3
2/2223

南海何崇禮編

中等教育

幾何學教科書

科學會編譯部刊行

MG
G634.67
37

3 1773 5552 0

序

明徐光啓論幾何原本云竊意百年之後人人習之且以爲習之晚也有心哉徐氏之言乎胡至今而始驗也我國近代學校萠芽竊意繼自今必人人習之者此學固諸學之基礎也余友何君雅愛此學嘗語余以前此諸書非煩瑣則簡漏求一善本終莫能得素欲編一教科良本以公學界第學事多忙有志未逮歲甲辰何君東渡復銳意研究搜羅羣書繩以平日所學編輯成帙書成囑余爲序余尋譯彙旬乃窺全豹其中條理精密證法簡明幾何佳點畢聚乎是誠於我國幾何學闢一新世界也教科用書此其泰斗歟

丙午春南海龔志超序於羊城

例 言

本書以日本長澤龜之助先生所著之幾何學敎科書爲主。益參以己意。簡者詳之。繁者約之。晦者明之。缺者補之。斟酌損益。凡歷兩載。及克成帙。敎科用之。庶無遺憾。

本書編纂之本旨。原以供中學校及尋常師範學校敎科之用。故其證法。俱以式顯。可免文字冗長之弊。且與代數三角有相補助之功。然初學者觀式有未盡了解時。敎習更用文字。詳加說明。益以啓發學者思想。此編者所厚望。

本書定名。多本於形學備旨。至其有未盡切當及遺漏處。則參用日本名詞。反覆推敲。至精且當。名實之間。誠無間然。

本書首定記號。以代恒用之字。令學者望而即知。不致亂目。

本書卷終。附錄各部問題。以備敎習隨時摘用。

本書平面之部第三編。多有與代數對應者。特指出之。尤能啓發學者思想。

本書平面之部前卷。合於中學第二年程度。平面之

部後卷。合於中學第三年程度。立體之部合於第四年程度。

本書問題中有重要者。必以星點(如＊)顯之。凡遇有重要之問題。學者宜熟練。

本書製圖之體裁。用字之模樣。莫不盡善。均足以助學者之思索。

編　者　識

目　　次

第四編　比，比例

第五編　比例之用

第六編　正多角形，圓之測度

附　錄

注意　問題中有以星點＊記於號之右肩者。所以示其稍要重也。

緒論

1. 物體之形狀

試取一球一箱。兩相比較。球形爲圓。箱形爲方。形狀各異。他如紙之形狀。旣平且扁。三角板之形狀。成三角形。是故形狀有種種之別。故曰

物體有形狀。而形狀所以示其模樣若何。

2. 物體之大 (大字已包函大小兩義)

例如大炮之丸。其球形大。小槍之彈。其球形小。又如一升之大。一合之小。皆物體之形狀同。而大小不等。故曰

物體有大。而大所以示其占領部位幾何。

3. 物體之位置

例置書一冊於桌上。別置一冊於架上。其位置不同。又如郵局傳書。遠近。均能致送。故曰

物體有位置。而位置所以示其在何處。

4.　幾何體,立體　前述形狀,大,位置等。皆物體所具有。至物質爲如何。則非幾何學所當研究。可置莫問。今指此物體所占領之部位者。稱爲幾何體或稱立體。

5.　面　立體既占有位置。則其位置不能無界。其界即面。而界無厚薄。故曰面有位置,長,廣而無厚。

6.　線　面之界。或面與面交處爲線。故曰線有位置及長而無廣厚。

7.　點　線之界。或線與線交處爲點。故曰點有位置而無大。

8.　點之示法　欲示點於紙面。可畫一圓星。而以一文字附之。或線與線相交處。而附以文字示之。

例如點A或點B　　A・　　B ×

又A點或B點

9. 直線　任取線之一段。而任置其兩端於他段上。若處處相合者爲直線。欲示直線於紙面。可先置間尺或三角板於紙面。沿其邊以鉛筆引之。而附文字於其兩端。或以一文字附之。

例如直線AB或直線a

10. 直線之向　一直線上。有正向反向。

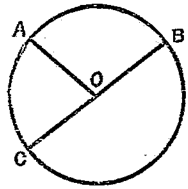
例如直線AB。視法由A向B。或由B向A均可。唯於前例以直線AB記之。於後例。以直線BA記之。

注意　直線無論何向。皆可延長之。而直線AB者。A與B兩點間最短之線也。由是兩點間之距離云者。蓋謂其兩點間之直線也。而欲測有限直線。即求其直線含他定長直線之(一尺,一米突等)若干倍。

11. 圓,圓周　在灣曲線界內之平面形爲圓。其曲線謂之圓周。由居中一定點引至圓周諸直線皆等。此定點即**圓心**。以圓

心及圓周爲界之諸直線。爲半徑。過圓心以圓周爲界之直線。爲徑。

例 O 乃 ABC 圓之中心，
AO,BO,CO 乃半徑。
BOC 乃徑。



欲畫圓於紙面。則須用兩脚規。又兩脚規可供轉移距離之用。

12. 幾何學 論各體面線之理。并求其組合之大小。爲幾何學。而僅論平面內所函直線及圓之理并求其大小者。稱初等平面幾何學。

問題壹

1. 物體之大相等。而形狀相異者。試舉其例。
2. 物體之形狀相同。而其大相異者。試示其例。
3. 物體之大，形狀俱等。而位置相異者。試舉其例。
4. 金箔爲面形。抑爲體形。
5. 金針爲線形。抑爲體形。

6. 面無厚。何故

7. 三寸及四寸之直線。引法若何。

8. 圓之半徑。一爲五分。一爲六分。試求兩圓之作法。

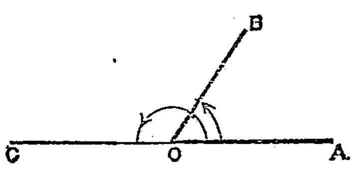
9. 求作一直線。與已知之兩直線之和及差等。

10. 求引AB直線至C點。(1)令AC等於AB之二倍。(2)令BC等於AB之三倍。

13. 平面角　角　同自一點引兩直線。是爲平面角。或單稱角。其點爲頂。而兩直線爲邊。

由角頂引一直線。始令落於其角之一邊上。而在其角之平面內廻轉。以至落於他邊。則此直線廻轉。僅在角內。故角之大小。依廻轉量之多少而定。

例如由OA直線上。按定O點。作一廻轉。至OC位置。是爲廻轉於AOC角內。



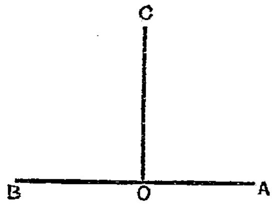
表角之號爲∠。

例如∠AOB。盖謂AOB角也。

註 時或以∧AOB或$A\hat{O}B$記之。

廻轉直線。如由一端之位置。以至他端正反向之位置。其間所成之角爲**平角**。平角之半爲**直角**。

例如AO與BO成一直線。則AOB爲平角又AOC角與BOC角相等。則AOC與BOC各爲直角。

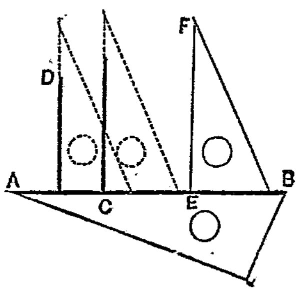


14. 垂線 一直線與他直線相交成直角。則兩直線互爲垂線。

例如前圖CO直線。爲AOB直線之垂線。又AOB直線。爲CO直線之垂線。

以三角板引垂線法

若欲由直線外之D點。或由直線中之C點作垂線。先取一三角板。沿AB直線以置之。再取他三角板。以其直角傍之一邊。置於AB上EF



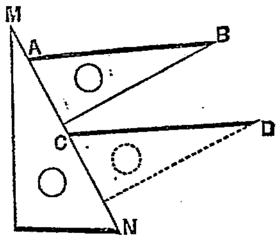
位置。然後將此三角板沿前三角板之邊滑動，遂由 EF 而移至 C 點。又至 D 點。如是以鉛筆沿其邊引垂線可也。

15.　平行直線　一平面中有二直線。自兩端各引長至無窮。不得相遇。亦不得相離者。爲平行直線。

例如兩直線 AB 及 CD。同在一平面中。自其兩端 B,D 或 A, C 各引長至無窮。不得相遇。亦不得相離者。則爲平行直線

平行直線略稱爲**平行線**。

以三角板引平行線法



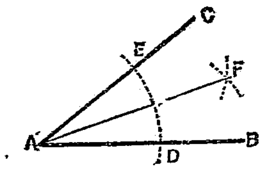
試取兩三角板。以其一之邊。沿他三角板之邊 MN 滑動。然後沿其邊引 AB,CD 平行直線。即成平行線。

16.　有已知之角。求平分法

例設 BAC 爲已知角。求平分之。先以 A 爲圓心。任作

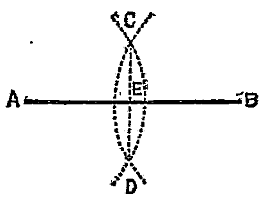
一半徑。(此半徑必須短於AC及AB兩線)以畫一弧線。(圓周之一部)與AC及AB兩邊遇于E,D兩點。

次以E,D爲圓心。任作相等半徑。(此半徑不得太長。又不能太短。以適合爲度)以畫兩弧線。此兩弧線相遇於F點。然後引AF直線。則BAC角被AF平分。

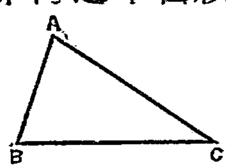


17. 有已知之直線。求平分法

例設AB爲已知之直線。以A爲圓心。任作一半徑。(此半徑必須短於AB全線。而長於其半)以畫一弧線。次以B爲圓心。亦作半徑。(此半徑必與前半徑等)更畫一弧。而與前弧相遇於C,D兩點。C,D間作一直線。與AB相交於E點。則AB線被CD平分於E。



18. 三角形 在三直線界內之平面形。爲三角形。凡三角形皆有三邊及三角。



例設ABC爲三角形。以ABC三角形或△ABC表之。而BC,CA,AB爲三邊。A,B,C爲三角。

問　題　貳

1. 角之兩邊引長之。與角之大小有關係否。
2. 求引兩直線。其相交所成之角互爲直角。
3. 次之諸問。試以二箸表示之
   1 平行形狀若何。2 相交形狀若何。
   3 非平行。又非相交。然引長之。則相交。其形狀若何。
   4 非平行。又非相交。即引長之。仍未相交。其形狀若何。
4. 試引一直線。與兩平行線相遇成直角。
5. 由三角形諸角之頂。至對邊引三垂線。

   註　此三垂線。同交於一點。此點稱三角形之垂心。
6. 由三角形諸角之頂。至對邊之中點(即對邊之平分點)作三直線。

   註　此三直線同交於一點。此點稱三角形之重心。

7. 於三角形各邊之中點。引三垂線。

註 此三垂線同交於一點。此點稱三角形之外心。

8. 三角形之諸角。各引直線平分之。

註 此三直線同交於一點。此點稱三角形之內心。

9. 引延三角形之二邊。求平分其兩外角之直線。及平分餘一角之直線。

註 此三直線必同交於一點。此點稱三角形之傍心。

10. 三角形有傍心幾何。

19. 命題 陳述一事項而命之爲題者爲命題

20. 公理 所舉以證明命題。而爲幾何學之本理者。爲公理。公理有二。一**普通公理**。一**幾何公理**。

21. 普通公理

(1) 全體大於其一部。

(2) 全體等於其各部之和。

(3) 物同等於他物。則互相等。

(4) 等物加等物。其和亦等。

(5) 等物減等物。其較亦等。

(6) 不等物加等物。其和不等。大物之和仍大。小物之和仍小。

(7) 不等物減等物。其較不等。大物之較仍大。小物之較仍小。

(8) 等物若干倍。或等物若干分。恒等。

22. 定理 舉已知之命題。按理證明他命題。而得其定者爲定理。已知之命題者。公理或既證明之定理是也。

23. 作圖題 依幾何學之規則。用器具作成圖形爲命題者曰作圖題。

凡幾何學所使用器具。不外規矩。

24. 系 由定理而推定。且因命題而得證明者。爲系。

記號及略語

∵	因	∠	角
∴	故	R.∠	直角
=	相等	△	三角形
≠	不等	∥	平行
>	大於	⊥	垂線
≯	不大於	≡	全等
<	小於	▱	平行四邊形
+	加	▭	矩形
−	減	□	正方形
∼	差		

幾何學教科書

第壹編

直　線

定　義

1. **點**　有位置而無大者爲點

2. **線**　有位置及長而無廣厚者爲線　線之兩端爲點。線之交處亦爲點。

3. **面**　有位置長廣而無厚者爲面。面之界爲線。面之交處亦爲線。

4. **立體**　位置及長廣厚均具者爲立體。立體之界爲面

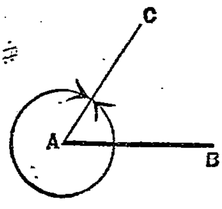
5. **直線**　任取線之一段。而任置其兩端於他段上。處處相合者爲直線　直線之兩端有限。或線之一段。稱**有限直線**。

有限直線若引長之。其引長之段。稱**延線**。

6. 平面 面內任取兩點。以直線聯之。此直線處處在面上者。爲平面。

7. 平面角 同自一點引兩直線。爲平面角。或單稱**角**。此點稱角之**頂**。而兩直線稱角之**邊**。

由角之頂引一直線。始令落於一邊之位置上。於其角內之平面廻轉。以至落於他一邊之位置上。則此直線僅於此角內廻轉。故角之大小。視此廻轉量之多少。而直線由一位置上。至他位置廻轉。其法有二。即方向不同。如由右而左。或由左而右。凡由一點引兩直線。

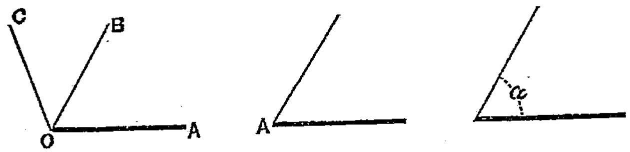


可作二角。而此二角之頂及邊。均爲公用。故稱**共軛角**。大者爲**優角**。小者爲**劣角**。

註　以後稱兩直線間之角。專指劣角

8.　角之示法　角之示法有三

甲圖　　乙圖　　丙圖



甲　凡一頂有數角者以三文字表之

例　角AOB,角BOC。或∠AOB,∠BOC〔甲圖〕但三文字中之第二文字。必付角頂。餘兩文字。付角之兩邊。

乙　凡一頂僅有一角者。可以一文字示之。

例　角A或∠A〔乙圖〕

丙　角內以一文字示之者。

例　a角〔丙圖〕

9.　隣角　同自一點引三直線。中央直線與左右直線所成之兩角。爲隣角。在左右直線間之角。乃兩隣角之和。

例　於上甲圖∠AOB,∠BOC爲隣角

且 $\angle AOB+\angle BOC=\angle AOC$

又 $\angle AOC-\angle COB=\angle AOB$

10. 平角 角之兩邊同在一直線上。而共軛角相等者。則各爲平角。

11. 直角 一直線垂於他直線上。而兩隣角相等。則各爲直角。

注意 是故一平角等於兩直角。而一直角爲平角之半。

12. 垂線 一直線與他直線相交成直角。則互爲垂線。垂線與直線之交點爲趾。

13. 銳角 凡小於直角者爲銳角。

14. 鈍角 凡大於直角而小於平角者。爲鈍角。

15. 餘角 凡兩角之和等於一直角。其兩角即互爲餘角。

16. 補角 凡兩角之和等於二直角。

其兩角即互爲補角。

幾何學公理

1 圖之形狀及大不變。而位置可變。

2 兩形相疊。處處恰合者。其大必等。

3 兩點之間。可引一直線聯之。而直線以一爲限。 由是

甲 任作一直線。其中任取一點。且任置於他直線中一點上。此兩直線可重合。

乙 二直線相會於一點。若此二直線非處處重合。其兩端任引延之。再不相會。

第一章

角

定理 I. 平角皆相等

解　設AB,AC乃以A爲頂所作平角之兩邊。DE,DF乃以D爲頂所作平角之兩邊。題言

平角BAC=平角EDF

證　AB,AC兩直線間之角爲平角。故BA,AC成BAC直線　〔定義10〕

同理ED,DF亦成EDF直線

然BAC直線上之A點。可令落於EDF直線上之D點。

〔公理3甲〕

但B與E同在D之一傍。C與F同在D之他傍。或B與F同在D之一傍。C與E同在D之他傍。

無論若何。BAC平角必與EDF平角重合。

既能重合。其大必等。　〔公理2〕

故　平角BAC=平角EDF

系1　直角皆相等。

2　於直線內一點。只可作其直線之一垂線。

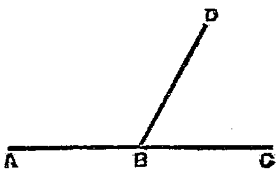
3　等角之餘角亦等。

4　等角之補角亦等。

定理 2.　一直線立於他直線上。兩隣角之和。等於兩直角。

解　設直線DB立於直線AC上。題言

$$\angle ABD+\angle DBC=2R.\angle$$



證　ABC為直線　〔原設〕

故　$\angle ABC$為平角　〔定義10〕

然由圖　$\angle ABD+\angle DBC=$平角$ABC\angle$

$=2R.\angle$　〔定義11注意〕

系　諸直線相會於一點。所作諸角之和。等于四直角。

問題 1.　兩直線相交作四角。若一角為直角。則餘三角俱為直角。

2. 兩直線相會於一點。所作兩角之和。等於四直角。

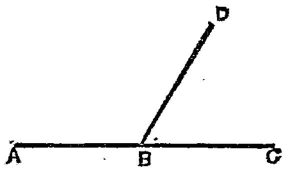
*3. 若兩隣角互爲補角。則平分兩角之二線間角。必爲直角。

定理 3. 一直線與他二直線相會於一點。其所作兩隣角之和。若等於二直角。則他兩直線必成一直線。

解 設直線DB與AB,BC兩直線相會於B點。而

$\angle DBA+\angle DBC=2R.\angle$

題言ABC成一直線



證 ∵ $\angle DBA+\angle DBC=2R.\angle$ 〔原設〕

由圖 $\angle DBA+\angle DBC=\angle ABC$

故 $\angle ABC=2R.\angle$ 〔公理(3)〕

∴ ABC成一直線 〔定義11〕

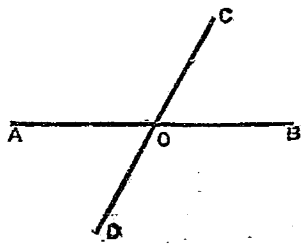
問題 4. 四直線相會於一點。若所作四角俱爲

直角。則四直線必成二直線。

5. 四直線OA,OB,OC,OD相會於一點。若$\angle AOB = \angle COD$及$\angle BOC = \angle DOA$。則AOC,BOD必成直線。

定義 17. 對頂角 二直線相交。其相對之角。爲對頂角。

定理 4. 二直線相交。對頂角必互相等。



解 設二直線AB,CD相交於O點。題言

$$\angle AOD = \angle BOC$$

及

$$\angle AOC = \angle BOD$$

證 ∵ COD爲直線。〔原設〕

故 $\angle AOD + \angle AOC = 2R.\angle$ 〔定理 2〕

而AOB亦爲直線。〔原設〕

故 $\angle BOC + \angle AOC = 2R.\angle$ 〔定理 2〕

∴ $\angle AOD + \angle AOC = \angle BOC + \angle AOC$ 〔公理(3)〕

∴ $\angle AOD = \angle BOC$

同理 $\angle AOC = \angle BOD$

問題 6. 五直線相會於一點。若所作之五角等。則各角爲直角五分之四

7. 有大小兩角。互爲補角。大角爲小角之二倍。問小角爲四直角之幾分之幾。

8. 兩隣角互爲餘角。求其兩二平分線所作之角幾何。

9. 兩直線相交作四角。其各平分直線必成二直線。且互相交成直角。

*10. 四直線 AO,BO,CO,DO 相會於 O 點。且 ∠AOB =∠COD。AO,CO 同在一直線上。而 BO, DO 在直線 AOC 之兩傍。則 BO 與 DO 成一直線。

11. 取紙一頁。斜方摺之。平分此紙之原補角之直線。必與摺邊成直角。

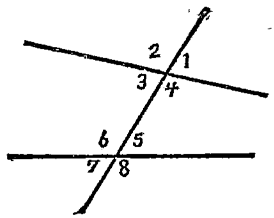
第二章

平行直線

定義 18. 平行直線 一平面中有二直線。自兩端各引長至無窮。不得相遇。亦不得相離者。爲平行直線。或稱**平行線**。

幾何學公理 4. 相交二直線。不能互與一線平行。

定義 19. 外角,內角,錯角,同位角。 一直線與他二直線相交。作八角。諸角互有關係。由是定其名稱爲次。



於圖

1,2,7,8 稱外角。

3,4,5,6 稱內角。

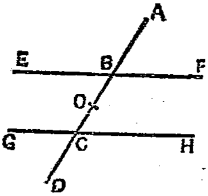
又 4 與 6,3 與 5 稱錯角。

1 與 5,2 與 6,3 與 7,4 與 8 稱同位角。

定理 5. 一直線與他二直線相交其

錯角相等。則二直線平行。

解　設直線ABCD與EF及GH相交。若錯$\angle EBC$=錯$\angle BCH$



題言　$EF \parallel GH$

證　BC之中點為O。以O為樞。令全圖形廻轉。及至BC線自相重合。

$\because$　　$OB = OC$　　〔原設〕

則B點可落於C點上。

又　$\because$　　$\angle EBC = \angle BCH$

則直線EB可落於直線CH上。

由是直線EBF與直線HCG。及直線GCH與直線FBE重合　　〔公理3乙〕

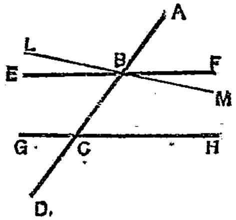
因此直線EB,GC各與相當同一直線之一段HC,FB重合。

若直線EBF,GCH之E,G端引延之而出會。則F,H端引延之亦不可不出會。若是。與幾何學公理3相背。故直線EBF,GCH。何端引延亦不相會。即EF,GH為平行線。

問題12.　一直線上引兩垂線。必互相平行。

定理 6. 一直線與兩平行線相交。其錯角相等。

解　設 EF 及 GH 爲兩平行線。若 ABCD 直線與之相交。題言



錯 $\angle$EBC＝錯 $\angle$BCH

證　若$\angle$EBC$\neq\angle$BCH

試引 LBM 直線過 B 點。而令

錯 $\angle$LBC＝錯 $\angle$BCH

則　LM $\parallel$ GH　〔定理 5〕

然　EF $\parallel$ GH　〔原設〕

即相交二直線 LM 及 EF 俱與 GH 平行。於理不合。

〔公理 4〕

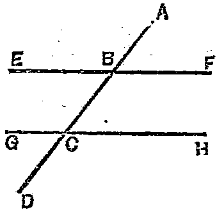
故　$\angle$EBC＝$\angle$BCH

問題 13. 一直線爲他直線之垂線。則其平行線亦爲他直線之垂線。

定理 7. 一直線與他二直線相交。若有兩錯角等。或兩同位角等。或同傍兩內角互爲補角。則一切錯角及同位角俱相等。而一切同傍內角亦必互爲補角。

解　設ABCD直線與EF,GH二直線相交。若

錯∠EBC=錯∠BCH



題言　錯∠FBC=錯∠BCG

同位∠ABF=同位∠BCH。等

及　∠CBF+∠BCH=2R.∠。等

證∵ ∠EBC=∠BCH　〔原設〕

故　此二角之補角亦相等　〔定理1系4〕

∴ ∠FBC=∠BCG

又　∵ ∠ABF=∠EBC　〔定理4〕

而　∠EBC=∠BCH　〔原設〕

∴ ∠ABF=∠BCH

同理可證他同位角俱等

次　∵ ∠EBC+∠FBC=2R.∠　〔定理2〕

而　∠EBC=∠BCH　〔原設〕

∴ ∠BCH+∠FBC=2R.∠

同理　∠EBC+∠BCG=2R.∠

其餘皆可以同理證明之。

系　由是一直線與兩平行線相交。同位角必相等。且同傍兩內角互為補角。

*問題 14. 二直線各與他二直線平行。則前二直

線間之角。各等於後二線間之角。

定理 8. 兩直線各與彼直線平行。則兩線必平行。

解 設直線A ∥ 直線×

又 直線B ∥ 直線×

題言 A ∥ B

證 若謂A交於B。則相交二直線A及B俱與第三直線×平行。於理不合 〔公理 4〕

故 A不與B相交

即 A ∥ B

問題 15. 一直線與他二直線相交。其同傍兩內角之和。與他傍兩內角之和等。則二直線必平行。

16. 有二人從一直道相伴而行。途中一人右轉若干度角直行歷幾何里後。復左轉與前同角度直行由是。兩人永不再會。其理何故。

17. 有平行直線若干。今以直線截其一。則他之平行線。亦被該直線所截。

18. 若干平行線。被他若干平行線所截。其所生諸角。若非相等。則必互爲補角

19. 二角AOB,COD同以O爲頂。且邊AO,BO各與相當邊CO,DO互爲垂線。若此兩角非相等。則互爲補角。

20. 有二直線各爲他二直線之垂線。則前二直線間角各與後二直線間角等。試由前題證明之。

第三章

三角形

定義20. 平面形　在一平面內以數線爲界之形。爲平面形。

21. 平面直線形　平面形以直線爲界者。稱平面直線形。或謂之**直線形**。又或稱**多角形**。而其界稱多角形之**邊**。其邊之和謂之**周圍**。

註　多角形諸角無優角者。稱凸多角形

22. 對角線　任於多角形之頂。引一直線。至他角頂。(必相隔一角)此直線爲對角線。

23. 面積　平面形界內之全形爲面積。

24. 內角　多角形兩鄰邊間之角爲

內角。

註 如稱多角形之角。即指其內角。

25. 外角 引長多角形之一邊。與其隣邊所作之角爲外角。

26. 正多角形 等邊等角之多角形。爲正多角形。

27. 全等形 一平面形置於他平面形上。若處處恰合者。此二平面形爲全等形。或謂之全相等。

28. 三角形 在三直線界內之形。爲三角形。

29. 底,頂角,頂點,底角 凡三角形可任立於一邊上。則此一邊謂之底。對於底之角爲頂角。角之頂爲頂點。底線兩端之角爲底角。

定理 9. 兩三角形若相當之兩邊。及

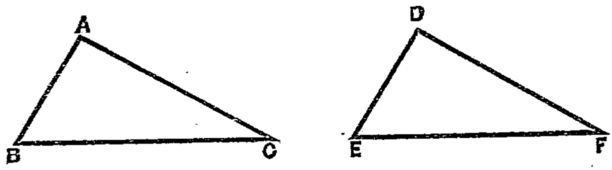
其夾角各等。則兩三角形全相等。而等角對等邊。〔全等三角形 I〕

解　設 $\triangle ABC, \triangle DEF$。若

$AB=DE, AC=DF, \angle A=\angle D$

題言　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

且　$\angle C=\angle F, \angle B=\angle E, BC=EF$



證　試取 $\triangle ABC$ 置於 $\triangle DEF$ 上。而令 A 點落於 D 點。且 AB 沿 DE。

$\because \quad \angle A=\angle D$　〔原設〕

故　AC 落於 DF 上

又　$\because \quad AB=DE$　〔原設〕

故　B 點落於 E 點

且　$\because \quad AC=DF$　〔原設〕

故　C 點落於 F 點

故　BC 與 EF 相合　〔公理 3〕

$\therefore \quad \triangle ABC \equiv \triangle DEF$　〔公理 2〕

由是　　　$\angle C=\angle F$

$\angle B=\angle E$

$BC=EF$

問題 21. 於BAC角之二等分直線中任取D點。若AB=AC則∠ADB=∠ADC。

22. 設有一角。其頂爲A。於其一邊中截取B點及D點。又於他邊中截取C點及E點。若AB等於AC。且AD等於AE。則BE必等於CD。

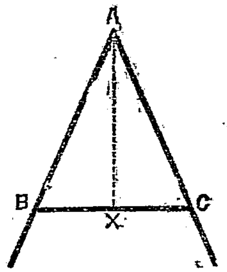
定義 30. 四邊形　在四直線界內之多角形。爲四邊形。或稱**四角形**。他如**五角形**或**五邊形**。**六角形**或**六邊形**等準此。

問題 23. 四邊形之兩隣邊相等。且對角線爲其間角之二等分線。則他兩邊亦等。

定義 31. 等腰三角形　三角形之兩邊相等。爲等腰三角形。或稱**二等邊三角形**。

等腰三角形。其兩等腰之交點爲**頂點**。對於頂點之邊爲**底**。

定理10. 等腰三角形。其兩底角相等。



解　設△ABC若

AB=AC

題言　∠ABC=∠ACB

證　平分∠BAC之直線爲A×。與BC相交於×點。故於△BA×,△CA×

$$\therefore \begin{cases} AB=AC & \text{〔原設〕} \\ A\times \text{公用} & \\ \angle BA\times=\angle CA\times & \text{〔本證〕} \end{cases}$$

故　△BA×≡△CA×　〔定理 9〕

而等角對等邊　∴ ∠ABC=∠ACB.

系 1.　等腰三角形之兩邊引長之。其底與延線所作之兩角亦等。

2.　三角形之三邊相等。其三角亦相等。

定義32. 等邊三角形　三角形之三邊相等。爲等邊三角形。

註　等邊三角形即正三角形。

問題 24. 自等腰三角形底之兩端。至對邊之中點引二直線。此二直線之長必等。

*25.　自等腰三角形之頂點。至底之中點引一直線。此直線爲底之垂線。而平分頂角。

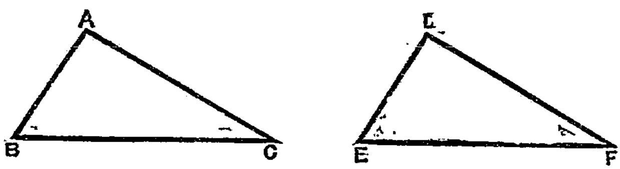
定理II.　兩三角形。其相當之二角及其夾邊各等。則兩三角形全相等。而等邊對等角。〔全等三角形II〕

解　設$\triangle ABC$,$\triangle DEF$若

$BC=EF, \angle B=\angle E, \angle C=\angle F$

題言　$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$

而　$\angle A=\angle D, AC=DF, AB=DE$



證　試取$\triangle ABC$置$\triangle DEF$上。令B點落於E點。且BC沿EF.

則　$\because$　$BC=EF$　〔原設〕

故　C點落於F點

$\because$　$\angle B=\angle E$　〔原設〕

故　BA線落於ED線上

故　BA與CA之交點A。必落於ED與FD之交點D

故　△ABC全與△DEF重合

$\therefore\quad \triangle ABC \equiv \triangle DEF$

而　$\angle A = \angle D$

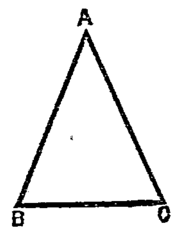
$AC = DF$

$AB = DE$

*問題 26. 等腰三角形。平分其底角之二直線。引長與對邊相遇。此二直線之長必等。

*27. 平分三角形一角之直線。若爲其對邊之垂線。則此三角形爲等腰。

定理12. 三角形之兩底角相等。其腰亦等。



解　設△ABC 若

$\angle B = \angle C$

題言　$AB = AC$

證　試反△ABC之背以置於原位置上。令C點落於B點。且CB線沿BC線。則B落於C之原位置。

$\because\quad \angle C = \angle B$　〔原設〕

故　CA線沿BA線

且　　BA必落於CA上。

故　　A點落於其原位置。

二直線AC,AB與二直線AB,AC重合

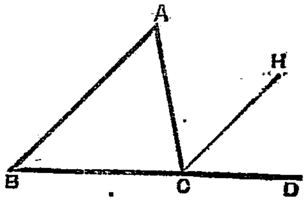
$\therefore$ AB=AC

系　三角形之三角相等。則爲等邊三角形。

問題 28. 等腰三角形。平分其兩底角之直線。引長之令相遇於一點。則此二直線與底線又成等腰三角形。

定義33. 內對角 凡三角形。非與外角隣合之二內角。爲外角之內對角。

定理13. 三角形之一外角。等於二內對角之和。而三角形三內角之和。等於二直角。



解　設△ABC。由其一邊BC引長之至D。

題言　$\angle ACD=\angle A+\angle B$

$\angle A+\angle B+\angle ACB=2R.\angle$

證　試由C引CH線與BA平行。

$\because$ $\angle HCD=\angle B$　　〔定理7系〕

及　　$\angle ACH=\angle A$　　〔定理 6〕

$\therefore\ \angle ACD=\angle A+\angle B$

又　上之二等量各加$\angle ACB$。則

$\angle ACD+\angle ACB=\angle A+\angle B+\angle ACB.$

然　　$\angle ACD+\angle ACB=2R.\angle.$　　〔定理 2〕

$\therefore\ \angle A+\angle B+\angle ACB=2R.\angle.$

系 1.　三角形內之角。不能有兩直角。鈍角亦然。

2.　三角形之一角爲直角。則他二角之和等於一直角。

3.　由直線外已知之一點。可引一垂線。而垂線以一爲限。

4.　任取三角形二角之和。必小於兩直角。

定義 34.　直角,鈍角,銳角三角形　三角形之有一直角者。爲直角三角形。三角形之有一鈍角者。爲鈍角三角形。三角形俱爲銳角者。爲銳角三角形。

35.　斜邊　直角三角形。其對直角之邊爲斜邊。

*問題 29. 試由次二法。證明三角形三角之和等於二直角。

(1) 過頂點引一直線。與底平行。

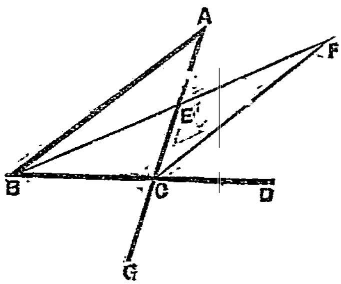
(2) 於底任取一點。與頂點聯合。

*30. 直角等腰三角形之底角。等於直角之半。

*31. 三角形之一角。等於他二角之和。則爲直角三角形。

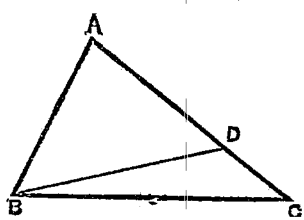
*32. 等邊三角形之一角。等於直角三分之二。

*33. 若何之直角三角形。由其直角之頂。引一直線至斜邊之中點。分本形爲二等腰三形。



34. 於圖。E爲ABC三角形之AC邊中點。而EF與BE相等。求證外角ACD大於內角A或B

定理14. 三角形內。其對大邊之角。大於對小邊之角。



解　設△ABC若

$AC>AB$

題言　$\angle ABC>\angle ACB$

證　試由AC截取AD。(=AB)而聯合BD。

則　$\because$　$AD=AB$　〔本證〕

故　$\angle ABD=\angle ADB$　〔定理10〕

然　$\angle ADB$乃$\triangle DBC$之外角

故　$\angle ADB>\angle ACB$　〔定理13〕

故又　$\angle ABD>\angle ACB$

更可知　$\angle ABC>\angle ACB$.

