三角法教科書

理學士
根津千治
編纂

東京
山海堂書店
明治四十三年

序

本書ノ目的ハ中學校及ビ之レト同等ナル程度ノ諸學校ニ於ケル教科ノ用ニ充ツルニ在リ。故ニ編纂ノ順序ハ專ラ文部省訓令中學校教授要目ノ指示スルトコロニ從ヒ敢テ加除セズ。但シ附錄トシテ弧度法,逆三角函數及ビ三角方程式ヲ講ジタルハ,中學校卒業生中ニ其ノ必要ヲ認ムレバナリ。

本書ノ說述ハ簡明直截ヲ旨トシ,以テ教授時間ノ節約ヲ圖レリ。餘裕ノ時間ヲ回顧概括ニ用ヒラレンコトヲ望ミタレバナリ。此際ニ,附錄スルトコロノ補充問題ヲ課スル如キハ既修ノ理論ヲ明劃ナラシムルニ最モ適切ナランコトヲ信ズ。

計算問題ノ答ハ本書所載ノ對數表ニヨリテ算出セリ。比較的精シキ表ニ依ルトキハ多少ノ差違アルベシ。

本書ヲ編纂スルニ當リ,現ニ中學教育ニ從事セラルル諸彥ノ叱正ヲ得タルコト甚ダ多シ。謹ンデ茲ニ謝意ヲ表ス。

明治四十三年九月

根津千治

目　次

附　錄

附　表

三　角　法

緒　論

1. 三角法

三角法トハ,三角函數ト名ヅクルモノノ性質ト,之レヲ三角形ノ邊及ビ角ノ關係ニ適用スルコトトヲ講ズル學科ナリ。

2. 角

角ヲ計ルニ直角ヲ單位トスルコトハ既ニ幾何學ニ於テ學ビタルトコロナリ。サレド,直角ナル單位ハ稍大ニ過グルヲ以テ,實用上ニテハ之レヲ九十等分シタル其一ツヲ單位トシ之レヲ**度**ト稱ス。一度ニ滿タザル角ヲ表ハサントスルトキハ,一度ノ六十分ノ一ヲ**分**トイヒ,一分ノ六十分ノ一ヲ**秒**トイフ。

度ヲ單位トシ,分,秒ヲ補助單位トスル方法ヲ**六十分法**トイフ。

度,分,秒ト記ス代リニ數字ノ右肩ニ夫々°,′,″ナル記號ヲ附シテ之レヲ表ハス。例ヘバ四十三度二十七分十五秒ヲ次ノ如ク記ス。

$$43^\circ\ 27'\ 15''$$

注意一. 秒ナル單位ハ小ニ過グルヲ以テ,之レヲ分ノ分數トシテ表ハスコトアリ。例ヘバ,前例ノ角ヲ次ノ如ク記ス。

$$43^\circ\ 27'\cdot 25$$

注意二. 六十分法ノ實用的ナルニ對シ,理論上ヨリ,弧度法ト稱スル單位ノ採リ方モアリ(附錄第一)。

問題第一

1. 次ノ角ヲ六十分法ニテ述ベヨ。

(a) 三分ノ二直角

(b) 正五邊形ノ一ツノ角

2. 次ノ角ヲ直角單位ニテ表ハセ。

(a) 18°

(b) $22^\circ\ 30'$

(c) $57^\circ\ 17'\cdot 75$

(d) $95^\circ\ 37'\ 30''$

3. 次ノ時刻ニ於ケル時計ノ兩針ノナス角度ヲ求ム。

(a) 正七時

(b) 三時三十分

(c) 十時四十五分

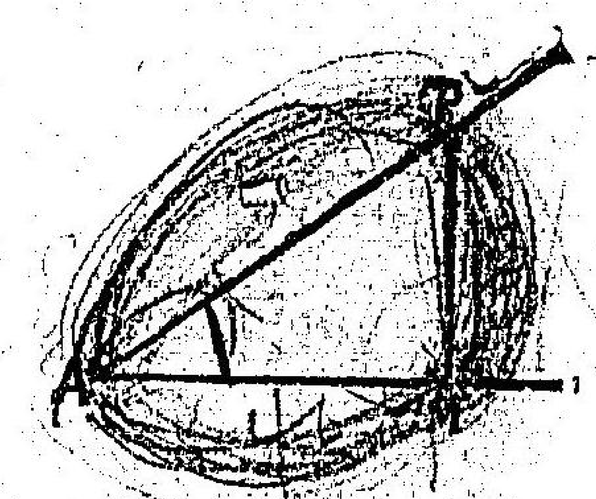
4. 三角形ノ三ツノ角ガ等差級數ヲナシ,通差ハ30°ナリトセバ,各ノ角度幾何。

第一編

銳角ノ三角函數

3. 定義

一銳角AアリトシAヲシテ其ノ大サヲモ表ハサシメヨ。



其ノ一邊上ノ任意ノ一點Pヨリ他ノ邊ニ垂線PMヲ引キ,便宜上,PMヲ垂線,APヲ斜邊,AMヲ底邊ト稱セン。此等三ツノ中ニツヅツノ比ノ値ヲ作リテ,次ノ六種ヲ得ベシ。

(1) $\frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}$ 即チ $\frac{PM}{AP}$, 之レヲ角Aノ**正弦**ト稱シ, $\sin A$ ニテ表ハス。

(2) $\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}$ 即チ $\frac{AM}{AP}$, 之レヲ角Aノ**餘弦**ト稱シ, $\cos A$ ニテ表ハス。

(3) $\frac{\text{垂線}}{\text{底邊}}$ 即チ $\frac{PM}{AM}$, 之レヲ角Aノ**正切**ト稱シ, $\tan A$ ニテ表ハス。

{sinA {cosA {tanA
{cosecA {secA {cotA

(4) $\frac{\text{底邊}}{\text{垂線}}$ 即チ $\frac{AM}{PM}$, 之レヲ角Aノ**餘切**ト稱シ, $\cot A$ ニテ表ハス。

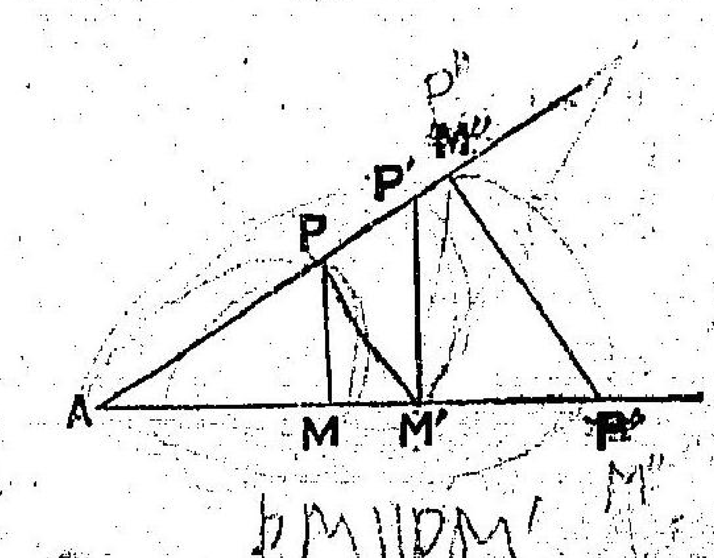
(5) $\frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}$ 即チ $\frac{AP}{AM}$, 之レヲ角Aノ**正割**ト稱シ, $\sec A$ ニテ表ハス。

(6) $\frac{\text{斜邊}}{\text{垂線}}$ 即チ $\frac{AP}{PM}$, 之レヲ角Aノ**餘割**ト稱シ, $\operatorname{cosec} A$ ニテ表ハス。

此六種ノ比ノ値ヲ名ヅケテ,銳角Aノ**三角函數**トイフ。

注意一. 三角函數ヲ又**三角比**,**圓函數**トモイフコトアリ。

注意二. 角Aノ大サガ變ゼザル限リハ,垂線PMハ如何ニ變ズルトモ,相似三角形ノ定理ニヨリテ二邊ノ比ノ値即チ三角函數ハ一定ナリ。例ヘバ圖ニ於テ



$$\sin A = \frac{PM}{AP} = \frac{P'M'}{AP'} = \frac{P''M''}{AP''}$$

等ナリ。

注意三. $\sin A$ 等ヲ $\sin$ トAトノ如ク分離スルハ,

猶$\sqrt{2}$ヲ$\sqrt{\ }$ト2トニ分離スルニ同ジク,計算上意味ナキコトトナル。サレバ $\sin A+\sin B$ ガ $\sin(A+B)$ ニ等シナドト誤解スベカラズ。

問題第二

1. 角Aノ斜邊ヲ5寸,垂線ヲ3寸トセバ, $\sin A$, $\cos A$ $\tan A$ ノ値各幾何。

2. 三角形ABCノ角Cヲ直角トシ, AC=12, BC=5 トセバ,

   (a) $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ ノ値幾何。

   (b) $\sin B$, $\cos B$, $\tan B$ ノ値幾何。

3. 角Cガ直角ナル三角形ABCニ於テ, AB=2, AC=1 ナルトキ,スベテノ三角函數ヲ求メヨ。

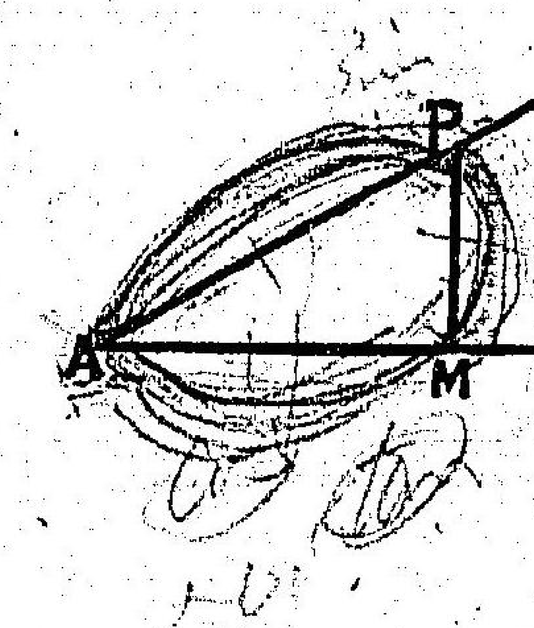
4. 長サ l ナル有限直線ガ他ノ直線ノ上ニ於ケル正射影ノ長サ p ナルトキ,二ツノ直線ノナス角ノ三角函數ヲ求メヨ。

4. 同ジ角ノ三角函數相互ノ關係

六種ノ三角函數ノ間ニハ極メテ密接ナル關係ナルモノナリ。今之レヲ分類シテ次ノ三ツトナス。

第一. 逆數ノ關係

定義ニヨリ



$$\cot A=\frac{AM}{PM}=\frac{1}{\frac{PM}{AM}}=\frac{1}{\tan A}$$

$$\sec A=\frac{AP}{AM}=\frac{1}{\frac{AM}{AP}}=\frac{1}{\cos A}$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{AP}{PM}=\frac{1}{\frac{PM}{AP}}=\frac{1}{\sin A}$$

卽チ

$$\left.\begin{aligned}\cot A&=\frac{1}{\tan A}\\ \sec A&=\frac{1}{\cos A}\\ \operatorname{cosec} A&=\frac{1}{\sin A}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

注意. 此簡單ナル關係ニヨリ,餘切,正割,餘割ノ三種ハ直チニ之レニ代用スルニ夫々正切,餘弦,正弦ノ逆數ヲ以テスルコトヲ得ルモノナリ。

第二. 商ノ關係

又, 定義ニヨリ

$$\tan A=\frac{PM}{AM}=\frac{\frac{PM}{AP}}{\frac{AM}{AP}}=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{PM}{AM}$$

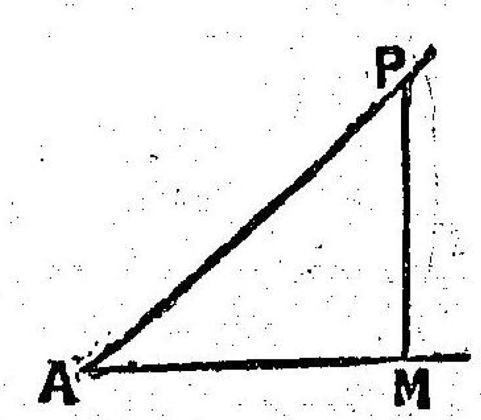
$$\cot A=\frac{AM}{PM}=\frac{\frac{AM}{AP}}{\frac{PM}{AP}}=\frac{\cos A}{\sin A}$$

卽チ

$$\left.\begin{aligned}\tan A&=\frac{\sin A}{\cos A}\\ \cot A&=\frac{\cos A}{\sin A}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

第三. 平方ノ關係

幾何學ニ於ケルぴたごらすノ定理ニヨリ,



$$\overline{PM}^2+\overline{AM}^2=\overline{AP}^2$$

之レヲ順次ニ $\overline{AP}^2$, $\overline{AM}^2$, $\overline{PM}^2$ ニテ割レバ次ノ關係ヲ得ベシ.

$$\left(\frac{PM}{AP}\right)^2+\left(\frac{AM}{AP}\right)^2=1$$

$$\left(\frac{PM}{AM}\right)^2+1=\left(\frac{AP}{AM}\right)^2$$

$$1+\left(\frac{AM}{PM}\right)^2=\left(\frac{AP}{PM}\right)^2$$

之レニ,第三節ニ定義セル三角函數ヲ置ケバ次ノ關係ヲ得.

$$\left.\begin{aligned}\sin^2 A+\cos^2 A&=1\\ 1+\tan^2 A&=\sec^2 A\\ 1+\cot^2 A&=\operatorname{cosec}^2 A\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3)$$

注意. 三角函數ノ冪ノ指數ハ,上記ノ如ク函數記號ノ右肩ニ置キテ括弧ヲ省略スルヲ普通トス。例ヘバ $\sin^2 A$ ハ $(\sin A)^2$ ヲ表ハスガ如シ。是レ $\sin A^2$ トスレバ A^2 ナル値ヲ有スル角ノ正弦ト誤ラルル恐レアルヲ以テナリ。

5. 三角函數恒等式

公式(1),(2),(3)ハ三角函數ノ間ノ最モ基礎的ナル關係ナリ。而シテ,此等ニヨレバ,更ニ種々ノ複雜ナル關係ヲ生ズ。之レヲ三角函數ノ恒等式トス。

三角函數ノ恒等式ヲ與ヘテ,其ノ證明ヲ求ムル場合ニハ,次ノ方法ニ據ルヲ可トス。

第一. 複雜ナル邊ヨリ簡單ナル邊ニ導ク方法

例. $\sec A-\tan A\sin A=\cos A$ ヲ證明セヨ。

(證明) $\sec A-\tan A\sin A=\frac{1}{\cos A}-\frac{\sin A}{\cos A}\sin A$

$$=\frac{1-\sin^2 A}{\cos A}=\frac{\cos^2 A}{\cos A}$$

$$=\cos A$$

$$=\frac{cos^2A}{cosA}=cosA$$

第二. 兩邊ヲ同一ノ式ニ導ク方法

例. $\dfrac{cosecA-secA}{cotA+tanA}=\dfrac{cotA-tanA}{cosecA+secA}$ ヲ證明セヨ。

(證明) $$\frac{cosecA-secA}{cotA+tanA}=\frac{\frac{1}{sinA}-\frac{1}{cosA}}{\frac{cosA}{sinA}+\frac{sinA}{cosA}}$$

分母ト分子トニ $sinAcosA$ ヲ乘ジテ

$$=\frac{cosA-sinA}{cos^2A+sin^2A}=cosA-sinA$$

$$\frac{cotA-tanA}{cosecA+secA}=\frac{\frac{cosA}{sinA}-\frac{sinA}{cosA}}{\frac{1}{sinA}+\frac{1}{cosA}}$$

$$=\frac{cos^2A-sin^2A}{cosA+sinA}=cosA-sinA$$

故ニ與ヘラレタル恒等式ハ眞ナリ。

注意. 兩邊ヨリ同一ノ式ニ導ク方法ハ考ヘ方トシテハ可ナリ,サレド,證明ノ書キ方トシテハ成ルベク之レヲ一方ノ邊ヨリ他ノ邊ニ導クヤウニ改ムベシ。

第三. 既知ノ恒等式ヨリ導ク方法

例. $tan^2A-cot^2A=sec^2A-cosec^2A$ ヲ證明セヨ。

(證明) 公式(3)ニヨリ

$$1+tan^2A=sec^2A$$

$$\cancel{1+cot^2A=cosec^2A}$$

$tan^2A-cot^2A=sec^2A-cosec^2A$

邊々相引クコトニヨリ

$$tan^2A-cot^2A=sec^2A-cosec^2A$$

注意. 第一,第二ノ例ニ見ルガ如ク, $tanA, cotA, secA, cosecA$ ヲ何レモ $sinA, cosA$ ニテ表ハスコトニヨリテ證明ヲ就ゲ得ル場合甚ダ多シ。

問題第三

次ノ恒等式(1)乃至(10)ヲ證明セヨ。但シ本問題ニ於ケルA, α, θ, x ハ何レモ銳角ナルモノトス。

1. $tan\alpha+cot\alpha=sec\alpha\ cosec\alpha$
2. $sin^4\theta-cos^4\theta=sin^2\theta-cos^2\theta$
3. $sin^6\theta+cos^6\theta=1-3sin^2\theta\ cos^2\theta$

人ヲ疑ル前ニ己ヲ省ミヨ

4. $sec^2A+cosec^2A=sec^2A\,cosec^2A$
5. $(tan\alpha+sec\alpha)^2=\dfrac{1+sin\alpha}{1-sin\alpha}$
6. $(1+tanx)^2+(1+cotx)^2=(sec$
7. $\dfrac{tanx}{1+tan^2x}=sinx\ cosx$

8. $(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2=2$

9. $\dfrac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}\cdot\dfrac{1+\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta}=\tan\theta$

10. $\dfrac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot\dfrac{\operatorname{cosec}\theta+1}{\sec\theta+1}=\cot^3\theta$

11. $\sin A=a,\ \tan A=b$ ナルトキ，$b^2=a^2(1+b^2)$ ナルコトヲ證明セヨ。

12. $\sin x+\sin^2x=1$ ナルトキ；$\cos^2x+\cos^4x=1$ ナルコトヲ證明セヨ。

13. $x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$ ナルトキ，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ナルコトヲ證明セヨ。

[前例ノ如ク,二ツ又ハ二ツ以上ノ與ヘラレタル關係式ヨリ,其ノ中ニ含マルル或文字(前例ニ於テハθ)ヲ含マザル新關係式ヲ作ルコトヲ,其文字ヲ消去ストイフ。]

14. $\cos\theta+\sin\theta=a,\ \cos\theta-\sin\theta=b$ ヨリ θ ヲ消去セヨ。

15. $1+\tan\theta=a\sec\theta,\ 1-\tan\theta=b\sec\theta$ ヨリ θ ヲ消去セヨ。

……ツヲ知リテ他ヲ求ムル方法

……ヲ知ラバ,公式(1),(2),(3)ニヨ……

……ベシ。之レヲ代數學的解……

欠

MISSING

ハ,比例部分ノ法則ト稱スル次ノ事實ニ據ル。

角ノ差ト之レニ對應スル三角函數ノ差トハ,双方ガ小ナル程度ニ於テ,比例ヲナスモノトス。

例一. $sin23°30'$, $tan66°30'$ ノ値ヲ求ム。

(解) 眞數表ニヨリ

$$sin23°30'=0{\cdot}3987$$
$$tan66°30'=2{\cdot}2998$$

注意. 眞數表ノ見方ハ $0°$ ヨリ $45°$ ニ至ル間ノ角ニツイテハ左行ノ角ト上段ノ種別トニ據リ, $45°$ ヨリ $90°$ ニ至ル間ノ角ニツイテハ右行ノ角ト下段ノ種別トニ據ルモノトス。是レ第6節ノ餘角ノ關係ニ由ルモノナリ。

例二. $tan37°18'$, $cos37°18'$ ノ値ヲ求ム。

(解) 眞數表ニヨレバ

$$\left.\begin{aligned} tan37°10'&=0{\cdot}7581 \\ tan37°18'&=\ldots\ldots\ldots \\ tan37°20'&=0{\cdot}7627 \end{aligned}\right\} 0{\cdot}0046\,(\text{差})$$

比例部分ノ法則ニヨリ

$$10':8'=0{\cdot}0046:x, \qquad x=0{\cdot}0037$$

$\therefore\ \tan 37^\circ 18' = 0{\cdot}7581 + 0{\cdot}0037 = 0{\cdot}7618$

又,
$$\left.\begin{aligned} \cos 37^\circ 10' &= 0{\cdot}7969 \\ \cos 37^\circ 18' &= \ldots\ldots\ldots \\ \cos 37^\circ 20' &= 0{\cdot}7951 \end{aligned}\right\} -0{\cdot}0018$$

$10' : 8' = -0{\cdot}0018 : x, \qquad x = -0{\cdot}0014$

$\therefore\ \cos 37^\circ 18' = 0{\cdot}7969 - 0{\cdot}0014 = 0{\cdot}7955$

例三. $\sin\alpha = 0{\cdot}2845$ ナルトキ α ノ値ヲ求ム。

(解) 眞數表ニヨレバ

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{aligned} \sin 16^\circ 30' &= 0{\cdot}2840 \\ \sin\alpha \quad &= 0{\cdot}2845 \end{aligned}\right\} 5 \\ \sin 16^\circ 40' = 0{\cdot}2868 \quad \end{aligned}\right\} 28$$

$28 : 5 = 10' : x', \qquad x = 1{\cdot}8$

$\therefore\ \alpha = 16^\circ 31'{\cdot}8$

注意. 本例ノ差 5 及ビ 28 ハ小數點以下第四位ヲ單位ニ取リタル書キ方ナリ。

例四. $\cot A = 2$ ナルトキ A ヲ求ム。

(解) 眞數表ニヨリ

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{aligned} \cot 26^\circ 30' &= 2{\cdot}0057 \\ \cot A \quad &= 2 \end{aligned}\right\} -57 \\ \cot 26^\circ 40' = 1{\cdot}9912 \quad \end{aligned}\right\} -147$$

$-145 : -57 = 10' : x', \qquad x' = 4'$

$\therefore\ A = 26^\circ 30' + 4' = 26^\circ 34'$

問題第六

1. 次ノ三角函數ノ値ヲ求メヨ。

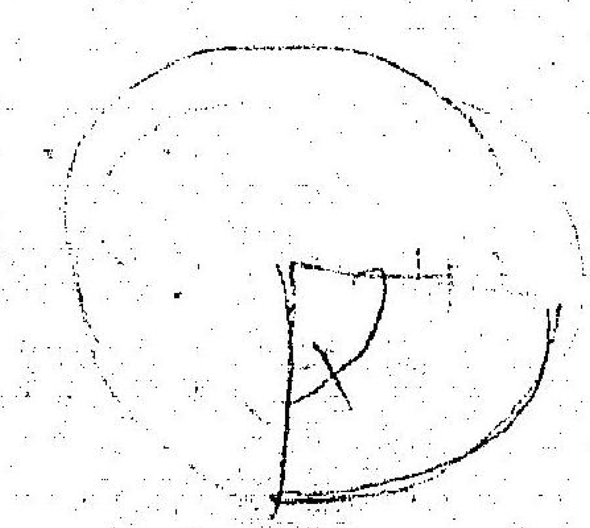
(a) $\sin 71^\circ 40'$ (b) $\cos 28^\circ 35'$

(c) $\tan 50^\circ 53'$ (d) $\cot 41^\circ 5'$

2. 次ノ方程式ニ適スル鋭角ヲ求メヨ。

(a) $\sin A = 0{\cdot}3861$ (b) $\tan x = \frac{1}{3}$

(c) $\cos\alpha = 0{\cdot}25$ (d) $\cot\theta + 3\tan\theta = 4$



第二編

直角三角形

10. 定義

三角形ノ三ツノ邊ト三ツノ角トヲ三角形ノ**原素**トイフ。

幾何學ニ據レバ,六ツノ原素ノ中,一邊ト他ノ二ツノ原素トガ與ヘラルレバ其三角形ヲ作圖スルコトヲ得。三角法ニ於テハ一邊ト他ノ二原素トヲ數値ニテ與ヘテ,殘リノ三原素ヲ數値ニテ求メントスルモノナリ。而シテ之レヲ三角形ヲ**解ク**トイフ。

三角形ヲ解クニ當リテハ,三ツノ角ヲA, B, Cニテ表ハシ,夫々ノ對邊ヲa, b, cトスルコト慣習ニシテ至便ナリ。

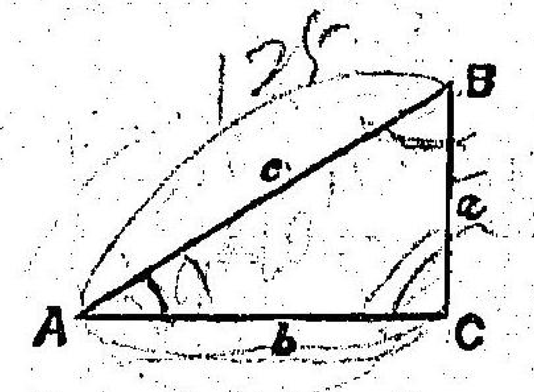
注意. 三角法ニ於テハ,角ノ頂點ノ記號A, B, Cヲ以テ直チニ角ノ大サヲ表ハサシメ,混同ノ恐レナキ限リハ$\hat{A}$又ハ$\hat{A}$ノ大サナドト記セザルモノトス。例ヘバA=37° 30′ノ如シ。

11. 直角三角形ヲ解クコト

直角三角形ニ於テハ,一ツノ角ノ直角ナルコトガ與ヘラレタルモノ故其他ニ二邊ガ與ヘラルルカ,一邊ト一角トガ與ヘラルルカノ二ツノ場合ヲ生ズ。

第一. 一邊ト一鋭角トガ與ヘラレタル場合

三角形ABCニ於テC=90°ナリトセヨ。



(1) A, Bノ何レガ與ヘラルルトモ,他ハ

$$A+B=90°$$

ヨリ求メラルベシ。

(2) a, b, cノ中何レノ一ツガ與ヘラルルトモ,他ハ

$$\frac{a}{c}=\sin A=\cos B$$

$$\frac{b}{c}=\cos A=\sin B$$

$$\frac{a}{b}=\tan A=\cot B$$

ヨリ算出セラルベシ。

例一. c=125間, A=9° 20′ヨリa, b, Bヲ求メヨ。

(解) 9° 20′+B=90° ヨリ

$$B=90°-9°20'=\boxed{80°40'}$$

又，$\frac{b}{c}=\cos A$ ヨリ

$$b=c\cos A=125\times0\cdot9868=123\cdot4\ (間)$$

$\frac{a}{c}=\sin A$ ヨリ

$$a=c\sin A=125\times0\cdot1622=20\cdot3\ (間)$$

例二. $b=27$ 米, $A=37°5'$ ヨリ a, c, B ヲ求メヨ。

(解) $B=90°-37°5'=52°55'$

又，$\frac{a}{b}=\tan A$ ヨリ

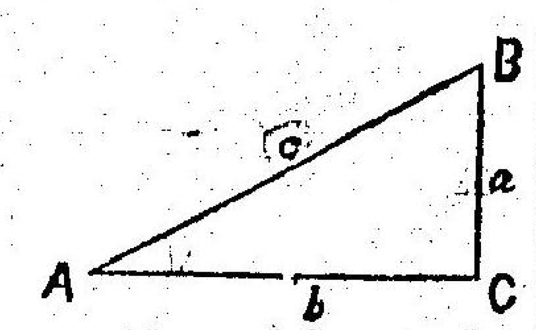
$$a=b\tan A=27\times0\cdot7559=20\cdot4\ (米)$$

