中等算學月刊
第三卷
第四期
贈閱

本 期 目 次

創製最新教具

立體幾何模型

立體幾何之教學，必須有模型爲助，方易使學生獲得明晰的空間概念。但國內中等學校通常之所用者，或由教師自製，手續麻煩，且恐尙不能合用；或購用國外製造之模型，價格極昂，而其構造亦嫌固定繁重。

本模型由余介石、孫克定兩先生計劃，復經中等算學研究會及金陵大學暑期中等理科教員講習班討論及試驗應用，均稱完善，可供各中學採用。且價格低廉，構造精確，內有數種，可變換配合，以表示各種空間關係及立體圖形，尤爲特色。惟此模型在國內製造尙屬初創，務希　諸賢先進加以指正，則非僅計劃者及本局之幸，於立體幾何之教學，亦將不無小補焉。該模型每組附有說明書，詳述用法，並附插圖數十幅；此外另編印價目表一冊，亦附插圖數幅，對於模型之製作，可一望而知。學校蓋章函索，即將價目單寄贈。

計劃者　余介石　孫克定

分三組發售

初級中學用定價二十二元

高級中學用定價五十四元

初高級中學用定價六十六元

◆零售各件　另印價目表

上海昆明路　中華教育用具製造廠製

上海及各省　**中華書局發售**

19(全)　23,12.

高 斯 略 傳

(Karl Friedrich Gauss)

乙 閣

高斯德人，於 1777 年四月卅日生於布倫斯威克 (Brunswick)，1855 年二月廿三日卒於哥庭根 (Goettingen)，享年七十有八。

氏幼時卽以算學見長，相傳其三歲時，已能指出其父發給傭資時計算上之錯誤而糾正之。蓋其父爲磚瓦匠，常雇傭爲助也。其時一家生活，端賴老父勞力之所得，僅免凍餒，依其父之意，欲令氏作工，以裕收入。幸布倫斯威克伯爵驚其天才，慨允資助學費，乃於 1792 年入卡羅林學院 (Caroline College) 肄業。先是氏在小學時，有教師巴台爾(Bartels)者，喜其聰穎，特別授以算學，氏纔十二歲時，已譜舉二項式定理及無窮級數。在卡羅林學院三年，凡教師所能授者，氏已無所不知。乃於 1795年入哥庭根大學，於最小二乘法頗有心得。在大學時期，數論方面之發明甚多，大都由歸納特例所得。1796 年三月三十日發明圓內接正十七邊形之作法，自是日起氏始將其所發明之種種，記載一小册中，卽今所稱爲高斯日記"Tagebuch"者是也。

1798年返布倫斯威克爲私家教師。是時伯爵之資助，依然繼續，氏旦夕孜孜從事著述其名作 Disquitiones Arithmeticae，以紀念其恩人，終於 1801 年完成出版。氏之博士論文，發表於 1799 年，內容爲一定理之幾種證法，此定理卽謂『凡一變數之代數函數，概可分爲許多一次或二次實因子之積。』卽代數之基本定理也。授與氏之博士學位者，爲黑姆斯達大學 (University of Helmstadt)，鼎鼎有名之算學教授帕夫 (Pfaff) 氏，卽設帳於是。

1801年氏對於天文特感興趣。是年正月一日，意大利人披亞齊 (G. Piazzi of Palermo) 發見火星與木星間之第一顆小行星，但其行蹤變幻莫測。經氏之推算，終將其軌道算出，依其結果而觀測之，果於是年之最後一日，又見此小行星。此爲天文

學上一段佳話，蓋此等小行星所在地位，恰符合博德定律 (Bode's law) 也。此後二十年間氏之興趣幾大半在天文方面。

1803年聖彼得堡 (St. Petersberg) 大學聘氏爲教授，以伯爵不允未去。又三年伯爵受命率領普魯士健兒與拿破崙戰，不幸受傷致死，從此氏乃失一摯友。1807 年聖彼得堡大學又來相約，氏仍婉辭之，而於是年就哥庭根天文台長及大學天文教授之職。未幾法軍佔哥庭根，氏應付出二千佛郎以上之戰債；然教授薪金有限，安能償此巨額。友人奧奴白 (Olber) 寄與款額如數，但氏立卽璧還。拉普剌斯(La place) 代付此款於巴黎國庫，氏卒將本利如數歸還。嚮使氏肯獻媚求榮，拿破崙定必寵幸有加，然氏詎肯出此者?

在哥庭根之工作，極合氏之性情。講書時清晰流利，不許學生作筆記，恐分聽講之心也。但其著作則極其簡潔，難於領悟。其一生所研究之工作，範圍極廣，算學而外，天文物理，無所不精。其專心業務，尤令人欽佩，自就哥庭根教職後，卽寢饋於天文台之小室中，僅於1828年赴柏林蒞科學集會時一度離開而已。

馮華特好生(Von Walterhausen)爲氏同時之人，其言曰：『以高斯之天才，祗唯榮利之是求，未有不達者，然高斯絕不出此，卽送到門前之榮譽，亦不接受，樸素自持，畢生如一日。書齋有如斗室，治事之桌，覆以綠色之布，寫字之檯，塗以白色之垩，坐椅窄狹，七旬後始易一靠椅，入晚燈光黯然，寢室無暖氣設備，飲食簡單，睡衣一襲，絲帽一頂，其生活中之必需事物，如斯而已。』

氏之友人每言及氏，輒曰『我們的高斯』，親愛之情，溢於言表；於此可見其爲人之德性及待友之眞摯。氏之著作，今已彙印成帙，凡六巨册。自氏而後，算學家之淵博如氏者，卽未之覩。誠以各科進步太速，治算者爲精力所限，祗可精研其一部分或數部分也。

二次三項式之號及其應用(續)

郭 堅 白

10.一元二次及一次聯立不等式之解法.

設有一元二次及一次聯立不等式

$$\left.\begin{array}{r}ax^2+bx+c>0\\ x>\alpha\end{array}\right\}\text{或}\left.\begin{array}{r}ax^2+bx+c\\ x<\beta\end{array}\right\}\text{或}\left.\begin{array}{r}ax^2+bx+c\\ \alpha<x<\beta\end{array}\right\}$$

式中之a,b,c,α,β為常數,或為含一參數λ之變係數.

欲解此數聯立不等式,當先解組中之第一式(卽二次不等式),然後將所得之解,與第二式(卽一次式)合觀之,以督其是否衝突或能否合併.

另一方法,卽先將α或β與二次三項式之根比較,求得α,β與二根之位置關係,然後視督在若何間幕內,此二不等式始同時適合.

在 a,b,c,α,β為一含參數λ之變係數時,吾人若視λ為第二變數,而以y代之,則此類問題亦卽二元聯立不等式之問題也.

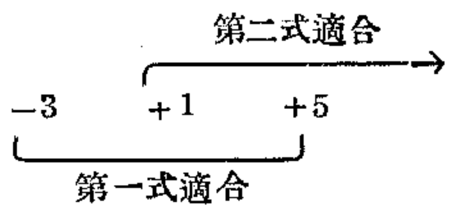
例一. 求解聯立不等式

$$\left.\begin{array}{r}x^2-2x-15<0\\ x>1\end{array}\right\}$$

因平方項之係數為正,二次三項式之二根為-3,$+5$,而不等號為$<$,故欲使第一式適合,當有

$$-3<x<+5$$

但欲適合第二式當有$x>1$,然-3,5,1三數之順序為



故欲同時適合兩式，當有

$$1<x<5.$$

例二. 求解聯立不等式

$$(4\lambda-1)x^2+2(2\lambda-3)x-(4\lambda+2)>0$$

$$0<x<1$$

由前款之解答，先求得二根與 $0, 1$ 之比較，例如

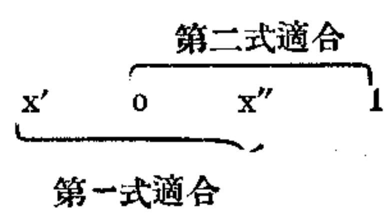
當 $-\infty<\lambda<-\frac{9}{8}$ 時，二根與 $0, 1$ 之順序為 $x'<0<x''<1$，斯時平方項之係數 $4\lambda-1$ 既為負，而不等號為 $>$，故欲適合第一式，當有

$$x'<x<x''$$

但欲適合第二式，又當有

$$0<x<1$$

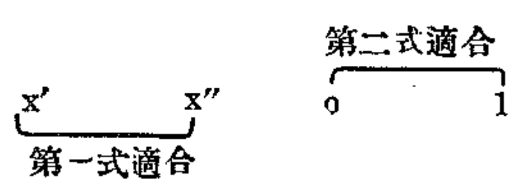
今 $x', x'', 0, 1$ 四數之順序旣為



故欲同時適合兩式，當有

$$0<x<x''$$

又當 $-\frac{9}{8}<\lambda<-1$ 時，二根與 $0, 1$ 之順序為



故由上圖可見，斯時不等式不能成立。

餘仿此，得表如下

λ	$\triangle$	a	根與 o，1 之比較	不等式之解
$-\infty$				
	+	−	$x'<0<x''<1$	$0<x<x''$
$-\frac{9}{4}$				
	+	−	$x'<x''<0<1$	不聯立
-1				
	−	−	無	不聯立
0				
	+	−	$x<x''<0<1$	不聯立
$\frac{1}{4}$				
	+	+	$x'<0<1<x''$	不聯立
$\frac{2}{3}$				
	+	+	$x'<0<1<x''$	不聯立
$\frac{3}{2}$				
	+	+	$x'<0<1<x''$	不聯立
4				
$+\infty$	+	+	$x'<0<x''<1$	$x''<x<1$

例三。 求解聯立不等式

$$f(x)=5x^2-(\lambda+1)x+\lambda^2>0 \qquad (1)$$

$$\varphi(x)=2x-3\lambda<0 \qquad (2)$$

先將$\frac{3}{2}\lambda$與$f(x)$之二根比較。因

$$f'(x)=10x-(\lambda+1)$$

$$f(\tfrac{3}{2}\lambda)=\tfrac{1}{4}(43\lambda-6)\lambda$$

$$f'(\tfrac{3}{2}\lambda)=14\lambda-1$$

$$\triangle=-19\lambda^2+2\lambda+1.$$

故以λ'及λ''代$\triangle$之二根，而研究數列

$$5 \qquad 14\lambda-1 \qquad \lambda(43\lambda-6)$$

之號變，卽得根與$\frac{3}{2}\lambda$之比較，由是卽得聯立不等式之解矣。

表示之如次：

λ	$\triangle$	a	$f'(\frac{3}{2})\lambda$	$f(\frac{3}{2}\lambda)$	根與$\frac{3}{2}\lambda$之比較	不等式之解
$-\infty$						
	$-$	$+$	$-$	$+$	虛根無比較	$x<\frac{3}{2}\lambda$
λ'						
	$+$	$+$	$-$	$+$	$\frac{3}{2}\lambda<x'<x''$	$x<\frac{3}{2}\lambda$
o						
	$+$	$+$	$-$	$-$	$x'<\frac{3}{2}\lambda<x''$	$x<x'$
$\frac{1}{14}$						
	$+$	$+$	$+$	$-$	$x'<\frac{3}{2}\lambda<x''$	$x<x'$
$\frac{6}{13}$						
	$+$	$+$	$+$	$+$	$x'<x''<\frac{3}{2}\lambda$	$x<x'$或$x''<x<\frac{3}{2}\lambda$
λ''						
	$-$	$+$	$+$	$+$	虛根無比較	$x<\frac{3}{2}\lambda$
$+\infty$						

在$\triangle<o$時,第一式恆適合,故只須取$x<\frac{3}{2}\lambda$以適合第二式。

注意。 視λ為變數,則本題亦卽二次聯立不等式(有一式爲一次式者)。

11.聯立二次方程式及不等式之解法

設有聯立二次方程式及不等式

$$ax^2+bx+c>o \qquad (1)$$

$$x^2+px+q=o \qquad (2)$$

以$-a$乘(2),而加於(1),卽得一次不等式

$$(b-ap)x+c-aq>o \qquad (3)$$

於是,由(3)與(2)所成之組卽與原組同解,蓋以a乘(2),而加於(3),卽可回到(1)式故也。因之,本題變爲:求解二次方程式(2),已知未知數x受有如(3)之限制

此類問題之解法,與前款所述者略同,仍當由比較根與與數入手也。

例。 求討論聯立不等式及方程式

$$x^2-2(1+\lambda)x+\lambda^2-1=o \qquad (1)$$

$$x^2-2(2+\lambda)x+\lambda 2\geq o \qquad (2)$$

解: 消去x^2項,得

$$1-2x\geq o$$

卽 $x\geq\frac{1}{2}$　　(3)

故本題變爲:已知$x \geqq \frac{1}{2}$,求討論二次方程式

$$f(x) \equiv x^2-2(1+\lambda)x+\lambda^2-1=0$$

因 $f'(x)=2x-2(1+\lambda)$

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}(4\lambda^2-4\lambda-7)$,其二根爲$\frac{1\pm2\sqrt{2}}{2}$

$f'(\frac{1}{2})=-(2\lambda+1)$

$\triangle=2(\lambda+1)$。

故得表如次:

λ	$\triangle$	a	$f'(\frac{1}{2})$	$f(\frac{1}{2})$	號變數	根與$\frac{1}{2}$之比較	方程式之解
$-\infty$ -1	$-$					虛　根	無
-1 $\frac{1-2\sqrt{2}}{2}$	+	+	+	+	0	$x'<x''<\frac{1}{2}$	二解: x',x'')
$\frac{1-2\sqrt{2}}{2}$ $-\frac{1}{2}$	+	+	+	$-$	1	$x'<\frac{1}{2}<x''$	一解: x'
$-\frac{1}{2}$ $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$	+	+	$-$	$-$	1	$x'<\frac{1}{2}<x''$	一解: x'
$\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ $+\infty$	+	+	$-$	+	2	$\frac{1}{2}<x'<x''$	無

特殊情形。1°若$\lambda=-1$,則$\triangle=0$,(1)式之二根均爲零,小於$\frac{1}{2}$,故(1)式有二解均爲0。

2°若$\lambda=\frac{1-2\sqrt{2}}{2}$,則$f(\frac{1}{2})=0$,$\frac{1}{2}$爲一解,他一解爲$\frac{5-4\sqrt{2}}{2}<\frac{1}{2}$,故(1)式有二解。

3°若$\lambda=\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$,則$f(\frac{1}{2})=0$,$\frac{1}{2}$爲一解,他一解爲$\frac{5+4\sqrt{2}}{2}>\frac{1}{2}$,故(1)式僅有一解。

