萬有文庫
第一二集簡編五百種
王雲五主編

統計學原理

(二)

鮑萊著
李植泉譯

商務印書館發行

省立新竹高中圖書館
00010735
-2
35

萬有文庫

第一二集簡編五百種

總編纂者
王雲五

商務印書館發行

統計學原理

(二)

鮑萊 著

李植泉 譯

國立新竹高級中學圖書印

漢譯世界名著

010735

第七章　圖示法

第一節　總論

{平均數與圖式}　在初級統計學中，有重要方法兩種，爲一般學生或辦理統計事務之官員，所不可不知，且無數學知識亦易瞭解，但竟爲一般所誤解，或被對統計無興趣或向不通統計之人士所忽略者，厥爲平均法與圖示法。此兩種方法所以相提並論者，乃以平均數及圖式之用途，有幾不可分之連繫在也。設遇有極大極繁之數字羣類當前，雖用表列法已爲明晰之表示，但吾人對於許多數字之整個情形，仍不能完全領略。任何一列數字——各城市之人口，各級年齡上之死亡率，許多工人之工資，若干年數之進口貨值——數列愈長，愈難令人索解。十個數目組成之序列，吾人或可一望而知，二十個數目之序列，雖稍費力，亦不難明瞭；但如一列印就之一百年數字，則欲其予吾人以何等之印象也殊難。一樹易見，成林之樹木則不易辨淸矣。關於平均數用途上所有問題之試金石，卽視所選用之平均數，是否能給予全部羣類以最佳之總結，使此一總結數字令人可以一目瞭然。在平均數一名詞意義大爲擴張時，卽可知同時選用三，四乃至十個適當之數字，

14189

悉能充分表現任一羣類之主要形態。平均數如此，圖示法亦然，圖示法之主要用途，乃在表現大羣類之數字，以便瞭解全部之情形，至一切圖式之是否完善，其試金石乃視所繪之圖，能否托出一組數字之最佳觀感，令人一望即可領會。惟圖式尚有一用途，爲平均數所不及者，即欲表現時間數列，唯圖式實優爲之。然就實質言之，圖式又不如平均數之重要，蓋平均數雖由若干數字推出，但離開數字亦能獨立存在，而代表所測量之數量之眞正形態。唯用平均數，乃可以此一羣類，與其他之羣類相比較，而圖式則不然，蓋圖式乃立於輔助之地位，非主要之元素，即完全取消之，亦無不可，因用之乃在助目力之所不及，且爲閱者節省時間計也。

圖式法及平均數 爲使本章與前一章關係銜接起見，玆請同時用兩種方法，表示同一之數字羣類，即以多數工人之工資爲例以討論之，資料如下：

工人之工資及人數

工資	人數	
自十五先令至十六先令	200	
自十六先令至十七先令	400	
自十七先令至十八先令	100	1000
自十八先令至十九先令	100	
自十九先令至二十先令	200	

自二十先令至二十一先令	200	2,200
自二十一先令至二十二先令	300	
自二十二先令至二十三先令	300	
自二十三先令至二十四先令	500	
自二十四先令至二十五先令	900	
自二十五先令至二十六先令	1,200	3,500
自二十六先令至二十七先令	800	
自二十七先令至二十八先令	700	
自二十八先令至二十九先令	500	
自二十九先令至三十先令	300	
自三十先令至三十一先令	300	2,100
自三十一先令至三十二先令	400	
自三十二先令至三十三先令	400	
自三十三先令至三十四先令	500	
自三十四先令至三十五先令	500	
自三十五先令至三十六先令	600	1,200
自三十六先令至三十七先令	400	
自三十七先令至三十八先令	100	
自三十八先令至三十九先令	80	
自三十九先令至四十先令	20	

如用平均法，上列羣類可以下列數字代之：

全部之平均數　　二十七先令六便士

最低1000人之平均數一十七先令

最高1000人之平均數三十六先令六便士

中等4000人之平均數二十七先令

或

中位數	二十六先令九便士
四分位數	二十四先令二便士
	三十二先令
十分位數	二十先令
	二十三先令六便士
	二十四先令九便士
	二十五先令八便士
	二十六先令九便士
	二十八先令二便士
	三十一先令
	三十三先令四便士
	三十五先令四便士
衆數	二十五先令三便士
次要衆數	十六先令六便士
	三十六先令

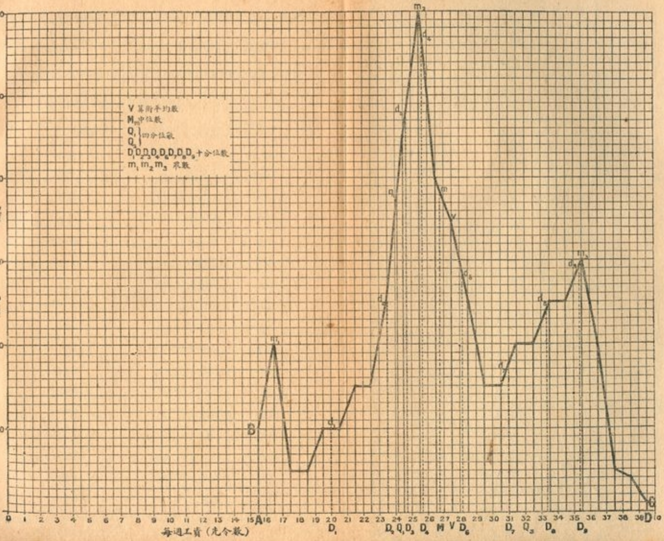
或

工資	人數對全部之百分數
自十五先令至二十先令	10

自二十先令至二十五先令	22
自二十五先令至三十先令	35
自三十先令至三十五先令	21
自三十五先令至四十先令	12

{簡單圖式之構造法} 此一羣類,以圖式表列之,如第二圖。此爲用圖表示兩變數相互關係之一例。與此相類之圖式,可用以表示各級年齡中之結婚率或死亡率,表示身長各異之人數,在各種價格上之需要,或用以表示其他任何同質數量之羣類。即以此同一之構圖法,表示若干年中任何數值之變動,亦無不可。構圖之法,須在紙之底邊,畫一平行線,在此線上分成相等之距離,以代表依次增加之若干數量,諸如年齡,所得,身長,價格,時間以及其他等等。此線名曰橫軸 (axis of abscissa),線上某一點至零點之距離,謂之該點之橫坐標 (abscissa)。在紙之側邊,經過零點再畫一線,與橫軸成爲直角,則此垂直之線,即名縱軸 (axis of ordinate)。在此縱軸上,亦分成等距,依次代表含有橫軸上所代表數量之人數或件數。又於橫軸上分別在各點各畫一垂直之線,標明在該一點上有若干人數或件數,此線即爲縱坐標 (ordinate)。請閱下列一圖,橫坐標所表示者,爲工資數,縱坐標代表賺各級工資之人數。橫坐標縱坐標旣已判明,然後即在各縱坐標之上端,各連一直線,於是圖式乃告完成。實際上,如用方格

第二圖　工資統計圖


V 算術平均數
M 中位數
Q1 Q3 四分位數
D1 D2 D3 D4 D6 D7 D8 D9 十分位數
m1 m2 m3 衆數
人數
工人
每週工資(元分數)
1200
1000
800
600
400
200
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39
A D1 D2 Q1 D3 D4 M V D6 D7 Q3 D8 D9 D
B C
m1 m2 m3 m

紙，則可不用畫縱坐標，而縱坐標之頂端，亦可標出。

工資圖之解釋 由此一圖，令人一望即知，賃銀勞動者依所賺工資分配之情形。工資在十五至十六先令者人數甚少，在十六至十七先令者則漸多，但在十七至十九先令者人數又大爲減少。自十九先令起，人數依次連續上升；至二十四先令與二十七先令之間，人數乃登峯而造極，其中尤以在二十五先令至二十六先令者爲最多。但自是而後，則每況愈下，直至三十先令一組而後已。此三十先令以前一組人數雖過少，而與十七至十九先令之間者相較，尙非過低。降至三十先令之後，復又以有規則之進展，漸次上升，至三十六先令後，乃又急轉直下，而達於三十九先令一組之最低數。由此觀之，在二十五先令左右集合之大部，乃爲全類之主體，而三十六先令之一組則屬其次，但在十六先令之處，則爲極小而幾別成一部。凡此種種，示與吾人，在三十至四十先令間，有高度技能之工人甚多，至有平常技能之工人大衆，則其工資乃在二十先令至三十先令之間，但有極少之粗笨無技能工人，工資均在十六先令左右。用一圖式形態畢現，如用表列豈可得哉！

於此吾人須加注意者，表上在十五先令至十六先令間之人數，正由在十五先令六便士（該組之中點）之縱坐標表示之。如表列所根據之原來數字，能取至最近之一便士爲止，則縱坐標應畫在十五先令五又二分之一便士處。各組之中點位置，畫時須準

確安置，此一要事也。

連續性　連結各縱坐標頂端之線，用途有二。第一爲便於判斷各相對高度 (relative height)；第二可表示連續性 (continuity)。第一點姑不具論，玆就第二點作圖舉例解明於下：

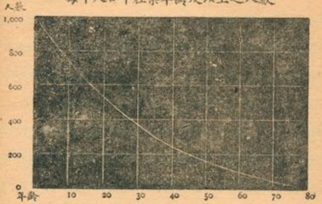
每千人口中之年齡分配

（根據一八九一年之人口普查）

年齡	人數	年齡	人數
自零歲以上	1000	自十七歲以上	607
自一歲以上	973	自十八歲以上	587
自二歲以上	949	自十九歲以上	567
自三歲以上	925	自二十歲以上	547
自四歲以上	901	自二十一歲以上	528
自五歲以上	877	自二十二歲以上	510
自六歲以上	854	自二十三歲以上	491
自七歲以上	830	自二十四歲以上	474
自八歲以上	807	自二十五歲以上	456
自九歲以上	783	自二十六歲以上	439
自十歲以上	760	自二十七歲以上	423
自十一歲以上	738	自二十八歲以上	407
自十二歲以上	715	自二十九歲以上	391
自十三歲以上	693	自三十歲以上	376
自十四歲以上	671	自三十一歲以上	361
自十五歲以上	649	自三十二歲以上	346
自十六歲以上	628	自三十三歲以上	333

年齡	人數	年齡	人數
自三十四歲以上	318	自五十八歲以上	85
自三十五歲以上	305	自五十九歲以上	79
自三十六歲以上	292	自六十歲以上	73
自三十七歲以上	280	自六十一歲以上	67
自三十八歲以上	268	自六十二歲以上	62
自三十九歲以上	256	自六十三歲以上	57
自四十歲以上	244	自六十四歲以上	52
自四十一歲以上	233	自六十五歲以上	47
自四十二歲以上	222	自六十六歲以上	43
自四十三歲以上	211	自六十七歲以上	38
自四十四歲以上	201	自六十八歲以上	34
自四十五歲以上	191	自六十九歲以上	31
自四十六歲以上	180	自七十歲以上	27
自四十七歲以上	171	自七十一歲以上	24
自四十八歲以上	161	自七十二歲以上	21
自四十九歲以上	152	自七十三歲以上	18
自五十歲以上	143	自七十四歲以上	15
自五十一歲以上	135	自七十五歲以上	13
自五十二歲以上	127	自七十六歲以上	11
自五十三歲以上	119	自七十七歲以上	9
自五十四歲以上	112	自七十八歲以上	8
自五十五歲以上	104	自七十九歲以上	6
自五十六歲以上	98	自八十歲以上	5
自五十七歲以上	91		

每千人口中在某年齡及以上之人數



（第　三　圖）

上圖，橫軸代表年齡，縱軸代表一八九一年夏末英格蘭及威爾士人口每千人中尙存在及在各級年齡以上之人數估計數。縱坐標乃由代表每歲年齡之中點之橫軸量起；但壽命之長短，不能照幾年幾月幾日計算也。此圖之本意，卽爲表明每一整歲尙存人口之比例，爲達此目的計，縱坐標之頂點所連成之線，必須不致出現破斷及折角，而應有絕對之連續性也。

實際上，不滿一整歲之較小年齡組距，無標出其縱坐標之必要，恐令人一見不能領會其詳細情節也。然上圖所畫之線，亦確與人口數爲無限大而年齡分組無限小者所呈現之線之形式相同。

就此所論各點，請考察前繪之工資統計圖（第二圖）。某一年之平均工資收入，計數時未必每一先令，甚至每一便士，均無

錯誤，此乃觀察件數不足之故，苟如件數充足，吾人自可將工資分爲整齊之順序，而以微至一法尋(farthing)爲準，則表示工資之線，必不致有尖銳之折角，而成爲連續之曲線。圖式所給予吾人之印象，卽爲連續性之存在。又吾人於下列第六圖中，可得一印象，出口貨值之線，亦確爲日接一日連續不斷也。

面積 經過一顯然之階段，吾人頗可假定，由橫軸相接兩區分點畫成之兩條垂直線，與由縱軸相接兩點畫成之兩條水平線，四條線交叉所成之中間方格面積之單位，乃代表一個工人；由此假定，可知上以曲線爲界，下以基線爲止，以左右兩條經過代表任何兩種工資額之兩點所成之垂直線爲範圍，所畫成之面積，卽爲工資介乎底線上所代表之該兩種數額之工人總數。

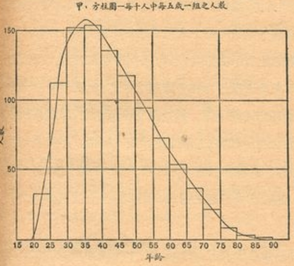
故在第二圖中，經過中位數，M，四分位數，Q_1，Q_3，十分位數，D_1，D_2，D_3，D_4，D_5，D_6，D_7，D_8，D_9，等點所繪成之線，卽將面積 $ABm_1m_2m_3CD$，分別分爲二，四，及十個等面積。該圖之重心，乃在於經過平均工資，V所畫成之垂直線上；至經過最高位置m_1，m_2，m_3 三點之縱坐標，在基線上之基點，卽爲三個衆數之所在。

分組資料 在資料之分組甚寬時，吾人以用下列方柱圖(block diagram)之法爲宜。

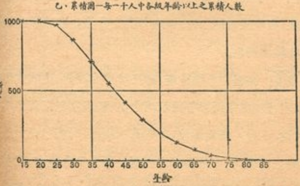
一九一一年英格蘭及威爾士已婚男子之年齡分配

甲　方柱圖——每千人中每五歲一組之人數

第四圖　一九一一年英格蘭及威爾士已婚男子之年齡分配



(第四圖甲)



(第四圖乙)

上列之甲，乙，二圖，乃爲前表第十八表已婚男子人數依年齡分配之例釋。在第十八表中，吾人除只知其年在二十歲而不滿二十五歲之比例外，並無別項消息可得。但今用圖式，以代表五歲之組距爲底，以與該組記錄上人數成比例之數爲高，乃成一長方形，所有前表未能宣示之事實，玆均已有精確之表示。根據前第二圖之指示，各組人數乃均在各該組之中心。如就年齡之圖式而論，各歲人數理應連續不斷，於是如完全表示之，卽爲連續曲線，吾人已熟知之矣，然則以五歲組距爲底之面積，必與各該長方形之面積相等。此種曲線雖爲用隨手畫法，在圖上繪成，但若全線之位置，並無動搖不定之處所，則此曲線必足爲事實之代表。

資料亦可用圖乙代表之，在圖乙中，十字號卽爲表上記錄之資料。將此若干十字號各連成直線，若事實現象果爲連續的，則結果所得之線，與曲線乃無二致，卽在本圖之曲線，亦殊難與各點所連成之直線辨別也。

必需之確度 繪圖之詳細技術，標尺尺度之位置，使圖式明晰之辦法，等項可於本章所舉各圖示明之。至於數字究以萬爲單位，以千爲單位，或以一個爲單位，其確實之程度，乃純以目力能以領會爲決定之標準。在本章所舉之圖例，所表示之數字，設在一千個中，有一易其位置，卽判然可見，此乃平常之限度也。若進

而欲求更高之確度，誠亦非事實所需要，蓋圖式不能離表列而獨立，其功能亦僅爲補目力之所不及，特別顯示數列之重要形態而已。

目力　在未討論選擇代表數字之尺度前，圖式必如何乃可予吾人以明顯之印象，應有加以研究之必要。夫吾人之肉眼，所能判斷者有三：一，距離；二，比率；三，角度是也。茲以第六圖之虛線爲例，討論距離，比率及角度三端。

（一）肉眼對於距離之長短，可予以頗爲安全之判斷；兩點對於基線之距離，何者較遠，何者爲近，一見即知，幾無可疑之點；若用方格紙，則雖有千分之一之差，亦能明察無遺。且眼目對於差額之判斷，最爲神速；例如圖中一八八三年出口貨值超過一八八五年出口貨值之數，較之一八九〇年出口超過一八八三年者爲尤巨，一望可知也。

（二）一八八九年之出口貨值，幾爲一八六二年之兩倍，或一八七八年之出口貨值，約當一八九〇年之四分之三；均不難一望而知。但只恃目力，其測量所得之確度，並不甚高；一八七三年出口貨值與一八七一年出口貨值之比(1.095:1)，較一八八二年出口貨值與一八八〇年出口貨值之比(1.073:1)爲大，實難用目力覺察之；然此並非目力不能判斷之證明，反之，該圖所給予吾人之印象，一部乃由此種性質無意識之計算而完成也。至如欲

得確實之觀察,須用本章第五節所述之方法。於此,吾人須注意,為表現此等觀察,必須插進基線;且因目力之計算,本為無意識者,若以一圖表示若干年之運動形勢,而無基線,則其將給予吾人以錯誤之印象也無疑。

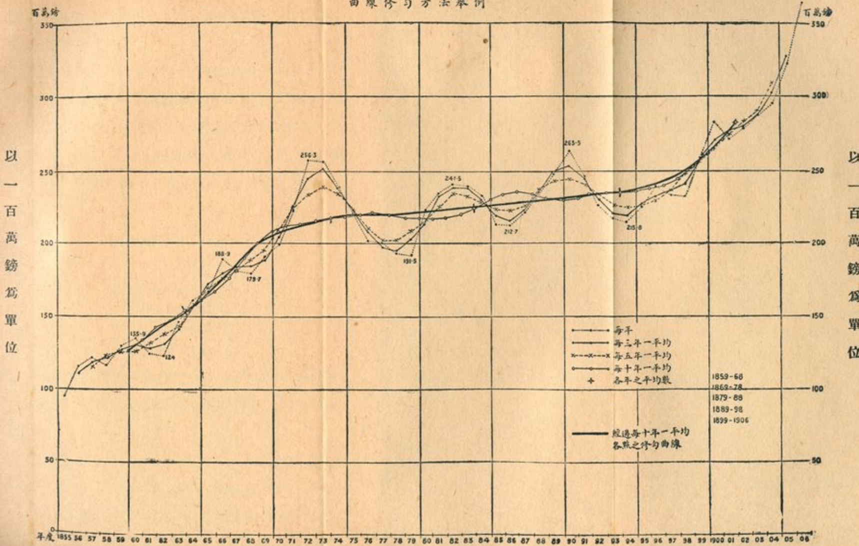
(三)設吾人質問:一八八六至一八八七年增加之量大耶?抑一八八七至一八八八年之增額大耶?則欲得迅速之答覆,與其查視二年度之差額,無寧觀察二者上升之角度。後一年度之變動,上升之線,較前一年度上升之線為峻峭(與水平線成一較大之角);故後一年之變動,必較前一年度者為大,實際上,後一年度增加有一千二百六十萬鎊之多,而前一年度只增加九百二十萬鎊也。此種目力觀察最有效之練習,莫過於判斷增加率發生變動之年度;例如,一八六二至一八六三年,出口貨值既有增進,一八六三至一八六四年,增加漸緩,一八六四至一八六五年漲勢仍輕,在一八六五至一八六六年,則驟然上騰;自一八六六至一八六七年,漸漸下降後,復又以加速度接續上升,直至一八七一年而後已,其他年度依此類推,姑不多述。一八七二年至一八七六年之線,與基線成凹面(concave),乃為急轉直下之形勢;一八七九至一八八二年之凹形,又緩緩上升。總之,如此所示之增加,乃絕對或實際之高漲,並非與各該年度之最初數量成比率而計算也。

尺度之選擇　尺度爲定數字位置所必需，究應如何選擇之，殊難規定準則。吾人所欲研究者，只縱橫尺度之相對比率一問題。全圖不可過大，以一望可窺及其全豹爲宜；如圖式複雜，所述者爲極多年代，及極多之變動數字，則纖細之確度，乃不得不付之犧牲。設橫標尺尺度，業已定妥，選擇縱標尺尺度之法，必須使一代表增加率最大之線段，能表現對縱軸十分傾斜之形勢爲度，而欲其如此，唯有將縱標尺尺度定爲極小之一度。但若欲使所有數字重要之異動，顯然可見，則縱標尺尺度不必加大。唯能適合此兩種條件之尺度，乃可謂之適得其當。下列之第五圖，例示由故意操縱尺度之大小，及取消基線，所能給予吾人之錯誤印象。

正常底線之必要　此組粗略之圖式，均表示同一之數字：一八六〇至一八九一年英美兩國工資估計數。圖甲之各線，尙爲正當。圖乙，英國工資數之尺度，基線並非自零點起算，而美國數字亦大爲縮減；其結果乃成英國工資變動甚大，而美國數字略有增加之情形。圖丙，丁，戊三圖，尺度大加改寬，基線亦行更易，故圖丙之美國工資，有超出英國數字而上升之勢，而圖戊情形又恰形相反，同時圖丁，兩國之工資，乃成等速運動之情狀。試就以下各圖，加以分析，足見只憑目力決定基線，基線必難正當無誤，若取消基線，又必不能據以估計變動之重要性。又除少數之例外容當提

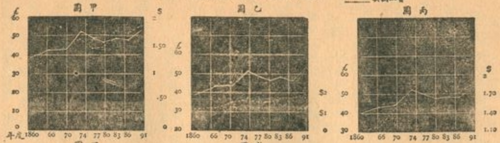
第六圖　一八五五年至一九〇六年英國國產貨物出口總額

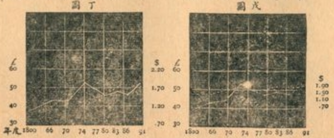
曲線修勻方法舉例



第五圖 各種尺度及錯誤之基線表示同一數字

(下列各圖左方尺度代表英國工資，右方表示美國工資)





工資平均

	英國 每年	美國 每日
年度 1860	£38.8	$1.10
1866	43.2	1.22
1870	43.9	1.50
1874	52.4	1.66
1877	49.8	1.48
1880	47.6	1.57
1883	48.8	1.75
1886	48.0	1.71
1891	53.2	1.85

及者(註一)外,凡數字圖式因取消基線關係而縮小空間者,其所代表之情形,實難令人信任。

修勻曲線　論及修勻曲線(smoothing curve),不能不以吉芬爵士(Sir R. Giffen)在英國皇家統計學會,宣讀論文中,所提出之『英國出口貿易之靜止狀態』一問題,爲最妙之例證。

下列第六圖之輕虛線,表示各年出口之貨值,由此線吾人得來之印象,可知最近數年,出口貨值並未增長。但吉芬爵士則提出如下數字:

平均每年出口貨值

1855—57	134,000,000鎊
1865—67	228,000,000鎊
1875—77	264,000,000鎊
1885—87	274,000,000鎊
1895—97	292,000,000鎊

於是彼乃依據此列數字,發生結論謂:各年數字均有增加,惟唯一足爲表示其靜止狀態者,厥爲後半期中增加率,較前半期之增加爲低一點。

英國『星期六評論』(Saturday Review),因見其所選之數字只爲每十年選出三年之平均數,僅爲一種情形之巧合,乃著文論之曰:『(此一結論實爲極大之誤解);否則,何以不將一八九八年計入耶?』吾人見此評語,若查閱數字,殊覺無從答覆,但試閱

第六圖，則全部情狀，一覽無餘矣。第六圖上自一八六五年之後，曲線呈現三大波浪式。一八七二年，因物價膨脹，致該年出口價值之最高點極高，但一八九〇年之最高點尤大，前此各年無與匹敵者，而一八八二年之最高額，相形之下，則反較甚低。至於各年之最低點，從圖式觀之，則全部均有增加之勢；一八六八，一八七九及一八八六年之最低點，三年形成有規則之增進，迨一八九一年，忽又一瀉而下。一八九四至一八九六年間，似有另一每十年一循環之現象出現，不期至一八九七年中途又生變化。自此以後，以至一九〇六年，各年累有增加，是又超過一八七二年以前而愈趨上昇矣。

『星期六評論』復進而質問，何以吉芬爵士，不用有如下列每五年一平均之數字：

	平均每年出口貨值
1870—74	235,000,000鎊
1880—84	234,000,000鎊
1890—94	234,000,000鎊
1898	233,000,000鎊

而此列數字，恰與吉芬氏所提出之數，大相反對也。

由此觀之，吾人必須採用某種通行方法，使表示數字之形式，不致因擇用特別年度而受影響。茲將全部數字及圖式列下：

據公布英國國產貨物出口眞實値

以一百萬鎊爲單位

		平均數					平均數		
		三年一平均	五年一平均	十年一平均			三年一平均	五年一平均	十年一平均
1855	95.7	…	…	…	1881	234.0	216.2	208.2	221.6
1856	115.8	…	…	…	1882	241.5	232.9	216.7	220.1
1857	122.0	111.2	…	…	1883	239.8	238.4	226.0	218.6
1858	116.6	118.1	…	…	1884	233.0	238.1	234.3	217.9
1859	130.4	123.0	116.1	…	1885	213.1	228.6	232.3	216.9
1860	135.9	127.6	124.1	…	1886	212.7	219.0	228.0	218.1
1861	125.1	130.5	126.0	…	1887	221.9	215.6	224.1	220.4
1862	124.0	128.3	126.4	…	1888	234.5	223.0	223.0	224.5
1863	146.5	131.9	132.4	…	1889	248.9	235.1	226.2	230.2
1864	160.4	143.7	138.4	127.2	1890	263.5	249.0	236.3	234.2
1865	165.8	157.6	144.4	134.3	1891	247.2	253.2	243.2	235.5
1866	188.9	171.7	157.2	141.6	1892	227.1	245.9	244.2	234.1
1867	181.0	178.6	168.7	147.5	1893	218.1	230.8	240.9	231.9
1868	179.7	183.2	175.1	153.8	1894	215.8	220.3	234.3	230.2
1869	190.0	183.6	181.0	159.8	1895	225.9	219.9	226.8	231.4
1870	199.6	189.8	187.8	165.9	1896	240.1	227.3	225.4	234.1
1871	223.1	204.2	194.6	175.7	1897	234.3	233.4	226.8	235.4
1872	256.3	226.3	209.7	188.9	1898	233.4	235.9	229.8	235.3
1873	255.2	244.9	224.8	200.0	1899	255.3*	241.0	237.8	236.1
1874	239.6	250.4	234.7	207.9	1900	283.6*	257.4	249.3	238.1
1875	223.5	239.4	239.6	213.7	1901	270.9*	269.9	255.5	240.5
1876	200.6	221.0	235.1	214.9	1902	277.7*	277.4	264.2	245.5
1877	198.9	207.7	223.7	216.7	1903	286.5*	278.4	274.8	252.3
1878	192.8	197.4	210.9	218.0	1904	296.3*	286.8	283.0	260.4
1879	191.5	194.4	201.4	218.1	1905	324.4*	302.4	291.2	270.2
1880	223.1	202.5	201.3	220.5	1906	367.0*	329.2	310.4	282.9

（註二） （第三十一表）

上圖之輕連續線，表示每三年一平均之各年數字，換言之，即每年與其前後二年數字之平均，其位置幾與每年數值之虛線相合；此線僅將虛線之折角修勻，對於全部形態，並未波及。十字之線代表每五年一平均之每年數值，即以其前兩年與後兩年之數值合併加以平均也。圓圈之線，表示每十年一平均之每年數值，每一圓圈所在，即爲一期間之中心，代表該期間之平均數，例如代表一八七五至一八八四年十年間平均數之圓圈，即在一八七五與一八八〇之縱分界線上。（註三）

期間之選擇　試觀每五年平均數之曲線，可知『星期六評論』駁論吉芬爵士之點，不爲無見，蓋吉芬氏亦確僅就利於彼之論辯之年份，而取作資料也。何則？所取用之每五年之平均數，恰與一八九八年相反，盡在波形之上半部，代表此種平均數之各符號，均與每五年一平均之線之最高值相近，但一八九八年之數，則非爲最高數也。玆請以或多或少之確度，選用年份如下：

出口貨值每五年之平均數

1865—69	181,000,000鎊
1875—79	201,000,000鎊
1885—89	226,000,000鎊
1898	233,000,000鎊

由此數字從而發言，謂一八九八年之出口貨值，較之所選以前之任何平均數均高。無須用武斷方法選擇相當期間，亦能得事實之證明矣。由此觀之，若欲作一論斷，必須注意商業循環，否則

任何理論，均無成立之餘地。此種週期循環，必至用每十年之平均數後，方能剔除。

圖上特別符號，乃爲每十年之平均數，由此數點，可見在一八七〇年以前，增加之勢甚速，自一八七〇年以後，則增進甚緩，但後又繼以飛躍之擴張。全線所表示之全部情態，與每十年平均數之線所示者相同。

最後，設吾人在可能範圍內，用隨手畫法，儘量將全線修勻，而對於曲折過甚之線段，並不厲行纂改，則修勻後之曲線，仍可代表同一之情況，如上圖之重線，卽此是也。修勻時，事先有一假定，認商業循環乃爲十年一期；今在此假定之下，發見在同一之十年期中，竟有兩個最高值者，故圖中此期之平均數，本應爲該期之最低點，現則呈現最高值之地位如一八八七年矣。此一現象，若欲消除之，只有變換平均期間之法，以適應此變動之週期長度(wave length)，而所謂變動之週期長度者，乃一頗爲武斷之前提也。然此一困難，解決之法，本不甚難，只須隨吾人之所見加以修正而已，如圖中最後已修勻之重線，卽足傳示此正當之印象也。

自一八九九年之五年，去一八九八年曾幾何時，而高下相去懸殊，殊出人意料之外；惟嗣後之又一五年數字，未能先事判斷，故不知次一週期之波形，當吾人將此又一五年之數字加入計算時，可知每十年（如1890-1899，1891-1900……）之平均數，又

達最高之記錄，而自一九〇〇年起至一九〇六年止，各年之數字，均較以往之最高值爲大，亦從可知矣。然則，吉芬爵士所言『各年數字均有增加，惟唯一足爲表示其靜止狀態者，厥爲後半期增加率，較前半期之增加爲低一點』一言，業已完全實現矣。

修勻曲線之意義及趨勢　上圖之修勻曲線，在將偶然及暫時變動(accidental and temporary variations)剔除之後，則所表示者，即爲歷年出口貨値之一般趨勢。從長期運動中，完全剔出短期之變化，即從繼長增高之商業大流中，將商業上潮水之漲落，另行剔出，是否可能，現尙不得而知，如其果爲可能也，則吾人必可求得用此一修勻曲線代表之趨勢矣。蓋較小數字歷年之升降，乃現出變化不規則之曲線，今若將此曲線修勻，則在修勻之線中，即無突然之變動，即增加率亦將以穩健之步驟上升也。

討論至此，試添加以下各年之數字：

	各年平均數	三年一平均	五年一平均	十年一平均
一九〇七 ─ ─ ─	416.0*	369.1	338.0	301.1
一九〇八 ─ ─ ─	366.5*	383.2	354.0	314.4
一九〇九 ─ ─ ─	372.3*	384.9	369.2	326.1
一九一〇 ─ ─ ─	421 6*	386.8	388.7	339.9
一九一一 ─ ─ ─	448.5*	414 1	405.0	356.7
一九一二 ─ ─ ─	480.2*	450.1	417.8	377.9
一九一三 ─ ─ ─	514.2*	481.0	427.4	400.7

（註四）

至歐戰時之記錄，不便與其他平時之數值相比，故自一九一四後之數字，付之闕如。讀者在查閱上列一九〇七至一九一三年

之數字前，可請先就前列之圖式（第六圖），加以預測，察其數值，變化及一般趨勢若何，然後再參看實在數值。

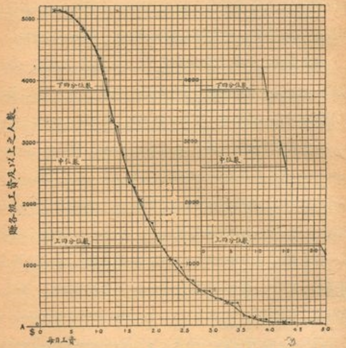
修勻曲線在某一期日行進之方向，謂之數列(series)在該期日之趨勢(trend)。當修勻曲線經過若干年份而仍大概成爲直線形式時，則該曲線行進之方向，卽表示在彼一期間中之趨勢。

對於趨勢之求法，近年來摩爾(Moore)教授，曾創用一特別方法（見一九一九年號統計學報第三七五頁）。彼之方法，乃假定若干年份之一般趨勢，可表之爲下述之方程式：$y=a+bx+cx^2+dx^3$，並以『如某一期日(x_t)之觀察值爲y_t，則$\Sigma(y_t-a-bx_t-cx_t^2-dx_t^3)^2$應爲最小』爲條件，而求$a,b,c$及$d$之值。但貝孫斯(Persons)教授之假定（見美國哈佛大學經濟統計評論創刊號），則以爲甚爲確實而能使$\Sigma(y_t-a-bx_t)^2$成爲最小者，乃爲一條直線。二人方法有別，何一可供一般之應用，尙成疑問。惟貝孫斯氏之假定，應用時務須酌量情形，不可普遍實施。實則上文所用之移動平均(moving averages)法，設所論年份甚長，而支配現象之總原因，又屢有顯著之變化時，則此法對於趨勢方向變動之表現，確較他法爲敏銳。

同質羣類之修勻　『修勻』數列之詳細研究，乃屬於第十章內插補法之範圍，不在本章討論之列，惟另有一羣類此時不妨加以考慮者，卽用圖示法從不規則之原始資料中，求出有規則之

形態也。試就前列第十三表之美國工資統計而論，吾人頗可將此五千人之工資，用圖表示之如下：

第七圖　決定中位數與眾數之圖示法



圖中之縱坐標，代表在賺某定額工資或以上之人數。成有尖角之輕線，亦代表工人人數，惟係按一角分組之各組人數登入者。此種圖示法，對於類似此一工資羣類之不規則數列，頗有特殊之效用，因工資自最高額起至最低額止，人數由少而多，工資在某定額以上人數之曲線，自亦由低而高。於是第五章第五節所論求

中位數之圖示法,亦可由上圖實施之矣。

求中位數之圖示法　上圖輕線所呈現之不規則狀態，並非因工資分類之任何法則而起,而係出乎觀察之意外事故而來。設所得之資料,乃認爲係由極大之羣類中抽樣而成,則吾人可以𠔥定:如作挨戶調查,則完全之資料,作成之形式,必與此修勻曲線相去不遠。修勻之法,可用隨手畫法,畫一條距各點愈近愈佳之線,不可現出特別破裂曲折之角,則形式卽如上圖所示。基於上述理由,可用修勻曲線求中位數,四分位數，十分位數乃至百分位數之近似值,求算之法，須在縱軸代表人數二分之一,四分之一,四分之三,……等處,各畫一條水平線，以達於修勻曲線,然後再由各水平線與修勻曲線交叉之各點,向下各畫一條垂直線,以至橫軸爲止，則在橫軸所代表之尺度上,卽得工資中位數,四分位數,以及十,百分位數之工資。

茲將得數列下:

	中位數	下分位數	上四分位數
第十四表(第四章等四節)求得者	\$1.49	....	....
用第五章第五節之圖示法,經在上圖求得者	\$1.49	\$1.16	\$2.12
由上圖之修勻曲線求得者	\$1.51	\$1.15	\$2.13
用第十章第二節代數內插補法求得者	\$1.536		