$\frac{b}{c}=\cos A$ ヨリ

$$c=\frac{b}{\cos A}=\frac{27}{0\cdot7978}=33\cdot8\ (米)$$

第二. 二邊ガ與ヘラレタル場合

三角形 ABC ニ於テ $C=90°$ ナリトセヨ。



(1) a, b, c ノ中何レノ二邊ガ與ヘラレルトモ,他ハ

$$c^2=a^2+b^2$$

ヨリ求メ得ラルベシ。

(2) A, B ハ

$$\tan A=\frac{a}{b},\qquad B=90°-A$$

$$\sin A=\frac{a}{c},\qquad B=90°-A$$

$$\cos A=\frac{b}{c},\qquad B=90°-A$$

ノ何レヲ用ヒテモ求メ得ラルベシ。

注意. (2) ノ三公式ノ中成ルベクハ (1) ニヨリテ求メタル邊ヲ含マザルモノヲ用ヒルヲヨシトス。是レ誤差ヲ重ネザル用意ナリ。

例一. $a=100$ 尺, $b=600$ 尺ヨリ c, A, B ヲ求メヨ。

(解) $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{100^2+600^2}=608\cdot3$ (尺)

又，$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{100}{600}=0\cdot16667$

眞數表ニヨリ

$$A=9°27'\cdot8$$

從テ $B=90°-9°27'\cdot8=80°32'\cdot2$

(別解) $A=9°27'\cdot8$ ヲ求メタル後ニ

$$c=\frac{a}{\sin A}=\frac{100}{0\cdot1644}=608\cdot3$$

ヲ得ルモ可ナリ。

例二. $c=18$, $b=6\sqrt{2}$ ヨリ a, A, B ヲ求メヨ。

(解) $\cos A=\frac{b}{c}=\frac{6\sqrt{2}}{18}=\frac{\sqrt{2}}{3}=0\cdot4714$

故ニ $A=61°54'$

從テ $B=90°-61°54'=28°6'$

又，　$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{18^2-(6\sqrt{2})^2}=6\sqrt{7}=15{\cdot}87$

トシテモ或ハ

$$a=c\,sin\mathrm{A}=18\times0{\cdot}8819=15{\cdot}87$$

トシテ算出シテモヨシ。

問題第七

次ノ直角三角形ヲ解ケ。但シ C=90° ナルモノトス

1.　$c=250$ 碼，　$\mathrm{B}=72°$

2.　$a=12$ 間，　$\mathrm{A}=62°\,35'$

3.　$a=5\sqrt{3}$，　$b=15$

4.　$a=5$ 寸，　$b=7$ 寸

5.　$a=220$ 尺，　$c=500$ 尺

12. 測量

三角法ノ第一ノ應用ハ地上ノ諸物又ハ天體ノ相互ノ關係ヲ研究スルニ在リ。特ニ斯カル研究ヲナスヲ**測量術**トイフ。

實地ニツイテ距離或ハ角ヲ測ルヲ**實測**トイフ。距離ノ實測ニハ測鎖又ハ卷尺ヲ使用シ,角ノ實測ハ概ネ**經緯儀** (Transit) ニ據ル。

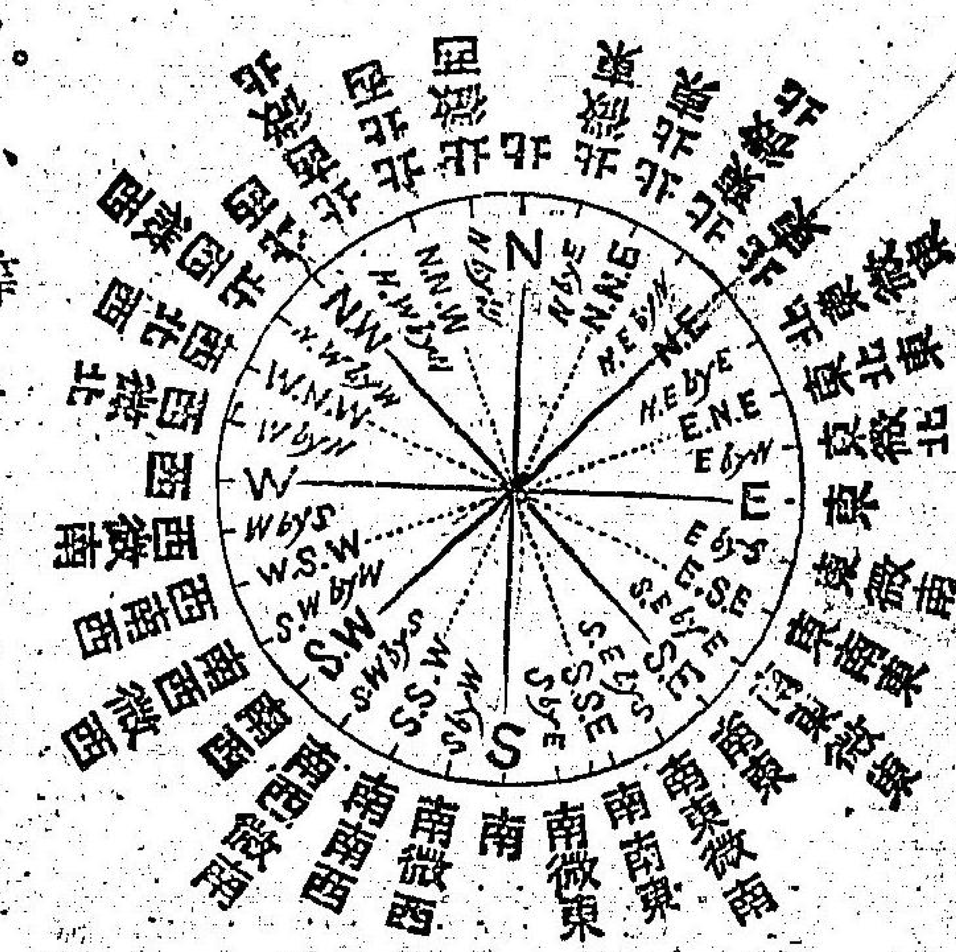
測量ノ問題ニ於テハ,必ズ先ヅ或距離ヲ實測スルヲ要ス。之レヲ**基線**トイフ。

重錘ヲ糸ニテ吊シタルトキ,其糸ノ方向ヲ**鉛直線**トイヒ,之レヲ含ム平面ヲ**鉛垂面**トイフ。

鉛直線ニ垂直ナル直線或ハ平面ヲ夫々**水平線**或ハ**水平面**トイフ。

角ノ實測ニ於テ,鉛垂面ニ於ケル或直線ト水平線トノナス角ハ水平線ノ上方或ハ下方ニ於ケルニ從ヒ,之レヲ夫々**仰角**或ハ**俯角**ト呼ブ。仰角ハ又**高度**トモイフコトアリ。

或觀測點ニ於テ他ノ二點間ノ距離ヲ夾ム角ヲ其距離ノ**角距**トイフ。

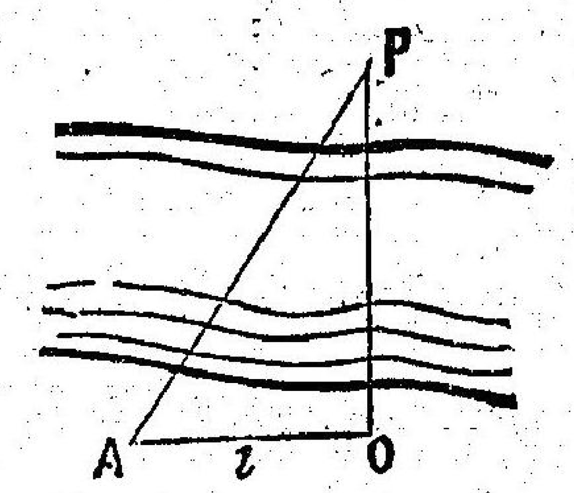


經緯儀等ニ於テハ 10″ 飛ビ, 20″ 飛ビ等ノ分度器ヲ具ヘテ角ヲ測ルヲ便トス。航海用ノ羅針盤ニ於テハ北東南西ノ間ヲ各八等分シテ各分點ニ命名スルコト圖ノ如クス。

13. 直角三角形ノ應用

直角三角形ヲ解クコトニ歸セシメ得ベキ距離及ビ高サノ測量ノ簡易ナル例ヲ次ニ示サン。

第一. 達シ得ベカラザル點マデノ距離ヲ求ムル法



OヨリPヘハ達シ得ベカラズトシ,從テ實測スル能ハズトセバ,Oニ測量器械ヲ据エテ,OPニ垂直ナル方向ニ一點Aヲ定メ,OA=lヲ實測スベシ。次ニ器械ヲAニ移シテOPノ角距ヲ實測スレバ

$$\frac{OP}{l}=tanA$$

$$OP=l\,tanA$$

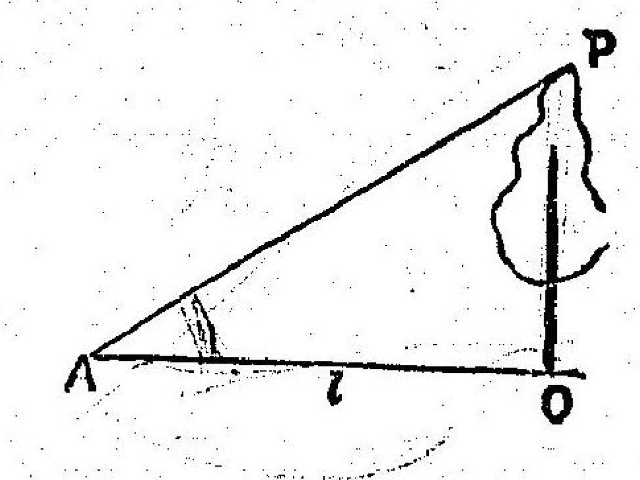
之レニヨリテ距離OPヲ求ムルコトヲ得ルナリ。

例. 實測ノ結果,OA=120間, A=68°33′ナリトスレバ,

$$OP=120\times2{\cdot}5452=305{\cdot}4\ (間)$$

第二. 水平上ニ直立セル物體ノ高サヲ求ムル法

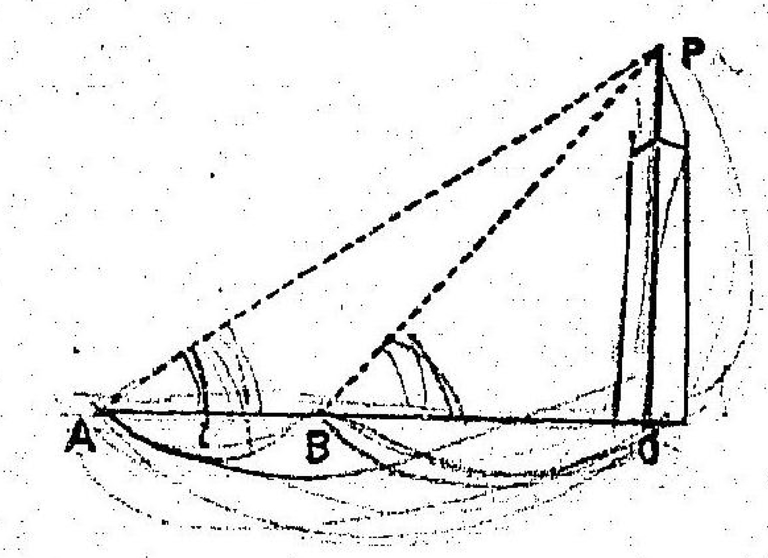
(1) 直立體ノ基脚(鉛直線ト水平面トノ交點)ニ達シ得ベキ場合



此場合ニハ,基脚ヨリ實測距離lナル水平面上ノ一點Aニ於テ直立體ノ頂點Pノ仰角ヲ測ルベシ。然ルトキハ

$$PO=l\,tanA$$

(2) 直立體ノ基脚ニ達シ得ベカラザル場合



此場合ニハ,基脚ヨリ水平ナル一直線上ニ二點A, Bノ距離lヲ實測シ,A, Bノ各點ニ於テ頂點Pノ仰角ヲ測ルベシ。然ルトキハ

$$AO=l+BO=POcotA$$

$$BO=POcotB$$

$$\therefore\quad l=PO(cotA-cotB)$$

$$\therefore\quad PO=\frac{l}{cotA-cotB}$$

例. A=30°, B=45°　=100尺ナリトスレバ,

$$PO=\frac{100}{cot30^\circ-cot45^\circ}=\frac{100}{\sqrt{3}-1}=50(\sqrt{3}+1)$$

$$=50(1{\cdot}732+1)=136{\cdot}6\ (尺)$$

注意. 實地ニ高サヲ測ルトキハ,測量器械ノ高サ

(之レヲ眼高トイフ)ヲ控除シタルモノヲ得ルヲ普通トス。斯ノ如キ場合ニハ計算ノ際之レヲ加フベキナリ。例ヘバ前例ニ於テ器械ノ高サ4.2尺ナリトスレバ實際ノ塔ノ高サハ $136{\cdot}6^{尺}+4{\cdot}2^{尺}=140{\cdot}8^{尺}$ トナルガ如シ。然レドモ本書ニ於テハ煩ヲ恐レテ概ネ之レヲ省ケリ。

問題第八

1. 河岸ノ一點Aニ於テ對岸ノ樹木Bマデノ距離ヲ測ラントシ,ABニ垂直ナル方向ニAC=7間ヲ實測シタルニ,角ACBガ60°ナリトイフ。距離AB幾何。 答12.124間

2. 水平面ト12°30′ノ傾斜ヲナセル坂道アリ,長サ5町20間ナリトスレバ,頂上ハ麓ヨリ何程高キカ。

3. 海岸ニ在ル高サ32尺ノ巖頭ヨリ一漁舟ヲ臨ミ俯角7°30′ヲ得タリ。漁舟マデノ距離如何。

4. 水平面ニ對シ45°ノ傾斜ヲナセル長サ100尺ノ坂アリ,今之レニ傾斜角30°ナル九折坂道ヲ造ラバ坂道ノ長サ幾尺トナルベキカ。

5. 一塔アリ,其ノ基脚ヨリ25尺ヲ距ツル地點ニ於ケル仰角ガ90尺ヲ距ツル地點ニ於ケル仰角ノ二倍ニ等シトイフ。塔ノ高サ幾何。

6. 河岸ニ立テル人ガ對岸ノ一樹ヲ望ミテ仰角60°ヲ得,次ニ河岸ヨリ40尺退キタル地點ニ於テ仰角30°ヲ得タリ。樹ノ高サ及ビ河幅ヲ求メヨ。但シ眼高ヲ4尺トセヨ。

7. 圓形ノ池アリ,地上ノ一點ヨリ此池ヲ夾ム角ハ60°ニシテ,此點ヨリ池邊ニ至ル最近距離ハ15間ナリトイフ。此池ノ直徑幾何。

8. 平地上ニ築カレタル臺上ニ直立セル竿アリ,地上ノ一點ニ於テ竿ノ底及ビ頂ヲ望ミテ仰角30°及ビ60°ヲ得,次ニ臺ヨリ遠ザカルコト更ニ25尺ナル地點ニ於テ竿頭ノ仰角45°ヲ得タリトイフ。竿ノ長サ幾何。

9. 半徑 r 尺ナル球狀輕氣球アリ,其ノ中心ノ仰角ハ α ニシテ球ヲ夾ム角ハ β ナリトスレバ球ノ中心ノ平地上ノ高サ幾何。

10. 一塔アリ,之レヲ正南ニ望ム一地點ニテ仰角 α ヲ得,此地點ヨリ正東ニ l 尺進ミタル地點ニテ仰角 β ヲ得タリトシ,塔ノ高サヲ求メヨ。

11. 丘上ニ立テルl尺ノ標柱アリ,麓ノ一地點ニ於テ柱ノ底及ビ頂ノ仰角夫々α及ビβヲ得タリトシ,丘ノ高サヲ求メヨ。

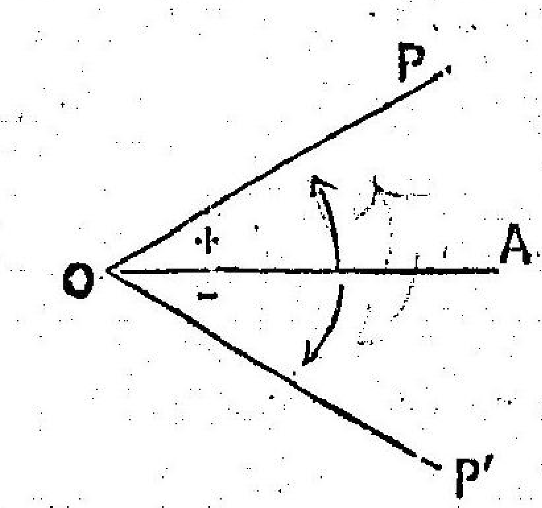
12. 水平面上ニ於テ正北ニ傾斜セル旗竿アリ,其ノ正南ニ當リ竿底ヨリa尺及ビb尺ノ地點ニ於テ夫々仰角α及ビβヲ得タリトシ,竿頭ノ水平面上ノ高サヲ求メヨ。

第三編

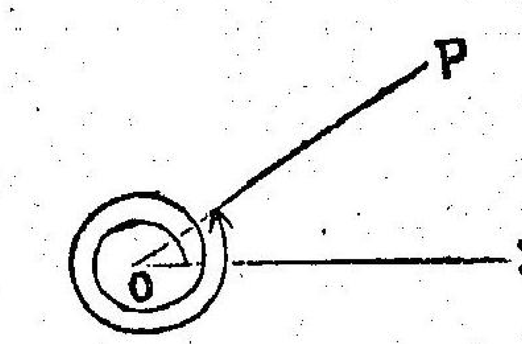
一般ノ角ノ三角函數

14. 一般ノ角

一ツノ平面上ニ於テ一ツノ直線ガ一ツノ點ヲ中心トシテ廻轉スルニハ二樣ノ向キアリ。之レニヨリ,角ヲ表ハス數ニ正負ノ符號ヲ適用シテ,之レヲ代數學ノ數トナス。



平面上ニ角ヲ表ハストキニハ,時計ノ針ト反對ナル向キニ廻轉スル方ヲ正ノ角トスルヲ慣習トス。



直線ガ廻轉ヲ起ス最初ノ位置ヲ角ノ**原線**トイヒ,廻轉スル直線ヲ**動徑**トイヒ,廻轉ノ中心ヲ**原點**トイフ。

動徑ヲ,原點ノ廻リニ正又ハ負ノ方向ニ如何程ニテモ廻轉セシメ得ルモノトシテ之レヲ考フレバ,角ハ

大サヲシテ正又ハ負ノ如何ナル數ヲモ表ハサシムルコトヲ得。

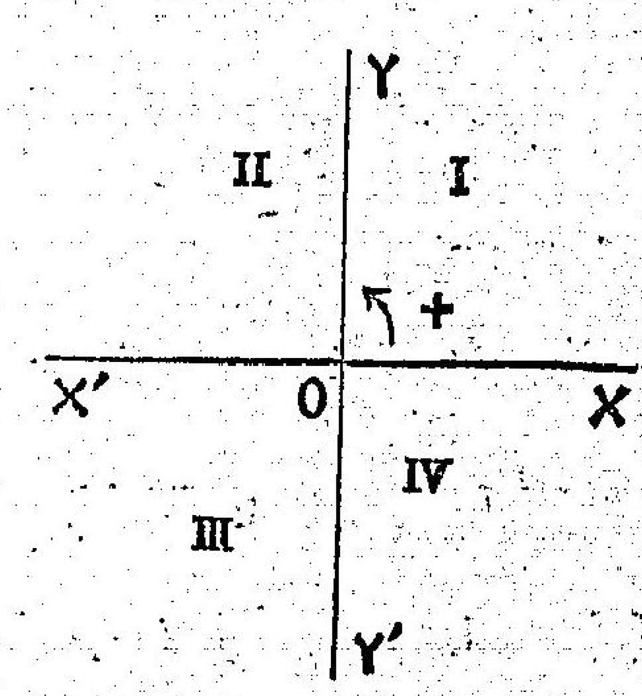
サレバ動徑ノ最後ノ位置ヲ同ジクスル角ハ正角負角共ニ無限ニ有リテ,互ニ$360°$ノ倍數ダケノ差アリ。故ニ其ノ最小ナル正角ヲαトスレバ,他ハ

$360°\times n+\alpha$ （nハ0又ハ正負ノ整數）

ニヨリテ表ハサルルモノナリ。

角ヲ表ハス數ニ符號ヲ附シ且ツ其ノ大サヲシテ制限無カラシムルトキハ,之レヲ**一般ノ角**トイフ。

15. 象限



角ノ原線ナル直線ト原點ヲ過リテ之レニ垂直ナル直線トニヨリテ平面ヲ分ツトキ,其ノ四ツノ部分ヲ**象限**トイフ。更ニ之レヲ正角ヲ測ル向キニ順次ニ**第一象限,第二象限,第三象限,第四象限**トイフ。

一般ノ角ハ,其ノ最後ノ動徑ガ含マルル象限ニヨリテ之レヲ分類シ,各其象限ニ屬スル角又ハ其象限ニ

於ケル角トイフ。

16. 一般ノ角ノ三角函數

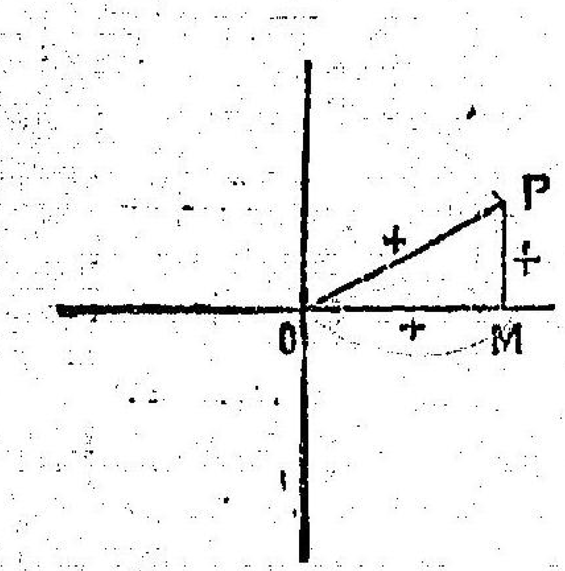
一般ノ角ノ三角函數ハ鋭角ノ場合ノ斜邊,底邊,垂線ト同樣ナル關係ヲ存續スルモノトシ,更ニ次ノ規約ニヨリテ之レニ符號ヲ附ス。

I. 斜邊ハ常ニ動徑上ニ取リ,正トス。

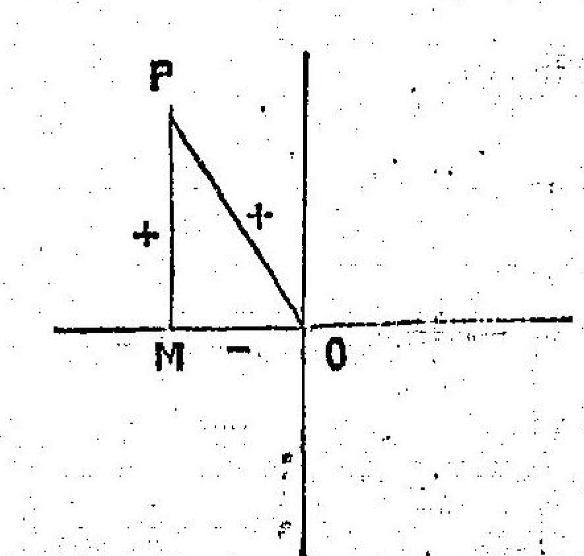
II. 底邊ハ動徑上ノ一點ヨリ原線OX又ハ其ノ延長OX′ノ上ニ引ケル垂線ノ足ト原點Oトノ間ノ距離ニシテ,原線ノ上ニ在ルモノヲ正トシ,其ノ延長ノ上ニ在ルモノヲ負トス。

III. 垂線ハ第一,第二ノ象限内ニ在ルモノヲ正トシ,第三,第四ノ象限内ニ在ルモノヲ負トス。

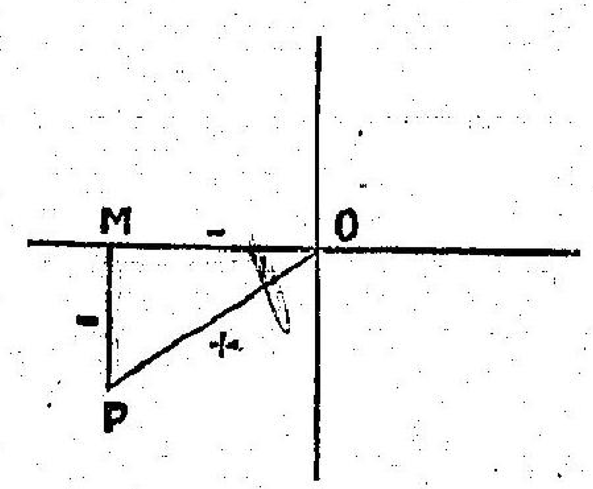
I.



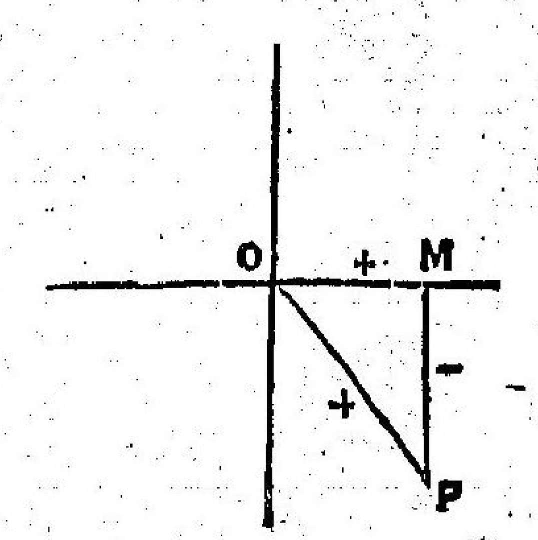
II.



III.



IV.



