left(1 - \frac{2\pi^2 \rho}{3\omega_0^2} + \dots \right), \\ \bar{\gamma} &= \gamma \sqrt{1 + \frac{4\pi^2 \rho}{3\omega_0^2}} = \gamma \left(1 + \frac{2\pi^2 \rho}{3\omega_0^2} + \dots \right) \end{aligned} \right\} \dots (35.18)$$

である。これより振動數も制振も ρ 即ち密度に比例した變位を受けることが判る。(35.17) にて他の吸収條線の作用を考へに入れて、左邊の 1 を n_0^2 で置換えれば

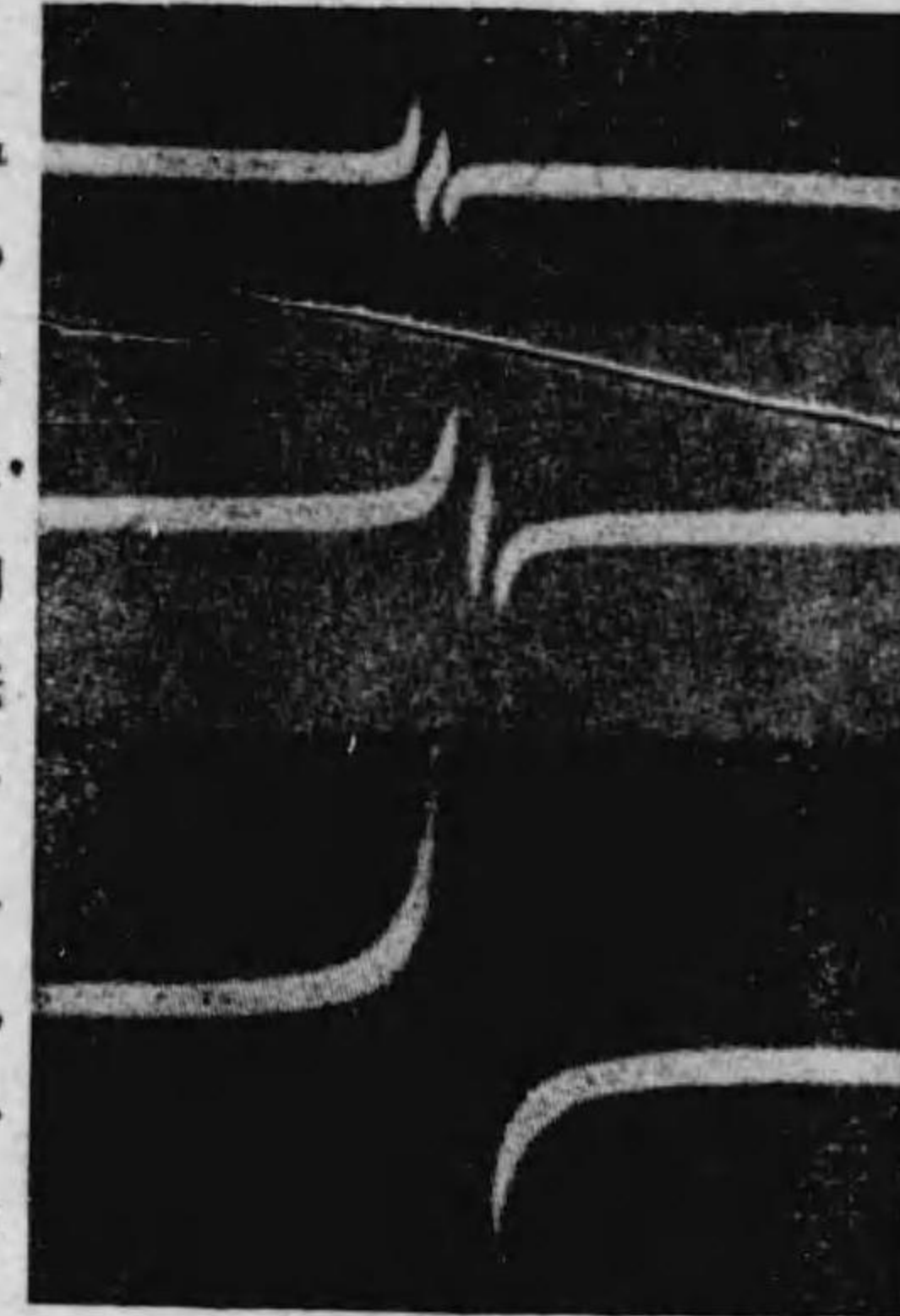
$$n^2 - n_0^2 = -\frac{M}{x - i} \dots (35.19)$$

を得、 x, M の定義 (35.11), (35.12) 中 $\nu_0(\omega_0)$ と γ を $\bar{\nu}_0(\bar{\omega}_0)$ と $\bar{\gamma}$ で

置換えれば良いのである。(35.19)は(35.13)と全く同價値である。(35.18)に示す變位, 幅擴は實驗的にワイスコプフ (Weisskopf) によつて確められた。普通吸収條線内は觀測に掛らないし、ドップラー効果の作用が吸收の影響を被ふから、線中央から相當隔つた處では公式 (35.15) が成立つてこの式だけで充分である。

この吸収條線の半値幅外では常に振動數が増すと共に屈折率が高まる (正規分散) が、吸収條線内では狀況は逆になる (異常分散)。瓦斯體の如き狭い吸収條線に對してはこの異常分散は觀察し難い (最も強い吸收の範圍と下度一致するから) が、物質によつては弱い吸收範圍があつてその異常分散範圍に於ける屈折率の低まるの見えることがある。沃素蒸氣, アニリン色素のアルカリ溶液等に見られる。ウッド (Wood) は Na 蒸氣にてこの現象を明かに見た (第 71 圖

参照) プンゼン焰中で輝つて居る Na 蒸氣を小さい鹽のプリズム様の形の粒より出させると、Na の D 線は二重線でこの相接近した二本の線に相當して二重の彎曲がその附近に明かに見られる。この異常分散は既にケットラー (Ketteler), ゼルマイヤー (Sellmeier), ヘルムホルツ (Helmholtz) 等の分散公式中に取扱はれ、近頃ではコップフェルマン (Kopfermann), ラーデンプルグによつて論ぜられて居る。



第 71 圖 三種の異つた Na 蒸氣壓に於ける Na-D 線の異常分散

B. ドップラー効果を考へた場合
この場合の α は (35.3) によら

ねばならない。A の場合と同様に (35.11), (35.12) で與へられる x, M を導入すれば, (35.13) に相當した式として次の式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{M} \{n^2(1 - \kappa^2) - n_0^2\} &= -\varphi(x, \eta), & x &= \frac{\omega - \omega_0}{\gamma/2}, \\ \frac{1}{M} 2n^2\kappa &= \psi(x, \eta), & \eta &= \frac{\delta}{\gamma}. \end{aligned} \right\} \dots\dots(35.20)$$

(35.4) で定義された兩函數 $\varphi(x, \eta), \psi(x, \eta)$ を種々なる値の η に対して計算せねばならない。

$$\chi(x, \eta) = \sqrt{\pi} \eta (\psi + i\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{\eta^2}} \frac{dy}{1-iy} \dots\dots(35.21)$$

と置き,

$$\frac{1}{1-iy} = \int_0^{\infty} e^{-(1-iy)\xi} d\xi$$

であるから

$$\chi(x, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{1}{\eta^2}(x^2 - 2xy + y^2)} \int_0^{\infty} e^{-(1-iy)\xi} d\xi$$

となる。積分順序を逆にして $u = y - (x + i\frac{\eta^2\xi}{2})$ とすれば,

$$\begin{aligned} \chi(x, \eta) &= e^{-\frac{x^2}{\eta^2}} \int_0^{\infty} d\xi e^{-\xi} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{1}{\eta^2} \{y - (x + i\frac{\eta^2\xi}{2})\}^2} e^{\frac{1}{\eta^2} (x + i\frac{\eta^2\xi}{2})^2} \\ &= \int_0^{\infty} d\xi e^{-\xi + ix\xi - \frac{1}{4}\eta^2\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-\frac{u^2}{\eta^2}} \end{aligned}$$

然るに $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{\eta^2}} du = \eta\sqrt{\pi}$ であるから,

$$\begin{aligned} \chi(x, \eta) &= \eta\sqrt{\pi} e^{\frac{(1-ix)^2}{\eta^2}} \int_0^{\infty} d\xi e^{-\xi(\frac{1}{2}\eta\xi + \frac{1-ix}{\eta})^2} \\ &= 2\sqrt{\pi} e^{\frac{(1-ix)^2}{\eta^2}} \int_{\frac{1-ix}{\eta}}^{\infty} dw e^{-w^2} \end{aligned}$$

と書け, ガウスの誤差函數

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-w^2} dw, \quad \Phi(\infty) = 1 \dots\dots(35.22)$$

を導入して結局

$$\chi(x, \eta) = \pi e^{\frac{(1-ix)^2}{\eta^2}} \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{1-ix}{\eta}\right) \right\} \dots\dots(35.23)$$

なる表現を得る。有名な $1 - \Phi(x)$ の級數展開式 ($|x| \gg 1$) を用ひて容易に (35.23) から

$$\chi(x, \eta) = \frac{\eta\sqrt{\pi}}{1-ix} \left\{ 1 - \frac{\eta^2 \cdot 1}{2(1-ix)^2} + \frac{\eta^4 \cdot 1 \cdot 3}{2^2(1-ix)^4} - \frac{\eta^6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3(1-ix)^6} + \dots \right\} \dots\dots(35.24)$$

或は收斂級數として

$$\chi(x, \eta) = \pi e^{\frac{(1-ix)^2}{\eta^2}} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1-ix}{\eta} - \frac{(1-ix)^3}{\eta^3 \cdot 1! \cdot 3} + \frac{(1-ix)^5}{\eta^5 \cdot 2! \cdot 5} - \dots \right\} \right] \dots\dots(35.25)$$

を得る。實數部分と虚數部分とに分けて (35.21) より大なる x に対して

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi(x, \eta) &= \frac{x}{1+x^2} \left\{ 1 - \frac{\eta^2 \cdot 1}{2} \frac{\binom{3}{1} - \binom{3}{3}x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{\eta^4 \cdot 1 \cdot 3}{2^2} \frac{\binom{5}{1} - \binom{5}{3}x^2 + \binom{5}{5}x^4}{(1+x^2)^4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\eta^6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} \frac{\binom{7}{1} - \binom{7}{3}x^2 + \binom{7}{5}x^4 - \binom{7}{7}x^6}{(1+x^2)^6} + \dots \right\}, \\ \psi(x, \eta) &= \frac{1}{1+x^2} \left\{ 1 - \frac{\eta^2 \cdot 1}{2} \frac{1 - \binom{3}{2}x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{\eta^4 \cdot 1 \cdot 3}{2^2} \frac{1 - \binom{5}{2}x^2 + \binom{5}{4}x^4}{(1+x^2)^4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\eta^6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} \frac{1 - \binom{7}{2}x^2 + \binom{7}{4}x^4 - \binom{7}{6}x^6}{(1+x^2)^6} + \dots \right\}, \end{aligned} \right. \dots\dots(35.26)$$

小なる x に対して

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi(x, \eta) &= \frac{2}{\eta} e^{\frac{1-x^2}{\eta^2}} \left\{ \cos \frac{2x}{\eta^2} \left[\frac{x}{\eta} - \frac{1}{\eta^3 \cdot 1! \cdot 3} \left(\binom{3}{1}x - \binom{3}{3}x^3 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\eta^5 \cdot 2! \cdot 5} \left(\binom{5}{1}x - \binom{5}{3}x^3 + \binom{5}{5}x^5 \right) + \dots \right] \right. \\ &\quad \left. - \sin \frac{2x}{\eta^2} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \left(-\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta^3 \cdot 1! \cdot 3} \left(1 - \binom{3}{2}x^2 \right) \right) \right] \right\} \end{aligned} \right.$$

$$\left[-\frac{1}{\eta^5 215} \left(1 - \binom{5}{2} x^2 + \binom{5}{4} x^4 + \dots \right) \right] \left\{ \sin \frac{2x}{\eta^2} \left[\frac{x}{\eta} - \frac{1}{\eta^3 113} \left(\binom{3}{1} x - \binom{3}{3} x^3 + \dots \right) \right] + \cos \frac{2x}{\eta^2} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \left(-\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta^3 113} \left(1 - \binom{3}{2} x^2 - \dots \right) \right) \right] \right\} \dots (35.27)$$

が得られる。

(35.26) より各 η に對して線中央から相當隔つた距離に於ける兩曲線は簡単な分散曲線 (35.13) に斂収することが判る。この事實を用ひてミンコウスキー (Minkowski) は自然線幅を測定し又ドップラー効果擾亂のない壓力増加による線幅伸張を測定した (Na D 線に對して $\gamma_0 = 0.62 \cdot 10^8 \text{ sec}^{-1}$ なる値を得た)。 10^{-2} mm Hg の Na 蒸氣壓にて既に壓力線幅伸張を認め、これは上記共鳴幅擴によつて説明さる可き現象である。(35.26), (35.27) の兩式の助けをかりて種々なる η の値に對して吸收曲線 $\psi(x)$ に對して對稱的) と分散曲線 $\phi(x)$ に對して非對稱的) とが得られる。凡ての ψ 曲線は $x = \pm 1 (\omega - \omega_0 = \pm \gamma/2)$ の近所で極限曲線 $1/1+x^2$ と交り、その内部ではその極限曲線より小、外部では大なる値を持ち、漸近的に x が大になれば極限曲線と一致する。然し ϕ 曲線は x の廣い範圍で (η が大なればなる程) 極限曲線 $x/1+x^2$ からはずれ、 x が大になれば矢張その極限曲線と一致する。これより明かにドップラー効果は線の直ぐ近所に於ける分散の特徴ある狀況を呈するものなることが判る。更に

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, \eta) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{y^2 + 1} = \pi \dots (35.28)$$

であるから、吸收の總積分は簡単な吸收曲線に對すると同じ値を持つことが判る。

低温或は分子量の大なる瓦斯に對して成立つ (35.10) 或は (35.13) を見るに、吸收條線の形は固有振動數 ν_0 の外 ρ, γ なる常數に關係する。こ

の兩常數はその分子特有の常數と瓦斯全體としての特性とに關聯して、 ρ は普遍常數 e^2/m と分子常數なる強さ f との積及び分子數 N (密度) で定められ、 γ は餘り低くない壓力にて主としてその自由行路 l (有效斷面) で低壓にて強さ因子 f で定められる。種々なる吸收、屈折率の實驗方法でこれ等の常數測定が從つて出来る筈であるが、その詳細な説明は應用光學篇に譲る。たゞ注意すべきはスペクトル線が細狭であるから吸收曲線に於て二つの獨立な測定より ρ と γ とを得ることは非常に困難であることである。然し積分値を求めることは容易で、即ち總吸收が問題になるのである。非常に薄い層 (厚さ d) に於ける單色光のエネルギー減少は (21.18) に從つて χd で與へられ、こゝで χ は

$$\chi = \frac{4\pi\nu}{c} n\kappa \dots (35.29)$$

光源が連続スペクトルで、考へて居る吸收線の範圍にて一定と見られれば、總吸收は

$$A = \int_0^{\infty} d \cdot \chi(\nu) d\nu = \frac{4\pi}{c} d \int_0^{\infty} \nu \cdot n\kappa \cdot d\nu \dots (35.30)$$

となる。弱い吸收で對稱的吸収線 (35.15) の場合には ν の代りに x を (35.11) に從つて用ひ、下の積分極限值 $-4\pi\nu^0/\gamma$ を $-\infty$ とし、

$$A = \frac{\gamma M}{2cn_0} \cdot d \cdot \nu_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\gamma M}{2cn_0} \cdot d \cdot \nu_0 \cdot \pi = \frac{\pi^2 \rho}{cn_0} d = \frac{\pi N f e^2}{cm n_0} d \dots (35.31)$$

を得るから、この總吸收は ρ 即ち Nf だけによつて、制振 γ にはよらない。從つてこの總吸收測定によつて f が求められる。

有限の厚さの層の場合には

$$A = \int_{\nu_0-\delta}^{\nu_0+\delta} (1 - e^{-\chi d}) d\nu \dots (35.32)$$

で、 χ には(35.29)を入れ、そこで ν を ν_0 と置き得るし、 $n\kappa$ には(35.15)を用ひ、

$$\zeta = \frac{2\pi\nu_0}{cn_0} Md = \frac{4\pi^2 \rho}{cn_0 \gamma} d = \frac{4\pi}{cn_0} \frac{e^2 N f}{m \gamma} d \quad \dots\dots(35.33)$$

を導入すれば、容易に次の表現を得る。

$$A = \frac{\gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{-\frac{\zeta}{1+x^2}}) dx \quad \dots\dots(35.34)$$

部分積分をして、 $x = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ としベッセル函数

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{iz \cos \varphi} d\varphi, \quad J_1(z) = -\frac{i}{z} \int_0^\pi e^{iz \cos \varphi} \cos \varphi d\varphi$$

を用ひ

$$A = \frac{\zeta\gamma}{4\pi} e^{-\frac{\zeta}{2}} \int_0^\pi e^{-\frac{\zeta}{2} \cos \varphi} (1 - \cos \varphi) d\varphi = \frac{\zeta\gamma}{4} e^{-\frac{\zeta}{2}} \left\{ J_0\left(i\frac{\zeta}{2}\right) - iJ_1\left(i\frac{\zeta}{2}\right) \right\} \quad \dots\dots(35.35)$$

なる表現に書ける。ベッセル函数の級数展開によつて非常に薄い層 ($\zeta \ll 1$) の場合には

$$A_0 = \frac{\zeta\gamma}{4} = \frac{\pi^2 \rho}{cn_0} d,$$

非常に厚い層 ($\zeta \gg 1$) の場合には

$$A_\infty = \frac{\gamma}{2\pi} \sqrt{\pi\zeta} = \sqrt{\frac{\pi\rho\gamma d}{cn_0}} \quad \dots\dots(35.36)$$

となる。前者は勿論(35.31)と一致し、後者ではその總吸収は ρ, γ によることが判る。これ等の測定によつて ρ と γ とが得られる。

特に興味あるはスペクトル線の吸収測定に光源と全く同じスペクトル線を用ひた場合である。温度放射の場合又はキルヒホッフ(Kirchhoff)の法則即ち放射能力と吸収能力との比は各温度で振動数の普遍函数である様な場合には簡単であつて、狭いスペクトル線の範囲ではこの函数は一定と見られ、放射能力に對して

$$E(\nu) = E_0(1 - e^{-\chi a}) \quad \dots\dots(35.37)$$

と取れる。有限の吸収層によつてこの強さの吸収される部分を測れば、所謂吸収線として

$$A_L = \frac{\int_{\nu_0-\delta}^{\nu_0+\delta} E(\nu)(1 - e^{-\chi a}) d\nu}{\int_{\nu_0-\delta}^{\nu_0+\delta} E(\nu) d\nu} = 1 - \frac{\int_{\nu_0-\delta}^{\nu_0+\delta} (1 - e^{-\chi a}) e^{-\chi a} d\nu}{\int_{\nu_0-\delta}^{\nu_0+\delta} (1 - e^{-\chi a}) d\nu} \quad (35.38)$$

を得る。(35.33)の ζ を導入して(35.15)を用ひ簡単な計算の後矢張ベッセル函数にて

$$A_L = 2 \left\{ 1 - e^{-\frac{\zeta}{2}} \frac{J_0(i\zeta) - iJ_1(i\zeta)}{J_0\left(i\frac{\zeta}{2}\right) - iJ_1\left(i\frac{\zeta}{2}\right)} \right\} \quad \dots\dots(35.39)$$

と書ける。大なる ζ 即ち厚い層の極限にては

$$A_L^{(\infty)} = 2 - \sqrt{2} = 0.58575 \quad \dots\dots(35.40)$$

となつて、線吸収は層の厚さが増しても100%にはならず、約58.6%の普遍値に近づく結果になる。

参 考:

- A. Goldhammer: Dispersion und Absorption des Lichtes. Leipzig 1913.
- V. Weisskopf: ZS. f. Phys. Bd. 75 (1932) 287.
- F. P. Leroux: Ann. Chim. et Physique, Bd. 41 (1861), 285.
- C. Christiansen: Pogg. Ann. Bd. 141 (1870), 479; Bd. 143 (1871), 250.
- R. W. Wood: Physical Optics. New York 1923.
- E. Ketteler: Pogg. Ann. Bd. 140 (1870), 1, 177.
- W. Sellmeier: Pogg. Ann. Bd. 143 (1871), 272.
- H. v. Helmholtz: Pogg. Ann. Bd. 154 (1875), 582.
- H. Kopfermann u. R. Ladenburg: ZS. f. Phys. Chem. Abt. A (Haber-Bd., 1928), 375.
- F. Reiche: Verh. dtsch.-phys. Ges. 1913, 3.

- M. W. Zemansky: Phys. Rev. Bd. 36 (1930), 219.
 R. Minkowski: ZS. f. Phys. Bd. 36 (1926), 839.
 R. Ladenburg u. F. Reiche: Ann. d. Phys. Bd. 42 (1913), 181.

§ 36. 分散の特殊問題

§ 35 にて述べた様に一つの固有振動数即ちスペクトル線より多少隔れば γ は殆んどきかず吸収は非常に小なる。このスペクトル線の近所外を透明な範囲として、こゝでは制振常数を無視した電氣能率と電場の強さとの関係を與へる公式が得られる。(34.4) 及び (34.18) は一つのスペクトル線の持前として

$$p_0 = f \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \mathcal{E}_0, \dots\dots\dots(36.1)$$

然るに凡ての共鳴位置にこの持前があるから、 k で各を表して $2\pi\nu_k = \omega_k$, f_k を用ひ、(35.9) に従つて

$$p_k = N \frac{e^2}{\pi m} f_k \dots\dots\dots(36.2)$$

を導入すれば、(35.10) より $n_0 = 1$, $\gamma = \kappa = 0$ として屈折率の式は次の表現を取る。

$$n^2 - 1 = 4\pi N \alpha = \sum_k \frac{\rho_k}{\nu_k^2 - \nu^2} = \sum_k \frac{\rho_k}{c^2} \frac{\lambda^2 \lambda_k^2}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \dots\dots\dots(36.3)$$

そこで $\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_k^2} = 1 + \frac{\lambda_k^2}{\lambda^2 - \lambda_k^2}$ であるから、(36.3) は

$$n^2 - 1 = a + \sum_k \frac{b_k}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \dots\dots\dots(36.4)$$

$$a = \sum_k \frac{\rho_k}{\nu_k^2} = \frac{1}{c^2} \sum_k \rho_k \lambda_k^2, \quad b_k = \frac{c^2 \rho_k}{\nu_k^4} = \frac{1}{c^2} \rho_k \lambda_k^4, \dots\dots(36.5)$$

と書ける。

無限に長い波長或は無限に小なる振動数の極限の場合には、既に第一章

にて述べた如く或物質に對してマックスウェルの關係 $n^2 = \epsilon$ が成立つ。こゝでは ϵ は靜的雙極子を持たない様な物質に對する靜的電媒常數である。然るに雙極子を持つ物質に對しては溫度に逆比例する部分を引き去つて n^2 の極限值が得られるのである。(36.4) 式よりすれば、 $\nu \rightarrow 0$ の極限にて

$$\epsilon = 1 + a = 1 + N \frac{e^2}{\pi m} \sum_k \frac{f_k}{\nu_k^2}, \dots\dots\dots(36.6)$$

こゝで單位體積中の分子數 N はモルの數 N と密度 d , 分子量 μ とで $N = N \frac{d}{\mu}$, フラデー常數 $F = N e = 2.895 \cdot 10^{14}$ 靜電單位を用ひ、 $\frac{e}{m} = 5.8 \cdot 10^{17}$ e. s. u/g を入れて $N \frac{e^2}{m} = \frac{d}{\mu} 1.534 \cdot 10^{32}$ となる。従つて(36.6) によりその瓦斯の吸収範囲の大體を知ればその電媒常數の値が大約得られる。例へば一氣壓 0°C の空氣にて $d = 0.0012$, $\mu = 28.8$ (平均分子量) を以て $N \frac{e^2}{m} = 2.048 \cdot 10^{27}$, 空氣は可視光線範囲にて透明, 紫外線範囲に吸収がある ($\lambda_k = 1860 \text{ \AA} = 1.86 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$, $\nu_k = 1.6 \cdot 10^{15} \text{ sec}^{-1}$) から $\frac{1}{\nu_k^2}$ の和は大體 $3.9 \cdot 10^{-31}$ で、 $\epsilon - 1 = 8.10^{-4}$ なる値を得る處、實際の一氣壓 0°C の空氣の電媒常數値は $\epsilon - 1 = 5.9 \cdot 10^{-4}$ であつて大約一致した値が出ることが判る。この(36.6)を充分證明するためには凡ての固有振動数を實際に知る必要がある。全スペクトル範囲に於ける n^2 の狀況を檢べて(36.3) が成立つ處で何處でも振動數が増すと共に屈折率が増すことを知り、即ち正規分散が起ることを知り、固有振動數はその處で $n^2 - 1$ の符號が逆になつて無限大になることから判り、こゝでは(36.4) なる公式は意味はなく、その吸収線の近所では最早 γ が無視出來なくなる。極限公式(36.3) は $n^2 > 0$ の處を結んだ曲線で表される。異常分散の範囲は(35.15) で表されるのである。普通は全スペクトルに互つての屈折率の表現は一二の固有振動數を紫外線範囲に持つ場合

$$n^2 - 1 = a + \frac{b}{\lambda^2 - \lambda_0^2} \dots\dots\dots(36.7)$$

で充分である。例へば水素、酸素、空氣に對して 0°C 760 mm Hg 壓力にて $\lambda = 0.436 - 8.68 \mu$ の範圍に於ける n 測定よりの a, b, λ_0 なる常數値は次の表の如くなる。これ等の値を用ひて (36.6) を證明すれば、最後の二行に示す如き $1 + a$ の値と直接測定した ϵ の値とになる。

第 6 表

瓦斯	$a \cdot 10^8$	$b \cdot 10^8$	λ_0^2 (10^{-8} cm^2 にて)	ν_0 (10^{15} sec^{-1} にて)	$1 + a$	ϵ
水素	27216	211.2	0.007760	3.40	1.00027216	1.000264
酸素	52842	369.9	0.007000	3.55	1.00052842	1.000547
空氣	57642	327.7	0.005685	3.98	1.00057642	1.000590

大體の一致が見られる。

固有振動數を含まない様なスペクトル範圍に於ける公式 (36.3) 或は (36.4) は充分な近似でもつと簡単な表現に出来る。短波長の側にてこのスペクトル範圍外にある固有振動數を ν_0 とし、長波長の側にあるのを ν_r とすれば、分散公式 (36.3) は級數に展開して

$$n^2 - 1 = A + B\nu^2 + C\nu^4 + \dots - \frac{B'}{\nu^2} - \frac{C'}{\nu^4} - \dots$$

$$= A + \frac{Bc^2}{\lambda^2} + \frac{Cc^4}{\lambda^4} + \dots - \frac{B'\lambda^2}{c^2} - \frac{C'\lambda^4}{c^4} - \dots$$

と書け、こゝで常數 $A, B, C, \dots, B', C', \dots$ 等は

$$A = \sum \frac{\rho_\nu}{\nu_0^2}, \quad B = \sum \frac{\rho_\nu}{\nu_0^4}, \quad C = \sum \frac{\rho_\nu}{\nu_0^6}, \quad \dots, \quad B' = \sum \rho_r, \quad C' = \sum \rho_r \nu_r^2, \dots$$

で與へられる。瓦斯體の場合 n は 1 に殆んど近い値を持つから $n^2 - 1$ は $2(n - 1)$ と置け、普通赤外線固有振動數による B', C', \dots の項は大なる影響を及ぼさないから無視すれば、所謂コーシー (Cauchy) の分散公式を得る。

$$n - 1 = A_1 \left(1 + \frac{B_1}{\lambda^2} \right), \quad A_1 = \frac{A}{2}, \quad B_1 = \frac{Bc^2}{A} \dots \dots \dots (36.8)$$

こゝでは λ^{-2} の項までにとりてある。この式によつて實驗と相當一致するその値が計算される。

大なる密度の物質即ち液體、固體に對しては (36.3) 式の代りにローレンツ・ローレンツの式が成立つて、透明範圍にては制振を無視して

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} N \alpha \dots \dots \dots (36.9)$$

或は

$$n^2 - 1 = \frac{12\pi N \alpha}{3 - 4\pi N \alpha}, \dots \dots \dots (36.10)$$

$$4\pi N \alpha = \frac{N e^2}{\pi m} \sum_k \frac{f_k}{\nu_k^2 - \nu^2} = \sum_k \frac{\rho_k}{\nu_k^2 - \nu^2} \dots \dots \dots (36.11)$$

なる表現を得る。密度との關係即ち N との關係に重點を置かなければ (36.10) を瓦斯體の分散公式の形に出来る。即ち

$$3 - 4\pi N \alpha = 3 - \sum \frac{\rho_k}{\nu_k^2 - \nu^2} = 0$$

なる方程式の ν の根を $\bar{\nu}_k$ とすれば (36.10) は

$$n^2 - 1 = \sum_k \frac{\bar{\rho}_k}{\bar{\nu}_k^2 - \nu^2} \dots \dots \dots (36.12)$$