雖然，此法所得之結果，精度並不甚大；修勻曲線微有彎曲，則其所得數之差額，必較上表之第二與第三行相差爲尤大。

求衆數之圖示法 用此法求衆數，亦能求出其近似值。惟此法有兩種困難，前已提及，吾人當能記憶，一、衆數之兩邊分配不均，二、表列變更則總數位置亦移。第一種困難，如用圖示法，卽可完全消滅，第二種困難，因衆數位置之移動，全視修勻線之彎曲是否有輕微之變動爲斷，故困難亦可減少。夫衆數之位置，乃爲最大人數之所在，其理至明，吾人已知之，惟今用圖示方法，則衆數者卽波折——或修勻——線最峻峭之處也。在修勻曲線上，最峻峭之處所，卽爲切線 (tangent) 經過曲線之點，在數學上所謂轉向點(point of inflexion) 者卽是。用機械求此點，可用一尺置於圖上與曲線接觸，然後將尺繞曲線轉動，至尺與曲線相交時，則相交之點，卽爲衆數所在。如上圖之一元一角至一元四角一組所出現者卽是。除此以外，倘有較爲繁複之求中位數與衆數法，容當於第十章第二節討論之。

求中位數與衆數而用圖示法，最大之優點有二：一、用於不整齊之人數（例如，工資在三十先令六便士者三十人，三十先令八便士又二分之一者四十人，四十先令一便士者三十五人……等）時，與用於整齊之資料，其造圖之難易相同，而確度亦相同；且如修勻曲線造圖精密，則衆數之個數，一望卽知，並可估計各

個乘數之相對重要性也。卽如上圖，基線上自三角起至一元二角止，曲線成凹形；一元二角至三元一角五分，曲線成凸形，其後至三元四角爲止，又現凹形，復又繼以凸形．以至於終端而後已。轉向點——或云乘數——卽凹形轉爲凸形之點。故此處有乘數二，而其中之一，臨近三元四角處者，乃次要之乘數也。

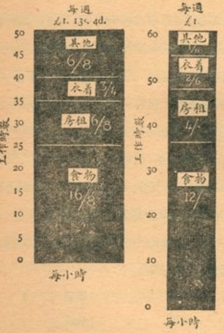
{象形圖} 圖式之種類甚多，但中有極大部份，並無詳細討論之必要。著作家及講演家，有時爲表現數目之大小起見，採用大小不同之點，線，三角形，四方形，圓形，以及圖畫等。此種圖式，對於演說及手册，本各有其用途，但對於數字意義，則無價值可言。此種圖式，哥巴戈理歐(Gabaglio) 氏之統計學原理(Teoria Generale della Statistica)第二部，及勒瓦舍(Levasseur)氏之圖式統計學 (La Statistique Graphique 見於英國皇家統計學會之五十週年紀念刊) 一書中，討論甚多，可以參閱也。

此種圖式之中，有一類足爲實際上應用者，厥爲長方形圖。長方形可用以代表三種數量，玆分列於下：

	側邊	底邊	面積
	代表	代表	代表
1.	物價	物量	物值
2.	房間數	每間住人數	人口總數
3.	每週工作時間	{每小時平均產量 每小時工資	{總產量 每週工資

玆舉一例，以示此法應用之範圍：

用長方形代表三件事實　下圖爲一技師與一勞工之家庭預算，分別表示每週各種消費所用之金額，與每一消費金額所需之工作時間。



橫標尺代表每小時便士數
0.125英寸等於一便士
縱標尺代表每週工作時數
0.1英寸等於二小時
面積代表消費金額，
全長方形代表每週工資數
一平方英寸等於十三先令四便士

（第　八　圖）

英國之圖示法標準聯席委員會（Joint Committee on Standard for Graphic Representation），自一九一六年後，曾議決

統計圖示之最佳方法,並爲謀圖式之統一,免除錯誤起見,特提供若干有用之建議。

{統計地圖} 統計地圖之用途,現可簡略討論之。關於人口之數字,不論其爲人口之密度,抑人口之平均所得數,或平均負擔租稅額,均可分區用適當之記號或彩色標示之。在此種方法之中,普通最便於應用者,厥爲以一種彩色(例如藍)代表大於平均數之區域,另以他色(例如紅)代表小於平均數之區域。將區域分成九類,大於平均數者,分爲百分之七以上,百分之五至七,百分之三至五,百分之一至三幾種,以深淺不同之藍色表示之,距平均數最遠者,藍色最深,愈近於平均數其色愈淺。在平均數上下百分之一以內則用白色。在平均數以下者,分別以深淺之紅色表示之,去平均數愈遠色亦愈濃。但用此法時,深淺度之分級,不可過多,此吾人不可不注意者。應用統計地圖之書,舉例言之,有布斯氏之『人民之生活與勞動』附圖,有美國第十一屆人口普查之統計地圖,有『印度統計地圖』,上文所舉之『勒瓦舍氏圖式統計學』一文中,亦附有地圖。勒瓦舍氏之文中,有一省費而極有效之方法,乃僅用黑白兩色,其結果亦甚佳,又白狄雍氏之『統計學初級教本』,第一百三十三頁後圖式法一章,亦有同樣之介紹焉。

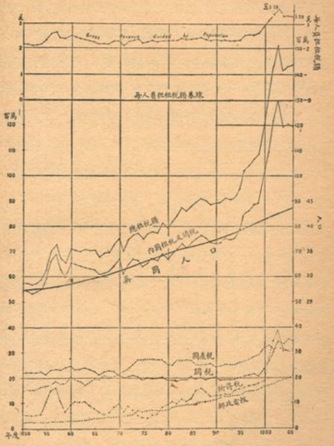
雖然,地圖法自有其缺點,蓋地圖法之記錄,乃以行政分區

爲準,但所欲表示之現象,則殊與此無關。茲舉例以明之。假如一九一一年,英格蘭之各部,用染色方法,標明人口之密度,則可伯蘭(Cumberland)之色度,應大略等於每百英畝二十七人,而脳賛伯蘭(Northumberland),爲每百英畝五十三人。但若遇有荒漠之處,人烟稀少,則人口密度,用彩色表示之,則若干英里之內必將一片荒涼。故補救之法,須用下列二種途徑:一、略分區域,可以一教區作一單位,各教區均僅用黑色煊染之,色之深淺一隨人口之多寡。二、用點標記,視資料之許可,儘量求其準確,各點大小應完全相等,一點代表一百人,但遇人口稠密之區域,則應加以變更,此類之統計地圖,在塞可利斯特(Secrist)教授所著之統計方法(Statistical Method)一書中(一九一七年版,第一八九頁),曾加複述。

第二節 歷史圖

數字之比較 圖式之主要用途,大致不外供人瀏覽兩序列事項之相互關係。此中情節,以舉例釋明之爲最佳。最簡單之一種,厥爲比較同以一單位(例如金鎊)表示之兩列數字,而就中尤爲簡單者,莫過於以全體與一部數字作比較。

以租稅爲例 下圖中部第一條線表示英國各年總租稅額(見統計輯要 Statistical Abstract 一九〇六號);(註五)第二



（第　九　圖）

條線爲內國租稅及關稅，此項與總租稅額相差之數，主要卽爲郵政收入。租稅之內，以關稅，國產稅(excise)，所得稅，及郵政收入爲大宗。玆各以曲線將其各年之數字，分別列如上圖之下部，各

英國之租稅

各欄概以一萬金鎊為單位

年度（以四月一日起至三月卅一日止）	租稅總額	內國租稅及關稅	關稅	國產稅	財產及所得稅	郵政及電報
1850	5,739	5,431	2,226	1,497	560*	216
1851	5,732	5,412	2,204	1,528	560*	228
1852	5,658	5,335	2,222	1,538	550*	237
1853	5,753	5,401	2,214	1,575	570*	237
1854	5,890	5,502	2,251	1,630	580*	252
1855	6,282	5,944	2,163	1,680*	1,070*	237
1856	7,026	6,601	2,324	1,730*	1,520*	281
1857	7,279	6,848	2,353	1,840*	1,620*	292
1858	6,788	6,309	2,311	1,782	1,159	292
1859	6,548	5,987	2,412	1,790	668	320
1860	7,109	6,570	2,446	2,036	960	331
1861	7,028	6,514	2,331	1,943	1,092	340
1862	6,986	6,412	2,367	1,833	1,036	351
1863	7,060	6,390	2,403	1,715	1,057	365
1864	7,021	6,306	2,323	1,821	908	381
1865	7,031	6,291	2,257	1,956	796	410
1866	6,781	6,036	2,128	1,979	639	425
1867	6,943	6,156	2,230	2,067	570	447
1868	6,960	6,204	2,265	2,016	618	463
1869	7,259	6,422	2,242	2,046	862	466
1870	7,543	6,708	2,153	2,176	1,004	477
1871	6,994	6,106	2,019	2,279	635	527
1872	7,471	6,484	2,033	2,333	908	543
1873	7,661	6,660	2,103	2,578	750	583
1874	7,734	6,608	2,034	2,717	569	700
1875	7,492	6,397	1,929	2,739	431	679
1876	7,713	6,525	2,002	2,763	411	719
1877	7,857	6,636	1,992	2,774	528	730
1878	7,774	6,610	1,997	2,746	582	746
1879	8,115	6,899	2,032	2,740	871	757
1880	7,934	6,695	1,933	2,530	923	777
1881	8,187	6,895	1,918	2,530	1,065	830
1882	8,396	7,058	1,929	2,724	994	863
1883	8,739	7,513	1,966	2,693	1,190	901
1884	8,616	7,187	1,970	2,695	1,072	947
1885	8,799	7,380	2,032	2,660	1,200	966
1886	8,958	7,493	1,983	2,546	1,516	989
1887	9,077	7,611	2,015	2,525	1,590	1,028
1888	8,980	7,566	1,963	2,562	1,444	1,060
1889	8,847	7,360	2,007	2,560	1,270	1,118
1890	8,930	7,341	2,042	2,416	1,277	1,177
1891	8,949	7,358	1,948	2,479	1,325	1,226
1892	9,099	7,534	1,974	2,561	1,381	1,263
1893	9,040	7,480	1,971	2,536	1,347	1,288
1894	9,113	7,543	1,971	2,520	1,520	1,301
1895	9,468	7,865	2,011	2,605	1,560	1,334
1896	10,197	8,512	2,076	2,680	1,610	1,422
1897	10,395	8,597	2,125	2,746	1,665	1,477
1898	10,661	8,855	2,180	2,830	1,725	1,518
1899	10,834	8,945	2,085	2,920	1,800	1,586
1900	11,984	9,963	2,380	3,210	1,875	1,665
1901	13,038	10,956	2,626	3,310	2,692	1,725
1902	14,300	12,189	3,099	3,160	3,480	1,779
1903	15,155	12,993	3,443	3,210	3,880	1,838
1904	14,155	11,935	3,385	3,155	3,080	1,915
1905	14,337	12,053	3,573	3,075	3,125	1,993
1906	14,398	11,987	3,447	3,023	3,135	2,101

（第三十二表）

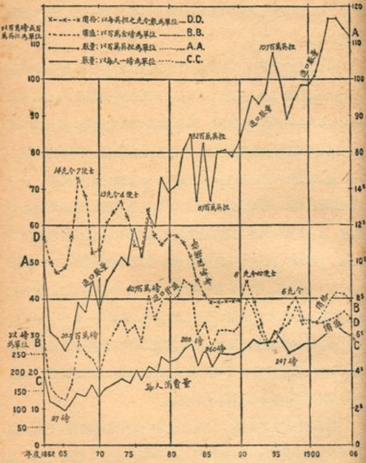
線各自獨立，不相連繫，但標尺尺度及基線均相同。如此畫法，較之繪一線代表總租稅額減去關稅，再繪一線代表總租稅額減去關稅及國產稅，依次減少之畫法，強似多多，因如彼不能令人一望即可判斷各項之相對變動情況也。就圖觀之，所有關於租稅趨向之主要情勢，歷歷在目：增加雖速，但不規則。一八五四至一八五七年之進展甚急，隨後即生變化，但一八六〇至一八七〇十年間之數字，終比一八五〇至一八六〇年間之數字爲高。自一八七〇年之後，變化甚大，增進之勢，亦較爲整齊，直至一八八七年，幾始終未生頓挫；但自一八八七年以後，中經一短期之靜止狀態，至一八九五年，突飛猛晉，一八九八至一九〇三年之漲勢亦然。總租稅額之曲線如此，內國稅及關稅之線，大致相同。更就各項租稅而論，其有增加及變動情形者，在一九〇〇年以前，國產稅收入增加最多，郵政收入次之，所得稅又次之，而關稅則漸減。各條曲線各有其各別之形式。郵政收入之增長，大致甚有規則。所得稅變化最劇，總租稅之激烈變動，幾全受此項之影響。尤以一八五六年一八七〇年及一九〇〇至一九〇二年爲甚。國產稅之線，在一八七〇年之前，有緩和之增加趨勢，其後繼以猛烈之突進，至一八七四年而後，後又現遲緩上漲之情勢。然在關稅方面，情形恰與國產稅之線相反，故二者之總數，在一九〇〇年以前，並無急劇之變化。上圖之上部，另有一新基線，所表示者乃爲各年

度之全人口每人負擔總租稅額金鎊數；由圖中可以看出，各年之增加，以一八五三至一八五七年及一八九八至一九〇三年爲最顯著。

第二尺度之選擇　由此觀之，尺度之決定，已不若先時僅有一條線者之難，蓋如上列之大圖，以百萬金鎊作單位，至用一鎊作單位時，則另定一新基線。然如欲將人口之變動，在大圖表現之，則仍可用同一之基線，以供兩種數量之比較。所不同者，第二種數量之尺度，可任以何處爲起點，卽如上圖之縱軸尺度，人口曲線所在之處，乃求其使人便於考察與租稅數成比例之變動情狀也。此一起點，決定之法，最佳莫過於視問題之性質，以求便於比較。例如欲比較一八五〇年以後，租稅之增長及人口之增加，則後者一數之線，應以前者起始之一八五〇年處爲起點，惟其如此，二條曲線之犬牙交錯，乃可顯然示明。雖然，一八五〇年乃假設之年份，並非問題所指定，故仍以使二線在資料中之最近年份相合爲宜，以便與以前各年比較也。試觀上圖，第二條線之位置，適足與內國租稅大部路線相密接也。

數量與價值之比較　尺度之決定，尙有其他困難，下列一圖，可爲例釋。本圖之目的，在說明人口與輸入小麥（數量，價值，及價格）之關係。A線所用之尺度，以求其能將曲線之變化曲折，完全托出爲標準，由此一線，將各人每年負擔之數額算出，則小

第十圖 一八六二年至一九〇六年輸入英國之小麥及麪粉



麥與人口之關係，即可顯然。如C線乃即代表每人消費量者，此線之尺度，與他線所用迥異，以免與其他各線交相錯雜，致混淆

一八六二至一九〇六年英國之小麥及麪粉
麪粉已折成小麥計算

年　度	A. 進口總數量（單位十萬英擔）	B. 進口總價值（單位十萬金鎊）	C. 英國人口每人消費量（單位鎊）	D. 每英擔麥及麪粉之平均價值（單位先令）
1862	500	286	191 lbs.	11.44
1863	309	155	118 ,,	10.03
1864	288	135	109 ,,	9.37
1865	258	124	97 ,,	9.61
1866	294	168	110 ,,	11.43
1867	391	285	144 ,,	14.58
1868	365	249	134 ,,	13.64
1869	444	233	166 ,,	10.50
1870	369	196	132 ,,	10.62
1871	444	268	158 ,,	12.07
1872	476	303	168 ,,	12.73
1873	516	344	180 ,,	13.33
1874	493	309	170 ,,	12.53
1875	595	324	203 ,,	10.89
1876	519	279	176 ,,	10.75
1877	635	407	212 ,,	12.82
1878	597	342	197 ,,	11.46
1879	730	400	239 ,,	10.95
1880	685	393	222 ,,	11.47
1881	713	407	229 ,,	11.42
1882	808	449	257 ,,	11.11
1583	851	438	269 ,,	10.30
1884	669	301	210 ,,	9.00
1885	823	337	256 ,,	8.19
1886	670	261	207 ,,	7.79
1887	802	314	245 ,,	7.82
1888	804	315	244 ,,	7.82
1889	789	311	238 ,,	7.88
1890	824	327	246 ,,	7.94
1891	895	396	265 ,,	8.85
1892	956	371	281 ,,	7.76
1893	938	308	273 ,,	6.57
1894	967	268	277 ,,	5.54
1895	1,073	302	305 ,,	5.63
1896	996	309	279 ,,	6.21
1897	887	330	247 ,,	7.44
1898	944	377	259 ,,	7.99
1899	985	330	267 ,,	6.71
1900	986	334	266 ,,	6.78
1901	1,011	334	270 ,,	6.60
1902	1,079	360	288 ,,	6.67
1903	1,167	397	309 ,,	6.80
1904	1,182	415	310 ,,	7.02
1905	1,142	413	296 ,,	7.23

（第三十三表）

不清也。如圖式內容過於複雜，不妨援照前第九圖表現每人負擔租稅額之例，如法辦理。

{構圖詳解} 年度之尺度，必須一致不變，且爲計算簡捷，表示便利起見，每人消費一百鎊，應與一千萬英擔(hundredweight)，在縱尺度上佔同一之距離。A 線與C 線所表示者均爲數量，故以同線代表之。B線表示價值，玆以斷續線爲代表，此線之尺度，較難決定。以後續列圖式，有時參用特殊方法，以供某項比較之用。但本圖則無用此之必要；玆用一尺度，使A，B，二線發生密切關係，而將B之變動現於圖上，縱尺度定每二十金鎊與二十英擔(cwt)，同一距離，故圖式簡單而明瞭。

D線乃由第三十三表A，B兩欄算出之小麥變動價格。此線之尺度，已決定如上圖，其所以如此者，以恰能與A，B兩線相交也；試觀上圖，該線之曲折變化，瞭如指掌，各數判然可見，蓋每英擔二先令，恰與千萬英擔同隸一縱尺度也。上圖繪製倘非甚精，不然，A與D兩線，在一八七六至一八七七年間，必互相貼合；可見現在已向上下互離，然本圖所示已甚明晰，吾人頗可得一大概印象也。

{運動情況需加解釋} 上圖各線，已有第三十三表爲之說明，但由此表現之特點及變化，必須請由研究經濟史者加以解釋。輸入英國之小麥，英國每人之消費量，在一八九五年以前三十年間，

歷年均有增加，迨至一八九五年而後，數年之中，乃又漸趨下游。再輸入數量之線，有猛烈之短期變化，甚爲顯然。至代表價格之線，自一八六二年起至一八七八年左右止，經過劇烈之升降變化後，以後十七年間，竟有每況愈下之勢。現象如此，追原其故，原因極爲複雜：一則由英國人口之增加，二則進口小麥之多寡，須視英國農產之豐歉，而農產之豐歉，須受天時之支配，三則由於全世界收穫量之變動，四則由於政局之變遷，五則由於銀價之低落，六則由於交通運輸之發展，以及其他等等，不一而足。此圖之功能，只在標明各種運動之一般趨勢及發生變動之時期，惟運動之背後原因，則非圖式所能爲力者矣。

各個曲線之符號，究應如何規定？論及此問題，其準則雖夥，但主要者不外將相互交叉各線（除相交成爲銳角者外）均分別標誌清晰一端。至於凡相近數量者以相近符號表之：此乃第二之準則。如遇可用多種顏色時，此一原則，頗易實施也。（註六）

茲爲補充第三十三表賡續完成第十圖起見，又覓得以後各年之數字列下：

年　度	A	B	C（鎊）	D
1906	1.127	395	290	7.01
1907	1.156	440	295	7.61
1908	1.091	450	275	8.32
1909	1.132	516	284	9.12
1910	1.191	497	296	8.35
1911	1.120	442	276	7.89
1912	1.237	520	301	8.41
1913	1.225	502	296	8.20

趨勢與變動 欲檢察時間上數列之一般性質，其途徑有二；一為檢視數列運動之趨勢，一為考察數字變動之性質，茲將時間數列分成以下五類：

一、有方向穩定，或方向逐漸轉變之趨勢，而無忽高忽低之變動者。一國之人口統計數字即屬此類。(註七)

二、變動無定者；換言之，即一種運動，其多年記錄上之數字運動（或上或下）情形，不能據以推測下年度之為上升或下降。例如各年雨量統計即是。

三、具有補償的變動情形者；換言之，即變動情況，在一年成上升運動者，下年一般必有一下降運動以補償之。出生率，死亡率，及結婚率時或呈現此種補償情形。

四、成擺動式者；換言之，在達到最高或恐慌點後，必發生下降運動，如此一年復一年，經過數年之後，乃降低至最低點，其後復繼以上升運動，與年上升，乃又達於最高點。一般物價統計，及所有關於商業循環之極多記錄，均屬於此類也。

五、成循環性者；換言之，即每十年，或十二月，或他種定期間，上升與下降發生之順序，每期乃全相同，且（在數種情形之下）變動之大小度，亦各期相一致。季節變動之例，容在本章第四節討論之。

上舉二，三，四及五四種中，其趨勢可與變動同時存在。且有

一無定形式之變動，或一補償式之變動，發現於擺動式運動及一趨勢之上；所謂昇潮中大浪之微波，即此意也。故如有一時期數列當前，極重要之事項，厥爲考察數列所形成之趨勢及變動，大概性質若何，性質決定之後，乃可推斷最近將來之情形。如變動之情狀爲無定形式或變化出入甚爲驟烈，則設遇有極低之數字，吾人似可無須爲之擾亂，因而相信有亟圖補救之必要也。在補償變動中，如在一高價之後，必隨之出低價，此則可爲預斷者。如變動或擺動現象，則數字在一經高價跌落之後，回後之日必須有待，乃可在吾人意料之中也。

第三節　數列之比較

一、在未研究次一圖式之前，似應先請就用數字作比較研究之目的，加以分析，並考慮作比較研究而堪供應用之方法。

比較之主旨所在　在研究兩組類似數量（例如兩國之各該國貿易或二國人口之各別趨勢）時，吾人欲知者有二端：一則爲一般進展率(rate of progress)（此可用修勻曲線法求得之），二則爲特殊增進之年份，即最高或最低點所在之時期。一言以蔽之，即欲就吾人目所能見者，用增加量，增加率，及增加率發生變動之時期三者，以作比較研究也。爲達此目的，最顯而易見之方法，不外將兩國用同一尺度，同一基線，以表示之。至數量之單位，

兩國亦使成一致；然此法應用之途有時而窮，不能到處皆通也。何則？蓋吾人用此方法，可以判斷兩國各年中之增加及減退，可以考查最高點，最低點，及增加率發生變動之日期，固矣，其奈不能比較增加率何？夫作一大略之臆斷，固屬可能，但比率究非易於判斷之事。例如：設兩國之貿易數量，大小迥然不同，雖二國之絕對增值 (absolute increment) 完全相等，而相對增值 (relative increment) 則大有區別，且此乃又不易使人時時覺察者也。

百分數尺度　此爲美中不足，宜如何補救之，唯有變更尺度之排列一途。故除上文所言之圖式之外，應另作一圖，在此第二圖中，尺度之單位必用百分數，而不言貨幣數額：例如，茲以一八五〇年英國國外貿易之百分之一，爲英國貿易尺度之單位；而以同年德國貿易之百分之一，爲德國貿易尺度之單位。易言之，即以某年兩國貿易總値之百分數，代表兩國之貿易，而各以一線，分別代表此兩組百分數。此外，在圖旁不妨分列兩個或兩個以上之尺度，以示各國貿易之絕對量。如是，則增加率乃可從事比較，如在一八五〇年，所謂增値相等者，即表示各國貿易百分數相等；而且，此一國較之彼一國，稍佔優勢之日期，圖上已瞭如指掌。

絕對進展與相對進展　絕對增加率與相對增加率二者，究應以何者爲研究之對象？此一問題，乃統計學上極普通之問題。

有時必須求得絕對數量，此尤以吾人如欲估計促進特殊階級福利之社會政策，實行後之影響，或計算某某數國之貿易時爲然；但有時必須求得相對數量，例如考察各種產業之增進量，或探尋將來之繼起競爭者時即是。絕對進展與相對進展，二種研究，雖或代表同一數字，但仍非用兩個不同之圖式表示之不可也。

作圖比較時，須以某一年之數量爲基準，但所謂某一年，究以採用何年爲宜，此乃主要困難之所在；決定之法，必須視論辯之性質，蓋此論辯，即圖式所欲例證者也。

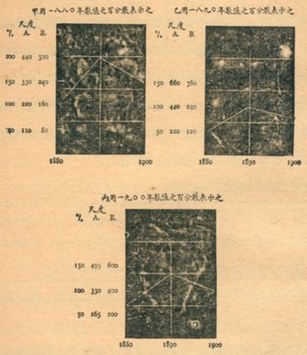
例如吾人欲就下列數量：

年　度	一八八〇	一八九〇	一九〇〇
甲	220	440	330
乙	160	240	400

加以比較，則比較之法，可有三種不同之途徑，茲分作圖式如下：

下列圖丙中，曲線之變動，以最後一年數值之百分數表示之，各年之進展比例，表現情形，較圖甲所示者爲佳。一般情形，多係以最近年度之數量爲基準，故以前各年度之數字雖小，但以現代觀點考察之，則各年變化之比例，必能適當其分。吾人如言一八八〇年數值甲，當近今數值甲百分之四十，一八八〇年數值乙，當一八八〇年數值乙百分之一百五十，必使人易於理解；但此亦

第十一圖



宜隨情形而決定，何年最爲適當，卽以何年之數值爲基準，未可一概而論也。

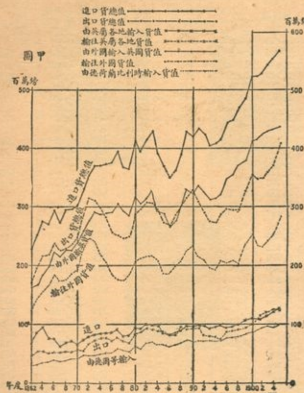
用英德貿易爲例證 上文所論幾點，玆可更以一圖式表明之，下列第十二圖之目的，在分析英國與其屬地及外國間貿易之進展，英德貿易情形，尤當重視焉。

一八六二至一九〇年英國之出入口貨值
以十萬金鎊爲單位

	進口總貨值	出口及復出口總貨值	英國輸往英屬各地之貨值	英國輸往外國之貨值	由英屬各地輸入之貨值	由外國輸入之貨值	由德國，荷蘭，比利時輸入之貨值
1862	2,257	1,662	454	1,207	653	1,604	279
1863	2,489	1,969	550	1,419	847	1,642	283
1864	2,749	2,126	557	1,569	937	1,812	332
1865	2,711	2,188	515	1,673	728	1,982	364
1866	2,953	2,389	572	1,817	722	2,231	388
1867	2,752	2,258	534	1,724	607	2,144	373
1868	2,947	2,278	537	1,741	670	2,277	379
1869	2,955	2,370	519	1,851	704	2,250	405
1870	3,033	2,441	554	1,887	648	2,384	409
1871	3,310	2,836	556	2,280	729	2,581	469
1872	3,547	3,146	656	2,490	794	2,753	455
1873	3,713	3,110	711	2,399	810	2,903	463
1874	3,701	2,977	779	2,197	822	2,879	494
1875	3,739	2,816	767	2,050	844	2,895	515
1876	3,752	2,568	701	1,866	843	2,908	516
1877	3,944	2,523	758	1,766	896	3,049	590
1878	3,688	2,455	720	1,735	779	2,908	575
1879	3,630	2,488	665	1,823	789	2,840	543
1880	4,112	2,864	815	2,049	925	3,187	616
1881	3,970	2,971	867	2,104	915	3,055	582
1882	4,130	3,067	923	2,143	994	3,136	658
1883	4,269	3,054	904	2,150	987	3,282	692
1884	3,900	2,960	883	2,077	958	2,942	646
1885	3,710	2,715	885	1,860	844	2,866	638
1886	3,499	2,690	822	1,867	819	2,680	609
1887	3,622	2,813	823	1,990	838	2,784	646
1888	3,876	2,986	917	2,068	869	3,007	684
1889	4,276	3,156	908	2,248	973	3,304	715
1890	4,207	3,283	945	2,337	962	3,245	694
1891	4,354	3,091	933	2,158	995	3,360	716
1892	4,238	2,916	812	2,104	979	3,259	715
1893	4,047	2,771	786	1,986	919	3,128	720
1894	4,083	2,738	786	1,952	940	3,143	716
1895	4,167	2,858	761	2,098	957	3,210	729
1896	4,418	2,964	907	2,057	933	3,485	761
1897	4,510	2,941	871	2,071	941	3,569	760
1898	4,705	2,970	901	2,038	998	3,708	786
1899	4,850	3,295	943	2,352	1,069	3,781	834
1900	5,231	3,544	1,021	2,523	1,096	4,134	861
1901	5,220	3,479	1,132	2,347	1,057	4,163	897
1902	5,284	3,492	1,176	2,317	1,069	4,215	950
1903	5,426	3,604	1,195	2,409	1,137	4,289	973
1904	5,510	3,710	1,208	2,502	1,200	4,310	962
1905	5,650	4,076	1,227	2,849	1,279	4,372	990

（第三十四表）

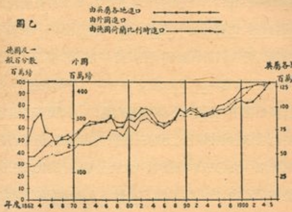
英國與其屬地及外國間之貿易價值



（第十二圖）

進口貨值對一九〇五年進口總值之百分數

圖乙



圖丙

（續　第　十　二　圖　）

第十二圖圖甲所表示者，爲英國之出入口貨總值，及分別與英屬各地及外國之出入口貨值，各線之尺度，均以百萬金鎊爲單位，由德國，荷蘭，比利時輸入英國之進口貨值，另以一線表示之；此三國之數值，乃合併計算而得，蓋截至一九〇四年止，德國之製品，運輸之時，未能與荷，比二國之貨分清，故統計數字，亦無從單列也。觀察圖甲，英國由外國或屬地進口，試問何者進展最速，並無明白表示。故在圖乙，另將三條線重新造圖，而用百分數爲尺度，意卽以一九〇五年各該數值之百分數，分別代表三種數值也。於是在圖乙中，自其他外國及英屬各地與印度輸入英國之貨物，除在棉產荒歉期間外，餘時均有並駕齊驅之勢，惟自德荷比三國入口，則進展甚急，遠非其他外國及英屬各地與印度所能及耳。吾人苟以一八六二年爲基準，而使此年各數量全然相等，則代表德荷比三國進口之曲線，至一九〇五年，必超越其他曲線甚多；但由此所得之印象，如就絕對數量觀之，則不免陷於錯誤，蓋由德荷比三國入口增加七千一百一十萬金鎊，其餘外國輸入英國，則增加二萬七千七百萬金鎊也。

圖丙表示德荷比三國及英屬各地，自一八七〇年以來，輸英貨值之相對增加率。

國際統計局(International Institute of Statistics) 爲求作比較用之歷史圖標準化起見，經多番考慮，結果於一九一一年

開會時議決以一九〇一至一九一〇年間數字之平均數爲標準，並議決此十年數字之平均數，須以縱長尺度代表之，此縱長之高度，應與代表三十年之橫尺度相等，用此標準化之尺度，作成之圖，乃可任與代表何種數量之圖，相互比較。此種議案之意，並非不可作別種之比較（例如本章第二節第十圖，一八六二至一九〇六年輸入英國之小麥及麪粉），更非不能作以同一單位（金鎊或噸數）表示並以同一自然單位作圖而代表之時間數列之圖式。反之，本議決案之用意，乃以此標準作無他法可用時之唯一標準形式，如有理由必不能用此標準時，則此標準只供參考云耳，非不用不可也。總而言之，凡作一比較——尤以國際統計爲尤甚——如遵循上述準則；便利甚大焉。

因果關係　二、關於數列之比較，爲探討或例證其因果之關係(casual relation)，時常採用地圖表示法。在地圖顯示法之下，吾人不惟研究增長率，如上列第十二圖圖丙所示，且更須就全部期間中，考察增加率有無任何相似之徵象，出現最高量及最低量之日期，或研求發生變動時同時發生之事象。然用此種種方法以作比較，其事甚難，非經精謹審愼之分析不爲功。例如，設吾人欲考慮室外貧民救濟費之增加，是否與貧民加多有關：則須以一線代表款額，一線代表人數，二者並無共同單位；吾人於此無須計算百分數，但款額之尺度，旣經加以規定，則人數之尺度，卽可以

最簡單之方法排定，於是二種尺度可以任一年度爲基準，二種數量在基準之年乃彼此相等。然後吾人所欲知者有二事，一查款額或增或減，是否與人數增減同時發生，或款額之增減，恰在人數增減之前；二查款額增加多者人數是否亦隨之俱多。爲求顯示直接關聯起見，構圖之時，二線應使相愈距近爲愈佳。

構圖法 構圖之法，第一步先作一粗略圖，二線之尺度，任意規定之；由此粗略圖式，卽可作一試驗，而查明二線相似之情況。請注意，在何期間所生變動爲最大；此一變動最大之期間，卽一般用作比較之日期，蓋惟在此期間，因果關係乃最爲顯露也。反之，如因特殊理由，採用其他期間，亦須明瞭此點，否則必引人批評，否認所採期間爲唯一之關係明顯之期間也。如此，吾人從任何兩條曲線中，查出同時發生變化之短短期間，事必不致甚難。爲達此目的，可求所採用期間之款額平均數及人數平均數，並重新再作一圖，在此第二圖中，人數尺度之決定，以使人數平均數與款額平均數相等爲標準。如此，兩條曲線苟有任何適應性，卽可一望而知矣。

負相關 在許多情形之下，常有一種數量，爲吾人視爲原因者，其變動乃與另一種數量而爲吾人視爲結果者之變動，成相反之方向。例如，設吾人以貿易進展與失業人數作比較觀察，而按上文所言之構圖法顯示之，則第一條曲線之最高點，必與第

二曲線之最低點，同時出現。但如此尚非十分明顯，如欲求更大之明晰，可以一線倒置之；換言之，即用一線代表就業之人數，而不使表示失業之人數，則二條曲線之變動必亦步亦趨完全一致矣。

較複雜之關係　依照上文所論之構圖，設一種數量之變動，恰與他一數量之變動恰成比例，詳言之，如以室外貧民救濟費為例，代表款額之線，超出平均數百分之十，貧民人數亦必增多百分之十，則在所有期間中，無論兩線之變動如何，一線必始終在另一線之上，此種關係，乃為極罕見之簡單關係；吾人一般所見者，大多最高點最低點在同時出現，兩組數量之變動，自始至終大多同一方向，且一線變動較大者，他線變動亦較烈也。

圖式表示相關之用途　圖式常用以表現兩組數字之相關(correlation)，而表示兩數字之相關，亦確為圖式之主要優點之一也。又圖式可在論辯某問題時作為例證之用，惟圖式之效用，如就此點而論，誠亦甚微，蓋圖式所表示者，只足為簡略之例釋，非極詳備之證明也。夫因果關係之建立，事本甚難，在理論付諸試驗之際，採用之原始數字，非經過極嚴密之考量不可也。

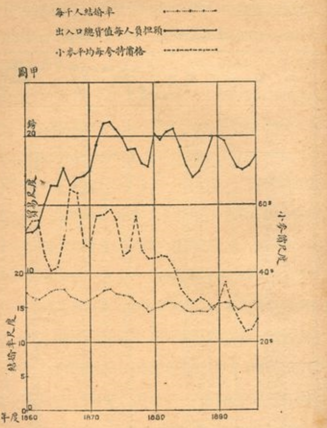
更爲確切之方法　爲作比較而用之圖式，其用途並非止此而已，尙有較爲確切者在焉。然下文所論方法，採用之時，須特別謹愼。設吾人意欲確定一金鎊多買一布舍爾(bushel)小麥，是否與結婚率增加千分之一·五，或其他任何之嚴格數字比例相適應。必須繪一圖代表小麥數量，將已擇定實行比較之期間中之數量加以平均，然後以平均數爲零點，由平均數向上，分成一，二，三……布舍爾，或自平均數而下，亦分成一，二，三……布舍爾等尺度。如此並無基線。現請更繪一曲線，代表結婚率，在擇定期間中，超過結婚率平均數之部分，或低於平均數之部分，此一條線之尺度，必須每超過平均數有千分之一·五，其距離卽與一布舍爾小麥數量所佔之縱標尺距離相同。然則此兩條線，接近之程度，卽可測驗理論是否可以成立，如能成立，卽可測驗成立之限度爲何如矣。惟此一方法，用時每有危險，蓋旣無基線之設，自不能以總計數爲比較，而鑑定變動之總額也。雖然，如畫兩條基線，固屬合乎需要，然一有基線，裨益雖非甚大，而因之反有易致紛擾之虞也。