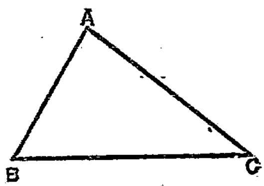
定理15. 三角形內。其對大角之邊。大於對小角之邊。

解　設$\triangle ABC$。若$\angle B>\angle C$

題言　$AC>AB$

證　試比較AC與AB之大

$AC<,=,>AB$



若謂　$AC<AB$

則必　$\angle B<\angle C$　與原設相背　〔定理14〕

若謂　$AC=AB$

則必　$\angle B=\angle C$　與原設相背　〔定理10〕

$\therefore$　$AC>AB$

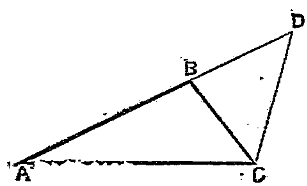
注意　此證法爲反證

問題 35. 自等腰三角形ABC之底BC。任引之至D點。AD以一直線聯之。則AD大於此三角形之各邊

*問題 36. 直角三角形之斜邊。大於他之二邊。

*37. 鈍角三角形。其對於鈍角之邊。大於他之二邊。

定理16. 任取三角形二邊之和。必大於其一邊。



解　設$\triangle ABC$

題言　$AB+BC>AC$

證　試引AB至D點。令

$BD=BC$

則　$\angle BCD=\angle BDC$　〔定理10〕

然　$\angle ACD>\angle BCD$

故　$\angle ACD>\angle ADC$

$\therefore\ AD>AC$　〔定理15〕

然　$AD=AB+BC$

$\therefore\ AB+BC>AC$

系　任取三角形二邊之較。必小於其一邊。

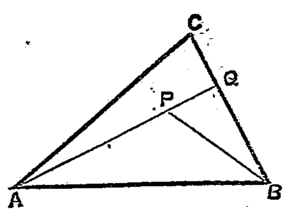
*問題38.　自三角形一角之頂引一直線至對邊之中點此直線小於他兩邊和之半。

定義36.　中線　自三角形一角之頂。至對邊中點引一直線稱爲中線。

註　凡三角形有三中線。

定理17.　自三角形內任取一點至一邊之兩端作二直線此二線之和小於三角形他二邊之和而其夾角大於他二邊之夾角。

解　試於△ABC內任取P點與AB邊之兩端作AP,BP二直線。



題言　I.　$AP+BP<AC+BC$

II.　$\angle APB>\angle ACB$

證　I.　試引長AP與BC相交於Q

則　$AC+QC>AQ$　〔定理16〕

此二不等量各加以BQ則

$$AC+BC>AQ+BQ$$

又 $PQ+BQ>BP$ 〔定理16〕

此二不等量各加以AP。則

$$AQ+BQ>AP+BP$$

然 $AC+BC>AQ+BQ$

更可知 $AC+BC>AP+BP$

II. $\angle APB$爲$\triangle PQB$之外角。故

$$\angle APB>\angle PQB$$ 〔定理13〕

而$\angle PQB$爲$\triangle ACQ$之外角。故

$$\angle PQB>\angle ACB$$ 〔定理13〕

更可知 $\angle APB>\angle ACB$

問題39. 於本定理之圖。以直線聯合C,P。且引長與底線相遇。證APB角大於C角。

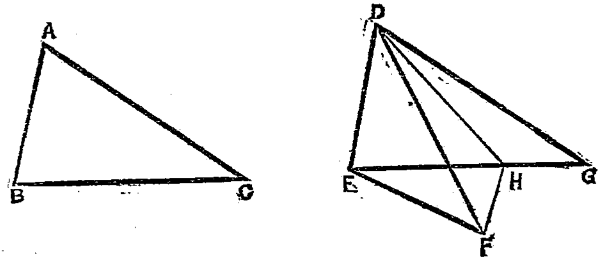
*40. 自三角形內任取一點。至各角之頂作三直線。此三線之和。小於三角形之周圍。

定理18. 兩三角形之兩邊等。而兩夾角不等。則餘一邊必不等。而對大角之邊大於對小角之邊。

解 設$\triangle ABC$,$\triangle DEF$若

$$AB=DE, AC=DF, \angle BAC>\angle EDF$$

題言　　　　BC>EF



證　試取△ABC置△DEF上。令A點落於D點。且AB沿DE。

則　　∵　　AB=DE　　〔原設〕

故　B點落於E點

而　　　　∠BAC>∠EDF　　〔原設〕

故AC直線必越DF而落於DG位置。而BC之位置必爲EG。

由是引DH直線平分∠FDG。而與EG相交於H。且聯合F,H兩點。

則　於△FDH,△GDH

∵ FD=GD　　〔原設〕

DH公用

∠FDH=∠GDH　　〔作圖〕

故　　$HF=HG$.

$\therefore\quad EH+HF=EG$

然　　$EH+HF>EF$　　〔定理16〕

$\therefore\quad EG$ 即 $BC>EF$

問題41.　若置三角形 ABC 於 DE 之左。其證法若何。

42.　ABC 爲三角形。其底 BC 之中點爲 D。AD 兩點以直線聯之。若 ADB 爲鈍角。則 AB 大於 AC。

定理19.　兩三角形之三邊俱等。則全相等。而等角對等邊。〔全等三角形III〕

解　設 $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ 若

$$AB=DE, BC=EF, CA=FD,$$

題言　　$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$,

而　　$\angle C=\angle F, \angle A=\angle D, \angle B=\angle E$,

證　試比較 $\angle A$ 及 $\angle D$ 之大

$$\angle A>,=,<\angle D$$

若謂　　$\angle A>$ 或 $<\angle D$

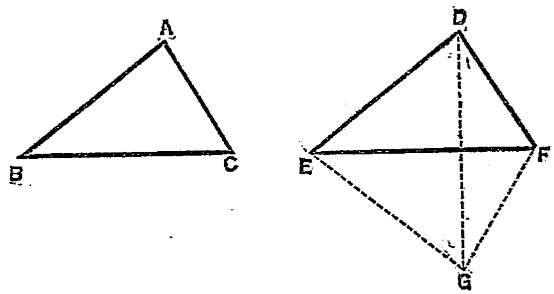
則必　　$BC>$ 或 $<EF$　　〔定理18〕

與原設相背

$\therefore\quad \angle A=\angle D,$

同理　$\angle B=\angle E,$

$\angle C=\angle F,$



別證　試取△ABC置B點於E點上。以BC沿EF

$\because\quad BC=EF$　〔原設〕

故C點落於F點。

而置兩三角形於EF之異傍。則A落於G位置。幷聯合DG。

則　$\because\quad EG=ED$　〔原設〕

故　$\angle EDG=\angle EGD$　〔定理10〕

又　$\because\quad FG=FD$　〔原設〕

故　$\angle FDG=\angle FGD$　〔定理10〕

$\therefore\quad$ 全$\angle EDF=$全$\angle EGF$

然　$\angle EGF=\angle BAC$　〔作圖〕

∴　$\angle BAC=\angle EDF$

由是　$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$　〔定理 9〕

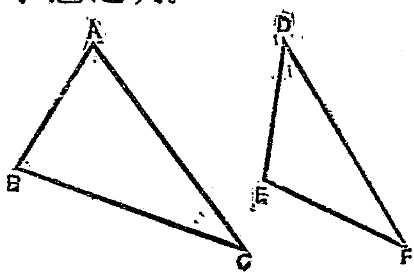
注意　DG 過底之端或過底之外。亦可以同理證明之。

*問題43.　於 ABC 三角形。若 AB=AC。而 D 爲 BC 之中點。則 ADB 角等於 ADC 角。〔試由本定理證明〕

*44.　四邊形之對邊兩兩相等。則對角亦兩兩相等。

*45.　ABC,DBC 兩等腰三角形。同以 BC 爲底。則過 A,D 之直線。必平分 BAC 角及 BDC 角。且平分 BC 底。而與之相交成直角。

定理20.　兩三角形。相當之兩邊各等。然餘一邊不等。則其對角亦不等。而對大邊之角大於對小邊之角。



解　設 $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ 爲 $AB=DE$, $AC=DF$, 然 $BC>EF$

題言　$\angle A>\angle D$

證　試比較 $\angle A$ 與 $\angle D$

$\angle A >, =, < \angle D$

若謂　$\angle A = \angle D$

則必　$BC = EF$　〔定理12〕

與原設相背

又謂　$\angle A < \angle D$

則必　$BC < EF$　〔定理18〕

與原設相背

$\therefore \quad \angle A > \angle D.$

問題46.　於ABC三角形。AB邊小於AC邊。而D為BC之中點。則 $\angle ADB$ 必為銳角。

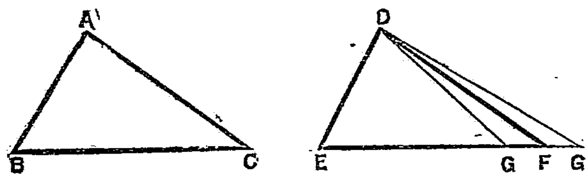
定理21. 兩三角形。若相當之兩角各等。且相當之二邊亦等。則全相等。而等邊對等角。〔全等三角形IV〕

解　設 $\triangle ABC, \triangle DEF$ 若

$\angle B = \angle E, \angle C = \angle F, AB = DE$

題言　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

而　$AC = DF, BC = EF, \angle A = \angle D$



證　試取△ABC置於△DEF上。而令A點落於D點。且AB沿DE

$\because$　AB=DE　〔原設〕

故　B點落於E點上。

$\because$　$\angle B=\angle E$　〔原設〕

故　BC落於EF上，

由是　C點必落於F點上。

若謂不落於F點。而落於F位置外之G點。

$\because$　$\angle C=\angle F$　〔原設〕

故　$\angle EGD=\angle EFD$

即　△GFD之外角等於其內對角。於理不合。

〔定理13〕

故　△ABC≡△DEF，

而　AC=DF，

BC=EF，

$\angle A=\angle D$，

*問題47. 任作一角。以直線平分之。又於線中任取一點。至角之二邊作垂線。此垂線必等。

定理22. 自直線外一點。至其線作垂線。又作數斜線。

I. 垂線較諸斜線最短

II. 若兩斜線與垂線所作之角等則彼此等。

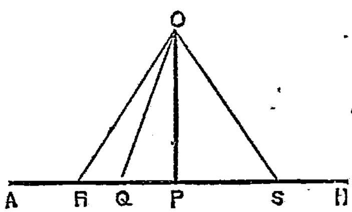
III. 若兩斜線與垂線所作之角不等則大者更長

解　設AB直線外之一點為O。OP為垂線。OQ為任意之斜線。OR,OS二斜線與OP所作之角等。

題言　I. $OP<OQ$

II. $OR=OS$

III. OR或OS $>OQ$



證 I.　三角形任取二角之和。必小於二直角。〔定理13〕

故　$\angle OPQ+\angle OQP<2R.\angle$,

$\because$　$\angle OPQ=R.\angle$,　〔原設〕

故於$\triangle OPQ$　$\angle OPQ>\angle OQP$,

$\therefore\quad OQ>OP,$ 〔定理15〕

證II. 於$\triangle POR,\triangle POS$

$\because\begin{cases}\angle OPR=\angle OPS,(=R.\angle) & 〔原設〕\\ \angle POR=\angle POS, & 〔原設〕\\ \quad PO\text{公用.}\end{cases}$

$\therefore\quad \triangle POR\equiv\triangle POS,$ 〔定理11〕

$\therefore\quad OR=OS.$

證III. $\angle OQR$為$\triangle OPQ$之外角。

故 $\angle OQR>\angle OPQ$ 〔定理13〕

$\because\quad \angle OPQ=R.\angle$ 〔原設〕

$\therefore\quad \angle OQR=$鈍角

$\therefore\quad \angle ORQ=$銳角 〔定理13系1〕

由是 $\angle OQR>\angle ORQ$

$\therefore\quad OR>OQ$ 〔定理15〕

系 自直線外一點。可引二等長直線於其上。然以二爲限。而此二等長直線間角。被垂線平分。

定義37. 距離 自一點至直線所作之垂線。爲此點至直線之距離。

問題48. 由本定理。證明直角三角形之三邊。以

斜邊最大。

*49. 於ABC三角形。AB=AC。D乃過直線BC中之一點。若D在B,C之間。則AB>AD。若D不在B,C之間。則AB<AD

定理23. 兩三角形。其相當之兩邊各等。對等邊之相當一角又等。則對等邊之他一角亦等。而兩三角形全等。若他一角不等。則必互爲補角。〔三角形兩意之例〕

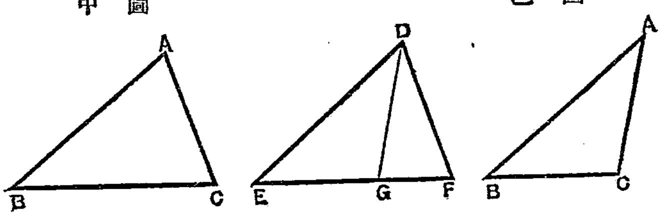
解　設$\triangle ABC, \triangle DEF$ 若

$AB=DE, AC=DF, \angle B=\angle E.$

題言　$\angle C=\angle F$ 而 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

或　$\angle C+\angle F=2R.\angle$

甲　圖　　　　　　乙　圖



證　按本題之理。腰間角A等於∠D。或不等於∠D

若如甲圖。則　$\angle A=\angle D$

由　定理 9　　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

$\therefore \quad \angle C = \angle F$

若如乙圖。則　$\angle A \neq \angle D$

置A點於D點上。且AB沿DE。二三角形相疊。

$\because \quad AB = DE$　〔原設〕

故　B點落於E點。

又　$\because \quad \angle B = \angle E$　〔原設〕

故　直線BC重合於EF上。

由是　C必落於EF線中之G點。或落於其延線內。

又　$\because \quad AC = DF$　〔原設〕

故　$DG = DF,$

$\therefore \quad \angle DFE = \angle DGF,$

然　$\angle DGF + \angle DGE = 2R.\angle,$

即　$\angle F + \angle C = 2R.\angle,$

系 1.　於兩三角形ABC,DEF

$AB = DE, AC = DF, \angle B = \angle E,$

且　$\angle B >, = R.\angle$.　則　$\angle E >, = R.\angle,$

故　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

2.　於兩三角形ABC,DEF

$AB = DE, AC = DF, \angle B = \angle E,$

且　$\angle C>,<R.\angle$ 及 $\angle F>,<R.\angle$.或 $\angle C=R.\angle$

則　$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$

3.　於兩三角形ABC,DEF

$AB=DE,AC=DF,\angle B=\angle E,$

且　$AB\neq AC$　則　$\triangle ABC\equiv\triangle DEF.$

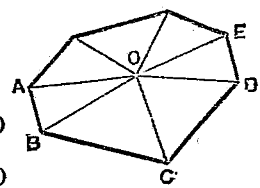
*問題50.　三角形ABC內之點P。距三邊均等。則AP,BP,CP三直線。平分A,B,C三角。

定理24. 凸多角形總內角之和。等於邊數二倍之直角。而少四直角。

解　任作ABCD……凸多角形。其邊數爲n。

題言　$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\cdots$

$=2nR.\angle-4R.\angle.$



證　試於多角形內任取O點。而聯合OA,OB,OC,OD,……。即O爲公用之頂點。而此多角形成爲n個(邊數)三角形。

∵　三角形內角之和$=2R.\angle$,　〔定理13〕

故　總三角形總內角之和$=2nR.\angle$,

∴　總三角形總內角之和

=多角形總內角之和+O點諸角

=多角形總內角之和+4R.∠.〔定理 2 系〕

∴　多角形總內角之和+4R.∠=2nR.∠,

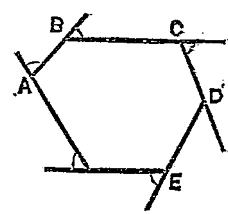
即　多角形總內角之和=2nR.∠−4R.∠

系　凸多角形總外角之和。等於四直角。

解　任作ABCD⋯⋯凸多角形。其外角之和=4R.∠.

證　一內角與其隣合外角之和=2R.∠.〔定理 2〕

∴　總內角之和加總外角之和=2nR.∠



然　總內角之和+4R.∠=2nR.∠　〔定理 24〕

故　總外角之和=4R.∠.

*問題 51.　四邊形總內角之和。等於四直角。

52.　等邊三角形之外角。等於等角六角形之內角。

53.　任由多角形一角之頂。引對角線。求證定理 24。

54.　由多角形平面中一點。引數直線與各邊平行。求證定理 24 系。

問題 55.　於ABCD四邊形。ABC角等於DCB角。且

AB等於CD。則AC必等於BD。

56. 於四邊形相對二邊之中點。以直線聯之。若為兩邊之垂線。則他二邊必相等。

*問題57. 三角形ABC內任取一點O。OA+OB+OC大於三邊和之半。

*58. 於三角形各邊之中點。作三垂線。必相交於一點。

定義38. 外心 於三角形各邊之中點作三垂線。其交點為外心。

*問題58. 三角形之三角。以直線平分之。必相交於一點。

定義39. 內心 平分三角形三角之直線。其交點為內心。

*問題60. 平分三角形內角之直線。與他二內角隣合之外角二平分線。必相交於一點。

定義40. 傍心 平分三角形一內角之直線。與平分他二內角之隣合外角直線相遇。其交點為傍心。

註　三角形有三傍心。

問題61.　四邊形四邊之和大於兩對角線之和。而小於其和之二倍。

*62.　A,B兩點同在直線CD之一傍。P爲CD內之一點。由A,B各至P作直線若∠APD=∠BPC。則AP+BP<AQ+BQ

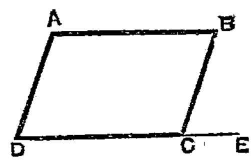
第四章

平行四邊形

定義41. 平行四邊形 四邊形之對邊。兩兩平行者。爲平行四邊形。

42. 梯形 四邊形僅有一對邊平行者。爲梯形。

定理25. 平行四邊形之隣合二角必互爲補角。且相對二角必等。



解　設$\square$ABCD

題言　$\angle ABC+\angle BCD=2R.\angle$,

$\angle ABC=\angle ADC$.

證　試引延DC至E點。

$\because$　AB $\parallel$ DC　〔原設〕

BC與此二平行線相交。故

$\angle ABC+\angle BCD=2R.\angle$,　〔定理7系〕

而　$\because$　$\angle ABC=\angle BCE$　〔定理6〕

又　AD $\parallel$ BC　〔原設〕

DC與此二平行線相交。故

$\angle BCE=\angle ADC$, 〔定理 7 系〕

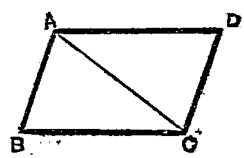
$\therefore\quad \angle ABC=\angle ADC$.

系　平行四邊形。若一角爲直角。則餘三角皆爲直角。

定義43. 矩形　平行四邊形之各角均爲直角。謂之矩形。

*問題63.　矩形之兩對角線必等。

定理26. 平行四邊形之對邊兩兩相等。且對角線分本形爲兩全等三角形。



解　設▱ABCD

題言　$AB=DC$,

$AD=BC$,

且　$\triangle ABC\equiv\triangle CDA$.

證　試聯合AC兩點,

則　$\because\quad AB\parallel DC$ 〔原設〕

AC與此二平行線相交。故

錯$\angle BAC=$錯$\angle DCA$. 〔定理 6〕

而　$\because\quad AD\parallel BC$ 〔原設〕

故 錯$\angle BCA=$錯$\angle DAC$ 〔定理 6〕

故 於$\triangle ABC, \triangle CDA$

$$\because \begin{cases} \angle BAC=\angle DCA \\ \angle BCA=\angle DAC \\ \text{夾邊} AC \text{公用} \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$ 〔定理 11〕

而 $AB=DC$,

$AD=BC$

系 平行四邊形之隣合二邊相等,則各邊相等

定義44. 菱形 平行四邊形之各邊相等,爲菱形。

45. 正方形 矩形之各邊相等,爲正方形。

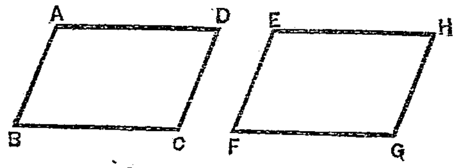
*問題64. 菱形之對角線,必平分菱形之角且相交成直角。

定理27. 兩平行四邊形,其隣合兩邊及兩邊間之角等,則兩平行四邊形全等。

解 設▱ABCD,▱EFGH.

$AB=EF, BC=FG, \angle B=\angle F$*

題言 $\square ABCD \equiv \square EFGH$.



證 試置▱ABCD於▱EFGH上。令B點落於F點上。BC邊落於FG邊上。

∵ $BC=FG$ 〔原設〕

故 C點必落於G點上。

又 ∵ $\angle ABC=\angle EFG$ 〔原設〕

故 BA必沿FE而重合

又 ∵ $BA=FE$ 〔原設〕

故 A點必落於E點上。

又 ∵ $AD \parallel BC, EH \parallel FG$. 〔原設〕

故 AD必沿EH而重合 〔公理4〕

同理 CD必沿GH而重合

故 D點必落於H點上

∴ $\square ABCD \equiv \square EFGH$

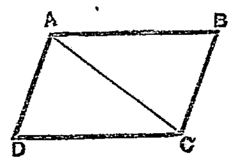
系 兩矩形之隣合兩邊互相等，則全相等。

二正方形之一邊等。則全相等。

注意 * 之二角。若以 ∠C=∠G 代之。則生差誤。

問題65. 二四邊形之隣合三邊俱相等。且相等三邊間之兩角亦等。試證其全相等。

定理28. 四邊形之相對兩邊等且平行。則本形爲平行四邊形。



假 四邊形ABCD內

AB=CD 且 AB ∥ CD

題言 AD ∥ BC

證 試以直線聯合A,C兩點

∵ AB ∥ BC 〔原設〕

故 ∠BAC=∠DCA 〔定理 6〕

故 於△BAC,△DCA

∵ $\begin{cases} AB=CD, & 〔原設〕\\ AC公用 & \\ 夾∠BAC=夾∠DCA, & 〔本證〕\end{cases}$

∴ △BAC≡△DCA, 〔定理 9〕

由是 ∠BCA=∠DAC,

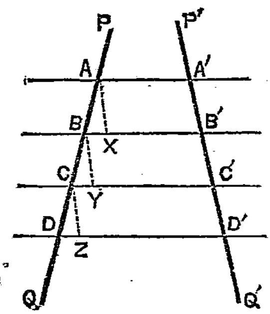
∴ AD ∥ BC 〔定理 5〕

*問題66. 四邊形之二對角線互相平分。則本形爲平行四邊形。

定理29. 若干平行線交於一直線。所截取各段俱相等。則此諸平行線任交於他直線。其所截取各段。亦俱相等。

解　設AA',BB',CC',DD'等爲平行線。$PQ,P'Q'$兩直線與之相交。若

$AB=BC=CD=$等



題言　$A'B'=B'C'=C'D'=$等

證　若　$P'Q' \parallel PQ$

則　$A'B'=AB, B'C'=BC,$等

〔定理26〕

若是。則　$A'B'=B'C'=C'D'=$等甚明。

若　$P'Q'$不與PQ平行。則由A,B,C點引AX,BY,CZ與$P'Q'$平行。且與BB',CC',DD'等相交於X,Y,Z諸點。

則　$AX=A'B', BY=B'C'$　〔定理26〕

若是。則於　$\triangle ABX, \triangle BCY$

$$\therefore \begin{cases} AB=BC & \text{〔原設〕} \\ \angle BAX=\angle CBY & \text{〔定理7系〕} \\ \angle ABX=\angle BCY & \end{cases}$$

則　　$AX=BY$　　〔定理11〕

故　　$A'B'=B'C'$

同理　　$A'B'=B'C'=C'D'=$等

系 1. 由三角形一邊之中點。引一直線與底平行。此直線必過他邊之中點。

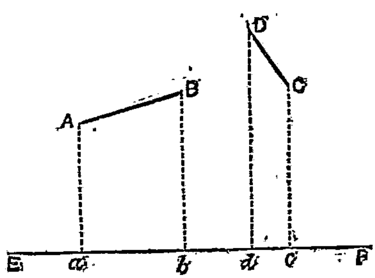
2. 三角形兩邊之中點。以直線聯合之。必與底平行。

*問題 67. 三角形兩邊之中點。以直線聯合之。此直線等於他邊之半。

定義 46. 正對影　一直線外有他直線。由他直線之兩端至其直線作二垂線。其兩趾之距離。爲正射影。

例　Aa,Bb,Cc,Dd 各爲 EF 之垂線。則 EF 上 AB,CD 之正射影各爲 ab,cd。

註　凡正射影本書略稱爲射影



問題 68. 凡平行直線。其長相等。則在他之任意

直線上。其射影亦等。

69. 凡平行線。在他直線上所作之射影若相等。則此等直線之長必等。

70. 凡等長直線。在他直線上所作之射影若相等。則此諸直線與他直線所成之角亦必相等。

---

*問題 71. 凡平行四邊形之兩對角線。皆互相等。

*問題 72. 四邊形之對邊。若兩兩相等。則本形必爲平行四邊形。

*73. 於三角形 ABC 之三邊上。作三個等邊三角形。爲 BCP, CAQ, ABR。求證 AP, BQ, CR 俱相等。

*74. 自三角形各角之頂。至對邊引三垂線。必同交於一點。

定義 74. 垂心 自三角形各角之頂至對邊引三垂線。其交點爲垂心。

*75. 三角形之三中線。必同交於一點。

定義 48. 心重 三角形之三中線交點。謂之重心。

第五章

軌跡

定義49. **軌跡**　線或線之一部或線之一群。其中所有各點。悉合於一定之規則。如其他點。皆於此規則不合。則此線或線之一部或線之一群者。稱爲合於此規則之點之軌跡。

註　本書所論。僅在平面軌跡。

欲確定線或線之一部或線之一群 A 爲點之軌跡。而合於一定規則 X 與否。則必依以下二定理證明。甚適合也。

I　若點在線或線之一部或線之一群 A 中。則爲合於 X 規則。

II　若點不在線或線之一部或線之一群 A 中。則不合於 X 規則。

I 定理可以下數語代之。

若點非合於X規則。必不在線或線之一部或線之一羣A中。

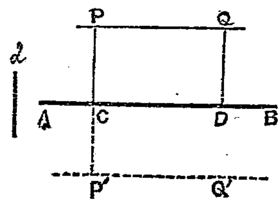
II定理可以下數語代之。

若點爲合於X規則。必在線或線之一部或線之一羣A中。

軌跡 I.　已知之直線。其已知之距離內所有點之軌跡。即於直線兩傍在已知之距離內兩平行線。

解　設AB爲已知之直線。d爲距離。

求由AB至d距離內所有點之軌跡。



〔I〕　由AB中任取C點。引AB垂線PC。且令PC=d。又過P點引PQ線與AB平行。

由是。於直線PQ中任取Q點。由Q引QD爲AB垂線。則PQDC成距形。故

$$QD=PC=d,$$

若是。則PQ中各點。與AB相距離爲d.

〔II〕　若Q乃由AB至d距離內之一點。則

$$QD=d,$$

而　$\because$　$PC=d$,　〔原設〕

$\therefore$　$QD=PC$

而PC,QD俱爲AB垂線。故

$QD \parallel PC$

$\therefore$　$PQ \parallel AB$　〔定理28〕

由是Q在過P而與AB平行之直線內。

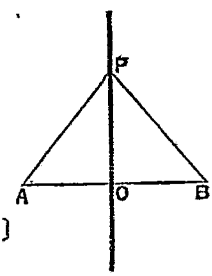
軌跡　故由AB至d距離內所有點之軌跡爲PQ。

同理在AB他傍之d距離與AB平行之P′Q′線。亦由AB至d距離內所有點之軌跡。

由是。所求之軌跡爲PQ,P′Q′兩平行線。

軌跡 2.　自已知之兩點。作其等距離點之軌跡。即平分此兩點間直線之垂線。

解　設A,B爲已知兩點。求自A,B等距離點之軌跡。



〔I〕　試引AB之垂線過中點O。任取垂線中之P點。聯合PA,PB。

則於　$\triangle APO, \triangle BPO$

$\because \begin{cases} AO=BO & \text{〔作圖〕} \\ PO\text{公用} \end{cases}$

$\left\{\angle AOP=\angle BOP[=R.\angle]\right.$ 〔作圖〕

$\therefore\quad AP=BP$ 〔定理9〕

由是。平分AB之垂線內諸點。均去A及B爲等距離。

〔II〕 若P點與A,B距離等。則AP=BP。O爲AB之中點。聯合PO。

則於 $\triangle AOP,\triangle BOP$

$\because\left\{\begin{array}{l}AO=BO\\ PO\text{公用}\\ AP=BP\end{array}\right.$ 〔原設〕

$\therefore\quad\angle AOP=\angle BOP$ 〔定理19〕

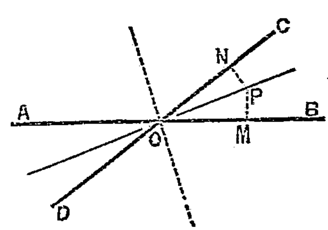
$\therefore\quad PO\perp AB$ 〔定義11,12〕

由是。與A及B等距離各點。在平分AB之垂線內。

軌跡 故所求之軌跡。爲平分AB之垂線。

軌跡2. 自相交直線。作其等距離點之軌跡。即平分兩交角之二直線。

解 設AB,CD之交點爲O。求AB,CD之等距離點之軌跡。



〔1〕 於平分∠COB之直線內任取P點。引AB,C

D之垂線爲PM,PN。

則於　　$\triangle POM, \triangle PON$

$$\because \begin{cases} \angle POM = \angle PON \\ \angle PMO = \angle PNO & \text{〔原設〕} \\ OP\text{公用} \end{cases}$$

$\therefore$　PM=PN　　〔定理21〕

由是。平分$\angle COB$之直線內諸點。去AB及CD爲等距離。

同理。AB,CD間任取一角平分之。其直線中諸點。去AB及CD亦爲等距離。

〔II〕若P爲AB,CD之等距離點。聯合PO。

則於　　$\triangle OPM, \triangle OPN$

$$\because \begin{cases} PM = PN & \text{〔原設〕} \\ OP\text{公用} \\ \angle PMO = \angle PNO & \text{〔原設〕} \end{cases}$$

$\therefore$　$\angle POM = \angle PON$　　〔定理23系1〕

由是。P在平分$\angle COB$之直線內。

軌跡　故所求之軌跡。爲平分AB,CD間角之二直線。

*問題76.　自已知之一點。引直線至他已知直線上。求所引直線中點之軌跡

77. 有已知之直線。置其兩端於互交成直角之二直線上。而滑動之。求其中點之軌跡。

78. 矩形之隣合二邊所乘之角互爲補角。求其角頂點之軌跡。

軌跡之交 合於X規則之點之軌跡爲A。合於Y規則之點之軌跡爲B。則合於X及Y規則之點。即A,B之交點。

例 非同在一直線內。有已知之三點A,B,C。由此三點至等距離之點唯一。

證 由A,B等距離點之軌跡。即平分AB而與之成直角之直線PQ　〔軌跡 2〕

同理,由B,C等距離點之軌跡。即平分BC而與之成直角之直線RS。

故PQ與RS之交點。即由A,B,C等距離點。而二直線之交點唯一。　〔公理 3〕

*問題79. 由已知之二點至已知之一直線內。其等距離之點唯一。

80. 由已知之一直線。於其相交直線上。求其已知之距離之點。

81.　由已知之二直線至他直線上其等距離之點若干(此三直線可相交成三角形)

*82.　三直線非同交於一點只二直線相交則由此等三直線至等距離之點唯四

第二編

圓

第一章

性質

定義 1. **圓** 以圓周爲界之平面形爲圓。由形內一定點引數直線至圓周。諸線皆等。此定點爲**圓心**。

2. **半徑** 以圓心及周爲界之直線爲半徑。

3. **徑** 過圓心以周爲界之直線。爲徑。

4. **弧** 圓周之一段爲弧。

5. **弦** 圓周中任取兩點。以直線聯之爲弦。弦可分圓周爲兩不等分。其

大者爲優弧。小者爲劣弧。而二弧互爲共軛。

6. 弓形　以弦與弧爲界之平面形爲弓形。所用爲界之弧若爲優弧。則稱優弓形。若爲劣弧。則稱劣弓形。

7. 圓心角　兩半徑所作之角。爲圓心角。乘優弧者爲優角。乘劣弧者爲劣角。而二角互爲共軛。

8. 圓心角形　以兩半徑及弧爲界之平面形爲圓心角形。而此兩半徑間之角。爲圓心角形之角。

定義 9. 同心圓　同以一點爲心之諸圓。爲同心圓。

10. 點對稱　直線之兩端。對於其線之中心。爲對稱。

圓形內諸點。對於一定點爲對稱時。則

此圓形對於該定點爲對稱。或謂之對於該定點爲點對稱。而此定點爲對稱之心。

故圓對於其中心爲對稱。而圓心爲對稱之心。

以下所示圓之性質。即由圓之定義推知。

(1) 一圓僅有一心。

(2) 圓之半徑爲r。由圓心至某點p。其距離爲d。則

$$d<,=,>r$$

恆視p點在圓內。或圓周。或圓外而定。

(3) p在圓內或圓周或圓外者。由是

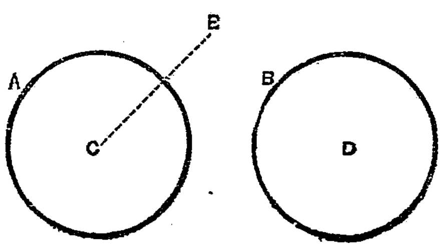
$$d<,=,>r.$$

定理 I. 兩圓之半徑等。必全相等。

解 設A,B兩圓之半徑等。

題言 A=B.

證 二圓之心爲C及D。



置B圓於A圓上。而令C點落於D點。復於二圓外任取E點。而聯合CE。

因同圓半徑皆相等。故二圓半徑悉等。

故二圓周與CE相交同在一點。

同理。由B引延諸直線。若與兩圓周相交。皆同在一點。

故二圓相合。　　∴ A≡B.