なる形になつて (36.3) と同形になる。例へば一つだけ固有振動數を考ふ可きならば、 $\bar{\nu}_1$ は $3 - \rho_1/(\nu_1^2 - \nu^2) = 0$ の根で、

$$\bar{\nu}_1^2 = \nu_1^2 - \frac{1}{3} \rho_1, \quad \bar{\rho}_1 = \rho_1 \dots \dots \dots (36.13)$$

となつて、これは (35.18) と一致して居る。分散公式 (36.3) 又は (36.4) を三つの等軸晶系の螢石、岩鹽、加里岩鹽 (シルヴィン) に應用すれば、その常數は次の表の如くなり、 $1 + a$ と直接測定した ϵ の値とは相當に良く一致して居る。そこで波長の單位は $\mu = 10^{-4} \text{ cm}$ で、 ν は sec^{-1} である。

透明範囲(可視光線)に於ける屈折率測定の根據よりして、これ等の結晶

體には二種の吸収條線があ

り、一つは 30-50 μ 附近

(赤外線)に、他は 100-150

$m\mu$ 附近(紫外線)にある

ことが判る。この赤外線範

圍に於ける固有振動數の存

在を利用してルーベンス

(H. Rubens) 等は所謂殘

留線の方法を見出した。即

ちこの固有振動の附近に於

ける屈折率の著しい増大は

反射率の増大を來たすから不均等な熱線から數回の反射によつてこの撰擇

された反射の波長即ち殘留線を得るのである。實驗的に定められた吸収極

大の波長、殘留線の波長、分

散曲線より外挿法で定めた

固有振動數に相當した波長

を $\mu = 10^{-4}$ cm を單位に

て表して右の表の如き値を

種々なる結晶にて得られて

居る。撰擇反射の極大と吸

收の極大との間には差があ

ることは(吸収極大の方が

長波長側にある) § 35 にて

説明し、第 70 圖にて示され

第 7 表

	螢石	岩鹽	シルピン
b_1	0.00612	0.018	0.0150
λ_1^2	0.00888	0.0162	0.0234
λ_1	0.0940	0.127	0.153
ν_1	$3.19 \cdot 10^{15}$	$1.75 \cdot 10^{15}$	$1.96 \cdot 10^{15}$
b_2	5099	3977	10747
λ_2^2	1258	3149	4517
λ_2	35.5	56.1	67.2
ν_2	$8.57 \cdot 10^{12}$	$5.35 \cdot 10^{12}$	$4.47 \cdot 10^{12}$
$1+a$	6.09	5.18	4.55
ϵ	6.7-6.9	5.81-6.29	4.94

第 8 表

物 質	吸 收	殘 留 線	分 散
LiF	32.6	17.0	—
NaF	40.6	35.8	—
NaCl(岩鹽)	61.1	52.0	56.1
KCl(シルピン)	70.7	63.4	67.2
RbCl	84.8	73.8	—
CsCl	102.0	—	—
NaBr	74.7	—	—
KBr	88.3	81.5	—
RbBr	114.0	—	—
CsBr	134.0	—	—
NaJ	85.5	—	—
KJ	102.0	94.1	—
RbJ	129.5	—	—
Ca ₂ F(螢石)	—	31.6	35.5

て居る様に、屈折率の曲線が吸収曲線より餘計に短波長側にずれて居ることに起因して居る。

更にこの二種の固有振動數の物理的意味を考へるに、この事實はデューラーの考へに従へば、赤外線のは原子又はイオンの振動により、紫外線のは電子の振動に據るのである。この兩方の引戻す力が等しければ、その波長の比はその質量の平方根の比に等しく $\frac{\lambda_r}{\lambda_v} = \sqrt{\frac{m_r}{m_v}}$ となる。 μ を分子量として、 m を電子の質量、 m_H を水素原子の質量とすれば、 $m_v = m$ 、 $m_r = \mu m_H$ 、 $m_H/m = 1845$ であるから

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_v} = \sqrt{1845 \mu} = 43.0 \cdot \sqrt{\mu}$$

となる。然るに先の表に與へた螢石、岩鹽、シルピンに對する λ_v 、 λ_r を用ひ、それ等の分子量 78.1, 58.5, 74.6 を用ひて $\frac{\lambda_r}{\lambda_v \sqrt{\mu}}$ を計算すれば、螢石: 43, 岩鹽: 58, シルピン: 51 となる。従つて電子とイオンに對する上記結合力は殆んど等しいことが判る。その 43.0 と異なるものはその力が異なることを示すのである。マードルグ (Madelung) はこの殘留線の位置と結晶の彈性常數との關係を論じた。こゝで考へて居る様な結晶はイオン格子で、結晶の電氣的格子理論にてはクーロンの法則に従ふ力がイオン間に働いて居ると見做す以上、それは單位電荷に就いて電子の場合と同様であることは勿論、又それが彈性理論とも關係のあることは容易に了解出来る。これ等の正確な理論は量子理論によつて初めて得られる。

紫外線吸収に就いても (86.4) なる分散公式を比較出来る直接測定があるが、こゝではその説明を略す。

次に種々なる光効果の振動數による問題に就いて述べる。特にファラデー効果、コットン・ムートン効果、ケル効果、光散亂、旋光性等の分散に關する大要を説明しやう。勿論嚴密なこの理論は量子論に據る可きである。

ファラデー効果の分散と逆ゼーマン効果:-

外よりの磁場中にて原子が光波をうけて如何なる状況を示すか即ち逆ゼーマン効果を取扱ふとファラデー効果の分散が與へられる。§ 33 のゼーマン効果を説明した時に用ひた等方的に束縛された負電子を考へ、その速度に比例する制振を取入れ、一定な磁場 \mathcal{H} 内にて電氣的光場の作用を受けたその共鳴子の振動方程式は (33.54) と同様に

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 p_x}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial p_x}{\partial t} + \omega_0^2 p_x + 2\omega_L \frac{\partial p_y}{\partial t} &= \frac{e^2}{m} \mathcal{E}_x^0, \\ \frac{\partial^2 p_y}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial p_y}{\partial t} + \omega_0^2 p_y - 2\omega_L \frac{\partial p_x}{\partial t} &= \frac{e^2}{m} \mathcal{E}_y^0, \\ \frac{\partial^2 p_z}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial p_z}{\partial t} + \omega_0^2 p_z &= \frac{e^2}{m} \mathcal{E}_z^0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36.14)$$

で與へられる。

$$\left. \begin{aligned} p_x + ip_y &= p_\xi, & p_x - ip_y &= p_\eta, \\ \mathcal{E}_x^0 + i\mathcal{E}_y^0 &= \mathcal{E}_\xi^0, & \mathcal{E}_x^0 - i\mathcal{E}_y^0 &= \mathcal{E}_\eta^0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36.15)$$

を導入して、更にこの綜合量も $e^{i\omega t}$ に比例するとすれば、直ちに

$$\left. \begin{aligned} p_\xi &= \frac{\frac{e^2}{m} \mathcal{E}_\xi^0}{\omega_0^2 - \omega^2 + \omega(2\omega_L + i\gamma)} = \alpha_\xi \mathcal{E}_\xi^0, \\ p_\eta &= \frac{\frac{e^2}{m} \mathcal{E}_\eta^0}{\omega_0^2 - \omega^2 - \omega(2\omega_L - i\gamma)} = \alpha_\eta \mathcal{E}_\eta^0, \\ p_z &= \frac{\frac{e^2}{m} \mathcal{E}_z^0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} = \alpha_z \mathcal{E}_z^0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36.16)$$

が得られる。この原子は等方性であるとされたから、この公式は空間固定座標系に於ても分子固定座標系にても成立つて、 $p_x = \sum_y \mathbf{A}_{xy} \mathcal{E}_y^0$ の形に出来、

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{1}{2}(\alpha_\xi \mathcal{E}_\xi^0 + \alpha_\eta \mathcal{E}_\eta^0) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha_\xi(\mathcal{E}_x^0 + i\mathcal{E}_y^0) + \alpha_\eta(\mathcal{E}_x^0 - i\mathcal{E}_y^0)) \\ &= \frac{\alpha_\xi + \alpha_\eta}{2} \mathcal{E}_x^0 + i \frac{\alpha_\xi - \alpha_\eta}{2} \mathcal{E}_y^0 = \mathbf{A}_{xx} \mathcal{E}_x^0 + \mathbf{A}_{xy} \mathcal{E}_y^0 \dots (36.17) \end{aligned}$$

及び他の二つの類似の表現を得る。従つて空間固定系に於けるテンソル \mathbf{A} は

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_{xx} = \mathbf{A}_{yy} &= \frac{1}{2}(\alpha_\xi + \alpha_\eta), & \mathbf{A}_{xy} = -\mathbf{A}_{yx} &= \frac{i}{2}(\alpha_\xi - \alpha_\eta), \\ \mathbf{A}_{zz} &= \alpha_z, & \mathbf{A}_{xz} = \mathbf{A}_{zx} = \mathbf{A}_{yz} = \mathbf{A}_{zy} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36.18)$$

となる。§ 29 の議論が成立ち、特に瓦斯體を論ずるとすれば、 $\mathcal{D} = \mathcal{E} + 4\pi \mathcal{P}$
 $= \mathcal{E} + 4\pi N p$ より (29.22) 或は (29.48) を

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_{xx} = \mathcal{E}_{yy} = \mathcal{E}_e &= 1 + 4\pi N \mathbf{A}_{xx} = 1 + 4\pi N \frac{1}{2}(\alpha_\xi + \alpha_\eta), \\ \mathcal{E}_{xy} = -\mathcal{E}_{yx} = -i\mathcal{E}' &= 4\pi N \mathbf{A}_{xy} = 4\pi N \frac{i}{2}(\alpha_\xi - \alpha_\eta), \\ \mathcal{E}_{zz} = \mathcal{E}_o &= 1 + 4\pi N \mathbf{A}_{zz} = 1 + 4\pi N \alpha_z \end{aligned} \right\} (36.19)$$

と置いて得られる。主要な場合として

- 1) 磁場の方向に平行に傳播する: 二つの圓偏光波

$$\frac{\mathcal{D}_y}{\mathcal{D}_x} = \pm i, \quad n_{\mp}^2 = \mathcal{E}_e \pm \mathcal{E}', \dots\dots\dots (36.20)$$

- 2) 磁場の方向に垂直に傳播する: 線的二重屈折

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}_\parallel &= 0, & n_1^2 &= \mathcal{E}_e - \frac{\mathcal{E}'^2}{\mathcal{E}_e}, \\ \mathcal{D}_\perp &= 0, & n_2^2 &= \mathcal{E}_o \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36.21)$$

なる場合がある。1) の縦効果を取れば、(36.19) を入れ、(36.16) より (36.20) に従つて

$$\left. \begin{aligned} n_-^2 &= 1 + 4\pi N \alpha_v = 1 + \frac{4\pi N \frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 - \omega(2\omega_L - i\gamma)}, \\ n_+^2 &= 1 + 4\pi N \alpha_t = 1 + \frac{4\pi N \frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \omega(2\omega_L + i\gamma)} \end{aligned} \right\} \dots(36.22)$$

と書ける。多くの共鳴子を考へて一般的分子の光効果を取扱ふため先の場合と同様に $\rho_l = N \frac{e^2}{\pi m} f_l$ を以て ($\nu = \omega/2\pi$) (36.22) は次の如く書き直せる。

$$\left. \begin{aligned} n_-^2 &= 1 + \sum_l \frac{\rho_l}{\nu_l^2 - \nu^2 - \nu(2\nu_L - i\frac{\gamma}{2\pi})}, \\ n_+^2 &= 1 + \sum_l \frac{\rho_l}{\nu_l^2 - \nu^2 + \nu(2\nu_L + i\frac{\gamma}{2\pi})} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36.23)$$

先づ吸収が餘りきかないで γ が無視出来る範囲を取れば、屈折率は實數になり、附加項 $\nu\nu_L$ で展開すれば

$$n_- - n_+ = \frac{n_-^2 - n_+^2}{2n} = \frac{2\nu\nu_L}{n} \sum_l \frac{\rho_l}{(\nu_l^2 - \nu^2)^2} \dots\dots(36.24)$$

この n は磁場なしの状態に於ける屈折率を意味する。ラーモア振動數 (33.53) 或は (33.59) を入れてヴェルデ (Verdet) 常數を計算すれば、

$$\begin{aligned} R &= \frac{\pi}{\lambda_0} (n_- - n_+) \frac{1}{H} = \frac{e}{2mc^2} \frac{\nu^2}{n} \sum_l \frac{\rho_l}{(\nu_l^2 - \nu^2)^2} \\ &= N \frac{e^3}{2\pi c^3 m^2} \frac{\nu^2}{n} \sum_l \frac{f_l}{(\nu_l^2 - \nu^2)^2} \dots\dots\dots(36.25) \end{aligned}$$

なる吸収の餘りきかないスペクトル範囲に於ける廻轉分散の法則を與へる公式が得られる。Rは常に正であつて (陰電子 $-e$ ($e > 0$) を取るから)、先に論じた廻轉の符號の議論との一致を示して居る。Rの内には屈折の分散同様に ρ 或は Nf のみが入つて居るからファラデー効果の分散を觀

測してもそれ等の原子常數が定められる。たゞ兩分散の異ひは屈折の場合には分母が $\nu_l^2 - \nu^2$ であつたに反し、(36.25) では $(\nu_l^2 - \nu^2)^2$ で吸收線の左右側にて廻轉能は同じ符號を持つて居る點である。

(36.25) と (36.3) とを比較すれば直ちに (29.42) に與へた所謂ベッケレルの公式

$$R = \frac{e}{2mc^2} \nu \frac{dn}{d\nu} = -\frac{e}{2mc^2} \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0}$$

が得られる。こゝで取扱つた模型ではたゞ温度に無關係な旋光能力 (反磁性) だけが與へられるので、分子の異方性による常磁性旋光能力の分散を定めるには、分子模型にて球面對稱でない分極能テンソル α_{xy} を考へ、 $\alpha_{xy} - \alpha_{yx}, \dots\dots$ が零でなく、加之その分子は固定磁氣能率 m_0 を持つて居らねばならない。弱い吸收にてはテンソル α はエルミート型で、既に述べた様に d_x, d_y, d_z なる成分を持つ軸的ベクトル d で α が表され、 $f_l = \frac{1}{3} m_0 d$ となる。これ等の成分が如何に振動數によるかを簡単な共鳴子の狀況から定めれば、それは丁度 $n^2 - 1$ と同様に吸收線の左右側にて符號が異つて來ることが判る。この兩者の差違から反磁性効果と常磁性効果とが分けられる。

次に吸收線 ν_0 の附近に於ける廻轉狀況を検べる。 ν_0 以外の凡ての固有振動數による屈折率の部分を n_0 として

$$n_{\pm} = n_0^2 + \frac{\rho_0}{\nu_0^2 - \nu^2 + i\nu \frac{\gamma}{2\pi} \pm 2\nu\nu_L} \dots\dots\dots(36.26)$$

と書け、前と同様 $x = \frac{\omega - \omega_0}{\gamma/2} = \frac{4\pi(\nu - \nu_0)}{\gamma}$ なる變數を導入して、吸收線の附近では $\nu_0^2 - \nu^2 = -\frac{\gamma\nu_0}{2\pi} x$ と置けるから、 $x_L = \frac{4\pi\nu_L}{\gamma}$, $M = \frac{2\pi\rho_0}{\gamma\nu_0}$ として

$$n_{\pm} = n_0^2 - \frac{M}{x \mp x_L - i} \dots\dots\dots (36.27)$$

或は實數部と虚數部とを分けて

$$\left. \begin{aligned} n_{\pm}^2(1 - \kappa_{\pm}^2) &= n_0^2 - \frac{M(x \mp x_L)}{(x \mp x_L)^2 + 1} \\ 2n_{\pm}^2\kappa_{\pm} &= \frac{M}{(x \mp x_L)^2 + 1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36.28)$$

を得る。(35.13)と比較すれば、豫期の如く、屈折率、吸収率は丁度傳播方向の周りに左圓偏光波に對して固有振動數が $x = 0$ から $x = x_L$ へ移つたかの如き、又右圓偏光波に對しては $x = 0$ から $x = -x_L$ へ移つたかの如き狀況を示すことが判る。吸収率だけを見れば、(36.28)の第二式は縦逆ゼーマン効果を表して、最初の吸収線は二線に分割し、兩吸収率に相當した二つの異つた速さの逆向な圓偏光に入射波が分れることになる。

この兩率の各は最初の線に於けると同様な狀況を示し、たゞ吸収最大が $\pm x_L$ だけ移るのである。この効果に對してはかくして放射の場合に述べたと同様になる。次に屈折率の狀況を見れば、吸収線の近くにて圓複屈折が共鳴的に強く高まることが判る。 κ^2 を無視すれば單位長さの廻轉角は次の表現を取る。

$$\chi = \frac{\pi}{\lambda}(n_- - n_+) = \frac{\pi M}{2n_0\lambda} \left\{ \frac{x - x_L}{(x - x_L)^2 + 1} - \frac{x + x_L}{(x + x_L)^2 + 1} \right\} \dots\dots\dots (36.29)$$

この兩項が n_- , n_+ を表すのであつて吸収範圍外左右側にては n_- 曲線は n_+ 曲線の上にあつて χ が正になるに反し、ゼーマン分割成分間ではその符號が逆になる。この磁氣的旋光の振動數の函數としての特殊性(吸収線附近に於ける)をマカルソ・コルビノ (Macaluso-Corbino) 効果と云ふ。

最後に横効果に就いて簡単に述べる。この場合には (36.21) によつて線的複屈折が起る。即ち

$$\frac{1}{n_1^2} = \frac{\epsilon_e}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\epsilon_e + \epsilon'} + \frac{1}{\epsilon_e - \epsilon'} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n_-^2} + \frac{1}{n_+^2} \right\} \dots\dots\dots (36.30)$$

であるから、横効果は縦効果にて表現出来る。處で磁場に平行な振動成分 ($\mathcal{D}_{\perp} = 0$) の屈折は磁場には無關係で、磁場なしの媒質の屈折率を n として

$$n_2^2 = \epsilon_0 = 1 + 4\pi N\alpha_e = n^2 \dots\dots\dots (36.31)$$

である。(36.30)より

$$\frac{(1 + i\kappa_1)^2}{n_1^2(1 + \kappa_1^2)^2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(1 + i\kappa_+)^2}{n_+^2(1 + \kappa_+^2)^2} + \frac{(1 + i\kappa_-)^2}{n_-^2(1 + \kappa_-^2)^2} \right\} \dots\dots\dots (36.32)$$

であるから、實數部と虚數部とに分けて書けば、次の如き表現を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1 - \kappa_1^2}{n_1^2(1 + \kappa_1^2)^2} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 - \kappa_+^2}{n_+^2(1 + \kappa_+^2)^2} + \frac{1 - \kappa_-^2}{n_-^2(1 + \kappa_-^2)^2} \right\} \\ \frac{\kappa_1}{n_1^2(1 + \kappa_1^2)^2} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\kappa_+}{n_+^2(1 + \kappa_+^2)^2} + \frac{\kappa_-}{n_-^2(1 + \kappa_-^2)^2} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36.33)$$

1に對して κ^2 が無視されれば、簡単になつて

$$\frac{1}{n_1^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_+^2} + \frac{1}{n_-^2} \right), \quad \frac{\kappa_1}{n_1^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_+}{n_+^2} + \frac{\kappa_-}{n_-^2} \right) \dots\dots\dots (36.34)$$

なる式を得る。更にこの第二式にて n_+ , n_- , n_1 が實用上互に等しければ、

$$\kappa_1 = \frac{1}{2}(\kappa_+ + \kappa_-) \dots\dots\dots (36.35)$$

となる。(36.31)に従つて κ を磁場なしの線の吸収率とすれば、 $\kappa_2 = \kappa$ であるから、横逆ゼーマン効果の結果は次の如くなる。入射波は二つに別れ、一つは磁場に平行に振動してその吸収のスペクトル的分布は最初の吸収線の形を保ち、他はその磁場に垂直に振動して二つの吸収最大を持ち、これ等は最初の線に對して $\pm x_L$ だけずれる。従つて三吸収線が見られ、正規ゼーマン三重線が現れる。

その吸収線から多少離れた處では線的複屈折 (コットン・ムートン効果) が觀察される。弱い吸収の範圍に於ては n_{\pm} (36.23) をラーモア振動數で展開して

$$\left. \begin{aligned} n_{\pm}^2 &= 1 + \sum_i \frac{\rho_i}{\nu_i^2 - \nu^2} \mp \nu_L \sum_j \frac{2\nu\rho_j}{(\nu_j^2 - \nu^2)^2} + \nu_L^2 \sum_l \frac{4\nu^2\rho_l}{(\nu_l^2 - \nu^2)^3} \mp \dots \\ &= n_2^2 \mp \Sigma_1 + \Sigma_2 \mp \dots, \\ n_2^2 &= 1 + \sum_i \frac{\rho_i}{\nu_i^2 - \nu^2} = n^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(36.86)$$

と書ける。従つて (36.84) を使つて

$$n_1^2 = \frac{2n_+^2 n_-^2}{n_+^2 + n_-^2} = \frac{(n^2 + \Sigma_2)^2 - \Sigma_1^2}{n^2 + \Sigma_2}, \dots\dots\dots(36.87)$$

或は近似的に

$$\begin{aligned} n_1 - n_2 &= \frac{\Sigma_2 - \frac{1}{n^2}\Sigma_1^2}{2n} = \frac{1}{8n} H^2 \frac{e^2}{\pi^2 m^2 c^2} \left\{ \sum_i \frac{\nu^2 \rho_i}{(\nu_i^2 - \nu^2)^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n^2} \left(\sum_i \frac{\nu \rho_i}{(\nu_i^2 - \nu^2)^2} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots(36.88) \end{aligned}$$

となつて、コットン・ムートンの横複屈折がその振動数で如何なる状況になるか、近似的に (36.88) で定められる。吸収線近所でこの効果も強められるが、詳しい説明は略す。

ケル効果の分散と散亂の分散:—

この問題を解くためには全く一般的に變形テンソルの成分 A_{XY} を一つの分子固定體系に對して計算せねばならない (先づ場のない α_{XY} と次に外場の作用を受けてのとを)。外場なしの状態に於ける異方性分子に關して一つの共鳴子を考へ、それは分子固定座標系の三方向に異つた力で束縛された質量粒子から成り、そのポテンシャルエネルギーは次の如き形を持つて居るとする。

$$U = \frac{1}{2} (\alpha_X u_X^2 + \alpha_Y u_Y^2 + \alpha_Z u_Z^2) \dots\dots\dots(36.89)$$

この模型は三つの互に直角に振動する異つた振動数の線的振動子と同價値

で、かくの如き分子は振動数に無關係な主軸系を持つて居る。その異つた軸に異つた主要變形可能性 $\alpha_X, \alpha_Y, \alpha_Z$ が屬し、これ等の量は各々先に線的振動子の振動數函数として求められたものに等しい。これ等互に直角な振動の強さは古典的計算では互に等しい (e^2/m に) が、量子理論の概念を取つてそれ等の三振動は異つた強さ因子 f_X, f_Y, f_Z を持つとす可きである。従つてそれ等の振動數が等しいと假定出來ても f が異なるために異方性形態が生ずるのである。多少より一般的な分子模型は (その變形度の主軸系が振動數による) カップルされた多くの共鳴子の一體系を考へて得られ、その運動のエネルギー、ポテンシャルエネルギーは

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_k m_k \left(\frac{du_k}{dt} \right)^2, & U &= \frac{1}{2} \sum_{kl} \sum_{XY} \alpha_{XY}^{kl} u_X^k u_Y^l, \\ \alpha_{XY}^{kl} &= \alpha_{YX}^{lk} \end{aligned} \right\}$$

で與へられる。處が所謂正規座標を導入し得、

$$\sqrt{m_k} u_k = v_k, \quad \frac{\alpha_{XY}^{kl}}{\sqrt{m_k m_l}} = K_{XY}^{kl} \dots\dots\dots(36.40)$$

と置けば、直交變換

$$v_{kX} = \sum_j e_{kX}^{(j)} \xi_j, \quad \xi_j = \sum_k e_{kX}^{(j)} v_k$$

によつて

$$T = \frac{1}{2} \sum_j \left(\frac{d\xi_j}{dt} \right)^2, \quad U = \frac{1}{2} \sum_j \mu_j \xi_j^2 \dots\dots\dots(36.41)$$

なる形に書ける。こゝで $\mu_j = \omega_j^2$ は永年方程式 (secular equation)

$$|K_{XY}^{kl} - \mu \delta_{kl} \delta_{XY}| = 0 \dots\dots\dots(36.42)$$

の解であり、固有ベクトル $e_k^{(j)}$ は直交體系をなして

$$\sum_{k=1}^n e_k^{(j)} e_k^{(l)} = \delta_{jl}, \quad \sum_{j=1}^{3n} e_{kX}^{(j)} e_{lY}^{(j)} = \delta_{kl} \delta_{XY} \dots\dots\dots(36.43)$$

で、次の線的方程式が満足される。

$$\mu_j e_{kX}^{(j)} = \sum_l \sum_Y K_{XY}^{kl} e_{lY}^{(j)} \dots\dots\dots(36.44)$$

そこでかくの如き體系が光波に如何に關係し會ふかを檢べる。k 番目の粒子に R_k なる力が働くとその振動方程式は

$$m_k \frac{d^2 u_{kX}}{dt^2} + \sum_l \sum_Y a_{XY}^{kl} u_{lY} = R_{kX} \dots\dots\dots(36.45)$$

で、(36.40) を導入すれば、振動回数 $\omega = \sqrt{\mu}$ の振動に對し

$$\mu u_{kX} - \sum_l \sum_Y K_{XY}^{kl} u_{lY} = -\frac{1}{\sqrt{m_k}} R_{kX} \dots\dots\dots(36.46)$$

が成立つ。 $\frac{1}{\sqrt{m_k}} R_k$ の成分體系に 3n 次元空間に於ける上記直交變換と同じ變換を施して

$$K_j = \sum_k \frac{1}{\sqrt{m_k}} e_k^{(j)} R_k \dots\dots\dots(36.47)$$

と書け、運動の方程式 (36.45) は次の如くなる。

$$\mu \xi_j - \mu_j \xi_j = -K_j \dots\dots\dots(36.48)$$

この解は明かに

$$\xi_j = \frac{K_j}{\mu_j - \mu} \dots\dots\dots(36.49)$$

であつて、最初の變數にて書けば、

$$u_{kX} = \frac{1}{\sqrt{m_k}} \sum_j e_{kX}^{(j)} \frac{K_j}{\mu_j - \mu} \dots\dots\dots(36.50)$$

(36.47) を $\omega_j = \sqrt{\mu_j}$ と共に用ひて

$$\left. \begin{aligned} u_{kX} &= \sum_l \sum_Y A_{XY}^{kl} R_{lY}, \\ A_{XY}^{kl} &= \frac{1}{\sqrt{m_k m_l}} \sum_j \frac{e_{kX}^{(j)} e_{lY}^{(j)}}{\omega_j^2 - \omega^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36.51)$$

そこで原子の大きさに比して波長が大であると假定して、 $R_{kX} = e_k \mathcal{E}_X$ が成立ち、電氣能率を書けば

$$p_X = \sum_j \sum_Y \frac{\mathcal{E}_X^{(j)} \mathcal{E}_Y^{(j)}}{\omega_j^2 - \omega^2} \mathcal{E}_Y \dots\dots\dots(36.52)$$

こゝでベクトル $\mathcal{E}^{(j)}$ は

$$\mathcal{E}^{(j)} = \sum_k \frac{e_k}{\sqrt{m_k}} e_k^{(j)} \dots\dots\dots(36.53)$$

で與へられる。これは法化された j 番目の固有振動に對する電氣能率なる物理的意味を持つて居る。 $e_k^{(j)}$ に對する直交條件 (36.43) から

$$\sum_j \mathcal{E}_X^{(j)} \mathcal{E}_Y^{(j)} = \sum_{j,l} \frac{e_k e_l}{\sqrt{m_k m_l}} e_{kX}^{(j)} e_{lY}^{(j)} = \sum_k \frac{e_k^2}{m_k} \delta_{XY} \dots\dots\dots(36.54)$$

或は Z 個の凡ての振動する粒子が同じ電荷 e、同じ質量 m を持てば、

$$\sum_j \mathcal{E}_X^{(j)} \mathcal{E}_Y^{(j)} = Z \frac{e^2}{m} \delta_{XY} \dots\dots\dots(36.55)$$

を得る。

(36.52) は前章の基本式となつた

$$p_X = \sum_Y \alpha_{XY} \mathcal{E}_Y \dots\dots\dots(36.56)$$

なる形を持つて居て、こゝでの分極度テンソルは

$$\alpha_{XY} = \sum_j \frac{\mathcal{E}_X^{(j)} \mathcal{E}_Y^{(j)}}{\omega_j^2 - \omega^2} \dots\dots\dots(36.57)$$

なる一定の實數値を持つて居る。制振を考へれば ω^2 の代りに $\omega^2 - i\gamma\omega$ を入れれば良い。(36.57) と一般的分散理論に用ひた公式 (36.1) とを比較すれば、こゝで考へて居るカッパルされた質點系は多くの線的振動子と同價値で、j 番目の振動子は分極度テンソルの XY 成分に強さ因子 $f_{XY}^{(j)}$ を持つて關與し、それは

$$f_{XY}^{(j)} \frac{e^2}{m} = \mathcal{E}_X^{(j)} \mathcal{E}_Y^{(j)} \dots\dots\dots(36.58)$$