執此而論，吾人苟能善自採用尺度及基線，則兩日期中之各點，必能與若干代表數列精確畫成之曲線相合。玆舉一圖爲例以釋明之。

〔例釋〕 英國之結婚率，出入口總貨值平均每人負擔額，與小麥每夸特(quarter)平均價格

年份	結婚率	出入口總貨值平均每人負擔額 金鎊	先令	便士	小麥每夸特平均價格 先令	便士
1860	17.1	13	0	8	53	3
1861	16.3	13	0	3	55	4
1862	16.1	13	8	0	55	5
1863	16.8	15	2	7	44	9
1864	17.2	16	8	7	40	2
1865	17.5	16	7	5	41	10
1866	17.5	17	14	5	49	11
1867	16.5	16	9	6	64	5
1868	16.1	17	0	6	63	9
1869	15.9	17	3	9	48	2
1870	16.1	17	10	3	46	10
1871	16.7	19	9	6	56	8
1872	17.4	21	0	0	57	0
1873	17.6	21	4	2	58	8
1874	17.0	20	11	0	55	8
1875	16.7	19	19	4	45	2
1876	16.5	19	0	10	46	2
1877	15.7	19	5	5	56	9
1878	15.2	18	2	1	46	5
1879	14.4	17	16	10	43	10
1880	14.9	20	3	3	44	4
1881	15.1	19	17	5	45	4
1882	15.5	20	8	10	45	1
1883	15.5	20	13	2	41	7
1884	15.1	19	4	1	35	8
1885	14.5	17	16	9	32	10
1886	14.2	17	0	10	31	0
1887	14.4	18	11	7	32	6
1888	14.4	18	12	1	31	10
1889	15.0	19	19	9	29	9
1890	15.5	19	19	7	31	11
1891	15.6	19	14	0	37	0
1892	15.4	18	15	6	30	3
1893	14.7	17	14	9	26	4
1894	15.1	17	11	9	22	10
1895	15.0	17	19	3	23	1
1896	15.8	18	14	1	26	2

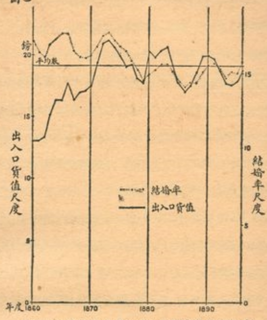
（第三十五表）



（第 十 三 圖）

在上列第十三圖甲圖中，有代表小麥每夸特價格先令數之線，有代表出入口總貨值除以英國人口之線，並有代表每千人中結婚率之線。尺度之擇定，有二簡單之原則，一則最便於應用，二

圖乙

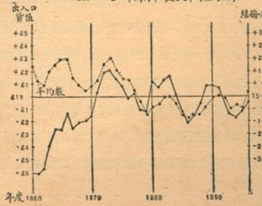


英國人口平均每人負担出入口總貨值與結婚率

圖丙

一八六九至一八九六年平均數均在同一線上

一八六九至一八九六年間對平均數之平均差均相等



（續第十三圖）

則將各曲線刻畫畫致,起伏狀況明顯。各個標尺尺度上諸點,凡屬於同一年份者,必相互重叠,但各點各有其尺度,所代表之單位,彼此並不相同。至基線則無相合之必要也。

貿易額與結婚率 試觀上圖,各種數字之進行曲折,是否有類似之情狀,此則不問可知。先就貿易額與結婚率二者言之,自一八七〇年以來——稍前數年或亦同然——貿易額之變動,與結婚率之起浮,大概有相應之狀態,此乃可爲斷言者。又圖上,小麥價格及貿易總值,相似之點甚多;一八七〇至一八七三年,二者相率上昇,一八七三至一八七五年,又相繼下游;一八七六至一八七七年,復同時俱起,其後兩年又同時俱落,至一八七九年後,乃復同趨上昇;自一八八一年,二線又偕以俱降,直至一八八六年爲止,迨一八八七年,乃又齊趨上昇矣。雖然,相同之點固多,行動相左之點,亦所在多有,例如一八六二至一八六四年,及一八八七至一八八九年,乃特別顯著者也。

結婚率與小麥價格 現請再檢視小麥價格與結婚率之線,可見在該世紀前數十年中,關係甚爲密切,此漲彼落,似頗顯然,惟細加考察,二條曲線,既不甚爲相似,復非恰相反對。在一八六〇至一八六二年,小麥價格上漲,結婚率則降低,在一八六二至一八六四年,小麥價格下落,而結婚率則上漲;一八六五至一八六七年,小麥價格騰起,而結婚率初則堅挺不動,繼則微形頹弱;

一八六八至一八七〇年，小麥價格雖日趨低下，結婚率亦每況愈低；一八七〇至一八八〇年，結婚率出現一極大之變動，而小麥價格，則有兩個短促之變動，迨至一八八〇年以後，小麥價格連年低降時，結婚率一般形勢亦始終衰弱不振，小麥價格上昇之日，結婚率亦趨上昇。

二者之聯環關係　此二現象，或有聯環之關係，吾人不妨略一討論之。小麥爲勞動階級生活費用中之主要項目，故小麥價格之漲落，實爲勞動羣衆最爲關心之主要事項，然則小麥價漲，而結婚率降，非無故矣。如就另一方面言之，當麥價廉，工資高之時，麵包價格偶有變動，則重視之者，僅爲少數人而已；而此乃國家一般興盛之象，由對外貿易情況可知，是結婚率擡高，有由來矣。

在出口入口貨值增加之時，貿易大形發達，預備結婚者，雖當此物價高昂之際，猶充滿樂觀空氣，以爲繁榮可常留，物價終當降落也；但物價一落，利潤大減，國民所得自亦降低，於是預備結婚者，乃不得不稍持穩重。然則吾人基於此種理由，而謂結婚率與國外貿易二曲線，彼此有一致之趨向，要非過言矣。

結婚率之增加，乃隨貿易發達以俱來，而貿易發達，又出現於一般物價上漲之際，故僅就小麥價格一項而論，麥價與一般物價有連帶關係，國外貿易發達，則麥價漲，對外貿易衰落，則麥價亦隨之俱低；於是麥價漲，結婚率亦隨之而昇，麥價落，結婚率亦

隨之俱降。然麥價之漲落,原因非止一端,除對外貿易一因素外,尙有其他特殊之原因在,故麥價並非永隨貿易狀況而變動,與結婚率尤少相關,此十九世紀中前期麥價之趨勢,所以恰與結婚率成相反之變動也。

由此而論,結婚率與出入口貿易二曲線,有相應之趨勢,麥價與貿易二曲線,略爲一致,但並非有甚密切之傾向,麥價與結婚率有雙重之趨勢,本不足爲奇。試觀上列第十三圖,結婚率與出入口貿易相應之情形,已躍然紙上。小麥價格與貿易相應情狀,仍不難用同一方法釋明。至結婚率與麥價之關係,應另作比較。比較之法,須以不同之計劃,重作二次之比較:第一先求其正相應(direct correspondence),次則以上端作麥價曲線之基線,另構一圖,以求二者之負相應(inverse correspondence)。

圖式之構造 比較貿易及結婚率二曲線之程序,有如下述:吾人檢查上列第十三圖圖甲,知二條曲線,在一八六九年以前,並無任何相似之關係,故自一八六九年起之各部曲線,應使之顯露密切之相應。一八六九至一八九六年,結婚率平均數爲一五·五,平均每人負擔出入口貨值額爲一九金鎊。玆以平常方法將結婚率曲線繪成,次藉用滑動尺度(sliding scale),將貿易曲線畫上,如此則二者之基線相同,一九鎊與一五·五兩平均數同在一條線上,詳見第十三圖圖乙。

經此構圖結果，吾人由圖中可以看出，二條曲線之升降，均發現於同一日期，惟變動程度不同耳；蓋自一八七三至一八七九年，二曲線幾成平行，二線達到最高點之後，下落之程度，約略相等，但至一八七九年而後，貿易及結婚率二條曲線，在平均數線上下擺動，貿易線尤較結婚率線爲甚焉。

最終之比較　一切程序至此，即須用作圖測驗法，考察各次變動，是否互成比例。此時，可令出入口貨值對一八六九至一八九六年平均數之平均差(1.04鎊)，與結婚率對同期平均數之平均差(0.72)相等，而成一尺度方程式；不然即用粗略方法，以等距離之縱尺度，一方代表一鎊入口貨值，一方又代表結婚率千分之〇·七，如此乃成立一假定；凡出入口總貨值每人負擔額，有一鎊之變動，則每千人中結婚率必同時有〇·七之變動。上列第十三圖圖丙之尺度，即依此辦法而決定者，已在圖中公共平均數線之上下標明矣。

在丙圖中，吾人一望即知自一八七〇年以後，二曲線之變動，合攏甚爲密切，但此一密切關係，惟犧牲一八七〇年以前之部分，始能得之。在一八七九至一八九三年一短促之期間中，二條曲線愈形貼合；然此旣經用特殊之選擇而繪成，則以此作爲一般論辯之基礎，必將有誤入歧途之危險。

吾人根據構圖之結果，可得一結論：自一八七〇年以後，支

配英國國外貿易之原因,亦同樣爲支配結婚率之因素,使二者發生變動既在同一時期,變動方向亦相互一致;且一者受影響之程度愈大,他一曲線受牽動之程度亦愈甚;惟二者之間,並無成簡單比例之一定法則耳。

在比較曲線之時,可不必比較對一期間平均數之離中差,正當而有利之方法,莫過於計算對修勻曲線之離中差,至計算對修勻曲線之離中差,由移動平均數求之固可,否則卽用其他方法求之亦無不可也。總之,算出對修勻曲線之離中差後,吾人可忽略有逐漸而永久效果之原因,從事比較短期之變動矣。此節容以後再申論之(見第二編第六章)。

附註——上列第十三圖圖乙,所欲測驗之關係,可以一方程式$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$表示之,丙圖所欲測驗者,可以方程式$\frac{x-a}{y-b}=c$(c爲常數)代表之。式中之x爲出入口貨値,y爲結婚率,a爲出入口貨値在某一期間中之平均數,b爲結婚率在一期間中之平均數,選擇c値之法,須能使兩組數量之平均變動相等。如用最小二乘法,則擇定之c,必能使二條曲線之相應性,較用本書算出之數値所求得者爲密切也。

第四節 循環數字

循環數字 現當論及循環數字(periodic figures)矣。所謂

循環數字者何？乃即在某一週期（例如數字報告爲每月一次時週期即爲一年）中．依一定之時間，達到最高點及最低點，並表示連續期間中呈有規律之變動之數字也。此種數字之例證甚多，在自然現象中，有如日之升起，每日之記錄相同，均可代表現象，年復一年，幾無變化。舉潮汐之例而論，季節現象之較爲呆板之各年曲線，與社會統計中稍欠明顯之週期，二者之間，乃確有其相連之關係；惟潮汐往往受諸種不同之影響，因其週期乃有二十四小時一循環，及其他長短不同之週期循環，且因素既衆，影響力量復有強弱之異，一因素之效果，往往爲他因素之效果所掩蔽耳。即在英格蘭銀行之每週記錄中，霍翁士(Jevons)氏，(註八)亦曾發現有按月，按季，按年，種種不同之循環焉。

在社會及產業統計中，吾人慣常發現有按年之循環，同時有遲滯之向上向下之一般運動，攙雜其間，另外復因有循環之商業繁盛及蕭條關係，呈現大約每十年一循環之不規則週期。此三種運動對於數字之影響，吾人不難考察而得，玆就英國鑄鐵工人協進會失業人數之每月調查數字爲例，作一完全之討論，以謀徹底明瞭研究循環數字之一般方法。霍翁士氏論文『秋收對貨幣市場之頻繁壓力』(註九)可請讀者參考作爲第二例釋之用；如欲作爲練習之用，可請採用英國統計月報中之小麥價格，在此數字中，各年數字圖，形式有逐漸變化之象，此種變化之經過，可參照

全球各處秋收影響日愈強烈之情形察視之。

循環數字之一般形態　此種循環數字，如用圖示法，表明兩重之循環，有特別適用之效，考察每年急促變動及較長時期之一般運動，相互發生之影響，尤爲適宜。請閱下列第三十六表：

循環數字

鑄鐵工人失業人數，以英國鑄鐵工人協進會會員總數估計數之百分數按月份分別表示之：計算所根據之數字，爲鑄鐵工人協進會一八九四年之常年報告。

年份	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	一年平均
一八五五	11.1	14.1	14.0	12.5	10.0	9.9	8.7	8.7	6.8	7.7	8.8	12.0	10.4
一八五六	10.9	12.6	12.2	10.0	9.4	7.5	6.9	7.3	6.9	8.1	8.7	9.9	9.2
一八五七	10.1	9.5	8.7	8.7	8.1	7.3	6.8	6.9	6.2	8.0	14.0	17.7	9.3
一八五八	20.2	20.6	20.9	19.8	20.3	17.8	15.9	14.3	13.1	11.9	11.5	11.2	16.5
一八五九	10.6	8.8	6.5	5.2	4.0	4.4	3.2	3.6	3.4	3.8	4.6	5.1	5.3
一八六〇	4.0	3.2	2.6	2.2	1.6	1.7	2.3	2.6	2.6	2.9	3.7	5.6	2.9
一八六一	6.0	6.9	6.5	7.9	7.8	8.4	6.9	7.9	9.5	10.7	12.4	13.8	8.7
一八六二	14.5	14.0	14.0	14.6	14.4	13.7	13.3	12.9	12.2	13.5	14.9	16.0	14.0
一八六三	15.5	13.9	13.6	11.6	10.4	9.3	8.1	7.8	7.4	6.6	5.3	5.0	9.5
一八六四	6.0	7.1	6.6	5.1	4.4	3.3	2.8	2.8	2.6	3.3	4.2	8.1	4.7
一八六五	5.4	5.3	5.3	4.6	3.4	2.9	2.6	3.1	2.7	2.6	2.3	4.9	3.8
一八六六	4.2	5.4	5.1	3.6	5.1	6.5	5.9	6.5	6.9	7.4	9.3	13.8	6.7
一八六七	12.4	13.2	15.4	16.7	14.9	14.6	14.2	13.9	15.7	16.3	18.9	22.6	15.7
一八六八	22.1	20.9	19.2	18.6	16.7	15.8	14.9	14.7	14.2	14.1	15.6	17.4	17.1
一八六九	17.3	17.1	16.8	15.6	15.2	13.6	13.3	11.8	13.1	13.6	14.8	15.3	14.8
一八七〇	14.5	10.9	8.7	7.2	5.0	4.5	3.7	4.5	4.9	5.0	5.6	8.3	6.9
一八七一	7.2	5.6	3.6	2.8	1.6	1.5	1.6	1.2	.9	1.4	1.1	2.2	2.6
一八七二	1.1	1.1	.9	.8	1.2	.7	.9	1.0	1.3	1.8	2.6	4.1	1.5
一八七三	3.3	2.8	2.7	2.5	2.1	2.0	3.0	4.9	4.3	3.3	3.3	5.1	3.3

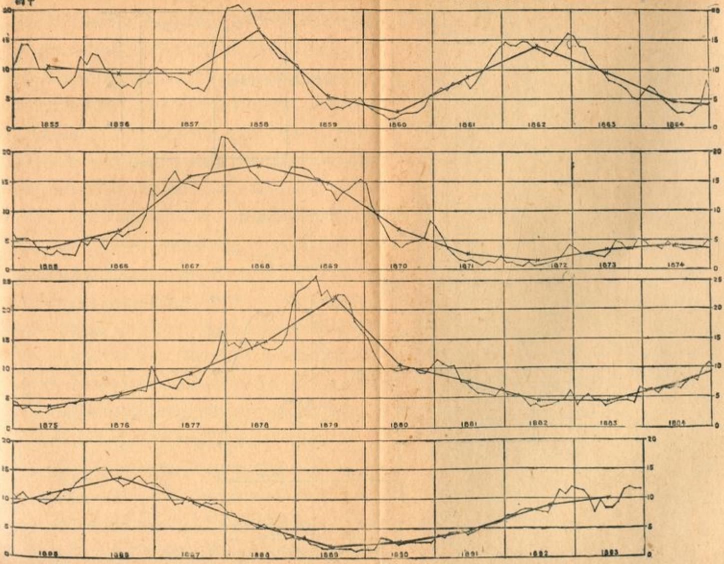
平均數一八五五至七三	10.3	10.2	9.7	8.9	8.2	7.7	7.1	7.2	7.1	7.5	8.5	10.4	8.6
一八七四	4.9	3.9	3.9	3.5	4.9	3.9	3.8	3.4	3.5	3.7	3.9	5.0	4.0
一八七五	4.6	3.4	3.5	2.8	2.8	2.8	3.3	3.4	3.6	4.1	4.1	5.0	3.6
一八七六	4.9	4.9	4.9	5.4	4.8	5.2	5.7	5.8	6.4	6.4	6.2	10.3	5.9
一八七七	7.7	7.4	7.0	6.9	8.4	7.6	7.4	7.8	9.6	10.9	12.3	16.3	9.1
一八七八	14.0	14.3	13.5	15.3	13.3	14.6	13.6	13.2	13.3	14.0	15.7	21.0	14.7
一八七九	23.2	23.8	24.7	25.5	22.3	23.4	21.5	22.6	22.5	21.1	18.0	16.6	22.1
一八八〇	15.2	12.9	11.1	10.0	10.0	9.7	9.8	10.0	10.0	9.2	9.2	10.2	10.6
一八八一	11.5	10.8	10.1	10.1	7.6	7.5	6.5	5.8	5.6	5.4	5.0	6.6	7.7
一八八二	5.5	5.2	5.3	4.5	3.6	3.8	3.2	3.4	3.6	4.1	4.4	6.0	4.4
一八八三	3.6	4.8	5.2	4.3	4.2	3.6	3.9	4.3	4.5	4.2	4.0	6.6	4.4
一八八四	6.1	6.2	5.9	6.5	6.5	6.9	6.5	7.6	8.1	7.8	9.8	10.9	7.4
一八八五	10.2	11.1	10.0	10.1	9.8	9.1	9.8	10.7	[illegible]	11.6	12.7	13.6	10.9
一八八六	14.1	15.0	15.2	15.5	13.4	13.1	12.1	12.7	13.6	13.9	12.7	12.9	13.7
一八八七	12.4	11.6	10.2	9.1	9.2	10.6	9.2	8.8	9.6	9.4	9.4	9.1	9.9
一八八八	7.8	7.5	6.4	6.4	5.9	5.2	5.7	5.0	5.1	4.8	3.2	3.5	5.5
一八八九	3.1	3.5	2.4	2.1	1.7	1.6	1.7	1.7	1.6	1.5	1.2	1.4	1.9
一八九〇	1.3	1.3	3.2	3.1	2.8	2.4	2.4	2.7	2.7	2.7	2.7	2.7	2.5
一八九一	3.9	3.5	4.2	4.2	4.6	4.0	4.5	4.8	5.4	5.6	5.7	6.3	4.7
一八九二	7.0	7.2	7.9	8.1	7.9	7.9	7.7	7.6	9.3	11.4	10.9	12.0	8.7
一八九三	11.5	11.2	10.1	7.7	9.6	[illegible]	8.3	9.2	11.7	11.9	11.5	11.5	10.2
平均數一八七四至九三	8.6	8.5	8.2	8.1	7.7	7.6	7.3	7.5	8.1	8.2	8.1	9.4	8.1
平均數一八五五至九三	9.4	9.3	8.9	8.5	7.9	7.6	7.2	7.4	7.6	7.9	8.3	9.9	8.3

第三十六表

於諸年各橫列中，可見在每年中間，必有降低之現象。再查縱行每月份之下，各年增減並無通盤顯著之趨勢，因前數年與末數年，均見高低不同之數字也。惟最引人注意者，此種數字之主要

英國鑄鐵工人協進會每月失業會員百分數及每年平均數

圖甲

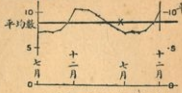


（第　十　四　圖　）

每年變動波浪形

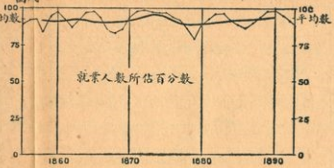
各年平均數與修匀曲線（七年之平均）

圖乙

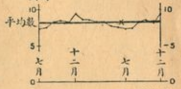


一八五五—七三年各月平均數

圖戊

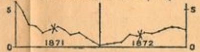


圖丙



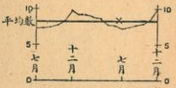
一八七四—九三年各月平均數

圖己 真正最低點爲一八七二年一月



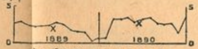
圖庚

圖丁



一八八五—九三年各月平均數

圖辛



真正最低點，一八八九年十二月

（續第十四圖）

形態，即爲成組之低數字年份與成組之高數字年份，有循環返復之趨勢。每月失業人數佔會員總數之百分數，在百分之十以上者，有一八五七至一八五八年，一八六一至一八八一年，一八八四至一八八七年及一八九二至一八九三年數組。玆僅就一八六六至一八七〇年一期研究之。一八六六年一月份之數字，比以前各年同月份之數字均低；一八六六年二月，三月，及四月份之數字亦然；惟自五月起至九月止，此五個月份之數字，則比一八六五或一八六四年同期之五個月份數字爲高；一八六六年自十月至十二月之數字，則比一八六三，一八六四或一八六五年之數爲高；至一八六七年十二月乃愈大，以前各年之數字無與倫比者。一八六八年之數字，多半均比以前九年爲高；惟自一八六八年九月以來，各年同月數字每況愈下，必較上一十二個月份之數字爲低，此種情形，直至一八七二年九月爲止，始形緩和。由此可見，此一失業狂瀾，波濤澎湃，自一八六六年五月起，延至一八七二年九月，有六年餘之久焉。

{季節影響} 現請再考察季節之影響。一八六六年，除在四月一月外，夏季並無低落之現象，至十二月反有急速之昇進。一八六七年，自五月至八月一落之後，自九月至十二月，即繼以猛烈之標高。一八六七年十二月起，又形式微，直至一八六八年九月，始告一段落，而同年十月十一月及十二月，反甚高漲；由此

視之，失業數字之擡高，在一般情形之下，非至八月後，不能出現，可知一般低落現象，並未使季節影響延長甚多也。復查次年，卽一八六九年，在八月數字降落甚低，打破以往最低點之記錄，惟在十二月，數字升起程度甚微，再次一年，數字降低迅速，至八月而極，然因季節而應有之上昇，仍及時而至，並未稍見延擱也。於斯可見，除在開始一年卽一八六六年尙未見有低落現象外，其餘各年，在全局之變動過程中，均受季節之影響，且各年之擡起，均見於秋季，似有一致之情形；此種情形，在一八七五年八月起至一八八一年五月止一期中均相同。然吾人試問：一八六七至一八七〇年，就業情狀，以何月最爲最惡劣？則一八六七年十二月之百分之二二•六，乃爲最大之數字，似爲十二月矣，然十二月之失業，向來比其他各月爲甚，而一月至六月共六個月中，任何一月之數字，頗有較爲反常之可能，反不若十二月情形之一致，故欲查就業狀況最惡劣之確定日期，非用圖示法，必不能得出最優良之表明。下列圖式爲英國鑄鐵工人協進會前任書記海君（Mr. Hey）所繪，上文所言各點，卽多爲海君所提示，吾人於此不妨一併聲明。

{圖式說明}　上列第十四圖，內中包含之事實，如下所述。重線之作用，在表示每年之平均百分數，吾人試察該線，必見一八五七年以前之步步趨跌趨勢，至一八五七年，驟然上騰，一八五八至一八六〇年，又突然下降，嗣後復經過兩年之上昇，乃達於原來

之水準，至一八六五年，竟又回復至最低點；次一波浪形，自一八六五年起至一八七二年止，經過七年之久，在此一波浪形中，最令人注意者，爲一八六七年之異常挺進，及一八七二年之重現極低新記錄。一八七二年之特異貿易狀態，並未保持甚久，卽行漸漸擡起，直至一八七六年爲止，於是另有一個六年期之波浪形開始，而成另一商業循環矣。此波浪形之升進，已非如前一波形運動之峻峭，惟經過時間之長久，昇進最高點之高度，則有過之無不及。反之，在降落之時，下降角度，幾與上昇所成角度相同，且在一八八二年所現之最低點，亦與在一八六五年之最低點大致相同。次一波浪形，本尙未至理應開始之年，乃竟提前實現，且波浪形之經過，有七年之久，亦非復爲六年，惟上升下降情形，均極緩和，特上昇尙較下降爲陡峭耳。一八八九年所呈現之最低點，並未維持甚久，卽行逐漸上昇，其後圖雖中止，但吾人得知其最高點，將見於一八九四年，惟高度尙爲緩和而已，又如支配以前各商業蕭條時期之原因依然存在，則下一最低點可望於一八九八或一八九九年實現也。實際上，據英國商業部之調查，就有報告寄還之各職工組合綜合觀之，最高月份爲一八九二年之十二月，最高年份爲一八九三年；嗣後卽逐步降落，至一八九七年而達於最低點，一八九八年一度輕微漲起之後，又於一八九九年重現極低之數字焉。(註一〇)

圖戊所表示者爲就業人數所佔之百分數，故此圖式恰爲以上各圖之倒置，而篇幅則大爲縮小。在一八七六至一八八二年一期之間，如以兩條縱線劃開，則依圖所示，在此數年中，英國全國損失之工作量，何等之大，鑄鐵工人協進會會員損失之工資，爲數何等之鉅，讀者必可一目瞭然。由此數字，指示吾人在鑄鐵工人協進會中，因特殊原因而失業之百分數，猶大於其他職工組合（只就有同期數字可資比較者而言）失業人數百分數之兩倍。

圖戊中，每年平均數用本章第一節所論修勻曲線法將之修勻，而以每七年一平均之平均數，(註一一) 適應一般之波長(wave length)。由此可知，在此三十九年中，運動或上或下，並無顯著之趨勢可言，且已修勻之曲線，與就業人數之總平均數，即91.7，相距尚不甚遠也。

此一圖式，最妙莫過於與前列第六圖（英國國產貨物出口總值）作比較觀。玆將二圖比較之結果，擇要揭露如下：

日期		日期	
出口貨值最低點	失業人數最高點	出口貨值最高點	失業人數最低點
1862	1858及1862	1866	1865
1868	1868	1872	1872
1879	1879	1882	1882或1883
1886	1886	1890	1889
1894	1893		

此外，此兩種數字，如用前節或下節所述方法，用圖比較之亦可。

季節影響之測算 在一八五五至一八七三年中十九個一月，十九個二月，十九個三月……等月份之平均數，在一八七四至一八九三年二十個一月，二十個二月……等月份之平均數，以及自一八五五至一八九三年全期中同月份之平均數，均已見於前列第三十六表，並列於第十四圖之乙，丙，丁。當吾人計算前論之各年平均數時，旣已用上述方法，將季節變動剔除；今用各月之平均數，吾人乃又剔除特定年份之影響。例如，設吾人從一數列完全不受季節影響之數字（假如果有此種數字）中，將所有十一月份之數字提出，而以此十一月份之數字，與所有各月之總平均數作比較，如就通盤計算，則在此平均數之上者，與在此平均數之下者，二者出現之次數，必完全相同。然各月數字，果已受季節之影響，則非在在平均數上之數字，較在平均數下之數字甚多，必在平均數上者，較在平均數下者過少。此過多過少之數，卽視季節影響而定，凡季節影響愈大者，則相差之數亦愈大。今用此方法，將數字施以平均，必可剔除非屬於季節之影響。設非用平均方法，勢必難以剔除，否則必須從根本就實際計算而來。季節原因之影響如使十一月超出總平均數之數，較使十月份超出總平均數之數爲大，則各年十一月份數字之平均數，超出總平均數之

數，亦必比十月份超出總平均數者爲多，且表示各年某一月份之平均數之曲線，必與因非屬於季節之影響已失其存在而得出之平均數曲線相似。何則？二者相似之理由有二端，第一，因在比較短期而爲吾人認爲足够應用之數年中，必有一極有力之非屬於季節之影響，對此一平均數發生永遠顯著之作用，如在前列第三十六表所表示者卽是；第二，因爲季節原因以及非屬於季節之原因，時常互有影響，並非各自獨立；例如，商業蕭條時期，每因酷寒之冬日，而加強其深刻之程度；又如商業不振之年，復遇生意清淡之月，則失業人數必驟然大增，反之在繁榮之年，加臨生氣蓬勃之夏季，失業人必大爲減少，甚可幾至於零。故在一方面，各種不同原因之相互作用，可以擡高季節之最高度，復可壓低季節之最低度，但在另一方面，二者相互爲用，因生補償作用，反可緩和尖銳之程度也。

在前列第十四圖乙，丙，丁三圖中，代表後半年之曲線，置於歷年後半年曲線之前，此乃因每年波浪形之特性，必由最低而最高，始最爲顯明之故。試觀圖丙之波浪形，形式稍欠穩定，而漲落則較圖乙所示前一期中之漲落爲衰弱；此無他，季節已失其影響故也。

每年之波浪形　每年一度之波浪形，如甚穩定，如圖丁所示者，則類似下圖形式：

5  5

0 0

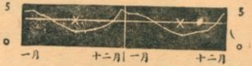
（第十五圖）

之數字，每年必與第十四圖甲相同；一八六四年，一八八二年及其他數年，即其最顯著者也。就所有各年觀察，絕大部份，每年最高度，非現於十二月，即在一月；在一八五八年之末，並無最高點出現，但因下降過速，致現折斷之象；一八六〇年之末，曲線居然上升，但一升之後，又發生春季之瀉落，終以一般上升趨勢甚強，瀉落未久，即行轉而向上邁進；自一八六一年以後，尙有劇烈變動甚多，可依此類推，姑不一一敍述。總之，沿線之突出點，恰在平均數線之上，而各點相距大致相等，則無可疑。

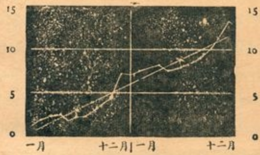
各最低點，尙欠十分明顯，此係因各點連結而成之形式不明之故，是以每以些須原因，各點即趨近修勻曲線，且各最低點每隨一般降落趨勢而被遮蔽，或因一般上昇趨勢而致消失。雖然，在一八六一年，雖同時有強烈之上升趨勢，而最低點仍甚鮮明；在一八六五至一八七〇年變動行程中，各最低點亦頗顯著；至於自一八五九至一八八八年間，除一八七六，一八八〇，及一八八一年三年爲例外外，其餘各年，遇有最低點出現時，亦尙易於辨認也。

茲為示明每年平均數之靜止，上升，及下落等傾向，對於季節波浪形之影響，分作三圖於下：

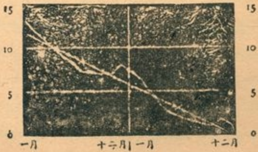
甲、平均數線在靜止狀態下之季節波浪形



乙、平均數線在上升狀態下之季節波浪形



丙、平均數線在下降狀態下之季節波浪形



（第十六圖）

此三圖式,係用每月對總平均數之平均差額(詳言之,即

一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
+1.1	+1.0	+.6	+.2	−.4	−.7	−1.1	−.9	−.7	−.4	0	+1.6

)按月加上連結每年平均數之直線上之距離,或由該直線上之距離減去之。圖乙之上升曲線上,春季之降勢,有趨向平行之意,而秋季上升之勢,則有更趨陡峭之意;圖丙下降曲線上,春季之降勢,有急轉直下之勢,而秋季之升勢,則未能暢行上昇。

此一季節波動,連遲滯之長期變動在內,是否卽爲數字變動之完全解釋,尙難確定,如其果爲數字變動之唯一原因,則第十四圖甲,必完全爲第十六圖甲,乙,丙三圖所合成。第十六圖甲之例,最佳莫過於一八五五至一八五七年,一八六四至一八六五年,及一八七一至一八七三年;圖乙之例,爲一八六〇至一八六一年,一八六六至一八六七年,一八七七至一八七八年,及一八八三至一八八五年;圖丙之例,則爲一八五九年,一八六三年,一八八〇至一八八二年,及一八八六至一八八九年。

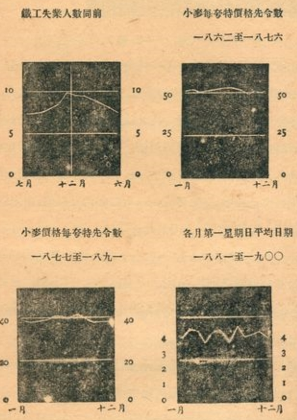
變動之剔除 依上文所述,變動之原因有兩組,彼此並非獨立,而上列圖式之再繪製,又非十分準確;然由此所表示之相合形態,已甚密切,故以下所論之剔除季節變動方法,有一部份頗可付諸實施。將以上所得之各月對總平均數之超出數及缺少數,與原始數字合併計算,卽將超出數減去,並加上缺少數;如此則可產生一直線如下圖:

（第十七圖）

但經此程序之後，結果除求得一趨勢之外，其餘並無所有，此乃由於一八八三年一月曾有非常降落之故，然除此一期之外，如欲尋得一完全之例，其事甚難。以此法施於第十四圖之己，庚辛三圖，以謀由一八七二年之商業恐慌，一八七九年之商業蕭條，以及一八八三年之潮流轉向中之效果，各將其季節之影響解除。在第十四圖之己圖中，吾人可見一八七二年六月以前，尙未達到絕對最低點，但該年之一月乃爲比較最佳之月份。由此可知一八七二年一月，乃爲商業全盛時代之轉向點，惟此月份爲期則較其他一般轉向期爲早。但一八七九年最高點之日期，經此法修正之後，並未有何改變，至一八八九年最高點之日期，亦不過移過一月而已。

週期存在之判準　討論至此，關於週期存在之判別標準，不得不加以考慮。在第十四圖甲圖中，即憑吾人目力，已足判明每年一度之週期，然用一代表小麥價格之圖式，是否可以引起每年一度之變動，則不無可疑。總而言之，任何調查材料之每月數字，

凡就若干年將同月份之數施以平均者，則卽使並無季節影響，一月，二月……以及其他各月之平均數，必不能準確相等。下列第十八圖各式，卽表示各種平均數者也：



（第十八圖）

在此四種圖式中，前三者可謂之爲有季節性，末一圖，旣係表示二十年中各月第一個星期日所在日期之平均數，自非屬於季節性質。

此點，可另作一簡單測驗於下，以決定之。如有一種週期循環，勿論任何種形式，凡與季節有關聯者，則此一週期，必與普通天氣如溫度及其他等圖，多少相適應，蓋天氣圖，不論溫度與雨量，每平均僅有一最高點及最低點也。受天氣影響之現象，自亦應表現唯一最高點，此一最高點，大致必與最高溫度或最低溫度相合。例如，失業人數最高度，卽與晝長最低度相合，而在最低溫度之前。在幾種情形之下，除一種主要効果之外，同時又有一第二附帶發生之最高度出現，例如，一逾額之死亡率，或許由於炎寒或酷暑之故；然卽就此例而論，如再經進一步之研究，必可證明，炎寒之最高度，足致老年人之死命，酷暑之最高度，足促成少年人之傷亡。溫度之例如此，小麥之價格，亦何莫不然，地球有南北兩半球，收穫時間不同，因而小麥價格，乃出現兩個最低點。第十八圖之星期日曲線，最高點有四個之多，故與季節無關。最高點不止一個而有兩個或兩個以上之多，卽足證明並無週期性存乎其間，否則必須別有理由證明確有週期性存在也。