系 1.　二全等圓相疊。以二圓心爲樞。任何廻轉。二圓恒相合。

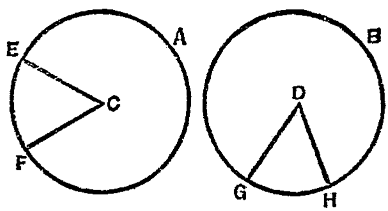
系 2.　兩圓周相交。必非同心。

問題 1.　凡平行四邊形。對於其對角線之交點爲點對稱。

定理 2.　同圓或等圓內之圓心角等。所乘之弧必等。若圓心角不等。則圓心角大者。其所乘之弧必大。

解　設圓A＝圓B.而圓心爲C,D.

題言　弧EF>,=,<弧GH者,因∠ECF>,=,<∠GDH而定.



證　試取B圓

置於A圓上。令D點落於C點。則二圓全相合[定理1]
又以二圓心爲樞。廻轉B圓。令DG重合於CE上。而二圓仍相合。〔定理1系1〕
G點落於E點。

則　弧EF>,=,<弧GH

因H點越F點外。或在F上。或在E及F之間而定。

即因　∠ECF>,=,<∠GDH　而定。

系1. 同圓或等圓內之圓心角等。則圓心角形亦等。圓心角大。則圓心角形亦大。

2. 圓徑必分圓爲二平分。兩圓徑若相交成直角。則分圓爲四平分。

問題2. 四邊形若爲其對角線交點之點對稱則本形必爲平行四邊形。

定義11. 半圓及四分圓　圓爲徑所分二部。各稱爲半圓。爲垂直二徑所分之四部。各稱爲四分圓。

12. 線對稱　以直線分圖形爲二等分。沿直線摺此分於他分上。若處處恰合

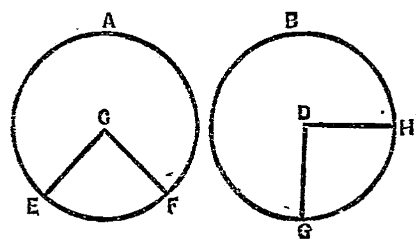
者。則本形對於此直線爲對稱。而直線爲對稱之軸。

故圓對於諸徑爲對稱。

問題 3. 等圓之中心角。此角爲彼角之二倍。則所乘之弧。此弧亦爲彼弧之二倍。

定理 3. 同圓或等圓內之弧等。所乘之中心角必等。若弧不等。則弧之大者。其所乘之中心角亦大。

解　設圓A=圓B,其中心爲C,D。



題言　∠ECF>,=,<∠GDH

因　弧EF>,=,<弧GH而定

證　弧EF>弧GH。

則　∠ECF=,<∠GDH必不能。

何則。因　弧EF=,<弧GH然後可。〔定理 2〕

今　弧EF>弧GH,

∴　∠ECF>∠GDH.

餘可依同理證明。

系　同圓或等圓內之等圓心角形。所成之角必等。若不等圓心角形。則圓心角形之大者。所成之角亦大。

問題 4. 共軛弧若等。則圓之弧如何。

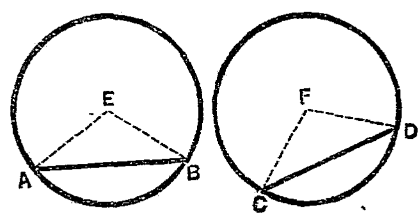
5. 圓爲弓形。亦爲圓心角形。若何。

6. 正方形之一對角線內任取一点。引二直線過之。令與邊平行。其交邊之四點。必在以二對角線之交點爲心之圓周上。

第二章

弦

定理 4. 同圓或等圓內之弧等。所乘之弦必等。若弧不等。則弧之大者。其所乘之弦必大。



解 I. 於二等圓內。設

弧 AB＝弧CD

題言 弦AB＝弦CD

證 I 命二等圓之心爲E,F。聯合 AE,BE,CF,DF。

$\because$ 弧 AB＝弧 CD 〔原設〕

故 $\angle AEB=\angle CFD$ 〔定理 3〕

而於 $\triangle AEB, \triangle CFD$

$$\because \left\{\begin{array}{l} AE=CF \\ BE=DF \\ \angle AEB=\angle CFD \end{array}\right.$$ 〔原設〕

$\therefore$ $AB=CD$ 〔1. 定理 9〕

解 II. 又 設劣弧 AB > 劣弧 CD

題言 弦 AB > 弦 CD

證 II. ∵ 劣弧 AB > 劣弧 CD 〔原設〕

故 $\angle AEB > \angle CFD$ 〔定理 3〕

而於 $\triangle AEB, \triangle CFD$

$$\because \left\{ \begin{array}{l} AE = CE \\ BE = DF \\ \angle AEB > \angle CFD \end{array} \right.$$ 〔原設〕

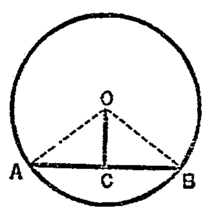
∴ 底 AB > 底 CD 〔1. 定理 18〕

系 同圓或等圓內之弦等。所乘之弧必等。若弦不等。則弦之大者。其所乘之弧亦大。

注意 此系可如定理 3 證明之。

定理 5. 由圓心至弦之中點引直線。即爲此弦之垂線。

解 由圓心 O 引直線 OC 至弦 AB 中點 C.



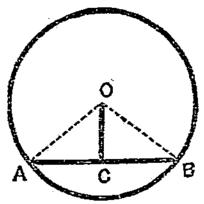
題言 $OC \perp AB$

證 試聯合 OA, OB。因 $\triangle OAC$, $\triangle OBC$ 之三邊兩兩相等。

$\therefore\quad \angle OCA=\angle OCB$　〔1.定理19〕

$\therefore\quad CO\perp AB$　〔1.定義11,12〕

定理6. 由圓心至弦作垂線。即必平分其弦。



解　由圓心O引垂線OC至弦AB。

題言　$AC=BC$

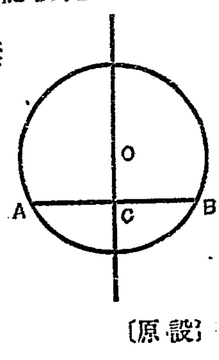
證　於　$\triangle ACO,\triangle BCO$

$$\because\left\{\begin{array}{l}AO=BO\\ OC\text{公用}\\ \angle OCA=\angle OCB[=R.\angle]\end{array}\right.$$　〔原設〕

$\therefore\quad AC=BC$　〔1.定理23系1〕

問題7.　不過圓心之二弦。不能彼此平分。

定理7. 過弦中點之垂線。必過圓心。



解　設弦之中點爲C。

若　$OC\perp AB$

題言　OC必過圓心

證　CO乃平分AB之垂線，　〔原設〕

故　CO乃由A,B等距離點之軌跡。　　[1.軌跡2]

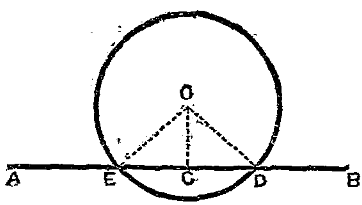
而　圓心亦與A,B等距離.

故　CO必過圓心。

系　作圓過已知之二點,其圓心之軌跡,即平分二點間直線之垂線。

*問題8.　平行諸弦中點之軌跡,即垂直於諸弦之徑.

定理8.　凡直線與圓周相交,祇在兩點。



解　設AB爲直線,O爲圓心,題言AB與圓周相交,祇在兩點。

證　試由圓心O引OC爲AB垂線,直線與圓交點爲D,又聯合OD。

次由O點引OE線,令∠EOC=∠DOC,而OE與AB交於E。

因OE,OD乃與垂線OC成等角之斜線,故

$$OE=OD \qquad [1.定理22]$$

故E點在圓周上.

而由O至AB再引他線,則必比OD大,或較OD小,即A

B與圓周交點在D及E。

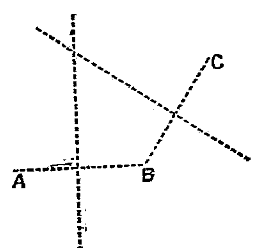
系 圓之弦全在圓內。

定理 9. 不在一直線內任取三點必可作一圓周過之其圓周以一為限。

解 設A,B,C三點不在一直線上。

題言過A,B,C三點僅有一圓。

證 過A及B之圓其圓心之軌跡即平分AB之垂線。 〔定理7系〕



又過B及C之圓其圓心之軌跡。亦平分BC之垂線。

故過A,B,C圓之心乃此二直線之交點。

然此二直線必相交何故夫此二直線不相交必此二直線平行而後可若是則A,B,C為一直線矣與原設不合。

而此二直線僅交於一點。 〔公理3〕

故過A,B,C祗有一圓。

系 1. 兩圓同過三點必全相合。

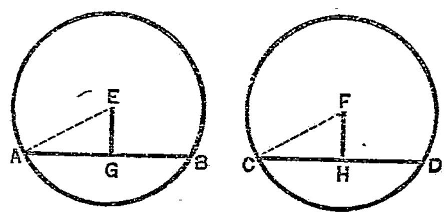
2. 兩圓祇可於兩點相交若云於三點相交則

兩圓全相合。

3. 自圓內一點至圓周引二直線。若爲等長。此點即圓心。

問題 9. 二圓必無公用弧。試證明之。

定理10. 同圓或等圓內之等弦。距圓心之遠近必等。不等弦其小者遠。而大者近。



解 I. 設二等圓之心爲E及F。而

弦AB=弦CD

若由E,F引EG,FH爲AB,CD之垂線, 題言 EG=FH

證 I. 試聯合EA,FC。

因EG,FH乃自心至弦AB,CD之垂線,

故 AG=GB,CH=HD 〔定理 6〕

而 AB=CD 〔原設〕

∴ AG=CH

由是 於直角△AGE,直角△CHF

斜邊AE=斜邊CF

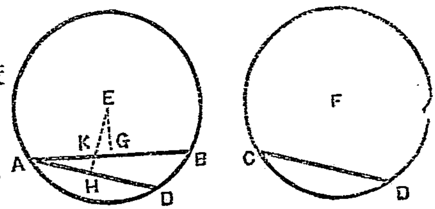
|一邊AG=一邊CH 〔本證〕

EG=FH 〔1.定理23系1〕

解II. 設二等圓之心爲E,F.而

弦AB>弦CD

題言AB距圓心較CD近。



證II. 弦AB>弦CD

則 劣弧AB>劣弧CD 〔定理4系〕

將兩圓重合。令F落於E。且令C點落於A點。

〔定理1及其系1〕

因 劣弧CD<劣弧AB, 〔本證〕

故 D必落於AB弧內之一點。

而引EG,EH爲AB,AD弦之垂線。EH與AB交於K.

因 $EG \perp AB$

故 $EG < EK$ 〔1.定理22〕

而 $EK < EH$

$\therefore \quad EG < EH$

故AB之距圓心較AD近。即較CD近。

系1. 同圓或等圓內之弦。距圓心等者。其弦必

等。距圓心近者大而遠者小。

注意 本系可如定理3證明之。

系 2. 徑爲圓內最長之弦。

問題10. 二等弦相交。其各段兩兩相等。

11. 一直線與二同心圓周相交。二周間所截之直線必等。

12. 自徑之兩端引垂線至任意弦上。〔必引延線〕二垂線趾距圓心必等。

*13. 平分一弦之徑。亦平分與此弦平行之諸弦。

14. AB及CD爲圓之二弦。而AB $\neq$ CD且AB $\parallel$ CD。則AC及BD，并AD及BC。必與垂直於AB及CD之徑或其延線內一點相交。且與此徑成等角。試證明之。

若AB＝CD則如何。

第三章

弓形角

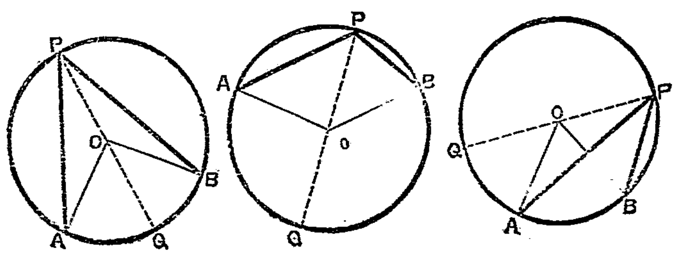
定義13. 圓周角 自周中一點任引兩弦。其兩弦間之角爲圓周角。此角乘其兩邊間之弦。

14. 弓形角 弓形內自弧中一點。引二直線至弦之兩端。其二直線間之角爲弓形角。

定理11. 圓周角與圓心角所乘之弧等。則圓周角爲圓心角之半。

解 設圓心爲O。弧爲AB。圓周中任取P點。

題言 $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$



證　試聯合PO。且引延至Q。

$$\because \quad OA=OP$$

故　$\angle OAP=\angle OPA,$　〔1.定理10〕

然　外$\angle AOQ=\angle OAP+\angle OPA,$　〔1.定理13〕

$$\therefore \quad \angle AOQ=2\angle OPA,$$

同理　$\angle QOB=2\angle OPB$

由是。在第一第二圖

$$\angle AOQ+\angle QOB=2(\angle OPA+\angle OPB)$$

即　$\angle AOB=2\angle APB.$

又在第三圖

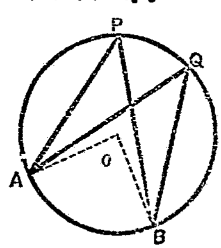
$$\angle AOQ\sim\angle BOQ=2(\angle OPA\sim\angle OPB)$$

即　$\angle AOB=2\angle APB$

問題15.　四邊形之各角皆在圓周上。若二對邊等。則他二對邊必平行。

定理12.　圓內同弓形之角皆等。

解　設$\angle APB,\angle AQB$同在APQB弓形內。



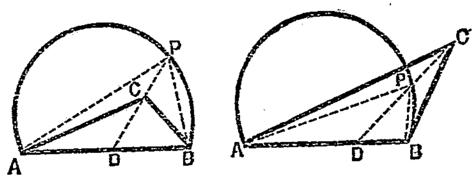
題言　$\angle APB=\angle AQB,$

證　試由圓心O聯合AO,BO

$$\because \begin{cases} \angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB \\ \angle AQB=\frac{1}{2}\angle AOB \end{cases}$$ 〔定理11〕

$\therefore \quad \angle APB=\angle AQB$

系　自一點至弦之兩端引二直線。此點若在弓形內。則其間之角大於弓形角。此點若在弓形外。則其間之角小於弓形角。



解　設弓形爲APB。C在弓形內。或在弓形外。

若C在弓形內。題言　$\angle ACB>\angle APB$,

若C在弓形外。題言　$\angle ACB<\angle APB$,

證　AB中任取D點。聯合DC。而DC之延線與弧交於P。又聯合PA,PB

因C在弓形APB內。

則C在△APB內。

由是　$\angle ACB>\angle APB$　〔1.定理17〕

又C若在弓形APB外。

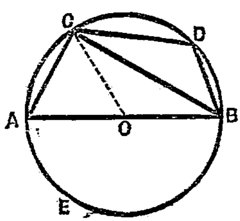
則P在△ACB內

由是 $\angle ACB < \angle APB$ 〔1.定理17〕

注意 由本定理及系。凡於已知之直線之一傍、其作直線所乘一定之角。其頂點之軌跡。即以此直線爲弦之圓弧可知。

問題16. 自周中一點。引出諸弦。求其中點之軌跡。

定理13. 弓形較半圓或小或等或大其弓形角較直角必或大或等或小。



解 設AB爲徑。任作AC弦。若弓形BDC較半圓小。或弓形BEC較半圓大。

題言 弓形角 $BDC > R.\angle$,

半圓角 $BDA = R.\angle$,

弓形角 $BEC < R.\angle$,

證 命圓心爲O。聯合CO。

則 弓形角 $CDB = \frac{1}{2}$ 優$\angle COB$ 〔定理11〕

然 優$\angle > 2R.\angle$, 〔1.定義7〕

故 弓形角 $CDB > R.\angle$

又 半圓角 $ADB = \frac{1}{2}\angle AOB$, 〔定理11〕

然　$\angle AOB = 2R.\angle$

$\therefore$ 半圓角 $ADB = R.\angle$.

又　弓形角 $CEB = \frac{1}{2}\angle COB$,　〔定理11〕

然　$\angle COB < 2R.\angle$,

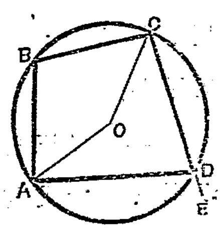
$\therefore$ 弓形角 $CEB < R.\angle$.

系　弓形角較直角或大或等或小。其弓形較半圓亦必或小或等或大。

問題17. 以等腰三角形之腰爲徑畫一圓周。此圓周必平分其底。

定義15. 內接外接。 凡形之各角。俱抵圓周。其形爲圓之內接。圓爲形之外接。此圓名爲多角形之**外接圓**。

定理14. 凡圓之內接四邊形。其每相對之兩角。互爲補角。



解　設 ABCD 爲圓之內接四邊形。

題言　$\angle ABC + \angle CDA = 2R.\angle$.

證　試取圓心 O 聯合 AO,CO。

$\because\quad \angle ABC=\frac{1}{2}$優$\angle AOC,$　　〔定理11〕

$\angle CDA=\frac{1}{2}$劣$\angle AOC,$

$\therefore\quad \angle ABC+\angle CDA=\frac{1}{2}($優$\angle AOC+$劣$\angle AOC,$

然　　優$\angle AOC+$劣$\angle AOC=4R.\angle,$　　〔1.定理2系〕

$\therefore\quad \angle ABC+\angle CDA=2R.\angle,$

系 1.　內接四邊形之外角。等於其內對角。

證　試引延CD至E。

外$\angle ADE+\angle ADC=2R.\angle,$　　〔1·定理2.〕

然　　$\angle ABC+\angle ADC=2R.\angle,$

$\therefore$　外$\angle ADE=\angle ABC.$

*2　四邊形之相對兩角。若互爲補角。則能爲內接形

問題18.　圓內等弧之兩端。以直線聯合之。此直線若非相等。則必平行。

19.　AB.CD爲圓之二弦。若其交角有一定不易。則二弧AC,BD之和或差。不論其弦之位置如何。亦一定不易。

20.　以三角形之二邊爲徑而畫兩圓。此兩圓周必交於底邊或其延線上之一點。

21.　自圓內或圓外一點。至圓周上引無數直線。

在圓周內諸線之中點。即一圓周。

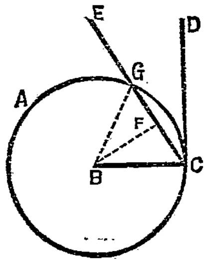
22. 圓內任作內接六角形。其非隣合之三角之和。等於四直角。

第四章

切線

定義16. 割線 與圓周相交於兩點之直線爲割線。

定理15. 與半徑相會於圓周一點之數直線。若非與半徑相會成直角者。則必與圓周之他點相會。



解 設A圓心爲B。BC爲半徑。DC與BC相會於C而成直角。CE爲他任意直線。

題言 CE直線除C點外。必復與圓周相會於他點。而DC則不再與圓周相會。

證 $BC\perp CD$

故 BC乃自B至CD之最短線 [1.定理22]

故於CD線上。非自C點。而自他點至B。其距離必較BC大。即較圓之半徑大。

故於CD線上,若非C點,他點皆在圓外 [74頁2]

又自B引CE垂線爲BF

而令 ∠FBG＝∠FBC

引BG與CE交於G點,則BC及BG二直線,與垂線BF相會成等角。

故 BG=BC. [1.定理22]

即 BG等於圓之半徑,

故 G在圓周上,

即 CE復與圓周相交於G。

定義17. 切線 直線僅與圓周會於一點,任引延之,再不相會者爲切線。

18. 切點 切線與圓周相會之一點爲切點。

以下諸問,可由定理15證明之。

(1) 於圓周上已知之一點,必能引一切線,然以一爲限。

(2) 圓之切線,即與其切點相會之半徑之垂線。

(3) 自圓周引切線之垂線至其切點。此線必過圓心。

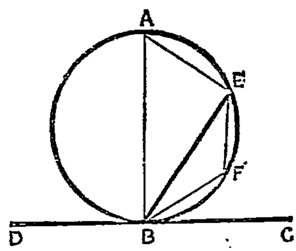
(4) 自圓心引垂線至切線。必過切點。

注意 直線與圓。其位置之相關。論之如次。

直線距圓心。較半徑或小或等或大。此直線亦或爲割線。或爲切線。或不與圓周相會

問題23. 圓內之兩弦相等。則其所切之圓必有一定。

定理16. 自切點任引一弦。弦與切線間角。等於其弦所乘之鄰合圓周角。



解 切線DBC與圓相切於B點。BE爲過B任意之弦。

題言 ∠EBC=圓周角EAB

∠EBD=圓周角EFB

證 試自B引BA徑。又於弓形BFE之弧上任取F點。

則 BA⊥DC 〔定理15〕

而 $\angle AEB = R.\angle$, 〔定理13〕

$\therefore$ $\angle A + \angle ABE = R.\angle$, 〔1.定理13系2〕

然 $\angle EBC + \angle ABE = R.\angle$,

$\therefore$ $\angle EBC = \angle A$.

又 $\angle A + \angle F = 2R.\angle$, 〔定理14〕

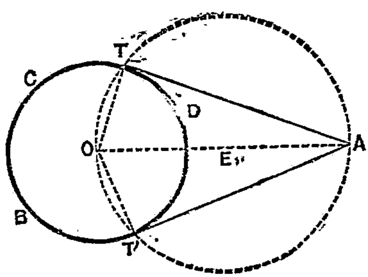
及 $\angle EBC + \angle EBD = 2R.\angle$, 〔定理2〕

已知 $\angle EBC = \angle A$, 〔本證〕

$\therefore$ $\angle EBD = \angle F$.

問題24. 二圓相交於A於B.自一圓周上任取P點。由P引直線PAC,PBD與他圓相交於C及D。若聯合CD。必與P切點之切線平行。

定理17. 由圓外一點。必能引此圓之二切線。然以二爲限。



解 設BCD圓外之一點爲A。題言由A必能引BCD圓之二切線。然以二爲限。

證 試取圓心O。聯合AO。平分AO於E。

次以E爲心。EO爲半徑。畫ATT'圓。

則此圓之徑爲OA。爲此徑所分之兩圓周。必與BCD圓相交。

何則。其圓之一部在BCD圓內。而他部在圓外故也。

今命其交點爲T及T'。聯合OT,AT

則 $\angle OTA = R.\angle$, 〔定理13〕

故TA切BCD圓於T點。 〔定理15〕

同理AT'亦切BCD圓於T'點。

故由A點。可引BCD圓之二切線。

又由A至BCD圓之切線。不能多於二。

何則。因半徑與切線所成之角爲直角。 〔定理15〕

故切點必在ATT'圓周中。 〔定理12注意〕

然ATT'圓與BCD圓相交不能多於二點。

〔定理9系2〕

故由A引BCD圓之切線不能多於二。

系 由圓外一點引此圓之二切線。必相等。且以該點及心爲界之直線。必平分二切線所成之角。

證 於直角△ATO,直角△AT'O

$$\because \begin{cases} OT=OT', \\ OA\text{公用} \end{cases}$$

$$\therefore \quad AT=AT',\qquad\text{〔1.定理23系I〕}$$

及

$$\angle TAO=\angle T'AO$$

定義19. 切弦 自圓外一點。至其圓引二切線。聯合其兩切點之直線爲切弦。

定義19.a 內切及外切 凡形之各邊。皆爲圓之切線。則圓爲形之內切。形爲圓之外切。

---

*問題25. 自圓外一點。引其圓之二切線AB,AC。若聯合圓心及A。必平分BC切弦。且相交成直角。

*26. 凡直角三角形內切圓之徑。必等於二邊之和與斜邊較。

*27. 外切四邊形。對邊之和俱相等。

28. 外切六邊形。非隣合三邊之和互相等。

29. 外切四邊形。以心爲頂。兩對邊所乘之二角和。等於二直角。

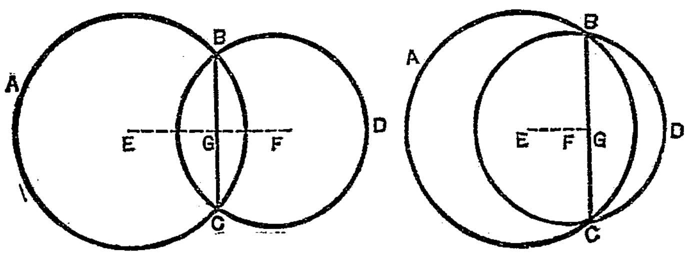
第五章

二圓之關係

定理18. 兩圓相交。聯合二交點之直線。必被聯二圓心之直線平分。而與之正交。

解 設ABC,DBC兩圓相交於B及C。其兩心爲E及F。

題言直線EF平分BC弦。且與之正交。



證 試平分BC於G。聯合GE,GF。

因　　BC爲BCD圓之弦

而　　FG爲過心而平分BC之直線

故　　∠BGF=R.∠,　　　　〔定理 5〕

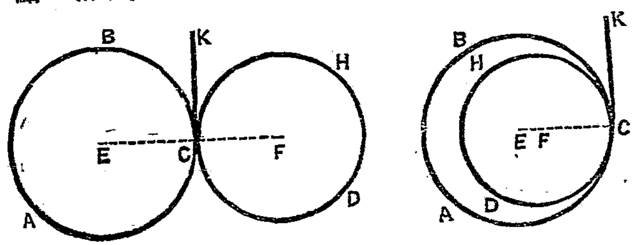
同理　　$\angle BGE = R.\angle$,

$\therefore$　EG,GF成一直線　　〔1.定理3〕

即聯合E,F之直線EF。平分弦BC而與之正交。

定理19.　二圓周僅於過兩心之直線中一點相會。則此兩圓周更無他點相會。

解　設兩圓心爲E,F。若兩圓周僅於EF直線中一點C相會。題言此二圓周更不相會於他點。



證　若謂二圓周更相會於他點。如B。由定理18。EF直線必不過C。而爲平分CB之直線。若是。則與原設不合。

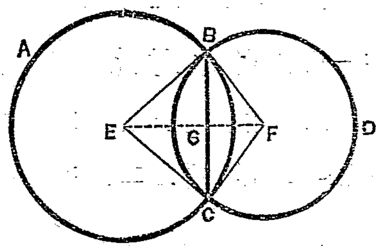
故二圓周相會。C外更無他點。

定義20.　相切圓　二圓周相會。僅有一點。稱相切圓。相會之點爲切點。

問題30.　兩圓相切。過其切點任作直線。自二圓

截取弓形。令弓形所含之角相等。

定理20. 兩圓周若於過兩心之直線外一點相遇。必更有他一點相遇。



解 設兩圓心爲E,F。兩圓周若於EF直線外一點B相遇。題言此兩圓周必更於他一點相遇。

證 自B引垂線BG至EF。且引延BG至C。令

$$GC=GB,$$

次聯合EB,EC,FB,FC。

則 於 △EGC,△EGB

$$\because \begin{cases} CG=BG & \text{〔作圖〕} \\ EG\text{公用} & \\ \angle CGE=\angle BGE[=R.\angle.] & \text{〔作圖〕} \end{cases}$$

$$\therefore \quad EC=EB \qquad \text{〔1.定理9〕}$$

故C必在以E爲心之圓周上。

同理證C亦在以F爲心之圓周上。

即二圓周相遇。B外更有一C點。

定理21. 兩圓相切。其過兩心之直線必過切點。

證 若切點不在過兩心之直線內。則二圓周必更相遇於他點。 〔定理20〕

由是此二圓必非相切。

系 二相切圓。於切點內。可作一公用之切線。 〔定理15〕

注意 二圓心相距爲d。其半徑爲r及r′。則得數例爲次。

(1) 若$d>r+r'$。則二圓周必不相交。一圓全在他圓外。

(2) 若$d=r+r'$。則二圓周必相會於一點。一圓全在他圓外。

定義21. **外切圓** 於第二例之二圓爲外切圓。

(3) 若$r+r'>d>r\sim r'$。則二圓周必相會於兩點

定義22. **相交圓** 於第三例之二圓爲相交圓。

(4) 若$d=r\sim r'$。則二圓周必相會於一點。一圓全在他圓內。

定義23. 內切圓 於第四例之二圓爲內切圓。

(5) 若$d<r\sim r'$。則二圓周決不相會。而一圓全在他圓內。

前列五例。反言之亦合於理。

問題31. 有兩同心圓。若內圓之切線爲外圓之弦。則切點即弦之中點。

32. 二弦任交於圓徑內一點。若二弦與徑所作之角等。則二弦相等。

33. 有外切二定圓。任作他圓與之相切。則由定圓之心至他圓之心。其距離之差。恒等於定圓半徑之差。

34. 二定圓相交。作他圓與之相切。他圓之大小不論如何。

(1) 當他圓爲一定圓之內切。及一定圓之外切。

(2) 當他圓俱爲二圓之內切或俱外切。

由是。自二定圓之中心至他圓之中心。其距離之和及

差恆一定不易。

35. 二圓相切。過切點任作二直線。此二直線所截二弧之弦。必互平行。

36. 兩圓相交。過其交點各引直線。其二直線所截二弧之弦。必互平行。

第六章

作圖題

當幾何學作圖之始。即所謂作圖之基本。必依以下三例。而作圖之器。則用間尺及規。規以畫圓又所以移距離之具也。

作圖之規距

1. 自任意一點。至他任意點引一直線。
2. 有限之直線。任意引延之。
3. 任以一點爲心。而任取一直線爲半徑以畫圓。

於初等幾何學欲解作圖題。可依以下之次序。

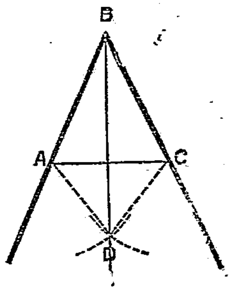
(1) 運用間尺及規。以示所求作之圖之法。

(2) 證明圖之作法。

(3) 當作圖時。必自設一界限。細思此界限中能作成其圖否。

作圖題 I. 已知之角。求平分之。

設ABC爲已知角。求平分∠ABC



作圖法　於角邊任截取等長之BA,BC。聯合AC。

次以A為心。以大於AC之半為半徑。對於B點作弧。又以C為心。以前半徑為度。亦對於B點作弧。與前弧相交於D。

又聯合AD,CD,BD。

則∠ABC被BD平分。

證　　於△ABD,△CBD,

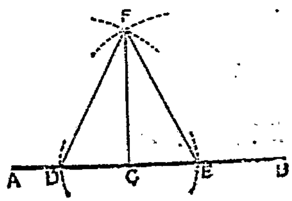
$$\because \begin{cases} AB=CB, & \text{〔作圖〕} \\ BD\text{公用}, & \\ AD=CD, & \text{〔作圖〕} \end{cases}$$

$\therefore$ ∠ABD=∠CBD　　〔1.定理19〕

則　　BD平分∠ABC

問題 37.　已知之角。求四平分之。

作圖題 2.　於直線內已知之點。求作此直線之垂線。



設AB為已知直線。C為線內已知之一點。求於C作

AB之垂線。

作圖法 先於C點外截取CE與CD等。次以D爲心。以大於DC之線爲半徑。向上作弧。又以E爲心。以前半徑爲度作弧。與前弧相交於F點。

試聯合FC。

則 $FC \perp AB$

證 於 $\triangle DCF, \triangle ECF$,

$$\because \begin{cases} DC = EC, & \text{〔作圖〕} \\ CF \text{ 公用}, & \\ DF = EF, & \text{〔作圖〕} \end{cases}$$

$\therefore \quad \angle DCF = \angle ECF,$ 〔1.定理19〕

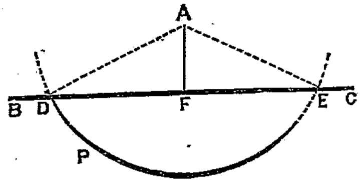
$\therefore \quad \angle DCF = \angle ECF = R.\angle,$ 〔1.定義11〕

$\therefore \quad CF \perp AB.$ 〔1.定義12〕

問題 38. 於作圖題2之FC線引延之。延線中諸點。距D及E俱等。

補 此作圖題。即作圖題1之特別例。其已知之角即平角也。

作圖題 3. 自直線外已知之點。求作此直線之垂線。



設BC爲已知之直線。A爲線外一點。求自A作BC之垂線。

作圖法 先以A爲心。以大於A距AC之線爲半徑作弧。與BC線相交於D於E

次作直線AF平分∠DAE 〔作圖題1〕

則 AF⊥BC.

證 於 △AFD,△AFE,

$$\because \begin{cases} AD=AE, & \text{〔作圖〕} \\ AF\ \text{公用}, & \\ \angle DAF=\angle EAF, & \text{〔作圖〕} \end{cases}$$

$\therefore$ $\angle AFD=\angle AFE$, 〔1定理9〕

$\therefore$ $AF\perp DE$.

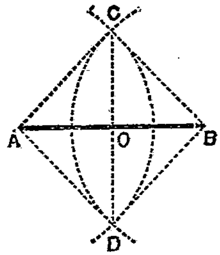
問題 39. 於作圖3。其所用以爲半徑者必大於由A距AC之線試言其故。

40. 以A爲心之圓。與BC相交僅有兩點。試證其理。

作圖題 4. 已知之直線。求兩平分之.

設AB爲已知之直線。求將此直線平分爲二。

作圖法　先以A爲心。以大於AB之半爲半徑。於上下作弧。又以B爲心。以前半徑爲度。上下作弧。與前弧相交於C於D。



次作CD直線。與AB相交於O點.

