

Lineare Algebra und analytische Geometrie I**Arbeitsblatt 8****Die Pausenaufgabe**

AUFGABE 8.1. Bestimme die Dimension des Raumes der 2×2 -Matrizen.

Übungsaufgaben

AUFGABE 8.2. Bestimme die Dimension des Lösungsraumes des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}4x - 3y + 7z + 5u - v &= 0 \\ y + 6z - 10u + 3v &= 0\end{aligned}$$

in den Variablen x, y, z, u, v .

AUFGABE 8.3. Bestimme die Dimension des Raumes aller $m \times n$ -Matrizen.

AUFGABE 8.4.*

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge der Diagonalmatrizen ein Untervektorraum im Raum aller $n \times n$ -Matrizen über K ist und bestimme seine Dimension.

Eine $n \times n$ -Matrix

$$M = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

heißt *symmetrisch*, wenn $a_{ij} = a_{ji}$ für alle i, j ist.

AUFGABE 8.5. Zeige, dass die Menge der symmetrischen $n \times n$ -Matrizen einen Untervektorraum im Raum aller $n \times n$ -Matrizen bildet und bestimme dessen Dimension.

AUFGABE 8.6. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge der oberen Dreiecksmatrizen ein Untervektorraum im Raum aller $n \times n$ -Matrizen über K ist und bestimme seine Dimension.

AUFGABE 8.7. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum mit endlicher Dimension $n = \dim(V)$. Es seien n Vektoren v_1, \dots, v_n in V gegeben. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

- (1) v_1, \dots, v_n bilden eine Basis von V .
- (2) v_1, \dots, v_n bilden ein Erzeugendensystem von V .
- (3) v_1, \dots, v_n sind linear unabhängig.

AUFGABE 8.8. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum mit endlicher Dimension. Es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $\dim(U) = \dim(V)$. Zeige, dass dann $U = V$ ist.

AUFGABE 8.9.*

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Wir betrachten die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Man gebe Beispiele für a, b, c derart, dass der von diesen Vektoren erzeugte Untervektorraum die Dimension 0, 1, 2, 3 besitzt.

AUFGABE 8.10.*

Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K -Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Welche Dimension besitzt der Produktraum $V \times W$?

AUFGABE 8.11.*

Es sei W ein n -dimensionaler K -Vektorraum (K ein Körper) und seien $U, V \subseteq W$ Untervektorräume der Dimension $\dim(U) = r$ und $\dim(V) = s$. Es gelte $r + s > n$. Zeige, dass $U \cap V \neq 0$ ist.

AUFGABE 8.12. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Sei $d \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge aller Polynome vom Grad $\leq d$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum von $K[X]$ ist. Was ist seine Dimension?

AUFGABE 8.13. Zeige, dass die Menge aller reellen Polynome vom Grad ≤ 4 , für die -2 und 3 Nullstellen sind, ein endlichdimensionaler Untervektorraum in $\mathbb{R}[X]$ ist. Bestimme die Dimension von diesem Vektorraum.

AUFGABE 8.14. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über den komplexen Zahlen, und sei v_1, \dots, v_n eine Basis von V . Zeige, dass die Vektorenfamilie

$$v_1, \dots, v_n \text{ und } iv_1, \dots, iv_n$$

eine Basis von V , aufgefasst als reeller Vektorraum, ist.

AUFGABE 8.15. Es sei die Standardbasis e_1, e_2, e_3, e_4 im \mathbb{R}^4 gegeben und die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass diese Vektoren linear unabhängig sind und ergänze sie mit einem geeigneten Standardvektor gemäß Satz 8.2 zu einer Basis. Kann man jeden Standardvektor nehmen?

AUFGABE 8.16. Wir betrachten die linearen Gleichungen

$$9x - 8y + 7z - 8u + 4v = 0,$$

$$3y + 7z - 4u + 6v = 0,$$

$$-2z + 5u + 7v = 0$$

über \mathbb{R} .

- (1) Bestimme eine Basis \mathfrak{b}_1 des Lösungsraumes des gesamten Gleichungssystems.
- (2) Ergänze die Basis \mathfrak{b}_1 zu einer Basis \mathfrak{b}_2 des Lösungsraumes des Gleichungssystems, das aus den ersten beiden Gleichungen besteht.
- (3) Ergänze die Basis \mathfrak{b}_2 zu einer Basis \mathfrak{b}_3 des Lösungsraumes des Gleichungssystems, das allein aus der ersten Gleichung besteht.
- (4) Ergänze die Basis \mathfrak{b}_3 zu einer Basis \mathfrak{b}_4 des Gesamttraumes \mathbb{R}^5 .