機率測驗　第二種測驗法，卽考查時間序列圖，而分析其在同一月中最高點出現次數；非屬於週期性之原因，動輒遮蔽最高

點，但經長期序列之觀察，必有一月特別顯露其優越性。第十四圖甲圖中，三月及四月出現之最高點，每月各有二次，二月則有三次，一月則有十一次，而在十二月則有二十一次。惟此處之最低點，則尚欠鮮明。

將此分析引而申之，茲作一表如下；

	三十九年中出現之次數
十二月份之百分數，大於同年十一月份之百分數者	33
十二月份之百分數，大於次年一月之百分數者	28
十二月份之百分數，大於同年七月份之百分數者	33
十二月份之百分數，大於次年七月份之百分數者	30

設季節並無影響，十二月份已佔絕大之優勢，若反乎此種優勢而出現之機率，必分別爲六萬五千次對一次，一百六十次對一次，六萬五千次對一次，及一千二百次對一次。依此方法，可將所有各月份逐一加以測驗。惟此種測驗方法，並不能將驗證發揮無餘，因吾人以上僅以兩月作比較，而討論兩月中以何月份之百分數爲較大，但此月果大於彼月，究有幾何，並未論及。關於此點，讀者可請參閱，英國皇家統計學會五十週紀念刊第二百零六頁，愛基華斯教授(Edgeworth)之統計方法論(On Method of Statistics)一文；雖然，吾人尚須在第二編將數學方法研究旣畢之時，方可對此加以討論也。

第五節　對數曲線

以前各節所述圖示法之嚴重缺陷，乃爲：當吾人討論一列漸增數字時，卽使各年之總計數，或許爲漸增數字，因爲方法所限，亦只能以相等之縱距離，以代表各年漸增總計數之相等增加量。譬如，一年之總計數爲二〇鎊，另一年之總計數，則爲二〇〇〇鎊，現二年各增加二〇鎊，則各年增加量，只有以同一縱距離表示之之一途。試以下列第十九圖爲例，該圖表示英國十九世紀進出口貿易之進展；先就代表出口貨値之曲線而論，在一八一五至一八一六年，出口貨値由五二，〇〇〇，〇〇〇鎊，一降而爲四二，〇〇〇，〇〇〇鎊，雖降落已達百分之二十，但由圖觀之，並不甚引人注意，然當此之時英國工業區正在極度恐慌中也。至於一八八三年，由三〇五，〇〇〇，〇〇〇鎊，至一八八六年，降爲二六九，〇〇〇，〇〇〇鎊，雖僅落下百分之十二，竟已立卽引人注意。又如一八四八至一八五〇年，出口貨値增加有百分之三十四，然以與一八七〇至一八七二年僅增加百分之二十九者比較，似反無甚重要可言。故吾人在硏究因果關係之時，與其求得實在增加額，究不若計算比例增加率之爲愈。吾人在討論一國對外貿易之

英國十九世紀間進出口貨值對數尺度

年　次	*進口貨值百萬金鎊	對　數	†出口貨值百萬金鎊	對　數	年　次	*進口貨值百萬金鎊	對　數	†出口貨值百萬金鎊	對　數
一八〇〇	28	1.447	34	1.531	一八五四	152	2.182	116	2.064
一八〇一	31	1.491	...	...	一八五五	144	2.158	117	2.068
一八〇二	29	1.462	...	...	一八五六	173	2.237	139	2.143
一八〇三	26	1.415	...	...	一八五七	179	2.252	146	2.164
一八〇四	27	1.431	...	...	一八五八	165	2.216	140	2.146
一八〇五	28	1.447	38	1.580	一八五九	179	2.252	156	2.193
一八〇六	27	1.431	41	1.613	一八六〇	211	2.324	165	2.217
一八〇七	27	1.431	37	1.568	一八六一	217	2.336	160	2.204
一八〇八	27	1.431	37	1.568	一八六二	226	2.354	166	2.220
一八〇九	32	1.505	47	1.672	一八六三	249	2.396	197	2.295
一八一〇	39	1.591	48	1.681	一八六四	275	2.439	213	2.328
一八一一	27	1.431	33	1.518	一八六五	271	2.432	219	2.340
一八一二	26	1.415	42	1.623	一八六六	295	2.470	239	2.379
一八一三	...	...	...	...	一八六七	275	2.439	226	2.354
一八一四	34	1.531	45	1.653	一八六八	295	2.470	228	2.358
一八一五	32	1.505	52	1.716	一八六九	295	2.470	237	2.375
一八一六	37	1.568	42	1.623	一八七〇	303	2.481	244	2.387
一八一七	31	1·491	42	1.623	一八七一	331	2.519	284	2.453
一八一八	37	1.568	46	1.663	一八七二	355	2.550	315	2.498
一八一九	31	1.491	35	1·544	一八七三	371	2.569	311	2.492
一八二〇	32	1.505	36	1.556	一八七四	370	2.568	298	2.475
一八二一	31	1.491	37	1.568	一八七五	374	2.573	282	2.450
一八二二	31	1.491	37	1.568	一八七六	375	2.574	257	2.410
一八二三	36	1.556	35	1.544	一八七七	394	2.596	252	2.401
一八二四	37	1.568	38	1.580	一八七八	369	2.567	245	2.389
一八二五	44	1.643	39	1.591	一八七九	363	2.559	249	2.396
一八二六	38	1.580	32	1.505	一八八〇	411	2.614	286	2.456
一八二七	45	1.653	37	1.568	一八八一	397	2.599	297	2.473
一八二八	45	1.653	37	1.568	一八八二	413	2.616	307	2.487
一八二九	44	1.643	36	1.556	一八八三	427	2.630	305	2.484
一八三〇	46	1.663	38	1.580	一八八四	390	2.591	296	2.471
一八三一	50	1.699	37	1.568	一八八五	371	2.569	271	2.432
一八三二	45	1.653	36	1.556	一八八六	350	2.544	269	2.429
一八三三	46	1.663	40	1.602	一八八七	362	2.558	281	2.448
一八三四	49	1.690	42	1.623	一八八八	388	2.586	299	2.476
一八三五	49	1.690	47	1.672	一八八九	428	2.631	316	2.500
一八三六	57	1.756	53	1.724	一八九〇	421	2.624	328	2.516
一八三七	55	1.740	42	1.623	一八九一	435	2.638	309	2.490
一八三八	61	1.785	50	1.699	一八九二	424	2.627	292	2.465
一八三九	62	1·792	53	1.724	一八九三	405	2.607	277	2.442
一八四〇	67	1.825	51	1.708	一八九四	401	2.603	274	2.439
一八四一	63	1.799	52	1·716	一八九五	417	2.620	286	2.456
一八四二	64	1.806	47	1·672	一八九六	442	2.645	296	2.471
一八四三	68	1.832	52	1.716	一八九七	451	2.654	294	2.468
一八四四	74	1.869	59	1.771	一八九八	471	2.673	294	2.468
一八四五	83	1.919	60	1.778	一八九九‡	485	2.685	330	2.519
一八四六	73	1.863	58	1·763	一九〇〇	523	2.719	354	2.549
一八四七	83	1.919	59	1.771	一九〇一	522	2.718	348	2.542
一八四八	89	1.949	53	1.724	一九〇二	528	2.723	349	2.543
一八四九	100	2.000	64	1.806	一九〇三	543	2.735	360	2.556
一八五〇	100	2.000	71	1.851	一九〇四	551	2.741	371	2.569
一八五一	111	2.045	74	1.869	一九〇五	565	2.752	408	2.611
一八五二	109	2.037	78	1.892	一九〇六	608	2.784	461	2.664
一八五三	123	2.090	99	1.996					

（第三十七表）

* 進口貨值——在一八五三年以前，爲公估貨值；一八五四年以後，爲眞實價值。

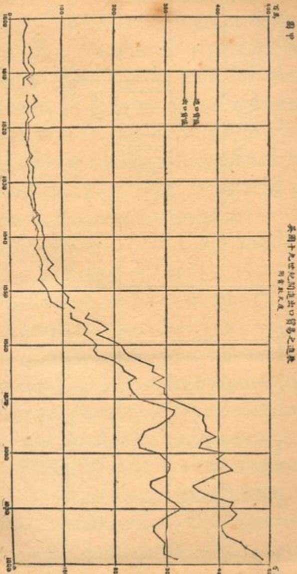
† 包括復出口在內。

‡ 自一八九九年起售賣船隻價值一併包括在內。

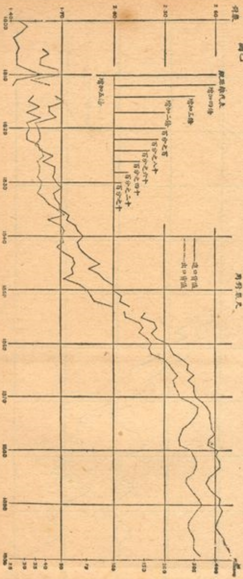
逐漸進展，或比較兩國貿易之發達時，如以實數尺度作圖如下列第十九圖甲圖者，往往對於早期之掙扎時代發生極荒謬之印象。爲今之計，吾人所需要者，非爲表示數量之圖，乃爲表示比率之圖，在此表示比率之圖上，相等之縱距離所表示者，已非爲相等之絕對增加量，而爲相等之比例增加量，換言之，即相等之增加率也。今應用對數，乃得作成普遍一致之尺度，於是吾人之目的乃可於以完成。不諳數學之學生，對於如此構成之圖，甚易養成應用之習慣，只須（一）研究記載實在數之圖式，（二）並不論所用尺度爲何一部分，均須留心分別以同一之縱距離，代表雙倍，半倍，或百分之二十……以及其他等等。

對數圖之構造法 用此一尺度構圖，其程序有如下述：（一）將所欲代表之序列數字記下；（二）在各數字之側；查出各該數之對數，記下；（三）在紙上分成相等之正方形，並沿縱線，以相等之間距，將數字按有規則之級數，依照漸次上升次序，分列於上，但須足以包括所有查得之對數；（四）在橫線上，分別標列日期；（五）在如此作成之尺度上，即將對數記上，不必再用原始數字。下列第三十七圖：

譬下列第十九圖



（第十九圖）



（續第十九圖）

所表示之數字，卽爲英國之出入口貨值，而用對數尺度作成者。第十九圖乙圖之右方，列有絕對數字；左方卽爲相當於絕對數字之對數。某一縱距離，例如一英寸，爲對數尺度0.301之距離；吾人如以此數加在任一數之對數上，則得該數之兩倍之對數，因爲 $\log a+.301=\log a+\log 2=\log 2a$；，舉例言之，設吾人欲將代表三十鎊之距離，增加長度一英寸，則結果位置必在代表六十鎊之距離。反之，設吾人將一英寸之1.59（在對數尺度上代表0.477亦卽 $\log 3$）加在 $2a$ 之對數上，則必得 $6a$，故

$$\log 6a=.477+\log 2a=.477+.301+\log a,$$ 理由如上述

$$=.778+\log a=\log 6+\log a;$$

換言之，吾人在此尺度上求得同一之位置，其途徑有二，一爲用兩個分立之比率，一爲僅一複比率。依此原則繪成之圖式，必能滿足兩種必需之條件；一則相等之縱距離，不論所用爲何一部尺度，均須代表同一之比率，二則不論點數若干，均可記錄於圖上，而不致發生矛盾。本章本節之末，附有修正至小數點三位止自一至一千之對數表，此表對於上述之用途，已足應付裕如。

{對數圖之應用舉例}　試觀上列第十九圖，可見英國之進口貨值，自一八一一年，至一八三六年，貨值已變爲兩倍，至一八五三年，復變爲一八三九年之兩倍，至一八六六年又變爲一八五五年之兩倍，而在一八九九年之進口貨值，則較之一八八六年已增

加百分之四十。由此圖上，同時可加注意者，尚有兩點，一則在一八五〇及一八八〇年，英國進口貨值超出出口貨值之數，恰爲出口貨值之百分之四十，二則一八九九年之進口貨值，當一八六〇年出口貨值之三倍。

假如吾人目力果已經過精密之訓練，能以了解諸如此類之圖式，又假如吾人深知此一圖式乃爲一比率圖而非數量圖，而將此事實深印心中，則此圖必完全適合圖示法之宗旨；換言之，卽使吾人對於繁複事件，立可產生眞實之印象。反之，設幷此眞實印象而不可得，此係由於不能使心理成正當狀態，則只能採用實數尺度之圖式，然吾人不可不知，此種僅用實數尺度之圖式，每予吾人以背謬之比率印象也。(註一二)

速度及加速度　尚有一點，吾人務須注意者，卽在此類圖式中，不須再畫基線，否則必予人以一錯誤之印象。此外，尤須注意者，在相等之縱距離，代表圖上任何部分彼此相互之相等比率，而非代表在實數尺度上之相等增加量時，相等之斜度(degree of slope)實卽代表相等之增加率（相等加速度），而非代表在實數尺度上相等時間之相等增加量（相等速度）。在用對數尺度時，一上升之線，如與橫線成凸形，乃表示增加率之擴展，如一八三〇至一八五三年之進口貨值（設此曲線已修勻過）。反之，如一線與橫線成凹形，卽表示增加率之遲滯，如一八五四至一八七

三年之進口貨值是。但若在實數尺度圖上，則在一八三〇至一八五三年，及一八五四至一八七三年兩期中，曲線幾全呈凸形，此表示實在增加量無時不在增加也。

對數尺度對於指數應用之有利　如果篇幅許可，頗可多列數圖，兼用兩種尺度；蓋在極多之數列中，用此兩種方法後，顯示出極大之差異，而惟此差異，乃可爲吾人之教訓。今有一種情形，可以明白指示，即對數尺度所以須特別重視者，即在原始數字所表示者爲比率而非實在數字之時。例如孫巴克(Sauerbeck)氏有名之圖式，乃用實數尺度繪成，該圖之作用，乃在表示彼之物價指數，在此圖式中，所列之數字，乃爲某若干年中之物價百分數。玆設三年之指數，爲一〇〇，八〇，六〇，如用實數尺度，則逐年之減少量，必將以相等之距離表示之，因而似有相等之情勢。然金價之變動，在兩時期絕無完全相等之理。第一期，由一〇〇落至八〇，乃降落百分之二十；在前年價值一金鎊之貨物，去年乃以十六先令購得之。第二期，由八〇落至六〇，降落達百分之二十五；在去年價值一金鎊之貨物，今年竟以十五先令購得之。故就對於物價指數之應用而論，比率最爲重要，作圖所應表示者，亦唯比率一端也。

用對數尺度作比較　對數尺度對於數列之比較，有其特別之用途，專論對數尺度之節目中，所討論之方法，可以立即採用

之。在比較性質不同之數量，以擇定單位為最困難，但此困難，唯在以比率相比較時，乃可消滅；故從此對於百分數方法，不致再感煩難矣。夫在調查因果關係之時，在比率中所發見之密切關聯，遠比在實在數量中所見者為多。蓋一組現象，與另一組現象，如無關聯則已，如有關聯，則二者之關係，大半以比例關係（例如，某一現象可量性質每增加百分之十，另一現象之可量性質，則增加百分之八）時為多，而為絕對數量之關係（例如，一種物價，不論原來位置如何，凡每增加二先令，則買主必減少一百人）時則較少。今用對數尺度，設兩曲線如有類似狀態，則其意義卽足表示兩曲線，以比例的變動相適應，但如用實數尺度，則兩曲線之類似狀態，不過表示絕對的變動相應和而已。

不特此也，在此新方法之下，如欲令兩平均數相等，亦不若前此之煩難。蓋一經取用兩組數列之對數，此兩數列在對數尺度上之地位，高度幾何，並不重要；高度之變換，不過意卽以一常數，乘所有各項(item) 而已，並未變換各項之形態，或變動之比例也。用此方法，其程序可列之如下：（一）在對數尺度上，將代表兩組數列之曲線畫出；（二）然後將下面之一曲線，縱直向上移動，使接近上面之曲線，使二曲線相疊至二曲線可能之相應狀態，最為接近為止；（三）卽在此地位，將此下一曲線繪成，於是兩組數列，可以從事比較矣。

變動方程式　玆爲明瞭此一方法起見，特以英國職工組合有業人數之百分數，與結婚率比較爲例，列如第三十八、三十九兩表，及第二十圖。

結婚率與有業人數

每千人中結婚率					有業人數所佔之百分數				
年度	最高點	最低點	差額	對最高額之百分數	年度	最高點	最低點	差額	對最高額之百分數
一八六九	…	15.9	1.7	10	一八六八	…	91.5	7.4	7.5
一八七三	17.6	…	3.2	18	一八七二	98.9	…	11.4	11.5
一八七九	…	14.4	1.1	7	一八七九	…	87.5	10.6	10.8
一八八二至八三	15.5	…	1.3	8	一八八二	98.1	…	7.6	7.8
一八八六	…	14.2	1.4	9	一八八六	…	90.5	7.4	7.6
一八九一	15.6	…	.9	6	一八八九至九〇	97.9	…		
一八九三	…	14.7			一八九三	…	92.5	5.4	5.5
				9.7					8.4

有業人數在總人數中所佔之平均百分數在一八六五至一八九三年，爲百分之九十五·一；九五·一之百分之八·四，即爲八二·四之百分之九·七。

（第三十八表）

下列圖甲，數字用實數尺度表示；圖乙，二十九年間之各平均數，均令其完全相等，數字則用對數尺度表示之。此時可依照本章第十三節所論之構圖法辦理，惟方法不妨別加改良，如第三十八表，列有各時期中之最高及最低點，並將由最高點降爲最低點時之

年度	結婚率	對數	有業人數百分數	減去12.7	對數
一八六五	17.5	1.243	98.0	85.3	1.931
一八六六	17.5	1.243	96.9	84.1	1.925
一八六七	16.5	1.217	92.7	80.0	1.903
一八六八	16.1	1.207	91.5	78.8	1.896
一八六九	15.9	1.201	92.6	79.9	1.902
一八七〇	16.1	1.207	95.7	83.0	1.919
一八七一	16.7	1.223	98.2	85.5	1.932
一八七二	17.4	1.240	98.9	86.2	1.935
一八七三	17.6	1.245	98.7	86.0	1.934
一八七四	17.0	1.230	98.2	85.5	1.932
一八七五	16.7	1.223	97.5	84.8	1.928
一八七六	16.5	1.217	96.4	83.7	1.923
一八七七	15.7	1.196	95.6	82.9	1.919
一八七八	15.2	1.182	93.7	81.0	1.908
一八七九	14.4	1.158	87.5	74.8	1·874
一八八〇	14.9	1.173	94.1	81.4	1.911
一八八一	15.1	1.179	96.5	83.8	1.923
一八八二	15.5	1·190	98.1	85.4	1.931
一八八三	15.5	1.190	97.8	85.1	1.930
一八八四	15.1	1.179	92.6	79.9	1.902
一八八五	14.5	1.161	91.0	78.3*	1.894
一八八六	14.2	1.152	90.45	77.7	1.890
一八八七	14.4	1.158	92.6	79.9	1.902
一八八八	14.4	1.158	95.2	82.5	1.916
一八八九	15.0	1.176	97.9	85.2	1.930
一八九〇	15.5	1.190	97.9	85.2	1.930
一八九一	15.6	1.193	96.5	83.8	1.923
一八九二	15.4	1.187	93.7	81.0	1.908
一八九三	14.7	1.167	92.5	79.8	1.902
		平均數 1.196			平均數 1·916

（第三十九表）

變動之平均數(表上列有對最高額之百分數,意卽指此)算出。據查在有調查表可稽之職工組合中,有業人數之變動,爲百分之八·四,恰與結婚率百分之九·七之變動相當。(註一三) 如欲求更密切

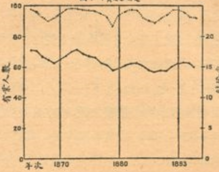
一八六五至一八九三年之比較

圖甲 用實數尺度

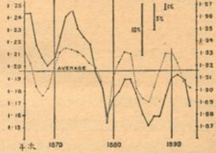
結婚率與有業人數

一八六五—一九三年之比較

圖甲用實數尺度

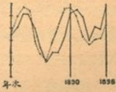


圖乙用對數尺度



圖丙一八八〇—一八九六年之比較

尺度與圖乙同



———— 結婚率　　- - - - - - 有業人數

（第二十圖）

之相應，可假定有業人數之一部，並不致影響結婚率，並求出在此總數之百分之八·四，成爲餘額之百分之九·七以前，究應扣除幾何；在擇定之期間，職工組合會員有業人數之平均百分數，爲九五·一，此九五·一之百分之八·四，爲七·九九，而此七·九九卽爲八二·四之百分之九·七。例如，九五·一與八二·四之差爲一二·七，此一二·七可視爲與本問題無關之數，故在未查出對數以前，卽從各數中將此一二·七扣除。用實數尺度時，此種程序可令兩組數列之平均數相等以代替之，並在一基線之下，另畫一基線，使與上一基線，距相當之距離，以便兩數列之同一縱距離，乃可代表平均之變動；此一程序純與前在本章第三節末段所述者完全相同。如以代數表示之，可得下列方程式：

$$\log(y-c)-\log x=k,\ k\text{爲一常數},$$

在此式中，c 及 k 爲常數，此二常數，如何擇定，完全視能否使配合最爲密切爲衡，至 x 及 y，乃卽欲作比較之二數量也。

在上列第二十圖甲，數字用實數尺度表示之，圖乙則用對數尺度表示之，並已令兩組變動平均百分數相等矣；圖丙，自一八八〇至一八九六年，期間較短，方法恰與圖乙所用者相同。至實在數字及其對數，則列於上列第三十九表。

費許 (Irving Fisher) 教授，於一九一七年六月，在美國統計學會之季刊中，曾發表一文，論述對數曲線，極稱對數曲線之妙用。玆特列恰足供吾人應用之三位小數對數表於下：

對數表

數字	對數	數字	對數	數字	對數	數字	對數	數字	對數	數字	對數	數字	對數
1	0	34	1.531	67	1.826	101	2.004	134	2.127	167	2.223	201	2.303
2	.301	35	1.544	68	1.833	102	2.009	135	2.130	168	2.225	202	2.305
3	.477	36	1.556	69	1.839	103	2.013	136	2.134	169	2.228	203	2.307
4	.602	37	1.568	70	1.845	104	2.017	137	2.137	170	2.230	204	2.310
5	.699	38	1.580	71	1.851	105	2.021	138	2.140	171	2.233	205	2.312
6	.778	39	1.591	72	1.857	106	2.025	139	2.143	172	2.236	206	2.314
7	.845	40	1.602	73	1.863	107	2.029	140	2.146	173	2.238	207	2.316
8	.903	41	1.613	74	1.869	108	2.033	141	2.149	174	2.241	208	2.318
9	.954	42	1.623	75	1.875	109	2.037	142	2.152	175	2.243	209	2.320
10	1.	43	1.633	76	1.881	110	2.041	143	2.155	176	2.246	210	2.322
11	1.041	44	1.643	77	1.886	111	2.045	144	2.158	177	2.248	211	2.324
12	1.079	45	1.653	78	1.892	112	2.049	145	2.161	178	2.250	212	2.326
13	1.114	46	1.663	79	1.898	113	2.053	146	2.164	179	2.253	213	2.328
14	1.146	47	1.672	80	1.903	114	2.057	147	2.167	180	2.255	214	2.330
15	1.176	48	1.681	81	1.908	115	2.061	148	2.170	181	2.258	215	2.332
16	1.204	49	1.690	82	1.914	116	2.064	149	2.173	182	2.260	216	2.334
17	1.230	50	1.699	83	1.919	117	2.068	150	2.176	183	2.262	217	2.336
18	1.255	51	1.708	84	1.924	118	2.072	151	2.179	184	2.265	218	2.338
19	1.279	52	1.716	85	1.929	119	2.076	152	2.182	185	2.267	219	2.340
20	1.301	53	1.724	86	1.934	120	2.079	153	2.185	186	2.270	220	2.342
21	1.322	54	1.732	87	1.940	121	2.083	154	2.188	187	2.272	221	2.344
22	1.342	55	1.740	88	1.944	122	2.086	155	2.190	188	2.274	222	2.346
23	1.362	56	1.748	89	1.949	123	2.090	156	2.193	189	2.276	223	2.348
24	1.380	57	1.756	90	1.954	124	2.093	157	2.196	190	2.279	224	2.350
25	1.398	58	1.763	91	1.959	125	2.097	158	2.199	191	2.281	225	2.352
26	1.415	59	1.771	92	1.964	126	2.100	159	2.201	192	2.283	226	2.354
27	1.431	60	1.778	93	1.968	127	2.104	160	2.204	193	2.286	227	2.356
28	1.447	61	1.785	94	1.973	128	2.107	161	2.207	194	2.288	228	2.358
29	1.462	62	1.792	95	1.978	129	2.111	162	2.210	195	2.290	229	2.360
30	1.477	63	1.799	96	1.982	130	2.114	163	2.212	196	2.292	230	2.362
31	1.491	64	1.806	97	1.987	131	2.117	164	2.215	197	9.294	231	2.364
32	1.505	65	1.813	98	1.991	132	2.121	165	2.217	198	2.297	232	2.365
33	1.519	66	1.820	99	1.996	133	2.124	166	2.220	199	2.299	233	2.367
				100	2.000					200	2.301		

數字	對數	數字	對數	數字	對數	數字	對數	數字	對數	數字	對數
234	2.369	267	2.427	301	2.479	335	2.525	401	2.603	467	2.669
235	2.371	268	2.428	302	2.480	337	2.528	403	2.605	469	2.671
236	2.373	269	2.430	303	2.481	339	2.530	405	2.607	471	2.673
237	2.375	270	2.431	304	2.483	341	2.533	407	2.610	473	2.675
238	2.377	271	2.433	305	2.484	343	2.535	409	2.612	475	2.677
239	2.378	272	2.435	306	2.486	345	2.538	411	2.614	477	2.679
240	2.380	273	2.436	307	2.487	347	2.540	413	2.616	479	2.680
241	2.382	274	2.438	308	2.489	349	2.543	415	2.618	481	2.682
242	2.384	275	2.439	309	2.490	351	2.545	417	2.620	483	2.684
243	2.386	276	2.441	310	2.491	353	2.548	419	2.622	485	2.686
244	2.387	277	2.442	311	2.493	355	2.550	421	2.624	487	2.688
245	2.389	278	2.444	312	2.494	357	2.553	423	2.626	489	2.689
246	2.391	279	2.446	313	2.495	359	2.555	425	2.628	491	2.691
247	2.393	280	2.447	314	2.497	361	2.558	427	2.630	493	2.693
248	2.394	281	2.449	315	2.498	363	2.560	429	2.632	495	2.695
249	2.396	282	2.450	316	2.500	365	2.562	431	2.634	497	2.696
250	2.398	283	2.452	317	2.501	367	2.565	433	2.636	499	2.698
251	2.400	284	2.453	318	2.502	369	2.567	435	2.638	501	2.700
252	2.401	285	2.455	319	2.504	371	2.569	437	2.640	503	2.702
253	2.403	286	2.456	320	2.505	373	2.572	439	2.642	505	2.703
254	2.405	287	2.458	321	2.507	375	2.574	441	2.644	507	2.705
255	2.407	288	2.459	322	2.508	377	2.576	443	2.646	509	2.707
256	2.408	289	2.461	323	2.509	379	2.579	445	2.648	511	2.708
257	2.410	290	2.462	324	2.511	381	2.581	447	2.650	513	2.710
258	2.412	291	2.464	325	2.512	383	2.583	449	2.652	515	2.712
259	2.413	292	2.465	326	2.513	385	2.585	451	2.654	517	2.713
260	2.415	293	2.467	327	2.515	387	2.588	453	2.656	519	2.715
261	2.417	294	2.468	328	2.516	389	2.590	455	2.658	521	2.717
262	2.418	295	2.470	329	2.517	391	2.592	457	2.660	523	2.719
263	2.420	296	2.471	330	2.519	393	2.594	459	2.662	525	2.720
264	2.422	297	2.473	331	2.520	395	2.597	461	2.664	527	2.722
265	2.423	298	2.474	332	2.521	397	2.599	463	2.666	529	2.723
266	2.425	299	2.476	333	2.522	399	2.601	465	2.667	531	2.725
		300	2.477							533	2.727

數字	對數	數字	對數	數字	對數	數字	對數	數字	對數	數字	對數
535	2.728	601	2.779	667	2.824	735	2.866	801	2.904	900	2.954
537	2.730	603	2.282	669	2.825	737	2.867	804	2.905	903	2.956
539	2.732	605	2.783	671	2.827	739	2.869	807	2.907	906	2.957
541	2.733	607	2.785	673	2.828	741	2.870	810	2.908	909	2.959
543	2.735	609	2.786	675	2.829	743	2.871	813	2.910	912	2.960
545	2.736	611	2.787	677	2.831	745	2.872	816	2.912	915	2.961
547	2.738	613	2.789	679	2.832	747	2.873	819	2.913	918	2.963
549	2.740	615	2.790	681	2.833	749	2.874	822	2.915	921	2.964
551	2.741	617	2.792	683	2.834	751	2.876	825	2.916	924	2.966
553	2.743	619	2.793	685	2.836	753	2.877	828	2.918	927	2.967
555	2.744	621	2.794	687	2.837	755	2.878	831	2.920	930	2.968
557	2.746	623	2.796	689	2.838	757	2.879	834	2.921	933	2.970
559	2.747	625	2.797	691	2.839	759	2.880	837	2.923	936	2.971
561	2.749	627	2.799	693	2.841	761	2.881	840	2.924	939	2.973
563	2.751	629	2.800	695	2.842	763	2.883	843	2.926	942	2.974
565	2.752	631	2.801	697	2.843	765	2.884	846	2.927	945	2.975
567	2.754	633	2.803	699	2.844	767	2.885	849	2.929	948	2.977
569	2.755	635	2.804	701	2.846	769	2.886	852	2.930	951	2.978
571	2.757	637	2.806	703	2.847	771	2.887	855	2.932	954	2.980
573	2.758	639	2.807	705	2.848	773	2.888	858	2.933	957	2.981
575	2.760	641	2.808	707	2.849	775	2.889	861	2.935	960	2.982
577	2.761	643	2.810	709	2.851	777	2.890	864	2.937	963	2.984
579	2.763	645	2.811	711	2.852	779	2.892	867	2.938	966	2.985
581	2.764	647	2.812	713	2.853	781	2.893	870	2.940	969	2.986
583	2.766	649	2.814	715	2.854	783	2.894	873	2.941	972	2.988
585	2.767	651	2.815	717	2.856	785	2.895	876	2.942	975	2.989
587	2.769	653	2.816	719	2.857	787	2.896	879	2.944	978	2.990
589	2.770	655	2.818	721	2.858	789	2.897	882	2.945	981	2.992
591	2.772	657	2.819	723	2.859	791	2.898	885	2.947	984	2.993
593	2.773	659	2.820	725	2.860	793	2.899	888	2.948	987	2.994
595	2.775	661	2.821	727	2.862	795	2.900	891	2.950	990	2.996
597	2.776	663	2.823	729	2.863	797	2.901	894	2.951	993	2.997
599	2.777	665	2.823	731	2.864	799	2.903	897	2.953	996	2.998
				733	2.865					1,000	3.000

（第四十表）

（註一）　見本章第三節及第五節

（註二）　表中有符號表示數不包括出口船隻價值

（註三）　在各種平均數曲線中，表示平均數之符號，位在表示所平均之三，五，或十五年數字之數符號之重心。

（註四）　表中有＊號者表示該數並未將船隻出口貨值包括在內。

（註五）　因英帝國及地方租稅紀載變更，使此各年度之圖式，不能繼續畫出。

（註六）　請參閱本書原著者之『十九世紀之工資』(Wages in the Nineteenth century)一書第九十頁附圖。

（註七）　此外尚有一種數列，其數字經數年始一變，在此數年中，數字完全相等，經過數年之後，忽一躍而至另一水準，既至另一水準之後，又保持不動者許久。此種數列之例證，為標準計時工資率 (Standard time-rates)即是。

（註八）　見稚翁士氏著對於通貨及金融之調查(Investigation in Currency and Finance)。

（註九）　見稚翁士氏著對於通貨及金融之調查。

（註一〇）　請參閱英國一八九五年勞工統計簡報第七十三頁，該處對於類似上文所論各種數字之處置方法，列舉甚多。

（註一一）　關於曲線修勻方法及週期曲線之研究，請參閱一八八四年布安廷教授(Poynting)及一九一九年摩爾教授 (Moore) 同在統計學報所發表之文。

（註一二）　馬夏爾(Marshall)教授)在彼『統計圖示法』(On the Graphic Method of Statistics) 一文中，建議糾正此一錯誤印象之簡單方法。該文刊於英國皇家統計學會學報五十週年紀念特刊，第二百五十七頁。

（註一三）　在第三十九表第二，四兩欄之數字，乃自務德 (G. H. Wood)先生在一九〇〇年英國統計學報發表之『一八六〇年關於工人階級發展之幾種統計』一文，並有一極有價值之對數表，可為本節若干點之例證。

第八章　確度

第一節　引論

度量之性質　無論在物體上，或在經濟上，均無完全準確度量之存在，正與無完全直線或完全流體之存在同。經濟度量之性質，最好可由物體度量性質考察而解明之。權衡物質而不致有一公分之差，其事甚易。若有精確之天平，吾人即可因器械進步之故，在權衡上不致有一公毫，一公絲，乃至一公絲之十分之一之差。但欲獲得超過此等程限之確度，則無此天平矣。於角度之度量亦然。肉眼能辨別對角一度之三十分之一之物體。藉六分儀之助，則度量可精確至弧之十五秒。格林尼治(Greenwich) 天文學家所作觀察，可精確至一秒之百分之一，逾此則不復可得。

在此等情形下，度量結果謂已精確至不致有一公絲之差，或多高程度。同樣，於錢財之計算上，吾人可以一鎊不差之錢幣估計數稱之。

物體與統計度量　太陽視差之度量，與某種統計的估計之工作，頗有相似之處。此種度量，係決定太陽與地球之距離者。十八世紀天文學家，估計此距離為十秒，即等於九千六百萬英里。

以觀察方法及工具改良之故，觀察者遂開始公認秒之整數爲八，但對於第一位小數之計算則異其詞。自一八大五年以來，計算上不以 8 爲此數(8.8″)之最近似值者爲數極少。而較爲晚近之觀察，則咸認此種視差爲八秒七六至八秒七八之間。故吾人可認爲此一距離，吾人所能知者，現精確至四百分之一。討論及此，吾人須加注意者，第一，早日之觀察須時加改正；第二，歷時愈久，愈能得出較佳之一致意見；第三，時至今日，絕對一致之意見，及絕對不移之確度，尙未獲得。物體度量如此，於統計度量亦然。例如代表平均壽命曲線之逐漸穩定，物價跌落之度量，與工資統計之發展是也。

精確之可能度 復次，在物體度量中，有時固可達到極高之確度，例如一立方尺水之重量，吾人可確知其一百萬分之一而無疑，但在其他情形下，吾人如能量至十分之一卽已引爲滿意，例如離吾人最近之恆星距離，據測量所得，大約卽爲三百四十至三百七十億英里之間也。故在統計上，如知一八八五年英國之資本總額爲七十五億至一百億金鎊之間，或知一八八六年全時工作工人之平均每週工資，爲二十一至二十七先令之間，於願足矣。此種言論之缺點卽在，往往一估計作成之後，雖知其並不確實，但吾人不能估計差誤之限度。於此吾人殊不若『近代旅行家』之鑿確，彼

『……絲毫不差的，

知道天氣，

知道經度和緯度。』

而吾人則不敢具言『吾人之估計數，爲二十四先令五便士；此一估計數，大概不致有三便士之相差，但差誤而達六便士乃不可能』；惟在物體之度量中，吾人往往可精確至所用工具之一最小分度也。