則　　O爲AB之平分點也。

證　聯合AD,BD。

於　$\triangle ACD, \triangle BCD$,

$$\because \begin{cases} AC=BC, & \text{〔作圖〕} \\ CD\text{公用}, & \\ AD=BD, & \text{〔作圖〕} \end{cases}$$

$\therefore\ \angle ACD=\angle BCD.$　　〔1.定理19〕

故　　於　$\triangle ACO, \triangle BCO$,

$$\because \begin{cases} AC=BC, & \text{〔作圖〕} \\ CO\text{公用}, & \\ \angle ACO=\angle BCO, & \text{〔本證〕} \end{cases}$$

$\therefore\ AO=BO.$　　〔1.定理9〕

即　　平分直線AB於O點。

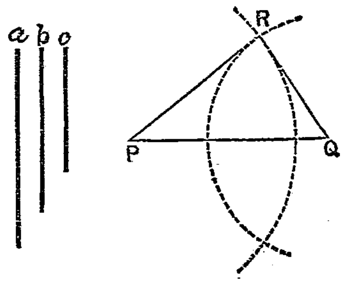
問題 41.　已知之直線。求四等分之。

作圖題 5.　已知三角形之三邊。求作

其三角形。

設a,b,c爲三邊。求作一三角形。其三邊與a,b,c等。

作圖法　先作PQ直線。與已知三角形之a邊等。次以Q爲心。以與c等之半徑向上作弧。又以P爲心。以與d等之半徑向上作弧此兩弧相交於R點。聯合RP,RQ。則RPQ即所求之三角形也。



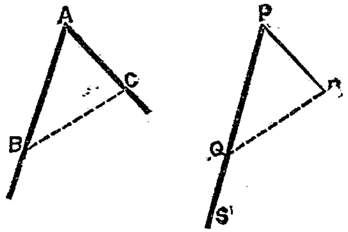
證、△RPQ之三邊。與已知之三邊兩兩相等故也。

案　a,b,c三直線中。任取兩線之和。必須大於他一線。何則。若$b+c<a$。則圖中兩弧不相交甚明。又若$b+c=a$。則R點在PQ之中而三角形成一直線。同理，若非$b<a+c$,$c<a+b$。則三直線不能成三角形。由1.定理16。已說明之。

問題　42.　以已知之一直線爲底。求作等邊三角形。

43.　有直角。求三平分之。

作圖題 6. 於直線內已知之點。求作一角。與已知之角等。



設BAC爲已知角，而P爲PS直線內一點。求於P點作角與BAC角等。

作圖法 於∠BAC之二邊中任取B,C兩點聯合之。作△PQR。其三邊PQ,QR,RP各等於AB,BC,CA。 〔作圖題5〕

則 ∠QPR爲所求角

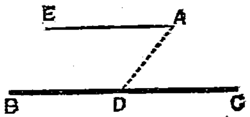
證 於 △ABC,△PQR,

$$\because \begin{cases} AB=PQ, & \text{〔作圖〕} \\ AC=PR, & \text{〔作圖〕} \\ BC=QR, & \text{〔作圖〕} \end{cases}$$

$\therefore\ \angle A=\angle P.$ 〔1.定理19〕

作圖題 7. 求過已知之一點作一直線與他直線平行。

設A爲已知之點。BC爲直線。求作直線過A與BC平行。



作圖法　先自A任作AD直線與BC交於D點。又過A點作AE直線。令

$\angle DAE = \angle ADC,$　　[作圖題6]

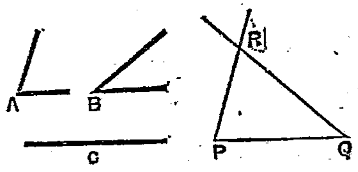
則　　AE ∥ BC.

證　　錯$\angle EAD$=錯$\angle ADC$,

$\therefore$ AE ∥ CB　　[1.定理5]

作圖題 8. 已知三角形之兩角。及其夾邊。求作其三角形。

設二角爲A,B。夾邊爲C。求作一三角形。有兩角等於$\angle A, \angle B$。而兩角間之邊等於C。



作圖法　先作直線PQ=C。又引PR,QR直線。令$\angle P = \angle A, \angle Q = \angle B$。則PR,QR相交於R點。

由是　　△RPQ即所求之三角形。

證　因△RPQ之PQ=C, $\angle P = \angle A, \angle Q = \angle B$故也。

案　已知之二角和。必小於二直角。不然。PR,QR不能相會。

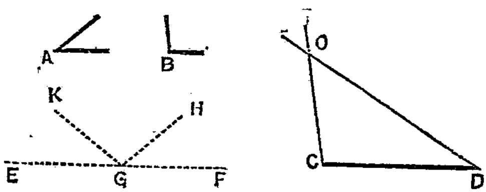
問題 44. 以已知之直線爲斜邊。於其上作等邊直角三角形。

*54 以已知直線爲斜邊。於其上作直角三角形。其一銳角等於他銳角之二倍。證斜邊爲最小邊之二倍。

作圖題 9. 已知三角形之二角。及一對邊。求作其三角形。

設A及B爲已知之二角。CD爲對∠A之邊。求作一三角形。有兩角等於∠A, ∠B。而一角之對邊等於CD。

作圖法 先任作EF直線。於線內任取G點。



作∠FGH=∠A, ∠HGK=∠B。 〔作圖題6〕

如是∠KGE必爲三角形之餘一角。 〔1.定理13〕

又於C於D作 ∠C=∠HGK, ∠D=∠KGE。其兩邊之交點爲O。

則 △OCD即所求之三角形。

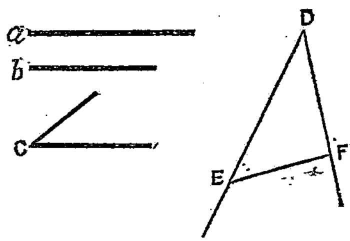
證 因△OCD之CD爲已知之邊.

而 $\angle O=\angle A, \angle C=\angle B$ 故也。

案 已知之二角和。必小於二直角。與前同例。

作圖題 10. 已知三角形之兩邊。及其夾角。求作其三角形。

設 a,b 爲已知之二邊。C爲夾角。求作一三角形。其二邊與 a,b 等。而 a, b 間角與 C 等。



作圖法 先作 $\angle EDF=\angle C$。并截取 DE=a,DF=b.若聯合 EF。則

$\triangle$ DEF 爲所求之三角形。

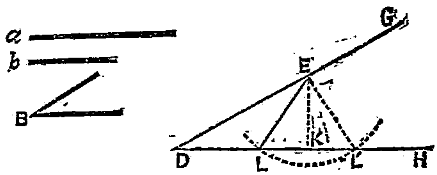
證 因於 $\triangle$ DEF。DE=a.DF=b, $\angle D=\angle C$ 故也。

註 於作圖題 5,8,9,10 等。合於其所設已知之項者。只可作一三角形。若別言之。由兩兩已知項。則三角形可確定。於前數例。其已知項。必含三角形之三事。如作圖題 5。三邊已知。如作圖題 8。兩角及其夾邊已知。如 9。二角及一對邊已知。如 10。二邊及其夾角已知。若是者與全等三角形之定理 III,II,IV, I 對應。然縱有已知之項。猶未足確定三角形者若何。例如僅知

三角形之二邊。或僅知其三角。(其和等於二直角)則不足確定三角形。何者。因合於此等規則。有無數三角形也。又有由已知之項。其三角形似可作。而猶不能作者。如前數案所述是。且作圖更有兩意之例。却與1.定理23相對應。

作圖題 II. 已知三角形之兩邊。及其一邊之對角。求作其三角形。

設a,b爲已知二邊。B爲對b邊之角。求作合於此已知之項之三角形。



作圖法 先作∠GDH=∠B, DE=a。次以E爲心。b爲半徑作弧。與DH線相交於L。末聯合EL。則△DLE乃合於已知之項之三角形也。

茲有各種之例。

已知角如爲銳角。則由1定理22得

(1) 若b<EK。則弧不交DH。其三角形即不能作。

(2) 若b=EK。則弧緊切DH線。而湊合於垂線趾若是。則合於此已知項者。僅一直角三角形。

(3)　若$EK<b<DE$。如圖。弧必與DH相交於L,L′二點。而落於D點之一旁。由是。合於此已知項者。有 EDL,EDL′兩三角形。

(4)　若$b=DE$。則L點落於D點。而一三角形消滅。即祇有一等腰三角形。

(5)　若$b>DE$。則弧與DH交於兩點。各在D之一旁。則DEL,DEL′兩三角形。一函∠D。一函∠D之補角。此例之合於此已知之項者。祇有一三角形。

證　此證明已包於前文中。

〔已知之角如爲直角或爲鈍角者。學生自演習證明可也。〕

*問題　46.　於已知之直線上。求作一正方形。

*47　已知距形之二邊。求作其形。

48　已知正方形之周圍。求作其正方形。

49　已知四邊形之各邊及一對角線。求作其四邊形。

50　已知四邊形之三邊及兩對角線。求作其四邊形。

51　由已知之一點。至相交二直線作等角。

52　已知四邊形之各邊及一角。求作其四邊形。

*53　於已知之O點引OA,OB,OC已知長之三直

線。令A,B,C同落於一直線內。且AB=BC。

54 過非平行二直線間一點。求引此二直線間之一直線。而被已知之點平分

55 於相交二直線間。求作一已知長之直線。與他已知之直線平行。

56 ABC三角形之底爲BC。其中任取D點。求作一直線。截三角形爲二。沿此直線反摺其三角形。則A點落於D點。

*57 已知之直線。求三平分之。

58 已知三角形之底。及二邊之和較。且一底角。求作其三角形。

59 已知三角形之周圍及各角。求作其三角形。

60 已知直角三角形之一邊。及斜邊與他邊之和較。求作其三角形。

61 已知之三角形內有一已知之點。求作一平行四邊形。以此點爲對角線之交點。且二角之頂。落於三角之二邊內。而一邊與三角形之他邊重合。

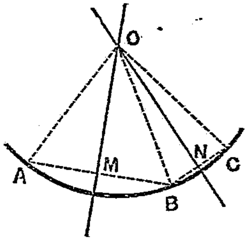
作圖題 12. 已知之圓或弧。求其心。

設ABC爲已知之圓或已知之弧。求ABC之心。

作圖法 任作AB,BC二弦。且引MO,NO二線間

直平分之。　〔作圖題2,4〕

其交點若爲O。則O即所求之心。



證　由作圖法。MO乃A及B等距離點之軌跡。

$\therefore AO=BO$　〔1.軌跡2〕

同理。NO亦B及C等距離點之軌跡。$\therefore BO=CO$

$$\therefore AO=BO=CO$$

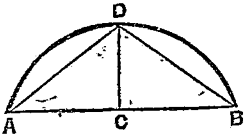
由是　O乃已知圓或已知弧之心。

補　由本題可作一圓。過已知之三點A,B,C。

作圖題 13. 已知之弧。求平分之。

設AB爲已知弧。求平分AB。

作圖法　先作AB弦。而平分之於C。　〔作圖題4〕



次引CD爲AB之垂線。〔作圖題2〕而與其弧交於D。則AB弧被D平分。

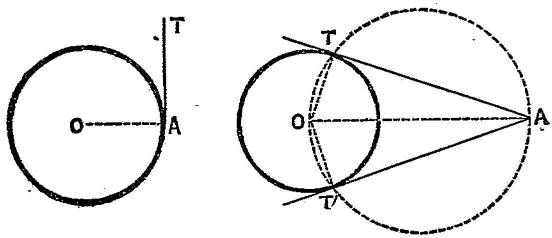
證　試聯合AD,BD。

則由作圖。CD乃A及B等距離點之軌跡。〔1.軌跡2〕

故　$AD=BD$

$\therefore$ 弧$AD=$弧BD　〔定理4系〕

作圖題 14. 自圓外或圓周中已知之一點。求作切線。



I. 設已知之點爲A。而落於以O爲心之圓周中。求自A作圓之切線。

作圖法 先聯合OA。次引AT線與OA成直角

〔作圖題2〕

證 據定理15。即能證明。

II. 設A在圓外。求自A作圓之切線。

作圖法 先作OA直線。且以OA爲徑畫一圓周。與已知圓相交於T於T'。聯合AT,AT'。

則AT及AT'乃由A引出之二切線。

證 試聯合OT,OT'。因ATO爲半圓。

故 $\angle ATO = R.\angle$, 〔定理13〕

即AT爲OT半徑之垂線。

故AT爲切線。　〔定理15〕

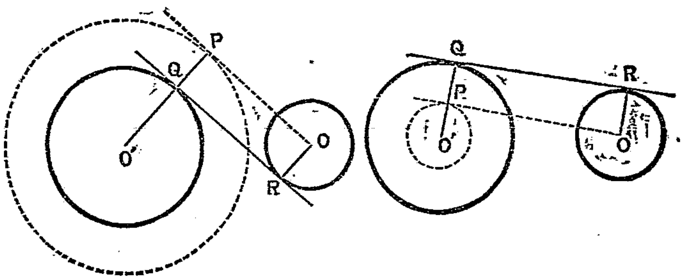
同理AT'亦爲切線

補　A點若在圓內。必不能引其圓之切線。

問題　62　求作一圓。與平行四邊形之各邊相切。其平行四邊形爲菱形。而其對角線之點即圓心。

作圖題　15.　已知之二圓。求作其公切。

設已知之二圓之心爲O,O'



作圖法　先以O'爲心。以兩圓半徑之和或較爲度。作一圓。次自O作此圓之切線OP　〔作圖題14〕

幷作O'P直線。則O'P或其延線。與O'心圓交於Q點。復自O作OR線與PQ平行。

末作QR直線。則QR者即所求二圓之公切也。

證　由作圖　PQ=OR, 及PQ ∥ OR,

故 $RQ=OP$ [1.定理28]

然 $\angle OPO'=R.\angle,$ [95頁(2)]

$\therefore \angle O'QR=R.\angle,$ [1.定理7系]

而 $\angle ORQ=R.\angle,$ [1.定理25]

故 RQ爲二圓公切,

補 二圓全在外,則有四公切。二圓爲外切,則有三公切。二圓若相交,則有二公切。二圓若內切,則有一公切。又若一圓全在他圓內,則無公切。

*問題 63 二圓全在外,其四公切,必兩兩相等。

*64 前題四公切必有兩相交。其交點必在過二圓心之直線中。

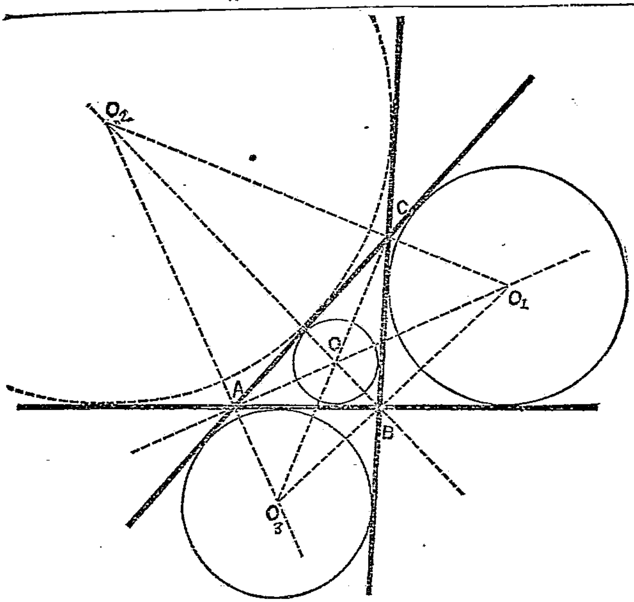
作圖題 16. 三直線非平行,又不同過於一點,求作其切圓。

設三直線兩兩相交於A,B,C。

所求之圓若切於交A點之二直線,則其圓心必落於平分∠A之直線中。 [1.軌跡3]

同理,所求之圓若切於交B點之二直線,則其圓心亦必落於平分∠B之直線中。由是,得作圖法如次,

作圖法 先作平分∠A及∠B之二直線,其交點



爲O,O_1,O_2,O_3，此四交點即所求切圓之心也。

由是。取其一點爲心。以作一直線之切圓。又必切他二直線。

*問題 65. 聯合三角形兩傍心之直線。必過頂點。且爲聯合內心及他傍心之直線之垂線。

66 已知之三直線。若二線平行。則切三線之圓惟二。

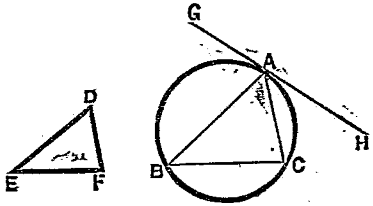
67 三直線悉平行。或同交於一點。則切三線之圓爲不能作。

定義 24. 內切圓 三角形之各邊。俱切於圓。爲內切圓。

定義 25. 傍切圓 三角形之一邊及他二邊之延線。同切一圓。爲傍切圓。

作圖題 17 已知之圓。求作內接三角形。與已知之三角形等角。

設ABC爲已知之圓。△DEF爲已知之三角形。求作此圓之內切三角形。與△DEF等角。



作圖法 先於圓周內任取A點。作GAH切線。

〔作圖題 14〕

次於A作∠GAB與∠F等。又作∠HAC與∠E等。

〔作圖題 6〕

後作BC直線。則△ABC即所求之三角形。

證 GAH爲ABC圓之切線。故

$\angle HAC = \angle B$ 〔定理 16.〕

然 $\angle HAC = \angle E$ 〔作圖〕

$\therefore \quad \angle B=\angle E$

同理　　$\angle C=\angle F$

故　　餘　$\angle BAC=\angle D$

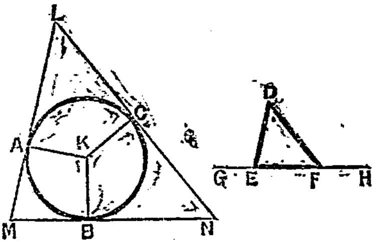
由是。$\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 等角。且爲ABC圓之內接也。

問題　68　內接等邊三角形於各角頂點引三切線。亦成一等邊三角形。而其面積則四倍內接三角形面積。求證。

作圖題　18　已知之圓。求作外切三角形。與已知之三角形等角。

設ABC爲已知之圓。$\triangle DEF$ 爲已知之三角形。求作此圓之外切三角形。與 $\triangle DEF$ 等角。

作圖法　先引延EF兩端至G,至H。次求ABC圓之心爲K。〔作圖題12〕任引半徑KB。



又於K作 $\angle BKA$ 等於 $\angle DEG$　　〔作圖題6〕作 $\angle BKC$ 等於 $\angle DFH$。復過A,B,C作ABC圓之切線。爲ALM,MBN,NCL。則 $\triangle LMN$ 爲所求三角形。

證 LM,MN,NL各切ABC圓之A,B,C三點。

〔作圖〕

故在A,B,C點之角俱爲直角 〔定理15〕

而AMBK四邊形之四角和。等於四直角。〔1.定理24〕

然四角內 $\angle KAM = \angle KBM = R.\angle$,

故 $\angle AKB + \angle AMB = 2R.\angle$,

而 $\angle DEG + \angle DEF = 2R.\angle$, 〔1.定理2〕

然 $\angle AKB = \angle DEG$, 〔作圖〕

$\therefore \angle AMB = \angle DEF.$

同理 $\angle CNB = \angle DFE.$

故 餘$\angle ALC = \angle D.$

由是 $\triangle LMN$與$\triangle DEF$等角。且爲ABC圓之外切。

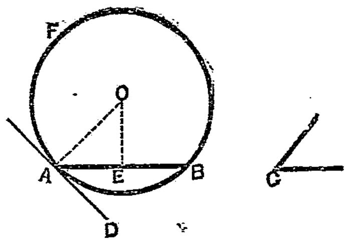
問題 69 同圓之外切等角三角形。必全相等。

70 求作已知圓之外切三角形。其各邊與已知三角形之邊平行。合於本題之三角形有若干。

作圖題 19 已知之直線上。求作弓形。使弓形所函之角等於已知之角。

設AB爲已知直線。$\angle C$爲已知角。求於AB上作弓形。使弓形所函之角等於$\angle C$。

作圖法　先於A點作∠BAD與∠C等。



〔作圖題6〕

即自A作AD之垂線AO。

〔作圖題2〕

又將AB平分於E。〔作圖題4〕

即自E作AB之垂線EO。〔作圖題2〕

AO與EO相交於O點。

後以O為心。OA為半徑作圓。

則AFB弓形即所求之弓形也。

證　AD切圓於A。其圓心必落在AO垂線內。

〔96頁(3)〕

而其圓心亦必落在AB之垂線EO內。〔定理7系〕

故AO與EO之交點O。即為過A,B圓之心。亦即與AD切於A點之圓之心也。

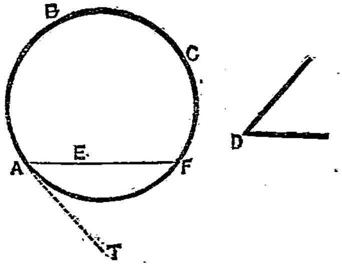
而　　弓形角AFB＝∠BAD〔定理16〕

＝∠C。

問題 71　求已知之直線內一點。為他直線所乘之角之頂點。

作圖題 20　於已知之圓內。求截取

已知之角之弓形。



設BAC爲已知圓。

作圖法　先於圓周內任取A點。作AT切線。　〔作圖題14〕

且作∠FAT等於∠D。　〔作圖題6〕

則ABF即所求之弓形。

證　弓形角ABF＝∠FAT　〔定理16〕

然　∠FAT＝∠D

∴　弓形角ABF＝∠D

問題　72.　求自已知之一點作一直線。又自他一點求作此線之垂線而與已知之長等。

73.　求以已知之半徑爲度作圓。切於已知之直線。且其心在他已知之直線內。

74　引延圓內之已知弦。求自其中一點引圓之切線。與已知之長等。

75　求以已知之半徑爲度作一圓。與他已知之二圓相切。

76　已知三角形之頂角。及其底被平分頂角之直線所截之二段。求作其形。

77. 已知三角形之底及高。與其外接圓之半徑。求作其形。

78. 已知三角形之周圍及頂角與其頂角之平分線。求作其形。

*79. 已知圓心之三點。求作三圓兩兩相切。

*80. 已知之三直線。求作一圓截之。令所截得之三弦與已知之長等。

*81. 兩圓相交。求過交點以兩圓周爲界作最大之直線。

第三編

面積

第一章

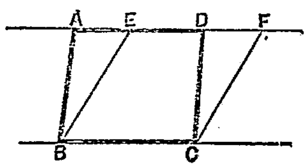
定理

定義 1. 平行四邊形之高 任以四邊形之一邊爲底。此底與對邊間之距離。爲平行四邊形之高。

2. 三角形之高 自三角形之頂點至底所作之垂線。即爲三角形之高。

注意 由普通公理(4)及(5)。以擴張幾何學公理2至相等兩物之和或較。互相重疊。即不重合。亦必相等。

定理 1. 兩平行四邊形同底。且同在兩平行線間。其大必等。



解 設▱ABCD,▱EBCF同以BC爲底。且同在AF,BC平行線間。

題言 ▱ABCD=▱EBCF

證　ABCD 爲平行四邊形。［原設］

故　AB=DC,［1.定理 26］

而　AB ∥ CD, BE ∥ CF,［原設］

故　$\begin{cases}\angle BAE=\angle CDF, \\ \angle BEA=\angle CFD,\end{cases}$［1.定理 7系］

∴　△ABE=△DCF,［1.定理 21］

然　▱ABCD=梯形 ABCF−△DCF,

及　▱EBCF=梯形 ABCF−△ABE,

∴　▱ABCD=▱EBCF.

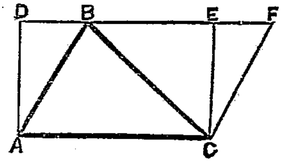
系 1　凡平行四邊形。其面積必等於等底等高之距形。

2.　等底等高之兩平行四邊形。其積必等。又等高之兩平行四邊形。底大者其積亦大。底小者其積亦小。又等底之兩平行四邊形。其高者積大。其矮者積小。

1　題於定理 1 圖。若 E, D 同落於一點。可由第一編定理 26 證明之。

定理 2.　凡三角形面積。半於同底等高之距形。

解　設△ABC 及▭DACE 同以 AC 爲底。且同高。



題言　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\square DACE$

證　先自C引CF線與AB平行。且與DE延線交於F。則

BACF爲平行四邊形。

故　$\square BACF=\square DACE$　〔定理1〕

然　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\square BACF$　〔1.定理26〕

$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\square DACE.$

系　1.　凡等底等高之兩三角形。其積亦等

2.　等底之兩三角形。若其積等。其高亦等。

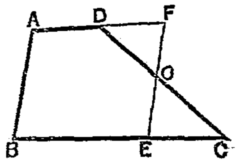
3.　等積之兩三角形。若爲同底。或爲等底。而兩底同在一直線上。則聯合二頂點之直線。必與底平行。

*問題　2　諸三角形之底同。其積等。求其頂點之軌跡。

定理　3.　梯形之面積。等於以平行兩邊間之距離爲高。及以平行兩邊和之半爲底之矩形。

解　設梯形爲ABCD。而

$AD \parallel BC$



題言梯形之面積。等於以$\frac{1}{2}$(AD+BC)爲底。及以AD, BC間距離爲高之矩形。

證　先將DC平分於O。過O作EF直線與AB平行。且交BC於E。交AD延線於F.

於　$\triangle DOF, \triangle EOC$

$$\because \begin{cases} DO=OC, & \text{〔作圖〕} \\ \angle DOF=\angle EOC & \text{〔1.定理4〕} \\ \angle ODF=\angle OCE & \text{〔1.定理6〕} \end{cases}$$

$\therefore\ \triangle DOF \equiv \triangle EOC,$　〔1.定理11〕

故　梯形ABCD=▱ABEF.

然　▱ABEF等於同BE底及同在AD,BC平行線間之距形。〔定理1系1〕

而　EC=DF,　〔1.定理11〕

及　AF=BE,

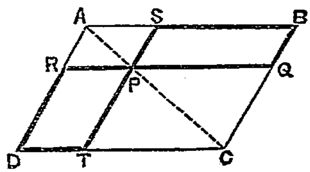
故　底　BE=$\frac{1}{2}$(AD+BC)

故梯形ABCD等於以平行兩邊和之半爲底。及兩邊間之距離爲高之距形。

問題 3. 梯形非平行二邊BA, CD引延之。相會於H。則HAC及HCB兩三角形必等.

定義 3. 沿對角線平行四邊形及其餘形。 於平行四邊形之對角線內。任自一點。引二直線與各邊平行。則分本形爲四平行四邊形。其中以原對角線爲對角線之二平行四邊形。爲沿對角線平行四邊形。其餘爲沿對角線平行四邊形之餘形。

定理 4. 凡沿對角線平行四邊形之餘形。其積皆等。



解 設ABCD爲平行四邊形。AC爲對角線。於AC中任取P點。而作

RPQ ∥ AB, SPT ∥ BC.

題言 $\square PB=\square PD$.

證 $\triangle ABC=\triangle ADC$, [1.定理26]

同理 $\triangle ASP=\triangle ARP$,

又 $\triangle PQC=\triangle PTC$,

故 $\triangle ABC-(\triangle ASP+\triangle PQC)=\triangle ADC-(\triangle ARP+\triangle PTC$.

即　　$\square PB=\square PD$.

問題　4.　於定理4圖。如P不落於AC對角線內。而在ABC三角形內。則平行四邊形SQ小於平行四邊形RT。

5.　於前題若RQ, ST各與AC交於M於N。則平行四邊形RT, SQ之較。等於RNQ或△SMT之二倍。

定義　4.　二線所函距形　以已知之二直線爲隣合二邊作一距形。是爲二直線所函距形。

例如AB, CD爲已知之二直線。此二線所函之距。形以AB.CD記之。

直線上正方形　以已知之直線爲邊。作一正方形。即爲其直線上正方形。

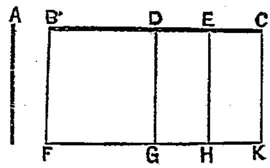
例如AB爲已知之直線。則AB上正方形以AB^2記之。

5.　內分及外分　直線中之一點。即爲內分此直線。或單稱分。而其延線中相似之一點。是爲外分此直線。

直線之分　於內分之例及外分之例。由分點以至直線之兩端。其間之距離爲分。

注意　凡直線在內分之例。等於其二分之和。在外分之例。等於其二分之較。

定理 5. 已知之二直線所函之距形。等於取其一線任分之。各分及他線所函之矩形之和。*



解　設A及BC爲已知之二直線。任分BC爲 BD,DE,EC。

題言　$A.BC=A.BD+A.DE+A.EC$。

證　過B引BC之垂線爲BF。過F引直線與BC平行。又過D,E,C引DG,EH,CK直線與BF平行。

則BK,BG,DH,EK皆爲距形。

而　$A=BF=DG=EH=CK$

---

*本定理與代數學法式

$p(a+b+c)=pa+pb+pc$ 對應。

故　　$\square BK = A.BC$,

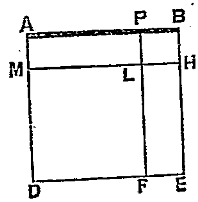
$\square BG = A.BD$,　$\square DH = A.DE$,　$\square EK = A.EC$,

由是　　$A.BC = A.BD + A.DE + A.EC$.

系 1. 一直線任兩分之。其全線與一分所函之矩形,等於其一分上正方形。加二分所函之矩形。[◎]

2. 一直線任兩分之。其全線上正方形。等於全線與各分所函矩形之和。[△]

定理 6 二直線和上正方形。等於二分線上正方形和。加兩分線所函矩形之二倍。[*]



解　設 $AB = AP + PB$.

題言　$AB^2 = AP^2 + BP^2 + 2AP.PB$.

證　先於 AB 上作 ADEB 正方形。

次過 P 引 PLF 線與 AD 平行。且與 DE 相會於 F。後截取 $PL = PB$。則 $LF = AP$。

◎本系與代數學法式〔命 $x = a + b$ 則 $ax = a^2 + ab$〕對應。

△本系與代數學法式〔命 $x = a + b$ 則 $x^2 = ax + bx$〕對應。

*本定理與代數學法式 $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ 對應。

復於L引HLM線與AB平行。且各與DA,EB相會於M於H。

如是。由作圖AL,LE俱成矩形。MF,PH俱成正方形.

而 $\square MF=AP^2,\ \square PH=PB^2$

$\square AL=\square LE=AP.PB$

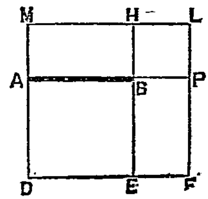
則由圖 $\square ADEB=\square MF+\square PH+\square AL+\square LE$

即 $AB^2=AP^2+BP^2+2AP.BP$

定理 7. 二直線較上正方形。等於此兩線上正方形和。減此二線所函矩形之二倍。*

解 設$AB=AP-BP$

題言 $AB^2=AP^2+BP^2-2AP.BP$



證 先於AB線上作ADEB正方形.

次過P引LPF線。與AD平行。且與DE延線會於F。

次截取$PL=PB$。則$LF=AP$。

末過L引MHL線與AB平行。與DA,EB延線各會於M

*本定理與代數學法式$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$對應.

於H。

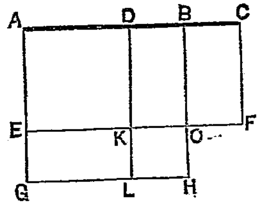
則MF乃在AP上正方形。HP乃在BP上正方形。

MP及HF乃AP,BP矩形。

而 $$\square AE=\square MF+\square HP-(\,\blacksquare MP+\blacksquare HF)$$

即 $$AB^2=AP^2+BP^2-2AP.BP$$

定理 8. 二直線上正方形之較。等於兩直線和與較所函之矩形。*



解 設AB及BC為二直線。若AB>BC。

題言 AB^2-BC^2

$=\overline{AB+BC}.\ \overline{AB-BC}.$

證 先置AB及BC在一直線上。且截BD=BC。則

$$AC=AB+BC,\ AD=AB-BC$$

故證明 $AB^2-BC^2=AC.AD$ 即可

由是。先於AB上作AGHB正方形。次過D,C作DL,CF與AG及BH平行。截取HO=LH。[即BD]復過O作EKOF線與BC平行。

則 $$\square KH=DB^2=BC^2$$

---

*本定理與代數學法式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 對應。

故　$AB^2-BC^2=\square EL+\square AO.$

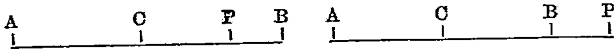
然　$\square EL=\square BF,$　〔作圖〕

故　$\square EL+\square AO=\square AF.$

然　$\square AF=AC.AE=CA.AD,$

故　$AB^2-BC^2=AC.AE=AC.AD.$

系　直線任內分或外分於一點。則二分線所函之矩形。等於半直線上正方形。與由中點至分點間直線上正方形之較。



解　AB平分於C。又任設P點為內分或為外分

系言　$AP.BP=AC^2\sim CP^2$

證　因　$AP=AC+CP$

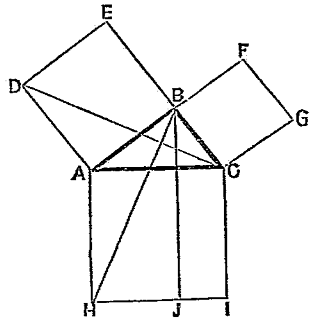
$BP=BC\sim CP=AC\sim CP$　故也

*問題　6　已知矩形隣合二邊之和。若兩邊相等。其面積為最大。

定理　9.　直角三角形之斜邊上正方形。等於直角旁二邊上正方形之和。

解　設△ABC為直角三角形。其直角在∠B。

題言　$AC^2=AB^2+BC^2$



證　AB,BC,CA 上各作 ADEB, BFGC, CIHA 正方形。聯合 CD,BH。且引 BJ 與 AH 平行。

因 ∠ABC, ∠ABE, ∠CBF 俱爲直角。故 CBE,ABF 成一直線。　〔1.定理 3〕

故△DAC 與□DABE 同以 DA 爲底。且同在 DA,EC 平行線間。

$\therefore$　△DAC＝$\frac{1}{2}$□DABE.　〔定理 2〕

同理　△BAH＝$\frac{1}{2}$▭AJ.

然　∠DAB, ∠HAC 俱爲直角。

故　∠DAC＝∠BAH,

而　DA＝BA,　〔作圖〕

AC＝AH,

由是　△DAC≡△BAH,　〔1.定理 9〕

故　□DABE＝▭AJ.

同理　□BCGF＝▭CJ.

由是　□AHIC＝□DABE＋□BCGF.

即　$AC^2=AB^2+BC^2$.

系 於△ABC。若直角在∠B。則

$AB^2=AC^2-BC^2$ 及 $BC^2=AC^2-AB^2$

*問題 7 於定理9之圖。試證明以下各事。

(1) 聯合AE,CF。此二直線必平行。

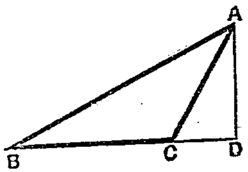
(2) D,B,G三點同在一直線中。

(3) CD,BH必互爲直角相交、

(4) 聯合EF,GI,DH。則△EFB與△ABC全相等。而△GCI,△DAH與△ABC等積。

*8 正方形之對角線上正方形。等於本形之二倍。

定理 10. 凡三角形。其對鈍角之邊上正方形。大於鈍角傍之二邊上正方形和、所大者即一矩形之倍。其矩形之兩邊。一係鈍角傍之邊。一係在其邊上他邊之射影。



解 △ABC爲鈍角三角形。其鈍角在∠ACB。CD爲BC(延線)上AC之射影。

題言 $AB^2=AC^2+BC^2+2BC.CD$

證 $AB^2=AD^2+BD^2$ [定理9]

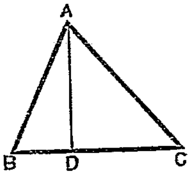
然　$AD^2=AC^2-CD^2$,　〔定理9系〕

及　$BD^2=BC^2+CD^2+2BC.CD$,　〔定理6〕

故　$AB^2=AC^2+BC^2+2BC.CD$.

