測量平差法

陈永龄　夏坚白　王之卓著

商务印書館

測量平差法

(最小二乘法)

陈永龄　夏坚白　王之卓著

（修訂本）

本書是一部講述測量平差問題的專著，对於測量平差之基本理論及各种測量平差之計算方法均作了較为詳細的敍述，著者均有較为丰富之教学經驗，本書取材又多針对高等測量学校教学之需要，故可作为各高等測量学校教学參考書。其他各院校学習"誤差原理及最小二乘法"时，此書亦有參考价值。書中引用了一些实測的例子作为各种測量平差計算的范例，对於实际測量工作者也很有用。

本書初版於1947年，前后經过兩次修訂，供应了廣大讀者的需要。虽然由於著者工作較忙，未來得及作徹底修訂，但原書的基本內容仍適合於目前需要，故仍不失为一部頗有价值的參考書。

測 量 平 差 法

陈永齡　夏坚白　王之卓著

商 務 印 書 館 出 版

上海河南中路二一一號

(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)

新 華 書 店 總 經 售

上 海 三 星 印 刷 廠 印 刷

(15017·13)

1947年5月初版　　開本 850×1168 1/32

1956年12月7版(修訂本)　　字數 404,000

1956年12月上海第2次印刷　　印數 6,501—11,500

印張 14 6/16　　定價(10) ¥ 2.10

目　錄

測 量 平 差 法

(最小二乘法)

陈永龄　夏坚白　王之卓著

(修 訂 本)

本書是一部講述測量平差問題的專著，对於測量平差之基本理論及各种測量平差之計算方法均作了較为詳細的敍述，著者均有較为丰富之教学經驗，本書取材又多針对高等測量学校教学之需要，故可作为各高等測量学校教学参考書。其他各院校学習"誤差原理及最小二乘法"时，此書亦有参考价值。書中引用了一些实測的例子作为各种測量平差計算的范例，对於实际測量工作者也很有用。

本書初版於1947年，前后經过兩次修訂，供应了廣大讀者的需要。虽然由於著者工作較忙，未來得及作徹底修訂，但原書的基本內容仍適合於目前需要，故仍不失为一部頗有价值的参考書。

測 量 平 差 法

陈永齡 夏坚白 王之卓著

商 務 印 書 館 出 版
上海河南中路二一一號
(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)
新 華 書 店 總 經 售
上 海 三 星 印 刷 廠 印 刷
(15017·13)

1947年5月初版
1956年12月7版(修訂本)
1956年12月上海第2次印刷
印張14 6/16

開本850×1168 1/32
字數404,000
印數6,501—11,500
定價(10)¥2.10

目　　錄

第七版序

本書系在1943年以前寫成，1947年初版，至1956年共印行六版，未曾作較大修訂。

最近高等教育出版社反映讀者的需要，建議將本書加以修訂再版，并提出对本書修訂的意見；其中主要的一点是希望把誤差理論一部分移到本書的最后去。

著者的考慮是，几年以來在測量平差方法方面已經有若干新的發展，特別是在苏联發展的一些新的方法，在修訂时应当吸收到本書內向讀者介紹；此外，本書用文言体裁对于目前也是不合適的。因此，認为对本書加以徹底改編是非常必要的。

但是由于修訂限期急迫，而著者目前工作又都很忙，不能專心从事于修訂本書，所以商得原出版机关的同意，在这一版里，暫不考慮全部修訂，而僅作局部的重点的修改，以便早日再版，供測量作業人員和教学的参考。

由于局部修訂，本書的上述两个缺点也就不可能在这一版中消除，这是著者感到十分遺憾的。好在現在國內已有几本苏联最小二乘法教材翻譯出版，而本書內容在許多方面都可作为那几本教材的补充和参考資料，对于讀者还可以有一定的帮助。

著　者

一九五六年二月

緒　論

观測結果不能免于誤差，故吾人永远不能測得一量之絕对眞値。倘吾人丈量一直綫之長度多次，則多次观測結果必不能尽等；或者吾人观測一个多边形之所有內角，其內角总和亦不能与理論上应得之値完全相等。凡此均系由于观測結果必然受許多种誤差影响之故。

多次丈量一直綫長度之結果旣然不能互相符合，究应取何値作为最后結果？或者測定多边形之所有內角，而其总和不等于几何上应有之値，究应如何改正各內角之观測結果，使之符合于几何要求？此种問題称为平差問題。

由上所述可見，平差問題系由于有多余观測存在而產生。如果直綫長度僅丈量一次，卽無任何理由不取此次丈量之結果作为最后結果，于是卽無平差問題。在測定多边形內角时，倘多边形系由 n 个內角所組成，而測量时僅測定其中 $n-1$ 个內角，另一个內角乃由此 $n-1$ 个內角之观測結果根据几何定理推算而得，于是亦不存在平差問題。

但在各种測量工作中，为檢查观測結果有無錯誤，幷为提高最后結果之精度，通常要求必須作多余观測。是以在各种測量結果中通常均有平差問題。

消除观測結果中所存在之矛盾为平差之主要目的。但在消除矛盾时不能随意对观測結果加以取捨，或任意給予改正，而必須提出要求，消除矛盾后所得之最后結果必須为最可靠之結果，亦卽与其眞値可能最为接近之結果。是以解决平差問題时不能采用任意之方法，而必須根据观測誤差之理論制定一种方法，使由此法所得之結果最为可靠。

最初研究此問題者为德人高斯(Gauss)。1794 年高斯正在大学讀

書，年僅十七歲。当时观測小行星 ceres 在天球上之位置，獲得一系列結果，而欲由此結果推算該行星之軌道。由于有多余观測存在，用不同組观測結果計算行星軌道即將獲得不同之結果。究竟如何始能充分利用所有观測結果以便獲得决定行星軌道各原素之最可靠数值，此乃高斯所欲解决之問題。

高斯根据下列考慮出發：倘用同等精度測定一量多次，既不能对某一次結果特別重視，亦不能对某次結果廢棄不用，唯一合理之办法系取各次观測結果之算学平均值为其最后結果。此种考慮实际上系假定观測結果所受誤差之影响純系偶然性質，所以不能对某一次观測結果采取任何偏信态度。在此假定之下，高斯進一步研究偶然誤差之特性，得出偶然誤差之理論，并以此理論为基礎得出最小二乘法作为解决平差問題之基本方法。

1806 年法人勒戎德尔亦独立提出同样方法用以計算彗星的軌道，为文發表，并首次正式命名此方法为"最小二乘法"。

最小二乘法可以簡單解釋如下：如果以同等精度观測一个或多个未知量，并有多余观測，則在求定各未知量之最后結果中，必須如此改正每次观測值，使所有改正数之平方和为最小。如用符号表示，則最小二乘法的原理可以寫成

$$[vv]=\text{最小},$$

v 代表在各观測值上所应加之改正数。

高斯研究之結果于 1809 年始發表，迟于勒戎德尔。但高斯系从誤差理論出發对此方法加以論証之第一人，同时高斯又推証出如何由平差結果估計观測值以及最后平差值精度之方法。

在此后由高斯領導所進行之天文与大地測量工作中，彼曾廣泛应用最小二乘法解决測量中各項問題。对于誤差理論，对于各种类型平差問題之处理方法以及对于在平差計算中解算法方程式之方法等高斯均有更深入之研究，作出了重要之貢献。

自此以后最小二乘法卽成为处理各种測量結果之重要方法。根据最小二乘法处理測量結果可以达到下列目的：1)消除观測結果之間所存在的矛盾；2)獲得統一并为最可靠之最后結果；3)求定各观測値及平差結果之精度。

平差問題可分为下列三种基本形式：

(1) 直接观測平差　所謂直接观測卽直接測定一未知量之大小。当測定次数不僅一次时卽發生平差問題。此种問題僅含有一未知量，解算最为簡單。

(2) 間接观測平差　倘有一組互相独立之未知量，在观測时或直接測定其中若干未知量之大小，或間接測定其中若干未知量之函数之大小，最后欲由所有观測結果推求各独立未知量之最可靠結果，此时卽必須按間接观測法平差。例如在一測站 A (圖 1)上观測水平角，当此測站上有四个方向 AB, AC, AD, AE 时，存在三个独立未知量，例如圖中所示之 x, y, z 三个角。倘观測时不僅測定此三角，并独立測定 $t=x+y$, $u=x+y+z$, $v=y+z$ 等角，則此諸角乃为独立未知量 x, y, z 之函数。此种观測称为間接观測。欲由所有观測結果中推算此独立未知量之最可靠結果卽須按間接观測平差。在間接观測时必須观測量之数目多于独立未知量之数目始發生平差問題。

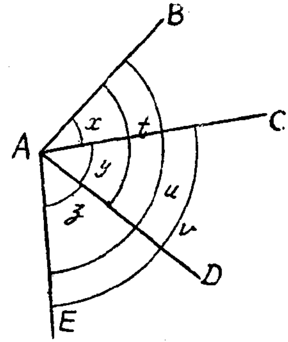

圖 1.1

(3) 条件观測平差　倘个別測定若干未知量之大小，而在此未知量之間存在有一定之数学或物理关系，在平差最后結果必須满足者，則此种观測称为条件观測，例如測定一平面三角形之三內角，在平差之后此三內角必須满足其間之几何条件，卽其和必須为 180°，此时欲求每一內角之最可靠結果卽可按条件观測平差。在条件观測中，未知量之

数目必須多于条件之数目，始發生平差問題。

某些問題既可按間接观測平差，又可按条件观測平差，例如第一圖所示之例，吾人亦可列出下列条件：

$$x+y=t,\quad x+y+z=u,\quad y+z=v$$

而按条件观測平差。同样，在观測三角形內角时，亦可利用其間之几何条件，設想其中一內角为 180° 減去另外两內角，使之成为該两內角之間接观測。

以上三种乃为平差問題之基本形式。此外尙可能發生“含有条件方程式之間接观測”或“含有新未知量之条件观測”等問題，但均可化为上述(2)或(3)之基本形式。

欲正确解决測量平差問題，必須明了誤差理論，因为誤差理論是最小二乘法之理論基礎。誤差理論之重要性尙不僅于此。在各种測量業务中，欲解决如何正确組織測量工作，如何选用正确之仪器与方法，始能獲得最为有利之結果等問題，亦必須利用誤差理論。

本書之目的在于介紹用最小二乘法解决各种平差問題之基本理論与方法，并將在三角測量中应用最小二乘法平差时之各种具体問題詳加討論，最后并介紹誤差理論之概念。

第一章　观測誤差

第一節　誤差种类

在观測时產生誤差之原因甚多。由于观測者感覺器官不尽完善，由于仪器構造存在缺陷，以及由于外界环境之影响，均能產生誤差。在各种誤差影响中，有为人力所能設法避免或消除者，有非人力所能控制者。通常按其性質將誤差分为下列各种:

(1) 錯誤　錯誤系由于观測者或記錄者之疏忽而引起。如讀測尺而記一整数或誤記分数为度数之类。在实际工作中为免除錯誤起見，除小心从事外，尙須注意檢核观測結果与計算結果之方法，使能及时發覺改正。

(2) 系統誤差　此种誤差，对于观測結果常有同一方向之影响。例如用測尺量某直綫之長，倘測尺本身之長度有差，則每用此測尺量一距离，結果必發生相同符号之誤差。由此而生之誤差卽称为系統誤差。系統誤差具有不断累積之性質，对于測量結果極为有害，在各种測量工作中必須設法避免或消除之。

(3) 偶然誤差　偶然誤差，亦有名之为不規則誤差者，其形成之原因，大半由于仪器構造上之限制、环境之影响及人类覺官所不能避免之差誤。例如以刻至公厘之測尺量一距离，則最多僅能估至 1/10 公厘，而人类覺官对于估計常不能絕对正确，故每次估計未必尽能相同。此种誤差卽为偶然誤差。如用人工方法，或增加仪器之精度，或改良讀数之設备，此种誤差可以減小至某种程度，但無法完全消除；此种誤差之影响可正可負，不能預見，此其与錯誤及系統誤差不同之处也。

在应用最小二乘法处理観測結果时，通常假定在观測結果中不存在錯誤或系統誤差而僅有偶然誤差。但必須注意，系統誤差并非經常可以避免或消除者，因此在实际所得之观測結果中一般既含有偶然誤差又含有系統誤差。系統誤差之存在常可由比較一系列观測之結果而發覚之。例如用某一測尺丈量之結果常較用另一測尺丈量之結果为大，或水准測量往測之結果常較返測之結果为大，凡此均表明有系統誤差存在于观測結果中。但如系統誤差之來源及对观測結果之影响已被消除或大加減弱，則在此种观測結果中主要誤差乃系偶然誤差。观測者之任务系在某一观測过程中設法使系統誤差之影响远小于偶然誤差之影响，此种观測結果卽可应用最小二乘法加以处理。

第二節　偶然誤差之特征

对某一次观測而言，偶然誤差之發生并不遵守一定規律。但若观測之次数增加，至于極多次，而每次观測之条件又相同，則分析所有各次观測所受偶然誤差影响之大小卽可發現在許多偶然誤差中各种大小誤差出現之次数乃遵守一定之規律。此規律可以归納为下列三点：

（1）同样大小之正誤差与負誤差，其出現之可能性必相等；

（2）較小誤差出現之可能性必高于較大誤差出現之可能性；

（3）在一定測量条件下，大誤差不会超出某一極限値，卽極大誤差不可能出現。

上述偶然誤差之三特征虽不能用純数学方法作絕对之証明，然依常理之推測及实际之經驗，对于其必然性，均可加以承認。最要者，卽所謂誤差系指純粹偶然誤差而言。如有系統誤差在内，則此三特征自不复存在，故吾人亦可利用此三特征判断一組誤差是否为純粹偶然誤差。

第三節　眞誤差与改正数

某一量眞値 X 与其观測値 l 之差称为該观測値之眞誤差，玆以 ε

代表之，于是得关系

$$\varepsilon = X - l. \tag{1}$$

一般而論，某一种独立未知量之眞值乃系不能完全用观測方法确定者。是以当观測此未知量时，观測結果之眞誤差亦恆不能确定。但当若干未知量之間存在一定条件时，在观測与此条件有关之所有未知量之后，將观測結果代入条件中，如不能与条件尽相符合，卽得所謂“不符值”或“閉合差”，此种閉合差卽代表有关观測結果之眞誤差。例如任意一平面三角形，其三个內角之和必为180°。如为球面三角形，則三內角之和必为“180°＋球面角超”。今設观測三內角之值为 α, β, γ，其和不等于“180°＋球面角超”，則所差之数称为三角形閉合差，卽为三个角度和之眞誤差。但每个角度之眞誤差則仍無法求出，因三个內角分別而論，并無任何数学关系可以决定其眞值也。

个別未知量之眞值固屬不知，但当有多余观測存在时，应用最小二乘法原理常可求得其最或是值。所謂最或是值，卽由所有有关观測值中所求出之最可靠的結果，其值可能与眞值最为接近。設对某一未知量观測一次得出观測值为 l，而由平差求得該未知量之最或是值为 x，則二者之差称为改正数，以下式表示之：

$$v = x - l. \tag{2}$$

最或是值 x 僅系由許多观測結果中所推得之最为可靠之数值，不能卽認为与眞值 X 相等，是以改正数 v 亦不与眞誤差 ε 相等。最或是值 x 求定得愈为可靠，卽愈与眞值 X 相近，而 v 亦愈与 ε 接近。

第四節 观測精度之衡量

一般而論，一次观測之精度愈高，則其結果所受誤差之影响必愈小，亦卽其眞誤差之值应当愈小。但在第一節中已指出，观測誤差中之大部分应为偶然誤差，而偶然誤差在同等精度之观測結果中有时較大有时較小，故由一次观測結果之眞誤差大小不能正确判断观測之精度。

必須有相同精度之多次观測結果，为每次結果(观測值)求出其眞誤差，然后用某种方法取一中数，使之代表观測之精度始較適宜。視取眞誤差中数之方法之不同，有所謂“平均誤差”、“中誤差”及“或是誤差”。現分論于下：

1. 平均誤差

設用同一精度观測一固定量 n 次，所得之观測值为 $l_1, l_2, \cdots l_n$，其眞誤差为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$，則所謂平均誤差者，卽为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ 各眞誤差絕对值(不計正負号)之平均值，可以公式表之如下：

$$t = \frac{\pm[|\varepsilon|]}{n}. \tag{3}$$

公式内之[ ]表示各数之和，| |表示絕对值。因平均誤差系用以表示精度者，并非实在誤差，故于其前置±符号。如观測次数極少，則依此所得之平均誤差未必可靠，是以嚴格而論，欲求某种观測之平均誤差，其观測次数 n 必須極大。

例：某三角鎖共有二十二个三角形，各三角形之内角 α, β, γ，概行測出，内角之和与“180°＋球面角超”相比較得下列之差異，求其平均誤差。

$$\alpha+\beta+\gamma-(180^\circ+\text{球面角超})=\varepsilon.$$

号数	眞誤差 ε	号数	眞誤差 ε	号数	眞誤差 ε
1	+0.36″	9	+0.56″	17	+1.62″
2	+0.93″	10	0.00″	18	+1.62″
3	−0.51″	11	−0.59″	19	+1.67″
4	−1.46″	12	0.00″	20	−0.72″
5	−0.95″	13	−1.36″	21	−1.35″
6	−1.40″	14	+1.86″	22	−0.98″
7	+1.76″	15	−0.42″		7.96″
8	+0.92″	16	+1.68″		6.47″
	8.29″		6.47″		8.29″
					和＝22.72″＝[|ε|]

$$\text{平均誤差}=t=\pm\frac{[|\varepsilon|]}{n}=\pm\frac{22.72''}{22}=\pm1.03''.$$

2. 中誤差(均方誤差)

理論上最適宜于代表观测之精度者为中誤差或称为均方誤差。所謂中誤差者，即在一相同精度观测列中各观测值之眞誤差平方和以眞誤差数目 n 除之再經开方所得之值也。此定义可以下列公式表示之:

$$m^2=\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots+\varepsilon_n^2}{n},$$

或
$$m=\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}. \tag{4}$$

式中 ε 为眞誤差，n 为观测之次数，m 为中誤差。定义中假定各观测值之精度相同，且 n 必須为較大之数目，m 之值始較可靠。

可以証明，中誤差恆大于平均誤差，因

$$m^2=\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots+\varepsilon_n^2}{n}=\frac{n\varepsilon_1^2+n\varepsilon_2^2+\cdots+n\varepsilon_n^2}{n^2};$$

$$t^2=\left[\frac{|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|+\cdots+|\varepsilon_n|}{n}\right]^2$$
$$=\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots+\varepsilon_n^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2+2\varepsilon_1\varepsilon_3+\cdots+2\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n}{n^2},$$

故

$$m^2-t^2=\frac{(n-1)(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots+\varepsilon_n^2)-(2\varepsilon_1\varepsilon_2+2\varepsilon_1\varepsilon_3+\cdots+2\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n)}{n^2}$$
$$=\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_1-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+\cdots+(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)^2}{n^2}.$$

因 $\dfrac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2}{n^2}$ 等均为正数，故 $m>t$.

只有当眞誤差 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\cdots=\varepsilon_n$ 时，始得

$$m=t,$$

但此乃不可能之情形也。

例: 例一中 $[\varepsilon\varepsilon]=30.5014$, $n=22$, 故 $m=\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}=\pm1.18''$, 較平均誤差为大。

3. 或是誤差

前两節所述之平均誤差及中誤差，均为誤差乘冪之平均值。此外尙有或是誤差者，其定义与誤差乘冪無关。設或是誤差之値为 r，則在一組精度相等之观测中，大于 r 誤差出現之或是率，应与小于 r 誤差出現之或是率相等，二者各为 1/2。由实际观测誤差値以定或是誤差时，可依照上述特征，將各誤差不分正負，依其大小之次序排列。在此排列正中間之値，卽应为或是誤差 r。盖此时大于 r 之誤差数目，適与小于 r 之誤差数目相等，与定义中或是率相等之意义脗合也。

玆再根据例一中所給之眞誤差，求或是誤差。將眞誤差依大小次序排列之为：

0.00 0.00 0.36 0.42 0.51 0.56 0.59 0.72 0.92 0.93 0.95

0.98 1.35 1.36 1.40 1.46 1.62 1.62 1.67 1.68 1.76 1.86

誤差总数为 22，其中間之二値为 0.95 及 0.98，故或是誤差应为

$$r=\pm 0.965.$$

4. 中誤差之选用

平均誤差、中誤差及或是誤差均可取用以代表观测之精度。在理論上言之（見第十一章），当观测次数为極多时，三者均可乘以某一固定之常数而互相換算。但在实际作業时一般均采用中誤差（均方誤差）以衡量观测精度，卽偶有采用或是誤差者亦必先求出其中誤差，然后乘以理論上之常数（0.6745）以得或是誤差之値。其故何在？玆申述如下：

一般观测之眞誤差率均不知，所用以衡量精度者，实皆各观测値之改正数，卽本章第三節所述之 v 是也。改正数为最或是値与观测値之差。因最或是値未必卽与眞値完全符合，是以改正数亦不能与眞誤差相等。按平均誤差、中誤差及或是誤差之定义，其値均系自眞誤差計算而得，今眞誤差旣無法求得，是以前此所列之公式及方法亦不能直接应用，势必代以由改正数計算之公式。但根据改正数 v 僅能直接推出計算中誤差之公式（見以下各章論中誤差之各節），而不能推出直接計算平均

誤差及或是誤差之公式。故通常均采用中誤差作为观測精度之衡量。

此外中誤差之値，系由誤差平方得來，故大誤差之影响亦大，較为合理；且因乘方开方之故，自动有加减号出現，亦为其优点。

有人喜用或是誤差，以为其値可代表誤差之或是値，其实不然。观測誤差如純为偶然誤差，其最或是値固为零也。且中誤差之計算，与誤差分佈依照何种定律毫無关系，而或是誤差之値，全視誤差分佈依照何种定律而異。如誤差之分佈不依高斯定律，則或是誤差計算亦不能由中誤差乘一常数轉算求得。高斯曾論及此点，是以不主張用或是誤差代表观測之精度。更進一步言之，中誤差之意义与最小二乘法最能切合，因改正数 v 之二次冪和应为最小，乃最小二乘法之基本原理，由此更易体会，按照最小二乘法平差后之結果，其中誤差实为最小，亦卽精度最高也。

最后尙須指出，由式(4)所求得之中誤差称为單一观測之中誤差，卽此中誤差代表一系列观測結果中每一次观測結果之精度。在一定条件下進行多次观測，每次观測結果之眞誤差虽不相同，但必須認为各次結果之精度相同，是以各次观測結果之精度只能用同一中誤差表示。由此可見，必須將代表一次观測精度之中誤差与某一个别观測値之眞誤差加以嚴格区别。

第五節 極限誤差

在各种測量作業中，为使观測者能判断其观測精度是否符合于規定之要求，除規定其中誤差不得超出某种限度外，又常規定最大誤差或極限誤差。例如对于長度丈量乃水准測量常規定同一綫段往測与返測結果之差不得超过某种極限。又例如对于三角測量中水平角观測常規定各測回結果相差之極限，以及三角形閉合差之極限等。

極限誤差乃对于眞誤差或眞誤差函数所規定之極限値。根据偶然誤差之特征，較大誤差出現之可能性極小，倘实际發生之誤差大于某一

定可能之限度时，即可認为該观测之精度不足或在該观测結果中含有錯誤。由偶然誤差出現或是率之理論（第十一章）可以証明，大于中誤差 2 倍之眞誤差平均須在 22 次观测中始出現一次，而大于中誤差 3 倍之眞誤差平均須在 370 次观测中始出現一次。是以通常可認为等于中誤差 2 倍至 3 倍之誤差值为可能出現之最大誤差，而規定为極限誤差。

第六節 观测值之权

在处理观测結果时，不僅有精度相同之观测結果，亦可能遇到精度不相同之观测結果。顯然，在求定最后結果时，对于观测精度較高之結果必須予以較大之信賴。表示对于某一观测值信賴程度之数值称为权。对于观测精度較高之結果給以較大之权；而对于观测精度較低之結果則給以較小之权。既然用中誤差代表观测之精度，故一观测值之中誤差与其权之間必然有一定之关系。

規定观测結果之权須与其中誤差之平方成反比。如以 p 表示某一观测結果之权而以 m 表示其中誤差，則

$$p=\frac{\lambda}{m^2}, \tag{5}$$

λ 为任一常数。

对于个別观测值而言，則由上式所得之权 p 并無意义，因 λ 旣可为任一常数，p 亦可为任意之值。但如对一系列观测值給予 λ 以一共同而又任意之数值，則各观测值之权可用下式表示：

$$p_1=\frac{\lambda}{m_1^2}, \quad p_2=\frac{\lambda}{m_2^2}, \quad p_n=\frac{\lambda}{m_n^2}, \tag{6}$$

此时比較各观测值权数之大小即可見其可靠程度之比例。

由此可見，在同一系統之观测結果中，权僅具有比較之意义。將同一系統所有观测值之权均乘一共同常数，則各观测值之权值虽有变化，而其比例不变。是以單独看权之絕对值并不能确知其眞实精度如何，

只有同时知 λ 之数值时，始能由式(5)求出其所相差之中誤差 m，从而判断其实际精度。

設式(5)中之 $p=1$，卽得

$$\lambda = m^2,$$

而 m 为相当于 $p=1$ 时之中誤差，称为权單位中誤差。

由此可見，式(5)或式(6)中之 λ 实际上可以解釋为权單位中誤差之平方。

現举例說明于下。設观測水平角时，一次观測之精度可用 $m_1 = \pm 3''$ 表示之，另一次观測之精度可用 $m_2 = \pm 4''$ 表示之。根据式(6)两次观測之权可按下式求出：

$$p_1 = \frac{\lambda}{9}, \quad p_2 = \frac{\lambda}{16}.$$

給 λ 以任意数值，設为 $\lambda = 1$，卽得

$$p_1 = \frac{1}{9}, \quad p_2 = \frac{1}{16};$$

此时系假定权單位中誤差 m 为

$$m = \sqrt{\lambda} = \pm 1'',$$

卽中誤差为 $\pm 1''$ 之观測值相当于权等于 1。

亦可給 λ 以任意一其它数值，例如 $\lambda = 9 \times 16 = 144$，于是

$$p_1 = 16, \quad p_2 = 9;$$

此时权單位中誤差將为

$$m = \sqrt{\lambda} = \pm 12'',$$

卽中誤差为 $\pm 12''$ 之观測值相当于权等于 1。

無論給 λ 以何数值，p_1 与 p_2 之比例不变，卽

$$p_1 : p_2 = \frac{1}{9} : \frac{1}{16} = 16 : 9.$$

第七節　最小二乘法原理

最小二乘法之原理为:“解算任意一平差問題时，在相等精度之观测值上所应加之改正数,其平方之和应为最小”。

今以 $v_1, v_2\cdots$ 等代表各相等精度观测值上应加之改正数，則上述原理可以下式表示之:

$$[vv]=\text{最小值}。\qquad (7)$$

廣义言之，在不等精度之观測时最小二乘方之原理为:“解算任意一平差問題时,在不等精度之观测值上所应加之改正数,其平方乘以观测之权,所得之和应为最小”。

今仍以 $v_1, v_2\cdots$ 代表各不等精度观测值上应加之改正数，而以 $p_1, p_2\cdots$ 等分别代表其各次观测之权,則上述原理可以下式表示之:

$$[pvv]=\text{最小值}。\qquad (8)$$

上述原理之導出見第十一章。

第二章 誤差傳播定律

第一節 誤差傳播

欲解算平差問題中若干重要問題，必須根据誤差傳播定律。設有若干观測值 $l_1, l_2 \cdots$，其中誤差各为 $m_{l_1}, m_{l_2}, \cdots$，則由此数观測值所計算而得之任一函数 x，亦必有誤差存在無疑。述明其中誤差 m_x 与观測值中誤差 $m_{l_1}, m_{l_2} \cdots$ 等之关系者，謂之誤差傳播定律。設一三角形之 b 边及 α, β 两角已經測定，其中誤差各为 m_b, m_α, m_β，則可按三角公式：

$$a=\frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$$

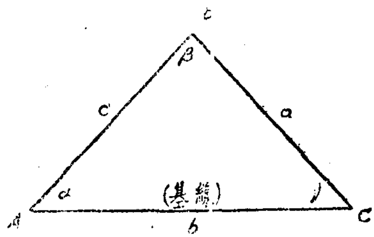

圖 2.1

以求 a 边之長。b, α, β 三值內既有誤差，故按上式計算之 a 值，自必受其影响，在平差法內名之为誤差傳播。傳播之定律可分数种，于下列各節分別論之。

第二節 倍 数

設有一数 x 等于观測值 l 之 a 倍，a 为一常数，l 之中誤差为 m_l，試求 x 之中誤差 m_x。以公式表之：

$$x=al. \tag{1}$$

l 之中誤差既为 m_l，則用 a 乘后，誤差必增大 a 倍，故卽可得下列公式：

$$m_x=am_l. \tag{2}$$

例：用視距方法測定在平地上两点間之距离时，吾人应用下列公式：

$$S = Kl + C.$$

S 为两点間之距离，K 为視距倍常数，C 为加常数，l 为視距間隔。設 K 与 C 已經精密測定，認为毫無誤差，而視距間隔讀数之中誤差为 m_l，則 S 之中誤差应为若干？

根据式(2)，S 之中誤差应为 l 中誤差之 K 倍，故

$$m_S = Km_l.$$

第三節 和 数

某一数值 x 系等于两观測值 l' 与 l'' 之和，設此两数均由相互独立之观測求得，其中誤差各为 $m_{l'}$ 及 $m_{l''}$，求 x 之中誤差 m_x 为若干？以公式表示之：

$$x = l' + l''. \tag{3}$$

今以 ε' 及 ε'' 代表 l' 及 l'' 之眞誤差，則 x 之眞誤差为 $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$。設 l' 及 l'' 各观測 n 次，則

$$\begin{array}{l|l}
\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1''; & \varepsilon_1^2 = \varepsilon_1'^2 + \varepsilon_1''^2 + 2\varepsilon_1'\varepsilon_1''; \\
\varepsilon_2 = \varepsilon_2' + \varepsilon_2''; & \varepsilon_2^2 = \varepsilon_2'^2 + \varepsilon_2''^2 + 2\varepsilon_2'\varepsilon_2''; \\
\varepsilon_3 = \varepsilon_3' + \varepsilon_3''; & \varepsilon_3^2 = \varepsilon_3'^2 + \varepsilon_3''^2 + 2\varepsilon_3'\varepsilon_3''; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots; & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\
\varepsilon_n = \varepsilon_n' + \varepsilon_n''. & \varepsilon_n^2 = \varepsilon_n'^2 + \varepsilon_n''^2 + 2\varepsilon_n'\varepsilon_n''.
\end{array}$$

由各誤差之平方求其中誤差，則按第一章第四節公式(4)得

$$m_x = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \cdots \varepsilon_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon'^2]}{n} + \frac{[\varepsilon''^2]}{n} + \frac{2[\varepsilon'\varepsilon'']}{n}}.$$

因 $$m_{l'}^2 = \frac{[\varepsilon'^2]}{n}, \quad m_{l''}^2 = \frac{[\varepsilon''^2]}{n},$$

故 $$m_x = \sqrt{m_{l'}^2 + m_{l''}^2 + \frac{2[\varepsilon'\varepsilon'']}{n}}.$$

又因 ε_1'，ε_2' 等誤差既均为偶然誤差，則应有正有負，而其各种不同配合之互乘 $\varepsilon_1'\varepsilon_1''$，$\varepsilon_1'\varepsilon_2''\cdots$ 亦必正負參半。倘 n 之数目極大，吾人可認 $\frac{[\varepsilon'\varepsilon'']}{n}$

值之極限为零。故

$$m_x=\sqrt{m_{l'}^2+m_{l''}^2}, \tag{4}$$

或

$$m_x^2=m_{l'}^2+m_{l''}^2. \tag{5}$$

若式(3)内 x 系等于两观測值 l' 及 l'' 之差时，則按上述之推論，仍得与式(5)相同之結果。

若式(3)内之 l 項数增加至 n，且各 l 均系由独立之观測所求出时，

則

$$m_x^2=m_{l'}^2+m_{l''}^2+m_{l'''}^2+\cdots+m_{l_n}^2.$$

又設 $l', l'', l''', \cdots$ 中各誤差均相等，則得一特別情形：

$$m_x^2=nm_l^2, \tag{6}$$

或

$$m_x=m_l\sqrt{n}. \tag{7}$$

例：在 A 点应用經緯儀測量角度 α 及 β，各角及其誤差之值如下：

$\alpha=36°24'31''\pm2.1''$;

$\beta=53°33'28''\pm1.7''$,

γ 为 α 及 β 两角之和，故其中誤差为：

$$m_\gamma=\sqrt{m_\alpha^2+m_\beta^2}$$
$$=\sqrt{2.1^2+1.7^2}=\pm2.7'',$$

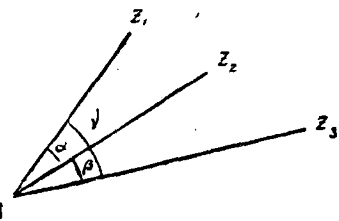

圖 2.2

γ 之値为 $89°57'59''\pm2.7''$。

第四節 直綫函数

引伸上述(2)与(5)两公式，則任意一組观測值之直綫函数之中誤差亦可求出。設观測値 $l_1, l_2, l_3, \cdots$ 之中誤差为 $m_{l_1}, m_{l_2}, m_{l_3}\cdots$，其直綫函数

$$x=a_1l_1+a_2l_2+\cdots+a_nl_n \tag{8}$$

之中誤差应为：

$$m_x=\sqrt{a_1^2m_{l_1}^2+a_2^2m_{l_2}^2+\cdots+a_n^2m_{l_n}^2}. \tag{9}$$

設 $m_l=m_{l_2}=\cdots m_{l_n}=m$ 时，

則

$$m_x=m\sqrt{[aa]}. \tag{10}$$

例：角度观测时，角度誤差來自对准誤差与讀数誤差两种，兹就各种不同之观测方法，推求其誤差之傳播。

(A) 簡單角度測量 先对左方目标，讀出两游标所指之讀数而用其平均值。繼則轉移至右方目标，而如上法得第二讀数之平均值，二平均値之差，即应为其一次角度量测之値。今以 ε_v 代表对准之眞誤差，ε_a 为讀数之眞誤差，則每方向之眞誤差 ε_r 应为：

$$\varepsilon_r=\varepsilon_v+\frac{\varepsilon_a+\varepsilon_{a'}}{2}.$$

其中 ε_a, $\varepsilon_{a'}$ 与 ε_v 为相互独立而發生之誤差，故可直接应用上述直綫函数之定律改化为中誤差：

$$m_r=\pm\sqrt{m_v^2+\frac{m_a^2}{4}+\frac{m_{a'}^2}{4}}.$$

讀数誤差 m_a 与 $m_{a'}$ 普通彼此相等，故

$$m_r=\pm\sqrt{m_v^2+\frac{m_a^2}{2}}.$$

每一角度为二方向之差，故利用和数定律知角度誤差 m_α 应为

$$m_\alpha=\sqrt{m_r^2+m_{r'}^2}=\pm\sqrt{2\left(m_v^2+\frac{m_a^2}{2}\right)}.$$

此种簡單角度之測量重复至 n 次，各次之結果設为 $\alpha_1, \alpha_2\cdots$ 而取其平均値 α 时，則公式为：

$$\alpha=\frac{1}{n}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n).$$

按直綫函数誤差傳播定律，則平均値 α 角之中誤差 m_α 应为：

$$m_\alpha=\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2m_{\alpha_1}^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2m_{\alpha_2}^2+\cdots\left(\frac{1}{n}\right)^2m_{\alpha_n}^2}.$$

当各簡單角度測量之中誤差均相等时，則得

$$m_\alpha=\frac{1}{\sqrt{n}}m_a=\sqrt{\frac{2}{n}\left(m_v^2+\frac{m_a^2}{2}\right)}. \tag{11}$$

(B) 复測法　利用复測法求角，設每次讀数仍取二遊标之平均值时，則其眞誤差之关系应为：

$$\varepsilon_\alpha=\frac{1}{n}\left\{-\frac{\varepsilon_a'+\varepsilon_a''}{2}-\varepsilon_v'+\varepsilon_v''-\varepsilon_v'''+\varepsilon_v''''+\cdots\varepsilon_v^{(2n-1)}+\varepsilon_v^{2n}+\frac{\varepsilon_a'''+\varepsilon_a''''}{2}\right\},$$

其中誤差之关系为：

$$m_\alpha=\pm\sqrt{\frac{1}{n^2}(2nm_v^2+m_a^2)}=\pm\sqrt{\frac{2}{n}\left(m_v^2+\frac{m_a^2}{2n}\right)}. \tag{12}$$

由式(11)与(12)之比較，可以知复測方法測角优点之所在矣。

第五節　任意函数

若 x 为观測值 $l_1, l_2, l_3 \cdots l_n$ 之任意函数，則式(8)仍可应用，但必須先將此函数依据泰罗 (Taylor) 定律化为直綫式，始能計算 x 之中誤差。設

$$x=f(l_1 l_2 l_3\cdots), \tag{13}$$

則函数之眞值应为：

$$x+\varepsilon=f(l_1+\varepsilon_1,\ l_2+\varepsilon_2,\ l_3+\varepsilon_3,\ \cdots).$$

因所有誤差均甚微細，其二次及更高次各項可以捨而不論，由是借泰罗定律能定 x 之眞誤差 ε 为：

$$\begin{aligned}\varepsilon&=f(l_1+\varepsilon_1,\ l_2+\varepsilon_2,\ \cdots,\ l_n+\varepsilon_n)-f(l_1 l_2\cdots l_n)\\&=\frac{\partial f}{\partial l_1}\varepsilon_1+\frac{\partial f}{\partial l_2}\varepsilon_2+\frac{\partial f}{\partial l_3}\varepsilon_3+\cdots\frac{\partial f}{\partial l_4}\varepsilon_4.\end{aligned} \tag{14}$$

由此得

$$m_x=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2 m_{l_1}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2 m_{l_2}^2+\ \cdots\ +\left(\frac{\partial f}{\partial l_n}\right)^2 m_{l_n}^2}. \tag{15}$$

例：三角形 ABC 之 b 边为已知基綫，假設其观測之誤差甚小，可認为零。α 及 β 两角之中誤差設为 m_α 及 m_β，現由 α 及 β 两角与 b 边計算 a 边之長，試求其中誤差 m_a。

解:
$$a=b\frac{\sin\alpha}{\sin\beta};$$
$$da=b\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}d\alpha+b\left(-\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta}\right)\sin\alpha d\beta$$
$$=a\cot\alpha d\alpha-a\cot\beta d\beta;$$
$$m_a=\pm\sqrt{(a\cot\alpha)^2m_\alpha^2+(a\cot\beta)^2m_\beta^2},$$
$$\therefore\quad m_a=a\sqrt{\cot^2\alpha m_\alpha^2+\cot^2\beta m_\beta^2}.$$

以上已將誤差傳播定律在各种不同情形,分别討論,公式(15)为最廣义之形式,所有其他各式均可由此化出。最后尙須声明者,卽誤差傳播定律,僅能用于偶然誤差,倘有系統誤差存在于任一观測値內,則不能应用此定律。此外各观測値又必須为互不相关,否則亦不能用,此讀者应注意者也。

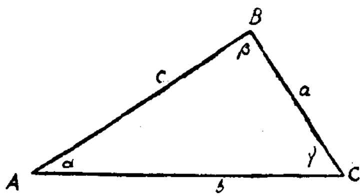

圖 2.3

習 題

1. 用一 30 公尺長之捲尺,量測 AB 間之水平距离,得 269.52 公尺。今用精密方法檢定捲尺之長度为:

30,012 公尺 ± 0.0006 公尺。

問 AB 間之实量距离应为若干? 因捲尺檢定長度之中誤差所影响全長之中誤差应为若干?

2. 前題中設每次用捲尺銜接測量时,所生之中誤差为 ±2 公厘,則因此影响全長之中誤差为若干? 合計因捲尺本身長度及因測量时所生之中誤差,量得結果之中誤差总数应为若干?

3. 用視距法測 AB 两点間之水平距离及高程差,自 A 視 B 之垂直角为 α, 則依公式:

$$E=Kl\cos^2\alpha+C\cos\alpha;$$

$$H=\frac{1}{2}Kl\sin 2\alpha+C\sin\alpha,$$

可計算水平距离 E 及高程差 H, K 为視距倍常数, l 为視距間隔讀数, 設 K 及 C 均無誤差, K 为 100, C 为 0.5 公尺, l 及 α 之讀数为:

$$l=1.25\text{ 公尺}\pm 0.015;\quad \alpha=2^{\circ}13'\pm 1',$$

求 E 及 H 之值与其中誤差。

4. 在一三角形內实測 a 边及 β 与 γ 两角,其值及中誤差为:

$$a=514.18\text{ 公尺}\pm 0.05\text{ 公尺};$$

$$\beta=57^{\circ}8'16''\pm 7'';$$

$$\gamma=75^{\circ}28'30''\pm 7'',$$

求 b 边之長及其中誤差。

第三章 直接观測之平差

第一節 簡單算学平均値

前已論及，当观測一定量至若干次，而每次观測之精度均相等时，則所有观測値之簡單算学平均値乃此量之最或是値。此种假定，常人不依任何学理即可領会，但实际亦可以最小二乘法之原理証明之。今設观測一定量 X 之結果为 $l_1, l_2, l_3 \cdots l_n$，共为 n 个观測値，以 x 为其最或是値，則每个观測値均須加一改正数 v，始能等于此値，其关系可由下列公式表示之：

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= x - l_1; \\ v_2 &= x - l_2; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots; \\ v_n &= x - l_n. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

改正数 v 之符号，恆以最或是値減去观測値为准則。按第一章第七節所論之最小二乘法定义，欲使 x 为最或是値，須令

$$[vv] = 最小値, \tag{2}$$

由公式(1)可求出：

$$[vv] = [(x-l)^2]. \tag{3}$$

今以 x 及 v 为未知数，將式(3)之右方，依 x 微分而令之为零，卽可求出 x 之値矣。

$$\frac{d[vv]}{dx} = 2[(x-l)] = 0, \tag{4}$$

故 $$(x-l_1)+(x-l_2)+\cdots+(x-l_n)=0,$$

或 $$nx = [l].$$

$$x=\frac{[l]}{n}. \tag{5}$$

由式(5)可知所求得之最或是值 x，即为所有观測值之簡單算学平均值。

根据式(4)，尙可得出

$$[v]=0, \tag{6}$$

即改正数之代数和应为零。此式为算学平均值之基本公式，可資檢核計算之用。

普通观測值之数目均甚大，而各值之差異則頗微細，故計算平均值时，应尽量应用小值，較为便捷。其法先計平均值之近似值而命为 x_0，最好約之为一整数，以便計算，然后从 $l_1, l_2 \cdots l_n$ 內分別減去近似值，其相当之差数为 $u_1, u_2, u_3 \cdots u_n$，即

$$\left.\begin{array}{l} l_1-x_0=u_1; \\ l_2-x_0=u_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\ l_n-x_0=u_n. \end{array}\right\} \tag{7}$$

由此得
$$[l]-nx_0=[u].$$

因
$$x=\frac{[l]}{n},$$

故
$$x=x_0+\frac{[u]}{n}. \tag{8}$$

例：今以相同精度量測一角度至二十一次，其結果如下表所示，求此角度之最或是值。

由下表第一列之諸观測值，可以任意选一近似值 x_0，設为 $22°36'07''.0$。更依式(7)計算 u 值列于表內第二列，并將正負分別，以便計算 u 值之和，用式(8)求出：

$$x=x_0+\frac{[u]}{n}=22°36'07''.4,$$

观測值	$u(x_0=22^\circ 36'07''.0)$		v		vv
22°36′7.8	+0.8			−0.4	0.16
7.6	+0.6			−0.2	0.04
8.5	+1.5			−1.1	1.21
7.8	+0.8			−0.4	0.16
5.1		−1.9	+2.3		5.29
6.4		−0.6	+1.0		1.00
6.8		−0.2	+0.6		0.36
6.3		−0.7	+1.1		1.21
5.8		−1.2	+1.6		2.56
8.0	+1.0			−0.6	0.36
7.5	+0.5			−0.1	0.01
7.8	+0.8			−0.4	0.16
9.6	+2.6			−2.2	4.84
6.4		−0.6	+1.0		1.00
6.5		−0.5	+0.9		0.81
8.3	+1.3			−0.9	0.81
7.0	0		+0.4		0.16
6.4		−0.6	+1.0		1.00
7.9	+0.9			−0.5	0.25
9.0	+2.0			−1.6	2.56
9.3	+2.3			−1.9	3.61
	+15.1	−6.3	+9.9	−10.3	27.56

$$[u]=+8.8,\qquad [v]=-0.4,$$

$$\frac{[u]}{n}=+0.4,$$

$$x=22^\circ 36'07''.4.$$

卽欲求之角度之最或是値也。为檢核計算之有無誤差計，須將改正数 v 求出，列于上表之第三列，按式(6)，$[v]$ 应为 0，此处 $[v]=-0.4$，系因計算 $\frac{[u]}{n}$ 时四捨五入之故，卽

$$\frac{[u]}{n}=\frac{+8.8}{21}=+0.4+\frac{0.4}{21}.$$

吾人僅用上式右方之第一項而捨去其次項 $+\frac{0.4}{21}$，故 $[v]$ 应等于捨去一項之分子，卽 -0.4 也，由此可証明上列之計算無訛。

第二節　算学平均値之中誤差

前節关于算学平均値之公式(5)亦可書作

$$x=\frac{1}{n}l_1+\frac{1}{n}l_2+\cdots+\frac{1}{n}l_n,$$

倘所有 l 之观测精度相同，如前節之所假定者，則所有 l 之中誤差必然相等。今命之为 m，根据第二章之誤差傳播定律，因 l 均为相互独立之观测值，故 x 之中誤差 M 可以下式表之：

$$M=\frac{1}{n}\sqrt{nm^2},$$

$$M=\frac{1}{\sqrt{n}}m. \tag{9}$$

但按中誤差之定义，$m=\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}$，$\varepsilon$ 为各 l 之眞誤差，吾人無从知悉；所知者僅为前節公式(1)所列之各改正数 v，故此时必須求出 ε 与 v 之关系。今設 x 之眞値为 X，則眞誤差 ε 与改正数 v 之公式各如下：

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1&=X-l_1; & v_1&=x-l_1;\\
\varepsilon_2&=X-l_2; & v_2&=x-l_2;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots; & &\cdots\cdots\cdots\cdots;\\
\varepsilon_n&=X-l_n. & v_n&=x-l_n.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1&=X-x+v_1;\\
\varepsilon_2&=X-x+v_2;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\
\varepsilon_n&=X-x+v_n.
\end{aligned}$$

但其中 $X-x$ 为平均值 x 之眞誤差，可以 ε_x 表示之，故

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1&=\varepsilon_x+v_1; & \varepsilon_1\varepsilon_1&=\varepsilon_x\varepsilon_x+2\varepsilon_x v_1+v_1v_1;\\
\varepsilon_2&=\varepsilon_x+v_2; & \varepsilon_2\varepsilon_2&=\varepsilon_x\varepsilon_x+2\varepsilon_x v_2+v_2v_2;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots; & &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\
\varepsilon_n&=\varepsilon_x+v_n. & \varepsilon_n\varepsilon_n&=\varepsilon_x\varepsilon_x+2\varepsilon_x v_n+v_nv_n.
\end{aligned}$$

$$[\varepsilon\varepsilon]=n\varepsilon_x\varepsilon_x+2\varepsilon_x[v]+[vv]. \tag{10}$$

根据前節公式(6)，$[v]=0$，故式(10)可化为

$$[vv]=[\varepsilon\varepsilon]-n\varepsilon_x\varepsilon_x, \tag{11}$$

ε_x 既为 x 之真誤差，其中值应为 x 之中誤差 M，更根据式(9)可得

$$n\cdot\varepsilon_x\varepsilon_x=n\cdot M^2=m^2.$$

又按 m 之定义：

$$[\varepsilon\varepsilon]=n\cdot m^2,$$

故代入(11)后可得

$$m^2=\frac{[vv]}{n-1} \quad 或 \quad m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}, \tag{12}$$

是为每个观測值中誤差之公式，再代入(9)即得

$$M=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}, \tag{13}$$

是为算学平均值 x 之中誤差。

例：仍以上節最后所举之例，試計算每个观測值及其算学平均值之中誤差，按照該例所附之表。

$$[vv]=27.56.$$

故每个观測之中誤差为

$$m=\pm\sqrt{\frac{27.56}{21-1}}=\pm 1''.17.$$

其算学平均值之中誤差为

$$M=\pm\frac{1''.17}{\sqrt{21}}=\pm 0''.26.$$

即該角度平差后之結果应为 $22°36'07''.4\pm$ $\pm 0''.26$.

由(9)可知算学平均值之中誤差不但与

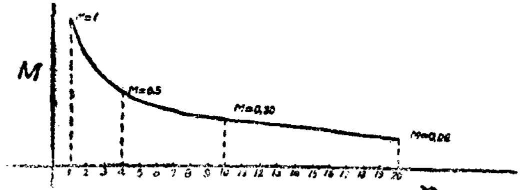

圖 3.1

每个观测值之中誤差有关，亦与观測次数有关。倘將观測次数增多，平均值之中誤差可以减小，即观测总結果之精度可以增加，但精度之增加与观測次数之平方根成比例，故至一定限度以外，观測次数虽增至甚多，精度亦不能大为增加，此种情形可用圖解說明之，將 M 与 n 之关系按照式(9)以縱横坐标表示之，可得曲綫如上(圖 3.1)(設 $m=1$)。

由上圖可以看出观測增至 6 次以上时，M 之減少已甚迟緩，是以普通观測甚少有重复至十次以上者(有时为消除仪器誤差之影响而观測更多次数)盖此时再增加观測次数，則工作加多而精度增進有限也。

倘欲使結果更加精密时，最經济而可靠之办法，乃为增加仪器本身之精度及改進观測之方法，而使每个观測值之中誤差減低。

作精密測量时，各大三角網內角或方向之观測，仍須观測多次，有时多至二十次以上者，此时之目的并非專依公式(6)求精度之改進，其主要作用乃在变换观測时之一切环境，以減少可能之系統誤差。如測角时每組观測之后，必更換度盤之位置，以免除刻度之誤差，此时增加观測次数乃另有其意义也。

至于系統誤差对于以上所求各公式之影响，当于另处論之。吾人所須牢記者，即此处所論之中誤差公式僅能適用于純含偶然誤差之观測，或已將系統誤差消除后之結果。

第三節 权之意义

权之定义，已于第一章第六節論及之。在該節中曾規定权与中誤差之平方成反比，即 $p \propto \frac{1}{m^2}$，或

$$p_1 : p_2 = m_2^2 : m_1^2.$$

茲再申論此式在实际量測情形时之意义。設某一距离用捲尺測量二日，第一日共量二次，其算学平均值为 l'，第二日共量三次，其算学平均值为 l''。問 l' 与 l'' 两观測值間权之比数如何？

兹假定两日测量应用同一捲尺并采用同一方法，其他环境亦均相同，則每次观測値之权应当相等。今設 m 为每次观測之中誤差，則根据上節所論，第一日二次之平均值之中誤差应为 $M_1=\frac{m}{\sqrt{2}}$，第二日三次观測之平均值之中誤差应为 $M_2=\frac{m}{\sqrt{3}}$，是以 M_1 与 M_2 之平方比例为：

$$M_1^2:M_2^2=\frac{m^2}{2}:\frac{m^2}{3}=3:2.$$

根据上述权与中誤差之关系，設 l' 之权为 p_1，l'' 之权为 p_2，則其比例应如下：

$$p_1:p_2=M_2^2:M_1^2=2:3.$$

吾人可令 l' 之权为 2，l'' 之权为 3，卽某日观測平均値之权逕与其观測之次数相等，但此数僅示比例，如令 l' 之权为 4，l'' 之权为 6，亦無不可。

由上例可知权与測量次数应成正比例。以一常数乘所有权之数目，則其結果不变。

决定权数之时，并非必需依其观測之次数而定。依观測次数而定其权値，僅为方法中之一种。权数固亦可根据观測情形而定，例如量一角度两次，每次所用之經緯仪不同，根据經驗，第一次所用之經緯仪可量至 $\pm 10''$ 之精度，第二次所用者可量至 $\pm 4''$ 之精度，于是两权之比可定为 $4^2:10^2$ 卽 $16:100$。又如量一距离，第一次無風力之影响，第二次有風力之影响，根据經驗，第一次之結果应較第二次为可靠，吾人可視其可靠之程度而估計其权之比例。

此外权之决定，亦可按照誤差傳播定律計算之，例如水准測量两点間高程差之中誤差与其間距离之平方根成正比，故其权应与两点間之距离成反比。蓋水准測量之誤差傳播与仪器安放次数有关，設每次安放所求得前后視差数之中誤差为 m，則 n 次相加之結果，其中誤差应为 $\sqrt{n}\,m$，設每次前后視距离均約略相等，則 n 与距离必成正比也。

第四節　廣义算学平均值

今仍以上節之距离测量为例，設第一日共量二次，其結果为 l_1, l_2，第二日共量三次；結果为 l_3, l_4, l_5。因 $l_1, l_2 \cdots l_5$ 之精度完全相等，故根据观测結果，此距离之最或是值应为 $l_1, l_2 \cdots l_5$ 之算学平均值：

$$x=\frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5}{5}. \tag{14}$$

設將两日分别平均之，命第一日之平均值为 l'，第二日之平均值为 l''，則

$$l'=\frac{l_1+l_2}{2}, \quad l''=\frac{l_3+l_4+l_5}{3};$$

或

$$l_1+l_2=2l',$$

$$l_3+l_4+l_5=3l'';$$

代入(14)应得

$$x=\frac{2l'+3l''}{5}=\frac{2l'+3l''}{2+3}. \tag{15}$$

根据上節之論列，吾人可命 l' 之权 p_1 为 2，l'' 之权 p_2 为 3，故(15)亦可書作

$$x=\frac{p_1l'+p_2l''}{p_1+p_2}.$$

此卽不等权之算学平均值公式，亦名为廣义算学平均值。普遍言之，設有观测值 $l_1, l_2, l_3 \cdots l_n$，其权各为 $p_1, p_2, p_3 \cdots p_n$，則最或是值应为

$$x=\frac{p_1l_1+p_2l_2+\cdots+p_nl_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n},$$

$$x=\frac{[pl]}{[p]}. \tag{16}$$

上列公式亦可根据廣义之最小二乘法公式導出之[第一章公式(8)]，兹以 v_i 代表某观測值 l_i 之改正数，p_i 为此改正数之权，則

$$[pvv] = \text{最小值}。$$

而 $$v_i = x - l_i,$$

故 $$[pvv] = [p_i \cdot (x - l_i)^2].$$

按最小二乘法原理微分之，以求其最小值，得

$$\frac{d[pvv]}{dx} = 2p_1(x - l_1) + 2p_2(x - l_2) + \cdots = 0,$$

或 $$[p]x - [pl] = 0, \tag{17}$$

是以 $$x = \frac{[pl]}{[p]}, \tag{18}$$

此即廣义算学平均值之公式也。

今更論其改正数方程式，則

$$\begin{aligned} v_1 &= x - l_1, & \text{权 } p_1; \\ v_2 &= x - l_2, & \text{权 } p_2; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots; \\ v_n &= x - l_n, & \text{权 } p_n. \end{aligned}$$

將以上各式分別以其权数乘之，卽得

$$\begin{aligned} p_1v_1 &= p_1x - p_1l_1; \\ p_2v_2 &= p_2x - p_2l_2; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\ p_nv_n &= p_nx - p_nl_n; \\ \hline [pv] &= [p]x - [pl]. \end{aligned} \tag{19}$$

但根据式(16)，$[p]x = [pl]$，故

$$[pv] = 0. \tag{20}$$

此为不等权直接观测平差之基本公式，与本章第一節公式(6) $[v] = 0$ 之意义相同，蓋式(20)中如各(p)相等，卽可化为式(6)也。

由式(16)及(20)倘可証明权之單个值与計算結果無关，僅須保留其比例卽可。設將所有 p 值均用一常数 a 乘之，則

$$x=\frac{[apl]}{[ap]}=\frac{a[pl]}{a[p]}=\frac{[pl]}{[p]}$$

$$[apv]=a[pv]=0, \text{ 即 } [pv]=0.$$

对于結果并無影响也。

第五節　权單位及廣义算学平均値之中誤差

在等权观测內，可求出每一观测値之中誤差，但在不等权观测时，每个观测値精度不同，其中誤差亦必不同，是以表示一般精度之方法，以用权單位之中誤差为宜。所謂权單位者，卽一假想之观测値，其权適为 1 也（参考第一章第六節）。倘权單位之中誤差已知，則根据权与中誤差平方成反比之原理，任何观测値之中誤差均可求出。設有观测値 $l_1, l_2, \cdots l_n$ 共 n 个，其权各为 $p_1, p_2 \cdots p_n$，倘吾人已知权單位（卽 $p=1$ 时）之中誤差为 m，則

$$1 : p_1 = m_1^2 : m^2,$$

或

$$m_1^2=\frac{m^2}{p_1}, \qquad m_1=\frac{m}{\sqrt{p_1}}.$$

同理可得

$$\left.\begin{array}{ll} m_2^2=\dfrac{m^2}{p_2}, & m_2=\dfrac{m}{\sqrt{p_2}}; \\ \cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots; \\ m_n^2=\dfrac{m^2}{p_n}, & m_n=\dfrac{m}{\sqrt{p_n}}. \end{array}\right\} \tag{21}$$

今再將廣义算学平均値之公式(16)分項寫出：

$$x=\frac{p_1}{[p]}l_1+\frac{p_2}{[p]}l_2+\cdots+\frac{p_n}{[p]}l_n, \tag{22}$$

因 $l_1, l_2 \cdots l_n$ 均为各自独立之观测値，其中誤差各为 $m_1, m_2, m_3, \cdots m_n$，是以按照誤差傳播定律，$x$ 之中誤差应为

$$M^2=\left(\frac{p_1}{[p]}m_1\right)^2+\left(\frac{p_2}{[p]}m_2\right)^2+\cdots+\left(\frac{p_n}{[p]}m_n\right)^2, \tag{23}$$

將(21)代入(23)內各項而归併之，即得

$$M^2=\frac{m^2}{[p]^2}(p_1+p_2+\cdots+p_n)=\frac{m^2}{[p]}, \tag{24}$$

或

$$M=\frac{m}{\sqrt{[p]}}. \tag{25}$$

因相当于中誤差 m 之权为 1，故按(25)知廣义算学平均值 x 之权为 $[p]$。但 m 之値为何？則仍可应用第二節类似之方法求之。今命 X 为 x 之眞値，ε 代表某次观測之眞誤差，因

$$\varepsilon_i=X-l_i,\quad v_i=x-l_i,$$

故

$$\varepsilon_i=v_i+(X-x).$$

兩方均乘以 $\sqrt{p_i}$：

$$\varepsilon_i\sqrt{p_i}=v_i\sqrt{p_i}+(X-x)\sqrt{p_i}. \tag{26}$$

將(26)兩方平方，令 $i=1, 2, \cdots n$，而求其和：

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^2p_1&=v_1^2p_1+(X-x)^2p_1+2v_1(X-x)p_1;\\
\varepsilon_2^2p_2&=v_2^2p_2+(X-x)^2p_2+2v_2(X-x)p_2;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\
\varepsilon_n^2p_n&=v_n^2p_n+(X-x)^2p_n+2v_n(X-x)p_n,\\
\hline
\text{和}\quad[\varepsilon^2p]&=[v^2p]+(X-x)^2[p]+2(X-x)[vp].
\end{aligned}$$

因

$$[pv]=0,$$

故

$$[\varepsilon^2p]=[v^2p]+(X-x)^2[p]. \tag{27}$$

式(27)內之 $(X-x)=\varepsilon_x$ 为 x 之眞誤差，其中値应为 x 之中誤差 M，更按式(25)，則得

$$(X-x)^2[p]=M^2[p]=m^2.$$

式(27)之左方可改化如下：

$$[\varepsilon^2p]=[(\sqrt{p}\varepsilon)^2],$$

其中 $(\sqrt{p_1}\varepsilon_1)^2, (\sqrt{p_2}\varepsilon_2)^2, \cdots$ 等均代表权單位之眞誤差，故按权單位中誤差之定义得：

$$m=\sqrt{\frac{[(\sqrt{p}\,\varepsilon)^2]}{n}},$$

或
$$[p\varepsilon^2]=nm^2.$$
代入(27)得
$$nm^2=[pv^2]+m^2,$$
故
$$m^2=\frac{[pv^2]}{n-1},$$
或
$$m=\pm\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}. \tag{28}$$
代入(25)得
$$M=\pm\sqrt{\frac{[pv^2]}{[p](n-1)}}, \tag{29}$$
m 为权單位之中誤差，而 M 系廣义算学平均値之中誤差。玆將其实际之运用举下例以說明之。

例 1：某一角度曾用复測法量測四次，各次均依其重复之次数而定其权値。得下列之結果，求其最或是值与中誤差。

观測値 l	p	$u(l_0=78°18'42''.00)$		pu		v		pv		pvv
78°18′42″.16	3	+0.16		+0.48			−0.09		−0.27	0.024
41.96	2		−0.04		−0.08	+0.11		+0.22		0.024
41.70	2		−0.30		−0.60	+0.37		+0.74		0.274
42.23	4	+0.23		+0.92			−0.16		−0.64	0.102
合　計	11			+1.40	−0.68			+0.96	−0.91	0.424

$$[pu]=+0.72,\quad \frac{[pu]}{[p]}=\frac{+0.72}{11}=+0.07,$$
$$m=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}=\sqrt{\frac{0.424}{4-1}}=\pm 0''.38,$$
$$M=\frac{m}{\sqrt{[p]}}=\frac{\pm 0.38}{\sqrt{11}}=\pm 0''.11,$$
平差結果得　　$78°18'42''.07\pm 0''.11.$

例 2：A, B, C, D, E, F 六点之高程为已知，自此六点用三角高程測量法定 P 点之高度得下表之結果：

目标距离 (S)	各点高出海面之高程	量得之高程差	算得 P 点之高程
AP=20.10 公尺	A 1043.64 公尺	$h_1=-314.73$ 公尺	728.91 公尺
BP=89.03	B 619.02	$h_2=+109.20$	728.22
CP=58.20	C 480.81	$h_3=+248.24$	729.05
DP=30.02	D 1247.01	$h_4=-518.43$	728.58
EP=61.97	E 928.18	$h_5=-199.16$	729.02
FP=58.00	F 418.71	$h_6=+310.13$	728.84

試求 P 点之高程(假設 $A, B, \cdots$ 等六点之高程均無誤差)。

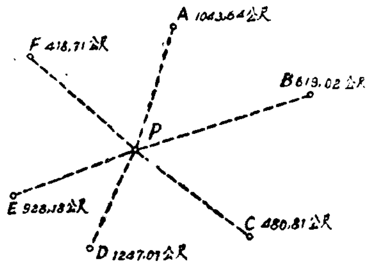

圖 3.2

按三角高程測量原理，高程差 η 之誤差与目标距离 S 为正比例，故其权 p 应反比于目标距离 S 之平方，卽 $p=\frac{1}{S^2}$。化零为整，由上表內之 S 約化成下数。

$$S=2.0,\quad 8.9,\quad 5.8,\quad 3.0,\quad 6.2,\quad 5.8 \text{ 公里};$$

$$p=\frac{1}{S^2}=0.25,\quad 0.01,\quad 0.03,\quad 0.11,\quad 0.03,\quad 0.03.$$

更表列上述結果而計算之，得：

l_0+u	p	pu	$v=0.83-u$	pv	pvv
728+0.91	0.25	0.2275	−0.08	−0.0200	0.0016
+0.22	0.01	0.0022	+0.61	+0.0061	0.0037
+1.05	0.03	0.0315	−0.22	−0.0066	0.0015
+0.58	0.11	0.0638	+0.25	+0.0275	0.0070
+1.02	0.03	0.0306	−0.19	−0.0057	0.0011
+0.84	0.03	0.0252	−0.01	−0.0003	0.0000
和	0.46	0.3808			0.0149

檢核 $[pv]=+0.001$;

$$x = x_0 + \frac{[pu]}{[p]} = 728 + \frac{0.3808}{0.46} = 728 + 0.83.$$

权單位之中課差:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{0.0149}{6-1}} = \pm 0.055\ 公尺;$$

平均值之中課差:

$$M = \pm\frac{m}{\sqrt{[p]}} = \frac{0.055}{\sqrt{0.46}} = \pm 0.080\ 公尺;$$

故 P 点之高程为

$$H = 728.83\ 公尺 \pm 0.080\ 公尺。$$

第六節　根据观测值之中課差計算廣义算学平均值之中課差

权之大小可依各观测值本身中課差平方之倒数定之。設有一角度，于不同日期内观测三次，每次观测之結果，系用若干組平均所得，故可計算其中課差，兹以下列方式表示之。

观测值	中課差	权数
l_1	m_1	$\frac{1}{m_1^2}$
l_2	m_2	$\frac{1}{m_2^2}$
l_3	m_3	$\frac{1}{m_3^2}$

于是其廣义算学平均值为

$$x = \frac{\frac{l_1}{m_1^2} + \frac{l_2}{m_2^2} + \frac{l_3}{m_3^2}}{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \frac{1}{m_3^2}}. \tag{30}$$

按第五節 x 之权数应为

$$P=[p]=\frac{1}{m_1^2}+\frac{1}{m_2^2}+\frac{1}{m_3^2}=\left[\frac{1}{m^2}\right],$$

故 x 之中課差亦可求出:

$$M=\frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{m^2}\right]}}. \tag{31}$$

公式(30)事实上卽为廣义算学平均值公式之另一寫法,然由式(31)所得之結果,并不定与式(29)之結果相等,盖式(31)全由观测值原有之中課差所求得,并未顧及各 l 間之差別,而式(29)則全由 l 間之差別求出,初未計及原有观測值 l 之精度。是以应用此两公式所求出之中誤差未必完全符合。此种差别可为偶然者,亦可为必然者,当 l 数目不多时,按照式(29)所求出之中誤差必不能准确,此时与按式(31)所計算之結果可相差甚大,此乃純为偶然性質之差别。但有时 l 之中誤差甚小,而各 l 間之差異則甚大,其結果必致由式(31)算出之中誤差远較由式(29)得出者为小,此乃为必然性質者。盖各 l 值观測时尙可有其他因环境不同所發生之誤差存在也。

此种情形,常可于角度观測时發現。今設量測一角度二三日,每日观測若干組,而求其平均值及其中誤差。倘每日之天气情形不同,以致折光影响及照准誤差均不相同,則每日結果,其內部相差極微,而与另一日之結果相比,可能發生甚大之差異。此时观測者所应注意者,乃設法尋得最適宜之环境,而尽量使观測結果不受系統誤差之影响。

例:某角度之測量分別于三日完成,每日各測数組,其平均值及中誤差如下,求其最或是值与相当之中誤差。

第一日观測結果: $l_1=149°16'51''.48,\quad m_1^2=0.44;$

第二日观測結果: $l_2=149°16'48''.87,\quad m_2^2=0.17;$

第三日观測結果: $l_3=149°16'49''.72,\quad m_3^2=0.14.$

$$x = 149°16'48''.87 + \frac{\dfrac{2.61}{0.44} + 0 + \dfrac{0.85}{0.14}}{\dfrac{1}{0.44} + \dfrac{1}{0.17} + \dfrac{1}{0.14}} = 149°16'49''.65.$$

A: 依各观测值本身之中誤差計算其最或是值之中誤差[公式(30)]

$$M_x = \frac{1}{\sqrt{\left[\dfrac{1}{m^2}\right]}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{0.44} + \dfrac{1}{0.17} + \dfrac{1}{0.14}}} = \frac{1}{\sqrt{15.31}} = \pm 0''.26.$$

B: 依各观测值間之差異計算其最或是值之中誤差[公式(29)]

	l	p	v	pv	pvv
1	149°16′51″.48	2.27	−1.83	+4.05	7.590
2	48″.87	5.89	+0.78	+4.59	3.600
3	49″.72	7.15	−0.07	−0.50	0.035
	x=149°16′49″.65	15.31		−0.06	11.225

$$M_x = \sqrt{\frac{[pvv]}{[p](n-1)}} = \sqrt{\frac{11.225}{15.31 \times 2}} = \sqrt{\frac{11.225}{30.62}} =$$
$$= \pm 0''.61.$$

第七節 以三角形角值之平差为例

某三角形之三角如各以不同权之观测得 α, β, γ, 其权之比例为 p_α, p_β, p_γ。因每平面三角形三內角之和应等于 180°, 故在此三观测之中,有多余观测存在,其各角之最或是值可以直接观测平差法推求之。

今試以 A 角而論,此角一方面可由其角之直接观测值 α。另方面尙可由 β, γ 二观测值推算而得,即 $A = 180° - (\beta + \gamma)$。

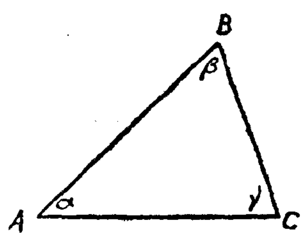

圖 3.3

設前者之权为 p_α 而后者之权为 p'，則按式(16)可求 A 角値应为：

$$\angle A=\frac{p_\alpha\alpha+p'[180^\circ-(\beta+\gamma)]}{p_\alpha+p'}. \tag{32}$$

今以 m 为权單位之中誤差，即

$$m^2=m_\alpha^2\cdot p_\alpha=m_\beta^2p_\beta=m_\gamma^2p_\gamma=m'^2p', \tag{33}$$

其中 m' 为相当于公式(32)內权为 p' 时之中誤差，但 m' 由 β 与 γ 二角观測誤差之和所構成。

$$m'^2=m_\beta^2+m_\gamma^2=\frac{m^2}{p_\gamma}+\frac{m^2}{p_\beta}=\frac{m^2}{p'},$$

故

$$\frac{1}{p'}=\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\quad 或\quad p'=\frac{1}{\dfrac{1}{p_\beta}+\dfrac{1}{p_\gamma}}, \tag{34}$$

而

$$p_\alpha+p'=\frac{1}{\dfrac{1}{p_\alpha}}+\frac{1}{\dfrac{1}{p_\beta}+\dfrac{1}{p_\gamma}}=\frac{\left[\dfrac{1}{p}\right]}{\dfrac{1}{p_\alpha}\left(\dfrac{1}{p_\beta}+\dfrac{1}{p_\gamma}\right)}. \tag{35}$$

又按平面三角公式

$$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ,$$

今以观測値 α,β,γ 代入上式，則由观測誤差关系，不能符合，称其不符之値为閉合差 w，即

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ+w, \tag{36}$$

代之于(32)得

$$\angle A=\frac{p_\alpha\alpha+p'(\alpha-w)}{p_\alpha+p'}=\alpha-\frac{p'}{p_\alpha+p'}w,$$

更按(34)及(35)得

$$\angle A=\alpha-\frac{1}{\dfrac{1}{p_\beta}+\dfrac{1}{p_\gamma}}\cdot\frac{\dfrac{1}{p_\alpha}\left(\dfrac{1}{p_\beta}+\dfrac{1}{p_\gamma}\right)}{\left[\dfrac{1}{p}\right]}w=\alpha-\frac{\dfrac{1}{p_\alpha}}{\left[\dfrac{1}{p}\right]}w. \tag{37}$$

今再論两观测值 α 及 $180^\circ-(\beta+\gamma)$ 之改正数 v_1 及 v_2，其值应为：

$$v_1=\angle A-\alpha=-\frac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]}w;$$

$$v_2=\angle A-[180^\circ-(\beta+\gamma)]=\angle A-\alpha+w=$$

$$=+\frac{\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)w}{\left[\frac{1}{p}\right]}. \tag{38}$$

权單位之中誤差为：

$$m=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}=\sqrt{\frac{p_\alpha v_1^2+p'v_2^2}{2-1}}=\sqrt{p_\alpha\left(\frac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]}w\right)^2+\frac{\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)^2w^2}{\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)\left[\frac{1}{p}\right]^2}}=$$

$$=\frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]}\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}w^2+\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)w^2}=\pm\frac{w}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}}; \tag{39}$$

平差前 A 角之中誤差为：

$$m_\alpha=\frac{m}{\sqrt{p_\alpha}}=w\frac{\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}}}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}};$$

平差后 A 角之中誤差为：

$$M_\alpha=\frac{m}{\sqrt{[p]}}=\frac{m}{\sqrt{p_\alpha+p'}}=$$

$$=\frac{w}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}}\sqrt{\frac{\frac{1}{p_\alpha}\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)}{\left[\frac{1}{p}\right]}}=\frac{w\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)}}{\left[\frac{1}{p}\right]}. \tag{40}$$

B, C 两角之值及其中誤差亦可以同理求得，兹將各式綜列于下:

$$\left.\begin{aligned}
\angle A &= \alpha - \frac{\dfrac{1}{p_\alpha}}{\left[\dfrac{1}{p}\right]} w; \qquad M_\alpha = \frac{w\sqrt{\dfrac{1}{p_\alpha}}\sqrt{\dfrac{1}{p_\beta}+\dfrac{1}{p_\gamma}}}{\left[\dfrac{1}{p}\right]}.\\
\angle B &= \beta - \frac{\dfrac{1}{p_\beta}}{\left[\dfrac{1}{p}\right]} w; \qquad M_\beta = \frac{w\sqrt{\dfrac{1}{p_\beta}}\sqrt{\dfrac{1}{p_\alpha}+\dfrac{1}{p_\gamma}}}{\left[\dfrac{1}{p}\right]}.\\
\angle C &= \gamma - \frac{\dfrac{1}{p_\gamma}}{\left[\dfrac{1}{p}\right]} w; \qquad M_\gamma = \frac{w\sqrt{\dfrac{1}{p_\gamma}}\sqrt{\dfrac{1}{p_\alpha}+\dfrac{1}{p_\beta}}}{\left[\dfrac{1}{p}\right]}.
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

例 1: 三角形之三內角，观測結果如下，試平差之(圖 3.4)。

$$\begin{aligned}
\alpha &= 72^\circ 16' 44''.86, & p_\alpha &= 27;\\
\beta &= 90^\circ \ \ 1' 56''.46, & p_\beta &= 42;\\
\gamma &= 17^\circ 41' 17''.43, & p_\gamma &= 65;
\end{aligned}$$

和 $= 179^\circ 59' 18''.75.$

$180^\circ +$ 球面角超 $= 180^\circ 00' 00''.29;$

三角形閉合差 $w = \qquad -1''54.$

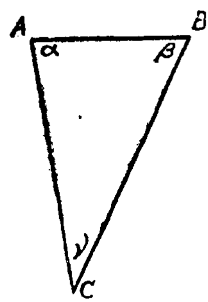

圖 3.4

解出:

$$\frac{1}{p_\alpha} = 0.037; \quad \frac{1}{p_\beta} = 0.024; \quad \frac{1}{p_\gamma} = 0.015; \quad \left[\frac{1}{p}\right] = 0.076.$$

$$v_\alpha = \frac{\dfrac{1}{p_\alpha}}{\left[\dfrac{1}{p}\right]} w = \frac{0.037}{0.076} \times 1''.54 = +0''.75;$$

$$v_\beta=\frac{\frac{1}{p_\beta}}{\left[\frac{1}{p}\right]}w=\frac{0.024}{0.076}\times 1''.54=+0.49'';$$

$$v_\gamma=\frac{\frac{1}{p_\gamma}}{\left[\frac{1}{p}\right]}w=\frac{0.015}{0.076}\times 1''.54=+0.30''.$$

观测結果	改正数	平差角值
72°16′44″.86	+0.75	72°16′45″.61
90° 1′56″.46	+0.49	90° 1′56″.95
17°40′17″.43	+0.30	17°41′17″.73
179°59′58″.75		180°00′00″.29

权單位之中誤差:

$$m=\frac{w}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}}=\frac{1.54}{\sqrt{0.076}}=\pm 3''.59.$$

平差后之角中誤差:

$$M_\alpha=\frac{w\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}}\sqrt{\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}}}{\left[\frac{1}{p}\right]}=\frac{1.54\sqrt{0.037}\sqrt{0.039}}{0.076}=\pm 0''.77;$$

$$M_\beta=\frac{w\sqrt{\frac{1}{p_\beta}}\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}+\frac{1}{p_\gamma}}}{\left[\frac{1}{p}\right]}=\frac{1.54\sqrt{0.024}\sqrt{0.052}}{0.076}=\pm 0''.72;$$

$$M_\gamma=\frac{w\sqrt{\frac{1}{p_\gamma}}\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}+\frac{1}{p_\beta}}}{\left[\frac{1}{p}\right]}=\frac{1.54\sqrt{0.015}\sqrt{0.081}}{0.076}=\pm 0''.61.$$

平差之結果:

$$\alpha = 72°16'45''.61 \pm 0''.77;$$

$$\beta = 90° \ \ 1'56''.95 \pm 0''.72;$$

$$\gamma = 17°41'17''.73 \pm 0''.61.$$

观测各角之权如系相同,則上述各式可以简化甚多,盖属于上式內之一特别情形也。三角之观測值仍設为 α, β, γ 而其权各等于 1, 故

第一角值: α, 权: $p_\alpha = 1$;

第二角值: $180° - (\beta + \gamma)$, 权: $p' = \frac{1}{2}$.

平均値为:

$$\angle A = \frac{1 \times \alpha + \frac{1}{2}\{180 - (\beta + \gamma)\}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2\alpha(\alpha - w)}{3} = \alpha - \frac{w}{3}. \tag{42}$$

其他两角 β 及 γ 亦可以同法求之,若以 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 代表三角之平差角值,則

$$\left.\begin{aligned} \angle A &= \alpha - \frac{w}{3}; \\ \angle B &= \beta - \frac{w}{3}; \\ \angle C &= \gamma - \frac{w}{3}, \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = \alpha + \beta + \gamma - w.$$

式 (38) 中第一角值之改正数为 $v_1 = -\frac{w}{3}$ 而第二角值之改正数 v_2 則等于 $-\left(\frac{w}{3} + \frac{w}{3}\right) = -\frac{2}{3}w$, 由是求得权單位之中誤差,其式如下:

$$m = \pm\sqrt{\frac{p_\alpha v_1^2 + p' v_2^2}{2-1}} = \sqrt{\left(\frac{w}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}w\right)^2} = \pm\frac{w}{\sqrt{3}}; \tag{44}$$

平差后角度之中誤差:

$$M=\pm\frac{m}{\sqrt{[p]}}=\pm\frac{m}{\sqrt{\frac{3}{2}}}=\pm\frac{w}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\pm\frac{w\sqrt{2}}{3}. \tag{45}$$

就(44)及(45)而比較之,可以考核其角值中誤差由平差結果而低減之比例为

$$M:m=\frac{w\sqrt{2}}{3}:\frac{w}{\sqrt{3}}=0.816:1.$$

第八節 分組与全体平差

本節拟討論者,为直接观測之分組与全体平差之区别。根据本章第四節所論,已可証明如將观測值分組平均,各組之平均値給予相当之权后,再求其总平均値,則其結果与全体平差無異。但在此两种情形內所求出之总平均値之中誤差,則并不一定相等。

今举一簡單之例以說明之。設有观測值四个:l_1, l_2, l_3, l_4,其平均値为

$$x=\frac{l_1+l_2+l_3+l_4}{4}, \tag{46}$$

改正数各为

$$\left.\begin{aligned}v_1&=x-l_1;\\v_2&=x-l_2;\\v_3&=x-l_3;\\v_4&=x-l_4.\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

改正数之平方和为

$$[vv]=v_1^2+v_2^2+v_3^2+v_4^2. \tag{48}$$

每个观測值之中誤差为

$$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{4-1}}=\pm\sqrt{\frac{1}{3}(v_1^2+v_2^2+v_3^2+v_4^2)}; \tag{49}$$

总平均值之中課差为

$$M=\pm\frac{m}{\sqrt{4}}. \tag{50}$$

今設將此四个观測值分为两組平均，先求 l_2, l_3, l_4 之平均值，命之为 l_2'：

$$l_2'=\frac{l_2+l_3+l_4}{3}. \tag{51}$$

更命 l_1 單为一組，命之为 l_1'，則 $l_1'=l_1$。然后再將 l_1' 与 l_2' 按不等权之算学平均值求其平均数，此时 l_1' 之权为 1，l_2' 之权应为 3：

$$x'=\frac{l_1'+3l_2'}{1+3}=\frac{1}{4}(l_1'+3l_2'). \tag{52}$$

將(51)代入(52)內而与(46)比較，卽可證明 $x'=x$。但此时之改正数已变为：

$$\left.\begin{aligned}v_1'&=x'-l_1'=x-l_1=v_1, & p_1&=1;\\ v_2'&=x'-l_2'=\frac{1}{3}(v_2+v_3+v_4), & p_2&=3.\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

故

$$[pv'v']=v_1^2+3v_2'^2. \tag{54}$$

在比較(48)与(54)两式之前，須先將(48)化为下列形狀：

$$\begin{aligned}[vv]&=v_1^2+(v_2'+v_2-v_2')^2+(v_2'+v_3-v_2')^2+(v_2'+v_4-v_2')^2=\\ &=v_1^2+3v_2'^2+\{(v_2-v_2')^2+(v_3-v_2')^2+(v_4-v_2')^2\}=\\ &=[pv'v']+\{(v_2-v_2')^2+(v_3-v_2')^2+(v_4-v_2')^2\}.\end{aligned} \tag{55}$$

(55)明白表示 $[pv'v']$ 永較 $[vv]$ 为小，因{ }括号內之值永为正数也。至{ }括号內之値究为若干？可比較(47)及(53)而得之，盖

$$\left.\begin{aligned}(v_2-v_2')^2&=(l_2'-l_2)^2;\\ (v_3-v_2')^2&=(l_2'-l_3)^2;\\ (v_4-v_2')^2&=(l_2'-l_4)^2.\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

由此可知 $[vv]$ 乃代表遞次平均所有改正数平方之总和，因(56)所代表者乃求第一次分組平均値 l_2' 时改正数之平方。公式(55){ }括号內

之值即其总和；$[pv'v']$ 則代表第二次求总平均值时之改正数平方总和，是以公式(55)又可証明，無論分組平差或全体平差，其所有改正数之平方总和必不变易。

但在分組平差时，求权單位及总平均值之中誤差应用下列公式：

$$m' = \pm\sqrt{\frac{[pv'v']}{2-1}}; \tag{57}$$

$$M' = \pm\frac{m'}{\sqrt{4}}. \tag{58}$$

因权單位之中誤差即相当于單个观測值之中誤差，故就理論而言，m 应当与 m' 相等，且無論逐次平差或一次平差，M 必須等于 M'。但实际上 m 与 m' 未必完全符合，二者比較当以 m 之值較为可靠，蓋分組平差后，組数較原來观測值为少，故式(57)不如(49)可靠，此点頗堪注意也。

例：求某水准之水准軸与視軸之夾角时，利用直接观測法得下列之結果：

第一日	第二日	第三日	
$l_1=+1''.27$	$l_5=+0''.03$	$l_9=-0''.90$	$l_{13}=-0''.60$
$l_2=-0''.78$	$l_6=+0''.07$	$l_{10}=+0''.20$	$l_{14}=-0''.90$
$l_3=+0''.01$	$l_7=+0''.08$	$l_{11}=+0''.96$	$l_{15}=-0''.17$
$l_4=-0''.71$	$l_8=+0''.56$	$l_{12}=+0''.86$	$l_{16}=-0''.03$

第一日观測值之平均值为：

$$x_1=\frac{+1.27+0.01-0.78-0.71}{4}=-0''.03; \quad [vv]=2.73.$$

第二日及第三日观測值之平均值各为：

$$x_2=+0''.18;$$

$$x_3=-0''.07.$$

由全部观測值求得之总平均值为：

$$x=+0''.00.$$

其改正数之平方总和

$$[vv]=6.77,$$

于是每一观测之中誤差为:

$$m=\sqrt{\frac{6.77}{16-1}}=\pm 0''.67.$$

总平均值之中誤差为:

$$M=\frac{0.67}{\sqrt{16}}=\pm 0''.17.$$

以上系就全体平差法而求得之平均值及其中誤差。兹設將三日所得之結果分成三組平差,其总平均值仍相同,但中誤差則不复相同矣!

$$x_1=-0''.03,\quad \text{观測次数 } 4,\quad [vv]=2.7345;$$

$$x_2=+0''.18,\quad \text{观測次数 } 4,\quad [vv]=0.1890;$$

$$x_3=-0''.07,\quad \text{观測次数 } 8,\quad [vv]=3.6690.$$

令权單位代表一次之观測,于是三日所得結果之权数比例为 $4:4:8$,由是得:

$$x=\frac{-0.03\times4+0.18\times4-0.07\times8}{16}=0''.00.$$

改正数 $v_1=+0.03,\quad v_2=-0.18,\quad v_3=+0.07,;$

$$[pvv]=0.17;$$

$$m'=\pm\sqrt{\frac{0.17}{3-1}}=\pm 0''.29;$$

$$M'=\frac{0.29}{\sqrt{16}}=\pm 0''.07.$$

第九節 观測値差

測量距离时,通常均往返各測一次而求其平均値,水准測量亦然,两次之結果旣不能相等,其差謂之观測値差。設有一長距离为 l,往返

观测之結果为 l_1 及 l_2，其差为 $d=l_2-l_1$，而其長之最或是值 x 应为：

$$x=\frac{l_1+l_2}{2}. \tag{59}$$

相当之改正数为：

$$v_1=x-l_1=+\frac{d}{2};\quad v_2=x-l_2=-\frac{d}{2},$$

故每一次观測之中誤差亦可根据下式求之：

$$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{\frac{d^2}{4}+\frac{d^2}{4}}{2-1}}=\frac{d}{\sqrt{2}}; \tag{60}$$

其平均值 x 之中誤差等于

$$M=\frac{m}{\sqrt{2}}=\frac{d}{2}. \tag{61}$$

水准測量或距离測量时，以路徑过長而分段施測，在每段內往返各測一次，然后混合平差之。兹令每段之观測值差为 $d_1, d_2, d_3 \cdots d_n$，而其相当之中誤差等于 $m_1, m_2 \cdots m_n$，于是每次观測之中誤差当用下式計算之：

$$m=\pm\sqrt{\frac{m_1^2+m_2^2+\cdots+m_n^2}{n}}=\pm\sqrt{\frac{[dd]}{2n}}; \tag{62}$$

而每对观測平均值之中誤差为：

$$M=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{[dd]}{n}}. \tag{63}$$

各次观測精度不能尽同，各水准測量之分段施測时因环境之特殊，分段各有長短，其由不同段所得之观測值差，应給与相当之权。

令 l 及 l' 为每对之观測值，ε 及 ε' 則为其相当之眞誤差，于是每对观測所得之关系可以下式表示之：

$$\left.\begin{array}{ll} l_1+\varepsilon_1=l'_1+\varepsilon'_1, \quad \text{或} & l_1-l'_1=d_1=\varepsilon'_1-\varepsilon_1; \\ l_2+\varepsilon_2=l'_2+\varepsilon'_2, & l_2-l'_2=d_2=\varepsilon'_2-\varepsilon_2; \\ \cdots\cdots,\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\ l_n+\varepsilon_n=l'_n+\varepsilon'_n, & l_n-l'_n=d_n=\varepsilon'_n-\varepsilon_n. \end{array}\right\} \tag{64}$$

乘上式各以 $\sqrt{p_1}$, $\sqrt{p_2}$, $\cdots$, $\sqrt{p_n}$ 求其平方总和,而以 n 除之得

$$\frac{[d^2p]}{n}=\frac{[(\sqrt{p}\varepsilon)^2]}{n}+\frac{[(\sqrt{p'}\varepsilon')^2]}{n}-\frac{2[(\sqrt{p}\varepsilon)(\sqrt{p}\varepsilon')]}{n}, \tag{65}$$

其中按权与中誤差之关系;可知 $\sqrt{p}\varepsilon$ 与 $\sqrt{p'}\varepsilon'$ 等相当于权單位时之眞誤差,故(65)之末項应为零,而第一二兩項則均为 m^2, m 为权單位之中誤差也。

因得
$$\frac{[d^2p]}{n}=2m^2,$$

故
$$m=\pm\sqrt{\frac{[d^2p]}{2n}}; \tag{66}$$

是卽权等于1时每次观測之中誤差,每对观測平均値之中誤差当以 $\sqrt{2}$ 除上式,卽得

$$M=\frac{m}{\sqrt{2}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{[pd^2]}{n}}. \tag{67}$$

举凡長距离或水准測量,中誤差之累積尽与所測路綫長度 S 之开方成正比例,故各观测之权適与 S 成反比,卽 $p\propto\frac{1}{S}$。若以此値代入(66)及(67)則得

$$m=\pm\sqrt{\frac{1}{2n}\left[\frac{d^2}{S}\right]}; \tag{68}$$

$$M=\pm\sqrt{\frac{1}{4n}\left[\frac{d^2}{S}\right]}. \tag{69}$$

上述各式之应用,將以下列諸例說明之:

例1: 某圖上之距离均各量測兩次,其結果列如下表,試求某一次观測之中誤差。

次数	观测值 I	观测值 II	d	dd
1	20.45 公厘	20.55 公厘	−0.10	0.0100
2	44.00 公厘	40.05 公厘	−0.05	0.0025
3	65.95 公厘	66.00 公厘	−0.05	0.0025
4	99.55 公厘	99.50 公厘	+0.05	0.0025
5	132.45 公厘	132.60 公厘	−0.15	0.0225
6	23.55 公厘	23.60 公厘	−0.05	0.0025
7	45.45 公厘	45.45 公厘	0	0
8	79.05 公厘	79.05 公厘	0	0
9	111.95 公厘	112.00 公厘	−0.05	0.0025
10	21.90 公厘	22.00 公厘	−0.10	0.0100
11	55.45 公厘	55.45 公厘	0	0
12	88.40 公厘	88.40 公厘	0	0
13	33.65 公厘	33.60 公厘	+0.05	0.0025
14	66.45 公厘	66.45 公厘	0	0
15	32.90 公厘	32.95 公厘	−0.05	0.0025
				0.0600

$$m=\pm\sqrt{\frac{[dd]}{2n}}=\sqrt{\frac{0.0600}{2\times 15}}=\pm 0.045\text{ 公厘。}$$

例 2: 水准点 1 至 6 間往返各測一次，其記錄如下，試求一公里内某对观测之中誤差。

水准綫	I	II	I-II$=d$	dd	S	$\frac{dd}{S}$
1—2	−0.1853 公尺	−0.1859 公尺	+0.6 公厘	0.36	0.72 公里	0.50
2—3	+1.6258 公尺	+1.6262 公尺	−0.4 公厘	0.16	0.42 公里	0.38
3—4	+1.4329 公尺	+1.4323 公尺	+0.6 公厘	0.36	0.47 公里	0.79
4—5	+0.5106 公尺	+0.5094 公尺	+1.2 公厘	1.44	0.48 公里	3.00
5—6	−0.0073 公尺	−0.0049 公尺	−2.4 公厘	5.76	0.51 公里	11.30
$n=5$	+3.5693	+3.5679	+2.4			15.95
	−0.1926	−0.1908	−2.8			
	+3.3767	+3.3771	−0.4			
	−3.3771					
	−0.0004					

一公里長每次观測之中誤差:

$$m=\pm\sqrt{\frac{1}{2n}\left[\frac{dd}{S}\right]}=\pm\sqrt{\frac{1}{10}\times 15.95}=\pm 1.26\text{ 公厘;}$$

一公里長每对观測平均值之中誤差:

$$M=\pm\sqrt{\frac{1}{4n}\left[\frac{dd}{S}\right]}=\pm\sqrt{\frac{1}{20}\times 15.95}=\pm 0.89\text{ 公厘。}$$

習 題

1. 某一角度曾量測 10 次,其記錄如下:

1.	45°29′55.4″	6.	45°29′54.8″
2.	55.1″	7.	55.0″
3.	53.7″	8.	53.6″
4.	55.7″	9.	56.6″
5.	58.3″	10.	57.7″

試求其算数平均值及其中誤差。

2. 用甲乙两經緯仪測量某一角度,其結果如下:

(甲) 24°13′36″± 3.1″;

(乙) 24°13′24″±13.8″,

求該角度之最或是值及其中誤差。

3. 量測某一距离,第一次以能讀一公分之鋼尺量 5 次,第二次以能讀 1 公寸之鉄鏈量 5 次,其結果分列如下:

鋼 尺	鉄 鏈
741.17 公尺	741.2 公尺
741.09 公尺	741.4 公尺
741.22 公尺	741.0 公尺
741.12 公尺	741.3 公尺
741.10 公尺	741.1 公尺

求各次之权及其距离之長度。

4. 一角度测 20 次，得中誤差 ±0.42″. 問增测若干次，其中誤差可望达到 ±0″.28?