一般所需要之確度　就另一方面論之，吾人雖不能獲得絲毫之確度，但在許多情形下，吾人所估計之數字，可達到一種確度，已足供實際應用之所需。在普通用途上，僅須有合乎慣例之確度即足。試舉雜例數則，例如一田產之面積，係以英畝，路得(rood 面積度量名，等於一千二百一十平方碼——譯者註)，及波爾(pole，面積度量名，等於三〇七又四分之一平方碼——譯者)計算之，非精確至一方碼不差也。股票之市場價格，變動至少以十六分之一爲起碼。吾人之生辰，記其日而不記其時。鐵路時刻表，並不註明秒數。海洋船隻，規定在某點鐘起碇，乃不言某點之某分鐘。身長之度量，求其精確到一吋之十分之一而已。百碼競走以十分之一秒而計時。物體度量如此，統計度量又何獨不然，吾人所得之答數，鮮有求精確至千分之一者，甚至精確至百分之一者，亦罕見之。一工作星期之千分之一，不及三分鐘；一週

工資之百分之一爲六便士。倫敦一城之人口，一百以內者，吾人鮮注意之，英國財政部之支出，不及一千鎊者，吾人殊不注意之，平均壽長不滿一日者，吾人亦不注意及之。總之，惟在此種限度以內，求達到實用之確度，乃往往可能。

差誤之定義 —— 爲實施度量計，吾人可採用下述定義：——一估計數中之相對差誤者，即估計數與眞值相差對估計數之比率也。當眞值超過估計數時，則其差誤即爲正差誤 (positive error)。

例如，若農村勞動者之平均每週工資，實在爲十四先令，而吾人之估計數，僅爲十三先令，則吾人差誤，即爲 $\frac{14-13}{13}=\frac{1}{13}$，或百分之七・七。設吾人之估計數，爲十五先令，則差誤乃爲 $\frac{14-15}{15}=-\frac{1}{15}$，或百分之—6.6。

用代數記號述之，設某一數量之度量爲 u，其眞值爲 u^1，則 $\frac{u^1-u}{u}$ 即爲估計數中之差誤。$\frac{u^1-u}{u}$ 吾人可稱之爲 e，故 $e=\frac{u^1-u}{u}$ 而 $u^1=u(1+e)$（註一）。所謂 e，即爲相對差誤，至 ue 則係絕對差誤。

差誤之說明　就事理言之，當吾人計算差誤之時，差誤之量無從得知；吾人所能知者，最多不過差誤大概及或有之限度耳。例如，吾人可估計某一年內之失業百分數爲四・五，吾人由所有

之報告(由工資單據之研究，或救濟機關之報告得來)觀之，吾人認爲此一差誤，乃在失業百分數之二分之一以內。於是吾人應書爲 4.5±.5，意即估計數中之差誤(定義已如上述)，大概不致超過$\frac{.5}{4.5}=\frac{1}{9}$，或百分之十一，而相當之絕對差誤，乃爲二分之一。在此種場合，吾人亦能指明確定之限度。失業百分數必須在零與一百之間。設吾人實際上能列舉百分之一之勞工階級爲失業工人，百分之九十二爲有業工人，則可知所求之數，即在百分之一，與百分之八之間，而吾人估計四・五中之差誤最大限，即爲$\frac{3.5}{4.5}=\frac{7}{9}$，或百分之七十八。此種差誤雖大，然較之原來說明『失業百分數爲四・五，差誤巨細則非所知』，猶爲精確也。吾人如再加研究，或可使各差誤之限度愈益接近，然後斷定所求之百分數實際上確爲三・五與四・五之間。於是應謂失業數係勞工階級之〇・〇四…，此一估計數，精確至所舉之最後一位數字。此一說明，與下一說明，係屬同一性質：『某實體之重量爲十五磅三盎斯——正確至一盎斯爲止』。

雖然，在一方面，甚爲明顯者，吾人對於差誤往往不能求得以小之一定限度，在另一方面，吾人卻常知一總數中有若干數字幾乎一定無誤，而其他數字則幾乎一定有誤。例如，由英國人事登記總監之報告，吾人可知一八九五年英國人口爲三九・一二四，四九六，此一估計數字乃依一八九一年之戶口普查作成，而

自一八九一年至一八九五年之增加數，乃係根據一八八一年起之增加數計算而得。故其最後兩位或三位數字，一定僅為一種猜測；而前二位或三位數字則正確無誤。因此之故，此一說明應為：人口三千九百一十萬，或三九，一二四，〇〇〇土五，〇〇〇。此後一數，究為何數，應視吾人對於人口之變動增加率之分析而決定。如此說法，較之前項說明，實際上較為精確。

細數之刪略　在許多種估計中，習常須將數字舉至極端細微之數。此在官方發表之文告上，可謂正則；因有司之責任，即係收集答案而列為表格，示明此種答案之如何得來，及由何處得來；而此種報告之確度如何，則為經濟學家或統計學家之工作。但在總綱之敍述與記載上，以及在科學的估計上，則非特不需要列舉最後數字（一則因其並非準確，二則因其對於議論上不關重要，或對於讀者亦無意義可言），且其本身又純屬不正確。避免不確實，最易之法，即將總數以千為單位而說明之（例如地球直徑為八千英里）；反之，如以某種理由，而需要較確切之度量（如當吾人欲比較赤道直徑與經過兩極之較短直徑時），則依科學方法，必須將數字舉至業已計算明確之處，並指陳其精確之程度。

第二節　計算相對差誤之效果之定則

吾人現請舉出若干定則，以說明一繁複之估計數之差誤，與

作成此估計數各成分中差誤之關係。

〔總和中之差誤〕 一、當每一部分數字之差誤，乘以該部分對總和之比率時，則某一總估計數中之差誤，即等於各部分差誤之總和。

設吾人估計n數量爲$u_1, u_2 \cdots\cdots u_n$，而其總和爲$u$，則$u=u_1+u_2+\cdots\cdots u_n$，而各數量之差誤，爲$e_1, e_2 \cdots\cdots e_n$，總和中之差誤爲$e$：於是此總和之眞值，爲$u(1+e)$，而各部分之眞值，爲$u_1(1+e_1)$，$u_2(1+e_2)\cdots\cdots$，故

$$u(1+e)=u_1(1+e_1)+u_2(1+e_2)++$$

但　$$u=u_1 \qquad +u_2 \qquad ++$$

二式相減，則$$ue=u_1e_1 \qquad +u_2e_2 \qquad ++$$

且　$$e=e_1\times\frac{u_1}{u} \qquad +e_2\frac{u_2}{u} \qquad ++$$

各部分之中，如有若干可以減去時，則此公式易於施用。

試取一算術實例以說明之。假如勞工階級之平均食物費在一九一四年爲二十五先令，衣着費用爲五先令六便士，房租費用爲六先令六便士，而眞實平均數，食物費爲二十七先令，衣着費爲四先令六便士，房租爲六先令；則差誤爲$-\frac{2}{25}$，$+\frac{2}{11}$，$+\frac{1}{13}$，於是三數總和中之差誤爲

$$-\left(\frac{2}{25}\right)\times\left(\frac{25}{37}\right)+\left(\frac{2}{11}\right)\times\left(\frac{5.5}{37}\right)+\left(\frac{1}{13}\right)\times\left(\frac{6.5}{37}\right)=-.054+.027$$

$+.0133=-.0135$或$-1\frac{1}{3}\%$。

在一重要事例，當吾人能以頗高之確度估計某一總和之大部分，而其一小部分爲吾人所不知時，即可應用此一定理。例如，吾人可自若干職工組合中搜集若干報告，得悉失業者有三萬三千六百五十人，則雖有較小組合未作報告，吾人亦有理由相信此中差誤，不致超過百分之一。吾人可爲此較小之職工組合，作一估計，姑謂其會員中失業者有一千人，並且假設此中差誤甚大，姑謂有三分之二或百分之六十七之多；於是此一總數中之差誤，乃小於

$$\frac{33650}{34650}之\frac{1}{100}+\frac{1000}{34650}之\frac{2}{3}=.029$$

或小於百分之三。此一差誤，以大組合報告之差誤，與小組合報告之差誤相比，則與前者相近遠較後者爲大。在前言，吾人謂『小於』者，以吾人假定已爲該一小部分之差誤，設置一最高限度也。

平均數中之差誤　二、當各個估計數之差誤，乘以各該項估計數對所有估計數總和之比率時，則各項估計數之算術平均數中之差誤，即爲此等估計數之諸差誤之總和。

因設以 m_1, m_2, ……m_n 爲某某等數量之估計數，而此等數量之眞值，則爲 $m_1(1+e_1)$, $m_2(1+e_2)$, ……則各估計之算術平均數爲 $\frac{m_1+m_2+\cdots\cdots m_n}{n}$，而各眞值之算術平均數，爲 $\frac{m_1(1+e_1)+m_2(1+e_2)+\cdots\cdots+m_n(1+e_n)}{n}$，於是算術平均數中

之差誤，乃爲

$$\frac{\dfrac{m_1(1+e_1)+m_2(1+e_2)++}{n}-\dfrac{m_1+m_2++}{n}}{\dfrac{m_1+m_2++}{n}}=\frac{e_1m_1+e_2m_2++}{m_1+m_2++}$$

$$=e_1\times\frac{m_1}{S.m}+e_2\times\frac{m_2}{S.m}+\cdots\cdots$$

此處之S，表示 m 各數之總和。

吾人甚易見到，一則個別之差誤，對於得數不能發生極大影響，二則假如各別差誤，若非甚不相等，並若非全爲正數，或全爲負數，則算術平均數中之差誤，必幾可與各別差誤中之一數同其大小；三則如依一般情形所實現，假如各別差誤中，有若干爲正數，有若干爲負數（此點吾人卽將討論及之），則差誤必大形削減。

〔加權平均數中之差誤〕 三、一加權平均數中之差誤，爲以下兩種差誤之總和：（一）爲由於諸數量中諸差誤之差誤，此種差誤與一不加權平均數中之差誤相同；（二）爲由於諸權數中乘差誤之差誤，當原來數量幾全相等時，此種差誤必變爲甚小。

令 W_1，$W_2\cdots\cdots W_n$ 爲權數，加於 n 個估計數 M_1，$M_2\cdots\cdots M_n$ 上；設權數之眞値，爲 $W_1(1+\epsilon_1)$，$W_2(1+\epsilon_2)\cdots\cdots$ 1數量之眞値爲 $M_1(1+e_1)$，$M_2(1+e_2)\cdots\cdots$。

以 $M_w=\frac{SWM}{SW}$，於是則 M_w 卽爲估計得來之加權平均數，今令 $M_w(1+E)$ 爲此加權平均數之眞値。

然則 $M_w.E=\frac{SW(1+\epsilon)M(1+\epsilon)}{SW(1+\epsilon)}-\frac{SWM}{SW}$

$=[SW.S\{W_tM_t(1+e_t)(1+e_t)\}-SWM.S\{W_t(1+\epsilon_t)\}]$

$\div SW.SW(1+\epsilon)$,

此處之附數 t,表示任一選來之數量,等等。

於是

$$E.SWM.SW(1+\epsilon)=SW.SW_tM_te_t+SW.SW_tM_t(\epsilon_t+e_t\epsilon_t)$$
$$-SWM.SW_t\epsilon_t。$$

現在假設 E, e_t, ϵ_t 甚小,等於.1;乘積之等於.01者,略去之。

$$E.SWM.SW=SW.SW_tM_te_t+S\{W_t(M_tSW-SWM)\epsilon_t\}$$

$$\therefore E=\frac{SW_tM_te_t}{SWM}+\frac{S\{W_t(M_t.SW-SWM)\epsilon_t}{SWM.SW}$$

如以 W_1M_1 代 m_1,……其他依此類推,則包含 e_t 之項,即與定則二之項相同,至 e_t 乃即一數量中之差誤。

ϵ_t 之係數,尙須進一步加以研究。

但因 $SWM=M_w.SW$, $M_tSW-SWM=SW(M_t-M_w)=m^1{}_tSW$,(此處之$m^1{}_t$,係一數量超出加權平均數之數)。

$$\therefore E=S\frac{W_tM_t}{SWM}.e_t+S\frac{W_tm^1{}_t}{SWM}\epsilon_t。$$

由此觀之,起於各數量諸差誤之差誤,包括M_1, M_2……等數量,而起於各權數諸差誤之差誤,則僅包括此等數量對其加權平均數之離中差。此等數量對其平均數之離散度,如與該平均數相

較爲小，則此等離中差各個亦甚小。復次，係數 $W_t m^1_t$ 之總和，等於 $SW_tM_t-M_wSW=0$。各權數中之差誤，如完全相等，則所得之平均數中差誤必爲零，此可演繹知之。又如正差誤一般並非與正離中差 (m^1_t) 並存，負差誤非與負離中差相存，且如巨大差誤一般非與大權數並存（反之亦然），則 $W_t m^1_t e_t$ 諸項之總和，漸趨於零。

故權數中之差誤，有一種效果，此種效果減小之原因，與使數量中差誤減小者相同。且此種效果，使各係數有互相消除之強烈傾向；惟若諸差誤，諸數量，及諸權數，以特殊形式相結合，則不致有此傾向矣。設數量甚多時，若欲在平均數中有甚大之差誤，則權數中必須有巨大之差誤不可。總之，事實上當權數一經合理估定，而諸數量並非甚不相等時，則數量中之差誤，必有一種影響，遠比權數中差誤之影響爲大，故權數中之差誤，吾人可間或忽略之。關於此一原則之數字實例，已見於前第五章第二節（加權平均數）內矣。

乘積中之差誤　四、一乘積中之差誤，約等於各因數中各差誤之總和，但正負號務須加以充分注意。

因如估計得來之各因數爲 $f_1, f_2, \cdots\cdots f_n$，而眞值爲 $f_1(1+e_1)$，$f_2(1+e_2)$，……，則乘積中之差誤，等於

$$\frac{f_1(1+e_1)f_2(1+e_2)\cdots\cdots f_1f_1\cdots\cdots}{f_1f_2\cdots\cdots}=(1+e_1).(1+e_2)\cdots\cdots-1$$

如吾人删略二個或二個以上之e之乘積，則等於$e_1+e_2+e_3++e_n$。

e 之各値之爲正或爲負，原各有均等之機會。如兩個 e 値之正負號各異，則有相互對銷之傾向。設各因數之所有差誤符號相同，則卽使諸因數之差誤，各個均爲甚小，而乘積中之差誤，亦可爲甚大。

舉例言之，設吾人估計結果，平均各賺二十五先令者有一百人，但實際上乃有一百零五人各賺二十六先令，則依公式之規定，估計之所賺總數中之差誤，應爲：$\frac{5}{100}+\frac{1}{25}=.09$。

如仍用此同一估計數，設其實人數爲一百零五，工作收入爲二十四先令，則乘積中之差誤，應爲$\frac{5}{100}-\frac{1}{25}=.01$。

比率中之差誤　五、一比率中之差誤，約等於其二項差誤之相差，但正負號務予以充分注意。

蓋若估計得來之二項爲 u_1u_2，而其眞值乃爲 $u_1(1+e_1)$ 及 $u_2(1+e_2)$，則此比率中之差誤，必爲 ——

$$\frac{\frac{u_1(1+e_1)}{u_2(1+e_2)}-\frac{u_1}{u_2}}{\frac{u_1}{u_2}}=\frac{1+e_1}{1+e_2}-1=\frac{e_1-e_2}{1+e_2}$$

$$=(e_1-e_1)(1-e_2+e_2^2-e_2^3+-)$$

吾人如將 e 有二次方之各項删略，則等於 e_1-e_2。

如二項中之差誤，均爲正或均爲負，則有相互抵消之傾向。若二差誤亦幾乎相等，則比率中差誤必變爲甚小。

在不同日估計得來類似數量之兩個平均數相比中之差誤，吾人可應用定則五以計算之。

仍依用定則二及定則三下之符號，以m_1，e_1，ϵ 指一日期所估計之數量，以 m^1，e^1，ϵ^1，指另一日期所估計之數量，則 m_1^1，m_2^1，……之簡單平均數，對m_1，m_2，……之簡單平均數之比率中之差誤，爲

$$\mathrm{S}\left\{e^1\left(\frac{m^1}{\mathrm{S}m^1}\right)\right\}-\mathrm{S}\left\{e\left(\frac{m}{\mathrm{S}m}\right)\right\}$$

$$=\left(e_1{}^1\cdot\frac{m_1{}^1}{\mathrm{S}m^1}-e_1\cdot\frac{m^1}{\mathrm{S}m}\right)+\left(e_2{}^1\cdot\frac{m_2{}^1}{\mathrm{S}m^1}-e_2\frac{m_2}{\mathrm{S}m}\right)++$$

設在二次觀察間之期內，各數量無大變遷，則$\frac{m^1}{\mathrm{S}m^1}$一分數與$\frac{m_1}{\mathrm{S}m}$相差無幾，餘類推。

此等相差數，與數量本身相比，吾人殊可將相差數删略不計，此爲吾人計算差誤之約略影響時所不可少之正當手續，惟如此則

兩簡單平均數比率之差誤$=\mathrm{S}\left\{\frac{m_1{}^1}{\mathrm{S}m^1}(e_1{}^1-e_1)\right\}$。

設兩估計數，乃在幾乎相同之環境下作成，因而招致差誤之機會亦相同，則$e_1{}^1$及e_1 多半非特具有同一符號，而且幾乎相等。

試以 d_1 代替$(e_1{}^1-e_1)$，以 d_2 代替$(e_2{}^1-e_2)$，……餘類推，

則

$$\text{差誤}=\mathrm{S}.\left\{d_1\cdot\left(\frac{m_1{}^1}{\mathrm{S}m^1}\right)\right\}$$

（此處 d 之各值，可爲甚小）。

兩簡單平均數相比比率之差誤，已討論如上，如更對於兩加

權平均數比率之差誤，亦加以相當分析，則因其過於複雜，此處不便予以檢討（註二）。但若遵用『權數之差誤，不若數量中差誤之重要』一原則，而於應用時酌加修改，則吾人不妨採用上述在求算對兩加權平均數比率中差誤之第一近似值時所舉之公式。茲將此一公式用文字述之如下文。

平均數相比之差誤 六、在不同期間所估計之兩類似數列之平均數之比率中之差誤，約等於此兩數列各相當項中差誤諸差數之總和，但每一相差數，務須各乘以其相當項之後項，對於後期所有各項總和之比率。

此一定則異常重要，故殊有舉一實例以解明之之價值，在此實例中將更介紹一新數量。

設在兩年中每一年吾人均可估計一總數之一部，而較另一部分之估計爲確實，如在定則一下所舉實例所云然，則吾人可採用下列公式：

	第一年		第二年	
估計數或估計權數	w;	差誤e;	w^1;	差誤e^1
平均收入估計數	m_1;	誤差e_1;	$m_1{}^1$;	差誤$e_1{}^1$
估計數，確度較低	rw;r之差誤，p;		r^1w^1;r^1之差誤，p^1	
收入估計數	m_2;	差誤e_2;	$m_2{}^1$;	差誤$e_2{}^1$

依假定，e_1及$e_1{}^1$小於e_2及$e_2{}^1$。

第一年平均數之差誤

$$\frac{\dfrac{w(1+\epsilon).m_1(1+e_1)+r(1+\rho).w(1+\epsilon).m_2(1+e_2)}{w(1+\epsilon)+r(1+\rho)w(1+\epsilon)}-\dfrac{wm_1+rwm_2}{w+rw}}{\dfrac{wm_1+rwm_2}{w+rw}}$$

$$=e_1\frac{m_1}{m_1+rm_2}+e_2\frac{rm_2}{m_1+rm_2}+\rho\frac{r}{1+r}\cdot\frac{m_2-m_1}{m_1+rm_2}$$

設吾人略去 e 及 ρ 之各乘積時。

由此觀之，與確度較低之部分有關之差誤，e_2 及 ρ，各乘以 r(r 為確度較低部之權數，對確度較高部分權數之比率)，ρ 亦乘以 m_2-m_1，m_2-m_1 在多數情況下，值均爲甚小，至於其餘之差誤，即爲 e_1，依假定亦爲甚小。

爲討論簡便計，吾人假設未知部分對全部之比率(並非估計時之差誤)不變，並設兩部分之平均收入估計數之比率，亦未變更，則相比中之差誤爲：

$$(e_1{}^1-e_1)\cdot\frac{m_1}{m_1+rm_2}+(e_2{}^1-e_2)\cdot\frac{rm_2}{m_1+rm_2}+(\rho^1-\rho)\frac{r}{1-r}\cdot\frac{m_2-m_1}{m_1+rm_2}。$$

例如，在估計蘇格蘭農村勞動者平均工資之變動時，吾人得有與下列類似之數字：

	一八六七年			一八九二年		
	已婚農夫					
估計數	1,000	平均收入	36鎊	1,200	平均收入	49鎊
假定眞正數	1,010	平均收入	35鎊	1,220	平均收入	48鎊
	農場傭工					
估計數	200	平均收入		240	平均收入	
		貨幣	21鎊		貨幣	27鎊5先令
		膳費估計值	23鎊		膳費估計值	24鎊
		合計	34鎊		合計	41鎊5先令
假定眞正數	200	收入總數	37鎊	240	收入總數	47鎊

由此所見 $w=1000$，$m_1=36$，$r=\frac{1}{5}$，$m_2=34$，$w^1=1200$，$m_1^1=49$，$r^1=\frac{1}{5}$，$m_2^1=41\frac{1}{4}$，$\epsilon=\frac{1}{100}$，$e_1=-\frac{1}{36}$，$\rho=\frac{9}{101}$，$e_2=\frac{3}{34}$，$\epsilon^1=\frac{1}{60}$，$e_1^1=-\frac{1}{49}$，$\rho^1=-\frac{1}{61}$，$e_2^1=\frac{23}{165}$。

以上二例吾人對於已婚農夫之收入估計過高，而對於農場傭工之收入估計則過低。茲假設（事實亦確如此）農場傭工之膳宿及其他賞賜之價值，估計難以精確；又此兩階級之比例數，亦不能確知。

代入上列公式，則可知在二年中二階級平均收入總數之估計數比率中之差誤，爲

+·0062，屬於農夫收入估計數之差誤。

+·0081，屬於農場傭工收入估計數之差誤。

−·0008，屬於二階級中人數比率估計數中之差誤。

此最末一差誤，卽屬於權數之差誤，其值甚小；第二差誤，乃因吾人對於膳宿所知不詳之故，現以傭工人數甚少，故此一差誤亦減至與第一差誤相去無幾。

職是之故，經用公式求得，整個差誤爲+·0135。試查實際數字，可知第二差誤對第一差誤之估計數比率；爲一·三三七六對一之比，而假定之眞正數比率，爲一·三五二九與一之比；換言之，差誤乃爲$\frac{.153}{1.3376}=+.011$ 也。

此兩種計算方法之差別，卽在刪略次要各項之不同。

所須注意者，二個數量相比之差誤，與吾人所或欲計算之差誤（卽百分率增加量中之差誤）不同。例如在上述之例中，估計之百分率增加量爲三三·八，眞正之百分率增加量爲三五·三，而百分率增加量中之相對差誤，則僅爲．〇四五。故在此種計算中如求確實，則依定則六之公式，所算出之差誤，非爲甚小不可也。

如就一工人家庭預算，而計算其衣着費之相對重要性，實有人所共知之困難，玆更舉一例以明之。

下列估計數，卽一九一八年英國生活費委員會報告中所採用之數字（總號八九八〇，第七，第十八及第二十三頁）。

有技能工人，平均每週費用

	一九一四年	一九一八年	比率
食物	27先令	49先令10便士	1·84
衣着	7先令	13先令 9便士	1·96
總計	34先令	63先令 7便士	1·864

玆以 $w=27$，$r=\frac{7}{27}$，$m_1=1.84$，$m_2=1.96$。

假設 r 應作爲 $\frac{1}{3}$，m_1 應作爲 1.90；而 m_2 應作爲 2.10。

則 $e_1=\frac{3}{92}=\cdot 0326$，$e_2=\frac{1}{14}=.0714$，而 $\rho=\frac{2}{7}=.286$。

依公式得差誤爲

$\pm .0256$，屬於兩期食物費相比之差誤。

+.0155,屬於兩期衣着費相比之差誤,

+.0030,屬於衣着費與食物費兩期相比之差誤。

至整個之相對差誤,則爲 .044。

各差誤之影響,與差誤之大小,成反比例。衣着費比率之巨大差誤,僅僅影響得數中之第二位小數而已。

雖然,若 m_2-m_1 較大,換言之,卽若衣着費之估計增加數,遠比食物費之估計增加數爲大,則此一差誤之效力,必亦依比例而增大。

討論至此,吾人況又提及相對差誤之整個問題,而此卽本書第二編第四章之機率原理所解明者也。

第三節 偏誤及非偏誤

偏誤及非偏誤 在平均或比較時,提及所有差誤,有兩類差誤,不可不加以區別,一類卽偏誤 (biassed error),一類卽非偏誤 (unbiassed error) 也。此中差別可設例以闡明之。設派遣多人,分往各地,調查各種工業狀況,以證明工資之果然爲高,工作條件之果甚無損於健康,以及其他等等,則彼輩多半將僅就經營最完善之工廠,而加以考察,並僅就技能較高工作有定之工人,而記錄其工資,於是所產生每一城市之平均數,無乃過高。反之,

如各人心中並無成見，僅事公正不偏之調查，則調查人員在某某城市所得之平均數，即屬過高，而在他數城市所得者，反乃過低，此一隨調查員之個人特性及環境情勢而定者也。然則在前一情節之下，差誤係屬偏誤，各差誤均在同一方向，均有使平均數增長之傾向，故此平均數之差誤，乃即等於各城市之平均差誤。在後一情節下，差誤乃為非偏誤，超過平均數或較平均數為低，二者各有均等之機會，是以所作估計數愈多，而結果之差誤亦愈微。茲以下列數解明之：

	事　實	有偏誤之估計數	有非偏誤之估計數
	先　令	先　令	先　令
甲地之平均工資	24	25	24
乙地之平均工資	23	25	25
丙地之平均工資	26	27	25
丁地之平均工資	27	28	28
戊地之平均工資	28	30	27
平均數	25.6	27	25.8
差　誤		5.2%	1%

沿一具有哩程碑之道路，度量腳踏車騎行之距離，吾人可知連續各哩程碑間之距離，並不準確，乃或有五十碼至百碼之相差。但超過一里或少於一哩之差誤，二者各幾有均等之機會，故騎行經過之距離愈長，差誤亦愈少，此點上文業已闡明之。此差誤即

非偏誤也。反之，若乘脚踏車者信任彼之迴輪計，則將不免於偏誤，蓋彼之迴輪計，未必準確貼合彼之車輪，車每行一哩，迴輪計輒指一千八百碼也。在此情形之下，偏誤(bias)可加以度量而以結果中減去之，至於非偏誤則任其自行抵消。總而言之，偏誤往往由於工具級度劃分錯誤，非偏誤則往往由於各別度量有錯也。

偏誤及非偏誤之相對重要性 在人口普查報告表中，有一事實，即許多婦女報告之年齡，較其出生報告書所載者爲小，惟有此事實，乃致引起人口平均年齡之一種偏誤。又有一事實，即人民往往將其年齡報爲最相近之整略數，而惟此一事實，乃致引起非偏誤，但大體上對於平均數並無甚影響。即在一九〇六年之工資調查中，亦未嘗無僅由某種工業中經營方法較爲寬大之工廠採取材料之傾向，故對於所得之平均數中，乃招致一種偏誤。由此種種例證，吾人現可提出另一極一極爲重要之原則。非偏誤與簡單估計數中之偏誤相比，非偏誤實不甚重要；但如取用二個類似估計數之比率時，則偏誤亦減小。

蓋在數個數量之平均數中，而此數個數量具有偏誤(η_1，η_2……)及非偏誤(e_1，e_2……)時，吾人依據定則二之規定，即知結果所得之差誤，可寫成：

$$S\left(e_1\cdot\frac{m_1}{S.m}\right)+S\left(\eta\cdot\frac{m_1}{S.m}\right)。$$

第一項中之差誤，爲非偏誤，此等差誤之中，有許多爲正，有

許多為負，二者有相互銷除之傾向。實際上，E若為 $e_1, e_2 \cdots\cdots e_n$ 諸差誤之代表，則求平均數中諸差誤所發生之差誤之近似值，其第一近似值必為 $\frac{2E^*}{3\sqrt{n}}$。（*註三）

偏誤之巨大效果　例如，茲有數量百個，每一數量之非偏誤大約為 $\frac{1}{10}$，則此一百數量之平均數中，所得之差誤未必大於 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{10}\div\sqrt{100}$，即未必大於 $\frac{1}{150}$。反之，則無互趨平衡之趨勢。假如每一數量，各超過百分之十，則平均數亦超出百分之十。為求確實計，吾人之原則，僅注意於鎊，而未兼及便士。當吾人之數量為巨大之偏誤所貫穿時，則減少非偏誤以增進吾人數量之確度，實為徒勞。吾人苟不知實際上彼充滿吾人估計數之偏誤之存在，則無可挽救。設吾人熟知之，如欲獲得較高之確度，則與其完全删略之，實不若加以最差誤之修正之為愈。蓋當吾人為多數偏誤，加以不偏不倚之修正時，是吾人即已將其化為非偏誤矣。於是在吾人之平均數中，包括之項數愈多，則結果之差誤亦愈小矣。例如，設吾人得知英國全國農村勞動者之平均每週工資，為十三先令，並假設得出此一平均數之調查報告共有一千份，茲就此一千份報告之情況而考慮之結果，吾人有理由假設一先令之差誤，當為調查報告中非偏誤之代表，則結果在平均數中之差誤，吾人以意料之，當為 $\frac{1}{\sqrt{1000}}$ 之 $\frac{2}{3}$，換言之，即僅四分之一便士之差誤也。但此處吾人乃有一完全虛假之確度。蓋農村勞動之收入，吾人未曾計入

者，尚有甚多，如割禾時及收穫時之償付，計件工作之利益，便宜之房租及地租，以及零星賞金；此一部分收入，吾人殊不能加以準確計算。吾人如將此等收入完全棄之不顧，則在平均數中之差，將有二先令左右之差誤。反之，吾人就此一千份之全數報告中，將此等增加數，作成個別之估計數，如其中並無偏性，則每一估計數中，雖或有二先令之出入，而結果在平均數中之差誤，可望爲$\frac{2}{\sqrt{1000}}$之[illegible]先令，即僅二分之一便士：於是吾人整個差誤，現可少於一便士，而非一先令矣。在計算已發表之平均數之確度時，務應將此等原則牢記心中，而偏誤之可能性，尤須常常加以考慮也。

相比之確度 當吾人計算一比率中之差誤時，情形即有不同。一比率之差誤，約等於該比率各項差誤間之差額。設 n, n^1 爲各項中之偏誤，e, e^1 爲各項中之非偏誤，則依定則五之規定，$(n^1-n)+(e^1-e)$ 即爲此比率中之差誤。至非偏誤 (e^1-e) 之大小度，大致幾與 e 或 e^1 之大小度相同（註四）。又如上例所述，設 e 及 e^1 不致遠大於 [illegible]，則 (e^1-e) 不致遠大於 [illegible]。但此比率中各項之偏性，意味如爲相同（全爲正，或全爲負），則偏誤結果之 (n^1-n)，將小於原來之差誤。設吾人以恰爲相同方法，爲兩項各作一估計數，設吾人曾對同類人發同一之問題，而在兩處取捨之細節亦全相同，則在兩估計數中，吾人將已造成幾乎相同之偏性差。試就

以前所舉之例證言之，設吾人在兩期間調查一農村勞動者之收入，除其平均每週工資外，其餘各節竟顯然置之不顧，則此比率中所生之唯一差誤，必由於此等特別收益對通常工資之比例之變遷；而此種變遷在短期間內大致必甚輕微也。不然，設吾人乃以兩期之夏季工資作為該年之平均工資，則比率中之差誤，將僅隨夏季工資對該平均數關係之變遷而定。是故對於一變遷遲緩之數量，在不同日期所作兩估計數，如估計數作成之方法相同，則此兩估計數之比率之差誤，往往小於任一單獨估計數中之差誤；蓋非偏誤並未增大，而更重要之偏誤，則大為減小也。此時，偏誤之是否存在，吾人無須求知，偏誤即將自行消失。如吾人果知有偏誤之存在，並有為彼作成甚為精確之估計數之任何方法，則有加以估計之價值；但若僅改正其一年之偏性，而另一年之偏性，又不予改正，則實為大錯。為供比較之用，而使後期之估計數，較前期之估計數為精確，往往遇巨大困難，非止常無大用而已也。總之，由非偏誤而生之差誤，固能略形減消，但由更重要之偏誤，而生之差誤，則只有增大之一途。

〔定期報告結構上對於統一性之需要〕一切編纂每年報告之政府官員及其他人士，在此均有進退兩難之苦。苟欲使每年報告表冊本身精確無疵，則永須努力精益求精，且恆須察視所量數量之變動，而使所用方法及列表法，與此等變動相適合。但為求各

年報告，可相互比較，則必須絕對保守成法，前人卽有錯誤亦應一仍其舊，惟須注意，無使錯誤加多，或另有新遺漏也。雖然，此種進退兩難之苦，並非絕不可免。蓋引用一改進方法之時，有時可爲新舊兩法各作數年之表格；於是經此改動而起之區別可見，而早日數字，不難使其達到後期數字之較大精確程度矣。例如，英國商業部，自一八九八年起，始於出口貨值表中，添列裝載貨物駛離英國海口而連貨物一併售與外人之船隻。玆列一表於下：

	一八九九	一八九八
國產品出口貨値（售與外人之船隻除外）	255,465,000鎊	233,359,000鎊
國產及殖民地商品之復出口貨値	65,020,000鎊	60,655,000鎊
總 計	320,485,000鎊	294,014,000鎊
出口之新船隻貨値	9,195,000鎊	未 詳
新 總 計	329,680,000鎊	

由此足見在材料之搜集及列表時，微細更動之忽略，實爲統計上許多錯誤之原因。

結論 玆將本章之主要結論，摘要述之如下：

增進確度之方法有二，一爲平均法，平均法可減少非偏誤；一爲相比法，相比法可減少偏誤。權數中之差誤，往往不若估計數中其他差誤之重要。一答數中之差誤，固然不能算出，但能以該答數所自出之各項中之差誤說明之。吾人不能達到定而不可

移之程度，但吾人可指出減小差誤之方法，而藉數學之助，吾人並能度量此減縮之範圍。當吾人計算類似及估計方法相同之數量之加權平均數之比率時，原起之差誤，卽能減去大部。吾人在下章所討論之指數，卽爲此類之例證。

由抽樣方法而得之確度，必需多加以數理之討論，容當於本書第二編第二章及第四章論及之。

（註一）　有時書如 $u=u^1(1+\epsilon)$，與實值相對而計算錯誤，則更爲便利。如此則 ϵ 約等於 $-e+e^2$；當 e 不及百分之十時，則可令 $\epsilon=-e$。

（註二）　見統計學報，一九一一年，自第八十五頁起，及本書第二編附錄七，但算式已略變動。

（註三）　能否得到如是其大之差誤，尙在兩可之間。請參閱本書第二編第四章。

（註四）　設 E 爲 e 或 e^1 之機誤，則 $E.\sqrt{2}$ 爲二者相差之機誤；見本書第二編第三章。

第九章　指數

指數(Index number)之討論，可作爲上章所述原理異常良好之解明，而指數之本身，又異常重要，故吾人本意，雖欲避免特殊問題而不談，但究値特闢一章以硏究之。

指數之功能　指數者，用以測量吾人不能直接觀察之某種數量之變動者也。蓋此種數量，吾人不能直接觀察之，但知其對於能以直接觀察之其他數量，乃有其確定之影響，若上漲卽有全部上漲之傾向，若下落卽有全部下落之趨向，然此一影響反爲對於各個數量發生種種不同影響之多宗原因之作用所隱蔽，因而並不可見也。例如，就三種應用指數之數量而論，一、貴金屬與其購買力之關係之變動，卽足波及所有各種商品之價格；但同時尙有其他無數原因亦在發生作用，足以影響各類商品之價格；二、有平常技能工人之每週工資，卽有促其上漲之一般原因，但此一般之增加，已爲無數對於上下各級勞動有大小不同之影響之原因所遮蔽矣；三、勞動及其他階級消費量之變動，乃爲十分穩定之數量，但此一數量，只能用間接方法，就各個物品消費量之變動，觀察而測量之。

