岐點

77. 岐點 岐點(Cusp)トハ曲線ノ二邊ガ會スル一點ニシテ其點ニ於テ曲線ガ止マル場合ヲイフ曲線ノ二邊ガ岐點ニ於ケル切線ノ對方ニ在ル片此點ハ第一種ノ岐點トシ之ヲ Keratoid 岐點トイヒ切線ノ同方ニ在ル片ハ第二種ノ岐點ニシテ之ヲ Rhamphoid 岐點トイフ

岐點ハ即チ一種ノ倍點ナルカ故ニ曲線 $u=\phi(x,y)=0$ ノ任意一點ニ於テ岐點ガ存在スル片 $\frac{\delta u}{\delta x}=0$ 及ヒ $\frac{\delta u}{\delta y}=0$ ヨリ岐點ヲ得ヘシ而シテ其點ニ於テ曲線ノ二邊ガ止マルコヲ推究スヘシ

〔例〕 曲線ノ方程式 $u=(cy-bx)^2-\frac{(x-a)^3}{a}=0$ ……………(1)

$x=a$ 及ヒ $y=\frac{ab}{c}$ ハ此方程式ニ適合ス

又 $\frac{\delta u}{\delta x}=-2b(cy-bx)-\frac{3(x-a)^2}{a}=0$

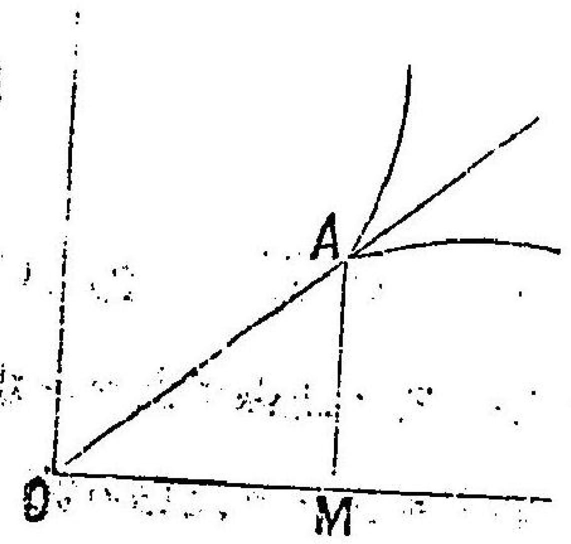
$\frac{\delta u}{\delta y}=2c(cy-bx)=0$ 此方程式ヨリ $x=a,\ y=\frac{ab}{c}$

原方程式ヨリ $y=\frac{bx}{c}\pm\frac{1}{c}\sqrt{\frac{(x-a)^3}{a}}$ ……………(2)

x ガ a ヨリ小ナル片 y ハ虚數ナリ又 $x=a$ ナル片 y ハ唯一ツノ値ヲ有ス

x カ a ヨリ大ナル片 y ハ實數ニシテ兩値ヲ有ス

之ニ由テ $x=a,\ y=\frac{ab}{c}$ ハ倍點ナリ



而シテ $y=\frac{bx}{c}$ ハ直線 OA ヲ示シ A ハ岐點ナリ而シテ $x>a$ ナル片 y ハ (2) ニヨリテ $\frac{ab}{c}$ ヨリ大及ヒ小ノ兩値ヲ有シ曲線ハ OA ノ兩方ニ在ルコヲ知リ得ヘシ故ニ A ハ第一種ノ岐點ナリ

第一種ノ岐點ノ片ハ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ハ其點ニ近キ曲線上ノ點ニ於テ反對ノ符號トナリ第二種ノ岐點ノ片ハ同符號トナルヘシ(則チ彎點ト同理)

之ヲ要スルニ岐點ヲ決定スルニハ其岐點ノ近隣ニ在ル曲線上ノ點ノ性質ヲ檢スヘシ而シテ其近隣ノ點ノ對方(岐點ニ對シテ)ノ點ガ虚點ナルコヲ考察セザルベカラス若シ此點カ虚點ナラサル片ハ倍點ナリ

尚ホ次ニ示ス所ノ例ニ就キテ説明スヘシ

例題

1. 半立方拋物線 $ay^2=x^3$ ノ岐點ヲ求ム

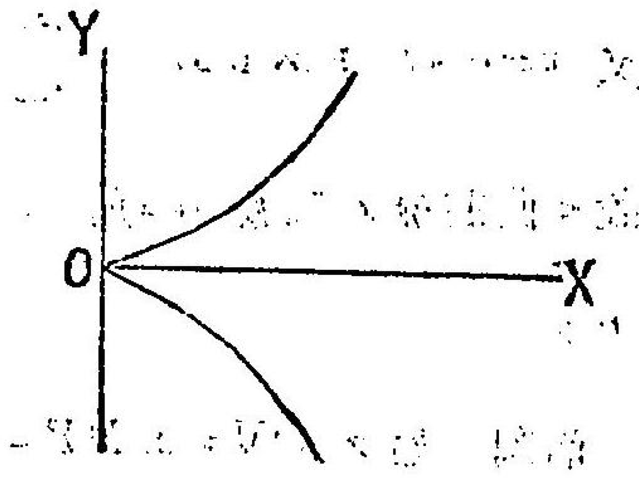
2. 曲線 $y=b+cx^2+(x-a)^{\frac{5}{2}}$ ノ岐點ヲ求ム

3. 曲線 $y^3=(x-a)^2(x-c)$ ハ $x=a$ ナル片第一種ノ岐點ヲ有ス

4. 曲線 $y-b=(x-a)^{\frac{1}{3}}+(x-a)^{\frac{1}{4}}$ ハ $x=a$ ナル片第二種ノ岐點ヲ有ス

5. 曲線 $x^4-2ax^2y-axy^2+a^2y^2=0$ ノ原點ハ第二種ノ岐點ナリ

(1) $y=\pm\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$, $\frac{py}{dx}=\pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{a}}$



$\frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{3}{4\sqrt{ax}}$, $x=0$ ナル時

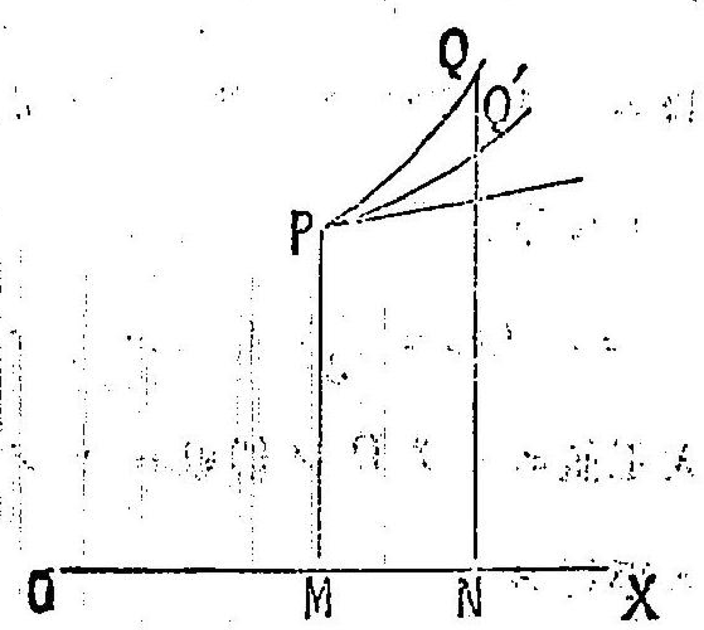
$y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$, $x=-h$ ナル時

y 及ヒ $\frac{dy}{dx}$ ハ虚數トナル而シテ

$x=h$ トスレハ $h=\pm\frac{h^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$ 及ヒ $\frac{dy}{dx}=\pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{h}{a}}$

之ニ由テ此曲線ハ原點ニ於テ岐點ヲ有シ其點ノ切線ハ x 軸ニシテ曲線ノ二邊ハ x 軸ノ對方ニ在リ

(2) $\frac{dy}{dx}=2cx+\frac{5}{2}(x-a),^{\frac{3}{2}}$



$\frac{d^2y}{dx^2}=2c+\frac{15}{4}(x-a),^{\frac{1}{2}}$

$x=a$ ナル時 $y=b+ca^2$

$\frac{dy}{dx}=2ca$, $\frac{d^2y}{dx^2}=2c$

$x=a+h$ トスレハ

$y=b+c(a+h^2)+h,^{\frac{5}{2}}$ $\frac{dy}{dx}=2c(a+h)+\frac{5h^2}{2}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=2c+\frac{15h^{\frac{1}{2}}}{4}$

y 及ヒ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ハ $\frac{1}{2}$ ナル指數ヲ含ムカ故ニ各兩値ヲ有ス而シテ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ノ兩値ハ正ナリ

又 $x=a-h$ トスレハ y, $\frac{dy}{dx}$ 及ヒ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ハ虚數ナリ

故ニ此曲線ノ二邊ハ岐點 A ノ切線ノ同方ニ在リ即チ第二種ノ岐點ナリ

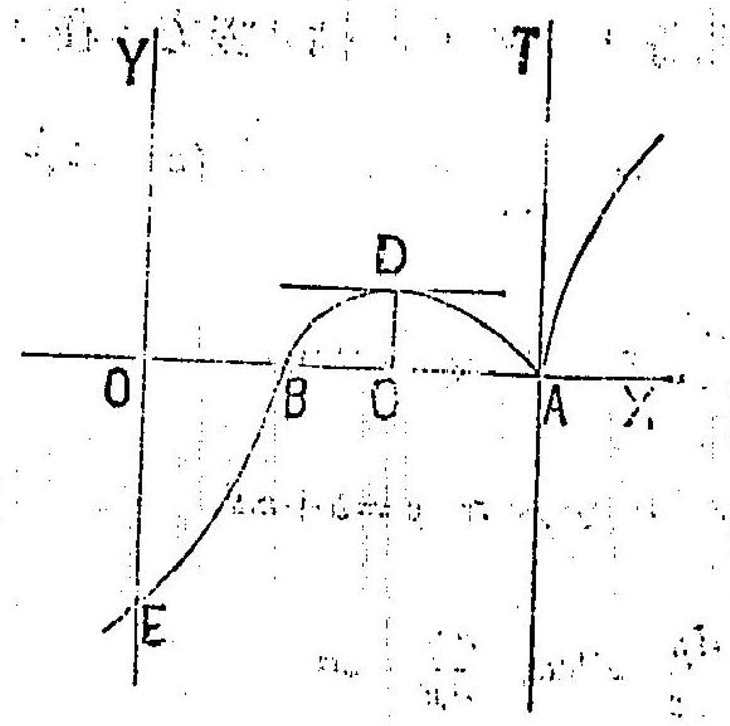
前圖ノ如ク $OM=a$, $MP=b+ca^2$,

$ON=a+h$, $NQ=b+c(a+h^2)+h,^{\frac{5}{2}}$ $NQ'=b-c(a+h^2)-h^{\frac{5}{2}}$

(3) $y^3=(x-a)^2(x-c)$ ニ於テ $x=a$ トスレハ $y=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{3x-a-2c}{3(x-a)^{\frac{1}{3}}(x-c)^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2(a-c)^2}{9(x-a)^{\frac{4}{3}}(x-c)^{\frac{5}{3}}}$

$a>c$ トス $x=0$ ナル時



$y=\mp\sqrt[3]{a^2c}=OE$ $x<c$ ナル時 y ハ負ニシテ $x>c$ ナル時ハ y ハ正ナリ 69。章例題ニ 4。ニ由テ $OB=c$, $OA=a$, $OC=\frac{a-c}{3}$ CD ハ y ノ極大正値ニシテ D ノ切線ハ x ノ軸ニ平行ス

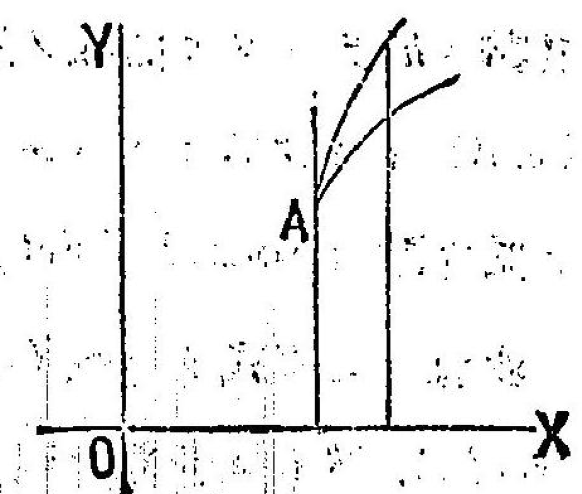
又 $x=a$ ナル時 $\frac{dy}{dx}=\infty$ ナルカ故ニ A ノ切線 AT ハ y 軸ニ平行シ x カ a ヨリ大ナル時 y ノ値ハ常ニ正數ナリ之ニ由テ $x>a$ ナル時此曲線ノ他邊ハ AT ノ右方ニアリテ A ハ第一種ノ岐點ナリ何トナレハ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ハ常ニ負ナルヲ以テ A ノ近隣ニ於ケル曲線ノ兩邊ハ x ノ軸ニ凹向スルカ故ナリ

(4) $y-b=(x-a)^{\frac{1}{3}}+(x-a)^{\frac{1}{4}}$ ニ於テ $x=a$ ナルトキ $y=b$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3(x-a)^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{4(x-a)^{\frac{3}{4}}}=\infty,\quad (x=a\ ナルトキ)$$

又 $x<a$ ナルトキ y ハ虚數, $x=a+h$ ナルトキ

$y=b+h^{\frac{1}{3}}\pm h^{\frac{1}{4}}$ ニシテ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3a^{\frac{2}{3}}}\pm\frac{1}{4a^{\frac{3}{4}}}$

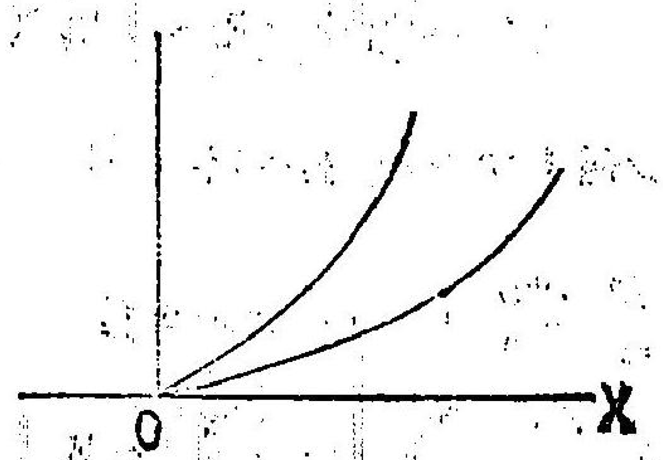


又 $\frac{d^2y}{dx^2}$ ハ $x>a$ ナルトキ負數ナリ

之ニ由テ題言ノ如シ

(5) 原方程式ヨリ

$$y=\frac{x^2}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{x})\sqrt{a}}$$



$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x\sqrt{a}\pm3\sqrt{x^3}}{2(\sqrt{a}\pm\sqrt{x})^2\sqrt{a}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{8a\pm9\sqrt{ax}+3x}{4(\sqrt{a}\pm\sqrt{x})^3\sqrt{a}}$$

$\therefore\ x=0$ ナルトキ $y=0,\ \frac{dy}{dx}=0,\ \frac{d^2y}{dx^2}=2a$

又 $x=h$ ナルトキ y ハ兩正數値ヲ有シ又 $\frac{d^2y}{dx^2}$ モ亦正値ナリ

而シテ $x=-h$ ナルトキ y 及 $\frac{dy}{dx}$ ハ虚數ナリ

之ニ由テ $x=0,\ y=0$ ハ第二種ノ岐點ニシテ x 軸ハ切線ナリ

相屬點

78. 相屬點 一點ノ縱横線ガ曲線ノ方程式ニ適合スルトキハ其點ニ於テ一ツモ曲線ノ邊ヲ有セザルトキ 其點ヲ相屬點 (Conjugate Point) トイフ時トシテハ此點ガ其曲線ニ屬スル點トシテ考フルトキ之ヲ孤立點 (Isolated Point) ト名ツク

曲線ノ方程式ヲ $y=f(x)$ トシ其相屬點ヲ $x=a,\ y=b$ トスレハ $b=f(a)$, 然レモ此點ノ附近ニハ曲線ガ存在セズ故ニ $x=a\pm h$ トスレハ y 即チ $f(a\pm h)$ ハ必ラス虚數ナリ然ルトキ $\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\cdots\frac{d^ny}{dx^n}$ ハ $x=a\pm h$ ニ對シテ凡ヘテ虚數ナルカ或ハ其内ノ若干ガ虚數トナルヘシ何トナレハ $y_1=f(x\pm h)=f(x)\pm h\frac{dy}{dx}+\frac{h^2}{\underline{|2}}\frac{d^2y}{dx^2}\pm\cdots\cdots+(-1)^n\frac{h^n}{\underline{|n}}\frac{d^ny}{dx^n}+\cdots$ ナルカ故ニ y_1 ガ $f(a\pm h)$ ナルトキ虚數ナルヲ以テ $\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\cdots\frac{d^ny}{dx^n}$ ハ凡ヘテ虚數ナルカ或ハ其内ノ若干ハ虚數トナルヘシ

例題

1. 曲線 $y-1=(x-2)\sqrt{(x-3)}$ ノ相屬點ヲ求ム

2. 曲線 $y^2=\frac{x^2}{a^2}(x^2-a^2)$ ノ相屬點ヲ求ム

3. 曲線 $y^2=\frac{x^4}{a^4}(x^2-a^2)$ ノ相屬點ヲ求ム

4. 曲線 $ay^2-x^3+bx^2=0$ ノ相屬點ヲ求ム

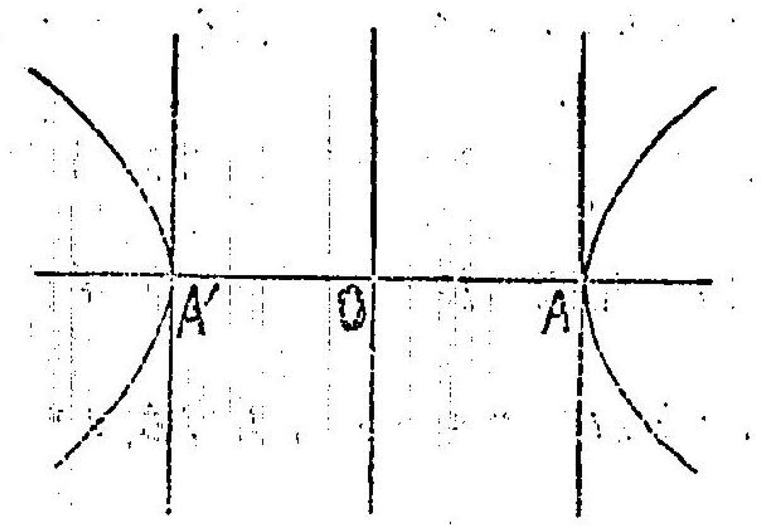
5. $a<c$ ナルトキ曲線 $y-b=(x-a)^2\sqrt{x-c}$ ノ相屬點ヲ求ム

6. 曲線 $x^4-ax^2y-axy^2+a^2y^2=0$ ノ原點ハ相屬點ナリ

---

(1) $x=2$ ナルトキ $y=1$, 又 $x=2\pm h$ ナルトキ y ハ虛數トナル故ニ $x=2$, $y=1$ ハ相屬點ナリ

(2) $y=\pm\frac{x}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}$,



$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}\pm\frac{x^2}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$$

故ニ $x=0$ ナルトキ $y=0$

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{-1}$$

又 $x=\pm a$ ナルトキ $y=0$, 即チ $OA=a$, $OA'=-a$

然ルトキ $\frac{dy}{dx}=\pm\infty$ 故ニ此曲線ハ $+a$ ト $-a$ トノ間ニハ存在セズ故ニ原點ハ相屬點ナリ

(3) 此例ニ於テハ $x=0$ ナルトキ $y=0$ ナレドモ

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{2x}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}\pm\frac{x^3}{a\sqrt{(x^2-a^2)}}=0,\ (x=0,\ y=0 \text{ ナルトキ})$$

然レドモ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ハ $x=0$, $y=0$ ナルトキ虛數トナル

故ニ此曲線ノ相屬點ハ原點ニシテ之ヲ曲線トシテ考フルトキハ原點ニ於ケル切線ハ x ノ軸ナリ

(4) $y=\pm\frac{x}{a}\sqrt{(x-b)}$, $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{x-b}{a}}\pm\frac{x}{2\sqrt{(ax-ab)}}$

$x=0$ ナルトキ $y=0$, 及ビ $\frac{dy}{dx}=\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)}$

又 $x=0\pm h$ ナルトキ y 及ビ $\frac{dy}{dx}$ ハ虛數トナル故ニ原點ハ相屬點ナリ

(5) $y-b=(x-a)^2\sqrt{x-c}$ ニ於テ $x=a$ ナルトキ $y=b$ 而シテ $x=a\pm h$ ナルトキ h ハ微小ナルカ故ニ $a+h<c$ 故ニ y ハ虛數ナリ之ニ由テ $x=a$, $y=b$ ナル點ハ相屬點ナリ