4°若$\lambda=-\frac{1}{2}$,則方程式之二根爲$-\frac{1}{2}$及1,故惟$-\frac{1}{2}$適合題設條件。

12.兩個二次方程式之根之比較。

設有兩個二次方程式

$$f(x) \equiv ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

$$\varphi(x) \equiv a'x^2+b'x+c'=0 \qquad (2)$$

因方程式各項之符號可以同時變更，故吾人可假定：

$$a>0,\qquad a'>0$$

於是，在$\triangle\geq 0$及$\triangle'\geq 0$之情形下，以a'乘(1)式，$-a$乘(2)式，而加之即有

$$a'f(x)-a\varphi(x)\equiv(a'b-ab')x+a'c-ac'\qquad(3)$$

命(1)式之二實根為α,β，并假定$\alpha<\beta$。再命(2)式之二實根為α',β'。並假定$\alpha'<\beta'$。又設

$$a'b-ab'=p,\qquad \frac{a'c-ac'}{a'b-ab'}=-q$$

於是

[A]．若p不等於零，則(3)式可書如：

$$a'f(x)-a\varphi(x)\equiv p(x-q)\qquad(4)$$

故以α',β'，代入，則因$\varphi(\alpha')=\varphi(\beta')=0$，卽得

$$f(\alpha')=\frac{p}{a'}(\alpha'-q)\qquad(5)$$

$$f(\beta')=\frac{p}{a'}(\beta'-q)\qquad(6)$$

同樣，以α,β代入，則得

$$\varphi(\alpha)=-\frac{p}{a}(\alpha-q)\qquad(5')$$

$$\varphi(\beta)=-\frac{p}{a}(\beta-q)\qquad(6')$$

於是，欲比較(1)，(2)兩式之根，當知$f(\alpha')$，$f(\beta')$之符號，欲知$f(\alpha')$，$f(\beta')$之符號，當求$\alpha'-q$，及$\beta'-q$，之符號，換言之，卽當以q代入(2)式，得$\varphi(q)$而審其符號也。

Ⅰ．設$\varphi(q)<0$。於是，因$a'>0$，故有

$$\alpha'<q<\beta'$$

因之，由(5)，(6)兩式可見，$f(\alpha)$與p異號，$f(\beta')$與p同號，故若

1° $p>0$，則有　$\alpha<\alpha'<\beta<\beta'$

2° $p<0$，則有　$\alpha'<\alpha<\beta'<\beta$

Ⅱ．設$\varphi(q)=0$，於是q為(2)式之一根，由(4)式可見$f(q)=0$，故q為(1)

(2)兩式之公根。欲知此公根爲二方程式之大根或小根，當以兩式之二根之半和，各與 q 比較，因兩根之半和恆分於兩根之間故也，既知公根爲何根，而欲得其餘二根之順序。則比較兩方程式之兩根之半和可矣。

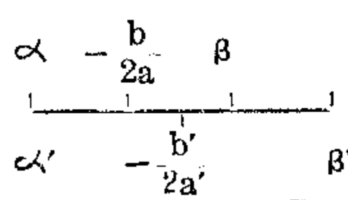
茲分別 $p>0$ 及 $p<0$，兩種情形論之，並附圖顯明於后。

1° $p>0$，即 $-\frac{b}{2a}<-\frac{b'}{2a'}$

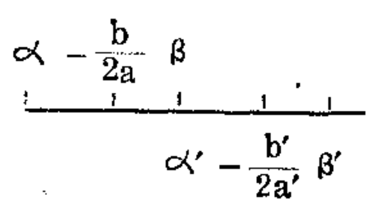
若 $q<-\frac{b}{2a}<-\frac{b'}{2a'}$ 則有 $\alpha=\alpha'<\beta<\beta'$ （圖一）

若 $-\frac{b}{2a}<q<-\frac{b'}{2a'}$ 則有 $\alpha<\beta=\alpha'<\beta'$ （圖二）

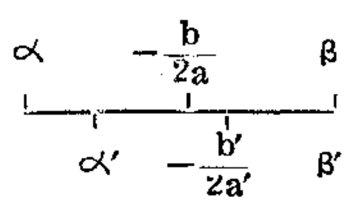
若 $-\frac{b}{2a}<-\frac{b'}{2a'}<q$ 則有 $\alpha<\alpha'<\beta=\beta'$ （圖三）



（圖一）



（圖二）



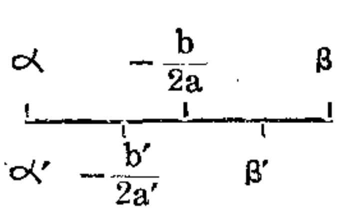
（圖三）

2° $p<0$，即 $-\frac{b'}{2a'}<-\frac{b}{2a}$

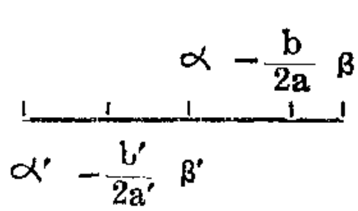
若 $q<-\frac{b'}{2a'}<-\frac{b}{2a}$，則有 $\alpha=\alpha'<\beta'<\beta$ （圖四）

若 $-\frac{b'}{2a'}<q<-\frac{b}{2a}$；則有 $\alpha'<\beta'=\alpha<\beta$ （圖五）

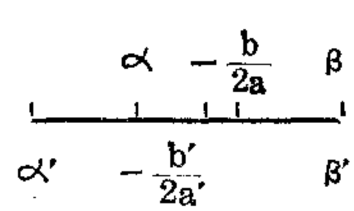
若 $-\frac{b'}{2a'}<-\frac{b}{2a}<q$，則有 $\alpha'<\alpha<\beta=\beta$，（圖六）



（圖四）



（圖五）



（圖六）

III. 設 $\varphi(q)>0$ 於是，由(4)式可見，$f(q)>0$ 故 q 在 α β 及 α'，β' 之外，茲仍分別 $p>0$ 及 $p<0$ 兩種情形論之，

1° $p>0$，卽 $-\frac{b}{2a}<-\frac{b}{2a'}$

若 $q<-\frac{b}{2a}<-\frac{b'}{2a'}$ 則有 $q<\alpha<\beta$，故由(5′)，(6′)兩式可見 $\varphi(\alpha)<0$，$\varphi(\beta)<0$，因之。

$$\alpha'<\alpha<\beta<\beta'$$

若 $-\frac{b}{2a}<q<-\frac{b'}{2a'}$ 則有 $\alpha<\beta<q<\alpha'<\beta'$。因之，

$$\alpha<\beta<\alpha'<\beta'$$

若 $-\frac{b}{2a}<-\frac{b'}{2a'}<q$，則有 $\alpha'<\beta'<q$，故由(5)，(6)兩式可見 $f(\alpha')<0$，$f(\beta')<0$，因之

$$\alpha<\alpha'<\beta'<\beta$$

2° $p<0$，卽 $-\frac{b'}{2a'}<-\frac{b}{2a}$。

若 $q<-\frac{b'}{2a'}<-\frac{b}{2a}$，則有 $\alpha<\alpha'<\beta'<\beta$

若 $-\frac{b'}{2a'}<q<-\frac{b}{2a}$，則有 $\alpha'<\beta'<\alpha<\beta$

若 $-\frac{b'}{2a'}<-\frac{b}{2a}<q$，則有 $\alpha'<\alpha<\beta<\beta'$

[B]. 若 $p=0$，則(3)式變爲

$$a'f(x)-a\varphi(x)=a'c-ac'$$

隨 $a'c-ac'$ 之符號，可分三種情形論之。

Ⅰ. 若 $a'c-ac<0$，則 $f(\alpha)<0$，$f(\beta)<0$，故有

$$\alpha<\alpha'<\beta'<\beta$$

Ⅱ. 若 $a'c-ac'=0$，則(1)，(2)兩式之根完全相同，故有

$$\alpha=\alpha'<\beta'=\beta$$

Ⅲ. 若 $a'c-ac'>0$，則 $\varphi(\alpha)<0$，$\varphi(\beta)<0$，故有

$$\alpha'<\alpha<\beta<\beta'$$

13. 例一. 求比較下列二式之根.

$$f(x)\equiv x^2+x-1=0 \qquad (1)$$

$$\varphi(x)\equiv 2x^2-5x+1=0 \qquad (2)$$

此二方程式均具不相等之二實根.

由(1),(2)兩式,得

$$2f(x)-\varphi(x)\equiv 7x-3=7(x-\tfrac{3}{7}).$$

故

$$2f(\alpha')=7(\alpha'-\tfrac{3}{7}),\quad 2f(\beta')=7(\beta'-\tfrac{3}{7}) \qquad (3)$$

以$\frac{3}{7}$代入(2)式,得

$$\varphi(\tfrac{3}{7})=-\frac{38}{49}.$$

$\varphi(\frac{3}{7})$既爲負,故有

$$\alpha'<\tfrac{3}{7}<\beta'$$

於是,由(3)式可見$f(\alpha')<0, f(\beta')>0$.故有

$$\alpha<\alpha'<\beta<\beta'.$$

例二. 求比較下列二式之根.

$$f(x)\equiv 6x^2-7x+2=0 \qquad (1)$$

$$\varphi(x)\equiv 15x^2-13x+2=0 \qquad (2)$$

由(1),(2)兩式得

$$5f(x)-2\varphi(x)\equiv -9x+6=-9(x-\tfrac{2}{3}) \qquad (3)$$

以$\frac{2}{3}$代入(2)式,得$0=0$.故$\frac{2}{3}$爲二方程式之公根.

欲知此公根$\frac{2}{3}$爲(1),(2)兩式之大根或小根,當比較$\frac{2}{3}$及兩式之兩根之半和$\frac{7}{12}$及$\frac{13}{30}$.因

$$\frac{13}{30}<\frac{7}{12}<\frac{2}{3}$$

故有

$$\alpha'<\alpha<\beta=\beta'=\frac{2}{3}$$

例三. 試隨λ之變化，比較下列二式之根

$$f(x)\equiv x^2-3x+\lambda=0 \qquad (1)$$

$$\varphi(x)\equiv x^2-4x+3(\lambda-1)=0 \qquad (2)$$

(1)式之判根式$9-4\lambda$，在$\lambda<\frac{9}{4}$時爲正。(2)式之判根式$-3\lambda+7$在$\lambda<\frac{7}{3}$時爲正，今$\frac{9}{4}<\frac{7}{3}$，故吾人僅能在$\lambda<\frac{9}{4}$時，比較兩方程式之根。

由(1)，(2)兩式，得

$$f(x)-\varphi(x)\equiv x-(2\lambda-3). \qquad (3)$$

再以$2\lambda-3$代入(2)式，得

$$\varphi(2\lambda-3)=4\lambda^2-17\lambda+18=(\lambda-2)(4\lambda-9), \qquad (4)$$

上式之二根爲2及$\frac{9}{4}$.故若

1,°$\lambda<2$,則$\varphi(2\lambda-3)>0$。因之，亦有$f(2\lambda-3)>0$。斯時$2\lambda-3<\frac{3}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$，故有

$$2\lambda-3<\alpha<\beta$$

於是 $\varphi(\alpha)=-[\alpha-(2\lambda-3)]<0,$

$\varphi(\beta)=-[\beta-(2\lambda-3)]<0$

故有 $\alpha'<\alpha<\beta<\beta'$

2°。$2<\lambda<\frac{9}{4}$，則$\varphi(2\lambda-3)<0$，故有

$$\alpha'<2\lambda-3<\beta'$$

於是。 $(f\alpha')=\alpha'-(2\lambda-3)<0$

$f(\beta')=\beta'-(2\lambda-3)>0$

故有 $\alpha<\alpha'<\beta<\beta'$

3°。$\lambda=2$，則$\varphi)2\lambda-3)=0$，即$\varphi(1)=0$，故1爲(1)，(2)兩式之公根，因斯時$p>0$，而$1<\frac{3}{2}<2$，

故有 $1=\alpha=\alpha'<\beta<\beta'$,

4°. $\lambda=\frac{9}{4}$，則 $\varphi(2\lambda-3)=0$，卽 $\varphi(\frac{3}{2})=0$ 故 $\frac{3}{2}$ 爲(1)，(2)兩式之公根，因斯時 $p>0$，而公根 $\frac{3}{2}$ 卽爲(1)式兩根之半和，故(1)式之二根相等，而同等于 $\frac{3}{2}$，又因(2)式之兩根之半和 $2>\frac{3}{2}$，故(2)式有一根 $\beta'>\frac{3}{2}$，于是，有

$$\frac{3}{2}=\alpha=\beta=\alpha'<\beta'.$$

14.兩元二次聯立不等式之解法。

解兩元二次聯立不等式實與比較含參數之兩個二次方程式之根無異。一式爲一次，他一式爲二次者，其解法已述於前，今舉二式均爲二次者論之。

例。　求解聯立不等式：

$$2x^2+x\geq 3y^2-xy$$

$$3x^2-y^2\leq 2xy$$

移項並對一未知數x順列之，得

$$f(x)\equiv 2x^2+(1+y)x-3y^2\geq 0 \qquad (1)$$

$$\varphi(x)\equiv 3x^2-2yx-y^2\leq 0 \qquad (2)$$

今若視y爲參數，而比較兩二次式之根則不等式亦卽因之而解矣。

因 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 之首末二項異號，故此二式均具不相等之二實根，且一爲正，一爲負，設 α，β 爲(1)式之二根，並假定 $\alpha<\beta$。故 α 爲負根，β 爲正根，同樣，設 α'，β' 爲(2)式之根，並假定 $\alpha'<\beta'$。卽有 $\alpha'<0$，$\beta'>0$。

欲使(1)式成立，須有

$$x\leq\alpha \text{ 或 } x\geq\beta \qquad (3)$$

欲使(2)式成立，須有

$$\alpha'\leq x\leq\beta'. \qquad (4)$$

是以今當解決者，乃 α，β，α'，β' 諸數之順序問題而已。

欲達此目的，可先於 $f(x)=0$ 及 $\varphi(x)=0$ 二式中消去 x^2，卽得

$$F(x)\equiv 3f(x)-2\varphi(x)=(7y+3)x-7y^2$$

$$=(7y+3)\left(x-\frac{7y^2}{7y+3}\right).$$

今若於上式中，以α'代x，則得

$$F(\alpha')=3f(\alpha')=(y+3)\left(\alpha'-\frac{7y^2}{7y+3}\right) \qquad (5)$$

是以$f(\alpha')$之符號，可由上式二因子之符號而定，故隨y之小於或大於$-\frac{3}{7}$，而分數種情形論之。

I．設$y<-\frac{3}{7}$，

於是，$f(\alpha')$與$\alpha'-\frac{7y^2}{7y+3}$異號，欲知$\alpha'-\frac{7y^2}{7y+3}$之符號。當先計算$\varphi\left(\frac{7y^2}{7y+3}\right)$。因得

$$\varphi\left(\frac{7y^2}{7y+3}\right)=-\frac{3y^2}{(7y+3)^2}(28y+3) \qquad (6)$$

在現時所討論之情形下：$y<-\frac{3}{7}<-\frac{3}{28}$，故$\varphi\left(\frac{7y^2}{7y+3}\right)>o$。因之，$\frac{7y^2}{7y+3}$當位於$\alpha'$，$\beta'$二根外，因$\frac{7y^2}{7y+3}$爲負，而$\beta'$爲正，故有

$$\frac{7y^2}{7y+3}<\alpha'<\beta'$$

因之，$\alpha'-\frac{7y^2}{7y+3}$爲正，而$f(\alpha')$爲負矣。

同理，$f(\beta')$亦爲負。故有

$$\alpha<\alpha'<\beta'<\beta$$

由此可見(3)，(4)兩條件不聯立，故不等式不能成立。

II．設$y=-\frac{3}{7}$。

斯時，由(5)式可見$F(\alpha')=3f(\alpha')=3f(\beta)=-7y^2<o$，故得同上之結論。

III．設$-\frac{3}{7}<y<-\frac{3}{28}$。

於是如I，由(6)式可見$\varphi\left(\frac{7y^2}{7y+3}\right)>o$。但因$\frac{7y^2}{7y+3}>o$，故有

$$\alpha'<\beta'<\frac{7y^2}{7y+3}$$

又因$7y+3<o$，故$f(\alpha')$與$\alpha'-\frac{7y^2}{7y+3}$同號。今$\alpha'-\frac{7y^2}{7y+3}$既爲負，故