問題 9　若角ACB爲平角。求證定理6及定理10之極限之例。

定理 11. 凡三角形。其對銳角之邊上正方形。小於銳角傍之二邊上正方形。所小者即一矩形之倍。其矩形之兩邊。一係銳角傍之邊。一係在其邊上他邊之射影。



解　於△ABC。其銳角在∠B。而BD乃BC上AB之射影,

題言　$AC^2=AB^2+BC^2-2BC.BD$。

證　$AC^2=AD^2+DC^2$,〔定理9〕

然　$AD^2=AB^2-BD^2$,　〔定理9系〕

及　$DC^2=BC^2+BD^2-2BC.BD$,〔定理7〕

故　$AC^2=AB^2+BC^2-2BC.BD$.

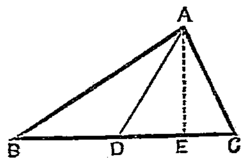
系　反之凡三角形一邊上正方形。與他二邊上正方形之和相較。或等或大或小。必因其邊所對之角爲直角或爲鈍角或爲銳角而定。

問題　10　求證定理7及定理11之極限之例。

定理　12. 凡三角形。自頂角至底之中點作直線。則兩腰上正方形之和。必等於半底上正方形之二倍。加直線上正方形之二倍。

解　設ABC爲三角形。其底BC之中點爲D。

題言　$AB^2+AC^2=2BD^2+2AD^2$.



證　在BC上AD之射影爲DE。則 $AB^2=BD^2+AD^2+2BD.DE$,　〔定理10〕

及　$AC^2=CD^2+AD^2-2CD.DE$,　〔定理11〕

然　$BD=CD$,

故　$AB^2+AC^2=2BD^2+2AD^2$.

*問題　11　平行四邊形。其各邊上正方形之和。等於各對角線上正方形之和。

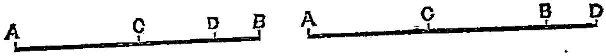
*12　任作四邊形。其各邊上正方形之和。大於對角線上正方形之和。所大者即一正方形之四倍。其方形之邊。乃聯合對角線兩中點之直線.

定理　13. 直線上任取一點爲內分或

爲外分。其二分線上正方形之和。等於半直線上正方形之二倍。加中點及分點間直線上正方形之二倍。

解　設AB直線之中點爲C。任取D點爲內分或爲外分。題言

$$AD^2+DB^2=2AC^2+2CD^2.$$



證　$AD^2=AC^2+CD^2+2AC.CD,$　〔定理6〕

及　$DB^2=CB^2+CD^2-2BC.CD,$　〔定理7〕

而　$AC=BC,$

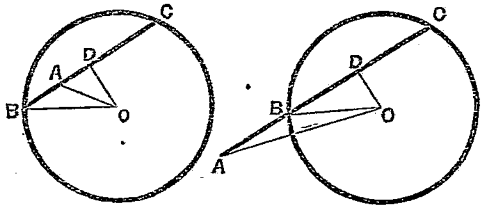
故　$AD^2+DB^2=2AC^2+2CD^2.$

問題　13　求證定理13及定理12之極限之例。

定理　14.　內分或外分圓弦。由分點至圓周之二直線所函之矩形。等於半徑上正方形與他正方形之較。其正方形之邊。即自分點至圓心之直線。

解　設O爲圓心。BC爲弦，內分或外分於A點。

題言　$AB.AC=OB^2\sim OA^2.$



證　引BC之垂線OD。則

$$BD=DC,$$ 〔11.定理6〕

由是　$AB.AC=BD^2\sim AD^2,$ 〔定理8系〕

然　$OB^2=BD^2+OD^2,$ 〔定理9〕

$OA^2=AD^2+OD^2,$ 〔定理9〕

由是　$OB^2\sim OA^2=BD^2\sim AD^2$

故　$AB.AC=OB^2\sim OA^2$

系 1　過圓內或圓外已知之一點。任作數弦。每弦之二分所函之矩形恒等。

2.　過圓內已知一點。作一弦。其兩分所函之矩形。等於被該點平分之弦之半自乘。

3.　過圓外已知一點。作一弦。其二分所函之矩形。等於由該點引圓之切線上正方形。

證　設AT爲切線。則

$$AT^2=OA^2-OT^2$$ 故也

系 4. 反之。過圓外一點之弦。其二分上所函之矩形若等於由該點與圓周聯合之直線上正方形。則此直線必為切線。

證 若 $AB.AC=AP^2$

而 AP 非切線。則 AP 必更與圓交於他點。今設此點為 Q。則 $AB.AC=AP.AQ$ [系 1]

$$\therefore \quad AP^2=AP.AQ$$

若是。則於理不合

故 AP 必為切線。

*問題 14 AB之延線中任取C點。以AB為徑畫一圓。由C至圓引二切線恒等。

*15. ABC三角形。C為直角。由C至斜邊引垂線 CD。則 CD 上正方形必等於 AD.DB矩形。

16. ABC三角形。由A,B至對邊引 AP, BQ 垂線。相交於O。則 AO.OP 矩形必等於 BO.OQ 矩形。

*17. 有同頂角之數三角形。諸形之底皆過已知之一點。當其底以此點為中點者。則此底較他諸底最小。

18. 平行四邊形之兩對角線。必分本形為四個等積三角形。

19. 凡平行四邊形。由其一對角線內一點。至二對角引兩直線。則分本形爲四個三角形。其相對兩個三角形之和。等於平行四邊形之積之半。

問題 20. 平行四邊形ABCD之對角線爲AC。於其延線內任取E點。則△EBC, △EDC等積。

21. ABCD爲平行四邊形。同平面內任意之一點爲O。則△OAB, △OCD之和或較。等於平行四邊形之積之半。

22. 平行四邊形ABCD之對角線之交點爲O。而P爲△OAB內之一點。

則 $\triangle APB \sim \triangle CPD = \triangle APC + \triangle BPD$.

*23. 聯合三角形各邊之中點。其所成之三角形爲本形四分之一。

24. 正方形內之一點與各角之頂。以直線聯合之。此線上正方形之和。等於由該點至各邊所引垂線上正方形和之二倍。

*25. 平分四邊形之各邊。聯合諸分點所作之平行四邊形。等於原形之積之半。

*26. 二直線AB,CD。內分或外分於O。如

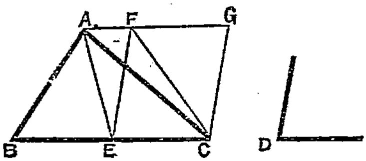
$$OA.OB = OC.OD$$

則可作一圓周過A,B,C,D。

第二章

作圖題

作圖題 I. 求作平行四邊形。其積與已知之三角形等。且其一角與已知之角等。



設△ABC爲已知之三角形。D爲已知之角。求作一平行四邊形。其積與△ABC等。且其中一角與D角等。

作圖法 先平分BC於E。且作∠CEF等於∠D。次過A作AFG線與BC平行。且過C引CG線與EF平行。則EFCG乃所求之平行四邊形。

證 先聯合AE。則

△ABC=2△AEC, 〔定理2系1〕

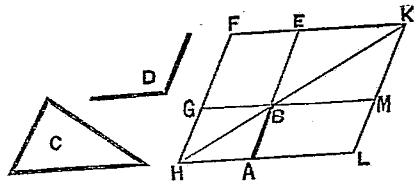
▱FGCE=2△AEC, 〔定理2〕

∴▱FGCE=△ABC.

而▱FGCE之∠CEF等於∠D。

問題 27. 求作平行四邊形。其積與已知之正方形等。且其一角等於直之角半。

作圖題 2. 於已知之直線上。求作平行四邊形。其積與已知之三角形等。且其一角與已知之角等。



設C爲已知之三角形。D爲已知之角。AB爲已知之直線。求於AB上作一平行四邊形與△C等積。且有一角等於∠D。

作圖法 先作FEBG平行四邊形與C等積。且令$\angle GBE=\angle D$。 〔作圖題1〕

且必可令EB與AB同在一直線上。

次引延FG。且由A作AH線與BG平行。此二線相會於H。由是聯合HB。且引延之與FE之延線相遇於K。

末作KML與FH平行。且與GB之延線遇於M。與HA之延線遇於L。

則ABML爲所求之平行四邊形。

證 ▱FB=▱BL, 〔定理4〕

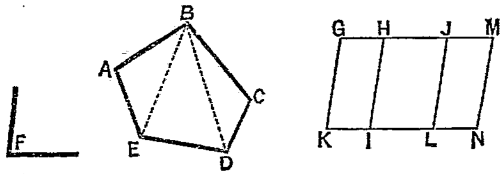
▱FB=△C,

∴ ▱BL=△C.

而▱BL之∠ABM等於∠D。且在已知之直線AB上。

作圖題 3. 有已知之直線形。求作平行四邊形與之等。且一角與他已知角等。

設ABCDE為已知之直線形。F為已知之角。求作平行四邊形與ABCDE等。且有一角與F等。



作圖法 先作ABCDE之對角線。必可分為數三角形。

次作▱GHIK等於△BAE。且令∠K=∠F。〔作圖題1〕

又於HI上作▱HJLI等於△BED。且令∠HIL=∠F。〔作圖題2〕

復於JL上作▱JMNL等於△BCD。且令∠JLN=∠F。〔作圖題2〕

則GKNM為所求之平行四邊形。

證 　∠HIL=∠K 〔作圖〕

然 　∠K+∠HIK=2R.∠ 〔1.定理25〕

∴ ∠HIL+∠HIK=2R.∠

由是 KIL成一直線 [1.定理3]

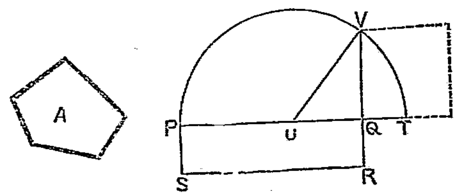
同理可證GHJM及KILN俱成一直線。

而 $MN \parallel GK$ [1.定理8]

故GKNM平行四邊形之K角等於∠F。且與ABCDE等積

作圖題 4. 有已知之直線形。求作正方形與之等。

設A為已知之直線形，求作正方形與A之積等。



作圖法 先作PQRS矩形與A等. [作圖題3]

若PQ=QR。則PQRS即所求之正方形。

若PQ≠QR。則引延PQ至T。

令 QT=QR.

次以PQT為徑。向上作半圓，而其心為U。

末引延RQ與圓周相遇於V。

則QV上之正方形即等於A直線形。

證 PQ=PU+UQ,

$$QT = PU - UQ,$$

故 $$PQ.QT = PU^2 - UQ^2.$$ 〔定理8〕

然 $$PU^2 = UV^2,$$

$$\therefore PU^2 - UQ^2 = UV^2 - UQ^2 = VQ^2.$$ 〔定理9系〕

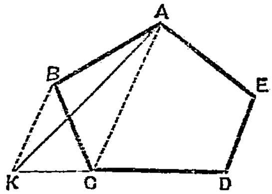
然 $$PQ.QT = \square PQRS = A,$$

$$\therefore VQ^2 = A.$$

問題 28. 於已知之底上作矩形。與已知之正方形等。

作圖題 5. 有已知之直線形。求作一直線形與之等。但比已知之形小一邊。

設ABCDE爲已知之直線形。求作他直線形與ABCDE等。但比ABCDE形小一邊。



作圖法 先作AC直線。且過B引BK線與AC平行。而與DC延線相遇於K。遂作AK直線。

則AKDE爲所求之直線形。

證 $\triangle ABC = \triangle AKC$ 〔定理2系1〕

兩形各加ACDE直線形。則

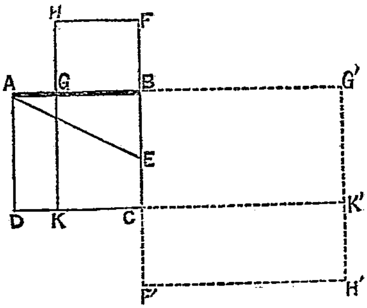
直線形ABCDE=直線形AKDE

而AKDE之邊數比ABCDE之邊數少一。

增　本作圖法反覆用之。則可作三角形與已知之直線形等。

作圖題 6. 有已知之直線。內分或外分於一點。其一分與全線所函之矩形。等於他一分上之正方形。求作法。

設AB爲已知之直線。



作圖法　先於AB上作ABCD正方形。

次平分BC於E。且作EA直線.

又以E爲心。以EA爲半徑。向上下作弧。與BC延線相遇於F於F'。末於BF及BF'上作BFHG及BF'H'G'兩正方形。

則G及G'爲所求之兩點。

證　試作矩形FHKC及F'H'K'C。

則 $AB^2=AE^2-BE^2$, [定理9系]

然 $CF.BF=AE^2-BE^2$, [定理8系]

$\therefore AB^2=CF.BF$,

即 $\square ABCD=\text{▭}FK$,

同理 $\square ABCD=\text{▭}F'K'$,

而於前例由等量減去▭BK於後例由等量加入▭BK'

則 $\text{▭}AK=\square BH$

$\text{▭}AK'=\square BH'$

即 $AB.AG=BG^2$ 及 $AB.AG'=BG'^2$

系 分FB於C點若

$FC.FB=CB^2$

則必爲外分。

問題 29. 求作正方形等於他正方形之二倍。

*30. 求作正方形等於若干已知之正方形之和。

*問題 31. 求自三角形一邊之任一點作直線平分其形之積。

32. 過已知之一點作一直線平分平行四邊形。

33. 求分已知之直線爲二段其一分上正方形等於全線上正方形之半。

34. 已知三角形之底與面積及其一底角求作

其形。

35. 由已知之二點至一點作直線,此線上之正方形之和,當其一定不易,求該點之軌跡。

36. 於已知之直線內求取一點,由此點至已知之二點作直線,而其上正方形之和最小。

第四編

比及比例

第一章

緒論及定義

記法 本編用大羅馬文字(如A,B,C,D……)以代量。(大羅馬文字即爲量。非如代數學上所用以代表量之測度也)用小羅馬文字(如a,b,c,d ……)以表完全數。又二量可比較且爲同類者。則取羅馬字之前半以代之。例如A,B與C,D比較者是也。若二量爲異類者。則取羅馬字之前半及後半以代之。例如A,B與P,Q比較或C,D與X,Y比較者是也。

定義 1. 倍量 設有二量。若此量函有彼量若干倍。則此量爲彼量之倍量。

2. 約量 設有二量。若此量被彼量函有若干倍。則此量爲彼量之約量。

例如A=mB。則A爲B之m倍量B爲A之約量。

次之諸式。關於倍量之性質。亦關於測度其量之

性質。已定爲公理者也。但 $m,n,p\cdots\cdots$ 爲完全數。

(1) $mA+mB+mC+\cdots\cdots=m(A+B+C+\cdots\cdots)$.

(2) 若 $A>B$。則 $mA-mB=m(A-B)$.

(3) $mA+nA+pA+\cdots\cdots=(m+n+p+\cdots\cdots)A$.

(4) 若 $m>n$。則 $mA-nA=(m-n)A$.

(5) $m.nA=mn.A=nm.A=n.mA$.

(6) 同類二量爲 A, B。同以一單位測度之。若所測得爲 a 爲 b。由是

$A>,=,<B$。則必得 $a>,=,<b$。

反之 $a>,=,<b$。則必得 $A>,=,<B$。

3. 比 一量與同類之他量相比。即問此量爲彼量之若干倍也。

A 與 B 之比。可以 $A:B$ 記之。而稱 A 爲比之前率。B 爲比之後率。

若干倍一語。蓋問第一量函有第二量恰盡或有餘也。要非適足之定義。試更詳述之如次。

同類二量爲 A, B。同以一單位測度之。命其所測得者爲 a 爲 b。則此測度可說明之如次。

(1) 若 A,B 精密函有單位若干倍者。則

a,b 爲完全數

A,B 二量間之關係爲 $bA=aB$ 即 $A=\frac{a}{b}B$

於此例 $\frac{a}{b}$ 爲完全數或爲分數。則 A 量 B 量之關係爲若干倍者。亦必爲完全數或爲分數。 由是 A : B 者爲 $\frac{a}{b}$ 即等於以 B 之測度除 A 之測度。

(2) 若 A,B 精密函有單位幾分之若干倍者。則 a,b 爲分數。

於此例其關係亦如次

$$bA=aB \text{ 即 } A=\frac{a}{b}B$$

A 量與 B 量之關係爲若干倍者。亦必爲完全數或爲分數 $\frac{a}{b}$。 由是 A : B. 爲 $\frac{a}{b}$。即等於以 B 之測度除 A 之測度。

A, B 二量。若精密函有單位若干倍。或函有單位幾分之若干倍者。則此二量爲有公度。 於此例。其二量稱**可公約量**。反之。如二量無公度者。則此二量爲**不可公約量**。

凡量可與單位公約者。則其量之測度爲盡數。故

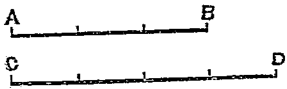
盡數包函完全數及分數。又凡量不可與單位公約者。則其量之測度爲不盡數，

由是合(1)(2)兩說。則

A,B 二量爲可公約者。則其二量之比。即其測度之比。必爲盡數。而A,B二量之關係爲 $A=rB$。但 r 爲盡數。

例如有同數二量。以二直線AB,CD表之。分AB爲三等分。CD爲四等分。而AB每分與CD每分等，

則 $4AB=3CD$ 即 $AB=\frac{3}{4}CD$。而 $AB:CD$ 爲 $3:4$ 即 $\frac{3}{4}$。



(3) A,B若爲不可公約量。則a,b必有一爲不盡數。而其比 $\frac{a}{b}$ 亦爲不盡數。

而不盡數必爲一盡數之極限。故 $A:B$ 無論爲有可公約量與否。皆可言爲 $\frac{a}{b}$。即以B之測度除A之測度。與其測得之商等。但此除商爲不盡數。故精密求其數值不能。然在理論上。亦可想得其眞值。若在實際上。只可求其隨意近合之數值。

例如正方形。其對角線A之測度爲a。其邊B之測

度爲b。據第三編定理9。得其關係爲$a^2=b^2+b^2$即$a^2=2b^2$。由是$a=\sqrt{2}.b$

是故正方形之對角線A與其邊B之比A：B。爲$\frac{a}{b}$。即$\sqrt{2}$. 今由算術求平方根法。得 $\sqrt{2}=1.414213\cdots\cdots$。

故如上述比之近合數爲

$$\frac{14}{10},\ \frac{15}{10}.\quad \frac{141}{100},\frac{142}{100}.\quad \frac{1414}{1000},\ \frac{1415}{1000}.\ 等$$

上每對分二數。前數乃不足之近合。後數乃有餘之近合。今設正方形之對角線與其邊之比。若取$\frac{141}{100}$以爲例。則不足之近合數。不差$\frac{1}{100}$。又若取$\frac{142}{100}$以爲例。則有餘之近合數。不差$\frac{1}{100}$。 試更命每對之前分數爲$\frac{m}{n}$。則每對之後數爲$\frac{m+1}{n}$。A：B即$\frac{a}{b}$。所差者必在$\frac{m}{n}$及$\frac{m+1}{n}$之間。而$\frac{m}{n}$對於$\frac{a}{b}$爲不足近合數。所差不逾$\frac{1}{n}$。又$\frac{m+1}{n}$對於$\frac{a}{b}$爲有餘近合數。所差不逾$\frac{1}{n}$但n原爲無定數。可任意增多。故對於$\frac{a}{b}$能爲任意之近合數。由是n可爲無限大。則$\frac{a}{b}$爲$\frac{m}{n}$或$\frac{m+1}{n}$之極限。

以上所述。可更約言之如次。

同類二量A,B之比。如A：B。乃其測度之比。如a:b。即等於$\frac{a}{b}$。比者不過一無名數耳。夫A,B若爲可公約量。則比爲盡數。若爲

不可公約量。則比爲不盡數。

注意　非同類量不能比。

4. 比之相等　A,B,X,Y 四量之測度各爲 a,b,x,y。若 A : B 等於 X : Y。則

$$a : b = x : y \quad 即 \quad \frac{a}{b}=\frac{x}{y}.$$

註　A,B 二量之比若等於 X,Y 二量之比,則

$mA >,=,< nB$。因 $mX >,=,< nY$ 而定

(但 m 及 n 爲任意之完全數。)

何則。若 A : B 等於 X : Y。故各量之測度。其關係如下

$$\frac{a}{b}=\frac{x}{y}.$$

兩邊各以 $\frac{m}{n}$ 乘之。則得

$$\frac{ma}{nb}=\frac{mx}{ny}.$$

故由分數之理。若　$ma >,=,< nb.$

則　$mx >,=,< ny.$

由是。依159頁(6)。若　$mA >,=,< nB.$

則　$mX >,=,< nY.$

5. 比例　A : B 等於 X : Y。則 A,B,X,Y 四量爲比例量。而此四量稱爲比例。讀作「A

之於B。猶X之於Y;而其記法如次。

$$A:B::X:Y \text{ 或 } A:B=X:Y$$

A與Y稱外率。B與X稱中率。又Y爲A,B,X之比例第四率。

而前率A與前率X相當。後率B與後率Y相當。

6. 比之不等 A,B,X,Y四量之測度各爲a,b,x,y。若 $A:B>X:Y$。則

$$a:b>x:y \quad \text{即} \quad \frac{a}{b}>\frac{x}{y}.$$

註 A,B二量之比若大於X,Y二量之比。則

$mA>nB$ 因 $mX \ngtr nY$ 而定。

又 $mA=nB$ 因 $mX<nY$ 而定。

(但m及n爲任意之完全數。)

何則。A:B若大於X:Y。則各量之測度。其關係如下。

$$\frac{a}{b}>\frac{x}{y}.$$

兩邊各以$\frac{m}{n}$乘之。則得

$$\frac{ma}{nb}>\frac{mx}{ny}.$$

故由分數之理。若 $ma>nb$ 則 $mx \ngtr ny$.

又 $ma=nb$ 則 $mx<ny$.

由是。依159頁(6)若 $mA>nB$ 則 $mX \ngtr nY$.

$mA=nB$ 則 $mX<nY$.

7. 等比 若 $A=B$。則 $A:B$ 稱等比。

優比 若 $A>B$。則 $A:B$ 稱優比。

劣比 若 $A<B$。則 $A:B$ 稱劣比。

8. 反比 此比之前率及後率。各爲他比之後率及前率。則二比互爲反比。

例如 $B:A$ 爲 $A:B$ 之反比。

9. 比例中率及比例第三率 有同類三量。其第一與第二之比。等於第二與第三之比。則稱比例量。亦云比例。

例 $A:B::B:C$

則 A,B,C 爲比例量。

而 B 爲 A 及 C 之比例中率。C 爲 A 及 B 之比例第三率。

10. 連比例 有三以上之同類量。其

第一與第二之比。等於第二與第三之比。又第二與第三之比。等於第三與第四之比。逐次如是。稱連比例。

11. 複比 有若干同類量。其第一量與末量之比。即爲第一與第二之比。第二與第三之比。以至其最後二量之比之複比。

例 A,B,C,D,E 爲諸同類量。A : E 爲 A : B,B : C, C : D,D : E,等之複比。

若 A,B,C,D,E 之測度各爲 a,b,c,d,e。則

$$\frac{a}{e}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{d}\times\frac{d}{e}。$$

12. 複比 有諸同類量。與他若干比相比。其第一量與第二量之比。等於他第一比。第二量與第三量相比。等於他第二比。逐次如是。則第一量與末量之比。即爲他若干比之複比。

設諸同數量爲 P,Q,R,S。而若干比爲 A : B,C : D,E

:F。則

$$P:Q::A:B$$

$$Q:R::C:D$$

$$R:S::E:F$$

P:S爲A:B,C:D,E:F之複比。

若P,Q,R,S及A,B,C,D,E,F之測度各爲p,q,r,s及a b,c,d,e,f。則 $\frac{p}{q}=\frac{a}{b}$, $\frac{q}{r}=\frac{c}{d}$, $\frac{r}{s}=\frac{e}{f}$,

故 複比 $\frac{p}{s}=\frac{p}{q}\times\frac{q}{r}\times\frac{r}{s}=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}$.

13. 二乘比 若A:B::B:C。則A:C爲A:B之二乘比。

試設A,B,C之測度各爲a,b,c。則

$$\frac{a}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{c^2}$$

14. 三乘比 若A:B::BC::C:D。則A:D爲A:B之三乘比。

試設A,B,C,D之測度各爲a,b,c,d。則

$$\frac{a}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{d}=\frac{a^3}{b^3}$$

極限論

定義 15. 定量及變量 定量者一定

不易之量也。變量者消長變易之量也。

例如三角形之三角。各爲變量。而其三角之和。則爲定量〔二直角〕又圓之弦爲變量。而其徑爲定量。

16. 極限 一變量從定律次第變改其値。至近合一定量時。則其定量與變量之差。縱小至無窮。仍爲變量。而不能與定量恰合。則此定量爲彼變量之極限。而彼變量近合其極限。可至無限。

例如次圖。AB 爲定長之直線〔定量〕由 A 點出發向 B 進行。在第一秒間。歷 AB 之半爲 AM。在第二秒間。歷餘線之半爲 MM′。在第三時間。亦歷其餘線之半爲 M′M″。逐次如是。則該點進行之距離〔變量〕

次第近合 AB。而秒數愈多。則該點愈近合 AB。至 AB 與該距離之差。可任小至無窮。

故 AB 爲該點進行距離之極限。

如他一例。有 n 邊之正多角形。其一角之測度〔以直角爲單位〕爲 a。則

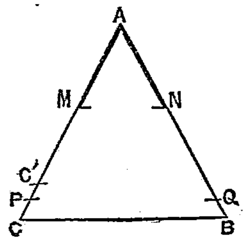
$$a=2-\frac{4}{n}$$ [1.定理24]

由是A者。關於n爲變量。而$\frac{4}{n}$可小至無窮。故A以二直角爲極限。而近合可至無窮。然決不能達此極限。

定理 若二變量恆相等。則其極限亦相等。

解 凡量皆可用直線表示。故二變量以AM,AN兩直線表之。而AC,AB各爲AM,AN之極限。且AM,AN恆相等。而其大不變。題言

AC=AB.



證 若非AC=AB。

則必AC>或<AB然後可、

試設 AC>AB.

則截取AC'線。令 AC'=AB.

今因AM能無限近合AC。故AM可達至AP而較AC'値大。與AP相當AN之値爲AQ.

則得 AP=AQ.

及 AC'=AB.

然此二相等式。爲不合理。

何則。AP>AC'及AQ<AB故也。

由是。AC必不能大於AB。

同理。AC亦不能小於AB。

$$\therefore \quad AC=AB.$$

系 1 二變量有一定不易之比。則其極限亦必同比。

2\. 二不盡比所有之近合值。俱精密相等。則二不盡比必相等。

證 不盡比為其近合值之極限故也。

第　二　章

比及比例之定理

定理 1. 若兩比例之一比等。則餘一比亦等。

解　若 A : B : : P : Q 及 G : H : : P : Q

題言　　　　A : B : : G : H.

證　若 A,B,G,H,P,Q 之測度各爲 a,b,g,h,p,q.

且　　A : B : : P : Q 及 G : H : : P : Q　〔原設〕

故　　$\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$ 及 $\frac{g}{h}=\frac{p}{q}$,

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{g}{h},$$

即　　A : B : : G : H.

注意　以下諸量。恒以大文字示之。而其量之測度。則以其相當之小文字示之。

定理 2. 反理　若二比相等。其反比亦相等。

解　若 A : B : : P : Q 題言 B : A : : Q : P

證　因　　A : B : : P : Q

$$\frac{a}{b}=\frac{p}{q},$$

以兩邊各除1。則得 $\frac{b}{a}=\frac{q}{p}$,

$$\therefore B:A::Q:P.$$

定理 3. 取二量各與第三量比。若第一量比第二量或大或等或小。則第一量之比或大或等或小於第二量之比。又取一量各與他二量比。若二量之第一量比第二量或小或等或大。則第一量之比或大或等或小於第二量之比。

解 A,B,C為同類三量。若

$A>,=,<B$ 題言 $A:C>,=,<B:C$.

又 $A<,=,>B$ 題言 $C:A>,=,<C:B$.

證 若 $A>,=,<B$ 則 $a>,=,<b$.

故 $\frac{a}{c}>,=,<\frac{b}{c}$ 及 $\frac{c}{a}<,=,>\frac{c}{b}$.

由是 $A:C>,=,<B:C$ 及 $C:A<,=,>C:B$.

系 1. 反之 $A:C>,=,<B:C$

或 $C:A<,=,>C:B$

由是 $$A>,=,<B.$$

2. 已知之三量其比例第四率唯一。

又已知之二量其比例第三率及比例中率亦唯一。

定理 4. 二量之比與其等倍量之比等。

解 設A與B爲二量題言 $A:B::mA:mB$

證 若二量之比爲r無論r爲盡數爲不盡數必得

$$A=rB.$$

又無論m爲完全數或爲分數必得

$$mA=mrB=r(mB).$$

故 $$A:B::mA:mB$$

系 若 $A:B::C:D$ 亦爲 $mA:mB::nC:nD$

定理 5. 同類四量爲比例若第二量比第四量或大或等或小則第一量比第三量亦必或大或等或小。

解 設同類之四量爲A,B,C,D且 $A:B::C:D$。若 $B>,=,<D$ 題言 $A>,=,<C$。

證 $$A:B::C:D,$$

故　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 由是 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$,

故　$b>,=,<d$。則 $a>,=,<c$,

即　$B>,=,<D$ 則 $A>,=,<C$.

定理 6. 屬理 同類四量爲比例。第一與第三之比。等於第二與第四之比。

解　$A:B::C:D$ 題言 $A:C::B:D$.

證　因　$A:B::C:D$,

故　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。由是 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$,

故　$A:C::B:D$.

系　$A:B::C:D$ 亦爲 $mA:nB::mC:nD$

定理 7. 加理 同類諸量爲比例。任取一前率比其後率。等於諸前率之和比諸後率之和。

解　設　$A:B::C:D::E:F\cdots\cdots$

題言　$A:B::A+C+E+\cdots\cdots:B+D+F+\cdots\cdots$

證　試設其等比爲r。則

$$A=rB, C=rD, E=rF\cdots\cdots$$

由是　$A+C+E+\cdots\cdots=rB+rD+rF+\cdots\cdots$

$$=r[B+D+F+\cdots\cdots].$$

故　$A+C+E+\cdots : B+D+F+\cdots\cdots :: A : B.$

定理 8. 合理,分理　四量爲比例。其第一量與第二量之和或較。比其第二量。等於第三量與第四量之和或較。比其第量四。

解　若　$A : B :: P : Q$

題言〔合理〕　$A+B : B :: P+Q : Q.$

及〔分理〕　$A \sim B : B :: P \sim Q : Q.$

證　試設其等比爲r。則

$A=rB$ 及 $P=rQ,$

由是　$A+B=rB+B=(r+1)B,$

及　$P+Q=rQ+Q=(r+1)Q,$

故　$A+B : B :: P+Q : Q.$

同理　$A \sim B : B :: P \sim Q : Q.$

系　$A : B :: P : Q$

則　$A+B : A \sim B :: P+Q : P \sim Q.$

定理 9. 等理　有量分爲二群。各群之第一量比其第二量皆等。又各群之第

二量比其第三量亦等。逐次如是。至最後二量之比仍等。則各群之第一量比其末量必等。

解 設諸量分爲$A,B,C,\cdots\cdots L,M,$及$P,Q,R,\cdots\cdots,Y,Z,$二群。

若 $A:B::P:Q,$

$B:C::Q:R,$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$L:M::Y:Z,$

題言 $A:M::P:Z.$

證 設 $A=rB,B=r'C,\cdots\cdots,L=r^nM,$

則 $P=rQ,Q=r'R\cdots\cdots,Y=r^nZ.$

但$r,r',\cdots\cdots r^n$爲盡數或不盡數。

故 $A=rB=rr'C=\cdots\cdots=rr'\cdots\cdots r^nM,$

及 $P=rQ=rr'R=\cdots\cdots=rr'\cdots\cdots r^nZ,$

由是 $A:M::P:Z.$

系 若 $A:B::P:Q$及$B:C::R:P$

則 $A:C::R:Q.$

定理 10. 若二比相等。其二乘比亦

相等。反之。二乘比相等。則其二比亦相等。

解　若　$A:B::P:Q$

題言　$A:B$之二乘比$=P:Q$之二乘比。

證 I　$A:B::P:Q$

故　$\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$ 由是 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{p^2}{q^2}$

由是　$A:B$之二乘比$=P:Q$之二乘比

〔定義13〕

解 II　若　$A:B$之二乘比$=P:Q$之二乘比

題言　$A:B::P:Q$

證 II　由前證甚明

問題　I　若$A:B>P:Q$。則$B:A<Q:P$。試證明之。

2.　$A:B::P:Q$。若$A>,=,<B$。則$P>,=,<Q$。

3.　若　$A:B::P:Q$及$E:B::X:Q$

則　$A+E:B::P+X:Q$。

4.　若　$A:B::C:D::E:F$

則　(1)　$A:B::A-C:B-D$

(2)　$A:B::mA\pm nC:mB\pm nD$

(3)　$A:B::mA+nC+pE+\cdots\cdots:mB+nD+pF+\cdots$

5. 若A : B>P . Q。則 A+B : B>P+Q : Q

而A>或<B及P>或<Q。則

$$A\sim B : B >\text{或}< P\sim Q : Q$$

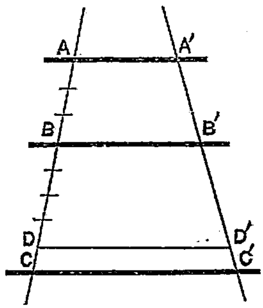
第五編

比例之用

第一章

本理

定理 I. 二直線交於三平行線。其一直線二分之比。等於他直線相當二分之比。



解　設 AA', BB', CC' 爲三平行線。二直線各與之相交於 A, B, C 及 A', B', C'。

題言　$AB : BC :: A'B' : B'C'$

證　(第一) AB 及 BC 爲可公約量。今命 AB, BC 之公約量爲 CD。

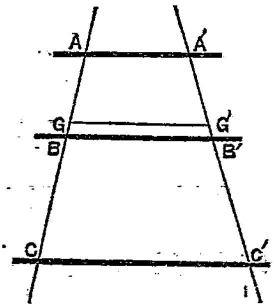
且設 AB 中函此公約量爲三倍。BC 中函此公約量爲五倍。則　$AB : BC = 3 : 5$

於是分 AB, BC 爲數部分。各分俱等於 CD。若由其各分點引數直線與 AA', BB', CC' 平行。則此數直線必平分 $A'B'$ 爲三。平分 $B'C'$ 爲五。

由是　　　$A'B':B'C'=3:5$

故　　　$AB:BC::A'B':B'C'$

（第二）AB及BC爲不可公約量。先平分BC爲若干分。取其一分爲度。由A向B次第截取。



夫AB與BC爲不可公約量。故至G爲最後之截點。而所餘GB。必小於爲度之一分。

次由G引GG'直線。與AA'平行。

則AG及BC爲可公約量。故由前例。則

$$AG:BC::A'G':B'C'$$

若是。平分BC之數愈增。則每分之長愈短。由是G點漸次近合於B點。

故AG之極限爲AB。而A'G'之極限爲A'B'。

由是　　　比 $AG:BC$ 之極限＝不盡比 $AB:BC$，

　　　比 $A'G':B'C'$ 之極限＝不盡比 $A'B':B'C'$.

