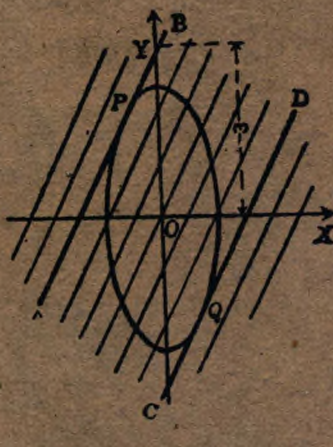
SMITH
GALE
NEELLEY

解析幾何題解

蔣憲淞 編演



世界書局發行

中華民國二十九年四月初版
（本書電碼5112）
斯蓋尼三氏解析幾何題解一册
Key to New Analytic Geometry
每册實價國幣一元八角
外埠酌加郵費
版權所有
不准翻印
已呈請內政部註册
編演者 蔣憲㳇
上海四馬路三二八弄五號
出版者 廣文社
總發行 世界書局
經售處 全國各大書局

目　　次

第二章　笛卡兒坐標

第三章　曲線及方程式

第四章　直　線

第五章　圓

第六章　拋物線,橢圓與雙曲線

第七章　坐標之變換

第八章　切線

第九章　極坐標

第十章　超越曲線

第十一章　通徑方程式與軌跡

第十二章 函數,圖形及經驗方程式

章十三章 空間之笛卡兒坐標

第十四章 空間之平面與直線

第十五章 特種曲面

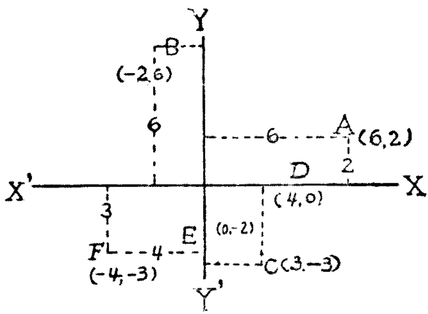
第十六章 空間幾何補編

第十七章 坐標之變換,各種坐標制

第二章　笛卡兒坐標

原本第8—9頁習題

1.　試正確作 $(6,2)$, $(-2,6)$, $(3,-3)$, $(4,0)$, $(0,-2)$, $(-4,-3)$ 諸點。

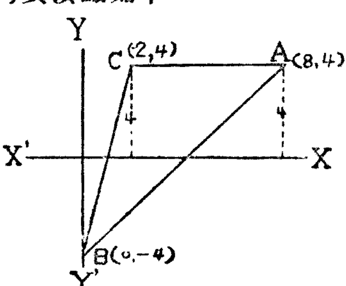


2.　一點之軌跡爲何，如此點移動時 (1) 其橫坐標常爲 -3? (2) 其縱坐標常爲 4?

(1)　平行於 y 軸而在 y 軸左方 3 單位之直線。

(2)　平行於 x 軸而在 x 軸之上 4 單位之直線。

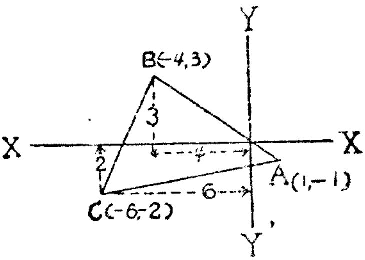
3.　作三角形，其頂點如下：

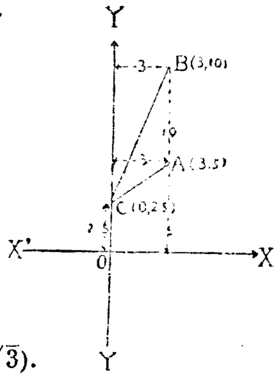


(a) 設 3 頂點爲 $A(8, 4)$, $B(0, -4)$ 及 $C(2, 4)$, 則三角形如上圖.

(b) $(1, -1)$, $(-4, 3)$, $(-6, -2)$.

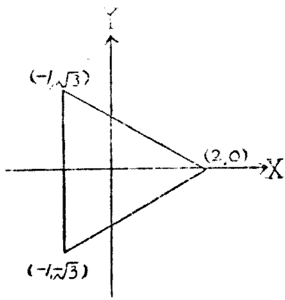
(c) $(3, 5)$, $(3, 10)$, $(0, 2.5)$.

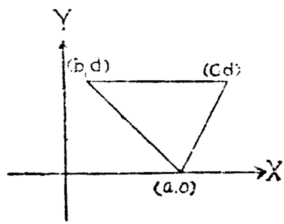




(d) $(2, 0)$, $(-1, \sqrt{3})$, $(-1, -\sqrt{3})$.

(e) (b, d), (c, d), $(a, 0)$.





4. 求題 3 之 (c), (d), (e) 諸三角形之面積.

三角形之面積 $=\frac{1}{2}$ 底 $\times$ 高.

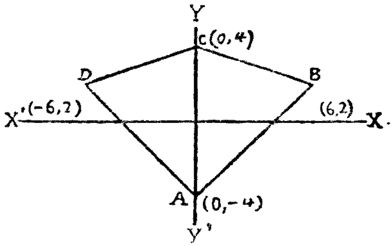
(c) 面積 $=\frac{1}{2}\times 5\times 3=7.5$.

(d) 面積 $=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 3=3\sqrt{3}$.

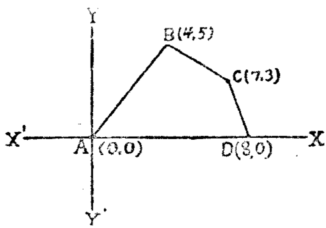
(e) 面積 $=\frac{1}{2}\times(c-d)\times d=\frac{1}{2}d(c-d)$.

5. 作四邊形,其頂點如下:

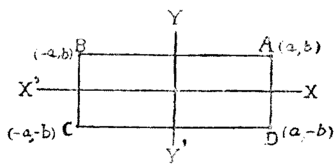
(a) 設四頂點爲 $A(0, -4)$, $B(6, 2)$, $C(0, 4)$, $D(-6, 2)$, 則四邊形如下圖.



(b)　(0, 0), (4, 5), (8, 0), (7, 3).



(c)　$(a, b), (-a, b), (a, -b), (-a, -b)$.



6.　一點之軌跡爲何，(1) 其橫坐標與其縱坐標相等？(2) 其橫坐標與縱坐標之負值相等？

(1)　軌跡爲平分 $\angle XOY$ 及 $\angle X'OY'$ 之直線。

(2)　軌跡爲平分 $\angle XOY'$ 及 $\angle X'OY$ 之直線。

7.　用幾何作圖法，正確作 $(\sqrt{2}, 3)$, $(\sqrt{3}, 2)$, $(\sqrt{5}, \sqrt{6})$ 諸點。

$\sqrt{2}=\sqrt{1+1}$，故可作一直角三角形，使兩邊各等於 1，其弦即爲 $\sqrt{2}$.

$\sqrt{3}=\sqrt{4-1}$，故可作一直角三角形，使一邊爲 1 而弦爲 2，其另一邊即爲 $\sqrt{3}$.

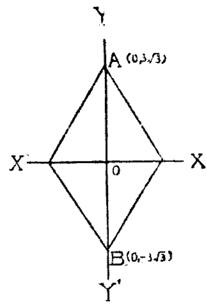
$\sqrt{5}=\sqrt{4+1}$，故可作二邊爲 2 與 1 之直角三角形而求其弦。

$\sqrt{6}=\sqrt{5+1}$，既得$\sqrt{5}$，更於其上作直角，使另一邊爲1，聯爲三角形，其弦卽爲$\sqrt{6}$.

或以比例中項求之亦可，例如$\sqrt{6}=\sqrt{2\times 3}$，求2與3之比例中項得一線分卽爲$\sqrt{6}$.

既得諸數之線值，卽以爲縱橫坐標而求其點，例如，既得$\sqrt{2}$之線值，卽以爲橫坐標，3爲縱坐標得一點，卽爲所求。

8. 邊長6吋之等邊三角形，其底與x軸重合，而其中點在原點上，則其頂點之坐標爲何？(有二種情形)



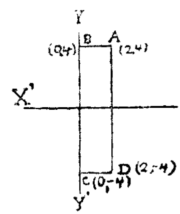
$$AO=A'O=\sqrt{AC^2-OC^2}=\sqrt{6^2-3^2}$$
$$=\sqrt{27}=3\sqrt{3}.$$

故頂點之坐標爲$A(0,3\sqrt{3})$, $B(0,-3\sqrt{3})$.

9. 邊長6吋之正方形，其兩對角線在兩坐標軸上，則其頂點之坐標爲何？

$\frac{1}{2}$對角線之長$=\sqrt{\frac{6^2}{2}}=\sqrt{6\times 3}=3\sqrt{2}$，故頂點之坐標爲$(0,3\sqrt{2})$, $(0,-3\sqrt{2})$, $(3\sqrt{2},0)$及$(-3\sqrt{2},0)$.

10. 何種四邊形其頂點在$(2,4)$, $(0,4)$, $(0,-4)$, $(2,-4)$？其面積爲何？



按此四點作圖得一矩形，其面積爲$8\times 2=16$.

11. 設一長方形之兩邊各長a與b，且各與x軸及y軸重合，則其頂點之坐標爲何？

此長方形之頂點可有四種情形：

(a) $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,b)$, (a,b).

(b) $(0,0)$, $(-a,0)$, $(0,b)$, $(-a,b)$.

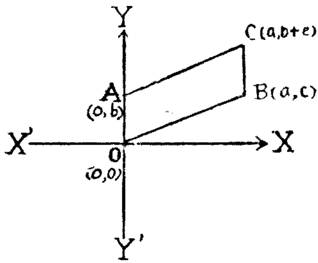
(c) $(0,0)$, $(-a,0)$, $(0,-b)$, $(-a,-b)$.

(d) $(0,0)$, $(a,0)$, $(a,-b)$, $(0,-b)$.

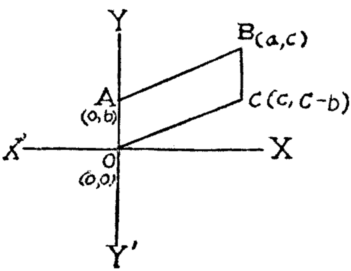
12. 設$(0,0)$, $(0,b)$, (a,c)爲一平行四邊形三頂點之坐標，則其第四頂點之坐標爲何？

按圖其第四頂點爲$(a,c-b)$. 若聯OB爲一邊，則C在B之上，故第四頂點(卽C)爲$(a,b+c)$.

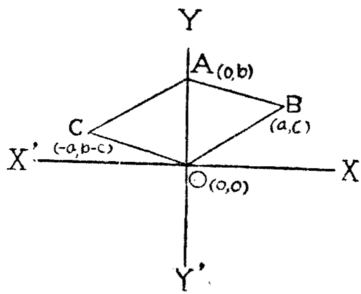
如下圖，則 C 爲 $(a, b+c)$.



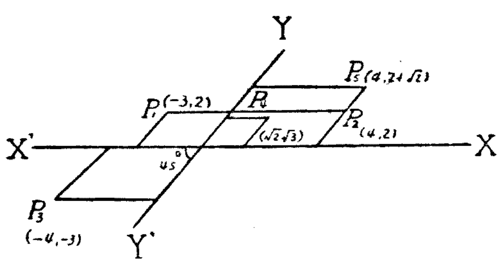
如下圖，則 C 爲 $(a, c-b)$.



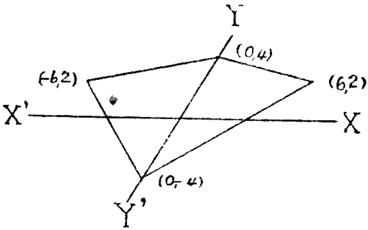
又如下圖，則 C 爲 $(-a, b-c)$.

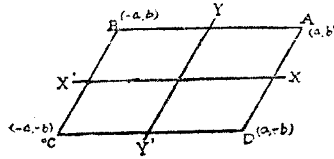


13. 作諸點其斜坐標如下，而坐標軸間之角爲 45°：$(-3, 2)$, $(4, 2)$, $(-4, -3)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $(4, 2+\sqrt{2})$.

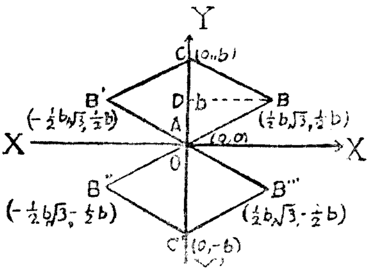


14. 作題 5 之諸四邊形，設坐標軸間之角爲 60°.





15. 設等邊三角形之一邊長爲 b, 一頂點爲 $(0, 0)$, 而一邊在 y 軸上, 則其餘頂點之坐標爲何?(有四種情形)



$DB=\sqrt{b^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}=\frac{b}{2}\sqrt{3}$, 故其餘頂點爲:

$(0, b)$ 及 $\left(\frac{b}{2}\sqrt{3},\ \frac{b}{2}\right)$, $(0, b)$ 及 $\left(-\frac{b}{2}\sqrt{3},\ \frac{b}{2}\right)$,

$(0, -b)$ 及 $\left(\frac{b}{2}\sqrt{3},\ -\frac{b}{2}\right)$, $(0, -b)$ 及 $\left(-\frac{b}{2}\sqrt{3},\ -\frac{b}{2}\right)$.

16. 對於 x 軸對稱於 (a, b) 之點, 其坐標爲何? 對於 y 軸? 對於原點?

對於 x 軸對稱於 (a, b) 之點爲 $(a, -b)$.

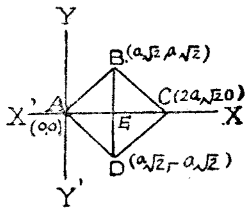
對於 y 軸則爲 $(-a, b)$.

對於原點則爲 $(-a, -b)$.

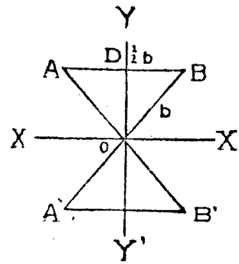
17. 邊長 $2a$ 之正方形, 有一頂點在 $(0, 0)$ 而一對角線在正 x 軸上, 則其餘頂點之坐標爲何?

$AE=BE$, 故 $AE=\sqrt{\frac{\overline{AB}^2}{2}}=\sqrt{\frac{4a^2}{2}}=a\sqrt{2}$, 則其餘三頂點爲

$(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$, $(a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$ 及 $(2a\sqrt{2}, 0)$.



18. 邊長 b 之等邊三角形，其一頂點在原點上，而一高在 y 軸上，則其餘頂點之坐標爲何？(有兩種情形)



$$OD=\sqrt{b^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}=\frac{b}{2}\sqrt{3}.$$

故三角形之其餘兩頂點爲：

$$\left(-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\sqrt{3}\right), \quad \left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\sqrt{3}\right) \text{ 或}$$

$$\left(-\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}\sqrt{3}\right), \quad \left(-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\sqrt{3}\right).$$

原 本 第 14—16 頁 習 題

1. 求下列三角形之周界：

(a) 設三角形之三頂點爲 $A(3, 0)$, $B(5, 2)$, $C(7, 6)$，則 AB, BC, CA 爲三邊.

$$AB=\sqrt{(3-5)^2+(0-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2},$$
$$BC=\sqrt{(5-7)^2+(2-6)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5},$$
$$CA=\sqrt{(7-3)^2+(6-0)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}.$$

故此三角形之周界爲 $AB+BC+CA=2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2\sqrt{13}$ $=2(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{13})$.

(b) $(2, 1)$, $(7, 3)$, $(5, -4)$.

$$\text{周界}=\sqrt{(2-7)^2+(1-3)^2}+\sqrt{(7-5)^2+(3+4)^2}$$
$$+\sqrt{(5-2)^2+(4+1)^2}=\sqrt{29}+\sqrt{53}+\sqrt{34}.$$

(c) $(3, 3)$, $(-3, 4)$, $(-4, -3)$.

周界$=\sqrt{(3+3)^2+(3-4)^2}+\sqrt{(-3+4)^2+(4+3)^2}$
$+\sqrt{(3+4)^2+(3+3)^2}=\sqrt{37}+\sqrt{50}+\sqrt{85}.$

(*d*) $(-1, 4), (-4, -2), (3, -4).$

周界$=\sqrt{(-1+4)^2+(4+2)^2}+\sqrt{(-4-3)^2+(-2+4)^2}$
$+\sqrt{(3+1)^2+(-4-4)^2}=\sqrt{45}+\sqrt{53}+\sqrt{80}$
$=7\sqrt{5}+\sqrt{53}.$

(*e*) $(2, -3), (-6, -3), (5, 4).$

周界$=8+\sqrt{170}+\sqrt{58}.$

2. 試決定下列諸三角形，何者爲不等邊，等腰，或等邊三角形：

(*a*) $A(2, 6), B(6, 2), C(-3, -3).$

$$AB=\sqrt{(2-6)^2+(6-2)^2}=4\sqrt{2},$$
$$BC=\sqrt{(6+3)^2+(2+3)^2}=\sqrt{106},$$
$$AC=\sqrt{(2+3)^2+(6+3)^2}=\sqrt{106}.$$

故此三角形爲等腰三角形.

(*b*) $A(-3, -6), B(-6, 5), C(-3, 5).$

$$AB=\sqrt{(-3+6)^2+(-6-5)^2}=\sqrt{130},$$
$$BC=\sqrt{(-6+3)^2+(5-5)^2}=3,$$
$$AC=5+6=11.$$

故此三角形爲不等邊三角形.

(*c*) $A(3, 0), B(-3, 0), C(0, -3\sqrt{3}).$

$$AB=3+3=6,$$
$$BC=\sqrt{(-3)^2+(-3\sqrt{3})^2}=6,$$
$$AC=\sqrt{(-3)^2+(-3\sqrt{3})^2}=6.$$

故此三角形爲等邊三角形.

(*d*) 等邊.

(*e*) 等腰.

3. 諸點 $A(3, 2), B(1, 2\sqrt{3}), C(-2, 3), D(-2\sqrt{2}, -\sqrt{5})$ 是否在以原點爲中心之圓上?

$$OA=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13},$$
$$OB=\sqrt{1+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{13},$$
$$OC=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13},$$

$$OD=\sqrt{(-2\sqrt{2})^2+(-\sqrt{5})^2}=\sqrt{13}.$$

四點與原點之距均爲 $\sqrt{13}$, 故此四點均在以原點爲中點 $\sqrt{13}$ 爲半徑之圓上.

4. 設自 $(0, -2)$ 至 $(b, 4)$ 之距離爲 10 單位, 則 b 之值爲何?

$$\sqrt{(0-b)^2+(-2-4)^2}=10.$$

$$b^2+36=100.$$

$$b^2=64.$$

$$\therefore\quad b=\pm 8.$$

5. 求題 1 中諸三角形各邊之中點.

(a) $(3, 0), (5, 2), (7, 6)$.

設三中點爲 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 及 (x_3, y_3).

$$x_1=\frac{3+5}{2}=4,\qquad y_1=\frac{0+2}{2}=1;$$

$$x_2=\frac{5+7}{2}=6,\qquad y_2=\frac{2+6}{2}=4;$$

$$x_3=\frac{3+7}{2}=5,\qquad y_3=\frac{0+6}{2}=3.$$

(b) $(2, 1), (7, 3), (5, -4)$.

$$x_1=\frac{2+7}{2}=4.5,\qquad y_1=\frac{1+3}{2}=2;$$

$$x_2=\frac{7+5}{2}=6,\qquad y_2=\frac{3-4}{2}=-0.5;$$

$$x_3=\frac{2+5}{2}=3.5,\qquad y_3=\frac{1-4}{2}=-1.5.$$

(c) $(3, 3), (-3, 4), (-4, -3)$.

$$x_1=0,\qquad y_1=3.5;$$

$$x_2=-3.5,\qquad y_2=0.5;$$

$$x_3=-0.5,\qquad y_3=0.$$

(d), (e) 仿此.

6. 設一線段之一端爲 $(-1, 2)$ 而其中點爲 $(2, 1)$, 則他端之坐標爲何?

設所求一點之坐標爲 (x, y), 則

$$\frac{-1+x}{2}=2,\qquad \frac{2+y}{2}=1.$$

$$\therefore \quad x=5, \quad y=0.$$

7. 設一點在下列各組中自第一點至第二點之距離之三分之二處，求各該點之坐標：

(a) $(-2,-1),(3,2)$.

所求點離第一點爲第二點至第一點之 $\frac{2}{3}$ 卽分一二兩點間之距離爲 2 與 1 之比，故得

$$x=\frac{-2+3\cdot 2}{1+2}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}, \qquad y=\frac{-1+2\cdot 2}{1+2}=1.$$

(b) $(3,-4),(-1,5)$.

$$x=\frac{3-1\cdot 2}{1+2}=\frac{1}{3}, \qquad y=\frac{-4+5\cdot 2}{3}=2.$$

(c) $(0,0),(-21,6)$.

$$x=\frac{0-21\cdot 2}{3}=-14, \qquad y=\frac{0+6\cdot 2}{3}=4.$$

(d) $(2,6),(8,9)$.

$$x=\frac{2+8\cdot 2}{3}=6, \qquad y=\frac{6+9\cdot 2}{3}=8.$$

8. 試以坐標證明直角三角形弦上之中點與三頂點等距。

設直角三角形之三頂點爲 $(0,0)$ $(a,0)$ $(0,b)$，則弦上之中點爲 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$，此點至直角頂點 $(0,0)$ 之距離爲

$$d_1=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

至其他兩頂點之距離爲 $d_2=d_3=\sqrt{\left(a-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$，故相等。

9. 試以解析法證明連接任意四邊形鄰邊中點之線段仍成一四邊形，其周界爲原四邊形對角線之和。

設四邊形之四頂點順次爲 $(0,0)$, $(0,a)$, (b,c) 及 (d,e)，則四邊之中點爲 $\left(0, \frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{b}{2}, \frac{a+c}{2}\right)$, $\left(\frac{b+d}{2}, \frac{c+e}{2}\right)$ 及 $\left(\frac{d}{2}, \frac{e}{2}\right)$.

新四邊形之周界爲 $\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}+\frac{1}{2}\sqrt{d^2+(a-e)^2}+\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}$ $+\frac{1}{2}\sqrt{d^2+(a-e)^2}=\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{d^2+(a-e)^2}$.

而對角線之和爲 $\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{d^2+(a-e)^2}$, 故相等。

10　設 (1, 1) 各與點 (3, 7) 及 (5, -3) 連成直線，且各由此末二點延長至原長三倍處，求延長後諸端點之坐標。

設 (x, y) 爲所求之點，則 (3, 7) 分聯 (x, y) 至 (1, 1) 之點爲 2 與之比，故得

$$\frac{1\cdot 2+x}{1+2}=3, \qquad \frac{1\cdot 2+y}{1+2}=7.$$

$$x=7, \qquad y=19.$$

又
$$\frac{1\cdot 2+x}{3}=5, \qquad \frac{1\cdot 2+y}{3}=-3.$$

$$x=13, \qquad y=-11.$$

11.　有二點皆分 (5, 10) 與 (-2, 3) 之連線成 3 : 4, 則此二點之坐標爲何?

$$x_1=\frac{5+\frac{3}{4}(-2)}{1+\frac{3}{4}}=2, \qquad y_1=\frac{10+\frac{3}{4}\cdot 3}{1+\frac{3}{4}}=7.$$

$$x_2=\frac{5+\frac{4}{3}(-2)}{1+\frac{4}{3}}=1, \qquad y_2=\frac{1+\frac{4}{3}\cdot 3}{1+\frac{4}{3}}=6.$$

12　頂點爲 (2, 1), (7, 1), (9, 3), (4, 3) 之四邊形，其對角線互相平分否?

四邊形之對角線爲自 (2, 1) 至 (9, 3) 及自 (7, 1) 至 (4, 3) 二線。第一直線之中點爲

$$x=\frac{2+9}{2}=5.5, \qquad y=\frac{1+3}{2}=2.$$

第二直線之中點爲

$$x=\frac{7+4}{2}=5.5, \qquad y=\frac{1+3}{2}=2.$$

二直線之中點相合，故互相兩等分。

13.　證明 (2, 3), (4, 1), (8, 2) 與 (6, 4) 爲一平行四邊形之四頂點。

四邊之長順次爲

$$d_1=\sqrt{(2-4)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2},$$
$$d_2=\sqrt{(4-8)^2+(1-2)^2}=\sqrt{17},$$
$$d_3=\sqrt{(8-6)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{2},$$
$$d_4=\sqrt{(6-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{17}.$$

兩對邊兩兩相等,故為平行四邊形.

14. 試以解析法證:

(a) 矩形之對角線相等.

設長方形之四頂點為 $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, b) 及 $(0, b)$,則兩對角線分別為

$$d_1=\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}=\sqrt{a^2+b^2},$$
$$d_2=\sqrt{(a-0)^2+(0-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

故相等.

(b) 任意平行四邊形之對角線互相平分.

設平行四邊形之四頂點為 $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(c, b)$ 及 $D(c-a, b)$,則對角線 AC 之中點為 $\left(\frac{c}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 而 BD 之中點為 $x=\frac{a+c-a}{2}=\frac{c}{2}$, $y=\frac{b}{2}$. 中點相合即互相兩等分.

(c) 連任意三角形二邊中點之線段等於第三邊之半.

設三角形之三頂點為 $A(0, 0)$, $B(a, 0)$ 及 $C(b, c)$, 則

AB 之中點為 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$,

AC 之中點為 $\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

兩中點聯線之長為 $\frac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2+c^2}$.

而 BC 之長為 $\sqrt{(a+b)^2+c^2}$.

15. 設 $(-1, 1)$, $(4, -1)$ 與 $(-2, -5)$ 為一三角形各邊之中點,求此三角形之各頂點.

設三角形之三頂點為 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), 則

$$x_1+x_2=2\times(-1), \qquad y_1+y_2=2\times1;$$
$$x_2+x_3=2\times4, \qquad y_2+y_3=2\times(-1);$$
$$x_3+x_1=2\times(-2), \qquad y_3+y_1=2\times(-5).$$

解之,得 $x_1=-7$, $x_2=5$, $x_3=3$;

$$y_1=-3,\quad y_2=5,\quad y_3=-7.$$

16. 點 $(-4,3)$ 分連接 $(1,-2)$ 與 $(-6,5)$ 之線段成何比？

$$\frac{1+(-6)r}{1+r}=-4,\qquad \frac{-2+5r}{1+r}=3.$$

$$r=\frac{5}{2},\qquad r=\frac{5}{2}.$$

17. 表一點 (x, y) 至 $(3, -2)$ 之距離爲 7 單位之代數方程式爲何？

$$d=\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}=7.$$

$$x^2+y^2-6x+4y-36=0.$$

18. 以何代數方程式表：

(a) 點 (x, y) 與 $(3, 5)$ 及 $(-2, -4)$ 等距？

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y+4)^2}.$$

$$5x+9y=7.$$

(b) 點 (x, y) 至 $(3, 5)$ 之距離爲至 $(-2, -4)$ 之二倍。

$$\sqrt{(x+2)^2+(y+4)^2}=2\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}.$$

$$3x^2+3y^2-28x-48y+116=0.$$

19. 三角形三頂點各爲 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)，求其三中線相交點之坐標．此點爲三角形之重心．(見圖)

自平面幾何學，三中線之交點離一頂點之距離爲距其對邊中點之二倍．

BC 之中點 D 爲 $\left(\dfrac{x_2+x_3}{2},\ \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$.

分 AD 爲 $2:1$ 之點爲

$$x=\frac{x_1+2\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}\right)}{2+1}=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),$$

$$y=\frac{y_1+2\left(\dfrac{y_2+y_3}{2}\right)}{2+1}=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3).$$

20. 試用解析法證明：

(a) 連任意四邊形對邊中點之兩線段互相平分．

設四邊形之四頂點爲 $A(0,0)$, $B(a, 0)$, $C(b, c)$ 及 $D(d,e)$，則四邊

之中點順次爲 $E\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $F\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$, $G\left(\frac{b+d}{2}, \frac{c+e}{2}\right)$及 $H\left(\frac{d}{2}, \frac{e}{2}\right)$.

二對邊中點聯線 EG 之中點爲$\left(\frac{a+b+d}{4}, \frac{c+e}{4}\right)$.

FH 之中點爲 $\left(\frac{a+b+d}{4}, \frac{c+e}{4}\right)$.

二點相合，故互相兩等分.

(b) 連任意四邊形二對邊中點之線段與連此四邊形兩對角線中點之線段，彼此互相平分.

假設如前，則兩對角線之中點爲$\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ 及 $\left(\frac{a+d}{2}, \frac{e}{2}\right)$, 此兩點之中點爲$\left(\frac{a+b+d}{4}, \frac{c+e}{4}\right)$, 故與上題對邊中點聯線之中點相合.

21. 試用解析法證明自一矩形之兩對角頂點至任意一點之距離之平方和，等於自其他二對角頂點至此點之距離之平方和.

設矩形之三頂點爲 $A(0, 0)$, $B(a, 0)$ 及 $C(0, b)$, 則第四點 D 必爲 $(\pm a, \pm b)$.

設任一點之坐標爲 (x, y),則其至矩形兩相對頂點 A, C 之距離之平方和爲

$$(x^2+y^2)+(x-a)^2+(y-b)^2.$$

(x, y) 至 B, D 之距離之平方和爲

$$(x-a)^2+y^2+x^2+(y-b)^2.$$

故相等.

22. 試用解析法證明自平行四邊形一頂點至一對邊中點之線與其相對之對角線交於一點，而此點分各線成 1 : 2 之比.

設平行四邊形之三頂點爲 $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(b, c)$,則第四頂點必爲 $D(b+a, c)$ 或 $D_1(b-a, c)$ 或 $D_2(a-b, -c)$.

設第四頂點爲 $D(b+a, c)$, 則與 $(0, 0)$ 相對.

CD 之中點 E 爲$\left(\frac{a+2b}{2}, c\right)$.

分 AE 爲 2 : 1 之點爲

$$x=\frac{0+2\cdot\frac{a+2b}{2}}{1+2}=\frac{a+2b}{3},\quad y=\frac{0+2c}{3}=\frac{2c}{3}.$$

分對角線 BC 爲 2:1 之點爲

$$x=\frac{a+2b}{3},\qquad y=\frac{0+2c}{3}=\frac{2c}{3}.$$

兩點相合卽互分爲兩段各爲 2 與 1 之比。
設第四項點爲 D_1 或 D_2 亦可如法證之。

原本第 19—20 頁習題

1. 求過下列諸點各線之斜率:

(a) (4, 5), (7, 8).

$$m=\frac{5-8}{4-7}=1.$$

(b) (4, 7), (−3, −5).

$$m=\frac{7+5}{4+3}=\frac{12}{7}.$$

(c) (2.5, 3.4), (−3, 5.2).

$$m=\frac{3.4-5.2}{2.5+3}=-\frac{18}{55}.$$

(d) (a, b), $(c, -d)$.

$$m=\frac{b+d}{a-c}.$$

(e) (−3, −7), (−5, 4).

$$m=\frac{-7-4}{-3+5}=-\frac{11}{2}.$$

(f) (3, 3), (5, 5).

$$m=1.$$

2. 求過下列諸點各線之傾角:

(a) (2, −2), (4, 2).

$$m=\frac{-2-2}{2-4}=2,\qquad \alpha=63°26'.$$

(b) (1, 1), (5, −5).

$$m=\frac{-5-1}{5-1}=-1.5,\qquad \alpha=123°41'.$$

(c) (5, 8), (3, −4).

$$m=\frac{8+4}{5-3}=6,\qquad \alpha=80°33'.$$

(*d*) (4, 8), (−2, −2).

$$m=\frac{8+2}{4+2}=\frac{5}{3}=1.6,\quad \alpha=59°2'.$$

(*e*) (2, 3), (−6, 7).

$$m=\frac{3-7}{2+6}=-\frac{1}{2},\qquad \alpha=153°26'.$$

3. 與 x 軸平行之任何直線，其斜率與傾角爲何？與 y 軸平行者？

平行於 x 軸斜率爲 0，斜度爲 0°.

平行於 y 軸斜率爲 ∞，斜度爲 90°.

4. 一線垂直於過下列已知點之直線，求此線之斜率與傾角：

(*a*) (1, 2), (−1, 3).

$$m=\frac{2-3}{1+1}=-\frac{1}{2}.\qquad 故\ m'=2,\qquad \alpha=63°26'.$$

(*b*) (5, −2), (5, 4).

$$m=\frac{-2-4}{5-5}=\infty.\qquad 故\ m'=0,\qquad \alpha=0°.$$

(*c*) (3, 7), (−2, 7).

$$m=\frac{7-7}{3+2}=0.\qquad 故\ m'=\infty,\qquad \alpha=90°.$$

(*d*) (5, 4), (4, 7).

$$m=\frac{7-4}{4-5}=-3.\qquad 故\ m'=\frac{1}{3},\qquad \alpha=18°26'.$$

5. 具下列頂點之三角形，試用其斜率以決定何者爲直角三角形：

(*a*) (−2, 9), (10, −7), (12, −5).

$$m_1=\frac{9+7}{-2-10}=-\frac{4}{3},\quad m_2=\frac{-7+5}{10-12}=1,\quad m_3=\frac{9+5}{-2-12}=-1$$

m_2 與 m_3 互爲負倒數，故爲直角，即三角形爲直角三角形。

(*b*) (2, 1), (3, −2), (−4, −1).

$$m_1=-3,\qquad m_2=\frac{1}{7},\qquad m_3=\frac{1}{3}.$$

m_1 與 m_3 互爲負倒數，故亦爲直角三角形。

(*c*) (0, −1), (3, −4), (2, 1).

(d) $(6, 11), (-4, -9), (11, -4)$.

(c), (d) 解法同，若無兩斜率互爲負倒數者，即非直角三角形。

6. 下列何組中之三點在一直線上？

(a) $(6, 6), (4, 7), (2, 8)$.

一二兩點聯線之斜率爲 $m=-\frac{1}{2}$.

一三兩點聯線之斜率爲 $m=-\frac{1}{2}$.

二線斜率相同，同經過 $(6, 6)$，故相合，即三點在一直線上。

(b) $(1, 5), (0, 2), (2, 8)$.

$$m_1=3, \qquad m_2=3.$$

故亦在一直線上。

(c) $(3, -2), (5, 1), (10, 0)$.

(d) $(13, -2), (5, 5), (-7, 6)$.

(e) $(a, b+c), (b, c+a), (c, a+b)$.

(c), (d), (e) 方法相同，即任取二點求其斜率，又另取二點亦求其斜率，若相等，則在一直線上；不等則否。

7. 求下列各三角形之角：

(a) $(0, 1)$ $(3, 4), (2, -1)$.

$$m_1=1, \qquad m_2=5, \qquad m_3=-1.$$

m_1 與 m_3 互爲負倒數，故一角爲直角。

$$\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{-4}{1+5}=-\frac{2}{3}, \qquad \alpha_1=146°20'.$$

已有一角爲直角，故不能再有鈍角，故 $146°20'$ 當爲外角，即內角爲 $33°40'$.

$$\frac{m_2-m_3}{1+m_2m_3}=\frac{6}{-4}=-\frac{3}{2}, \qquad \alpha_1=56°20'.$$

三角之和 $=90°+33°40'+56°20'=180°$.

(b) $(7, -4), (1, 3), (-5, -7)$.

(c) $(6, -6), (5, 2), (2, 2)$.

(d) $(0, -2), (4, 2), (0, 6)$.

(b), (c), (d) 仿此。

8. 試證下列各組中諸點爲一平行四邊形之頂點：

(a) $A(2, 3), B(4, 1), C(8, 2), D(6, 4)$.

AB 之斜率爲 $\dfrac{3-1}{2-4}=-1$.

CD 之斜率爲 $\dfrac{2-4}{8-6}=-1$, 故 $AB \parallel CD$.

AD 之斜率爲 $\dfrac{3-4}{2-6}=\dfrac{1}{4}$.

BC 之斜率爲 $\dfrac{1-2}{4-8}=\dfrac{1}{4}$, 故 $AD \parallel BC$.

兩雙對邊兩兩平行,故爲平行四邊形.

(b) $A(-4, -2)$, $B(2, 0)$, $C(8, 6)$, $D(2, 4)$.

AB 之斜率爲 $\dfrac{-2}{-6}=\dfrac{1}{3}$.

CD 之斜率爲 $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$, 故 $AB \parallel CD$.

AD 之斜率爲 $\dfrac{-6}{-6}=1$.

BC 之斜率爲 $\dfrac{6}{6}=1$, 故 $AD \parallel BC$.

故亦爲平行四邊形.

9. 用解析法證明:

(a) 任意正方形之對角線互相垂直.

設 $(0, 0)$, $(0, a)$, $(a, 0)$ 及 (a, a) 爲正方形之四頂點,則二對角線之斜率爲 $\dfrac{a}{a}=1$ 及 $\dfrac{-a}{a}=-1$, 故垂直.

(b) 設一矩形之對角線互相垂直,則此矩形必爲一正方形.

設矩形之四頂點爲 $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$ 及 (a, b).

兩對角線之斜率爲 $\dfrac{b-0}{a-0}=\dfrac{b}{a}$ 及 $\dfrac{b-0}{0-a}=-\dfrac{b}{a}$.

若對角線互相垂直,則互爲負倒數,即 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}$.

即 $a^2=b^2$, 即 $a=b$.

故爲正方形.

(c) 菱形之對角線,互相垂直平分.

設菱形之四頂點爲 $(0, 0)$, $(a, 0)$, (b, c) 及 $(a+b, c)$, 其中 $b^2+c^2=a^2$.

菱形爲平行四邊形之一種,前已證其對角線互相二等分

兩對角線之斜率爲

$$m_1=\frac{c-0}{a+b}=\frac{c}{a+b},$$

$$m_2=\frac{c-0}{b-a}=\frac{c}{b-a}.$$

但 $b^2+c^2=a^2$, 故 $c^2=a^2-b^2$, 即 $c=\sqrt{a^2-b^2}$.
代入得

$$m_1=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}},$$

$$m_2=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b-a}=-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b}=-\sqrt{\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}}=-\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}.$$

m_1 與 m_2 互爲負倒數，故互相垂直．

原 本 第 24 頁 習 題

1. 求三角形之面積，其頂點如下：

(a) (2, 3), (5, 7), (4, −2).

2,	3	每一橫坐標乘以下一列之縱坐標而相加，得
5,	7	$2\times7+5\times(-2)+4\times3=16.$
4,	−2	每一縱坐標乘以下一列之橫坐標而相加，得
2,	3	$3\times5+7\times4+(-2)\times2=-39.$

$$面積=\frac{16-39}{2}=-11.5.$$

(b) (1, 3), (−5, −2), (7, 1).

1,	3	$1\times(-2)+(-5)\times1+7\times3=14.$
−5,	−2	$3\times(-5)+(-2)\times7+1\times1=-28.$
7,	1	$面積=\dfrac{14+28}{2}=21.$
1,	3	

(c) (5, 5), (−6, 7), (−7, −2).

5,	5	$5\times7+(-6)\times(-2)+(-7)\times5=12.$
−6,	7	$5\times(-6)+7\times(-7)+(-2)\times5=-89.$
−7,	−2	$面積=\dfrac{12+89}{2}=50.5.$
5,	5	

(d) (3, 3), (6, 2), (8, −2).

$$\begin{array}{rr} 3, & 3\\ 6, & 2\\ 8, & -2\\ 3, & 3\end{array}$$

$3\times 2+6\times(-2)+8\times 3=18.$

$3\times 6+2\times 8+(-2)\times 3=28.$

$$面積=\frac{18-28}{2}=-5.$$

(*e*) $(-6, 7)$, $(-7, -2)$, $(2, -4)$.

$$\begin{array}{rr} -6, & 7\\ -7, & -2\\ 2, & -4\\ -6, & 7\end{array}$$

$(-6)\times(-2)+(-7)\times(-4)+2\times 7=54.$

$7\times(-7)+(-2)\times 2+(-4)\times(-6)=-29.$

$$面積=\frac{54+29}{2}=41.5.$$

(*f*) $(a, 2)$, $(0, c)$, $(b, 2)$.

$$\begin{array}{rr} a, & 2\\ 0, & c\\ b, & 2\\ a, & 2\end{array}$$

$$面積=\frac{ac+2b-(bc+2a)}{2}=\frac{ac+2b-bc-2a}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(b-a)(2-c).$$

(*g*) $(3, 0)$, $(0, 3\sqrt{3})$, $(6, 3\sqrt{3})$.

$$\begin{array}{rr} 3, & 0\\ 0, & 3\sqrt{3}\\ 6, & 3\sqrt{3}\\ 3, & 0\end{array}$$

$$面積=\frac{9\sqrt{3}-(18\sqrt{3}+9\sqrt{3})}{2}=-9\sqrt{3}.$$

2. 求四邊形之面積，其頂點如下：

(*a*) $(2, -1)$, $(5, 6)$, $(3, 8)$, $(-4, 4)$.

$$\begin{array}{rr} 2, & -1\\ 5, & 6\\ 3, & 8\\ -4, & 4\\ 2, & -1\end{array}$$

$2\times 6+5\times 8+3\times 4+(-4)\times(-1)=68.$

$(-1)\times 5+6\times 3+8\times(-4)+4\times 2=-11.$

$$面積=\frac{68+11}{2}=39.5.$$

(*b*) $(0, 2)$, $(7, 1)$, $(12, 4)$, $(5, 5)$.

$$\begin{array}{rr} 0, & 2\\ 7, & 1\\ 12, & 4\\ 5, & 5\\ 0, & 2\end{array}$$

$0\times 1+7\times 4+12\times 5+5\times 2=98.$

$2\times 7+1\times 12+4\times 5+5\times 0=46.$

$$面積=\frac{98-46}{2}=26.$$

(*c*) $(-2, 3)$, $(-3, -4)$, $(5, -1)$, $(2, 2)$.

$$\begin{array}{rr} -2, & 3\\ -3, & -4\\ 5, & -1\\ 2, & 2\\ -2, & 3\end{array}$$

$$面積=\frac{8+3+10+6-(-9-20-2-4)}{2}$$

$$=\frac{27+35}{2}=31.$$

(*d*) (0, 0), (5, 0), (9, 11), (0, 3).

$$\begin{array}{rr} 0, & 0 \\ 5, & 0 \\ 9, & 11 \\ 0, & 3 \\ 0, & 0 \end{array} \qquad 面積=\frac{55+27}{2}=41.$$

(*e*) (7, 0), (10, 8), (0, 5), (0, 0).

$$\begin{array}{rr} 7, & 0 \\ 10, & 8 \\ 0, & 5 \\ 0, & 0 \\ 7, & 0 \end{array} \qquad 面積=\frac{56+50}{2}=53.$$

3. 試證連接題 2 中任一四邊形相鄰二邊中點所成之四邊形，其面積爲原四邊形面積之半.

(*a*) 四邊之中點爲 $\left(\frac{2+5}{2}, \frac{-1+6}{2}\right)$, $\left(\frac{5+3}{2}, \frac{6+8}{2}\right)$, $\left(\frac{3-4}{2}, \frac{8+4}{2}\right)$, $\left(\frac{2-4}{2}, \frac{-1+4}{2}\right)$ 卽 $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$, (4, 7), $\left(-\frac{1}{2}, 6\right)$, $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$.

$$\begin{array}{rr} \frac{7}{2}, & \frac{5}{2} \\ 4, & 7 \\ -\frac{1}{2}, & 6 \\ -1, & \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2}, & \frac{5}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \frac{49}{2}+24-\frac{3}{4}-\frac{5}{2}=\frac{181}{4}. \\ 10-\frac{7}{2}-6+\frac{21}{4}=\frac{23}{4}. \\ 面積=\frac{1}{2}\left(\frac{181}{4}-\frac{23}{4}\right)=19.75. \\ 故等於原四邊形\ 39.5\ 之半. \end{array}$$

(*b*) 四邊之中點爲 $\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{19}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{17}{2}, \frac{9}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

$$\begin{array}{rr} \frac{7}{2}, & \frac{3}{2} \\ \frac{19}{2}, & \frac{5}{2} \\ \frac{17}{2}, & \frac{9}{2} \\ \frac{5}{2}, & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2}, & \frac{3}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \frac{35}{4}+\frac{171}{4}+\frac{119}{4}+\frac{15}{4}=\frac{340}{4}=85. \\ \frac{57}{4}+\frac{85}{4}+\frac{45}{4}+\frac{49}{4}=\frac{236}{4}=59. \\ 面積=\frac{85-59}{2}=13 \end{array}$$

(c), (d), (e) 倣此.

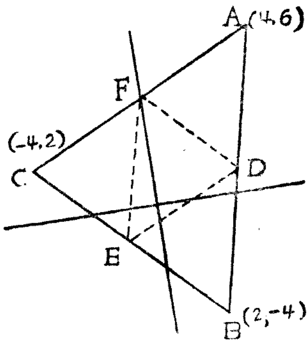
4. 三角形之頂點為 $(4,6)$, $(2,-4)$, $(-4,2)$. 試證其各邊中點之連線分原三角形為四個面積相等之三角形.

設其頂點為 $A(4,6)$, $B(2,-4)$, $C(-4,2)$, 則

AB 中點 D 之坐標為 $(3,1)$,

BC 中點 E 之坐標為 $(-1,-1)$,

AC 中點 F 之坐標為 $(0,4)$.



$$\begin{array}{rr} 4, & 6 \\ 3, & 1 \\ 0, & 4 \\ 4, & 6 \end{array} \qquad \triangle ADF=\frac{4+12-(18+16)}{2}=-9.$$

$$\begin{array}{rr} 3, & 1 \\ 2, & -4 \\ -1, & -1 \\ 3, & 1 \end{array} \qquad \triangle DBE=\frac{-12-2-1-(2+4-3)}{2}=-9.$$

$$\begin{array}{rrrr} 3, & -1, & 0, & 3 \\ 1, & -1, & 4, & 1 \end{array} \qquad \triangle DEF=\frac{-3-4-(-1+12)}{2}=-9.$$

$$\begin{array}{rrrr} -1, & -4, & 0, & -1 \\ -1, & 2, & 4, & -1 \end{array} \qquad \triangle ECF=\frac{-2-16-(4-4)}{2}=-9.$$

5. 若一三角形之頂點為已知, 其面積為零, 則諸頂點必在一直線上. 試用此理以證下列各組中諸點均在一直線上:

(a) $(-2,-4)$, $(10,2)$, $(4,-1)$.

$$\begin{array}{rrrr} -2, & 10, & 4, & -2 \\ -4, & 2, & -1, & -4 \end{array} \qquad 面積=\frac{-4-10-16-(-40+8+2)}{2}=0.$$

(b)　$(-3, 10), (7, -10), (5, -6)$.

$$\begin{matrix} -3, & 7, & 5, & -3 \\ 10, & -10, & -6, & 10 \end{matrix} \qquad 面積=\frac{30-42+50-(70-50+18)}{2}=0.$$

(c)　$(\frac{1}{2}, 0), (2\frac{1}{2}, 3), (4, 5)$.

(d)　$(2, -3), (14, 6), (6, 0)$.

(c), (d) 仿此.

(e)　$(a, b+c), (b, c+a), (c, a+b)$.

$$\begin{matrix} a, & b, & c, & a \\ b+c, & c+a, & a+b, & b+c \end{matrix}$$

$$面積=\frac{ac+a^2+ab+b^2+bc+c^2-(b^2+bc+c^2+ac+a^2+ab)}{2}$$

$$=0.$$

(f)　$(a, c+a), (-c, 0), (-a, c-a)$.

仿此.

6.　將題 5 中諸數寫成行列式以驗其值為零.

(a)　$面積=\begin{vmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0.$

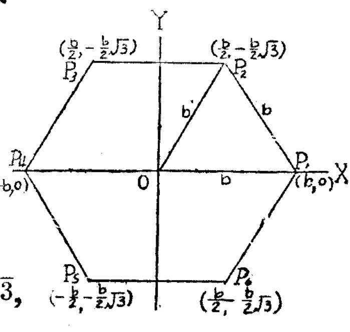
(b)　$面積=\begin{vmatrix} -3 & 10 & 1 \\ 7 & -10 & 1 \\ 5 & -6 & 1 \end{vmatrix}$　以 3 乘 3 列加於 1 列，以 10 乘 3 列自 2 列減去，更以所得之式中 1 列之二倍加於 2 列，則 2 列全為 0 即該行列式 $=0$.

(c), (d) 仿此.

(e)　$面積=\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix}$　以 1 列加於 2 列，提出公因子 $(a+b+c)$，則 2, 3 兩列相同即行列式 $=0$.

(f) 仿此.

7.　一正六邊形之邊長為 b，中心在原點上，而其一對角線在 x 軸上，試用坐標法以求其面積，並求其所含諸三角形之面積以驗算之.



邊長為 b，故除在 x 軸上之二點外其餘四頂點之橫坐標為 $x=\pm\frac{b}{2}$，而縱坐標為 $y=\pm\sqrt{b^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}=\pm\frac{b}{2}\sqrt{3}$，

故各頂點爲 $(b, 0)$, $\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\sqrt{3}\right)$, $\left(-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\sqrt{3}\right)$ $(-b, 0)$, $\left(-\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}\sqrt{3}\right)$, $\left(\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}\sqrt{3}\right)$.

正六邊形之面積 $=\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{2}\sqrt{3}+\frac{b^2}{4}\sqrt{3}-0+\frac{b^2}{2}\sqrt{3}+\frac{b^2}{4}\sqrt{3}+0\right)-\frac{1}{2}\left(0-\frac{b}{4}\sqrt{3}-\frac{b^2}{2}\sqrt{3}-0-\frac{b^2}{4}\sqrt{3}-\frac{b^2}{2}\sqrt{3}\right)=\frac{3b^2}{4}\sqrt{3}+\frac{3b^2}{4}\sqrt{3}$
$=\frac{3}{2}b^2\sqrt{3}.$

正六邊形可分爲六個相等之正三角形,每個之面積 $=\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{2}\sqrt{3}-0\right)=\frac{b^2}{4}\sqrt{3}$, 故六個三角形之總面積 $=6\times\frac{b^2}{4}\sqrt{3}=\frac{3b^2}{2}\sqrt{3}.$

第三章　曲線及方程式

原本第 26—28 頁習題

1.　求一直線之方程式,此線平行於 y 軸,且

(a)　在其左 6 單位距離處.

平行於 y 軸之直線爲 $x=k$, 在右則 k 爲正,左則 k 爲負, 故 (a) 之直線方程式爲 $x=-6$.

(b)　在其右 3 單位距離處.

$$x=3.$$

(c)　在點 $(3, 3)$ 之左 4 單位距離處.

在點 $(3, 3)$ 之左 4 單位卽爲在 y 軸之左 1 單位距離處, 故其方程式爲　　$x=-1.$

(d)　在點 $(-2, 2)$ 之右 5 單位距離處.

卽在 y 軸之右 3 單位距離,故其方程式爲　$x=3.$

2.　求一直線之方程式,此線平行於 x 軸,且

(a)　在其上 5 單位距離處.

平行於 x 軸之直線方程式爲 $y=k$, 在其上則 k 爲正, 下則爲負,故 (a) 之直線方程式爲　　$y=5.$

(b) 在其下 3 單位距離處。

$$y=-3.$$

(c) 在點 $(3,-4)$ 之下 5 單位距離處。

即在 x 軸下 9 單位。

$$y=-9.$$

(d) 在點 $(-6,4)$ 之上 7 單位距離處。

$$y=4+7=11.$$

3. x 軸之方程式為何? y 軸?

$$x=0,\ y=0.$$

4. 具下列條件之直線之方程式為何? 此直線平行於直線 $x=5$, 且

(a) 在其左 4 單位處。

因 $x=5$ 之直線平行於 y 軸，故所求之線亦平行於 y 軸，在 $x=5$ 之左故應減，即

$$x=5-4 \text{ 或 } x=1.$$

(b) 在其左 7 單位處。

$$x=5-7 \text{ 或 } x=-2.$$

(c) 在其右 3 單位處。

$$x=5+3 \text{ 或 } x=8.$$

5. 求一直線之方程式，此線垂直於 $y=3$, 且 (1) 在 $(6,2)$ 之左 2 單位處；(2) 在 $(-6,1)$ 之右 4 單位處。

(1) 垂直於 $y=3$ 即 $\perp$ 於 x 軸亦即 $\parallel$ y 軸，其方程式當為 $x=k$, 此處 k 當為 $6-2=4$.

(2) k 當為 -2.

6. 一點之軌跡之方程式為何? 若此點移動時 (1) 與直線 $y=-2$ 及 $y=8$ 等距；(2) 與直線 $x=2$ 及 $x=6$ 等距。

(1) $y=-2$, $y=8$ 為平行於 x 軸之兩線，線上各點之縱坐標均各為 -2 與 8, 與此二線等距之點其縱坐標必為 $y=\dfrac{-2+8}{2}=3$, 故其軌跡為 $y=3$.

(2) 仿此。

7. (1) 若邊長 a 之正方形，其中心在原點上而一邊垂直於一坐標軸，則各邊之方程式為何? (2) 若邊長 a 之正方形，其一頂點在原點上而一邊在正 y 軸上，則各邊之方程式為何?(兩種情形)

(1)　邊長爲 a 中心在原點，則每邊離原點均爲 $\frac{1}{2}a$，故四邊之方程式當爲 $x=\pm\frac{a}{2}$, $y=\pm\frac{a}{2}$.

(2)　一頂點在原點上而一邊在正 y 軸上，則第二邊必在正 x 軸上或負 x 軸上。設在正 x 軸上，則第三，四邊在 x 軸之上 y 軸之右，故四邊之方程式當爲 $x=0$, $y=0$, $x=a$, $y=a$. 設第二邊在負 x 軸上，則第三，四邊在 x 軸之上而 y 軸之左，則四邊之方程式爲?

8.　求具下列條件之直線之方程式：

(a)　過 $(3, 4)$ 而斜率爲 2.

設 (x_1, y_1) 爲直線上之任意一點，此線又經過 $(3, 4)$ 點，則其斜率爲 $\frac{y_1-4}{x_1-3}$，已知斜率爲 2，故得

$$\frac{y_1-4}{x_1-3}=2.$$

即　$$y_1-4=2x_1-6.$$

即　$$2x_1-y_1=2.$$

但 (x_1, y_1) 爲直線上之任意一點，故在直線上之任意一點均合於此條件，故得直線之方程式爲

$$2x-y=2.$$

(b)　過 $(-3, 5)$ 而斜率爲 3.

仿此，得　$$3x-y+14=0.$$

(c)　過 $(0, 5)$ 而斜率爲 $\frac{2}{3}$.

$$2x-3y+15=0.$$

(d)　過 (a, b) 而斜率爲 $-\frac{1}{4}$.

$$x+4y-a-4b=0.$$

9.　求具下列條件之直線之方程式：

(a)　過 $(0, 3)$ 而傾角爲 $45°$.

依題 8 (a) 法，得斜率爲 $\frac{y-3}{x-0}$，傾角爲 $45°$.

即斜率爲　$$m=\tan 45°=1.$$

故得　$$\frac{y-3}{x-0}=1.$$

即 $$x-y+3=0.$$

(*b*) 過 $(-4,-2)$ 而傾角為 $30°$.

$$\frac{y+2}{x+4}=\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$x-\sqrt{3}y+4-2\sqrt{3}=0.$$

(*c*) 過 $(-a, b)$ 而傾角為 $135°$.

依 (*a*), 得 $$x+y+a-b=0.$$

(*d*) 過 $(2, 3)$ 而傾角為 $120°$.

$$\sqrt{3}x+y-3-2\sqrt{3}=0.$$

(*e*) 過 $(-4, 5)$ 而傾角為 $150°$.

$$x+\sqrt{3}y+4-5\sqrt{3}=0.$$

(*f*) 過 $(-1,-3)$ 而傾角為 $90°$.

$$\frac{y+3}{x+1}=\tan 90°=\infty.$$

在此式中必需 $x+1=0$, 合式之值方為 ∞, 故 $x+1=0$ 即為所求之方程式.

10. 求過下列諸點之直線方程式:

(*a*) $(4, 5)$ 與 $(0, 0)$.

設 (x_1, y_1) 為所求直線上任意一點, 此線又經過 $(4, 5)$ 點, 故其斜率為 $\dfrac{y_1-5}{x_1-4}$, 但此線又經 $(0, 0)$, 故其斜率亦為 $\dfrac{5-0}{4-0}=\dfrac{5}{4}$, 二者應相等, 故得
$$\frac{y_1-5}{x_1-4}=\frac{5}{4}.$$
$$5x_1-4y_1=0.$$

但 (x_1, y_1) 為直線上任意一點, 則直線上任意點均合此條件, 故直線之方程式為
$$5x-4y=0.$$

(*b*) $(0,-3)$ 與 $(5, 2)$.

依 (*a*), 得二斜率為 $\dfrac{y+3}{x}=\dfrac{y-2}{x-5}$ 或 $\dfrac{y+3}{x}=\dfrac{-3-2}{0-5}.$

化簡, 得 $$x-y-3=0.$$

(*c*) $(-1, 6)$ 與 $(6, 2)$.

同法, 得 $$4x+7y-38=0.$$

(*d*) $(-4, 8)$ 與 $(7, 8)$.

$$11y-84=0.$$

(*e*) $(2, 2)$ 與 $(-4, -4)$.

$$x=y.$$

(*f*) $(1, -5)$ 與 $(-3, 1)$.

$$3x+2y+7=0.$$

11. 一點之軌跡之方程式為何? 此點常:

(*a*) 距 $(0, 2)$ 4 單位.

設此點為 (x_1, y_1) 則此點與 $(0, 3)$ 之距離為

$$d=\sqrt{(x_1-0)^2+(y_1-3)^2}.\quad 已知距離為\ d=4.$$

即
$$\sqrt{(x_1-0)^2+(y_1-3)^2}=4.$$
$$x_1^2+y_1^2-6y_1+9=16.$$
$$x_1^2+y_1^2-6y_1-7=0.$$

當 (x_1, y_1) 移動時,其坐標均當合此條件,故其軌跡之方程式為

$$x^2+y^2-6y-7=0.$$

(*b*) 距原點 6 單位.

$$d=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=6.$$
$$x^2+y^2=36.$$

(c) 距 $(3, 2)$ 5 單位.

$$x^2+y^2-6x-4y-12=0.$$

(*d*) 距 $(a+c, a-c)$ c 單位.

$$x^2+y^2-2(a+c)x-(a-c)y+a^2+2c^2=0.$$

12 求以下諸圓之方程式:

(*a*) 圓心 $(6, -5)$ 而半徑 4.

設 (x_1, y_1) 為圓上任意一點,則其離圓心 $(6, -5)$ 之距離為 $d=\sqrt{(x-6)^2+(y+5)^2}$, 但此距離應等於半徑 4, 故得

$$\sqrt{(x-6)^2+(y+5)^2}=4.$$
$$(x-6)^2+(y+5)^2=16.$$
$$x^2-12x+36+y^2+10y+25=16.$$
$$x^2+y^2-12x+10y+45=0.$$

(*b* 圓心 $(3, 4)$ 而半徑 5.

依 (*a*), 得
$$x^2+y^2-6x-8y=0.$$

(*c*) 圓心 $(-a, 2a)$ 而半徑 $3a$.

$$x^2+y^2+2ax-4ay-4a^2=0.$$

13. 求與下列諸點等距之點之軌跡之方程式:

(a) $(-3,-3)$ 與 $(2,4)$.

設 (x_1,y_1) 爲所求軌跡上任意一點,則其離二定點之距離各爲

$$d_1=\sqrt{(x_1+3)^2+(y_1+3)^2},$$

$$d_2=\sqrt{(x_1-2)^2+(y_1-4)^2}.$$

但 $d_1=d_2$, 故 $\sqrt{(x_1+3)^2+(y_1+3)^2}=\sqrt{(x_1-2)^2+(y_1-4)^2}$.

$x_1^2+6x_1+9+y_1^2+6y_1+9=x_1^2-4x_1+4+y_1^2-8y_1+16.$

$$10x_1+14y_1=2.$$

$$5x_1+7y_1=1.$$

但 (x_1,y_1) 爲所求軌跡上任意一點,即在軌跡上之任意點均合此條件,故其軌跡爲 $5x+7y=1.$

(b) $(-4,3)$ 與 $(3,2)$.

依 (a),得 $\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$.

$$x^2+8x+16+y^2-6y+9=x^2-6x+9+y^2-4y+4.$$

$$7x-y+6=0.$$

(c) $(0,4)$ 與 $(5,0)$.

$$10x-8y-9=0.$$

(d) (a,b) 與 $(-a,-b)$.

$$ax+by=0.$$

14. 用解析法證明題 13 所得之直線各爲連二已知點之線段之垂直平分線.

(a) 過 $(-3,-3)$ 與 $(2,4)$ 二點之直線之斜率爲

$$m=\frac{4+3}{2+3}=\frac{7}{5}.$$

與此線垂直之線之斜率當爲

$$m'=-\frac{5}{7}.$$

正與題 13 (a) 所得 $5x+7y=1$ 之斜率相合.

又 $(-3,-3)$ 與 $(2,4)$ 之中點爲

$$x=\frac{-3+2}{2}=-\frac{1}{2},\quad y=\frac{-3+4}{2}=\frac{1}{2}.$$

此點 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$合於 $5x+7y=1$ 之直線方程式,故 $5x+7y=1$

經過其中點$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,且垂直於其聯線,故爲垂直平分線。

(b) 過$(-4, 3)$與$(3, 2)$二點之直線之斜率爲

$$m=\frac{3-2}{-4-3}=-\frac{1}{7}.$$

與此線垂直之直線之斜率爲

$$m'=7.$$

$(-4, 3)$與$(3, 2)$之中點爲$\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

經過此點而斜率爲 7 之直線即聯$(-4, 3)$與$(3, 2)$之垂直平分線爲

$$\frac{y-\frac{5}{2}}{x+\frac{1}{2}}=7.$$

$$7x-y+6=0.$$

與題 13 (b) 所正相同。

(c), (d) 仿 (a) 或 (b) 法。

15. 求以連接$(5, 6)$與$(3, -4)$之線段爲直徑之圓之方程式。

所求圓之圓心爲$(5, 6)$與$(3, -4)$之中點而半徑爲此點與$(5, 6)$或$(3, -4)$之距離,此二者均可求得,然後依題 12 法求圓之方程式,得

$$x^2+y^2-8x-2y-9=0.$$

16. 求以$(-3, 4)$爲圓心而經過原點之圓之方程式。

原點在圓上,卽半徑等於原點與圓心$(-3, 4)$之距離等於$\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$,依題 12 法求方程式,得

$$(x+3)^2+(y-4)^2=25.$$

原本第 31 頁習題

1. 作下列各方程式之軌跡:

(a) $2y+5=0$.

$y=-\frac{5}{2}$,卽爲平行於 x 軸而在 x 軸下 $\frac{5}{2}$ 單位處之直線。

(b) $x+y=0$.

$x=-y$,卽平分二,四兩象限之直線。

(c) $x-3y+5=0$.

設
$$x=0,\quad y=\frac{5}{3};$$
$$y=0,\quad x=-5.$$

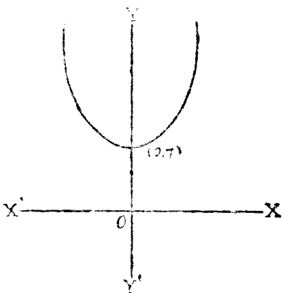
聯 $\left(0,\ \frac{5}{3}\right)$ 及 $(-5,0)$ 之直線即爲所求。

(*d*) $y=2x+3.$

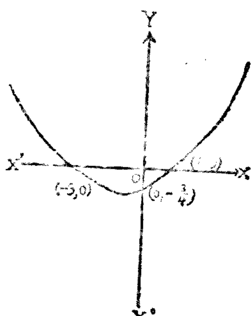
同 (*c*)

(*e*) $y=4x^2+7.$

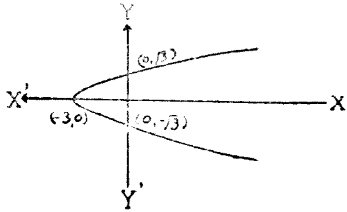
以下諸題均需以 x 或 y 任意假設若干數值，而算出 y 或 x 之相當值，每組 $(x,\ y)$ 之值即爲在此軌跡上之一點，將此若干點精細作於方格紙上，然後聯結此若干點使成一光整之軌跡。下列諸圖不過示其大概，學者須按教本例題所示，計算各相當值，並以方格紙精密作出諸點，然後以聯諸點爲一光整之曲線。



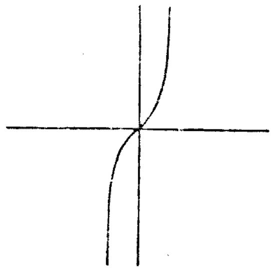
(*f*) $x^2-4y+2x-3=0.$



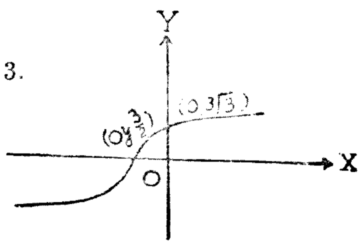
(g) $y^2 = x + 3$.



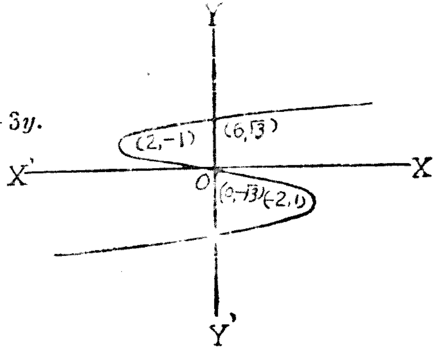
(h) $y = x^3$.



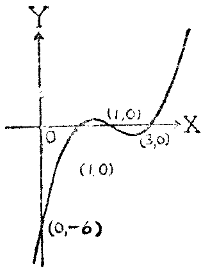
(i) $2x = y^3 - 3$.



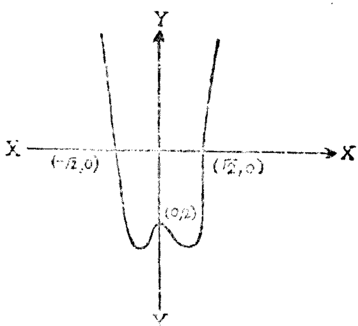
(j) $x = y^3 - 3y$.



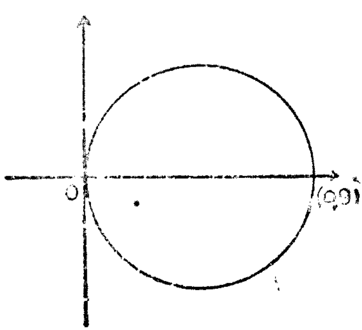
(k) $y=x^3-6x^2+11x-6.$



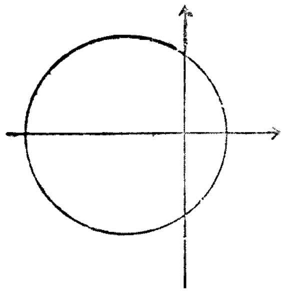
(l) $y=x^4-x^2-2.$



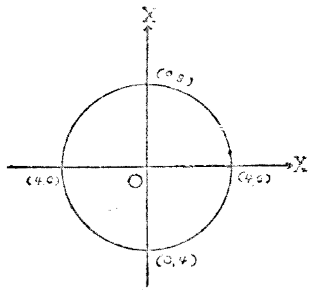
(m) $x^2+y^2-9x=0.$



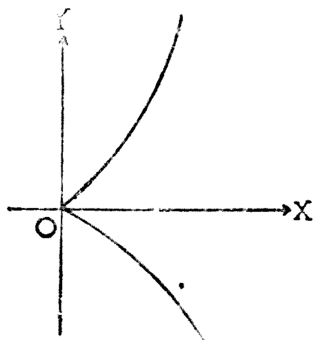
(n) $x^2+y^2+6y+16=0.$



(o) $x^2+y^2=16.$



(p) $3y^2=x^3$

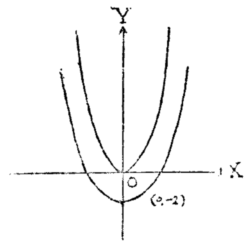


2. 用同一組坐標軸,作 $2x-3y-4=0$ 與 $3x+2y+2=0$ 之圖形,並求其交點之坐標。此交點之坐標,用代數學方法如何求得之?

先作此兩線，並估計其交點之坐標．兩線之交點 $P(x_1, y_1)$ 旣在第一線上，亦在第二線上，故必同時適合於兩方程式之 x, y，故代數方法卽將兩式聯立而解之，得 x, y 之值卽爲交點之坐標．

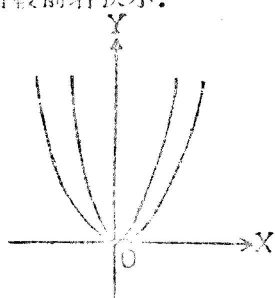
3. 用同一組坐標軸，作 $2y=x^2$ 與 $2y=x^2-4$ 之軌跡．二圖形有何不同？

由第一式，得 $y=\dfrac{x^2}{2}$；由第二式，得 $y=\dfrac{x^2}{2}-2$．依法作圖，得此兩圖，前者經過原點，後者不經原點而經過 $(0, -2)$，兩圖形狀完全相同，每一相同之 x 之值，其 y 之值後者較前者小 2．故後者在前者之下 2 單位．



4. 用同一組坐標軸，作 $y=x^2$ 與 $y=4x^2$ 之圖形．二者有何不同？

依法作圖，得後者較前者狹小．



5. 題 1 中諸曲線，何者過原點？一代數方程式代表一過原點之曲線，其必要條件爲何？

(b), (h), (p) 通過原點．

代數式之常數項爲 0 者，其曲線必通過原點．

6. 證明 $Ay^2+By+C=0$ 之軌跡爲一線或二線平行於 x 軸，全視 $\Delta=B^2-4AC$ 之爲零或爲正而定．設 $\Delta<0$，則其軌跡爲何？

$$Ay^2+By+C=0.$$

以公式解之，得 $y=\dfrac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$.

設 $\Delta=0$, 則 $y=-\frac{B}{2A}$, 故為平行於 x 軸之一直線。

設 $\Delta>0$, 則 y 有兩值，故為兩線。

設 $\Delta<0$, 則 y 之值為虛數，即無軌跡。

7.　證明 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=0$ 為一對相交直線，或為一直線或一點，全視 $\Delta=B^2-4AC$ 之為正，為零或為負而定。

$$Ax^2+2bxy+Cy^2=0.$$

解 x, 得
$$x=\frac{-2By\pm\sqrt{4b^2y^2-4ACy^2}}{2A}$$
$$=\frac{-By\pm y\sqrt{B^2-AC}}{A}.$$

設 $\Delta=0$, 則 $x=\frac{-By}{A}$ 為一直線。

$\Delta>0$, 則為兩斜率不相等之兩直線，即相交之兩直線。

$\Delta<0$, 則 x 與 y 必需皆等於 0, 始能合此方程式，故為 $(0,0)$ 一點。

原本第37—39頁習題

1.　討論下列各方程式，並作其軌跡。所有討論須與圖形相符。

(a)　$y^2=4x.$

1.　截部　設 $x=0$, 則 $y=0$; 設 $y=0$, 則 $x=0$; 故在兩軸上之截部為 $(0,0)$.

2.　此方程不含 y 之奇次冪，即 y 之絕對值不變而符號自正變負時，x 之值不變，亦可謂 x 有一值時，y 有絕對值相等之正負兩值，故軌跡對稱於 x 軸。

3.　範圍　求 y.

$$y=\pm2\sqrt{x}.$$

x 為負時，y 為虛數，故 y 不能為負，即軌跡必在 x 軸之右。作圖之法與第31頁習題1相同。

(b)　$y=8-x^2.$

1.　截部　設 $x=0$, $y=8$, 在 y 軸上之截部為 8.

設 $y=0$, 則 $x=\pm\sqrt{2}$, 在 x 軸上之截部為 $\pm2\sqrt{2}$.

2.　對稱　此方程不含 x 之奇次冪，故對稱於 y 軸。

3. 範圍　$y=8-x^2$, x 爲任何數值，y 均有一相當值，故 x 之值無限制.

$x=\pm\sqrt{y-8}$, y 之值小於 8 時，x 爲虛數，y 之值不能小於 8.

依第 31 頁習題 1 法作圖驗之。下仿此。

(c)　$x=y^2-2y$.

1. 截部　$y=0$, 則 $x=0$, 故 x 軸上之截部爲 $(0, 0)$；$x=0$, 則 $y^2-2y=0$, 卽 $y=0$, 或 $y=2$, 故 y 軸上之截部爲 0 及 2.

2. 對稱　x, y, 均有奇次冪，故不對稱於兩軸。

3. 範圍　$x=y^2-2y$, y 爲任何值，x 均有一值，故 y 之值無限制.

$$y^2-2y-x=0.$$

$$y=\frac{2\pm\sqrt{4+4x}}{2}=1\pm\sqrt{1+x}.$$

若 $x<-1$ 時，則 y 爲虛數，故 x 不能小於 -1.

(d)　$3y=x^2-9$.

1. $y=0$, 則 $x=\pm 3$ 是爲 x 軸上之截部。

$x=0$, $y=-0$ 是爲 y 軸上之截部。

2. x 無奇次冪，故對稱於 y 軸.

3. y 之值無限 (何故？)

$$x=\pm\sqrt{3y+9}.$$

$3y+9<0$ 或 $y<-3$ 時，x 爲虛數，故 y 之值不能小於 -3.

(e)　$x^2+y^2=25$.

1. $y=0$, $x=\pm 5$ 爲 x 軸上之截部。

$x=0$, $y=\pm 5$ 爲 y 軸上之截部。

2. x, y 均無奇次冪，故對稱於二軸.

3. $y=\pm\sqrt{25-x^2}$.

$25-x^2<0$, 或 $x^2>25$ 卽 $x<-5$ 或 >5 時，y 之值爲虛數，故 x 之值必在 -5 與 5 之間。同樣 y 之值必在 -5 與 5 之間.

(f)　$x^2-y^2=25$.

1. $y=0$, 則 $x=\pm 5$ 爲 x 軸上之截部.

$x=0$, 則 $y^2=-25$, 故 y 軸上無截部。

2. x, y 均無奇次冪，故對稱於二軸.

3. $x=\pm\sqrt{25+y^2}$，故 y 爲任何值，x 不爲虛數，故 y 之值無限制。

$y=\pm\sqrt{x^2-25}$，故 x^2-25 不能小於 0，即 x^2 必須大於 25，即 x 不能大於 -5 或小於 5.

(g) $x^2+4y^2=24$.

1. $y=0$, $x=\pm2\sqrt{6}$ 爲 x 軸上之截部。
   $x=0$, $y=\pm\sqrt{6}$ 爲 y 軸上之截部。
2. x, y 均無奇次冪，故對稱於兩軸。
3. $y=\pm\dfrac{\sqrt{24-x^2}}{2}$，故 x^2 必須小於24，即 $-2\sqrt{6}<x<2\sqrt{6}$ 時，y 方不爲虛數。

$x=\pm\sqrt{24-4y^2}=\pm2\sqrt{6-y^2}$，故 y^2 不能大於 6，即 y 不能 $<-\sqrt{6}$ 或 $>\sqrt{6}$.

(h) $4x^2-y^2=-16$.

1. $y=0$, $x^2=-4$, $x=\pm\sqrt{-4}$ 爲虛數，故 x 軸上無截部。
2. $x=0$, $y^2=16$, $y=\pm4$, 故 y 軸上之截部 -4, 4.
3. $y=\pm\sqrt{4x^2+16}$, x 爲任何值，y 不爲虛數，故 y 之值無限制。

$x\pm\sqrt{y^2-16}$, y^2 必須 >16，即 y 不能大於 -4 或小於 4，故在 $y=-4$, $y=4$ 之間無軌跡。

以下各題均與此相似.

(i) $x^2+9y^2=18$.

(j) $x^2+y^2-4y=0$.

(k) $x^2+y^2+4x=0$.

(l) $x^2+6y^2+6y=0$.

(m) $4x^2+16x+y^2=0$.

(n) $y=3x^3-6x$.

1. 截部　設 $x=0$, 則 $y=0$, 軌跡經過原點。
   設 $y=0$, $3x^3-6x=0$.
   $$x(x^2-2)=0.$$
   $$x=0,\ 或\ x=\pm\sqrt{2}.$$
   故 $x=0$, $\pm\sqrt{2}$ 爲 x 軸上之截部。

2. 對稱 x, y 均爲奇次冪，x 之絕對值不變而僅變其符號時，y 亦變其符號而絕對值不變，故對稱於原點。

3. $y=3x^3-6x$, x 可爲任何值。

又 x 無二次冪，y 亦爲任何值，故無限度。

(o) $y=x^4-4x^2$.

1. 截部 設 $x=0$, 則 $y=0$,故經過原點而 y 軸上無其他截部。

設 $y=0$, 則 $x=0$, 或 ± 2 爲 x 軸上之截部。

2. 對稱 x 無奇次冪，故對稱於 y 軸。

3. 範圍 x 可爲任何值。

$$x^4-4x^2-y=0.$$

$$x^2=\frac{4\pm\sqrt{16+4y}}{2}=2\pm\sqrt{4+y}.$$

$y<-4$ 時，x^2 爲虛數，即 x 爲虛數，故 y 之值不能小於 -4.

(p) $3x^3+y^2=0$.

1. $y=0$, $x=0$.

$x=0$, $y=0$.

故兩軸上之截部爲 $(0, 0)$.

2. y 無奇次冪，故對稱於 x 軸。

3. $y=\sqrt{-3x^3}$, 故 x 不能爲正。

$x=\sqrt[3]{\dfrac{y^2}{3}}$, 故 y 可爲任何值。

(q) $9x^2-y^2+18x+6y=0$.

略。

(r) $x^2+xy+y^2-4=0$.

1. $y=0$, $x=\pm 2$ 爲 x 軸上之截部。

$x=0$, $y=\pm 2$ 爲 y 軸上之截部。

2. x 爲同一絕對值而變其符號時，y 之値亦變，故不對稱於 y 軸；同樣亦不對稱於 x 軸。

但 x 與 y 之值同時變號時，方程式之値不變，故對稱於原點。

3. 解 x, 得 $x=\dfrac{-y\pm\sqrt{y^2-4y^2+16}}{2}$.

故 $-3y^2+16$ 不能 <0，即 y^2 不能大於 $\frac{16}{3}$，即 y 必須 $>\frac{4}{3}\sqrt{3}$，亦不能 $<-\frac{4}{3}\sqrt{3}$，否則 x 將為虛數也。

解 y，得 $\quad y=\frac{-x\pm\sqrt{x^2-4x^2+16}}{2}$

故 $-3x^2+16$ 不能 <0，即 x 不能 $<-\frac{4}{3}\sqrt{3}$ 或 $>\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

(s) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$.

1. $y=0, x=4$ 為 x 軸上之截部。
   $x=0, y=4$ 為 y 軸上之截部。
2. 對兩軸皆不對稱。
3. $\sqrt{x}=2-\sqrt{y}$, $x=2+y-4\sqrt{y}$，故 y 不能為負。同樣，x 亦不能為負，但 x, y 均可為任何正值。

2. 討論下列各方程式。作圖時，可假定幾個數值以代此式中之任意常數，惟不可以特殊數值代之，以致增加方程式之特性。*

(a) $y^2=2px$. (拋物線)

1. $x=0, y=0$.
   $y=0, x=0$. 經過原點。無他截部。
2. 對稱於 x 軸。
3. $y=\pm\sqrt{2px}$，故 x 必須與 p 同號，否則 y 為虛數。故 p 為負時，x 不能為正；p 為正時，x 不能為負。

(b) $x^2+y^2=r^2$. (圓)

1. $x=0, y=\pm r$ 為 y 軸上之截部。
   $y=0, x=\pm r$ 為 x 軸上之截部。
2. 對稱於兩軸，且對稱於原點。
3. x 與 y 之值均不能 $<-r$ 或 $>r$.

(c) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. (橢圓)

1. 截部 $\quad x=0, y=\pm b$; $y=0, x=\pm a$.
2. 對稱 $\quad$ 對稱於兩軸並原點。
3. 範圍 $\quad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

故 x 之値必須在 $-a$ 與 a 之間，否則 y 爲虛數。

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}.$$

故 y 之値必須在 $-b$ 與 b 之間。

(d) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$ (雙曲線)

1. 截部 $y=0,\ x=\pm a.$

$x=0,\ y=\pm b\sqrt{-1}$, 故 y 軸無截部。

2. 對稱 對稱於兩軸並原點。

3. 範圍 $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, 故 x 不能 $-a<x<a.$

$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2+y^2}$, 故 y 之値無限制。

(e) $y=mx^3.$ (立方拋物線)

1. 截部 $x=0,\ y=0;\ y=0,\ x=0$ 經原點。

2. 對稱 對稱於原點。

3. 範圍 $x,\ y$ 均可爲任何値。

(f) $y^2=3x^3$ (半立方拋物線)。

1 截部 $x=0,\ y=0;\ y=0,\ x=0$ 經原點。

2. 對稱 對稱於 x 軸。

3. 範圍 $y=\pm\sqrt{3x^3}$, 故 x 不能爲負，y 則可爲任何値，

(g) $xy=a.$ (等邊拋物線)

1. 截部 $x=0,\ y=0;\ y=0,\ x=0.$

2. 對稱 x 之値變號時 y 亦變號，故對稱於原點。

3. 範圍 若 a 爲正，則 $x,\ y$ 之値必須同號，即軌跡限於第一，三象限；若 a 爲負，則 $x,\ y$ 必須異號，即軌跡限於第二，四象限。

(h) $x^2+my^2=16.$

1. 截部 $x=0,\ y=\pm\frac{4}{m}\sqrt{m};\ y=0,\ x=\pm 4.$

2. 對稱 對稱於兩軸並原點。

3. 範圍 $y=\pm\sqrt{\frac{16-x^2}{m}}$, 若 m 爲正，則 x 不能 >4 或

<-4；若 m 爲負，則 x 不能 <4 而 >-4.

4. m 爲正，則爲橢圓；m 爲負，則爲雙曲線；$m=1$，則爲圓。

(*i*) $x^2+y^2+2rx=0$. (圓)

1. 截部　$x=0, y=0$; $y=0, x=0$ 或 $-2r$.

2. 對稱　對稱於 x 軸。

3. 範圍　$y=\pm\sqrt{-x^2-2rx}$，設 r 爲正，則 $-(x^2+2rx)$ 必須 >0，卽 $x^2+2rx<0$，卽 x 必須在 $-2r$ 與 0 之間；設 r 爲負，則 x 必須在 0 與 $2r$ 之間。

$x=-r\pm\sqrt{r^2-y^2}$，故 y^2 不能大於 r^2，卽 y 必須在 $-r$ 與 r 之間。

(*j*) $y=ax^2+bx+c$. (拋物線)

1. 截部　$x=0, y=c$; $y=0, x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

2. 對稱　不對稱於兩軸或原點。

3. 範圍　x 可爲任何値。

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac+4ay}}{2a}.$$

$b^2-4ac+4ay$ 不能 <0.

卽　y 不能 $<\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

(*k*) $x=ay^2+by+c$.

與 (*j*) 相同，惟易 x 軸爲 y 軸，y 軸爲 x 軸。

(*l*) $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

1. 截部　$x=0, y=\dfrac{-E\pm\sqrt{E^2-4F}}{2}$;

$$y=0,\ x=\frac{-D\pm\sqrt{D^2-4F}}{2}.$$

2. 對稱　$D=0$ 時，對稱於 y 軸；$E=0$ 時，對稱於 x 軸。

3. 範圍　$x^2+Dx+y^2+Ey+F=0$.

$$x=\frac{-D\pm\sqrt{D^2-4y^2-4Ey-4F}}{2}.$$

故　$\Delta = D^2 - 4y^2 - 4Ey - 4F$ 必須 >0.

設　$\Delta = 0$, 即 $y = \dfrac{-E \pm \sqrt{E^2 + D^2 - 4F}}{2}$.

故　y 之值必須在 $\dfrac{-E + \sqrt{E^2 + D^2 - 4F}}{2}$ 與

$\dfrac{-E - \sqrt{E^2 + D^2 - 4F}}{2}$ 之間.

同理，x 之值必須在 $\dfrac{-D + \sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$ 與

$\dfrac{-D - \sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$ 之間.

3.　證明代表圓錐曲線之方程式爲含 x 與 y 之二次方程式。

取所設定線爲 y 軸，作 x 軸經過所設定點，則定點之坐標爲 $(p, 0)$；又設 (x, y) 爲軌跡上任意點，則 (x, y) 與定點之距離爲

$$d_1 = \sqrt{(x-p)^2 + y^2},$$

與定線之距離爲 $d_2 = x$. 依題意，$d_1 = ed_2$, 即

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = ex.$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = e^2x^2.$$

$$(1-e^2)x^2 - 2px + y^2 + p^2 = 0.$$

4.　討論題 3 之方程式，並作其軌跡而以:

(1)　$e = 1$.

方程式爲　$-2px + y^2 + p^2 = 0$.

即　$y^2 = 2p\left(x - \dfrac{p}{2}\right)$.

1.　截部　$\left(\dfrac{p}{2},\ 0\right)$.

2.　對稱　對稱於 x 軸.

3.　範圍　設 p 爲正，x 不能 $<\dfrac{p}{2}$；p 爲負，x 不能 $>\dfrac{p}{2}$.

(2)　$e = \frac{1}{2}$.

方程式爲　$\frac{3}{4}x^2 - 2px + y^2 + p^2 = 0$.

1.　截部　$(2p,\ 0)$, $\left(\dfrac{2p}{3},\ 0\right)$.

2.　對稱　x 軸.

3.　範圍　解 y，得 $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3x^2+8px-4p^2}$.

$-3x^2+8px-4p^2$ 之兩根爲 $2p,\ \frac{2p}{3}$.

故　x 必須在 $2p$ 與 $\frac{2p}{3}$ 之間.

解 x，得　$x=\frac{8p\pm\sqrt{16p^2-48y^2}}{6}$

$$=\frac{1}{3}(4p\pm2\sqrt{p^2-3y^2}).$$

p^2-3y^2 之兩根爲 $y=\pm\frac{p}{3}\sqrt{3}$;

故　y 必須在 $\frac{p}{3}\sqrt{3}$ 與 $-\frac{p}{3}\sqrt{3}$ 之間.

(3)　$e=2$.

方程式爲　　$3x^2-y^2+2px-p^2=0$.

1.　截部　$y=0$，則 $3x^2+2px-p^2=0$

$(3x-p)(x+p)=0$.

$x=\frac{p}{3}$ 或 $-p$.

$x=0$，則 $y^2+p^2=0$，y 軸上無截部.

2.　對稱　對稱於 x 軸.

3.　範圍　解 y，得　$y=\pm\sqrt{3x^2+2px-p^2}$.

$3x^2+2px-p^2=0$ 之兩根爲 $\frac{p}{3}$ 及 $-p$.

x 之值在 $\frac{p}{3}$ 及 $-p$ 之間 $3x^2+2px-p^2$ 爲負，卽 y 爲虛數，故 x 之值不能在 $\frac{p}{3}$ 及 $-p$ 之間.

解 x，得　$x=\frac{-2p\pm\sqrt{4p^2+12y^2+12p^2}}{6}$，故 y 可爲任何値.

5.　一點移動時，其與 $(4,\ 0)$ 及 $(-4,\ 0)$ 之距離之和永爲 12，則其軌跡爲何?

設 (x,y) 爲軌跡上任意點，則離 $(4,0)$ 之距離爲 $d_1=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$,

離 $(-4, 0)$ 之距離為 $d_2=\sqrt{(x+4)^2+y^2}$, 已知 $d_1+d_2=12$, 即

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2}+\sqrt{(x+4)^2+y^2}=12.$$

$$(x-4)^2+y^2=144+(x+4)^2+y^2-24\sqrt{(x+4)^2+y^2}.$$

$$2x+18=3\sqrt{(x+4)^2+y^2}.$$

$$4x^2+72x+18^2=9x^2+72x+144+9y^2.$$

$$5x^2+9y^2=180.$$

6. 一點移動時，其與 $(0, 3)$ 與 $(0, -3)$ 之距離之差為 6, 則其軌跡為何?

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}-\sqrt{x^2+(y+3)^2}=4.$$

$$x^2+(y-3)^2=16+x^2+(y+3)^2+8\sqrt{x^2+(y+3)^2}.$$

$$-3y-4=2\sqrt{x^2+(y+3)^2}.$$

$$9y^2+24y+16=4x^2+4y^2+24y+36.$$

$$5y^2-4x^2=20.$$

此為雙曲線。

7. 一點至 $(4, 5)$ 之距離為至 $(-2, 3)$ 之距離之兩倍，求其軌跡之方程式。討論並作此軌跡。

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}=2\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}.$$

$$x^2-8x+16+y^2-10y+25$$
$$=4x^2+16x+16+4y^2-24y+36.$$

$$3x^2+3y^2+24x-14y+9=0.$$

此為一圓。

8. 一點移動時，其縱坐標較至此點 $(3, 3)$ 之距離少 2, 求其軌跡之方程式。討論並作圖。

設 (x, y) 為軌跡上任意點，則其離 $(3, 3)$ 之距離為

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}\ \text{且等於}\ y+2.$$

化簡之，得 $x^2-6x-10y+14=0$.　　此為一拋物線。

9. 一點移動時，其與 $(-2, 3)$ 及 $(3, -2)$ 之距離，常成 $4:5$ 之比。求其軌跡之方程式，討論並作其圖形。

設 (x, y) 為軌跡上任意點，則

$$d_1=\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2},\quad d_2=\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}.$$

而 $d_1 : d_2=4 : 5$.

列式化簡之，得

$$25x^2+100x+100+25y^2-150y+225$$
$$=16x^2-96x+144+16y^2+64y+64.$$

$$9x^2+9y^2+196x-214y+117=0.$$

此為一圓。

10. 一點至 $(2,-4)$ 之距離常較其縱坐標多 5，求其軌跡之方程式。討論並作圖。

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}=y+5.$$

$$2y=x^2-4x-5.$$

此爲一拋物線.

11. 已知點 $A(3,1)$ 與點 $B(-1,-1)$. 一點 P 移動時使 $\triangle PAB$ 之面積常爲 8 平方單位. 求 P 點軌跡之方程式並作圖.（有二種情形）。

設 (x,y) 爲此動點，則

$$\triangle PAB\text{ 之面積}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1\\ 3 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}=\pm 8.$$

展開之，得 $x-2y-9=0$ 及 $x-2y+7=0$.

12. 一點移動時，其與 $(2,2)$ 連線之斜率適爲與 $(-2,0)$ 連線斜率之二倍。求其軌跡之方程式，討論並作其圖形。

設 (x,y) 爲此動點，則

$$\frac{y-2}{x-2}=2\cdot\frac{y}{x+2}.$$

$$xy+2x-6y+4=0.$$

13. 一點移動時，其與 $(2,4)$ 連線之斜率常較與 $(-2,4)$ 連線之斜率多 3. 求其軌跡之方程式。討論並作圖。

設 (x,y) 爲此動點，則

$$\frac{y-4}{x-2}=\frac{y-4}{x+2}+3.$$

$$4y=3x^2+4.$$

此爲一拋物線。

14. 證下述命辭：設 x 與 y 互換而其方程式不變，則此軌跡常對稱於 $y=x$ 之直線。應用此理，作下列諸軌跡：

設 x 與 y 互換而方程式不變時，卽設 (x_1,y_1) 爲軌跡上一點，則軌跡上必另有一點爲 (y_1,x_1). 因 x 與 y 旣可互換，則軌跡上之任一點 (x_1,y_1) 必亦可互換爲 (y_1,x_1) 也。又 (x_1,y_1) 至 $x=y$ 之距離適等於 (y_1,x_1) 至 $x=y$ 之距離，故此軌跡必對稱於 $x=y$ 線。

(a) $x^2-xy+y^2-4=0.$

1. 截部 $x=0,\ y=\pm 2;\ y=0,\ x=\pm 2.$

2. 對稱　對稱於 $y=x$ 及原點。

3. 解 x 與 y, 得

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4y^2+16}}{2}=\frac{y\pm\sqrt{-3y^2+16}}{2},$$

$$y=\frac{x\pm\sqrt{-3x^2+16}}{2}.$$

故 x 之值必須 $-\frac{4}{3}\sqrt{3}<x<\frac{4}{3}\sqrt{3}$,

y 之值必須 $-\frac{4}{3}\sqrt{3}<y<\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

此軌跡既對稱於 $x=y$ 且對稱於原點,故祇須求出 $x=y$ 與 $x=-y$ 間之諸點卽可.

(b), (c) 同上.

15. 試述對於直線 $x+y=0$ 爲對稱之條件,且證之.

如一方程式當 x 變爲 $-y$, y 變爲 $-x$ 時,方程式不變,則軌跡對稱於 $x+y=0$.

設方程式 x 變爲 $-y$, y 變爲 $-x$ 時,方程式不變,則如軌跡上有一點 (x_1, y_1) 必有一點爲 $(-y_1, -x_1)$, 此兩點與 $x+y=0$ 直線之距離相等,故對稱於此直線.

原 本 第 42 頁 習 題

1. 決定下列各方程式之水平與垂直漸近線.討論並作圖:

(a) $xy=8$.

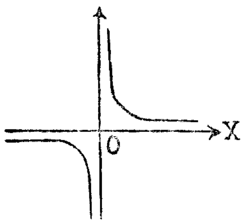
1. $y=\frac{8}{x}$, 當 x 趨近於 0 時, y 趨近 ∞, 故 $x=0$ 爲一垂直漸近線.

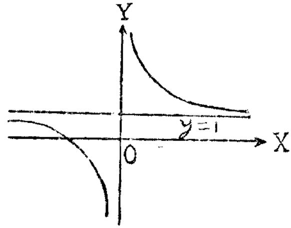
$x=\frac{8}{y}$, 同樣, $y=0$ 爲一水平漸近線.

2. 無截部。

3. 對稱於原點,對稱於 $x=y$ 及 $x+y=0$.

4. x, y 必同號,故限於第一,三兩象限.





(*b*) $xy-x-2=0.$

1. 解 x　$x=\dfrac{2}{y-1}$, 故 $y-1=0$ 爲一水平漸近線.

　解 y　$y=\dfrac{x+2}{x}$, 故 $x=0$ 爲一垂直漸近線.

2. 截部　$x=0,\ y=\infty$; $y=0,\ x=-2.$
3. 對稱　不對稱.
4. 無限度.

(*c*) $2x+2xy-y=0.$

1. 解 x　$x=\dfrac{y}{2+2y}$, 故 $y+1=0$ 爲一水平漸近線.

　解 y　$y=\dfrac{2x}{1-2x}$, 故 $2x-1=0$ 爲一垂直漸近線.

2. 截部　$x=0,\ y=0$; $y=0,\ x=0.$
3. 對稱　不對稱於兩軸及原點.
4. 範圍　x, y 之值均無限.

(*d*) $x^2+2xy-4=0.$

1. 解 x　$x=-y\pm\sqrt{y^2+4}$, 故無水平漸近線.

　解 y　$y=\dfrac{4-x^2}{2x}$, $x=0$ 時, $y=\infty$, 故 $x=0$ 爲一垂直漸近線.

　又　$x=\dfrac{4}{x+2y}$, 故 $x+2y$ 爲一漸近線.

2. 截部　$y=0,\ x=\pm 2.$
3. 對稱　對稱於原點.
4. 範圍　x, y 均可爲 $-\infty$ 至 ∞ 間之任何值.

(*e*) $x^2-xy-2x-y=0.$

1. 解 x $x=\dfrac{y+2\pm\sqrt{y^2+8y+4}}{2}$, 故為一水平漸近線。

解 y $y=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$, 故 $x+1=0$ 為一垂直漸近線。

又 $x=\dfrac{y}{x-y-2}$, 故 $x-y-2=0$ 為一漸近線。

2. 截部 $x=0, y=0$; $y=0, x=0$ 或 2.

3. 對稱 不對稱於二軸或原點。

4. 範圍 $y^2+8y+4<0$, 即 y 在 $-4\pm2\sqrt{3}$ 間, x 為數虛, 故 y 在 $-4\pm2\sqrt{3}$ 間無曲線。

(*f*) $xy=x^2+4$.

1. 解 y $y=\dfrac{x^2+4}{x}$, 故 $x=0$ 為一漸近線。

解 x $x=\dfrac{y\pm\sqrt{y^2-16}}{2}$, 故無水平漸近線。

又 $x=\dfrac{4}{y-x}$, 故 $y-x=0$ 為一漸近線。

2. 截部 $x=0, y=\infty$; $y=0, x=$ 虛數。

3. 對稱 不對稱於兩軸, 對稱於原點。

4. 範圍 $y^2-16<0$, 即 y 在 -4 與 4 間, x 為虛數, 即無軌跡.

(*g*) $3xy-9y-2x+8=0$.

1. 解 x $x=\dfrac{9y-8}{3y-2}$, 故 $y=\dfrac{2}{3}$ 為一水平漸近線。

解 y $y=\dfrac{2x-8}{3(x-3)}$, 故 $x=3$ 為一垂直漸近線。

2. 截部 $x=0, y=\dfrac{8}{9}$; $y=0, x=4$.

3. 對稱 不對稱。

4. 範圍 無限度。

2. (*a*) $xy^2=4(4-x)$.

1. 解 x $x=\dfrac{16}{y^2+4}$, y 為任何值, 分母不為 0, 即 x 不為 ∞, 故無水平漸近線。

解 y　$y=\pm\sqrt{\dfrac{16-4x}{x}}$, 故 $x=0$ 爲一垂直漸近線.

2. 討論　垂 x 軸於 $x=4$, 對稱於 x 軸, x 不能爲負.

(b)　$x^2y-y=2x$.

1. 解 x　$x=1\pm\sqrt{1+y^2}$.

解 y　$y=\dfrac{2x}{x^2-1}$, 故 $x^2-1=0$ 或 $x=\pm1$ 爲二垂直漸近線.

2. 討論　過原點,不對稱,無限度.

(c)　$x^2y+y=8$.

1. 解 x　$x=\pm\sqrt{\dfrac{8-y}{y}}$, 故 $y=0$ 爲一水平漸近線.

解 y　$y=\dfrac{8}{x^2+1}$, x 爲任何值, x^2+1 不爲 0.

2. 討論　$x=0$, $y=8$, 對稱於 y 軸, y 不能大於 8 或小於 0.

(d)　$(x^4-4x^2)y=4$.

1. 解 x　$x=\pm\sqrt{2\pm2\sqrt{\dfrac{y+1}{y}}}$, 故 $y=0$ 爲一水平漸近線.

解 y　$y=\dfrac{4}{x^2(x^2-4)}$, 故 $x=0, x=\pm2$ 爲三垂直漸近線.

2. 討論　兩軸上無截部,對稱於 y 軸, x,y 均可爲任何值.

(e)　$3xy+6=x^2y$.

1. 解 x　$x=\dfrac{3y\pm\sqrt{9y^2+24y}}{2y}$, 故 $y=0$ 爲一水平漸近線.

解 y　$y=\dfrac{6}{x^2-3x}$, 故 $x^2-3x=0$ 即 $x=0$, $x=3$ 爲二垂直漸近線.

2. 討論　不交兩軸,不對稱, $0>y>-\dfrac{9}{24}$ 間無軌跡.

(f)　$y(x^2-4)=12$.