$f(\alpha')$亦爲負，同理$f(\beta')$亦爲負。

如Ⅰ，Ⅱ兩段，不等式仍不能成立。

Ⅳ.設$y=-\frac{3}{28}$。

於是，$\varphi\left(\frac{7y^2}{7y+3}\right)=0$，故方程式$f(x)=0$及$\varphi(x)=0$有一組公根。

$$x=\frac{1}{28},\ y=-\frac{3}{28}$$

Ⅴ.設$y<-\frac{3}{28}$。

於是 $\varphi\left(\frac{7y^2}{7y+3}\right)<0$，而有 $\alpha'<\frac{7y^2}{7y+3}<\beta'$。故由(5)式，可見

$$\alpha<\alpha'<\beta<\beta'$$

因之，欲適合條件(3)，(4)，須有

$$\beta\leq x\leq\beta'$$

及 $$y<-\frac{3}{28}$$

即 $\frac{-y-1+\sqrt{25y^2+2y+1}}{4}\leq x\leq\frac{y+2\sqrt{y^2}}{3}$ 及 $y>-\frac{3}{28}$。

總結以上討論，表示如次：

$y<-\frac{3}{28}$	不等式不聯立
$y=-\frac{3}{28}$	$x=-\frac{1}{28}$
$y>-\frac{3}{28}$	$\frac{-y-1+\sqrt{25y^2+2y+1}}{4}\leq x\leq\frac{y+2\sqrt{y^2}}{3}$

（完）

論反三角函數

余 介 石

1. <u>反函數意義</u> 設有二變數 x,y 相依而變，吾人可視其一爲其他之函數，例如有一次式 $3y=2x$，

取 x 爲自變數，書 y 爲顯函數之形，得 $y=\frac{2}{3}x=f(x)$

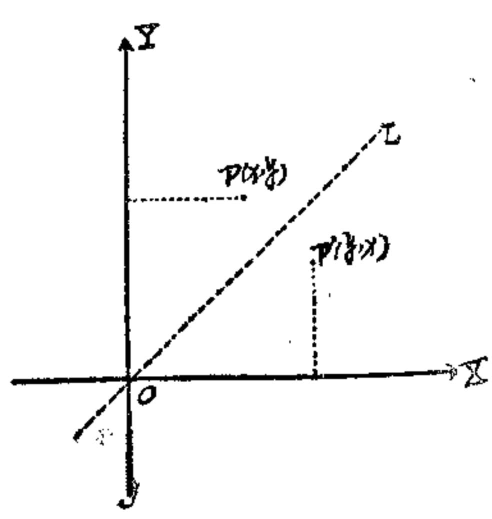
如以 y 爲自變數，則可得 $x=\frac{3}{2}y=F(y)$。

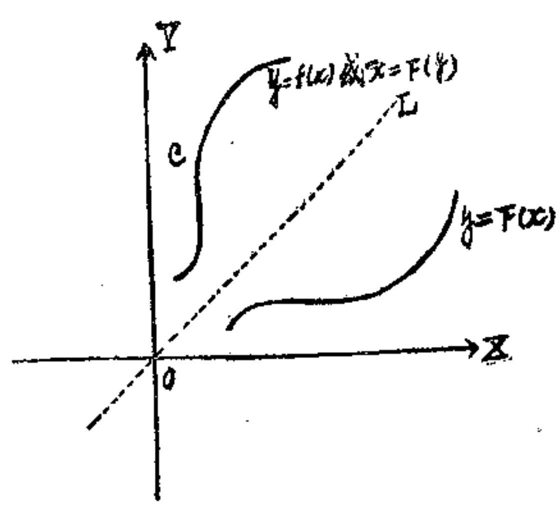
此二函數式，卽互稱爲反函數。

在通例，如自 $y=f(x)$ 中解出 $x=F(y)$，而按通例，以 x 記自變數，改書後式爲 $y=F(x)$，則 $F(x)$ 爲 $f(x)$ 之反函數。

2. <u>反函數圖解</u> 一函數關係式所表曲線，不因其式之形式而變。如上述之 $y=f(x)$ 與 $x=F(y)$ 二者之曲線無異。但如改換自變數得 $y=F(x)$，則所表圖解不復相同。

在曲線 $x=F(y)$ 卽 $y=f(x)$ 上有一點 $P(x,y)$，則在其反函數 $y=F(x)$ 之曲線上必有一相當點 $P'(y,x)$。吾人只須明 P 與 P′ 之關係，卽不難知互反二函數圖形之關係矣。

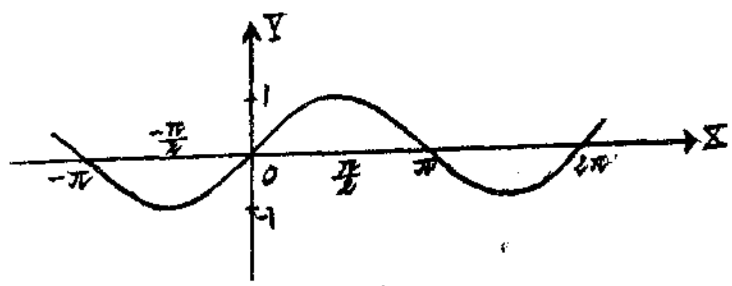




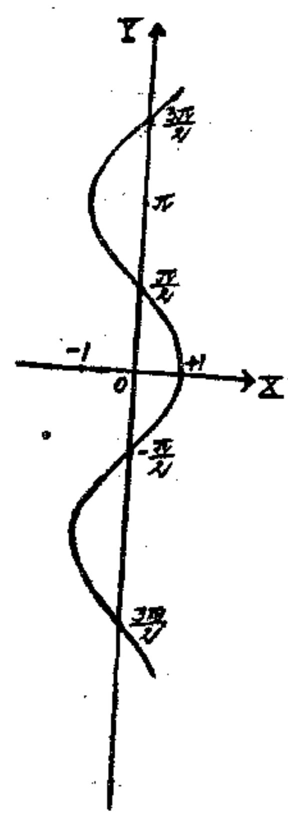
設OL爲第一象限之分角線，則P，F′二點對之成軸對稱，因之二互反函數圖形必對OL成對稱形。由是立得作一函數之反函數曲線之法如下；

在一薄紙上作 $y=f(x)$ 卽 $x=F(y)$ 之曲線，依OL爲軸翻轉此紙，自紙背透視之卽爲反函數$y=F(x)$之圖。

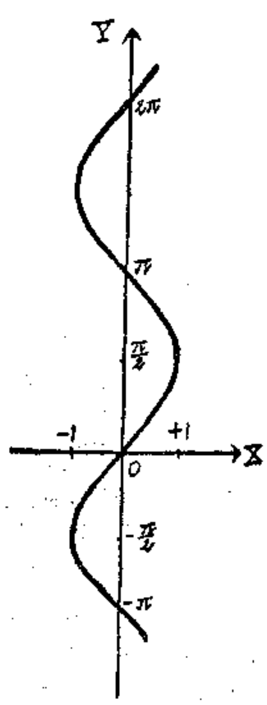
3. **反三角函數曲線** 吾人當已習知三角函數曲線，依上述之法，卽不、難得各反三角函數之曲線矣。今列舉各圖如下。



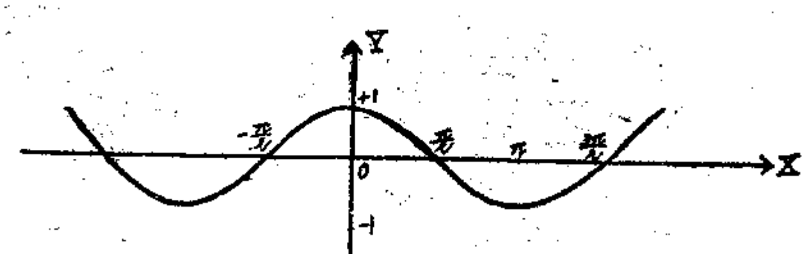
正弦曲線 $y=\sin x$



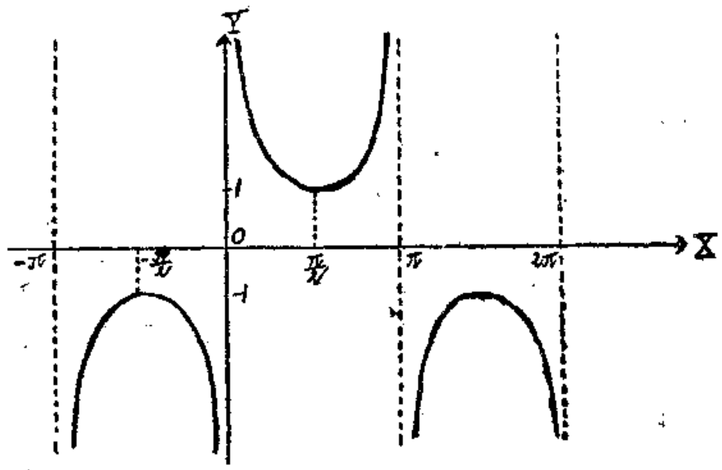
反餘弦曲線 $y=\cos^{-1}x$



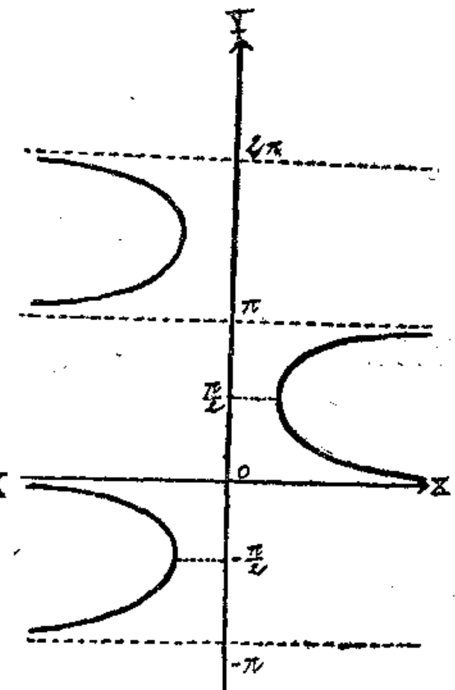
反正弦曲線 $y=\sin^{-1}x$



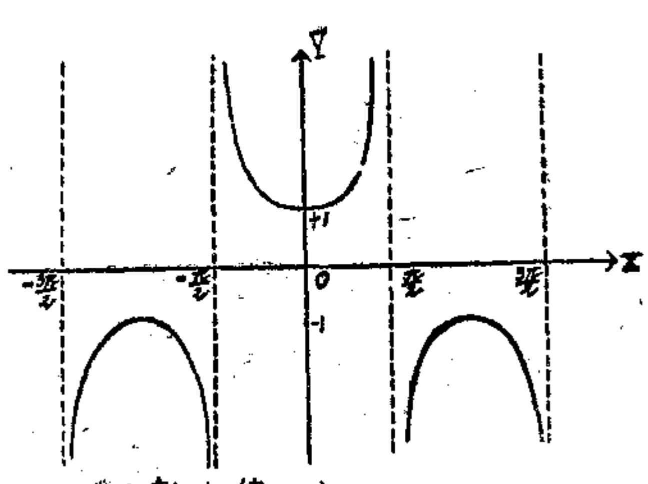
餘弦曲線 $y=\cos x$



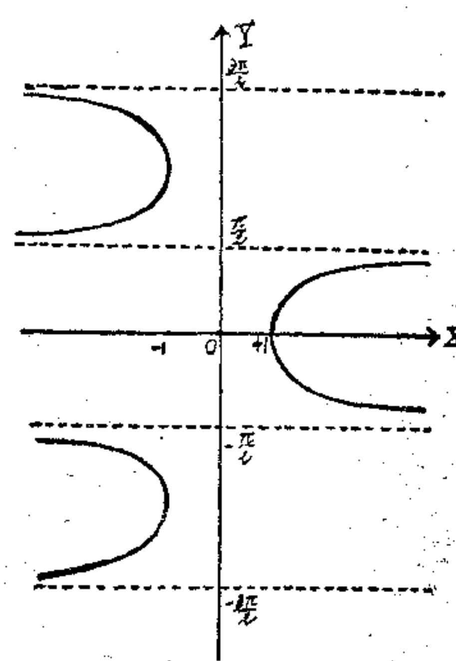
餘割曲線 $y=\csc x$



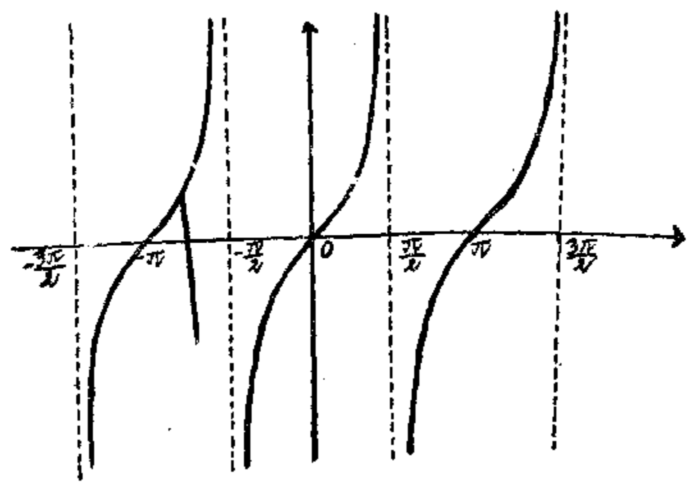
反餘割曲線 $y=\csc^{-1}x$



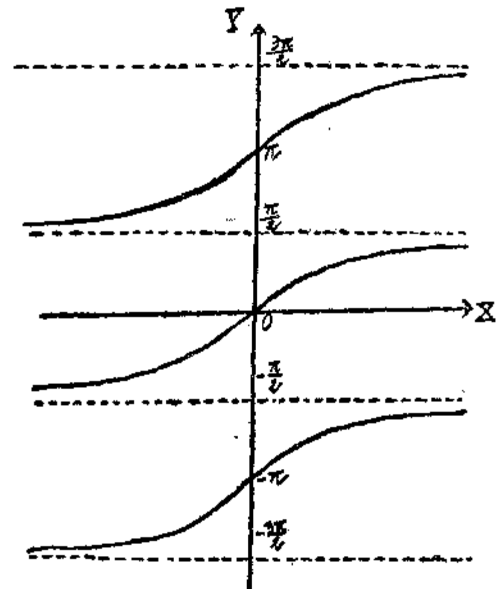
正割曲線 $y=\sec x$



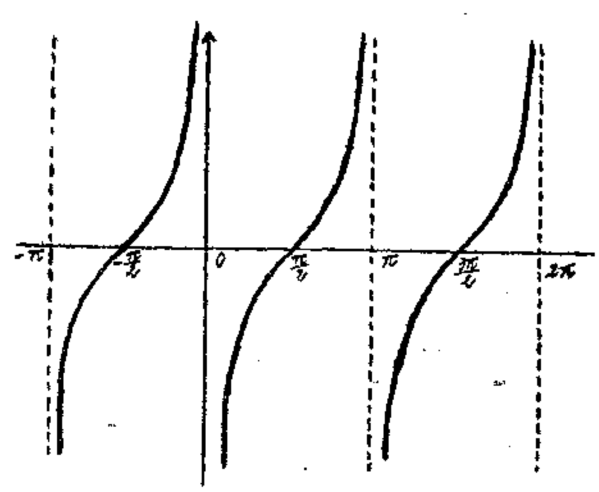
反正割曲線 $y=\sec^{-1}x$



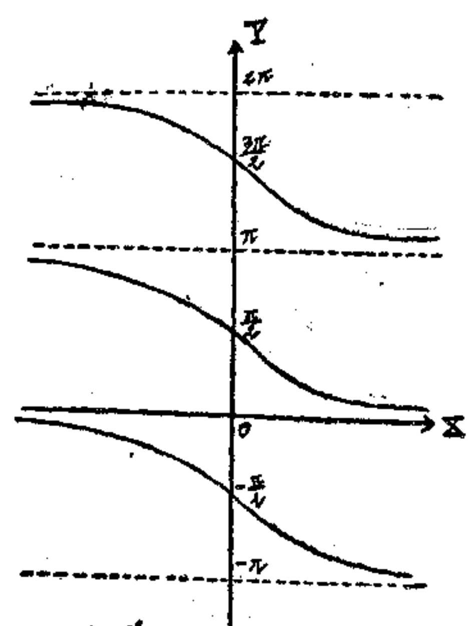
正切曲線 $y=\tan x$



反正切曲線 $y=\tan^{-1}x$



餘切曲線 $y=\cot x$



反餘切曲線 $y=\cot^{-1}x$

4. 反三角函數之多值性　在一函數 $y=f(x)$ 中，予x一任意值而求y之相當值，就幾何言之，卽以與 oy 平行之線割曲線而求其交點之縱坐標也。就上節觀之，oy 軸之平行線至多只能割三角函數曲線于一點，故卽每予 x 一值，y 只能有一相當值，是曰單值函數，但在反三角函數曲線，則與 oy 平行之直線，每可割