但シ此例ニ於テ $x=a$ ナルトキ $\frac{dy}{dx}=0$ 然レドモ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ヲ求ムレハ次ノ如ク虛數トナルヘシ原方程式ヲ有理トスレハ

$(y-b)^2=(x-a)^4(x-c)$ ヨリ

$$2(y-b)\frac{dy}{dx}=4(x-a)^3(x-c)+4(x-a)^4,$$ 但シ $\frac{dy}{dx}=0$ ナルガ故ニ

$$(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}=4(x-a)^3+6(x-a)^2(x-c)$$

即チ $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4(x-a)^3+6(x-a)^2(x-c)}{y-b}=\frac{0}{0},\ (x=a, y=b \text{ ナルトキ})$$

$$=\frac{18(x-a)^2+12(x-a)(x-c)}{\frac{dy}{dx}}=\frac{0}{0},\ (\text{同上ナルトキ})$$

$$=\frac{48(x-a)+12(x-c)}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\frac{-12(c-a)}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$\therefore \dfrac{d^2y}{dx^2}=2\sqrt{-3(c-a)}$ 即チ虚數ナリ故ニ例題 **3.** ノ如シ

(6) $x^4-ax^2y-axy^2+a^2y^2=0$ ヨリ

$y=\dfrac{x^2}{2(a-x)\sqrt{a}}(\sqrt{a}\pm\sqrt{4x-3a}),$ $\therefore$ $x=0$ ナルトキ $y=0$

而シテ $x=0\pm h$ ナルトキ y ハ虚數トナル故ニ題言ノ如シ

趾 點

79. 趾點 曲線ノ一邊ガ或一點ニ於テ不意ニ止マルトキ其點ヲ稱シテ趾點 (Point d'arret) トイフ

例ヘハ $y=x\log x$ ナル曲線ニ於テ $x=0$ ナルトキ $y=0$

然レモ x ガ負數即チ $0-h$ ナルトキ y ハ虚數トナル故ニ此曲線ハ原點ニ於テ止マルヲ以テ原點ハ即チ趾點ナリ

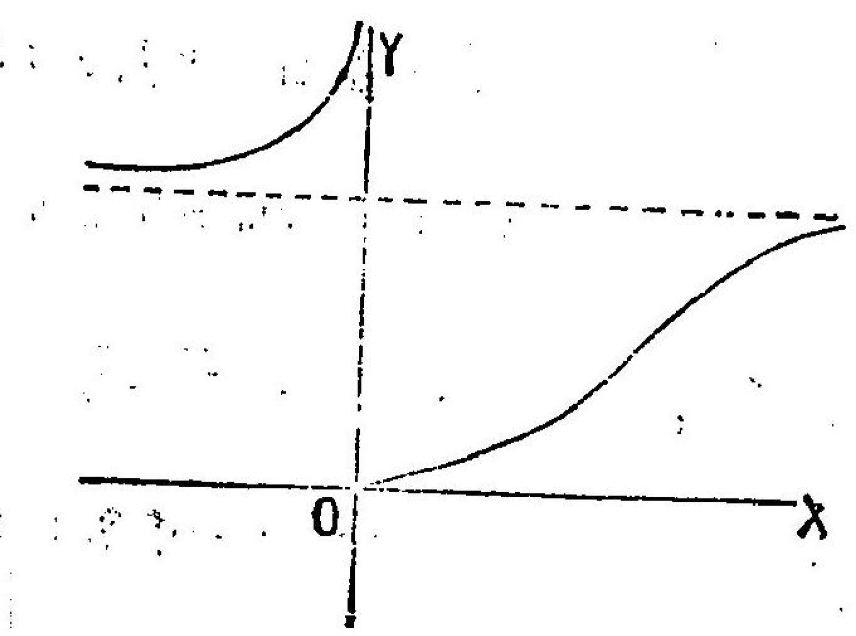
何トナレハ $\log x=z$ トスレハ $\log x=\log e^z$

$\therefore$ $x=e^z$, 而シテ e ハ正數ナルカ故ニ z ノ任意ノ實數ニ對シテ e^z 即チ x ハ正數ナリ故ニ x カ負數トナルトキ $\log x$ ハ虚數トナルヲ以テナリ

又曲線 $y=e^{-\frac{1}{x}}$ ニ於テ

x ヲ無限小ノ正數トスレハ y ハ微小トナリ其極限ハ 0 ナリ然レモ x カ無限小ノ負數トナレハ y ハ無限大トナルベシ

之ニ由テ圖ニ示スガ如ク原點ガ趾點ナリ

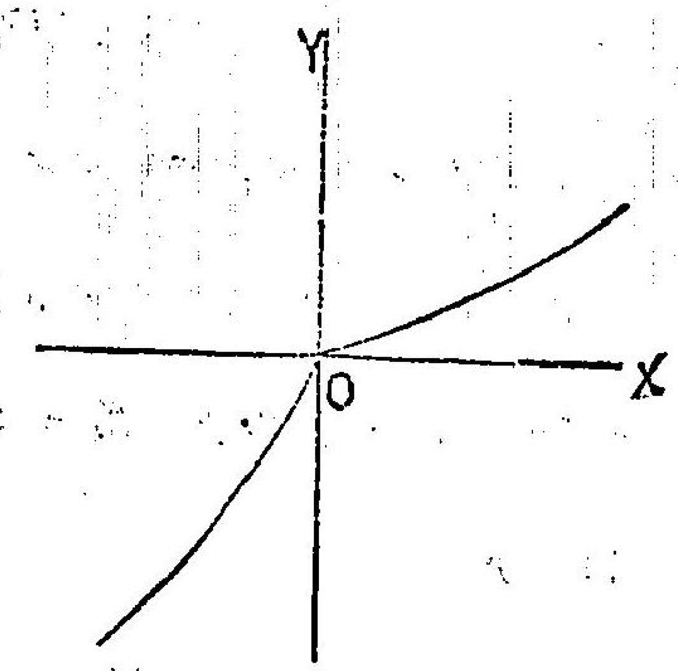


而シテ此點線ハ $x=\infty$ ナルトキ原方程式ガ變シテ $y=1$ トナル時ニ於ケル漸近線ナリ

凸 點

80. 凸點 線線ノ二邊ガ一點ニ於テ相會シテ不意ニ止マリ而シテ其點ニ於テ共通ノ切線ヲ有セザルトキ其點ヲ凸點 (Point Saillant) トイフ

例ヘハ $y=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ ニ於テ



$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x(1+e^{\frac{1}{x}})}$

故ニ x ノ正值ガ其極限ニ於テ 0 ニ漸近スルトキ極限ニ至リ $y=0$ 及ヒ $\dfrac{dy}{dx}=0$, 然レモ x ガ負數ナルトキノ極限ハ $y=0$ 及ヒ $\dfrac{dy}{dx}=1$

之ニ由テ此曲線ノ二邊ハ原點ニ於テ相會シ其一切線ハ x ノ軸ニシテ他ノ一切線ハ x ノ軸ト 45° ノ角ヲナス即チ原點ハ凸點ナリ

列　枝　點

81. 列枝點　曲線ガ無限數ノ相屬點ヲ有スルＨ是等ノ列點ヲ稱シテ列枝點 (Branches Pointillees) トイフ

例ヘバ曲線 $y^2=x\sin^2x$ ニ於テ

x ノ凡ヘテノ正數値ニ於テ y ハ各二ツノ値ヲ有スヘシ然レモ x ガ π ノ整數倍ニアラザル負數ナルＨ y ハ虛數トナルベシ

$x=-n\pi$ (n ハ正整數) トスレハ $y=0$

$x=-n\pi\pm h$ (h ハ微小ノ正整數) ナルＨ y ハ虛數ナリ

之ニ由テ此曲線ハ $x=-n\pi,\ y=0$ ノ如キ無限數ナル相屬點ヲ有ス而シテ是等ノ點ハ凡ヘテ x ノ軸上ニ在リ

故ニ此曲線ハ x ノ軸上ニ於テ列抜點ヲ有スルモノトイフ

曲　線　の　畫　法

82. 曲線の畫法　曲線ノ方程式ヲ與ヘテ其曲線ヲ畫クニハ曲線ノ性質ヲ推究セザルヘカラス而シテ之ヲ推究センニハ其曲線上ノ諸點ノ切線法線及ヒ漸近線 (第六編) ノ性質ヲ知リ次ニ其曲線上ノ特別點ヲ知ルヿヲ要ス故ニ曲線ヲ畫ク法ハ第六編及ヒ本編ノ例ニ於テ既ニ其概略ヲ示シタレハ讀者ハ各自ノ例題ニ於テ獨學推究スルヿヲ得ヘシ

然レモ復習ノ爲メ煩雜ヲ厭ハズ次ノ例ニ於テ其重要ナルモノヲ再ヒ說明セントス

例　題

次ノ各曲線ヲ畫ケ

1. $y=\frac{x(x-2a)}{x-a}$　　**2.** $y^2=\frac{x^3+1}{x-1}$

3. $y=x\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$　　**4.** $y=x\sqrt{\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}}$

5. $y^2=\frac{x^2(x^2-4a^2)}{x^2-a^2}$　　**6.** $y^2=\frac{x(x-a)(x-2a)}{x+3a}$

7. $y=\frac{a^4}{a^2+x^2}$　　**8.** $y=(x-2)\sqrt{\frac{x-9}{x}}$

9. $y=ax+bx^2+cx^3$　　**10.** $x^4-ayx^2+by^3=0$

11. $y^4+ay^2x-x^4=0$　　**12.** $y^3=x^3-a^3$

13. $(y-b)^3=(x-a)^5$　　**14.** $(y-b)^2=(x-a)^5$

15. $(y-x)^5=(x-a)^3$　　**16.** $(y-x)^2=(x-a)^5$

17. $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$　　**18.** $y^4+2axy^2-ax^3=0$

---

(1)　$y=x-a-\frac{a^2}{x-a};\quad \frac{dy}{dx}=1+\frac{a^2}{(x-a)^2}$ ナルカ故ニ

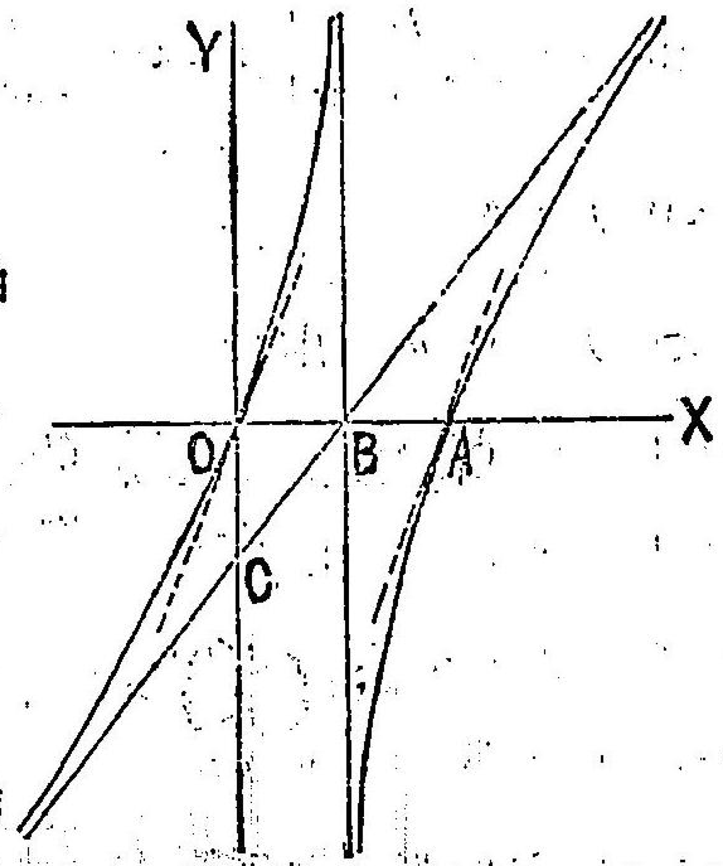
$x=0$ ナルＨ $y=0,\ \frac{dy}{dx}=2,$

$x=a=\mathrm{OA}$ ナルＨ $y=\infty,\ \frac{dy}{dx}=\infty$

$x=2a=OA$ ナル片 $y=0,\ \frac{dy}{dx}=2$

x ガ負ナル片 y ハ負ナリ

故ニ此曲線ハ O, A ニ於テ x 軸ヲ截リ O 及ヒ A ニ於ケル切線ハ各 x 軸ト $\tan^{-1}2$ ナル角ヲナシテ平行ス又 $\frac{dy}{dx}=1+\frac{a^2}{(x-a)^2}=0$ トスレバ $x=a(1\pm\sqrt{-1})$ 即チ此曲線ノ縦線ハ極大及ヒ極小ヲ有セズ又原方程式ヨリ 48. 章ニ由テ



$$y=x\left(\frac{1-\frac{2a}{x}}{1-\frac{a}{x}}\right)=x\left(1-\frac{a}{x}-\frac{2a^2}{x^2}-\cdots\cdots\right)=x-a-\frac{2a}{x}-\cdots\cdots$$

$x=\infty$ トスレバ $y=x-a$ 即チ漸近線ノ方程式ニシテ之ヨリ $OB=a,\ OC=-a$ ヲ得即チ BC ハ漸近線ナリ又 $x=a,\ y=\infty$ ナルガ故ニ B ヲ通過スル縦線ハ漸近線ナリ

次ニ $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2a^2}{(x-a)^3},\ y=x-a-\frac{a^2}{x-a}=\frac{(x-a)^2-a^2}{x-a}$

$0<x<a$ ナル片 $\frac{d^2y}{dx^2}>0,\ y>0$ 故ニ曲線ハ x 軸ニ凸向ス

$a<x<2a$ ナル片 $\frac{d^2y}{dx^2}<0,\ y<0$ 故ニ同上

$x>2a$ ナル片 $\frac{d^2y}{dx^2}<0,\ y>0$ 故ニ曲線ハ x 軸ニ凹向ス

$x<0$ ナル片 $\frac{d^2y}{dx^2}>0,\ y<0$ 故ニ同上

(2) $y=\pm\sqrt{\left\{\frac{x+1}{x-1}(x^2-x+1)\right\}}$

$x=0$ ナル片 $y=\pm\frac{1}{\sqrt{-1}}$

$x<1$ ナル片 y ハ虚數

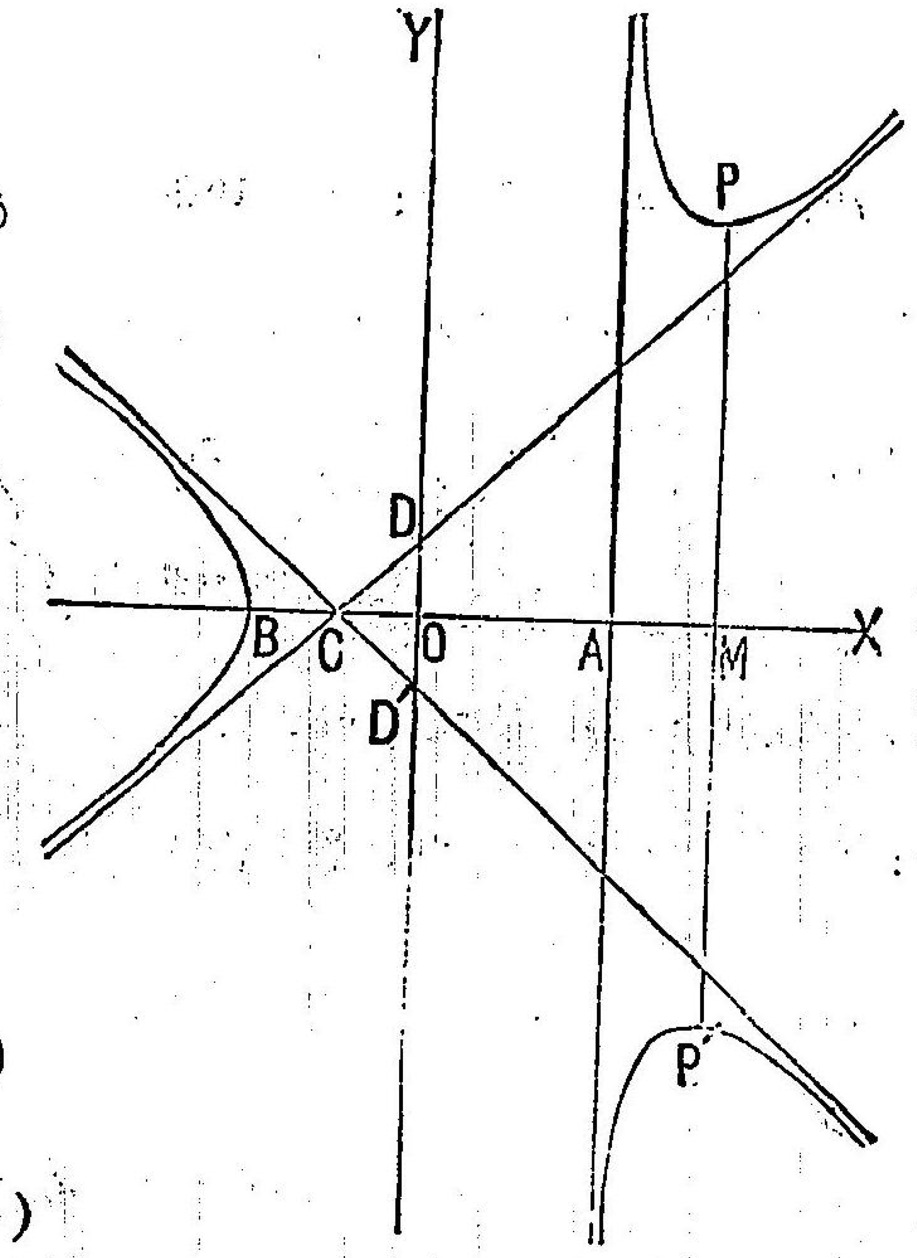
$x=1=OA$ ナル片 $y=\pm\infty$

$x>1$ ナル片 $y=\pm$ (實數)

$x=\infty$ ナル片 $y=\pm\infty$

$x=-1=OB$ ナル片 $y=0$

$x<-1$ ナル片 y ハ虚數



又 $y=\pm x\sqrt{\frac{1+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x}}}$

$$=\pm x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\cdot\cdot\right)}$$

$$=\pm x\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{M}{x^2}+\cdot\cdot\right)$$

$$=\pm\left(x+\frac{1}{2}+\frac{M}{x}+\cdots\cdot\right)$$

之ニ由テ $y=\pm(x+\frac{1}{2})$ ハ兩漸近線ニシテ $OC=OD'=-\frac{1}{2},\ OD=\frac{1}{2}$ ニシテ此兩漸近線ハ CD 及ヒ CD' ニシテ x 軸ト 45° 及ヒ 135° ノ角ヲナス

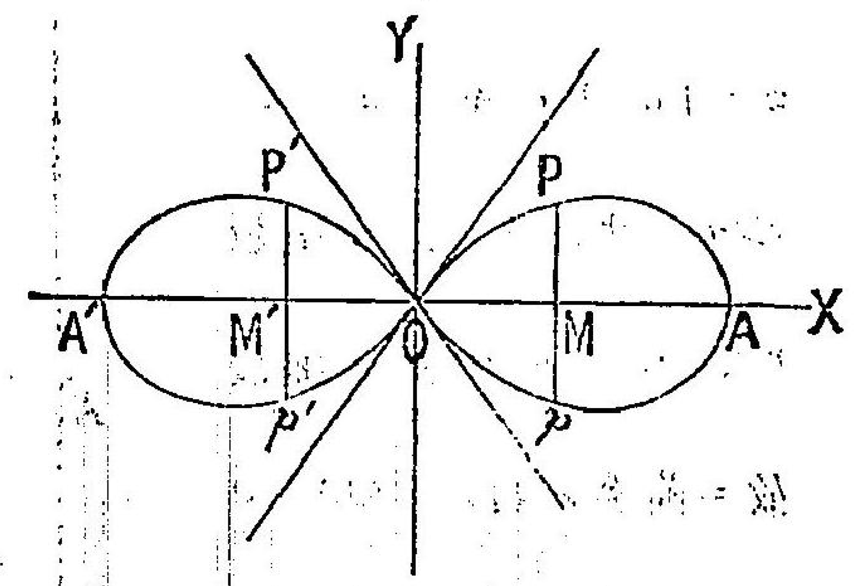
又 $x=1,\ y=\pm\infty$ ナルガ故ニ A ヲ通過スル縦線ハ漸近線ナリ