1. 解 y $y=\dfrac{12}{x^2-4}$，故 $x=\pm 2$ 為二漸近線。

解 x $x=\pm\sqrt{\dfrac{12+4y}{y}}$，故 $y=0$ 為一漸近線。

2. 討論 不交兩軸，對稱於 y 軸，$-3<y<0$ 間無軌跡。

(g) $x=\dfrac{y+3}{y-1}$.

1. $y=1$ 為一水平漸近線。

解 y $y=\dfrac{x+3}{x-1}$，故 $x=1$ 為一漸近線。

2. 截部為 $(0,-3)$，$(-3,0)$，對稱於 $x=y$，x，y 無限度。

(h) $x=\dfrac{y}{y^2-9}$.

1. 解 y $y=\dfrac{1\pm\sqrt{1+36x^2}}{2x}$，故 $y=\pm 3$，$x=0$ 為漸近線。

2. 討論 截部為 $(0,0)$，不對稱，無限度。

(i) $y=\dfrac{(x-2)^2}{x+2}$.

1. 解 x $x=\dfrac{4+y\pm\sqrt{y^2+16y}}{2}$. 故 $x=-2$ 為一漸近線。

2. 討論 截部為 $(0,2)$，$(2,0)$，無對稱，$0>y>-16$ 間無軌跡。

(j) $y=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-x-6}$.

1. $x-3=0$，$x+2=0$ 為兩漸近線。

解 x $x=\dfrac{y+1\pm\sqrt{25y^2-46y+25}}{2(y-1)}$，故 $y-1=0$ 為一漸近線。

2. 討論 $(0,1)$，$(2,0)$，$(-3,0)$ 為截部，無對稱，無限度。

(k) $y=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+5x-6}$.

1. $x+6=0$，$x-1=0$ 為兩漸近線。

又 $x^2=\dfrac{6y-5xy-4x+4}{y-1}$，故 $y-1=0$ 為一漸近線。

2. 討論　截部爲 $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$, $(2, 0)$, 無對稱軸，y 在 $\frac{33}{49}$ 與 0 間無軌跡.

(l)　$4x=\frac{y^2}{y-2}$.

1.　$y-2=0$ 爲一水平漸近線.

$y=\frac{-8x}{y-4x}$, 故 $y-4x=0$ 爲一漸近線。

$y=2x\pm 2\sqrt{x^2-2x}$, 故無垂直漸近線.

2.　討論　截部爲 $(0, 0)$, 不對稱於兩軸, $0<x<2$ 間無曲線.

(m)　$y=\frac{x^2-4}{x^2-1}$.

1.　$x=\pm 1$ 爲兩漸近線.

解 x　$x=\pm\sqrt{\frac{y-4}{y-1}}$, 故 $y=1$ 爲一漸近線,

2.　討論　$(0, 4)$, $(2, 0)$, $(-2, 0)$ 爲截部，對稱於 y 軸，$1<y<4$ 間無軌跡.

3.　求一點之軌跡之方程式，設其移動時至原點之距離常等於該點與原點連線之斜率.討論並作其軌跡.

設 (x, y) 爲該動點,則其與原點之距離爲 $d=\sqrt{x^2+y^2}$, 而該點與原點聯線之斜率爲 $\frac{y}{x}$. 依題意,得

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{y}{x}.$$

$$x^2+y^2=\frac{y^2}{x^2}.$$

$$x^4+x^2y^2-y^2=0.$$

討論　解 x　$x=\pm\sqrt{\frac{-y^2\pm\sqrt{y^4+4y^2}}{2}}$.

解 y　$y=\pm\sqrt{\frac{x^4}{1-x^2}}$.

故曲線經過原點，對稱於兩軸並原點，x 不能小於 -1 或大於 1, 故 $x=\pm 1$ 爲兩漸近線.

4. 決定下列各方程式中平行於 OX 或 OY 之漸近線，討論並作圖：

(a) $y=\dfrac{ax+b}{x}$.

$x=0$ 爲一漸近線。

又 $x=\dfrac{b}{y-a}$，故 $y-a=0$ 爲一漸近線。

截部爲 $\left(-\dfrac{b}{a},\ 0\right)$，不對稱於兩軸，無限度。

(b) $y=\dfrac{x}{ax+b}$.

$ax+b=0$ 爲一垂直漸近線.

$$x=\frac{by}{ay-1}.$$

$ay-1$ 爲一水平漸近線。

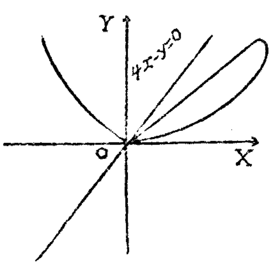
截部爲 $(0, 0)$，不對稱於兩軸，無限度.

原本第 42—43 頁習題

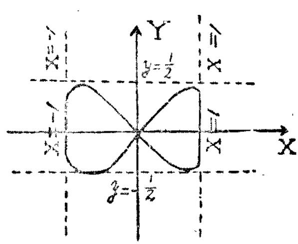
個別研究諸題之討論方法，大體與以上諸題相同，可依前法詳細討論，並求出諸點，而作精細之圖形，此處僅示圖形之大概，以資比對.

詳細討論下列各方程式作其軌跡：

1. $y^2-4xy+x^3=0$.

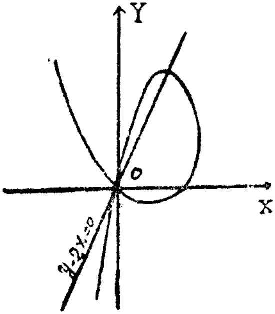


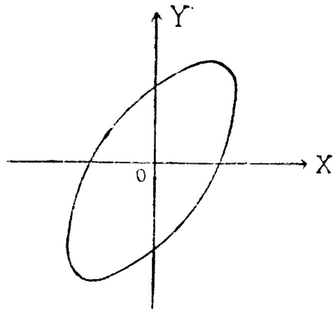
2. $y^2-2xy-2x^2+x^3=0$.



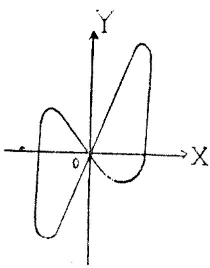
3. $y^2-x^3+x^4=0$.

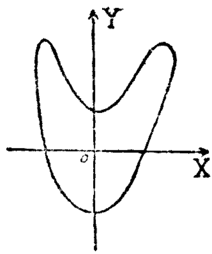
4. $(y-x)^2-(a^2-x^2)=0$.





5. $(y-x)^2-x^2(a^2-x^2)=0.$ **6.** $(y-x^2)^2-(a^2-x^2)=0.$





7. $(y-x^2)^2-x^2(a^2-x^2)=0.$

1. 對稱於 y 軸.

2. 截部為 $(0,0)$ 及 $\left(\pm\frac{a}{2}\sqrt{2},0\right)$.

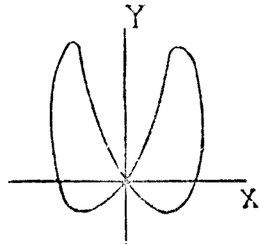
3. 無漸近線.

4. 解 y, 得 $y=x^2\pm x\sqrt{a^2-x^2}$, 故 x 不能小於 a.

 解 x, 得 $x=\frac{1}{2}\sqrt{2y+a^2\pm\sqrt{a^4+4a^2y-4y^2}}$.

$4y^2-4a^2y-a^4$ 之兩根為 $y=a^2\left(\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}\right)$, 故 y 必須在 $a^2\left(\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}\right)$ 之間. 設 $a=5$, 則作圖如下.

x	y
± 1	$5.9, -3.9$
± 2	$13.2, -5.2$
± 3	$21, -3$
± 4	$28, \quad 4$
± 5	25



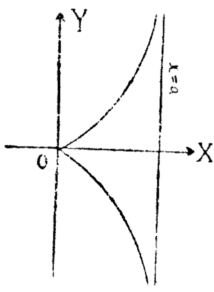
8. $y^2(a-x)-x^3=0.$

1. 對稱於 x 軸。

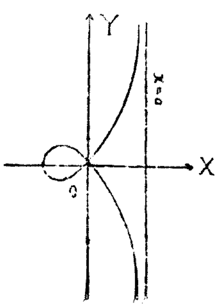
2. 解 y，得 $y^2=\dfrac{x^3}{a-x}$，故 $x=a$ 爲一漸近線。

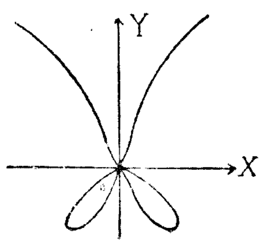
3. 截部爲 $(0\ \ 0)$.

4. $y=\dfrac{x}{a-x}\sqrt{x(a-x)}$，故 x 不能小於 0 或大於 a.

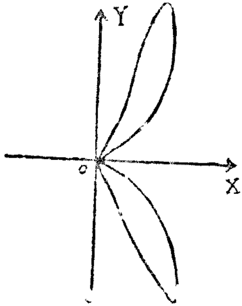


9. $y^2(a-x)-x^2(a+x)=0.$ 10. $x^4+2ax^2y-ay^3=0.$

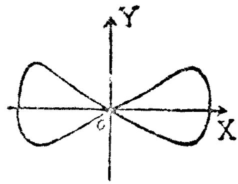




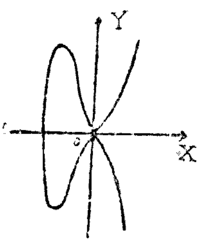
11. $x^4 - axy^2 + y^4 = 0.$



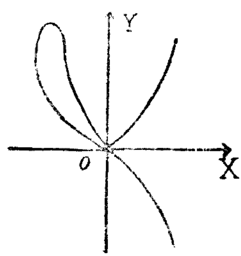
12. $a^4y^2 - a^2x^4 + x^6 = 0.$



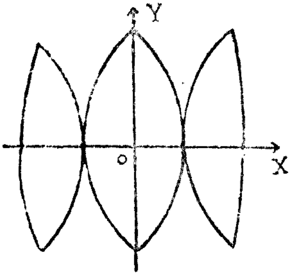
13. $ay^2 - bx^4 - x^5 = 0.$



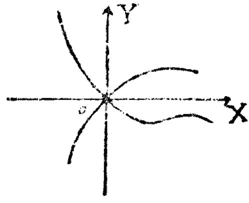
14. $a^3y^2 - 2abx^2y - x^5 = 0.$



15. $y^2 - (a^2 - x^2)(b^2 - x^2)^2 = 0.$

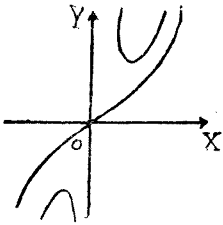


16. $x^3y^2 - a^3x^2 + ay^4 = 0.$

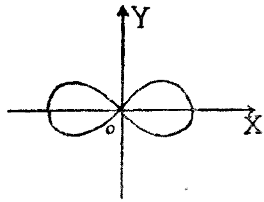


17. $x(y-x)^2 - b^2y = 0.$

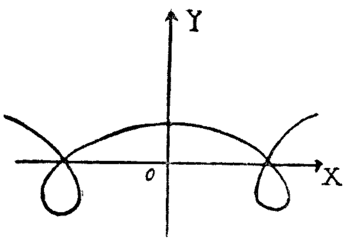
18. $(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0.$



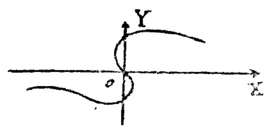
19. $(x^2-a^2)^2=ay^2(3a+2y)$.



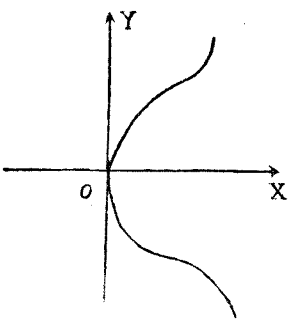
20. $(x^2+y^2-1)y-ax=0$.



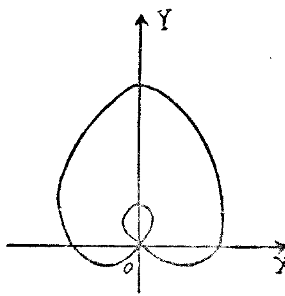
21. $y^2-x^2-x(x-4)^2=0$.

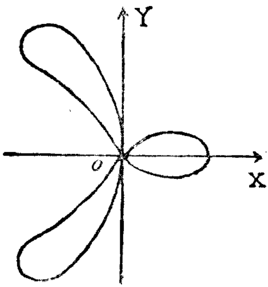


22. $(x^2+y^2-2ay)^2=a^2(x^2+y^2)$

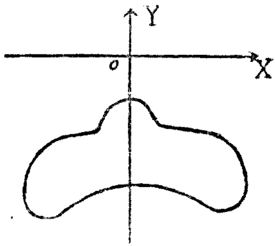


23. $x^4+x^2y^2+y^4=x(ax^2-4ay^2)$.

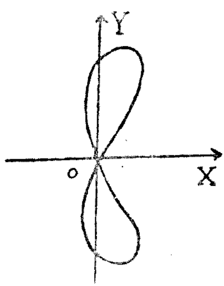




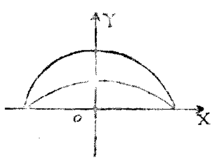
24. $(x^2+y^2+4ay+a^2)(x^2+a^2)+2a^2y^2=0.$



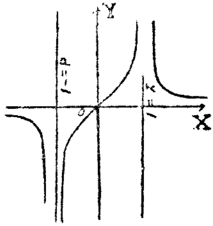
25. $(y^2-x^2)(x-1)(x-\frac{3}{2})=2(y^2+x^2-2x)^2.$



26. $(x^2+y^2+4ay-a^2)(x^2-a^2)+4a^2y^2=0.$



27. $(x^2-1)^2y-x^3=0.$



原本第 45 頁習題

求下列諸曲線之交點並作圖:

1. $3x+y-13=0$ ……………………………………………(1)

$x^2+y^2-25=0$ ……………………………………………(2)

由 (1), $y=13-3x.$

代入 (2), 得 $x^2+(13-3x)^2-25=0.$

$10x^2-78x+144=0.$

$\therefore\quad x=3$ 或 $4.8;$

$y=4$ 或 $-1.4.$

故交點爲 (3, 4) 及 (4.8, −1.4).

2. $3x+4y=25$ ……………………………………………(1)

$x^2+y^2=25$ ……………………………………………(2)

由 (1), $x=\dfrac{25-4y}{3}$

代入 (2), 得 $\left(\dfrac{25-4y}{3}\right)^2+y^2=25.$

$625-200y+16y^2+9y^2=225.$

$y^2-8y+16=0.$

$\therefore\quad y=4,\quad x=3.$

故交點爲 (3, 4).

3. $xy=2$ ……………………………………………(1)

$x^2+y^2=5$ ……………………………………………(2)

(2) 加 $2\times(1)$ 開方,得 $x+y=\pm 2\sqrt{5}.$

(2) 減 $2\times(1)$ 開方,得 $x-y=\pm 2\sqrt{3}.$

故交點爲 $(\sqrt{5}+\sqrt{3},\ \sqrt{5}-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{5}-\sqrt{3},\ -\sqrt{5}+\sqrt{3})$, $(\sqrt{5}-\sqrt{3},\ \sqrt{5}+\sqrt{3})$ 及 $(-\sqrt{5}+\sqrt{3},\ -\sqrt{5}-\sqrt{3})$.

4. $2y=x^2$,

$x=y$.

交點爲 $(0, 0)$, $(2, 2)$.

5. $y^2=2px$ ……………………………………(1)

$x^2=2py$ ……………………………………(2)

(1), (2) 相減，以 $x-y$ 除之，得 $x+y=-2p$ 代入 (1) 或 (2) 解之，得 $(0, 0)$, $(2p, 2p)$.

6. $y=x^3$ ……………………………………(1)

$y=x^2+2x$ ……………………………………(2)

用比較消去法，得 $x^3=x^2+2x$. 解之，得 $(0, 0)$, $(2, 8)$, $(-1, -1)$.

7. $x+y=0$,

$x^3-6x-3y=0$.

交點爲 $(0, 0)$, $(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3})$.

8. $x^2+y^2=5a^2$ ……………………………………(1)

$x^2=4ay$ ……………………………………(2)

以 (2) x^2 之值代入 (1) 解之，得 $(2a, a)$, $(-2a, a)$.

9. $x^2-y^2=16$,

$x^2+y^2=25$.

先解 x^2 及 y^2 再開方，即得 x 及 y 爲 $\left(\pm\frac{\sqrt{82}}{2}, \pm\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ 四點.

10. $x^2+y^2-6x=0$ ……………………………………(1)

$y^2=x^3$ ……………………………………(2)

以 (2) y^2 之值代入 (1) 解之，得 $(0, 0)$, $(2, \pm 2\sqrt{2})$.

11. $x^2-4y^2=9$,

$xy=10$.

交點爲 $(5, 2)$, $(-5, -2)$.

12. 求兩圓 $x^2+y^2=16$ 與 $x^2+(y-6)^2=9$ 之公共弦之長.

先求兩圓之兩交點爲 $\left(\pm\frac{\sqrt{455}}{12}, \frac{43}{12}\right)$, 再依距離公式求 d.

13. 求三角形各邊之長，其邊之方程式爲 $x+2y=5$, $2x+y=7$, $x-y=-1$.

三角形之三邊交於三點，故於三邊中每頂取二邊，三次解之可得 3 頂點爲 $(3,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$. 再以距離公式，得三邊之長爲 $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$.

14. 設三角形之邊爲 $x+y=a$, $x-2y=4a$, $y-x+7a=0$, 則其面積爲何？

先求三頂點爲 $(2a, -a)$, $(4a, -3a)$, $(10a, 3a)$.

$$\text{面積}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2a & -a & 1 \\ 4a & -3a & 1 \\ 10a & 3a & 1 \end{vmatrix}=6a^2.$$

15. 求 $x^2+y^2=13$ 與 $y^2=3x+3$ 之交點連線之斜率.

解聯立方程式，得交點爲 $(2,3)$, $(2,-3)$, 故其聯線之斜率爲 ∞.

16. 圓心爲 $(2,1)$, 半徑爲 4 之圓在直線 $x+2y=4$ 上所截之弦長爲何？

圓心爲 $(2,1)$, 半徑爲 4 之圓方程式爲 $(x-2)^2+(y-1)^2=4^4$, 此圓與 $x+2y=4$ 之交點爲 $(-6\mp8\sqrt{5}, 5\pm4\sqrt{5})$. 再以距離公式，求其長爲 $\sqrt{6^2+5^2}=\sqrt{61}$.

17. 求三角形三中線之長，其邊爲 $x+7y+11=0$, $3x+y-7=0$, $x-3y+1=0$.

$A(3, -2)$, $B(-4, -1)$, $C(2, 1)$.

BC 之中點爲 $D(-1, 0)$, 故 $AD=2\sqrt{5}$.

AC 之中點爲 $E\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, 故 $BE=\frac{1}{2}\sqrt{170}$.

AB 之中點爲 $F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, 故 $CF=\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

18. 求 $x^2+y^2=9$ 與 $3y-4x=15$ 之交點. 此結果之意義爲何？

$x^2+y^2=9$ 爲一圓而 $3y-4x=15$ 爲一直線，此兩軌跡僅有一交點 $\left(-\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$, 即此直線切於此圓.

19. 求二點之坐標，此二點各與 $(2,1)$ 及 $(-2,-3)$ 相距 6 單位.

與 $(2,1)$ 相距 6 單位之曲線爲

$$(x-2)^2+(y-1)^2=36.$$

與 $(-2,-3)$ 相距 6 單位之曲線爲

$$(x+2)^2+(y+3)^2=36.$$

解之，得交點爲

$$(1+\sqrt{17}, 2+\sqrt{17}) \quad 及 \quad (1-\sqrt{17}, 2-\sqrt{17}).$$

20. 二圓之半徑皆爲 4, 且皆過 $(2, 1)$ 與 $(-2, -2)$, 則二圓心連線之斜率與長各爲若干?

設圓心爲 $P(x, y)$, 則

$$(x-2)^2+(y-1)^2=16, \quad (x+2)^2+(y+2)^2=16.$$

解此聯立方程式，得圓心爲

$$\left(\frac{192\pm\sqrt{206064}}{200}, \frac{-267\mp\sqrt{206064}}{150}\right),$$

即 $\qquad (3.23, -4.81) \quad 及 \quad (-1.31, 1.25).$

其聯線之斜率爲 $-\frac{4}{3}$, 其長爲 $\frac{5}{600}\sqrt{206064}=3.78.$

21. 求直線 $x-2y=4$ 上與 $(1, -1)$ 相距 4 單位諸點之坐標。

與 $(1, -1)$ 相距 4 單位之點之軌跡爲

$$(x-1)^2+(y+1)^2=16.$$

與 $x-2y=4$ 之交點爲

$$\left(\frac{13+\sqrt{19}}{5}, \frac{-7+\sqrt{19}}{5}\right) \quad 及 \quad \left(\frac{13-\sqrt{19}}{5}, \frac{-7-\sqrt{19}}{5}\right).$$

22. 求距 $(2, 2)$ 4 單位而距 $(0, -1)$ 3 單位諸點之坐標。

距 $(2, 2)$ 4 單位之軌跡方程式爲

$$(x-2)^2+(y-2)^2=16.$$

距 $(0, -1)$ 3 單位之軌跡方程式爲

$$x^2+(y+1)^2=9.$$

其交點爲

$$\left(\frac{12\pm\sqrt{3888}}{26}, \frac{-12\mp\sqrt{3888}}{39}\right),$$

即 $\qquad (2.86, -1.91) \quad 及 \quad (-1.94, 129).$

第四章 直線

原本第 48—49 頁習題

1. 求下列各方程式之截部，斜率與傾角，並作圖:

(a) $2x+3y=5.$

截部 $x=0,\ y=\frac{5}{3};\ y=0,\ x=\frac{5}{2}.$

原式可寫爲 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}.$

故 $m=\tan\theta=-\frac{2}{3},\quad \theta=146°19'.$

(b) $2x+y=0.$

截部 $(0,0).$

原式可寫爲 $y=-2x.$

故 $m=-2,\quad \theta=116°34'.$

(c) $2y-3=0.$

截部 $\left(0,\frac{3}{2}\right).$

原式可寫爲 $y=\frac{3}{2}.$

故 $m=0,\quad \theta=0°.$

(d) $3x-5y=4.$

截部 $x=0,\ y=-\frac{4}{5};\ y=0,\ x=\frac{4}{3}.$

原式可寫爲 $y=\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}.$

故 $m=\frac{3}{5},\quad \theta=30°58'.$

(e) $5x+2y=3.$

截部 $\left(\frac{3}{5},0\right),\ \left(0,\frac{3}{2}\right).$

原式可寫爲 $y=-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}.$

故 $m=-\frac{5}{2},\quad \theta=111°48'.$

(f) $2x+5y=2.$

截部　$(1,\ 0)$, $\left(0,\ \frac{2}{5}\right)$,

原式可寫爲　$y=-\frac{2}{5}x+1.$

故　$m=-\frac{2}{5},\quad \theta=21°48'.$

(*g*)　$4x+7=0.$

截部　$\left(-\frac{7}{4},\ 0\right)$,

故　$m=\infty,\quad \theta=90°.$

2.　依下列已知條件，求直線之方程式並作圖：

(*a*)　$m=\frac{2}{3},\ b=1.$

$$y=\frac{2}{3}x+1.$$

$$2x-3y+3=0.$$

(*b*)　$m=-\frac{4}{3},\ b=2.$

$$y=-\frac{4}{3}x+2.$$

$$4x+3y-6=0.$$

(*c*)　$m=1,\ b=-3.$

$$y=x-3.$$

(*d*)　$\alpha=45°,\ b=\frac{5}{3}.$

$\alpha=45°$ 卽 $m=\tan\alpha=1.$

$y=x+\frac{5}{3}\qquad 3x-3y+5=0.$

(*e*)　$\alpha=60°,\ b=0.$

$\alpha=60°,\quad \tan\alpha=\sqrt{3}.$

$y=\sqrt{3}x.$

(*f*)　$\alpha=135°,\ b=-\frac{4}{3}.$

$\alpha=135°,\quad \tan\alpha=-1.$

$$y=-x-\frac{4}{3}.$$

$$3x+3y+4=0.$$

3. 求下列各直線之方程式:

(a) 平行於 $2x-y-5=0$ 而過 $(0, 0)$.

平行於 $2x-y-5=0$, 則其斜率當相同;即

$$y=2x-5,\ m=2 \text{ 而 } b=0.$$

故所求之直線為

$$y=2x.$$

(b) 平行於 $3x+4y-15=0$ 而過 $(0, 3)$.

$$3x+4y-15=0.$$

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{15}{4},\ m=-\frac{3}{4} \text{ 而 } b=3.$$

故 $$y=-\frac{3}{4}x+3 \text{ 即 } 3x+4y-12=0.$$

(c) 平行於 $5y-5x+12=0$ 而過 $(0, -3)$.

$$5y-5x+12=0.$$

$$y=x-\frac{12}{5},\ m=1 \text{ 而 } b=-3.$$

故 $$y=x-3.$$

(d) 平行於 $2x+y+7=0$ 而過 $(0, -4)$.

$$2x+y+7=0.$$

$$y=-2x-7,\ m=-2 \text{ 而 } b=-4.$$

故 $$y=-2x-4.$$

4. 求下列各直線之方程式:

(a) 垂直於 $3x-4y-5=0$ 而過 $(0, 2)$.

$$3x-4y-5=0.$$

即 $$y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}, \quad \text{故} \quad m=\frac{3}{4}.$$

所求之線之 $m'=-\dfrac{1}{m}=-\dfrac{4}{3}$ 而 $b=2$.

故 $$y=-\frac{4}{3}x+2 \text{ 即 } 4x+3y=2.$$

(b) 垂直於 $6x+5y=2$ 而過 $(0, 4)$.

$$y=-\frac{6}{5}x+\frac{2}{5},\ m=-\frac{6}{5},\ m'=\frac{5}{6},\ b=4.$$

故 $y=\frac{5}{6}x+4$ 卽 $5x-6y+4=0.$

(c) 垂直於 $x-2y=6$ 而過 $(0,\ -4)$.

$$y=\frac{1}{2}x-3,\ m=\frac{1}{2},\ m'=-2,\ b=-4.$$

故 $y=-2x-4$ 卽 $2x+y+4=0.$

(d) 垂直於 $y-3x=2$ 而過 $(0,\ -7)$.

$$y=3x+2,\ m=3,\ m'=-\frac{1}{3},\ b=-7.$$

故 $y=-\frac{1}{3}x-7$ 卽 $x+3y+7=0.$

5. 依下列已知條件,求直線之方程式:

(a) $m=-2$ 並過 $x+y=3$ 與 $2x-3y+9=0$ 之交點。

解 $x+y=3$ 與 $2x-3y+9=0$,得交點爲 $(0,3)$,而已知 $m=-2$,故得

$$y=-2x+3 \quad 卽 \quad 2x+y-3=0.$$

(b) $m=\frac{3}{2}$ 並過 $2x-y-2=0$ 與 $5y-5x+11=0$ 之交點.

此題解法此處尚未習過(需用第 25 節或第 32 節之方法),度 $5y-5x+11=0$ 中 11 或係 10 之誤.

解 $2x-y-2=0$ 與 $5y-5x+10=0$,得交點 $(0,\ -2)$,而已知 $m=\frac{3}{2}$,故得

$$y=\frac{3}{2}x-2 \quad 卽 \quad 3x-2y-4=0.$$

若依原式 $2x-y-2=0$ 與 $5y-5x+11=0$ 解之,得交點爲 $\left(-\frac{1}{5},-\frac{12}{5}\right)$,所求直線之斜率爲 $m=\frac{3}{2}$,則必平行於 $y=\frac{3}{2}x$. 設所求直線爲 $y=\frac{3}{2}x+b$,而交點 $\left(-\frac{1}{5},-\frac{12}{5}\right)$ 在直線上必合此方程式,故

$$-\frac{12}{5}=-\frac{3}{2}\times\frac{1}{5}+b. \quad b=-\frac{21}{10}.$$

故所求直線為

$$y=\frac{3}{2}x-\frac{21}{10} \quad \text{即} \quad 15x-10y-21=0.$$

6. 證明以 $3x-y+2=0$, $x+y+1=0$, $6x-2y-1=0$ 與 $2x+2y=7$ 為邊之四邊形為一平行四邊形．作其圖形．

$$3x-y+2=0, \qquad y=3x+2 \cdots\cdots(1)$$
$$x+y+1=0, \qquad y=-x-1 \cdots\cdots(2)$$
$$6x-2y-1=0, \qquad y=3x-\frac{1}{2} \cdots\cdots(3)$$
$$2x+2y=7, \qquad y=-x+\frac{7}{2} \cdots\cdots(4)$$

(1) 與 (3) 斜率相等，故平行；(2) 與 (4) 相等，亦平行；四邊兩兩平行，故為平行四邊形．

7. 證明以 $5x+2y+3=0$, $2x-5y+4=0$, $10x+4y=12$ 與 $6x-15y=8$ 為邊之四邊形為一矩形．作諸線．

$$5x+2y+3=0, \qquad y=-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2} \cdots\cdots(1)$$
$$2x-5y+4=0, \qquad y=\frac{2}{5}x+\frac{4}{5} \cdots\cdots(2)$$
$$10x+4y=12, \qquad y=-\frac{5}{2}x+3 \cdots\cdots(3)$$
$$6x-15y=8, \qquad y=\frac{2}{5}x-\frac{8}{15} \cdots\cdots(4)$$

(1) 與 (3) 平行，且同垂直於 (2) 與 (4)，故為矩形．

8. 證明以 $5x+3y=30$, $3x-4y=16$, $10x+6y=4$ 與 $2x-y+4=0$ 為邊之四邊形為一梯形．

$$5x+3y=30, \qquad y=-\frac{5}{3}x+10 \cdots\cdots(1)$$
$$3x-4y=16, \qquad y=\frac{3}{4}x-4 \cdots\cdots(2)$$
$$10x+6y=4, \qquad y=-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3} \cdots\cdots(3)$$
$$2x-y+4=0, \qquad y=2x+4 \cdots\cdots(4)$$

其中惟 (1) 與 (3) 斜率相等，即祇有二邊平行，故為梯形．

9. 用解析法證明適合下列各種已知條件之點之軌跡為一直線，並作其圖形：

(a) 與 x 軸及 y 軸之距離常成 4 與 5 之比。

$$x : y = 4 : 5.$$

$$4y = 5x \quad \text{為一直線。}$$

(b) 與兩軸距離之差等於 8.（有兩種情形）

$$y = x + 8, \quad y = x - 8.$$

(c) 與兩軸等距。

$$x = y.$$

(d) 與兩互相垂直之直線之距離，其和為一常數。

設兩互相垂直之直線為兩軸，則

$$x + y = k.$$

以上四題之答案均為 x, y 之一次式，故均為直線。

原本第 50—51 頁習題

1. 證明下列各方程式之軌跡為一對直線，並作其圖形：

(a) $xy = 0$.

分解因子，得 $x = 0$, $y = 0$, 故為兩直線。

(b) $x^2 - 5x - 6 = 0$.

分解因子，得 $(x-6)(x+1) = 0$. $x - 6 = 0$, $x + 1 = 0$.

(c) $9x^2 - 4y^2 = 0$.

$$3x - 2y = 0, \quad 3x + 2y = 0.$$

(d) $xy - 2x = 0$.

$$x = 0, \quad y - 2 = 0.$$

(e) $x^2 - 3xy = 0$.

$$x = 0, \quad x - 3y = 0.$$

(f) $xy - 2x^2 - 3x = 0$.

$$x = 0, \quad 2x - y + 3 = 0.$$

(g) $x^2 - 5xy + 6x = 0$.

$$x = 0, \quad x - 5y + 6 = 0.$$

(h) $4y^2 - x^2 - 8y + 4x = 0$.

$$2y + x = 0, \quad 2y + x - 4 = 0.$$

(i) $2x^2 - 3xy - 4x + 6y = 0$.

$$2x - 3y = 0, \quad x - 2 = 0.$$

(j) $x^2-4y^2+5x+10y=0.$

$$x-2y+5=0,\quad x+2y=0.$$

(k) $x^2+3xy+2y^2+x+y=0.$

$$x+2y+1=0,\quad x+y=0.$$

(l) $3y^2+xy-2x^2+6y-4x=0.$

$$y+x+2=0,\quad 3y-2x=0.$$

(m) $y^2-4xy-5x^2+2y-10x=0.$

$$y-5x=0,\quad y+x+2=0.$$

(n) $xy-3x+5y-15=0.$

$$x+5=0,\quad y-3=0.$$

2. 用上述定理,作下列各方程式之全部軌跡:

(a) $x^3+xy^2-4x=0.$

$$x(x^2+y^2-4)=0.$$

$x=0$ 爲一直線, $x^2+y^2-4=0$ 爲一圓.

(b) $x^3-6x^2+11x-6=0.$

原式析因子,得 $(x-1)(x-2)(x-3)=0$, 故爲三直線.

(c) $x^4-y^4=0.$

析因子,得 $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)=0$, 故爲二直線及一點.

(d) $(x^2+y^2-8)(xy+4)=0.$

$x^2+y^2-8=0$ 爲一圓, $xy+4=0$ 爲一雙曲線.

3. 一點移動時,與 $(-3,0)$ 及 $(2,4)$ 之距離之平方差常爲 8, 作其軌跡.

設動點爲 $P(x,y)$, 其距 $(-3,0)$ 及 $(2,4)$ 之距離爲

$$\sqrt{(x+3)^2+y^2}\ \text{及}\ \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}.$$

故依題意,得

$$(x+3)^2+y^2-(x-2)^2-(y-4)^2=\pm 8.$$

$$10x+8y-19=0\quad\text{或}\quad 10x+8y-3=0.$$

4. 一點移動時,與兩垂直線之距離之平方差爲零.當兩垂直線作爲坐標軸時,求其方程式並作其軌跡.

設動點爲 (x,y), 則

$$x^2-y^2=0.$$

$x-y=0$, $x+y=0$ 爲二直線.

5. 一點移動時,常與 $x-2=0$ 及 $y+4=0$ 兩線等距.求其方程式並作其軌跡.

設 (x_1, y_1) 爲動點，則與 $x-2=0$ 之距爲 x_1-2 而與 $y+4=0$ 之距爲 y_1+4 兩距相等，但可正可負，故得

$$x-2=\pm(y-4).$$

即 $$x-y-6=0 \text{ 或 } x+y+2=0.$$

原本第 54—55 頁習題

1. 求以下列條件所決定之各直線之方程式，並作圖：

(a) 過 $(3, 2)$ 而 $m=2$.

用點與斜率式，得

$$y-2=2(x-3).$$
$$2x-y-4=0.$$

(b) 過 $(-4, -3)$ 而 $m=\frac{3}{5}$.

同上，得

$$y+3=\frac{3}{5}(x+4).$$
$$3x-5y-3=0.$$

(c) 過 $(-7, 0)$ 而 $m=-3$.

$$y=-3(x+7).$$
$$3x+y+21=0.$$

(d) 過 $(4, 3)$ 與 $(-4, 1)$.

用二點式，得

$$\frac{y-3}{x-4}=\frac{3-1}{4+4}.$$
$$x-4y+8=0.$$

(e) 過 $(2, 5)$ 與 $(6, -5)$.

同上，得

$$\frac{y-5}{x-2}=\frac{5+5}{2-6}.$$
$$5x+2y-20=0.$$

(f) 過 $(-3, 4)$ 而 $a=-1$.

以 x, y 及 b 之値代入截部式，得

$$\frac{-3}{-1}+\frac{4}{b}=1. \quad b=-2.$$

故所求直線爲

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{-2}=1 \quad 即 \quad 2x+y+2=0.$$

(g) 過 $(-5,\ -7)$ 而 $b=3$.

同上，得

$$\frac{-5}{a}+\frac{-7}{3}=1. \quad a=-\frac{3}{2}.$$

$$-\frac{2x}{3}+\frac{y}{3}=1 \quad 即 \quad 2x-y+3=0.$$

(h) $a=-5,\ b=-4$.

$$\frac{x}{-5}+\frac{y}{-4}=1.$$

$$4x+5y+20=0.$$

(i) $m=-\frac{1}{3},\ b=-3$.

代入斜率截部式 $(y=mx+b)$，得

$$y=-\frac{1}{3}x-3.$$

$$x+3y+9=0.$$

(j) $a=5$，即經過 $(5,\ 0)$ 一點而 $m=\frac{2}{3}$.

$$y=\frac{2}{3}(x-5).$$

$$2x-3y-10=0.$$

(k) $a=10,\ b=-1\frac{1}{2}$.

$$\frac{x}{10}+\frac{2y}{-3}=1.$$

$$3x-20y-30=0.$$

2. 求一線之方程式並作圖，若此線：

(a) 過 $(4,\ 4)$ 而與 $x=y$ 平行.

$x=y$ 之斜率爲 $m=1$ 平行於此線，則 m 亦等於 1. 又經過 $(4,\ 4)$ 一點，故代入一點斜率式，得

$$y-4=x-4 \quad 即 \quad x=y.$$

(b) 過 $(-2, -5)$ 而與 $x-2y=7$ 垂直。

$x-2y=7$ 之斜率爲 $m=\frac{1}{2}$ 與之垂直，則 $m'=-2$, 故得

$$y+5=-2(x+2).$$
$$2x+y+9=0.$$

(c) 過 $(0, 5)$ 而與 $3x+4y=5$ 垂直。

$3x+4y=5$ 之斜率爲 $m=-\frac{3}{4}$ 與之垂直，則 $m'=\frac{4}{3}$, 故得

$$y-5=\frac{4}{3}x.$$
$$4x-3y+15=0.$$

(d) 過 $(4, -7)$ 而與 $3x+y+6=0$ 平行。

$3x+y+6=0$ 之斜率爲 $m=-3$ 與之平行，則 $m'=3$, 故得

$$y+7=3(x-4).$$
$$3x-y-19=0.$$

(e) 其 $a=-3$ 而與 $4x+7y=1$ 平行。

與 $4x+7y=1$ 平行，則 $m=-\frac{4}{7}$, $a=-3$, 卽經過 $(-3, 0)$, 故得

$$y=-\frac{4}{7}(x+3).$$
$$4x+7y+12=0.$$

(f) 其 $b=6$ 而與 $x-7y=4$ 平行。

與 $x-7y=4$ 平行，則 $m=\frac{1}{7}$, $b=3$, 卽經過 $(0, 6)$, 故得

$$y-6=\frac{1}{7}x.$$
$$x-7y+42=0.$$

(g) 連 $(2, 5)$ 至 $(-2, -3)$ 與 $(4, -6)$ 之中點。

$(-2, -3)$ 與 $(4, -6)$ 之中點爲 $\left(1, -\frac{9}{2}\right)$, 此點與 $(2, 5)$ 相聯之直線爲

$$\frac{y-5}{x-2}=\frac{5+\frac{9}{2}}{2-1}.$$
$$19x-2y-28=0.$$

3. 一三角形之頂點爲 $A(3,3)$, $B(-1,-5)$ 與 $C(6,0)$. 求其:

(a) 各邊之方程式。

用兩點式,可得

$$AB \text{ 爲 } \frac{y-3}{x-3}=\frac{3+5}{3+1} \quad \text{即} \quad 2x-y-3=0.$$

$$BC \text{ 爲 } \frac{y-0}{x-6}=\frac{0+5}{6+1} \quad \text{即} \quad 5x-7y-30=0.$$

$$AC \text{ 爲 } \frac{y-0}{x-6}=\frac{0-3}{6-3} \quad \text{即} \quad x+y-6=0.$$

(b) 各中線之方程式及其公共交點。

先求三邊之中點,得

$$BC \text{ 之中點 } D \text{ 爲 } \left(\frac{5}{2},\ -\frac{5}{2}\right).$$

$$AC \text{ 之中點 } E \text{ 爲 } \left(\frac{9}{2},\ \frac{3}{2}\right).$$

$$AB \text{ 之中點 } F \text{ 爲 } (1,\ -1).$$

仍用兩點式,得

$$AD \text{ 爲 } \frac{y-3}{x-3}=\frac{3+\frac{5}{2}}{3-\frac{5}{2}} \quad \text{即} \quad 11x-y-30=0\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$BE \text{ 爲 } \frac{y+5}{x+1}=\frac{-5-\frac{3}{2}}{-1-\frac{9}{2}} \quad \text{即} \quad 13x-11y-42=0\cdots\cdots(2)$$

$$CF \text{ 爲 } \frac{y-0}{x-6}=\frac{0+1}{6-1} \quad \text{即} \quad x-5y-6=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

解 (1), (3), 得交點爲 $\left(\frac{8}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$, 此點亦合於 (2), 故 (2) 亦經過此點,即爲三線之交點。

(c) 各高之方程式及其公共交點。

BC 之斜率爲 $m=\frac{5}{7}$, 故 BC 上之高之斜率爲 $m'=-\frac{7}{5}$, 故高之方程式爲

$$y-3=-\frac{7}{5}(x-3) \quad 即 \quad 7x+5y-36=0 \cdots\cdots\cdots(1)$$

AC 之斜率爲 $m=-1$, 故 $m'=1$.

$$y+5=x+1 \qquad 即 \qquad x-y-4=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

AB 之斜率爲 $m=2$, $m'=-\frac{1}{2}$.

$$y=-\frac{1}{2}(x-6) \quad 即 \quad x+2y-6=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

解 (2), (3), 得交點爲 $\left(4\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, 此點亦合於 (1), 故爲三線之公共交點.

(d) 各邊上中垂線之方程式及其公共交點.

BC 之中點爲 $D\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$, 斜率與高之斜率 $\left(-\frac{7}{5}\right)$ 相同, 故得 BC 上中垂線之方程式爲

$$y+\frac{5}{2}=-\frac{7}{5}\left(x-\frac{5}{2}\right) \quad 即 \quad 7x+5y=0.$$

AC 之中點爲 $E\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $m=1$, 故得 AC 上之中垂線爲

$$y-\frac{3}{2}=x-\frac{9}{2} \quad 即 \quad x-y-3=0.$$

AB 之中點爲 $F(1, -1)$, $m=-2$, 故得 AB 上之中垂線爲

$$y+1=-2(x-1) \quad 即 \quad 2x+y-1=0.$$

(e) 過頂點而平行於對邊諸線之方程式.

BC 之斜率爲 $\frac{5}{7}$, 故經過 A 而平行於 BC 之直線爲

$$y-3=\frac{5}{7}(x-3) \quad 即 \quad 5x-7y+6=0.$$

AC 之斜率爲 -1, 故經過 B 而平行於 AC 之直線爲

$$y+5=-(x+1) \quad 即 \quad x+y+6=0.$$

AB 之斜率爲 2, 故經過 C 而平行於 AB 之直線爲

$$y=2(x-6) \quad 即 \quad 2x-y-12=0.$$

(f) 連接各邊中點諸直線之方程式.

聯接 DE 之方程式爲

$$\frac{y+\frac{5}{2}}{x-\frac{5}{2}}=\frac{-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}-\frac{9}{2}} \quad \text{卽} \quad 4x-2y-15=0.$$

聯接 EF 之方程式爲

$$\frac{y+1}{x-1}=\frac{-1-\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{2}} \quad \text{卽} \quad 5x-7y-12=0.$$

聯接 DF 之方程式爲

$$\frac{y+1}{x-1}=\frac{-1+\frac{5}{2}}{1-\frac{5}{2}}, \quad \text{卽} \quad x+y=0.$$

(g) 連接分 AB 與 AC 各成 1 與 3 之比之二分點之直線之方程式.

分 AB 成 $1:3$ 之點爲 $(2, 1)$; 分 AC 成 $1:3$ 之點爲 $\left(\frac{15}{4}, \frac{9}{4}\right)$, 此兩點之聯線爲

$$\frac{y-1}{x-2}=\frac{1-\frac{9}{4}}{2-\frac{15}{4}} \quad \text{卽} \quad 5x-7y-3=0.$$

(h) 連接頂點 C 至分 AB 成 5 與 2 之比之分點之直線之方程式.

分 AB 爲 $5:2$ 之點爲 $\left(\frac{1}{7}, -\frac{19}{7}\right)$, 此點與 C 之聯線爲

$$\frac{y-0}{x-6}=\frac{0+\frac{19}{7}}{6-\frac{1}{7}} \quad \text{卽} \quad 19x-41y-114=0.$$

4. 設 $A(-3, 2)$, $B(3, -2)$ 與 $C(0, -1)$ 爲一三角形之頂點, 求題 3 中所需之方程式.

5. 三角形之頂點爲 $A(8, 0)$, $B(6, 4)$ 與 $C(-1, 3)$, 求題 3 中

所需之方程式.

(4), (5) 兩題與上題方法完法相同,茲再述其步驟如次:

(a) 於三頂點中取其二點之坐標,代入直線之二點式(§26),卽得一邊之方程式,三點取二,有三種取法,卽得三邊.

(b) 先自二點求其中點,與第三點代入直線之二點式,卽得中線方程式. 取二中線方程式解之,得一交點,此交點之坐標亦必適合第三中線方程式,可代入以驗之.

(c) 自一邊之方程式可得其斜率,因以得高之斜率,乃與對此邊之頂點同代入直線之點與斜率式(§25),卽得高之方程式,三邊三頂點可得三高,取其二解之,得一交點,此交點亦必適合第三高.

(d) 中垂線之斜率與高同,但經過各邊之中點亦以點與斜率式列出之,求交點法亦同.

(e) 亦用點與斜率式.

(f) 取(b)可得中點代入二點式.

(g), (h) 先依§10, 求二點代入二點式卽得.

6. 求任一正方形之兩對角線之方程式,並證其互相垂直.

令原點爲其一頂點,且令二邊在 x 軸及 y 軸上,且設其邊長爲 a, 則四頂點爲 $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, a) 及 $(0, a)$, 其對角線爲

聯 $(0, 0)$ 與 (a, a) 點,得

$$\frac{y}{x}=\frac{a}{a}, \qquad y=x \cdots\cdots\cdots(1)$$

聯 $(a, 0)$ 與 $(0, a)$ 點,得

$$\frac{y}{x-a}=\frac{a}{-a}, \qquad y=-x+a \cdots\cdots\cdots(2)$$

自(1) $m_1=1$, 自(2) $m_2=-1$, 斜率互爲負倒數,故互相垂直.

7. 求任一菱形之兩對角線之方程式,並證其互相垂直.

菱形之對邊平行且相等,故若一頂在原點,而一邊在 x 軸上,而邊長爲 a 時,則四頂點順次爲 $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(a+b, c)$, (b, c), 故對角線爲

$$\frac{y-0}{x-0}=\frac{c}{a+b}, \quad y=\frac{c}{a+b}x, \qquad m_1=\frac{c}{a+b};$$

$$\frac{y-0}{x-a}=\frac{-c}{a-b}, \quad y=-\frac{c}{a-b}(x-a), \quad m_2=-\frac{c}{a-b}.$$

但菱形之四邊均相等，故 $(0, 0)$ 至 (b, c) 之長亦爲 a，即 $b^2+c^2=a^2$ 乃得 $c=\sqrt{a^2-b^2}$ 代入之，得

$$m_1=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}=\frac{\sqrt{(a-b)(a+b)}}{a+b}=\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}},$$

$$m_2=-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b}=-\frac{\sqrt{(a-b)(a+b)}}{a-b}=-\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}.$$

故互相垂直。

8.　一平行四邊形之兩邊，其方程式爲 $2x+3y-7=0$ 與 $x-3y+4=0$. 一頂點爲 $(5, 5)$. 求其餘二邊之方程式。

此二邊不平行，故其餘二邊必各分別平行於此二邊，又此二邊皆不經過 $(5, 5)$，故其餘兩邊必皆經過此點。依點與斜率式，得

$$2x+3y-25=0,$$
$$x-3y+10=0.$$

9.　一平行四邊形之兩邊爲 $3x-y-2=0$ 與 $x-y-5=0$. 設一頂點爲 (1) $(4, 3)$；(2) $(-4, 3)$；(3) $(6, -4)$；(4) $(-3, -8)$；求其餘二邊之方程式。

(1)　依上法，得　$3x-y-9=0$,　$x-y-1=0$.

(2)　$3x-y+15=0$,　$x-y+7=0$.

(3)　$3x-y-22=0$,　$x-y-10=0$.

(4)　$3x-y+1=0$,　$x-y-5=0$.

10.　求從直線 $x-2y=8$ 至點 $(2, 1)$ 之垂直距離。

過 $(2, 1)$ 而垂直於 $x-2y=8$ 之直線爲 $y-1=-2(x-2)$，即 $2x+y=5$ 與 $x-2y=8$ 聯立解之，得交點爲 $x=\frac{18}{5}$, $y=-\frac{11}{5}$. 用距離公式，得 $d=\frac{8}{5}\sqrt{5}$.

11.　三角形之三邊爲 $8x+y+34=0$, $x-y+2=0$, $x+2y=7$, 求證其外接圓之圓心（外心），三中線之交點（重心）與三高之交點（垂心）在一直線上（諸點共線）。

由三方程式中任取二邊解之，得一頂點，三次得三頂點爲

$$A(-4,\ -2),\ B(1,\ 3)\ 及\ C(-5,\ 6).$$

因得各邊之中點爲

$$c\left(-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ b\left(-\frac{9}{2},\ 2\right)\ 及\ a\left(-2,\ \frac{9}{2}\right).$$

各邊之斜率爲

$$m_a=-\frac{1}{2},\ m_b=-8,\ m_c=1.$$

各邊上高及垂直等分線之斜率爲

$$m'_a=2,\ m'_b=\frac{1}{8},\ m'_c=-1.$$

各邊上之垂直等分線爲

$$B_a\quad y-\frac{9}{2}=2(x+2)\ \text{即}\ 4x-2y+17=0.$$

$$B_b\quad y-2=\frac{1}{8}\left(x+\frac{9}{2}\right)\ \text{即}\ 2x+16y+41=0.$$

解二方程式,得外心爲 $\left(-\frac{19}{6},\ \frac{13}{6}\right)$.

各邊上之高爲

$$h_a\quad y+2=2(x+4)\ \text{即}\ 2x-y+6=0.$$
$$h_c\quad y-6=-(x+5)\ \text{即}\ x+y-1=0.$$

解二式,得垂心爲 $\left(-\frac{5}{3},\ \frac{8}{3}\right)$.

各邊上之中線爲

$$M_a\quad \frac{y+2}{x+4}=\frac{-2-\frac{9}{2}}{-4+2}\ \text{即}\ 13x-4y+44=0.$$

$$M_c\quad \frac{y-6}{x+5}=\frac{6-\frac{1}{2}}{-5+\frac{3}{2}}\ \text{即}\ 11x+7y+13=0.$$

解二式,得重心爲 $\left(-\frac{8}{3},\ \frac{7}{3}\right)$.

取外心,垂心,重心三點中任二點立一直線方程式,以第三點代之亦能適合,即三線在一直線上,或以三點成三角形之面積等於 C 證之亦可.

$8x+y+34=0,\ m=-8,\ b\ m'=\frac{1}{8},\quad B\ (1,\ 3),\qquad b\left(-\frac{9}{2},\ 2\right).$

$x-y+2=0,\quad m=1,\qquad c\ m'=-1,\ C\ (-5,6),\qquad c\left(-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right).$

$x+2y-7=0,\ m=-\frac{1}{2},\ a\ m'=2,\qquad A\ (-4,\ -2),\ a\left(-2,\ \frac{9}{2}\right).$

$$B_a\quad 2y-9=4(x+2)\quad 即\quad 4x-2y+17=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$B_b\quad 8y-16=x+\frac{9}{2}\quad 即\quad 2x-16y+41=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解 (1), (2), 得

$$x=-3\frac{1}{6},\quad y=2\frac{1}{6}.$$

$$2(2y+4)=13x+52\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\frac{y-6}{x+5}=\frac{6-\frac{1}{2}}{-5+\frac{3}{2}}=-\frac{11}{7}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

解 (3), (4), 得

$$x=-\frac{8}{3},\quad y=\frac{7}{3}.$$

原 本 第 58—59 頁 習 題

1. ON (見第 55 頁上之圖)應在何象限內，若 $\sin\omega$ 與 $\cos\omega$ 皆爲正?皆爲負?若 $\sin\omega$ 爲正而 $\cos\omega$ 爲負?若 $\sin\omega$ 爲負而 $\cos\omega$ 爲正?

$\sin\omega$ 與 $\cos\omega$ 皆爲正，則 ω 在 $0°-90°$ 間，故 ON 在第一象限內；若皆爲負，則 ω 在 $180°-270°$ 間，故 ON 在第三象限內；若 $\sin\omega$ 爲正而 $\cos\omega$ 爲負，則 ω 在 $90°-180°$ 間，故 ON 在第二象限內；若 $\sin\omega$ 爲負而 $\cos\omega$ 爲正，則 ω 在 $270°-360°$ 間，故 ON 在第四象限內.

2. 求方程式並作其直線，其條件爲:

(*a*) $\omega=0°,\ p=5.$

方程式爲 $\qquad x\cos 0°+y\sin 0°-5=0,$

即 $\qquad\qquad x-5=0.$

(*b*) $\omega=\frac{3\pi}{2},\ p=3.$

方程式爲 $$x\cos\frac{3\pi}{2}+y\sin\frac{3\pi}{2}-3=0,$$

即 $$y+3=0.$$

(c) $\omega=\frac{\pi}{4}$, $p=3$.

方程式爲 $$x\cos 45^\circ+y\sin 45^\circ-3=0,$$

即 $$x+y-3\sqrt{2}=0.$$

(d) $\omega=45^\circ$, $p=4$.

代入法線式，得 $$x+y-4\sqrt{2}=0.$$

(e) $\omega=120^\circ$, $p=2$.

代入，得 $$\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-2=0 \quad 即 \quad x-\sqrt{3}y-4=0.$$

(f) $\omega=\frac{7\pi}{4}$, $p=4$.

代入，得 $$\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-4=0.$$

3. 化下列方程式爲法線式，求 p 與 ω，作其圖並於圖中驗之：

(a) $4x-3y+1=0$.

因 $A=4, B=-3, \pm\sqrt{A^2+B^2}=\pm 5$ 而 C 爲正，故取負號以除方程式之各項，得

$$-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{1}{5}=0.$$

$$\cos\omega=-\frac{4}{5},\ \sin\omega=\frac{3}{5};\ \ \omega=143^\circ 8',\ \ p=\frac{1}{5}.$$

(b) $3x+y-5=0$.

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{10},$$

$$\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}y-\frac{5}{\sqrt{10}}=0.$$

$$\cos\omega=\frac{3}{10}\sqrt{10},\ \sin\omega=\frac{1}{10}\sqrt{10};\ \ \omega=18^\circ 26',\ \ p=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

(c) $2x-y+3=0$.

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{5},$$

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{y}{\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{5}}=0.$$

$$\omega=153°26', \quad p=\frac{3}{5}\sqrt{5}.$$

(d) $4x-y+2=0.$

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{17},$$

$$-\frac{4}{\sqrt{17}}x+\frac{1}{\sqrt{17}}y-\frac{2}{\sqrt{17}}=0.$$

$$\omega=165°58', \quad p=\frac{2}{17}\sqrt{17}.$$

(e) $x+y-3=0.$

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{2},$$

$$\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}=0.$$

$$\omega=45°, \quad p=\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

(f) $4x-y=0.$

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{17},$$

$$\frac{4}{\sqrt{17}}x-\frac{1}{\sqrt{17}}y=0.$$

$$p=0, \quad \omega=165°58'.$$

(g) $x+4y=0.$

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{17},$$

$$\frac{1}{\sqrt{17}}x+\frac{4}{\sqrt{17}}y=0.$$

$$p=0, \quad \omega=75°58'.$$

4. 用公式 (V) 求自原點至下列諸直線之距離:

(a) $3x+4y-5=0.$

$$p=\frac{5}{\sqrt{3^2+4^2}}=1.$$

(b) $x+y-7=0.$

$$p=\frac{7}{\sqrt{2}}=\frac{7}{2}\sqrt{2}.$$

(c) $2x-y+4=0.$

$$p=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}\sqrt{5}.$$

5. 用公式 (V) 求題 4 中諸線之傾角.

(a) $\cos\omega=\frac{3}{5}$, $\sin\omega=\frac{4}{5}$, $\omega=53°8'$.

(b) $\cos\omega=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\omega=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\omega=45°$.

(c) $\cos\omega=-\frac{2}{5}\sqrt{5}$, $\sin\omega=\frac{1}{5}\sqrt{5}$, $\omega=153°26'$.

6. 若自原點至直線 $kx+y+7=0$ 之垂直距離爲 6 單位,求 k.

$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{k^2+1}$, $p=\frac{7}{\sqrt{k^2+1}}$. 但已知 $p=6$, 故

$$\frac{7}{\sqrt{k^2+1}}=6. \quad \therefore \quad k=\pm\frac{1}{6}\sqrt{13}.$$

7. ω 應爲何值,則 (V) 之軌跡平行於 x 軸? y 軸?

軌跡平行於 x 軸, ON 應垂直於 x 軸,故 ω 爲 90°, 270°.

軌跡平行於 y 軸, ON 應平行於 x 軸,故 ω 爲 0°, 180°.

8. 求下列諸直線之方程式:

(a) 與原點相距 7 單位而過 (7, 14).

設此直線爲 $x\cos\omega+y\sin\omega-7=0$, 此線通過 (7, 14), 故 (7, 14) 必合於此方程式,卽

$$7\cos\omega+14\sin\omega-7=0.$$

解之,得 $\sin\omega=0$ 或 $\frac{4}{5}$,

$\cos\omega=1$ 或 $-\frac{3}{5}$.

代入,得 $x-7=0$

及 $3x-4y+35=0$.

(b) 與原點相距 10 單位而過 (5, 10).

設此直線爲 $x\cos\omega+y\sin\omega-10=0$,

$5\cos\omega+10\sin\omega-10=0$.

解之,得 $\sin\omega=\frac{3}{5}$ 或 1,

$\cos\omega=\frac{4}{5}$ 或 0.

代入，得 $$4x+3y-50=0$$
及 $$y-10=0.$$

9. 求下列諸直線之方程式：

(a) $m=-3,\ p=10.$

設所求方程式爲 $y=mx+C$, $m=-3$.

代入，得 $y=-3x+C$ 卽 $3x+y-C=0.$

$p=-rC,\ r=\dfrac{1}{\pm\sqrt{10}},\ p=10,$ 故 $C=\pm 10\sqrt{10}.$

代入，得 $$3x+y\pm 10\sqrt{10}=0.$$

(b) 過 $(2, 5)$, $p=1$.

依題 8 法，得
$$2\cos\omega+5\sin\omega-1=0.$$
解之，得 $$2\sqrt{1-\sin^2\omega}=1-5\sin\omega.$$
$$\sin\omega=\frac{5\pm 4\sqrt{7}}{29}.$$
又 $$2\cos\omega-1=-5\sqrt{1-\cos^2\omega}.$$
$$\cos\omega=\frac{2\pm 10\sqrt{7}}{29}.$$
代入，得 $$(2\pm 10\sqrt{7})x+(5\pm 4\sqrt{7})y-29=0.$$

(c) $m=-2,\ p=5.$

同 (a)，得 $$2x+y-C=0.$$
$$p=5=-rC=\frac{C}{\pm\sqrt{5}},\ C=\pm 5\sqrt{5}.$$
代入，得 $$2x+y\pm 5\sqrt{5}=0.$$

10. 一圓以原點爲圓心而半徑爲 4，其一直徑之傾角爲 150°. 求切此圓於此直徑兩端之切線之方程式.

圓之切線垂直於切點之直徑，故所求切線之 ω 卽爲 150°，而切線與原點之垂直距離 p，卽爲半徑 $=\pm 4$，故代入法線式，卽得
$$x\cos 150^\circ+y\sin 150^\circ\pm 4=0,$$
卽 $$\sqrt{3}x-y\pm 8=0.$$

原本第 62—63 頁習題

1. 求從已知直線至已知點之垂直距離. 作圖並說明其結果之符號：

(a) $4x-y+2=0$ 至 $(3, 2)$.

$$r=-\sqrt{17}.$$

$$d=\frac{4x-y+2}{-\sqrt{17}}.$$

以 $(3, 2)$ 代入,得

$$d=\frac{12-2+2}{-\sqrt{17}}=-\frac{12}{17}\sqrt{17}.$$

$(3, 2)$ 與原點在直線之同側,故 d 爲負。

(b) $4x+y=0$ 至 $(-1, 3)$.

$$d=\frac{-4+3}{\sqrt{17}}=-\frac{\sqrt{17}}{17}.$$

(c) $3x+4y-5=0$ 至 $(5, 5)$.

$$d=\frac{3\times5+4\times5-5}{5}=6.$$

(d) $x+y-4=0$ 至 $(-2, -3)$.

$$d=-\frac{9}{2}\sqrt{2}.$$

(e) $2x-y+4=0$ 至 $(5, -2)$.

$$d=-\frac{16}{5}\sqrt{5}.$$

(f) $3x+4y-2=0$ 至 $(2, 7)$.

$$d=6\frac{2}{5}.$$

$(2, 7)$ 與原點在直線之兩側,故 d 爲正。

(g) $y-2x+1=0$, 即 $2x-y-1=0$ 至 $(-1, -3)$.

$d=0$ 即 $(-1, -3)$ 在直線上。

2. 求下列三角形中三高之長,其:

(a) 三邊爲 $a.\ 4x-3y+8=0$, $b.\ 12x-5y+8=0$, $c.\ 2x-y=0$.

解方程式,得三頂點爲 $A(-4, -8)$, $B(4, 8)$, $C(1, 4)$.

以三頂點及對邊代入距離公式,得

$$h_a=-\frac{16}{5},\quad h_b=-\frac{16}{13},\quad h_c=-\frac{2}{5}\sqrt{5}.$$

(b) 頂點爲 $A(8, 7)$, $B(4, -8)$, $C(2, 10)$.

先求三邊之方程式:

AB 爲 $15x-4y-92=0.$

BC 爲 $9x-5y-76=0.$

AC 爲 $x+2y-22=0.$

故三高之長爲

$$h_a=-\frac{39}{52}\sqrt{26},$$

$$h_b=-\frac{34}{5}\sqrt{5},$$

$$h_c=-\frac{102}{241}\sqrt{241}.$$

(c) 頂點爲 $A(1, 2), B(-2, 0), C(6, -1).$

先求三邊之方程式:

AB 爲 $2x-3y+4=0.$

BC 爲 $x+8y+2=0.$

AC 爲 $3x+5y-13=0.$

故三高之長爲

$$h_a=-\frac{19}{65}\sqrt{65}, \quad h_b=-\frac{19}{34}\sqrt{34}, \quad h_c=-\frac{19}{13}\sqrt{13}.$$

(d) 三邊爲 $a. \, 2x+3y=0$, $b. \, x+3y+3=0$, $c. \, x+y+1=0.$

將三式中兩式聯立解之,得 $A(0, -1), B(-3, 2), C(3, -2).$

代入公式,得三高之長爲

$$h_a=-\frac{3}{13}\sqrt{13}, \quad h_b=-\frac{3}{5}\sqrt{10}, \quad h_c=-\sqrt{2}.$$

3. 求題 2 諸三角形各內角之平分線之方程式. 證明在各情形中,三平分線皆過於一點:

(a) 設 $P(x, y)$ 爲任意一點,則 P 與 b 邊之距離爲

$$d_b=\frac{12x-5y+8}{\pm 13}.$$

而 P 與 c 邊之距離爲

$$d_c=\frac{2x-y}{\pm\sqrt{5}}.$$

設 P 點在 A 角之平分線上,則 $d_b=d_c$, 得平分線之方程式爲

$$\frac{12x-5y+8}{-13}=\frac{2x-y}{\sqrt{5}},$$

即 $(26+12\sqrt{5})x-(13+5\sqrt{5})y-8\sqrt{5}=0$ ....(1)

同樣， $d_a=\dfrac{4x-3y+8}{\pm 5}$.

因之，得 B 角之平分線為

$$\frac{4x-3y+8}{-5}=\frac{2x-y}{\sqrt{5}},$$

即 $(4+2\sqrt{5})x-(3+\sqrt{5})y+8=0$......................(2)

同樣，得 C 角之平分線為

$$\frac{4x-3y+8}{5}=\frac{12x-5y+8}{13},$$

即 $4x+7y-32=0$..................................(3)

[註] 〔此處 r 取正取負，可得相互垂直之二平分線，但在三角形，則一為內角平分線，一為外角平分線，何者為內角平分線可作成圖形，而決定其內角平分線之斜率應為正為負 (θ 小於 90° 抑大於 90°)，即直線方程式 x, y 兩項之係數應為異號抑同號．若依圖，該線之斜度小於 90°，即斜率為正，則取二線中 x, y 之係數為異號者為內角平分線，其另一條，則為外角平分線；反之若依圖，斜率為負，則 x, y 之係數為同號者為內角平分線．〕

解 (1), (2), (3) 中任兩式，得交點為

$$\left(-\frac{35+32\sqrt{5}}{28+18\sqrt{5}},\ \frac{74+32\sqrt{5}}{14+9\sqrt{5}}\right),$$

此點亦須適合於第三式．

(b), (c), (d) 解法相同．

4. 已知三角形之頂點，求其面積(底乘高折半)，並用第 15 節驗之。

(a) $A(7, 8)$, $B(-8, 4)$, $C(-2, -10)$.

先求 AB 之直線方程式，得

$$\frac{y-8}{x-7}=\frac{8-4}{7+8},$$

化簡，得 $4x-15y+92=0$.

C 點與 AB 之垂直距離為

$$h_c=\frac{-8+150+92}{\sqrt{16+225}}=\frac{234}{\sqrt{241}}.$$

AB 之長爲 $\sqrt{(7+8)^2+(8-4)^2}=\sqrt{241}.$

故三角形面積 $=\frac{1}{2}AB\times h_c=\frac{1}{2}\sqrt{241}\times\frac{234}{\sqrt{241}}=\mathbf{117}.$

以第 15 節驗之:

$$\text{面積}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}7 & 8 & 1\\ -8 & 4 & 1\\ -2 & -10 & 1\end{vmatrix}=117.$$

(b) $A(8,0)$, $B(0,-8)$, $C(-3,-3)$.

AB 之直線方程式爲 $\frac{y-0}{x-8}=\frac{0+8}{8-0}.$

$$x-y-8=0.$$

C 點與 AB 之距離爲 $h_c=\frac{-3+3-8}{\sqrt{2}}=-4\sqrt{2}.$

AB 之長爲 $8\sqrt{2}.$

$$\therefore\quad \text{面積}=\frac{1}{2}\cdot8\sqrt{2}\cdot4\sqrt{2}=32.$$

$$\text{又面積}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}8 & 0 & 1\\ 0 & -8 & 1\\ -3 & -3 & 1\end{vmatrix}=32.$$

(c) $A(5,-4)$, $B(-4,-5)$, $C(0,8)$.

同樣,得面積 $=54.$

(d) $A(3,1)$, $B(2,3)$, $C(1,2)$,

$$\text{面積}=1\frac{1}{2}.$$

5. 求以下各對平行線間之距離:

(a) $3x-y=10$, $3x-y=0$.

平行線間之垂直距離恆等,故可於一線任取一點(卽於一線上任設其縱坐標或橫坐標爲一數,而求其橫坐標或縱坐標,以得一點之坐標).再求此點與第二線之垂直距離,卽得二線之距離.

於 $3x-y=0$ 中設 $x=1$, 則 $y=3$, 故 $(1,3)$ 爲線上一點,此點與 $3x-y=10$ 之距離爲

$$\frac{3-3-10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}.$$

(b) $12x+5y-1=0,\ 12x+5y+7=0.$

第二法先求兩線至原點之垂直距離，而相減之。

$$d_1=\frac{1}{13},\quad d_2=-\frac{7}{13}.$$

相減，得 $\frac{8}{13}.$

(c) $3x-4y+1=0,\ 6x-8y-9=0.$

$$d_1=\frac{1}{5},\quad d_2=-\frac{9}{10}.$$

相減，得 $\frac{11}{10}.$

(d) $2x-7y+8=0,\ 4x-14y-3=0.$

$$d_1=-\frac{8}{\sqrt{53}},\quad d_2=\frac{3}{2\sqrt{53}}.$$

相減，得 $\frac{19}{106}\sqrt{53}.$

(e) $x-3y=0,\ 3x-9y=7.$

$x-3y=0$ 經過原點，故祇需求出一線至原點之距離，得

$$d=\frac{7}{3\sqrt{10}}=\frac{7}{30}\sqrt{10}.$$

(f) $y=mx+3,\ y=mx-3.$

$$d_1=\frac{3}{\sqrt{m^2+1}},\quad d_2=-\frac{3}{\sqrt{m^2+1}}.$$

相減，得 $\frac{6}{\sqrt{m^2+1}}.$

6. 證三角形之內角平分線遇於一點(共點)，其所設三邊爲:

(a) $4x-3y=12,\ 5x-12y-4=0,\ 12x-5y-13=0.$

依題 3 之方法，得三內角之平分線爲

$$7x-9y=16,\ 7x+7y=9,\ 112x-64y=221.$$

三線之公共點爲 $\left(\frac{193}{112},\ -\frac{7}{16}\right).$

(b) $5x-12y=0,\ 5x+12y+60=0,\ 12x-5y=60.$

$$\frac{5x-12y}{13}=\frac{5x+12y+60}{13}, \quad 2y+5=0.$$

$$\frac{5x-12y}{13}=\frac{12x-5y-60}{-13}, \quad 17x-17y-60=0.$$

$$\frac{5x+12y+60}{13}=\frac{12x-5y-60}{-13}, \quad 17x+7y=0.$$

三線之公共點爲 $\left(\frac{35}{34}, \quad -\frac{5}{2}\right)$.

(c) $x+2y-5=0,\ 2x-y-5=0,\ 2x+y+5=0.$

$$\frac{x+2y-5}{\sqrt{5}}=\frac{2x-y-5}{\sqrt{5}}, \quad x-3y=0.$$

$$\frac{x+2y-5}{\sqrt{5}}=\frac{2x+y+5}{-\sqrt{5}}, \quad 3x+y=0.$$

$$\frac{2x-y-5}{\sqrt{5}}=\frac{2x+y+5}{-\sqrt{5}}, \quad x=0.$$

三線之公共交點爲 $(0,\ 0)$.

(d) $3x+y-1=0,\ x-3y-3=0,\ x+3y+11=0.$

解法與 (a), (b), (c) 同.

7. 求一點之軌跡,此點:

(a) 至線 $3x+4y-5=0$ 之距離爲至線 $4x+3y=6$ 之距離之二倍.

設 (x, y) 爲所求軌跡上任意一點,則離 $3x+4y-5=0$ 爲

$$d_1=\frac{3x+4y-5}{5},$$

離 $4x+3y=6$ 爲 $d_2=\dfrac{4x+3y-6}{\pm 5}.$

但 $d_1=2d_2$, 故得

$$\frac{3x+4y-5}{5}=2\left(\frac{4x+3y-6}{\pm 5}\right).$$

$$5x+2y-7=0$$

及 $$11x+10y+17=0.$$

(b) 至線 $12x+5y-1=0$ 之距離爲至 y 軸之距離之三倍.

設 (x, y) 爲所求軌跡上一點,則離 $12x+5y-1=0$ 爲

$$\frac{12x+5y-1}{13},$$

離 y 軸之距離爲 x，故得

$$\frac{12x+5y-11}{13}=\pm 3x.$$

$$27x-5y+11=0,$$

$$51x+5y-11=0.$$

(c) 至線 $5x-12y=0$ 之距離爲至線 $12x-5y=60$ 之四倍.

$$\frac{5x-12y}{13}=4\left(\frac{12x-5y-60}{\pm 13}\right).$$

$$43x-8y-240=0,$$

$$53x-32y-240=0.$$

(d) 至線 $4x-3y+4=0$ 之距離爲至線 $5x+12y-8=0$ 之三分之二.

$$\frac{4x-3y+4}{5}=\pm\frac{2}{3}\left(\frac{5x+12y-8}{13}\right).$$

$$106x-137y+236=0,$$

$$206x+3y+76=0.$$

(e) 至線 $4x-3y+1=0$ 之距離爲至線 $5x-12y=0$ 之 n 倍.

$$\frac{4x-3y+1}{5}=\pm n\left(\frac{5x-12y}{13}\right).$$

$$(52-25n)x-(39-60n)y+13=0,$$

$$(52+25n)x-(39+60n)y+13=0.$$

8. 求下列三角形之內切圓之圓心及半徑而其:

(a) 三邊爲 $2x+y=12$, $2x-y=-4$, $x-2y-4=0$.

先求三角形二角之平分線，得

$$x-2=0 \quad 及 \quad x+3y-8=0.$$

解此兩方程式，得其交點爲 $(2, 2)$，卽爲內切圓之圓心，自此點至任一邊之距離，卽爲內切圓之半徑，故

$$R=\frac{4+2-12}{\sqrt{5}}=-\frac{6}{5}\sqrt{5}.$$

(b) 頂點爲 $(8, 1)$, $(2, 4)$, $(-2, -4)$.

以三頂點代入直線之二點方程式，得三邊之方程式爲

$$x+2y-10=0,\ 2x-y=0,\ x-2y-6=0.$$

更由三邊之方程式，求兩頂角之平分線為

$$3x+y-10=0 \quad 及 \quad y-1=0.$$

解此兩方程式，得其交點，卽內切圓心為 (3, 1).

此點至任一邊之距離卽半徑為

$$\frac{3+2-10}{\sqrt{5}}=-\sqrt{5}.$$

(c) 邊為 $2x+5y-22=0$, $5x-2y+32=0$, $2x-5y+26=0$.

解法與 (a) 同。

9. 計算多邊形之面積，其頂點為 (6, 1), (3, −10), (−3, −5), (−2, 0).

先將四點作圖，使順次為 $A(6,\ 1)$, $B(3,\ -10)$, $C(-3,\ -5)$, $D(-2,\ 0)$. 聯 AC 分此四角形為 ABC, ADC 兩三角形。

兩三角形在 AC 上之高為 AC 至 B 及 D 之距離，但 AC 之方程式為

$$\frac{y-1}{x-6}=\frac{1+5}{6+3} \quad 卽 \quad 2x-3y-9=0.$$

至 B 之距離為 $$\frac{6+30-9}{\sqrt{13}}=\frac{27}{\sqrt{13}}.$$

至 D 之距離為 $$\frac{-4-9}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}.$$

而 AC 之長為 $$\sqrt{(6+3)^2+(1+5)^2}=3\sqrt{13}.$$

故四邊形之面積為 $=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{13}\left(\frac{27}{\sqrt{13}}+\sqrt{13}\right)=\frac{81}{2}+\frac{39}{2}=60.$

10. 三角形之邊為 $x+4y-8=0$, $x-4y+10=0$, $4x-y-15=0$. 試證其一內角平分線與其他二頂點之外角平分線遇於一點(共點)。

參閱題 3 註，求二外角及一內角平分線，解三式之二求其交點，此點亦必適合第三式。

11. 求過題 11 中三角形內切圓之圓心而與三角形各邊平行諸直線之方程式。

求二內角平分線而解之卽得圓心，過此點而與各邊平行之方程式，可以直線之點與斜率式代入卽得。

12. 求題 11 中三角形各邊上距他二邊等遠之一點。

三角形一角之等分線上任何點，皆與夾此角之二邊等距，故取內角等分線之方程式與對邊解之，即得一邊上距他二邊等遠之點。

原本第65—66頁習題

1. 依下列條件，寫出其直線系之方程式：

(a) y 軸之截部為 -3.

$$y=mx-3.$$

(b) 斜率為 $-\frac{2}{3}$.

$$y=-\frac{2}{3}x+b.$$

(c) 通過 $(-2,\ -5)$.

$$y+5=m(x+2).$$

(d) x 軸之截部為 4.

$$y=m(x-4).$$

(e) 與原點相距 5.

$$x\cos\omega+y\sin\omega=5.$$

或設此方程式為　$Ax+By+C=0,$

而　$$\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=5,$$

即　$$C=\pm5\sqrt{A^2+B^2}.$$

故得　$$Ax+By\pm5\sqrt{A^2+B^2}=0.$$

(f) 二截部之和為 7.

設所求方程式為 $y=mx+b$, 則其兩截部為 $\left(-\frac{b}{m},0\right)$ 及 $(0,b)$.

$$b-\frac{b}{m}=7.\quad b=\frac{7m}{m-1}\quad 或\quad m=\frac{b}{b-7}.$$

代入，得　$$y=mx+\frac{7m}{m-1}\quad 或\quad y=\frac{b}{b-7}x+b.$$

(g) 二截部之差為 2.

此題可依上法，得 $b+\frac{b}{m}=2$ 而解之。

或設所求方程式為 $Ax+By+C=0$, 則兩截部為 $-\frac{C}{B}$ 及

$-\dfrac{C}{A}$.

其差為 2, 故得 $-\dfrac{C}{A}+\dfrac{C}{B}=2$ 卽 $C=\dfrac{2AB}{A-B}$.

或 $-\dfrac{C}{B}+\dfrac{C}{A}=2$ 卽 $C=\dfrac{2AB}{B-A}$.

故所求方程式為 $Ax+By\pm\dfrac{2AB}{A-B}=0$.

(h) 與二軸成一面積為 10 之三角形.

設所求方程式為 $Ax+By+C=0$, 兩截部為 $-\dfrac{C}{B}$, $-\dfrac{C}{A}$, 其所成三角形之面積為 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{C^2}{AB}=10$.

$$\therefore\quad C=\pm 2\sqrt{5AB}.$$

代入前式, 得 $Ax+By\pm 2\sqrt{5AB}=0$.

(i) 與二軸成一周界為 6 之三角形.

$Ax+By+C=0$, 兩截部為 $-\dfrac{C}{B}$, $-\dfrac{C}{A}$, 卽三角形之兩邊, 而弦 $=\pm\sqrt{\dfrac{C^2}{B^2}+\dfrac{C^2}{A^2}}=\pm\dfrac{C}{AB}\sqrt{A^2+B^2}$.

$$\text{周界}=-\frac{C}{B}-\frac{C}{A}\pm\frac{C}{AB}\sqrt{A^2+B^2}=6.$$

$$C=\frac{6}{-\dfrac{1}{B}-\dfrac{1}{A}\pm\dfrac{\sqrt{A^2+B^2}}{AB}}=\frac{6AB}{-A-B\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

代入前式, 得 $Ax+By+\dfrac{6AB}{-A-B\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$.

(j) 平行於 $5x-3y=6$.

$$y=\frac{5}{3}x-2.\qquad m=\frac{5}{3}.$$

$$y=\frac{5}{3}x+b$$

(*k*) 垂直於 $x+2y=8$.

$$y=-\frac{1}{2}x+4. \quad m=-\frac{1}{2}, \quad m'=2.$$

$$y=2x+b.$$

(*l*) 二截部之積爲 12.

$Ax+By+C=0$, 兩截部爲 $-\frac{C}{A}$, $-\frac{C}{B}$.

$$\therefore \quad \frac{C}{A}\cdot\frac{C}{B}=12, \quad C=\pm 2\sqrt{3AB}.$$

代入,得 $$Ax+By\pm 2\sqrt{3AB}=0.$$

(*m*) 原點至直線之垂直距離爲 3.

$$Ax+By+C=0, \quad \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=3, \quad C=\pm 3\sqrt{A^2+B^2}.$$

$$Ax+By\pm 3\sqrt{A^2+B^2}=0.$$

(*n*) 過 $x-y=6$ 與 $4x+3y=10$ 之交點.

二線之交點爲 $(4, -2)$, 故得 $y+2=m(x-4)$.

(*o*) 過 $(2, 2)$ 與 $(0, -6)$ 之中點.

$(2, 2)$ 與 $(0, -6)$ 之中點爲 $(1, -2)$, 故得

$$y+2=m(x-1).$$

(*p*) 平行於 $x\cos 45^\circ+y\sin 45^\circ=6$.

$$x\cos 45^\circ+y\sin 45^\circ=k.$$

(*q*) 垂直於 $3x-7y=3$.

同 (*k*).

(*r*) 垂直於 $y=mx+6$.

$$y=-\frac{1}{m}x+k.$$

(*s*) 垂直於 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

$$bx+ay=ab, \qquad y=-\frac{b}{a}x+b.$$

$$m=-\frac{b}{a}, \qquad m'=\frac{a}{b}.$$

$$y=\frac{a}{b}x+k.$$

(*t*) 切於圓心在原點而半徑爲 7 之圓.

即離原點 7 之直線系.

(*u*) x 軸上之截部爲 y 軸上之截部之三分之二.

$Ax+By+C=0$, 兩截部爲 $-\frac{C}{A}$, $-\frac{C}{B}$.

$$-\frac{C}{A}=-\frac{C}{B}\times\frac{2}{3}.$$

$$B=\frac{2}{3}A.$$

代入,得 $$Ax+\frac{2}{3}Ay+C=0.$$

$$3x+2y+k=0.$$

2. 用直線系方程式以求適合下列條件之直線之方程式:

(*a*) 過 $(4, 5)$ 而平行於 $x+3y=4$.

過 $(4,5)$ 之直線系方程式爲

$$y-5=m(x-4).$$

平行於 $x+3y=4$, 則 $m=-\frac{1}{3}$.

代入,得 $$y-5=-\frac{1}{3}(x-4).$$

$$x+3y-19=0.$$

(*b*) 過 $(-3, 2)$ 而平行於 $3x-2y=7$.

仿此,得 $$3x-2y+13=0.$$

(*c*) 過 $(5, -6)$ 而平行於 $2x-4y=3$.

$$x-2y-17=0.$$

(*d*) 過 $(-1, -2)$ 而垂直於 $x-4y=2$.

過 $(-1, -2)$ 之直線系方程式爲

$$y+2=m(x+1).$$

垂直於 $x-4y=2$, 故 $m=-4$.

代入,得 $$y+2=-4(x+1).$$

$$4x+y+6=0.$$

(e) 過 (1, 4) 而垂直於 $3x-5y+8=0$.

依上題法，得 $$5x+3y-17=0.$$

(f) 過 (2, 7) 而垂直於 $5x-y=4$.

$$x+7y+33=0.$$

3. 決定通徑 k 之數值，其條件為：

(a) $x-2y+k=0$ 而過 (4, 5).

此線過 (4, 5)，則 (4, 5) 必適合於此直線之方程式.

代入，得 $4-2\times5+k=0$ 即 $k=6$.

代入，得 $$x-2y+6=0.$$

(b) $y=kx-3$ 而平行於 $4x+12y=7$.

此線平行於 $4x+12y=7$ 即 $y=-\frac{4}{12}x+\frac{7}{12}$，故

$$k=-\frac{4}{12}=-\frac{1}{3}.$$

代入，得 $y=-\frac{1}{3}x-3$ 即 $x+3y+9=0$.

(c) $kx-y-2k=0$ 而過 $(5, -2)$.

以 $(5, -2)$ 代入原式，得 $5k-2-2k=0$, $k=\frac{2}{3}$.

代入，得 $\frac{2}{3}x-y-2\cdot\frac{2}{3}=0$, $2x-3y-4=0$.

(d) $4x+7y-2k=0$ 而與原點相距 7 單位.

$4x+7y-2k$ 與原點之距離為 $\frac{2k}{\sqrt{65}}$. 已知此值為 7，故

$$\frac{2k}{\sqrt{65}}=7, \quad k=\frac{7}{2}\sqrt{65}.$$

代入，得 $$4x+7y-7\sqrt{65}=0.$$

(e) $3x+4ky=7$ 而在 y 軸上之截部為 $\frac{1}{2}$.

y 軸上之截部為 $\frac{1}{2}$，即在此直線式中 $x=0$ 時，$y=\frac{1}{2}$.

代入，得 $4k\cdot\frac{1}{2}=7$, $k=\frac{7}{2}$.

(*f*) $kx+3y+8=0$ 而其斜率爲 $\frac{2}{3}$.

$$y=-\frac{k}{3}x-\frac{8}{3}.$$

斜率爲 $\frac{2}{3}$, 即 $-\frac{k}{3}=\frac{2}{3}$, 故 $k=-2$.

(*g*) $7x+2y+k=0$ 而其二截部之差爲 3.

截部爲 $\left(-\frac{k}{7},0\right)$ 及 $\left(0,-\frac{k}{2}\right)$, 其差爲 3, 即

$$-\frac{k}{7}+\frac{k}{2}=3 \quad 或 \quad -\frac{k}{2}+\frac{k}{7}=3.$$

即 $$k=\frac{42}{5} \qquad 或 \qquad k=-\frac{42}{5}.$$

(*h*) $2x+7y-k=0$ 而與二軸成一面積爲 3 之三角形.

截部爲 $\left(\frac{k}{2},0\right)$ 及 $\left(0,\frac{k}{7}\right)$, 所成三角形之面積爲

$$\frac{1}{2}\times\frac{k}{2}\times\frac{k}{7}=3, \qquad k=\pm 2\sqrt{21}.$$

(*i*) $4x-3y+3k=0$ 而與原點相距 3 單位.

$$\frac{6k}{\pm 5}=3, \qquad k=\pm 2\frac{1}{2}.$$

4. (1) 已知一平行四邊形之二邊爲 $3x-4y+6=0$ 與 $x+5y-10=0$ 及一頂點爲 (4, 9). 求其他二邊之方程式.

(4, 9) 不在已知之兩邊上, 故其他二邊必過 (4, 9) 而平行於已知之兩邊, 故祇須求過 (4, 9) 而分別平行於已知兩邊之直線方程式, 即得

$$3x-4y+24=0,$$
$$x+5y-49=0.$$

(2) 已知一平行四邊形之二邊爲 $3x+y-7=0$ 與 $x-2y+5=0$ 及一頂點爲 (4, 5). 求其餘二邊之方程式.

同 (1).

5. 過點 (3, 2) 之直線系方程式以求其中與二軸成一面積爲 $13\frac{1}{2}$ 之三角形之直線方程式。

與例題相同。

6. 一直線與二軸成一面積爲 2 之三角形而其二截部差爲 3. 求其方程式。

設 $Ax+By+C=0$ 爲所求之直線，則其截部爲 $-\frac{C}{A}$, $-\frac{C}{B}$, 因

得 $$-\frac{C}{A}+\frac{C}{B}=\pm 3 \quad 即 \quad C(A-B)=\pm 3AB.$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{C}{A}\cdot\frac{C}{B}=2 \quad 即 \quad C^2=4AB.$$

解之，得 $$A-B=\frac{3}{4}C, \quad A+B=\pm\frac{5}{4}C.$$

又 $$B-A=\frac{3}{4}C, \quad A+B=\pm\frac{5}{4}C.$$

$$\therefore \quad A=C, \quad -\frac{C}{4}, \quad \frac{C}{4}, \quad -C;$$

$$B=\frac{C}{4}, \quad -C, \quad C, \quad -\frac{C}{4}.$$

代入 $Ax+By+C=0$, 約去 C, 得

$$x+\frac{y}{4}+1=0, \quad \frac{x}{4}+y-1=0,$$

$$\frac{x}{4}+y+1=0, \quad x+\frac{y}{4}-1=0.$$

7. 求垂直於 $3x-4y=7$ 而適合於下列條件之直線方程式：

(a) 過 $(7, -6)$.

垂直於 $3x+4y=7$, 則 $m=\frac{4}{3}$, 其直線系爲

$$4x-3y=k.$$

過 $(7, -6)$, 則此點必合於此方程式。代入，得 $k=46$.

故得直線方程式爲

$$4x-3y=46.$$

(b) 與二軸成一面積爲 6 之三角形。

兩軸上之截部為 $\left(\frac{k}{4}, 0\right)$ 及 $\left(0, -\frac{k}{3}\right)$.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{4}\cdot\frac{k}{3}=6,\quad k=\pm 12.$$

故得　$$4x-3y=\pm 12.$$

(c) 與二軸成一周界為 10 之三角形.

$$弦=\sqrt{\frac{k^2}{16}+\frac{k^2}{9}}=\pm\frac{5}{12}k.$$

$$\frac{k}{4}+\frac{k}{3}\pm\frac{5}{12}k=10,\ k=10\ 或\ 60.$$

故得　$$4x-3y=0,\qquad 4x-3y=60.$$

(d) 自原點之距離為 4 單位.

$$4x-3y-k=0.$$

$$\frac{k}{\pm\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{k}{\pm 5}=4,\quad k=\pm 20.$$

故得　$$4x-3y=\pm 20.$$

(e) 自原點之垂直距離與自原點至已知直線者相同.

自原點之垂直距離 $=\frac{k}{\pm 5}$.

自原點至已知直線之垂直距離 $=\frac{7}{\pm 5}$.

故　$$\frac{k}{\pm 5}=\frac{7}{\pm 5},\quad k=\pm 7.$$

故得　$$4x-3y=\pm 7.$$

(f) x 軸之截部為 -7.

x 軸之截部為 -7, 卽過 $(-7, 0)$ 一點.代入,得　$k=28$.

$$4x-3y+28=0.$$

(g) 二截部之和為 14.

$$\frac{k}{4}+\frac{k}{3}=14,\quad k=24.$$

$$4x-3y=24.$$

(h) 被二軸所截線段之中點為 (3, 4).

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{k}{4}\right)=3,\quad k=-24.$$

或 $\frac{1}{2}\left(-\frac{k}{3}\right)=4,\quad k=-24.$

故得 $4x-3y+24=0.$

原本第68—69頁習題

1. 求過 $2x-3y+2=0$ 與 $3x-4y-2=0$ 之交點而適合於下列各條件之直線之方程式:

(*a*) 過原點.

過上兩線之交點之直線系為

$$2x-3y+2+k(3x-4y-2)=0 \qquad \cdots\cdots (1)$$

或 $$(3k+2)x-(4k+3)y-(2k-2)=0 \qquad \cdots\cdots (2)$$

過原點,則 $2k-2=0,\quad k=1.$

代入,得 $5x-7y=0.$

(*b*) 平行於 $5x-12y+3=0.$

平行於 $5x-12y+3=0$, 則二線之斜率應相等,即

$$\frac{3k+2}{4k+3}=\frac{5}{12},\quad k=-\frac{9}{16}.$$

代入 (2), 得 $5x-12y+50=0.$

(*c*) 垂直於 $3x+2y+4=0.$

垂直於 $3x+2y+4=0$, 則斜率 $=\frac{2}{3}$, 即

$$\frac{3k+2}{4k+3}=\frac{2}{3},\quad k=0.$$

代入 (1), 得 $2x-3y+2=0.$

2. 一三角形為直線 $2x-3y+1=0$, $x-y=0$ 與 $3x+4y-2=0$ 所成. 求過此三角形諸頂點而適合下列各條件之直線之方程式:

(*a*) 與對邊平行.

過三頂點之直線系方程式為

$$2x-3y+1+k_1(x-y)=0,\quad (k_1+2)x-(k_1+3)y+1=0.$$

$$2x-3y-1+k_2(3x+4y-2)=0,$$

$$(3k_2+2)x+(4k_2-3)y-(2k_2+1)=0.$$

$$3x+4y-2+k_3(x-y)=0,\quad (k_3+3)x-(k_3-4)y-2=0.$$

平行於對邊，則其斜率各為 $m_1=-\frac{3}{4}$, $m_2=-1$, $m_3=\frac{2}{3}$.

因得
$$\frac{k_1+2}{k_1+3}=-\frac{3}{4},\quad k_1=-\frac{17}{7}.$$
$$-\frac{3k_2+2}{4k_2-3}=-1,\quad k_2=5.$$
$$\frac{k_3+3}{k_3-4}=\frac{2}{3},\quad k_3=-17.$$

分別代入三式，得
$$3x+4y-7=0,$$
$$17x+17y-11=0,$$
$$14x-21y+2=0.$$

(b) 與對邊垂直.

與對邊垂直，則其斜率各為 $m_1=\frac{4}{3}$, $m_2=1$, $m_3=-\frac{3}{2}$.

因得
$$\frac{k_1+2}{k_1+3}=\frac{4}{3},\quad k_1=-6.$$
$$-\frac{3k_2+2}{4k_2-3}=1,\quad k_2=\frac{1}{7}.$$
$$\frac{k_3+3}{k_3-4}=-\frac{3}{2},\quad k_3=\frac{6}{5}.$$

分別代入，得
$$4x-3y-1=0,$$
$$17x-17y-9=0,$$
$$21x+14y-10=0.$$

3. 四邊形之邊為 $x+y-2=0$, $x-y+6=0$, $2x-y+3=0$ 與 $x-3y+2=0$. 求其對角線之方程式.

此題宜先作圖形，視四邊形之各頂點為何二線之交點，然後演算之，除書中所提示之方法外，若求其頂點而作聯線較為簡便，但此題目的在練習直線系之方法耳.

4. 求過 $2x+y=8$ 與 $3x+2y=0$ 之交點而適合下述情形之直線方程式:

(a) 垂直於 x 軸.

過交點之方程式為 $2x+y-8+k(3x+2y)=0$, 即
$$(3k+2)x+(2k+1)y-8=0.$$

垂直於 x 軸，則 y 之係數 $2k+1=0$, $k=-\frac{1}{2}$.

代入，得　$x-16=0.$

(*b*) 垂直於 y 軸。

垂直於 y 軸，則 x 之係數 $3k+2=0,\ k=-\dfrac{2}{3}.$

代入，得　$y+24=0.$

5. 平行四邊形之方程式為 $x+3y+2=0,\ x+3y-8=0,\ 3x-2y=0$ 與 $3x-2y-16=0.$ 求過一頂點而垂直於一對邊之直線之方程式.

取不平行之兩邊作直線系方程式：

$$x+3y+2+k(3x-2y)=0.$$
$$(3k+1)x-(2k-3)y+2=0.$$

其斜率為　$\dfrac{3k+1}{2k-3}.$

垂直於對邊，則其斜率當為 3 及 $-\dfrac{2}{3}$. 即

$$\frac{3k+1}{2k-3}=3,\qquad k=\frac{10}{3}.$$

又　$$\frac{3k+1}{2k-3}=-\frac{2}{3},\quad k=\frac{3}{13}.$$

代入，得　$$33x-11y+6=0,$$
$$22x+33y+26=0.$$

經過其他三頂點而垂直於對邊之直線可用同法求之，得

$$33x-11y-24=0,$$
$$22x+33y-104=0,$$
$$33x-11y-184=0,$$
$$22x+33y-152=0,$$
$$3x-y-14=0,$$
$$2x+3y-2=0.$$

6. 求過 $x+3y=10$ 與 $3x-y=0$ 之交點而與原點相距一單位之直線之方程式.

過已知直線之交點之直線系為

$$x+3y-10+k(3x-y)=0.$$
$$(3k+1)x-(k-3)y-10=0.$$

與原點之距離為　$$\frac{10}{\pm\sqrt{(3k+1)^2+(k-3)^2}}=1.$$

$$(3k+1)^2+(k-3)^2=100.$$
$$10k^2=90, \qquad k=\pm 3.$$

代入，得
$$x-1=0,$$
$$4x-3y+5=0.$$

7. 求過 $7x+7y=24$ 與 $x-y=0$ 之交點而與 x 軸有下列關係之直線之方程式：

(a) 成一周界為 12 之三角形.

直線系為
$$7x+7y-24+k(x-y)=0.$$
$$(7+k)x+(7-k)y-24=0.$$

在兩軸上之交點為 $\left(\dfrac{24}{7+k}, 0\right), \left(0, \dfrac{24}{7-k}\right)$.

三角形之弦 $=\sqrt{\dfrac{24^2}{(7+k)^2}+\dfrac{24^2}{(7-k)^2}}=\dfrac{24}{(7+k)(7-k)}\sqrt{98+2k^2}$.

周界為 12, 則 $\dfrac{24}{7+k}+\dfrac{24}{7-k}+\dfrac{24}{(7+k)(7-k)}\sqrt{98+2k^2}=12.$

解之，得 $k=\pm 1$ 及 ± 7. 但 $k=\pm 7$, 直線與二軸不成三角形，故不合用. 以 $k=\pm 1$ 代入上式，得
$$4x+3y-12=0, \quad 3x+4y-12=0.$$

(b) 同上法.

原 本 第 69—70 頁 習 題

1. 已知三角形之頂點為：

(a) $(2, 6)$, $(7, 1)$, $(-1, -3)$.

(b) $(2, 7)$, $(5, -3)$, $(-3, 2)$.

(c) $(-4, 5)$, $(-3, 8)$, $(4, 1)$.

(d) $(3, 5)$, $(-1, -2)$, $(6, -3)$.

(e) $(4, 13)$, $(16, 5)$, $(-1, -12)$.

(f) $(4, 3)$, $(2, -2)$, $(-3, 4)$.

(g) $(4, 0)$, $(2, 4)$, $(-5, 3)$.

(h) $(-3, -3)$, $(-2, 0)$, $(5, -7)$.

(i) $(5, 3)$, $(-3, 1)$, $(2, -6)$.

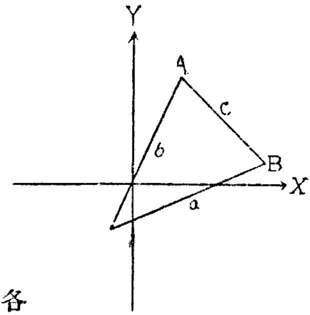
(j) $(-1, 15)$, $(11, 7)$, $(-6, 10)$.

求其 (1) 三邊之方程式，(2) 各邊之中垂線之方程式，(3) 三中線之方程式，(4) 三高之方程式，(5) 過頂點而平行於對邊諸線之方程式，(6) 三中線之長，(7) 三高之長，(8) 面積，(9) 三內角，

(10) 外接圓之方程式.

(a) $A\ (2, 6)$, $B\ (7, 1)$, $C\ (-1, -3)$.

1. 取 A, B 兩點之坐標,代入直線之二點式,即得 AB 一邊之方程式為



$$\frac{y-6}{x-2}=\frac{6-1}{2-7}, \qquad x+y-8=0.$$

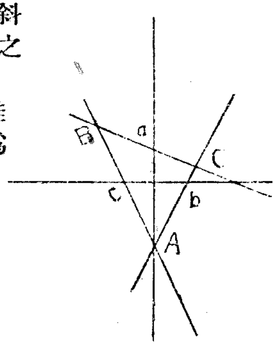
同樣,以 B, C 代入,則得

$$\frac{y-1}{x-7}=\frac{1+3}{7+1}, \qquad x-2y-5=0.$$

AC 為

$$\frac{y-6}{x-2}=\frac{6+3}{2+1}, \qquad 3x-y=0.$$

2. 各邊之中垂線之斜率為各該邊之斜率之負倒數,故自各邊之斜率可得中垂線之斜率,以之與中點之坐標代入點與斜率式即得,如



AB 之斜率為 $m=-1$, 則中垂線之斜率為 $m'=1$; AB 之中點為

$$x=\frac{2+7}{2}=\frac{9}{2}, \quad y=\frac{6+1}{2}=\frac{7}{2}.$$

故 AB 之中垂線為

$$y-\frac{7}{2}=x-\frac{9}{2}.$$

即 $\qquad x-y-1=0.$

同樣,得 BC 之斜率為 $m=\frac{1}{2}$, $m'=-2$, $x=3$, $y=-1$.