で與へられる。それ故 (36.55) に従へば、 $f^{(j)}$ に對する加法法則として次の如き量子論的 f-加法法則 (34.9) 類似の表現が得られる。

$$\sum_j f_{XY}^{(j)} = \delta_{XY} \dots\dots\dots(36.59)$$

自由廻轉性分子に對する平均分極度 α は

$$\alpha = \frac{1}{3}(\alpha_{XX} + \alpha_{YY} + \alpha_{ZZ}) = \frac{1}{3} \sum_j \frac{\mathcal{G}^{(j)2}}{\omega_j^2 - \omega^2} \dots\dots(36.60)$$

で、それに屬する f 値は

$$f^{(j)} = \frac{1}{3}(f_{XX}^{(j)} + f_{YY}^{(j)} + f_{ZZ}^{(j)}) = \frac{1}{3} \frac{m}{e^2} \mathcal{G}^{(j)2} \dots\dots\dots(36.61)$$

であるから、加法法則として

$$\sum_j f^{(j)} = \frac{1}{3} \frac{m}{e^2} \sum_j \mathcal{G}^{(j)2} = Z \dots\dots\dots(36.62)$$

を得る。従つて形式上量子論の結果と一致するが、その内容は大いに異つて居ることを注意せねばならない。例へば $Z=1$ にて古典共鳴子理論では唯一つの振動數、量子理論では無限に多くの異つた強さの振動數があるのである。

§ 29, § 30 にて述べた處は凡て (36.57) によつて振動數と關係して來るのである。ケル効果も光散亂も常數 b_1, b_2 で定められ、それ等は (29.62) (29.63) で振動數に無關係な變形の主軸系のある場合に與へられる。従つてこの兩量の振動數によるのは $\alpha_X - \alpha_Y, \alpha_Y - \alpha_Z, \alpha_Z - \alpha_X$ なる三つの量に於てである。こゝで述べた一般的模型ではそれ等は

$$\alpha_X - \alpha_Y = \sum_j \frac{\varphi_{XY}^{(j)}}{\omega_j^2 - \omega^2}, \quad \varphi_{XY}^{(j)} = \mathcal{G}_X^{(j)2} - \mathcal{G}_Y^{(j)2} \dots\dots(36.63)$$

等で與へられる。これ等三つの量の各に對して次の如き加法法則が成立つ。

$$\sum_j \varphi_{XY}^{(j)} = 0 \dots\dots\dots(36.64)$$

而して實用上振動數に關する狀況は全く屈折率の場合と同様である。

§ 80 にて説明した光の散亂に就いて一言すれば、散亂には (30.37) にて與へられる兩部分があつて、兩者とも $1/\lambda^4$ に比例する。原子及び等方性分子にてはレーレー散亂 Ω_0 だけが考へられ、(30.39) に従へばそれは $(n^2 - 1)^2$ なる量に比例する。即ちこの種の散亂の分散はこれ等で定められるが、透明範圍では $(n^2 - 1)^2$ による影響は $1/\lambda^4$ のに比して小であるに反し、一つの固有振動數に近づけば共鳴効果がきいて來て、散亂の撰擇的増大が起る。異方性分子に於てはこのレーレー散亂の他に (30.37) に與へた附加項がきいて來る。それは不變量 Ω により、光のデポラリゼーションを起す。§ 30 にては分子中に固定なデポラリゼーション主軸系があつて、主變形度 $\alpha_X, \alpha_Y, \alpha_Z$ が振動數によるのは大體等しい様な場合だけを論じた。従つて (30.41) が成立つたのである。如何なる條件の下にこの假定が三つの互に直角な線的振動子に於て正しいかと云ふに、それはその三振動數が等しくてたゞ強さ因子 f_x, f_y, f_z が異なる場合である。(30.41) が成立てば、(30.42) に従つて Ω は上記ケル効果常數 b_1 に比例し、 $\alpha_X - \alpha_Y, \alpha_Y - \alpha_Z, \alpha_Z - \alpha_X$ なる差のみによる。従つてその分散は (30.41) の $\sigma = \frac{n^2 - 1}{n^2 - 1}$ によつてのみ定まる。

液體, 瓦斯體の自然旋光能力の分散: -

§ 31 で論じた如く、旋光能力は分極度テンソルのみならずその幾何學的構造に據り、分子の化學構造論上主要な役割を演ずる。(31.32) で與へた旋光パラメーター

$$g = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{3} \sum_{kl} a^{kl} (r_k - r_l) e_k e_l \dots\dots\dots(36.65)$$

から出發して論ずる。 a^{kl} はテンソル A_{XY}^{kl} の非對稱成分に屬して居て、それは (36.51) で與へられるから、

$$-a_{\frac{kl}{2}} = \frac{1}{2}(A_{XY}^{kl} - A_{YX}^{kl}) = \frac{1}{\sqrt{m_k m_l}} \frac{1}{2} \sum_j \frac{e_{kX}^{(j)} e_{lY}^{(j)} - e_{lY}^{(j)} e_{kX}^{(j)}}{\omega_j^2 - \omega^2},$$

或は

$$a^{kl} = \frac{-1}{\sqrt{m_k m_l}} \frac{1}{2} \sum_j \frac{e_k^{(j)} \times e_l^{(j)}}{\omega_j^2 - \omega^2} \dots\dots\dots(36.66)$$

である。これを (36.65) へ入れれば、

$$g = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{3} \sum_j \frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2} \frac{1}{2} \sum_{kl} \frac{e_k e_l}{\sqrt{m_k m_l}} (r_k - r_l) (e_l^{(j)} \times e_k^{(j)}) \dots(36.67)$$

を得る。然るに

$$\sum_{kl} \frac{e_k e_l}{\sqrt{m_k m_l}} r_k (e_l^{(j)} \times e_k^{(j)}) = \sum_{k,l} \frac{e_k e_l}{\sqrt{m_k m_l}} e_l^{(j)} (e_k^{(j)} \times r_k)$$

であるから、(36.53) で定義された $\mathcal{G}^{(j)}$ と

$$\mathcal{R}^{(j)} = \sum_k \frac{e_k}{\sqrt{m_k}} (e_k^{(j)} \times r_k) \dots\dots\dots(36.68)$$

とを導入すれば、(36.66) から

$$g = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{3} \sum_j \frac{\mathcal{G}^{(j)} \mathcal{R}^{(j)}}{\omega_j^2 - \omega^2} \dots\dots\dots(36.69)$$

が得られる。これは平均分極度に對する表現 (36.60) に類似であるが、その相違はこの分數の分子の和にて、即ち

$$\sum_j \mathcal{G}^{(j)} \mathcal{R}^{(j)} = \sum_{kl} \frac{e_k e_l}{\sqrt{m_k m_l}} r_k \sum_j e_l^{(j)} \times e_k^{(j)} \dots\dots\dots(36.70)$$

であるが、右邊は (36.43) に従つて零であるから、

$$\sum_j \mathcal{G}^{(j)} \mathcal{R}^{(j)} = 0 \dots\dots\dots(36.71)$$

となるに反し、(36.62) には

$$\frac{1}{3} \sum_j \mathcal{G}^{(j)2} = Z \frac{e^2}{m}$$

であつた。個々の振動數が屈折率に關與する持前が同じ方向に加へられるならば、旋光に於ては各々逆の方向になつて、この符號が交互になるために吸収條線から隔つた處ではこの圓複屈折は非常に小になる (屈折率値に

比して)。

吸収線から相當隔つた所に於ける旋光能力の狀況は分散理論に於けると同様に、 λ と $1/\lambda$ の冪級數に展開される。(36.69) に従つて g は $\frac{1}{\lambda} = \frac{n}{\lambda_0}$ に比例し、 χ は次の表現を取る。

$$\chi = \frac{1}{\lambda_0^2} \left\{ D_0 + \frac{D_1}{\lambda_0^2} + \dots\dots + E_1 \lambda_0^2 + E_2 \lambda_0^4 + \dots\dots \right\} \dots(36.72)$$

第一項だけを取れば所謂ビオ (Biot) の公式である。然し吸収線の含まれて居る様な範圍にては (36.69) を用ひて論ぜねばならない。

(36.69) 式を今少し了解し易い表現にして見やう。 $\mathcal{R}^{(j)}$ には固有振動振幅 $e_k^{(j)}$ のみならずその共鳴子の位置ベクトル r_k が入つて居る。分子中の共鳴子の絶對的位置には關係しない様な最も簡単な模型として二つの線的共鳴子が d なる距離に置かれ、その兩者を結ぶ直線と相互に直角にその兩振動子は振動する様な體系を考へる。これを振動子對と稱し、固有振動の法化を 1 に定めれば、與へられた $\mathcal{R}^{(j)}$ の $\mathcal{G}^{(j)}$ の大きにて d は全く定まつて了ふ。 d はこの振動子對の槓杆腕とも云つて、原子の大き位の値を持つて居ると考へられる。

Z をこの一對の軸、 X を第一振動子の振動方向、 Y を第二振動子の振動方向として、固有ベクトルを

$$\left. \begin{aligned} e_1^{(1)} &= (\cos \alpha, 0, 0), & e_2^{(1)} &= (0, \sin \alpha, 0), \\ e_2^{(2)} &= (-\sin \alpha, 0, 0), & e_1^{(2)} &= (0, \cos \alpha, 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots(36.73)$$

とすれば、(36.53) 及び (36.68) に従つて

$$\mathcal{G}^{(1)} = \left(\frac{e_1}{\sqrt{m_1}} \cos \alpha, \frac{e_2}{\sqrt{m_2}} \sin \alpha, 0 \right), \quad \mathcal{G}^{(2)} = \left(-\frac{e_1}{\sqrt{m_1}} \sin \alpha, \frac{e_2}{\sqrt{m_2}} \cos \alpha, 0 \right),$$

$$\mathcal{R}^{(1)} = \left(d \frac{e_2}{\sqrt{m_2}} \sin \alpha, 0, 0 \right), \quad \mathcal{R}^{(2)} = \left(d \frac{e_2}{\sqrt{m_2}} \cos \alpha, 0, 0 \right)$$

更に

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{G}^{(1)2} &= \frac{e_1^2}{m_1} \cos^2 \alpha + \frac{e_2^2}{m_2} \sin^2 \alpha, & \mathcal{G}^{(2)2} &= \frac{e_1^2}{m_1} \sin^2 \alpha + \frac{e_2^2}{m_2} \cos^2 \alpha \\ \mathcal{G}^{(1)} \mathcal{R}^{(1)} &= d \frac{e_1 e_2}{\sqrt{m_1 m_2}} \sin \alpha \cos \alpha, & \mathcal{G}^{(2)} \mathcal{R}^{(2)} &= -d \frac{e_1 e_2}{\sqrt{m_1 m_2}} \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots(36.74)$$

を得るから、變形度は (36.60) から

$$\alpha = \frac{\frac{1}{3} \mathcal{G}^{(1)2}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\frac{1}{3} \mathcal{G}^{(2)2}}{\omega_2^2 - \omega^2} \dots\dots(36.75)$$

旋光度パラメーターは (36.69) から

$$g = \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ \frac{\frac{1}{3} \mathcal{G}^{(1)} \mathcal{R}^{(1)}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\frac{1}{3} \mathcal{G}^{(2)} \mathcal{R}^{(2)}}{\omega_2^2 - \omega^2} \right\} \dots\dots(36.76)$$

であつて、(36.74) を用ひて d と α の函数として表される。 g は $d \sin \alpha \cos \alpha$ に比例することになる。従つて旋光性存在の條件は：(1) 光の波長に對して零でない長さの振動子對の積杆があること、(2) その一對の兩振動子がカップルされて居る可きこと、(3) それ等は異つた振動数を持つて居ること等である。それ等がカップルされて居なければ $\alpha = 0$ 又は $\frac{\pi}{2}$ で (36.74), (36.76) によつて $g = 0$ となり、更に $\omega_1 = \omega_2$ ならば (36.76) より直ちに $g = 0$ となる。

以上の如く振動子對を考へても二原子分子で旋光性が可能とは行かない。何となればかくの如き軸對稱は原子核を結ぶ直線の周りにであつて、それに垂直な方向 x, y が特殊なものであるとはならないからである。三原子分子では三原子を通る平面が對稱面となるから旋光性を持ち得ない。四原子或はそれ以上の原子よりなる分子にて、初てその四原子の配置で必要な非對稱性が一つの振動子對に配せられるのである(ファントホッフ (Van't Hoff), ルベル (Le Bel) の概念に一致して居る)。

簡単なため屈折率 n は 1 と殆んど異はないとし、

$$n^2 - 1 = 4\pi N \alpha$$

と置き、左、右圓偏光波に對し各特別の變形變數 α_+, α_- を導入して

$$n_{+}^2 - 1 = 4\pi N \alpha_+, \quad n_{-}^2 - 1 = 4\pi N \alpha_- \dots\dots(36.77)$$

とする。(31.49) に従つて

$$n_{+}^2 = n^2 - 2\gamma, \quad n_{-}^2 = n^2 + 2\gamma \dots\dots(36.78)$$

で、こゝで

$$\gamma = 4\pi N g \dots\dots(36.79)$$

であるから、

$$\alpha_+ = \alpha - \frac{2\gamma}{4\pi N} = \alpha - 2g, \quad \alpha_- = \alpha + \frac{2\gamma}{4\pi N} = \alpha + 2g \dots(36.80)$$

を得る。強さ因子を導入して

$$\alpha_+ = \frac{e^2}{m} \left(\frac{f_1^+}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{f_2^+}{\omega_2^2 - \omega^2} \right), \quad \alpha_- = \frac{e^2}{m} \left(\frac{f_1^-}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{f_2^-}{\omega_2^2 - \omega^2} \right)$$

と書けば、

$$\dots\dots(36.81)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{3} \mathcal{G}^{(1)2} \mp \frac{4\pi}{3\lambda} \mathcal{G}^{(1)} \mathcal{R}^{(1)} &= \frac{e^2}{m} \left\{ \frac{f_1^+}{f_1^-} \right\} \\ \frac{1}{3} \mathcal{G}^{(2)2} \mp \frac{4\pi}{3\lambda} \mathcal{G}^{(2)} \mathcal{R}^{(2)} &= \frac{e^2}{m} \left\{ \frac{f_2^+}{f_2^-} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(36.82)$$

となる。兩振動子のカップリングなしの強さ因子 f_1^0, f_2^0 を考へれば、

$$\frac{1}{3} \frac{e_1^2}{m_1} = \frac{e^2}{m} f_1^0, \quad \frac{1}{3} \frac{e_2^2}{m_2} = \frac{e^2}{m} f_2^0$$

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} f_1^+ \} &= f_1^0 \cos^2 \alpha + f_2^0 \sin^2 \alpha \mp \frac{4\pi}{\lambda} d \sqrt{f_1^0 f_2^0} \sin \alpha \cos \alpha, \\ f_1^- \} & \end{aligned} \right\} \\ \left. \begin{aligned} f_2^+ \} &= f_2^0 \cos^2 \alpha + f_1^0 \sin^2 \alpha \pm \frac{4\pi}{\lambda} d \sqrt{f_1^0 f_2^0} \sin \alpha \cos \alpha \\ f_2^- \} & \end{aligned} \right\} \dots\dots(36.83)$$

を得る。(35.31) にて得た様に f なる量は考へて居るスペクトル線の無限に薄い層内の總吸收と直接關係して、制振常數には無關係に 1 なる層の厚さについての吸收に對し

$$A = \frac{\pi}{c} \frac{e^2}{m} N \frac{f}{n} \dots\dots\dots(36.84)$$

が成立つ。左, 右圓偏光波に各吸収條線に對して異つた二つの f 値が屬するから, 左右偏光性の光は異なる狀況に吸収され特に總吸収が異つて來る。この現象を圓偏光二色性と云ふ。實驗的にコットン (Cotton) が發見したので, コットン効果とも云ふ。この効果の尺度として

$$\frac{A_1^- - A_1^+}{A_1} = \Gamma_1 \dots\dots\dots(36.85)$$

及び第二の條線に對してこれに對應した Γ_2 を取る。 A_1 は平均値で

$$A_1 = \frac{A_1^+ + A_1^-}{2} \dots\dots\dots(36.86)$$

である。(36.84) を考へて直ちに

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{f_1^- - f_1^+}{f_1}, & f_1 &= \frac{f_1^+ + f_1^-}{2}, \\ \Gamma_2 &= \frac{f_2^- - f_2^+}{f_2}, & f_2 &= \frac{f_2^+ + f_2^-}{2}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36.87)$$

となるから, (36.88) によつてこの兩量は次の表現に書ける。

$$\Gamma_1 = \Gamma(\alpha), \quad \Gamma_2 = \Gamma\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \dots\dots\dots(36.88)$$

こゝで
$$\Gamma(\alpha) = \frac{8\pi}{\lambda} d \frac{\sqrt{f_1^0 f_2^0} \sin \alpha \cos \alpha}{f_1^0 \cos^2 \alpha + f_2^0 \sin^2 \alpha} \dots\dots\dots(36.89)$$

この $\Gamma(\alpha)$ を振動子對の異方性因子と稱する。

處が旋光能力 (31.51) は (36.76) と f_1^0, f_2^0 の定義とから,

$$\chi = 8\pi^2 N \frac{g}{n\lambda_0} = 16\pi^3 N \frac{e^2}{m} \frac{1}{\lambda_0^2} \left\{ \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right\} \cdot d \sqrt{f_1^0 f_2^0} \sin \alpha \cos \alpha \dots\dots\dots(36.90)$$

で與へられる。これを兩固有振動の部分に分けて $\chi = \chi_1 + \chi_2$ とする。

或は (31.51) に與へた複屈折を取れば

$$(n_+ - n_-)_1 = \frac{\lambda_0}{\pi} \chi_1, \quad (n_- - n_+)_2 = \frac{\lambda_0}{\pi} \chi_2 \dots\dots\dots(36.91)$$

これ等を $n^2 - 1 = 4\pi N \alpha = 4\pi N \frac{\alpha_+ + \alpha_-}{2}$ の 1; 2 に對應した値即ち (36.80) に従つた

$$\begin{aligned} (n^2 - 1)_1 &= 4\pi N \left(\frac{\alpha_+ + \alpha_-}{2} \right)_1 = 4\pi N \frac{e^2}{m} \frac{f_1^+ + f_1^-}{2(\omega_1^2 - \omega^2)} \\ &= 4\pi N \frac{e^2}{m} \frac{f_1^0 \cos^2 \alpha + f_2^0 \sin^2 \alpha}{\omega_1^2 - \omega^2} \dots\dots\dots(36.92) \end{aligned}$$

及び $(n^2 - 1)_2$ で除すれば, (36.89) の助けをかりて, λ と λ_0 の差を無視する時

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{n_- - n_+}{n^2 - 1} \right)_1 &= \frac{\lambda_0 \chi_1}{\pi(n^2 - 1)_1} = \frac{1}{2} \Gamma(\alpha), \\ \left(\frac{n_- - n_+}{n^2 - 1} \right)_2 &= \frac{\lambda_0 \chi_2}{\pi(n^2 - 1)_2} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36.93)$$

なる表現を得る。

そこで

$$\frac{\sqrt{f_1^0 f_2^0}}{f_1^0 + f_2^0} = \bar{f}, \quad \frac{f_1^0 - f_2^0}{f_1^0 + f_2^0} = \delta \dots\dots\dots(36.94)$$

なる定義で與へられる \bar{f}, δ を導入して (36.89) を書けば, 異方性因子は

$$\Gamma(\alpha) = \frac{8\pi d}{\lambda} \bar{f} \frac{\sin 2\alpha}{1 + \delta \cos 2\alpha} \dots\dots\dots(36.95)$$

なる表現を取る。一定の f_1^0, f_2^0 を持つ振動子對が種々なるカップリング即ち異なる α 値にて $\Gamma(\alpha)$ が極大値を取る α の値及び $(\Gamma(\alpha))_{\max}$ 値は如何と云ふに, (36.95) より直ちに判る如く, それ等は

$$\cos 2\alpha = -\delta, \dots\dots\dots(36.96)$$

$$(\Gamma(\alpha))_{\max} = \frac{8\pi d}{\lambda} \bar{f} \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}} \dots\dots\dots(36.97)$$

である。他の吸収條線に對しての尺度 $\Gamma\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ は

$$\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2\alpha = -\delta \dots\dots\dots(36.98)$$

で極大値を取り、その値は兩條線に對して等しい。興味あることには、このカップルされない兩振動子の強さが等しい場合 ($f_1^0 = f_2^0$) にも、又一方が他方より非常に強い場合 ($f_1^0 \gg f_2^0$) にも簡単に判る如く

$$(\Gamma(\alpha))_{\max} = \frac{4\pi d}{\lambda} \dots\dots\dots(36.99)$$

となる。この兩極限の場合にカップリングを特殊に擇んで得られる異方性因子の極大値が等しい値を取るのである。この事實は旋光性有機化合物にて觀察された量的結果を了解するに實際役立つ居る。クーン(W. Kuhn)等の研究によれば、有機物の溶液にて可視光線範圍から紫の側へ行くと或所に弱い吸収があるが、これは紫外線近所に於ける非常に弱い強さ (f_2^0) の帶狀スペクトルに對應し、紫外線へ更に進むと非常に強い吸収が起るから、これは強い帶狀スペクトル (f_1^0) に歸す可きである。これに相應した旋光能力、二色性が實驗的に認められて居る。理論的には吸収から得られる f^0 、旋光能力から得られる $\Gamma(\alpha)$ 、吸収に役立つ電子の數から得られる $f_1^0 + f_2^0$ 等に就いて論ぜられる。又これ等から $d = \frac{\Gamma\lambda}{4\pi}$ なる旋光能力の尺度になる楕円軸の値が實驗的に定められる。多くの化合物に就いて調べられた結果可視光線に近い紫外線部の吸収條線が旋光能力に役立つことが判つた。

雙極子液體の分散：一

マックスウェルの基本關係 $n^2 = \epsilon$ に就いては第一章 §4 にて既に記述した如く、光學的電媒常數と靜的電媒常數との相違は今まで論じた様な電子又はイオンの振動に據るのみならず、剛體としての分子の廻轉に起因する。特に甚しい例として水の場合に室温にて靜的電媒常數値は約 81 であるに、可視光線範圍に於ける屈折率の二乗は 1.8 で、この様な大なる相違は今ま

での議論では説明出来ない。波長が長くなつて 1 米位になれば (短いヘルツ波) 兩者は大約等しくなる。かくの如き状況を説明するには分子の廻轉による異常分散を考へねばならない。剛體分子より形成された物質を考へ、各分子は固定雙極子を持ち、擾亂されない状態では空間に於てその凡ての雙極子の方向は均等に分布され、かくの如き體系に光波動の電氣交流場が作用すれば、それ等の雙極子分子は廻轉能率 (偶力) を受け、それによつて凡ての方向に均等な分布が擾亂されて外場に平行な單位體積の平均電氣能率を生ずる様になる。然らば如何なる振動數にて屈折率に著しくかくの如き配置が影響を及ぼすか問題になる。

先づ簡單のため熱運動を無視して擾亂されない分子は z 方向に θ_0 なる角をなして靜止して居るとする。その z 軸に平行に振動し、強さ E なる光場の作用をうけてその雙極子は $\theta_1 = \theta - \theta_0$ だけその靜止位置から變位したとし、その場の作用は小さいから $|\theta_1| \ll \theta_0$ と考へられるとする。その雙極子能率と z 軸に直角な軸の周りの分子の慣性能率を A とすれば、この強制廻轉振動の運動の方程式は

$$A \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -E p_0 \sin\theta_0 \dots\dots\dots(36.100)$$

となる。負符號は場の廻轉能率が角 θ を小にする様に働くことを意味する。そこで $E = E_0 e^{i\omega t}$ 、而して $\theta_1 = \xi e^{i\omega t}$ とすれば容易に

$$\xi = \frac{p_0 \sin\theta_0}{A\omega^2} E_0 \dots\dots\dots(36.101)$$

を得る。 z 方向に於ける電氣能率の成分は

$$\begin{aligned} p &= p_0 \cos\theta = p_0 \cos(\theta_0 + \theta_1) \\ &= p_0 \cos\theta_0 - p_0 \sin\theta_0 \cdot \theta_1 + \dots\dots \\ &= p_0 \cos\theta_0 - \frac{p_0^2 \sin^2\theta_0}{A\omega^2} E + \dots\dots \end{aligned}$$

となる。凡ての方向の等確率を假定するから、

$$\overline{\cos \theta_0} = 0, \quad \overline{\sin^2 \theta_0} = \frac{2}{3}$$

であつて、 p の平均値は

$$\bar{p} = -\frac{2p_0^2}{3A\omega^2} E = \alpha e^{i\pi} E, \quad \alpha = \frac{2p_0^2}{2A\omega^2} \dots \dots (36 \cdot 102)$$

で與へられる。 $e^{i\pi} = -1$ なる因子は自由粒子が常に逆の位相を持つて週期的力に續いて行くことを示して居る。

屈折率の尺度になる $\frac{4\pi}{3} N\alpha$ は次の如く書ける。

$$\frac{4\pi}{3} N\alpha = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \omega_0 = p_0 \sqrt{\frac{8\pi N}{9A}} \dots \dots (36 \cdot 103)$$

従つて廻轉作用の影響は ω が ω_0 位になるスペクトル範囲にて著しくなる。 p_0 と A の大體の大きさは、二原子分子に對して $p_0 = er$, $A = mr^2$ (e は有効電荷, m は有効質量, r は原子間の距離) であるから, $e \approx 5 \cdot 10^{-10}$ e.s.u., $r \approx 10^{-8}$ cm, $m_{\text{水素原子}} \approx 10^{-24}$ g であつて, $p_0 \approx 5 \cdot 10^{-18}$, $A \approx 10^{-40}$ である (p_0 と A は瓦斯體に於ける電媒常数が温度による状況及び分子スペクトル分析より正確に定められ, 水に對して $p_0 = 1.84 \cdot 10^{-18}$)。水に對し 0°C に於ける cm^3 中の分子數 $N = \frac{N}{18} \approx 3 \cdot 10^{22}$ を取つて, $\omega_0 \approx 3 \cdot 10^{13} \text{ sec}^{-1}$ となるから, それは $\lambda_0 = \frac{4\pi c}{\omega_0} \approx 130 \mu$ なる波長に相當する。この波長の處で廻轉振動の影響が起り初めることが判る。

然し實際には上記の如く廻轉振動の振幅は決して ω_0 の近所でも小さいとはならず, 然も分子の熱運動のために擾亂されるから, もつと正確な理論が必要である。衝突による運動擾亂の頻度は瓦斯體に於て瓦斯運動理論よりの衝突回數によつて定められる。二衝突間の平均時間は

$$\tau_s = \frac{l}{v} \dots \dots (36 \cdot 104)$$

である。 l は平均自由行路, v は平均速度を意味する。それ等は (33·37), (33·38) で與へられるから、

$$\tau_s = \frac{1}{4N\sigma^2 p} \sqrt{\frac{\mu RT}{\pi}} \dots \dots (36 \cdot 105)$$

となる。 $p = 1$ 氣壓, $T = 300^\circ$ で水 ($\mu = 18$, $\sigma = 10^{-8}$ cm) に對して $\tau_s = 10^{-9}$ sec である。従つて上記の振動時間 $\frac{2\pi}{\omega_0} \approx 10^{-13}$ sec に比して衝突時間は非常に長いので, 廻轉振動は實用上熱運動では擾亂されないと考へられる。それ故水蒸氣の場合には光學的から靜的電媒常數への飛躍は大體上記の機構で説明出來, それは 100μ 位の波長の處で起る。然し液體としての水或は類似の液體にて状況は全く異つて來る。衝突時間は密度に逆比例して増すから, 蒸氣よりは 1000 倍以上大なる密度の液體では, 衝突時間は廻轉振動時間と比較される位になる。然しこの場合には平均自由行路等を言ひ得ず, 瓦斯理論でなしにデバイ (Debye) によつて論ぜられた他の統計理論を應用せねばならない。熱運動の影響はこの場合に所謂緩和時間 τ を以て論ぜられる。外場の振動時間が τ 位になると熱運動の分散現象に及ぼす影響が著しくなることが豫期される。この問題はブラウン (Brown) 運動の理論に出て來る統計力學の問題であつて, アインシュタイン (Einstein) が初めて與へた方法をこゝでは述べる。

x 軸上に動きコントロール出來ない影響を受ける一粒子を考へる時, t 時に於てその粒子の位置は何處かの問題は判らないが, t 時に於てその粒子が x と $x + dx$ の間にある確率 ($W(x, t)dx$) は意味を持つ。各 t に對してそれは

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x, t) dx = 1 \dots \dots (36 \cdot 106)$$

の如く法化されて居る。コントロール出來ない位置變化も亦確率函數で記述され, 小時間 τ_0 を定めてその粒子が τ_0 内にて x 位置から ξ だけずれ

る。即ち $x + \xi$ と $x + \xi + d\xi$ の間にある確率を $\varphi(x, \xi) d\xi$ として、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \xi) d\xi = 1 \dots \dots \dots (36 \cdot 107)$$

の如く法化されて居るとする。而して $\varphi(x, \xi)$ は始原點のすぐ近所だけ即ち $|\xi|$ の小なる値に對してのみ相當の値を持つて、左右對稱でない誤差分布の如き狀況を示すとする。