即チ,一般ノ角ヲθニテ表ハセバ,

$$\sin\theta=\frac{PM}{OP},\qquad \cos\theta=\frac{OM}{OP}$$

$$\tan\theta=\frac{PM}{OM},\qquad \cot\theta=\frac{OM}{PM}$$

$$\sec\theta=\frac{OP}{OM},\qquad \operatorname{cosec}\theta=\frac{OP}{PM}$$

故ニ,各象限ニ於ケル角ノ三角函數ノ符號ハ次表ノ如シ。

函數 \ 象限	I	II	III	IV
$\sin\theta$ $\operatorname{cosec}\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$ $\sec\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$ $\cot\theta$	+	−	+	−

17. 一般ノ角ノ三角函數相互ノ關係

第4節ニ得タル三角函數ノ逆數ノ關係,商ノ關係,平方ノ關係ガ,之レニ符號ヲ添ヘテ一般ノ角ノ三角函數トシテモ,尚眞ナルコトハ容易ニ證明セラルベキコトナリ。即チθヲ一般ノ角トスルモ,

$$\left.\begin{array}{c}\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta},\quad \sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta},\quad \operatorname{cosec}\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}\\ \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\\ 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta,\quad 1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta\end{array}\right\}\ (8)$$

從テ,此公式ヨリ導キ得ル一般ノ角ノ有理式關係モ亦眞ナリ。

注意. 公式(8)ノ平方ノ關係ニヨリ,其ノ一ツノ三角函數ヲ他ニヨリテ表ハサントスルトキニハ,一般ニハ平方根號ノ前ニ複符號ヲ要スルコトヲ忘ルベカラズ。

例ヘバ
$$\sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$\tan\theta=\pm\sqrt{\sec^2\theta-1}$$

即チ $\cos\theta$, $\sec\theta$ 等ノ一ツノ値ニ對シテ夫々 $\sin\theta$, $\tan\theta$

等ハ二ツノ値ニテ適合スルナリ。

然レドモ,若シ角 θ ノ値ガ定マレルトキニハ,此等ノ二ツノ値ノ中,一ツヲ選ブコトヲ要ス。例ヘバ,θ ガ第一,第二ノ象限ニ於ケル角ナルトキハ

$$\sin\theta=+\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

θ ガ第三,第四ノ象限ニ於ケル角ナルトキハ

$$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

ナルガ如シ。

18. 無限大,無限小

値ヲ變ズル數アリテ,其ノ絕對値ガ如何ナル正數ヨリモ大トナリ得ルヤウニ絕エズ增大スルトキハ,之レヲ**極限ニ於テ無限大トナル**トイヒ,無限大トナルコトヲ∞ニテ表ハス。

又,値ヲ變ズル數ノ絕對値ガ如何ナル正數ヨリモ小ナラシメ得ラルルトキハ,之レヲ**極限ニ於テ無限小トナル**トイフ。無限小ノ極限値ハ0ナリ。

場合ニヨリ,正値ノミヲ經テ無限大或ハ無限小トナルトキヲ夫々 $+\infty$ 或ハ $+0$ ニテ表ハシ,負値ノミヲ經テ無限大或ハ無限小トナルトキヲ夫々 −8

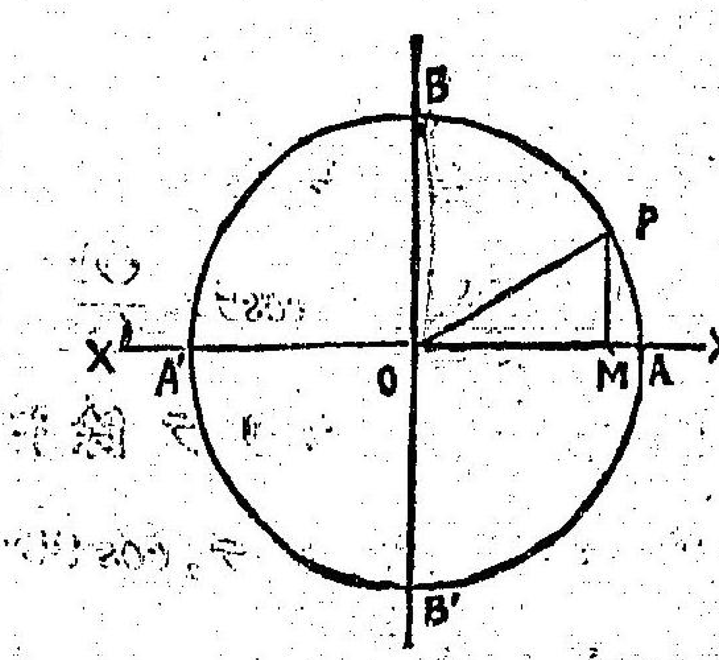
或ハ −0 ニテ表ハスコトアリ。

注意. 一ツノ積ノ中ニ無限小0トナル因數ト無限大∞トナル因數トヲ含ムトキハ,此積ハ必ズシモ0トナルモノニアラズ。

19. 三角函數ノ値ノ變化

θ ガ $0°$ ヨリ $360°$ マデ增大スル間ニ,其ノ三角函數ノ値ガ如何ニ變化スルカヲ見ン。

第一. 正弦ノ變化



角ノ原點Oヲ中心トシ,半徑ガ單位ノ長サニ等シキ圓ヲ作レ。θ ノ動徑ト圓周トノ交點Pヨリ原線ノ直線ニ垂線PMヲ引ケバ,

$$\sin\theta=\frac{PM}{OP}=\frac{PM}{1}=PM$$

サレバ,PMノ長サヲ表ハス數ガ正弦ノ値ニ等シ。從テPMニヨリテ正弦ノ變化ヲ述ブルコトヲ得。

先ヅ $\sin 0°=0$

θ ガ $0°$ ヨリ $90°$ マデ變ズルトキ,$\sin\theta$ ハ0ヨリ $OB=1$ マデ增大ス。

$$\sin 90^\circ = 1$$

θガ90°ヨリ180°マデ變ズルトキ,$\sin\theta$ハ1ヨリ0マデ減小ス。

$$\sin 180^\circ = 0$$

θガ180°ヨリ270°マデ變ズルトキ,$\sin\theta$ハ負値ノミニシテ0ヨリ-1マデ減小ス。

θガ270°ヨリ360°マデ變ズルトキ,$\sin\theta$ハ尙負ニシテ-1ヨリ0マデ增大ス。

第二. 餘弦ノ變化

前圖ニ於テ $\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{OM}{1} = OM$

サレバ,OMニヨリテ餘弦ノ變化ヲ述ブルコトヲ得。

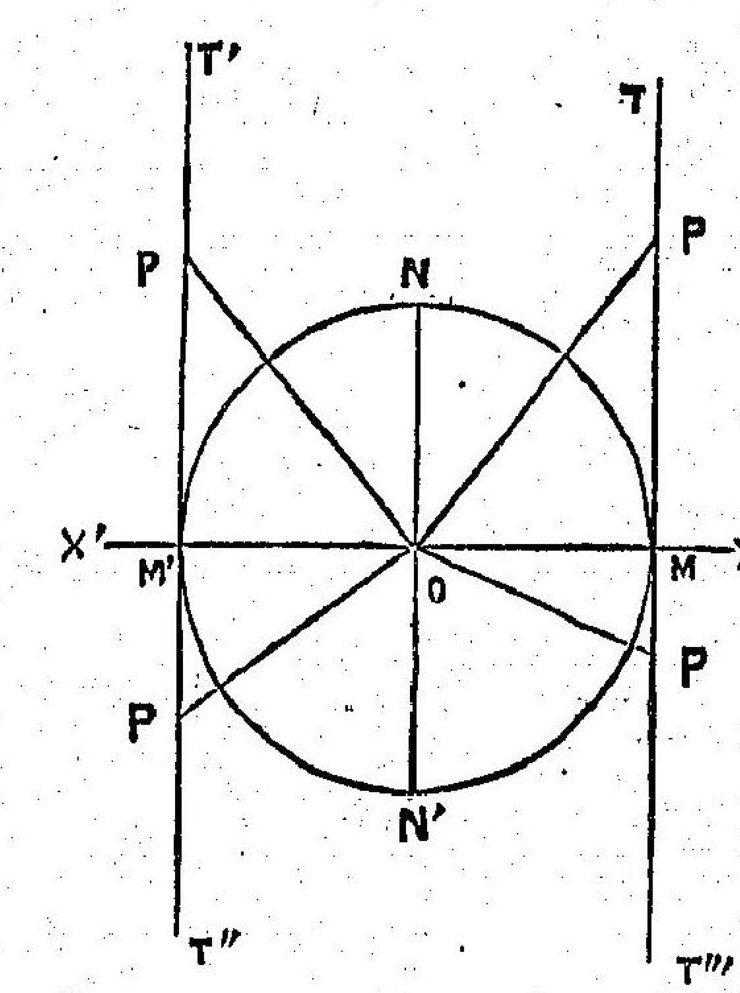
先ヅ$\cos 0^\circ = 1$ニシテ,$\cos 90^\circ = 0$マデハ$\cos\theta$ハθノ增大スルニ從ヒ減小ス。

$\cos 90^\circ = 0$ヨリ$\cos 180^\circ = -1$マデハ$\cos\theta$ハ負値ノミニシテ尙減小ス。

$\cos 180^\circ = -1$ヨリ$\cos 270^\circ = 0$マデモ$\cos\theta$ハ負値ナリ,然レドモ增大ス。

$\cos 270^\circ = 0$ヨリ$\cos 360^\circ = 1$マデハ$\cos\theta$ハ正値ニシテ增大ス。

第三. 正切ノ變化



角ノ原點Oヲ中心トシ,單位ノ長サニ等シキ半徑ノ圓ヲ作リ,原線ノ直線トノ交點M,M'ニ於テ夫々之レニ切線TT''',T'T''ヲ引ケ。

θノ動徑ト切線トノ交點ヲPトスレバ,

$$\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{PM}{1} = PM \quad (\text{第一,第四象限ニ於テ})$$

$$= \frac{PM'}{OM'} = \frac{PM'}{-1} = -PM' \quad (\text{第二,第三象限ニ於テ})$$

サレバ,PM,PM'ノ長サヲ表ハス數ニヨリテ正切ノ變化ヲ述ブルコトヲ得。

先ヅ $\tan 0^\circ = 0$

θガ0°ヨリ90°マデ變ズルトキハ,PハMT上ヲ漸次ニMヲ遠ザカリ,從テ$\tan\theta$ハ0ヨリ次第ニ增大シテ如何ナル正數ヨリモ大トナル。

$$\tan 90^\circ = \infty$$

θガ90°ヨリ180°マデ變ズルトキハ,PハT'M'上ヲ漸次ニM'ニ近ヅキ,從テ$\tan\theta = -PM'$ハ$-\infty$ヨリ增大シ

テ0トナル。

$$tan180°=0$$

θ ガ $180°$ ヨリ $270°$ マデ變ズルトキハ，P ハ MT″ 上ヲ漸次ニ M′ ニ遠ザカリ，從テ $tan\theta=-PM'$ ハ0ヨリ増大シテ $+\infty$ トナル。

$$tan270°=\infty$$

θ ガ $270°$ ヨリ $360°$ マデ變ズルトキハ，P ハ MT‴ 上ヲ漸次ニ M ニ近ヅキ，從テ $tan\theta$ ハ $-\infty$ ヨリ増大シテ0トナル。

$$tan360°=0$$

第四. 餘切，正割，餘割ノ變化

餘切，正割，餘割ハ夫々正切，餘弦，正弦ノ逆數ニ等シキヲ以テ，前ニ述ベシトコロニヨリテ各ノ變化ヲ容易ニ知ルコトヲ得ベシ。

以上ノ結果ヲ表ニスレバ次ノ如シ。

函數＼θ	0°	I	90°	II	180	III	270°	IV	360
$sin\theta$	0	正ニテ増	1	正ニテ減	0	負ニテ減	-1	負ニテ増	0
$cosec\theta$	∞	正ニテ減	1	正ニテ増	∞	負ニテ増	-1	負ニテ減	∞
$cos\theta$	1	正ニテ減	0	負ニテ減	-1	負ニテ増	0	正ニテ増	1
$sec\theta$	1	正ニテ増	∞	負ニテ増	-1	負ニテ減	∞	正ニテ減	1
$tan\theta$	0	正ニテ増	∞	負ニテ増	0	正ニテ増	∞	負ニテ増	0
$cot\theta$	∞	正ニテ減	0	負ニテ減	∞	正ニテ減	0	負ニテ減	∞

注意一. 角ガ $360°$ ヨリ増大スルカ，又ハ $0°$ ヨリ減小スルトキハ，三角函數ノ値ノ變化ハ表ノ順序ヲ左ヨリ又ハ逆ニ右ヨリ繰リ返ヘスベシ。

注意二. 正弦及ビ餘弦ハ1ト -1 トノ間ノ數値ヲ變化スルノミ。サレバ，何レモ最大値1ト最小値 -1 トヲ有ス。

注意三. 正割及ビ餘割ハ1ト -1 トノ間ノ數値ヲ取ルコトナシ。卽チ1又ハ1ヨリ大ナル正數値カ或ハ -1 又ハ -1 ヨリ小ナル負數値ヲ取ル。

注意四. 正切，餘切ハ如何ナル實數値ヲモ取ルコトヲ得。而シテ角ガ増スニ從ヒ，正切ハ專ラ増大スルノミニシテ，餘切ハ專ラ減小スルノミナリ。

20. $360°\times n+\theta$ ノ三角函數

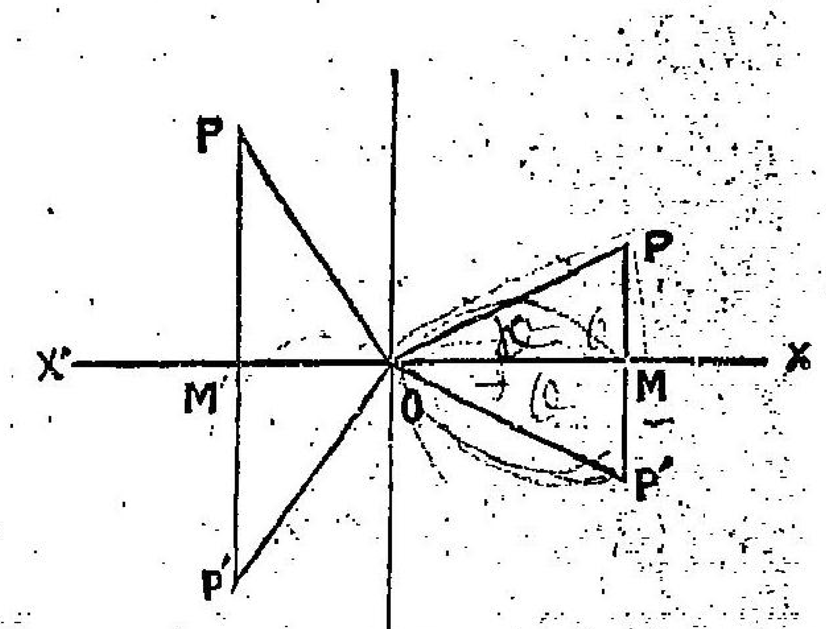
n ガ正又ハ負ノ如何ナル整數ニテモ，同ジ原線ニ關シテ，$360°\times n+\theta$ ト θ トハ動徑ノ最後ノ位置ヲ同ジクスルヲ以テ，

$$\left.\begin{aligned} sin(360°\times n+\theta)&=sin\theta \\ cos(360°\times n+\theta)&=cos\theta \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} tan(360^\circ\times n+\theta)&=tan\theta\\ cot(360^\circ\times n+\theta)&=cot\theta\\ sec(360^\circ\times n+\theta)&=sec\theta\\ cosec(360^\circ\times n+\theta)&=cosec\theta \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(9)$$

21. $(-\theta)$ ノ三角函數

$X\hat{O}P=X\hat{O}P'$ ニシテ且ツ$OP=OP'$ ナラシムレバ，PP' ハ XX' ニヨリテ垂直ニ二等分セラル。其ノ二等分點ヲ M トスレバ，



$$OP=OP',\quad OM=OM,\quad PM=-P'M$$

ナルヲ以テ，$X\hat{O}P=\theta$ トスレバ $X\hat{O}P'=-\theta$ トナリ，$X\hat{O}P=-\theta$ トスレバ $X\hat{O}P'=\theta$ トナリテ，

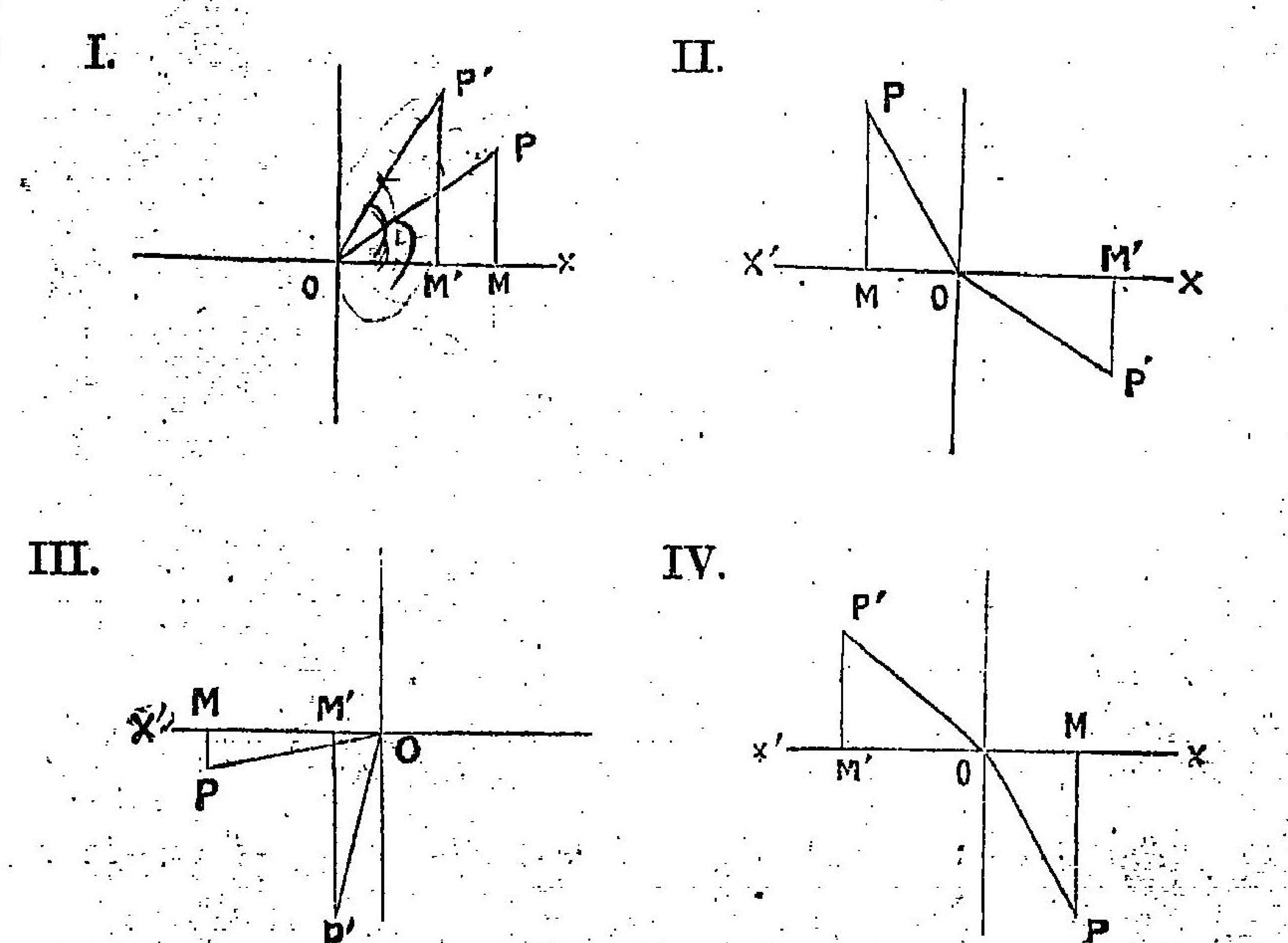
$$\left.\begin{aligned} sin(-\theta)&=-sin\theta, & cosec(-\theta)&=-cosec\theta\\ cos(-\theta)&=\ \ cos\theta, & sec(-\theta)&=\ \ sec\theta\\ tan(-\theta)&=-tan\theta, & cot(-\theta)&=-cot\theta \end{aligned}\right\}(10)$$

注意. $sin(-\theta)$, $tan(-\theta)$ 及ビ其ノ逆數ハ負號ヲ先頭ニ持出シ，$cos(-\theta)$ 及ビ $sec(-\theta)$ ハ負號ヲ無効ニスルコト恰カモ $(-x)^3=-(x)^3$, $(-x)^2=x^2$ ニ似タリ。斯クシテ正弦,正切等ヲ奇數函數ト稱シ,餘弦,正割ヲ偶數函數ト稱ス。

22. $(90^\circ-\theta)$ 及ビ $(90^\circ+\theta)$ ノ三角函數

$X\hat{O}P=\theta$, $X\hat{O}P'=90^\circ-\theta$ トシ,且ツ $OP=OP'$ ナラシメ，P, P' ヨリ XX' ニ夫々垂線 PM, P'M' ヲ引ケバ,常ニ一$\triangle OPM\equiv\triangle P'OM'$ ナルヲ以テ，

$$OP'=OP,\quad OM'=PM,\quad P'M'=OM$$



故ニ

$$\left.\begin{aligned} &\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta, \quad \operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)=\sec\theta \\ &\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta, \quad \sec(90^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta \\ &\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta, \quad \cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta \end{aligned}\right\}(11)$$

之レト前節トヨリ

$$\sin(90^\circ+\theta)=\sin\{90^\circ-(-\theta)\}=\cos(-\theta)=\cos\theta$$
$$\cos(90^\circ+\theta)=\cos\{90^\circ-(-\theta)\}=\sin(-\theta)=-\sin\theta$$
$$\tan(90^\circ+\theta)=\tan\{90^\circ-(-\theta)\}=\cot(-\theta)=-\cot\theta$$

故ニ

$$\left.\begin{aligned} \sin(90^\circ+\theta)&=\cos\theta \\ \cos(90^\circ+\theta)&=-\sin\theta \\ \tan(90^\circ+\theta)&=-\cot\theta \\ \cot(90^\circ+\theta)&=-\tan\theta \\ \sec(90^\circ+\theta)&=-\operatorname{cosec}\theta \\ \operatorname{cosec}(90^\circ+\theta)&=\sec\theta \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(12)$$

23. $180^\circ-\theta$ 及ビ $180^\circ+\theta$ ノ三角函數

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\{90^\circ+(90^\circ-\theta)\}=\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(180^\circ-\theta)=\cos\{90^\circ+(90^\circ-\theta)\}=-\sin(90^\circ-\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(180^\circ-\theta)=\tan\{90^\circ+(90^\circ-\theta)\}=-\cot(90^\circ-\theta)=-\tan\theta$$

他ハ此等ノ逆數ヲトルコトニヨリ,

$$\left.\begin{aligned} \sin(180^\circ-\theta)&=\sin\theta \\ \cos(180^\circ-\theta)&=-\cos\theta \\ \tan(180^\circ-\theta)&=-\tan\theta \\ \cot(180^\circ-\theta)&=-\cot\theta \\ \sec(180^\circ-\theta)&=-\sec\theta \\ \operatorname{cosec}(180^\circ-\theta)&=\operatorname{cosec}\theta \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(13)$$

又

$$\sin(180^\circ+\theta)=\sin\{180^\circ-(-\theta)\}=\sin(-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(180^\circ+\theta)=\cos\{180^\circ-(-\theta)\}=-\cos(-\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(180^\circ+\theta)=\tan\{180^\circ-(-\theta)\}=-\tan(-\theta)=\tan\theta$$

他ハ逆數ヲトルコトトスレバ,

$$\left.\begin{aligned} \sin(180^\circ+\theta)&=-\sin\theta \\ \cos(180^\circ+\theta)&=-\cos\theta \\ \tan(180^\circ+\theta)&=\tan\theta \\ \cot(180^\circ+\theta)&=\cot\theta \\ \sec(180^\circ+\theta)&=-\sec\theta \\ \operatorname{cosec}(180^\circ+\theta)&=-\operatorname{cosec}\theta \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(14)$$

24. 角ノ化法

第19節乃至第21節ニ於テ得タル公式(9)乃至(14)ハ正又ハ負ノ如何程大ナル角ノ三角函數ヲモスベテ

之レヲ0°ヨリ45°マデノ角ノ三角函數ニ歸セシメ得ルモノナリ。

(1) 先ヅ,公式(10)ニヨレバ,負ノ角ノ三角函數ハ正ノ角ノ三角函數ニ等シカラシムルコトヲ得。

(2) 公式(9)ニヨレバ,360°ヨリ大ナル角ノ三角函數ハ360°ヨリ小ナル角ノ三角函數ニ等シカラシムルコトヲ得。

(3) 公式(14)ニヨレバ,180°ヨリ大ナル角ノ三角函數ハ,180°ヨリ小ナル角ノ三角函數ニ等シカラシムルコトヲ得。

(4) 公式(12)又ハ(13)ニヨレバ,90°ヨリ大ナル角ノ三角函數ヲ90°ヨリ小ナル角ノ三角函數ニ等シカラシムルコトヲ得。

(5) 公式(11)ニヨレバ,45°ト90°トノ間ノ角ノ三角函數ハ0°ト45°トノ間ノ角ノ三角函數ニ等シカラシムルコトヲ得。

斯クノ如ク,正又ハ負ノ大ナル角ノ三角函數ヲ最小ナル正角ノ三角函數ニ化スルコトヲ**角ノ化法**トイフ。

注意. 化法適用ニ際シテ(5)ハ普通ニ使用セザルコト多シ。此場合ニハ0°ヨリ90°マデノ間ノ角ヲ最小ナル正角ト看做スナリ。然レドモ三角函數ノ眞數表等ニ於テ0°ヨリ45°マデノ値ヲ擧グルノミニテ充分ナルハ,是レ(5)ノ化法ニ由ルモノニシテ既ニ第8節ニ於テモ注意シタルトコロナリ。

例一. $\sin 1000° = \sin(360° \times 2 + 280°) = \sin 280°$

$= \sin(180° + 100°) = -\sin 100°$

$= -\sin(90° + 10°) = -\cos 10°$

例二. $\tan(-600°) = -\tan 600° = -\tan(360° + 240°)$

$= -\tan 240° = -\tan(180° + 60°)$

$= -\tan 60° = -\sqrt{3}$

tan. 第三象限 60°.

問題第九

1. 次ノ式ノ値ヲ求メヨ。

9(a) $\cos 0° \tan 45° + 2\cos 180° \sin 30° + 3\cos 360° \cot 30°$

(b) $\sin 0° \sin 60° \sin 120° - \sin 30° \sin 90° \sin 270°$

2. 次ノ各ノ値ヲ求ム。

(a) $\sin 690°$　　(b) $\tan 3465°$

(c) $\cot(-210°)$　　(d) $\sec(-1500°)$

3. 次ノ各ヲ45°ヨリ小ナル角ノ三角函數ニ化セヨ。

(a) $\sin 500^\circ$　　　　(b) $\tan(-730^\circ)$

4. $\tan 238^\circ = \frac{8}{5}$ ナルトキ，$\sin 238^\circ$ 及ビ $\cos 122^\circ$ ノ値各幾何。

5. $\cos\theta = -\frac{5}{13}$ ナルトキ，$\sin\theta$ 及ビ $\tan\theta$ ノ値各幾何。

6. 次ノ公式ノ複符號ハ如何ニ選定スベキカ，θ ノ限界ヲ求ム。

(a) $\cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$

(b) $\sec\theta = \pm\sqrt{1+\tan^2\theta}$

7. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

(a) $\sin(90^\circ - x) + \sin(180^\circ - x) + \sin(360^\circ - x)$

(b) $\sin^2 A + \sin^2(A+90^\circ) + \sin^2(A+180^\circ) + \sin^2(A+270^\circ)$

(c) $\frac{\sin(180^\circ-\alpha)}{\tan(180^\circ+\alpha)} \cdot \frac{\cos(90^\circ-\alpha)}{\tan(90^\circ+\alpha)} \cdot \frac{\cos(360^\circ-\alpha)}{\sin(-\alpha)}$

8. $270^\circ \pm A$ ノ三角函數ヲ A ノ三角函數ニ化スル方法ヲ示セ。

9. $\cos^2\theta = \frac{1}{2}$ ヲ滿足スル -180° ヨリ 180° マデノ間ノ角ヲ求メヨ。

10. 次ノ方程式ヲ滿足スル 0° ヨリ 360° マデノ間ノ角ヲ求メヨ。

(a) $2\cos^2 x + 3\sin x = 3$　　　(b) $2\sin^2\theta - 5\cos\theta - 4 = 0$

150°ヲ忘レテハイケヌ

11. 0° ト 360° トノ間ニ於テ $2\cos x - 1$ ヲ正ナラシムル x ノ範圍ヲ求メヨ。

12. $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$ ヨリ θ ヲ消去セヨ。

13. $\cos\theta\sin\theta = m,\ \cot\theta = n$ ヨリ θ ヲ消去セヨ。

第三編 (續キ)

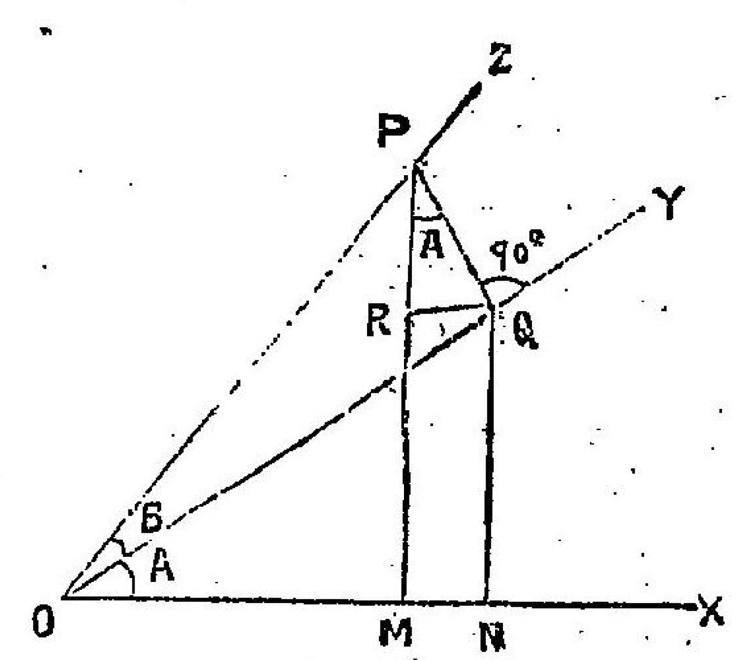
角ノ和ノ三角函數

25. 正弦及ビ餘弦ノ加法定理

今 A, B, A+B ヲ何レモ鋭角ナリトシ,

$$X\hat{O}Y=A,\quad Y\hat{O}Z=B$$

ナラシメ, OZ 上ノ一點 P ヨリ OX, OY ニ夫々垂線 PM, PQ ヲ引キ,次ニ Q ヨリ OX, PM ニ夫々垂線 QN, QR ヲ引ケバ,



$$Q\hat{P}R=A$$

故ニ
$$\sin(A+B)=\frac{PM}{OP}=\frac{PR+RM}{OP}=\frac{PR+QN}{OP}$$
$$=\frac{QN}{OP}+\frac{PR}{OP}$$
$$=\frac{QN}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}+\frac{PR}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OP}$$
$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B)=\frac{OM}{OP}=\frac{ON-MN}{OP}=\frac{ON-QR}{OP}$$

$$=\frac{ON}{OP}-\frac{QR}{OP}$$
$$=\frac{ON}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}-\frac{QR}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OP}$$
$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