5. 下圖所示 P 点之高程，系分别根据四已知高程之水准点 A, B, C 及 D，应用水准测量，测得其結果如下：

121.770 公尺； 121.788 公尺；

121.780 公尺； 121.766 公尺，

P 点至各点之距离各为：

$AP=2.56$ 公里； $BP=3.00$ 公里；

$CP=1.78$ 公里； $DP=0.70$ 公里。

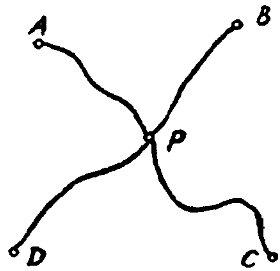

圖 3.5

假定水准测量之权与其距离成反比，試求 P 点高之平均值与中誤差。

6. 某一圖形之面積系用三种面積計求之，其結果如下：

$F_1=45.1$ 平方公寸， $m_1=\pm 0.30$ 平方公寸；

$F_2=45.1$ 平方公寸， $m_2=\pm 0.12$ 平方公寸；

$F_3=44.9$ 平方公寸， $m_3=\pm 0.18$ 平方公寸；

問其算学平均值及中誤差为若干？

7. 某一導綫網共有 10 角，各角均量测二次，作第二次量测时，仪器放置及目标对准均曾重行处理，观测結果如下，求所得各導綫網角度之中誤差：

	l_1	l_2		l_1	l_2
1.	193°16′33″	8″	6.	110°17′42″	58″
2.	154°28′42″	35″	7.	160°54′52″	22″
3.	26°20′28″	40″	8.	198°14′30″	34″
4.	170°48′30″	10″	9.	230°41′39″	51″
5.	230°35′18″	28″	10.	140°23′45″	25″

8. 某一水准綫系沿馬路進行，共分十二段，作水准测量时每段均往返各测一次，其观测値差及距离列表如下：

	d	S
1.	5 公厘	0.99 公里
2.	7 公厘	0.69 公里
3.	6 公厘	0.92 公里
4.	4 公厘	0.99 公里
5.	2 公厘	0.59 公里
6.	3 公厘	0.89 公里
7.	16 公厘	0.86 公里
8.	9 公厘	0.41 公里
9.	20 公厘	1.01 公里
10.	14 公厘	0.72 公里
11.	15 公厘	0.76 公里
12.	6 公厘	0.61 公里

試求其水准測量一公里之中誤差。

第四章　間接观測之平差

第一節　間接观測平差之原理

所謂間接观測者，乃 n 个观測量同为一組 u 个未知数之函数。所有 u 个未知数，必須相互独立而無关系。易言之，任一未知数均不能由其他未知数用数学方法求得之。同时此 n 个观測量又必須为此 u 个未知数不同之函数，且所有 n 个函数僅与此 u 个未知数有关，此外不复含有任何其他未知数。在此种情形之下，必須 $n \geqq u$，始能由此 n 个观測值定出 u 个未知数之値。当 $n=u$ 时，吾人適能用代数方法解 u 个联立方程式，而求未知数之値，但無所謂平差；当 $n>u$ 时，遂有多余观測，因而產生平差問題。

为便于下述方法之導出，先假定所有 n 个观測量均为 u 个未知数之一次函数，以公式表示之如下：

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= a_1X+b_1Y+\cdots+k_1;\\ F_2 &= a_2X+b_2Y+\cdots+k_2;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\ F_n &= \underbrace{a_nX+b_nY+\cdots+k_n.}_{u\text{ 个未知数}} \end{aligned}\right\} n\text{ 个函数} \qquad (1)$$

式中 X, $Y\cdots$代表未知数之眞値，F_1, $F_2\cdots F_n$ 代表观測量之眞値，a, b, $\cdots k$ 为已知之系数，均为实数。任意一組系数 a_i, $b_i\cdots k_i$ 均不与其他一組系数相等或成比例，且不能同时为零。

今設 F_1, $F_2\cdots F_n$ 之观測值为 L_1, L_2, $\cdots L_n$, 由此 n 个观測値幷不能求出未知数 X, $Y\cdots$之眞値，蓋观測値 L 均含有观測誤差也。將 L_1, $L_2\cdots L_n$ 等代入(1)內之 F_1, $F_2\cdots F_n$ 等，必須加以 L_i 之眞誤差 ε_i，故

$$\left.\begin{aligned}L_1+\varepsilon_1&=a_1X+b_1Y+\cdots+k_1;\\L_2+\varepsilon_2&=a_2X+b_2Y+\cdots+k_2;\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\L_n+\varepsilon_n&=a_nX+b_nY+\cdots+k_n.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

但真誤差 ε 之值既屬不知，故 X, Y 等之眞值，亦無法求定。吾人之目的乃在依最小二乘法之原理，求得 X, $Y\cdots$等之最或是值 x, $y\cdots$等。最小二乘法之原理在使各观測值之改正数 v 之平方和必須为最小。將最或是值 x, $y\cdots$代入式(2)而求出各观測值 L 之改正数 v，吾人可得下列方程式：

$$\left.\begin{aligned}L_1+v_1&=a_1x+b_1y+\cdots+k_1;\\L_2+v_2&=a_2x+b_2y+\cdots+k_2;\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\L_n+v_n&=a_nx+b_ny+\cdots+k_n.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

將上式左方之 L 項与右方之常数項 k 合併，命 $L_i-k_i=l_i$，卽得

$$\left.\begin{aligned}v_1&=a_1x+b_1y+\cdots-l_1;\\v_2&=a_2x+b_2y+\cdots-l_2;\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\v_n&=a_nx+b_ny+\cdots-l_n.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

此一組方程式名为“改正数方程式”，或称为誤差方程式。按最小二乘法原理必須$[vv]$为最小时，x, $y\cdots$等始为最或是值。x, $y\cdots$等既为互不相关之变数，欲求$[vv]$之最小值，当按微分方法求之。卽

$$\frac{\partial[vv]}{\partial x}=0,\qquad\frac{\partial[vv]}{\partial y}=0\cdots\text{等。}\tag{5}$$

將改正数方程式代入(5)內而微分之，得

$$\frac{\partial[vv]}{\partial x}=2\left[\frac{v\partial v}{\partial x}\right]=2[av]=0;$$

$$\frac{\partial[vv]}{\partial y}=2\left[\frac{v\partial v}{\partial y}\right]=2[bv]=0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

將式(4)代入，可得一組联立方程式：

$$
\left.\begin{aligned}
&[av]=[aa]x+[ab]y+\cdots-[al]-0;\\
&[bv]=[ab]x+[bb]y+\cdots-[bl]-0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{aligned}\right\}\text{共为 } u \text{ 个} \tag{6}
$$

此联立方程式名为“法方程式”。法方程式之数目与未知数之数目相等，故解法方程式后，即可得未知数之最或是值。为解释法方程式之性質，兹假定 $n=4$，$u=3$，其改正数方程式之形式如下：

$$
\left.\begin{aligned}
v_1&=a_1x+b_1y+c_1z-l_1;\\
v_2&=a_2x+b_2y+c_2z-l_2;\\
v_3&=a_3x+b_3y+c_3z-l_3;\\
v_4&=a_4x+b_4y+c_4z-l_4.
\end{aligned}\right\} \tag{7}
$$

法方程式之形式如下：

$$
\left.\begin{aligned}
&[aa]x+[ab]y+[ac]z-[al]=0;\\
&[ab]x+[bb]y+[bc]z-[bl]=0;\\
&[ac]x+[bc]y+[cc]z-[cl]=0.
\end{aligned}\right\} \tag{8}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
&[aa]=a_1a_1+a_2a_2+a_3a_3+a_4a_4;\\
&[ab]=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4;\\
&[ac]=a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3+a_4c_4;\\
&[al]=a_1l_1+a_2l_2+a_3l_3+a_4l_4;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{9}
$$

由法方程式(8)可以看出。

(1) 法方程式中各未知数之系数，在行与列間互相对称，而以 $[aa]$，$[bb]$，$[cc]$ 之对角綫为对称軸；

(2) 所有对称軸上各系数，因系平方之和，故永远为正数。

因法方程式具有此种特性，故解算时可以应用特别方法，此点將于第四節中詳論之。

例 1：今設有木制測尺四根，長各五公尺左右，欲于一長約十公尺之比長器上，作精密之比較。比長器两端之距离經用标准尺測定之結果为 10030.20 公厘。檢定木制測尺时，每次应用測尺两根，使其相接

順放于比長器上，一端緊抵比長器之一端点，另一端則用一金屬測微楔，量定与另一端点之間隙，如下圖所示：

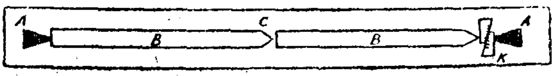

圖 4.1

C 为比長器，B 为測尺，A 为比長器之两端点，系固定于 C 上。K 为測微楔。

今命此四測尺之号数为 I, II, III, IV，比較时將此四个測尺按所有配合各比一次，其結果如下：

观測号数	应用測尺	測微楔之讀数
1	I II	27.94 公厘
2	I III	27.11 公厘
3	I IV	27.91 公厘
4	II III	27.87 公厘
5	II IV	28.22 公厘
6	III IV	27.58 公厘

在此問題中，未知数为四个測尺之長度，而观測量則为比長器两端点間之長度与每二个尺長之較，故为間接观測。

設 x, y, z, t 为測尺 I, II, III, IV 之最或是長度，則吾人可立即將改正数方程式列出：

$$
\begin{aligned}
27.94+v_1&=-x-y\qquad\qquad+10030.20;\\
27.11+v_2&=-x\qquad -z\qquad+10030.20;\\
27.91+v_3&=-x\qquad\qquad -t+10030.20;\\
27.87+v_4&=\qquad -y-z\qquad+10030.20;\\
28.22+v_5&=\qquad -y\qquad -t+10030.20;\\
27.58+v_6&=\qquad\qquad -z-t+10030.20.
\end{aligned}
$$

为計算方便起見，因 x, y, z, t 之値均近于 5000 公厘，故命 $x=5000+\xi$,

$y=5000+\eta$, $z=5000+\zeta$, $t=5000+\tau$, 并將上式左方观測值归併于右方常数項內，即得

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= -\xi-\eta \qquad\qquad +2.26;\\
v_2 &= -\xi \qquad -\zeta \qquad +3.09;\\
v_3 &= -\xi \qquad\qquad -\tau+2.29;\\
v_4 &= \qquad -\eta-\zeta \qquad +2.33;\\
v_5 &= \qquad -\eta \qquad -\tau+1.98;\\
v_6 &= \qquad\qquad -\zeta-\tau+2.62.
\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

按照公式(9)求得法方程式之系数:

$$\begin{array}{lllll}
[aa]=+3 & [ab]=+1 & [ac]=+1 & [ad]=+1 & [al]=+\ 7.64\\
 & [bb]=+3 & [bc]=+1 & [bd]=+1 & [bl]=+\ 6.57\\
 & & [cc]=+3 & [cd]=+1 & [cl]=+\ 8.04\\
 & & & [dd]=+3 & [dl]=+\ 6.89\\
 & & & & [ll]=+36.11
\end{array}$$

故法方程式如下:

$$\left.\begin{aligned}
3\xi+\eta+\zeta+\tau-7.64&=0;\\
\xi+3\eta+\zeta+\tau-6.57&=0;\\
\xi+\eta+3\zeta+\tau-8.04&=0;\\
\xi+\eta+\zeta+3\tau-6.89&=0.
\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

欲解此方程式，先求其和为

$$6\xi+6\eta+6\zeta+6\tau-29.14=0,$$

或
$$\xi+\eta+\zeta+\tau-4.86=0.\tag{12}$$

以式(11)內之各式順次減去(12)即得

$$2\xi-2.78=0;$$
$$2\eta-1.71=0;$$
$$2\zeta-3.18=0;$$
$$2\tau-2.03=0.$$

故 $\xi=+1.39 \qquad x=5001.39$ 公厘;

$\eta=+0.86 \qquad y=5000.86$ 公厘;

$\zeta=+1.59 \qquad z=5001.59$ 公厘;

$\tau=+1.02 \qquad t=5001.02$ 公厘,

至是此問題已經解出，x, y, z, t 卽为各測尺檢定之値。今將 ξ, η, ζ, τ 各値代入(10)內，更可求出各次观測値之改正数：

$$v_1=+0.01; \quad v_2=+0.11; \quad v_3=-0.12; \quad v_4=-0.12;$$

$$v_5=+0.10; \quad v_6=+0.01; \quad [vv]=0.0511.$$

此数当为一切可能 $[vv]$ 之最小値。

第二節 非一次函数

前節討論間接观測之平差原理时，先假定观測値为未知数之一次函数。倘此函数幷非一次，則必須將其改化，始能应用前節所得之公式。例如下列函数：

$$l=ax+bxy^2 \tag{13}$$

幷非一次，但如命 $z=xy^2$

而代入式(13)，卽得一次函数：

$$l=ax+bz. \tag{14}$$

此种办法幷不能应用于任一函数內，是以必須采用下述更普遍之方法。

在任意函数

$$L+v=f(x, y, z\cdots) \tag{15}$$

內，倘能求得未知数 $x, y, z,\cdots$ 等之近似値 x_0, y_0, z_0，而命

$$x=x_0+\xi; \quad y=y_0+\eta; \quad z=z_0+\zeta,$$

使 ξ, η, ζ 僅为極小之改正数，則按照泰罗定律，可將式(15)展成下列級数：

$$L+v=f(x_0, y_0, z_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\xi+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\eta+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\zeta+$$

$$+\xi, \eta, \zeta \text{ 之二次以上各項。} \tag{16}$$

当 x_0, y_0, z_0 之值与 x, y, z 相差甚微，即 ξ, η, ζ 为極小之改正数时，二次以上之微分項可以捨去。再命

$$a=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0;\quad b=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0;\quad c=\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0,$$

$$-l=f\,x_0, y_0, z_0)-L, \tag{17}$$

則式(16)即变为一次之改正数方程式：

$$v=a\xi+b\eta+c\zeta-l, \tag{18}$$

然后即可应用上節所述之方法，列出法方程式，而求 ξ, η, ζ 之值。得出后加之于 x_0, y_0, z_0 上，遂得未知数 x, y, z 之最或是值矣。

上法可应用于任何种函数（外含或內含函数均可）。唯一之条件，为 x_0, y_0, z_0 等近似値应与其最或是値相差甚微，俾吾人于捨去公式(16)內 ξ, η, ζ 之二次以上各項时，不致發生任何影响。至于如何求出近似値，則須按情形而决定之。倘于平差后，發現 ξ, η, ζ 等值尙相当巨大，則必須再以改正后之 x, y, z 作为近似値而將 a, b, c, l 各系数重新計算，再定一新值，直至平差后所得之値与近似値相差無几时为止。

上述应用近似値之方法，亦可施之于一次函数，蓋有时未知数之値大小懸殊，計算时不易得同等之精度，或常数項过大，解算法方程式至为不便，此时均以代入近似値較为方便，或以一新未知数代一旧未知数，以便將其化簡。此法于上節之例一內已經应用。除此之外，下列之例二更示如何利用未知数之倍数化簡法方程式之方法。

例 1：已知：三点 P_1, P_2 及 P_3 之坐标 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 及 (x_3, y_3)（圖 4.2）。

观测：距离 S_1, S_2, S_3.

求：　P 点之坐标。

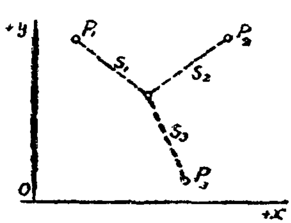

圖 4.2

設新点 P 之坐标为 x, y，于是得改正数方程式：

$$S_i+v_i=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2},$$

命　　　　$$x = x_0 + \xi,\qquad y = y_0 + \eta,$$

于是　　　$$S_i + v_i = \sqrt{(x_0 + \xi - x_i)^2 + (y_0 + \eta - y_i)^2}\,.$$

依泰罗定律展开后，得

$$S_i + v_i = \sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2} +$$
$$+ \frac{x_0 - x_i}{\sqrt{(x_0 + x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}}\xi + \frac{y_0 - y_i}{\sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}}\eta, \quad (19)$$

或　　　　$$v_i = a_i\xi + b_i\eta - l.$$

而　$$\left.\begin{aligned} &a_i = \frac{x_0 - x_i}{S_{0\cdot i}},\ b_i = \frac{y_0 - y_i}{S_{0\cdot i}},\ \sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2} = S_{0\cdot i}, \\ &-l = S_{0\cdot i} - S_i. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

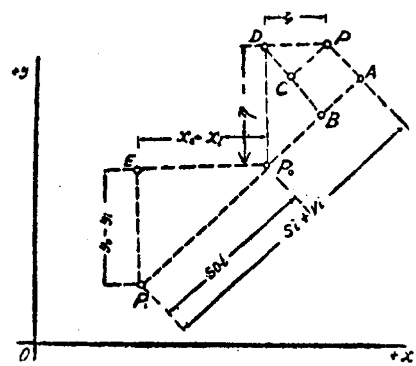

圖 4.3

式(20)之关系亦可以几何学証明之。設 P 为一或是点，其与 P_i 之距离为 $S_i + v_i$，而 P_0 为一相当于近似坐标 x_0, y_0 之近似点，与P_i 相距 $S_{0\cdot i}$ 經 P 点作 PA 垂直于 P_0P_i 并作 PC 綫平行于 AP_0，于是得下列之关系：

$$S_i + v_i = S_{0\cdot i} + P_0A;$$

$$P_0A = P_0B + BA = P_0B + CP,$$

或　$$S_i + v_i = S_{0\cdot i} + P_0B + CP.$$

因两直角三角形 BDP_0 及 CPD 与三角形 FP_0P_i 相似，故其間之几何关系可以坐标差及長距表示之，即

$$CP = \frac{x_0 - x_i}{S_{0\cdot i}}\xi,\qquad P_0B = \frac{y_0 - y_i}{S_{0\cdot i}}\eta;$$

而　　　　$$S_i + v_i = S_{0\cdot i} + \frac{x_0 - x_i}{S_{0\cdot i}}\xi + \frac{y_0 - y_i}{S_{0\cdot i}}\eta. \quad (19)$$

今設 P_1, P_2, P_3 三点之坐标及量得之 S_1, S_2, S_3 諸距离之値示如圖 4.4，求 P 点之坐标 (x, y)：（注意圖 4.4 所采用 x, y 坐标方向与

圖 4.2 所用者不同)。

$$P_1\begin{cases}x_1=+2092.76\text{ 公尺},\\ y_1=+5132.30\text{ 公尺};\end{cases}\quad P_2\begin{cases}x_2=2692.20\text{ 公尺},\\ y_2=5203.15\text{ 公尺};\end{cases}\quad P_3\begin{cases}x_3=2210.59\text{ 公尺},\\ y_3=5665.42\text{ 公尺};\end{cases}$$

$$S_1=306.00\text{ 公尺};\qquad S_2=387.36\text{ 公尺};\qquad S_3=354.86\text{ 公尺}.$$

根据 S_1 及 S_2 二值与 P_1 及 P_2 两点之坐标，求得 P 点坐标之近似值为：

$$x_0=2326.24\text{ 公尺},$$

$$y_0=5330.10\text{ 公尺};$$

$$\left.\begin{aligned}x&=x_0+\xi,\\ y&=y_0+\eta.\end{aligned}\right\}\qquad(20)$$

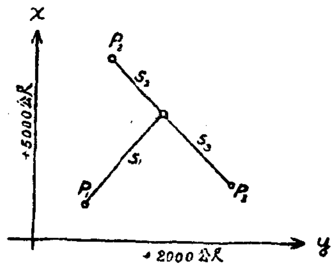

圖 4.4

兹將 a, b, $-l$ 等系数之計算，列成下表：

								a	b	$-l$
	x_0-x_i	y_0-y_i	$(x_0-x_i)^2$	$(y_0-y_i)^2$	$S^2_{0\cdot i}$	$S_{0\cdot i}$	S_i	$\frac{x_0-x_i}{S_{0\cdot i}}$	$\frac{y_0-y_i}{S_{0\cdot i}}$	$S_{0\cdot i}-S_i$
	公尺	公尺					公尺			公寸
1	+233.48	+197.80	54513	89125	93638	306.00	306.00	+0.76	+0.65	0
2	−365.96	+126.95	133927	16117	150044	387.36	387.36	−0.94	+0.33	0
3	+115.65	−335.32	13375	112439	125814	354.70	354.86	+0.33	−0.95	−1.6

根据上表之数值，可列改正数方程式如下：

$$v_1=+0.76\xi+0.65\eta+0;$$

$$v_2=-0.94\xi+0.33\eta+0;$$

$$v_3=+0.33\xi-0.95\eta-1.6.$$

由是得法方程式：

$$1.57\xi-0.13\eta-0.53=0;$$

$$-0.13\xi+1.43\eta+1.52=0.$$

解出上式得： $\xi=+0.25,\qquad \eta=-1.04.$

代入公式(20)，得未知数之值：

$$x = 2326.24 + 0.25 = 2326.49;$$

$$y = 5330.10 - 1.04 = 5329.06.$$

例 2: 气象台对于气压之观测歷时悠久，兹試以十二年間某九气象台之平均气压平差之，以求气压高程計算公式内之各常数。关于气压昇降，系假定其依高程作有規律之变化。今以 x 表示海平面($h=0$)上之气压讀数，而 y 为常数，則根据气压高程測量之原理，可得計算海拔 h 之方程式如下：

$$h = y \log \frac{x}{B}. \tag{21}$$

B 为相当于海拔 h 之气压讀数。上式内之 h 系用三角高程測量决定，其精度与用气压計所求得者相比較，可假定为無誤差，各气压讀数 B 之精度則完全相等。排列方程式以前，观測值須列为 x 及 y 之函数，即

$$\frac{h}{y} = \log \frac{x}{B}, \qquad \frac{x}{B} = 10^{\frac{h}{y}},$$

或

$$B = x \cdot 10^{-\frac{h}{y}}. \tag{22}$$

观 測 記 錄

	h	B		h	B		h	B
1	120.2 公尺	751.18 公厘	4	347.6 公尺	731.27 公厘	7	708.1 公尺	700.48 公厘
2	225.1 公尺	742.37 公厘	5	406.7 公尺	726.99 公厘	8	733.5 公尺	697.64 公厘
3	270.6 公尺	738.50 公厘	6	492.4 公尺	718.16 公厘	9	768.9 公尺	695.25 公厘

由上列九观測值求式(22)内二未知数 x 及 y 时，若不于 B_i 上加以改正数 v_i，則所得之結果將不能互相一致，故应將式(22)列成下式：

$$\left.\begin{aligned} B_1 + v_1 &= x \cdot 10^{-\frac{h_1}{y}}; \\ B_2 + v_2 &= x \cdot 10^{-\frac{h_2}{y}}; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots; \\ B_9 + v_9 &= x \cdot 10^{-\frac{h_9}{y}}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

依前例，先求未知数之近似值，x_0 及 y_0。此值之决定，系由式(21)

求之。茲將該式作下列寫法：

$$\log x_0 - \log B = \frac{h}{y_0}, \tag{24}$$

而以第一及第九观测値代入，于是得：

$$\log x_0 - \log 751.18 = \frac{120.2}{y_0};$$

$$\log x_0 - \log 695.23 = \frac{768.9}{y_0}.$$

解出以后，得近似値

$$x_0 = 762.03; \qquad y_0 = 19298.$$

將近似値代入式(23)而依泰罗定律处理之，因其函数为：

$$f(x, y) = x10^{-\frac{h}{y}}, \tag{25}$$

故所得之系数及常数可以下式表示之：

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\partial(x10^{-\frac{h}{y}})}{\partial x} = 10^{-\frac{h}{y}}; \\ b &= \frac{\partial(x10^{-\frac{h}{y}})}{\partial y} = x10^{-\frac{h}{y}} \cdot \frac{h}{y^2} \cdot \frac{1}{\mu}; \\ -l &= x_0 10^{-\frac{h}{y_0}} - B \quad 或 \quad = B_0 - B. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

实际計算时，所有未知数 x 及 y 均以近似値 x_0 及 y_0 代替之，而將式(26)改成对数式，以其易于計算也。

$$\left.\begin{aligned} \log a &= -\frac{h}{y_0} \qquad 或 \qquad \log\frac{1}{a} = \frac{h}{y_0}; \\ \log b &= -\frac{h}{y_0} + \log\frac{x_0 h}{\mu y_0^2} = \log a + \log\frac{x_0 h}{\mu y_0^2}; \\ \log(-l + B) &= \log x_0 - \frac{h}{y_0} = \log x_0 + \log a. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

x_0 及 y_0 为已知之近似値，h 为观测値，μ 乃对数模数，等于 0.43429，$\log \mu = 9.6377798$。將上述各数代入式(27)，逐次計算，即得 a_i、b_i 及 l_i 等値，茲列于下表：

	a	b	$-l$		a	b	$-l$		a	b	$-l$
1	+0.986	+0.00050	0.00	4	+0.959	+0.00157	−0.20	7	+0.919	+0.00307	−0.20
2	+0.973	+0.00103	−0.53	5	+0.953	+0.00182	−1.06	8	+0.916	+0.00317	+0.53
3	+0.963	+0.00123	−0.68	6	+0.943	+0.00219	+0.38	9	+0.912	+0.00331	0.00

由此得改正数方程式:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= 0.986\xi + 0.00056\eta' + 0.00; \\ v_2 &= 0.973\xi + 0.00103\eta' - 0.53; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

第二未知数所以用 η' 代表者,因尚须变更故也。式(28)内两未知数之系数,位数相差甚大,实际計算不甚便利,故令

$$\frac{\eta'}{100} = \eta \qquad \text{或} \qquad \eta' = 100\eta, \tag{29}$$

于是改正数方程式变成:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= 0.986\xi + 0.056\eta + 0.000; \\ v_2 &= 0.973\xi + 0.103\eta - 0.530; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

由上式可列法方程式:

$$\left.\begin{aligned} +8.0884\xi + 1.6798\eta - 1.7160 = 0; \\ +1.6798\xi + 0.4383\eta - 0.1725 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

解出:

$$\xi = +0.642, \qquad \eta = -2.07, \qquad \eta' = -207.$$

故

$$x = x_0 + \xi = 762.03 + 0.64 = 762.67,$$

$$y = y_0 + \eta' = 19298 - 207 = 19091.$$

欲求之公式应为:

$$h = 19091 \log \frac{762.67}{B},$$

或

$$\log B = \log 762.67 - \frac{h}{19091}. \tag{32}$$

第三節 不等权之間接观測

以上所論，均假定各观測值之精度相等，今再設各观測值之权不相等，其法方程式將成何种形式，当于下面導出之：

設下列方程式为各观測值之改正数方程式及其权：

$$\left.\begin{array}{ll} v_1 = a_1x + b_1y + \cdots - l_1, & \text{权 } p_1; \\ v_2 = a_2x + b_2y + \cdots - l_2, & \text{权 } p_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots; \\ v_n = a_nx + b_ny + \cdots - l_n, & \text{权 } p_n. \end{array}\right\} \tag{33}$$

不等权观測之最小二乘法原理为：

$$[pvv] = \text{最小值。} \tag{34}$$

茲按第一節方法將上式(33)分别依 x, $y\cdots$等未知数微分之，于是得：

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial[pvv]}{\partial x} = 2\left[\dfrac{pv\partial v}{\partial x}\right] = 2[pav] = 0; \\ \dfrac{\partial[pvv]}{\partial y} = 2\left[\dfrac{pv\partial v}{\partial y}\right] = 2[pbv] = 0; \end{array}\right\} \tag{35}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

將(33)之改正数 v_i 代入上式(35)，即得不等权之法方程式：

$$\left.\begin{array}{l} [paa]x + [pab]y + [pac]z - [pal] = 0; \\ [pab]x + [pbb]y + [pbc]z - [pbl] = 0; \\ [pac]x + [pbc]y + [pcc]z - [pcl] = 0. \end{array}\right\} \tag{36}$$

將此式或与第一節之(8)相比，可知等权与不等权之法方程式在形式上与性質上完全相同，故以下論法方程式之解出时，將以同一方法处理之。

吾人倘可用另一方法獲得相同之結果，即將改正数方程式(33)化为等权。若將式(33)內各式分别以其权之平方根乘之，即得

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{p_1}v_1 = a_1\sqrt{p_1}x + b_1\sqrt{p_1}y + \cdots - \sqrt{p_1}l_1; \\ \sqrt{p_2}v_2 = a_2\sqrt{p_2}x + b_2\sqrt{p_2}y + \cdots - \sqrt{p_2}l_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\ \sqrt{p_n}v_n = a_n\sqrt{p_n}x + b_n\sqrt{p_n}y + \cdots - \sqrt{p_n}l_n. \end{array}\right\} \tag{37}$$

上式(37)内各式之权等于1，故可按等权办法，命$[(\sqrt{p}v)^2]=$最小值，亦可得方程式(36)。

第四節 法方程式系数之計算

法方程式系数 $[aa]$，$[ab]$，$[ac]$，$[al]$ 等之計算，必須准确無訛，以免結果之错誤。欲达到此目的，計算方法必須極有系統，且必須有適当之核算。通常均列成一表，并用其和数檢核之。命

$$a_1+b_1+c_1+\cdots-l_1=s_1①;$$
$$a_2+b_2+c_2+\cdots-l_2=s_2;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$
$$a_n+b_n+c_n+\cdots-l_n=s_n;$$
$$[aa]+[ab]+[ac]+\cdots-[al]=[as];$$
$$[ba]+[bb]+[bc]+\cdots-[bl]=[bs];$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

表之格式如下：

号数	a	b	c	$-l$	s	aa	ab	ac	$-al$	as
1	a_1	b_1	c_1	$-l_1$	s_1	a_1a_1	a_1b_1	a_1c_1	$-a_1l_1$	a_1s_1
2	a_2	b_2	c_2	$-l_2$	s_2	a_2a_2	a_2b_2	a_2c_2	$-a_2l_2$	a_2s_2
……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……
n	a_n	b_n	c_n	$-l_n$	s_n	a_na_n	a_nb_n	a_nc_n	$-a_nl_n$	a_ns_n
[ ]	$[a]$	$[b]$	$[c]$	$-[l]$	$[s]$	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$-[al]$	$[as]$

接下表↓

↑續上表

号数	bb	bc	$-bl$	bs	cc	$-cl$	cs	$-ll$	ls
1	b_1b_1	b_1c_1	$-b_1l_1$	b_1s_1	c_1c_1	$-c_1l_1$	c_1s_1	$-l_1l_1$	l_1s_1
2	b_2b_2	b_2c_2	$-b_2l_2$	b_2s_2	c_2c_2	$-c_2l_2$	c_2s_2	$-l_2l_2$	l_2s_2
……	……	……	……	……	……	……	……	……	……
n	b_nb_n	b_nc_n	$-b_nl_n$	b_ns_n	c_nc_n	$-c_nl_n$	c_ns_n	$-l_nl_n$	l_ns_n
[ ]	$[bb]$	$[bc]$	$-[bl]$	$[bs]$	$[cc]$	$-[cl]$	$[cs]$	$-[ll]$	$[ls]$

① 計算 s 时亦有不包括 l 項在內者，視所用解算法方程式之便利而斟酌选用(見第五節)。

計算之檢核式为:

$$[a]+[b]+[c]-[l]=[s];$$
$$[aa]+[ab]+[ac]-[al]=[as];$$
$$[ab]+[bb]+[bc]-[bl]=[bs];$$
$$[ac]+[bc]+[cc]-[cl]=[cs];$$
$$[al]+[bl]+[cl]-[ll]=[ls].$$

至于平方数如 a_1a_1, b_1b_1 等之計算通常均用平方表。如系数 a, b 等不超过三或四位,普通平方表均可敷用,且查表極为簡便。乘積如 ab, ac, al, as 等,倘位数甚少,可用心算或計算尺;位数較多时,則应用乘積表,或計算机,或对数表。此数种方法內以应用計算机最为敏捷,但亦应按照一定程序行之。如將 a_1 放于計算机之底数盤內,然后順序分别乘以 a_1, b_1, c_1, l_1, s_1 而得 a_1a_1, a_1b_1, a_1c_1, a_1l_1, a_1s_1 等值,余类推。应用对数最为繁雜,因每次仍須由对数化为眞数,計算时亦应采用有系統之方法,以求簡捷。

此外在应用平方表时,計算乘積 a_1b_1 等倘有一算法,卽將乘積之計算化为平方及加減。例如:

$$ab=\frac{1}{2}\left\{(a+b)^2-(a^2+b^2)\right\},$$

吾人可先求 $a+b$, 再查出其平方値,然后減去 a^2+b^2, 再以 2 除之,卽得 $a\cdot b$, 故

$$[ab]=\frac{1}{2}\left\{[(a+b)^2]-([aa]+[bb])\right\};$$

$$[ac]=\frac{1}{2}\left\{[(a+c)^2]-([aa]+[cc])\right\}.$$

倘为不等权觀測,則应于上表內加一权数列, p_1, $p_2\cdots p_n$, 各系数均須乘以其相当之权。故較簡捷之方法为利用上節之式(37),將不等权觀測化为等权,卽命

$$\sqrt{p_1}a_1 = a_1', \qquad \sqrt{p_1}b_1 = b_1' \cdots \sqrt{p_1}l_1 = l_1';$$
$$\sqrt{p_2}a_2 = a_2', \qquad \sqrt{p_2}b_2 = b_2' \cdots \sqrt{p_2}l_2 = l_2';$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

先求出 $a_1', b_1', \cdots a_2', b_2', \cdots$等,即可按上表方式計算$[a'a'], [a'b'], \cdots$等值。

$$[a'a'] = [(\sqrt{p}a)^2] = [paa];$$
$$[a'b'] = [(\sqrt{p}a)(\sqrt{p}b)] = [pab];$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

例1: 兹將第二節例一繼續討論,設測量距离之权与長度成反比,在本題內假定 300 公尺之距离为权單位,故

$$p_i = \frac{300}{s_i}. \tag{38}$$

因 $s_1 = 306.00$ 公尺, $s_2 = 387.36$ 公尺, $s_3 = 354.86$ 公尺;

乃得 $p_1 = 0.98$, $p_2 = 0.78$, $p_3 = 0.85$.

法方程式之系数可列成下表:

法方程式之系数表

a	b	l	s	p	paa	pab	pal	pas	pbb	pbl	pbs
+0.76	+0.65	–	+1.41	0.98	0.57	+0.48	–	+1.05	0.41	–	+0.90
−0.94	+0.33	–	−0.61	0.78	0.69	−0.24	–	+0.45	0.09	–	−0.16
+0.33	−0.95	−1.6	−2.22	0.85	0.09	−0.27	−0.45	−0.62	0.77	+1.29	+1.79
					1.35	−0.03	−0.45	+0.88	1.27	+1.29	+2.53

法方程式为:

$$1.35\xi - 0.03\eta - 0.45 = 0;$$
$$-0.03\xi + 1.27\eta + 1.29 = 0.$$

解出: $\xi = +0.31$ 公寸; $\eta = -1.01$ 公寸。

故 $x = x_0 + \xi = 2326.24 + 0.03 = 2326.27$ 公尺;

$y = y_0 + \eta = 5330.10 - 0.10 = 5330.00$ 公尺。

改正数: $v_1 = -0.42$ 公寸, $v_2 = -0.62$ 公寸, $v_3 = -0.54$ 公寸。

三距离 s_1, s_2 及 s_3 之平差值为:

$$s_1' = s_1 + v_1 = 306.00 - 0.04 = 305.96 \text{ 公尺};$$
$$s_2' = s_2 + v_2 = 387.36 - 0.06 = 387.30 \text{ 公尺};$$
$$s_3' = s_3 + v_3 = 354.86 - 0.05 = 354.81 \text{ 公尺}.$$

此项数値如与由三固定点 P_1, P_2, P_3 及新点 P 之坐标內所求之距离相比較,应互相等,故可作一檢核。根据坐标求出之距离为:

$$s_1' = 305.96 \text{ 公尺}; \quad s_2' = 387.30 \text{ 公尺}; \quad s_3' = 354.81 \text{ 公尺}.$$

上値適与平差値完全符合。其他之檢核,以改正数試之,卽 $[pav]=0$, $[pbv]=0$, 如下表:

a	b	p	v	pav	pbv
+0.76	+0.65	0.98	−0.42	−0.31	−0.27
−0.94	+0.33	0.78	−0.62	+0.45	−0.16
+0.33	−0.95	0.85	−0.54	−0.15	+0.44
				−0.01	+0.01

第五節　法方程式之高斯解法

法方程式为对称之联立方程式,其数目与未知数之数目相等,吾人固可应用普通之約化法解算之,但因其对称之特性,如按一固定之規則与次序逐漸約化,不但計算可以簡捷,且易于檢核。此法之应用始于高斯,故亦名高斯約化法。

为解釋之方便,吾人可先設有一組包含三个未知数之法方程式:

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{I}) & [aa]x+[ab]y+[ac]z-[al]=[av]=0; \\
(\mathrm{II}) & [ab]x+[bb]y+[bc]z-[bl]=[bv]=0; \\
(\mathrm{III}) & [ac]x+[bc]y+[cc]z-[cl]=[cv]=0, \\
\hline
(s) & [as]x+[bs]y+[cs]z-[sl]=[sv]=0.
\end{array} \qquad (39)$$

最后之和数方程式(s),乃为檢核計算錯誤之用。s 为 a, b, c 等項之和不包括 l 項在內。今欲消除此組法方程式內之 x 項,可用 $-\dfrac{[ab]}{[aa]}$ 乘第一方程式(I)而与第二方程式(II)相加,卽得

$$\left([bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}\right)y+\left([bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}\right)z-\left([bl]-\frac{[ab][al]}{[aa]}\right)=0,$$

同样依次以 $-\dfrac{[ac]}{[aa]}$ 及 $-\dfrac{[as]}{[aa]}$ 乘第一法方程式(I)而分别加于(III)及(s)两式内，亦可將兩式之 x 項消去，于是吾人可得另外一組联立方程式，較原來之法方程式(39)少一未知数，亦卽少一方程式，其形式如下：

$$\left([bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}\right)y+\left([bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}\right)z-\left([bl]-\frac{[ab][al]}{[aa]}\right)=0;$$
$$\left([bc]-\frac{[ac][ab]}{[aa]}\right)y+\left([cc]-\frac{[ac][ac]}{[aa]}\right)z-\left([cl]-\frac{[ac][al]}{[aa]}\right)=0,$$
$$\left([bs]-\frac{[as][ab]}{[aa]}\right)y+\left([cs]-\frac{[as][ac]}{[aa]}\right)z-\left([sl]-\frac{[as][al]}{[aa]}\right)=0. \tag{40}$$

以上之方程式各为第一次約化之法方程式，由上面形式觀之，可确知其仍为对称，卽与原來法方程式有同一之性質。此法方程式之系数，如此寫法，甚为繁長，故高斯应用下列符号表示之：

$$\left.\begin{aligned}
[bb\cdot1]&=[bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]};\\
[bc\cdot1]&=[bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]};\\
[bl\cdot1]&=[bl]-\frac{[ab][al]}{[aa]};\\
[cc\cdot1]&=[cc]-\frac{[ac][ac]}{[aa]};\\
[cl\cdot1]&=[cl]-\frac{[ac][al]}{[aa]};\\
[bs\cdot1]&=[bs]-\frac{[ab][as]}{[aa]};\\
[cs\cdot1]&=[cs]-\frac{[ac][as]}{[aa]};\\
[ls\cdot1]&=[ls]-\frac{[al][as]}{[aa]}.
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

將以上之符号代入(40)，即得簡寫之第一次約化法方程式如下：

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{II})' \quad [bb\cdot1]y+[bc\cdot1]z-[bl\cdot1]=0;\\
&(\mathrm{III})' \quad [bc\cdot1]y+[cc\cdot1]z-[cl\cdot1]=0,\\
\hline
&(\ s\ )' \quad [bs\cdot1]y+[cs\cdot1]z-[ls\cdot1]=0. \qquad (42)
\end{aligned}
$$

吾人可証明式(42)之和数方程式$(s)'$仍为$(\mathrm{II})'(\mathrm{III})'$两方程式之和，因

$$
\begin{aligned}
[bs\cdot1]&=[bs]-\frac{[ab]}{[aa]}[as]=\\
&=[ab]+[bb]+[bc]-\frac{[ab]}{[aa]}([aa]+[ab]+[ac])=\\
&=[bb]+[bc]-\frac{[ab]}{[aa]}([ab]+[ac])=\\
&=\left([bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}\right)+\left([bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}\right)=\\
&=[bb\cdot1]+[bc\cdot1].
\end{aligned}
$$

同样

$$
\begin{aligned}
[cs\cdot1]&=[bc\cdot1]+[cc\cdot1];\\
[ls\cdot1]&=[bl\cdot1]+[cl\cdot1].
\end{aligned}
$$

故第一次約化后之和数方程式，仍可檢核第一次約化法方程式計算之有無錯誤。

此外吾人尙可証明$[bb\cdot1]$，$[cc\cdot1]$等系数，与$[aa]$，$[bb]$，$[cc]$等系数亦有同样之性質，即均为正数，因

$$
\begin{aligned}
[bb\cdot1]&=[bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}=\\
&=[bb]-2\frac{[ab]}{[aa]}[ab]+\frac{([ab])^2}{([aa])^2}[aa]=\\
&=\left[\left(bb-2\frac{[ab]}{[aa]}ab+\frac{([ab])^2}{([aa])^2}aa\right)\right]=\\
&=\left[\left(b-\frac{[ab]}{[aa]}a\right)^2\right], \qquad (43)
\end{aligned}
$$

故 $[bb\cdot 1]$ 乃平方之和也。同样亦可証明 $[cc\cdot 1]$ 为平方之和，故均必为正数。由此可知約化后之法方程式，与原有法方程式之性質完全相同，吾人仍可用以前之方法，將(42)再事約化，將第二未知数消除，于是可得

$$\frac{[cc\cdot 2]z-[cl\cdot 2]=0,}{[cs\cdot 2]z-[ls\cdot 2]=0.} \tag{44}$$

式中之 $[cc\cdot 2]$ 等乃以前述方法由 $[cc\cdot 1]$ 等約化得來，其意义如下：

$$[cc\cdot 2]=[cc\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1][bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]};$$

$$[cl\cdot 2]=[cl\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1][bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}. \tag{45}$$

余类推。

上式(44)名为第二次約化法方程式，$[cc\cdot 2]$ 仍为正数，且 $[cs\cdot 2]=$ $=[cc\cdot 2]$，$[ls\cdot 2]=[cl\cdot 2]$，其証明用以前之方法卽可推得，故不再贅述。

原有之法方程式僅含三未知数，經两次約化之后，僅余一未知数 z，故此时已可求得 z 之値：

$$z=\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}; \tag{46}$$

將 z 值代入第一次約化法方程式(42)之第一式(II)′内，卽得

$$y=\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}z; \tag{47}$$

將(46)及(47)两式代入原來法方程式(39)之第一式(I)内，卽得

$$x=\frac{[al]}{[aa]}-\frac{[ab]}{[aa]}y-\frac{[ac]}{[aa]}z, \tag{48}$$

于是 x, y, z 之値均可求出矣。

此例僅含三个未知数，如未知数之数目倘多，則約化之次数亦多。当有 u 个未知数时，必須約化 $(u-1)$ 次，由第 $(u-1)$ 次之約化方程式中求出最后一未知数之値，然后代入 $(u-2)$，$(u-3)\cdots$ 各約化法方程式内之第一式，卽可順序求出其他各未知数之値。

由上述之高斯約化法，可知算求未知数最主要之方程式为：

$$\left.\begin{aligned}[aa]x+[ab]y\quad+[ac]z\quad-[al]&=0;\\ [bb\cdot1]y+[bc\cdot1]z-[bl\cdot1]&=0;\\ [cc\cdot2]z-[cl\cdot2]&=0.\end{aligned}\right\}\tag{49}$$

倘將各式分别以 $[aa]$, $[bb\cdot1]$, $[cc\cdot1]$ 除之，則可書成

$$\left.\begin{aligned}x+\frac{[ab]}{[aa]}y+\frac{[ac]}{[aa]}z-\frac{[al]}{[aa]}&=0;\\ y+\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}z-\frac{[bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}&=0;\\ z-\frac{[cl\cdot2]}{[cc\cdot2]}&=0.\end{aligned}\right\}\tag{49}^*$$

第六節　改正数平方和之計算

將未知数 x, y, $z\cdots$等代入改正数方程式內，卽可求得改正数，平方之相加，卽得改正数平方和。但亦可于約化法方程式时由 $[ll]$ 求之，并可作整个解算法方程式之檢核計算。茲將其公式導出于下：

改正数方程式为：

$$\left.\begin{aligned}v_1&=a_1x+b_1y+c_1z-l_1;\\ v_2&=a_2x+b_2y+c_2z-l_2;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\ v_n&=a_nx+b_ny+c_nz-l_n.\end{aligned}\right\}\tag{50}$$

將(50)內各方程式順次乘以 v_1, v_2, $\cdots v_n$ 而加之，則得

$$[vv]=[av]x+[bv]y+[cv]z-[lv].\tag{51}$$

但
$$[av]=[bv]=[cv]=0,$$

故
$$[vv]=-[lv].\tag{52}$$

乘(50)內各式以相当之 $-l$ 而加之，于是

$$-[lv]=-[al]x-[bl]y-[cl]z+[ll],\tag{53}$$

故
$$[vv]=[ll]-[al]x-[bl]y-[cl]z.\tag{54}$$

不等权規測时，可寫成下式：

$$[pvv]=[pll]-[pal]x-[pbl]y-[pcl]z. \qquad (54)^*$$

按前節式(49)

$$x=\frac{[al]}{[aa]}-\frac{[ab]}{[aa]}y-\frac{[ac]}{[aa]}z; \qquad (55)$$

將(55)代入(54)，于是

$$[vv]=[ll]-\frac{[al][al]}{[aa]}-\left([bl]-\frac{[ab][cl]}{[aa]}\right)y-\left([cl]-\frac{[ac][al]}{[aa]}\right)z=$$

$$=[ll]-\frac{[al][al]}{[aa]}-[bl\cdot1]y-[cl\cdot1]z. \qquad (56)$$

按前節式(49)第二未知数等于

$$y=\frac{[bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}-\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}z; \qquad (57)$$

而第三未知数为：

$$z=\frac{[cl\cdot2]}{[cc\cdot2]}. \qquad (58)$$

故式(56)可寫作：

$$[vv]=[ll]-\frac{[al][al]}{[aa]}-\frac{[bl\cdot1][bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}-\left([cl\cdot1]-\frac{[bl\cdot1][bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}\right)z,$$

$$[vv]=[ll]-\frac{[al][al]}{[aa]}-\frac{[bl\cdot1][bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}-[cl\cdot2]z,$$

$$[vv]=[ll]-\frac{[al][al]}{[aa]}-\frac{[bl\cdot1][bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}-\frac{[cl\cdot2][cl\cdot2]}{[cc\cdot2]}. \qquad (59)$$

上式亦可簡寫如下：

$$[vv]=[ll]-\frac{[al]^2}{[aa]}-\frac{[bl\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\frac{[cl\cdot2]^2}{[cc\cdot2]}= \qquad (60)$$

$$=[ll\cdot1]-\frac{[bl\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\frac{[cl\cdot2]^2}{[cc\cdot2]}=[ll\cdot2]-\frac{[cl\cdot2]^2}{[cc\cdot2]}=[ll\cdot3]. \qquad (61)$$

不等权規測时，可寫成下式：

$$[pvv]=[pll\cdot3], \qquad (61)^*$$

此式內之 $[ll\cdot1]$ 及 $[ll\cdot2]$，亦与 $[bb\cdot1]$，$[cc\cdot2]$ 等之意义相同，蓋由導出中即可察出，

$$[ll\cdot1]=[\,l\,l\,]-\frac{[al]}{[aa]}[al];$$

$$[ll\cdot2]=[ll\cdot1]-\frac{[bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}[bl\cdot1];$$

$$[ll\cdot3]=[ll\cdot2]-\frac{[cl\cdot2]}{[cc\cdot2]}[cl\cdot2].$$

(61) 既示 $[vv]$ 等于 $[ll\cdot3]$，故 $[vv]$ 亦可用約化法求之。先計算 $[ll]$，使与其他平方項同列于法方程式之末，并在对角綫上，如下式：

$$\begin{array}{rrrr}
\underline{[aa]x}+[ab]y+[ac]z-[al]=0, \\
+\underline{[bb]y}+[bc]z-[bl]=0, \\
+\underline{[cc]z}-[cl]=0, \\
\underline{[ll]}.
\end{array}$$

上式为簡單寫法，凡对角綫以下各項因与上面对称故略去之，而于各对角綫項之下划一橫綫以示之。經过第一次約化后，得

$$\begin{array}{r}
\underline{[bb\cdot1]y}+[bc\cdot1]z-[bl\cdot1]=0, \\
+\underline{[cc\cdot1]z}-[cl\cdot1]=0, \\
\underline{[ll\cdot1]};
\end{array}$$

再約化一次，得

$$\begin{array}{r}
\underline{[cc\cdot2]z}-[cl\cdot2]=0, \\
\underline{[ll\cdot2]}.
\end{array}$$

至此未知数已可求出，但为求 $[ll\cdot3]$ 計，須再行約化一次，此次只余一項，即

$$[ll\cdot3].$$

將 $[ll\cdot3]$ 与由未知数代入改正数方程式內直接求得之 $[vv]$ 相比，倘二者互相符合，即可証明計算無誤。此种檢核謂之"結果檢核"，蓋 x, y, z 之值是否計算有差，亦可由此驗出之。

第七節　高斯約化法之实际解算步驟

应用高斯約化法解算法方程式之理論已如上述，但 $[bb\cdot1]$，$[cc\cdot1]$

等符号僅用于理論之演繹，实际計算时并不需要。茲將实际計算之步驟与排列法列于下，并举例說明之：

今仍以三个未知数为例，其法方程式为：

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) \quad [aa]x+[ab]y+[ac]z-[al]=0;\\
&(\mathrm{II}) \quad [ab]x+[bb]y+[bc]z-[bl]=0,\\
&(\mathrm{III}) \quad [ac]x+[bc]y+[cc]z-[cl]=0.
\end{aligned}
$$

計算时先將 (I), (II), (III) 三个方程式列出，但 $[ab]$, $[ac]$, $[bc]$ 等系数均屬对称者，为簡省不必要之項目起見，可將其略去，僅寫 $[aa]x$, $[bb]y$, $[cc]z$ 一个对角綫上右方之項目，每两行之間并空一行，以备填入約化之方程式，其格式如下：

行	說明	x	y	z	l
1	(I) $(\mathrm{I})_a=\frac{1}{[aa]}(\mathrm{I})$	$+[aa]$ $+1$	$+[ab]$ $+\frac{[ab]}{[aa]}$	$+[ac]$ $+\frac{[ac]}{[aa]}$	$-[al]$ $-\frac{[al]}{[aa]}$
2	(II) $(\mathrm{I})_b=-\frac{[ab]}{[aa]}(\mathrm{I})$		$+[bb]$ $-\frac{[ab][ab]}{[aa]}$	$+[bc]$ $-\frac{[ab][ac]}{[aa]}$	$-[bl]$ $+\frac{[ab][al]}{[aa]}$
3	(III) $(\mathrm{I})_c=-\frac{[ac]}{[aa]}(\mathrm{I})$			$+[cc]$ $-\frac{[ac][ac]}{[aa]}$	$-[cl]$ $+\frac{[ac][al]}{[aa]}$
4	(l) $(\mathrm{I})_l=-\frac{-[al]}{[aa]}(\mathrm{I})$				$+[ll]$ $-\frac{[al][al]}{[aa]}$
5	(s) $(\mathrm{I})_s=-\frac{[as]}{[aa]}(\mathrm{I})$	$+[as]$	$+[bs]$ $-\frac{[ab][as]}{[aa]}$	$+[cs]$ $-\frac{[ac][as]}{[aa]}$	$-[ls]$ $+\frac{[al][as]}{[aa]}$

上表計共五橫行，每橫行之內均列两方程式。法方程式 (I), (II), (III) 分列于首三橫格之上。第四格內列入 $[ll]$，乃为計算 $[vv]$ 之用。第五格內列入和数方程式 (s)。在 (I) 式之下，列入 $(\mathrm{I})_a=\frac{1}{[aa]}(\mathrm{I})$，乃为計算未知数 x 之用。(II), (III), (l), (s) 各式之下，則列入約化部

份，$(\mathrm{I})_b$，$(\mathrm{I})_c$，$(\mathrm{I})_l$，$(\mathrm{I})_s$，其意义均于首列內解釋之。$(\mathrm{I})_s$之首項，即$-[as]$可以不列，因对于以下計算無用也。

上表中在平方項对角綫左下方之各項，因对称关系，不必寫出，各式內之 x, y, z 等未知数亦經略去，而于列首書明該列系 x 或 y 項之系数。

至于 $(\mathrm{I})_a$，$(\mathrm{I})_b$，$(\mathrm{I})_c$，$(\mathrm{I})_l$，$(\mathrm{I})_s$ 各項之符号均有一定之規則:

1. $(\mathrm{I})_a$ 各項之系数与(I)各項系数正負号相同。

2. $(\mathrm{I})_b$，$(\mathrm{I})_c$ 等式之平方項系数必为負号。

3. $[ab]$ 之符号倘为負号，則 $(\mathrm{I})_b$ 各項之符号与(I)式相同，$[ab]$ 之符号如系正号，則$(\mathrm{I})_b$ 各項之符号与(I)式相当項之符号相反。

4. 同理 $[ac]$ 若为負号，$(\mathrm{I})_c$与 (I) 式相当項符号相同，否則相反。

$(\mathrm{I})_l$ 式則視 $-[al]$ 項之符号，$(\mathrm{I})_s$ 式則視 $[as]$ 項之符号。

按照上述規則，在計算 $(\mathrm{I})_b$，$(\mathrm{I})_c$，$(\mathrm{I})_l$，$(\mathrm{I})_s$ 式內各項之先，即可將各項符号列出，以免錯誤。

將上表內 2, 3, 4, 及 5 各橫行內之两式相加，即得第一次約化法方程式$(\mathrm{II})'$，$(\mathrm{III})'$，$(l)'$ 与其和数方程式$(s)'$。

行数	說　　明	y	z	l
1	$(\mathrm{II})'$ $(\mathrm{II})'_b=\frac{(\mathrm{II})'}{[bb\cdot1]}$	$+[bb\cdot1]$ $+1$	$+[bc\cdot1]$ $+\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}$	$-[bl\cdot1]$ $-\frac{[bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}$
2	$(\mathrm{III})'$ $(\mathrm{II})'_c=-\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}(\mathrm{II})'$		$+[cc\cdot1]$ $-\frac{[bc\cdot1][bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}$	$-[cl\cdot1]$ $+\frac{[bc\cdot1][bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}$
3	$(l)'$ $(\mathrm{II})'_l=-\frac{[bb\cdot1]}{[bb\cdot1]}(\mathrm{II})'$			$+[ll\cdot1]$ $-\frac{[bl\cdot1][bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}$
4	$(s)'$ $(\mathrm{II})'_s=-\frac{[bs\cdot1]}{[bb\cdot1]}(\mathrm{II})'$	$+[bs\cdot1]$	$+[cs\cdot1]$ $-\frac{[bs\cdot1][bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}$	$-[ls\cdot1]$ $+\frac{[bs\cdot1][bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}$

$(\mathrm{II})'_b$，$(\mathrm{II})'_c$，$(\mathrm{II})'_l$，$(\mathrm{II})'_s$ 之算法与前表相同，不再贅述，由此可

得第三次約化法方程式$(III)''_c$:

行数	說明	z	l
1	$(III)''$ $(III)''_c=\frac{1}{[cc\cdot2]}(III)''$	$+[cc\cdot2]$ $+1$	$-[cl\cdot2]$ $-\frac{[cl\cdot2]}{[cc\cdot2]}$
2	$(l)''$ $(III)''_l=-\frac{[cl\cdot2]}{[cc\cdot2]}(III)''$		$+[ll\cdot2]$ $-\frac{[cl\cdot2][cl\cdot2]}{[cc\cdot2]}$
3	$(s)''$ $(III)''_s=-\frac{[cs\cdot2]}{[cc\cdot2]}(III)''$	$+[cs\cdot2]$	$-[ls\cdot2]$ $+\frac{[cs\cdot2][cl\cdot2]}{[cc\cdot1]}$

至此未知数 z 已可自 $(III)''_c$ 内求出,法方程式已完全解出。但为求 $[ll\cdot3]$ 計,尙須約化一次,并作檢核之用,故最后得:

$(l)'''$	$[ll\cdot3]$
$(s)'''$	$-[ls\cdot3]$

計算程序及其排列已如上述,計算之工具,則于各系数位数不多时(三位以下)应用計算尺之精度已足。法方程式較多时,宜用乘法表,位数較多时最好应用計算机。至于对数法則僅于無計算机时可以采用,蓋查对数表之工作甚費时間,且易生差誤。

每次之約化法方程式,均应以和数方程式檢核之,以免有差。至最后一次之公式为:
$$[ll\cdot3]=-[ls\cdot3].$$

例 1: 应用高斯約化法解算第一節例一之法方程式(11):

	ξ	η	ζ	τ	$-l$	
(I)	+3.00	+1.00	+1.00	+1.00	− 7.64	
$(I)_a$	+1.00	+0.333	+0.333	+0.333	− 2.547	$\xi=+1.392$
(II)		+3.00	+1.00	+1.00	− 6.57	
$(I)_b$		−0.333	−0.333	−0.333	+ 2.547	
(III)			+3.00	+1.00	− 8.04	
$(I)_c$			−0.333	−0.333	+ 2.547	
(IV)				+3.00	− 6.89	
$(I)_d$				−0.333	+ 2.547	
l					+36.11	
$(I)_l$					−19.459	

(s) $(\mathrm{I})_s$	−1.64	−0.57 +0.547	−2.04 +0.547	−0.89 +0.547	+ 6.97 − 4.179	
$(\mathrm{II})'$ $(\mathrm{II})'_b$ $(\mathrm{III})'$ $(\mathrm{II})'_c$ $(\mathrm{IV})'$ $(\mathrm{II})'_d$ $(l)'$ $(\mathrm{II})'_l$		+2.667 +1.000	+0.667 +0.250 +2.677 −0.167	+0.667 +0.250 +0.667 −0.167 +2.667 −0.167	− 4.023 − 1.509 − 5.493 + 1.006 − 4.343 + 1.006 +16.651 − 6.071	$\eta=+0.859$
$(s)'$ $(\mathrm{II})'$		−0.023	−1.493 +0.006	−0.343 +0.006	+ 2.791 − 0.034	
$(\mathrm{III})''$ $(\mathrm{III})''_c$ $(\mathrm{IV})''$ $(\mathrm{III})''_d$ $(l)''$ $(\mathrm{III})''_l$			+2.500 +1.000	+0.500 +0.200 +2.500 −0.100	− 4.487 − 1.795 − 3.337 + 0.897 +10.580 − 8.054	$\zeta=+1.592$
$(s)''$ $(\mathrm{III})''_s$			−1.487	−0.337 +0.297	+ 2.757 − 2.669	
$(\mathrm{IV})'''$ $(\mathrm{IV})'''_d$ $(l)'''$ $(\mathrm{IV})'''_l$				+2.400 +1.000	− 2.440 − 1.010 + 2.526 − 2.479	$\tau=+1.016$
$(s)'''$ $(\mathrm{IV})'''_s$				−0.040	+ 0.088 − 0.041	
$(l)''''$					+ 0.047	$=[ll\cdot4]$ $=[vv]$
$(s)''''$					+ 0.047	

結果: $\xi=+1.392$; $\eta=+0.857$; $\zeta=+1.592$; $\tau=+1.016$; $[vv]=0.047$.

与第一節例 1 之結果相比，ξ, η, ζ, τ 之値，除此处多寫一位外，余均相同，惟彼处 $[vv]=+0.0511$ 与 $+0.047$ 相差較多，此蓋由于約化至 $[ll\cdot4]$ 时中間經过四捨五入，最后一位已不可靠。但为檢核之用，吾人已可認为满意矣。

玆应用对数表解上例，其結果虽較精确，然所費时間甚多，晚近普通均用計算机，卽此故也。

	1 $a]$	2 $b]$	3 $c]$	4 $d]$	5 $-l]$	6 $s]$	7 檢核
I $[a$	+3.0000	+1.0000	+1.0000	+1.0000	−7.6400	+1.6400	0
$\log [a$	0.477 1213	0	0	0	0.883 0934	0.214 8438	
$\log \frac{I_2}{I_1}[a$		9.522 8787	9.522 8787	9.522 8787	0.405 9721	9.737 7225	
$\log \frac{I_3}{I_1}[a$			9.522 8787	9.522 8787	0.405 9721	9.737 7225	
$\log \frac{I_4}{I_1}[a$				9.522 8787	0.405 9721	9.737 7225	
$\log \frac{I_5}{I_1}[a$					1.289 0655	0.620 8159	
$[b$		+3.0000	+1.0000	+1.0000	−6.5700	+0.5700	0
$\frac{I_2}{I_1}[a$		−0.3333	−0.3333	−0.3333	+2.5467	−0.5467	
		$b\cdot1]$	$c\cdot1]$	$d\cdot1]$	$-l\cdot1]$	$s\cdot1]$	
II $[b$		+2.6667	+0.6667	+0.6667	−4.0233	+0.0233	−0.0001

$\log [b$		0.425 9742	9.823 9305	9.823 9305	0.604 5824	8.367 3559	
$\log \frac{II_3}{II_2}[b$			9.221 8868	9.221 8868	0.002 5387	7.765 3122	
$\log \frac{II_4}{II_2}[b$				9.221 8868	0.002 5387	7.765 3122	
$\log \frac{II_5}{II_2}[b$					0.783 1906	8.545 9641	
$[c$			+3.0000	+1.0000	−8.0400	+2.0400	0
$\frac{I_3}{I_1}[a$			−0.3333	−0.3333	+2.5467	−0.5467	
$\frac{II_3}{II_2}[b$			−0.1667	−0.1667	+1.0059	−0.0058	
			$c\cdot 2]$	$d\cdot 2]$	$-l\cdot 3]$	$s\cdot 2]$	
III　$[c$			+2.5000	+0.5000	−4.4874	+1.4875	−0.0001
$\log [c$			0.397 9400	9.698 9700	0.651 9948	0.172 4570	
$\log \frac{III_4}{III_3}[c$				9.000 0000	9.953 0248	9.473 4870	
$\log \frac{III_5}{III_3}[c$					0.906 0496	0.426 5118	

$[d$		+3.0000	−6.8900	+0.8900	0
$\frac{I_4}{I_1}[a$		−0.3331	+2.5467	−0.5467	
$\frac{II_4}{II_2}[b$		−0.1667	+1.0059	−0.0058	
$\frac{III_4}{III_3}[c$		−0.1000	+0.8975	−0.2975	
		$d\cdot 3]$	$-l\cdot 3]$	$s\cdot 3]$	
IV $[d$		+2.4002	−2.4399	+0.0400	+0.0003
$\log [d$		0.380 2474	0.387 3720	8.602 0600	
$\log \frac{IV_5}{IV_4}[d$		0.007 1246	0.394 4966	8.609 1846	
$[l$			+36.1100	−6.9700	
$\frac{I_5}{I_1}[a$			−19.4564	+4.1765	
$\frac{II_5}{II_2}[b$			− 6.0701	+0.0352	
$\frac{III_5}{III_3}[c$			− 8.0547	+2.6700	
$\frac{IV_5}{IV_4}[d$			− 2.4840	+0.0407	
V $[vv]$			+ 0.0486	−0.0476	+0.0010
	$\xi=+1.3914$ $\eta=+0.8567$ $\zeta=+1.5916$ $\tau=+1.0165$				

第八節　杜力特尔之解法

由上節所論之高斯解法，可知实际用以求得未知数之方程式为(I)，(II)′，(III)″，(IV)‴ 諸法方程式，其他各約化法方程式中之 (III)′，(IV)′，(IV)″ 等僅为中間之方程式，原可不必寫出。此法称为杜力特尔方法，玆將其排列法列出，然后以上節之例解示之。

	1	2	3	4	5	6
(I) $(\mathrm{I})_a$	$[aa]$ 1	$[ab]$ $\frac{[ab]}{[aa]}$	$[ac]$ $\frac{[ac]}{[aa]}$	$[ad]$ $\frac{[ad]}{[aa]}$	$-[al]$ $-\frac{[al]}{[aa]}$	$[as]$ $\frac{[as]}{[aa]}$
(II) $(\mathrm{I})_b$		$[bb]$ $-\frac{\mathrm{I}_2}{\mathrm{I}_1}\times\mathrm{I}_2$	$[bc]$ $-\frac{\mathrm{I}_2}{\mathrm{I}_1}\times\mathrm{I}_3$	$[bd]$ $-\frac{\mathrm{I}_2}{\mathrm{I}_1}\times\mathrm{I}_4$	$-[bl]$ $+\frac{\mathrm{I}_2}{\mathrm{I}_1}\times\mathrm{I}_5$	$[bs]$ $-\frac{\mathrm{I}_2}{\mathrm{I}_1}\times\mathrm{I}_6$
(II)′ $(\mathrm{II})'_b$		$[bb\cdot1]$ 1	$[bc\cdot1]$ $\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}$	$[bd\cdot1]$ $\frac{[bd\cdot1]}{[bb\cdot1]}$	$-[bl\cdot1]$ $-\frac{[bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}$	$[bs\cdot1]$ $\frac{[bs\cdot1]}{[bb\cdot1]}$
(III) $(\mathrm{I})_c$ $(\mathrm{II})'_c$			$[cc]$ $-\frac{\mathrm{I}_3}{\mathrm{I}_1}\times\mathrm{I}_3$ $-\frac{\mathrm{II}_3}{\mathrm{II}_2}\times\mathrm{II}_3$	$[cd]$ $-\frac{\mathrm{I}_3}{\mathrm{I}_1}\times\mathrm{I}_4$ $-\frac{\mathrm{II}_3}{\mathrm{II}_2}\times\mathrm{II}_4$	$-[cl]$ $+\frac{\mathrm{I}_3}{\mathrm{I}_1}\times\mathrm{I}_5$ $+\frac{\mathrm{II}_3}{\mathrm{II}_2}\times\mathrm{II}_5$	$[cs]$ $-\frac{\mathrm{I}_3}{\mathrm{I}_1}\times\mathrm{I}_6$ $-\frac{\mathrm{II}_3}{\mathrm{II}_2}\times\mathrm{II}_6$
(III)′ $(\mathrm{III})''_c$			$[cc\cdot2]$ 1	$[cd\cdot2]$ $\frac{[cd\cdot2]}{[cc\cdot2]}$	$-[cl\cdot2]$ $-\frac{[cl\cdot2]}{[cc\cdot2]}$	$[cs\cdot2]$ $\frac{[cs\cdot2]}{[cc\cdot2]}$
(IV) $(\mathrm{I})_d$ $(\mathrm{II})'_d$ $(\mathrm{III})''_d$				$[dd]$ $-\frac{\mathrm{I}_4}{\mathrm{I}_1}\times\mathrm{I}_4$ $-\frac{\mathrm{II}_4}{\mathrm{II}_2}\times\mathrm{II}_4$ $-\frac{\mathrm{III}_4}{\mathrm{III}_3}\times\mathrm{II}_4$	$-[dl]$ $+\frac{\mathrm{I}_4}{\mathrm{I}_1}\times\mathrm{I}_5$ $+\frac{\mathrm{II}_4}{\mathrm{II}_2}\times\mathrm{II}_5$ $+\frac{\mathrm{III}_4}{\mathrm{III}_3}\times\mathrm{II}_5$	$[ds]$ $-\frac{\mathrm{I}_4}{\mathrm{I}_1}\times\mathrm{I}_6$ $-\frac{\mathrm{II}_4}{\mathrm{II}_2}\times\mathrm{II}_6$ $-\frac{\mathrm{III}_4}{\mathrm{III}_3}\times\mathrm{II}_6$
(IV)‴ $(\mathrm{IV})'''_d$				$[dd\cdot3]$ 1	$-[dl\cdot3]$ $-\frac{[dl\cdot3]}{[dd\cdot3]}$	$[ds\cdot3]$ $\frac{[ds\cdot3]}{[dd\cdot3]}$

						$[ll]$	$-[ls]$
l						$[ll]$	$-[ls]$
$(I)_l$						$\frac{I_5}{I_1}\times I_5$	$\frac{I_5}{I_1}\times I_6$
$(II)'_l$						$\frac{II_5}{II_2}\times II_5$	$\frac{II_5}{II_2}\times II_6$
$(III)''_l$						$\frac{III_5}{III_3}\times III_5$	$\frac{III_5}{III_3}\times III_6$
$(IV)'''_l$						$\frac{III_5}{III_4}\times III_5$	$\frac{III_5}{III_4}\times III_6$
V						$[ll\cdot4]$	$-[ls\cdot4]$

	ξ	η	ζ	τ	l	s	
(I)	+3.000	+1.000	+1.000	+1.000	− 7.640	−1.640	
$(I)_a$	+1.000	+0.333	+0.333	+0.333	− 2.547	−0.547	− 1
(II)		+3.000	+1.000	+1.000	− 6.570	−0.570	
$(I)_b$		−0.333	−0.333	−0.333	+ 2.547	+0.547	
(II)′		+2.667	+0.667	+0.667	− 4.023	−0.023	+ 1
$(II)'_b$		+1.000	+0.250	+0.250	− 1.509	+0.009	0
(III)			+3.000	+1.000	− 8.040	−2.040	
$(I)_c$			−0.333	−0.333	+ 2.547	+0.547	
$(II)_c$			−0.167	−0.167	+ 1.006	+0.006	
(III)″			+2.500	+0.500	− 4.487	−1.487	0
$(III)''_c$			+1.000	+0.200	− 1.795	−0.595	0
(IV)				+3.000	− 6.890	−0.890	
$(I)_d$				−0.333	+ 2.547	+0.547	
$(II)'_d$				−0.167	+ 1.006	+0.006	
$(III)'_d$				−0.100	+ 0.897	+0.297	
(IV)‴				+2.400	− 2.440	−0.040	0
$(IV)'''_d$				+1.000	− 1.016	−0.017	+ 1
(l)					+36.110	+6.970	
$(I)_l$					−19.459	−4.179	
$(II)'_l$					− 6.071	−0.043	
$(III)''_l$					− 8.054	−2.669	
$(IV)'''_l$					− 2.479	−0.041	
$(l)''''$				$[ll\cdot4]=$	+ 0.047	+0.047	0

將上表与上節例中之表相比，即可証明，杜力特尔法与高斯法僅有排列上之不同，在后者除省去書寫 (III)′ (IV)′ $(l)'$ (IV)″ $(l)''$ $(l)''$ 行式之工作外，計算并無簡省之处。上表中無和数方程式，但加一和数列 s，其意义与和数方程式完全相同，用高斯約化法时，亦可如此排列。

第九節　权單位之中誤差

权單位之中誤差，乃一假想权等于 1 之观測值之中誤差也。在等权观測中，每个观測值之权均假定为 1，故此时权單位之中誤差实卽观測值之中誤差。不等权观測中，所有观測值之精度旣均不相等，其中誤差自必各異，代表观測值之精度，以用权單位之中誤差为佳。观測值之权数中，不必有 1 之值，但任何观測值之中誤差，均可由权單位之中誤差計算之。設已知权單位之中誤差为 m，則某一观測值之权数为 p_1 时，其中誤差必为：

$$m' = \frac{m}{\sqrt{p_1}}, \tag{62}$$

蓋中誤差之平方与权成反比也。直接观測时之权單位之中誤差，已于第三章導出，即

等权观測：　$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$;

不等权观測：　$m = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}$.

間接观測中，未知数之数目較 1 为多，权單位之中誤差公式应成何种形式？玆当討論之。

今設 $X, Y\cdots$ 为未知数之眞值，x, y 为按最小二乘法原理求出之最或是值，則观測值之眞誤差为：

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_1X + b_1Y + c_1Z - l_1; \\ \varepsilon_2 &= a_2X + b_2Y + c_2Z - l_2; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\ \varepsilon_n &= a_nX + b_nY + c_nZ - l_n. \end{aligned}\right\}\text{假定为三未知数。} \tag{63}$$

观测值之改正数为:

$$\left.\begin{aligned}v_1&=a_1x+b_1y+c_1z-l_1;\\v_2&=a_2x+b_2y+c_2z-l_2;\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\v_n&=a_nx+b_ny+c_nz-l_n.\end{aligned}\right\}\tag{64}$$

以(64)内各式减去(63)内之相当式,即得

$$v_i-\varepsilon_i=a_i(x-X)+b_i(y-Y)+c_i(z-Z),\tag{65}$$

$i=1,\ 2,\ \cdots n$。此式亦可寫为:

$$v_i=a_i(x-X)+b_i(y-Y)+c_i(z-Z)+\varepsilon_i.\tag{66}$$

將(66)与(64)相比,两式之形式固相似,其不同者僅在 $-l_i$ 变为 $+\varepsilon_i$, $x,\ y,\ z$ 易以$(x-X)$, $(y-Y)$, $(z-Z)$。应用第六節方法由(66)求$[vv]$,可得类似第六節內公式(54)之結果,惟其中之 $-l$ 均代以$+\varepsilon$,即

$$[vv]=[\varepsilon\varepsilon]-\frac{[a\varepsilon]^2}{[aa]}-\frac{[b\varepsilon\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\frac{[c\varepsilon\cdot2]^2}{[cc\cdot2]}.\tag{67}$$

如系不等权观测,則式(67)应書为:

$$[pvv]=[p\varepsilon\varepsilon]-\frac{[pa\varepsilon]^2}{[paa]}-\frac{[pb\varepsilon\cdot1]^2}{[pbb\cdot1]}-\frac{[pc\varepsilon\cdot2]^2}{[pcc\cdot2]}.\tag{68}$$

按中誤差之定义,权單位之中誤差为:

$$m=\pm\sqrt{\frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{n}},$$

故
$$[p\varepsilon\varepsilon]=n\cdot m^2;\tag{69}$$

又 $$[pa\varepsilon]^2=(p_1a_1\varepsilon_1+p_2a_2\varepsilon_2+\cdots)(p_1a_1\varepsilon_1+p_2a_2\varepsilon_2+\cdots),$$

或 $$\begin{aligned}[pa\varepsilon]^2=(p_1^2a_1^2\varepsilon_1^2+p_2^2a_2^2\varepsilon_2^2+\cdots)+(2p_1p_2a_1a_2\varepsilon_1\varepsilon_2+\\+2p_2p_3a_2a_3\varepsilon_2\varepsilon_3+\cdots).\end{aligned}\tag{70}$$

式(70)右方前一部中之 $p_1\varepsilon_1^2$, $p_2\varepsilon_2^2\cdots$等可以其中值 m^2 代之,后一部中之 $\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\varepsilon_2\varepsilon_3\cdots$等,因 ε 之符号正負变化,故其中值应为 0, 于是

$$[pa\varepsilon]^2=[paa]m^2$$

或
$$\frac{[pa\varepsilon]^2}{[paa]}=m^2. \tag{71}$$

式(68)中之右方第三項

$$[pb\varepsilon\cdot 1]=[pb\varepsilon]-\frac{[pab]}{[paa]}[pa\varepsilon]= \tag{72}$$

$$=\left[p\left(b-\frac{[pab]}{[paa]}a\right)\varepsilon\right],$$

命
$$b_i'=b_i-\frac{[pab]}{[paa]}a_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots n. \tag{73}$$

則 $[pb\varepsilon\cdot 1]^2=(p_1b_1'\varepsilon_1+p_2b_2'\varepsilon_2+\cdots)^2=$

$$=(p_1^2b_1'^2\varepsilon_1^2+p_2^2b_2'^2\varepsilon_2^2+\cdots)+$$

$$+(2p_1p_2b_1'b_2'\varepsilon_1\varepsilon_2+2p_2p_3b_2'b_3'\varepsilon_2\varepsilon_3+\cdots). \tag{74}$$

同理以 $p_1\varepsilon_1^2$, $p_2\varepsilon_1^2\cdots p_n\varepsilon_n^2$ 等之中值 m^2 代 $p_1\varepsilon_1^2$, $p_2\varepsilon_2^2\cdots p_n\varepsilon_n^2$ 等，而 $\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\varepsilon_2\varepsilon_3\cdots$等之中值系等于零；故

$$[pb\varepsilon\cdot 1]^2=[pb'b']m^2=[pbb\cdot 1]m^2,$$

或
$$\frac{[pb\varepsilon\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]}=m^2. \tag{75}$$

同理命

$$c_i'=c_i-\frac{[pac]}{[paa]}a_i; \tag{76}$$

$$c_i''=c_i'-\frac{[pb'c']}{[pb'b']}b_i', \tag{77}$$

則
$$[pc\varepsilon\cdot 2]=[pc\varepsilon\cdot 1]-\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}[pb\varepsilon\cdot 1]=$$

$$=\left[p\left(c'-\frac{[pb'c']}{[pb'b']}b'\right)\varepsilon\right]=$$

$$=[pc''\varepsilon]. \tag{78}$$

而
$$[pc\varepsilon\cdot 2]^2=[pc''c'']m^2=[pcc\cdot 2]m^2,$$

或
$$\frac{[pc\varepsilon\cdot 2]^2}{[pcc\cdot 2]}=m^2. \tag{79}$$

將 (69), (71), (75) 及 (79) 諸式代入 (68) 內,即得

$$[pvv]=n\cdot m^2-m^2-m^2-m^2=(n-3)m^2.$$

若未知数为 u 个,則

$$[pvv]=(n-u)m^2,$$

或
$$m=\pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}}. \tag{80}$$

此即权單位中誤差之公式。如为等权观測,則式(80)变成

$$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-u}}, \tag{81}$$

是即每个观測值之中誤差。

第十節 未知数之中誤差

前節所論者为权單位之中誤差,由之可以推算观測值之中誤差。但在間接观測中,未知数系由观測值間接計算而得,其中誤差必須另行計算。茲將任一未知数与所有观測值之关系以下列形式表示之:

$$\left.\begin{aligned}x&=\alpha_1l_1+\alpha_2l_2+\cdots+\alpha_nl_n;\\ y&=\beta_1l_1+\beta_2l_2+\cdots+\beta_nl_n;\\ z&=\gamma_1l_1+\gamma_2l_2+\cdots+\gamma_nl_n;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{aligned}\right\} \tag{82}$$

若各观測值 $l_1, l_2, \cdots l_n$ 均为互不相关之等权观測,則由誤差傳播定律,可以下式求未知数 x, y, z 等之中誤差:

$$\left.\begin{aligned}m_x&=m\sqrt{[\alpha\alpha]};\\ m_y&=m\sqrt{[\beta\beta]};\\ m_z&=m\sqrt{[\gamma\gamma]}.\end{aligned}\right\} \tag{83}$$

反之,$l_1, l_2, \cdots l_n$ 如为不等权观測,則須先按第三節式(37)之方法將其化为等权,即

$$l_1'=\sqrt{p_1}\,l_1;\quad l_2'=\sqrt{p_2}\,l_2;\cdots l_n'=\sqrt{p_n}\,l_n.$$

然后列成与式(82)相同之方程式如下:

$$\left.\begin{aligned}x &= \alpha_1 l_1' + \alpha_2 l_2' + \cdots + \alpha_n l_n';\\ y &= \beta_1 l_1' + \beta_2 l_2' + \cdots + \beta_n l_n';\\ z &= \gamma_1 l_1' + \gamma_2 l_2' + \cdots + \gamma_n l_n';\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{aligned}\right\} \tag{84}$$

此时 $l_1', l_2' \cdots l_n'$ 之权俱为 1，故式(83)仍可应用，其中 m 应为权單位之中課差。設以 p_x, p_y, p_z 表示未知数 x, y, z 之权，则

$$\frac{1}{p_x} = [\alpha\alpha], \quad \frac{1}{p_y} = [\beta\beta], \quad \frac{1}{p_z} = [\gamma\gamma]. \tag{85}$$

是以 α, β, γ 等系数与未知数之权有密切关系，故名之为未知数之权系数。其求法如下：設有三个未知数之間接观测，其法方程式为：

$$\left.\begin{aligned}[aa]x + [ab]y + [ac]z - [al] = 0;\\ [ab]x + [bb]y + [bc]z - [bl] = 0;\\ [ac]x + [bc]y + [cc]z - [cl] = 0.\end{aligned}\right\} \tag{86}$$

將上列三方程式分别乘以不定系数 $Q_{1\cdot1}$, $Q_{1\cdot2}$, $Q_{1\cdot3}$, 即得

$$\left.\begin{aligned}Q_{1\cdot1}[aa]x + Q_{1\cdot1}[ab]y + Q_{1\cdot1}[ac]z - Q_{1\cdot1}[al] = 0;\\ Q_{1\cdot2}[ab]x + Q_{1\cdot2}[bb]y + Q_{1\cdot2}[bc]z - Q_{1\cdot2}[bl] = 0;\\ Q_{1\cdot3}[ac]x + Q_{1\cdot3}[bc]y + Q_{1\cdot3}[cc]z - Q_{1\cdot3}[cl] = 0.\end{aligned}\right\} \tag{87}$$

將(87)中之三式相加，得

$$\left.\begin{aligned}&(Q_{1\cdot1}[aa] + Q_{1\cdot2}[ab] + Q_{1\cdot3}[ac])x\\ &+ (Q_{1\cdot1}[ab] + Q_{1\cdot2}[bb] + Q_{1\cdot3}[bc])y\\ &+ (Q_{1\cdot1}[ac] + Q_{1\cdot2}[bc] + Q_{1\cdot3}[cc])z\\ &- (Q_{1\cdot1}[al] + Q_{1\cdot2}[bl] + Q_{1\cdot3}[cl]) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{88}$$

$Q_{1\cdot1}$, $Q_{1\cdot2}$, $Q_{1\cdot3}$ 既为任意系数，吾人可令之合于下列三条件：

$$\left.\begin{aligned}[aa]Q_{1\cdot1} + [ab]Q_{1\cdot2} + [ac]Q_{1\cdot3} = 1;\\ [ab]Q_{1\cdot1} + [bb]Q_{1\cdot2} + [bc]Q_{1\cdot3} = 0;\\ [ac]Q_{1\cdot1} + [bc]Q_{1\cdot2} + [cc]Q_{1\cdot3} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{89}$$

于是(88)内未知数 x 之系数为 1，而 y, z 之系数为零，故

$$x = Q_{1\cdot1}[al] + Q_{1\cdot2}[bl] + Q_{1\cdot3}[cl]. \tag{90}$$

將(90)按 l 展开，如 $l_1, l_2\cdots$ 等为等权观测，則

$$\left.\begin{aligned}x = & \quad (a_1Q_{1\cdot1}+b_1Q_{1\cdot2}+c_1Q_{1\cdot3})l_1\\ & +(a_2Q_{1\cdot1}+b_2Q_{1\cdot2}+c_2Q_{1\cdot3})l_2\\ & +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ & +(a_nQ_{1\cdot1}+b_nQ_{1\cdot2}+c_nQ_{1\cdot3})l_n.\end{aligned}\right\}\tag{91}$$

此式卽为本節开始时所述及之形式。

將(91)与(82)之第一方程式相比，卽知

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= a_1Q_{1\cdot1}+b_1Q_{1\cdot2}+c_1Q_{1\cdot3};\\ \alpha_2 &= a_2Q_{1\cdot1}+b_2Q_{1\cdot2}+c_2Q_{1\cdot3};\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\ \alpha_n &= a_nQ_{1\cdot1}+b_nQ_{1\cdot2}+c_nQ_{1\cdot3}.\end{aligned}\right\}\tag{92}$$

倘 $l_1, l_2\cdots l_n$ 为不等权观測，則式(90)内 $[al], [bl]\cdots$ 等項將为 $[pal]$, $[pbl]\cdots$，于是

$$\left.\begin{aligned}x = & \quad (a_1Q_{1\cdot1}+b_1Q_{1\cdot2}+c_1Q_{1\cdot3})p_1l_1\\ & +(a_2Q_{1\cdot1}+b_2Q_{1\cdot2}+c_2Q_{1\cdot3})p_2l_2\\ & +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ & +(a_nQ_{1\cdot1}+b_nQ_{1\cdot2}+c_nQ_{1\cdot3})p_nl_n.\end{aligned}\right\}\tag{90*}$$

又因 $l'=\sqrt{p}l$，故不等权观測时

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= \sqrt{p_1}(a_1Q_{1\cdot1}+b_1Q_{1\cdot2}+c_1Q_{1\cdot3})\\ \alpha_2 &= \sqrt{p_2}(a_2Q_{1\cdot1}+b_2Q_{1\cdot2}+c_2Q_{1\cdot3})\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_n &= \sqrt{p_n}(a_nQ_{1\cdot1}+b_nQ_{1\cdot2}+c_nQ_{1\cdot3}).\end{aligned}\right\}\tag{92*}$$

順次乘(92)以 α_i, a_i, b_i, c_i 并相加之，卽得：

$$[\alpha\alpha]=[a\alpha]Q_{1\cdot1}+[b\alpha]Q_{1\cdot2}+[c\alpha]Q_{1\cdot3};\tag{93}$$

$$\left.\begin{aligned}[a\alpha] &= [aa]Q_{1\cdot1}+[ab]Q_{1\cdot2}+[ac]Q_{1\cdot3};\\ [b\alpha] &= [ab]Q_{1\cdot1}+[bb]Q_{1\cdot2}+[bc]Q_{1\cdot3};\\ [c\alpha] &= [ac]Q_{1\cdot1}+[bc]Q_{1\cdot2}+[cc]Q_{1\cdot3}.\end{aligned}\right\}\tag{94}$$

按式(89)， $[a\alpha]=1,\quad [b\alpha]=0,\quad [c\alpha]=0.$ (95)

以之代入式(93)，得

$$[\alpha\alpha]=Q_{1\cdot1}. \tag{96}$$

在不等权观測时，順序乘(92)* 以 α_i, $\sqrt{p_i}\,a_i$, $\sqrt{p_i}\,b_i$, $\sqrt{p_i}\,c_i$ 而相加，卽得

$$[\alpha\alpha]=[\sqrt{p}a\alpha]Q_{1\cdot1}+[\sqrt{p}b\alpha]Q_{1\cdot2}+[\sqrt{p}c\alpha]Q_{1\cdot3}; \tag{93*}$$

$$\left.\begin{aligned}[\sqrt{p}a\alpha]&=[paa]Q_{1\cdot1}+[pab]Q_{1\cdot2}+[pac]Q_{1\cdot3};\\ [\sqrt{p}b\alpha]&=[pab]Q_{1\cdot1}+[pbb]Q_{1\cdot2}+[pbc]Q_{1\cdot3};\\ [\sqrt{p}c\alpha]&=[pac]Q_{1\cdot1}+[pbc]Q_{1\cdot2}+[pcc]Q_{1\cdot3}.\end{aligned}\right\} \tag{94*}$$

按式(89)，仍令

$$[\sqrt{p}a\alpha]=1,\qquad [\sqrt{p}b\alpha]=0,\qquad [\sqrt{p}c\alpha]=0. \tag{95*}$$

代入式(93)*，亦得

$$[\alpha\alpha]=Q_{1\cdot1}. \tag{96*}$$

(96)* 与 (96) 完全相同，故不論为等权或不等权观測，均得相同結果。將(96)代入式(83)，卽得

$$m_x=m\sqrt{Q_{1\cdot1}}. \tag{97}$$

或按(85)求未知数之权为：

$$p_x=\frac{1}{Q_{1\cdot1}}, \tag{98}$$

是以 $Q_{1\cdot1}$ 又名为未知数 x 之"权之倒数"。

应用同一方法求 β 及 $[\beta\beta]$，茲以另三不定系数 $Q_{2\cdot1}$, $Q_{2\cdot2}$, $Q_{2\cdot3}$ 分别乘法方程式(86)內之各式而相加，并命

$$\left.\begin{aligned}[aa]Q_{2\cdot1}+[ab]Q_{2\cdot2}+[ac]Q_{2\cdot3}&=0;\\ [ab]Q_{2\cdot1}+[bb]Q_{2\cdot2}+[bc]Q_{2\cdot3}&=1;\\ [ac]Q_{2\cdot1}+[bc]Q_{2\cdot2}+[cc]Q_{2\cdot3}&=0.\end{aligned}\right\} \tag{99}$$

遂得

$$y=Q_{2\cdot1}[al]+Q_{2\cdot2}[bl]+Q_{2\cdot3}[cl]. \tag{100}$$

是以

$$\beta_i=\sqrt{p_i}(a_iQ_{2\cdot1}+b_iQ_{2\cdot2}+c_iQ_{2\cdot3}). \tag{101}$$

此为不等权观測之形式，若系等权观測，則 $\sqrt{p_i}=1$，仍用与前相同之

方法，可求得

$$[\sqrt{p}a\beta]=0,\qquad [\sqrt{p}b\beta]=1,\qquad [\sqrt{p}c\beta]=0. \tag{102}$$

及
$$[\beta\beta]=Q_{2\cdot 2}. \tag{103}$$

故
$$m_y=m\sqrt{Q_{2\cdot 2}}, \tag{104}$$

或
$$p_y=\frac{1}{Q_{2\cdot 2}}. \tag{105}$$

再以不定系数 $Q_{3\cdot 1}$, $Q_{3\cdot 2}$, $Q_{3\cdot 3}$ 分别乘法方程式(86)，而命

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]Q_{3\cdot 1}+[ab]Q_{3\cdot 2}+[ac]Q_{3\cdot 3}=0;\\
&[ab]Q_{3\cdot 1}+[bb]Q_{3\cdot 2}+[bc]Q_{3\cdot 3}=0;\\
&[ac]Q_{3\cdot 1}+[bc]Q_{3\cdot 2}+[cc]Q_{3\cdot 3}=1.
\end{aligned}\right\} \tag{106}$$

卽可得
$$z=Q_{3\cdot 1}[al]+Q_{3\cdot 2}[bl]+Q_{3\cdot 3}[cl]. \tag{107}$$

又可得
$$m_z=\pm m\sqrt{Q_{3\cdot 3}} \tag{108}$$

及
$$p_z=\frac{1}{Q_{3\cdot 3}}. \tag{109}$$

$Q_{1\cdot 1}$, $Q_{2\cdot 2}$, $Q_{3\cdot 3}$ 各为未知数 x, y, z 之权之倒数，可由(89)，(99)，(106)三組联立方程式分别求得，再应用 (97)，(104)，(108) 卽可求得未知数 x, y, z 之中誤差。

第十一節 不定系数 Q 及权系数之特性

前節假定未知数为三个，故不定系数 Q 共有 $3^2=9$ 个；如未知数为 u 个，則应有不定系数 u^2 个。在此 u^2 个不定系数 Q 中，有 u 个为平方項，卽 $Q_{1\cdot 1}$, $Q_{2\cdot 2}$, $Q_{3\cdot 3}$,…其值为：

$$Q_{1\cdot 1}=[\alpha\alpha],\qquad Q_{2\cdot 2}=[\beta\beta],\cdots\cdots$$

其余之不定系数亦有一特性，卽

$$Q_{i\cdot k}=Q_{k\cdot i}. \tag{110}$$

兹試証明
$$Q_{1\cdot 2}=Q_{2\cdot 1},$$

其余卽可类推之。將式(89)内之各式，分别以 $Q_{2\cdot 1}$, $Q_{2\cdot 2}$, $Q_{2\cdot 3}$ 乘之，而相加，并將左方按 $Q_{1\cdot 1}$, $Q_{2\cdot 2}$, $Q_{3\cdot 3}$ 并項，卽得

$$\left.\begin{aligned}&([aa]Q_{2\cdot1}+[ab]Q_{2\cdot2}+[ac]Q_{2\cdot3})Q_{1\cdot1}+\\&+([ab]Q_{2\cdot1}+[bb]Q_{2\cdot2}+[bc]Q_{2\cdot3})Q_{1\cdot2}+\\&+([ac]Q_{2\cdot1}+[bc]Q_{2\cdot2}+[cc]Q_{2\cdot3})Q_{1\cdot3}=Q_{2\cdot1}.\end{aligned}\right\}\qquad(111)$$

按(99)，上式 $Q_{1\cdot1}$ 之系数为 0，$Q_{1\cdot2}$ 之系数为 1，$Q_{1\cdot3}$ 之系数亦为 0，故

$$Q_{1\cdot2}=Q_{2\cdot1}.\qquad(112)$$

关于不定系数 $Q_{1\cdot1}$, $Q_{2\cdot2}\cdots$ 与权系数之关系，已于前節式 (96) 及 (103) 論及。茲再申述其余不定系数与权系数之关系如下：

設以相当之 β 分别乘式(92)*內各式之两方而相加之，卽得

$$[\alpha\beta]=[\sqrt{p}a\beta]Q_{1\cdot1}+[\sqrt{p}b\beta]Q_{1\cdot2}+[\sqrt{p}c\beta]Q_{1\cdot3}.\qquad(113)$$

由(102)与上式，$Q_{1\cdot1}$ 及 $Q_{1\cdot3}$ 之系数均为零，$Q_{1\cdot2}$ 之系数为 1，故

$$[\alpha\beta]=Q_{1\cdot2}=Q_{2\cdot1}.\qquad(114)$$

同理以 γ 分别乘(92)內各式而相加之，卽得

$$[\alpha\gamma]=Q_{1\cdot3}=Q_{3\cdot1};\qquad(115)$$

由是可推断：

$$[\beta\gamma]=Q_{2\cdot3}=Q_{3\cdot2}.\qquad(116)$$

若將(90)，(100)，(107)三式列于一处，則成

$$\left.\begin{aligned}x&=Q_{1\cdot1}[al]+Q_{1\cdot2}[bl]+Q_{1\cdot3}[cl];\\y&=Q_{2\cdot1}[al]+Q_{2\cdot2}[bl]+Q_{2\cdot3}[cl];\\z&=Q_{3\cdot1}[al]+Q_{3\cdot2}[bl]+Q_{3\cdot3}[cl].\end{aligned}\right\}\qquad(117)$$

$Q_{1\cdot1}$, $Q_{2\cdot2}$, $Q_{3\cdot3}$ 为平方項，亦成一对角綫，与此对角綫对称之各項系数均相等，根据式(96)，(103)，(114)，(115)，(116)等，亦可將(117)書作

$$\left.\begin{aligned}x&=[\alpha\alpha][al]+[\alpha\beta][bl]+[\alpha\gamma][cl];\\y&=[\alpha\beta][al]+[\beta\beta][bl]+[\beta\gamma][cl];\\z&=[\alpha\gamma][al]+[\beta\gamma][bl]+[\gamma\gamma][cl].\end{aligned}\right\}\qquad(118)$$

由(118)可知各式內右方各項之系数 $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ 等与法方程式中之系数$[aa]$, $[ab]$等均有相同之性質，(118) 名为法方程式之不定式解法。

关于权系数之性質，倘有一特点須提出者，卽等权观測时

$$[\alpha v]=0,\qquad [\beta v]=0,\qquad [\gamma v]=0, \tag{119}$$

与法方程式

$$[av]=0,\qquad [bv]=0,\qquad [cv]=0$$

適相对照。茲証明之如下:

將改正数方程式

$$v_i=a_ix+b_iy+c_iz-l_i \tag{120}$$

之两方乘以相当之 α_i 而相加,卽得

$$[\alpha v]=[a\alpha]x+[b\alpha]y+[c\alpha]z-[\alpha l]. \tag{121}$$

因 $[a\alpha]=1,\quad [b\alpha]=0,\quad [c\alpha]=0,\quad [\alpha l]=x,$

故 $$[\alpha v]=0.$$

同理亦可証明 $$[\beta v]=0$$

及 $$[\gamma v]=0.$$

如系不等权观测,則設改正数方程式(120)之权为 p_i,將其两端乘以 $\sqrt{p_i}\alpha_i$ 而相加,卽得

$$[\sqrt{p}\alpha v]=[\sqrt{p}a\alpha]x+[\sqrt{p}b\alpha]y+[\sqrt{p}c\alpha]z-[\sqrt{p}\alpha l]. \tag{121*}$$

由(95)及(84)知

$$[\sqrt{p}a\alpha]=1,\quad [\sqrt{p}b\alpha]=0,\quad [\sqrt{p}c\alpha]=0,\quad [\sqrt{p}\alpha l]=x.$$

故代入(121)* 內,得

$$\left.\begin{aligned}&[\sqrt{p}\alpha v]=0;\\ \text{同理可証明}\qquad &[\sqrt{p}\beta v]=0;\\ &[\sqrt{p}\gamma v]=0.\end{aligned}\right\} \tag{122}$$

第十二節 未知数权倒数之計算

不定系数 $Q_{1\cdot1}$, $Q_{2\cdot2}$, $Q_{3\cdot3}$ 等卽为未知数 x, y, z 之权倒数,已于第十節式(98),(105),(109)中証明之。茲再將各該权倒数之計算方法解說之,由第十節之演化,各 Q 之决定公式为:

$$\left.\begin{aligned}&[aa]Q_{1\cdot1}+[ab]Q_{1\cdot2}+[ac]Q_{1\cdot3}=1,\\&[ab]Q_{1\cdot1}+[bb]Q_{1\cdot2}+[bc]Q_{1\cdot3}=0,\\&[ac]Q_{1\cdot1}+[bc]Q_{1\cdot2}+[cc]Q_{1\cdot3}=0;\end{aligned}\right\}\tag{89}$$

$$\left.\begin{aligned}&[aa]Q_{2\cdot1}+[ab]Q_{2\cdot2}+[ac]Q_{2\cdot3}=0,\\&[ab]Q_{2\cdot1}+[bb]Q_{2\cdot2}+[bc]Q_{2\cdot3}=1,\\&[ac]Q_{2\cdot1}+[bc]Q_{2\cdot2}+[cc]Q_{2\cdot3}=0;\end{aligned}\right\}\tag{99}$$

$$\left.\begin{aligned}&[aa]Q_{3\cdot1}+[ab]Q_{3\cdot2}+[ac]Q_{3\cdot3}=0,\\&[ab]Q_{3\cdot1}+[bb]Q_{3\cdot2}+[bc]Q_{3\cdot3}=0,\\&[ac]Q_{3\cdot1}+[bc]Q_{3\cdot2}+[cc]Q_{3\cdot3}=1.\end{aligned}\right\}\tag{106}$$

以上各組方程式为"权方程式",与法方程式之系数完全相同,其分別僅在常数一項,卽法方程式之常数項为 $[al]$, $[bl]$, $[cl]$, 而在权方程式中則变为 1 或 0。

將式(106)依約化法方程式之同样方法遞次約化,卽得下列之約化权方程式,除常数項外,与第五節式(49)完全相同:

$$\left.\begin{aligned}[aa]Q_{3\cdot1}+[ab]Q_{3\cdot2}+[ac]Q_{3\cdot3}&=0,\\[bb\cdot1]Q_{3\cdot2}+[bc\cdot1]Q_{3\cdot3}&=0,\\[cc\cdot2]Q_{3\cdot3}&=1.\end{aligned}\right\}\tag{123}$$

由最后一式可知 $Q_{3\cdot3}$ 卽等于$[cc\cdot2]$之倒数,是以欲求 $Q_{3\cdot3}$, 無須另外計算,依次約化法方程式后,自然可得之。至于 $Q_{1\cdot1}$ 与 $Q_{2\cdot2}$ 則不如是簡單。由式(123)可先求出 $Q_{3\cdot3}$, $Q_{3\cdot2}$, $Q_{3\cdot1}$ 諸値,其計算亦無須另列算式,蓋式(123)左方之各系数均为約化法方程式之系数也。其次再將式(99)約化一次,得下列兩式:

$$\left.\begin{aligned}[aa]Q_{2\cdot1}+[ab]Q_{2\cdot2}+[ac]Q_{2\cdot3}&=0,\\[bb\cdot1]Q_{2\cdot2}+[bc\cdot1]Q_{2\cdot3}&=1.\end{aligned}\right\}\tag{124}$$

因 $Q_{2\cdot3}=Q_{3\cdot2}$, 已自(123)中求得,故由(124)之第二式可求 $Q_{2\cdot2}$, 再代入第一式得 $Q_{2\cdot1}$。最后根据(89)之第一式:

$$[aa]Q_{1\cdot1}+[ab]Q_{1\cdot2}+[ab]Q_{1\cdot3}=1\tag{125}$$

可解算 $Q_{1\cdot1}$ 之値。至是所有 Q 值均已求出。此法为罕生所創。因式(123)，(124)，(125)除常数項外，其他系数均为約化法方程式之系数，故計算时無須另列算式，可就約化后之法方程式系数解算之。

高斯所啓示之方法，与此略有不同，盖(89)，(99)，(106)三式，可改書为下列各組方程式：

$$[cc\cdot2]Q_{3\cdot3}=1; \tag{126}$$

$$\left.\begin{aligned}[][bb\cdot1]Q_{2\cdot2}+[bc\cdot1]Q_{2\cdot3}&=1,\\ [bc\cdot1]Q_{2\cdot2}+[cc\cdot1]Q_{2\cdot3}&=0;\end{aligned}\right\} \tag{127}$$

$$\left.\begin{aligned}[][aa]Q_{1\cdot1}+[ab]Q_{1\cdot2}+[ac]Q_{1\cdot3}&=1,\\ [ab]Q_{1\cdot1}+[bb]Q_{1\cdot2}+[bc]Q_{1\cdot3}&=0,\\ [ac]Q_{1\cdot1}+[bc]Q_{1\cdot2}+[cc]Q_{1\cdot3}&=0.\end{aligned}\right\} \tag{128}$$

除(126)無庸再行約化外，將(127)及(128)再行約化，即可求出所有 Q 值。此时所須約化者僅为常数項，故依此时求 Q，可于法方程式之右方附加 Q 列，随同法方程式一同約化。此法之工作虽似較罕生法略多，但其計算步驟完全随法方程式之約化，故較醒目。

Q 之計算亦可用和方程式檢核之。將(89)，(99)，(106)各式分別相加，即得

$$\left.\begin{aligned}[][as]Q_{1\cdot1}+[bs]Q_{1\cdot2}+[cs]Q_{1\cdot3}&=1,\\ [as]Q_{2\cdot1}+[bs]Q_{2\cdot2}+[cs]Q_{2\cdot3}&=1,\\ [as]Q_{3\cdot1}+[bs]Q_{3\cdot2}+[cs]Q_{3\cdot3}&=1;\end{aligned}\right\} \tag{129}$$

