Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2018/2019**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 22

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 22.1. Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Zeige, dass diese Erweiterung genau dann normal ist, wenn die normale Hülle gleich L ist.

Aufgabe 22.2. Es sei K ein Körper und $F \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom. Zeige, dass die normale Hülle der Körpererweiterung $K \subseteq K[X]/(F)$ gleich dem Zerfällungskörper von F ist.

Aufgabe 22.3. Es sei $K \subseteq L$ eine auflösbare Körpererweiterung. Es sei $K \subseteq K'$ eine weitere Körpererweiterung und es sei $L' = LK'$ das Kompositum von L und K' (das in einem gewissen Oberkörper gebildet sei). Zeige, dass auch $K' \subseteq L'$ auflösbar ist.

Aufgabe 22.4. Es sei K ein Körper und seien $P, F \in K[X]$ nichtkonstante Polynome. Wir setzen $Q = P(F)$ (in P wird also das Polynom F eingesetzt). Zeige, dass man den Zerfällungskörper von P in den Zerfällungskörper von Q einbetten kann.

Aufgabe 22.5. Es sei K ein Körper und sei $P \in K[X]$ ein auflösbares Polynom. Zeige, dass auch $P(X^n)$ auflösbar ist.

Aufgabe 22.6.*

Es sei $P \in \mathbb{Q}[X]$ ein Polynom vom Grad 3. Zeige mit Mitteln der Galoistheorie, dass P auflösbar ist.

Aufgabe 22.7. Es sei $P \in \mathbb{Q}[X]$ ein Polynom vom Grad 3. Setze die Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$, die sich aus der Cardanoschen Formel ergeben, mit den Körpererweiterungen in Beziehung, die sich aus der Galoistheorie über Satz 22.6 ergeben.

Aufgabe 22.8. Man gebe ein Beispiel für einen Körper K und zerfallende Polynome $F, G \in K[X]$ derart, dass die Einsetzung $F(G)$ nicht zerfällt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 22.9. (3 Punkte)

Sei n eine ungerade Zahl. Man gebe eine Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq L$ vom Grad n derart, dass $\operatorname{Gal}(L|\mathbb{Q})$ trivial ist.

Aufgabe 22.10. (2 Punkte)

Es seien $K \subseteq L$ und $L \subseteq M$ auflösbare Körpererweiterungen. Zeige, dass auch $K \subseteq M$ auflösbar ist.

Aufgabe 22.11. (2 Punkte)

Es seien F und G auflösbare Polynome über einem Körper K. Zeige, dass das Produkt FG ebenfalls auflösbar ist.

Aufgabe 22.12. (8 (5+3) Punkte)

Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^2$ ein reguläres n-Eck ($n \geq 3$) mit den Eckpunkten $v_1, \ldots, v_n$, und es sei V der von diesen Eckpunkten erzeugte $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

a) Zeige die Abschätzungen

$$\varphi(n) \leq \dim_{\mathbb{Q}}(V) \leq \varphi(n) + 1.$$

(Dabei bezeichnet $\varphi(n)$ die eulersche φ-Funktion).

b) Zeige, dass in (a) sowohl links als auch rechts Gleichheit gelten kann.

Abbildungsverzeichnis