以上ノ二ツノ公式ハ, A, B ノ一方又ハ双方ガ 0 ナル格段ノ場合ニモ,又 A+B ガ 90° ナル場合ニモ適合ス。又 A+B ガ鈍角トナルモ,更ニ又, A, B ガ正又ハ負ノ如何ニ大ナル角トナルモ公式 (9) 乃至 (14) ニ據レバ以上ノ公式ハ眞ナルモノナリ。

從テ, B ノ代リニ −B トオケバ,

$$\sin(A-B)=\sin A\cos(-B)+\cos A\sin(-B)$$
$$=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$
$$\cos(A-B)=\cos A\cos(-B)-\sin A\sin(-B)$$
$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

Sin 2A = 2 Sin A Cos A

即チ
$$\left.\begin{aligned}\sin(A+B)&=\sin A\cos B+\cos A\sin B\\ \sin(A-B)&=\sin A\cos B-\cos A\sin B\\ \cos(A+B)&=\cos A\cos B-\sin A\sin B\\ \cos(A-B)&=\cos A\cos B+\sin A\sin B\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

之レヲ正弦及ビ餘弦ノ加法定理又ハ基本公式トイフ。

26. 正切及ビ餘切ノ加法定理

$$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$

右邊ノ分母子ヲ $\cos A\cos B$ ニテ割レバ,

$$=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

$\tan(A-B)$ ニツイテハ分母子ノ兩項間ノ符號ヲ異ニスルノミナリ。

$$\cot(A+B)=\frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}=\frac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}$$

右邊ノ分母子ヲ $\sin A\sin B$ ニテ割レバ

$$=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$$

$\cot(A-B)$ ニツイテハ亦分母子トモ兩項間ノ符號ヲ變ズレバ足ル。卽チ

$$\left.\begin{aligned}\tan(A+B)&=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\\ \tan(A-B)&=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}\\ \cot(A+B)&=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}\\ \cot(A-B)&=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(16)$$

27. 15° 及ビ 75° ノ三角函數

公式 (15), (16) ニ於テ A=45°, B=30° トスレバ 15° 及ビ 75° ノ三角函數ヲ得ベシ。卽チ

$$\sin15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin45^\circ\cos30^\circ-\cos45^\circ\sin30^\circ$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos45^\circ\cos30^\circ+\sin45^\circ\sin30^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\tan15^\circ=\frac{\sin15^\circ}{\cos15^\circ}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$$

$$\cot15^\circ=\frac{\cos15^\circ}{\sin15^\circ}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$$

$$\sin75^\circ=\sin(90^\circ-15^\circ)=\cos15^\circ=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos75^\circ=\cos(90^\circ-15^\circ)=\sin15^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\tan75^\circ=\cot15^\circ=2+\sqrt{3}$$

$$\cot75^\circ=\tan15^\circ=2-\sqrt{3}$$

28. $\sin(A+B)\sin(A-B)$, $\cos(A+B)\cos(A-B)$ ノ公式

公式 (15) ヲ二ツヅツ相乘ズレバ,

$$\begin{aligned} \sin(A+B)\sin(A-B) &= \sin^2A\cos^2B-\cos^2A\sin^2B \\ &= \sin^2A(1-\sin^2B)-(1-\sin^2A)\sin^2B \\ &= \sin^2A-\sin^2B \end{aligned}$$

或ハ
$$\begin{aligned} &= (1-\cos^2A)\cos^2B-\cos^2A(1-\cos^2B) \\ &= \cos^2B-\cos^2A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(A+B)\cos(A-B) &= \cos^2A\cos^2B-\sin^2A\sin^2B \\ &= \cos^2A(1-\sin^2B)-(1-\cos^2A)\sin^2B \\ &= \cos^2A-\sin^2B \end{aligned}$$

或ハ
$$= \cos^2B-\sin^2A$$

即チ
$$\left.\begin{aligned} \sin(A+B)\sin(A-B) &= \sin^2A-\sin^2B \\ &= \cos^2B-\cos^2A \\ \cos(A+B)\cos(A-B) &= \cos^2A-\sin^2B \\ &= \cos^2B-\sin^2A \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

問題第十

1. 次ノ各ノ式ヲ證明セヨ。

(a) $\sqrt{2}\sin(45^\circ+\theta)=\cos\theta+\sin\theta$

(b) $\sqrt{2}\cos(45^\circ+\theta)=\cos\theta-\sin\theta$

(c) $\tan(45^\circ+\theta)=\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$　(d) $\cot(45^\circ+\theta)=\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

2. A, B ヲ何レモ第一象限ニ於ケル角トスレバ,

(a) $\sin A=\dfrac{3}{5}$, $\sin B=\dfrac{2}{3}$ ヨリ $\sin(A+B)$, $\cos(A-B)$ ヲ求メヨ。

(b) $\sin A=\dfrac{12}{13}$, $\cos B=\dfrac{4}{5}$ ヨリ $\sin(A+B)$, $\cos(A+B)$ 及ビ $\tan(A+B)$ ヲ求メヨ。

(c) $\tan A=\dfrac{2}{3}$, $\tan B=\dfrac{3}{2}$ ヨリ A+B ヲ求メヨ。

3. α, β ヲ一般ノ角ナリトシ,

(a) $\sin\alpha=\dfrac{8}{17}$, $\cos\beta=\dfrac{4}{5}$ ヨリ $\cos(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ ヲ求メヨ。

(b) $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\cos\beta=\dfrac{1}{3}$ ヨリ $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ 及ビ $\tan(\alpha-\beta)$ ヲ求メヨ。

(c) $\tan\alpha=1$, $\tan\beta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ヨリ $\tan(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$ ヲ求メヨ。

4. $\tan A=\dfrac{5}{6}$, $\cot B=11$ ナルトキ, 0° ヨリ 360° マデノ間ノ A+B ノ値ヲ求メヨ。

5. 105° ノ三角函數ヲ求メヨ。　$(105^\circ=60^\circ+45^\circ)$

6. $\sin 165^\circ$, $\cos 165^\circ$ ヲ求ム。　$(165^\circ=45^\circ+120^\circ)$

次ノ恒等式(7)乃至(11)ヲ證明セヨ。

7. $\tan A+\tan B=\dfrac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}$

8. $\dfrac{\tan A-\tan B}{\tan A+\tan B}=\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}$

9. $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma$
$\qquad\qquad+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

10. $\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$
$\qquad\qquad-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$

11. $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta}$

注意. 問題 11 ヨリ, $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ ナルトキハ,

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

12. $\sin A=\sin B$, $\cos A=\cos B$ ナルトキハ $A-B$ ハ 0 ナルカ又ハ 360° ノ倍數ニ等シ。

29. 二倍角ノ三角函數

公式 (15), (16) ノ第一,第三ニ於テ B=A トスレバ

$$\left.\begin{aligned}\sin 2A&=2\sin A\cos A\\ \cos 2A&=\cos^2A-\sin^2A\\ &=2\cos^2A-1\\ &=1-2\sin^2A\\ \tan 2A&=\frac{2\tan A}{1-\tan^2A}\\ \cot 2A&=\frac{\cot^2A-1}{2\cot A}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(18)$$

30. 半角ノ三角函數

公式 (18) ノ A ノ代リニ $\frac{A}{2}$ ヲ用フレバ,

$$\left.\begin{aligned}\sin^2\frac{A}{2}&=\frac{1-\cos A}{2}\\ \cos^2\frac{A}{2}&=\frac{1+\cos A}{2}\\ \text{相割リテ}\quad \tan^2\frac{A}{2}&=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}\\ \cot^2\frac{A}{2}&=\frac{1+\cos A}{1-\cos A}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(19)$$

又, $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\dfrac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\dfrac{1-\cos A}{\sin A}$

$\cot\dfrac{A}{2}=\dfrac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\dfrac{2\cos^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\dfrac{1+\cos A}{\sin A}$

トスルコトヲ得。サレバ

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}\\ \cos\frac{A}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}\\ \tan\frac{A}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\frac{1-\cos A}{\sin A}\\ \cot\frac{A}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}}=\frac{1+\cos A}{\sin A}\end{aligned}\right\}\cdots(20)$$

但シ複符號ハ $\frac{A}{2}$ ノ屬スル象限ニヨリテ適宜何レカヲ選ブベキモノナリ。

31. 三倍角ノ三角函數

$$\begin{aligned} \sin 3A &= \sin(2A+A) = \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A \\ &= 2\sin A \cos^2 A + (1-2\sin^2 A)\sin A \\ &= 2\sin A(1-\sin^2 A) + \sin A - 2\sin^3 A \\ &= 3\sin A - 4\sin^3 A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 3A &= \cos(2A+A) = \cos 2A \cos A - \sin 2A \sin A \\ &= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin^2 A \cos A \\ &= 2\cos^3 A - \cos A - 2(1-\cos^2 A)\cos A \\ &= 4\cos^3 A - 3\cos A \end{aligned}$$

$$\tan 3A = \tan(2A+A) = \frac{\tan 2A + \tan A}{1-\tan 2A \tan A}$$

$$= \frac{\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} + \tan A}{1 - \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\tan A} = \frac{2\tan A + \tan A(1-\tan^2 A)}{1-\tan^2 A - 2\tan^2 A}$$

$$= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$$

$$\cot 3A = \frac{1}{\tan 3A} = \frac{1-3\tan^2 A}{3\tan A - \tan^3 A} = \frac{3\cot A - \cot^3 A}{1-3\cot^2 A}$$

即チ

$$\left.\begin{aligned} \sin 3A &= 3\sin A - 4\sin^3 A \\ \cos 3A &= 4\cos^3 A - 3\cos A \\ \tan 3A &= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A} \\ \cot 3A &= \frac{3\cot A - \cot^3 A}{1-3\cot^2 A} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (21)$$

32. 18°, 36° ノ三角函數

90° ヲ五等分スレバ 18° ヲ得ルヲ以テ,

$$5\alpha = 90^\circ$$

トスレバ,
$$2\alpha = 90^\circ - 3\alpha$$

$$\therefore \quad \sin 2\alpha = \cos 3\alpha$$

即チ
$$2\sin\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$\cos\alpha$ ハ 0 ナラザルヲ以テ之レニテ兩邊ヲ割レバ,

$$2\sin\alpha = 4\cos^2\alpha - 3$$

(∵ $4\cos^2\alpha = -4\sin^2\alpha + 4$

之レヨリ
$$4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 1 = 0$$

ナル二次方程式ヲ得。其ノ兩根ハ

$$\sin\alpha = -\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

ナレドモ, $\sin 18^\circ$ ハ正ナルベキヲ以テ,

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$cos 18^\circ = +\sqrt{1-sin^2 18^\circ} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

又，
$$cos 36^\circ = 1-2\,sin^2 18^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$sin 36^\circ = +\sqrt{1-cos^2 36^\circ} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

問題第十一

2.5.18 抜し

1. 次ノモノヲ求ム。

(a) $cosA=\frac{3}{5}$ ナルトキ $cos2A$ ノ値

(b) $sinx=\frac{1}{4}$ ナルトキ $cos2x$ ノ値

(c) $cos\theta=\frac{1}{2}$ ナルトキ $sin2\theta$ ノ値

(d) $tan\alpha=\frac{1}{5}$ ナルトキ $tan2\alpha$ ノ値

2. $tanA=2-\sqrt{3}$, $cosB=\frac{1}{2}$ ナルトキ $tan(2A+B)$ ノ値ヲ求ム。

3. $tan\theta=\frac{1}{5}$ ナルトキ $tan\frac{\theta}{2}$ ノ値ヲ求ム。

4. $sin\theta : sin\frac{\theta}{2}=8:5$ ナルトキ $cos\theta$ ノ値ヲ求ム。

5. 次ノモノヲ證明セヨ。 $(9^\circ=45^\circ-36^\circ)$

(a) $sin 9^\circ=\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$

(b) $cos 9^\circ=\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$

6. 次ノモノヲ證明セヨ。

(a) $sin\,22^\circ 30'=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

(b) $cos\,22^\circ 30'=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

次ノ恒等式(7)乃至(17)ヲ證明セヨ。

7. (a) $\dfrac{sin2A}{1+cos2A}=tanA$

(b) $\dfrac{sin2A}{1-cos2A}=cotA$

8. (a) $sin2A=\dfrac{2\,tanA}{1+tan^2A}$

(b) $cos2A=\dfrac{1-tan^2A}{1+tan^2A}$

9. (a) $cot\alpha+tan\alpha=2\,cosec2\alpha$

(b) $cot\alpha-tan\alpha=2\,cot2\alpha$

10. $sec2A-cos2A=\dfrac{4\,sin^2A}{1-tan^2A}$

11. $\dfrac{cosA+sinA}{cosA-sinA}=tan2A+sec2A$

左ハニ cosA+sinA ヲ
乗じて可なり

12. $\dfrac{1+sin\theta}{1-sin\theta}=tan^2\left(45^\circ+\dfrac{\theta}{2}\right)$

13. $sec\theta+tan\theta=tan\left(45^\circ+\dfrac{\theta}{2}\right)$

14. (a) $tan(45^\circ+A)-tan(45^\circ-A)=2tan2A$

(b) $tan(45^\circ+A)+tan(45^\circ-A)=2sec2A$

15 $\dfrac{4\tan A(1-\tan^2 A)}{(1+\tan^2 A)^2}=\sin 4A$

16. $\cot 22^\circ\cdot 5-\tan 22^\circ\cdot 5=2$

17. $\sin^2 24^\circ-\sin^2 6^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{8}$

18. $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{5}{4}$ ナルトキ $\sin 2\theta$ 及ビ $\sin^3\theta+\cos^3\theta$ ノ値ヲ求ム。

19. $\tan\theta=\dfrac{b}{a}$ ナルトキ $\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}+\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}=\dfrac{2\cos\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ ナルコトヲ證明セヨ。

20. $\cos\theta=\dfrac{\cos\alpha-e}{1-e\cos\alpha}$ ナルトキ $\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+e}{1-e}\tan^2\dfrac{\alpha}{2}$ ナルコトヲ證明セヨ。

33. 三角函數ノ和ト積トノ轉換

公式 (15) ヨリ

$$\left.\begin{aligned}\sin A\cos B&=\frac{1}{2}\{\sin(A+B)+\sin(A-B)\}\\ \cos A\sin B&=\frac{1}{2}\{\sin(A+B)-\sin(A-B)\}\\ \cos A\cos B&=\frac{1}{2}\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\}\\ \sin A\sin B&=\frac{1}{2}\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

是レ,正弦,餘弦ノ積ヲ其ノ和ニ轉換スル公式ナリ。

次ニ, $A+B=\alpha,\quad A-B=\beta$

トオケバ $A=\dfrac{\alpha+\beta}{2},\quad B=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

トナルヲ以テ,此等ヲ公式(22)ニ入レテ,兩邊ヲ交換スレバ

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta&=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \sin\alpha-\sin\beta&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \cos\alpha+\cos\beta&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\ \cos\alpha-\cos\beta&=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(23)$$

問題第十二

次ノ恒等式(1)乃至(5)ヲ證明セヨ。

1. (a) $\dfrac{\cos A-\cos 3A}{\sin 3A-\sin A}=\tan 2A$

(b) $\dfrac{\sin 3A+\sin 2A}{\cos 3A-\cos 2A}=-\cot\dfrac{A}{2}$

2. (a) $\cos(120^\circ+\alpha)+\cos(120^\circ-\alpha)+\cos\alpha=0$

(b) $\sin A+\sin(A+120^\circ)+\sin(A+240^\circ)=0$

(c) $\cos 55^\circ+\cos 65^\circ+\cos 175^\circ=0$

3. (a) $4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)=\sin3\alpha$

(b) $4\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=\cos3\alpha$

(c) $\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ=\frac{1}{8}$

4. $\tan\frac{A+B}{2}-\tan\frac{A-B}{2}=\frac{2\sin B}{\cos A+\cos B}$

5. (a) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=4\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

(b) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=4\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

次ノ式(6),(7)ヲ積ノ形ニ變ヘヨ。

6. $\cos x+\cos3x+\cos5x+\cos7x$

7. $\cos10\theta+\cos8\theta+3\cos4\theta+3\cos2\theta$

次ノ式(8)乃至(14)ヲ簡單ニセヨ。

8. $\cos2A+\frac{2}{\cot^2A+1}$

9. $\cos47^\circ+\cos25^\circ-\cos11^\circ-\cos61^\circ$

10. (a) $\cos^2A+\cos^2(60^\circ+A)+\cos^2(60^\circ-A)$

(b) $\cos^2A+\cos^2(A+120^\circ)+\cos^2(A+240^\circ)$

11. $\cos(15^\circ-A)\sec15^\circ-\sin(15^\circ-A)\operatorname{cosec}15^\circ$

12. $\cos^2(A+B)+\cos^2(A-B)-\cos2A\cos2B$

13. (a) $\frac{\sin\theta-\sin3\theta+\sin5\theta}{\cos\theta-\cos3\theta+\cos5\theta}$

(b) $\frac{\sin A+2\sin3A+\sin5A}{\sin3A+2\sin5A+\sin7A}$

14. $\frac{\cos A+\cos(120^\circ+B)+\cos(120^\circ-B)}{\sin B+\sin(120^\circ+A)-\sin(120^\circ-A)}$

15. $17\theta=180^\circ$ ナルトキ

$$\frac{\cos\theta\cos13\theta}{\cos3\theta+\cos5\theta}=-\frac{1}{2}$$

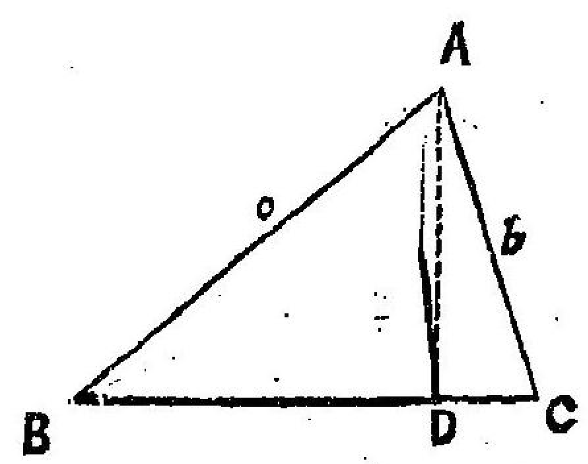
ナルコトヲ證明セヨ。

第 四 編

三角形ノ邊ト角トノ關係

34. 正弦比例

三角形ABCニ於テ, 暫ク$\hat{B}$, $\hat{C}$ヲ鋭角ナリトシ, 頂點Aヨリ之レニ對スル邊BCへ垂線ADヲ引ケバ,



$$\frac{AD}{c}=\sin B,\quad \frac{AD}{b}=\sin C$$

相割リテ $\qquad \frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$

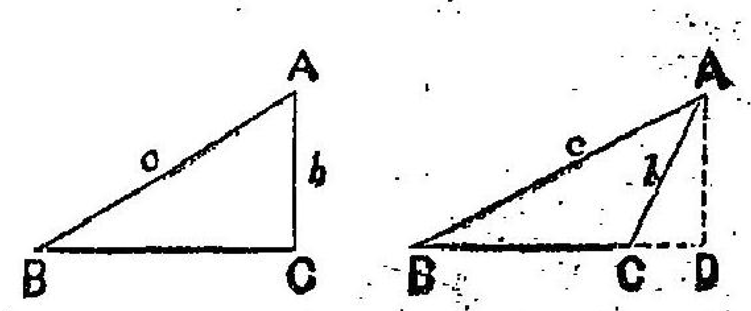
$$\therefore\quad \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

同樣ニ頂點Cヨリ之レニ對スル邊ABへ垂線ヲ引クコトニヨリ,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

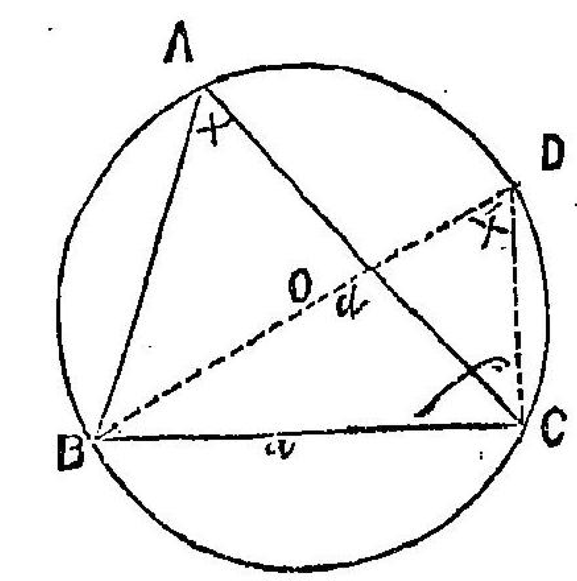
故ニ
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\quad\cdots\cdots(24)$$

之レヲ正弦比例ノ公式トイフ.



本公式ハ A,B,C, ノ一ツガ直角又ハ鈍角ナル場合ニモ適合ス。

注意. 三角形ABCノ外接圓ニ於テ, Bヨリ引ケル直徑ヲBDトスレバ,



$$\hat{D}=\hat{A}$$

$$B\hat{C}D=直角$$

ナルヲ以テ, 直徑ヲdニテ表ハセバ

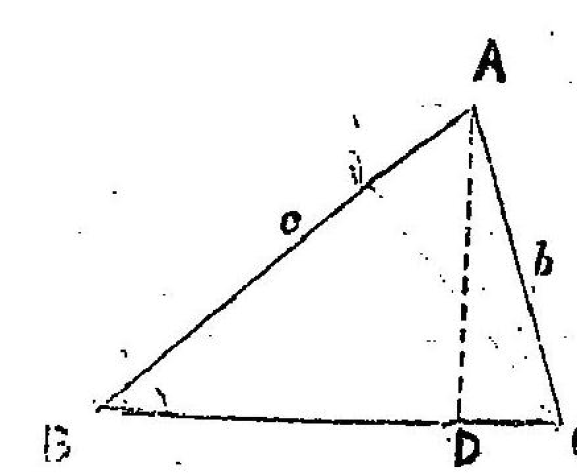
$$\sin A=\frac{a}{d}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=d$$

是レ, 正弦比例ノ他ノ證明法ニシテ, 更ニ比ノ値ガ外接圓ノ直徑ノ長サニ等シキコトヲ示スモノナリ。

35. 第一餘弦公式

鋭角三角形ABCニ於テ, 頂點Aヨリ之レニ對スル邊BCへ垂線ADヲ引ケバ,



$$\frac{BD}{c}=\cos B\qquad \therefore\quad BD=c\cos B$$

$$\frac{CD}{b}=\cos C\qquad \therefore\quad CD=b\cos C$$

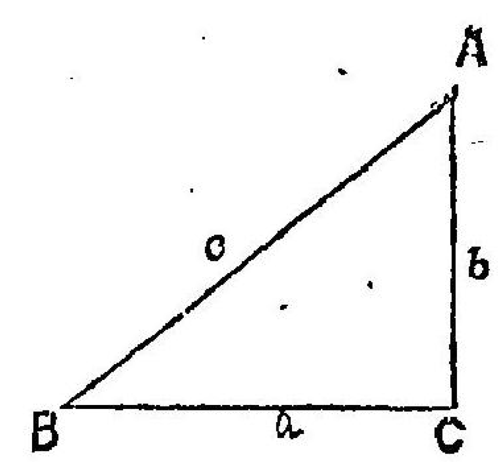
相加ヘテ, BD+CD=a ヨリ

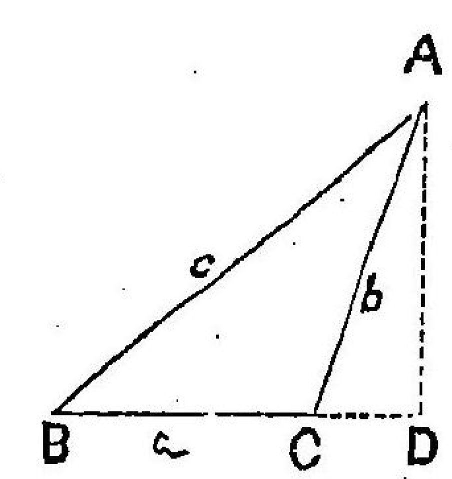
$$\left.\begin{aligned} a&=c\cos B+b\cos C\\ b&=a\cos C+c\cos A\\ c&=b\cos A+a\cos B\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(25)$$

同様ニ

之レヲ第一餘弦公式トイフ。

本公式ハA, B, Cノ一ツガ直角又ハ鈍角ナル場合ニモ眞ナリ。





例ヘバ, C=90°トスレバ, 圖ヨリモ公式(25)ヨリモ,

$$a=c\cos B,\quad b=c\cos A$$

又, C>90°トスレバ, 圖ヨリハ

$$a=c\cos B-b\cos A\hat{C}D$$

トナリ, 公式(25)ヨリハ

$$a=c\cos B+b\cos(180^\circ-A\hat{C}D)$$
$$=c\cos B-b\cos A\hat{C}D$$

トナル, 他ニツイテモ同様ナリ。

注意. 本公式ハ正弦比例ヨリモ導クコトヲ得。

即チ　$a=d\sin A=d\sin(180^\circ-B-C)$

$$=d\sin(B+C)=d\sin B\cos C+d\sin C\cos B$$

公式(24)ヨリ $d\sin B=b$, $d\sin C=c$ ナルヲ以テ,

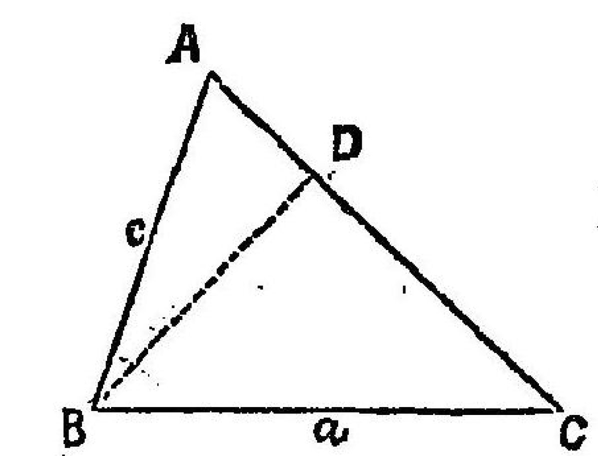
$$=b\cos C+c\cos B$$

ノ如シ。

36. 第二餘弦公式

幾何學ノ定理ニヨレバ, 暫クAヲ鋭角トシ, BD⊥AC トスレバ,

$$a^2=b^2+c^2-2b.AD$$



然ルニ,　$AD=c\cos A$

ニシテ, A=90°ナルトキハ AD=0 トナリ, A>90°トナレバ, $\cos A<0$ ナル故 AD<0 トナル故ニAノ如何ニ拘ハラズ,

$$\left.\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(26)$$

同様ニ

之レヲ第二餘弦公式トイフ。

注意一. 本公式ハ公式(25)ニ順次ニ a, b, c ヲ乘ジ, $a^2-b^2-c^2$ ヲ作リテモ之レヲ求メ得ベシ。

注意二. 公式(26)ヨリ一ツノ角ノ餘弦ヲ三邊ニテ表ハス公式ヲ得。即チ

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B &= \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ \cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(27)$$

問題第十三

三角形ABCニ於テ次ノ恒等式(1)乃至(10)ヲ證明セヨ。

(1)乃至(4)ハ A+B+C=180° ナルコトヨリ導クコトヲ得。

1. (a) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

 (b) $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

2. (a) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

 (b) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+4\cos A\cos B\cos C+1=0$