故得 BC 之中垂線為

$$y+1=-2(x-3) \text{ 即 } 2x+y-5=0.$$

$$AC \quad m=3, \quad m'=-\frac{1}{3}, \quad x=\frac{1}{2}, \quad y=\frac{3}{2}.$$

故得 AC 之中垂線為

$$y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

即 $\qquad x+3y-5=0$

3. 以一頂點與對邊中點之坐標代入二點式,即得中線之方程式,例如

A 爲 $(2, 6)$, BC 之中點爲 $(3, -1)$ 代入二點式,得

$$\frac{y-6}{x-2}=\frac{6+1}{2-3}, \quad 7x+y-20=0.$$

B 爲 $(7, 1)$, AC 之中點爲 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

$$\frac{y-1}{x-7}=\frac{1-\frac{3}{2}}{7-\frac{1}{2}}, \quad x+13y-20=0.$$

C 爲 $(-1, -3)$, AB 之中點爲 $\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

$$\frac{y+3}{x+1}=\frac{-3-\frac{7}{2}}{-1-\frac{9}{2}}, \quad 13x-11y-20=0.$$

4. 三角形之高經過頂點而垂直於對邊,即並行於中垂線,故以頂點之坐標與對邊中垂線之斜率代入點與斜率式,即得.

A 爲 $(2, 6)$, BC 中垂線之斜率爲[自 (2)] $m'=-2$.

代入,得 $\quad y-6=-2(x-2).$

即 $\quad 2x+y-10=0.$

B 爲 $(7, 1)$, AC 爲 $m'=-\frac{1}{3}$.

代入,得 $\quad y-1=-\frac{1}{3}(x-7).$

$$x+3y-10=0.$$

C 爲 $(-1, -3)$, AB 爲 $m'=1$.

$$y+1=x+3.$$

$$x-y+2=0.$$

5. 以頂點與對邊之斜率代入同式.

A 爲 $(2, 6)$ BC 之斜率爲 $m=\frac{1}{2}$, 故所求直線爲

$$y-6=\frac{1}{2}(x-2).$$

即 $$x-2y+10=0.$$

B 爲 $(7,1)$, AC 之斜率 $m=3$.

$$y-1=3(x-7).$$
$$3x-y-20=0.$$

C 爲 $(-1,-3)$, AB 之斜率爲 $m=-1$.

$$y+3=-(x+1).$$
$$x+y+4=0.$$

6. 以頂點與對邊中點之坐標代入距離公式，即得中線之長.

$$M_a=\sqrt{(2-3)^2+(6+1)^2}=5\sqrt{2}.$$

$$M_b=\sqrt{\left(7-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{170}.$$

$$M_c=\sqrt{\left(\frac{9}{2}+1\right)^2+\left(\frac{7}{2}+3\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{290}.$$

7. 以一直線與一點之距離公式，可得三高之長。

A 爲 $(2,6)$, BC 爲 $x-2y-5=0$.

$$h_a=\frac{2-12-5}{\sqrt{5}}=-3\sqrt{5}.$$

B 爲 $(7,1)$, AC 爲 $3x-y=0$.

$$h_b=\frac{21-1}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}.$$

C 爲 $(-1,-3)$, AB 爲 $x+y-8=0$.

$$h_c=\frac{-1-3-8}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}.$$

8. 面積以三頂點代入公式.

$$\text{面積}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & 6 & 1\\ 7 & 1 & 1\\ -1 & -3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0 & 3\\ 7 & 1 & 1\\ -1 & -3 & 1\end{vmatrix}=\frac{3}{2}\begin{vmatrix}7 & 1\\ -1 & -3\end{vmatrix}=30.$$

9. 以各邊之斜率代入 §14 角之公式，可得夾角之正切，由此可求角度.但此處正切爲正爲負須作圖後，視何者爲內角或外角而定之，再三角之正切至多祇有一角爲負或全爲正.

圖中三角形之三角均爲銳角，故三角之正弦均應爲正.

$$m_c=-1, \qquad m_b=3.$$

$$\therefore\ \tan A=\frac{-1-3}{1-3}=2.$$

此處 A 爲銳角,故 $\tan A$ 不爲 $\frac{3+1}{1-3}=-2$, 卽 $A=\tan^{-1}2=63°26'$ 而非 $\tan^{-1}(-2)=116°34'$.

$$m_c=-1,\qquad m_a=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\ \tan B=\frac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}}=3,\quad B=\tan^{-1}3=71°34'.$$

$$m_a=\frac{1}{2},\qquad m_b=3.$$

$$\tan C=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}}=1,\quad C=45°.$$

$$A+B+C=63°26'+71°34'+45°=180°.$$

10. 自中垂線之交點可得外接圓之圓心,自此點至任一頂點之距離卽爲外接圓之半徑,以 (x, y) 爲圓上任一點代入距離公式,卽得圓之方程式.

解中垂線 $x-y-1=0$, $2x+y-5=0$, $x+3y-5=0$ 中任二式,代入第三式驗之,得公共點爲 $(2, 1)$, 此點與三頂點之距離相等,卽 $\sqrt{(2-2)^2+(6-1)^2}=5$. 設 (x, y) 爲外接圓上一點,

則
$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=5.$$
$$x^2+y^2-4x-2y=20.$$

(b) — (j) 解法相同.

2. 已知三角形之頂點爲:

(a) $(2, 4)$, $(8, 4)$, $(6, 0)$.

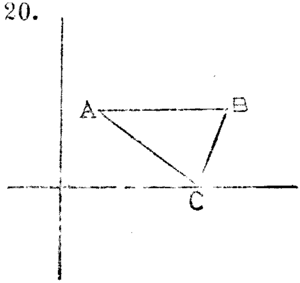
(b) $(0, -4)$, $(6, -2)$, $(5, -6)$.

(c) $(0, 3)$, $(6, 0)$, $(4, 4)$.

(d) $(3, -2)$, $(3, -6)$, $(0, -3)$.

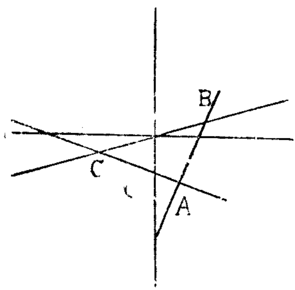
(e) $(8, 1)$, $(2, 4)$, $(-2, -4)$.

(f) $(-6, -30)$, $(36, 10)$, $(24, 10)$.



(*g*) $(5, 5)$, $(-5, 8)$, $(-7, -2)$.

求其 (1) 三邊之方程式，(2) 各邊之中垂線之方程式，(3) 三內角平分線之方程式，(4) 外接圓之方程式，(5) 內切圓之方程式.



(*a*) $A\ (2, 4)$, $B\ (8, 4)$, $C\ (6,0)$.

1. 同題 $1(a)1$, 得

$AB \quad y-4=0.$

$BC \quad 2x-y-12=0.$

$AC \quad x+y-6=0.$

2. 同題 $1(a)2$, 得 AB 之中點爲 $(5, 4)$, $m=0$, $m'=\infty$.

故 AB 上中垂線爲 $\quad x-5=0.$

BC 之中點爲 $(7, 2)$, 斜率 $m=2$, $m'=-\dfrac{1}{2}$.

$$x+2y-11=0.$$

AC 之中點爲 $(4, 2)$, 斜率 $m=-1$, $m'=1$.

$$x-y-2=0.$$

3. 內角平分線上之任意點與二邊等距,故可設 (x, y) 爲內角平分線上任意一點而求與二邊之距離並使相等而化簡之.

設 (x, y) 爲 A 角平分線上一點,則與 b, c 二邊之距離爲

$$\frac{x+y-6}{\pm\sqrt{2}} \text{ 及 } \pm(y-4).$$

相等,則 $x+(1-\sqrt{2})y-6+4\sqrt{2}=0.$

或 $\qquad x+(1+\sqrt{2})y-(6+4\sqrt{2})=0.$

觀圖，A 角之等分線斜率爲負,故第一式不合.

同樣,得 B 角之等分線爲

$$\frac{2x-y-12}{\pm\sqrt{5}}=y-4.$$

$$2x-(1+\sqrt{5})y-12+4\sqrt{5}=0.$$

C 角之等分線爲

$$\frac{2x-y-12}{\pm\sqrt{5}}=\frac{x+y-6}{\sqrt{2}}.$$

$(2\sqrt{2}+\sqrt{5})x+(\sqrt{5}-\sqrt{2})y-12\sqrt{2}-6\sqrt{5}=0$

4. 同題 $1(a)10$.

中垂線之公交點爲 $(5,3)$，外接圓半徑爲 $\sqrt{10}$，故外接圓爲

$$\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}=\sqrt{10}.$$

$$x^2+y^2-10x-6y+24=0.$$

5. 自內角平分線之交點得內切圓之圓心，此點至任一邊之垂直距離，即爲內切圓之半徑。

解 $x+(1+\sqrt{2})y-(6+4\sqrt{2})=0$ 及 $2x-(1+\sqrt{5}y)-12+4\sqrt{5}=0$ 得

$$x=\frac{18+16\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{3+2\sqrt{2}+\sqrt{5}},\qquad y=\frac{4\sqrt{5}+8\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}+\sqrt{5}}.$$

$$d=\frac{4\sqrt{10}}{(3+2\sqrt{2}+\sqrt{5})\sqrt{4+2\sqrt{2}}}.$$

內接圓爲
$$\left(x-\frac{18+16\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{3+2\sqrt{2}+\sqrt{5}}\right)^2+\left(y-\frac{4\sqrt{5}+8\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}+\sqrt{5}}\right)^2$$
$$=\frac{160}{(3+2\sqrt{2}+\sqrt{5})^2(4+2\sqrt{2})}.$$

(b) – (g) 作法相同。

3. 已知三角形之三邊爲：

(a) $x+4y-8=0,\ x-4y+10=0,\ 4x-y-15=0.$

(b) $4x-3y-4=0,\ 3x+4y-8=0,\ 5x-12y-60=0.$

(c) $3x+4y-10=0,\ 8x-6y+3=0,\ 12x+5y+15=0.$

(d) $5x+12y-24=0,\ 12x+5y+7=0,\ 5x-12y-48=0.$

(e) $5x-12y-42=0,\ 12x+5y-2=0,\ 5x+12y-66=0.$

(f) $7x+y-7=0,\ 5x-5y+19=0,\ x+7y+15=0.$

(g) $4x-3y+25=0,\ 5x-12y+1=0,\ 3x+4y-5=0.$

(h) $12x+5y+50=0,\ 5x+12y-16=0,\ 5x-12y-16=0.$

(i) $x+2y-5=0,\ 2x+y-7=0,\ x-2y-9=0.$

(j) $3x+y-7=0,\ x+3y-5=0,\ x-3y+1=0.$

求其 (1) 三內角，(2) 三內角平分線之方程式，(3) 三外角平分線之方程式，(4) 內切圓之方程式。

(a) (1), (2), (4) 與上題相同；(3) 求內角平分線時，另一條與之垂直者，即爲外角平分線。

第五章 圓

原本第 76—78 頁習題

1. 求下列各圓之方程式:

(*a*) 圓心爲 (0, 1) 而半徑爲 3.

代入 §34 (1), 得 $(x-0)^2+(y-1)^2=3^2$.

$$x^2+y^2-2y-8=0.$$

(*b*) 圓心爲 (7, 2) 而半徑爲 5.

$$x^2+y^2-14x-4y+28=0$$

(*c*) 圓心爲 (−6, 4) 而半徑爲 7.

$$x^2+y^2+12x-8y+3=0.$$

(*d*) 圓心爲 (−4, −8) 而半徑爲 8.

$$x^2+y^2+8x+16y+16=0$$

2. 決定下列各方程式之軌跡並作其圖形:

(*a*) $x^2+y^2-8x-9=0$.

將原式配方成完全平方,得

$$(x-4)^2+y^2=25.$$

故其軌跡爲圓,圓心爲 (4, 0), 半徑爲 5.

(*b*) $x^2+y^2+8y-9=0$.

$$x^2+(y+4)^2=25.$$

故其軌跡爲圓,圓心爲 (0, 4), 半徑爲 5.

(*c*) $x^2+y^2-2x+2y+2=0$.

$$(x-1)^2+(y+1)^2=0.$$

此方程式惟 $x=1$, $y=-1$ 能適合,故其軌跡爲 (1, −1) 一點,稱爲點圓.

(*d*) $x^2+y^2-4x+6y=0$.

$$(x-2)^2+(y+3)^2=13,$$

圓心爲 (2, −3), 半徑爲 $\sqrt{13}$ 之一圓.

(*e*) $2x^2+2y^2+34x-5y+2=0$.

$$(x+6)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=35\frac{25}{16}.$$

$$(x+6)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\sqrt{65}\right)^2.$$

圓心爲 $\left(-6,\frac{5}{4}\right)$，半徑爲 $\frac{3}{4}\sqrt{65}$.

(f) $5x^2+5y^2-10x+4y-1=0$.

$$(x-1)^2+\left(y+\frac{2}{5}\right)^2=\frac{34}{25}.$$

圓心爲 $\left(1,-\frac{2}{5}\right)$，半徑爲 $\frac{1}{5}\sqrt{34}$.

(g) $x^2+y^2=2rx$.

$$(x-r)^2+y^2=r^2.$$

圓心爲 $(r,0)$，半徑爲 r.

3. 求由下列情形所定之圓之方程式：

(a) 過 $(6,-6)$，$(-1,-5)$，$(7,-5)$.

設圓之方程爲 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，已知三點均在圓上，故

$$36+36+6D-6E+F=0,\qquad 6D-6E+F+72=0.$$
$$1+25-D-5E+F=0,\qquad D+5E-F-26=0.$$
$$49+25+7D-5E+F=0,\qquad 7D-5E+F+74=0.$$

解此三聯立方程，得 $D=-6$, $E=4$, $F=-12$.

代入，得 $x^2+y^2-6x+4y-12=0$.

(b) 過 $(2,1)$，$(3,-2)$，$(-4,0)$.

解法同 (a).

(c) 過 $(-1,1)$ 與 $(1,3)$ 而圓心在 x 軸上.

二點在圓上，得

$$1+1-D+E+F=0,\qquad D-E-F-2=0.$$
$$1+9+D+3E+F=0,\qquad D+3E+F+10=0.$$

又圓心在 x 軸上，則 $E=0$.

故得 $D=-4$, $F=-6$.

代入，得 $x^2+y^2-4x-6=0$.

(d) 圓心爲 $(1,3)$ 而切於 $2x+y+5=0$.

切於一線，則自此線至圓心之距離卽爲半徑，故

$$r=\frac{2+3+5}{\sqrt{13}}=\frac{10}{13}\sqrt{13}.$$

代入，得 $(x-1)^2+(y-3)^2=\frac{100}{13}$.

$$13x^2+13y^2-26x-78y+30=0.$$

(*e*) 圓心為 $(3,-5)$ 而切於 $x-7y+2=0$.

與 (*d*) 同,得 $x^2+y^2-6x+10y+2=0.$

(*f*) 過 $(-1,1)$ 而圓心為 $x+3y+7=0$ 與 $3x-2y-12=0$ 之交點.

解二直線方程式,得圓心為 $(2,-3)$.

半徑為二點間之距離 $=\sqrt{9+16}=5$.

代入,得 $(x-2)^2+(y+3)^2=25.$

(*g*) 切於兩軸而半徑為 4.(有四解)

切於二軸而半徑為 4, 則圓心為 $(4,4)$, $(4,-4)$, $(-4,4)$, $(-4,-4)$.

代入,得
$$(x-4)^2+(y-4)^2=16,$$
$$(x-4)^2+(y+4)^2=16,$$
$$(x+4)^2+(y-4)^2=16,$$
$$(x+4)^2+(y+4)^2=16.$$

(*h*) 以 $(4,7)$ 與 $(2,-3)$ 之連線為直徑.

此兩點之中點為 $(3,2)$ 而半徑為 $\frac{1}{2}\sqrt{(4-2)^2+(7+3)^2}=\sqrt{26}$.

代入,得 $(x-3)^2+(y-2)^2=26.$

(*i*) 過 $(4,2)$ 與 $(-6,-2)$ 而圓心在 y 軸上.

與 (*c*) 同,
$$x^2+y^2+5y-30=0.$$

(*j*) 過頂點為 $(a,0)$, $(b,0)$ 與 $(0,c)$ 之三角形三邊之中點.

該三角形三邊之中點為 $\left(\frac{a+b}{2},0\right)$, $\left(\frac{a}{2},\frac{c}{2}\right)$, $\left(\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$. 代入圓之方程,得 D, E, F 之三聯立方程解之,得 D, E, F 之值代入圓之方程,得 $x^2+y^2-\frac{a+b}{2}x+\frac{ab-c^2}{2c}y=0.$

4. 求由下列情形所定之圓之方程式:

(*a*) 外接於頂點為 $(4,3)$, $(3,-3)$, $(-1,2)$ 之三角形.

卽經過該三點之圓,解法與題 3(*a*), (*b*) 同.

(*b*) 一三角形為兩軸與 $x+2y=4$ 所成,求其外接圓.

此三角形之三頂點為兩軸之交點及該直線在兩軸上之截部,

卽 $(0,0)$, $(0,2)$ 及 $(4,0)$. 以之代入圓之方程而解 D, E, F 或 h, k, r 卽得.

(c) 外接於三邊爲 $x=y$, $2x-y=2$, $2x+3y-3=0$ 之三角形.

外接於一三角形，卽經過三頂點. 故當先求三角形之三頂點，然後代入 I 或 (2) 解 D, E, F 或 h, k, r.

三角形之三頂點爲 $(2,2)$, $\left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $\left(\frac{9}{8}, \frac{1}{4}\right)$, 皆在圓上，故

$$4+4+2D+2E+F=0, \quad 2D+2E+F+8=0.$$

$$\frac{9}{25}+\frac{9}{25}+\frac{3D}{5}+\frac{3E}{5}+F=0, \quad 15D+15E+25F+18=0.$$

$$\frac{81}{64}+\frac{1}{16}+\frac{9D}{8}+\frac{E}{4}+F=0, \quad 9D+2E+8F+\frac{85}{8}=0.$$

解之，得 $D=-\frac{111}{40}$, $E=-\frac{97}{40}$, $F=\frac{12}{5}$.

代入化簡之，得

$$40x^2+40y^2-111x-97y+96=0.$$

(d) 過 $(5,-3)$ 與 $(0,6)$ 而圓心在 $2x-3y=6$ 上.

依例題 (2), 得三聯立方程式:

$$(5-h)^2+(-3-k)^2=r^2,$$
$$(0-h)^2+(6-k)^2=r^2,$$
$$2h-3k=6.$$

解之，得 $h=19$, $k=\frac{32}{3}$, $r=\frac{1}{3}\sqrt{3445}$.

代入，得 $3x^2+3y^2-114x-64y+276=0$.

或以下列理解解之：二點均在圓上，則此二點與圓心之距離必相等，故圓心必在此二點聯線之中垂線上，立中垂線之方程式與 $2x-3y=6$. 解之得圓心，更求圓心與二點之距離爲半徑，立圓之方程式.

(e) 切於 x 軸，半徑爲 5 而圓心在 $x=6$ 上.

切於 x 軸，半徑爲 5，則圓心必在 $y=\pm 5$ 上與 $x=6$ 解之，得圓心爲 $(6,5)$ 及 $(6,-5)$，故圓爲

$$(x-6)^2+(y-5)^2=5^2, \quad x^2+y^2-12x-10y+36=0.$$
$$(x-6)^2+(y+5)^2=5^2, \quad x^2+y^2-12x+10y+36=0.$$

(f) 過 $(5,1)$ 與 $(3,-2)$ 而圓心在 $x+2y=3$ 上.

與 (d) 同。

(g) 切於 $4x+7y=4$ 而圓心在原點。

求原點與該線之距離，即得半徑。

5. 證明下列軌跡爲圓，並求其圓心與半徑。

(a) 一點移動時，其至 $(3,0)$ 與 $(-3,0)$ 之距離之平方和常爲 68.

設 (x,y) 爲此動點，其離 $(3,0)$ 與 $(-3,0)$ 之距離爲

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2} \text{ 及 } \sqrt{(x+3)^2+y^2}.$$

其平方和爲 68, 故

$$(x-3)^2+y^2+(x+3)^2+y^2=68.$$

化簡之，得 $$x^2+y^2=25.$$

圓心爲 $(0,0)$, 半徑爲 5.

(b) 一點移動時，其至 $(4,5)$ 與 $(-4,3)$ 之距離常成 3 與 2 之比。

設 (x,y) 爲此動點，則其至 $(4,5)$ 及 $(-4,3)$ 之距離爲

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2} \text{ 及 } \sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2}.$$

其比爲 $3:2$, 故

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2} : \sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2}=3:2.$$

$$5x^2+5y^2+104x-14y+61=0.$$

圓心爲 $\left(-\frac{52}{5}, \frac{7}{5}\right)$, 半徑爲 $\frac{1}{5}\sqrt{52^2+7^2-305}=\frac{4}{5}\sqrt{153}.$

(c) 一點移動時，其至 $(2,-1)$ 之距離常爲至 $(0,4)$ 之距離之半。

設 (x,y) 爲此動點，則

$$2\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=\sqrt{x^2+(y-4)^2}.$$

即 $$3x^2+3y^2-16x+16y+4=0.$$

化成 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, 即得圓心爲 (h,k), 半徑爲 r.

(d) 一點移動時，其至 y 軸之距離爲至 $(1,-3)$ 距離之平方之四倍。

設 (x,y) 爲此動點，則

$$x=4\{(x-1)^2+(y+3)^2\}.$$

即 $$4x^2+4y^2-9x-24y+40=0.$$

求圓心與半徑之法見上。

(e) 一點移動時，其至 $3x+4y-1=0$ 之距離常等於至 $(2, 3)$ 距離之平方.

設 (x, y) 爲軌跡上一點，則其至 $3x+4y-1=0$ 之距離爲 $\dfrac{3x+4y-1}{5}$，其至 $(2, 3)$ 之距離之平方爲 $(x-2)^2+(y-3)^2$ 相等,故

$$\frac{3x+4y-1}{5}=(x-2)^2+(y-3)^2.$$

即 $$5x^2+5y^2-23x-34y+66=0.$$

(f) 一點移動時，其至 $x+y=6$ 之距離之平方常等於由兩軸及該點至兩軸之垂線所成之矩形之面積.

設 (x, y) 爲軌跡上一點，則其至 $x+y=6$ 之距離爲 $\dfrac{x+y-6}{\sqrt{2}}$，而兩軸及該點至兩軸垂線所成矩形面積爲 xy，故得

$$\left(\frac{x+y-6}{\sqrt{2}}\right)^2=xy.$$

$$x^2+y^2-12x-12y+36=0.$$

圓心爲 $(6, 6)$，半徑爲 6.

(g) 已知斜邊兩端點爲 $(0, -4)$ 與 $(6, 3)$ 之直角三角形,其直角頂之軌跡.

設 (x, y) 爲軌跡上一點,則依勾^2＋股^2＝弦^{2}定理,得

$$x^2+(y+4)^2+(x-6)^2+(y-3)^2=6^2+(3+4)^2.$$

$$x^2+y^2-6x+y=12.$$

(h) 一點至兩線 $x-2y=7$ 與 $2x+y=3$ 之距離之平方和爲 7.

設 (x, y) 爲軌跡上一點,則

$$\left(\frac{x-2y-7}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{2x+y-3}{\sqrt{5}}\right)^2=7.$$

$$5x^2+5y^2-26x+22y+23=0.$$

6. 求內切圓之方程式,其三角形之邊如下:

(a) $x+2y=5$, $2x-y=5$, $2x+y+5=0$.

內切圓之圓心爲內角分角線之交點，半徑爲此點與三邊之距離,故先求二分角線

$$\frac{x+2y-5}{\sqrt{5}}=\frac{2x-y-5}{\sqrt{5}},\quad x=3y;$$

$$\frac{2x-y-5}{\sqrt{5}}=\frac{2x+y+5}{\sqrt{5}},\quad y=0.$$

其交點即內接圓之圓心為 $(0, 0)$, 半徑為 $\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

內切圓之方程式為

$$x^2+y^2=5.$$

(b) $3x+y=1,\ x-3y=3,\ x+3y+11=0.$

兩內角平分線為

$$2x-y-2=0,\quad 3y+7=0.$$

交點即圓心為 $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{7}{3}\right)$, 半徑為 $\frac{23}{6\sqrt{10}}$.

故圓之方程式為

$$\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\left(y+\frac{7}{3}\right)^2=\frac{529}{360}.$$

(c) $3x+4y=22,\ 4x-3y+29=0,\ y-5=0.$

兩內角分角線為

$$7x+y+7=0,\quad 3x+9y-47=0.$$

其交點為 $\left(-\frac{11}{9}, \frac{35}{6}\right)$, 半徑為 $\frac{5}{6}$.

故圓之方程式為

$$36x^2+36y^2+132x-420y+1321=0.$$

(d) $x=0,\ y=0,\ x+y=7.$

與 (c) 同.

7. 求下列各圓之方程式:

(a) 切 $4x+3y-70=0$ 於 $(10, 10)$ 而半徑為 10.

圓心在過 $(10, 10)$ 而垂直於 $4x+3y-70=0$ 之直線, 即

$$y-10=\frac{3}{4}(x-10).$$

$$3x-4y+10=0.$$

設圓心為 (h, k), 則

$$3h-4k+10=0.$$

又已知圓心至 $4x+3y-70=0$ 之垂直距離為 10, 故

$$\frac{4h+3k-70}{5}=\pm 10.$$

解 h 與 k，得 $h=18,\ k=16$ 或 $h=2,\ k=4$.

代入圓之方程式，得

$$x^2+y^2-36x-32y+480=0,$$

$$x^2+y^2-4x-8y-80=0.$$

(b) 切 $3x-4y=19$ 及 $4x+3y=17$ 而過 $(3, 2)$.

設圓為 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

切於已知兩線，則圓心在兩線夾角之分角線上。兩線之分角線為

$$\frac{3x-4y+19}{5}=\frac{4x+3y-17}{\pm 5}.$$

即

$$x+7y-36=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$7x-\ \ y+\ \ 2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

觀圖，圓心不能在 $x+7y-36=0$ 上，故必在 $7x-y+2=0$ 上。以 (h, k) 代之當相合，故

$$7h-k+2=0.$$

(h, k) 與任一直線之距離 $(3h-4k-19)/5$ 應與 (h, k) 至 $(3, 2)$ 之距離 $\sqrt{(h-3)^2+(k-2)^2}$ 相等，故

$$\frac{3h-4k-19}{5}=\sqrt{(h-3)^2+(k-2)^2}.$$

簡之，得 $16h^2+24hk+9k^2-36h-252k-36=0 \cdots\cdots(3)$

解 (2), (3), 得 $h=6,\quad k=6.$

或 $h=5\frac{13}{25},\quad k=2\frac{16}{25}.$

代入距離公式，得 $r=5$ 或 $\frac{1}{5}\sqrt{19}$.

故所求圓之方程式為

$$x^2+y^2-21x-12y+47=0$$

及 $25x^2+25y^2-276x-132y+857=0.$

(c) 切 $x+3y=26$ 於 $(8, 6)$ 而過 $(-2, -4)$.

設所求圓之方程式為

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

此圓之圓心為 $\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right).$

切 $x+3y=26$ 於 $(8, 6)$，則圓心必在過 $(8, 6)$ 而垂直於此線之直線上，即

$$y-6=3(x-8),\quad 3x-y-18=0.$$

故圓心之坐標當合於此方程式，即

$$3D-E+36=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

又此圓過 $(8,6)$ 及 $(-2,-4)$ 兩點，故

$$64+36+8D+6E+F=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$4+16-2D-4E+F=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

解 (1), (2), (3)，得

$$D=-11,\quad E=3,\quad F=-30$$

代入得圓之方程式為

$$x^2+y^2-11x+3y-30=0.$$

8. 用解析法證明半圓內圓周角為一直角.

設圓心為 $(0,0)$，半徑為 a，直徑之兩端為 $(a,0)$ 及 $(-a,0)$. 設 (x_1,y_1) 為圓周上任一點，則自此點至直徑兩端之直線為

$$\frac{y-0}{x-a}=\frac{0-y_1}{a-x_1} \text{ 及 } \frac{y-0}{x+a}=\frac{0-y_1}{-a-x_1}.$$

其斜率為 $\qquad m=\dfrac{y_1}{x_1-a}$ 及 $m'=\dfrac{y_1}{x_1+a}$.

代入夾角公式，得其夾角為

$$\tan\theta=\frac{\dfrac{y_1}{x_1-a}-\dfrac{y_1}{x_1+a}}{1+\dfrac{y_1}{x_1-a}\cdot\dfrac{y_1}{x_1+a}}=\frac{2ay_1}{x_1^2+y_1^2-a^2}.$$

但 (x_1,y_1) 在圓上，故 $x_1^2+y_1^2-a^2=0$.

$$\tan\theta=\frac{2ay_1}{0}=\infty.$$

故 $\theta=90^\circ$.

9. 用解析法證明一直線與圓之交點不能多於二點.

圓之方程式為二次式，直線之方程式為一次式，二者之交點為二式之公解，但二次式與一次式之公解至多祇有二組，故交點至多祇有二點.

10. 用解析法證明三角形三邊中點之圓，必通過此三角形三高之足並等分各頂點至三高交點之連接線.(九點圓)

設三角形之三頂點為 $(0,0)$, $(a,0)$, (b,c)，則三邊之中點為

$$\left(\frac{a}{2},0\right),\left(\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right),\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right).$$

一垂足爲 $(b, 0)$，餘二垂足可自二邊之方程式及相當高之方程式解之，而得 $\left(\frac{ab^2}{b^2+c^2}, \frac{ab^2}{b^2+c^2}\right)$ 及 $\left(\frac{ac^2}{c^2+(a^2+b^2)}, \frac{2ac(a-b)}{c^2+(a-b)^2}\right)$.

又解三角形之二高之方程式，可得其垂心，由此可求得垂心與三頂點之中心爲

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b(a-b)}{2c}\right), \left(b, \frac{b(a+b)+c^2}{2c}\right) \text{ 及 } \left(b, \frac{b(a-b)}{2c}\right).$$

然後以此中任三點求一圓之方程式，更以其他六點代入，證其均合於此方程式。

11. 設一點移動時，其至二定點之距離之平方和爲一常數。證其軌跡爲一圓。

設二定點爲 (a, b) 及 (c, d) 而動點爲 (x, y)，則

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(x-c)^2+(y-d)^2=k,$$

$$x^2+y^2-(a+c)x-(b+d)y+\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+k}{2}=0.$$

此方程式合於圓之標準方程式，故爲一圓。

12. 一點移動時，其與二固定垂線之距離之平方和爲一常數。證其軌跡爲一圓。

設二垂直線爲
$$Ax+By+C=0,$$
$$Bx-Ay+D=0.$$

設動點爲 (x, y)，則其至二線之距離爲

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \text{ 及 } \frac{Bx-Ay+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

其平方之和爲一常數，故

$$\frac{(Ax+By+C)^2}{A^2+B^2}+\frac{(Bx-Ay+D)^2}{A^2+B^2}=k.$$

展開整理之，得

$$x^2+y^2+\frac{2(AC+BD)}{A^2+B^2}x+\frac{2(BC-AD)}{A^2+B^2}y+\frac{C^2+D^2-k(A^2+B^2)}{A^2+B^2}$$

$=0$；故爲一圓。

13. 一點移動時，其至二定點之距離之比爲一常數，則其軌跡爲何？

設 (a, b), (c, d) 爲二定點, (x, y) 爲動點,則

$$\frac{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}{\sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}}=k.$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=k^2(x-c)^2+k^2(y-d)^2.$$

$(k^2-1)x^2+(k^3-1)y^2+2(a-k^2c)x+2(b-k^2d)y-a^2-b^2+k^2c^2+k^2d^2=0$, 故爲一圓.

14. 一點移動時,其至一定點距離之平方,與至一定線之距離成比例,則其軌跡爲何?

設 (a, b) 爲一定點, $(x\ y)$ 爲動點,則其間距離爲

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b^2)}.$$

又設 $Ax+By+C=0$ 爲一定直線,則自 (x, y) 點至此直線之距離爲

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

依題意,得 $(x-a)^2+(y-b)^2=k\left(\dfrac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right).$

$$x^2+y^2-\frac{2a\sqrt{A^2+B^2}+Ak}{\sqrt{A^2+B^2}}x-\frac{2b\sqrt{A^2+B^2}+Bk}{\sqrt{A^2+B^2}}y$$

$$+\frac{(a^2+b^2)\sqrt{A^2+B^2}-Ck}{\sqrt{A^2+B^2}}=0.$$

15. 已知一線段之長爲 $2a$, 移動時其兩端常在二垂線上,則其中點之軌跡爲何?

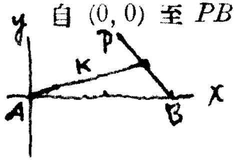
設二垂直線卽爲兩軸,已知長爲 $2a$ 之線段與兩軸成一直角三角形,設此線段之中點爲 (x, y), 此點與三頂點等距,故距 $(0, 0)$ 亦爲 a, 因得

$$x^2+y^2=a^2 \text{ 爲一圓.}$$

16. 一三角形其底固定,若一中線至底之一端之長爲一常數,則其頂點之軌跡爲何?

設三角形之底在 x 軸上,且令一頂點爲 $A\ (0, 0)$, 一頂點爲 $B(a, 0)$.

設 $P(x, y)$ 爲軌跡上任一點,則 PB 之中點爲 $\left(\dfrac{a+x}{2}, \dfrac{y}{2}\right)$.



自 $(0, 0)$ 至 PB 之中線之長爲

$$\sqrt{\left(\frac{a+x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2}=k.$$

$$x^2+y^2+2ax+a^2-4k^2=0.$$

17. 用解析法證明圓周上一點至直徑之垂線，分直徑成兩線段，而此垂線爲兩線段之比列中項。

設 (x, y) 爲 $x^2+y^2=a^2$ 圓周上任意一點，取 x 軸爲直徑，則 (x, y) 至 x 軸之垂線長 y，而此垂足分直徑爲 $a+x$ 及 $a-x$ 兩分，自圓之方程式

$$x^2+y^2=a^2.$$

$$y^2=a^2-x^2.$$

$$y^2=(a+x)(a-x).$$

故 y 爲 $a+x$ 及 $a-x$ 之比例中項

18. 用解析法證明圓中一半徑垂直於一弦，則平分此弦。

設圓之方程式爲 $x^2+y^2=a^2$，弦之方程式爲 $Ax+By+C=0$，解之得其交點，即弦之兩端爲

$$x=\frac{-AC\pm\sqrt{A^2C^2-(A^2+B^2)(C^2-a^2)}}{A^2+B^2},$$

$$y=\frac{-B^2C\mp 2A\sqrt{A^2C^2-(A^2+B^2)(C^2-a^2)}}{B(A^2+B^2)}.$$

此兩點之中點爲 $\left(\dfrac{-AC}{A^2+B^2}, \dfrac{-BC}{A^2+B^2}\right)$.

垂直於弦之半徑(經原點)爲 $Bx-Ay=0$.

以中點之値代入此方程式能適合，故該弦之中點亦在其垂線上．但兩直線祇能有一交點，故弦之垂直半徑平分此弦．

19. 設 $(3, -5)$ 爲圓 $x^2+y^2=277$ 之一弦之中點，則此弦之方程式與長爲何？

此圓之圓心爲原點，半徑爲 $\sqrt{277}$.

$(3, -5)$ 爲一弦之中點，則垂直於該弦之直線必經過 $(3, -5)$ 及 $(0, 0)$，因得方程式

$$5x+3y=0.$$

垂直於此線而經過 $(3, -5)$，即所求弦之方程式爲

$$3x-5y-34=0.$$

半徑之長爲 $\sqrt{277}$，弦中點至圓心之長爲 $\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$，故弦長爲

$$2\sqrt{277-34}=18\sqrt{3}.$$

原本第 80—81 頁習題

1. 求下列各對圓之根軸之方程式，並作此圓與根軸：

(a) $x^2+y^2+2y-4=0$ 與 $x^2+y^2-2y-4=0$.

根軸為 $$y=0.$$

第一圓之圓心為 $(0,-1)$，第二圓為 $(0,-1)$，半徑為 $\sqrt{5}$.

(b) $x^2+y^2-4=0$ 與 $x^2+y^2+2x-3=0$.

根軸為 $$2x+1=0.$$

(c) $x^2+y^2-3x-5y-8=0$ 與 $x^2+y^2+8x=0$.

$$11x+5y+8=0.$$

(d) $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 與 $x^2+y^2+mx+ny+p=0$.

$$(m+a)x+(n-b)y+p-c=0.$$

2. 求題 1 中各對圓之公共弦之長：

(a) 求根軸與任一圓之兩交點，即為兩圓之交點，此兩交點之距離，即為公共弦之長.

$$y=0,\qquad x=\pm 2.$$

故 $$l=4.$$

(b) — (d) 同上.

3. 求下列各組中每對圓之根軸，並證其遇於一點：

(a) $x^2+y^2+4x+7=0$, $2x^2+2y^2+3x+5y+9=0$, $x^2+y^2+y=0$.

第一，二兩圓之根軸為 $x-y+1=0$ ………………………… (1)

第二，三兩圓之根軸為 $x+y+3=0$ ………………………… (2)

第一，三兩圓之根軸為 $4x-y+7=0$ ………………………… (3)

解 (1)，(2)，得交點 $(-2,-1)$ 亦適合 (3)，故三線共點.

(b) $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2+6x-8y=0$, $x^2+y^2+6x-8=0$.

三根軸之方程式為

$$5x-4y=0,\quad 5y-4=0\quad 及\quad y-1=0.$$

三線公點 $\left(\frac{4}{5},1\right)$.

(c) $x^2+y^2-9=0$, $3x^2+3y^2-6x+8y-1=0$, $x^2+y^2+8y=0$.

(d) $x^2+y^2+4x-3y+5=0$, $2x^2+2y^2+5x-6y+1=0$, $x^2+y^2+5x-4y+5=0$.

(c)，(d) 與上同.

4. 證明題 1 中各對圓之連心線垂直於其根軸：

(a) 根軸爲 $y=0$ 而連心線爲 $x=0$，故垂直。

(b) 同上。

(c) 兩圓之圓心爲 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 及 $(-4, 0)$，故連心線爲

$$5x-11y+20=0.$$

根軸爲 $2x+1=0$，故互相垂直。

(d) 同上。

5. 證明題 1 中自每對圓之根軸上一定點至兩圓之切線，其長相等：

(a) 設 (x, y) 爲根軸上一點，則

$$t_1=x_1^2+y_1^2+2y_1-4,$$
$$t_2=x_1^2+y_1^2-2y_1-4,$$
$$t_1-t_2=4y_1.$$

但 (x_1, y_1) 在根軸上，故 $y_1=0$，故 $t_1-t_2=0$，即 $t_1=t_2$.

(b) − (d) 仿此。

6. 求下列切線之長：

(a) 從 $(7, 2)$ 至圓 $x^2+y^2-4=0$.

代入公式，得

$$t=\sqrt{7^2+2^2-4}=\sqrt{7^2}=7.$$

(b) 從 $(-3, 2)$ 至圓 $x^2+y^2-6x-2y=0$.

(c) 從 $(1, 1)$ 至圓 $2x^2+2y^2+2x+4y-1=0$.

(d) 從 $(-4, 0)$ 至圓 $x^2+y^2-6x+2y-3=0$.

(b) − (d) 同上。

7. 用解析法證任意三圓中其各對圓之根軸遇於一點。

設任意三圓各爲

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0,$$
$$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0,$$
$$x^2+y^2+D_3x+E_3y+F_3=0.$$

每二圓之根軸則爲

$$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0,$$
$$(D_2-D_3)x+(E_2-E_3)y+F_2-F_3=0,$$
$$(D_3-D_1)x+(E_3-E_1)y+F_3-F_1=0.$$

以三線之係數列成行列式，將三行相加，即可證為零.

$$\begin{vmatrix} D_1-D_2 & E_1-E_2 & F_1-F_2 \\ D_2-D_3 & E_2-E_3 & F_2-F_3 \\ D_3-D_1 & E_3-E_1 & F_3-F_1 \end{vmatrix}=0.$$

8. 求題 6 中，自已知點至已知圓之最長距離與最短距離.

自定點至圓之最長距離，即自定點至圓心之距離加半徑，最短距離為定點至圓心之距離減半徑.

(a) $2^2+y^2=4.$

圓心為 $(0, 0)$，半徑為 2.

自 $(7, 2)$ 至圓心之距離為 $\sqrt{53}$，故最長距離與最短距離為

$$\sqrt{53}\pm 2.$$

(b), (c), (d) 仿此.

9. 一點至二同心圓切線之長，其比等於二圓半徑之比，求此點之軌跡.

設
$$(x-h)^2+(y-k)^2=R^2,$$
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
為兩同心圓.

設 (x_1, y_1) 為軌跡上一點，則

$$\frac{\sqrt{(x_1-h)^2+(y_1-k)^2-R^2}}{\sqrt{(x_1-h)^2+(y_1-k)^2-r^2}}=\frac{R}{r}.$$

平方化簡之，得 $x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2=0$，故為一點圓.

又若
$$\frac{\sqrt{(x_1-h)^2+(y_1-k)^2-R^2}}{\sqrt{(x_1-h)^2+(y_1-k)^2-r^2}}=\frac{r}{R},$$

則得 $x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-R^2-r^2=0.$

10. 一點移動時，其至一已知圓之切線之長與至一已知點之距離成一定之比，求此點之軌跡.

設已知點為 $(0, 0)$，已知圓為 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，(x_1, y_1) 為所求軌跡上一點，則

$$\frac{\sqrt{(x_1-h)^2+(y_1-k)^2-r^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=c.$$

化簡，得 $(1-c^2)x_1^2+(1-c^2)y_1^2-2hx_1-2ky_1+h^2+k^2-r^2=0$，故為一圓.

11. 兩圓爲 $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ 與 $(x-b)^2+(y-a)^2=c^2$. 試就其公共弦之研討而求其相切之條件。

兩圓之根軸爲 $\qquad x-y=0.$

與兩圓之一解之，得兩交點爲

$$x=\frac{1}{2}[a+b\pm\sqrt{2c^2-(a-b)^2}],$$

$$y=\frac{1}{2}[a+b\pm\sqrt{2c^2-(a-b)^2}].$$

當 $2c^2-(a-b)^2=0$ 時，則兩交點合一，卽公共弦爲一點，卽兩圓相切，此時

$$x=\frac{1}{2}(a+b),\qquad y=\frac{1}{2}(a+b).$$

其條件爲 $\qquad 2c^2-(a-b)^2=0.$

原 本 第 83—84 頁 習 題

1. 作下列各對圓 C_1 與 C_2. 從此等方程式寫下其系之方程式相當於上述之 (4)（第 82 頁），並依所給之 k 值作諸圓。

求其連心線與根軸之方程式，並作其圖形.

(a) C_1: $x^2+y^2+4y=0$; C_2: $x^2+y^2-4=0$; $k=3,\ 1,\ -\frac{1}{2}$.

通過兩圓交點之圓系之方程式爲

$$x^2+y^2+4y+k(x^2+y^2-4)=0.$$

$k=3$, 則

$$x^2+y^2+y-3=0.$$

$k=1$, 則

$$x^2+y^2+2y-2=0.$$

$k=-\dfrac{1}{2}$, 則

$$x^2+y^2+8y+4=0.$$

(b) C_1: $x^2+y^2-2x+4y=0$; C_2: $x^2+y^2+2x-4y=0$; $k=1,\ -2,\ 3,\ -3$.

(c) C_1: $x^2+y^2-8x+4y-5=0$; C_2: $x^2+y^2+8x-4y-5=0$, $k=1,\ -2,\ 3,\ -3$.

(b), (c) 與 (a) 同.

2. 求圓之方程式，此圓：

(a) 過 $x^2+y^2=1$ 與 $x^2+y^2+2x=0$ 二圓之交點，並過 $(3, 2)$.

過二圓之交點之圓系為

$$x^2+y^2-1+k(x^2+y^2+2x)=0.$$

此圓系中過 $(3, 2)$ 之圓，當得 $(3, 2)$ 適合於圓之方程式.

代入，得　$3^2+2^2-1+k(3^2+2^2+2\cdot 3)=0.$

$$k=-\frac{12}{19}.$$

代入圓系之方程式，得

$$7x^2+7y^2-24x-19=0.$$

(b) 過 $x^2+y^2=4$ 與 $x^2+y^2-6x=0$ 二圓之交點，並過 $(2,-2)$.

通過兩圓交點之圓系為

$$x^2+y^2-4k(x^2+y^2-6x)=0.$$

將 $(2,-2)$ 代入，得　$k=1.$

代入，得　$x^2+y^2-3x-2=0.$

(c) 屬於系 $x^2+y^2-4x-3+k(x^2+y^2-4y-3)=0$ 並過 $(0, 1)$.

同上，得　$k=-\dfrac{1}{3}.$

所求圓為　$x^2+y^2-6x+2y-3=0.$

3. 求下列各圓之方程式，其系為:

(a) $x^2+y^2+6x-5+k(x^2+y^2+6y-7)=0$, 其圓心在直線 $x-y=4$ 上.

先將此圓系之方程式整理而化成 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 之式，可得圓心為 (h, k) 或 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, 則圓心為 $\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$. 此處 $D=\dfrac{6}{k+1}$, $E=\dfrac{6k}{k+1}$, 故圓心為 $\left(-\dfrac{3}{k+1},-\dfrac{3k}{k+1}\right)$.

但圓心在 $x-y=4$ 上，故

$$-\frac{3}{k+1}+\frac{3k}{k+1}=4,\quad k=-7.$$

代入，得　$x^2+y^2-x-7y-\dfrac{22}{3}=0.$

(b) $x^2+y^2-4x+2y+k(x^2+y^2-2y-4)=0$, 其圓心在直線 $2x+4y=1$ 上.

同上，得　$k=\dfrac{1}{3}.$

圓爲 $$x^2+y^2-3x+y-1=0.$$

4. 作下列方程式所表之圓系:

(a) $x^2+y^2+kx+4y=0.$

式中無常數項,故過原點.

圓心爲 $\left(-\frac{k}{2}, -2\right)$. 當 k 變時,圓心之縱坐標不變.

故圓心在 $y+2=0$ 直線上,半徑 $=\frac{1}{2}\sqrt{k^2+16}.$

(b) $x^2+y^2+kx+ky=0.$

過原點.

圓心爲 $\left(-\frac{k}{2}, -\frac{k}{2}\right)$, 故在 $y=x$ 直線上,半徑 $=\frac{k}{2}\sqrt{2}.$

(c) $x^2+y^2+4x-2y=k^2.$

圓心爲 $(-2, 1)$, 半徑 $=\sqrt{5+k^2}.$

(d) $x^2+y^2-2kx-2ky+k^2=0.$

圓心爲 (k, k), 半徑 $=k.$

(e) $x^2+y^2+2kx=0.$

圓心爲 $(-k, 0)$, 故在 y 軸上,皆經過原點,半經卽等於圓心之橫坐標.

5. 證明題 3 中圓系 (a) 內諸圓心與圓系 (b) 內諸圓心皆各在一直線上:

(a) 圓系 $x^2+y^2+6x-3+k(x^2+y^2+6y-7)=0$ 爲過

$$x^2+y^2+6x-3=0 \text{ 及 } x^2+y^2+6y-7=0$$

兩圓交點之圓系,此兩圓之圓心爲 $(-3, 0)$ 及 $(0, -3)$, 故其聯心線爲

$$x+y+3=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

而此圓系之圓心爲 $\left(-\frac{3}{k+1}, -\frac{3k}{k+1}\right)$,代入 (1) 不論 k 爲何值,均能適合

$$-\frac{3}{k+1}-\frac{3k}{k+1}+3=-3-3k+3k+3=0.$$

故圓心均在 $x+y+3=0$ 之直線上.

(b) 與 (a) 同

6. 若 P_1 與 P_2 各爲第 39 節中 (2) 與 (3) 兩圓之圓心，則 (4) 圓之圓心 P 分 P_1P_2 爲一比，其比値爲 k, 試證之.

(2) 之圓心爲 $$P_1\left(-\frac{D_1}{2}, -\frac{E_1}{2}\right).$$

(3) 之圓心爲 $$P_2\left(-\frac{D_2}{2}, -\frac{E_2}{2}\right).$$

整理 (4), 得圓心爲 $\left(-\frac{D_1+kD_2}{2(k+1)}, -\frac{E_1+kE_2}{2(k+1)}\right)$.

按 § 10 定理,分 P_1P_2 成 $k:1$ 之點爲

$$x=-\frac{D_1+kD_2}{2(k+1)},\quad y=-\frac{E_1+kE_2}{2(k+1)}.$$

卽爲 (4) 之圓心. 但 k 爲定値時，二者均祇有一點，故圓心 P 分 P_1P_2 爲 k 與 1 之比.

第六章 抛物線，橢圓與雙曲線

原本第 90 頁習題

1. 繪下列各方程式之軌跡並作其焦點與準線. 又求其通徑之長並畫之:

(a) $y^2=12x$.

x 軸爲抛物線之軸，x 不能爲負，故在 x 軸之右，下表示此抛物線上數點之坐標.

x	y
0	0
1	$\pm 2\sqrt{3}$
2	$\pm 2\sqrt{6}$
3	± 6
12	± 12

與 $y^2=2px$ 對比, $p=6$, $\frac{1}{2}p=3$, 故焦點爲 $(3, 0)$, 準線爲 $x=-3$, 通徑之長爲 $2p=12$.

(b) $x^2=10y$. (d) $3y=5x^2$. (f) $x^2+10y=0$.

(c) $2y^2=9x$. (e) $7x+4y^2=0$.

(b) — (f) 同上.

2. 用直尺與圓規作一拋物線,設其焦點為:

(a) 距準線 6 單位.

作二垂直線,取其一線為準線,於線上取一點距交點 6 單位為焦點,依 § 41 作圖.

(b) 距準線 10 單位. (c) 距準線 15 單位.

(b), (c) 同上.

3. 求拋物線之軌跡,其:

(a) 頂點為 (3, 4) 而準線為 y 軸.

設 $P(x, y)$ 為軌跡上一點,則 P 至準線(即 y 軸)之距離為 x 而 P 至 (3, 4) 之距離為 $\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$,按定義二者相等.

$$x=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$$

簡之,得
$$(y-4)^2=2\left(x-\frac{9}{2}\right).$$

(b) 頂點為 (4, 2) 而焦點為 (2, 2).

拋物線之軸過焦點及頂點,故軸為 $y=2$.

$\frac{p}{2}=4-2=2$, 焦點在頂點之左, 故準線在右,為 $x=4+2$ 即 $x=6$.

設 (x, y) 為軌跡上一點,則與準線之距離為 $6-x$,與焦點之距離為 $\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$.

$$(6-x)^2=(x-2)^2+(y-2)^2.$$

$$(y-2)^2=-8x+32.$$

(c) 頂點為 (0, 0), 軸為 y 軸, 且過 $(-4, 5)$.

頂點 (0, 0), 軸為 y 軸之標準式為

$$x^2=2py.$$

過 $(-4, 5)$, 則 $(-4, 5)$ 合於此式.

代入,得
$$(-4)^2=2p\cdot 5,\quad 2p=\frac{16}{5}.$$

代入,得
$$x^2=\frac{16}{5}y \quad 即 \quad 5x^2=16y.$$

(d) 準線爲 $y+3=0$ 與焦點 $(1,-7)$.

同 (a), 得 $$y-3=\sqrt{(x-1)^2+(y-7)^2}.$$

簡之，得 $$(x-1)^2=8y-40.$$

(e) 準線爲 $x+2y=1$ 與焦點爲原點.

設 (x, y) 爲軌跡上一點，則至原點之距離爲 $\sqrt{x^2+y^2}$, 而至 $x+2y=1$ 之距離爲 $\dfrac{x+2y-1}{\sqrt{5}}$.

按定義， $$\frac{x+2y-1}{\sqrt{5}}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

平方化簡之，得
$$4x^2-4xy+y^2+2x+4y-1=0.$$

(f) 軸爲 $x-y=0$, 頂點爲 $(0,0)$, 而通徑 $=4$ (二種情形).

通徑 $=4$, $p=2$, $\dfrac{1}{2}p=1$.

設焦點之坐標爲 (x_1, y_1), 則與頂點之距離 $=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\frac{1}{2}p=1$.

或 $$x_1^2+y_1^2=1.$$

而 (x_1, y_1) 在軸上，即 $x-y=0$ 上，故 $x_1-y_1=0$.

解之，得焦點爲 $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ 或 $\left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.

準線垂直於軸，即 $x-y=0$, 故準線之斜率爲 $m=-1$.

焦點爲 $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ 時，準線過 $\left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\ -\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)$, 故準線方程式爲
$$x+y+\sqrt{2}=0.$$

焦點爲 $\left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{2},\ -\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ 時，準線爲
$$x+y-\sqrt{2}=0.$$

今可設 (x, y) 爲軌跡上一點，而使其至焦點與至準線之距離相等而化簡之，得兩拋物線之方程式爲
$$x^2+y^2-2xy-4\sqrt{2}x-4\sqrt{2}y=0,$$
$$x^2+y^2-2xy+4\sqrt{2}x+4\sqrt{2}y=0.$$

(g) 頂點爲原點，軸爲 x 軸，而經過點 (h, k).

標準式爲 $$y^2=2px.$$

過 (h, k)，則 $$k^2=2ph.$$
$$2p=\frac{k^2}{h}.$$
代入，得 $$y^2=\frac{k^2}{h}x.$$

4. 求一拋物線拱之方程式並作其圖形，設其：

(a) 拱距爲 20 呎而高爲 10 呎.
$$2a=20, \quad h=10.$$
代入第 88 頁 (5)，得 $$y=\frac{10}{10^2}x^2.$$
$$10y=x^2.$$

(b) 拱距爲 15 呎而高爲 8 呎。

同 (a).

5. 證明拋物線上任一點至其軸之垂線爲通徑及自垂足至頂點距離之比例中項。

設拋物線爲 $y^2=2px$，則頂點爲 $(0, 0)$，軸爲 x 軸.

設其上一點爲 $P(x_1, y_1)$，則 P 至軸之垂線爲 y_1，通徑爲 $2p$，垂足至頂點之距離爲 x_1.

但 (x_1, y_1) 在曲線上，故 $y_1^2=2px_1$.

6. 拋物線通徑之兩端各與準線及其軸之交點連接。證此二連線互相垂直。

設拋物線爲 $y^2=2px$，則軸爲 x 軸，準線爲 $y=-\frac{1}{2}p$，其交點爲 $\left(-\frac{1}{2}p, 0\right)$ 而通徑之兩端爲 $\left(\frac{p}{2}, p\right)$，$\left(\frac{p}{2}, -p\right)$，聯線爲
$$\frac{y-0}{x+\frac{p}{2}}=\frac{0-p}{-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}} \quad 及 \quad \frac{y-0}{x+\frac{p}{2}}=\frac{0+p}{-\frac{1}{2}-\frac{p}{2}}.$$
即 $$x-y+\frac{p}{2}=0 \ 及 \ x+y+\frac{p}{2}=0.$$
故兩線垂直。

7. 一點移動時，其至 $(3, -4)$ 之距離較至線 $x+5=0$ 之距離少 4. 求其軌跡之方程式並作圖.

設 $P(x, y)$ 爲軌跡上一點，則其至 $(3, -4)$ 之距離爲

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}.$$

其至 $x+5=0$ 之距離為 $x+5$.

依題意,得 $\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}=x+5-4$.

平方化簡之,得 $(y+4)^2=8x+8$.

8. 一點移動時,其至線 $x=3$ 之距離與其至圓 $x^2+y^2=16$ 所作切線之長相等,求其軌跡之方程式.

設 (x, y) 為軌跡上一點,則其至 $x=3$ 之距離為 $x-3$, 至 $x^2+y^2=16$ 之切線之長為 $\sqrt{x^2+y^2-16}$, 相等,故

$$x-3=\sqrt{x^2+y^2-16}.$$

平方化簡之,得 $y^2=-6x+25$.

原本第96頁習題

1. 作下列方程式之圖形,定其焦點,並求其離心率與通徑之長:

(a) $x^2+4y^2=16$.

x 軸上之截部為 ± 4, y 軸上之截部為 ± 2, 故長軸在 x 軸上, $a=4$, $b=2$, $c=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, 二焦點為 $(2\sqrt{3}, 2)$ 及 $(-2\sqrt{3}, 0)$, 在 x 軸上,離心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$, 通徑之長 $=\dfrac{2b^2}{a}=2$.

作圖時以 x 自 -4 至 4 間各值代入,計算 y 之值,列如下表作出各點而聯繫為光整之曲線.

x	y
0	± 2
± 1	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{15}$
± 2	$\pm\sqrt{3}$
± 3	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{7}$
± 4	0

(b) $4x^2+9y^2=36$.　　(d) $2x^2=1-y^2$.

(c) $x^2+2y^2=8$.　　(e) $25y^2+x^2=25$.

(b) – (e) 同上.

(f) $3x^2+5y^2=30$.

x 軸上之截部為 $\pm\sqrt{10}$, y 軸上之截部為 $\pm\sqrt{6}$, 故長軸在 x 軸上, $a=\sqrt{10}$, $b=\sqrt{6}$, $c=2$, 二焦點為 $(2, 0)$ 及 $(-2, 0)$, 離心率

為 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{5}\sqrt{10}$, 通徑之長 $=\frac{2b^2}{a}=\frac{6}{5}\sqrt{10}$. 以 x 之值自 $-\sqrt{10}$ 至 $\sqrt{10}$ 代入式中,計算 y 之值,得

x	y
0	± 2.45
± 1	± 2.32
± 2	± 1.89
± 3	± 0.77
± 3.16	0

(g) $8x^2+3y^2=63$. (h) $9x^2+49y^2=250$.

(g), (h) 同上。

2 用下列條件,寫出以原點為中心之橢圓之方程式:

(a) $a=8,\ b=4$, 焦點在 y 軸上。

依 §44 (8), 得

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{8^2}=1.$$

即 $$4x^2+y^2=64.$$

(b) $a=10,\ c=6$, 焦點在 x 軸上。

$b=\sqrt{a^2-c^2}=8$, 故依 §44 (III), 得

$$\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{8^2}=1.$$

即 $$16x^2+25y^2=1600.$$

(c) $a=6$, 通徑 $=3$, 焦點在 x 軸上。

通徑 $=\frac{2b^2}{a}=3$, $a=6$ 代入,得 $b=3$. 故得

$$\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{3^2}=1.$$

即 $$x^2+4y^2=36.$$

(d) $b=5$, 通徑 $=7$, 焦點在 y 軸上。

通徑 $=\frac{2b^2}{a}=7$, $b=5$ 代入,得 $a=\frac{50}{7}$. 故得

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{\frac{50}{7}}=1.$$

(e) $a=5b$, 而過過 (7, 2).

以 a 與 (7, 2) 代入標準式,得

$$\frac{7^2}{(5b)^2}+\frac{2^2}{b^2}=1 \quad 或 \quad \frac{7^2}{b^2}+\frac{2^2}{(5b)^2}=1.$$

$$b=\frac{\sqrt{149}}{5} \quad 或 \quad b=\frac{\sqrt{1229}}{5}.$$

$$a=\sqrt{149} \quad 或 \quad a=\sqrt{1229}.$$

代入，得 $$\frac{x^2}{149}+\frac{25y^2}{149}=1 \quad 或 \quad \frac{25x^2}{1229}+\frac{y^2}{1229}=1.$$

3 寫出下列橢圓之方程式，其中心在原點，兩軸在坐標軸上面：

(a) 過 $(-3,0)$ 與 $(0,-2)$.

設橢圓之方程式爲 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, $(-3,0)$ 與 $(0,-2)$ 皆在橢圓上，故

$$9b^2=a^2b^2, \qquad a=\pm 3.$$
$$4a^2=a^2b^2, \qquad b=\pm 2.$$

故橢圓之方程式爲 $4x^2+9y^2=36$.

(b) 過 $(2,3)$ 與 $(-1,4)$.

(c) 過 $(5,1)$ 與 $(-4,-2)$.

(b), (c) 與 (a) 同.

(d) 其長軸三倍於短軸且過 $(6,2)$.

與題 2(e) 同.

4. 一點平分圓 $x^2+y^2=16$ 上諸點之橫坐標，求其軌跡之方程式.

設 (x_1,y_1) 爲已知圓上任一點，則在所求軌跡上必有一點 (x,y)，其縱坐標同 $y=y_1$ 而橫坐標爲 $x=\frac{x_1}{2}$ 或 $x_1=2x$. 但 (x_1,y_1) 在圓上，故代入圓之方程式，得

$$4x^2+y^2=16.$$

即所求軌跡之方程式.

5. 一點分圓 $x^2+y^2=25$ 上諸點之縱坐標成 $2:3$，求其軌跡之方程式.

同上題， $$y=\frac{2}{5}y_1, \quad y_1=\frac{5}{2}y.$$

故得 $$x^2+\left(\frac{5}{2}y\right)^2=25.$$

$$4x^2+25y^2=100.$$

6. 求一點之軌跡，此點移動時，其：

(a) 至線 $x=8$ 之距離爲至 $(2,0)$ 之距離之二倍。

設 (x,y) 爲軌跡上一點，則至線 $x=8$ 之距離爲 $x-8$，至 $(2,0)$ 之距離爲 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，故得

$$x-8=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}.$$
$$3x^2+4y^2=48.$$

(b) 至線 $y=6$ 之距離爲至 $(0,3)$ 之距離之二倍。

設 (x, y) 爲軌跡上一點，則

$$y-6=2\sqrt{x^2+(y-3)^2}.$$
$$4x^2+3y^2-8y=0.$$

(c) 至線 $x=-18$ 之距離爲至 $(-2,0)$ 之距離之三倍。

(d) 至線 $2y=-15$ 之距離爲至 $(0,-3\frac{1}{3})$ 之距離之 $1\frac{1}{2}$ 倍。

(c), (d) 解法同上。

7. 三角形底邊之兩端點爲 $(0,6)$ 與 $(0,-6)$，設其他二邊斜率之乘積爲 $-\frac{4}{9}$，求其頂點之軌跡。

設 (x, y) 爲軌跡上任一點，即第三頂點，則三角形二邊之斜率爲

$$\frac{y-6}{x} \text{ 及 } \frac{y+6}{x}.$$

故得

$$\frac{y-6}{x}\cdot\frac{y+6}{x}=-\frac{4}{9}.$$
$$4x^2+9y^2=324.$$

8. 證明一橢圓之通徑爲其兩軸之比例第三項 (Third proportional).

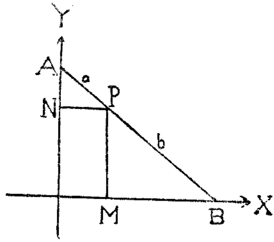
設兩軸爲 $2a$, $2b$，則通徑之長爲 $\frac{2b^2}{a}$，而二軸之比例第三項爲

$$2a:2b::2b:x.$$
$$x=\frac{2b^2}{a}.$$

故相等。

9. 一定長直線其兩端常在兩垂直線上移動，求線上任一點之軌跡。

設兩垂直線爲兩軸，定直線之長爲 $a+b$，二端在兩軸上移動，$P(x, y)$ 爲定直線上一點，離 y 軸上之一端爲 a，他端爲 b. 自 P 作垂線 PN, PM，則 $Rt\triangle PAN$ 及 $Rt.\triangle BPM$ 爲兩相似三角形，故得



$$PN : PA = BM : PB.$$

但 $PN=x,\ PA=a,\ PB=b,$

$$BM=\sqrt{b^2-y^2}.$$

代入化簡，得 $$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

原本第 101 頁習題

1. 繪下列方程式之軌跡並定其焦點．求其離心率與通徑之長並繪其通徑：

(a) $16x^2-9y^2=144.$

在 x 軸上之截部爲 $(\pm 3, 0)$，原式可化爲

$$\frac{16x^2}{144}-\frac{9y^2}{144}=1. \qquad \frac{x^2}{\frac{144}{16}}-\frac{y^2}{\frac{144}{9}}=1.$$

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1.$$

以常數項除原式，即化常數項爲 1，更以所得 x^2, y^2 之係數之分子除分母，化爲平方式，即得 a, b. 此處

$$a=3, \quad b=4.$$

因得 $$c=\sqrt{a^2+b^2}=5.$$

故焦點爲 $(\pm 5, 0)$.

$$離心率=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}.$$

$$通徑=\frac{2b^2}{a}=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}.$$

以 x 或 y 之值代入式中，以求相當之 y 或 x 之值，作出諸點聯結之成一曲線.

x	y
± 3	0
± 4	$\pm \frac{4}{3}\sqrt{7}$
± 5	$\pm \frac{16}{3}$
± 6	$\pm 4\sqrt{3}$
± 7	$\pm \frac{8}{3}\sqrt{10}$

(*b*) $5x^2-4y^2=20.$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1.$$

$a=2,\ b=\sqrt{5},\ c=\sqrt{3}$, 焦點爲 $(\pm 3, 0)$.

$$e=\frac{3}{2},\ \text{通徑}=5.$$

(*c*) $9x^2-16y^2=144.$

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1.$$

$a=4,\ b=3,\ c=5$, 焦點爲 $(\pm 5, 0)$.

$$e=\frac{5}{4},\qquad \text{通徑}=\frac{9}{2}.$$

(*d*) $x^2-8y^2+8=0.$

$$8y^2-x^2=8.$$

$$\frac{y^2}{1}-\frac{x^2}{8}=1.$$

$a=1,\ b=\sqrt{8},\ c=3$, 焦點爲 $(0, \pm 3)$.

$$e=3,\ \text{通徑}=16.$$

(*e*) $x^2-y^2=4.$

(*f*) $9x^2-y^2+9=0.$

(*g*) $9x^2-16y^2+144=0.$

(*h*) $3x^2-y^2=12.$

(*i*) $x^2-3y^2+3=0.$

(*j*) $4x^2-9y^2=36.$

(*k*) $9x^2-7y^2=36.$

(*l*) $7x^2-2y^2+8=0.$

(*e*) – (*l*) 均同上.

2. **求以原點爲中心之下列諸雙曲線之方程式:**

(a) $a=4,\ b=5$，焦點在 y 軸上。

代入 §48 (8)，得 $16x^2-25y^2=400$.

(b) $b=5,\ c=8$，焦點在 x 軸上。

$$a=\sqrt{64-25}=\sqrt{39}.$$

代入 §48 (IV)，得 $\dfrac{x^2}{39}+\dfrac{y^2}{25}=1$.

(c) $a=6,\ c=2$，貫軸在 x 軸上。

$a=6,\ e=2$.

$$c=ae=12,\quad b=\sqrt{144-36}=6\sqrt{3}.$$

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{108}=1.$$

(d) $a=\sqrt{6},\ c=6$，共軛軸在 x 軸上。

$$b=\sqrt{36-6}=\sqrt{30}.$$

共軛軸在 x 軸卽貫軸及焦點在 y 軸上，故得

$$6x^2-30y^2=-180.$$

(e) $a=7$，通徑 $=14$，共軛軸在 y 軸上。

$$a=7,\quad \frac{2b^2}{a}=14,\quad b=7.$$

$$x^2-y^2=49.$$

(f) $c=\sqrt{15}$，通徑 $=4$，焦點在 y 軸上。

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{15}\ \text{卽}\ a^2+b^2=15.$$

$$\frac{2b^2}{a}=4\ \text{卽}\ b^2=2a.$$

代入，得 $a^2+2a-15=0,\ a=3$ 或 -5.

負數不合 $a=3,\quad b=\sqrt{6}.$

代入，得 $3x^2-2y^2+18=0.$

3. 求以原點爲中心而二軸在坐標軸上之下列諸雙曲線之方程式：

(a) 貫軸在 y 軸上而過 $(2,-4)$ 與 $(6,-7)$.

貫軸在 y 軸上，故設雙曲線爲

$$\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1.$$

此雙曲線過 $(2,-4)$ 與 $(6,-7)$ 兩點，故該兩點當合於此方程

式，因得

$$4a^2-16b^2=-a^2b^2,$$
$$36a^2-49b^2=-a^2b^2.$$

解之，得　　$a^2=\dfrac{95}{8},\qquad b^2=\dfrac{380}{33}.$

代入，得　　$33x^2-32y^2=-380.$

(b)　貫軸在 y 軸上而過 $(0,4)$ 與 $(6,5)$.

解法同 (a),

$$x^2-4y^2=-64.$$

(c)　貫軸在 x 軸上而過 $(6,7)$ 與 $(-3,3)$.

同樣，得

$$40x^2-27y^2=117.$$

(d)　焦點在 x 軸上而過 $(2,0)$ 與 $(\sqrt{11},-3)$.

$$9x^2-7y^2=36.$$

4.　求一點之軌跡之方程式，此點移動時，其

(a)　至點 $(3,0)$ 之距離為至線 $4x-3=0$ 之距離之二倍.

設 (x,y) 為軌跡上一點，則其至點 $(3,0)$ 之距離為 $\sqrt{(x-3)^2+y^2}$，至 $4x-3=0$ 之距離為 $x-\dfrac{3}{4}$，因得

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=2\left(x-\frac{3}{4}\right).$$
$$12x^2-4y^2=-27.$$

(b)　至點 $(0,4)$ 之距離為至線 $9y-16=0$ 之距離之 $\frac{3}{2}$ 倍.

設 (x,y) 為軌跡上一點，則

$$\sqrt{x^2+(y-4)^2}=\frac{3}{2}\left(y-\frac{16}{9}\right).$$

化簡，得　　$36x^2-45y^2=-320.$

(c)　至點 $(0,-2)$ 之距離為至線 $9y+2=0$ 之距離之 3 倍.

設 (x,y) 為軌跡上一點，則

$$\sqrt{x^2+(y+2)^2}=3\left(y+\frac{2}{9}\right).$$

化簡，得　　$9x^2-72y^2=-32.$

(d)　至點 $(-5,0)$ 之距離為至線 $16x+5=0$ 之距離之 4 倍.

設 (x,y) 為軌跡上一點，則

$$\sqrt{(x+5)^2+y^2}=4\left(x+\frac{5}{16}\right).$$

化簡，得 $$240x^2-16y^2=-375.$$

5. 設一三角形之兩頂點為 $(0,5)$ 與 $(0,-5)$，而其兩變動邊斜率之乘積為 7，求其第三頂點之軌跡。

設 (x,y) 為軌跡上一點，即三角形之第三項點，則其至 $(0,5)$ 與 $(0,-5)$ 之聯線斜率為

$$\frac{y-5}{x} \text{ 及 } \frac{y+5}{x}.$$

因得 $$\frac{y-5}{x}\cdot\frac{y+5}{x}=7.$$

$$7x^2-y^2=-25.$$

6. 設雙曲線之中心為原點，焦點在 y 軸上，貫軸為 10 而共軛軸為二焦點間距離之半，試求其方程式。

$$2a=10,\quad 2b=\frac{1}{2}2c,\quad 2b=c.$$

$$a^2+b^2=c^2.$$

代入，得 $$25+b^2=4b^2,\quad b^2=\frac{25}{3}.$$

代入 §48 (8)， $$25x^2-\frac{25}{3}y^2=25\cdot\frac{25}{3}$$

$$3x^2-y^2=25.$$

原本第 106—107 頁習題

1. 求下列共軛雙曲線與其漸近線之方程式並作圖：

(a) $4x^2-y^2=16.$

依 §51 定義，其共軛雙曲線為

$$y^2-4x^2=16.$$

漸近線為 $$4x^2-y^2=0.$$

即 $$2x-y=0 \text{ 及 } 2x+y=0.$$

(b) $9x^2-4y^2=36.$

共軛雙曲線為 $$4y^2-9x^2=36.$$

漸近線為 $$2x-3y=0 \text{ 及 } 2x+3y=0.$$

(c) $9x^2-16y^2=144.$ (f) $x^2-y^2=10.$

(d) $16y^2-x^2+64=0.$ (g) $x^2-16y^2+16=0.$

(e) $25x^2-16y^2+400=0.$ (h) $x^2-9y^2+9=0.$

(c) — (h) 同上。

2. 證自雙曲線之一漸近線至各焦點之垂直距離，其絕對值與其半共軛軸相等。

設雙曲線爲 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$

則其漸近線爲 $bx-ay=0$ 及 $bx+ay=0.$

焦點爲 $(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0).$

故漸近線至兩焦點之垂直距離爲

$$\frac{\pm b\sqrt{a^2+b^2}}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\pm b.$$

故等於共軛軸之半。

3. 證自兩漸近線至雙曲線上任一點之二垂直距離之相乘積爲一定。

設雙曲線爲 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$

則其漸近線爲 $bx-ay=0,$ $bx+ay=0.$

設 (x_1, y_1) 爲雙曲線上任一點，則二垂直距離爲

$$\frac{bx_1-ay_1}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad 及 \quad \frac{bx_1+ay_1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

其相乘積爲 $\dfrac{bx_1-ay_1}{\sqrt{a^2+b^2}}\times\dfrac{bx_1+ay_1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{b^2x_1^2-a^2y_1^2}{a^2+b^2}.$

但 (x_1, y_1) 在雙曲線上，故 $b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2.$

代入，得 $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$

a, b 爲常數，故相乘積爲常數。

4. 證明不論 k 爲何值，直線 $bx+ay=k$ 與 $bx-ay=\dfrac{1}{k}$ 之交點在一雙曲線上。

用兩方程式消去 k 合爲一式，即得交點之軌跡爲

$$b^2x^2-a^2y^2=1.$$

此爲一雙曲線之方程式。

5. 證明自一等邊雙曲線上一點至其兩焦點之距離之相乘積等於自此點至雙曲線中心距離之平方．

設等邊雙曲線之方程式爲 $x^2-y^2=a^2$ 而 (x_1, y_1) 爲其上一點，其焦點爲 $(\pm a\sqrt{2}, 0)$，故距離爲

$$\sqrt{(x_1-a\sqrt{2})^2+y_1^2} \text{ 及 } \sqrt{(x_1+a\sqrt{2})^2+y_1^2}.$$

其相乘積爲 $\sqrt{[(x_1-a\sqrt{2})^2+y_1^2][(x_1+a\sqrt{2})^2+y_1^2]}$

$=\sqrt{x_1^4+2x_1^2y_1^2+y_1^4-4a^2x_1^2+4a^2y_1^2+4a^4}.$

但 (x_1, y_1) 在雙曲線上，故 $-4a^2x_1^2+4a^2y_1^2=-4a^4$，故上式 $=\sqrt{x_1^4+2x_1^2y_1^2+y_1^4}=x_1^2+y_1^2.$

即等於該點至原點距離之平方．

6. 設雙曲線之貫軸在 y 軸上，其一漸近線爲 $3y-2x=0$，而一焦點爲 $(0, -4)$．求其方程式．

$3y-2x=0$ 爲一漸近線，則 $3y+2x=0$ 必爲又一漸近線，因得雙曲線之方程式爲

$$9y^2-4x^2=k$$

$$\frac{y^2}{\frac{k}{9}}-\frac{x^2}{\frac{k}{4}}=1.$$

$$a^2=\frac{k}{9}, \quad b^2=\frac{k}{4}, \quad \text{但 } c^2=a^2+b^2=4^2.$$

故 $$\frac{k}{9}+\frac{k}{4}=16, \quad k=\frac{576}{13}.$$

代入，得 $$117y^2-52x^2=576.$$

7. 證一等邊雙曲線之離心率爲 $\sqrt{2}$．

設等邊雙曲線爲 $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1,$$

則 $$c=a\sqrt{2}.$$

故 $$e=\frac{a\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2}.$$

8. 證明一直線被一雙曲線與其二漸近線所截，其間所截之線

段相等.

設任一直線 $Ax+By+C=0$, 又設雙曲線爲 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$, 其漸近線爲 $bx-ay=0$ 及 $bx+ay=0$, 解直線與兩漸近線方程, 得兩交點爲 $\left(-\frac{aC}{Aa+Bb}, -\frac{bC}{Aa+Bb}\right)$ 及 $\left(-\frac{aC}{Aa-Bb}, -\frac{bC}{Aa-Bb}\right)$.

又解雙曲線與直線方程式, 亦得兩交點爲

$$\left(\frac{a^2AC\pm abB\sqrt{b^2B^2+C^2-a^2A^2}}{b^2B^2-a^2A^2}, \frac{-b^2BC\mp abA\sqrt{b^2B^2+C^2-a^2A^2}}{b^2B^2-a^2A^2}\right).$$

由此可證兩交點間之距離相等.

9. 依下列之已知值, 作其圓錐曲線系:

(a) $9x^2+y^2=k$; $k=0, 4, 9, 25$.

$k=0$ 爲點橢圓, 其餘各爲一橢圓.

(b) $9x^2-4y^2=k$; $k=0, \pm4, \pm9, \pm36$.

$k=0$ 爲兩直線 $3x-2y=0$ 及 $3x+2y=0$, 其餘均爲雙曲線.

(c) $x^2=4y-k$; $k=0, \pm4, \pm8$.

均爲拋物線.

(d) $ky^2-16kx^2=64$; $k=\pm1, \pm2, \pm4$.

均爲雙曲線.

(e) $y^2=2kx$; $k=\pm1, \pm4$.

均爲拋物線.

10. 作下列諸圓錐曲線系, 並證其每系之軌跡爲共焦點:

(a) $\frac{x^2}{4-k}+\frac{y^2}{9-k}=1$; $k=\pm1, \pm2, \pm10, \pm20$.

設 $k=1$, 則原式爲 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{8}=1$ 爲橢圓;

$k=-1$, 則原式爲 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{10}=1$ 爲橢圓;

$k=10$, 則原式爲 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{1}=-1$ 無軌跡;

$k=-10$, 則原式爲 $\frac{x^2}{14}+\frac{y^2}{19}=1$ 爲橢圓;

$k=5$, 則原式爲 $-\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$ 爲雙曲線.

故當 $k<4$ 時爲一橢圓，
$k>9$ 時無軌跡，
$4<k<9$ 時爲雙曲線。

式中 $a^2=9-k$, $b^2=4-k$, 故 $c=\pm\sqrt{a^2-b^2}=\pm\sqrt{5}$, 不論 k 爲何值，c 常爲 ± 5, 故共焦點。

(b) $y^2=2kx+k^2$; $k=\pm 1, \pm 4, \pm 6$.

k 爲無論何值除 0 外，均爲拋物線。

原式可寫作 $$y^2=2k\left(x+\frac{k}{2}\right).$$

故頂點爲 $\left(-\frac{k}{2}, 0\right)$, 焦點離頂點 $\frac{p}{2}$, 但 $2p=2k$, 故卽爲 $\frac{k}{2}$ 卽焦點在原點上。

(c) $\dfrac{x^2}{16-k}+\dfrac{y^2}{64-k}=1$; $k=0, \pm 9, \pm 20, \pm 50$.

與 (a) 同。

11. 求一方程式以代表焦點爲 $(0, \pm 3)$ 之一切橢圓。

$c=\pm 3$, $c^2=9$, $a^2-b^2=9$, 故 $a^2=9+b^2$, 焦點在 y 軸上，故得
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{9+b^2}=1.$$

12. 欲使題 11 之結果代表同焦點之一切雙曲線，其必需之改變爲何?
$$-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{9+b^2}=1.$$

13. 求二共軛雙曲線之離心率 e_1 與 e_2 之關係式。
$$e_1=\frac{c}{a}, \qquad e_2=\frac{c}{b}.$$

故得 $$e_1^2+e_2^2=\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}=\frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}=\frac{c^4}{a^2b^2}=\frac{c^2}{a^2}\times\frac{c^2}{b^2}=e_1^2e_2^2.$$

第七章　坐標之變換

原本第 109—110 頁習題

1. 求點 $(3, -5)$, $(-4, 3)$ 與 $(-2, -5)$ 之新坐標，設二軸移

至新原點:

(a) $(3, 6)$.

$$x = x' + h, \quad y = y' + k.$$

故 $$x' = x - h, \quad y' = y - k.$$

今 $$h = 3, \quad k = 6$$

故 $(3, -5)$ 移至新原點 $(3, 6)$ 時,得

$$x' = 3 - 3 = 0, \quad y' = -5 - 6 = -11.$$

故 $(3, -5)$ 之新坐標爲 $(0, -11)$.

同樣, $(-4, 3)$ 之新坐標爲 $(-7, -3)$.

$(-2, -5)$ 之新坐標爲 $(-5, -11)$.

(b) $(-5, 3)$.

新坐標爲 $(8, -8)$, $(1, 0)$, $(3, -8)$.

(c) $(-6, -7)$. (d) $(4, -3)$.

(c), (d) 同上.

2. 求點 $(3, 0)$, $(0, 0)$ $(0, 3)$ 之新坐標,設二軸移至新原點.

(a) $(2, -1)$; (b) (a, b); (c) $(-a, b)$; (d) $(a, -b)$.

與題 1 同.

3. 設二軸移至下列所示之新原點,求各曲線之方程式.作各曲線並繪其新舊坐標軸:

(a) $3x - 4y = 6$; $(2, 0)$.

$$x = x' + 2, \quad y = y'.$$

故 $$3(x' + 2) - 4y' = 6.$$

即 $$3x' - 4y' = 0.$$

(b) $5x - y + 2 = 0$; $(3, -2)$.

同上.

(c) $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$; $(2, 1)$.

$$x = x' + 2, y = y' + 1.$$

代入, $$(x' + 2)^2 + (y' + 1)^2 - 4(x' + 2) - 2(y' + 1) = 0$$

$$x'^2 + y'^2 = 5.$$

(d) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$; $(3, 5)$,

同上.

(e) $y^2 - 4x + 8 = 0$; $(2, 0)$.

$$x = x' + 2, \; y = y'.$$

$$y'^2 - 4(x' + 2) + 8 = 0.$$

$$y'^2 - 4x' = 0.$$

(f) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 18$; $(-2, 3)$.

同上.

(g) $y^2 - 2x^2 - 2y + 6x = 3$; $(\frac{3}{2}, 1)$.

$$x = x' + \tfrac{3}{2}, \; y = y' + 1.$$

$$(y'+1)^2-2(x'+\tfrac{3}{2})^2-2(y'+1)+6(x'+\tfrac{3}{2})=0.$$
$$2y'^2-4x'^2+7=0.$$

(h)　$x^2-2hx-4y+4k+h^2=0$；$(h,\ k)$.

(i)　$y=4+(x-3)^3$；$(3,\ 4)$.

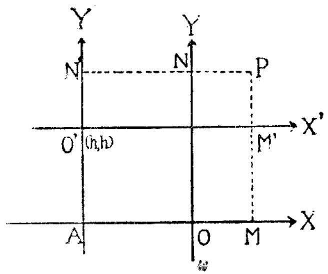
(j)　$y^2-6x+9=0$；$(\frac{3}{2},\ 0)$.

(k)　$x^2-4y^2+8x+24y=20$；$(-4,\ 3)$.

(l)　$y^2=x^3$；$(-2,\ -3)$.

(h)－(l) 同上。

4.　證明方程式 (I)，設其原點在 (1) 第二象限內；(2) 第三象限內；(3) 第四象限內。



$OM=x,\qquad MP=y.$

$OA=-h,\quad AO'=k.$

$O'M'=x',\qquad M'P=y'.$

$OM=AM-AO=O'M'-AO,$

即　　$x=x'+h.$

$MP=M'P+MM'=M'P+AO',$

即　　$y=y'+k.$

因在第二象限中，故 $AO=-h.$

在第三象限，則 $OA=-h,\ AO'=-k$，證法同。

在第四象限，則 $OA=h,\ AO'=-k$，證法同。

5.　當二平行軸之新原點在 (1) $(h-r,\ k)$ 時，則方程式 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 將成何形式？新原點在 (2) $(h,\ k-r)$ 時？

新原點在 $(h-r,\ k)$ 時，$x=x'+h-r,\ y=y'+k.$

代入，得　　$(x'+h-r-h)^2+(y'+k-k)^2=r^2.$

$$x'^2-2rx'+y'^2=0.$$

新原點在 $(h,\ k-r)$ 時，$x=x'+h,\ y=y'+k-r.$

代入，得　　$x'^2+y'^2-2ry'=0.$

6.　設二平行軸通過點 $\left(0,\ \dfrac{mn}{m-n}\right)$，則方程式 $(m-n)(x^2+y^2)-2mny=0$ 成何形式？

$$x=x',\ y=y'+\frac{mn}{m-n}.$$

$$(m-n)\left[x'^2+\left(y'+\frac{mn}{m-n}\right)^2\right]-2mn\left(y'+\frac{mn}{m-n}\right)=0.$$

簡之，得 $$x'^2+y'^2=\frac{m^2n^2}{(m-n)^2}.$$

原 本 第 113—114 頁 習 題

1. 用移軸法化簡下列諸方程式；作其曲線與新舊軸：

(a) $x^2+6x+4y+8=0.$

配方，得 $$x^2+6x+9+4y-1=0.$$
$$(x+3)^2+4(y-\tfrac{1}{4})=0.$$

設 $$x'=x+3,\ y'=y-\tfrac{1}{4}.$$

即 $x=x'-3,\ y=y'+\frac{1}{4}$，即移軸至 $(-3,\ \frac{1}{4})$.

代入，得 $$x'^2+4y'=0.$$

(b) $4x^2-32x-4y-13=0.$
$$4(x^2-8x+16)-4\left(y+\frac{77}{4}\right)=0.$$
$$4(x-4)^2-4\left(y+\frac{77}{4}\right)=0.$$

設 $x'=x-4,\ y'=y+\dfrac{77}{4}$，即移軸至 $\left(4,\ -\dfrac{77}{4}\right)$，得
$$4x'^2-4y'=0.$$

(c) $y^2-6x-10y+19=0.$

此處諸題，均以用第一法為便捷，茲更以第二法示一例。
$$(y'+k)^2-6(x'+h)-10(y'+k)+19=0.$$
$$y'^2+(2k-10)y'-6x'+k^2-10k-6h+19=0.$$

使 $$2k-10=0,\ k^2-10k-6h+19=0.$$
$$k=5,\ \ h=-1.$$

代入，得 $$y'^2-6x'=0.$$

其餘諸題均同，茲將其答案錄下。

(d) $2x^2-6x+7y+15=0.$
$$2x'^2+7y'=0,\ x=x'+\frac{3}{2},\ y=y'-\frac{3}{2}.$$

(e) $x\ -y^2+32x+4y+40=0.$
$$x'^2-y'^2=212,\ \ x=x'-16,\ y=y'+2$$

(f) $3x^2+4y^2-12x-6y+7=0.$

$$3x'^2+4y'^2=\frac{173}{4},\ x=x'+2,\ y=y'+\frac{3}{4}.$$

(g)　$x^2+4y^2+10x-12y+14=0.$

$$x'^2+4y'^2=20,\ x=x'-5,\ y=y'+\frac{3}{2}.$$

(h)　$x^2-y^2+8x-14y-35=0.$

$$x'^2+y'^2=2,\ x=x'-4,\ y=y'-7.$$

2.　用移軸法使新方程式不含一次項：

(a)　$x^2-4xy+6y=0.$

設新原點爲 (h, k), 則 $x=x'+h$, $y=y'+k$, 代入原式，得

$$(x'+h)^2-4(x'+h)(y'+k)+6(y'+k)=0$$

展開集項，得

$$x'^2-4x'y'+(2h-4k)x'-(4h-6)y'+h^2-4hk+6k=0.$$

欲消除一次項，則必使 x', y' 之係數等於零，卽

$$2h-4k=0,\ 4h-6=0.$$

故　$$h=\frac{3}{2},\ k=\frac{3}{4}.$$

代入化簡，得

$$4x'^2-16x'y'+9=0.$$

(b)　$x^2+xy+y^2+6x=0.$

步驟同上，得

$$(x'+h)^2+(x'+h)(y'+k)+(y'+k)^2+6(x'+h)=0.$$

$$x'^2+x'y'+y'^2+(2h+k+6)x'+(h+2k)y'$$
$$+h^2+hk+k^2+6h=0.$$

使 x', y' 之係數等於零，則

$$2h+k+6=0,\ h+2k=0.$$

解之，得　$$h=-4,\ k=2.$$

代入，得　$$x'^2+x'y'+y'^2-12=0.$$

(c)　$2xy-8x+6y=0.$

$$2(x'+h)(y'+k)-8(x'+h)+6(y'+k)=0.$$

$$2x'y'+(2k-8)x'+(2h+6)y'+2hk-8h+6k=0.$$

$$2k-8=0,\ 2h+6=0.$$

$$k=4,\ h=-3$$

$$x'y'+12=0.$$

(d) $3xy-4x+2=0.$

$$3(x'+h)(y'+k)-4(x'+h)+2=0.$$

$$3x'y'+(3k-4)x'+3hy'+3hk-4h+2=0.$$

$$3k-4=0,\ \ 3h=0.$$

$$h=0,\ \ k=\tfrac{4}{3}.$$

$$x'y'+2=0.$$

3. 求下列諸軌跡之方程式,並用移軸法化簡之.作其圖形及新舊軸:

(a) 一點移動時,其至 $(3,\ -2)$ 之距離為至線 $x+1=0$ 之四倍.

設 $(x,\ y)$ 為軌跡上一點,則

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}=4(x+1).$$

$$15x^2-y^2+38x-4y+3=0.$$

$$15\left(x+\frac{19}{15}\right)^2-(y+2)=\frac{19^2}{15}-4-3.$$

故移軸至 $h=-\dfrac{19}{15},\ k=-2,$ 則得

$$225x'^2-15y'^2=256.$$

(b) 一點移動時,其至線 $y-7=0$ 之距離常為至點 $(-3,4)$ 之距離之半.

設 $(x,\ y)$ 為軌跡上一點,則

$$y-7=\tfrac{1}{2}\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}.$$

$$4y^2-56y+196=x^2+6x+9+y^2-8y+16.$$

$$x^2+6x+9-3(y^2+16y+64)=-12.$$

故移軸至 $h=-3,\ k=-8,$ 則得

$$x'^2-3y'^2=-12.$$

(c) 一點移動時,其與 $(-2,\ 4)$ 及 $(6,\ 4)$ 之兩連線斜率之乘積常為 3.

設 $(x,\ y)$ 為軌跡上一點,則

$$\frac{y-4}{x+2}\cdot\frac{y-4}{x-6}=3.$$

$$(y-4)^2-3(x^2-4x-12)=0.$$

$$(y-4)^2-3(x^2-4x+4)=-48.$$

移軸至 $h=4,\ k=2,$ 則得

$$y'^2-3x'^2=-48.$$

(d) 一點移動時，其至 (3, 3) 與至線 $2x+5=0$ 之距離成 1 與 3 之比.

設 (x, y) 爲軌跡上一點，則

$$3\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=x+\frac{5}{2}.$$

$$9x^2-54x+81+9(y-3)^2=x^2+5x+\frac{25}{4}.$$

$$32\left[x^2-\frac{59}{8}x+\left(\frac{59}{16}\right)^2\right]+36(y-3)^2=\frac{889}{8}.$$

移軸至 $h=\frac{59}{16}$, $k=3$, 則得

$$32x'^2+36y'^2=\frac{889}{8}.$$

(e) 一圓切於 $y=2$, 而過 (3, 6). 其圓心之軌跡.

設此圓之圓心爲 $P_1(x_1, y_1)$, 則圓之方程式爲

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2.$$

但此圓切於 $y=2$, 故 $r=y_1-2$.

代入，得 $$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(y_1-2)^2.$$

此圓過 (3, 6), 則 (3, 6) 當合於此方程式，故得

$$(3-x_1)^2+(6-y_1)^2=(y_1-2)^2.$$

$$(3-x_1)^2-8(y_1-4)=0.$$

移軸至 $x'=x_1-3$, $y'=y_1-4$, 則得

$$x'^2-8y'=0.$$

(f) 一圓切於 y 軸，又切於圓 $x^2+y^2-12x+4y+31=0$. 其圓心之軌跡.

設 $P(x, y)$ 爲該圓心之軌跡上一點，因切於 y 軸，故 $r=x$.

已知圓 $x^2+y^2-12x+4y+31$ 之半徑爲 $\frac{1}{2}\sqrt{12^2+4^2-4\times 31}=3$.

兩圓相切，則其圓心之距離爲半徑之和，即 $x+3$.

但已知圓可寫作 $(x-6)^2+(y+2)^2=9$, 即其圓心爲 $(6,-2)$, 故兩圓心之距離亦等於

$$\sqrt{(x-6)^2+(y+2)^2}.$$

相等，則 $$\sqrt{(x-6)^2+(y+2)^2}=x+3.$$

化簡之,得 $(y+2)^2=18(x-\frac{3}{2})$.

移軸至 $(\frac{3}{2},-2)$, 則得 $y'^2=18x'$.

原本第 116 頁習題

1. 求下列諸抛物線之方程式,並用移軸法改爲第 40 節之標準式;作圖並畫兩組坐標軸:

(a) 頂點爲 (3, 4), 準線爲 y 軸.

$$\frac{p}{2}=3,\ p=6.$$

故抛物線爲 $(y-4)^2=12(x-3)$.

移軸至新原點 (3, 4), 則得 $y'^2=12x'$.

(b) 焦點爲 $(-2, 3)$, 頂點爲 (3, 3).

$$\tfrac{1}{2}p=-2-3=-5,\ p=-10$$

故抛物線爲 $(y-3)^2=-20(x-3)$.

移軸至新原點 (3, 3), 則得 $y'^2=-20x'$.

(c) 焦點爲 $(0, -3)$, 頂點爲 $(2, -3)$.

與 (b) 同.

(d) 其軸爲 y 軸,頂點爲 $(0, -4)$, 且過 (6, 0).

軸爲 y 軸,頂點爲 $(0, -4)$, 故標準式爲

$$x^2=2p(y+4).$$

過 (6, 0), 則 $6^2=2p\times 4,\ 2p=9.$

代入,得 $x^2=9(y+4)$.

移軸至 $(0, -4)$, 則得 $x'^2=9y'$.

(e) 焦點爲 (0, 0), 準線 $y=4$.

$$\tfrac{1}{2}p=-4,\ 2p=-16.$$

故得 $x^2=-16y$.

(f) 其軸爲 x 軸,頂點爲 (6, 0), 且過 (0, 4).

同 (d).

2. 求下列諸橢圓之方程式,而用移軸法化簡之;作圖並示其兩組坐標軸:

(a) $a=4$, 焦點 (5, 2) 與 $(-1, 2)$.

中心爲 $h=\dfrac{5-1}{2}=2,\ k=2.$

$$c=\frac{5+1}{2}=3,\ b^2=a^2-c^2=7.$$

故橢圓之方程式爲 $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{7}=1$

移軸至 (2, 2)，則得 $7x'^2+16y'^2=112.$

(b) $b=4$，焦點 (1, 0) 與 (−4, 0).

與 (a) 同.

(c) $b=\sqrt{7}$，頂點 (−2, 0) 與 (8, 0).

$$a=\frac{8+2}{2}=5.$$

中心爲 $$h=\frac{8-2}{2}=3,\ k=0.$$

橢圓爲 $$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{y^2}{7}=1.$$

移軸至 (3, 0)，則得 $7x'^2+25y'^2=175.$

(d) $b=2$，焦點 (0, 2) 與 (0, −4).

與 (a) 同.

3. 求下列諸雙曲線之方程式；化簡之．作圖，並示其二組：

(a) 貫軸 6，焦點 (−2, 0) 與 (6, 0).

中心爲 $$h=\frac{-2+6}{2}=2,\ k=0.$$

$$2a=6,\ a=3;\ 2c=6+2=8,\ c=4;$$
$$b^2=c^2-a^2=7.$$

貫軸平行於 x 軸.

雙曲線之方程式爲 $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1.$

移軸至 (2, 0)，則得 $7x'^2-9y'^2=63.$

(b) 共軛軸 4，焦點 (0, 2) 與 (0, −10).

中心爲 $$h=0,\ k=\frac{2-10}{2}=-4.$$

$$2b=4,\ b=2;\ 2c=2+10=12,\ c=6;$$
$$a^2=c^2-b^2=32.$$

貫軸在 x 軸上.

雙曲線爲 $$\frac{(y+4)^2}{32}-\frac{x^2}{4}=1.$$

移軸至 (0, −4)，則得

$$y'^2-8x'^2=8.$$

(c) 共軛軸 6, 頂點 (1, 2) 與 (−5, 2).

$$x'^2-y'^2=9.$$

(d) 貫軸 $2\sqrt{3}$, 焦點 (0, 0) 與 (−4, 0).

$$x'^2-3y'^2=3.$$

4. 求下列諸軌跡之方程式，化簡之及作圖：

(a) 一點移動時，其至 (3, 4) 與 (3, −2) 距離之和爲 8.

設 (x, y) 爲軌跡上一點，則

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}=8.$$

$$16(x-3)^2+7y^2-14y-105=0.$$

$$16(x-3)^2+7(y-1)^2=112.$$

移軸至新原點 (3, 1), 則得

$$16x'^2+7y'^2=112.$$

(b) 一點移動時，其至 (3, −3) 與 (−1, −3) 距離之差爲 3.

設 (x, y) 爲軌跡上一點，則

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2}-\sqrt{(x+1)^2+(y+3)^2}=\pm 3.$$

$$36(y+3)^2-28x^2+56x+35=0.$$

配方，得 $$36(y+3)^2-28(x-1)^2=-63.$$

移軸至新原點 (1, −3), 得

$$28x'^2-36y'^2=63.$$

5. 作圖並討論下列諸曲線系：

(a) $xy=k$.

當 x 增大時，y 減小而趨近於零；y 增大時，x 減小而趨近於零. $x=0$, $y=0$ 爲兩漸近線. 對稱於原點 k 爲正時，曲線在 I, III 兩象限內；k 爲負時，曲線在 II, IV 兩象限內；$k=0$ 時，則爲兩直線即兩軸.

(b) $kx^2+y^2-4x=0$.

$k=1$, 則爲一圓，其圓心爲 (2, 0).

$k=0$, 則 x 無二次項，故爲一拋物線，其頂點爲 (0, 0).

$k<0$, 則爲一雙曲線，中心爲 $\left(-\frac{2}{k},\ 0\right)$.

$k>0$, 則爲一橢圓，中心爲 $\left(\frac{2}{k},\ 0\right)$.

(c) $(x-k)^2=2y$.

不論 k 爲何值，均爲一抛物線，其頂點爲 $(k, 0)$.

(d) $(x-k)^2+9y^2=36.$

不論 k 爲何值，均爲一橢圓，其大小形狀一定，其中心爲 $(k, 0)$，焦點在 $x=k$ 上，$a=6$, $b=2$.

(e) $4(y-k)^2-9x^2=144.$

不論 k 爲何值，均爲一雙曲線，其大小形狀一定，其中心爲 $(0, k)$，貫軸爲 $y=k$，共軛軸爲 $x=0$, $a=6$, $b=4$.

(f) $4(x-h)^2-9(y-k)^2=36.$

不論 k 爲何值，均爲一雙曲線，其大小形狀一定，其中心爲 (h, k)，貫軸爲 $x=h$，共軛軸爲 $y=k$, $a=3$, $b=2$.

原本第 119 頁習題

1. 用轉軸法旋轉下列所示之角以變下列方程式；作圖，示其兩組之軸：

(a) $x+y=0$; $45°$.

$$\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

代入，得 $$x=0.$$

(b) $x^2+y^2=9$; $60°$.

$$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos 60°=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{x'-\sqrt{3}y'}{2},\quad y=\frac{\sqrt{3}x'+y'}{2}.$$

代入，得 $$x'^2+y'^2=9.$$

(c) $y^2-x^2=8$; $90°$.

$$\sin 90°=1,\quad \cos 90°=0.$$

$$x=y',\quad y=x'.$$

代入，得 $$x'^2-y'^2=8.$$

(d) $x^2+4xy+y^2=16$; $45°$.

$$\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

代入,得 $$3x'^2-y'^2=16.$$

(e) $4xy-3x^2=10$, $\tan\theta=2$.