而比 $AG:BC$，及比 $A'G':B'C'$ 任何近合其極限恆相等。

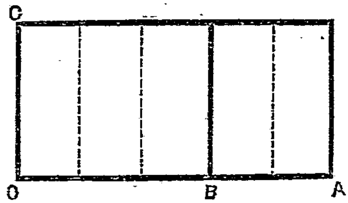
故於極限　$AB:BC::A'B':B'C'$　〔極限之定理系2〕

系　與三角形底平行之直線。截兩邊爲二分。其

一邊二分之比。等於他邊二分之比。

定理 2. 等高二矩形之比。等於其底之比。

解　二矩形AC,BC之高各爲OC。而其底爲OA,OB。



題言

▭AC : ▭BC :: OA : OB。

證 (第一) OA與OB兩底爲可公約量。

今設OA,OB各爲公約量之五倍三倍。則

OA : OB :: 5 : 3

於是由OA,OB各分點至底作垂線。則分AC爲五等積矩形。BC爲三等積矩形。此諸等積矩形。在AC中者。亦在BC中。悉相等。

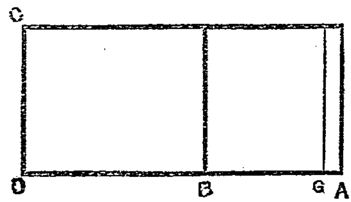
故　▭AC : ▭BC = 5 : 3.

由是　▭AC : ▭BC = 底OA : 底OB.

(第二) OA,OB爲不可公約量。

先平分OB爲若干分。取其一分爲度。由O向A次第截取。

夫OA與OB爲不可公約量。故至G爲最後之截點而所餘GA必小於爲度之一分。



次由G作OA之垂線。則OG及OB爲可公約量。故由前例得

▭GC:▭BC::底OG:底OB

若是。平分OB之數愈增。則每分之長愈短。由是。G點漸次近合於A點。

故　　OG之極限爲OA。GC之極限爲AC。

由是　　GC:BC之極限=不盡比AC:BC。

底OG:OB之極限=不盡比OA:OB.

而比GC:BC及比OG:OB任何近合其極限恒相等。故於極限

▭AC:▭BC::底OA:底OB.　〔極限之定理系2〕

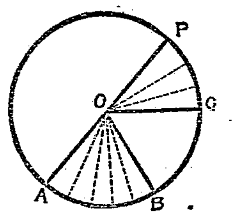
系 1. 等高之兩平行四邊形。或等高兩三角形之比。等於其底之比。

2. 等底兩矩形。或等底兩平行四邊形。又或等底兩三角形之比。等於其高之比。

定理 3. 等圓或同圓之圓心角相比。

如其所乘之弧相比。

解 設O爲圓心。AB,PQ爲任意兩弧。題言



$\angle AOB : \angle POQ :: $ 弧 $AB :$ 弧 PQ

證 (第一) AB,PQ弧爲可公約量。

今設AB,PQ兩弧各函公約量爲五倍三倍。則

$$\text{弧} AB : \text{弧} PQ = 5 : 3.$$

於是自弧AB,PQ之各分點至心作直線。則分 $\angle AOB$, $\angle POQ$ 各爲五個等角及三個等角。且彼此之等角相等。

故 $$\angle AOB : \angle POQ = 5 : 3.$$

由是 $$\angle AOB : \angle POQ :: \text{弧} AB : \text{弧} PQ.$$

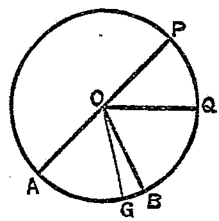
(第二) 弧AB,PQ爲不可公約量。

先平分弧PQ爲若干分。取其一分爲度。由A向B次第截取。

然AB與PQ爲不可公約量。故至G爲最後之截點。而所餘GB必小於爲度之一分。

次作GO直線。則弧AG,PQ爲可公約量。故由前例得

$\angle AOG : \angle POQ :: $ 弧 $AG :$ 弧 PQ



若是。平分PQ之數愈增。則每分之長愈短。由是G點漸次近合於B點。

故AG之極限爲AB。∠AOG之極限爲∠AOB。

由是　　AG : PQ之極限=不盡比AB : PQ

∠AOG : ∠POQ之極限=不盡比∠AOB : ∠POQ。

而比AG : PQ及比∠AOG : ∠POQ可任意近合其極限恆相等。故於極限

∠AOB : ∠POQ : : 弧AB : 弧PQ.

〔極限之定理系2〕

系　同圓或等圓之圓心角形之比。如其所乘之弧相比。

即　　圓心角形AOB : 圓心角形POQ : : 弧AB : 弧PQ

第　二　章

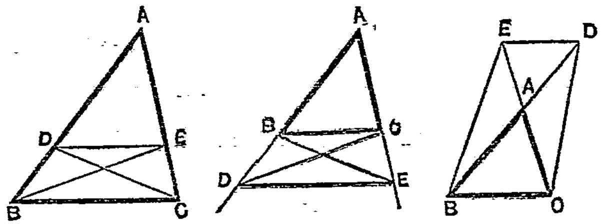
比　例　線

定理　4.　若直線分三角形之兩腰有比例。則此線必與底平行。

解　設直線為DE。分ABC三角形之兩腰AB,AC有比例為

$$AD:DB::AE:EC,$$

題言　　　　DE∥BC.



證　　AD : BD : : △ADE : △BDE,　〔定理2系1〕

及　　AE : EC : : △ADE : △CDE,

然　　AD : BD : : AE : EC,　〔原設〕

故　　△ADE : △BDE : : △ADE : △CDE,

由是　　△BDE=△CDE,　〔IV.定理3系1〕

然此兩三角形同以DE為底。故

$DE \parallel BC$.　　　　[III.定理2系3]

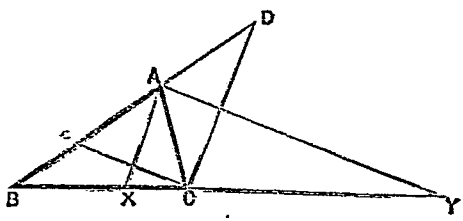
定理 5. 三角形。平分其腰間角或外角之線。必內分或外分其底。則分點距底兩端之線相比。如其兩腰相比。反之。內分或外分三角形之底。若其分點距底兩端之線相比。如其兩腰相比。則由分點至頂角作直線。必平分腰間角或外角。

解 1. 平分$\triangle ABC$之$\angle BAC$及其外$\angle CAD$之直線爲AX及AY。各與底BC及其延線交於X於Y。題言

$$BX : CX :: AB : AC,$$

及

$$BY : CY :: AB : AC.$$



證 1. 由C引CD線與XA平行。而與BA之延線交於D。則

$$CD \parallel XA$$

故　$\angle CDA = \angle BAX$,　〔1.定理7系〕

及　$\angle DCA = \angle CAX$,　〔1.定理6〕

然　$\angle BAX = \angle CAX$,　〔原設〕

故　$\angle CDA = \angle DCA$,

$\therefore\ AC = AD$.　〔1.定理12〕

又　$XA \parallel CD$,　〔作圖〕

故　$BX : XC :: BA : AD$,

即　$BX : CX :: AB : AC$.

同理由C引CE線與YA平行。則可證

$BY : CY :: AB : AC$.

解　11.　於△ABC之底BC及其延線中取X,Y兩點。

若　$BX : CX :: AB : AC$,

及　$BY : CY :: AB : AC$,

題言　AX及AY各平分A內角及其外角。

證　II　先作XA直線。且引CD線與XA平行。與BA延線交於D。

則　$BX : CX :: BA : AD$,　〔定理1系〕

然　$BX : CX :: AB : AC$,　〔原設〕

由是　$BA : AD :: AB : AC$,

$\therefore \quad AD = AC,$ 〔IV.定理3系1〕

故 $\angle ACD = \angle ADC,$

然 $\angle ACD = \angle CAX,$ 〔1.定理6〕

及 $\angle ADC = \angle BAX,$ 〔1.定理7系〕

$\therefore \angle BAX = \angle CAX.$

同理 $\angle CAY = \angle DAY.$

系 1. 已知AB:AC。則內分或外分BC直線僅有X及Y兩點。而若爲等比之例。則不能外分。

證 何則。作AX及AY直線。則必平分A內角及外角。而平分角之直線僅有一。

又在AB=AC之例。則AX⊥BC。而AY⊥AX。故AY∥BC。由是比AB:AC中無外分點。

2. B,C爲兩定點。各至A點之比爲AB:AC。而依一定〔非等比〕運動。則平分∠A之內角及外角兩直線。恒如其比分BC。而過二定點X及Y。而∠XAY爲直角。是故由二定點B,C至一點A。其距離之比。若爲一定。〔非等比〕則其點之軌跡。即以XY爲徑之圓周。

3. $BX : CX :: BY : CY.$

定義 I. 調和例 直線BC內分及外分於X及Y而爲同比。則BC謂之調和而分

於X及Y。B,X,C,Y四點稱爲調和列。

---

*問題　1.　當AB調和而分於X,Y。則XY亦可調和而分於A,B。

〔是故當A,X,B,Y爲調和列。則X,Y爲A,B之調和共軛點。又A,B亦爲X,Y之調和共軛點〕

2.　A,X,B,Y爲調和列。M爲AB之中點。則

$$MX : MA :: MA : MY$$

3.　四邊形被其兩對角線分爲四個三角形。則此四個三角形必成比例。

4.　兩三角形爲ACB,ADB。由其公用底AB中之一點E。引直線與AC,AD平行。且爲BC,BD各各相交於於F,G。則FG與CD平行。但兩三角形各在公用底AB之一傍。　又同在一傍則何如。

5.　$\triangle ABC$之邊BC平分於D點。$\angle ADB$, $\angle ADC$各各平分於直線DE,DF。而AB,AC之交點各爲E,F。則EF與BC平行。

第三章

相似形

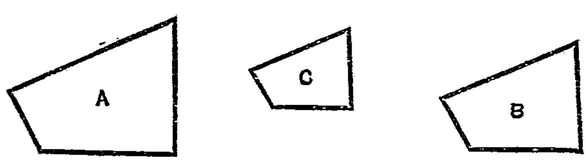
定義 2. 相似形 二直線形相當之角各等。且等角傍之邊相當爲比例。爲相似形。

3. 相似之位置 相似形之相當邊爲已知之二直線。則此相似形在已知之直線上相似之位置。

定理 6. 二直線形各與他直線形相似。則兩形互相似。

解 設A及B兩直線形各與C直線形相似。

題言 A亦與B相似。



證 A及B之各角各與C之各角等。故A及B爲

等角形。

而A各角傍之兩邊相比。等於C相當之兩邊相比。

B各角傍之兩邊相比。亦等於C相當之兩邊相比。

故A及B之相當兩邊必成比例。

故A與B相似。　〔定義2〕

定理 7. 兩三角形之各角俱等。則此兩三角形相似。而對等角之邊。即爲比例之相當率。

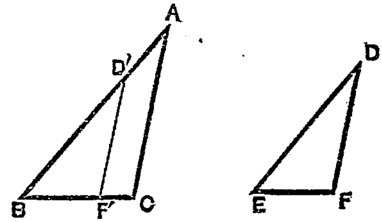
解　△ABC之∠A, ∠B, ∠C各與△DEF之∠D, ∠E ∠F等。題言此兩形相似。

即

$$AB : BC :: DE : EF.$$

$$BC : CA :: EF : FD.$$

$$CA : AB :: FD : DE.$$



證　試取△DEF置於△ABC上。而令∠E落於∠B.

則D及F必落於AB及BC上。或落於AB及BC延線上。試設其落於D′於F′。

因 $\angle F=\angle C$,

故 $D'F' \parallel AC$,

故 $BF':BC::BD':BA$ 〔定理1系〕

由是 $BF':BD'::BC:BA$ 〔屬理〕

即 $EF:ED::BC:BA$

同理。若置∠F在∠C上。或置∠D在∠A上。則可證他比例。

故 △ABC與△DEF相似。

問題 6 ABC爲銳角三角形。由A及B至對邊作AD及BE垂線。則△CDE與△CAB相似。求證。

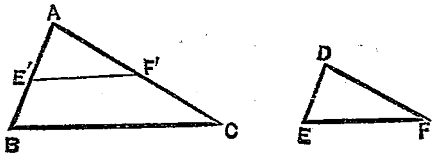
定理 8. 若兩三角形之一角等。且等角傍之邊有比例。即爲相似形。而對相當邊之角亦等。

解 於△ABC,△DEF

$\angle A=\angle D$,

及 $AB:AC::DE:DF$

題言 △ABC與△DEF相似。



證　試取△DEF置於△ABC上。令∠D重合於∠A。則E及F必落於AB及AC上。或落於其延線上。今命其落於E'及F'。

因　$AB:AC::DE:DF$　〔原設〕

故　$AB:AC::AE':AF'$

即　$AB:AE'::AC:AF'$　〔屬理〕

$\therefore E'F' \parallel BC$　〔定理4〕

由是∠AE'F'及∠AF'E'(即∠E及∠F)各與∠B及∠C等。〔1.定理7系〕

故　△ABC與△DEF相似。〔定理7〕

問題 7　自三角形一角之頂至對邊引垂線。若落於三角形內。且爲底二段之中率。則此形必爲直角三角形。

定理 9. 三角形之邊順次與他三角形之邊各有比例。則兩三角形相似。而對

相當邊之角相等。

解　於△ABC及△DEF,

AB : BC : : DE : EF,

及　BC : CA : : EF : FD,

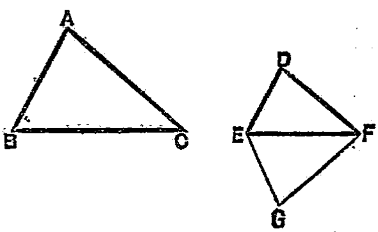
CA : AB : : FD : DE,

題言　△ABC,△DEF相似。

證　先於EF線上作△EGF。

令　∠FEG=∠B,

∠EFG=∠C,



則　△GEF與△ABC

等角.

故兩形相似。

∴ GE : EF : : AB : BC

然　AB : BC : : DE : EF

∴ GE : EF : : DE : EF

由是　GE=DE　[IV.定理3系1]

同理　GF=DF

由是　△DEF與△GEF等角　[I.定理19]

然　△GEF與△ABC等角

∴ △DEF與△ABC等角.

由是　　　△DEF與△ABC相似。　〔定理7〕

定理 10. 若兩三角形之一角等。且他一角傍之兩邊成比例。而其相當率爲等角之對邊。則餘一角相等。或互爲補角。若在初例。則兩三角形相似。

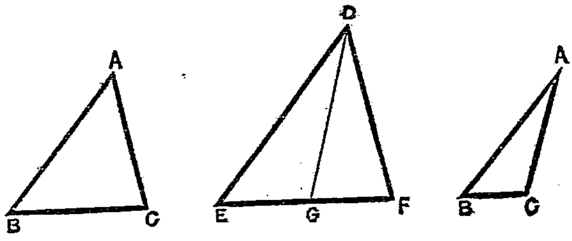
解　於△ABC及△DEF,

$\angle B=\angle E$,

及　　　$BA:AC::ED:DF$,

題言　　$\angle C=\angle F$ 或 $\angle C+\angle F=2R.\angle$.

若在前例。則△ABC與△DEF相似。



證　試取∠A與∠D比較。

若非 $\angle A=\angle D$。則必 $\angle A\neq\angle D$。

若　　　　$\angle A=\angle D$,

則由定理8。兩三角形相似。

而 $\angle C = \angle F.$

若 $\angle A \neq \angle D,$

則於D點作$\triangle EDG$與$\angle BAC$等。

則$\triangle DEG$及$\triangle ABC$爲等角。故亦相似。

由是 $ED : DG :: BA : AC,$

然 $ED : DF :: BA : AC,$

由是 $ED : DG :: ED : DF,$

故 $DG = DF,$

由是 $\angle DGF = \angle DFG,$

而 $\angle EGD = \angle C,$

及 $\angle EGD + \angle DGF = 2R.\angle,$

故 $\angle C + \angle DFE = 2R.\angle.$

由是 $\angle C = \angle F$ 或 $\angle C + \angle F = 2R.\angle$

而於前例。則兩三角形相似。

系 合於次所記三例。則本定理之兩三角形爲相似。

(1) 已知之等角爲直角或爲鈍角。

(2) 對於他兩相當邊之角。俱爲銳角。或俱爲鈍角。或一爲直角。

(3) 於兩三角形。對於已知之角之邊。不小於他

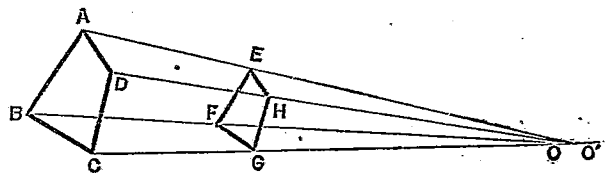
已知之邊。

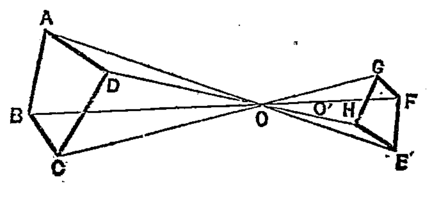
問題 8 OMN,OPQ 爲兩直線。MP,NQ 交於 R。若 OM：MP：：ON：NQ。則△PQR 爲兩等邊。

定理 II. 兩相似直線形。若相當之各邊平行。則聯合兩形各相當角頂之直線。必平行。或同交於一點。又由該點至兩形之相當邊任作直線。其矩離之比。等於其相當邊之比。

解 設 ABCD 及 EFGH 爲兩直線形。其一形之邊 AB,BC,CD,DA 各與他形之邊 EF,FG,GH,HE 平行。

題言 AE,BF,CG,DH 必平行。或同交於一點。





證　先設ABCD與EFGH相似而相等。如次

$$AB=EF \text{ 及 } AB \parallel EF$$

故　ABFE或ABEF爲平行四邊形。〔1.定理28〕

由是於第一圖　$AE \parallel BF$,

同理　$BF \parallel CG$, $CG \parallel DH$, 等.

故　AE,BF,CG,DH皆平行。〔1.定理8〕

又於第二圖

AE與BF互相平分。

同理。BF,CG或CG,DH等亦互相平分。

故AE,BF,CG,DH同交於一點。

次ABCD及EFGH相似而不相等。如次

若AE及BF相交於O點。則CG亦過O。

何則。若云CG不過O。而過BF之他點O′。

則由相似三角形ABO及BFO

$$AB : HF : : BO : FO,$$

又由相似三角形BCO′及FGO′

$$BC : FG : : BO' : FO'.$$

然　$AB : EF : : BC : FG.$　〔原設〕

$$\therefore BO : FO : : BO' : FO'.$$

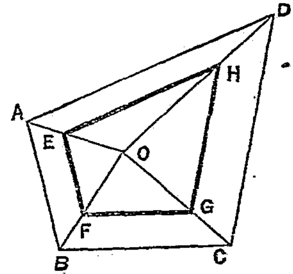
故二點O及O′必相合　〔定理5系1〕

∴CG亦過O。

同理DH亦過O。

系　相似之兩直線形。必可分爲等多之相似三角形。

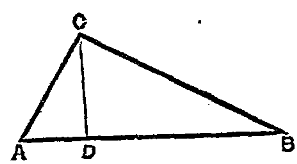
證　一直線形在他直線形內。其相當邊俱平行。則AE,BF, CG, DH必同交於O點。而AO, BO, CO, DO四線所分之三角形。必彼此相似。



定義 4. 相似心　在定理II之O點。爲兩直線形之相似心。

定理 12.　直角三角形。若自直角至斜邊作垂線。則分原形爲兩三角形。此兩形必彼此相似。亦必各與原形相似。

解　設△ABC爲直角三角形。其直角在C。而CD爲AB之垂線。



題言△ADC, △CDB彼此相

似。又各與△ABC相似。

證　於 $\triangle CAD$, $\triangle BAC$,

$\angle CAD = \angle BAC$,

$\angle CDA = \angle BCA$,

由是 $\angle ACD = \angle ABC$,

故 △CAD與△BAC相似。〔定理7〕

同理可證△DCB與△CAB相似。

故 △CAD與△BCD相似。〔定理6〕

系　直角三角形。若自直角至斜邊作垂線。分其形爲二。

I.　原形之兩腰。各爲斜邊及靠各腰一段之中率。

II.　垂線爲斜邊兩段之中率。

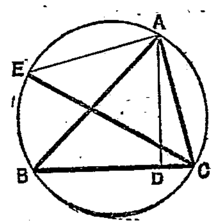
*問題 9.　ABC爲直角三角形。由直角之頂A至斜邊作垂線AD。則得三個相似三角形。求指示其對應之邊。

10.　平行兩切線間任作第三切線。自切點至圓心作直線。則此半徑爲第三切線兩段之中率。

定理 13.　三角形。任自一角之頂至對邊作垂線。此三角形之外接圓徑。必爲

垂線與該角傍兩邊相比之第四率。

解　ABC爲三角形。任自∠A至對邊BC作垂線爲AD。而CE爲△ABC外接圓之徑。



題言　AD : AB : : AC : CE

證　先作AE直線。

則　於　△ADB,△CAE,

∠ABD=∠CEA,　〔II.定理12〕

∠ADB=∠CAE(=R.∠).

故　△ADB與△CAE相似。

由是　AD : AB : : AC : CE.

問題　11.　等腰三角形ABC之底BC中一點或BC延線中一點爲D。△ABD及△ACD之外接圓相等。

問題　12.　梯形之平行兩邊。彼爲此之二倍。則對角線之交點。互分爲三分一。

問題　13.　ABCDE爲正五多角形。AD及BE交於F。求證AF : AE : : AE : AD.

14.　圓之二弦爲AB及CD。各於B及D端引延之。而交於E點。過E與AD平行引EF線。與CB之延線交於F。求證　FB : EF : : EF : FC

15. 同由一點引三直線截兩平行線於A,B,C,及P,Q,R。求證

$$AB:BC::PQ:QR.$$

16. 於三角形ABC之邊AB,AC作垂線BD,CD。而CE為AD之垂線。與AB交於E。求證△ABC,△ACE相似。

17. 於△ABC之二邊AB,AC中取二點D,E。令BD=CE。而DE,BC之交點為F。求證

$$AB:AC::EF:DF$$

第四章

面積

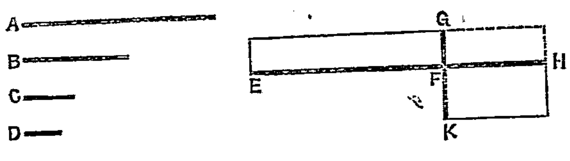
定理 14. 四直線爲比例。其外率兩直線所函之矩形。等於中率兩直線所函之矩形。反之。兩直線所函之矩形。等於他兩直線所函之矩形。則四直線有比例。但一矩形之二邊爲比例之外率。他矩形之二邊爲比例之中率。

解 1. A,B.C,D 爲四直線。

且　$A : B :: C : D$

題言　矩形 A.D＝矩形 B.C.

證 1. 先作▭EG。令邊 EF＝A,FG＝D.



次作▭KH。令邊 HF＝B,FK＝C。且令 EF 及 FH 同在一直線上。GF 及 FK 亦在一直線上。

由是以GF及FH爲二邊。以作GH矩形。

則　▭EG : ▭GH : : EF : FH　〔定理2〕

: : A : B

及　▭KH : ▭GH : : KF : FG

: : C : D

然　A : B : : C : D　〔原設〕

故　▭EG : ▭GH : : ▭KH : ▭GH

∴ ▭EG = ▭KH.

解 II.　若矩形A.D=矩形B.C.

題言　A : B : : C : D.

證 II.　先作圖如前。

▭EG = ▭KH　〔原設〕

故　▭EG : ▭GH : : ▭KH : ▭GH

然　▭EG : ▭GH : : EF : FH　〔定理2〕

: : A : B

及　▭KH : ▭GH : : KF : FG

: : C : D

∴ A : B : : C : D.

系　三直線爲比例。其外率兩直線所函之矩形等於中率一直線上之正方形。

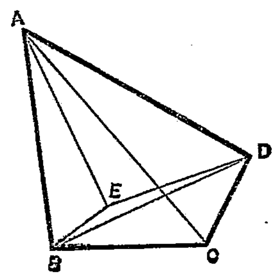
反之亦合於理。

*問題　18.　用定理14以證明次之定理。

二弦相交於圓外或圓內一點。二段所函之矩形等於他二段所函之矩形。

19.　圓周上任取A點。由A引AB,AC兩弦。更延長之。與切於直徑AG之端G之切線相交於D於E。則兩三角形AED,ABC相似。

定理　15.　四邊形兩對角線所函之矩形。概小於兩對邊所函矩形之和。若四邊形可作外接圓者。則等其於和。



解　ABCD爲四邊形。若不可作外接圓者。

題言$AC.BD<AB.CD+BC.DA$。

若可作外接圓者。

題言$AC.BD=AB.CD+BC.DA$。

證　先作$\angle BAE=\angle CAD$,

及　　$\angle ABE=\angle ACD$,

由是　　$\angle BAC=\angle EAD$.

次作DE直線.

則$\triangle ABE$及$\triangle ACD$爲等角形。故

$$AB : AE :: AC : AD, \qquad \text{〔定理7〕}$$

$$\therefore AB : AC :: AE : AD, \qquad \text{〔屬理〕}$$

然　$\angle BAC = \angle EAD$,

$$\therefore \triangle ABC \text{與} \triangle EAD \text{相似。} \qquad \text{〔定理8〕}$$

由是　$BC : AC :: ED : DA$,

$$\therefore BC.DA = AC.ED, \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又　$\triangle ABE$及$\triangle ACD$相似。故

$$AB : BE :: AC : CD,$$

$$\therefore AB.CD = AC.BE \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)及(2)相加。則得

$$AC.BE + AC.ED = AB.CD + BC.DA,$$

即　$AC.\overline{BE+ED} = AB.CD + BC.DA.$

然　$BD < BE + ED$,

故　$AC.BD < AB.CD + BC.DA.$

至若ABCD可作外接圓。則

$$\angle ABD = \angle ACD, \qquad \text{〔II.定理12〕}$$

故E點落於BD線內。

由是　$BD = BE + ED$,

$$\therefore AC.BD = AB.CD + BC.DA.$$

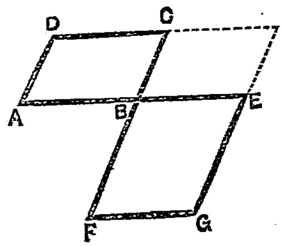
問題　20.　內接四邊形之兩對角線。若相交成直角。則兩對邊所函矩形之和。爲本形之二倍。

定理　16.　兩平行四邊形。或兩三角形。彼此一角相等。則兩面積之比。等於等角傍二邊比之複比。

解　於ABCD,EBFG兩平行四邊形。

$\angle ABC = \angle EBF$

題言　▱ABCD : ▱EBFG 等於 AB : BE 及 CB : BF 之複比。



證　置兩平行四邊形之一邊AB及BE在一直線內。則

$\angle ABC = \angle EBF$　〔原設〕

故CB及BF亦在一直線內。

由是作CE平行四邊形。

則▱DB : ▱BG 爲 ▱DB : ▱CE 及 ▱CE : ▱BG 之複比。

然　　▱DB : ▱CE : : AB : BE

及　　▱CE : ▱BG : : CB : BF

故▱DB : ▱BG 爲 AB : BE 及 CB : BF 之複比。

於圖作AC及EF直線。

則　　　　　　△ABC : △EBF : : ▱DB : ▱BG

故△ABC : △EBF爲AB : BE及CB : BF之複比。

系 1. 兩平行四邊形。或兩平行三角形。若彼此一角互爲補角。則兩面積之比。等於補角傍二邊比之複比。

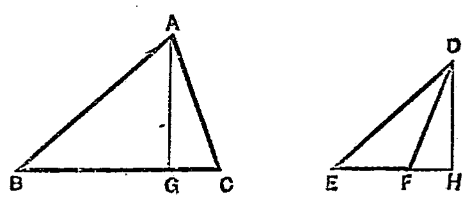
系 2. 直線與直線相交。其二比之複比。等於兩前率所函矩形與兩後率所函矩形之比。

問題 21. 於等腰三角形ABC之底AC任取D點。自D引DE,DF直線。令∠EDF等於∠A及∠C。且兩直線與BC, AB相遇於E於F。則△AED及△CDF爲等積。

定理 17. 兩三角形或兩平行四邊形之比。等於其底與高相比之複比。

解　設△ABC及△DEF之高各爲AG及DH。

題言 △ABC : △DEF等於BC : EF及AG : DH之複比。



證　$\triangle ABC=\frac{1}{2}AG.BC.$　〔III.定理 2〕

及　$\triangle DEF=\frac{1}{2}DH.EF,$

故　$\triangle ABC:\triangle DEF::AG.BC:DH.EF.$

即等於AG:DH及BC:EF之複比。〔定理16系2〕

其證明兩平行四邊形之例亦準此。

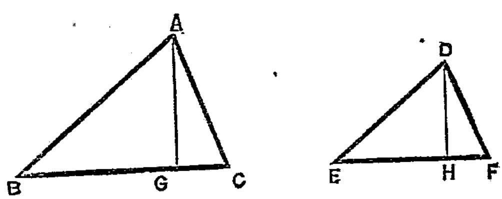
問題　22.　四邊形ABCD之邊AB與CD平行。其兩對角線之交點爲O。則矩形AO.OD等於矩形BO.OC。

定理　18.　相似兩三角形之比。等於其相當邊相比之二乘比。

解　設△ABC及△DEF。其角A,B,C各與角D,E,F等。

題言　△ABC:△DEF等於BC:EF之二乘比。

證　先引BC,EF之垂線爲AG, DH。則由前定理。



△ABC:△DEF爲AG:DH及BC:EF之複比。

然由相似三角形ABG,DEH

$$AG : DH :: AB : DE,$$

而 $$AB : DE :: BC : EF,$$ 〔原設〕

故 $$AG : DH :: BC : EF.$$

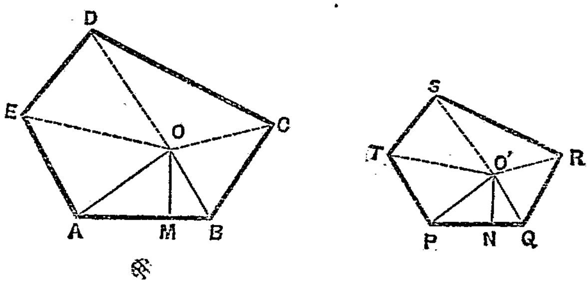
由是 $AG:DH$ 及 $BC:EF$ 之複比等於 $BC:EF$ 及 $BC:EF$ 之複比。即等於 $BC:EF$ 之二乘比。 〔IV.定義13〕

故 $\triangle ABC:\triangle DEF$ 等於 $BC:EF$ 之二乘比。

問題 23. 直角三角形。由直角頂至斜邊作垂線。斜邊二分之比。等於直角傍二邊相比之二乘比。

定理 13. 相似直線形。其面積之比。等於其相當邊相比之二乘比。

解 設相似直線形 ABCDE, PQRST。題言兩形面積之比。等於其相當邊 $AB:PQ$ 之二乘比。



證 先自 O 及 O′ 點至各角頂引直線。必可分此兩形為等多相似三角形。 〔定理11系〕

則相似三角形OAB,O′PQ之比。為AB:PQ之二乘比。

〔定理18〕

而相似三角形OBC,O′QR之比。為BC:QR之二乘比。

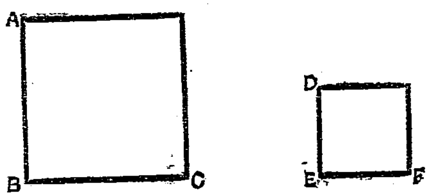
然此三角形相似。故

AB:PQ::BC:QR.

故△OBC:△O′QR為AB:PQ之二乘比。

同理　可證他相當兩三角形亦為AB:PQ之二乘比。

故直線形ABCDE:直線形PQRST為AB:PQ之二乘比。



系 1. 相似直線形之比。等於其相當邊上所作正方形之比。

證　ABC,DEF各為正方形。由本定理

□AC:□DF為BC:EF之二乘比。

然BC及EF上為相似形之位置。其所作相似直線形之比。為BC:EF之二乘比。

故此相似直線形之比。等於BC及EF上正方形之比。

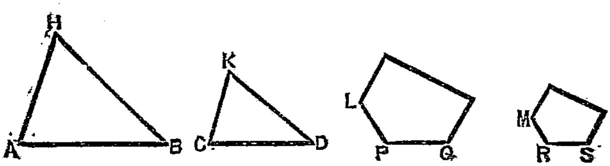
2. 四直線有比例。於第一第二之直線上作兩

相似形。又於第三第四之直線上作兩相似形。此四直線形必有比例。反之。若有四直線。其第一與第二兩線上所作相似形之比。等於第三與第四兩線上所作相似形之比。則此四直線有比例。

解　設 AB : CD : : PQ : RS.

而 ABH, CDK 各爲 AB, CD 上所作之相似形。LPQ, MRS 各爲 PQ, RS 上所作之相似形。

系言　　ABH : CDK : : LPQ : MRS.



證　　AB : CD : : PQ ; RS

故 AB : CD 之二乘比。等於 PQ : RS 之二乘比。

然 HAB : KCD 等於 AB : CD 之二乘比。

LPQ : MRS 等於 PQ : RS 之二乘比。

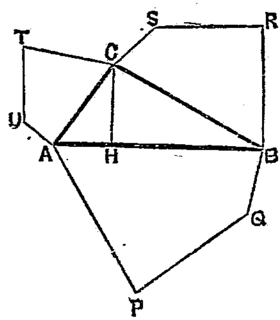
故　　HAB : KCD : : LPQ : MRS.