3. (a) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

 (b) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$

4. $\sin^2 A+2\sin B\sin C\cos A=\sin^2 B+\sin^2 C$

5. $\dfrac{a+b-c}{a-b+c}=\dfrac{\sin A+\sin B-\sin C}{\sin A-\sin B+\sin C}$

6. (a) $b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C)$

 (b) $a\cos A+b\cos B+c\cos C=2a\sin B\sin C$

7. $b\cos A-a\cos B=\dfrac{b^2-a^2}{c}$

8. $\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{\cos B-\cos A}{1+\cos C}$

9. $\dfrac{\sin(A-B)\sin C}{\sin A\sin(B-C)}=\dfrac{a^2-b^2}{b^2-c^2}$

10. $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$ ナルトキハ $C=90°$ ナルコトヲ證明セヨ。

11. $B=60°$ ナルトキハ $\dfrac{a+c}{2b}=\sin(30°+C)$ ナルコトヲ證明セヨ。

次ノ恒等式(12)乃至(14)ヲ證明セヨ。

12. $a(\cos B+\cos C)=2(b+c)\sin^2\frac{A}{2}$

13. $a(\cos B\cos C+\cos A)=b(\cos C\cos A+\cos B)$
 $=c(\cos A\cos B+\cos C)$

14. $\dfrac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$

15. (a) $a=\sqrt{2},\ b=2,\ c=\sqrt{3}+1$ ナルトキ A, B, C ヲ求ム。

 (b) $a=7,\ b=5,\ c=3$ ナルトキ最大角ヲ求ム。

16. $b\cos A=a\cos B$ ナルトキハ $a=b$ ナルコトヲ證明セヨ。

17. $a\cos A=b\cos B$ ナレバ，△ABC ハ直角三角形ナルカ

又ハ二等邊三角形ナリ。コレヲ證明セヨ。

18. $\cos B=\dfrac{\sin A}{2\sin C}$ ナルトキハ B=C ナルコトヲ證明セヨ。

37. 半角公式

公式(27)ヨリ

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

サレバ

(I)
$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}$$
$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$$

三角形ノ周ノ半分ヲ s トスレバ

$$\left.\begin{aligned} a+b+c&=2s\\ -a+b+c&=2(s-a)\\ a-b+c&=2(s-b)\\ a+b-c&=2(s-c)\end{aligned}\right\}$$

之レヲ代入シ, $\dfrac{A}{2}$ ガ必ズ鋭角ナルコトニ注意スレバ

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

同樣ニ

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(28)$$

又,

(II)
$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$
$$=\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{4bc}$$

他モ同樣ナル故,

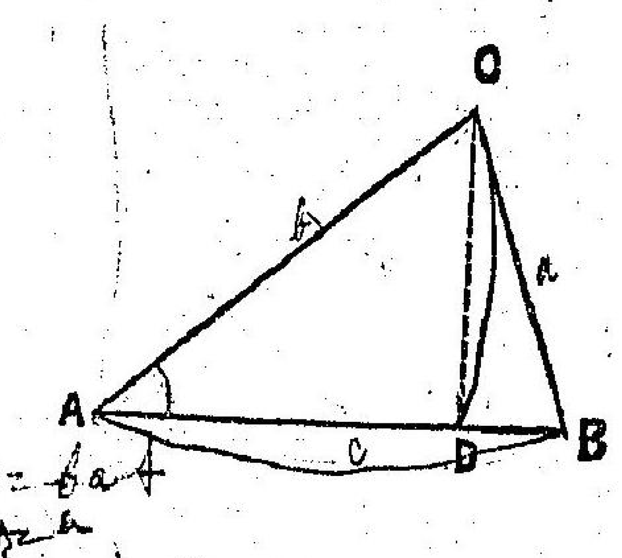
$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(29)$$

公式(28), (29)ヲ相割リテ

(III)
$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\\ \tan\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\\ \tan\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(30)$$

38. 三角形ノ面積

Aガ鋭角ナル三角形ABCニ於テ,$CD\perp AB$ナリトシ,面積ヲSトスレバ,



$$S=\frac{1}{2}AB.CD$$

$$=\frac{1}{2}c.b\,sinA=\frac{1}{2}bc\,sinA$$

サテ,$A=90^\circ$ナルトキハ$CD=b$トナリ,$A>90^\circ$ナルトキハ$sin(180^\circ-A)=sinA$ナル故,上ニ得タル結果ハAガ直角又ハ鈍角ナルトキニモ眞ナリ。

又,何レノ邊ヲ底邊ト看做スモ同様ノ結果ヲ得ルヲ以テ,

$$S=\frac{1}{2}bc\,sinA=\frac{1}{2}ca\,sinB=\frac{1}{2}ab\,sinC \quad (31)$$

然ルニ又,公式(28),(29)ニ據レバ

$$sinA=2\,sin\frac{A}{2}\,cos\frac{A}{2}$$

$$=2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ナルヲ以テ,之レヲ(31)ニ入ルレバ,

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ldots\ldots(32)$$

39. 三角形ノ外接圓及ビ內接圓ノ半徑

第一. 三角形ABCノ外接圓ノ半徑Rハ第34節注意ニヨリ,

$$R=\frac{a}{2sinA}$$

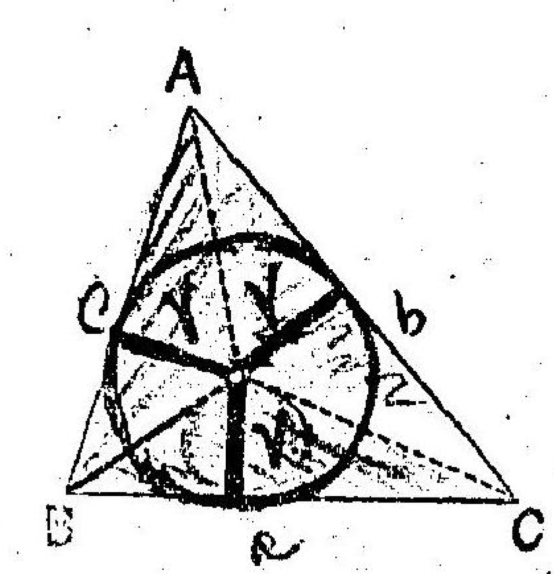
然ルニ公式(31)ニヨリ,

$$sinA=\frac{2S}{bc}$$

ナルヲ以テ

$$R=\frac{abc}{4S}\ldots\ldots\ldots\ldots(33)$$

第二. 三角形ABCノ內心ヲIトシ,之レヲIガ頂點ナル三ツノ三角形ニ分テバ,底邊ガa,b,cニシテ高サハ何レモ內接圓ノ半徑ニ等シキモノヲ得。



今,內接圓ノ半徑ヲrトスレバ,

$$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)r=sr$$

a+b+c=2s

$$\therefore \quad r=\frac{S}{s}\ldots\ldots\ldots\ldots(34)$$

注意. 同樣ニ, A, B, C ニ對スル傍接圓ノ半徑ヲ夫々 r_a, r_b, r_c トスレバ,

$$r_a=\frac{S}{s-a},\quad r_b=\frac{S}{s-b},\quad r_c=\frac{S}{s-c}\ \ldots(35)$$

問題第十四

次ノ問題ニ使用セル文字ハ何レモ前節ニ述ベタルモノニ同ジ。

1. (*a*) 三角形 ABC ノ角 A ノ二等分線ハ $\dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$ ニ等シキコトヲ證明セヨ。

(*b*) 三角形 ABC ノ A ニ於ケル外角ノ二等分線ハ $\dfrac{2bc\sin\frac{A}{2}}{b\sim c}$ ニ等シキコトヲ證明セヨ。

次ノ恒等式 (2) 乃至 (8) ヲ證明セヨ。

2. $(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}+(a-b)\cot\frac{C}{2}=0$

3. $\dfrac{a}{1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}=\dfrac{b}{1-\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}}=\dfrac{c}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}$

4. $\dfrac{r}{R}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

5. $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$

6. (*a*) $b\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{B}{2}=s$

(*b*) $b\sin^2\frac{C}{2}+c\sin^2\frac{B}{2}=s-a$

7. $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{r_a}+\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}$　$\dfrac{1}{r}=\dfrac{s}{S}=\dfrac{3s-2s}{S}=\dfrac{3s-(a+b+c)}{S}$

8. $S=\sqrt{r\,r_a r_b r_c}$　$S=\dfrac{S^2}{S}=\sqrt{\dfrac{S^4}{S^2}}=\sqrt{\dfrac{S^4}{s(s-a)(s-b)}}$

9. 三角形ノ內心ト傍心トノ距離ハ各

$$a\sec\frac{A}{2},\quad b\sec\frac{B}{2},\quad c\sec\frac{C}{2}$$

ニ等シキコトヲ證明セヨ。

第五編

對數表ノ用法及ビ三角形ノ解法

40. 一般ノ對數

任意ノ正數 a ニ關シテ,

$$a^x=y$$

ナル關係アルトキ,y ヲ冪數ト稱スルニ對シテ,x ヲ a ヲ底トスル y ノ對數ト稱シ,之レヲ

$$x=\log_a y$$

ニテ表ハス。

注意. a ハ正數ニ限ラルルモノ故,y モ亦必ズ正數ナルベキモノナリ。然レドモ,負ノ指數ノ定義ヲ此處ニ適用シテ,x ハ正又ハ負ノ任意ノ實數ヲ許スモノトス。

41. 對數ノ定理

(1) 1ノ對數ハ常ニ0ニ等シ。

(證明) $a^0=1$ ヨリ $\log_a 1=0$

(2) 底數ノ對數ハ1ニ等シ。

(證明) $a^1=a$ ヨリ $\log_a a=1$

(3) 積ノ對數ハ其ノ因數ノ對數ノ和ニ等シ。

(證明) $u=a^x,\ v=a^y$ トスレバ

$$uv=a^x a^y=a^{x+y}$$

$$\therefore\quad \log_a(uv)=x+y$$

然ルニ $x=\log_a u,\ y=\log_a v$ ナルヲ以テ

$$\log_a(uv)=\log_a u+\log_a v$$

同樣ニ,因數ガ三ツ又ハ三ツ以上ニテモ眞ナリ。

(4) 商ノ對數ハ被除數ノ對數ヨリ除數ノ對數ヲ減ジタル差ニ等シ。

(證明) $u=a^x,\ v=a^y$ トスレバ

$$\frac{u}{v}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$$

$$\therefore\quad \log_a\frac{u}{v}=x-y$$

$$=\log_a u-\log_a v$$

(5) 冪數ノ對數ハ其ノ底數ノ對數ニ冪指數ヲ乘ジタルモノニ等シ。

(證明) $u=a^x$ トスレバ

$$u^n=(a^x)^n=a^{nx}$$

$$\log_a u^n=nx$$

$$=n\log_a u$$

注意. 本定理(5)ハ n ガ分數ナル場合ニモ適合ス。即チ

$$\log_a u^{\frac{1}{m}}=\log_a\sqrt[m]{u}=\frac{1}{m}\log_a u$$

問題第十五

1. 次ノ式ノ値ヲ求メヨ。

(a) $\log_2 16$　　(b) $\log_{27}3$

(c) $\log_{16}8$　　(d) $\log_{0\cdot25}32$

2. $\log_a b\log_b c\log_c a=1$ ナルコトヲ證明セヨ。

42. 常用對數

底ガ10ナル對數ヲ**常用對數**トイフ。

常用對數ハ十進法ノ數ノ計算ニ於テハ次ニ述ブルガ如キ便宜アリ。サレバ本書ニ於テハ, Nナル數ノ常用對數即チ $\log_{10}$N ヲ略シテ $\log$N ト書キ,之レヲ略稱シテ單ニ「對數」トイハン。

定理. 位ノミガ相異ナル二數ノ對數ノ差ハ整數ナリ。

(證明) 一ツノ數ヲNトスレバ,位ノミガ之レト異ナル數ハ $\mathrm{N}\times10^r$ (r ハ正又ハ負ノ整數)トスルコトヲ得。而シテ

$$\log(\mathrm{N}\times10^r)=\log\mathrm{N}+\log10^r$$

$$=\log\mathrm{N}+r\log10$$

$$=\log\mathrm{N}+r$$

例. $\log1\cdot234$ ヲ知レリトスレバ,

$$\log1234=\log(1\cdot234\times10^3)$$

$$=\log1\cdot234+3$$

$$\log0\cdot01234=\log(1\cdot234\times10^{-2})$$

$$=\log1\cdot234-2$$

サレバ,今1ト10トノ間ノスベテノ帶小數ノ對數ヲ知リオケバ,如何ナル位ノ如何ナル數ノ對數トイヘドモ,皆之レニ整數ヲ加減スルニ止マルモノナリ。

Nガ1ヨリ10マデ增大スルトキハ, $\log$N ハ $\log1=0$ ヨリ增大シテ $\log10=1$ ニ至ル。故ニ1ト10トノ間ノ帶小數ノ對數ハ1ヨリ小ナル正數ナリ。

Nガ10ヨリ大ナルトキハ, $\log N$ハ此純小數ニ整數ヲ加ヘタル帶小數トナリ, Nガ1ヨリ小ナルトキハ,此純小數ヨリ整數ヲ減ジタル本來負ナル小數トナル。

此純小數ヲ假數トイヒ,位ニ由リテ之レニ加減スベキ整數ヲ指標トイフ。

計算ノ便宜上ヨリ,指標ハ加減ニ拘ハラズ假數ノ前ニ帶小數ノ形ニ書キ加フルモノトス。而シテ減ズベキ指標ハ符號(−)ヲ整數ノ頭ニ冠セシメテ,帶小數全部ノ負ナラザルコトヲ示ス。

例. $0{\cdot}30103+2=2{\cdot}30103$

$0{\cdot}30103-2=\bar{2}{\cdot}30103$

43. 數ノ對數表

1ヨリ10マデノスベテノ帶小數ニハ限リ無ク,其ノ對數モ一般ニ不盡數ナリ。小數點以下若干桁ノ帶小數ニツキ,其ノ對數ノ近似値ヲ表ニ調製シタルモノヲ數ノ對數表トイフ。

本書ノ卷末ニ載セタルハ1乃至100ノ對數全部及ビ1乃至2000ノ對數ノ假數部ノ五桁ノ近似

値ナリ。

對數表ヲ使用スルニハ,先ヅ次ノ指標ノ法則ニヨリテ指標ヲ定ムベシ。

(1) 10ヨリ大ナル數ノ對數ノ指標ハ小數點以上ノ桁數ヨリ1ダケ小ナリ。

(證明) Nナル數ノ小數點以上ノ桁數ヲrトスレバ, $N\div10^{r-1}=N'$ガ1ト10トノ間ノ數ナリ。故ニ

$$N=N'\times10^{r-1}$$

$$\log N=\log N'+r-1$$

例. 7320ハ小數點以上4桁ナルヲ以テ,其指標ハ$4-1=3$ナリ。故ニ表ニヨリ

$$\log 7320=3{\cdot}86451$$

(2) 1ヨリ小ナル數ノ對數ノ指標ハ負ニシテ其ノ絶對値ハ小數點以下有効數字ニ達スルマデノ間ノ0ノ個數ヨリ1ダケ大ナリ。

(證明) Nナル數ヲ純小數トシ,小數點以下有効數字ニ達スルマデノ間ノ0ノ個數ヲrトスレバ, $N\times10^{r+1}=N'$ガ1ト10トノ間ノ數ナリ。故ニ

$$N=N'\times 10^{-(r+1)}$$

$$\log N=\log N'-(r+1)$$

例. 0.0056 ノ指標ハ $-(2+1)=-3$ ナルヲ以テ,

$$\log 0.0056=0.74819-3$$
$$=\bar{3}.74819$$

桁數ガ對數表ニ載セアル數ヨリ多キ數ノ對數ハ次ノ**比例部分ノ法則**ニ據リテ之レヲ計算ス。

數ノ差ト之レニ對應スル對數ノ差トハ,何レモ小ナルトキ比例チナス。

比較的委シキ對數表ニアリテハ,表ニ載セアル小數點以下ハ此法則ニヨリテ豫メ對數ノ差(表差トイフ)ト比例部分(又ハP.P.)トノ欄ヲ設ケテ使用ノ便ヲ謀レルモノアリ。

例一. $\log 936=2.97128$, $\log 937=2.97174$ ヨリ $\log 936.4$ ヲ求ム。

(解) $2.97174-2.97128=0.00046$

今計算ヲ簡單ニセンタメ,此差ノ小數點ヲ取リ去リテ 46 ト看做セバ,

$$1:0.4=46:x,\quad x=18.4$$

$$\therefore\ \log 936.4=2.97128+0.00018=2.97146$$

例二. $\log N=1.52208$ ヨリ N ヲ求ム。

(解) 指標ガ 1 ナル故 N ハ小數點以上二桁ナル數ナリ。表ニヨレバ

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\log 33.2=1.52114\\ \log N\ \ =1.52208\end{array}\right\}94\\ \log 33.3=1.52244\end{array}\right\}130$$

故ニ $130:94=0.1:x$

$$x=0.072$$

$$\therefore\ N=33.2+0.07=33.27$$

例三. $\sqrt[3]{0.05}$ ヲ對數表ニヨリテ計算セヨ。

(解) $N=\sqrt[3]{0.05}$ トスレバ,

$$\log N=\log\sqrt[3]{0.05}=\frac{1}{3}\log 0.05$$
$$=\frac{1}{3}\times\bar{2}.69897$$
$$=\frac{1}{3}(\bar{3}+1.69897)$$
$$=\bar{1}.56632$$

表ニヨリ $N=0.3684$

注意. 負ノ指標ヲ割ル場合ニハ,コレガ割リ切ルルヤウニ適宜ノ數ヲ加減スベシ。

例四. $(49)^2\times 27\div(0\cdot33)^3$ ヲ對數表ニヨリテ計算セヨ。

(解) 求ムル數ヲNトスレバ,

$$\log N=2\log 49+\log 27-3\log 0.33$$

$$=2\times1\cdot69020+1\cdot43136-3\times\bar{1}\cdot51851$$

$$\begin{aligned}=\ &3\cdot38040\\ &+1\cdot43136\\ &-\bar{2}\cdot55553\\ \hline =\ &6\cdot25623\end{aligned}$$

表ニヨリ　$N=1804000$

44. 三角函數ノ對數表

0° ヨリ 45° ニ至ル間ノ諸々ノ角ノ三角函數ノ對數ノ近似値ヲ表ニ調製シタルモノヲ**三角函數ノ對數表**トイフ。

0° ヨリ 45° マデノ表ヲ逆ノ順序ニ見レバ,餘角ノ公式ニヨリテ 45° ヨリ 90° マデノ對數表トナル。サレバ是レ乃チ 0° ヨリ 90° マデノ對數表ナリ。

0° ヨリ 90° ニ至ル間ノ正弦及ビ餘弦ハ 0 ヨリ 1 マデノ數値ナル故,其ノ對數ハ皆負ノ指標ヲ有ス。又正切ハ 0° ヨリ 45° マデ,餘切ハ 45° ヨリ 90° マデノ間ニ於テ各對數ガ負ノ指標ヲ有ス。

サレバ昔時印刷上ノ事情ヨリ因襲シテ今日ニ至ルモ尙三角函數ノ對數ニハ10ヲ加ヘオクモノアリ。之レヲ表對數ト稱シ,Lヲ冠セシメテ通常ノlogヨリ區別ス。斯カル表ニ依ルトキハ,毎回10ヲ減ジタル數ヲ使用セザルベカラズ。

三角函數ノ對數表ニ於テモ,眞數表(第9節)及ビ數ノ對數表(第43節)ノ如ク比例部分ノ法則ヲ適用ス。

サレド,0° 及ビ 90° ニ近キ度ニ於テハ,角ノ差ガ小ナルモ對數ノ差ガ比較的大ナルカ,又ハ對數ノ差ガ小ナルモ角ノ差ガ比較的大ニシテ,比例部分ノ法則ガ適用セラレザルモノナリ。比較的精シキ對數表ニハ 0° 及ビ 90° ニ近キ度ニツイテハ特ニ精密ナル別表ヲ添フルモノアリ。

本書卷末ニ載セタル表ハ,角ハ 10′ 飛ビニシテ,其ノ對數ハ小數點以下五桁ノ近似値ナリ。

例一. $\log\tan 37°32'$ ヲ求メヨ。

(解) 表ニヨリ

$$\left.\begin{aligned}\log\tan 37°30'&=\bar{1}\cdot88498\\ \log\tan 37°32'&=\ldots\ldots\ldots\\ \log\tan 37°40'&=\bar{1}\cdot88759\end{aligned}\right\}0\cdot00261$$

卽チ 10′ ノ飛ビニ對シ對數ノ差ハ 0·00261 ナリ。

故ニ　　$10':2'=0{\cdot}00261:x,\qquad x=0{\cdot}00052{\cdot}2$

$\therefore\ \log\tan 37^\circ 32'=\bar{1}{\cdot}88498+0{\cdot}00052=\bar{1}{\cdot}88550$

例二. $\log\cos 66^\circ 25' 45''$ ヲ求メヨ。

(解)　表ニヨリ

$$\left.\begin{array}{ll}\log\cos 66^\circ 20' &=\bar{1}{\cdot}60359\\ \log\cos 66^\circ 25' 45'' &=\ldots\ldots\ldots\\ \log\cos 66^\circ 30' &=\bar{1}{\cdot}60070\end{array}\right\}-0{\cdot}00289$$

故ニ　　$10':5'{\cdot}75=-289:x,\qquad x=-166$

$\therefore\ \log\cos 66^\circ 25' 45''=\bar{1}{\cdot}60359-0{\cdot}00166=\bar{1}{\cdot}60193$

注意. 餘弦及ビ餘切ノ對數ハ,角ガ增大スルニ從ヒ減小スルモノナルヲ以テ,比例部分ヲ負ト看做スコトヲ得ルモノナリ。

例三. $\log\sin A=\bar{1}{\cdot}82367$ ニ適スル鋭角 A ヲ求メヨ。

(解)　表ニヨリ

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{ll}\log\sin 41^\circ 40' &=\bar{1}{\cdot}82269\\ \log\sin A &=\bar{1}{\cdot}82367\end{array}\right\}98\\ \log\sin 41^\circ 50'=\bar{1}{\cdot}82410\end{array}\right\}141$$

故ニ　　$141:98=10:x,\qquad x=6{\cdot}95$

$\therefore\ A=41^\circ 46'{\cdot}95=41^\circ 46' 57''$

例四. $\log\cot A=0{\cdot}88889$ ヨリ A ヲ求メヨ。

(解)　表ニヨリ

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{ll}\log\cot 7^\circ 20' &=0{\cdot}89044\\ \log\cot A &=0{\cdot}88889\end{array}\right\}-155\\ \log\cot 7^\circ 30'=0{\cdot}88057\end{array}\right\}-987$$

故ニ　　$987:155=10:x,\qquad x=1{\cdot}57$

$\therefore\ A=7^\circ 21'{\cdot}57=7^\circ 21' 34''$

問題第十六

$\log 2=0{\cdot}30103,\ \log 3=0{\cdot}47712$ ノミヲ知レリトシテ,次ノ數 (1), (2) ノ對數ヲ作レ。

1. (a) 1080　　(b) $\dfrac{32}{729}$
   (c) 0·125　　(d) $\sqrt{0{\cdot}000486}$
2. (a) $\sin 60^\circ$　　(b) $\tan 30^\circ$　　(c) $\sec 45^\circ$
3. $8^x=50$ ヲ滿足スル x ヲ求メヨ。但シ $\log 2=0{\cdot}30103$
4. 2^{18} ハ幾桁ノ數ナルカ。
5. $\log\sin 19^\circ 35'=\bar{1}{\cdot}52527,\ \log\sin 19^\circ 36'=\bar{1}{\cdot}52563$ ヨリ $\log\sin 19^\circ 35' 20''$ ノ値ヲ求メヨ。
6. $\log\tan\theta=0{\cdot}17200$ ニシテ, $\log\tan 56^\circ 3'=0{\cdot}17183$, $\log\tan 56^\circ 4'=0{\cdot}17210$ ナリ。θ ヲ求メヨ。

45. 一般ノ三角形ヲ解クコト

一般ノ三角形ニ於テ,六ツノ原素ノ中,一邊ト他ノ二ツトヨリ殘リヲ求ムルニハ,其ノ二ツノ採リ方ニヨリテ次ノ四ツノ場合ヲ生ズ。

第一. 一邊ト二角トガ與ヘラレタル場合

第二. 二邊ト其ノ夾角トガ與ヘラレタル場合

第三. 二邊ト其ノ一ツニ對スル角トガ與ヘラレタル場合

第四. 三邊ガ與ヘラレタル場合

次ニ順次ニ各場合ニ於ケル解法ヲ述ブベシ。

第一. 一邊aト二角トガ與ヘラレタル場合

(解) 第三ノ角ハ

$$A+B+C=180^\circ$$

ヨリ求メラルベシ。

他ノ邊b, cハ正弦比例ニヨリ,

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},\qquad c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

ヨリ求メ得ラルベシ。

例. $a=265$米, $B=43^\circ20'30''$, $C=67^\circ35'45''$ ナルトキ

三角形ヲ解ケ。

(解) Aノ計算

$$\begin{array}{rl} B= & 43^\circ\ 20'\ 30'' \\ C= & 67^\circ\ 35'\ 45'' \\ \hline B+C= & 110^\circ\ 56'\ 15'' \\ \therefore\ A= & 69^\circ\ \ 3'\ 45'' \end{array}$$

$b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}$	$c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$
$\log a=2\cdot42325$	$\log a=2\cdot42325$
$\log\sin B=\bar{1}\cdot83554$	$\log\sin C=\bar{1}\cdot96592$
$\log\sin A=\bar{1}\cdot97034$	$\log\sin A=\bar{1}\cdot97034$
$\log b=2\cdot28945$	$\log c=2\cdot41883$
$b=194\cdot7$ (米)	$c=262\cdot3$ (米)

問題第十七

次ノモノヲ知リテ三角形ヲ解ケ。

1. $a=10\cdot62$, $B=60^\circ40'$, $C=59^\circ10'$
2. $a=100$尺, $A=50^\circ$, $C=66^\circ$
3. $a=18$, $B=75^\circ$, $C=60^\circ$ (對數表ヲ用ヒズニ)

第二. 二邊 a, b ト其ノ夾角 C トガ與ヘラレタル場合

(解)
$$\frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}$$

又,
$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}$$

$$=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$$

$$=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}$$

$$\therefore\quad \tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

之レヨリ $\frac{A-B}{2}$ ヲ求メ, $\frac{A+B}{2}$ トノ和及ビ差ヨリ A, B ヲ求メ得ラルベシ。又第三邊 C ハ,

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

例. $a=61{\cdot}5$ 尺, $b=36{\cdot}7$ 尺, $C=108^\circ\,17'\,30''$ ナルトキ三角形ヲ解ケ。

(解)
$$C=108^\circ\;17\;\;30''$$
$$\frac{C}{2}=54^\circ\;\;8'\;45''$$
$$\therefore\quad\frac{A+B}{2}=35^\circ\;51'\;15''$$
$$\frac{A-B}{2}=10^\circ\;20'\;46''$$
$$A=46^\circ\;12'\;\;1''$$
$$B=25^\circ\;30'\;29''$$

$$a=61{\cdot}5$$
$$b=36{\cdot}7$$
$$a-b=24{\cdot}8$$
$$a+b=98{\cdot}2$$

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$
$$\log(a-b)=1{\cdot}39445$$
$$\log(a+b)=1{\cdot}99211$$
$$\log\cot\frac{C}{2}=\bar{1}{\cdot}85907$$
$$\log\tan\frac{A-B}{2}=\bar{1}{\cdot}26141$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$
$$\log a=1{\cdot}78888$$
$$\log\sin C=\bar{1}{\cdot}97748\quad(=\log\cos 18^\circ\,17'\,30'')$$
$$\log\sin A=\bar{1}{\cdot}85839$$
$$\log c=1{\cdot}90797$$
$$c=80{\cdot}90\ (\text{尺})$$

注意. c ヲ求ムルトキ,

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin(A+B)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