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \sin\theta=\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$x=\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}},\quad y=\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}.$$

代入,得 $$x'^2-4y'^2=10.$$

(f) $3x^2-3xy-y^2=5$; $\tan\theta=3$.

(g) $x^2+4xy+4y^2+12x-6y=0$; $\tan\theta=2$.

(f), (g) 同上.

2. 證明不論坐標軸如何旋轉,方程式 $x^2+y^2=r^2$ 終不變.

設將坐標旋轉 θ 角,則此方程式變為

$$(x'\cos\theta-y'\sin\theta)^2+(x'\sin\theta+y'\cos\theta)^2=r^2.$$

展開化簡,得

$$x'^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+y'^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=r^2.$$

故仍得 $$x'^2+y'^2=r^2.$$

3. 用轉軸法去下列方程式中之 xy 項,並作圖,示其兩組坐標軸:

(a) $x^2-2xy+y^2=12$.

此處 $$A=1,\ B=-2,\ C=1,$$

故 $$\tan 2\theta=\frac{B}{A-C}=\infty,\ 2\theta=90,\ \theta=45°.$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

代入,得 $y'=\pm\sqrt{6}$ 為兩平行直線.

(b) $x^2+2\sqrt{3}xy-y^2=4$.

$$A=1,\ B=2\sqrt{3},\ C=-1.$$

故 $$\tan 2\theta=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3},\ 2\theta=60°,\ \theta=30°.$$

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\theta=\frac{1}{2}.$$

$$x=\frac{\sqrt{3}x'-y'}{2},\ \ y=\frac{x'+\sqrt{3}y'}{2}.$$

代入,得 $\qquad x'^2-y'^2=2.$

(c) $17x^2-16xy+17y^2=225.$

$$A=17,\ B=-16,\ C=17.$$

$$\tan 2\theta=\infty,\ \theta=45^\circ.$$

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\ \ y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

代入,得 $\qquad 9x'^2+25y'^2=225.$

(d) $3x^2-4\sqrt{3}xy-y^2=9.$

$$\tan 2\theta=-\sqrt{3},\ \theta=60^\circ.$$

$$x=\frac{x'-\sqrt{3}y'}{2},\ \ y=\frac{\sqrt{3}x'+y'}{2}.$$

代入,得 $\qquad 3x'^2-y'^2=9.$

(e) $x^2+4xy+y^2=16.$

同上法可得 $\theta=45^\circ.$

轉軸後,得 $\qquad 3x'^2-y'^2=16.$

(f) $x^2-2xy+y^2-2x-2y+1=0.$

$$\theta=45^\circ.$$

轉軸後,得 $\sqrt{2}y'^2-4y'+\sqrt{2}=0$ 爲兩直線.

(g) $3x^2-2\sqrt{3}xy+y^2+4x+4\sqrt{3}y=0.$

$$\tan 2\theta=\frac{-2\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3},\ \theta=60^\circ$$

轉軸後,得 $\qquad y'^2+2x'=0.$

(h) $xy=12.$

$$\theta=45^\circ.$$

轉軸後,得 $\qquad x'^2-y'^2=24.$

(i) $25x^2+14xy+25y^2=288.$

$$\theta=45^\circ.$$

轉軸後,得 $\qquad 16x'^2+9y'^2=144,$

(j) $3x^2-10xy+3y^2=0.$

$$\theta=45^\circ.$$

轉軸後，得 $x'^2-4y'^2=0$，即 $x-2y=0$，$x+2y=0$ 爲兩直線，原式可析爲 $3x-y=0$，$x-3y=0$.

原 本 第 126—127 頁 習 題

1. 化簡下列諸方程式.作圖並繪其各組坐標軸:

(a) $x^2+3xy+5y^2=11.$

$$\tan 2\theta=\frac{B}{A-C}=-\frac{3}{4},\ \cos 2\theta=-\frac{4}{5}.$$

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}=\frac{3}{\sqrt{10}},\ \cos\theta=\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$x=\frac{x'-3y'}{\sqrt{10}},\ y=\frac{3x'+y'}{\sqrt{10}}.$$

代入化簡，得 $11x'^2+y'^2=22.$

(b) $x^2-2xy+y^2-5y=0.$

$$\tan 2\theta=\infty,\ 2\theta=90^\circ,\ \theta=45^\circ.$$

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\ y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

代入化簡，得 $4y'^2-5\sqrt{2}x'-5\sqrt{2}y'=0.$

或 $$\left(y'-\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)^2-\frac{5\sqrt{2}}{4}\left(x'+\frac{5\sqrt{2}}{16}\right)=0.$$

故再移軸至新原點 $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{16},\ \frac{5\sqrt{2}}{8}\right)$，則得

$$y''^2-\frac{5\sqrt{2}}{4}x''=0.$$

(c) $x^2+3xy+y^2+4y=0.$

$$\tan 2\theta=\infty,\ \theta=45^\circ.$$

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\ y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

代入化簡，得

$$5x'^2-y'^2+4\sqrt{2}x'+4\sqrt{2}y'=0.$$

或 $$5\left(x'+\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)^2-(y'-2\sqrt{2})^2=-\frac{32}{5}.$$

再移軸至新原點 $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{5},\ 2\sqrt{2}\right)$，得

$$5x''^2-y''^2=-\frac{32}{5}.$$

(*d*) $x^2+2xy+y^2+4x-4y=0.$

$$\tan 2\theta=\infty,\quad \theta=45^\circ.$$

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

代入，得 $$x^{2'}-2\sqrt{2}y'=0.$$

(*e*) $3xy+4x+8y+4=0.$

$$\theta=45^\circ.$$

轉軸，得 $3x'^2-3y'^2+12\sqrt{2}x'+4\sqrt{2}y'+8=0.$

即 $$3(x'+2\sqrt{2})^2-3\left(y'-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{40}{3}.$$

$$h=-2\sqrt{2},\ k=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

移軸，得 $$9x''^2-9y''^2=40.$$

(*f*) $x^2+6x-3y+6=0.$

僅需移軸至 $(-3,\ -1)$，即得

$$x'^2-3y'=0$$

(*g*) $3x^2+y^2-9x-y+4=0.$

將 x, y 均配成完全平方，得

$$3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=3.$$

故僅需移軸至 $(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2})$，即得

$$3x'^2+y'^2=3.$$

(*h*) $x^2+4y^2-16x+24y+84=0.$

配方移軸至 $(8,\ -3)$，可得

$$x'^2+4y'^2=16.$$

(*i*) $7x^2+50xy+7y^2=50.$

$$\theta=45^\circ.$$

轉軸後，得 $$16x'^2-9y'^2=25.$$

(*j*) $13x^2+13y^2+10xy-42x+6y-27=0.$

轉軸 45° 並移至新原點 $(2,\ -1)$，得

$$9x''^2+4y''^2=36.$$

2. 用上述第二法作下列諸方程式之圖形:

(a) $3x^2-4xy-1=0.$

$$\Delta=B^2-4AC=4^2-4\times3\times0=16$$

爲正數,故爲一雙曲線.

討論 1. 截部 x 軸 $\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$, y 軸無.

2. 對稱 原點.

3. 限度 x, y 均可爲任何值.

(b) $4xy+4y^2-2x+3=0.$

Δ 爲正,故爲一雙曲線.

討論 1. 截部 x 軸 $x=\frac{3}{2}$, y 軸無.

2. 對稱 無.

3. 限度 解 x, $x=\dfrac{4y^2+3}{2-4y}$, y 可爲任何值.

解 y, $y=\dfrac{-x\pm\sqrt{x^2+2x-3}}{2}$, 故 $-1<x<3$ 間不可用.

4. 漸近線 $2y-1=0$ 及 $x+y=0$.

(c) $x^2-4y^2-4x-32y-60=0.$

Δ 爲正雙曲線.

析因式,得 $x+2y+6=0$

及 $x-2y-10=0.$

故爲兩直線.

(d) $x^2+y^2-4x-6y-18=0.$

$A=C$, 故爲一圓,圓心爲 $(2, 3)$, 半徑爲 $\sqrt{31}$.

(e) $4xy-3x^2=9.$

$\Delta=16$, 故爲雙曲線.

討論無截部,對稱於原點.

漸近線 $x=0,\ 4y-3x=0.$

無限度.

(f) $2x^2+3y^2-16x+18y+53=0.$

$\Delta=-24$, 故爲橢圓.

討論無截部,不對稱.

解 x, $$x=\frac{8\pm\sqrt{-6y^2-36y-42}}{2}.$$

$-6y^2-36y-42$ 之兩根爲 $-3\pm\sqrt{2}$, 故 y 之値必需在 $-3+\sqrt{2}$ 與 $-3-\sqrt{2}$ 之間.

解 y, $$y=\frac{-9\pm\sqrt{-6x^2+48x-78}}{2}.$$

$-6x^2+48x-78$ 之兩根爲 $4\pm\sqrt{3}$, 故 x 之値必需在 $4+\sqrt{3}$ 與 $4-\sqrt{3}$ 之間.

此題若先移軸至 $(4,\ -3)$ 可簡捷不少.

(g) $x^2+4xy+4y^2+12x-6y=0.$

$\Delta=4^2-4\times4=0$, 故爲一拋物線.

討論截部爲 $(0,\ 0)$, $(0,\ \frac{3}{2})$, $(-12,\ 0)$.

不對稱

解 x, $$x=-2y-6\pm\sqrt{30y+36}$$

故 y 不能小於 $-\frac{6}{5}$.

(h) $3x^2+4xy+y^2-2x-1=0.$

$\Delta=4^2-4\times3=4$ 爲正數,故爲雙曲線.

討論截部爲 $(0,\ \pm1)$, $(1,\ 0)$, $(-\frac{1}{3},\ 0)$.

不對稱.

解 x, $$x=\frac{-2y+1\pm(y-2)}{3}$$

故 y 無限度.

解 y, $$y=-2x\pm(x+1).$$

故 x 無限度.

3. 檢驗下列諸方程式並作圖，變換法或直接繪圖法擇其較便者用之:

(a) $3x^2-2xy+y^2-4x-6=0.$

$\Delta=4-12=-8$, 故爲一橢圓.

$$\tan2\theta=\frac{B}{A-C}=-1,\ \cos2\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}},\ \cos\theta=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}.$$

$$x=\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}x'-\sqrt{\sqrt{2}+1}y'}{2\sqrt{2}},\quad y=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}x'+\sqrt{\sqrt{2}-1}y'}{2\sqrt{2}}.$$

代入，得

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2}x'^2+\frac{\sqrt{2}}{2}y'^2-\sqrt{2-\sqrt{2}}x'+\sqrt{2+\sqrt{2}}y'-6=0.$$

即 $$\frac{\sqrt{2}-1}{2}\left[x'^2-\frac{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1}x'+\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}\right)^2\right]$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}\left[y'^2+\frac{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}y'+(\sqrt{2}+1)\right]=\frac{16+\sqrt{2}}{2}.$$

故再移軸至 $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}},\ \sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$，則得

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2}x''^2+\frac{\sqrt{2}}{2}y''^2+\frac{16+\sqrt{2}}{2}.$$

此處此法甚繁，不如用第二法爲便。

(b) $x^2-xy+y^2-2x-6y=0.$

$\Delta=1-4=-3$，故爲橢圓。

$$\tan 2\theta=\infty,\quad \theta=45°.$$

轉軸 45°，得 $\qquad x'^2+3y'^2-8\sqrt{2}x'=0.$

移軸至 $(4\sqrt{2},0)$，則得

$$x'^2+3y'^2=32.$$

(c) $x^2+\sqrt{3}xy+y^2-4x-6y+5=0.$

$\Delta=3-4=-1$，故爲橢圓。

$$\theta=45°.$$

轉軸 45° 並移至新原點，得

$$(2+\sqrt{3})x''^2+(2-\sqrt{3})y''^2=94-48\sqrt{3}.$$

(d) $2x^2+4xy+5y^2-4x-22y+7=0.$

$\Delta=4^2-4\cdot2\cdot5=$ 負數，故爲橢圓。

$$\tan 2\theta=-\frac{4}{3},\quad \theta=\frac{\tan^{-1}(-\frac{4}{3})}{2}.$$

故以直接作圖爲便。

(e) $xy-x^2+4=0.$

$\Delta=1-4(-1)\cdot0=$ 正數，故爲雙曲線。

此處亦以第二法爲便。

(f) $xy-2x-y+3=0.$

$\Delta=$正數，故爲雙曲線。

用第二法。

(g) $x^2-2xy+y^2-2x-2y+1=0.$

$\Delta=4-4=0$，故爲拋物線。

轉軸 $\tan 2\theta=\infty$，$\theta=45°$，

得 $2y'^2-2\sqrt{2}x'+1=0$

再移軸至 $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}},\ 0\right)$，得

$$y'^2-\sqrt{2}x'=0.$$

(h) $2x^2-5xy-3y^2-2x+13y-12=0.$

$\Delta=25+24=49$，故爲雙曲線。

$$\tan 2\theta=\frac{-5}{5}=-1,\ 2\theta=135°,\ \theta=67.5°.$$

可先轉軸 67.5° 再移軸，或以第二法作圖。

(i) $x^2-3xy+y^2+10x-10y+21=0.$

$\Delta=9-4=5$，故爲雙曲線。

轉軸 $\theta=\frac{\tan^{-1}\infty}{2}=45°.$

再移軸至 $(-2,2)$，得 $x''^2-5y''^2=2.$

(j) $y^2+4xy+4x^2-4=0.$

可分解爲 $(2x+y+2)(2x+y-2)=0$

故爲二直線。

4. 證明二次方程式之普遍式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

可用移軸法化簡之使新方程式不含一次項，祇須新原點之坐標 (h,k) 適合於 $2Ah+Bk+D=0$，$Bh+2Ck+E=0$ 二方程式。再證明除 $B^2-4AC=0$ 外，新原點爲軌跡之中心。因在此情形 $B^2-4AC=0$ 中，變換法不能應用也。

以 $x=x'+h$，$y=y'+k$ 代入展開整理之，則得

$$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+(2Ah+Bk+D)x'+(2Ck+Bh+E)y'$$

$+Ah^2+Bhk+Ck^2+Dh+Ek+F=0.$

故若使 x', y' 之係數等於零時，則新方程式不含一次項，即

$$2Ah+Bk+D=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$2Ck+Bh+E=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解 (1), (2), 得

$$h=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC},\quad k=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}.$$

故 $B^2-4AC=0$ 時，h 與 k 爲 ∞，故不能用此變換法使 x' 與 y' 之係數皆變爲 0.

5. 試去方程式 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ 之根號，以證其軌跡爲一圓錐曲線，並決定其形式．給 a 以特殊數值以作圖．

兩端乘方，得 $\qquad x+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y=a.$

移項再乘方，得

$$x^2-2xy+y^2-2ax-2ay+a^2=0.$$

此爲一兩次式，故爲圓錐曲線．

且 $\Delta=0$, 故爲一拋物線．

6. 繪下列各方程式之曲線系：

(a) $(x-y)^2+(y-k)^2=0.$

平方均爲正數，其和爲零，則必各項均爲零，即 $y=k$, 而 $x=y=k$, 故僅得一點，即 (k, k).

將方程式展開，得

$$x^2-2xy+2y^2-2ky+k^2=0.$$

$\Delta=4-8=-4$, 故當爲一橢圓．

但解 x 時，得 $x=y\pm(y-k)\sqrt{-1}$, 故除 $y=k$ 外，x 均爲虛數，故其軌跡僅得 $x=y=k$ 一點．

(b) $xy+h^2-h(x+y)=0.$

$\Delta=1$, 故當爲一雙曲線．

解 x, $\qquad x=\dfrac{hy-h^2}{y-h}=h.$

解 y, $\qquad y=\dfrac{hx-h^2}{x-h}=h.$

不論 x 爲何值，$y=h$；不論 y 爲何值，$x=h$, 故軌跡爲 $x=h$ 及

$y=h$ 二直線.

原式可　因式爲 $(x-h)(y-h)=0$, 其結論同.

(c)　$x^3-y^3-(x-h)(x^2-y^2)=0.$

原式可析爲

$$(x-y)(x^2+xy+y^2-x^2-xy+hx+hy)=0.$$

即　$x-y=0$ 及 $y^2+hx+hy=0.$

故得一直線及一拋物線.

原本第 131 頁習題

1.　使用適當移軸法，求下列直角雙曲線以漸近線爲軸之方程式，並作圖:

(a)　$xy-2x-y+8=0.$

以 $x'+h$ 代 x, $y'+k$ 代 y, 得

$$x'y'+(k-2)x'+(h-1)y'+hk-2h-k+8=0.$$

使 x' 與 y' 之係數 $=0$, 則

$$k=2,\ h=1.$$

即移軸至新原點 $(1, 2)$, 則得

$$x'y'+6=0.$$

(b)　$3xy-6x-12y+30=0.$

$$xy-2x-4y+10=0.$$

將首三項配成完全因式，得

$$(x-4)(y-2)+2=0.$$

使 $x'=x-4$, $y'=y-2$, 即轉得至 $(4, 2)$, 則得

$$x'y'+2=0.$$

(c)　$2xy-6x+4y-16=0.$

$$xy-3x+2y-8=0.$$

$$(x+2)(y-3)-2=0.$$

移軸至新原點 $(-2, 3)$, 得

$$x'y'-2=0.$$

(d)　$4xy+12x-4y-6=0.$

$$2(xy+3x-y)-3=0.$$

$$2(x-1)(y+3)+3=0.$$

移軸至新原點 $(1, -3)$, 得

$$2x'y'+3=0.$$

(e) $5xy+5x+20y+24=0.$

$$5(xy+x+4y)+24=0.$$

$$5(x+4)(y+1)+4=0.$$

移軸至 $(-4, -1)$, 得

$$5x'y'+4=0.$$

(f) $3xy+x+4y+1=0.$

$$3\left(xy+\frac{x}{3}+\frac{4}{3}y\right)+1=0.$$

$$3\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(y+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}=0$$

移軸至新原點 $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, 得

$$9x'y'=1.$$

2. $A(x-h)(y-k)+C=0$ 爲何種圓錐曲線?

若以 $x'=x-h,\ y'=y-k$ 代入, 得

$$Ax'y'+C=0.$$

故爲一等邊雙曲線.

3. 用移軸法化簡 $(1-e^2)x^2+y^2-2px+p^2=0.$

$$(1-e^2)\left[x^2-\frac{2p}{1-e^2}x+\frac{p^2}{(1-e^2)^2}\right]+y^2+p^2-\frac{p^2}{1-e^2}=0.$$

$$(1-e^2)\left(x-\frac{p}{1-e^2}\right)^2+y^2=\frac{p^2e^2}{1-e^2}.$$

故移軸至 $\left(\frac{p}{1-e^2}, 0\right)$, 則得

$$(1-e^2)x'^2+y'^2=\frac{p^2e^2}{1-e^2}.$$

4. 用解析法證明有心圓錐曲線之焦點與已採用之焦點相重合.

$$(1-e^2)x^2+y^2-2px+p^2=0.$$

由上題移軸後, 得

$$(1-e^2)x'^2+y'^2=\frac{p^2e^2}{1-e^2}.$$

$$\frac{x'^2}{\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y'^2}{\frac{p^2e^2}{1-e^2}}=1.$$

$$a^2=\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2},\ b^2=\frac{p^2e^2}{1-e^2}.$$

設 $e<1$, 則為橢圓 $c^2=a^2-b^2$.

$$c=\pm\sqrt{\frac{p^2e^2-p^2e^2(1-e^2)}{(1-e^2)^2}}=\pm\frac{pe^2}{1-e^2}.$$

故二焦點為 $\left(\frac{pe^2}{1-e^2},\ 0\right)$ 及 $\left(-\frac{pe^2}{1-e^2},\ 0\right)$.

二焦點之坐標對原坐標軸為

$$x_1=\frac{pe^2}{1-e^2}+\frac{p}{1-e^2}=\frac{p(e^2+1)}{1-e^2},\ y_1=0.$$

$$x_2=-\frac{pe^2}{1-e^2}+\frac{p}{1-e^2}=\frac{p(1-e^2)}{1-e^2}=p,\ y_2=0$$

故 (x_2, y_2) 與原焦點相合.

設 $e>1$, 則為雙曲線 $c^2=a^2+b$.

$$c=\pm\sqrt{\frac{p^2e^2+p^2e^2(e^2-1)}{(e^2-1)^2}}=\pm\frac{pe^2}{e^2-1}.$$

二焦點之坐標對原坐標軸為

$$x_1=\frac{pe^2}{e^2-1}-\frac{p}{e^2-1}=\frac{p(e^2-1)}{e^2-1}=p,\ y_1=0.$$

$$x_2=-\frac{pe^2}{e^2-1}-\frac{p}{e^2-1}=-\frac{p(e^2+1)}{e^2-1},\ y_2=0.$$

故 (x_1, y_1), 與原焦點相合.

5. 證明題 3 中之 e 與第 44 節及第 48 節中所說之 e 相同.

$$(1-e^2)x^2+y^2-2px+p^2=0.$$

由上題移軸整理後,得

$$a=\frac{pe}{1-e^2},\ c=\frac{pe^2}{1-e^2}.$$

故 $\frac{c}{a}=e$ 與 §44 與 §48 之 e 正同.

6. 證明自橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一點 (x, y) 至焦點之距離 [稱為焦點半徑 (Focal radii)] 為 $a\pm ex$.

橢圓之焦點為 $(\pm c, 0)$, 故焦點與此橢圓任意點之距離為

$$\sqrt{(x\pm c)^2+y^2}.$$

但此點在橢圓上，故

$$y^2=\frac{a^2b^2-b^2x^2}{a^2}.$$

代入，得焦點半徑 $=\sqrt{x^2\pm 2cx+c^2+\dfrac{a^2b^2-b^2x^2}{a^2}}$

$$=\sqrt{\frac{a^2b^2+a^2c^2\pm 2a^2cx+a^2x^2-b^2x^2}{a^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^4\pm 2a^2cx+c^2x^2}{a^2}}$$

$$=\frac{a^2\pm cx}{a}=a\pm ex.$$

7. 用解析法證明設在任一橢圓上取三點，其橫坐標成一等差級數，則其對應之焦點半徑亦成一等差級數。

設在橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上取三點為 $x-d, x, x+d$，則從上題，其焦點半徑為 $a\pm e(x-d)$，$a\pm ex$，$a\pm e(x+d)$. e 為常數，故亦為等差級數.

8. 證明雙曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上任一點之焦點距離為 $ex\pm a$.

證法同題 6.

軌　跡　問　題

1. 求下列諸軌跡之方程式，討論之，並作其圖形.

三角形底邊之長與位置已一定，求其所對之頂點之軌跡，若：

(a) 他二邊之和為一常數.

設三角形之底邊在 x 軸上而中點為原點，並令底邊之長為 $2a$，則底邊二頂點之坐標為 $(c, 0)$ 與 $(-c, 0)$，設第三頂點之坐標為 (x, y)，而二邊之和為 $2k$，則得

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2k$$

化簡，得　$(k^2-c^2)x^2+k^2y^2=k^2(k^2-c^2)$.

或　$$\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{k^2-c^2}=1.$$

此處 $2k>2c$，因三角形二邊之和大於第三邊，即 $k>c$，故 x^2 與 y^2 之係數與常數項均同號，故爲橢圓。

(b) 他二邊之差爲一常數。

同上假設，得

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2k.$$

化簡，得 $$(c^2-k^2)x^2-k^2y^2=k^2(c^2-k^2).$$

或 $$\frac{x^2}{k^2}-\frac{y^2}{c^2-k^2}=1.$$

此處 $2k<2c$，因三角形二邊之差小於第三邊，即 $k<c$，故 x^2 與 y^2 之係數異號，故爲一雙曲線。

(c) 他二邊之斜率之和爲一常數。

同上假設，並設常數爲 k，則

$$\frac{y}{x-c}+\frac{y}{x+c}=k.$$

化簡，得 $$kx^2-2xy-c^2k=0.$$

此處無 y^2 項，故 B^2-4AC 爲正，故爲雙曲線，若 $k=0$，則爲 x $y=0$ 兩直線。

(d) 他二邊之斜率成反比。

同上假設，並設斜率相乘 $=k$，則

$$\frac{y}{x-c}\times\frac{y}{x+c}=k.$$

$$kx^2-y^2-kc^2=0.$$

設 $k>0$，則爲雙曲線。

$k<0$，則爲橢圓。

$k=0$，則爲一直線 $y=0$。

(e) 一底角爲他底角之 2 倍。

同上假設，並設底角 A 爲底角 B 之二倍。

$$\angle A=2\angle B,$$

則 $$\tan A=\frac{2\tan B}{1-\tan^2 B}.$$

設 $\angle A$ 在左，則 $$\tan A=\frac{y}{x+c},$$

$$\tan B=-\frac{y}{x-c}.$$

代入，得
$$\frac{y}{x+c}=\frac{-\dfrac{2y}{x-c}}{1-\dfrac{y^2}{(x-c)^2}}.$$

化簡，得 $$3x^2-y^2-2cx-c^2=0.$$

$\Delta=12$ 爲正數，故爲一雙曲線.

(*f*) 兩底角之和爲一常數.
$$\angle A+\angle B=k.$$

故 $$\tan(A+B)=k'.$$

展開，得 $$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=k'.$$

以 $\tan A$, $\tan B$ 代入，得
$$\frac{\dfrac{y}{x+c}-\dfrac{y}{x-c}}{1+\dfrac{y^2}{(x+c)(x-c)}}=k'.$$

化簡，得
$$x^2+y^2-\frac{2c}{k'}y-c^2=0.$$

故爲一圓，其圓心爲 $\left(0,\ -\dfrac{c}{k'}\right)$，半徑爲 $\dfrac{c}{k'}\sqrt{c^2+k'^2}$

(*g*) 兩底角之差爲一常數.
$$\angle A-\angle B=k.$$

故 $$\tan(A-B)=k'.$$

展開，得 $$\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}=k'$$

以 $\tan A$, $\tan B$ 代入，得
$$\frac{\dfrac{y}{x+c}+\dfrac{y}{x-c}}{1-\dfrac{y^2}{(x+c)(x-c)}}=k'.$$

化簡，得
$$k'x^2-2xy-k'y^2-k'c^2=0.$$

$\Delta=4$ 爲正數，故爲一雙曲線.

第八章 切線

原本第 134 頁習題

1. 求切下列諸曲線於切點 (x_1, y_1) 之切線之方程式:

(a) $3y^2=4x$.

設 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_1+h, y_1+k)$ 爲切線上兩點，則得

$$3y_1{}^2=4x_1,$$
$$3(y_1+k)^2=4(x_1+h).$$

展開相減，得

$$6ky_1+3k^2=4h.$$
$$k(6y_1+3k)=4h.$$
$$\frac{k}{h}=\frac{4}{6y_1+3k}.$$

當 h 與 $k\to 0$ 時，曲線之斜率爲

$$\frac{k}{h}=\frac{2}{3y_1}.$$

故切線爲 $$y-y_1=\frac{2}{3y_1}(x-x_1).$$

化簡，得 $$2x-3y_1y-2x_1+3y_1{}^2=0.$$

但 $$3y_1{}^2=4x_1.$$

故得 $$2x-3y_1y+2x_1=0.$$

(b) $x=Ay^2+By+C$.

同上法，得切線爲

$$x-(2Ay_1+B)y+Ay_1{}^2-C=0.$$

(c) $x^2+y^2+2hx+2ky+r^2=0$.

同上法，得

$$(x_1+h)x+(y_1+k)y+hx_1+ky_1+r^2=0.$$

(d) $x^2+6y^2=16$.

同上法，得 $$x_1x+6y_1y=16.$$

(e) $4x^2-2y^2=7$.

同上法，得 $$4x_1x-2y_1y=7.$$

(f) $xy=k$.

同上，得 $$y_1x+x_1y=2k.$$

(g) $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0.$

同上，得
$$(2Ax_1+D)x+(2By_1+E)y+Dx_1+Ey_1+2F=0$$

(h) $y=x^3.$

同上，得 $$3x_1^2x-y-2y_1=0.$$

(i) $3x^2=4y^3.$

同上，得 $$3x_1x-4y_1^2y+x_1^2=0.$$

(j) $xy^2=xy-y-x.$

同上，得
$$(y_1^2-y+1)x-(x_1-2x_1y_1-1)y-x_1y_1+2x_1+2y_1=0.$$

2. 求下列諸曲線之切線方程式，其切點如下：

(a) $x^2+9y^2=40,\ (-2,\ 2).$

設 (x_1, y_1) 及 (x_1+h, y_1+k) 爲曲線上兩點，則得
$$x_1^2+9y_1^2=40,$$
$$(x_1+h)^2+9(y_1+k)^2=40.$$

展開相減，得 $$h(2x_1+h)+9k(2y_1+k)=0.$$
$$\frac{k}{h}=-\frac{2x_1+h}{9(2y_1+k)}.$$

當 k 與 $h\to 0$ 時， $$\frac{k}{h}=-\frac{x_1}{9y_1}.$$

今切點爲 $(-2, 2)$，故得切線之斜率爲
$$\frac{k}{h}=\frac{1}{9}.$$

代入直線方程式，得
$$y-2=\frac{1}{9}(x+2)$$

化簡，得 $$x-9y+20=0.$$

或先將原式化爲標準式，得
$$\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{\frac{40}{9}}=1 \text{ 即 } \frac{40}{9}x^2+40y^2=40\cdot\frac{40}{9}.$$

$$a^2=40,\ b^2=\frac{40}{9},\ x_1=-2,\ y_1=2.$$

代入橢圓之曲線方程式，得

$$\frac{40}{9}(-2)x+40\cdot 2y=40\cdot\frac{40}{9}.$$

即 $$x-9y+20=0.$$

(b) $x^2+4y^2+2x+8y-20=0$, $(2,\ -3)$.

依上第一法，求斜率而以已知點代入，或將曲線移軸化爲

$$(x+1)^2+4(y+1)^2=25.$$

移軸至 $(-1,\ -1)$，則得

$$x'^2+4y'^2=25 \quad 即 \quad \frac{x'^2}{25}+\frac{y'^2}{\frac{25}{4}}=1.$$

而 $(2,\ -3)$ 對於新軸之坐標爲 $(3,\ -2)$.

故依橢圓之切線方程式，得

$$3x'-8y'=25.$$

再移至原軸 $(x'=x+1;\ y'=y+1)$，得

$$3x-8y=30.$$

(c) $2x^2+3y^2=50$, $(-1,\ -4)$.

依橢圓之切線式代入化簡，得

$$x-6y+25=0.$$

(d) $y=x^3+2x$, $(1,\ 3)$.

依上第一法，得切線之斜率爲

$$\frac{k}{h}=3x_1^2+2.$$

今切點爲 $(1,\ 3)$，故 $\frac{k}{h}=5.$

$$y-3=5(x-1).$$

$$5x-y-2=0.$$

(e) $2y^2=x^3$, $(2,\ 2)$.

$$\frac{k}{h}=\frac{3x_1^2}{4y_1}.$$

代入，得 $$y-2=\frac{3}{2}(x-2).$$

$$3x-2y-2=0.$$

(f) $y=2x^3+3$, $(-2,\ -13)$.

$$\frac{k}{h}=6x_1^2.$$

代入，得　$$y+13=6\cdot 4(x+2).$$

$$24x-y+35=0.$$

(*g*)　$2x^2-3y^2=12$, $(3, \sqrt{2})$.

雙曲線先寫成　$$4x^2-6y^2=24.$$

依雙曲線之切線方程式，可得

$$2x-\sqrt{2}y=4.$$

(*h*)　$y=2x-x^2$, $(0, 0)$.

$$\frac{k}{h}=2-2x_1.$$

代入 得　$$y=2x.$$

(*i*)　$xy=x+3$, $(3, 2)$.

$$\frac{k}{h}=\frac{1-y_1}{x_1}=-\frac{1}{3}.$$

代入，得　$$y-2=-\tfrac{1}{3}(x-3).$$

$$x+3y-9=0.$$

(*j*)　$xy-2x+y=0$, $(x_1=3)$.

$$\frac{k}{h}=\frac{2-y_1}{x_1+1}.$$

當 $x_1=3$ 時，$y_1=\frac{3}{2}$ [因 (x_1, y_1) 在曲線上].

$$\frac{k}{h}=\frac{1}{8}.$$

代入，得　$$y-\frac{3}{2}=\frac{1}{8}(x-3)$$

$$x-8y+9=0.$$

原 本 第 139—140 頁 習 題

1. 求至下列各曲線上所示之點之法線方程式：

(*a*)　$2x^2+3y^2=35$, $(2, 3)$.

$$\frac{x^2}{\frac{35}{2}}+\frac{y^2}{\frac{35}{3}}=1.$$

$$a^2=\frac{35}{2},\ b^2=\frac{35}{3},\ x_1=2,\ y_1=3.$$

代入 §71 橢圓之法線方程式，得

$$\frac{35}{2}\cdot 3x-\frac{35}{3}\cdot 2y=\left(\frac{35}{2}-\frac{35}{3}\right)2\cdot 3.$$

$$9x-4y=6.$$

(b) $y^2=4x+4$, $(3, 4)$.

$$y^2=4(x+1).$$

移軸至 $(-1, 0)$，得

$$y'^2=4x'.$$

$$p=2,\ x_1=3,\ y_1=4.$$

代入抛物線之法線方程式，得

$$4x'+2y'=3\cdot 4+2\cdot 4.$$

$$2x'+y'=10.$$

移回原軸，得

$$2x+y=8.$$

(c) $x^2+xy=4$, $(-2, 0)$.

先自第 133 頁之法，或以 $A, B, C, \cdots\cdots F$ 之值代入第 135 頁，

$$m=-\frac{2Ax_1+By_1+D}{Bx_1+2Cy_1+E},$$

得切線之斜率為 $m=-2$.

故法線之斜率為 $\frac{1}{2}$.

過 $(-2, 0)$，故得

$$y-0=\tfrac{1}{2}(x+2).$$

$$x-2y+2=0.$$

(d) $xy^2=9$, $(1, -3)$.

依上題第一法，得

$$m=\frac{k}{h}=-\frac{y_1}{2x_1},\ 故\ m'=\frac{2x_1}{y_1}=-\frac{2}{3}.$$

代入直線方程式，得

$$y+3=-\tfrac{2}{3}(x+1).$$

$$2x+3y+11=0.$$

(e) $3y^2=x^3$, $(3, 3)$.

$$m=\frac{k}{h}=\frac{x_1{}^2}{2y_1},\ 故\ m'=-\frac{2y_1}{x^2}=-\frac{2}{3}.$$

代入直線方程式，得 $y-3=-\frac{2}{3}(x-3)$.

$$2x+3y=15.$$

(*f*) $x^2+4y^2+5x=0,\ (-4,\ 1).$

$$m=-\frac{-8+5}{8+0}=\frac{3}{8},\quad m'=-\frac{8}{3}.$$

$$y-1=-\frac{8}{3}(x+4).$$

$$8x+3y+29=0.$$

2. 求題 1 各部中之次切線與次法線之長:

(*a*) 法線之斜率爲 $\frac{9}{4}$, 故切線之斜率爲 $-\frac{4}{9}$, 故切線之方程式爲

$$y-3=-\frac{4}{9}(x-2).$$

切線在 x 軸上之截部爲 (使 $y=0$), $x=\frac{35}{4}$, 但 $x_1=2$, 故次切線之長爲

$$x-x_1=\frac{27}{4}=6\frac{3}{4}.$$

法線之方程式爲 (自題 1), $9x-4y=6$, 其在 x 軸之截部爲 $x=\frac{2}{3}$, 故次法線之長爲 $x-x_1=\frac{2}{3}-2=-1\frac{1}{3}$. 或依 §67 法代入亦可.

(*b*) 法線之斜率爲 2, 故切線之斜率爲 $-\frac{1}{2}$. 依 § 72 定理:

$$次切線=-\frac{y_1}{m}=-\frac{4}{-\frac{1}{2}}=8.$$

$$次法線=-my_1=\tfrac{1}{2}\cdot 4=2.$$

(*c*) 次切線 $=0$.

次法線 $=0$.

(*d*) 次切線 $=2$.

次法線 $=-\frac{9}{2}$.

(*e*) 次切線 $=-2$.

次法線 $=\frac{9}{2}$.

(*f*) 次切線 $=-\frac{8}{3}$.

次法線 $=\frac{3}{8}$.

3. 證明拋物線 $y^2=2px$ 之次切線爲切點橫坐標之二倍, 而次法線爲一定, 且等於 p.

設切點爲 $(x_1,\ y_1)$, 則切線爲 $y_1y=p(x+x_1)$

其在 x 軸上之截部爲 $x=-x_1$

故次切線爲 $\qquad x_1+x_1=2x_1.$

法線為 $y_1x+py=x_1y_1+py_1.$

其在 x 軸上之截部為 $x=x_1+p.$

故次法線為 $x_1+p-x_1=p.$

4. 求在下列已知曲線之已知切點上之切線與法線之方程式，及其次切線與次法線之長：

(a) $y^2-6y-8x-31=0$, $(-3, -1)$.

先求切線之斜率，得 $\frac{k}{h}=\frac{4}{y-3}=-1.$

切線為 $y+1=-(x+3)$ 即 $x+y+4=0.$

法線為 $y+1=x+3$ 即 $x-y+2=0.$

次切線 $=-\frac{-1}{-1}=-1.$

次法線 $=(-1)(-1)=1.$

(b) $2x^2-y^2=14$, $(3, -2)$.

先求切線之斜率為 $\frac{k}{h}=\frac{2x_1}{y_1}=-3.$

切線為 $y+2=-3(x-3)$ 即 $3x+y-7=0.$

法線為 $y+2=\frac{1}{3}(x-3)$ 即 $x-3y-9=0.$

次切線 $=-\frac{2}{3}.$

次法線 $=6.$

(c) $x^2-3y^2+6x+12y=9$, $(0, 3)$.

先求得切線之斜率為 $\frac{x_1+3}{3y_1-6}=1.$

切線為 $y=x-3,\ x-y-3=0.$

法線為 $y=-x+3,\ x+y-3=0.$

次切線 $=-3.$

次法線 $=3.$

(d) $5x^2+9y^2+20x+36y+11=0$, $(1, -2)$.

(e) $4x^2+9y^2+24x+36y=0$, $(0, 0)$.

先依第 133 頁法求切線之斜率，因得法線之斜率，然後與切點同代入直線方程式，即得切線與法線，次切線與次法線，依公式計算之。

5 求自下列各已知點至下列各已知曲線上之切線方程式：

(a) $x^2+y^2=5$, $(3, -1)$.

設切點爲 (x_1, y_1)，則切線爲 $x_1x+y_1y=5.$

切線過 $(3, -1)$，故 $3x_1-y_1=5.$

又切點在曲線上，故 $x_1^2+y_1^2=5.$

解二方程式，得 $x_1=1,\ y_1=-2$；或 $x_1=2,\ y_1=1.$

代入切線方程式，得 $x-2y=5$

及 $2x+y=5.$

(b) $x^2+4y^2=4,\ (2, 2).$

設切點爲 (x_1, y_1)，則切線爲

$$x_1x+4y_1y=4.$$

切線過 $(2, 2)$，故 $2x_1+8y_1=4.$

又切點在曲線上，故 $x_1^2+4y_1^2=4.$

解二式，得切點爲 $(2, 0)$ 及 $\left(-\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right).$

代入切線方程式，得 $x=2$

及 $3x-8y+10=0.$

(c) $12x^2-10y^2=120.$

同上題法，得切點爲 $(2\sqrt{10}, -6)$ 及 $(-2\sqrt{10}, 6).$

代入切線方程式，得 $\pm 2\sqrt{10}x+5y=10.$

(d) $3x^2+y^2=16,\ (2, 2).$

(e) $y^2=6x,\ (8, 13).$

(d), (e) 法同上。

6. 依所示之斜率與傾角，求下列圓錐曲線之切線方程式：

(a) $2x^2+3y^2=6,\ m=-1.$

設切點爲 (x_1, y_1)，則切線爲

$$2x_1x+3y_1y=6.$$

其斜率爲 $-\frac{2x_1}{3y_1}.$

但已知斜率爲 -1，故

$$-\frac{2x_1}{3y_1}=-1 \quad 即 \quad 2x_1=3y_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 (x_1, y_1) 在曲線上，故

$$2x_1^2+3y_1^2=6 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解 (1) 與 (2)，得 $x_1=\frac{3}{\sqrt{5}},\ y_1=\frac{2}{\sqrt{5}}$；

$$x_1=-\frac{3}{\sqrt{5}},\ y_1=-\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

代入,得　$x+y\pm5=0$

(b)　$y^2=4x,\ \alpha=30°.$

$$m=\tan\alpha=\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

利用題 3,

$$my_1=p,\ \frac{y_1}{m}=2x_1,\ p=2,$$

得　$y_1=2\sqrt{3},\ x_1=3$

代入直線方程式,得

$$y-2\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-3).$$

$$x-\sqrt{3}y+3=0.$$

(c)　$x^2+y^2=25,\ m=-\frac{3}{4}.$

設切點爲 (x_1, y_1), 則切線爲

$$x_1x+y_1y=25.$$

其斜率爲 $-\frac{x_1}{y_1}$, 故

$$-\frac{x_1}{y_1}=-\frac{3}{4}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又　$x_1^2+y_1^2=25\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

解之,得　$x_1=3,\ y_1=4;$

$$x_1=-3,\ y_1=-4.$$

因得兩切線爲　$3x+4y=\pm25.$

(d)　$2y^2-16x^2=1,\ m=2.$

設切點爲 (x_1, y_1), 則切線爲

$$2y_1y-16x_1x=1.$$

斜率爲 $\frac{8x_1}{y_1}$, 故　$\frac{8x_1}{y_1}=2.$

又　$2y_1^2-16x_1^2=1.$

解之,得　$x_1=\frac{1}{4},\ y_1=1;$

$$x_1=-\frac{1}{4},\ y_1=-1.$$

代入,得　$4x-2y=\pm1.$

(e) $y^2-12y-8x+20=0,\ \alpha=90^\circ$.

設 (x_1, y_1) 為切點，依第 133 頁法或第 135 頁公式，求其斜率並使等於已知之斜率，即 $\tan\alpha=\tan 90^\circ=\infty$，即斜率之分母等於零，又以切點 (x_1, y_1) 在曲線上代入其方程式，以此二式解 (x_1, y_1)，一或二切點，乃以切點與斜率之直線方程式，即得切線。

(f) $15x^2-8y^2+30x+32y-137=0,\ m=\sqrt{2}$.

同上。

(g) $8x^2+9y^2=72,\ m=1$.

同 (a).

7. 依所示之斜率，求下列圓錐曲線之法線方程式：

(a) $xy=4,\ m=\frac{1}{4}$.

設 (x_1, y_1) 為切點，先求切線之斜率為 $-\frac{y_1}{x_1}$，故法線之斜率為 $\frac{x_1}{y_1}$，故 $4x_1=y_1$.

又 $$x_1y_1=4.$$
故 $$x_1=1,\ y_1=4;$$
$$x_1=-1,\ y_1=-4.$$
代入直線方程式，得 $$y\pm 4=\tfrac{1}{4}(x\pm 1).$$
即 $$x-4y\pm 15=0.$$

(b) $4x^2+6y^2=25,\ m=-6$.

設切點為 (x_1, y_1)，切線之斜率為 $-\frac{2x_1}{3y_1}$，因得
$$\frac{3y_1}{2x_1}=-6.$$
又 $$4x_1^2+6y_1^2=25.$$
解之，得 $$x_1=\tfrac{1}{2},\ y_1=-2;$$
$$x_1=-\tfrac{1}{2},\ y_1=2.$$
代入，得 $$6x+y\pm 1=0.$$

(c) $x^2-4y^2=9,\ m=\frac{1}{2}$.

設切點為 (x_1, y_1)，則法線之斜率為 $-\frac{4y_1}{x_1}$ 且 $-\frac{4y_1}{x_1}=\frac{1}{2}$.

又 $$x_1^2-4y_1^2=9$$
解之，得 $$x_1=4\sqrt{\frac{3}{5}},\ y_1=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}};$$

$$x_1=-4\sqrt{\frac{3}{5}},\ y_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

代入直線方程式,得

$$\left(y\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=\frac{1}{2}\left(x\mp4\sqrt{\frac{3}{5}}\right).$$

$$x-2y\pm\sqrt{15}=0.$$

(d) $2y^2-16x^2=1,\ m=\pm1.$

同上法,得四直線.

原本第 142—143 頁習題

1. 求適合下列所示條件之諸圓錐曲線之切線方程式.求其切點並用作圖法證實之:

(a) $x^2+y^2=16,\ m=-\frac{4}{3}.$

已知切線之方程式爲 $-\frac{4}{3}$,故設直線系之方程式爲

$$y=-\tfrac{4}{3}x+k \quad\cdots\cdots(1)$$

此直線系與

$$x^2+y^2=16 \quad\cdots\cdots(2)$$

相交於二點(相割),一點(相切),或不相交,視 k 之値而定.二者之交點可解二聯立方程式得之,解以 (1) 代入 (2),得

$$25x^2-24kx+9k^2-144=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

故

$$x=\frac{12k\pm3\sqrt{-9k^2+25\cdot16}}{25} \quad\cdots\cdots(4)$$

當 $\Delta=0$ 時,則交點祇一,卽二線相切;$\Delta=0$,卽

$$9k^2=25\cdot16.$$

$$k=\pm\frac{20}{3}.$$

代入直線方程式,卽得切線爲

$$4x+3y=\pm20.$$

代入 (4),得 $$x=\pm\frac{16}{5}.$$

更以 x 之值代入切線,得

$$y=\pm\frac{12}{5}.$$

故切點爲 $\left(3\frac{1}{5}, 2\frac{2}{5}\right)$ 及 $\left(-3\frac{1}{5}, -2\frac{2}{5}\right)$.

(b) $y^2=4x,\ m=1.$

利用第140頁習題3,

$$y_1 m=p,\quad \frac{y_1}{m_1}=2x_1,$$

得 $$x_1=1,\ y_1=2.$$

因得切線爲

$$y-2=x-1 \text{ 即 } x-y+1=0.$$

(c) $x^2+y^2-2x+3y-8=0,\ m=2.$

同 (a), $$y=2x+k.$$

代入解之,得

$$x^2+(2x+k)^2-2x+3(2x+k)-8=0.$$
$$5x^2+(4k+4)x+k^2+3k-8=0.$$
$$\Delta=B^2-4AC=k^2+7k-44=0.$$
$$k=-11 \text{ 或 } 4.$$

故切線爲 $$y=2x-11 \text{ 及 } y=2x+4.$$

切點爲 $$x=\frac{-B}{2A}=4 \text{ 或 } -2,$$
$$y=-3 \text{ 或 } 0.$$

(d) $x^2+y^2-2y=0,\ a=90°.$

移軸至新原點 (0, 1), 得 $x'^2+y'^2=1.$

依 §75 定理,得切線爲 $\frac{y}{\infty}=x\pm 1.$

或依上法,亦可得 $y+1=\infty(x\pm 1).$

故得 $x\pm 1=0$ 爲兩切線。

(e) $xy-12=0,\ m=-\frac{3}{2}.$

設 (x_1, y_1) 爲切點,則切線方程式爲

$$x_1 y+y_1 x=24.$$

其斜率爲 $$-\frac{y_1}{x_1}=-\frac{3}{2},\quad y_1=\frac{3x_1}{2}.$$

又 $$x_1 y_1=12$$
$$x_1=\pm 2\sqrt{2},\ y_1=\pm 3\sqrt{2}.$$

故切線爲 $$3x+2y=\pm 12\sqrt{2}$$

(*f*) $x^2-4y^2=4$, 垂直於 $x-2y-5=0$.
切線垂直於 $x-2y-5=0$, 故斜率爲 -2.
自 §75 定理,得切線爲 $y=-2x\pm\sqrt{15}$.
(*g*) $x^2+9y^2=4$, 垂直於 $9x-y=0$.

切線之斜率爲 $$-\frac{1}{9}.$$

原式可寫作 $$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{4}{9}}=1.$$

自 §75 定理,得切線爲

$$y=-\frac{1}{9}x\pm\sqrt{\frac{4}{81}+\frac{4}{9}}.$$

$$x+9y=\pm2\sqrt{10}.$$

(*h*) $x^2-y^2-4x+6y+7=0$, 平行於 $x+2y=7$.

$$x+2y=k,\ x=k-2y.$$

代入原式化簡,得

$$3y^2-(4k-14)y+k^2-4k+7=0.$$

$$\Delta=k^2-16k+28=0,\ k=2 \text{ 或 } 14.$$

故切線爲 $x+2y=2$ 及 $x+2y=14$.

切點爲 $$y=\frac{B}{2A}=\frac{4k-14}{6}=-1 \text{ 或 } 7.$$

$$x=4 \text{ 或 } 0.$$

(*i*) $9x^2-16y^2=32$, 平行於 $18x-8\sqrt{7}y=15$.

斜率爲 $$\frac{9}{4\sqrt{7}}.$$

雙曲線之方程式可書爲

$$\frac{x^2}{\frac{32}{9}}-\frac{y^2}{2}=1.$$

代入 §75 公式,得

$$y=\frac{9}{4\sqrt{7}}x\pm\sqrt{\frac{32}{9}\cdot\frac{9}{16\cdot7}-2}.$$

即 $$9x-4\sqrt{7}y\pm8=0.$$

解切線與雙曲線方程式,得切點爲 $(4,\sqrt{7})$ 及 $(-4,-\sqrt{7})$

(*j*) $4x^2+7y^2=79,\ m=\dfrac{8}{21}.$

同上題，得橢圓之切線爲

$$8x-21y=\pm 79.$$

切點爲 $(-2,\ 3),\ (2,\ -3).$

(*k*) $2x^2+5y^2=10,\ \alpha=60°.$

$$m=\tan 60°=\sqrt{3}.$$

同上題，得橢圓之切線爲

$$y=\sqrt{3}x\pm\sqrt{5\cdot 3+2}.$$

即 $$\sqrt{3}x-y\pm\sqrt{17}=0.$$

切點爲 $\left(\dfrac{5\sqrt{51}}{17},\ \dfrac{14\sqrt{17}}{17}\right)$ 及 $\left(-\dfrac{5\sqrt{51}}{17},\ -\dfrac{14\sqrt{17}}{17}\right).$

(*l*) $x^2+2y^2=22$, 平行於 $2x-6y+11=0.$

同前，得切線爲 $x-3y\pm 11=0$. 切點爲 $(-2,\ 3)$ 及 $(2,\ -3)$

(*m*) $4x^2-9y^2+36=0$, 垂直於 $5x+2y=7.$

原式可寫作 $\dfrac{x^2}{-9}-\dfrac{y^2}{-4}=1$, 而 $m=\dfrac{2}{5}.$

同前，得切線爲 $2x-5y\pm 8=0.$

代入曲線式，得

$$4x^2-\frac{36}{15}x^2\mp\frac{288}{25}x-\frac{9\times 64}{25}+36=0.$$

$$16x^2\mp 72x+81=0.$$

$$x=\pm\frac{9}{4},\ y=\pm\frac{5}{2}.$$

故切點爲 $\left(\dfrac{9}{4},\ \dfrac{5}{2}\right)$ 及 $\left(-\dfrac{9}{4},\ -\dfrac{5}{2}\right).$

(*n*) $x^2-2y^2=1,\ m=\dfrac{3}{4}.$

$$\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1.$$

切線爲 $$y=\frac{3}{4}x\pm\sqrt{\frac{9}{16}-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}x\pm\frac{1}{4}$$

即 $$3x-4y\pm 1=0.$$

解兩式,得 $$x^2-2\left(\frac{3}{4}x\pm\frac{1}{4}\right)^2=1.$$

$$8x^2-9x^2\mp 6x-1=8.$$

$$x^2\pm 6x+9=0.$$

$$x=\mp 3,\ y=\mp 2.$$

故切點為 $(-3,-2)$ 及 $(3,2)$.

(o) $xy+y^2-4x+8y=0$, $m=\frac{1}{2}$.

設切線方程式為 $y=\frac{1}{2}(x+k)$.

代入解 x,

$$\tfrac{1}{2}x(x+k)+\tfrac{1}{4}(x+k)^2-4x+4(x+k)=0$$

$$3x^2-4kx+k^2+16k=0.$$

$$\Delta=16k^2-12k^2-196k=4k^2-196k=0.$$

$$k=0\ \text{或}\ 48.$$

$$x=\frac{-B}{2A}=-\frac{2k}{3}=0\ \text{或}\ -32.$$

$$y=\tfrac{1}{2}(x+k)=0\ \text{或}\ 8.$$

故切點為 $(0,0)$ 及 $(-32,8)$.

切線為 $y=\frac{1}{2}x$ 及 $y=\frac{1}{2}(x+48)$.

(p) $x^2+2xy+y^2+8x-6y=0$, $m=\frac{4}{3}$.

同上,得切線為 $4x-3y=0$, 切點為 $(0,0)$.

(q) $x^2+2xy-4x+2y=0$, $m=2$.

同上,得切線為 $y=2x$ 及 $2x-y+10=0$, 切點為 $(0,0)$ 及 $(-2,6)$

2. 求第 141 頁定理中各切線之切點:

(a) 圓之方程式為 $x^2+y^2=r^2$ ……(1)

其切線為 $y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$ ……(2)

聯立解之,以 y 之值代入 (1),

$$x^2+m^2x^2\pm 2mr\sqrt{1+m^2}x+r^2(1+m^2)=r^2.$$

$$(1+m^2)x^2\pm 2mr\sqrt{1+m^2}x+m^2r^2=0.$$

$$x=\mp\frac{2mr\sqrt{1+m^2}}{2(1+m^2)}=\mp\frac{mr\sqrt{1+m^2}}{1+m^2},$$

$$y=\mp\frac{m^2r\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}\pm r\sqrt{1+m^2}=\pm\frac{r\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}.$$

(b) 橢圓爲 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$

其切線爲 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$

聯立解之，

$$b^2x^2+a^2(m^2x^2\pm 2mx\sqrt{a^2m^2+b^2}+a^2m^2+b^2)=a^2b^2.$$

$$(b^2+a^2m^2)x^2\pm 2a^2mx\sqrt{a^2m^2+b^2}+a^4m^2=0.$$

$$x=\mp\frac{a^2m\sqrt{a^2m^2+b^2}}{b^2+a^2m^2},$$

$$y=\pm\frac{b^2\sqrt{a^2m^2+b^2}}{b^2+a^2m^2}.$$

(c) 雙曲線爲 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2.$

其切線爲 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}.$

聯立解之，

$$b^2x^2-a^2(mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2})^2=a^2b^2.$$

$$(b^2-a^2m^2)x^2\mp 2a^2mx\sqrt{a^2m^2-b^2}-a^4m^2=0.$$

$$x=\pm\frac{a^2m\sqrt{a^2m^2-b^2}}{b^2-a^2m^2},$$

$$y=\pm\frac{b^2\sqrt{a^2m^2-b^2}}{b^2-a^2m^2}.$$

(d) 拋物線爲 $y^2=2px.$

其切線爲 $y=mx+\dfrac{p}{2m}.$

$$\left(mx+\frac{p}{2m}\right)^2=2px$$

$$m^2x^2-px+\frac{p^2}{4m^2}=0.$$

$$x=\frac{p}{2m^2},$$

$$y=\frac{p}{m}.$$

原 本 第 146—147 頁 習 題

1. 用解析法證明雙曲線上一切線之切點平分兩漸近線間所夾此切線之線段。

設雙曲線為 $$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$
則在 (x_1, y_1) 之切線為
$$b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2\cdots\cdots(1)$$
而漸近線為 $$bx+ay=0\cdots\cdots(2)$$
及 $$bx-ay=0\cdots\cdots(3)$$
自 (2), $y=-\frac{bx}{a}$, 代入 (1) 解之,
$$b^2x_1x+a^2y_1\frac{bx}{a}=a^2b^2.$$
$$bx_1x+ay_1x=a^2b.$$
得一交點為 $x=\frac{a^2b}{bx_1+ay_1},\ y=-\frac{ab^2}{bx_1+ay_1}.$

自 (3), $y=\frac{bx}{a}$, 代入 (1) 解之,
$$b^2x_1x-a^2y_1\frac{bx}{a}=a^2b^2.$$
$$bx_1x-ay_1x=a^2b.$$
得一交點為 $x=\frac{a^2b}{bx_1-ay_1},\ y=\frac{ab^2}{bx_1-ay_1}.$

此二交點中點之坐標為
$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2b}{bx_1+ay_1}+\frac{a^2b}{bx_1-ay_1}\right)=\frac{2a^2b^2x_1}{2(b^2x_1^2-a^2y_1^2)}.$$
但 (x_1, y_1) 在曲線上,故 $b^2x_1^2-a^2y_1^2=a^2b^2$, 故
$$x=\frac{a^2b^2x_1}{a^2b^2}=x_1,$$
$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{-ab^2}{bx_1+ay_1}+\frac{ab^2}{bx_1-by_1}\right)=\frac{2a^2b^2y_1}{2(b^2x_1^2-a^2y_1^2)}=y_1.$$
故中點即為 (x_1, y_1), 即 (x_1, y_1) 並分切線在兩漸近線間之部分.

2. 用解析法證明 (1) 垂直於拋物線焦點弦 (Focal chord) 於焦點之垂線與焦點弦二端所作之切線遇於準線上; (2) 此二切線互相垂直.

設拋物線為 $y^2=2px$, 則焦點為 $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$.

又設焦點弦之一端爲 (x_1, y_1)，則焦點弦爲經過此點與焦點之直線，卽

$$\frac{y-0}{x-\frac{p}{2}}=\frac{0-y_1}{\frac{p}{2}-x_1},$$

卽

$$y_1x+\left(\frac{p}{2}-x_1\right)y=\frac{py_1}{2}.$$

此線與拋物線之又一交點，卽焦點弦之他端可以此線與拋物線二方程式聯立解之而得［注意 (x_1, y_1) 在曲線上，故有 $y_1{}^2=2px_1$ 之關係］.

$$\left(\frac{p^3}{2y_1{}^2}, -\frac{p^2}{y_1}\right).$$

切於此兩點之切線方程式可自第 134 頁定理得之：

$$y_1y=p(x+x_1)\quad 卽\quad y=\frac{p}{y_1}(x+x_1).$$

$$-\frac{p^2}{y_1}y=p\left(x+\frac{p^3}{2y_1{}^2}\right)\quad 卽\quad y=-\frac{y_1}{p}x-\frac{p^2}{2y_1}.$$

準線爲 $x=-\frac{p}{2}$，與兩切線解之，得交點皆爲

$$\left(-\frac{p}{2}, \frac{y_1{}^2-p^2}{2y_1}\right).$$

又焦點弦之斜率爲 $-\frac{2y_1}{p-2x_1}$，故過焦點而垂直於焦點弦之直線爲

$$y=\frac{p-2x_1}{2y_1}\left(x-\frac{p}{2}\right).$$

交點之坐標代入此式，亦能適合，故此線亦過兩切線與準線之交點，故四線交於一點.

3. 用解析法證明自拋物線焦點至一切線之垂線與準線相遇於過切點而平行於拋物線軸之直線上.

設拋物線爲 $y^2=2px$，切點爲 (x_1, y_1)，則切線爲

$$y_1y=p(x+x_1).$$

其斜率爲 $m=\frac{p}{y_1}$，其垂線之斜率爲 $m'=-\frac{y_1}{p}$.

故自焦點 $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ 而垂直於此切線之直線爲

$$y=-\frac{y_1}{p}\left(x-\frac{p}{2}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

準線爲

$$x=-\frac{p}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解 (1), (2), 得交點爲

$$x=-\frac{p}{2},\quad y=y_1.$$

故此點亦在 $y=y_1$ 直線,即過切點而平行於軸之直線上.

4. 用解析法證明拋物線上任一點之切線各交準線及通徑之延長線於一點,而此兩交點至焦點之距離相等.

設拋物線爲 $y^2=2px$, 切點爲 $(x_1,\ y_1)$, 則切線爲

$$y_1y=p(x+x_1).$$

通徑爲

$$x=\frac{p}{2}.$$

準線爲

$$x=-\frac{p}{2}.$$

故兩交點爲

$$x=\frac{p}{2},\qquad y=\frac{p}{y_1}\left(\frac{p}{2}+x_1\right)=\frac{p^2+2px_1}{2y_1};$$

$$x=-\frac{p}{2},\quad y=\frac{p}{y_1}\left(-\frac{p}{2}+x_1\right)=-\frac{p^2-2px_1}{2y_1}.$$

焦點爲 $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$, 焦點至切線與通徑之交點爲

$$D_1=\sqrt{\left(\frac{p}{2}-\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{p^2+y_1^2}{2y_1}\right)^2}=\frac{p^2+y_1^2}{2y_1}.$$

焦點至切線與準線之交點爲

$$D_2=\sqrt{\left(\frac{p}{2}+\frac{p}{2}\right)^2+\left(-\frac{p^2-y_1^2}{2y_1}\right)^2}=\sqrt{\frac{4p^2y_1^2+p^2-2p^2y_1^2+y_1^4}{4y_1^2}}.$$

$$=\frac{p^2+y_1^2}{2y_1}.$$

故 $D_1=D_2$.

5. 一拋物線之焦點與兩切線之交點連接之直線平分兩焦

點，半徑至兩切點所成之角.

設 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 爲拋物線 $y^2=2px$ 上二點，則過此兩點之切線爲

$$y_1y=p(x+x_1)\cdots\cdots(1)$$

及

$$y_2y=p(x+x_2)\cdots\cdots(2)$$

過此兩線交點之直線系爲

$$y_1y-p(x+x_1)+k[y_2y-p(x+x_2)]=0\cdots\cdots(3)$$

若過此交點而又過焦點 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，則 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ 當合於此方程式.

代入，得

$$k=-\frac{\frac{p}{2}+x_1}{\frac{p}{2}+x_2}=-\frac{p+2x_1}{p+2x_2}.$$

代入 (3) 解 y，得此線之斜率爲

$$\tan\beta=\frac{p(p+2x_2)-p(p+2x_1)}{y_1(p+2x_2)-y_2(p+2x_1)}=\frac{p(y_1+y_2)}{y_1y_2-p^2}.$$

而二切點之半焦點半徑之斜率爲

$$\tan\alpha_1=\frac{y_1}{x_1-\frac{p}{2}}=\frac{2py_1}{y_1^2-p^2},$$

$$\tan\alpha_2=\frac{2y_2}{x_2-\frac{p}{2}}=\frac{2py_2}{y_2^2-p^2}.$$

故得

$$\tan(\beta-\alpha_1)=\frac{\frac{p(y_1+y_2)}{y_1y_2-p^2}-\frac{2py_1}{y_1^2-p^2}}{1+\frac{p(y_1+y_2)2py_1}{(y_1y_2-p^2)(y_1^2-p^2)}}$$

$$=\frac{p(y_1+y_2)(y_1^2+p^2)-2py_1(y_1y_2-p^2)}{(y_1y_2-p^2)(y_1^2-p^2)+2p^2y_1(y_1+y_2)}$$

$$=\frac{py_1^3+py_1^2y_2-p^3y_1-p^3y_2-2py_1^2y_2+2p^3y_1}{y_1^3y_2-p^2y_1^2-p^2y_1y_2+p^4+2p^2y_1^2+2p^2y_1y_2}$$

$$=\frac{py_1^3-py_1^2y_2+p^3y_1-p^3y_2}{y_1^3y_2+p^2y_1^2+p^2y_1y_2+p^4}$$

$$=\frac{p(y_1-y_2)(y_1^2+p^2)}{(y_1^2+p^2)(y_1y_2+p^2)}=\frac{p(y_1-y_2)}{y_1y_2+p^2},$$

$$\tan(\alpha_2-\beta)=\frac{\dfrac{2py_2}{y_1^2-p^2}-\dfrac{p(y_1+y_2)}{y_1y_2-p^2}}{1+\dfrac{2py_2\cdot p(y_1+y_2)}{(y_1^2-p^2)(y_1y_2-p^2)}}$$

$$=\frac{2py_2(y_1y_2-p^2)-p(y_1+y_2)(y_2^2-p^2)}{(y_1y_2-p^2)(y_2^2-p^2)+p(y_1+y_2)2py_2^2}$$

$$=\frac{p(y_1y_2^2-p^2y_2-y_2^3+p^2y_1)}{y_1y_2^3+p^2y_2^2+p^2y_1y_2+p^4}$$

$$=\frac{p(y_1-y_2)(y_2^2+p^2)}{(y_2^2-p^2)(y_1y_2+p^2)}=\frac{p(y_1-y_2)}{y_1y_2+p^2}.$$

故 $$\tan(\beta-\alpha_1)=\tan(\alpha_2-\beta).$$

6. 一拋物線兩切線間所成之角爲兩焦點半徑至此兩切點所成之角之半。

設 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 爲拋物線 $y^2=2px$ 上兩點，其切線爲

$$y_1y=p(x+x_1),\quad y_2y=p(x+x_2).$$

故其斜率爲 $$m=\frac{p}{y_1},\quad m'=\frac{p}{y_2}.$$

兩線相交之角爲

$$\tan\theta=\frac{\dfrac{p}{y_1}-\dfrac{p}{y_2}}{1+\dfrac{p^2}{y_1y_2}}=\frac{p(y_2-y_1)}{y_1y_2+p^2}.$$

$$\tan 2\theta=\frac{\dfrac{2p(y_2-y_1)}{y_1y_2+p^2}}{1-\dfrac{p^2(y_2-y_1)^2}{(y_1y_2+p^2)^2}}$$

$$=\frac{2p(y_2-y_1)(y_1y_2+p^2)}{(y_1y_2+p^2)^2-p^2(y_2-y_1)^2}$$

$$=\frac{2py_1y_2^2+2p^3y_2-2py_1^2y_2-2p^3y_1}{y_1^2y_2^2+2p^2y_1y_2+p^4-p^2y_2^2+2p^2y_1y_2-p^2y_1^2}$$

$$=\frac{4p^2y_1x_2+2p^3y_2-4p^2x_1y_2-2p^3y_1}{4p^2x_1x_2+2p^2y_1y_2+p^4-p^2y_2^2+2p^2y_1y_2-p^2y_1^2}$$

$$=\frac{4x_2y_1+2py_2-4x_1y_2-2py_1}{4x_1x_2+4y_1y_2+p^2-y_2^2-y_1^2}.$$

兩焦點半徑之斜率爲

$$\tan\alpha=\frac{2y_1}{2x_1-p}\quad 及\quad \tan\beta=\frac{2y_2}{2x_2-p}.$$

故其夾角爲

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\dfrac{2y_2}{2x_2-p}-\dfrac{2y_1}{2x_1+p}}{1+\dfrac{4y_1y_2}{(2x_2-p)(2x_2+p)}}$$

$$=\frac{4x_1y_2-2py_2-4x_2y_1+2py_1}{4x_1x_2-2px_1-2px_2+p^2+4y_1y_2}$$

$$=\frac{4x_1y_2-2py_2-4x_2y_1+2py_1}{4x_1x_2-y_1^2-y_2^2+p^2+4y_1y_2}.$$

故 $\tan(\beta-\alpha)=-\tan 2\theta.$

$\beta-\alpha$ 爲 $>90°$ 之角，故 tan 爲負，故

$$\beta-\alpha=2\theta.$$

7. 用解析法證明自橢圓（或雙曲線）上一切線至兩焦點之垂直距離之乘積爲一常數。

設 (x_1, y_1) 爲橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上一點，則過此點之切線爲

$$b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2.$$

自此線至二焦點之垂直距離爲

$$\frac{b^2x_1\sqrt{a^2-b^2}-a^2b^2}{\sqrt{b^4x_1^2+a^4y_1^2}}\quad 及\quad \frac{-b^2x_1\sqrt{a^2-b^2}-a^2b^2}{\sqrt{b^4x_1^2+a^4y_1^2}}$$

其相乘積爲

$$\frac{-b^4x_1^2(a^2-b^2)+a^4b^4}{b^4x_1^2+a^4y_1^2}=\frac{b^2[b^4x_1^2+a^2(a^2b^2-b^2x_1^2)]}{b^4x_1^2+a^4y_1^2}$$

$$=\frac{b^2(b^4x_1^2+a^4y_1^2)}{b^4x_1^2+a^4y_1^2}=b^2.$$

故爲一常數。

設 (x_1, y_1) 爲雙曲線 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 上一點，則過此點之切線爲

$$b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2.$$

自此至二焦點之垂直距離爲

$$\frac{b^2x_1\sqrt{a^2+b^2}-a^2b^2}{\sqrt{b^4x_1^2+a^4y_1^2}} \text{ 及 } \frac{-b^2x_1\sqrt{a^2+b^2}-a^2b^2}{\sqrt{b^4x_1^2+a^4y_1^2}}.$$

其相乘積為

$$\frac{-b^4x_1^2(a^2+b^2)+a^4b^4}{b^4x_1^2+a^4y_1^2}=\frac{-b^2[b^4x_1^2+a^2(b^2x_1^2-a^2b^2)]}{b^4x_1^2+a^4y_1^2}$$

$$=\frac{-b^2[b^4x_1^2+a^4y_1^2]}{b^4x_1^2+a^4y_1^2}=-b^2$$

故為一常數。

8. 共焦點 (Confocal) 之橢圓與雙曲線，必相交成直角。

設橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 及雙曲線 $\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=1$ 相交於 (x_1, y_1)，則在交點之切於兩曲線之方程式為

$$b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2 \text{ 及 } b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2.$$

故其斜率為

$$m=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1} \text{ 及 } m'=\frac{b'^2x_1}{a'^2y_1}.$$

(x_1, y_1) 在兩曲線上，故代當相合，代入兩式相減，得

$$\frac{(a^2-a'^2)x_1^2}{a^2a'^2}-\frac{(b^2+b'^2)y_1^2}{b^2b'^2}=0$$

兩曲線同焦點，故

$$a^2-b^2=c^2=a'^2+b'^2.$$

故 $$a^2-a'^2=b^2+b'^2.$$

故得 $$\frac{x_1^2}{a^2a'^2}-\frac{y_1^2}{b^2b'^2}=0.$$

即 $$b^2b'^2x_1^2=a^2a'^2y_1^2.$$

即 $$\frac{b^2x_1}{a^2y_1}=\frac{a'^2y_1}{b'^2x_1}.$$

即 $$m=-\frac{1}{m'}.$$

故二切線垂直，即二曲線相交成直角。

9. 以拋物線 $y^2=2px$ 之通徑兩端之切線（互相垂直）為坐標軸，求此拋物線之方程式。

拋物線 $y^2=2px$ 之通徑二端之坐標為 $\left(\frac{p}{2}, p\right)$ 及 $\left(\frac{p}{2}, -p\right)$.

其切線爲 $y=x+\frac{p}{2}$ 及 $-y=x+\frac{p}{2}$.

故交點爲 $\left(-\frac{p}{2},\ 0\right)$, 斜率爲 ± 1, 故與 x 軸成 45° 角。

將 $y^2=2px$ 移至 $\left(-\frac{p}{2},0\right)$, 得

$$y^2=2p\left(x'-\frac{p}{2}\right).$$

轉 135°, 得 $\left(\frac{-x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2=2p\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}-\frac{p}{2}\right)$.

即 $$x'^2-2x'y'+y'^2=2\sqrt{2}p(x'+y')-2p^2.$$

即 $$x'^2+2x'y'+y'^2=2\sqrt{2}p(x'+y')-2p^2+4x'y'.$$

$$(x'+y')^2-2\sqrt{2}p(x'+y')+2p^2=4x'y'.$$

$$x'+y'-\sqrt{2}p=-2\sqrt{x'y'}.$$

$$x'+2\sqrt{x'y'}+y'=\sqrt{2}p.$$

$$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\sqrt{2}p}.$$

10. 過有心圓錐曲線上一點 P 所作之法線被坐標軸截成線段 AB, 求證 P 分 AB 成一常數比 $(a^2:b^2)$.

設有心圓錐曲線爲

$$b^2x^2\pm a^2y^2=a^2b^2,$$

則其切點 (x_1,y_1) 之法線爲

$$a^2y_1x\mp b^2x_1y=(a^2\mp b^2)x_1y_1.$$

其截部爲

$$\left(x_1\mp\frac{b^2x_1}{a^2},\ 0\right)\ 及\ \left(0,\ y_1\mp\frac{a^2y_1}{b^2}\right).$$

截部至切點之長之比爲

$$\sqrt{\left(\frac{b^2x_1}{a^2}\right)^2+y_1^2}:\sqrt{x_1^2+\left(\frac{a^2y_1}{b^2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{a^2}\sqrt{b^4x_1^2+a^4y_1^2}:\frac{1}{b^2}\sqrt{b^4x_1^2+a^4y_1^2}$$

$$=\frac{1}{a^2}:\frac{1}{b^2}=b^2:a^2.$$

11. 過雙曲線一頂點之切線,過其軛雙曲線於兩點。求證過此

兩點之二切線必過其他一頂點。

設雙曲線爲 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$,

則其頂點爲 $(\pm a, 0)$.

過一頂點 $(a, 0)$ 之切線爲 $x=a$.

交其共軛雙曲線 $-b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 於二點:

$$(a, \pm b\sqrt{2}).$$

故二切線爲 $-bx\pm a\sqrt{2}y=ab$.

以一焦點代入，此二直線方程式均合，故兩線均過另一焦點，卽相交於另一焦點。

12. 證明雙曲線之二焦點及頂點所作之切線與任一切線之兩交點同在一圓周上。

設雙曲線爲 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$,

則切於 (x_1, y_1) 之切線爲

$$b^2x_1x-a^2y_1y=a^2b^2.$$

二頂點爲 $(a, 0)$ 及 $(-a, 0)$, 過頂點之切線爲 $x=\pm a$.

與第一切線交於

$$\left(a, \frac{b^2x_1-ab^2}{ay_1}\right) \text{ 及 } \left(-a, \frac{-b^2x_1-ab^2}{ay_1}\right).$$

欲證此兩點與兩焦點在同一圓上，可於四點中任取三點，求一共圓之方程式，更以第四點代入證其適合，但此處二交點之聯恰爲直徑，先求得二交點之中點爲 $\left(0, -\frac{b^2}{y_1}\right)$, 此點至兩交點之距離爲

$$\sqrt{(a-0)^2+\left(\frac{b^2x_1-ab^2}{ay_1}+\frac{b^2}{y_1}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^4y_1^2+b^4x_1^2}{a^2y_1^2}}$$
$$=\frac{1}{y_1}\sqrt{a^2y_1^2+b^2y_1^2+b^4}$$
$$=\frac{1}{y_1}\sqrt{c^2y_1^2+b^4}.$$

又此點至二焦點之距離爲

$$\sqrt{(0\pm c)^2+\left(\frac{b^2}{y_1}\right)^2}=\frac{1}{y_1}\sqrt{c^2y_1^2+b^4}.$$

其四點共圓，圓心爲 $\left(0, -\frac{b^2}{y_1}\right)$, 半徑爲 $\frac{1}{y_1}\sqrt{c^2y_1^2+b^4}$.

13. 求橢圓上次切線與次法線相等之諸點。

設 (x_1, y_1) 爲橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上次切線與次法線相等之一點，則

$$\frac{y_1}{m}=y_1m \quad 即 \quad m^2=1.$$

$$m=\pm 1.$$

故切線爲 $$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

與橢圓之方程式解之，得四點爲

$$x=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\ y=\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

14. 設兩等邊雙曲線，其漸近線各爲他雙曲線之軸時，求證兩雙曲線相交成直角.

設一等軸雙曲線之方程式爲 $x^2-y^2=a^2$，則以其漸近線爲軸之等軸雙曲線爲 $xy=b$，設其交點爲 (x_1, y_1)，則兩切線爲

$$x_1x-y_1y=a^2,\ y_1x+x_1y=2b.$$

故 $m=-\dfrac{1}{m}$，兩切線垂直，卽二曲線成正交.

15. 用解析法證明雙曲線之一切線與二漸近線所成之三角形之面積爲一定.

自題 1，得切線與漸近線之兩交點爲

$$\left(\frac{a^2b}{bx_1+ay_1},\ \frac{-ab^2}{bx_1+ay_1}\right),\ \left(\frac{a^2b}{bx_1-ay_1},\ \frac{ab^2}{bx_1-ay_1}\right).$$

又兩漸近線交於原點 $(0, 0)$，爲三角形之三頂點，故其面積爲

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2b}{bx_1+ay_1}\times\frac{ab^2}{bx_1-ay_1}+\frac{ab^2}{bx_1+ay_1}\times\frac{a^2b}{bx_1-ay_1}\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}(ab+ab)=ab.$$

故爲一常數.

第九章 極坐標

原本第 149 頁習題

1. 作 $(3, 30°)$, $(6, 120°)$, $(-5, -145°)$, $(-10, -20°)$, $(-4, 60°)$ 諸點.

2. 作 $(10, 0°)$, $(-2, 90°)$, $(5, 180°)$, $(5, 18°)$, $(5, 100°)$, $(4\frac{1}{2}, 135°)$ 諸點.

1, 2 依第 138—139 頁規則作之.

3. 證明點 (ρ, θ) 與點 $(\rho, -\theta)$ 對稱於極軸.

依幾何學相合三角形證之.

4. 證明點 (ρ, θ) 與點 $(-\rho, \theta)$ 對稱於極.

因 $(-\rho, \theta)$ 在 (ρ, θ) 之極端延線上，二點距極均為 ρ，故對稱於極。

5. 證明點 (ρ, θ) 與點 $(\rho, 180^\circ-\theta)$ 對稱於直線 $\theta=90^\circ$.

依幾何學相合三角形證之.

6. 寫出題 1 與題 2 中各點之另一對坐標.

$(3, 30^\circ)$ 之另一對坐標為 $(-3, 180^\circ+30^\circ)$，即 $(-3, 210^\circ)$.

$(-5, -145^\circ)$ 為 $(5, 180^\circ-145^\circ)$，即 $(5, 35^\circ)$.

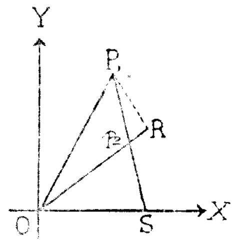
餘同。

7. (1) 兩點 $(3, 210^\circ)$ 與 $(4, 30^\circ)$ 間之距離為何? (2) 兩點 $(4, 45^\circ)$ 與 $(-6, 45^\circ)$ 間之距離為何?

(1) $(3, 210^\circ)$ 即為 $(-3, 30^\circ)$，故距離為 $4+3=7$.

(2) $4=6=10$.

8. 連接二點 $(4, 60^\circ)$ 與 $(3, 30^\circ)$ 之直線與極軸所成之角為何?



$$OR=4\cos P_1OP_2=4\cos 30^\circ=2\sqrt{3}.$$

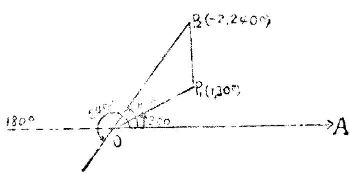
$$P_1R=4\sin P_1OP_2=4\sin 30=2.$$

$$\therefore\ \angle P_1P_2R=\tan^{-1}\frac{P_1R}{P_2R}=\tan^{-1}\frac{2}{2\sqrt{3}-3}.$$

$$\therefore\ \angle XSP_1=\angle OP_2S+\angle P_2OS$$

$$=\tan^{-1}\frac{2}{2\sqrt{3}-3}+30^\circ.$$

9. 求二點 $(1, 30^\circ)$ 與 $(-2, 240^\circ)$ 間之距離。(用第 4 頁 11 之餘弦定律)。



$(-2, 240^\circ)$ 即為 $(2, 60^\circ)$，故

$$\angle P_1OP_2=60^\circ-30^\circ=30^\circ.$$

按餘弦定律，

$$\overline{P_1P_2}^2=1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cos 30^\circ$$

$$=5-2\sqrt{3}.$$

故 $P_1P_2=\sqrt{5-2\sqrt{3}}.$

原本第 153—154 頁習題

討論並繪下列方程式之軌跡：

1. $\rho=8$.

1. 對稱 無論 θ 爲何值，ρ 均爲 8，即 θ 爲 $180^\circ+\theta$ 時，ρ 亦爲 8，但 (ρ, θ) 與 $(\rho, 180^\circ+\theta)$ 對稱於極，故曲線對稱於極。又 θ 爲 $-\theta$ 時，ρ 亦爲 8，故亦對稱於極軸。

2. 範圍 ρ 爲常數 8，不能 >8 或 <8，故爲一封閉曲線，以極爲圓心，8 爲半徑之圓。

2. $\theta=135^\circ$.

1. 對稱 θ 爲 135°，ρ 爲任何值，ρ 亦可爲 $-\rho$，故對稱於極。

2. 範圍 除 $\theta=135^\circ$ 外無曲線，且 ρ 可爲 $-\infty$ 至 ∞，故爲過極而與極軸成 135° 角之直線。

3. $\rho=10\sin\theta$.

1. 對稱 $\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$.
故由第 149 頁習題 5，知對稱於 $\theta=90^\circ$

2. 範圍 θ 無限制，$\sin\theta$ 不能小於 -1 或大於 1，故 ρ 在 -10 與 10 之間。

3. $\theta=0^\circ$ 時，$\rho=0$，故過原點。

4. $\rho=2\sin\theta+3\cos\theta$.

1. 對稱 無。

2. 範圍 θ 無限制，$\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 不能 >1 或 <-1，故 ρ 不能 $>2+3=5$ 或 <-5，故亦爲一封閉曲線。

5. $\rho\sin\theta=5$.

1. $\rho=\dfrac{5}{\sin\theta}$，同題 3 對稱於 $\theta=90^\circ$.

2. $\sin\theta$ 不能 >1 或 <-1，故 ρ 不能 >-5 或 <5.

6. $\rho=\dfrac{4}{1+\cos\theta}$.

1. $\cos(-\theta)=\cos\theta$，故 $\dfrac{4}{1+\cos\theta}=\dfrac{4}{1+\cos(-\theta)}$，故對稱於極軸。

2. θ 無限制，$\cos\theta$ 不能大於 1，$1+\cos\theta$ 不能大於 2，

故 ρ 不能 <2.

7. $\rho=\dfrac{8}{2+\cos\theta}$.

1. $\cos(-\theta)=\cos\theta$, 故對稱於極軸。

2. θ 可爲任何値，但 $\cos\theta$ 不能 <-1 或 >1, 故 $2+\cos\theta$ 不能 <1 或 >3, 故 ρ 不能 $<\frac{8}{3}$ 或 >8.

8. $\rho=\dfrac{8}{1+2\cos\theta}$.

1. 對稱於極軸。

2. θ 之値無限制，$1+2\cos\theta$ 不能 <-1 或 >3, 故 ρ 不能 >-8 或 $<\frac{8}{3}$.

9. $\rho=a\sin 2\theta$.

1. 對稱於 $\theta=90^\circ$.

2. $\sin 2\theta$ 不能 $>|1|$, 故 ρ 不能 $>|a|$.

3. 過極。

10. $\rho=2(1+\tan\theta)$.

1. $\tan(180^\circ+\theta)=\tan\theta$, 故有 (ρ_1,θ_1) 必有 $(\rho_1, 180^\circ+\theta_1)$, 故對稱於極。

2. θ 無限制，ρ 亦無限制。

11. $\rho^2\sin 2\theta=9$.

1. 對稱於 $\theta=90^\circ$.

$\rho=\pm\sqrt{9/\sin 2\theta}$, 故對稱於極。

2. $\sin 2\theta$ 爲負時，ρ 爲虛數，即 2θ 在 $180^\circ-360^\circ$ 及 $540^\circ-720^\circ$ 間，或 θ 在 $90^\circ-180^\circ$ 及 $270^\circ-360^\circ$ 間無軌跡。

3. $2\theta=0^\circ$ 及 180° 時，ρ 爲 ∞, 故 $\theta=0^\circ$ 及 $\theta=90^\circ$ 爲兩漸近線。

12. $\rho^2\cos 2\theta=a^2$.

1. $\cos 2\theta=\cos(-2\theta)$, 故對稱於極軸。

同一 θ, ρ 有正負二值，故對稱於極。

2. 2θ 在 $90^\circ—270^\circ$ 及 $450^\circ—630^\circ$ 間，$\cos 2\theta$ 爲負，ρ 爲虛數，故 θ 在 $45^\circ—135^\circ$ 及 $225^\circ—315^\circ$ 間無軌跡。

3. $\theta=45^\circ$ 及 $\theta=135^\circ$ 爲兩漸近線。

13. $\rho=a\sin\theta\tan\theta$.

1. $\sin(-\theta)\tan(-\theta)=\sin\theta\tan\theta$, 故對稱於極軸。

2 ρ 及 θ 均可爲任何值。

14. $\rho=a\sec\theta\pm b$; $b<a$.

1. $\sec(-\theta)=\sec\theta$, 故對稱於極軸。

2. ρ 及 θ 均可爲任何值.

15. $\rho=a(1-\cos\theta)$.

1. 對稱於極軸。

2. ρ 不能大於 $2a$, θ 無限.

16. $\rho^2=a^2\sin 2\theta$.

1. 對稱於極。

2. $\sin 2\theta$ 不能爲負,2θ 不能在 $180°-360°$ 及 $540°-720°$ 間,θ 不能在 $90°-180°$ 及 $270°-360°$ 間。

17. $\rho=b-a\cos\theta$; $b<a$.

1. 對稱於極軸。

2. ρ 限於 $b-a$ 及 $b+a$ 間。

18. 作蚌線 (題 14) 以 $b=a$ 與 $b>a$.

與題 14 圖大同小異.

19. 作蝸線 (題 17) 以 $b>a$.

與題 17 圖大同小異.

原 本 第 155 頁 習 題

作下列方程式之軌跡:

1. $\rho=a\cos 3\theta$.

先如前習題討論其對稱與限度, 然後以 ρ 與 θ 之變化列成一表,乃按表作圖。

3θ	$0°-90°$	$90°-180°$	$180°-270°$	$270°-360°$	$360°-450°$	$450°-540°$
θ	$0°-30°$	$30°-60°$	$60°-90°$	$90°-120$	$120°-150°$	$150°-180°$
ρ	$a-0$	$0-(-a)$	$(-a)-0$	$0-a$	$a-0$	$0-(-a)$

2—4 同上。

5. $\rho=a\cos\frac{1}{2}\theta$.

對稱於極軸, ρ 限於 $-a$ 至 a 間。

θ	$0°-90°$	$90°-180°$	$180°-270°$	$270°-360°$	$360°-540°$	$540°-720°$
$\frac{1}{2}\theta$	$0°-45°$	$45°-90°$	$90°-135°$	$135°-180°$	$180°-270°$	$270°-360°$
ρ	$a-\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}-0$	$0-\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)-(-a)$	$(-a)-0$	$0-a$

列表如上,然後按表作圖.

6—18 同上.

原本第 159—160 頁習題

1. 求 $(5,12)$, $(13,12)$, $(-4,-3)$, $(\sqrt{3},1)$, $(-2\sqrt{3},2)$, $(1,-1)$, $(5,5)$ 諸點之極坐標.

$$\rho^2=x^2+y^2,\quad \rho=\sqrt{5^2+12^2}=13,\quad \theta=\tan^{-1}\frac{12}{5}=67°23'.$$

故 $(5,12)$ 之極坐標為 $(13,67°23')$.

$(13,12)$ 同上.

$$(-4,-3),\quad \rho=\sqrt{16+9}=5,\quad \theta=\tan^{-1}=\frac{3}{4}=36°52'.$$

但 $(-4,-3)$ 在第三象限,故為 $(-5,36°52')$ 或 $(5,216°52')$.

其餘均同上.

2. 改下列各方程式為極方程式,並作其軌跡:

(a) $2x-5y=0$.

以 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ 代入,化簡之,得 $\tan\theta=\frac{2}{5}$.

(b) $4x-3y+6=0$.

$$4\rho\cos\theta-3\rho\sin\theta+6=0.\qquad\therefore\quad \rho=\frac{6}{3\sin\theta-4\cos\theta}.$$

(c) $x^2+y^2=25$.

$$(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2=25.$$
$$\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=25.$$
$$\rho^2=25.\quad\therefore\ \rho=\pm5.$$

(d) $x^2+y^2+2x=0$.

$$\rho^2+2\rho\cos\theta=0.\qquad\therefore\ \rho+2\cos\theta=0.$$

(e) $x^2+y^2-2x+4y=5$.

$$\rho^2-2\rho(2\sin\theta-\cos\theta)=5.$$

(*f*) $xy=a.$

$$\rho^2\cos\theta\sin\theta=a.$$

(*g*) $x^2-y^2=a^2.$

$$\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=a^2.$$

$$\rho^2=\frac{a^2}{\cos 2\theta}.$$

(*h*) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$

$$(\rho^2)^2=a^2\rho^2\cos 2\theta.$$

$$\rho^2=a^2\cos 2\theta.$$

(*i*) $(x^2+y^2+bx)^2-a^2(x^2+y^2)=0.$

$$(\rho^2+b\rho\cos\theta)^2-a^2\rho^2=0.$$

$$\rho=a-b\cos\theta$$

(*j*) $(1-e^2)x^2+y^2-px+p^2=0.$

$$(1-e^2)\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta-p\rho\cos\theta+p^2=0.$$

$$\rho^2-e^2\rho^2\cos^2\theta-2p\rho\cos\theta+p^2=0.$$

(*k*) $y^2=3x^3.$

$$\rho^2\sin^2\theta=3\rho^3\cos^3\theta.$$

$$\sin^2\theta=3\rho\cos^3\theta.$$

$$3\rho=\tan^2\theta\sec\theta$$

或 $3\rho=\sec^3\theta-\sec\theta.$

3. 改下列極方程式爲直坐標方程式:

(*a*) $\rho=7.$

$$x^2+y^2=\rho^2.$$

$$\therefore\quad x^2+y^2=49.$$

(*b*) $\theta=15^\circ$

$$\frac{y}{x}=\tan 15^\circ=\tan\frac{30^\circ}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}.$$

$$y=(1-2\sqrt{3})x.$$

(*c*) $\rho=4\sin\theta.$

$$\sin\theta=\frac{y}{\rho}.$$

$$\rho^2=4y.$$

$$x^2+y^2-4y=0.$$

(*d*) $\rho=6\cos\theta$.

以 $\cos\theta=\dfrac{\rho}{x}$ 代入，與 (*c*) 同。

(*e*) $\rho^2=9\cos 2\theta$.

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$
$$=\frac{\rho^2}{x^2}-\frac{\rho^2}{y^2}.$$
$$9x^2-9y^2+x^2y^2=0.$$

(*f*) $\rho^2=4\cot\theta$.

$$x^2+y^2=\frac{4x}{y}.$$
$$x^2y+y^3=4x.$$

(*g*) $\rho=\dfrac{1}{3}\tan\theta$.

以 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ 代入。

(*h*) $\rho=4\sec\theta$.

以 $\sec\theta=\dfrac{\rho}{x}$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ 代入。

(*i*) $\rho(2\cos\theta+3\sin\theta)+5=0$.
以 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ 代入。
(*j*) $\rho(7\cos\theta-5\sin\theta)=7$.
同 (*i*).
(*k*) $\rho=5\csc\theta$.

以 $\csc\theta=\dfrac{\rho}{y}$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ 代入。

(*l*) $\rho^2\cos 2\theta=16$.
展開 $\cos 2\theta$，以 $\rho\cos\theta=x$, $\rho\sin\theta=y$ 代入。
(*m*) $\rho+6\cot\theta\csc\theta=0$.

以 $\cot\theta=\dfrac{x}{y}$, $\csc\theta=\dfrac{\rho}{y}$ 代入消去 ρ.

(*n*) $\rho=\dfrac{6}{1+2\cos\theta}$.

以 $\rho=x^2+y^2$, $\rho\cos\theta=x$ 代入，化簡，得

$$3x^2-y^2-24x+36=0.$$

4. 設極軸繞極旋轉 α 角，則任一點之舊坐標 (ρ,θ) 與其新坐標 (ρ',θ') 間之關係若何？

$$\theta'=\theta-\alpha.$$

5. 設極軸繞極旋轉 90°，卽使與第 82 節所述之圓錐曲線之準線平行，則方程式 (V) 成何形狀？

$$\rho=\rho',\quad \theta=\theta'+90^\circ.$$

$$\therefore\quad \rho'=\frac{ep}{1-e\cos(\theta'+90^\circ)}=\frac{ep}{1+e\sin\theta'}.$$

6. 將下列各圓錐曲線之方程式與第 82 節之 (V) 或題 5 比較之而求 e 與 p. 作圖並畫出其準線：

(a) $\rho=\dfrac{7}{2-2\cos\theta}=\dfrac{\frac{7}{2}}{1-\cos\theta}.$

$$\therefore\quad e=1,\quad p=\frac{7}{2}.$$

(b) $\rho=\dfrac{16}{2+\sin\theta}=\dfrac{8}{1+\frac{1}{2}\sin\theta}.$

$$\therefore\quad e=\tfrac{1}{2},\quad p=8\div\tfrac{1}{2}=16.$$

(c) $\rho=\dfrac{12}{1+3\cos\theta}.$

$$\therefore\quad e=3,\quad p=4.$$

(d) $\rho=\dfrac{10}{2-\sin\theta}=\dfrac{5}{1-\frac{1}{2}\sin\theta}.$

$$\therefore\quad e=\tfrac{1}{2},\quad p=5\div\tfrac{1}{2}=10.$$

原 本 第 161 頁 習 題

求下列各對曲線之交點並作圖以驗之：

1. $\rho=4\sin\theta$ ....(1)

$\rho=2$ ....(2)

以 (2) 代入 (1)，得 $\sin\theta=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$, $\theta=30^\circ, 150^\circ.$

故交點爲 $(2, 30^\circ)$ 及 $(2, 150^\circ)$.

2. $\begin{cases}\rho=1+\cos\theta & \cdots\cdots(1)\\ \rho=\dfrac{1}{2} & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

以 (2) 代入 (1), 得 $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$, $\theta=120°, 240°$.

故交點爲 $\left(-\dfrac{1}{2}, 120°\right)$ 及 $\left(-\dfrac{1}{2}, 240°\right)$.

3. $\begin{cases}\rho=2a\sin\theta & \cdots\cdots(1)\\ \rho=2a & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

$$\sin\theta=1,\quad \theta=90°,\quad \rho=2a.$$

故交點爲 $(2a, 90°)$.

4. $\begin{cases}\rho\cos\theta=4a & \cdots\cdots(1)\\ \rho=4a\cos\theta & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

(1)$\times 4a$, $\qquad 4a\rho\cos\theta=16a^2$.

(2)$\times\rho$, $\qquad 4a\rho\cos\theta=\rho^2$.

因得 $\qquad \rho^2=16a^2. \qquad \rho=\pm 4a.$

$$\rho=4a,\quad \cos\theta=1,\quad \theta=0°.$$

$$\rho=-4a,\quad \cos\theta=-1,\quad \theta=180°.$$

故交點爲 $(4a, 0°), (-4a, 180°)$.

5. $\begin{cases}\rho=\sin\theta & \cdots\cdots(1)\\ \rho=\cos 2\theta & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

由 (2), $\quad \rho=\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta$.

故 $\qquad \sin\theta=1-2\sin^2\theta.$

$$2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0.$$

$$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)=0.$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2},\quad \theta=30°,\quad 150°,\quad \rho=\frac{1}{2}.$$

$$\sin\theta=-1,\quad \theta=270°,\qquad \rho=-1.$$

故交點爲 $\left(\dfrac{1}{2}, 30°\right)$ 及 $\left(\dfrac{1}{2}, 150°\right)$ 及 $(-1, 270°)$.

6. $\begin{cases}\rho=\cos 2\theta,\\ \rho=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

$$\cos 2\theta = \frac{1}{2}.$$

$$1 - 2\sin^2\theta = \frac{1}{2}.$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{4}.$$

$$\sin\theta = \pm\frac{1}{2}.$$

$$\theta = 30°,\ 150°,\ 210°,\ 330°.$$

故交點為 $\left(\frac{1}{2}, 30°\right),\ \left(\frac{1}{2}, 150°\right),\ \left(\frac{1}{2}, 210°\right),\ \left(\frac{1}{2}, 330°\right).$

7. $\begin{cases}\rho = 4 + 4\cos\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ \rho(1-\cos\theta) = 3 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

由 (2), 得 $\rho = \dfrac{3}{1-\cos\theta}.$

代入 (1), $4 + 4\cos\theta = \dfrac{3}{1-\cos\theta}.$

$$4\cos^2\theta - 1 = 0.$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{4}.\quad \cos\theta = \pm\frac{1}{2}.$$

$$\theta = \pm 60°,\quad \pm 120°.$$

$$\theta = \pm 60°,\quad \rho = 6.$$

$$\theta = \pm 120°,\ \rho = 2.$$

故交點為 $(6, \pm 60°)$, $(2, \pm 120°)$.

8. $\begin{cases}\rho^2 = \sin 2\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ \rho = \sqrt{2}\sin\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

由 (1), $\rho^2 = 2\sin\theta\cos\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

由 (2), $\rho^2 = 2\sin^2\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(4)÷(3), $\tan\theta = 1.$

$$\theta = 45°,\quad 225°.$$

$$\rho = \pm 1.$$

故交點為 $(1, 45°)$, $(1, 225°)$.

9. $\begin{cases}\rho = 5 - 2\sin\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ \rho = \dfrac{6}{1+\sin\theta} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

消去 ρ, $$5-2\sin\theta=\frac{6}{1+\sin\theta}.$$

$$2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0.$$

$$(2\sin\theta-1)(\sin\theta-1)=0.$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2},\quad \theta=30^\circ,\quad 150^\circ,\quad \rho=4.$$

$$\sin\theta=1,\quad \theta=90^\circ,\quad \rho=3.$$

故交點為 $(4, 30^\circ)$ 及 $(3, 90^\circ)$.

10. $\begin{cases}\rho^2\cos 2\theta=a^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\ \rho=\sqrt{2}a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)\end{cases}$

以 (2) 代入 (1), $$\cos 2\theta=\frac{1}{2}.$$

$$2\theta=60^\circ,\quad \theta=30^\circ,\quad \rho=\pm\sqrt{2}a.$$

故交點為 $(\pm\sqrt{2}a, 30^\circ)$.

11. $\begin{cases}\rho\cos(\theta-60^\circ)=a,\\ \rho\cos(\theta-30^\circ)=a.\end{cases}$

$$\cos(\theta-60^\circ)=\cos(\theta-30^\circ).$$

$$\cos\theta\cos 60^\circ+\sin\theta\sin 60=\cos\theta\cos 30+\sin\theta\sin 30^\circ.$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\theta=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin\theta.$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=1.$$

$$\theta=45^\circ,\quad 225^\circ.$$

$$\rho=\frac{a}{\cos(45^\circ-30^\circ)}=\frac{a}{\cos 15^\circ}.$$

故交點為 $\left(\frac{a}{\cos 15^\circ}, 45^\circ\right)$ 及 $\left(\frac{a}{\cos 15^\circ}, 225^\circ\right)$.

12. $\begin{cases}\rho=\dfrac{3}{2-\cos\theta},\\ \rho=2.\end{cases}$

$$2\cos\theta=1,\quad \theta=\pm 60^\circ.$$

故交點為 $(2, \pm 60^\circ)$.

13. $\begin{cases}\rho=6\sin\theta,\\ \rho=2(1+\cos\theta).\end{cases}$

$$6\sin\theta=2(1+\cos\theta).$$
$$6\sqrt{1-\cos^2\theta}=2(1+\cos\theta).$$
$$5\cos^2\theta+\cos\theta-4=0.$$
$$(5\cos\theta-4)(\cos\theta+1)=0.$$
$$\cos\theta=\frac{4}{5}\text{ 或 }-1.$$
$$\theta=\cos^{-1}\frac{4}{5}\text{ 或 }180°.$$
$$\rho=\frac{18}{5}\text{ 或 }0.$$

故交點爲 $\left(\frac{18}{5}, \cos^{-1}\frac{4}{5}\right)$ 及 $(0, 180°)$.