曲線于無窮點，卽x之一値，y可得無窮之相當値也，如此稱爲多值函數。

5. 主値 反三角函數旣爲多値者，故如不加某種限制，則對于已知 x 値之函數値，無由確定，使勿有歧義，主値之用意卽在此。

就曲線言之，此問題卽求化多値函數爲單値，其法乃分曲線爲若干枝，使與 oy 軸平行之任何直線，至多只能與每枝各割于一點。

今觀 $y=\sin^{-1}x$，$y=\csc^{-1}x$，二曲線，卽知應取函數値介于$-\frac{\pi}{2}$與$\frac{\pi}{2}$間之一段（或取$\frac{\pi}{2}$至$\frac{3\pi}{2}$等各段亦可，但不如前者絕對値之小）；在$y=\cos^{-1}x$，$y=\sec^{-1}x$二曲線，卽知應取函數値介于 o 與π間之一段（或取 o 至$-\pi$之一段亦可，但普通以取正値爲便）。但$y=\tan^{-1}x$，$y=\cos^{-1}x$二曲線，則任用上述規定之一均可，如此限制之反三角函數曰主値。在主値規定下，反三角函數，遂爲單値。

6. 反餘切之二種主値 反餘切之主値，有二種規定方法，殊無軒輊可言。在普通三角學中，以求敍述之整齊計，每以$-\frac{\pi}{2}$至$\frac{\pi}{2}$爲主値範圍。如是卽得反三角函數主値之規約如下：

對於 x 一已知値，在反函數値中取數値最小者，如有同値異號之二値，則取其正者，卽爲主値。

但在解析學中，如此之規定，使反餘切函數，于自變數域中有間斷點，甚感不便，如用第二種規約，以 o 至π爲主値，則可移間斷點于變數域之端點矣。

7. 反三角函數恆等式 反三角函數式有二種，其一可受主値之限制者，如$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$是，有不能受限制者，如$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}$。普通三角課本，對此種區別，皆漫不經意，讀者可取余所編高中三角學（中華書局出版）§§122—123一讀。第一類者，自因主値規約之不同，而異其結果。今舉一例。

例。求$\tan^{-1}\frac{1}{x}$與$\cot^{-1}x$之關係。

（一）如$x>o$，設 $\tan^{-1}\frac{1}{x}=\alpha$，$\cot^{-1}x=\beta$，則

$$\frac{1}{x}=\tan\alpha=\frac{1}{\cot\beta}=\tan\beta. \qquad (1)$$

取三角學主値之限制，則 $-\frac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$， $-\frac{\pi}{2}\leqq\beta\leqq\frac{\pi}{2}$. (2)

但$x>0$，故應有 $0<\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$. $0<\beta\leqq\frac{\pi}{2}$. 故由 (1) 式之關係 得 $\alpha=\beta$卽 $\mathrm{an}^{-1}\frac{1}{x}=\cot^{-1}x$.

如取解析學之限制，則$-\frac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$，$0\leqq\beta\leqq\pi$. (3)

但據$x>0$之假設，所推得結果，仍同上。

(二)如$x<0$，則在三角學主値限制下由(2)式得

$-\frac{\pi}{2}\leqq\alpha<0$，$-\frac{\pi}{2}\leqq\beta<0$ 故仍得$\alpha=\tan^{-1}\frac{1}{x}=\cot^{-1}x=\beta$.

若採解析學之主値規約，則由(3)式得

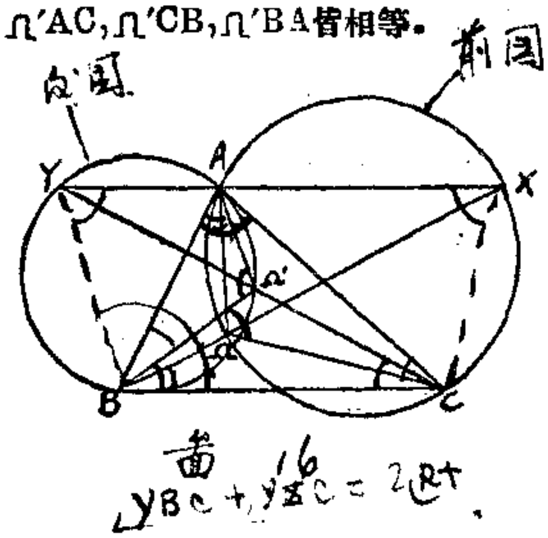
$-\frac{\pi}{2}\leqq\alpha<0$，$\frac{\pi}{2}<\beta\leqq\pi$. 卽 $-\frac{\pi}{2}<\beta-\pi\leqq0$

因而應有 $\alpha=\beta-\pi$ 卽得一不同結果爲 $\tan^{-1}\frac{1}{x}=\cot^{-1}x-\pi$.

三角形之近代研究 （續）

李緒文

17. 定理： 以△ABC之邊AC爲弦作一圓切AB于A，又以AB爲弦作一圓切AC于A。過A引平行于BC且交前圓于X，後圓于Y之線段，聯結BX交前圓于Ω，CY交後圓于Ω'，則六角ΩAB，ΩBC，ΩCA，Ω'AC，Ω'CB，Ω'BA皆相等。



因AB，AC爲二圓之切綫且XY//BC

$\therefore \angle AXB=\angle \Omega AB=\angle \Omega BC=\angle \Omega CA$

$\angle AYC=\angle \Omega' AC=\angle \Omega' CB=\angle \Omega' BA$

又以$\angle AXC=\angle BAC=\angle AYB$

故B，C，X，Y四點共圓，從而

$\angle AXB=\angle XBC=\angle AYC$

因之六角皆等適如所求證者。

(17·1) 定義： Ω，Ω'謂爲△ABC之Brocard點，因$\angle \Omega$AB，ΩBC，ΩCA皆爲正角（反鐘向），故名Ω曰正 Broard 點，$\angle \Omega'$AC，Ω'CB，Ω'BA皆爲負角（順鐘向），故名Ω'曰負 Brocard 點。上述之六角皆等，通常以ω表之，名曰 Brocard 角。此點遠在 1816 年已爲 Crelle 所注意，同時 Jacobi 與其他著名算學家發現其若干性質，惜繼起無人，其所研究之結果，竟爲世所遺忘。待 1875 年一法國軍官 Brocard 又發現此點，一時衝動學術界之興趣，羣起而研究三角形之性質焉，此點咸以 Brocard 名之以示紀念。至 1895 年，約略估計，歐洲方面發表關於幾何研究之論文竟有六百篇以上，當時對於幾何研究，興趣之濃厚，可以概見。

(17·2) 推論： 三角形之正負 Brocard 點爲等角共軛點.

(17·3) 推論： $\angle C\Omega A=\angle A$之補角$=\angle A\Omega' B$

$\angle A\Omega B=\angle B$之補角$=\angle B\Omega' C$

$\angle B\Omega C=\angle C$之補角$=\angle C\Omega' A$.

(17·4) 推論： 以AB爲弦而切BC於B之圓與以BC爲弦而切CA于C之圓相交于Ω. 又以BC爲弦而切AB于B點之圓及以CA爲弦而切BC于C之圓相交于Ω'.

(17·5) 推論： 相似三角形之Brocard角相等.

(17·6) 推論： 三角形之Brocard角决不大于30^0. 其有此極大之值者爲等邊三角形.

設於圖16中，AB爲定位置之邊，$\angle B$爲定角，而使BC平行移動，則當BC亦與ACX圓相切時之$\omega=\angle AXB$增至極大. 故三角形有一定角則以其他二角相等時有極之Brocard角. 故普遍言之，三角形之具有極大之Brocard角者當爲等邊三角形. 此時之$\omega=30^0$則甚顯然.

(17·7) 推論：$\triangle ABC$之類似重心爲K，三乘比圓截BC，CA，AB于D及D′，E及E′，F及F′，且DKE′，EKF′，FKD′各爲直線，則K爲$\triangle D'E'F'$之正Brocard點，而爲$\triangle DEF$之負Brocard點.

圖14中之$ED'=DF'=FE'$ (15.2c)，對此三等弦之圓周角因亦相等即$\angle KFE=\angle KED=\angle KDF=\angle KF'D'=\angle KE'F'=\angle KD'E'$故K爲$\triangle D'E'F'$之正Brocard點，而爲$\triangle DEF$之負Brocard點.

18. 定理： 三三角形ABC，A′B′C′，A″B″C″爲順相似，且後二者皆內接于$\triangle ABC$ (A′在AB上，A″在AC上等)，則$\triangle ABC$與A′B′C′公有一正Brocard點，$\triangle ABC$與A″B″C″公有一負Brocard點.

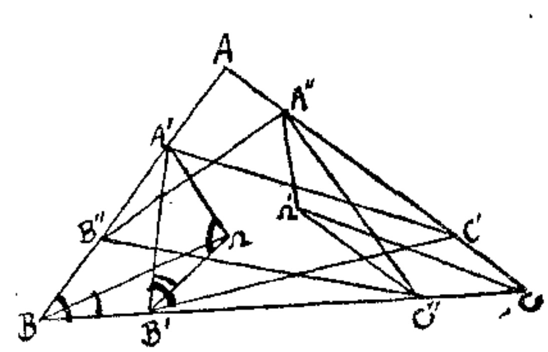


圖 17

三三角形既相似，即應有同值之ω(17·5)。設Ω為$\triangle A'B'C'$之正 Brocard 點，Ω'為$\triangle A''B''C''$之負 Brocard 點。則以$\angle A'\Omega B'=\angle A'B'C'$之補角(17·3)$=\angle ABC$之補角.

故Ω,A',B,B'四點共圓。

因之 $\angle \Omega BB'=\angle \Omega B'A'=\omega$,同理$\angle \Omega CC'=\angle \Omega AA'=\omega$。

故Ω亦為$\triangle ABC$之正Brocard點.

依同一方法，亦可證明Ω'又為$\triangle ABC$之負Brocard點。

(18·1) 推論： 按Ω,Ω'二點乃$\triangle ABC$與$A'B'C'$及$\triangle ABC$與$A''B''C''$之相似中心。故 $\triangle ABC$ 與其內接相似三角形之相似中心恆為定點 Ω或Ω'.

19. 定理： $\triangle ABC$之外心為S，類似重心為K，以SK為直徑之圓截三邊 BC，CA，AB之 Lemoine 平行綫於A',B',C'三點則

(a) AC',BA',CB'相會于其圓周上之一點，該點又恰為$\triangle ABC$之正 Brocard 點。

(b) AB', BC', CA' 相會于其圓周上之一點，該點又恰為 $\triangle ABC$ 之負 Brocard點。

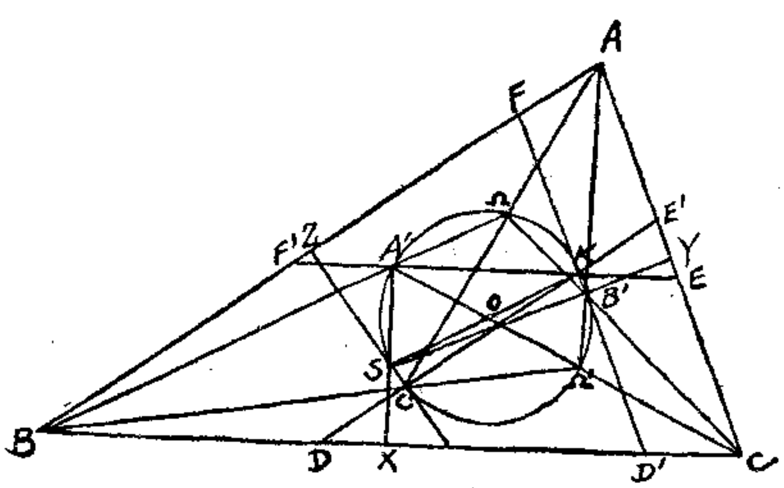


圖 18

設 Lemoine 平行綫 EKF',FKD, DKE' 交以 SK 為直徑之圓（圓心為 O）于A',B',C'三點。

因$\triangle SA'K$爲直角，且$EF' \parallel BC$，故SA'垂直平分BC于X．同理SB, SC'，各垂直平分CA, AB于Y, Z．

次設BA'與CB'交于Ω，由K至各邊BC, CA, AB之垂線爲p, q, r，則$p:BC=q:CA=r:AB$ (9)。然$p=A'Y, q=B'Y, r=C'Z$．故$A'X : BX=B'Y : CY=C'Z : AZ$．因之三直角三角形$A'BX, B'CY, C'AZ$皆互相似，$\angle BA'X=\angle CB'Y=\angle SB'\Omega$，故$\Omega$應與$A', S, B'$共圓，卽$BA', CB'$交于O圓圓周上。同理$BA'$與$AC'$亦相交于O圓圓周上，但$BA'$不能與O圓交于兩點以上，故知$BA', CB', AC'$三線相會于O圓圓周上之$\Omega$點。

吾人既已證明三直角三角形$A'BX, B'CY, C'AZ$之相似，及BA', CB', AC'三直線之共點性，故$\angle \Omega BC=\angle \Omega CA=\angle \Omega AB$，此卽表明$\Omega$爲$\triangle ABC$之正Brocard點之式也．

依同一方法，可更證其他三直線AB', BC', CA'亦相會于O圓圓周上之Ω'點，且此點恰爲$\triangle ABC$之負Brocard點。

本定理爲Brocard定理，此O圓名Brocard圓，又$A'B'C'$謂爲第一Brocard三角形。

(19·1) 推論： Brocard圓與第一Lemoine圓同心(15b)．

(19·2) 推論： 三直線AA', BB', CC'共點。

EF'爲第一Lemoine圓之弦截Brocard圓于A', K，而該二圓又屬同心(19·1)，故$F'A'=KE$，故AA'及AK之延長線截BC于與X等距離之處。同理，BB'及BK截CA於與Y等距離之處；CC'及CK截AB于與Z等距離之處，故由Ceva定理得知AA', BB'及CC'三直線共點。

此點爲K之等截共軛點，且係$\triangle ABC$與$A'B'C'$之配景中心．

(19·3) 推論： $\triangle A'B'C'$與ABC逆相似．

$$\angle A'C'B'=\angle A'KB'\text{之補角}=\angle ACB,$$

$$\angle A'B'C'=\angle A'KC'=\angle ABC,$$

是以$\triangle A'B'C'$與ABC等角，而對應部分之排列相反，故二者互爲逆相似.