此外，如再將(129)內各式相加，更假定未知数为 u 个，則可得一更普遍之檢核公式：

$$\begin{aligned}&[as](Q_{1\cdot1}+Q_{1\cdot2}+\cdots+Q_{1\cdot u})+\\ &+[bs](Q_{2\cdot1}+Q_{2\cdot2}+\cdots+Q_{2\cdot u})+\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+[us](Q_{u\cdot1}+Q_{u\cdot2}+\cdots+Q_{u\cdot u})=u.\end{aligned} \tag{130}$$

兹举例說明如下：

例一：用高斯法解下列法方程式并求不定系数 Q。

法方程式：

$$\left.\begin{aligned}982x+162y-139z-98.2&=0;\\162x+785y-69z+168.5&=0;\\-139x-69y+851z+241.2&=0.\end{aligned}\right\}\qquad\text{(a)}$$

解出：

					Q_1	
$982x$	$+162y$	$-139z$	-98.2	$=0$	$=1$	
x	$+0.166$	-0.142	-0.100	$=0$	$+0.00102$	
$162x$	$+785y$	$-69z$	$+168.5$	$=0$	$=0$	
	-27	$+23$	$+16.2$		-0.166	(b)
$-139x$	$-69y$	$+851z$	$+241.2$	$=0$	$=0$	
		-20	-13.9		$+0.142$	
$+1005x$	$+878y$	$+643z$	$+311.5$	$=0$	$=1$	
$-1005x$	-166	$+142$	$+100.5$		-1.023	

由式(b)得第一次約化法方程式：

			Q_1	Q_2	
$758y$	$-46z$	$+184.7=0$	-0.166	$+1$	
$-46y$	$+831z$	$+227.3=0$	$+0.142$	0	(c)
$712y$	$+785z$	$+412.0=0$	-0.023	$+1$	

在上式內增加 Q_2 一項，而其常数为 1 及 0，其理参考公式(126)。兹繼續將上式約化：

			Q_1	Q_2	
$758y$	$-46z$	$+184.7=0$	-0.166	$+1$	
y	-0.061	$+0.246=0$	-0.000216	$+0.00132$	
$-46y$	$+831z$	$+227.3=0$	$+0.142$	0	(d)
	-3	$+11.2$	-0.010	$+0.061$	
$712y$	$+785z$	$+412.0=0$	-0.023	1	
-712	$+43$	-174.0	$+0.154$	-0.940	

于是得第二次約化法方程式:

			Q_1	Q_2	Q_3
$828z$	$+238.5$	$=0$	$+0.132$	$+0.061$	$+1$
z	$+\ 0.288$		$+0.000161$	$+0.000074$	$+0.00121$
$828z$	$+238.0$	$=0$	$+0.131$	$+0.060$	$+1$

(e)

$$\therefore\quad z=-0.288.$$

$$Q_{1\cdot 3}=+0.000161,\quad Q_{2\cdot 3}=+0.000074,\quad Q_{3\cdot 3}=+0.00121.$$

由公式(d)第一方程式内求 y, 得

$$y=-0.260.$$

$$Q_{1\cdot 2}=-0.000216+0.061\times 0.000161=-0.000208;$$

$$Q_{2\cdot 2}=+0.00132\ \ +0.061\times 0.000074=+0.00133.$$

自式(b)第一方程式内求 x, 得

$$x=+0.102.$$

$$Q_{1\cdot 1}=+0.00102+0.142\times 0.000161+0.166\times 0.000206=+0.00107.$$

計算是否無錯誤，必須檢核。茲先試式(b)之总和項，然后試式(125)，(126)，(127)。

$$\begin{aligned}
+1005x &= 1005\times\ \ 0.102 &&= +102.5\\
+\ 878y &= 878\times(-0.260) &&= -228.3\\
+\ 643z &= 643\times(-0.288) &&= -185.2\\
\hline
& && \ -311.0\\
& &&\text{应}\ \ -311.5;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+1005Q_{1\cdot 1} &= 1005\times\ \ 0.000107 &&= +1.080\\
+\ 878Q_{1\cdot 2} &= 878\times(-0.000206) &&= -0.183\\
+\ 643Q_{1\cdot 3} &= 643\times(0.000161) &&= +0.103\\
\hline
& && \ +1.000\\
& &&\text{应}\ \ +1.000;
\end{aligned}$$

$$+1005Q_{3\cdot1}=1005\times0.000161=0.162$$

$$+\ 878Q_{3\cdot2}=\ 878\times0.000074=0.065$$

$$+\ 643Q_{3\cdot3}=\ 643\times0.00121\ =0.776$$

$$+1.003$$

应　$+1.000;$

$$+1005Q_{2\cdot1}=1005\times(-0.00206)=-0.217$$

$$+\ 878Q_{2\cdot2}=\ 878\times\ (0.00133)\ =+1.180$$

$$+\ 643Q_{2\cdot3}=\ 643\ \ (+0.000074)=+0.048$$

$$+1.011$$

应　$+1.000;;$

或用和数方程式检核 Q 之值：

$$Q_{1\cdot1}+Q_{2\cdot1}+Q_{3\cdot1}=+0.001023$$

$$Q_{1\cdot2}+Q_{2\cdot2}+Q_{3\cdot2}=+0.001196$$

$$Q_{1\cdot3}+Q_{2\cdot3}+Q_{3\cdot3}=+0.001445$$

$$[as](Q_{1\cdot1}+Q_{2\cdot1}+Q_{3\cdot1})=+1.030$$

$$[bs](Q_{1\cdot2}+Q_{2\cdot2}+Q_{3\cdot2})=+1.043$$

$$[cs](Q_{1\cdot3}+Q_{2\cdot3}+Q_{3\cdot3})=+0.925$$

$$+2.998$$

应　$+3.000.$

法方程式之解算，数字繁雜，最为煩人，并易致錯誤，故宜列以淸晰之表格，減少不必要之数字，庶使步驟明顯，行列井然。玆特將德人格魯伯所建議之計算格式列于下頁，以为参考。此表格內包括(1)法方程式之約化，(2)权方程式之約化，(3)未知数之計算，(4)权系数和之計

算。关于(1),(2)两項,其排列系采第八節杜力特尔之解法,無庸再述;关于(3),(4)两步計算工作,玆將其应用公式演化于下:

由第五節式(49)*,如假定为四个未知数,其未知数之計算公式可書如下式:

$$t=\frac{[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]};$$

$$z=\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}t=\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}-\frac{[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}\cdot\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]};$$

$$y=\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}z-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}t=$$

$$=\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\cdot\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\frac{[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}\left(\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\cdot\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right);$$

$$x=\frac{[al]}{[aa]}-\frac{[ab]}{[aa]}y-\frac{[ac]}{[aa]}z-\frac{[ad]}{[aa]}t=$$

$$=\frac{[al]}{[aa]}-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\cdot\frac{[ab]}{[aa]}-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\left(\frac{[ac]}{[aa]}-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\cdot\frac{[ab]}{[aa]}\right)-$$

$$-\frac{[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}\cdot\left\{\frac{[ad]}{[aa]}-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\,\frac{[ab]}{[aa]}-\right.$$

$$\left.-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\left(\frac{[ac]}{[aa]}-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\cdot\frac{[ab]}{[aa]}\right)\right\}.$$

此即表内所列之計算步驟,讀者不难一一对証。至于 $Q_{1\cdot 1}$ $Q_{1\cdot 2}$ $Q_{1\cdot 3}$ 等数,此处書作 $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]\cdots$, 以与 $[aa]$, $[ab]$, $[ac]\cdots$ 等对照,实則 $Q_{1\cdot 1}$ 与 $[\alpha\alpha]$ 之意义完全相同也。关于 $[\alpha\alpha]\cdots$ 等之計算,其理与未知数之計算同,盖即采用本節所述之高斯法也。

行数＼例数	因数 F	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I		[aa]	[ab]	[ac]	[ad]	$-[al]$	[as]	-1	0	0	0
			[bb]	[bc]	[bd]	$-[bl]$	[bs]	0	-1	0	0
	$-\frac{\mathrm{I}_2}{\mathrm{I}_1}$		$\mathrm{F}\cdot\mathrm{I}_2$	$\mathrm{F}\cdot\mathrm{I}_3$	$\mathrm{F}\cdot\mathrm{I}_4$	$\mathrm{F}\cdot\mathrm{I}_5$	$\mathrm{F}\cdot\mathrm{I}_6$	$-\mathrm{F}$			
II			[bb·1]	[bc·1]	[bd·1]	$-[bl\cdot1]$	[bs·1]	II_7	-1	0	0
				[cc]	[cd]	$-[cl]$	[cs]	0	0	-1	0
	$-\frac{\mathrm{I}_3}{\mathrm{I}_1}$			$\mathrm{F}\cdot\mathrm{I}_3$	$\mathrm{F}\cdot\mathrm{I}_4$	$\mathrm{F}\cdot\mathrm{I}_5$	$\mathrm{F}\cdot\mathrm{I}_6$	$-\mathrm{F}$	0	0	0
	$-\frac{\mathrm{II}_3}{\mathrm{II}_2}$			$\mathrm{F}\cdot\mathrm{II}_3$	$\mathrm{F}\cdot\mathrm{II}_4$	$\mathrm{F}\cdot\mathrm{II}_5$	$\mathrm{F}\cdot\mathrm{II}_6$	$\mathrm{F}\cdot\mathrm{II}_7$	$-\mathrm{F}$	0	0
III				[cc·2]	[cd·2]	$-[cl\cdot2]$	[cs·2]	III_7	III_8	-1	0
					[dd]	$-[dl]$	[ds]	0	0	0	-1
	$-\frac{\mathrm{I}_4}{\mathrm{I}_1}$				$\mathrm{F}\cdot\mathrm{I}_1$	$\mathrm{F}\cdot\mathrm{I}_5$	$\mathrm{F}\cdot\mathrm{I}_6$	$-\mathrm{F}$	0	0	0
	$-\frac{\mathrm{II}_4}{\mathrm{II}_2}$				$\mathrm{F}\cdot\mathrm{II}_4$	$\mathrm{F}\cdot\mathrm{II}_5$	$\mathrm{F}\cdot\mathrm{II}_6$	$\mathrm{F}\cdot\mathrm{II}_7$	$-\mathrm{F}$	0	0
	$-\frac{\mathrm{III}_4}{\mathrm{III}_3}$				$\mathrm{F}\cdot\mathrm{III}_4$	$\mathrm{F}\cdot\mathrm{III}_5$	$\mathrm{F}\cdot\mathrm{III}_6$	$\mathrm{F}\cdot\mathrm{III}_7$	$\mathrm{F}\cdot\mathrm{III}_8$	$-\mathrm{F}$	0

IV					$[dd\cdot 3]$	$-[dl\cdot 3]$	$[ds\cdot 3]$	IV_7	IV_8	IV_9	-1
						$[ll]$	s_l	0	0	0	0
	$-\frac{I_5}{I_1}$					$F\cdot I_5$	$F\cdot I_6$	$-F$	0	0	0
	$-\frac{II_5}{II_2}$					$F\cdot II_5$	$F\cdot II_6$	$F\cdot II_7$	$-F$	0	0
	$-\frac{III_5}{III_3}$					$F\cdot III_5$	$F\cdot III_6$	$F\cdot III_7$	$F\cdot III_3$	$-F$	0
	$-\frac{IV_5}{IV_4}$					$F\cdot IV_5$	$F\cdot IV_6$	$F\cdot IV_7$	$F\cdot IV_8$	$F\cdot IV_9$	$-F$
V						$[vv]$		$-x$	$-y$	$-z$	$-t$
	$-\frac{I_7}{I_1}$							$-F$	0	0	0
	$-\frac{II_7}{II_2}$							$F\cdot II_7$	$-F$	0	0
	$-\frac{III_7}{III_3}$							$F\cdot III_7$	$F\cdot III_8$	$-F$	0
	$-\frac{IV_7}{IV_4}$							$F\cdot IV_7$	$F\cdot IV_8$	$F\cdot IV_9$	$-F$
I′								$-[a\alpha]$	$-[a\beta]$	$-[a\gamma]$	$-[a\delta]$

	$-\frac{II_8}{II_2}$ $-\frac{III_8}{III_3}$ $-\frac{IV_8}{IV_4}$							$F \cdot II_7$ $F \cdot III_7$ $F \cdot IV_7$	$-F$ $F \cdot III_9$ $F \cdot IV_8$	0 $-F$ $F \cdot IV_9$	0 0 $-F$
II′								$-[\alpha\beta]$	$-[\beta\beta]$	$-[\beta\gamma]$	$-[\beta\delta]$
	$-\frac{III_9}{III_3}$ $-\frac{IV_9}{IV_4}$							$F \cdot III_7$ $F \cdot IV$	$F \cdot III_8$ $F \cdot IV_8$	$-F$ $F \cdot IV_9$	0 $-F$
III′								$-[\alpha\gamma]$	$-[\beta\gamma]$	$-[\gamma\gamma]$	$-[\gamma\delta]$
	$-\frac{IV_{10}}{IV_4}$							$F \cdot IV_7$	$F \cdot IV_8$	$F \cdot IV_9$	$-F$
IV′								$-[\alpha\delta]$	$-[\beta\delta]$	$-[\gamma\delta]$	$-[\delta\delta]$

关于表内所列計算步驟有須解釋者如下：I, II, …等代表行数，1, 2, 3, …等代表列数，故 II_4 即代表第 II 行第 4 列之系数，例如此处为 $[bd\cdot 1]$，余可类推。又因数 F 一列系标明各項所乘之因数，每行內之 F 均系指該行左端 F 列內所示之值。例如第 V 行上之一行，其 F 列內为 $-\frac{IV_5}{IV_4}$，即 $\frac{[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$，故該行內之 $F\cdot IV_5$，$F\cdot IV_6$ … 等即为 $-\frac{[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}[dl\cdot 3]$，$\frac{[dl\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}[ds\cdot 3]$，…等。所有 I, II, III, IV, V 及 I′, II′, III′, IV′ 各行均为其上数行之和。例如 III_3 为 $[cc\cdot 2]$，系 $[cc]+F\cdot I_3+F\cdot II_3$，余可类推。

为節省紙幅，計算时可將 7, 8, 9, 10 各列与 1, 2, 3, 4 各列并書，但对于初算者，此种列法，頗不省目，易致錯誤。兹举一四个未知数之例于下，以資說明。

例：須解之法方程式如下，求未知数及其权系数。

	檢核和数
$+8.5736x+0.4212y-0.0087z-1.2254t-4.3808=0$	-3.3804
$+0.4212x+6.3260y+0.6861z-0.1134t-3.6269=0$	-3.6930
$-0.0087x+0.6861y+0.4036z+0.0194t-0.3744=0$	-0.7260
$-1.2254x-0.1134y+0.0194z+0.2331t+0.7219=0$	$+0.3644$
$-4.3803x-3.6269y-0.3744z+0.7219t+4.4310=(vv)$	$+3.2387$
$(-[al])\quad(-[bl])\quad(-[cl])\quad(-[dl])\quad([ll])$	

列 行	因数	1 (7)	2 (8)	3 (9)	4 (10)	5	6
I		+8.5736 (−1)	+0.4242 (0)	−0.0087 (0)	−1.2254 (0)	−4.3803	−3.3803
		0	+6.3260	+0.6861	−0.1134	−3.6269	−3.6930
	$-\frac{I_2}{I_1}$	+0.0491	−0.0207	+0.0004	+0.0602	+0.2152	+0.1661
II		+0.0491	+6.3053 (−1)	+0.6865 (0)	−0.0532 (0)	−3.4117	−3.5269
		0	0	+0.4036	+0.0194	−0.3744	−0.7260
	$-\frac{I_3}{I_1}$	−0.0010	0	−0.0000	−0.0012	−0.0044	−0.0034
	$-\frac{II_3}{II_2}$	−0.0053	+0.1089	−0.0747	+0.0058	+0.3715	+0.3846
III		−0.0063	+0.1089	+0.3289 (−1)	+0.0240 (0)	−0.0069	−0.3454
		0	0	0	+0.2331	+0.7219	+0.3644
	$-\frac{I_4}{I_1}$	−0.1429	0	0	−0.1751	−0.6261	−0.4832
	$-\frac{II_4}{II_2}$	+0.0004	−0.008	0	−0.0004	−0.0288	−0.0298
	$-\frac{IV_4}{IV_3}$	+0.0005	−0.0079	+0.0730	−0.0018	+0.0005	+0.0252
IV		−0.1420	−0.0169	+0.0730	+0.0558 (−1)	+0.0675	−0.1234
		0	0	0	0	+4.4210	+3.2387
	$-\frac{I_5}{I_1}$	−0.5109	0	0	0	−2.2379	−1.7271
	$-\frac{II_5}{II_2}$	+0.0266	−0.5411	0	0	−1.8460	−1.9083
	$-\frac{III_5}{III_3}$	−0.0001	+0.0023	−0.0210	0	−0.0001	−0.0072
	$-\frac{IV_5}{IV_4}$	+0.1718	+0.0198	−0.0883	+1.2097	−0.0817	+0.1493
V		$-x$ −0.3126	$-y$ −0.5190	$-z$ −0.1093	$-t$ +1.2097	$[vv]$ +0.2553	$-[vv]$ −[0.2546]

	$-\frac{I_7}{I_1}$	−0.1166	0	0	0	
	$-\frac{II_7}{II_2}$	−0.0004	+0.0078	0	0	
	$-\frac{III_7}{III_3}$	−0.0001	+0.0021	−0.0193	0	
	$-\frac{IV_7}{IV_4}$	−0.3616	−0.0417	+0.1857	−2.5457	檢 核
I′		$-[aa]$ −0.4787	$-[\alpha\beta]$ −0.0318	$-[\alpha\gamma]$ +0.1660	$-[\alpha\delta]$ −2.5457	$+x=+0.3124$
	$-\frac{II_8}{II_2}$		−0.1586	0	0	
	$-\frac{III_8}{III_3}$		−0.0360	+0.3310	0	
	$-\frac{IV_8}{IV_4}$		−0.0048	+0.0214	−0.2936	
II′			$-[\beta\beta]$ −0.1994	$-[\beta\gamma]$ −0.3524	$-[\beta\delta]$ −0.2936	$+y=+0.5188$
	$-\frac{III_9}{III_3}$			−3.0404	0	
	$-\frac{IV_9}{IV_4}$			−0.0954	+1.3077	
III′				$-[\gamma\gamma]$ −3.1358	$-[\gamma\delta]$ +1.3077	$+z=+0.1104$
IV′	$-\frac{IV_{10}}{IV_4}$				$-[\delta\delta]$ −17.9211	$+t=-1.2112$

第十三節 未知数函数之中誤差

設有未知数之函数 $F(x, y, z, \cdots)$ 系由平差后所得之 $x, y, z, \cdots$ 等值計算之，則其中誤差应为若干，茲將申論之。$x, y, z\cdots$ 等既均由同一組之观測値求得，自非互相独立，故不能直接应用

$$m_F^2=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 m_x^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 m_y^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 m_z^2+\cdots$$

公式以計算 F 之中誤差，而必須依第十節公式(84)

$$\left.\begin{aligned}x&=\alpha_1 l'_1+\alpha_2 l'_2+\cdots+\alpha_n l'_n;\\ y&=\beta_1 l'_1+\beta_2 l'_2+\cdots+\beta_n l'_n;\\ z&=\gamma_1 l'_1+\gamma_2 l'_2+\cdots+\gamma_n l'_n.\end{aligned}\right\}\tag{131}$$

化 F 为 $l'_1, l'_2,\cdots l'_n$ 之函数，然后計算中誤差。因 $l'_1, l'_2,\cdots l'_n$ 为互不相关，且为等权之观測值，故可应用

$$m_F^2=\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial l'_1}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial l'_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial F}{\partial l'_n}\right)^2\right\}m^2\tag{132}$$

公式以求 F 之中誤差 m_F，式中之 m 为权單位之中誤差。

$$\text{今命}\qquad \frac{\partial F}{\partial x}=F_1,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=F_2,\qquad \frac{\partial F}{\partial z}=F_3,\tag{133}$$

則

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial l'_1}&=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial l'_1}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial l'_1}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial l'_1}=F_1\alpha_1+F_2\beta_1+F_3\gamma_1;\\ \frac{\partial F}{dl'_2}&=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{dl'_2}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dl'_2}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dl'_2}=F_1\alpha_2+F_2\beta_2+F_3\gamma_2;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\ \frac{\partial F}{dl'_n}&=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{dl'_n}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dl'_n}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial l'_n}=F_1\alpha_n+F_2\beta_n+F_3\gamma_n.\end{aligned}\right\}\tag{134}$$

將式 (133), (134) 代入 (132) 內，卽得

$$\begin{aligned}m_F^2=\{&(F_1\alpha_1+F_2\beta_1+F_3\gamma_1)^2+(F_1\alpha_2+F_2\beta_2+F_3\gamma_2)^2+\cdots\\ &+(F_1\alpha_n+F_2\beta_n+F_3\gamma_n)^2\}m^2;\end{aligned}\tag{135}$$

將上式展开，依 F_1, $F_2\cdots$ 并項，乃得：

$$m_F^2=\left\{\begin{matrix}[\alpha\alpha]F_1^2+2[\alpha\beta]F_1F_2+2[\alpha\gamma]F_1F_3\\ +\ [\beta\beta]F_2^2\quad+2[\beta\gamma]F_2F_3\\ +\ [\gamma\gamma]F_3^2\end{matrix}\right\}m^2;\tag{136}$$

根据第十節結果，亦可書作

$$m_F^2=\left\{\begin{matrix}F_1^2Q_{1\cdot1}+2F_1F_2Q_{1\cdot2}+2F_1F_3Q_{1\cdot3}\\ +\quad F_2^2Q_{2\cdot2}+2F_2F_3Q_{2\cdot3}\\ +\quad F_3^2Q_{3\cdot3}\end{matrix}\right\}m^2;\tag{137}$$

上式已可应用以計算 m_F，但須先求出所有 Q 之值。事实上尙可化成另

一形式，不需 Q 之值，亦可逕行計算 m_F。

設命

$$\left.\begin{aligned}L_1&=Q_{1\cdot1}F_1+Q_{1\cdot2}F_2+Q_{1\cdot3}F_3;\\L_2&=Q_{1\cdot2}F_1+Q_{2\cdot2}F_2+Q_{2\cdot3}F_3;\\L_3&=Q_{1\cdot3}F_1+Q_{2\cdot3}F_2+Q_{3\cdot3}F_3.\end{aligned}\right\}\qquad(138)$$

則(137)可化簡为

$$m_F^2=(F_1L_1+F_2L_2+F_3L_3)m^2.\qquad(139)$$

若將(138)与第十一節之(117)相比，可見两組方程式之系数完全相等，而 L_1, L_2, L_3 相当于 x, y, z; F_1, F_2, F_3 則相当于 $[al]$, $[bl]$, $[cl]$，故 $(F_1L_1+F_2L_2+F_3L_3)$ 相当于

$$[al]x+[bl]y+[cl]z.$$

此式可按照第六節(54)至(59)之演化步驟而約化之，該处

$$[al]x+[bl]y+[cl]z=\frac{[al]^2}{[aa]}+\frac{[bl\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}+\frac{[cl\cdot2]^2}{[cc\cdot2]},\qquad(140)$$

依同理，(139)亦可約化为

$$m_F^2=\left(\frac{F_1^2}{[aa]}+\frac{[F_2\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}+\frac{[F_3\cdot2]^2}{[cc\cdot2]}\right)m^2,\qquad(141)$$

$[F_2\cdot1]$之意义与$[bl\cdot1]$相当，即

$$[F_2\cdot1]=F_2-\frac{[ab]}{[aa]}F_1;\qquad(142)$$

同理

$$\begin{aligned}[F_3\cdot2]&=[F_3\cdot1]-\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}[F_2\cdot1]=\\&=F_3-\frac{[ac]}{[aa]}F_1-\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}[F_2\cdot1].\end{aligned}\qquad(143)$$

上法系按照高斯約化法將 F_2, F_3 之值順次約化，由之得 $[F_2\cdot1]$, $[F_3\cdot2]$ 等值，故可附于法方程式之后，与解算法方程式同时求定之。

不等权观測时，上列之(141)將变成下式，其導出尽如前法，不再贅述。

$$m_F^2=\left(\frac{F_1^2}{[paa]}+\frac{[F_2\cdot1]^2}{[pbb\cdot1]}+\frac{[F_3\cdot2]^2}{[pcc\cdot2]}\right)m^2.\qquad(144)$$

关于求未知数函数之中誤差計算法，玆举例以說明之:

例：水准測量达到之水准点为 A, B, C, D 及 E 五点，玆平差其結果，并定由 A 至 B, C, D, E 各点高程差之中誤差，以及由 C 至 E 間高程差之中誤差。

观測結果:

$(BA)L_1 = 189.404$ 公尺，　两点間之距离　3.1 公里；

$(CA)L_2 = 736.977$ 公尺，　两点間之距离　9.3 公里；

$(EA)L_3 = 376.607$ 公尺，　两点間之距离　59.7 公里；

$(CB)L_4 = 547.576$ 公尺，　两点間之距离　6.2 公里；

$(DB)L_5 = 273.528$ 公尺，　两点間之距离　16.1 公里；

$(EB)L_6 = 187.274$ 公尺，　两点間之距离　35.1 公里；

$(CD)L_7 = 274.082$ 公尺，　两点間之距离　12.1 公里；

$(DE)L_8 = 86.261$ 公尺，　两点間之距离　9.3 公里。

选最低一点 A 为参考面經过之点，而以 x, y, z 及 t 表示 B, C, D 及 E 各点超出于参考面之高度，于是可列改正数方程式如下:

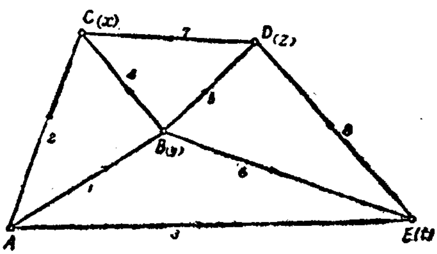

圖 4.5

$$\left.\begin{array}{l}
L_1 + v_1 = \qquad + y \\
L_2 + v_2 = + x \\
L_3 + v_3 = \qquad\qquad\qquad + t \\
L_4 + v_4 = + x - y \\
L_5 + v_5 = \qquad - y + z \\
L_6 + v_6 = \qquad - y \qquad + t \\
L_7 + v_7 = + x \qquad - z \\
L_8 + v_8 = \qquad\qquad + z - t
\end{array}\right\} \qquad (a)$$

水准測量之誤差傳播，多假定中誤差与距离 (s) 之平方根成比例．故吾人如命一公里之中誤差为 m 而其权为 1，則 $\frac{1}{p}=s$，是以距离 s_i 卽为权之倒数 $\frac{1}{p_i}$。

权單位之距离，普通均为一公里。如欲避免計算时之小数，可乘权以某一整数。若令該数为 1000，則

$$权=\frac{1000}{距离(公里)},\tag{b}$$

是卽表示权單位之距离亦为 1000 公里矣。由是求得之权如下：

$$P_1=323,\ P_2=108,\ P_3=17,\ P_4=161,\ P_5=62,\ P_6=28,$$
$$P_7=83,\ P_8=108.$$

复設未知数 x, y, z 及 t 等于

$$\left.\begin{aligned} x&=736.977+\xi,\\ y&=189.404+\eta,\\ z&=462.932+\zeta,\\ t&=376.607+\tau. \end{aligned}\right\}\tag{c}$$

將(c)代入(a)內幷將 $\xi, \eta, \zeta, \tau, v_1, v_2\cdots$ 等値用公厘为單位，得改正数方程式：

						权	s
$v_1=$	0		$+\eta$			323	1
$v_2=$	0	$+\xi$				108	1
$v_3=$	0				$+\tau$	17	1
$v_4=$	-3	$+\xi$	$-\eta$			161	0
$v_5=$	0		$-\eta$	$+\zeta$		62	0
$v_6=$	-71		$-\eta$		$+\tau$	28	0
$v_7=$	-37	$+\xi$		$-\zeta$		83	0
$v_8=$	$+64$			$+\zeta$	$-\tau$	108	0

法方程式:

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	$F_{(x-t)}$
$352\xi-161\eta-83\zeta\qquad-3554=0$	1	0	0	0	1
$-161\xi+574\eta-62\zeta-28\tau+2471=0$	0	1	0	0	0
$-83\xi-62\eta+253\zeta-108\tau+9983=0$	0	0	1	0	0
$-28\eta-108\zeta+153\tau-8900=0$	0	0	0	1	−1
$+108\xi+323\eta+0\zeta+17\tau+0=0$	1	1	1	1	0

上式内 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 各列乃为計算未知数 x, y, z, t 之中誤差，$F_{(x-t)}$ 一列则为計算 CE 两点高程差之中誤差。盖 CE 两点間之高程差等于 $x-t$, 为未知数之函数，在此函数内 x 之系数为 $+1$, 而 t 之系数则等于 -1, 故分别列于上式之末列。第一次約化上式以后，得

	Q_1	Q_2	$F_{(x-t)}$
$500\eta-100\zeta-28\tau+845=0$	+0.4574	1	+0.4574
$-100\eta+233\zeta-108\tau+9145=0$	+0.2358	0	+0.2358
$-28\eta-108\zeta+153\tau-8900=0$	+0	0	−1.0000
$+372\eta+25\zeta+17\tau+1090=0$	+0.6932	1	−0.3068

第二次約化后之結果:

	Q_1	Q_2	Q_3	$F_{(x-t)}$
$213\zeta-114\tau+9314=0$	+0.3273	+0.2001	+1	+0.3273
$-114\zeta+151\tau-8853=0$	+0.0256	+0.0560	0	−0.9744
$+99\zeta+37\tau-461=0$	+0.3529	+0.2561	+1	−0.6471

最后約化之結果为:

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	$F_{(x-t)}$
$90\tau-3869=0$	+0.2007	+0.1630	+0.5352	1	−0.7992
$90\tau-3869=0$	+0.2008	+0.1632	+0.5352	1	−0.7992

$$\therefore\quad \xi=+3.659,\qquad \eta=-3.424,$$

$$\zeta=-20.71,\qquad \tau=+42.99;$$

$$Q_{1\cdot1}=+0.004209,\qquad Q_{2\cdot2}=+0.002483,$$

$$Q_{3\cdot3}=+0.007878,\qquad Q_{4\cdot4}=+0.01111,$$

$$Q_{1\cdot2}=+0.001515,\quad Q_{2\cdot3}=+0.001908,\quad Q_{3\cdot4}=+0.005947,$$
$$Q_{1\cdot3}=+0.002727,\quad Q_{2\cdot4}=+0.001811,\quad Q_{1\cdot4}=+0.002230.$$

根据不定系数作計算之檢核，完全符合。然后將未知数引入改正数方程式而求改正数：

$$v_1=-3.4,\ v_2=+3.6,\ v_3=+43.0,\ v_4=+4.1,\ v_5=-17.3,$$
$$v_6=-24.6,\ v_7=-12.6,\ v_8=+0.3,\ [pvv]=87960.23.$$

另以別式計算 $[pvv]$，以作檢核：

$$[pvv]=[pll]-[pal]\xi-[pbl]\eta-[pcl]\zeta-[pdl]\tau=$$
$$=698592-12964.99-8460.74-206747.93-382611.00=87807.34,$$

相差 52.9，此乃由于数字过巨所致，非計算之錯誤，故卽可由之求每 1000 公里之中誤差：

$$m=\pm\sqrt{\frac{87960.23}{8-4}}=\pm148.3\text{ 公厘};$$

每一公里之中誤差为：

$$m(1\text{ 公里})=\frac{148.3}{\sqrt{1000}}=\pm4.7\text{ 公厘};$$

各未知数之中誤差：

$$m_{(x)}=\pm m\sqrt{Q_{1\cdot1}}=\pm\ 9.6\text{ 公厘},$$
$$m_{(y)}=\pm m\sqrt{Q_{2\cdot2}}=\pm\ 7.4\text{ 公厘},$$
$$m_{(z)}=\pm m\sqrt{Q_{3\cdot3}}=\pm13.1\text{ 公厘},$$
$$m_{(t)}=\pm m\sqrt{Q_{4\cdot4}}=\pm15.6\text{ 公厘};$$

故 $x=736.931$ 公尺 ±9.6 公厘，$z=462.911$ 公尺 ±13.1 公厘，
$y=189.401$ 公尺 ±7.4 公厘，$t=376.650$ 公尺 ±15.6 公厘。

至于 CE 兩点間高程差之中誤差当从下式求之：

$$m_{(F)}^2=\left(\frac{F_1'^2}{[paa]}+\frac{[F_2\cdot1]^2}{[pbb\cdot1]}+\frac{[F_3\cdot2]^2}{[pcc\cdot2]}+\frac{[F_4\cdot3]^2}{[pdd\cdot3]}\right)m^2.$$

$$m_{(F)}^2=(148.3)^2\left\{\frac{1}{352}+\frac{(0.4574)^2}{500}+\frac{(0.3273)^2}{213}+\frac{(0.7992)^2}{90}\right\}$$
$$=21990(0.002841+0.000418+0.000515+0.007099),$$

$m_{(F)} = \pm 15.4$ 公厘.

最后之檢核，亦得滿意之結果：

$$
\begin{aligned}
L_1 + v_1 &= y &&= 189.401, \\
L_2 + v_2 &= x &&= 736.981, \\
L_3 + v_3 &= t &&= 376.650, \\
L_4 + v_4 &= x - y &&= 547.580.
\end{aligned}
$$

第十四節 按最小二乘法所得未知数值之中誤差为最小

以前均根据最小二乘法之原理，命改正数之平方和为最小，而求未知数值。今試証明，由此所得未知数之值，其中誤差亦为最小。易言之，卽由此所得之未知数值系屬最为可靠，亦可云最为精准。此說可以反証法証明之，是卽以未知数之中誤差应为最小之条件而行平差，其結果应与最小二乘法之結果殊途同归。

設以 $X, Y, Z \cdots$ 为未知数之眞值，$l_1, l_2, \cdots l_n$ 为間接之观測值，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ 为其眞誤差，則

$$
\left.
\begin{aligned}
l_1 + \varepsilon_1 &= a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + \cdots; \\
l_2 + \varepsilon_2 &= a_2 X + b_2 Y + c_2 Z + \cdots; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\
l_n + \varepsilon_n &= a_n X + b_n Y + c_n Z + \cdots.
\end{aligned}
\right\}
\tag{145}
$$

暫以不定系数 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 按次乘(145)之各式而相加，乃得

$$
[\alpha l] + [\alpha \varepsilon] = [a\alpha] X + [b\alpha] Y + [c\alpha] Z + \cdots, \tag{146}
$$

α 共有 n 个，为任意之数值，今設加以下列 u 个条件(u 为未知数之数目，小于 n)：

$$
[a\alpha] = 1, \quad [b\alpha] = 0, \quad [c\alpha] = 0, \quad \cdots \tag{147}
$$

則(146)卽变为

$$
X = [\alpha l] + [\alpha \varepsilon]. \tag{148}
$$

上式(148)右方之兩項，第一項为 X 之一任意假定值，第二項則为此假定值之眞誤差。命此假定值为 x，則

$$x=[\alpha l]=\alpha_1 l_1+\alpha_2 l_2+\cdots+\alpha_n l_n. \tag{149}$$

此时 α 虽受(147) u 个条件之限制，但并未完全确定，予 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 以不同之値，可得不同之 x 値，每次不同之 x 値之中誤差均可用下列公式

$$m_x=m\sqrt{[\alpha\alpha]} \tag{150}$$

求得之。欲使 x 之中誤差为最小，$[\alpha\alpha]$ 必須亦为最小。此处尙須注意，除 $[\alpha\alpha]$ 应为最小之条件外，同时必須满足(147)之 u 个条件，故須以繫数(在数学中名为拉格讓乘数)乘(147)之各式，附于 $[\alpha\alpha]$ 之后，而整个部分微分之，以定各 α 之値，卽將

$$[\alpha\alpha]-2k_1([a\alpha]-1)-2k_2[b\alpha]-2k_3[c\alpha]-\cdots,$$

按照 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 部分微分之，得

$$\left.\begin{aligned} &2\alpha_1-2k_1a_1-2k_2b_1-2k_3c_1-\cdots=0;\\ &2\alpha_2-2k_1a_2-2k_2b_2-2k_3c_2-\cdots=0;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\ &2\alpha_n-2k_1a_n-2k_2b_n-2k_3c_n-\cdots=0. \end{aligned}\right\}$$

或

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1=a_1k_1+b_1k_2+c_1k_3+\cdots;\\ &\alpha_2=a_2k_1+b_2k_2+c_2k_3+\cdots;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\ &\alpha_n=a_nk_1+b_nk_2+c_nk_3+\cdots. \end{aligned}\right\} \tag{151}$$

k 之数目共为 u 个，其値甚易求得，將(151)代入式(147)內，卽得

$$\left.\begin{aligned} &[aa]k_1+[ab]k_2+[ac]k_3+\cdots=1;\\ &[ab]k_1+[bb]k_2+[bc]k_3+\cdots=0;\\ &[ac]k_1+[bc]k_2+[cc]k_3+\cdots=0;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{aligned}\right\}$$

試將此式与第十節之(89)比較，卽知 $k_1, k_2, k_3, \cdots$ 等相当于該处之权系数 $Q_{1\cdot1}, Q_{1\cdot2}, Q_{1\cdot3}, \cdots$ 故(151)可書成:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1=a_1Q_{1\cdot1}+b_1Q_{1\cdot2}+c_1Q_{1\cdot3}+\cdots;\\ &\alpha_2=a_2Q_{1\cdot1}+b_2Q_{1\cdot2}+c_2Q_{1\cdot3}+\cdots;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\ &\alpha_n=a_nQ_{1\cdot1}+b_nQ_{1\cdot2}+c_nQ_{1\cdot3}+\cdots. \end{aligned}\right\} \tag{152}$$

由此所定之 α 值，与最小二乘法平差所得之 α 值尽屬相同，故按照 x 之中誤差应为最小之条件所得之 x 值，与由最小二乘法求得之 x 值自將相等。此种情形，亦可于未知数 y 証明之。至此可以証明：最小二乘法平差所得未知数之值，其中誤差为最小。

第十五節　法方程式之逐步接近解算法

法方程式数目較多时，如用高斯約化法解算，工作至为繁巨，故有时不如采用逐步接近法較为簡捷。但逐步接近法不能同时計算权系数，如須計算未知数及其函数之权，应用此法反不如按高斯約化法可以同时求出，是其缺点。

逐步接近法之主要根据，系假定法方程式之平方項系数 $[aa]$，$[bb]\cdots$ 等一般均較非平方項系数为大。于是在下列法方程式中

$$\left.\begin{aligned}[aa]x+[ab]y+[ac]z-[al]=0;\\ [ab]x+[bb]y+[bc]z-[bl]=0;\\ [ac]x+[bc]y+[cc]z-[cl]=0.\end{aligned}\right\}\tag{153}$$

可命

$$x_1=\frac{[al]}{[aa]},\qquad y_1=\frac{[bl]}{[bb]},\qquad z_1=\frac{[cl]}{[cc]}\tag{154}$$

为 x, y, z 之第一次近似值。將此代入(156)后，各式之右方不能適得零，玆設为 r'_1, r'_2, r'_3，則第二次即可命

$$x_2=\frac{r'_1}{[aa]},\qquad y_2=\frac{r'_2}{[bb]},\qquad z_2=\frac{r'_3}{[cc]}\tag{155}$$

为近似值。將 $x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2$ 代入 (153)，又得 r''_1, r''_2, r''_3 諸值。r''_i 之值应均較 r' 为小，始有逐步接近之可能。繼續仍按上法以 r''_1, r''_2, r''_3 計算第三次近似值，迄 r 值趋近于零为止。于是未知数之值即为

$$\left.\begin{aligned}x=x_1+x_2+\cdots;\\ y=y_1+y_2+\cdots;\\ z=z_1+z_2+\cdots.\end{aligned}\right\}\tag{156}$$

上法为雅科俾(Jacobi)所創，高斯改良此法，使之更为簡捷，每次僅將 r 最大一項之未知数改善其近似值，如此計算可較簡易。除此之外，更利用一輔助未知数，使逐步接近之收斂較速。茲申論之如下：

命 $$x=\xi-\sigma,\quad y=\eta-\sigma,\quad z=\zeta-\sigma,\quad \cdots \tag{157}$$

σ 为輔助未知数，于是改正数方程式遂成下列形式：

$$v_i=-l_i+a_i\xi+b_i\eta+c_i\zeta+\cdots-s_i\sigma;$$
$$s_i=a_i+b_i+c_i+\cdots.$$

由此列成之法方程式为：

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\xi+[ab]\eta+[ac]\zeta+\cdots-[as]\sigma-[al]&=0;\\
[ab]\xi+[bb]\eta+[bc]\zeta+\cdots-[bs]\sigma-[bl]&=0;\\
[ac]\xi+[bc]\eta+[cc]\zeta+\cdots-[cs]\sigma-[cl]&=0;\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots;\\
-[as]\xi-[bs]\eta-[cs]\zeta-\cdots+[ss]\sigma+[sl]&=0.
\end{aligned}\right\} \tag{158}$$

法方程式(158)之和，各項均为零，用高斯約化法自不能解出。因 σ 可取任意一值，故 ξ,η,ζ 均將隨之而变[参考公式(157)]。但用逐步接近法时，ξ,η,ζ,σ 等值虽視計算程序而異，而由此求得之 x,y,z 等值則均正确。茲举例說明之如下：

例：用逐步接近法解算第十二節例一之法方程式：

$$\left.\begin{aligned}
982x+162y-139z-\ \ 98.2&=0;\\
162x+785y-\ \ 69z+168.5&=0;\\
-139x-\ \ 69y+851z+241.2&=0.
\end{aligned}\right\}$$

命 $$x=\xi-\sigma,\qquad y=\eta-\sigma,\qquad z=\zeta-\sigma;$$

按式(158)列成新法方程式：

$$\left.\begin{aligned}
982\xi+162\eta-139\zeta-1005\sigma-\ \ 98.2&=0;\\
162\xi+785\eta-\ \ 69\zeta-\ \ 878\sigma+168.5&=0;\\
-139\xi-\ \ 69\eta+851\zeta-\ \ 643\sigma+241.2&=0;\\
-1005\xi-878\eta-643\zeta+2526\sigma-311.5&=0.
\end{aligned}\right\}$$

逐步接近之計算列表於下:

常　数　項	$\zeta_1=-0.283$	余　数	$\eta_1=-0.240$	余　数
-98.2	$+39.3$	-58.9	-38.8	-97.7
$+168.5$	$+19.5$	$+188.0$	-188.5	-0.5
$+241.2$	-240.8	$+0.4$	$+16.6$	$+17.0$
-311.5	$+182.0$	-129.5	$+210.7$	$+81.2$
0	0	0	0	0
	$\xi_1=+0.100$	余　数	$\sigma_1=+0.006$	余　数
	$+98.2$	$+0.5$	-6.0	-5.5
	$+16.2$	$+15.7$	-5.3	$+10.4$
	-13.9	$+3.1$	-3.9	-0.8
	-100.5	-19.3	$+15.2$	-4.1
	0	0	0	0
	$\eta_2=-0.013$	余　数	$\xi_2=+0.008$	余　数
	-2.1	-7.6	$+7.8$	$+0.2$
	-10.2	$+0.2$	$+1.3$	$+1.5$
	$+0.9$	$+0.1$	-1.1	-1.0
	$+11.4$	$+7.3$	-8.0	-0.7
	0	0	0	0
	$\eta_3=-0.002$	余　数	$\zeta_2=+0.001$	余　数
	-0.3	-0.1	-0.1	-0.2
	-1.6	-0.1	-0.1	-0.2
	$+0.2$	-0.8	$+0.8$	0.0
	$+1.7$	$+1.0$	-0.6	$+0.4$
	0	0	0	0

由此得:

$$\xi=\xi_1+\xi_2 \qquad\qquad =+0.108, \quad x=\xi-\sigma=+0.102,$$
$$\eta=\eta_1+\eta_2+\eta_3=-0.255, \quad y=\eta-\sigma=-0.261,$$
$$\zeta=\zeta_1+\zeta_2 \qquad\qquad =-0.282, \quad z=\zeta-\sigma=-0.288.$$
$$\sigma=\sigma_1 \qquad\qquad =+0.006;$$

此結果与第十二節按高斯約化法所得者,除 y 差至最后一單位外,其余

完全相同。

第十六節 約化之改正数方程式

以上各節，均系概論一般間接观測之平差及法方程式之解算。若干平差問題具有特殊性質，欲謀法方程式解算之簡捷，則以用特殊方法为佳，以下数節將分別討論之。

前文已曾論及，未知数可用約化法方程式之方法逐步消除之，茲試更証明未知数亦可逕由改正数方程式中消除之。設有改正数方程式

$$v_i = a_i x + b_i y + c_i z - l_i, \tag{159}$$

由此組成之第一法方程式为：

$$[aa]x + [ab]y + [ac]z - [al] = 0 \tag{160}$$

或

$$x = -\frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z + \frac{[al]}{[aa]}. \tag{161}$$

將(161)代入(159)內，將 x 消去，即得

$$v_i = \left(b_i - \frac{[ab]}{[aa]}a_i\right)y + \left(c_i - \frac{[ac]}{[aa]}a_i\right)z - \left(l_i - \frac{[al]}{[aa]}a_i\right), \tag{162}$$

此式名为約化之改正数方程式，亦可簡書为：

$$v_i = b'_i y + c'_i z - l'_i, \tag{163}$$

由此所得之法方程式为：

$$\left.\begin{aligned} &[b'b']y + [b'c']z - [b'l'] = 0; \\ &[b'c']y + [c'c']z - [c'l'] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{164}$$

式(164)实即第一次約化之法方程式：

$$\left.\begin{aligned} &[bb\cdot1]y + [bc\cdot1]z - [bl\cdot1] = 0; \\ &[bc\cdot1]y + [cc\cdot1]z - [cl\cdot1] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{165}$$

蓋

$$b'_i = b_i - \frac{[ab]}{[aa]}a_i,$$

$$b'_i b'_i = b_i b_i - 2a_i b_i \frac{[ab]}{[ab]} + \frac{[ab]^2}{[aa]^2}a_i a_i,$$

故

$$[b'b'] = [bb] - 2[ab]\frac{[ab]}{[aa]} + \frac{[ab]^2}{[aa]^2}[aa],$$

或
$$[b'b'] = [bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] = [bb\cdot 1]. \tag{166}$$

同理亦可証明 $[b'c'] = [bc\cdot 1]$，$[b'l'] = [bl\cdot 1]$ 等。故由約化之改正数方程式(162)或(163)所列成之法方程式，与消除未知数 x 后之第一次約化之法方程式，完全相同。由(164)所求得之未知数 y，z 之值，亦必与由原法方程式中所求得者相同。

設繼續消除(163)內之 y 項，亦可由(165)中得
$$y = -\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}z + \frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}, \tag{167}$$
代入(164)內，即得再度約化之改正数之法方程式
$$v_i = \left(c'_i - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}b'_i\right)z - \left(l'_i - \frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}b'_i\right), \tag{168}$$
或簡寫为：
$$v_i = c''_i z - l''_i. \tag{169}$$
由此可得法方程式
$$[c''c'']z - [c''l''] = 0. \tag{170}$$

根据(166)之同一道理，此式即为第二次約化之法方程式
$$[cc\cdot 2]z - [cl\cdot 2] = 0. \tag{171}$$
設有更多之未知数，仍可应用同理于改正数方程式中約化之。

由以上之理論，已可証明：約化工作無論于改正数方程式中或法方程式中施行，其結果初無二致。惟就一般而言，于改正数方程式內实行約化，計算工作反較复雜，盖必須將每个改正数方程式加以約化，而于法方程式中約化，則僅約化較少数目之法方程式；且被消除之未知数 x，不能于(164)內求得，仍須利用(161)，故普通殊無采用約化改正数方程式之必要。但如某一未知数在各改正数方程式內之系数極为簡單，如尽为 $+1$ 或 -1，同时該未知数僅为輔助性質，結果中并不需知其平差值，則此时可应用約化改正数方程式之方法，使法方程式之数目自始即少去一个。

設有改正数方程式
$$v_i = -x + b_i y + c_i z - l_i, \tag{172}$$
即所有改正数方程式中 x 項之系数均为 -1，而 x 之平差值亦不需要，

因 $[aa]=+n,\ [ab]=-[b],\ [ac]=-[c],\ [al]=-[l],$

$$b'_i=b_i-\frac{[b]}{n},\quad c'_i=c_i-\frac{[c]}{n},\quad l'_i=l_i-\frac{[l]}{n},\tag{173}$$

故約化之改正数方程式系数b'_i, c'_i, l'_i等之計算甚屬簡易。計算之檢核为

$$[b']=0,\quad [c']=0,\quad [l']=0.\tag{174}$$

由此得約化之改正数方程式：

$$v_i=b'_iy+c'_iz-l'_i.\tag{175}$$

根据(175)可列出法方程式：

$$\left[\left(b-\frac{[b]}{n}\right)^2\right]y+\left[\left(b-\frac{[b]}{n}\right)\left(c-\frac{[c]}{n}\right)\right]z-\left[\left(b-\frac{[b]}{n}\right)\left(l-\frac{[l]}{n}\right)\right]=0,$$
$$\left[\left(b-\frac{[b]}{n}\right)\left(c-\frac{[c]}{n}\right)\right]y+\left[\left(c-\frac{[c]}{n}\right)^2\right]z-\left[\left(c-\frac{[c]}{n}\right)\left(l-\frac{[l]}{n}\right)\right]=0,\tag{176}$$

由而解算 y, z 之值。

此处須注意者，卽計算中誤差时，$[vv]$未尝变易，約化后之改正数方程式虽少一未知数，然在計算 m 时，仍須以原有之未知数数目为准則。

第十七節 分部約化法

上節所論，系于一組观測中，將改正数方程式先消去一未知数，再列法方程式。本節拟討論者，若有二組或多組观測，除共同含有一部未知数外，每組各有一特殊未知数时，亦可利用約化改正数方程式之方法，先將各組之特殊未知数分别消去，然后以約化后之改正数方程式合併列成一組法方程式，使僅含有共同未知数。如此則所得之法方程式，应与由未經約化之改正数方程式所列成之法方程式，先約化各組特殊未知数后所得之約化法方程式相同；但有时后法之計算工作，不如逕于改正数方程式中消除特殊未知数，然后再列法方程式之簡便。兹將此种关系証明于下，暫以二組观測各含一个特殊未知数为例：

第一組改正数方程式：

$$\left.\begin{aligned}v_1&=c_1z+a_1x+b_1y-l_1;\\v_2&=c_2z+a_2x+b_2y-l_2;\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\v_n&=c_nz+a_nx+b_ny-l_n.\end{aligned}\right\}\text{共 } n \text{ 个}\tag{177}$$

第二組改正数方程式：

$$\left.\begin{aligned} v_{n+1} &= d_{n+1}t + a_{n+1}x + b_{n+1}y - l_{n+1}; \\ v_{n+2} &= d_{n+2}t + a_{n+2}x + b_{n+2}y - l_{n+2}; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\ v_{n+q} &= d_{n+q}t + a_{n+q}x + b_{n+q}y - l_{n+q}. \end{aligned}\right\} \text{共 } q \text{ 个} \tag{178}$$

以上兩組改正数方程式內，x, y 为共同未知数，z 为第一組特有之未知数，t 为第二組特有之未知数。如自(177)內消去未知数 z，自(178)內消去未知数 t，卽得下列兩組約化改正数方程式：

第一組約化改正数方程式：

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1'x + b_1'y - l_1', \\ v_2 &= a_2'x + b_2'y - l_2', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ v_n &= a_n'x + b_n'y - l_n'. \end{aligned}\right\} \tag{177)*}$$

第二組約化改正数方程式：

$$\left.\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1}'x + b_{n+1}'y - l_{n+1}', \\ v_{n+2} &= a_{n+2}'x + b_{n+2}'y - l_{n+2}', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ v_{n+q} &= a_{n+q}'x + b_{n+q}'y - l_{n+q}'. \end{aligned}\right\} \tag{178)*}$$

式中 a', b', l' 之意义，与前節所用者相同。

由約化改正数方程式(177)*及(178)*联合而列成之法方程式如下：

$$\left.\begin{aligned} \underline{[a'a']_{n+q}}x + [a'b']_{n+q}y - [a'l']_{n+q} &= 0, \\ + \underline{[b'b']_{n+q}}y - [b'l']_{n+q} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{179}$$

式中$[a'a']_{n+q}$等之意义如下：

$$\begin{aligned} [a'a']_{n+q} &= a_1'a_1' + a_2'a_2' + \cdots + a_n'a_n' + a_{n+1}'a_{n+1}' + \cdots + a_{n+q}'a_{n+q}' = \\ &= [a'a']_n + [a'a']_q. \end{aligned}$$

余类推。

兹再証明，由原改正数列成之法方程式：

$$\left.\begin{aligned} \underline{[cc]_n}z \qquad\qquad + [ca]_n x \; + [cb]_n y \; - [cl]_n \; &= 0, \\ + \underline{[dd]_q}t + [da]_q x \; + [db]_q y \; - [dl]_q \; &= 0, \\ + \underline{[aa]_{n+q}}x + [ab]_{n+q}y - [al]_{n+q} &= 0, \\ \underline{[bb]_{n+q}}y - [bl]_{n+q} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{180}$$

約化兩次，消去未知数 z 及 t 后，則結果仍应得(179)。

第一次約化法方程式：

$$\left.\begin{aligned}[dd]_q t+[da]_q x+[db]_q y \quad -[dl]_q \quad &=0,\\ [aa\cdot1]_{n+q}x+[ab\cdot1]_{n+q}y-[al\cdot1]_{n+q}&=0,\\ [bb\cdot1]_{n+q}y-[bl\cdot1]_{n+q}&=0.\end{aligned}\right\} \tag{181}$$

其中

$$[aa\cdot1]_{n+q}=[aa]_{n+q}-\frac{[ca]_n^2}{[cc]_n}=[aa]_n+[aa]_q-\frac{[ca]_n^2}{[cc]_n}=[aa\cdot1]_n+[aa]_q;$$

同理 $$[ab\cdot1]_{n+q}=[ab\cdot1]_n+[ab]_q,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

第二次約化法方程式：

$$\left.\begin{aligned}[aa\cdot2]_{n+q}x+[ab\cdot2]_{n+q}y-[al\cdot2]_{n+q}&=0,\\ [bb\cdot2]_{n+q}y-[bl\cdot2]_{n+q}&=0.\end{aligned}\right\} \tag{182}$$

$$\begin{aligned}[aa\cdot2]_{n+q}&=[aa\cdot1]_{n+q}-\frac{[da]_q^2}{[dd]_q}=[aa\cdot1]_n+[aa]_q-\frac{[da]_q^2}{[dd]_q}\\ &=[aa\cdot1]_n+[aa\cdot1]_q.\end{aligned}$$

由上節已知：

$$[aa\cdot1]_n=[a'a']_n, \qquad [aa\cdot1]_q=[a'a']_q,$$

故 $$[aa\cdot2]_{n+q}=[a'a']_n+[a'a']_q=[a'a']_{n+q};$$

同理 $$[ab\cdot2]_{n+q}=[a'b']_{n+q}, \qquad [al\cdot2]_{n+q}=[a'l']_{n+q},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

故(179)与(182)完全相同。易言之，分部約化与合併約化之結果尽屬相同，此法之主要应用限于方向观測，以后再行詳論之。

第十八節 史賴伯約化法

此法系德國史賴伯所創，用于方向观測之平差。設有改正数方程式：

$$\left.\begin{aligned}v_1&=a_1x+b_1y+c_1z-l_1;\\ v_2&=a_2x+b_2y+c_2z-l_2;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\ v_n&=a_nx+b_ny+c_nz-l_n.\end{aligned}\right\} \tag{183}$$

在此 n 个方程式之外,可增一虚構之改正数方程式:

$$v'_{n+1}=[ab]y+[ac]z-[al],\text{ 令其权为 }-\frac{1}{[aa]}. \tag{184}$$

將原有改正数方程式內之未知数 x 項取消,再加方程式(184)总列之,則得

$$\left.\begin{aligned}
v'_1 &= +b_1y+c_1z-l_1, &&\text{权}\quad 1;\\
v'_2 &= +b_2y+c_2z-l_2, &&\text{权}\quad 1;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, &&\cdots\cdots;\\
v'_n &= +b_ny+c_nz-l_n, &&\text{权}\quad 1;\\
v'_{n+1} &= [ab]y+[ac]z-[al], &&\text{权}\ -\frac{1}{[aa]}.
\end{aligned}\right\} \tag{185}$$

式(185)名为虚構之改正数方程式。由此按照不等权观測列成下列法方程式:

$$\begin{aligned}
&\left([bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}\right)y+\left([bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}\right)z-\left([bl]-\frac{[ab][al]}{[aa]}\right)=0;\\
&\left([bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}\right)y+\left([cc]-\frac{[ac][ac]}{[aa]}\right)z-\left([cl]-\frac{[ac][al]}{[aa]}\right)=0.
\end{aligned} \tag{186}$$

或

$$\left.\begin{aligned}
&[bb\cdot1]y+[bc\cdot1]z-[bl\cdot1]=0;\\
&[bc\cdot1]y+[cc\cdot1]z-[cl\cdot1]=0.
\end{aligned}\right\} \tag{187}$$

此式与由式(183)列成之法方程式經約化 x 后所得之第一次約化法方程式相同。由此可以証明:按照上法列成之虛構改正数方程式(185),在求定 y, z 之値而言,与原改正数方程式(183)相較,其値相等。繼用此法消去未知数 y,則得虛構改正数方程式如下:

$$\left.\begin{aligned}
v''_1 &= c_1z-l_1, &&\text{权}\quad 1;\\
v''_2 &= c_2z-l_2, &&\text{权}\quad 1;\\
v''_3 &= c_3z-l_3, &&\text{权}\quad 1;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots, &&\cdots\cdots;\\
v''_n &= c_nz-l_n, &&\text{权}\quad 1;\\
v''_{n+1} &= [ac]z-[al], &&\text{权}\ -\frac{1}{[aa]};\\
v''_{n+2} &= [bc\cdot1]z-[bl\cdot1], &&\text{权}\ -\frac{1}{[bb\cdot1]}.
\end{aligned}\right\} \tag{188}$$

由(188)可列成法方程式:

$$\left([cc\cdot1]-\frac{[bc\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}\right)z-\left([cl\cdot1]-\frac{[bc\cdot1][bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}\right)=0,$$

或
$$[cc\cdot2]z-[cl\cdot2]=0. \tag{189}$$

是与由(187)消去 y 所得之結果相同。倘再繼續应用，則 z 亦可消去，应用下列虛構改正数方程式:

$$\left.\begin{array}{llll} v_1''' & = -l_1, & 权 & 1; \\ v_2''' & = -l_2, & 权 & 1; \\ \cdots\cdots\cdots, & & \cdots\cdots; & \\ v_n''' & = -l_n, & 权 & 1; \\ v_{n+1}''' & = -[al], & 权 & -\dfrac{1}{[aa]}; \\ v_{n+2}''' & = -[bl\cdot1], & 权 & -\dfrac{1}{[bb\cdot1]}; \\ v_{n+3}''' & = -[cl\cdot2], & 权 & -\dfrac{1}{[cc\cdot2]}. \end{array}\right\} \tag{190}$$

其总数为 $n+3$，各方程式內均無未知数，由此可求改正数平方和，即

$$[pv'''v''']=[vv]=[ll]-\frac{[al]^2}{[aa]}-\frac{[bl\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\frac{[cl\cdot2]^2}{[cc\cdot2]}, \tag{191}$$

与第六節式(59)相同。

上述系史賴伯約化法之理論，其应用最適于方向观測之平差，此时所有改正数方程式內之 x 項系数均为 -1，其形式如下:

$$v_i=-x+b_iy+c_iz-l_i \tag{192}$$

应用史賴伯約化法，其第1至第 n 个虛構改正数方程式，系將式(192)內之 $-x$ 項取消，各授以权1；另加一式:

$$v_{n+1}'=-[b]y-[c]z+[l], \qquad 权 \quad -\frac{1}{n}.$$

由此列成法方程式:

$$\left[\left(b-\frac{[b]}{n}\right)^2\right]y+\left[\left(b-\frac{[b]}{n}\right)\left(c-\frac{[c]}{n}\right)\right]z-\left[\left(b-\frac{[b]}{n}\right)\left(l-\frac{[l]}{n}\right)\right]=0,$$

$$\left[\left(b-\frac{[b]}{n}\right)\left(c-\frac{[c]}{n}\right)\right]y+\left[\left(c-\frac{[c]}{n}\right)^2\right]z-\left[\left(c-\frac{[c]}{n}\right)\left(l-\frac{[l]}{n}\right)\right]=0.$$

(192)

此式与第十七節之公式(176)完全相同，故不論用約化改正数方程式或用史賴伯約化法，其結果均相同也。

習 題

1. 試解下列法方程式：

$$\left.\begin{aligned}0.55x+0.18y-0.23z-4.78=0;\\0.18x+0.75y-0.40z-4.33=0;\\-0.23x-0.40y+0.68z+6.17=0.\end{aligned}\right\}$$

2. 試解下列法方程式：

$$\left.\begin{aligned}459x-308y-389z+244t-507=0;\\-308x+464y+408z-269t+695=0;\\-389x+408y+679z-331t+653=0;\\244x-269y-331z+469t-283=0.\end{aligned}\right\}$$

求未知数值及其权。

3. 由下列改正数方程式：

$$\left.\begin{aligned}&v_1=x, &&\text{权 } p_1=0.29;\\&v_2=-x+y+2.3, &&p_1=0.37;\\&v_3=y, &&p_1=0.25;\\&v_4=y-z-1.4, &&p_1=0.33;\\&v_5=z, &&p_1=0.50.\end{aligned}\right\}$$

試列相当之法方程式并解算其未知数值并求其中誤差：

4. 在測站 S (圖 4.6) 对准 A, B, C 三点共測三角，其值为：

$\alpha=43°37'15''$,

$\beta=248°12'34''$,

$\gamma=204°34'55''$.

設观測之精度相等，試平差之。

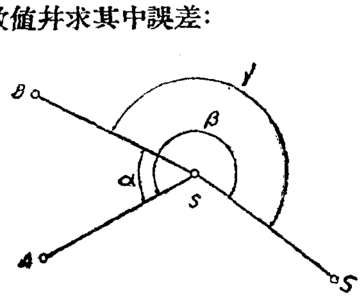

圖 4.6

5. 測站 A (圖 4.7) 之海拔为 237.483，玆拟根据之求 B, C, D 三測站之高程，故先应用水准測量

定出其間之高程差，所得之結果如下：

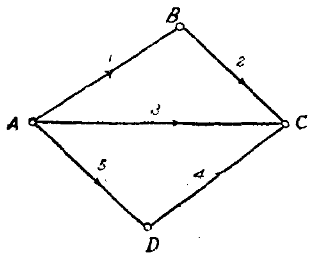

圖 4.7

$h_1 = 5.835$ 公尺， $h_2 = 3.782$ 公尺，

$h_3 = 9.640$ 公尺， $h_4 = 7.384$ 公尺，

$h_5 = 2.270$ 公尺。

各測站間之距離为：

$S_1 = 3.5$ 公里， $S_2 = 2.7$ 公里，

$S_3 = 4.0$ 公里， $S_4 = 3.0$ 公里，

$S_5 = 2.5$ 公里。

試求 B, C, D 三測站平差后之拔海高程及其中誤差。

6. 設 A, B, C 三点之坐标及其至新点 D 之三距离均已測定如下：

A： $x = -\ 732.540$ 公尺， $y = +1700.840$ 公尺；

B： -2386.087 公尺， $+\ 140.916$ 公尺；

C： $+\ 839.055$ 公尺， $-\ 661.723$ 公尺。

$AD = 1.89$ 公里， $BD = 0.49$ 公里， $CD = 2.87$ 公里。

試求 D 点之坐标及其中誤差。

7. 圖 4.8 水准網內 A 及 B 兩点之海拔 H_a 及 H_b 系于事前測定，水准測量共測絡綫 10 条，其高程差为 $h_1, h_2, \cdots h_{10}$，由之求 $P_1, P_2, \cdots P_5$ 等之海拔，試按平差法原理列出其改正数方程式。

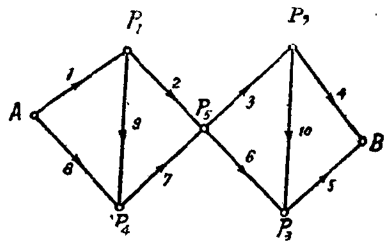

圖 4.8

8. 試应用史賴伯約化法求下列改正数方程式內之未知数及$[vv]$：

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= -\ 0.83 + \zeta + \ 44.71\xi - \ 77.84\eta;\\
v_2 &= +\ 5.37 + \zeta - \ 42.71\xi + \ 63.56\eta;\\
v_3 &= +16.96 + \zeta - 222.79\xi + 259.79\eta;\\
v_4 &= +\ 3.48 + \zeta - \ 34.63\xi - \ 29.65\eta;\\
v_5 &= +\ 1.53 + \zeta - \ 31.01\xi - \ 99.31\eta.
\end{aligned}\right\}$$

第五章　条件观測之平差

第一節　条件方程式

所謂条件观測平差者，乃在一組未知数之真值間有固定物理或几何之条件存在，平差时必須顧及，使平差后所得之最或是值能滿足之謂也。玆試以最簡單之例說明之：在地面上量一三角形之三內角 α, β, γ，由几何学定理知一球面三角形之內角和須等于 $180^\circ+$ 球面角超，而球面角超系由三角形之面積求之。設球面角超为 ε，則在 α, β, γ 三角度之真值間当有下列条件：

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ+\varepsilon$$

或

$$\alpha+\beta+\gamma-(180^\circ+\varepsilon)=0. \tag{1}$$

若上述三角之观測值为 α', β', γ'，則得

$$\alpha'+\beta'+\gamma'-(180^\circ+\varepsilon)=w, \tag{2}$$

w 为將观測值代入原方程式(1)后所得之值，普通名为“不符值”，在前例中，又名为三角形閉合差。

方程式(1)或(2)名为条件方程式。在一組观測量中，可有多个条件存在，其形式可为一次或非一次。設有观測量之真值为 $x_1, x_2, \cdots x_n$，其間有一条件为：

$$F(x_1, x_2\cdots x_n)=0, \tag{3}$$

而 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 之观測值为 $l_1, l_2, \cdots l_n$，其平差所得之改正数为 $v_1, v_2, \cdots v_n$，則

$$x_i=l_i+v_i.$$

代入(3)卽得：

$$F(l_1+v_1, l_2+v_2, \cdots l_n+v_n) = F(l_1, l_2, \cdots l_n) + \frac{\partial F}{\partial l_1} v_1 + \frac{\partial F}{\partial l_2} v_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial l_n} v_n + (\text{二次以上各項}) = 0. \quad (4)$$

命
$$F(l_1, l_2, \cdots l_n) = w_1, \quad (5)$$

幷以 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 代表微分系数 $\frac{\partial F}{\partial l_1}, \frac{\partial F}{\partial l_2}, \cdots \frac{\partial F}{\partial l_n}$，捨去二次以上各項（因 v 之値均甚小）不論，則式(4)可化为一次方程式如下：

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n + w = 0. \quad (6)$$

式(6)系由条件方程式(3)所演化而得之条件，卽平差后各改正数間必須滿足之关系也。在 n 个观測量間，設有 r 个如式(6)之条件方程式，則 r 之数目必須較 n 为小，始發生平差問題。利用 r 个条件方程式，可將 n 个观測值之改正数 $v_1, v_2, \cdots v_n$ 消去任意 r 个，而僅余 $n-r$ 个互相独立之改正数。观測量旣为 n 个，故多余之观測为 r 个。

倘 $r=n$，則 n 个如式(6)之方程式，適足以決定 n 个未知数之値，不但無平差問題，卽观測亦無意义，蓋僅憑数学之条件已能求出未知数值，固無需观測矣。

至于 $r>n$ 时，卽条件之数目多于未知数时，則問題不能解算，蓋少数之观測值实不能滿足多数之条件也。故在条件观測中，条件方程式之数目必須少于未知数之数目，且卽等于多余观測之数目。解算任一条件平差問題时，首須研究若干独立观測量卽足以解算該問題，設观測量多于最低数目，卽有条件方程式之存在，而其数目卽等于多余观測之数目。

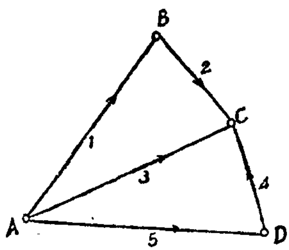

圖 5.1

例一：設 A 点之高程为已知，观測之高程差共有 5 个，卽 h_1 至 h_5 求 B, C, D 三点之高。

作此項計算时，三个观測，已能定三点之高程，在本例內事实上多作观測二个，故

得二条件方程式:

$$\left.\begin{aligned}(h_1+v_1)+(h_2+v_2)-(h_3+v_3)=0;\\(h_3+v_3)-(h_4+v_4)-(h_5+v_5)=0.\end{aligned}\right\}$$

令

$$h_1+h_2-h_3=w_1,$$

$$h_3-h_4-h_5=w_2;$$

于是

$$\left.\begin{aligned}v_1+v_2-v_3+w_1=0;\\v_3-v_4-v_5+w_2=0.\end{aligned}\right\}\ r=2.$$

上述之 v_i 为各高程差 h_i 上应加之改正数。

第二節　条件观測化为間接观測

条件方程式如不繁多,而其系数又复簡單,則可应用直接法解算。所謂直接法者,卽將条件观測化成間接观測而解出之謂也。

今設有 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots x_n$, 其間有 r 个条件:

$$\left.\begin{aligned}a_0+a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0;\\b_0+b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0;\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\r_0+r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n=0.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

如利用此 r 个条件方程式,消去任意 r 个未知数,則僅余 $n-r$ 个未知数。兹假定消去 $x_1, x_2, \cdots x_r$, 令 $x_1, x_2, \cdots x_r$ 均以 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots x_n$ 等值表示之,則

$$\left.\begin{aligned}x_1=A_1x_{r+1}+B_1x_{r+2}+\cdots+H_1x_n+k_1;\\x_2=A_2x_{r+1}+B_2x_{r+2}+\cdots+H_2x_n+k_2;\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\x_r=A_rx_{r+1}+B_rx_{r+2}+\cdots+H_rx_n+k_r.\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

如观測 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 之結果为 $l_1, l_2, \cdots l_n$, 于是可得下列 n 个改正数方程式:

$$\left.\begin{array}{l}
l_1 \;\; + v_1 \;\;\, = A_1 x_{r+1} + B_1 x_{r+2} + \cdots + H_1 x_n + k_1; \\
l_2 \;\; + v_2 \;\;\, = A_2 x_{r+1} + B_2 x_{r+2} + \cdots + H_2 x_n + k_2; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\
l_r \;\; + v_r \;\;\, = A_r x_{r+1} + B_r x_{r+2} + \cdots + H_r x_n + k_r; \\
l_{r+1} + v_{r+1} = x_{r+1}; \\
l_{r+2} + v_{r+2} = \qquad\qquad x_{r+2}; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\
l_n \;\; + v_n \;\;\, = \qquad\qquad\qquad\qquad x_n.
\end{array}\right\} n \text{ 个} \qquad (9)$$

方程式(9)之形式系为間接观测中之改正数方程式,由此可以解算 x_{r+1}, $x_{r+2}, \cdots x_n$ 之值,代入(8)内,又能求出 $x_1, x_2, \cdots x_r$ 等值,且所有 x 值必能满足(7)之条件,因式(8)系因(7)所演化而出者。

方程式(9)内共有 n 个观测值,$n-r$ 个未知数。設各观测值之权数为 $p_1, p_2, \cdots p_n$,則按照間接观测之公式,权單位之中誤差应为:

$$m = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}} = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-(n-r)}} = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}}. \qquad (10)$$

例:兹有一平面三角形 ABC(圖 5.2),其間之三内角 α, β, γ 必須满足下列之条件:

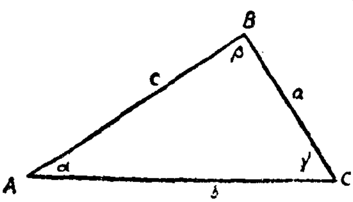

圖 5.2

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°. \qquad (a)$$

顧事实上三内角 α, β, γ 之观测值 L_1, L_2, L_3 往往不能適合預期之結果,而得

$$L_1 + L_2 + L_3 - 180° = w. \qquad (b)$$

在观测值上加以改正数后,始能满足必須之条件:

$$(L_1 + v_1) + (L_2 + v_2) + (L_3 + v_3) = 180°. \qquad (c)$$

由(b)及(c)二式中可得

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0. \qquad (d)$$

兹將内角 γ 以其他二角表示之,即

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= L_1+v_1;\\ \beta &= L_2+v_2;\\ \gamma &= L_3+v_3=180^\circ-(\alpha+\beta)=180^\circ-(L_1+v_1+L_2+v_2).\end{aligned}\right\}\qquad\text{(e)}$$

复命 x 及 y 为二新未知数，而以 L_1 及 L_2 之值为 α 及 β 之近似值，于是得

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= L_1+x;\\ \beta &= L_2+y;\\ \gamma &= 180^\circ-(\alpha+\beta).\end{aligned}\right\}\qquad\text{(f)}$$

由是可得改正数方程式：

$$\left.\begin{aligned}v_1 &= \alpha-L_1=x,\\ v_2 &= \beta-L_2=y,\\ v_3 &= \gamma-L_3=180^\circ-(L_1+v_1+L_2+v_2)-L_3=\\ &= 180^\circ-(L_1+L_2+L_3)-v_1-v_2=-x-y-w.\end{aligned}\right\}\qquad\text{(g)}$$

法方程式：

$$\left.\begin{aligned}+2x+y+w&=0;\\ x+2y+w&=0.\end{aligned}\right\}\qquad\text{(h)}$$

解出：

$$y=\frac{-\frac{w}{2}}{\frac{3}{2}}=-\frac{w}{3},$$

故

$$\beta=L_2-\frac{w}{3}.$$

該角之权为：

$$P_y=P_\beta=\frac{3}{2}.$$

每一角观測値之中誤差为：

$$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-u}}=\pm\sqrt{\frac{\frac{w^2}{3}}{1}}=\pm\frac{w}{\sqrt{3}}.$$

角度平差后之中誤差为：

$$M_y = M_\beta = \frac{m}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \pm\frac{w}{3}\sqrt{2}.$$

与第四章第八節用直接观測平差法所求得之結果完全相同。

第三節 繫数解法

前節所論方法，系利用 r 个条件方程式消除 r 个未知数，然后用間接观測方法平差之。若条件方程式为数較多，且形式复雜，則前項消除工作甚屬繁巨，計算頗为不便。故高斯創用"繫数解法"，未知数不必消除，卽可直接求得其最或是值。玆論述如下：

設有未知数 n 个，$x_1, x_2, \cdots x_n$，其間有条件方程式 r 个：

$$r\text{ 个}\left\{\begin{array}{l} a_0+a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0; \\ b_0+b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\ r_0+r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n=0. \end{array}\right\} \tag{11}$$

以观測值 $l_1, l_2\cdots l_n$ 代未知数 x_i 之位置后，則上列方程式將不复滿足必要之条件，而形成下式：

$$\left.\begin{array}{l} a_0+a_1l_1+a_2l_2+\cdots+a_nl_n=w_1; \\ b_0+b_1l_1+b_2l_2+\cdots+b_nl_n=w_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\ r_0+r_1l_1+r_2l_2+\cdots+r_nl_n=w_r. \end{array}\right\} \tag{12}$$

今以 $x_1=l_1+v_1,\ x_2=l_2+v_2, \cdots x_n=l_n+v_n$，代入条件方程式(11)，則得

$$\left.\begin{array}{l} a_0+a_1(l_1+v_1)+a_2(l_2+v_2)+\cdots+a_n(l_n+v_n)=0; \\ b_0+b_1(l_1+v_1)+b_2(l_2+v_2)+\cdots+b_n(l_n+v_n)=0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\ r_0+r_1(l_1+v_1)+r_2(l_2+v_2)+\cdots+r_n(l_n+v_n)=0. \end{array}\right\} \tag{13}$$

比較(13)与(12)得

$$r\text{ 个}\left\{\begin{array}{l}a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n+w_1=0;\\ b_1v_1+b_2v_2+\cdots+b_nv_n+w_2=0;\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\ r_1v_1+r_2v_2+\cdots+r_nv_n+w_n=0.\end{array}\right\} \tag{14}$$

式(12)及(14)可作下列寫法:

$$\left.\begin{array}{l}a_0+[al]=w_1,\ [av]=-w_1;\\ b_0+[bl]=w_2,\ [bv]=-w_2;\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\ \cdots\cdots\cdots\cdots;\\ r_0+[rl]=w_r,\ [cv]=-w_r;\end{array}\right\} \tag{15}$$

式(14)为平差后必須满足之条件方程式。平差时除此以外，倘須顧及最小二乘法之原理，即

$$[pvv]=p_1v_1v_1+p_2v_2v_2+\cdots+p_nv_nv_n=\text{最小值。} \tag{16}$$

欲使(16)与(15)同时满足，須將式(14)分別乘以不定系数，$-2k_1, -2k_2, \cdots 2k_r$ 併附于 $[pvv]$ 之后，而令整个函数为最小值:

$$[pvv]-2k_1([av]+w_1)-2k_2([bv]+w_2)\cdots 2k_r([rv]+w_r)=\text{最小值。} \tag{17}$$

將上式展开，再按 $v_1, v_2\cdots$ 集項，乃得

$$\begin{array}{l}p_1v_1v_1-2(a_1k_1+b_1k_2+\cdots+r_1k_r)v_1+\\ +p_2v_2v_2-2(a_2k_1+b_2k_2+\cdots+r_2k_r)v_2+\\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\\ +p_nv_nv_n-2(a_nk_1+b_nk_n+\cdots+r_nk_r)v_n-\\ \qquad -2(w_1k_1+w_2k_2+\cdots+w_rk_r)=\text{最小值。}\end{array} \tag{18}$$

按微分法求最小值之原理，將上式分別依 $v_1, v_2, \cdots v_n$ 微分之，而令其結果为另，于是得

$$\left.\begin{array}{l}p_1v_1=a_1k_1+b_1k_2+\cdots+r_1k_r;\\ p_2v_2=a_2k_1+b_2k_2+\cdots+r_2k_r;\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\ p_nv_n=a_nk_1+b_nk_2+\cdots+r_nk_r.\end{array}\right\} \tag{19}$$

或
$$
\left.\begin{aligned}
v_1&=\frac{1}{p_1}(a_1k_1+b_1k_2+\cdots+r_1k_r);\\
v_2&=\frac{1}{p_2}(a_2k_1+b_2k_2+\cdots+r_2k_r);\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\
v_n&=\frac{1}{p_n}(a_nk_1+b_nk_2+\cdots+r_nk_r).
\end{aligned}\right\}\tag{20}
$$

上式名为繫数方程式。$k_1, k_2, \cdots k_r$ 名为繫数。繫数之数目与条件方程式之数目相等。若知 $k_1, k_2, \cdots k_r$ 等之数値，則可应用繫数方程式求改正数 v_i。將繫数方程式(20)代入条件方程式(14)内，並按 k 集項，卽得:

$$
\left.\begin{aligned}
\left[\frac{aa}{p}\right]k_1+\left[\frac{ab}{p}\right]k_2+\cdots+\left[\frac{ar}{p}\right]k_r+w_1=0;\\
\left[\frac{ab}{p}\right]k_1+\left[\frac{bb}{p}\right]k_2+\cdots+\left[\frac{br}{p}\right]k_r+w_2=0;\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\
\left[\frac{ar}{p}\right]k_1+\left[\frac{br}{p}\right]k_2+\cdots+\left[\frac{rr}{p}\right]k_r+w_r=0.
\end{aligned}\right\}\tag{21}
$$

上式(21)与間接观測中之法方程式完全类似，所有系数均与平方系数对角綫对称，故亦名为法方程式。此处之未知数 $k_1, k_2, \cdots k_r$ 共有 r 个，方程式亦为 r 个，故解算此法方程式后，卽可得各繫数之値。再將其値代入式(20)内，得各观測値之改正数，平差問題于是解決。至于法方程式(21)之解算，仍可用前章所論之高斯或杜力特尔約化法，玆不贅論。以上系假定不等权观測。在等权观測时，則各 p 均为 1，故式(20)及式(21)内之 p 均可略去。

至于$[vv]$之求法，可直接以改正数之平方計算之，并可用另一公式检核之。检核之公式可如下法求之：將式(20)两边平方并乘以相当之权数卽得:

$$\left.\begin{aligned}p_iv_iv_i=\frac{1}{p_i}(&a_ia_ik_1^2+a_ib_ik_1k_2+\cdots+a_ir_ik_1k_r+\\&+a_ib_ik_1k_2+b_ib_ik_2^2+\cdots+b_ir_ik_2k_r+\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+a_ir_ik_1k_r+b_ir_ik_2k_r+\cdots+r_ir_ik_r^2),\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

故
$$\left.\begin{aligned}[pvv]=&\left[\frac{aa}{p}\right]k_1^2+\left[\frac{ab}{p}\right]k_1k_2+\cdots+\left[\frac{ar}{p}\right]k_1k_r+\\&+\left[\frac{ab}{p}\right]k_1k_2+\left[\frac{bb}{p}\right]k_2^2+\cdots+\left[\frac{br}{p}\right]k_2k_r+\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\left[\frac{ar}{p}\right]k_1k_r+\left[\frac{br}{p}\right]k_2k_r+\cdots+\left[\frac{rr}{p}\right]k_r^2.\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

試將此式与(21)相比較，則上式可簡書如下：

$$[pvv]=-k_1w_1-k_2w_2\cdots k_rw_r=-[kw].\tag{24}$$

上式可用以檢核$[pvv]$直接計算之結果。

式(24)又可演变成另一形式。应用第四章間接观測法方程式約化之相同符号，各k可書作

$$\left.\begin{aligned}k_1&=-\frac{w_1}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}k_2-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}k_3;\\k_2&=-\frac{[w_2\cdot1]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot1\right]}-\frac{\left[\frac{bc}{p}\cdot1\right]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot1\right]}k_3;\\k_3&=-\frac{[w_3\cdot2]}{\left[\frac{cc}{p}\cdot2\right]}.\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

將上列k_1之式代入式(24)得

$$[pvv]=\frac{w_1^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\left(w_2-\frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}w_1\right)k_2-\left(w_3-\frac{\left[\frac{ac}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}w_1\right)k_3=$$

$$=\frac{w_1^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-[w_2\cdot 1]k_2-[w_3\cdot 1]k_3; \tag{26}$$

再將(25)中 k_2 式代入(26),得

$$[pvv]=\frac{w_1^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}+\frac{[w_2\cdot 1]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}-\left([w_3\cdot 1]-\frac{\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}[w_2\cdot 1]\right)k_3=$$

$$=\frac{w_1^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}+\frac{[w_2\cdot 1]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}-[w_3\cdot 2]k_3; \tag{27}$$

最后將(25)中 k_3 式代入(27),遂得

$$[pvv]=\frac{w_1^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}+\frac{[w_2\cdot 1]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}+\frac{[w_3\cdot 2]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}+\cdots. \tag{28}$$

$\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]$, $\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]$ 之意义与 $[pbb\cdot 1]$,$[pcc\cdot 2]$ 相同。因 w_1, w_2,… 相当于 $-[pal]$, $-[pbl]$ 等,故 $[w_2\cdot 1]$ 相当于 $[pbl\cdot 1]$, $[w_3\cdot 2]$ 相当于 $[pcl\cdot 2]$,其求法亦与間接观測中求 $[pvv]$ 之約化步驟完全相同。惟該处 $[pll]$ 一項,此处为零,故約化之步驟如下:

$$
\left.\begin{array}{ll}
\left[\frac{aa}{p}\right]k_1+\left[\frac{ab}{p}\right]k_2+\left[\frac{ac}{p}\right]k_3+w_1=0 & \\
\qquad\left[\frac{bb}{p}\right]k_2+\left[\frac{bc}{p}\right]k_3+w_2=0 & \left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]k_2+\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]k_3+[w_2\cdot 1]=0 \\
\qquad\qquad\left[\frac{cc}{p}\right]k_3+w_3=0 & \left[\frac{cc}{p}\cdot 1\right]k_3+[w_3\cdot 1]=0 \\
\qquad\qquad\qquad\underline{0} & \qquad\underline{[0\cdot 1]} \\
 & \left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]k_3+[w_3\cdot 2]=0 \\
 & \qquad\underline{[0\cdot 2]} \\
 & \qquad\underline{[0\cdot 3]}
\end{array}\right\} \tag{29}
$$

式(29)之左面为法方程式，其下附有 0，系相当于間接观測中之 $[pll]$；$[0\cdot 1]$，$[0\cdot 2]$，$[0\cdot 3]$ 卽相当于 $[pll\cdot 1]$，$[pll\cdot 2]$，$[pll\cdot 3]$，因

$$
[0.3]=-\frac{w_1^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{[w_2\cdot 1]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}-\frac{[w_3\cdot 2]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]},
$$

故按照式(28)

$$
[0.3]=-[pvv]. \tag{30}
$$

綜合以上所述，$[pvv]$ 之計算共有三法：一为直接由改正数計算；二为用式(24)；三則用式(28)，而以式(29)之約化法求之。若三法所求之結果尽相同，是卽証明法方程式之解算無誤。应用繫数解法求得 $[pvv]$ 后，卽可按照下列公式：

$$
m=\sqrt{\frac{[pvv]}{r}},
$$

計算权單位之中誤差，r 为条件数目。

例 1：設 A 站之海拔 $H_a=237.483$ 公尺，玆为求 B，C 及 D 三点之海拔計，分五路作水准測量，求 A 站与 B，C 及 D 三点間之高程差 $h_1, h_2, \cdots h_5$。其結果如下：

$h_1 = 5.835$ 公尺，$h_2 = 3.782$ 公尺，$h_3 = 9.640$ 公尺，

$h_4 = 7.384$ 公尺，$h_5 = 2.270$ 公尺。

$S_1 = 3.5$ 公里，$S_2 = 2.7$ 公里，

$S_3 = 4.0$ 公里，$S_4 = 3.0$ 公里，

$S_5 = 2.5$ 公里。

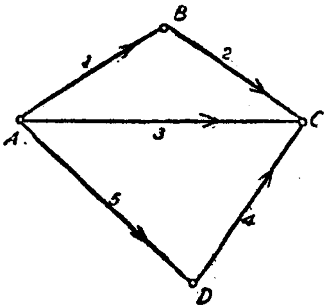

圖 5.3

按第一節例題，知此題平差之二条件方程式为：

$$\left.\begin{aligned}(h_1+v_1)+(h_2+v_2)-(h_3+v_3)=0;\\(h_3+v_3)-(h_4+v_4)-(h_5+v_5)=0,\end{aligned}\right\}$$

或
$$\left.\begin{aligned}v_1+v_2-v_3+w_1=0;\\v_3-v_4-v_5+w_2=0.\end{aligned}\right\}$$

令
$$w_1 = h_1 + h_2 - h_3 = -23 \text{ 公厘};$$
$$w_2 = h_3 - h_4 - h_5 = -14 \text{ 公厘}.$$

根据前章第十二節，知水准測量之权乃与距离成反比例。兹以一公里为單位，令其权与距离之关系为：

$$p_i = \frac{1}{S_i},$$

于是可求各高程差之权倒数如下：

$$\frac{1}{p_1}=3.5,\quad \frac{1}{p_2}=2.7,\quad \frac{1}{p_3}=4.0,\quad \frac{1}{p_4}=3.0,\quad \frac{1}{p_5}=2.5.$$

其条件方程式及法方程式各項系数之計算，列成下表：

	a	b	$\frac{1}{p}$	$\frac{aa}{p}$	$\frac{ab}{p}$	$\frac{bb}{p}$
1	+1		3.5	3.5		
2	+1		2.7	2.7		
3	−1	+1	4.0	4.0	−4.0	4.0
4		−1	3.0			3.0
5		−1	2.5			2.5
和				10.2	−4.0	9.5

法方程式为：

$$\left.\begin{aligned}\underline{10.2}k_1-4.0k_2-23=0;\\ \underline{+9.5}k_2-14=0.\end{aligned}\right\}$$

解出

$$k_1=3.40;\quad k_2=2.90.$$

根据式(20)求各改正数 v_i:

$$v_1=\frac{a_1}{p_1}k_1+\frac{b_1}{p_1}k_2=+12\text{ 公厘};$$

$$v_2=\frac{a_2}{p_2}k_1+\frac{b_2}{p_2}k_2=+\ 9\text{ 公厘};$$

$$v_3=\frac{a_3}{p_3}k_1+\frac{b_3}{p_3}k_2=-\ 2\text{ 公厘};$$

$$v_4=\frac{a_4}{p_4}k_1+\frac{b_4}{p_4}k_2=-\ 9\text{ 公厘};$$

$$v_5=\frac{a_5}{p_5}k_1+\frac{b_5}{p_5}k_2=-\ 7\text{ 公厘}。$$

由改正数 v_i 計算 $[pvv]$，得

$$[pvv]=118.74,$$

由式(24)求之，则得

$$[pvv]=-[kw]=118.8,$$

$$\therefore\quad m=\sqrt{\frac{[pvv]}{r}}=\sqrt{\frac{118.74}{2}}=\pm 7.7\text{ 公厘，是即每一公里之中誤差。}$$

高程差之平差值各为：

$h'_1=h_1+v_1=5.847$ 公尺，　　$h'_4=h_4+v_4=7.375$ 公尺，

$h'_2=h_2+v_2=3.791$ 公尺，　　$h'_5=h_5+v_5=2.263$ 公尺。

$h'_3=h_3+v_3=9.638$ 公尺，

故所求三点之海拔为：

$$H_b=243.330\text{ 公尺};$$

$$H_c = 247.121 \text{ 公尺};$$

$$H_d = 239.746 \text{ 公尺}.$$

例 2: 在测站 A 向 L, M, N, O, P 五测标观测，計得七角度

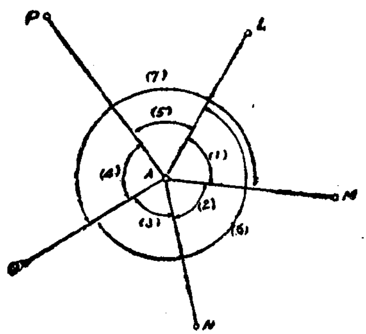

圖 5.4

$$L_1 = 85°14'24.5'';$$

$$L_2 = 83°45'32.0'';$$

$$L_3 = 41°35'24.0'';$$

$$L_4 = 99°01'14.1'';$$

$$L_5 = 50°23'26.7'';$$

$$L_6 = 210°35'17.5'';$$

$$L_7 = 234°39'08.2''.$$

五个方向之間僅有四个独立角度，故多余观測之数目为 3，亦卽应有三个条件存在于此七个观測值之間。兹按圖 5.4 所示，列出此三个条件方程如下：

$$\left.\begin{aligned} (1)+(2)+(3)-(6)\ &=0; \\ (4)+(5)+(6)-360°&=0; \\ -(1)+(6)+(7)-360°&=0. \end{aligned}\right\}$$

兹以 $(L+v)_i$ 代替 (1), (2)…于是可得条件方程式如下表:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	
1	+1	+1	+1			−1		+3.0=0
2				+1	+1	+1		−1.7=0
3	−1					+1	+1	+1.2=0
s	0	+1	+1	+1	+1	+1	+1	

由此得法方程式:

$$\left.\begin{aligned} \underline{+4k_1} - k_2 - 2k_3 + 3.0 &= 0; \\ \underline{+3k_2} + k_3 - 1.7 &= 0; \\ \underline{+3k_3} + 1.2 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

解出：

$$k_1=-1.347,\quad k_2=+0.619,\quad k_3=-1.503.$$

改正数为：

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
+0.16″	−1.35″	−1.35″	+0.62″	+0.62″	+0.46″	−1.50″

平差后之角度值：

$$(1)=L_1+v_1=\ 85°14'24.66'';$$
$$(2)=L_2+v_2=\ 83°45'30.65'';$$
$$(3)=L_3+v_3=\ 41°35'22.65'';$$
$$(4)=L_4+v_4=\ 99°01'14.72'';$$
$$(5)=L_5+v_5=\ 50°23'27.32'';$$
$$(6)=L_6+v_6=210°35'17.96'';$$
$$(7)=L_7+v_7=234°39'06.70''.$$

將此值代入上述三条件方程式，適能滿足，足証平差計算無誤。

第四節　未知数函数之中誤差

平差之目的，除在求未知数之值以外，尙須求平差后各未知数或其函数之中誤差。在平差以前如以观測值 $l_1, l_2, \cdots l_n$ 計算其函数

$$f=f(l_1,\ l_2,\cdots l_n) \tag{31}$$

之值，則求此未平差之 f 值之中誤差，其法甚为簡單，蓋各观測值 $l_1, l_2, \cdots l_n$ 之間，均互相独立，故可按照誤差傳播定律求之：

$$m_f^2=\left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2 m_1^2+\left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2 m_2^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial l_n}\right)^2 m_n^2, \tag{32}$$

m_f 为 f 之中誤差，$m_1, m_2, \cdots m_n$ 等为 $l_1, l_2, \cdots l_n$ 之中誤差。今命

$$f_1=\frac{\partial f}{\partial l_1},\quad f_2=\frac{\partial f}{\partial l_2},\quad \cdots\quad f_n=\frac{\partial f}{\partial l_n}, \tag{33}$$

而以 m 为权單位之中誤差，則由

$$p_1m_1^2 = p_2m_2^2 = \cdots = p_nm_n^2 = m^2$$

之关系，可將式(32)改書为:

$$m_f^2 = \left[\frac{ff}{p}\right] m^2. \tag{34}$$

但如以平差后未知数之值 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 求此同一函数之值，設得 F，則此时

$$F = f(x_1, x_2, \cdots x_n) = f(l_1 + v_1, l_2 + v_2, \cdots l_n + v_n), \tag{35}$$

其中每个改正数 v 均为所有观測值之函数，即

$$v_i = \varphi_i(l_1, l_2, \cdots l_n). \tag{36}$$

蓋所有改正数均由整組观測值經平差計算而得，故此时各 v 并非互相独立。如命

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial l_1}, \quad F_2 = \frac{\partial F}{\partial l_2}, \quad \cdots \quad F_n = \frac{\partial F}{\partial l_n}, \tag{37}$$

則 F 之中誤差为:

$$m_F^2 = \left[\frac{FF}{p}\right] m^2. \tag{38}$$

$F_1, F_2, \cdots F_n$ 之值，并不与 $f_1, f_2, \cdots f_n$ 之值相同，蓋由式(35)并注意各 v 均为 $l_1, l_2, \cdots l_n$ 之函数，則微分系数 F_i 之公式应为:

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial l_i} = \frac{\partial f}{\partial l_i} + \frac{\partial f}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial l_i} + \frac{\partial f}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial l_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial v_n} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial l_i}. \tag{39}$$

由函数(35)可知

$$\frac{\partial f}{\partial l_i} = \frac{\partial f}{\partial v_i}; \tag{40}$$

更按式(33)之关系可化式(39)为:

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial l_i} = f_i + f_1 \frac{\partial v_1}{\partial l_i} + f_2 \frac{\partial v_2}{\partial l_i} + \cdots + f_n \frac{\partial v_n}{\partial l_i}, \tag{41}$$

所有上式之 $\frac{\partial v}{\partial l_i}$ 必須間接求之。蓋 v 为各繫数 k 之函数，而 k 又为各观測值之函数，故

$$\frac{\partial v_h}{\partial l_i}=\frac{\partial v_h}{\partial k_1}\cdot\frac{\partial k_1}{\partial l_i}+\frac{\partial v_h}{\partial k_2}\cdot\frac{\partial k_2}{\partial l_i}+\cdots+\frac{\partial v_h}{\partial k_r}\cdot\frac{\partial k_r}{\partial l_i}, \tag{42}$$

h 为自 1 至 n（观测量之数目）間之任意一个，$k_1, k_2, \cdots k_r$ 为繫数，共有 r 个。关于 $\frac{\partial v_h}{\partial k_1}, \frac{\partial v_h}{\partial k_2}, \cdots$ 等，可自本章第三節式(20)經部分微分而求之，卽

$$\frac{\partial v_h}{\partial k_1}=\frac{a_h}{p_h},\quad \frac{\partial v_h}{\partial k_2}=\frac{b_h}{p_h};\ \cdots\ \frac{\partial v_h}{\partial k_r}=\frac{r_h}{p_h}, \tag{43}$$

故式(41)又可書为：

$$F_i=f_i+\left[\frac{af}{p}\right]\frac{\partial k_1}{\partial l_i}+\left[\frac{bf}{p}\right]\frac{\partial k_2}{\partial l_i}+\cdots+\left[\frac{rf}{p}\right]\frac{\partial k_r}{\partial l_i}. \tag{44}$$

上式右方之各項，可自前節之法方程式內求之：

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{aa}{p}\right]k_1+\left[\frac{ab}{p}\right]k_2+\cdots+\left[\frac{ar}{p}\right]k_r+w_1=0;\\
&\left[\frac{ab}{p}\right]k_1+\left[\frac{bb}{p}\right]k_2+\cdots+\left[\frac{br}{p}\right]k_r+w_2=0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\
&\left[\frac{ar}{p}\right]k_1+\left[\frac{br}{p}\right]k_2+\cdots+\left[\frac{rr}{p}\right]k_r+w_r=0.
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