次ニ $\frac{dy}{dx}=\pm\frac{2x^3-3x^2-1}{2(x-1)\sqrt{(x-1)(x^3+1)}}=0$ トスレバ

$2x^3-3x^2-1=0$ 今 $x=1$ トスレバ $2x^3-3x^2-1$ ハ -2 トナリ又 $x=2$ ト

スレハ 3 トナル故ニ此方程式ノ根ハ 1 ト 2 トノ間ニ在リ即チ OM ハ 1 ト 2 トノ間ニ在リテ之ニ相應スル y ノ値 MP 及ヒ MP′ ハ極小値ナリ

(3)　$y=\pm x\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$,



$x=0$ ナルキ $y=0$

$x=\pm a$ ナルキ $y=0$

$x>a$ ナルキ y ハ虚數

$x<-a$ ナルキ y ハ虚數

之ニ由テ $x=a=\mathrm{OA}$,

$x=-a=\mathrm{OA}'$ ナルカ故ニ曲線ハ原點及ヒ A, A′ ニ於テ x 軸ヲ截リ $x=a$ ト $x=-a$ トノ間ニ曲線ヲ有ス

又 $\dfrac{dy}{dx}=\pm\dfrac{a^4-2a^2x^2-x^4}{(a^2+x^2)\sqrt{(a^4-x^4)}}$ ナルガ故ニ

$x=0,\ y=0$ ナルキ $\dfrac{dy}{dx}=\pm 1$ 而シテ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\pm 2x\left\{\frac{2(a^2+x^2)^2(a^4-x^4)+(a^4-2a^2x^2-x^4)(a^4-a^2x^2-2x^4)}{(a^2+x^2)^2\sqrt{(a^4-x^4)^3}}\right\}$$

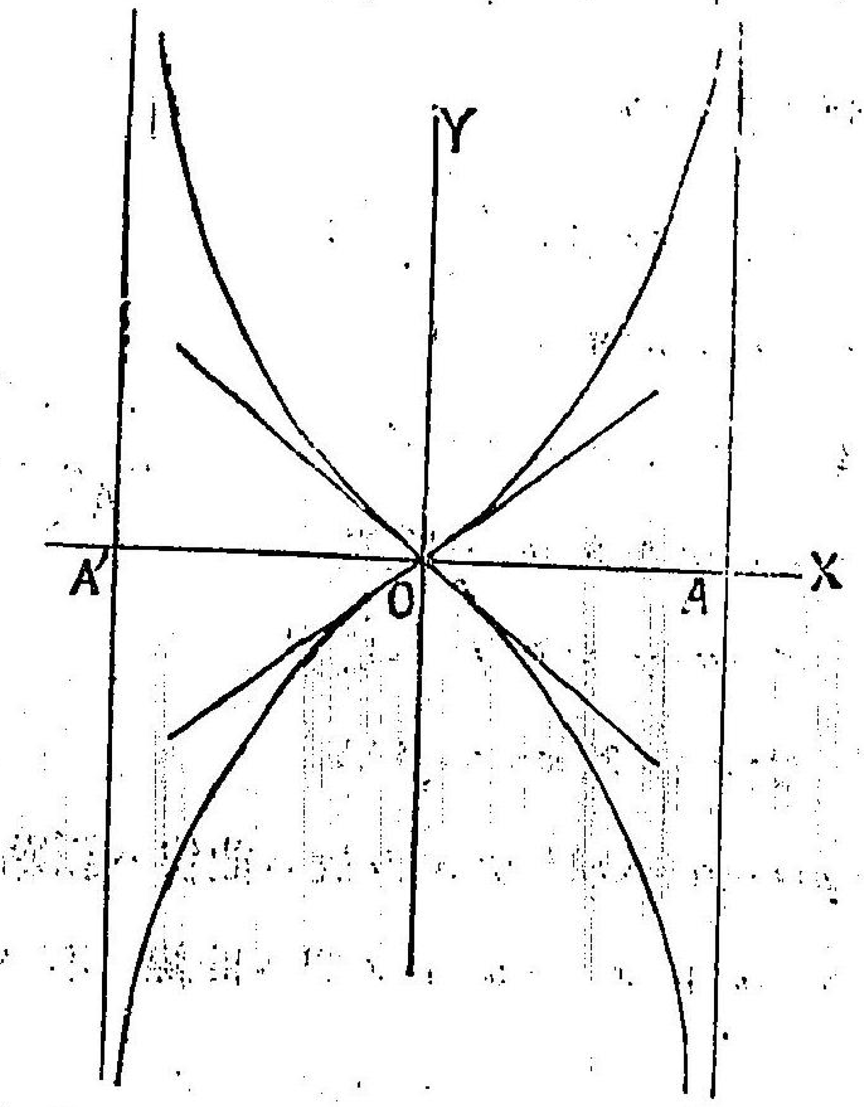
故ニ原點ニ於ケル二切線ハ x 軸ト 45° 及ヒ 135° ト角ヲナス而シテ $x=0+h$ 及ヒ $x=0-h$ ナルキ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ハ符號ヲ變ス之ニ由テ原點ハ曲線ノ變點ナリ

次ニ $\dfrac{dy}{dx}=0$ トスレハ $a^4-2a^2x^2-x^4=0$

$\therefore\ x=a\sqrt{(\sqrt{2}-1)}=\mathrm{OM},\ x=-a\sqrt{(\sqrt{2}-1)}=\mathrm{OM}'$

之ニ相應スル縱線ハ各正負ノ二ツアリテ極大ナリ

(4)　$y=\pm x\sqrt{\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}}$



$x=0$ ナルキ $y=0$

$x=\pm a$ ナルキ $y=\pm\infty$

$x>a$ ナルキ y ハ虚數

$x<-a$ ナルキ y ハ虚數

故ニ前例ノ如ク OA $=a$

OA′ $=-a$, 曲線ハ a ト $-a$ トノ間ニ在リテ原點ヲ通過シ A 及ヒ A′ ノ縱線ハ漸近線ナリ

又　$\dfrac{dy}{dx}=\pm\dfrac{a^4+2a^2x^2-x^4}{(a^2-x^2)\sqrt{(a^4-x^4)}}$

$x=0$ ナルキ $\dfrac{dy}{dx}=\pm 1$, 故ニ O ニ於ケル二切線ハ x 軸ト 45° 及ヒ 135° ノ角ヲナス而シテ O ハ彎點ナリ何トナレハ前例ノ如ク $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ハ x ヲ h 及ヒ $-h$ トスルキ符號ヲ變スルヲ以テナリ

(5)　$y=\pm x\sqrt{\dfrac{x^2-4a^2}{x^2-a^2}}$,

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{x^2-4a^2}{x^2-a^2}}\left(1+\frac{x^2}{x^2-4a^2}-\frac{x^2}{x^2-a^2}\right)$$

$x=0$ ナルキ $y=0$, $\dfrac{dy}{dx}=\pm 2$, x ガ 0 ヨリ a 迄ハ y ハ實數

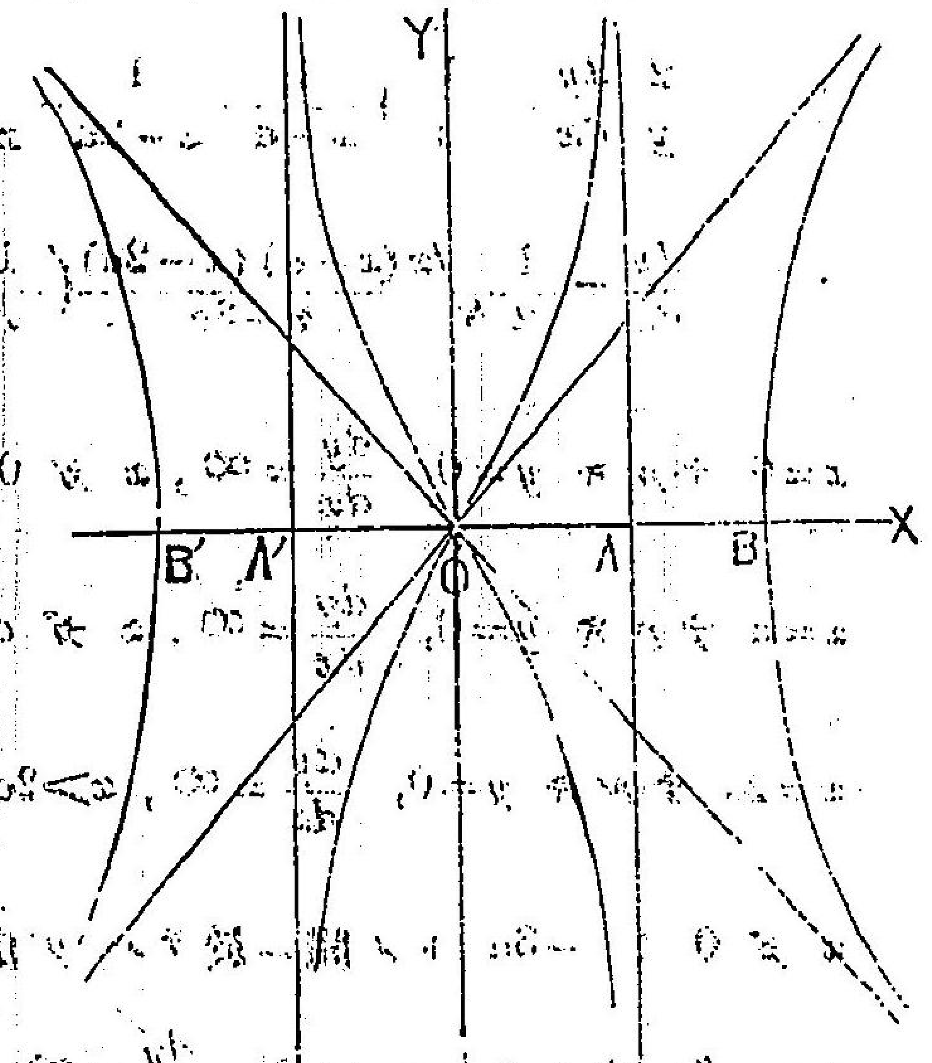
$x=a$ ナルキ $y=\infty,\ \frac{dy}{dx}=\infty$, x ガ a ヨリ $2a$ 迄ニハ y 虛數

$x=2a$ ナルキ $y=0,\ \frac{dy}{dx}=\infty$, $x>2a$ ナルキ y ハ實數

又原方程式ニヨリ曲線ハ

x ノ軸ニ對稱ナリ

又 x ガ負ナルキモ同様ナリ故ニ



$x=\mathrm{OA}=a$, $x=\mathrm{OA}'=-a$

ノ間ニハ曲線ハ存在シ A 及ヒ A′ ヲ通過スル縱線ハ漸近線ナリ

又 $\mathrm{AB}=a$ ニシテ A ト B 或ハ A′ ト B′ トノ間ニハ曲線ヲ有セス

又 $\frac{d^2y}{dx^2}$ ヲ求メ $x=0,\ y=0$ 即チ原點ガ彎曲點ナルヿヲ知リ得ベシ

次ニ原方程式ヨリ $y=\pm x\left(1-\frac{4a^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$=\pm x\left(1-\frac{2a^2}{x^2}-\frac{2a^4}{x^4}-\cdots\cdots\right)\left(1+\frac{a^2}{2x^2}+\frac{3a^4}{8x^4}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\pm x\left(1-\frac{3a^2}{2x^2}-\cdots\cdots\right)$$

之ニ由テ $y=x$ 及ヒ $y=-x$ ハ漸近線ノ方程式ニシテ此兩漸近線ハ原點ヲ通過シ x ノ軸ト 45° 及ヒ 135° ノ角ヲナス

(6)　$y^2=\frac{x(x-a)(x-2a)}{x+3a}$ ヲ對數式ニスレハ

$$2\log y=\log x+\log(x-a)+\log(x-2a)-\log(x+3a)$$

$$\therefore\quad \frac{2}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-2a}-\frac{1}{x+3a}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x(x-a)(x-2a)}{x+3a}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-2a}-\frac{1}{x+3a}\right)$$

$x=0$ ナルキ $y=0,\ \frac{dy}{dx}=\infty$, x ガ 0 ヨリ a 迄ハ y ハ實數

$x=a$ ナルキ $y=0,\ \frac{dy}{dx}=\infty$, x ガ a ヨリ $2a$ 迄ハ y ハ虛數

$x=2a$ ナルキ $y=0,\ \frac{dy}{dx}=\infty$, $x>2a$ ナルキ y ハ實數

x ガ 0 ト $-3a$ トノ間ニ於テハ y 虛數ナリ

$x=-3a$ ナルキ $y=\pm\infty,\ \frac{dy}{dx}=\infty$

x ガ $-3a$ ヨリ $-\infty$ ニ至ル迄ハ y ハ實數ナリ

之ニ由テ $\mathrm{OA}=a$, 曲線ハ O 及ヒ A ニ於テ x ノ軸ヲ通過ス

而シテ $\frac{dy}{dx}=0$ トスレハ

$x=a,\ \ x=2a,\ \ \frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-2a}-\frac{1}{x+3a}=0$

$x=a,\ x=2a$ ニ於テハ $y=0$ ヲ得

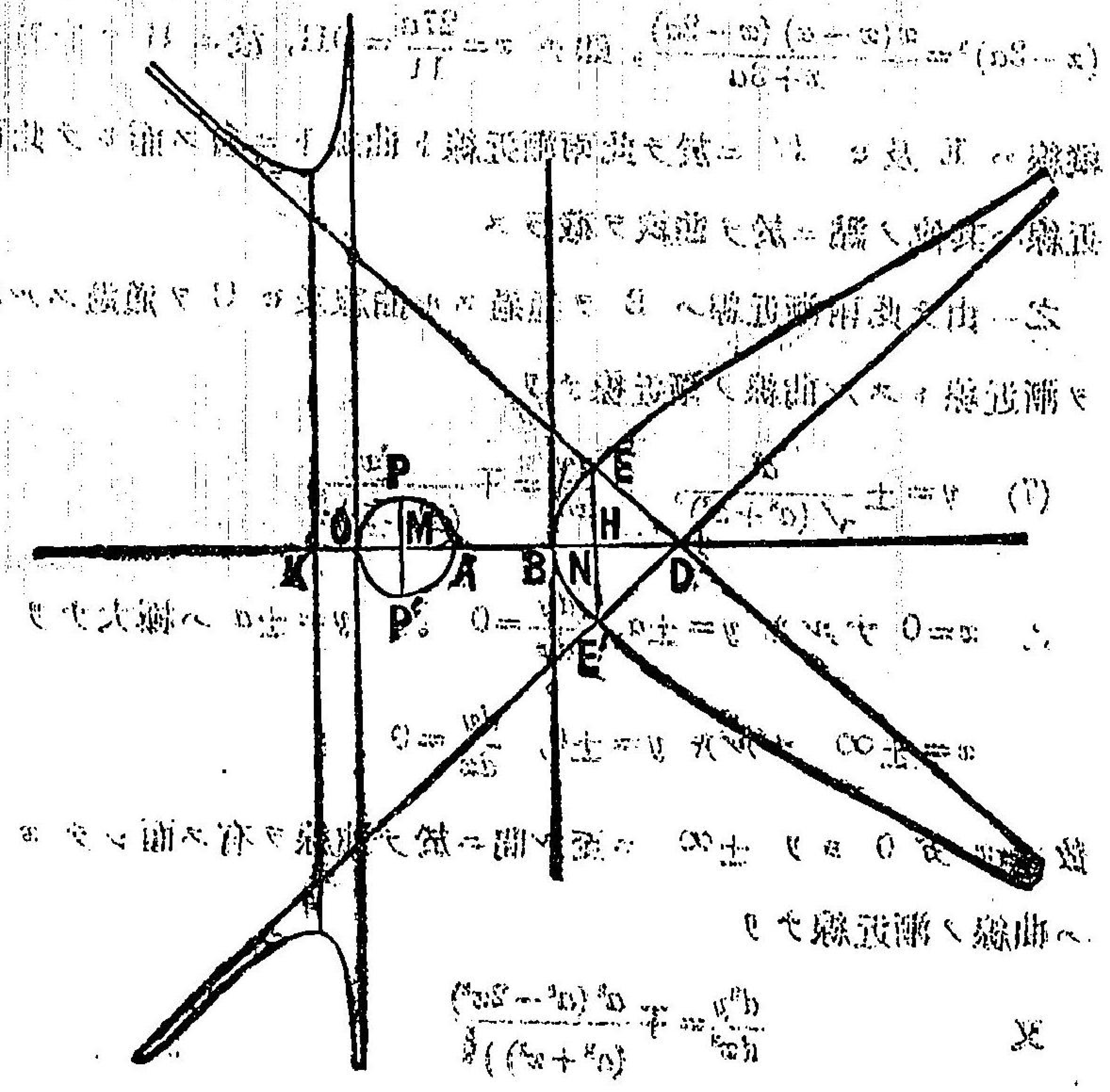
又 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-2a}-\frac{1}{x+3a}=0$ 即チ $x^3+3ax^2-9a^2x+3a^3=0$ ニ

於テ $x=\frac{1}{2}a$ トスレバ $x^3+3ax^2-9a^2x+3a^3$ ハ負トナリ $x=\frac{1}{3}a$ トスレバ正トナル, 故ニ此方程式ノ一根ハ $\frac{1}{2}a$ ト $\frac{1}{3}a$ トノ間即チ OM ニシテ曲線ノ縦線 MP, PM′ ハ極大ナリ他ノ二根ハ

$$x=OH,\qquad x=-OK$$

$x=2a=OB$, $y=0$ ナルカ故ニ曲線ハ B ヲ通過ス又 A ト B トノ間ニハ曲線無シ

$x=-3a=OC$, $y=\infty$ ナルカ故ニ C ヲ通過スル縦線ハ漸近線ニシテ O ト C トノ間ニハ曲線無シ



次ニ原方程式ヨリ $y=\pm x\left(1-\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{2a}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{3a}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$=\pm x\left(1-\frac{a}{2x}-\frac{a^2}{8x^2}\cdots\right)\left(1-\frac{a}{x}-\frac{a^2}{2x^2}\cdots\right)\left(1-\frac{3a}{2x}+\frac{27a^2}{8x^2}\cdots\right)$$

$$=\pm\left(x-3a+\frac{11a^2}{2x}\cdots\right)$$

∴ $y=x-3a$ 及ヒ $y=-x+3a$ ハ漸近線ナリ故ニ此兩漸近線ハ $x=3a=OD$ ニ於テ x ノ軸ヲ通過シ x ノ軸ト 45° 及ヒ 135° ノ角ヲ爲ス

又此兩漸近線 $y=\pm(x-3a)$ ヲ曲線ノ方程式ニ代用スレハ $(x-3a)^2=\frac{x(x-a)(x-2a)}{x+3a}$, 即チ $x=\frac{27a}{11}=OH$, 故ニ H ヲ通過スル縦線ハ E 及ヒ E′ ニ於テ此兩漸近線ト曲線トニ會ス而シテ此兩漸近線ハ其他ノ點ニ於テ曲線ヲ截ラス

之ニ由テ此兩漸近線ハ B ヲ通過スル曲線及ヒ C ヲ通過スル縦線ヲ漸近線トスル曲線ノ漸近線ナリ

(7) $y=\pm\frac{a^2}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$, $\frac{dy}{dx}=\mp\frac{a^2x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

∴ $x=0$ ナルトキ $y=\pm a$, $\frac{dy}{dx}=0$ ∴ $y=\pm a$ ハ極大ナリ

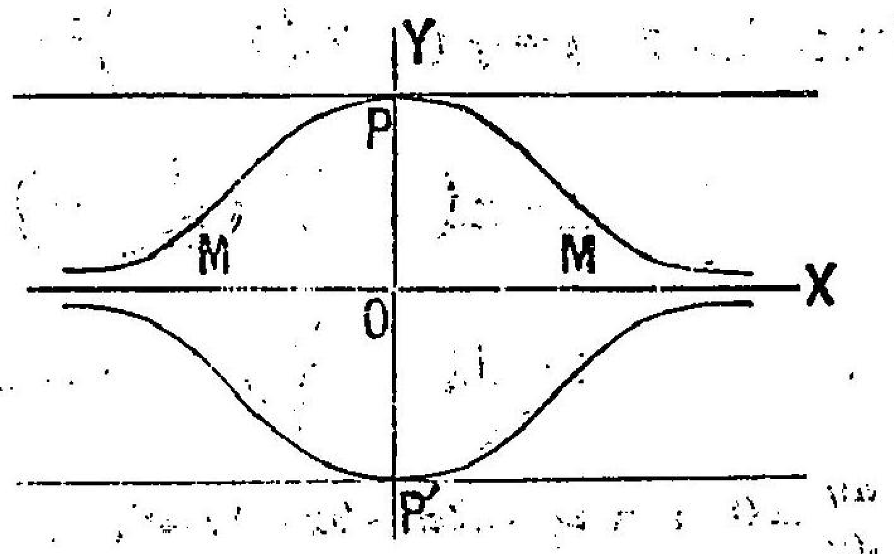
$x=\pm\infty$ ナルトキ $y=\pm 0$, $\frac{dy}{dx}=0$