(19·4)　推論：　$\triangle FDE$之邊與ΩA，ΩB，ΩC平行；$\triangle E'F'D'$之邊$\Omega' B$，$\Omega' C$，$\Omega' A$平行。

$$FA \underline{\parallel} KE' \underline{\parallel} DC',\ \therefore FD // \Omega A$$

其他各邊亦可依此推之。

(19·5)　推論：　$SK \perp \Omega\Omega'$，

$$\angle \Omega A'K = \angle \Omega BC = \omega = \angle \Omega' CB = \Omega' A'K,$$

故K爲$\overparen{\Omega\Omega'}$之中點，從而$SK \perp \Omega\Omega'$.

(19·6)　推論：　$\angle A'\Omega C' = \angle ABC$，$\angle \Omega O \Omega' = 4\omega$.

$$\angle A'\Omega C' = \angle A'KC' = \angle ABC.$$

次之，因K爲$\overparen{\Omega\Omega'}$之中點(19·5)，故

$$\angle \Omega O \Omega' = 2\angle \Omega OK = 4\angle \Omega A'K = 4\angle \Omega BC = 4\omega.$$

(19·7)　推論：　K爲$\triangle FDE$之負Brocard點，而爲$\triangle E'F'D'$之正Brocard點(參考17·7)。

$AFDC'$爲一平行四邊形(19·4)，$\angle KDF = \angle FAC' = \omega$，
同理$\angle KED = \angle KFE = \omega$，故$K$爲$\triangle FDE$之負Brocard點。

依此亦可證明K爲$\triangle E'F'D'$之正Brocard點.

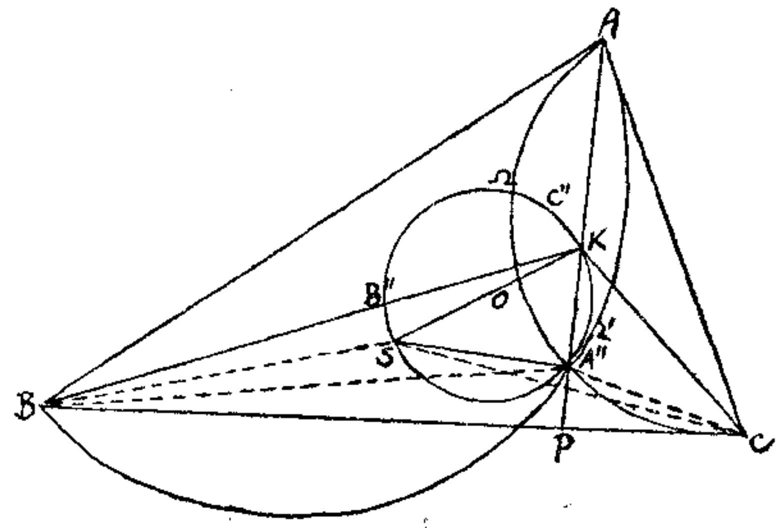
(19·8)　推論：　$\triangle FDE$與ABC公有正Brocard點，$\triangle E'F'D'$與ABC公有負Brocard點。

$\triangle FDE$與ABC順相似(15·2)，且前者內接於後者，故應公有正Brocard點(18)。

同理$\triangle E'F'D'$與ABC應公有負Brocard點。

20. 定理：　$\triangle ABC$之類似重心爲K，正負Brocard點爲Ω與Ω'；AK，BK，CK再交Brocard圓于A''，B''，C''，則A''爲兩弧$A\Omega C$與$A\Omega' B$之交點；B''爲兩弧$B\Omega A$

與BΩ'C之交點;C″爲兩弧CΩB,與CΩ'A之交點.



畫 19

設兩弧AΩC與AΩ'B之交點爲Q,AQ交對邊BC于P,以$\angle\Omega AB=\omega=\angle\Omega CA$故弧A$\Omega$C切AB.又以$\angle\Omega'AC=\omega=\angle\Omega'BA$,故弧A$\Omega$'B切AC.於是$\angle QAB=\angle QCA$,$\angle QAC=\angle QBA$依此$\triangle$QAB與QCA相似,故 $\overline{AB}^2:\overline{AC}^2=\triangle QAB:\triangle QCA=BP:PC$.

今設AK交BC于P′,則又有$BP':P'C=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$ (9•2),是以P.P′兩點非相合不可,故Q點應在AK上.

次之,$\angle BAC=\angle QAB+\angle QAC=\angle QAB+\angle QBA=\angle BQP$.同理$\angle BAC=\angle CQP$,故$\angle BQC=2\angle BAC$.又以S爲$\triangle ABC$之外心,$\angle BSC=2\angle BAC$,乃有B,S,Q,C四點共圓.

$\angle SQB=\angle SCB=\angle BAC$之餘角$=\angle BQP$之餘角,因之$\angle SQK$爲直角,故Q點又在Brocard圓上.

然則AK與Brocard圓之交點A″卽係兩弧AΩC與AΩ'B之交點.

其他兩點B″,C″亦可依此法證明之.

$\triangle A''B''C''$謂爲$\triangle ABC$之第二Brocard三角形.

(完)

自 由 講 座

（一）重慶陳永琰君問：

敝人對於算學頗感興趣，故遇困難必求明瞭，謹就平素問題不能解决者以求指教，請賜覆焉。

1. 因 $i^{4n+1}=i$ （n爲任一正整數）

則 $\log_i i=4n+1$

當 $n=0$ 則 $\log_i i=1$，此與對數定理"以某數爲底某數之對數爲1"相合。

但當 $n=1$ 時則有

$$\log_i i=5,$$

而 $n=2$ 則 $\log_i i=9,$

……………

由此得對數以 i 爲底能求任何數之對數否？上之推論結果確否？任何數爲底複數之對數能求否？對此有人研究否？

2. "1之任何乘方爲1"其爲虛數乘方當如何證明？

3. 得謨爾定理：

$$(\mathrm{Cos}\theta+i\sin\theta)^n=\mathrm{Cos}n\theta+i\sin n\theta$$

此中n爲複數之證明若何？

〔答〕：一

1. 1之任何次乘方恆爲1；$y=i^x$ 乃一週期函數；如 ω 爲1之一n次方根則 $y=\omega^x$ 仍爲一週期函數；且若 b 爲 i 之一n次方根則 $y=b^x$ 亦爲一週期函數。故爲免去混淆計，1，i 及其各次根均不取作對數之底。此爲一無庸明言之規約，故普通書多不詳論之。先生所推得之結果在理論上固屬無誤然不能卽由之而斷定 $1=5=9=\cdots$ $\cdots$ 其理由正如吾人不能由 $\sin(2n\pi+x)=\sin x$ 而斷定 $2n\pi+x=x$ 同。

至於複數之對數亦能求，不過普通書中多不論及。而複變數函數論書中則詳載

之，先生如有趣於此可便查較普通之複變數函數論書，恕在此不能詳覆。

2. 於 $1^x=1$ 式中，如 x 之值爲複數，亦能成立。欲驗此理需先明複指數之意義。如 x 爲複數則 e^x 乃由下列無窮級數確定之：

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{n!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots,$$

至若 x，m 均爲複數時，則 x^m 乃由下式確定：

$$x^m=e^{m\log x}$$

由此卽可知 $1^x=1$ 式於 x 爲複數時仍爲正確且得誤爾定理於 n 爲複數時之證明亦可推得。關於此數問題普通複變數函數論書中多詳論之，爲篇幅所限恕只能略述綱要希便中一査。

（二）湖南妙高峯中學謝綱信君問：

鄙人在長沙求志公司訂閱　貴刊，兩載於玆矣。獲益非淺，感戴莫銘。近因有一難題，久未解出，且教科書上亦復少見。故特修書前來，敬請賜告爲荷。題如下：

求證　$\log 0=-\infty$。

［答］：—

此題本身並未完全，蓋對數之底未書入也。應改書如下：

1. 當 $a<1$ 時　$\log_a 0=$ ？

2. 當 $a>1$ 時　$\log_a 0=$ ？

對數函數原由指數函數導出。故求 $\log_a 0$ 之值，卽求 $a^x=0$ 式中 x 之值。如 $a<1$ 時，則 x 之值增，a^x 反隨之減少，而當 $x\to\infty$ 時，$a^x\to 0$。故得 $\log_a 0=\infty$。此乃就 $a<1$ 而言。反之如 $a>1$ 則易知當 x 之值由負數而趨近於 $-\infty$ 時則 $a^x\to 0$。故有 $\log_a 0=-\infty$。［瑞］。

本 刊 啓 事

本刊第三卷第一期重慶大學津貼一百元已收到此啓

問 題 欄

本欄之目的，在徵集關於中等算學範圍內之種種問題，不拘科目，不限難易，以供讀者之研究，藉收觀摩之效。凡本刊讀者，皆可提出問題，及解決本欄內所提出之問題。無論出題或解題，概依收到之先後，次第編號發表，而出題者及解題者之姓名及所在學校或住址，均隨題披露。數人同解一題，解法同時則擇尤發表，解法異時則分段刊登。來稿務祈繕寫清楚，姓名住址尤須明晰。至解題時所用圖形，務請用黑色墨水精確作好，連帶寄下。

晚 到 之 解 答

27.4,27.5,28.1 湖南明德學校周德珪君

28.1 北平武郁文君

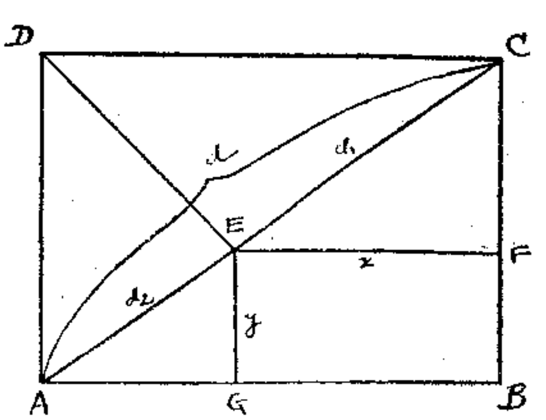
29.3,29.5 湖北省立高級中學劉後利君

問 題 已 解 决 者

30.1 自矩形 ABCD 之頂點 D 向 AC 作一垂線，自垂線足E，作 EF⊥BC，EG⊥AB。設AC=d,EF=y,則

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=d^{\frac{2}{3}}$$

（用普通幾何法解）



證（提出人南京錢介夫）

設AB=a,BC=b,EC=d_1,AE=d_2,

則由相似三角形之性質可得

$$d_1=\frac{a^2}{d},\quad d_2=\frac{b^2}{d}.$$

又因 EF:EC=AB:AC, GE:AE=BC:AC;

卽 $x:d_1=a:d$, $y:d_2=b:d$,

故 $$x=\frac{ad_1}{d}=\frac{a^3}{d^2},\quad y=\frac{d_2^2}{d}=\frac{b^3}{d^2},$$

故 $$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\frac{a^2}{d^{\frac{4}{3}}}+\frac{b^2}{d^{\frac{4}{3}}}=\frac{a^2+b^2}{d^{\frac{4}{3}}}=\frac{d^2}{d^{\frac{4}{3}}}=d^{\frac{2}{3}}$$

30.2 三數成調和級數其和爲39,若第一數之平方較第二第三兩數平方之和大99則此三數爲何數。

解

設 $a,\frac{2ab}{a+b}$, b 爲所求之三數,依題意

$$a+\frac{2ab}{a+b}+b=39\ (1),\quad a^2-99=b^2+\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2,\ (2)$$

由(1)式 $\frac{2ab}{a+b}=39-a-b$,代入(2)式得$a^2-99=b^2+(39-a-b)^2$,卽

$$b^2+ab-39a-39b+810=0. \qquad (3)$$

(1)式可書爲 $$a^2+b^2+4ab-39a-39b=0. \qquad (4)$$

(4)—(3)得 $a^2+3ab=810$,故 $b=\frac{810-a^2}{3a}$

代入(4)式而化簡之,得

$$a^4+117a^3-4050a^2+47385a-328050=0$$

或 $$(a-18)(a^3+135a^2-1620a+18225)=0$$

故 $a=18, b=9$,而$\frac{2ab}{a+b}=12$,於是所求三數依次爲18,12,9

30.3求證

$$IO^2+I_1O^2+I_2O^2+I_3O^2=12R^2$$

O表外心,I表內心,I_1, I_2, I_3各表傍心,R表外接圓半徑。

解

由Hobson: Plane Trigonometry 199頁,有

$IO^2=R^2-2Rr$, $I_1O^2=R^2+2Rr_1$, $I_2O^2=R^2+2Rr_2$,

$I_3O^2=R^2+2Rr_3$.

故 $IO^2+I_1O^2+I_2O^2+I_3O^2=4R^2+2R(r_1+r_2+r_3-r)$.