如以暂时不定之系数 $L_1, L_2, \cdots L_r$ 分别順次乘上列各式，而相加之，并按 $k_1, k_2, \cdots k_r$ 集項，卽得

$$\begin{aligned}
&\left(\left[\frac{aa}{p}\right]L_1+\left[\frac{ab}{p}\right]L_2+\cdots+\left[\frac{ar}{p}\right]L_r\right)k_1\\
&+\left(\left[\frac{ab}{p}\right]L_1+\left[\frac{bb}{p}\right]L_2+\cdots+\left[\frac{br}{p}\right]L_r\right)k_2\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\left(\left[\frac{ar}{p}\right]L_1+\left[\frac{br}{p}\right]L_2+\cdots+\left[\frac{rr}{p}\right]L_r\right)k_r\\
&+w_1L_1+w_2L_2+\cdots+w_rL_r=0,
\end{aligned} \tag{46}$$

L 之数目共为 r 个，为任意之系数，名为傳遞系数，吾人可以下列 r 个傳遞方程式決定其値：

$$\left.\begin{aligned}&\left[\frac{aa}{p}\right]L_1+\left[\frac{ab}{p}\right]L_2+\cdots+\left[\frac{ar}{p}\right]L_r=\left[\frac{af}{p}\right];\\&\left[\frac{ab}{p}\right]L_1+\left[\frac{bb}{p}\right]L_2+\cdots+\left[\frac{br}{p}\right]L_r=\left[\frac{bf}{p}\right];\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\&\left[\frac{ar}{p}\right]L_1+\left[\frac{br}{p}\right]L_2+\cdots+\left[\frac{rr}{p}\right]L_r=\left[\frac{rf}{p}\right].\end{aligned}\right\}\tag{47}$$

于是式(46)可改化为：

$$\left[\frac{af}{p}\right]k_1+\left[\frac{bf}{p}\right]k_2+\cdots+\left[\frac{rf}{p}\right]k_r+w_1L_1+w_2L_2+\cdots+w_rL_r=0.\tag{48}$$

依前節式(15)，w 系以 l 表示之，于是得

$$\left[\frac{af}{p}\right]k_1+\left[\frac{bf}{p}\right]k_2+\cdots+\left[\frac{rf}{p}\right]k_r=-(a_0+[al])L_1-$$
$$-(b_0+[bl])L_2\cdots-(r_0+[rl])L_r.\tag{48)*}$$

將式(48)* 依 l_i 微分之，卽得

$$\left[\frac{af}{p}\right]\cdot\frac{\partial k_1}{\partial l_i}+\left[\frac{bf}{p}\right]\frac{\partial k_2}{\partial l_i}+\cdots+\left[\frac{rf}{p}\right]\frac{\partial k_r}{\partial l_i}=-a_iL_1-b_iL_2\cdots-r_iL_r.\tag{49}$$

以式(49)代入式(44)內，可化簡之为

$$F_i=f_i-a_iL_1-b_iL_2\cdots-r_iL_r.\tag{50}$$

是以計算函数 F 之中誤差时，当先求微分系数 $f_1, f_2, \cdots f_n$，然后求 $\left[\frac{af}{p}\right], \left[\frac{bf}{p}\right], \cdots \left[\frac{rf}{p}\right]$ 等和数，附于法方程式之后以求傳遞系数 $L_1, L_2, \cdots L_r$ 等値，再由式(50)定 $F_1, F_2, \cdots F_n$，最后以式(38)求 m_F。

上述之法固可計算 m_F 之値，然尙嫌繁瑣。此外尙有一法不需計算 $F_1, F_2, \cdots F_n$ 等値而直接算求之。其法以 $\frac{a_i}{p_i}$ 乘式(50)而求和数，乃得

$$\left[\frac{aF}{p}\right]=\left[\frac{af}{p}\right]-\left[\frac{aa}{p}\right]L_1-\left[\frac{ab}{p}\right]L_2\cdots-\left[\frac{ar}{p}\right]L_r.$$

由式(47)之第一式,可知

$$\left[\frac{aF}{p}\right]=0; \tag{51}$$

同理,以 $\frac{b_i}{p_i}, \cdots \frac{r_i}{p_i}$ 乘式(50),又得

$$\left[\frac{bF}{p}\right]=0, \cdots \left[\frac{rF}{p}\right]=0. \tag{52}$$

若以 $\frac{F_i}{p_i}$ 乘式(50)之两方,而求其和,卽得

$$\left[\frac{FF}{p}\right]=\left[\frac{fF}{p}\right]-\left[\frac{aF}{p}\right]L_1-\left[\frac{bF}{p}\right]L_2\cdots-\left[\frac{rF}{p}\right]L_r,$$

由式(51)及(52)可以証明:

$$\left[\frac{FF}{p}\right]=\left[\frac{fF}{p}\right]. \tag{53}$$

再以 $\frac{f_i}{p_i}$ 乘式(50)之两方,于是

$$\left[\frac{fF}{p}\right]=\left[\frac{FF}{p}\right]=\left[\frac{ff}{p}\right]-\left\{\left[\frac{af}{p}\right]L_1-\left[\frac{bf}{p}\right]L_2+\cdots+\left[\frac{rf}{p}\right]L_r\right\}, \tag{54}$$

$$m_F^2=\left[\frac{FF}{p}\right]m^2=m^2\left\{\left[\frac{ff}{p}\right]-\left(\left[\frac{af}{p}\right]L_1+\left[\frac{bf}{p}\right]L_2+\cdots+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left[\frac{rf}{p}\right]L_r\right)\right\}. \tag{55}$$

应用上式时,可不必計算 F_i,而直接求 m_F。式(55)括弧( )内之值,可依式(47)用高斯約化法化簡之,其步驟与前節所述按式(28)計算 $[vvv]$ 之約化方法完全相同,結果为:

$$m_F^2=m^2\left\{\left[\frac{ff}{p}\right]-\left(\frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}+\frac{\left[\frac{bf}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}+\cdots\right)\right\}, \tag{56}$$

$$m_F^2=m^2(\mathrm{I}-\mathrm{II}). \tag{56*}$$

式(56)与間接观測中求$[vv]$之公式完全相似,其計算之步驟亦同,卽于法方程式之后另附一列,$\left[\frac{af}{p}\right]$,$\left[\frac{bf}{p}\right]\cdots\left[\frac{ff}{p}\right]$,然后随同方程式進行約化,結果卽得所求之$\left[\frac{FF}{p}\right]$,是为函数 F 之权倒数,因

$$m_F^2=m^2\left[\frac{FF}{p}\right],$$

$$\therefore\quad \frac{1}{p_F}=\left[\frac{FF}{p}\right]=\left[\frac{ff}{p}\right]-\frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{\left[\frac{bf}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}-\frac{\left[\frac{cf}{p}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}. \qquad 57)$$

其中$\left[\frac{ff}{p}\right]$代表平差前之权倒数,而其后各項則为由平差結果所增進之精度也。

应用此法較傳遞系数法为簡捷,但傳遞系数亦可作計算函数值之用。設函数 F 之值先以未經平差之观測值 $l_1, l_2,\cdots l_n$ 等作一初步之計算,則平差之后应加何种改正,可以傳遞系数計算之,其公式如下:

$$f(x_1, x_2,\cdots x_n)=f(l_1+v_1, l_2+v_2,\cdots l_n+v_n)=f(l_1, l_2,\cdots l_n)+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial l_1}v_1+\frac{\partial f}{\partial l_2}v_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial l_n}v_n+(\text{二次以上各項})。\qquad (58)$$

因假定改正数之值甚小,故二次以上各項均可略去,式(58)簡書之为:

$$f(x)=f(l)+df, \qquad (59)$$

$$df=f_1v_1+f_2v_2+\cdots+f_nv_n=[fv]. \qquad (60)$$

乘前節繫数方程式(20)以相当之 f 而相加,卽得

$$[fv]=\left[\frac{af}{p}\right]k_1+\left[\frac{bf}{p}\right]k_2+\cdots+\left[\frac{rf}{p}\right]k_r,$$

根据本節式(48),上式可化为

$$[fv]=-w_1L-w_2L_2\cdots-w_rL_r,$$

或 $$[fv]=-[wL],\tag{61}$$

故 $$f(x)=f(l)-[wL].$$

在条件观测中，因各未知数并非互相独立，故一函数 f 可有不同之表示法。兹以最簡單之例言之，設一三角形內，观测其三內角 α,β,γ（圖 5.5），則有一条件方程式:

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ+\varepsilon.\tag{62}$$

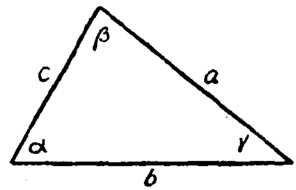

圖 5.5

今設欲求 a, b 两边之比例及其中誤差，命

$$f=\frac{a}{b},$$

將 f 化为观测量 α,β,γ 之函数，应用洛讓(Legendre)定理

$$f=\frac{a}{b}=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{1}{3}\varepsilon\right)}{\sin\left(\beta-\frac{1}{3}\varepsilon\right)},\tag{63}$$

卽以 α,β 两角度表示之，但根据(62)亦可化为 α,γ 两角度之函数，卽

$$f=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{1}{3}\varepsilon\right)}{\sin\left\{180^\circ-\left(\alpha+\gamma-\frac{2}{3}\varepsilon\right)\right\}};\tag{64}$$

或用 β,γ 两角度表示之

$$f=\frac{\sin\left\{180^\circ-\left(\beta+\gamma-\frac{2}{3}\varepsilon\right)\right\}}{\sin\left(\beta-\frac{1}{3}\varepsilon\right)}.\tag{65}$$

若以观測值 α',β',γ' 代入(63)，(64)，(65)各式內計算 f，因 α',β',γ' 未必滿足条件方程式(62)，故由(63)，(64)，(65)各式所得之 f 值未必相同。然应用平差后之 α,β,γ 值計算 f，則不啻將函数改化为式(35)之 F 函数，無論应用任何 f 公式，其結果均得相等之值；卽中誤差之計

算，無論用(63),(64),(65)之任何一式求 f_i，然后根据本節之公式定 $\frac{1}{p_F}$，其計算進程虽不同，然結果必均一致。蓋有多余观測时，不僅观測值不能尽相符合，卽其函数之值亦必有差異，而平差后所得之結果，則必僅有一个，此乃最小二乘法之特徵也。

例一：玆以前章第十三節之例題重用条件观測法平差之，并求 AE 与 EC 間高程差之中誤差。水准測量之記錄为：

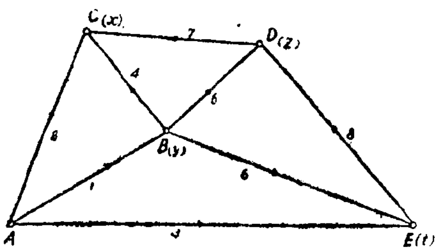

圖 5.6

$(BA)=l_1=189.404$，距離 3.1 公里；
$(CA)=l_2=736.977$，距離 9.3 公里；
$(EA)=l_3=376.607$，距離 59.7 公里；
$(CB)=l_4=547.576$，距離 6.2 公里；
$(DB)=l_5=273.528$，距離 16.1 公里；
$(EB)=l_6=187.274$，距離 35.1 公里；
$(CD)=l_7=274.082$，距離 12.1 公里；
$(DE)=l_8=86.261$，距離 9.3 公里。

本題之解算，首列条件方程式。取 A 站为始点，若观測無誤差，則藉观測值 l_1, l_2, l_3 及 l_5 可決定 B, C, D 及 E 四点之高程。每增一观測卽增一条件方程式。玆共多測四次，故共得四条件方程式。例如 B 与 C 間之高程差，由 $-l_1+l_2$ 求之，亦可由 $+l_4$ 求之，而两路所得結果必相同，以公式表示之为：

$$-(l_1+v_1)+(l_2+v_2)-(l_4+v_4)=0. \tag{a}$$

將观測值 l 代入上式，而令常数項之單位为公厘，于是得第一条件方程式：

$$-v_1+v_2-v_4-3=0; \tag{b}$$

第二条件方程式系由三角形(BCD)內求得：

$$+v_4-v_5-v_7-34=0; \tag{c}$$

从三角形(BDE)及(ABE)內得第三及第四条件方程式：

$$+v_5-v_6-v_8-\ \ 7=0; \tag{d}$$

$$+v_1-v_3+v_6+71=0. \tag{e}$$

命 AE 間之高程差为 F, EC 間之高程差为 F', 則

$$F = l_3 + v_3,$$

$$F = (l_4 + v_4) - (l_6 + v_6).$$

于是 $f_3 = +1$, 其他 f 均为零。

$f'_4 = +1$, $f'_6 = -1$, 其他 f' 均为零, 故条件方程式之系数可列表于下:

$1/p$	3.1	9.3	59.7	6.2	16.1	35.1	12.1	9.3		
号　数	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	w	$=0$
1	-1	$+1$		-1					-3	$=0$
2				$+1$	-1		-1		-34	$=0$
3					$+1$	-1		-1	-7	$=0$
4	$+1$		-1			$+1$			$+71$	$=0$
S		$+1$	-1				-1	-1	$+27$	$=0$
f			$+1$							
f'				$+1$		-1				

由此列出法方程式及其附項 $\left[\frac{af}{p}\right]$, $\left[\frac{af'}{p}\right]$, 等列于 f 及 f' 之下:

	f	f'
$18.6k_1 - 6.2k_2 + 0\ k_3 - 3.1k_4 - 3 = 0$	0	-6.2
$-6.2k_1 + 34.4k_2 - 16.1k_3 + 0\ k_4 - 34 = 0$	0	$+6.2$
$-0\ k_1 - 16.1k_2 + 60.5k_3 - 35.1k_4 - 7 = 0$	0	$+35.1$
$-3.1k_1 + 0\ k_2 - 35.1k_3 + 97.9k_4 + 71 = 0$	-59.7	-35.1
$+9.3k_1 + 12.1k_2 + 9.3k_3 + 59.7k_4 + 27 = 0$	-59.7	0

最末行乃用以檢核計算之有無錯誤。法方程式之解算,用高斯約化法,列表如下:

					f	f′	
+18.6 k_1	− 6.2 k_2	+ 0. k_3	− 3.1 k_4	− 3=0	0	− 6.2	
1	− 0.33333		− 0.16667	−0.16129=0		− 0.33333	
	+34.4 k_2	−16.1 k_3	+ 0 k_4	− 34=0	0	+ 6.2	
	− 2.0666		− 1.0333	− 1=0		− 2.0667	
		+60.5 k_3	−35.1 k_4	− 7=0	0	+35.1	(A)
			+97.9 k_4	+ 71=0	−59.7	−35.1	
			−0.5167	−0.5	0	− 1.0333	
+ 9.3 k_1	+12.1 k_2	+ 9.3 k_3	+59.7 k_4	+ 27=0	−59.7	0	
− 9.3	+ 3.1000		+ 1.5500	+1.5	0	+ 3.1	

				f	f′	
+32.3334 k_2	−16.1 k_3	− 1.0333 k_4	−35.0000 =0	0	+ 4.1333	
	− 0.49794	− 0.03196	− 1.08247=0		+ 0.12784	
	+60.5 k_3	−35.1 k_4	− 7.0000 =0	0	+35.1	(B)
	− 8.0108	− 0.5145	−47.4278 =0		+ 2.0582	
		+97.3833 k_4	+70.5 =0	−59.7	−36.1333	
		− 0.0330	− 1.1185	0	+ 0.1321	
+15.2000 k_2	+ 9.3 k_3	+61.2500 k_4	+28.5 =0	−59.7	+ 3.1	
−15.2000	+ 7.5687	+ 0.4858	+16.4535 =0	0	− 1.9432	

			f	f′	
+52.4832 k_3	−35.6145 k_4	−24.4278 =0	0	+37.1582	
1	− 0.67859	− 0.46544=0	0	+ 0.70802	
	+97.3503 k_4	+69.3815 =0	−59.7	−36.0012	(C)
	−24.1676	−16.5764	0	+25.2150	
+16.8687 k_3	+61.7358 k_4	+44.9535 =0	−59.7	+ 1.1568	
−16.8687	+11.4469	+ 7.8514 =0	0	−11.9430	

		f	f′	
+73.1827 k_4	+52.8051=0	−59.7	−10.7862	
1	+ 0.7222=0	− 0.81576	− 0.14739	(D)
+73.1827 k_4	+52.8051=0	−59.7	−10.7862	

于是求得各繫数之值:

$$k_1 = +0.3900; \qquad k_3 = -0.0246;$$

$$k_2 = +1.0471; \qquad k_4 = -0.7222.$$

以所得結果代入(A)式之总和式内,若計算無誤,則 $9.3k_1+12.1k_2+9.3k_3+59.7k_4$ 应等于-27;現得 27.05,已足証明計算無誤矣。由 k 計算改正数 V_i,尙可利用条件方程式系数表,于各行乘以相当之 k,列成下表:

繫数 \ 改正数	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
k_1	-0.3900	$+0.3900$		-0.3900				
k_2				$+1.0471$	-1.0471		-1.0471	
k_3					-0.0246	$+0.0246$		$+0.0246$
k_4	-0.7222		$+0.7222$			-0.7222		
和	-1.1122	$+0.3900$	$+0.7222$	$+0.6571$	-1.0717	-0.6976	-1.0471	$+0.0246$
$\frac{1}{p}$	3.1	9.3	59.7	6.2	16.1	35.1	12.1	9.3
改正数值	-3.45	$+3.63$	$+43.12$	$+4.07$	-17.25	-24.49	-12.67	$+0.23$

由此得

$$[pvv] = 87.98,$$

檢核之計算为:

$$[pvv] = -[wk] = +87.88$$

两相符合,故每公里之中誤差为:

$$m = \pm\sqrt{\frac{87.88}{4}} = \pm 4.7 \text{ 公厘。}$$

玆加改正数于观测值,得平差值如下:

$$l_1+v_1 = 189.4005; \qquad l_5+v_5 = 273.5107;$$

$$l_2+v_2 = 736.9806; \qquad l_6+v_6 = 187.2495;$$

$$l_3+v_3 = 376.6501; \qquad l_7+v_7 = 294.0693;$$

$$l_4+v_4 = 547.5801; \qquad l_8+v_8 = 86.2612.$$

最后將平差值代入上述之条件方程式，其結果必須符合所需之条件，是为整个平差計算之檢核。

$$-189.4005-547.5801+736.9806=0;$$

$$+547.5801-273.5107-274.0693=0.1;$$

$$+273.5107-187.2495-\ 86.2612=0;$$

$$+189.4005-376.6501+187.2495=-0.1\text{ 公厘}.$$

第二及第四条件方程式內之小差異 0.1 公厘，乃由于計算时四捨五入所致，此項結果与用間接观測法平差所得之結果相符。

至于 F 及 F' 之中誤差，乃由公式(56)計算之，式內分 I 及 II 兩部，茲分别求之，然后計算权之倒数。

$$\mathrm{I}=\left[\frac{ff}{p}\right]=\Big\{(+1)\cdot(+1)\Big\}\,59.7=59.7;$$

$$\mathrm{I}'=\left[\frac{f'f'}{p}\right]=\Big\{(+1)^2\cdot 6.2+(-1)^2\cdot 35.1\Big\}=41.3;$$

$$\mathrm{II}=\frac{(-59.7)^2}{73.1827}=59.7\times 0.81576=48.7;$$

$$\mathrm{II}'=\frac{(-6.2)^2}{18.6}+\frac{(4.1333)^2}{32.3334}+\frac{(37.1582)^2}{52.4832}+\frac{(-10.7862)^2}{73.1827}=$$

$$=6.2\times 0.3333+4.1333\times 0.12784+37.1582\times 0.70802+$$

$$+10.7862\times 0.14739=30.49.$$

故 $\left[\frac{FF}{p}\right]=59.7-48.7=11.0;\quad \left[\frac{F'F'}{p}\right]=41.3-30.5=10.8.$

此二値亦可以附加 $\left[\frac{ff}{p}\right]$ 及 $\left[\frac{f'f'}{p}\right]$ 于法方程式之后，而直接約化求得之。

$$m_F^2=m^2\cdot 11.0;$$

$$m_F=\pm 4.7\sqrt{11.0}=\pm 15.6\text{ 公厘};$$

$$m_{F'}^2=m^2\cdot 10.8;$$

$$m_{F'}=\pm 4.7\times\sqrt{10.8}=\pm 15.5\text{ 公厘}。$$

上得之中誤差与前章十三節之結果 15.6 公厘及 15.4 公厘亦相符合。

第五節　应用問題举例

1．測站平差

此項問題之条件方程式原系一次函数，故其約化方法不再詳論。所应注意者，在如何列出条件方程式，蓋此式成立之后，其他不难循法而行之。

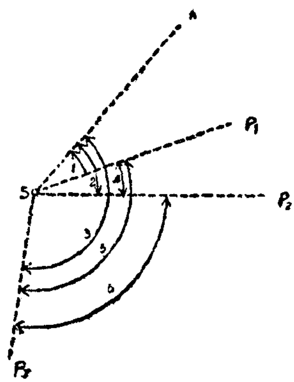

圖 5.7

例 1：

已知：方向角 (SA)（圖 5.7）.

观测角度：$\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \cdots \alpha_6'$.

求：方向角 (SP_1), (SP_2) 及 (SP_3)。

解出：$n=6$, $u=3$;

条件方程式数目 $=6-3=3$.

設 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_6$ 为諸角度之平差值，于是得三条件方程式如下：

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_4&=\alpha_2;\\ \alpha_1+\alpha_5&=\alpha_3;\\ \alpha_2+\alpha_6&=\alpha_3.\end{aligned}\right\}\quad \text{或}\quad \left.\begin{array}{lllll}\alpha_1-\alpha_2 & & +\alpha_4 & & =0;\\ \alpha_1 & -\alpha_3 & & +\alpha_5 & =0;\\ & \alpha_2-\alpha_3 & & +\alpha_6 & =0.\end{array}\right\}$$

例 2：

已知：方向角 (SA), (SB) 及 (SC)（圖 5.8）.

观测角度：$\alpha_1', \alpha_2', \cdots \alpha_6'$,

求：方向角 (SP_1) 及 (SP_2).

解出：$n=6$, $u=2$,

条件方程式数目 $=6-2=4$.

設 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_6$ 为諸角度之平差值，于是得下列四条件方程式：

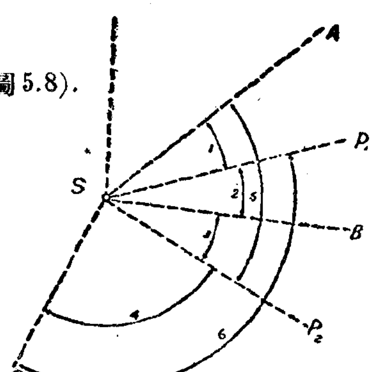

圖 5.8

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3&=\alpha_5;\\
\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4&=\alpha_6;\\
\alpha_1+\alpha_2\qquad&=(SB)-(SA);\\
\alpha_3+\alpha_4\qquad&=(SC)-(SB).
\end{aligned}\right\}$$

或

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\quad-\alpha_5\quad&=0;\\
\alpha_2+\alpha_3+\alpha\quad-\alpha_6&=0;\\
\alpha_1+\alpha_2\qquad-\{(SB)-(SA)\}&=0;\\
+\alpha_3+\alpha_4\quad-\{(SC)-(SB)\}&=0.
\end{aligned}\right\}$$

2. 高程網平差

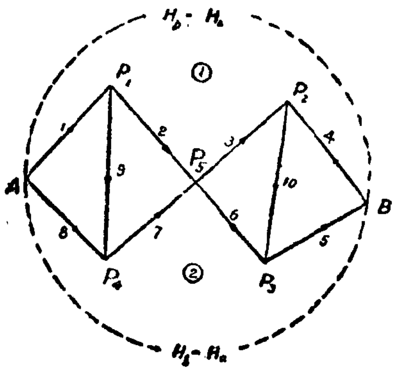

圖 5.9

例 1:

已知：圖 5.9 上 A 及 B 二点之海拔 H_a 及 H_b。

观测之高程差：$h'_1, h'_2, \cdots h'_{10}$.

求：$P_1, P_2, \cdots P_5$ 五点之海拔。

解出：$n=10,\ u=5$;

条件方程式之数目

$$=10-5=5.$$

設 $h_1, h_2, \cdots h_{10}$ 为平差后之高程差，于是得下列五条件方程式：

$$\left.\begin{aligned}
h_1+h_2+h_3+h_4-(H_b-H_a)&=0;\\
h_5+h_6+h_7+h_8-(H_b-H_a)&=0;\\
h_1+h_9-h_8\qquad&=0;\\
h_2-h_7-h_9\qquad&=0;\\
h_3+h_{10}-h_6\qquad&=0.
\end{aligned}\right\}$$

或

$$\left.\begin{aligned}
h_1+h_2+h_3+h_4\qquad\qquad-(H_b-H_a)&=0;\\
+h_5+h_6+h_7+h_8-(H_b-H_a)&=0;\\
h_1\qquad\qquad-h_8+h_9\qquad&=0;\\
h_2\qquad\quad-h_7\quad-h_9\qquad&=0;\\
h_3\quad-h_6\qquad\quad+h_{10}\quad&=0.
\end{aligned}\right\}$$

3. 三距离定点法

例 1:

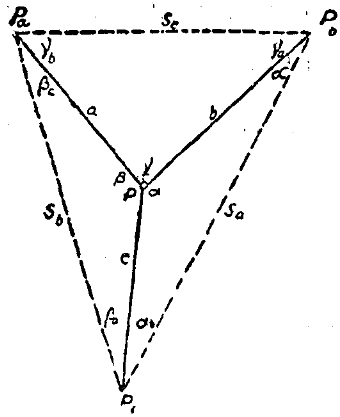

圖 5.10

已知: P_a, P_b, P_c 三点之坐标 (x_a, y_a), (x_b, y_b) 及 (x_c, y_c) (圖 5.10)。

观測之距离: a', b' 及 c'。

求: P 点之坐标.

解出: $n=3$, $u=2$;

条件方程式之数目 $=3-2=1$.

設三角形 PP_bP_c, PP_cP_a 及 PP_aP_b 之平差面積为 F'_a, F'_b 及 F'_c, 而已知三角形 $P_aP_bP_c$ 之面積为 F, 故条件方程式为:

$$F'_a+F'_b+F'_c-F=0, \tag{a}$$

上式內之 F 等于

$$F=\sqrt{S(S-S_a)(S-S_b)(S-S_c)}, \quad S=\frac{S_a+S_b+S_c}{2};$$

S_a, S_b 及 S_c 系由 P_a, P_b 及 P_c 之坐标求之。設 a, b 及 c 与 α, β 及 γ 为平差后之距离及角度。

$$2F'_a=bc\sin\alpha,\ 2F'_b=ca\sin\beta\ \text{及}\ 2F'_c=ab\sin\gamma.$$

以之代入(a), 乃得

$$bc\sin\alpha+ca\sin\beta+ab\sin\gamma-2F=0. \tag{b}$$

复令 v_a, v_b, v_c 与 $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$ 为距离 a', b', c' 及 α, β, γ 之改正数, 于是

$$a=a'+v_a, \quad b=b'+v_b, \quad c=c'+v_c;$$

$$\alpha=\alpha'+v_\alpha, \quad \beta=\beta'+v_\beta, \quad \gamma=\gamma'+v_\gamma.$$

故公式(b)变成

$$(b'+v_b)(c'+v_c)\sin(\alpha'+v_\alpha)+(c'+v_c)(a'+v_a)\sin(\beta'+v_\beta)+$$
$$+(a'+v_a)(b'+v_b)\sin(\gamma'+v_\gamma)-2F=0.$$

依泰罗定理展开，捨去高次因数項而不論，得

$$(b'c'\sin\alpha'+c'a'\sin\beta'+a'b'\sin\gamma'-2F)+(b'\sin\gamma'+c'\sin\beta')v_a+$$
$$+(c'\sin\alpha'+a'\sin\gamma')v_b+(a'\sin\beta'+b'\sin\alpha')v_c+b'c'\cos\alpha'\frac{v_\alpha}{\rho}+$$
$$+c'a'\cos\beta'\frac{v_\beta}{\rho}+a'b'\cos\gamma'\frac{v_\gamma}{\rho}=0. \qquad \text{(c)}$$

因拟以 v_a, v_b, v_c 表示 $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$，故令

$$S_a^2=b'^2+c'^2-2b'c'\cos\alpha',\ \cos\alpha'=\frac{b'^2+c'^2-S_a^2}{2b'c'}.$$

經过相当約化后得：

$$-\sin\alpha'\frac{v_\alpha}{\rho}=\frac{b'^2-c'^2+S_a^2}{2b'^2c'}v_b+\frac{c'^2-b'^2+S_a^2}{2b'c'^2}v_c,$$

或
$$\frac{v_\alpha}{\rho}=\frac{c'\cos\alpha'-b'}{b'c'\sin\alpha'}v_b+\frac{b'\cos\alpha'-c'}{b'c'\sin\alpha'}v_c.$$

同理可得

$$\frac{v_\beta}{\rho}=\frac{a'\cos\beta'-c'}{c'a'\sin\beta'}v_c+\frac{c'\cos\beta'-a'}{c'a'\sin\beta'}v_a,$$

及
$$\frac{v_\gamma}{\rho}=\frac{b'\cos\gamma'-a'}{a'b'\sin\gamma}v_a+\frac{a'\cos\gamma'-b'}{a'b'\sin\gamma'}v_b.$$

公式(c)倘須簡化，α 由 S_a, b' 及 c' 計算，β 由 S_b, c' 及 a' 計算，γ 則由 S_c, a' 及 b' 計算，故三角形三部之观測面積为：

$$b'c'\sin\alpha'=2\sqrt{S_1(S_1-S_a)(S_1-b')(S_1-c')}=2F_a,\ S_1=\frac{S_a+b'+c'}{2};$$

$$c'a'\sin\beta'=2\sqrt{S_2(S_2-S_b)(S_2-c')(S_2-a')}=2F_b,\ S_2=\frac{S_b+c'+a'}{2};$$

$$a'b'\sin\gamma'=2\sqrt{S_3(S_3-S_c)(S_3-a')(S_3-b')}=2F_c,\ S_3=\frac{S_c+a'+b}{2}.$$

于是得最后之簡方程式：

$$Av_a+Bv_b+Cv_c+w=0. \qquad \text{(d)}$$

式(d)中之

$w=2\{(F_a+F_b+F_c)-F\}$;

$A=b'\sin\gamma'+c'\sin\beta'+(c'\cos\beta-a')\operatorname{ctg}\beta'+(b'\cos\gamma'-a')\operatorname{ctg}\gamma'$;

$B=c'\sin\alpha'+a'\sin\gamma'+(a'\cos\gamma-b')\operatorname{ctg}\gamma'+(c'\cos\alpha'-b')\operatorname{ctg}\alpha'$;

$C=a'\sin\beta'+b'\sin\alpha'+(b'\cos\alpha'-c')\operatorname{ctg}\alpha'+(a'\cos\beta'-c')\operatorname{ctg}\beta'$.

4. 三角形条件平差

三角形之平差前曾論及，本節所拟研究者为条件平差。設三角形(圖 5.11)之三角均曾观測其权相等，而观測之結果各为 l_1, l_2 及 l_3。

更設三角之未知数为 x_1, x_2, x_3，于是得条件方程式：

$$-180°+x_1+x_2+x_3=0; \qquad (a)$$

以观測値 l 代替 x 以后，上式將不复等于 0，而得差 w，是卽

$$-180°+l_1+l_2+l_3=w; \qquad (b)$$

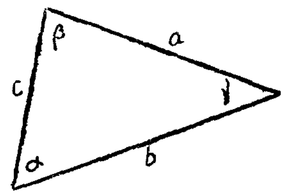

圖 5.11

故以改正数 v 表示之条件方程式当为：

$$v_1+v_2+v_3+w=0. \qquad (c)$$

由是所得法方程式之系数为：

$$\left[\frac{aa}{p}\right]=3;$$

其他各系数均为零，其法方程式为：

$$3k+w=0,$$

解之，得
$$k=-\frac{w}{3}.$$

于是得改正数：

$$v_1=-\frac{w}{3},\quad v_2=-\frac{w}{3},\quad v_3=-\frac{w}{3}.$$

平差角值

$$x_1=l_1-\frac{w}{3},\quad x_2=l_2-\frac{w}{3},\quad x_3=l_3-\frac{w}{3}.$$

每一观測权單位之中誤差，卽平差前之中誤差为：

$$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{1}}=\sqrt{\frac{3w^2}{9}}=\pm\frac{w}{\sqrt{3}}.$$

函数 $F=l_1+v_1$ 之权卽三角平差后之权，因其系数甚屬簡單，卽

$$f_1=1,\qquad f_2=0,\qquad f_3=0.$$

故 $$\left[\frac{af}{p}\right]=1,\quad \left[\frac{bf}{p}\right]=0,\quad \left[\frac{cf}{p}\right]=0,\quad \left[\frac{ff}{p}\right]=1.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{P}=\left[\frac{ff}{p}\right]-\left\{\frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\right\}$$

$$=1-\frac{1^2}{3}=\frac{2}{3},\quad P=\frac{3}{2}.$$

故經过平差改正后，每个角度値之权由 1 增至 $\frac{3}{2}$，其意义可解釋如下：倘僅观測两角度，第三角度由巳观測两角度計算之，則观測之角度每个权为 1，推算之角度根据誤差傳播定律应为 $\frac{1}{2}$，倘三角度均用同样精度观測而施以平差，則平差后三角度之权均为 $\frac{3}{2}$，此为多余观測对于結果精度增加之影响。

以上所論者僅观測三角形內之三角，若于三角之外倘測三边長度，則平差情形將与上述者不同。茲設其边長之观測値为 a', b', c'，角度之观測値各为 α', β', γ'，而命相当之平差値各为 a, b, c 与 α, β, γ（圖 5.12），則

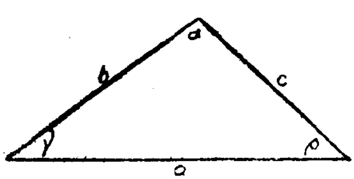

圖 5.12

$$a=a'+v_a,\qquad \alpha=\alpha'+v_\alpha,$$
$$b=b'+v_b,\qquad \beta=\beta'+v_\beta,$$
$$c=c'+v_c;\qquad \gamma=\gamma'+v_\gamma.$$

按一三角形可由一边長与二角完全決

定，今共测六量，故其条件有三，即

$$\text{(I)}\qquad \alpha+\beta+\gamma=180^\circ;$$

$$\text{(II)}\qquad \frac{b}{a}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha};$$

$$\text{(III)}\qquad \frac{c}{a}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

其角度条件方程式(I)可改化为：

$$v_\alpha+v_\beta+v_\gamma+w_1=0.$$

至于式(II)及(III)系非一次函数，解出以前，須用泰罗公式化成一次函数，由(II)

$$a\sin\beta-b\sin\alpha=0,$$

得：

$$(a'\sin\beta'-b'\sin\alpha')+\sin\beta' v_a-\sin\alpha' v_b+$$
$$+a'\cos\beta' v_\beta-b'\cos\alpha' v_\alpha=0; \qquad \text{(d)}$$

$$-\frac{b'}{\rho}\cos\alpha' v_\alpha+\frac{a'}{\rho}\cos\beta' v_\beta+\sin\beta' v_a-\sin\alpha' v_b+w_2=0.$$

同理得条件(III)演化之結果为：

$$-\frac{c'}{\rho}\cos\alpha' v_\alpha+\frac{a'}{\rho}\cos\gamma' v_\gamma+\sin\gamma' v_a-\sin\alpha' v_c+w_3=0.$$

各边長改正数之單位为公厘，故上述条件方程式之計算，亦用同一單位。玆举实例說明之。

設观测值为：

$$\alpha'=28^\circ12'52'',\qquad a'=79.306,$$
$$\beta'=136^\circ03'05'',\qquad b'=116.406,$$
$$\gamma'=14^\circ43'55'';\qquad c'=45.501.$$

而其中誤差为：

$$m_\alpha=m_\beta=m_\gamma=\pm 7'',$$

$m_a=\pm 8$ 公厘，　$m_b=\pm 12$ 公厘，　$m_c=\pm 5$ 公厘。

各观测值之权乃与中誤差之平方成反比，故可逕行求之。为謀計

算之便利，假定各中誤差之平方均成一整数。

$$m_\alpha^2 = m_\beta^2 = m_\gamma^2 = 50,$$

$$m_a^2 = 75, \quad m_b^2 = 150, \quad m_c^2 = 25.$$

$$p_a = \frac{1}{3}, \quad p_b = \frac{1}{6}, \quad p_c = 1, \quad p_\alpha = p_\beta = p_\gamma = \frac{1}{2}.$$

条件方程式：

$$v_\alpha + v_\beta + v_\gamma + w_1 = 0;$$

$$-\frac{b}{\rho}\cos\alpha' v_\alpha + \frac{a'}{\rho}\cos\beta' v_\beta + \sin\beta' v_a - \sin\alpha' v_b + w_2 = 0;$$

$$-\frac{c'}{\rho}\cos\alpha' v_\alpha + \frac{a'}{\rho}\cos\gamma' v_\gamma + \sin\gamma' v_a - \sin\alpha' v_c + w_3 = 0.$$

其中：

$a' = 4.899306,$	$b' = 5.065975;$	$a' = 4.8993;$	$b' = 5.0660;$
$\sin\beta' = 9.841368$	$\sin\alpha' = 9.674653$	$\cos\beta' = 9.8575(n)$	$\cos\alpha' = 9.9451$
4.740674	4.740628	$1/\rho = 4.6856$	$1/\rho = 4.6856$
+55039.4 公厘	−55033.6 公厘	9.4422(n)	9.6967
		−0.277	+ 0.497

$$\sin\alpha' = +0.473;$$

$$\sin\beta' = +0.604;$$

$$w_2 = +5.8 \text{ 公厘。}$$

第一条件方程式甚为簡單，各系数均等于 1，故

$$+1.00 v_\alpha + 1.00 v_\beta + 1.00 v_\gamma - 8.0 = 0;$$

第二条件方程式为：

$$-0.50 v_\alpha - 0.28 v_\beta + 0.69 v_a - 0.47 v_b + 5.8 = 0;$$

类似方法可求第三条件方程式，得

$$-0.19 v_\alpha + 0.37 v_\gamma + 0.27 v_a - 0.47 v_c - 8.8 = 0.$$

三条件方程式之系数可列成一表：

	v_α	v_β	v_γ	v_a	v_b	v_c	w
$\frac{1}{p}$	2	2	2	3	6	1	
a	+1.00	+1.00	+1.00				−8.0
b	−0.50	−0.28		+0.69	−0.47		+5.8
c	−0.19		+0.37	+0.27		−0.47	−8.8

繫数方程式之系数乃由上表內求出，其結果如下：

$$6.00k_1-1.56k_2+0.36k_3-\ \ 8.0=0$$
$$-1.56k_1+3.42k_2+0.75k_3+\ \ 5.8=0$$
$$+0.36k_1+0.75k_2+0.78k_3-\ \ 8.8=0$$
$$\overline{4.80k_1+2.61k_2+1.89k_3-11.0=0}$$

解出：

$$k_1=-1.33,\quad k_2=-6.17,\quad k_3=+17.67.$$

改正数：

$v_\alpha=-3.22''$,　　$v_\beta=+0.80''$,　　$v_\gamma=+10.42''$,

$v_a=+1.54$ 公厘，$v_b=+17.40$ 公厘，$v_c=-8.30$ 公厘。

各平差值为：

$\alpha'+v_\alpha=\ \ 28°12'48.78''$　　$a+v_a=\ \ 79.3075$ 公尺。

$\beta'+v_\beta=136°03'05.80''$　　$b+v_b=116.4234$ 公尺。

$\gamma'+v_\gamma=\ \ 15°44'05.42''$　　$c+v_c=\ \ 45.4927$ 公尺。

$\overline{180°00'00.00''}$

計算是否無誤，必須檢核，將平差值代入条件方程式，其結果应無差数存在，如

$$a'=4.899314 \qquad b'=5.066041$$
$$\sin\beta'=9.841366 \qquad \sin\alpha'=9.674640$$
$$\overline{4.740680} \qquad \overline{4.740681}$$
$$a'=4.899314 \qquad c'=4.657942$$
$$\sin\gamma'=9.436266 \qquad \sin\alpha'=9.674640$$
$$\overline{4.332580} \qquad \overline{4.332582}$$

差数均在对数第六位，而最大者为 2，故其結果可称准确。改正数之平方和系直接由 v 求出得$[pvv]=179.93$，而檢核則用公式$[pvv]=-[wk]$。

$$[pvv]=-[wk]=180.65.$$

权單位之中誤差为：

$$m=\pm\sqrt{\frac{179.93}{3}}=\pm 7.75.$$

函数 $F=\alpha+v_\alpha$ 之权亦可求出，因

$$f_1=1,\quad f_2=f_3=0,$$

故 $$\left[\frac{af}{p}\right]=2,\quad \left[\frac{bf}{p}\right]=-1,\quad \left[\frac{cf}{p}\right]=-0.38.$$

于是按公式：

$$\frac{1}{P}=\left[\frac{ff}{p}\right]-\left\{\frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}+\frac{\left[\frac{bf}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}+\frac{\left[\frac{cf}{p}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}\right\},$$

因解算法方程式时曾順帶求出$\left[\frac{af}{p}\right]=2$, $\left[\frac{bf}{p}\cdot 1\right]=0.48$, $\left[\frac{cf}{p}\cdot 2\right]=0.37$

故

$$\frac{1}{P}=2-\left\{\frac{2^2}{6}+\frac{0.48^2}{3}+\frac{0.37^2}{0.52}\right\}=2-(0.66+0.07+0.26)=$$
$$=2-0.99=1.01,$$

$$\therefore\quad P=0.99.$$

上值系平差后之权，若与平差前之权 $p_\alpha=\frac{1}{2}$ 相比，適增一倍。

第六節 分組平差法

条件观測之平差，有时可用分組法行之。設有条件方程式多个，先取其中之一部独自計算，由此求得相当之繫数值 k'，及各观測值改正

数 v'。將此初步改正后之观测値代入各条件方程式內，再度求繫数値 k''，及各改正数 v''，則就一般而論，可以証明下列关系：

$$k_i' + k_i'' = k_i, \qquad v_i' + v_i'' = v_i.$$

k_i 与 v_i 为全体平差时之繫数値及改正数値。玆推演如下：設有条件方程式三个如下：

$$\left.\begin{aligned} a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 + w_1 = 0, \\ b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 + b_4v_4 + w_2 = 0, \\ c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 + w_3 = 0; \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

其法方程式为：

$$\left.\begin{aligned} [aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 + w_1 = 0, \\ [ab]k_1 + [bb]k_2 + [bc]k_3 + w_2 = 0, \\ [ac]k_1 + [bc]k_2 + [cc]k_3 + w_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

第一次約化之法方程式为：

$$\left.\begin{aligned} [bb\cdot1]k_2 + [bc\cdot1]k_3 + [w_2\cdot1] = 0, \\ [bc\cdot1]k_2 + [cc\cdot1]k_3 + [w_3\cdot1] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

各改正数为：

$$\left.\begin{aligned} v_1 = a_1k_1 + b_1k_2 + c_1k_3, \\ v_2 = a_2k_1 + b_2k_2 + c_2k_3, \\ v_3 = a_3k_1 + b_3k_2 + c_3k_3, \\ v_4 = a_4k_1 + b_4k_2 + c_4k_3. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

以上無庸解釋。今設用分組平差法，先取出第一条件方程式独自列成法方程式如下：

$$[aa]k_1' + w_1 = 0, \quad k_1' = -\frac{w_1}{[aa]} \tag{70}$$

及

$$v_1' = a_1k_1', \quad v_2' = a_2k_1', \quad v_3' = a_3k_1', \quad v_4' = a_4k_1'. \tag{71}$$

將(70)及(71)代入原有之条件方程式內，幷命

$$v_1 = v_1' + v_1'', \quad v_2 = v_2' + v_2'', \cdots \tag{72}$$

卽得

$$\left.\begin{aligned}&a_1v_1''+a_2v_2''+a_3v_3''+a_4v_4''+\quad 0\quad=0;\\&b_1v_1''+b_2v_2''+b_3v_3''+b_4v_4''+[w_2\cdot 1]=0;\\&c_1v_1''+c_2v_2''+c_3v_3''+c_4v_4''+[w_3\cdot 1]=0.\end{aligned}\right\}\qquad(73)$$

由(73)組成法方程式，卽为

$$\left.\begin{aligned}&[aa]k_1''+[ab]k_2''+[ac]k_3''\qquad\qquad=0;\\&[ab]k_1''+[bb]k_2''+[bc]k_3''+[w_2\cdot 1]=0;\\&[ac]k_1''+[bc]k_2''+[cc]k_3''+[w_3\cdot 1]=0.\end{aligned}\right\}\qquad(74)$$

一次約化之后为：

$$\left.\begin{aligned}&[bb\cdot 1]k_2''+[bc\cdot 1]k_3''+[w_2\cdot 1]=0;\\&[bc\cdot 1]k_2''+[cc\cdot 1]k_3''+[w_3\cdot 1]=0.\end{aligned}\right\}\qquad(75)$$

將(75)与(68)比較，卽知

$$k_2''=k_2,\qquad k_3''=k_3.$$

由(67)之第一式与(74)之第一式比較，又可得

$$k_1'+k_1''=k_1,$$

是以由分組作两次平差所得之結果，与一次全体平差之結果無異。

根据上述之理論，可更進一步設想將条件方程約化，由此第一法方程式卽可独立。今設將(66)之第一式用 $-\dfrac{[ab]}{[aa]}$ 及 $-\dfrac{[ac]}{[aa]}$ 乘之，分别加于第二第三两式內，卽得約化之条件方程如下：

$$\left.\begin{aligned}&a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4+\quad w_1\quad=0;\\&b_1'v_1+b_2'v_2+b_3'v_3+b_4'v_4+[w_2\cdot 1]=0;\\&c_1'v_1+c_2'v_2+c_3'v_3+c_4'v_4+[w_3\cdot 1]=0.\end{aligned}\right\}\qquad(76)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&b'=b-\frac{[ab]}{[aa]}a,\qquad\qquad c'=c-\frac{[ca]}{[aa]}a;\\&[w_2\cdot 1]=w_2-\frac{[ab]}{[aa]}w_1,\quad [w_3\cdot 1]=w_3-\frac{[ac]}{[aa]}w_1.\end{aligned}\right\}\qquad(77)$$

由約化条件方程可組成之法方程式，遂为

$$\left.\begin{aligned}&[aa]k_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + w_1 \qquad = 0;\\ &\qquad [b'b']k_2+[b'c']k_3+[w_2\cdot 1]=0;\\ &\qquad [b'c']k_2+[c'c']k_3+[w_3\cdot 1]=0.\end{aligned}\right\}\tag{78}$$

是以第一法方程式已与第二法方程式分开，改正数之公式为：

$$v_1=a_1k_1+b_1'k_2+c_1'k_3,$$
$$v_2=a_2k_1+b_2'k_2+c_2'k_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

約化条件方程式，与間接观測中之約化改正数方程式相当，故其应用亦以第一条件方程式內各系数均为 1 时为最便利。 在普通情形下，幷無使計算工作減少之处。設

$$a_1=a_2=\cdots=1,$$

則(77)各式变为：

$$\left.\begin{aligned}&b'=b-\frac{[b]}{n}, \qquad\qquad c'=c-\frac{[c]}{n};\\ &[w_2\cdot 1]=w_2-\frac{[b]}{n}w_1, \quad [w_3\cdot 1]=w_3-\frac{[b]}{n}w_1.\end{aligned}\right\}\tag{77)*}$$

n 为观測値之数目，計算甚为簡單也。 此种情形見于導綫平差时，其第一条件为折角和之方程，二三两条件为坐标閉合之条件。

除上述之分組平差法外，尙有克里格尔之分組平差法，利用所謂改組之条件方程式，其理論將于第十章中詳述之，因其为博尔茲擴展式之導源也。

第七節　最適当之权分配

此問題之起源，始于史賴伯，当其測哥廷根基綫網时，欲將各測站上角度观測之次数，作最合理之分配，以期求得最適当之擴大边長。按

其理論可用于各种观测，非僅限于三角測量，故于此处用普遍形式証明之。

普遍之"最適当之权分配"問題可如下述之：設以观測之方法，求定多个观測値之一函数值，在此多个观測量之間，有条件方程存在，今欲給予不同之观測量以不同之观測次数或权，以期所得函数之权为最大，但同时观測次数或权之总和应等于一固定値，問題即在各观測之权应作如何分配，始能达到此目的也。

如以基綫網为例，此問題可具体言之如下：由观測基綫網中之角度以求基綫擴大边之長度，設所有角度总共观測之組数为一定数时，則每个角度各应观測若干組，始能达到所得基綫擴大边之权数为最大之目的？

今自普遍之公式解此問題，根据第四節之式(38)，一函数 F 之权倒数为：

$$\frac{1}{P_F}=\left[\frac{FF}{p}\right],$$

今命之为 y，其値应为：

$$y=\frac{1}{P_F}=\frac{F_1^2}{p_1}+\frac{F_2^2}{p_2}+\cdots+\frac{F_n^2}{p_n}. \tag{79}$$

此权之倒数 y 应为最小，則函数之权为最大。但除此之外，尙須顧及另一条件，即各观測値之权之和应为一定量：

$$[p]=p_1+p_2+\cdots+p_n=S=\text{常数}, \tag{80}$$

因各 p 必須为正数，故最好以某数之平方代之，今称之为 x^2，則

$$p_1=x_1^2,\quad p_2=x_2^2,\cdots p_n=x_n^2.$$

欲解此問題，可將最小条件列出：

$$\left[\frac{FF}{x^2}\right]+\lambda([x^2]-S)=\text{最小值}, \tag{81}$$

λ 为一尙屬未定之常数。將(81)依 $x_1, x_2\cdots$ 微分，即得

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{F_1^2}{x_1^4}-\lambda\right)x_1=0;\\&\left(\frac{F_2^2}{x_2^4}-\lambda\right)x_2=0;\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\&\left(\frac{F_n^2}{x_n^4}-\lambda\right)x_n=0.\end{aligned}\right\}\tag{82}$$

欲满足式(82)之关系，可有两途，

即　(1)　$\frac{F^2}{x^4}=\lambda$，　或　(2)　$x=0$；

仍以 p 代 x^2，则为

$$\frac{F_i}{p_i}=\sqrt{\lambda}, \quad 或 \quad p_i=0. \tag{83}$$

初視之，至此則各 p_i 之值似已可由前一式決定，然实际并非如此簡單。蓋各 F_i 之值与各 p_i 之值有关系，由第四節中 F_i 公式之導出卽可明悉。此处可將第四節之(51)及(52)两式展开如下：

$$\left.\begin{aligned}&\left[\frac{aF}{p}\right]=\frac{F_1}{p_1}a_1+\frac{F_2}{p_2}a_2+\cdots+\frac{F_n}{p_n}a_n=0;\\&\left[\frac{bF}{p}\right]=\frac{F_1}{p_1}b_1+\frac{F_2}{p_2}b_2+\cdots+\frac{F_n}{p_n}b_n=0;\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\&\left[\frac{rF}{p}\right]=\frac{F_1}{p_1}r_1+\frac{F_2}{p_2}r_2+\cdots+\frac{F_n}{p_n}r_n=0.\end{aligned}\right\}共\ r\ 个。\tag{84}$$

此式示吾人以另一事实：卽 n 个 $\frac{F_i}{p_i}$ 中，最多僅能有 $n-r$ 个取任意之値，而其余之 r 个則可由此联立方程式求出。根据式(83)之两种情形，可以想像假定 $n-r$ 个 $\frac{F_i}{p_i}$ 値为 $\sqrt{\lambda}$ 代入式(84)后，求得其他 r 个 $\frac{F_i}{p_i}$ 之値，此后求出之 $\frac{F_i}{p_i}$ 値定不能等于 $\sqrt{\lambda}$。此时可取式(82)之第二种情形，卽 $p_i=0$。蓋 $p_i=0$ 时，F_i 亦等于零，$\frac{F_i}{p_i}=\frac{0}{0}$，为一不定数，固

可視之与由式(84)求出之値相等。所謂 $p=0$ 者，卽不观測該量之謂也。是以在可能观測之 n 个观測量中，如欲求得最適当之权分配，应僅观測其中之 $n-r$ 个量，其权数照 $p_i=\frac{F_i}{\sqrt{\lambda}}$ 之律以分配之。至于此外之 r 个量，則根本可不必观測。r 旣为条件方程之数目，是以 $n-r$ 適为足以解決此問題所必須之最少观測量数目。故上述結果亦可云：欲求得最適当之权分配，应僅观測適足以解決此問題之各量，而無需多余观測。

以上僅为史賴伯"最適当之权分配定律"之一部，蓋問題至此尙未解決，因由可能观測之 n 个量中，选出 $n-r$ 个实际观測之量，可有多种不同之方法，而此处所須知者，卽为如何始能选出最適宜之 $n-r$ 个量。关于此点，尙無簡捷确定之法，僅能用逐漸接近法求之。先假定一权之分配，由此求出各 F 値，根据式(83) p 应与 F 成比例，故按照此 F 値，再定一与之約成比例之权之分配。若 F 有接近零之傾向，卽可选命其相当之 p 为零，如此經过数次接近，卽可求得最適宜之权分配，今举例以明之：

例：圖 5.13 之三角形，b 为基綫，今欲观測(1)，(2)，(3)三角度以求三角形之高 h，三个角度之近似値为：

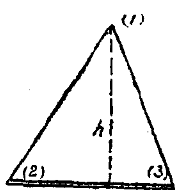

圖 5.13

$$(1)=34°,\qquad \cot 34°=c_1=1.483;$$
$$(2)=68°,\qquad \cot 68°=c_2=0.404;$$
$$(3)=78°,\qquad \cot 78°=c_3=0.213.$$

条件方程式：

$$v_1+v_2+v_3+w=0.$$

三角形之高为

$$h=\frac{b}{\sin(1)}\sin(2)\sin(3).$$

$$\frac{\partial h}{\partial(1)}=-h\cot(1),\quad \frac{\partial h}{\partial(2)}=+h\cot(2),\quad \frac{\partial h}{\partial(3)}=+h\cot(3).$$

令　　$\cot(1)=c_1,\quad \cot(2)=c_2,\quad \cot(3)=c_3,$

則　　$h=h_0+h_0(-c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3).$

h_0 为 h 之近似値,可視为一常数,故吾人可以上式括号内之各項为函数,卽

$$f(v)=-c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3=F[(1),(2),(3)]$$

由此得

$$f_1=-c_1,\quad f_2=+c_2,\quad f_3=+c_3.$$

根据第四節之式(47)得傳遞方程式:

$$\left[\frac{1}{p}\right]L=-\frac{c_1}{p_1}+\frac{c_2}{p_2}+\frac{c_3}{p_3},$$

或傳遞系数 L 为:

$$L=\left(-\frac{c_1}{p_1}+\frac{c_2}{p_2}+\frac{c_3}{p_3}\right):\left[\frac{1}{p}\right]=\frac{-c_1p_2p_3+c_2p_1p_3+c_3p_1p_2}{p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3},$$

又按第四節之公式(50),

$$F_1=-c_1-L,\quad F_2=+c_2-L,\quad F_3=+c_3-L,$$

权倒数为:

$$\frac{1}{P}=\left[\frac{FF}{p}\right]=\frac{p_1[(c_3-c_2)^2+p_2(c_1+c_3)^2+p_3(c_1+c_2)^2]}{p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3};$$

根据以上各公式,茲先命 $p_1=p_2=p_3=1$, $[p]=3.0$, 求出

$$L=-0.289,\quad F_1=-1.194,\quad F_2=+0.693,\quad F_3=+0.502,$$

$$\frac{1}{p}=2.1578,\qquad [|F|]=2.389.$$

今再根据式(83),因 p 不能为負数,故命 $\frac{|F|}{p}=$ 常数,同时 $[p]$ 仍須等于 3.0, 由上述之各 F 値之比例,求得各 p 値如下:

$$p_1=1.50,\quad p_2=0.87,\quad p_3=0.63,\quad [p]=3.00.$$

以此为第二次假定之权分配代入 L 式内,得

$$L=-0.059,\quad F_1=-1.424,\quad F_2=+0.463,\quad F_3=+0.272,$$

$$\frac{1}{P}=1.715.$$

由此已可看出 F_3 之值漸近于零，是以为減省工作起見，卽于第三次逕命之为零，而得第三次之权之分配：

$$p_1=2.26,\quad p_2=0.74,\quad p_3=0;$$

由上列之傳遞系数公式，可知当 $p_3=0$ 时，$L=+c_3$，故 $F_3=+c_3-c_3==0$，与前文所述符合。此时求出之 F 值为：

$$F_1=-1.696,\quad F_2=0.191,\quad [|F|]=1.887;$$

是以最后之权之分配应为：

$$p_1=\frac{1.696}{1.887}\times 3.0=2.696,\quad p_2=\frac{0.191}{1.887}\times 3.0=0.304,$$

此乃最適当之权之分配。

理論上之結果虽如上述，但实际上多余观測仍有其价值，故在較复雜之圖形时，应尽量避免过多之观測量，而可有少数之多余观測，以資檢核。例如在上例中，可令角度(1)观測 24 組，角度(2)，(3) 各观測 4 組。

第八節　等值观測

所謂等值观測者，卽一組观測值，如以另外一組虛拟观測值代之，由此求出之未知数以及其任意一函数之值与权，均与由原來观測值所求出者無異，于是卽謂此組虛拟之观測值，与原有一組之观測值"完全等值"。

此种情形于間接观測时有之，蓋無論改正数方程式之形式若何，僅須由两組观測所列出之法方程式完全相同，此两組观測值卽为等值，因未知数之值与权，均可由法方程式完全決定也。又虛拟观測值之数目不必多于未知数数目，与之相等卽可。

最普通之例，卽間接观測时，以各約化方程式視作虛拟观測值，卽

与原有之观测值等值。設以三个未知数为例，將約化法方程式列出并附以权：

$$
\left.\begin{aligned}
\lambda_1 &= x+\frac{[pab]}{[paa]}y+\frac{[pac]}{[paa]}z-\frac{[pal]}{[paa]},\quad \text{权}\,[paa];\\
\lambda_2 &= y+\frac{[pbc\cdot1]}{[pbb\cdot1]}z-\frac{[pbl\cdot1]}{[pbb\cdot1]},\quad \text{权}\,[pbb\cdot1];\\
\lambda_3 &= z-\frac{[pcl\cdot2]}{[pcc\cdot2]},\quad \text{权}\,[pcc\cdot2].
\end{aligned}\right\} \tag{85}
$$

如將式(85)視作改正数方程式，以$\frac{[pal]}{[paa]}$，$\frac{[pbl\cdot1]}{[pbb\cdot1]}$，$\frac{[pcl\cdot2]}{[pcc\cdot2]}$視作观測值，$[paa]$，$[pbb\cdot1]$，$[pcc\cdot2]$为其权，$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$为其改正数，則由此所得之法方程式遂为：

$$
\left.\begin{aligned}
[paa]x+[pab]y+[pac]z &= [pal];\\
[pbb\cdot1]y+[pbc\cdot1]z &= [pbl\cdot1];\\
[pcc\cdot2]z &= [pcl\cdot2].
\end{aligned}\right\} \tag{86}
$$

其結果固仍为原有之法方程式。是以式(85)与原有之观測值完全等值。

但等值观測，亦不限于間接观測。設由条件观測求出任意三个函数x, y, z之权倒数$\frac{1}{p_x}$，$\frac{1}{p_y}$，$\frac{1}{p_z}$，按第四節之式(57)，設为等权观測，并僅有三个条件方程式，其式为：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{1}{p_x} &= [ff]-\frac{[af]^2}{[aa]}-\frac{[bf\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\frac{[cf\cdot2]^2}{[cc\cdot2]};\\
\frac{1}{p_y} &= [f'f']-\frac{[af']^2}{[aa]}-\frac{[bf'\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\frac{[cf'\cdot2]^2}{[cc\cdot2]};\\
\frac{1}{p_z} &= [f''f'']-\frac{[af'']^2}{[aa]}-\frac{[bf''\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\frac{[cf''\cdot2]^2}{[cc\cdot2]}.
\end{aligned}\right\} \tag{87}
$$

其中f，f'及f''各为其相当函数x，y及z依观測值之微分系数。按照高斯約化法之寫法，式(87)亦可書作

$$\frac{1}{p_x}=[ff\cdot 3],\quad \frac{1}{p_y}=[ff'\cdot 3],\quad \frac{1}{p_z}=[f''f''\cdot 3].\tag{88}$$

此外尚可想像 x, y, z 化成原有各观測值 $l_1, l_2, \cdots l_n$ 之一次擴展式，即

$$\left.\begin{aligned}x&=\alpha_1 l_1+\alpha_2 l_2+\cdots+\alpha_n l_n=[\alpha l];\\ y&=\beta_1 l_1+\beta_2 l_2+\cdots+\beta_n l_n=[\beta l];\\ z&=\gamma_1 l_1+\gamma_2 l_2+\cdots+\gamma_n l_n=[\gamma l].\end{aligned}\right\}\tag{89}$$

由此可知 $\frac{1}{p_x}, \frac{1}{p_y}, \frac{1}{p_z}$ 亦可以 $[\alpha\alpha], [\beta\beta], [\gamma\gamma]$ 表示之，同时 $[\alpha\beta], [\alpha\gamma]$, $[\beta\gamma]$ 等非平方系数亦可比較式(88)之关系而引出：

$$\left.\begin{aligned}&[\alpha\alpha]=[ff\cdot 3],\quad [\beta\beta]=[f'f'\cdot 3],\quad [\gamma\gamma]=[f''f''\cdot 3];\\ &[\alpha\beta]=[ff'\cdot 3],\quad [\alpha\gamma]=[ff''\cdot 3],\quad [\beta\gamma]=[f'f''\cdot 3].\end{aligned}\right\}\tag{90}$$

今再設想函数 x, y, z 有另一組虛拟观測值 r_1, r_2, r_3，其关系如次：

$$\left.\begin{aligned}x&=\xi_1 r_1+\xi_2 r_2+\xi_3 r_3;\\ y&=\eta_1 r_1+\eta_2 r_2+\eta_3 r_3;\\ z&=\zeta_1 r_1+\zeta_2 r_2+\zeta_3 r_3.\end{aligned}\right\}\tag{91}$$

若欲使由式(91)所得之 x, y, z 各函数之权倒数与由原來所求者完全相等，必須令 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ 九个系数有下列之关系：

$$\left.\begin{aligned}&[\xi\xi]=[\alpha\alpha],\ [\eta\eta]=[\beta\beta],\ [\zeta\zeta]=[\gamma\gamma];\\ &[\xi\eta]=[\alpha\beta],\ [\xi\zeta]=[\alpha\gamma],\ [\eta\zeta]=[\beta\gamma].\end{aligned}\right\}\tag{92}$$

此六个方程式即为使虛拟观測值 r_1, r_2, r_3，与原來观測值 $l_1, l_2, \cdots l_n$ 完全等值之必需条件，因 ξ, η, ζ 諸值本为任意者，其数目共为九个，而只有六个条件，故可使其中之任意三个为零，最好使 η_1, ζ_1, ζ_2 为零，即可由 $[\alpha\alpha], [\alpha\beta]$……等值确定其他 ξ, η, ζ 之值。关于此法之应用，將于大規模三角網平差一章述及之。

除去完全等值之外，尚可有部分等值之虛拟观測。如由 r 个虛拟观測值所求出之 r 个函数，其值与权均与由原來观測值所求出者完全相等。此 r 个虛拟观測值对此 r 个函数而論，即与原有之观測值等值。

r 之数目少于未知数之数目 n，故此时謂之部分等值。$r=n$ 时即为完全等值。

第九節　附有条件方程之間接观測

在平差問題中，有时于一組間接观測之未知数中，尙有条件存在。通常此种問題可利用条件方程消去一部未知数，而用間接观測之平差法解算。但当条件方程之系数較为复雜时，消去一部未知数之工作至为繁雜，故亦可用直接方法平差。設有 u 个未知数 $x, y, z, \cdots$，而有 n 个間接观測量，其改正数方程式为：

$$n\text{个}\begin{cases} v_1 = a_1x + b_1y + c_1z + \cdots l_1; \\ v_2 = a_2x + b_2y + c_2z + \cdots l_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\ v_n = a_nx + b_ny + c_nz + \cdots l_n. \end{cases} \tag{93}$$

此外于未知数 $x, y, z, \cdots$ 之間，又有 r 个条件：

$$r\text{个}\begin{cases} p_0 + p_1x + p_2y + p_3z + \cdots = 0; \\ q_0 + q_1x + q_2y + q_3z + \cdots = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\ r_0 + r_1x + r_2y + r_3z + \cdots = 0. \end{cases} \tag{94}$$

如用間接方法平差，可利用 r 个条件方程，消去观測方程式中 r 个未知数，使 n 个观測方程式中僅含有 $u-r$ 个未知数，然后再以普通間接观測之平差法解算之。

今如欲用直接解法，須令式(93)之$[vv]$为最小值，而同时須顧及式(94)之条件，是故必須令

$$\begin{aligned} [vv] &+ 2k_1(p_0 + p_1x + p_2y + p_3z + \cdots) \\ &+ 2k_2(q_0 + q_1x + q_2y + q_3z + \cdots) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ 2k_r(r_0 + r_1x + r_2y + r_3z + \cdots) = \text{最小值。} \end{aligned} \tag{95}$$

將式(95)按 $x, y, z, \cdots$ 微分，得

$$\left.\begin{array}{l}[av]+k_1p_1+k_2q_2+\cdots=0;\\ [bv]+k_1p_2+k_2q_2+\cdots=0;\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{array}\right\}\quad(96)$$

將式(93)之 v 代入式(96)內，并于其下加入式(94)之 r 个条件，卽得

$$\left.\begin{array}{l}[aa]x+[ab]y+[ac]z+\cdots+p_1k_1+q_1k_2+\cdots[al]=0,\\ [ab]x+[bb]y+[bc]z+\cdots+p_2k_1+q_2k_2+\cdots[bl]=0,\\ [ac]x+[bc]y+[cc]z+\cdots+p_3k_1+q_3k_2+\cdots[cl]=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\ p_1x\quad+p_2y\quad+p_3z\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+p_0=0,\\ q_1x\quad+q_2y\quad+q_3z\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+q_0=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{array}\right\}(97)$$

式(97)亦为对称方程式，唯 k_1, k_2 等無平方項，令仍名之为法方程式。此式亦可用高斯約化法解算之，而求未知数 $x, y, z,\cdots$ 之值（k_1, k_2 等值在此处并無用处）。倘各观測值之权不等，上述方法亦可按普通方法顧及其权。

此外倘有一法，將此种問題分为两部平差，第一部專由間接观測定 x, y, z 各未知数之初步值，然后再用等值观測之原理，將第一部結果代入条件方程式內作第二部平差。茲將其步驟述之于下：

首由式(93)之改正数方程式求得未知数之初步值 $x_0, y_0, z_0,\cdots$，今以三个未知数为例，其法方程式为：

$$\left.\begin{array}{l}[aa]x_0+[ab]y_0+[ac]z_0-[al]=0;\\ [ab]x_0+[bb]y_0+[bc]z_0-[bl]=0;\\ [ac]x_0+[bc]y_0+[cc]z_0-[cl]=0.\end{array}\right\}\quad(98)$$

將未知数之初步值 x_0, y_0, z_0 代入式(94)之条件方程式內，設为两个条件($r=2$)，則得条件不符值：

$$\left.\begin{array}{l}w_1=p_0+p_1x_0+p_2y_0+p_3z_0;\\ w_2=q_0+q_1x_0+q_2y_0+q_3z_0.\end{array}\right\}\quad(99)$$

命 x_0, y_0, z_0 之第二部改正数为 ξ, η, ζ，即

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta, \quad z = z_0 + \zeta. \tag{100}$$

代入式(94)内，得

$$\left.\begin{aligned} p_1\xi + p_2\eta + p_3\zeta + w_1 = 0; \\ q_1\xi + q_2\eta + q_3\zeta + w_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

由法方程式(98)按第八節之公式(85)，可將其化为三个等值观测方程式：

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= x_0 + \frac{[ab]}{[aa]}y_0 + \frac{[ac]}{[aa]}z_0 - \frac{[al]}{[aa]}, \quad 权：\quad [aa] = P_1; \\ \lambda_2 &= \qquad\qquad y_0 + \frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}z_0 - \frac{[bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}, \quad 权：[bb\cdot1] = P_2; \\ \lambda_3 &= \qquad\qquad\qquad\qquad z_0 - \frac{[cl\cdot2]}{[cc\cdot2]}, \quad 权：[cc\cdot2] = P_3. \end{aligned}\right\} \tag{102}$$

式(102)为虚拟观测值，因与原來之观测方程式(93)完全等值，故此处可視之为独立观测之結果。今設此虚拟观测値所得之改正数 λ_1, λ_2, λ_3, 系起因自第二部分之平差，则因(100)之关系，式(102)可化为：

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \xi + \frac{[ab]}{[aa]}\eta + \frac{[ac]}{[aa]}\zeta, \quad 权：\quad [aa] = P_1; \\ \lambda_2 &= \qquad\quad \eta + \frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}\zeta, \quad 权：\quad [bb\cdot1] = P_2; \\ \lambda_3 &= \qquad\qquad\qquad\quad \zeta, \quad 权：\quad [cc\cdot2] = P_3. \end{aligned}\right\} \tag{102*}$$

由此式可將 ξ, η, ζ 分别以改正数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 表示之：

$$\left.\begin{aligned} \xi - \lambda_1 &= \frac{[ab]}{[aa]}\lambda_2 - \left(\frac{[ac]}{[aa]} - \frac{[ab]\,[bc\cdot1]}{[aa]\,[bb\cdot1]}\right)\lambda_3; \\ \eta &= \lambda_2 - \frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}\lambda_3; \\ \zeta &= \lambda_3. \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

將式(103)代入(101)之条件方程式內，使其化为改正数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 之条

件，因 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 可視作独立之改正数，故可按普通之条件观测法平差，但須顧及 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 之权各为 $[aa], [bb\cdot 1], [cc\cdot 2]$。

实际計算时之佈置可無須經过如許多之步驟，因將(103)代入(101)內后，可得

$$\left.\begin{aligned}
&p_1\lambda_1+\left(p_2-\frac{[ab]}{[aa]}p_1\right)\lambda_2+\left\{\left(p_3-\frac{[ac]}{[aa]}p_1\right)-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\left(p_2-\frac{[ab]}{[aa]}p_1\right)\right\}\lambda_3+w_1=0;\\
&q_1\lambda_1+\left(q_2-\frac{[ab]}{[aa]}q_2\right)\lambda_1+\left\{\left(q_3-\frac{[ac]}{[aa]}q_1\right)-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\left(q_2-\frac{[ab]}{[aa]}q_1\right)\right\}\lambda_3+w_2=0.
\end{aligned}\right\} \tag{104}$$

此处 λ_2, λ_3 之系数，实即

$$[p_2\cdot 1]=\left(p_2-\frac{[ab]}{[aa]}p_1\right),\quad [p_3\cdot 2]=\left(p_3-\frac{[ac]}{[aa]}p_1\right)-$$
$$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\left(p_2-\frac{[ab]}{[aa]}p_1\right);$$
$$[q_2\cdot 1]=\left(q_2-\frac{[ab]}{[aa]}q_1\right),\quad [q_3\cdot 2]=\left(q_3-\frac{[ac]}{[aa]}q_1\right)-$$
$$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\left(q_2-\frac{[ab]}{[aa]}q_1\right),$$

故可由解算法方程式(98)时順便求出。

茲为簡單之故，命式(104)內之系数为 A_1, A_2, A_3 及 B_1, B_2, B_3，并設 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 之权为 P_1, P_2, P_3，則由条件(104)可列出法方程式：

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{AA}{P}\right]k_1+\left[\frac{AB}{P}\right]k_2+w_1=0;\\
&\left[\frac{AB}{P}\right]k_1+\left[\frac{BB}{P}\right]k_2+w_2=0.
\end{aligned}\right\} \tag{105}$$

改正数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 之公式为：

$$\left.\begin{aligned}[aa]\lambda_1 &= A_1k_1 + B_1k_2;\\ [bb\cdot1]\lambda_2 &= A_2k_1 + B_2k_2;\\ [cc\cdot2]\lambda_3 &= A_3k_1 + B_3k_2.\end{aligned}\right\}\tag{106}$$

根据上述之理論，可归納其計算步驟如下：解法方程式(98)，并將 $p_1, p_2\cdots q_1, q_2\cdots$ 等附于其后，由此求得 x_0, y_0, z_0 及 $A_2, B_2\cdots P_1, P_2, P_3$ 諸値，將 x_0, y_0, z_0 代入式(99)求 w_1, w_2，然後組成法方程式(105)，解算之得 k_1, k_2 諸繫数之値，再按式(106)求改正数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 代入式(103)，又得 ξ, η, ζ。最后由式(100)得未知数 $x, y, z\cdots$ 之値。

关于 $[vv]$ 之計算，將与前述者稍異。改正数分二部，卽 v'_i 及 λ_i，最后之改正数应为：

$$v_i = v'_i + \lambda_i,\tag{107}$$

平方之，乃得

$$[vv] = [v'v'] + [\lambda\lambda] + 2[v'\lambda].\tag{108}$$

因 $$[v'\lambda] = 0,$$

故 $$[vv] = [v'v'] + [\lambda\lambda].\tag{109}$$

茲証明 $[v'\lambda] = 0$ 如下：自式(98)求出 x_0, y_0, z_0 后，卽可由

$$\left.\begin{aligned}v'_1 &= a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 - l_1;\\ v'_2 &= a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 - l_2;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}\right\}\tag{110}$$

計算改正数 v'_i。至于最后之改正数应为：

$$\left.\begin{aligned}v_1 &= a_1(x_0+\xi) + b_1(y_0+\eta) + c_1(z_0+\zeta) - l_1 = v'_1 + \lambda_1;\\ v_2 &= a_2(x_0+\xi) + b_2(y_0+\eta) + c_2(z_0+\zeta) - l_2 = v'_2 + \lambda_2;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{aligned}\right\}\tag{111}$$

故

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta;\\ \lambda_2 &= a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}\right\}\tag{112}$$

乘式(112)以 v'_i 并相加，即得

$$[v'\lambda]=[av']\xi+[bv']\eta+[cv']\zeta. \tag{113}$$

自式(98)及(110)內可得下列之关系：

$$[av']=[aa]x_0+[ab]y_0+[ac]z_0-[al]=0, \tag{114}$$

同理 $$[bv']=0,\quad [cv']=0,$$

故 $$[v'\lambda]=0.$$

权單位中誤差：

$$m=\pm\sqrt{\frac{[v'v']+[\lambda\lambda]}{n-(u-r)}}=\pm\sqrt{\frac{[v'v']+[\lambda\lambda]}{n-u+r}}. \tag{115}$$

第十節 附有未知数之条件观測

設有下列各条件方程式：

$$\left.\begin{array}{l} p_0+p_1L_1+p_2L_2+\cdots+p_nL_n+a_1x+b_1y+\cdots=0; \\ q_0+q_1L_1+q_2L_2+\cdots+q_nL_n+a_2x+b_2y+\cdots=0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{116}$$

其中 $L_1, L_2,\cdots$ 为观測之量，$x, y,\cdots$ 等为未观測而欲求得之未知数。

設 $L_1,L_2,\cdots$ 之观測值为 $l_1,l_2,\cdots$，其誤差为 $v_1,v_2,\cdots$，又 $x, y\cdots$ 之近似值为 $x_0, y_0,\cdots$，則式(116)可化为下列形式：

$$\left.\begin{array}{l} p_1v_1+p_2v_2+\cdots+p_nv_n+a_1\xi+b_1\eta+\cdots+w_1=0; \\ q_1v_1+q_2v_2+\cdots+q_nv_n+a_2\xi+b_2\eta+\cdots+w_2=0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{116)*}$$

其中
$$\left.\begin{array}{l} x=x_0+\xi,\quad y=y_0+\eta,\cdots; \\ w_1=p_0+p_1l_1+p_2l_2+\cdots+p_nl_n+a_1x_0+b_1y_0+\cdots; \\ w_2=q_0+q_1l_1+q_2l_2+\cdots+q_nl_n+a_2x_0+b_2y_0+\cdots. \end{array}\right\} \tag{117}$$

此問題解法之一为自式(116)*之条件方程式內消去 $\xi, \eta\cdots$ 等，而用普通之条件观測法計算。設式(116)*之条件方程式共有 r 个，未知数为 u 个，則消去 $\zeta, \eta\cdots$ 之后，尙余条件方程 $r-u$ 个。

另一方法为將此問題化为間接观测。設观测值之数目为 n 个，式(116)* 之条件为 r 个，故可利用此条件方程將其中之 r 个改正数用其余之 $n-r$ 个改正数及所有未知数表示之。因此列出 n 个改正数方程式：

$$
\left.\begin{array}{l}
r\ 个\left\{\begin{array}{l}
v_1=-l'_1+a'_1\xi+b'_1\eta+\cdots+p'_1v_{r+1}+q'_1v_{r+2}+\cdots,\\
v_2=-l'_2+a'_2\xi+b'_2\eta+\cdots+p'_2v_{r+1}+q'_2v_{r+2}+\cdots,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;
\end{array}\right.\\
n-r\ 个\left\{\begin{array}{l}
v_{r+1}= \qquad\qquad\qquad\qquad +\ v_{r+1},\\
v_{r+2}= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\ v_{r+2},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
v_h= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +v_n.
\end{array}\right.
\end{array}\right\}共\ n\ 个 \tag{118}
$$

$$\underbrace{\underbrace{\qquad\qquad}_{u\ 个}\quad\underbrace{\qquad\qquad}_{n-r\ 个}}_{共\ u+n-r\ 个未知数}$$

此时將 $v_{r+1}, v_{r+2}, \cdots v_n$ 亦視如未知数，按間接观测方法解算，多余观测之数目为 $n-(u+n-r)=r-u$，与用条件观测法解算时之約化后条件数目相等。

顾此种問題亦可用直接之解法，以下式为最小条件：

$$
\begin{aligned}
[vv]&-2k_1(p_1v_1+p_1v_2+\cdots+a_1\xi+b_1\eta+\cdots+w_1)\\
&-2k_1(q_1v_1+q_2v_2+\cdots+a_2\xi+b_2\eta+\cdots+w_2)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{119}
$$

$$=最小值。$$

將此式微分，得繫数方程式：

$$
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
v_1=p_1k_1+q_1k_2+\cdots,\\
v_2=p_2k_1+q_2k_2+\cdots,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
v_n=p_nk_1+q_nk_2+\cdots;
\end{array}\right\}n\ 个\\
\left.\begin{array}{l}
0=a_1k_1+a_2k_2+\cdots,\\
0=b_1k_1+b_2k_2+\cdots,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{array}\right\}u\ 个
\end{array} \tag{120}
$$

代入条件方程式(116)*内，得法方程式：

$$\left.\begin{array}{l}[pp]k_1+[pq]k_2+\cdots+a_1\xi+b_1\eta+\cdots+w_1=0,\\ [pq]k_1+[qq]k_2+\cdots+a_2\xi+b_2\eta+\cdots+w_2=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\end{array}\right\} r\text{ 个}$$

$$\left.\begin{array}{l}a_1k_1+a_2k_2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=0,\\ b_1k_1+b_2k_2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{array}\right\} u\text{ 个} \qquad (121)$$

由此式可解算得 $k_1, k_2\cdots$ 之值及未知数 $\xi, \eta, \zeta\cdots$ 之値，再由式(120)得各观测值之改正数 v。

習 題

1. 在测站 S (圖 5.14)向目标 A, B 及 C 观测其間之角度 α_1, α_2 及 α_3，結果如下：

$$\alpha_1=\ \ 43°37'15'';$$

$$\alpha_2=248°12'34'';$$

$$\alpha_3=204°34'55''.$$

若观测之精度相等，試用条件观测法平差之。

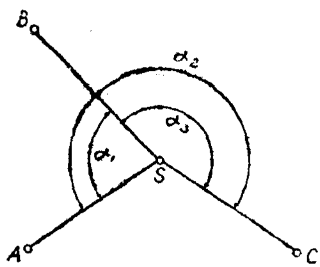

圖 5.14

2. 水准点 A 及 E 之海拔为 $H_a=278.354$, $H_E=292.380$ 公尺，在其間作分段之水准測量，結果如下：

間 段	量得高程差	权 $\left(\frac{1}{d}\right)$	$\frac{1}{p}$
1. $A-1$	+18.402	2	0.50
2. $1-2$	− 9.706	3	0.33
3. $2-3$	− 1.204	4	0.25
4. $3-E$	+ 6.514	1	1.00

$[\Delta h]=+14.006$, $[p]=10$, $\left[\frac{1}{p}\right]=2.08$.

試求各段間平差后之高程差及其相当之中誤差。

3. 方向角(SA)及(SB)(圖 5.15)設为已知,卽

$$(SA)=10^\circ35'45'';$$

$$(SB)=294^\circ28'13''.$$

茲为求三方向角(SP_1),(SP_2)及(SP_3)起見,观测下列四角:

$$\alpha_1=112^\circ17'40'';$$

$$\alpha_2=67^\circ25'42'';$$

$$\alpha_3=86^\circ36'18'';$$

$$\alpha_4=17^\circ33'32''.$$

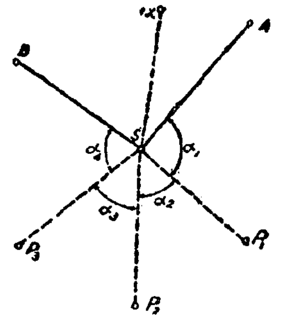

圖 5.15

若精度相等,試求各观测角在平差前后之中誤差。

4. 根据水准測量定出 A, B, C, D 及 E 五点間之高程差如下:

間段号数	自	至	高程差 Δh	間段之長度	測量次数
1	D	E	+10.194	3.5 公里	1
2	E	B	+10.659	2.6 公里	1
3	D	B	+20.871	1.7 公里	1
4	D	C	+40.791	1.0 公里	1
5	B	C	+19.930	2.3 公里	1
6	A	E	+38.460	4.2 公里	2
7	A	D	+28.248	1.9 公里	2
8	A	C	+69.096	2.8 公里	2

A 点之海拔为 201.754 公尺,試用条件平差法求其他各点之海拔。

5. 設 A 点(圖 5.16)之海拔 H_a 为已知,所观测者为五高程差 h_1, $h_2\cdots h_5$。試列为求 P_1, P_2 及 P_3 三点海拔必須之条件方程式。

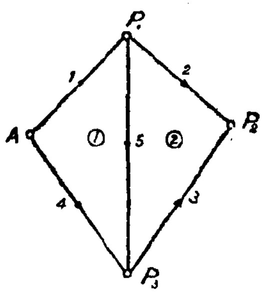

圖 5.16

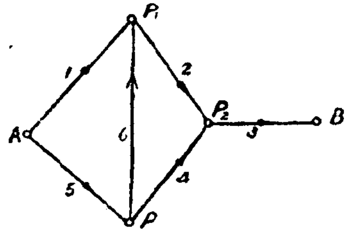

圖 5.17

6. 已知 A 及 B 二点之海拔为 H_a 及 H_b(圖 5.17)，观测之高程差为 $h_1, h_2 \cdots h_6$，求 p_1, p_2, p_3 等三点之海拔，共有若干条件方程式?試列出之。

7. 在测站 S (圖 5.18)对于目标 A, B 及 C 之方向角(SA),(SB)及(SC)均已知悉，观测之方向为 $\alpha_a', \alpha_1', \alpha_b', \alpha_2'$ 及 α_c。求方向角(SP_1)及(SP_2)时共需若干条件方程式?試排列之。

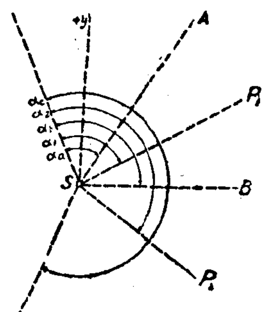

圖 5.18

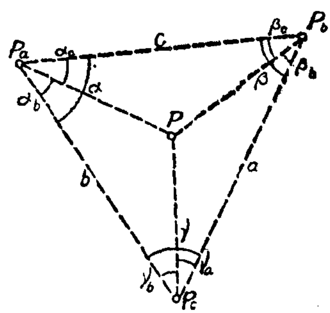

圖 5.19

8. P_a, P_b 及 P_c (圖 5.19) 三点之坐标 (x_a, y_a), (x_b, y_b) 及 (x_c, y_c) 为已知，所观测者为三水平角:

$$PP_aP_b = \alpha_c, \quad PP_bP_c = \beta_a, \quad PP_cP_a = \gamma_b.$$

試列求 P 点坐标时必須之条件方程式。

第六章 三角測量測站平差

第一節 測站平差之目的

設在測站上有 s 个方向，則独立未知数僅有 $s-1$ 个。倘观測之数量超出此数，即發生測站平差問題。

嚴格而論，三角測量平差須不僅顧及每一測站之多余观測，尙須同时顧及全網之多余观測，而一起進行平差。例如圖 6.1 所示之大地四边形，設在每測站上观測 3 个角度，則总共观測之数量为 12 个。实际上，观測 4 个角度即可决定此大地四边形之形狀。是以全部多余观測之数目为 $12-4=8$ 个，如按条件观測平差則应有 8 个条件。在此 8 个条件內，每个測站上各有 1 个条件，即由两外边方向与对角綫方向所分別組成之两角，其和应等于由两外边方向所組成之角，在 4 个測站上共有 4 个測站条件。此外在大地四边形內倘有 4 个圖形条件(見第七章)。如嚴格按最小二乘法平差，应同时顧及此 8 个条件，使观測值改正数之平方和为最小。

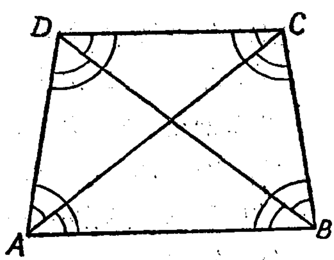

圖 6.1

不難想像，如按此种嚴格方法作三角測量平差，則三角網內条件数目將極多，使計算工作異常复雜。解决此問題有两种可能办法：一为在測站上如此進行观測使不產生測站条件，或虽有測站条件而在測站平差后仍能獲得有如独立观測值之一套結果(通常为方向)；另一办法为不顧最小二乘法之嚴格要求(即不使独立观測值之改正数平方和为最小)，而將平差分为两步進行，測站平差

及三角網平差，將測站平差之結果視为独立观測值而作三角網平差。

顯然，上述第一办法为嚴格方法，在基本控制網平差时应采用之，而第二办法为簡略方法，所獲得之結果將不嚴格，但在补充網或作小三角測量时可以采用。

現將第一办法所包含之各种情形簡述如下。

当水平角观測系按个别角度观測时，在一个測站上 s 个方向之間僅观測相鄰方向間之角度，如圖 6.2 所示，則不產生測站条件。此种情形僅在用复測法測角时有之，今日測量作業中頗少应用。

今日三角測量均采用方向观測法，或虽观測角度而使其能化为完全方向組之結果，如全組合測角法。当用方向法观測时，倘在每測回內均依次观測測站上所有各方向，則称为完全方向測回，此时測站平差后仍將獲得一組等权方向，猶如直接观測之結果，可視作独立观測量進入三角網平差，結果仍屬嚴格。当按全組合測角法观測时，經过測站平差亦能使观測結果化为一組具有确定权值之方向，故亦可視作独立观測量（方向）進入至角網平差。此点將于第三節中論之。

今日 I, II 等三角測量多用史賴伯全組合測角法或完全方向測回法观測，故將整个平差分为測站平差与三角網平差两步仍能獲得嚴格之結果。但測站平差必須嚴格按最小二乘法原理進行。

低等三角測量多用方向法或复測法观測，在測站上須將高等三角網方向間之角度視为固定角，因此在測站平差时尙含有固定角条件。此时測站平差多不按嚴格方法進行。

第二節 观測个别角度时之測站平差

当在測站上分別观測个別角度，而在所观測角度之間存在条件时，即須進行測站平差。此时測站平差可按間接观測平差，亦可按条件观測平差進行。

玆用以下两例說明此种測站平差進行之方法。

例 1： 自测站 A 上观测 P_1, P_2, P_3, P_4 4 个目标，如圖 6.2 所示。所观测之角度及其观测値列如下表：

号数	角度	观测値 l
1	P_1AP_2	36°21′36″.2
2	P_2AP_3	28°15′13″.7
3	P_3AP_4	39°22′14″.3
4	P_1AP_3	64°36′52″.6
5	P_2AP_4	67°37′24″.9

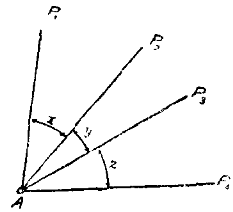

圖 6.2

在测站 A 上共有 4 个方向，故作为独立未知数之角度有 3 个。今以 $P_1AP_2=x$, $P_2AP_3=y$, $P_3AP_4=z$ 三个角度为未知数，按間接观测法解算，列出观测方程式如下：

$$\left.\begin{aligned} l_1+v_1 &= +x, \\ l_2+v_2 &= \quad +y, \\ l_3+v_3 &= \qquad +z, \\ l_4+v_4 &= x+y, \\ l_5+v_5 &= \quad y+z. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

命 x, y, z 之近似值为：

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 36°21'30'', & x &= x_0+\xi, \\ y_0 &= 28°15'10'', & y &= y_0+\eta, \\ z_0 &= 39°22'10''; & z &= z_0+\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

將(2)代入(1)内，即得改正数方程式：

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= +\xi \qquad\qquad - 6.2, \\ v_2 &= \quad +\eta \qquad - 3.7, \\ v_3 &= \qquad\quad +\zeta - 4.3, \\ v_4 &= +\xi+\eta \qquad - 12.6, \\ v_5 &= \quad +\eta+\zeta - 4.9. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

由此組成法方程式：

$$\left.\begin{aligned} 2\xi+\ \eta \qquad -18.8&=0,\\ \xi+3\eta\ +\zeta-21.2&=0,\\ +\ \eta+2\zeta-\ 9.2&=0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

解法方程式(4)得

$$\left.\begin{aligned} \xi&=+7''.6, \qquad & x&=36°21'37''.6,\\ \eta&=+3''.6, & y&=28°15'13''.6,\\ \zeta&=+2''.8; & z&=39°22'12''.8.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

各改正数之值如下:

$$v_1=+1.4,\quad v_2=-0.1,\quad v_3=-1.5,\quad v_4=-1.4,\quad v_5=+1.5;$$

$$[vv]=8.43, \qquad \therefore\ m=\sqrt{\frac{8.43}{5-3}}=\pm 2''.05. \tag{6}$$

即观测值之中誤差为 $\pm 2''.05$。

此問題亦可按条件平差法解之。命所观测五个角度之最或是值为 $x_1, x_2, \cdots x_5$, 則其間共有条件两个, 即

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2-x_4&=0,\\ x_2+x_3-x_5&=0.\end{aligned}\right\}$$

以观测值代入, 得条件方程式:

$$\left.\begin{aligned} v_1+v_2 \qquad -v_4 \qquad -2.7&=0,\\ +v_2+v_3 \qquad -v_5+3.1&=0.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

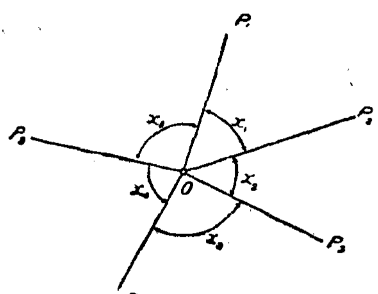

图 6.3

列成法方程式为:

$$\left.\begin{aligned} 3k_1+\ k_2-2.7&=0,\\ k_1+3k_2+3.1&=0.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

解出得

$$k_1=+1.4; \qquad k_2=-1.5.$$

由此可算出改正数之値与由(6)求出者無異, x_1, x_2, x_3 三角度值亦与(5)相符。

例 2: 水平閉合条件。

設在一测站上共有 s 个方向，每次测两相鄰方向間之角度，則共为 s 个角度。此 s 个角度之和应適为360°，称为水平閉合条件。如圖 6.3 所示，自测站 O 共有五个目标，如依次观测 $x_1, x_2, \cdots x_5$ 五个角度，即有一个条件方程式：

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5-360^\circ=0.$$

如將观测值 $l_1, l_2 \cdots l_5$ 代入，得

$$l_1+l_2+l_3+l_4+l_5-360^\circ=w,$$

則
$$v_1+v_2+v_3+v_4+v_5+w=0. \tag{9}$$

按照条件平差法得

$$v_1=v_2=v_3=v_4=v_5=-\frac{w}{5}.$$

如在一测站上共有 s 个角度，其水平角閉合条件之改正数即为：

$$v_i=-\frac{w}{s}. \tag{10}$$

易言之，即在一测站上之水平閉合如不等于 360°，可將其差異平均分配于各角度上。

倘各角度之观测精度不等，命其权为 $p_1, p_2, \cdots p_s$，則依式(9)得法方程式：

$$\left[\frac{1}{p}\right]k+w=0,$$

或
$$k=-\frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]}. \tag{11}$$

各改正数为

$$v_i=+\frac{1}{p_i}\cdot k=-\frac{1}{p_i}\cdot\frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]}, \tag{12}$$

即各角度之改正数値与其观测値之权倒数成比例。

欲求各角度平差値之权，可設想每个角度观测两次，一次为其本身，一次为 360° 减去所有其他角度，此两观测値之权为：

$$p_i \quad 及 \quad p_i',$$

因中誤差平方与权之倒数成比例，故按照誤差傳播定律

$$\frac{1}{p_i'}=\left[\frac{1}{p}\right]-\frac{1}{p_i},$$

是故平差后之权为：

$$P_i=p_i+p_i'=p_i+\frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]-\frac{1}{p_i}}=\frac{\left[\frac{1}{p}\right]}{\left[\frac{1}{p}\right]-\frac{1}{p_i}}p_i; \tag{13}$$

当等权观测时，

$$P_i=\frac{s}{s-1}. \tag{14}$$

因观测値之权为 1，故由于水平閉合使权之增進并不大，它与观测値权之比例为 $s:s-1$。

第三節　史賴伯全組合測角法之測站平差

三角測量之初期，因仪器刻度之簡陋，各國多采用复測法，以使精度增加，是为角度观测。迨后刻度及讀数設备均漸改進，又因复測法之結果常含有系統誤差，故方向观测法遂超而上之。但方向法之缺点在不易同时看清所有目标，因而耗費观測时間至多；且因高台受日光直射后有旋轉之虞，致使較多目标之方向观测，亦易有系統誤差存在。故 1870 年以后，德國普魯士大地測量局史賴伯試用全組合測角法，自 1880 年以后，遂为德國三角測量之榜样，至今不变。其法平差后之結果可使角度观測化为完全方向組，各方向之权相等，对于三角網平差至

为便利。茲將其理論扼要述之于下：

設在測站上有 s 个方向，則任意两方向卽可成为一角度，故所有組合之角度总数为 $\frac{1}{2}s(s-1)$ 个。圖 6.4 所示 $s=4$ 之情形，所有可能角度之总数为 6。按照史賴伯测角法，应將所有六个角度均作同样多次数之观測，設命其观測值为：

$$
\begin{array}{ccc}
(1.2) & (1.3) & (1.4) \\
 & (2.3) & (2.4) \\
 & & (3.4)
\end{array}
$$

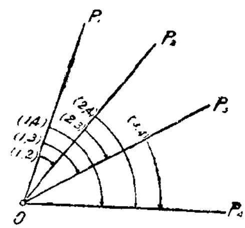

圖 6.4

此六个角度并非互相独立，故吾人取第一方向与其他各方向分别組成之角度为独立未知数，而以 $[1.2]$, $[1.3]$, $[1.4]$ 表示各角之平差值。如此可得改正数方程式如下：

未　知　数	观　測　值
$v_1=+[1.2]$	$-(1.2)$
$v_2=\quad\quad +[1.3]$	$-(1.3)$
$v_3=\quad\quad\quad\quad +[1.4]$	$-(1.4)$
$v_4=-[1.2]+[1.3]$	$-(2.3)$
$v_5=-[1.2]\quad\quad +[1.4]$	$-(2.4)$
$v_6=\quad\quad -[1.3]+[1.4]$	$-(3.4)$

(15)

由此得法方程式：

未　知　数	常　数　項
$3[1.2]-[1.3]-[1.4]$	$-(1.2)\quad\quad +(2.3)+(2.4)=0$
$-[1.2]+3[1.3]-[1.4]$	$-(1.3)\quad -(2.3)\quad +(3.4)=0$
$-[1.2]-[1.3]+3[1.4]$	$-(1.4)\quad -(2.4)-(3.4)=0$

(16)

欲解此法方程式，可先求其和方程式：

$$[1.2]+[1.3]+[1.4]-(1.2)-(1.3)-(1.4)=0, \tag{17}$$

將(17)分别加于(16)之各式，卽可求得各未知数：

$$\left.\begin{aligned}[1.2]&=\frac{1}{4}\{2(1.2)+(1.3)-(2.3)+(1.4)-(2.4)\};\\ [1.3]&=\frac{1}{4}\{2(1.3)+(1.4)-(3.4)+(1.2)+(2.3)\};\\ [1.4]&=\frac{1}{4}\{2(1.4)+(1.2)+(2.4)+(1.3)+(3.4)\}.\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

式(18)可以文字表示之：欲求任意一角度之平差值 $[i,k]$，取直接观测值 (i,k) 命其权为 2，又將所有可能之間接計算值列出，其权各等于 1，而取其中数，卽得 $[i,k]$ 之值。可以証明，無論測站上方向数目如何，此結論均屬正确。

式(18)之結果，亦可化为方向值。命 [1], [2], [3], [4] 为自測站 0 至目标 P_1, P_2, P_3, P_4 之平差后方向值，則 $[1.2]=[2]-[1]$, $[1.3]=$ $=[3]-[1]\cdots$。更命 $(2.1)=-(1.2)$, $(3.1)=-(1.3)\cdots$，則(18)可書成下式：

$$\left.\begin{aligned}&[1.2]=-[1]+[2]=\\ &\qquad=\frac{1}{4}\{(1.2)+(1.3)+(1.4)\}-\frac{1}{4}\{(2.1)+(2.3)+(2.4)\};\\ &[1.3]=-[1]+[3]=\\ &\qquad=\frac{1}{4}\{(1.2)+(1.3)+(1.4)\}-\frac{1}{4}\{(3.1)+(3.2)+(3.4)\};\\ &[1.4]=-[1]+[4]=\\ &\qquad=\frac{1}{4}\{(1.2)+(1.3)+(1.4)\}-\frac{1}{4}\{(4.1)+(4.2)+(4.3)\}.\end{aligned}\right\}\qquad(19)$$

由(19)可知各方向值为：

$$\left.\begin{aligned}
[1] &= -\frac{1}{4}\{(1.2)+(1.3)+(1.4)\};\\
[2] &= -\frac{1}{4}\{(2.1)+(2.3)+(2.4)\};\\
[3] &= -\frac{1}{4}\{(3.1)+(3.2)+(3.4)\};\\
[4] &= -\frac{1}{4}\{(4.1(+(4.2)+(4.3)\}.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

式(20)乃專为四个方向之情形，如有 s 个方向 $1, 2, 3\cdots s$，可推得其公式如下：

$$\left.\begin{aligned}
[1] &= -\frac{1}{s}\{(1.2)+(1.3)+\cdots+(1.s)\};\\
[2] &= -\frac{1}{s}\{(2.1)+(2.3)+\cdots+(2.s)\};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;\\
[s] &= -\frac{1}{s}\{(s.1)+(s.2)+\cdots+(s.s-1)\}.
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

根据此式可直接自角度值計算其方向值。

在全組合測角法中，設測站上方向数目为 s，則全組合角度数目，亦卽測站上全部观測量总数，为 $\frac{s}{2}(s-1)$，独立未知数数目为 $s-1$，故多余观測数目为 $r=\frac{s}{2}(s-1)-(s-1)=\frac{1}{2}(s-1)(s-2)$。由此得由測站平差結果計算每角度中誤差之公式：

$$m = \pm\sqrt{\frac{2[vv]}{(s-1)(s-2)}}, \tag{22}$$

式中 v 为由測站平差所得之角度改正数，例如对角度 i, k 而言，

$$v_{ik} = [i, k] - (i, k). \tag{23}$$

倘每个角度观測值系 n 个測回观測結果的平均值，則式(22)所得之中誤差 m 为 n 个測回平均值之中誤差；而每个角度观測一个測回之

中誤差应为

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{2n[vv]}{(s-1)(s-2)}}. \tag{24}$$

玆再討論平差后每个角度值及方向值之中誤差。

根据式(18)可以寫出任一角度 i, k 平差值之普遍公式:

$$[i,k]=\frac{1}{s}\{2(i.k)+(i.1)-(k.1)+(i.2)-(k.2)+\cdots\} \tag{25}$$

其中$(i.1)-(k.1)$, $(i.2)-(k.2)$等为間接計算$(i.k)$之角值。当測站上共有 s 个方向时,共有$(s-2)$个間接計算值,亦即式(25)括号內除直接观測值$(i.k)$項以外,尙有$2(s-2)$項。所有各項均为直接独立观測值,按誤差傳播定律可得平差值$[i.k]$之中誤差 M_y 为

$$M_y^2=\frac{1}{s^2}\{4\cdot m^2+2(s-2)\cdot m^2\}=\frac{2}{s}m^2=\frac{2}{sn}\mu^2. \tag{26}$$

由此可見,如以每角度每測回观測值之权为 1, 則观測 n 个測回时平差后每角度之权为

$$p_y=\frac{s\cdot n}{2}. \tag{27}$$

用全組合測角法时,由任意两方向所組成之角度均观測相同測回数,故任意两方向之間的角度均可按式(25)計算,而且平差后所有角度之权均为式(27)所給之 $\frac{s\cdot n}{2}$。由此得出結論,按全組合测角法观測时,測站平差后可化为等权的完全方向組,因为僅当所有方向之权相等时,才能使由任意两方向所組成角度之权相等。一个角度系由两方向所組成,是以角度之权恆为方向之权之一半。故按史賴伯法測角时,平差后每方向之权为

$$P=s\cdot n. \tag{28}$$

根据式(26)及(22),如平差后每方向之中誤差用 M 表示,則

$$M=\frac{1}{\sqrt{s}}m=\pm\sqrt{\frac{2[vv]}{s(s-1)(s-2)}}. \tag{29}$$

由式(27)及(28)可見，如在三角網中用史賴伯測角法進行观測，欲使每个測站上在測站平差后所得之方向值均为等权，必須在每个測站上，無論 s 为多少，均保持 P 为常数。通常在 I 等三角測量时使 $P=$ $=n\cdot s=24$。在測站上方向数目不同时每个角度所須观測之測回数亦必不同，有如下表所示：

測站上方向数目 s	2	3	4	5	6	7	8
每角度观測測回数 n	12	8	6	5	4	4	3
平差后方向权 P	24	24	24	25	24	28	24

除 $s=5$ 及 $s=7$，P 与 24 小有差别外，其余均適为 24。在三角網平差时可不顧及在 $s=5$ 及 $s=7$ 时每方向权之微小差别，而全部作为等权進入平差。又上表中平差后每方向之权 $P=24$ 系取每角度每測回之权为 1，如假定每測回每方向之权为 1，則平差后方向权为 12，亦即按上述測回数目用史賴伯法測角时，相当于按方向观測法观測 12 个測回之精度。

現举例說明按史賴伯測角法观測时測站平差之計算方法。

在一測站上有 1, 2, 3, 4 四个方向，观測所有組合角度，共計 $\frac{s}{2}(s-1)=6$ 个角度，每个角度观測 3 个測回所得平均值如下：

$$(1.2)=48°17'1''.4;\qquad (1.3)=96°52'16''.8;$$
$$(1.4)=152\ 54\ \ 6.8;\qquad (2.3)=48\ 35\ \ 14.3;$$
$$(2.4)=104\ 37\ \ 7.8;\qquad (3.4)=56\ \ 1\ \ 48.9.$$

首先按式(18)計算各角度之平差值：

角度	[1.2]	[1.3]	[1.4]
直接观測值	48°17′ 1″.4 17 1 .4	96°52′16″.8 16 .8	152°54′6″.8 6 .8
間接推算值	17 2 .5 16 59 .0	17 .9 15 .7	9 .2 5 .7
平差值	48 17 1 .08	96 52 16 .80	152 54 7 .12
改正数 v	− 0 .32	0 .00	+0 .32

角 度	[2.3]	[2.4]	[3.4]
直接观测值	48°35′14″.3 14 .3	104°37′7″.8 7 .8	56°1′48″.9 48 .9
間接推算值	15 .4 18 .9	5 .4 3 .2	50 .0 53 .5
平差值	48 35 15 .72	104 37 6 .05	56 1 50 .32
改正数 v	+ 1 .42	− 1 .75	+ 1 .42

由此得出平差后等权方向值:

$$
\begin{aligned}
[1] &= \quad 0°00'00''.00;\\
[2] &= \ 48\ 17\ \ 1\ .08;\\
[3] &= \ 96\ 52\ 16\ .80;\\
[4] &= 152\ 54\ \ 7\ .12.
\end{aligned}
$$

又由各角度改正数計算 $[vv]=7.28$。根据式(22)計算每角度之观测中誤差,得

$$m=\sqrt{\frac{2\times 7.28}{(4-1)(4-2)}}=\pm 1''.56;$$

而根据式(29)平差后方向值之中誤差为

$$M=\frac{1.56}{\sqrt{4}}=\pm 0''.78.$$

第四節 完全方向測回之測站平差

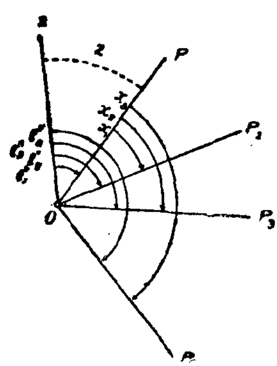

圖 6.5

圖 6.5 中示在測站 O 上共有 P_1, P_2, P_3, P_4 四个方向,Oz 为在此刻度盤位置时,刻度零所对之方向(此方向并非由观測而得)。当望远鏡照准 P_1, P_2, P_3, P_4 各目标时,吾人得 l_1, l_2, l_3, l_4 各观測值,如圖所示。在四个目标之間,吾人僅有三个独立角度未

知数，另外尚有一个定向未知数 z。今取自 P_1(称为零方向)至 P_2, P_3, P_4 各角度即圖中所示之 x_1, x_2, x_3 为独立角度未知数，并命第一测回之观测值为 l'_1, l'_2, l'_3, l'_4，其定向未知数为 z'；第二测回之观测值为 $l''_1, l''_2, l''_3, l''_4$，其定向未知数为 z''，余类推。根据圖 6.5 可列出各测回之改正数方程式如下：

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{第一組}\left\{\begin{array}{l}
v'_1 = z' \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot -l'_1,\\
v'_2 = z' \cdot \quad +x_1 \quad \cdot \quad \cdot -l'_2,\\
v'_3 = z' \cdot \quad \cdot \quad +x_2 \quad \cdot -l'_3,\\
v'_4 = z' \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad +x_3 -l'_4;
\end{array}\right.\\
\text{第二組}\left\{\begin{array}{l}
v''_1 = \cdot\, z'' \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot -l''_1,\\
v''_2 = \cdot\, z'' \quad +x_1 \quad \cdot \quad \cdot -l''_2,\\
v''_3 = \cdot\, z'' \quad \cdot \quad +x_2 \quad \cdot -l''_3,\\
v''_4 = \cdot\, z'' \quad \cdot \quad \cdot \quad +x_3 -l''_4;
\end{array}\right.\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\text{第}\,n\,\text{組}\left\{\begin{array}{l}
v_1^{(n)} = \cdot \cdot \cdot \cdot\, z^{(n)} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot -l_1^{(n)},\\
v_2^{(n)} = \cdot \cdot \cdot \cdot\, z^{(n)} +x_1 \quad \cdot \quad \cdot -l_2^{(n)},\\
v_3^{(n)} = \cdot \cdot \cdot \cdot\, z^{(n)} \quad \cdot +x_2 \quad \cdot -l_3^{(n)},\\
v_4^{(n)} = \cdot \cdot \cdot \cdot\, z^{(n)} \quad \cdot \quad \cdot +x_3 -l_4^{(n)}.
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \tag{30}
$$

一般而論，如在一测站上共有 s 个方向，則每测回观测即有 s 个改正数方程式，n 测回內共有 $n\cdot s$ 个方程式，其中有定向未知数 n 个，角度未知数 $s-1$ 个，共有未知数 $n+s-1$ 个。

由(30)可列出法方程式如下(設 $n=4,\ s=4$)：

$$
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
sz' \qquad\qquad\qquad +x_1 +x_2 +x_3 -[l'] = 0,\\
\quad +sz'' \qquad\qquad +x_1 +x_2 +x_3 -[l''] = 0,\\
\qquad +sz''' \qquad +x_1 +x_2 +x_3 -[l'''] = 0,\\
\qquad\qquad +sz'''' +x_1 +x_2 +x_3 -[l''''] = 0;
\end{array}\right\} n\text{ 个} \\
\left.\begin{array}{l}
z' + z'' + z''' + z'''' + nx_1 \qquad\qquad - [l_2] = 0,\\
z' + z'' + z''' + z'''' \qquad + nx_2 \qquad - [l_3] = 0,\\
z' + z'' + z''' + z'''' \qquad\qquad + nx_3 - [l_4] = 0.
\end{array}\right\} (s-1)\text{ 个}
\end{array}
\tag{31}
$$

其中 $[l']=l'_1+l'_2+l'_3+l'_4$; $[l_2]=l'_2+l''_2+l'''_2+l_2^{(n)}$.