故ニ x ガ 0 ヨリ $\pm\infty$ ニ至ル間ニ於テ曲線ヲ有ス而シテ x ノ軸ハ曲線ノ漸近線ナリ

又 $\frac{d^2y}{dx^2}=\mp\frac{a^2(a^2-2x^2)}{(a^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ トスレハ

$$a^2-2x^2=0$$



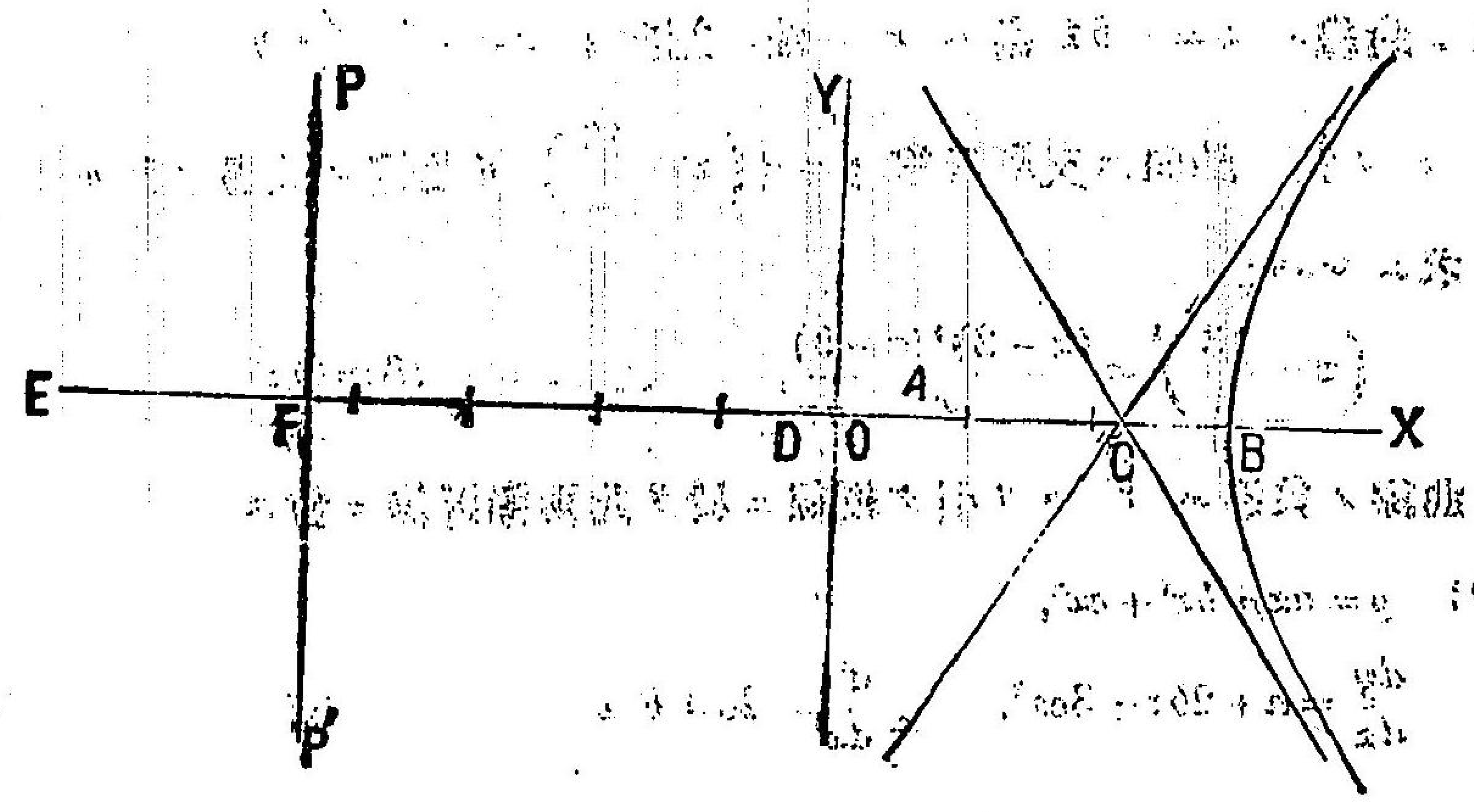
$\therefore\quad x=\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ ハ彎點ナリ

之ニ由テ　$OP=a,\quad OP'=-a,\quad OM=\dfrac{a}{\sqrt{2}},\quad OM'=-\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

(8)　$y=(x-2)\sqrt{\dfrac{x-9}{x}},\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^2-9x-18}{2x\sqrt{x(x-9)}}$

$x<9$ ナルキ y ハ虛數，而シテ $x=2$ ナルキ $y=0$，又 x ガ 2 ヨリ 0 迄ハ y ハ虛數

之ニ由テ　$x=2$ ハ相屬點 (即チ A) ナリ



$x=9=OB,\ y=0$，又 $x>9$ ナルキ y ハ實數 $x=\infty$ ナルキ $y=\infty$

故ニ曲線ハ x ノ正數ノ方ニ無限ニ廣延ス

原方程式ヨリ　$y=\pm(x-2)\left(1-\dfrac{9}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\pm(x-2)\left(1-\dfrac{9}{2x}-\dfrac{81}{8x^2}\cdots\right)$

$$=\pm\left(x-\frac{13}{2}-\frac{9}{8x}\cdots\right)$$

$\therefore\quad y=\pm\left(x-\dfrac{13}{2}\right)$ ハ兩漸近線ナリ

$\dfrac{dy}{dx}=0$ トスレハ $2x^2-9x-18=0,\quad\therefore\quad x=-\dfrac{3}{2}=OD,\ x=6$ 但シ x ハ 6 ヨリ小ナラス故ニ $x=6$ ハ省クヘシ而シテ $x=-\dfrac{3}{2}$ ナルキ y ハ極大ナリ

此曲線ガ x ノ負ノ方ニ於ケル形チヲ畫ク〻次ノ如シ

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-9(x+54)}{4x^{\frac{5}{2}}(x-9)^{\frac{3}{2}}}$ ニ於テ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ トスレハ $x=-54$ 而シテ x ヲ $-54\pm h$ トスレハ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ハ負ヨリ正ニ變ス故ニ $x=-54=OE$ ハ變點ヲ示シ曲線ハ $x=-54$ 迄ハ x ノ軸ニ凹向シ $x=-54$ ヨリ $-\infty$ 迄ハ x ノ軸ニ凸向ス又漸近線 $y=\pm\left(x-\dfrac{13}{2}\right)$ ガ曲線ノ負邊ヲ截ル點ヲ求ムレハ

$$\left(x-\frac{13}{2}\right)^2=\frac{(x-2)^2(x-9)}{x},\qquad\therefore\quad x=-16=OF$$

故ニ曲線ノ負邊ハ F ヨリ引ク縱線ニ於テ此兩漸近線ニ會ス

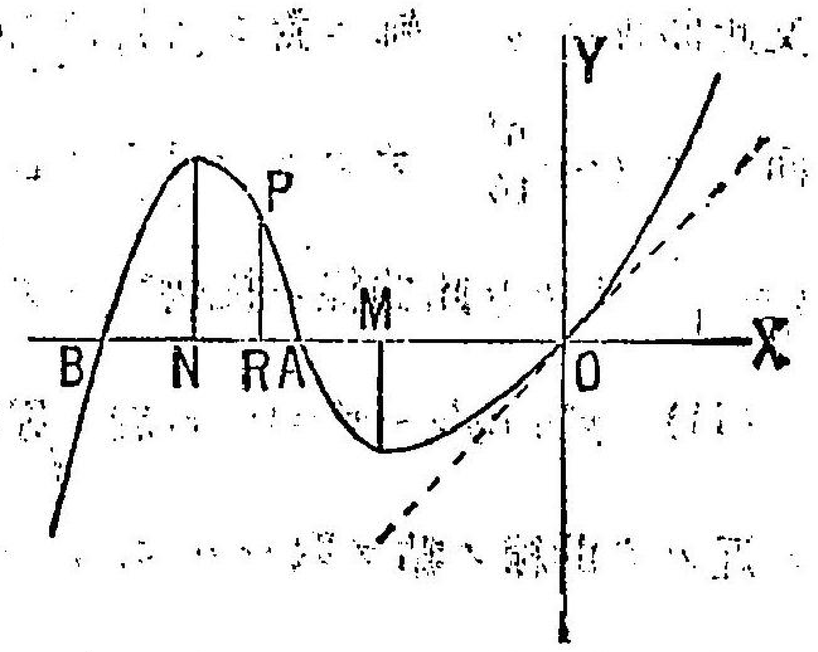
(9)　$y=ax+bx^2+cx^3,$

$$\frac{dy}{dx}=a+2bx+3cx^2,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=2b+6cx$$

$x=0$ ナルキ $y=0,\ \dfrac{dy}{dx}=a$，故ニ此曲線ハ原點ヲ通過シ其切線ハ x ノ軸ト $\tan^{-1}a$ ナル角ヲナス

$x=\infty$ ナル時 $y=\infty$

及ヒ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ハ正ナル故ニ此曲線ハ x ノ正邊ニ無限ニ廣延シ x ノ軸ニ凸向ス



$y=0$ ナル時

$$ax+bx^2+cx^3=0$$

此方程式ノ三根ハ　$x=0$

$$x=-\frac{1}{2c}(b-\sqrt{b^2-4ac})=OA$$

$$x=-\frac{1}{2c}(b+\sqrt{b^2-4ac})=OB$$

故ニ此曲線ハ原點及ヒ A, B ニ於テ x ノ軸ヲ截ル

又 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ 即チ $2b+6cx=0$ 　$\therefore\ x=-\frac{b}{3c}=OR$ 彎點 P ノ縱點ナリ

次ニ $\frac{dy}{dx}=0$ トスレハ $a+2bx+3cx^2=0$, 　$\therefore\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-3ac}}{3c}$

即チ　$OM=-\frac{1}{3b}(b-\sqrt{b^2-3ac})$, 　$ON=-\frac{1}{3c}(b+\sqrt{b^2-3ac})$ ナル時其縱線ハ極大(初ノ縱線ハ負ナルカ故ニ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ハ正トナル)ナリ

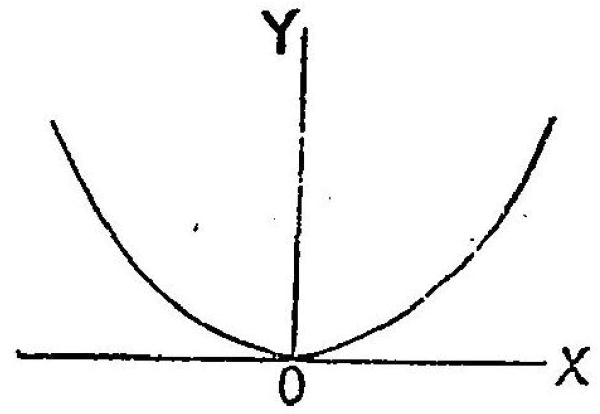
又此曲線ハ B ヨリ左方ニ於テ無限ニ廣延ス

(10)　$x=0$ ナル時 $y=0$ 故ニ此曲線ヲ通過ス

而シテ　$x=\pm\sqrt{\{\frac{1}{2}y(a\pm\sqrt{a^2-4by})\}}$ 故ニ y ガ負ナル時ハ x ハ虛數

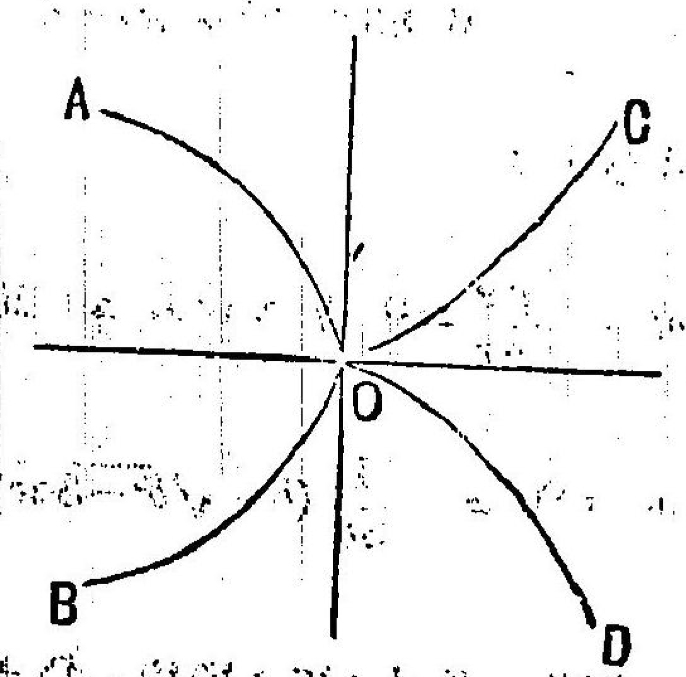
又此曲線ハ y ノ軸ニ對シテ對稱ナリ

而シテ $y<\frac{a^2}{4b}$ ナラサル可ラス若シ $y=\frac{a^2}{4b}$ ナル時此曲線ハ拋物線トナル



(11)　$y^4+ay^2x-x^4=0$ ニ於テ原點ニ近カク曲線ノ點ヲ取レハ x, y ハ微小トナルヘシ然ル時此方程式ニ於テ x^4 ヲ取リ去ル時 $y^4+ay^2x=0$ 即チ $y^2=-ax$, 然ル時 x ハ y^2 ノ如ク變ズ故ニ x^4 即チ y^8 ノ如ク變ズル項ヲ取リ去リテ y^4 ノ如ク變ズル二項ガ存在スルヲ以テ $y^2=-ax$ ハ原曲線ノ近似形ニシテ此方程式ニ由テ曲線 AOB ヲ得

又原方程式ニ於テ ay^2x ヲ取リ去リ $y^4-x^4=0$ 即チ $y=\pm x$ トスレハ x ハ y ノ如ク變スルカ故ニ ay^2x 即チ y^3 ノ如ク變スル項ヲ取リ去リテ夫レヨリ高次ナル y^4 ノ如ク變スル二項ガ存在スルヲ以テ $y=\pm x$ ハ近似曲線トスル能ハス



又原方程式ニ於テ y^4 ノ項ヲ取リ去リテ $ay^2x-x^4=0$ 即チ $y^2=\frac{x^3}{a}$ トスレハ y^2 ハ x^3 ノ如ク變ズルガ故ニ x^6 ノ如ク變スル項ヲ去リテ x^3 ノ如ク變スル二項ガ存在スルヲ以テ之ヲ近似曲線トス

之ニ由テ OC, OD ノ如キ曲線ヲ畫キ得ヘシ

(12)　$y^3=x^3-a^3,\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{(x^3-a^3)^{\frac{2}{3}}}$

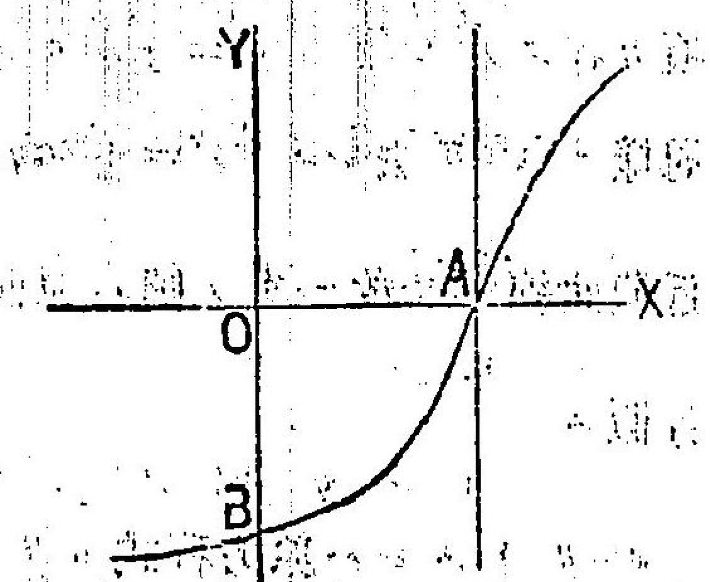
$x=0$ ナル𪜈 $y=-a$, x ガ 0 ヨリ a 迄ハ y ハ負

$x=a$ ナル𪜈 $y=0$, $\dfrac{dy}{dx}=\infty$ 但シ $OA=a$, $OB=-a$

$x=\infty$ ナル𪜈 $y=\infty$ $x>a$ ナル𪜈 y ハ負ナリ

x カ負ナル𪜈 y ハ負ニシテ

$x=-\infty$ ナル𪜈 $y=-\infty$



又 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{2a^3x}{(x^3-a^3)^{\frac{5}{3}}}$

但シ $x=a$ ナル𪜈 $\dfrac{dy}{dx}=\infty$ ナル

カ故ニ A ニ於ケル曲線ノ切線ハ

縦線ニシテ x ガ $a+h$ ヨリ $a-h$ ニ至ル間ニ於テ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ハ負ヨリ正ニ變ス故ニ圖ノ如シ

(13)　$(y-b)^3=(x-a)^5,\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{5}{3}(x-a)^{\frac{2}{3}},\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{10}{9(x-a)}$

$x=a$ ナル𪜈 $y=b$, $\dfrac{dy}{dx}=0$, 而シテ x ガ $a-h$ ヨリ $a+h$ ニ至ル間ニ於テハ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ハ負ヨリ正ニ變ス故ニ $x=a$, $y=b$ ハ彎點ナリ

而シテ彎點ノ切線ハ x ノ軸ニ平行ス

(14)　$x=a$, $y=b$ ハ彎點ニシテ其切線ハ x ノ軸ニ平行ス

(15)　$x=a$, $y=b$ ハ彎點ニシテ其切線ハ x ノ軸ト $45°$ ノ角ヲナス

(16)　同上

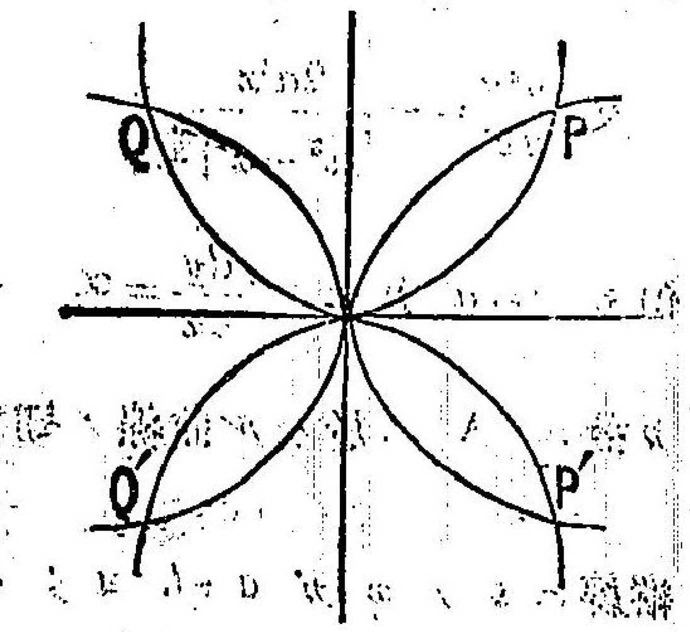
(17)　原方程式ノ兩邊ヲ立方ニ開キ轉項スレハ

$x^2+y^2-(2a)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}=0$, 原點ニ近キ曲線ノ點ヲ取レハ次ノ如シ

x^2 ヲ去リテ $y^2=(2a)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ 即チ $y^2=\pm 2ax$ トスレハ x ハ y^2 ノ如ク變スルカ故ニ y^4 ノ如ク變スル項ヲ去リテ y^2 ノ如ク變スル二項カ存スルカ故ニ $y^2=\pm 2ax$ ハ近似曲線ナリ

同樣ニ y^2 ヲ去レハ $x^2=\pm 2ay$ モ亦

近似曲線ナリ故ニ次ノ圖ハ原曲線ニ近似ス



$x=y$ トスレハ原方程式ヨリ

$x=y=\pm a\sqrt{2}$ 即チ P, P′ 及ヒ Q, Q′ ヲ得ヘシ

(18)　$y^4+2axy^2-ax^3=0$ ヲ二ツニ分ツ𪜈ハ次ノ如シ

$y^2=x(-a+\sqrt{a^2+ax})$ ……………………(1)

$y^2=x(-a-\sqrt{a^2+ax})$ ……………………(2)