14. $\begin{cases}\rho=a\sin\theta,\\ \rho=a\sin 2\theta.\end{cases}$

$$\sin\theta=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta.$$
$$\cos\theta=\frac{1}{2},\quad \theta=60°,\quad \rho=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

15. $\begin{cases}\rho=2+\cos\theta,\\ 4\rho(1-\cos\theta)=9.\end{cases}$

$$8+4\cos\theta=\frac{9}{1-\cos\theta}.$$
$$4\cos^2\theta+4\cos\theta+1=0.$$
$$2\cos\theta+1=0.\quad \cos\theta=-\frac{1}{2}.$$
$$\theta=120°,\quad 240°,\quad \rho=1\frac{1}{2}.$$

故交點爲 $\left(1\frac{1}{2}, 120°\right)$, $\left(1\frac{1}{2}, 240°\right)$.

原 本 第 162—163 頁 習 題

1 從極作圓 $\rho=2r\cos\theta$ 之諸弦,求各弦中點所成軌跡之方程式.

$\rho=2r\cos\theta$, 過極而對稱於極軸,卽於極軸上 $(r, 0°)$ 爲圓心, r 爲半徑之圓. 自極之弦長卽爲 $\rho=2r\cos\theta$, 而 $\rho_1=\frac{1}{2}$, 故

$$\rho_1=\frac{1}{2}\rho=r\cos\theta.$$

故軌跡爲　$\rho_1=r\cos\theta$.

2.　延長定圓 $\rho=a\cos\theta$ 之弦 OB 至 P, 而 BP 之長由下述條件決定之.求 P 之軌跡並作其圖:

(a)　BP 等於自極軸至 B 之垂直距離.

$$\rho=OB+BP.$$

$$OB=a\cos\theta,\quad BP=OB\sin\theta=a\cos\theta\sin\theta.$$

$$\therefore\quad \rho=a\cos\theta(1+\sin\theta).$$

(b)　$BP=$直徑$=a$. (見圖 1.)

$$\rho=a\cos\theta+a.$$

(c)　$BP=$半徑$=\frac{1}{2}a$. (見第 153 頁題 17.)

$$\rho=a\cos\theta+\frac{1}{2}a=a\left(\frac{1}{2}+\cos\theta\right).$$

(d)　$BP=AB$. (見圖 2.)

$$AB=a\sin\theta.$$

$$\therefore\quad \rho=OB+BP=OB+AB=a\cos\theta+a\sin\theta$$
$$=a(\cos\theta+\sin\theta).$$

(e)　$BP=2AB$.

$$\rho=OB+2AB=a\cos\theta+2a\sin\theta=a(\cos\theta+2\sin\theta).$$

(f)　$BP=\frac{3}{2}a$.

$$\rho=a\cos\theta+\frac{3}{2}a=a\left(\frac{3}{2}+\cos\theta\right).$$

3.　從定圓上定點 O 作諸線使與過 O 點之直徑之垂線 LM 相遇.在此諸線中之任一線,如 OC 上截取 $OP=BC$; 則 P 點之軌跡爲何? (圖 3)

設 (1) $b=4, a=3$; (2) $b=3, a=4$; (3) $a=b=4$, 作其軌跡.

當 $a=b$ 時,此曲線爲蔓葉線 (Cissoid) (第 95 節題 8).

設定點 O 爲極,過 O 垂直於 LM 之直線爲極軸,則

$$\rho=OP=BC=OC-OB.$$

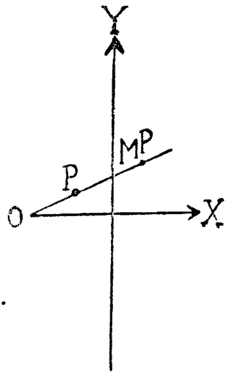
$$OC=b\sec\theta,\quad OB=a\cos\theta.$$

$$\therefore\quad \rho=b\sec\theta-a\cos\theta.$$

4.　自極 O 作一直線過直線 $\rho\cos\theta=4$ 於 M. 依下已知條件,

求 OM 上一點 P 之軌跡之方程式並作圖.

$\rho\cos\theta=4$ 爲離極 4 而垂直於極軸之直線.



(a) $MP=4$.

$$\rho=OM\pm MP.$$

$$OM=4\sec\theta,\quad MP=4.$$

$$\therefore\ \rho=4\sec\theta\pm4=4(\sec\theta\pm1).$$

(b) $MP=OM+4$.

$$\rho=OM\pm MP.$$

$$\rho=-4 \text{ 或 } \rho=2OM+4=8\sec\theta+4.$$

(c) $OM\cdot OP=12$.

$$4\rho\sec\theta=12.$$

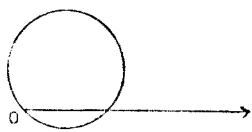
$$\rho\sec\theta=3.$$

原 本 第 163—165 頁 習 題

作下列諸軌跡之圖形:

1. $\rho=a\sin\theta+b\sec\theta$.

［解］ 此曲線爲通過極點之圓.



θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	b	$\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}b}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)$	$\frac{\sqrt{3}a}{2}+\frac{b}{2}$	a

θ	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ	$\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{b}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(a-b)$	$\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}b$	$-b$

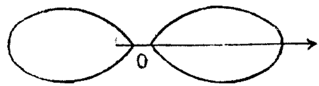
θ	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
ρ	$\frac{\sqrt{3}}{2}b-\frac{a}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(b-a)$	$\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$-a$

如 $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$，$\rho$ 爲負，故在第三象限內無軌跡。

2.　$\left(\rho-\frac{a}{2}\right)^2=a^2\cos 2\theta.$

［解］　$\rho=a(\sqrt{2\cos^2\theta-1}+\frac{1}{2}).$

(1)　對極軸及 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 對稱.



因 $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$，但方程式中爲 $\cos^2\theta$，故對 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 對稱.

(2)　$\cos\theta\not<\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|$ 即在 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 及 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 中間無軌跡.

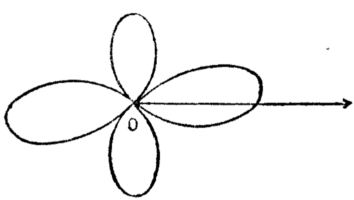
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
ρ	$\frac{3a}{2}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}a$	$\frac{a}{2}$	虛數

3.　$\rho=a(\cos 2\theta+\sin 2\theta).$

［解］　$\rho=2\{\cos^2\theta-\sin 2\theta+2\sin\theta\cos\theta\}.$

(1)　對極爲對稱.

(2)　θ 之值無限度，但 $\rho<|2a|$，故爲封閉之曲線.

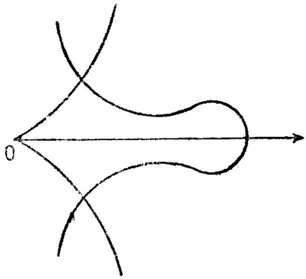


4.　$\rho=a\cos 2\theta+\frac{1}{2}a\sec\theta.$

［解］　$\rho=a\left\{2\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sec\theta-1\right\}.$

(1)　對極軸對稱.

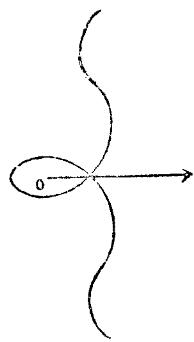
(2)　ρ 及 θ 皆無限度.



θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	$\frac{3}{2}a$	$1.08a$	$0.7a$	$\frac{a}{2}$	∞

θ	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ	$-\frac{3}{2}a$	$-\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)a$	$\frac{a}{2}$

5. $\rho=a\sin 2\theta+\frac{1}{2}a\sec\theta.$



〔解〕 $\rho=a\left\{2\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{2}\sec\theta\right\}.$

(1) 對極軸對稱.

(2) ρ 及 θ 之值皆無限度.

$\theta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\theta=\frac{3\pi}{2}$, $\rho\to\infty$.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
ρ	$\frac{a}{2}$	$\frac{5}{2\sqrt{3}}a$	$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)a$	$\left(1+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)a$

θ	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ	∞	$-\left(1+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)a$	$-\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)a$	$-\frac{5}{\sqrt{3}}a$	$-\frac{a}{2}$

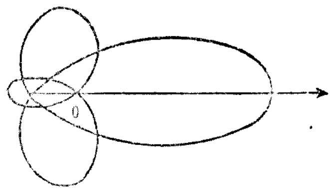
θ	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
ρ	$\frac{a}{2\sqrt{3}}$	$\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)a$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)a$	∞

6. $\rho=a\cos 2\theta+b\cos\theta.$

[解] $\rho=a(2\cos^2\theta-1)+b\cos\theta.$

(1) 對極軸對稱.

(2) θ 可為任何值,但 $\rho<(a+b)$.



θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
ρ	$a+b$	$\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}b$	$\frac{\sqrt{2}}{2}b$

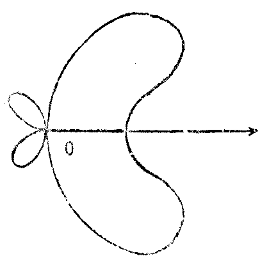
θ	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ	$\frac{b-a}{2}$	$-a$	$-\frac{a+b}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}b$	$\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}b$	$a-b$

7. $\rho=a\sin 2\theta+b\cos\theta.$

[解] $\rho=2a\sin\theta\cos\theta+b\cos\theta.$

(1) 對極軸對稱.

(2) θ 可為任何值,但 $\rho<(a+b)$.



θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
ρ	b	$\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$	$a+\frac{\sqrt{2}}{2}b$	$\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{b}{2}$

θ	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
ρ	0	$-\frac{\sqrt{3}a+b}{2}$	$a+\frac{\sqrt{2}}{2}b$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$

θ	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
ρ	$-b$	$\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)$	$a-\frac{\sqrt{2}}{2}b$	$\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{b}{2}$	0

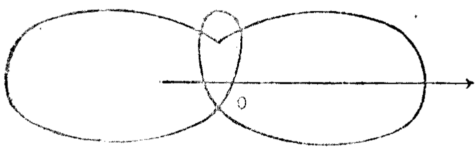
如 $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$，則其軌跡與第二象限內之負值相等，故對極軸為對稱.

8. $\rho=a\cos 2\theta+b+(\sin\theta+1)$.

[解] $\rho=a(2\cos^2\theta-1)+b(\sin\theta+1)$.

(1) 對 $\theta=90^\circ$ 對稱.

(2) θ 可為任何值，但 $\rho<(a+2b)$.



θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
ρ	$a+b$	$\frac{a}{2}+\frac{3b}{2}$	$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)b-\frac{a}{2}$

θ	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
ρ	$-a+2b$	$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$	$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)b$	$-\frac{a}{2}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)b$	$-a$

9. $\rho=a\cos 3\theta-b\cos\theta$.

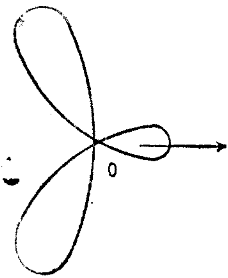
[解] $\rho=\{4\cos^3\theta-3\cos\theta\}-b\cos\theta$.

(1) 對極軸對稱.

(2) θ 可為任何值，但 $\rho<|a+b|$.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
ρ	$a-b$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}b$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$	$-a-\frac{b}{2}$

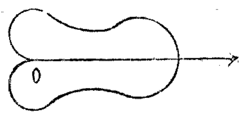
θ	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ	0	$a+\frac{b}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}b$	$-a+b$



10. $\rho=\cos 3\theta+\cos\theta+1.$

[解] (1) 對極軸對稱。

(2) θ 可爲任何值，但 $\rho<|3|$.

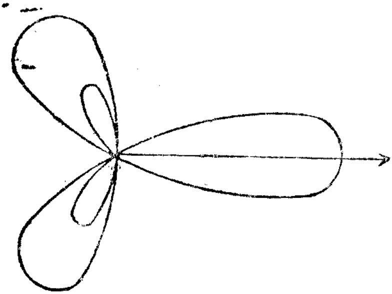


θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ	3	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	1	$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

11. $\rho=\cos 3\theta+\cos 2\theta.$

[解] (1) 對極軸對稱。

(2) θ 可爲任何值，但 $\rho<2.$



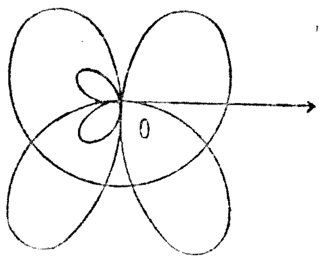
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-1-\frac{1}{2}$	-1

θ	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

12. $\rho=\cos 3\theta-\sin 2\theta.$

[解] (1) 對極軸對稱。

(2) θ 可爲任何值,但 $\rho\leq|1|$.

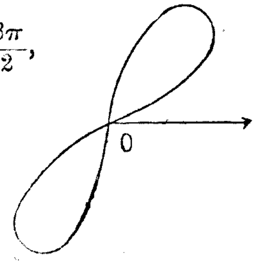


θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
ρ	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	0	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

θ	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$
ρ	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}-1$

θ	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	π
ρ	$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-1+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

13. $\rho^2 \cos\theta = a^2 \sin 3\theta.$



［解］ (1) 對極爲對稱(如 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{3\pi}{2}$，則軌跡在 ∞).

(2) 限度，如 $\rho=\pm a\sqrt{\dfrac{\sin 3\theta}{\cos\theta}}$ (如 $\cos\theta=0$，則 $\rho\to\infty$，但 θ 之值使 $\dfrac{\sin 3\theta}{\cos\theta}=0$，則不能用)。

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}\to\frac{\pi}{2}\to\frac{2\pi}{3}\to\pi$
$\pm\rho$	0	$a\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$	a	0　虛　數

14. $\rho^2=\dfrac{2\cos\theta}{\cos 2\theta}+1.$

［解］ (1) 對極爲對稱。

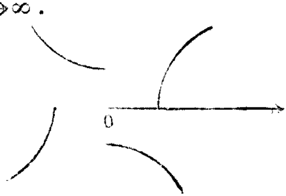
(2) 限度，如 $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3\pi}{4}<\theta<\pi$，無軌跡。

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$
$\pm\rho$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{1+2\sqrt{3}}$	∞	1	$\sqrt{3}$	∞

15. $\rho^2=\dfrac{2\cos 2\theta}{2+\cos\theta}+1.$

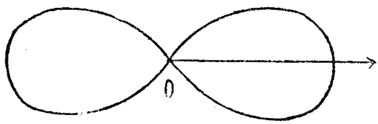
［解］ (1) 對極及極軸均對稱.

(2) 限度，如 $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{3\pi}{4}$，則無軌跡，$\cos\theta+2>0$，故無 θ 可使 $\rho\to\infty$.



θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\pm\rho$	$\sqrt{1+\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{+\sqrt{3}}}$	1	0

16. 在橢圓 $\rho=\dfrac{6}{2-\cos\theta}$ 之一動徑（焦點半徑）FQ 上從 Q 向 F 截取線段 $QP=4$. 求 P 之軌跡.（線段 QP= 半長軸.）



橢圓之一焦點爲極，長軸在極軸上.

$$\rho_1=FP=FQ-QP.$$

$$FQ=\rho=\frac{6}{2-\cos\theta},\quad QP=4.$$

$$\therefore\ \rho_1=\frac{6}{2-\cos\theta}-4=\frac{4\cos\theta-2}{2-\cos\theta}.$$

17. O 爲定圓之圓心而 A 爲圓內一定點. 作任一半徑 OB, 連 A 與 B, 而作 AP 垂直 AB 且遇 OB 於 P. 求 P 之軌跡.

所設 $OB=a$, $OA=e$

設 $a=4$, $e=2$, 作其軌跡，並證明與題 16 中者相同.

設圓心 O 爲極，半徑 $OB=a$, 圓內一點 A 離圓心 O 爲 e, 作 OA 延長之爲極軸. 設 (ρ,θ) 爲軌跡上一點.

依餘弦定律，$\overline{AP}^2=\overline{OP}^2+\overline{OA}^2-2\overline{OP}\,\overline{OA}\cos\theta$ ....(1)

$OP=\rho$, $OA=e$, $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2-\overline{AB}^2$ ....(2)

$BP=a-\rho$, $\overline{AB}^2=\overline{OB}^2+\overline{OA}^2-2\overline{OA}\,\overline{OB}\cos\theta$.

$OB=a$, $OA=e$. $\therefore\ \overline{AB}^2=a^2+e^2-2ae\cos\theta$.

代入 (2), $\overline{AP}^2=(a-\rho)^2-a^2-e^2+2ae\cos\theta$.

與 (1) 消去 $\overline{AP}^2$, 得

$$\rho^2+e^2-2\rho e\cos\theta=a^2-2a\rho+\rho^2-a^2-e^2+2ae\cos\theta.$$

$$\rho e\cos\theta-a=e^2-ae\cos\theta.$$

$$\rho=\frac{e(e-a\cos\theta)}{e\cos\theta-a}.$$

若 $a=4,\ e=2,$

$$\rho=\frac{2(2-4\cos\theta)}{2\cos\theta-4}=\frac{2(1-2\cos\theta)}{\cos\theta-2}.$$

故與題 16 同。

18. 設 x 軸截圓 $x^2+y^2=a^2$ 於 A. 在圓周截取任一弧 AB 等於拋物線 $y^2=4cx$ 上一點 $(x_0,\ y_0)$ 之橫坐標 X_0 延長半徑 OB 至 P, 使 $BP=y_0$. 證 P 之軌跡爲拋物螺線 (Parabolic spiral) $(\rho-a)^2$.

設圓心爲極，OX 爲極軸，$(e,\ \theta)$ 爲軌跡上一點，則

$$\rho=OB+BP.$$

$$OB=a.\quad BP=y_0=\sqrt{4cx_0},$$

$$x_0=AB=a\theta.$$

$$\therefore\quad \rho=a+\sqrt{4a\theta c}.$$

$$(\rho-a)^2=4ac\theta.$$

19. 求一點之軌跡，其條件爲：

(*a*) 其動徑與其變角成正比例.

設動徑 ρ 與交角 θ 之比爲 a, 則

$$\rho/\theta=a\quad 即\quad e=a\theta.$$

(*b*) 其動徑與變角成反比例.

設其相乘積爲 a. 則

$$\rho\theta=a.$$

(*c*) 其動徑之平方與變角成反比例.

設其相乘積爲 a^2, 則

$$\rho^2\theta=a^2.$$

(*d*) 其動徑之對數與變角成正比例.

設其比爲 a, 則

$$\log\rho=a\theta.$$

20. 對數螺線之定理. 當對數螺線上已作出 P_1 與 P_2 二點，則在此二點間此軌跡上之各點，可依下述定理，用幾何學方法作出之：

平分角 P_2OP_1 而在平分線上截取一線段 OP_3 等於 OP_1 與 OP_2 之比例中項，則 P_3 在此軌跡上.

證此定理(參閱上圖).

設 ρ_3 爲 (ρ_3, θ_3).

$$\rho_3{}^2=\rho_1\rho_2.$$

各取對數， $2\log\rho_3=\log\rho_1+\log\rho_2$.

但 P_1, P_2 在曲線上，故

$$\log\rho_1=a\theta_1,\quad \log\rho_2=a\theta_2.$$

代入，得 $2\log\rho_3=a(\theta_1+\theta_2)$.

$$\log\rho_3=a\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right).$$

但 $$\frac{\theta_1+\theta_2}{2}=\theta_3.$$

故 $$\log\rho_3=a\theta_3.$$

故 P_3 在軌跡上.

第十章　超越曲線

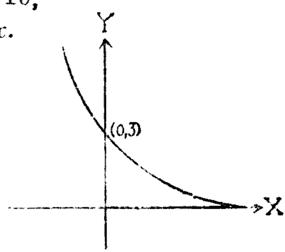
原本第170頁習題

作下列各方程式之軌跡:

1. $y=3e^{-x}$.

取對數，得 $\log y=\log 3-x\log_e 10$,

$$\log y=\log 3-0.434x.$$



1. x 軸上之截部爲 $(\infty, 0)$, y 軸上之截部爲 $(0, 3)$.
2. 不對稱.
3. y 不能爲負.
4. x 之值增加時漸近於 x 軸.

作圖時以 x 之值代入，求 y 之相當值列表，然後參照討論結果作圖.

2 $y=2e^{-\frac{1}{2}x}$.

1. 截部爲 $(0, 0.61)$ 及 $(\infty, 0)$.
2. 不對稱.
3. y 不能爲負.
4. $y=0$ 爲一漸近線.

檢教本第 168 頁可得 $e^{-\frac{1}{2}x}$ 之諸值，以計 y 之值，列表作圖。

3. $y=\frac{1}{2}e^{2x}$.

1. 截部 $(0,\frac{1}{2})$ $(-\infty,0)$.
2. 不對稱。
3. y 不能爲負。
4. y 趨近於 0 時，x 趨近於 $-\infty$，x 軸爲一漸近線。

4. $y=xe^{-2x}$.

1. 截部 $(0,0)$.
2. 不對稱.
3. x 及 y 之値均無限。

5. $y=x^2e^{-x}$.

1. 截部 $(0,0)$.
2. 不對稱。
3. y 不能爲負。

6. $y=2\log_{10}\sqrt{x}$.

$$\log_{10}\sqrt{x}=\tfrac{1}{2}\log_{10}x.$$

代入，得
$$y=\log_{10}x.$$
$$x=10^y=e^{2.303y}.$$

圖見教本第 169 頁。

7. $y=\log_{10}(2+x)$.

$$2+x=10^y=e^{2.303y}.$$
$$x=e^{2.303y}-2.$$

1. 截部 $(-1,0)$.
2. 不對稱。
3. $e^{2.303y}$ 不爲負，故 x 不能小於 -2。
4. $x=-2$ 時，x 趨近於 $-\infty$，故 $x=-2$ 爲一漸近線。

8. $y=\log_e(9-x^2)$.

$$e^y=9-x^2,\quad x^2=9-e^y,\quad x=\pm\sqrt{9-e^y}.$$

1. 截部爲 $(\pm2\sqrt{2},0)$ 及 $\left(0,\dfrac{0.954}{0.434}\right)$.
2. 對稱於 y 軸。
3. e^y 不爲負，故 x 不能 $>|3|$.
4. $x=\pm3$ 爲二漸近線。

9. $y=\log_{10}\sqrt{x+3}$.

$$\sqrt{x+3}=10^y=e^{2.303y}.$$

$$x=e^{2\times 2.303y}-3.$$

1. 截部 $(-2, 0)$, $(0, 0.24)$.
2. 不對稱.
3. x 不能 <-3.
4. $x=-3$ 爲一漸近線.

10. $y=\log_e(4x-x^2)$.

$$e^y=4x-x^2.$$

1. 截部 $(2\pm\sqrt{3}, 0)$, $(0, -\infty)$.
2. $e^y=x(4-x)$, 故 x 不能 <0 或 >4.
3. 對稱於 $x=2$.
4. 漸近線爲 $x=0$ 及 $x=4$.

11. $x=e^{-x^2}$.

$$y=\frac{1}{e^{x^2}}.$$

1. 截部 $(\pm\infty, 0)$, $(0, 1)$.
2. 對稱於 y 軸.
3. y 不能 >1 或 <0.
4. x 軸爲一漸近線.

12. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

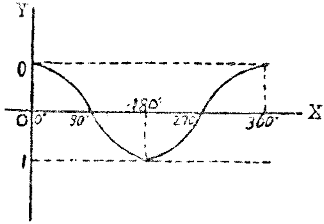
1. 截部 $(0, a)$
2. 對稱於 y 軸.
3. y 不能 $<\frac{a}{2}$.

原本第175頁習題

1. 作 $\cos x$ 之數值表(參閱第86節)與繪 $y=\cos x$ 之圖形，並充分討論之.

繪下列方程式一完全週期之圖形.依所設 x 之值計算 y 值，並作圖以驗之.

x	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$135°$	$180°$	$270°$	$360°$
y	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0	1



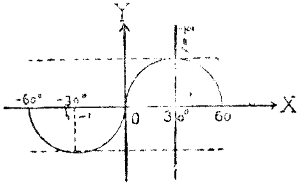
討論 1. y 軸上之截部為 $(0, 1)$.

x 軸上之截部為 $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{(m+1)\pi}{2}$.

2. 對稱於 y 軸.
3. 軌跡在 $y=\pm 1$ 之間.
4. 週期為 2π.

2. $y=\sin 3x, x=\frac{1}{2}$.

x	$0°$	$\pm 10°$	$\pm 15°$	$\pm 20°$	$\pm 30°$	$\pm 40°$	$\pm 50°$	$\pm 60°$
$3x$	$0°$	$\pm 30°$	$\pm 45°$	$\pm 60°$	$90°$	$\pm 120°$	$\pm 150°$	$\pm 180°$
y	0	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	± 1	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	0



$x=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times 57.29°=28.65°$,

$y=\sin 3x=\sin 3\times 28.65°=\sin 85.95°=0.9975$.

3. $y=2\sin\frac{1}{2}x,\ x=\frac{1}{2}\pi.$

x	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
$\frac{x}{2}$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
y	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0

圖形略同第 174 頁例題，惟振幅爲 a，週期爲 720° 或 4π.

$x=\frac{1}{2}\pi$ 爲截 x 軸於 $\frac{\pi}{2}$ 而垂直於 x 軸之直線，其與正弦曲線之交點爲

$$x=\frac{1}{2}\pi,\quad y=2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}.$$

4. $y=2\cos\pi x,\ x=\frac{2}{3}.$

圖形略如第 173 頁之圖，惟振幅爲 2，週期爲 2，其與 $x=\frac{2}{3}$ 之交點爲 $x=\frac{2}{3},\quad y=2\cos\frac{2\pi}{3}=2\cos 120°=-1.$

5. $y=\frac{1}{2}\cos 2x,\ x=1.$

振幅爲 $\frac{1}{2}$，週期爲 π.

交點爲 $x=1,\quad y=\frac{1}{2}\cos 2=\frac{1}{2}\cos 114.58°=0.20668.$

6. $y=\cos\frac{1}{2}\pi x,\ x=3.$

振幅爲 1，週期爲 4.

交點爲 $x=3,\quad y=\cos\frac{3\pi}{2}=\cos 270°=0.$

7. $y=2\sin\frac{1}{3}\pi x,\ x=2.$

振幅爲 2，週期爲 6.

交點爲 $x=2,\quad y=2\sin\frac{2\pi}{3}=2\sin 120°=\sqrt{3}.$

8. $y=3\cos\frac{1}{4}\pi x,\ x=-3.$

振幅爲 3, 週期爲 8.

交點爲 $x=-3,\ y=3\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=3\cos 135°=-\frac{3}{2}\sqrt{2}.$

9. $y=3\sin(x+2),\ x=1.$

振幅爲 3, 週期爲 2π.

交點爲 $x=1,\ y=3\sin 3=3\times 0.14148=0.4244.$

10. $y=2\cos(1-3x),\ x=-\frac{1}{3}.$

振幅爲 2, 週期爲 $\frac{2\pi}{3}=120°.$

交點爲 $x=-\frac{1}{3},\ y=2\cos\left(1+3\cdot\frac{1}{3}\right)=2\cos 2=-0.8320.$

11. $y=2\cos\left(2\pi x+\frac{2}{3}\pi\right),\ x=\frac{2}{3}.$

振幅爲 2, 週期爲 1.

交點爲 $x=\frac{2}{3},\ y=2\cos 2\pi=2.$

12. $y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\right),\ x=2.$

振幅爲 $\frac{1}{2}$, 週期爲 6π.

交點爲 $x=2,$

$$y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{7}{6}=\frac{1}{2}\times 0.91936=0.4597$$

13. $y=\sin\left(\frac{1}{3}\pi x-\frac{1}{5}\pi\right),\ x=2.$

振幅爲 1, 週期爲 6.

交點爲 $x=2,\ y=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin 84°=0.99452.$

14. $y=a\sin(kx+\pi).$

振幅爲 a, 週期爲 $\frac{2\pi}{k}$

15. $s=a\cos\left(\frac{2\pi t}{P}+\beta\right)$.

振幅爲 a, 週期爲 P.

自 $\cos\left(\frac{2\pi t}{P}+\beta\right)=0$, 即

$$\frac{2\pi t}{P}+\beta=\frac{\pi}{2},\quad \frac{3\pi}{2},\cdots\cdots$$

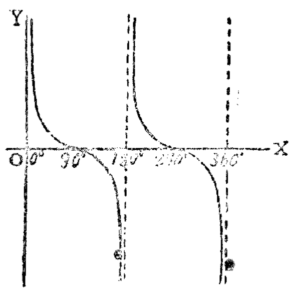
可得 x 軸上之截部爲 $\frac{(\pi-2\beta)P}{4\pi}$, ……

原本第178頁習題

1. 直接繪 (1) $y=\cot x$; (2) $y=\csc x$; 並討論之:

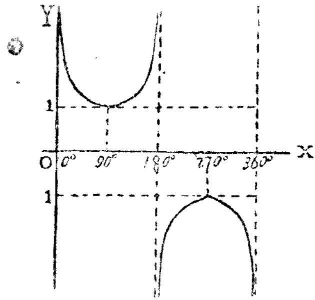
(a) $y=\cot x$.

1. 截部 x 軸上之截部爲 $x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\cdots\cdots$.
2. 對稱 對稱於原點.
3. 限度 x 及 y 之值皆無限度.
4. 週期 2π.



(b) $y=\csc x$.

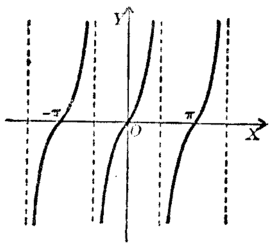
1. 截部 無.
2. 對稱 對稱於原點.
3. 限度 無限大, 但 $y=\pm1$ 間無曲線.
4. 週期 2π.



2. 試繪下列各方程式一週期之曲線，從所設 x 之值計算 y，並以圖驗之：

(a) $y=3\tan x$; $x=\frac{1}{4}\pi$.

x	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
y	0	$\sqrt{3}$	3	$3\sqrt{3}$	∞	$-3\sqrt{3}$	-3	$-\sqrt{3}$	0



交點爲 $x=\frac{1}{4}\pi$, $y=3\tan\frac{\pi}{4}=3$.

(b) $y=3\tan\left(\frac{1}{2}\pi x-\frac{2}{3}\pi\right)$; $x=\frac{2}{3}$.

週期爲 2, 截部爲 $x=\frac{4}{3}$, $\frac{10}{3}$.

交點爲 $x=\frac{2}{3}$, $y=3\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-3\sqrt{3}$.

(c) $y=\cot\frac{2}{3}\pi x$; $x=2$.

週期為 $\frac{3}{2}$, 截部為 $x=\frac{3}{4}, -\frac{9}{4}, \cdots\cdots$.

交點為 $x=2,\quad y=\cot\frac{4\pi}{3}=\cot 240^\circ=\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

(d) $y=4\cot\left(\frac{1}{4}\pi x+\frac{3}{4}\pi\right);\quad x=1.2$.

週期為 4, 截部為 $x=-1, 3, 7\cdots\cdots$.

交點為 $x=1.2,\quad y=4\cot\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{3\pi}{4}\right)=4\cot\frac{\pi}{20}=25.254$.

(e) $2y=3\cot 3x;\quad x=\frac{1}{2}$.

$$y=\frac{3}{2}\cot 3x.$$

週期為 $\frac{1}{3}$, 截部為 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \cdots\cdots$.

交點為 $x=\frac{1}{2},\quad y=\frac{3}{2}\cot\frac{3}{2}=10.495$.

(f) $3y=\sec[-(x+1)];\quad x=0.8$.

$$y=\frac{1}{3}\sec(x+1).$$

週期為 4π, 截部為 $y=\frac{1}{3}\sec 1=0.609$.

交點為 $x=0.8,\quad y=\frac{1}{3}\sec 1.8=-1.469$.

(g) $2y=\sec\frac{x}{2};\quad x=5$.

$$y=\frac{1}{2}\sec\frac{x}{2}.$$

週期為 2π, 截部為 $y=\frac{1}{2}$.

交點為 $x=5,\quad y=\frac{1}{2}\sec 2.5=-0.624$.

(h) $4y=\csc\frac{1}{4}\pi x;\quad x=3$.

$$y=\frac{1}{4}\csc\frac{1}{4}\pi x.$$

週期爲 8, x 軸上無截部, $\pm\frac{1}{4}$ 間無曲線.

(i) $y=\csc\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)$; $x=5$.

週期爲 6π, x 軸上無截部, ± 1 間無曲線.

交點爲 $y=\csc\left(\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\right)=\csc\frac{7}{3}=1.383$.

(j) $2y=3\csc 3x$; $x=1.2$.

$$y=\frac{3}{2}\csc 3x.$$

週期爲 $\frac{2}{3}\pi$, $\pm\frac{3}{2}$ 間無曲線.

$$y=\frac{3}{2}\csc 3.6=\frac{3}{2}\csc 206.24^\circ=-1.9.$$

繪下列各軌跡,並討論之:

3. $x=\sin y$. 又可寫作 $y=\arcsin x$ 或 $\sin^{-1}x$, 而讀作"正弦爲 x 之角".

$$x=\sin y \text{ 卽 } y=\sin^{-1}x.$$

1. 截部　x 軸上之截部爲 $(0, 0)$, y 軸上之截部爲 0, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, …….

2. 對稱　對稱於 $x=\frac{\pi}{2}$.

3. 限度　x 限於 ± 1 之間, y 無限度.

4. 週期　2π, 振幅爲 1.

圖形與 $y=\sin x$ 全同,惟 x 軸與 y 軸互換.

4. $x=2\cos y$, 或 $y=\arccos\frac{1}{2}x$.

$$x=2\cos y \text{ 或 } y=\cos^{-1}\frac{1}{2}x.$$

1. 截部　$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(0, \frac{5\pi}{2}\right)$……

2. 對稱　對稱於 x 軸.

3. 限度 限於 $x=\pm 2$ 之間。
4. 週期 2π, 振幅爲 2.

5. $x=\tan y$, 或 $y=\text{arc}\tan x$ (見圖)。

圖形與 $y=\tan x$ 完全相同，不過兩軸互換耳。

6. $x=2\sin\frac{2}{3}\pi y$.

1. 截部爲 $y=0, 3, 6\cdots\cdots$.
2. 對稱於原點。
3. x 限於 ± 2 之間。
4. 振幅爲 2, 週期爲 6.

7. $x=\frac{1}{2}\cos\frac{1}{3}\pi y$.

1. 截部爲 $y=\frac{3}{4}, \frac{9}{4}$.
2. 對稱於 x 軸。
3. x 限於 $\pm\frac{1}{2}$ 之間。
4. 振幅爲 $\frac{1}{2}$，週期爲 3.

8. $y=\text{arc}\tan 2x$.

$$y=\tan^{-1}2x,\quad 2x=\tan y,\quad x=\frac{1}{2}\tan y.$$

1. 截部爲 $y=0, \pi, 2\pi, \cdots\cdots$.
2. 對稱於原點。
3. x y 之値無限。
4. 週期爲 π.

9. $y=\frac{1}{2}\pi\,\text{arc}\cos\frac{1}{2}x$.

$$y=\frac{1}{2}\pi\cos^{-1}\frac{1}{2}x.$$

$$x=2\cos\frac{2y}{\pi}.$$

1. 截部爲 $y=\frac{\pi^2}{4}, \frac{2\pi^2}{4}, \pi^2, \cdots\cdots$.
2. 對稱於 x 軸。

3. x 限於 ± 2 之間。

4. 振幅爲 2, 週期爲 $\dfrac{3\pi^2}{4}$.

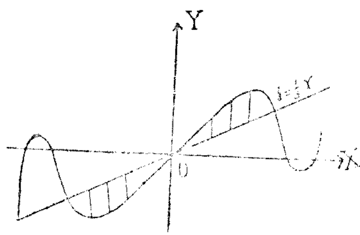
原本第 180 頁習題

繪下列曲線,從所設 x 之値,準確計算 y 值,並以圖驗之:

1. $y=2\sin x+\dfrac{1}{3}x$; $x=1$.

於同一坐標軸上作 $y'=\dfrac{1}{3}x$ 及 $y'=2\sin x$ 二曲線,以每一 x 值之二 y 值相加,得一點,聯繫諸點即得 $y=2\sin x+\dfrac{1}{3}x$ 之曲線。

$$x=2\sin 1+\frac{1}{3}=2.016.$$



2. $y=2\cos x+\dfrac{1}{10}x^2$; $x=\dfrac{1}{2}$.

作圖法同上題。

以 $x=\dfrac{1}{2}$ 代入,得

$$y=2\cos\frac{1}{2}+\frac{4}{10}=2\cos 28°39'+0.4=2.155.$$

3. $y=\sin x-\cos 2x$; $x=-\dfrac{1}{2}$.

$$y=\sin\left(-\frac{1}{2}\right)-\cos(-1)=-\sin\frac{1}{2}-\cos 1=-1.02.$$

4. $3y=x-3\sin\dfrac{1}{3}\pi x$; $x=2$.

$$y=\frac{1}{3}\left(x-3\sin\frac{1}{3}\pi x\right)=\frac{1}{3}(2-3\sin 120°)=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5. $y=\log_{10}x-4\cos\frac{1}{4}\pi x;\ \ x=2.$

$$y=\log_{10}2-4\cos 90°=\log_{10}2=0.30103.$$

6. $y=e^{\frac{1}{4}x}-\cos\pi x;\ \ x=\frac{1}{2}.$

$$y=e^{\frac{1}{8}}-\cos 90°=e^{\frac{1}{8}}=1.14.$$

7. $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x;\ \ x=1.8.$

$$y=\sin 1.8+\frac{1}{2}\sin 3.6=\sin 103.14°+\frac{1}{2}\sin 206.28°$$
$$=0.075.$$

8. $y=\frac{1}{2}x+e^{-x};\ \ x=-\frac{1}{2}.$

$$y=-\frac{1}{4}+e^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{4}+1.65=1.4.$$

9. $y=\sin 2x+\cos 2x;\ \ x=\frac{9}{10}.$

$$y=\sin\frac{9}{5}+\cos\frac{9}{5}$$
$$=\sin 103.14°+\cos 103.14°$$
$$=0.974+0.227=1.201.$$

10. $y=2\sin x+3\cos x;\ \ x=1.5.$

$$y=2\sin 85.83+3\cos 85.83$$
$$=1.995+0.218=2.213.$$

11. $y=2\sin 2x-e^{-\frac{1}{4}x};\ \ x=1.$

$$y=2\sin 2-e^{-\frac{1}{4}}=2\sin 114°34'+\frac{1}{e^{0.25}}$$
$$=1.819+7.798=9.617.$$

12. $y=\sin 2x+\cos 2x.$

此處 $A=1,\ B=1$，故 $C=\sqrt{2}.$

$$\gamma=\tan^{-1}\frac{B}{A}=\tan^{-1}1=45°.$$

故得 $y=\sqrt{2}\sin(2x+45°)$.

13. $y=2\sin x+3\cos x$.

此處 $A=2$, $B=3$, 故 $C=\sqrt{13}$.

故可寫作 $y=\sqrt{13}\sin(x+\alpha)$.

其中 $\alpha=\tan^{-1}\dfrac{B}{A}=\tan^{-1}1.5=0.98$.

原本第 182—183 頁習題

作下列諸軌跡，以所設 x 之值，精確計算 y，並以圖驗之：

1. $y=x\sin x$; $x=3$, $\frac{1}{3}\pi$.

$$y=x\sin x.$$

$\sin x$ 在 ±1 之間，故 $y=\pm x$ 爲曲線之界限。

$(-x)\sin(-x)=x\sin x$, 故對稱於 y 軸.

x 軸上之截部與 $y=\sin x$ 同。

故當先作 $y=x$, $y=-x$ 及 $y=\sin x$, 因 $\sin x=\pm1$ 時，y 在界限線上，故得 $y=\sin x$, 依上列條件擴大其振幅卽得曲線。

$$x=3,\quad y=y\sin 3=3\sin 172.4°=0.397.$$

$$x=\frac{1}{3}\pi,\quad y=\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\sin 60°=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}.$$

2. $xy=\sin x$; $x=\frac{1}{2}$.

$$y=\frac{1}{x}\sin x.$$

界限線爲 $y=\pm\dfrac{1}{x}$ 卽 $xy=1$ 及 $xy=-1$ 兩雙曲線對稱於 y 軸，截部與 $y=\sin x$ 同，$x=0$ 時 y 爲不定。

$$x=\frac{1}{2},\ 則\ y=2\sin\frac{1}{2}=0.959.$$

3. $xy=\cos x$; $x=1$.

$$y=\frac{1}{x}\cos x.$$

界限線爲 $y=\pm\dfrac{1}{x}$, 與上題同，對稱於原點，截部與 $y=\cos x$ 同。

$$x=1 \quad \text{則} \quad y=\cos x=0.540.$$

4. $3y=x\cos\pi x$; $x=3$.

$$y=\frac{x}{3}\cos\pi x.$$

界限線爲 $y=\pm\frac{x}{3}$，截部與 $y=\cos\pi x$ 同，對稱於原點.

$$x=3, \quad y=\cos 3\pi=-1.$$

5. $10y=x^2\sin\frac{1}{2}\pi x$; $x=\frac{1}{2}, 3$.

$$y=\frac{x^2}{10}\sin\frac{1}{2}\pi x.$$

界限線爲雙曲線 $y=\frac{1}{10}x^2$，截部與 $y=\sin\frac{1}{2}\pi x$ 同，對稱於原點.

$$x=\frac{1}{2}, \quad y=\frac{1}{40}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{80}.$$

6. $y=3e^{-\frac{1}{2}x}\sin 2x$; $x=1, 2$.

界限線爲 $y=3e^{-\frac{1}{2}x}$ 及 $y=-3e^{-\frac{1}{2}x}$，截部與 $y=\sin 2x$ 同.

$$x=1, \quad y=3e^{-\frac{1}{2}}\sin 2=3\times 0.61\times 0.91=1.665.$$

7. $ye^x=\cos 2x$; $x=1.5, 2$.

$$y=e^{-x}\cos 2x.$$

界限線爲 $y=\pm e^{-x}$，截部與 $y=\cos 2x$ 同.

$$x=1.5, \quad y=e^{-1.5}\cos 3=0.22\times(-0.99)=-0.218.$$
$$x=2, \quad y=e^{-2}\cos 4=0.14\times(-0.654)=-0.916.$$

8. $y=e^{-\frac{1}{4}x^2}\sin\frac{1}{3}\pi x$; $x=1, 3$.

界限線爲 $y=e^{-\frac{1}{4}x^2}$ 及 $y=-e^{-\frac{1}{4}x^2}$.

$$x=1, \quad y=e^{-\frac{1}{4}}\sin 60^\circ=0.675.$$
$$x=3, \quad y=e^{-\frac{9}{4}}\sin\pi=0.$$

9. $y=(x+1)\sin 2x$; $x=\frac{1}{3}\pi$.

界限線爲 $y=x+1$ 及 $y=-(x+1)$.

$$x=\frac{1}{3}\pi,\quad y=\left(\frac{\pi}{3}+1\right)\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{3}+1\right).$$

10. $x^2y=\cos\frac{1}{2}x$; $x=2,\ \frac{1}{2}\pi.$

$$y=\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{2}x.$$

界限線爲 $y=\frac{1}{x^2}$ 及 $y=-\frac{1}{x^2}.$

$$x=2,\quad y=\frac{1}{4}\cos 1=\frac{1}{4}\times 0.5405=0.1351.$$

$$x=\frac{\pi}{2},\quad y=\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{2}{\pi^2}\sqrt{2}.$$

11. $ye^{\frac{1}{4}x}=\cos\frac{1}{4}\pi x$; $x=1.6.$

界限線爲 $y=e^{-\frac{1}{4}x}$, $y=-e^{-\frac{1}{4}x}.$

$$x=1.6,\quad y=e^{-0.4}\cos 0.4\pi.$$

12. $y=2e^{-\frac{1}{3}x}\sin\pi(x+1)$; $x=-\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}.$

界限線爲 $y=2e^{-\frac{1}{3}x}$ 及 $y=-2e^{-\frac{1}{3}x}.$

$$x=-\frac{1}{2},\quad y=2e^{\frac{1}{6}}\sin\frac{\pi}{2}=2e^{\frac{1}{6}}.$$

$$x=\frac{2}{3},\qquad y=2e^{-\frac{1}{3}}\sin\frac{5\pi}{3}=\sqrt{3}e^{-\frac{1}{3}}.$$

13. $y=3e^{-x}\sin\frac{1}{3}\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)$; $x=-\frac{1}{2}.$

界限線爲 $y=3e^{-x}$, $y=-3e^{-x}.$

$$x=-\frac{1}{2},\quad y=3e^{0.5}=4.95.$$

14. $y=2e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\pi x-\frac{1}{2}\pi\right)$; $x=0.$

界限線爲 $y=2e^{-\frac{1}{2}x}$, $y=-2e^{-\frac{1}{2}x}.$

$$x=0,\quad y=2\times\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

15　作下列兩種軌跡，其法將下列各對曲線之縱坐標 (1) 相加與 (2) 相乘：

(a)　$y=\sin 2x$.

$$y=e^{-x}.$$

(1)　相加,先作二曲線,然後以每一橫坐標之兩縱坐標相加,得一點聯繫爲一新曲線。

(2)　相乘,作法同上諸題。

(b)　$y=e^{\frac{1}{2}x}$,
$y=\cos\frac{1}{2}x$.

(c)　$y=2+\dfrac{1}{16}x^2$,
$y=\cos\dfrac{1}{2}\pi x$.

(d)　$y=\dfrac{1}{8}(16-x^2)$,
$y=\cos\dfrac{1}{3}\pi x$.

(e)　$y=e^x$,
$y=\log_e x$.

(f)　$y=x$,
$y=\dfrac{1}{3}\cos\left(\dfrac{1}{3}\pi x+\dfrac{2}{3}\right)$.

(b)—(f) 同上。

16.　作下列複曲線：

(a)　$y=2\sin\left(\pi x+\dfrac{1}{4}\pi\right)+3\sin\left(\pi x-\dfrac{1}{3}\pi\right)$.

先作 $y'=2\sin\left(\pi x+\dfrac{1}{4}\pi\right)$；$y''=3\sin\left(\pi x-\dfrac{1}{3}\right)$，然後以每一橫坐標之兩相當縱坐標相加，得諸點聯繫之即得。

(b)　$y=3\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\pi\right)-\cos\left(2x-\dfrac{1}{4}\pi\right)$.

(c)　$y=\sin\left(x+\dfrac{1}{12}\pi\right)-2\cos\left(x-\dfrac{1}{12}\pi\right)$.

(b), (c) 同上。

17.　以 $y=A\sin(\pi x+\alpha)$ 之形式表題 16 之各方程式，並求 A 與 α 之值，作圖與上題之複曲線比較之：

(a)　$y=2\sin\left(\pi x+\dfrac{1}{4}\pi\right)+3\sin\left(\pi x-\dfrac{1}{3}\pi\right)$

$$=2\sin\pi x\cos\frac{\pi}{4}+2\cos\pi x\sin\frac{\pi}{4}$$

$$+3\sin\pi x\cos\frac{\pi}{3}-3\cos\pi x\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\left(\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right)\sin\pi x+\left(\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\cos\pi x$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{2}+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}\sin(\pi x+\alpha)$$

$$=\sqrt{13+3\sqrt{2}-3\sqrt{6}}\sin(\pi x+\alpha).$$

其中 $\alpha=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\frac{3}{2}}=\tan^{-1}0.406=-22.09°$.

故得 $\quad y=\sqrt{13+3\sqrt{2}-3\sqrt{6}}\sin(\pi x-22.09°)$.

(b), (c) 同上。

第十一章 通徑方程式與軌跡

原本第 186—187 頁習題

作下列各通徑方程式之圖形，t 與 θ 爲通徑．並求各題之直坐標方程式：

1. $\quad x=t,\ y=2-t.$

先以 t 之值代二式求 x, y 之相當值，列成一表，然後就表中 x, y 之相當值作圖．

t	0	1	2	3	4	5	−1	−2	−3
x	0	1	2	3	4	5	−1	−2	−3
y	2	1	0	−1	−2	−3	3	4	5

由第一式，$t=x$ 代入第二式，得

$$y=2-x.$$

即爲直坐標方程式。

2. $\quad x=2+t,\ y=2-3t.$

$$t=x-2,\quad y=2-3(x-2).$$

$$y=-3x+8.$$

3. $x=t^2,\ y=\frac{1}{2}t$

$$t=2y,\quad x=4y^2.$$

4. $x=\frac{1}{2}t,\ y=t^2-1.$

$$t=2x,\quad y=4x^2-1.$$

5. $x=t^2-2t,\ y=t^2+2.$

相减，得 $\qquad y-x=2t+2,\quad t=\frac{y-x-2}{2}.$

代入 (2)，得 $\qquad y=\frac{(y-x-2)^2}{4}+2.$

$$x^2-2xy+y^2+4x-8y+12=0.$$

6. $x=t^2+t,\quad y=\frac{1}{2}t^2-3t.$

2×(2) 減 (1)，得 $\qquad t=\frac{x-2y}{7}.$

代入，得 $\qquad x=\frac{(x-2y)^2}{49}+\frac{x-2y}{7}.$

$$x^2-4xy+4y^2-42x-14y=0.$$

7. $x=\frac{2}{t},\ y=4t.$

$$xy=8.$$

8. $x=t+2,\ y=\frac{t}{t-2}.$

$$t=x-2,\quad y=\frac{x-2}{x-4}.$$
$$xy-x-4y+2=0.$$

9. $x=\frac{1}{2}t^2+1,\ y=\frac{1}{3}t^3-2.$

$$t^2=2x-2,\quad t^3=3y+6.$$
$$t^6=8x^3-24x^2+24x-8,\quad t^6=9y^2+36y+36.$$
$$8x^3-24x^2+24x-8=9y^2+36y+36.$$

或 $\qquad 8(x-1)^3=9(y+2)^2.$

10. $x=2\cos\theta,\ y=2\sin\theta.$

$$\cos\theta=\frac{x}{2},\quad \sin\theta=\frac{y}{2}.$$

$$\cos^2\theta=\frac{x^2}{4},\ \sin^2\theta=\frac{y^2}{4}.$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1.$$

11. $x=3\sin\theta,\ y=4\cos\theta.$

$$\sin^2\theta=\frac{x^2}{9},\quad \cos^2\theta=\frac{y^2}{16}.$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1.$$

12. $x=5+\cos\theta,\ y=\sin\theta-5.$

$$\cos^2\theta=(x-5)^2,\quad \sin^2\theta=(y+5)^2.$$

$$(x-5)^2+(y+5)^2=1.$$

13. $x=3\sec\theta,\ y=3\tan\theta.$

$$\sec^2\theta=\frac{x^2}{9},\quad \tan^2\theta=\frac{y^2}{9}.$$

$$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta.$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$$

14. $x=\csc\theta,\ y=5\cot\theta.$

$$\csc^2\theta=x^2,\quad \cot^2\theta=\frac{y^2}{25}.$$

$$\csc^2\theta=1+\tan^2\theta.$$

$$\therefore\quad x^2-\frac{y^2}{25}=1.$$

15. $x=2\cos\theta,\ y=\cos 2\theta.$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-.$$

$$\cos^2\theta=\frac{x^2}{4}.$$

$$\therefore\quad y=2\cdot\frac{x^2}{4}-1.$$

$$x^2=2y+2.$$

16. $x=3\tan\theta,\ y=\cot\theta.$

$$xy=3.$$

17. $x=5t\cos 30°,\ y=5t\sin 30°-16t^2.$

由 (1),得 $t=\dfrac{2x}{5\sqrt{3}},\qquad t^2=\dfrac{4x^2}{75}.$

代入 (2), $y=\dfrac{2x}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{2}-16\cdot\dfrac{4x^2}{75}.$

$$64x^2-25\sqrt{3}x+75y=0.$$

18. $x=3+4\cos\theta,\quad y=3\sin\theta-2.$

$$\cos^2\theta=\frac{(x-3)^2}{16},\qquad \sin^2\theta=\frac{(y+2)^2}{9}.$$

$$\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{9}=1.$$

19 $x=6+4\sec\theta,\quad y=3\tan\theta-2.$

$$\sec\theta=\frac{x-6}{4},\qquad \tan\theta=\frac{y+2}{3}.$$

$$\left(\frac{x-6}{4}\right)^2=\left(\frac{y+2}{3}\right)^2+1.$$

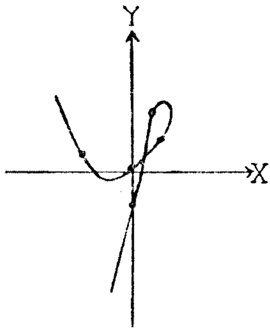
$$\frac{(x-6)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1.$$

20. 作下列通徑方程式之圖形:

(*a*) $x=t^2-4t,\quad y=t^3-3t^2-3t.$

t	0	1	2	3	4	5	−1	−2	−3
x	0	−3	−4	−3	0	5	5	12	21
y	0	−5	−10	−9	4	35	−1	−14	−45

將求得諸點作出,軌跡尚有不能確定之處,可更求數點,如此處 $t=1$ 與 2 之間可更以 $t=\dfrac{3}{2}$ 代入,得 $x=-3\dfrac{1}{4},\ y=-7\dfrac{1}{8}$. 又 y 軸上之截部可設 $x=0$, 即 $t^2-4t=0$, 得 t 之兩根為 0 與 4, 表中已算而 $y=0$ 時,即 $t^3-3t^2-3t=0$, t 有三根,表中僅得其 1 即 $t=0$, 故應解 $t^2-3t-3=0$, 因得 t 為 $\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}$, 代入 (1), 得 $x=\dfrac{3\mp\sqrt{21}}{2}$, 是為 x 軸上之二截部,作圖如下.



(b) $x=t+\sin t,\ y=1+\cos t.$

(c) $x=2r\cos\theta-r\cos 2\theta,\ y=2r\sin\theta-r\sin 2\theta.$

(d) $x=3r\cos\theta-\frac{1}{2}r\cos 3\theta,\ y=3r\sin\theta-\frac{1}{2}r\sin 3\theta.$

(e) $x=r\cos\theta+r\theta\sin\theta,\ y=r\sin\theta-r\theta\cos\theta.$

(b) — (e) 同上。

原本第 189—190 頁習題

1. 求下列曲線之通徑方程式，用所示之方程式代入而解之。其通徑爲 t 或 θ，作各題之曲線。

(a) $y^2=4x^2-5x^3$; $y=tx.$

以 $y=tx$ 代入，

$$t^2x^2=4x^2-5x^3.$$

$$x=\frac{4-t^2}{5},\quad y=tx=\frac{t(4-t^2)}{5}.$$

作圖法同前。

(b) $y^3=5x^2-8x^3$; $y=tx.$

以 $y=tx$ 代入解 x，即可得以 t 表示 x 之式，更以代入第二式，得以 t 表示 y 之式

$$t^3x^3=5x^2-8x^3.$$

$$x=\frac{5}{t^3+8},\qquad y=\frac{5t}{t^3+8}.$$

(c) $4x^2+y^2-16x+12=0$; $y=2\cos\theta.$

$$4x^2-16x+12+4\cos^2\theta=0.$$
$$x^2-4x+3+\cos^2\theta=0.$$
$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-12-4\cos^2\theta}}{2}=2\pm\sin\theta$$

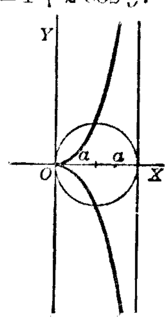
(d) $x^2-4xy+13y^2=9;\quad y=\sin\theta.$
$$x^2-4x\sin\theta+13\sin^2\theta-9=0.$$
$$x=\frac{4\sin\theta\pm\sqrt{16\sin^2\theta-52\sin^2\theta+36}}{2}$$
$$=2\sin\theta\pm3\cos\theta.$$

(e) $x^2y^2=b^2x^2-a^2y^2;\quad y=b\sin\theta.$
$$x^2b^2\sin^2\theta=b^2x^2-a^2b^2\sin^2\theta.$$
$$x^2=\frac{a^2\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}=a^2\tan^2\theta.\quad x=a\tan^2\theta.$$

(f) $x^2y^2=a^2y^2+b^2x^2;\quad y=b\csc\theta.$
$$x^2b^2\csc^2\theta=a^2b^2\csc^2\theta+b^2x^2.$$
$$x^2=\frac{a^2\csc^2\theta}{\csc^2\theta-1}=\frac{a^2\csc^2\theta}{\cot^2\theta}=a^2\sec^2\theta.$$
$$x=a\sec\theta.$$

(g) $x^2+2xy+y^2+2x-2y=0;\quad x=t-t^2.$
$$t^2-2t^3+t^4+2ty-2t^2y+y^2+2t-2t^2-2y=0.$$
$$y^2-2(t^2-t+1)y+t^4-2t^3-t^2+2t=0.$$
$$y=t^2-t+1\pm(2t-1)=t^2+t\ \text{或}\ t^2-3t+2.$$

(h) $17x^2-16xy+4y^2-34x+16y+13=0;\quad x=1+2\cos\theta.$
$$17+68\cos\theta+68\cos^2\theta-16y-32\cos\theta\, y$$
$$+4y^2-34-68\cos\theta+16y+13=0.$$
$$y^2-8\cos\theta\, y+17\cos^2\theta-1=0.$$
$$y=4\cos\theta\pm\sin\theta$$



2. 化下列方程式爲通徑方程式而作其曲線.

(a) $y^2(2a-x)=x^3;\quad y=tx.$
$$t^2x^2(2a-x)=x^3,\qquad 2at^2-t^2x=x.$$
$$x=\frac{2at^2}{t^2+1},\qquad y=\frac{2at^3}{t^2+1}.$$

t	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
x	0	a	$\frac{8}{5}a$	$\frac{9}{5}a$	$\frac{32}{17}a$	a	$\frac{8}{5}a$	$\frac{9}{5}a$	$\frac{32}{17}a$
y	0	a	$\frac{16}{5}a$	$\frac{27}{5}a$	$\frac{128}{17}a$	$-a$	$-\frac{16}{5}a$	$-\frac{27}{5}a$	$-\frac{128}{17}a$

(b) $y^2=x^2\dfrac{2+x}{2-x}$; $\quad y=tx.$

$$t^2x^2=x^2\frac{2+x}{2-x}. \qquad x=\frac{2(t^2-1)}{t^2+1},$$

$$y=\frac{2t(t^2-1)}{t^2+1}.$$

(c) $x^2+xy+2y^2+2x+1=0$; $\quad x=ty-1.$

$$t^2y^2-2ty+1+ty^2-y+2y^2+2ty-2+1=0.$$

$$(t^2+t+2)y^2-y=0. \quad y=0 \text{ 或 } y=\frac{1}{t^2+t+2},$$

$$x=\frac{t}{t^2+t+2}-1=\frac{-t^2-2}{t^2+t+2}.$$

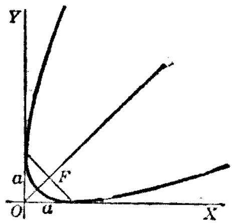
(d) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$; $\quad x=a\cos^4\theta.$

$$a^{\frac{1}{2}}\cos^2\theta+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}.$$

$$y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}(1-\cos^2\theta)=a^{\frac{1}{2}}\sin^2\theta.$$

$$y=a\sin^4\theta.$$

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
x	a	$\frac{9a}{16}$	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{16}$	0	$\frac{a}{16}$	$\frac{a}{4}$	$\frac{9a}{16}$	a
y	0	$\frac{a}{16}$	$\frac{a}{4}$	$\frac{9a}{16}$	a	$\frac{9a}{16}$	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{16}$	0



(e) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$; $x=a\sin^3\theta$.

$$a^{\frac{2}{3}}(\sin^3\theta)^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

$$y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(1-\sin^2\theta)=a^{\frac{2}{3}}\cos^2\theta.$$

$$y=a\cos^3\theta.$$

(f) $x^4+2ax^2y-ay^3=0$; $y=tx$.

$$x^4+2atx^3-at^3x^3=0.$$

$$x=at(t^2-2),\qquad y=at^2(t^2-2).$$

(g) $(x^2+y^2+4ay-a^2)(x^2-a^2)+4a^2y^2=0$; $x^2=a^2-t^2y^2$.

$$(a^2-t^2y^2+y^2+4ay-a^2)(a^2-t^2y^2-a^2)+4a^2y^2=0.$$

$$t^4y^2-t^2y^2-4at^2y+4a^2=0.$$

$$y=\frac{4at^2\pm 4at}{2t^2(t^2-1)}=\frac{2a(t\mp 1)}{t},$$

$$x=a\sqrt{-4t^2\pm 8t-3}.$$

(h) $x^2=y(y-2)^2$; $y-2=tx$.

$$x=\frac{y-2}{t}.$$

$$\frac{(y-2)^2}{t^2}=y(y-2)^2.$$

$$y=\frac{1}{t^2},\qquad x=\frac{\frac{1}{t^2}-2}{t}=\frac{1-2t^2}{t^3}.$$

(i) $\left(x^2-\frac{1}{2}b^2\right)^2+y^2(x^2-b^2)=0$; $x^2=\frac{1}{2}b^2+ty$.

$$t^2y^2+y^2\left(ty-\frac{1}{2}b^2\right)=0$$

$$y=\frac{b^2-2t^2}{2t},$$

$$x=b^2-t^2.$$

(j) $(a-x)y^2=(a+x)x^2;\quad x=a\cos\theta.$

$$a(1-\cos\theta)y^2=a(1+\cos\theta)a^2\cos^2\theta.$$

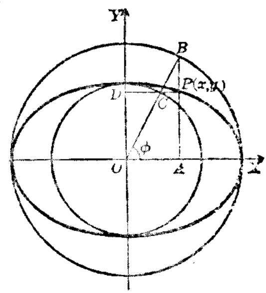
$$y=a\cos\theta\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$$

$$=a\cos\theta\cot\frac{\theta}{2}.$$

原本第193—196頁習題

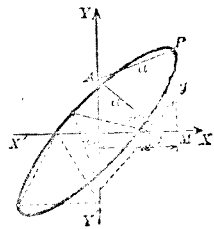
在下列諸題中以通徑及圖中已知線之長表 x 與 y 速繪其軌跡:

1. 求橢圓之通徑方程式,以其離心角 (Eccentric angle) 為通徑,即其長軸與圓 $x^2+y^2=a^2$ 上 B 點處之半徑間之角也.而 B 點之橫坐標與橢圓上 $P(x,y)$ 點同(見第194頁與第45節之圖).



$$x=OA=OB\sin OBA$$
$$=a\cos\phi,$$
$$y=PA=DO=OC\cos DOC$$
$$=b\sin\phi.$$

2. 在下右圖中,ABP 為一固定之等邊三角形.A 在 YY' 上移動,B 在 XX' 上移動.求頂點 P 之軌跡.



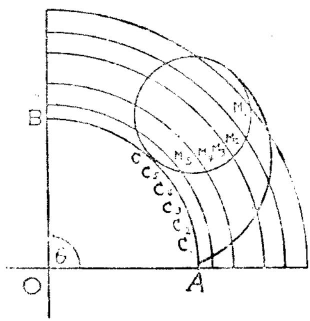
$$x=OB+BM$$
$$=a\cos\theta+a\cos\theta[180°-(60°+\theta)]$$
$$=a\cos\theta+a\cos(120°-\theta),$$
$$y=PM=a\sin(120°-\theta).$$

3. 外旋輪線 (Epicycloid) 一半徑 r 之圓在一半徑為 R 之圓外滾動.求動圓上一點之軌跡之方程式.

$$x=OE+EP.$$

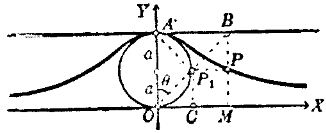
$$OE=(R+r)\cos\theta.$$
$$EF=DP=r\sin DCP.$$
$$\angle DCP=\angle BCP-\angle BCD$$
$$=\angle BCP-(90^\circ-\theta).$$
$$r\angle BCP=R\theta.$$
$$\angle BCP=\frac{R}{r}\theta.$$
$$\therefore\quad \angle DCP=\frac{R}{r}\theta+\theta-90^\circ.$$
$$EF=\sin DCP=r\sin\left(\frac{R+r}{r}\theta-90^\circ\right)$$
$$=-r\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta\right).$$
$$\therefore\quad x=(R-r)\cos\theta-r\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta\right),$$
$$y=CE-CD=(R+r)\sin\theta-r\cos DCP$$
$$=(R+r)\sin\theta-r\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta-90^\circ\right)$$
$$=(R+r)\sin\theta-r\sin\left(\frac{R+r}{r}\quad\right).$$

4. 描述外旋輪線與內旋輪線之作圖法，與第 192 頁旋輪線之作法相類似。



設 R 與 r 爲定圓與動圓之半徑，O 爲定圓之圓心，θ' 爲動圓旋轉之角。因二弧必相等，故定圓之弧所對之角 θ 必等 $\frac{r}{R}\cdot 2\pi$. 作 θ 角兩邊交圓周於 A, B, 則 $\widehat{AB}=$動圓之圓周.取 $\widehat{AB}$ 之中點 C, 作動圓使切定圓於 C. 分 $\widehat{AC}$ 爲若干等分 $C_1, C_2, C_3, \cdots\cdots$, 又分動圓之半圓周爲同等分 $M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots$ 過 M_1, M_2, M_3 以 O 爲圓心作弧平分於 $\widehat{AB}$, 於諸弧上截取 $\widehat{M_1P_1}$ 使等於 $\widehat{CC_5}$, $\widehat{M_2P_2}=\widehat{CC_4}$, $\widehat{M_3P_3}=\widehat{CC_3}$ $\cdots\cdots$, 則 $P_1\ P_2, P_3, \cdots\cdots$ 皆在軌跡上。

5. **亞尼西之箕舌線** (The witch of Agnesi) 求一點 P 之軌跡，其作法如下：命 OA 爲一圓之直徑，而命任一直線 OB 爲過 O 遇圓於 P_1 與切於 A 點之切線相交於 B. 畫 $P_1P \perp OA$ 與 $BP \parallel OA$.

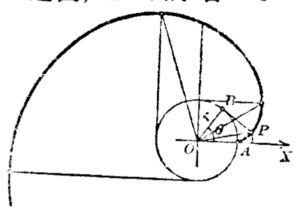


$$x = AB = 2a\tan\theta,$$
$$y = MP = MB - PB$$
$$= 2a - P_1B\sin(90^\circ - \theta)$$
$$= 2a - P_1B\cos\theta.$$

但 $$P_1B = OB - OP_1 = \frac{2a}{\cos\theta} - 2a\cos\theta.$$

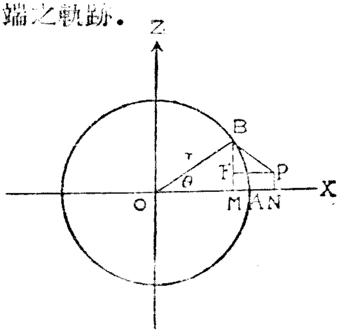
故 $$y = 2a - \left(\frac{2a - 2a\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)\cos\theta$$
$$= 2a\cos^2\theta.$$

6. Q 爲半徑 BP (第 192 頁例題 2 之圖) 上一點。若 $BQ = b$, 求 Q 點之軌跡. 此軌跡稱爲長旋輪線 (Prolate cycloid) 或短旋輪線 (Cortate cycloid) 全視其 a 之大於或小於 b 而定.



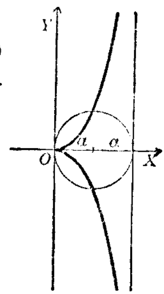
$$x = OE = OA - EA = a\theta - b\sin\theta,$$
$$y = GA = BA - BG = a - b\cos\theta$$

7. **圓之展開線** (The involute of a circle). 一繩盤繞於一圓周上；求當解開時，繩端之軌跡.



設 $$\angle AOB = \theta.$$

$$x = OM + MN.$$
$$OM = r\cos\theta.$$
$$MN = FP = BP\sin PBF.$$
$$\angle PBF = 90^\circ - \angle OBM = \theta.$$
$$BP = \widehat{AB} = r\theta.$$
$$\therefore\quad x = r\cos\theta + r\theta\sin\theta.$$
$$y = BM - BF.$$
$$BM = r\sin\theta.\quad BF\phi = BP\cos PBF = r\theta\cos\theta.$$
$$\therefore\quad y = r\sin\theta - r\theta\cos\theta.$$



8 **狹凹克爾之蔓葉線** (The cissoid of Diocles) 圓 $x^2+y^2-2ax=0$ 之一弦 OP_1 遇直線 $x=2a$ 於一點 A. 求直線 OP_1 上一點 P 使 $OP=P_1A$ 之軌跡.

$$x = OP\cos\theta,\qquad y = OP\sin\theta.$$

$$OP = P_1A = OA - OP_1 = \frac{2a}{\cos\theta} - 2a\cos\theta$$
$$= \frac{2a\sin^2\theta}{\cos\theta}.$$

$$\therefore\quad x = \frac{2a\sin^2\theta}{\cos\theta}\cdot\cos\theta = 2a\sin^2\theta \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y = \frac{2a\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\sin\theta = \frac{2a\sin^3\theta}{\cos\theta} \cdots\cdots\cdots(2)$$

自 (1), $\qquad \sin^2\theta = \dfrac{x}{2a},\quad \sin\theta = \sqrt{\dfrac{x}{2a}}.$

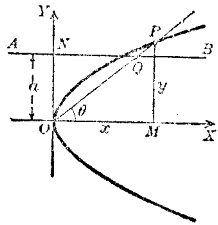
$$\cos\theta = \sqrt{1-\frac{x}{2a}} = \sqrt{\frac{2a-x}{2a}}.$$

代入 (2), $\qquad y = \dfrac{2a - \dfrac{x}{2a}\sqrt{\dfrac{x}{2a}}}{\sqrt{\dfrac{2a-x}{2a}}} = \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2a-x}}.$

$$y^2 = \frac{x^3}{2a-x}\quad 或\quad y^2(2a-x) = x^3$$

9. AB 爲一定直線而 O 爲一定點. 過 O 畫 OX 平行 AB 與

ON 垂直 AB. 從 O 作直線過 AB 上任一點 Q. 在此線上取一點 P 使 $MP=NQ$, MP 垂直 x 軸，則 P 之軌跡為何？

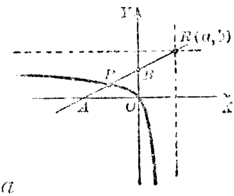


$$y=NQ=a\cot NQO$$
$$=a\cot\theta,$$
$$x=y\cot\theta=a\cot^2\theta.$$

消去 θ，得

$$y^2=ax.$$

10.　過定點 $R(a, b)$ 作線過二坐標軸於 A 與 B，則 AB 中點之軌跡為何？



$$x=-\frac{AO}{2},\qquad y=\frac{BO}{2}.$$

設 $\angle BAO=\theta$，則

$$\frac{b}{AO+a}=\tan\theta,$$

$$AO=\frac{b}{\tan\theta}-a=b\cot\theta-a$$

$$x=\frac{a-b\cot\theta}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{b-BO}{a}=\tan\theta.$$

$$BO=b-a\tan\theta.$$

$$y=\frac{b-a\tan\theta}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

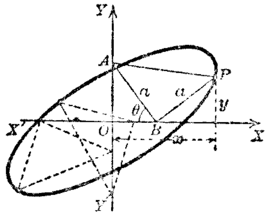
自 (1)，　$$\cot\theta=\frac{a-2x}{b}.$$

自 (2)，　$$\tan\theta=\frac{b-2y}{a}.$$

故得　$$\frac{a-2x}{b}=\frac{a}{b-2y}.$$

即　$(a-2x)(b-2y)=ab$ 或 $(2x-a)(2y-b)=ab.$

11.　一剛堅等腰直角 $\triangle ABP$ 之兩頂點 A 與 B 在兩垂線上移動．求頂點 P 之軌跡．



$$x=OB+BC.$$

$$OB=a\cos\theta,\qquad BC=a\cos PBC.$$

$$\angle PBC=90^\circ-\theta.\qquad BC=a\sin\theta.$$

$$\therefore\quad x=a\cos\theta+a\sin\theta\cdots\cdots(1)$$

$$y=a\sin PBC=a\cos\theta\cdots\cdots(2)$$

自 (2), $\qquad a\cos\theta=y,\qquad \cos\theta=\dfrac{y}{a}.$

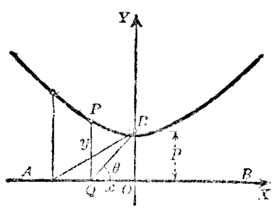
$$\sin\theta=\sqrt{\frac{a^2-y^2}{a^2}}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-y^2}.$$

代入 (1), $\qquad x=y+\sqrt{a^2-y^2}.$

$$x^2-2xy+y^2=a^2-y^2.$$

$$x^2-2xy+2y^2=a^2.$$

12. AB 爲一定線而 R 一定點。自 R 至 AB 上任一點 Q 作直線 RQ; 於 Q 點作 AB 之垂線 QP, 使 $QP\div QR$ 等於一常數 e, 則 P 之軌跡爲何?



$$x=p\cot\theta\cdots\cdots(1)$$

$$y=QP=e\,QR=ep\csc\theta\cdots\cdots(2)$$

自 (1), $\qquad \cot^2\theta=\dfrac{x^2}{p^2}.$

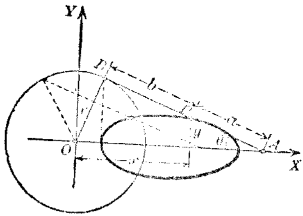
自 (2), $\qquad \csc^2\theta=\dfrac{y^2}{e^2p^2}.$

$$\cot^2\theta+1=\csc^2\theta.$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{p^2}+1=\frac{y^2}{e^2p^2}.$$

或
$$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{e^2p^2}=-1.$$

13. OB 爲一機器之曲拐而 AB 爲所連之桿。B 在曲拐之圓周上移動，其圓心爲 O，而 A 在定線 OX 上移動，則 AB 上一點 P 之軌跡爲何？



$$y=a\sin\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$x=OQ=OA-QA.$$
$$\overline{OA}^2+(a+b)^2-2\,OA(a+b)\cos\theta=r^2.$$
$$OA=a+b\pm r.$$
$$QA=a\cos\theta.$$
$$\therefore \quad x=a+b\pm r-a\cos\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

自 (1),
$$\sin^2\theta=\frac{y^2}{a^2}.$$

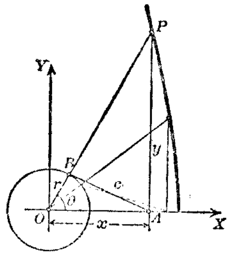
自 (2),
$$\cos^2\theta=\frac{[x-(a+b\pm r)]^2}{a^2}.$$

$$\therefore \quad \frac{[x-(a+b\pm r)]^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

當 $a+b=r$ 時，
$$(x-2r)^2+y^2=a^2.$$

或
$$x^2+y^2=a^2$$

14. OB 爲一機器之曲拐繞 O 旋轉，而 AB 爲其連桿，點 A 在 OX 上移動。畫 $AP\perp OX$ 遇 OB 之延長線於 P,* 則 P 之軌跡爲何？



設 $AB=c$，則

$$x^2+r^2-2rx\cos\theta=c^2$$

$$x=r\cos\theta\pm\sqrt{c^2-r^2\sin^2\theta}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y=x\tan\theta=r\sin\theta+\tan\theta\sqrt{c^2-r^2\sin^2\theta}\cdots\cdots\cdots(2)$$

自 (1)，得 $\quad (x-r\cos\theta)^2=c^2-r^2(1-\cos^2\theta)$.

$$x^2-2rx\cos\theta+r^2\cos^2\theta=c^2-r^2+r^2\cos^2\theta.$$

$$\cos\theta=\frac{x^2-c^2+r^2}{2rx}.$$

又自 (1)，$x^2=r^2\cos^2\theta+c^2-r^2\sin^2\theta+2r\cos\theta\sqrt{c^2-r^2\sin^2\theta}$

$$y^2=r^2\sin^2\theta+\tan^2\theta(c^2-r^2\sin^2\theta)+2r\sin\theta\tan\theta\sqrt{c^2-r^2\sin^2\theta}$$

$$\therefore\quad x^2+y^2=r^2+\sec^2\theta(c^2-r^2\sin^2\theta)+2r\sec\theta\sqrt{c^2-r^2\sin^2\theta}.$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=r+\sec\theta\sqrt{c^2-r^2\sin^2\theta}.$$

但 $\quad \sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{rx}{x^2-c^2+r^2},\quad \sin^2\theta=\dfrac{4r^2x^2-(x^2-c^2+r^2)^2}{4r^2x^2}$.

故 $\sqrt{x^2+y^2}=r+\dfrac{2rx}{x^2-c^2+r^2}\sqrt{\dfrac{4c^2x^2-4r^2x^2+(x^2-c^2+r^2)^2}{4x^2}}$.

$$(x^2-c^2+r^2)\sqrt{x^2+y^2}=r(x^2-c^2+r^2)+r(x^2+c^2-r^2).$$

$$(x^2-c^2+r^2)\sqrt{x^2+y^2}=2rx^2.$$

若 $c=r$，則得 $\qquad x^2+y^2=4r^2$.

原 本 第 198—199 頁 習 題

1. 過等邊雙曲線(第 52 節)之中心作切線之垂線，求此垂線與此切線之交點之軌跡．

設等邊雙曲線之方程式爲

$$x^2-y^2=a^2.$$

設 m 為切線之斜率，則切線方程式為

$$y = mx \pm a\sqrt{m^2-1} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

自原點作垂直於切線之方程式為

$$y = -\frac{1}{m}x \quad 或 \quad m = -\frac{x}{y} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

消去 m，將 (2) 代入 (1)，

$$y = -\frac{x^2}{y} \pm a\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2-1}.$$

$$\frac{y^2+x^2}{y} = \pm a\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2-1}.$$

$$(y^2+x^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$

2.　設一三角形之底邊固定，其高亦為定長，試求此三角形三高之交點之軌跡。

設三角形之底邊在 x 軸上，過其中點之垂線為 y 軸，底邊之長為 $2a$ 卽二頂點在 $(-a, 0)$ 及 $(a, 0)$. 又設高為 b，三高之交點為 (x_1, y_1)，則第三頂點必為 (x_1, b). 二邊之斜率為 $\frac{b}{x_1+a}$ 及 $\frac{b}{x_1-a}$，故二高之方程式為

$$y = -\frac{x_1+a}{b}(x-a) \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$y = -\frac{(x_1-a)}{b}(x+a) \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$x_1 = -\frac{by}{x-a} - a,$$

$$x_1 = -\frac{by}{x+a} + a.$$

$$\frac{by}{x-a} + a = \frac{by}{x+a} - a.$$

$$by(x+a) = by(x-a) - 2a(x^2-a^2).$$

$$by = -x^2 + a^2.$$

或　　$$x^2 = -by + a^2.$$

或以 $x_1 = x$ 代入 (1) 式亦可。

3.　求橢圓 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ 上兩垂直切線之交點之軌跡。

設 t 與 $-\frac{1}{t}$ 爲橢圓兩切線之斜率，則切線爲

$$y-tx=\sqrt{a^2t^2+b^2}.$$
$$ty+x=\sqrt{a^2+b^2t^2}.$$

平方相加，

$$y^2-2txy+t^2x^2=a^2t^2+b^2.$$
$$x^2+2txy+t^2y^2=a^2+b^2t^2.$$
$$y^2(t^2+1)+x^2(t^2+1)=(a^2+b^2)(t^2+1).$$
$$x^2+y^2=a^2+b^2.$$

4. 橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上一切線遇 x 軸於 A, y 軸於 B. 從 A 畫一線 $\parallel OY$, 而從 B 畫一線 $\parallel OX$; 則此二線之交點之軌跡爲何?

設橢圓爲 $$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

切線爲 $$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

其在 x 軸上之截部爲 $x=\mp\frac{\sqrt{a^2m^2+b^2}}{m}$ …………………………(1)

其在 y 軸上之截部爲 $y=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ …………………………(2)

自 (1), (2) 消去 m, 得

$$x^2y^2=a^2y^2+b^2x^2.$$

5. 以雙曲線代題 4 中之橢圓而求之.

設雙曲線爲 $$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2.$$

切線爲 $$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}.$$

兩軸上之截部爲 $x=0,\ y=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$;

$$y=0,\ x=\mp\frac{\sqrt{a^2m^2-b^2}}{m}.$$

消去 m, $$y^2=a^2m^2-b^2,$$
$$m^2x^2=a^2m^2-b^2.$$
$$y^2=m^2x^2.$$

代入，得 $$x^2y^2=a^2y^2-b^2x^2.$$

6. 求二垂直切線交點之軌跡，此二切線切於 (1) 拋物線, (2) 第 48 節之雙曲線 (IV) (參閱題 3).

(1) 設拋物線爲 $$y^2=2px.$$

設 t 與 $-\frac{1}{t}$ 爲切線之斜率，則切線爲

$$y=tx+\frac{p}{2t} \quad 及 \quad y=-\frac{x}{t}-\frac{pt}{2}.$$

$$2ty=2t^2x+p, \quad 2ty=-2x-pt^2.$$

相減，
$$(2t^2+2)x+p(1+t^2)=0.$$

$$2x+p=0.$$

$$x=-\frac{p}{2}.$$

(2) 設雙曲線爲 $\qquad b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2.$

切線爲 $\qquad y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

及 $\qquad y=-\frac{x}{m}\pm\sqrt{a^2\left(\frac{1}{m}\right)^2-b^2}.$

$$y-mx=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2},$$

$$my+x=\pm\sqrt{a^2-b^2m^2}.$$

$$y^2-2mxy+m^2x^2=a^2m^2-b^2,$$

$$m^2y^2+2mxy+x^2=a^2-b^2m^2.$$

$$y^2(m^2+1)+x^2(m^2+1)=a^2(m^2+1)-b^2(m^2+1).$$

$$x^2+y^2=a^2-b^2.$$

7. 過 (1) 橢圓，(2) 拋物線，(3) 雙曲線之一焦點，各作直線垂直於其切線．求此直線與切線之交點之軌跡．

(1) 橢圓爲 $\qquad b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

切線爲 $\qquad y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$

自焦點之垂線爲 $\quad y=-\frac{1}{m}(x\pm\sqrt{a^2-b^2}).$

$$y^2-2mxy+m^2x^2=a^2m^2+b^2.$$

$$m^2y^2+2mxy+x^2=a^2-b^2.$$

$$x^2+y^2=a^2.$$

(2) 拋物線爲 $\qquad y^2=2px.$

切線爲 $\qquad y=tx+\frac{p}{2t}.$

自焦點之垂線爲 $\quad y=-\frac{1}{t}\left(x-\frac{p}{2}\right).$

$$2ty-2t^2x-p=0$$

$$-2ty-2x+p=0.$$

$$2(t^2+1)x=0.$$
$$x=0.$$

(3) 雙曲線為 $\qquad b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2.$

切線為 $\qquad y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}.$

垂線為 $\qquad y=-\dfrac{1}{m}(x\pm\sqrt{a^2+b^2}).$

$$y^2-2mxy+m^2x^2=a^2m^2-b^2.$$
$$m^2y^2+2mxy+x^2=a^2+b^2.$$
$$x^2+y^2=a^2.$$

8. 過圓 $x^2+y^2+2ax+a^2-b^2=0$ 作直線垂直於其切線,求此直線與切線之交點之軌跡.

設圓之切線之斜率為 m,得直線系 $y=mx+k$. 代入圓之方程式,得

$$x^2+m^2x^2+2ax+2mkx+k^2+a^2-b^2=0.$$
$$\Delta=4(a^2+2amk+m^2k^2)-4(m^2+1)(k^2+a^2-b^2)=0.$$
$$k^2-2amk+m^2a^2-m^2b^2-b^2=0.$$
$$k=am\pm b\sqrt{m^2+1}.$$

故得切線為 $\qquad y=mx+am\pm b\sqrt{m^2+1}.$

而其垂線過 $(0,0)$ 為 $\quad y=-\dfrac{1}{m}x\quad$ 或 $\quad m=-\dfrac{x}{y}.$

代入,得 $\qquad y=-\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{ax}{y}\pm\dfrac{b}{y}\sqrt{x^2+y^2}.$

即 $\qquad (x^2+y^2+ax)^2=b^2(x^2+y^2).$

9. 在橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上任一點 M 作切線. 從橢圓之中心作直線垂直於此切線且遇 M 之縱坐標(必要時,延長之)於 P. 求 P 之軌跡(參閱第 143 頁題 2).

設切線之斜率為 m, 切於橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. 自第 143 頁題 2,得其切點為 $\left(-\dfrac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}},\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$.

即於縱坐標為

$$x=-\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\text{ 之直線.}$$

切線之垂線為 $\qquad y=-\dfrac{1}{m}x.$

因得
$$m=-\frac{x}{y}.$$

代入上式，得
$$x=-\frac{-a^2\dfrac{x}{y}}{\dfrac{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}}{y^2}}.$$
$$a^2x^2+b^2y^2=a^4.$$

10.　抛物線上任一點 M 作切線．從抛物線之頂點作此切線之垂線遇 M 之焦點半徑(必要時，延長之)於 P，則 P 之軌跡爲何?

解法同上(參閱第 197 頁例題)．

11.　從原點作直線垂直於抛物線 $y^2+4ax+4a^2=0$ 之切線；求其垂足之軌跡．

設抛物線 $y^2+4ax+4a^2=0$ 之切線爲 $y=mx+k$.

代入，得　$m^2x^2+2mkx+4ax+4a^2+k^2=0.$
$$\Delta=4m^2k^2+16amk+16a^2-16a^2m^2-4k^2m^2=0.$$
$$k=\frac{a(m^2-1)}{m}.$$

故切線爲
$$y=mx+\frac{a(m^2-1)}{m}.$$

其垂線爲
$$y=-\frac{1}{m}x.$$

因得
$$m=-\frac{x}{y}.$$

故其垂足，卽二線交點之軌跡爲以 m 代入化簡之，得
$$y=-\frac{x^2}{y}-\frac{a\left(\dfrac{x^2}{y^2}-1\right)}{\dfrac{x}{y}}.$$
$$y^2=-x^2-\frac{a(x^2-y^2)}{x}.$$
$$x^3+y^2x+ax^2-ay^2=0.$$
$$y^2=x^2\cdot\frac{a+x}{a-x}.$$

12. 在橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 及大輔圓 $x^2+y^2=a^2$ 上，取其橫坐標相同諸點作法線，求其交點之軌跡。

設 (x_1, y_1) 為圓上一點，則橢圓上橫坐標相同之一點為

$$\left(x_1, \frac{a}{b}y_1\right).$$

兩法線之方程式為

$$y_1x-x_1y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

及 $$a^2\cdot\frac{b}{a}y_1x-b^2x_1y=(a^2-b^2)x_1\cdot\frac{b}{a}y_1$$

即 $$ay_1x-bx_1y=\frac{a^2-b^2}{a}\cdot x_1y_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

但 (x_1, y_1) 在圓上，故

$$y_1=\sqrt{a^2-x_1^2}.$$

代入 (1)，得 $$\sqrt{a^2-x_1^2}x-x_1y=0.$$

$$(a^2-x_1^2)x^2=x_1^2y^2.$$

$$x_1^2=\frac{a^2x^2}{x^2+y^2}, \qquad x_1=\frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

又以 $y_1=\sqrt{a^2-x_1^2}$ 代入 (2)，得

$$a\sqrt{a^2-x_1^2}x-bx_1y=\frac{a^2-b^2}{a}x_1\sqrt{a^2-x_1^2}.$$

以 $x_1\sqrt{a^2-x_1^2}$ 除各項，得

$$\frac{a^2x}{x_1}-\frac{aby}{\sqrt{a^2-x_1^2}}=a^2-b^2.$$

以 x_1 之值代入，得

$$\frac{a^2x\sqrt{x^2+y^2}}{ax}-\frac{aby}{\sqrt{a^2-\frac{a^2x^2}{x^2+y^2}}}=a^2-b^2.$$

$$a\sqrt{x^2+y^2}-b\sqrt{x^2+y^2}=a^2-b^2.$$

$$x^2+y^2=(a+b)^2.$$

13. AB 爲一圓之定直徑而 M 爲圓上任一點。從 A 作直線垂直於 M 處切線過 BM 之延長線於 P. 求 P 之軌跡.

設圓爲 $x^2+y^2=r^2$ 在 AB 直徑在 x 軸上,則 A, B 之坐標爲 $(r, 0)$ 及 $(-r, 0)$.

設 M 之坐標爲 (x_1, y_1), 則其切線爲

$$x_1x+y_1y=r^2.$$

過 A 而垂直於此切線之方程式爲 $y=\frac{y_1}{x_1}(x-r)$.

而過 BM 之直線爲 $\frac{y-0}{x+r}=\frac{y_1-0}{x_1+r}$.

展開此兩式:

$$y_1x-x_1y-ry_1=0,$$

$$y_1x-x_1y+ry_1-ry=0.$$

相減,得 $$y_1=\frac{y}{2}.$$

又 (x_1, y_1) 在圓上,故 $x_1=\sqrt{r^2-y_1^2}$.

以 x_1, y_1 之值代入兩直線式之一,得

$$\frac{y}{2}x-\sqrt{r^2-\frac{y^2}{4}}\,y-r\frac{y}{2}=0.$$

$$\sqrt{4r^2-y^2}=x-r.$$

$$(x-r)^2+y^2=4r^2.$$

14. A 與 B 爲定點而 LM 爲一定線。作 PA 與 PB 使在 LM 上截一已知長,則 P 之軌跡爲何?

設 A,B 兩點在 x 軸上,其坐標爲 $(-a, 0)$ 及 $(a, 0)$. 又設定直線在兩軸上之截部爲 $(\alpha, 0)$ 及 $(0, \beta)$, 則直線爲 $\beta x+\alpha y-\alpha\beta=0$.

設 P 點之坐標爲 (x, y_1), 則

PA 爲 $$(x_1+a)y-y_1x-ay_1=0.$$

PB 爲 $$(x_1-a)y-y_1x+ay_1=0.$$

PA 與定直線之交點爲

$$x=\frac{\alpha\beta(x_1+a)+a\alpha y_1}{\alpha y_1+\beta(x_1+a)},\qquad y'=\frac{\beta(a+\alpha)y_1}{\alpha y_1+\beta(x_1+a)}.$$

PB 與定直線之交點爲

$$x''=\frac{a\beta(x_1-a)+a\alpha y_1}{\alpha y_1+\beta(x_1-a)},\qquad y''=\frac{\beta(a-a)y_1}{\alpha y_1+(x_1-a)}.$$

但此兩點之距離一定，設其距離爲 c，因得

$$\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}=c.$$

代入化簡之，得

$$c\beta^2x^2+a(\alpha-2a\sqrt{\alpha^2+\beta^2})y^2+2\beta(\alpha-a\sqrt{\alpha^2+\beta^2})x_1y_1+2a\alpha\beta y_1=0$$

原本第 202—203 頁習題

1. 求下列圓錐曲線內平分所示諸弦之直徑之方程式。每一情形中作一圖：

(a) $4x^2+9y^2=36$，諸弦之斜率 $=\frac{1}{2}$.

設諸弦爲 $$y=\frac{1}{2}(x+k),$$

則 $$x=2y-k.$$

求其交點以弦之 x 代入橢圓，得

$$25y^2-16ky+4k^2-36=0.$$

解此方程式，可得交點之兩縱坐標 y_1 及 y_2 而其中點爲

$$y'=\frac{y_1+y_2}{2},\qquad x'=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

但 $$y_1=\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A},\qquad y_2=\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A},$$

故 $$y'=\frac{-B}{2A}=\frac{8k}{25}.$$

代入弦系之方程式，得

$$x'=-\frac{9k}{25}.$$

消去 k 並去其符標，得

$$8x+9y=0.$$

(b) $x^2=8y$，諸弦 $x+y=k$.

同法以 $y=k-x$ 代入拋物線式，得

$$x^2+8x-8k=0.$$

中點之橫坐標為　　$x=-4.$

即為直徑之方程式.

(c)　$4x^2-y^2=16$, 諸弦　$3x-y+k=0.$

以 $y=3x+k$ 代入,得

$$5x^2+6kx+k^2+16=0.$$

弦之中點為　　$x=-\frac{3}{5}k,\quad y=-\frac{4}{5}k.$

消去 k, 得直徑方程式為　$4x-3y=0.$

(d)　$xy=12$, 諸弦之斜率 $=-2.$

$$y=-2x+k.$$

$$2x^2-kx+12=0.$$

$$x'=\frac{k}{4},\qquad y'=\frac{k}{2}.$$

$$2x-y=0.$$

(e)　$x^2-4y^2+4x-16=0$, 諸弦　$x+y=k.$

$$y=k-x.$$

$$3x^2-8kx-4x+4k^2+16=0.$$

$$x'=\frac{4k+2}{3},\qquad y'=-\frac{k+2}{3}.$$

消去 k,　　$x+4y+2=0.$

(f)　$xy-y^2+2x-4=0$, 諸弦 $3y=2x+k.$

$$x=\frac{3y-k}{2}.$$

代入展開,得　　$y^2+(6-k)y-2k-8=0.$

$$y'=\frac{k-6}{2},\qquad x'=\frac{k-18}{4}.$$

消去 k,　　$2x-y+6=0.$

2.　求從下列已知條件所決定之已知圓錐曲線之直徑方程式及被此直徑所平分諸弦系之斜率:

(a)　$y^2=6x$, 過 $(3,-1)$.

$p=3$, 故依第 201 頁定理,可設直徑為 $my=3$, 過 $(3,-1)$, 故 $(3,-1)$ 當在於直徑之方程式,因得 $m=-3$, 故直徑為

$$-3y=3\quad 即\quad y+1=0.$$

此直徑所平分之弦系之斜率爲 $m=-3$.

(*b*) $9x^2+36y^2=324$, 過 $(4, 2)$.

依第 201 頁定理，設直徑爲 $9x+36my=0$.

$(4, 2)$ 在直徑上，故 $36+36\cdot 2\cdot m=0$.

$$m=-\frac{1}{2}.$$

故直徑爲 $\qquad x-2y=0.$

(*c*) $4x^2-16y^2=25$, 過 $(1, -2)$.

設弦系之斜率爲 m, 則直徑爲

$$4x-16my=0.$$

$$4+32m=0.$$

斜率爲 $\qquad m=-\frac{1}{8}.$

直徑爲 $\qquad 2x+y=0.$

(*d*) $x^2+2y^2-4x-2y-6=0$, 過 $(8, 0)$.

$$(x-2)^2+2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{21}{2}.$$

移軸，得 $\qquad x'^2+2y'^2=\frac{21}{2}.$

$$a^2=\frac{21}{2},\qquad b^2=\frac{21}{4}.$$

設諸弦之斜率爲 m, 則直徑爲 $\quad \frac{21}{4}x'+\frac{21}{2}my'=0.$

卽 $\qquad x'+2my'=0.$

移回原軸，得 $\qquad x-2+2m\left(y-\frac{1}{2}\right)=0.$

經過 $(8, 0)$ 故得 $\qquad m=8-2=6.$

代入，得直徑爲 $\qquad x+12y-8=0.$

(*e*) $y^2+xy-8=0$, 過 $(3, -3)$.

設弦爲 $\qquad y=mx+k,\quad x=\frac{y-k}{m}.$

$$my^2+y^2-ky-8m=0.$$

中點爲 $\qquad y'=\frac{k}{2(m+1)},\quad x'=\frac{-k(2m+1)}{2m(m+1)}.$

消去 k, 得 $(2m+1)y+mx=0.$

$(3,-3)$ 在直徑上,故得 $m=-1.$

直徑方程式爲 $x+y=0.$

3. 求弦之方程式,此弦爲:

(a) $y^2=6x$ 之弦而被 $(4,3)$ 所平分

$p=3$, 設弦之斜率爲 m, 則直徑爲 $my=3.$

弦爲 $(4,3)$ 所平分,則 $(4,3)$ 必在直徑上,故得 $m=1.$

弦之斜率爲 1, 則弦爲 $y=mx+k$, 此弦過 $(4,3)$, 故 $k=-1$ 代入,得 $y=x-1.$

(b) $9x^2+36y^2=324$ 之弦而被 $(4,2)$ 所平分。

設弦之斜率爲 m, 則直徑爲 $9x+36my=0.$

弦爲 $y=mx+k.$

此兩線皆過 $(4,2)$,因得 $m=-\frac{1}{2}$, $k=4.$

故得弦爲 $x+2y=8.$

(c) $4x^2-y^2=9$ 之弦兩被 $(4,2)$ 所平分。

直徑爲 $4x-my=0.$

弦爲 $y=mx+k.$

$$m=8, \quad k=-30.$$

故弦爲 $y=8x-30.$

(d) $xy-4=0$ 之弦而被 $(2,-1)$ 所平分。

設弦爲 $y=mx+k.$

求交點 $mx^2+kx-4=0.$

$$x'=-\frac{k}{2m}, \qquad y'=\frac{k}{2}.$$

直徑爲 $mx+y=0.$

$(2,-1)$ 在直徑上,故 $m=\frac{1}{2}$, 亦在弦上,故 $k=-2.$

故弦爲 $y=\frac{1}{2}x-2$ 即 $x-2y-4=0=0.$

4. 在橢圓 $4x^2+y^2=25$ 上之點 $(2,3)$ 作一直徑,復作諸弦平行於此直徑。求平分諸弦之直徑兩端之坐標。

過 $(2,3)$ 之直徑之斜率為 $m=\frac{3}{2}$，故第二直徑為

$$4x+\frac{3}{2}y=0.$$

解此直徑與橢圓：

$$4x^2+\frac{64x^2}{9}=25. \qquad 100x^2=9\times 25.$$

$$x=\pm\frac{3}{2}.$$

故得交點為 $\quad x=\frac{3}{2},\quad y=-\frac{8x}{3}=-4;$

$$x=-\frac{3}{2},\ y=4.$$

5. 在圓錐曲線與一直徑相遇之點處作一切線。證明此切線平行於被此直徑所平分之諸弦：

(a) 橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. 設弦系之斜率為 m，則平分諸弦之直徑為 $b^2x+a^2my=0$.

此直徑與橢圓之交點為 $\left(\pm\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}},\ \mp\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$.

過此二點之切線為

$$\pm\frac{b^2a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}x\mp\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}y=a^2b^2.$$

故其斜率亦為 m，與諸弦平行。

(b) 雙曲線 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$. 弦之斜率為 m，則直徑為

$$b^2x-a^2my=0.$$

與雙曲線之交點為 $\left(\pm\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}},\ \pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}\right)$.

切線為 $\quad \pm\frac{a^2b^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}x\mp\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}y=a^2b^2.$

故其斜率為 m，與諸弦平行。

(c) 拋物線 $y^2=2px$. 設弦之斜率為 m，則直徑為 $my=p$.

與拋物線之交點為 $\quad y=\frac{p}{m},\ x=\frac{p}{2m^2}.$

切線爲 $y=mx+\frac{p}{2m}$.

故與諸弦平行.

6. 證明下之定理:設橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 之兩直徑，其斜率爲 m 與 m' 能適合 $mm'=-\frac{b^2}{a^2}$ 之關係，則各直徑平分平行於他直徑之諸弦，而稱爲共軛直徑 (Conjugate diameter). 圖中 AB 與 CD 爲共軛直徑.