將式(31)內之前 n 个方程式相加，而以 s 除之，卽得

$$z'+z''+z'''+z''''=\frac{1}{s}[l]-\frac{n}{s}(x_1+x_2+x_3), \tag{32}$$

其中 $[l]=[l']+[l'']+\cdots+[l^{(n)}]=[l_1]+[l_2]+\cdots[l_s]$.

將(32)代入(31)內之后$(s-1)$个方程式中，卽得

$$(s-1)\text{个}\left\{\begin{aligned}&\left(n-\frac{n}{s}\right)x_1-\frac{n}{s}x_2-\frac{n}{s}x_3-\left([l_2]-\frac{1}{s}[l]\right)=0;\\&-\frac{n}{s}x_1+\left(n-\frac{n}{s}\right)x_2-\frac{n}{s}x_3-\left([l_3]-\frac{1}{s}[l]\right)=0;\\&-\frac{n}{s}x_1-\frac{n}{s}x_2+\left(n-\frac{n}{s}\right)x_3-\left([l_4]-\frac{1}{s}[l]\right)=0.\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

吾人所欲求得者，乃 x_1, x_2, x_3 諸值，而非 $z', z''\cdots$ 等，故式(33)內已將所有定向未知数消去。將式(33)之$(s-1)$个方程式相加，卽得

$$\frac{n}{s}x_1+\frac{n}{s}x_2+\frac{n}{s}x_3-\left(\frac{1}{s}[l]-[l_1]\right)=0, \tag{34}$$

以(34)分別加于(33)內之各式中，卽得

$$\left.\begin{aligned}&nx_1-([l_2]-[l_1])=0, &\quad x_1&=\frac{1}{n}([l_2]-[l_1]),\\&nx_2-([l_3]-[l_1])=0, &\quad x_2&=\frac{1}{n}([l_3]-[l_1]),\\&nx_3-([l_4]-[l_1])=0; &\quad x_3&=\frac{1}{n}([l_4]-[l_1]).\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

通常計算时，均將各測回之零方向 l'_1, l''_1, l'''_1 等化为零，故 $[l_1]=0$，由是(35)可化为:

$$x_1=\frac{1}{n}[l_2],\quad x_2=\frac{1}{n}[l_3],\quad x_3=\frac{1}{n}[l_4]. \tag{36}$$

或以[1], [2], [3], [4] 表示 P_1, P_2, P_3, P_4 之平差后方向値，卽得

$$[1]=0,\quad [2]=\frac{1}{n}[l_2],\quad [3]=\frac{1}{n}[l_3],\quad [4]=\frac{1}{n}[l_4]. \tag{37}$$

至于 $z', z'', z''' \cdots$ 之值，自式(31)之前 n 个方程式内求之：

$$\left.\begin{aligned} z' &= \frac{1}{s}\{[l'] - (x_1 + x_2 + x_3)\}, \\ z'' &= \frac{1}{s}\{[l''] - (x_1 + x_2 + x_3)\}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

求出 $z', z'' \cdots$ 等之后，即可根据(30)求改正数 v，即

$$\left.\begin{aligned} &v_1' = \quad -(l_1' - z'), &&v_1'' = \quad -(l_1'' - z''), &&\cdots\cdots \\ &v_2' = x_1 - (l_2' - z'), &&v_2'' = x_1 - (l_2'' - z''), &&\cdots\cdots \\ &v_3' = x_2 - (l_3' - z'), &&v_3'' = x_2 - (l_3'' - z''), &&\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; &&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; &&\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

故吾人须先算出每测回内加上定向未知数后之方向值 $(l_1' - z')$ 等，使测回内所有方向值均作相同之移动，是名为测回移动。每测回之测回移动值 $-z', -z'', \cdots$ 等均不相等。$(l_1' - z')$ 等，謂之移动后之方向值。以 $x_1, x_2 \cdots$ 等分别减去其相当之移动后之方向值，即得改正数。

因观测方向总数为 $n \cdot s$，未知数总数为 $n + s - 1$，故每观测方向之中誤差为：

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{ns - n - (s-1)}} = \sqrt{\frac{[vv]}{(n-1)(s-1)}}. \tag{40}$$

至于平差后每方向之中誤差，可由(37)直接寫出，因按誤差傳播定律：

$$M^2 = m_{[1]}^2 = m_{[2]}^2 = \cdots = \frac{1}{n^2}(\underbrace{m^2 + m^2 + \cdots + m^2}_{\text{共 } n \text{ 項}}),$$

故平差后各方向之中誤差为：

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}, \tag{41}$$

即平差后每方向之权为观测方向值权之 n 倍，而任意两方向間所作成之角度，其权为 $n/2$。

测回号数 度盘位置		1 0	2 22°30′	3 45°	4 67°30′	5 90°	6 112°30′	7 135°	8 157°30′	总和	方向中数 A
觇准点	方向 P	″	″	″	″	″	″	″	″		
(I) 大宝頂	0° 0′	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00
(I) 歌乐山	159°43′	36.48	36.90	36.00	38.98	37.52	35.10	35.80	33.86	290.64	36.33
(I) 小垭口	216°14′	36.58	38.08	35.64	35.57	37.78	36.68	36.10	36.32	292.75	36.59
(I) 雷家山	252°46′	18.29	19.30	17.75	18.27	19.24	17.98	17.34	16.16	143.35	17.92
(I) 天台寺	313°34′	2.50	2.44	0.42	1.92	3.34	3.82	1.42	−0.78	15.08	1.88
和数		93.85	96.72	88.81	94.74	97.88	93.58	90.66	85.56	741.80	92.72
中数 B		18.77	19.34	17.76	68.95	19.58	18.72	18.13	17.11	148.36	$18.54=A_0$
测回移动值 A_0-B		−0.23	−0.80	+0.78	−0.41	−1.04	−0.18	+0.41	+1.43	−0.04	
$II=I+(A_0-B)$ 大宝頂		−0.23	−0.80	+0.78	−0.41	−1.04	−0.18	+0.41	+1.43	−0.04	
$II=I+(A_0-B)$ 歌乐山		36.25	36.10	36.78	38.57	36.48	34.92	36.21	35.29	290.60	
$II=I+(A_0-B)$ 小垭口		36.35	37.28	36.42	35.16	36.74	36.50	36.51	37.75	292.71	
$II=I+(A_0-B)$ 雷家山		18.06	18.50	17.53	17.86	18.20	17.80	17.75	17.59	143.29	
$II=I+(A_0-B)$ 天台寺		2.27	1.64	1.20	1.51	2.30	3.64	1.83	0.65	15.04	

和數	92.79	92.72	92.71	92.69	92.68	92.68	92.71	92.71	741.60
中數 B'	18.54	18.54	18.54	18.54	18.54	18.54	18.54	18.54	148.32

$v=A-\text{II}$

	+0.23	+0.80	−0.78	+0.41	+1.04	+0.18	−0.41	−1.43	+0.04
	+0.08	+0.23	−0.45	−2.24	−0.15	+1.41	+0.12	+1.04	+0.04
	+0.24	−0.69	+0.17	+1.43	−0.15	+0.09	+0.08	−1.16	+0.01
	−0.14	−0.58	+0.39	+0.06	−0.28	+0.12	+0.17	+0.33	+0.07
	−0.39	+0.24	+0.68	+0.37	−0.42	−1.76	+0.05	+1.23	0
和	+0.02	0	+0.01	+0.03	+0.04	+0.04	+0.01	+0.01	+0.16

vv

	0.053	0.640	0.608	0.168	1.082	0.032	0.168	2.045	4.796
	0.006	0.052	0.203	5.018	0.023	1.988	0.014	1.082	8.387
	0.058	0.476	0.029	2.045	0.023	0.008	0.006	1.346	3.991
	0.020	0.336	0.152	0.004	0.078	0.014	0.029	0.011	0.644
	0.152	0.058	0.462	0.137	0.176	3.098	0.003	1.513	5.599
和	0.289	1.563	1.454	7.372	1.382	5.140	0.220	5.997	23.417

每一測回每一方向之中誤差 $m=\sqrt{\dfrac{[vv]}{(n-1)(s-1)}}=\sqrt{\dfrac{23.417}{7\times 4}}=\pm 0''.92$；

方向中數之中誤差 $M=\dfrac{0''.92}{\sqrt{8}}=\pm 0''.33.$

由上所述，可知完全方向組之計算按(37)極为簡單，中誤差之計算可按(39)，(40)，(41)進行，今举例如下以明之：

例 1: 方向观测中誤差之計算(詳見 206, 207 頁各表)。

測站: 宝華寺　仪器: Wild 3349　观測日期: 1941 年 7 月 10 日

关于 $[vv]$ 之計算，吾人亦可不必求出 $z', z'', \cdots$ 諸値，而直接由每方向中数与每測回讀数之差異 d 求之。命

方向	第 1 組	第 2 組	……	第 n 組
P_1	$d'_1=0 \quad -l'_1$	$d''_1=0 \quad -l''_1$	……	$d_1^{(n)}=0 \quad -l_1^{(n)}$
P_2	$d'_2=x_1 \quad -l'_2$	$d''_2=x_1 \quad -l''_2$	……	$d_2^{(n)}=x_1 \quad -l_2^{(n)}$
⋮	………………	………………	……	………………
P_s	$d_s=x_{(s-1)}-l'_s$	$d''_s=x_{(s-1)}-l''_s$	……	$d_s^{(n)}=x_{(s-1)}-l_s^{(n)}$

(42)

將各組之 d 相加而与式(38)比較，即得

$$[d'] = -s\cdot z',\ [d''] = -s\cdot z'', \cdots [d^{(n)}] = -s\cdot z^{(n)}. \tag{43}$$

又由(39)知

$$\left.\begin{aligned} v'_1 &= d'_1 + z' = d'_1 - \frac{[d']}{s}, \\ v'_2 &= d'_2 + z' = d'_2 - \frac{[d']}{s}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ v'_s &= d'_s + z' = d'_s - \frac{[d']}{s}. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

其余各測回可类推。由(44)各式之平方和得：

$$[v'v'] = [d'd'] - 2\frac{[d']^2}{s} + \frac{[d']^2}{s} = [d'd'] - \frac{[d']^2}{s}; \tag{45}$$

其余各測回亦得同样之結果，如

$$[v''v''] = [d''d''] - \frac{[d'']^2}{s}.$$

將各測回所得之 $[v'v']$ 相加，即得

組　　数 度盘位置		1 0	2 22°30′	3 45°	4 67°30′	5 90°	6 112°30′	7 135°	8 157°30′	总和	方向中数 A
觇准点	方向 P	″	″	″	″	″	″	″	″	″	″
(I) 大宝頂	0° 0′	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00	00.00
(I) 歌乐山	159°42′	36.48	36.90	36.00	38.98	37.52	35.10	35.80	33.86	290.64	36.33
(I) 小㖞口	216°14′	36.58	38.08	35.64	35.57	37.78	36.68	36.10	36.32	292.75	36.59
(I) 雷家山	252°46′	18.29	19.30	16.75	18.27	19.24	17.98	17.34	16.16	143.33	17.92
(I) 天台寺	313°34′	2.50	2.44	0.42	1.92	3.34	3.82	1.42	−0.73	15.08	1.88
觇准点		$d=A-P$									
大宝頂		0	0	0	0	0	0	0	0	0	
歌乐山		−0.15	−0.57	+0.33	−2.65	−1.19	+1.23	+0.55	+2.47	0	
小㖞口		+0.01	−1.49	+0.95	−1.02	−1.19	−0.09	+0.49	+0.27	−0.03	
雷家山		−0.37	−1.38	+1.17	−0.35	−1.32	−0.06	+0.58	+1.76	+0.03	
天台寺		−0.62	−0.56	+1.46	−0.04	−1.46	−1.94	+0.46	+2.60	−0.04	

和数 $[d]$	−1.13	−4.00	+3.91	−2.02	−5.16	−0.86	+2.06	+7.16	−0.040	
零方向改正数 $\frac{[d]}{s}$	−0.226	−0.800	+0.782	−0.404	−1.032	−1.172	+0.412	+1.432	−0.008	
$[d]$ $[d]$	1.275	16.00	15.250	4.080	26.600	0.740	4.240	51.300	119.485	$=([d]^2)$
觀准点	*dd*								总和	
大宝頂	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
歌乐山	0.023	0.325	0.108	7.000	1.415	1.510	0.281	6.100	16.762	
小啞口	0.000	2.220	0.905	1.040	1.415	0.008	0.240	0.073	5.901	
留家山	0.136	1.900	1.365	0.123	1.740	0.004	0.336	3.100	3.703	
天台寺	0.384	0.313	2.130	0.002	2.130	3.750	0.212	7.080	16.001	
和数	0.543	4.758	4.508	8.164	6.700	5.272	1.069	16.353	47.367	$=[dd]$

$$[vv]=[dd]-\frac{([d]^2)}{s} \tag{46}$$

$([d]^2)$ 系以每測回为單位，求得各差異值 d 之和，而平方之，然后將各組之結果相加卽得。故应用式(42)求 d，可不必先求測回移动及移动后之方向值，而可直接用式(46)求改正数平方和。玆將前例按此方法重算之如下：

例：方向觀測中誤差之計算(詳見109, 110頁各表)。

$$[vv]=[dd]-\frac{1}{s}([d]^2)=47.367-\frac{119.485}{5}=23.470;$$

每一測回每一方向之中誤差 $m=\sqrt{\frac{[vv]}{(n-1)(s-1)}}=\pm 0''.92;$

方向中数之中誤差　$M=\frac{m}{\sqrt{n}}=\pm 0''.33.$

上述之 s = 觀測方向之数目，n = 測回之数目。此法所得之結果，与前法完全相同。

第五節　不完全方向測回之測站平差

由上節所論，可知完全方向測回不但計算簡單，且經过測站平差后每个方向之权相等，对于此后之圖形平差甚为方便。不完全方向測回則反是。計算至为繁雜，且平差后各方向之权不能尽等，对于以后圖形平差亦極不便，且刻度誤差亦不能完全消除，故 I, II 三角測量中不許用之。在 III, IV 等三角測量中，如遇万不得已时，观测不完全方向測回，亦多按簡略法計算。本節僅將白塞尔于东普魯士弧度測量时所創用之嚴格方法作簡單之介紹。

計算不完全方向測回时，先將觀測方向相同之各組归併于一处，按前節所述之完全方向測回計算，其权等于所測測回数。然后列出改正数方程式与前節之式(30)完全相同。但此时之組可包括数測回之中数，故每組均有一不同之权，命之为 $p', p'', \cdots p^{(n)}$。每組內各方向之

权均相等。由是可組成法方程式如下：

$$
\begin{array}{l}
n\text{个}\left\{\begin{array}{l}
[p']z' \qquad\qquad\qquad +p'\ x_1+p'\ x_2+p'\ x_3-p'\ [l']\ =0,\\
\quad +[p'']z'' \qquad\qquad +p''\ x_1+p''\ x_2+p''\ x_3-p''\ [l'']\ =0,\\
\qquad +[p''']z''' \qquad +p'''\ x_1+p'''\ x_2+p'''\ x_3-p'''\ [l''']\ =0,\\
\qquad\quad +[p'''']z''''+p''''x_1+p''''x_2+p''''x_3-p''''[l'''']=0;
\end{array}\right.\\
(s-1)\text{个}\left\{\begin{array}{l}
p'z'+p''z''+p'''z'''+p''''z''''+[p_2]x_1 \qquad\qquad -[pl_2]=0,\\
p'z'+p''z''+p'''z'''+p''''z'''' \qquad +[p_3]x_2 \qquad -[pl_3]=0,\\
p'z'+p''z''+p'''z'''+p''''z'''' \qquad\qquad +[p_4]x_3-[pl_4]=0.
\end{array}\right.
\end{array}
\tag{47}
$$

式(47)与(31)完全相似，但因各組中并非將每个方向尽行观测，故式中亦有若干項可能并不存在，且因不等权之关系，不能將 x_1, x_2, x_3 之値化成一般之公式。但由式(47)內之前 n 个方程式中，吾人可求得各組之定向未知数 z 如下式：

$$
\left.\begin{array}{l}
z' = \dfrac{p'}{[p']}\{[l']-(x_1+x_2+x_3)\};\\
z'' = \dfrac{p''}{[p'']}\{[l'']-(x_1+x_2+x_3)\};\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{array}\right\}
\tag{48}
$$

將式(48)代入(47)內之后$(s-1)$个方程式內，卽可求得約化后僅含未知数 $x_1, x_2, \cdots$ 之法方程式。解此法方程式，卽可求得 $x_1, x_2, \cdots$ 諸値。

每个观測方向之中誤差，可由下式求之：

$$
m=\sqrt{\frac{[pvv]}{R-n-(s-1)}},
\tag{49}
$$

R 为总共观測方向之数目。

兹举例如下：

自測站 O 观測 P_1, P_2, P_3 三方向，其結果如下：

$$
\text{第一組}\quad\left\{\begin{array}{llll}
P_1 & 0^\circ & 00' & 00''.000,\\
P_2 & 26 & 14 & 51.646, \qquad p'=12;\\
P_3 & 87 & 04 & 52.792.
\end{array}\right.
$$

第二組 $\begin{cases} P_1 & 0 \quad 00 \quad 00.000, \\ P_2 & 26 \quad 14 \quad 52.553; \end{cases} \quad p''=19;$

第三組 $\begin{cases} P_1 & 0 \quad 00 \quad 00.000, \\ P_3 & 87 \quad 04 \quad 53.104. \end{cases} \quad p'''=12.$

命 P_1P_2 間之角度为 x_1，其近似值为 $x_1^0=26°14'50''$，$x_1=x_1^0+\xi_1$；

P_1P_3 間之角度为 x_2，其近似值为 $x_2^0=87\ 04\ 50$，$x_2=x_2^0+\xi_2$.

于是得改正数方程式：

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{llll} v_1'=z_1 & & & \\ v_2'=z_1 & +\xi_1 & & -1.646 \\ v_3'=z_1 & & +\xi_2 & -2.792 \end{array}\right\} p'=12; \\
\left.\begin{array}{llll} v_1''= & z_2 & & \\ v_2''= & z_2 & +\xi_1 & -2.553 \end{array}\right\} p''=19; \\
\left.\begin{array}{llll} v_1'''= & z_3 & & \\ v_3'''= & z_3 & +\xi_2 & -3.104 \end{array}\right\} p'''=12.
\end{array}\right\} \tag{50}$$

由此組成法方程式：

$$\left.\begin{array}{rrrrrr}
36z_1 & —— & —— & +12\xi_1 & +12\xi_2 & -53.256=0; \\
—— & +38z_2 & —— & +19\xi_1 & —— & -48.507=0; \\
—— & —— & +24z_3 & —— & +12\xi_2 & -37.248=0; \\
12z_1 & +19z_2 & —— & +31\xi_1 & —— & -68.259=0; \\
12z_1 & —— & +12z_3 & —— & +24\xi_2 & -70.752=0.
\end{array}\right\}$$

由前三方程式中得：

$$12z_1=-\ 4\xi_1-4\xi_2+17.752;$$
$$19z_2=-9.5\xi_1 \qquad +24.254;$$
$$12z_3= \qquad -6\xi_2+18.624.$$

代入法方程式之后二方程式内得：

$$17.5\xi_1-\ 4.0\xi_2-26.253=0;$$
$$-4.0\xi_1+14.0\xi_2-34.376=0.$$

解之，得 ξ_1 及 ξ_2 之值：

$$\xi_1 = +2''.205, \quad \xi_2 = +3''.086.$$

加入近似值 x_1^0 及 x_2^0，遂得平差值

P_1P_2 間之角度：　$x_1 = 26°14'52''.205;$

P_1P_3 間之角度：　$x_2 = 87°04'53''.086.$

將 ξ_1 与 ξ_2 值代入 z 式內，卽得

$$z_1 = -0''.284;$$

$$z_2 = +0''.174;$$

$$z_3 = +0''.009.$$

最后代入(50)內，卽得改正数：

$$v_1' = -0''.284, \quad v_2' = +0''.275, \quad v_3' = +0''.010;$$

$$v_1'' = +0''.174, \quad v_2'' = -0''.174;$$

$$v_1''' = +0''.009, \qquad v_3''' = -0''.009.$$

由此得　$[pvv] = 3.03.$

总共观測方向数目为 $R=7$, $n=3$, $s=3$, 代入式(49)卽求出权單位之中誤差：

$$m = \sqrt{\frac{3.03}{2}} = \pm 1''.23.$$

平差后各角度之权，可依第四章所論之算法，用权方程式求出。因各方向观測次数多寡不同，各角度之权不尽相等，是以各方向之权無法求出。但作圖形平差时，如欲嚴格用最小二乘法，必須知測站平差后各方向之权。1850 年，英國測量局以每組方向值与平差方向值之差異求其近似之权数，并以此近似值为圖形平差之用。1870 年在德國 Bayern 邦之測量，則以每方向对准之次数为其权数。但此种方法均系近似方法。赫尔默特采用一更合理之方法，能使由各方向之权数計算各角之

权数，与由平差中求得各角之权数相差甚微，但此中計算，至为繁雜，对于实际应用，頗不便利，本書从略。

第六節 不完全方向測回之簡略計算法

前節所述之不完全方向測回平差法，系嚴格遵照最小二乘法之原理，其計算工作至为繁雜。英國測量局采用一种簡略計算法，其結果与应用最小二乘法所得者相差極微，玆先略述其理論，再以上節之例解釋之。

今自公式(47)出發，捨去諸定向未知数 $z', z'', \cdots$ 等項，于是自(47)内之后 $(s-1)$ 个方程式内，可求得 $x_1, x_2, \cdots$ 等之第一近似值：

$$x_1^0=\frac{[pl_2]}{[p_2]}, \quad x_2^0=\frac{[pl_3]}{[p_3]}, \cdots. \tag{51}$$

將此近似值代入改正数方程式内，例如在第一組之改正数方程式为：

$$q\text{ 个}\begin{cases} v'_1=z' & -l'_1, \\ v'_2=z'+x_1^0 & -l'_2, \\ v'_3=z' \quad +x_2^0 & -l'_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{cases} \tag{52}$$

并假定在該組内 $[v']=0$，易言之，即命該組之 $[v'v']$ 为最小值，于是求得 z' 之近似值：

$$z'=-\frac{1}{q}[x^0-l']. \tag{53}$$

同样將 x_1^0, x_2^0 代入第二組之改正数方程式内，亦可求得 z''，余类推。

求得 $z', z'', \cdots$ 之近似值後，再將其代入(52)内，此时复以 $x_1, x_2, \cdots$ 等为未知数，而另外組成一法方程式，再求 $x_1, x_2, \cdots$ 等之第二近似值。在普通情形下，此第二近似值已与最小二乘法之嚴格結果相差不多，英國測量局之規定，亦即以此为方向之平差値。但吾人如欲得更精确之結果，仍可重复应用此方法，玆举前節之例以明之：

例 1: 第一步: 求 $x_1, x_2, \cdots$ 之第一近似值[参考式(51)](表中僅書秒数,不列分数之值)

組别	权	方向值 l		
		P_1	P_2	P_3
第一組	12	60″.000	51″.646	52″.792
第二組	19	60 .000	52 .553	——
第三組	12	60 .000	——	53 .104
权中数	x^0	60 .000	52 .202	52 .948

第二步: 求 $z', z'', \cdots$ 之近似值

組别	权	x^0-l			組之和	q	z 之近似值
		P_1	P_2	P_3			
第一組	12	0″.000	+0″.556	+0″.156	+0.712	3	−0.237
第二組	19	0 .000	−0″.351	——	−0.351	2	+0.176
第三組	12	0 .000	——	−0 .156	−0.156	2	+0.078
不等权中数		0	0	0			

第三步: 求 $x_1, x_2, \cdots$ 之第二次近似值

組别	权	$l-z$		
		P_1	P_2	P_3
第一組	12	60″.237	51″.883	53″.029
第二組	19	59 .824	52 .377	
第三組	12	59 .922		53 .026
不等权中数		59 .967	52 .186	53 .028

若仍將 P_1 方向化为零方向,卽得

$$x_1 = 26°14'52''.219,$$

$$x_2 = 87°04'53''.061.$$

將 x_1, x_2 与 $z', z''\cdots$ 等值与前節按最小二乘法之結果比較,已相差極少,x 值最大不过差百分之二秒余。故英國測量局卽用此結果已足

为証明連續应用此法当可求得更相近之值，今再續作一次：

第四步：求 $z', z'', \cdots$ 之第二次近似值

組別	权	x^0-l			組之和	q	z 之近似值
		P_1	P_2	P_3			
第一組	12	0″.000	+0″.573	+0″.269	+0″.842	3	−0″.281
第二組	19	0 .000	−0 .334	——	−0 .334	2	+0 .167
第三組	12	0 .000	——	−0 .043	−0 .043	2	+0 .022
不等权中数		0	+0 .017	+0 .113			

第四步：求 $x_1, x_2, \cdots$ 之第二次近似值

組別	权	$l-z$		
		P_1	P_2	P_3
第一組	12	60″.281	51″.927	53″.073
第二組	19	59 .833	52 .386	
第三組	12	59 .978		53 .082
不等权中数		59 .998	52 .208	53 .078

化 P_1 为零方向，得
$$x_1 = 26°14'52''.210,$$
$$x_2 = 87°04'53''.080.$$

此值与嚴格值相差已不过千分之五六秒矣。

習 題

1. 在測站張家唖口観測鷄公山、沙兒崗、大宝鼎及天台寺四目标，其結果如下：

組數		1	2	3	4	5	6	7	8	总和	方向中数
測度盤位置		0	22°30′	45°	67°30′	90°	112°30′	135°	157°30′		
鷄公山	0°0′	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00
沙兒崗	36 03	57.9	58.8	59.0	58.3	55.8	55.8	55.8	57.0	458.40	57.30
大宝鼎	61 05	36.7	33.4	35.4	36.0	36.0	36.8	36.2	33.9	284.40	35.55
天台寺	103 44	28.5	27.6	27.6	26.4	24.6	26.2	24.0	24.0	208.70	26.09

試平差之，并求其中誤差。

2. 自測站沙兒崗观測大宝鼎、天台寺、張家啞口及鶏公山四方向，得下列結果：

組	数	1	2	3	4	5	6	7	8	中数
大宝鼎	0°00′	00	00	00	00	00	00	00	00	00
天台寺	54 34	17.3	18.3	15.6	14.3	18.0	16.0	15.2	15.7	16.30
張家啞口	125 20	41.7	40.5	42.6	39.8	43.6	42.3	40.4	39.0	41.24
鶏公山	180 06	07.5	07.4	10.8	05.6	09.8	10.6	08.2	05.6	8.19

試計算观測之中誤差。

3. 在測站五雲山，观測其四週三四等三角点，因雲霧之关系，同时不能完全見及所有各目标，故僅得不完全方向測回，其結果如下：

組 測点	° ′	1	2	3	4	5	6	7	8
天台寺	0 00	00	00	00	00	00	00	00	00
熊家岩	25 55	19	08	—	—	—	—	—	—
白羊坡	30 57	58	51	—	—	—	—	—	—
巴山	45 19	38	29	28	30	—	—	—	—
歇馬場	55 58	24	15	—	—	—	—	—	—
廟頂坡	63 11	21	14	—	—	—	—	—	—
楊洪廟	79 19	12	04	—	—	—	—	—	—
獅子岩	102 05	51	46	55	44	—	—	—	—
大宝鼎	174 50	68	62	76	66	66	58	58	59
流水岩	198 05	—	—	—	—	07	07	—	—
佛衣寺	235 37	—	—	—	—	—	—	13	14
何家崖口	244 50	—	—	—	—	18	12	—	—
真武廟	252 24	32	32	—	—	—	—	—	—
大坡	278 16	55	55	58	62	—	—	—	—
楊家廟	301 04	—	—	—	—	45	44	—	—
迴龍寺	328 07	47	42	—	—	—	—	—	—

試应用簡略計算法平差之。

第七章 圖形平差

第一節 圖形条件方程式

当测站平差完畢之后，吾人卽以测站平差之結果（角度或方向值）視作独立观测值，而進行圖形平差。圖形平差可在参考橢圓体面上進行，亦可將观测結果化至平面坐标系統內，如高斯投影平面內，然后在平面上平差。在平面上平差較在参考橢圓体面上平差簡單。一般而論，圖形平差多采条件平差之方式。今先不論基綫方位角諸条件，而僅論一独立三角網內之圖形几何条件。此种条件可分为两种：角度条件及边長条件。

角度条件有两种不同形式：一为测站上水平閉合条件。在一测站上，如將周圍各方向間之角度均加观测，則有一水平閉合条件。此种条件于方向观测时則不存在。如圖 7.1（甲）为角度观测之情形，在测站 D 上观测(7)(8)(9)三角度，經圖形平差后，此三角度之和必为 360°。同圖（乙）为方向观测之情形，此时平差后(10)(11)及(12)各方向各自得一改正数。(11—10)，(12—11)及(10—12)各角度之改正数和为零，因

$$v_{11}-v_{10}+v_{12}-v_{11}+v_{10}-v_{12}=0$$

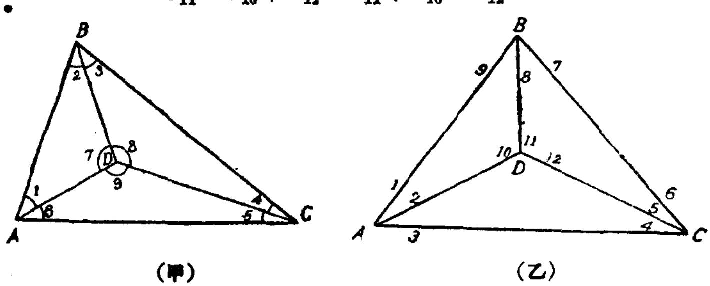

圖 7.1

也。故方向观测时，此种条件自动滿足，不必另列条件。

第二种角度条件，为三角形或任意一多边形內角总和之几何条件。例如上圖之三角形 ABD，其內角总和必須等于 $180°+\varepsilon$，ε 为該三角形之球面角超，在平面上平差时無球面角超。按角度平差时（圖甲），其形式如下：

$$(1)+(2)+(7)-(180°+\varepsilon)=0. \tag{1}$$

按方向平差时（圖乙）其形式如下：

$$(2)-(1)+(9)-(8)+(11)-(10)-(180°+\varepsilon)=0. \tag{2}$$

又如上圖之四边形 $ADBC$，其角度条件为：

（甲）角度观測 $(3)+(4)+(5)+(6)+(8)+(9)-(360°+\varepsilon)=0$;

（乙）方向观測 $(3)-(2)+(6)-(4)+(8)-(7)+$

$+(10)-(11)--(360°+\varepsilon)=0.$

普通一 n 边之多角形，其內角总和应为 $(n-2)180°+\varepsilon$。

角度条件滿足之后，每一圖形并不一定能完全閉合。例如圖 7.2 之三边中点形，其角度条件已完全滿足，但圖形仍不閉合。蓋吾人如自 AB 边計算 BC 边之長度，可循两不同路綫：由 AB 經三角形 ABC 得 BC 之边長为 BC；由 AB 經三角形 ABD 先求 BD 之長，再經三角形 $BC'D$ 得 BC 之边長为 BC'。是以圖形內各角度能滿足內角总和之条件以后，并不能得一几何上閉合之圖形。如欲使此圖形閉合，必須令

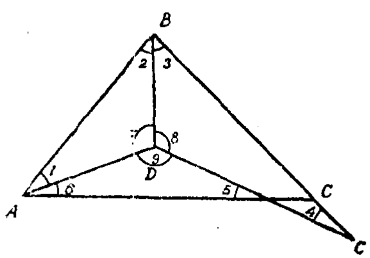

圖 7.2

$$BC=BC',$$

或
$$\frac{BA}{BD}\cdot\frac{BD}{BC}\cdot\frac{BC}{BA}=1, \tag{3}$$

是为边長条件。如以观測值（此处为角度）表示之，可將上述之边長計

算用正弦定律導出:

$$BC = AB \cdot \frac{\sin(1+6)}{\sin(4+5)}; \tag{4}$$

$$BC' = AB \cdot \frac{\sin(1)\sin(8)}{\sin(7)\sin(4)}. \tag{5}$$

將式(4)及(5)代入(3)內,即可約去 AB, BC 等边長值,而得

$$\frac{\sin(1)\sin(8)\sin(4+5)}{\sin(7)\sin(4)\sin(1+6)} = 1, \tag{6}$$

此为各角度間之边長条件。实际应用时,須將此式化为对数式:

$$\log\sin(1) - \log\sin(7) + \log\sin(8) - \log\sin(4) + \\ + \log\sin(4+5) - \log\sin(1+6) = 0. \tag{7}$$

如以角度(1),(7)…等之观测値代入式(7),則由于观測誤差关系,其右方不为零,而其对数之差値为 w, 或

$$\log\sin(1) - \log\sin(7) + \log\sin(8) - \log\sin(4) + \log\sin(4+5) \\ - \log\sin(1+6) = w. \tag{8}$$

w 通常以对数第 6 位为單位。

命 $v_1, v_7, v_8\cdots$等为角度(1),(7),(8)…等之改正数,加至各角后,对数差値 w 自將消去。設 v 之單位为秒, $\log\sin(1)$, $\log\sin(7)$ 等每秒之变化为 $\delta_1, \delta_7, \cdots$等,亦以对数第 6 位为單位,則顯然

$$\left.\begin{aligned} \log\sin\{(1)+v_1\} &= \log\sin(1) + \delta_1 v_1; \\ \log\sin\{(7)+v_7\} &= \log\sin(7) + \delta_7 v_7; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\log\sin\{(4+5)+v_4+v_5\} = \log\sin(4+5) + \delta_{(4+5)}v_4 + \delta_{(4+5)}v_5,$$

余类推。而

$$\log\sin\{(1)+v_1\} - \log\sin\{(7)+v_7\} + \log\sin\{(8)+v_8\} - \\ - \log\sin\{(4)+v_4\} + \log\sin\{(4+5)+v_4+v_5\}) - \\ - \log\sin\{(1+6)+v_1+v_6\} = 0. \tag{10}$$

以式(10)減去式(8),并顧及式(9)之关系,卽得边長条件方程式:

$$\delta_1 v_1-\delta_7 v_7+\delta_8 v_8-\delta_4 v_4+\delta_{(4+5)}(v_4+v_5)-$$
$$-\delta_{(1+6)}(v_1+v_6)+w=0, \tag{11}$$

依 v 併項，遂得

$$(\delta_1-\delta_{(1+6)})v_1+(\delta_{(4+5)}-\delta_4)v_4+\delta_{(4+5)}v_5-\delta_{(1+6)}v_6-$$
$$-\delta_7 v_7+\delta_8 v_8+w=0, \tag{12}$$

此式为平差計算时所用之边長条件方程式。

倘为方向观测，吾人可比較第一圖之(甲)及(乙)而得相当于式(6)之边長条件如下：

$$\frac{\sin(2-1)\sin(12-11)\sin(6-4)}{\sin(11-10)\sin(6-5)\sin(3-1)}=1, \tag{13}$$

化为对数后，得

$$\delta_{(2-1)}(v_2-v_1)+\delta_{(12-11)}(v_{12}-v_{11})+\delta_{(6-4)}(v_6-v_4)-\delta_{(11-10)}(v_{11}-$$
$$-v_{10})-\delta_{(6-5)}(v_6-v_5)-\delta_{(3-1)}(v_3-v_1)+w=0,$$

或依 v 併項：

$$(\delta_{(3-1)}-\delta_{(2-1)})v_1+\delta_{(2-1)}v_2-\delta_{(3-1)}v_3-\delta_{(6-4)}v_4+\delta_{(6-5)}v_5+$$
$$+(\delta_{(6-4)}-\delta_{(6-5)})v_6+\delta_{(11-10)}v_{10}-$$
$$-(\delta_{(12-11)}+\delta_{(11-10)})v_{11}+\delta_{(12-11)}v_{12}+w=0. \tag{14}$$

此时 $v_1, v_2, \cdots$ 等为方向(1), (2), ⋯等之改正数。

第二節 三角網內圖形条件之数目

圖形条件共分角度条件与边長条件两种，而角度条件又分为水平閉合条件及多边形(包括三角形)內角总和条件。在一圖形較为复雜之網內，吾人常須檢查究竟此網应有若干圖形条件，其中角度及边長条件各为若干。为解答此問題，吾人須先將三角網圖形繪出，將所有双向观測之方向以实綫連接之。如某方向僅自一端观測，則該半段用实綫，而另外半段用虛綫(如圖 7.3)。今命

$$\left.\begin{array}{l} p\ \text{为三角点之总数;} \\ p'\ \text{純用前交会所定三角点之数目;} \\ l\ \text{所有三角点間之連接綫总数;} \\ l'\ \text{半实半虛之連接綫数目,} \end{array}\right\} \tag{15}$$

而就按角度平差及按方向平差两种情形討論其应有之圖形条件数目。

(I) 按角度平差　設观測之角度共为 w 个。

(1) 圖形条件之总数目 r:

由第五章条件平差之理論中,吾人已曾論及,任意一平差問題,其条件方程之数目系等于多余观測之数目。故欲求三角網內圖形条件之总数,首須知悉如欲完全固定此圖形中之各点,至少应观測若干角度,自实际观測角度之数目減去之,卽得多余观測之数目,亦卽圖形条件之总数也。

今設自一固定綫出發,其两端共有两点。如欲加測一第三点,至少須測两角,是以

$$\text{共}\,p\,\text{点}\left\{\begin{array}{ll} \text{基綫之两点要求} & 0\ \text{角;} \\ \text{第三点要求} & 2\ \text{角;} \\ \text{第四点要求} & 2\ \text{角;} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots; \\ \text{第}\,p\,\text{点要求} & 2\ \text{角,} \end{array}\right.$$

$$\text{总和为}\qquad 0+(p-2)2=(2p-4)\ \text{角}.$$

卽欲測定 p 个三角点,至少須观測$(2p-4)$个角度。今实測 w 个角,故多余观測之数目,亦卽圖形条件之总数目为

$$r=w-2p+4. \tag{16}$$

(2) 內角总和条件之数目:

凡一多边形或三角形內,必須观測其所有內角,始能成立一內角总和条件。易言之,必須所有連接多边形各点間之綫均为实綫时,始有內角总和条件。同理,如一三角点僅自其他三角点观測之,而本身未置仪

器作角度观测(謂之前交会点),則自此点出發之綫均为半虛半实之連接綫,此种点必不能与任何其他点作成一实綫多边形。是以欲求多边形內角总和条件之数目,必須將帶有虛綫之連接綫,及純由前交会或后交会固定之点除去不論。若專論实点及实綫,則在$(p-p')$个实点間如用$(p-p')-1$条实綫連接之,適無角度条件。凡多一实綫,卽產生一內角总和条件。根据(15)式,知实綫之总数为$(l-l')$,故內角总和条件之数目为:

$$\text{內角总和条件数目} = (l-l')-(p-p')+1. \tag{17}$$

(3) 边長条件之数目:

今先設想自一三角形出發,連接此三角形之三点共有三边,如增加一点,可用任意两綫連接之。如圖 7.3 之 ABC 为一三角形,共有三綫連接之,加入 D 点則多加两綫無边長条件;倘加三綫如圖 7.5,卽生一边長条件,蓋多一綫卽使边長計算可循两路進行矣。是以

最初三点需用	3 連接綫;
第四点需	2 連接綫;
第五点需	2 連接綫;
………………	…………;
第 p 点需	2 連接綫,
共 p 点需	$(2p-3)$連接綫.

此处所指之綫,实綫或半实半虛之綫均計在內,故如一三角網內連接綫之总数为 l,則

$$\text{边長条件数目} = l-2p+3. \tag{18}$$

(4) 水平閉合条件之数目:

每一測站如共有 s 个連接綫,僅測 $s-1$ 个角度卽足,如观測 s 个角,卽發生水平角閉合条件。欲知一三角網內水平角閉合条件之数目,可將每測站实綫数目相加,如連接綫之一端为实綫,一端为虛綫,实綫之一端亦須計入,故 $\Sigma s=2l-l'$。实际測站之总数为 $p-p'$ 时,故僅測

$\Sigma s-(p-p')=2l-l'-p+p'$ 个角度卽足。倘观測之角度总数为 w，則

$$水平閉合条件数目=w-2l+l'+p-p'. \qquad (19)$$

將(17)，(18)及(19)三公式相加得：

$$\begin{aligned}圖形条件总数=&+l-l'-p+p'+1\\&+l\quad-2p\quad+3\\&w-2l+l'+p-p'\\=&w-2p+4.\end{aligned}$$

与式(16)完全符合。

倘三角網內并無不設測站之点，亦無虛綫方向，則 $p'=0$, $l'=0$,公式(17)及(19)可化簡。玆將此种情形下之各种条件数目列成下式：

$$圖形条件总数目=w-2p+4; \qquad (16)^*$$

$$內角总和条件数目=l-p+1; \qquad (17)^*$$

$$边長条件数目=l-2p+3; \qquad (18)^*$$

$$水平閉合条件数目=w-2l+p. \qquad (19)^*$$

(II) 按方向平差

(1) 圖形条件之总数目：

設自 AB 两点出發，相对各有一方向，加 C 点时(圖 7.3)，如 C 不放仪器作方向观測，則必須由 AC, BC 两方向前交会，故只需两方向已足。倘加 D 点，而于 D 設仪器，必須三方向如圖之 AD, DA 及 DB。是以在一三角網內，如有 p 个点，其中 p' 个为不放仪器观測之点，原点二个 (AB) 共需 2 方向，其余 $(p-p'-2)$ 个点需 $3(p-p'-2)$ 个方向，是以最少需要观測之总数目为 $3(p-p'-2)+$ $+2p'+2=3p-p'-4$。設共观測 R 个方向，則多余观測之数目，亦卽圖形条件之总数为：

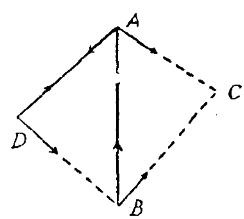

圖 7.3

$$r=R-3p+p'+4=2l-l'-3p+p'+4. \qquad (20)$$

因观测方向之总数目，即为所有綫数乘 2 減虛綫之数目也。

(2) 內角总和条件之数目：

按方向平差与按角度平差無別，故按照式(17)在按方向平差时

$$\text{內角总和条件之数目亦}=(l-l')-(p-p')+1. \qquad (21)$$

(3) 边長条件之数目：

按方向平差与按角度平差亦無分別，按式(18)

$$\text{边長条件之数目}=l-2p+3. \qquad (22)$$

因按方向平差时無所謂水平閉合条件，是以按(21)及(22)得按方向平差时圖形条件之总数为：

$$\begin{aligned} r= & \ l-l'-\ p+p'+1 \\ & +l\ -2p \qquad +3 \\ = & \ 2l-l'-3p+p'+4, \end{aligned}$$

与公式(20)固相同也。

倘 $l'=0$, $p'=0$, 則可应用下列公式：

$$\text{圖形条件总数 } r=2l-3p+4; \qquad (20)^*$$

$$\text{內角总和条件数目}=l-p+1; \qquad (21)^*$$

$$\text{边長条件数目}=l-2p+3. \qquad (22)^*$$

比較按方向平差与按角度平差各种条件之数目，可知同一三角網按方向平差与用角度平差时內角条件及边長条件数目完全相等，但按方向平差时，可少水平閉合条件。

例：(a) 試求下列三角網(圖 7.4)內各条件之数目：

$w=18$;

$p=8$; $l=13$.

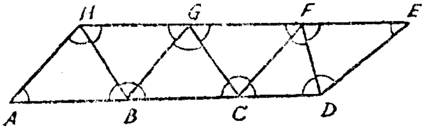

圖 7.4

应用公式(16)*至(18)*得

$$\text{圖形条件总数目 } r=18-16+4=6;$$

$$\text{內角条件数目} = 13 - 8 + 1 = 6;$$

$$\text{边長条件数目} = 13 - 16 + 3 = 0;$$

$$\text{水平閉合条件数目} = 18 - 26 + 8 = 0.$$

蓋此圖形名为三角形單鎖,除每个三角形內有一內角总和方程式外,并無边長及水平閉合条件。按方向平差亦同。

(b) 求下列四边形(圖 7.5)內各条件之数目:

$l=6;\qquad p=4.$

$$\text{圖形条件总数目} = 12 - 12 + 4 = 4;$$

$$\text{內角条件数目} = 6 - 4 + 1 = 3;$$

$$\text{边長条件数目} = 6 - 8 + 3 = 1.$$

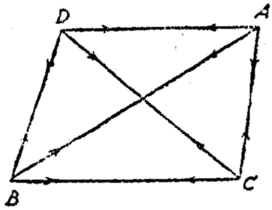

圖 7.5

此圖形为一四边形,共有三个內角条件,一个边長条件。內角条件与边長条件各有数种列法,將于第三節論及之。

(c) 求三角双鎖內各条件之数目(圖 7.6):

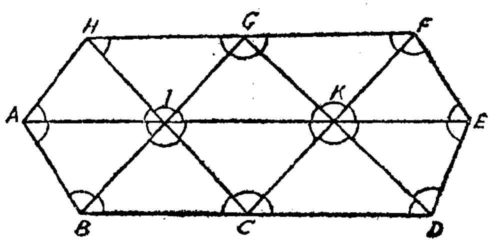

圖 7.6

$w=30;$

$p=10;\qquad l=19.$

$$\text{圖形条件总数} = 30 - 20 + 4 = 14;$$

$$\text{內角条件数目} = 19 - 10 + 1 = 10;$$

$$\text{边長条件数目} = 19 - 20 + 3 = 2;$$

$$\text{水平閉合条件数目} = 30 - 38 + 10 = 2.$$

此圖形为三角形双鎖，蓋適为二条單鎖所拼合者。除每个三角形有一內角条件共計10个外，每一多边中点形 $ABCKGH$ 及 $CDEFGI$ 各有一边長条件，多边中点形之中点 I 及 K 各有一水平閉合条件。

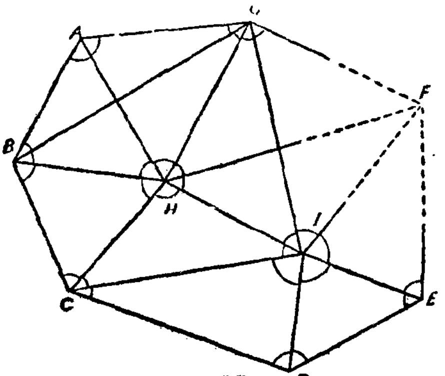

圖 7.7

(d) 求圖 7.7 之圖形之条件数目：

$w=28$;

$p=9$;　　$p'=1$;

$l=19$;　　$l'=4$;

$r=28-18+4=14$.

$$\text{內角总和条件数目}=(19-4)-(9-1)+1=8;$$

$$\text{边長条件数目}=19-18+3=4;$$

$$\text{水平閉合条件数目}=28-38+4+9-1=2.$$

今試檢查內角总和条件之所在，可分述如下：BHC, HCI, ICD, IDE, IGH 各三角形內各一个，四边形 $ABHG$ 內 3 个，共为 8 个与上求之数目相等。边長方程式在 $ABHG$, $GHIF$ 两四边形內各一，在 $ABCIG$, $GHCDEF$ 两多边中点形內又各一，共为 4 个，亦符合。至于水平閉合条件，則極明顯在 H、I 两測站。

(e) 圖 7.8 內系按方向平差，試求其条件之数目。

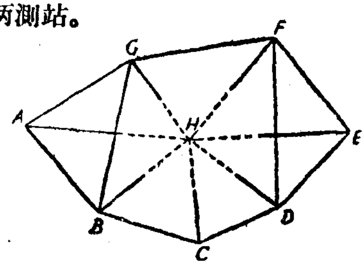

圖 7.8

$p=8$;　　$p'=1$;

$l=16$;　　$l'=7$;

$R=2l-l'=25$;

$r=25-24+1+4=6$.

$$\text{內角总和条件数目}=(16-7)-(8-1)+1=3;$$

$$\text{边長条件数目}=16-16+3=3.$$

内角总和之条件为 ABG, DEF 两实綫三角形，及 $BCDFG$ 实綫多边形。边長条件为 $ABHG$, $HDEF$ 两四边形及 $BCDFG$ 一多边形。

第三節　四边形之圖形条件

由前節之例中，吾人已知三角單鎖及双鎖之圖形条件均極易認出，但四边形之圖形条件，則尚有数种排列法，故特再提出討論之。

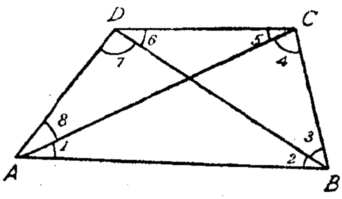

圖 7.9

無論角度观测或方向观测，每个四边形均有四个圖形条件：三个角度条件及一个边長条件。今先設按角度平差(圖 7.9)幷命各三角形之球面角超如下：

$$\begin{aligned}&\triangle ABC: \quad \varepsilon_1;\\ &\triangle BCD: \quad \varepsilon_2;\\ &\triangle CDA: \quad \varepsilon_3;\\ &\triangle DAB: \quad \varepsilon_4.\end{aligned} \quad \text{注意 } \varepsilon_1+\varepsilon_3=\varepsilon_2+\varepsilon_4. \tag{23}$$

内角条件共有下列数种寫法：

$$\left.\begin{aligned}
&(1)+(2)+(3)+(4)-(180^\circ+\varepsilon_1)=0; && (a)\\
&(3)+(4)+(5)+(6)-(180^\circ+\varepsilon_2)=0; && (b)\\
&(5)+(6)+(7)+(8)-(180^\circ+\varepsilon_3)=0; && (c)\\
&(7)+(8)+(1)+(2)-(180^\circ+\varepsilon_4)=0; && (d)\\
&(1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(6)+(7)+(8)-(360^\circ+\varepsilon_1+\varepsilon_3)=0; && (e)\\
&(1)+(2)-(5)-(6)-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=0; && (f)\\
&(3)+(4)-(7)-(8)-(\varepsilon_2-\varepsilon_3)=0. && (g)
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

公式(24)内之 (a), (b), (c), (d) 四式，系由 7.9 圖内之四个三角形所組成，(e) 由四边形 $ABCD$ 所組成，(f), (g) 則由两个折过之四边形 $ABDCA$

及 $BCADB$ 所組成。以上七式均可各为四边形之一內角条件，吾人可任意选擇，但須注意此七个条件之間并非相互独立，每次僅可任选三个独立者（因四边形之內角条件僅为三个也）。最明顯者为下列各关系：

$$\left.\begin{aligned}(a)+(c)&=(b)+(d)=(e);\\(a)-(b)&=(d)-(c)=(f);\\(b)-(c)&=(a)-(d)=(g).\end{aligned}\right\}\qquad(25)$$

上式(25)之关系，除由(24)各式加減而得外，并須注意(23)之关系。

此外則在(a),(b),(c),(d)四条件中亦僅有三个独立者，并由其中任意三个条件均可用加減求得第四个也。

是以选用三个角度条件时，必須注意(25)之关系，勿令所选三个条件为互相不独立者。选擇之法可分下列三类：

1. (a),(b),(c),(d)中之任意三个；
2. (e),(f),(g)；
3. (e),(f),(g)之任意一个与(a),(b),(c),(d)中之二个，但須注意(25)之关系。

在此三法中，第二法特别值得注意，如先捨去边長条件不顧时，可由(24)之(e),(f),(g)三条件組成法方程式。

$$\left.\begin{aligned}8k_1\qquad\qquad&+w_{(e)}=0;\\4k_2\qquad&+w_{(f)}=0;\\4k_3&+w_{(g)}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(26)$$

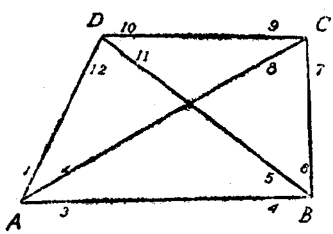

圖 7.10

(26)解算極易，因所有$[ab]$,$[ac]$,$[bc]$諸系数均为零也。

如为方向观測（圖 7.10）．則相当于(24)者为下列諸內角总和条件：

$$\left.\begin{aligned}
(3)-(2)+(6)-(4)+(8)-(7)-(180^\circ+\varepsilon_1)=0;(a)\\
(6)-(5)+(9)-(7)+(11)-(10)-(180^\circ+\varepsilon_2)=0;(b)\\
(9)-(8)+(12)-(10)+(2)-(1)-(180^\circ+\varepsilon_3)=0;(c)\\
(12)-(11)+(3)-(1)+(5)-(4)-(180^\circ+\varepsilon_4)=0;(d)\\
(3)-(1)+(6)-(4)+(9)-(7)+(12)-(10)-(360^\circ+\varepsilon_1+\varepsilon_3)=0;(e)\\
(3)-(2)+(5)-(4)-(9)+(8)-(11)+(10)-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=0;(f)\\
(6)-(5)+(8)-(7)-(12)+(11)-(2)+(1)-(\varepsilon_2-\varepsilon_3)=0.(g)
\end{aligned}\right\}(27)$$

如用(e),(f),(g)三条件組法方程式,亦可同样得極簡單之法方程式:

$$\left.\begin{aligned}
8k_1 \qquad\qquad +w_{(e)}=0;\\
8k_2 \qquad +w_{(f)}=0;\\
8k_3+w_{(g)}=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(28)$$

其次再論边長条件:亦有相当于式(24)及(27)之七种列法。惟此处不如角度条件之明顯,今用圖說明之:

圖 7.11 中 $ABCD$ 为四边形,其对角綫之交点为 M,两相对边之交点为 S 及 S',M, S, S' 均非测站,且亦非三角点。但吾人每次均可取 A, B; C, D 或 M, S, S' 之任一点为"極"而列出边長条件:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{極}\ A: & \dfrac{AD}{AC}\cdot\dfrac{AC}{AB}\cdot\dfrac{AB}{AD}=1;\\[2ex]
\text{極}\ B: & \dfrac{BA}{BD}\cdot\dfrac{BD}{BC}\cdot\dfrac{BC}{BA}=1;\\[2ex]
\text{極}\ C: & \dfrac{CB}{CA}\cdot\dfrac{CA}{CD}\cdot\dfrac{CD}{CB}=1;\\[2ex]
\text{極}\ D: & \dfrac{DC}{DB}\cdot\dfrac{DB}{DA}\cdot\dfrac{DA}{DC}=1;\\[2ex]
\text{極}\ M: & \dfrac{MA}{MB}\cdot\dfrac{MB}{MC}\cdot\dfrac{MC}{MD}\cdot\dfrac{MD}{MA}=1;\\[2ex]
\text{極}\ S: & \dfrac{SA}{SC}\cdot\dfrac{SC}{SD}\cdot\dfrac{SD}{SB}\cdot\dfrac{SB}{SA}=1;\\[2ex]
\text{極}\ S': & \dfrac{S'A}{S'C}\cdot\dfrac{S'C}{S'B}\cdot\dfrac{S'B}{S'D}\cdot\dfrac{S'D}{S'A}=1.
\end{array}\right\}(29)$$

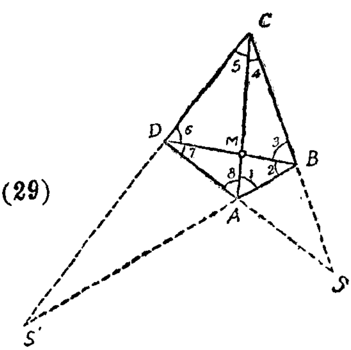

圖 7.11

式(29)之边長比例，亦可用角度表示之如下：

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{極 } A:\ \frac{\sin(5)\sin(2+3)\sin(7)}{\sin(6+7)\sin(4)\sin(2)}=1; &&(A)\\
&\text{極 } B:\ \frac{\sin(7)\sin(4+5)\sin(1)}{\sin(8+1)\sin(6)\sin(4)}=1; &&(B)\\
&\text{極 } C:\ \frac{\sin(1)\sin(3)\sin(6+7)}{\sin(8)\sin(6)\sin(2+3)}=1; &&(C)\\
&\text{極 } D:\ \frac{\sin(3)\sin(8+1)\sin(5)}{\sin(4+5)\sin(2)\sin(8)}=1; &&(D)\\
&\text{極 } M:\ \frac{\sin(1)\sin(8)\sin(5)\sin(7)}{\sin(2)\sin(4)\sin(6)\sin(8)}=1; &&(M)\\
&\text{極 } S:\ \frac{\sin(4)\sin(6+7)\sin(3)\sin(8+1)}{\sin(8)\sin(4+5)\sin(7)\sin(2+3)}=1; &&(S)\\
&\text{極 } S':\ \frac{\sin(5)\sin(2+3)\sin(6)\sin(8+1)}{\sin(1)\sin(4+5)\sin(2)\sin(6+7)}=1. &&(S')
\end{aligned}\right\}\quad(30)
$$

由式(30)可看出，如以 $ABCD$ 四点作極，則边長条件各有六項，以 M, S, S' 三点作極，边長条件各有八項。

式(30)之七式，其書法虽各有不同，但如应用角度条件，可由任意一式化至其他一式。最明顯之关系为：

$$
\left.\begin{aligned}
&(M)=(A)(C)=(B)(D);\\
&(S)=\frac{(D)}{(A)}=\frac{(C)}{(B)};\\
&(S')=\frac{(A)}{(B)}=\frac{(D)}{(C)}.
\end{aligned}\right\}\qquad(31)
$$

理論上，吾人可取(30)中之任何一式为平差之用，其結果当屬一致，但事实上則必須选择对于計算結果最精准，而計算手續又較簡單者。若專以后一条件論，六項之方程式較八項者为簡單，計算法方程式系数时，亦可稍省工作。但若論精准，則欲使計算精度增高，必須边長条件中各項之系数較大，易言之，卽必須使之尽量含有小角度，盖由第一節

中已知边長条件之系数与角度之余切成正比，而角度愈小，則其余切愈大也。

关于边長条件之选擇，丹麦人 Zacharie 及德人 Jordán 均有詳尽之討論。尤其后者証明边長条件之系数大小，与所选極点相对三角形之面積成比例。今略將其意义解釋如下：

今將圖 7.12 中之四边形 $ABCD$ 以其对角綫分为四部，令四部之面積为 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 如圖所示。以 A, B, C, D, M, S 及 S' 各点为極时，边長条件系数与下列面積成比例：

極	面積
A	$\beta+\gamma$
B	$\gamma+\delta$
C	$\alpha+\delta$
D	$\alpha+\beta$
M	$\alpha+\beta+\gamma+\delta$
S	$\gamma-\alpha$
S'	$\beta-\delta$

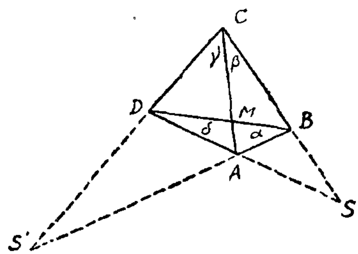

圖 7.12

由上列之面積比例，可以看出以 M 为極之边長方程式为最精准。一般而論，以 S 或 S' 为極之边長方程式最不利，蓋如 AD 与 BC 两边平行 $\gamma-\alpha=0$，如 AB 与 CD 两边平行，則 $\beta-\delta=0$，而普通之四边形，其对边均相近于平行也。故平常应用时吾人多选 A, B, C, D, M 中之一点为極，而列边長方程式。最精准者为(M)，但含系数为八項，而在(A)，(B)，(C)，(D)四式則共含六項。

式(30)之列出，系假定角度观測，如为方向观測，应以方向符号代角度符号，其余無分別，此时(A)，(B)，(C)，(D)各式均含九項，(M)則含十二項。

第四節　四边形按角度平差

今有四边形一个，如第三節圖 7.9 所示，其角度观測結果如下，試

平差之。

角度观测值：

(1) 42° 38′ 50″.51;　　(2) 41° 33′ 08″.83;

(3) 37 48 37.59;　　(4) 57 59 21.96;

(5) 29 37 43.75;　　(6) 54 34 15.64;

(7) 70 46 25.44;　　(8) 25 01 35.80.

三角形	球面角超	三角形閉合差	条件不符值
$\triangle ABC$	$\varepsilon_a=0.26$	$w_a=-1''.37$	$w_1=w_a+w_c=-0''.85$
$\triangle BCD$	$\varepsilon_b=0.16$	$w_b=-1.22$	$w_2=w_a-w_b=-0.15$
$\triangle CDA$	$\varepsilon_c=0.11$	$w_c=+0.52$	$w_3=w_b-w_c=-1.75$
$\triangle DAB$	$\varepsilon_d=0.21$	$w_d=+0.37$	

边長条件之計算：

Log sin (1)	9.8308992	$\delta_1=2.28$	Log sin (2)	9.8217135	$\delta_2=2.37$
,, (3)	9.7874966	$\delta_3=2.71$	,, (4)	9.9283704	$\delta_4=1.30$
,, (5)	9.6940602	$\delta_5=3.70$	,, (6)	9.9110695	$\delta_6=1.50$
,, (7)	9.9750757	$\delta_7=0.73$	,, (8)	9.6263806	$\delta_8=4.32$
	9.2875317			9.2875340	

$w_4=-2.3$

条件方程式：

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	w
a	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	−0.85=0
b	+1	+1			−1	−1			−0.15=0
c			+1	+1			−1	−1	−1.75=0
d	+2.28	−2.37	+2.71	−1.30	+3.70	−1.50	+0.73	−4.32	−2.30=0

法方程式：

$$\left.\begin{aligned}
\underline{8k_1} \qquad\qquad\qquad -0.07k_4 - 0.85 &= 0;\\
\underline{+4k_2} \qquad\quad -2.29k_4 - 0.15 &= 0;\\
\underline{+4k_3} + 5.00k_4 - 1.75 &= 0;\\
\underline{+54.98k_4} - 2.30 &= 0.
\end{aligned}\right\}$$

此法方程式之約化至为簡單，蓋僅第四式須加約化也：

$$
\begin{array}{rr}
+54.98k_4 & -2.30=0 \\
-\ \ 0.00 & -0.01 \\
-\ \ 1.31 & -0.09 \\
-\ \ 6.25 & +2.19 \\
\hline
47.42k_4 & -0.21=0
\end{array}
$$

由此得 $k_4=+0.0044.$

代入法方程式内求出：$k_1=+0.106$；$k_2=+0.040$；$k_3=+0.432.$

改正数之計算：

角度	ak_1	bk_2	ck_3	dk_4	v	vv	改正后之角度
(1)	+0.106	+0.040		+0.010	+0.16	0.0256	42° 38′ 50″.67
(2)	+0.106	+0.040		−0.010	+0.14	196	41 33 08.97
(3)	+0.106		+0.432	+0.013	+0.55	3025	37 48 38.14
(4)	+0.106		+0.432	−0.006	+0.53	2809	57 59 22.49
(5)	+0.106	−0.040		+0.016	+0.08	64	29 37 43.83
(6)	+0.106	−0.040		−0.007	+0.06	36	54 34 15.70
(7)	+0.106		−0.432	+0.003	−0.32	1024	70 46 25.12
(8)	+0.106		−0.432	−0.019	−0.35	1225	25 01 35.45

$[vv]=0.8635;$

$-[wk]=0.8604;$

$$m=\pm\sqrt{\frac{0.8635}{4}}=\pm 0''.47.$$

檢核：

$$
\begin{array}{llllll}
\triangle ABC & (1) & 42^\circ & 38' & 50''.67 \\
 & (2) & 41 & 33 & 08.97 \\
 & (3) & 37 & 48 & 38.14 \\
 & (4) & 57 & 59 & 22.49 \\
\hline
\text{和}= & & 180 & 00 & 0.27 \\
\text{应} & & & & 0.26
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llllll}
\triangle BCD & (3) & 37^\circ & 48' & 38''.14 \\
 & (4) & 57 & 59 & 22.49 \\
 & (5) & 29 & 37 & 43.83 \\
 & (6) & 54 & 34 & 15.70 \\
\hline
\text{和}= & & 180 & 00 & 00.16 \\
\text{应} & & & & 00.16
\end{array}
$$

$\triangle CDA$ (5)	29°	37′	43″.83		$\triangle DAB$ (7)	70°	46′	25″.12
(6)	54	34	15 .70		(8)	25	01	35 .45
(7)	70	46	25 .12		(1)	42	38	50 .67
(8)	25	01	35 .45		(2)	41	33	08 .97
和＝180	00	00 .10			和＝180	00	00 .21	
应		00 .11			应		0 .21	

log sin (8)	9.6263790	log sin (1)	9.8308995
log sin (2)	9.8217139	log sin (3)	9.7874981
log sin (4)	9.9283711	log sin (5)	9.6940605
log sin (6)	9.9110696	log sin (7)	9.9750755
	9.2875336		9.2875336

單个四边形之平差，亦可采用分組平差法（第五章第六節），計算較为簡單。茲將其用法說明于下：

先取角度方程式三个如下：

$$\left.\begin{aligned}&v_1'+v_2'+v_3'+v_4'+v_5'+v_6'+v_7'+v_8'+w_1=0;\\&v_1'+v_2'\qquad\qquad\quad -v_5'-v_6'\qquad\qquad +w_2=0;\\&\qquad\quad +v_3'+v_4'\qquad\qquad\quad -v_7'-v_8'+w_3=0.\end{aligned}\right\}\tag{32}$$

是为第一組条件方程，得法方程式：

$$\left.\begin{aligned}&8k_1'\qquad\qquad\quad +w_1=0;\\&\qquad +4k_2'\qquad +w_2=0;\\&\qquad\qquad +4k_3'+w_3=0.\end{aligned}\right\}\tag{33}$$

由此可得：$k_1'=-\dfrac{w_1}{8};\ \ k_2'=-\dfrac{w_2}{4};\ \ k_3'=-\dfrac{w_3}{4}.$

及初次改正数：

$$\left.\begin{aligned}&v_1'=v_2'=-\frac{w_1}{8}-\frac{w_2}{4};\quad v_5'=v_6'=-\frac{w_1}{8}+\frac{w_2}{4};\\&v_3'=v_4'=-\frac{w_1}{8}-\frac{w_3}{4};\quad v_7'=v_8'=-\frac{w_1}{8}+\frac{w_3}{4}.\end{aligned}\right\}\tag{34}$$

由此公式可見第一次改正数之計算至为簡單，根本無須列法方程式，而可直接求得之。然后再以改正后之角度列出第二次之条件方程式：

$$\left.\begin{aligned}
v_1''+v_2''+v_3''+v_4''+v_5''+v_6''+v_7''+v_8''&=0;\\
v_1''+v_2''\qquad\qquad-v_5''-v_6''\qquad\qquad&=0;\\
+v_3''+v_4''\qquad\qquad-v_7''-v_8''&=0;\\
\delta_1v_1''-\delta_2v_2''+\delta_3v_3''-\delta_4v_4''+\delta_5v_5''-\delta_6v_6''+\delta_7v_7''-\delta_8v_8''+w_4&=0.
\end{aligned}\right\}\tag{35}$$

此时前三个角度方程式之不符值項均为零，第四个条件之不符值項 w_4 系以初次改正后之角度值計算而得。如此得法方程式：

$$\left.\begin{array}{lllll}
8k_1'' & \text{——} & \text{——} & +Ak_4'' \text{——} & =0;\\
\text{——} & 4k_2'' & \text{——} & +Bk_4'' \text{——} & =0;\\
\text{——} & \text{——} & 4k_3'' & +Ck_4'' \text{——} & =0;\\
Ak_1'' & +Bk_2'' & +Ck_3'' & +Dk_4''+w_4 & =0.
\end{array}\right\}$$

由条件方程式中可以看出：

$$\left.\begin{aligned}
A&=(\delta_1+\delta_3+\delta_5+\delta_7)-(\delta_2+\delta_4+\delta_6+\delta_8);\\
B&=(\delta_1-\delta_2)-(\delta_5-\delta_6);\\
C&=(\delta_3-\delta_4)-(\delta_7-\delta_8);\\
D&=[\delta^2].
\end{aligned}\right\}\tag{36}$$

將 k_1'', k_2'', k_3'' 消去卽得：

$$\left\{D-\frac{1}{8}(A^2+2B^2+2C^2)\right\}k_4''+w_4=0,\tag{37}$$

或

$$k_4''=-\frac{w_4}{D-\frac{1}{8}(A^2+2B^2+2C^2)}.$$

$$k_1''=-\frac{A}{8}k_4'';\quad k_2''=-\frac{B}{4}k_4'';\quad k_3''=-\frac{C}{4}k_4''.\tag{38}$$

此法簡捷之处，在無須約化法方程式，亦不必將其列出。先照式(34)將角度方程不符值配數于各角，然后計算边長方程式。附帶查出各角之 δ 值，而依(36)計算 A, B, C, D 各值，更依(38)求 k 值，卽可求

二次改正数矣。至于$[vv]$及中誤差之計算，仍須顧及第一次之改正数，蓋

$$v_i = v_i' + v_i''$$

也。玆仍以前例用此法計算之如下：

角度	观测値	$-\frac{w_1}{8}$	$\pm\frac{w_2}{4}$	$\pm\frac{w_3}{4}$	初步改正値
(1)	42° 38′ 50″.51	+0″.106	+0.038		– – 50.65
(2)	41 33 08 .83	+0 .106	+0.038		– – 08.97
(3)	37 48 37 .59	+0 .106		+0.438	– – 38.13
(4)	57 59 21 .96	+0 .106		+0.438	– – 22.50
(5)	29 37 43 .75	+0 .106	–0.038		– – 43.82
(6)	54 34 15 .64	+0 .106	–0.038		– – 15.71
(7)	70 46 25 .44	+0 .106		–0.438	– – 25.11
(8)	25 01 35 .80	+0 .106		–0.438	– – 35.47

$w_a = -1''.37,$　　$w_1 = w_a + w_c = -0''.85,$

$w_b = -1\ .22,$　　$w_2 = w_a - w_b = -0\ .15,$

$w_c = +0\ .52,$　　$w_3 = w_b - w_c = -1\ .75.$

$w_d = +0\ .37;$

正弦对数 +	正弦对数 −	δ	δ	$\delta_1-\delta_2$, $\delta_5-\delta_6$	$\delta_3-\delta_4$, $\delta_7-\delta_8$	δ^2
9.8308995		2.29				5.24
	9.8217139		2.37	–0.08		5.62
9.7874981		2.72				7.40
	9.9283711		1.32		+1.40	1.74
9.6940604		3.70				13.69
	9.9110696		1.50	+2.20		2.25
9.9750755		0.74				0.55
	9.6263791		4.32		–3.58	18.66
9.2875335	9.2875337	9.45	9.51	–2.28	+4.98	55.15
$w = -0.2$		$A = -0.06$		$=B$	$=C$	$=D$

$$A^2 = 0.00; \qquad D = 55.15; \qquad k_4'' = \frac{+0.2}{47.65} = +0.0042;$$

$$2B^2 = 10.40; \qquad \frac{1}{8}\Sigma = \underline{7.50}; \qquad k_1'' = -\frac{A}{8}k_4'' = 0;$$

$$\underline{2C^2 = 49.60}; \qquad 47.65; \qquad k_2'' = -\frac{B}{4}k_4'' = +0.0024;$$

$$\Sigma = 60.00; \qquad k_3'' = -\frac{C}{4}k_4'' = -0.0052.$$

角度	ak_1''	bk_2''	ck_3''	$\delta k_4''$	v''	v'	v
(1)	0	+0″.002		+0″.010	+0″.012	+0″.144	+0″.16
(2)	0	+0 .002		−0 .010	−0 .008	+0 .144	+0 .14
(3)	0		−0″.005	+0 .011	+0 .006	+0 .544	+0 .55
(4)	0		−0 .005	−0 .006	−0 .011	+0 .544	+0 .53
(5)	0	−0 .002		+0 .016	+0 .014	+0 .068	+0 .08
(6)	0	−0 .002		−0 .006	−0 .008	+0 .068	+0 .06
(7)	0		+0 .005	+0 .003	+0 .008	−0 .332	−0 .32
(8)	0		+0 .005	−0 .018	−0 .013	−0 .332	−0 .35

以上計算之步驟，表中均已詳列，無庸解釋。比較所得結果，与前法毫無差異。

第五節　四边形按方向平差

方向观测时之四边形平差与前節所述之角度观测無大差別。今就下圖为例而論之。一四边形内每测站观测三方向，共为十二个方向，其角度条件方程式如下(参閱圖 7.13)：

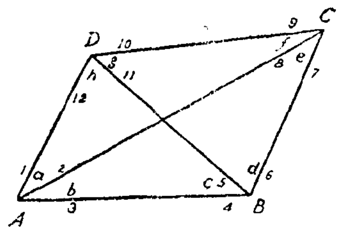

圖 7.13

$$\left.\begin{aligned}
-v_1 \quad +v_3-v_4 \quad +v_6-v_7 \quad +v_9-v_{10} \quad +v_{12}+w_1&=0;\\
-v_2+v_3-v_4+v_5 \quad +v_8-v_9+v_{10}-v_{11} \quad +w_2&=0;\\
+v_1-v_2 \quad -v_5+v_6-v_7+v_8 \quad +v_{11}-v_{12}+w_3&=0.
\end{aligned}\right\}\quad(39)$$

今以 a,b,c,d,e,f,g,h 表示此十二方向間所組成之角度，如

$$a=(2)-(1);\qquad b=(3)-(2)\cdots,$$

余类推。$\delta_a,\delta_b,\delta_c\cdots$为 $a,b,c\cdots$等角每差$1''$时其正弦对数之变化，于是得边長条件方程式:

$$\frac{\sin(3-2)\sin(6-5)\sin(9-8)\sin(12-11)}{\sin(2-1)\sin(5-4)\sin(8-7)\sin(11-10)}=1. \tag{40}$$

若化为改正数之边長条件，則得下式:

$$\delta_a v_1-(\delta_a+\delta_b)v_2+\delta_b v_3+\delta_c v_4-(\delta_c+\delta_d)v_5+\delta_d v_6+\delta_e v_7-$$
$$-(\delta_e+\delta_f)v_8+\delta_f v_9+\delta_g v_{10}-(\delta_g+\delta_h)v_{11}+\delta_h v_{12}+w_4=0. \tag{41}$$

將(39)与(41)联合解算，卽可求得 k_1, k_2, k_3, k_4 然后求得改正数 $v_1, v_2, \cdots v_n$ 等。

按方向平差时条件方程式之系数有一定律，卽每一条件中所有系数之和应为零。無論在角度条件及边長条件均能適用。蓋所有角度及边長条件均以角度为單位而列出者，故实际如以 α 代表角度，而以 v 代表方向，則所有方向观测之条件均可化为

$$a_1\alpha_1'+a_2\alpha''+\cdots=0 \tag{41}$$

之形式，如换以 v，則得

$$a_1(v_r'-v_l')+a_2(v_r''-v_l'')+\cdots=0, \tag{42}$$

蓋每个角度均可以其左右两方向之差表示，卽 $\alpha'=v_r'-v_l,\alpha''=v_r''-v_l''\cdots$ 是也。由(42)取其系数之和，得

$$[a]=+a_1-a_1+a_2-a_2\cdots=0.$$

此外倘可由此証明另一定律，卽每測站上各方向改正数之和亦等于零。蓋任意一角度化为方向后，其改正数之系数和必为零。倘將一測站各方向改正数相加，因

$$v_1=a_1k_1+b_1k_2+c_1k_3+\cdots,$$

故 $$[v]=[a]k_1+[b]k_2+[c]k_3+\cdots.$$

根据上述之理論，$[a]=[b]=[c]=\cdots=0$，故 $[v]=0$.

此定律可作檢核計算結果之用。

玆举例如下(参閱圖 7.13)：

观 測 結 果

A 雷家山	B 小垭口	球面角超
1. 0° 00′00″.00	4. 0° 00′00″.00	$\triangle ABC$: $\varepsilon_a=0''.51$
2. 43° 07′58″.04	5. 26°58′37″.73	
3. 116°29′40″.89	6. 56°57′26″.14	$\triangle BCD$: $\varepsilon_b=0''.46$
C 歌乐山	D 宝華山	
7. 0° 00′00″.00	10. 0° 00′00″.00	$\triangle CDA$: $\varepsilon_c=0''.28$
8. 49° 40′52″.76	11. 56°31′58″.40	
9. 93° 29′15″.45	12. 93°03′41″.37	$\triangle DAB$: $\varepsilon_d=0''.33$

三角形閉合差之計算

$\triangle ABC$		$\triangle BCD$		$\triangle CDA$	
$\angle ABC$:	56°57′26″.14	$\triangle BCD$:	93°29′15″.45	$\angle CDA$:	93°03′41″.37
$\angle BCA$:	49°40′52″.76	$\triangle CDB$:	56°31′58″.40	$\angle DAC$:	43°07′58″.04
$\angle CAB$:	73°21′42″.85	$\triangle DBC$:	29°58′48″.41	$\angle ACD$:	43°48′22″.69
	180°00′01″.75		180°00′02″.26		180°00′02″.10
$\varepsilon_a=$	0.51	$\varepsilon_b=$	0.46	$\varepsilon_c=$	0.28
$w_a=$	+1.24	$w_b=$	+1.80	$w_c=$	+1.82

$\triangle DAB$	
$\angle DAB$:	116° 29′ 40″.89
$\angle AB$:	26 58 37″.73
$\angle BDA$:	36 31 42″.97
	180 00 01″.59
$\varepsilon_d=$	0″.33
$w_d=$	+1″.26

檢核：$w_a+w_c=w_b+w_d=+3''.06.$

角度条件不符值：

$$w_1=w_a+w_c=+3''.06;$$

$$w_2=w_a-w_b=-0''.56;$$

$$w_3=w_b-w_c=-0''.02.$$

边長条件之計算如下：

角度	观測值	正弦对数	δ	角度	观測值	正弦对数	δ
(a)	43°07′58″.04	9.8348602	2.25	(b)	73°21′42″.85	9.9814255	0.63
(c)	26°56′37″.73	9.6567066	4.13	(d)	29°58′48″.41	9.6987088	3.65
(e)	49°40′52″.76	9.8822156	1.79	(f)	43°48′22″.69	9.8402457	2.19
(g)	56°31′58″.40	9.9212715	1.39	(h)	36°31′42″.97	9.7746804	2.84
	和	9.2950539	9.56		和	9.2950604	9.31

$$w_4 = +6.5.$$

比較(39),(41)兩式,可得法方程式系數如下:

$$[ad] = -(\delta_a+\delta_c+\delta_e+\delta_g)+(\delta_b+\delta_d+\delta_f+\delta_h) = -0.25;$$

$$[bd] = \{(\delta_a-\delta_e)-(\delta_d-\delta_h)\}-2\{(\delta_c-\delta_g)-(\delta_b-\delta_f)\} = -8.95;$$

$$[cd] = 2\{(\delta_a-\delta_e)+(\delta_d-\delta_h)\}+\{(\delta_c-\delta_g)+(\delta_b-\delta_f)\} = +3.72;$$

$$[dd] = [\delta\delta]+(\delta_a+\delta_b)^2+(\delta_c+\delta_d)^2+(\delta_e+\delta_f)^2+(\delta_g+\delta_h)^2 = +156.39.$$

故法方程式為:

$$\left.\begin{array}{llllr}
\underline{8k_1} & & & -\;\;0.25k_4 & +3.06=0; \\
 & \underline{+8k_2} & & -\;\;8.95k_4 & -0.56=0; \\
 & & \underline{+8k_3} & +\;\;3.72k_4 & -0.02=0; \\
 & & & \underline{+156.39k_4} & +6.50=0.
\end{array}\right\}$$

法方程式之約化至為簡單,僅須約化最后一式:

$$\begin{array}{rrl}
+156.39\,k_4 & +6.50 & =0 \\
-\;\;\;0.008 & +0.096 & \\
-\;\;10.000 & -0.626 & \\
-\;\;\;1.730 & +0.009 & \\
\hline
+144.65\,k_4 & +5.98 & =0
\end{array}$$

$$k_4 = -0.0413;$$

代入法方程式之前三式內,得:

$$k_1 = -0.382; \quad k_2 = +0.024; \quad k_3 = +0.022.$$

改正數之計算可列表如下:

方 向	ak_1	bk_2	ck_3	dk_4	v	vv	改正后之方向值
(1)	+0.382		+0.022	−0.093	+0″.31	0.0931	0 00 00.31
(2)		−0.024	−0.022	+0.119	+0 .07	49	43 07 58.11
(3)	−0.382	+0.024		−0.026	−0 .38	1444	116 29 40.51
(4)	+0.382	−0.024		−0.170	+0 .19	361	0 00 00.19
(5)		+0.024	−0.022	+0.321	+0 .32	1024	26 58 38.05
(6)	−0.382		+0.022	−0.151	−0 .51	2601	56 57 25.63
(7)	+0.382		−0.022	−0.074	+0 .29	841	0 00 00.29
(8)		+0.024	+0.022	+0.164	+0 .21	441	49 40 52.97

(9)	−0.382	−0.024		−0.090	−0 .50	2500	93 29 14.95
(10)	+0.382	+0.024		−0.057	+0 .35	1225	0 00 00.35
(11)		−0.024	+0.022	+0.174	+0 .17	289	56 31 58.57
(12)	−0.382		−0.022	−0.117	−0 .52	2704	93 03 40.85

$$[vv]=1.4440;$$
$$-[wk]=1.451.$$

关于結果之檢核，可用前述之定律；每測站各方向改正数之和应为零，如 $v_1+v_2+v_3=0$, $v_4+v_5+v_6=0, \cdots$ 又 $[vv]$ 之值与 $-[wk]$ 亦符合于計算精度之內。每方向之观測中誤差为：

$$m=\sqrt{\frac{1.444}{4}}=\pm 0''.60.$$

最后之檢核为將改正后之方向值代入条件方程式內，視其是否完全滿足，此处略去不列。

四边形按方向平差，亦可应用分組平差法。由三个角度条件〔式(39)〕所組成之法方程式为：

$$\left.\begin{aligned} 8k_1' \qquad\qquad &+w_1=0;\\ 8k_2' \qquad &+w_2=0;\\ 8k_3' &+w_3=0. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

解出得：

$$k_1'=-\frac{w_1}{8};\quad k_2'=-\frac{w_2}{8};\quad k_3'=-\frac{w_3}{8}. \tag{44}$$

故改正数为：

$$\left.\begin{aligned} v_4'=-v_3'=+\frac{1}{8}(w_1+w_2);\quad v_{10}'=-v_9'=+\frac{1}{8}(w_1-w_2);\\ v_2'=-v_8'=+\frac{1}{8}(w_2+w_3);\quad v_{11}'=-v_5'=+\frac{1}{8}(w_2-w_3);\\ v_7'=-v_6'=+\frac{1}{8}(w_3+w_1);\quad v_{12}'=-v_1'=+\frac{1}{8}(w_3-w_1). \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

据此將各方向值改正后，再計算边長条件，得不符值 w_4''，由此組成

之第二次法方程式为：

$$\left.\begin{array}{l} 8k_1'' \qquad\qquad + Ak_4'' = 0; \\ \quad + 8k_2'' \qquad + Bk_4'' = 0; \\ \qquad\quad + 8k_3'' + Ck_4'' = 0; \\ Ak_1'' + Bk_2'' + Ck_3'' + Dk_4'' + w_4 = 0. \end{array}\right\} \tag{46}$$

其中 A, B, C, D 各値，卽为

$$\left.\begin{array}{l} A = -(\delta_a+\delta_c+\delta_e+\delta_g)+(\delta_b+\delta_d+\delta_f+\delta_h) = -A_1+A_2; \\ B = \{(\delta_a-\delta_e)-(\delta_d-\delta_h)\} - 2\{(\delta_c-\delta_g)-(\delta_b-\delta_f)\} = B_1-2B_2; \\ C = 2\{(\delta_a-\delta_e)+(\delta_d-\delta_h)\} + \{(\delta_c-\delta_g)+(\delta_b-\delta_f)\} = 2C_1+C_2; \\ D = 2\{[\delta\delta]+\delta_a\delta_b+\delta_c\delta_d+\delta_e\delta_f+\delta_g\delta_h\} = 2(D_1+D_2), \\ \text{或} D = [\delta\delta]+(\delta_a+\delta_b)^2+(\delta_c+\delta_d)^2+(\delta_e+\delta_f)^2+(\delta_g+\delta_h)^2. \end{array}\right\} \tag{47}$$

A, B, C, D 之計算亦可列表行之，但不如角度观测时之簡單。法方程式(46)經約化三次后，得

$$\left\{D - \frac{1}{8}(A^2+B^2+C^2)\right\} k_4'' + w_4 = 0,$$

是以

$$k_4'' = -\frac{w_4}{D - \frac{1}{8}(A^2+B^2+C^2)}; \tag{48}$$

然后代入其他三个法方程式内，卽得

$$k_1'' = -\frac{A}{8}k_4''; \quad k_2'' = -\frac{B}{8}k_4''; \quad k_3'' = -\frac{C}{8}k_4''. \tag{49}$$

兹再应用此法將前例解算如下：

$w_1 = +3''.06$, $w_2 = -0''.56$, $w_1+w_2 = +2''.50$, $w_1-w_2 = +3''.62$;

$w_2 = -0''.56$, $w_3 = -0''.02$, $w_2+w_3 = -0''.58$, $w_2-w_3 = -0''.54$;

$w_3 = -0''.02$, $w_1 = +3''.06$, $w_3+w_1 = +3''.04$, $w_3-w_1 = -3''.08$.