但 $r=\frac{\triangle}{s}$, $r_1=\frac{\triangle}{s-a}$, $r_2=\frac{\triangle}{s-b}$, $r_3=\frac{\triangle}{s-c}$, $R=\frac{abc}{4\triangle}$

其中△表三角形之面積而$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$。

$$\therefore r_1+r_2+r_3-r=\frac{\triangle}{s-a}+\frac{\triangle}{s-b}+\frac{\triangle}{s-c}-\frac{\triangle}{s}$$

$$=\frac{\triangle[s(s-b)(s-c)+s(s-c)(s-a)+s(s-a)(s-b)-(s-a)(s-b)(s-c)]}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\frac{3s^3-2(a+b+c)s^2+(bc+ca+ab)s-[s^3-(a+b+c)s^2+(bc+ca+ab)s-abc]}{\triangle}$$

$$=\frac{2s^3-(a+b+c)s^2+abc}{\triangle}=\frac{2s^3-2s^3+abc}{\triangle}=\frac{abc}{\triangle}=4R$$

代入(1)式，即得

$$IO^2+I_1O^2+I_2O^2+I_3O^2=4R^2+2R.4R=12R^2$$

30.4若 $\cos A+\cos B+\cos C+\cos A\cos B\cos C=0$

求證 $\csc^2A+\csc^2B+\csc^2C\pm2\csc A\csc B\csc C=1$

證（提出人張季平）

令 $\cos A=x$, $\cos B=y$, $\cos C=z$; $\sin A=l$, $\sin B=m$, $\sin C=n$;

則 $x^2=1-l^2, y^2=1-m^2, z^2=1-n^2$

依題意， $x+y+z=-xyz$,

平方之， $x^2+y^2+z^2+2(yz+zx+xy)=x^2y^2z^2$,

以(1)代入 $3-l^2-m^2-n^2+2cyz+zx+xy=(1-l^2)(1-m^2)(1-n^2)$,

簡化之 $2(yz+zx+xy)=m^2n^2+n^2l^2+l^2m^2-l^2m^2n^2-2$

再平方之， $4[y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2+2xyz(x+y+z)]=(m^2n^2+n^2l^2+l^2m^2-l^2m^2n^2-2)^2$

以(1)代入而簡化之， $4m^2n^2l^2=(m^2n^2+n^2l^2+l^2m^2-l^2m^2n^2)^2$

$$m^2n^2+n^2\ell^2+\ell^2m^2-\ell^2m^2n^2=\pm2m^2n^2\ell^2$$

$$\frac{1}{\ell^2}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}-1=\pm\frac{2}{\ell mn}$$

即 $cse^2A+cse^2B+cse^2C\pm2cseA\,cseB\,cseC=1.$

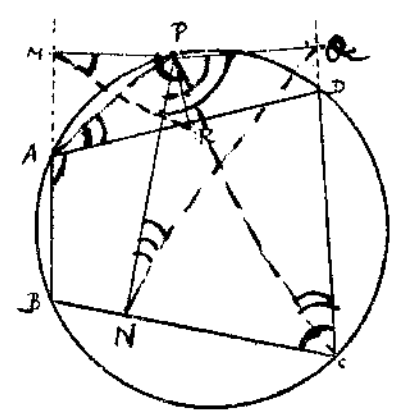
30.5由圓上一點P，向其內接四邊形之四邊AB，BC，CD，DA 所作垂線各爲a，b，c，d，則ac=bd，求證。

證

如圖 $\angle RPM+\angle RAM=\angle RAM+\angle RAB$

$=\angle RAB+\angle BCD$

$=\angle QPN+\angle BCD=2\angle R$



∴ $\angle RPM=\angle QPN$

但 $\angle RMP=\angle PAR=\angle PCQ=\angle PNQ,$

故 $\triangle PMR\backsim\triangle PNQ,$

∴ PR:PM=PQ:PN， 卽ac=bd。

提 出 之 問 題

34.1 過兩圓之交點P，作互相垂直之兩弦APB及A'P'B'，求 AA' 與 BB' 之交點之軌跡。（湖南明德學校周德珪提）

34.2 求於與圓內作內接四邊形已知其兩對角線及面積（前人提）

34.3 求作一線段等于已知線段之調和中項（香港鐸聲書院何季隆提）

34.4 三角形頂點至內切圓之切線長爲l，m，n，m 爲 l 及n 之算術中項及幾何中項，則 $m/r=\sqrt{3}$，內r 爲內切圓之半徑（前人提）

34.5 一組定點$(P_1,P_2,\cdots\cdots P_n)$至一直線之距離之代數和等於一常數時，此直線必切一定圓，試證之。（提出者我無君）

34.6 求證

$$\begin{vmatrix} \text{sni}\ \theta\ \cos\ \phi & \cos\ \theta\ \cos\ \phi & \sin\ \theta\ \sin\ \phi \\ \text{sni}\ \theta\ \text{sni}\ \phi & \cos\ \theta\ \text{sni}\ \phi & \sin\ \theta\ \cos\ \phi \\ \cos\ \theta & -\sin\ \theta & 0 \end{vmatrix}=\sin\theta$$

（提出者武漢大學H.C.L.）

交通大學廿三年度入學試驗算學試題解答

管理學院算學入學試題解答

1. 解下方程式:

(a) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{5x-6}$,

(b) $(1-e^2)x^2-2mx+m^2=0$.

〔解〕 (a)有理化,得:

$$5x^2-36x+52=0$$

$\therefore x=\frac{26}{5}$或2代入原式適合故爲其根

(b) $$x^2-\frac{2m}{1-e^2}x+\frac{m^2}{1-e^2}=0$$

$$\left(x-\frac{m}{1-e}\right)\left(x-\frac{m}{1+e}\right)=0$$

$$\therefore x=\frac{m}{1-e},\ x=\frac{m}{1+e}.$$

2. 下式:H表箱中水深(呎),d表箱底管之直徑(吋),L表管長(呎),V表每秒水在管中之速度(呎);

$$\frac{Hd}{L}=\frac{HV^2+5V-2}{1200}$$

設d=5吋,L=1000呎,H=49呎,求V?

〔解〕 將所與之值代入上式則得

$$\frac{49\times\frac{5}{12}}{1000}=\frac{49V^2+5V-2}{1200}$$

化爲 $$98V^2+V10-53=0$$

$$V=\frac{-5+\sqrt{25+53\times 98}}{98}=\frac{67}{98}$$ （水在管中每秒呎數）

（負根不合理，棄之。）

3. 一羣點，聯每二點成一直線，共有線105，求點共有若干？

〔解〕 設點數為n，依題意得方程式如下：

$C_2^n=105$，卽 $n^2-n-210=0$

$n=15$ 或 -14。

答：點數為15。

4. 解下聯立方程式

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 & (1)\\[2ex] \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=233 & (2)\end{cases}$$

〔解〕

從 $\frac{1}{x}=5-\frac{1}{y}$

$\therefore 2\frac{1}{y}(5-\frac{1}{y})=-201$

$\therefore \frac{1}{y}=$

$\sqrt{2\times(2)-(1)^2}$ 得

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\pm 21 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

從(1)與(3)得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}=13 \text{ 或} -8\\[2ex] \dfrac{1}{y}=-8 \text{ 或 } 13\end{cases} \quad \therefore \begin{cases}x=\dfrac{1}{13} \text{ 或 } \dfrac{1}{8}\\[2ex] y=-\dfrac{1}{8} \text{ 或 } \dfrac{1}{13}\end{cases}$$

5. 下列各式作圖：——

(a) $y=(x-1)^2(x-2)^2$

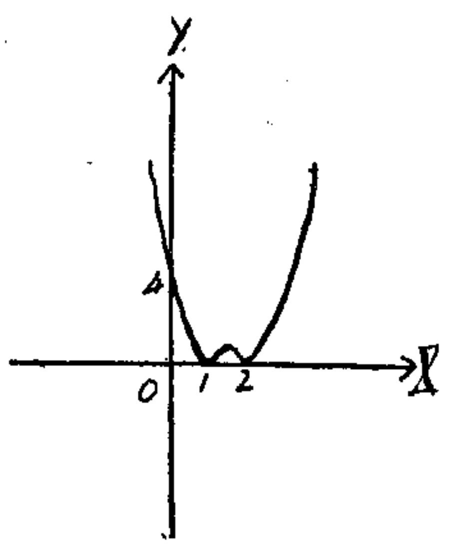
(b) $y=x(x-1)(x-3)$

(c) $\begin{cases}x^2+y^2-8x-4y-5=0\\ 3x+4y=5\end{cases}$

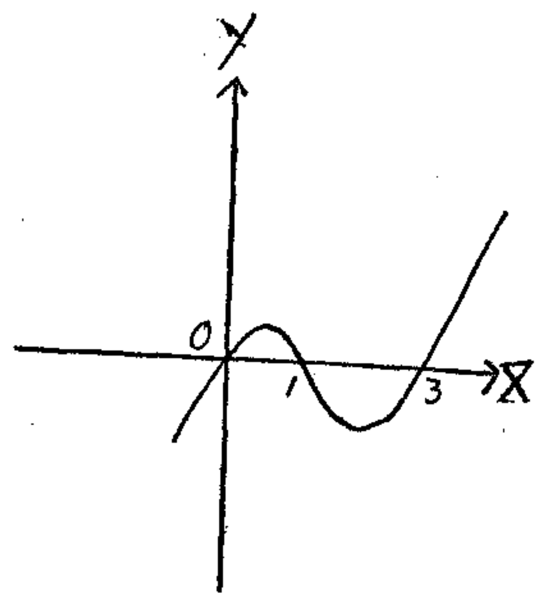
〔解〕 (a) $y=(x-1)^2(x-2)^2$

(b) $y=x(x-1)(x-3)$

(圖一)

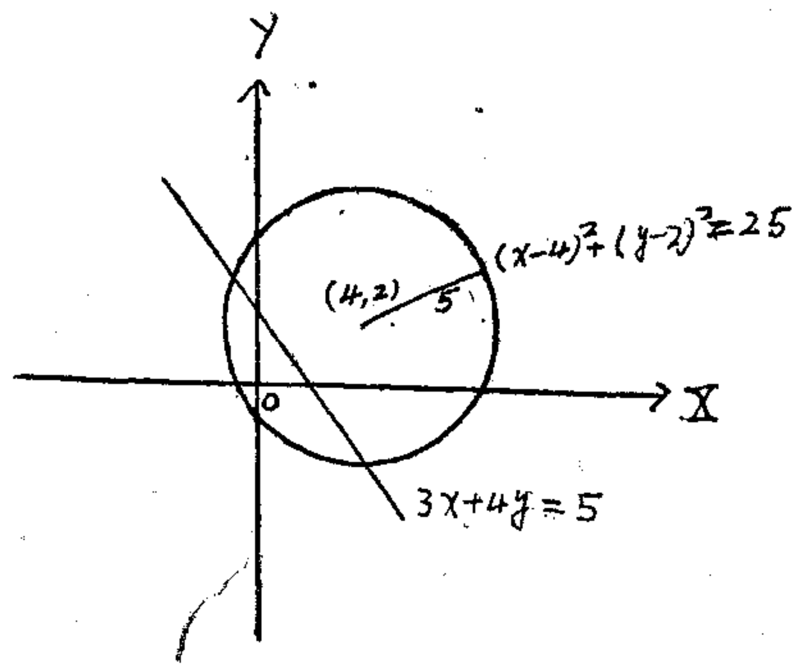


(圖二)



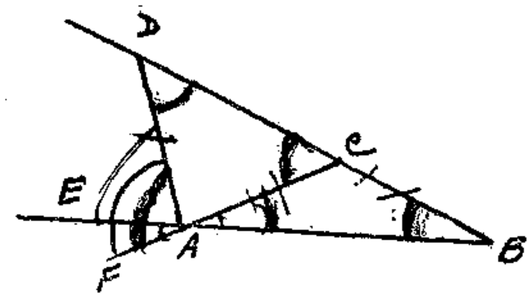
(c) $\begin{cases} x^2+y^2-8x-4y-5=0 \\ 3x+4y=5 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} (x-4)^2+(y-2)^2=25 \\ 3x+4y=5 \end{cases}$

(圖三)



6. 設AD＝AC＝BC；BE，同DB爲二直線。

求證：∠EAD＝3∠B　　EAD = 3B. FAD = 4∠B

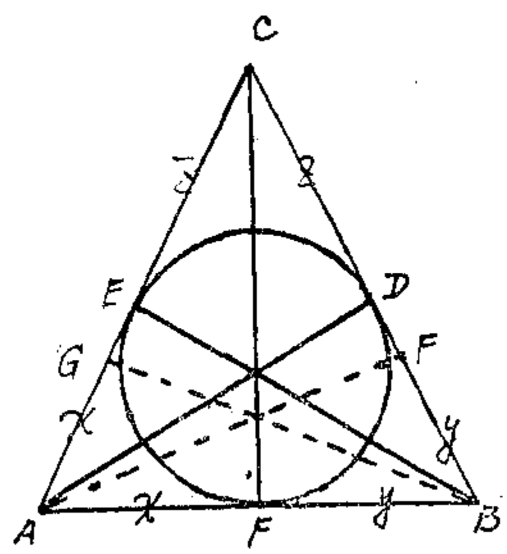


〔解〕 ∠EAD ＝∠ADB＋∠B

＝∠ACD＋∠B

＝2∠B＋∠B

＝3∠B。



7. 三角形之三邊爲9，8，9，求各項點至其內切圓與邊相切之點之距離。

〔解〕 設△ABC之三邊 AB＝8，AC＝BC＝9。外切圓於D，E，F．

求 AE，AF，CE，CD，BF，BD，CF，AD，BE之長。

設AF＝AE＝x，

BF＝BD＝y，

CE＝CD＝z，

因 $\begin{cases} x+y=8, \\ y+z=9, \\ x+z=9. \end{cases}$　　故 $\begin{cases} x=4, \\ y=4. \\ z=5, \end{cases}$

∴AF＝AE＝4，　BF＝BD＝4，　CE＝CD＝5，

又CF＝$\sqrt{AC^2-AF^2}=\sqrt{81-16}=\sqrt{65}$。

於△ABC

$\because \overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{BC}\cdot\overline{BF}$.

即　$9^2=8^2+9^2-2\times9\times BF$,　　$\therefore BF=\frac{32}{9}$.

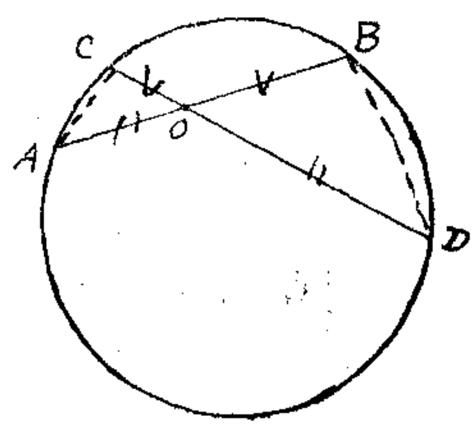
於$\triangle ABD$, $\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2BD\cdot BF=8^2+4^2-2\times4\times\frac{32}{9}=\frac{464}{9}$,

$\therefore\ AD=\frac{4}{3}\sqrt{29}$

$BE=\frac{4}{3}\sqrt{29}$.

比例证亦可.

8. 設一弦被他一弦所平分，則其任一線段爲他一弦之二線段之比例中項。



［解］　設AB被CD平分於O，AO＝BO，

求證：$\overline{AO}^2=\overline{BO}^2=CO\times DO$.

［證］　$CO\times DO=AO\times BO$

即　$\overline{AO}^2=\overline{BO}^2=CO\times DO$

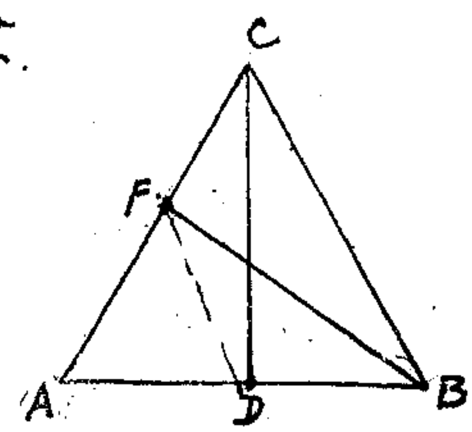
9. 於$\triangle ABC$內，D及F爲AB，及AC之中點；以 ~~[illegible]~~

求證$\triangle ADC=\triangle ABF$.　~~[illegible]~~

［證］　$\triangle ADC=\frac{1}{2}\triangle ABC$　　[illegible]

$\triangle ABF=\frac{1}{2}\triangle ABC$

$\therefore \triangle ADC=\triangle ABF$.



10. 二管各高50ft.，直徑一爲10ft.，一爲16ft.，今以他一管替之。其容量與此二管等，其高亦相等，求此管之直徑。

［解］　設此管之直徑爲x，則

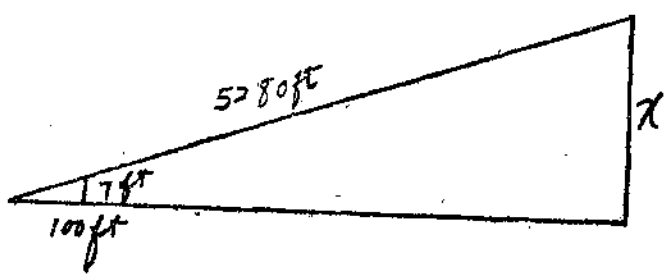
$$50\pi\left\{\left(\frac{10}{2}\right)^2+\left(\frac{16}{2}\right)^2\right\}=50\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

即　$x^2=10^2+16^2=356$.

$$x=\sqrt{356}=18\cdot 6\text{ft}.$$

11. 鐵道一百呎之平距時，可高七呎，問斜行一里可高幾呎？

〔解〕 $\frac{x}{5280}=\frac{7}{\sqrt{100^2+7^2}}$



$$\therefore\ x=\frac{7}{\sqrt{100^2+7^2}}\times 5280=358\cdot 8\text{ft}.$$

12. 求證 $\frac{\tan 5x-\tan 3x}{1+\tan 5x\tan 3x}=\frac{\tan 3x-\tan x}{1+\tan 3x\tan x}$.