設弦系爲 $y=mx+k$, 則平分諸弦之直徑爲 $b^2x+a^2my=0$.

第二直徑與第一直徑有 $mm'=-\frac{b^2}{a^2}$ 之關係.今 $m=-\frac{b^2}{a^2m}$,則 $m'=m$. 故第二直徑必爲 $y=mx$.

故與第二直徑平行之諸弦卽爲 $y=mx+k$. 故第一直徑平分平行於第二直徑之諸弦.

平行於第一直徑之諸弦爲 $b^2x+a^2my+k=0$, 平分此諸弦之直線爲 $b^2x+a^2\left(-\frac{b^2}{a^2m}\right)y=0$ 卽 $y=mx$, 卽爲第二直徑.

7. 橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上一點 $A(x_0, y_0)$ 爲一直徑之端點證明下列諸定理:

(a) 其共軛直徑 CD 之兩端點爲 $\left(\pm\frac{ay_0}{b}, \pm\frac{bx_0}{a}\right)$.

直徑之一端點爲 (x_0, y_0), 則直徑爲 $y=\frac{y_0}{x_0}x$.

其共軛直徑爲 $b^2x_0x+a^2y_0y=0$.

與橢圓解其交點;以 $y=-\frac{b^2x_0x}{a^2y_0}$ 代入橢圓方程式,

$$b^2x^2+a^2\left(\frac{b^4x_0^2x^2}{a^4y_0^2}\right)=a^2b^2.$$

$$a^2y_0^2x^2+b^2x_0^2x^2=a^4y_0^2.$$

$$x^2=\frac{a^4y_0^2}{a^2y_0^2+b^2x_0^2}=\frac{a^4y_0^2}{a^2b^2}=\frac{a^2y_0^2}{b^2}.\quad x=\pm\frac{ay_0}{b},$$

$$y=\frac{-b^2x_0\left(\pm\frac{ay_0}{b}\right)}{a^2y_0}=\pm\frac{bx_0}{a}.$$

(*b*) 在二共軛直徑 AB 與 CD 之端點作切線，則由此切線所成之平行四邊形，其面積為 $\triangle OAC$ 之八倍而等於 $4ab$.

由 (*a*)，得二共軛直徑之四端點為 $A(x_0, y_0)$，$B(-x_0, -y_0)$，$C\left(\frac{ay_0}{b}, -\frac{bx_0}{a}\right)$ 及 $D\left(-\frac{ay_0}{b}, \frac{bx_0}{a}\right)$.

過此四點之切線為

$$b^2x_0x + a^2y_0y = \pm a^2b^2.$$
$$y_0x - x_0y = \pm ab.$$

解之，得四交點為 $x = \pm(x_0 + a^2y_0)$,　$x = \pm(x_0 - a^2y_0)$；
$y = \pm(y_0 - b^2x_0)$,　$y = \pm(y_0 + b^2x_0)$.

以求三角形之面積法，得四切線所成之平行四邊形之面積為 $4ab$，而 $\triangle AOC$ 則為 $\frac{ab}{2}$.

(*c*) 設 OB 與 OC 為任意兩半共軛直徑之長，則 $\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = a^2 + b^2$.

$$\overline{OB}^2 = x_0^2 + y_0^2, \qquad \overline{OC}^2 = \frac{a^2y_0^2}{b^2} + \frac{b^2x_0^2}{b^2}.$$

$$\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = x_0^2 + \frac{a^2y_0^2}{b^2} + y_0^2 + \frac{b^2x_0^2}{a^2}$$
$$= \frac{a^2b^2}{b^2} + \frac{a^2b^2}{a^2} = a^2 + b^2.$$

8. 過橢圓一焦點作一直徑之垂線而交其共軛直徑之延長線於 P. 求 P 之軌跡.

設兩共軛直徑為 $b^2x + a^2my = 0$ ……………………………(1)
及 $mx - y = 0$ ……………………………(2)
與 (2) 垂直而過焦點之直線為 $x + my = \pm c$ ……………………(3)
自 (1) 與 (3) 消去 m，得其交點之軌跡為

$$m = \frac{-b^2x}{a^2y} = \frac{\pm c - x}{y}.$$
$$(a^2 - b^2)x = \pm a^2c.$$
$$\therefore \quad x = \pm\frac{a^2}{c}.$$

9. 題 6 與題 7 中之橢圓如以雙曲線

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

代之.試述其相當諸定理並證明之.(參閱右圖,其中 AB 與 CD 爲共軛直徑).

設雙曲線之直徑與其共軛雙曲線之直徑之斜率各爲 m 與 m',而 $mm'=\frac{b^2}{a^2}$ 時,則各直徑平分平行於他直徑之諸弦.

雙曲線 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 上一點 $A(x_0, y_0)$ 爲一直徑之端點,則

(a) 其共軛直徑之 CD 兩端點爲 $\left(\pm\frac{ay_0}{b}, \pm\frac{bx_0}{a}\right)$.

(b) 在兩共軛直徑 AB 與 CD 之端點作切線,則由此切線所成之平行四邊形,其面積爲 $\triangle OAC$ 之八倍而等於 $4ab$.

(c) 設 OB 與 OC 爲任意兩半共軛直徑之長,則 $\overline{OB}^2+\overline{OC}^2=a^2+b^2$.

證法與題 6, 題 7 略同。

第十二章 函數,圖形及經驗方程式

原本第 203—208 頁習題

1. 在下表中求 Δx, Δy 與 $\Delta^2 y$. 於是證明 x 與 y 之値確切適合一次關係式 $y=ax+b$, 而求 a 與 b.

(a)

x	1	2	3	4	5
y	-1	2	5	8	11
Δy	3	3	3	3	

故 $a=3$ 代入 $y=ax+b$, 得 $y=3x+b$, 以 x 與 y 之任一組値代入求 b, 得 $b=-4$ 代入,得

$$y=3x-4.$$

(b)

x	1	2	3	4
y	3	1	-1	-3
Δy	-2	-2	-2	

$$a=-2,\quad b=5.$$

故得 $$2x+y-5=0.$$

2. 作一 x 與 y 之數值表使適合一假定之一次關係式.求 Δx, Δy 與 $\Delta^2 y$, y 之變化率爲何?

任設一組數值使 $\Delta y=$ 常數,依上法列式。

3. 在下表中求 Δx, Δy 與 $\Delta^2 y$. 於是證明 x 與 y 之值確切適合 $y=ax^2+bx+c$, 而求 a, b, c.

(a)

x	1	2	3	4	5
y	−3	2	13	30	53
Δy	5	11	17	23	
$\Delta^2 y$	6	6	6		

當 Δx 爲常數時, $\Delta^2 y$ 亦爲常數,故當爲一次式適合於

$$y=ax^2+bx+c \cdots\cdots(1)$$

求 a, b, c, $$\Delta y=2ahx+ah^2+bh \cdots\cdots(2)$$

$$\Delta^2 y=2ah\cdot h \cdots\cdots(3)$$

自 (3), $$2a=6,\quad a=3.$$

自 (2), $$5=6+3+b,\quad b=-4.$$

代入 (1), $$2=12-8+c,\quad c=-2.$$

故得 $$y=3x^2-4x-2.$$

(b)

x	−2	−1	0	1	2
y	13	8	5	4	5

同上法求之,或以三組 x, y 之值代入 $y=ax^2+bx+c$ 中,得三方程式:

$$4a-2b+c=13,$$

$$c=5,$$

$$a+b+c=4.$$

解之,得 $$c=5,\quad a=1,\quad b=-2.$$

因得 $$y=x^2-2x+5.$$

4. 作一 x 與 y 之數值表使適合一所假定如 (2) 式之關係

式.求 Δx, Δy 與 $\Delta^2 y$, Δy^2 在何時爲一常數?

任設一組數值使 $\Delta^2 y=$ 常數.

5. 從下列諸已知値,證明 y 之變化率爲一常數.以一 x 之函數表 y.

(*a*)

x	0	1.4	2	5
y	3.26	4.8	5.46	8.76
Δx	1.4	0.6	3	
Δy	1.54	0.66	3.3	

故 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=$ 常數 $=1.1$, 故 x 與 y 當合於直線式

$$y=ax+b.$$

其中 $a=1.1$, 因得 $b=3.26$.

$$y=1.1x+3.26.$$

(*b*)

x	10	15	25	40
y	72.4	83.4	105.4	138.4
Δx	5	10	15	
Δy	11	22	33	

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=2.2 \text{ 爲一常數.}$$

故得 $$y=2.2x+50.4.$$

6. 求 a, b, c 於拋物線律 $y=ax^2+bx+c$ 中,此律確切適合下表中諸值.

(*a*)

x	0	2	5	10	15
y	6	12	42	148	324

將 x, y 之相當値代入 $y=ax^2+bx+c$ 中,得

$$c=6,\quad 4a+2b+c=12,\quad 25a+5b+c=42.$$

解三式，得 $\qquad c=6,\quad b=\frac{1}{5},\quad a=\frac{7}{5}.$

此三值代入第四，五二組之 (x, y) 值亦相合，故得

$$5y=7x^2+x+30.$$

(b)

x	0	0.5	2	4	5
y	10.2	10.2	13.8	27	37.2

同上題，得 $\qquad a=1.2,\ b=-0.6,\ c=10.2.$

故得 $\qquad 10y=12x^2-6x+102.$

7. 已知 $f(x)=x^2-4x+2$. 求 $f(3), f(0), f(-2)$ 之值。

$$f(x)=x^2-4x+2.$$
$$f(3)=3^2-4\times 3+2=-1.$$
$$f(0)=2.$$
$$f(-2)=14.$$

8. 設 $P_0(x_0, y_0)$ 爲拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 上一定點，而 P 爲任一點，證明弦 PP_0 之斜率爲 x 之一次函數.

P_0, P 均在曲線 $y=ax^2+bx+c$ 上，故其坐標 (x_0, y_0), (x_1, y_1) 均合於此方程式。但此方程式之第二差爲一常數，故依定理 2，y 之諸對應連續值之諸差卽 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$，亦卽 P_0P 之斜率爲 x 之一次函數。

$$y+\Delta y=ax^2+2ax\Delta x+a\Delta^2x+bx+b\Delta x+c.$$
$$y=ax^2+bx+c.$$
$$\Delta y=2ax\Delta x+a\Delta^2x+b\Delta x.$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2ax+b+a\Delta x.$$

(x_0, y_0) 及 (x_1, y_1) 旣爲已知，則 Δx 爲一常數，故斜率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 爲 x 之直線函數。

9. 試將題 8 之定理應用之於題 6.

於題 6 中任取二對相當値代入，如 $(0, 6)$ $(2, 12)$, $\Delta x=2$, 故二

點聯線之斜率爲

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2\cdot\frac{7}{5}\cdot 0+\frac{1}{5}+\frac{7}{5}\cdot 2=3.$$

10. **證方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之實根爲其左邊式之圖形在 x 軸上之截部.**

此式左端之圖形可以 $y=ax^2+bx+c$ 表之,此圖在 x 軸上之截部即爲 $y=0$ 時 x 之值,故卽爲 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根.

原本第 210—211 頁習題

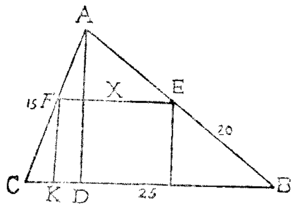
1. **矩形內接於 3 吋半徑之半圓中.以矩形之面積 A 爲其寬 y 之函數,作其圖形.**

矩形之寬爲 y, 則長爲 $2\sqrt{9-y^2}$.

故面積爲 $A=寬\times長=2y\sqrt{9-y^2}$.

設 y 以諸任意値代入,求 A 之相當値,列表作圖,自圖可得 $y=\sqrt{4.5}$ 時, A 爲最大.

2. **已知一直角三角形之兩腰爲 15 與 20. 在其內作矩形使一邊 x 在斜邊上而其相對兩頂點在兩腰上.表面積 A 爲 x 之函數並作其圖形.**



$$\overline{CD}^2+\overline{AD}^2=\overline{15}^2.$$

$$(25-CD)^2+\overline{AD}^2=20^2.$$

解之,得 $CD=9,\quad AD=12.$

$\triangle ABC\sim\triangle AEF$, 故 $x:25=(15-CF):15$ ……………(1)

又 $\triangle CFK\sim\triangle CAD$, 故 $CF:FK=15:12.$

卽 $$CF=\frac{5FK}{4}.$$

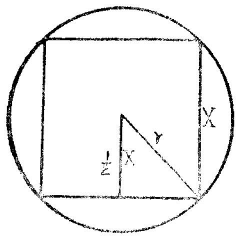
代入 (1)，　$x:25=\left(15-\frac{5FK}{4}\right):15.$

故　$$FK=\frac{300-12x}{25}.$$

面積爲　$$A=x\cdot FK=\frac{300x-12x^2}{25}.$$

作圖，得當 $x=12.5$ 時，$A=75$ 爲最大。

3. 直圓柱體內接於半徑 r 之球內。表其曲面積 S 爲其高 x 之函數，並作其圖形。



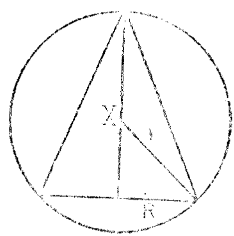
曲面積爲　$$S=2\pi Rx.$$

但　$$R=\sqrt{r^2-\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-x^2}.$$

故　$$S=\pi x\sqrt{4r^2-x^2}.$$

作圖 (r 可假定一數)，得當 $x=\sqrt{2}r$ 時，S 爲最大。

4. 直圓錐體內接於半徑 r 之球內。表其體積 V 爲其高 x 之函數，作圖。



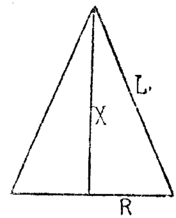
體積爲　$$V=\frac{1}{3}\pi R^2x.$$

但　$$R=\sqrt{r^2-(x-r)^2}.$$

$$\therefore\quad V=\frac{1}{3}\pi x(2rx-x^2).$$

作圖，得當 $x=\frac{4r}{3}$ 時，V 爲最大。

5. 直圓錐體已知其斜高爲 L. 表其全面積 T 爲其高 x 之函數，並作圖。



$$T=\pi R^2+\frac{1}{2}\cdot 2\pi R\cdot L.$$

$$R=\sqrt{L^2-x^2}.$$

$$\therefore\quad T=\pi(L^2-x^2)+\pi L(L^2-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

6.　一錫製之漏斗其形為直圓錐體。設 V 為其一定之體積，表所用錫之總量 T 為其底半徑 x 之函數，而作其圖形。

$$T=\pi x S\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

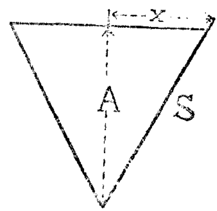
$$V=\frac{1}{3}\pi x^2 a\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

但　$S=\sqrt{x^2+a^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

自 (2),　$a=\frac{3V}{\pi x^2},\qquad a^2=\frac{9V^2}{\pi^2 x^4}.$

代入 (3),　$S=\frac{1}{\pi x^2}\sqrt{\pi^2x^6+9V^2}$

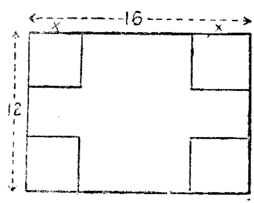
代入 (1),　$T=\frac{1}{x}(\pi^2x^6+9V^2)^{\frac{1}{2}}.$



作圖,得當 $x=\left(\frac{3V}{\sqrt{2}\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ 時 T 為最小。

7.　用 16×12 吋之硬紙一塊，於其四角切去相等之正方形，摺其邊以成一開口之紙匣。表體積 V 為其所切去之正方形之邊 x 之函數，並作圖。

$$V=x(16-2x)(12-2x)$$
$$=4x^3-56x^2+196x.$$



作圖,得當 $x=\frac{7}{3}$ 時，T 為最大。

8.　作自 (0, 5) 至橢圓 $x^2+2y^2=98$ 上任一點 (x, y) 之距離 d 之圖形。

設 (x, y) 為橢圓上任一點，故得

$$d=\sqrt{x^2+(y-5)^2}.$$

但 (x, y) 在橢圓上，故　$x^2=98-2y^2.$

代入，得　$d=\sqrt{123-10y-y^2}.$

作圖，得 $y=-5$ 時，d 爲最大。

9. 過一定點 (3,4) 作一直線。表此線在兩軸間之長爲其 x 軸上截部 x 之函數。

設 x 軸上之截部爲 $(x_1, 0)$，則直線爲

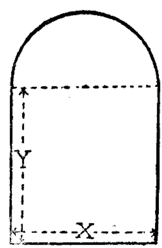
$$\frac{y-4}{x-3}=\frac{4}{3-x_1}.$$

此直線在 y 軸上之截部爲

$$y=\frac{12}{3-x_1}-4.$$

$$d=\frac{x_1}{3-x_1}\sqrt{x_1^2-6x_1+25}.$$

10. 一窗爲一矩形與矩形上一半圓所組成。已知其面積爲 A，試表其週界 P 爲半圓之半徑 x 之函數，並作圖。



$$P=2y+x+\pi x,$$

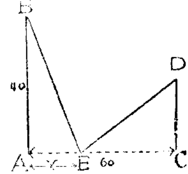
$$A=2xy+\frac{1}{2}\pi x^2.$$

$$\therefore \quad y=\frac{2A-\pi x^2}{4x},$$

$$P=\frac{2A-\pi x^2}{2x}+x+\pi x$$

$$=\frac{2A+2x^2+\pi x^2}{2x}.$$

11. 二竿各高 40 與 20 呎，在一水平街道上相距 60 呎。在二竿間地上同一點繫二支索。表此二索之長爲自一竿至此繫點之距離 x 之函數，並作圖。



$$\overline{BE}^2=\overline{AB}^2+\overline{AE}^2=\overline{40}^2+x^2.$$

$$\overline{DE}^2=\overline{DC}^2+\overline{CE}^2=\overline{20}^2+(60-x)^2.$$

$$L=BE+DE$$

$$=(1600+x^2)^{\frac{1}{2}}+(4000-12x+x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

12. 一木匠有木料 96 平方呎，用以作一底蓋皆爲正方形之匣。表此匣之體積爲其底邊之函數，作圖，並討論之。

設木匣之高爲 a，則全面積爲

$$2x^2+4ax=96.$$

即 $$a=\frac{48-x^2}{2x}.$$

$$\therefore\quad V=ax^2=\frac{48-x^2}{2}x.$$

討論　當 $x=0$ 或 $4\sqrt{3}$ 時，$V=0$ 爲最小，

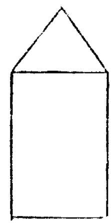
當 $x=4$ 時，$V=64$ cu. ft. 爲最大.

13.　一窗之形爲一矩形與其上一等邊三角形所組成．已知此窗之面積爲 A，試表其窗架之長爲其寬之函數．

設矩形之高爲 y，則窗之面積爲

$$A=xy+\frac{x^2}{4}\sqrt{3},$$

$$y=\frac{A}{x}-\frac{x\sqrt{3}}{4}.$$



從 $F=4x+2y=4x+\dfrac{2A}{x}-\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$，得

$$x=\frac{2}{8-\sqrt{3}}\sqrt{A(8-\sqrt{3})}$$ 時，F 爲最小．

14.　已知一金屬線之長爲 L．設將其切成二段，一段折成一正方形，而他段折成一圓，表兩形之總面積爲其圓之半徑之函數，並作其圖形．

設圓之半徑爲 x，則周長爲 $2\pi x$，正方形之周界爲 $L-2\pi x$，每邊爲 $\dfrac{L-2\pi x}{4}$，故總面積爲

$$A=\pi x^2+\frac{(L-2\pi x)^2}{16}.$$

當 $x=\dfrac{L}{8+2\pi}$ 時，$A=\dfrac{L}{4(4+\pi)}$ 爲最小．

15.　以正六邊形爲底之直角柱之體積爲 16 立方吋．表其表面之總面積爲一底邊之函數並作圖．

設 x 爲一底之一邊，則底面積爲 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x^2$.

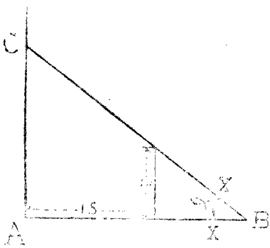
$$V=\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2\cdot h=16.$$

故 $$h=\frac{32}{3\sqrt{3}x^2}.$$

全面積 $$T=2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2+6\cdot\frac{32}{3\sqrt{3}x^2}\cdot x$$
$$=3\sqrt{3}x^2+\frac{64}{3}\sqrt{3}\frac{1}{x}.$$

當 $x=\dfrac{4}{\sqrt[3]{18}}$ 時，T 為最小。

16. 距一正方形屋 15 呎之四週圍一高 10 呎之牆.牆外一梯靠於牆上適達此屋. 試表梯長為梯足與牆間之距離之函數或為梯與地平線所成之傾角之函數,作圖並討論之.



$$x:10=(x+15):AC.$$
$$AC=\frac{10x+150}{x}.$$
$$\therefore\quad BC=\left[\frac{(10x+150)^2}{x^2}+(x+15)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{x}(x^4+30x^3+325x^2+300x+22500)^{\frac{1}{2}}.$$

17. 欲造一圓柱形之汽鍋其容量為 1200 立方呎.其用於兩底之材料每方呎之價為 $\$\ 3.50$, 而其曲面每方呎之價為 $\$\ 2.50$. 表其總價為汽鍋長之函數,作圖並討論之.

設 x 為汽鍋之長，y 為圓底之半徑，則

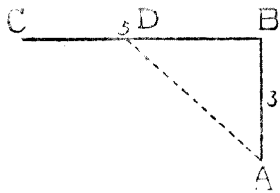
$$V=x\cdot\pi\, y^2=1200,\quad y=\left(\frac{1200}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

故總價 $=2.50\cdot 2\pi yx+3.50\cdot 2\pi y^2$

$$=5\cdot\pi x\left(\frac{1200}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}+7\pi\left(\frac{1200}{\pi x}\right)$$

$$=100\sqrt{3\pi x}+\frac{8400}{x}.$$

18. 一人在舟中，此舟離一直線海岸之最近點爲 3 哩，欲至一離此點 5 哩之屋．此人每小時能行 4 哩，能划行 $3\frac{1}{2}$ 哩．試表此人至屋所需之時間爲其登陸處至此屋之距離之函數．



設舟在 A 點，BC 爲直線海岸，C 爲屋，D 爲登陸之處，則時間 T 爲

$$T=\frac{AD}{3.5}+\frac{DC}{4}=\frac{\sqrt{(5-x)^2+3^2}}{3.5}+\frac{x^2}{4}$$

$$=\frac{8(44-10x+x^2)^{\frac{1}{2}}-7x^2}{28}.$$

原本第 216—217 頁習題

1. 用平均法，求一直線定律以適合下列各羣已知值．計算其剩餘．(參閱第 104 節之定理)．

(a)

x	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	0.31	0.82	1.29	1.85	2.51	3.02

設直線方程式爲 $y=ax+b.$

以 x, y 之值代入分爲二組，

$$\begin{array}{rlrl} 0.5a+b=0.31 & & 2a+b=1.85 \\ a+b=0.82 & & 2.5a+b=2.51 \\ 1.5a+b=1.29 & & 3a+b=3.02 \\ \hline 3a+3b=2.42 & & 7.5a+3b=7.38 \end{array}$$

相加，得 $3a+3b=2.42$　　$7.5a+3b=7.38$

解之,得 $a=1.10,\quad b=-0.29.$

故得 $y=1.10x-0.29.$

以 x 之值代入所得式中,計算 y 與題中 y, 並列表計其相差.

x	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	0.31	0.82	1.29	1.85	2.51	3.02
計算所得 y	0.26	0.81	1.36	1.91	2.46	3.01
相差	0.05	0.01	-0.07	-0.06	0.05	0.01

以下諸題均用同法計算其式, 總之, 先將 x, y 之相當值代入 $y=ax+b$ 中,得數方程式分之為最近相等之份相加,得二聯立二元一次方程式解之,以求 a, b, 乃將 a, b 代入原式,即得一方程式,更以 x 之值代入此方程式,計算 y 之相當值與原有 y 值比較之,其各個相差之總和須為零,茲將所得之式列下:

(b)

x	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
y	2.1	6.8	12.0	17.2	21.8	27.1

$$y=9.6x-2.3.$$

(c)

x	0.9	3.0	5.2	7.0	8.8	10.7
y	5.6	4.4	3.3	2.6	1.6	0.7

$$y=-0.48x+2.97.$$

(d)

x	0	2.2	4.0	5.8	7.9	10.0
y	3.8	8.2	12.1	15.7	19.8	24.0

$$y=2.02x-3.90.$$

(e)

x	10	20	30	40	50
y	0.75	1.15	1.74	2.18	2.67

$$y=0.048x+0.25.$$

2. 在題 1 中檢驗 Δy 與 Δx 之比值, 因以證實直線定律之用;

(a)

x	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	0.31	0.82	1.29	1.85	2.51	3.02
Δx	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	
Δy	0.51	0.47	0.56	0.66	0.51	

$\Delta y/\Delta x$ 近於一常數,故爲直線。

Δy 之平均值爲 0.542, $\Delta y/\Delta x$ 爲 1.084.

(b)—(e) 同上。

3. 作由下列諸值所決定諸點,而求一直線定律 $V=mt+b$ 以適合之.

在壓力一定,溫度 (t°C.) 遞更之情形下,量得某定量氣體之體積 (V 立方公分)之結果如下表(參閱下頁頁端之評註):

t	20	30	40	50	60	70
V	106.5	110.9	114	117.2	121.2	124.7

$$\begin{array}{ll} 20m+\ b=106.5 & 50m+\ b=117.2 \\ 30m+\ b=110.9 & 60m+\ b=121.2 \\ 40m+\ b=114 & 70m+\ b=124.7 \\ \hline 90m+3b=331.4 & 180m+3b=363.1 \end{array}$$

解之,得 $m=0.352,\quad b=99.9.$

故得直線 $V=0.352t+99.9.$

4. 用平均法求下列各題之直線律。計算其剩餘。作諸點與所求得之直線.

方法與題 1 同,惟求得直線方程式,須作出直線並驗諸點與直線之位置. 茲列所得方程式於下:

(a) S 爲在 t°C. 時溶於 100 克水所溴化鉀之重量。

t	0	20	40	60	80
S	53.4	64.6	74.6	84.7	93.5

$$S=0.4[illegible]t+5[illegible].24.$$

(b)

x	30	25	20	15	10	5
y	1	4	7.4	10.4	13.4	16.7

$$y=-0.624x+19.74.$$

(c) 弧光發電機之速度與感應伏數,二者之對應值求得爲

每分鐘旋轉次數, R	200	320	495	621	744
感應伏數, V	165	270	410	525	625

$$V=0.852R-6.7.$$

(d) 在 t°C. 時,一金屬線之抵抗 R 歐量得如下:

t	0	5	10	15	20	25
R	25.00	25.49	25.98	26.48	26.99	27.51

$$R=0.13t+24.42.$$

原本第220—221頁習題

1. 下列諸值近似適合一乘冪定律 $y=ax^n$. 用平均法求 a 與 n 而計算其剩餘:

(a)

x	1	2	3	4	5	6
y	9.2	6.1	4.7	3.9	3.5	3.2

$$y=ax^n \cdots\cdots(1)$$

即 $$\log y=\log a+n\log x\cdots\cdots(2)$$

設 $y'=\log y$, $x'=\log x$, $a'=\log a$, 列表如下:

$x'=\log x$	0	0.3010	0.4771	0.6021	0.6990	0.7782
$y'=\log y$	0.9638	0.7853	0.6721	0.5911	0.5441	0.5051

代入 (2),

$$\begin{aligned}a'&=0.9638 & 0.6021n+a'&=0.5911\\ 0.3010n+a'&=0.7853 & 0.6990n+a'&=0.5441\\ 0.4771n+a'&=0.6721 & 0.7782n+a'&=0.5051\end{aligned}$$

相加, $0.7781n+3a'=2.4212$ $\qquad 2.0793n+3a'=1.6403$

解之,得 $n=-0.6$, $a'=0.9626$.

故得 $$y'=-0.6x'+0.9626\cdots\cdots(3)$$

$$a=\text{antilog}\,0.9626=9.17.$$

故得 $$y=9.17x^{-0.6}\cdots\cdots(4)$$

自 (4), 以 x 之值代入，計算 y 之值與 y 之原值比較之.

y	9.2	6.1	4.7	3.9	3.5	3.2
y 計算所得	9.18	6.05	4.75	3.99	3.57	3.13
差	0.02	0.05	−0.05	−0.09	−0.07	0.07

自 (3), 以 x' 之值代入，計算 y' 之值與 y' 之原值比較之.

x'	0	0.3010	0.4771	0.6021	0.6990	0.7782
y'	0.9638	0.7853	0.6721	0.5911	0.5441	0.5051
y' 計值	0.9626	0.7820	0.6763	0.6031	0.5432	0.4957
差	0.0012	0.0033	−0.0042	−0.0120	0.0009	0.0094

以下諸題同此，以 x 與 y 合於 $y=ax^n$，先取 x 與 y 之對數 x' 與 y'，則 x' 與 y' 合於直線式 $y'=\log a+nx'$，以 x' 與 y' 之值代入，依第 216 頁題 1 解之，可得 $\log a$ 與 n，因得 a，因得一乘冪定律之方程式，更將 x' 之值代對數式，求 y' 與原有 y' 相較，其對 y' 之總和亦當等於 0 或近於 0 (因計算時有小數點).

(b)

x	5	10	15	20	25	30
y	2.56	3.23	3.70	4.07	4.39	4.66

$$y'=0.42x'+0.1013,$$
$$y=1.29x^{0.41}.$$

(c)

x	4	4.5	5	5.5	6	7
y	110	97.1	86.8	78.4	71.5	60.7

$$y'=-1.063x'+2.6812,$$
$$y=48x^{-1.063}.$$

2. 下表之值爲輸送 H 馬力所需每分鐘轉動 70 次之熟鐵軸之直徑 D. 求 $D=mH^n$ 形之定律.

$$D=mH^n \cdots\cdots(1)$$

$$\log D=\log m+n\log H \cdots\cdots(2)$$

H	10	20	30	40	50	60	70	80
D	2.11	2.67	3.04	3.36	3.61	3.82	4.02	4.22
$H'=\log H$	1	1.3010	1.4771	1.6021	1.6990	1.7782	1.8451	1.9031
$D'=\log D$	0.3243	0.4265	0.4829	0.5263	0.5575	0.5821	0.6042	0.6253

以 D' 與 H' 之值代入第二式，分為二組相加，得

$$5.6021n+4m'=1.5263,$$
$$7.2254n+4m'=2.3691.$$

解之，得 $\quad n=0.33,\quad m'=-0.0039,$

$$m=\text{antilog } m'=0.991.$$

代入 (1)，得 $\quad D=0.991H^{0.33}.$

3. 下表之值為兩磁極相距 d 公分所生之力 F 達因。求 $F=md^n$ 形之定律。

d	1.2	1.9	2.3	3.2	4.5
F	4.44	1.77	1.21	0.63	0.32
$d'=\log d$	0.0792	0.2788	0.3617	0.5051	0.6532
$F'=\log F$	0.6474	0.2480	0.0828	−0.2007	−0.4919

代入 $\log F=\log m+n\log d$，得五式，分為二組相加，得

$$0.7197n+3m'=0.9782,$$
$$1.1583n+2m'=-0.6956.$$

解之，得 $\quad n=-1.99,\ m'=0.8047,\ m=6.38.$

故得 $\quad F=6.38d^{-1.99}.$

4. 下表之值為在每平方吋 p 磅壓力下之飽和蒸氣之體積 (u 立方呎)。求 $pu^n=$ 一常數形之定律。

u	26.43	22.40	19.38	16.32	14.04
p	14.70	17.53	20.80	21.54	28.83
$u'=\log u$	1.4221	1.3503	1.2866	1.2127	1.1474
$p'=\log p$	1.1673	1.2438	1.3181	1.3809	1.4598

代入 $\log p+n\log u=k'$，得五式，分爲二組相加，得

$$3.7292+4.0529n=3k',$$
$$2.8497+2.3601n=2k'.$$

解之，得 $n=1.063,\quad k'=2.679,$

$$k=\text{antilog } k=477.8.$$

故得 $$pu^{1.063}=477.8.$$

5. 下表所示之馬力 I，用以駛行一每小時行 10 浬，排水量爲 D 噸之輪船。求 $I=mD^n$ 形之定律。

D	1720	2300	3200	4100
I	655	783	1000	1164

依同法，得 $$I=4.194D^{0.677}.$$

原本第 223—224 頁習題

1. 從下述已知値，求 $y=be^{ax}$ 形之定律，並計算其剩餘：

(a)

x	0	34.5	10.85	19.30	28.8	40.1	53.75
y	19.9	18.9	16.9	14.9	12.9	10.9	8.9

$$y=be^{ax} \qquad\qquad (1)$$

$$\log y=\log b+ax\log e.$$

使 $y'=\log y$，$b'=\log b$，$a\log e=a'$，得

$$y'=b'+a'x \qquad\qquad (2)$$

x	0	34.5	10.85	19.30	28.8	40.1	53.75
y	19.9	18.9	16.9	14.9	12.9	10.9	8.9
$y'=\log y$	1.1989	1.2765	1.2279	1.1732	1.1106	1.0374	0.9494

以 x 與 y' 之値代入 (2)，得七方程式，分爲兩組相加，得兩方程式：

$$14.3a'+\ \ b'=3.8033,$$
$$141.95a'+4b'=4.2706.$$

解之，得 $a'=-0.00652,\quad b'=1.2989.$

但　$a' = a \log e$,　故　$a = \dfrac{a'}{\log e} = a' \times 2.303 = -0.015$,

$$b = \operatorname{antilog} b = 1.99.$$

故得
$$y = 19.9e^{-0.015x} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$
$$y' = \log y = 1.2989^{-0.00652x} \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

以 x 之值代入 (4), 計 y' 並與 y' 之觀察值比較其差.

y' (計值)	19.9	18.9	16.9	14.9	12.91	10.9	8.88
差	0	0	0	0	-0.01	0	0.02

(b)

x	10	20	30	40	50	60
y	64.72	58.03	52	48.54	41.75	37.33

依同法,得兩方程式爲
$$60a' + 3b' = 5.2907,$$
$$150a' + 3b' = 4.8789.$$

解之,得　$a' = -0.0046$,　$b' = 1.8551$,
$$a = 2.302a' = -0.0106,$$
$$b = \operatorname{antilog} b' = 7.163.$$

故得
$$y = 7.163e^{-0.0106x}.$$

(c)

x	-2.4	-1.2	0	2	4	6
y	1.6	2.8	5.1	14	37.5	102

依同法,得兩方程式爲
$$-3.6a' + 3b' = 1.3589,$$
$$12a' + 3b' = 4.7269.$$

解之,得　$a' = 0.2159$,　$b' = 0.712$.

直線式爲
$$y' = 0.2159x + 0.712.$$
$$a = 2.303a = 0.497, \quad b = 5.152.$$

故得
$$y = 5.152e^{0.497x}$$

2.　從下述已知值,可得定律 $y = \dfrac{ax+b}{x}$ 用平均法求 a 與 b,並計算其剩餘:

(a)

x	3	5	7	9	12
y	4.85	2.95	2.10	1.50	1.15
xy	14.45	14.75	14.70	14.50	14.30

以 xy 與 x 之值代入，得七方程式：

$$\begin{aligned} &3a+b=14.45, &&12a+\ b=14.30,\\ &5a+b=14.75, &&15a+3b=43.90,\\ &7a+b=14.70, &&21a+2b=28.80.\\ &9a+b=145.0, && \end{aligned}$$

解之，得　　$a=-0.0424,\quad b=14.84.$

故得　　$y=\dfrac{-0.0424x+14.84}{x}.$

以 x 之值代入，計算 y 及差。

y 計值	4.904	2.926	2.078	1.606	1.194
	−0.054	0.024	0.022	−0.106	−0.044

(b)

x	1.96	2.45	2.97	3.45	3.96	4.97
y	50.25	48.7	47.9	47.5	46.8	45.7
xy	49.74	119.8	142.26	163.88	185.32	227.13

以 xy 及 x 之值代入 $xy=ax+b$，得六方程式，分爲兩組相加，得兩方程式：

$$7.39a+3b=360.55,$$
$$12.38a+3b=576.34.$$

解之，得　　$a=43.2,\quad b=13.8.$

故　　$y=\dfrac{43.2x+13.8}{x}.$

(c)

x	1.5	2	2.5	3	3.5	4
y	3.08	3.12	3.14	3.15	3.162	3.164

同樣，得　　$y=\dfrac{3.223x-0.21}{x}.$

3. 從下述已知值，求 $y=\dfrac{x}{ax+b}$ 形之定律，並計算其剩餘：

(a)

x	5	10	15	20	30
y	5.0	6.8	7.4	8.0	8.7
x/y	1	1.47	2.03	2.5	3.45

代入，得

$$\begin{aligned} 5a+\ b&=1 & 20a+\ b&=2.5\\ 10a+\ b&=1.47 & 30a+\ b&=3.45\\ 15a+\ b&=2.03 & & \end{aligned}$$

相加，得

$$30a+3b=4.50 \qquad 50a+2b=5.95$$

解之，得

$$a=0.1,\qquad b=0.515.$$

故得

$$y=\frac{x}{0.x+0.515}.$$

(b)

x	10	20	30	40	50	60	70	80
y	12.8	17.1	20	22.2	23.1	23.8	23.8	24.2

同樣，得

$$y=\frac{x}{0.0355x+0.4257}.$$

(c)

x	8	15	30	60	80	100
y	13.0	15.4	17.2	18.5	18.9	19.2

同樣，得

$$y=\frac{x}{0.05x+0.228}.$$

4. 下表所載之 h 爲高度之呎數，p 爲氣壓計上之吋數．求 $p=be^{ah}$ 形之定律。

h	0	886	2753	4763	6942	10593
p	30	29	27	25	23	20
$p'=\log p$	1.4471	1.4624	1.4314	1.3979	1.3617	1.3010

$$p=be^{ah},\quad \log p=\log b+ah\log e,$$

$$p'=b'+a'h.$$

以 h 與 p' 之値代入，得六方程式，分爲二組相加，得

$$4.3709=3639a'+3b',$$

$$4.0603=21298a'+3b'.$$

解之，得 $\quad a'=-0.0001663,\quad b'=1.4771;$

$$a=2.303a'=-0.000383,\quad b=30.$$

故定律爲 $\quad p=30e^{-0.000383h}.$

5. 從下述已知値，求 $y=b+\dfrac{a}{x^2}$ 形之定律並求其剩餘。

x	2	3	4	5
y	40	17	7	3
$V={}^1/x^2$	0.25	0.1111	0.0625	0.04
y 計値	41.123	15.88	7.059	2.956
差	−1.123	1.12	−0.059	0.044

$$y=b+\frac{a}{x^2}.\quad 設\quad V=\frac{1}{x^2}.\quad 則\quad y=b+aV.$$

以 V 與 y 之値代入，得四方程式，分爲兩組相加，得

$$0.3611a+2b=57,$$

$$0.1025a+3b=10.$$

解之，得 $\quad a=181.748,\quad b=-4.314.$

因得定律 $\quad y=-4.314+\dfrac{181.748}{x^2}.$

以定律由 x 計算 y，並計其差，見上表。

6. 從下述已知値，求 $y=a\sqrt{x}+b$ 形之定律，並計算其剩餘。

x	3	6	9	12	16	20
y	6.2	8.8	11.3	13.2	15.3	17.0
$\sqrt{x}$	1.7321	2.4495	3.0000	3.4641	4.0000	4.4721
y 計値	6	8.92	11.18	13.07	15.25	17.15
差	0.2	−0.12	−0.08	0.13	0.05	−0.15

以 $\sqrt{x}$ 與 y 之值代入，得六方程式，分爲兩組相加，得

$$7.1816a+3b=26.1,$$
$$11.9362a+3b=45.5.$$

解之，得 $a=4.08,\quad b=-1.067.$

故得定律 $y=4.08\sqrt{x}-1.067.$

原本第228—229頁習題

1. 從已知値求 $y=a+bx^2$ 之定律。計算其剩餘。作諸點與所得之拋物線：

(a)

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5
y	1.0	4.1	8.5	14.1	21.0	29.1
x^2	1	2.25	4	6.25	9	12.25
y 計値	1	4.1	8.5	14.1	21	29.1
差	0	0	0	0	0	0

$$y=a+bx^2.$$

計算 x^2 列如上表中第三行，乃以 x^2 及 y 之相當値代入式中，得六方程式，分爲兩組相加，得二方程式：

$$9.25b+3a=13.6,$$
$$27.75b+3a=64.2.$$

解之，得 $a=-1.5,\quad b=2.5.$

故得 $y=2.5x^2-1.5.$

依式以 x^2 計算 y 之値得表中第四行與 y 比較之爲第五行差。

(b)

x	2	6	10	14	18	22
y	84	177	370	661	1040	1525
x^2	4	36	100	196	324	484

同法，得兩方程式爲

$$140b+3a=631,$$
$$1004b+3a=3226.$$

解之，得 $b=3,\quad a=70.8.$

故定律爲 $y=3x^2+70.8.$

(c)

x	10	20	30	40	50
y	7	9.1	1.45	20	29
x^2	100	400	900	1600	2500

依同法，得二方程式：

$$1400b+3a=30.6,$$
$$4100b+2a=49.$$

解之，得 $\quad a=6.02,\quad b=0.009.$

故得 $\quad y=0.009x^2+6.02.$

2. 求一抛物線定律 $y=ax^2+bx+c$ 大致適合於下值。用第108節第二例題之法，計算其剩除：

(a)

x	0	20	40	60	89	100	
y	8290	8253	8215	8176	8136	8094	
x^2	0	400	1600	3600	6400	10000	22000
Δy	-37	-38	-39	-40	-42		

$$\Delta y=2ahx+ah^2+bh.$$

設 $a'=2ah,\ b'=ah^2+bh,$ 則 $\quad \Delta y=a'x+b'.$

計算 Δy 與 x 同代入此式中，得五式，分爲兩組相加，得

$$\begin{array}{rl|rl} & b'=-37 & 60a'+b' & =-40 \\ 20a'+ & b'=-38 & 80a'+b' & =-42 \\ 40a'+ & b'=-39 & & \\ \hline 60a'+3b' & =-114 & 140a'+2b' & =-82 \end{array}$$

解之，得 $\quad a'=-0.06,\quad b'=-36.8.$

但 $\quad a'=2ah,\quad h=20.$

$$\therefore\quad a=\frac{a'}{2h}=-\frac{0.06}{40}=-0.0015;$$

$$b'=ah^2+bh,\quad b=-1.81.$$

以 a 及 b 之值代入五式總和之方程式：

$$22000a+300b+6c=49064.$$

$$\therefore\quad c=8274.$$

故得 $\quad y=-0.0015x^2-1.81x+8274.$

(b)

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	10.5
y	5.4	6.3	6.6	6.1	5.0	3.2	0.6	33.2
x^2	0	0.25	1	2.25	4	6.25	9	22.75
Δy	0.9	0.3	−0.5	−1.1	−1.8	−2.6		

依上題方法，得六方程式，分爲兩組相加，得

$$1.5a'+3b'=0.7, \quad 6a'+3b'=-5.5.$$

解之，得 $a'=-1.378, \quad b'=0.92.$

$$a=\frac{a'}{2h}=-1.378, \quad b=2.53.$$

代入總和所列方程式，

$$22.75a+10.5b+7c=33.2.$$

$$\therefore \quad c=5.44.$$

故得 $y=-1.378x^2+2.53x+5.44.$

(c)

x	0	20	40	60	80	100
y	290	253	215	176	136	94

依同法，得 $y=-0.0015x^2-1.81x+290.$

3. 考查 $\Delta^2 y$ 之值以證實題 2 所用之拋物線定律：

(a) $\Delta^2 y=-1, \ -1, \ -1, \ -2.$

(b) $\Delta^2 y=-0.6, \ -0.8, \ -0.6, \ -0.7, \ -0.8.$

(c) $\Delta^2 y=-1, \ -1, \ -1, \ -2.$

當 Δx 爲常數時，$\Delta^2 y$ 亦近於一常數，卽 Δy 與 Δx 合於一直線方程式，故 y 與 x 合於一拋物線定律。

4. 用平均法（第 109 節）解題 2 (b).

將題 2 (b) 中 x, x^2 與 y 之值代入 $y=ax^2+bx+c$ 中，得六方程式，分爲三組相加，得三方程式：

$$1.25a+1.5b+3c=18.3,$$

$$6.25a+3.5b+2c=11.1,$$

$$15.25a+5.5b+2c=3.8.$$

解之，得 $a=-1.376, \quad b=2.542, \quad c=5.4.$

因得 $y=-1.376x^2+2.542x+5.4.$

5.　V＝火車每小時速度之哩數，R＝火車每噸抵抗之磅數.

V	20	40	60	80	100	120
R	5.5	9.1	14.9	22.8	33.3	46.0

證明諸值大致適合 $R=aV^2+bV+c$. 作諸點及代表此定律之拋物線.

此表中 $\Delta V=20,\ 20,\ 20,\ 20,\ 20$ 爲常數.

$\Delta R=3.6,\ 5.8,\ 8.0,\ 10.4\ \ 12.7.$

$\Delta^2 R=2.2,\ 2.2,\ 2.4,\ 2.3$ 亦近於常數.

故適合於拋物線方程式.

將 V, V^2 及 R 之值代入 $R=aV^2+bV+c$ 中，分爲三組相加，得三方程式:

$$2000a+60b+2c=14.6,$$
$$10000a+140b+2c=37.7,$$
$$24400a+220b+2c=79.3.$$

解之,得　$a=0.00289,\quad b=0.0003125,\quad c=4.45.$

故得　　$R=0.00289V^2+0.0003125V+4.45.$

原本第232頁習題

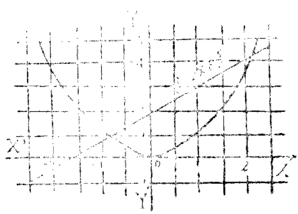
1.　圖解下列二次方程式,以代數解法驗算之:

(a)　$2x^2-4x-5=0.$

$$x^2=2x+\frac{5}{2}.$$

設　$y=x^2,$　則　$y=2x+\frac{5}{2}.$

作 $y=x^2$ 及 $y=2x+\frac{5}{2}$ 於同一坐標軸，則其交點爲合於兩



式之 (x, y) 值，其橫坐標即為合於 $2x^2-4x-5=0$ 之兩根。

自圖，得其交點為　2.9　及　-0.9.

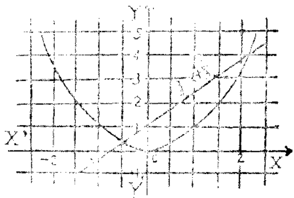
代數解法，得　$x=2.87$　及　-0.87.

(b)　$2x^2-3x-2=0$.

$$x^2=x+\frac{2}{3}.$$

$$y=x^2,\quad y=x+\frac{2}{3}.$$

依法作圖。



圖中交點之橫坐標為　1.5　及　-0.5.

代數解法，得其根為　1.46　及　-0.46.

(c)　$x^2+11x+30=0$.

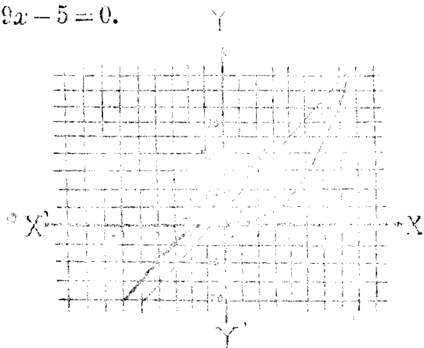
$$x=-5\quad 及\quad -6.$$

(d)　$3x^2+4x+6=0$.

兩線不相交，以代數解之，$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{-14}}{3}$ 為虛根。

2.　圖解下列三次方程式。用補閒法驗算之。並注意，從大代數，如無 x^2 項，則諸根之和為零：

(a)　$x^3-9x-5=0$.



設　$y=x^3$，則　$y=9x+5$.

作兩曲線之圖，得其交點之橫坐標爲 -2.67，-0.58 及 3.25；三根之和爲 0.

(b)　$x^3-6x-12=0$.

依同法，得交點爲 3.135.

(c)　$x^3-5x+2=0$.

交點爲 $x=2$，0.414，-2.414.

(d)　$x^3+2x-5=0$.

一交點爲 1.328.

(e)　$x^3-5x+1=0$.

交點爲 -2.33，0.20，2.13.

(f)　$x^3+8x-7=0$.

交點爲 $x=0.808$.

3.　證明下述命辭：將 $x=x_1-\frac{1}{3}a$ 代入方程式 (6)，則可化爲 $x_1^3+px_1+q_1=0$. 用此結果解下列方程式：

$$x^3+ax^2+bx+c=0.$$

以 $x=x_1-\dfrac{1}{3}a$ 代入，得

$$\left(x_1-\frac{1}{3}a\right)^3+a\left(x_1-\frac{1}{3}a\right)^2+b\left(x_1-\frac{1}{3}a\right)+c=0.$$

展開，　$x_1^3-ax_1^2+\dfrac{1}{3}ax_1-\dfrac{1}{27}a^3+ax_1^2-\dfrac{2}{3}a^2x_1+\dfrac{1}{9}a^3$

$$+bx_1-\frac{1}{3}ab+c=0.$$

即　$$x_1^3+\left(-\frac{2}{3}a^2+b\right)x_1+\left(\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c\right)=0.$$

故可消去 x^2 之項而化成 $x_1^3+px+q=0$ 之形.

(a)　$x^3-6x^2+3x+5=0$.

依法，將 $x=x_1+2$ 代入，可得

$$x_1^3-9x_1-11=0.$$

同題 2. 作 $y=x_1^3$ 及 $y=9x_1+11$，得其交點爲

$$x_1=-2.67,\quad -0.58\ 及\ 3.25.$$

但 $x=x_1+2$，故得　$x=-0.67$，1.42 及 5.25.

(b) $x^3-3x^2-2x+5=0$.

以 $x=x_1+1$ 代入，得

$$x_1^3-5x_1+1=0.$$

作 $y=x_1^3$ 及 $y=5y_1-1$，得其交點為

$$x_1=-2.32,\ 0.2 \quad 及 \quad 2.12.$$

代入 $x=x_1+1$，得

$$x=-1.32,\ 1.2 \quad 及 \quad 3.12.$$

4. 一圓柱形炮彈，一端為半球形，其體積為 700 立方吋。圓柱部之長為 24 吋。求其直徑。

設半徑為 x，則圓柱形之體積為 $24\pi x^2$，半球形部之體積為 $\frac{2}{3}\pi x^3$，因得

$$\frac{2}{3}\pi x^3+2\pi x^2=700.$$

設 π 為 $\frac{22}{7}$，則得

$$x^3+3x^2=334.09.$$

以 $x=x_1-1$ 代入，得

$$x^3-3x_1=332.09.$$

依上法，設 $y=x_1^3$，$y=3x_1+332.09$，作圖得其交點為 $x_1=3.93$，故 $x=2.93$，直徑為 5.86.

5. 單底球盤 (Spherical segment of one base) 之體積 V，其高為 h，則 $V=\pi(rh^2-\frac{1}{3}h^3)$，其中 $r=$ 球之半徑。設 $r=2$ 呎，$V=20$ 立方呎，求 h.

$$V=\pi\left(rh^2-\frac{1}{3}h^3\right),\ r=2,\ V=20,\ \pi=\frac{22}{7}.$$

代入，得 $$h^3-6h^2+19.09=0.$$

以 $h=h_1+2$ 代入，得

$$h_1^3-12h_1+3.09=0.$$

如法作圖 $y=h_1^3$ 及 $y=12h_1-3.09$，得其交點為

$$h_1=0.415,\quad 3.237 \quad 及 \quad -3.652.$$

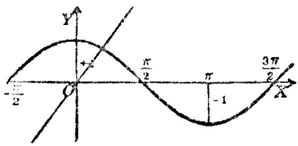
故 $$h=2.415 \quad 或 \quad 5.237.$$

原 本 第 234 頁 習 題

用圖解法決定下列各題解答之數而求其最小根.(異於零者).

1. $\cos x = x.$

作 $y=\cos x$, $y=x$ 兩直線,其交點即 y 相等 x 之值,即為 $\cos x = x$ 之根.



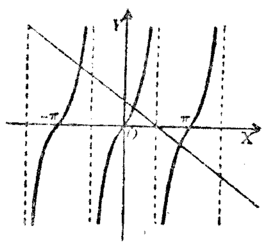
圖中交點 $x=0.74.$

2. $\sin 2x = x.$

以 $y=\sin 2x$ 及 $y=x$ 作圖,得三交點,最小解答為 $x=0.95.$

3. $\tan x + x - 1 = 0.$

設 $y=\tan x$, 則亦得 $y=1-x$, 作圖可得無限交點, 最小解答為 $x=0.48.$



4. $3\sin x - x = 0.$

設 $y=\sin x$, 則亦得 $y=\frac{x}{3}$, 仍於 $y=\sin x$ 之圖上作 $y=\frac{x}{y}$ 直線,得其交點為 0 及近於 ± 2.2, 乃取 x 近於 2.2 之值與 $\sin x$ 及 $3\sin x - x$ 列表:

x	$\sin x$	$\sin 3x - x$
2.269(130°)	0.7660	0.029
$2.269+z$	(根)	0
2.2864(131°)	0.7549	-0.0223
0.0174		**0.0513**

$$z=\frac{0.029}{0.0513}\times 0.0174=0.00984.$$

故最小根爲 $\pm(2.269+0.00984)=\pm 2.27884.$

5. $\cot x-1+x^2=0.$

設 $y=\cot x,\quad y=1-x^2.$

以同一單位作一餘切曲線及一拋物線，應有多根，其最小一根近於 -1.2.

x	$\cot x$	x^2-1	$\cot x+x^2-1$
$-1.0472(60^\circ)$	-0.57735	0.0966	-0.48075
$-1.0472-z$	(根)		0
$-1.2217(70^\circ)$	-0.3640	0.4925	0.0285
-0.1745			0.50925

$$z=\frac{0.40075}{0.50925}\times(-0.1745)=-0.1373$$

故 $x=-1.0472-0.1373=-1.1845.$

6. $e^x+x-2=0.$

設 $y=e^x,\quad y=2-x.$

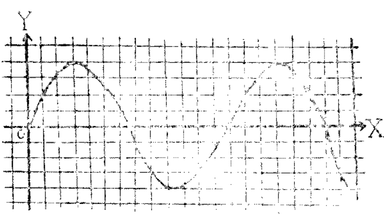
作二曲線，得其交點近於 0.44.

同法，得 $x=0.4429.$

7. $\sin x-\log_{10}x=0.$

設 $y=\sin x,\quad y=\log_{10}x.$

作二曲線，得其交點三，最小之一近於 2.7.



x	$\sin x$	$\log_{10}x$	$\sin x-\log_{10}x$
$2.6355(150^\circ)$	0.48481	0.42078	0.6403
$2.6355+z$	(根)		0
$2.7053(155^\circ)$	0.40674	0.43217	-0.2593
0.9798			0.8996

$$z=\frac{0.6403}{0.8996}\times 0.0798=0.0568.$$

$$\therefore\quad x=2.6355+0.0568=2.6923.$$

8. $\cos x-\log_{10}(x+1)=0.$

設 $y=\cos x,\quad y=\log_{10}(x+1).$

作二曲線，求其交點有三，最小一根近於 1.2.

x	$\cos x$	$\log_{10}(x+1)$	$\cos x-\log_{10}(x+1)$
1.2217(70°)	0.34202	0.34668	-0.00466
$1.2217-z$	(根)		0
1.2043(69°)	0.35837	0.34327	0.01510
0.0174			0.01976

$$z=\frac{0.00466}{0.01976}\times 0.0174=0.0041.$$

$$\therefore\quad x=1.2217-0.0041=1.2176.$$

9. $\sin 2x-\cos 3x=0.$

作 $y=\sin 2x$ 及 $y=\cos 3x$，其交點有無限個，其最小一個近於 $x=0.3$。

x	$\sin 2x$	$\cos 3x$	$\sin 2x-\cos 3x$
0.3142(18°)	0.58779	0.58779	0

以三角解方程式法：

$$\sin 2x=\cos 3x.$$

但 $$\cos 3x=\sin(90-3x).$$

故 $$\sin 2x=\sin(90-3x).$$

即 $$2x=90-3x.$$

$$\therefore\quad x=18^\circ=0.3142 \text{ 弧度}.$$

10. $e^{-x}-\tan\frac{1}{2}x=0.$

作 $y=e^{-x}$ 及 $y=\tan\frac{1}{2}x$，可得無限交點，最小一根約為 0.85.

x	e^{-x}	$\tan\frac{1}{2}x$	$e^{-x}-\tan\frac{1}{2}x$
0.8	0.45	0.3894	0.0606
$0.8+z$	(根)		0
0.9	0.41	0.4358	-0.0258
0.1			0.0864

$$z=\frac{0.0606}{0.0864}\times 0.1=0.07.$$

$\therefore \quad x=0.8+0.07=0.87.$

11. 一弓形之弧對 x 弧度之圓心角，半徑爲 2 吋，面積爲 5 平方吋，求 x.

$$\text{弓形之面積}=\frac{r^2x}{2}-\frac{r^2\sin x}{2}=2x-2\sin x=5.$$

$$x-\frac{5}{2}-\sin x=0.$$

設 $$y=x-\frac{5}{2},\quad y=\sin x.$$

作兩曲線，其交點近於 2.8.

x	$x-\frac{5}{2}$	$\sin x$	$x-\frac{5}{2}-\sin x$
2.8	0.3	0.3349	-0.0349
$2.8+z$	(根)		0
2.95	0.35	0.2844	0.0626
0.05			0.0975

$$z=\frac{0.0349}{0.0975}\times 0.05=0.0179.$$

$\therefore \quad x=0.3179.$

第十三章　空間之笛卡兒坐標

原本第 238—239 頁習題

1. 作下列諸點並計算各點坐標軸之垂直距離，與至原點之距離：

(a) $(0,0,4),(0,-2,0),(-4,0,0),(3,0,5),(7,3,0),(0,-4,3)$.

(b) $(1,3,5),(1,6,1),(-2,-1,4),(3,4,-2),(-3,-4,-6),(-4,5,7)$.

(c) $(4,5,8),(3,-4,8),(6,4,-2),(3,-2,6),(-2,3,1),(-3,-6,-7)$.

例如 $(1,3,5)$ 至 x 軸之距離爲 $\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$，至 y 軸之距離爲 $\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$，至 z 軸之距離爲 $\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，至原點之距離爲 $\sqrt{1+3^2+5^2}=\sqrt{35}$.

2. 證下列諸點在一直圓柱面上，其軸爲 z 軸。

$(3, 4, 7)$, $(5, 0, 4)$, $(2\sqrt{5}, \sqrt{5}, -3)$, $(2\sqrt{6}, -1, -4)$.

自一點 $P(x_1, y_1, z_1)$ 至 z 軸之距離爲 $\sqrt{x_1^2+y_1^2}$，故此諸點離 z 軸均爲 5，故均在以 z 軸爲軸而半徑爲 5 之圓柱上。

3. $P(x, y, z)$ 之軌跡爲何，設：

(a) $x=0$?

$x=0$, YZ 面。

(b) $y=0$?

$y=0$, XZ 面。

(c) $z=0$?

$z=0$, XY 面。

(d) $x=y=0$?

$x=y=0$, z 軸。

(e) $x=z=0$?

$x=z=0$, y 軸。

(f) $y=z=0$?

$y=z=0$, x 軸。

(g) $x=y=z$?

$x=y=z$，過原點在 I, VIII 二格內而與三軸成等角之線。

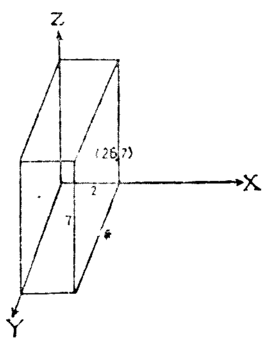
(h) $x=y$, $z=0$?

$x=y$, $z=0$，在 XY 面內平分 $\angle XOY$ 之直線。

(i) $x=z$?

$x=z$，過 y 軸而平分 $\angle XOZ$ 之平面。

4. 設 $(0, 0, 0)$ 與 $(3, 6, 7)$ 爲一直角六面體一對角線之兩端，其邊在坐標面內或平行於坐標面，求作此直角六面體。



5. 從 (a, b, c), $(a, b, -c)$, $(a, -b, c)$, $(-a, -b, c)$, $(-a, b, -c)$, $(a, -b, -c)$, $(-a, b, c)$, $(-a, -b, -c)$ 各點至原點之距離及其至坐標軸之垂直距離爲何？諸點中何對乃對稱於坐標面？對稱於坐標軸？對稱於原點？

諸點至原點之距離皆爲 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

諸點至 XY 面之距離皆爲 c; 至 XZ 面之距離皆爲 b; 至 YZ 面之距離皆爲 a.

A 與 B, C 與 F, D 與 H, E 與 G 對稱於 XY 面.

A 與 C, B 與 F, D 與 G, E 與 H 對稱於 XZ 面.

A 與 G, B 與 E, C 與 D, F 與 H 對稱於 YZ 面.

A 與 F, B 與 C, G 與 H, D 與 E 對稱於 x 軸.

A 與 E, B 與 G, C 與 H, D 與 F 對稱於 y 軸.

A 與 D, B 與 H, C 與 G, E 與 F 對稱於 z 軸.

A 與 H, B 與 D, C 與 E, F 與 G 對稱於原點.

6. 從原點作直線至下列各點，求此直線與各軸所成之角：

(a). $(1, -1, -1)$.

$$\rho=\sqrt{3},$$

$$\alpha=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}=54°44',$$

$$\beta=\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=125°16',$$

$$\gamma=\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=125°16'.$$

(b) $(1, -2, -2)$.

$$\rho=3,$$

$$\alpha=\cos^{-1}\frac{1}{3}=70°32',$$

$$\beta=\cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)=131°48',$$

$$\gamma=\cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)=131°48'.$$

(c) $(4, 3, 12)$.

$$\rho=13,$$

$$\alpha=\cos^{-1}\frac{4}{13}=72°5',$$

$$\beta=\cos^{-1}\frac{3}{13}=76°40'.$$

$$\gamma=\cos^{-1}\frac{12}{13}=22°35'.$$

(*d*) (4, -4, 7).

$$\rho=9,$$

$$\alpha=\cos^{-1}\frac{4}{9}=48°12',$$

$$\beta=\cos^{-1}\left(-\frac{4}{9}\right)=131°48',$$

$$\gamma=\cos^{-1}\frac{7}{9}=38°57'.$$

(*e*) (-6, 2, 3).

$$\rho=7,$$

$$\alpha=\cos^{-1}\left(-\frac{6}{7}\right)=149°,$$

$$\beta=\cos^{-1}\frac{2}{7}=73°24',$$

$$\gamma=\cos^{-1}\frac{3}{7}=64°37'.$$

(*f*) (4, -2, -3).

$$\rho=\sqrt{29},$$

$$\alpha=\cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{29}}=42°2',$$

$$\beta=\cos^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{29}}\right)=111°48',$$

$$\gamma=\cos^{-1}\left(-\frac{3}{\sqrt{29}}\right)=123°51'.$$

7. 過點 $(-6,5,2)$ 作一直線平行於 y 軸. 求此線上距原點 9 單位諸點之坐標.

在此線上之點，其 x, z 坐標皆為 -6 與 2，而 y 可自

$$\sqrt{(-6)^2+y^2+2^2}=9,\ 得\quad y=\pm\sqrt{41}.$$

故得兩點　$(-6, \sqrt{41}, 2)$ 及 $(-6, -\sqrt{41}, 2)$.

8. 設題 7 中之線平行於 x 軸；平行於 z 軸；試解之。

解法同上。

9. 作一點之軌跡，設此移動時：

(*a*) 其至 y 軸之垂直距離爲 3.

以 y 軸爲軸而半徑爲 3 之圓柱形。

(*b*) 其至原點之距離爲 6.

以原點爲心而半徑爲 6 之球面。

(*c*) 其至坐標面 XY 與 YZ 之垂直距離相等。

平分平面 XOZ 之面。

(*d*) 其至坐標面 ZX 之垂直距離爲 -5.

平行於 XZ 面而距離 -5 之平面。

原 本 第 240—241 頁 習 題

1. 下列各情形中之數爲一直線之方向數。試寫出同一直線之其他數組方向數，而計算其方向餘弦：

(*a*) $2, -3, 4.$

與三數成比例之數，均可與例如 $4, -6, 8$ 或 $1, -\frac{3}{2}, 2$ 等。

方向餘弦爲

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{29}},\quad \cos\beta=-\frac{3}{\sqrt{29}},\quad \cos\gamma=\frac{4}{\sqrt{29}}.$$

(*b*) $3, 0, -1.$

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}},\quad \cos\beta=0,\quad \cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

(*c*) $\frac{1}{5}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}.$

$6,\ 45,\ 20,\ \rho=\sqrt{2461}.$

$$\cos\alpha=\frac{6}{\sqrt{2461}},\ \cos\beta=\frac{45}{\sqrt{2461}},\ \cos\gamma=\frac{20}{\sqrt{2461}}.$$

(*d*) $0, -\frac{1}{2}, \frac{4}{5}.$

同上法。

2. 求一向上直線之方向餘弦與角，設其方向數爲：

(a) $-6, 2, 3.$

$$\rho=\sqrt{36+4+9}=7,$$

$$\alpha=\cos^{-1}\left(-\frac{6}{7}\right)=149°,$$

$$\beta=\cos^{-1}\frac{2}{7}=73°24',$$

$$\gamma=\cos^{-1}\frac{3}{7}=64°37'.$$

(b) $1, 2, 3.$

$$\rho=\sqrt{14},$$

$$\alpha=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{14}}=74°8',$$

$$\beta=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{14}}=57°41',$$

$$\gamma=\cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

(c) $4, 1, 0.$

(d) $-2, -3, 1.$

(e) $1, -1, -1.$

(f) $5, -4, 7.$

(g) $5, 0, -6.$

(c)—(g) 同上。

3. 述一線之方向，設其：

(a) $\cos\alpha=0.$

垂直於 x 軸。

(b) $\cos\gamma=0.$

垂直於 z 軸。

(c) $\cos\beta=0.$

垂直於 y 軸。

(d) $\cos\alpha=\cos\beta=0.$

平行於 z 軸。

(e) $\cos\alpha=\cos\gamma=0.$

平行於 y 軸。

(f) $\cos\beta=\cos\gamma=0$.

平行於 x 軸.

4 一直線與各坐標軸所成之角皆相等,求其角.

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

$$\alpha=\beta=\gamma,\quad 3\cos^2\alpha=1,\quad \cos^2\alpha=\frac{1}{3}.$$

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \alpha=\beta=\gamma=54°44'.$$

5. 一直線與 x 軸成 $45°$ 之角,與 y 軸成 $60°$ 之角;則與 z 軸成何角?

$$\cos^2 45°+\cos^2 60°+\cos^2\gamma=1.$$

$$\therefore\quad \cos^2\gamma=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

$$\cos\gamma=\pm\frac{1}{2}.$$

$$\gamma=60°\quad\text{或}\quad 120°.$$

6. 一直線與 z 軸成 $30°$ 之角,與 x 軸及 y 軸成等角.求其方向餘弦.

$$2\cos^2\alpha+\cos^2 30°=1.$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{8}.$$

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{4}\sqrt{2},$$

$$\cos\beta=\pm\frac{1}{4}\sqrt{2},$$

$$\cos\gamma=\cos 30°=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

7. 下列任意組諸數可爲一線之方向餘弦否?

(a) $\left(\frac{1}{15},\ 1,\ -\frac{2}{15}\right)$.

驗三數之平方和是否等於 1.若然則可 $\left(\frac{1}{15}\right)^2+1^2+\left(\frac{2}{15}\right)^2\neq 1$,故不能.

(b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. (d) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{7}\right)$.

(c) $\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.

(b), (c), (d) 仿此。

8. 設一線之二方向角爲 60° 與 30°, 則其第三角爲何?

第三角必爲 90°.

9. 一線之二方向餘弦爲 $\frac{1}{3}$ 與 $-\frac{2}{3}$, 則其第三方向餘弦爲何?

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = \frac{4}{9}, \quad \cos\theta = \pm\frac{2}{3}.$$

10. 過 O 點之直線,其正向部份在何八分區 (O-XYZ, O-$X'YZ$ 等) 內,設其:

(a) $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$, $\cos\gamma > 0$?

O-XYZ.

(b) $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$, $\cos\gamma < 0$?

O-XYZ'.

(c) $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta < 0$, $\cos\gamma < 0$?

O-$XY'Z'$.

(d) $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta < 0$, $\cos\gamma > 0$?

O-$XY'Z$.

(e) $\cos\alpha < 0$, $\cos\beta > 0$, $\cos\gamma > 0$?

O-$X'YZ$.

(f) $\cos\alpha < 0$, $\cos\beta < 0$, $\cos\gamma > 0$?

O-$X'Y'Z$.

(g) $\cos\alpha < 0$, $\cos\beta < 0$, $\cos\gamma < 0$?

O-$X'Y'Z'$.

(h) $\cos\alpha < 0$, $\cos\beta > 0$, $\cos\gamma < 0$?

O-XYZ.

原本第 245—246 頁習題

1. 用長之公式證明頂點爲 (7, 3, 4), (1, 0, 6) 與 (4, 5, −2) 之三角形爲一等腰直角三角形(參閱上例)。

三邊之長爲

$$\sqrt{(7-1)^2+3^2+(4-6)^2}=7,$$
$$\sqrt{(7-4)^2+(3-5)^2+(4+2)^2}=7,$$
$$\sqrt{(1-4)^2+5^2+(6+2)^2}=7\sqrt{2}.$$

故爲等腰三角形.

依 § 116, 三邊之方向餘弦爲 AB 6, 3, -2; AC 3, -2, 6; BC -3, -5, 8. 若二邊垂直,則 $aa'+bb'+cc'=0$. 試 AB 與 BC, $6\times3-3\times2-2\times6=0$, 故 $AB\perp AC$, 故三角形爲直角三角形.

2. 求下列各三角形內第一頂點之角.各三角形皆應作出.又須決定所求之角爲向上(第 115 節)二邊間之角,抑或其補角:

(a) $A(2, 1, 4)$, $B(3, -1, 2)$, $C(5, 0, 6)$.

AB 之方向數爲 $-1, 2, 2$; AC 之方向數爲 $-3, 1, -2$; 故其方向餘弦爲

$$-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\quad 及\quad -\frac{3}{\sqrt{14}},\ \frac{3}{\sqrt{14}},\ -\frac{2}{\sqrt{14}}.$$

故 $$\cos\theta=-\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{\sqrt{14}}\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}=\frac{1}{3\sqrt{14}}.$$

$$\theta=84°53'.$$

(b) $A(2, -4, 7)$, $B(3, -2, 0)$, $C(4, -5, 4)$.

AB 之方向數爲 $-1, -2, 7$; AC 之方向數爲 $-2, 1, 3$; 故其方向餘弦爲

$$-\frac{1}{3\sqrt{6}},\ -\frac{2}{3\sqrt{6}},\ \frac{7}{3\sqrt{6}}\quad 及\quad -\frac{2}{\sqrt{14}},\ \frac{1}{\sqrt{14}},\ \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

故 $$\cos\theta=\frac{2}{6\sqrt{21}}-\frac{2}{6\sqrt{21}}+\frac{21}{6\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{21}}{6}.$$

$$\theta=40°12'.$$

(c) $(4, 3, -4)$, $(-2, 9, -4)$, $(-2, 3, 2)$.

(d) $(4, 3, -2)$, $(7, -1, 4)$, $(-2, 1, -4)$.

(e) $(3, 2, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 4, -1)$.

(c)—(e) 同上.

3. 用長之公式,決定題 2 中各三角形之性質:

(a) $l_1=\sqrt{1+4+4}=3$, $\quad l_2=\sqrt{4+1+16}=\sqrt{21}$,

$l_3=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$.

(b)　$l_1=\sqrt{1+4+49}=3\sqrt{6}$,　　$l_2=\sqrt{1+9+16}=\sqrt{26}$,
$l_3=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$.

(c)—e) 仿此，若有二邊相等者爲等腰三角形，若三邊全等則爲等邊三角形。

4. 何種四邊形之頂點爲 (5, 5, 2), (7, 5, −3), (3, 2, −1), (1, 2, 4)? 作此圖。

$$AB=\sqrt{4+0+25}=\sqrt{29},$$
$$BC=\sqrt{16+9+4}=\sqrt{29},$$
$$CD=\sqrt{4+0+25}=\sqrt{29},$$
$$DA=\sqrt{16+9+4}=\sqrt{29}.$$

四邊相等當爲菱形。

方向餘弦：

AB 爲 $-2, 0, 5$,　BC 爲 $4, 3, -2$,
CD 爲 $2, 0, -5$,　DA 爲 $4, 3, -2$.

兩對邊平行。

$$\angle ABC=\cos^{-1}\left(\frac{-8-10}{29}\right)=\cos^{-1}\left(-\frac{18}{29}\right).$$

故非正方形。

5. 求下列每兩點之連線之中點及其三等分點：

(a)　(3, 2, −1) 與 (4, −2, 6).

中點爲 $\left(\frac{3+4}{2}, \frac{2-2}{2}, \frac{-1+6}{2}\right)$ 即 $\left(3\frac{1}{2}, 0, 2\frac{1}{2}\right)$.

三分點爲

$$x=\frac{3+2\times 4}{3}=3\frac{2}{3},\quad y=\frac{2-2\times 2}{3}=-\frac{2}{3},$$
$$z=\frac{-1+2\times 6}{3}=3\frac{2}{3}.$$

又
$$x=\frac{4+2\times 3}{3}=3\frac{1}{3},\quad y=\frac{-2+2\times 2}{3}=\frac{2}{3},$$
$$z=\frac{6-1\times 2}{3}=1\frac{1}{3}.$$

(b)　(4, −7, 3) 與 (−6, 3, −5).

(c)　(4, 3, −2) 與 (−2, 1, −5).

(d) $(4, 7, -2)$ 與 $(3, 5, -4)$.

(e) $(3, -8, 6)$ 與 $(6, -4, 6)$.

(b)—(e) 同上法.

6. 用比較方向與長之方法,決定下列各組頂點之圖形(各組頂點依其周界之次序排列如下):

(a) $(7, 3, -4)$, $(1, 0, -6)$, $(4, 5, 2)$.

(b) $(2, -1, 5)$, $(3, 4, -2)$, $(6, 2, 2)$, $(5, -3, 9)$.

(c) $(6, 7, 3)$, $(3, 11, 1)$, $(-3, 7, 2)$, $(0, 3, 4)$.

(d) $(-6, 3, 2)$, $(3, -2, 4)$, $(5, 7, 3)$, $(-13, 17, -1)$.

(e) $(2, 3, 0)$, $(4, 5, -1)$, $(3, 7, 1)$, $(1, 5, 2)$.

(f) $(6, -6, 0)$, $(3, -4, 4)$, $(2, -9, 2)$, $(-1, -7, 6)$.

(g) $(3, 2, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 4, -1)$, $(4, 4, 0)$.

(h) $(2, 1, 4)$, $(0, 0, 0)$, $(3, -1, 2)$, $(5, 0, 6)$.

取諸頂點,以長度公式計算其邊長,視其有無相等之邊,更以 § 116 末之公式,計各邊之方向數及方向餘弦,隨以 § 117 之公式,計其夾角,視其有無等角或直角.

7. 審定下列各組中諸點是否在一直線上.作其圖形:

(a) $(3, 2, 7)$, $(1, 4, 6)$, $(7, -2, 9)$.

先求 AB, BC 及 AC 中二線之方向數,若方向數成比例,則二線平行,但兩線經過一點,故三點在一直線上,否則不在一直線上.

AB 之方向數為 $2, -2, 1$.

BC 之方向數為 $6, -6, 3$.

故在一直線上.

(b) $(13, 4, 9)$, $(1, 7, 13)$, $(7, 5.5, 11)$, $\left(5, 6, 11\frac{2}{3}\right)$.

(c) $(3, 6, -2)$, $(7, -4, 3)$, $(-1, 16, -7)$, $(-5, 25, -12)$.

(d) $(2, -15, -4)$, $(-3, -5, -9)$, $(3, -17, -3)$, $(4, -19, -2)$

(b)—(d) 仿此.

8 求各三角形之面積,其頂點為:

(a) $(1, 3, 3)$, $(0, 1, 0)$, $(4, -1, 0)$.

先求三邊之長,得 $\sqrt{14}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{22}$; 代入面積公式即得.

(b) $(3, 1, 2)$, $(2, -1, 5)$, $(1, 0, -1)$.

(c) $(4, -4, 2)$, $(9, -1, 10)$, $(6, -7, 8)$.

(d) $(3, -4, 4)$, $(2, -9, 2)$, $(-1, -7, 6)$.

(b)—(d) 仿此。

9. 設直線 L_1 與 L_2 之方向數各為 $(0,-1,1)$ 與 $(-1,-1,0)$，又一直線 L_3 垂直於 L_1 並與 L_2 成 $30°$ 之角，求 L_3 之方向餘弦。

L_1 之方向餘弦為 $\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$；$L_2$ 之方向餘弦為 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

設 L_3 之方向餘弦為 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，則

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\beta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\gamma=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\beta=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

自 (1), (2), 得 $\cos\alpha$ 及 $\cos\gamma$.

代入 (3), 得 $6\cos^2\beta+2\sqrt{6}\cos\beta+1=0$.

$$(\sqrt{6}\cos\beta+1)^2=0,\quad \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$\cos\gamma=\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{6}},\quad \cos\alpha=\frac{1}{3}\sqrt{6}.$$

方向餘弦為 $\left(\frac{1}{3}\sqrt{6},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

10. 設一直線之一端點為 $(2,-3,5)$ 而其中點為 $(4,2,3)$，求他一端點之坐標。

設他一端點之坐標為 (x_1,y_1,z_1)，則

$$\frac{x_1+2}{2}=4,\quad \frac{y_1-3}{2}=2,\quad \frac{z_1+5}{2}=3.$$

因得 $\qquad x_1=6,\quad y_1=7,\quad z_1=1.$

11. 證明 $(0,0,0)$, $(0,-1,-1)$, $(-1,0,-1)$ 與 $(-1,-1,0)$ 為一正四面體 (Regular tetrahedron) 之頂點。

求四點間之距離，知六距離全相等於 $\sqrt{2}$，故為正四面體。

12. 設直線之一端點為 $(6,-1,-7)$ 而自此端點至全線五分之三處之點為 $(3,2,-1)$，求他端點之坐標。

$P(3,2,-1)$ 分 $P_1(6,-1,-7)$ 至 $P_2(x,y,z)$ 之直線為 3 與 2

之比，故 $\dfrac{1+\frac{3}{2}x}{1+\frac{3}{2}}=3,\quad \dfrac{-1+\frac{3}{2}y}{1+\frac{3}{2}}=2,\quad \dfrac{-7+\frac{3}{2}z}{1+\frac{3}{2}}=-1.$

故 $x=1,\quad y=4,\quad z=3.$

13. 設三直線之方向數各為 $(12,-3,-4)$, $(4,12,3)$ 與 $(3,-1,12)$，證明此三線互相垂直。

三線方向餘弦相乘積之和均為0，故互相垂直。

14. 在 $(2,-3,4)$ 與 $(8,0,10)$ 連線上一點之 x 坐標為4. 求此點之其他二坐標.

兩點聯線之方向數為 $(6,3,6)$，其方向餘弦為 $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$. 故得

$$\frac{\cos\alpha}{2}=\frac{\cos\beta}{1}=\frac{\cos\gamma}{2}.$$

$$\frac{8-4}{0-y}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=2,\quad y=-2.$$

$$\frac{8-4}{10-z}=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}=1,\quad z=6.$$

原本第246—247頁習題

1. 設 L_1 與 L_2 兩直線之方向數各為 $(2,-3,4)$ 與 $(-1,2,-3)$，求垂直於 L_1 與 L_2 一線之方向數。

設 a, b, c 為垂直於二線之直線之方向數，則

$$2a-3b+4c=0,\quad a-2b+3c=0.$$

因得 $b=2c, a=c$，故方向數為 $1, 2, 1$.

2. 求 $\triangle ABC$ 之面積，其頂點為 $A(2,1,4)$, $B(3,-1,2)$, $C(5,0,6)$，用公式，面積 $=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A$.

$$AB=3,\quad AC=\sqrt{14}.$$

AB 之方向餘弦為 $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$.

AC 之方向餘弦為 $-\frac{3}{\sqrt{14}}$, $\frac{1}{\sqrt{14}}$, $-\frac{2}{\sqrt{14}}$.

$$\cos A=\frac{1}{\sqrt{14}}+\frac{2}{3\sqrt{14}}-\frac{4}{3\sqrt{14}}=\frac{1}{\sqrt{14}}.\quad \cos A=\sqrt{\frac{13}{14}}.$$

故面積$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{\frac{13}{14}}=\frac{3}{2}\sqrt{13}.$

3. 證明 (2, 3, 4) 與 (−1, 2, 6) 之連線與 (1, 2, −5) 與 (6, 3, −18) 之連線相交，並求其交點。

因 $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 1 \\ 6 & 3 & -18 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

故在一平面而其方向數不合平行之條件，故必相交。

設其交點為 (x_1, y_1, z_1)，則

$$\frac{x_1-2}{-1-2}=\frac{y_1-3}{2-3}=\frac{z_1-4}{6-4}, \quad \frac{x_1-1}{6-1}=\frac{y_1-2}{3-2}=\frac{z_1+5}{-18+5}.$$

求 x_1, y_1, z_1，得 $(-4, 1, 8)$.

4. 求任一三角形之重心 (Centroid) 之坐標。

設三角形之三頂點為 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 及 $C(x_3, y_3, z_3)$，則 AB 之中點為 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$，重心在 AB 之三分之二處，故得 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$.

5. 證明任意四邊形（不必平面）對邊中點之連線互相平分。

設任意四邊形之四頂點為 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) 及 (x_4, y_4, z_4)；則其四邊之中點為 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$, $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right)$, $\left(\frac{x_3+x_4}{2}, \frac{y_3+y_4}{2}, \frac{z_3+z_4}{2}\right)$ 及 $\left(\frac{x_4+x_1}{2}, \frac{y_4+y_1}{2}, \frac{z_4+z_1}{2}\right)$.

而二對邊中點聯線之中點均為

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}, \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right).$$

6. 連接四面體對邊中點之三線互相平分。

設四面體之頂點為 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ 及

$P_4(x_4, y_4, z_4)$，則

P_1P_2 之中點 Q 為 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

P_3P_4 之中點 R 為 $\left(\frac{x_3+x_4}{2}, \frac{y_3+y_4}{2}, \frac{z_3+z_4}{2}\right)$.

QR 之中點為

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}, \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right).$$

其餘諸對邊之中點均同，故為一點，則互相二等分。

7. 在任一四面體內，從各頂點至其相對表面上之重心所作諸線相會於一點，且各線皆分成 $r=3$ 之比。(此點即四面體之重心)。

設四面體之四頂點 P_1, P_2, P_3, P_4 如上題，則 $\triangle P_1P_2P_3$ 之重心為 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$. 分此點與 P_4 聯線為 $1:3$ 之點為 $x=\frac{x_4+3\cdot\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)}{1+3}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$,

$$y=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}, \quad z=\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}.$$

8. 任一四邊形二對角線之平方和，為其連接對邊中點兩直線平方和之兩倍。

設四邊形之四頂點如題 6，其對角線之平方和為 $(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2+(x_2-x_4)^2+(y_2-y_4)^2+(z_2-z_4)^2$.

而對邊中點聯線之平方為 $\frac{1}{4}[(x_1+x_2-x_3-x_4)^2+(y_1+y_2-y_3-y_4)^2+(z_1+z_2-z_3-z_4)^2]$ 及 $\frac{1}{4}[(x_2+x_3-x_4-x_1)^2+(y_2+y_3-y_4-y_1)^2+(z_2+z_3-z_4-z_1)^2]$

而 $\frac{1}{4}[(x_1+x_2-x_3-x_4)^2-(x_2+x_3-x_4-x_1)^2]=\frac{1}{4}\{[(x_2-x_4)+(x_1-x_3)]^2+[(x_2-x_4)-(x_1-x_3)]^2\}=\frac{1}{4}[2(x_2-x_4)^2+2(x_1-x_3)^2]=\frac{1}{2}(x_2-x_4)^2+\frac{1}{2}(x_1-x_3)^2$，$y$，$z$ 同之，故前者為後者之二倍。

9. 四面體兩雙對邊之平方和，等於第三雙對邊之平方和加第三雙對邊之中點連線平方之四倍。

設四頂點如題 6，則兩雙對邊平方之和為

$$\overline{P_1P_2}^2+\overline{P_3P_4}^2+\overline{P_1P_4}^2+\overline{P_2P_3}^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$$
$$+(x_3-x_4)^2+(y_3-y_4)^2+(z_3-z_4)^2+(x_1-x_4)^2+(y_1-y_4)^2$$
$$+(z_1-z_4)^2+(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2$$
$$=2\Sigma x^2+y^2+z^2-2\Sigma x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

又第三對邊平方之和加第三對邊中點聯線之平方之四倍為(M_1 為 P_1P_3 之中點，M_2 為 P_2P_4 之中點)

$$\overline{P_1P_3}^2+\overline{P_2P_4}^2+4\overline{M_1M_2}^2=(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2+(x_2-x_4)^2$$
$$+(y_2-y_4)^2+(z_2-z_4)^2+4\left[\left(\frac{x_1+x_3}{2}-\frac{x_2+x_4}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1+y_3}{2}-\frac{y_2+y_4}{2}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(\frac{z_1+z_3}{2}-\frac{z_2+z_4}{2}\right)^2\right]$$
$$=\Sigma x_1^2+y_1^2+z_1^2+2(x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3+x_2x_4+y_2y_4+z_2z_4)$$
$$+\Sigma x_1^2+y_1^2+z_1^2-2[(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_4+x_3x_4)+(y_1y_2+y_2y_3$$
$$+y_1y_4+y_3y_4)+(z_1z_2+z_2z_3+z_1z_4+z_3z_4)]$$
$$=2\Sigma x_1^2+y_1^2+z_1^2-2\Sigma x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

原本第 249—250 頁習題

1. 坐標面之方程式為何？坐標軸之方程式為何？

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0.$$
$$y=z=0,\quad x=z=0,\quad x=y=0.$$

2. 求一點之軌跡之方程式，此點：

(a) 在 XY 平面之下 4 單位.

$$z=-4.$$

(b) 在 YZ 平面之左 5 單位.

$$x=-5.$$

(c) 在 XZ 平面之前 3 單位.

$$y=3.$$

(d) 在 YZ 平面之右 4 單位.

$$x=4.$$

(e) 在 XY 平面之上 10 單位.

$$z=10.$$

(f) 在 XZ 平面之後 6 單位.

$$y=-6.$$

3. 求一點之軌跡之方程式，此點：

(*a*) 與 $(1, -1, 3)$ 相距 6 單位.

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=36.$$

(*b*) 與 $(3, 0, 4)$ 相距 5 單位.

$$(x-3)^2+y^2+(z-4)^2=25.$$

(*c*) 與 $(2-2, 1)$ 及 $(4, 5, 6)$ 等距.

$$(x-2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=(x-4)^2+(y-5)^2+(z-6)^2.$$

$$2x+7y+5z=34.$$

(*d*) 與 $(4, -6, -8)$ 及 $(-2, 7, 9)$ 等距.

$$(x-4)^2+(y+6)^2+(z+8)^2=(x+2)^2+(y-7)^2+(z-9)^2.$$

$$6x-13y-17z+9=0.$$

4. 一平面垂直且平分下列各對已知點之連線，求此平面之方程式：

(*a*) $(6, 3, 2)$ 與 $(4, 2, 0)$.

(*b*) $(7, -6, 0)$ 與 $(-5, -2, -3)$.

(*c*) $(4, -3, 6)$ 與 $(2, -4, 2)$.

(*d*) $(4, -5, -12)$ 與 $(-2, 4, 6)$.

即求與所設二點等距離之點之軌跡.

5. 求球面之方程式，此球：

(*a*) 之半徑為 4 而圓心為 $(3, -4, -5)$.

$$(x-3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=16.$$

(*b*) 以 $(-3, 4, 2)$ 與 $(7, -2, 6)$ 之連線為其直徑.

求二點之中點為 $(2, 1, 4)$，此點即球心與兩端之距離 $\sqrt{38}$ 為半徑，故得

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=38.$$

(*c*) 之圓心為 $(2, 1, 4)$ 而切於 YZ 平面.

半徑為 2.

(*d*) 之圓心為 $(3, 2, 7)$ 而過 $(5, -3, 8)$.

半徑為 $\sqrt{(5-3)^2+(-3-2)^2+(8-7)^2}=\sqrt{30}.$

(*e*) 之半徑為 3 而與三個坐標皆相切(有八種情形).

球心為 $(\pm 3, \pm 3, \pm 3)$ 可得八點.

(*f*) 過 $(2, 0, 0)$, $(0, -4, 0)$, $(0, 0, 4)$, $(8, 0, 0)$.

設球心為 (x_1, y_1, z_1)，半徑為 r，則球之方程式為 $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2$，四點均在球面上，當合於此方程式，故以四

點代入，得四方程式，解之以求 x_1, y_1, z_1 及 r，即得

$$(x-5)^2+(y-5)^2+(z-4)^2=50.$$

6. 求一點軌跡之方程式，此點：

(a) 與 $(5, 4, 0)$ 之距離二倍於與 $(-4, 3, 4)$ 之距離．

$$2\sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2+z^2}=\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}.$$

展開化簡即得．

(b) 至 $(5, 0, 0)$ 與至 $(-5, 0, 0)$ 之距離和為 20.

$$\sqrt{(x-5)^2+y^2+z^2}+\sqrt{(x+5)^2+y^2+z^2}=20.$$

$$3x^2+4y^2+4z^2=300.$$

(c) 至 $(7, -5, 9)$ 與至 $(5, -3, 8)$ 距離之平方和為 6.

$$(x-7)^2+(y+5)^2+(z-9)^2+(x-5)^2+(y+3)^2+(z-8)^2=6.$$

(d) 至 $(-4, 3, 4)$ 之距離等於至 XY 平面之距離．

$$(x+4)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=z^2.$$

(e) 至 x 軸之距離 4 倍於至 $(4, -2\ 4)$ 之距離．

$$4\sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2+(z-4)^2}=\sqrt{y^2+z^2}.$$

(f) 至三坐標面之距離和等於至原點之距離．

$$x+y+z=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

$$xy+yz+xz=0.$$

7. 求垂直平分四面體 $(4, 8, 0)$, $(2, 5, -2)$, $(3, 2, 2)$, $(5, 1, 2)$ 之各邊之六個平面之方程式．此等平面相會於一共公點否？

$$A(4, 8, 0),\ B(2, 5, -2),\ C(3, 2, 2),\ D(5, 1, 2).$$

平分而垂直於：

AB 之平面為 $\quad 4x+6y+4z-47=0.$

BC 之平面為 $\quad x-3y+4z+8=0.$

CD 之平面為 $\quad 4x-2y-13=0.$

AD 之平面為 $\quad x-7y+2z+25=0.$

AC 之平面為 $\quad 2x+12y-4z-63=0.$

BD 之平面為 $\quad 6x-8y+8z+3=0.$

解此中三式，得交點為 $\left(\frac{227}{42}, \frac{181}{42}, -\frac{5}{42}\right)$，此點適合於其中三式，故均交於此點．

8. 寫出下列各圓柱面之方程式：

(a) 其半徑為 5 而以 z 軸為軸．

$$x^2+y^2=25.$$

(b) 其半徑為 4 而以 y 軸為軸。

$$x^2+z^2=16.$$

(c) 其半徑為 3 而以 x 軸為軸。

$$y^2+z^2=9.$$

9. 一點至三定點 $(1,3,8)$, $(-6,-4,2)$ 與 $(3,2,1)$ 之距離皆相等,求此點之軌跡之方程式。

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z-8)^2=(x+6)^2+(y+4)^2+(z-2)^2$$
$$=(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2.$$

$$-2x-6y-16z+74=12x+8y-4z+56=-6x-4y-2z+14.$$

因得
$$\begin{cases}7x+7y+6z-9=0,\\ 9x+6y-z+21=0.\end{cases}$$

10 求一點之軌跡之方程式,設此點:

(a) 至 $(1,3,2)$ 與至 $(0,0,1)$ 之距離相等,又至 $(3,0,3)$ 與 $(0,-2,0)$ 之距離亦相等。

為一直線即下列二平面之交線。

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=x^2+y^2+(z-1)^2,$$

即
$$2x+3y+2z-13=0.$$

$$(x-3)^2+y^2+(z-3)^2=x^2+(y+2)^2+z^2,$$

即
$$3x-2y+3z-8=0.$$

(b) 至 $(1,2,1)$ 為 3 單位而至 $(2,0,1)$ 為 2 單位。

為一圓即下列二球面之交線。

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9,$$
$$(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=4.$$

(c) 至 x 軸與至 y 軸皆為 2 單位。

$$y^2+z^2=4, \qquad x^2+z^2=4.$$

(d) 至 y 軸, XZ 平面與 $(3,3,2)$ 之距離皆相等。

$$x^2+z^2=y^2=(x-3)^2+(y-3)^2+(z-2)^2.$$

(e) 為等腰三角形之頂點,其底為 $(4,5,6)$ 與 $(-2,-1,2)$ 之連線。

為二點聯線之垂直平分面及聯線中點為球心三角形之高為半徑之球面之交線。即一圓。

第十四章 空間之平面與直線

原本第255—257頁習題

1. 求下列各平面在坐標軸上之截部，與在坐標面上之蹤線．作其圖形：

(a) $6x-2y+3z-20=0.$

求截部，分別設式中 y 與 z；x 與 z；x 與 y 等於 0，即得三軸上之截部
$$x=\frac{10}{3},\ y=-10,\ z=\frac{20}{3}.$$

求蹤線，分別設式中 z, y 或 x 等於 0，即得 XY, XZ 及 YZ 面上之蹤線
$$3x-y-10=0,\qquad 2y-3z+20=0,$$
$$6x+3z-20=0.$$

(b) $x+2y+3z+12=0.$

截部 $x=-12,\quad y=-6,\quad z=-4.$

蹤線 $x+2y+12=0,\qquad x+3z+12=0,$

$2y+3z+12=0.$

(c) $6x-4y+z-12=0.$ (f) $3x-y+z-14=0.$

(d) $2x+y+z=0.$ (g) $4y+3z+36=0.$

(e) $3x+2y-6z-10=0.$ (h) $5x+3z+45=0.$

(c)—(h) 仿此．

2. 求下列諸平面之方程式並作其圖形：

(a) $p=5,\ \alpha=120°,\ \beta=45°,\ \gamma=120°.$
$$x\cos 120°+y\cos 45°+z\cos 120°-5=0.$$
$$-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y-\frac{1}{2}z-5=0.$$
$$x-\sqrt{2}\,y+z+10=0.$$

(b) $p=7,\ \alpha=45°,\ \beta=60°,\ \gamma=60°.$
$$x\cos 45°+y\cos 60°+z\cos 60°-7=0.$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z-7=0.$$

$$\sqrt{x}+y+z-14=0.$$

(c) $p=4,\ \alpha=90°,\ \beta=135°,\ \gamma=45°.$

(d) $p=2,\ \alpha=60°,\ \beta=45°,\ \gamma=120°.$

$(c),(d)$ 仿此。

(e) $p=4,\ \dfrac{\cos\alpha}{6}=\dfrac{\cos\beta}{-2}=\dfrac{\cos\gamma}{3}.$

$$\cos\alpha=\frac{6}{\pm\sqrt{6^2+2^2+3^2}}=\pm\frac{6}{7},\quad \cos\beta=\mp\frac{2}{7},\quad \cos\gamma=\mp\frac{3}{7}.$$

$$\frac{6}{7}x-\frac{2}{7}y+\frac{3}{7}z\pm 4=0.$$

$$6x-2y+3z\pm 28=0.$$

(f) $p=6,\ \dfrac{\cos\alpha}{-2}=\dfrac{\cos\beta}{-1}=\dfrac{\cos\gamma}{-2}.$

$$\cos\alpha=\pm\frac{2}{9},\quad \cos\beta=\pm\frac{1}{9},\quad \cos\gamma=\pm\frac{2}{9}.$$

$$\frac{2}{9}x+\frac{1}{9}y+\frac{2}{9}z\pm 6=0.$$

$$3x+y+2z\pm 54=0.$$

(g) $p=3,\ \dfrac{\cos\alpha}{6}=\dfrac{\cos\beta}{-3}=\dfrac{\cos\gamma}{2}.$

(h) $p=0,\ \dfrac{\cos\alpha}{-3}=\dfrac{\cos\beta}{4}=\dfrac{\cos\gamma}{12}.$

$(g),(h)$ 同上。

3. 求一平面之方程式，已知從原點至平面之垂線之足為：

(a) $(-2,\ -2,\ 1).$

$$\cos\alpha=\frac{-2}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=-\frac{2}{3},\quad \cos\beta=-\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=\frac{1}{3}.$$

$$p=-\sqrt{(0+2)^2+(0+2)^2+(0-1)^2}=-3.$$

因得
$$-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z-3=0.$$

$$2x+2y-z+9=0.$$

(b) $(1,\ 4,\ 2).$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{21}},\quad \cos\beta=\frac{4}{\sqrt{21}},\quad \cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{21}}.$$

$$p=-\sqrt{21}.$$

因得 $\qquad x+4y+2z-21=0.$

(c) $(-4, 3, -12)$.

$$4x-3y+12z+169=0.$$

(d) $(2, -1, 3)$.

$$2x-y+3z-14=0$$

(e) $(-1, 6, 3)$.

$$x-6y-3z+46=0.$$

(f) $(1, 0, 2)$.

$$x+2z-5=0.$$

4. 化題1中諸平面之方程式爲法線式．求各情形中從原點至平面所作之垂線之方向餘弦，與從原點至平面之垂直距離：

(a) 將各項之係數以 $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ 除之，得

$$\cos\alpha=\frac{6}{7},\quad \cos\beta=-\frac{2}{7},\quad \cos\gamma=\frac{3}{7}.$$

$$p=-\frac{20}{7}.$$

故法線式爲 $\quad \frac{6}{7}x-\frac{2}{7}y+\frac{3}{7}z-\frac{20}{7}=0.$

(b)—(h) 同上。

5. 寫出平面之方程式，此平面垂直於從原點：

(a) 至 $(4, 5, 3)$ 之連線，且過 $(1, 3, 2)$.

垂線之方向數爲 $(4, 5, 3)$，則平面必爲

$$4x+5y+3z+D=0.$$

此面過 $(1, 3, 2)$，故代入可得 $D=-25$.

故得 $\qquad 4x+5y+3z-25=0.$

(b) 至 $(2, -4, 3)$ 之連線，且過 $(3, -4, -5)$.

$$2x-4y+3z+D=0,\quad D=-2\times3-4\times4+15=-7.$$

故得 $\qquad 2x-4y+3z-7=0.$

6. 寫出平面之方程式，此平面通過 $(1, -3, 2)$ 而垂直於 $(0, 0, 3)$ 與 $(1, -3, -4)$ 之連線。

方向數爲 $\quad -1, 3, 7.$

$$-x+3y+7z+D=0.$$

$$-1-9+14+D=0, \quad D=-4.$$

$$x-3y-7z+4=0.$$

7. 設一直角三角形之直角頂點爲 $(4, -2, -2)$，其他一頂點爲 $(3, 1, 1)$. 求其第三頂點之軌跡之方程式.