そこで非常に多くの (N 個) 互に獨立な粒子がその短時間内に互つて散亂し觀測されると考へ、 τ_0 の間に dx 内にある粒子數の變化は $\tau_0 N \frac{\partial W}{\partial t} dx$ で與へられる。 τ_0 を相當に長く取れば、最初に dx 内にあつた粒子は散らばり、他方 $x - \xi$ の處の $d\xi$ 内にあつた最初の粒子 $NW(x - \xi, t) d\xi$ 個の一部分なる $NW(x - \xi, t) \varphi(x - \xi, \xi) d\xi dx$ 個が dx の方へ移る。従つて共通因子 Ndx を除いて、 $W(x, t)$ を定める方程式として次の式が成立つ。

$$\tau_0 \frac{\partial W}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} W(x - \xi, t) \varphi(x - \xi, \xi) d\xi - W(x, t) \dots (36 \cdot 108)$$

そこでこの變位確率は狭い誤差函數の如き形を取るとして、この積分内をテイラー (Taylor) 級數に展開出來、

$$W(x - \xi) \varphi(x - \xi, \xi) = W(x) \varphi(x, \xi) - \xi \frac{\partial}{\partial x} \{W(x) \varphi(x, \xi)\} + \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{W(x) \varphi(x, \xi)\} \dots$$

と書けるから、(36·108) は次の表現を取る。

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{\xi}}{\tau_0} W \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\bar{\xi}^2}{\tau_0} W \right), \dots \dots (36 \cdot 109)$$

こゝで

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi \varphi(x, \xi) d\xi = \bar{\xi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \varphi(x, \xi) d\xi = \bar{\xi}^2 \dots \dots (36 \cdot 110)$$

(36·109) 式は x 軸に沿うた滲出現象の方程式である。

外よりの擾亂作用が働く時、それを二つに分けて、連続的に働く外力と統計的法則による衝突とを考へ、前者は τ_0 間に s だけ轉移を起させ、後者は平均で左右側に於て對稱的なる故に $\bar{\xi}$ にはきいて來ない。不規則な衝突の平均變位の二乗は統計現象に従つて s^2 の如き量でなく、それは場所にはよらないで、

$$\frac{\bar{\xi}^2}{2\tau_0} = D \dots \dots \dots (36 \cdot 111)$$

と置く。D を滲出常數と稱する。外力による變位 s を計算する際、凡ての不規則な擾亂の和を摩擦力の如く考へそれは相當強いため慣性力が無視される程であるとすれば、

$$\frac{ds}{dt} = BK \dots \dots \dots (36 \cdot 112)$$

の成立つことが判る。K は外力で、B は一定力 1 の下にその粒子が持つ速度を意味する常數である。小なる τ_0 に對しては

$$\frac{\bar{\xi}}{\tau_0} = \frac{s}{\tau_0} = BK \dots \dots \dots (36 \cdot 113)$$

と取れる。従つて (36·111), (36·113) を (36·109) に入れて運動の方程式として次の表現を得る。

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (BKW) + D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \dots \dots \dots (36 \cdot 114)$$

以上の如き一次元の考へを空間にて動き得る粒子に一般化するのであるが、その粒子にはベクトルの力 \mathbf{R} と不規則な衝突が作用するのであつて、その衝突は空間の三方向にて互に無關係で、平均にて等しい強さであるとすれば、

$$\bar{\xi}^2 = \bar{\eta}^2 = \bar{\zeta}^2 = 2\tau_0 D, \quad \bar{\eta\xi} = \bar{\zeta\xi} = \bar{\xi\eta} = 0 \dots \dots \dots (36 \cdot 115)$$

と出來、(36·114) に相當した式として、 $W(x, y, z; t)$ に對して次の式が得られる。

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\text{div}(BW \cdot \mathcal{R}) + D \cdot \Delta W = \text{div}\{-BW \cdot \mathcal{R} + D \text{grad} W\} \dots \dots \dots (36.116)$$

これを物理的に解釋すれば、 $\mathcal{Q} = N\{BW \cdot \mathcal{R} - D \text{grad} W\}$ は流密度即ちベクトル \mathcal{Q} の方向に直角な單位表面を正なる方向に通過する粒子數を意味する。

かくの如き概念より一點の周りに廻轉する雙極子を空間にて滲出する粒子の代りに考へる場合に移れる。この場合その雙極子は外より偶力及び不規則な衝突をうけるのである。極座標 r, θ, φ を用ひて、 r による微分は零で、 r に對して固定値 r_0 を取る。更に外力 \mathcal{R} は極軸 (z 軸) の周りに對稱的であると、 φ には無關係な解 W を求めることに限るとする。雙極子端に働く力の成分 \mathcal{R}_θ の代りに雙極子軸と z 軸に垂直な方向の周りの偶力

$$r_0 \mathcal{R}_\theta = L \dots \dots \dots (36.117)$$

を導入し、線的運動に關した常數 B, D の代りに廻轉に關した量

$$\frac{B}{r_0^2} = \beta, \quad \frac{D}{r_0^2} = \delta \dots \dots \dots (36.118)$$

を定義して、(36.116) より $W(\theta, t)$ に對する微分方程式として次の表現が成立つ。

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \sin \theta \left(-\beta L W + \delta \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \right\} \dots \dots \dots (36.119)$$

(36.100) に於けると同様にその偶力 L に對して

$$L = -E p_0 \sin \theta \dots \dots \dots (36.120)$$

を取り、統計的平衡にある場合を考へて、 $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$ 或は流密度が零でなければならぬから、

$$\delta E p_0 \sin \theta \cdot W + \delta \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0 \dots \dots \dots (36.121)$$

が成立つ。この式の解は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} W &= W_0 e^{\frac{\beta}{\delta} \cdot E p_0 \cos \theta} = W_0 e^{-\frac{\beta U}{\delta}}, \\ U &= -E p_0 \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (36.122)$$

U は θ 位置に於ける雙極子のエネルギーである。この式はボルツマンの分布方程式 $W = W_0 e^{-\frac{U}{kT}}$ と同形であつて、この兩式を比較することによつて、

$$\beta kT = \delta = \frac{(\Delta \theta)^2}{2 \tau_0} \dots \dots \dots (36.123)$$

なる有名な平均變位二乗に對するアインシュタインの公式が得られる。この問題は別として、こゝでは緩和時間に興味があるので、(36.123) で δ を置換えた $W(\theta, t)$ に對する微分方程式

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\beta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ kT \sin \theta \frac{\partial W}{\partial \theta} + E p_0 \sin^2 \theta \cdot W \right\} \dots \dots \dots (36.124)$$

にて $E = 0$ と置いて、その一定な場の遮断に於けるこの無秩序な状態の回復に相當した解を求めれば、始原條件 ($t = 0$)

$$W(\theta, 0) = W_0 e^{\frac{E_0 p_0}{kT} \cos \theta} = W_0 \left(1 + \frac{E_0 p_0}{kT} \cos \theta + \dots \right) \dots \dots \dots (36.125)$$

の下に、

$$W = W_0 \left(1 + \frac{E_0 p_0}{kT} \psi(t) \cos \theta \right) \dots \dots \dots (36.126)$$

となつて、この $\psi(t)$ は

$$\frac{d\psi}{dt} = -2\beta kT \psi \dots \dots \dots (36.127)$$

を満足し、

$$\psi(t) = e^{-2\beta kT t} = e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{1}{2\beta kT} \dots \dots \dots (36.128)$$

なる表現で與へられることが判る。この τ は求むる緩和時間である。即ち

(36.125) で與へられる最初の異方的雙極子分布が均等な $W = W_0$ に移る速さを定める量である。この τ は氣體に對しては容易に了解し得る量であるが、液體に對してはアインシュタインにならつて次の如く考へればよい。半徑 a なる巨視的球が内部摩擦 η を持つ液體中に均等に廻轉すれば、流體力學にて計算される様に角速度は偶力 L と β との積で與へられ $\frac{d\varphi}{dt} = \beta L$, ストークス (Stokes) によればこの β は $\beta = \frac{1}{8\pi\eta a^3}$ で表される。これを個々の分子に應用して

$$\tau = \frac{4\pi\eta a^3}{kT} \dots\dots\dots(36.129)$$

を得る。 a は分子の半徑、水にて室溫の場合 $\eta = 0.01$, $a = 2 \cdot 10^{-8}$ cm, 従つて $\tau = 2.4 \cdot 10^{-11}$ sec 即ち約 1 cm の波長に相當する。 a, η は物質により、 η は溫度によるから、異常分散が起る臨界波長は短いヘルツ波の範圍に互つて擴つて居ることが判る。

(36.124) 中 β の代りに τ を (36.128) に従つて用ひ、 E の代りに密度の大なる媒質中の個々の分子に働く E' (平均場の強さ E とは異なる) を入れて次の式を得る。

$$2\tau \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \sin\theta \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{E' p_0}{kT} \sin^2\theta \cdot W \right\} \dots\dots(36.130)$$

そこで週期的光波 $E' = E_0' e^{i\omega t}$ の場合を考へ、

$$W = W_0 \left(1 + C \frac{E_0' p_0}{kT} e^{i\omega t} \cos\theta \right) \dots\dots\dots(36.131)$$

と置いて (36.130) を解けば、 E_0' の一次の項より高次の項を無視して

$$C = \frac{1}{1 + i\omega\tau} \dots\dots\dots(36.132)$$

を得る。それ故分布函數 W は

$$W = W_0 \left(1 + \frac{1}{1 + i\omega\tau} \frac{E' p_0}{kT} \cos\theta \right) \dots\dots\dots(36.133)$$

で與へられる。 $\omega\tau = 0$ ならばこの表現はボルツマンの分布の近似的式 (36.125) になり、 $\omega\tau$ が非常に大になれば W は一定になることが判る。一つの極限の場合から他へ遷移するのは $\omega\tau \approx 1$ なる振動數の所である。

この方向の分子の平均電氣能率は (36.133) により

$$\bar{p} = \frac{1}{W_0} \int_0^\pi p_0 \cos\theta \cdot W \cdot \sin\theta d\theta = \frac{p_0^2}{3kT} \frac{E'}{1 + i\omega\tau} \dots\dots(36.134)$$

となる。従つて方向作用によつて起る分極度の部分は

$$\alpha_1 = \frac{p_0^2}{3kT} \frac{1}{1 + i\omega\tau} \dots\dots\dots(36.135)$$

で與へられ、複素數であるから、分散のみならず吸収も現れる。 α のこの部分に場によつて直接起る普通の轉位の部分 α_0 を加えて、ローレンツ・ローレンツの法則が成立つとしてモル屈折 (28.16) は

$$P = \frac{\mu}{\rho} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} N \alpha = \frac{4\pi}{3} N (\alpha_0 + \alpha_1) = \frac{4\pi}{3} N \left(\alpha_0 + \frac{p_0^2}{3kT} \frac{1}{1 + i\omega\tau} \right) \dots\dots(36.136)$$

と書ける。こゝで ϵ は複素電媒常數を意味し

$$\epsilon = n^2 = n^2 (1 - i\kappa)^2 \dots\dots\dots(36.137)$$

そこで $\omega\tau = \infty$ と $\omega\tau = 0$ (即ち定つた τ にて $\lambda = 0$ と $\lambda = \infty$) に對するモル屈折

$$P_0 = \frac{\mu}{\rho} \frac{\epsilon_0 - 1}{\epsilon_0 + 2} = \frac{4\pi}{3} N \alpha_0, \quad P_1 = \frac{\mu}{\rho} \frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1 + 2} = \frac{4\pi}{3} N \left(\alpha_0 + \frac{p_0^2}{3kT} \right) \dots\dots(36.138)$$

を α_0, p_0 の代りに導入すれば、總モル屈折は

$$P = P_0 + \frac{P_1 - P_0}{1 + i\omega\tau} \dots\dots\dots(36.139)$$

(36.136) で與へられる ϵ は

$$\epsilon = \frac{1 + 2 \frac{\rho}{\mu} P}{1 - \frac{\rho}{\mu} P} = \frac{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + 2} + i\omega\tau \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + 2}}{\frac{1}{\epsilon_1 + 2} + i\omega\tau \frac{1}{\epsilon_0 + 2}} \dots\dots(36.140)$$

となる。 ϵ_0 は短波即ち大なる振動数に対する電媒常数(光學電媒常数と云ふ)で、 ϵ_1 は普通の靜的電媒常数である。更に

$$x = \frac{\epsilon_1 + 2}{\epsilon_0 + 2} \omega\tau \dots\dots\dots(36.141)$$

なる變數を用ひて(36.137)に従ふ屈折率、吸收率を表せば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} n^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{\epsilon_1^2 + \epsilon_0^2 x^2}{1 + x^2}} + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_0 x^2}{1 + x^2} \right\}, \\ n^2 \kappa^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{\epsilon_1^2 + \epsilon_0^2 x^2}{1 + x^2}} - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_0 x^2}{1 + x^2} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(36.142)$$

水に對しては $\epsilon_1 = 81$, $\epsilon_0 = 2$ である。 κ は

$$\omega\tau = \frac{\epsilon_0 + 2}{\epsilon_1 + 2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}}$$

の處に極大値

$$\kappa_{\max} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_0}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_0}}$$

を持ち、この $\omega\tau$ に對する屈折率の二乗は

$$n^2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_1}}{\epsilon_0 + \epsilon_1} (\sqrt{\epsilon_0} + \sqrt{\epsilon_1})^2$$

である。

かくの如くして雙極子液體の異常分散が質的に理論上了解される。勿論 n, κ を測定して逆に $\omega\tau$ を定めることも出来る。

固體も亦融解點近所で異常分散を示すが、これも分子の廻轉に起因すると考へられる。

● 考:

J. Koch: Nov. Act. Soc. Ups. Bd. 2 (1909), 61.

L. Cauchy: Bull. des sc. math. Bd. 14 (1830), 9; Sur la dispersion de la lumière, 1836.

H. Rubens u. E. F. Nichols: Wied. Ann. Bd. 60 (1897), 45; Bd. 65 (1898), 253; Bd. 67 (1899), 459; Phil. Mag. 1910, 761.

H. Rubens u. G. Hertz: Berl. Ber. 1912, 256; 1913, 513; 1914, 169; 1915, 4; 1916, 1280, 1919, 198 & 876.

R. B. Barnes u. M. Czerny: ZS. f. Phys. Bd. 72 (1931), 447; Bd. 75 (1932), 723.

P. Drude: Ann. d. Phys. Bd. 14 (1904), 677.

F. Haber: Verh. d. deutsch. Phys. Ges. Bd. 13 (1911), 1117.

E. Madelung: Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1909, 100; 1910, 43; Phys. ZS. Bd. 11 (1910), 898.

M. Born: Atomtheorie des festen Zustandes, Berlin 1921; ZS. f. Phys. Bd. 76 (1932), 559.

R. Hilsch u. R. W. Pohl: ZS. f. Phys. Bd. 48 (1928), 384; 57 (1929), 145; Bd. 59 (1930), 812; Bd. 64 (1930), 606.

M. Czerny: ZS. f. Phys. Bd. 65 (1930), 600.

D. Macaluso et O. M. Corbino: C. R. Bd. 127 (1898), 548.

W. Voigt: Magneto-und Elektrooptik, Leipzig 1908.

R. Ladenburg: Magneto-und Elektrooptik in Müller-Pouillet.

P. Zeeman u. T. L. de Bruin: Handb. d. Phys. Optik, Bd. 2. 2. Hälfte, 1. Teil.

H. M. Hansen: Ann. d. Phys. Bd. 43 (1914), 169.

R. Minkowski: ZS. f. Phys. Bd. 36 (1926), 839.

A. Ellet: J. opt. Soc. Amer. Bd. 10 (1925), 427.

W. Kuhn: ZS. f. Phys. Chem. Abt. B. Bd. 4 (1929), 14; Trans. Faraday

Soc. Bd. 26 (1930), No. 109, 293,

J. B. Biot: Mém. de l'Acad. des Sciences Bd. 2 (1817), 41.

A. Cotton: Ann. chim. physique Bd. 8 (1896), 360.

P. Debye: Ber. dtsh. phys. Ges. Bd. 15 (1913), 777; Phys. ZS. Bd. 13 (1912), 97; Polare Molekeln, Leipzig 1929.

A. Einstein: Ann. d. Phys. Bd. 19 (1906), 371.

G. G. Stokes: Cambr. Trans. Bd. 8 (1845), 287.

H. Lamb: Hydrodynamik. Cambridge Press.

第七章 光學と熱力學

§ 37. 電磁輻射の自由度

電磁波光理論より導出される輻射の特性に導いてこの章では記述するのであるが、こゝで得られる結果は量子理論にても適當な光量子の概念を以てすれば一般に成立つものである。

マックスウェルの式の一般的解は光場の非常に多くの多様性を表すから、輻射の空間時間的集合の問題に對しては特別の場合にのみ應用し得て、週期的或は準週期的光場が特に興味を持たれる。

一定の振動數範圍 $\Delta\nu$ の輻射を Δt 時間に亘つて固定空間點 P に於て考へる。一つの振動數の光の強さは多少異つたその近所の振動數の光の強さと關聯して定められ、何個の獨立な關與によつて充分 $\Delta\nu$ (連續的) 内の Δt 間の強さ分布を定め得るか。更に空間角 $\Delta\Omega$ から表面 Δf 上へ Θ なる斜角の下に嚴密に單色なる光 ν が入射する時、その表面の點 P_1 に於ける光の強さはそこから多少隔つた點 P_2 に於ける光の強さと關聯して定められ、一時間點 t_0 に於けるこの全表面 Δf (無限に多くの點からなる) 上の光の強さ分布を定めるに必要にして充分な獨立の關與の數は如何、實際計算して見ると後に述べる様に連續的範圍 ($\Delta\nu$ 或は Δf) に於ける輻射狀態を定めるには有限個の關與で何れの場合にも充分である。即ちその考へて居る連續的範圍は有限個の自由度を持つて居る。次に數種の例に就いてその自由度數を計算して見やう。

洞空の固有振動:—

V 體積内の $\Delta\nu$ 輻射狀態を定める可き互に獨立な決定量は何個かを定

めるためにジーンズ (Jeans) はその輻射がその洞空 $V = l^3$ (立方體でその稜の長さが l) 内にて可能な凡ての異つた波長の定常波から形成されて居ると考へた。この各定常固有振動は方向餘弦値 $|\cos\alpha|, |\cos\beta|, |\cos\gamma|$ を持つ八つの異つた前進波から合成される (その定常波に沿うて單位ベクトルを立方體の一頂點 (原點) から取る。その成分は $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ で、その立方體の異つた面上の反射によつてそのベクトルはそれ等の鏡内に見える八個の異つた像に變換され、それ等の成分は $\pm\cos\alpha, \pm\cos\beta, \pm\cos\gamma$ である)。然るにこの方向 $|\cos\alpha|, |\cos\beta|, |\cos\gamma|$ の一定常波はその波長 λ がその立方體の稜の長さ l と次の關係にある時にのみ可能である。

$$2l \cdot |\cos\alpha| = a \cdot \lambda, \quad 2l \cdot |\cos\beta| = b \cdot \lambda, \quad 2l \cdot |\cos\gamma| = c \cdot \lambda, \dots (37.1)$$

こゝで a, b, c は正なる整数であつて、その容積の境界面が節面になることを意味して居る。方向餘弦の二乗の和は 1 であるから (37.1) より直ちに

$$1 = \left(\frac{\lambda}{2l}\right)^2 (a^2 + b^2 + c^2) \dots (37.2)$$

を得る。従つてこの三個の任意の正なる整数 a, b, c を與へれば、(37.2) から波長、(37.1) からそれに屬する l^3 立方體内の定常波の方向が定まる。そこでマックスウェルの式に従へばこの方向にて二つの互に直角に偏光された然もその振幅と位相に於て互に獨立な定常波が出来、 (a, b, c) に屬する固有振動はこの兩偏光の各に對し任意に取り得る振幅と位相とを持つて居る。即ち全體で四つの自由がある。時の原點を定めることに關係する位相の自由性を特別に數へなければ、その固有振動の互に直角に偏光した成分の兩振幅が任意に擇ばれ、各 (a, b, c) は二つの自由度を持つことになる。

輻射の自由度の總數を求めるために、この三數組 (a, b, c) の數 (その固

有振動が ν と $\nu + d\nu$ との間にある) を計算して、その數の二倍をする。處で $\Delta\lambda$ に屬する正なる整数 a, b, c は (37.2) により次の不等式を満足する。

$$\left(\frac{2l}{\lambda + \Delta\lambda}\right)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq \left(\frac{2l}{\lambda}\right)^2 \dots (37.3)$$

今 (a, b, c) を正座標 a, b, c を持つ立方空間格子内の一點と考へれば、(37.3) を満足する格子點は半径 $\frac{2l}{\lambda}$ と $\frac{2l}{\lambda + \Delta\lambda}$ の二球間の正八分圓内にあつて、各格子點は 1 なる大きさの容積を代表するから、その正八分圓内 ($\frac{1}{8}$ 球殼) の求むる格子點數は簡單にその容積に等しく、

$$\frac{1}{8} \cdot 4\pi \left(\frac{2l}{\lambda}\right)^2 \cdot \Delta\left(\frac{2l}{\lambda}\right) = \frac{4\pi l^3}{\lambda^4} \Delta\lambda \dots (37.4)$$

となる。各 (a, b, c) は二つの輻射自由度に相當するから、 $\Delta\lambda$ に於ける體積 $l^3 = V$ の自由度の數 ΔZ は結局

$$\Delta Z = 2 \cdot \frac{4\pi \Delta\lambda}{\lambda^4} \cdot V = 2 \cdot \frac{4\pi}{\lambda^2} \Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) \dots (37.5)$$

で與へられる。ワイル (Weyl) によれば、この公式は立方體でない任意の形の洞空 V に對しても成立つことが判る。

この公式 (37.5) は一見全く異つた様に見える方法でも導出される。即ち N 個の光源點 (振動子) よりの輻射を考へ、その各の振動は互に獨立に定め得るとすれば、一點に於ける輻射或は全空間 V に於ける輻射は N に比例する關與の數で定められる。空間 V 中何處かに平面要素 $\Delta f = \Delta\xi \cdot \Delta\eta$ があつて、 N 個の振動子が V 中に何れかの有様で分布されてそれによつて Δf が $\Delta\nu$ の間にある振動數で輝されたとして、一定の偏光方向の振幅 $A(\nu, \xi, \eta)$ を Δf の無限に多くの點 (ξ, η) に於て $\Delta\nu$ 間の無限に多くの振動數 ν に對して定めるには何個の決定量或は關與が必要かを解くのである。A は個々の輻射體 (振動子) の持前を綜合して與へら

れ、 (ξ, η) 点からのその k 番目の振動子の距離を r_k とすれば、

$$A(\nu, \xi, \eta) = \sum_1^N \alpha_k(\nu) e^{-2\pi i \nu (t - \frac{r_k}{c})} \dots \dots \dots (37.6)$$

である。 $\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}$ と $\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}$ との間の振動数間隔、矩形範囲 $(\xi_0 - \frac{\Delta\xi}{2}$ と $\xi_0 + \frac{\Delta\xi}{2}$, $\eta_0 - \frac{\Delta\eta}{2}$ と $\eta_0 + \frac{\Delta\eta}{2}$ の間) に互つてこの $A(\nu, \xi, \eta)$ をフーリエ級数に展開すれば、

$$A(\nu, \xi, \eta) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{spq} e^{2\pi i (s \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu} + p \frac{\xi - \xi_0}{\Delta\xi} + q \frac{\eta - \eta_0}{\Delta\eta})}$$

で、このフーリエ係数 F_{spq} は

$$F_{spq} = \frac{1}{\Delta\nu \cdot \Delta\xi \cdot \Delta\eta} \int_{\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}} d\nu \int_{\xi_0 - \frac{\Delta\xi}{2}}^{\xi_0 + \frac{\Delta\xi}{2}} d\xi \int_{\eta_0 - \frac{\Delta\eta}{2}}^{\eta_0 + \frac{\Delta\eta}{2}} d\eta \cdot A(\nu, \xi, \eta) e^{-2\pi i (s \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu} + p \frac{\xi - \xi_0}{\Delta\xi} + q \frac{\eta - \eta_0}{\Delta\eta})}$$

なる値を持つ。然るに (37.6) 中

$$\nu(t - \frac{r_k}{c}) = \nu_0(t - \frac{r_k^0}{c}) + (\nu - \nu_0)t - (\nu - \nu_0) \frac{r_k}{c} - \frac{\nu_0}{c} [(\xi - \xi_0) \alpha_k + (\eta - \eta_0) \beta_k] \dots \dots (37.7)$$

と書けるから (α_k, β_k) は k 番目の振動子と Δf の中点とを結ぶ直線 r_k^0 の方向餘弦、(37.6) を入れて ν と共にゆるく變化する函数 $\alpha_k(\nu)$ を常数として計算すれば、フーリエ係数は次の如き表現に書き表せる。

$$F_{spq} = \sum_{k=1}^N \alpha_{k\nu} e^{2\pi i \nu_0 (t - \frac{r_k^0}{c})} \times \frac{\sin \pi (s + t \Delta\nu - r_k^0 \frac{\Delta\nu}{c}) \sin \pi (p - \alpha_k \nu_0 \frac{\Delta\xi}{c}) \sin \pi (q - \beta_k \nu_0 \frac{\Delta\eta}{c})}{\pi (s + t \Delta\nu - r_k^0 \frac{\Delta\nu}{c}) \cdot \pi (p - \alpha_k \nu_0 \frac{\Delta\xi}{c}) \cdot \pi (q - \beta_k \nu_0 \frac{\Delta\eta}{c})} \dots \dots \dots (37.8)$$

そこで V 空間を Δf の周りの球群

$$r^{(s)} = \frac{c}{\Delta\nu} s + ct \dots \dots \dots (37.9)$$

と二つの錐面群

$$\alpha^{(p)} = \frac{c}{\nu_0 \Delta\xi} p, \beta^{(q)} = \frac{c}{\nu_0 \Delta\eta} q \dots \dots \dots (37.10)$$

とで圍はれた細胞に分割して考へる。 $\Delta\nu, \Delta\xi, \Delta\eta$ が大なる程小さく區分される。その細胞の各角點で (37.9), (37.10) にて與へられる三曲面が出合ふから、その凡ての細胞角點は格子點 (spq) の體系を形成し、各格子點 (spq) に一つの F_{spq} が屬する。 k 振動子に關する (ξ_0, η_0) から測つた空間座標 r_k^0, α_k, β_k を以てその格子點 (spq) がその振動子 k の周りの殼内にて定められ、第一殼には 2^3 格子點があり (その振動子を含む細胞の 8 個の角點)、第二殼には $4^3 - 2^3$ 、第三殼には $6^3 - (4^3 - 2^3)$ 格子點等がある。然るに k 番目の振動子の F_{spq} に關與する持前は (37.8) の分母 $s + t \Delta\nu - \frac{\Delta\nu}{c} r_k^0, p - \frac{\nu \Delta\xi}{c} \alpha_k, q - \frac{\nu \Delta\eta}{c} \beta_k$ が大なる程小になるから、主に第一殼の八格子點がきき、他の持前は小になる (その振動子と (spq) 點との間の殼の數が増せば増す程それは小になる)。又他方 $\Delta\nu, \Delta\xi, \Delta\eta$ を充分大に取つて格子點網を狭細にしても F_{spq} にきく格子點の數は變らないが、格子點のある空間範圍は小になつて、その振動子が Δf から η 方向と Θ なる傾斜にある與へられた體積要素 (r と $r + \Delta r, \alpha$ と $\alpha + \Delta\alpha, \beta$ と $\beta + \Delta\beta$ の間にある)

$$\Delta V = r^2 \Delta r \Delta \Omega = r^2 \Delta r \frac{\Delta \alpha \Delta \beta}{\cos \Theta} \dots \dots \dots (37.11)$$

中にあれば、 ΔV 中にある格子點 (spq) は (37.9) (37.10) に従つて次の極限内に限られる。

$$\left. \begin{aligned} -l\Delta\nu + \frac{\Delta\nu}{c}r < s < -l\Delta\nu + \frac{\Delta\nu}{c}(r + \Delta r) \\ \frac{\nu\Delta\xi}{c}\alpha < p < \frac{\Delta\xi}{c}(\alpha + \Delta\alpha), \quad \frac{\nu\Delta\eta}{c}\beta < q < \frac{\Delta\eta}{c}(\beta + \Delta\beta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(37.12)$$

従つて ΔV 内には全部で

$$\Delta z = \frac{\Delta\nu}{c}\Delta r \frac{\nu\Delta\xi}{c}\Delta\alpha \frac{\nu\Delta\eta}{c}\Delta\beta = \frac{\nu^2}{c^3}\Delta r \Delta\nu \Delta f \Delta\Omega \cos\Theta \dots\dots\dots(37.13)$$

だけ格子点 (spq) がある。 ΔV 又は $\Delta\nu\Delta f$ を大にして (即ち $\Delta z \gg 1$) ΔV 中の振動子の影響を及ぼす範囲が ΔV の限界を出来るだけ少ししか越さない様になる。従つて (37.8) 中の項として ΔV 内にある格子点 (spq) に属する F_{spq} にきくのは ΔV 内の振動子のみであることが判る。即ち $\Delta z \gg 1$ ならば (37.13) の Δz 個だけ零でないフーリエ係数 F_{spq} で與へられる光刺戟を $\Delta V = r^2\Delta r\Delta\Omega$ 中に分布された振動子が Θ なる傾斜の下表面要素 Δf 上に及ぼすことになる。