雖然，指數之功用，並非止此而已，實則指數之用途，乃幾與

統計學之領域,同其廣被焉;蓋統計學一詞,吾人既只限於對繁複羣類及其變動之測量,統計學之目的,既在測量支配一異質羣類(heterogeneous group)之一般定律之作用,且一般勢力所產生之變動,依例只能就其對於各個事件之效力而測量之;是則指數方法,自可立即用以自專對於各別物件有特殊影響之變動原因中,分解對於全體羣類均有公共影響之力量也。

指數之性質　更嚴格論之,一列指數,實即一列加權平均數,而此加權平均數,乃按期算出,所平均之數量,又彼此相似(如價格或工資),至所用之權數,必須以能將每一次測量所涉及之全部羣類施以實在之平均者爲限。如就其廣義論之,一列指數,乃即一組數列,而能將所論及之某種數量之運動,在其趨勢及變動中反映出來者也。如諸數量及其權數,均能確切得知,則指數方法,乃即直捷表現純粹算學得數之簡便方法,此一單簡性,於編製出口貨價指數時,庶幾可以顯現。如諸數量乃爲自一範圍甚寬之羣類中抽選得來之樣本,而又無決定各數量相對重要性之顯明方法者,則此指數對於有一定之意義及可量之性質之現象之運動,必不能有十分直接之關係;此乃大多數之物價指數之性質,亦即幾種工資指數之性質也。至如諸數量,並非由吾人所欲研究之現象中,得來樣本之直接度量,而爲相聯現象之抽樣數量時,則此列指數與現象之關係,必爲間接者;事實上大多數工資指數

及就業狀況指數，均屬於此類也（註一）。

最普通之編製指數法，乃介乎極正確與間接關係兩極端之間。例如英國商業部勞工局之工資率變動指數，其對象乃卽照例定之計劃按年查算指數，而此指數之比率，卽與英國一定工廠中，工人平均每週工資率之比率相同；最低限度，一般所用之指數之意義，乃不外如此，至英國勞工統計輯要 (Abstract of Labour Statistics) 中標題所云，乃為『英國工資之一般動向』(如第十六期輯要，總號第七一三一號，第八十二頁）也。此一指數之算法，須先擇出經承認之計時或計件工資率數百個，作為一九〇〇年工資額之百分數以表示之，然後將此得數按年平均之。此平均數中之權數，採用之法乃為間接者；凡建築業，煤礦業，工程業，紡織業，及農業五類，每類均以同等重要視之，雖建築業一類，包含七十四件，農業包含一百一十五件，其他各類件數，亦多寡不同云。孫巴克 (Sauerbeck) 氏之物價指數，求得之法，選擇若干代表商品之價格，對於較重要商品則用雙重價碼 (duplicating quotations) 方法以加權之。然則在此處以及其他各處，凡論及指數時，吾人須擇用一種『數量』(quantity)，此種數量或熟籌而後用之，或偶然用及之，並須決定一種『權數』(weight)，此種權數或為直接或為間接求得之。故不論吾人之對象，為平均工資，抑為平均物價平準，凡吾人擬加以測量者，則此指數之運動，

必期望其能與現象成正比例也。

在此種情形之下，須加考慮者有三點：一，此羣類之性質與範圍，以及此羣類所具特質（此特質之一般變動，卽吾人欲行研究者）之本性；二，抽選樣本之方法；三，權數之效果。

（一）就孫巴克氏之物價指數而論，其羣類乃爲英國之躉售物價；就其他物價指數而言，所謂羣類乃卽出口貨物之價格，進口貨物之價格，以及其他種種之價格。英國勞工局之工資指數中，其羣類爲雙重，乃包括（甲）每週計時工資率，（乙）計件工資率，而其結果自爲混合物。羣類之範圍，及將施以度量之本質或屬性，規定二者之定義，甚爲重要。夫本質之意義，有時甚爲費解，如『貨幣之購買力』，或『失業之總量』是，在此情形之下，吾人只得就有關之屬性，給以定義，而度量之，如一般物價平準，或依照失業之某種定義，而計算之失業人數是。

（二）在抽樣之時，依一般遵循之準則，必須就有適合定義而度量可以確實者抽選之，卽在最佳之有名指數中，選擇之標準，異常嚴苛，所有之價格，必須適合準則乃能採納之。當此之時，吾人往往須將羣類之定義重行考慮並限制其範圍。例如吾人進行度量一般物價，必爲定義中之要件所限制，因而只能就市價甚有規則之躉售物價度量之；至於工資方面，英國勞工局亦只有採用合於標準之工資率（農業工資爲例外）之一途。但爲求製成之

指數，適於差誤律之分析，吾人所抽之樣本，務須隨機而得，且其變動必須與一般運動無涉；苟求此獨立性而不可得，則樣本之數，必須加多，以期達到某種確度。隨機性（randomness），或可因不期而遇之事件，能以保持，蓋惟有不期而遇之事件，乃使所取之樣本可以被選用也；但此大多以在躉售物價爲然，至於工資，則不可能。抽選時，如發生偏性（bias），吾人有時可將羣類之定義，重行加以限制，即可期於安全。

（三）關於權數之效果，如互爲獨立之數量，個數甚多，則任何合理之加權辦法，多能得到良好之結果，與爲該問題之條件所許可而得者相同也。

假設支配一羣類數量之變動者，有一般勢力一，有其他勢力若干；此一般勢力，以同一意味而活動，換言之，即如漲則全部漲，落則全部落；其他數種勢力，各對於一數量或多數量發生作用，且其中有使數量趨於上升者，同時亦有使數量減退者；故總計諸項特殊勢力，使平均數趨於增加者有之，使趨於降落者亦有之，而此一般勢力，則始終保持一種累積效力，使各數量全部增加，或全部漸減。然如此諸端特殊勢力爲數甚多，而其效力則甚輕微，則此諸勢力對於平均數之影響，必有趨於中和之傾向；如此則平均數之變動，必將僅顯現此一般原因之影響矣。如用上章之用語言之，此諸種特殊勢力雖產生多數偏性（biassed）變動，但此種

偏性變動，對於平均數之影響，乃甚輕微，較之一般勢力所產生之偏性變動，殊可略去不計也。

吾人經將多數之普通應用指數加以檢討以後，可知實際上施以度量之數量，並非吾人意欲知其一般運動之數量。夫躉售之物價，絕不依照任何簡單定律——不論定差(constant difference)或定比(constant ratio)——而與零售物價，同其運動；標準工資與平均工資，大不相同，但何以不同，人皆不知；計件工資率與工作收入之關係，變化靡常，且不可知。可加度量之數量，與實在欲加調查之本質，二者之間，並無有如 $y=x$,或 $y=kx$,或 $y=a+bx$ 之簡單關係，實則乃爲$y=f(x)$之關係，而此函數之形式如何，吾人又非所知也。如求作成之指數，令人易於瞭解，$y=a+bx$ 在 x 之普通全距(range)中必須爲一良好之近似值，因具有高級乘冪之 x 項之極端值，有變爲甚大之可能，致結果作成之指數，反不可靠也。在編製指數之過程中，a 卽行消滅，但 b 所度量者，爲 y 之變動對 x 之變動之比率，決定 b 時，往往甚難。

製成某一年之指數，其定義可述之如下：設有 n 個數量，吾人欲研究其一般運動，茲以 x_1, x_2……x_n 代表此種數量。設另有一種已加度量之數量，與前一數量用一方程式聯繫之，此另一種數量，以 y_1, y_2……y_n 代表之，聯繫 x 與 y 之方程式，以 $y_r-100=b_r(x_r-100)$ 爲其良好近似值(註二)。設已規定一種適當之權

數，如 $w_1, w_2 \cdots\cdots$ 等，並以 J 代表 $\frac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots\cdots}{w_1+w_2+\cdots\cdots\cdots}$，以 I 代表 $\frac{w_1y_1+w_2y_2+\cdots\cdots}{w_1+w_2+\cdots\cdots\cdots}$。此 J 即爲一指數，此指數之變動，即足表示運動，但此指數乃理論上之指數，無從加以計算，至實際可以計算而且付諸應用之指數，乃爲 I。

$$I-100=\frac{\Sigma w(y-100)}{\Sigma w}=\frac{\Sigma wb(x-100)}{\Sigma w}。$$

設 $b_1=k+d_1, b_2=k+d_2, \cdots\cdots, k$ 乃選來（如可能時）作爲 b 各值之平均數，而此平均數能在 x 各值之普通全距間使

$$\frac{\Sigma wd(x-100)}{\Sigma w}(=F)$$

變小者。

$$於是 I-100=k\frac{\Sigma w(x-100)}{\Sigma w}+\frac{\Sigma wd(x-100)}{\Sigma w}=k(J-100)+F$$

僅就一般情形言之，如 x 各值數值之範圍並不甚寬，如 b 各值幾爲相等，而 b 之極端值，並不與 w 之極端值相合爲一時，則 F 之值必甚小，而其各年間之變量必甚微，乃可以略去不計之。

在此情形之下，I 與 J 之關係，在標準年 (standard year) 當 J（及各個 x 與 y）爲 100 時，I 亦等於 100，且 I 値之變動，乃幾爲 J 値變數之 k 倍，至 k 乃爲 b 各值之平均數，而各 b 值則爲度量各個 y 值之變動對相當之各 x 值變動之比率者也。

吾人如企圖藉由躉售物價作成零售物價指數，b 之各值，並

不可知，且各個 b 值，由一商品至另一商品，原卽大不相同，由此時至彼時，亦迥然有異，又當物價特高或特低時，b 各值變化靡常，人甚難測定。故一般零售物價與躉售物價之關聯，並非異常密切，吾人殊不能發言，謂此之變動，與彼之變動，成正比例也。試就英國勞工局之工資指數而論，計時工資之變動，與計件工資之變動，對於工作收入之關係，彼此並不相同，且二者對於工作收入之關係，亦無從得知；換言之，b 之各值，乃爲未知且不相等也。僅就計件工資率而論，當工資率上漲時，工作收入往往上升較速（b 小於 1），而工資率下落時，工作收入下降亦往往較緩（b 大於 1）；換言之，b 之各值並非一定，而上列公式中之 F，乃爲未知且不能删略也。

如 b 之各值果爲相等，則 F 必爲零，k 之值乃可在將兩年間之數值，加以特別研究後，而求得之。如然，則 I 之運動，必將緊隨 J 之運動，而在一已知尺度上現明顯之反應。

無如實際之關係，並非顯然，設有一 x 值超出其平均數百分之四，吾人不能卽謂 y 亦大於其平均數百分之四，只能謂 y 之離中差爲百分之四 $\times b$，而 b 幾爲常數也。b 之各值，與某種（加權）平均值（k）相差，而此等相差數之影響，在取用此平均數時，幾可全然消滅，且此平均值 k，在各年幾皆一定不變，此亦可加以假定者也。總之，對於 b 之各值，及結果所得之 k 值，無不可以設立

各種之假定，於是指數之變動，乃可解明矣。

於此有一重要之條件，即當 x 經過一變動後復回至一數值時，則相當之 y 值，亦必還歸其原來數值，否則，即有任何相差數額，至少，必為極微且無偏性。但如用躉售物價以度量零售物價之變動，此一條件必爲之破壞，蓋躉售物價與零售物價之關係，已逐漸變更，果如吾人所預料也。執此而論，英國勞工局之工資一般動向指數，因標準工資或計件工資之變動，對於平均工資之變動，關係時在變更，則此一條件自必爲之破壞矣。

英國商業部之指數　英國現存之躉售物價指數甚多，吾人可擇要略一檢閱之。商業部按年有出入口貨值貨量記載發表，則出入口貨之平均價格，必可加以計算。所舉之商品，乃自一定之整個期間之答案中均曾出現者選擇而來。商品選定之後，即擇定某一年作爲基年 (base year)；然後依基年之物價，分別估量其他所有各年之各種價格；任何一年估得價格之總數，即爲該年貨物價格未曾變更之總價值；此一數值對於記錄上實在所有價值之比率，即爲在基年之平均物價對其他某一年之平均價格（假如平均一詞乃用其廣義之意義）之比率；又如此一比率之前項使與 100 相等，則比率之後項，即爲所求之某一年之指數，而所謂指數，乃即對基年之指數之百分數。然則，吾人現所論者，顯已論及加權平均數矣。

權數方式 設 p_1, p_2, p_3……為基年中選定各單位貨物之價格，以 r_1p_1, r_2p_2, r_3p_3……為吾人欲求算指數之某年物價：則 r_1, r_2, r_3……卽為各個商品價格變動之度量，而此種所有之 r 值，卽為吾人抽來欲從中查出物價一般變動之樣本也。以上所述之方法中，所用之權數，求得之法，不外：設 b_1, b_2, b_3……為某一年貨物單位數，但該年貨物總價值，以當年之物價計之，為 $(b_1r_1p_1+b_2r_2p_2+\cdots\cdots)$，以基年之物價計之，則為 $(b_1p_1+b_2p_2+\cdots\cdots)$；二者之比率，為 $\Sigma brp:\ \Sigma bp$，於是該年之指數，必為

$$100\times\frac{\Sigma brp}{\Sigma bp}=100\times\Sigma\left(r\cdot\frac{bp}{\Sigma bp}\right).$$

由此觀之，加於 r 各值上之權數，卽為該年相當貨物按基年價格計算之價值。吾人於此可見標準年份之選擇，對於權數甚有影響，因以物價甚高之年為基年，竟對於某一商品加以特別之權數，而為尋覓一『正常』年份，業已煞費周折矣；然各別商品之權數，雖受其影響，但平均數未必卽隨之變更，且依上文所述之原則，卽有變更，亦必極為輕微也。實際上玆有下列之數字（註三）：

一八八六年指數與一八八三年指數之比較

權數 / 年份	進口貨				出口貨			
	以一八七三年價格計算之價值	以一八八三年價格計算之價值	以一八六一年價格計算之價值	以一八八一年價格計算之價值	以一八七三年價格計算之價值	以一八八三年價格計算之價值	以一八六 年價格計算之價值	以一八八一年價格計算之價值
1883	100	100	100	100	100	100	100	100
1886	81.7	82.1	82.9	82.3	$88\frac{1}{2}$	88	87	89

吾人本可作成一種數字，以示因掉換基年而生之參差，但此種工作，已有人用抽選利於特別論辯之樣本而完成之矣。

然觀乎上表，權數變換如彼之大，結果相差如此之微，是以吾人甚至是否需要以進口貨數量（卽上列公式中之 b 值）爲權數，實頗有考慮之價值。玆列一表於下，（註四）以示無甚影響之權數：

以一八八一年指數爲100，用各種加權方式求得之
一八九五年指數

	物價之比率 (r_1, r_2……)					$\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$, …等算術平均數之倒數	英國經濟雜誌之數字
	以一八八一年物價，一八九五年物量之物值加權	以一八八一年公佈物值加權	算術平均數	中位數	幾何平均數		
進口貨	$67\frac{1}{2}$	69	$73\frac{1}{2}$	$72\frac{1}{2}$	$72\frac{1}{2}$	69	71
出口貨	83	87	82	81	$78\frac{1}{2}$	75	

設 b_1, b_2……爲一八八一年之物量

p_1, p_2……爲一八八一年之物價

c_1, c_2……爲一八九五年之物量

r_1p_1, r_2p_2…爲一八九五年之物價

由第一欄，可得

$$100\times\frac{\text{以一八九五年物價與一八九五年物量計算之各種物值總和}}{\text{以一八八一年物價與一八九五年物量計算之各種物值總和}}$$

$=\dfrac{100\Sigma c_1p_1r_1}{\Sigma c_1p_1}$，至加於 r 各值之權數，乃爲一八八一年公佈之物值。

第三欄爲 r 各值之算術平均數，第四欄爲 r 各值之中位數，第五欄爲 r 各值之幾何平均數。倒數第二欄，爲 $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}$……各值之算術平均數，換言之，即一八八一年物價對一八九五年物價之比率之算術平均數；此算術平均數對 100 之比率，即等於 100 對另一新指數之比率，至於此新指數，乃即相當於前一算術平均數而將一八八一年與一八九五年互爲更代者也。最末一欄之數，乃根據倫敦經濟雜誌(Economist)所登載之資料而算出；每年之出口入口貨，均以其前一年之價格計算其物值，是以所得之每年比率，與同表第一欄之比率相同；一八八一年之指數 100，須用此每年比率按年乘之，至一八九五年爲止，則得數乃爲 71。[如用代數表示之，此一指數爲 $100 \times \Sigma\left(r \cdot \frac{bp}{\Sigma bp}\right) \times \Sigma\left(r^1 \cdot \frac{b^1p^1}{\Sigma b^1p^1}\right) \times \times$]

試將上表所列數字，加以較完全之分析，並就出口貨價指數最低75與最高87之歧異考察其原因，即可證明種種方法究以採用何者爲宜矣。然僅就上表而論，不加權平均數爲 82，第一個加權平均數爲 83，二者相去無幾，吾人大可滿意矣。

處理此種權數之其他方法，容當在本章零售物價指數一節『加權方法』一段內討論之。

{客觀度量} 以英國商業部基礎而編製之指數，最大之優點，即在能約略度量一客觀數量，而度量之結果，又能以可訴諸非統計學家之平常人士之用語陳述之，例如『一八九五年之進口貨，

僅值一八八一年價格之一半』;雖然如此,此一指數對於意義欠確定之數量如『進口貨價之跌落』者,未必卽爲一最佳之度量,蓋所謂『進口貨價之跌落』,其中必有一般原因支配此類商品,但此種商品之行動,乃已被其他部分原因所左右矣。

基年之選擇　選擇一正常年份或一期間之平均數爲基年,其事甚爲重要,蓋年份之選擇,足以影響嗣後作比較之有效權數也。茲採用下列之符號:

所選權數	基年中之價格	第二年之價格	第三年之價格	第三年價格與第二年價格之比
w_1	100	$100r_1$	$100r_1^1$	$R_1=r_1^1:r_1$
w_2	100	$100r_2$	$100r_2^1$	$R_2=r_2^1:r_1$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

並以 100, I_1, I_2 分別代表此三年之指數,則得

$$\frac{Sw100}{Sw}:\frac{Sw100r}{Sw}:\frac{Sw100r^1}{Sw}=100:I_1:I_2$$

$$\therefore I_2=I_1\times\frac{Swr^1}{Swr}=I_1\times\frac{S(wr\cdot R)}{Swr}。$$

但吾人如以第二年所有之價格均作爲 100,則 $I_2=I_1\times\frac{SwR}{Sw}$。

假如此平均數爲未加權之平均數,吾人必仍不能免此困難,蓋如此則一者之值爲$\frac{SrR}{Sr}$,而他者之值乃爲$\frac{1}{n}Sr$也。

但因權數中之差誤,在平常情形之下,影響僅爲甚微,故若非所擇之基年,果爲極端反常之年份,或物價之運動,極不規則,

則此點並無顧慮之必要。

幾何平均數　據愛基華斯教授之指示，吾人如用幾何平均數，則在不加權平均數中所遇之困難，即可完全避免。試用同一符號：

$$100:I_1:I_2=100:100\sqrt[n]{r_1r_2\cdots\cdots r_n}:100\sqrt[n]{r_1^1r_2^1\cdots\cdots r_n^1}$$

$$\therefore I_2=I_1\times\sqrt[n]{\frac{r_1^1r_2^1\cdots\cdots r_n^1}{r_1r_2\cdots\cdots r_n}}=I_1\times\sqrt[n]{R_1R_2\cdots\cdots R_n},$$

於是不論用何年爲基年，若欲比較兩年之指數，得數均爲相同矣（註五）。

其他指數　孫巴克先生及倫敦經濟雜誌(Economist)，爲求在商品之消費相對重要性將各別比率加權時，避免其一部分之困難起見，特自價格最準確之商品中，多用消費廣遍之物品，如小麥，而少用次要之商品，如亞麻仁。孫巴克先生在其一年一度發表於英國皇家統計學會學報(Journal of the Royal Statistical Society）之文中，曾對於彼四十五個比率之不加權平均數，與已用各種原則加權之同一比率之平均數，證明其相合之點（註六）。

選樣正當之重要　如所得比率爲數甚多，而所用特別權數之選擇無關重要時，則欲加研究之數量之選擇，對於得數必有極大之影響。例如外國之原料及製品輸入我國之數字，據上列一表所示，勿論權數如何，而所受影響雖然甚微，但與英國製品之出口價格，未必即得同一之指數；且此兩種指數無一可與孫巴克氏

指數或經濟雜誌之指數切合，實則卽孫巴克氏與經濟雜誌二者之指數，亦並非完全融和也。此四種指數所根據之樣本，乃由羣類不同之商品選來，且據此等指數所示，同一之勢力，對於此等各羣類之影響，亦各不相同也。總之，吾人對於選來之樣本，無論用何數乘之，但如再用某數除之之時，對於所得到之指數，並不發生影響，則吾人可以期望吾人之得數，必能代表所需之度量矣（註七）。

{中位數之絕大優點} 試就一八六〇至一八七〇年一期中，以經濟雜誌之指數，與孫巴克氏指數作一比較，吾人可見前者在棉花歉收期中，表現之增加度，較後者強烈多多。一種指數，凡因在一羣商品中之變動，以致出入甚大者，此必係缺乏之物價平準之一般度量應有之數種主要原質無疑。此一難點，亦卽加權上所有困難之所在，有一簡單之辦法，可以避免之，此一方法，乃以某年所有物價比率之中位數，作爲該年之指數，如包括項目果然甚多，則理論上示明其他各種平均數，對於必需條件之滿足，較中位數爲佳，乃爲不可能之事，且中位數在實際上爲最便於計算之平均數，則無可疑。

{經人提議之標準} 在另一方面，資料如甚稀少，採用權數乃爲必需，且公衆感覺需要一種具體度量，以便對加權之便利，明白表示時，最好之標準，恐無過於英國協會之委員會所提議之編

製指數標準，蓋此一製作指數之標準，可作爲商業上關於將來價付交易之基礎也。茲將此標準，述之於下：

一八八八年英國協會經濟組所組委員會
介紹之指數基礎

品名	每種物品每年耗用金額（單位百萬金鎊）	故指定之權數爲		價格之根據
小麥	60	5		勞工公報之平均數，英國小麥
大麥	30	5	20	勞工公報之平均數，英國大麥
雀麥	50	5		勞工公報之平均數，英國雀麥
番薯，稻米及其他	50	5		進口價格平均數，番薯
肉	100	10		市價，生肉
魚	20	2½	20	商業部調查表；上陸每英擔(Cwt)平均價格
乳酪，黃油，牛奶	60	7½		乳酪及牛奶，進口平均價格
糖	30	2½		平均進口價格，[illegible]製糖
茶	20	2½		平均進口價格，茶
啤酒	100	9	20	平均出口價格，啤酒
酒精	40	2½		平均進口價格，酒精
酒	10	1		平均進口價格，酒
煙草	10	2½		平均進口價格，煙草
棉花	20	2½		平均進口價格，棉花
羊毛	30	2½	10	平均進口價格，羊毛
絲	20	2½		平均進口價格，生絲
皮	10	2½		平均進口價格，獸皮
煤	100	10		平均出口價格，煤
鐵	50	5	20	市價，蘇格蘭銑鐵
紫銅	25	2½		平均進口價格，紫銅礦砂
鉛，鋅，錫	25	2½		平均進口價格，鉛礦砂
木料	30	3		平均進口價格
煤油	5	1		平均進口價格
碇青	5	1	10	平均進口價格
亞麻及亞麻仁	10	3		平均進口價格
棕櫚油	5	1		平均進口價格
硬橡皮	5	1		平均進口價格

（第四十一表）

美國之統計學家，爲製成指數，曾採用一總數比較法(method of comparing totals)，而不用加權或不加權之價格比率(price ratio)。『如此作法,可以克服兩點困難:第一點爲選擇基年問題,因如此則實在物價可以不必化成價比(relative),第二點爲依價比之適宜平均數而決定之問題』(註八)。實則此法固有令人明瞭與作法簡單之優點,但其中並無新原理。茲請述之如下:某年,即如一九一四年,每一物品之價格,須以在上一舉行調查之年,如一九〇九之成交數量乘之;另一年卽如一九一二年之物價,亦以同數量乘之。以一九一四年之綜合數(aggregate)爲基數(base),卽爲 100,然後以一九一二年之綜合數與一九一四年之綜合數相比,卽得一九一二年之指數。假如一九一四年之物量爲 w_1, w_2……,物價爲 P_1, P_2……,一九一二年之物價爲 p_1, p_2……,則一九一四年之綜合數,卽爲 SwP,而一九一二年之綜合數爲 SwP,於是得指數爲 $100\frac{SwP}{SwP}=100\frac{S(wP.R)}{SwP}$ 式中,R_1, R_2……卽一九一四對一九一二年之價格比率也。此種指數與上述之英國商業部指數相同,而未敢云有特別確度者也。

〔零售物價指數〕 對於躉售物價,吾人所得者,旣僅爲粗略之相應性,則度量零售物價,自不能希望有極大之精確。蓋據上章所述,一平均數中之差誤,與在作成此平均數之各個項目中,所出現之差誤,有其一定之關係;如各項中之差誤,通盤均有雙倍,則在平均數中,及在兩平均數之比率中之差誤,大半亦必有兩倍之多,於是吾人不得不更需要四倍之樣本(註九),以期恢復精確

度。然計算零售物價指數，資料之不完全，較計算躉售物價指數所用，有過之無不及，且因包括之物品種類更少，而種種項目如麵包及房租等，實佔極重要之地位，故加權問題，乃愈形重要。

特別困難點　吾人在以一指數表明特殊階級之人士之貨幣購買力時，有若干點，爲計算躉售物價指數時在所不計者，此時亦不得不注意及之。在同一時期之不同階級，與在不同時期之同一階級，對於彼之所得，開銷之比例不同，對象亦復有異。吾人果能蒐集若干充分之確實樣本，此一事實卽無十分關係，無如一般對於減價之商品旣有多購之趨勢，此事仍有某種之重要性。旣然如此，吾人似有爲每一階級每一區域各作一指數之必要矣。資料不充分與不確實之困難，迄今猶未能克服；惟吾人旣有於將來覓得一定之零售物價記錄甚多足以完成其確實性之可能，則吾人不妨略一討論其他各點矣。

加權法　如爲某一階級，作一指數，必須有該階級人民在所論及之所有日期中，對於所得開支方法之記錄，記錄並須甚多，足以得到些須之確度，以應加權之所需。在吾人旣得尙爲良好之零售物價記錄後，乃有數種加權法當前(註一〇)，而此所有各法，大致多能得出同一之得數。至於加權之必要，及其方法，最佳須以數字例證解明之(註一一)。

不論生活費之定義若何，對於生活費變動之度量，所用之資

料,性質均係相同,內容包括有各層社會階級之代表,在兩期間或兩地方,所購各種商品之數量,及付出物價之記錄。例如,茲有資料如下:

商　品	地方或日期(甲)					(乙)				
	數量		價格		費用	數量		價格		費用
1	Q_1	×	P_1	=	E_1	q_1	×	p_1	=	e_1
2	Q_2	×	P_2	=	E_2	q_2	×	p_2	=	e_2
3	Q_3	×	P_3	=	E_3	q_3	×	p_3	=	e_3
⋮	⋮		⋮		⋮	⋮		⋮		⋮
n	Q_n	×	P_n	=	E_n	q_n	×	p_n	=	e_n

在下列第四十二表,即依此式,表明一九一九年英國生活費委員會報告所用之家庭預算。

如以第一年之物價,計算第二年之預算,則得生活費為二二五・五便士,而非四五五・五便士。以此為基礎,而計算零售物價指數,乃為 $100\times\frac{455.5}{225.5}$,或為 $100\frac{Sqp}{SqP}=202.0$。加於價格比率 p: P 之權數,為 qP。指數等於 $100\frac{Se}{S_{e}\frac{P}{p}}\cdots\cdots(a)$

用第二年物價計算第一年預算,則生活費必為五二一・六便士,而非二四六・五便士。以此基礎得指數為

$$100\times\frac{521.6}{246.5},\text{或為}100\frac{SQp}{SQP}=211.6\cdots\cdots(b)$$

加於價格比率 p: P 之權數,乃為 QP,或 E。此即勞工公報(Labour Gazette)用以度量『零售物價之平均增加量』所用

之法也。

城市勞動階級家庭預算

標準家庭之生活費

		一九一四年			一九一八年，六月			p/P
		Q 數量	P 價格（便士）	E 費用（便士）	q 數量	p 價格（便士）	e 費用（便士）	價比
（1）麵包及麵粉	磅	33.5	1.51	50.5	34.5	2.36	81.5	1.56
（2）肉	磅	6.8	8.6	58.5	4.4	18.6	82.0	2.15
（3）鹹肉	磅	1.2	11.7	14.0	2.55	26.1	66.5	2.24
（4）豬油，牛羊油及其他	磅	1.0	7.5	7.5	.78	17.9	14.0	2.29
（5）雞蛋	枚	13	1.0	13.0	9.1	4.0	36.5	4.00
（6）鮮牛奶	瓶	9.2	1.8	16.5	11.7	3.0	35.5	1.69
（7）煉乳	罐頭	.25	6.0	1.5	.59	14.5	8.5	1.42
（8）乳酪	磅	.84	8.9	7.5	.41	20.7	8.5	2.32
（9）黃油	磅	1.70	14.4	24.5	.79	29.7	23.5	2.07
（10）人造牛奶油	磅	.42	6.0	2.5	.91	12.1	11.0	2.01
（11）番薯	磅	15.6	.7	11.0	20	1.25	25.0	1.78
（12）稻米及太皮歐加 (tapioca)	磅	1.4	3.2	4.5	1.3	5.8	7.5	1.82
（13）蕎麥粉	磅	1.3	1.9	2.5	1.4	4.3	6.0	2.24
（14）茶	磅	.68	21.3	14.5	.57	33.3	19.0	1.56
（15）咖啡茶	磅	.09	16.7	1.5	.12	25.0	3.0	1.50
（16）可可茶	磅	.18	19.4	3.5	.23	32.6	7.5	1.69
（17）糖	磅	5.9	2.2	13.0	2.83	7.07	20.0	3.21
合計				246.5			455.5	
其他食物				52.5			111.5	
總計				299.0			567.0	

S.QP=246.5　S.qp=455.5　S.Qp=521.6　S.qP=225.5

S.e÷S.E=1.90　S.Qp÷S.QP=2.12　S.qp÷S.qP=2.02

（第四十二表）

在若干種情形之下，上述二式，或用(a)，或用(b)，均各有其理由。如其不然，吾人卽採用二者之平均數，於理亦無不合；算術平均數爲 206.8，幾何平均數爲 206.74，倒數平均數爲 206.69，各數相差無幾，吾人究用何數，並無關係。否則不妨介紹一含義淺顯之法，卽依次計算各數量之平均數 $(\frac{1}{2}(Q_1+q_1),\ \frac{1}{2}(Q_2+q_2),\cdots\cdots)$，並求各年之費用，而比較各年費用之總數。於是得出 $\frac{S(Q+q)p}{S(Q+q)P}\times 100=203.7$。至加於價格比率之權數，則爲

$$(Q+q)P \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (c)$$

另有一法，乃以每項物品兩期中費用之平均數，作爲該項價格比率之權數，乃得

$$\frac{S(E+e)\frac{p}{P}}{S(E+e)}=198.6 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (d)$$

雖然，此式在分子中，含有 p^2/P 一數量，因此乃對於某一商品價格之異常運動，給以不正當之加重。

如不知數量之多寡時，價格比率之簡單平均數

$$\frac{1}{n}S\frac{p}{P}\times 100=209.1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (e)$$

有時亦可用之；但在此問題而忽略權數，雖不必求得極大之精度，究非妥當之辦法。

最後一法，手續繁複多多，蓋在此法之下，必須假設第二年之費用總數，其中各項概依第一年之比例而耗用，且第二年所購各項物品之數量，須以第一年之價格而計算其價值。第一年實在全部費用（以 100 乘之），對依上法算出之費用之比率，等於

$$\frac{100Se}{S\left\{E_1\frac{Se}{SE}\times\frac{P_1}{p_1}+\cdots\cdots\right\}}=100\frac{SE}{SE\frac{P}{p}}=196.4\cdots\cdots\cdots\cdots(f)$$

此處加於價格比率$\frac{p}{P}$之權數，乃為 $QP^2\div p$，此一權數，與第(*d*)例同，對於特別價格，亦給與以不當之權數。並且吾人殊無理由可以假設各年費用中各項物品始終保持定比也。

以上所述度量零售物價六法，究以何法為最佳？此一問題迄今尚無一致公認之結論；但對於(*d*)，(*e*)，及(*f*)三者，則有基於理論之嚴重反對論。(*a*)與(*b*)之間，一般無甚差別，但為達到此目的，此一年旣有併入計算之必要，彼一年又何獨不然，故吾人不若用二得數之平均數之為愈。在此各種辦法中，平均諸數量之方法，以(*c*)為最敏捷，計算極簡易，亦卽基於一切理由堪以介紹於吾人之前者也(註一二)。

度量零售物價之運動一問題，一般多與用兩期間之同一項目以度量一標準(此標準代表最低生計(minimum subsistence)或代表有效生計(efficiency subsistence)之費用之變動一問題，混為一談。本書對於此項度量法之細節，本不預備多所討論，惟吾人不可不知者，各種商品之供給上及價格上之變動，乃為連續不斷者。對於每一份家庭預算，吾人必須假定在每一日期以最經濟的購買，各得到同一之滋養物（以更廣泛之語言之，各得同一之滿足），如是則價格上漲最少，下落最多之各種食物數量必增

加,而價漲多落少之食物數量則減少,故上升運動必較用 (a) 法所量得者爲小,而下降運動必較用(a)法所量得爲大也(註一三)。

其他之難點　此外尙有妨礙本問題不能作完全解決之困難兩點,不能不加以考慮。在所有之家庭預算中,房租乃一重要之項目,而增加房租與設備改良(連同與房租一併繳納之捐稅而享受公共支出所給予之利益在內)之關係,現似無有良好估計之期望。再者,假如吾人考慮者,非問錢如何用去,而爲應如何用法,則吾人不得不提出一較爲普通之因子;蓋在必需業已滿足後尙留之邊際,其購買力增漲必甚速,以機製產品種類日繁,而價格日低也;在躉售物價中已算出之降落,或可卽足作爲此一增長之優秀度量焉。

消費指數　姑置此一極難問題而不論,吾人可請仍就對於較爲特色之指數之數量度量法,略一探討之(註一四)。吾人如須度量一一原因之作用,而此原因所支配之數量,並無公同之度量,則仍可用指數以度量之。進口貨物之消費量,已有一般之增加,故如能對此種消費量之增加,加以度量,但並不使其因物價之變動,而受何影響,則吾人卽可用此消費增加量,以批評實際工資之運動之任一度量法矣。麵包,葡萄乾,牛奶酪,肉,以及其他等物品之實在價値,唯一之普通度量,厥爲各該物品之價格,至其重量在此處乃毫無用處可言;故不得不另用其他方法。如將此種物

品若干按年消費之數量一一記下，而以任一年（不必均用一年）消費量之百分數表示之，乃卽得一列僅須加權卽成所求指數之數字。在此情形之下，吾人可以證明：關於權數任何合理之採擇方法，只須以物品之價値或各項物品假定之重要性爲根據，甚或卽用隨機權數方式，其所得之指數，無不與用簡單算術平均數所得者相同。實際上，吾人如有十分良好之一組樣本，吾人幾可完全脫離權數而獨立運用之也。如事實果然如此，則吾人可具有把握而謂所求之數卽在由各種權數方式而來之一羣附近，於是卽擇其似最合理之方式，以作爲吾人所採用之估計數可矣。在務德（Wood）先生一八九九年英國統計學報所載之『勞工階級進步之數種統計』一文中，僅有十四項商品，所用權數有五種不同之方式，而所得答數，在一八七三至一八九六年期間中，消費之增加，均在百分之一三・八，與百分之二〇・一之間。