〔證〕 $\tan(5x-3x)=\tan(3x-x)$

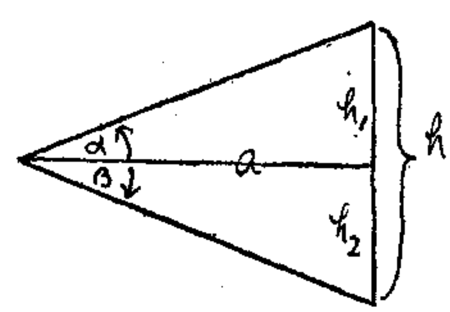
即 $\frac{\tan 5x-\tan 3x}{1+\tan 5x\tan 3x}=\frac{\tan 3x-\tan x}{1+\tan 3x\tan x}$.

13. 於塔之平距離a處，測得塔頂之仰角爲α，塔底之俯角爲β，求證塔高爲

$$h=a(\tan\alpha+\tan\beta)=a\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

〔證〕

$$h=h_1+h_2=a\tan\alpha+a\tan\beta$$
$$=a(\tan\alpha+\tan\beta)$$
$$=a\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}\right)$$
$$=a\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha+\cos\beta}.$$



14. 求證：——

(a) $\text{arc}\tan\frac{1}{2}+\text{arc}\tan\frac{1}{3}=\text{arc}\tan 1=\frac{\pi}{4}$

(b) $\sin^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}x=\frac{1}{2}\cos^{-1}(1-2x^2)$

〔證〕 (a) $\tan(\text{arc}\tan\frac{1}{2}+\text{arc}\tan\frac{1}{3})=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1$

$\tan(\text{arc}\tan 1)=1,\tan\frac{\pi}{4}=1.$

$\therefore$ arc $\tan\frac{1}{2}+$ arc $\tan\frac{1}{3}=$ arc $\tan 1=\frac{\pi}{4}$.

(b) $\sin(\sin^{-1}x)=x, \sin(\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}x)=\cos(\cos^{-1}x)=x,$

$$\sin\frac{1}{2}\cos^{-1}(1-2x^2)=\sqrt{\frac{1-\cos\cos^{-1}(1-2x^2)}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1-(1-2x^2)}{2}}=x,$$

$\therefore \sin^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}x=\frac{1}{2}\cos^{-1}(1-2x^2).$

二十三年度交通大學入學試驗物理試題解答

注意：——投考實業管理門者答A組各題（一小時半）投考其他各門者答A B兩組各題（三小時）不准發問

A 組

A—1 Explain the following terms :—

(a)Uniform Motion, (b)Relative Humidity, (c)Self-Induction (d)Sympathetic Vibrations, and (e)Index of Refraction.

A—1 (a)凡速率一定之運動卽謂之等速運動.

(b)凡空氣在某體積內現含水蒸氣之量,與其在此溫度飽和時所含水蒸氣量之比,卽謂之空氣之相比濕度.

(c)凡在同一輪道中電路初連鎖時，常發生與原電流方向相反之電流，使原有電流之强度減少;當切開時,亦有與原電流同方向之電流發生,使原有電流之强度增加,此種現象謂之自感.

(d)凡音波或其他較弱波動之振動周期（或頻率）如與一物體原有之振動周期（或頻率）相當，或者可以互相調節合拍時，卽可使此物體發生强大之振動,此種振動謂之交感振動.

(e)當光由任一媒質投射于他一媒質中時卽有屈折現象,投射角正弦與屈折角正弦之比,卽謂之該物質之折光指數.

A—2 (a)What are the approximate values in absolute C.G.S. unite of (Ⅰ)One atmospheric pressure, and (Ⅱ)One horse power ?

(b)Convert : —

(Ⅰ)British Thermal Unit into Calorie and (Ⅱ)Foot-candle into meter-candle ?

A－2 (a)(Ⅰ)—大氣壓力≒10136000達因/糎²

(Ⅱ)—馬力=746瓦=746×10^7厄/秒

(b)(Ⅰ)—B.T.U.=453.6×$\frac{5}{9}$=252卡

(Ⅱ)—呎燭=$(1/.3048)^2$=10.77米燭

A—3. (a)What will be the acceleration produced if a constant force of 500 dynes is acting on a mass of 25 grams ?

(b)Over what distance will the body move in 5 seconds if the force mentioned in (a)continues to act ?

(c)If the force ceases to act at the end of the 5th second, how far will the body move during the next 5 seconds ?

A—3. (a)加速度= $F/m=500/25$=20每秒每秒糎.

(b)第一五秒鐘間所經之距離=$\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\times20\times5^2$=250糎.

(c)第二五秒鐘間所經之距離=$Vt=5\times20\times5$=500糎.

A—4. How many grams of steam will be produced of 1000 grams of melted lead at its melting point 326 deg C. are poured into 100 grams of water at 80 deg C. contained in a caliumeter of specific heat 0.1 and weight 60 grams ? (Sp. ht. of lead=0.03, heat of fusion of lead=56 cal/gm ; heat of vaporization of water=540 (Cal/gm.)

A—4. 令x=發生蒸氣之質量

則 $540x+(100+60\times0.1)(100-80)=1000[5.6+0.03(326-100)]$

∴ x=19克.

A—5 The terminals of a battery of 3 cells Connected in sesies each bearing an e. m. f. of 1.5 volts and internal resistance of 2 ohms are connected to two resistances of 2 and 3 ohms in parallel. Find the potential diffirence between the terminals of the battery and the current in each of the parallel resistences.

A—5. R=2歐與3歐二抵抗平結時之總抵抗 $=\frac{2\times3}{2+3}=\frac{6}{5}$,

E= 電池兩極間之電位差 $=R\times\frac{E}{R+r}=\frac{6}{5}\times\frac{3\times15}{\frac{6}{5}+3\times2}=0.75$弗.

I =輸道內通過之電流 $=\frac{3\times15}{\frac{6}{5}+3\times2}=0.625$安.

I_1=在輸道內通過2歐抵抗之電流 $=0.625\times\frac{3}{5}=0.375$安.

I_2= 在輸道內通過了歐抵抗之電流 $=0.625\times\frac{2}{5}=0.250$安.

B 組

B—1. Distinguish between : —

(a)Velocity and Speed,

(b)Vapor and Gas,

(c)Primary Cell anp Secondary cell,

(d)musical Jone and Ncise, and

(e)Real Image and Virtual Image.

B—1. (a)運動體每單位時間位置之變化，謂之速率；倘與其變位之方向合併而言，即謂之速度.

(b)凡臨界溫度甚低或臨界壓力甚高，且在普通情形下，不能以液體狀態而存在之物質，謂之氣體.至於蒸氣則係由臨界溫度甚高，且在普通情形下雖只受有一大氣壓力亦爲液體之物質蒸發而來.

(c)原電池之電流，係由於組成電池之化學藥品所生之化學作用而發生.次電池則不然，其能發生電能之化學能量，乃由電能變化而成，故須先通以一定之電流，經過以一定之時間始可.

(d)凡振動有一定之規律，使人聽之能起快感之音，皆謂之樂音。倘振動無規則，使人聽之起不快之感者，卽爲噪音。

(e)凡光線實際集中於一處所生之像謂之實像。倘光線實際並不由其處發出，僅由吾人之眼依光線直進之作用以看出者卽係虛像。

B—2. Give the approximate value to each of the following physical quantities :

(a)Acceleration of gravity in meters/min/min.

(b)Absolute zero of temperature in Fahreneit scale,

(c)Electrochemical Equiualent of siluer,

(d)Velocity of Light in vacaum or air, and

(e)Normal distance of most distinct vision.

A—2. (a)物體因重力作用而生之加速度$=980$每秒每秒糎$=9.8\times60\times60$

$=35280$每分每分米。

(b)華氏溫度計上相當於絕對溫度零度之示數$=-273\times\frac{9}{5}+32$

$=-459.4°F$

(c)銀之電化當量$=0.001118$克。

(d)光在眞空中之速度$=300,000$每秒仟米。

(e)普通明視距離$=25$糎。

B—3. A block of wood weighs 50 grams in air when the black is attacked to a sinker and weighed again with the block in air on the sinker in water the total weight is 190 grams when the block and the sinker are both immersed in water, the total weight ls 120 grams. What is the volume and the specific gravity of the wood block ?

B—3. 木塊之體積$=50+[(190-50)-120]=70$立糎。

木塊之比重$=\frac{50}{70}=0.7145$.

B—4. Beats are heard three times per second when two open pipes one 2 ft. 9 in. in length and the other half an inch longer, are sounded to-gether. Find the velocity of sound in air.

B—4. 令V＝音在空氣中之速度，

$\therefore \nabla/_{33\times 2}=\Lambda/_{33.5\times 2}+3$,

$V=66\times 67\times 3=13266$每秒吋$=1105.5$每秒呎.

B—5. A concave mirrer has radius of curvature 40 cm. Find the position and the size of images when a luminors dise of 2.5 cm. diameter is held at a distance of 25 cm. and 15 cm. respectivety form the mirror. [END]

B—5. (a)令V＝像與鏡之距離，

Q＝像之大小，

$\therefore \frac{1}{25}+\frac{1}{V_1}=\frac{1}{20}$,

$V_1=100$糎，

$Q_1=2.5\times\frac{100}{25}=10$糎………直徑，

(b) $\frac{1}{15}+\frac{1}{V_2}=\frac{1}{20}$,

$V_2=-60$糎，

$Q_2=2.5\times\frac{60}{15}=10$糎………直徑.

Science & Engincering. Physics 不准發問

Note : In the following froblems the value of g is to be taken as 32 or 980.

1.(a) What are the three fundamental physical measurements ? What are their standards and units in metric system ?

(b) Two blocks A and B are placed on earth surface as shown. Indicate the force acting on A and B in two seperate sketches. State the four pairs of action reaction existing in the system (A, B, and earth)

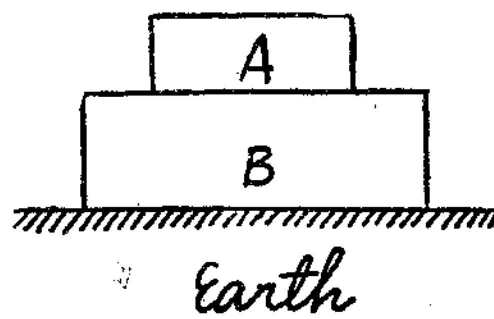


圖 一

1.(a) 長度，質量，時間爲物理學上之三種基本測量；在米制卽以米爲長度單位；瓩爲質量單位，平均太陽日爲時間單位。

長度單位之米，質量單位之瓩均以萬國同盟度量衡局所保管之標準米爲標準。平均太陽日則以太陽日一年間之長短平均所得之時間爲標準。

(b) 作用於A之力爲Ag，

作用於B之力爲Bg，

在A，B與地間之作用與反作用共有(1)A與B，(2) A與地 (3) B與地 (4) (A+B) 與地。

2. A body of mass 5 pounds starts from rest and moves along a smooth horizontal plane with a uniform acceleration. It describes a distance of 128 feet in the first four seconds. Find (a) the force acting on the body, (b) the total impulse acting on it, (c) the power at the end of the fourth second, (b) the total work done in the four seconds and (e) the kinetic energy at the end of the fourth second.

2.(a) 加速度 $=\frac{2s}{t^2}=\frac{2\times128}{4^2}=16$ 每秒每秒呎 ($\because s=\frac{1}{2}at^2$).

作用力$=ma=\frac{5}{32}\times16=2.5$磅重力.

(b) 力時積$=2.5\times4=10$每秒磅呎單位.

(c) 四秒鐘終了時之速度$=at=6\times4=64$每秒呎.

四秒鐘終了時之工率$=FV=25\times64=160$每秒呎磅.

(d) 四秒鐘間所作之工$=FS=2.5\times128=320$呎磅.

(e) 四秒鐘終了時之動能$=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times5\times64^2=10240$呎磅達:

$$=\frac{10240}{32}=320\text{呎磅}.$$

3. Two unequal masses A and B are suspended at the ends of a lever of unequal arms of 10 and 7 inches respectively. The specific gravity of A is 8 and that of B is 2.8. whan A is completety immered in water and B is completety imersed in a liqiud of specefic gravity 0.8, the lever is in equilibrium. Find the ratio of the masses A and B.

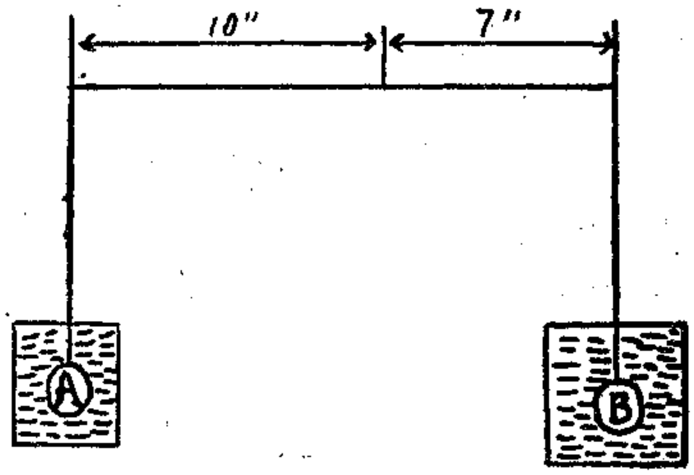


圖 二

3. 根據阿幾默德原理設令A,B爲此二物體之質量則得

$$10\left(A-\frac{A}{8}\right)=7\left(B-\frac{B}{2.8}\times.8\right)$$

$$7A=4B$$

$$\therefore\ \frac{A}{B}=\frac{4}{7}$$

4. What is the final result (temperature and states) of a mixture

80 grams of ice at $0^{\circ}C$, 200 grame of water at $15^{\circ}C$, and 5 grams of steam at $100^{\circ}C$? The vessel which cantains the mixture has negligible heat capacity. During mixing mechanical work of 168 joules is done upon the mixture by stirring Assuming that there is no heat lost.

Heat of fusion ice………80 cal/g.

Heat of vaporization of water………540 cal/g.

Mechanical equivalent of heat………4.2×10^{7} erg/g.

4. $\left[5(540+100)+200\times15+\frac{168}{4.2}\right]\div80=78$克.

依照上得結果知5克之$100^{\circ}C$水蒸氣200克之$15^{\circ}C$水完全變爲$0^{\circ}C$水時所放出之熱量,僅能溶解78克之$0^{\circ}C$冰爲$0^{\circ}C$水,故最後之結果應爲283克之$0^{\circ}C$水及2克之$0^{\circ}C$冰.

5.(a) What is a gas thermometer? What are the two main types of gas-thermoneters? Explain how each type can be used to measure temperature.

(b) Explain the plenomenon of total reflection of light when passing from one medium to another.

5.(a) 凡以定量氣體體積或壓力之變化以測定溫度高低之儀器,均謂之氣體溫度計.倘固定其體積,視其壓力之大小以測定溫度者,謂之定體積氣體溫度計.如其壓力爲一定,視其體積之脹縮以測定溫度者,則謂之定壓氣體溫度計.