ヨリ導カルヽ公式,

$$c=(a+b)\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$$

ニ依ルコトヲ得。

又,c ノミヲ求ムル場合ニ公式

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$$

ニ依ルコトモアリ。

問題第十八

1. $a=365$ 尺, $b=274$ 尺, $\cos C=0{\cdot}81915$ ナルトキ c ヲ求ム。

2. $a=5$ 間, $b=7$ 間, $C=67°$ ナルトキ c ヲ求ム。

3. $a=4453{\cdot}4$ 呎, $b=2968{\cdot}5$ 呎, $C=74°\ 21'\ 24''$ ナルトキ三角形ヲ解ケ。

第三. 二邊 a, b ト其ノ一ツニ對スル角 A トガ與ヘラレタル場合

(解)　$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$

ヨリ B ヲ求ムベシ。次ニ

$$C=180°-(A+B)$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

然ルニ,B ヲ定ムルニ次ノ場合ヲ生ズ。

I. $b\sin A>a$ ナルトキ

$\sin B>1$ トナル故,之レヲ滿足スル B ナシ。

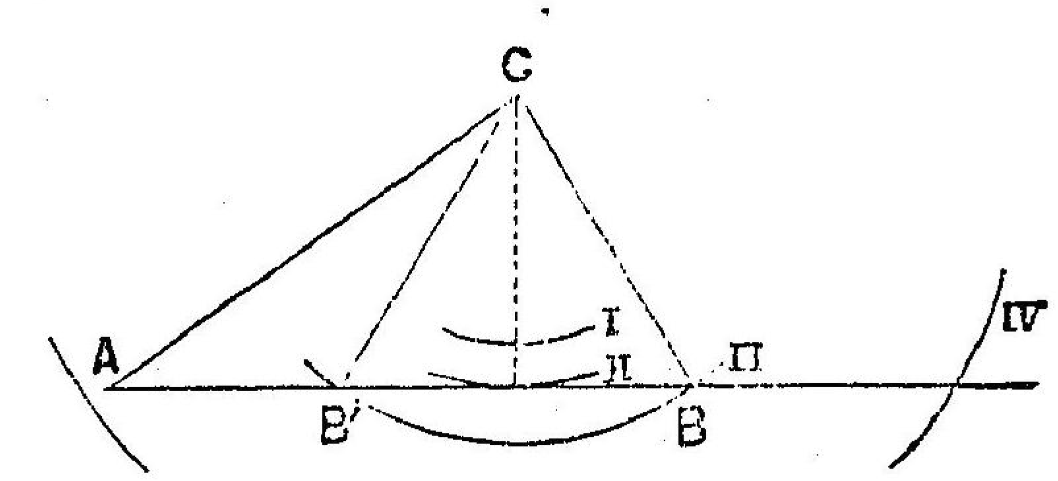
II. $b\sin A=a$ ナルトキ

$\sin B=1$ トナリ,明カニ $B=90°$ ナリ。

III. $b\sin A<a$ ナルトキ

$\sin B<1$ トナリ,B ヲ求ムルコトヲ得ベシ。

サレド,求メ得タル結果ガ $B<A$ (卽チ與ヘラレタル二邊ガ $b>a$) ナルトキニハ B ハ銳角ニ限リテ唯一ツナレドモ,モシ $B>A$ (卽チ $b<a$) ナラバ,銳角ノ B 及ビ其ノ補角ナル鈍角ハ,三角函數ノ値ガ相等シキコトヨリ,何レモ與ヘラレタル條件ニ適合シテ二ツノ解ヲ生ズルコトトナルベシ。之レヲ**兩意ノ場合**トイフ。



例. $a=273$, $b=513{\cdot}5$, $A=31°37'20''$ ナルトキ三角形ヲ解クコトヲ求ム。

(解)
$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$$
$$\log b=2{\cdot}71054$$
$$\log\sin A=\bar{1}{\cdot}71959$$
$$\log a=2{\cdot}43616$$
$$\log\sin B=\bar{1}{\cdot}99397$$

$$B=80°\ 28'\ 30''$$
$$A=31°\ 37'\ 20''$$
$$A+B=112°\ 5'\ 50''$$
$$\therefore\ C=67°\ 54'\ 10''$$

$$B'=99°\ 31'\ 30''$$
$$A=31°\ 37'\ 20''$$
$$A+B'=131°\ 8'\ 50''$$
$$C'=58°\ 51'\ 10''$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$
$$\log a=2{\cdot}43616$$
$$\log\sin C=\bar{1}{\cdot}96687$$
$$\log\sin A=\bar{1}{\cdot}71959$$
$$\log c=2{\cdot}68344$$
$$c=482{\cdot}4$$

$$c'=\frac{a\sin C'}{\sin A}$$
$$\log a=2{\cdot}43616$$
$$\log\sin C'=\bar{1}{\cdot}93239$$
$$\log\sin A=\bar{1}{\cdot}71959$$
$$\log c'=2{\cdot}64896$$
$$c'=445{\cdot}6$$

問題第十九

1. $a=2{\cdot}5$, $b=5$, $\sin A=0{\cdot}25$ ナルトキBヲ求ム。
2. $a=20\sqrt{3}$, $b=60$, $A=30°$ ナルトキ三角形ヲ解ケ。

第四. 三邊 a, b, c ガ與ヘラレタル場合

(解) $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ ヲ求メテ後,
$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$
$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$
$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$
ヨリA, B, Cヲ得ベシ。

注意一. 上ノ公式ヨリ求メラルルA, B, Cハ和ガ180°トナルベキ等ノモノナレドモ,對數表ノ誤差ヨリ些少ノ過不足ヲ生ズルコト多シ。

注意二. $\tan\frac{A}{2}$ 等ノ代リニ $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$ 等ノ公式ニ依ルモヨシ。然レドモ手數ハ正切ニ依ルガ最モ單便ナリ。

例. $a=17{\cdot}5$, $b=22{\cdot}6$, $c=30{\cdot}3$ ナルトキ三角形ヲ解ケ。

(解)
$$a=17{\cdot}5$$
$$b=22{\cdot}6$$
$$c=30{\cdot}3$$
$$2s=70{\cdot}4$$

$s=35{\cdot}2$	$\log s=1{\cdot}54654$
$s-a=17{\cdot}7$	$\log(s-a)=1{\cdot}24797$
$s-b=12{\cdot}6$	$\log(s-b)=1{\cdot}10037$
$s-c=4{\cdot}9$	$\log(s-c)=0{\cdot}69020$

	1·10037	0·69020	1·24797
+	0·69020	1·24797	1·10037
	1·79057	1·93817	2·34834
−	1·24797	1·10037	0·69020
	0·54260	0·83780	1·65814
−	1·54654	1·54654	1·54654
	$\bar{2}$·99606	$\bar{1}$·29126	0·11160
$\frac{1}{2}$	$\bar{1}$·49803	$\bar{1}$·64563	0·05580

$\frac{A}{2}=17°28'25''$ $\frac{B}{2}=23°51'20''$ $\frac{C}{2}=48°40'13''$

$A=34°56'50''$ $B=47°42'40''$ $C=97°20'26''$

$$\begin{array}{r} A=34°56'50'' \\ B=47°42'40'' \\ C=97°20'26'' \\ \hline 179°59'56'' \end{array}$$

問題第二十

1. $a=123, b=154, c=175$ ナルトキ三角形ヲ解ケ。

2. 三ツノ邊ガ9尺,10尺,14尺ナル三角形ノ最大角ヲ求メヨ。

3. 三角形ノ三ツノ邊ノ比ガ $2:\sqrt{6}:1+\sqrt{3}$ ニ等シキトキ,三ツノ角ヲ求メヨ。

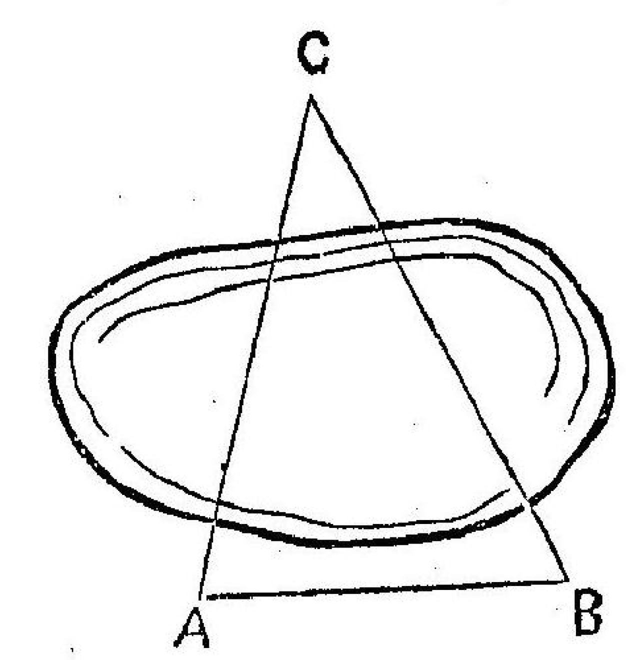
第六編

距離及ビ高サノ測定

46. 一般ノ三角形ノ應用

直角三角形ヲ適用シテ距離及ビ高サヲ測定スル方法ハ第三編ニ於テ之レヲ述ベタリ。本編ニ於テハ,一般ノ三角形ヲ解クコトニ歸セシメ得ベキ測量問題ノ中,重要ナルモノヲ論ゼントス。

第一. 觀測者ノ位置ヨリ達スル能ハザル點マデノ距離ノ測定



A ヲ觀測者ノ位置トシ, A ヨリ實測スル能ハザル距離 AC ヲ測定スルコトヲ求ム。

(解) A ヨリ達シ得ベキ任意ノ點 B ニ至ル距離 AB ヲ實測シ, A 及ビ B ニ於テ夫々 $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ ヲ器械ニヨリテ測ルベシ。

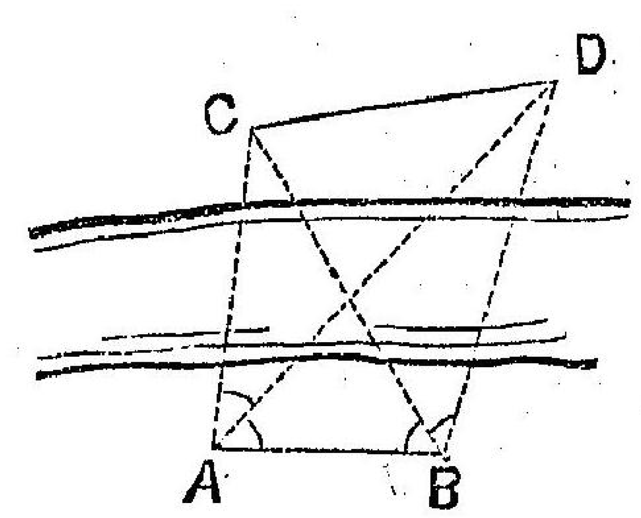
然ルトキハ,三角形 ABC ニ於テ一邊ト二角トガ實測

セラレアルヲ以テ,第45節第一ノ場合ニヨリ AC ヲ算定スルコトヲ得。

注意. 第13節ニ於テハ, $\widehat{CAB}=90^\circ$ ナル如キ點 B ニツイテ,距離 AC ヲ求メタリ。本節ハ其ノ一般ナル場合ニ當ル。

第二. 達シ得ベカラザル二點間ノ距離ノ測定

觀測者ノ達シ得ベカラザル二點ヲ C, D トシテ,其ノ距離ヲ測定スルコトヲ求ム。



(解) 觀測者ノ達シ得ベキ範圍內ニ任意ノ二點 A, B ヲ選ミ,其ノ距離 AB ヲ實測シ,又器械ニヨリテ $\widehat{CAD}$, $\widehat{DAB}$, $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{ABD}$, ヲ測ルベシ。(A, B, C, D ガ同ジ平面上ニ在ルトキハ $\widehat{CAD}=\widehat{CAB}-\widehat{DAB}$ ナリ。)

然ルトキハ, △ABC ニ於テハ一邊 AB ト $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$ トガ實測セラレアルヲ以テ, AC ヲ算定スルコトヲ得。

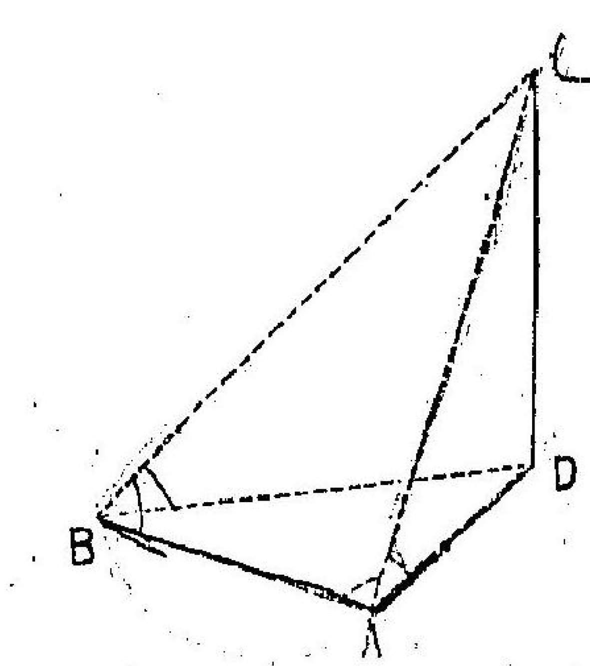
又, △ABD ニ於テモ一邊 AB ト $\widehat{DAB}$, $\widehat{ABD}$ トガ實測セラレアルヲ以テ, AD ヲ算定スルコトヲ得。

サレバ, △ACD ニ於テハ AC, AD ガ算定セラレ,其ノ交

角 $\widehat{CAD}$ ガ實測セラレアルヲ以テ,第45節第二ノ場合ニヨレバ求ムル CD ヲ算定スルコトヲ得ルナリ。

第三. 基脚ニ達シ得ベカラザル直立體ノ平地上ノ高サノ測定

直立體 CD ノ基脚 D ニハ達シ得ベカラザルモノトシ,高サ CD ヲ測定スルコトヲ求ム。



(解) 平地上ノ任意ノ二點 A, B ヲ選ミ,其ノ距離 AB ヲ實測シ,又器械ニヨリ $\widehat{CAD}$, $\widehat{CAB}$, $\widehat{CBA}$ ヲ測ルベシ。

然ルトキハ, △ABC ニ於テ一邊 AB ト $\widehat{CAB}$, $\widehat{CBA}$ トガ實測セラレアルヲ以テ AC ヲ算定スルコトヲ得。

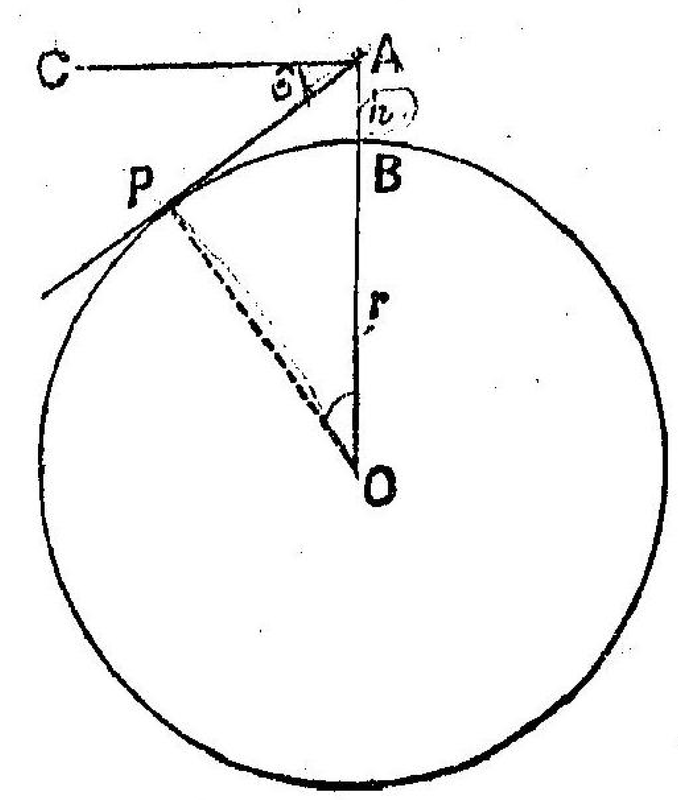
サレバ, △ACD ニ於テハ $\widehat{ADC}$ ガ直角ニシテ, $\widehat{CAD}$ ハ實測セラレアリ, AC ハ算定セラレタルヲ以テ CD ヲ算定スルコトヲ得ベシ。

注意一. 第13節第二(2)ニ於テ述ベタル方法ハ本節ノ特別ノ場合ニシテ,卽チ D, A, B ガ一直線上ニ在ル如ク A, B ヲ選ビタルモノナリ。

注意二. 基脚Dガ平地上ニ在ラザル場合ニハ,Aニ於テACガ鉛直線トナス角ヲ測リ,錯角ノ定理ニヨリ,之レヲ$A\hat{C}D$ト看做シテ計算スレバヨシ。

注意三. 塔ノ高サ,山ノ高サ,高所ニ立テル竿ノ長サ等ノ測定ニハ本節ノ解法ヲ適用スルモノトス。

47. 視界半徑ノ測定



地球ヲ球狀ナリト看做シ,其ノ表面上高サhナル點Aヨリ表面ニ切線APヲ引ケバ,切點Pノ軌跡ハ圓周ニシテ,是レ觀測點Aヨリ視得ル限界ナリ。之レヲAニ於ケル**視界**トイヒ,切線APヲ**視界半徑**トイフ。

又,切線APガ鉛直面BAPニ於ケル水平線ACトナス角CAPヲAニ於ケル**視界俯角**トイフ。

今地球ノ半徑ヲrトシ,視界俯角ヲδニテ表ハセバ,$A\hat{O}P=\delta$ナルヲ以テ,

$$\cos\delta=\frac{OP}{AO}=\frac{r}{r+h}$$

$$\therefore\quad r=\frac{h\cos\delta}{1-\cos\delta}=\frac{h\cos\delta}{2\sin^2\dfrac{\delta}{2}}$$

従テ,

$$AP=OP\tan\delta=r\tan\delta$$

$$=\frac{h\sin\delta}{2\sin^2\dfrac{\delta}{2}}=h\cot\frac{\delta}{2}$$

即チ

$$AP=h\cot\frac{\delta}{2}$$

$$r=\frac{h\cos\delta}{2\sin^2\dfrac{\delta}{2}}$$

問題第二十一

1. 河岸ニ沿ヘル二點A, Bニ於テ對岸ノ一目標Cヲ望ミシニ$C\hat{A}B=45°$, $C\hat{B}A=60°$ナリ。AB=80間ナリトセバ河幅幾何。

2. 正南ニ航スル船ガ最初東ヨリ30°南ニ認メシ小島ヲ二海里航行後ニ東ヨリ15°南ニ望ムニ至レリ。之レヲ正東ニ望ムトキ船ト島トノ距離幾何。

3. 高サh尺ナル塔ト其上ニ立テル旗竿トヲ塔ノ基脚ヨリa尺ノ距離ニ在ル地平面上ノ一點ヨリ見タルニ相等シキ角ヲ夾ミタリトイフ。旗竿ノ長サ幾何。

4. 上リノ傾斜$\frac{1}{5}$ナル峠ノ長サ1里24町アリ。今之レニ傾斜$\frac{1}{12}$ナル九十九折ノ阪道ヲ附ケントスルトキハ其ノ長サ幾何。

5. 地球ノ半徑ヲ4000哩ナリトシ,富士山ノ高サヲ2哩ナリトシテ,其山巓ニ於ケル視界半徑ヲ求メヨ。

6. 塔ABノ頂上Aヨリ基脚Bト同ジ地平面上ノ二點C, Dヲ臨ミ$\widehat{CAD}=\alpha$ヲ得タリ。$BC=a$, $BD=b$, $CD=c$ナルトキ塔ノ高サ幾何。

7. 等速ニテ垂直ニ上昇スル輕氣球アリ。a米上昇シタルトキ平地上ノ一點ニ於テ仰角18°ヲ得,其後15分ヲ經テ仰角30°ヲ得タリ。輕氣球每時ノ速サ幾何。

8. 丘ヲ平地上其ノ正南ノ一點Aニ於テ望ミ仰角30°ヲ得,更ニAヨリ正東a間ノ距離ニ在ル平地上ノ點Bニ於テ仰角18°ヲ得タリ。丘ノ高サ幾何。

9. 正北ニ傾斜セル電信柱アリ。其ノ柱足ヨリ正南a, bノ距離ニ在ル二點ニ於テ夫々仰角α, βヲ得ルトキハ柱頭ガ地面ヨリ離ルルコト

$$\frac{(b-a)\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

10. A及ビBハ地平面上ノ二點ニシテCハ山頂ノ目標ナリ。$\widehat{CAB}=48^\circ 10'$, $\widehat{ABC}=66^\circ 20'$, $AB=150$米ニシテBニ於ケルCノ仰角ハ$23^\circ 48'$ナルトキハ地平面上Cノ高サ幾何。

11. 直線ノ道路ヲ行ク人ガ他ノ二ツノ目標ヲ最大角距αニテ望ミテヨリC間行キタルニ,兩目標ハ此人ト一直線上ニ在ルコトトナリ,其直線ハ道路ト角βヲナセリトスレバ,兩目標間ノ距離ガ

$$\frac{2c\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

12. 湖水面ヨリh尺ノ高サナル丘上ニ於テ飛行機ノ仰角αト湖水面ニ映ズル其ノ影像ノ俯角βトヲ得タリトスレバ,飛行機ノ湖水面上ノ高サハ

$$\frac{h\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

附錄第一

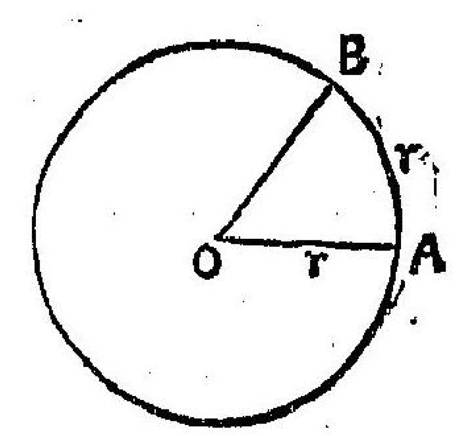
弧　度　法

1. 定義

任意ノ圓ニ於テ,半徑ニ等シキ弧ニ對スル中心角ハ大サ一定ナリ。

何トナレバ,圓Oノ半徑ヲrトシ,

$\widehat{AB}=r$ ナラシムレバ



$$A\hat{O}B:2\text{直角}=\widehat{AB}:\text{半圓周}$$

$$=r:\ \pi r$$

$$=1:\ \pi$$

$$\therefore\ A\hat{O}B=\frac{1}{\pi}(2\text{直角})$$

ナレバナリ。

此一定ナル角ヲ單位トシテ角ヲ計ル方法ヲ弧度法トイヒ,弧度法ニヨリテ計リタル角ヲ弧度トイフ。

注意. 弧度ノ單位ヲ名ヅケテらぢあん(Radian)トイフコトモアリ。

2. 圓ノ半徑ト弧度ト弧ノ長サトノ關係

圓ノ半徑ヲrトシ,弧度θニ對スル弧ノ長サヲaトスレバ,弧度1ニ對スル弧ノ長サガrナルヲ以テ

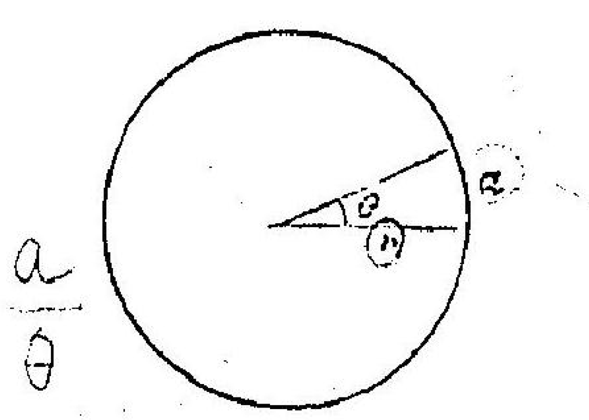
$$1:\theta=r:a$$

$$\therefore\ a=r\theta$$

$$\theta=\frac{a}{r}$$

$$r=\frac{a}{\theta}$$

$r=\frac{a}{\theta}$



注意. aヲ半圓周卽チπrトスレバ,

$r=\frac{a}{r}$

$$\theta=\frac{\pi r}{r}=\pi$$

卽チ2直角(又ハ180°)ノ弧度ハπナリ。

3. 弧度法ト六十分法トノ關係

或角ノ弧度ヲθトシ,其ノ度數ヲDトスレバ,前節ノ注意ニヨリ

$$\theta:\pi=D^\circ:180^\circ$$

$$\therefore\ \theta=\frac{D}{180}\pi$$

$$D^\circ=\frac{\theta}{\pi}\times180^\circ$$

例題第一

1. 次ノ角ヲ弧度ニテ表ハセ。

(a) $30°$ (b) $22°30$

(c) $14°13'20''$ (d) $270°$

2. 次ノ角ヲ六十分法ニ直セ。

(a) $\frac{1}{5}\pi$ (b) $\frac{5}{12}\pi$

3. 邊數ガnナル正多角形ノ一內角ノ弧度ヲ求ム。

4. 弧度ノ單位ハ六十分法ノ $57°17'44''.8$ ニ當ルコトヲ證明セヨ。

5. 半徑5尺ナル圓ニ於テ$1°$ノ中心角ガ夾ム弧ノ長サ幾何。

6. 半徑3呎ナル圓ニ於テ長サ5呎4吋ナル弧ニ對スル中心角ヲ六十分法ニテ表ハセ。

7. $\frac{1}{7}\pi$ ナル中心角ガ夾ム弧ノ長サガ2糎ナルトキ其ノ半徑ヲ求ム。

8. 月ニ於テ地球ノ半徑ハ $57'3''.16$ ノ角ヲ夾ムトイフ。地球ノ半徑ヲ3963哩トシ,之レニ對スル弧ノ長サヲ半徑ト看做シテ,地球ト月トノ距離ヲ計算セヨ。

9. 地球ニ於テ月ノ半徑ハ$1868''$ヲ夾ム。前問題ヨリ求メタル距離ヲ用ヒテ月ノ半徑ヲ計算セヨ。

附錄第二

逆三角函數

1. 定義

三角函數ノ値ガ a ナル如キ角ヲ a ノ**逆三角函數**トイフ。

正弦ガ a ナル角ヲ a ノ**逆正弦**, 餘弦ガ a ナル角ヲ a ノ**逆餘弦**, 正切ガ a ナル角ヲ a ノ**逆正切**等ト稱スルモノニシテ, 之レヲ $\sin^{-1}a$ (又ハ $\arcsin a$), $\cos^{-1}a$ ($\arccos a$), $\tan^{-1}a$ ($\mathrm{arctg}\, a$) 等ニテ表ハス。即チ

$$a=\sin\theta \quad \text{ヨリ} \quad \theta=\sin^{-1}a=\arcsin a$$

$$a=\cos\theta \quad \text{ヨリ} \quad \theta=\cos^{-1}a=\arccos a$$

$$a=\tan\theta \quad \text{ヨリ} \quad \theta=\tan^{-1}a=\mathrm{arctg}\, a$$

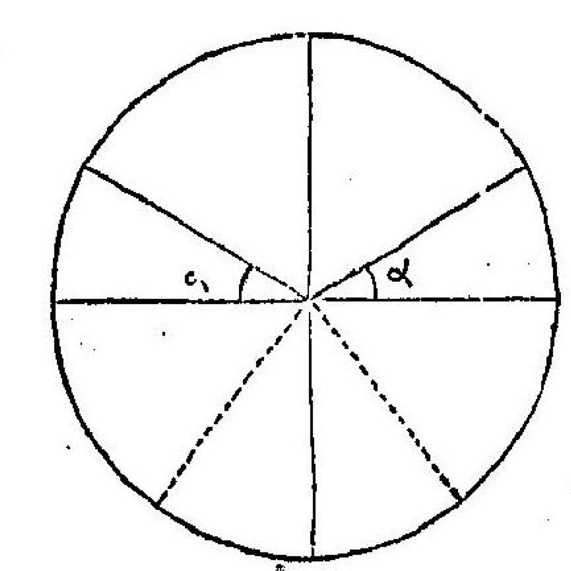
等ナリ。

一ツノ數値ニ對スル逆三角函數ノ値ハ無限ニ有ルコト次ニ述ブルガ如シ。其ノ中,絕對値ノ最小ナルモノ(絕對値相等シク符號相反スルモノアルトキハ正ナルモノ)ヲ其ノ主値トイフ。