工資指數　指數在工資統計上之應用，其中並不含有任何新原則。惟在編製工資指數之時，對於權數之變動，不可置之不顧；非然者，工資上漲者人數增加之一般傾向，必無從得知。在各別平均數之中，極有陷於偏誤之危險；蓋加工之工資，特高之計件工資，人類極多而無聯絡之低技能或待遇惡劣工人之工資，往往不見於工資記錄中也。雖然，此等偏誤在比較時乃有趨於消滅之傾向；故由此足見吾人頗有製成具有頗佳確度之工資指數之

可能(註一五)。

(註一)　本文一部分乃係由一九一二年統計學報第七百九十一至七百九十五頁摘錄而來。

(註二)　如重新排列之後,此一方程式可即由 $y=a+bx$ 得之。

(註三)　見一八九七年六月份之英國經濟學報(Economic Journal)及統計學報。

(註四)　見經濟學報,但對於權數之說明,則已加修正。

(註五)　關於此點,以及本章其他各處,請參閱帕爾格拉夫(Palgrave)之經濟學辭典(Dictionary)中『指數』一條。

(註六)　讀者可參閱一九〇〇年統計學報第九十七及九十八頁。

(註七)　孫巴克氏之指數,見彼在統計學報中每年發表一次之文;另外並有一表示自一八二〇年以來各年指數之圖式,係 P. S. King and Son 書店所印行。

(註八)　請參閱塞可利斯特(Secrist)著,統計方法概論 (An Introduction to Statistical Methods), 一九一七年版,第三百二十九頁三百三十九頁,及三百四十頁。並參閱美國勞工局統計公報 (Bulletin of the U. S. Bureau of Labour) 總號一八一,一九一五年十月號。

(註九)　見本書第二編第四章。

(註一〇)　請參閱帕爾格拉夫氏編經濟學辭典第六百四十至六百四十一頁『名義工資與實際工資』一條。

(註一一)　此處及上下文之一部,均摘錄於統計學報一九一九年第三百四十三頁起之『對於生活費變動之度量』一文。

(註一二)　此意見已異乎本書以前各版所持之論調。爲求更進一步之參考,可閱帕爾格拉夫氏編經濟學辭典,關於工人家庭預算(Workingmen's Budget)之參考書目。

(註一三)　關於此種問題之討論,請參閱一九一九年五月份統計學報,『生活費』一文。

(註一四)　下舉例解,乃以務德(G. H. Wood)先生載於一八九九年英國統計學報『勞工階級進步之數種統計』一文爲根據。

(註一五)　關於此種方法及各項因子,若欲求完全之例解,請參閱『英國工資統

計，第十四編，工程及造船」，見於一九〇六年三月份統計學報，第一百五十四頁起，尤以一百六十六，一百六十八，及一百八十五諸頁爲重要。

第十章　插補法

第一節　總論

插補之必要　在實用統計中，吾人對於時間數字往往不能隨將來進一步研究之需要，作成頻繁之時間數列，或將羣類作一極詳盡之鋪敍。例如一國之人口，只能每十年舉行一次；但吾人需要以按月或按年之記錄——如出生率、死亡率、貿易報告……等等——與現有人口數，聯成密切之關係，又如國家之概算，賦稅之收入，尤須以當年納稅人數之估計數爲基準：故在不舉行人口普查年間而估計人口數，誠有插補(interpol te)之必要也。再者，作依年齡分配之人口數報告，乃爲保險精算工作及社會學研究所必需，而此亦非用插補法推算不可。英國人事登記舉辦之戶主報告表，在名義上原確爲當年之年齡報告，無如實際上任人皆知其並不確實，以其每有塡報接近之整略年齡之情勢也；比較言之，塡報年齡在三十五至四十五歲之間者，尙屬較爲正確，蓋報告年齡爲四十歲之人，其年齡或許不致超出四十歲上下五歲之外也。實則英國在一九一一年以前之原始報告，錯誤之處尙不止此，故歷次登記，迄未實行發表，其發表者亦不過以十歲爲一組

之分類人數而已。然則由此分類之人數，自非對各歲年齡之人數，加以估計不可矣。且也，英國一八八六至一八九一年舉辦之工資調查，編製人員計算賺各級工資之人數，乃按『十五先令以上而不滿二十先令者』，『二十先令以上而不滿二十五先令者』……等組分類，並非以一先令爲工資組距之人數也。然在與工資有關之問題中，常時有須詳加推算之必要；且在吾人欲以英國工資，而與法國工資羣類作比較時，必須釐定一種計劃，使二法郎之分組，可與五先令之分組相比較，而此則非用一適當之插補法不可者也。

插補法之需要，當吾人欲比較性質相同而排列方式不同之羣類時，尤極常見。例如，兩國舉行人口普查之日期不同者卽是。一國之人口數，年齡以十五歲爲一組，而另一國則以十歲爲一組；一國以不滿二十一歲者爲未成年人，而另一國則以十八歲以下者爲未成年。至於不定期之估計數，兩國之日期，鮮有能適合者；例如法國之工資統計已舉辦者，有一八四〇，一八五〇，及一八九二年，而英國則爲一八六六，一八八五，一八八六，及一八九一年。在以甲國與乙國比較時，必可求出相同之差度；在此情形之下，決定平均數之方法，必須加以討論，而此一討論，卽將爲幾個初步插補法問題之例釋焉。

初級例證 下列一表，假設表中之正體數字，爲某三區域每

週工資之確實調查數字，茲請就三區中求其整個之平均變動。

	一八六〇		一八六二		一八六四		一八六六		一八七〇		一八七一		一八七五		一八七八		一八八〇		一八八一	
	先令	便士	先令	便士	先令	便士	先令	便士	先令	便士	先令	便士	先令	便士	先令	便士	先令	便士	先令	便士
甲區	12	6	15	0	*15*	*0*	15	0	*15*	*0*	14	6	18	0	18	0	17	6	17	0
乙區	18	0	*19*	*0*	19	0	*20*	*0*	20	0	*19*	*6*	*21*	*0*	21	0	*20*	*6*	20	0
丙區	10	0	*11*	*0*	11	0	12	0	*12*	*0*	*12*	*0*	15	0	*15*	*0*	15	0	*14*	*6*
平均數	*13*	*6*	*15*	*0*	*15*	*0*	*15*	*8*	*15*	*8*	*15*	*4*	*18*	*0*	*18*	*0*	*17*	*8*	*17*	*2*

試觀此表，可知吾人必須由此資料中，求出關於工資一般行程之事實，惟此表所示與吾人者，並不明鮮。上列表中之斜體數字，乃有其自然之成立理由，甲區在一八六二至一八六六年間，並無何種變動，故一八六四年之工資，必爲十五先令無疑。再由乙區判斷，甲區一八七〇年之數字，似不致比一八六四年之數字爲低，故甲區一八七〇年之數字，可寫爲十五先令。甲區旣告完全，然後吾人觀察甲區中之初度上升，終止於一八六二年，假定乙區情形與甲區同，則乙區一八六二年之數，必爲十九先令。丙區中之數字，自一八六四年上升，至一八六六年停止，而在甲區，一八六六至一八七〇年間，並無任何變動；假設吾人以乙區一八六六年之數字爲二十先令，則乙區必與甲丙兩區相呼應。設乙區中之數字，一八七一年爲十九先令六便士，一八七五年爲二十一先令，一八八〇年爲二十先令六便士，則一八六六至一八八一年

間，甲乙兩區必成密切之相應。基於同一理由，吾人可將丙區之數字補插而得。於是逐年之不加權平均數，吾人乃可求得，但若用當時日期則不能直接算出也。此一平均數對於原始數字之變動，均能發生反應，惟對任何部分，則並無特殊之加重。由此觀之，此插補完成之數列，可視爲以所有資料爲基礎之最或然之數列也。

事先之假定 在施用此法之前，不言而喻，必有數種假定，茲就此種假定檢討之。第一項假定，假設各數字間並無猛烈之升降，假設一八六四年甲區，絕不許有二十先令之存在；此一假定，必須有兩個先決條件，能滿足此二條件，假定乃可認爲正當而無誤，第一條件，必須熟知支配工資率之一般原因，第二條件，兩期之間，數字必須確知並無激烈之波動。由此論之，當美國南北戰役時，吾人對於棉織工業之工資，即不能施用此一假定，對年代甚長之數列亦然。

第二假定，假設如果同時並無反面的證據，則數字之上升與下降，必係協和運動。例如，乙區中一八七八至一八八一年間，一八八〇之工資，乃即吾人假定爲在一八七八至一八八一年間者；假如在甲區各工資分點之間，並無恰在中途之證明，則可謂其乃在時間行程上之三分之二，故如不用整略數，則一八七九年之數，必須以二十先令八便士插補之，而在一八八〇年，則須以二十先

令四便士插補之。

第三，假定三個區域之工資運動行程，彼此相同。例如甲區在一八六〇至一八六二年間，有上升之趨勢，但在一八六六年以前，迄無任何之進展；故吾人假定乙丙兩區記錄上在一八六四年以前之上升運動，確於一八六二年以前實現。又在一八七〇至一八七五年間，甲區工資一直瀉落以至一八七一年爲止，乃又儘情上升而達一八七五年之高度，其後直至一八七八年爲止，竟無任何變動；故乙區工資率之運動，吾人假定在一八七五年之工資，乃與一八七八年者相等，並且一八七八年之下降，乃爲事實所許可，因此一降落，乃愈促成一八七一至一八七五年上升之尖銳也。至在丙區中，一八七一年之十二先令，是否不應爲十一先令六便士，則頗堪致疑。反對此一判斷之理由無他，乃以一則低工資上之增加，不若在高度工資上之增加之易於消滅也；由十二先令中減落六便士，其降落程度，就比例言之，必比由十五先令中減去六便士者爲大；二則在一八七一至一八七五年顯現之三先令六便士之增加，較之甲區或乙區中之上升，比例較大多多；三則一八七〇至一八七一年之降落之存在，乃純由在一八六六至一八七一年間有下降趨勢之證據之故。

數字僅有數個時，必須依上所述詳加分析而求出其最或然之數字；且如此辦理往往頗易補塡對於現存證據適合十分密切

之數字。然於此乃立時發生一疑問：此種數量依假定既爲未知數，則謂此種數量在實際上無論遠近終必近於在表面上爲最或然之數字，吾人究有何種把握耶？

測驗法 在數種插補問題如現在所論者之下，此一問題，吾人可以一數學機率用語答覆之。所謂數學機率用語，例如，與某一數字相差六便士之機率，以二對一而失敗，與某一數字相差一先令之機率，以三〇對一而失敗，與一數字相差二先令六便士之機率，以一〇〇〇對一而失敗……等等即是。惟在調查時最常偶然出現之數字中，求得確然如此之機率，乃不可能。玆有一簡略但甚有效之方法，可用以測驗上舉一例中插補結果之確度，仍請舉例以明之。現欲測驗者，爲吾人所算出之一八七〇年平均數，在不致十分防害吾人對於本問題之常識範圍內，究爲多少。將甲丙二區在此數十年間儘量擴大；因乙區在一八六四至一八七〇年間，曾有一上升現象，吾人或可由此假設在一八六六年之上，有一先令之上升。如熟知決定此數十年間工資率之原因，則吾人幾不能假設，一八七〇年之數字，與一八七五至一八七八年同其高度，亦不能假設在此一年中工資大爲降落，計有二先令之多。假設甲區之最高工資，爲十六先令六便士，丙區之最高工資，爲十三先令六便士，則吾人所得之平均數，乃爲十六先令八便士，而非十五先令八便士。依此同理，吾人或可以十四先令爲一八七

〇年甲區之最低工資，以十一先令爲一八七〇年丙區之最低工資;如是，則平均數必爲十五先令。假設吾人對於在此數十年間事象之一般趨勢，所知甚詳，足以依此方法決定數字大小之範圍，則吾人可以斷定:一八七〇年之平均工資，最小少於十五先令，最大多於十六先令八便士之事，或不易見，而且依證據所示，平均工資爲十五先令八便士一語，勢乃有所難能。

由此觀之，吾人所行插補結果之確度，乃視下列兩件而決定:(一)爲吾人對於數字之可能變動之知識，此種知識之取得，必須就數字所出現之期間，觀察數字之一般變動;(二)爲吾人對於事象(此種事象，卽與數字關聯)運動過程之知識。

數字計算舉例　玆爲例釋數字計算方法起見，特取用同類資料(註一)，作爲第二例如下:

英國北部各郡	農村每週工資			
	一八六七至一八六九		一八六九至一八七〇	
	先令	便士	先令	便士
且協爾	*13*	*1*	13	6
耶加協爾	15	0	15	0
約克協爾西區	14	6	16	5
東區	14	6	*14*	*11*
北區	14	6	15	4
得由漢姆	16	6	16	0
腦贊伯蘭	16	6	16	7
可伯蘭	*14*	*4*	14	9
外斯特摩蘭	*15*	7	16	1

上表資料就兩期原有數字之五區而論，一八六七至一八六九年一期之五區工資平均數，爲一五先令四・八便士，一八六九至一八七〇年之平均工資，爲一五先令一〇・四便士，換言之，卽爲三三與三四之比。吾人如假定，除此五郡之外，其他各郡之工資，乃受同一原因之支配，並依同一之比率增加，則吾人得列如上表之插補數字。經此補插之後，於是英國北部各郡工資之不加權平均數，在一八六七至一八六九年，爲一四先令一一便士，在一八六九至一八七〇年，爲一五先令五便士，而非原來僅有五區數字之平均數，前期一五先令三便士，後期一五先令五便士矣。如就英國全國以前期與後期作一般比較，吾人只得删略前後兩期中無數字可查之各郡，以免無端掣低一般之平均數，蓋近年來此等各郡之工資，雖較北部各郡平均工資爲低，但終比英國全國總平均數爲高也。在同時，吾人必將北部各郡顯然可見之平均數，作不公正之擡高，且吾人必已失去特別數郡在前期（唯前期乃爲較安全之基礎）之或然數字；蓋北部各郡在最後五十年中，幾全維持於同一狀態之下。由此觀之，可見此類工資，並不若非由補插而來之工資之確實，故吾人務宜留心以此等數字爲基礎之論辯，察其應用之插補數字，究有幾何也。

此種方法，與用以爲在一校中上課時缺席學生判分所用者，頗相近似；給分時一方固須注意該生在同班中之一般地位，一方

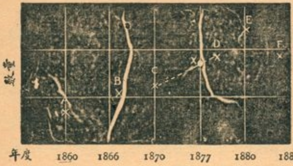
尤須注意缺席學生中除該生外班中其餘之缺席學生所得分數之平均值。

辨別插補數字之必要 此法雖已甚爲完全，但插補數字之證據，與用直接證據結果而得之數字，大不相同，此點吾人務須認清。在某種情形之下，此種插補數字，有時乃代表並不存在之數量（如上述之學校分數），而此數量之用途，亦不過爲計算便利而已。在他種情形之下，此種插補數字，僅爲一種因認識不足而誤作最或然之數字。故此種數字，務須明白註明乃爲插補數字；最佳更須敍明求得之方法，如有任何附帶資料（此種資料有時可視爲證明確度之直接證據），亦須敍及，並且如實際上爲可能時，此種數字，不妨作爲並不確切之資料，而視爲有某種範圍中之伸縮性；如且協爾郡之插補數字，可以寫作一二先令六便士至一三先令六便士，不必竟謂爲一三先令一便士也。

論及插補法，其問題有種種不同，其中有須以代數解決者，容在下節討論之，其他數種可以數字例題解釋之如下。

用圖插補法 用圖插補法——設已知各別位置上之數值，如年齡二五至三五歲，三五至四五歲……之人口數；如一八七一年，一八八一年，一八九一年……之人口數；如一八六〇年，一八七〇年，一八七三年……之工資；如工資在一五先令至二〇先令，二〇先令至二五先令……之人數，則吾人可用如下圖式表示事

實:



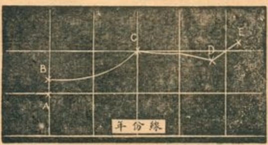
（第二十一圖甲）

設吾人需要一八七五年之數值。如圖上僅有C，D兩點，則一最簡單亦即無反面證明始生效之假定，乃為C與D間之數量，乃依同樣的步調逐漸增加；於是 CD 一條直線，即代表此種增加趨勢，則 x 點之高度，必代表一八七五年之數量。

如另外已有一個E點，則 CD，DE 兩條直線所代表之假定，必不能成立，蓋此假定乃假設在一致趨勢中間，忽於一八七七年之D點，驟然折斷，而所謂一八七七年D點之折斷，並無證據存在也。然則吾人不可不就所有各已知點通盤計議，即經過此等所有各點，畫一條線，此畫成應之線，應儘量使其均勻，曲折力求減少，蓋若無反對方面之證據時，吾人即假定在此種數量中間，並無猛烈變動也。此一曲線之構成，可以用數學原理為基礎，不然即用隨手畫法 (freehand method)，亦無不可；如果採用隨手畫

法，則所畫之線，必時常隨所持論辯之許可，十分接近事實。

此一方法，只可用於連續之數量，如各級年齡之人數，各年份之人口數，一極大工資羣類中，各級工資上之人數均是。例如，英國全國之平均工資，變動必甚遲緩，但倫敦一市建築工人之工資，乃竟因某日罷工議和之結果，驟起猛烈之變動。在此情形之下，繪曲線必須盡力之所能以求切合證據；例如下列第二十一圖乙：



（第二十一圖乙）

圖中 AB 線代表驟然之昇進；BC 線代表因商業發達之逐漸加速度的增加，CD 線爲工資到達 C 點後之遲緩下降勢，至 DE 線，則爲一堅挺而蒸蒸向上以謀恢復已往頹勢之力量。

循環數字　吾人如知每一年爲一週期之數字之每年平均數，並設有若干每月平均數，足以用第七章第四節所述方法，推測此種數字之循環變動，則任何月份，苟有關調查材料，雖甚確

實可信，但惜殘缺不全時，吾人均可插補之。例如就英國勞工公報所載之失業人數而論，在所有各月份中，週期雖不甚顯著，但吾人仍能查出其週期，蓋在春季必有普遍之降勢，晚秋必有一般之升勢，而六月份則大概均爲最低之月份。於是吾人頗可應用前在第七章第四節所列之第十七圖甲、乙、丙三圖，先將所用之資料，在圖上標示各點，然後隨平均數線之或爲上升，或爲靜止不動，抑或下降，畫出波浪曲線，則各變動之曲線，必經過已有標記之各點。次再檢察原有數字之大概性質，則結果所得之數字，確實程度何若，吾人卽可知之；並由該公報查得：一則失業人數百分數，一月中變動向無有過於兩單位者，二則變動向無延時在三四月以下者；三則失業人數百分數，向無有在一以下或在一〇以上者。最後吾人可察視某日之商業盛衰史，並由此所得之結果，可拒斥任何不可能之數字。

補助曲線之利用　如吾人採用第七章第三節所述之構圖法，及同章第五節所述之變動方程式，而能查出兩組數列間之密切關聯，則可擇其較完全之一組，以便補插另一組缺失之數字。當此之時，第一必先詳細檢閱兩組數列在均有完全數字時之相應密切度及相應性質。次復依照類似前在第七章第三節所列第十三圖之形式，另行作圖，而圖上各線之中，留有一不完全之線。然後完成此一殘缺之線，使其隨原有各點之地位，儘量與已完成

之線相切合，於是吾人對於缺失之數字，卽得最或然之數值矣。至於由此所得之結果，確度如何，測驗之法，與前論相同。此一方法用以插補數字，用途甚多：如用一財源之收入，以插補另一財源之收入；如用進口貨值以插補出口貨值；如用對外貿易數值以插補結婚率；如用一區域之工資，以插補另一區域之工資；如用食物消費量之變動，以插補失業之人數；如當吾人知全部人口之變動情形時，以插補一部人口之變動狀況，以及其他甚多之數列等均是。

第二節　代數方法

插補問題，最值得吾人注意者，可述之如下：當有一數量呈現連續性之有規則變動，另有一數量，其變動與前一數量發生聯結關係，且吾人已知此第二數量之某某僅有數個之不連續數值，或能直接推算出來時，則吾人之任務，卽在為此第二數量與第一數量相當之某項數值，求出其或然值。例如，已有至一五歲，二〇歲，二五歲……等等年齡後之壽長平均數，吾人須求出中間年齡之壽長平均數；或如已有某國在一八七一，一八八一，一八九一，及一九〇一年之人口數，須求其在中間年份之人口數。於此有唯一為情理所許之假設數則：其一，假設數量必連續變動，換言之，卽任何中間數，絕無破裂之處；其二，假設數量之變動率，亦為連

續不斷，換言之，卽代表變動之線乃爲平滑均勻者，而非爲多角形。

研究插補法，有系統之探討，只能用代數上之有限相差(finite difference)一法，惟欲應用此法，不可不自符號之定義，及若干基本公式之導來始。

（一）設 y 爲 x 之連續函數，並設 y_0, y_1, y_2,……爲 y 之各值，同時 x 之各值則爲 x_0, x_1, x_2……。

於是吾人排成一表如下：

x之值	y之值	第一相差	第二相差	第三相差
x_0	y_0			
x_1	y_1	Δ_0^1	Δ_0^2	
x_2	y_2	Δ_1^1	Δ_1^2	Δ_0^3
x_3	y_3	Δ_2^1	Δ_2^2	Δ_1^3
x_4	y_4	Δ_3^1	Δ_3^2	Δ_2^3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

此處每一 Δ，乃由前一欄恰在其下之項，減去前欄恰在其上之項；例如，$\Delta_0^1=y_1-y_0$, $\Delta_1^1=y_2-y_1$,……。$\Delta_0^2=\Delta_1^1-\Delta_0^1$,……。$\Delta_0^3=\Delta_1^2-\Delta_0^2$……。此表假設之可以向下並向右無限繼續。

於是吾人可得

$$\Delta_0^2=\Delta_1^1-\Delta_0^1=(y_2-y_1)-(y_1-y_0)=y_2-2y_1+y_0$$

$\Delta_t^2=y_{2+t}-2y_{1+t}+y_t$，式中 t 爲任何整數。

$$\Delta_0^3=(y_3-2y_2+y_1)-(y_2-2y_1+y_0)=y_3-3y_2+3y_1-y_0$$

$$\Delta_t^3=y_{3+t}-3y_{2+t}+3y_{1+t}-y_t$$

且就一般情形論之，如用普通證明二項定理常用之歸納法，並均含同一係數，則

$$\Delta_0{}^r=y_r-r.y_{r-1}+\frac{r(r-1)}{1\cdot2}y_{r-2}-\frac{r(r-1)(r-2)}{1\cdot2\cdot3}y_{r-3}+\cdots\cdots$$

直至 $r+1$ 項爲止$\cdots\cdots(\alpha)$

$$\Delta_t{}^r=y_{r+t}-r\cdot y_{r+t-1}+\frac{r(r-1)}{1\cdot2}y_{r+t-2}+\cdots\cdots$$ 直至 $r+1$ 項爲止$\cdots\cdots(\beta)$

式中，r 爲任何整數。

又得

$y_1=y_0+\Delta_0{}^1$，及 $y_2=y_1+\Delta_1{}^1=(y_0+\Delta_0{}^1)+(\Delta_0{}^1+\Delta_0{}^2)=y_0+2\Delta_0{}^1+\Delta_0{}^2$，

同理，$\Delta_1{}^1=\Delta_0{}^1+\Delta_0{}^2$，

且 $\Delta_2{}^1=\Delta_1{}^1+\Delta_1{}^2=(\Delta_0{}^1+\Delta_0{}^2)+(\Delta_0{}^2+\Delta_0{}^3)=\Delta_0{}^1+2\Delta_0{}^2+\Delta_0{}^3$。

$$\therefore\quad y_3=y_2+\Delta_2{}^1=y_0+3\Delta_0{}^1+3\Delta_0{}^2+\Delta_0{}^3,$$

且依同理　$\Delta_3{}^1=\Delta_0{}^1+3\Delta_0{}^2+3\Delta_0{}^3+\Delta_0{}^4$。

依此程序，繼續向下推演，吾人可重得兩項係數(the Binomial Coefficients)，則

$$y_r=y_0+r\cdot\Delta_0{}^1+\frac{r(r-1)}{1\cdot2}\Delta_0{}^2+\cdots\cdots$$ 直至 $r+1$ 項爲止$\cdots\cdots(\gamma)$

$$\Delta_r{}^t=\Delta_0{}^t+r\cdot\Delta_0{}^{t+1}+\frac{r(r-1)}{1\cdot2}\Delta_0{}^{t+2}+\cdots$$ 直至 $r+1$ 項爲止$\cdots(\delta)$

更往下推演之，則

$$y_{r+s}=y_s+r\cdot\Delta_s{}^1+\frac{r(r-1)}{1\cdot2}\Delta_s{}^2+\cdots\cdots$$ 直至 $r+1$ 項爲止$\cdots\cdots(\epsilon)$

式中 s 爲任一整數。

例如，設 $y=x^4$，並設 x 之各値爲 0，h，$2h$，$3h$，$\cdots\cdots$則

x之值	y之值	相差 第一級	第二級	第三級	第四級	第五級
0	0	h^4	$14h^4$	$36h^4$	$24h^4$	0
h	h^4	$15h^4$	$50h^4$	$60h^4$	$24h^4$	0
$2h$	$16h^4$	$65h^4$	$110h^4$	$84h^4$	$24h^4$	
$3h$	$81h^4$	$175h^4$	$194h^4$	$108h^4$		
$4h$	$256h^4$	$369h^4$	$302h^4$			
$5h$	$625h^4$	$671h^4$				
$6h$	$1296h^4$					

由公式(α)得

$\Delta_0{}^4=(256-4\times 81+6\times 16-4\times 1+0)h^4=24h^4$,此處$r$等於4。

由公式(β)得

$\Delta_0{}^5=(7^4-5\times 6^4+10\times 5^4-10\times 4^4+5\times 3^4-2^4)h^4=0$,

式中 $r=5,t=2$。

由公式(γ)得

$(5h)^4=(0+5+10\times 14+10\times 36+5\times 24+0)h^4=625h^4$,

式中 $r=5$。

由公式(δ)得

$\Delta_2{}^3=(36+2\times 24+0)h^4=84h^4$,式中$r=2,t=3$,

又由公式(ε)得

$(5h)^4=(16+3\times 65+3\times 110+84)h^4=625h^4$,式中$r=3$,

$s=2$。

(二)如y與x之關係,成爲下列形式:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots a_nx^n,$$

x之值又係成爲算術級數,即依次爲$x_0,x_0+h,\cdots\cdots x_0+(n-1)h$,

則由此可知$\Delta_0{}^n=a_n.h^n n$，且除此之外，更無較高級之相差。

因爲$\Delta_0{}^1=a_0-a_0+a_1(x_0+h-x_0)+\cdots\cdots+a_n\{(x_0+h)^n-x_0{}^n\}$

$$=ha_1+\cdots+a_n\{nhx_0{}^{n-1}+x_0\text{ 之次級乘方}\}$$

$$\Delta_1{}^1=ha_1+\cdots+a_n\{nh(x_0+h)^{n-1}+(x_0+h)\text{之次級乘方}\}$$

$$\Delta_0{}^2=2h^2a_2+\cdots+a_n\{n(n-1)h^2x_0{}^{n-2}+x_0\text{ 之次級乘方}\}$$

由此可知 $\Delta_0{}^1$ 之乘方，最高無過於 $x_0{}^{n-1}$；$\Delta_0{}^2$ 之乘方，最高無過於 $x_0{}^{n-2}$。

繼續向下推演——

$$\Delta_0{}^n=a_n n(n-1)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1h^n=a_nh^nn!\cdots\cdots(\zeta)$$

於是$\Delta_0{}^{n+1}$及更高級相差，乃完全消滅。

在上一例中，$y=x^4$，$a_n=1$，$n=4$，故

$$\Delta_0{}^4=1\cdot h^4\cdot4!=24h^4\text{，又}\Delta_0{}^5=0\text{。}$$

反之，假設相差至第n級爲最高，其上更無相差，則如下列附註所證明，y 與 x 之方程式，乃爲下一形式：$y=a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_nx^n$。

附註 ——相差 (Difference) 與引申函數 (Derived Functions) 或各微係數 (Differential Coefficients) 之關係，在相差原理上，佔有極重要之地位，茲可以運槓微分法 (Method of Operators) 簡括表明之。

援用微積分常用符號，依照台洛爾氏定理 (Taylor's Theorem)，得公式如下：

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2!}h^2f''(x)+\cdots\cdots=e^{hD}\cdot f(x),$$

式中 D代表連續微分，至e^{hD}則須展開爲$1+hD+\frac{1}{2!}h^2D^2+\cdots\cdots$，然後用之將$f(x)$各項依次展開。D之所以用爲一代數符號，純因有$D\{Df(x)\}=D^2f(x)$，$D^m\{D^nf(x)\}=D^{m+n}f(x)$，$aD(f(x))=D(af(x))$，……之關係。

但 $\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)=(e^{hD}-1)f(x)$。

$\Delta\{af(x)\}=a\Delta f(x)$， $\Delta\{\Delta f(x)\}=\Delta^2f(x)$，

$\Delta^m(\Delta^nf(x))=\Delta^{m+n}f(x)$，Δ亦作一代數符號用之。

故 $\Delta\equiv e^{hD}-1$

$\Delta^n\equiv(e^{hD}-1)^n=(hD+\frac{1}{2!}h^2D^2+\cdots\cdots\cdots)^n=h^nD^n(1+\frac{1}{2}hD+\frac{1}{6}h^2D^2+\cdots\cdots)^n=h^nD^n(1+\frac{n}{2}hD+\frac{n(n+1)}{24}h^2D^2+\cdots\cdots)\cdots\cdots(1)$

且 $hD\equiv\log(1+\Delta)$

$h^nD^n\equiv\{\log(1+\Delta)\}^n=(\Delta-\frac{1}{2}\Delta^2+\frac{1}{3}\Delta^3\cdots\cdots)^n$

$=\Delta^n(1-\frac{n}{2}\Delta+n\frac{(3n+5)}{24}\Delta^2+\cdots\cdots)\cdots\cdots(2)$

但如 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_nx^n$，

$D^nf(x)=a_n\cdot n!$，

及 $D^{n+1}f(x)=0=D^{n+2}f(x)\cdots\cdots$

∴ $\Delta^nf(x)=h^na_nn!$，又依公式(1)，則

$\Delta^{n+1}f(x)=h^{n+1}D^{n+1}(1+\cdots\cdots)f(x)=0$，如上正文。

反之，如$\Delta^{n+1}f(x)=0=\Delta^{n+2}f(x)=\cdots\cdots$

則由公式(2)，$D^{n+1}f(x)=0\cdots\cdots D^nf(x)=$常數$=c_n$，

$D^{n-1}f(x)=c_nx+c_{n-1}$，

$$D^{n-2}f(x)=\frac{1}{2}c_nx^2+c_{n-1}x+c_{n-2},$$

及
$$f(x)=\frac{1}{n!}c_nx^n+\cdots\cdots+c_1x+c_0。$$

故第 n 級相差如爲常數,則此函數爲有理的,整數的,並爲第 n 次方。

牛頓(Newton)氏插補公式,如下(K)所述,用連續微分法,可簡捷求得如下:

$$y=f(x_0+k)=e^{kD}f(x_0)=(1+\Delta)^{\frac{k}{h}}f(x_0),\text{惟因 } e^{hD}=1+\Delta,\text{故}$$
$$=f(x_0)+\frac{k}{h}\Delta f(x_0)+\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{h}\left(\frac{k}{h}-1\right)\cdot\Delta^2f(x_0)+\cdots\cdots$$
$$=y_0+\frac{x-x_0}{h}\Delta_0{}^1+\frac{x-x_0}{h}\cdot\frac{x-x_0-h}{2h}\Delta_0{}^2+\cdots\cdots$$

在此式中,$x=x_0+k$。

當第 n 級相差(或曰第 n 次引申函數)爲零時,依公式(β)所示,應

$$y_{n+t}-ny_{n-1+t}+\frac{n(n-1)}{2}y_{n-2+t}\cdots\cdots\pm y_t=0\cdots\cdots(\eta)$$

不論 t 之值爲何。

(三)普通之插補公式,全以一假定爲基礎,在此假定之下,假設對於所求值所在地之鄰近地段之觀察數,可以一連續函數,$y=f(x)$代表之。

據假定,此函數可以展開爲 x 之一個冪級數,如一般對於連續函數(註二)然,則吾人可得下式

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n\cdots\cdots(\theta)$$

式中 n 爲 x 之最高乘冪之指數,其值如何,尙待加以決定。如a_0,

$a_1, \cdots\cdots a_n$ 各值選用得當，則此方程式可以若干$(n+1)$對之 x 及 y 值滿足之。例如，對於 $y=a_0+a_1x$ 一條直線，可以選定兩點（或云兩對數值），對於 $y=a_0+a_1x+a_2x^2$ 一條拋物線，可以選出三點，其他以此類推。

最簡單之形式，厥爲 $y=a_0+a_1x$；吾人採用此式，必須假定用成比例之部分（此法在用對數表，三角函數表及其他數學表時多施用之），以作插補，其結果尙爲確實。在此情形之下，此第一級相差，與第一次引申函數（或名線之斜度），必爲常數。

拋物線有三個數值，用此拋物線，必須假定斜度之變動，爲均勻一致，其第二級相差及其第二次引申函數，乃爲常數。

因更高級相差之差量，必須將項數加多，而函數之展開，至第 n 項卽行截止，必能與第 n 級相差之恆性相適應。

設吾人之問題，爲於一已知數學函數中之插補問題，則删略第 n 級相差之差量，對於計算上發生何等之影響，吾人可以測驗之。例如在一七位數對數表中，作下列之數字：

自然數	對數	相差				
		第一級	第二級	第三級	第四級	第五級
20	1.3010300					
		.0211893				
21	1.3222193		−.0009859			
		.0202034		+.0000876		
22	1.3424227		−.0008983		−.0000110	
		.0193051		+.0000766		+.0000015
23	1.3617278		−.0008217		−.0000095	
		.0184834		+.0000671		+.0000015
24	1.3802112		−.0007546		−.0000080	
		.0177288		+.0000591		+.0000016
25	1.3979400		−.0006955		−.0000064	
		.0170333		+.0000527		
26	1.4149733		−.0006428			
		.0163905				
27	1.4313638					

由此觀之，連續各次相差，依次漸減，甚有規則，至第六級，相差已絕不過.0000001矣。

此中原理，在統計上應用時，一般並不知有函數之存在，吾人只得假定，確有此函數存在，並可展開成爲一種收斂甚速之級數，惟其收斂甚速，吾人頗可刪略第五項（譬如說）後所有之各項；否則，如以稍欠準確之語言之，吾人假定此產生總計數之原因，乃有由此一點至彼一點依次逐漸變動之效果，故此種變動之差量，僅在一小部分間，甚屬輕微。

（四）設y之各值爲 $y_0, y_1\cdots\cdots y_n$，與此等數值相當者，則有x之距離均等各數值，如 x_0, x_0+h, x_0+2h, $\cdots\cdots x_0+nh$。由此吾人可求得公式 (θ) 之係數，特其中經過需用算術工作極其煩難，而較便應用之算式，尙有用相差法解算之一途也。

試請就下列一方程式而考慮之

$$y=y_0+\frac{x-x_0}{h}\Delta_0{}^1+\frac{x-x_0}{h}\cdot\frac{x-x_0-h}{2h}\Delta_0{}^2+\frac{x-x_0}{h}\cdot\frac{x-x_0-h}{2h}\cdot$$

$$\frac{x-x_0-2h}{3h}+\cdots\cdots+\text{直至 } n+1 \text{ 項爲止}\cdots\cdots(\kappa)$$

（牛頓公式）。

如 $x=x_0$，則 $y=y_0$。

如 $x=x_0+h$，則 $y=y_0+2\Delta_0{}^1=y_1$。

如 $x=x_0+2h$，則 $y=y_0+2\Delta_0{}^1+\Delta_0{}^2=y_2$。

如 $x=x_0+rh$, 則 $y=y_0+r\Delta_0^1+\frac{r(r-1)}{1\cdot 2}\Delta_0^2+$ 至 $r+1$項止，後而數項已消失，故依公式(γ)之規定，$y=y_r$。