(b) 凡光由密媒質投射入疏媒質時,除折射光外,尙有一部分爲其境界面所反射,當投射角漸次增加達到某一數値時,屈折角爲90°,屈折光綫卽沿境界面進行;雖投射角之值再有增加,光亦不再屈折而全部反射.此種現象謂之全反射.

6. A convergent lens (convex lens) of 10 cm. focal length is placed 20

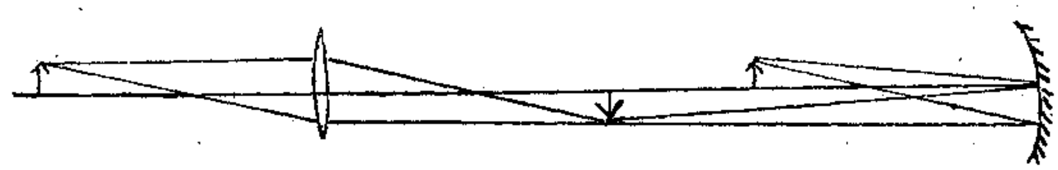
cm. from a luminous object 2 cm. long. If a concave of 24 cm. radius of curvature is placed at a distance of 50 cm from the lens on the image side, what will be the position and the size of the image formed by the mirror? Draw diagram showing the formation of the image.

6. $\frac{1}{20}+\frac{1}{v}=\frac{1}{10}$, $v=20$糎………透鏡成像之位置與透鏡之距離

$I=0=2$糎………透鏡成像之長

$\frac{1}{50-20}+\frac{1}{v},=\frac{2}{24}$, $v=20$糎………凹面鏡成像之位置與凹面鏡之距離

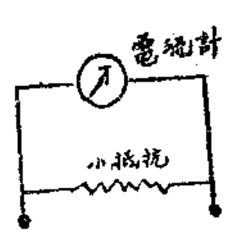
$I=\frac{20}{50-20}\times 2=\frac{4}{3}$糎………凹面鏡成像之長



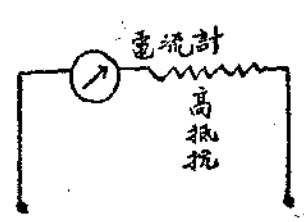
7.(a) How can a galvanometer be converted into an ammetre or a voltmeter? Draw diagrams to show the connections for each.

(b) Diseribe at least three different methods for the determination of resistance of an electric conductor. state the disadvantages of each.

7.(a) 電流計之兩極間，如加以間路小抵抗，(卽加一小抵抗與電流計之轉動線圈成平結)電統計卽可用作安培計(圖一).倘以高抵抗與其兩極間成串結，(卽加一高抵抗與其轉動線圈成串結)電流計卽可用作伏特計(圖二).



圖一



圖二

(b) (1)代替法：將待定值之抵抗x與電池 B，電流 計G，及二圓電鑰k 用導線串結之，當關閉電鑰使電流通過於輸道內時，記錄電流計上之示數，如其偏轉度過大時，可加一間路小抵抗，以減小之，然後用一已知抵抗R以代替 x，校正此抵抗之值，使電流計上之示數與前得者相同，則x＝R，惟用此法時，常有R之值不能校正準確，使電流計上之示數與電流通過x時完全相同之困難。

(2)安培計伏特計法：此法係用一伏特計 V量其兩端之電位差E，幷用一安培計R，量其通過之電流Ｉ，（圖二實線圖）。

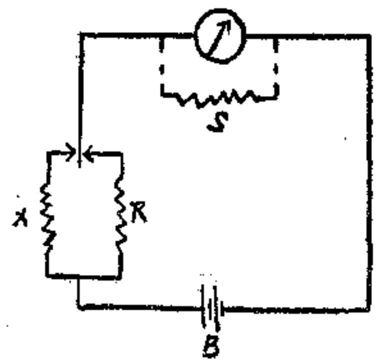
$$\therefore x = \frac{E}{I}.$$

用此法時，須伏特計抵抗極大，而x之值甚小時始。可否則通過x之電流，卽不能以安培計上之示數計算。倘連接安培計與 x 於伏特計之兩端（圖二虛線圖）則安培計之抵抗，須先求出以，加入計算，且當x之值較安培計之抵抗為極小時，亦不適用。

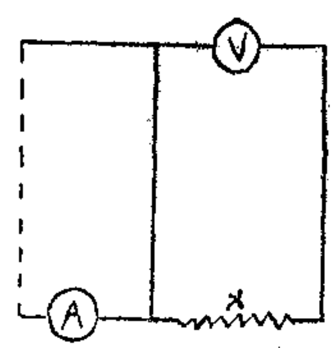
(3)滑線橋法：滑線橋上之綫AB長為1000粍，當電鑰K,K'關閉，電流在輸道中通行時，如電流計G中之綫圈無論偏轉，卽表示CD兩點之電位差相同，則

$$\frac{x}{R} = \frac{a_1}{1000-a_1},\ x = R\frac{a_1}{1000-a_1}.$$

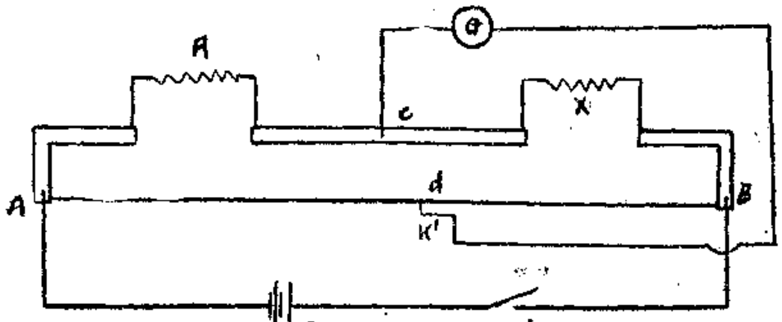
設 AB 線之粗細不勻時，則其抵抗之大小卽不與其長短成比例，應用上式卽有錯誤。



圖一



圖二



圖三

8. A galvanometer of 200 ohms resistance and a coil of 40 ohms resistance are connected in series to a storage cell. The galvanometer current is found to be 0.008 ampere. If the 40-ohm coil is removed, and the galvanometer is shunted by another resistance coil of lo ths galvanoneter current is found to be the some as before. Find the e.m.f.and the internal resistance of the storage cell.

8. 令E＝蓄電池之E.M.F.

r＝蓄電池之內電阻

$$\therefore \frac{E}{200+40+r}=\frac{E}{240+r}=0.008 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{E}{\frac{200\times10}{200+10}+r}\times\frac{10}{210}=\frac{E}{200+21r}=0.008\cdots\cdots(2)$$

解上列二方程式得

E＝1.936伏特， r＝2歐姆.

9.(a) Explain the following terms:

(Ⅰ)Magnetic Lincs of Force,

(Ⅱ)agnetic Induction,

(Ⅲ)Specific Resistance,

(Ⅲ)Electro-Chemical equivalent.

(b) What is the elementary principle of transformer? What is its important function in electrical transmission? What is its advantage?

9.(a) (Ⅰ)磁力線者，乃一正磁極在磁場內，受磁力作用而自由運動時所取之路徑；因置於磁場內之正磁極，常由北極向南極移動，故磁力線亦起於磁石之北極而終於南極。

(a) (Ⅱ)將鐵片持至磁石之旁，則鐵片即成磁石，其與磁石較近之一端成異名之極，他端成同名之極；此種將物體置於磁場內，即可令之發生磁性之現象，即謂之磁感應。

(a) (Ⅲ)長為1糎斷面積為1平方糎之物質，當電池垂直的流過其斷面時，所有之抵抗，謂之該物質之比抵抗（或稱阻電率）。

(a) (Ⅳ)凡一庫倫之電量通過於電解質所分析出該電解質之質量，即謂之該電解質之電化當量。

(b) 變壓器乃一種用以變換交流電位之感應圈，其結構即係兩個線圈——原線圈與副線圈——，繞於用薄鐵片組成之鐵心上，當交流電流通過變壓器之原線圈時，鐵心中即生有交變之磁束，此磁束與副線圈相鏈穿遂生交變的副電位，此副電位即可使電流通於副電路中，根據互感理，知原電位與副電位之數值，係與原綫圈與副綫圈之圈匝數成正比($E_2/E_1=N_2/N_1$)，故當輸送電流時即可利用變壓器，依照經濟原則，將電位變為極高或極低，蓋當輸送電流至遠方時，如不用較高之電位，即須用甚大之導線極不經濟，蓋以通過之電流甚大，如不用甚大之導綫則大部電能將耗為熱能也，如用變壓器即可將發電機所生之電位變高，將電流輸送至用電處所，然後再用變壓器將電位減低，以備應用，此即變壓器之效用與利益也。

10(a) By how many different methods can you adjust the pitch and the quality of the note given by a violin? Explain each method briefly.

(b) Describe briefly at least two different methods for the determination of the velocity of sound in air.

10(a) 校正提琴（梵啞鈴）之音調與音色其法有三：(1)變更其絃線之長短，(2)變更其絃綫所受張力之大小（弦之鬆緊），(3)變更其絃線之粗細，因絃綫之頻率與其長短成反比與其所受能力之平方根成正比，與其線密度之平方根成反比也。

(b) (1) 設有距離甚遠之甲乙二地，當甲地開炮時，乙地之人必先見火光後聞砲聲，如量得其中間隔之時間，則以此時間除甲乙二地之距離，即得音在空氣中之速度。

(2) 置一音叉於一閉管之上端，此閉管之長度可用儲於管中水面之移動而變更之；當音叉振動時管中空氣亦發生振動，當此振動達管底反射而重經管口時如起共鳴作用而發極大之聲，則其長度當爲音波長度之半倘。再變更其長度求出第二次發高聲之地位，則其長度當爲音波長度$\frac{3}{4}$，故此二長度之差當爲波長之半，令其數値爲l設音叉之頻率爲 n，則音在空氣中之速度應爲 2nl。

中等算學研究會編輯

「新學制初中算學教科書」

算術 上下二冊 △每冊大洋八角▽

代數 上下二冊 △每冊大洋九角▽

幾何 上下二冊 △每冊一元一角▽

三角 全一冊 △每冊大洋八角▽

各埠各大書局均有出售

編輯者：中等算學研究會

校訂者：段調元　周家樹

×××××××

本書十二大優點

1. 根據教部標準　2. 曾在各校實驗
3. 編者經驗充足　4. 習題活潑新鮮
5. 編制適合心理　6. 內容注重實用
7. 有充分的彈性　8. 有豐富的興趣
9. 方法異常經濟　10 材料幾經增删
11 印採精美醒目　12 詳解無價贈送

△各校教授評語▽

金陵大學算學系主任教育部中小學課程修訂委員師範科課程委員 **余光烺先生**

中等算學研究會所編輯之初中新學制算學教科書計有算術代數幾何各二冊三角一冊全書有一貫之系統互相聯絡編制甚合學生心理取材博而不致散漫習題多而支配勻稱誠爲現代初級中學適用之優良教本也

中央大學算學教員 中大實驗中學自然科主任 **徐曼英先生**

中等算學研究會編輯之初中算學教科書選材精當編輯得宜根據實際之經驗運用新穎之方法頗合教授初中學生之用

南京成美中學教員 測量專門學校教官 **劉漢三先生**

余歷任各校算學教師數載曾試用多種教本結果覺中等算學研究會出版之初中算學教科書最爲滿意該書編制之得宜說理之詳明習題之豐富可謂盡善盡美故樂志數言以作介紹

江蘇省立南京中學教員 **柳屺生先生**

中等算學研究會所編初中算學教科書係富有教學經驗的教師多人合撰計算術上下代數上下幾何上下及三角共計七冊全書極有聯絡彼此呼應用作教本收效很宏尤以各冊都另印問題解答專贈教師便於改削課本法良意美至可欽佩

山東兖州第四師範教員 **徐廷瓛先生**

初中算學科學生素視爲畏途固由算學科性質使然但一般課本編制上之不良亦一大原因余歷任皖魯各地中學教員有年均採用中等算學研究會出版之初中算學教科書頗足引學生興趣教師授課易而學生得益多誠適合現代初中之優良教本也

安徽省立徽州中學教員 **胡術五先生**

中等算學研究會所編之初中幾何一書內容新穎極便初學能將經驗幾何與理論幾何分開並於每述一定理之先加入啓發題數則此二點尤爲其最大特色

安徽省立滁縣中學教員 **胡思齊先生**

算術：內容豐富；能使讀者生研究算術之興趣。
代數：編制周密；能使讀者得完備的代數基礎。
幾何：理論嚴正；能使讀者知正確的幾何觀念。

安徽省立第五中學教員 **陳伯琴先生**

余在蘇皖浙魯鄂各省教授算學十有餘載對初中課本每採用中等算學研究會所編之算術代數幾何該書編制新穎一掃我國算學教科書中陳腐之氣且幾何一書分經驗與理論二部教學方法尤感便利在歐美各國已皆如此編制在我國則此書實爲獨創誠良教本也

南京冶城中學算學教員 胡二鼎 孫斯大 **先生**

中等算學研究會所出版之初中算術代數幾何三種教本取材新穎證解詳明頗切實用其引人入勝處最易使學者收聯絡貫通徹底了解之效業經敝校試用兩載認爲初中不可多得之良善教本也

本刊預定章程

1. 本刊每期出版後儘先發送預定各戶

2. 定閱者請將前面定閱單塡明寄下本社再發正式收據爲憑

3. 定閱者須將通信處詳細註明如中途改變地址時請即來函通知否則如有遺失本社不能負責

定閱款項以大洋爲準但一角以下郵票亦能十足通用惟須襯托完整如損壞及限地用者不收

5. 定閱須註明開始卷期

本刊投稿簡則

1. 本刊以供給中學校師生補充算學教材，引起研究興趣爲宗旨，如蒙賜稿，至所歡迎。

2. 來稿以簡明淺易能合中等算學程度爲佳。

3. 來稿務宜謄正，勿過於潦草，否則惟有割愛。

4. 來稿如有繪圖，須用墨汁繪畫，因如用紅藍墨水，及鉛畫繪畫，則製版絕難明晰此點務望投稿諸君，特別注意。

5. 翻譯文字 ， 請詳細註明原文出處。

6. 來稿登載後，酌贈以本刊若干期爲酬。

7. 來稿內容，本刊有修正全權，其不願修改者，請寄稿時聲明。

8. 來登稿件，除寄稿時特別聲明并附足郵費外，概不退還。

9. 來稿請署眞姓名，如欲用筆名發表，請預先聲明，本社當代守祕密之責。

10. 來稿請寄南京南捕廳鍾英中學本社

敬啓者敝社出版「中等算學月刊」以供給中學校師生補充算學教材引起其研究興趣爲宗旨內容豐富取材新穎爲國內僅有之算學刊物全年十期定價一元一角零售每册一角三分茲爲普及優待閱者起見特定優待辦法如下：凡在民國廿四年四月底以前預定全年者僅收一元過期則照定價計算如蒙定閱請將下列定閱單塡明并連同書費一併寄下敝社當按期續寄（背載預定簡章五條祈　留意）

中等算學月刊社謹啓

中等算學月刊定單

啓者茲寄上大洋　元　角　分定閱

貴刊自第　卷第　期起至第　期止共計　期

此致

中等算學月刊社

寄件處：

訂閱者：

月　日

社址：南京南捕廳鍾英中學內