V 中の平面 f に當る輻射 $\Delta\nu$ の輻射状態を定める決定量の数の計算にこの考へを應用すれば、

$$\sum \sum \Delta r \Delta f \cos\Theta = V$$

であつて、(37.13) によつて $\frac{\nu^2}{c^3}\Delta\Omega \cdot V \cdot \Delta\nu$ だけのフーリエ係数 F_{spq} (全振動子によつて全平面 f を $\Delta\nu$ の振動数範囲で輝す光刺戟を表す量) が存在する。凡ての入射角に互つて居れば $\Delta\Omega$ の代りに 4π を入れ、二つの互に直角な偏光方向があるから二倍して、求むる獨立な關與の數として

$$\Delta Z = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V \cdot \Delta\nu \dots\dots\dots(37.14)$$

を得る。これは V 中の任意の平面 f 上の $\Delta\nu$ 間の輻射状態を定める獨立

な決定量の數で $\Delta\nu$ 間の全空間 V の自由度の數になり、先のジーンズの數 (37.5) と一致する。振動子の數 N 及びその自由度は全々輻射自由度の數に對しては肝要な數ではない。

光束の自由度 :-

空間角 $\Delta\Omega$ 内の凡ての方向から來る線的な光線束の單色光圓錐は一焦點に收斂し、その焦點の他側では發散する。個々の平面波列が全空間を満して居る様な平面波列を重合して光束を表現する。與へられた空間角 $\Delta\Omega$ 内に波動法線がある様な波動列の連續的群を考へるのである。その個々の平面波の位相と振幅を適當に取れば、その與へられた二重圓錐外では干涉によつて任意の近似に於てその平面波は相殺される様になる。

その様な單色光圓錐の一つの平行群 (その焦點は Δf 面上にある) が一つの單色光束を形成する。 $\Delta\nu$ 間にある異つた ν の光束を重合すれば、位相と振幅を適當に取つてその刺戟を或有限な範圍に縦に限られる様になる。即ち c を光速、 T を Δf 内の刺戟繼續時間 (有限な光束がその焦點を通過する間) とすれば、 $l = c \cdot T = \frac{c}{\Delta\nu}$ の長さ上に限られる。かくの如き一光束 ($\Delta f, \Delta\Omega, T, \Delta\nu$) の自由度の數、個々の光束からなる與へられた體積 V 中の總輻射の自由度の數をラウエ (Laue) は次の如くして計算した。その光束に長さ l 或は時間 $T = l/c$ を配して、 l に沿うた刺戟はフーリエ級數によつて波長 $\lambda_m = l/m$ として

$$A(x) = \sum_0^{\infty} A_m \cdot \cos\left(2\pi \frac{m}{\lambda} x - \alpha_m\right)$$

で與へられる。 λ と $\lambda + \Delta\lambda$ との間にはたゞ次の條件を満足する級數項だけが屬する。

$$\lambda < \frac{l}{m} < \lambda + \Delta\lambda \quad \text{即ち} \quad \frac{l}{\lambda} > m > \frac{l}{\lambda + \Delta\lambda}$$

その数は明かに

$$dZ' = \frac{l}{\lambda + \Delta\lambda} - \frac{l}{\lambda} = l \cdot \Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = T \cdot \Delta\nu \dots\dots\dots(37.15)$$

である。従つて $\Delta\nu$ 範囲は T の間に $\Delta Z' = T \Delta\nu$ だけ獨立に振動する
フーリエ成分即ち $\Delta Z'$ だけの色に別れる。

一つの単色光束は空間角 $\Delta\Omega$ 内の Δf 上に一定数 $\Delta Z''$ の自由度を持つて居る。詳細な計算は略すが、輻射方向 Ω と Δf の法線とのなす角を Θ として零でないフーリエ係数の数は

$$\Delta Z'' = \frac{\Delta f \cdot \cos \Theta \cdot \Delta\Omega}{\lambda^2} = \frac{\Delta f \cdot \Delta\Omega \cdot \cos \Theta \cdot \nu^2}{c^2} \dots\dots\dots(37.16)$$

だけ必要で、一つの線的偏光々束 (その長さ l) に対しては (37.15) と (37.16) との積

$$\begin{aligned} \Delta Z' \cdot \Delta Z'' &= \frac{\Delta f \cos \Theta \cdot d\Omega}{\lambda^2} \cdot T d\nu = \frac{\Delta f \cdot \cos \Theta \cdot d\Omega}{\lambda^2} \cdot \frac{l}{c} \Delta\nu \\ &= \frac{l \cdot \Delta f \cdot \Delta\Omega \cdot \nu^2 d\nu}{c^3} \cos \Theta \dots\dots\dots(37.17) \end{aligned}$$

だけの自由度がある。こゝで位相は自由度として数えない。

洞空 V 内の凡ての輻射よりなる $\Delta\nu$ 間の光束の自由度数を得るには、 $f = \Sigma \Delta f$ として $\cos \Theta \cdot \Sigma \Delta f \cdot l$ が V に等しいことより、更に $\Delta\Omega$ に就いて積分して ($\Delta\Omega$ の代りに 4π を取れば良い)、二倍すればよい。(37.17) より直ちに

$$\Delta Z = \frac{8\pi \nu^2 d\nu}{c^3} \cdot V$$

なる (37.5) と一致する数を得る。この方法よりすれば ΔZ は V の形には據らないことが判り、更に次のことが云へる。

長さ l の線的偏光々束は 1 なる自由度を持つと云ふことは

$$l \cdot \frac{\Delta f \cdot \Delta\Omega \cdot \nu^2 d\nu}{c^3} \cos \Theta = 1 \dots\dots\dots(37.18)$$

によつて定義される。この条件を満足する光束をラウエは基本光束と稱し、 V 内の $\Delta\nu$ 間の輻射は ΔZ 個の基本光束より形成されることになる。この基本光束の概念は光學的及び調和的分解能、輻射の揺動及び量子論的輻射問題に於て重大な役割を演ずる。

分散媒質中の光束：一

幾何光學の正弦法則に従つて光束が真空中にあれば、常に幾何光學的現象の何れに於ても $\Delta\Omega \cdot \Delta f \cdot \cos \Theta$ は一定である。振動数 ν 、光束の長さ $l = cT$ も亦變らないから、幾何光學現象にてその自由度数も亦不變である。然しその光束が他の媒質中へ入れば、屈折率の相違により $\Delta\Omega \cdot \Delta f \cdot \cos \Theta$ が變り、光傳播速度の相違により光束の長さ l が變つて來る。屈折率 $n(\nu)$ を持つ媒質内では $\lambda = \frac{c}{\nu}$ の代りに $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{c}{n\nu}$ を導入せねばならない。 v は位相速度である。従つて (37.16) は

$$\Delta Z'' = \frac{\Delta\Omega \cdot \Delta f \cdot \cos \Theta}{\lambda^2} = \frac{\Delta\Omega \cdot \Delta f \cdot \cos \Theta \cdot \nu^2}{v^2},$$

更に $v = \lambda \cdot \nu$ 、 $dv = \lambda d\nu + \nu d\lambda = d\nu \cdot \frac{dv}{d\nu}$ であるから、

$$\begin{aligned} \Delta Z' &= l \cdot \Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = l \Delta\left(\frac{\nu}{v}\right) = \frac{l \Delta\nu}{v} \left(1 - \frac{\nu}{v} \frac{dv}{d\nu}\right) \\ &= \frac{l}{v} \Delta\nu \left(1 + \frac{\nu}{n} \frac{dn}{d\nu}\right) = \frac{l \cdot \Delta\nu}{g} \end{aligned}$$

となる。こゝで g は群速度を意味し

$$g = \frac{v}{1 + \frac{\nu}{n} \frac{dn}{d\nu}} \dots\dots\dots(37.19)$$

で與へられる。それ故光束の自由度数は

$$\Delta Z' \cdot \Delta Z'' = \frac{1}{c^3} \Delta f \cdot \cos \Theta \cdot \Delta\Omega \cdot \nu^2 \cdot \Delta\nu \cdot l \cdot n^2 \left(n + \nu \frac{dn}{d\nu}\right) \dots\dots\dots(37.20)$$

となる。

屈折率 n を持つ体積 V は全體で $\Delta\nu$ 間に

$$V \cdot \frac{8\pi\nu^2 \Delta\nu}{c^3} n^3 \left(1 + \frac{\nu}{n} \frac{dn}{d\nu}\right) = V \cdot \frac{8\pi\nu^2 \cdot \Delta\nu}{\nu^2 \cdot g} \dots\dots\dots(37.21)$$

なる電磁自由度を持つて居ることになる。

凡ての幾何光學的現象にて一つの媒質から他の媒質に移る際 $\Delta\Omega \cdot \Delta f \cdot \cos\Theta$ の變化は n^2 の變化で相殺され、 l の變化は $\left(n + \nu \frac{dn}{d\nu}\right)$ の變化で相殺されてその光束の自由度數 (37.20) は不變である。又ローレンツ變換に對しても $\Delta Z' \cdot \Delta Z''$ なる數は不變量であることが判る。

然し廻折現象、散亂現象に於ては $\Delta\Omega$ が増す具合によつて自由度數が増す。自由度數を増す様な状態へのエネルギーの移りはエントロピー増加と關聯し、この現象は熱力學的意味に於て非可逆的で、幾何光學的現象は可逆的である。

光學的分解能：一

a なる距離にある互に等しい純調和振動數 $\nu = \frac{c}{\lambda}$ を持つ光點 P_1, P_2 が像平面上に二つの異つた獨立點として寫像されるためには、その像點は少くとも約一つの唸りの線的擴りの斷面を持たねばならない。換言すればその兩像を A, B として、 P_1, P_2 から來て A に集る光線は B に集る光線に比して少くとも 1λ だけ光路差がなければならぬ。何となればそれより小なる差では或時點に於て A での照度は B での照度と區別されないからである。 AB 間の距離を b とし $PA = r$ は a, b に殆んど直角、 PA と PB の角を $\Delta\Theta$ とすれば $\lambda \ll a \ll b \ll r$ の時

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{b}{r} = \Delta\Theta$$

なることが上記のことより容易に判る。従つて與へられた b 或は $\Delta\Theta$ にて區別出来る最小なる a は

$$a = \lambda \cdot \frac{r}{b} = \frac{\lambda}{\Delta\Theta}$$

で與へられる。點形でなく擴りとして認められる最小面 a^2 は與へられた b^2 或は空間角 $\Delta\Omega = (\Delta\Theta)^2$ に於て

$$a^2 = \lambda^2 \frac{r^2}{b^2} = \frac{\lambda^2}{\Delta\Omega}$$

で、輻射方向と Θ なる角をなす Δf (物面) は

$$\Delta Z'' = \Delta f \cdot \cos\Theta \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\lambda^2}{\Delta\Omega} = \delta \cdot \frac{\nu^2}{c^2} \Delta\Omega \cdot \Delta f \cdot \cos\Theta \dots(37.22)$$

だけの光學的に互に區別される基本範圍から出來て居ることになる。この δ は定められないが、(37.16) と比較すれば、この基本範圍の數が Δf から出て $\Delta\Omega$ 内に放射される單色光束の持つ自由度數と一致するためには $\delta = 1$ でなければならぬ。

廻折開き Δf から來る光束 $\Delta\Omega$ の途中にスクリーンを挿入すれば、その上に出来る明るい廻折縞の數は $\Delta Z''$ 位の數である。

調和分解能：一

二つの同時に鳴つて居る音或は光の色 ν と ν' が重合されて居るのを調和的に分析し得るためにはその整理に要する時間 T が大約その差音の振動時間 $\frac{1}{|\nu - \nu'|}$ に等しくなければならない。即ち一つの唸りを豫期させる可きである。 T 時間の間に二つの振動 ν と ν' が區別されるためには $T(\nu - \nu') = \frac{1}{\gamma}$ でなければならず、ここで γ は 1 に近い値を持つ可きである。従つて觀測時間 T 或は光線路程 $l = c \cdot T$ に關して $\Delta\nu$ 間には

$$\Delta Z' = \gamma \cdot T \cdot \Delta\nu = \gamma \cdot \frac{l}{c} \Delta\nu \dots\dots\dots(37.23)$$

個の基本色がある。差音觀測の精密度、その速さ等によつて唸りによる兩振動數分析は異なるからこの γ は定められない。然し (37.15) と比較して

$\gamma = 1$ と置けば, 分析し得る色成分の數 (37.23) は T 時間内の $\Delta\nu$ 間の輻射の自由度數と一致する。

参 考:

J. H. Jeans: Phil. Mag. Bd. 10 (1905), 91.
 M. Planck: Voresungen über die Theorie der Wärmestrahlung.
 H. Weyl: Crelles Journ. Bd. 141 (1912), 163.
 A. Landé: Ann. d. Phys. Bd. 50 (1916), 89.
 M. v. Laue: Ann. d. Phys. Bd. 44 (1914), 1197.
 P. Debye: Ann. d. Phys. Bd. 30 (1909), 755.
 L. Brillouin: Les statistiques quantiques et leurs applications. Paris 1930

§ 38. 輻射 揺 動

前節 §37 の終りに述べた様に輻射の自由度數は調和的に及び光學的に分析し得る基本範圍の數として表されるが, その自由度數は又スペクトルの及び空間的光の強さ分布の揺動に相當した輻射の基本範圍分割と密接な關係にある。問題は如何なる程度に相接近した色の強さ揺動が互にカップルされるか, 更に相接近した空間點に於ける強さ揺動が各瞬間に相關聯するかである。空間的及びスペクトルの揺動に於て二つの空間及びスペクトルの接近した場所は近ければ近い程餘計に互に關聯し合つて, 不定な數因子 δ, γ を除いては, 内部では關聯し外部では獨立な様な臨界空間範圍と臨界振動數範圍とが定められることが言へる。それによつて空間及びスペクトルを互に獨立な揺動する基本範圍に分割出來, その數は各不定な因子 δ と γ を除いては自由度數を與へるジーンズの數に一致することが判る。而してそれらの臨界範圍は調和的及び光學的分解能の臨界極限と同一である。

観測點 P から $r - \frac{\Delta r}{2}$ と $r + \frac{\Delta r}{2}$ 間にあつて空間角 $\Delta\Omega$ 内の N 個

の光源でその P 點が輝されたとする。従つてその光源は $r^2 \Delta\Omega \Delta r$ なる體積要素中に満ちて居る。k 番目の振動子の振動はフーリエ級數に展開され, u_{ks} を複素數とし, 2T を基本週期として

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} u_{ks} e^{-i\frac{\pi s t}{T}} \dots\dots\dots (38.1)$$

で表される。 t_k を k 番目の振動子から P 點までの光時 ($t_k = \frac{r_k}{c}$) とすれば, P に於ける N 光源凡てによる光刺戟は

$$\sum_{k=1}^N \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{ks} e^{-i\frac{\pi s}{T}(t-t_k)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\pi s}{T}t} \sum_{k=1}^N a_{ks} e^{i\frac{\pi s}{T}t_k} \dots\dots\dots (38.2)$$

なる形の級數で與へられる。 $\nu = \frac{s}{2T}$ なる振動は $A_s = \sum_{k=1}^N a_{ks} e^{i\frac{\pi s}{T}t_k}$ なる振幅位相因子を持つて居ることを示して居る。共軛複素を * で表して, この ν 振動の強さは

$$J_s = A_s A_s^* = \sum_k \sum_l a_{ks} a_{ls}^* e^{i\frac{\pi s}{T}(t_k-t_l)} \dots\dots\dots (38.3)$$

で, $\nu' = \frac{s'}{2T}$ が他のフーリエ成分の振動數ならば,

$$J_s \cdot J_{s'} = \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n a_{ks} a_{ls}^* a_{ms'} a_{ns'}^* e^{i\frac{\pi}{T}[s(t_k-t_l+t_m-t_n)-(s-s')(t_m-t_n)]} \dots\dots\dots (38.4)$$

である。

體積要素 $r^2 \Delta\Omega \Delta r$ 中に振動子が均等な密度充滿をなして居るとして t_1, \dots, t_k は $\tau = \frac{\Delta r}{c}$ ($t_k = \frac{r}{c} + \tau_k, -\frac{\tau}{2} < \tau_k < +\frac{\tau}{2}$) なる $t = \frac{r}{c}$ の周りの範圍で變化すれば, (38.8) 中指數函數項の平均値は

$$\frac{1}{\tau^2} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} dt_k dt_l e^{i\frac{\pi s}{T}(t_k-t_l)} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi s \tau}{2T}\right)}{\left(\frac{\pi s \tau}{2T}\right)^2} \quad k \neq l$$

$$= 1 \quad k = l$$

となる。若し $\nu\tau = \frac{s\tau}{2T} \gg 1$, 即ち Δr 上に多くの波長 $\lambda = \frac{c}{\nu}$ があれば, $k \neq l$ に相当した項の平均値は $k=l$ の項のに比して無視され, (38.3) より

$$\bar{J}_s = \sum_k |a_{ks}|^2 \dots\dots\dots(38.5)$$

を得る。 $\nu\tau \gg 1, \nu'\tau \gg 1$ ($(\nu - \nu')\tau \gg 1$ の必要はない) ならば, (38.4) 中平均値としては $k=l, m=n$ 或は $k=n, l=m$ に對する項だけが残る結局次の平均値を得る。

$$\bar{J}_s \bar{J}_{s'} = \sum_k \sum_m |a_{ks}|^2 |a_{ms'}|^2 + \frac{\sin^2[\pi(\nu - \nu')\tau]}{[\pi(\nu - \nu')\tau]^2} \sum_{k \neq l} a_{ks} a_{ls}^* a_{ks}^* a_{ls} \dots\dots\dots(38.6)$$

然るに (38.5) によつて

$$\bar{J}_s \bar{J}_{s'} = \sum_k \sum_m |a_{ks}|^2 |a_{ms'}|^2 \dots\dots\dots(38.7)$$

である。 J_s と $J_{s'}$ とが全く互に獨立ならば,

$$\bar{J}_s \bar{J}_{s'} / \bar{J}_s \bar{J}_{s'} = 1$$

であるが, (38.6) の第二項の

$$\sin^2 \left[\pi(\nu - \nu') \frac{\Delta r}{c} \right] / \left[\pi(\nu - \nu') \frac{\Delta r}{c} \right]^2 \dots\dots\dots(38.8)$$

が大なれば大なる程, この比は獨立値 1 とは餘計に異つて来る。勿論 ν, ν' が別々になつて (38.8) が零になれば, $|\nu - \nu'| = \frac{c}{\Delta r}$, その比は 1 になる。もつと大なる差 $|\nu - \nu'| > \frac{c}{\Delta r}$ に於てはその比の値は 1 からたゞ極小値だけ異なる。1 と多少異つた數値を γ として

$$\frac{c}{\Delta r} \frac{1}{\gamma} \dots\dots\dots(38.9)$$

を一種の臨界的振動數差と見做せる。 $|\nu - \nu'| < \frac{1}{\gamma} \frac{c}{\Delta r}$ なら ν と ν' とは互に關係し合ひ, $|\nu - \nu'| > \frac{1}{\gamma} \frac{c}{\Delta r}$ なら獨立であると云へる。従つてスペクトル範圍 $\Delta\nu$ は

$$\gamma \cdot \frac{\Delta r}{c} \Delta\nu \dots\dots\dots(38.10)$$

個の獨立な振動數範圍に分割出来る。 a_{ks} ($k=1, 2, \dots, N; -\infty < s < +\infty$) で表現される振動子に特殊な輻射能やその總數 N には關係なく, 光源が均等に満されて居る體積要素 $r^2 \Delta\Omega \Delta r$ は受働點 $r=0$ にて, 確率理論の意味に於て, 二振動數 ν, ν' の強さが $|\nu - \nu'| \Delta r / c$ が 1 に比して大なれば大なる程餘計に獨立的に互に振動する様なスペクトルを與へると云ふ結果になる。従つて受働點に於て觀測されるスペクトル範圍 $\Delta\nu$ は

$$\Delta Z' = \gamma \cdot \Delta\nu \cdot \frac{\Delta r}{c} \dots\dots\dots(38.11)$$

個の互に獨立な振動の基本範圍に分割されることになる。

次に空間的強さ振動に就いて考へる。この場合 1 個の $\nu = \frac{c}{\lambda}$ の振動だけを取つて, r_k を P から k 番目の振動子までの距離とし, r'_k を P に接近した點 P' より距離とすれば, $e^{-2\kappa(r'_k)}$ の因子を除いて P 及び P' に於ける光刺戟は

$$A = \sum_{k=1}^N a_k e^{i(\delta_k + \kappa r_k)}, \quad A' = \sum_{k=1}^N a_k e^{i(\delta_k + \kappa r'_k)} \dots\dots\dots(38.12)$$

で與へられる。こゝで δ_k は位相, $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$ である。先の場合と同様にし

$$J = A A^* = \sum_k \sum_l a_k a_l e^{i(\delta_k - \delta_l) + i\kappa(r_k - r'_l)}$$

$$J J' = A A^* A' A'^*$$

$$= \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n a_k a_l^* a_m a_n^* e^{i(\epsilon_k - \epsilon_l + \delta_m - \delta_n) + i\kappa(r_k - r_l + r'_m - r'_n)}$$

を得る。多くの位相分布 δ に亙つて取つた平均値を計算すれば、 \bar{J} にては $k = l$ の項だけが残り

$$\bar{J} = \sum_k |a_k|^2 \dots\dots\dots(38 \cdot 13)$$

となり、

$$\bar{J} \bar{J}' = \sum_k \sum_m |a_k|^2 |a_m|^2 + \sum_k \sum_{k \neq l} |a_k|^2 |a_l|^2 e^{i\kappa(r_k - r'_k) - (r_l - r'_l)}$$

$$\dots\dots\dots(38 \cdot 14)$$

$$\bar{J} \cdot \bar{J}' = \sum_k \sum_m |a_k|^2 |a_m|^2 \dots\dots\dots(38 \cdot 15)$$

なることが容易に判る。そこで兩受働點 P, P' は f 平面上にあつて、その座標は $P(\xi = 0, \eta = 0)$, $P'(\xi, \eta)$ とする。それ等の振動子を含む體積要素 $r^2 \Delta \Omega \Delta r$ の中點は P から方向餘弦 α, β, γ で與へられる方向にあるとすれば、

$$\Delta \Omega = \frac{\Delta \alpha \Delta \beta}{\cos \Theta} \dots\dots\dots(38 \cdot 16)$$

こゝで Θ は $\alpha \beta \gamma$ 方向と f の表面法線とのなす角である。k 番目の振動子は方向餘弦 $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ を持ち、

$$\alpha_k = \alpha + \epsilon_k \quad \left(-\frac{\Delta \alpha}{2} < \epsilon_k < +\frac{\Delta \alpha}{2}\right),$$

$$\beta_k = \beta + \epsilon_k' \quad \left(-\frac{\Delta \beta}{2} < \epsilon_k' < +\frac{\Delta \beta}{2}\right)$$

であるとする。PP' の距離が r_k に比して小であれば、近似的に

$$r_k' - r_k = \xi \alpha_k + \eta \beta_k = (\xi \alpha + \eta \beta) + (\xi \epsilon_k + \eta \epsilon_k')$$

であるから、振動子の均等分布を假定して (38.14) 中の指數函數因子の平均値は

$$\frac{1}{(\Delta \alpha \Delta \beta)^2} \int_{-\frac{\Delta \alpha}{2}}^{\frac{\Delta \alpha}{2}} \int_{-\frac{\Delta \beta}{2}}^{\frac{\Delta \beta}{2}} e^{i\kappa((\xi \epsilon_k + \eta \epsilon_k') - (\xi \epsilon_l + \eta \epsilon_l'))} d\epsilon_k d\epsilon_l d\epsilon_k' d\epsilon_l'$$

$$= \frac{\sin^2(\kappa \xi \Delta \alpha / 2)}{(\kappa \xi \Delta \alpha / 2)^2} \cdot \frac{\sin^2(\kappa \eta \Delta \beta / 2)}{(\kappa \eta \Delta \beta / 2)^2} \dots\dots\dots(38 \cdot 17)$$

で與へられる。J と J' が互に全く獨立ならば

$$\bar{J} \bar{J}' / \bar{J} \cdot \bar{J}' = 1$$

であるが、この比は (38.17) が大なれば大なる程獨立値 1 から餘計異る。P' (ξ, η) が P (0, 0) と隔つて (38.17) が零になれば、その比は 1 になる。

$$|\xi| = \frac{2\pi}{\kappa \Delta \alpha} = \frac{\lambda}{\Delta \alpha}, \quad |\eta| = \frac{2\pi}{\kappa \Delta \beta} = \frac{\lambda}{\Delta \beta}$$

先の場合と同様に δ を多少 1 と異なる數値として

$$\frac{1}{\delta} \cdot \frac{\lambda}{\Delta \alpha} \cdot \frac{\lambda}{\Delta \beta} = \frac{c^2}{\delta \cdot r^2 \Delta \Omega \cos \Theta} \dots\dots\dots(38 \cdot 18)$$

は一種の臨界面範圍と見做され、 $|\xi| < \frac{\lambda}{\Delta \alpha} \frac{1}{\sqrt{\delta}}$, $|\eta| < \frac{\lambda}{\Delta \beta} \frac{1}{\sqrt{\delta}}$ なら P, P' に於ける光刺激は互に關聯し合ひ、 $|\xi| > \frac{\lambda}{\Delta \alpha} \frac{1}{\sqrt{\delta}}$, $|\eta| > \frac{\lambda}{\Delta \beta} \frac{1}{\sqrt{\delta}}$ なら互に獨立であると出来る。従つて Δf は

$$\Delta Z'' = \delta \cdot \Delta f \cos \Theta \frac{\Delta \alpha \Delta \beta}{\lambda^2} = \delta \cdot \frac{v^2}{c^2} \Delta f \cdot \Delta \Omega \cos \Theta \dots\dots(38 \cdot 19)$$

個の獨立な搖動する基本範圍に分けられ、 Θ なる入射角でそれ等の振動子によつて輝された平面要素に對して、體積要素 $r^2 \Delta \Omega \Delta r$ が均等な密度で満された場合、その表面上の二點 P, P' に於ける光の強さ搖動は

$$\frac{\kappa \xi \Delta \alpha}{2\pi} \cdot \frac{\kappa \eta \Delta \beta}{2\pi} = \xi \eta \frac{v^2}{c^2} \Delta \Omega \cos \Theta$$

が1に比して大なれば大なる程互に餘計獨立的になり、これは光源の總數及びその特性には無關係であると云ふ結果を得る。

(38.11) と (38.19) との積を取れば互に獨立な搖動する基本範圍の總數として $\Delta f \cdot \Delta \nu$ に對して

$$\gamma \delta \frac{\nu^3}{c^3} \Delta r \Delta \Omega \cos^2 \Theta \Delta f \Delta \nu \dots\dots\dots(38.20)$$

を得る。これは分解能の計算よりの (37.22) と (37.23) の積に等しい。

§ 39. 輻射のエントロピーと溫度

眞空にされた鏡壁で圍まれた洞空内では種々なる振動數 ν の輻射はその空間的エネルギー密度が

$$\frac{U}{V} = u = \int_0^\infty u(\nu) \cdot d\nu \dots\dots\dots(39.1)$$

で與へられる様な任意のスペクトルエネルギー分布を持つて居る。 $u(\nu)$ は輻射比密度である。この一つの色に對する $u(\nu)$ を變化さす様な吸収又は放射をなす物質がない以上上記の輻射状態は時間的に無制限にそのまま保たれる。然しその洞空内に凡ての色に對して吸収し、放射し得る物質(暗黒體)があつて、異つた色の間にエネルギー交換が可能ならば、熱力學の第二法則に従つて、始原的スペクトルエネルギー分布は次第に他の全く定つた分布に移つて行き輻射の熱力學的平衡状態にまで至る。そこではエネルギー法則に従つて總エネルギー而して總エネルギー密度が恆存する。この最後の安定なエネルギー分布 $u(\nu)$ を暗黒輻射のエネルギー分布と稱する。これは暗黒體による種々なる色の放射と簡單な關係にあるからかく稱するのである。

この暗黒輻射が體積 V 中に滿されて居れば、それに溫度 T 、エントロピ

- S を考へ得る。即ち輻射密度 u と平衡にある任意の物體の絶對溫度 T を考へ、 $u(\nu)$ は T の函數となる。暗黒體との平衡に於て準靜的過程によつて輻射のエネルギー U 、従つてその溫度 T 、更にその體積 V が變化するとすれば、その輻射のエントロピー變化は

$$ds = \frac{dU + p dV}{T} \dots\dots\dots(39.2)$$

で定義され、適當のエントロピー常數法化をすれば、暗黒輻射の平衡状態の各に、與へられた U と V 或は T と V に於て、エントロピー値 S 或はエントロピー密度値 $s = \frac{S}{V}$ を配し得る。而してそれは暗黒輻射中の個々の色の持前から綜合されて居ると見做し得て、

$$S = V \cdot s = V \int_0^\infty \bar{s}(\nu) d\nu \dots\dots\dots(39.3)$$

なる表現が得られる。輻射が暗黒でなく、それからはずれたスペクトルエネルギー分布にあれば、輻射の一定の溫度を云ふことには何等の意味もなくなるが、全く形式的にこの場合にも或一定の状態にある各物理體系に對してと同様に V 中の輻射に或エントロピー $S = V \cdot s$ を配し得る。異つた色は互に無關係に體積 V 中に存在し得るから、 $d\nu$ 間の持前を加へて S を表し得、(39.3) なる式が得られる。