(1) ニ於テ $x=0$ ナル𪜈 $y=0$,

$x=a$ ナル𪜈 $y=a\sqrt{(\sqrt{2}-1)}=$ AP

$x=\infty$ ナル𪜈 $y=\infty$

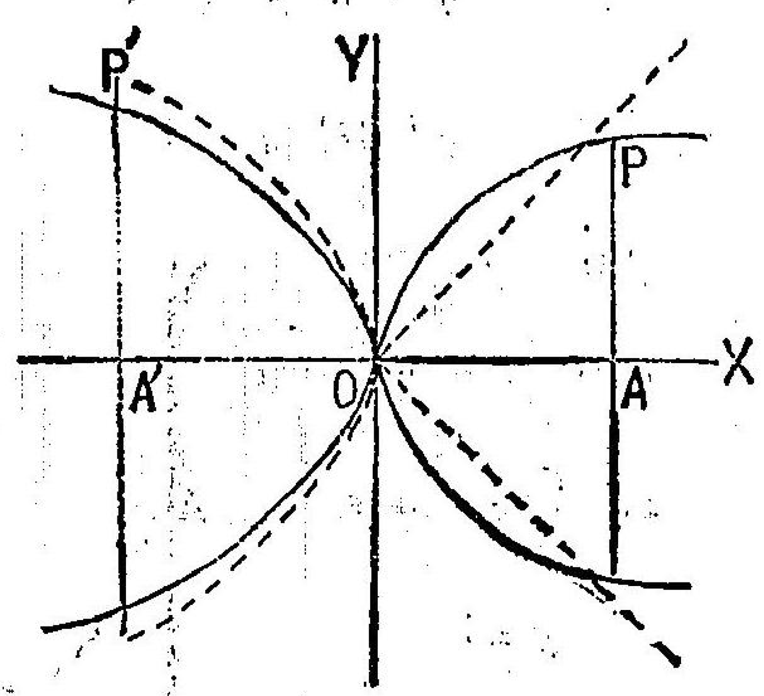
(2) ニ於テ $x=0$ ナル𪜈 $y=0$

$x=-a=OA'$ ナル𪜈 $y=a=A'P'$

$x=-\infty$ ナル𪜈 $y=-\infty$

次ニ原方程式ニ於テ y^4 ヲ去レバ $x^2=2y^2$ 即チ $y=\pm\frac{x}{\sqrt{2}}$ 此直線ハ (1) ノ曲線ノ近似曲線ナリ

又 ax^3 ノ去レバ $y^3=-2ax$ 即チ (2) ノ曲線ノ近似曲線ナリ



次ノ各方程式ノ曲線ヲ畫ケ

19. $r=a(1+\cos\theta)$ **20.** $y=e^{\cos x}$

21. $r=a\sec\frac{\theta}{3}$ **22.** $r=\frac{a\sin\theta}{\theta}$

23. $r=\frac{a\theta^2}{1+\theta^2}$ **24.** 對數曲線 $y=a^x$

25. 對數螺線 $r=a^\theta$ **26.** Archimeds 氏螺線 $r=a\theta$

---

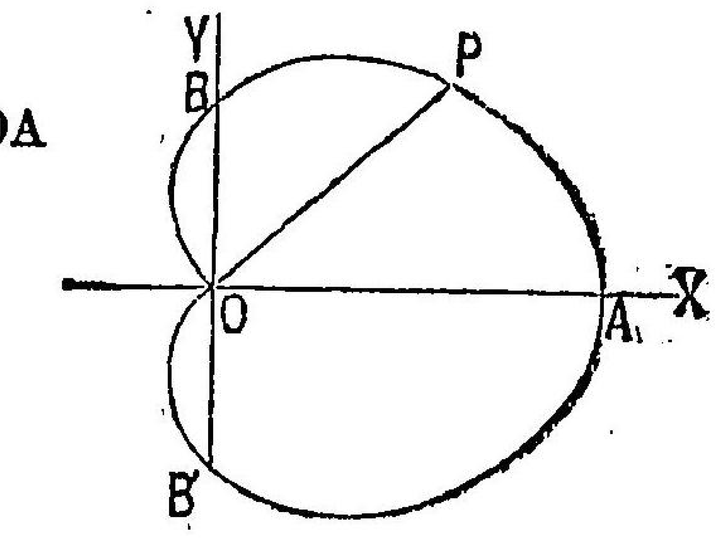
(19) $r=a(1+\cos\theta)$ ニ於テ

$\theta=0$ ナル𪜈 $r=a(1+1)=2a=OA$

$\theta=\frac{\pi}{2}$ ナル𪜈 $r=a=OB$

$\theta=\pi$ ナル𪜈 $r=a(1-1)=0$

$\theta=\frac{3\pi}{2}$ ナル𪜈 $r=a=OB'$



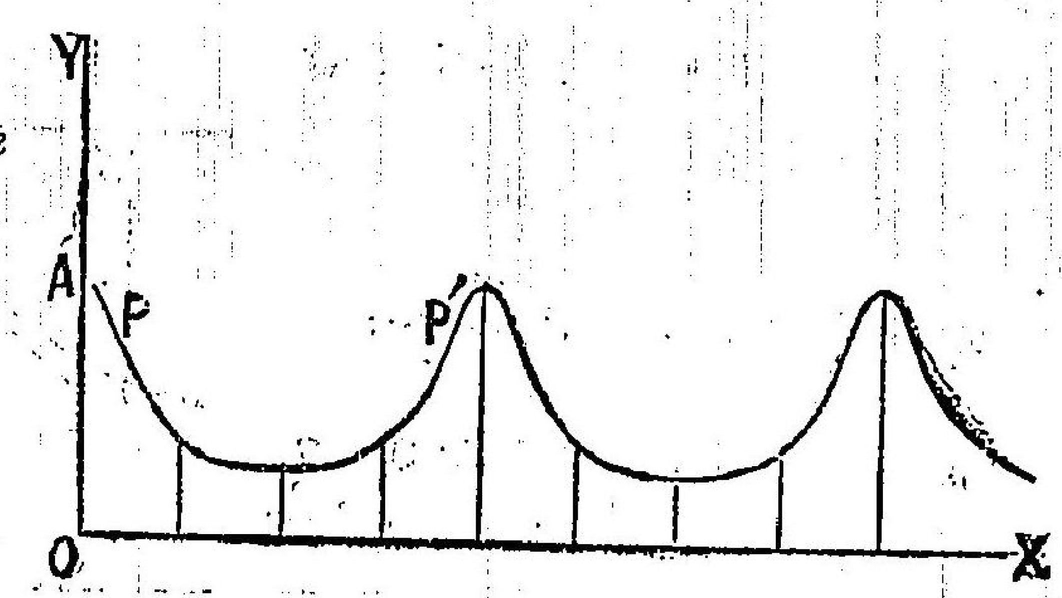
此曲線ハ等圓轉軌線ナリ

(20) $y=e^{\cos x}$

$x=0$ ナル𪜈 $y=e$

$x=\frac{\pi}{2}$ ナル𪜈 $y=1$

$x=\pi$ ナル𪜈 $y=\frac{1}{e}$



$x=\frac{3\pi}{2}$ ナル𪜈 $y=1$

$x=2\pi$ ナル𪜈 $y=e$

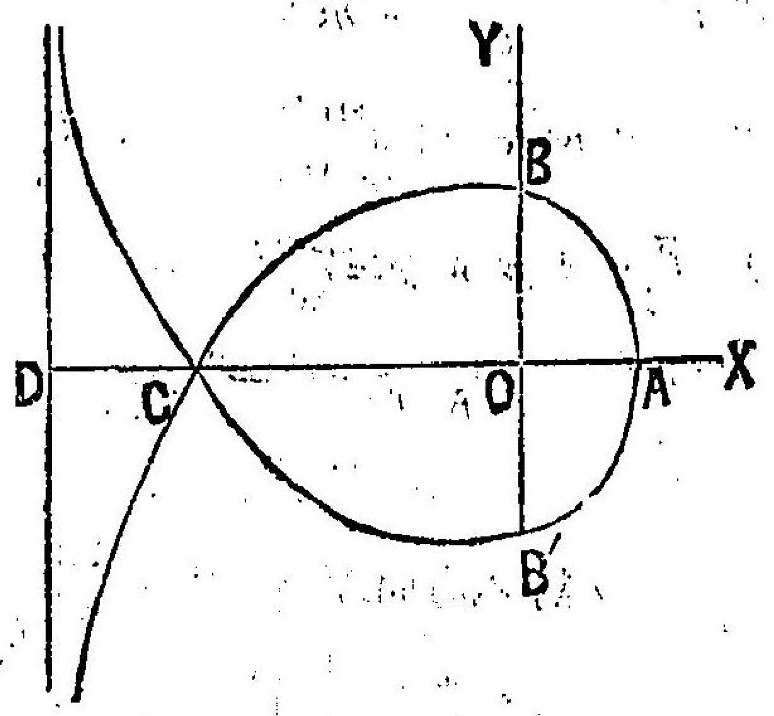
x ガ $2\pi, \frac{5\pi}{2}, 3\pi, \frac{7\pi}{2}, 4\pi$ ナル𪜈順次ニ y ハ $e, 1, \frac{1}{e}, 1, e$ トナル以下無限ニ引續クベシ

又 $\frac{dy}{dx}=-e^{\cos x}\sin x,\ \frac{d^2y}{dx^2}=-e^{\cos x}(\cos x-\sin^2 x)$

$\cos x-\sin^2 x=0$ トスレバ $\cos x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 即チ彎點ヲ示ス

但シ $\cos x=\cos(\pi+x)$ $\therefore$ 所求ノ彎點ハ P 及ヒ P' ナリ

(21) $r=\dfrac{a}{\cos\frac{1}{3}\theta}$ ニ於テ



$\theta=0$ ナル𪜈 $r=a=\mathrm{OA}$

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ナル𪜈 $r=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}=\mathrm{OB}$

$\theta=\pi$ ナル𪜈 $r=-2a=\mathrm{OC}$

$\theta=2\pi$ ナル𪜈 $r=-2a$

$-2a$ ハ反對ノ方向即チ OC ヲ示ス

次ニ $r=x\cos\theta,\ r=y\sin\theta$ ヨリ $r=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$

$\tan\theta=\dfrac{x}{y}$ 即チ $\cos\theta=\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$ 及ヒ $\cos\theta=4\cos^3\dfrac{\theta}{3}-3\cos\dfrac{\theta}{3}$

ヨリ $r,\ \theta$ ヲ消去スレハ

$$y=\pm\frac{(2a+x)\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{(3a+x)}}$$

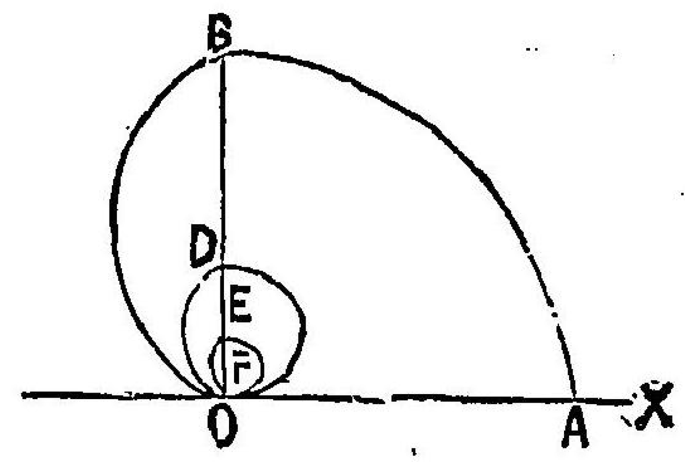
$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\mp\frac{x^2+4ax+a^2}{(x+3a)^{\frac{3}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}}}$$

$x=-3a=\mathrm{OD}$ ナル𪜈 $y=\pm\infty,\quad \dfrac{dy}{dx}=\infty$

又 x ガ $3a$ ヨリ大ナル負數ナル𪜈 y ハ虛數ナリ

之ニ由テ D ニ於ケル縦線ハ漸近線ナリ

(22) $r=\dfrac{a\sin\theta}{\theta}$ ニ於テ



$\theta=0$ ナル𪜈 $r=a\dfrac{\sin 0}{0}=a=\mathrm{OA}$

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ナル𪜈 $r=\dfrac{2a}{\pi}=\mathrm{OB}$

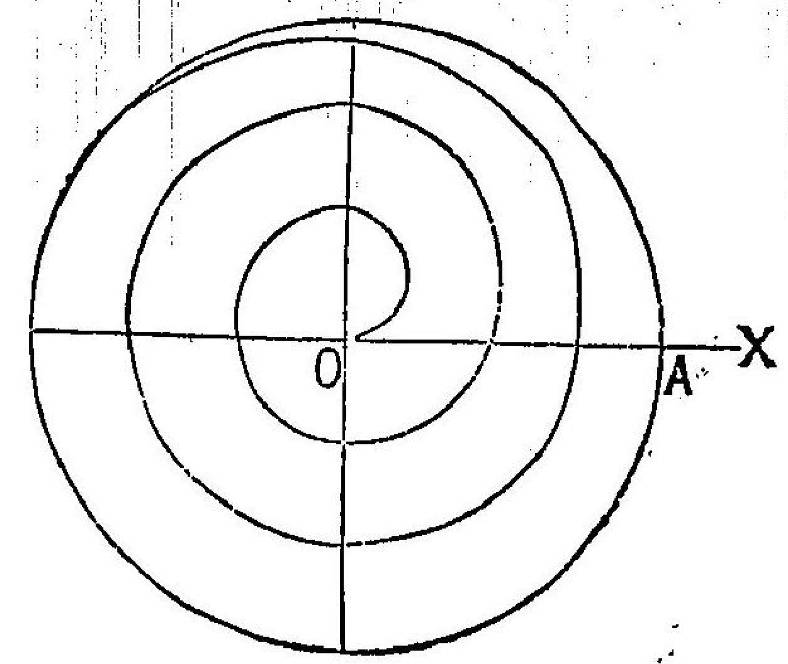
$\theta=\dfrac{3\pi}{2}$ ナル𪜈 $r=-\dfrac{2a}{3\pi}$ 但シ

$-\dfrac{2a}{3\pi}$ ハ反對ノ方向即チ $\mathrm{OE}=\dfrac{2a}{3\pi}$ ヲ示ス

$\theta=2\pi$ ナル𪜈 $r=0$, 故ニ θ ガ 0 ヨリ π 迄ハ r ハ正ニシテ θ ガ π ヨリ 2π 迄ハ r ハ負ナリ次ニ θ ヲ $\dfrac{5\pi}{2}$, 3π, $\dfrac{7\pi}{2}$, 4π トスレハ r ハ順次ニ 0, $\dfrac{2a}{5\pi}=\mathrm{OE}$, 0, $-\dfrac{2a}{7\pi}=\mathrm{OF}$, 0 トナル

以下同上

(23) $r=\dfrac{a\theta^2}{1+\theta^2}=\dfrac{a}{\dfrac{1}{\theta^2}+1}$



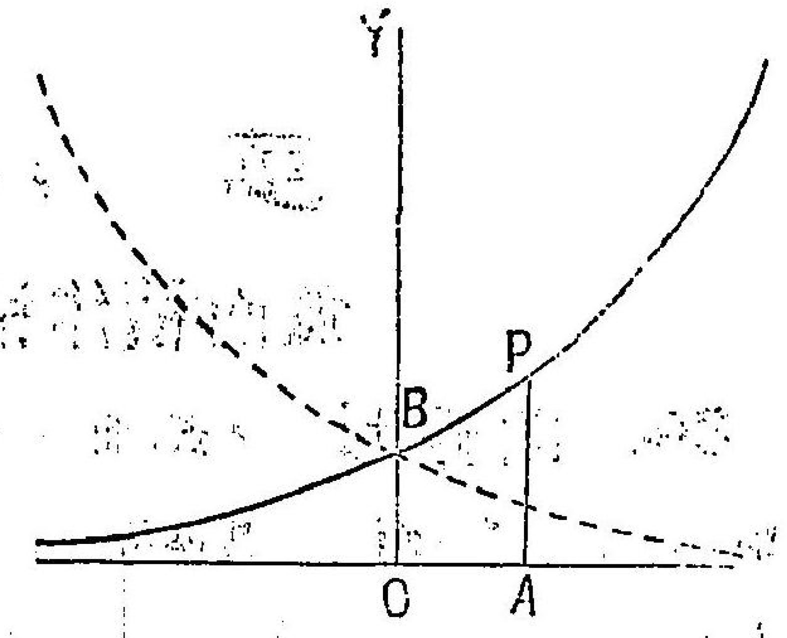
$\theta=0$ ナル𪜈 $r=0$

$\theta=\infty$ ナル𪜈 $r=a=\mathrm{OA}$

而シテ θ ノ如何ナル値ニ於テモ r ハ決シテ a ヨリ大ナラズ

之ニ由テ $r=a$ ハ此曲線ノ漸近圓ヲ表ハス

(24) $y=a$ ニ於テ $a>1$ トス



$x=0$ ナル片 $y=1=OB$

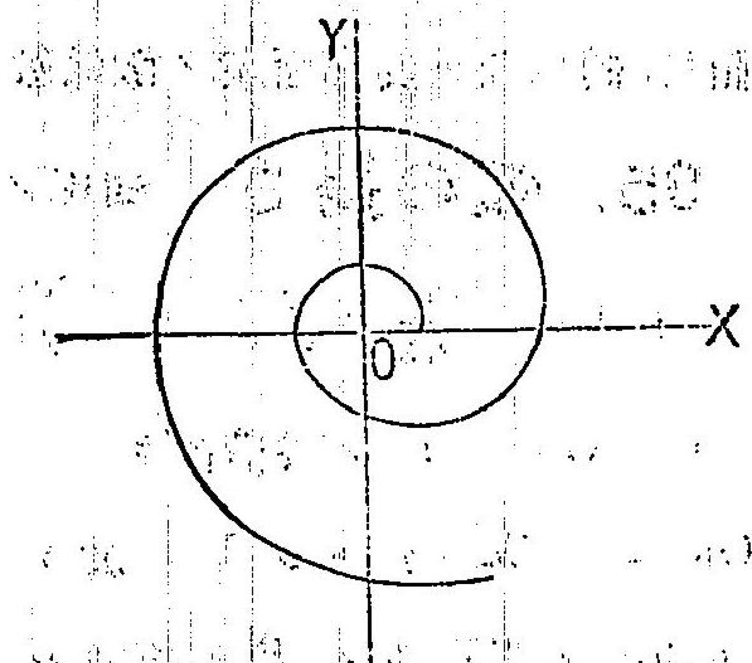
$x=1$ ナル片 $y=a=AP$

$x=\infty$ ナル片 $y=\infty$

$x=-\infty$ ナル片 $y=0$

故ニ x ノ軸ハ漸近線ナリ

又 $a<1$ ナル片點線ノ曲線ヲ表ハス

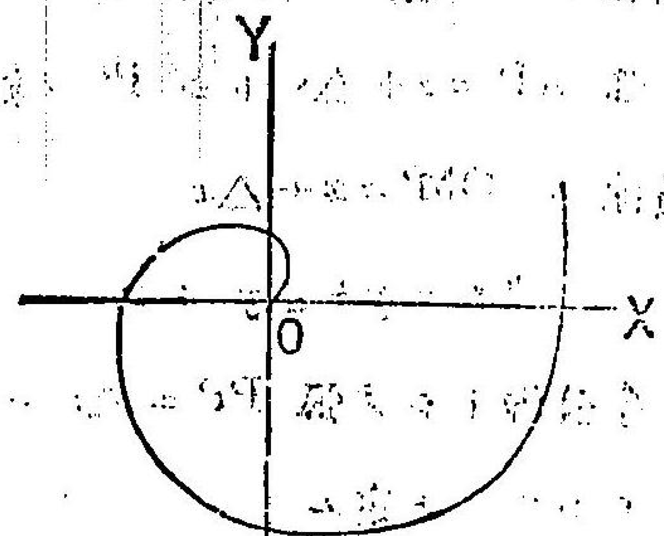


(25) $r=a^{\theta}$ ニ於テ $a>1$ トス

$\theta=0$ トスレハ $r=1$

$\theta=1$ トスレハ $r=a$

$\theta=\infty$ トスレハ $r=\infty$



(26) $r=a\theta$ ニ於テ

$\theta=0$ トスレハ $r=0$

$\theta=1$ トスレハ $r=a$

$\theta=n$ トスレハ $r=na$

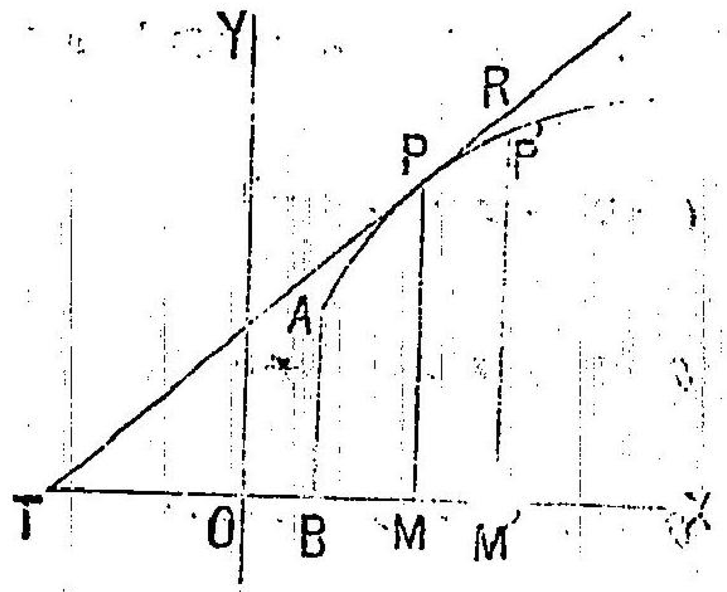
第八編

弧面積体積の微係數

84. 曲線形 ノ弧, 面積, 体積及ヒ曲面積ヲ求ムルコハ積分學ノ應用ニ屬ス而シテ其体積ハ平面形ノ回轉体ニ就キテ論スルモノトス

積分學ニ於テ是等ノ計算ヲナスノ準備トシテ此編ニ於テ弧ノ長サ面積, 體積及ヒ其曲面積ノ微係數ヲ求ムル方法ヲ示サントス

85. 弧の長さ 曲線ノ方程式ヲ $y=f(x)$ トシ弧ノ長サヲ s トスレハ $\frac{ds}{dx}=\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$