反之。亦可反覆同理以證明之。

定理　20.　直角三角形。於三邊上任作三相似直線形。其斜邊上之形。等於餘

兩邊上所作相似形之和。

解　設ABC爲三角形。直角在C。APQB, BRSC, CTUA各爲AB, BC, CA邊上所作之相似直線形。



題言　APQB=BRSC+CTUA.

證　先作AB之垂線爲CH。由相似三角形ABC,CBH

AB : BC : : BC : BH

〔定理12系〕

故　APQB : BRSC : : AB : BH

〔定理19及IV.定義13〕

同理　APQB : CTUA : : AB : AH,

故　APQB : BRSC+CTUA : : AB : BH+AH,

然　AB=BH+AH,

∴ APQB=BRSC+CTUA.

注意　第三編定理9乃本定理特別之例。

*問題　24. △ABC之兩邊BC,AC各平分於E,於F。AE,BF之交點爲G。求△AGB,△EGF之比。

*25. ABC爲直角三角形。BF線平分直角B。與斜邊AC交於F。而截ABC之外接圓周於D。求證矩形

BD.BF＝2△ABC。

26. 相似三角形之面積之比。等於其內切(或外接)圓之半徑上正方形之比。

27. 由△ABC之各角頂至對邊引三垂線。聯合三趾所成之三角形。爲△DEF。求證△ABC:△DBF爲AB:BD之二乘比。

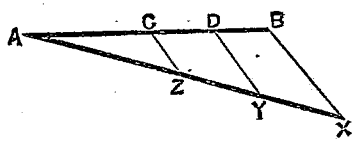
(△DEF稱爲△ABC之垂趾三角形)

28. 於前題AFDC:△BFD爲AD:BD之二乘比。

第五章

作圖題

作圖題 1. 已知之直線。求分之與他已分之直線有比例。



設AB爲已分於C於D之直線。而求分AX直線爲三分。與AB有比例。

作圖法 先將AX直線之一端。與AB線重合於A點。(AX與AB所成之角。無論爲銳角爲直角爲鈍角均可。)且作BX直線。

次過C,D作CZ,DY與BX平行。則AX被分於Z於Y。與AB之分於C於D有比例。

證　　$AZ:ZY::AC:CD$,　〔定理1系〕

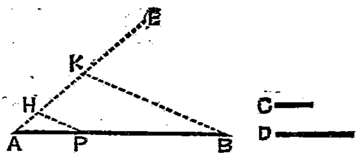
及　　$ZY:YX::CD:DB$,　〔定理1〕

故AX被分於Z,Y。與AB已分之線有比例。

作圖題 2. 已知之直線。求內分或外

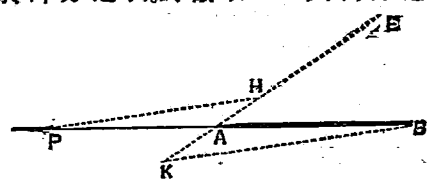
分之。與已知二線有比例。

設BA爲已知之直線。C及D亦爲已知之二直線。求內分或外分AB，令與C及D有比例。



作圖法 內分之例。由A任作AE直線。截取AH=C,HK=D。作KB直線。引HP與KB平行。P即爲所求之分點。

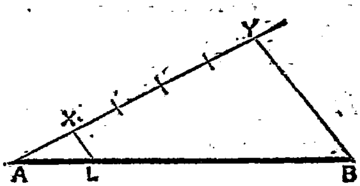
外分之例。於外分之例。其截取HK與內分之例反對即合。



證 據定理1。證明甚易。

作圖題 3. 已知之直線。求分爲若干分。

設AB爲已知之直線。求分爲若干分。



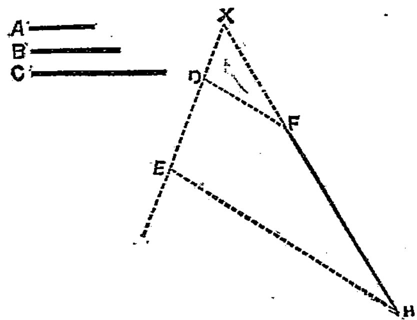
作圖法 由A點任作AX直線。且引延之。以適合爲度。如AY。其爲AX之倍數。適等於AB所求。

分部分之倍數。

由是作BY直線。過X作XL與YB平行。則AL即所求之部分也。

證 按定理1。證明甚易。

作圖題 4. 有已知之三直線。求其第四率比例線。



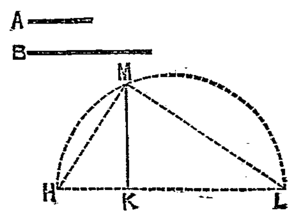
設A, B, C為已知之三直線。求與為比例之第四率線。

作圖法 先任作X角。於其一邊截取XD=A,DE=B。又於他邊截取XF=C。次作DF直線。且引EH與DF平行。而與XF延線交於H。則FH為所求之直線。

證 按定理1系。證明甚易。

作圖題 5. 有已知之兩直線。求其中率比例線。

設A, B爲已知之兩直線。求與爲比例之中率線。



作圖法　先作HL直線。令HK=A, KL=B。並以HL爲徑。向上作半圓。後作HL之垂線爲KM。與圓周相遇於M點。則KM即所求之直線。

證　試作HM,ML直線。因HML爲半圓。故

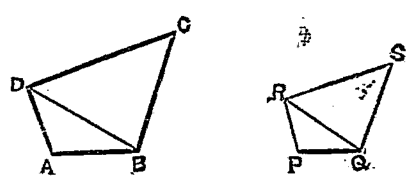
$\angle HML=R.\angle.$

$\therefore$　HK : MK : : MK : KL.　〔定理12系〕

即　A : MK : : MK : B.

作圖題 6. 已知之直線上。求作一直線形。與他已知之直線形相似。

設ABCD爲已知之直線形。PQ爲已知之直線。求於PQ上作一直線形與ABCD相似。



作圖法　先作BD直線。並於直線PQ之P點Q點作∠QPR及∠PQR各等於∠BAD及

∠ABD。遂得△PQR。次於直線RQ之R點Q點作∠QRS,∠RQS。各等於∠BDC,∠DBC。遂得△QRS。

則PQRS爲所求之直線形。

證　由作圖法PQSR之各角。各與ABCD之各角等。甚明。

而由相似三角形ABD及PQR

$$AB:BD::PQ:QR,$$

又由相似三角形DBC及RQS

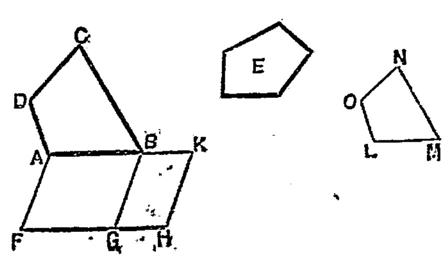
$$BD:BC::QR:QS,$$

$$\therefore\ AB:BC::PQ:QS.$$

同理。彼此兩直線形等角之兩傍。亦可證其有比例。

作圖題 7. 求作一多邊形。與此多邊形相似。而與彼多邊形等積。

設E及ABCD爲已知之多邊形。求作一多邊形。與ABCD相似。與E等積。



作圖法　先於AB上作ABGF平行四邊形。與ABCD等積。〔III.作圖題2〕

次於BG上作平行四邊形。與E等積。令$\angle GBK=\angle FAB$。〔III.作圖題2〕

次求AB及BK之比例中率LM。〔作圖題5〕

且於LM上作多邊形LMNO與ABCD相似。而令LM與AB爲相當邊。〔作圖題6〕

則LMNO爲所求之多邊形。

證　$AB:LM::LM:BK$,〔作圖〕

故　$AB:BK$爲$AB:LM$之二乘比。

而　$AB:BK::\text{▱}AG:\text{▱}BH$,〔定理2系1〕

然　$ABCD:LMNO$爲$AB:LM$之二乘比。〔定理19〕

故　$\text{▱}AG:\text{▱}BH::ABCD:LMNO$,

然　$\text{▱}AG=ABCD$,〔作圖〕

$\therefore LMNO=\text{▱}BH$,

然　$\text{▱}BH=$多邊形E,〔作圖〕

$\therefore LMNO=$多邊形E.

而LMNO原作與ABCD相似.

故LMNO即所求之多邊形.

問題　29. 於圓內已知之弓形ACB之周中求C點。令直線AC=2CB。

*30　於已知之三角形內。求作正方形。

31. 過已知之一點A求引一直線。各與二直線OX,OY交於X及Y。而令AX:AY與已知之比等。

32. 求作等邊三角形。與已知之正方形之積等。

33. 由已知之圓周中之二定點A,B。求引平行二弦AC,BD。而令AC:BD與已知之比等。

34. 已知三角形之頂角及底與其二邊之比。求作其形。

35. 已知之正方形內。求作其內接正方形。令其面積等於已知之正方形面積之四分之三。

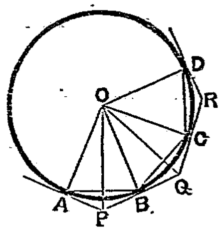
第六編

正多角形及圓之測度

第一章

定理

定理 I. 平分圓周爲諸等弧。其諸弦所作之內接形。爲正多角形。而由各分點引諸切線。其所作之外切形。亦爲正多角形。



解　分圓周ABC於A於B於D爲諸等弧。

題言ABCD····爲正多角形。而於A於B於C等各點引切線。其所作成之形。亦正多角形。

證　因劣弧AB,BC,CD皆相等。故其弧之弦AB,BC,CD亦必相等。

故　　　　ABCD······爲等邊形。

又 ∠ABC, ∠BCD 等所乘之弧。皆爲全周減去二

等分弧。故此諸角所乘之弧等。

由是　　$\angle ABC=\angle BCD=$等.

故　　ABCD爲等角形。

由是　　ABCD爲正多角形。

又於A於B於D等點引切線。作PQR……多角形。並由圓心O作OA,OB直線。

若是則四邊形OAPB各角之和爲四直角。

〔I.定理24〕

而在A及B之角。則爲直角。

$\therefore \angle APB+\angle AOB=2R.\angle,$

即　　$\angle APB$爲$\angle AOB$之補角。

同理。外切形之他諸角。皆爲圓心角之補角。而圓心角所乘之弧、爲等分圓周之一分皆等。

由是。外切形各角亦等。

故　　PQR……爲等角形。

又作OP及OQ直線。則二切線PA,PB與PO線所成之角等，　〔II.定理17系〕

由是。　　$\angle OPB=\frac{1}{2}\angle APB,$

同理　　$\angle OQB=\frac{1}{2}\angle BQC,$

然　　$\angle APB=\angle BQC,$

由是　$\angle OPB = \angle OQB$,

$\therefore\ OP = OQ.$

同理可證　$OQ = OR.$

$\therefore\ OP = OQ = OR = $ 等.

由是。若以O爲心。OP爲半徑。以作一圓。此圓周必過Q,R各點。

而　$OA = OB = OC = $ 等。

故PQ,QR諸弦距圓心等。

$\therefore\ PQ = QR = $ 等。　[II.定理10系1]

由是　PQR爲等邊形。

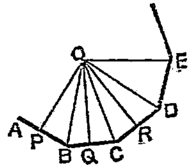
故　PQR爲正多角形。

系　AP+PB等於外切正多角形之一邊PQ。

定理 2. 平分正多角形各角之直線。必同交於一點。且由此點至諸角頂之距離必等。至各邊之距離亦等。

解　設直線BO,CO平分正多角形ABCD·····之兩隣角ABC及BCD。而相交於O點。遂與A,B,C,D等點聯合。

題言DO,EO等亦平分多角形之各角.



由O至A,B,C,……點之距離等。

又至AB,BC,CD,……邊之距離亦等。

證　於$\triangle OBC$及$\triangle ODC$,

$$\because \begin{cases} BC=DC, & \text{〔原設〕} \\ CO\text{公用}, & \\ \angle BCO=\angle DCO, & \text{〔原設〕} \end{cases}$$

$\therefore \triangle OBC \equiv \triangle ODC.$　〔1.定理9〕

$\therefore \angle CBO=\angle CDO.$

由是$\angle CDO$半於正多角形之一角。

故　OD平分$\angle CDE$.

同理。由O至正多角形之各角頂所作直線。亦可證其平分各角。

又$\angle OCD$, $\angle ODC$皆半於正多角形之各角。故皆相等。

由是　$OC=OD$.

同理可證OA,OB,OC,……皆相等。

若既證　$OA=OB=OC=$等

故以O爲心。OA爲半徑作圓。其圓周必過正多角形之各角頂。

則正多角形之各邊AB, BC, CD,……爲此圓之等弦,故距離皆等。

系 正多角形。必能作其內切圓及外接圓。

定義 1. 正多角形之心 內切及外接圓之公心。爲正多角形之心。

2. 角幅 外接圓之半徑。爲正多角形之角幅。

3. 垂幅 內切圓之半徑。爲正多角形之垂幅。

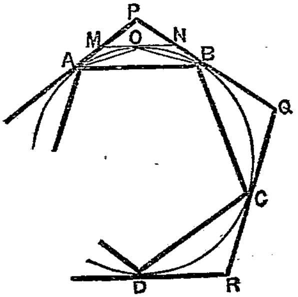
4. 心角 由心至一邊之兩端作二直線。其間所成之角。爲正多角形之心角。

幾何學公理 5. 凡弧比其所函之弦大。又由圓外一點引兩切線。比其所函之弧大。

由是。凡內接多角形之周圍。必比其圓周小。又外切多角形之周圍。必比其圓周大。

定理 3. 內接或外切正多角形。其邊

數可引增至無窮。然其周圍以圓周爲極限。其面積以圓之面積爲極限。



解　ABC……及PQR……各爲圓之內接及外切正多角形。ABC……或PQR……之邊數可引增至無窮。題言其周圍及面積以圓周及圓之面積爲極限。

證　弧AB之中點爲O。作AO,BO直線。

則　$AO+OB>AB.$　〔1.定理16〕

是故ABC……如爲n邊之正多角形。則2n邊之正多角形。其周圍及面積。皆比n邊之正多角形之周圍及面積大。甚明。

逐次如是。內接正多角形之邊數次第增加。則其周圍及面積亦次第增大。由是漸次近合圓周及圓之面積。其圓周與正多角形周圍之差。及圓之面積與正多角形面積之差。皆可小至無窮。

故內接正多角形之邊數可引增至無窮。然其周圍及面積各以圓之周及面積爲極限。

次於O點引切線MON。則

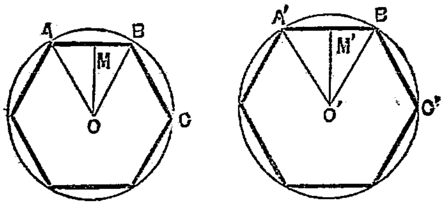
$$AM+MN+NB<AP+PB \text{ 即 } PQ$$

甚明。故與前同理。可證圓周及圓之面積。各爲其外切正多角形之周圍及面積之極限。

定理 4. 正多角形。其邊數等。即爲相似形。

解　設ABC……,A′B′C′……爲正多角形。其邊數相等。

題言　ABC……與A′B′C′……相似。



證　ABC……及A′B′C′……必爲等角形.

何則。正多角形諸角之大。與其邊數之多少有關係故也　〔1.定理24〕

次相當邊之比AB∶A′B′, BC∶B′C′皆相等。故二多角形之相當邊有比例。

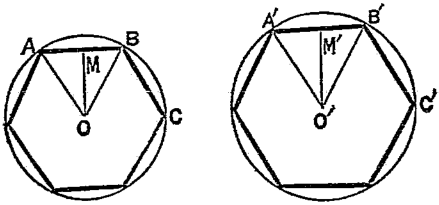
故　ABC……與A′B′C′……兩形相似。

系　正多角形。其邊數等。則其周圍之比。等於其外接圓半徑之比。[AO : A′O′]或內切圓半徑之比。[MO : M′O′]而其面積之比。等於此等半徑比之二乘比。

定理 5. 兩圓周相比。如其半徑相比。兩圓之面積相比。如其半徑上正方形相比。

解　設兩圓周為C及C′。其面積為S及S′。其半徑為R及R′。

題言　$C : C' :: R : R'$ 及 $S : S' :: R^2 : R'^2$



證　先作內接正多角形ABC……，A′B′C′……。其周圍為P為P′。其面積為A為A′。則

$$\begin{cases} P : P' :: R : R' \\ A : A' :: R^2 : R'^2 \end{cases}$$ 〔定理4系〕

若是。據此關係。無論正多角形之邊數為幾何。恒適合。故無限引增其邊數以至極限。亦適合。

然邊數無限引增時。P及P′之極限爲C及C′。而A及A′之極限爲S及S′。故 〔定理3〕

$$C:C'::R:R'$$

$$S:S'::R^2:R'^2$$

系 圓周與其徑之比。必一定不易。

證 $C:C'::R:R'$

故 $C:C'::2R:2R'$

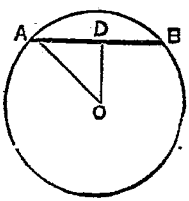
$$\therefore C::2R::C':2R'.$$

注意 一定不易之比。以希臘文字π表之。此比爲不盡數。(其證明屬高等數學)故實際上。唯用其近合值。π所以表其精密之値也。

由是。C及R爲圓周及半徑之測度。則如次

$$C=2\pi R.$$

定理 6. 內接正多角形之邊數。若增至無限時。其垂輻之極限。爲圓之半徑。



解 內接正多角形之一邊爲AB。其垂輻爲OD。邊數可增至無限。OD之極限爲OA半徑。

證　於$\triangle OAD$。　$OA-OD<AD$. [1.定理16系]

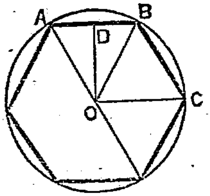
若是。增加正多角形之邊數。則其一邊AB可小至無窮。

故$\frac{1}{2}AB$即AD亦可小至無窮。

故$OA-OD$更可小至無窮。

由是。OD近合OA。而以之爲極限。

定理 7. 正多邊形之面積。等於周及垂輻所函矩形之半。



解　設正多角形ABC……之面積爲A。垂輻爲OD。周爲P。

題言　　$A=\frac{1}{2}P.OD$.

證　先自O至各角作直線爲OA,OB,OC。則$\triangle OAB$, $\triangle OBC$等於以正多角形一邊爲底。以其垂輻爲高之矩形之半。

由是。此諸三角形之和。即正多角形面積之和。必等於P(各邊之和)及OD(垂輻)所函矩形之半。

系　1.　按本定理。正多角形之邊數。無論幾何恒適合。故可無限增加其邊數。以至極限。遂如次。

$$S=\frac{1}{2}C.R.$$

然由定理5之意。則$C=2\pi R$,

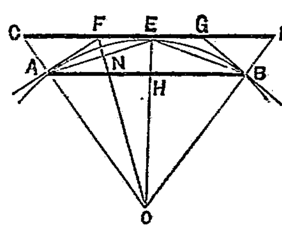
$\therefore S=\pi R^2.$

2. 設測得圓心角形之弧爲c。其面積爲s。則

$s=\frac{1}{2}c.R.$

定理 8. 邊數等之內接及外切正多角形之周各爲P及P。其邊數二倍之內接及外切正多角形之周。各爲P′及P′。則

$$P+P:2P::P:P' \text{ 及 } P:P'::P':P'.$$



證 設內接正多角形之一邊爲AB。外切正多角形之一邊爲CD。而CD切弧AB之中點E。

作AE直線。且引AF及BG二直線。與弧切於A於B。則AE者乃以P′爲周之內接正多角形之一邊。FG者乃以P爲周之外切正多角形之一邊。

然　　$P:p::OC:OA$

$::OC:OE,$　　〔定理4系〕

而OF平分∠COE。故

$OC:OE::CF:FE,$　　〔V.定理5〕

$$\therefore \mathrm{P} : p :: CF : FE,$$

由是　$$\mathrm{P}+p : 2p :: CF+EF : 2EF,$$　〔合理〕

$$:: CE : FG,$$

$$:: \mathrm{P} : \mathrm{P}' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

又直角三角形AEH,EFN相似。故

$$AH : AE :: EN : EF,$$

然　$$AH : AE :: p : p',$$

及　$$EN : EF :: p' : \mathrm{P},$$

$$\therefore p : p' :: p' : \mathrm{P}' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

問題　1.　圓之外切等邊多角形。其邊數若為奇數。則成正多角形。

2.　圓之內接等角多角形。其邊數若為奇數。則成正多角形。

3.　凡圓之外切等角多角形。皆為正多角形。

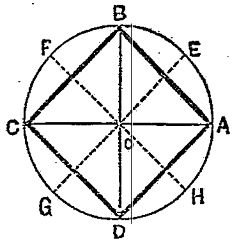
4.　求證圓之外切正三角形之一邊。等於其內接正三角形一邊之二倍。

5.　求證圓之內接正六角形之面積。等於其外切正六角形之面積四分之三。

第二章

作圖題

作圖題 1. 求作圓之內接正方形。與其外切正方形。



設ABCD為圓。O為圓心。求作其內接正方形並外切正方形。

作圖法 先作AOC,BOD兩徑。令其正交於O。
又作AB,BC,CD,DA四直線。所成之ABCD形。即內接正方形。
又於A,B,C,D四點作圓之切線。所成之形。即外切正方形。

證 二徑AOC及BOD必分圓周為四等分。

[II.定理2系2]

故本證據定理1即明。

增 作二徑EOG,FOH平分AOC及BOD間之角。則AEBFCGDH為內接正八角形。而於各角之頂作諸切線。所成之形。為外切正八角形。

逐次如是.可作內接及外切16,32,64……邊之正多角形。

注意 1. 於直角三角形ABO

$$AB^2=OA^2+OB^2=2OA^2$$

故OA之測度若爲R.則 $AB=R\sqrt{2}$。

又外切正方形之一邊爲2R甚明。

2. 若圓徑爲1.則圓周$2\pi R$爲π.而π之近合值.可求得之如次。

由定理8之比例(1)(2).其測度爲P, p, P', p'.則得法式爲

$$P'=\frac{2pP}{P+p} \quad 及 \quad p'=\sqrt{pP'}$$

然圓徑爲1.由注意1

$$P=4, p=2\sqrt{2}=2.8284271,$$

由是依前法式.得

$$P'=3.3137085, p'=3.0614675.$$

即外切及內接正八角形之周圍。

由是　$P=3.3137085, p=3.0614675.$

則由前法式.得

$$P'=3.1825979, p'=3.1214452.$$

逐次如是。遂得次所表之結果。

邊數	外切正多角形之周圍	內接正多角形之周圍
4	4.0000000	2.8284271
8	3.3137085	3.0614675
16	3.1825979	3.1214452
32	3.1517249	3.1365485
64	3.1441184	3.1403312
128	3.1422236	3.1412773
256	3.1417504	3.1415138
512	3.1416321	3.1415729
1024	3.1416025	3.1415877
2048	3.1415951	3.1415914
4096	3.1415933	3.1415923
8192	3.1415928	3.1415926

由前表。徑＝1之圓周即π。必小於3.1415928而大於3.1415926可知。由是。著求π之近合值至小數七位。則得

$$\pi=3.1415927.$$

3. 最初求得π之近合值者。爲Archimedes氏。以$\pi=3\frac{1}{7}$。此近合值可用以計算大概。

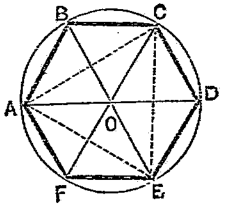
次有wetius氏之近合值。以$\pi=\frac{355}{113}$。此近合值由分母及分子順次書出。如113/355。即三奇數之重複。取其便於記憶。

近有德意志人clausen及Dase二氏皆算至小數二百位。又英人Shanks氏算至小數七百七位。

雖然。通例以　$\pi=3.1416$

已甚適足也。

作圖題 2. 圓內求作內接正六角形。



設已作ABCDEF正六角形。

且作BE及AD直線。

則弧AB,BC,CD皆相等。故BE,AD皆平分圓周爲二。由是。其交點即爲圓心。

而∠ABO必等於乘AFE弧(圓周六分之二)。之圓心角之半。

故　$\angle ABO=\angle AOB,$

然　$ABO=\angle BAO,$

故△ABO爲等邊三角形。由是得次之作圖法

作圖法　任始於圓周中一點。作與半徑等之AB,BC等弦。其所成之形即內接正六角形。

〔此作圖法必須用規〕

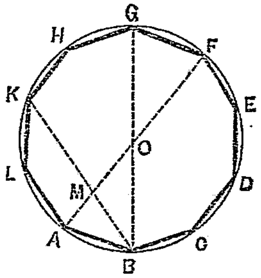
增　如前圖聯合A,C,E三分點。所成之形。即爲內接正三角形。又內接六邊形之弧。逐次二等分之。所成之形。次第爲12,24,48……邊之內接正多角形。而於內接形之各角頂作切線。其所成之形。即爲等邊數之外

切正多角形。

作圖題 3. 圓內求作內接正十角形。

設已作ABC … L內接正十邊形。

若聯合AF,BG。此兩直線皆平分圓周。故爲圓徑。由是其交點O爲圓心。



次作BK直線。與AF交於M點。若是。∠ABM,∠OBM皆乘圓周十分之二。故相等。而∠OBM乘圓周十分之二。故等於乘十分之一之圓心角BOM。

由是　$MB=MO$ 及 $\angle ABO=2\angle AOB.$

然　$\angle AMB=\angle BOM+\angle OBM=2\angle AOB.$

由是　$\angle AMB=\angle ABO=\angle BAM.$

故　$AB=MB$ 由是 $AB=MO.$

又△OAB, △ABM各爲等腰。且其底角爲頂角之二倍。故爲等角形。

由是　$OA:AB::AB:AM$　〔V.定理7〕

故　$OA.AM=AB^2=OM^2$　〔V.定理14〕

故得次之作圖法。

作圖法　分半徑OA於M。令

$$OA.AM=OM^2 \qquad [\text{III.作圖題}6]$$

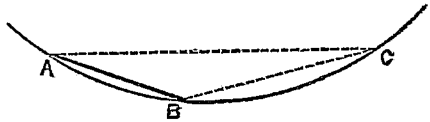
則OM爲正十角形之一邊。

增　由本作圖題。亦可作5,10,20,40……邊之內接及外切正多角形。

作圖題 4. 圓內求作內接正十五角形。

設AB爲內接正十五角形之一邊。

然$\frac{1}{15}=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$。故AC若爲內接正六邊形之一邊。BC若爲內接正十邊形之一邊。由是。得次之作圖法。



作圖法　圓內作內接正六角形之一邊AC。又作內接正十角形之一邊BC。則

AB爲內接正十五邊形之一邊。

增　由本作圖題。可作15,30,60……邊之內接及外切正多角形。

問題 6.　圓之半徑爲R。其內接n邊多角形之一邊。可由次例以求之。

1 $n=3$. 2 $n=5$. 3 $n=6$.

4 $n=8$. 5 $n=10$. 6 $n=12$

7 $n=15$.

附　錄　一

定 理 之 關 係

1. 定理 據已知之命題。以證明一新命題者爲定理。而已知之命題云者。公理或已證明之定理是也。定理者函**原設**及**今得**二部而成。原設云者。其原來所設定也。今得云者。由原設以導來者也。

定理之形式如下

若A爲B。則C爲D　　　　(1)

「若A爲B」者原設也。「則C爲D」者今得也。

前之定理若適合。則次之定理亦必適合。

若C非爲D。則A非爲B。　　　　(2)

如(1)與(2)兩定理。互稱爲對偶。

2. 定理之逆例 有二定理。其一之原設。及今得。各爲他之今得及原設。則互爲逆例。

例　　若C爲D。則A爲B.　　(3)

定理(1)之逆例。若取(3)之對偶,則得

若A非爲B。則C非爲D.　　(4)

定理(4)乃定理(1)之裏例。

某定理爲適合其逆例及裏例未必俱合。故適合之定理。其逆例及裏例之眞僞如何。宜分別論究之。

3. 定理之變態。有四種關係。如次。

原定理	若A爲B	則C爲D	(1)
(1)之對偶	若C非爲D	則A非爲B	(2)
(1)之逆例	若C爲D	則A爲B	(3)
(1)之裏例	若A非爲B	則C非爲D	(4)

此四定理中。(1)與(2)必同時適合。如前所述。而(3)及(4)互爲對偶。亦必同時適合。然時有(1)雖適合。(3)及(4)未必適合者。是故此四種定理中。非互爲對偶之二定理。若既據幾何學之理證明之。則他二定理亦必適合。而可不必證矣。

注意　時定理之原設甚複雜。含有二三之原設。於此之例。以原設之一與今得交換。則可作其逆例。

4. 轉換法　已證明一群之定理。其中

各定理之原設有一適合。而各今得不能二以上同時適合。則此一群之定理。其逆例亦必適合。

例 1. 定理及其裏例即

	若A爲B	則C爲D	(1)
及	若A非爲B	則C非爲D	(4)

若能證其適合。則各定理之逆例

即	若C爲D	則A爲B	(3)
及	若C非爲D	則A非爲B	(2)

亦必能證其適合。何則。(2)爲(1)之對偶。(3)爲(4)之對偶故也。

例 2. 在幾何學中。有恆遇而不一遇之例。如次一群之定理。

若 $A>B$ 則 $C>D$

若 $A=B$ 則 $C=D$

若 $A<B$ 則 $C<D$

上列三定理。在幾何學中。如已證明。則各定理之逆例必適合。

5. 同一法 於此僅有一A及一B。若已

證明「A即爲B」。必能斷定「B即爲A」。

注　意

定理之關係。爲敎師者宜隨時敎授。必由本文取例以證明之。

附錄二

練習問題 I.

直線之部

A. 1. 自三角形之一角頂。任作中線。其比對邊之半段大或等或小。因其角爲銳角或直角或鈍角而定。

2. 於三角形ABC。AB>AC。AB中取D點。截AD=AC。求證∠BCD等於∠ABC與∠ACB相較之半。

3. 四邊形之兩對角線相等。且互爲二等分。求證本形爲矩形。

4. 等邊三角形。聯合其各邊之中點。亦成等邊三角形。

5. 於平行四邊形ABCD之對角線AC內取E,F兩點。若AE與CF等。則BEDF亦爲平行四邊形。

B. 1. 四邊形ABCD內之一點爲O。若O爲AC,BD之交點。則OA,OB,OC,OD之和爲最小。

2. 平行四邊形爲ABCD。於對角線AC截取AA′=CC′。又於BD截取BB′=DD′。則A′B′C′D′亦爲平行四邊形。

3. ABC爲三角形。自其底AB之中點D引DE,DF直線。與BC,AC兩邊平行。各與AC,BC邊交於E於F。則EF ∥ AB。

4. 矩形之對角線。必大於兩對邊間所作諸直線。

5. 過已知之點引一直線。與兩平行線相遇。其在平行線間之一段。與已知之長等。求作法。

C. 1. ABC三角形。∠BAC爲最大角。AB,AC中各任取D,E兩點。則DE<BC。

2. ABC三角形。AC>AB。自A作BC之垂線爲AD。則DC>BD。及∠DAC>∠BAD。

3. 凸五角形之各邊引長之。則相交而成星形五角形。其五角之和等於二直角。

4. 平行四邊形之兩對邊。若平分之。由分點至對角頂所作之直線。必兩兩平行。且平分對角線爲三段。

5. 有已知之直線。又有已知之兩點。各在線之一傍。求自此兩點至直線中一點引兩直線。此兩直線所成之角。被已知之直線平分。

D. 1. ABC三角形。BC邊引延至D。作CE直線。平分∠ACB。與AB交於E。由E作直線與BC平行。交AC

於F點。且交平分ACD角之直線於G。則EF＝FG。

2.　凡四邊形。聯合其各邊之中點。所成之形。亦爲平行四邊形。

3.　直角三角形。一銳角爲他銳角之二倍。則斜邊爲最短邊之二倍。

4.　三角形ABC。平分其各角之直線交於O。作OF爲AB之垂線求證。

AF＝$\frac{1}{2}$[三角形之周圍]－BC。

又作OD爲BC之垂線。則BD及CD之長。與前有比例。

5.　已知二點及一無限長直線之位置。求作正三角形。其一邊重合於已知之直線。而他二邊則過已知之二點。

E.　1.　三角形之一角。等於他二角之和。則最大邊等於由其中點至對角頂所作直線之二倍。

2.　ABC三角形。邊AB＞BC。作BD線平分底AC。又作BE線平分∠ABC。則

(1)　∠ABD＜∠DBC.　　(2)　BE＜BD.