如何なる有様に \bar{s} が ν と u とに據るかは次の如くして普通のエントロピー概念を以てと同様に定められる。與へられた體積 V 中にて與へられた總エネルギーの場合暗黒輻射の平衡エントロピーは各非平衡エントロピーより大であつて、暗黒輻射に對する條件として

$$\delta S = 0 \quad (\delta U = 0, \delta V = 0) \dots\dots\dots(39.4)$$

が U, V 一定にて可能なスペクトルエネルギー分布の凡ての變化に對して要求される。エネルギー分布の變化は各振動數 ν に對する $u(\nu)$ が或變

化 δu をなすことによつて代表されれば、 $\delta V = 0$ であるから

$$0 = \delta S = \delta \left(V \int_0^\infty \xi \, d\nu \right) = V \int_0^\infty \delta \xi \cdot d\nu = V \int_0^\infty \frac{\partial \xi}{\partial u} \delta u \cdot d\nu \dots\dots\dots (39.5)$$

となり、副条件

$$0 = \delta U = V \cdot \int_0^\infty \delta u \cdot d\nu \dots\dots\dots (39.6)$$

を満足する任意の δu に於て (39.5) が満足されるためには、凡ての振動数 ν に対して

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \text{const.} \dots\dots\dots (39.7)$$

でなければならない。(39.7) より一定の V 、變化するエネルギー U に於て

$$\begin{aligned} \delta S &= V \int_0^\infty \frac{\partial \xi}{\partial u} \delta u \cdot d\nu = \frac{\partial \xi}{\partial u} \cdot V \int_0^\infty \delta u \cdot d\nu = \frac{\partial \xi}{\partial u} \cdot V \cdot \delta U \\ &= \frac{\partial \xi}{\partial u} \cdot \delta U \dots\dots\dots (39.8) \end{aligned}$$

が得られる。そこで一定體積中の暗黒輻射に対しては $\delta S = \frac{\delta U}{T}$ であるから、暗黒輻射に於けるエントロピー函数 ξ の特性として

$$\frac{\partial \xi(u, \nu)}{\partial u} = \frac{1}{T} \dots\dots\dots (39.9)$$

を得る。任意の安定でない輻射分布に対しても輻射比エントロピーの定義として同じ函数 $\xi(u, \nu)$ が成立つ可く、この輻射状態に於ける考へて居る振動数 ν の温度 $T(\nu)$ は (39.9) と同じ式で定義される。暗黒輻射では (39.7) が成立つて、凡ての可能なスペクトルエネルギー分布の下に凡ての振動数は同じ温度を持つと云ふ特性があるに反して、非暗黒輻射では各振動数 ν はその體積 V 中にて異つた温度を持つて居る。一振動数 ν の温

度 $T(\nu)$ は非暗黒輻射にて輻射密度 $u(\nu)$ に關與するが、それは $u(x)$ と平衡にある暗黒體の温度と確定される。かくして一光束 ($d\Omega, df, d\nu, l, \lambda$) にも一定のエントロピー値を附加出來、總エントロピー S は個々の光束の持前を加へ合せて得られる。

然しこのエントロピーの加法の成立つのはその部分體系が (その各状態が他の部分の各状態と適應した様な具合に) 互に獨立な場合のみに限つて居る。エントロピーの可加性は ($S = S_1 + S_2 + \dots$) ボルツマンの統計的エントロピー定義

$$S = k \cdot \log W; \quad S_1 = k \log W_1, \quad S_2 = k \log W_2, \dots$$

によつて第一、第二、..... 部分體系の状態の起る確率 W_1, W_2, \dots を互に乘じた

$$W = W_1 \cdot W_2 \cdot W_3 \dots$$

が總體系の状態の起る確率を與へることを意味して居る。各振動數範圍のエネルギーと温度は他の振動數範圍のとは互に獨立的であるから、(39.8) に相當して、個々の振動數範圍の持前を綜合して總輻射を得る場合にはそのエントロピー可加性は確かに認められて居る。然し狭い光束 ((37.18) を見よ)

$$\frac{l \cdot df \cdot d\Omega \cdot \nu^2 \, d\nu \cdot \cos \theta}{c^3} \ll 1$$

に集中した様なエネルギーが多く例へば二つの適當な位相、振幅の光束の重合によつて出來て居る場合には、その兩部分光束は互に獨立でなく、第一の光束の位相、振幅が與へられた際に重合して與へられた總光束を得るには第二の光束は定つた位相、振幅を持つて居らねばならない。この兩部分光束及びその重合光束にそれ等のエネルギー値と温度に相當してエントロピー値 σ_1, σ_2 と σ とをそれぞれ配すれば、部分光束の位相、振幅は

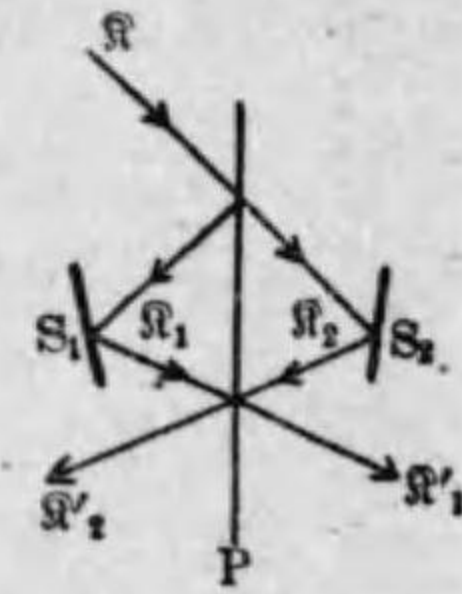
独立的でなく、即ちその可干渉性のために最早 $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ ではない。即ち可干渉性光束に対してはエントロピーの加法法則は成立しない。

物質體系に於て周知の如く、エントロピー可加性は兩部分體の溫度差を相殺なしに増すことの不可能性と密接な關係にあると同様に、物質のエントロピーに慣つて作られた輻射エントロピーに於ても兩光束の溫度差を相殺なしには増し得ない。ラウエは次の例を以てこれを明かにした。

吸収のない平行平板 P へ入射面内に又はそれに垂直に偏光された R なる強さの光束が入射されたとする (第 72 圖)。r がその板の反射能ならば、それによつて反射、屈折された光束の強さは

$$R_1 = rR, \quad R_2 = (1-r)R \dots\dots(39\cdot10)$$

で與へられる。この兩光束を P に對稱的に置かれた完全反射をなす鏡 S_1, S_2 に當てゝ再び P に來たらす。



第 72 圖

r' をこの第二の P への入射に於ける反射能とすれば、兩光束は干渉して次の表現で與へられる強さ R'_1, R'_2 の二光束が出来る。

$$\left. \begin{aligned} R'_1 &= (\sqrt{Rr(1-r')} + \sqrt{R(1-r)r'})^2 \\ &= R \{ r(1-r') + (1-r)r' + 2\sqrt{rr'(1-r)(1-r')} \} \\ R'_2 &= R - R'_1 = R \{ rr' + (1-r)(1-r') - 2\sqrt{rr'(1-r)(1-r')} \} \end{aligned} \right\} \dots\dots(39\cdot11)$$

こゝで後者はエネルギー法則に従つて得られる

$$R'_1 + R'_2 = R_1 + R_2 = R$$

から出した。特に $r = r', \frac{1}{4} < r < \frac{3}{4}$ ならば、

$$|R'_1 - R'_2| > |R_1 - R_2| \dots\dots(39\cdot12)$$

なることが上記の式 (39·10), (39·11) より明かである。換言すればこの

装置を用ひて兩部分光束の強さの差 $|R_1 - R_2|$ が増されてそれより大なる $|R'_1 - R'_2|$ になることが判り、溫度差に就いても同様なことが言へる。従つて可干渉性光束の溫度差は、特殊な干渉現象によつて、相殺なしに増加し得るのである。

更に P への第二の入射角を適當にして $r' = 1 - r$ になる様にすれば、明かに

$$R'_1 = R, \quad R'_2 = 0 \dots\dots(39\cdot13)$$

となり、 R から別れた二可干渉性光束は一個の R'_1 に戻される。換言すれば吸収なしの反射、屈折は完全に可逆現象であることを示して居る。第二法則より二つの可干渉性光束のエントロピーはそれ等個々のエントロピーの和ではなく、一つの光束のエントロピーに等しい。

次に廻折の熱力學を考へて見る。光束の廻折も亦可逆的であるかエントロピーの増加なしに起るか如何かと云ふ問題である。廻折が反射、屈折同様可干渉波の體系をなすことは、疑ひもなく非可逆的な吸収現象が除外される限り、最初から可逆性なることを語つて居るが、一光束はその獨得な傳播方向のために凡ての方向に傳播する波よりは遙かに整頓された現象を呈し、非可逆性を假定することも最初から許されないと云へない。ラウエによれば廻折現象も亦その結果が幾何光學的現象によつて得られる限り可逆的であると云へる。

條線間隔 a なる規則正しい條線格子が真空中にあつて、小なる空間角 $d\Omega$ の單色光束が入射され、 $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ をその入射光束に屬する一光線の方向餘弦とし、 α, β, γ を一つの廻折された光線の方向餘弦とすれば、明かに廻折次數を p として

$$\alpha = \alpha_0 + p \frac{\lambda}{a}, \quad \beta = \beta_0 \dots\dots(39\cdot14)$$

である。従つて各廻折された光束に対して

$$d\alpha \cdot d\beta = d\alpha_0 \cdot d\beta_0,$$

α, β, γ の代りに極座標 θ, φ を導入し、一光束の空間角 $d\Omega$ を考へれば、 $\cos\theta = \gamma, \cos\theta_0 = \gamma_0$ で上記の關係は

$$d\Omega \cdot \cos\theta = d\Omega_0 \cdot \cos\theta_0 \dots\dots\dots(39.15)$$

と書ける。従つて今考へて居る廻折現象にては df を θ なる傾斜の下に開きの角 $d\Omega$ から輝かれて居る格子の表面として

$$\frac{d\Omega \cdot \cos\theta \cdot df}{\lambda^2} \dots\dots\dots(39.16)$$

は不変、即ち

$$df = df_0, \quad \lambda = \lambda_0 \dots\dots\dots(39.17)$$

となる。(39.16) なる量は既に (37.16) で與へられた如く單色光束の自由度數 dZ'' であるが、それは幾何光學の正弦法則に従つて凡ての幾何光學的光束現象に於て一定である。この表現 dZ'' に於て一致する様な可干渉性光束は幾何光學的に個々の光束より形成され而して再びそれに集められる。格子廻折に於ては同じ表面 df から出て $d\Omega \cdot \cos\theta$ を共通に持つ可干渉性光束の一群があつて、格子廻折の結果は幾何光學的路にて逆路にも可能である。かくして格子廻折の可逆性が證明される。然しこの考察には未だ不備な點がある。第一に(39.14)式はキルヒホッフの廻折理論から導出されたものであつて、それは今考へに入つて來る量の長さが波長 λ に比して大なる時の近似的表現である。更に無限大の格子でなければ (39.14) 以外の方向でも相當な光の強さがある。廻折現象問題を嚴密に取扱つた結果 (特に有限な格子に就いて)、幾何光學からはずれた廻折によつてはエントロピー増加が廻折によつて起ることをラウエは示し、全格子の内有效な表面が大になれば大になる程その増加は小になることが判つた。エント

ロピー増加に関しては有限格子に於ける廻折は熱力學的にその格子表面の形及び大きさの開きに於ける廻折と同價値なることが示された。然るにその後者の廻折現象はその開きが大なれば大なる程餘計に幾何光學の法則が行はれるから、その格子表面を大にして任意の近似に於て可逆的に格子廻折をなさせ得る。

然し有限格子にては $d\Omega \cos\theta = d\Omega_0 \cos\theta_0$ が成立つ近似即ち廻折が可逆的な近似は入射光束の開き角 $d\Omega_0$ に據る。充分大なる $d\Omega_0$ の入射光束を取れば、 $d\Omega_0 \cos\theta_0 = d\Omega \cdot \cos\theta$ を満足する開きの内に集中された主要強さの廻折光束が得られ、相當良い近似でこの廻折は可逆的になる。 $d\Omega_0$ が小なれば小なる程益々有限格子に於ける廻折は非可逆的になる。實用上視準儀 (コリメーター) のスリットを廣くすれば廻折は可逆的になり、狭ければ然らず。格子の調和的分解能を出来る丈利用しやうとすれば、 $d\Omega_0$ を出来るだけ小にせねばならぬ。即ち出来るだけ平行光束を利用せねばならぬ。この場合には廻折は可逆的でなくなる。

又不規則な條線格子に於ける廻折も非可逆的であることが容易に判る。

参 考:

M. v. Laue: Ann. d. Phys. Bd. 20 (1906), 365; Bd. 23 (1907), 1; 795; Phys. ZS. Bd. 9 (1908), 788; Ann. d. Phys. Bd. 30 (1909), 225.

§ 40. 溫度輻射の法則

暗黒體、暗黒輻射に就いては既に前節にて述べたが、熱せられた物體から放射される輻射の性質を今少し詳しく説明しやう。この溫度輻射の法則は量子理論の根源をなすものであつて、こゝでは單に古典的理論から論じ得る點だけにとゞめる。

一物體から放射される温度輻射はその物體の温度の函数であつて、その温度が變化すればそのスペクトル中のエネルギー分布従つて總エネルギーが修正される。加之或温度に於ける物體の輻射能はその吸収能と關係して居て、完全に最も良く吸収する物體（暗黒體）は各温度にて放射の強さ極大の物體である。然し如何なる物體でも普通完全に凡ての振動數に對して吸収すると云ふものはないから、この暗黒體の定義に適ふものを見出さねばならない。完全な吸収をしない様な物體で造られた壁で囲まれた洞空に小さな口径の開きを取れば、その開き口の表面は凡ての輻射に對して完全吸収をなす絶對暗黒と見做される。實際その口を通過して洞空内に浸入した光はその壁面に當る度に部分的に吸収され、反射される。多くの回数この種の反射をすれば、遂には全部吸収されるに至る。完全吸収の表面要素と見られるその洞空の口から放射される輻射は、その壁が全部一様に温度 T に熱せられて居る時に如何なる特性を持つて居るか。これを知るためにはその T 度なる壁の洞空内に存在する輻射を検べねばならない。従つて暗黒體の研究から等温洞空内にある熱に起因する輻射（温度輻射）の研究に移り、これが暗黒輻射の考へられる理由である。

その洞空が眞空の場合には直線的に傳播する種々なる振動數の光線があらゆる方向に進んで居て、 df 表面を直角に通過する、 df の法線の周りの空間角 $d\Omega$ 内の方向に、 dt 間にその輻射が運搬するエネルギーは $dE = J df d\Omega dt$ なることは明かである（ J はその輻射の總比強度である）、それは一般に時間、座標空間角の位置の函数である。その總輻射を分析して ν と $\nu + d\nu$ との間の振動數の波が運搬するエネルギーを dE_ν とすれば、 $dE_\nu = J_\nu d\nu df d\Omega dt$ で、 J_ν は振動數 ν ($d\nu$ 間) の輻射の比強度を意味し、 $J = \int J_\nu d\nu$ である。比強度の代りにエネルギー密度 u を考へれば、眞空中を傳播する平面波に對して c を眞空中の光速として $J = uc$ な

る關係がある。これは1秒間に光に垂直な單位面積上へ落ちるエネルギーは 1 cm^2 の底面、高さ c なる圓筒内に含まれるエネルギーに等しいことを意味して居る。與へられた一點に於ける輻射の總密度は $u' = \frac{1}{c} \int J d\Omega$ で、若し凡ての方向にて等しい比強度を持つ輻射ならば、 $u' = \frac{4\pi J}{c}$ となる。振動數 ν ($d\nu$ 間) の輻射のエネルギー密度 u'_ν に對しては $u'_\nu d\nu = \frac{4\pi J_\nu}{c} d\nu$ 、空間角 $d\Omega$ 内の傳播方向の振動數 ν ($d\nu$ 間) の輻射のエネルギー密度は $u_\nu d\nu d\Omega = \frac{J_\nu}{c} d\nu d\Omega$ である。

眞空でない屈折率 $n(\nu)$ を持つ媒質中に於ては §37 で考へた様に位相速度 $v = \frac{c}{n(\nu)}$ と群速度 $g = \frac{c/n}{1 + \frac{\nu}{n} \frac{dn}{d\nu}}$ とを考へねばならない。振動數 ν なるシグナルの傳播速度はその振動數が吸収帶の近所になればその群速度に等しい。その吸収帶内の振動數に對しては群速度は異常値を取つて無限大にも負にもなり得る。その異常範圍を除外すれば、従つてエネルギー運搬の速さは群速度である。

分散媒質中の波の強度及びエネルギー密度は如何に定義されるかと云ふに、平面波の場合に A なる振幅の電場の強さ \mathcal{E} は $\mathcal{E} = A \cos 2\pi\nu \left(t - \frac{r}{v} \right)$ で、非分散媒質中ではエネルギー密度 u は $u = \frac{\epsilon}{8\pi} \mathcal{E}^2 + \frac{1}{8\pi} \dot{\mathcal{E}}^2 = \frac{\epsilon A^2}{8\pi} \left(\nu = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \right)$ で與へられるから、1秒間に單位面積（光に垂直な）を過して運搬されたエネルギーで測られる波の強度 J は $J = uv = \epsilon v \frac{A^2}{8\pi}$ で與へられると同様に、分散媒質中では上記の $\epsilon(\nu)$ とは異なる $\epsilon_1(\nu)$ を取つてエネルギー密度は

$$u = \frac{\epsilon_1(\nu)}{8\pi} \frac{A^2}{8\pi}, \dots \dots \dots (40.1)$$

而して強度はエネルギー傳播速度 g_1 を導入して

$$J = \epsilon_1(\nu) g_1 \frac{A^2}{8\pi} \dots \dots \dots (40.2)$$

で定義される。この g_1 は振動数 ν が異常分散帯中になければ群速度 g に等しい。この g_1 の値は真空と ϵ_1 を電媒常數として持つ媒質との境界面に於ける屈折法則及びその面に於けるエネルギー恒存則により容易に次の關係にあることが判る。

$$g_1 \epsilon_1 = v \epsilon \dots\dots\dots(40.8)$$

それ故波の強度 J に対しては非分散媒質中でも分散媒質中でも同じ表現が成立つ。然るにエネルギー密度は分散媒質に対して異つた値を持つて、それは (40.1) より明かに

$$u = \frac{J}{g_1} \dots\dots\dots(40.1')$$

で與へられる。

單位體積中に N 個の振動子を考へて既に前章分散の節に述べた如く $\omega \neq \omega_0$ の處では

$$\frac{v}{g} = 1 + \frac{4\pi N e^2}{\epsilon_r m} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \dots\dots\dots(40.4)$$

なる關係が得られる。又エネルギー密度の計算も容易に出來て、 N 個の共鳴子の運動のエネルギー、ポテンシャルエネルギーの計算から (40.3) を利用して

$$\frac{v}{g_1} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_r} = 1 + \frac{4\pi N e^2}{\epsilon_r m} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \dots\dots\dots(40.5)$$

を得る。 ϵ_r は ϵ の實數部を意味する。真空の電媒常數を ϵ_0 とすれば、 $\frac{c}{v}$ は $\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}$ の實數部であつて、その虚數部は吸收係數を與へるのである。

かくして γ に関する項を無視すれば、即ち異常分散帯を隔つた處では $\frac{v}{g}$ と $\frac{v}{g_1}$ とは同一値を取ることが判る。シグナルの速度 s は異常分散帯中では正確に定義出來ないが、大體の狀況を圖示すれば $\frac{c}{v}, \frac{c}{g}, \frac{c}{s}, \frac{c}{g_1}$ の ω に対する變化は第 73 圖の如くなる。

溫度輻射に関する問題に再び戻つて、 $\epsilon, \epsilon_1, g_1, v$ 等が振動數の函數であるから非分散媒質中の如く總エネルギー密度と總比強度との間の一般的關係を見出すことは出來ない。先づ ν と $\nu + d\nu$ の間にある振動數 ν を定めねばならない。

$$u_\nu d\nu d\Omega = \frac{J_\nu}{g_1} d\nu d\Omega \dots\dots\dots(40.6)$$

と書いて、若し凡ての方向に等しい比強度 J_ν を

持てば而して媒質が均等ならば $d\Omega$ で積分して

$$u'_\nu d\nu = \frac{4\pi J_\nu}{c} d\nu \dots\dots\dots(40.7)$$

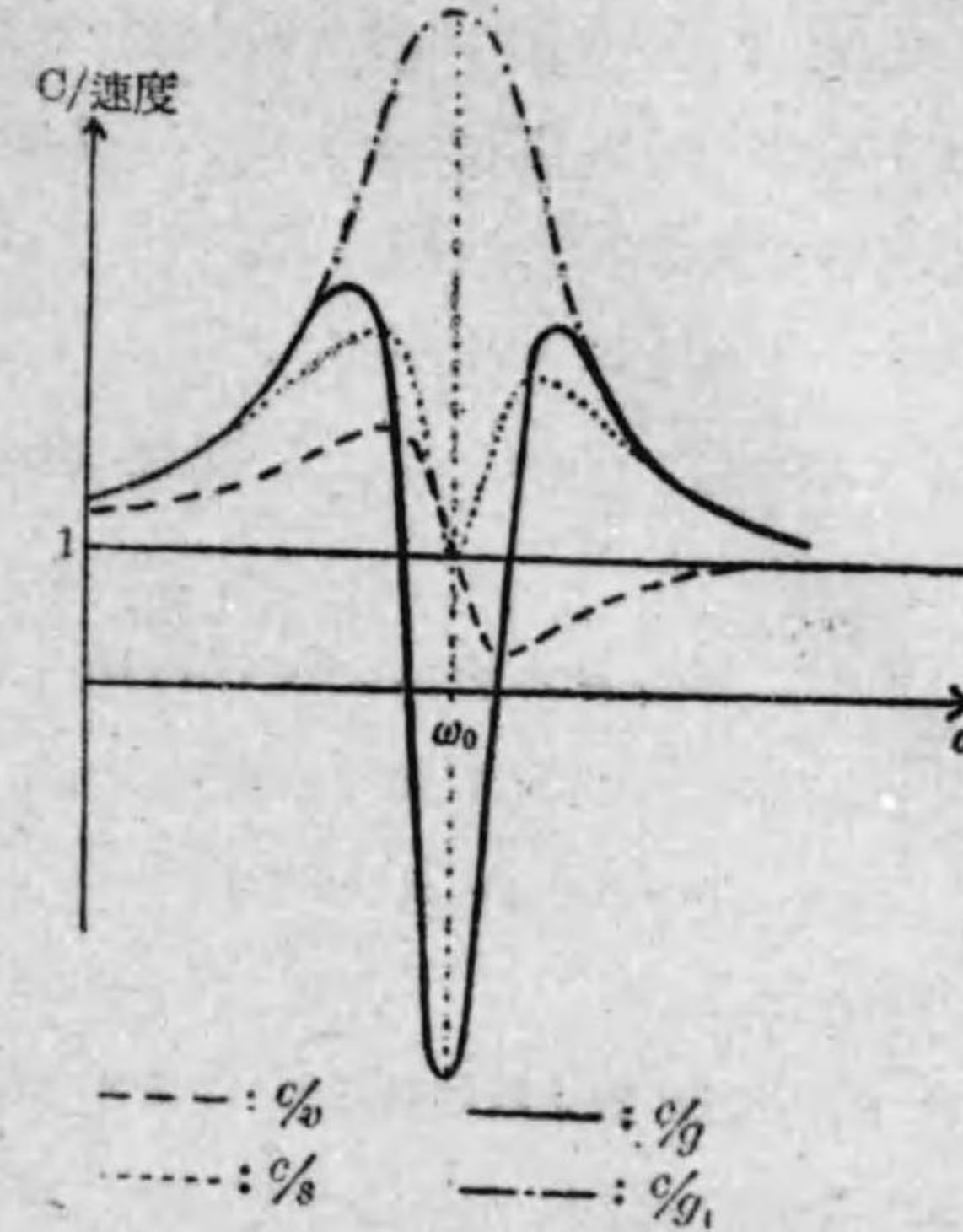
ν に就いての積分を取れば、總エネルギー密度 u 及び總比強度 J として

$$u = \int u'_\nu d\nu = 4\pi \int \frac{J_\nu}{g_1} d\nu, \quad J = 4\pi \int J_\nu d\nu \dots\dots\dots(40.8)$$

を得、 u と J との間に簡単な關係はない。

次に放射と吸收とを考へる。振動數 ν ($d\nu$ 間) に対する一物體の放射係數を e_ν とする。この係數は次の如く定義される。物體の dV なる體積が dt 間に空間角 $d\Omega$ 内に

$$dE_e = e_\nu dV dt d\Omega d\nu \dots\dots\dots(40.9)$$



第 73 圖 吸收線附近に於ける速度分布

なるエネルギーの振動数 ν を持つ輻射を放射する。同様に吸収係数 κ_ν 、散乱係数 d_ν を與へられた物體及び振動数 ν の輻射に對して定義出来る。振動数 ν 、強度 J_ν なる入射波が dl なる厚さの物體を通過して吸収及び散亂によつて

$$dJ_\nu = -(\kappa_\nu + d_\nu) J_\nu dl \dots\dots\dots (40.10)$$

だけ減少される。(40.1') により dt 間に $df \cdot dl = dV$ によつて吸収されるエネルギーは

$$dE_a = \kappa_\nu g_1 u_\nu dV d\nu d\Omega dt \dots\dots\dots (40.11)$$

なることが判る。又散亂されるエネルギーは

$$dE_s = d_\nu g_1 u_\nu dV d\nu d\Omega dt \dots\dots\dots (40.12)$$

で與へられる。

更に df 表面に對する放射係數 $E(\nu, \theta, T)$ と吸収係數 $A(\nu, \theta, T)$ も同様に次の如く定義される。この兩係數は一般に振動数 ν 、溫度 T 、 df の法線と輻射方向とのなす角 θ の函數である。 dt の間にその條件の下に放射されるエネルギーは

$$dE_r = E(\nu, \theta, T) df d\nu d\Omega dt, \dots\dots\dots (40.13)$$

J_ν なる強度の輻射に對して dt 間に吸収されるエネルギーは

$$\begin{aligned} dE_a &= A(\nu, \theta, T) J_\nu df d\nu d\Omega dt \\ &= A(\nu, \theta, T) g_1 u_\nu df d\nu d\Omega dt \dots\dots\dots (40.14) \end{aligned}$$

である。

先に記した暗黒體即ち洞空に df なる開口を持たしたもの、内に於ける ν なる輻射の比強度を J_ν とすれば、 df によつて放射される振動数 ν の、 df の法線と θ なる角の方向に $d\Omega$ 中へ dt 間に放射されるエネルギーは

$$dE_r = J_\nu df \cdot \cos\theta d\nu \cdot d\Omega \cdot dt \dots\dots\dots (40.15)$$

である。従つて T 度なる暗黒體の放射能は比強度 J_ν で表される。

以上の如く溫度輻射に關する諸量の定義を與へて、今熱不透性の洞空内で物質と輻射とが熱平衡状態になる場合を考へる。極大エントロピーの状態が實現されて、カルノー (Carnot) の法則に従つて溫度輻射の諸性質に關する法則が得られる。

1. ランベルト (Lambert) の法則

各點に於て輻射エネルギーは完全に散され、凡ての輻射方向に對して比強度は等しい。一つの輻射に就いての可能な二つの偏光に對してもその比強度は等しい。この法則は自明に近いもので、暗黒體に對して放射能は $\cos\theta$ に比例して、(40.15) にて J_ν は θ に無關係となる。

2. キルヒホッフ (Kirchhoff) の法則

溫度 T に於ける振動数 ν ($d\nu$ 間) の輻射の比強度 J_ν は一般に各點に於て光の傳播速度 v の函數である。然し $J_\nu v^2$ なる積は ν と T の普遍函數で、各媒質の特性には據らない。この普遍函數を $\Phi(\nu, T)$ とすれば、

$$J_\nu = \frac{1}{v^2} \Phi(\nu, T), \dots\dots\dots (40.16)$$

従つて (40.6) より

$$u_\nu = \frac{4\pi}{g_1 v^2} \Phi(\nu, T) \dots\dots\dots (40.17)$$

となる。従つて (40.9)、(40.11) より明かな如く、溫度 T なる洞空中に置かれた與へられた物體は dt 間にそれが放射するだけの振動数 ν のエネルギーを吸収するから、

$$\frac{e_\nu}{\kappa_\nu} = J_\nu = \frac{1}{v^2} \Phi(\nu, T) \dots\dots\dots (40.18)$$

なる法則が得られ、溫度 T の媒質の振動数 ν に對する放射係數と、吸収係數との比はその振動数、その溫度に對する暗黒體の放射能に等しくなる。

放射する表面に就いてもそれ等の係数 $E(\nu, \theta, T)$, $A(\nu, \theta, T)$ の比は振動数 ν , 偏光性, 入射角 θ , 温度 T が與へられた場合

$$\frac{E(\nu, \theta, T)}{A(\nu, \theta, T)} = J_\nu = \frac{1}{v^2} \Phi(\nu, T) \dots\dots\dots(40.19)$$

となる。

このキルヒホッフの法則を二つの媒質 (その中の傳播速度が v_1, v_2) の境界面に於ける入射光, 反射光と屈折光に就いて考へれば, 容易に

$$J_{v1} v_1^2 = J_{v2} v_2^2, \quad r_1 = r_2 \dots\dots\dots(40.20)$$

なることが判る。前者はキルヒホッフの法則で, 第二式は相對應する二光線に對してその面の反射能が等しいことを示して居る。これはヘルムホルツ (Helmholtz) の一般法則の特別な場合である。