此軌跡爲一平面過 $(4, -2, -2)$ 而垂直於此點與 $(3, 1, 1)$ 之聯線，方向數爲 $(1, -3, -3)$.

$$x-3z-3z+D=0.$$

$$D=-16.$$

故得
$$x-3y-3z-16=0.$$

8. 在下列各情形中，證明二平面互相平行，且求二平面間之垂直距離：

(a) $x-y-z+5=0$, $2x-2y-2z-7=0$.

三項係數之比即方向數之比相等，故平行，其至原點之距離各爲 $-\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ 及 $-\dfrac{7}{2\sqrt{3}}$，故兩平行面間之垂直距離爲 $\dfrac{17}{2\sqrt{3}}$.

(b) $3x-y+2z+10=0$, $3x-y+2z-7=0$.

$$\frac{10}{\sqrt{14}}+\frac{7}{\sqrt{14}}=\frac{17}{\sqrt{14}}.$$

(c) $6x+2y-3z-63=0$, $6x+2y-3z+49=0$.

$$\frac{63}{7}+\frac{49}{7}=16.$$

(d) $x+2y+2z-7=0$, $3x+6y+6z-1=0$.

$$\frac{7}{3}-\frac{1}{9}=\frac{20}{9}.$$

9. 在下列各情形中，檢出各對互相平行之平面與互相垂直之平面：

(a) $2x+3y-z=0$, $3x-y+3z+2=0$, $4x+6y-2z+8=0$.

(1), (3) 兩平面因係數成比例，故平行而與 (2) 之係數相乘積之和爲零，故各與 (2) 垂直.

(b) $2x-5y+4=0$, $5x+2y-8=0$, $x-2y=0$.

(1), (2) 兩平面垂直.

10. 求平面之方程式，此平面：

(*a*) 垂直於 XY 平面並過 $(2, -1, 0)$ 與 $(3, 0, 5)$ 二點。

垂直於 XY 平面，則 z 之係數爲零，故可設平面爲

$$Ax+By+D=0.$$

已知兩點之聯線之方向數爲 $-1, -1, -5$ 在此平面內，故與此平面之垂線垂直，因得

$$-A-B=0 \quad 即 \quad B=-A.$$

故平面可書爲 $\quad Ax-Ay+D=0.$

將已知點代入，得 $\quad 2A+A+D=0 \quad 即 \quad D=-3A.$

代入原式消去 A，得 $\quad x-y-3=0.$

(*b*) 垂直於 YZ 平面，其在 y 軸與 z 軸上之截部各爲 5 與 -2.

設平面爲 $\quad By+Cz+D=0.$

當 $z=0$ 時，$y=5$；$y=0$ 時，$z=-2$. 故得

$$5B+D=0, \qquad -2C+D=0.$$

$$B=-\frac{D}{5}, \qquad C=\frac{D}{2}.$$

代入消去 D，得 $\quad -\frac{y}{5}+\frac{z}{2}+1=0.$

$$2y-5z-10=0.$$

(*c*) 平行於平面 $x-2y-2z-15=0$ 而至原點之距離較近 2 單位.

將原式化爲法線式，得 $\quad \frac{x}{3}-\frac{2y}{3}-\frac{2z}{3}-5=0.$

近原點 2 單位，則 $\quad D=-5+2=-3.$

$$\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}-\frac{2z}{3}-3=0.$$

$$x-2y-2z-9=0.$$

11. 求下列平面之交點:

(*a*) $x+2y+z=0,\ x-2y-8=0,\ x+y+z-3=0.$

依代數法解聯立方程式，得 $\quad x=2,\ y=-3,\ z=4.$

(*b*) $3x-5y-4z+7=0,\ 6x+2y+2z-7=0,\ x+y=5.$

解聯立方程式，得 $\quad \left(\frac{3}{4},\ 4\frac{1}{4},\ -3\right).$

12. 證明 $4x+y+z+4=0,\ y-5z+14=0,\ x+2y-z+3=0,$

$x+y+z-2=0$，四平面有一公共點。

解三式，得其交點爲 $(-2,1,3)$，將此點代入第四式亦合，故四平面交於一點。

13. 求三坐標面截以下各平面所成之三角形之面積：

(a) $2x+2y+z-12=0$.

此平面在三軸上之交點爲 $(6,6,12)$.

此平面與三坐標面所成之四邊形之體積可以三蹤線所成三角與高（即平面與原點之距離）表之，如 $D=\frac{12}{3}=4$，即體積 $=\frac{1}{3}\times 4\times$ 底面積.

而此體積亦 $=\frac{1}{3}z_1\times\frac{x_1y_1}{2}=\frac{x_1y_1z_1}{6}$.

故得 $$\frac{4}{3}\times\text{底面積}=\frac{6\times6\times12}{6}.$$

$$\text{底面積}=54.$$

(b) $7x-7y+2z-6=0$.

$$D=\frac{6}{\sqrt{7^2+7^2+2^2}}=\frac{6}{\sqrt{102}}.$$

三交點爲 $\frac{6}{7}$，$-\frac{6}{7}$，3.

故 $$\frac{1}{3}\times\frac{6}{\sqrt{102}}\times\text{底面積}=\frac{\frac{6}{7}\times\frac{6}{7}\times3}{6}.$$

$$\text{底面積}=\frac{9}{49}\sqrt{102}.$$

(c) $2x-y-3z+12=0$.

$$D=\frac{12}{\sqrt{14}}.$$

三交點爲 -6，12，4.

$$\frac{1}{3}\times\frac{12}{\sqrt{14}}\times\triangle\text{面積}=\frac{6\times12\times4}{6}.$$

$$\triangle\text{面積}=12\sqrt{14}.$$

(d) $x+5y+7z-3=0$.

$$D=\frac{3}{5\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{5}.$$

三交點爲 $3,\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{3}{7}.$

$$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{5}\times\triangle\text{面積}=\frac{3\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{7}}{6}.$$

$$\triangle\text{面積}=\frac{9}{14}\sqrt{3}.$$

原本第 260—262 頁習題

1. 求過下列已知點之平面之方程式，並驗證其解答：

(a) (0, 0, 3), (4, 0, 0), (8, 0, 0).

設 $Ax+By+Cz+D=0$ 爲所求平面。

$$3C+D=0,\quad 4A+D=0,\quad 8A+D=0.$$

解此三式，必須 $A=C=D=0$ 方可，故得

$$By=0\ \text{即}\ y=0.$$

(b) (2, 3, 0), (−2, −3, 4), (0, 6, 0).

設方程式爲 $Ax+By+Cz+D=0$，則

$$2A+3B+D=0,\qquad -2A-3B+4C+D=0,$$
$$6B+D=0.$$

故得 $\quad D=-6B,\quad A=\dfrac{3}{2}B,\quad C=3B.$

代入消去 B，得 $\quad 3x+2y+6z-12=0.$

(c) (−4, 0, 6), (8, 2, −1), (2, 4, 6).

$$-4A+6C+D=0,$$
$$8A+2B-C+D=0,$$
$$2A+4B-6C+D=0.$$

解之，得 $\quad C=9A,\quad D=-50A,\quad B=\dfrac{51}{2}A.$

因得 $\quad 2x+51y+18z-100=0.$

(d) (4, 2, 1), (−1, −2, 2), (0, 4, −5).

(e) (1, 2, 3), (2, 3, 4), (5, 4, 3).

(f) (1, 1, −1), (−2, −2, 2), (1, −1, 2).

(d)—(f) 倣此。

2. 求平面之方程式，此平面經過：

(a) $(2, 1, -1)$ 而平行於平面 $7x+4y-4z=0$.

設平面爲 $Ax+By+Cz+D=0$.

經過 $(2, 1, -1)$，則 $2A+B-C+D=0$.

平行於 $7x+4y-4z=0$，則 $\dfrac{A}{7}=\dfrac{B}{4}=\dfrac{C}{-4}$.

解之，得 $B=\dfrac{4A}{7},\quad C=-\dfrac{4A}{7},\quad D=-\dfrac{22}{7}A$.

代入消去 A，得 $7x+4y-4z-22=0$.

(b) $(3, -4, 5)$ 而平行於平面 $3x-y+z+6=0$.

同法，得 $3x-y+z-18=0$.

3 寫出平面之方程式，其截部如下，並作此平面：

(a) $3, 4, 5$.

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1.$$

$$20x+15y+12z-60=0.$$

(b) $-1, -3, 5$.

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{5}=1.$$

$$15x+5y-3z+15=0.$$

(c) $2, 4, -7$.　(e) $a, -b, -c$.

(d) $7, 0, -4$.　(f) $2a, -a, 3a$.

(c)—(f) 仿此。

4. 寫出平面之方程式，作平面過：

(a) $(2, 1, -1)$ 與 $(1, 1, 2)$ 而垂直於平面 $7x+4y-4z+30=0$

設平面爲 $Ax+By+Cz+D=0$.

垂直於已知平面，故 $7A+4B-4C=0$.

經過兩點，則

$$2A+B-C+D=0,$$
$$A+B+2C+D=0.$$

解之，得 $A=3C,\quad B=-\dfrac{17}{4}C,\quad D=-\dfrac{3}{4}C$.

代入，得 $12x-17y+4z-3=0$.

(b) $(6, 4, -1)$ 與 $(2, 4, 1)$ 而垂直於平面 $4x+6y-3z-7=0$

$$4A+6B-3C=0,$$
$$6A+4B-C+D=0,$$
$$2A+4B+C+D=0.$$

$$C=2A,\quad B=\frac{A}{3},\quad D=-\frac{16}{3}A.$$

$$3x+y+6z-16=0.$$

5. 寫出平面之方程式，此平面過：

(a) $(7, 0, 3)$ 而與 $2x-4y+3z=0$ 及 $7x+2y+z=14$ 各平面互相垂直。

$$7A+3C+D=0,$$
$$2A-4B+3C=0,$$
$$7A+2B+C=0.$$

$$C=-\frac{16}{5}A,\quad D=\frac{13}{5}A,\quad B=-\frac{19}{10}A.$$

$$10x-19y-32z+26=0.$$

(b) $(3, 4, 5)$ 而與 $2x+3y-7=0$ 及 $4x-3z=7$ 各平面互相垂直。

$$3A+4B+5C+D=0,$$
$$2A+3B=0,$$
$$4A-3C=0.$$

$$B=-\frac{2}{3}A,\quad C=\frac{4}{3}A,\quad D=-7.$$

$$3x-2y+4z-21=0.$$

6. 證明下列各情形內已知之四點在一平面內：

(a) $(-1, 0, 0)$, $(0, 2, -3)$, $(2, 10, -5)$, $(1, 0, -10)$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 10 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -10 & 1 \end{vmatrix}=0,$$ 故在一平面上。

(b) $(1, 0, -1)$, $(3, 4, -3)$, $(8, -2, 6)$, $(2, 2, -2)$.

同上。

7. 求下列各對平面間之角：

(a) $4x-3y+5z=8$, $2x+3y-z=4$.

$$\cos\theta=\frac{4\times2-3\times3-5\times1}{\sqrt{16+9+25}\sqrt{4+9+1}}=-\frac{3}{5}\sqrt{7}.$$

(b) $2x-y+z=7,\ x+y+2z=11.$

$$\cos\theta=\frac{2-1+2}{6}=\frac{1}{2},\qquad \theta=60°.$$

(c) $4x-3y+z=6,\ 2x+3y-5z=4.$

$$\cos\theta=\frac{8-9-5}{\sqrt{26}\sqrt{38}}=-\frac{3}{2}\sqrt{13\times19}.$$

(d) $x+2y-z=12,\ x-2y-2z=7.$

$$\cos\theta=\frac{1-4+2}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=-\frac{1}{6},\quad \theta=97°49'.$$

(e) $3x-z+12=0,\ x+3y+17=0.$

$$\cos\theta=\frac{3}{(-\sqrt{10})(-\sqrt{10})}=\frac{3}{10}.$$

(f) $x+5y-3z=10,\ 2x-3y+z=10.$

$$\cos\theta=\frac{2-15-3}{\sqrt{35}\ \sqrt{17}}=-\frac{16}{7\sqrt{10}}.$$

8. 證明第 128 節 (III) 所得之角等於不含原點之二面角之平面角.

兩平面之夾角，卽等於垂直於此兩平面之第三平面與此兩平面所交之兩線所夾之角，此兩交線各與二平面之法線垂直，故等於第 128 節 (III) 所示之角。

9 求平面 $x+y+z=2,\ x-y-2z-4=0,\ 2x+y-z=2$ 所成之三面角之頂點與二面角.

解三平面之方程式，得交點 $(4,-4,2)$ 卽爲三面角之頂點，三平面之求法與題 7 同.

$$\cos\theta_1=\frac{1-1-2}{\sqrt{3}\ \sqrt{6}}=-\frac{1}{3}\sqrt{2}.$$

$$\cos\theta_2=\frac{2-1+2}{-\sqrt{6}\ \sqrt{6}}=-\frac{1}{2},\qquad \theta_2=120°.$$

$$\cos\theta_3=\frac{2+2-1}{\sqrt{3}\ \sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \theta_3=45°$$

10. 求下列各平面之方程式:

(a) 過 $(0, -1, 0)$ 與 $(0, 0, 1)$ 而與 XY 平面成 $60°$ 之角。

設 $Ax+By+Cz+D=0$, 則

$$-B+D=0, \quad C+D=0.$$

又與 XY 卽 $z=0$ 平面成 $60°$ 角,故 $\dfrac{-C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{1}{2}$.

解三式,得 $C=-D, \quad B=D, \quad A=\pm\sqrt{2}\,D.$

代入,得 $\pm\sqrt{2}\,x+y-z+1=0.$

經過二點 x 之正係數不合,故得

$$\sqrt{2}\,x-y+z-1=0.$$

(b) 過 $(0, -1, 0)$ 與 $(0, 0, 1)$ 而與平面 $y-z-2=0$ 成 $120°$ 之角。

設 $Ax+By+Cz+D=0$, 則

$$-B+D=0, \quad C+D=0.$$

又
$$\frac{B-C}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}.$$

因得 $B=D, \quad C=-D, \quad A=\pm\sqrt{6}\,D.$

代入,得 $\pm\sqrt{6}\,x+y-z+1=0.$

11. 一平行六面體之三面,其方程式為 $x-4y=3$ $2x-y+z=3$ 與 $3x+y-2z=0$, 而其一頂點為 $(3, 7, -2)$, 則其他三面之方程式為何? 其他諸頂點之坐標為何?

求經過 $(3, 7, -2)$ 點而平行於已知三平面之三平面卽得。設平面為 $x-4y+D=0$ 等而以已知頂點代入,得 $D=25$, 故得 $x-4y+25=0$. 同樣,得 $2x-y+z+3=0$, $3x+y-2z-20=0$, 取不平行之三平面解之,可得五個交點卽其他頂點。

12. 求平面之方程式,此平面經過點 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 而平行於平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$.

設平面為 $Ax+By+Cz+D=0.$

經過 (x_1, y_1, z_1), 故 $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0.$

故 $D=-(Ax_1+By_1+Cz_1).$

代入,得 $Ax+By+Cz-(Ax_1+By_1+Cz_1)=0.$

卽 $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$

13. 求平面之方程式,此平面過原點與 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 而垂直於

平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$.

設平面為　　$Ax+By+Cz+D=0$.

經過原點及 P_1, 故　$D=0$,　$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$.

垂直於上列平面，故　$AA_1+BB_1+CC_1=0$.

解之，得　$B=\dfrac{C_1x_1-A_1z_1}{B_1z_1-C_1y_1}A$,　$C=\dfrac{A_1y_1-B_1x_1}{B_1z_1-C_1y_1}A$.

代入消去 A, 得

$$(B_1z_1-C_1y_1)x+(C_1x_1-A_1z_1)y+(A_1y_1-B_1x_1)z=0.$$

14.　求平面之方程式，此平面過 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 而垂直於平面 $Ax+By+Cz+D=0$.

設平面為 $Ax+By+Cz+D=0$, 則

$$A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1=0,$$
$$A_1x_2+B_1y_2+C_1z_2+D_1=0.$$

又　　$$AA_1+BB_1+CC_1=0.$$

解之代入，得

$$(Bz_1+Cy_2-Bz_2-Cy_1)x+(Az_2+Cx_1-Cy_2-Az_1)y+(Ay_1+Bx_2-Ay_2-Bx_1)z+Ay_2z_1+Bx_1z_2+Cx_2y_1-Ay_1z_2-Bx_2z_1-Cx_1y_2=0.$$

原 本 第 263—264 頁 習 題

1.　求從下列已知平面至已知點之垂直距離：

(a)　$6x-3y+2z-10=0$ 至 $(4, 2, 10)$.

代入公式，　$d=\dfrac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{24-6+20-10}{7}=4$

(b)　$x+2y-2z-12=0$ 至 $(1, -2, 3)$.

$$d=\frac{1-4-6-12}{3}=-7.$$

(c)　$4x+3y+12z+6=0$ 至 $(9, -1, 0)$.

$$d=\frac{36-3+6}{-13}=-3.$$

(d)　$2x-5y+3z+4=0$ 至 $(-2, 1, 7)$.

(e)　$3x-4y+12z+26=0$ 至 $(1, 5, 9)$.

(f)　$3x+4y-12z+10=0$ 至 $(1, 6, 5)$.

(d)—(f) 倣此.

2. 求一四面體諸高之長，其頂點爲 $(0, 3, 1)$, $(2, -7, 1)$, $(0, 5, -4)$ 與 $(2, 0, 1)$.

先以三點求平面，可得四面體之四平面；然後求各平面與第四點（不在此平面內之一點），求其垂直距離.

3. 求一四面體之體積，已知其頂點爲 $(1, 2, 1)$ 及平面 $3x+4y+2z+12=0$ 與三坐標軸之交點.

該平面在三軸上之截部爲 $-4, -3, -6$. 依第 257 頁題 13 之法，可求聯此三點所成三角形之面積，又 $(1, 2, 1)$ 至該平面之垂直距離，即四面體之高亦可求得.

4. 求具下列四頂點之四面體之體積：

(a) $(3, 4, 0)$, $(4, -1, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(6, -1, 4)$.

(b) $(0, 0, 4)$, $(3, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(7, 7, 3)$.

(c) $(4, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(0, 0, 4)$, $(7, 3, 2)$.

(d) $(3, 0, 0)$, $(6, -2, 0)$, $(0, 0, -1)$, $(3, -1, -1)$.

(e) $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, -2)$, $(4, -1, 3)$.

(f) $(3, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$, $(0, 0, -1)$, $(3, -4, 0)$.

先求三點所成三角形之面積，再求過此三點之平面與第四點之距離，即可得其體積 (a) 8, (b) $\frac{29}{3}$, (c) $21\frac{1}{3}$, (d) $\frac{3}{2}$, (e) $\frac{1}{6}$, (f) 2.

5. 求一點之軌跡之方程式，此點至 $2x-y-2z-3=0$ 與 $6x+3y+2z+4=0$ 兩平面之距離之絕對值相等.

設 (x, y, z) 爲軌跡上一點，則與第一平面之距離爲

$$\frac{2x-y-2z-3}{\pm\sqrt{4+1+4}}=\frac{2x-y-2z-3}{\pm 3}.$$

與第二平面之距離爲

$$\frac{6x+3y+2z+4}{\pm\sqrt{36+9+4}}=\frac{6x+3y+2z+4}{\pm 7}.$$

相等，故 $$\frac{6x+3y+2z+4}{\pm 7}=\frac{2x-y-2z-3}{\pm 3}.$$

因得兩平面 $$4x+16y+20z+33=0$$

及 $$32x+2y-8z-9=0.$$

6. 求一點之軌跡之方程式，此點至平面 $3x-6y-2z=0$ 之

距離爲至平面 $2x+y+2z=9$ 之距離之 3 倍。

設 (x, y, z) 爲軌跡上一點，則

$$\frac{3x-6y-2z}{\pm 7}=3\cdot\frac{2x+y+2z-9}{\pm 3}.$$

即 $$11x+13y+16z-63=0$$

及 $$17x+y+12z-63=0.$$

7. 求一點之軌跡之方程式，其至平面 $x+y+z+12=0$ 之距離等於至原點之距離。

設 (x, y, z) 爲軌跡上一點，則

$$\frac{x+y+z+12}{\sqrt{3}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz+24x+24y+24z+144$$
$$=3(x^2+y^2+z^2).$$
$$x^2+y^2+z^2-2(xy+yz+xz)-12(x+y+z)-72=0.$$

8. 求一點之軌跡之方程式，其至平面 $x+y=1$ 之距離等於至 z 軸之距離。

設 (x, y, z) 爲軌跡上一點，則

$$\frac{x+y-1}{\sqrt{2}}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

$$(x+y-1)^2=2(x^2+y^2).$$
$$x^2+y^2+1+2xy-2x-2y=2x^2+2y^2.$$
$$x^2+y^2-2xy+2x+2y-1=0.$$
$$(x-y)^2+2(x+y)-1=0.$$

9. 求一點之軌跡之方程式，其至平面 $x+y-z-1=0$ 與 $x+y+z+1=0$ 之距離之平方和等於 1.

設 (x, y, z) 爲軌跡上一點，則

$$\left(\frac{x+y-z-1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{x+y+z+1}{\sqrt{3}}\right)^2=1.$$

$$[(x+y)-(z+1)]^2+[(x+y)+(z+1)]^2=3.$$
$$2(x+y)^2+2(z+1)^2-3=0.$$

10. 一平面與各坐標面成等角而從原點之距離爲 p. 寫出其方程式。

設平面爲 $x+y+z+D=0$, 則

$$\frac{D}{-\sqrt{3}}=p, \quad D=-\sqrt{3}\,p.$$

代入，得 $\qquad x+y+z-\sqrt{3}\,p=0.$

11. 求從原點至一平面之垂直距離 p 與其截部 a, b, c 間之關係式.

截部爲 a, b, c, 則平面爲 $\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

因得 $\quad p=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=\dfrac{abc}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}.$

原本第 266—267 頁習題

1. 決定 k 之值使平面 $x+ky-2z-9=0$.

(a) 過點 $(5, -4, -6)$.

將 $(5, -4, -6)$ 代入該方程式，得

$$k=\frac{5-2(-6)-9}{4}=2.$$

(b) 平行於平面 $6x+2y-12z=7$.

平行時，x, y, z 之係數當成比，則

$$\frac{k}{2}=\frac{1}{6}, \quad k=\frac{1}{3}.$$

(c) 垂直於平面 $2x+4y+3z=3$.

$$2\times 1+4\times k-3\times 2=0, \quad k=1.$$

(d) 離原點 5 單位.

$$d=\frac{9}{\sqrt{1+k^2+4}}=5, \quad k=\pm\frac{\sqrt{6}}{5}.$$

(e) 與平面 $2x-3y+z=0$ 成 45° 之角.

$$\cos\theta=\frac{2-3k-2}{\sqrt{1+k^2+4}\sqrt{4+9+1}}=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$-6k=2\sqrt{7(k^2+5)}.$$

$$9k^2=7k^2+35, \quad k=\pm\frac{1}{2}\sqrt{70}.$$

2. 求一平面之方程式，此平面過 $(3,\ -2,\ -1)$ 而平行於平面 $7x-y-z=14$.

平行於 $7x-y-z=14$ 之平面系爲

$$7x-y-z=k.$$

經過 $(3,\ -2,\ -1)$，則

$$k=7\times3+2+1=24.$$

故平面爲 $\qquad 7x-y-z=24.$

3. 求一平面之方程式，此平面過 $2x+y-4=0$ 與 $y+2z=0$ 二平面之交線，又：

(a) 過點 $(2,\ -1,\ -1)$.

設平面爲 $\qquad 2x+y-4+k(y+2z)=0.$

以 $(2,\ -1,\ -1)$ 代入，得 $\quad k=-\dfrac{1}{3}.$

代入，得 $\qquad 3x+y-z=6.$

(b) 垂直於平面 $3x+2y+3z=6$.

設平面爲 $\qquad 2x+y-4+k(y+2z)=0.$

$$2x+(k+1)y+2kz-4=0.$$

垂直於 $3x+2y+3z=6$，則

$$3\times2+2(k+1)+3\times2k=0.$$

$$k=-1.$$

故得 $\qquad x-z-2=0.$

4. 求諸平面之方程式，此等平面過 $2x+y-z=4$ 與 $x-y+2z=0$ 二平面之交線，並垂直於坐標面.

設直線系爲 $\quad 2x+y-z-4+k(x-y+2z)=0.$

$$(2+k)x+(1-k)y-(1-2k)z-4=0.$$

垂直於 XY 面，則 z 之係數爲 0，卽 $k=\dfrac{1}{2}$，故得

$$5x+y-8=0.$$

垂直於 XZ 面，則 y 之係數爲 0，卽 $k=1$，故得

$$3x+z-4=0.$$

垂直於 YZ 面，則 x 之係數爲 0，卽 $k=-2$，故得

$$3y-5z-4=0.$$

5. 求一平面之方程式，此平面平行於 $6x+3y+2z+21=0$ 而切於一半徑爲 1 而圓心爲原點之球.

設平面為 $6x+3y+2z+D=0.$

其至原點之距離為 $\dfrac{D}{\sqrt{36+9+4}}=\dfrac{D}{7}.$

切於半徑為 1 球心為原點之球，則離原點為 $\pm 1.$

故得 $\dfrac{D}{7}=\pm 1,\quad D=\pm 7.$

故平面為 $6x+3y+2z\pm 7=0.$

6. 求一平面之方程式，此平面平行於 $6x-2y+3z+15=0$ 而點 $(0,-2,-1)$ 恰在兩平面之中間.

設平面為 $6x-2y+3z+D=0.$

二平面與 $(0,-2,-1)$ 之距離為 $\dfrac{4-3+D}{-7}$ 及 $\dfrac{4-3+21}{7}.$

相等，則 $D=-23.$

$$6x-2y+3z-23=0.$$

7. 求一平面之方程式，此平面過點 $(2,-3,0)$ 而在 XZ 面上之蹤線與在 $x-3y+7z+12=0$ 上者同.

該平面在 XZ 面上之蹤線，即為該平面與 $y=0$ 面之交線，故可設平面為

$$x-3y+7z+12+ky=0.$$

以 $(2,-3,0)$ 代入，得 $k=\dfrac{23}{3}.$

$$3x+14y+21z+36=0.$$

8. 求一平面之方程式，此平面平行於 $2x+y+2z+5=0$ 而與三坐標面成一體積為 1 之四面體.

設平面為 $2x+y+2z\pm D=0.$

其在三軸上之截部為 $\pm\dfrac{D}{2},\ \pm D,\ \pm\dfrac{D}{2}.$

XY 面上之三角形面積為 $\dfrac{D^2}{4}.$

四面體之體積為 $\pm\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{D}{2}\cdot\dfrac{D^2}{4}=1.\quad\therefore\ D=\pm 2\sqrt[3]{3}.$

故平面為 $2x+y+2z\pm 2\sqrt[3]{3}=0.$

9. 求一平面之方程式，此平面平行於 $5x+3y+2z+7=0$ 而其截部之總和為 23.

設平面爲 $5x+3y+2z+D=0.$

其截部爲 $-\dfrac{D}{5},\quad -\dfrac{D}{3},\quad -\dfrac{D}{2}.$

故 $-\left(\dfrac{D}{5}+\dfrac{D}{3}+\dfrac{D}{2}\right)=23,\quad D=-\dfrac{690}{31}.$

故得 $5x+3y+2z-\dfrac{690}{31}=0.$

10. 求一平面之方程式,此平面平行於 $2x+6y+3z-8=0$, 而在第一,八分區內被坐標面所截之面積爲 $\frac{7}{8}$.

設平面爲 $2x+6y+3z+D=0.$

其截部爲 $-\dfrac{D}{2},\quad -\dfrac{D}{6},\quad -\dfrac{D}{3}.$

平面至原點之距離爲 $\dfrac{D}{\sqrt{4+36+9}}=\dfrac{D}{7}.$

故四邊形之體積爲 $V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{D}{7}\cdot\dfrac{7}{8}=\dfrac{D}{24}.$

但由截部,則其體積爲 $V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{D^3}{2\cdot 6\cdot 3}=\dfrac{D^3}{216}.$

故 $\dfrac{D}{24}=\dfrac{D^3}{216},\quad D^2=9,\quad D=\pm 3.$

但在第一,八分區內,故 $D=-3.$

因得 $2x+6y+3z-3=0.$

11. 求一平面之方程式,此平面平行於 $12x+y+2z+5=0$, 並與坐標面所成四面體之全面積爲 1.

設平面爲 $12x+y+2z+D=0.$

其截部爲 $-\dfrac{D}{12},\quad -D$ 及 $-\dfrac{D}{2}.$

其在三坐標面上之三平面之面積爲 $\dfrac{D^2}{24},\ \dfrac{D^2}{4}$ 及 $\dfrac{D^2}{48}.$

四面體之體積爲 $\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{D}{12}\cdot D\cdot\dfrac{D}{2}=\dfrac{D^3}{144}.$

此平面至原點之距離爲 $\dfrac{D}{\sqrt{149}}.$

故此平面在三坐標面間之三角形面積為

$$\frac{D^3}{144}\div\frac{D}{3\sqrt{149}}=\frac{D^2}{48}\sqrt{149}.$$

四面體之總面積為

$$\frac{D^2}{24}+\frac{D^2}{4}+\frac{D^2}{48}+\frac{D^2\sqrt{149}}{48}=1,\quad D=\pm\frac{192\sqrt{6}}{\sqrt[4]{149}}.$$

代入,得　$$12x+y+2z\pm\frac{192\sqrt{6}}{\sqrt[4]{149}}=0$$

12. 求一平面之方程式,此平面之蹤線為 $x+3y-2=0$, 並與坐標面所成四面體之體積為 $\frac{8}{3}$.

設平面為 $x+3y+Cz-2=0$; 其截部為 $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{C}$; 四面體之體積為 $\frac{1}{6}\cdot2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{C}=\frac{4}{9C}$. 故得

$$\frac{4}{9C}=\frac{8}{3},\quad C=\frac{1}{6}.$$

故得　$$6x+18y+z-12=0.$$

13. 求一平面之方程式,此平面過 $6x+2y+3z-6=0$ 與 $-x+y+z+1=0$ 二平面之交線,而與坐標面所成四面體之體積為 $\frac{1}{6}$.

設平面為　$$6x+2y+3z-6+k(-x+y+z+1)=0.$$
$$(6-k)x+(2+k)y+(3+k)z-6+k=0.$$

截部為　$$1,\ \frac{6-k}{2+k},\ \frac{6-k}{3+k}.$$

故四面體之體積為　$$\frac{1}{6}\cdot\frac{6-k}{2+k}\cdot\frac{6-k}{3+k}=\frac{1}{6}.$$

$$36-12k+k^2=6+5k+k^2,\quad k=\frac{30}{17}.$$

代入,得　$$72x+64y+81z-72=0.$$

14. 證明 $x+2y-3z+1=0$, $3x+4y-19z+5=0$ 與 $y+5z=1$ 有一公共交線.

過前二平面交線之平面系為

$$x+2y-3z+1+k(3x+4y-19z+5)=0.$$

若 $k=-\frac{1}{3}$，則得 $2y+10z-2=0$ 卽 $y+5=1.$

故三平面有一共同交線.

15. 求一平面之方程式，此平面過 $3x+y-z+5=0$ 與 $x-y+z-2=0$ 之交線，並與平面 $y-z=0$ 成 $45°$ 之角.

設平面爲 $3x+y-z+5+k(x-y+z-2)=0.$

$$(3+k)x+(1-k)y+(k-1)z-2k+5=0.$$

與 $y-z=0$ 之夾角爲

$$\cos\theta=\frac{(1-k)-(k-1)}{\sqrt{(3+k)^2+(1-k)^2+(k-1)^2}\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$2-2k=\sqrt{3k^2+2k+11}.$$

$$k=5\pm4\sqrt{2}.$$

故得 $(8\pm4\sqrt{2})x-(4\pm4\sqrt{2})y+(4\pm4\sqrt{2})z-5\mp8\sqrt{2}=0.$

16 求一平面之方程式，此平面過 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 與 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 二平面之交線，並過原點.

設平面爲

$$(A_1+kA_2)x+(B_1+kB_2)y+(C_1+kC_2)z+D_1+kD_2=0.$$

過原點，則 $D_1+kD_2=0$, 故 $k=-\frac{D_1}{D_2}.$

代入，得

$$(A_1D_2-A_2D_1)x+(B_1D_2-B_2D_1)y+(C_1D_2-C_2D_1)z=0.$$

17. 求一平面之方程式，此平面過 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 與 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 二平面之交線，並垂直於一坐標面.

設平面爲

$$(A_1+kA_2)x+(B_1+kB_2)y+(C_1+kC_2)z+D_1+kD_2=0.$$

垂直於 XY 面，則 z 之係數爲 0，卽 $C_1+kC_2=0$ 卽 $k=-\frac{C_1}{C_2}.$

因得 $(A_1C_2-A_2C_1)x+(B_1B_2-B_2C_1)y+D_1C_2-D_2C_1=0.$

餘類推.

18. 求一平面之方程式，此平面過原點與 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 而垂直於 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0.$

過 (x_1, y_1, z_1) 依 § 132 (VII)，可設平面爲

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

垂直於 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，則

$$AA_1+BB_1+CC_1=0.$$

過原點，則　　$Ax_1+By_1+Cz_1=0.$

解之，得　$C=\dfrac{A_1y_1-B_1x_1}{B_1z_1-C_1y_1}A,\ B=\dfrac{C_1x_1-A_1z_1}{B_1z_1-C_1y_1}A.$

代入消去 A，得

$$(B_1z_1-C_1y_1)x+(C_1x_1-A_1z_1)y+(A_1y_1-B_1x_1)z=0.$$

原本第 269—270 頁習題

1.　求下列各直線之蹤點及其方向數，並作此直線：

(a)　$x+5y+7z-3=0,\ x-2y+3z-6=0.$

使 $z=0$，則　　$x+5y=3,\quad x-2y=6.$

解之，得 $y=-\dfrac{3}{7},\ x=5\dfrac{1}{7}$ 爲 XY 面上之蹤點。

設方向數爲 a, b, c，則依例題 (1)，得

$$a+5b+7c=0,\qquad a-2b+3c=0.$$

$$b=-\frac{4}{7}c,\qquad a=-\frac{29}{7}c.$$

$$\therefore\quad \frac{\cos\alpha}{29}=\frac{\cos\beta}{4}=\frac{\cos\gamma}{-7}.$$

(b)　$3x-5y-4z+12=0,\ 6x+2y+2z-12=0.$

使 $y=0$，則　　$3x-4z=-12,\quad 3x+z=16.$

$z=\dfrac{24}{5},\ x=\dfrac{36}{15}$ 爲 XZ 面上之蹤點。

設方向數爲 a, b, c，則依前法，得

$$3a-5b-4c=0,\qquad 3a+b+c=0.$$

$$b=-\frac{5}{6}c,\qquad a=-\frac{1}{18}c.$$

$$\therefore\quad \frac{a}{1}=\frac{b}{15}=\frac{c}{18}.$$

(c)　$6x-3y+6z-7=0,\ 3x+2y+3z+28=0.$

使 $x=0$，則　$3y-6z=-7,\quad 2y+3z=-28.$

$y=-9,\ z=-3\dfrac{1}{3}$ 爲 YZ 面上之蹤點。

設方向數爲 a, b, c, 則

$$2a-b+2c=0, \quad 3a+2b+3c=0.$$

解之,得 $$a=-c, \quad b=0.$$

$$\frac{a}{1}=\frac{b}{0}=\frac{c}{-1}.$$

(d) $5x-7y+3z-10=0,\ 3x+5y-8z+3=0.$

(e) $x+2y=8,\ 2x-4y=7.$

(f) $y+z=4,\ x+y-2z=12.$

(d)—(f) 同上。

2. 求下列各對直線間之角,假定其方向爲向上[若 $\cos\gamma=0$, 則假定其方向爲向 ZX 平面之前 (第 115 節), 如 $\cos\beta=\cos\gamma=0$, 則向右]:

(a) $x+y-z=0,\ y+z=0$ 與 $x-y=1,\ x-3y+z=0.$

先求兩直線之方向數(依前題方法),

$$a+b-c=0, \quad b+c=0. \qquad a=2c, \quad b=-c.$$

故得 $$\frac{a}{2}=\frac{b}{-1}=\frac{c}{1}.$$

又 $$a-b=0, \quad a-3b+c=0. \qquad a=b, \quad c=2b.$$

故得 $$\frac{a}{1}=\frac{b}{1}=\frac{c}{2}.$$

$$\cos\theta=\frac{2\times1+(-1)\times1+1\times2}{\sqrt{2^2+1+1}\sqrt{1+1+2^2}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\ \theta=60^\circ.$$

(b) $2x+y-z=2,\ x-y+2z=4$ 與 $4x+3y-6z=0,\ 4x-3y=2.$

$$2a+b-c=0, \quad a-b+2c=0. \qquad a=-\frac{c}{3}, \quad b=3c.$$

$$\therefore\ \frac{a}{-1}=\frac{b}{9}=\frac{c}{3}.$$

$$4a+3b-6c=0, \quad 4a-3b=0. \qquad a=\frac{3}{4}b, \quad c=b.$$

$$\therefore\ \frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{4}.$$

$$\cos\theta=\frac{-3+36+12}{\sqrt{91}\times\sqrt{41}}=\frac{45}{\sqrt{91\times41}}.$$

(c) $x+y+z=5, x-y+z=3$ 與 $y+3z=4, 3y-5z=1$.

答: $\theta=45°$.

(d) $2x-y+2z=5,\ x+2y-2z=4$ 與 $3x-2y-6z+49=0, 2x+2y-z=9$.

答: $\theta=101°57'$.

(e) $x-2y+z=2, 2y-z=1$ 與 $x-2y+z=2, x-2y+2z=4$.

答: $\theta=78°27'$.

(f) $x+y-3z=6, 2x-y+3z=3$ 與 $x+y=6, 2x-3z=5$.

答: $\theta=61°45'$.

(g) $3x+2y-z=4,\ x-2y-2z=5$ 與 $5x-14z=7,\ 7x+7z=19$.

答: $\theta=63°19'$.

(h) $6x-3y+2z-7=0, 2x-2y-z+12=0$ 與 $2x+2y-z=9, 6x+4y-z+12=0$.

答: $\theta=91°42'$.

3. 證明每兩對方程式所表之直線互相平行,並作此等直線:

(a) $2y+z=0, 3y-4z=7$ 與 $5y-2z=8, 4y+z=44$.

四平面皆垂直於 YZ 坐標面,故其交線平行.

(b) $x+2y-z=7, y+z-2x=6$ 與 $3x+6y-2z=8, 2x-y-z=0$.

求二線之方向數均為 3, 1, 5, 故平行.

(c) $3x+z=4, y+2z=9$ 與 $6x-y=7, 3y+6z=1$.

求二線之方向線成 $-1, -6, 3$ 之比,故平行.

4. 證明下列每兩對平面之交線遇於一點並互相垂直:

(a) $x+2y=1, 2y-z=1$ 與 $x-y=1, x-2z=3$.

先求二直線之方向數,代入 $aa'+bb'+cc'=0$, 故二直線垂直.

四平面有一共同交點,故二直線相交於一點.

方向數為 $-2, 1, 2$ 及 $2, 2, 1$; $-4+2+2=0$, 故垂直.

解三方程式,得交點為 $(1, 0, -1)$, 此點亦合於第四方程式,故四平面交於一點,亦卽二直線有一交點.

(b) $4x+y-3z+24=0, z=5$ 與 $x+y+3=0, x+2=0$.

方向數為 $1, -4, 0$ 及 $0, 0, -1$, 故彼此垂直.

四平面有一公交點 $(-2,-1,5)$，即二直線均過此點。

(c) $3x+y-z=1,\ 2x-z=2$ 與 $2x-y+2z=4,\ x-y+2z=3$.

方向數爲 $(-1,1,-2)$ 及 $(0,-2,-1)$.

5. 證明 $x+2y+3z=3$ 與 $3x+6y+9z=20$ 同 $4x-y+z=0$ 之二交線爲二平行線。

第一，二兩平面平行，則與第三平面相交成兩線必平行，可更以一，三及一，二之交線之方向數證之。

6. 求直線 $3x-y-3z-8=0,\ x-y+z+2=0$ 與 $x+y-z=0,\ 6x-6y-3z-15=0$ 之交點。

解四方程式之三，得交點 $(-1,-2,-3)$，此點亦合於第四方程式，故二直線交於此點(否則兩直線不相交)。

7. 用解析法證明兩平行平面同任意第三平面所成之二交線互相平行。

設兩平行平面爲 $Ax+By+Cz+D=0$

及 $kAx+kBy+kCz+D'=0.$

其第三平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0.$

其交線之方向數爲

$$\frac{a}{BC_1-B_1C}=\frac{b}{CA_1-C_1A}=\frac{c}{AB_1-A_1B}$$

及
$$\frac{a'}{k(BC_1-B_1C)}=\frac{b'}{k(CA_1-C_1A)}=\frac{c'}{k(AB_1-A_1B)}.$$

故
$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

故二直線平行。

8. 用解析法證明平面 $y-z=0$ 同平面 $3x+y-z+5=0$ 與 $x-y+z-2=0$ 相交成二平行線。

求二交線之方向數，得

$$\frac{a}{0}=\frac{b}{-3}=\frac{c}{3}\ \text{及}\ \frac{a'}{0}=\frac{b'}{-1}=\frac{c'}{1}.$$

故
$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

故二直線平行。

原 本 第 274—276 頁 習 題

1. 求下列各直線之投影面之方程式；將此直線之方程式寫

成投影式:

(a) $2x+y-z=0,\ x-y+2z=0.$

自兩方程式消去 z, 得對 XY 面之投影面爲

$$5x+y=3 \cdots\cdots(1)$$

消去 y, 得對 XZ 面之投影面爲

$$3x+z=3 \cdots\cdots(2)$$

消去 x, 得對 YZ 面之投影面爲

$$3y-5z+6=0 \cdots\cdots(3)$$

自 (1), (2), 得投影式爲

$$y=-5x+3 \text{ 及 } z=-3x+3.$$

(b) $2x+y+z=6,\ x+3y-2z=2.$

同上,得 $5x+5y=14,\quad 5x+5z=16,\quad 5y-5z+2=0.$

$$y=-x+\frac{14}{5},\quad z=-x+\frac{16}{5}.$$

(c) $2x+y-z=1,\ x-y+z=2.$

同上,得 $x=1,\quad y=z-1.$

故平行於 YZ 面。

(d) $3x+y-4z=10,\ 2x+2y+3z=10.$

同上,得 $17x+11y=70,\quad 4x-11z=10,\quad 4y+17z=10.$

$$y=-\frac{17}{11}x+\frac{70}{11},\quad z=\frac{4x-10}{11}.$$

(e) $2y+3z=6,\ 2y-3z=18.$

直線平行於 x 軸, $y=6,\quad z=-2.$

(f) $12x+y+z=0,\ 4x+3y+2z=16.$

$$20x-y=-16,\quad 32x+z=-16,\quad 8y+7z=48.$$

(g) $x+z=1,\ x-z=3.$

$$x=2,\quad z=-1.$$

直線平行於 y 軸。

2. 證明下列各公式,在所設特別情形中代替 (X) 至 (XII) 從 (XI) 導出之:

(a) 當 $\gamma=90^\circ$, $\dfrac{x-x_1}{\cos\alpha}=\dfrac{y-y_1}{\cos\beta}$, $z=z_1$.

當 $\gamma=90^\circ$ 時, $\cos\gamma=0.$

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{z-z_1}{0} \quad 卽 \quad z-z_1=0.$$

故得
$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}, \quad z=z_1.$$

自 (IX), $t=\dfrac{x-x_1}{\cos\alpha}=\dfrac{y-y_1}{\cos\beta}$, $\quad z=z_1+t\cos 90°.\quad \therefore\ z=z_1.$

(b) 當 $c=0$, $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}$, $z=z_1$.

當 $c=0$ 時，
$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{0} \quad 卽 \quad z-z_1=0.$$

故得
$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}, \quad z=z_1.$$

(c) 當 $z_1=z_2$, $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$, $z=z_1$.

當 $z_1=z_2$ 時， $\qquad z_1-z_2=0.$

故得
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \quad z=z_1.$$

3. 證明下列公式，以代 (X) 至 (XII) (參閱題 2).

(a) 當 $\beta=\gamma=90°$, $y=y_1$, $z=z_1$.

當 $\beta=\gamma=90°$ 時， $\quad \cos\beta=\cos\gamma=0.$

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{0}=\frac{z-z_1}{0}.$$

故
$$y=y_1, \quad z=z_1.$$

(b) 當 $b=c=0$, $y=y_1$, $z=z_1$.

以 b, c 乘 (XI) 卽得.

(c) 當 $y_1=y_2$, $z_1=z_2$, $y=y_1$, $z=z_1$.

以 y_2-y_1 乘 (XII) 卽得.

4. 試導出下列各線之方程式，在特別情形中，用題 2 與題 3 之結果：

(a) 通過 $(3, 4, -4)$ 而其方向角爲 $60°, 45°, 120°$.

代入公式 (X)，得
$$\frac{x-3}{\frac{1}{2}}=\frac{y-4}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{z+4}{-\frac{1}{2}}.$$

即 $2x-\sqrt{2}y-6+4\sqrt{2}=0,\quad x+y-7=0.$

(b) 通過 (1, −2, 3) 而其方向角為 45°, 90°, 135°.

代入 (X),
$$\frac{x-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-3}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

即 $x+z-4=0,\quad y=-2.$

(c) 通過 (3, −2, 1), (2, 3, 4).

代入 (XII),
$$\frac{x-2}{3-2}=\frac{y-3}{-2-3}=\frac{z-4}{1-4}.$$

即 $5x+y-13=0,\quad 3x+z-10=0.$

(d) 通過 (3, −2, 1), (3, −4, 5).

代入 (XII),
$$\frac{x-3}{3-3}=\frac{y+4}{-2+4}=\frac{z-5}{1-5}.$$

即 $x=-3,\quad 2y+z+3=0.$

(e) 通過 (3, 2, −1), 其方向數為 0, 1, 0.
$$x=3,\quad z=-1.$$

(f) 通過 (1, 4, 6) 與 (−1, 4, 6).
$$\frac{x+1}{1+1}=\frac{y-4}{4-4}=\frac{z-6}{6-6}.$$
$$y=4,\quad z+6.$$

(g) 通過 (0, −3, 2) 而平行於 (3, 4, −7), (2, 7, −6) 之連線。聯二點之直線之方向數為 1, −3, −1.

故得
$$\frac{x-0}{1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-2}{-1}.$$

即 $3x+y+3=0,\quad y-3z+9=0.$

5. 證明三點 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 與 $P_3(x_3, y_3, z_3)$ 在一直線上之條件為 $\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}.$

聯 (x_1, y_1, z_1) 及 (x_2, y_2, z_2) 之直線為
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

若 (x_3, y_3, z_3) 亦在直線上，則必合於此方程式，故

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}.$$

6. 化下列各線之方程式為對稱式 (XI) (參閱以上題 2 與題 3) 而說明其結果:

(a) $4x+5y+3z=3,\ 4x-5y+z+9=0.$

自兩方程式消去 x 或 y, 得兩投影面為

$$5y+z-6=0,\quad 4x+2z+3=0.$$

因得 $$z=\frac{5y-6}{-1},\quad z=\frac{4x+3}{-2}.$$

即 $$\frac{4x+3}{2}=\frac{5y-6}{1}=\frac{z}{-1}.$$

即 $$\frac{x+\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{y-\frac{6}{5}}{\frac{1}{5}}=\frac{z}{-1}.$$

各以 10 乘分母, $$\frac{x+\frac{3}{4}}{5}=\frac{y-\frac{6}{5}}{2}=\frac{z}{-10}.$$

故經過 $\left(-\frac{3}{4},\ \frac{6}{5},\ 0\right)$ 而方向數為 $5,\ 2,\ -10.$

(b) $2x+y+5=0,\ x+3z-5=0.$

兩式均為投影面, 解 x, 得

$$x=-\frac{y}{2}-\frac{5}{2},\quad x=-3z+5.$$

$$\frac{x}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{3z-5}{-1}.$$

即 $$\frac{x}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-\frac{5}{3}}{-\frac{1}{3}}.$$

即 $$\frac{x}{-3}=\frac{y-5}{6}=\frac{z-\frac{5}{3}}{1}.$$

(c) $x+2y+6z=5,\ 3x-2y-10z=7.$

答: $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-7}=\dfrac{z}{2}.$

(d) $3x+y-2z=0,\ 6x-3y+4z+9=0.$

答: $\dfrac{x+\frac{3}{4}}{2}=\dfrac{y}{24}=\dfrac{z+\frac{9}{8}}{15}.$

(e) $2x+y+2z=7,\ x+3y+6z=11.$

答: $\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{-1},\quad x=2.$

垂直於 x 軸。

(f) $3x-3y+z=4,\ 4x-6y-z=5.$

答: $\dfrac{x}{9}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z-1}{-6}.$

7. 一直線過點 $(-2,\ 4,\ 0)$ 並與直線 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-4}{-1}$ 相平行。求其方程式。

平行於此線，則方向數亦為 $4,\ -3,\ -1.$

故得
$$\frac{x+2}{4}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z}{-1}.$$

即
$$x+4z+2=0,\quad y-3z-4=0.$$

8. 證明 $\dfrac{x+2}{-6}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z-11}{2}$ 與 $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z+3}{3}$ 二直線互相垂直。

$$aa'+bb'+cc'=12-18+6=0.$$

故二直線垂直。

9. 求在直線 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$ 與 $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-7}{2}=\dfrac{z}{1}$ 間之角，所設兩直線之方向皆向上。

$$\cos\theta=\frac{2\times1+1\times2-1\times1}{\pm\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{3}{\pm6}=\pm\frac{1}{2}.$$

此處需取負號，故 $\theta=120°.$

10. 求下列各直線之方程式:

(a) 通過 $(-1,2,6)$ 而平行於直線 $x=2z-3,\ y=-3z-5.$

先依第 269 頁定理，求已知直線之方向數，得
$$\frac{\cos\alpha}{2}=\frac{\cos\beta}{-3}=\frac{\cos\gamma}{1}.$$

故直線為
$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-6}{1}.$$

(b) 通過 $(-1,2,6)$ 而垂直相交於 x 軸。

x 軸之方向餘弦爲 $1, 0, 0$, 垂直則 $a'=0$.

故設直線爲　$\dfrac{y-2}{b}=\dfrac{z-6}{c},\quad x=-1.$

過 x 軸,則　$y=0,\quad z=0.$

代入,得　$\dfrac{-2}{b}=\dfrac{-6}{c}$ 卽 $\dfrac{1}{b}=\dfrac{3}{c}.$

故得　$\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-6}{3},\quad x=-1.$

(c) 通過原點而垂直於下列各線 $x=2z-4,\quad y=-z+2$ 與 $y=x+5,\ z=2x-8.$

先求二直線之方向數,得 $2, -1, 1$ 及 $1, 1, 2$.

設所求直線之方向數爲 a, b, c, 則

$$2a-b+c=0,\quad a+b+2c=0.$$

解之,得　$a=b=-c.$

故得　$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}.$

(d) 通過 $(0, 2, 0)$ 而與直線 $x=z,\ y=2z$ 及 y 軸成直角.

第一直線之方向數爲 $1, 2, 1$; y 軸之方向數爲 $0, 1, 0$; 設所求直線之方向數爲 a, b, c, 則

$$a+2b+c=0,\quad b=0,\quad a=-c.$$

故得直線　$\dfrac{x}{1}=\dfrac{z}{-1},\quad y=2.$

卽　$x+z=0,\quad y=2.$

(e) 垂直於兩直線 $y=-x+6,\quad z=2x-11$ 與 $x=2z+10,\ y=2z+8$ 之交點處.

兩直線之方向數爲 $1, -1, 2$ 及 $2, 2, 1$.

故　$a-b+2c=0,\quad 2a+2b+c=0.$

解之,得　$a=-\dfrac{5}{4}c,\quad b=\dfrac{3}{4}c.$

$$\therefore\quad \frac{a}{-5}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}.$$

又解二直線方程式,得交點爲 $(4, 2, -3)$.

故得　$\dfrac{x-4}{-5}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+3}{4}.$

11. 一直線過點 $(2, 3, 4)$，其方向餘弦與 $1, -4$ 及 2 成比例，求其通徑方程式。

代入 (IX)，得 $x=2+t,\quad y=3-4t,\quad z=4+2t.$

12. 作諸線通徑方程式爲：

(a) $x=2+\frac{2}{3}t,\ y=4+\frac{1}{3}t,\ z=6+\frac{2}{3}t.$

解 t，得 $$t=\frac{x-2}{\frac{2}{3}},\quad t=\frac{y-4}{\frac{1}{3}},\quad t=\frac{z-6}{\frac{2}{3}}.$$

故得 $$\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-6}{2}.$$

可依第 269 頁例題 (3) 作過 $(2, 4, 6)$ 而方向數爲 $2,\ 1,\ 2$ 之直線。

(b) $x=-3+\frac{2}{7}t,\quad y=6-\frac{6}{7}t,\quad z=4+\frac{3}{7}t.$

解 t，得 $$t=\frac{x+3}{\frac{2}{7}},\quad t=\frac{y-6}{-\frac{6}{7}},\quad t=\frac{z-4}{\frac{3}{7}}.$$

故得 $$\frac{x+3}{2}=\frac{y-6}{-6}=\frac{z-4}{3}.$$

作法同上。

13. 之線之方程式爲 $x=2-\frac{3}{13}t,\ y=4+\frac{12}{13}t,\ z=-3+\frac{4}{13}t.$ 求從點 $(2, 4, -3)$ 至此線與平面 $4x+y-2z=16$ 之交點之距離。

將直線化爲兩平面之交線式

$$\frac{x-2}{-3}=\frac{y-4}{12}=\frac{z+3}{4}.$$

$$4x+y-12=0,\quad y-3z-13=0.$$

將此二式與已知平面解之，得交點爲 $\left(\frac{5}{4}, 7, -2\right).$

$$d=\sqrt{\left(2-\frac{5}{4}\right)^2+(4-7)^2+(-3+2)^2}=\frac{13}{4}=3\frac{1}{4}.$$

原本第 277—278 頁習題

1. 證明直線 $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$ 平行於平面 $4x-2y-2z=9.$

$$Aa+Bb+Cc=4\times(-2)+(-2)\times(-7)+(-2)\times 3$$
$$=-8+14-6=0.$$

故平行。

2. 證明直線 $\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$ 垂直於平面 $3x-2y+7z=8$.

$$\frac{A}{a}=\frac{3}{3}=1,\quad \frac{B}{b}=\frac{-2}{-2}=1,\quad \frac{C}{c}=\frac{7}{7}=1.$$

$$\therefore\quad \frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}.$$

故垂直。

3. 證明:

(a) 直線 $x=z+4,\ y=2z+3$ 在平面 $2x+3y-8z-17=0$ 內。

先將直線化為對稱式

$$z=x-4,\quad z=\frac{y-3}{2}.$$

$$\frac{x-4}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{1}.$$

直線之方向數為 1, 2, 1, 與平面之方向數有

$$Aa+Bb+Cc=1\times 2+3\times 2-8\times 1=0$$

之關係，故平行。又直線過 $(4,3,0)$ 一點，此點合於平面方程式，即在平面內，即此線過平面內之一點，且平行於平面，故此線在平面內。

(b) 直線 $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$ 在平面 $2x+2y+2z-6=0$.

同上， $Aa+Bb+Cc=3\times 2+1\times 2-4\times 2=0.$

又 $(2,-2,3)$ 在平面內，故直線在平面內。

4. 求下列各線之方程式:

(a) 通過 $(2,-3,4)$ 而垂直於平面 $3x-y+2z=4$.

設直線之方程式為 $\frac{x-2}{a}=\frac{y+3}{b}=\frac{z-4}{c}$, 則

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{-1}=\frac{c}{2}.$$

故得
$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{2}.$$

即 $$x=-3y-7,\quad z=-2y-2.$$

(b) 通過 $(-1,3,2)$ 而垂直於平面 $x-3z=4$.

設直線為 $$\frac{x+1}{a}=\frac{y-3}{b}=\frac{z-2}{c}.$$

$$\frac{a}{1}=\frac{c}{-3},\quad y=y_1.$$

故得 $$\frac{x+1}{1}=\frac{z-2}{-3},\quad y=3.$$

(c) 通過 $(0,2,4)$ 而平行於 $x+2z=1$ 與 $y-3z=2$ 兩平面。

設直線為 $$\frac{x}{a}=\frac{y-2}{b}=\frac{z-4}{c}.$$

$$a+2c=0,\quad b-3c=0.$$

$$c=-\frac{a}{2},\quad c=\frac{b}{3}\quad 即\quad \frac{a}{-2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{1}.$$

故得 $$\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}.$$

(d) 通過 $(1,-2,3)$ 而平行於 $2x-y=4$ 與 $x+y-z=4$ 兩平面。

設直線為 $$\frac{x-1}{a}=\frac{y+2}{b}=\frac{z-3}{c}.$$

$$2a-b=0,\quad a+b-c=0.$$
$$b=2a,\quad c=3a.$$

故得 $$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{3}.$$

5. 求下列各平面之方程式:

(a) 通過 $(1,2,-3)$ 而垂直於直線 $3x-y=4$, $y+2z=5$.

先化直線為對線式

$$y=\frac{x-\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}},\quad y=\frac{z-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}}.$$

因得 $$\frac{x-\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{y}{1}=\frac{z-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}}.$$

設平面之方程式為 $A(x-1)+B(y-2)+C(z+3)=0$. 則

$$\frac{A}{\frac{1}{3}}=\frac{B}{1}=\frac{C}{-\frac{1}{2}}.$$

因得 $$\frac{1}{3}(x-1)+(y-2)-\frac{1}{2}(z+3)=0.$$

$$2x+6y-3z-23=0.$$

(b) 通過 $(-4,0,1)$ 而垂直於直線 $x+y-4z=0,\ y-z=2$.

依第 273 頁例題，得直線之對稱式為

$$\frac{x+8}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{1}.$$

同上，設平面之方程式為 $A(x+4)+By+C(z-1)=0$，則

$$\frac{A}{3}=\frac{B}{1}=\frac{C}{1}.$$

$$3(x+4)+y+z-1=0.$$

$$3x+y+C+11=0.$$

(c) 通過 $(3,6,-12)$ 而平行於 $x+3y-1=0,\ 3y+z-2=0$ 與 $z=2x+1,\ y=3$ 各直線。

兩直線之方向數為 $3,-1,3$ 及 $1,0,2$.

設平面為 $A(x-3)+B(y-6)+C(z+12)=0$，則

$$3A-B+3C=0,\quad A+2C=0.$$

$$A=-2C,\quad B=-3C.$$

故得 $$2(x-3)+3(y-6)-z-12=0.$$

$$2x+3y-z-36=0.$$

(d) 由二交線 $x=2z+1,\ y=3z+2$ 與 $2x=2-z,\ 3y=z+6$ 所決定之。

兩已知直線之交點為 $(1,2,0)$，故所求平面即過此點而平行於兩直線，兩直線之方向數為 $2,3,1$ 及 $-2,1,3$.

設平面為 $A(x-1)+B(y-2)+Cz=0$，則

$$2A+3B+C=0,\quad -2A+B+3C=0$$

$$B=-C,\qquad A=C.$$

故得 $$x-1-(y-2)+z=0.$$

$$x-y+z+1=0.$$

(e) 通過直線 $x+2z-4=0,\ 3y-z+8=0$ 而平行於直線 $x=y+4,\ z=y-6$.

取第一直線： 設 $y=0$，則 $z=8,\ x=-12$，即 $(-12,0,8)$ 為

線上一點；又設 $x=0$，則 $z=2$，$y=-2$，卽 $(0,-2,2)$ 亦爲線上一點。

第二直線之方向數爲 $1,1,1$.

設平面爲 $Ax+By+Cz+D=0$，則

$$-12A+8C+D=0,\quad -2B+2C+D=0,$$
$$A+B+C=0.$$

解之，得 $\quad B=-\dfrac{9}{7}C,\quad A=\dfrac{2}{7}C,\quad D=-\dfrac{32}{7}C.$

代入，得
$$\frac{2}{7}x-\frac{9}{7}y+z-\frac{32}{7}=0.$$
$$2x-9y+7z-32=0.$$

(*f*) 由點 $(2,3,-4)$ 與直線 $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$ 決定之。

設平面爲 $Ax+By+Cz+D=0$，則
$$2A+3B-4C+D=0.$$

又
$$2A+3B-C-D=0,$$
$$2A+2B-C=0.$$

解之，得 $\quad D=\dfrac{3}{2}C,\quad B=\dfrac{3}{2}C,\quad A=-C.$

故得
$$-Cx+\frac{3}{2}Cy+Cz+\frac{3}{2}C=0$$
$$2x-3y-2z-3=0.$$

(*g*) 由 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{1}$ 與 $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$ 二平行線決定之。

設平面爲 $Ax+By+Cz+D=0$，則第一直線上 $(-1,-2,0)$ 及第二直線上 $(-3,-4,-1)$ 皆在平面內，故

$$A+2B-D=0,\quad 3A+4B+C-D=0.$$

又
$$3A-2B+C=0.$$

解之，得 $\quad D=6B,\quad A=4B,\quad C=-10B.$

故得平面爲 $\quad 4x+y-10z+6=0.$

6\. 求由下列條件所決定之諸線之方程式：

(*a*) 在平面 $x+3y-z+4=0$ 內而與直線 $x=2z+3$，$y=2z$ 相

垂直於此線與平面相遇之一點.

解方程式,得直線與平面之交點爲 $(1, -2, -1)$.

設直線爲 $$\frac{x-1}{a}=\frac{y+2}{b}=\frac{z+1}{c}.$$

故 $$a+3b-c=0.$$

已知直線之方向數爲 $2, 2, 1$, 故得

$$2a+2b+c=0.$$

解之,得 $$\frac{a}{5}=\frac{b}{-3}=\frac{c}{-4}.$$

因得直線爲 $$\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+1}{-4}.$$

(b) 過 $(4, 2, -3)$, 平行於平面 $x+y+z-10=0$, 而垂直於直線 $x+2y-z=5$, $z=10$.

設直線爲 $\dfrac{x-4}{a}=\dfrac{y-2}{b}=\dfrac{z+3}{c}$, 則

$$a+b+c=0.$$

又已知直線之方向數爲 $2, -1, 0$, 則

$$2a-b=0.$$

故 $$\frac{a}{1}=\frac{b}{2}=\frac{c}{-3}.$$

故平面爲 $$\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-3}.$$

(c) 與直線 $3x+2y-z=8$, $x-3y+1=0$ 相垂直於此線與平面 $2x-y+z-3=0$ 相遇之一點.

直線之方向數爲 $3, 1, 11$.

直線與平面之交點爲 $(2, 1, 0)$.

與一直線相正交之軌跡,若無其他條件,當爲一平面而非直線,設平面爲

$$A(x-2)+B(y-1)+Cz=0$$

故 $$\frac{A}{3}=\frac{B}{1}=\frac{C}{11}.$$

因得 $$3x+B+11z-7=0.$$

(d) 過 $(2, 5, -3)$, 垂直於原點與此點之連線, 而平行於平面 $2x-3y+16=0$.

過 (2, 5, −3) 而垂直於此點與原點聯線之平面爲

$$2x+5y-3z-\sqrt{38}=0.$$

過 (2, 5, −3) 而平行於已知面之平面爲

$$2(x-2)-3(y-5)=0.\quad 2x-3y+11=0.$$

此兩平面之交線卽爲所求.

原本第 278—279 頁習題

1. 求從點 $(3, 4, -6)$ 至直線 $3x-2y+7=0, 2y+z-3=0$ 之垂直距離.

先化直線爲對稱式,乃藉公式 VII 及 § 136 定理求過 $(3, 4, -6)$ 而垂直於此直線之平面,乃可求直線與平面之交點,然後求交點與已知點之距離.

2. 一直線通過 $A(3, -7, 5)$, 其方向數爲 4, 1, 8, 遇平面 $2x+3y-z+7=0$ 於 B. 求 AB 之長.

過 A 而方向數爲 4, 1, 8 之直線爲

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y+7}{1}=\frac{z-5}{8}.$$

與平面方程式解之, 得交點 B 爲 $\left(\frac{61}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{119}{3}\right)$, 乃以公式 III 求其距離.

3. 推算下列各線之方程式,各線皆過 $P_1(x_1, y_1, z_1)$:

(a) 平行於直線 $x=mz+a, y=nz+b$.

已知直線之方向數爲 $m, n, 1$.

故得直線 $$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{1}.$$

卽 $$x-x_1=m(z-z_1),\quad y-y_1=n(z-z_1).$$

(b) 垂直於 $x=m_1z+a_1, y=n_1z+b_1$ 與 $x=m_2z+a_2, y=n_2z+b_2$ 各線.

設直線爲 $$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}.$$

已知直線之方向數爲 $m_1, n_1, 1$ 及 $m_2, n_2, 1$.

故 $$m_1a+n_1b+c=0,\quad m_2a+n_2b+c=0.$$

解之,得 $$c=\frac{m_2n_1-m_1n_2}{m_1-m_2}b,\quad a=\frac{n_2-n_1}{m_1-m_2}b.$$

即 $$\frac{a}{n_2-n_1}=\frac{b}{m_1-m_2}=\frac{c}{m_2n_1-m_1n_2}.$$

故直線爲 $$\frac{x-x_1}{n_2-n_1}=\frac{y-y_1}{m_1-m_2}=\frac{z-z_1}{m_2n_1-m_1n_2}.$$

(c) 垂直於平面 $Ax+By+Cz+D=0$.

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

(d) 平行於 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 與 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 各平面.

設直線爲 $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$, 則

$$A_1a+B_1b+C_1c=0,$$
$$A_2a+B_2b+C_2c=0.$$

解之,得 $$a=\frac{B_2C_1-B_1C_2}{A_1C_2-A_2C_1}b=\frac{B_2C_1-B_1C_2}{A_2B_1-A_1B_2}c.$$

故得直線爲 $$\frac{x-x_1}{B_2C_1-B_1C_2}=\frac{y-y_1}{A_1C_2-A_2C_1}=\frac{z-z_1}{A_2B_1-A_1B_2}.$$

4. 求過 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 而垂直於直線 $x=mz+p,\ y=nz+q$ 之平面之方程式.

設平面爲 $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$

已知直線之方向數爲 $m,\ n,\ 1.$

故得 $$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{1}.$$

即平面爲 $m(x-x_1)+n(y-y_1)+(z-z_1)=0.$

5. 當題 3(b) 中諸線在一平面內時,證明

$$(a_1-a_2)(n_1-n_2)=(b_1-b_2)(m_1-m_2).$$

已知兩直線可化爲 $$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z}{1}$$

及 $$\frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z}{1}.$$

第一直線過 $(a_1, b_1, 0)$, 故過此直線之平面爲

$$A(x-a_1)+B(y-b_1)+Cz=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

而 $$Am_1+Bn_1+C=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

第二直線過 $(a_2, b_2, 0)$, 故過此直線之平面爲

$$A(x-a_2)+B(y-b_2)+Cz=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

而　　$$Am_2+Bn_2+C=0 \quad\cdots\cdots(4)$$

設一平面過此二直線，則此四條件當同時存在。

(3)−(1)，得　$A(a_1-a_2)+B(b_1-b_2)=0,\quad \dfrac{A}{-B}=\dfrac{b_1-b_2}{a_1-a_2}.$

(2)−(4)，得　$A(m_1-m_2)+B(n_1-n_2)=0,\quad \dfrac{A}{-B}=\dfrac{n_1-n_2}{m_1-m_2}.$

故得　　$$\frac{b_1-b_2}{a_1-a_2}=\frac{n_1-n_2}{m_1-m_2}.$$

即　　$$(a_1-a_2)(n_1-n_2)=(b_1-b_2)(m_1-m_2).$$

6.　求在直線 $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$ 與平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 間之角 θ.

一直線與一平面間之角，乃此線與其在平面上正射影間之銳角，此角等於自 $90°$ 減去此線與平面之法線間之角。

此線與平面法線間之角爲

$$\cos^{-1}\frac{Aa+Bb+Cc}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

故直線與平面間之角爲

$$\sin^{-1}\frac{Aa+Bb+Cc}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

7.　求過 $P_3(x_3,y_3,z_3)$ 而平行於 $\dfrac{x-x_1}{a_1}=\dfrac{y-y_1}{b_1}=\dfrac{z-z_1}{c_1}$ 與 $\dfrac{x-x_2}{a_2}=\dfrac{y-y_2}{b_2}=\dfrac{z-z_2}{c_2}$ 各線之平面之方程式。

設平面爲 $A(x-x_3)+B(y-y_3)+C(z-z_3)$，則

$$Aa_1+Bb_1+Cc_1=0,\quad Aa_2+Bb_2+Cc_2=0.$$

解之，得　$$\frac{A}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{B}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{C}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

故　$$(b_1c_2-b_2c_1)(x-x_3)+(c_1a_2-c_2a_1)(y-y_3)$$
$$+(a_1b_2-a_2b_1)(z-z_3)=0.$$

8.　求平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 平行於直線 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$ 之必要條件。

將直線化成對稱式，得其方向數爲

$$B_2C_3-B_3C_2,\quad C_2A_3-C_3A_2,\quad A_2B_3-A_3B_2.$$

平面與此線平行，則

$$A(B_2C_3-B_3C_2)+B(C_2A_3-C_3A_2)+C(A_2B_3-A_3B_2)=0.$$

9. 求由點 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 與直線 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 所決定之平面之方程式。

過兩平面交線之直線系為

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+k(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

過 (x_1, y_1, z_1)，則

$$A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1+k(A_2x_1+B_2y_1+C_2z_1+D_2)=0.$$

解 k，得 $$k=\frac{-(A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1)}{A_2x_1+B_2y_1+C_2z_1+D_2}.$$

代入，得 $$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)(A_2x_1+B_2y_1+C_2z_1+D_2)$$
$$=(A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1)(A_2x+B_2y+C_2z+D_2).$$

10. 求由兩相交直線 $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ 與 $\frac{x-x_1}{a_2}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{c_2}$ 所決定之平面之方程式。

兩直線均過 (x_1, y_1, z_1)，故平面亦過此點，設平面為

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

故 $$Aa_1+Bb_1+Cc_1=0,\quad Aa_2+Bb_2+Cc_2=0.$$

解之，得 $$\frac{A}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{B}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{C}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

故平面為 $$(b_1c_2-b_2c_1)(x-x_1)+(c_1a_2-c_2a_1)(y-y_1)$$
$$+(a_1b_2-a_2b_1)(z-z_1)=0.$$

11. 求由二平行直線 $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ 與 $\frac{x-x_2}{a}=\frac{y-y_2}{b}=\frac{z-z_2}{c}$ 所決定之平面之方程式。

兩直線分別過 (x_1, y_1, z_1) 及 (x_2, y_2, z_2) 兩點而方向數均為 a, b, c，設平面為

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

故 $$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0,\quad Ax_2+By_2+Cz_2+D=0,$$
$$Aa+Bb+Cc=0.$$

解 B, C, D，代入消去 A，得

$$[(y_1-y_2)c-(z_1-z_2)b]x+[(z_1-z_2)a-(x_1-x_2)c]y$$

$$+[(x_1-x_2)b-(y_1-y_2)a]z+(y_1z_2-y_2z_1)a$$
$$+(z_1x_2-z_2x_1)b+(x_1y_2-x_2y_1)c=0.$$

12. 求直線 $x=mz+a,\ y=nz+b$ 在平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 內之必要條件.

化直線爲對稱式,得

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z}{1}.$$

直線過 $(a,b,0)$,故平面亦過此點,因得

$$Aa+Bb+D=0.$$

又平面平行於此直線,則

$$Am+Bn+C=0.$$

13. 求通過直線 $\dfrac{x-x_1}{a_1}=\dfrac{y-y_1}{b_1}=\dfrac{z-z_1}{c_1}$ 而平行於直線 $\dfrac{x-x_2}{a_2}=\dfrac{y-y_2}{b_2}=\dfrac{z-z_2}{c_2}$ 之平面之方程式.

設平面爲 $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$,則

$$Aa_1+Bb_1+Cc_1=0,\quad Aa_2+Bb_2+Cc_2=0.$$

解之代入,得 $$(b_1c_2-b_2c_1)(x-x_1)+(c_1a_2-c_2a_1)(y-y_1)$$
$$+(a_1b_2-a_2b_1)(z-z_1)=0.$$

14. 求由 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 與過 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 而有方向數 a,b,c 之直線所決定之平面之方程式.

平面過 (x_1,y_1,z_1) 及 (x_2,y_2,z_2) 而直線之方向數爲 a,b,c,故其條件及結果與題 11 同.

第十五章　特種曲面

原本第 281—283 頁習題

1. 求下列方程式各軌跡之性質;如軌跡爲一球面,求其中心與半徑;如爲一點球,則求其中心之坐標:

(a) $x^2+y^2+z^2+4x-6z=0.$

整理配方,得

$$(x^2+4x+4)+y^2+(z^2-6z+9)=13.$$

即 $$(x+2)^2+y^2+(z-3)^2=13.$$

故爲一球面,球心爲 $(-2,0,3)$,半徑爲 $\sqrt{13}$.

(b) $x^2+y^2+z^2-4x+2y-5=0.$

整理配方，得

$$(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)+z^2=10.$$

即 $$(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=10.$$

故爲一球面，球心爲 $(2,-1,0)$，半徑爲 $\sqrt{10}$.

(c) $x^2+y^2+z^2-x+4y+10=0.$

配方，得 $$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+2)^2+z^2=-5\frac{3}{4}.$$

r^2 不能爲負，故無軌跡.

(d) $x^2+y^2+z^2-12y+6z=5.$

球心爲 $(0,6,-3)$，半徑爲 $5\sqrt{2}$.

(e) $x^2+y^2+z^2-4x+6y+8z+29=0$

配方，得 $$(x-2)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=0.$$

r^2 爲零，故爲一點球，其坐標爲 $(2,-3,-4)$.

(f) $x^2+y^2+z^2+2x+2y+4z=0.$

球心爲 $(1,1,2)$，半徑爲 2.

2. 求一點之軌跡之方程式，此點：

(a) 至 $\left(0,\frac{1}{2},-2\right)$ 之距離爲 $\frac{1}{2}$

設 (x,y,z) 爲軌跡上一點，依距離公式，得

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(z+2)^2=\frac{1}{4}.$$

$$x^2+y^2+z^2-y+4z+4=0.$$

(b) 至 $\left(-2,\frac{1}{3},0\right)$ 之距離爲 $\sqrt{5}$.

$$(x+2)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+z^2=5.$$

$$9x^2+9y^2+9z^2+36x-6y=8.$$

(c) 至 $(-3,2,1)$ 之距離爲 4.

$$(x+3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=16.$$

$$x^2+y^2+z^2+6x-4y-2z=2.$$

(d) 至 $\left(-1,3,\frac{2}{3}\right)$ 之距離爲 $\sqrt{3}$.

$$(x+1)^2+(y-3)^2+\left(z-\frac{2}{3}\right)^2=3.$$

$$9x^2+9y^2+9z^2+18x-54y-12z+64=0.$$

3. 求球面之方程式:

(a) 以 $(3,0,4)$ 與 $(4,6,0)$ 之連線爲半徑而以第一點爲球心.

半徑之長爲 $\sqrt{(4-3)^2+(6-0)^2+(0-4)^2}=\sqrt{53}.$

故得 $(x-3)^2+y^2+(z-4)^2=53.$

即 $x^2+y^2+z^2-6x-8z=28.$

(b) 以 $(3,0,7)$ 與 $(-2,1,1)$ 之連線爲直徑。

球心在二點之中點,即 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 4\right).$

半徑爲 $\frac{1}{2}\sqrt{5^2+1+6^2}=\frac{1}{2}\sqrt{62}.$

故球面爲 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(z-4)^2=\frac{31}{2}.$

$$x^2+y^2+z^2-x-y-8z+1=0.$$

(c) 球心爲 $(2,-2,1)$ 而切於 XZ 平面。

半徑等於點與 XZ 面之距離,即 2.

$$(x-2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4.$$

$$x^2+y^2+z^2-4x+4y-2z+5=0.$$

(d) 過 $(2,0,0)$, $(0,4,0)$, $(0,0,-4)$ 與 $(-8,0,0)$ 四點。

設圓心爲 $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$, 則

$$4+2a+d=0,\quad 16+4b+d=0,$$

$$16-4a+d=0,\quad 64-8c+d=0.$$

解之,得 $a=2,\quad d=-8,\quad b=-2,\quad c=7.$

因得 $x^2+y^2+z^2+2x-2y+7z-8=0.$

4. 證明適合下列各情形中已知條件之點之軌跡,皆爲一球面,並求其半徑與球心:

(a) 至 $(7,1,-3)$ 之距離爲至 $\left(-\frac{5}{4},-2,\frac{3}{2}\right)$ 之距離之二倍.

$$(x-7)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+(y+2)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2.$$

$$x^2+y^2+z^2+8x+6y-2z-\frac{37}{4}=0.$$

$$(x+4)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=\frac{141}{4}.$$

(b) 至 $(-3, 4, 5)$ 之距離爲至原點之距離之四倍。

$\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2}=4\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

$15x^2+15y^2+15z^2-6x+8y+10z=50$.

$$\left(x-\frac{3}{15}\right)^2+\left(y+\frac{4}{15}\right)^2+\left(z+\frac{5}{15}\right)^2=\frac{16\times 50}{225}.$$

$$\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\left(y+\frac{4}{15}\right)^2+\left(z+\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)^2.$$

故爲一球,球心爲 $\left(\frac{1}{5}, -\frac{4}{15}, -\frac{1}{3}\right)$, 半徑爲 $\frac{4}{3}\sqrt{2}$.

(c) 至 $(4, -5, 1)$ 與 $(0, 2, -4)$ 之距離之平方和爲 64.

$$(x-4)^2+(y+5)^2+(z-1)^2+x^2+(y-2)^2+(z+4)^2=64.$$

$$2x^2+2y^2+2z^2-8x+6y+6z=2.$$

$$x^2+y^2+z^2-4x+3y+3z=1.$$

$$(x-2)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{38}}{2}\right)^2.$$

故爲一球,球心爲 $\left(2, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, 半徑爲 $\frac{\sqrt{38}}{2}$.

(d) 至 $x+y+z=5$, $2x-3y-2z=1$, $3x-2y+3z=6$ 三平面垂直距離之平方和爲 5.

設 (x, y, z) 爲軌跡上一點,則至三平面之距離爲

$$d_1=\frac{x+y+z-5}{\sqrt{3}},\quad d_2=\frac{2x-3y-2z-1}{\sqrt{17}},\quad d_3=\frac{3x-2y+3z-6}{\sqrt{22}}.$$

其平方之和爲 5, 故

$$\frac{(x+y+z-5)^2}{3}+\frac{(2x-3y-2z-1)^2}{17}+\frac{(3x-2y+3z-6)^2}{22}=5.$$

5. 求球面之方程式,此球面:

(a) 與 $x^2+y^2+z^2-6x+4z-36=0$ 同心並過 $(2, 5, -7)$.

已知球之球心爲 $(3, 0, -2)$, 此點與 $(2, 5, -7)$ 之距離爲 $\sqrt{51}$, 卽半徑,故得

$$(x-3)^2+y^2+(z+2)^2=51.$$

$$x^2+y^2+z^2-6x+4z=38.$$

(b) 之球心爲 $(4, -4, 3)$ 而切於平面 $3x+2y-z=7$.

半徑等於球心至平面之距離，即

$$\frac{4\times3-4\times2-3\times1-7}{\sqrt{14}}=-\frac{6}{\sqrt{14}}.$$

故球面爲 $(x-4)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=\frac{36}{14}.$

$$x^2+y^2+z^2-8x+8y-6z+\frac{269}{7}=0.$$

(c) 之球心在 XZ 平面中而過 $(1, 0, 2), (1, 3, 1), (-3, 0, 0)$ 三點。

球心在 XZ 面內，故設球心爲 $(x_1, 0, z_1)$，三點在球上，故與球心等距。

$(x_1-1)^2+(z_1-2)^2=(x_1-1)^2+9+(z_1-1)^2=(x_1+3)^2+z_1^2.$

即 $-2x_1-4z_1+5=-2x_1-2z_1+11=6x_1+9.$

故 $x_1=1, z_1=-3$ 即球心爲 $(1, 0, -3).$

球心與三點之距離爲 5，故球爲

$$(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=25.$$

即 $x^2+y^2+z^2-2x+6z=15.$

(d) 之球心在 z 軸上而過 $(3, 4, 0)$ 與 $(-2, 3, 5)$.

設球心爲 $(0, 0, z_1)$，則

$$3^2+4^2+z_1^2=2^2+3^2+(z_1-5)^2,\quad z_1=\frac{13}{10}.$$

半徑爲 $\sqrt{3^2+4^2+\left(\frac{13}{10}\right)^2}=\frac{1}{10}\sqrt{2669}.$

故球爲 $x^2+y^2+\left(z-\frac{13}{10}\right)^2=\frac{2669}{100}.$

即 $5x^2+5y^2+5z^2-13z=125.$

(e) 過 $(1, 5, -3)$ 與 $(-3, 0, 0)$ 而球心在直線 $3x+y+z=0$, $x+2y+1=0$.

設球心爲 (x_1, y_1, z_1)，則其至兩點之距離相等，故

$$(x_1-1)^2+(y_1-5)^2+(z_1+3)^2=(x_1+3)^2+y_1^2+z_1^2.$$

即 $4x_1+5y_1-3z_1=13.$

又球心在直線上，故

$$3x_1+y_1+z_1=0,\quad x_1+2y_1+1=0.$$

解之，得 $x_1=\frac{17}{9},\quad y_1=-\frac{13}{9},\quad z_1=-\frac{38}{9}.$

半徑爲 $\sqrt{\left(-3-\frac{17}{9}\right)^2+\left(\frac{13}{9}\right)^2+\left(\frac{38}{9}\right)^2}=\frac{13}{9}\sqrt{21}.$

故得 $\left(x-\frac{17}{9}\right)^2+\left(y+\frac{13}{9}\right)^2+\left(z+\frac{38}{9}\right)^2=\left(\frac{13}{9}\sqrt{21}\right)^2.$

即 $9x^2+9y^2+9z^2-34x+26y+76z-183=0.$

(*f*) 過 $(2,2,0)$, $(0,2,2)$ 與 $(2,0,2)$ 而半徑爲 5.

設圓心爲 (x_1, y_1, z_1)，則

$$(x_1-2)^2+(y_1-2)^2+z_1^2=25,$$
$$x_1^2+(y_1-2)^2+(z_1-2)^2=25,$$
$$(x_1-2)^2+y_1^2+(z_1-2)^2=25.$$

解之，得 $x_1=y_1=z_1=\frac{4\pm\sqrt{67}}{3}.$

故圓爲

$$\left(x-\frac{4\pm\sqrt{67}}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4\pm\sqrt{67}}{3}\right)^2+\left(z-\frac{4\pm\sqrt{67}}{3}\right)^2=25.$$

6. 求切於下列各球面上已知之平面之方程式：

(*a*) $x^2+y^2+z^2-14=0$, 在 $(3,-2,1)$.

圓心爲 $(0,0,0)$，過 $(3,-2,1)$ 之半徑之方向數爲 $3,-2,1$.

故平面爲 $3(x-3)-2(y+2)+(z-1)=0.$

$$3x-2y+z-14=0.$$

(*b*) $x^2+y^2+z^2-6x+4z-36=0$, 在 $(1,6,-5)$.

圓心爲 $(3,0,-2)$，過 $(1,6,-5)$ 之半徑之方向數爲 $2,-6,3$，與此半徑垂直之平面之方向數當與此成比例。又平面過 $(1,6,-5)$，故

$$2(x-1)-6(y-6)+3(z+5)=0.$$
$$2x-6y+3z+49=0.$$

(*c*) $x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z=0$, 在 $(0,0,-6)$.

圓心爲 $(2,1,-3)$，過 $(0,0,-6)$ 之半徑之方向數爲 $2,1,3$，故得平面

$$2x+y+3(z+6)=0.$$
$$2x+y+3z+18=0.$$

(*d*) $x^2+y^2+z^2-2x+6z=15$, 在 $(1,5,-3)$.

圓心為 $(1,0,-3)$, 過 $(1,\ 5,\ -3)$ 之半徑之方向數為 $0,5,0$, 故得
$$y-5=0.$$

7. 已知兩球面 A: $x^2+y^2+z^2-6x+8y-10z+41=0$ 與 B: $x^2+y^2+z^2+6x+2y-6z+10=0$. 求第三球面之方程式, 設:

(a) A 與 B 兩球心之連線為其直徑。

二球面可書為 A: $(x-3)^2+(y+4)^2+(z-5)^2=3^2$.
B: $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=3^2$.

AB 球心聯線之中點為 $\left(0,\frac{5}{2},-4\right)$, 兩球心之距離為 7, 故第三圓之半徑為 $\frac{7}{2}$.

故得球
$$x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2+(z+4)^2=\frac{49}{4}.$$
$$x^2+y^2+z^2-5y+8z+10=0.$$

(b) 其球心與 A 相同而切於 B (有二情形).

其球心在 A 與 B 球心之連線上, 而

兩球心之距離為 7, B 之半徑為 3, 故相切球之半徑當為 $7\pm3=10$ 及 4, A 之球心為 $(3,-4,5)$, 故得
$$(x-3)^2+(y+4)^2+(z-5)^2=100,$$
$$(x-3)^2+(y+4)^2+(z-5)^2=16.$$
或
$$x^2+y^2+z^2-6x+8y-10z-50=0,$$
$$x^2+y^2+z^2-6x+8y-10z+34=0.$$

(c) 與 A 及 B 皆相切 (四種情形).

若外切於 AB, 則球心為兩球心之中點, 而半徑為 $\frac{1}{2}(7-2\times3)=\frac{1}{2}$, 故得球
$$x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2+(z+4)^2=\frac{1}{4}.$$

若 AB 內切於所求球面, 則圓心同上, 而半徑為 $\frac{1}{2}(7+2\times3)=\frac{13}{2}$, 故得球
$$x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2+(z+4)^2=\frac{169}{4}.$$

若二球一外切一內切，則半徑為 $\frac{7}{2}$；若 A 內切 B 外切，則圓心在 AB 聯心線上距 $A\ \frac{1}{2}$ 距 $B\ \frac{13}{2}$ 之處，反之，則在距 $B\ \frac{1}{2}$ 距 $A\ \frac{13}{2}$ 之處，故當求二點分 AB 之聯心線為 $1:13$ 及 $13:1$ 即為球心，因得

$$x_1=\frac{3-39}{14}=-\frac{18}{7},\quad y_1=\frac{-4-13}{14}=-\frac{17}{14},\quad z_1=\frac{5+39}{14}=\frac{22}{7};$$

$$x_2=\frac{-3+39}{14}=\frac{18}{7},\quad y_2=\frac{-1-52}{14}=-\frac{53}{14},\quad z_2=\frac{3+65}{14}=\frac{34}{7}.$$

故兩球為

$$\left(x+\frac{18}{7}\right)^2+\left(y+\frac{17}{14}\right)^2+\left(z-\frac{22}{7}\right)^2=\frac{49}{4},$$

$$\left(x-\frac{18}{7}\right)^2+\left(y+\frac{53}{14}\right)^2+\left(z-\frac{34}{7}\right)=\frac{49}{4}.$$

(d) 其球心在 B 球面上而切於 A（四種情形）.

球心當在兩球之聯心線上，距 B 心 3 A 心 4，即

$$x_1=\frac{3-\frac{4}{3}\cdot 3}{\frac{7}{3}}=-\frac{3}{7},\quad y_1=\frac{-4-\frac{4}{3}}{\frac{7}{3}}=-\frac{16}{7},\quad z_1=\frac{5+\frac{4}{3}\cdot 3}{\frac{7}{3}}=\frac{27}{7}$$

半徑為 1 或 7，可得二球為

$$\left(x+\frac{3}{7}\right)^2+\left(y+\frac{16}{7}\right)^2+\left(z-\frac{27}{7}\right)^2=1,$$

$$\left(x+\frac{3}{7}\right)^2+\left(y+\frac{16}{7}\right)^2+\left(z-\frac{27}{7}\right)^2=7^2.$$

又球心可在 AB 聯心線之延線上，外分 AB 聯心線為 $10:3$，可依上法求一點，半徑則為 7 或 13.

8. 求諸平面之方程式，此等平面切球面 $x^2+y^2+z^2-10x+5y-2z-24=0$ 於其與坐標軸交者.

球面可寫作 $(x-5)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2+(z-1)^2=\left(\frac{5\sqrt{17}}{2}\right)^2$，故球心為 $\left(5,-\frac{5}{2},1\right)$，半徑為 $\frac{5\sqrt{17}}{2}$，球面與三軸之交點為

$x^2-10x-24=0,\quad (x-12)(x+2)=0,\quad x=12$ 或 -2;
$y^2+5y-24=0,\quad (y+8)(y-3)=0,\quad y=-8$ 或 3;
$z^2-2z-24=0,\quad (z-6)(z+4)=0,\quad z=6$ 或 -4.

分別過此六點，而垂直於此六點與球心之聯線之平面，即爲所求六切面：

$$7(x-12)+\frac{5}{2}y-z=0,$$
$$7(x+2)-\frac{5}{2}y+z=0,$$
$$5x+\frac{11}{2}(y+8)+z=0,$$
$$5x-\frac{11}{2}(y-3)+z=0,$$
$$5x-\frac{5}{2}y-5(z-6)=0,$$
$$5x-\frac{5}{2}y+5(z+4)=0.$$

9. 求一球面之方程式，此球內切於由下列任意四個平面所成之四面體內：

$$14x+5y-2z-168=0,\quad 10x+11y+2z+88=0,$$
$$14x-5y+2z+28=0,\quad 2x-y-2z+12=0,$$
$$10x-11y+2z+33=0,\quad 2x-y+2z+8=0.$$

設球心爲 (x_1, y_1, z_1)，半徑爲 r，則

$$14x_1+5y_1-2z_1-168=15r,$$
$$14x_1-5y_1+2z_1+28=15r,$$
$$10x_1-11y_1+2z_1+33=10r,$$
$$10x_1+11y_1+2z_1+88=15r,$$
$$2x_1-y_1-2z_1+12=3r,$$
$$2x_1-y_1+2z_1+8=3r.$$

任擇四方程式解之，可得圓心 (x_1, y_1, z_1) 及 r 得一球，六個中取四個有十五種取法，故可得十五個球。

10. 求切於下列球面之最小球面之方程式：

$$x^2+y^2+z^2-2x-6y+1=0,\quad x^2+y^2+z^2+6x+2y-4z+5=0.$$

將兩球寫成標準式，得

$$(x-1)^2+(y-3)^2+z^2=3^2,$$
$$(x+3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=3^2.$$

最小相切之球其球心當在二球聯心線之中點,即 $(-1,1,1)$,兩球聯心線之長爲 6, 適等於兩球半徑之和，故兩球實兩切中間不能更置相切之球,故最小相切球必使兩球內切於其中,故半徑爲 6, 即球爲

$$(x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=36.$$
$$x^2+y^2+z^2+2x-2y-2z=33.$$

教本答案爲球心相同半徑爲零之點球.

原 本 第 286—287 頁 習 題

1. 決定下列諸曲面之性質而作其圖形:

(a) $x^2+z^2=16.$

以 y 軸爲軸之圓柱形，其在 XZ 面上之蹤線爲圓 $x^2+z^2=16$; 其在 XY 面上之蹤線爲 $x=\pm 4$, $y=0$; YZ 面上之蹤線爲 $z=\pm 4$, $y=0$.

(b) $x^2+y^2=4x.$

$$x^2-4x+4+y^2=4.\quad (x-2)^2+y^2=4.$$

以 $x=2$, $y=0$ 爲軸之圓柱形,其在 XY 面上之蹤線爲圓 $(x-2)^2+y^2=4$; 其在 XZ 面上之蹤線爲 z 軸及 $x=4$, $z=0$.

(c) $y^2+4x^2=16.$

爲橢圓柱形，XY 面上之蹤線爲橢圓 $4x^2+y^2=16.$

(d) $x^2-y^2-z^2=0.$

以 x 軸爲軸頂點在原點之圓錐體,當 $x=k$ 時，截面爲圓 $y^2+z^2=k^2.$

(e) $y^2+xz+yz=0.$

當 $x=0$ 時，$y^2+yz=0$, $y=0$ 或 $y=-z$.

當 $y=0$ 時，$xz=0$.

當 $z=0$ 時，$y=0$.

故爲一錐形.

(f) $xz-6=0.$

爲一雙曲線柱形，其在 XZ 面上之蹤線爲一雙曲線 $xz=6$.

(g) $y^2+z^2-2xz=0.$

爲一圓錐形,頂點在原點,軸在 XZ 面內,當 $x=k$ 時,截面爲圓.

(h) $y^2-2z^3=0.$

爲一三次曲線之柱形，一直線平行於 x 軸,依 YZ 面上之蹤線爲 $y^2-2z^3=0$ 移動而成。

(i) $x^2-4y^2+6z^2=0.$

爲一橢圓錐形，$y=k$ 時,其截面爲橢圓。

(j) $x^2-z^2=25.$

爲雙曲線柱形,其在 XZ 面上之蹤線爲雙曲線 $x^2-z^2=25.$

2. 求適合已知條件一點之軌跡之方程式. 決定此軌跡之性質,而作其圖形:

(a) 從 z 軸至此點之距離之平方等於從 YZ 平面至此點之距離之二倍。

設一點 (x, y, z) 在軌跡上，則至 z 軸之距離爲 $\sqrt{x^2+y^2}$, 至 YZ 面之距離爲 x, 故得

$$x^2+y^2=2x \quad 卽 \quad (x-1)^2+y^2=1.$$

故軌跡爲一圓柱形,其軸平行於 z 軸卽 $x=1, y=0$, 另一平行線依 XY 面上之蹤線爲圓 $(x-1)^2+y^2=1$ 繞此軸成一圓柱。

(b) 從 z 軸至此點之距離爲從 XY 平面至此點之距離之三倍。

設 (x, y, z) 爲軌跡上一點,則得

$$\sqrt{x^2+y^2}=3z, \quad x^2+y^2-9z^2=0.$$

故爲一圓錐形,以 z 軸爲軸,頂點在原點。

(c) 從點 $(4, 0, 0)$ 與從 XY 平面至此點之距離爲相等。

設 (x, y, z) 爲軌跡上一點,則

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2+z^2}=z.$$

$$x^2-8x+16+y^2=0.$$

故爲一圓柱形，XY 面上之蹤線爲圓 $(x-4)^2+y^2=0$, 其軸平行於 z 軸,卽直線 $x=4, y=0.$

(d) 從 XY 平面與從 z 軸至此點之距離爲相等。

$$z=\sqrt{x^2+y^2}. \quad x^2+y^2-z^2=0.$$

圓錐形。

(e) 離 y 軸之距離爲離 z 軸之距離之四倍。

$$\sqrt{x^2+z^2}=4\sqrt{x^2+y^2}.$$

$$15x^2+16y^2-z^2=0.$$

圓錐形。

(*f*) 離三坐標面之距離和等於離原點之距離.

$$x+y+z=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz=x^2+y^2+z^2.$$

$$xy+yz+xz=0.$$

圓錐形.

(*g*) 距點 $(0,0,5)$ 與 x 軸之距離爲相等.

$$\sqrt{x^2+y^2+(z-5)^2}=\sqrt{y^2+z^2}.$$

$$x^2-10z+25=0.$$

拋物線柱形,其在 XZ 面上之跡線爲拋物線 $x^2-10z+25=0$.

(*h*) 離 XY 平面與 XZ 平面之距離，其和與差之積爲離 YZ 平面之距離平方之四倍.

$$(z+y)(z-y)=4x^2.$$

$$4x^2+y^2-z^2=0.$$

圓錐形.

3 求圓錐面之方程式,其頂點爲原點而其發生線割圓 $y^2+z^2=4$, $x=1$.

圓錐形,以 x 軸爲軸，故設方程式爲

$$y^2+z^2-ax^2=0.$$

以 $y^2+z^2=4$ 及 $x=1$ 代入,得 $a=4$.

故得 $$y^2+z^2-4x^2=0.$$

4. 求以頂點爲原點,其發生線割橢圓 $2x^2+3z^2=6$, $y=1$ 之圓錐面之方程式.

爲一橢圓柱形,以 y 軸爲軸,設方程式爲

$$2x^2-by^2+3z^2=0.$$

以 $2x^2+3z^2=6$, $y=1$ 代入,得 $b=6$.

故得 $$2x^2-6y^2+3z^2=0.$$

5. 一點移動時，使其從兩垂直相交線之距離之平方差爲一常數,則其軌跡爲何?

設兩垂直直線爲 x 軸及 y 軸,即 $y=0$, $z=0$ 及 $x=0$, $z=0$. 又設 (x,y,z) 爲軌跡上一點,則

$$(y^2+z^2)-(x^2+z^2)=k.$$

$$y^2-x^2=k.$$

故爲一雙曲線柱形.

6.　從一平面與從一垂直於此平面之直線至一點之距離爲相等，則此點之軌跡爲何？

設平面爲 XY 面，直線爲 z 軸，則

$$\sqrt{x^2+y^2}=z.$$

$$x^2+y^2-z^2=0.$$

故爲一圓錐形。

7.　一點移動時，其從兩垂直相交線之距離之比爲一常數，則其軌跡爲何？

設兩垂直直線爲 x 軸及 y 軸，則

$$\sqrt{y^2+z^2}/\sqrt{x^2+z^2}=k.$$

$$y^2+z^2=k^2x^2+k^2z^2.$$

$$k^2x^2+(k^2-1)z^2-y^2=0.$$

故爲一圓錐形。

8.　一點移動時，使其從一定點之距離常等於從一定線之距離，其軌跡爲何？

設定直線爲 z 軸，定點爲 $(x_1, 0, 0)$，則

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-x_1)^2+y^2+z^2}.$$

$$z^2+2x_1x+x_1{}^2=0.$$

故爲一拋物線柱形。

9.　一點離三個互相垂直平面之距離和，等於離其公共交點距離之一半，此軌跡爲何？

設三直線爲三軸交點即原點，則

$$2(x+y+z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

$$4x^2+4y^2+4z^2+8xy+8xz+8yz=x^2+y^2+z^2.$$

$$3x^2+3y^2+3z^2+8xy+8xz+8yz=0.$$

原本第 290 頁習題

1.　作下列已知曲面與已知平面相交之曲線：

(a)　$4x^2+y^2-8z=0,\ z=2.$

消去 z，得　$4x^2+y^2=16$　即　$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1.$

故在 $z=2$ 平面上之交線爲橢圓 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1.$

(b) $x^2+3y^2+4z^2=45,\ z=3.$

消去 z，得 $x^2+3y^2=9$ 即 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1.$

故在 $z=3$ 平面上之交線為一橢圓。

(c) $x^2+3y^2+4z^2=45,\ x=3.$

消去 x，得 $3y^2+4z^2=36$ 即 $\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{9}=1.$

故在 $x=3$ 平面上之交線為一橢圓.