3.　ABC三角形。平分∠A之直線。與平分B,C之外角之兩直線相遇於O。由O至BC, CA, AB[必於

其延線]三邊各作OD,OE,OF三垂線。則

AE=AF=[三角形之周圍之半]。

又 OD及BC為垂線。則BD及CD皆等。

4. 任作四邊形。聯合兩對邊中點之二直線。必與一直線中點相交。此直線為聯合兩對角線中點之直線。

5. 已知A, B, C三點。求過A引一直線。自B,C至此直線作垂線皆等。

F. 1. ABC三角形。過A任作一直線。自B及C引BP,CQ垂於其上。而BC之中點為M。則MP=MQ。

2. ABC三角形。其邊BC引延至D。且作AE直線平分∠BAC。與BC相遇於E。則

$$2\angle AED=\angle ABD+\angle ACD.$$

3. 任自兩點。及聯合此兩點之直線之中點。至任意之直線作三平行線。若兩點同在直線之一傍。則外兩平行線之和。等於中線之二倍。若兩點各在直線之一傍。則外兩平行線之較。等於中線之二倍。

4. 兩三角形之三邊。若兩兩為垂線。則兩三角形之各角俱等。

5.　ABC等腰三角形。求兩腰AB,AC中之D及E點。令

$$BD=DE=EC.$$

G.　1.　等腰三角形底中任取一點。由此點至兩腰作二垂線。此兩線之和。恒一定不易。若任取之一點。在底之延線中則何如。

2.　等邊三角形內任取一點。由此點至三邊引三垂線。此三線之和。恒一定不易。若任取之一點在三角形外則何如。

3.　ABC三角形。於其兩邊AB,AC中求D,E兩點。令DE直線等於DB與EC之和。或較。且與BC平行。

4.　已知三角形之底。及兩邊之較與底角之較。求作其形。

5.　以已知之直線爲斜邊。於其上作直角三角形。求直角頂點之軌跡。

H.　1.　ABC,DBC兩三角形。同以BC爲底。若AD與BC平行。且△ABC爲等腰三角形。則△ABC之周圍小於△DBC之周圍。

2.　ABCD正方形。於一邊CD中求取P點。令AP=PC+CB。若CD之中點爲Q。則∠BAP=2∠QAD.

3. ABCD四邊形。平分∠ABD及∠ACD之二直線交於F。則∠BFC等於∠BAC,∠BDC和之半。

4. 已知三角形之二邊及其一中線。求作其形。但可以種種之例爲之。

5. AB爲已知之直線。過B任作直線。由A引AX垂於其上。求AX中點之軌跡。

I. 1. 平分四邊形諸角之直線。若相交而別生一四邊形。則此四邊形之兩對角。必互爲補角。

2. 於前問題。若初之四邊形爲平行四邊形。則別生後之四邊形爲矩形。又初之四邊形爲矩形。則別生後之四邊形爲正方形。

3. ABC三角形。於BC,CA,AB三邊中各取L,M,N點。若ANM,NBL,MLC等三角形互爲等角。則諸三角形與△ABC及△LMN亦爲等角。

4. 已知四邊形各邊之長。及兩對邊之中點位置。求作其形。

5. 由二直線至一點。其距離之和或較。等於已知之長。求其點之軌跡。

J. 1. 任作一梯形。非平行兩邊之中點。與兩對角線之中點。同在一直線內。此直線必與平行兩邊

平行。又非平行兩邊之中點相距。等於平行二邊和之半。又兩對角線之中點相距。等於平行兩邊較之半。

2. ABC三角形。由AB邊中之D點作DEF直線。與BC交於E。與AC延線交於F。則平分∠ABE及∠ADE直線間之兩角。各等於平分∠ACE及∠AFE直線間之兩角。

3. 已知等邊三角形之高。求作其形。

4. 求作一正方形。其一角之頂點。落於已知點上。其他二角之頂點。落於已知角之二邊內。

5. 凸多角形之邊數爲奇數。已知其各邊中點之位置。求作其形。

K. 1. 六角形之對邊。兩兩平行。且相等。求證其三對角線必同交於一點。

2. ABC三角形。於底AC中任取D點。AD, DC, AB, BC各平分於E, F, G, H。則 EG=FH。且互相平行

3. 已知BAC角。及其角內P點。於BA, AC中各取M, N點。求PM+MN+NP之最小者。

4. 有矩形之撃球檯。任置球於檯面P點。撃之令與檯之四邊衝突。而返原位置。其撃球在最初

之方向如何。

5. 矩形ABCD內任設P點。於邊BC,CD,DA,AB中各取K,L,M,N點。求PK+KL+LM+MN+NP之最小者。

L. 1. 平行四邊形之各角頂。同落於他平行四邊形之各邊內。則兩平行四邊形之對角線同交於一點

2. 平分三角形一外角之直線。與平分其內對角之直線所成之角。等於他內角之半。

3. 已知之兩平行線爲XY, X'Y'.其兩傍有A,B二點。此兩平行線間求作MN已知之長。令AMNB爲最小。[AMNB稱折線]

4. 已知之BAC角內P,Q兩點。求於BA,AC中各取M,N點。令折線PMNQ最小。

5. 有矩形之擊球檯。任置球於P點。擊之。使與檯之四邊衝突。而落於他已知點Q。求球所經之路如何。

練習問題 II.

圓之部

A. 1. 兩圓外切於A。而BC爲二圓之公切。求證∠B

AC=R.

2. 於已知之圓內。作兩等弦。求其中點之軌跡。

3. 於已知圓周內之一點。作切圓。求切圓心之軌跡。

4. 由圓外已知之一點。至圓周作直線。求此線中點之軌跡。

5. 兩等圓交於A,於B。以A爲心。及比AB小之線爲半徑。以作一圓。與兩等圓交於C於D。C,D同在AB之一傍。則B,C,D同在一直線內。

B. 1. 自圓周中之二定點。作二直線。其所夾之弧若爲一定不易。則二直線交點之軌跡。即爲一圓周。

2. 置兩洋圓於矩形之箱內。各與箱之一邊相切。且互相切。由是旋轉之。求其切點之軌跡。

3. 兩圓相交於A於B。一周上任取P點。作PA,PB兩直線。引延之與他圓交於Q於R。則QR弦之長有一定。

4. 兩圓相交。自一交點作二圓之徑。則二徑之他端及他交點。必同在一直線內。

5. 與弦平行之切線。必平分其弦所截之弧於

切點。

C. 1. 兩圓周相交於A於B。由A作各圓之切線AC,AD。與各圓周交於C於D。則$\angle ABD=\angle ABC$。

2. 相交兩圓周,其第一圓周過第二圓之心。由交點作第一圓之切線。此切線與兩圓公用弦所成之角。必被由第二圓周之心至切點之直線平分

3. ABC三角形之傍切圓。與BC切於P。與AC,AB之延線。各切於Q,R。則AQ,AR各等於三角形周圍之半。BP,CP各等於由周之半減去AB,AC。

4. 已知三角形之周圍及頂角與高。求作其形。

5. 圓內求作內接四邊形。其兩對角線相交成直角。由交點至任意之邊引垂線。必平分對邊。

〔此稱羅蔑夫達之定理。於西曆598至660年頃印度數學者所創制也。〕

D. 1. 已知三角形底邊之大及其位置。與其頂角之大。求

(1) 垂心　　(2) 外心

(3) 內心　　(4) 傍心

之軌跡。又若已知三角形底邊之大及頂角之大與其位置。求上諸點之軌跡。

2. 已知三角形底邊之大。及其位置。與頂角之大。求其重心之軌跡。

3. 兩圓相切。則聯合兩平行直徑之反對或同傍兩端之直線。必相交於切點。

4. 三角形之三邊上。各作等邊三角形。則三外接圓必同交於一點。

5. 非相交之二圓。其公切線之交點。必落於聯合兩心之直線內。

E. 1. 已知之直線AB。自其兩端任引兩平行線AP,BQ。而平分∠PAB,∠QBA之二直線相交於R。求R之軌跡。

2. 圓內求作已知長之弦。其弦或其延線必過圓內或圓外已知之點。

3. ABC三角形。其內切圓之心爲O。與AB,AC各切於C′,B′。而AO與圓周交於P點。AO之延線與圓周交於P′點。則P,P′各爲AB′C′三角形之內切圓及傍切圓心。

4. 求作四點。任聯合兩點之直線與聯合他兩點之直線皆成直角。

5. 由一定點作諸同心圓之切線。求其切點之

軌跡。

F. 1. 三角形之傍切圓。其三切點分各邊爲六分。而兩兩相等。

2. 由銳角三角形各角之頂。至對邊作垂線。聯合三垂線之趾。即成一三角形。〔稱垂趾三角形〕此三角形之各角。必被所作之垂線平分。又原三角形各角之頂。爲其垂趾三角形之傍心。

3. 由三角形各角之頂。至對邊作三垂線。已知其垂線趾之位置。求作其形。

4. 已知之三直線。求作一圓過之。截取三弦。與已知之長等。

5. 三角形之外接圓心爲 C。其重心爲 G。其垂心爲 O。則 C,G,O 同在一直線內。而

$$CG=\frac{1}{2}GO$$

G. 1. 對於正方形之二邊。有張等角之一點。試求其軌跡。

2. 對於正方形之三邊。有張等角之一點。試求其軌跡。

3. 四直線相交作四三角形。此四三角形之外接圓。必同過一點。

4. 過三角形之二角頂及其垂心之圓。等於此三角形之外接圓。

5. ABC三角形之外接圓。其心爲O。則 $\angle BOC$, $\angle COA$, $\angle AOB$各爲 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$,角之二倍。

H. 1. 等邊多角形。亦等角多角形。又等角多角形。亦等邊多角形試言其故。

2. 已知平分三角形頂角之直線。及由頂角至底之中線。與由頂角至底之垂線。求作其形。

3. 三等圓同交於A點。他交點爲B,C,D。於A,B,C,D四點中。某點爲他三點所成三角形之垂心。

4 由三角形各角頂至對邊作三垂線。其趾爲D,E,F。又其外接圓之心爲O。則OA,OB,OC,各爲EF,FD,DE之垂線。

5. 以O爲心。作第一圓。於周中任取G點。以G爲心。作第二圓。與前圓交於B於C。又於第二圓周中任取H點。以H爲心。BC爲切線。作第三圓。由C及B。至第三圓引他二切線。則兩切線之交點。必落於第一圓周內。

6. 三角形之內切圓心爲L。其傍切圓心爲L′。則LL′被外接圓周平分。

I, 相切

1. 求作一圓。切於直線內已知之點。且過他已知一點。

2. 已知圓之半經。及其所過之一點。與其所切之一直線。求作其圓。

3. 已知圓之半徑。及其所切之圓與直線。求作其圓。

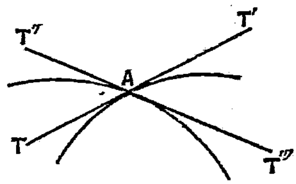
3. 已知圓所切之圓及直線。且已知之直線。為已知之圓徑一端之垂線。求作其圓。

5. 已知圓所切之圓。及所切直線之一點。求作其圓。

6. 已知圓所切之直線。及所切圓之一點。求作其圓。

J. 直交

兩曲線相交所成之角。即於交點引二切線所成之角。



例如兩曲線交於A所成之角。即於A點切各曲線之直線TAT', T''AT''' 所成之角。故謂二圓周為直交者。即於交

點引兩切線所成之角爲直角也。

1. 兩圓互直交。則於交點引各圓之切線。必過他圓之心。

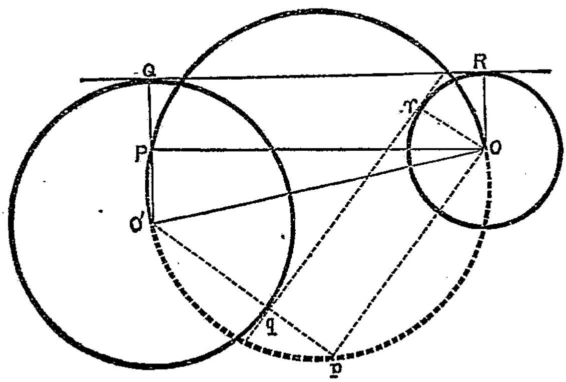
2. 兩等圓互直交。則其公弦。等於二心之距離。

3. 有圓與他已知之圓周直交於已知之點。求此圓心之軌跡。

4. 求作一圓。與已知之圓周直交於已知一點。且過他已知之點。

K. 公切

1. 於已知之二圓。求引公切之解析法。



已知之兩圓心爲O及O'。則可引其公切QR及qr。又以OO'爲徑作一圓周。與O'Q交於P。與O'q之延

線交於p。次作OP及Op直線。則OPQR及Opqr皆爲距形甚明。故O'P等於已知之二圓半徑之較。又O'p等於已知之二圓半徑之和。由是。即得第六章作圖題15之組立法。

2. 兩圓外切於A。引公切線切兩圓周於P於Q。則以PQ爲徑作一圓。此圓周必切聯合兩心之直線於A。

3. 兩圓外切於A。兩心爲C及C'。引公切線切兩圓周於P於Q。而平分∠PCA, ∠QC'A之二直線。必交於PQ中之R點。且成直角。

又RA亦爲二圓之公切。

4. 求作一直線。爲此已知圓之切線及爲他已知圓之割線。然其弦與已知之長等。

5. 求作一直線。爲已知二圓之割線。而二弦與已知之長等。

L. 最大最小

1. 非相交之兩圓周。求其最大及最小之距離。

2. 同於CD直線之一傍。有A,B兩點。今CD中之一點爲P。若∠APB最大。則P點之位置如何。

3. 圓周之內或外。有A,B兩點。今圓周中一點

爲P。若∠APB角最大。則P點之位置如何。

4. 於AB弦上作一弓形。求於弧中取P點。而令AP+BP爲最大。

5. 求作周圍最大之等邊三角形。其三邊各過已知之三點。

M. 詩崇線

1. 於ABC三角形之外接圓周中任取P點。由P至BC,CA,AB三邊作三垂線。其趾L,M,N必同在一直線內。

〔直線LMN稱詩崇線。詩崇者英國之數學大家也。生於西曆1687年。死於西曆1768年。〕

2. 由三角形外一點至三邊引三垂線。若其三趾同在一直線內。則該點必落於三角形之外接圓周內。

3. △ABC及△AB′C′兩三角形。其頂角A爲公用。其外接圓交於P。則由P至AB,AC,BC,B′C′作四垂線。其四趾同落於一直線內。

4. 於第一題引延PL,PM,PN。與圓周交於X,Y,Z。則AX,BY,CZ與詩崇線平行。

5. 三角形之垂心與詩崇線所由成之點聯合

成直線,必被此諸垂線平分。

N. 九點圓

1. 於任意三角形

I. 可作一圓過其各邊之中點,及由各頂角至對邊所作三垂線之趾,與各頂角與垂心聯合之直線中點。[此圓稱原三角形之九點圓]

II. 九點圓之心,必與原三角形之垂心,外心,重心同在一直線內。且在垂心與外心之中點。

III. 九點圓之半徑,半於原三角形之外接圓之半徑。

2. 若ABC三角形之垂心爲O,則$\triangle$ABC之九點圓亦爲$\triangle$OAB,$\triangle$OBC$\triangle$OCA之九點圓。

3. ABC三角形之垂心爲O。BC, CA, AB, 三邊之中點各爲D, E,F。OA,OB,OC之中點各爲P,Q,R。則PFDR, PQDE皆爲矩形。且對角線之公交點,即ABC三角形之九點圓心。

4. 已知三角形之底及其頂角,求九點圓心之軌跡。

5. 凡三角形之垂心同,而外接圓亦同,則其九點圓必同

練習問題 III.

面積之部

A. 1. 於定理9之圖。若聯合AE及CF。必互平行。

2. 求作一菱形。與已知之平行四邊形等積。且其邊與平行四邊形之長邊等。

3. ABC三角形之三邊。順次截取其三分之二爲AA′,BB′,CC′。則$\triangle A'B'C'=\frac{1}{3}\triangle ABC$。

4. 設m及n爲任意二數。今以m^2+n^2,m^2-n^2,2mn爲三邊之測度。聯合三邊之端。則成直角三角形。

5. 由已知之二點至他一點。其距離上正方形之和。等於二點間距離上正方形之和。求作他一點之軌跡。

B. 1. 於定理9之圖。求證D,B,G三點同在一直線內。

2. 已知之三角形。於邊內任取一點。求過此點引二直線。分本形爲三平分。

3. AB直線之中點爲D。又其他點爲C。AC及BC上正方形之和。大於AC.BC矩形之二倍。所大者即CD上正方形之四倍。

4. 任作直角三角形。其直角傍一邊上之正方形。等於他二邊上正方形之和及較所函之矩形。

5. 於ABC任意之等腰三角形。由其頂點A至其底中之任意D點作直線。求證

$$AB^2=AD^2+BD.DC$$

C. 1. 於定理9之圖。求證DC,BH互相交成直角。

2. 三角形之三中線上正方形和之四倍。等於三邊上正方形和之三倍。

3. 求證平行四邊形各邊上正方形之和。等於對角線上正方形之和。

4. 等腰三角形之底上正方形。等於一邊與此邊上所有底之射影相函之矩形二倍。

5. 四邊形各邊之中點。以直線聯合之。即成平行四邊形。其各邊上正方形和之二倍。必等於四邊形兩對角線上正方形之和。

6. 四邊形兩對邊中點。以直線聯合之。此兩線上正方形和之二倍。必等於兩對角線上正方形之和。

D. 1. 四邊形兩對角線上正方形之和。小於各邊上正方形之和。所小者即聯合兩對角線中點之

直線上正方形四倍。

2. AOB,COD爲圓之兩弦,相交成直角。則 OA, OB,OC,OD上正方形之和,與徑上正方形等。

3. 於前題若圓心爲M,則

$$AB^2+CD^2=8AM^2-4OM^2$$

4. 三角形之面積,等於其周之半與其內切圓半徑所函之矩形。

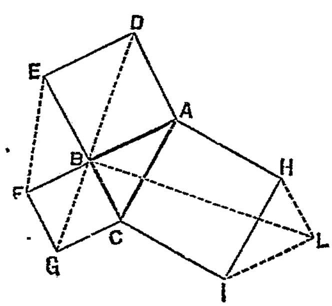
5. 凡圓內接諸矩形,正方形爲最大。

6. 三角形ABC之重心爲G,則△GAB, △GBC, △GCA皆等積。

E. 1. ABC爲直角三角形,如定理9圖。於各邊上作正方形,又於HI上作△HIL。而與△ABC全相等,但HL=BC。

若聯合EF,DBG,BL。

則



(1) △EBF與△ABC全相等。

(2) 四邊形GEFD, GCAD, BCIL, LHAB全相等。

(3) 由是,可證明定理9。

2. 已知之四邊形。由其一角頂作直線平分之

3. 證明定理10及11。與定理9同法。

4. ABC三角形之重心為G。則

$$GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}(AB^2+BC^2+AC^2)$$

5. 二或二以上之三角形。有公頂點。而已知其底之大。及其位置。與其面積之和。求證公頂點之軌跡。為一直線。

F. 1. 由一點至已知之二圓引兩切線。若為等長則此點之軌跡。為一直線。〔此軌跡稱已知之兩圓之根軸〕

2. 三圓之二根軸。必會於一點〔此點稱根軸之心。〕

3. 求作已知二圓之根軸

4. 二圓之根軸被其公切平分。

G. 1. 於定理9之圖。求證

I. $GI^2=AB^2+4BC^2$,

II. $DH^2=BC^2+4AB^2$,

III. $GI^2+DH^2=5AC^2$

2. 直角三角形。其直角傍之二邊上所作等邊三角形之和。等於斜邊上所作等邊三角形。

3. 任作四邊形。測得其邊爲 a,b,c,d。其兩對角線爲 m,n。則四邊形之面積爲

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(2mn+a^2-b^2+c^2-d^2)(2mn-a^2+b^2-C^2+b^2)}$$

4. 前題之四邊形。其內接圓之面積爲

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

但 $s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$

而此四邊形之外切圓。其面積爲

$$\sqrt{abca}$$

練習問題 IV

比例之部

A. 1. ABC,PQR 爲兩平行線。且

$$AB:BC::PQ:QR$$

則 AP,BQ,CR 皆平行。或同交於一點。

2. 聯合三角形各邊之中點。則所成之三角形與原形相似。而其積等於原形四分之一。

3. ABC 三角形。於 AC 中任取 A′點。且由 CB 之延線截取 BB′。令 BB′=AA′。則截 AB 爲 A′B′二分之比等於 CB:CA。

4. ABC等腰三角形。D爲其底BC中之一點。或爲其延線中之一點。則△ABD,△ACD之兩外接圓必等。

5. 已知之兩矩形之比。求作二直線與之同比

B. 1. ABC三角形。平分∠A之直線。與底相交於D而BC之中點爲O。則

$$OB:OD::AB+AC:BA\sim AC$$

2. ABC三角形。BC邊內任取D點。則ABD,ACD兩三角形之外接圓徑之比。等於AB:AC。

3. AB爲已知之直線。XY與AB平行之直線。已知其中CD之長。由是聯合AC,BD。而兩延線交於O。則CD變其位置。而O之軌跡。必與AB平行。

4. 求二分圓之弧。令與其弦之比。等於已知之比。

5. 求作多邊形。與已知之多邊形相似。且其比與已知之比等。

C. 1. 引延正六角形之各邊。則互相交而更成他正六角形。此兩正六角形之比。如3與1之比。

2. 三角形之三邊。各測得爲a,b,c。其面積爲A。及其外接圓徑爲d。則求證

d. $A=\frac{1}{2}adc$.

3. △AEF,△ABC兩三角形。∠A爲公用角。則△AEF : △ABC等於AE : AB及AF : AC之複比。

4. 圓內作ABC內接三角形。切於A點之線與BC之延線交於D。則

$$CD : BD :: CA^2 : BA^2$$

D. 1. 有外切之二圓。同切於一直線。在兩切點間之段。爲兩圓徑之比例中率。

2. 圓之徑爲AB。PCQ線與圓任切於C點。而PCQ與切於A,B點之兩直線交於P於Q。又AQ,BP之交點爲R。則CR與AP,BQ平行。

3. AB爲有限長之直線。線內已知P,Q兩點之位置。求更於線內取O點。令

$$AO : BO :: PO : QO.$$

4. 由一定點O引OPQ線。比OP : OQ等於已知之比。若P之軌跡爲直線。則Q之軌跡亦爲直線。

5. 求作一矩形。其積與已知之正方形等。且其二邊之比。等於已知之比。

E. 1. 同底同傍之兩等積三角形爲ACB,ADB。AC與BD交於O點。由O引兩直線與DA, CB平行。而

與AB相遇於E於F。則AE=BF。

2. 由一定點O引OPQ直線。而比OP:OQ與已知之比等。若P之軌跡爲圓。則Q之軌跡亦必爲圓。

3. 已知之直線。同傍有已知之二點A,B。求於已知之直線內取C點。令∠ACB爲最大。

4. 求分已知之直線爲二段。其二段上正方形之比。等於已知之比。

5. AB直線上之一點爲C。求過C作一直線。令由A,B至此直線上所作兩垂線之比。等於已知之比。

F. 1. 兩圓相交於A於B。引二直線切各圓於A點而與各圓周交於C於D。若聯合CB, BD。則BD爲CB,BA之比例第三率。

2. ABCD爲平行四邊形。由其一角之頂D引一直線與AB交於E與CB之延線交於F。則

$$EA:AD::AB:CF$$

3. ABE爲圓周。周上任取A點。以A爲心。以任意之半徑作BDC圓。與前圓交於B於C。又由A任作AEF弦。與BC交於F。而與BDC, ABE兩圓周各

交於D於E。則AD必爲AF及AE之比例中率。

4. 半圓之徑爲AB。其中任取C點。由C作DC線與AB相交成直角。且交圓周於D。又作OD直線。引CE垂直於OD。則DE爲AO及DC之比例第三率。

5. 已知之三角形。求作直線。與其一邊平行。且分其形爲二。而此兩面積之比。等於已知之比。

G. 1. AC爲半圓之徑。其周上一點爲B。BC若與其半徑等。則AB爲BC及BC+CA之比例中率。

2. BC爲半圓之徑。其周上任取A點。BC中又任取D點。由D引BC之垂線。而與AB交於E。與AC交於F。與半圓周交於G。則DG爲DE及DF之比例中率。

3. 於AB直線內取C,D兩點。令AB,AC,AD爲連比例。如是由A任作AE線與AC等。則∠AEC=∠CED。

4. ABC三角形。平分其外角A之直線與其底之延線交於D。與外接圓周交於E。則矩形BA.AC=EA.AD。

5. 等腰三角形。求作一直線與其底平行。以截

取一三角形。此三角形與原形之比。等於底與一邊之比。

H. 1. OAB 爲四分圓。其半徑 OA 上作 ODA 半圓。於 A 作 AE 切線。並由 O 任作 ODFE 直線。與兩圓周交於 D 於 F。與切線交於 E。更由 D 引 DG 垂直於 OA。則 OE,OF,OD,OG 爲連比例。

2. ABC 內接等腰三角形。其頂點爲 A。由 A 任作直線。截 BC 底於 D。截圓周於 E。則

$$矩形\ EA.AD = AB^2.$$

3. ABC 三角形。求作直線平分之。而此線與一邊成直

4. 二圓外切於 A。更引一直線與兩圓切於 B 於 C。而與聯合兩心之直線交於 S。則矩形 SB.SC 等於 SA 上之正方形。

5. 已知三角形之頂角。及兩腰之比。與其外接圓徑。求作其形。

I. 1. 由三角形 ABC 之各角頂。至對邊作三垂線 AD,BE,CF。而同交於一點。則 BD : DC, CE : EA, AF : FB 之複比等於一。〔稱涉踐之定理〕

2. ABC 三角形。其邊 BC,CA, AB 或其延線被一

直線截於D於E於F。則 BD : DC,CE : EA,AF : FB之複比等於一。〔稱密彌羅士之定理〕

3. 內切圓之切點與其相對各角之頂點聯合此三直線必同交於一點。

4. ABCD四邊形。AB,DC之交點爲X。AD,BC之交點爲Y。則AC,BD,XY之中點必同在一直線門〔本題之直線XY。爲四邊形之第三對角線〕

J. 1. ABC三角形。其邊BC,CA,AB之測度各爲a,b,c。而其面積之測度爲△。求證

$$\triangle=\sqrt{\{s(s-a)(s-b)(s-c)\}}$$

但s爲周圍之半。

注意 於本文123頁之圖。其內切圓徑爲r與BC切之傍切圓半徑爲r_1此兩圓各切於AB之點D及E。則

$$sr=(s-a)r_1=\triangle$$

而可證△ODB,△BEO$_1$相似。

2. 三角形之兩傍切圓若相等。則此三角形之兩腰必等。

3. 等邊三角形。其傍切圓之半徑與內切圓之半徑相比。如3:1。

4. ABC三角形其傍切圓之半徑若爲內切圓半徑之三倍則此三角形三邊之長爲等差級數

K. 相切

1. 求作一圓過已知之兩點且切已知之直線
2. 求作一圓過已知之兩點且切已知之圓
3. 求作一圓過已知之一點且切已知之二直線
4. 求作一圓過已知之一點且切已知之直線及已知之圓
5. 求作一圓過已知之一點且切已知之二圓
6. 求作一圓切已知之二直線及已知之圓
7. 求作一圓切已知之直線及已知之二圓
8. 求作一圓切已知之三圓

〔本題由希臘數學名家亞羅鄂士氏始解得之時在西曆紀元前二百年頃〕

練習問題 V.

正多角形及圓之測度之部

A. 1. 圓之內接正三角形等於其外切正三角形

四分之一。

2. 內接正六角形之面積.與其內接正三角形及外切正三角形之面積相比例.必爲兩形之中率.

3. 內接正八角形之積.等於內接正方形.及外切正方形之隣邊之矩形之積.

4. 內接正十二角形之面積.等於半徑上正方形之三倍.

5. 不等之兩圓內.其等弧所函之中心相比.等於其半徑之反比.

B. 1. 內接正五角形.其一邊上之正方形.等於其內接正十角形一邊上之正方形.加半徑上之正方形.

2. n 邊之正多角形.自其內一點至各邊引諸垂線.其諸線之和.等於垂幅之n倍.

於本題其點若在多角形外則何如.

3. 已知圓之半徑爲 R.求作其外切正六角形之一邊.

4. n 邊之正多角形.由其各角之頂至任意之直線作諸垂線.其諸線之和.等於由多角形心至

諸垂線所引垂線之n倍。

5. 由正多角形各角之頂。至其外接圓任意之徑作垂線則徑之一段所有諸垂線之和。等於他一段諸垂線之和。

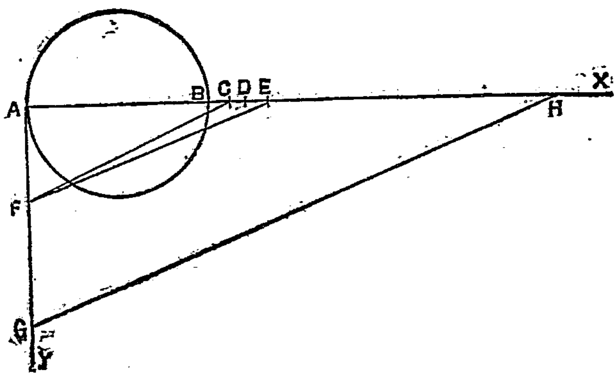
C. 1. 一直角求分爲五等分。

2. 於已知之一邊上。求作正八角形。

3. 以內接正六角形之周。與其外切正方形之周相比。則可證圓周大於其直線之三倍。而小於其四倍。

4. 圓之半徑爲R。其內接正多角形之一邊爲a又其相似外切正多角形之一邊爲A。求證

$$A=\frac{2aR}{\sqrt{(4R^2-a^2)}} \text{ 及 } a=\frac{2AR}{\sqrt{(4R^2+A^2)}}$$



AB 爲圓徑而引延至 X。又於 A 引 AY 切線。圓之半徑爲 R。今截取 AF=R, BC=CD=DE=$\frac{1}{5}$R。又截取 AG=CF。引 GH 與 FE 平行。則 AH 殆與圓周等。

附錄三

應用問題

1. 四邊形有鈍角幾何。

2. 三角形之二邊爲一尺二寸及一尺七寸。問第三邊之最大以幾何爲限。

3. 已知三角形之各角爲A,B,C。求次之諸角。

   (1) 平分A及B之兩直線所成之角。

   (2) 由B及A至AB及BC上各引垂線。求其間所成之角。

   (3) 平分A之直線。與由A至BC之垂線所成之角。

4. 由圓心至圓外一點作直線。若與其徑等。則由其點至圓引二切線。問其所成之角之大。

5. 同心二圓之半徑各爲a, b。則作二圓與此兩圓相切。問其半徑幾何。

6. 矩形之面積爲二百十六平方寸。而其周圍爲六尺。問其二邊之長幾何。

7. 矩形之面積爲六百平方寸。而其二邊之差爲一尺。問其二邊之長幾何。

8. 梯形之平行二邊爲三尺二寸及二尺。而他二邊各爲一尺。問其面積幾何。

9. 等邊三角形之一邊爲a而其高爲h。求其面積幾何。

10. 已知平行四邊形之二邊爲a,b。及其一對角線爲g。求其他對角線h。

11. 三角形之三邊爲a,b,c。而a=b。平分邊c之對角之直線亦分邊爲二段。問分後之形狀若何。

12. 直角三角形之三邊。恰爲順次之三整數。問其三邊幾何。

13. 三角形之三邊爲a,d,c。求其外接圓之半徑R。及內切圓之半徑r。

14. 有甲乙丙三家。甲與乙相距爲十丈二尺。乙與丙相距爲十五丈。丙與甲相距爲十六丈八尺。今三家同掘一井。此井之與三家相距爲八丈五尺。求井之位置。

15. 由三角形一邊之中點。求作二直線。分全形如1:2:3。

16. ABC三角形之邊AB中之一點D。過D作DE直線與BC平行。若合於次之規則。由是於AB之率

可求AD。

(1)　DE爲平分ABC三角形者。

(2)　三角形$ADE=\frac{1}{3}$三角形ABC者。

(3)　梯形$BDEC=\frac{1}{4}$三角形ABC者。

(4)　$\triangle ADE$:梯形BDEC::m:n者。

17.　兩相似六角形之相當邊爲三尺三寸及五尺六寸。求其和及等積相似六角形之相當邊。

18.　於梯形ABCD。命其平行二邊$AB=a$, $CD=c$。而引直線x,y與平行兩邊平行。乃由CD順次計之。分梯形如m:n:p。求x,y。

19.　其圓之外切正六角形與其內接正三角形。求比較之。

20.　三個正八角形之一邊。各爲三尺四尺及十二尺則此三個正八角形之面積之和。等於正八角形之一邊。如何

本會發行書目

- 陳文 平面三角法演題詳解 定價三角 長沙黃離演
- 中等教科 平面三角法 定價六角 連江陳文編
- 教科兼用 初等自修代數學 定價壹元貳角 歸順曾彥編
- 查理斯密 小代數學解式 定價八角 歸順曾彥譯
- 查理斯密 小代數學 定價壹元五角 連江陳文譯
- 中學適用 算術教科書 定價壹元三角 連江陳文編
- 高等小學 算術教授法 全四冊每冊洋四角 陳文 何崇禮 合著
- 高等小學 算術教科書 全四冊每冊洋貳角 陳文 何崇禮 合著

- 查理斯密 大代數學上卷 定價壹元 陳文 何崇禮 合譯
- 溫特渥斯 解析幾何學 定價壹元五角 香山鄭家斌譯
- 溫特渥斯 立體幾何學 （譯述中）
- 溫特渥斯 平面幾何學 定價壹元二角 桂林馬君武譯
- 何崇禮 平面幾何學問題解法 定價八角 長沙王醉六演
- 中等教育 幾何學教科書立體之部 定價五角 南海何崇禮編
- 中等教育 幾何學教科書平面之部 定價壹元 南海何崇禮編
- 幾何學初等教科書 定價五角 歸順曾彥譯

中等博物教科 **植物學** 定價壹元五角 桂林李天佐編

倫孫氏 **中等化學教科書** 定價壹元五角 桂林馬君武譯

馬福生韓德生 **最新實驗化學** 定價七角 餘姚史寄譯

高等 **物理學教科書** （印刷中） 連江陳文編

中等教科 **新式物理學** 定價貳元 連江陳文編

圖學教科 **平面幾何畫法** 定價九角 桂林何錫齡編

奧斯賓氏 **積分學** 定價壹元 香山鄭家斌譯

奧斯賓氏 **微分學** 定價壹元五角 李德晉鄭家斌合譯

查理斯密 **大代數學** 下卷 定價壹元貳角 連江陳文譯

查理斯密 **大代數學** 中卷 定價壹元 陳文何崇禮合譯

植物學講本 金華邵錫濂 江陰陳以益 合著

查理斯密 **大代數學解式** 歸順曾彥譯

最新 **刑法講義案** 桂林張仁普編

中學 **英文典教科書** 定價壹元貳角 南海何崇禮編

普通教育 **地文學教科書** 定價壹元 歸順曾彥編

中等歷史教科書 **東西洋之部** 定價八角 臨桂趙懿年編

中等歷史教科書 **本國之部** 定價七角 臨桂趙懿年編

中等博物教科 **生理衞生學** 定價九角 桂林陳用光編

中等博物教科 **鑛物學** 定價六角 桂林陳用光編

中等博物教科 **動物學** 定價壹元 靈川秦國宗編

總發行所 上海四馬路老巡捕房東首科學會編譯部總發行所

數學辭書 歸顧晉彥譯

漢譯斐德烈斯第三英文典 南海何崇禮譯

中學教科 外國地理 編輯中

中學教科 本國地理 編輯中

中學 中國歷史 仁和馬叙倫著

普通教育 生理衛生學 定價洋六角 歸顧晉彥編

普通教育 動物學教科書 定價洋六角 歸顧晉彥編

普通教育 植物學教科書 定價大洋五角 歸顧晉彥編

普通教育 理科彙編 編譯中

高等 地文學教科書 歸顧晉彥編

普通教育 地質學教科書 歸顧晉彥編

名學釋例 定價大洋壹圓 連江陳文編

新編 初等重學 (印刷中) 崑山朱文熊譯

科學公例提要 連江陳文輯

世界格言集 連江陳文輯

理科辭典 桂林李天佐 陳用光 合譯

總發行所 上海 四馬路老巡捕房東首 科學會編譯部總發行所

發行者 科學會編譯部

印刷所 秀英舍第一工場 東京市牛込區市ヶ谷加賀町一丁目十二番地

印刷者 藤本兼吉 東京市牛込區市ヶ谷加賀町一丁目十二番地

編者 南海何崇禮

定價大洋壹圓

中等教育幾何學奥附

宣統二年六月二十日七版發行
宣統二年三月十五日六版發行
宣統元年四月初一日五版發行
光緒三十四年十二月初五日四版發行
光緒三十三年十月十六日三版發行
光緒三十三年三月二十日再版發行
光緒三十二年五月初五日初版發行