按照(45)求各方向之改正数，并以初步改正后之方向値計算各夾角(a), (b), (c), (d), …等如下：

方向	观测值	改正数	改正后秒数	夾角	角度
(1)	0° 00′ 00″.00	+0″.38	00″.38	43° 07′ 57″.59	(a)
(2)	43° 07′ 58″.04	−0″.07	57″.97		
(3)	116° 29′ 40″.89	−0″.31	40″.58	73° 21′ 42″.61	(b)
(4)	0° 00′ 00″.00	+0″.31	00″.31	26° 58′ 37″.49	(c)
(5)	26° 58′ 37″.73	+0″.07	37″.80		
(6)	56° 57′ 26″.14	−0″.38	25″.76	29° 58′ 47″.96	(d)
(7)	0° 00′ 00″.00	+0″.38	00″.38	49° 40′ 52″.45	(e)
(8)	49° 40′ 52″.76	+0″.07	52″.83		
(9)	93° 29′ 15″.45	−0″.45	15″.00	43° 48′ 22″.17	(f)
(10)	0° 00′ 00″.00	+0″.45	00″.45	56° 31′ 57″.88	(g)
(11)	56° 31′ 58″.40	−0″.07	58″.33		
(12)	93° 03′ 41″.37	−0″.38	40″.99	36° 31′ 42″.66	(h)

由初步改正后之夾角值計算边長方程式，并以各角度正弦对数变化 δ 按式(47)推算 A, B, C, D 之值。凡此計算均可列于下表中：

角度	正弦对数	正弦对数	δ		$\delta_a-\delta_e$ $\delta_c-\delta_g$	$\delta_d-\delta_h$ $\delta_b-\delta_f$	B_1 B_2	C_1 C_2	$\delta\delta$	$\delta_a\delta_b$
(a)	9.8348592		2.25						5.06	
(b)		9.9814253		0.63					0.40	1.42
(c)	9.6567057		4.13		+0.47	+0.81	−0.34	+1.28	17.06	
(d)		9.6987072		3.65					13.32	15.07
(e)	9.8822151		1.78		+2.74	−1.57	+4.31	+1.17	3.17	
(f)		9.8402446		2.20					4.84	3.92
(g)	9.9212707		1.39						1.93	
(h)		9.7746796		2.84					8.07	3.95
和	9.2950507	9.2950567	9.55	9.32			$B=$	$C=$	53.85	24.36
		$w_4''=+6.0$;	$A=-0.23$				−8.96	+3.73	$D=156.42$	

$A^2=0.05$;　　$B^2=80.28$;　　$C^2=13.91$.

$$D-\frac{1}{8}\left(A^2+B^2+C^2\right)=156.42-\frac{1}{8}\,94.24=144.64.$$

按式(48)得　　　　$k_4''=-0.0414$;

代入(49)得　　　　$k_1''=-0.001$;

$$k''_2 = -0.046;$$

$$k''_3 = +0.019.$$

二次改正数之計算以及改正数总和列于下表:

方向	ak''_1	bk''_2	ck''_3	dk''_4	v''	v'	v
(1)	+0.001		+0.019	−0.093	−0.07	+0.38	+0.31
(2)		+0.046	−0.019	+0.119	+0.15	−0.07	+0.08
(3)	−0.001	−0.046		−0.026	−0.07	−0.31	−0.38
(4)	+0.001	+0.046		−0.171	−0.12	−0.31	+0.19
(5)		−0.046	−0.019	+0.322	+0.26	+0.07	+0.33
(6)	−0.001		+0.019	−0.151	−0.13	−0.38	−0.51
(7)	+0.001		−0.019	−0.074	−0.09	+0.38	+0.29
(8)		−0.046	+0.019	+0.165	+0.14	+0.07	+0.21
(9)	−0.001	+0.046		−0.091	−0.05	−0.45	−0.50
(10)	+0.001	−0.046		−0.058	−0.10	+0.45	+0.35
(11)		+0.046	+0.019	+0.175	+0.24	−0.07	+0.17
(12)	−0.001		−0.019	−0.118	−0.14	−0.38	−0.52
檢核	0	0	0	−0.001	+0.02	0	+0.02

將此結果与前所求出者相比,所差最多 0″.01,系因計算时四捨五入所致。比較两法之計算工作,則分組平差于此处并無若何簡捷可言。吾人所以列出者,乃为与下文第八節簡略平差法比較之故。

第六節　多边中点形之平差

多边中点形乃一多边形而具一中点之圖形也。最簡單者如本章之圖 7.1 为三边中点形。在三角網中較为普通者为五边中点形、六边中点形及七边中点形。如圖 7.6 之 $ABCKGHI$ 为一六边中点形,圖 7.7 之 $CDEFHI$ 为一五边中点形。

倘一多边形所有各边之两端均經观測,其內角条件之数目即等于外边之数目。如按角度平差,則尚須增中点之水平閉合条件。無論何种情形,均有一边長条件。今以圖 7.14 所示之六边中点形为例解釋之。設此圖形用角度观測,則共有六个內角条件、一个中点水平閉合条

件及一个边長条件。六个內角条件可以六个三角形內角和之条件列出，边長条件則以中点为極計算之。

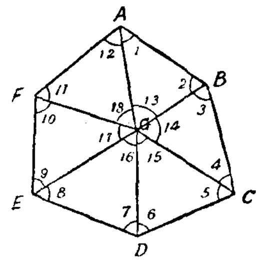

圖 7.14

內角条件:

$$\triangle GAB\ (1)+(2)+(13)-(180^\circ+\varepsilon_{ab})=0;$$
$$\triangle GBC\ (3)+(4)+(14)-(180^\circ+\varepsilon_{bc})=0;$$
$$\triangle GCD\ (5)+(6)+(15)-(180^\circ+\varepsilon_{cd})=0;$$
$$\triangle GDE\ (7)+(8)+(16)-(180^\circ+\varepsilon_{de})=0;$$
$$\triangle GEF\ (9)+(10)+(17)-(180^\circ+\varepsilon_{ef})=0;$$
$$\triangle GFA\ (11)+(12)+(18)-(180^\circ+\varepsilon_{fa})=0.$$

中点水平閉合条件:

$$(13)+(14)+(15)+(16)+(17)+(18)-360^\circ=0.$$

边長条件:

$$\frac{GA}{GB}\cdot\frac{GB}{GC}\cdot\frac{GC}{GD}\cdot\frac{GD}{GE}\cdot\frac{GE}{GF}\cdot\frac{GF}{GA}=1,$$

或以各角表示之:

$$\frac{\sin(2)\sin(4)\sin(6)\sin(8)\sin(10)\sin(12)}{\sin(1)\sin(3)\sin(5)\sin(7)\sin(9)\sin(11)}=1.$$

此后計算步驟与前两節所举四边形平差之例类似，兹不贅述。

第七節　三角網平差举例

無論三角網或三角鎖，其基本圖形不外三角形、四边形或多边中点形。是以任意三角網或三角鎖均可視作由此数种圖形組合而成，不过其連接之处或有較复雜之疊合。由上列数節所述，吾人已可明悉各种条件方程式之列法；無論在若何复雜之情形，其理并無二致。兹再举两实例于下，以解釋較为复雜三角網之平差方法。

例 1：云南省昆明市举办土地測量所作之三角測量，其圖形大体为一九边中点形，如圖 7.15 所示。在此中点形內，缺一由 X 至 XI 之方向，但多測由 VI 至 II 之方向，致使 II, III, VI 五(B)成为一四边形。其观測結果如下:

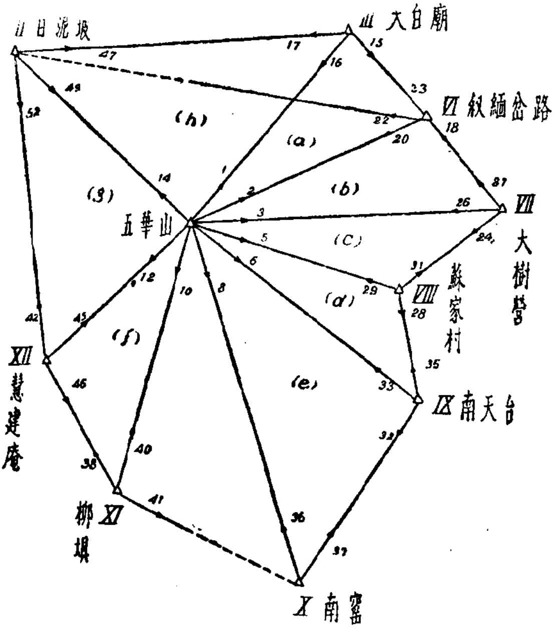

圖 7.15

五華山測站(B)

III······(1)= 00°00′00″,

VI······(2)= 37 51 27.2,

VII ···(3)= 70 58 21.7,

VIII···(5)= 92 54 57.4,

IX······(6)=108 35 12.2,

X ······(8)=142 44 3.4,

XI ···(10)=175 18 16.9,

XII···(12)=198 18 46.8,

II ···(14)=278 32 18.2;

VI 叙緬岔路測站

VII ···(18)= 00°00′00″,
五(B)···(20)= 97 48 32.2,
II ······(22)=132 57 22.5,
III······(23)=183 74 41.8;

VII 大樹營測站

VIII ···(24)= 00°00′00″,
五(B)···(26)= 57 37 35.9,
VI ······(27)=106 42 0.0;

VIII 苏家村測站

IX ······(28)= 00°00′00″,
五(B)···(29)=131 2 38.1,
VII ···(31)=231 28 38.7.

IX 南天台測站

X ······(32)= 00°00′00″,
五(B)···(33)= 70 1 32.7,
VIII ···(35)=103 18 19.1;

X 南窰測站

五(B)···(36)= 00°00′00″,
IX ······(37)= 75 49 57.6;

XI 柳壩測站

XII······(32)= 00°00′00″,
五(B) ···(40)= 47 23 13.8,
X·········(41)=129 55 5.4.

XII 慧建庵測站

II ······(42)= 00°00′00″,
五(B)···(45)= 57 20 31.4,
XI ······(46)=166 56 31.5;

II 白泥坡測站

III······(47)= 00°00′00″,
五(B)···(49)= 45 30 47.0,
XII······(52)= 87 56 44.3;

III 大白廟

VI ······(15)= 00°00′00″,
五(B)···(16)= 56 42 04.7,
II·········(17)=109 43 50.1.

圖形条件数目：

$$R=36,\quad p=10,\quad l=19,\quad l'=2.;$$

内角条件數目：　$19-2-10+1=8;$

边長条件数目：　$19-20+3=2;$

圖形条件总数目：　$38-2-30+4=10.$

角度方程式：

$$\left.\begin{array}{ll}
(a) & -v_1+v_2-v_{15}+v_{16}-v_{20}+v_{23}-18.5=0;\\
(b) & -v_2+v_3-v_{18}+v_{20}-v_{26}+v_{27}-9.2=0;\\
(c) & -v_3+v_5-v_{24}+v_{26}-v_{29}+v_{31}+12.2=0;\\
(d) & -v_5+v_6-v_{28}+v_{29}-v_{33}+v_{35}-20.7=0;\\
(e) & -v_6+v_8-v_{32}+v_{33}-v_{36}+v_{37}+21.5=0;\\
(f) & -v_{10}+v_{12}-v_{38}+v_{40}-v_{45}+v_{46}-16.2=0;\\
(g) & -v_{12}+v_{14}-v_{42}+v_{45}-v_{49}+v_{52}+0.1=0;\\
(h) & +v_1-v_{14}-v_{16}+v_{17}-v_{47}+v_{49}+14.2=0.
\end{array}\right\}\qquad (a)$$

边長方程式：

以五(B)为極点，得第一边長方程式(1)，第二边長方程式系屬于四边形 III VI 五(B) II 者，若以 VI 为極点則得(2)。

$$(1)\quad \frac{\sin(23-20)\sin(27-26)\sin(31-29)\sin(35-33)\sin(37-36)\sin(41-40)}{\sin(16-15)\sin(20-18)\sin(26-24)\sin(29-28)\sin(33-32)\sin\angle \text{XIX 五}(B)}$$

$$\frac{\sin(46-45)\sin(52-49)\sin(17-16)}{\sin(40-38)\sin(45-42)\sin(49-47)}=1;$$

$$(2)\quad \frac{\sin\angle \text{III II VI}\sin(2-14)\sin(16-15)}{\sin\angle \text{VI II 五}(B)\sin(17-15)\sin(2-1)}=1.$$

$$\angle \text{XI X 五}(B)=180^\circ-(10-8)-(41-40)=64^\circ53'54''.9;$$

$$\angle \text{III II VI}=180^\circ-(17-15)-(23-22)=19^\circ58'50''.6;$$

$$\angle \text{VI II 五}(B)=-180^\circ+(49-47)+(17-15)+(23-22)=25^\circ31'56''.4.$$

角　度	log sin	1″之对数差		角　度	log sin	1″之对数差	
(23−20)	9.9986207	+ 1.7	$(v_{23}-v_{20})$	(16−15)	9.9221127	+13.8	$(v_{16}-v_{15})$
(27−26)	9.8782626	+18.3	$(v_{27}-v_{26})$	(20−18)	9.9951537	− 2.9	$(v_{20}-v_{18})$
(31−29)	9.9927593	− 3.9	$(v_{31}-v_{29})$	(26−24)	9.9266392	+13.3	$(v_{26}-v_{24})$
(35−33)	9.7393544	+32.0	$(v_{35}-v_{33})$	(29−28)	9.8774903	−18.3	$(v_{29}-v_{28})$
(37−36)	9.9865859	+ 5.0	$(v_{37}-v_{36})$	(33−32)	9.9730568	+ 7.7	$(v_{33}-v_{32})$
(41−40)	9.9962995	+ 2.8	$(v_{41}-v_{40})$	∡XIX五(B)	9.9569165	+ 9.9	$(v_8-v_{10}+v_{40}-v_{41})$
(46−45)	9.9740773	− 7.5	$(v_{46}-v_{45})$	(40−38)	9.8668456	+19.3	$(v_{40}-v_{38})$
(52−49)	9.8291250	+23.0	$(v_{52}-v_{49})$	(45−42)	9.9252640	+13.5	$(v_{45}-v_{42})$
(17−16)	9.9025157	+15.8	$(v_{17}-v_{16})$	(49−47)	9.8533393	+20.7	$(v_{49}-v_{47})$
A=9.2976004 N=9.2976183 w= 179					N=9.2976183		

將改正数依次列成一次函数之边長方程式:

$$-0.99v_8+0.99v_{10}+1.38v_{15}-2.96v_{16}+1.58v_{17}-0.29v_{18}+0.12v_{20}+0.17v_{23}+$$
$$+1.33v_{24}-3.16v_{26}+1.83v_{27}-1.83v_{28}+2.22v_{29}-0.39v_{31}+0.77v_{32}-3.97v_{33}+$$
$$+3.20v_{35}-0.53v_{36}+0.53v_{37}+1.93v_{38}-3.20v_{0}+1.27v_{41}+1.35v_{42}-0.60v_{45}-$$
$$-0.75v_{46}+2.07v_{47}-4.37v_{49}+2.30v_{52}-17.9=0. \qquad \text{(b)}$$

角　度	log sin	1″　之　对　数　差	
∡ III II VI	9.5336500	+57.9	$(v_{15}-v_{17}+v_{22}-v_{23})$
(2−14)	9.9404694	−11.9	(v_2-v_{14})
(16−15)	9.9221127	+13.8	$(v_{16}-v_{15})$
	A=9.3962321 N=9.3961778 w= 543		

角　度	log sin	1″　之　对　数　差	
(17−15)	9.9737236	− 7.5	$(v_{17}-v_{15})$
∡VI II 五(B)	9.6344978	+44.1	$(v_{49}-v_{47}+v_{17}-v_{15}+v_{23}-v_{22})$
(2−1)	9.7879564	+27.0	(v_2-v_1)
	N=9.3961778		

將改正数依次排列，得一次函数之边長方程式如下:

$$+2.70v_1-3.88v_2+1.18v_{14}+8.07v_{15}+1.38v_{16}-9.45v_{17}+$$
$$+10.20v_{22}-10.20v_{23}+4.41v_{47}-4.41v_{49}+54.3=0. \qquad \text{(c)}$$

合(a)，(b)及(c)共得 10 条件方程式，其系数列成一表，名为条件方程式之系数表:

条件方程式之系数表

		v_1	v_2	v_3	v_5	v_6	v_8	v_{10}	v_{12}	v_{14}	v_{15}	v_{16}	v_{17}
k_1	a	-1	$+1$								-1	$+1$	
k_2	b		-1	$+1$									
k_3	c			-1	$+1$								
k_4	d				-1	$+1$							
k_5	e					-1	$+1$						
k_6	f							-1	$+1$				
k_7	g								-1	$+1$			
k_8	h	$+1$								-1		-1	$+1$
k_9	i						-0.99	$+0.99$			$+1.38$	-2.96	$+1.58$
k_{10}	j	$+2.70$	-3.88							$+1.18$	$+8.07$	$+1.38$	-9.45

条件方程式之系数表(续一)

		v_{18}	v_{20}	v_{22}	v_{23}	v_{24}	v_{26}	v_{27}	v_{28}	v_{29}	v_{31}	v_{32}	v_{33}
k_1	a		-1		$+1$								
k_2	b	-1	$+1$				-1	$+1$					
k_3	c					-1	$+1$			-1	$+1$		
k_4	d								-1	$+1$			-1
k_5	e											-1	$+1$
k_6	f												
k_7	g												
k_8	h												
k_9	i	-0.29	$+0.12$		$+0.11$	$+1.33$	-3.16	$+1.83$	-2.83	$+2.22$	-0.39	$+0.77$	-3.97
k_{10}	j			$+10.20$	-10.25								

條件方程式之係數表(續二)

		v_{35}	v_{36}	v_{37}	v_{38}	v_{40}	v_{41}	v_{42}	v_{45}	v_{46}	v_{47}	v_{49}	v_{52}	w
k_1	a													−18.5
k_2	b													− 9.2
k_3	c													+12.2
k_4	d	+1												−20.7
k_5	e		−1	+1										+21.5
k_6	f				−1	+1			−1	+1				−16.2
k_7	g							−1	+1			−1	+1	+ 0.1
k_8	h										−1	+1		+14.2
k_9	i	+3.20	−0.53	+0.53	+1.98	−3.20	+1.27	+1.35	−0.60	−0.75	+2.09	+4.37	+2.30	−17.9
k_{10}	j													+54.3

法方程式:

$$
\begin{aligned}
&+6.000\,k_1-2.000\,k_2 \cdots\cdots -2.000\,k_8-4.290\,k_9-23.470\,k_{10}-18.500=0;\\
&6.000\,k_2-2.000\,k_3 \cdots\cdots +5.400\,k_9+3.880\,k_{10}-9.200=0;\\
&6.000\,k_3-2.000\,k_4 \cdots\cdots -7.100\,k_9 \cdots\cdots +12.200=0;\\
&6.000\,k_4-2.000\,k_5 \cdots\cdots +11.220\,k_9 \cdots\cdots -20.700=0;\\
&+6.000\,k_5 \cdots\cdots -4.670\,k_9 \cdots\cdots +21.500=0;\\
&+6.000\,k_6-2.000\,k_7 \cdots\cdots -6.270\,k_9 \cdots\cdots -16.200=0;\\
&6.000\,k_7-2.000\,k_8+4.720\,k_9+5.590\,k_{10}+0.1000=0;\\
&6.000\,k_8-1.900\,k_9-18.130\,k_{10}+14.200=0;\\
&+112.934\,k_9+18.783\,k_{10}-17.900=0;\\
&+427.044\,k_{10}+54.300=0.
\end{aligned}
$$

解出:

$k_1=+3.5407,\quad k_2=+3.6912,\quad k_3=-0.4158,\quad k_4=+3.6124,\quad k_5=-2.8115,$

$k_6=+3.7942,\quad k_7=+0.6816,\quad k_8=-1.0093,\quad k_9=-0.1275,\quad k_{10}=-0.0032;$

$[vv]=-[wk]=267.2802.$

改正数之計算:

		1	2	3	5	6	8	10	12
a	$k_1=+3.5409$	-3.541	$+3.541$						
b	$k_2=+2.6912$		-2.691	$+2.691$					
c	$k_3=-0.4158$			$+0.416$	-0.416				
d	$k_4=+2.6124$				-2.612	$+2.612$			
e	$k_5=-2.8115$					$+2.812$	-2.812		
f	$k_6=+2.7942$							-2.794	$+2.794$
g	$k_7=+0.6816$								-0.682
h	$k_8=-1.0093$	-1.009							
i	$k_9=-0.1275$						$+0.126$	-0.126	
j	$k_{10}=-0.0032$	-0.009	$+0.012$						
	v	-4.559	$+0.862$	$+3.107$	-3.028	$+5.424$	-2.686	-2.920	$+2.112$

	↑ 接左上	14	15	16	17	18	20	22
a			-3.541	$+3.541$			-3.541	
b						-2.691	$+2.691$	
c								
d								
e								
f								
g		$+0.682$						
h		$+1.009$		$+1.009$	-1.009			
i			-0.176	$+0.377$	-0.201	$+0.037$	-0.015	
j		-0.004	-0.026	-0.004	$+0.030$			-0.033
		$+1.687$	-3.743	$+4.923$	-1.180	-2.654	-6.865	-0.033

	23	24	26	27	28	29	31	32	33	35	36
a	+3.541										
b			−2.691	+2.691							
c		+0.410	−0.416			+0.416	−0.416				
d					−2.612	+2.612			−2.612	+2.612	
e								+2.812	−2.812		+2.812
f											
g											
h											
i	−0.022	−0.170	+0.403	+0.233	+0.233	−0.283	+0.050	−0.098	+0.506	−0.408	+0.068
j	+0.033										
$v=$	+3.552	+0.246	−2.704	+2.458	−2.379	+2.745	−0.366	+2.714	−4.918	+2.204	+2.880

↑间	37	38	40	41	42	45	46	47	49	52	
a											
b											
c											
d											
e	−2.816										
f		−2.794	+2.794			−2.794	+2.794				
g					−0.682	+0.682			−0.682	+0.682	
h								+1.009	−1.009		
i	−0.068	−0.246	+0.408	−0.162	−0.172	+0.077	+0.096	−0.264	+0.557	−0.293	
j											
$v=$	−2.880	−3.040	+3.202	−0.162	−0.854	−2.035	+2.890	+0.731	−1.120	+0.389	

$$[vv]=+267.2899.$$

每一方向观测之中誤差：

$$m=\pm\sqrt{\frac{267.29}{10}}=\pm 5''.16.$$

各观测值上加以改正数而得平差值，以之代入原有角度及边長方程式内均能符合檢核計算，此处从略。

例 2：中國地理研究所于四川北碚設一測量实驗区，其二等三角鎖示如圖 7.16，大体上为一四边形單鎖、北端加一三角形，其观测結果如下：

测站：鷄公山 II 5

1. II 7　0° 00′ 00″.00
2. II 6　89° 11′ 37″.35

测站：張家埡口 II 6

3. II 5　0° 00′ 00″.00
4. II 7　36° 03′ 57″.98
5. II 9　61° 05′ 33″.78
6. II 8　103° 44′ 24″.29

测站：沙兒崗 II 7

7. II 9　0° 00′ 00″.00
8. II 8　54° 34′ 15″.64
9. II 6　125° 20′ 41″.08
10. II 5　180° 06′ 06″.35

测站：天台寺 II 8

11. II 6　0° 00′ 00″.00
12. II 7　47° 33′ 08″.83
13. II 9　79° 21′ 46″.42
14. II 11　106° 32′ 00″.13
15. II 10　160° 10′ 27″.18

测站：大宝頂 II 9

16. II 11　0° 00′ 00″.00
17. II 10　48° 51′ 49″.95
18. II 8　106° 23′ 48″.69
19. II 6　164° 23′ 10″.65
20. II 7　194° 00′ 54″.40

测站：雷家山 II 10

21. II 8　0° 00′ 00″.00
22. II 9　41° 39′ 17″.78
23. II 11　65° 33′ 58″.09
24. II 13　108° 41′ 51″.13
25. II 12　182° 03′ 33″.98

测站：宝華寺 II 11

26. II 13　0° 00′ 00″.00
27. II 12　56° 31′ 58″.40
28. II 10　93° 03′ 41″.37
29. II 8　153° 51′ 22″.68
30. II 9　200° 17′ 18″.17

测站：小埡口 II 12

31. II 10　0° 00′ 00″.00
32. II 11　26° 58′ 37″.73
33. II 13　56° 57′ 26″.14

测站：歌乐山 II 13

34. II 12　0° 00′ 00″.00
35. II 10　49° 40′ 52″.76
36. II 11　93° 29′ 15″.45

三角形及球面角超值計算举例。茲以 II5-II6-II7 一个三角形为例：其中 II5-II6 一边之边長由基綫網中求出为：

$$\log(\mathrm{II}5-\mathrm{II}6)=3.811276.$$

按洛讓定理求此三角形三角度之化成角如下：

角 度		球面角观测值	化成角	正弦对数
α	II6-II7-II5	$54°45'25''.27$	$25''.07$	9.912069
β	II5-II6-II7	$36°03'57''.98$	$57''.78$	9.769907
γ	II7-II5-II6	$89°10'37''.35$	$57''.15$	9.999955
		和$=180°00'00''.60$	$00''.00$	
		$\frac{\varepsilon''}{3}=0''.20$		

各边長 a, b, c (a 边对 α 角, b 边对 β 角, c 边对 γ 角) 之对数可用正弦定律求之, 即

$$m=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma},$$

a 为已知边, 故

$$\begin{aligned}\log\ a &= 3.811276,\\ \log\sin\alpha &= 9.912069,\\ \hline \log\ m &= 3.899207.\end{aligned}$$

以 $\log m$ 之値加上表 $\log\beta$ 及 $\log\gamma$ 之値卽得 b, c 两边之对数:

$$\begin{aligned}\log\ b &= 3.669114;\\ \log\ c &= 3.899162.\end{aligned}$$

計算球面角超之公式如下:

$$\varepsilon''=\frac{\rho}{2r^2}ab\sin\gamma,$$

$$\log\frac{\rho}{2r^2}=1.40546,$$

$$\begin{aligned}\log\ a &= 3.81128,\\ \log\ b &= 3.66911,\\ \log\sin\gamma &= 9.99996,\\ \log\ \varepsilon'' &= 8.88581, \qquad 故\ \varepsilon''=0''.0769.\end{aligned}$$

其余各三角形之球面角超計算方法相同，玆不备列。

球面角超既知之后，即可列条件方程。按第二節条件方程数目之公式：因 $p=9$, $l=18$, 故

$$\text{角度条件共有}\quad l-\ p+1=10\ \text{个};$$
$$\text{边長条件共有}\quad l-2p+3=\ 3\ \text{个};$$
$$\text{条件总数为}\quad 2l-3p+4=13\ \text{个}.$$

角度条件及边長条件之列法已于第三節之例中詳为說明，故此处僅將其列表如下：

略　圖

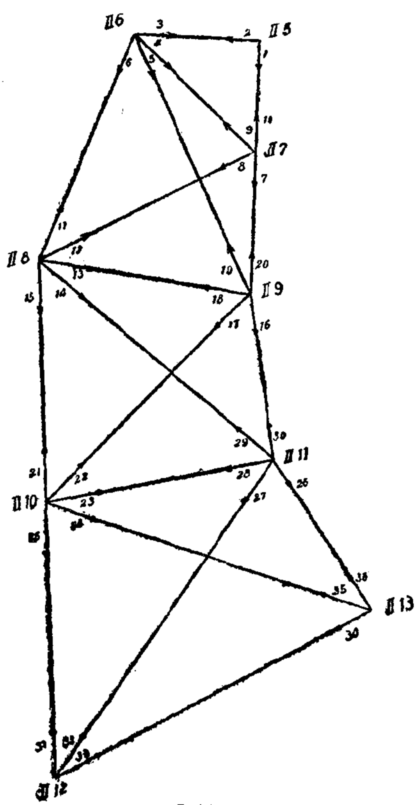

圖 7.16

条件方程表

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}
a				+2.1419	−3.2275	+1.0856	+0.7114	−1.0602	+0.3488		+1.1282	−2.4170	+1.2888
b													+1.9483
c													
d	−1	+1	−1	+1					−1	+1			
e					+1	−1	−1	+1			+1	−1	
f				−1	+1			−1	+1			+1	−1
g				−1		+1	−1		+1		−1		+1
h													
i													−1
j													−1
k													
l													
m													
s	−1	+1	−1	+1.1419	−1.2275	+1.0856	−1.2886	−1.0602	+1.3488	+1	+1.1282	−2.4170	+1.2371

条件方程表(續一)

	v_{14}	v_{15}	v_{16}	v_{17}	v_{18}	v_{19}	v_{20}	v_{21}	v_{22}	v_{23}	v_{24}	v_{25}
a					+0.6251	−2.3834	+1.7583					
b	−2.6845	+0.7362	+0.8735	−1.5098	−0.6363			−1.1242	−3.3798	+2.2556		
c										+1.0674	−1.3662	+0.2988
d												
e						−1	+1					
f					+1	−1						
g					−1		+1					
h	−1	+1	+1	−1				−1	+1			
i	+1			−1	+1				+1	−1		
j		+1	−1		+1			−1		+1		
k										+1	+1	
l											−1	+1
m										−1		+1
s	−2.6845	+2.7362	+0.8735	−3.5098	+3.2614	−4.3834	+3.7583	−0.8758	−1.3798	+1.3230	+1.3662	+2.2988

条件方程表(續二)

	v_{26}	v_{27}	v_{28}	v_{29}	v_{30}	v_{31}	v_{32}	v_{33}	v_{34}	v_{35}	v_{36}	w
a												−1.0924
b			+0.5590	−1.5102	+0.9512							+3.1346
c	+0.6611	−2.0111	+1.3500			+1.9645	−3.6979	+1.7334	+0.8486	−1.8912	+1.0426	+3.0871
d												+0.52
e												+0.15
f												+1.73
g												−0.84
h				+1	−1							−0.74
i			+1	−1								−4.15
j			−1		+1							−1.07
k		−1	+1				+1	−1	+1	−1		+0.02
l	+1	−1				−1	+1			+1	−1	−0.56
m	−1		+1			−1		+1	−1		+1	+3.06
s	+0.6611	−4.0111	+3.9060	−1.5102	+0.9512	+0.0355	−1.6979	+1.7334	+0.8486	−1.8912	+1.0426	+3.2493

上表所列之条件方程，a, b, c 三个为三个四边形之边長条件，其改正数系数系为角度余切。d 为 II5-II6-II7 三角形之条件，以下九个条件为三个四边形内之角度条件。由此所得之法方程式可列表如下：

法方程式表

	$a]k_1$	$b]k_2$	$c]k_3$	$d]k_4$	$e]k_5$	$f]k_6$	$g]k_7$	$h]k_8$
$[a$	+35.8735	+2.9088	0	+1.7931	+1.6022	−4.6577	−0.1251	0
$[b$		+36.2643	+3.1623	0	0	−1.3120	+1.3120	−1.1614
$[c$			+35.3214	0	0	0	0	0
$[d$				+6.0000	0	−2.0000	−2.0000	0
$[e$					+8.0000	0	0	0
$[f$						+8.0000	0	0
$[g$							+8.0000	0
$[h$								+8.0000
$[i$								
$[j$								
$[k$								
$[l$								
$[m$								
$[s$								

↑接上	$i]k_9$	$j]k_{10}$	$k]k_{11}$	$l]k_{12}$	$m]k_{13}$	$s]$	w	S
$[a$	−0.6637	−0.6657	0	0	0	+36.0673	−1.0924	+34.9747
$[b$	−6.0529	+0.0743	−1.6966	0	−1.6966	+31.8022	+3.1346	+34.9368
$[c$	+0.2826	−0.2826	−1.7640	−4.2590	−0.1168	+32.3439	+3.0871	+35.4310
$[d$	0	0	0	0	0	+3.7931	+0.5200	+4.3131
$[e$	0	0	0	0	0	+9.6022	+0.1500	+9.7522
$[f$	+2.0000	+2.0000	0	0	0	+4.0303	+1.7300	+5.7603
$[g$	−2.0000	−2.0000	0	0	0	+3.1869	−0.8400	+2.3469
$[h$	0	0	0	0	0	+6.8386	−0.7400	+6.0986
$[i$	+8.0000	0	+2.0000	0	+2.0000	+5.5660	−4.1500	+1.4160
$[j$		+8.0000	−2.0000	0	−2.0000	+3.1280	−1.0700	+2.0580
$[k$			+8.0000	0	0	+4.5394	+0.0200	+4.5594
$[l$				+8.0000	0	+3.7410	−0.5600	+3.1810
$[m$					−8.0000	+6.1866	+3.0600	+9.2466
$[s$						+150.8255	+3.2493	+154.0748

由此法方程表中，可見各边長条件之法方程式列于前面，而角度条件列于后。盖解算大規模法方程式时，应以含有較大系数之方程式列于前面，使其系数不致因多次約化而逐漸近于零。又此处系数采用小数点

上列法方程式用高斯約化法約化后，即得約化法方程式如下：

約　化　法　方

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7
+35.8735	+ 2.9088	0	+1.17931	+1.6022	−4.6577	−0.1251
[bb·1]	+36.0285	+ 3.1623	−0.1454	−0.1299	−0.9344	+1.3221
	[cc·2]	+35.0438	+0.0128	+0.0114	+0.0820	−0.1160
		[dd·3]	+5.9098	−0.0806	−1.7710	−1.9884
			[ee·4]	+7.9268	+0.1804	−0.0167
				[ff·5]	+6.8360	−0.5771
					[gg·6]	+7.2330
						[hh·7]

后四位，亦为解算大規模三角網法方程式应取之步驟。惟以十三个繫数之法方程式系統，采用小数点后三位原可足用，此处乃为与第十章所述擴展法結果比較，故用四位計算。

程　式　表

k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	k_{12}	k_{13}	w
0	−0.6637	−0.6637	0	0	0	−1.0924
−1.1614	−5.9991	+0.1287	−1.6966	0	−1.6966	+3.2232
+0.1019	+0.8091	−0.2938	−1.6151	−4.2590	+0.0321	+2.8042
−0.0047	+0.0087	+0.0338	−0.0063	+0.0016	−0.0069	+0.5866
−0.0043	+0.0077	+0.0307	−0.0055	+0.0014	−0.0062	+0.2175
−0.0316	+1.7587	+1.9272	−0.0420	+0.0105	−0.0461	+1.8360
+0.0386	−1.6280	−1.8338	+0.0514	−0.0127	+0.0562	−0.5999
+7.9620	−0.1790	+0.0237	−0.0505	+0.0125	−0.0553	−0.6320
[ii·8]	+6.1472	−0.8923	+1.7761	+0.0930	+1.7401	−4.3208
	[jj·9]	+6.8466	−1.7247	−0.0284	−1.7137	−2.3774
		[kk·10]	+6.8970	−0.2301	−1.0140	+0.9639
			[ll·11]	+7.4732	−0.0630	−0.1347
				[mm·12]	+6.8479	+3.9913
						−7.5289

由此得出之 k 值为:

$k_1 = -0.0100$; $k_6 = -0.5309$; $k_{10} = +0.1447$;

$k_2 = +0.0162$; $k_7 = +0.3400$; $k_{11} = -0.2249$;

$k_3 = -0.1072$; $k_8 = +0.0949$; $k_{12} = +0.0131$;

$k_4 = -0.1475$; $k_9 = +0.9537$; $k_{13} = -0.5829$.

$k_5 = -0.0168$;

將 k 值代入条件方程式内，即得各方向改正数之值。因此例將于第十章第七節再用擴展法計算，故計算改正数及核算之步驟，均留待該節完成之。

第八節　方向观测之簡略平差法

在一三角網之平差中，設方向 P_iP_k 之改正数为 v_{ik}，則其公式可作下列書法:

$$v_{ik} = ak_1 + bk_2 + \cdots + \alpha_i k' + \beta_i k'' + \cdots, \tag{50}$$

$k_1, k_2\cdots$ 为角度条件之繫数，$k', k''\cdots$ 为边長条件之繫数；$a, b\cdots$ 为該方向在第一第二……角度条件方程式内之系数(普通均为 $+1$ 或 -1)；$\alpha_i, \beta_i\cdots$ 为該方向在第一第二……边長条件方程式内之系数。P_iP_k 之相对方向 P_kP_i 之改正数公式为:

$$v_{ki} = -ak_1 - bk_2\cdots + \alpha_k k' + \beta_k k'' + \cdots, \tag{51}$$

盖在角度条件中，两相对方向必同时出現，而其系数均为 1，但符号相反。

是以吾人如应用分組平差法，以所有角度条件为一組作初步平差，則初步之方向改正数:

$$v'_{ik} = +\delta_{ik}, \qquad v'_{ki} = -\delta_{ik}, \tag{52}$$
$$v'_{ik} - v'_{ki} = +2\delta_{ik}.$$

在第二組边長条件平差时，如令各方向之改正数为 ε，并令两相对方向之改正数互等，即 $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$，則两次平差后之总改正数为:

$$v_{ik}=+\delta_{ik}+\varepsilon_{ik},$$

$$v_{ki}=-\delta_{ik}+\varepsilon_{ik},$$

而
$$v_{ik}-v_{ki}=+2\delta_{ik}. \tag{53}$$

如此則第一組之角度條件自动滿足。蓋在角度條件中，如將两相对方向併为一处，則影响于此条件者，僅为两相对方向改正数之差，即 $v_{ik}-v_{ki}$，根据式(52)及(53)，經过第二組平差后，其值幷未变也。是以应用 $\varepsilon_{ik}=\varepsilon_{ki}$ 之假定，于第二組边方程式之平差时，可完全不顧及第一組之角度条件，因此計算工作可以簡省。但此假定幷非根据最小二乘法之原理，其結果自不嚴格。茲以第五節之例应用此法平差。

按第五節第 241 頁專以角度条件初步平差之結果为:

$$v_4'=-v_3'=+0''.31;\qquad v_{10}'=-v_9'=+0''.45;$$

$$v_2'=-v_8'=-0''.07;\qquad v_{11}'=-v_5'=-0''.07;$$

$$v_7'=-v_6'=+0''.38;\qquad v_{12}'=-v_1'=-0''.38.$$

經过此初步改正后而列出之边長条件方程式为(按第 245 頁):

$$+2.25\,\varepsilon_1-2.88\,\varepsilon_2+0.63\,\varepsilon_3+4.13\,\varepsilon_4-7.78\,\varepsilon_5+3.65\,\varepsilon_6+1.78\,\varepsilon_7+$$
$$-3.98\,\varepsilon_8+2.20\,\varepsilon_9+1.39\,\varepsilon_{10}-4.23\,\varepsilon_{11}+2.84\,\varepsilon_{12}+6.0=0. \tag{54}$$

由此命两相对方向之第二次改正数互等，即

$$\varepsilon_4=\varepsilon_3,\ \varepsilon_2=\varepsilon_8,\ \varepsilon_7=\varepsilon_6,\ \varepsilon_{10}=\varepsilon_9,\ \varepsilon_{11}=\varepsilon_5,\ \varepsilon_{12}=\varepsilon_1$$

而代入式(54)，即得

$$+5.09\,\varepsilon_1-6.86\,\varepsilon_2+4.76\,\varepsilon_3-12.01\,\varepsilon_5+5.43\,\varepsilon_6+3.59\,\varepsilon_9+6.0=0 \tag{55}$$

不顧角度条件而組成之法方程式为:

$$282.2\,k_4''+6.0=0,$$

故
$$k_4''=-0.0212.$$

由此按照式(55)即可計算第二次改正数 ε，茲將其結果列表于下:

方向	v'	ε	$(v)=v'+\varepsilon$	v	嚴格之 v	差異
(1)	$+0''.38$	$-0''.11$	$+0''.27$	$+0''.29$	$+0''.31$	$+0''.02$
(2)	$-0''.07$	$+0''.15$	$+0''.08$	$+0''.10$	$+0''.08$	$-0''.02$
(3)	$-0''.31$	$-0''.10$	$-0''.41$	$-0''.39$	$-0''.38$	$+0''.01$
(4)	$+0''.31$	$-0''.10$	$+0''.21$	$+0''.19$	$+0''.19$	0
(5)	$+0''.07$	$+0''.26$	$+0''.33$	$+0''.32$	$+0''.33$	$+0''.01$
(6)	$-0''.38$	$-0''.12$	$-0''.50$	$-0''.51$	$-0''.51$	0
(7)	$+0''.38$	$-0''.12$	$+0''.26$	$+0''.28$	$+0''.29$	$+0''.01$
(8)	$+0''.07$	$+0''.15$	$+0''.22$	$+0''.23$	$+0''.21$	$-0''.02$
(9)	$-0''.45$	$-0''.08$	$-0''.53$	$-0''.51$	$-0''.50$	$+0''.01$
(10)	$+0''.45$	$-0''.08$	$+0''.37$	$+0''.35$	$+0''.35$	0
(11)	$-0''.07$	$+0''.26$	$+0''.19$	$+0''.17$	$+0''.17$	0
(12)	$-0''.38$	$-0''.11$	$-0''.49$	$-0''.52$	$-0''.52$	0

表中 v' 为第一次專以角度条件平差之結果，ε 为边長条件之改正数，(v) 为二者之和，亦卽最后之改正数。为与用嚴格方法求得之改正数比較，必須將此处每測站之改正数和化为零，卽 $[v]=0$；上表第五列之 v 卽为移动后之改正数，第二列为嚴格之 v 值，比較五六两列之值，得其差異列于第七列。最大之差異不过 ± 0.02，足見此簡略平差方法之精度頗佳。在三四等三角網中，如采用此法可使計算工作減少甚多。

第九節　应用不完全方向測回观測时之圖形平差法

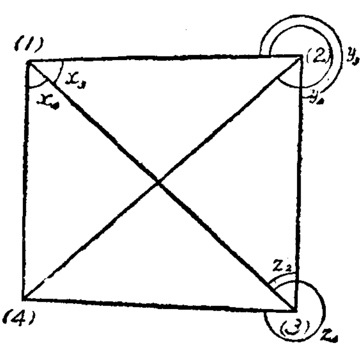

圖 7.17

在大三角測量时，晚近一般之習慣多用完全方向測回观測，或如德國測量总局采用史賴伯全組合角度观測法，亦可化为完全方向測回之結果。在史賴伯以前，德國白塞耳作东普魯士弧度測量时用方向观測，因每測站四週之各点常不能同时獲得良好之通視，是以僅得不完全方向測回之結果。由第六章第五節中，已知不完全方向

測回之平差結果，僅能以角度代表之，若化为方向，則每个方向应得之权值無法嚴格求出。为使平差獲得嚴格結果，白塞耳將測站平差与圖形平差合于一处，而利用第五章第九節中所論附有条件方程之間接观測平差法以解算之，蓋測站平差为間接观測，而圖形平差則有条件方程也。玆以下列虛拟之例解釋此法之步驟。

今有一近于正四方形之四边形(圖7.17)其各站方向观測之成果为：

表 1.

測站 (1)

測点	(2)	(3)	(4)	权
第一組	0° 0′ 00″	45° 0′ 0″.3	90° 0′ 0″.9	1
第二組	0	1 .0		1
第三組		0 .0	89° 59′59″.8	1

測站 (2)

測点	(1)	(3)	(4)	权
第一組	0° 0′ 00″	270° 0′ 0″.6	315° 0′ 0″.3	1
第二組	0		0″.6	1
第三組		0″.0	1″.0	1

測站 (3)

測点	(1)	(2)	(4)	权
第一組	0° 0′ 0″	45° 0′ 1″.0	315° 0′ 0″.5	1
第二組	0	0″.3	314°59′59″.7	1

測站 (4)

測点	(1)	(2)	(3)	权
第一組	0° 0′ 0″	45° 0′ 0″.2	90° 0′ 1″.3	0.5
第二組	0	1″.0	0″.5	0.5

整理上表所列結果，首作各站之測站平差，其中測站(1)(2)之观測为不完全方向測回之观測，測站(3)(4)之观測則为完全方向測回。測站(1)之測站平差已在第六章第五節之例內演算，玆更用相同步驟，演化測站(2)及(3)之成果并列于第二表。測站(3)因系完全方向測回观測，本可与測站(4)同样应用簡單之平均得其測站之平差，但为普遍之解說計，亦列于不完全方向測回內，以資參考。

表 2.

	(甲)
測站	(1)
近似角 改正數	$\angle 213=45°0'00''$ $\angle 214=90°00'00''$ x_3 x_4
法方程式及 其約化式	$\frac{5}{3}x_3-\frac{5}{6}x_4=+0.5$ $\frac{3}{4}x_4=+0.65$
測站平差結果 中誤差	$x_3=+0.7333$ $x_4=+0.8667$ $[vv]=0.2267$ $m=\pm 0''.337$
	(乙)
測站	(2)
近似角 改正數	$\angle 123=270°00'00''$ $\angle 124=315°00'00''$ y_3 y_4
法方程式及 其約化式	$\frac{7}{6}y_3-\frac{5}{6}y_4=-0.2$ $\frac{15}{14}y_4=+\frac{4.6}{7}$
測站平差結果 中誤差	$y_3=0.2666$ $y_4=+0.6133$ $[vv]=0.4223$ $m=\pm 0''.460$
	(丙)
測站	(3)
近似角 改正數	$\angle 132=45°00'0''.65$ $\angle 134=315°00'0''.00$ z_2 z_4
法方程式及 其約化式	$\frac{4}{3}z_2-\frac{2}{3}z_4=0$ $z_4=0$
測站平差結果 中誤差	$z_2=0$ $z_4=0$ $[vv]=0.1900$ $m=\pm 0''.308$

測站(4)之測站平差依完全組法簡單之平均得之。成果見表三，其測站平差所得之权單位中誤差則为：

$$[vv]=0.3200; \qquad m=\pm 0''.400.$$

此等測站平差之結果，尚須經四边形圖形之平差，故仍須加其他改正数，总列其值如下：

表 3.

	測站平差之結果	圖形平差之改正数	
(1)	$\measuredangle(2.3)=\ 45^\circ\ 00''.7333$	$+\xi_3$	
	$\measuredangle(2.4)=\ 90^\circ\ 00''.8667$	$+\xi_4$	
(2)	$\measuredangle(1.3)=270^\circ\ 00''.2666$	$+\eta_3$	
	$\measuredangle(1.4)=315^\circ\ 00''.6133$	$+\eta_4$	
(3)	$\measuredangle(1.2)=\ 45^\circ\ 00''.6500$	$+\delta_2$	
	$\measuredangle(1.4)=315^\circ\ 00''.1000$	$+\delta_4$	
(4)	$1.=\ 0^\circ\ 00''.0000$	$+\gamma_1$	权 1
	$2.=\ 45^\circ\ 00''.6000$	$+\gamma_2$	1
	$3.=\ 90^\circ\ 00''.9000$	$+\gamma_3$	1

圖形平差条件方程式計有角度条件三个和边長条件一个，得：

三角形 1.2.3.

$$\xi_3-\eta_3+\delta_2+1''.1167=0;$$

三角形 1.2.4.

$$\xi_1-\eta_4-\gamma_1+\gamma_2+0''.8534=0;$$

三角形 1.3.4.

$$-\xi_3+\xi_4-\delta_4-\gamma_1+\gamma_3+0''.9334=0.$$

边長条件方程式按由边長(1)(2)算至(1)(4)經由不同的三个角所得結果必等，其式如下：

$$\frac{\sin(4)(2)(1)}{\sin(1)(4)(2)}=\frac{\sin(3)(2)(1)\sin(4)(3)(1)}{\sin(1)(3)(2)\sin(1)(4)(3)}.$$

取其对数，并以对数之第七位为單位，于是得

$$\log\sin 45° - 21.06(0.6133+\eta_4) - \log\sin 45° - 21.06(0.600-\gamma_1+\gamma_2) =$$

$$= \log\sin 45° - 21.06(0.1000+\delta_4) - \log\sin 45° - 21.06(0.6500+\delta_2),$$

或 $$-\eta_4+\delta_2+\delta_4+\gamma_1-\gamma_2-0''.4633=0.$$

上述四条件方程式彙列于下表：

表 4.

ξ_3	ξ_4	η_3	η_4	δ_2	δ_4	γ_1	γ_2	γ_3	常数
+1		−1		+1					+1.1167
	+1		−1			−1	+1		+0.8534
−1	+1				−1	−1		+1	+0.9334
			−1	+1	+1	+1	−1		−0.4630
	+2	−1	−2	+2		−1		+1	+2.4402

但表四中之 $\xi_3\xi_4\eta_3\eta_4$ 及 $\delta_2\delta_4$ 等六值并非独立之观测值，故不能直接应用之于平差計算。今可視表二內所列法方程式及其約化式為等值之虛拟观測公式（見第五章第九節），則自表二甲得：

$$(x_3+\xi_3)-0.5(x_4+\xi_4)=+0.5\quad+\lambda_1,\quad 权\ \frac{5}{3};$$

$$(x_4+\xi_4)=+0.087+\lambda_2,\quad 权\ \frac{3}{4}.$$

或代入 x_3, x_4 值后得

$$\xi_3-0.5\xi_4=\lambda_1,\quad 权\ \frac{5}{3};$$

$$\xi_4=\lambda_2,\quad 权\ \frac{3}{4}.$$

同理自表二乙得

$$\eta_3-\frac{5}{7}\eta_4=\lambda_3,\quad 权\ \frac{7}{6};$$

$$\eta_4=\lambda_4,\quad 权\ \frac{15}{14}.$$

自表二丙得

$$\delta_2 - 0.5\delta_4 = \lambda_5, \quad 权\ \frac{4}{3},$$

$$\delta_4 = \lambda_6, \quad 权\ 1.$$

將此等关系代入表四之条件方程式中，消除 $\xi_3\xi_4\cdots$ 等未知数而代之以 $\lambda_1\lambda_2\cdots$，則得以 λ 及 γ 所組成之条件方程式：

表 5.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	γ_1	γ_2	γ_3	常　数
+1	+0.5	−1	$-\frac{5}{7}$	+1	+0.5				+1.1167
	+1		−1			−1	+1		+0.8534
−1	+0.5				−1	−1		+1	+0.9334
			−1	+1	+1.5	+1	−1		−0.4633
	+2	−1	$-\frac{19}{7}$	+2	+1	−1		+1	+2.4402
$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{15}{14}$	$\frac{4}{3}$	1	1	1	1	权

由此組成之法方程式为：

表 6.

$$+3.2666\,k_1+1.333\,k_2-0.7667\,k_3+2.1667\,k_4+1.1167=0;$$
$$+1.3333\,k_1+4.2667\,k_2+1.6667\,k_3-1.0667\,k_4+0.8534=0;$$
$$-0.7667\,k_1+1.6667\,k_2+3.9333\,k_3-2.5000\,k_4+0.9334=0;$$
$$+2.1667\,k_1-1.0667\,k_2-2.5000\,k_3+5.9333\,k_4-0.4633=0.$$

所有約化法方程式之第一行为：

表 7.

$$+3.2666\,k_1+1.333\,k_2-0.7667\,k_3+1.1667\,k_4+1.1167=0;$$
$$+3.7225\,k_2+1.9796\,k_3-1.9511\,k_4+0.3976=0;$$
$$+2.7006\,k_3-0.9539\,k_4+0.9841=0;$$
$$+3.1366\,k_4-0.6481=0$$

或將第一項化为 1 时，得：

表 8.

$$
\begin{aligned}
k_1+0.40816\ k_2-0.23471\ k_3+0.66329\ k_4+0.34188&=0;\\
k_2+0.53179\ k_3-0.52413\ k_4+0.10681&=0;\\
k_3-0.35322\ k_4+0.36440&=0;\\
k_4-0.20663&=0.
\end{aligned}
$$

由之解得各系数及改正数如下:

$$k_1=-0.61120;\quad k_2=+0.15646;\quad k_3=-0.29141;\quad k_4=+0.20663.$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_1&=-0.1919; & \lambda_6&=+0.2958;\\
\lambda_2&=-0.3932; & \gamma_1&=+0.3416;\\
\lambda_3&=+0.5239; & \gamma_2&=-0.0502;\\
\lambda_4&=+0.0686; & \gamma_3&=-0.2914;\\
\lambda_5&=-0.3035; & [p\lambda\lambda]&=0.9168.
\end{aligned}
$$

此时权單位之中誤差为:

$$m=\pm\sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]+[p\gamma\gamma]}{4}}=\pm\sqrt{\frac{0.9169}{4}}=\pm 0''.479.$$

更由 $\lambda_1, \lambda_2\cdots$与 $\xi_3, \xi_4, \eta_3, \eta_4, \delta_2, \delta_4$ 等关系得:

$$
\begin{aligned}
\xi_3&=-0''.3885, & \eta_4&=+0''.0686,\\
\xi_4&=-0''.3932, & \delta_2&=-0''.1556,\\
\eta_3&=+0''.5729, & \delta_4&=+0''.2958.
\end{aligned}
$$

平差后最后之結果为:

表 9.

$$
\text{測站 (1)}\begin{cases}(1)=\ \ 0^\circ0'0''.0000;\\(2)=\ 45^\circ0'0''.3448;\\(3)=\ 90^\circ0'0''.4735.\end{cases}
\qquad
\text{測站 (3)}\begin{cases}(1)=\ \ 0^\circ0'0''.0000;\\(2)=\ 45^\circ0'0''.4944;\\(3)=315^\circ0'0''.3958.\end{cases}
$$

$$
\text{測站 (2)}\begin{cases}(1)=\ \ 0^\circ0'0''.0000;\\(3)=270^\circ0'0''.8395;\\(4)=315^\circ0'0''.6819.\end{cases}
\qquad
\text{測站 (4)}\begin{cases}(1)=\ \ 0^\circ0'0''.0000;\\(2)=\ 45^\circ0'0''.2082;\\(3)=\ 90^\circ0'0''.2670\end{cases}
$$

每权單位方向观測之中誤差按式(114)(第六章)应为:

$$m=\sqrt{\frac{[pvv]+[p\lambda\lambda]+[p\gamma\gamma]}{n-u+\gamma}},$$

其中 $[pvv]+[p\gamma\gamma]+[p\lambda\lambda]=(0.2267+0.4227+0.1900+0.3210)+$
$+0.9168=2.0762$,

$$\therefore \quad m=\sqrt{\frac{2.0762}{26-(12+6)+4}}=\sqrt{\frac{2.0762}{12}}=\pm 0''.416.$$

第十節　間接观測平差法

三角網之圖形平差，多采用条件平差法，但有时亦可采用間接观測法。今以角度观測之四边形为例以解釋之。

圖 7.18 为一四边形，所观測之角度为 (1), (2), $\cdots$ (8) 各角。欲确定此四边形实际僅須观測四个角度即足。故吾人假定其中之四个角度 (1), (2), (3), (8) 之改正数 v_1, v_2, v_3, v_8 为未知数，而將其他各角应用角度及边長方程式化为此四个角度之函数。由角度条件可得：

$$\left.\begin{aligned} v_4&=-v_1-v_2-v_3-w_a;\\ v_7&=-v_1-v_2-v_8-w_b.\end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

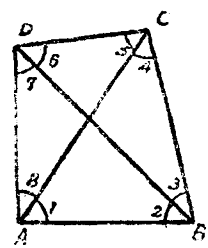

圖 7.18

w_a 及 w_b 为以观測之角度值代入三角形 ABC 及 ABD 所得之不符值。以 C 为極之边長条件可書作：

$$\delta_1 v_1-\delta_{(2+3)}v_2+(\delta_3-\delta_{(2+3)})v_3+(\delta_{(6+7)}-\delta_6)v_6+\delta_{(6+7)}v_7-\delta_8 v_8+w_c=0,$$

更利用(56)之关系可得：

$$(\delta_{(6+7)}-\delta_6)v_6=(\delta_{(6+7)}-\delta_1)v_1+(\delta_{(6+7)}+\delta_{(2+3)})v_2+(\delta_{(2+3)}-\delta_3)v_3+$$
$$+(\delta_{(6+7)}+\delta_8)v_8+\delta_{(6+7)}w_b-w_c, \qquad (57)$$

式(57)为角度(6)之改正数 v_6 与未知数 v_1, v_2, v_3, v_8 之关系。同理以 D 为極之边長条件为：

$$\delta_{(1+8)}v_1-\delta_2 v_2+\delta_3 v_3-\delta_{(4+5)}v_4+(\delta_5-\delta_{(4+5)})v_5+$$
$$+(\delta_{(8+1)}-\delta_8)v_8+w_d=0.$$

利用(56)之关系可化为：

$$(\delta_5-\delta_{(4+5)})v_5=-(\delta_{(1+8)}+\delta_{(4+5)})v_1+(\delta_2-\delta_{(4+5)})v_2-$$
$$-(\delta_3+\delta_{(4+5)})v_3+(\delta_8-\delta_{(8+1)})v_8-\delta_{(4+5)}w_a-w_d. \qquad (58)$$

式(57)及式(58)可簡單以下式代表之:

$$\left.\begin{aligned} v_6&=a_6v_1+b_6v_2+c_6v_3+d_6v_8-l_6;\\ v_5&=a_5v_1+b_5v_2+c_5v_3+d_5v_8-l_5.\end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

$a_5, a_6, b_5, b_6\cdots$等值，由式(57)，(58) 中可以看出。

如是吾人可列改正数方程式如下:

$$\left.\begin{aligned} v_1&=+v_1;\\ v_2&=\quad +v_2;\\ v_3&=\qquad +v_3;\\ v_4&=-v_1-v_2-v_3 \qquad -w_a;\\ v_5&=a_5v_1+b_5v_2+c_5v_3+d_5v_8-l_5;\\ v_6&=a_6v_1+b_6v_2+c_6v_3+d_6v_8-l_6;\\ v_7&=-v_1-v_2 \qquad -v_8-w_b;\\ v_8&=\qquad\qquad +v_8.\end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

由式(60)可組成法方程式而計算 v_1, v_2, v_3, v_8 之值，并由(56)，(59) 两式求其他改正数 v_4, v_5, v_6, v_7 之值。茲將第四節之例依此法平差如下:

角度观测值:(參考圖 7.9)

(1)	42° 38′ 50″.51;	(2)	41° 33′ 08″.83;
(3)	37° 48′ 37″.59;	(4)	57° 59′ 21″.96;
(5)	29° 37′ 43″.75;	(6)	54° 34′ 15″.64;
(7)	70° 46′ 25″.44;	(8)	25° 01′ 35″.80.

按第234頁之結果，$\triangle ABC$ 及 $\triangle DAB$ 之閉合差为 $-1''.37$ 及 $+0''.37$，如命 v_1, v_2, v_3, v_8 为独立未知数，則按照式(56)得

$$v_4=-v_1-v_2-v_3+1.37;$$
$$v_7=-v_1-v_2-v_8-0.37.$$

其次以 C 点及 D 点为極，得边長条件不符值如下:

以 C 为極之边長条件計算:

角度	观测值	正弦对数	δ	角度	观测值	正弦对数	δ
(1)	42°38′50″.51	9.8308992	+2.28	(2+3)	79°21′46″.42	9.9924722	+0.39
(3)	37°48′37″.59	9.7874966	+2.71	(6)	54°34′15″.64	9.9110695	+1.50
(6+7)	125°20′41″.08	9.9115231	−1.50	(8)	25°01′35″.80	9.6263806	+4.32
		9.5299189				9.5299223	

故 $$w_c = -3.4.$$

以 D 为極之边長条件計算：

角度	观测值	正弦对数	δ	角度	观测值	正弦对数	δ
(3)	37°48′37″.59	9.7874966	+2.71	(4+5)	87°37′05″.71	9.9996247	+0.09
(5)	29°37′43″.75	9.6940602	+3.70	(8)	25°01′35″.80	9.6263806	+4.32
(1+8)	67°40′26″.31	9.9661592	+0.86	(2)	41°33′08″.83	9.8217135	+2.37
		9.4477160				9.4477188	

故 $$w_d = -2.8.$$

按照(57)，(58)两式，得

$$-3.00\,v_6 = -3.78\,v_1 - 1.11\,v_2 - 2.32\,v_3 + 2.82\,v_8 + 2.84,$$

$$+3.61\,v_5 = -0.95\,v_1 + 2.28\,v_2 - 2.80\,v_3 + 3.46\,v_8 + 2.92;$$

由此可化为(59)之形式：

$$v_6 = +1.26\,v_1 + 0.37\,v_2 + 0.77\,v_3 - 0.94\,v_8 - 0.95,$$

$$v_5 = -0.26\,v_1 + 0.63\,v_2 - 0.78\,v_3 + 0.96\,v_8 + 0.81;$$

是以全体改正数方程式为：

$$\begin{aligned}
v_1 &= +v_1; \\
v_2 &= \qquad\qquad +v_2; \\
v_3 &= \qquad\qquad\qquad\qquad +v_3; \\
v_4 &= -v_1 \qquad -v_2 \qquad -v_3; \qquad\qquad\qquad +1.37; \\
v_5 &= -0.26\,v_1 + 0.63\,v_2 - 0.78\,v_3 + 0.96\,v_8 + 0.81; \\
v_6 &= +1.26\,v_1 + 0.37\,v_2 + 0.77\,v_3 - 0.94\,v_8 - 0.95; \\
v_7 &= -v_1 \qquad -v_2 \qquad\qquad\qquad -v_8 \qquad -0.37; \\
v_8 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -v_8.
\end{aligned}$$

由此列出法方程式：

$$\underline{4.655\,v_1}+2.302\,v_2+2.173\,v_3-0.433\,v_8-2.407=0;$$
$$\underline{+3.534\,v_2}+0.794\,v_3+1.257\,v_8-0.842=0;$$
$$\underline{+3.201\,v_3}-1.473\,v_8-2.734=0;$$
$$\underline{+3.805\,v_8}+2.040=0.$$

解出后，得

$$v_1=+0''.162;\quad v_2=+0''.134;\quad v_3=+0''.551;\quad v_8=-0''.348.$$

代入改正数方程式內，得其他角度之改正数为：

$$v_4=+0''.523;\quad v_5=+0''.088;\quad v_6=+0''.055;\quad v_7=-0''.318.$$

試与第四節用繁数法所作結果比較，可知二者完全符合，其最后一位所差之数，系由于湊整之所致。

習 題

1. **試求下列各圖形之条件方程数目，并指出各条件之列法：**

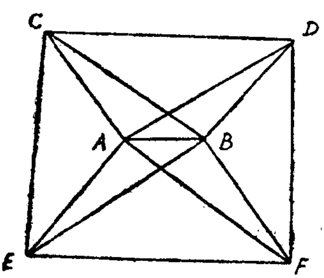

圖 7.19 (a) 方向观測

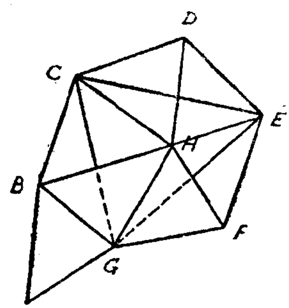

圖 7.20 (b) 方向观測

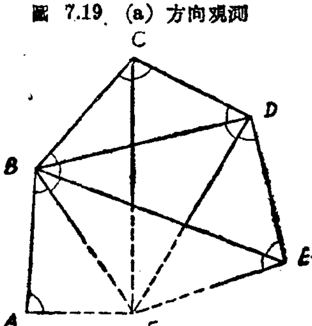

圖 7.21 (c) 角度观測

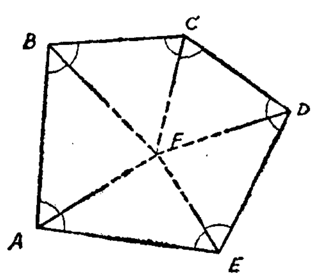

圖 7.22 (d) 角度观測

2. 試用分組平差法平差圖 7.23 所示之四边形。其角度观測結果为:

(1)	43° 44′ 02″.0,	(5)	28° 17′ 12″.9,
(2)	26° 42′ 51″.8,	(6)	42° 09′ 40″.3,
(3)	61° 29′ 53″.9,	(7)	44° 49′ 27″.4,
(4)	48° 03′ 10″.3,	(8)	64° 43′ 42″.3.

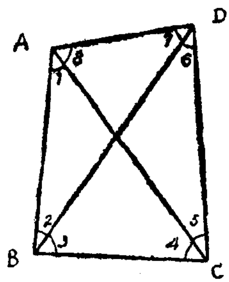

圖 7.23

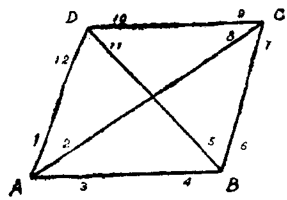

圖 7.24

3. 試將圖 7.24 四边形方向观測之結果用嚴格法平差:

測站 A:

(1) 0° 00′ 00″,

(2) 37° 26′ 41″,

(3) 72° 02′ 06″;

測站 B:

(4) 0° 00′ 00″,

(5) 41° 17′ 34″,

(6) 97° 15′ 36″;

測站 C:

(7) 0° 00′ 00″,

(8) 48° 09′ 02″,

(9) 78° 00′ 28″;

測站 D:

(10) 0° 00′ 00″,

(11) 46° 01′ 27″,

(12) 112° 41′ 51″.

四边形之面積甚小,其球面角超可略而不計。

4. 上題試用簡略方法平差并比較其結果。

5. 北碚基綫網之第一次擴大圖形示如圖 7.25, 其观測結果为:

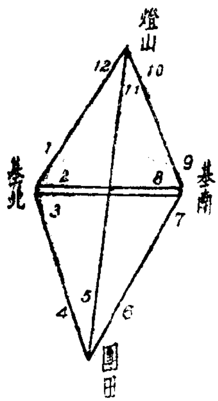

圖 7.25

测站：基北　　　　测站：基南

(1) 0° 0′ 0″.00, (7) 0° 0′ 0″.00,

(2) 87° 06′ 06″.64, (8) 81° 29′ 40″.02,

(3) 148° 13′ 38″.64; (9) 147° 20′ 47″.49.

测站：团田　　　　测站：灯山

(4) 342° 25′ 12″.95, (10) 0° 0′ 0″.00,

(5) 0° 0′ 0″.00, (11) 12° 51′ 12″.28,

(6) 19° 47′ 59″.97; (12) 27° 02′ 46″.37.

各三角形之球面角超为：

南北灯：　0″.01,

南北团：　0″.00,

南灯团：　0″.00,

北灯团：　0″.00.

試將其平差並求第一次擴大边（灯山）——（团田）之中誤差（基綫量測之誤差不計）。

第八章　三角網之其他条件

第一節　基綫条件

当三角網或三角鎖內不僅含有一条基綫时，卽發生基綫条件，亦名为長度条件，蓋自任意一基綫(或其擴大边)出發，經过三角網之任意一部計算各边長度，以推至另外一基綫(或擴大边)时，其所得之結果必須与該边直接量得(或擴大)之結果完全相符。今設想在一網內共有 g 条基綫，則欲达到上述目的必須有 $g-1$ 个基綫条件。此处所言之基綫为廣义的，亦包括強制附合平差时之固定边長。所謂強制附合平差者，卽所欲平差之三角網与一已經平差之三角網相接，而平差后必須使原平差之結果不変。就長度言，两網之公共边必須保留原來平差之長度。

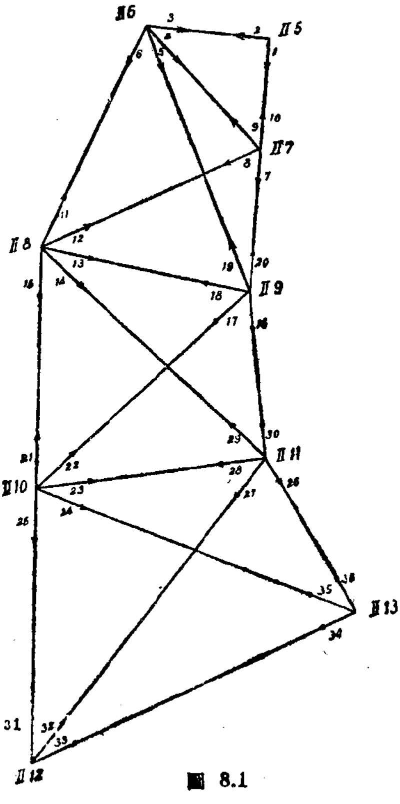

圖 8.1

基綫条件中通常假定基綫或固定边之値不受改正，蓋基綫之量測至为精密，其誤差与三角網遞算之誤差相比，可以不加計較也。

基綫条件与边長条件之形式無異，玆以第七章第七節中國地理研究所之三角網为例，而將其圖形再度繪之于上（圖 8.1），以解釋基綫条件之列法。圖中之 II 5——II 6 一边为北碚基綫之擴大边；II 12——II 13 一边为由重慶基綫（測量总局所測）推算而得。今为欲使此两基綫之結果相合，加于此網內平差，則必須列一基綫条件。設

$$l_1 = \text{II } 5\text{——II } 6 \text{ 量得之長度；}$$

$$l_2 = \text{II } 12\text{——II } 13 \text{ 量得之長度，}$$

則用平差后之方向值計算，必須能符合下列公式：

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\text{II }5-\text{II }6}{\text{II }6-\text{II }7}\cdot\frac{\text{II }6-\text{II }7}{\text{II }7-\text{II }8}\cdot\frac{\text{II }7-\text{II }8}{\text{II }8-\text{II }9}\cdot\frac{\text{II }8-\text{II }9}{\text{II }9-\text{II }10}\cdot\frac{\text{II }9-\text{II }10}{\text{II }10-\text{II }11}\cdot\frac{\text{II }10-\text{II }11}{\text{II }11-\text{II }12}\cdot\frac{\text{II }11-\text{II }12}{\text{II }12-\text{II }13}. \tag{1}$$

应用正弦定律，代入式(1)內，卽得

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\sin(10-9)}{\sin(2-1)}\cdot\frac{\sin(12-11)}{\sin(6-4)}\cdot\frac{\sin(20-18)}{\sin(8-7)}\cdot\frac{\sin(22-21)}{\sin(15-13)}\cdot\frac{\sin(30-28)}{\sin(17-16)}\cdot\frac{\sin(32-31)}{\sin(25-23)}\cdot\frac{\sin(36-34)}{\sin(27-26)}. \tag{2}$$

將式(2)化为对数式，命各角度正弦对数每秒之差为 δ，則式(2)可化为下列条件方程式：

$$\begin{aligned}&\delta_{2-1}v_1-\delta_{2-1}v_2+\delta_{6-4}v_4-\delta_{6-4}v_6+\delta_{8-7}v_7-\delta_{8-7}v_8-\delta_{10-9}v_9+\delta_{10-9}v_{10}-\delta_{12-11}v_{11}+\delta_{12-11}v_{12}+\\&+\delta_{15-13}v_{13}-\delta_{15-13}v_{15}+\delta_{17-16}v_{16}-\delta_{17-16}v_{17}-\delta_{20-18}v_{18}+\delta_{20-18}v_{20}-\delta_{22-21}v_{21}+\delta_{22-21}v_{22}+\\&+\delta_{25-23}v_{23}-\delta_{25-23}v_{25}+\delta_{27-26}v_{26}-\delta_{27-26}v_{27}-\delta_{30-28}v_{28}+\delta_{30-28}v_{30}-\delta_{32-31}v_{31}+\delta_{32-31}v_{32}-\\&-\delta_{36-34}v_{34}+\delta_{36-34}v_{36}+w_g=0.\end{aligned} \tag{3}$$

式(3)之列出不再解釋，蓋与边長条件之化算完全相同，其中之不符值 w_g 可以下式表示之：

$$\begin{aligned}&\log\sin(10-9)'+\log\sin(12-11)'+\log\sin(20-18)'+\log\sin(22-21)'+\\&+\log\sin(30-28)'+\log\sin(32-31)'+\log\sin(36-34)'-\log\sin(2-1)'-\\&-\log\sin(6-4)'-\log\sin(8-7)'-\log\sin(15-13)'-\log\sin(17-16)'-\\&-\log\sin(25-23)'-\log\sin(27-26)'-(\log l_1-\log l_2)'=w_g,\end{aligned} \tag{4}$$

式(4)中各角度均加一撇，蓋表示系观測値也。根据第七章第七節例二

之观測値，可將(3)，(4)两式計算如下：

		δ			δ
$\log\sin(10-9)'$	9.912 0688	+1.49	$\log\sin(2-1)'$	9.999 9552	+0.03
$\log\sin(12-11)'$	9.821 7131	+2.37	$\log\sin(6-4)'$	9.966 1591	+0.86
$\log\sin(20-18)'$	9.999 6247	+0.08	$\log\sin(8-7)'$	9.911 0700	+1.50
$\log\sin(22-21)'$	9.822 5906	+2.37	$\log\sin(15-13)'$	9.994 3913	+0.34
$\log\sin(30-28)'$	9.980 0672	−0.65	$\log\sin(17-16)'$	9.876 8795	+1.84
$\log\sin(32-31)'$	9.656 7044	+4.13	$\log\sin(25-23)'$	9.951 8118	−1.05
$\log\sin(36-34)'$	9.999 1950	−0.13	$\log\sin(27-26)'$	9.921 2704	+1.39
	9.191 9638			9.621 5373	

差異＝9.570 4265

$\log l_1 = 3.811\ 2756$

$\log l_2 = 4.240\ 8526$

$\log l_1 - \log l_2 = 9.570\ 4230$

不符值 $w_g = +3.5$(因 δ 亦以对数第六位为單位也)。

基綫条件方程式为：

$$+0.03v_1-0.03v_2+0.86v_4-0.86v_6+1.50v_7-1.50v_8-1.49v_9+1.49v_{10}-$$
$$-2.37v_{11}+2.37v_{12}+0.34v_{13}-0.34v_{15}+1.84v_{16}-1.84v_{17}-0.08v_{18}+0.08v_{20}-$$
$$-2.37v_{21}+2.37v_{22}-1.05v_{23}+1.05v_{25}+1.39v_{26}-1.39v_{27}+0.65v_{28}-0.65v_{30}-$$
$$-4.13v_{31}+4.13v_{32}+0.13v_{34}-0.13v_{36}+3.5=0.$$

第二節 方位角及拉伯拉斯条件

方位角条件与基綫条件之意义类似。基綫条件为長度之联合控制，方位角条件則为方位角之联合控制。在一較大之三角網中，自一固定方位角出發(例如由天文观測所得)以求其他各边之方位角，当傳遞次数过多时，常因观測誤差之漸次積累而使距原点方位角过远各边之方位角誤差增大，因而影响远处三角点位置之精度。欲免此弊，必須于網中多处作天文方位角之观測，以資控制，因而發生方位角条件。所謂方位角条件者，即自一固定方位角出發，經三角網之各边，推算至第二

固定方位角，其所推算之結果必須与固定之值完全符合。此处所言之固定方位角，实际不僅指天文观測之方位角，亦包括因強制附合而生之固定方位角。蓋強制附合时，不僅公共边之边長須保留，其方位角亦須保留也。一般而論，如有 a 个固定方位角，即有 $a-1$ 个方位角条件。

茲仍以前節之圖形为例，II 5—II 6 一边之方位角係由北碚基綫網中天文观測推算而得，II 12—II 13 之方位角亦可由測量总局在重慶基綫端点之天文观測推算。因測量总局之三角網早經平差，其点位並已作为地形測量控制之用，是以中國地理研究所測量实驗区之三角鎖必須与之強制附合，以便地形圖之併合。茲設

α_1 代表由实驗区三角網推算 II 6 至 II 5 之方位角；

α_2 代表由測量局三角網推算 II 12 至 II 13 之方位角，

則根据圖 8.2，三角網內各方向必須滿足下列之方位角条件：

$$\alpha_1+(6-3)-(180^\circ+\Delta\alpha_{6-8})+(15-11)-(180^\circ+\Delta\alpha_{8-10})+(25-21)-\\-(180^\circ+\Delta\alpha_{10-12})+(33-31)=\alpha_2, \tag{5}$$

式中之 $\Delta\alpha_{6-8}$, $\Delta\alpha_{8-10}$, $\cdots$ 为大地綫 II 6—II 8, II 8—II 10, II 10—II 12 往返方位角之差。例如 $\Delta\alpha_{6-8}=\alpha_{6-8}-\alpha_{8-6}-180^\circ$, (6)

其値可由平差前之三角形概算得出。今將观測値代入式 (5)，即得方位角条件：

$$-v_3+v_6-v_{11}+v_{15}-v_{21}+v_{25}-v_{31}+v_{33}+w_a=0. \tag{7}$$

式中 w_a 一項为：

$$w_a=(6-3)'+(15-11)'+(25-21)'+(33-31)'-\\-(3\cdot180^\circ+\Sigma\Delta\alpha)+(\alpha_1-\alpha_2). \tag{8}$$

茲以实际观測之結果①，將 (7), (8) 兩式計算如下：

① 由測量总局三角網推算，II 12—II 13 之方位角，系用观測成果所計算，因其平差改正过大（有超过 3″ 者），如用平差値計算 w_a 將为 $+6''.30$，顯系观測或平差有誤之故。是以此处举例未用之。

$(6-3)'=$	103 44 24.29	$\Delta\alpha_{6-8}$	$=1'\,55''.38$
$(15-11)'=$	160 10 27.18	$\Delta\alpha_{8-10}$	$=0'\,49''.98$
$(25-21)'=$	182 03 33.98	$\Delta\alpha_{10-12}$	$=1'\,09''.00$
$(33-31)'=$	56 57 26.14	$\Sigma\Delta\alpha$	$=3'\,54''.36$
	502 55 51.59		
$-(3\cdot180°+\Sigma\Delta\alpha)=$	-540 03 54.36	$\alpha_1=$	$109°49'54''.59$
	$-$ 37 08 2.77	$\alpha_2=$	$72°41'52''.04$
$\alpha_1-\alpha_2=$	37 08 2.55	$\alpha_1-\alpha_2=$	37 08 2.55
$w_a=$	$+0.22$		

由此得方位角条件为:

$$-v_3+v_6-v_{11}+v_{15}-v_{21}+v_{25}-v_{31}+v_{33}+0.22=0.$$

上述之固定方位角除在強制附合之情形外,均由天文观测得來。因天文观測之結果,尙含有垂綫偏差之影响,不能与橢圓体面上所推算者尽相符合,故以之控制三角網之方位角实有不足。欲免此种誤差,必須利用拉伯拉斯方程式。凡一三角点,其經度与方位角均用天文观测测定者卽名为拉伯拉斯点;在两拉伯拉斯点之間,可按垂綫偏差之关系,列一条件,是卽为拉伯拉斯条件。

設 P_1 为三角網之原点,所有網內其他各点之經緯度及方位角均由此点出發推算。玆有一拉伯拉斯点 P_2,其緯度为 φ_2,P_1P_2 間之經度差由三角網計算而得者为 λ_2,由天文观測求得者为 λ_2^*,又自 P_2 至其鄰近一任意三角点 P_2' 之方位角由三角網計算而得者为 α_2,由天文观測求得者为 α_2^*。按垂綫偏差之公式,P_2 点之拉伯拉斯方程式为:

$$\alpha_2-\alpha_2^*=(\lambda_2-\lambda_2^*)\sin\varphi_2,$$

或可書为条件方程之形式:

$$(\alpha_2-\lambda_2\sin\varphi_2)-(\alpha_2^*-\lambda_2^*\sin\varphi_2)=0. \tag{9}$$

今設 α_2', λ_2' 为由方向观測值所計算之方位角及經度差值,其改正数为 $\delta\alpha_2$ 及 $\delta\lambda_2$。又以 $(\alpha_2^*-\lambda_2^*\sin\varphi_2)'$ 代表由天文观測結果所得之值,

其总共改正数以 u 表示之。將此等观測値代入式(9)內，卽得

$$\delta\alpha_2-\delta\lambda_2\sin\varphi_2-u+w_l=0. \tag{10}$$

其中不符値項为：

$$w_l=(\alpha_2'-\lambda_2'\sin\varphi_2)-(\alpha_2^*-\lambda_2^*\sin\varphi_2)', \tag{11}$$

α_2' 实卽式(5)內之 α_2，用一般符号表示之可書作：

$$\alpha_2'=\alpha_1+\Sigma\beta'-\Sigma(180^\circ+\Delta\alpha').$$

α_1 为固定方位角，β' 为各計算所用綫之夾角，卽式(8)中之 $(6-3)'$，$(15-11)'$，… 等。又 α_2' 之改正数 $\delta\alpha_2$ 可書为

$$\delta\alpha_2=\Sigma\delta\beta'-\Sigma\delta\Delta\alpha',$$

$\delta\beta'$ 及 $\delta\Delta\alpha'$ 为 β' 及 $\Delta\alpha'$ 之改正数。故式(10)及(11)可化为下式：

$$\Sigma\delta\beta'-u-(\delta\lambda_2\sin\varphi_2+\Sigma\delta\Delta\alpha')+w_l=0, \tag{10*}$$

$$w_l=\Sigma\beta'-\Sigma(180^\circ+\Delta\alpha')+(\alpha_1-\alpha_2^*)-(\lambda_2-\lambda_2^*)\sin\varphi_2. \tag{11*}$$

式(10)*中括弧內之两項，系顧及平差后方向改正对于用观測値所計算之初步經度差及方位角之影响。惟此种影响極小，据倍希林(Bäschlin)之研究①，在普通情形內可以完全不必考慮。又式(11)*右方之前半部实卽式(8)中之 w_a，故可將此两式再度簡化，而得应用之公式如下：

$$\Sigma v_s-u+w_l=0 \tag{12}$$

$$w_l=w_a-(\lambda_2'-\lambda_2^*)\sin\varphi_2 \tag{13}$$

在式(12)中，將 $\Sigma\delta\beta'$ 易为 Σv_a，卽用以計算方位角各有关方向之改正数也。將式(13)与式(8)比較，可知应用拉伯拉斯条件后之方位角条件不符値較無拉伯拉斯条件者多一改正項 $(\lambda_2'-\lambda_2^*)\sin\varphi_2$。又式(12)較式(7)多一天文改正数 u。在平差时 u 之权应較方向改正之权为小，蓋天文观測結果不如一方向精度之高，其比例約在 1：20 至 1：30 之間。天文改正数实际应書作：

① Baeschlin: Rapport sur la Répartition et L'utilization pratique des Points de Laplace, Bulletin Géodisique, 1936. pp. 425—458.

$$u=\delta\alpha_2^*-\delta\lambda_2^*\sin\varphi_2, \tag{14}$$

包括天文方位角及天文經度差两項改正，但此二者不能再分开，故以上均以—u表示之。

茲为解釋拉伯拉斯条件之列法起見，假定前述三角網之 II 12 为拉伯拉斯点，在此点之天文观测結果(假定)为：

II 6—II 12 之經度差 $\lambda_2^*=106°14'57''.912$；
II 12—II 13 之方位角 $\alpha_2^*=\ 72°41'52''.04$；
II 12之緯度 $\varphi_2=29°31'29''$.

計算之步驟为按方向观测值求 λ_2' 及 $\Sigma\beta'-\Sigma(180°+\Delta\alpha')$，$\lambda_2'$ 由經緯度概算中得出，$\Sigma\beta'(180°+\Delta\alpha)$之計算已見于上面例中，將此值代入式(11)* 内求 w_l 如下：

$$\begin{aligned}
\lambda_2' &= 106\ \ 14\ \ 57.289 \\
\lambda_2^* &= 106\ \ 14\ \ 57.912 \\
\lambda'-\lambda_2^* &= -0.723 \\
\sin\varphi_2 &= 0.4928 \\
(\lambda_2-\lambda_2^*)\sin\varphi_2 &= -0.36
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 109\ \ 49\ \ 54.59 \\
\alpha_2^* &= \ \ 72\ \ 41\ \ 52.04 \\
\alpha_1-\alpha_2^* &= +37\ \ 08\ \ \ 2.55 \\
\Sigma\beta'-\Sigma(180°+\Delta\alpha') &= -37\ \ 08\ \ \ 2.77 \\
-(\lambda_2-\lambda_2^*)\sin\varphi_2 &= +\qquad\quad 0.36 \\
w_l &= \qquad\quad +0.15
\end{aligned}$$

然后由式(12)得拉伯拉斯条件为：

$$-v_3+v_6-v_{11}+v_{15}-v_{21}+v_{25}-v_{31}+v_{33}-u+0''.15=0.$$

第三節　經緯度条件

在強制附合三角網及环形網中，除有前述之基綫及方位角条件外，尙有經緯度閉合之条件存在。例如圖 8.1 之四边形鎖，II 12—II 13 一边为测量总局蓉渝系三角鎖之一边，如將前中國地理研究所测量实驗区之三角網与蓉渝系三角鎖附合，須滿足四个条件：

(1) 由基綫擴大边 II 5—II 6 推算至附合边 II 12—II 13 之長度，必須与蓉渝三角網平差后所得該边之長度相等，是为基綫条件。

(2) 由 II 6—II 5 之原点方位角推算至附合边 II 12—II 13 之方

位角，必須与蓉渝三角網平差后所得該边之方位角相等，是为方位角条件。

(3) 由原点 II 6 之經緯度推算至 II 12 之經緯度，必須与蓉渝三角網平差后所得 II 12 一点之經緯度相合，此为两个条件，因經緯度条件必須分列，是为經緯度条件。

关于基綫及方位角条件之列法已于前两節中述明，茲再進而解釋經緯度条件之列法，仍以中國地理研究所之三角網为例。II 6 为三角網中之經緯度原点，其值为 φ_6 及 L_6，II 6—II 5 为基綫擴大边，其長度以 s_{6-5} 表示之，其方位角为出發方位角，以 a_{6-5} 表示之。又網中之 II 12 为与測量总局三角網之一共同点，設在該網內之坐标为 φ°_{12} 及 L°_{12}。今如自 II 6 循圖 8.1 之三角網計算 II 12 之經緯度差，其值为 $\sum\limits_6^{12}\Delta\varphi$ 及 $\sum\limits_6^{12}\lambda$，則經緯度条件应为：

$$\varphi_6+\sum_6^{12}\Delta\varphi=\varphi^\circ_{12};$$

$$L_6+\sum_6^{12}\lambda=L^\circ_{12}.$$

倘用观測值循 II 6—II 8—II 10—II 12 計算之 $\Delta\varphi$ 及 λ 值以其上加一撇表示之，則經緯度条件之不符值为：

$$\left.\begin{aligned}w_\varphi&=\sum_6^{12}\Delta\varphi'-(\varphi^\circ_{12}-\varphi_6)=\Delta\varphi'_{6-8}+\Delta\varphi'_{8-10}+\Delta\varphi'_{10-12}-(\varphi^\circ_{12}-\varphi_6);\\ w_\lambda&=\sum_6^{12}\lambda'-(L'_{12}-L_6)=\lambda'_{6-8}+\lambda'_{8-10}+\lambda'_{10-12}-(L^\circ_{12}-L_6).\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

以 $\Delta\varphi'$ 及 λ' 改正数所列之經緯度条件为：

$$\left.\begin{aligned}d\Delta\varphi_{6-8}+d\Delta\varphi_{8-10}+d\Delta\varphi_{10-12}+w_\varphi=0,\\ d\lambda_{6-8}\ +\ d\lambda_{8-10}\ +\ d\lambda_{10-12}\ +w_\lambda=0.\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

式(16)中之 $d\Delta\varphi_{6-8}$ 及 $d\lambda_{6-8}$ 等並非观測值之改正数，故必先將其化为方向改正数 v 之函数。此工作需分两步進行之：第一步將 $d\Delta\varphi$ 及 $d\lambda$

等化为各边長 s 及方位角 α 之函数，第二步再將 s 与 α 之改正数 $d\log s$ 与 $d\alpha$ 列为各方向改正数 v 之公式。第一步可取大地測量中經緯度計算公式之第一項，而略去其他各項，对于此处应用，其公式如下：

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi_{1\cdot 2}&=(\varphi_2-\varphi_1)''=\frac{s_{12}\cos\alpha_{12}}{M_1}\rho''+\cdots+(\text{可略去之各項});\\ \lambda_{1\cdot 2}&=L_2-L_1=\frac{s_{12}\sin\alpha_{12}}{N_1\cos\varphi_1}\rho''+\cdots+(\text{可略去之各項}).\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

式(17)中之 $\varphi_1, L_1, \varphi_2, L_2$ 为两三角点 P_1, P_2 之經緯度，$\Delta\varphi_{1\cdot 2}$ 及 $\lambda_{1\cdot 2}$ 为两点間之經緯度差以秒表示之。s_{12} 为 P_1P_2 之距离，α_{12} 为自 P_1 至 P_2 之方位角（自北方計算），M_1, N_1 为 P_1 点之子午圈及卯酉圈曲度半徑，ρ'' 为以弧度値化为秒値之常数，在圓周360°之分划中，$\rho''=206265$。

今將式(14)依 s_{12} 及 α_{12} 微分，得

$$\left.\begin{aligned}d\Delta\varphi_{1\cdot 2}&=\frac{\cos\alpha_{1\cdot 2}}{M_1}\rho''ds_{1\cdot 2}-\frac{s_{1\cdot 2}\sin\alpha_{1\cdot 2}}{M_1}d\alpha_{1\cdot 2};\\ d\lambda_{1\cdot 2}&=\frac{\sin\alpha_{1\cdot 2}}{N_1\cos\varphi_1}\rho''ds_{1\cdot 2}+\frac{s_{1\cdot 2}\cos\alpha_{1\cdot 2}}{N_1\cos\varphi_1}d\alpha_{1\cdot 2}.\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

此处之 $d\alpha_{1\cdot 2}$ 亦以秒为單位，故該項之 ρ'' 取消。將式(17)之关系代入式(18)，並將 ds 化为 $d\log s$，又命 $\dfrac{N_1\cos\varphi_1}{M_1}=V_1^2\cos\varphi_1=A_1$，卽得

$$\left.\begin{aligned}d\Delta\varphi_{1\cdot 2}&=+\frac{\Delta\varphi_{1\cdot 2}}{\mu\cdot 10^6}d\log s_{1\cdot 2}-\frac{A_1}{\rho''}\lambda_{1\cdot 2}d\alpha_{1\cdot 2};\\ d\lambda_{1\cdot 2}&=+\frac{\lambda_{1\cdot 2}}{\mu\cdot 10^6}d\log s_{1\cdot 2}+\frac{1}{A_1\rho''}\Delta\varphi_{1\cdot 2}d\alpha_{1\cdot 2}.\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

此两方程式代表 $\Delta\varphi_{1\cdot 2}$ 及 $\lambda_{1\cdot 2}$ 与 $d\log s_{1\cdot 2}$ 及 $d\alpha_{1\cdot 2}$ 之关系。μ 为对数常数，等于 0.43429，又此处之 $d\log s_{1\cdot 2}$ 以对数第六位为單位，故須除以 10^6。

第二步將 $d\log s_{1\cdot 2}$ 及 $d\alpha_{1\cdot 2}$ 列为各方向改正数之一次函数，茲以 II 6—II 8 之例說明之。由圖 8.1 中可以看出：

$$s_{6-8}=s_{6-5}\frac{\sin(2-1)\sin(9-8)}{\sin(10-9)\sin(12-11)},\quad(20)$$

此式可按以前边長条件之法，用对数化算，得

$$d\log s_{6-8}=-\delta_{2-1}v_1+\delta_{2-1}v_2-\delta_{9-8}v_8+(\delta_{9-8}+\delta_{10-9})v_9-\delta_{10-9}v_{10}+ \\ +\delta_{12-11}v_{11}-\delta_{12-11}v_{12}, \tag{21}$$

δ_{2-1} 为角度(2—1)每变 1 秒时其正弦对数第六位之变化，v 之單位为秒。又由圖中得方位角之关系：

$$\alpha_{6-8}=\alpha_{6-3}+(6-3), \tag{22}$$

化为改正数公式，得

$$d\alpha_{6-8}=v_6-v_3. \tag{23}$$

此处須注意者，即(20)，(22)两式之列出，必須自基綫擴大边及原点方位角出發。同样亦可列出 II 8—II 10, II 10—II 12 之相当公式，今將其統列如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\text{II 6—II 8}\\
&d\log s_{6-8}=-\delta_{2-1}v_1+\delta_{2-1}v_2-\delta_{9-8}v_8+(\delta_{9-8}+\delta_{10-9})v_9-\\
&\qquad-\delta_{10-9}v_{10}+\delta_{12-11}v_{11}-\delta_{12-11}v_{12};\\
&d\alpha_{6-8}=-v_3+v_6;\\
&\text{II 8—II 10}\\
&d\log s_{8-10}=-\delta_{2-1}v_1+\delta_{2-1}v_2-\delta_{6-4}v_4+\delta_{6-4}v_6-\delta_{8-7}v_7+\\
&\qquad+\delta_{8-7}v_8+\delta_{10-9}v_9-\delta_{10-9}v_{10}+\delta_{12-11}v_{11}-\\
&\qquad-\delta_{12-11}v_{12}-\delta_{18-17}v_{17}+(\delta_{18-17}+\delta_{20-18})v_{18}-\\
&\qquad-\delta_{20-18}v_{20}+\delta_{22-21}v_{21}-\delta_{22-21}v_{22},\\
&d\alpha_{8-10}=-v_3+v_6-v_{11}+v_{15}.\\
&\text{II 10—II 12}\\
&d\log s_{10-12}=-\delta_{2-1}v_1+\delta_{2-1}v_1-\delta_{6-4}v_4+\delta_{6-4}v_6-\delta_{8-7}v_7+\\
&\qquad+\delta_{8-7}v_8+\delta_{10-9}v_9-\delta_{10-9}v_{10}+\delta_{12-11}v_{11}-\\
&\qquad-\delta_{12-11}v_{12}-\delta_{15-13}v_{13}+\delta_{15-13}v_{15}-\delta_{17-16}v_{16}+\\
&\qquad+\delta_{17-16}v_{17}+\delta_{20-18}v_{18}-\delta_{20-18}v_{20}+\delta_{22-21}v_{21}-\\
&\qquad-\delta_{22-21}v_{22}-\delta_{28-27}v_{27}+(\delta_{28-27}+\delta_{30-28})v_{28}-\\
&\qquad-\delta_{30-28}v_{30}+\delta_{32-31}v_{31}-\delta_{32-31}v_{32},
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$d\alpha_{10-12}=-v_3+v_6-v_{11}+v_{15}-v_{21}+v_{25}.$$

列出(24)各式后，卽可按(19)列出 $d\Delta\varphi_{6-8}$, $d\Delta\varphi_{8-10}$, $d\Delta\varphi_{10-12}$ 及 $d\lambda_{6-8}$, $d\lambda_{8-10}$, $d\lambda_{10-12}$ 各式，然后將其代入式(16)中，卽为由 II 6—II 12 之經緯度条件矣。玆为說明起見，將 $d\Delta\varphi_{6-8}$ 及 $d\lambda_{6-8}$ 两式列下：

$$\left.\begin{aligned} d\Delta\varphi_{6-8}=&\frac{\Delta\varphi_{6-8}}{\mu\cdot 10^6}\{-\delta_{2-1}v_1+\delta_{2-1}v_2-\delta_{9-8}v_8+(\delta_{9-8}+\delta_{10-9})v_9-\\ &-\delta_{10-9}v_{10}+\delta_{12-11}v_{11}-\delta_{12-11}v_{12}\}-\frac{A_6}{\rho''}\lambda_{6-8}(-v_3+v_6);\\ d\lambda_{6-8}=&\frac{\lambda_{6-8}}{\mu\cdot 10^6}\{-\delta_{2-1}v_1+\delta_{2-1}v_2-\delta_{9-8}v_8+(\delta_{9-8}+\delta_{10-9})v_9-\\ &-\delta_{10-9}v_{10}+\delta_{12-11}\delta_{11}-\delta_{12-11}v_{12}\}+\frac{1}{A_6\rho''}\Delta\varphi_{6-8}(-v_3+v_6).\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

在实际計算时，$\Delta\varphi_{6-8}$ 及 λ_{6-8} 可取由观測値所得之概算値，A_6 之値可由地球橢圓函数之表中以 φ_6 为引数，查出 V_6^2 之对数而按 $A_6=V_6^2\cos\varphi_6$ 計算之。

今以数目計算之結果綜列如下①：

$\varphi_6=29°49'48''.426$, $\varphi°_{12}=29°31'28''.828$, $\varphi°_{12}-\varphi_6=-18'19''.598$,
$L_6=106°22'50''.169$, $L°_{12}=106°14'57.260$, $L°_{12}-L_6=-7'52''.909$.

由大地坐标之初步計算，得

$\Delta\varphi'_{6-8}=-5'05''.424=-305''.424$, $\lambda'_{6-8}=-3'52''.248=-232''.248$,
$\Delta\varphi'_{8-10}=-6'01''.137=-361''.137$, $\lambda'_{8-10}=-1'40''.884=-100''.884$,
$\Delta\varphi'_{10-12}=-7'13''.108=-433''.108$, $\lambda'_{10-12}=-2'19''.747=-132''.747$.

$\Sigma\Delta\varphi'=-18\quad 19.669$, $\Sigma\lambda'=-7\ 52.879$,
$-(\varphi°_{12}-\varphi_6)=+18\quad 19.598$; $-(L°_{12}-L_6)=+7\ 52.909$;
$w_\varphi=\quad -0''.071$. $w_\lambda=\quad +0''.030$.