弧 $AP=s$, P ノ縦横線ヲ $OM=x$, $PM=y$ トシ P ニ於ケル切線ヲ PT トシ P ニ近カク曲線上ニ一點 P' ヲ取リ

弧 $AP'=s+\triangle s$ トシ P' ノ縦横線ヲ $OM'=x+\triangle x$

$P'M'=y+\triangle y$ トス

今公理トシテ弧 $PP'=\triangle s$ ハ弦 PP' ヨリモ大ニシテ $PR+RP'$ ヨリモ小ナリト定ム

$$弦\ PP'=\sqrt{\{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2\}}$$

$$PR=MM'\sec PTM=MM'\sqrt{(1+\tan^2 PTM)}$$

$$\doteq \Delta x\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$$

$$RP'=RM'-(y+\Delta y)=PM+\Delta x\tan PTM-(y+\Delta y)$$
$$=\Delta x\frac{dy}{dx}-\Delta y$$

故ニ Δs ハ $\sqrt{\{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\}}$ ト $\sqrt{\{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\}}+\Delta x\frac{dy}{dx}-\Delta y$ トノ間ニ在リ

即チ $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ ハ $\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\}}$ ト $\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\}}+\frac{dy}{dx}-\frac{\Delta y}{\Delta x}$ トノ間ニ在リ

Δx ガ無限ニ減小スル時ハ $\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\}}$ ノ極限ハ $\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$ ナリ

又 $\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\}}+\frac{dy}{dx}-\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ノ極限ハ $\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$ ナリ

又 $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ ノ極限ハ $\frac{ds}{dx}$ ナリ

之ニ由テ $\frac{ds}{dx}=\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$ ……………………(1)

又 $x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$ トスレハ

$$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=\sin\theta\frac{dr}{d\theta}+r\cos\theta$$

$$\frac{ds}{d\theta}=\frac{dx}{d\theta}\cdot\frac{ds}{dx}=\frac{dx}{d\theta}\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}=\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right\}}$$

$$=\sqrt{\left\{\left(\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\sin\theta\right)^2+\left(\sin\theta\frac{dr}{d\theta}+r\cos\theta\right)^2\right\}}$$

$$\therefore\quad \frac{ds}{d\theta}=\sqrt{\left\{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2\right\}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又 $\frac{ds}{dr}=\frac{d\theta}{dr}\cdot\frac{ds}{d\theta}=\frac{d\theta}{dr}\sqrt{\left\{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2\right\}}=\sqrt{\left\{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2\right\}}\cdots(3)$

86 面積 曲線 $y=f(x)$ ノ一部分ト其兩端ノ二縱線ニテ界スル面積ヲ A トスレハ $\frac{dA}{dx}=y$

曲線ノ弧ヲ AP トシ縱線ヲ AB, PM トシ曲線上ニ於テ P ニ近キ一點 P' ヲ設ケ APMB ノ面積＝A, AP'M'B ノ面積＝A＋ΔA トスレハ PP'M'M ノ面積＝ΔA

而シテ PP'M'M ノ面積ハ P'M'. MM' ト PM. MM' トノ間タニ在リ

即チ $(y+\Delta y)\,\Delta x>\Delta A>y.\Delta x$

即チ $y+\Delta y>\frac{\Delta A}{\Delta x}>y$

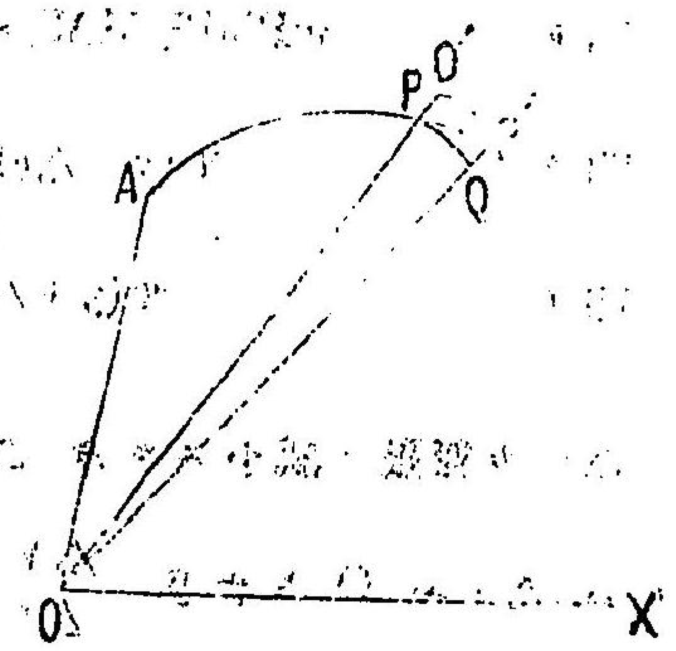
Δx ガ無限ニ減スル時 Δy モ亦無限ニ減ス之ニ由テ

$$\frac{dA}{dx}=y$$

87 極軸に於ける面積 曲線ノ弧ト其兩端ニ於ケル動徑ニテ界スル面積ヲ A トスレハ

$$\frac{dA}{d\theta}=\frac{r^2}{2}$$

曲線上ノ三點ヲ A, P, P′ トシ



$OP=r,\quad OP'=r+\Delta r$

$\angle POX=\theta,\quad \angle P'OX=\theta-\Delta\theta$

AOP ノ面積 ＝ A

AOP′ ノ面積 ＝ A ＋ △A トスレハ

POP′ ノ面積 ＝ △A

而シテ POP′ ノ面積ハ

弓形 P′OQ′ ト POQ トノ間ニアリ

但シ　弓形 $P'OQ'=\frac{1}{2}PO\sin POQ$

$\angle POQ=\Delta\theta$ カ微小ナル片 $\sin\Delta\theta=\Delta\theta$

∴　弓形 $P'OQ'=\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\theta$,　弓形 $POQ=\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$

故ニ　$\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\theta>\Delta A>\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$

即チ　$\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2>\frac{\Delta A}{\Delta\theta}>\frac{1}{2}r^2$

△θ カ無限ニ減小スル片 △r モ亦無限ニ減ス故ニ極限ニ至レハ

$$\frac{dA}{d\theta}=\frac{1}{2}r^2$$

88 体積

曲線及ヒ其兩端ノ二縦線ニ由テ界スル平面ガ x ノ軸ヲ廻クリテ回轉シタル体ノ体積ヲ V トスレハ

$$\frac{dV}{dx}=\pi y^2$$

85章ノ圖ニ於テ APMB カ OX ヲ廻クリテ回轉スル片回轉体 PP′M′M ハ P′M′ ヲ半徑トシ MM′ ヲ高サトスル圓柱ト PM ヲ半徑トシ MM′ ヲ高サトスル圓柱トノ間ニ在リ。

即チ　$\pi P'M'^2.MM'>$ 回轉体 $PP'M'M>\pi PM^2.MM'$

即チ　$\pi(y+\Delta y)^2\Delta x>\Delta V>\pi y^2\Delta x$

即チ　$\pi(y+\Delta y)^2>\frac{\Delta V}{\Delta x}>\pi y^2$

△x カ無限ニ減小スル片 △y モ亦無限ニ減小ス而シテ極限ニ至レハ △y ハ 0 トナリ $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ ハ $\frac{dV}{dx}$ トナル

$$\therefore\quad \frac{dV}{dx}=\pi y^2$$

89 曲面積

回轉体ノ曲面積ヲ S トスレハ $\frac{dS}{dx}=2\pi y$

前章ノ如ク回轉体 PP′M′M ノ曲面積ハ P′M′ ヲ半徑トシ MM′ ヲ高サトスル圓柱ノ曲面積ト PM ヲ半徑トシ MM′ ヲ高サトスル圓柱ノ曲面積トノ間ニ在リ

即チ　$2\pi P'M'.MM'>PP'M'M$ ノ曲面積 $>2\pi PM.MM'$

即チ　$2\pi(y+\Delta y)\Delta x>\Delta S>2\pi y\Delta x$

即チ　$2\pi(y+\Delta y)>\frac{\Delta S}{\Delta x}>2\pi y$

△x ト △y ガ無限ニ減小シテ極限ニ至レハ △y ハ 0 トナリ $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ ハ $\frac{dS}{dx}$ トナル

$$\therefore\quad \frac{dS}{dx}=2\pi y$$

此編ハ全ク積分學ニ應用シ得ヘキモノナリ故ニ詳細ノ例ハ積分學講義ニ示スヘシ

第九編

曲率半徑 漸伸線及漸縮線

90 兩曲線の相切 一曲線ヲ $y=f(x)$ トシ他ノ曲線ヲ $y=\phi(x)$ トス, $x=a$ ナルキ $y=b$ 即チ $b=f(a)$, $b=\phi(x)$ ナルキ $f(a)=\phi(a)$ 然ルキ此兩曲線ハ一點 (a, b) ニ於テ相交ハルヘシ

若シ $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}=\phi'(x)$ ニ於テ $x=a$ ナルキ $f'(a)=\phi'(a)$ ナルキ此二曲線ハ相切スヘシ何トナレハ $f'(a)$, $\phi'(a)$ ハ $x=a$ ナルキ其點ニ於ケル切線ト x ノ軸トノ交角ノ正切ナルヲ以テ此二曲線ハ其交點ニ於テ共通ノ切線ヲ有スレハナリ故ニ此場合ニ於テハ $f(a)=\phi(a)$ ナルコ明ラカナリ即チ此二曲線ハ點 (a, b) ニ於テ第一次ノ切點ヲ有スルモノトイフ

且ツ又二次微係數 $f''(a)=\phi''(a)$ ナルキ此二曲線ハ二次ノ切點ヲ有ストイヒ同様ニ $f'''(a)=\phi'''(a)$ 及ヒ $f^{(n)}(a)=\phi^{(n)}(a)$ ナルキ第三次及ヒ第 n 次ノ切點ヲ有ストイフ

但シ此記法ニ於テ n 次ノ切點ヲ有スルコヲ說明スルキニハ其二曲線ハ夫レヨリ高次ナル切點ヲ有セサルモノトスヘシ即チ此場合ニハ $f^{(n+1)}(a)$ ハ $\phi^{(n+1)}(a)$ ニ等シカラサルモノト考フヘシ

91 定理 兩曲線カ一點ニ於テ n 次ノ切點ヲ有スルキ第三ノ曲線ハ其各ト n 次ヨリ低次ナラサル切點ヲ有スルニアラサレハ

其切點附近ニ於テ前ノ兩曲線ノ間ヲ通過セス

兩曲線ノ方程式ヲ $y=f(x)$ 及ヒ $y=\phi(x)$ トシ $x=a$ ナル點ニ於テ n 次ノ切點ヲ有スルモノトス然ルキ $y=f(a)=\phi(a)$,

$y_1=f(a+h)$ 及ヒ $y_2=\phi(a+h)$ トスレハ 30章ニ由テ

$$y_1=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{|\underline{2}}f''(a)+\cdots\cdots+\frac{h^n}{|\underline{n}}f^{(n)}(a)+\frac{h^{n+1}}{|\underline{n+1}}f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

$$y_2=\phi(a)+h\phi'(a)+\frac{h^2}{|\underline{2}}\phi''(a)+\cdots\cdots+\frac{h^n}{|\underline{n}}\phi^{(n)}(a)+\frac{h^{n+1}}{|\underline{n+1}}\phi^{(n+1)}(a+\theta_1 h)$$

兩曲線ハ n 次ノ切點ヲ有スルカ故ニ

$$y_1-y_2=\frac{h^{n+1}}{|\underline{n+1}}\{f^{(n+1)}(a+\theta h)-\phi^{(n+1)}(a+\theta_1 h)\}\cdots\cdots(1)$$

次ニ第三ノ曲線 $y=\psi(x)$ カ第一曲線ニ前ト同切點ニ於テ m 次ノ切點ヲ有スルモノトシ $y_3=\psi(a+h)$ トスレハ同様ニ

$$y_1-y_3=\frac{h^{m+1}}{|\underline{m+1}}\{f^{(m+1)}(a+\theta h)-\psi^{(m+1)}(a+\theta_2 h)\}\cdots\cdots(2)$$

(1) 及ヒ (2) ノ { } ハ h ガ微小ルヲ以テ甚タ微小ナリ故ニ y_1-y_2 及ヒ y_1-y_3 ノ値ハ h^{n+1} 及ヒ h^{m+1} ニ關スヘシ

而シテ m ヲ n ヨリ小トスレハ $h^{n+1}<h^{m+1}$ 故ニ $\dfrac{h^{n+1}}{|\underline{n+1}}$ ハ $\dfrac{h^{m+1}}{|\underline{m+1}}$ ヨリモ尚ホ小ナリ之ニ由テ $y_1-y_2<y_1-y_3$ (但シ絶對値ニ於テ)

故ニ第三曲線ハ切點ノ附近ニ於テ第二曲線ヨリモ第一曲線ヲ去ルコ遠キモノナルコヲ知ル

92 相交の兩場合 前章 (1) ニ於テ h ヲ十分ニ微小ニスレハ y_1-y_2 ハ符號ニ於テ $h^{n+1}\{f^{(n+1)}(a)-\phi^{(n+1)}(a)\}$ ト同符號ナリ

故ニ若シ n ガ偶數ナルヰ y_1-y_2 ハ h^{n+1} ハ奇乘方ナルカ故ニ h ガ符號ヲ變スルヰニ符號ヲ變スヘシ之ニ由テ兩曲線ガ偶數次ノ切點ナルヰ此兩曲線ハ其切點ニ於テ横截ル即チ少ナクモ其一曲線ハ其切點ヲ變點トス

若シ n カ奇數ナルヰ h カ符號ヲ變スルモ h^{n+1} ハ正ナルカ故ニ y_1-y_2 ハ符號ヲ變ス之ニ由テ兩曲線ガ奇數次ノ切點ナルヰ兩曲線ハ其切點ニ於テ横截ラス

93 反論 一曲線カ他ノ既知曲線ト n 次ノ切點ヲ有スルヰ 90. 章ニ由テ $n+1$ ノ方程式ヲ得ヘシ故ニ $n+1$ ノ常數ヲ有スル曲線ノ方程式ハ是等ノ方程式ニ由テ其曲線ノ方程式ヲ知リ得ヘシ

例ヘハ直線 $y=mx+c$ ハ m 及ヒ c ノ二常數ヲ有スルカ故ニ一定點 (a,b) ニ於テ既知曲線 $y=f(x)$ ニ切スルヰ其曲線ト一次ノ切點ヲ有スルカ故ニ $ma+c=f(a)$, $m=f'(a)$

之ニ由テ $\quad c=f(a)-f'(a)$

故ニ此直線ノ方程式ハ $\quad y=xf'(a)+f(a)-f'(a)$

又曲線ノ方程式ヲ $y=f(x)$ トスレハ次ノ曲線ハ此曲線ト n 次ノ切點ヲ有スヘシ

$$y=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{\underline{|2}}f''(a)+\cdots\cdots+\frac{(x-a)^n}{\underline{|n}}f^{(n)}(a)$$

何トナレハ第二ノ方程式ヲ連次微分スレハ

$$\frac{dy}{dx}=f'(a)+(x-a)f''(a)+\cdots\cdots+\frac{(x-a)^{n-1}}{\underline{|n-1}}f^{(n)}(a)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(a)+\cdots\cdots+\frac{(x-a)^{n-2}}{\underline{|n-2}}f^{(n)}(a),\ \cdots\cdots\ \frac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(a)$$

故ニ $x=a$ トスレハ第一ノ方程式及ヒ其連次微係數ハ第二ノ夫レト各〻 n 次ニ至ル迄相等シ

94 曲率圓 圓ノ一般ノ方程式ハ三ツノ常數ヲ含ムカ故ニ圓カ定曲線ト二次ノ切點ヲ有スルヰ其圓ノ中心ノ位置及ヒ半徑ヲ決定スルコヲ得ヘシ

定曲線ト二次ノ切點ヲ有スル圓ヲ稱シテ其一點ニ於ケル曲率圓 (Circle of Curvature) トイフ

圓ノ方程式ヲ次ノ如クス

$$(X-a)^2+(Y-b^2)=\rho^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但シ a, b ハ中心ノ縱横線ニシテ ρ ハ半徑ナリ

(1) ヲ一次及ヒ二次微分ニスレハ

$$\left.\begin{aligned}&X-a+(Y-b)\frac{dY}{dX}=0\\ \text{及ヒ}\quad &1+\left(\frac{dY}{dX}\right)^2+(Y-b)\frac{d^2Y}{dX^2}=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

此圓ガ一點 (x,y) ニ於テ定曲線ノ曲率圓ナルヰ

$$\left.\begin{aligned}X&=x\\ Y&=y\\ \frac{dY}{dX}&=\frac{dy}{dx}\\ \frac{d^2Y}{dY^2}&=\frac{d^2y}{dx^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

之ニ由テ (2) ヨリ

$$\left.\begin{aligned}&x-a+(y-b)\frac{dy}{dx}=0\\ &1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

故ニ

$$\left.\begin{aligned} y-b&=-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \\ x-a&=\frac{\frac{dy}{dx}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(1) 及ヒ (5) ヨリ $\rho=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

之ニ由テ a,b 及ヒ ρ ヲ推求得ヘシ

ρ ヲ稱シテ曲率半徑 (Radius of Curvature) トイフ

(6) ノ右邊ハ平方根ヲ含ムカ故ニ正負ノ二號ヲ有ス而シテ曲線ガ x 軸ニ凹向或ハ凸向スルニ從ヒテ負或ハ正號ヲ用フ然ルトキ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ハ負或ハ正ナルカ故ニ曲線ガ x ノ軸ニ凸向スルトキハ次ノ如ク負ノ號ヲ用フ

即チ $\rho=-\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(6')$

曲線ノ曲率半徑ハ曲線ノ曲ガリノ度合ヲ測ル爲メニ用フルモノニシテ其半徑ノ大小ニ反比シテ曲率ノ度合ヲ測ルモノナリ

例ヘハ直線ノ曲率ハ全ク無シ故ニ直線 $y=mx+c$ ニ於テ

$\frac{dy}{dx}=m,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=0$ 故ニ (6) ヨリ $\rho=\frac{\{1+m^2\}^{\frac{3}{2}}}{0}=\infty$

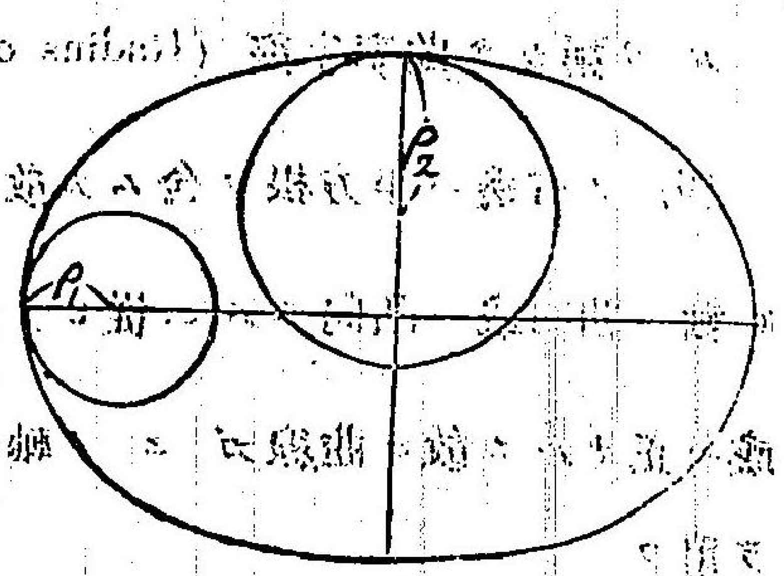
又楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ニ於テ

$\frac{dy}{dx}=-\frac{bx}{a\sqrt{(a^2-x^2)}}$ 及ヒ $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{ab}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ 之ヲ (6) ニ代用スレハ

$$\rho=\frac{\left\{1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}\right\}^{\frac{3}{2}}}{-\frac{ab}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}}=-\frac{\{a^4-(a^2-b^2)x^2\}^{\frac{3}{2}}}{a^4b}$$