(d) $x^2+3y^2-4z^2=9,\ z=3.$

消去 z，得 $x^2+3y^2=45$ 即 $\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{15}=1.$

交線為一橢圓.

(e) $x^2+3y^2-4z^2=16,\ x=2.$

消去 x，得 $3y^2-4z^2-12=0.$

為一雙曲線.

2. 討論下列各曲面之方程式，作其蹤線:

(a) $x^2+4y^2+9z^2=36.$

截部:

使 $y=z=0$，x 軸上之截部為 $x=\pm6.$

使 $x=z=0$，y 軸上之截部為 $y=\pm3.$

使 $x=y=0$，z 軸上之截部為 $z=\pm2.$

蹤線:

使 $z=0$，XY 面上之蹤線為橢圓 $x^2+4y^2=36.$

使 $y=0$，XZ 面上之蹤線為橢圓 $x^2+9z^2=36.$

使 $x=0$，YZ 面上之蹤線為橢圓 $4y^2+9z^2=36.$

對稱: 對稱於三軸，三坐標面並原點.

交線: $|x|<6$ 時，交線均為橢圓; $x=\pm6$ 時，交線祇一點，即 $y=0,\ z=0.$

$|y|<3,\ |z|<2$ 時同; $y=\pm3,\ z=\pm2$ 時亦同.

(b) $x^2+4y^2=8z.$

$y=z=0$ 時，$x=0$; $x=y=0$ 時，$z=0$; $x=z=0$ 時，$y=0$，交截部祇 $(0,0,0)$ 一點.

$z=0$ 時，XY 面上之蹤線爲點橢圓 $x^2+4y^2=0$.

$y=0$ 時，XZ 面上之蹤線爲拋物線 $x^2=8z$.

$x=0$ 時，YZ 面上之蹤線爲拋物線 $y^2=2z$.

對稱於 YZ 面，XZ 面及 z 軸。

(c) $x^2+y^2+z^2=25$.

截部: $y=z=0, x=\pm 5$; $x=z=0, y=\pm 5$; $x=y=0, z=\pm 5$.

蹤線: $z=0,\ x^2+y^2=25$; $y=0,\ x^2+z^2=25$, $x=0,\ y^2+z^2=25$, 均爲圓。

對稱: 對稱於三軸，三坐標面及原點。

(d) $z^2+7xy=0$.

截部: $(0, 0, 0)$.

蹤線: 僅一點(原點)。

對稱: 對稱於 XY 面，z 軸及原點。

交線: $z=k,\ xy=-\dfrac{k^2}{7}$，雙曲線。

$x=k,\ z^2=-7ky$，拋物線。

$y=k,\ z^2=-7kx$，拋物線。

(e) $x^2-y^2+z^2=25$.

截部: $x=\pm 5,\quad z=\pm 5,\quad y$ 軸上無截部。

蹤線: $x^2-y^2=25,\ z^2-y^2=25$, 兩雙曲線; $x^2+z^2=25$, 圓.

對稱: 對稱於三軸，三坐標面並原點。

交線: 與平行於 YZ 面及 XY 面之交線均爲雙曲線，與 XZ 面平行之平面之交線均爲圓。

(f) $x^2-y^2-4z^2=8$.

截部: $x=\pm 2\sqrt{2}$ y 軸及 z 軸上無截部.

蹤線: $x^2-y^2=8,\quad x^2-4z^2=8$, 雙曲線 YZ 面上無蹤線。

對稱: 對稱於三軸，三坐標面及原點。

交線: $y=\pm k,\quad x^2-4z^2=8+k^2$ 爲雙曲線。

$z=\pm k,\quad x^2-y^2=8+k^2$ 爲雙曲線。

$|x|>2\sqrt{2},\quad y^2+4z^2>0$ 爲橢圓。

圖形略如教本第 294 頁之圖。

(g) $x^2+9y^2-9z^2=0$.

截部：$x=0$, $y=0$, $z=0$, 截部祇原點一點。

蹤線：$x^2+9y^2=0$ 爲一點 $(0, 0, 0)$.

$x^2-9z^2=0$, 卽 $x+3z=0$, $x-3z=0$ 爲二直線。

$9y^2-9z^2=0$, 卽 $x+y=0$, $x-y=0$ 爲二直線。

圖形爲錐體。

(h) $xy-4=0$.

截部：無截部。

蹤線：XY 面上之蹤線爲 $xy=4$, 一雙曲線。

對稱：對稱於 $x=y$ 面，$x=-y$ 面及原點。

圖形爲以 z 軸爲縱軸之雙曲線柱形，$z=k$ 時，交線均爲雙曲線 $xy=4$.

3. 討論並作下列各方程式之軌跡：

(a) $x^2+4y^2=8z$.

截部：$(0, 0, 0)$.

蹤線：$z=0$, $x^2+4y^2=0$ 爲點橢圓。

$y=0$, $x^2=8z$ 爲拋物線。

$x=0$, $y^2=2z$ 爲拋物線。

對稱：對稱於 YZ 面，XZ 面及 z 軸。

交線：$z=k$ 時，$x^2+4y^2=8k$ 爲橢圓。

$x=k$ 時，$y^2=2\left(z-\frac{k^2}{8}\right)$ 爲拋物線。

$y=k$ 時，$x^2=8\left(z-\frac{k^2}{2}\right)$ 爲拋物線。

圖形略如教本第 289 頁之圖，惟向上以 z 軸爲軸。

(b) $x^2+4z^2=8y$.

與上題同，圖形亦略同，惟以 y 軸爲軸。

(c) $x^2+4y^2+9z^2=100$.

截部：$x=\pm 10$, $y=\pm 10$, $z=\pm 3\frac{1}{3}$.

蹤線：XY 面，$z=0$, $x^2+y^2=100$, 圓。

XZ 面， $y=0$, $x^2+9z^2=100$, 橢圓。

YZ 面， $x=0$, $y^2+9z^2=100$, 橢圓。

對稱： 對稱於三軸，三坐標面及原點。

(d) $x^2-9y^2=10z$.

截部： $(0, 0, 0)$.

蹤線： $z=0$, $x^2-9y^2=0$, 卽 $x\pm 3y=0$, 兩直線。

$y=0$, $x^2=10z$, 拋物線。

$x=0$, $y^2=-\dfrac{10}{9}z$, 拋物線。

對稱： 對稱於 YZ 面，XZ 面及 z 軸。

(e) $x^2+4y^2-z^2=25$.

與上題 (e) 略同。

(f) $y^2+z^2-4z+8=0$.

截部： $x=0$, $y=0$, $z=2\pm 2\sqrt{3}$; x 軸與 y 軸上無截部。

蹤線： YZ 面上之蹤線爲雙曲線 $y^2+(z-2)^2=-4$.

XZ 面上之蹤線爲兩直線 $z=2\pm 2\sqrt{3}$.

對稱： 對稱於 $y=0$ 及 $z=2$ 兩平面。

圖形爲雙曲線柱形，以 $y=0$, $z=2$ 爲垂直軸，橫截面以 $y=0$ 爲貫軸，$z=2$ 爲共軛軸，卽中心在 $(0, 0, 2)$.

(g) $x^2+4y^2-16x=0$.

截部： $x=0$, $z=0$, $y=0$.

蹤線： $z=0$, 蹤線爲橢圓 $(x-8)^2+4y^2=64$.

$y=0$, $x(x-16)=0$, 兩直線爲 $x=0$ 及 $x=16$.

$x=0$, $y=0$ 爲一直線。

對稱： 對稱於 $y=0$, $z=0$ 及 $x=8$ 三平面。

圖形爲橢圓柱形，以 $x=8$, $y=0$ 爲垂直軸，與平行於 XY 面之交線均爲一橢圓，其中心在 $x=8$, $y=0$, 橢圓二半軸之長爲 8 與 4.

(h) $x^2-y^2-z^2-1=0$.

截部： $x=\pm 1$.

蹤線： $y=0$, XY 面上之蹤線爲 $x^2-y^2=1$, 雙曲線。

$y=0$, XZ 面上之蹤線爲 $x^2-z^2=1$, 雙曲線。

$x=0$, $y^2+z^2=-1$, YZ 面上無蹤線。

對稱：對稱於三軸，三坐標面及原點。

交線：$y=k$, $z=k$, 其交線均爲雙曲線；$|x|>1$ 時其交線爲直線。

(i) $x^2+y^2-2zx=0$.

截部：$(0, 0, 0)$.

蹤線：$z=0$, $x^2+y^2=0$, 點圓。

$y=0$, $x^2-2zx=0$, $x(x-2z)=0$, 兩直線。

$x=0$, $y^2=0$, 原點。

對稱 對稱於 XZ 面，y 軸及原點。

交線：$x=k$, $y=2k\left(z-\frac{k}{2}\right)$, 拋物線。

$y=k$, $x^2-2zx+k^2=0$, 雙曲線。

$z=k$, $(x-k)^2+y^2=k^2$, 圓。

圖形爲一圓錐形，頂點在原點。

(j) $y^2+z^2-x-4=0$.

截部：$x=-4$, $y=\pm 2$, $z=\pm 2$.

蹤線：$z=0$, $y^2=x+4$, 拋物線。

$y=0$, $z^2=x+4$, 拋物線。

$x=0$, $y^2+z^2=4$, 圓。

圖形略如教本第 289 頁之圖，惟頂點在 $(-4, 0, 0)$.

原本第 295 頁習題

1. 討論，作圖，並舉出下列各方程式之軌跡之名稱：

(a) $x^2+4y^2+9z^2=36$.

截部：$x=\pm 6$, $y=\pm 3$, $z=\pm 2$.

蹤線：$\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$,

$\frac{x^2}{6^2}+\frac{z^2}{2^2}=1$,

$\frac{y^2}{3^2}+\frac{z^2}{2^2}=1$,

均爲橢圓，其主軸爲 12, 6, 4.

交線：$|x|<6$, $|y|<3$, $|z|<2$ 時，與各平行於主平面之交線均爲橢圓。在上述範圍以外無軌跡。

此爲橢圓面，中心在原點。

(b) $x^2+4y^2-9z^2=36$.

截部：$x=\pm 6$, $y=\pm 3$, z 軸上無截部。

蹤線：$x^2+4y^2=36$ 爲橢圓。

$\frac{x^2}{6^2}-\frac{z^2}{2^2}=1$, $\frac{y^2}{3^2}-\frac{z^2}{2^2}=1$ 均爲雙曲線。

交線：x 與 y 爲任何值，均爲雙曲線。

z 爲任何值，均爲橢圓。

此爲單葉雙曲面。

(c) $x^2-4y^2-9z^2=36$.

兩葉雙曲面。

(d) $4x^2+9y^2-9z^2=36$.

與 (b) 同，惟 YZ 面上之蹤線及與平行於此面之交線爲等邊雙曲線。

(e) $x^2-y^2-z^2=1$.

與 (c) 同，爲兩葉雙曲面。

(f) $9x^2-4y^2-z^2=36$.

兩葉雙曲面。

(g) $9x^2+y^2-z^2=36$.

單葉雙曲面。

(h) $9x^2-16y^2+4z^2=64$.

單葉雙曲面。

(i) $x^2-4y^2+9z^2+36=0$.

$$4y^2-x^2-9z^2=36.$$

兩葉雙曲面。

(j) $4x^2+4y^2+z^2=16$.

橢圓面，惟在 XY 面上之蹤線與平行於此面之平面上之交線均爲圓。

(k) $x^2+y^2-9z^2=1$.

單葉雙曲面，惟 XY 面上之蹤線與平行於此面之平面上之交線均爲圓。

(l) $x^2+4y^2-z^2=16$.

單葉雙曲面。

(m) $4x^2+16y^2-z^2=64$.

單葉雙曲面.

(n) $x^2-8y^2+2z^2=16.$

單葉雙曲面.

2. 假定一有心二次曲面之方程式為

$$Ax^2+By^2+Cz^2+D=0,$$

而過下列各已知點,求其方程式.舉出曲面之名稱:

(a) $(2,-1,1),(-3,0,0),(1,-1,-2).$

三點皆在曲面上代入,得

$$4A+B+C+D=0\cdots\cdots(1)$$

$$9A+D=0\cdots\cdots(2)$$

$$A+B+4C+D=0\cdots\cdots(3)$$

自 (2), $D=-9A$; 代入 (1), (3), 得

$$B+C=5A,\quad B+4C=8A.$$

故 $C=A$, $B=4A$ 代入原方程式消去 A, 得

$$x^2+4y^2+z^2=9,\ \text{橢圓面.}$$

(b) $(-1,5,4),(-7,1,-8),(8,-2,10).$

同上,得
$$A+25B+16C+D=0,$$
$$49A+B+64C+D=0,$$
$$64A+4B+100C+D=0.$$

解之,得 $B=A,\quad C=-\dfrac{1}{2}A,\quad D=-18A.$

故得
$$x^2+y^2-\frac{1}{2}z^2-18=0.$$

即
$$2x^2+2y^2-z^2-36=0,\ \text{單葉雙曲面.}$$

(c) $(4,-2,-1),(0,1,-3),(3,5,2).$

同上,得
$$16A+4B+C+D=0,$$
$$B+9C+D=0,$$
$$9A+15B+4C+D=0.$$

解之,得 $A=\dfrac{97}{8}B,\quad C=\dfrac{197}{8}B,\quad D=-\dfrac{1781}{8}B.$

故得
$$97x^2+8y^2+197z^2-1781=0,\ \text{橢圓面.}$$

(d) $(-1,-1,\sqrt{5}),(2\sqrt{5},-2,4),(0,0,-2).$

同上,得
$$A+B+5C+D=0,$$

$$20A+4B+16C+D=0,$$
$$4C+D=0.$$

解之,得　$D=-4C,\quad A=-\dfrac{C}{2},\quad B=-\dfrac{C}{2}.$

代入消去 C, 得 $x^2+y^2-2z^2+8=0$, 單葉雙曲面.

3. 求一點之軌跡之方程式,其離點 $(1,0,0)$ 之距離爲離平面 $x=4$ 之垂直距離之半.討論,述其名稱,並作其軌跡.

設 (x,y,z) 爲軌跡上一點,則

$$2\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}=x-4.$$

即　$$4x^2-8x+4+y^2+z^2=x^2-8x+16.$$
$$3x^2+y^2+z^2=12,\text{ 橢圓面.}$$

討論與前同.

4. 求一點之軌跡之方程式,設其從 $(0,-4,0)$ 之距離爲從平面 $y+1=0$ 之垂直距離之二倍.討論,作圖,並述此曲面之名稱.

設 (x,y,z) 爲軌跡上一點,則

$$\sqrt{x^2+(y+4)^2+z^2}=2(y+1).$$
$$x^2+y^2+8y+16+z^2=4y^2+8y+4.$$
$$x^2-3y^2+z^2+12=0,\text{ 單葉雙曲面.}$$

5. 假定爲題 2 之方程式,求過 $(2,1,3)$ 與具下列方程式之曲線之曲面方程式:

(a)　$z=4,\ 3x^2+y^2-9=0.$

當 $z=4,\ x=0$ 時,　　　$y=\pm 3;$
　$z=4,\ y=0$ 時,　　　$x=\pm\sqrt{3}.$

連 $(2,1,3)$, 得三方程式

$$9B+16C+D=0,$$
$$3A+16C+D=0,$$
$$4A+B+9C+D=0.$$

解之,得　$A=3B,\quad C=\dfrac{4}{7}B,\quad D=-\dfrac{127}{7}B.$

代入消去 B, 得 $21x^2+7y^2+4z^2=127.$

(b)　$z=4,\ x^2+y^2-25=0.$

同上,得　$7x^2+7y^2-20z^2+145=0.$

6. 一點移動時,其與空間兩正交直線之距離之平方和爲一常數.證明此軌跡爲一旋轉橢圓面.

設 x, y 兩軸爲所設兩垂直線, (x, y, z) 爲軌跡上一點,則

$$y^2+z^2+x^2+z^2=C.$$

$$x^2+y^2+2z^2=C.$$

故爲一橢圓面,當 $z=k$ 時,交線爲圓,故爲以 z 軸爲旋軸之旋轉橢圓面.

原 本 第 298—299 頁 習 題

1. 討論,作圖,並述下列各曲面之名稱:

(a) $x^2+y^2=4z$.

截部: $(0, 0, 0)$.

蹤線: $x^2+y^2=0$, $x^2=4z$, $y^2=4z$, 點圓及拋物線.

對稱: 對稱於 YZ 面, XZ 面及 z 軸.

交線: 與平行於 XY 面, $z=k$ 之交線均爲圓, $z=-k$ 時無交線,與垂直於 XY 面之平面之交線均爲拋物線.

此爲沿 z 軸之圓拋物面.

(b) $y^2-z^2=6x$.

截部: $(0, 0, 0)$.

蹤線: $y^2=6x$, $z^2=-6x$, 拋物線.

$y^2-z^2=0$, 兩直線.

對稱: 對稱於 XZ 面, XY 面及 x 軸.

交線: 在 $x=k$ 面上之交線均爲雙曲線, k 爲正時,雙曲線以 y 軸爲貫軸, k 爲負時以 z 軸爲貫軸。

此爲雙曲線拋物面,主軸爲 x 軸.

(c) $y^2-4x^2=16z$.

與 (b) 略同,惟主軸爲 z 軸.

(d) $x^2+z^2=8x$.

$$x^2-8x+16+z^2=16. \quad (x-4)^2+z^2=16.$$

此爲以 $x=4$, $z=0$ 直線爲主軸之圓柱形,其橫截面(與 XZ 平行之面)爲半徑 4 之圓.

(e) $3x^2+z^2-4y=0$.

$$3x^2+z^2=4y$$

橢圓拋物面,主軸爲 y 軸.

(f) $y^2-2x^2-4z=0$.

$$y^2-2x^2=4z.$$

雙曲線拋物面，主軸爲 z 軸。

(g) $9y^2-4z^2=288x$.

雙曲線拋物面，主軸爲 x 軸.

(h) $x^2-y^2-z^2=0$.

圓錐形，頂點爲 $(0, 0, 0)$，主軸爲 x 軸.

(i) $2y^2+3z^2-2x=0$.

$2y^2+3z^2=2x$，向右之橢圓拋物面，主軸爲 x 軸.

(j) $y^2-2z^2-4x=0$.

$y^2-2z^2=4x$，雙曲線拋物面，主軸爲 x 軸。

(k) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=6z$.

橢圓拋物面，主軸爲 z 軸。

(l) $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{4}=2y$.

雙曲線拋物面，主軸爲 y 軸.

以上諸題討論方法均與第 295 頁習題及本習題 (a), (b) 略同.

2. 命一無心二次曲面之方程式爲 $Ax^2+By^2+Cz=0$ 之形式，求其方程式，設此曲面過下列諸已知點.述此曲面之名稱:

(a) $(1, 0, 1)$, $(0, 2, 1)$.

已知兩點在曲面上，故

$$A+C=0, \quad 4B+C=0.$$

解之，得 $\qquad C=-4B, \quad A=4B.$

代入 $Ax^2+By^2+Cz=0$ 消去 B，得 $\quad 4x^2+y^2-4z=0.$

此爲橢圓拋物面。

(b) $(1, 0, 1)$, $(0, 2, -1)$.

$$A+C=0, \quad 4B-C=0.$$

解之，得 $\qquad C=4B, \quad A=-4B.$

代入消去 B，得 $\qquad 4x^2-y^2-4z=0.$

此爲雙曲線拋物面。

(c) $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$.

$$A+4B+C=0, \quad 4A+B+C=0.$$

解之，得 $\qquad B=A, \quad C=-5A.$

代入消去 A，得 $\quad x^2+y^2-5z=0$，圓拋物面.

3. 用題 2 之公式，求過曲線 $z=4$, $2x^2+y^2=4$ 之拋物面之

方程式。

設其方程式爲 $Ax^2+By^2+Cz=0.$

以 $z=4$ 代入，得 $Ax^2+By^2=-4C.$

與 $2x^2+y^2=4$ 比較，則 $A=2,\ B=1,\ C=-1$，故得

$$2x^2+y^2-z=0.$$

原 本 第 299 頁 習 題

1. 證明平行於一主平面之諸平面割 (1) 一橢圓拋物面或 (2) 一雙曲線拋物面，所得之拋物線爲全等。

設橢圓拋物面之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2cz.$$

又雙曲線拋物面之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2cz.$$

其主平面爲 $x=0$ 及 $z=0$，平行於主平面，則 $x=k$ 或 $z=k$ 代入，得 $\frac{y^2}{b^2}=2c\left(z-\frac{k^2}{2ca^2}\right)$ 及 $\frac{y^2}{b^2}=-2c\left(z-\frac{k^2}{2ca^2}\right)$.

或 $\frac{x^2}{a^2}=2c\left(z-\frac{k^2}{2cb^2}\right)$ 及 $\frac{x^2}{a^2}=2c\left(z+\frac{k^2}{2cb^2}\right)$.

故其大小相合。

2. 方程式 $\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}+\frac{z^2}{c^2-k}=1,\ a>b>c$，其中 k 爲一通徑，代表一有心二次曲面系，則 k 之何值須除外？此二次曲面爲一橢圓面時，k 應爲何值？爲一單葉雙曲面時？爲一兩葉雙曲面時？

k 不能大於 a^2.

$k<c^2$ 爲橢圓面。

$b^2>k>c^2$ 爲單葉雙曲面。

$a^2>k>b^2$ 爲兩葉雙曲面。

3. 證明題 2 中之二次曲面在各坐標面上諸蹤線皆爲其焦點圓錐曲線(參閱第 55 節之例題).

$$\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}+\frac{z^2}{c^2-k}=1.$$

設 $z=0$，曲面在 XY 面上之蹤線爲

$$\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}=1.$$

$c=\pm\sqrt{(a^2-k)-(b^2-k)}=\pm\sqrt{a^2-b^2}$. 故不論 k 爲何值,其焦點均在 $\pm\sqrt{a^2-b^2}$。

其他兩坐標面上之蹤線亦同.

4. 方程式 $\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}=2cz$, 其中 k 爲一通徑，代表一無心二次曲面系.此二次曲面爲一橢圓拋物面時，k 應爲何值？爲一雙曲線拋物面時？

k 在 a^2 與 b^2 之間時, $\frac{x^2}{a^2-k}$ 及 $\frac{y^2}{b^2-k}$ 爲一正一負,故爲雙曲線拋物面.

否則若 $a>b$, 則 $k>a$ 或 $<b$ 時，上述二項同號，卽爲橢圓拋物面(若 $a<b$ 時,則 $k<a$ 或 $>b$).

5. 如何移動一拋物線使成一拋物面?(參閱題 1).

一拋物線依其軸旋轉時,卽成一圓拋物面.又向其展開之兩翼，同時如依垂直於其平面之方向移動,卽成一橢圓拋物面.

6. 在題 2 中,證明此曲面,一橢圓面,當 k 增加而漸近於 c^2 時,漸漸變爲扁平.約去方程式之分數,證明當 $k=c^2$ 時,此極限曲面爲 XY 平面內之一橢圓.此橢圓之方程式爲何?

當 $k\to c^2$ 時, $c^2-k\to 0$, 故在 z 軸上之軸漸近於 0,故漸趨平坦.

自原式,得 $\frac{(c^2-k)x^2}{a^2-k}+\frac{(c^2-k)y^2}{b^2-k}+z^2=c^2-k.$

當 $k=c^2$ 時,得 $z=0$ 卽爲 XY 面.

代入原式,得 $\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1$, 一橢圓.

第十六章　空間幾何補編

原本第 301—302 頁習題

1. 求在一坐標面內，一已知曲線繞一已知軸旋轉時所成旋轉面之方程式,述其名稱並作此曲面:

(a) $4x-y=2$, x 軸.

設 $P(x, y, z)$ 爲曲面上一點，P 至 x 軸之距離$=y'$，則

$$4x-y'=2.$$

但 $$y'=\sqrt{y^2+z^2}.$$

代入，得 $$4x-2=\sqrt{y^2+z^2}.$$

$$16x^2-16x+4=y^2+z^2.$$

$$16x^2-y^2-z^2-16x+4=0.$$

此爲圓錐形，頂點在 $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$.

(b) $x^2+4z^2=16$, z 軸.

設 $P(x, y, z)$ 爲曲面上一點，P 至 z 軸之距離爲 x'，則

$$x'^2+4z^2=16.$$

但 $$x'^2=x^2+y^2.$$

代入，得 $$x^2+y^2+4z^2=16.$$

此爲旋轉橢圓面.

(c) $9x^2+4y^2=36$, y 軸.

設 $P(x, y, z)$ 爲曲面上一點，P 至 y 軸之距離爲 x'，則

$$9x'^2+4y^2=36.$$

但 $$x'^2=x^2+z^2.$$

代入，得 $9x^2+4y^2+9z^2=36$, 橢圓面.

(d) $9x^2-4y^2=36$, x 軸; y 軸.

設 P 爲曲面上一點，若依 x 軸旋轉，則

$$9x^2-4y'^2=36.$$

$$y'^2=y^2+z^2.$$

故得 $9x^2-4y^2-4z^2=36$, 兩葉雙曲面.

設依 y 軸旋轉，則

$$9x'^2-4y^2=36.$$

$$x'^2=x^2+z^2.$$

故得 $9x^2-4y^2+9z^2=36$, 單葉雙曲面.

(e) $y^2=8x$, x 軸.

設 $P(x, y, z)$ 爲曲面上一點，P 至 x 軸之距離爲 y'，則

$$y'^2=8x.$$

但 $$y'^2=y^2+z^2.$$

故得 $y^2+z^2=8x$, 圓拋物面.

(f) $2x^2-4z^2=1$, 其貫軸；其共軛軸.

其貫軸爲 x 軸，得 $2x^2-4y^2-4z^2=1$, 兩葉雙曲面.

其共軛軸爲 y 軸，得 $2x^2+2y^2-4z^2=1$, 單葉雙曲面.

(g) $x^2=y^3$, y 軸.

答: $x^2+z^2=y^3$.

(h) $2x^2=4-y$, y 軸.

答: $2x^2+2z^2=4-y$.

(i) $xz=8$, z 軸.

設 $P(x, y, z)$ 爲軌跡上一點，則

$$x'z=8.$$

但 $$x'=\sqrt{x^2+y^2}.$$

故 $$z\sqrt{x^2+y^2}=8.$$

即 $$z^2(x^2+y^2)=64.$$

(j) $y=\sin x$, x 軸.

答: $y^2+z^2=\sin^2 x$.

(k) $x^2+4y^2-4x=0$, x 軸 y 軸; $x=2$.

設 $P(x, y, z)$ 爲軌跡上任一點.

1. 過 P 及 x 軸作一平面使 P 至 x 軸之垂直距離爲 y',

則 $$x^2+4y'^2-4x=0.$$

但 $$y'^2=y^2+z^2.$$

故得 $$x^2+4y^2+4z^2-4x=0.$$

2. 過 P 及 y 軸作一平面使 P 至 y 軸之垂直距離爲 x',

則 $$x'^2+4y^2-4x'=0.$$

但 $$x'=\sqrt{x^2+z^2}.$$

故得 $$x^2+4y^2+z^2-4\sqrt{x^2+z^2}=0.$$

3. 原題 $x=2$ 爲一平面不能繞之旋轉，可加一條件 $z=0$, 則爲一直線，可繞之以旋轉.

將原式寫作 $(x-2)^2+4y^2=4$.

設 $x'=x-2$, 則 $x'^2+4y^2=4$.

過 $x=2$, $y=0$ (即 $x'=0$, $y=0$) 及軌跡上一點 $P(x, y, z)$ 作一平面，並設 P 至 $x'=0$, $y=0$ 之垂直距離爲 x'', 則

$$x''^2+4y^2=4.$$

但 $$x''^2=x'^2+z^2$$

故 $$x'^2+4y^2+z^2=4.$$

但 $x'=x-2$, 故得 $$(x-2)^2+4y^2+z^2=4.$$

卽 $$x^2+4y^2+z^2-4x=0$$

亦爲橢圓面.

(*l*) $xy=a$, 繞其兩漸近線.

$xy=a$ 之兩漸近線卽爲 x 軸及 y 軸.

設 $P(x, y, z)$ 爲軌跡上一點,過 P 及 x 軸作一平面使 y' 至 x 軸之距離爲 y', 則

$$xy'=a.$$

但 $y'=\sqrt{y^2+z^2}$, 故得 $$x\sqrt{y^2+z^2}=a$$

卽 $$x^2(y^2+z^2)=a^2.$$

同樣,繞 y 軸時,則得

$$y^2(x^2+z^2)=a^2.$$

2. 求已知曲線繞所示之軸旋轉時所成旋轉面之方程式. 述其名稱並作此曲面:

(*a*) $y^2=2pz$, z 軸.

同上題法,得 $x^2+y^2=2pz$, 旋轉拋物面或圓拋物面.

(*b*) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, x 軸.

答: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$, 橢圓拋物面.

(*c*) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, y 軸.

答: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=1$, 單葉雙曲面.

(*d*) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, x 軸.

答: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1$, 兩葉雙曲面.

3. 曲線 $z=e^x$ 繞 (1) x 軸; (2) z 軸旋轉時所成之曲面,求其方程式並作此曲面.

(1) 設 $P(x, y, z)$ 爲軌跡上一點,作平面過 P 及 x 軸使 P 至 x 軸之距離爲 z', 則

$$z'=e^x.$$

但 $$z'=\sqrt{y^2+z^2}.$$

故得 $$\sqrt{y^2+z^2}=e^x \quad 即 \quad y^2+z^2=e^{2x}.$$

(2) 繞 z 軸，則同樣得

$$z=e^{x'} \quad 而 \quad x'=\sqrt{x^2+y^2}.$$

故得 $$z=e^{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

即 $$\log_e z=\sqrt{x^2+y^2}.$$

4. 用解析法證明球面為一圓繞其一直徑旋轉而成.

設 XY 面上一圓 $x^2+y^2=a^2$ 以直徑 x 軸為軸旋轉.設 $P(x,y,z)$ 為旋轉面上一點，過此點並旋軸 x 軸作一平面，作 PQ 垂直於 x 軸並使 $PQ=y'$，則在所作平面內有一圓 $x^2+y'^2=a^2$. 但 $y'^2=y^2+z^2$，故得 $$x^2+y^2+z^2=a^2，球面.$$

5. 求圓 $x^2+y^2-2hx+h^2-r^2=0$ 繞 y 軸旋轉所成曲面之方程式.討論此曲面當 $h>r$, $h=r$ 與 $h<r$.

當 $h>r$ 時，此曲面稱為錨環形曲面 (Anchor ring or torus).

$$x'^2+y^2-2hx'+h^2-r^2=0.$$

$$x'=\sqrt{x^2+z^2}.$$

$$x^2+z^2+y^2-2h\sqrt{x^2+z^2}+h^2-r^2=0.$$

$$x^2+y^2+z^2+h^2-r^2=2h\sqrt{x^2+y^2}.$$

$$(x^2+y^2+z^2+h^2-r^2)^2=4h^2(x^2+y^2).$$

設 $h>r$，曲面為一環，其截部為

$$x=2h\pm\sqrt{3h^2+r^2},\quad x=-2h\pm\sqrt{3h^2+r^2};$$

$$y=2h\pm\sqrt{3h^2+r^2},\quad y=-2h\pm\sqrt{3h^2+r^2};$$

$$z=\sqrt{r^2-h^2},\quad z=-\sqrt{r^2-h^2}.$$

其在 XY 面上之蹤線為兩同心圓.

其在 XZ 面及 YZ 面上之蹤線均為相離之兩等圓

$$(x\pm h)^2+z^2=r^2 \quad 或 \quad (y\pm h)^2+z^2=r^2.$$

當 $h=r$ 時，截部及蹤線均同，惟 XZ 面及 YZ 面上蹤線之兩圓相切.

當 $h<r$ 時亦同，惟兩圓相交.

6. 一旋轉圓柱面之軸即為坐標軸，其半徑為 r. 求其方程式.

旋轉圓柱形為一直線繞其平行之軸而成，故可設直線 $x=a$, $y=a$ 繞 z 軸而轉，則過軌跡上一點並 z 軸之平面上當有一直線，此

直線至 z 軸之距離亦為 a，取此直線上任一點 $P(x, y, z)$，此點至 z 軸之距離為 $\sqrt{x^2+y^2}$，故得 $x^2+y^2=a^2$.

7. 一旋轉圓錐面之軸即為坐標軸，而其發生線與旋轉軸成 ϕ 角，求其方程式。

設直線在 XY 面內與 x 軸成 ϕ 角，則 $y=x\tan\phi$，此直線旋轉時，設有一點 P 在軌跡上，則 P 至 x 軸之距離 y' 亦得

$$y'=x\tan\phi.$$

但 $$y'=\sqrt{y^2+z^2}.$$

故代入，得 $$y^2+z^2=x^2\tan^2\phi.$$

同樣，繞 y 軸，則得 $$x^2+z^2=y^2\tan^2\phi.$$

繞 z 軸，則得 $$x^2+y^2=z^2\tan^2\phi.$$

8. 證明下列軌跡為旋轉面：

(a) $y^2+z^2=4x$.

依上法逆推之，得 $y'^2=4x$ 即為 $y^2=4x$ 繞 x 軸旋轉而成。

(b) $x^2-4y^2+z^2=0$.

$x^2-4y^2=0$，即 $x+2y=0$ 或 $x-2y=0$ 繞 y 軸旋轉而成；或 $z^2-4y^2=0$，即 $z-2y=0$ 或 $z+2y=0$ 繞 y 軸旋轉而成。

(c) $4x^2+4y^2-z^2=16$.

曲面與 $z=k$ 之交線為圓 $4x^2+4y^2=k^2+16$，故為 $4x^2-z^2=16$ 或 $4y^2-z^2=16$ 繞 z 軸旋轉而成。

(d) $x^2-4y^2+z^2-3y=0$.

曲面與 $y=k$ 之交線為圓 $x^2+z^2=4k^2-3k$，故為 $x^2-4y^2-3y=0$ 或 $z^2-4y^2-3y=0$ 繞 y 軸旋轉而成。

(e) $xz^2+xy^2=3$.

$x(z^2+y^2)=3$，$x=a$ 時為圓 $y^2+z^2=\dfrac{3}{a}$，故為 $xy^2=3$ 繞 x 軸之旋轉面。

(f) $(x^2+z^2)y=4a^2(2a-y)$.

$y=k$ 為圓 $x^2+z^2=\dfrac{4a^2(2a-k)}{k}$，故為 $x^2y=4a^2(2a-y)$ 或 $z^2y=4a^2(2a-y)$ 繞 y 軸之旋轉面。

(g) $x^2+y^2+zx^2+zy^2-z+3=0$.

$z=k$ 時為圓 $x^2+y^2=\dfrac{a-3}{a+1}$.

故為 $x^2+zx^2-z+3=0$ 或 $y^2+zy^2-z+3=0$ 之旋轉面.

(h) $x^2+y^2+z^3-2y+1=0$.

$x^2+(y-1)^2+z^3=0$, $z=k$ 時為圓 $x^2+(y-1)^2=-k^3$, 故為 $x^2+z^3=0$ 或 $(y-1)^2+z^3=0$ 繞直線 $x=0, y=1$ 之旋轉面.

(i) $y^2+z^2+xy^2+xz^2-8=0$.

$x=k$ 時為圓 $y^2+z^2=\dfrac{8}{k+1}$, 故為 $y^2(1+x)=8$ 或 $z^2(1+x)=8$ 繞 x 軸之旋轉面.

9. 一點移動時，其從一定平面之垂直距離與從一定點之距離成一常數比.證明其軌跡為旋轉面.

設定平面為 YZ 面,定點為 $(a, 0, 0)$, 則軌跡之方程式為

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}=cx.$$

即 $$(1-c^2)x^2+y^2+z^2=2ax-a^2.$$

當 $x=k$ 時,即得此軌跡與 $x=k$ 平面之交線為

$$y^2+z^2=2ak-a^2+c^2k^2-k^2.$$

此交線為以 $(k, 0, 0)$ 為圓心之圓,故軌跡為以 x 軸為軸之旋轉面.

10. 一點移動時，其從一定直線之垂直距離與從在此直線上一定點之距離成一常數比.用解析法證明此軌跡為一旋轉圓錐面.何種比值須除外?

設定線為 z 軸,定點為原點, (x, y, z) 為軌跡上一點,則

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=c\sqrt{x^2+y^2}.$$

$$(c^2-1)x^2+(c^2-1)y^2-z^2=0.$$

當 $z=k$ 時,其交線為圓 $x^2+y^2=\dfrac{k^2}{c^2-1}$, $z=0$ 時,則為點圓,故為旋轉圓錐形.

設有直線 $\sqrt{c^2-1}\,x\pm z=0$ 或 $\sqrt{c^2-1}\,y\pm z=0$ 繞 z 軸旋轉時,可證其得上列方程式.

$c=\pm1$ 時,軌跡為 $z=0$ 平面。

$|c|<1$ 時,軌跡為原點一點.

故 $-1<c<1$ 當除外.

原本第 305—306 頁習題

1. 證明下列各方程式之軌跡為柱面，其直母線平行於一坐

標面．求直母線之方程式，並用此等方程式作曲面：

(a) $xy=2$.

此曲面與平面 $y=k$ 之交線爲直線

$$kx=z,\quad y=k.$$

故爲平行於 XZ 面之直線系 $kx=z$ 所成。

(b) $yz=x+z^2$.

此曲面與平面 $z=k$ 之交線爲直線

$$ky=x+k^2,\quad z=k$$

故爲平行於 XY 面之直線系 $y=\frac{1}{k}x+k$ 所成。

(c) $y^2=x+yz$.

此曲面與平面 $y=k$ 之交線爲直線

$$x+kz=k^2,\quad y=k.$$

故爲平行於 XZ 面之直線系 $x+kz=k^2$ 所成。

(d) $x^2y+xz=y$.　　(g) $xz-z^2+y=0$.

(e) $xy=y^2-3z$.　　(h) $x^2=y^2(z+1)$.

(f) $x^2y-x^2+z=0$.

(d) – (h) 同上。

2. 求下列各二次曲面之兩種直母線系．用一種直母線系之方程式，作此等曲面：

(a) $x^2-z^2-y^2+1=0$.

$$x^2-z^2=y^2-1.$$

$$x+z=k(y+1),\quad x-z=\frac{1}{k}(y-1).$$

或 $$x+z=k(y-1),\quad x-z=\frac{1}{k}(y+1).$$

(b) $x^2+yz-1=0$.

$$1-x^2=yz.$$

$$1+x=ky,\quad 1-x=\frac{1}{k}z.$$

或 $$1+x=kz,\quad 1-x=\frac{1}{k}y.$$

(c) $9x^2+4y^2-36z^2=36.$

$$9x^2-36z^2=36-4y^2.$$

$$3(x+2z)=2k(3+y),\quad 3(x-2z)=\frac{2}{k}(3-y).$$

或 $$3(x+2z)=2k(3-y),\quad 3(x-2z)=\frac{2}{k}(3+y).$$

(d) $y^2-4z^2+2x=0.$

$$y^2-4z^2=-2x.$$

$$y-2z=-2kx,\quad y+2z=\frac{1}{k}.$$

或 $$y-2z=-\frac{2x}{k},\quad y+2z=k.$$

(e) $x^2-4y^2=4z.$

$$x-2y=2kz,\quad x+2y=\frac{2}{k}.$$

或 $$x+2y=2kz,\quad x-2y=\frac{2}{k}.$$

(f) $x^2+y^2-yz-1=0.$

$$y(y-z)=1-x^2.$$

$$y-z=k(1-x),\quad ky=1+x.$$

或 $$y-z=k(1+x),\quad ky=1-x.$$

3. 求法面之方程式其直母線如下。作此等曲面：

(a) $x+2z+k(1-y)=0,\ k(x-2z)+1+y=0.$

自 (1)，$k=\dfrac{x+2z}{y-1}$　　自 (2)，$k=\dfrac{y+1}{2z-x}.$

故 $$\frac{x+2z}{y-1}=\frac{y+1}{2z-x}.$$

$$4z^2-x^2=y^2-1.$$

$$x^2+y^2-4z^2=1,\ \text{旋轉單葉拋物面。}$$

(b) $2x+y-3k=0,\ k(2x-y)-z=0.$

自 (2)， $$k=\frac{z}{2x-y}.$$

代入 (1)，得 $$4x^2-y^2-3z=0,\ \text{雙曲線拋物面.}$$

(c) $x+2ky+4z=4k,\ kx-2y-4kz=4.$

自 (1)，$k=\dfrac{x+4z}{4-2y}$.　　　自 (2)，$k=\dfrac{4+2y}{x-4z}$.

故得　　$x^2+4y^2-16z^2=16$，單葉拋物面.

(d)　$5-x-ky=0$，$k(5+x)-y=0$.

自 (1)，　　$k=\dfrac{5-x}{y}$.

代入 (2)，得　　$25-x^2-y^2=0$.

即　　$x^2+y^2=25$，圓柱形.

(e)　$y-4k=0$，$ky-x=0$.

消去 k，得　　$y^2-4x=0$，拋物線柱形.

(f)　$3x-4y=kz$，$k(3x+4y)=z$.

(1)，(2) 相乘消去 k，得　$9x^2-16y^2-z^2=0$，圓錐形.

4.　證明雙曲線拋物面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2cz$ 之各直母線平行於平面 $\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$ 中之一.

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2cz$ 之直母線系為

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2ck,\qquad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{z}{k}$$

或

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2ck,\qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{k}.$$

且兩直線系化作對稱式，得

$$\frac{x}{\dfrac{a^2b}{k}}=\frac{y}{-\dfrac{ab^2}{k}}=\frac{z}{2ab}，故平行於\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0.$$

又　$$\frac{x}{a^2bk}=\frac{y}{ab^2k}=\frac{z}{2ab}，故平行於\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0.$$

5.　證明 (1) 單葉雙曲面，(2) 雙曲線拋物面之直母線在一主平面上諸直母線之射影必與該曲面在此主平面上之蹤線相切.

(1) 單葉雙曲面對稱於三軸及三坐標面，故任一坐標面均可為主平面.

單葉雙曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y^2}{b^2}$ 之直母線系為

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=k\left(1+\frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

或 $$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=k\left(1-\frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\left(1+\frac{y}{b}\right).$$

設 XY 面爲主平面，其蹤線爲橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

化第一直線系爲對稱式，得

$$\frac{x-\frac{a(k^2+1)}{2k}}{a(k^2-1)}=\frac{y}{2bk}=\frac{z-\frac{c(k^2-1)}{2k}}{c(k^2+1)}.$$

此直線系在 XY 面上之射影爲

$$\frac{x-\frac{a(k^2+1)}{2k}}{a(k^2-1)}=\frac{y}{2bk},\qquad z=0.$$

故得 $$x=\frac{a(k^2-1)}{2bk}y+\frac{a(k^2+1)}{2k}=\frac{a(k^2-1)}{2k}\left(\frac{y}{b}+1\right).$$

代入蹤線方程式，得

$$\frac{a^2(k^2-1)^2}{4k^2}\left(\frac{y}{b}+1\right)^2\Big/a^2+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

卽 $$\frac{(k^2+1)^2}{4b^2k^2}y^2+\frac{k^4-1}{2bk^2}y+\frac{(k^2+1)^2}{4k^2}-1=0.$$

$$\Delta=\left(\frac{k^4-1}{2bk^2}\right)^2-4\frac{(k^2+1)^2}{4b^2k^2}\left[\frac{(k^2+1)^2}{4k^2}-1\right]$$

$$=\frac{(k^4-1)^2}{4b^2k^4}-\frac{(k^2+1)^2(k^2-1)^2}{4b^2k^4}=0.$$

$\Delta=0$，卽直線與橢圓相切於一點.

又設 YZ 面爲主平面，其蹤線爲雙曲線

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

直母線在 YZ 面上之射影爲

$$\frac{y}{2bk}=\frac{z-\frac{c(k^2-1)}{2k}}{c(k^2+1)},\qquad x=0.$$

因得 $$z=\frac{c(k^2+1)}{2bk}y+\frac{c(k^2-1)}{2k}.$$

代入蹤線方程式，得

$$\frac{y^2}{b^2}-\left[\frac{(k^2+1)}{2bk}y+\frac{(k^2-1)}{2k}\right]^2=1.$$

$$\frac{(k^2-1)^2}{4b^2k^2}y^2+\frac{k^4-1}{2bk^3}y+\frac{(k^2-1)^2}{4k^2}+1=0.$$

$$\Delta=\frac{(k^4-1)^2}{4b^2k^4}-4\frac{(k^2-1)^2}{4b^2k^4}\left[\frac{(k^2-1)^2}{4k^2}+1\right]=0.$$

(2) 雙曲線拋物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2cz$ 之直母線系爲

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2ck,\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{z}{k}.$$

或 $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=kz,\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{2c}{k}.$$

設主平面爲 XZ 面，則曲面在其上之蹤線爲

$$\frac{x^2}{a^2}=2cz.$$

第一直線系在其上之射影可自對稱式，得

$$\frac{x}{a}=\frac{y-2bck}{-b}=\frac{z+2ck^2}{2k}.$$

$$\frac{x}{a}=\frac{z+2ck^2}{2k},\quad y=0.$$

因得 $$x=\frac{a(z+2k^2)}{2k}.$$

代入蹤線方程式，得 $$\frac{(z+2ck^2)^2}{4k^2}=2cz.$$

$$z^2+4ck^2z+4c^2k^4-8ck^2z=0.$$

$$(z-2ck)^2=0,\quad z=2ck^2.$$

z 祇一值，故爲切點，卽射影與曲面之蹤線相切。

6. 過單葉雙曲面之中心與其一母線之平面與此曲面相交於第二母線中，此第二母線平行於第一母線。

單葉雙曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 之中心爲 $(0,0,0)$，母線爲

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=k\left(1+\frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

或 $$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=k\left(1-\frac{y}{b}\right),\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\left(1+\frac{y}{b}\right).$$

過第一直母線系之平面爲

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}-k\left(1+\frac{y}{b}\right)+m\left\{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}-\frac{1}{k}\left(1-\frac{y}{b}\right)\right\}=0.$$

過 $(0,0,0)$，則 $-k-\frac{m}{k}=0$ 卽 $m=-k^2$.

故得平面爲

$$\frac{1-k^2}{a}x+\frac{1+k^2}{c}z-\frac{2ky}{b}=0.$$

$$x=\frac{a(k^2+1)}{c(k^2-1)}z-\frac{2aky}{b(k^2-1)}.$$

當 $y=0$ 時， $$x=\frac{a(k^2+1)}{c(k^2-1)}z.$$

代入曲面方程式，得 $$\frac{a^2(k^2+1)^2}{a^2c^2(k^2-1)^2}z^2-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

故 $$z=\pm\frac{c(k^2-1)}{2k},\quad x=\pm\frac{a(k^2+1)}{2k}.$$

又如當 $x=0$ 時， $$y=\frac{b(k^2+1)}{2ck}z.$$

代入曲面方程式，得 $$\frac{b^2(k^2+1)}{4b^2c^2k^2}z^2-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

故 $$z=\pm\frac{2ck}{k^2-1},\quad y=\pm\frac{b(k^2+1)}{k^2-1}.$$

此四點中 $\left[\frac{a(k^2+1)}{2k},\ 0,\ \frac{c(k^2-1)}{2k}\right]$ 及 $\left[0,\ -\frac{b(k^2+1)}{k^2-1},\ -\frac{2ck}{k^2-1}\right]$ 在第一直母線上，$\left[-\frac{a(k^2+1)}{2k},\ 0,\ -\frac{c(k^2-1)}{2k}\right]$ 及 $\left[0,\ \frac{b(k^2+1)}{k^2-1},\ \frac{2ck}{k^2-1}\right]$ 爲直母線與曲面之另二交點，聯此二點之直線爲

$$\frac{x+\dfrac{a(k^2+1)}{2k}}{\dfrac{2(k^2+1)}{2k}}=\frac{y}{\dfrac{b(k^2+1)}{k^2-1}}=\frac{z+\dfrac{c(k^2-1)}{2k}}{\dfrac{2ck}{k^2-1}+\dfrac{c(k^2-1)}{2k}}.$$

即
$$\frac{x+\dfrac{a(k^2+1)}{2k}}{k^2-1}=\frac{y}{2bk}=\frac{z+\dfrac{c(k^2-1)}{2k}}{c(k^2+1)}.$$

其方向數與第一直母線之方向數同(參閱第五題)，故平行。

解此直線之方程式，以 z 表 x 及 y,

$$x=\frac{a(k^2-1)}{c(k^2+1)}z-\frac{2ak}{k^2+1},\quad y=\frac{2bk}{c(k^2+1)}z+\frac{b(k^2-1)}{k^2+1}.$$

代入曲面方程式，得

$$\frac{\dfrac{a^2(k^2-1)^2}{c^2(k^2+1)^2}z^2-\dfrac{4a^2k(k^2-1)}{c(k^2+1)^2}+\dfrac{4a^2k^2}{(k^2+1)^2}}{a^2}$$

$$+\frac{\dfrac{4b^2k^2}{c^2(k^2+1)^2}z^2+\dfrac{4b^2k(k^2-1)}{c(k^2+1)^2}z+\dfrac{b^2(k^2-1)^2}{(k^2+1)^2}}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

$$\frac{(k^2-1)^2+4k^2-(k^2+1)^2}{c^2(k^2+1)^2}z^2+\frac{4k(k^2-1)-4k(k^2-1)}{c(k^2+1)^2}z$$

$$+\frac{4k^2+(k^2-1)^2}{(k^2+1)^2}=1.$$

即
$$0+0+1=1.$$

故無論 k 爲何値均確，故直線之諸點均在此曲線上，即此直線爲此曲面之一母線系。

7. 證明 (1) 雙曲線拋物面與單葉雙曲面之兩種直母線皆通過曲面上各點。

自第§149，雙曲線拋物面及單葉雙曲面，皆可有二直母線系，由此任一直母線系之方程式中消去 k，即得曲面之方程式，則曲面上諸點即坐標適合於曲面方程式者，亦當適合於直母線系方程式，故亦在直母線系上。

8. 設一平面通過二次曲面之一直母線，證明其必通過第二直母線，而此兩母線並不屬於同系。

設二次曲面雙曲線拋物面爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2cz.$$

其直母線系為

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2ck,\qquad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{z}{k}.$$

或

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=kz,\qquad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{2c}{k}.$$

過第一直線之平面為

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-2ck\right)+m\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{k}\right)=0.$$

此平面亦通過第二直母線系。

9. 單葉雙曲面之方程式可寫作 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$. 用第 149 節中之法處理之，可得曲面上兩種直線系之方程式。證明此兩種直線系與以前所得者相同。

$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$ 之直母線系為

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=k\left(1+\frac{x}{a}\right),\qquad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\left(1-\frac{x}{a}\right).$$

或

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=k\left(1-\frac{x}{a}\right),\qquad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\left(1+\frac{x}{a}\right).$$

將此直線系化為對稱式，可證其與以前所得者相同。

原本第 309—311 頁習題

1. 證明下列曲面為圓柱面，討論其方程式，並作此等曲面：

(a) $x-y^2+z=0$.

$$y^2=x+z.$$

$$y=k,\quad x+z=k^2.$$

此為一直線系，無論 k 為何值，方向數均為 $1, 0, -1$，故為平行直線系，故為柱形。

其蹤線為 $y^2=x$, $x+z=0$ 及 $y^2=z$，故為拋物線柱形。

(b) $xz+yz-1=0$.

$$z=k,\quad x+y=\frac{1}{k}.$$

亦為一平行直線系，方向數為 1, −1, 0.

其蹤線為雙曲線 $xz=1$, $yz=1$, XY 面上無蹤線。

(c) $y^2-2x-3z=0$.

$$y=k,\quad 2x+3z=k^2.$$

不論 k 為何值，直線之方向數為 3, 0, −2.

其蹤線為 $y^2=2x$, $y^2=3z$, $2x+3z=0$, 故為拋物線柱形。

(d) $y^2-4(x+z)+8=0$.

$$y=k,\quad x+z=\frac{k^2}{4}+2.$$

直線系之方向數均為 1, 0, −1.

蹤線為 $y^2=4x-8$, $y^2=4z-8$, $x+z=2$.

(e) $x^2+2xy+y^2=4z$.

$$z=k,\quad x+y=\pm 2\sqrt{k}.$$

直線系之方向數均為 1, 0, −1.

蹤線為 $x+y=0$, $x^2=4z$, $y^2=4z$, 故為拋物線柱形。

(f) $y^2-2yz+z^2=4-x^2$.

$$x=k,\quad y-z=\pm\sqrt{4-k^2}.$$

直線系之方向數為 0, 1, 1.

蹤線為 $x^2+y^2=4$, $x^2+z^2=4$, $x=\pm 2$.

(g) $x^2-4xy+4y^2=z-1$.

$$z=k,\quad x-2y=\pm\sqrt{k-1}.$$

直線系之方向數為 1, 2, 0.

蹤線為 $x^2=z-1$, $y^2=z-1$.

(h) $x^2+9y^2+4z^2-12yz=4$.

$$(3y-2z)^2=4-x^2.$$

$$x=k,\quad 3y-2z=\pm\sqrt{4-k^2}.$$

直線系之方向數為 0, 2, 3.

蹤線為 $x^2+9z^2=4$, $x^2+4z^2=4$, $3y-2z=\pm 2$.

2. 證明下列曲面為圓柱面。作此等曲面：

(a) $(x+z)(y+z)=4$.

$$x+z=k,\quad y+z=\frac{4}{k}.$$

直母線系之方向數為 1, 1, −1, 故為平行直線系，故為柱形，其蹤線為雙曲線 $xy=4$, $z(x+z)=4$, $z(y+z)=4$.

(b) $(x+z)^2=y+z$.

$$x+z=k, \quad x+z=\frac{1}{k}(y+z).$$

但 $z=k-x$, 代入 (2) 式，得 $x-y=k^2-k$.

直母線系之方向數為 1, 1, −1.

蹤線為 $x^2=y$, $x^2+2xz+z^2-z=0$.

$$\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=y+\frac{1}{4}.$$

(c) $(x+y)^2+(x-z)^2=a^2$.

設 $x-z=k$, 則 $x+y=\pm\sqrt{a^2-k^2}$.

直母線系之方向數為 1, −1, 1.

蹤線為橢圓 $2x^2+2xy+y^2=a^2$, $2x^2-2xz+z^2=a^2$ 及圓 $y^2+z^2=a^2$.

(d) $(y+z-a)^2+(x-z)^2=a^2$.

設 $x-z=k$, 則 $y+z-a=\pm\sqrt{a^2-k^2}$.

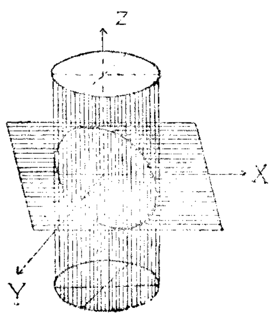
方向數為 1, −1, 1.

XY 面上之蹤線為圓 $x^2+(y-a)^2=a^2$ 及橢圓 $x^2-2xz+z^2-2az=0$, $y^2+2yz+2z^2-2ay-2az=0$.

3. 作下列各對曲面相交之曲線:

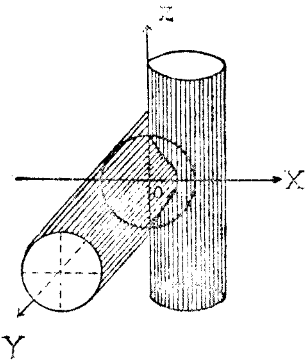
(a) $x^2+y^2=36$, $y-z=0$.

為垂直於 XY 面以 z 軸為軸半徑為 6 之圓柱形，與過 x 軸而與 XY 面成 45° 角之平面 $y=z$ 之交線.



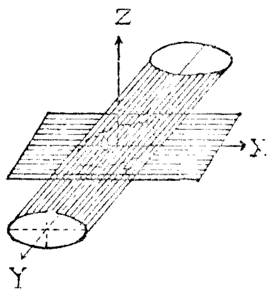
(b) $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+z^2-4=0$.

(1) 爲垂直於 XY 面以 $x=2$, $y=0$ 爲軸半徑爲 2 之圓柱形; (2) 爲垂直於 XZ 面以 y 軸爲軸半徑爲 2 之圓柱形.



(c) $x^2+4z^2-8z=0$, $x+y-1=0$.

(1) 爲橢圓柱形, (2) 爲平面.



(d) $y^2-4z=0$, $x^2-z-4=0$.

(1) 爲垂直於 x 軸之拋物線柱形, (2) 爲垂直於 y 軸之拋物柱形.

4. 求下列各曲線之投影圓柱面之方程式,並將此曲線當作其中之二圓柱面之交線而作之:

(a) $x^2+y^2+z^2=25$, $x^2+4y^2-z^2=0$.

逐一消去 x, y, z, 得其投影柱形之方程式爲

$$2x^2+5y^2=25,\ 3x^2+5z^2=100,\ 3y^2-2z^2=-25.$$

(1), (2) 爲橢圓柱形，(3) 爲雙曲線柱形。

(b) $x^2+4y^2-z^2=16,\ 4x^2+y^2+z^2=4.$

投影柱形方程式爲

$$x^2+y^2=4,\ 17x^2+5z^2=0,\ 3y^2-z^2=12.$$

(c) $x^2+y^2=4z,\ x^2+y^2-4x=0.$

投影柱形方程式爲

$$x^2+y^2-4x=0,\ x=z,\ y^2+16z^2-4z=0.$$

(d) $x^2+2y^2+4z^2=32,\ x^2+4y^2=4z.$

自 (2), 得 $\qquad 16z^2=(x^2+4y^2)^2.$

代入 (1), 得 $\quad 4x^2+8y^2+x^4+8x^2y^2+16y^4=128,$

$$x^2+8z^2+4z=64,\ 2y^2-4z^2-4z+32=0.$$

(e) $x^2-10y-5z-25=0,\ x^2+2y^2+5z+10y-25=0.$

(f) $x^2+2y^2+4z-4=0,\ 2x^2+5y^2+12z-8=0.$

(g) $y^2-x^2+2z^2+7y-72=0,\ x^2-z^2-7y+36=0.$

(h) $2x^2+y^2-9z=0,\ y^2+9z-72=0.$

(i) $x^2+y^2-z-1=0,\ x^2-y^2-z+1=0.$

(e)—(i) 同上。

5. 在題 1 (f) 中，證明亦可從 $y-z-kx-2k=0,\ k(y-z)-2+x=0$ 以求得之。證明此等方程式規定一平行線系。用同法研究題 1 (h).

在此直線方程系中消去 k, 得

$$y-z=k(x+2),\ k(y-z)=2-x.$$

相乘，得 $\qquad y^2-2yz+z^2=4-x^2.$

卽爲題 1 (f) 之曲面方程式。

將此直線系化爲對稱式，可得其方向數爲 0, 1, 1, 與 k 之值無關，故爲平行直線系。

6. 證明二平面系 $4x\pm12z=k$ 與橢圓 $9x^2+25y^2+169z^2=100$ 相交成諸圓。

平面之方程式可寫作

$$\pm12z=4x-k.$$

平方，得 $\qquad 144z^2=16x^2-8kx+k^2.$

與橢圓曲面相加，得

$$25x^2+25y^2+25z^2-8kx+k^2=100.$$

此曲面當通過橢圓曲面與平面之交線，但此爲球面與任一平

面之交面必爲圓。

7. 證明平面 $3x+y=10$ 切於圓柱面 $x^2+y^2-10=0$. 寫出此平面切於圓柱面處之發生線之方程式。

將兩方程式聯立解之，得

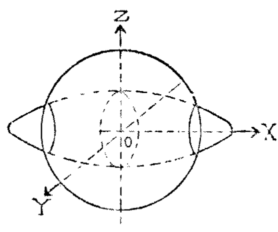
$$y=10-3x,\ x^2+(10-3x)^2-10=0,$$
$$10x^2-60x+90=0,\ x^2-6x+9=0,\ x=3.$$

故祗交於一點卽切點，將 $x=3$ 代入平面方程式，得 $y=1$, 故 $x=3$, $y=1$ 爲相切之發生線。

8. 作下列諸曲面並在第一曲面爲第二曲面所截之部份以暗色表之：

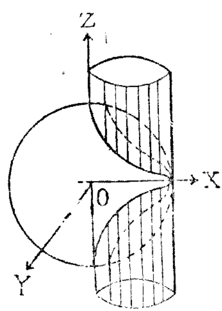
(*a*) $x^2+4y^2+9z^2=36$, $x^2+y^2+z^2=16$.

一橢圓面及一球面。



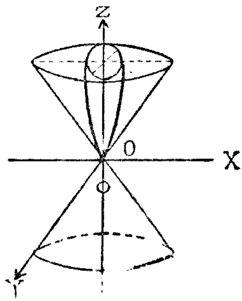
(*b*) $x^2+y^2+z^2=64$, $x^2+y^2-8x=0$.

一球面及一圓柱形。



(*c*) $4x^2+y^2-4z=0$, $x^2+4y^2-z^2=0$.

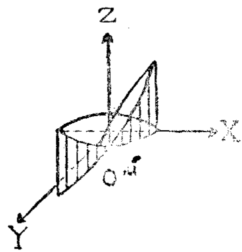
一橢圓抛物面及一圓錐形。



9. 作圖並描述由下列曲面所圍成之立體:

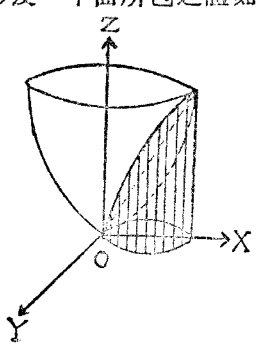
(a) $x^2+y^2=a^2 \quad z=mx,\ z=0.$

圓柱形與兩平面所包之體如圖。



(b) $x^2+y^2=az,\ x^2+y^2=2ax,\ z=0.$

圓抛物面,圓柱形及一平面所包之體如圖。



10. 一點移動時，其離一定點之距離常等於其離一定線之距離．證明此軌跡爲一拋物線圓柱面 (Parabolic cylinder).

設 z 軸爲定線，定點在 x 軸上 $(a, 0, 0)$，則

$$x^2+y^2=(x-a)^2+y^2+z^2.$$

$$z^2=2ax-a^2.$$

直母線系爲 $\quad z=k,\ 2ax-a^2=k^2.$

故爲拋物柱形．

11. 一點移動時，其離二正交直線之距離之平方差爲一常數．證明此軌跡爲一雙曲線圓柱面 (Hyperbolic cylinder).

設 z 軸與 y 軸爲兩正交直線，則

$$(x^2+y^2)-(x^2+z^2)=c.$$

$$y^2-z^2=c.$$

直母線系爲 $\quad y+z=kc,\ x-z=\dfrac{c}{k}.$

故爲雙曲線柱形．

12. 一點移動時，其離二平面之距離和等於其離第三平面之平方．此三個平面互相垂直．證明此軌跡爲一圓柱面．

設三坐標面爲所設三平面，則

$$x+y=z^2.$$

使 $z=k$，則 $x+y=k^2$ 爲平行直母線系，故爲柱形．

13. 一點移動時，其離二平面之距離和等於其離第三平面之距離之平方根．證明其軌跡爲一拋物線圓柱面當三平面互相垂直時．

設三坐標面爲三垂直平面，則

$$x+y=\sqrt{z} \quad 即 \quad (x+y)^2=z.$$

使 $z=k$，則 $x+y=\sqrt{k}$ 爲平行直線系，在 XZ 面與 YZ 面上之蹤線爲拋物線．

$x^2=z$ 及 $y^2=z$，故爲拋物線柱形。

原 本 第 313 頁 習 題

1. 求下列各對已知曲面相交之曲線之簡單通徑方程式．從此等通徑方程式，作此曲線：

(a) $\quad y^2-4z=0,\ 4x+z^2=0.$

設 $y=2t$，則 $\qquad z=t^2,\ x=-\frac{1}{4}t^4.$

(b) $x^2-9z+36=0,\ x^2+y^2-36=0.$

設 $z=t^2+4$, 則

自 (1), $x^2=9t^2,\ x=\pm 3t.$

自 (2), $y^2=36-9t^2,\ y=\pm 3\sqrt{4-t^2}.$

(c) $x^2+y^2-25=0,\ 3x-z^2=0.$

設 $z=3t$, 則 $x=3t^2,\ y=\pm\sqrt{25-9t^4}.$

(d) $x^2+y^2-2y=0,\ y^2+z^2-4=0.$

設 $y=t$, 則 $z=\pm\sqrt{4-t^2},\ x=\pm\sqrt{2t-t^2}.$

(e) $x^2+y^2-25=0,\ x^2+z^2-25=0.$

設 $x=\sqrt{25-t^2}$, 則 $y=\pm t,\ z=\pm t.$

(f) $2y^2+z^2+4x-4z=0,\ y^2+3z^2-8x-12z=0.$

自二式逐一消去 x 及 y, 得

$$3y^2+5z^2-20z=0,\ z^2-4x-4z=0.$$

設 $z=t+2$ 代入,得 $y=\pm\sqrt{\dfrac{20-5t^2}{3}},\ x=\dfrac{t^2}{4}-1.$

2. 求其通徑方程式並由此等方程式作其軌跡以驗證第 151 節題 3 與題 4 中所作各曲線.

先求射影柱形,更化爲通徑方程式,方法與前題同.

第十七章 坐標之變換,各種坐標制

原本第 316—317 頁習題

1. 移軸至所示點以變換下列各方程式.述曲面之名稱:

(a) $x^2+y^2-4x+2y-4z+1=0$; $(2,\ -1,\ -1)$.

$$x=x'+2,\ y=y'-1,\ z=z'-1.$$

代入,得

$$(x'+2)^2+(y-1)^2-4(x'+2)+2(y'-1)-4(z'-1)+1=0.$$

化簡,得 $x'^2+y'^2-4z'=0$, 旋轉拋物面.

(b) $4x^2+9y^2-36z^2-16x-18y+216z-385=0$; $(2,\ 1,\ 3)$.

$$x=x'+2,\ y=y'+1,\ z=z'+3.$$

原式可寫作

$$4(x-2)^2+9(y-1)^2-36(z-3)^2=106.$$

代入,得 $4x'^2+9y'^2-36z'^2=106$, 單葉雙曲面.

(c) $2x^2-5y^2-3z^2+20x-4z-46=0$; $\left(-5,\ 0,\ \frac{2}{3}\right)$.

原式可寫作

$$2(x+5)^2-5y^2+3\left(z+\frac{2}{3}\right)^2=46+50-\frac{4}{3}$$

$$=\frac{284}{3}.$$

$$x=x'-5,\quad y=y',\quad z=z'+\frac{2}{3}.$$

代入，得 $\qquad 2x'^2-5y'^2-3z'^2=\frac{284}{3}$，兩葉雙曲面.

(d) $x^2+y^2-4z^2-4x-y-4z-3=0$; $\left(2,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$.

原式可寫作

$$(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-4\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}.$$

$$x=x'+2,\quad y=y'+\frac{1}{2},\quad z=z'-\frac{1}{2}.$$

代入，得 $\qquad x'^2+y'^2-z'^2=\frac{9}{4}$，單葉雙曲面.

2. 將坐標軸繞 (1) x 軸; (2) y 軸旋轉 θ 角而導出其方程式.

依 §154，得

(1) $\qquad y=y'\cos\theta-z'\sin\theta,\quad z=y'\sin\theta+z'\cos\theta.$

(2) $\qquad x=x'\cos\theta-z'\sin\theta,\quad z=x'\sin\theta+z'\cos\theta.$

3. 用移軸法或繞一坐標軸之轉軸法（見第 58, 64 節）以證下列方程式可變爲答案中之方程式.述曲面之名稱及與原軸之關係:

(a) $x^2+y^2-z^2-6x-8y+10z=0.$

原式可寫作

$$(x-3)^2+(y-4)^2-(z-5)^2=0.$$

設 $x=x'+3,\ y=y'+4,\ z=z'+5$，則得

$$x'^2+y'^2-z'^2=0.$$

故爲圓錐形，頂點在原坐標之 (3, 4, 5) 點.

(b) $3x^2-8xy+3y^2-5z^2+5=0.$

$$\tan 2\theta=\frac{B}{A-C}=\infty, \quad \theta=45°.$$

設 $\quad x=x'\cos\theta-y'\sin\theta, \quad y=x'\sin\theta+y'\cos\theta.$

即 $$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

故繞 z 軸轉 $45°$ 後，則得

$$3\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2-8\frac{(x'-y')(x'+y')}{2}+3\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2-5z'^2+5=0.$$

$$x'^2-7y'^2+5z'^2=5, \text{ 單葉雙曲面.}$$

(c) $\quad y^2+4z^2-16x-6y+16z+9=0.$

$$(y-3)^2+4(z+2)^2=16(x+1).$$

設移軸至 $(-1, 3, -2)$，則

$$x=x'-1, \; y=y'+3, \; z=z'-2.$$

代入，得 $\quad y'^2+4z'^2=16x'$，橢圓拋物面.

(d) $\quad 2x^2-5y^2-5z^2-6yz=0.$

$$\tan 2\theta=\frac{-6}{-5+5}=\infty, \quad \theta=45°.$$

$$y=\frac{y'-z'}{\sqrt{2}}, \quad z=\frac{y'+z'}{\sqrt{2}}.$$

$$2x'^2-5\left(\frac{y'-z'}{\sqrt{2}}\right)^2-5\left(\frac{y'+z'}{\sqrt{2}}\right)^2-6\frac{(y'-z')(y'+z')}{2}=0.$$

$$2x'^2-8y'^2-2z'^2=0.$$

$$x'^2-4y'^2-z'^2=0, \text{ 圓錐形.}$$

(e) $\quad 9x^2-25y^2+16z^2-24zx-80x-60z=0.$

$$\tan 2\theta=\frac{-24}{9-16}=\frac{24}{7},$$

$$\cos 2\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{7}{25},$$

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}=\frac{3}{5},$$

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}=\frac{4}{5}.$$

$$x=x'\cos\theta-z'\sin\theta,$$

$$z=x'\sin\theta+z'\cos\theta.$$

$$x=\frac{4x'-3z'}{5},\quad z=\frac{3x'+4z'}{5}.$$

$$9\left(\frac{4x'-3z'}{5}\right)^2-25y'^2-24\frac{(4x'-3z')(3x'+4z')}{25}$$

$$+16\left(\frac{3x'+4z'}{5}\right)^2-\frac{80}{5}(4x'-3z')-\frac{60}{5}(3x'+4z')=0.$$

$$\frac{9}{25}(16x'^2-24x'z'+9z'^2)-25y'^2=\frac{24}{25}(12x'^2+7x'y'-12z'^2)$$

$$+\frac{16}{25}(9x'^2+24x'z'+16z'^2)-\frac{80}{5}(4x'-3z')$$

$$-\frac{60}{5}(3x'+4z')=0.$$

$$25z'^2-25y'^2-100x'=0.$$

$z'^2-y'^2=4x'$，雙曲線拋物面.

4. 用坐標變換法，將下列方程式化爲第 141 節之二次曲面標準式 (1) 或 (2)：

(a) $x^2+4y^2+6z^2-8x+8y=0.$

原式可寫作

$$(x-4)^2+4(y+1)^2=8\left(x+\frac{5}{2}\right).$$

移軸至 $\left(4,\ -1,\ -\dfrac{5}{2}\right)$，則 $x=x'+4,\ y=y'-1,\ z=z'-\dfrac{5}{2}$，得

$$x'^2+4y'^2=8x'.$$

即
$$\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{1}=2x'.$$

(b) $x^2+xy+y^2+z^2-3=0.$

$\tan 2\theta=\infty$，$\theta=45^\circ$，繞 z 軸轉 45°，則

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\quad y=x'\sin\theta+y'\cos\theta.$$

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

代入，得
$$\frac{(x'-y')^2}{2}+\frac{x'^2-y'^2}{2}+\frac{(x'+y')^2}{2}+z'^2-3=0.$$

$$3x'^2+y'^2+2z'^2=6.$$

即 $$\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{6}+\frac{z'^2}{3}=1.$$

(c) $3y^2-5yz+3z^2-8x=0.$

$\tan 2\theta=\infty$，$\theta=45°$，繞 x 軸轉 $45°$，則

$$y=y'\cos\theta-z'\sin\theta=\frac{y'-z'}{\sqrt{2}},$$

$$z=y'\sin\theta+z'\cos\theta=\frac{y'+z'}{\sqrt{2}}.$$

代入，得 $$\frac{3(y'-z')^2}{2}-\frac{5(y'^2-z'^2)}{2}+\frac{3(y'+z')^2}{2}-8x'=0.$$

$$y'^2+5z'^2=16x'.$$

$$\frac{y'^2}{5}+\frac{z'^2}{1}=\frac{16}{5}x'.$$

(d) $x^2+3xy+y^2+z^2-6z=0.$

$\tan\theta=\infty$，$\theta=45°$，繞 z 軸轉 $45°$，則

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

$$\frac{(x'-y')^2}{2}+\frac{3(x'^2-y'^2)}{2}+\frac{(x'+y')^2}{2}+z^2-6z=0.$$

$$5x'^2-3y'^2+2z'^2-12z'=0,$$

$$5x'^2-3y'^2+2(z'-3)^2=18.$$

再轉軸至 $(0, 0, 3)$，則

$$x'=x'',\ y'=y'',\ z'=z''+3.$$

$$5x''^2-3y''^2+2z''^2=18.$$

$$\frac{x''^2}{\frac{18}{5}}-\frac{y''^2}{6}+\frac{z''^2}{9}=1.$$

(e) $x^2+y^2+6y-6z-18=0.$

$$x^2+(y+3)^2=6\left(z+\frac{9}{2}\right).$$

移軸至 $\left(0,\ -3,\ -\frac{9}{2}\right)$，則得

$$x'^2+y'^2=6z'.$$

(f) $x^2+xy+y^2-2z^2+5x=0.$

$\tan 2\theta=\infty$，$\theta=48°$，繞 z 軸轉 $45°$，則

$$\frac{(x'-y')^2}{2}+\frac{x'^2-y'^2}{2}+\frac{(x'+y')^2}{2}-2z'^2+5x'=0.$$

$$3x'^2+y'^2-4z'^2+10x=0.$$

$$3\left(x'+\frac{5}{3}\right)^2+y'^2-4z'^2=\frac{25}{3}.$$

移軸至 $\left(-\frac{5}{3},0,0\right)$, 則得

$$3x'^2+y''^2-4z''^2=\frac{25}{3}.$$

5. 轉軸至一位置其方向餘弦各爲 $\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}$; 以變換方程式 $5x^2+8y^2+5z^2-4yz+8zx+4xy-4x+2y+4z=0$.

自 (IV), 得
$$x=\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'+\frac{2}{3}z',$$
$$y=\frac{2}{3}x'-\frac{2}{3}y'-\frac{1}{3}z',$$
$$z=\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'-\frac{2}{3}z'.$$

代入, 得

$$\begin{aligned}&5\left(\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'+\frac{2}{3}z'\right)^2+8\left(\frac{2}{3}x'-\frac{2}{3}y'-\frac{1}{3}z'\right)^2\\&+5\left(\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'-\frac{2}{3}z'\right)^2-4\left(\frac{2}{3}x'-\frac{2}{3}y'-\frac{1}{3}z'\right)\\&\times\left(\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'-\frac{2}{3}z'\right)+8\left(\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'-\frac{2}{3}z'\right)\\&\times\left(\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'+\frac{2}{3}z'\right)+4\left(\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'+\frac{2}{3}z'\right)\\&\times\left(\frac{2}{3}x'-\frac{2}{3}y'-\frac{1}{3}z'\right)-4\left(\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'+\frac{2}{3}z'\right)\\&+2\left(\frac{2}{3}x'-\frac{2}{3}y'-\frac{1}{3}z'\right)+4\left(\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'-\frac{2}{3}z'\right)\\&=0.\end{aligned}$$

化簡，得 $$3x^2+3y^2=2z.$$

6. 將坐標軸繞 x 軸旋轉使 y' 軸之方向餘弦為 $\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$，以變換方程式

$$5x^2-2y^2+11z^2+12xy+12yz-16=0.$$

繞 x 軸旋轉，則

$$\cos\alpha_1=1,\quad \cos\beta_1=0,\quad \cos\gamma_1=0;$$

而 $$\cos\alpha_2=0,\quad \cos\beta_2=\frac{1}{2}\sqrt{3},\quad \cos\gamma_2=\frac{1}{2}.$$

由九方向餘弦之關係，得

$$0\cdot\cos\alpha_3+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\cos\beta_3+\frac{1}{2}\cos\gamma_3=0,$$

$$\cos\alpha_3+0\cdot\cos\beta_3+0\cdot\cos\gamma_3=0,$$

$$\cos^2\alpha_3+\cos^2\beta_3+\cos^2\gamma_3=0.$$

故得 $$\cos\alpha_3=0,\quad \cos\beta_3=\frac{1}{2}\sqrt{3}\quad \cos\gamma_3=\frac{1}{2}.$$

$$x=x',$$

$$y=\frac{1}{2}\sqrt{3}y'+\frac{1}{2}\sqrt{3}z',$$

$$z=\frac{1}{2}y'+\frac{1}{2}z'.$$

代入原方程式化簡之卽得.

7. 用轉軸法使其新方向餘弦為 $-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$; $-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$；以變換方程式 $5x^2+5y^2+2z^2+2xy-4yz+4xz+6x-6y-12z=0.$

$$x=-\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'-\frac{2}{3}z',$$

$$y=\frac{2}{3}x'-\frac{2}{3}y'+\frac{1}{3}z',$$

$$z=\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'-\frac{2}{3}z'.$$

代入化簡之卽得.

8. 轉軸至一位置使其方向數爲 2, −1, −1; 0, 1, −1; 1, 1, 1; 以變換方程式 $x^2+2y^2+6z^2-2x-2y+18z+9=0$.

方向餘弦爲 $\frac{1}{3}\sqrt{6}$, $-\frac{1}{6}\sqrt{6}$, $-\frac{1}{6}\sqrt{6}$; 0, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, 因得

$$x=\frac{1}{3}\sqrt{6}x'+\frac{1}{3}\sqrt{3}z',$$

$$y=-\frac{1}{6}\sqrt{6}x'+\frac{1}{2}\sqrt{2}y'+\frac{1}{3}\sqrt{3}z',$$

$$z=-\frac{1}{6}\sqrt{6}x'-\frac{1}{2}\sqrt{2}y'+\frac{1}{3}\sqrt{3}z'.$$

代入化簡之卽得.

9. 證明繞 z 軸之轉軸法常可消去 $Ax^2+By^2+Cz^2+Fxy+K=0$ 中之 xy 項.

繞 z 軸旋轉時, z 軸之方向數爲 (0, 0, 1), 故 z 項不變可視若常數, 故依 § 62 之法可旋轉 θ 角以消去 xy 項, 其中 $\theta=\dfrac{\tan^{-1}\dfrac{B}{A-C}}{2}$.

10. 設 (x, y, z) 與 (x', y', z') 各爲一點轉軸前後之坐標, 證明

$$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2.$$

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2&=x'^2\cos^2\alpha_1+y'^2\cos^2\alpha_2+z'^2\cos^2\alpha_3\\
&\quad+2x'y'\cos\alpha_1\cos\alpha_2+2x'z'\cos\alpha_1\cos\alpha_3+2y'z'\cos\alpha_2\cos\alpha_3\\
&\quad+x'^2\cos^2\beta_1+y'^2\cos^2\beta_2+z'^2\cos^2\beta_3+2x'y'\cos\beta_1\cos\beta_2\\
&\quad+2x'z'\cos\beta_1\cos\beta_3+2y'z'\cos\beta_2\cos\beta_3+x'^2\cos^2\gamma_1\\
&\quad+y'^2\cos^2\gamma_2+z'^2\cos^2\gamma_3+2x'y'\cos\gamma_1\cos\gamma_2\\
&\quad+2x'z'\cos\gamma_1\cos\gamma_3+2y'z'\cos\gamma_2\cos\gamma_3\\
&=x'^2(\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1)+y'^2(\cos^2\alpha_2+\cos^2\beta_2+\cos^2\gamma_2)\\
&\quad+z'^2(\cos^2\alpha_3+\cos^2\beta_3+\cos^2\gamma_3)\\
&\quad+2x'y'(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2)\\
&\quad+2x'z'(\cos\alpha_1\cos\alpha_3+\cos\beta_1\cos\beta_3+\cos\gamma_1\cos\gamma_3)\\
&\quad+y'z'(\cos\alpha_2\cos\alpha_3+\cos\beta_2\cos\beta_3+\cos\gamma_2\cos\gamma_3)\\
&=x'^2+y'^2+z'^2.
\end{aligned}$$

11. 用變換坐標法化下列各方程式爲標準式(第 141 節)而決

定其所代表之拋物面之形式:

(a) $z=xy$.

$$\tan 2\theta=\infty, \quad \theta=45^\circ.$$

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \qquad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

代入,得 $$z'=\frac{x'^2-y'^2}{2}.$$

即 $$x'^2-y'^2=2z,$$ 雙曲線拋物面。

(b) $z=x^2+xy+y^2$.

$$\tan 2\theta=\infty, \quad \theta=45^\circ.$$

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

代入,得 $$z=\frac{(x'-y')^2}{2}+\frac{x'^2-y'^2}{2}+\frac{(x'+y')^2}{2}.$$

$$2z'=3x'^2+y'^2,$$ 橢圓拋物面。

(c) $x^2+2y^2-6x+4y+3z+11=0$.

$$(x-3)^2+2(y+1)^2+3z=0.$$

移軸至 $(3, -1, 0)$, 則

$$x'^2+2y'^2+3z'=0,$$ 橢圓拋物面。

(d) $z^2-3y^2-4x+2z-6y+1=0$.

$$(z+1)^2-3(y+1)^2=4\left(x-\frac{3}{4}\right).$$

移軸至 $\left(\frac{3}{4}, -1, -1\right)$, 則

$$z'^2-3y'^2=4x',$$ 雙曲線拋物面。

12 一點至一固定平面與至一固定點之距離相等. 證明其軌跡爲一旋轉橢圓拋物面。

設定平面爲 YZ 面,定點爲 $(k,0,0)$,又 (x,y,z) 爲軌跡上任一點,則

$$x=\sqrt{(x-k)^2+y^2+z^2}.$$

$$y^2+z^2=2kx-k^2.$$

$$y^2+z^2=2k\left(x-\frac{k}{2}\right).$$

旋轉拋物面,其頂點在$\left(\frac{k}{2}, 0, 0\right)$,設移轉至此點,則得

$$y'^2+z'^2=2kx'.$$

13. 一點至不相交之兩垂直線之距離相等. 證明其軌跡爲一雙曲線拋物面.

設 x 軸及 $x=0, y=k$ 爲不相交之兩垂直線,(x, y, z) 爲軌跡上一點,則

$$\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{x^2+(y-k)^2}.$$

$$x^2-z^2=2ky-k^2.$$

$$x^2-z^2=2k\left(y-\frac{k}{2}\right).$$

爲雙曲線拋物面,若移軸至 $\left(0, \frac{k}{2}, 0\right)$, 則得

$$x^2-z^2=2ky.$$

原本第 320 頁習題

1. 述下列各退縮二次曲面之名稱:

(a) $9x^2-36y^2+4z^2=0.$ 圓錐形.

(b) $16x^2-4y^2-z^2=0.$ 圓錐形.

(c) $4x^2+z^2-16=0.$ 橢圓柱.

(d) $y^2-9z^2+36=0.$ 雙曲線柱.

(e) $4y^2-25=0.$ 二平行平面.

(f) $3y^2+7z^2=0.$ x 軸.

(g) $8y^2+25z=0.$ 拋物線柱.

(h) $z^2+16=0.$ 無軌跡.

2. 用坐標變換法證明下列各二次曲面爲退縮曲面:

(a) $x^2-y^2+z^2-6z+9=0.$

$$x^2-y^2+(z-3)^2=0.$$

移軸至 (0, 0, 3), 則得

$$x'^2-y'^2+z'^2=0,\ \text{圓錐形.}$$

(b) $x^2+4y^2-z^2-2x+8y+5=0.$

$$(x-1)^2+4(y+1)^2-z^2=0.$$

移軸至 (0, −1, 0), 則得

$$x'^2+4y'^2-z'^2=0,\ 圓錐形.$$

(c) $x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z+6=0.$

$$(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=0.$$

移軸至 $(-1,\ 1,\ 2)$, 則得

$$x'^2+y'^2+z'^2=0,\ 原點.$$

(d) $x^2+y^2-2z^2+2y+4z-1=0.$

$$x^2+(y+1)^2-2(z-1)^2=0.$$

移軸至 $(0,\ -1,\ 1)$, 則得

$$x'^2+y'^2-2z'^2=0,\ 圓錐形.$$

(e) $x^2+yz=0.$

轉軸繞 x 軸 $45°$, 則得

$$x'^2+\frac{y'-z'}{\sqrt{2}}\cdot\frac{y'+z'}{\sqrt{2}}=0.$$

$$2x'^2+y'^2-z'^2=0,\ 圓錐形.$$

(f) $4x^2-y^2+9z^2+16x+6y+18z+16=0.$

$$4(x+2)^2-(y-3)^2+9(z+1)^2=0.$$

移軸至 $(-2,\ 3,\ -1)$, 則得

$$4x'^2-y'^2+9z'^2=0,\ 圓錐形.$$

(g) $3x^2-6xy+xz-2yz+12x-6y+3z+6=0.$

設 XY 面轉至 $x=2y$, 則

$$3(2y)^2-6(2y)y+(2y)z-2yz+12(2y)-6y+3z+6=0.$$

$$6y+z+2=0,\ 直線.$$

與 $x=2y+k$ 之交線均爲直線,故爲一退縮二次曲面.

原本第 322—323 頁習題

1. 求下列各點之極坐標與球面坐標:

(a) $(0,2,0)$.　　(b) $(3,4,12)$.　　(c) $(-2,2,-1)$.

極坐標:

(a) $\rho=\sqrt{0+2^2+0}=2.$

$$\alpha=\cos^{-1}\frac{0}{2}=90°,\quad \beta=\cos^{-1}\frac{2}{2}=0°,\quad \gamma=\cos^{-1}\frac{0}{2}=90°.$$

(b) $\rho=\sqrt{9+16+144}=13.$

$$\alpha=\cos^{-1}\frac{3}{13},\qquad \beta=\cos^{-1}\frac{4}{13},\qquad \gamma=\cos^{-1}\frac{14}{13}.$$

(c) $\rho=\sqrt{4+4+1}=3.$

$$\alpha=\cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right),\quad \beta=\cos^{-1}\frac{2}{3},\qquad \gamma=\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right).$$

球面坐標：

自 $x=\rho\sin\theta\cos\phi,\ y=\rho\sin\theta\sin\phi,\ z=\rho\cos\theta$，得

$$x^2+y^2=\rho^2\sin^2\theta,\quad x^2+y^2+z^2=\rho^2.$$

$$\sin\theta=\frac{1}{\rho}\sqrt{x^2+y^2},\quad \cos\theta=\frac{z}{\rho};$$

$$\cos\phi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sin\phi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

(a) $\rho=2,\ \theta=\cos^{-1}\frac{0}{2}=90^\circ,\ \phi=\cos^{-1}\frac{0}{2}=90^\circ.$

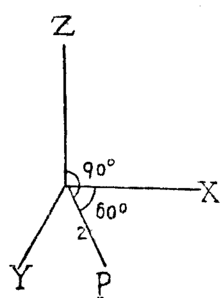
(b) $\rho=13,\ \theta=\cos^{-1}\frac{12}{13},\ \phi=\cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{9+16}}=\cos^{-1}\frac{3}{5}.$

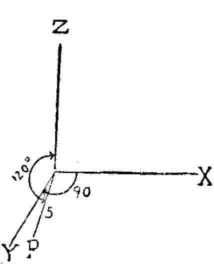
(c) $\rho=3,\ \theta=\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right),\ \phi=\cos^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{4+4}}\right)$

$$=\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)=135^\circ.$$

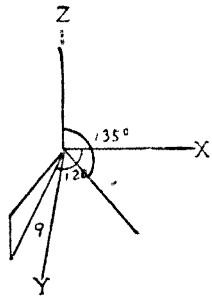
2. 作下列諸點，其球面坐標爲：

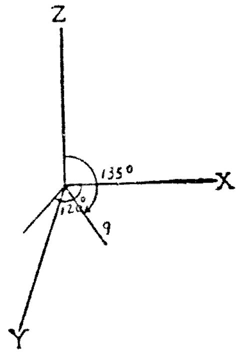
(a) (2, 90°, 60°). (b) (5, 120°, 90°).





(c) (9, −135°, 120°).





3.　求題 2 中各點之直角坐標：

(*a*)　(2, 90°, 60°).

$$x=2\cdot1\cdot\frac{1}{2}=1,\quad y=2\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3},\quad z=2\cdot0=0.$$

(*b*)　(5, 120°, 90°).

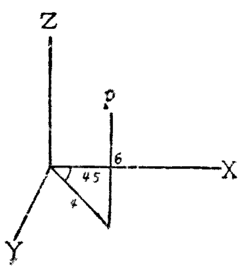
$$x=5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot0=0,\quad y=5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot1=\frac{5\sqrt{3}}{2},\quad z=5\left(-\frac{1}{2}\right)=-2.5.$$

(*c*)　(9, −135°, 120°).

$$x=9\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}\sqrt{2},\quad y=9\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{9}{4}\sqrt{6},$$

$$z=9\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{9}{2}\sqrt{2}.$$

4.　一點之圓柱面坐標爲 (4, 45°, 6)，作此點.其直角坐標爲何？



$$x=r\cos\theta=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2},\ y=r\sin\theta=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2},\ z=6.$$

5. "一方程式之軌跡"在極坐標 ρ, α, β 與 γ 中之意義爲何?在球面坐標 ρ, θ 與 ϕ 中?在圓柱面坐標 r, ϕ 與 z 中?

方程式之軌跡,爲軌跡上所有之點均合於此方程式之條件,而合於此方程式之條件之點均在此軌跡上.故以極坐標 ρ, α, β 及 γ 爲變數之方程式之軌跡,爲軌跡上所有之點之坐標 ρ, α, β 及 γ 均合於此方程式,而合於此方程式之諸點 $(\rho, \alpha, \beta, \gamma)$ 均在軌跡上.其他坐標亦同.

6. 設已知其極坐標方程式,如何求此曲面在直坐標軸上之截部?設已知其球面坐標方程式?設已知其圓柱面坐標方程式?

(a) 已知極坐標之方程式,欲求直坐標 x 軸上之截部,當設

$$y=0,\ z=0.$$

$$x=\rho\cos\alpha,\quad y=\rho\cos\beta,\quad z=\rho\cos\gamma.$$

而 $\rho\neq0$ (若 $\rho=0$, 則 $x=0$), 故當設

$$\cos\beta=0,\quad \cos\gamma=0.$$

又 $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

故同時,當設

$$\cos^2\alpha=1,\quad \cos\alpha=\pm1\quad \text{即}\quad x=\pm\rho.$$

故欲求 x 軸上之截部,當設

$$\cos\beta=\cos\gamma=0,\ \cos\alpha=\pm1,\ \text{而}\ \rho=\pm x.$$

y 軸及 z 軸上之截部仿此.

(b) 已知球面坐標之方程式,則設

$$y=\rho\sin\theta\sin\phi=0,\quad z=\rho\cos\theta=0.$$

即設 $\cos\theta=0$, 此時 $\sin\theta=1$ 即 $\sin\phi=0$.

因得 $\cos\phi=0$, 而 $x=\rho\sin\theta\cos\phi=\rho$.

故當設 $\cos\theta=0,\ \sin\theta=1,\ \sin\phi=0,\ \cos\phi=1$, 而 $\rho=x$.

求 y 軸上之截部,則

$$x=\rho\sin\theta\cos\phi=0,\quad z=\rho\cos\theta=0.$$

即設 $\cos\theta=0,\ \sin\theta=1,\ \cos\phi=0,\ \sin\phi=1,\ \rho=y$.

求 z 軸上之截部,則設

$$x=\rho\sin\theta\cos\phi=0,\quad y=\rho\sin\theta\sin\phi=0.$$

平方相加,得 $(\rho\neq0)$

$$\sin^2\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)=0.$$

即 $\sin\theta=0,\quad \cos\theta=1,\quad z=\rho.$

(c) 已知圓柱面坐標方程式，求 x 軸上之截部，則設

$z=0,\ y=r\sin\phi=0$ 即 $\sin\phi=0$, 而 $\cos\phi=1,\ r=x.$

求 y 軸上之截部，則

$z=0,\ x=r\cos\phi=0$ 即 $\cos\phi=0$, 而 $\sin\phi=1,\ r=y.$

求 z 軸上之截部，則

$$x=r\cos\phi=0,\quad y=r\sin\phi=0.$$

但 $\cos\phi$ 與 $\sin\phi$ 不能同時爲 0，故當設 $r=0$, 而 $z=z.$

7. 改下列方程式爲極坐標方程式：

(a) $x^2+y^2+z^2=25.$

$$x=\rho\cos\alpha,\quad y=\rho\cos\beta,\quad z=\cos\gamma.$$

代入，得 $\rho^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=25$ 即 $\rho=5.$

(b) $x^2+y^2-z^2=0.$

$$\rho^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos^2\gamma)=0.$$

$$\rho^2=0 \quad \text{或} \quad \cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos^2\gamma=0.$$

但 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$

故得 $2\cos^2\gamma=1,\quad \cos^2\gamma=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \gamma=45^\circ.$

(c) $2x^2-y^2-z^2=0.$

$$\rho^2(2\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma)=0.$$

$$\rho^2=0 \quad \text{或} \quad 2\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma=0.$$

但 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$

故得 $3\cos^2\alpha=1,\ \cos^2\alpha=\frac{1}{3},\ \cos\alpha=\frac{1}{3}\sqrt{3},\ \alpha=\cos^{-1}\frac{1}{3}\sqrt{3}.$

(d) $x^2-y^2+z^2=0.$

$$\rho^2(\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=0.$$

$$\rho^2=0 \quad \text{或} \quad \cos^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\gamma=0.$$

但 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$

故得 $2\cos^2\beta=1,\ \cos^2\beta=\frac{1}{2},\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \beta=45^\circ.$

8. 改下列方程式爲球面坐標方程式：

(a) $x^2+y^2+z^2=16.$

$$x=\rho\sin\theta\cos\phi,\ y=\rho\cos\theta\cos\phi,\ z=\rho\cos\theta.$$

代入，得 $\rho^2[\sin^2\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)+\cos^2\theta]=16.$

$$\rho^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=16 \quad 即 \quad \rho=4.$$

(b) $2x+3y=0.$

$$2\rho\sin\theta\cos\phi+3\rho\sin\theta\sin\phi=0.$$

即 $$2\cos\phi+3\sin\phi=0.$$

$$3\sin\phi=-2\cos\phi.$$

$$\tan\phi=-\frac{2}{3},\quad \phi=\tan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right).$$

(c) $3x^2+3y^2=7z^2.$

$$3\rho^2(\sin^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\theta\sin^2\phi)=7\rho^2\cos^2\theta,$$

$$3\sin^2\theta=7\cos^2\theta.$$

$$\tan^2\theta=\frac{7}{3},\quad \tan\theta=\frac{\sqrt{21}}{3},\quad \theta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{21}}{3}.$$

(d) $x^2-y^2+z^2=0.$

$$\rho^2(\sin^2\theta\cos^2\phi-\sin^2\theta\sin^2\phi+\cos^2\theta)=0.$$

$$\sin^2\theta\cos^2\phi-\sin^2\theta-\sin^2\theta\sin^2\phi+\cos^2\theta+\sin^2\theta=0.$$

$$\sin^2\theta(\cos^2\phi-1)-\sin^2\theta\sin^2\phi+1=0.$$

$$2\sin^2\theta\sin^2\phi=1.$$

(e) $x^2+y^2-4z^2=0.$

$$\rho^2(\sin^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\theta\sin^2\phi-4\cos^2\theta)=0.$$

$$\sin^2\theta-4\cos^2\theta=0.$$

$$5\cos^2\theta=1,\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5},\quad \theta=\cos^{-1}\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

9. 改下列方程式爲圓柱面坐標方程式:

(a) $5x-y=0.$

$$5r\cos\phi-r\sin\phi=0.$$

$$5\cos\phi-\sin\phi=0.$$

$$\tan\phi=5,\quad \phi=\tan^{-1}5.$$

(b) $x^2+y^2=4.$

$$r^2\cos^2\phi+r^2\sin^2\phi=4.$$

$$r^2=4,\quad r=2.$$

(c) $x^2+y^2-z^2=0.$

$$r^2(\cos^2\phi+\sin^2\phi)-z^2=0.$$

$$r^2=z^2,\quad r=z.$$

10. 描述下列各方程式之軌跡:

極坐標 (a) $\rho=$常數. (b) $\alpha=$常數.

球面坐標 (a) $\rho=$常數. (b) $\theta=$常數. (c) $\phi=$常數.

圓柱面坐標 (a) $r=$常數. (b) $\phi=$常數.

(a) $\rho=$常數,即至極點之距離爲一常數,故爲一球面.

(b) $\alpha=$常數,即與 x 軸成一定角,故爲一圓錐形.

(a) $\rho=$常數,即至原點之距離爲一常數,故爲一球面.

(b) $\theta=$常數,即與 z 軸成一定角,故爲一圓錐形.

(c) $\phi=$常數,即與 XZ 面成一定角,故爲一平面.

(a) $r=$常數,即與 z 軸之距離爲一常數,故爲一圓柱形.

(b) $\phi=$常數,即與 XZ 面成一定角, 故爲一垂直於 XY 面之平面.

11. P 點 (a, b, c) 三個互相垂直之平面 $x=a$, $y=b$, $z=c$ 之交點.參考上題,描述相交於 P 點之三曲面,當 P 之:

(a) 球面坐標爲 $(\rho_1, \theta_1, \phi_1)$ 時.

$\rho^2=\rho_1{}^2=a^2+b^2+c^2$, 故得一球面 $\rho=\rho_1=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

又可得一平面 $\phi=\phi_1$ 及一圓錐形 $\theta=\theta_1$.

(b) 圓柱面坐標爲 (r_1, ϕ_1, z_1) 時.

$r^2=a^2+b^2$, 故得一圓柱形 $r=r_1=\sqrt{a^2+b^2}$.

又可得二平面 $z=z_1=c$, $\phi=\phi_1$.

12. 證明其極坐標爲 $(\rho_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ 與 $(\rho_2, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ 之兩間之距離 r 之平方爲

$$r^2=\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2).$$

$$\begin{aligned}r^2&=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\\&=(\rho_1\cos\alpha_1-\rho_2\cos\alpha_2)^2+(\rho_1\cos\beta_1-\rho_2\cos\beta_2)^2\\&\quad+(\rho_1\cos\gamma_1-\rho_2\cos\gamma_2)^2\\&=\rho_1^2(\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1)\\&\quad+\rho_2^2(\cos^2\alpha_2+\cos^2\beta_2+\cos^2\gamma_2)\\&\quad-2\rho_1\rho_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2)\end{aligned}$$

$$=\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2$$
$$+\cos\gamma_1\cos\gamma_2).$$

13. 求在極坐標制中一球面之普遍方程式.

直坐標中球面之普遍方程式爲

$$x^2+y^2+z^2+Gx+Hy+Iz+K=0.$$

變作極坐標,則

$$\rho^2+G\rho\cos\alpha+H\rho\cos\beta+I\rho\cos\gamma+K=0.$$

即 $$\rho^2+\rho(G\cos\alpha+H\cos\beta+I\cos\gamma)+K=0.$$