然則(κ)顯而易見必為 n 次方，而且可以上述 n 對數值滿足之。

例如，用上列一表，求 $y=\log 20.5$。

$x_0=20, h=1, x=x_0+\cdot 5, y_0=1.3010300, \Delta_0^1=.0211893$，餘從略。

$$y_0=1.3010300+.0211893\times .5+\tfrac{1}{2}(.5)(-.5)(-.0009859)+$$
$$\tfrac{1}{6}(.5)(-.5)(-1.5)(.0000876)+\tfrac{1}{24}(.5)(-.5)(-1.5)$$
$$(-2.5)(-.0000110)+\tfrac{1}{120}(.5)(-.5)(-1.5)(-2.5)$$
$$(-3.5)(.0000015)。$$

取用為首二項，可得 $y=1.3116247$

取用為首三項，可得 $y=1.3117479$

取用為首四項，可得 $y=1.3117534$

取用為首五項，可得 $y=1.3117538$

取用全數各項，可得 $y=1.3117538$

至真值則為 1.3117539。

此點對於統計上之應用，容在第十目討論之。

（五）反之，吾人如已知 y，即可得一求 x 之方程式，而此乃可以亨納(Horner) 氏方法或他法解決之。

例如，吾人僅有四個觀察值，而欲求其中位數，則解算程序

如下。設有 y_0 人工資在 x_0 以下，y_1 人工資在 x_0+h 以下，y_2 人工資在 x_0+2h 以下，並有 y_3 人工資在 x_0+3h 以下，並設總數共有$(2y_m-1)$人，則 x_m (為 x 各值之一，與 y_m 相當)即為中位數。

$$於是\ y_m=y_0+\frac{x_m-x_0}{h}\Delta_0{}^1+\frac{x_m-x_0}{h}\cdot\frac{x_m-x_0-h}{2h}\Delta_0{}^2$$

$$+\frac{x_m-x_0}{h}\cdot\frac{x_m-x_0-h}{2h}\cdot\frac{x_m-x_0-2h}{3h}\Delta_0{}^3,$$

此為求 x_m 之三次方程式。

吾人有隨意以 x_0 為任何一組開始之自由固矣，惟分組之決定，應以中位數恰在插補之中間組為宜。例如，吾人如用上述二三次方程式，則包含中位數在內者，厥為 x_0+h 至 x_0+2h 一組。

前在第五章第五節所述求中位數公式之計算，即刪略其第二級以上之相差，並以 x_0 至 x_0+h 一組為含有中位數之組。然則 $y_m=y_0+\frac{x_m-x_0}{h}(y_1-y_0)$，故

$$x_m=x_0+\frac{y_m-y_0}{y_1-y_0}\cdot h。$$

如求衆數，吾人仍當以 y 為達於 x 值之累積數。據吾人所知，衆數乃為最簡單之一種，且就一般而論，只用四個觀察值即足，如此則衆數恰在第二與第三組之間。然後吾人只用公式(κ)之前四項，並求曲線最陡峭時，亦即橫坐標每一單位所佔次數為最多時，x 之值為何。然 D_xy 即為最大，則 $D_x{}^2y$ 必為零無疑。

$$0=D_x{}^2y=\frac{1}{h^2}\Delta_0{}^2+\frac{x-x_0-h}{h^3}\Delta_0{}^3。$$

$$故\quad x=x_0+h-\frac{h\Delta_0^2}{\Delta_0^3}=x_0+h+\frac{(u_2-u_1)h}{(u_2-u_1)+(u_2-u_3)},$$

在此式中，u_1 代表 y_1-y_0，u_2 代表 y_2-y_1，u_3 代表 y_3-y_2，而 u_1 即爲 x_0 至 x_0+h 之間之次數，u_2 爲 x_0+h 至 x_0+2h 間之次數，u_3 爲 x_0+2h 至 x_0+3h 間之次數。如衆數在第二組，則 $u_2>u_1$，而 $u_2>u_3$。該一公式，指示吾人，x_0+h 至 x_0+2h 間之組距，必須如何除之，以便求得衆數所在之位置。（請參閱第五章第四節『求衆數法』末段）。

（六）中間相差數——在插補法中，吾人往往只能應用 y 之若干値，而在此若干 y 値中，吾人欲以確定之某項數値之部位，乃在全部之中央，於是僅用公式 (θ) 以求之，有時必不能順利達到吾人之目的。當此之時，於是乃有同等公式產生，以避免偏態情形，此公式即應用所謂『中間相差數』(central differences) 者也。但此公式並不含有新的原理，實乃由公式(θ)轉變而成。至此爲止所用之相差數，爲別於其他之相差起見，可名之曰『升級相差』(ascending differences)。

其適當之符號，乃如下列：

$$\begin{array}{llllll}
x_{-2}=x_0-2h & y_{-2} & & & & \\
 & & \delta_{-\frac{3}{2}} & & & \\
x_{-1}=x_0-h & y_{-1} & & \delta^2_{-1} & & \\
 & & \delta_{-\frac{1}{2}} & & \delta^3_{-\frac{1}{2}} & \\
x_0 & y_0 & & \delta^2_0 & & \delta^4_0 \\
 & & \delta_{\frac{1}{2}} & & \delta^3_{+\frac{1}{2}} & \\
x_1=x_0+h & y_1 & & \delta^2_1 & & \delta^4_1 \\
 & & \delta_{\frac{3}{2}} & & \delta^3_{+\frac{3}{2}} & \\
x_2=x_0+2h & y_2 & & \delta^2_2 & & \\
 & & \delta_{\frac{5}{2}} & & & \\
x_3=x_0+3h & y_3 & & & &
\end{array}$$

此處 $\delta_{\frac{1}{2}}=y_1-y_0$；$\delta^2{}_0=\delta_{\frac{1}{2}}-\delta_{-\frac{1}{2}}=y_1-2y_0+y_{-1}$；$\delta_0{}^4=y_2-4y_1+6y_0-4y_{-1}+y_{-2}$，其他以此類推。

有一 x 值，同時必有一 y 值，今以 x 值除 x_0 至 x_1 之組距，使成 $p:q$ 之比率，則 $x=x_0+ph=x_1-qh$，而 $p+q=1$。

於是再用替換法，可知下一公式

$$y=py_1+qy_0-\tfrac{1}{6}pq\{(p+1)\delta^2{}_1+(q+1)\delta_0{}^2\}$$
$$+\tfrac{1}{120}pq(p+1)(q+1)\{(p+2)\delta^4{}_1+(q+2)\delta_0{}^4\}\cdots\cdots\cdots(\lambda)$$

（此式——以 $q=1-p$ ——乃爲一有理整數函數而爲 p 之五次方，同時亦爲 q 之五次方）必可以 $(x_{-2}y_{-2})(x_{-1}y_{-1})\cdots\cdots(x_3y_3)$ 六對數值滿足之；但若將含有第四級相差之一項删略，只用由 $(x_{-1}y_{-1})\cdots\cdots$ 至 (x_2y_2) 四項，亦能滿足之。

玆爲舉例釋明應用符號起見，吾人可以 $y_1=\log 23$，已見於本節第三目之對數函數相差表中，並以 $p=.2$，然後計算 $\log 22.2$。

$$\log 22.2=.2\log 23+.8\log 22$$
$$-\frac{.16}{6}\{1.2\text{ of }(-.0008217)+1.8\text{ of }(-.0008923)\}$$
$$+\frac{.16\times1.2\times1.8}{120}\{2.2\text{ of }(-.000095)+2.8\text{ of }(-.0000110)\}$$
$$=1.3462837+.0000694-.0000002=1.3463529_{\circ}$$

而眞値則爲 1.3463530。

此一公式之重要，在並無一般代數函數而欲僅由鄰近數項

插施行補時，愈為顯然。

（七）拉格郎支氏公式——上論(ζ)(η)(θ)(κ)及(λ)數則公式，所論情形，必須x之觀察值，彼此有相等之距離。至各觀察值距離並不相等時，迄無如此簡單之插補方法。惟拉格郎支(Lagrange)氏，曾得出一方程式，係為第n次方者，並能滿足(x_0y_0)，(x_1y_1)……(x_ny_n)共有$(n+1)$對數值，不論x各值間之關係若何也，茲請述之如下：

$$y=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}$$

$$+\cdots\cdots+y_n\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}\cdots\cdots(\mu)$$

式中分子，可為任何分數，譬如即為y_t之乘數亦可，求此分子，只須乘$(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)$各因子而略去$x-x_t$即可；至於分母，則以$x_t$代$x$，由分子即可得之。

理由最為明顯者，當$x=x_t$時，除y_t之乘數而外，其餘各分數，均為零，蓋y_t之乘數，乃為整一，故$y=y_t$。

（八）前以公式(θ)表示y與x相互關係時，所下之假定，現頗有再加考慮之必要。

假如y與x用一函數法則發生聯結關係，換言之，即假如對於x之所有已知各數值，y亦各有確定之數值（此為一假定，無此假定，多數之插補問題，必將失其意義），則y可作為x之一函

數而表示之，譬如示如 $y=f(x)$ 者卽是。如該函數及其引申函數，係爲連續的，則依麥克老令氏定理，

$$y=f(0)+xf^1(0)+\frac{x^2}{2!}f^2(0)+\frac{x^3}{3!}f^3(0)+\cdots\cdots\text{以下連續至於無窮。}$$

如 $f^{n+1}(0)$ 及隨後之係數甚小，且 x 永不大，則自第 $n+2$ 項以上之各項，較之以前各項，所值甚微，大可删略不計，故僅以在前之 $n+1$ 項，已能約略決定 y 之値；但依本節第二目附註中之第(1)，(2)兩公式所規定，當 Δ^{n+1}，Δ^{n+2}……等等均小時，f^{n+1} 乃甚大，Δ^{n+1}，Δ^{n+2}……均甚大時，則反是。由此觀之，吾人可得一結論於下：y 與 x 間任何之函數關係，必均可化爲n次元之拋物線方程式（見公式 θ），如高於第 n 級之相差消失時，且如此種高於第 n 級之相差雖未消失但爲甚小時，方程式(θ)終爲表示此函數關係之約略公式。

但如經過所示各點，晝成之曲線，其確度爲連續而變動緩和時，則可證明：隣近各點之第二級相差，必不甚大，蓋縱坐標增加率變動過急，則曲度變化必速也。又如吾人更作一第二曲線，橫坐標仍如前，而以第一級相差，爲其縱坐標，則甚小之第三級相差，卽爲第一級相差並無激烈變動之表示，其他以此類推。但如在此點之外，則爲插補法背景之假定，與各次連續相差之減少量，二者之關係，必不易看出。雖然，在反對方面則較爲明顯；假如在任一數字級數中，依試驗所示，知連續各項相差，有趨消滅之傾

向，則不論任何曲線，凡經過此諸點者，均可由一拋物線方程式，約略表示之。德摩剛(De Morgan)氏，述此結論如下：『假如吾人取定之n點，彼此相距不遠，其橫坐標，爲一算術級數，而有甚小——至少須不太大——之公相差，至其縱坐標，彼此相距並不過於懸殊時，則一有$n-1$次方之拋物線，必將與同樣大概形式之任何有規則曲線，大致相合，至少當以在同點與同點間爲然也』。布爾氏(Boole)對此之解釋，爲：『依慣例，吾人須假定所提數值之一般方程式，爲x之一有理且爲整數之函數，然後根據所給條件，以決定常數。此一假定之基礎，建築於一「假設連續各次之相差減退甚速」之假定上，而此假設，確已在一切函數(註三)表中證實之矣』。

依照本節第二目附註中公式(1)之規定，當h甚小時，連續各級相差之級數愈高，則連續各級相差對於任何曲線之影響亦愈微，然則吾人以假定更高級相差均消滅爲基礎，建立任何函數數值之一級數，自不失爲一合法之處置。

假如隨手畫成之曲線，畫時確能經過選就之固定點，且此曲線之曲度，變化儘量求其緩和，則必可得一曲線，與用公式(θ)所求得之曲線，相合甚近。此種曲線，絕似騎腳踏車者，故意經過數點，或避免幾處障礙物時，所過之軌跡。

（九）由以上之研究，可知隨意經過若干點，吾人即可畫成

一調勻而連接之曲線；蓋用拋物線方程式(θ)，當 x 連接變動時，$y,\frac{dy}{dx}$，或$\frac{d^2y}{dx^2}$之各值，絕不致現出驟然之跳動；而且吾人可隨常數之多寡，如數求出若干一次方程（唯一次方程，乃永必有眞值），而方法甚簡單，只須就原來方程式中之 n，即作爲固定點之點數即可。

（第二十二圖）

並設吾人意欲在F與G之間一條已定直線上找出一個點，則僅就F與G而論，將此兩點畫成一條直線，然後找出 x_1 一點固可；如就E，F與G，或就F，G，與H而論，畫成一條拋物線，因而求得 x_2 或 x_3 亦可；卽或不然僅就E，F，G及H畫成三次之拋物線，亦無不可。由此三次拋物線上，亦能於近於下點處找出一轉向點(point of inflexion)。此一條線，必約略與騎脚踏車者所經路線相合，假如此騎脚踏車者，由E點起行，騎向臨近之點H，然後趨往下及G。但如吾人連D及K兩點合併在內（假如，騎脚踏車

者由D點起行，經過E、F，G及H四點，而達於K點)，則全部曲線，必將留有改變。同理，吾人如併入各點愈多，則FG之路綫，將不斷微受影響。再者假如吾人併入所有較近各點，能使FG線與一最終位置愈益約略相近，同時如更將較遠各點合併在內，卽能使FG一線與最終位置離開，則吾人可得一結論，斷定此較遠諸點，必不受較近諸點所受之同一數字條件之支配。例如，在生命表(table of survivals)中，年齡在五歲以下者之數字，其分佈情況必不與用年齡較長者之數字所繪成之曲線相合。又如在工資表中，可見工資甚高之數字與工資低者，並不受同一原因之支配。在他一方面，每次舉行人口普查所得之數字，乃須視以前數十年之數字而定。故如插補一八七六年之英國人口數，僅將一八五一，一八六一，一八七一，一八八一，及一八九一年，或並將一九〇一年之數字合併計算在內，吾人必將得若干不同之數字。此種處置方法，並不足奇，蓋插補一八七六年之人口，果有錯誤，若非連查二十五年之數字，必不能免除也。由此可見，距欲插補之數字，所在之期間，甚遠之諸點，必不若相距甚近之諸點，所生之影響之大，且據試驗所示，此一條件，在上述之方法中，可以完全滿足也。不特此也，在公式(κ)之級數中，連續各項之係數，自第r項(此時$x<x_0+(2r-3)h$)起，卽行逐漸減少，換言之，卽當x在x_0與x_0+h之間時，第一級相差之係數，必開始漸減也。

在此吾人可以注意，此曲線之突升突降，已爲一條件所限制，在此條件之下，有 $n-1$ 次方之曲線，其轉向點必不致超過 $n-3$ 個，蓋$\frac{d^2y}{dx^2}$並無一項之方次，能大於 x^{n-3} 也。

仍就上舉之例而論，由Ｆ起至Ｇ止中間諸點，可用Ｄ，Ｅ，Ｆ，Ｇ，Ｈ，或用Ｅ，Ｆ，Ｇ，Ｈ，Ｋ五點求得之。此兩條曲線，在Ｆ與Ｇ之間，可以冶合爲一。臨近Ｆ之諸點，以用前五點求得爲確實，而在此五點中，Ｆ恰在中央；至接近Ｇ之點，可用後五點求之，Ｇ亦在其中央。兩條曲線在Ｆ與Ｇ間冶合爲一之線段，與第一曲線在Ｆ點相接，與第二曲線接觸於Ｇ點。故爲簡便起見，此可以用正弦 (sine) 曲線求之。以意度之，英國人事登記總監處所用者，不外乎此也。

雖然，現在所論之統計插補法理論，吾人殊不能謂之有完全滿意之基礎（註四）。蓋一則支配此一理論之原則，並未善爲說明，二則將原理與事實發生關係，必須有方法，而此種方法之數理的研究，並未完全也。然旣有較爲密切之方法，如再苦心另求別法，恐亦無此必要，蓋一則除非吾人確知支配此種數字之法則之代數公式外，僅恃插補所得之數字，求其完全精確，事乃絕不可能，二則玆所討論之方法，依經驗所示，已能滿足條件，若再求進一步之精密，亦不過產生些須之修正而已。

（十）公式在數字上應用之例釋

（1）玆有工資以五先令爲一組之工人人數，試估計工資在二四先令以上而不滿二五先令之人數。

		每千人中之工人人數（成年男子）	相差			
			第一級	第二級	第三級	第四級
工資在10先令以上而不滿	15先令	39				
			257			
	20先令	296		46		
			303		−144	
	25先令	599		−98		151
			205		7	
	30先令	804		−91		18
			114		25	
	35先令	918		−66		
			48			
	40先令	966				

上表中工資在一五先令以下之人數之漸增相差數，可删略之。

用公式 (κ)，$x_0=20$（先令），$h=5$，$y_0=296$，$\Delta_0{}^1=303$，$\Delta_0{}^2=-98$，$\Delta_0{}^3=7$，$\Delta_0{}^4=18$。

工資不滿二五先令之組，$y=599$，見上表。

工資在二四先令之處，$x=24$，

$$y=296+\frac{4}{5}\times 303+\frac{4}{5}\cdot\frac{-1}{10}\times(-98)+\frac{4}{5}\left(\frac{-1}{10}\right)\cdot\frac{-6}{15}\times 7+\frac{4}{5}\cdot\frac{-1}{10}\cdot\frac{-6}{15}\cdot\frac{-11}{20}\cdot 18$$

$$=296+242.4+7.84+.224+.3168=547\text{（約略）。}$$

故所求數為 $599-547=52$。

再在二三先令處，$x=x_0+3$，$y=489$，故工資在二三先令以上而不滿二四先令之人數為 58。

（2）設一八一三年之進口貨值，因記錄已燬於火，茲請作一估計以補充之。

各年進口貨值如下：

一八一〇	£39,202,000	y_1。
一八一一	26,510,000	y_2。
一八一二	26,163,000	y_3。
一八一三	26,163,000	y_4。
一八一四	33,755,000	y_5。
一八一五	32,987,000	y_6。
一八一六	27,431,000	y_7。

用公式（η），僅取 y_3 及 y_5 二數字，並假定第二級相差業已消滅，

$$y_5-2y_4+y_3=0,\ 則\ y_4=29,959。$$

用公式（η），並加用 y_2 及 y_6 二值，並假定第四級相差業已消滅，

$$y_6+y_2-4(y_5+y_3)+6y_4=0,\ 則\ y_4=30,029。$$

依公式（η），並加用 y_1 及 y_7 二值，並假定第六級相差業已

消滅，

$$y_7+y_1-6(y_6+y_2)+15(y_5+y_3)-20y_4=0, \text{則} y_4=30,421。$$

觀上各值，第一，第二相距甚近，而第三值，則大不相同，故吾人可卽採用 £30,000,000 爲所求值。

（3）在布斯(Boothe)先生之『人民之生活與勞動』第五卷第四十六頁，載有表示各等級年齡分配之圖式數則，用處甚多，茲將其所用數字列下：

年 齡	在十歲至八十歲總數一萬人中所佔之比例	各組年齡中每歲平均數
10—15歲	193.5	38.7
15—20歲	880	176
20—25歲	933	188.6
25—35歲	1636	163.6
35—45歲	1201	120.1
45—55歲	830	83
55—65歲	434	43.4
65—80歲	192.5	12.8

布斯先生之圖式，卽用最末一欄畫成，此最末欄之數，卽爲各該年齡分組中點之縱坐標。旣將各點求出，然後卽連以一條直線。如此辦理，如就其原來目的而言，確已盡確實之能事，惟吾人

如欲從中間年齡中求出較為詳盡之數字，則布斯氏之方法，可供吾人為研究插補問題之有趣舉例。

年　齡	年齡在 x 以下者在總數一萬人中所佔之比例
$15=x_1$	$193.5=y_1$
$20=x_2$	$1073.5=y_2$
$25=x_3$	$2006.5=y_3$
$35=x_4$	$3642.5=y_4$
$45=x_5$	$4843.5=y_5$
$55=x_6$	$5673.4=y_6$
$65=x_7$	$6107.5=y_7$
$80=x_8$	$6300\quad=y_8$

請用拉格郎支氏公式 (μ)，以求年齡在三十歲以下之人數，至年齡在五十五歲以上之人數，則略去之。如此則 $x=30$。

$$y=193.5\times\frac{10.5(-5)(-15)(-25)}{(-5)(-10)(-20)(-30)(-40)}$$

$$+1073.5\times\frac{15.5(-5)(-15)(-25)}{5(-5)(-15)(-25)(-35)}$$

$$+2006.5\times\frac{15.10(-5)(-15)(-25)}{10.5(-10)(-20)(-30)}$$

$$+3642.5\times\frac{15\cdot10\cdot5(-15)(-25)}{20\cdot15\cdot10(-10)(-20)}$$

$$+4843.5\times\frac{15\cdot10\cdot5(-5)(-25)}{30\cdot25\cdot20\cdot10(-10)}$$

$$+5673.5\times\frac{15\cdot10\cdot5(-5)(-15)}{40\cdot35\cdot30\cdot20\cdot10}=2879。$$

此數據布斯先生圖式之計算，乃爲 2824.5，而布斯氏所用者，僅爲 y_3 及 y_4 二值。

在此公式中，如僅用y_2，y_3，y_4，y_5四值，則y據計算乃爲2869。

以上所用之拉格郎支氏公式，實與假定第六級相差消滅而年齡分佈甚爲均勻相等。茲以三十歲之 y 值爲 a，四十歲之 y 值爲 b，五十歲之 y 值爲 c。

然後用 y_1，y_2，y_3，a，y_4，b，y_5，依公式(β)或公式(η)，則得

$$y_1-6y_2+15y_3-20a+15y_4-6b+y_5=0,$$

且依同理，

$$y_2-6y_3+15a-20y_4+15b-6y_5+c=0$$

又
$$y_3-6a+15y_4-20b+15y_5-6c+yb=0$$

由此直進而計算之，則 $a=2879$ 如上。此一方法，應用之時，較用拉格郎支氏公式，計算尤爲簡單。

（4）爲例釋求中位數及衆數方法起見，吾人可用已於第四章第四節第十三表所用之數字，茲列表於下：

工資	x	y	相差			
在$ .25 以上	−1	0				
			317			
在 .75 以上	0	317		1157		
			1472		−1332	
在 1.25 以上	1	1789		−175		
			1279		−15	+15
在 1.75 以上	2	3086		−327		
			970		−137	
在 2.25 以上	3	4056		−464		
			506			
在 2.75 以上	4	4562				

工人總數爲5123，爲求中位數，以 $y=2562$，並用自 $x=0$ 至 $x=4$ 之各項。如求至第四級相差爲止時，則

$$2562=317+1472x-\tfrac{1}{2}\cdot175x(x-1)-\tfrac{1}{6}\cdot152x(x-1)(x-2)$$
$$+\tfrac{1}{24}\cdot15x(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\therefore 61488=7608+36122x-111x^2-698x^3+15x^4$$

解此方程式，如用亨納(Horner)氏解法，得 $x=1.5715$。

故中位數乃在 \$.75+1.5715×.50=\$1.536。

此外另有一法，乃假設 x 爲 y 之函數（註五），如用拉格郎支公式，則

$$x=\frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)(y_0-y_3)}x_0+++$$

吾人如僅用上列一表之四項，則得

$$x=\frac{(2562-1789)(2562-3086)(2562-4056)}{-1472\times-2769\times-3739}(\times0)+++$$

由此得 $x=1\cdot5624$，於是中位數爲 $1\cdot531$。

此法適用計算機計算之。

爲求衆數，請用自 $x=-1$ 至 $x=-2$ 之各項。

本節第六目公式之相差符號表中，如用以求第二及第三級相差，此處之第二相差爲1157，第三相差爲 −1332

所求値爲 $\$.75+\frac{1157}{1332}\times.50=\$1.18$。

其實其他各種方法，無不可以應用，惟結果則略有不同。事

實上，上表分組既如是之寬，而更高級相差並不漸趨於零，求出之總數，自不能十分精確。

此一方法，應用之處甚多，如人口數，結婚率，出生率，死亡率及其他等等，在何期間，其增加率爲最速，及在何年年齡，死亡之機率增加最烈，種種問題，均可應用之（註六）。

（十一）當一種原始調查報告，尚須加以修正時，例如在人口普查所得原始材料中，以決定依年齡之人口分佈時，乃又有一類極重要之插補問題焉。

現先就經過極多點之附近，但不必經過任何一點，以繪一修勻曲線之問題而論。在此之時，必須有一假定，此假定一則假設所得報告甚少不敷獨立應用，或其確度不足使人完全信賴，二則假設據此種報告所示，年齡確有有規則之分佈，而此卽調查報告有表現之原來使命者也。

（1）第一法，須假定極大羣類中之平均數均爲確實。然後採用上文所論之任一方法，以插補此中平均數。

（2）第二法在討論修勻曲時（見前第七章），業已用過。玆可重述如下：取二點，或三點，或四……十點之連續羣類，依一定之橫坐標，再三由不同之縱坐標起畫之。然後求每一羣類之重心；換言之，卽立定一縱坐標，使與在此羣類之外部縱坐標之橫坐標兩端之中間一點上之羣類各縱坐標之平均數相等。經過求得之

各點，畫一條線。則吾人可以察見，此一條線必能與已定之條件相合。此一方法之例釋，已列如在第七章第一節之第六圖。

（3）另外一法，乃須將原始數字之曲線，加以修勻，直至第四級，或第五級，或更高級相差消失時爲止；然後再應用普通插補公式。

例如，援用本章本節第十目之第一例，可重作一表於下：

工　資 在十五先令以上	修勻後之人數	修正相差數 第一級	 第二級	 第三級
至 20 先令爲止	296			
		$303+a$		
至 25 先令爲止	$599+a$		$-98-a+b$	
		$205+b$		$7-3b$
至 30 先令爲止	$804+a+b$		$-91-a-2b$	
		$114-a-b$		$25+2a+3b$
至 35 先令爲止	918		$-66+a+b$	
		48		
至 40 先令爲止	966			

吾人如以 $b=2\frac{1}{2}$，則 $a=-16$，而第三級相差乃消滅，於是 $\Delta_0^1=287$，$\Delta_0^2=-79\frac{2}{3}$，$\Delta_0^3=\Delta_0^4=0$；當 $x=25$ 時，則 $y=583$

又當 $x=24$ 時，則

$$y=296+\tfrac{4}{5}\cdot 287-\tfrac{2}{25}\cdot\left(-79\tfrac{2}{3}\right)=531.97$$

然則工資在二十四先令而不滿二十五先令者之人數，現經求得爲 51，並非 52。

任何原始數字，均可加以修正。

吾人現時尚須多解一方程式，以便完成自工資二十先令至三十先令之表格。

當 $x=23$ 時，$y=296+\frac{3}{5}\cdot287+\frac{3}{25}\cdot79\frac{2}{3}$。此值與 y 之值之差額，在 $x=24$ 時，爲 $\frac{1}{5}\cdot287-\frac{1}{25}\cdot79\frac{2}{3}=54\cdot21$。

於是吾人乃得出下列一表，在此表中，斜體字之數字，乃舊已算出者，至用正體字之數字，則爲在第三級相差爲零之假定下加入者。

工資	人數	相差數		
		第一級	第二級	第三級
至 20 先令爲止	296		·	
		63.75		···
至 21 先令爲止	360		3.18	
		60.57		0
至 22 先令爲止	420		3.18	
		57.39		0
至 23 先令爲止	478		3.18	
		54.21		0
至 24 先令爲止	532		3 18	
		51.03		0
至 25 先令爲止	583		3.18	
		47.85		0
至 26 先令爲止	631		3.18	
		44.67		0
至 27 先令爲止	676		3.18	
		41.49		0
至 28 先令爲止	717		3.18	
		38.31		0
至 29 先令爲止	755		3.18	
		35.13		···
至 30 先令爲止	[illegible]90		···	

吾人計算第二級相差，如果更爲確切，則上表最末一數，自應爲 $804+a+b=790\frac{1}{3}$。

在此法之下，一經發現其重要差(Signipicant differences)，則許多數字，即可隨手找出，但在原來資料，已甚確切時，此法亦能作普遍之應用。

(4)此外另有一法，所用數理較深，本應在將差誤律(the Law of Error)研究之後，再行討論，方爲適宜；惟此時不妨先作一簡短之解釋，順便介紹一有用之公式。

假設有相連之點五個：$(-2,y_{-2})$，$(-1,y_{-1})$$(0,y)$，$(1,y_1)$，$(2,y_2)$，均爲已知。

經過此五點，可畫成一具有四次方之拋物線，但此線卻有兩個轉向點。如臨近所有五點，可畫成三次方之拋物線，爲數極多，各線並無轉向點，但亦能滿足普通之插補法之條件。

茲借用最小二乘法(註七)之一原理，假設拋物線

$$y=a+bx+cx^2+dx^3$$

之係數，選定時足使此數量

$$\Sigma(a+bx+cx^2+dx^3)^2$$

(式中總和號一直施用於 x 與 y 之五年數值)成爲最小，則如此求得之拋物線，即爲最適於其目的。

關於此點，其必不可少之數理的研究，吾人可就達爾文(Darwin)教授之『難免錯誤之度量』(On Fallible Measures)(註八)一文，加以探討，蓋上一方法，即根據該文而來也。

年次	英國人口平均每人自撥進口之小麥數量（磅）	相差數 第一級	第二級	第三級	第四級	修勻後數字
一八九〇	226					
		18				
一八九一	244		−17			
		1		19		
一八九二	245		2		−16	$245+\frac{3}{35}$ of $16=246\frac{1}{3}$
		3		3		
一八九三	248		5		13	$248-\frac{3}{35}$ of $13=247$
		8		16		
一八九四	256		21		−94	$256+\frac{3}{35}$ of $94=264$
		29		−78		
一八九五	285		−57		134	$285-\frac{3}{35}$ of $134=263\frac{1}{2}$
		−28		56		
一八九六	257		− 1		−16	$257+\frac{3}{35}$ of $16=258\frac{1}{2}$
		−29		40		
一八九七	228		39			
		+10				
一八九八	238					

每年年底之小麥存貨，年有不同，且無記錄可查，消費量之統計，並無確實可言。故此列數字，應以尙待修正，並須削去過大之出入者視之，方爲合理。

（5）除此而外，尙有一較爲普遍之插補問題，乃須求出一代數公式，與前時所用，目的在表現全數列或全羣類之拋物線方程式，迥有不同。關於此公式，本書第二編第五章，曾有一簡短之介紹焉。

附註——公式（λ）乃愛爲來特（Everett）教授所建立，通用名詞及公式之證明，均爲彼之貢獻（見理論與實用數學季刊，一九〇一年，第一百二十八號，公式G）。

茲覓得其證明如次：

假如 $f(x)=\cosh\left(2q\ \sinh^{-1}\frac{x}{2}\right)$，則立可證明 $f^{n+2}(0)=(q^2-\frac{1}{4}n^2)\ f^n(0)$，故依麥克老令氏定理，$f(x)$ 之展開式，爲

$$1+\frac{1}{2!}q^2x^2+\frac{1}{4!}q^2(q^2-1)x^4+\frac{1}{6!}q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)x^6+\cdots=\cosh\left(2q\ \sinh^{-1}\frac{x}{2}\right)。$$

經微分並以 qx 除之後，則得

$$q+\frac{1}{3!}q(q^2-1)\,x^2+\frac{1}{5!}q(q^2-1^2)\,(q^2-2^2)x^4+\cdots=\frac{2}{x\sqrt{4+x^2}}\sinh\left(2q\ \sinh^{-1}\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{\sinh(qhD)}{\sinh(hD)},$$

在此最後一式中，$x=2\sinh\left(\frac{hD}{2}\right)$。

採照本章本節第六目之符號，$\delta_0{}^2=(e^{hD}-2+e^{-hD})\ y_0=\left(e^{\frac{hD}{2}}-e^{-\frac{hD}{2}}\right)^2 y_0$，如是，則 $\delta=2\sinh\left(\frac{hD}{2}\right)$。

$$y_{ph}=e^{phD}(y_0)，又\ y_1=e^{hD}(y_0)。$$

$$e^{phD}=\{e^{(p+1)hD}-e^{(p-1)hD}\}\div(e^{hD}-e^{-hD})$$

$$=\{e^{qhD}-e^{-qhD}+(e^{phD}-e^{-phD})e^{hD}\}\div(e^{hD}-e^{-hD})$$

因 $p+q=1$，$=\dfrac{\sinh(qhD)}{\sinh(hD)}+\dfrac{\sinh(phD)}{\sinh(hD)}e^{hD}$。

$$\therefore\ y_{ph}=\frac{\sinh(qhD)}{\sinh(hD)}y_0+\frac{\sinh(phD)}{\sinh(hD)}y_1。$$

在上級數中，x 與 δ 乃爲一個，且如用先此級數表示對於 y_0 之微分，次（經以 p 代 q 後）表示對於 y_1 之微分，則

$$y_{ph}=qy_0+\frac{1}{3!}q(q^2-1)\delta_0{}^2+\frac{1}{5!}q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\delta_0{}^4$$

$$+\frac{1}{7!}q(q^2-1^2)(q^2-2^2)(q^2-3^2)\delta_0{}^6+\cdots$$

$$+py_1+\frac{1}{3!}p(p^2-1)\delta_1{}^2+\frac{1}{5!}p(p^2-1^2)(p^2-2^2)\delta_1{}^4$$

$$+\frac{1}{7!}p(p^2-1^2)(p^2-2^2)(p^2-3^2)\delta_1{}^6+\cdots$$

此卽通則化之公式(λ)也。

關於插補法之其他書籍,讀者可請參考:(1)發爾 (Farr) 博士之生命表(第三表),一八六四年版;(2)布爾 (Boole) 先生之『有限相差』(Finite Difference),『保險精算學院課本』(Text-Book of Institute of Actuaries) 第二本,第四百二十頁起;(3)來斯 (Rice) 氏之『插補法之理論與實線』(Theory and Practice of Interpolation) 一八九九年版;(4)麥瑞費爾德(Merrifield)氏之『求方法與插補法』(On Quadratures and Interpolation),見一八八○年英國協會報告;(5)蕭文內(Chauvenet)氏之『球面及實用天文學』(Spherical and Practical Astronomy);(6)吳爾好斯(Woolhouse) 在保險雜誌第十一,第十二卷發表之文;(7)愛爲來特(J. D. Everett) 氏之『相差表之代數論』(On the Algebra of Difference Tables),見一九○○年第一百二十四期數學季刊 (Quarterly Journal of Mathematics); 及其『中間相差插補公式』,見一九○○年英國協會報告,及一九○一年一月份保險精算學院月報;(7)薛伯 (W. F. Sheppard) 博士之『中間相差公式』(On Central Difference Formulae),見倫敦數理學會會報第三十一卷,第七百零七至七百一十期),及『補助曲線在連續差量統計中之應用』(On the Use of Auxiliary Curves in Statistics of Continuous Variation),見一九○○年九月份統計學報。在以上文獻中,些可查得其他參考書籍。

(註一)　此項資料取自一八九八年十二月份統計學報中本書原著者之『英格蘭之農村工資』一文。表中數字正體字爲原有,斜體字爲插補而來。

(註二)　此言尤以連續之函數,及其引申函數爲連續並非爲無限之函數時爲恰當。

(註三)　卽爲數學函數,如 $\int_0^x e^{-x^2}dx$,非統計近似數也。

(註四)　對於數學函數數值之插補,不在此範圍之內。

(註五)　請參閱英國一八九八年號統計學報第六百九十八頁愛基華斯 (Edgeworth)一文。

(註六)　參閱一八九九年號統計學報第三百八十一頁所載愛基華斯氏一文,其他參考書籍,該文另有介紹。

(註七)　參閱本書第二編附十。

(註八)　參閱一八七七年七月份英國哲學雜誌(Phil. Mag. and Journal)如此,吾人可將第七章第二節所列第十圖中之C線,加以修勻。

14189

省立 竹中學

圖書室

791
2