AUFGABE 8.17.*

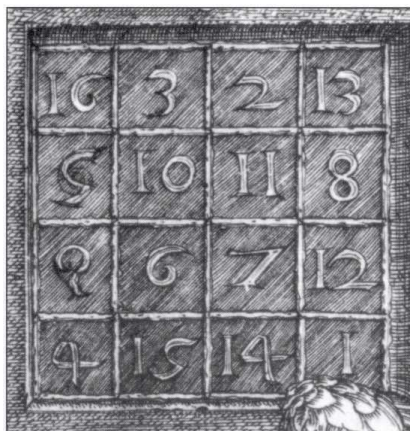
Wir betrachten die letzte Ziffer im kleinen Einmaleins (ohne die Zehnerreihe) als eine Familie von 9 Tupeln der Länge 9, also die Zeilenvektoren in der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 2 & 5 & 8 & 1 & 4 & 7 \\ 4 & 8 & 2 & 6 & 0 & 4 & 8 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 8 & 4 & 0 & 6 & 2 & 8 & 4 \\ 7 & 4 & 1 & 8 & 5 & 2 & 9 & 6 & 3 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 0 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche Dimension besitzt der durch diese Tupel aufgespannte Untervektorraum des \mathbb{R}^9 ?

AUFGABE 8.18. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Zeige, dass V nicht zugleich eine endliche Basis und eine unendliche Basis besitzen kann.

Eine $n \times n$ -Matrix $(a_{ij})_{ij}$ über einem Körper K heißt *magisches Quadrat* (oder *linear-magisches Quadrat* über K), wenn jede Spaltensumme und jede Zeilensumme in der Matrix gleich einer bestimmten Zahl $c \in K$ ist.



Das magische Quadrat aus Dürers Stich Melencolia I.

In diesem Sinne ist

$$\begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c \end{pmatrix}$$

für jedes $c \in K$ ein magisches Quadrat.

AUFGABE 8.19. Zeige, dass die Menge aller linear-magischen Quadrate der Länge n über K einen Untervektorraum im Raum aller $n \times n$ -Matrizen bildet.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 8.20. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Es sei v_1, \dots, v_m eine Familie von Vektoren in V und sei

$$U = \langle v_i, i = 1, \dots, m \rangle$$

der davon aufgespannte Untervektorraum. Zeige, dass die Familie genau dann linear unabhängig ist, wenn die Dimension von U gleich m ist.

AUFGABE 8.21. (4 (3+1) Punkte)

a) Bestimme die Dimension des Lösungsraumes des linearen Gleichungssystems

$$2x + 5y + 7z + 4u - 3v + 2w = 0$$

$$4x + 9y + 6z + 5u - v + w = 0$$

$$7x + 8y - 3z + u + 3v + 3w = 0$$

$$-x + 6y + 16z + 8u - 7v = 0$$

in den Variablen x, y, z, u, v, w .

b) Was ist die Dimension des Lösungsraumes, wenn man dieses System in den Variablen x, y, z, u, v, w, r, s auffasst?

AUFGABE 8.22. (4 Punkte)

Zeige, dass die Menge aller reellen Polynome vom Grad ≤ 6 , für die -1 , 0 und 1 Nullstellen sind, ein endlichdimensionaler Untervektorraum in $\mathbb{R}[X]$ ist. Bestimme die Dimension von diesem Vektorraum.

AUFGABE 8.23. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Bestimme die Dimension des Raumes aller linear-magischen Quadrate der Länge n über K .

AUFGABE 8.24. (7 (3+2+1+1) Punkte)

Wir betrachten die linearen Gleichungen

$$8x - 3y + 5z + 7u + 6v = 0,$$

$$9x + 2y + z - v = 0,$$

$$7y - z + 4u = 0$$

über \mathbb{R} .

- (1) Bestimme eine Basis \mathfrak{b}_1 des Lösungsraumes des gesamten Gleichungssystems.
- (2) Ergänze die Basis \mathfrak{b}_1 zu einer Basis \mathfrak{b}_2 des Lösungsraumes des Gleichungssystems, das aus den ersten beiden Gleichungen besteht.
- (3) Ergänze die Basis \mathfrak{b}_2 zu einer Basis \mathfrak{b}_3 des Lösungsraumes des Gleichungssystems, das allein aus der ersten Gleichung besteht.
- (4) Ergänze die Basis \mathfrak{b}_3 zu einer Basis \mathfrak{b}_4 des Gesamttraumes \mathbb{R}^5 .

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Albrecht Dürer - Melencolia I (detail).jpg , Autor = Albrecht
Dürer, Lizenz = PD

4