其次再以 φ_6, φ_8, φ_{10} 为引数，自地球橢圓表中查出 V_6, V_8, V_{10} 之对数而計算式(25)中之系数：

① 此处 $\varphi°_{12}$ 及 $L°_{12}$ 之値系假定者，並非实际之値。

$\log V_6^2 \quad =0.00221$	$\log V_8^2 \quad =0.00221$	$\log V_{10}^2 \quad =0.00221$
$\log\cos\varphi_6=9.93827$	$\log\cos\varphi_8=9.93864$	$\log\cos\varphi_{10}=9.93907$
$\log A_6 \quad =9.94048$	$\log A_8 \quad =9.94085$	$\log A_{10} \quad =9.94128$
$\log\rho'' \quad =5.31443$	$\log\rho'' \quad =5.31443$	$\log\rho'' \quad =5.31443$
$\log\frac{A_6}{\rho''} \quad =4.62605$	$\log\frac{A_8}{\rho''} \quad =4.62642$	$\log\frac{A_{10}}{\rho''} \quad =4.62685$
$\log\lambda_{6-8} \quad =2.36595\,n$	$\log\lambda_{8-10} \quad =2.00382\,n$	$\log\lambda_{10-12} \quad =2.14534\,n$
$6.99200\,n$	$6.63024\,n$	$6.77219\,n$
$\frac{A_6\lambda_{6-8}}{\rho''}=-0.000982$	$\frac{A_8\lambda_{8-16}}{\rho''}=-0.000427$	$\frac{A_{10}\lambda_{10-12}}{\rho''}=-0.000592$
$\log\Delta\varphi_{6-8}=2.48490\,n$	$\log\Delta\varphi_{8-10}=2.55767\,n$	$\log\Delta\varphi_{10-12}=2.63660\,n$
$\log A_6\rho'' \quad =5.25491$	$\log A_8\rho'' \quad =5.25528$	$\log A_{10}\rho'' \quad =5.25571$
$7.22999\,n$	$7.30239\,n$	$7.38089\,n$
$\frac{\Delta\varphi_{6-8}}{A_6\rho''}=-0.001698$	$\frac{\Delta\varphi_{8-10}}{A_8\rho''}=-0.002006$	$\frac{\Delta\varphi_{10-12}}{A_{10}\rho''}=-0.002404$
$\log\Delta\varphi_{6-8}=2.48490\,n$	$\log\Delta\varphi_{8-10}=2.55767\,n$	$\log\Delta\varphi_{10-12}=2.63660\,n$
$\log 1:\mu\cdot 10^6=4.36222$	$\log 1:\mu\cdot 10^6=4.36222$	$\log 1:\mu\cdot 10^6=4.36222$
$6.84712\,n$	$6.91989\,n$	$6.99882\,n$
$\frac{\Delta\varphi_{6-8}}{\mu\cdot 10^6}=-0.000703$	$\frac{\Delta\varphi_{8-10}}{\mu\cdot 10^6}=-0.000832$	$\frac{\Delta\varphi_{10-12}}{\mu\cdot 10^6}=-0.000997$
$\log\lambda_{6-8} \quad =2.36595\,n$	$\log\lambda_{8-10} \quad =2.00382\,n$	$\log\lambda_{10-12} \quad =2.14534\,n$
$\log 1:\mu\cdot 10^6=4.36222$	$\log 1:\mu\cdot 10^6=4.36222$	$\log 1:\mu\cdot 10^6=4.36222$
$6.72817\,n$	$6.36604\,n$	$6.50756\,n$
$\frac{\lambda_{6-8}}{\mu\cdot 10^6}=-0.000535$	$\frac{\lambda_{8-10}}{\mu\cdot 10^6}=-0.000232$	$\frac{\lambda_{10-12}}{\mu\cdot 10^6}=-0.000322$

又按观测成果，將式(24)之数值填入，得下列各式：

II 6—II 8

$$d\log s_{6-8}=-0.03v_1+0.03v_2-0.74v_8+2.23v_9-1.49v_{10}+2.37v_{11}-2.37v_{12},$$

$$d\alpha_{6-8}=-v_3+v_6;$$

II 8—II 10

$$d\log s_{8-10}=-0.03v_1+0.03v_2-0.86v_4+0.86v_6-1.50v_7+1.50v_8+1.49v_9-$$
$$-1.49v_{10}+2.37v_{11}-2.37v_{12}-1.34v_{17}+1.42v_{18}-0.08v_{20}+2.37v_{21}-$$
$$-2.37_{22},$$

$$d\alpha_{8-10}=-v_3+v_6-v_{11}+v_{15},$$

II 10—II 12

$$d\log s_{10-12}=-0.03v_1+0.03v_2-0.86v_4+0.86v_6-1.50v_7+1.50v_8+1.49v_9-1.49v_{10}+$$
$$+2.37v_{11}-2.37v_{12}-0.34v_{13}+0.34v_{15}-1.84v_{16}+1.84v_{17}+0.08v_{18}-$$
$$-0.08v_{20}+2.37v_{21}-2.37v_{22}-2.84v_{27}+2.19v_{28}+0.65v_{30}+4.13v_{31}-$$
$$-4.13_{32},$$

$$da_{10-12}=-v_3+v_6-v_{11}+v_{15}-v_{21}+v_{25}.$$

將以上各式按式(25)乘以相当之系数，卽可列出 $d\Delta\varphi$, $d\lambda$ 各改正数方程式。玆为使小数位数適宜起見，將各式均乘以 1000，于是得

$$1000d\Delta\varphi_{6-8}=+0.02v_1-0.02v_2+0.98v_3-0.98v_6+0.52v_8-1.57v_9+1.05v_{10}-$$
$$-1.67v_{11}+1.67v_{12};$$

$$1000d\Delta\varphi_{8-10}=+0.02v_1-0.02v_2+0.43v_3+0.72v_4-1.15v_6+1.25v_7-1.25v_8-$$
$$-1.24v_9+1.24v_{10}-1.54v_{11}+1.97v_{12}-0.43v_{15}+1.12v_{17}-$$
$$-1.18v_{18}\pm0.07v_{20}-1.97v_{21}+1.97v_{22};$$

$$1000d\Delta\varphi_{10-12}=+0.03v_1-0.03v_2+0.59v_3+0.86v_4-1.45v_6+1.50v_7-1.50v_8-$$
$$-1.49v_9+1.49v_{10}-1.77v_{11}+2.36v_{12}+0.34v_{13}-0.93v_{15}+1.84v_{16}-$$
$$-1.84v_{17}-0.08v_{18}+0.08v_{20}-1.77v_{21}+2.36v_{22}-0.59v_{25}+2.83v_{27}-$$
$$-2.18v_{28}-0.65v_{30}-4.12v_{31}+4.12v_{32};$$

$$1000d\lambda_{6-8}=+0.02v_1-0.02v_2+1.70v_3-1.70v_6+0.40v_8-1.19v_9+0.80v_{10}-$$
$$-1.27v_{11}+1.27v_{12};$$

$$1000d\lambda_{8-10}=+0.01v_1-0.01v_2+2.01v_3+0.19v_4-2.20v_6+0.35v_7-0.35v_8-$$
$$-0.35v_9+0.35v_{10}+1.46v_{11}+0.55v_{12}-2.01v_{15}+0.31v_{17}-0.33v_{18}+$$
$$+0.02v_{20}-0.55v_{21}+0.55v_{22};$$

$$1000d\lambda_{10-12}=+0.01v_1-0.01v_2+2.40v_3+0.28v_4-2.68v_6+0.48v_7-0.48v_8-$$
$$-0.48v_9+0.48v_{10}+1.64v_{11}+0.76v_{12}+0.11v_{13}-2.51v_{15}+0.33v_{16}-$$
$$-0.33v_{17}-0.03v_{18}+0.03v_{20}+1.64v_{21}+0.76v_{22}-2.40v_{25}+0.91v_{27}-$$
$$-0.71v_{28}-0.21v_{30}-1.33v_{31}+1.33v_{32}.$$

將各 $d\Delta\varphi$ 之式及各 $d\lambda$ 之式分别相加，卽可按式(16)書出經緯度条件方程式。式中之 w_φ 及 w_λ 乃以 $1/1000''$ 为單位，蓋上列之 $d\Delta\varphi$ 及 $d\lambda$ 各式均以 1000 乘过也。

緯度条件方程式:

$$+0.07v_1-0.07v_2+2.00v_3+1.58v_4-3.58v_6+2.75v_7-2.23v_8-4.30v_9+$$
$$+3.78v_{10}-4.98v_{11}+6.00v_{12}+0.34v_{13}-1.36v_{15}+1.84v_{16}-0.72v_{17}-1.26v_{18}+$$
$$+0.15v_{20}-3.74v_{21}+4.33v_{22}-0.59v_{25}+2.83v_{27}-2.18v_{28}-0.65v_{30}-4.12v_{31}+$$
$$+4.12v_{32}-71=0;$$

經度条件方程式:

$$+0.04v_1-0.04v_2+6.11v_3+0.47v_4-6.58v_6+0.83v_7-0.43v_8-2.02v_9+$$
$$+1.63v_{10}+1.83v_{11}+2.58v_{12}+0.11v_{13}-4.52v_{15}+0.33v_{16}-0.02v_{17}-0.36v_{18}+$$
$$+0.05v_{20}+1.09v_{21}+1.31v_{22}-2.40v_{25}+0.91v_{27}-0.71v_{28}-0.21v_{30}-1.33v_{31}+$$
$$+1.33v_{32}+30=0.$$

除上述之方法外，經緯度条件亦可化至平面上列出，使其平面坐标相等。此法之优点在于平面坐标計算之公式較为簡單。关于坐标条件之公式，其演化步驟与前述方法类似，此处从略。

第四節　环形網之平差

环形網之特徵，在其本身必須閉合。今如有一环形網如圖 8.2 所示，則除普通之圖形条件外，尙有所謂环形条件者。蓋圖形条件中之角度条件滿足后，僅能使各三角形內之角度閉合；在此簡單之單鎖环形網中尙有一边長条件，卽自任意一边 AB 起循一方向，計算各边之長度，及仍回算至 AB 边本身时，其長度必須与出發之長度相符，卽圖 8.2 中之 $A'B'$ 須与 AB 相等。

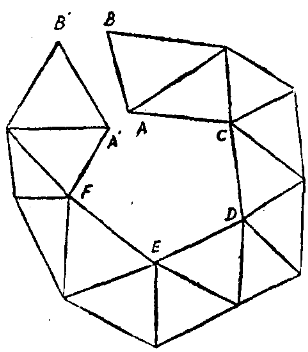

圖 8.2

在普通三角網中，如上述之角度及边長条件滿足后，三角網卽能符合無間矣。但在环形網中未必如是，蓋由圖 8.2 中卽可看出，角度与边長条件滿足后，$A'B'$ 两点未必卽与 AB 相合于一处。欲使此两点相合，尙有三个条件。

(1) $A'B'$ 与 AB 之方位角必須相等，是为方位角条件。

(2) A 与 A'（或 B 与 B'）必須重疊，易言之，卽其經緯度必須相等，是为两个坐标条件。

此三个条件，統名之曰环形網条件，或曰多边形条件，其性質固与閉合導綫中之三个条件完全相同也。此三个条件中之第一条件，亦可

化为多边形內角总和条件，蓋 $ACDEF$ 为一多边形，由其各边方向所構成之內角总和如与几何条件相合，則 AB 必与 $A'B'$ 平行，关于此种条件之列法，前数節中均已論及，玆不重述。

环形網之条件，除上述一种列法外，尙可有他种选擇。例如方位角条件，亦可易以 B 点任意之一坐标（經度或緯度）条件。此外边長条件亦可易以 B 点其他一坐标之条件。如此則除各三角形閉合之条件外，尙加 AB 两点之四个坐标条件。条件方程式之数目仍旧不变。一般因方位角条件較为簡單，故常用前述之組合。

坐标条件不一定为經緯度条件，亦可为平面坐标条件。

环形網之平差除用上法外，尙可利用虛拟观測法平差。例如圖 8.2 之網形，其环形中間之多边形甚小，故可假設由 A 点至 DE 两点曾作观測，于是其圖形变为圖 8.2 之形狀。AD 与 AE 两方向，可給与一近似値，由此列出以 A, C, D, E, F 五点为中心之五个边長条件。在此五个边長条件中，共含有两个未知数卽虛拟观測之两个方向是也。此两个方向旣未經实測，自不能列于条件方程之內，故必須由五个条件中將其消去，于是僅余三个边長条件。以此三个条件並加 $ACDEF$ 五边形之內角总和条件，卽相当于前述之 AB 边長及三个环形条件，其数目亦共为四个。两种方法中条件方程之列出工作俱甚繁雜，如环形中間之多边形不过四五边，則后法或較簡單；但在較大环形網內，中間多边形点数甚多时，后法中消除虛拟未知数之工作太繁，反不若前法之簡單矣。

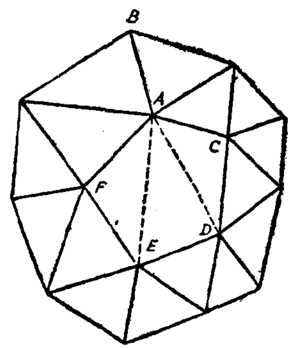

圖 8.3

一般而論，环形網之条件过于复雜，在較大規模之平差时，多不采用上述之方法，而采用特殊方法，如分段以大地綫代替，或用坐标法等，此种特殊方法，將于第十章論述之。

第九章　交会定点法

第一節　概論

通常独立三角網，無論其精度屬于何等，均按条件观测平差，其法已于第七第八两章詳論之。但就理論言，固亦可以各三角点之平面坐标为未知数，而用間接观测法平差，此时除由出發二点之坐标可認为已知外，其余各点均各含有两未知数(卽点之縱橫二坐标)。今設有一簡單之三角鎖，共有 n 个三角形，其总共点数应为 $n+2$ 个，除去两个已知点外，尙有 n 个未知点，卽含有 $2n$ 个未知数。按間接观测法平差时，应得 $2n$ 个法方程式。如用条件法平差，在此最簡單之三角鎖內，僅含有角度条件方程式 n 个，卽僅解 n 个法方程式卽足，故后法較前法簡便。

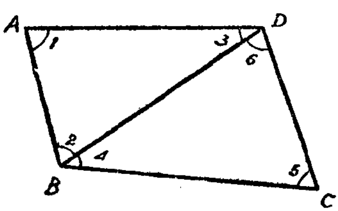

圖 9.1

但若三角網之点数較少，而強制附合之处甚多，譬如由一二等三角点定三四等三角点之位置，而以一二等三角点之位置为不变时，則用間接观测法平差，卽較用条件法平差適宜。最簡單之例，設由三个已知三角点 A, B, C (圖 9.1) 测定一新点 D 之位置时，除两个三角形各有一角度条件外，尙有自 AB 点出發閉合于已知 C 之強制条件两个，共需列四个条件方程式，因得四个法方程式。同一問題若用平面坐标方法平差，則無論观测之角度为数几何，其未知数僅有两个，卽新点 D 之縱橫二坐标値也。故在此种情形之时，宜用平面坐标方法平差。此法亦名为交会定点法。

所謂交会定点法，卽利用交会綫之相交而定点位之謂。交会綫可由已知点出發测視未知点，称之为前方交会綫，或外方向綫；其由未知

点出發而測視已知点者，称之为后方交会綫、或內方向綫；凡連接一已知点与一未知点之視線在两端俱行观測者，卽同时包括內外方向線者，称之为联合交会綫。在用交会法同时定多点之位置时，亦有自未知点間互測者。

交会定点法最普遍之应用为單点定位法，由数已知点測定一未知点位，如圖 9.1 所示之情形；此外为双点定位法，卽由数已知点同时測定二新点之点位。多点定位法則鮮有应用，盖新点数目加多时，通常多用条件平差法也。凡小三角之三角網中，待定之新点甚多时，有时逐点分开測求；亦有先求交会位置良好之点，得其点位之后，更利用之作为已知点，以測求其他之新点者，如此則繁复之三角網亦可分析为若干單点或双点交会定位矣。

此类平差問題計算之步驟：第一，根据已知点之平面坐标及任意数个观測之角度或方向，計算未知点之近似坐标；第二，根据未知点之近似坐标計算各方向或角度之近似値；第三，比較由第二步所算出之方向或角度近似値与观測所得之値而列出改正数方程式。第一第二两步驟至为明顯，关于改正数方程式之排列，將于以下数節詳論之。

第二節　方位角及距离之平面改正

用交会法定点时，以坐标値为未知数之間接平差，率行之于平面上；而观測所得之角度或距离，則位于地球橢圓体上，故在应用此种方法平差之先，必須求其方向及距离之改正。此种改正随投影方法之不同而異。在測量实际所应用者多为正形投影，且地域較大时往往分为若干帶分投，以減少各种投影誤差。兹以最常用之高斯-克呂格投影及蘭孛圓錐正形投影为例，列举其应用之公式。

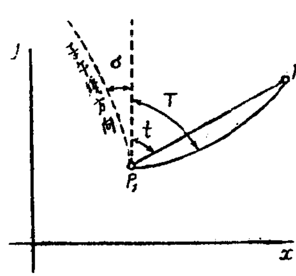

圖 9.2

平面方向角系以其标准子午綫圈方向为縱坐标軸（y 軸），而大地方位角則以該点本身之子午綫圈方向为标准，故二者之間相差子午綫收斂角値 σ（圖 9.2）。此外球面与平面倘有一差别，卽平面二点之連接直綫並不相当于其地球表面之大地綫是也。故除子午綫收斂角外，倘須加此項較小之方向改正 $T-t$（圖 9.2）。此种改正無須用極嚴格之公式，僅取其展开后之首項卽足。

（一）高斯-克呂格投影：高斯-克呂格投影方向改正之公式为：

$$\text{大地方位角}——\text{平面方向角}=T-t=\gamma+\frac{(y_2-y_1)(2x_1+x_2)}{6r^2}\rho'', \quad (1)$$

其中 γ 为子午綫收斂角，x_1, y_1 为端点 P_1 之平面坐标，x_2, y_2 为端点 P_2 之平面坐标。r 为該投影区域内中心緯度之地球平均半徑，其与二主半徑 M, N 之关系为：

$$r=\sqrt{MN}; \quad (2)$$

至于距离改正則为：

$$m=\frac{ds}{dS}=1+\frac{x^2}{2r^2} \text{ 或 } \log m=\frac{\mu}{2r^2}x^2; \quad (3)$$

$$\log s-\log S=\frac{\mu}{12r^2}(x_1^2+4x_0^2+x_2^2), \quad (4)$$

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad \mu=0.4343, \quad \log\mu=9.63778.$$

其中 s 为平面之直綫距离，S 为椭圓体面距离，m 为其点之投影比例尺。由公式(3)可知距离改正随其横坐标 x 变化，故如 m 与 x 之关系列有表格时，則可在表內求其比例尺之中値以改正距离，不必再应用式(4)矣（參考下例）。

（二）蘭孛圓錐正形投影：以地軸为中軸之圓錐作为投影面，展开之卽得圓錐投影。此圓錐往往割交于地球之二緯圈 φ_1, φ_2。在二緯圈时其比例尺差为零。設使此圓錐切交于地球时，其切交之緯圈 φ_0 約位于略大于 φ_1 与 φ_2 中数之处，如以圓球代表此部分之地球椭圓体面时，

則圓球之半徑 $r=\sqrt{MN}$，均指 φ_0 处数值而言。圓錐投影之特征为等緯圈之投影为圓弧，子午圈之投影为直綫，任意一子午綫投影与中間子午綫間之角度間隔 θ 即为子午綫收斂角，为其經度差之倍数。今更以 y_0 代表 φ_0 之縱坐标时，則其方向改正之公式为：

大地方位角——平面方向角＝

$$=T-t=\theta-\frac{x_2-x_1}{2r^2}\left(y_1-y_0+\frac{y_2-y_1}{3}\right)\rho'', \tag{5}$$

距离改正則可由比例尺之微分公式得之：

$$m=\frac{ds}{dS}=1+\frac{y^2}{2r^2}-\frac{y^3\tan\varphi_0}{6r^3}. \tag{6}$$

如只保留此式之第二項时，則与式(3)之結果完全相同，惟 y 与 x 对調，是即長度誤差之改正随縱坐标 y 而变異也。今設有表列 m 与 φ 角每分之变化(或与 y 値每公里之变化)，則可直接应用式(6)求其中数。

例：試求某二点(北緯 41°48′ 及 41°52.3′)間之距离改正(应用陸地測量总局分帶蘭孛圓錐投影系統)。

下表之第一及第二两項，取自蘭孛圓錐投影某帶之投影表。比例尺項乃以对数第七位为單位之值。

表 1.

緯　度	比例尺改正	权	权×比例尺改正
0			
41°48′.0	−26.3	0.5	−13.15
49	−20.3	1	−20.3
50	−13.9	1	−13.9
51	− 7.1	1	− 7.1
52.0	0.0	0.8	0.0
	和	4.3	−54.45

$$\frac{-54.45}{4.3}=-12.7.$$

表列 41°48′ 处之改正值 −26.3 应用于 41°47′.5 至 41°48′.5，但第一站之緯度为 41°48.0，故只計 −26.3 之半值。同理52′.3 大于 51′.5 之値为 0.8，故以之为 0.0 值之权，如此所得之平均值 −12.7 加之于地面上長度之对数值，即得平面上長度之对数值矣。

第三節 方向角与平面坐标之关系

交会定点之改正数方程式系由方向角变化与平面坐标变化間之关系得來。今設有一方向綫 PP_1（圖 9.3），其两端点之平面坐标各为 x,y 与 x_1,y_1，而其在 P 点之方向角設为 α_1，則其方向角与二点平面坐标值之关系为：

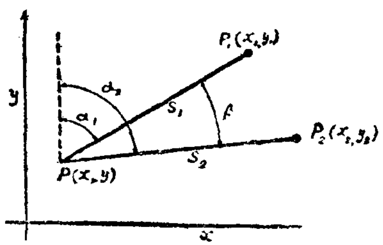

圖 9.3

$$\tan\alpha_1=\frac{x_1-x}{y_1-y}, \tag{7}$$

$$\alpha_1=\tan^{-1}\left(\frac{x_1-x}{y_1-y}\right).$$

今所欲求者，即方向角变化 $d\alpha_1$ 与二端点平面坐标变化 dx_1, dy_1, dx, dy 之关系，此关系可以微分式（7）得之：

$$d\alpha_1=\frac{d\left(\dfrac{x_1-x}{y_1-y}\right)}{1+\left(\dfrac{x_1-x}{y_1-y}\right)^2}=\frac{\dfrac{(y_1-y)(dx_1-dx)-(x_1-x)(dy_1-dy)}{(y_1-y)^2}}{1+\left(\dfrac{x_1-x}{y_1-y}\right)^2}$$

$$=\frac{(y_1-y)(dx_1-dx)-(x_1-x)(dy_1-dy)}{(y_1-y)^2+(x_1-x)^2}. \tag{8}$$

更以 S_1 代表 PP_1 之長，則

$$\left.\begin{aligned}S_1^2&=(x_1-x)^2+(y_1-y)^2\cdots,\\x_1-x&=S_1\sin\alpha_1\ \cdots\cdots,\\y_1-y&=S_1\cos\alpha_1\ \cdots\cdots.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式(9)代入式(8)，得

$$d\alpha_1=\frac{\cos\alpha_1}{S_1}(dx_1-dx)-\frac{\sin\alpha_1}{S_1}(dy_1-dy). \tag{10}$$

在 P, P_1 二点之中，設 P 为已知点时，则其坐标值無变化，而 dx, dy 为零，此时 α_1 自已知点出發，为前方交会定点时之情形。反之，設 P_1 为已知点时，则同理 dx_1, dy_1 为零，方向角 α_1 得自未知点 P 观测已知点 P_1，为后方交会定点时之情形。

在角度观测时，角度为二方向之差，其角度与平面坐标之微分关系，仍可利用式(10)求之。今設自圖 9.3 之 P 点更有第二方向至 P_2，其方向角为 α_2，其距离 $PP_2=S_2$，则其方向角变化与平面坐标变化之微分式应为：

$$d\alpha_2=\frac{\cos\alpha_2}{S_2}(dx_2-dx)-\frac{\sin\alpha_2}{S_2}(dy_2-dy), \tag{11}$$

而 PP_1 与 PP_2 間夾角 β 之变化 $d\beta$ 应为：

$$\begin{aligned}d\beta&=d\alpha_2-d\alpha_1\\&=\frac{\cos\alpha_2}{S_2}(dx_2-dx)-\frac{\sin\alpha_2}{S_2}(dy_2-dy)-\frac{\cos\alpha_1}{S_1}(dx_1-dx)+\\&\qquad+\frac{\sin\alpha_1}{S_1}(dy_1-dy)\end{aligned} \tag{12}$$

式(10)及(12)为此章中之二基礎方程式，所有交会定点之平差問題，均由此关系出發。其坐标变化之系数 $\frac{\cos\alpha_i}{S_i}$，$-\frac{\sin\alpha_i}{S_i}$ 等簡称之为方向系数，以 a_i 及 b_i 代表之。当实际应用之时，$d\alpha$ 及 $d\beta$ 恆用秒为單位，距离 S 以公里为單位，而坐标变化 dx, dy 等取公寸为單位；依此标准改动时，則方向系数內須各乘以 $\rho''\frac{1}{1000\times10}$ 一項。

第四節 方向系数之計算方法

由公式(9)之关系，方向系数可以下列三种方法表示之:

$$\left.\begin{aligned} a_i &= +\frac{\cos\alpha_i}{S_i}\frac{\rho''}{10000} = \frac{y_i - y}{S_i^2}\frac{\rho''}{10000} = \frac{\cos\alpha_i\sin\alpha_i}{x_i - x}\frac{\rho''}{10000};\\ b_i &= -\frac{\sin\alpha_i}{S_i}\frac{\rho''}{10000} = -\frac{x_i - x}{S_i^2}\frac{\rho''}{10000} = -\frac{\cos\alpha_i\sin\alpha_i}{y_i - y}\frac{\rho''}{10000}. \end{aligned}\right\}\quad(13)$$

此三种形式均可視应用之便利而斟酌採用。如已知某視綫之長度及方位角，可逕应用第一种形式用計算尺或对数計算；如有 $\cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\frac{\rho}{10000}$ 之表格时，則以第三种形式为便利；本書附錄列 $u=\frac{\cos\alpha\cdot\rho}{10000}$ 及 $v=-\frac{\sin\alpha\cdot\rho}{10000}$ 表，依 α 每十分之間隔排列，可供第一种形式計算时之应用；此外尙有对数差法及其他圖解方法甚多，均以使式(13)中系数計算之能簡化为主。玆將数种算法举例如下，但無論应用何种計算方法，其 a 与 b 之符号可首由式(13)之第二种形式中判断，卽 a 值之符号恆与縱坐标値差 y_2-y_1 相同，b 値之符号恆与橫坐标値差 x_2-x_1 相反也。

例：今設有二点 P, P_1，其坐标値为已知，試求其方向系数 a 与 b。

P_1:	$x_1=2658004.85$	$y_1=921220.79$
P:	$x=2695423.55$	$y=890348.48$
	$x_1-x=-37418.55;$	$y_1-y=+30872.31.$

$\log x_1-x=4.5730870(n)$	$\log x_1-x=4.57309$
$\log y_1-y=4.4895691$	$\log\sin\alpha=9.88725-10$
$\log\tan\alpha=0.0835179(n)$	$\log s=4.68584$
$\alpha=309°31'28''.0;$	$S=4.8511$ 公尺
	$=48.51$ 公里。

(1) 对数計算法:

$$\begin{array}{ll}
\log \frac{\rho''}{10000} = 1.3144 & \log -\frac{\rho''}{10000} = 1.3144(n) \\
\log(1:S) = 8.3142 & \log(1:S) = 8.3142 \\
\log\cos\alpha = 9.8037 & \log\sin\alpha = 9.8873(n) \\
\hline
\log a = 9.4323 & \log b = 9.5159 \\
a = +0.271; & b = +0.328.
\end{array}$$

(2) 利用 u, v 表法：

当 $\alpha = 309°31'.5$ 时自附錄之表內得：

$u = +20.6265\cos\alpha = +13.12$；　$v = -20.6265\sin\alpha = +15.92$，

故：$a = +\frac{13.12}{48.51} = +0.271$；　　$b = +\frac{15.92}{48.51} = +0.328$.

(3) 对数差計算法：

		对数差
$\log x_1 - x = 4.5730870(n)$	每1公寸	11.6
$\log y_1 - y = 4.4895691$	每1公寸	14.0
$\log\tan\alpha = 0.0835179(n)$	每　秒	42.9

故知 x 坐标每 1 公寸之变化相当于方向 $\frac{11.6}{42.9} = 0''.271$ 之变化。此值即为系数 a；而 y 坐标每 1 公寸之変化相当于方向 $\frac{14.0}{42.9} = 0''.327$ 之变化，此值即为系数 b。

a 与 b 系数求得之后，可利用其二者平方之和以驗核之。按：

$$a^2 + b^2 = \frac{\rho^2}{100S^2}$$

关系，此平方和值与視綫之方向無关，如以 S 之公里值列 $\frac{\rho^2}{100S^2}$ 之表，則査表即可知其平方和应得之值矣。

第五節　前方交会定点法

前方交会定点法者由已知点观测新点(未知点)而定新点之坐标之

謂。观测可分为角度与方向二种，玆分别論述之。

(一) 角度观测：

应用角度观测时，其改正数方程式为式(12)，此时观测之站 P (圖 9.4) 为已知点，故其点之坐标变化恆为零。在 P_1 与 P_2 中，一为已知点，一为未知点。若已知点之方向角小于未知点之方向角时(如圖 9.4 雷家山之 β_1 角)，則式(12)之 dx_1 与 dy_1 以及 dx 与 dy 均应为零，而其应用之公式为：

$$d\beta=\frac{\cos\alpha}{S}dx-\frac{\sin\alpha}{S}dy\cdots, \tag{14}$$

此时之 α, S 及 dx, dy 均指与新点(圖 9.4 之大坡点)有关之各值而言。設至已知点之方向角大于未知点之方向角时(如圖 9.4 宝華寺站之 β_2 角、大宝鼎站之 β_3, β_4 角等)，則式(12)之 dx_2 与 dy_2 以及 dx 与 dy 均为零，而其应用之公式为：

$$d\beta=-\frac{\cos\alpha}{S}dx+\frac{\sin\alpha}{S}dy\cdots, \tag{15}$$

令命 β' 为观测之角值，β 为平差后应得之角值，β_0 为根据新点近似坐标值所得之近似角值，則 $\beta=\beta'+v=\beta_0+d\beta$，故：

$$v=d\beta-(\beta'-\beta_0)=\pm\frac{\cos\alpha}{S}dx\mp\frac{\sin\alpha}{S}dy-(\beta'-\beta_0),$$

$(\beta'-\beta_0)$ 为常数項，以 l 表示之，幷代入 a, b 之值，卽得

$$v=\pm a dx\pm b dy-l. \tag{16}$$

a, b 之前置符号如下：

$+$：已知点方向在未知点之左方；

$-$：已知点方向在未知点之右方。

式(16)为前方交会角度观测之改正数方程式。

本章所举实例均采自前中國地理研究所北碚測量实驗区之三角点观测成果，为应用之方便計，玆將其一部观测成果列于下表：

三角點观测成果一覽表

視准点	最后方位 ν			观测方向 a			$\nu-a$ 定向角 $z=\frac{[\nu-a]}{m}$			計算用方向 $a+z$		
	°	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″
(a) 已知点												
令8 天台寺 $x=3627282.28$　$y=231072.1$												
令4 巴　山				0	00	00.0						
令3 獅子岩	83	01	45.8	45	57	31.2	37	4	14.6			
令2 五云山				77	18	20.3				114	22	34.9
令9 大宝鼎 $x=3635625.49$　$y=227658.43$												
令7 沙兒嵅	19	52	30.3	36	07	16.2	343	45	14.1	19	52	32.6
令1 大　坡				262	13	07.3				24.5	67	23.7
令2 五云山				305	28	23.5				28.9	13	39.9
令8 天台寺	292	15	244	308	30	05.6			18.8	29.2	15	22.0
							343	45	16.4			
令10 雷家山 $x=3624694.89$　$y=219925.86$												
令1 大　坡				27	22	30.3				44	14	11.7
令7 丰文山				88	50	21.9				105	42	03.3
令8 中云寺				120	59	44.6				137	51	26.0
令8 天台寺	13	04	04.0	356	12	22.6	16	51	41.4	13	0.4	04.0
令11 宝華寺 $x=3635045.46$　$y=222006.75$												
令9 大宝鼎	5	51	35.2	0	00	00.0	5	51	35.2	5	51	35.2
令1 大　坡				292	49	58.2				298	41	33.4

令12 小堙口

$x=3621079.88$ $y=206553.06$

令8 中云寺				12	58	17.7				52	45	51.1
令13 歌乐山	72	05	02.9	32	17	29.5	39	47	33.4	72	05	02.9

令13 歌乐山

$x=3637643.67$ $y=211908.08$

令8 中云寺				0	00	00.0				283	21	29.5
令12 小堙口	252	05	02.9	328	42	33.4	283	21	29.5	252	05	02.9

令1 大 坡

$x=3629615.25$ $y=224979.03$

令9 大宝鼎	65	58	19.0	0	00	00.0	65	58	19.5	65	58	21.3
令11 宝華寺	118	41	40.3	52	43	18.4			21.9	118	41	39.7
令7 丰文山				123	23	18.9				189	21	40.2
令10 雷家山	224	14	13.5	158	15	54.7			18.8	224	14	16.0
令8 天台寺	339	03	0.45	273	04	39.4			25.1	339	03	0.7
令2 五云山				326	41	05.4				32	39	26.7
							65	58	21.3			

令3 獅子岩

$x=363437.74$ $y=231940.45$

令9 大宝鼎	163	45	14.5	0	00	00.0	163	45	14.5			
令2 五云山				52	43	10.8				216	28	23.3
令8 天台寺	266	01	45.8	99	16	33.5	163	45	12.3			
令7 沙兒崗	59	27	40.5	255	42	29.7	163	45	10.8			
							163	45	12.5			

令4　巴　山　$x=3629983.88$　$y=234648.76$												
令8　天台寺	217	04	17.5	0	00	00.0	217	04	17.5			
令6　張家埡口	30	09	0.2	173	04	42.6			17.6			
令3　獅子岩	121	38	57.3	264	34	35.5			21.8			
令2　五云山				302	37	40.1				159	41	59.0
							217	04	18.9			
(b) 新　点												
令2　五云山												
令8　天台寺				0	00	00.0						
令4　巴　山				45	19	29.3						
令3　獅子岩				102	05	48.4						
令9　大宝堋				174	51	03.2						
令1　大　坡				278	16	54.0						
令7　丰文山												
令10　雷家山				0	00	00.0						
令1　大　坡				83	39	30.0						
令11　宝華寺				138	02	22.4						
令8　中云寺				235	17	16.4						
令8　中云山												
令12　小埡口				25	02	2.7						
令10　雷家山				110	07	42.4						
令7　丰文山				133	15	33.1						
令13　歌乐山				255	37	39.9						

表内 △ 代表二等三角点，△ 代表三等三角点，此后亦有間用 II，III 符号以表示之者。所有观测均为方向观测，并已按蘭孛圖錐正形投影之方向改正公式改算至平面之上。今試以 △9 大宝鼎站点之观测为例，其观测值之归化計算列如下表：

测站	视准点	观测值	归心值		球面改正	归化后之观测值
			测站	觇标		
△9 大宝鼎	△3	0°00′ 0″.0	–	−2.1	+0.11	0″.0
	△7	36°07′14″.4	–	–	−0.21	16.2
	△1	262°18′05″.9	–	–	−0.54	07.3
	△2	305°28′21″.2	–	−1.1	+0.28	23.5
	△8	308°30′02″.9	–	–	+0.73	05.6

其中球面改正为式(5)之 $T-t-\theta$ 項，因 θ 为某测站观测共同之改正值，求其平面方向相对之关系时無須加入演算也。今更取 △9—△8 之改正值 +0.73 为例，其計算之程序列下：

	x	y
△8	27 282.29	231 072.91
△9	35 625.49	227 658.47
	−8 343.20;	+3 414.44.

在此投影帶内 $y_0=194227.46$，而 $\dfrac{\rho}{2r^2}=25.4\times10^{-10}$.

按式(5)

$$T-t-\theta=-\frac{x_2-x_1}{2r^2}\rho\left(y_1-y_0+\frac{y_2-y_1}{3}\right)=$$

$$=-(-8343.20\times25.4\times10^{-10})\left(33431+\frac{3414}{3}\right)=+0.73.$$

例：为举例以示角度观测平差計算之过程計，今假想 △1 大坡为新点，由 △9 大宝鼎、△10 雷家山及 △11 宝華寺三已知点前方交会观测以得其点位。观测角度值得自上表各相当二方向之差，逕假想其

为直接观测之值，共得 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 及 β_4 (圖 9.4)等四角，其值各为：

$$\beta_1' = 31°10'07''.7,$$

$$\beta_2' = 67°10'01''.8,$$

$$\beta_3' = 46°16'58''.3,$$

$$\beta_4' = 133°54'08''.9.$$

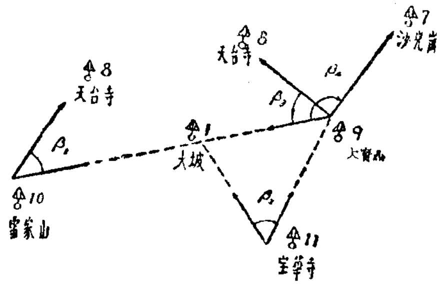

圖 9.4

β_1', β_2' 两角之权設各为 1/2，而 β_3', β_4' 两角之权設各为 1。

平差計算共分六步：(1) 新点近似坐标之計算；(2) 已知点与新点間近似方向角及距离之計算(由新点之近似坐标值計算)；(3) 改正数方程式之列出；(4)法方程式之解算；(5)改正数及中誤差之計算；(6)平差后方向角之計算。凡以上各步計算工作，均行之于固定格式上，此处所示者卽前中國地理研究所大地測量組所采用者，其第(1)，(2) 步計算可参閱普通測量学中之公式，并用公式

$$\tan\left(\frac{1}{4}\pi + \nu_a^b\right) = \frac{\Delta y + \Delta x}{\Delta y - \Delta x},$$

加算 $\frac{1}{4}\pi + \nu_a^b$ 以資檢核 ν_a^b 值之計算。第(3)表系依照式(16)所列，無庸詳釋；第(4)步列法方程式及其解算之結果，求出 dx 及 dy 后，并加于近似值 (x)，(y) 上而得新点之坐标，第(5)步由改正数方程式求改正数并求其平方和，然后計算平差后坐标之中誤差，第(6)步为平差后各方向值之計算。依上述步驟分列数表如下：

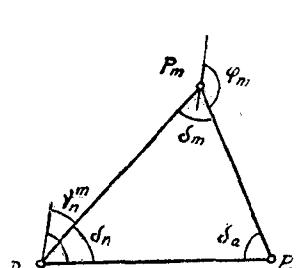

圖 9.5

1. 由已知点 P_n：合11 宝華寺及 P_m：合9 大宝鼎計算新点，P_a：合1 大坡之近似坐标。

应用公式：(圖 9.5)

$$m_a=\frac{x_m-x_n}{\sin\delta_a\sin\nu_n^m}=\frac{y_m-y_n}{\sin\delta_a\cos\nu_n^m};$$

$$\Delta x_n=m_a\sin\delta_m\sin\varphi_n,$$

$$\Delta y_n=m_a\sin\delta_m\cos\varphi_n,$$

$$\Delta x_m=m_a\sin\delta_n\sin\varphi_m,$$

$$\Delta y_m=m_a\sin\delta_n\cos\varphi_m.$$

P_n: P_m:	合 11 合 9	x_n x_m		3635045.46 3635625.49	y_n y_m		222006.75 227658.47
		x_m-x_n	+	580.03	y_m-y_n	+	5651.72

	°	′	″		°	′	″
φ_n	298	41	34	$\delta_n=\varphi_n-\nu_n{}^m$	292	49	59
φ_m	245	58	17	$\delta_m=\nu_n{}^m-\varphi_m\pm\pi$	−60	06	42
$\nu_n{}^m$	5	51	35	$\delta_a=\varphi_m-\varphi_n$	−52	43	17
				$\delta_n+\delta_m+\delta_a=\pi$	180	00	00

$\log(x_m-x_n)$	2.763457	$\log(y_m-y_n)$	3.752180
colog $\sin\delta_a$	0.099251n	colog $\sin\delta_a$	0.099251n
colog $\sin\nu_n{}^m$	0.991001	colog $\cos\nu_n{}^m$	0.002275
$\log m_a$	3.853709n	$\log m_a$	3.853706n
$\log\sin\varphi_n$	9.943102n	$\log\sin\varphi_m$	9.960633n
$\log m_a$	3.853706n	$\log m_a$	3.853706n
$\log\sin\delta_m$	9.938018n	$\log\sin\delta_n$	9.964526n
$\log\cos\varphi_n$	9.681342	$\log\cos\varphi_m$	9.609800n
$\log\Delta x_n$	3.734826n	$\log\Delta x_m$	3.778901n
$\log\Delta y_n$	3.473066	$\log\Delta y_m$	3.428068n

	x_n		3635045.46	y_n		222006.75
	Δx_n	−	5430.33	Δy_n	+	2972.12
	x_m		3635625.49	y_m		227658.47
	Δx_m	−	6010.37	Δy_m	−	2679.59
令 1	x_a		3629615.12	y_a		224978.88

2. 近似距离及方向角之計算:

$\uparrow P_b$ / P_a		x_b / x_a / $\Delta x = x_b - x_a$ / $\Delta y + \Delta x$		y_b / y_a / $\Delta y = y_b - y_a$ / $\Delta y - \Delta x$	$\log(\Delta y+\Delta x)$ / $\log(\Delta y-\Delta x)$ / $\log\tan\left(\frac{1}{4}\pi+\nu_a{}^b\right)$ / $\frac{1}{4}\pi+\nu_a{}^b$	$\log\Delta x$ / $\log\Delta y$ / $\log\tan\nu_a{}^b$ / $\nu_a{}^b$	$\log\sin\nu_a{}^b$ / $\log\cos\nu_a{}^b$ / $\log S$ / S
令 1 大　坡		3629615.12		224978.88	3.9988367	3.6919855	
令10 雷家山		3624694.89		219925.86	2.1231654	3.7035510	9.85519
	+	4920.23	+	5053.02	1.8756713	9.9884345	3.84836
	+	9973.25	+	132.79	89°14′13″.9	44°14′13″.8	7.05
令 1 大　坡		3629615.12		224978.88	3.3906190n	3.7348270n	9.94310
令11 宝華寺		3635045.46		222006.75	3.9244070	3.4730678	
	−	5430.34	+	2972.13	9.4662120n	0.2617592n	3.79173
	−	2458.21	+	8402.47	343°41′33″.9	298°41′33″.9	6.19
令 1 大　坡		3629615.12		224978.88	3.9390178n	3.7789012n	9.96063
令 9 大宝鼎		3635625.49		227658.47	3.5225460	3.4280684n	
	−	6010.37	−	2679.59	0.4164718n	9.3508328	3.81827
	−	8689.96	+	3330.78	290°58′16″.9	245°58′16″.9	6.58

3. 方向系数及改正数方程式之常数値:

号数	测站	u	v	S (公里)	β'	(β)	$(\beta)-\beta' = -l$
1	雷家山	+14.78	−14.39	7.05	31°10′07″.7	31°10′09″.8	+2.10
2	宝華寺	+ 9.90	+18.09	6.19	67 10 01 .8	67 10 01 .3	−0.50
3	大宝鼎	− 8.40	+18.84	6.58	46 16 58 .3	46 17 07 .5	+9.20
4	大宝鼎	− 8.40	+18.84	6.58	133 54 08 .9	133 54 13 .4	+4.50

4. 改正数方程式、法方程式及其解算:

号数	P	$a=\frac{\pm u}{S}$	$b=\frac{\pm v}{S}$	$-l$	aa	ab	$-al$	bb	$-bl$
1	$\frac{1}{2}$	+2.10	−2.04	+2.10	2.20	−2.14	+ 2.20	2.08	− 2.14
2	$\frac{1}{2}$	−1.60	−2.92	−0.50	1.28	+2.34	+ 0.40	4.26	+ 0.73
3	1	+1.28	−2.86	+9.20	1.64	−3.66	+11.77	8.16	−26.32
4	1	+1.28	−2.86	+4.50	1.64	−3.66	+ 5.75	8.16	−12.87
和					6.76	−7.12	+20.12	22.06	−40.60

法方程式

$$6.76dx-7.12dy+20.12=0,\ dx=-1.59\text{ 公寸},\ Q_{11}=1/4.46;$$

$$-7.12dy+22.06dy-40.60=0,\ dy=+1.33\text{ 公寸},\ Q_{22}=1/14.58.$$

$$(x)=3629615.12 \qquad (y)=224978.88$$

$$dx=\quad -0.16 \qquad dy=\quad +0.13$$

$$x=3629614.96; \qquad y=224979.01.$$

5. 中誤差計算:

号数	adx	bdy	$-l$	v	p	pvv	pll	β'	$\beta'+v$
1	−3.34	−2.71	+2.10	−3.95	$\frac{1}{2}$	7.79	2.21	31°10′07″.7	31°10′03″.7
2	+2.54	−3.88	−0.50	−1.84	$\frac{1}{2}$	1.70	0.12	67 10 01 .8	67 10 00 .0
3	−2.03	−3.80	+9.20	+3.17	1	10.01	84.64	46 16 58 .3	46 17 01 .5
4	−2.03	−3.80	+4.50	−1.33	1	1.76	20.25	133 54 08 .9	133 54 07 .6
和						21.26	107.22		

核算 $[pvv]=[pll]-[pal]dx-[pbl]dy=107.22-31.9-54.0=21.3.$

$$m=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-2}}=\pm 3''.25;$$

$$m_x=\pm 3.25\sqrt{Q_{11}}=\pm 1.54\text{ 公寸};$$

$$m_y=\pm 3.25\sqrt{Q_{22}}=\pm 0.85\text{ 公寸}。$$

6. 最后方位角 ν 之計算:

P_b P_a		x_b x_a x_b-x_a		y_b y_a y_b-y_a	$\log(x_b-x_a)$ $\log(y_b-y_a)$ $\log\tan\nu_a{}^b$	ν	β
大　坡 III 1 曾家山 II 10	 +	3629614.96 3624694.89 4920.07	 +	224979.01 219925.86 5053.15	3.6919713 3.7035622 9.9884091	 44°14′ 7″.8 13 04 04 .0	 31°10′03 .8
大　坡 III 1 宝華寺 II 11	 −	3629614.96 3635045.46 5430.50	 +	224979.01 222006.75 2972.26	3.7348398n 3.4730868 0.2617530n	 365 51 35 .2 298 41 35 .1	 67 10 0 .1
大　坡 III 1 大宝鼎 II 9	 −	3629614.96 3635625.49 6010.54	 −	224979.01 227658.47 2679.46	3.7789128n 3.4280473n 0.3508655	 292 15 24 .4 245 58 22 .8	 46 17 01 .6
						379 52 30 .3 245 58 22 .8	 133 54 07 .5

全1　大坡

$$x = 3629614.96 \pm 0.15\ 公尺;$$

$$y = \ 224979.01 \pm 0.09\ 公尺。$$

（二）方向观测:

用方向观測作前方交会定点时，在一已知点上必須观測其他已知点之方向，以便求得其至未知点之方向。如圖 9.6 之 P 点为未知点，在已知点 P_1 所作之方向观測須包括至已知点 $Q_1, Q_2, \cdots$ 之已知方向，始可推算 P_1P 之方向。今設以 α 为自已知点 P_1 至新点 P 經平差后应得之方向角值，α' 为自固定方向 $P_1Q_1, P_1Q_2, \cdots$ 等观測成果所推得之新点 P 之方向观測值，

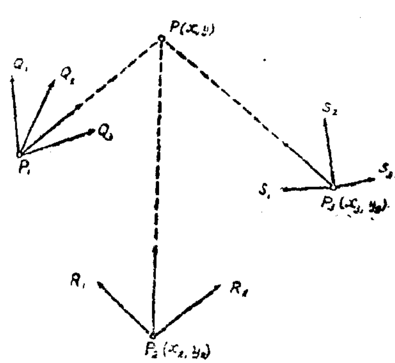

圖 9.6

α_0 为根据 P 点近似坐标所算得之近似方向角，則其誤差方程式为:

$$v=\alpha-\alpha'=\alpha_0+d\alpha-\alpha';$$

更自式(10)取其前方交会定点时之情形，得:

$$v=+\frac{\cos\alpha}{S}dx-\frac{\sin\alpha}{S}dy-(\alpha'-\alpha_0). \tag{17}$$

以 P_1 点之观測为例，則 v 代表 P_1P 方向观測值之改正数。但此方向观測值乃由多数固定方向計算而得，是以在一測站上所观測固定方向之多寡，足以决定其新点方向值 P_1P 之精粗。当新点 P 由各已知点 $P_1,P_2,P_3\cdots$ 等出發之方向綫前交时，倘在各站所观測固定方向数目不同，則其改正数 v 之权亦必各異，此权之計算方法可依其計算之公式推演之:

設在 P_1 点作一組之方向观測，得方向角值为 $\alpha'_{Q_1},\alpha'_{Q_2},\alpha'_P,\alpha'_{Q_3}$ 而其至各固定点 Q_1,Q_2,Q_3 已知之方向角設为 $\alpha_{Q_1},\alpha_{Q_2},\alpha_{Q_3}$，則其全組之定向值 z 应为:

$$z=\frac{(\alpha_{Q_1}-\alpha'_{Q_1})+(\alpha_{Q_2}-\alpha'_{Q_2})+(\alpha_{Q_3}-\alpha'_{Q_3})}{3};$$

或当固定方向之数目为 n 时，得:

$$z=\frac{[(\alpha_Q-\alpha'_Q)]}{n}. \tag{18}$$

是以自測站至新点之方向观測值应为:

$$\alpha'=\alpha'_p+z=\alpha'_p+\frac{[(\alpha_Q-\alpha'_Q)]}{n}=\frac{[\alpha_Q]}{n}+\alpha'_p-\frac{[\alpha'_Q]}{n}. \tag{19}$$

今命每一观測方向之权为 1，其中誤差为 m，因式(19)中之 α'_p 及各 α'_Q 均为独立观測值，故由此計算之 α' 值，其中誤差可按誤差傳播定律求之。

$$m^2_{\alpha'}=m^2+\frac{nm^2}{n^2}=\frac{n+1}{n}m^2,$$

是以 P_1P 方向 α' 之权为:

$$P_{a'} = \frac{n}{n+1}, \tag{20}$$

n 为在該測站所观測固定方向之数目：

式(20)代表某外方向在理論上应得之权值，实际上因交会定点法各点輾轉互求，本非基于嚴格之理論，故权之关系亦往往不作嚴格之假定，而时常假定其为相等：

例：应用方向观測按前方交会定点法測定新点 △2 五雲山之点位。各已知站点及在各站点所观測之方向綫示于圖 9.7，各观測值均

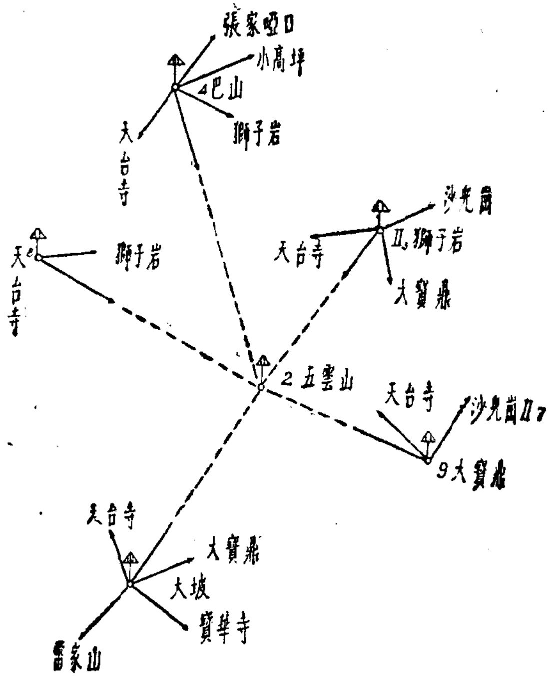

圖 9.7

取自前錄之成果表。各方向之权不因其固定方向之数目而加以区分，計算之步驟則与前例相做。今假定新点之近似坐标为：

$$(x)=3632116.72,$$
$$(y)=\ \ 228882.10.$$

由而求得之近似方位角刊于下表之 α_0 項。其余諸步驟表列如下：

方向系数及改正数方程式之常数值

号数	測 站	觀准点	u	v	S (公里)	α'	α_0	$-(\alpha'-\alpha_0)$
1	II 8天台寺	III2五云山	− 8.51	−18.78	5.21	114°22′34″.9	114°22′42″.7	+ 7.8
2	III1大 坡	”	+17.37	−11.13	4.64	32°39′26″.7	32°39′20″.6	− 6.1
3	II 9大宝鼎	”	+ 6.79	+19.47	3.72	289°13′39″.9	289°13′31″.6	− 8.3
4	III3獅子岩	”	−16.58	+12.26	3.30	216°28′23″.3	216°28′31″.7	+ 3.4
5	III4巴 山	”	−19.34	− 7.16	6.15	159°41′59″.0	159°42′09″.8	+10.8

改正数方程式法方程式及其解算

号数	P	$a=\dfrac{+u}{S}$	$b=\dfrac{+v}{S}$	$-l$	aa	ab	$-al$	bb	$-bl$
1	1	−1.60	−3.54	+ 7.80	2.56	+5.66	−12.48	12.53	−27.60
2	1	+3.75	−2.40	− 6.10	14.06	−9.00	−22.86	5.76	+14.64
3	1	+1.83	+5.24	− 8.30	3.35	+9.59	−15.19	27.50	−43.50
4	$\frac{1}{3}$*	−4.37	+3.23	+ 8.40	6.35	−4.70	−12.22	3.48	+ 9.03
5	1	−3.15	−1.16	+10.80	9.92	+3.65	−34.02	1.35	−12.53
和					36.24	+5.20	−96.77	50.62	−59.96

* 方向号数 4 观测所用仪器之权較其余方向观测所用仪器之权小三倍。

法方程式

$$36.24dx+\ 5.20dy-96.77=0,\quad dx=+2.54\text{ 公寸},\quad Q_{11}=1/35.7,$$
$$5.20dx+50.62dy-59.96=0,\quad dy=+0.92\text{ 公寸},\quad Q_{22}=1/49.8.$$

$$\begin{array}{rl} (x)=3632116.72 & \qquad (y)=228882.10 \\ dx=+\qquad 0.25 & \qquad dy=+\qquad 0.09 \\ \hline x=3632116.97; & \qquad y=228882.19. \end{array}$$

中誤差計算

号数	adx	bdy	-1	v	P	Pvv	Pll	a'			$a'+v$		
1	− 4.06	−3.27	+ 7.80	+0.47	1	0.22	60.8	114	22	34.9	114	22	35.4
2	+ 9.52	−2.22	− 6.10	+1.20	1	1.44	37.2	32	39	26.7	32	39	27.9
3	+ 4.64	+4.89	− 8.30	+1.23	1	1.52	68.9	289	13	39.9	389	13	41.1
4	−11.08	+2.98	+ 8.40	+0.30	$\frac{1}{3}$	0.03	23.5	216	28	23.3	216	28	23.6
5	− 7.99	−1.07	+10.80	+1.74	1	3.03	116.6	159	41	59.0	159	42	00.7
和						6.24	307.0						

核算 $[pvv]=[pll]-[pal]dx-(pbl)dy=307.0-245.4-55.4=6.2.$

$$m=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-2}}=\pm 1''.44;$$

$m_x=\pm 1.44\sqrt{Q_{11}}=\pm 0.24$ 公寸；$m_y=\pm 1.44\sqrt{Q_{22}}=\pm 0.21$ 公寸。

最后方向角 ν 之計算

P_b P_e		x_b x_e x_b-x_e		y_b y_e y_b-y_e	$\log(x_b-x_e)$ $\log(y_b-y_e)$ $\log\tan\nu_e{}^b$	ν
令 2 令 8 天台寺	+	3632116.97 3627282.28 4834.69	−	228882.19 231072.91 2190.72	3.6843686 3.3405869n 0.3437817n	114°22′35″.4
令 2 令 1 大　坡	+	3632116.97 3629615.25 2501.72	+	228882.19 224979.03 3903.16	3.3982387 3.5914164 9.8068223	32 39 27 .9
令 2 令 9 大宝鼎	−	3632116.97 3635625.49 3508.52	+	228882.19 227658.47 1223.72	3.5451240n 3.0876821 0.4574419n	289 13 40 .9
令 2 令 3 獅子岩	−	3632116.97 3634377.74 2260.77	−	228882.19 231940.43 3058.24	3.3542563n 3.4854716n 9.8687847	216 28 23 .7
令 2 令 4 巴　山	+	3632116.97 3629983.88 2133.09	−	228882.19 234648.76 5766.57	3.3290092 3.7609075n 9.5680917n	159 42 0 .9

全2 五云山

$x = 3632116.97 \pm 0.02$ 公尺；

$y = 228882.19 \pm 0.02$ 公尺。

第六節 后方交会定点法

后方交会定点法，系以未知点为测站向已知点观测方向或角度以定該点之位置。其观测之已知点至少須有三个，始能解算，倘观测三点以上时，即生平差問題。玆亦按角度与方向观测两情形分别論之：

(一) 角度观测：

用后方交会定点时，应用角度观测之实例甚少，其基本关系亦可由式(12)導出，盖此时既以未知点为观站测視二已知点，故式(12)内之 dx_1, dy_1, dx_2 及 dy_2 均应为零，因得

$$d\beta = \frac{-\cos\alpha_2}{S_2}dx + \frac{\sin\alpha_2}{S_2}dy + \frac{\cos\alpha_1}{S_1}dx - \frac{\sin\alpha_1}{S_1}dy; \tag{21}$$

仍以式(13)之意义代表 a_i, b_i 时，則式(21)可寫为：

$$d\beta = -(a_2 - a_1)dx - (b_2 - b_1)dy. \tag{22}$$

若以 β' 代表观测之角值，v 为其改正数，β_0 代表由近似坐标所算得之角值，則其改正数方程式应为：

$$\begin{aligned} v = \beta - \beta' &= (\beta_0 + d\beta) - \beta' = \\ &= -(a_2 - a_1)dx - (b_2 - b_1)dy - (\beta' - \beta_0). \end{aligned} \tag{23}$$

(二) 方向观测：

应用方向观测作后方交会定点为交会定点法中主要之一部。其改正数方程式可由式(10)導出，此时之观测自未知点达已知点，故式(10)中之 dx_1, dy_1 应为零，因得：

$$d\alpha = -\frac{\cos\alpha}{S}dx + \frac{\sin\alpha}{S}dy, \tag{24}$$

而其改正数方程式为：

$$v=\alpha-\alpha'=(\alpha_0+d\alpha)-\alpha'. \tag{25}$$

此时 α_0 为根据未知点近似坐标值所算得之方向值，α' 为观测之方向值，v 为其改正数。但在后方交会定点时，观测出發自未知点，無固定方向可資以定整个方向組之方向，故在平差計算时，須加定向值 z 为未知数。

今以 z_0 为定向值之近似值，以 dz 为其改正数，而以 r 代表观测成果中之方向值，則得：

$$\alpha'=r+z=r+(z_0+dz), \tag{26}$$

以式(24)及(26)代入式(25)得：

$$\left.\begin{aligned} v&=-dz-\frac{\cos\alpha}{S}dx+\frac{\sin\alpha}{S}dy-(r+z_0-\alpha_0),\\ \text{或}\quad v&=-dz+adx+bdy-l\cdots. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

此时之 a, b 系指普通改正数方程式之系数而言，与式(13)之所指者符号相反。

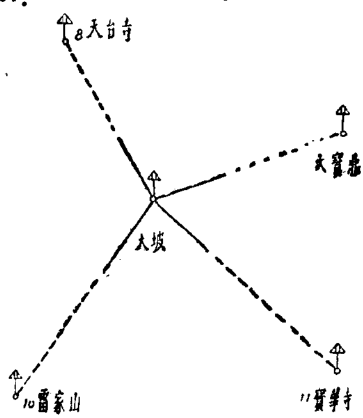

圖 9.8

定向值 z_0 可由式(27)常数項內之关系求之。今設观测之方向数为 n，則：

$$z_0=\frac{[\alpha_0-r]}{n} \tag{28}$$

相当于改正数之方程式(27)，其法方程式为：

$$\left.\begin{aligned} ndz-[a]dx-[b]dy+[l]&=0\cdots;\\ -[a]dz+[aa]dx+[ab]dy-[al]&=0\cdots;\\ -[b]dz+[ab]dx+[bb]dy-[bl]&=0\cdots. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

关于此項法方程式之解算已于第四章第十六節及第六章第四節論及，不再贅述。

例：用方向观测作后方交会定点，假定新点为 令1 大坡。观测方

向值 r 取自前列之成果表内观測方向一欄，其新点 令1 大坡之近似坐标及由此算得至 令9 大宝鼎，令10 雷家山 令11 宝華寺諸点之近似方位角 α，仍可利用第五節角度观測平差内所算得之諸值。以后諸計算步驟表列于下：

方向系数及改正数方程式之常数值

号数	测站	觀准点	u	v	S (公里)	r	α_0	α_0-r	$-(r+z_0-\alpha_0)$
1	III1	II 9	+8.40	−18.84	6.58	0° 0′ 0″.0	65°58′16″.9	65°58′16″.9	−3.6
2		II11	−9.90	−18.09	6.19	52°43′18″.4	118°41′33″.9	15″.5	−5.0
3		II10	−14.78	+14.39	7.05	158°15′54″.7	224°14′13″.8	19″.1	−1.4
4		II 8	+19.27	+7.38	6.53	273°04′39″.4	339°03′10″.0	30″.6	+10.1
							$z_0=65\ 58\ 20.5$		

改正数方程式法方程式及其解算

号数	p	$-\frac{u}{S}=a$	$-\frac{v}{S}=b$	$a-a_0=A$	$b-b_0=B$	$-L$	AA	AB	$-AL$	BB	$-BL$
1	1	−1.28	+2.87	−1.15	+2.21	−3.6	1.35	−2.54	+4.14	4.88	−7.95
2	1	+1.60	+2.92	+1.73	+2.26	−5.0	2.96	+3.91	−8.65	5.11	−11.30
3	1	+2.10	−2.04	+2.23	−2.70	−1.4	4.97	−6.02	−3.12	7.28	+3.78
4	1	−2.95	−1.13	−2.82	−1.79	+10.1	7.95	+5.05	−28.48	3.21	−18.08
和		−0.53	+2.62				17.20	+0.40	−36.11	20.48	−33.55

$a_0=-0.13;\quad b_0=+0.66.$

法方程式

$$17.20dx+0.40dy-36.11=0,\quad dx=+2.05,\quad Q_{11}=1/17.2;$$

$$0.40dx+20.48dy-33.55=0,\quad dy=+1.60,\quad Q_{22}=1/20.4.$$

$$(x)=3629615.12\qquad (y)=224978.88$$

$$dx=+\quad 0.20\qquad dy=+\quad 0.16$$

$$x=3629615.32;\qquad y=224979.04.$$

中誤差計算

$$dz = a_0 dx + b_0 dy = +1.33, \quad z = z_0 + dz = 65°58'21''.8.$$

号数	$-dz$	adx	bdy	$-l$	v	p	pvv	pll	r			$r+z+v$		
1	−1.33	−2.62	+4.59	− 3.6	−2.96	1	8.76	12.96	00	00	00.0	65	58	18.8
2	−1.33	+3.28	+4.67	− 5.0	+1.62	1	2.62	25.00	52	43	18.4	118	41	41.8
3	−1.33	+4.30	−3.26	− 1.4	−1.69	1	2.86	1.96	158	15	54.7	224	14	14.8
4	−1.33	−6.05	−1.81	+10.1	+0.91	1	0.83	102.01	273	04	39.4	339	03	02.1
							15.07	141.93						

核算: $[pvv]=[pll]-[pAL]dx-[pBL]dy=141.9-74.0-53.6$
$=14.3.$

$$m=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-3}}=\pm 3''.88;$$

$m_x=\pm 3.88\sqrt{Q_{11}}=\pm 0.94$ 公寸, $m_y=\pm 3.88\sqrt{Q_{22}}=\pm 0.86$ 公寸。

最后方向角 ν 之計算

p_b p_a		x_b x_a x_b-x_a		y_b y_a y_b-y_a	$\log(x_b-x_a)$ $\log(y_b-y_a)$ $\log+\tan\nu_a{}^b$	ν
仝II 9大宝鼎 仝III 1大 坡	 +	3632625.49 3629615.32 6010.17	 +	227658.47 224979.04 2679.43	3.7788867 3.4280425 0.3508442	 65°58′18″.9
仝II 11宝華寺 仝III 1大 坡	 +	3635045.46 3629615.32 5430.14	 −	222006.75 224979.04 2972.29	3.7348110 3.4730911n 0.2617199n	 118 41 41 .7
仝II 10晋家山 仝III 1大 坡	 −	3624694.89 3629615.32 4920.43	 −	219925.86 224979.04 5053.18	3.6920030n 3.7035648a 9.9884382n	 224 14 14 .7
仝II 8天台寺 仝III 1大 坡	 −	3627282.28 3629615.32 2333.04	 +	231072.91 224579.04 6093.87	3.3679222n 3.7848932 9.5830290n	 339 03 02 .3

令1 大坡

$x = 3629615.32 \pm 0.09$ 公尺;

$y = 224979.04 \pm 0.09$ 公尺。

第七節 联合交会定点法

前二節所論,自数已知点观测一未知点之方向,称之为前方交会定点法;自未知点观測数已知点之方向称之为后方交会定点法。如欲增進点位决定之精度,往往两者混用,是为联合交会定点法。平差时卽采前二節所演化之改正数方程式混合于一处,所有外方向綫之改正数方程式按式(17)为:

$$v = +\frac{\cos\alpha}{S}dx - \frac{\sin\alpha}{S}dy - (\alpha' - \alpha_0), \tag{30}$$

其权为:

$$P = \frac{n}{n+1}, \tag{31}$$

所有內方向綫之改正数方程式,按式(27)为:

$$v = -dz - \frac{\cos\alpha}{S}dx + \frac{\sin\alpha}{S}dy - (r + z_0 - a_0), \tag{32}$$

其权为1。但当同一方向綫自两端均曾观測时,則外方向之方向値 α 与內方向之方向値 α_1 有下列之关系:

$$\alpha = \alpha_1 + 180,$$

故:

$$\left.\begin{aligned} -\cos\alpha_1 &= +\cos\alpha; \\ +\sin\alpha_1 &= -\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

因此,相当于两端观測之改正数方程式,其 dx 与 dy 之系数相等,卽:

$$\left.\begin{aligned} v &= \phantom{-dz +{}} adx + bdy - l; \\ v_1 &= -dz + adx + bdy - l_1. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

例:应用联合交会法測定假設为新点令1大坡之点位(参考圖9.8)。此时內方位綫之观測值采用第六節例之所用者,外方位綫則包括

△9 大宝鼎 △11 宝華寺及 △10 雷家山三已知点之观测，其观测値取自第五節所列之成果表。参考式(34)之关系及第六節例內之改正数方程式，則由外方向綫所成之法方程式表列于下。又因此次观測之法規为每已知点測站之观測概以观測固定方向二个为原則，故当內外方向观測併列时，內方向观測之权如訂为 1，則外方向观測之权概訂为 2/3。

外方向之改正数方程式：

号数	测站	覘准点	a	b	a'	a_0	$-l=-(a'-a_0)$
1	II 9 大宝鼎	III 1 大坡	−1.28	+2.87	245°58′23″.7	245°58′16″.9	−6.8
2	II 11 宝華寺		+1.60	+2.92	298 41 33 .4	298 41 33 .9	+0.5
3	II 10 雷家山		+2.10	−2.04	44 14 11 .7	44 14 13 .8	+2.1

外方向之法方程式：

号数	aa	ab	$-al$	bb	$-bl$	
1	1.64	−3.67	+ 8.70	8.24	−19.52	$5.73dx-2.19dy+9.27=0$
2	2.56	+4.67	+ 0.80	8.52	+ 1.46	
3	4.41	−4.28	+ 4.41	4.16	− 4.28	$-2.19dx+13.94dy-14.88=0$
和	8.61	−3.28	+13.91	20.92	−22.34	
⅔和	5.73	−2.19	+ 9.27	13.94	−14.88	

自第六節例中所得內方向观測之法方程式为：

$$\left.\begin{aligned}17.20dx+0.40dy-36.11=0;\\0.40dx+20.48dy-33.55=0.\end{aligned}\right\}$$

內外之法方程式合併得联合交会法之法方程式为：

$$\left.\begin{aligned}22.93dx-1.79dy-26.84=0;\\-1.79dx+34.42dy-48.43=0.\end{aligned}\right\}$$

解化之得：

$$dx=+1.29\text{ 公寸},\qquad dy=+1.47\text{ 公寸},$$

$$Q_{11}=1/22.84,\qquad Q_{22}=1/34.26.$$

下表列中誤差之計算：

号数	$-dz$	adx	bdy	$-l$	v	p	pvv	pll	a' r	$a'+v$ $r+z+v$
外方向										
1		−1.65	+4.22	− 6.8	−4.23	⅔	11.94	30.82	245°58′23″.7	245°58′19″.5
2		+2.06	+4.29	+ 0.5	+6.85	⅔	30.80	0.17	298 41 33 .4	298 41 40 .2
3		+2.71	−3.00	+ 2.1	+1.81	⅔	2.19	2.93	44 14 11 .7	44 14 13 .5
內方向 $dz=a_0dx+b_0dy=+0''.80$ $z=z_0+dz=65°58'21''.3$										
4	−0.80	−1.65	+4.22	− 3.6	−1.83	1	3.35	12.96	0° 0′ 0″.0	65°58′19″.5
5	−0.80	+2.06	+4.29	− 5.0	+0.55	1	0.30	25.00	52 43 18 .4	118 41 40 .3
6	−0.80	+2.71	−3.00	− 1.4	−2.49	1	6.20	1.96	158 15 54 .7	224 14 13 .4
7	−0.80	−3.81	−1.66	+10.1	+3.83	1	14.68	102.01	273 04 39 .4	339 03 04 .5
和							69.46	175.85		

核算：$[pvv]=[pll]-[pAL]dx-[pBL]dy=175.8-34.6-71.2=70.0.$

$$m=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-3}}=\pm 4''.17;$$

$m_x=\pm 4.17\sqrt{Q_{11}}=\pm 0.87$ 公寸； $m_y=\pm 4.17\sqrt{Q_{22}}=\pm 0.71$ 公寸。

最后方向角 ν 之計算

P_b P_a		x_b x_a x_b-x_a		y_b y_a y_b-y_a	$\log(x_b-x_a)$ $\log(y_b-y_a)$ $\log\tan\nu_a{}^b$	ν
II 9 III 1	 +	3635625.49 3629615.25 6010.24	 +	227658.47 224979.03 2679.44	3.7788918 3.4280441 0.3508477	 65°58′19″.5
II 11 III 1	 +	3635045.46 3629615.25 5430.21	 −	222006.75 224979.03 2972.28	3.7348166 3.4730897n 0.2617269n	 118 41 40 .3
II 10 III 1	 −	3624694.89 3629615.25 4920.36	 −	219925.86 224979.03 5053.17	3.6919969n 3.7035639n 9.9884330	 224 14 13 .5
II 8 III 1	 −	3627282.28 3629615.25 2332.97	 +	231072.91 224979.03 6093.88	3.3679091n 3.7848939 9.5830152n	 339 03 04 .5

令1 大坡

$x = 3629615.25 \pm 0.09$ 公尺;

$y = 224979.03 \pm 0.07$ 公尺。

第八節 双点交会定点法

交会法不僅可以决定一点之位置,亦可同时决定多点之位置。但点数愈多,則其所解之法方程式亦愈多,計算工作亦愈繁,而漸成为網狀交会。在小三角点之交会中,最常应用者厥为双点定点法。当逐点交会定点之时,先求得之点,即視为固定点,以求其次之新点。因此先定之各点其交会圖形必須較強,俾使其点之誤差減小而不致傳播至以后所求之点位。今設有二新点相隣,其各别与諸已知点之交会圖形均不甚佳而須仰賴相互間之方向时,則宜用双点定位法,使其点位之决定加強。

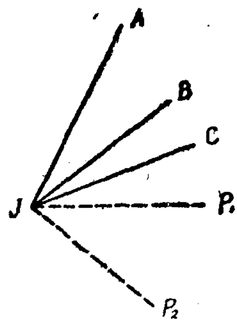

圖 9.9

在双点交会定点时,自已知点上所測外方向綫之改正数方程式不似單点定位时之簡單[比較第五節之(17)与(20)两式]。圖 9.9 示此种情形,J 为一已知点,以 J 为測站观測 ABC 三个已知方向得 r_A, r_B, r_C,观測 P_1, P_2 两未知点之方向得 r_1, r_2,如以 JA, JB, JC 三固定方向之方向角 $\alpha_A, \alpha_B, \alpha_C$ 求全組方向之初步定向值 z_0,可得:

$$z_0 = \frac{1}{3}\{(\alpha_A - r_A) + (\alpha_B - r_B) + (\alpha_C - r_C)\}. \tag{35}$$

此时各观測方向之改正数方程式应作下列形式:

$$\left.\begin{aligned}
v_A &= -dz & &-l_A;\\
v_B &= -dz & &-l_B;\\
v_C &= -dz & &-l_C;\\
v_1 &= -dz + a_1dx_1 + b_1dy_1 & &-l_1;\\
v_2 &= -dz & + a_2dx_2 + b_2dy_2 &-l_2.
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

式中之 dz 为 z_0 应得之改正数，各 l 項为：

$$\left.\begin{aligned} &l_A = r_A + z_0 - \alpha_A, \quad l_B = r_B + z_0 - \alpha_B, \\ &l_C = r_C + z_0 - \alpha_C, \quad l_1 = r_1 + z_0 - \alpha_1, \\ &l_2 = r_2 + z_0 - \alpha_2, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

此种改正数方程式可用第四章第十八節所論之史賴伯約化法將未知数 dz 消去，而以其和方程式为一虛擬改正数方程式，于是得：

$$\left.\begin{aligned} &v_1 = a_1dx_1 + b_1dy_1 \qquad\qquad\qquad\quad - l_1, \text{ 权 } \quad 1; \\ &v_2 = \qquad\qquad\qquad a_2dx_2 + b_2dy_2 - l_2, \text{ 权 } \quad 1; \\ &v' = a_1dx_1 + b_1dy_1 + a_2dx_2 + b_2dy_2 - [l], \text{ 权 } -\frac{1}{s}. \end{aligned}\right\} \tag{36}^*$$

虛拟改正数方程式中之 $[l]$，因由(35)及(37)之关系知 $l_A + l_B + l_C = 0$，故：

$$[l] = l_1 + l_2.$$

又权 $-\frac{1}{s}$ 中之 s 为在該測站观測方向之总数，在此处如以 n 代表固定方向之数目，則此总数可書以 $n+2$，因新点方向共有两个也。

若新点方向僅有一个，則相当于(36)* 之改正数方程式为：

$$v_1 = a_1dx_1 + b_1dy_1 - l_1, \quad \text{权：} \quad 1;$$

$$v' = a_1dx_1 + b_1dy_1 - l_1, \quad \text{权：} \quad -\frac{1}{n+1}.$$

此两方程式之右端完全相同，故可合而为一：

$$v_1 = a_1dx_1 + b_1dy_1 - l_1, \quad \text{权：} \ 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}, \tag{38}$$

与第五節之(17)，(20)两式固相同也。

式(36)为理論上嚴格之方法，但对于普通之应用，有时不必需，亦可逕將 v_1, v_2 均用式(38)之方法列出：

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1dx_1+b_1dy_1 \qquad\qquad\qquad -l_1, \quad \text{权：}\frac{n}{n+1}; \\ v_2 &= \qquad\qquad\qquad a_2dx_2+b_2dy_2-l_2, \quad \text{权：}\frac{n}{n+1}. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

甚或有时其权值 $\frac{n}{n+1}$ 亦不用嚴格値，而一概命之为 $\frac{1}{2}$，盖假定固定方向数为 r 之情形也。此种簡略方法对于平差之結果影响固極小，而計算工作則因此減少甚多。

在双点定位时，內方向之改正数方程式与后方交会定点法無異，惟除自已知点至已知点之方向外，此时倘有两未知点間之方向，其改正数方程式亦可由第三節之普遍公式(10)中推得，当圖 9.3 中 P 及 P_1 均为未知点时，自 P_1 观測 P 之方向改正与坐标变遷之关系为：

$$d\alpha_1=\frac{\cos\alpha_1}{S_1}dx_1-\frac{\sin\alpha_1}{S_1}dy_1-\frac{\cos\alpha}{S}dx+\frac{\sin\alpha}{S}dy. \tag{40}$$

反向观測自 P 測視 P_1 时，以同理得：

$$d\alpha=\frac{\cos\alpha}{S}dx-\frac{\sin\alpha}{S}dy-\frac{\cos\alpha_1}{S_1}dx_1+\frac{\sin\alpha_1}{S_1}dy_1. \tag{41}$$

但上二式之方向角 α 与 α_1 之間相差適为 180°，自上節式(32)之关系，設自 P_1 点观測之改正数方程式为：

$$v_1=-dz_1+adx_1+bdy_1+cdx+ddy-l_1 \tag{42}$$

时，則自 P 点观測之改正数方程式应为：

$$v=-dz+adx_1+bdy_1+cdx+ddy-l, \tag{43}$$

卽二誤差方程式除其定向值及常数項外完全相同也。

例：应用双点定位法由宝華寺、歌乐山、小啞口、雷家山及大坡等五已知点測求丰文山及中雲寺二未知点之点位。各方向观測值取自第五節之成果表。二新点之近似坐标設求得为：

		x	y
III 7	丰文山	3628601.43,	218827.71;
III 8	中云寺	3630391.90,	213630.30.

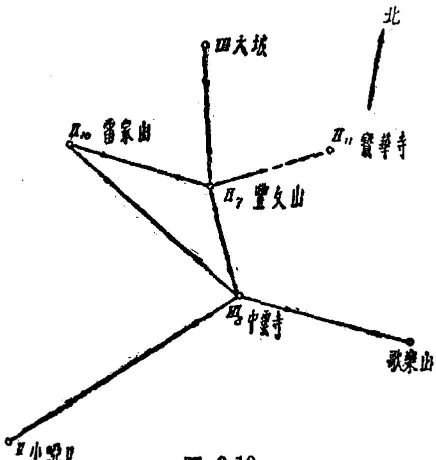

圖 9.10

由此而求得各方向綫之近似方向角及距离表列如下:

$P_a \to P_b$	$\nu_a{}^b$	S
II 10 → III 7	105° 42′ 03″.5	4.06
II 11 → III 7	243° 44′ 29″.2	7.18
III 1 → III 7	189° 21′ 32″.3	6.23
III 8 → III 7	340° 55′ 29″.5	5.50
II 10 → III 8	137° 51′ 26″.1	8.49
II 12 → III 8	52° 45′ 53″.1	11.70
II 13 → III 8	283° 21′ 34″.8	7.45

下表列其方向系数及改正数方程式之常数值:

外方向之权取 2/3, 内方向之权取 1, 盖按此次观測法規, 已知点固定方向概以取二个方向为准則也。又以观测时所用仪器不同, 在 III 1 大坡点之观测系用威特 T 3 号經緯仪, 其余系用威特 T 2 号經緯仪, 故

号数	测站	觇准点	u		v		S (公里)	a' r			a_0 a_0			a_0-r			$-(a'-a)$ $-(r+z_0-a_0)$	
								外方向										
1	II 10	III 7	−	5.58	−	19.86	4.06	105°	42′	03″.3	105°	42′	03″.5				+	0″.2
2	III 1	III 7	−	20.35	+	3.36	6.23	189	21	40.2	189	21	32.3				−	7.9
3	II 12	III 8	+	12.48	−	16.43	11.70	52	45	51.1	52	45	53.1				+	2.0
4	II 13	III 8	+	4.77	+	20.07	7.45	283	21	29.5	283	21	34.8				+	5.3
5	II 10	III 8	−	15.28	−	13.85	8.49	137	51	26.0	137	51	26.1				+	0.1
								内方向										
6	III 7	II 10	+	5.58	+	19.86	4.06	00	00	00.0	285	42	03.5	285	42	03.5	−	2.9
7	III 7	III 1	+	20.35	−	3.36	6.23	83	39	30.0	9	21	32.3			02.3	−	4.1
8	III 7	II 11	+	9.13	−	18.50	7.18	138	02	22.4	63	44	29.2			06.8	+	0.4
9	III 7	III 8	−	19.50	−	6.72	5.00	235	17	16.4	160	59	29.5			13.1	+	6.7
													(z_7)	285	42	06.4		
10	III 8	II 12	−	12.48	+	16.43	11.70	25	02	02.7	232	45	53.1	207	43	50.4	−	1.0
11	III 8	II 10	+	15.28	+	13.85	8.49	110	07	42.4	317	51	26.1			43.7	−	7.7
12	III 8	III 7	+	19.50	+	6.72	5.50	133	15	33.1	340	59	29.5			56.4	+	5.0
13	III 8	II 13	−	4.77	−	20.07	7.45	255	37	39.9	103	21	34.8			54.9	+	3.5
													(z_8)	207	43	51.4		

由二种仪器精度之不同，复給与 1 : 1/2 权之比例。下表列其改正数方程式之各項系数，各新点观测之定向角系用史賴伯負权法以銷除之。

号数	$a=\frac{\pm u^*}{S}$	$b=\frac{\pm v}{S}$	$c=\frac{\pm u}{S}$	$d=\frac{\pm v}{S}$	$-l$	S	p
1	−1.37	−4.89			+0.2	− 6.06	⅓
2	−3.26	+0.54			−7.9	−10.62	⅔
3			+1.07	−1.40	+2.0	+ 1.67	⅓
4			+0.65	+2.77	+5.3	+ 8.72	⅓
5			−1.81	−1.63	−0.1	− 3.34	⅓
6	−1.37	−4.89			−2.9	− 9.16	½
7	−3.26	+0.54			−4.1	− 6.82	½
8	−1.27	+2.58			+0.4	+ 1.71	½
9	+3.55	+1.22	−3.55	−1.22	+6.7	+ 6.70	½
1′	−1.18	−0.28	−1.78	−0.61	+0.05	− 3.80	−½
10			+1.07	−1.40	−1.0	− 1.33	½
11			−1.81	−1.63	−7.7	−11.14	½
12	+3.55	+1.22	−3.55	−1.22	+5.0	+ 5.00	½
13			+0.65	+2.77	+3.5	+ 6.92	½
2′	+1.78	+0.61	−1.82	−0.74	−0.1	− 0.27	−½

* 外方向用“+”号，内方个用“−”号，但对第二新点之系数則反是。

因得法方程式为：

$$\left.\begin{aligned}
+25.15dx_a+5.55dy_a-12.06dx_b-4.03dy_b+46.38&=0,\\
+24.85dy_a-4.01dx_b-1.34dy_b+10.49&=0,\\
+13.40dx_b+5.80dy_b-11.46&=0,\\
+11.23dy_b+8.59&=0,\\
+136.22&=0.
\end{aligned}\right\}$$

解算之得:

$dx_a=-2.41$ 公寸, $dy_a=-0.08$ 公寸, $dx_b=-0.81$ 公寸, $dy_b=-1.22$ 公寸,

$Q_{11}=0.206,\quad Q_{22}=0.268,\quad Q_{33}=0.341,\quad Q_{44}=0.404,$

$$dz_a=+2.54,\qquad dz_b=-1.02.$$

下表列其中誤差之計算:

号数	$-dz_a$ $-dz_b$	adx_a	bdy_a	cdx_b	ddy_b	-1	v	pvv	a' r			$a+v$ $r+z_a$, $b+v$		
1		+3.30	+0.39			+0.20	+3.89	5.04	105°	42′	33″.3			07.2
2		+7.80	−0.04			−7.90	−0.03	0.00	189	21	40.2			40.1
								5.04						
3				−0.87	+1.71	+2.0	+2.84	2.69	52	45	51.1			53.9
4				−0.53	−3.38	+5.3	+1.39	0.64	283	21	29.5			30.9
5				+1.46	+1.99	+0.1	+3.55	4.20	137	51	26.0			29.6
								7.53						
6	−2.54	+3.30	+0.39			−2.9	−1.75	1.53	00	00	00.0	285	42	07.1
7	−2.54	+7.86	−0.04			+4.1	+1.18	0.69	83	39	30.0	29	21	40.1
8	−2.54	+3.06	−0.21			+0.4	+0.71	0.25	138	02	22.4	63	44	32.0
9	−2.54	−8.56	−0.10	+0.87	+1.49	+6.7	−0.14	0.01	235	17	16.4	160	59	25.2
								2.48						
$z_a=z_0+dz_a=285°42'06''.4+2.5=285°42'8''.9$														
10	+1.02			−0.87	+1.71	−1.0	+0.86	0.37	25	02	2.7	232	45	54.0
11	+1.02			+1.46	+1.99	−7.7	−3.23	5.21	110	07	42.4	317	51	29.6
12	+1.02	−8.56	−0.10	+2.87	+1.49	+5.0	+1.72	1.48	133	15	33.1	340	59	25.2
13	+1.02			−0.53	−3.38	+3.5	+0.61	0.19	255	37	30.9	103	21	30.9
								7.25						
$z_b=z_0+dz_b=207°43'51''.4-1.0=207°43'50''.4$														

$$[pvv]=5.04+2.48+7.53+7.25=22.30,$$

$$m=\sqrt{\frac{[pvv]}{n-6}}=\pm 1''.79.$$

下表列最后距离及方向角之計算:

$\uparrow P_b$ / P_a		x_b / x_a / $\Delta x=x_b-x_a$		y_b / y_a / $\Delta y=y_b-y_a$	log Δx / log Δy / log tan $\nu_a{}^b$ / $\nu_a{}^b$
仝 II 10 仝 III 7	−	3624694.89 3628601.19 3906.30	+	219925.86 218827.70 1098.16	3.5917656n 3.0406656 0.5511000n 285° 42′ 07″.2
仝 II 1 仝 III 7	+	3629615.25 3628601.19 1014.06	+	224979.03 218827.70 6151.33	3.0060637 3.7889690 9.2170947 9° 21′ 40″.1
仝 II 11 仝 III 7	+	3635045.46 3628601.19 6444.27	+	222006.75 218827.70 3179.05	3.8091736 3.5022973 0.3068763 63° 44′ 32″.0
仝 III 8 仝 III 7	+	3630391.82 3628601.19 1790.63	−	213630.18 218827.70 5197.52	3.2530059 3.7157962n 9.5372097n 160° 59′ 25″.2
仝 II 12 仝 III 8	−	3621079.88 3630391.82 9311.94	−	206553.06 213630.18 7077.12	3.9690402n 3.8498565n 0,1191837 237° 45′ 54″.0
仝 II 13 仝 III 8	+	3637643.67 3630391.82 7251.85	−	211908.08 216330.18 1722.10	3.8604488 3.2360584n 0.6243904 103° 21′ 31″.0
仝 II 10 仝 III 8	−	3624694.89 3630391.82 5696.93	+	219925.86 213630.18 6295.68	3.7556409n 3.7990426 9.9565983n 317° 51′ 29″.5

双点交会定点法之結果为:

$$
\begin{array}{ll}
\text{令7　丰文山} & \text{令8　中云寺} \\
x=3628601.19\pm0.05, & x=3630391.82\pm0.07, \\
y=\ \ 218827.70\pm0.04; & y=\ \ 213630.18\pm0.06.
\end{array}
$$

第九節　網狀交会定点法

同时用交会方法决定之点数增多时即为多点交会定位，或称为網狀交会，其改正数方程式之排列，与双点交会定点情形完全相同，計包括自已知点至未知点，自未知点至已知点，及自未知点至未知点之三种情形。其未知数之数目除各測站之定向值 z 可于列出方程式之前消去外，尙有点之縱横坐标値，共为新点数目之两倍。当新点数目甚多时，則是否以改用条件平差方法計算，較为便捷，应比較其所須解算法方程式数目之多寡而定。

玆試举前中國地理研究所在四川北碚附近三角測量之例以說明之。自灯山、雞公山与沙兒崗三个二等点(固定点)用交会法測定圖 9.11 之各三等点。此網如依条件平差法計算，則其条件数目应为:

角度条件:

$(S-l')-(P-P')+1=13-\ 8+1=\ 6,$

边長条件: $l-2P+3=15-16+3=\ 2,$

強制附合: $=\ 2,$

共　10.

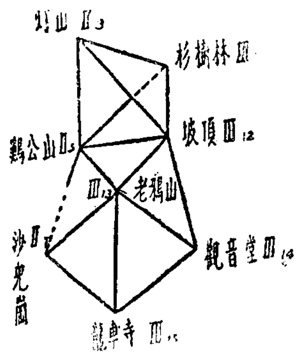

圖 9.11

此圖形計包括未知点五个，故如依多点交会方法以坐标值为未知数平差时，未知数共为 10 个，数目与前者適相等。

玆依多点交会法計算，首列其方向观測値如下，其中所有內方向之

权均为 1，外方向之权均設为 2/3。

測站 II 3

III 11　0°　0′　0″.0
III 12　41° 45′ 17″.2
II 5　78° 55′ 13″.3

測站 II 5

II 3　70° 40′ 21″.4
III 11　105° 52′ 21″.5
III 12　129° 13′ 04″.6
III 13　225° 10′ 58″.3
II 7　270° 49′ 24″.6

測站 II 7

III 13　0° 00′　0″.0
III 15　110° 22′ 24″.0
II 6*　276° 20′ 02″.2

*II 6 系另外已知点，未列于圖。

測站 III 11

III 12　72° 45′ 12″.1
II 3　163° 33′ 36″.2

測站 III 12

III 11　0° 00′ 00″.0
III 14　164° 31′ 18″.9
III 13　195° 25′ 52″.4
II 5　228° 16′ 01″.0
II 3　312° 33′ 19″.3

測站 III 13

II 5　0°　0′ 00″.0
III 12　51° 12′ 07″.1
III 14　148° 02′ 45″.2
III 15　226° 34′ 18″.7
II 7　254° 33′ 05″.1

測站 III 14

III 13　0° 00′ 00″.0
III 12　52° 14′ 13″.9
III 15　290° 47′ 19″.2

測站 III 15

II 7　0° 00′ 00″.0
III 13　41° 38′ 47″.7
III 14　73° 54′ 55″.2

其已知点之坐标及諸新点之近似坐标值各为：

已知点：

点名	坐标值 x	坐标值 y
II 3　灯　山	3639508.94	243964.16
II 5　雞公山	3639525.70	238422.90
II 7　沙兒崗	3637931.31	234036.88

新点:

点名	近似坐标値 (x)	近似坐标値 (y)	改正値
III 11 杉樹林	36 42 945.44	2 43 301.96	dx_1dy_1
III 12 坡　头	36 42 390.34	2 40 187.13	dx_2dy_2
III 13 老鵝山	36 40 539.40	2 36 313.39	dx_3dy_3
III 14 观音堂	36 42 859.59	2 34 819.97	dx_4dy_4
III 15 龍济寺	36 38 796.82	2 31 750.88	dx_5dy_5

今取新点 III 12 坡頂之观测为例，演化其計算过程为:

誤差方程式之常数項:

号数	測站	視准点	v	u	S	r	α_0	α_0-r	$-(r_0+z_0-\alpha_0)$
1	III12	II 3	+16.40	+12.51	4.75	312°33′19″.3	322°35′39″.3	10°06′20″.0	+ 2″.20
2		II 5	−10.82	+17.57	3.36	228°16′01″.0	238°22′21″.2	20″.2	+ 2″.40
3		III11	+20.30	− 3.62	3.16	00°00′00″.0	10°06′19″.0	19″.0	+ 1″.20
4		III13	−18.61	+ 8.89	4.29	195°25′52″.4	205°32′21″.4	29″.0	+11″.20
5		III14	−20.54	− 1.94	5.39	164°31′18″.9	174°37′19″.8	00″.9	−16″.90

$z_0=10°\ 06'\ 17''.8.$

誤差方程式:

号数	dx_1	dy_1	dx_2	dy_2	dx_3	dy_3	dx_4	dy_4	$-l$	S	p
1			−3.46	−2.63					+ 2.20	+ 3.89	1
2			+3.22	−5.22					+ 2.40	− 0.40	1
3	+6.42	−1.14	−6.42	+1.14					+ 1.20	− 1.20	1
4			+4.33	−2.07	−4.33	+2.07			+11.20	−11.20	1
5			+3.81	+0.36			−3.81	−0.36	−16.90	+16.90	1
1′	+6.42	−1.14	+1.48	−8.42	−4.33	+2.07	−3.81	−0.36	+ 0.10	+ 7.99	$-\frac{1}{5}$

所組成之法方程式为:

dx_1	dy_1	dx_2	dy_2	dx_3	dy_3	dx_4	dy_4	$-l$	S
+32.98	− 5.86	−43.12	+18.13	+ 5.56	− 2.66	+ 4.89	+ 0.46	+ 7.57	−17.96
	+ 1.04	+ 7.66	− 3.22	− 0.99	+ 0.47	− 0.87	− 0.08	− 1.35	+ 3.19
		+96.39	−20.09	−17.46	+ 8.35	−13.40	− 1.27	−23.50	+ 6.47
			+25.70	+ 1.64	− 0.83	− 7.77	− 0.73	−46.04	+33.20
				+15.00	− 7.16	− 3.29	− 0.30	−48.41	+55.42
					+ 3.43	+ 1.57	+ 0.14	+23.14	−26.48
						+11.62	+ 1.10	+64.47	−58.30
							+ 0.10	+ 6.09	− 5.50

总列所有各测站观测所得之法方程式，总和之卽为所求之法方程式。兹僅列其居首之四項如下：

測　　站	dx_1	dy_1	dx_2	dy_2
II 3 灯 山	+ 0.83	+ 4.32 +22.35	…… …… + 7.98	…… …… + 6.07 + 4.61
II 5 雞公山	+ 5.38	− 3.77 + 2.64	…… …… + 6.91	…… …… −11.21 +18.17
II 7 沙兒崗	……	……	……	……
III 11 杉樹林	+28.43	+17.52 +10.81	−24.21 −14.92 +20.61	+ 4.30 + 2.65 − 3.66 + 0.65
III 12 坡 頂	+32.98	− 5.86 + 1.04	−43.18 + 7.66 +96.39	+18.13 − 3.22 −20.09 +25.70
III 13 老鴉山			+15.00	− 7.17 + 3.42
III 14 观音堂			+ 9.68	+ 0.91 + 0.09
III 15 龍車寺	……	……	……	……
总　　和	+67.62	+12.21 +36.84	− 67.33 − 7.26 +156.57	+22.43 − 0.57 −35.15 +52.64

解算之得：

$$dx_1 = -0.33,\quad dx_2 = -0.44,\quad dx_3 = +0.37,\quad dx_4 = +4.74,\quad dx_5 = +0.27,$$
$$dy_1 = +0.56;\quad dy_2 = +0.27;\quad dy_3 = -2.06;\quad dy_2 = -1.56;\quad dy_5 = +4.20.$$

从而求得之点位坐标值及其中误差各为：

点		x	y
III 11	杉樹林	36 42 945.44±0.07,	2 43 302.02±0.06;
III 12	坡 頂	36 42 390.30±0.05,	2 40 187.16±0.06;
III 13	老鴉山	36 40 539.44±0.03,	2 36 313.18±0.05;
III 14	观音堂	36 42 895.12±0.09,	2 34 819.81±0.08;
III 15	龍車寺	36 38 796.85±0.06,	2 31 751.30±0.11.