3. ステファン (Stefan), ボルツマン (Boltzmann) の法則

この法則を説明する前に放射の壓力なる概念を導入する。放射が真空中で鏡に垂直に當れば

$$p = \frac{2J}{v} = 2u \dots\dots\dots(40.21)$$

なる壓力を鏡上へ與へることは電磁理論から明かである。こゝで J は入射光の強度, v はその傳播速度, u はそのエネルギー密度を意味する。 u なるエネルギー密度の放射の放射又は吸収に際しては

$$p = u \dots\dots\dots(40.22)$$

だけの壓力を放射の時には放射の傳播方向と逆の方向に, 吸収に際してはその傳播方向に働かす。鏡による平面波の反射 (入射角が θ) にては放射の壓力は $p = 2u \cos^2 \theta$ なる値を持つて居る。

凡ての放射方向に對して總エネルギー密度は u なる完全に散らばる放射で滿されて居る洞空の壁は常に垂直な壓力をうけて, その値は

$$p = \frac{1}{3} u \dots\dots\dots(40.23)$$

である。これは $p = 2u \cos^2 \theta$ なる式から凡ての θ に關して平均を取れば得られ, (40.23) 式はその壁が完全な反射をなす場合にも一部反射, 一部放射する場合でも成立つ。然しこれは真空中でのみ正當で, 物質媒質中では鏡上に働く壓力は複雑な表現を取り, θ 及びその放射の偏光性に關係する。この放射がその比強度が凡ての方向に對して同一な様な放射ならば, その媒質の密度を ρ , $u dv$ を凡ての方向の v (dv 間) なる放射のエネルギー密度として,

$$dp = u dv \frac{g}{v} \left(\frac{1}{3} + \frac{\partial \log v}{\partial \log \rho} \right) \dots\dots\dots(40.24)$$

なる表現が得られる。

さてステファン・ボルツマンの法則とは温度が變化するに際して暗黒體の總放射能 (凡ての振動數に對する) が如何に變化するかを決定する法則である。温度 T なる温度放射を滿して居る體積 V なる真空洞空を考へる。その V 中に含まれた放射の總エネルギー密度が u ならば, 放射の壓力でなされた仕事は $\frac{1}{3} u dV = p dV$, その體系の内部エネルギー變化は

$$dU = u dV + V \frac{\partial u}{\partial T} dT \dots\dots\dots(40.25)$$

で, エントロピー變化は ((39.2) を見よ)

$$dS = \frac{dU + \frac{1}{3} u dV}{T} = \frac{4}{3} \frac{u}{T} dV + \frac{V}{T} \frac{\partial u}{\partial T} dT \dots\dots(40.26)$$

となる。このエントロピー變化 dS が完全微分なるためには $\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{V}{T} \frac{\partial u}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{4}{3} \frac{u}{T} \right)$ でなければならない。この條件は

$$\frac{1}{T} \frac{\partial u}{\partial T} = -\frac{4}{3} \frac{u}{T^2} + \frac{4}{3} \frac{1}{T} \frac{\partial u}{\partial T}$$

即ち
$$T \frac{\partial u}{\partial T} = 4u \dots\dots\dots(40.27)$$

であるから、積分形にして σ_0 なる比例常数を以て

$$u = \sigma_0 T^4 \dots\dots\dots(40.28)$$

なる関係を得る。暗黒体の總放射能 J に対しては $u = \frac{4\pi J}{c}$ より

$$J = \frac{c}{4\pi} T^4, \quad \sigma = \frac{c\sigma_0}{4} \dots\dots\dots(40.29)$$

なる関係が成立つ。この σ をステファン・ボルツマンの常數と稱して、多くの人々の實驗の結果を (40.29) 式と比較して $\sigma = 5.76 \cdot 10^{-12}$ Watt cm^{-2} degree $^{-4}$ なる値が最も確な値とされて居る。

この公式から暗黒輻射の斷熱膨脹の法則を導出し得る。それには (40.26) のエントロピー變化 dS を零にして、 u の代りに $\sigma_0 T^4$ を取れば良くて、即ち

$$\frac{4}{3} \frac{u}{T} dV + \frac{V}{T} \frac{\partial u}{\partial T} dT = 0,$$

即ち
$$\frac{1}{3} \frac{dV}{V} + \frac{dT}{T} = 0$$

従つて

$$VT^3 = \text{const} \dots\dots\dots(40.30)$$

となる。

(40.24) で與へられる様な壓力を及ぼす物質中にての法則を導出することは非常に困難である。非分散物質中ならば、 $g = v$ であるが $\frac{\partial \log v}{\partial \log \rho}$ の項が残つて居て、溫度輻射の問題と固體の熱的性質との関係が論ぜらる可く、特にデバイ (Debye) の比熱の理論が入つて来る。

4. ヴィーン (Wien) の法則

等溫輻射に対するスペクトル中のエネルギー分布の問題は、與へられた溫度 T に於ける一つの共鳴子が持つ平均エネルギーの理論と密接な關係

にある。種々なる理論があるが、凡て

$$u(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{v^2 g_1} W_\nu d\nu \dots\dots\dots(40.31)$$

なる公式に歸せられる。こゝで $u(\nu, T)$ は完全に散亂された輻射のエネルギー密度、 v は今考へて居る媒質中の位相速度、 g_1 はエネルギー運搬速度、 W_ν は溫度 T に於て振動數 ν の共鳴子の持つ平均エネルギーである。この公式は種々なる共鳴子の模型を定義しても常に一般的に成立つものである。種々なる自由度間のエネルギー等分布を結論するためには古典的確率假定を導入すれば充分であつて、各振動子はこの場合平均エネルギーとして

$$W_\nu = kT \dots\dots\dots(40.32)$$

を持ち、(40.31) と組合せれば所謂レーレー (Rayleigh) の公式として次の表現を得る。

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{v^2 g_1} kT d\nu \dots\dots\dots(40.33)$$

(40.31) の正しいことは §37 にて論じた輻射の自由度數の値、例へば (37.21) によつても容易に了解出来る。

一自由度を持つ平均エネルギー $W(\nu, T)$ は二變數即ち振動數 ν と溫度 T の函數であるが、ヴィーンの法則によれば、その函數は

$$W(\nu, T) = \nu F\left(\frac{\nu}{T}\right) \dots\dots\dots(40.34)$$

なる形を取ると云ふのである。従つて等溫輻射のエネルギー密度は (40.31) と (40.34) より

$$u(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi\nu^3}{v^2 g_1} F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu \dots\dots\dots(40.35)$$

で與へられることが判る。この法則の證明は色々の例に就いてなされて居るが、こゝではボルツマン (Boltzmann) の理論に基いての説明を述べる。

一般に週期 τ の週期的體系を變化する時に供給すべき熱量は

$$dQ = 2 \frac{d(\tau \bar{E}_{kin})}{\tau} \dots\dots\dots(40.36)$$

であることはボルツマンの理論より明かである。 \bar{E}_{kin} はその體系の平均運動のエネルギーを意味する。これは最小作用の法則を満足する體系ならば常に満足されるものである。電磁現象にてはこれは成立し、その時に電氣エネルギーはポテンシャル、磁氣エネルギーは運動のエネルギーを表すとすれば良い。この體系はそれが受ける振動の振幅には無関係な振動数を持つ共鳴子の如きとは全々異ふ體系でも良い。たゞ週期 τ があれば良いのである。今興味のあるのは共鳴子の場合であつて、これに對してはその平均運動のエネルギーは總エネルギーの $\frac{1}{2}$ に等しく

$$2 \bar{E}_{kin} = W_\nu \dots\dots\dots(40.37)$$

である。従つて (40.36) は

$$dQ = \frac{d(\tau W_\nu)}{\tau} = \nu d\left(\frac{W_\nu}{\nu}\right) \dots\dots\dots(40.38)$$

と書ける。然るにカルノーの原理によつて $\frac{dQ}{T}$ は完全微分である可く、従つて

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{\nu}{T} d\left(\frac{W_\nu}{\nu}\right) \dots\dots\dots(40.39)$$

處がこの表現の右邊は $\frac{W_\nu}{\nu}$ が $\frac{\nu}{T}$ の函数でなければ積分可能でないから、

$$\frac{W_\nu}{\nu} = F\left(\frac{\nu}{T}\right) \dots\dots\dots(40.40)$$

の時にのみ積分可能である。(40.40) はヴィーンの法則 (40.34) に他ならない。

斷熱的變換をなす場合を特に考へれば、變化を非常にゆつくりなして可

逆的である可く、何等外部と今考へて居る體系との間に熱の變化のない場合で、ボルツマンの公式 (40.36) にて $dQ = 0$, 即ち

$$\tau E_{kin} = \text{const.} \dots\dots\dots(40.41)$$

或は共鳴子に對しては

$$\tau W_\nu = \frac{W_\nu}{\nu} = \text{const.} \dots\dots\dots(40.41')$$

即ち

$$\frac{W_\nu}{\nu} = \frac{u_\nu v^2 g_1}{8\pi v^3} = F\left(\frac{\nu}{T}\right) \dots\dots\dots(40.42)$$

が斷熱的不變量なる根本的量であることが言へる。これはプランク (Planck) の量子の條件

$$W_\nu = n h \nu \quad n: \text{整数} \dots\dots\dots(40.43)$$

(h はプランクの常數) と密接な關係にある。後者によれば上記不變量値は h の整数倍に等しいのである。

このヴィーンの法則の結果として振動数 ν の凡ての方向の輻射の總エネルギー密度 $u(\nu, T)$ は (40.35) で與へられるから、振動数 ν ($d\nu$ 間) 及び空間角 $d\Omega$ に對する比強度 J_ν は

$$J_\nu d\nu d\Omega = \frac{2\nu^3}{v^2} F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu d\Omega \dots\dots\dots(40.44)$$

で與へられる。振動数の代りに波長 λ を用ひれば、

$$J_\lambda d\lambda d\Omega = 2 \frac{v^2}{\lambda^5} F\left(\frac{\nu}{\lambda T}\right) d\lambda d\Omega \dots\dots\dots(40.45)$$

となることは次の關係より明である。

$$J_\lambda d\lambda = J_\nu d\nu, \quad \nu\lambda = v, \quad d\nu = -\frac{v}{\lambda^2} d\lambda.$$

更にヴィーンの法則の結果としてスペクトル中のエネルギー極大の位置が T によつて變位する法則が得られる (ヴィーンの變位法則)。與へられた温度

T に於ける暗黒體のスペクトルは或波長 λ_m の處にエネルギー極大値を持つて居る。それは

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J_\lambda}{\partial \lambda} = 0$$

即ち (40.45) に従つて

$$-\frac{5}{\lambda^5} F\left(\frac{\nu}{\lambda T}\right) - \frac{\nu}{\lambda^2 T} \frac{\partial F\left(\frac{\nu}{\lambda T}\right)}{\partial \left(\frac{\nu}{\lambda T}\right)} = 0 \dots\dots\dots (40.46)$$

の解として得られる。 $x = \frac{\nu}{\lambda T}$ とすればこの式は

$$5F(x) + x \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

と書け、普遍函數 F の形にのみ關係する。従つて各溫度 T に對してスペクトルの極大エネルギー位置は波長 λ_m の處にあつて、それは

$$\lambda_m = \frac{\nu}{x_0 T} \dots\dots\dots (40.47)$$

で與へられることが判る。 x_0 は上記の式の解である。この式は實驗的に良く檢べられて居る。

$$\lambda_m T = 0.294 \text{ cm/degree}$$

なる値が與へられて居る。

5. レーレーの法則, ヴィーンの公式, プランクの公式

以上の考察より明かなる如く、溫度輻射に關して正確に知られないのは $F\left(\frac{\nu}{T}\right)$ なる函數だけである。多くの人々によつてこの函數形を定めやうと試みられた。先づ古い統計理論を基礎にしてエネルギーの等分布を假定すれば、各自由度は溫度 T に於て平均運動のエネルギー $\frac{1}{2} kT$ を取り、調和共鳴子に對しては總エネルギーは平均運動のエネルギーの二倍に等しく、

$$W_\nu = kT, \quad F\left(\frac{\nu}{T}\right) = k \frac{T}{\nu} \dots\dots\dots (40.48)$$

となり、等溫輻射に對してレーレーの公式

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi \nu^2}{v^2 g_1} kT d\nu$$

を與へる。この公式は長波長、高溫度の範圍にては近似的に正しいが、 $\frac{\nu}{T}$ が小でなくなると、全く不正確になる。然も溫度輻射の總エネルギーは $\int_0^\infty u_\nu d\nu = \infty$ になつてこれは理論上許されない。

そこでヴィーンは $\frac{\nu}{T}$ の大なる値に對して成立つ公式を提出した。それは

$$\left. \begin{aligned} W_\nu &= h\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}}, & F\left(\frac{\nu}{T}\right) &= e^{-\frac{h\nu}{kT}} \\ u_\nu d\nu &= \frac{8\pi h\nu^3}{v^2 g_1} e^{-h\nu/kT} d\nu \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40.49)$$

なる表現である。こゝで h はプランクの常數を意味する。然しこの公式の難點は $\frac{\nu}{T}$ の小なる時にレーレーの公式と一致しないことである。

最後にプランクは一見不思議に思はれるエネルギー量子 $h\nu$ なる概念を明確に導入して次の公式を導出したのである。

$$\left. \begin{aligned} W_\nu &= \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, & F\left(\frac{\nu}{T}\right) &= \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \\ u_\nu d\nu &= \frac{8\pi h\nu^3}{v^2 g_1} \frac{d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40.50)$$

この公式によれば $\frac{\nu}{T}$ の小なる値に對してはレーレーの公式と一致した結果を、 $\frac{\nu}{T}$ の大なる値に對してはヴィーンの公式と一致した結果を與へて、實驗的にも凡ての範圍に互つてこの公式は證明された。このプランクの公式即ち溫度輻射の嚴密な正確な法則を得るためには現代の物理學に於て最も重大な役割を演じて居る量子理論の基礎の上に立つて凡てを論じなければならぬ。

参 考:

- M. Planck: Wärmestrahlung. 5. Aufl. Leipzig 1923.
 J. H. Jeans: Report on radiation and Quantum theory. London 1914.
 H. A. Lorentz: Les theories statistiques en thermodynamique (Conférences faites au Collège de France 1912). Leipzig 1916.
 M. v. Laue: Ann. d. Phys. Bd. 18 (1905), 123.
 E. Kretschmann: Ann. d. Phys. Bd. 65 (1921), 310; ZS. f. Phys. Bd. 5 (1921), 77.
 Helmholtz: Handbuch der physiologischen Optik, Leipzig 1856.
 L. Brillouin: Thèse. La Théorie des solides et les quanta. Ann. Ec. Norm. Sup., Bd. 37 (1920), 359; C. R. Bd. 172 (1921), 1167; J. de Phys., Bd. 6 (1925), 337; Ann. de Phys. Bd. 4 (1925), 528.
 G. Kirchhoff: Berl. Ber. (1859), 783; Pogg. Ann. Bd. 109 (1860), 275; Abhandlung. d. Berl. Akad. (1861), 63.
 H. Kayser: Handb. d. Spektroskopie Bd. II. Leipzig 1902.
 J. Stefan: Wiener Ber. Bd. 79 (1879), 391.
 L. Boltzmann: Wiener Ann. Bd. 22 (1884), 291.
 M. Planck: Ann. d. Phys. Bd. 1 (1899), 111.
 W. W. Coblentz: Scient. P. Bureau of Stand. Bd. 17 (1921), 7; J. Opt. Soc. Amer. Bd. 5 (1921), 131.
 W. Wien: Wied. Ann. Bd. 52 (1894), 132; Berl. Ber. (1893), 55.
 Lord Rayleigh: Phil. Mag. Bd. 49 (1900), 539.
 H. A. Lorentz: Theorie d. Strahlung. Leipzig 1927.
 F. Paschen: Wied. Ann. Bd. 58 (1896), 455; Bd. 60 (1897), 662; Berl. Ber. (1899), 405, 959; Ann. d. Phys. Bd. 4 (1901), 277.
 F. Henning: Jahrb. d. Radioakt. Bd. 17 (1920), 30.
 Handbuch d. Phys. Bd. XX, Licht als Wellenbewegung, Weisses Licht. Gesetzmässigkeit schwarzer und nichtschwarzer Strahlung, von L. Grebe.

索 引

- | ア | イ |
|--------------------------------------|------------------------------------------|
| アイコナル 53 | イオン格子 431 |
| ザイデルの — 56, 80 | 異常光線 230, 269, 272 |
| 光學合成體系の — 93 | 異常ゼーマン効果 340 |
| シュワルツシルドの角 — 55 | 異常分散 419, 451 |
| 球面の — 67 | — 帯 490 |
| フランスの — 54 | — の臨界波長 458 |
| アインシュタイン 6, 362, 453, 457, 458 | — の臨界波長 458 |
| 青空の光 349 | — の臨界波長 458 |
| アップ 59, 86 | — の臨界波長 458 |
| — の開口数 87 | — の臨界波長 458 |
| — の正弦条件 83, 85 | — の臨界波長 458 |
| — の不変量 95, 101 | — の臨界波長 458 |
| — のプリズム 121 | — の臨界波長 458 |
| アミチのプリズム 121 | — の臨界波長 458 |
| アラゴ 3, 139, 364 | — の臨界波長 458 |
| 暗黒體 264, 480 | — の臨界波長 458 |
| 暗黒輻射 480, 482 | — の臨界波長 458 |
| — のエネルギー分布 480 | — の臨界波長 458 |
| — の断熱膨脹法則 496 | — の臨界波長 458 |
| 暗帯 274 | — の臨界波長 458 |
| アンペールの分子電流 300, 301 | — の臨界波長 458 |
| | 位相 14 |
| | — 常数 14, 138 |
| | — 速度(法線速度) 216, 218, 471, 489 |
| | — 飛躍 30, 162, 165 |
| | — 平面 17 |
| | 複素 — 258 |
| | 一軸性結晶 229, 230, 335, 344, 364, 378 |
| | — に於る干涉圖 243, 272 |
| | — の常, 異常光線 230, 269, 272, 380 |
| | — の偏光方向 231 |
| | — の法線橢圓體の主断面 231 |

- の法線面 231
 吸収性 — 269
 正, 負 — 231
 旋光性 — 380
 一對の不遊點 86
 糸巻形歪曲 93
 異方性
 —分子 438
 —のテンソル 329
 強制された — 328
 ケル常数の — 項 345
 振動子對の — 因子 448
 人工的 — 328
 色消し 105
 —レンズ 105
 光學體系の — 107
 焦點距離の — 106
 像平面と像の大きさの — 108
 プリズム體系の — 132
 色収差 104
- ウ**
- ウィーナー 170
 ヴィーン 391
 —の公式 501
 —の法則 496, 499
 ウェーバー 4, 20
 右圓波 379
 右圓偏光性 38, 374, 436, 447, 448
 ヴェルデの常數 335, 338, 339, 434
 右晶 364, 381
 薄いレンズ 77, 102, 105
 ウッド 31, 419
 唸り 178
- エ**
- エアリー 166
 —の虹理論 287
 永年方程式 439
 液浸對物レンズ 67
 液浸法 87
 エシユロン(階段格子) 174
 X線 198, 202
 —干渉散亂 198, 202
 —分光學 199
 —の屈折率 200
 —連続スペクトル 202
 エーテル 2, 3, 6
 —一部隨伴説 5
 —風 6
 エネルギー
 —恒存則 11, 12, 40,
 87, 214, 218, 408, 480, 484
 —状態の生命時間 410
 —總決算 12
 —速度(光線速度) ... 210, 218, 489

- 密度 489
 —量子 501
 エルステッド 7
 エルミート形式 303, 356
 エワルド 213, 312, 321
 圓錐屈折 236, 238
 内部, 外部 — 237
 —の錐體作圖 236
 エントロピー 362, 472, 480
 —の可加性 483, 484
 —變化 481, 495
 可干渉性光束の — 485
 光束の — 483
 圓二重屈折(圓複屈折)
 336, 364, 380, 436, 444
 圓偏光 37, 259, 339, 374, 379, 405, 433
 —二色性 448
- オ**
- オイラーの角 328
 多くの光線重合に據る干渉現象 164
 オーグストロム單位 105
 オゼーン 311, 365
 —の法則 311
 オームの法則 10
 温度輻射 487, 488
 —の法則 487
 ヴィーン — 496, 500
 キルヒホッフ — 493
 ステファン・ボルツマン — 494
 ブランク — 500
 ランベルト — (餘弦法則) ... 86, 493
 レーレー — 500
- カ**
- 廻折 140, 472
 —格子 196
 — — スペクトルの次數
 183, 198, 206
 — — の分解能 206
 — — 分光器 174, 198
 —公式
 鋭端に於ける —
 194, 196
 圓形開口に於ける —
 187
 矩形, 細隙に於ける —
 184
 格子 — 197
 楕圓開口に於ける —
 190
 導體に於ける — 275
 —の理論 140
 キルヒホッフの — 理論
 147, 196
 ゾンマーフェルドの — 理論

.....151
 ホイヘンスの—理論.....140
 —の熱力學.....485
 フランホーファーの一現象.....
 155, 201, 208
 フレネルの—現象.....155, 192
 廻轉能(旋光能).....
 磁氣性 —.....305, 335, 339, 341
 自然 —.....305, 338, 375
 比—“(一角).....374, 379
 廻轉能率(偶力).....451
 廻轉(螺旋廻)方向.....
 自然旋光(廻轉)に於ける—.....364
 ファラデー効果に於ける—.....338
 ガウス.....
 —の光線屈折學.....56, 72, 211
 —の誤差函數.....180, 420
 —の法則.....12, 25, 147
 可干涉.....136
 —長.....137, 175, 179, 206
 —時間.....137, 175, 180, 206
 —性光束.....484
 — —の溫度.....485
 — —のエントロピー...485
 火曲線..... 58
 角アイコナル.....55, 67
 角倍率(収斂比).....62, 65
 瓦斯體.....

—に對する分散公式.....429
 —に對するモル屈折.....326
 —に對するローレンツ・ローレ
 ンツ法則.....325
 —のケル效果.....346
 —の自然旋光能力の分散.....443
 旋光性 —.....371
 雙極子 —.....346, 360
 活性.....
 液體の自然光學的 —.....371
 瓦斯の自然光學的 —.....371
 結晶の自然光學的 —.....375
 自然光學的 —.....364
 カップリング.....402, 418, 439, 441
 —幅擴.....418
 カドミウムの赤色線波長(長さの單位)
174
 カナール線.....391
 火面..... 58
 カラテオドリ..... 60
 硝子.....44, 105, 114
 —堆..... 42
 —の分散能.....105
 クラウン —.....105
 フリント —.....105, 135
 ガリレー..... 1
 カルノーの法則.....493, 498
 干涉.....136

—可能, 不可能.....136
 —環.....272
 —器械.....171
 —極大の位置.....201
 —屈折計.....171
 —計.....172
 —稿.....159
 —條線.....167
 —スペクトル線の銳度.....167
 —の可視性.....175, 179, 180
 —の次數.....197
 —分光器.....167, 174
 X線の—散亂.....198, 202
 可—光.....136
 吸収性結晶板に於ける—.....271
 結晶板に於ける—.....239
 等厚, 等傾斜—.....163, 173
 反射光に於ける—.....164
 ヤングの—實驗.....158
 ガンス.....362
 完全偏光.....290
 完全導體.....275, 290
 緩和時間.....
 制振振動子の—.....347
 雙極子配置の—.....453, 457
 導體内の電荷密度減少の—.....255

キ

幾何學的陰影.....48, 153, 195
 幾何光學.....45, 287
 —の成立條件..... 48
 擬似(無焦點的)寫像.....60, 63, 65
 輝度..... 87
 基本光束.....471
 境界條件.....25, 42, 168, 276
 鏡徑比.....111
 鏡像.....74, 112
 共心光束..... 57
 共線寫像..... 53
 共鳴.....291
 —位置.....388, 415, 426
 —子(振動子).....383, 389, 403
 — —の強制振動.....407
 — —のスペクトル光分布
388
 等方的— —.....407
 —曲線.....413
 —效果.....443
 —線.....399, 409, 410
 —幅擴.....418, 422
 共軛點..... 60
 逆格子.....203, 312
 逆行的有軸寫像..... 63
 球狀的像.....

—曲面..... 91
 —彎曲..... 92
 —點..... 125
 球面.....
 —遮蔽物..... 149
 —波..... 140, 149, 212
 二次的——..... 142, 143
 發散, 收斂——..... 141
 —を通しての寫像..... 66
 —の角アイコナル..... 67
 導體——に於ける廻折..... 275
 不遊..... 67
 フレネルの帯——..... 151
 球面收差..... 89
 吸光係數..... 359
 吸收..... 383, 407, 409, 414
 線——..... 425
 總——..... 423
 非常に厚い層の——..... 424
 有限の厚さの層の——..... 423
 —曲線..... 422
 —係數..... 270, 490, 492
 —能..... 254, 264, 488
 —率..... 256, 269, 415, 436, 460
 主——..... 271
 吸收狀況.....
 ドップラー効果を考へた場合の——
 419

ドップラー効果を無視した場合
 の——..... 416
 一つのスペクトル線による——..... 414
 吸收性結晶..... 265
 一軸性——..... 269
 二軸性——..... 269
 —の自現干渉像..... 274
 —の主振動..... 267
 —のフレネルの方程式..... 267, 268
 —の振り軸..... 274
 —板に於る干渉現象..... 271
 一軸性——板..... 272
 二軸性——板..... 273
 キュリーの法則..... 341
 ギーベ..... 20
 キルヒホッフ..... 4, 147
 —の廻折理論..... 151, 196, 287, 486
 —の熱輻射法則..... 264, 424, 493
 金屬.....
 —の光學常數..... 262
 —反射..... 258
 ———能..... 262
 ク
 空間格子..... 198
 空間テンソル..... 367
 楔板..... 163
 屈折..... 20, 21, 39, 67, 426, 460

—反射法則..... 50
 —のアッペ不變量..... 95
 —の分散(分散の項を見よ).....
 圓錐——(圓錐屈折の項を見よ)..
 廻轉體表面に於ける——..... 67
 結晶に於ける——..... 230
 原子——..... 325
 二重——(二重屈折の項を見よ)..
 分子光學的——..... 308
 モル——(モル屈折の項を見よ)..
 屈折率..... 21, 417, 423, 426, 460
 —測定..... 430
 —と電媒常數との關係..... 22, 450
 —と密度との關係..... 325
 —分散(分散の項を見よ).....
 —に及ぶ廻轉振動の影響..... 450
 X線に對する——..... 200
 主——の差..... 381
 結晶の——..... 231, 244
 複素——..... 256, 324, 415
 クニッピング..... 202
 クライン..... 53, 60
 クラウン硝子..... 105
 グーリエの五角プリズム..... 121
 グリマルディ..... 1, 140
 グリュンアイゼン..... 20
 グリーンの法則..... 147, 316
 グルストランド..... 104

クーロン・ポテンシャル..... 298
 クーン..... 450
 群速度..... 471, 489
 ケ
 螢光..... 396, 399
 —現象の繼續時間..... 347
 —殘光..... 391
 携帶電流..... 293
 結晶.....
 —光學..... 213, 320, 364
 —格子..... 306, 375
 正則——..... 321
 —格子光學..... 213, 312, 319
 —細胞..... 200
 —底面點..... 159
 —による散亂..... 200, 362
 —の殘留線波長..... 430
 —の電氣的格子理論..... 431
 —の分散常數..... 430
 —板に於る干渉..... 239, 271
 光學的——分類..... 228
 吸收性——..... 265
 旋光性——..... 375
 ケッテラー..... 31, 419
 ケル..... 344
 —效果..... 344
 ———と分極搖動..... 362

——の惰性347
 ——と温度との関係 ...346
 ——と散亂との関係
 351, 360, 362
 ——の分散438, 442
 瓦斯の——346
 正——347
 雙極子瓦斯の——360
 無雙極子物質の——
358, 360
 ——常數345, 347, 360, 361, 442
 總——361
 ——の異方性項 ...345, 360
 ——の雙極子項346
 ——セル347
 限界條件283
 限界値問題(波動方程式)279
 限外顯微鏡202
 檢光子238, 239, 260
 減光法則268
 原子核の運動24
 原子屈折325
 原子分極325
 コ
 光學異性365
 光學器械の分解能88
 光學軸(光學的法線軸)229

光學的
 ——軸性結晶229, 230, 243, 269,
 335, 344, 345, 364, 378, 380
 ——廻轉能321
 ——活性364, 365
 ——結晶分類228
 ——主軸系357
 ——電媒常數325
 ——二軸性結晶229,
 231, 248, 269, 341, 378
 ——法線軸225
 楨杆狀445, 450
 光強度(光の強さの項を見よ)389
 光吸收源の古典的模型407
 口徑角109
 光源の古典的模型383
 光散亂321
 格子
 ——イオン431
 ——廻折196
 ——階段174
 ——空間198
 ——結晶306, 375
 ——の底面199
 結晶の——光學213, 312, 319
 結晶の電氣的——理論431
 逆——203, 312
 原子——199

——結晶構造205
 ——細胞201, 203, 312, 317
 ——常數196
 ——スペクトル198
 ——點200, 312, 467
 ——の次數206
 ——の條線數206
 ——の分解能206
 ——分光器174, 198
 ——ポテンシャル314
 ——網面202
 條線——198, 202, 485
 雙極子——315
 分子——312
 平面網——198, 202
 格子廻折の可逆性486
 コーシ4, 213
 ——の法則193
 ——の分散公式428
 膠質溶液275, 287, 349
 光線45
 ——曲面223
 ——軸229
 ——の位置236
 ——速度(速度の項を見よ)
 ——楕圓體面226, 229
 ——場52
 ——方程式(フレネルの——)