長徑ノ一端ノ横線ハ $\pm a$ 及ヒ短徑ノ一端ノ横線ハ o ナルカ故ニ $\pm a$ 及ヒ o ヲ上ノ右邊ノ x ノ代リニ用フレハ

$\rho_1=-\frac{b^2}{a}$ 及ヒ $\rho_2=-\frac{a^2}{b}$



但シ $a>b$ ナルカ故ニ $\frac{b^2}{a}<\frac{a^2}{b}$

故ニ楕圓ノ長徑ノ一端ノ曲率ハ短徑ノ一端ノ曲率ヨリモ大ナリ

95. 極式に於ける曲率半徑

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ トスルトキ 30. 章ニヨリ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta\frac{dr}{d\theta}+r\cos\theta}{\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\sin\theta},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\sin\theta\right)}$$

之ヲ前章ノ(6)ニ代用スレハ $\rho=\dfrac{\left\{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}$ ……(1)

若シ $r=\dfrac{1}{u}$ トスレハ $\dfrac{dr}{d\theta}=-\dfrac{1}{u^2}\dfrac{du}{d\theta}$

$$\frac{d^2r}{d\theta^2}=\frac{2}{u^3}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2-\frac{1}{u^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

之ヲ上ノ右邊ニ代用スレハ $\rho=\dfrac{\left\{u^2+\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{u^3\left(u+\dfrac{d^2u}{d\theta^2}\right)}$ ……(2)

又原點ヨリ點(x,y)ニ於ケル切線ニ引ク垂線ヲ p トスレハ 46.章ニ由テ

$$p=\frac{x\dfrac{dy}{dx}-y}{\sqrt{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}$$

$$\therefore\quad \frac{dp}{dx}=\frac{x\dfrac{d^2y}{dx^2}\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}-\dfrac{dy}{dx}\dfrac{d^2y}{dx^2}\left(x\dfrac{dy}{dx}-y\right)}{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

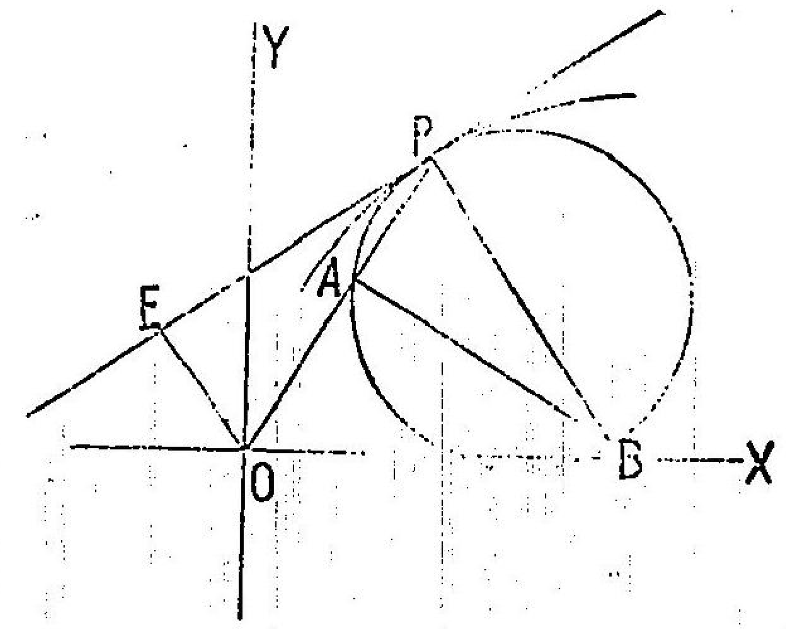
$$=\frac{\left(x+y\dfrac{dy}{dx}\right)\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

但シ $r^2=x^2+y^2$, $r\dfrac{dr}{dx}=x+y\dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{dp}{dx}$, $\dfrac{dr}{dx}$ 及ヒ前章(6)ノ ρ ノ値ヨリシテ $\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{1}{\rho}r\dfrac{dr}{dx}$

$$\therefore\quad \rho=r\frac{dr}{dp}\quad\cdots\cdots(3)$$

96 曲率弦 原點ヲ通過スル曲率弦ヲ PA トスレハ兩三角形 OEP, PAB ハ相似ナルカ故ニ



$$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}.\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OP}}=2\rho\frac{p}{r}$$

但シ前章(3)ヨリ $\dfrac{\rho}{r}=\dfrac{dr}{dp}$

$$\therefore\quad \mathrm{PA}=2p\frac{dr}{dp}$$

又 4[illegible].章ニ由テ $\dfrac{1}{p^2}=u^2+\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2$ $\therefore$ $p=\dfrac{1}{\left\{u^2+\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$ 及ヒ前章(2)ヨリ

$$\therefore\quad \mathrm{PA}=2\rho\frac{p}{r}=\frac{2\left\{u^2+\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{u^3\left(u+\dfrac{d^2u}{d\theta^2}\right)}\times\frac{u}{\left\{u^2+\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}=\frac{2u^2+2\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2}{u^2\left(u+\dfrac{d^2u}{d\theta^2}\right)}$$

97 曲率半徑の極大及ひ極小 曲率半徑ガ極大或ハ極小ナル片其曲率圓ハ第三次ノ切點ヲ有ス

$\rho=\dfrac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$ ヨリ

$$\frac{d\rho}{dx}=\frac{3\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\dfrac{dy}{dx}-\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}\dfrac{d^3y}{dx^3}}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2}=0$$

$$\therefore\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{dy}{dx}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$ **94.**章ノ (2) ヲ微分スレハ

$$3\frac{d^2Y}{dX^2}\,\frac{dY}{dX}+(Y-b)\frac{d^3Y}{dX^3}=0,$$ 之ニ由テ

$$\frac{d^3Y}{dX^3}=-\frac{3\frac{d^2Y}{dX^2}\,\frac{dY}{dX}}{Y-b}=\frac{3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{dy}{dx}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$ 〔**94.**章 (3), (5) ニヨル〕

$$\therefore\quad \frac{d^3Y}{dX^3}=\frac{d^3y}{dx^3},$$ 即チ三次ノ切點ヲ有ス

例　題

1. 立方拋物線 $a^2y=x^3$ ノ曲率半徑ヲ求ム

2. 半立方拋物線 $ay^2=x^3$ ノ曲率半徑ヲ求ム

3. 圓 $x^2+y^2=a(x-y)$ ノ曲率半徑ハ $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ナリ

4. 曲線 $y=x^4-4x^3-12x^2$ ノ原點ニ於ケル曲率半徑ハ $\frac{1}{24}$ ナリ

5. 曲線 $y=x(x+2)(x+3)$ ノ原點ニ於ケル曲率半徑ハ $-\frac{37}{10}\sqrt{37}$ ニシテ曲率半徑カ無限大トナル片ノ切點ヲ求メヨ

6. 立方拋物線 $a^2y=x^3$ ト $x=a$ ナル點ニ於テ切シ其内ニ包容セラレ且ツ y ノ軸ニ平行スル軸ヲ有スル所ノ拋物線ノ方程式ヲ求メヨ

(1)　$y=\frac{x^3}{a^2},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{a^2},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6x}{a^2},$　**94.**章 (6′) ヨリ

$$\rho=-\frac{\left\{1+\left(\frac{3x^2}{a^2}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{6x}{a^2}}=-\frac{(a^4+9x^4)^{\frac{3}{2}}}{6a}$$

(2)　$\rho=-\frac{(4a+9x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}}{6a}$

(3)　$x^2+y^2-a(x-y)=0,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{a-2x}{a+2y},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4a^2}{(a+2y)^3}$

$$\therefore\quad \rho=\frac{\left\{1+\left(\frac{a-2x}{a+2y}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{4a^2}{(a+2y)^3}}=\frac{\{4x^2+4y^2-4a(x-y)+2a^2\}^{\frac{3}{2}}}{4a^2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

(4)　$\frac{dy}{dx}=4x^3-12x^2-24x=0,\quad (x=0$ ナル片$)$

$\frac{d^2y}{dx^2}=12x^2-24x-24=-24,\quad (x=0$ ナル片$)\quad \therefore\quad \rho=\frac{1}{24}$

(5)　$y=x^3+5x^2+6x,\quad \frac{dy}{dx}=3x^2+10x+6=6,\quad (x=0$ ナル片$)$

$\frac{d^2y}{dx^2}=6x+10=10,\ (x=0$ ナル片$)\quad \therefore\ \rho=-\frac{(1+6^2)^{\frac{3}{2}}}{10}=-\frac{37}{10}\sqrt{37}$

又　$\rho=\frac{\{1+(3x^2+10x+6)^2\}^{\frac{3}{2}}}{6x+10}=\infty\qquad \therefore\quad 6x+10=0,\quad x=-\frac{5}{3}$

(6)　所求ノ拋物線ノ頂點ノ縱横線ヲ $\alpha,\ \beta$ トスレハ其方程式ハ

$(x-\alpha)^2=4m(y-\beta),\qquad \therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{x-\alpha}{2m}=\frac{a-\alpha}{2m},\quad (x=\ \ )$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2m},$　又　$a^2y=x^3$ ニ於テ $x=a$ トスレハ $y=a$

$a^2y=x^3$ ヨリ $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{a^2}=\frac{3}{a}$, 及ヒ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6x}{a^2}=\frac{6}{a}$, ($x=a$ ナル斥)

所求ノ方程式ニ於テ $x=y=a$ トスレハ

$$(a-\alpha)^2=4m(a-\beta)\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{a-\alpha}{2m}=\frac{3}{a}\cdots\cdots(2)$$

題意ニヨリ兩曲線ハ双方 x ノ軸ニ凸向スルカ故ニ各ノ $\frac{d^2y}{dx^2}$ モ亦相同シ $\therefore\ \frac{1}{2m}=\frac{6}{a}\cdots\cdots(3)$

(1), (2) 及ヒ (3) ヨリ $m=\frac{a}{12}$, $\alpha=\frac{a}{2}$, $\beta=\frac{a}{4}$

之ニ由テ所求ノ方程式ハ $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a}{3}\left(y-\frac{a}{4}\right)$

---

7. $r=a(1-\cos\theta)$ ナル斥 $\rho=\frac{4a}{3}\sin\frac{\theta}{2}$

8. $r=a(2\cos\theta-1)$ ナル斥 $\rho=\frac{a(5-4\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{9-6\cos\theta}$

9. $r=a(1+\cos\theta)$ ナル斥

$\rho=\frac{2\sqrt{2ar}}{3}$ 及ヒ原點ヲ通過スル曲率弦ハ $\frac{4r}{3}$

10. Archimedes氏ノ螺線ニ於テ $r=\frac{a}{\sqrt{3}}$ ナル斥曲率半徑ハ原點ヲ通過スル曲率弦ニ等シ

11. $r=a\sec^2\frac{\theta}{2}$ ナル斥 $\rho=2a\sec^3\frac{\theta}{2}$

(7) $r=a(1-\cos\theta)$, $\frac{dr}{d\theta}=a\sin\theta$, $\frac{d^2r}{d\theta^2}=a\cos\theta$ 35.章(1)ヨリ

$$\rho=\frac{\{a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta\}^{\frac{3}{2}}}{a^2(1-\cos\theta)^2+2a^2\sin^2\theta-a(1-\cos\theta)\cos\theta}=\frac{4a}{3}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

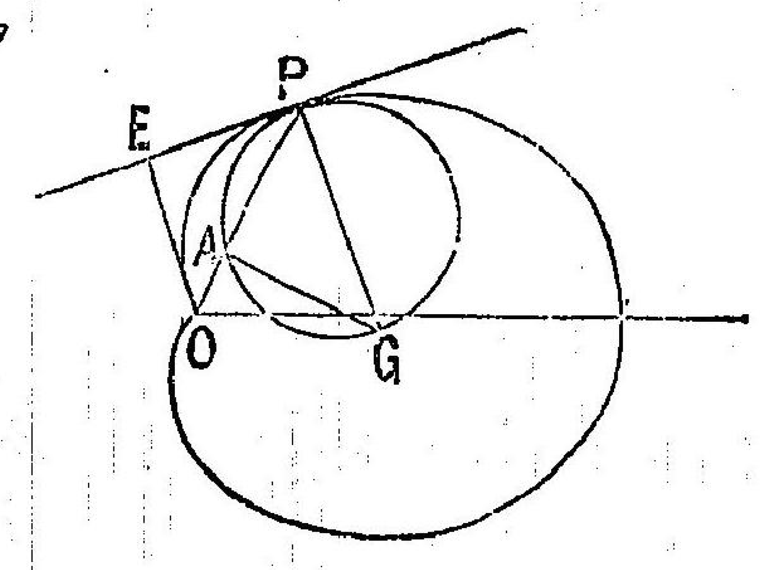
(8) 同法

(9) $r=a(1+\cos\theta)$, $\frac{dr}{d\theta}=-\sin\theta$, $\frac{d^2r}{d\theta^2}=-a\cos\theta$

$$\rho=\frac{\{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta\}^{\frac{3}{2}}}{a^2(1+\cos\theta)^2+2a^2\sin^2\theta-a(1+\cos\theta)(-a\cos\theta)}$$

$$=\frac{2^{\frac{3}{2}}a(1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}{3}=\frac{2\sqrt{2ar}}{3}$$

82.章例題19.ニ由テ次ノ圖ヲ得



85.章ニ由テ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta\frac{dr}{d\theta}+r\cos\theta}{\cos\theta\frac{dr}{d\theta}-r\sin\theta}$$

$$=\frac{-a\sin^2\theta+r\cos\theta}{-a\sin\theta\cos\theta-r\sin\theta}$$

之ト $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ トヲ 46.章(F)ニ代用スレハ

$$\mathrm{OE}=\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}=\frac{r\sin\theta-r\cos\theta\left(\frac{-a\sin^2\theta+r\cos\theta}{-a\sin\theta\cos\theta-r\sin\theta}\right)}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{-a\sin^2\theta+r\cos\theta}{-a\sin\theta\cos\theta-r\sin\theta}\right)^2\right\}}}$$

即チ　$\mathrm{OE}=\dfrac{r^2}{\sqrt{(r^2+a^2\sin^2\theta)}}=\dfrac{r^2}{\sqrt{\left\{r^2+a^2-a^2\left(\dfrac{r}{a}-1\right)^2\right\}}}=\dfrac{r^2}{\sqrt{2ar}}$

96. 章ニ由テ　$\mathrm{PA}=2\rho\dfrac{\mathrm{OE}}{r}=\dfrac{4\sqrt{2ar}}{3}\cdot\dfrac{r^2}{r\sqrt{2ar}}=\dfrac{4r}{3}$

(10)　$r=a\theta$ ニ於テ $r=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ トスレハ $\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 故ニ前例ノ如ク

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta\dfrac{dr}{d\theta}+r\cos\theta}{\cos\theta\dfrac{dr}{d\theta}-r\sin\theta}=\frac{a\sin\theta+r\cos\theta}{a\cos\theta-r\sin\theta}$$

$$\mathrm{OE}=\frac{x\dfrac{dy}{dx}-y}{\sqrt{\left(1+\dfrac{dy^2}{dx^2}\right)}}=\frac{r\cos\theta\left(\dfrac{a\sin\theta+r\cos\theta}{a\cos\theta-r\sin\theta}\right)-r\sin\theta}{\sqrt{\left\{1+\left(\dfrac{a\sin\theta+r\cos\theta}{a\cos\theta-r\sin\theta}\right)^2\right\}}}$$

$$=\frac{r^2}{\sqrt{(a^2+r^2)}}=\frac{r^2}{\sqrt{(3r^2+r^2)}}=\frac{r}{2}$$

$$\therefore\qquad \mathrm{OA}=2\rho\frac{\mathrm{OE}}{r}=2\rho.\frac{1}{2}=\rho$$

(11)　$r=a\sec^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2a}{1+\cos\theta}$,　　$\dfrac{dr}{d\theta}=\dfrac{2a\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}$

$\dfrac{d^2r}{d\theta^2}=\dfrac{2a(2-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)^2}$ 之ヲ 95. 章 (1) ニ代用スレハ

$$\rho=\frac{4a\sqrt{2}}{(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4a\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cos^{\frac{3}{2}}\dfrac{\theta}{2}}=2a\sec^3\frac{\theta}{2}$$

98. 漸伸線及ビ漸縮線

曲率圓ノ中心ノ軌跡ヲ原曲線ノ漸伸線 (Evolute) トイフ曲線ガ其漸伸線ニ對シテ考フルキ其曲線ヲ漸縮線 (Involute) トイフ

曲線上ノ一點 (x, y) ニ於ケル曲率中心ノ縱橫線ヲ x', y' トスレハ

94. 章 (2) ニ由テ　$x-x'+(y-y')\dfrac{dy}{dx}=0$ ……………… (1)

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-y')\frac{d^2y}{dx^2}=0 \quad\text{……………… (2)}$$

曲線ノ方程式 $y=f(x)$ ヨリシテ y, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ハ凡ヘテ x ノ項ニ由テ表ハスコヲ得ヘシ故ニ (1), (2) ヨリ x ヲ消去シテ x' 及ヒ y' ノ關係ヲ求ムルコヲ得ヘシ又上ノ兩方程式ヨリ x' 及ヒ y' ヲ x ノ函數トシテ考ヘ (1) ヲ微分スレハ

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-y')\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dx'}{dx}-\frac{dy'}{dx}\frac{dy}{dx}=0$$

之ヲ (2) ヨリ減スレハ　$\dfrac{dx'}{dx}+\dfrac{dy'}{dx}\dfrac{dy}{dx}=0$ ……………… (3)

$$\therefore\qquad 1+\frac{dy'}{dx'}\frac{dy}{dx}=0 \quad\text{……………… (4)}$$

之ニ由テ (1) ヨリ　$y-y'=\dfrac{dy'}{dx'}(x-x')$

即チ一點 (x, y) ハ一點 (x', y') ニ於ケル漸伸線ノ切線上ニ在リ又 (1) ヨリ一點 (x', y') ハ一點 (x, y) ニ於ケル曲線ノ法線上ニ在リ故ニ漸縮線上ノ任意一點ノ法線ハ漸伸線上ノ之ニ相應スル一點ノ切線ナリ

99. 定理　漸伸線ノ弧ト曲率半徑トノ和或ハ差ハ常數ナリ

曲線上ノ一點 (x, y) ニ於ケル曲率半經ヲ ρ トシ曲率中心ヲ (x', y') トスレハ

$$(x-x')^2+(y-y')^2=\rho^2$$

x', y' ヲ x ノ函數トスレハ ρ モ亦 x ノ函數ナリ之ニ由テ上ノ方程式ヲ微分スレハ

$$(x-x')\left(1-\frac{dx'}{dx}\right)+(y-y')\left(\frac{dy}{dx}-\frac{dy'}{dx}\right)=\rho\frac{d\rho}{dx}$$

故ニ前章ノ (1) ヨリ

$$(x-x')\frac{dx'}{dx}+(y-y')\frac{dy'}{dx}=-\rho\frac{d\rho}{dx}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (1)$$

前章ノ (1) 及ヒ (3) ヨリ

$$\frac{\frac{dx'}{dx}}{x'-x}=\frac{\frac{dy'}{dx}}{y'-y}=\pm\left\{\frac{\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2}{(x'-x)^2+(y'-y)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{\rho}\frac{ds'}{dx}$$

但シ s' ハ漸伸線ノ弧ナリ (85。章ヲ視ヨ)

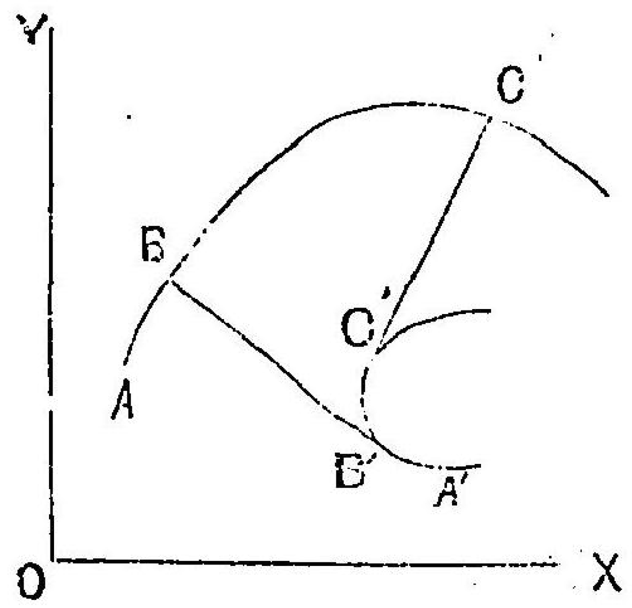
故ニ (1) ヨリ $\frac{1}{\rho}\{(x'-x)^2+(y'-y)^2\}\frac{ds'}{dx}=\pm\rho\frac{d\rho}{dx}$

$$\therefore\quad \frac{ds'}{dx}=\pm\frac{d\rho}{dx}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2)$$