2. $\sin^{-1}a$ ノ値

相等シキ正弦 a ヲ有スル角ハ, $a>0$ ナレバ第一象限ト第二象限トニ在リ, 又 $a<0$ ナレバ第三象限ト第四象限トニ在リ。而シテ夫々原線ト其ノ延長トニ對シテ相等シキ角ヲ其ノ同ジ側ニナス。

今其ノ主値ヲ α ニテ表ハセバ,



$\sin^{-1}a$ ノ一般ノ値 θ ハ

$$\left.\begin{array}{l}\theta=180^\circ\times 2m+\alpha \\ \theta=180^\circ\times(2m+1)-\alpha\end{array}\right\}$$

但シ m ハ零ナルカ或ハ正又ハ負ノ整數ナリ。之レヲ纒メテ

$$\theta=180^\circ\times n+(-1)^n\alpha \quad (n\text{ ハ零或ハ正又ハ負ノ整數})$$

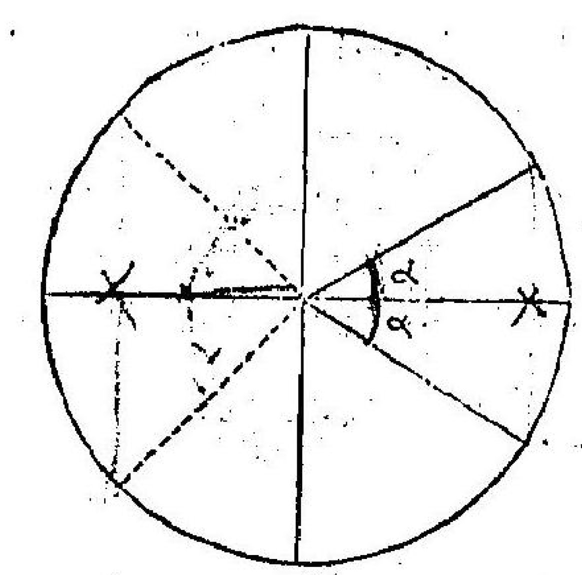
注意. a ノ絕對値ガ1ヨリ大ナルトキハ $\sin^{-1}a$ ノ値ハ無意義トナル。

3. $\cos^{-1}a$ ノ値

相等シキ餘弦 a ヲ有スル角ハ, $a>0$ ナレバ第一象限ト第四象限トニ在リ, 又 $a<0$ ナレバ第二象限ト第三象限トニ在リ。而シテ原線ニ對シテ相等シキ角ヲ

ナス。

サレバ，其ノ主値ヲ α ニテ表ハシ，$\cos^{-1}a$ ノ一般ノ値ヲ θ トスレバ



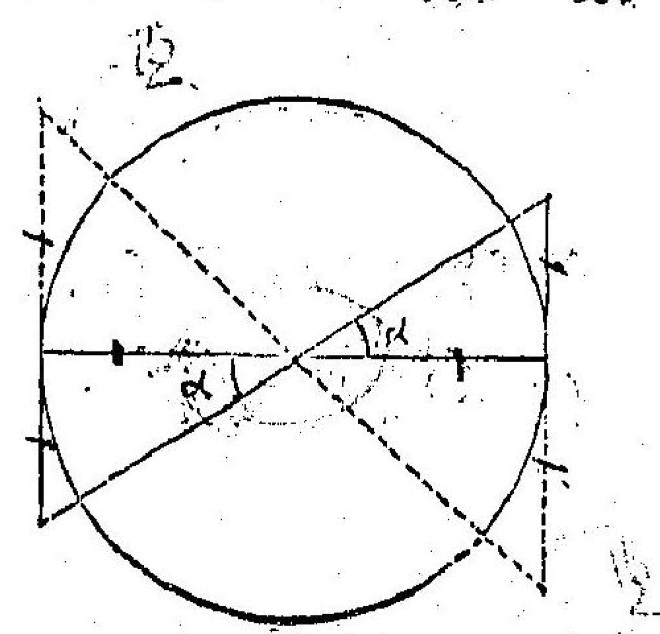
$$\theta=180^\circ\times 2n\pm\alpha$$

（n ハ零或ハ正又ハ負ノ整數）

注意. 本節ニ於テモ a ノ絶對値ハ 1 ヨリ大ナルベカラズ。

4. $\tan^{-1}a$ ノ値

正切ガ相等シク a ナル如キ角ハ，$a>0$ ナレバ第一象限ト第三象限トニ在リ，又 $a<0$ ナレバ第二象限ト第四象限トニ在リ。而シテ夫々原線ト其ノ延長トニ對シテ反對ノ側ニ相等シキ角ヲナス。



サレバ，其ノ主値ヲ α トシ，$\tan^{-1}a$ ヲ θ トスレバ

$$\theta=180^\circ\times n+\alpha \quad (n\text{ ハ零或ハ正又ハ負ノ整數})$$

5. $\cot^{-1}a,\ \sec^{-1}a,\ \mathrm{cosec}^{-1}a$ ノ値

$\cot\theta=a$ ナルトキハ，$\tan\theta=\dfrac{1}{a}$ ニシテ

$$\theta=\cot^{-1}a,\qquad \theta=\tan^{-1}\frac{1}{a}$$

$$\therefore\quad \cot^{-1}a=\tan^{-1}\frac{1}{a}$$

同様ニ

$$\sec^{-1}a=\cos^{-1}\frac{1}{a}$$

$$\mathrm{cosec}^{-1}a=\sin^{-1}\frac{1}{a}$$

注意. 正割，餘割ノ場合ニ於テ a ノ絶對値ガ 1 ヨリ小ナルトキニハ之レニ適スル角ナシ。

例題第二

1. 次ノ方程式ニ適スル θ ノ一般ノ値ヲ求ム。

(a) $\sin\theta=0$　　(b) $\sin\theta=1$

(c) $\cos\theta=1$　　(d) $\tan\theta=1$

(e) $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$　　(f) $\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}$

(g) $2\cos\theta+1=0$

2. 次ノ方程式ヲ滿足スル θ ノ一般ノ値ヲ求ム。

(a) $\cos 2\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(b) $\tan(\theta+45^\circ)=\sqrt{3}$

(c) $cosec^2\theta=\frac{4}{3}$ (d) $cot3\theta=1$

3. 790° ト 880° トノ間ニテ $tan2\theta=\sqrt{3}$ ニ適スル θ ノ値如何。

4. 正切ガ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ナル二ツノ最小正角ノ和ハ 45° ニ等シキコトヲ證明セヨ。

附録第三

三角方程式

1. 定義

未知角ノ三角函數ヲ含メル方程式ヲ**三角方程式**トイフ。

三角方程式ヨリ未知角ヲ求ムルコトヲ,之レヲ**解ク**トイフ。

2. 三角方程式ノ解法

第一. 代數學的ノ因數分解ニヨル方法

例一. $sin2\theta=cos\theta$ ヲ解ケ。

(解) 二倍角ノ公式ニヨリ

$$2\,sin\theta\,cos\theta=cos\theta$$

$$cos\theta(2\,sin\theta-1)=0$$

$$\therefore\quad cos\theta=0,\quad sin\theta=\frac{1}{2}$$

$cos\theta=0$ ヨリ $\theta=180°\times n+90°=90°\times(2n-1)$

$sin\theta=\frac{1}{2}$ ヨリ $\theta=180°\times n+(-1)^n30°$ $\frac{\pi}{6}$

例二. $\cos 2x=(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos x+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1$ ヲ解ケ。

(解) 二倍角ノ公式ニヨリ

$$2\cos^2 x-1=(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos x+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1$$

整頓シテ

$$2\sqrt{2}\cos^2 x-\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos x-\sqrt{3}=0$$

是レ $\cos x$ ニツキ二次方程式ナルヲ以テ,

$$(2\cos x-\sqrt{3})(\sqrt{2}\cos x+1)=0$$

$$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ヨリ $x=180^\circ\times 2n\pm 30^\circ$

$\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ヨリ $x=180^\circ\times 2n\pm 135^\circ$

例三. $\tan\theta-1=\sqrt{3}(1-\cot\theta)$ ヲ解ケ。

(解) $\tan\theta-1=\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{\tan\theta}\right)$

$\tan\theta$ ハ 0 ナラズトシテ,之レヲ乗ジ

$$\tan\theta(\tan\theta-1)=\sqrt{3}(\tan\theta-1)$$

之レヨリ, $(\tan\theta-1)(\tan\theta-\sqrt{3})=0$

$$\tan\theta=1,\quad \tan\theta=\sqrt{3}$$

$\tan\theta=1$ ヨリ $\theta=180^\circ\times n+45^\circ=45^\circ\times(4n+1)$

$\tan\theta=\sqrt{3}$ ヨリ $\theta=180^\circ\times n+60^\circ=60^\circ\times(3n+1)$

第二. 三角函数ノ和ヲ積ニ直ス解法

例一. $\cos\theta=\cos 3\theta$ ヲ解ケ

(解) $\cos\theta-\cos 3\theta=0$

$$2\sin\frac{\theta+3\theta}{2}\sin\frac{3\theta-\theta}{2}=0$$

即チ $\sin 2\theta\sin\theta=0$

$$\sin 2\theta=0,\quad \sin\theta=0$$

$\sin 2\theta=0$ ヨリ $2\theta=180^\circ\times n$

$\theta=90^\circ\times n$

$\sin\theta=0$ ヨリ $\theta=180^\circ\times n$

後ノ場合ハ全ク前者ニ含マルルヲ以テ,求ムル θ ハ $90^\circ\times n$ ナリ。

例二. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$ ヲ解ケ。

(解) $2\sin 2x\cos x+\sin 2x=0$

即チ $\sin 2x(2\cos x+1)=0$

$$\sin 2x=0,\quad \cos x=-\frac{1}{2}$$

$\sin 2x=0$ ヨリ $2x=180^\circ\times n$

$x=90^\circ\times n$

$\cos x=-\frac{1}{2}$ ヨリ $x=180^\circ\times 2n\pm 120^\circ$

$=120^\circ\times(3n\pm 1)$

例三. $\sin x+\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

（解） 兩邊ニ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ヲ乘ジテ,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{2}$$

$\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ナルヲ以テ,

$$\cos 45^\circ \sin x+\sin 45^\circ \cos x=\frac{1}{2}$$

即チ

$$\sin(x+45^\circ)=\frac{1}{2}$$

$$x+45^\circ=180^\circ\times n+(-1)^n 30^\circ$$

$$x=180^\circ\times n+(-1)^n 30^\circ-45^\circ$$

例 題 第 三

次ノ三角方程式ヲ解ケ。

1. $6\cos^2 x+5\sin x=7$
2. $\sin\theta+\frac{3}{2}=\operatorname{cosec}\theta$
3. $\sin^2 x+\cos^2 x=\cos x$
4. $\tan^2\theta+\cot^2\theta=2$
5. $\cos 2x+\cos x=0$
6. $\cos\theta-\cos 7\theta=\sin 4\theta$
7. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$

8. $\cos x+\cos 2x+\cos 4x=0$
9. $2\sin(\theta+30^\circ)=\cos\theta$
10. $\sin 3\theta=\sin\theta\cos 2\theta$
11. $\sin\theta-\cos\theta=1$
12. $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}$
13. $x+y=90^\circ,\quad \sin x+\sin y=\sqrt{3}$
14. $x+y=150^\circ,\quad \tan x+\tan y=-\frac{2}{\sqrt{3}}$
15. $\sin(2x-y)=\cos(x+2y)=\frac{1}{2}$

補 充 雜 題

第一. 銳角ノ三角函數

本集ニ於ケル角 A, α, θ, x ハ何レモ銳角ナルモノトス。

次ノ恒等式(1)乃至(6)ヲ證明セヨ。

1. $\sec^2 x \csc^2 x - \tan^2 x - \cot^2 x = 2$

2. $2(\sin^6\theta + \cos^6\theta) - 3(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + 1 = 0$

3. $\sin A(1+\tan A) + \cos A(1+\cot A) = \sec A + \operatorname{cosec} A$

4. $\dfrac{1-\sec\alpha+\tan\alpha}{1+\sec\alpha-\tan\alpha} = \dfrac{\sec\alpha+\tan\alpha-1}{\sec\alpha+\tan\alpha+1}$

5. $\tan^2\theta - \tan^2\alpha = \dfrac{\cos^2\alpha - \cos^2\theta}{\cos^2\theta\cos^2\alpha}$

6. $\tan A = \dfrac{\sin A + 2\sin A\cos A}{1+\cos A+\cos^2 A-\sin^2 A}$

7. $\sin A = \dfrac{2mn}{m^2+n^2}$ ナルトキハ, $\tan A = \dfrac{2mn}{m^2-n^2}$ ナルコトヲ證明セヨ。

8. $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$ ナルトキハ,

$$\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

9. $\tan A + \sin A = a$, $\tan A - \sin A = b$ ヨリ A ヲ消去セヨ。

10. $\sin A + \cos A > 1$ ナルコトヲ證明セヨ。

11. $2\sin^2\theta = 3\cos\theta$ ヲ滿足スル銳角 θ ヲ求メヨ。

12. $\cot x = 2\cos x$ ヲ滿足スル銳角 x ヲ求メヨ。

第二. 直角三角形

1. C ガ直角ナル三角形 ABC ニ於テ,

(a) $c=21{\cdot}7$, $a=13{\cdot}5$ ナルトキ, A 及ビ b ヲ求メヨ。

(b) $a=120$, $A=67^\circ 30'$ ナルトキ, b, c ヲ求メヨ。

2. C ガ直角ナル三角形 ABC ニ於テ, $c=18$, $A=32^\circ$ ナルトキ,直角ノ頂點 C ヨリ斜邊ヘ引ケル垂線ノ長サヲ求メヨ。

3. 直角三角形 ABC ニ於テ C ヲ直角トスレバ,

$$\tan A + \tan B = \frac{c^2}{ab}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

4. 直角三角形 ABC ノ一ツノ銳角 A ト面積 S トヲ知レルトキ三邊ヲ求ムル公式ヲ作レ。

5. 長サ三尺ナル洋杖ノ影ガ二尺四寸ナル時刻ニ於ケル太陽ノ高度幾何。

6. 銳角三角形ノ一ツノ頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ガ之レヲ分ツ二部分ノ比ハ,此邊ノ兩端ニ於ケ

ル角ノ餘切ノ比ニ等シ。之レヲ證明セヨ。

7. A, B ハ海面上ノ二點ニシテ相距ルコト 2500 米ナリ。A, B 兩所ニ於テ,直線 AB ノ直上ニ在ル輕氣球 C ヲ望ミテ仰角夫々 45° 及ビ 60° ヲ得タリトセバ,輕氣球ノ水平上ノ高サ幾何。

8. 鋭角 A ノ一邊上ノ點 B ヨリ他ノ邊ニ垂線 BC ヲ引キ,次ニ C ヨリ邊 AB ニ垂線 CD ヲ引キ,次ニ D ヨリ邊 AC ニ垂線 DE ヲ引キ,次々ニ同様ニ限リナク垂線ヲ引クトキハ,此等垂線ノ和 BC+CD+DE+… ハ $\frac{\mathrm{BC}\,\sin\mathrm{A}}{1-\cos\mathrm{A}}$ ニ等シキコトヲ證明セヨ。

9. 塔ト同ジ水平面上ニ於テ垂直ニ立テル梯子アリ,梯子ノ基脚ニ於テハ塔ノ仰角 45° ニシテ,梯子ヲ攀登ルコト 15 尺ノ點ニ於テハ仰角 30° ナリトイフ。塔ノ高サヲ求メヨ。

10. 傾斜セル平面アリ,其平面上ノ水平線ニ垂直ナル方向ニ於テハ 100 尺ニツキ 5 尺ノ勾配ナリトイフ,此方向ト其平面上ニテ 30° ノ角ヲナセル方向ニ於ケル勾配幾何。

11. 地平面上ニ直立セル棒ノ頂點ヨリ,地平面上ノ二點マデ二條ノ鐵索ヲ張リタルニ,鐵索ノナス仰角 45°, 60° ナリ。鐵索ノ長サノ和ガ 75 尺ナリトセバ棒ノ長サ幾何。

12. 甲船ガ燈臺ヲ東ヨリ 30° 北ニ見タル時,乙船ハ其燈臺下ヨリ北西ノ方向ニ漕ギ出ダセリ,甲船ガ正東ニ一海里進ミテ其燈臺ヲ正北ニ見タル時ニハ乙船ハ北ヨリ 30° 西ニ在リタリトセバ,此間ニ乙船ハ如何程進ミタルカ。

第三. 一般ノ角ノ三角函數

1. 932° ノ正弦,餘弦及ビ正切ヲ 45° ヨリ小ナル角ノ三角函數ニ化セヨ。

2. 次ノ恒等式ヲ證明セヨ。

(a) $\tan 200^\circ=\tan 20^\circ$

(b) $\sin 225^\circ \cos 225^\circ=1$

3. α ガ第二象限ニ於ケル角ナルトキ,

$$\mathrm{A}\cos\alpha+\mathrm{B}\sin\alpha$$

ヲ $\tan\alpha$ ノ項ニテ表ハセ。但シ A, B ハ何レモ常數ナリトス。

4. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

(a) $\cos(180^\circ+\theta)\sec(90^\circ-\theta)+\sin(90^\circ+\theta)\operatorname{cosec}(180^\circ-\theta)$

(b) $\dfrac{(a^2-b^2)cot(180°-\alpha)}{cos(180°+\alpha)}+\dfrac{(a^2+b^2)tan(90°-\alpha)}{cot(180°-\alpha)}$

(c) $\dfrac{sin(90°+\alpha)cos(90°-\alpha)}{cos(180°+\alpha)}+\dfrac{sin(180°-\alpha)cos(90°+\alpha)}{sin(180°+\alpha)}$

5. θ ガ $0°$ ヨリ $360°$ マデ變化スルトキ,次ノ式ノ變化ヲ示セ。

(a) $\dfrac{1}{1+tan\theta}$

(b) $\dfrac{1-cos\theta}{1+cos\theta}$

6. $4ab\,sin\theta=(a+b)^2$ ハ $a=b$ ナルニ非ズンバ,之レニ適スル θ ヲ有セズ。之レヲ證明セヨ。

7. $sec\theta=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ ナル等式ハ x ノ如何ナル値ニ於テ成立スルカ。

8. $9\,sin^2\theta+27\,sin\theta=10$ ニ適スル $0°$ ヨリ $360°$ マデノ間ノ角ヲ求ム。

9. $2\,sin\theta=tan\theta$ ヲ滿足スル $-180°$ ヨリ $180°$ マデノ間ノ角ヲ求ム。

10. $sinx\,cos^2x=a,\ cos^2x\,sinx=b$ ヨリ x ヲ消去セヨ。

第四. 角ノ和ノ三角函數

1. $tanx=2,\ tany=\dfrac{1}{3}$ ナルトキ, $tan\{2(x+y)\}$ ノ値ヲ求ム。

2. 次ノ恒等式ヲ證明セヨ。

(a) $sin(x+y)+cos(x-y)=(sinx+cosx)(siny+cosy)$

(b) $cos(\alpha+60°)+cos(\alpha-60°)=cos\alpha$

(c) $sinA\,sin(B-C)+sinB\,sin(C-A)+sinC\,sin(A-B)=0$

3. $12°, 6°, 3°$ ノ三角函數ヲ求ムル手續キ如何。

4. $cos2\theta=\dfrac{3}{5}$ ナルトキ $sin^4\theta+cos^4\theta$ ノ値ヲ求ム。

5. $cos\theta=\dfrac{cos\alpha+cos\beta}{1+cos\alpha\,cos\beta}$ ナルトキ, $tan^2\dfrac{\theta}{2}=tan^2\dfrac{\alpha}{2}\,tan^2\dfrac{\beta}{2}$ ナルコトヲ證明セヨ。

6. 次ノ恒等式ヲ證明セヨ。

(a) $1+tan\alpha\,tan\dfrac{\alpha}{2}=sec\alpha$

(b) $tan\left(30°+\dfrac{\theta}{2}\right)tan\left(30°-\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{2cos\theta-1}{2cos\theta+1}$

(c) $\dfrac{sin3A}{sinA}-\dfrac{cos3A}{cosA}=2$

7. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

(a) $sin100°\,sin(-160°)+cos200°\,cos(-280°)$

(b) $cos(36°-\alpha)cos(36°+\alpha)+cos(54°+\alpha)cos(54°-\alpha)$

(c) $(cosA+cosB)^2+(sinA+sinB)^2$

8. $a\,cosx=b\,cosy$ ナルトキハ,

$$\frac{a+b}{a-b}=cot\frac{x+y}{2}\,cot\frac{x-y}{2}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

9. 次ノ式ヲ積ノ形ニ變セヨ。

(a) $\sin 3\theta+\sin 2\theta+2\sin\frac{3}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$

(b) $\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 y}{\sin x\cos x-\sin y\cos y}$

10. $\sec(\theta+\alpha)+\sec(\theta-\alpha)=2\sec\theta$ ナルトキハ,

$$\cos^2\theta=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

11. $\sin\alpha+\sin\beta=a,\quad \cos\alpha+\cos\beta=b$ ナルトキハ,

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

12. 次ノ恒等式ヲ證明セヨ。

(a) $\cos(A+B)\cos(A-B)+1=\cos^2 A+\cos^2 B$

(b) $\tan(A+B)\tan(A-B)+1=\dfrac{1-2\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 B}$

13. 次ノ恒等式ヲ證明セヨ。

(a) $\dfrac{\sin 3A}{\sin A}-\dfrac{\sin 3B}{\sin B}=4\sin(A+B)\sin(B-A)$

(b) $\cos 4\alpha=1-8\cos^2\alpha+8\cos^4\alpha$

(c) $\sin 5\alpha=5\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha$

14. 次ノ式ノ値ヲ求ム。

(a) $\cos 40^\circ\cos 80^\circ\cos 160^\circ$

(b) $\cos 47^\circ+\cos 25^\circ-\cos 11^\circ-\cos 61^\circ$

(c) $\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ$

15. $a\cos\theta+b\sin\theta$ ニ於テ, $\dfrac{b}{a}=\tan\phi$ ト置キ, 之レヲ積ノ形ニ改メヨ。

16. $\tan B=\dfrac{2\sin A\sin C}{\sin(A+C)}$ ナルトキハ, $\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ ガ等差級數ヲナスコトヲ證明セヨ。

17. 次ノ恒等式ヲ證明セヨ。

(a) $\tan 50^\circ+\cot 50^\circ=2\sec 10^\circ$

(b) $\dfrac{1}{2}\cos 40^\circ+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 40^\circ=\sin 70^\circ$

(c) $\cos^2 18^\circ\sin^2 36^\circ-\cos 36^\circ\sin 18^\circ=\dfrac{1}{16}$

(d) $\sin^2 24^\circ-\sin^2 6^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{8}$

18. θ ガスベテノ角ヲ變化スルトキ,

(a) $\sin\theta\cos\theta$ ノ最大値,最小値ト其ノ各場合ノ θ ノ値トヲ求ム。

(b) $\cos^2\theta-\sin^2\theta$ ノ最大値ト其ノトキノ θ ノ値トヲ求ム。

19. θ ガ 0° ヨリ 360° マデノ間ヲ變化スルトキ,次ノ式ノ値ノ變化ヲ示セ。

(a) $\cos\theta-\sin\theta$

(b) $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$

(c) $\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

20. 次ノ各組ノ方程式ヨリ x ヲ消去セヨ。

(a) $\sin(\alpha+x)=m,\quad \sin(\alpha-x)=n$

(b) $\tan(\alpha+x)=a,\quad \tan(\alpha-x)=b$

21. $x\cos A+y\sin A=x\cos B+y\sin B=z$ ナルトキハ,

$$\frac{x}{\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{y}{\sin\frac{A-B}{2}}=\frac{z}{\cos\frac{A-B}{2}}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

22. 角ガ等差級數ヲナス三角函數ノ級數

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\delta)+\sin(\alpha+2\delta)+\sin(\alpha+3\delta)+\dots$$

ノ最初ヨリ數ヘテ n 項ノ和ヲ求ム。

(解) 求ムル和ヲ S_n トスレバ,

$$S_n=\sin\alpha+\sin(\alpha+\delta)+\sin(\alpha+2\delta)+\dots+\sin\{\alpha+(n-1)\delta\}$$

兩邊ニ $2\sin\frac{\delta}{2}$ ヲ乘ズレバ

$$2\sin\frac{\delta}{2}S_n=2\sin\alpha\sin\frac{\delta}{2}+2\sin(\alpha+\delta)\sin\frac{\delta}{2}+2\sin(\alpha+2\delta)\sin\frac{\delta}{2}$$

$$+\dots+2\sin\{\alpha+(n-1)\delta\}\sin\frac{\delta}{2}$$

$$=\left\{\cos\left(\alpha-\frac{\delta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right)\right\}$$

$$+\left\{\cos\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{3\delta}{2}\right)\right\}$$

$$+\left\{\cos\left(\alpha+\frac{3\delta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{5\delta}{2}\right)\right\}$$

$$+\dots$$

$$+\left\{\cos\left(\alpha+\frac{2n-3}{2}\delta\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\delta\right)\right\}$$

$$=\cos\left(\alpha-\frac{\delta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\delta\right)$$

$$=2\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\delta\right)\sin\frac{n\delta}{2}$$

$$\therefore\ S_n=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\delta\right)\sin\frac{n\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

(注意) $\sin\frac{\delta}{2}=0$ ナル場合ニハ直接ニ容易ナル解法アリ。

23. $\cos\alpha+\cos(\alpha+\delta)+\cos(\alpha+2\delta)+\dots+\cos\{\alpha+(n-1)\delta\}$ ナル級數ノ和ハ $\cos\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\delta\right)\sin\frac{n\delta}{2}\div\sin\frac{\delta}{2}$ ニ等シキコトヲ證明セヨ。

24. 次ノ級數ノ最初 n 項ノ和ヲ求ム。

(a) $\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha+\dots$

(b) $\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha+\dots$

25. 問題21, 22ニ於テ δ ノ代リニ $180°+\delta$ ヲ置キテ次ノ級數ノ和ヲ求メヨ。

(a) $\sin\alpha-\sin(\alpha+\delta)+\sin(\alpha+2\delta)-\dots$

$$+(-1)^{n-1}sin\{\alpha+(n-1)\delta\}$$

(b) $cos\alpha-cos(\alpha+\delta)+cos(\delta+2\delta)-\ldots$
$$+(-1)^{n-1}cos\{\alpha+(n-)\delta\}$$

第五. 三角形ノ邊ト角トノ關係

本集ニ於テハ, A, B, C ハ三角形ノ三ツノ角ノ大サヲ示シ, a, b, c ハ各對邊ノ長サヲ表ハシ, 尙 S, s, R, r, r_a, r_b, r_c モスベテ第五編ニ述ベタルニ同ジ。

三角形ニ於テ次ノ恒等式(1)乃至(6)ヲ證明セヨ。

1. (a) $cos\frac{A}{2}+cos\frac{B}{2}+cos\frac{C}{2}$
$$=4\,cos\left(45°-\frac{A}{4}\right)cos\left(45°-\frac{B}{4}\right)cos\left(45°-\frac{C}{2}\right)$$
(b) $sin\frac{A}{2}+sin\frac{B}{2}+sin\frac{C}{2}$
$$=4\,sin\left(45°-\frac{A}{4}\right)sin\left(45°-\frac{B}{4}\right)sin\left(45°-\frac{C}{4}\right)+1$$

2. (a) $cot\frac{A}{2}+cot\frac{B}{2}+cot\frac{C}{2}=cot\frac{A}{2}cot\frac{B}{2}cot\frac{C}{2}$
(b) $tanB\,tanC+tanC\,tanA+tanA\,tanB=1+secA\,secB\,secC$

3. $a\,cos(B-C)+b\,cos(C-A)+c\,cos(A-B)$
$$=2(a\,cosA+b\,cosB+c\,cosC)$$

4. $(a+b+c)(cosA+cosB+cosC)$
$$=2\left(a\,cos^2\frac{A}{2}+b\,cos^2\frac{B}{2}+c\,cos^2\frac{C}{2}\right)$$