.....221
 ——率218
 光束57
 基本——471
 ——の焦點的特性56
 ——の主光線57, 109
 ——の自由度469
 ——の非點隔差58
 分散媒質中の——471
 光速度測定20
 ゴースト167
 光度(光の強さ)86
 ——測定法の根本法則86
 光傳播
 異方體內の——213
 吸収性結晶體內の——265
 眞空中の——17
 等方性物質中の——17
 導體内の——254
 分子光學的——308
 光能率の二次搖動322
 光ベクトル171, 286
 コーラウシユ4, 20
 光量子463
 光路47
 ——差49
 結晶に於ける等光路差曲面244
 絶對的——172

相対的—172
 五角プリズム121
 五収差 89
 黒帯(黒十字)241, 247, 252, 272
 主—241
 コットン効果(圓偏光二色性)448
 コットン・ムートン効果341, 437
 —の常數343
 —の分散438
 コップフェルマン419
 コヘレント光(可干渉光)136, 137
 コマ 90
 薄いレンズの—103, 104
 固有振動
 —回数394, 396,
 407, 415, 422, 426, 428, 436
 強制された—441
 自由振動子の—384
 定常—464
 洞空の—463
 分子の—399
 固有ベクトル439
 コリオリの力338
 コルニユの螺旋195

サ

最短光路の原理(フェルマ) 52
 ザイデルのアイコナル
 56, 80, 83, 88, 93

ザイデルの公式(有軸レンズ體系の三
 収差に対する) 99
 細胞467
 結晶—200
 格子—201, 203, 312, 317
 サヴァール板247
 左圓波379
 左圓偏光性38, 336, 374, 436, 447, 448
 左晶364, 381
 砂糖(左—, 右—)365
 作用空間310
 三角プリズム114
 三次の収差 88
 三斜晶系229
 三方晶系229
 散亂311, 348
 —係數492
 —光(散光)275, 288
 — —の總エネルギー .. 355
 — —の強さ288, 354
 極大, 極小の強さ比358
 — —の偏光性
 288, 351, 354
 —の分散438, 443
 液体内の光—361
 ケル常數と—との關係358
 固体内の光—361

ティンダル—(擴散)311, 362
 分子光—293, 308,
 311, 321, 348, 351, 438, 472
 ラマン—362
 レーレー—291, 353, 357, 443
 残留線430
 Circle of confusion110

シ

シェンロック394
 磁氣
 —廻轉能341
 — —の常磁性部分343
 — —の反磁性部分343
 —光學335
 —的エネルギー11, 340
 —的旋光性436
 —的ベクトル286
 —二重極288
 —能率293, 365, 435
 勵磁能率301
 平均—366
 シグナルの傳播速度489
 軸
 —分散216
 —軸性結晶の—230
 二軸性結晶の—233
 旋光性結晶の—378

軸對稱的共線寫像57, 74
 自現干渉像274
 シェーラー199
 ジーグベン199
 四重極子288, 391, 400
 自然光41, 274, 289, 358, 359
 自然旋光能力の分散443
 自然線幅390, 391, 410, 422
 相対的—390
 次微粒子287
 †波長板 44
 絞り(遮蔽物)109
 —の作用109
 —なしレンズ102
 口径—109
 視野—109
 肉眼の—110
 補充的—157
 視野角110
 射影角109
 斜方晶系229
 ジャイレーション
 —曲面379
 —テンソル369
 —ベクトル375
 —の常數371
 —のパラメーター376
 射出瞳81, 109

寫像..... 53	主黒帯 241, 247, 273
擬似(無焦點的, 望遠鏡的)——	主電媒常數..... 266
..... 60, 63, 65, 77	主等色曲線..... 242
逆行的——..... 63	主分極能..... 324
共線——..... 59	——テンソル..... 324, 357
球面を通しての——..... 66	主方位角..... 259
集会的(收斂的)——..... 63	主入射角(金屬反射の)..... 259
順行的——..... 63	主要點..... 62
點的——..... 67	主要面..... 62
發散的——..... 63	シュタルク效果..... 400
プリズムを通しての——..... 124	——の強度分布..... 401
有軸——..... 61, 63	線的——..... 403
レンズを通しての——..... 77, 78	シュテルン..... 400, 401
——の合成..... 64	ジュール熱..... 10, 11, 254
——の方程式..... 62, 65, 95	シュワルツシルド..... 53, 85
寫像收差論.....	——の角アイコナル..... 55
幾何學的——..... 80	週期(振動時間)..... 14
波動的——..... 209	收斂球面波..... 141
ジャマンの屈折計..... 171	收斂比(角倍率)..... 62, 65
自由度..... 463	收差(像收差, 寫像收差論の項を見よ)
光束の——..... 469, 471, 472	色——..... 104
電磁——..... 472	五次——..... 104
——數..... 465, 469, 474	三次——..... 80, 88, 94
自由行路..... 397, 411	有軸レンズ體系の三次——..... 99
——のマックスウェルの式..... 398	——加法可能法則..... 97
自由電子..... 294	——曲線..... 89
主吸收率..... 271	準安定状態..... 391
主光速度..... 220	照角..... 203

常光線..... 230, 269	————加法法則(トーマス・クー
常磁性旋光能力の分散..... 435	ン)..... 401, 441
常磁性體..... 10, 340	強制——..... 407, 411
消散力..... 391	原子の假想的——..... 409
焦線..... 57, 58, 91	制振調和——..... 386, 390
條線格子..... 198, 202, 485	調和——..... 383, 403, 407
衝突制振..... 385, 391, 395	非制振(自由)線的振動子..... 383, 407
——常數..... 398	——對..... 445
焦點..... 48, 61, 73, 208, 209, 211	————の異方性因子..... 448
——距離..... 62, 73	————の杆狀楕..... 445
————の色消し(色消しの項を	振動數條件..... 409
見よ).....	滲出常數..... 455
焦面..... 58, 60, 210	ジーンズ..... 464, 474
真空の光傳播..... 13	振幅..... 14
真空の波長..... 14	——の法化..... 276
人工的異方性..... 328	金屬反射に於る——比..... 259
振動.....	複素——..... 17
——數, ——回數..... 14	——ベクトル..... 34
——の方位角..... 42	フレネルの——公式..... 29
——の楕圓..... 38	
金屬反射に於る——..... 259	
——方向..... 37, 225	
——方程式(強制廻轉振動の)..... 383	
——面..... 37	
振動子(共鳴子の項を見よ).....	
——の固有振動回數..... 394, 407	
——の強度..... 387, 394	
——の強き因子... 408, 409, 414, 441	

ス

スカラー波..... 17
スカラーポテンシャル..... 278, 295
ステファン・ボルツマンの常數..... 496
ステファン・ボルツマンの法則..... 494
ストークス..... 4, 458
——の法則..... 26, 50
ストラウベル..... 129

スネリユース 1
 —の屈折法則.....21, 69
 スペクトル・エネルギー分布480, 488
 スペクトル系列.....402, 403
 スペクトル項.....402
 スペクトル線.....
 —の強さ分布.....416
 —の超微構造.....182
 —の彎曲(プリズムによる).....124
 —幅.....388
 吸収——.....
 共鳴効果による——.....413
 自然線幅.....410
 衝突制振とドップラー効果
 による——.....412
 放射——.....
 圧力による幅變化.....403, 422
 自然線幅(放射制振).....389
 衝突制振幅.....398
 シュタルク効果による幅...403
 ドップラー幅.....394
 ——測定.....
391, 394, 399, 419, 422
 ——と可干渉長.....175, 179
 スペクトルの純粋度.....132, 175
 スモルコウスキー.....362

七
 正一軸性結晶.....231
 正規座標.....439
 正規ゼーマン三重線.....437
 正規分散.....419
 正弦法則.....471, 486
 制振.....
 —共鳴體.....181
 —常數.....395, 407, 414, 426
 —調和振動.....385
 —力.....302
 衝突——.....385, 390, 395, 407
 ドップラー効果——.....385, 392, 407
 輻射——.....385, 389, 407
 正則結晶.....364
 生命時間.....
 エネルギー状態の——.....410
 平均——.....386
 静電雙極子.....299
 正方晶系.....229
 接線的像曲面.....91
 接線的像點.....125
 接線的像彎曲.....92
 節點.....62
 絶對屈折率.....21
 ゼーマン効果.....338, 403
 異常——.....406

逆——.....432
 縦、横逆——.....436, 437
 縦、横——.....405
 ゼルマイヤー.....419
 選擇反射.....430
 線の二重屈折.....342, 433, 436, 437
 線偏光性.....37, 289
 旋光性(光學的廻轉能).....321
 —液體.....371, 381
 —瓦斯體.....371
 —結晶體.....375
 ——の干渉現象.....381
 —存在の條件.....446
 等方的——物質に對する光學的根
 本方程式.....373
 —有機化合物.....450
 旋光能力(光學的活性).....
364, 375, 379, 380, 435, 445, 450
 一軸性結晶の——.....381
 二軸性結晶の——.....381
 瓦斯、液體の——の分數.....443
 旋光パラメーター.....443, 446
 全反射.....30, 117
 ——と偏光性との關係.....43
 ——の臨界角.....31, 33
 全偏光.....355

ソ
 雙極子.....24, 288, 299, 305, 309,
 383, 400, 401, 403, 414, 451
 —液體.....326
 ——の分散.....450
 ——の異常分散.....460
 —瓦斯.....346, 360
 —球面波.....308, 309, 312, 319
 —格子中の光波傳播.....315
 —格子のポテンシャル.....315
 —の極大振幅.....350
 —の空間密度.....299
 —の自由振動.....383
 —の能率.....310, 451
 —輻射.....287, 400
 —物質.....346
 無——物質.....345, 358
 ケル常數の——項.....346
 振動——の場.....311, 315, 349
 靜電——.....299, 314
 像.....
 —界.....54
 ——の焦面.....60
 —角.....110
 —曲面(球狀的、接線的).....91
 —收差論.....
 幾何學的——.....80

波動的(廻折論的)—— 205
 — 點の作圖 68
 — 歪曲 92
 — 平面の色消し 108
 — 彎曲 91, 92
 相對性原理 6, 262
 相對的屈折率 21
 相對的スペクトル線幅 207, 394
 速度
 位相(法線)—— 216,
 218, 220, 269, 471, 489
 エネルギー(光線)—— 216, 218, 489
 群—— 471, 489
 光—— 20
 主—— 220
 複素—— 267
 側倍率(横倍率) 62
 ゾンマーフェルド 151, 196

タ

第一近似寫像理論 72
 帯磁率 341
 帶狀スペクトル 450
 對稱的炭素化合物(雙極子なし) 25
 楕圓振動 378
 楕圓偏光 35, 259, 267, 289, 443
 ターブル 80
 多重極子 288

多色性 269, 291
 樽形歪曲 93
 單弦調和振動 46
 單斜晶系 229
 彈性光波動説 3, 7
 斷熱的不變量 499
 斷熱的變換 498

チ

遲滯ポテンシャル 295
 調和振動
 — 子 383, 403, 407
 單弦—— 16, 384
 制振—— 385
 直交光線體系 50

テ

定常波 169, 464
 ティンダル現象(效果) 311, 321, 349
 362
 ディアコースティック 67
 デュルレーデ 42, 365, 431
 デカルト 1
 デバイ 24, 199, 209, 453, 496
 デバイ・シェラーの實驗 202
 デボラリゼーション 358, 443
 — 度 290, 358
 — の主軸系 443

磁場による—— 443
 導體球による散亂光の—— 290
 分子的散亂光の—— 355
 天光
 — の青色 351
 — の照度分布 355
 — の偏光度 361
 テンソル
 — 成分の平均値 323, 332
 光學電媒常數—— 214, 265
 チャイレーション・テンソル 369
 電氣傳導度テンソル 265
 分極能(異方性)テンソル
 (分極能の項を見よ)
 電荷の連續性式 10
 電荷密度 9
 電氣光學 335
 電氣的エネルギー 11
 電氣的空間密度 293
 電氣能率 23, 293, 299, 366, 375,
 408, 412, 413, 426
 電氣傳導度
 — のテンソル 265
 — — — — — の主軸 266
 完全—— 291
 比—— 8
 電磁光波動説 5, 7, 22, 25, 213
 電送寫眞 347

點的寫像 59, 67, 83
 電導電流 294
 電媒常數 8, 325, 341, 345, 427, 460
 光學—— 325, 460
 主—— 216, 345, 375
 靜的—— 460
 複素—— 459
 電媒テンソル 214, 265
 — — — — — の主軸系 215
 電媒變位 325, 372
 電流密度 293

ト

同位相表面 48
 透過能力 40
 トーキー 347
 等傾斜の干涉曲線 163, 173, 174
 等厚の干涉曲線 163, 173, 174
 透磁率 8
 等軸晶系 228
 透磁作用 293
 等照度曲線 241
 等色曲線 241, 245, 252
 主—— 242
 導體(電氣傳導度, 金屬の項を見よ)
 10, 254, 258, 268
 完全導體 275, 290
 — に於る廻折, 散亂光 275

ドップラー 5
 — 効果 385, 392, 410, 413, 419, 422
 — 幅 394, 413
 トーマス・クーンの加法法則 (振動子の強き因子) 410, 441
 トムソン 4
 — 角 290

ナ

波の位相速度 (法線速度) 216
 波の強度 489
 総比強度 491

ニ

ニコルプリズム 238
 二次波 22, 142, 308
 虹の理論 287
 二軸性結晶 225, 231, 248, 341
 — の一定位相差面 250
 — の光線曲面 233
 — の光線軸 233, 236
 — の法線曲面 232
 — の法線軸 232, 236
 吸収性 269, 273
 旋光性 379, 381
 — — の干渉圖 248
 第一, 第二主位置 252

二重極の能率 288
 二重屈折 (複屈折) 237, 342, 347, 364, 376
 結晶に於る線の 237
 磁氣的圓 336
 磁場内の線的横 343, 437, 438
 自然圓 364, 380
 人工的 345
 電氣的 — の惰性 347
 二色性 448, 450
 圓偏光 448
 入射 (投射)
 — 角 21
 主 259
 — 垂線 27
 — 瞳 81, 109
 — 面 21
 ニュートン 2, 141
 — 環 161, 163
 — のポテンシャル 147

ネ

熱輻射 264
 熱力學的平衡状態 480
 熱力學と光學 463
 ノイマン (C) 4

ノイマン (F) 4, 213
 ノイマン函数 281
 能率
 — 搖動 357
 磁氣 293, 365, 435
 — — の搖動 302
 電流環の 301
 雙極子 310, 451
 電氣 23, 293, 299, 366, 375, 408, 412, 413, 426

ハ

ハイディンガー 238
 波
 — 數 15
 — 前面 22
 — 節 170
 — 長 19
 — 頭 218
 — 腹 170
 — 路 16, 19
 波動
 — の浸入深度 257
 — ベクトル 312
 — 法線 21
 — 方程式 46, 47, 141, 257, 279, 295, 309, 315
 — 面 22

— 列 175
 白光 291
 薄層の色 161
 ハーゲン 263, 264
 パーシェン・バック効果 406
 バストゥール 365
 發散球面波 141
 發散的有軸寫像 63
 場のエネルギー 11
 バビネの原理 157, 190
 ハミルトン 3, 53
 — の特性函数 53
 ハル 199
 バルトリヌス 2
 ハロ (暈) 191
 ハンケル函数 281
 反磁性體 10, 340
 反射 20
 — 能力 40
 — 理論 (分子光學的) 310
 — 率 430
 金屬表面に於る 258
 空 30, 117
 選擇 430
 反射光 20, 39
 — に於る干渉 164
 — の強さ 29
 — の偏光 39

半値幅(スペクトル線幅の項を見よ) ... 388, 390
 半分衝突幅(スペクトル線幅の項を見よ) ... 398
 半分ドップラー幅(スペクトル線幅の項を見よ) ... 394

ヒ

ビエの半レンズ ... 160
 ビオ ... 3, 364
 —の公式(旋光) ... 445
 —のプリズムの式 ... 115
 ビオ・サバールの法則 ... 300
 非横波の波 ... 31
 比廻轉角(旋光性) ... 374
 光 ...
 —の擴散(ティンダル)現象 ... 311
 —の錯行法則 ... 393
 —の傳播基本方程式 ... 8
 —の強さ(温度)(ポインティングベクトルの項を見よ) ... 11, 39, 86, 137, 386
 散亂光の— ... 288
 スペクトル線内の—分布 ... 176, 180, 181, 388, 401
 全反射光の強さ ... 32
 總光強度 ... 389
 比光強度(輝度) ... 87

平均— ... 387
 —の横波性 ... 3, 16, 139, 217, 286
 非共心光束 ... 57
 比旋光度 ... 379
 非旋光性結晶 ... 377
 非對稱的炭素 ... 365
 非點隔差 ... 58
 非點收差 ... 91, 92, 103

フ

ファブリー・ブイッソン ... 394
 ファブリー・ペロー干渉計 ... 173, 182, 183
 ファラデー ... 4
 —効果 ... 335, 364
 —の分散 ... 432, 434
 —常數 ... 338, 427
 —の感應法則 ... 7
 ファントホッフ ... 365, 446
 フィゾー ... 3, 20, 175
 負一軸性結晶 ... 231
 フェルマ ... 1
 —の原理(最短光路) ... 52
 フォーカルプレーン ... 58
 フォーグト ... 31, 238, 365, 381
 輻射 ...
 —温度 ... 480
 —制振常數 ... 389, 390, 395
 —の壓力 ... 495

—のエントロピー ... 480
 —變化 ... 481
 —密度 ... 481
 —の比エントロピー ... 482
 —能 ... 488
 —の自由度 ... 464
 —數 ... 469
 —の比強度 ... 488
 —比密度 ... 480
 —搖動 ... 474
 暗黒— ... 480, 482, 496
 温度— ... 487, 488
 —の法則 ...
 (温度—の項を見よ)
 複素 ...
 —位相 ... 258
 —屈折率 ... 256, 324, 415
 —速度 ... 267
 —電媒常數 ... 459
 —波數 ... 276
 フーコー ... 4, 20
 物界 ... 53
 —の焦面 ... 60
 フック ... 1
 物質方程式 ... 10, 213, 219
 不導體 ... 10
 部分波(部分振動) ...
 電氣—, 磁氣—

... 286, 287, 288, 350
 部分偏光性 ... 41, 289
 不遊球表面 ... 67
 不遊點 ... 67
 フェヒトパウアー ... 399
 ブラウン運動 ... 453
 ブラッグ ... 199, 317
 —の實驗 ... 202
 —の條件 ... 203
 ブラッドレー ... 5
 ブランク ... 501
 —の常數 ... 501
 —の量子條件 ... 499
 フランホーファーの廻折現象 ... 155, 201, 208
 圓形に於る— ... 187
 矩形, 細隙に於る— ... 184
 その他の開口に於る— ... 190
 ブランス ... 53, 60
 —のアイコナール ... 54
 プリズム ...
 —スペクトル ... 131
 —體系 ... 118
 —による擴大作用 ... 130
 —によるスペクトル線彎曲 ... 124
 —による像廻轉 ... 129
 —の屈折角 ... 114
 —の最小偏角 ... 117

- の主断面 114
 —の線 114
 —の偏角 114
 —の面 114
 —の分解能力 133
 —の分散 131
 —の分散度 133
 グーリエの五角 121
 三角 114
 ニコル 238
 フレネルの複 160
 フレネルの平行六面體 44
 ヘルシェルの二重 120
 フリードリッヒ 202
 ブリュースター 41, 274
 フリント硝子 105, 135
 ブルフリッヒ(屈折率測定法) 118
 フレネル 3, 44, 139, 140, 142, 143, 147, 149, 151, 213, 364, 379
 — 随伴係数 3
 —の廻折現象 155
 半平面の直線的鋭端に於る 192
 —の光線方程式 221
 —の振幅公式 29, 308, 311
 全反射に対する 32
 —の積分 157
 —の帯 149
- の二枚鏡 160
 —の平行六面體プリズム 44
 —の複プリズム 160
 ●の法線方程式 220, 267, 276
 プロイ- (M. de) 199
 分解能 175, 205
 光學的 472
 格子の 182, 206
 調和 473
 プリズムの 133
 分極 293
 —能(變形能) 346, 362
 極大光學的 346
 主 324, 345, 357
 — — テンソル 302, 322
 * 330, 333, 344, 415, 435
 — — の対角和 305
 — — のテンドン項とラ
 マン項 362
 — — の方向 346
 分子の平均 308
 平均 324, 444
 — — と電媒常数との關係 325
 —楕圓體
 實數 304
 平均 324
 — — の方程式 323

- 搖動 362
 分光學 402
 分散 383, 414
 —曲線 391, 420, 422
 —公式 410, 428
 瓦斯體の 429
 コーシーの 428
 —常数 430
 —狀況
 スペクトル線による 417
 ドップラー効果を考へた場合
 の 419
 ドップラー効果を無視した場
 合の 416
 透明範圍に於る 426
 —能(度)
 硝子の 105
 プリズムの 133
 廻轉 434
 屈折の
 263, 326, 339, 426, 429, 434
 ケル効果の 438
 軸 216
 コットン・ムートン効果の 438
 散亂の 438
 正規, 異常 419, 427
 常磁性旋光能力の 435
- 雙極子液體の 450
 ファラデー効果の 434
 偏光の 291
 分子
 —光學 293
 — — — — の根本概念 302
 —光散亂 351
 —構造 347, 361, 365
 —内の有效電場 302
 —の異方性 345, 358
 —のエネルギー 329, 330
 —の慣性能率 451
 —の加法的混合法則 327
 —の光學的主軸系 357
 —の對稱性狀況 372
 —の直徑(有效断面)
 光學的 — —, 瓦斯運動的
 — — 399
 —の複合 346
 —の平均速度 398
 —の平均電氣能率 459
 —の分類 305
 一軸性分子 305
 一般的分子 305
 自由廻轉性分子 442
 等方性分子 305
 —模型 302
 空間的 — — 365

平均磁気能率.....341	一般的.....439
平均生命時間.....380, 391	
自然——.....390	
平均分子量.....327	平均屈折率.....377
平均変位二乗の公式.....457	—の公式(ヴェルデ常数)...339, 435
平行平板.....120, 129, 164	ベッセルの微分方程式.....281
平面鏡.....112	ベツバール.....80
平面格子.....198, 202	—の公式.....100
平面直線の偏光性波.....13	ヘルシュルの二重プリズム.....120
平面波.....14, 16, 17, 47, 140, 254	ヘルツ.....5
単弦調和——.....16, 19	—波.....326
導体中の——傳播.....257	ヘルムホルツ.....410, 494
平凸レンズ.....77	変形エネルギー.....329
ベクトル.....	変形能(分極能)テンソル.....329
廻折波の電氣的, 磁氣的——.....286	主変形能.....358, 439, 443
光ベクトルとしての電氣的——.....171, 286	偏光.....33
波動——.....312	—角.....41
ポインティングベクトル(ポインティング輻射ベクトルの項を見よ)	—顯微鏡.....253
ヘルツ——.....309, 349	—子.....42, 238, 239, 260
有效場の——.....319	—度.....289
—ポテンシャル.....295	—方向.....37, 231
磁気能率に対する——.....301	—面.....42, 259
定常電流に対する——.....300	自然——廻轉.....364
—波.....17, 33	磁氣的——廻轉(ファラデー効果の項を見よ).....335
ベッケレル(J).....340	—性除去.....355
ベッケレル(H).....339	直線, 圓, 楕圓偏光.....33, 39, 259
	—の分散.....291

散亂光の——.....288, 349, 351, 354	旋光性結晶の——.....376
反射, 屈折光の偏光.....39	—楕圓體面.....223, 229
	フレネルの——方程式...220, 267, 376
	吸収性結晶に対する——.....267
	旋光性結晶に対する——.....376
	ポテンシャル.....
	—理論.....148
	空間的雙極子密度の——.....299
	クーロン——.....298
	スカラー——.....278, 295
	四重極子の——.....401
	雙極子格子の——.....314
	遅滯——.....296
	調和振動子の平均——.....390
	ベクトル——.....295
	ホルツマルク.....400, 403
	ボルツマン.....23, 497
	—常数.....328
	—のエントロピー定義.....483
	—の関係式(エントロピーとミクロ状態の確率との).....362
	—の分布方程式.....457
	ボルン.....213, 229, 365
	—の格子光學.....213
	ホ
ポアソン.....4	
—の微分方程式.....314	
方位角.....	
主——.....259	
振動の——.....42	
ホイヘンス.....2, 140, 142, 147	
—の原理.....4, 22, 141	
—の要素波.....3	
ボイル.....1	
ポインティング輻射ベクトル.....	
.....11, 19, 32, 33, 86, 217, 291, 384	
ボゲンドルフ.....238	
方向揺動.....355	
放射.....383, 409	
—係数.....492	
—線の幅.....389	
—能.....264, 424	
補充的.....157	
補整板.....238, 260	
法線.....	
—軸.....225, 229, 232—238	
—の位置.....236	
—速度.....216, 220, 229, 269	
—曲面.....223, 228, 231, 233, 237	

マ	
マイケルソン	5, 20, 174, 182, 394
—の階段格子	174, 183
—の干渉計	172, 176
—の實驗	6
マカルソ・コルビノ効果	436
マールデング	431
マックスウェル	4, 7, 60
—の公式(自由行路)	398
—の屈折率と電媒常数との基本 関係	22, 24, 263, 427, 450
—の場	5
—の電磁方程式	7, 8, 13, 15, 16, 17, 18, 45, 213, 266, 294
—の分布方則	393
マックスウェル・ボルツマンの法則	328
マッハ	
—の圓錐體檢光子	42
—の屈折率	172
マリュー	2
—の定理	50
ミ	
ミー効果	290
密度揺動	
瓦斯中の—	352
液體中の—	362
ム	
ミンコウスキー	422
メ	
メートル原器	174
モ	
モル屈折	325, 459
液體の—	327
化合物の—	327
空氣の—	326
總—	459
部分—	327
平均—	327
—と密度との關係	326
モル分率	327
モレー	6
ヤ	
ヤング	2
—の干渉實驗	158
ユ	
ユーンイング	361
有極分子	24
有效電場(分子内)	302, 305

有軸寫像	61	量子光學	6, 293, 328, 334, 340, 362, ...367, 383, 399, 406, 408, 409, 442, 487
ヨ			
横波(光の横波性の項を見よ)		量子統計理論	294
要素光束	57	兩凹レンズ	77
ラ			
ライヘ	211	兩凸レンズ	77
ラウエ	199, 317, 469, 484, 485, 486	臨界角(全反射の)	31, 33
—の基本光束	471	臨界波長(異常分散の)	458
—の公式	202, 203, 317	ル	
—の斑點實驗	202	ルチャンドルの倍函數	280
ラグランジュの方法	224	ルチャンドルの變換	55
ラーデンプルグ	340, 408, 419	ルビー・ガラス	275
ラブラース	3	ルベル	365, 446
—の演算子	9	ルーベンス	25, 263, 264, 430
ラマン効果	362	—の残留線(残留線の項を見よ)	
ラーモア		ルンドブラッド	311
—の歳差運動	340	ルンマー・ゲールッケ板	174, 182, 183
—の振動回數	338, 404, 434, 437	レ	
—の法則	338	レオナルド・ダ・ビンチ	140
ランドルトの常数表	262	レーマー	2
ランベルトの餘弦法則	86, 493	レーレー	4, 206, 351
リ			
立體化學	365	—の温度輻射公式	497, 501
リーブマン	60	—の散亂	291, 353, 357, 443
量子共鳴子	398	—輻射(散亂光)	288, 289
		—の強さ	353
		—の偏光度公式	290
		レンズ	74, 100

—を通しての寫像.....	74, 78	レンヂェン	196
—集合體系.....	79	ロ	
—のアッペ不變量	101	ロイド.....	3
—の擬似的寫像.....	77	ロシュミット数.....	305, 325, 361
—の焦點.....	75	六方晶系.....	229
—の焦點距離.....	75	ローレンツ.....	5
—の主要平面.....	75	—の衝突制振理論.....	399
—の收斂的寫像.....	77	—のゼーマン效果理論.....	403
—の掩み.....	101	—變換.....	392, 472
—の深さ.....	111	ローレンツ・ローレンツの法則...322, 325,	
—の變形.....	101	374, 418, 429, 459	
色消し—.....	105	ワ	
薄い—.....	77, 102, 105	ワイエルストラース.....	67
無コマ—.....	103	ワイスコプフ.....	419
兩凸, 兩凹, 平凸, 凸凹—.....	77	ワイル.....	465
ビエの半—.....	160		
連続スペクトル.....	175		
連続性式.....	295		



電磁光學

昭和11年9月28日印刷
昭和11年10月2日發行
昭和23年4月20日四版

著者
杉浦義勝

發行者
長島榮一

東京都千代田區神田區籠町三ノ六

發行所

産業圖書株式會社

東京都千代田區神田區籠町三ノ六
電話下谷(83) 0283, 1817 番

印刷所

大日本印刷株式會社
(小坂孟)

東京都新宿區市ヶ谷加賀町一ノ二



本會員はゴム印又は
貼紙による定價の變
更はいたしません

定價 280 圓

31.7.13

425-Su48ㄅ



1200500742742

終