(2) ヨリ $\frac{ds'}{dx}\mp\frac{d\rho}{dx}=0$, 即チ $\frac{d(s'\mp\rho)}{dx}=0$

之ニ由テ $s'\mp\rho$ ハ常數ナリ (之ヲ l トス)

圖解　ABC ヲ既知曲線トシ A'B'C' ヲ漸伸線トス BB' ヲ既知曲線ノ B ニ於ケル曲率半徑トシ CC' ヲ C ニ於ケル曲率半徑トス



然ルキ A' ガ漸伸線上ノ一定點ナルキ弧 A'B'C' ヲ度ルコヲ得ヘシ即チ

弧A'B'+BB'$=l$

弧A'B'C'+CC'$=l$

∴　弧B'C'=BB'−CC'

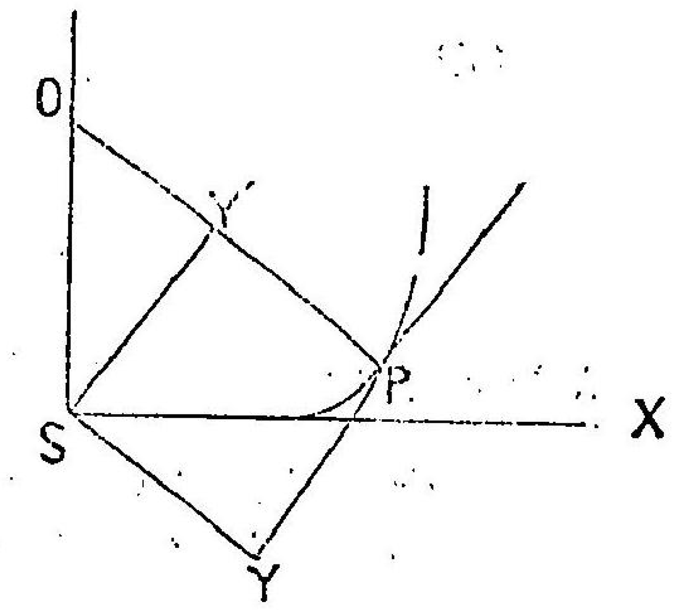
之ニ由テ長サ l ナル糸ノ一端ヲ漸伸線ノ一定點 A' ニ固着セシメ其糸ヲ漸伸線ノ附着シテ其切點ヨリシテ糸ニテ切線ヲ作レハ糸ノ他ノ一端ハ AB ナル漸縮線ヲ畵キ得ヘシ此性質ヨリシテ漸伸線及ヒ漸縮線ノ名アリ

s' ガ増シ ρ ガ減ズルキ $s'+\rho$ ハ常數ナリ

又 s' ヲ C' ヨリ A' ノ方ニ向ヒテ度ルキハ s' 及ヒ ρ ハ共ニ増スガ故ニ $s'-\rho$ ハ常數ナリ

曲線ハ一ツノ漸伸線ヲ有ス然レ曲線ハ無限數ノ漸縮線ヲ有スヘシ何トナレハ $s'\mp\rho=l$ ナル方程式ニ於テ常數 l ハ意ノ如ク任意ノ値ヲ定メ得ヘキヲ以テナリ

99. 極軸　極軸ニ關スル曲線上ノ一點 P ニ於ケル曲率圓ノ中心ヲ O トシ P ニ於ケル切線ニ垂線 SY ヲ引キ OP ニ垂線 SY' ヲ引ク而シテ



SP$=r$,　PO$=\rho$,　SY$=p$

SO$=r'$,　SY'$=p'$　トスレハ

三角形 SOP ニ於テ

$$r'^2=p^2+r^2-2r\rho\cos\mathrm{SPO}$$
$$=\rho^2+r^2-2r\rho\sin\mathrm{SPY}$$

$\therefore \qquad r'^2=\rho^2+r^2-2\rho p \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

又 $\qquad p'^2=r^2-p^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

$$\rho=r\frac{dr}{dp} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

曲線ノ既知方程式ヨリ r ノ項ニ於テ p ヲ求メ得ヘシ然ルキ (1) 及ヒ (2) ヨリ r ヲ消去シ p' 及ヒ r' ノ關係方程式ヲ得ヘシ然ルキ O ノ軌跡ヲ決定シ得ラルヘシ

圖ニ於テ曲線ハ極點 S ニ凹向スルモノト定メタリ

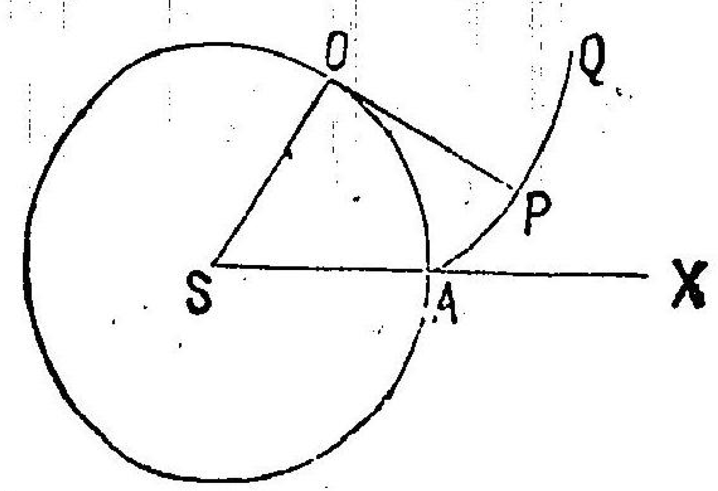
若シ曲線ガ S ニ凸向スルキハ $\frac{dr}{dp}$ ハ負ナリ 75。章),故ニ $\rho=-r\frac{dr}{dp}$, 此場合ニ於テハ (1) ハ $r'^2=\rho^2+r^2+2\rho p$

之ニ由テ双方ニ場合ニ於テ $\quad r'^2=\rho^2+r^2-2pr\frac{dr}{dp}$

100。圓の漸縮線

圓ノ中心ヲ S トシ其漸縮線ノ一部分ヲ APQ トシ引キ伸バシタル糸ノ部分ヲ OP＝OA トス

$SO=a, \quad \angle OSA=\theta,$



P ノ縱横線ヲ x, y トスレハ

$OP=a\theta$

$x=a\cos\theta+a\theta\sin\theta$

$y=a\sin\theta-a\theta\cos\theta$

$AP=s$ トスレハ 85。章ニ由テ

$$\frac{ds}{d\theta}=\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right\}}=a\theta$$

之ニ由テ $\qquad s=\frac{a\theta^2}{2},$

何トナレハ $s=\frac{a\theta^2}{2}$ ヲ微分スレハ $\frac{ds}{d\theta}=a\theta$ トナルヲ以テナリ

例　　題

1. 雙曲線ノ漸伸線ハ $(ax)^{\frac{2}{3}}-(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2+b^2)^{\frac{2}{3}}$ ナリ

2. 曲線 $xy=a^2$ ノ漸伸線ノ方程式ヲ求ム

3. 抛物線ノ頂點ヲ A, 焦點ヲ S トシ抛物線上ノ任意ノ一點ヲ P トスレハ A ニ於ケル曲率中心ヨリ P ニ於ケル曲率中心點ノ漸伸線ノ長サハ

$$\frac{2(PS^{\frac{3}{2}}-AS^{\frac{3}{2}})}{\sqrt{AS}} \text{ ナリ}$$

---

(1) $\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad y=\frac{b}{a}(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{bx}{a(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{ab}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}$ 故ニ 9 .章 (1), (2) ニ之ヲ代用スレハ

$$x-x'+\left\{\frac{b}{a}(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}-y'\right\}\frac{bx}{a(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}=0 \cdots\cdots (1)$$

$$1+\frac{b^2x^2}{a^2(x^2-a^2)}+\left\{\frac{b}{a}(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}-y'\right\}\frac{-ab}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}=0 \cdots (2)$$

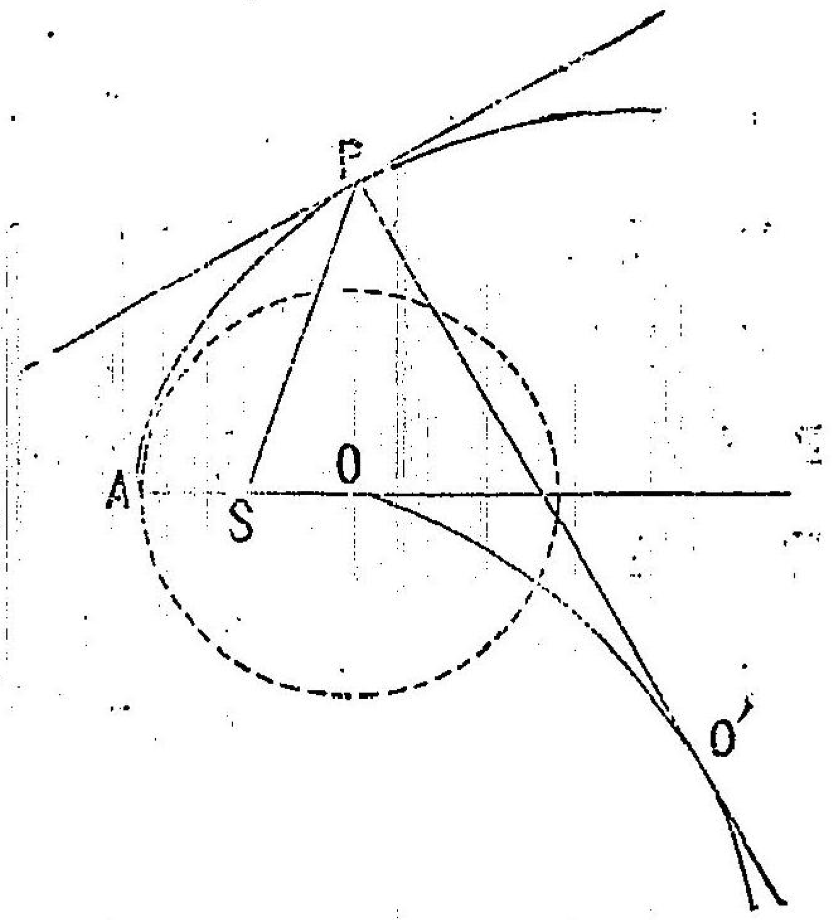
(1), (2) ヨリ $\quad \left\{1+\frac{b^2x^2}{a^2(x^2-a^2)}\right\}/(x-x')=-a^2/x(x^2-a^2)$

即チ $x=\frac{a^{\frac{4}{3}}x'^{\frac{1}{3}}}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{3}}}$ 之ヲ (1) ニ代用シ變化スレハ

$$(ax')^{\frac{2}{3}}+(by')^{\frac{2}{3}}=(a^2+b^2)^{\frac{2}{3}}$$

(2) 前例ノ如クスレハ $(x'+y')^{\frac{2}{3}}-(x'-y')^{\frac{2}{3}}=(4a)^{\frac{2}{3}}$

(3) O ヲ A ニ於ケル曲率中心トシ O' ヲ P ニ於ケル曲率中心トス



$y^2=4ax$ ヨリ $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\sqrt{a}}{2x\sqrt{x}}$$

$$\rho=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{\sqrt{a}}{2x\sqrt{x}}}=\frac{2(x+a)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$$

$$\therefore \quad AO=\frac{2(a)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}=2a,$$

故ニ 99. 章ニ由テ 弧 $OO'=PO'-AO=\frac{2(x+a)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}-2a$

$$=\frac{2SP^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{AS}}-2AS=\frac{2(SP^{\frac{3}{2}}-AS^{\frac{3}{2}})}{\sqrt{AS}}$$

第十編
包絡線

101. 包絡線 一ツノ曲線ガ一定ノ法則ニ於テ記サレタル若干ノ曲線ニ切スル𪜈初ノ曲線ヲ稱シテ次ノ諸曲線ノ包絡線 (Envelopes) トイフ是等ノ次ノ諸曲線ハ既知ノ形チニシテ初ノ曲線即チ包絡線ヲ求ムルヿヲ要ス

102. 諸圓の包絡線 若干ノ等圓アリテ其各中心ハ或一定曲線上ニ在リトス然ル𪜈此諸等圓ニ切スル曲線即チ包絡線ヲ求ム

x, y ヲ包絡線上ノ任意一點ノ縦横線トシ α, β ヲ諸等圓ノ内其一ツノ中心ノ縦横線トシ等圓ノ半徑ヲ a トスレハ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=a^2$$

諸中心ヲ含ム既知曲線ヲ $y=f(x)$ トスレハ $\beta=f(\alpha)$

$$\therefore \quad (x-\alpha)^2+\{y-f(\alpha)\}^2=a^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

今若シ α ガ無限小ニ増スモノトスレハ (1) ハ等圓ノ他一ツヲ表ハシ (1) ノ圓ト無限小ニ近カキ所ノ中心ヲ有スヘシ而シテ其ノ交點ハ極限ニ至リ (x, y) トナルヘシ同様ニ此第二圓ト第三圓トノ關係ヲ此ノ如クシテ推考スル𪜈ハ諸圓ノ連續交點ニ由テ成レル切曲線即チ包絡線ヲ想像シ得ラルヘシ而シテ此包絡線ノ方程式ヲ決定スルニハ方程式 (1) 及ヒ此圓ヨリ微動セシ他ノ一圓ノ方程式即チ α ニ關シテ取リタル (1) ヲ微分セシ方程式ニ由テ α ヲ消去セ

ザルヘカラス之ヲ詳說スル次ノ如シ

α 及ヒ β ノ代リニ $\alpha+\triangle\alpha$ 及ヒ $\beta+\triangle\beta$ ヲ (1) ニ用フレハ

$$\{x-(\alpha+\triangle\alpha)\}^2+\{y-(\beta+\triangle\beta)\}^2=a^2$$

之ヲ (1) ヨリ減スレハ

$$\{2(x-\alpha)-\triangle\alpha\}\triangle\alpha+\{2(y-\beta)-\triangle\beta\}\triangle\beta=0$$

即チ　$2(x-\alpha)+2(y-\beta)\dfrac{\triangle\beta}{\triangle\alpha}-(\triangle\beta\dfrac{\triangle\beta}{\triangle\alpha}+\triangle\alpha)=0$

極限ニ至レハ　$\triangle\alpha=\triangle\beta=0,\quad \dfrac{\triangle\beta}{\triangle\alpha}=\dfrac{d\beta}{d\alpha}$

$\therefore$　$2(x-\alpha)+2(y-\beta)\dfrac{d\beta}{d\alpha}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

(1) ニ於テ α ニ關シテ β ノ微係數ヲ求ムレハ (2) ヲ得ヘシ而シテ (1) 及ヒ (2) ヨリ α ヲ消去スレハ包絡線ノ方程式ヲ得ヘシ

例　題

1. 一定點ヨリ等距離ニ在ル諸直線ニ切スル曲線(即チ包絡線)ハ圓ナリ

〔解〕 定點ヲ原點トシ原點ヨリ各直線ニ至ル垂線ヲ p トスレハ其一直線ノ方程式ハ　$y=mx+p\sqrt{1+m^2}$

此一直線ガ第二ノ直線ノ位置迄微動セルニハ m ヲ微變セサルヘカラス

$\therefore$　$x+\dfrac{pm}{\sqrt{(1+m^2)}}=0,$　即チ　$\dfrac{p}{x}=-\dfrac{\sqrt{1+m^2}}{m}$

$\therefore$　$\dfrac{1}{m^2}=\dfrac{p^2}{x^2}-1=\dfrac{\overset{p}{d}{}^2-x^2}{x^2}$　$\therefore$　$m=\dfrac{x}{\sqrt{(p^2-x^2)}}$

又　$\sqrt{1+m^2}=-m\dfrac{p}{x}=-\dfrac{p}{\sqrt{(p^2-x^2)}}$

$\therefore$　$y=mx+p\sqrt{1+m^2}=\dfrac{x^2}{\sqrt{(p^2-x^2)}}-\dfrac{p^2}{\sqrt{(p^2-x^2)}}=-\sqrt{(p^2-x^2)}$

之ニ由テ　$x^2+y^2=p^2$

2. 定長ノ直線ガ直角二軸上ニ兩端ヲ置キテ動クトキ此凡ヘテノ位置ニ於テ此直線ニ切スル曲線ノ方程式ヲ求ム

〔解〕 直線ノ長サヲ c トシ直線カ兩軸ヲ截ル部分ヲ a 及ヒ b トスレハ　$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$　及ヒ　$a^2+b^2=c^2$

$\therefore$　$\dfrac{x}{a^2}+\dfrac{y}{b^2}\dfrac{db}{da}=0,$　及ヒ　$a+b\dfrac{db}{da}=0$　即チ　$\dfrac{db}{da}=-\dfrac{a}{b}$

$\therefore$　$\dfrac{x}{a^2}-\dfrac{ay}{b^3}=0$　即チ　$b=a\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$　$\therefore$　$a^2+b^2=a^2\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x}\right)=c^2$

$\therefore$　$a=\dfrac{cx^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})}},\quad b=\dfrac{cy^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})}}$

$\therefore$　$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{\sqrt{(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})}}{c}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=1$　$\therefore$　$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$

3. 直線 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ ニ切シ $a^n+b^n=c^n$ ナルトキ c ヲ定長トスレハ其包絡線ノ方程式ハ　$x^{\frac{n}{n+1}}+y^{\frac{n}{n+1}}=c^{\frac{n}{n+1}},$　(前例ト同シ)

4. $y=mx+\sqrt{(m^2a^2+b^2)}$ ナル凡ヘテノ直線ニ切スル曲線ハ橢圓ナリ但シ a 及ヒ b ヲ常數トス

〔解〕　$x+\dfrac{ma^2}{\sqrt{(m^2a^2+b^2)}}=0$　$\therefore$　$\sqrt{(m^2a^2+b^2)}=-\dfrac{ma^2}{x}$

又　$m^2=-\dfrac{b^2x^2}{a^2(x^2-a^2)}$

$$y=mx+\sqrt{(m^2a^2+b^2)}=mx-\frac{ma^2}{x} \quad ヨリ \quad m=\frac{xy}{x^2-a^2}$$

$$\therefore \quad \frac{x^2y^2}{(x^2-a^2)^2}=-\frac{b^2x^2}{a^2(x^2-a^4)} \qquad \therefore \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

解析幾何學講義 102。章ヲ參照スヘシ

5。中心及ヒ兩軸ヲ共有スル凡ヘテノ楕圓ニ切スル曲線ヲ求ム但シ其内任意一楕圓ノ長短半徑ノ矩形ヲ常數 m^2 トス

〔解〕　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$　及ヒ　$ab=m^2$

$$\therefore \quad b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2=m^4 \quad \therefore \quad 2bx^2\frac{da}{db}+2ay^2=0$$

即チ　$\frac{db}{da}=\frac{ay^2}{bx^2}$　又　$b+a\frac{db}{da}=0,$　即チ　$\frac{db}{da}=-\frac{b}{a}$

$\therefore$　$\frac{b}{a}=\frac{ay^2}{bx^2}$　即チ　$\frac{b}{a}=\frac{y}{x}$　之ト　$ab=m^2$　トニ由テ

$a^2=\frac{m^2x}{y},$　$b^2=\frac{m^2y}{x}$　之ヲ　$b^2x^2+a^2y^2=m^4$　ニ代用スレハ

$2xy=m^2,$　即チ等邊雙曲線ナリ

6。曲線ノ任意ノ切線ガ兩軸ヲ截ル部分ノ和常數 c ナルヤ其曲線ヲ求ム

〔解〕　切線ヲ　$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$　及ヒ　$a+b=c$

$\frac{db}{da}=-1,$　又　$bx+ay=ab$　ヨリ　$x\frac{db}{da}+y=b+a\frac{db}{da}$

即チ　$-x+y=b-a$　之ト　$a+b=c$　トニ由テ

$a=\frac{c+x-y}{2}$　及ヒ　$b=\frac{c-x+y}{2}$　之ヲ　$bx+ay=ab$　ニ代用スレハ

$$\frac{x(c-x+y)}{2}+\frac{y(c+x-y)}{2}=\frac{(c-x+y)(c+x-y)}{4}$$

即チ　$2c(x+y)-2(x-y)^2=c^2-(x-y)^2$

即チ　$(x+y)^2-2c(x+y)+c^2=4xy,$

$$\therefore \quad x+y-c=2\sqrt{xy}$$

$$\therefore \quad (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=c \qquad \therefore \quad \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{c}$$

(完　了)

明治四拾年貳月貳拾日印刷
明治四拾年貳月貳拾三日發行

不許複製

微分學講義
（正價金壹圓五拾錢）

著者　上野　清
發行者　辻本末吉
東京市神田區表神保町七番地
印刷者　椿市太郎
東京市本郷區湯島一丁目二番地
印刷所　株式會社 葆光社
東京市本郷區湯島一丁目二番地

東京市神田區表神保町七番地
發賣所　電話本局一七五三　振替貯金三三八　修學堂書店

大賣捌　大阪市東區南久太郎町四　藤谷崇文館

32