5. $c^2=(a+b)^2sin^2\frac{C}{2}+(a-b)^2cos^2\frac{C}{2}$

6. $(b+c)sin\frac{A}{2}=a\,cos\frac{B-C}{2}$

7. 三角形ニ於テ, A=2B ナルトキハ, $a=2b cosB$ ナルコトヲ證明セヨ。

8. 三角形ニ於テ $sinC=\frac{sinA+sinB}{cosA+cosB}$ ナルトキハ, C ガ直角ナルコトヲ證明セヨ。

9. 三角形ノ面積ノ四倍ハ $a^2sin2B+b^2sin2A$ ニ等シキコトヲ證明セヨ。

10. 三角形ニ於テ $cot\frac{A}{2}$, $cot\frac{B}{2}$, $cot\frac{C}{2}$ ガ等差級數ヲナストキハ, $cot\frac{A}{2}\,cot\frac{C}{2}=3$ ナルコトヲ證明セヨ。

三角形ニ於テ次ノ關係(11), (12)アルコトヲ證明セヨ。

11. (a) $bc\,cos^2\frac{A}{2}+ca\,cos^2\frac{B}{2}+ab\,cos^2\frac{C}{2}=s^2$
(b) $cosA+cosB+cosC=1+\frac{r}{R}$

12. (a) $r_a=s\,tan\frac{A}{2}$, $r_b=s\,tan\frac{B}{2}$, $r_c=s\,tan\frac{C}{2}$
(b) $r=a\,sec\frac{A}{2}\,sin\frac{B}{2}\,sin\frac{C}{2}$
(c) $4R=r_a+r_b+r_c-r$
(d) $S=r^2cot\frac{A}{2}\,cot\frac{B}{2}\,cot\frac{C}{2}$

第六. 三角形ノ解法

本集ニ於テ使用スル記號ハ何レモ前集ニ於ケルモノニ同ジ。

1. 三角形ニ於テ, $B=45°$, $C=105°$ ナルトキ, b 及ビ c ヲ a ノ項ニテ表ハセ。

2. 梯形ノ平行ナル二邊ノ長サト其ノ一ツノ兩端ニ於ケル角トヲ知レルトキ,殘リノ邊ト角トヲ求ムル公式ヲ作レ。

3. $a=13$, $A=53°\,7'{\cdot}8$, $B=14°\,15'$ ナルトキ, b 及ビ c ヲ求ム。

4. $A=120°$, $b=12$, $c=9$ ナルトキ a ヲ小數點以下第二位マデ求メ以下四捨五入セヨ。

5. 三角形ノ二邊ガ $5:3$ ノ如ク,其ノ夾角ガ $40°$ ナルトキ,他ノ角ヲ求ム。

6. 平行四邊形ノ兩對角線ノ長サト其ノ夾角トヲ知レリトシテ各邊ヲ求ムル公式ヲ作レ。

7. 邊ノ長サ a ナル正三角形ノ一邊ヲ三等分スル點ノ各ヲ之レニ對スル頂點ニ結ビ付クル直線ノ長サ及ビ之レニヨリテ分タルル頂角ノ各分角ヲ計算セヨ。

8. $a=13{\cdot}5$, $b=17{\cdot}6$, $A=38°\,22'$ ナルトキ,第三邊 c ヲ求ム。

9. $a=12$, $b=\frac{399}{40}$, $A=45°$ ナルトキ B ヲ求ム。

10. $a=2\sqrt{3}$, $b=3-\sqrt{3}$, $c=3\sqrt{2}$ ナルトキ C ヲ求ム。

11. 三角形ノ周ト面積ト一角トヲ知レルトキ,之レヲ解ク方法如何。

12. $a=4$ 米, $b=5{\cdot}1$ 米, $S=8{\cdot}61$ 平方米ナルトキ,三ツノ角ヲ求メヨ。

第七. 距離及ビ高サノ測定

1. A, B, C ハ平地上ノ三點ニシテ C ガ直角ナル三角形ノ頂點ヲナス。A ニ立テル塔ヲ B 及ビ C ニ於テ望ミテ仰角夫々 $18°$ 及ビ $30°$ ナルトキハ,塔ノ高サガ $BC \div \sqrt{2+2\sqrt{5}}$ ナルコトヲ示セ。

2. 前問題ニ於テ B, C ニ於ケル仰角ヲ夫々 $15°$, $45°$ ナリトシ, $\tan B=\frac{1}{2}\left\{3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}}\right\}$ ナルコトヲ示セ。

3. 直線ノ道路ヲ行ク人ガ,此道路ヨリ a ナル距離ノ地點ニ立テル塔ヲ望ミ,仰角 α 及ビ塔ノ方向ト道路ノ方向トノナス角 β ヲ得タリ。塔ノ高サヲ求メヨ。

4. 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ニ於テ, $AB=p$, $C\hat{A}D=\alpha$, $B\hat{A}C=\beta$, $A\hat{B}D=\gamma$ トスレバ

$$CD=\frac{p\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

5. 或地點ニ於テ,等速ニテ垂直ニ上昇スル輕氣球ヲ望ミ,其レガ1哩ノ高サニ在リシトキノ仰角ハα,ソレヨリ十五分時ノ後ノ仰角ハβナリシトスレバ,此輕氣球每時ノ上昇速度如何。

6. 平地上ニ立テル臺ノ高サhナルアリテ,臺上ニハ更ニ長サ$\frac{3}{2}h$ナル旗竿アリ。平地上ニ於テ基脚ヲ距ル如何程ノ地點ニ於テ之レヲ望マバ,旗竿ヲ夾ム角ガ臺ヲ夾ム角ニ等シクナルベキカ。

7. 兩岸ガ平行直線ヲナス幅aナル川アリテ,其ノ岸ニ垂直ナル橋アリ。岸ヲ距ルbナル地點ニ於テ,之レニ面セル橋ノ一側ヲ望ミ角距αヲ得タリトイフ。此地點ヨリ橋ノ最モ短キ一隅マデノ距離如何。

8. A,B ハ烟突 CD ノ基脚Cト同ジ水平面上ノ二點ナリ。$C\hat{A}B=105°$, $C\hat{B}A=30°$, $D\hat{A}C=60°$, $AB=30$間

ナルトキ,烟突ノ高サヲ間ノ小數第二位マデ計算セヨ。

第八. 弧度法

本集ニ於ケルθ,α,βハ弧度法ニヨリテ表ハサレタル角ノ大サナリトス。

1. $\tan\frac{\pi}{8}-\tan\frac{\pi}{8}=2$ ナルコトヲ證明セヨ。

2. $\frac{\sin(\pi-\theta)}{\tan(\pi+\theta)}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}\cdot\frac{\cot(2\pi-\theta)}{\sin(-\theta)}$ ヲ簡單ニセヨ。

次ノ恒等式(3),(4)ヲ證明セヨ。

3. (a) $\sin\alpha+\cos\beta=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

(b) $\sin\alpha-\cos\beta=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

4. (a) $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$

(b) $\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$

5. $\alpha=\frac{2\pi}{15}$ ナルトキ $\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos4\alpha+\cos8\alpha$ ノ値ヲ求ム。

6. $\left(1-2\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(1-2\cos\frac{4\pi}{7}\right)\left(1-2\cos\frac{6\pi}{7}\right)=-1$ ナルコトヲ證明セヨ。

第九. 逆三角函數

次ノ恒等式(1)乃至(3)ヲ證明セヨ。

1. (a) $\sin^{-1}a=\cos^{-1}(\pm\sqrt{1-a^2})$

(解) $\sin^{-1}a=\theta$ トスレバ $a=\sin\theta$

$$\therefore\ 1-a^2=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$$

$$\therefore\ \cos\theta=\pm\sqrt{1-a^2}\qquad \theta=\cos^{-1}(\pm\sqrt{1-a^2})$$

$$\therefore\ \sin^{-1}a=\cos^{-1}(\pm\sqrt{1-a^2})$$

(注意) 複符號ハ其ノ何レヲ採ルモ適合ス。

(b) $\cos^{-1}a=\sin^{-1}(\pm\sqrt{1-a^2})$

2. (a) $\sin^{-1}a+\sin^{-1}b=\sin^{-1}(\pm a\sqrt{1-b^2}\pm b\sqrt{1-a^2})$

(b) $\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}\dfrac{a+b}{1-ab}$

3. (a) $2\tan^{-1}a=\tan^{-1}\dfrac{2a}{1-a^2}$

(b) $2\cos^{-1}a=\cos^{-1}(2a^2-1)$

次ノ恒等式(4),(5)ヲ各函數ノ主値ニ關シテ證明セヨ。

4. (a) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$

(b) $\cot^{-1}\dfrac{3}{4}+\cot^{-1}\dfrac{1}{7}=\dfrac{3\pi}{4}$

5. (a) $\sin^{-1}\dfrac{5}{4}+\sin^{-1}\dfrac{5}{13}=\sin^{-1}\dfrac{63}{65}$

(b) $4\tan^{-1}\dfrac{1}{5}=\tan^{-1}\dfrac{120}{119}$

6. 次ノ式ノ値ヲ求ム。

(a) $\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{3}+\cos^{-1}\dfrac{1}{5}\right)$

(b) $\tan(\sec^{-1}2-\cot^{-1}2)$

7. $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=\dfrac{\pi}{4}$ ヲ滿足スル x ノ値ヲ求ム。

(解) $\tan^{-1}2x=\alpha$, $\tan^{-1}3x=\beta$ トスレバ,

$$2x=\tan\alpha,\qquad 3x=\tan\beta$$

原方程式ハ $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ ナルコトヲ示スヲ以テ, 今 $\tan(\alpha+\beta)$ ヲ作レバ

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2x+3x}{1-2x\times3x}$$

$$=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

$$\therefore\ \frac{2x+3x}{1-2x\times3x}=1$$

即チ
$$\frac{5x}{1-6x^2}=1$$

分母ヲ去リ整頓シテ

$$6x^2+5x-1=0$$

之レヨリ $x=\dfrac{1}{6}$ 及ビ $x=-1$ ヲ得,而カモ何レモ,去リタル分母ヲ零ナラシメズ。故ニ $\dfrac{1}{6}$ 及ビ -1 ガ求ムル根ナリ。

8. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{4}$ ニ適スル x ノ値ヲ求ム。

9. $\cot^{-1}x+\cot^{-1}(n^2-x+1)=\cot^{-1}(n-1)$ ニ適スル x ノ値ヲ求ム。

第十. 三角方程式

次ノ三角方程式(1)乃至(8)ヲ解ケ。

1. $\cos x=\cos 2x$

2. $\sec\theta=2\tan\theta$

3. $\tan x+\cot x=4$

4. $2\sin^2\theta+\sin^2 2\theta=2$

5. $a\sin 2x=b\tan x$

6. $\tan 4\theta-\tan\theta=0$

7. $\sec^2\frac{x}{2}+\mathrm{cosec}^2\frac{x}{2}=16\cot x$

8. $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=2$

次ノ三角方程式(9)乃至(11)ニ適スル弧度ヲ求ム,

9. $\tan\theta+\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=2$

10. $\sec\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\sec\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2\sec\theta$

11. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=3\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

12. $a\sin x+b\cos x=c$ ヲ解ケ。

(注意) $\frac{b}{a}=\tan\phi$ トシ, ϕ ハ表ニヨリテ知ルモノトスベシ。

次ノ聯立方程式(13)乃至(15)ヲ解ケ。

13. $x+y=a,\quad \tan x+\tan y=b$

14. $2\sin(\theta+\phi)=\sqrt{3},\quad 2\cos(\theta-\phi)=1$

15. $\sin x+\sin y=\sqrt{2},\quad \cos x+\cos y=\sqrt{2}$

問　題　答

問題第一. **1.** (a) 60°　　(b) 108°

2. (a) 五分ノ一直角　　(b) 四分ノ一直角

(c) $\frac{13751}{21600}$ 直角　　(d) $1\frac{1}{16}$ 直角

3. (a) 150° 又ハ 210°　　(b) 75°　　(c) 52° 30′

4. 30°, 60°, 90°

問題第二. **1.** $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos A = \frac{4}{5}$, $\tan A = \frac{3}{4}$

2. (a) $\sin A = \frac{5}{13}$, $\cos A = \frac{12}{13}$, $\tan A = \frac{5}{12}$

(b) $\sin B = \frac{12}{13}$, $\cos B = \frac{5}{13}$, $\tan B = \frac{12}{5}$

3. $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos A = \frac{1}{2}$, $\tan A = \sqrt{3}$, $\cot A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sec A = 2$,

$\operatorname{cosec} A = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sin B = \frac{1}{2}$, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan B = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$\cot B = \sqrt{3}$, $\sec B = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{cosec} B = 2$

4. $\frac{\sqrt{l^2-p^2}}{l}$, $\frac{p}{l}$, $\frac{\sqrt{l^2-p^2}}{p}$, $\frac{p}{\sqrt{l^2-p^2}}$, $\frac{l}{p}$, $\frac{l}{\sqrt{l^2-p^2}}$

問題第三. **14.** $a^2+b^2=2$　　**15.** $a^2+b^2=2$

問題第四. **1.** $\cos x = \frac{4}{5}$, $\tan x = \frac{3}{4}$

2. $\sin A = \frac{12}{13}$, $\tan A = \frac{12}{5}$, $\cot A = \frac{5}{12}$, $\sec A = \frac{13}{5}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{13}{12}$

3. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\tan\alpha=\sqrt{3}$, $\cot\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}$

4. $\frac{\cot A}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$ 5. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ 6. 1, $\frac{1}{2}$

問題第五. 3. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$ 4. $45°$, $60°$

5. $30°$ 6. $45°$

問題第六. 1. (a) 0·9492 (b) 0·8781

(c) 1·2298 (d) 1·1470

2. (a) $22°\,43'$ (b) $18°\,26'$ (c) $75°\,31'$

(d) $45°$, $18°\,26'$

問題第七. 1. $A=18°$, $a=77·25$碼, $b=237·78$碼

2. $B=27°\,25'$, $b=6·23$間, $c=13·52$間

3. $c=10\sqrt{3}$, $A=30°$, $B=60°$

4. $c=8·60$, $A=35°\,32'$, $B=54°\,28'$

5. $b=449$尺, $A=26°\,6'$, $B=63°\,54'$

問題第八. 1. $7\sqrt{3}$間$=12·12$間

2. 69·25間 卽チ 1町9間1·5尺 3. 245·15尺

4. $100\sqrt{2}$尺$=141·42$尺 5. 60尺

6. 河幅20尺, 樹ノ高サ38·64尺 7. 30間

8. 39·43尺 9. $\frac{r\sin\alpha}{\sin\frac{\beta}{2}}$ 10. $\frac{l}{\sqrt{\cot^2\beta-\cot^2\alpha}}$

11. $\frac{l\tan\alpha}{\tan\beta-\tan\alpha}$ 12. $\frac{b-a}{\cot\beta-\cot\alpha}$

問題第九. 1. (a) $3\sqrt{3}$ (b) $\frac{1}{2}$

2. (a) $-\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) $-\sqrt{3}$ (d) 2

3. (a) $\sin 40°$ (b) $-\tan 10°$

4. $\sin 238°=-\frac{8}{\sqrt{89}}$, $\cos 122°=-\frac{5}{\sqrt{89}}$

5. $\sin\theta=\frac{12}{13}$, $\tan\theta=-\frac{12}{5}$ 又ハ $\sin\theta=-\frac{12}{13}$, $\tan\theta=\frac{12}{5}$

6. (a) θ ガ第一及ビ第四象限ニ屬スルトキハ正號,
第二及ビ第三象限ニ屬スルトキハ負號

(b) (a) ニ同ジ

7. (a) $\cos x$ (b) 2 (c) $\sin\alpha\cos\alpha$

9. $-135°$, $-45°$, $45°$, $135°$

10. (a) $30°$, $90°$, $150°$ (b) $120°$, $240°$

11. $0°$ ヨリ $60°$ マデ 及ビ $300°$ ヨリ $360°$ マデ

12. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 13. $mn^2+m-n=0$

問題第十. 2. (a) $\sin(A+B)=\frac{8+3\sqrt{5}}{15}$, $\cos(A-B)=\frac{6+4\sqrt{5}}{15}$

(b) $\sin(A+B)=\frac{63}{65}$, $\cos(A+B)=-\frac{16}{65}$, $\tan(A+B)=-\frac{63}{16}$

(c) $90°$

3. (a) 双方トモ $\pm\frac{84}{85}$ 又ハ $\pm\frac{36}{85}$

(b) $\sin(\alpha-\beta)$ ハ $\pm\frac{2\sqrt{2}+3}{6}$ 又ハ $\pm\frac{2\sqrt{2}-3}{6}$,

$\cos(\alpha-\beta)$ ハ $\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$ 又ハ $\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$,

$tan(\alpha-\beta)$ ハ $\pm\frac{9\sqrt{3}-8\sqrt{2}}{23}$ 又ハ $\pm\frac{9\sqrt{3}+8\sqrt{2}}{23}$

(c) $tan(\alpha+\beta)=2+\sqrt{3}$, $sin(\alpha+\beta)=\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

4. 45°, 225°

5. $sin105°=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, $cos105°=-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$,

$tan105°=-(2+\sqrt{3})$, 等

6. $sin165°=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $cos165°=-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

問題第十一. **1.** (a) $-\frac{7}{25}$　(b) $\frac{7}{8}$　(c) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$　(d) $\frac{5}{12}$

2. ∞ 又ハ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$　**3.** $-5\pm\sqrt{26}$　**4.** $\frac{7}{25}$

18. $sin2\theta$ ハ $\frac{25}{16}$, $sin^3\theta+cos^3\theta$ ハ $\frac{115}{128}$

問題第十二. **6.** $4\,cos4x\,cos2x\,cosx$　**7.** $8\,cos\theta\,cos^3 3\theta$

8. 1　**9.** $sin7°$　**10.** (a) $\frac{3}{2}$　(b) $\frac{3}{2}$

11. $4\,sinA$　**12.** 1　**13.** (a) $tan3\theta$　(b) $\frac{sin3A}{sin5A}$

14. $tan\frac{A+B}{2}$

問題第十三. **15.** (a) A=30°, B=45°, C=105°　(b) 120°

問題第十五. **1.** (a) 4　(b) $\frac{1}{3}$　(c) $\frac{3}{4}$　(d) $-\frac{5}{2}$

問題第十六. **1.** (a) 3·03342　(b) $\bar{2}$·64243

(c) $\bar{1}$·09691　(d) $\bar{2}$·34332

2. (a) $\bar{1}$·93753　(b) $\bar{1}$·76144　(c) 0·15052

3. 1·881　**4.** 六桁　**5.** $\bar{1}$·52539　**6.** 56° 3′ 38″

問題第十七. **1.** A=60° 10′, b=10·67, c=10·51

2. B=64°, b=117·33, c=119·26

3. A=45°, b=24·59, c=22·05

問題第十八. **1.** 210·84　**2.** 6·83間

3. A=67° 36′ 58″, B=38° 1′ 38″, c=4637·9

問題第十九. **1.** 30° 又ハ 150°

2. B=60°, C=90°, $c=40\sqrt{3}$ 又ハ

B=120°, C=30°, $c=20\sqrt{3}$

問題第二十. **1.** A=43° 19′·4, B=59° 12′·5, C=77° 28′·1

2. 94° 46′·8　**3.** 45°, 60°, 75°

問題第二十一. **1.** 50·72間　**2.** 6·46海里

3. $\frac{h(a^2+h^2)}{a^2-h^2}$尺　**4.** 3里 33町 41間　**5.** 126·51哩

6. $2x^2+a^2+b^2-c^2=2\sqrt{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}\,cos\alpha$ ノ根ナリ

7. $\frac{4}{3}(\sqrt{15+6\sqrt{5}}-3)\,a$ 米　**8.** $\frac{\sqrt{2}}{4}a$ 間　**10.** 49·56米

附　　錄

例題第一. **1.** (a) $\frac{\pi}{6}$　(b) $\frac{\pi}{8}$　(c) $\frac{32}{405}\pi$　(d) $\frac{3}{2}\pi$

2. (a) 36° (b) 75° 3. $\frac{n-2}{n}\pi$ 5. 0·08727尺

6. 101°51′33″ 7. 4.46糎 8. 238793哩 9. 1081哩

例題第二. 1. (a) $180^\circ\times n$ (但シnハ零或ハ正又ハ負ノ整數ヲ表ハス。以下モ同様ナリ)

(b) $90^\circ\times(4n+1)$ (c) $360^\circ\times n$ (d) $45^\circ\times(4n+1)$

(e) $180^\circ\times n+(-1)^n30^\circ$ (f) $45^\circ\times(2n+1)$ (g) $120^\circ\times(3n\pm1)$

2. (a) $180^\circ\times n\pm75^\circ$ (b) $180^\circ\times n+15^\circ$

(c) $60^\circ\times(3n\pm1)$ (d) $15^\circ\times(4n+1)$ 3. 840°

例題第三. 1. $180^\circ\times n+(-1)^n80^\circ$ 及ビ $sin^{-1}\frac{1}{2}$ 即チ $180^\circ\times n+(-1)^n19^\circ28'\cdot1$

2. $180^\circ\times n+(-1)^n30^\circ$ 3. $90^\circ\times(2n+1)$, $360^\circ\times n$

4. $45^\circ\times(2n+1)$ 5. $60^\circ\times(6n\pm1)$, $180^\circ\times(2n+1)$

6. $45^\circ\times n$, $10^\circ\times\{6n+(-1)^n\}$

7. $45^\circ\times(2n+1)$, $120^\circ\times(3n\pm1)$

8. $90^\circ\times(2n+1)$, $40^\circ\times(3n\pm1)$ 9. $180^\circ\times n$

10. $90^\circ\times n$ 11. $360^\circ\times n$, $90^\circ\times(4n-1)$

12. $180^\circ\times2n+75^\circ$, $180^\circ\times2n-15^\circ$

13. $[x=180^\circ\times n+(-1)^n60^\circ,\ y=-180^\circ\times n-(-1)^n60^\circ+90^\circ]$,
$[y=180^\circ\times n+(-1)^n60^\circ,\ x=-180^\circ\times n-(-1)^n60^\circ+90^\circ]$

14. $[x=30^\circ\times(6n+1),\ y=60^\circ\times(2-3n)]$,
$[x=60^\circ\times(3n+2),\ y=30^\circ\times(1-6n)]$

15. $x=10^\circ\times\{6(2m+n)+2+(-1)^n\}$,
$y=10^\circ\times\{6(2m-n)+2-(-1)^n\}$
(但シm, nハ互ニ關係ナキ零或ハ正又ハ負ノ整數ナリ)

補充雜題

第一. 銳角ノ三角函數

9. $(a^2-b^2)^2=16ab$ 11. 60° 12. 30°

第二. 直角三角形

1. (a) $A=38^\circ28'\cdot1$, $b=16\cdot99$ (b) $b=49\cdot71$, $c=129\cdot89$

2. 8·09 5. 51°20′·4 7. 1585米

9. 35·5尺 11. 29·2尺 12. 1·12海里

第三. 一般ノ角ノ三角函數

1. $sin32^\circ$, $-cos32^\circ$, $-tan32^\circ$ 3. $-\frac{A}{\sqrt{1+tan^2\alpha}}-\frac{B\,tan\alpha}{\sqrt{1+tan^2\alpha}}$

4. (a) 0 (b) $a^2(cosec\alpha-1)-b^2(cosec\alpha+1)$ (c) 0

7. $x=0$ 8. 19°28′20″, 160°31′40″

9. −180°, −60°, 0°, 60°, 180° 10. $(a^2+b^2)^3=a^2b^2$

第四. 角ノ和ノ三角函數

1. $-\frac{7}{24}$ 4. $\frac{17}{25}$

7. (a) $-\frac{1}{2}$ (b) $cos2\alpha$ (c) $4\,cos^2\frac{A-B}{2}$

9. (a) $4\cos^2\frac{\theta}{2}\sin 2\theta$ (b) $\tan(x+y)$

14. (a) $-\frac{1}{8}$ (b) $\sin 7^\circ$ (c) 0 15. $\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\phi)$

18. (a) 最大値 $\frac{1}{2}$, $\theta=45^\circ\times(4n+1)$ ナルトキ

最小値 $-\frac{1}{2}$, $\theta=45^\circ\times(4n-1)$ ナルトキ

(b) 最大値 1, $\theta=180^\circ\times n$ ナルトキ

20. (a) $m^2+n^2+2mn\cos 2\alpha=\sin^2 2\alpha$

(b) $(a+b)\tan^2\alpha-2(ab-1)\tan\alpha-(a+b)=0$

24. (a) $\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\ \sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ (b) $\dfrac{\cos\frac{n+1}{2}\alpha\ \sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

25. (a) $\dfrac{\sin\left\{\alpha+\frac{(n-1)}{2}(180^\circ+\delta)\right\}\sin\frac{n}{2}(180^\circ+\delta)}{\cos\frac{\delta}{2}}$

(b) $\dfrac{\cos\left\{\alpha+\frac{n-1}{2}(180^\circ+\delta)\right\}\sin\frac{n}{2}(180^\circ+\delta)}{\cos\frac{\delta}{2}}$

第六. 三角形ノ解法

1. $b=\sqrt{2}a$, $c=\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})a$ 3. $b=4$, $c=15$

4. 18·25 5. A$=104^\circ\ 29'$, B$=35^\circ\ 31'$

7. 長サ $\frac{\sqrt{7}}{3}a$, $19^\circ\ 6'{\cdot}4$, $21^\circ 47'{\cdot}2$

8. 21·73 又ハ 5·88 9. 36°

10. 120° 12. $16^\circ\ 38'{\cdot}3$, $21^\circ\ 25'{\cdot}3$, $141^\circ\ 56'{\cdot}1$

第七. 距離及ビ高サノ測定

3. $\dfrac{\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}}{\sin\alpha}a$ 5. $\dfrac{4\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cos\beta}$哩 6. $\sqrt{5}h$

7. $\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b(a+b)\tan^2\alpha}}{2\tan\alpha}$ 8. 36·76間

第八. 弧度法

2. $-\cos\theta$ 5. $\frac{1}{2}$

第九. 逆三角函數

6. (a) $\dfrac{1+8\sqrt{3}}{15}$ (b) $5\sqrt{3}-8$

8. $\pm\sqrt{\frac{2}{17}(5-2\sqrt{2})}$ 9. n, n^2-n+1

第十. 三角方程式

1. $120^\circ\times n$ 2. $180^\circ\times n+(-1)^n 30^\circ$

3. $90^\circ\times n+(-1)^n 15^\circ$ 4. $45^\circ\times(2n+1)$, $90^\circ\times(2n+1)$

5. $180^\circ+n$, $\cos^{-1}\left(\pm\sqrt{\frac{b}{2a}}\right)$ 6. $60^\circ\times n$

7. $90^\circ\times n+(-1)^n 15^\circ$ 8. $60^\circ\times(6n\pm1)$

9. $\{6n+(-1)^n\}\frac{\pi}{12}$ 10. 適スル θ ナシ

11. $\left(n+\frac{1}{12}\right)\pi$, $\left(n-\frac{7}{12}\right)\pi$

12. 正弦ガ $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ナル主値ヲ α トスレバ

$n\pi+(-1)^n\alpha-\phi$

13. 餘弦ガ $\frac{1}{b}(2\sin a-b\cos a)$ ナル主値ヲ α トスレバ

$$x=\frac{1}{2}(a+2n\pi\pm\alpha),\quad y=\frac{1}{2}(a-2n\pi\pm\alpha)$$

14. $\theta=30^\circ\times\{n+2m+(-1)^n\pm1\}$,

$\phi=30^\circ\times\{n-2m+(-1)^n\mp1\}$

15. $[x=90^\circ\times(2n+2m+1),\ \ y=90^\circ\times(2n-2m)]$,

$[x=90^\circ\times(2n+2m),\ \ y=90^\circ\times(2n-2m+1)]$

明治四十三年九月廿八日印刷
明治四十三年十月二日發行

根津三角法奥付

定價金六十錢

著作者 根津千治

發行者 東京市神田區猿樂町二十三番地 來島正時
發行者 東京市神田區表神保町十番地 大島政次
發行者 大阪市南區心齋橋筋一丁目四十三番地 松村九兵衛
印刷者 牛込區市谷加賀町一丁目十二番地 天野耕一

發行所 東京市神田區猿樂町二十三番地 山海堂書店
發賣所 東京市神田區表神保町十番地 武藏屋書店
發賣所 大阪市南區心齋橋筋一丁目四十三番地 文海堂書店

56

三角法教科書

根津　千治／編