第十節 有距离条件之交会定点法

在双点定位或多点定位之时，有时二新点間之距离为已知，或其点間之距离甚近，極易直接量測而得，則此时交会定点法之計算內須附有此固定距离之条件。此条件可即在計算新点之近似坐标时顧及之。其法：先求一未知点坐标之近似值，然后依二点間量得之距离及二点間近似之方向角計算第二点之坐标近似值。

設圖 9.12 中 P_1, P_2 为二未知点，其間之固定距离为 S，而其坐标設各为 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2)，(P_1) 与 (P_2) 为其近似坐标所决定之点位，其坐标設各为 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2)。今命 dx, dy, dx_2, dy_2 为其近似坐标之改正数，則得：

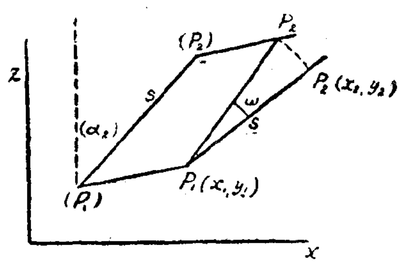

圖 9.12

$$\left.\begin{aligned}(y_1) + dy_1 &= y_1,\\ (y_2) + dy_2 &= y_2,\\ (x_1) + dx_1 &= x_1,\\ (x_2) + dx_2 &= x_2.\end{aligned}\right\}\qquad(44)$$

按圖 9.12 依 (P_1)，(P_2)，P_1 点構成平行四边形得 P_2' 点，由式 (44) 得：

$$
\left.\begin{aligned}
dx_2-dx_1&=(x_2-x_1)-[(x_2)-(x_1)]=(x_2-x_1)-(x_{P'_2}-x_1)=\\
&=x_2-x_{P'_2}=+S\frac{w}{\rho}\cos(\alpha_{12}),\\
dy_2-dy_1&=(y_2-y_1)-[(y_2)-(y_1)]=(y_2-y_1)-(y_{P'_2}-y_1)=\\
&=y_2-y_{P'_2}=-S\frac{w}{\rho}\sin(\alpha_{12}).
\end{aligned}\right\}\quad(45)
$$

w 为近似方向角(α_{12})在平差后所求得之改正数。由圖 9.12 又知

$$S\sin(\alpha_{12})=(x_2)-(x_1),\quad S\cos(\alpha_{12})=(y_2)-(y_1),$$

故式 (45) 可化为:

$$
\left.\begin{aligned}
dx_2&=dx_1+\frac{w}{\rho}[(y_2)-(y_1)],\\
dy_2&=dy_1-\frac{w}{\rho}[(x_2)-(x_1)].
\end{aligned}\right\}\quad(46)
$$

式(46)代表保持 P_1, P_2 点距离之条件,由此二方程式可以使二坐标未知数 dx_2, dy_2 在改正数方程式中消除,但同时增加未知数 w 一項。

平差时先將各內外方向綫之改正数方程式,按前数節所述之方法列出,然后用式(46)之关系,消去一未知数之两坐标未知数,两未知点 P_1, P_2 間之方向改正数方程式將更为簡單。玆仍用以前習用之符号以有括弧者代表其近似值,演化如下:

$$
\left.\begin{aligned}
v_1&=\alpha_1-\alpha'=[(\alpha_1)+w]-[r_1+(z_1)+dz_1]=\\
&=-dz_1+w-[r_1+(z_1)-(\alpha_1)]=-dz_1+w-l_1;\\
\text{同理}\quad v_2&=\alpha_2-\alpha'=-dz_2+w-[r_2+(z_2)-(\alpha_2)]=\\
&=-dz_2+w-l_2.
\end{aligned}\right\}\quad(45)^*
$$

故在此二式中,坐标未知数已全不存在,关系更較簡單矣。

計算中誤差时,須注意法方程式中之未知数虽僅有三个,而实际之未知数則有五个,包括 dx_1, dy_1, dx_2, dy_2 及 w, 故权單位中誤差之計算公式应为:

$$m=\sqrt{\frac{[vv]}{n-5}},\tag{46)*$$

坐标 x_1, y_1 及 w 之中誤差，仍可由法方程式解算所得之权系数求出，惟 x_2 与 y_2 因为直接解算諸未知数之函数：

$$dx_2=dx_1+pw,\qquad dy_2=dy_1+qw,\tag{47}$$

故須依未知数函数之中誤差公式求其中誤差。其公式为：

$$F=f_1dx_1+f_2dy_1+f_3dw.\tag{48}$$

求 x_2 之权时，按式(46) f_1 为 1，f_2 为零，而 f_3 为 $+\frac{(y_2)-(y_1)}{\rho}$；求 y_2 之权时，则 f_1 为零，f_2 为 1，而 f_3 为 $-\frac{(x_2)-(x_1)}{\rho}$ 也。

第十一節　誤差橢圓

由平差計算直接求得之坐标中誤差 m_x, m_y，僅能代表該点在縱横两坐标軸方向之精度。其值随所选坐标軸之方向而異；故不足以作普遍点位誤差之代表。今泛言点位之中誤差为：

$$M=\sqrt{m_x^2+m_y^2},\tag{49}$$

则此 M 值与坐标軸之方向無关，但仍缺乏实际之意义，因其不能代表某任何方向之点位中誤差，且亦非各方向中誤差之平均值也。欲定一点在不同方向之中誤差，宜利用誤差橢圓以求之。玆將其理論及計算方法分为單点定位、双点定位及普遍情形三种論述之。

(一) 單点定位

單点定位时之改正数方程式为：

$$\left.\begin{aligned}v_1&=-l_1+a_1x+b_1y,\\v_2&=-l_2+a_2x+b_2y,\\v_3&=-l_3+a_3x+b_3y,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot\end{aligned}\right\}\tag{50}$$

相当之法方程式为:

$$\begin{aligned}&[aa]x+[ab]y-[al]=0,\\&[ab]x+[bb]y-[bl]=0.\end{aligned}\tag{51}$$

由此求得該点在縱橫坐标軸方向之中誤差为:

$$\left.\begin{aligned}m_x^2&=\frac{\begin{vmatrix}1&[ab]\\0&[bb]\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}[aa]&[ab]\\[ab]&[bb]\end{vmatrix}}m^2=\frac{[bb]}{[aa][bb]-[ab]^2}m^2=\frac{[bb]}{D}m^2;\\m_y^2&=\frac{\begin{vmatrix}[aa]&0\\[ab]&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}[aa]&[ab]\\[ab]&[bb]\end{vmatrix}}m^2=\frac{[aa]}{[aa][bb]-[ab]^2}m^2=\frac{[aa]}{D}m^2.\end{aligned}\right\}\tag{52}$$

其中 m 为权單位之中誤差,而

$$a=+\frac{\rho}{S}\cos\alpha,\qquad b=-\frac{\rho}{S}\sin\alpha,\tag{53}$$

$$D=[aa][bb]-[ab]^2.$$

欲証明 M 与坐标軸無关,可自

$$M^2=m_x^2+m_y^2=\frac{[aa]+[bb]}{D}m^2\tag{54}$$

出發,其中

$$[aa]+[bb]=\left[\frac{\rho^2}{S^2}\cos^2\alpha\right]+\left[\frac{\rho^2}{S^2}\sin^2\alpha\right]=\left[\frac{1}{S^2}\right]\rho^2\tag{55}$$

与 α 無关,又

$$\begin{aligned}D=[aa][bb]-[ab]^2&=(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots)(b_1^2+b_2^2+\cdots)-\\&-(a_1b_1+a_2b_2+\cdots)^2=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+\\&+(a_2b_3-a_3b_2)^2+\cdots.\end{aligned}$$

若以式(53)之关系代入則得:

$$D=\rho^2\left\{\frac{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}{S_1^2S_2^2}+\frac{\sin^2(\alpha_1-\alpha_3)}{S_1^2S_3^2}+\frac{\sin^2(\alpha_2-\alpha_3)}{S_2^2S_3^2}+\cdots\right\},\tag{56}$$

由此式可知 D 值只随各方向間之夾角而不随方向值之本身变化，故亦与坐标軸方向無关。(55)及(56)既均与坐标軸之方向無关，由(54)之关系可知無論坐标軸取何方向，M 值永为不变。

今欲求点位在任意方向之中誤差值，可想像使原有坐标軸作任意 β 角之旋轉，今假定坐标軸之轉向为时鐘方向，則式(53)所代表之方向系数为：

$$a'=+\frac{\rho}{S}\cos(\alpha-\beta),\qquad b'=-\frac{\rho}{S}\sin(\alpha-\beta). \tag{57}$$

而 $$[a'a']=\rho^2\left\{\frac{\cos^2(\alpha_1-\beta)}{S_1^2}+\frac{\cos^2(\alpha_2-\beta)}{S_2^2}+\cdots\right\}=$$

$$=\rho^2\left\{\left[\frac{\cos\alpha^2}{S^2}\right]\cos^2\beta+\left[\frac{\sin^2\alpha}{S^2}\right]\sin^2\beta+\left[\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{S^2}\right]\sin 2\beta\right\}.$$

按式(53)之关系，上式可化为：

$$[a'a']=[aa]\cos^2\beta+[bb]\sin^2\beta-[ab]\sin 2\beta,$$

同理

$$[b'b']=[bb]\cos^2\beta+[aa]\sin^2\beta+[ab]\sin 2\beta. \tag{58}$$

参考式(52)，D 既与坐标軸之方向無关，則坐标軸轉动后，在此新軸方向之点位中誤差应为：

$$\left.\begin{aligned}m_1^2&=m^2\frac{[b'b']}{D}=m^2\frac{[aa]\sin^2\beta+[bb]\cos^2\beta+[ab]\sin 2\beta}{D},\\ m_2^2&=m^2\frac{[a'a']}{D}=m^2\frac{[aa]\cos^2\beta+[bb]\sin^2\beta-[ab]\sin 2\beta}{D}.\end{aligned}\right\} \tag{59}$$

命 β 为任何一角度，卽可求出与原來坐标軸成該角度之方向内之坐标中誤差。

欲知 β 为何角 β_0 时 m_1 或 m_2 为最大値或最小値，可將式(59)依 β 微分，使等于零，因 D 与 β 無关，故可命

$$\left.\begin{aligned}\frac{d[a'a']}{d\beta}&=-([aa]-[bb])\sin 2\beta_0-2[ab]\cos 2\beta_0=0,\\ \frac{d[b'b']}{d\beta}&=+([aa]-[bb])\sin 2\beta_0+2[ab]\cos 2\beta_0=0.\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

由上式可得：

$$\tan 2\beta_0 = \frac{-2[ab]}{[aa]-[bb]}. \tag{61}$$

解式(61)得 $2\beta_0$ 及 $2\beta_0 \pm 180°$ 或 β_0 及 $\beta_0 \pm 90°$ 二值，二者为相互垂直之方向，其一为中誤差最大之方向，另一为中誤差最小之方向。按式(59)此两中誤差値为：

$$\left.\begin{aligned} B^2 &= m^2 \frac{[aa]\sin^2\beta_0 + [bb]\cos^2\beta_0 + [ab]\sin 2\beta_0}{D}, \\ A^2 &= m^2 \frac{[aa]\cos^2\beta_0 + [bb]\sin^2\beta_0 - [ab]\sin 2\beta_0}{D}. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

式(62)倘可化簡，因由

$$\sin^2\beta_0 = \frac{1-\cos 2\beta_0}{2}, \qquad \cos^2\beta_0 = \frac{1+\cos 2\beta_0}{2}. \tag{63}$$

及 $\cos 2\beta_0 = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\beta_0}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{4[ab]^2}{([aa]-[bb])^2}}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{([aa]-[bb])^2+4[ab]^2}{([aa]-[bb])^2}}} = \frac{[aa]-[bb]}{\sqrt{([aa]-[bb])^2+4[ab]^2}} \tag{64}$$

若命 $$W = \sqrt{([aa]-[bb])^2+4[ab]^2}, \tag{65}$$

式(64)可簡書为：

$$\cos 2\beta_0 = \frac{[aa]-[bb]}{W}. \tag{66}$$

式(66)与式(61)相比，得

$$\sin 2\beta_0 = \frac{-2[ab]}{W}. \tag{67}$$

此时可假定 W 值恆为正数，以确定 $2\beta_0$ 所居之象限。

將式(66)之結果代入式(63)，得：

$$\left.\begin{aligned}\sin^2\beta_0=\frac{1-\cos 2\beta_0}{2}=\frac{W-[aa]+[bb]}{2W},\\ \cos^2\beta_0=\frac{1+\cos 2\beta_0}{2}=\frac{W+[aa]-[bb]}{2W}.\end{aligned}\right\}\tag{68}$$

更將(67)与(68)代于式(62)内而簡化之得:

$$B^2=m^2\frac{[aa]+[bb]-W}{2D},\qquad A^2=m^2\frac{[aa]+[bb]+W}{2D}.\tag{69}$$

前既假定 W 恆为正值，則 $A>B$，故 A 为坐标中誤差之最大值，而 B 为其最小值。此时之坐标中誤差最小值 B 相当于式(59)之 m_1，卽式(52)之 m_x。今如仍用原來之坐标方向，則知此誤差最小值 B 之方向与原來 x 軸之夾角为 β_0，或言誤差最大值 A 方向与原來之 y 軸之夾角亦为 β_0，今称此后者之夾角为 θ_0，則:

$$\theta_0=\beta_0.\tag{70}$$

参考式(61)，則

$$\tan 2\theta_0=\frac{-2[ab]}{+([aa]-[bb])},\tag{71}$$

θ_0 实卽相当于坐标中誤差最大值之方向角。

既求得 A, B, 与 θ_0 之值后，可以 A 为長軸，θ_0 为其方向角，B 为短軸，作一橢圓，此橢圓卽名为誤差橢圓，其公式为:

$$\frac{u^2}{A^2}+\frac{v^2}{B^2}=1,\tag{72}$$

u, v 为以其長短軸所决定之坐标系。今將以上所得結果再总列于下:

$$\tan 2\theta_0=\frac{-2[ab]}{+([aa]-[bb])},\tag{73}$$

$$W=+\sqrt{([aa]-[bb])^2+4[ab]^2}=$$

$$=\frac{-2[ab]}{\sin 2\beta_0}=\frac{[aa]-[bb]}{\cos 2\beta_0}.\tag{74}$$

$$\left.\begin{aligned} m^2_{\text{最大值}} &= m^2\frac{[aa]+[bb]+W}{2D}=A^2 \text{ 方向角 } \theta_0;\\ m^2_{\text{最小值}} &= m^2\frac{[aa]+[bb]-W}{2D}=B^2 \text{ 方向角 } \theta_0\pm 90.\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

其次所須求者为各方向之坐标中誤差与誤差橢圓之关系。欲得此关系，应將式(52)之 m_x, m_y 两式亦化为 A, B 及 θ_0 之函数：

$$m_x^2=\frac{[bb]}{D}m^2=\frac{4W[bb]}{4WD}m^2=\frac{(W+[bb])^2-(W-[bb])^2}{4WD}m^2=$$

$$=\left\{\frac{(W+[bb])^2-[aa]^2}{4WD}-\frac{(W-[bb])^2-[aa]^2}{4WD}\right\}m^2=$$

$$=\left\{\left(\frac{[aa]+[bb]+W}{2D}\right)\left(\frac{W-[aa]+[bb]}{2W}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{[aa]+[bb]-W}{2D}\right)\left(\frac{W+[aa]-[bb]}{2W}\right)\right\}m^2.$$

应用(68)与(69)之关系，可化簡之为：

$$m_x^2=A^2\sin^2\beta_0+B^2\cos^2\beta_0, \tag{76}$$

或以 θ_0 代 β_0，幷同理求得 m_y^2 之公式，合併書之，遂为

$$\left.\begin{aligned} m_x^2 &= A^2\sin^2\theta_0+B^2\cos^2\theta_0,\\ m_y^2 &= A^2\cos^2\theta_0+B^2\sin^2\theta_0.\end{aligned}\right\} \tag{77}$$

今如想像 θ_0 为一变值，以 θ 代表之，则式(77)中之 m_x, m_y 亦可易为在相当于 θ 方向时之坐标中誤差 m_1, m_2，式(77)遂变为一普遍公式：

$$\left.\begin{aligned} m_1^2 &= A^2\sin^2\theta+B^2\cos^2\theta,\\ m_2^2 &= A^2\cos^2\theta+B^2\sin^2\theta.\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

此时須注意者，卽 θ 之零方向为誤差橢圓之長半徑方向，故式(78)系以誤差橢圓之 u, v 为坐标系。如以 θ 及 m_1 (或 m_2) 为極坐标，作一曲綫，將曲綫上之各点与誤差橢圓之中心相連，卽得該方向內之坐标中誤差。

此处所欲証明者，卽此曲綫应为誤差橢圓之垂点曲綫。自橢圓形

上任意一点作一切綫，然后由橢圓中心作一垂綫至此切綫上，其相交之点名为垂点，連接所有此等垂点之曲綫卽为垂点曲綫。

按圖 9.13，設 $P_1(u_1, v_1)$ 为誤差橢圓上之一点，則根据誤差橢圓公式(72)，在 P_1 点之切綫公式应为：

$$\frac{u_1}{A^2}u+\frac{v_1}{\beta^2}v=1. \tag{79}$$

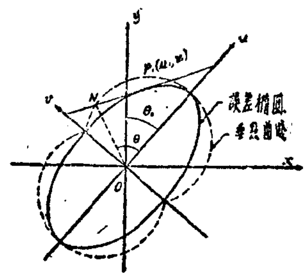

圖 9.13

按解析几何定理，垂直于此切綫通过橢圓中心之垂綫与 u 軸所成角度 θ 之公式为：

$$\tan\theta=\frac{A^2v_1}{B^2u_1}.$$

化成 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$，卽为

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{B^2u_1}{\sqrt{(B^2u_1)^2+(A^2v_1)^2}},\\ \sin\theta&=\frac{A^2v_1}{\sqrt{(B^2u_1)^2+(A^2v_1)^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{80}$$

又垂距 ON 为：

$$\overline{ON}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{u_1}{A^2}\right)^2+\left(\frac{v_1}{B^2}\right)^2}}=\frac{A^2B^2}{\sqrt{(B^2u_1)^2+(A^2v_1)^2}}. \tag{81}$$

因 P_1 系橢圓上之一点，故按式(79)

$$B^2u_1^2+A^2v_1^2=A^2B^2. \tag{82}$$

联合(81)与(82)，得：

$$\overline{ON}^2=\frac{A^2B^2(B^2u_1^2+A^2v_1^2)}{(B^2u_1)^2+(A^2v_1)^2}=$$

$$=\frac{A^2B^4u_1^2}{(B^2u_1)^2+(A^2v_1)^2}+\frac{B^2A^4v_1^2}{(B^2u_1)^2+(A^2v_1)^2}.$$

根据式(80)，可將上式化为：

$$\overline{ON}^2 = A^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta. \tag{83}$$

比較(78)与(83)卽知 ON 与 m_2 相当，因此証明式(78)之曲綫卽为誤差橢圓之垂点曲綫。

实际欲求任意一方向之坐标中誤差时，先作該点之誤差橢圓，然后將該方向綫 ON 繪出，作一綫与 ON 垂直并切于誤差橢圓，此綫与垂綫相交于 N，ON 卽代表該方向之坐标中誤差。

例：繼續第七節之例：

$$[aa]=22.93, \qquad [ab]=-1.79,$$

$$[bb]=34.42, \qquad m=\pm 4''.17;$$

$$\tan 2\theta_0 = \frac{-2[ab]}{+([aa]-[bb])} = \frac{+3.58}{-11.49} = -0.3115,$$

$$2\theta = 162^\circ 41' 39'',$$

$$\theta = 81^\circ 20' 50''.$$

$$W^2 = ([aa]-[bb])^2 + 4[ab]^2 = (132.018+12.816) = 144.834;$$

$$W = +12.004;$$

$$D = [aa][bb]-[ab]^2 = +786.046, \quad 2D = +1572.092;$$

$$A = \sqrt{m^2\frac{[aa]+[bb]+W}{2D}} = \sqrt{17.389\frac{34.42+22.93+12.034}{1572.092}} =$$

$= \pm 0.876$ 公寸；

$$B = \sqrt{m^2\frac{[aa]+[bb]-W}{2D}} = \sqrt{17.389\frac{34.42+22.93-12.034}{1572.092}} =$$

$= \pm 0.708$ 公寸。

(二) 双点定位

在双点定位时其坐标之法方程式为：

$$
\left.\begin{aligned}
[aa]x_1+[ab]y_1+[ac]x_2+[ad]y_2-[al]&=0,\\
+[bb]y_1+[bc]x_2+[bd]y_2-[bl]&=0,\\
+[cc]x_2+[cd]y_2-[cl]&=0,\\
+[dd]y_2-[dl]&=0.
\end{aligned}\right\}
$$

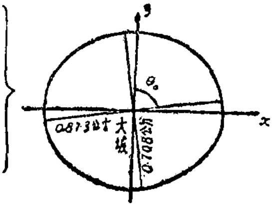

图 9.14

經二次約化后得:

$$
\left.\begin{aligned}
[cc\cdot 2]x_2+[cd\cdot 2]y_2-[cl\cdot 2]&=0,\\
[cd\cdot 2]x_2+[dd\cdot 2]y_2-[dl\cdot 2]&=0.
\end{aligned}\right\} \tag{84}
$$

式(84)与式(51)相似,故知求第二点之誤差橢圓时,可仍用單点定位时之諸公式(72)—(74),惟此时以 $[cc\cdot 2]$ 代 $[aa]$; $[cd\cdot 2]$ 代 $[bb]$ 耳。

至于解求第一点之誤差橢圓时,則必須將法方程式之未知數次序顛倒,使 x_2 与 y_2 居于前二項,而使 x_1 与 y_1 为末二項,經二次約化之后得相当式(84)之公式为:

$$
\left.\begin{aligned}
[aa\cdot 2]x_1+[ab\cdot 2]y_1-[al\cdot 2]&=0,\\
[ab\cdot 2]x_1+[bb\cdot 2]y_1-[bl\cdot 2]&=0.
\end{aligned}\right\} \tag{85}
$$

例: 繼續第八節之例題。

將第八節之例題中法方程式約化,經二次后得:

$$7.54dx_b+\ \ 3.84dy_b+10.80=0,$$

$$3.84dx_b+10.58dy_b+16.03=0,$$

故 $$[aa]=+7.54,\quad [bb]=+10.58,\quad [ab]=+3.84;$$

$$m=\pm 1''.79;$$

$$\tan 2\theta_0=\frac{-2[ab]}{[aa]-[bb]}=\frac{-7.68}{-3.04}=+2.536,$$

$$2\theta_0=248^\circ 29',$$

$$\theta_0=124^\circ 14'.5;$$

$$W^2=([aa]-[bb])^2+4[ab]^2=9.18+58.98=68.16,$$

$$W=+8.45;$$

$$D=[aa][bb]-[ab]^2=64.81,$$

$$2D=129.62;$$

$$A=m\sqrt{\frac{[aa]+[bb]+W}{2D}}=\pm 0.80\ \text{公寸};$$

$$B=m\sqrt{\frac{[aa]+[bb]-W}{2D}}=\pm 0.49\ \text{公寸}。$$

以上之計算系屬于中云寺者。复將此組法方程式次序倒換并約化二次，于是得：

$$14.16dx_a+\ 1.89dy_a+34.19=0,$$

$$1.89dx_a+23.63dy_a+\ 6.43=0;$$

故　　$[aa]=14.16,\quad [bb]=23.63,\quad [ab]=+1.89;$

$$m=\pm 1''.79;$$

$$\tan 2\theta_0=\frac{-2[ab]}{[aa]-[bb]}=\frac{-3.78}{-9.47}=+0.399,$$

$$2\theta_0=201°45',\qquad \theta_0=100°52'.5;$$

$$W=\sqrt{([aa]-[bb])^2+4[ab]^2}=\sqrt{103.96}=+10.18;$$

$$D=[aa][bb]-[ab]^2=331.0;$$

$$A=m\sqrt{\frac{[aa]+[bb]+W}{2D}}=$$

$$=\pm 0.48\ \text{公寸};$$

$$B=m\sqrt{\frac{[aa]+[bb]-W}{2D}}=$$

$$=\pm 0.36\ \text{公寸}。$$

以上之計算系屬于丰文山。二新点之誤差橢圓以圖上一公分等于点位誤差为四公分之比例尺繪示于圖 9.15。

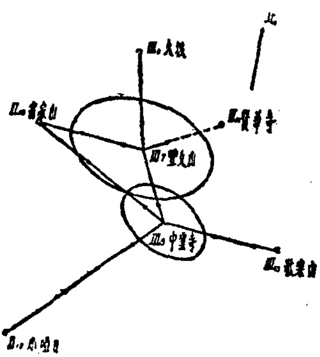

圖 9.15

（三）普遍情形

以上所用之方法，系根据間接测观平差法中法方程式之系数，是以欲求一点之誤差橢圓，必須將其未知数化为(51)或(84)，(85)之形式。此种方法应用于單点定位时固極方便，但多点同时定位，或以条件观测法平差时，前述之公式即不能適用。此困难可以改用权系数之方法克服之，盖基本公式(52)亦可書作：

$$m_x^2=[\alpha\alpha]m^2,\qquad m_y^2=[\beta\beta]m^2. \tag{86}$$

α, β 为坐标値 x, y 之权系数，即

$$\left.\begin{aligned}x&=\alpha_1l_1+\alpha_2l_2+\cdots+\alpha_nl_n,\\ y&=\beta_1l_1+\beta_2l_2+\cdots+\beta_nl_n.\end{aligned}\right\} \tag{87}$$

$l_1, l_2, \cdots l_n$ 为观测値。

权系数平方和 $[\alpha\alpha]$ $[\beta\beta]$ 及乘積和 $[\alpha\beta]$ 与前所应用之法方程式系数 $[aa]$，$[bb]$，$[ab]$ 有下列之关系（見第四章第十節）：

$$[\alpha\alpha]=\frac{1}{[aa\cdot1]},\qquad[\beta\beta]=\frac{1}{[bb\cdot1]},\qquad[\alpha\beta]=\frac{1}{[ab\cdot1]}.$$

或將 $[aa\cdot1]$，$[bb\cdot1]$，$[ab\cdot1]$ 等展开，即得：

$$[\alpha\alpha]=\frac{[bb]}{D},\qquad[\beta\beta]=\frac{[aa]}{D},\qquad[\alpha\beta]=\frac{-[ab]}{D}. \tag{88}$$

今如命

$$\Delta=[\alpha\alpha][\beta\beta]-[\alpha\beta][\alpha\beta], \tag{89}$$

則由式(88)可証明：

$$\Delta D=1.$$

而式(88)亦可化为：

$$[aa]=\frac{[\beta\beta]}{\Delta},\qquad[bb]=\frac{[\alpha\alpha]}{\Delta},\qquad[ab]=-\frac{[\alpha\beta]}{\Delta}. \tag{90}$$

將式(90)之关系代入(73)，(74)，(75)及(69)諸式内，即得以权系数計算之公式：

$$\left.\begin{aligned}
&\tan 2\theta_0=\frac{+2[\alpha\beta]}{-([\alpha\alpha]-[\beta\beta])}\cdots\cdots\cdots\cdots;\\
&W^2=\frac{([\alpha\alpha]-[\beta\beta])^2+4[\alpha\beta]^2}{\Delta^2}=\frac{Q^2}{\Delta^2};\\
&Q=\sqrt{([\alpha\alpha]-[\beta\beta])^2+4[\alpha\beta]^2}=\frac{2[\alpha\beta]}{\sin 2\theta_0}=\frac{-([\alpha\alpha]-[\beta\beta])}{\cos 2\theta_0};\\
&A^2=m^2\frac{[\alpha\alpha]+[\beta\beta]+Q}{2};\qquad B^2=m^2\frac{[\alpha\alpha]+[\beta\beta]-Q}{2}.
\end{aligned}\right\}\quad(91)$$

以上諸式虽以單点定位之例導出，但在其他情形时，亦可適用，因权系数之值，决不因平差所取之形式而異，例如由(84)，(85)两式之形式亦可化为权系数之公式也。是以(91)为普遍之公式，無論采用何种方式平差，均可適用。

間接观測：間接观測之权系数总和$[\alpha\alpha]$，$[\beta\beta]$，$[\alpha\beta]$可按权方程式附于法方程式后計算之，但在多点定位时，其中許多項如$[\alpha\gamma]$，$[\alpha\delta]$，$[\beta\gamma]$，$[\beta\delta]$等均为不需要之值，故此时以單独計算之方法为宜。关于$[\alpha\alpha]$，$[\beta\beta]$之計算，已于第四章中論及，至于$[\alpha\beta]$之計算公式可導出如下：

今如有某未知数之函数設为：

$$F=x+y=[\alpha l]+[\beta l]=[(\alpha+\beta)l],$$

則此函数之权倒数为：

$$\frac{1}{P_{x+y}}=[\alpha\alpha]+2[\alpha\beta]+[\beta\beta].\qquad(92)$$

易言之，亦可想像$x+y$为未知数x，y之函数，而应用第四章第十三節之公式計算求之。此时

$$f_1=1,\quad f_2=0,\quad f_3=0,\quad f_4=0;$$
$$f'_1=0,\quad f'_2=1,\quad f'_3=0,\quad f'_4=0.$$

故$x+y$之权倒数为：

$$\frac{1}{P_{x+y}}=\frac{f_1^2}{[aa]}+\frac{[f_{2\cdot1}]^2}{[bb\cdot1]}+\frac{[f_{3\cdot2}]^2}{[cc\cdot2]}+\frac{[f_{4\cdot3}]^2}{[dd\cdot3]}+$$
$$+\frac{f_1'^2}{[aa]}+\frac{[f'_{2\cdot1}]^2}{[bb\cdot1]}+\frac{[f'_{3\cdot2}]^2}{[cc\cdot2]}+\frac{[f'_{4\cdot3}]^2}{[dd\cdot3]}+$$
$$+2\left(\frac{f_1f'_1}{[aa]}+\frac{[f_{2\cdot1}][f'_{2\cdot1}]}{[bb\cdot1]}+\frac{[f_{3\cdot2}][f'_{3\cdot2}]}{[cc\cdot2]}+\frac{[f_{4\cdot3}][f'_{4\cdot3}]}{[dd\cdot3]}\right). \quad (93)$$

式(93)之前二項为$[\alpha\alpha]$与$[\beta\beta]$，故比較式(93)与式(90)时，可知：

$$[\alpha\beta]=\frac{f_1f'_1}{[aa]}+\frac{[f_{2\cdot1}][f'_{2\cdot1}]}{[bb\cdot1]}+\frac{[f_{3\cdot2}][f'_{3\cdot2}]}{[cc\cdot2]}+\frac{[f_{4\cdot3}][f'_{4\cdot3}]}{[dd\cdot3]}. \quad (94)$$

条件观測：在条件观測时，$[\alpha\alpha]$，$[\beta\beta]$之計算可按第五章第四節之公式(56)行之。

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{P_x}&=[\alpha\alpha]=[ff]-\frac{[af]^2}{[aa]}-\frac{[bf\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\cdots,\\ \frac{1}{P_y}&=[\beta\beta]=[f'f']-\frac{[af']^2}{[aa]}-\frac{[bf'\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\cdots.\end{aligned}\right\} \quad (95)$$

今設求下列函数之权倒数：

$$F=x+y.$$

应用权系数 α,β，可得：

$$\frac{1}{P_{x+y}}=[\alpha\alpha]+2[\alpha\beta]+[\beta\beta]. \quad (96)$$

同理亦可按式(96)得：

$$\frac{1}{P_{x+y}}=[(f+f')^2]-\frac{[af+af']^2}{[aa]}-\frac{[(bf+bf')\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}. \quad (97)$$

其中 $$[(f+f')^2]=[ff]+2[ff']+[f'f'];$$
$$[af+af']^2=[af]^2+2[af][af']+[af']^2;$$
$$[(bf+bf')\cdot1]^2=[bf\cdot1]^2+2[bf\cdot1][bf'\cdot1]+[bf']^2,$$

故式(97)可書为：

$$\frac{1}{P_{x+y}}=[ff]-\frac{[af]^2}{[aa]}-\frac{[bf\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}-\cdots+$$

$$+[f'f']-\frac{[af']}{[aa]}-\frac{[bf'\cdot2]}{[bb\cdot1]}-\cdots+$$

$$+2\left([ff']-\frac{[af][af']}{[aa]}-\frac{[bf\cdot1][bf'\cdot1]}{[bb\cdot1]}-\cdots\right). \quad (98)$$

將式(95)，(96)与(98)相比較，可知：

$$[\alpha\beta]=[ff']-\frac{[af][af']}{[aa]}-\frac{[bf\cdot1][bf'\cdot1]}{[bb\cdot1]}. \quad (99)$$

由此式可求得 $[\alpha\beta]$ 之值，然后应用式(91)定誤差橢圓。

例：求第七章第九節(圖 7.17)点(4)之誤差橢圓。点(4)之位置系由基綫(1)(2)計算而得，基綫(1)(2)之長設为 100000 單位，此时之二未知数可認为自点(1)至点(4)距离 ρ 之变遷 δr 及与此方向垂直之变遷 $\rho\delta\psi$，設 ψ 角为 $\angle(2)(1)(4)$，因得相当于式(86)之二未知数为：

$$dx=\delta\rho, \qquad dy=\rho\delta\psi.$$

在后式內 ρ 为常数，可随后附入，命第一函数 $f=\rho$ 而第二函数 $f'=\psi$。其由第七章表 9 結果所得之 ρ 与 φ 之数值各为：

$$\log\rho=-4.99999813, \qquad \psi=90°0'0''.4735.$$

今首求式(96)所代表之 $[\alpha\alpha]$ 与 $[\beta\beta]$，則

$$\text{函数 } f=\rho=100000\frac{\sin\angle(4)(2)(1)}{\sin\angle(1)(4)(2)},$$

$$\log\rho=5+\log\sin(360-315°0'0''.6133-\eta_4)-$$

$$-\log\sin(45°0'0''.6000+r_2-r_1).$$

因得： $f_1=\dfrac{\partial\rho}{\partial\lambda_1}=0,\qquad f_2=\dfrac{\partial\rho}{\partial\lambda_2}=0,\qquad f_3=\dfrac{\partial\rho}{\partial\lambda_3}=0,$

$f_4=\dfrac{\partial\rho}{\partial\lambda_4}=-0.4849,\qquad f_5=\dfrac{d\rho}{d\lambda_5}=0,\qquad f_6=\dfrac{d\rho}{d\lambda_6}=0,$

$$f_7=\frac{d\rho}{dr_2}=\frac{d\rho}{d\lambda_4}=-0.4849,\quad f_8=\frac{\partial\rho}{\partial r_1}=-f_7=-0.4849.$$

函数 $$f'=\psi+\xi_4\doteq\psi+\lambda_2.$$

因得: $$f'_1=f'_3=f'_4=f'_5=f'_6=f'_7=f'_8=0,\quad f'_2=\frac{\partial f'}{\partial\lambda_2}=1,$$

故:

$$\left[\frac{ff}{p}\right]=\frac{(-0.4849)^2}{\frac{15}{14}}+\frac{(+0.4849)^2}{1}+\frac{(-0.4849)^2}{1}=0.6897;$$

$$\left[\frac{f'f'}{p}\right]=\frac{4}{3}=1.3333.$$

將 $f_1, f_2, \cdots f_8$, 及 $f'_1, f'_2, \cdots f'_8$ 等值列于表5, 而求其各相当 $\frac{+af}{p}$ 及 $\frac{af'}{p}$ 之乘積則得:

$$\left[\frac{af}{p}\right]=+0.3233,\quad \left[\frac{bf}{p}\right]=-0.5172,\quad \left[\frac{cf}{p}\right]=-0.4849,$$

$$\left[\frac{df}{p}\right]=+1.4224,$$

$$\left[\frac{af'}{p}\right]=+0.6667,\quad \left[\frac{bf'}{p}\right]=+1.333,\quad \left[\frac{cf'}{p}\right]=+0.6667,$$

$$\left[\frac{df'}{p}\right]=0.$$

更参考第七章表8則得:

$$\left[\frac{bf}{p}\cdot 1\right]=-0.5172-0.40816\times 0.3233=-0.6492,$$

$$\left[\frac{cf}{p}\cdot 2\right]=-0.4849+0.23471\times 0.3233+0.53179\times 0.6492=-0.0638,$$

$$\left[\frac{df}{p}\cdot 3\right]=+14224-0.66329\times 0.3233-0.52413\times 0.6492-0.35322\times 0.0638=40.8452.$$

同理得:

$$\left[\frac{bf'}{p}\cdot 1\right]=+1.0612,\quad \left[\frac{cf'}{p}\cdot 2\right]=+0.2589,\quad \left[\frac{df'}{p}\cdot 3\right]=+0.2054.$$

故按式(95)参考表7(第七章)得:

$$[\alpha\alpha]=0.6897-\frac{(0.3233)^2}{3.2666}-\frac{(-0.6492)^2}{3.7225}-\frac{(-0.0638)^2}{2.7006}+\frac{(+0.8452)^2}{3.1366}$$

$$=0.3152,$$

$$[\beta\beta]=1.3333-\frac{(+0.6667)^2}{3.2666}-\frac{(+1.0612)^2}{3.7225}-\frac{(+0.2589)^2}{2.7006}-\frac{(+0.2054)^2}{3.1366}$$

$$=0.8566.$$

更按式(99)得:

$$[\alpha\beta]=0-\left\{\frac{0.3233\times 0.6667}{3.2666}-\frac{0.6492\times 1.0612}{3.7225}-\frac{0.0638\times 0.2589}{2.7006}\right.$$

$$\left.+\frac{0.8452\times 0.2054}{3.1366}\right\}=+0.06986.$$

此种計算系根据 $f'=\psi$ 算求,实则此时所檢討之誤差为 $\rho d\psi$, 故所得各值应为:

$$[\alpha\alpha]=0.3152,\quad [\beta\beta]=0.8566\left(\frac{100000}{206265}\right)^2=0.2013,$$

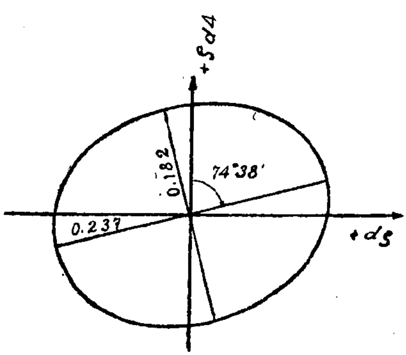

图 9.16

$$[\alpha\beta]=+0.06986\left(\frac{100000}{206265}\right)=$$

$$=+0.03387.$$

此时式(89)各项均已算出,可以据之求誤差橢圓之各值,更由第七章之例,知权單位之中誤差为:

$$m=0''.416,$$

按式(89):

$$\tan 2\theta_0 = \frac{+2(0.03387)}{-(0.3152-0.2013)} = -0.5947,$$

$$2\theta_0 = 149^\circ 16',$$

$$\theta_0 = 74^\circ 38';$$

$$Q = \frac{-([\alpha\alpha]-[\beta\beta])}{\cos 2Q_0} = \frac{-0\ 1139}{-0.8596} = 0.1325;$$

$$A = 0.416\sqrt{\frac{0.5165+0.1325}{2}} = \pm 0.237;$$

$$B = 0.416\sqrt{\frac{0.5165-0.1325}{2}} = \pm 0.182.$$

第十章　大規模三角網或三角鎖之平差

第一節　概論

昔欧美各邦所作之三角測量，其平差多采用強制附合之方法，使后作之三角測量附合于以前完成各部之上。此法实用上固極方便，且可不影响以前計算之成果，但輾轉附合，牽制漸多，以致各种系統誤差均集于后作之三角網中，其結果常使網形發生扭曲。故在大規模三角網進行至相当階段时，必須設法將所有观測結果举行調整之平差。此种大規模平差不僅可使一國內之三角網獲得合理之結果，其意义更可及于國际間三角網之連絡，使國际間測定地球形狀之工作亦能進入一新階段。

应用高斯約化法作大規模三角網平差計算之困难有二：一为解算法方程式工作之繁巨；一为計算精度之不易維持。蓋三角網平差一般均用条件法，卽繫数法，網之規模愈大，則条件与法方程式之数目愈多，而法方程式解算之工作与法方程式数目之平方成比例，是以三角網之規模增大一倍，計算工作卽增加三倍。至于計算精度，亦与法方程式数目有关，蓋約化次数愈多，約化后之系数值精度愈差；且約化至最后一法方程式求出最后一繫数值后，仍須代返各約化法方程式中，依次求出其他各繫数之值，直至求出第一繫数值为止。因此第一繫数值之精度最差，而最后一繫数值之精度最高。且一般法方程式內各項系数之值均甚小，經多次約化后，其值極易不可靠，是以大規模法方程式之解算中，为保持較好之精度，必須將各繫数計算之位数增加，因此亦增加計算之工作。

若專就理論而言，大規模三角網之平差原可同样采用前数章所論及之方法，但因上述两种实际困难，必須另設他法，以資补救，此卽本章所欲討論之范圍。

应用高斯約化法解算法方程式之限度，約以五六十个未知数为限。逾此限度，則上述两种困难卽將顯著。倘法方程式之数目不过多，为补救上述困难之第二点，可采用顚倒法方程式次序之法。蓋根据上述之計算精度，最后一繫数之精度最高，而第一繫数值之精度最低。今若將法方程式之次序完全顚倒，再算一次，則第一次計算精度較差之各繫数，此次均可得較好之精度。但应用此法时計算工作加倍而精度僅略增高，故其应用，僅限于法方程式数目不甚多时。

此外高斯尙創用所謂分部漸近法。如有略大規模之法方程式，可將其分为数部。先解算第一部法方程式，將其中所有其他諸部之繫数項均先取消，如此求得第一部繫数之近似値，將其代入第二部法方程式中，幷將第二部法方程式中仍含有之其他各部繫数項取消，而求第二部繫数之近似値。如此繼續，直至最后一部繫数求出为止，此为第一次近似値。今如將所有第二以下以至最后一部繫数之近似値代入第一部法方程式內，再从而求第一部繫数之値，則必与第一次近似値不符，但必比較更接近其应得之値。如此再順序解算一遍，求出所有繫数之第二次近似値。如第二次近似値仍不能滿足法方程式至滿意之程度，則必須再解算一遍，直至求出滿意之値为止。此种方法应用时計算工作自亦相当繁巨，但一般而論，可較全体解算大規模法方程式之工作为少。蓋吾人如將所有法方程式分为 n 部，則重复計算 n 次，始与全体解算之工作相当。但尙有一优点，卽每次解算时，僅常数項不同，而各繫数系数之約化則不必重算。且在計算小規模之法方程式时，如偶有小誤，其影响僅限于一小部，不若全体解算时，一小誤差之存在，致使全局重算也。

上述之方法固可解决計算困难之一部，但仍嫌过繁，且其漸近之程

度亦因不同之情形而異，故不能作为一般之应用方法。

关于解算大規模法方程式之嚴格方法，自克理格尔以后，始漸發展，博尔兹繼之創用擴展法及代替法，对于实用有極大之意义。此外娶格又用大地綫法作嚴格解算之工具，对于三角鎖佈成網狀时之平差最为適宜，本章均將分别論之。

至于用簡略法解算大規模三角網，亦有若干發展，盖簡略法之便利在能減少計算工作至極小之限度，如能愼加选擇，其結果不致与用嚴格法者相差过多，故本章亦將普通常用之簡略法作一介紹。

此外尙須提出者，卽用坐标法作三角網平差之問題。一般情形之下，三角網平差全用繫数法，但在特殊情形下，坐标法亦自有其优点，故于章末特闢一節論之。

第二節 克里格尔分組平差法①

克里格尔分組平差法之原理，系將条件方程分为两組，將第二組条件方程設法加以改化，使改化后之条件方程与第一組条件方程完全独立，然后可分别求两組繫数。今設两組条件方程如下：

$$\left.\begin{aligned}a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4+w_1=0,\\ b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3+b_4v_4+w_2=0,\\ c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+c_4v_4+w_3=0;\end{aligned}\right\}\text{第一組}\tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3+\alpha_4v_4+\varphi_1=0,\\ \beta_1v_1+\beta_2v_2+\beta_3v_3+\beta_4v_4+\varphi_2=0.\end{aligned}\right\}\text{第二組}\tag{2}$$

將第一組条件保持不变，但改化第二組，使之与第一組無关。分别乘第一組各式以 ξ_1, η_1, ζ_1，而加于第二組之第一式內，再分别乘第一組各式以 ξ_2, η_2, ζ_2，而加于第二組之第二式內，卽得两改化之条件方程如下：

① 見 L. Krüger: Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen in zwei Gruppen. Veröff. Kgl. Preuss. Geodätischen Instituts Neue Folge Nr. 18, Potsdam, 1905.

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha_1+a_1\xi_1+b_1\eta_1+c_1\zeta_1)v_1+(\alpha_2+a_2\xi_1+b_2\eta_1+c_2\zeta_1)v_2+\cdots+\\ \quad+(\varphi_1+w_1\xi_1+w_2\eta_1+w_3\zeta_1)=0,\\ (\beta_1+a_1\xi_2+b_1\eta_2+c_1\zeta_2)v_1+(\beta_2+a_2\xi_2+b_2\eta_2+c_2\zeta_2)v_2+\cdots+\\ \quad+(\varphi_2+w_1\xi_2+w_2\eta_2+w_3\zeta_2)=0.\end{array}\right\} \quad (3)$$

命

$$\left.\begin{array}{ll}A_1=\alpha_1+a_1\xi_1+b_1\eta_1+c_1\zeta_1, & B_1=\beta_1+a_1\xi_2+b_1\eta_2+c_1\zeta_2,\\ A_2=\alpha_2+a_2\xi_1+b_2\eta_1+c_2\zeta_1, & B_2=\beta_2+a_2\xi_2+b_2\eta_2+c_2\zeta_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ W_1=\varphi_1+w_1\xi_1+w_2\eta_1+w_3\zeta_1; & W_2=\varphi_2+w_1\xi_2+w_2\eta_2+w_3\zeta_2.\end{array}\right\} \quad (4)$$

則式(3)可簡書为:

$$\left.\begin{array}{l}A_1v_1+A_2v_2+A_3v_3+A_4v_4+W_1=0,\\ B_1v_1+B_2v_2+B_3v_3+B_4v_4+W_2=0.\end{array}\right\} \quad (5)$$

$\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ 諸值倘为不定系数，其决定之条件为須使改化后之第二組条件(5)与原有之第一組(1)不發生关系。易言之，即須使

$$\left.\begin{array}{l}[aA]=[bA]=[cA]=0,\\ [aB]=[bB]=[cB]=0.\end{array}\right\} \quad (6)$$

(6)內之六个方程適足以决定六个不定系数，將其寫出，即为:

$$\left.\begin{array}{l}[aa]\xi_1+[ab]\eta_1+[ac]\zeta_1+[a\alpha]=0,\\ [ab]\xi_1+[bb]\eta_1+[bc]\zeta_1+[b\alpha]=0,\\ [ac]\xi_1+[bc]\eta_1+[cc]\zeta_1+[c\alpha]=0,\\ [aa]\xi_2+[ab]\eta_2+[ac]\zeta_2+[a\beta]=0,\\ [ab]\xi_2+[bb]\eta_2+[bc]\zeta_2+[b\beta]=0,\\ [ac]\xi_2+[bc]\eta_2+[cc]\zeta_2+[c\beta]=0.\end{array}\right\} \quad (7)$$

式(7)与第一組之法方程式完全类似，故其解算可与第一組法方程式相併行之，由此求出 $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ 諸值后，代入式(4)內即可得 $A_1, A_2, \cdots W_1, B_1, B_2, \cdots W_2$ 諸值，于是得第二組法方程式:

$$\left.\begin{array}{l}[AA]K_1+[AB]K_2+W_1=0,\\ [AB]K_1+[BB]K_2+W_2=0.\end{array}\right\} \quad (8)$$

而与第一組法方程式完全無关。各改正数之值为:

$$\left.\begin{aligned}v_1&=a_1k_1+b_1k_2+c_1k_3+A_1K_1+B_1K_2,\\v_2&=a_2k_1+b_2k_2+c_2k_3+A_2K_1+B_2K_2,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

此种方法之適用与否，全視第一組法方程式解算之难易以及式(4)之复雜与否而定。倘第一組法方程式極簡單而有規律，則不定系数 ξ，$\eta\cdots$等之算求甚易，式亦較簡單，克氏此法应用于三角網按角度平差时，如以角度条件为一組，边長条件为第二組，最为適用。

第三節　博尔茲擴展法①

博尔茲擴展法，系假定三角網为等权之方向观测，其理論則由克里格尔之分組平差法所導出，但平差时不用高斯約化法解算法方程式，而將各繫数展为各条件不符値之一次函数，謂之繫数擴展式。当三角網或鎖之構造有相当規律时，此种繫数擴展式之系数極易求得。

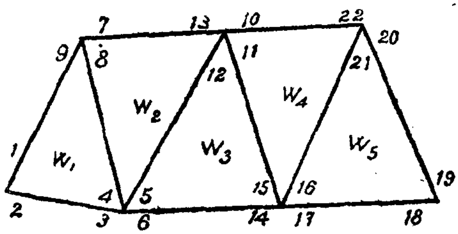

圖 10.1.

今設一含有五个三角形之三角形單鎖如圖10.1，其角度条件为:

$$\left.\begin{aligned}&-v_1+v_2-v_3+v_4\cdots\cdots-v_8+v_9\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+w_1=0,\\&\cdots\cdots-v_4+v_5\cdots-v_7+v_8\cdots\cdots-v_{12}+v_{13}\cdots\cdots+w_2=0,\\&\cdots\cdots-v_5+v_6\cdots\cdots-v_{11}+v_{12}\cdots-v_{14}+v_{15}\cdots+w_3=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

由此組成法方程式:

① 見 H. Boltz: Entwickelungsverfahren zum Ausgleichen geodätischer Netze. nach der M. d. Kl. Q. Veröff. des Preuss. Geod. Instituts N. F. Nr. 90.

$$\left.\begin{array}{l}
+6k_1-2k_2 \qquad\qquad\qquad +w_1=0,\\
-2k_1+6k_2-2k_3 \qquad\qquad +w_2=0,\\
\qquad -2k_2+6k_3-2k_4 \qquad +w_3=0,\\
\qquad\qquad -2k_3+6k_4-2k_5+w_4=0,\\
\qquad\qquad\qquad -2k_4+6k_5+w_5=0.
\end{array}\right\} \tag{11}$$

式(11)之形狀極有規則，故易將其化为擴展式:

$$\left.\begin{array}{l}
k_1=-0.191w_1-0.073w_2+0.028w_3-0.010w_4-0.003w_5,\\
k_2=-0.073w_1-0.219w_2-0.083w_3-0.031w_4-0.010w_5,\\
k_3=-0.028w_1-0.083w_2-0.222w_3-0.083w_4-0.028w_5,\\
k_4=-0.010w_1-0.031w_2-0.083w_3-0.219w_4-0.073w_5,\\
k_5=-0.003w_1-0.010w_2-0.028w_3-0.073w_4-0.191w_5.
\end{array}\right\} \tag{12}$$

由式(11)化至式(12)可用克里格尔之不定系数解法①，亦可用連續分数之解法②，在博尔兹及耶奈(Jenne)之两專刊中，已將所有通常三角網可遇到之形狀及其繫数擴展式列成表狀。一般而論，擴展式之形狀如下:

$$\left.\begin{array}{l}
k_1=f_{11}w_1+f_{12}w_2+f_{13}w_3+\cdots,\\
k_2=f_{21}w_1+f_{22}w_2+f_{23}w_3+\cdots,\\
k_3=f_{31}w_1+f_{32}w_2+f_{33}w_3+\cdots,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{array}\right\} \tag{13}$$

所有 f 称为擴展系数，在式(13)中擴展系数亦为对称的相等，即

$$f_{12}=f_{21},\quad f_{13}=f_{31},\quad f_{23}=f_{32}\cdots, \tag{14}$$

盖式(13)实即相当于第四章第十一節之法方程式不定式解法，彼处已証明此种对称之情形，故不贅述。今仍設两組条件方程式如下:

① 見 L. Krüger: Zur Ausgleichung der Widersprüche in den Winkelbedingungsgleichungen trigonometrischer Netze, Veröff. des Kgl. Preuss. Geod. Instituts N. F. Nr. 25.

② 見 W. Jenne: Kettenbruchformein und Korrelatentabellen. Veröff. des Preuss. Geod. Instituts N. F. Nr. 107.

$$\left.\begin{aligned}a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n+w_1=0,\\ b_1v_1+b_2v_2+\cdots+b_nv_n+w_2=0,\\ c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_nv_n+w_3=0;\end{aligned}\right\}\text{第一組} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots+\alpha_nv_n+w_4=0,\\ \beta_1v_1+\beta_2v_2+\cdots+\beta_nv_n+w_5=0.\end{aligned}\right\}\text{第二組} \tag{16}$$

今如不顧第二組条件而列出第一組法方程式，卽得：

$$\left.\begin{aligned}[aa]k_1^0+[ab]k_2^0+[ac]k_3^0+w_1=0,\\ [ab]k_1^0+[bb]k_2^0+[bc]k_3^0+w_2=0,\\ [ac]k_1^0+[bc]k_2^0+[cc]k_3^0+w_3=0.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

將其按擴展式展开，卽得：

$$\left.\begin{aligned}k_1^0=f_{11}w_1+f_{12}w_2+f_{13}w_3,\\ k_2^0=f_{21}w_1+f_{22}w_2+f_{23}w_3,\\ k_3^0=f_{31}w_1+f_{32}w_2+f_{33}w_3.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

但若將所有第一二两組条件列于一处，其法方程式应为下式：

$$\left.\begin{array}{l|l}[aa]k_1+[ab]k_2+[ac]k_3 & +[a\alpha]k_4+[a\beta]k_5+w_1=0,\\ [ab]k_1+[bb]k_2+[bc]k_3 & +[b\alpha]k_4+[b\beta]k_5+w_2=0,\\ [ac]k_1+[bc]k_2+[cc]k_3 & +[c\alpha]k_4+[c\beta]k_5+w_3=0;\end{array}\right\} \tag{19}$$

$$\left.\begin{array}{ll}[a\alpha]k_1+[b\alpha]k_2+[c\alpha]k_3 & +[\alpha\alpha]k_4+[\alpha\beta]k_5+w_4=0,\\ [a\beta]k_1+[b\beta]k_2+[c\beta]k_3 & +[\alpha\beta]k_4+[\beta\beta]k_5+w_5=0.\end{array}\right\} \tag{20}$$

于第一組式(19)中，命

$$\left.\begin{aligned}w_1'=[a\alpha]k_4+[a\beta]k_5+w_1,\\ w_2'=[b\alpha]k_4+[b\beta]k_5+w_2,\\ w_3'=[c\alpha]k_4+[c\beta]k_5+w_3.\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

于是可按式(13)將 $k_1\ k_2\ k_3$ 等化为擴展式：

$$\left.\begin{aligned}k_1=f_{11}w_1'+f_{12}w_2'+f_{13}w_3',\\ k_2=f_{21}w_1'+f_{22}w_2'+f_{23}w_3',\\ k_3=f_{31}w_1'+f_{32}w_2'+f_{33}w_3'.\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$k_1,\ k_2,\ k_3$ 为最后应得之繫数值。將式(22)与(18)相較，并顧及式(21)之关系，可知 k 与 k^0 之关系如次：

$$k_1=k_1^0+(f_{11}[a\alpha]+f_{12}[b\alpha]+f_{13}[c\alpha])k_4+ \\ +(f_{11}[a\beta]+f_{12}[b\beta]+f_{13}[c\beta])k_5. \tag{23}$$

k_2, k_3 之式类似(23)。

令命
$$\left.\begin{aligned} z_{41}&=f_{11}[a\alpha]+f_{12}[b\alpha]+f_{13}[c\alpha],\\ z_{42}&=f_{21}[a\alpha]+f_{22}[b\alpha]+f_{23}[c\alpha],\\ z_{43}&=f_{31}[a\alpha]+f_{32}[b\alpha]+f_{33}[c\alpha];\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} z_{51}&=f_{11}[a\beta]+f_{12}[b\beta]+f_{13}[c\beta],\\ z_{52}&=f_{21}[a\beta]+f_{22}[b\beta]+f_{23}[c\beta],\\ z_{53}&=f_{31}[a\beta]+f_{32}[b\beta]+f_{33}[c\beta].\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

則式(23)可簡書为:

$$\left.\begin{aligned} k_1&=k_1^0+z_{41}k_4+z_{51}k_5,\\ k_2&=k_2^0+z_{42}k_4+z_{53}k_5,\\ k_3&=k_3^0+z_{43}k_4+z_{53}k_5.\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$z_{41}, z_{42}, z_{43}, z_{51}, z_{52}, z_{53}$ 等名为介繫数，实即相当于第二節中克里格尔法之不定系数，因由該節之式(7)亦可化为(24)，(25)之擴展式也。將法方程式(17)之 w_1 代以 $[a\alpha]$, w_2 代以 $[b\alpha]$, w_3 代以 $[c\alpha]$，則解算之結果即得各介繫数 z_{41}, z_{42}, z_{43}; 同理代之以 $[a\beta]$, $[b\beta]$, $[c\beta]$ 等，則得介繫数 z_{51}, z_{52}, z_{53}, 此关系可由式(24)，(25)及(18)之比較得之。

將式(26)代入式(20)内，并按 k_4, k_5 集項，得

$$\left.\begin{aligned} &\{[a\alpha]+[a\alpha]z_{41}+[b\alpha]z_{42}+[c\alpha]z_{43}\}k_4+\{[\alpha\beta]+[a\alpha]z_{51}+[b\alpha]z_{52}+\\ &\quad+[c\alpha]z_{53}\}k_5+\{w_4+[a\alpha]k_1^0+[b\alpha]k_2^0+[c\alpha]k_3^0\}=0,\\ &\{[\alpha\beta]+[a\beta]z_{41}+[b\beta]z_{42}+[c\beta]z_{43}\}k_4+\{[\beta\beta]+[a\beta]z_{51}+[b\beta]z_{52}+\\ &\quad+[c\beta]z_{53}\}k_5+\{w_5+[a\beta]k_1^0+[b\beta]k_2^0+[c\beta]k_3^0\}=0.\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

命
$$\left.\begin{aligned} [AA]&=[a\alpha]+[a\alpha]z_{41}+[b\alpha]z_{42}+[c\alpha]z_{43},\\ [AB]&=[\alpha\beta]+[a\alpha]z_{51}+[b\alpha]z_{52}+[c\alpha]z_{53},\\ W_4&=w_4+[a\alpha]k_1^0+[b\alpha]k_2^0+[c\alpha]k_3^0,\\ [BA]&=[\alpha\beta]+[a\beta]z_{41}+[b\beta]z_{42}+[c\beta]z_{43},\\ [BB]&=[\beta\beta]+[a\beta]z_{51}+[b\beta]z_{52}+[c\beta]z_{53},\\ W_5&=w_5+[a\beta]k_1^0+[b\beta]k_2^0+[c\beta]k_3^0.\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

即可將式(27)化簡为：

$$\left.\begin{aligned}[AA]k_4+[AB]k_5+W_4=0,\\ [BA]k_4+[BB]k_5+W_5=0.\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

在此改化之法方程式中，其系数亦有对称之关系存在。吾人若將式(24)，(25)代入式(28)之 $[AB]$ 及 $[BA]$ 两式內，并顧及

$$f_{ik}=f_{ki},$$

之关系，即可証明 $$[AB]=[BA].$$

解式(29)后可得 k_4, k_5 之値，代入(26)內，即得 k_1, k_2, k_3 之値。

以上为博尔茲擴展法原理之大概。此法并不限应用一次，倘吾人于計算 k_4, k_5 时，仍用不定式解法，則可得 k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, 对于 w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 之擴展式，如再加入其他条件，即可再度施用此法繼續行之。故擴展法之优点在于可以随时將后加入之条件与已平差之条件合併，而得有如全体平差之結果。此点对于实用上具有甚大之意义，盖三角測量擴展时，亦可陸續將新条件加入，而得全体平差之結果。

擴展法之另一优点，在其計算精度之均匀。盖擴展系数旣可自表中査得，其精度完全相等，不若采用高斯約化法时各繫数精度之不等。是以擴展法应用之范圍亦可因而增大。但应用擴展法时，所有各观測值必須等权，如两部三角網之精度不同，即不能应用矣。

擴展法中权單位中誤差之計算与在高斯約化法时無異，以公式表之即为：

$$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{r}}=\pm\sqrt{\frac{-[w_ik_i]}{r}}. \tag{30}$$

但在应用擴展法时，可在任何階段求至該部为止之权單位中誤差，从而判断各条件对于中誤差之影响。此举对于誤差之檢討有莫大之意义。至于平差未知数任意函数中誤差之計算，則可依擴展法特徵演化如下。

今設所求之函数为：

$$\begin{aligned}F(l_1l_2\cdots l_n)&=f_0+f_1(l_1+v_1)+f_2(l_2+v_2)+\cdots f_n(l_n+v_n)=\\ &=F_0+F_1l_1+F_2l_2+\cdots F_nl_n.\end{aligned} \tag{31}$$

其权倒数为：
$$\frac{1}{P_F}=[FF].\tag{32}$$

又由第五章之式(50)，F_i 与 f_i 之关系为：
$$F_i=f_i-a_iL_1-b_iL_2-c_iL_3-\cdots,\tag{33}$$
L 为傳遞因数。比較第五章第四節之傳遞方程式及法方程式，即可知前者系以 $-[af],-[bf],\cdots$ 諸数代替后者之 $w_1,w_2,\cdots$ 諸不符值。在擴展法中，法方程式变为繫数之擴展式(22)，故若將此擴展式中之 $w_1',w_2'\cdots$ 等代以 $-[af],-[bf],\cdots$ 諸数，即得 L 之擴展式：
$$\left.\begin{aligned}-L_1&=f_{11}[af]+f_{12}[bf]+f_{13}[cf],\\-L_2&=f_{12}[af]+f_{22}[bf]+f_{23}[cf],\\-L_3&=f_{13}[af]+f_{23}[bf]+f_{33}[cf].\end{aligned}\right\}\tag{34}$$
是以用擴展法时，各 L 之計算可用已列出之擴展系数，以 $[af],[bf],\cdots$ 等代 $w_1,w_2,\cdots$ 直接計算之，与求系数 k 之法相同。至于 $[FF]$ 之計算，則仍应用第五章第四節之公式(55)，即：
$$\frac{1}{P}=[FF]=[ff]-[af]L_1-[bf]L_2-\cdots.\tag{35}$$

第四節 三角網法方程式之点綫表示法

凡由三角簡單形構成之網而用方向观測者，其角度条件所構成之法方程式，具有一种規律：即其平方和項(亦称为主項)之系数必为6，而所有其他各項系数必为 -2。例如一簡單三角鎖(圖 10.2)之法方程式为：

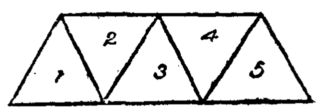

圖 10.2

$$\left.\begin{aligned}+6k_1-2k_2\qquad\qquad\qquad\qquad&+w_1=0,\\-2k_1+6k_2-2k_3\qquad\qquad\quad&+w_2=0,\\-2k_2+6k_3-2k_4\qquad&+w_3=0,\\-2k_3+6k_4-2k_5&+w_4=0,\\-2k_4+6k_5&+w_5=0.\end{aligned}\right\}$$

于此又可以看出：因三角形 1 与三角形 2 有一公共边，故在以 k_1 为主项之法方程式（即第一法方程式）内，有 $-2k_2$ 一項，以 k_2 为主項之法方程式（即第二法方程式）內，亦有 $-2k_1$ 之一項。余可类推。

为將此等关系更加明顯表示起見，德人非德烈 (Friedrich) 創用点綫表示法，以点表示每一法方程之主項，以綫表示各繫数間之关系。例如圖 10.2 之單鎖，如用点綫法表示之即为圖 10.3。其中以 1, 2, 3, 4, 5 所标之各点，代表法方程式中之 $6k_1$, $6k_2$, $6k_3$, $6k_4$, $6k_5$ 各主項，相連之綫則代表其他各項，如点 2 与点 1 及点 3 相連，故在 $6k_2$ 之法方程式中有 $-2k_1$ 及 $-2k_3$ 两項。余类推。

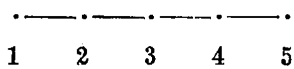

圖 10.3.

此种表示法之优点，在不必列出法方程式，而由点綫圖中即可讀出任意一法方程式之各項。因此在一复雜之三角網中，其各繫数之关系可以一目了然，不似法方程式之形式，常与其排列之次序有关。例如圖 10.4 为一較复雜之三角網，但其法方程式之关系可由其点綫圖（圖 10.5）中立刻讀出。

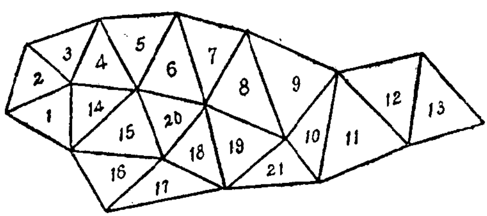

圖 10.4.

例中相当于第 18 三角形条件之繫数 k_{18}，其法方程式为：

$$6k_{18}-2k_{17}-2k_{19}-2k_{20}+w_{18}=0,$$

盖圖 10.5 中之点 18，有三綫相連于 17, 19, 20 各点。

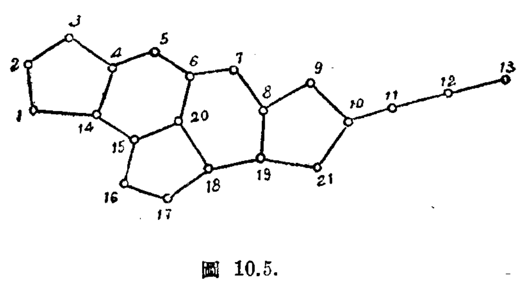

圖 10.5.

在点綫圖中不僅可看出角度条件繫数之关系，尙可看出边長方程式之情

形，因三角網圖中之每一多边中点形均相当于点綫圖中之一多边形。例如由 1, 2, 3, 4, 14 所組成之多边中点形，在 10.5 圖中为一多边形。因每个多边中点形均有一个边長条件，故在点綫圖中每个閉合之多边形即代表一个边長条件。相当于此边長条件之法方程式，除其主項外，尙包括構成此多边形各点之繫数項。但边長法方程式中之各項系数与各角度值有关，不似角度法方程式之簡單。

点綫圖对于擴展法之应用頗有帮助。盖用擴展法时，每將一網分为若干部分，按次合併。应当如何分划，最好于点綫圖中决定之，因点綫圖較三角網原圖更为清晰，各繫数間之关系，可一目了然也。

点綫法之应用僅限于由簡單三角形所構成之網，倘包括复雜之圖形，即不能用之表明所有法方程式之关系。例如一四边形，包括三个角度条件及一个边長条件，其間之关系，常因角度条件之取法而不同，此时点綫表示法即不能適用矣。

第五節　三角形單鎖之擴展式

擴展法之优点已如前節所述，但欲使計算工作減少，必須利用三角鎖角度法方程式之簡單形式，使其擴展式易于列出。是以本節將三角形單鎖之擴展式求法加以說明，以备应用。

圖 10.1 为一三角形單鎖，含有五个三角形，其法方程式已于前節列出：

$$\left.\begin{array}{lllllll}
M_{1\times} & +6k_1 & -2k_2 & & & & +w_1=0,\\
M_{2\times} & -2k_1 & +6k_2 & -2k_3 & & & +w_2=0,\\
M_{3\times} & & -2k_2 & +6k_3 & -2k_4 & & +w_3=0,\\
M_{4\times} & & & -2k_3 & +6k_4 & -2k_5 & +w_4=0,\\
M_{5\times} & & & & -2k_4 & +6k_5 & +w_5=0.
\end{array}\right\} \qquad (36)$$

今以不定乘数 M_1, M_2, $\cdots M_5$ 順次乘以上各式而相加之，即得下式：

$$Ak_1+Bk_2+Ck_3+Dk_4+Ek_5+L=0. \tag{37}$$

A, B, C, D, E, L 之意义如下:

$$\begin{aligned} &A=+6M_1-2M_2, && D=-2M_3+6M_4-2M_5, \\ &B=-2M_1+6M_2-2M_3, && E=-2M_4+6M_5, \\ &C=-2M_2+6M_3-2M_4, && L=M_1w_1+M_2w_2+M_3w_3+M_4w_4+M_5w_5. \end{aligned} \tag{38}$$

如欲求 k_1 之擴展式,則应令式(37)中 k_1 之系数 A 为 1, 而其他諸系数 B, C, D, E 均为零,或(38)应化为:

$$\left.\begin{aligned} &(A) && +6M_1-2M_2=1, \\ &(B) && -2M_1+6M_2-2M_3=0, \\ &(C) && -2M_2+6M_3-2M_4=0, \\ &(D) && -2M_3+6M_4-2M_5=0, \\ &(E) && -2M_4+6M_5=0. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

今命式(E)中之 $M_5=1$, 則由(E),(D),(C),(B)各式可順次求出:

$$M'_5=+1,\ M'_4=+3,\ M'_3=+8,\ M'_2=+21,\ M'_1=55. \tag{40}$$

如將(40)之 M'_1, M'_2 值代入(39)之(A)式中,卽得

$$A'=+6M'_1-2M'_2=288, \tag{41}$$

是以吾人若以 288 除所有各 M' 之値而代入式(39)內,必可同时满足(39)之所有各式,卽

$$M_1=+\frac{55}{288},\ M_2=+\frac{21}{288},\ M_3=+\frac{8}{288},\ M_4=+\frac{3}{288},\ M_5=+\frac{1}{288}. \tag{42}$$

代入(38)之 L 式內,卽可得相当于 $A=1$, $B=C=D=E=0$ 时之 L 式,更因(37)之关系,求得 k_1 之擴展式:

$$288k_1=-55w_1-21w_2-8w_3-3w_4-w_1.$$

应用同法亦可求得 $k_2, k_3, \cdots k_5$ 之擴展式。茲將其列表如下:

$$\left.\begin{aligned}288k_1&=-55w_1-21w_2-\ 8w_3-\ 3w_4-\ 1w_5,\\288k_2&=-21w_1-63w_2-24w_3-\ 9w_4-\ 3w_5,\\288k_3&=-\ 8w_1-24w_2-64w_3-24w_4-\ 8w_5,\\288k_4&=-\ 3w_1-\ 9w_2-24w_3-63w_4-21w_5,\\288k_5&=-\ 1w_1-\ 3w_2\ -8w_3-21w_4-55w_5.\end{aligned}\right\}\tag{43}$$

公式(43)僅为五个三角形所構成單鎖之擴展式，但無論三角形数目增多或減少，法方程式之特性永远保存，是以不难求得一普遍定律。博尔兹之專刊中曾得一結果：由式(43)之豎列系数中可列一普遍公式，能將此級数任意向前推算。其关系卽每級数中之第 i 項应为其前一項之三倍減再前一項之値也。或以公式表示之为：

$$a_i=3a_{i-1}-a_{i-2}.\tag{44}$$

根据此公式，吾人可得下列各級数：

$$\begin{array}{rrrrrrrr}1, & 3, & 8, & 21, & 55, & 144, & 377, & 987,\cdots\\3, & 9, & 24, & 63, & 165, & 432, & 1131,\cdots & \\8, & 24, & 64, & 168, & 440, & 1152,\cdots & & \\21, & 63, & 168, & 439, & 1149,\cdots & & & \\55, & 165, & 438, & 1149,\cdots & & & & \\144, & 432, & 1152, & & & & & \\377, & 1131, & & & & & & \\987, & & & & & & & \end{array}\tag{45}$$

此外尙有相当于 A' 之級数，亦遵守同一定律：

$$6,\ 16,\ 42,\ 110,\ 288,\ 754,\ 1974,\ 5168,\cdots.\tag{46}$$

应用以上諸級数可以立卽寫出包含任何数目三角形之三角形單鎖系数擴展式。例如今有六个三角形之單鎖，其繫数擴展式左方每个繫数之系数应为級数(46)之第六項，卽 754，右方 w_6 之系数由上至下按(45)之第一級数，w_5 由上至下按(45)之第二級数，余类推。但每列均至对角綫上为止，其余各項均可按对称之方法求出：

$$\left.\begin{aligned}
754k_1&=\underline{-144w_1}-\ 55w_2-\ 21w_3-\quad 8w_4-\quad 3w_5-\quad 1w_6,\\
754k_2&=(-55w_1)\underline{-165w_2}-\ 63w_3-\ 24w_4-\quad 9w_5-\quad 3w_6,\\
754k_3&=(-21w_1)(-63w_2)\underline{-168w_3}-\ 64w_4-\ 24w_5-\quad 8w_6,\\
754k_4&=(-\ 8w_1)(-24w_2)(-64w_3)\underline{-168w_4}-\ 63w_5-\ 21w_6,\\
754k_5&=(-\ 3w_1)(-\ 9w_2)(-24w_3)(-63w_4)\underline{-165w_5}-\ 55w_6,\\
754k_6&=(-\ 1w_1)(-\ 3w_2)(-\ 8w_3)(-21w_4)-(55w_5)\underline{-144w_6}.
\end{aligned}\right\}\quad(47)$$

上式中所有对称之項均用括号表示之。

根据上述法則，每个三角形單鎖之擴展式均極易列出。 但有时計算需用小数而不用分数，故博尔兹之專刊中仍列有变成小数之各表。

第六節　多边中点形及單鎖环形網之擴展式

多边中点形与單鎖环形網之法方程式形式相同，故一併論之。圖 10.6 为一多边中点形，圖 10.7 为一單鎖环形網，其点綫圖之形式完全相同，故普通言之，設有 n 个三角形其法方程式均得下列形式：

$$\left.\begin{array}{l}
+6k_1-2k_2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -2k_n+w_1=0,\\
-2k_1+6k_2-2k_3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +w_2=0,\\
\qquad -2k_2+6k_3-2k_4 \qquad\qquad\qquad\qquad +w_3=0,\\
\qquad\qquad -2k_3+6k_4-2k_5 \qquad\qquad\qquad +w_4=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
\qquad\qquad\qquad -2k_{n-2}+6k_{n-1}-2k_n+w_{n-1}=0,\\
-2k_1 \qquad\qquad\qquad\qquad -2k_{n-1}+6k_n+\ w_n\ =0.
\end{array}\right\}\quad(48)$$

欲求各繫数之擴展式，可用上節同一方法，依次乘以 $M_1, M_2, \cdots M_n$

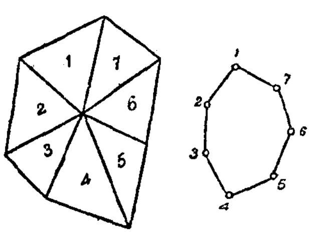

圖 10.6.

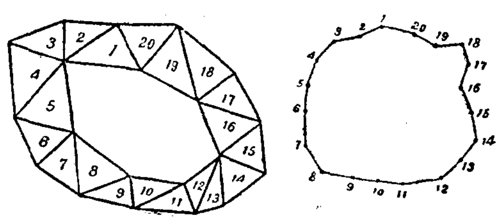

圖 10.7.

諸不定乘数而相加之。命其和数方程式之 k_1 系数为 A, k_2 系数为 B, 順次以降。今如欲求 k_1 之擴展式,卽命 A 为 1, $B=C=\cdots=0$, 于是得下列各式:

$$\left.\begin{array}{ll}(\mathrm{A}) & +6M_1-2M_2-2M_n=1,\\ (\mathrm{B}) & -2M_1+6M_2-2M_3=0,\\ (\mathrm{C}) & -2M_2+6M_3-2M_4=0,\\ \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\end{array}\right\}$$

此等式与前節式 (39) 之不同点为每式均含三項,故不能任意假定一 M 之值,順推其余之 M 值。但此时可利用中点形及單鎖环形網之一特徵以求之。由圖 10.6 及圖 10.7 可知,在三角形(1)两边最相隣之三角形对于 k_1 之影响一定相同,卽 w_2 与 w_n 对于 k_1 之擴展系数必相等。同理 w_1 与 w_{n-1} 之擴展系数亦必相等。是以吾人可利用此特徵自与三角形(1)相对之三角形出發,例如在圖 10.3 中,因 n 为奇数,此三角形有二个,卽(4)与(5),在 10.4 圖中 n 为偶数,此三角形为(11)。为求 M_1, $M_2,\cdots$ 諸值,玆將其分为 $n=$ 奇数或偶数两种情形,幷以 $n=5$ 及 $n=6$ 两种情形为例分述之。当 n 为 5 时:

$$\left.\begin{array}{llll}(\mathrm{A}) & +6M_1-2M_2-2M_5=1, & (\mathrm{D}) & -2M_3+6M_4-2M_5=0,\\ (\mathrm{B}) & -2M_1+6M_2-2M_3=0, & (\mathrm{E}) & -2M_1-2M_4+6M_5=0.\\ (\mathrm{C}) & -2M_2+6M_3-2M_4=0, & & \end{array}\right\} \quad (49)$$

因 $M_2=M_5$, $M_3=M_4$ 之关系,玆命式(C)中之 M_3' 及 M_4' 为 1, 依次求得

$$\left.\begin{array}{l}M_3'=M_4'=1,\\ M_2'=M_5'=2,\\ M_1'=5.\end{array}\right\} \quad (50)$$

代入(A)式內,得 $A'=22$。(44)之級数及 A' 亦有前節(44)之关系,故不难將其繼續推算。

当 $n=6$ 时,

$$\left.\begin{array}{ll}(\mathrm{A})\ +6M_1-2M_2-2M_6=1, & (\mathrm{D})\ -2M_3+6M_4-2M_5=0,\\ (\mathrm{B})\ -2M_1+6M_2-2M_3=0, & (\mathrm{E})\ -2M_4+6M_5-2M_6=0,\\ (\mathrm{C})\ -2M_2+6M_3-2M_4=0, & (\mathrm{F})\ -2M_1-2M_5+6M_6=0.\end{array}\right\}(49)^*$$

此时可命 $M'_4=2$，以求得一繫数級数，計为

$$\left.\begin{array}{l}M'_4=2,\\ M'_3=M'_5=3,\\ M'_2=M'_6=7,\\ M'_1=18.\end{array}\right\}\qquad(50)^*$$

又代入(A)式得 $A'=80$。(50)* 以及其相当之 A' 亦遵守同一級数定則(44)。

以上虽專論 k_1 之擴展式，但由多边中点形及單鎖环形網之特徵，任何三角形之繫数均应相同，盖每个三角形均無处于中間或边上之分别，是以上述之級数已足供寫出所有繫数之擴展式。茲將 n 为奇数及偶数时 M' 及 A' 之級数列下：

n（奇数）	1	3	5	7	9	11	13	15……
M' 之級数	1.	2,	5,	13,	34,	89,	233,	610……
A' 之級数		8	22	58	152	398	1042	2728……

(51)

n（偶数）	2	4	6	8	10	12	14	16……
M' 之級数	3	7	18	47	123	322	843	2207……
A' 之級数		30	80	210	550	1440	3770	9870……

(52)

今設欲求 $n=7$ 时之擴展式，先以 k_1 为例，左方 k_1 之系数为 58，w_1 之系数为 13，余类推。今書之于下：

$$58k_1=-13w_1-5w_2-2w_3-w_4-w_5-2w_6-5w_7.$$

注意 w_2 与 w_7 之系数相等，w_3 与 w_6 之系数相等，余类推。如欲寫 k_i 之擴展式，則左方为 $58\,k_i$，右方之系数不变；惟 w_1 改为 w_i，w_2 改为 w_{i+1}，然后循环寫去卽得。今再举 k_6 为例：

$$58k_6=-13w_6-5w_7-2w_1-w_2-w_3-2w_4-5w_5.$$

第七節 四边形單鎖之擴展式

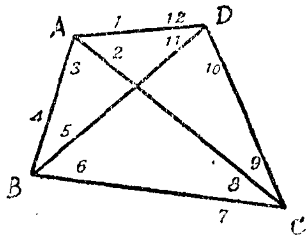

圖 10.8.

四边形單鎖为我國已往大三角測量常用之圖形，其角度条件之繫数擴展式亦極易求得①。兹根据第七章第五節之公式，取四边形$DACB$, $ABDC$及$ABCD$为角度条件，前二个均为折疊之四边形，其条件方程式为(參考圖 10.8)：

$$\left.\begin{aligned}&(\mathrm{a})\quad -v_1+v_2+v_5-v_6+v_7-v_8-v_{11}+v_{12}+w_a=0,\\&(\mathrm{b})\quad -v_2+v_3-v_4+v_5+v_8-v_9+v_{10}-v_{11}+w_b=0,\\&(\mathrm{c})\quad -v_1+v_3-v_4+v_6-v_7+v_9-v_{10}+v_{12}+w_c=0.\end{aligned}\right\}\tag{53}$$

由此列出之法方程式为：

$$8k_a+w_c=0,\qquad 8k_b+w_b=0,\qquad 8k_c+w_c=0.$$

此簡易之法方程式固可極易化为擴展式：

$$k_a=-\frac{1}{8}w_a,\quad k_b=-\frac{1}{8}w_b,\quad k_c=-\frac{1}{8}w_c.\tag{54}$$

今再進而观測一四边形單鎖如圖 10.9，共含有五个四边形，自左至右，号以 1, 2, 3, 4, 5，每个四边形中又有三个角度条件，相当于(53)中之条件。兹命第1个四边形之条件为(1a), (1b), (1c)，第二个四边形之条件(2a), (2b), (2c)，余类推。且每个条件之次序与正負号均遵照式(53)与圖 10.4 之关系。即圖 10.9 中用斜綫所示之折疊四边形相当于条件(a)，空白之折疊四边形相当于条件(b)，全个四边形之条件为 (c)。如此則可得下列法方程式：

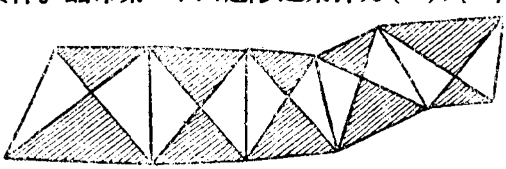
圖 10.9.

① 見陈永令著：“四边形單鎖之擴展平差法”。

$$
\left.\begin{array}{lll}
(1a) & +8k_{1a} & +w_{1a}=0, \\
(1b) & +8k_{1b}+2k_{2b}+2k_{2c} & +w_{1b}=0, \\
(1c) & +8k_{1c}-2k_{2b}-2k_{2c} & +w_{1c}=0, \\
(2a) & +8k_{2a} & +w_{2a}=0, \\
(2b) & +8k_{2b}+2k_{1b}-2k_{1c}+2k_{3b}+2k_{3c} & +w_{2b}=0, \\
(2c) & +8k_{2c}+2k_{1b}-2k_{1c}-2k_{3b}-2k_{3c} & +w_{2c}=0, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & \\
(5a) & +8k_{5a} & +w_{5a}=0, \\
(5b) & +8k_{5b}+2k_{4b}-2k_{4c} & +w_{5b}=0, \\
(5c) & +8k_{5c}+2k_{4b}-2k_{4c} & +w_{5c}=0.
\end{array}\right\} \tag{55}
$$

由(55)可知,所有 $k_{1a}, k_{2a}, \cdots k_{5a}$ 諸式均不与他式發生关系,故其擴展式可直接書出:

$$
8k_{ia}=-w_{ia}, \qquad i=1\cdots n. \tag{56}
$$

n 为全鎖四边形之总数目。

欲求(b),(c)各繫数之擴展式,將相当之(b),(c)两式相加減,即得

$$
\left.\begin{array}{l}
8k_{1b}+8k_{1c} \qquad\qquad\qquad =-w_{1b}-w_{1c}, \\
8k_{1b}-8k_{1c}+4k_{2b}+4k_{2c}=-w_{1b}+w_{1c}, \\
4k_{1b}-4k_{1c}+8k_{2b}+8k_{2c}=-w_{2b}-w_{2c}, \\
8k_{2b}-8k_{2c}+4k_{3b}+4k_{3c}=-w_{2b}+w_{2c}, \\
4k_{2b}-4k_{2c}+8k_{3b}+8k_{3c}=-w_{3b}-w_{3c}, \\
8k_{3b}-8k_{3c}+4k_{4b}+4k_{4c}=-w_{3b}+w_{3c}, \\
4k_{3b}-4k_{3c}+8k_{4b}+8k_{4c}=-w_{4b}-w_{4c}, \\
8k_{4b}-8k_{4c}+4k_{5b}+4k_{5c}=-w_{4b}+w_{4c}, \\
4k_{4b}-4k_{4c}+8k_{5b}+8k_{5c}=-w_{5b}-w_{5c}, \\
8k_{5b}-8k_{5c} \qquad\qquad\qquad =-w_{5b}+w_{5c}.
\end{array}\right\} \tag{57}
$$

將(57)之首尾两式乘 3,其他每相鄰二式可以消去两項,即得

$$
\left.\begin{array}{l}
24(k_{1b}+k_{1c})=-3(w_{1b}+w_{1c}), \\
24(k_{1b}-k_{1c})=-4(w_{1b}-w_{1c})+2(w_{2b}+w_{2c}), \\
24(k_{2b}+k_{2c})=-4(w_{2b}+w_{2c})+2(w_{1b}-w_{1c}), \\
24(k_{2b}-k_{2c})=-4(w_{2b}-w_{2c})+2(w_{3b}+w_{3c}), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
24(k_{5b}+k_{5c})=-4(w_{5b}+w_{5c})+2(w_{4b}-w_{4c}), \\
24(k_{5b}-k_{5c})=-3(w_{5b}-w_{5c}).
\end{array}\right\} \tag{58}
$$

再將(58)之第一二两式，第三四两式分别相加減，卽得

$$\left.\begin{aligned}48k_{1b}&=-7w_{1b}+\ w_{1c}+2w_{2b}+2w_{2c},\\48k_{1c}&=+\ w_{1b}-7w_{1c}-2w_{2b}-2w_{2c},\\48k_{2b}&=+2w_{1b}-2w_{1c}-8w_{2b}+2w_{3b}+2w_{3c},\\48k_{2c}&=+2w_{1b}-2w_{1c}-8w_{2c}-2w_{3b}-2w_{3c},\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\48k_{5b}&=+2w_{4b}-2w_{4c}-7w_{5b}-\ w_{5c},\\48k_{5c}&=+2w_{4b}-2w_{4c}-\ w_{5b}-7w_{5c}.\end{aligned}\right\}\qquad(59)$$

(56)与(59)卽为四边形單鎖之角度繫数擴展式。(56)为一般之公式，(59)之普遍公式可分　下列数条述之：

設有一四边形單鎖共有 n 个四边形，其(b)，(c)两类条件方程之繫数擴展式可按下式列出：

自左至右第1个四边形：

$$\left.\begin{aligned}48k_{1b}&=-7w_{1b}+\ w_{1c}+2w_{2b}+2w_{2c},\\48k_{1c}&=+\ w_{1b}-7w_{1c}-2w_{2b}-2w_{2c}.\end{aligned}\right\}\qquad(60)$$

其他各中間四边形，例如第 i 个四边形，$i=2,\ 3,\cdots(n-1)$.

$$\left.\begin{aligned}48k_{ib}&=+2w_{(i-1)b}-2w_{(i-1)c}-8w_{ib}+2w_{(i+1)b}+2w_{(i+1)c},\\48k_{ic}&=+2w_{(i-1)b}-2w_{(i-1)c}-8w_{ic}-2w_{(i+1)b}-2w_{(i+1)c}.\end{aligned}\right\}\qquad(61)$$

第 n 个四边形：

$$\left.\begin{aligned}48k_{nb}&=+2w_{(n-1)b}-2w_{(n-1)c}-7w_{nb}-w_{nc},\\48k_{nc}&=+2w_{(n-1)b}-2w_{(n-1)c}-w_{nb}-7w_{nc}.\end{aligned}\right\}\qquad(62)$$

(56)，(60)，(61)，(62)联合于一处卽为四边形單鎖之整个繫数擴展式。

例：　前中國地理研究所大地測量組在重慶歌乐山至北碚間所举行之三角測量，系用等权之方向观測，应用普通平差方法之結果，已于第七章第七節之例中作出，今試用擴展法將其平差。

由观測結果列出条件方程及法方程之步驟，与普通方法無異。为应用擴展法起見，玆將法方程式之次序加以改变，便符合本節所論四边形單鎖之次序。繫数用大寫之 K 表示之。

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
a	+8						
b		+8					
c			+8				
d				+8		+2	+2
e					+8	−2	−2
f		(I)		+2	−2	+8	
g				+2	−2		+8
h						+2	−2
i						+2	−2
j		(II)		−2	−2		
k	+1.6022	(III)		−4.6577	−0.1251	−0.6637	−0.6637
l		−1.1614	(IV)	−1.3120	+1.3120	−6.0529	+0.0743
m			−4.2590	(V)		+0.2826	−0.2826
S	+9.6022	+6.8386	+3.7410	+4.0303	+3.1869	+5.5660	+3.1280

K_8	K_9	K_{10}	K_{11}	K_{12}	K_{13}	w	
			+1.6022			+0.15	1
				−1.1614		−0.74	2
					−4.2590	−0.56	3
		−2	−4.6577	−1.3120		+1.73	4
		−2	−0.1251	+1.3120		−0.84	5
+2	+2		−0.6637	−6.0529	+0.2826	−4.15	6
−2	−2		−0.6637	+0.0743	−0.2826	−1.07	7
+8				−1.6966	−1.7640	+0.02	8
	+8			−1.6966	−0.1168	+3.06	9
		+6	+1.7931			+0.52	10
		+1.7931	+35.8735	+2.9088		−1.0924	11
−1.6966	−1.6966		+2.9088	+36.2643	+3.1623	+3.1346	12
−1.7640	−0.1168			+3.1623	+35.3214	+3.0871	13
+4.5394	+6.1866	+3.7931	+36.0674	+31.8022	+32.3439		

根据上表，將法方程式分为五組，所有四边形之角度条件由 a 至 i，列为第 I 組，j 为三角形 II5—II6—II7 之角度条件，为第 II 組，III, IV, V 三組为四边形之边長条件。

根据本節所得之結果，可將第 I 組單独之擴展式列下：

第 I 組之擴展式

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	Σ
$48K^0_1$	-6									-6
$48K^0_2$		-6								-6
$48K^0_3$			-6							-6
$48K^0_4$				-7	$+1$	$+2$	$+2$			-2
$48K^0_5$				$+1$	-7	-2	-2			-10
$48K^0_6$				$+2$	-2	-8		$+2$	$+2$	-4
$48K^0_7$				$+2$	-2		-8	-2	-2	-12
$48K^0_8$						$+2$	-2	-7	-1	-8
$48K^0_9$						$+2$	-2	-1	-7	-8
Σ	-6	-6	-6	-2	-10	-4	-12	-8	-8	

欲合併第 I, II 两組，可自法方程式表中出發，法方程式 j 中 K_1 至 K_3 及 K_6 至 K_9 之系数均为零，K_4, K_5 之系数各为 -2。故在計算介繫数时，应命第 I 組擴展式中之 w_4, w_5 为 -2，其余之 w 为零，由是求得介繫数如下：

$$z_{10\cdot1}=z_{10\cdot2}=z_{10\cdot3}=0,$$

$$z_{10\cdot6}=z_{10\cdot7}=z_{10\cdot8}=z_{10\cdot9}=0,$$

$$z_{10\cdot4}=\frac{(-2)\times(-7)+(-2)\times(+1)}{48}=+\frac{1}{4},$$

$$z_{10\cdot5}=\frac{(-2)(+1)+(-2)(-7)}{48}=+\frac{1}{4}.$$

合併后 K_4, K_5 之值与合併前 K^0_4, K^0_5 之关系如下：

$$K_4=K^0_4+z_{10\cdot4}K_{10}=K^0_4+\frac{1}{4}K_{10},$$

$$K_5=K^0_5+z_{10\cdot5}K_{10}=K^0_5+\frac{1}{4}K_{10};$$

代入法方程式 j 內，因

$$-2K_4-2K_5=-K_{10}-2K_4^0-2K_5^0,$$

又由第一組擴展式中，可得

$$-2K_4^0-2K_5^0=\frac{1}{4}w_4+\frac{1}{4}w_5,$$

故 j 式可化为：

$$(6-1)K_{10}=-\frac{1}{4}w_4-\frac{1}{4}w_5-w_{10},$$

解出得　　$240K_{10}=-12w_4-12w_5-48w_{10}.$

代入 K_4, K_5 之式內，卽得合併后之擴展式：

$$240K_4=-38w_4+2w_5+10w_6+10w_7-12w_{10},$$

$$240K_5=+2w_4-38w_5-10w_6-10w_7-16w_{10}.$$

因其他介繫数均为零，故其他繫数之擴展式不变。茲將 I, II 两組合併后之擴展式再列表如下：

I, II 两組合併之擴展式

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	Σ
$240K_1$	−30										−30
$240K_2$		−30									−30
$240K_3$			−30								−30
$240K_4$				−38	+ 2	+10	+10			−12	−28
$240K_5$				+ 2	−38	−10	−10			−12	−68
$240K_6$				+10	−10	−40		+10	+10		−20
$240K_7$				+10	−10		−40	−10	−10		−60
$240K_8$						+10	−10	−35	− 5		−40
$240K_9$						+10	−10	− 5	−35		−40
$240K_{10}$				−12	−12					−48	−72
Σ	−30	−30	−30	−28	−68	−20	−60	−40	−40	−72	

其次再將第 III 組之法方程式 k 加入，其方法与上同，但此处改用分数計算將式 k 之 K_1, K_2,…各系数代入上表之 w_1, w_2,…，卽得介繫数 $z_{11\cdot1}\to z_{11\cdot10}$ 如下：

介繫数 $z_{11\cdot1} \rightarrow z_{11\cdot10}$ 之計算 (表内 $\begin{matrix} i=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 \\ x=a,b,c,d,e,f,g,h,i,j \end{matrix}$)

	$[ak]f_{i1}$	$[bk]f_{i2}$	$[ck]f_{i3}$	$[dk]f_{i4}$	$[ek]f_{i5}$	$[fk]f_{i6}$
$z_{11\cdot1}$	-0.200274					
$z_{11\cdot2}$						
$z_{11\cdot3}$						
$z_{11\cdot4}$				$+0.737470$	-0.001043	-0.027654
$z_{11\cdot5}$				-0.038814	$+0.019809$	$+0.027654$
$z_{11\cdot6}$				-0.194071	$+0.005213$	$+0.110616$
$z_{11\cdot7}$				-0.194071	$+0.005213$	
$z_{11\cdot8}$						-0.027654
$z_{11\cdot9}$						-0.027654
$z_{11\cdot10}$				$+0.232885$	$+0.006256$	
Σ	-0.200274			$+0.543399$	$+0.035448$	$+0.055308$

	$[gk]f_{i7}$	$[hk]f_{i8}$	$[ik]f_{i9}$	$[jk]f_{i10}$	Σ	$z_{11\cdot i}[xk]$
$z_{11\cdot1}$					-0.200274	-0.320879
$z_{11\cdot2}$						
$z_{11\cdot3}$						
$z_{11\cdot4}$	-0.027654			-0.089656	$+0.591463$	-2.754857
$z_{11\cdot5}$	$+0.027654$			-0.089656	-0.053353	$+0.006674$
$z_{11\cdot6}$					-0.078242	$+0.051929$
$z_{11\cdot7}$	$+0.110616$				-0.078242	$+0.051929$
$z_{11\cdot8}$	$+0.027654$					
$z_{11\cdot9}$	$+0.027654$					
$z_{11\cdot10}$				-0.358622	-0.119481	-0.214241
Σ	$+0.165924$			-0.537934	$+0.061871$ $+0.061871$	$+35.873500=[ik]$
						$\Sigma=+32.694055=[AA]$

上表中豎列之 Σ 一列內卽为各介繫数之值，乘以法方程式內各相当 K 之系数，卽得最右方之一列。由

$$[AA]_{11}=[kk]+z_{11\cdot1}[ak]+z_{11\cdot2}[bk]+\cdots,$$

可得

$$[AA]_{11}=+32.694055;$$

又由

$$W_{11}=w_{11}+z_{11\cdot1}w_1+z_{11\cdot2}w_2+\cdots,$$

可得

$$W_{11}=w_{11}-0.200274w_1+0.591463w_4-0.053353w_5-$$
$$-0.078242w_6-0.078242w_7-0.119481w_{10}.$$

因是知 K_{11} 之公式为：

$$+32.694055K_{11}=-W_{11}.$$

將此化为擴展式，又可計算其他各 K 之擴展式，其步驟与前用分数之方法初無不同之处。玆为節省篇幅計，將此擴展式及 IV，V 两組之合併計算均略去，而將最后之繫数 $K_1\to K_{13}$ 擴展式列于下頁之表內。

在計算时須注意对称之关系，可用以檢核計算誤差，但平方項，卽对角綫上之各項則不能用此法檢核，普通应于全部計算完畢后，將此諸項再算一次，以免誤差。但最可靠之檢核方法，可將至每一段落之繫数值算出，代入法方程式內，观其是否可以滿足，此种檢核在大規模計算

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7
K_1	−0.126235	−0.000073	+0.000027	+0.003661	−0.000344	−0.000868	−0.000486
K_2	−0.000073	−0.125680	+0.000255	+0.000358	−0.000162	−0.003643	−0.000060
K_3	+0.000027	+0.000255	−0.133823	−0.000134	+0.000061	+0.003422	−0.002034
K_4	+0.003661	+0.000358	−0.000134	−0.169221	+0.009383	+0.044995	+0.043114
K_5	−0.000344	−0.000162	+0.000061	+0.009383	−0.158458	−0.042663	−0.041809
K_6	−0.000868	−0.003643	+0.003422	+0.044995	−0.042663	−0.186838	+0.000026
K_7	−0.000486	−0.000060	−0.002034	+0.043114	−0.041809	+0.000026	−0.167344
K_8	0	+0.000007	−0.004645	−0.000004	+0.000002	+0.042799	−0.042761
K_9	−0.000010	−0.000091	−0.001233	+0.000048	−0.000022	+0.041475	−0.041974
K_{10}	−0.000737	−0.000043	+0.000016	−0.047815	−0.050205	−0.000518	−0.000290
K_{11}	+0.006164	+0.000363	−0.000136	−0.018281	+0.001719	+0.004338	+0.002426
K_{12}	−0.000500	−0.004689	+0.001758	+0.002462	−0.001117	−0.025096	−0.000417
K_{13}	+0.000051	+0.000479	−0.016573	−0.000252	+0.000114	+0.006429	−0.003821
Σ	−0.119350	−0.132979	−0.153039	−0.131686	−0.283501	−0.116141	−0.255430

↑ 接上同	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	Σ
	0	−0.000010	−0.000737	+0.006164	−0.000500	+0.000051	−0.119350
	+0.000007	−0.000091	−0.000043	+0.000363	−0.004689	+0.000479	−0.132979
	−0.004646	−0.001234	+0.000017	−0.000136	+0.001758	−0.016573	−0.153039
	−0.000004	+0.000048	−0.047815	−0.018281	+0.002462	−0.000251	−0.131686
	+0.000002	−0.000022	−0.050205	+0.001719	−0.001117	+0.000114	−0.283501
	+0.042797	+0.041473	−0.000518	+0.004336	−0.025097	+0.006429	−0.116149
	−0.042761	−0.041974	−0.000290	+0.002426	−0.000417	−0.003821	−0.255430
	−0.148303	−0.021507	+0.000001	−0.000004	+0.000049	−0.008727	−0.183093
	−0.021506	−0.146029	−0.000006	+0.000047	−0.000631	−0.002317	−0.172249
	+0.000001	−0.000006	−0.200440	+0.003678	−0.000299	+0.000031	−0.296627
	−0.000004	+0.000049	+0.003678	−0.030780	+0.002500	−0.000256	−0.028220
	+0.000049	−0.000632	−0.000299	+0.002500	−0.032300	+0.003302	−0.054979
	−0.008727	−0.002317	+0.000031	−0.000256	+0.003302	−0.031131	−0.052671
	−0.183095	−0.172252	−0.296626	−0.028224	−0.054979	−0.052670	

中必須常常行之，以免一次錯誤影响全盤。此种檢核之可能，僅于擴展法中有之，是以亦为擴展法之优点。將不符值 w 之值代入上列之最后擴展式中，即可求得各繫数之值如下表：

繫数 K 值之計算:

	w_1 +0.15	w_2 −0.74	w_3 −0.56	w_4 +1.73	w_5 −0.84	w_6 −4.15	w_7 −1.07
K_1	−0.018935	+0.000054	−0.000015	+0.006334	+0.000289	+0.003602	+0.000520
K_2	−0.000011	+0.093003	−0.000143	+0.000619	+0.000136	+0.015118	+0.000064
K_3	+0.000004	−0.000189	+0.074941	−0.000232	−0.000051	−0.014205	+0.002176
K_4	+0.000549	−0.000265	+0.000075	−0.292752	−0.007882	−0.186729	−0.046132
K_5	−0.000052	+0.000120	−0.000034	+0.016233	+0.133105	+0.177051	+0.044736
K_6	−0.000130	+0.002696	−0.001916	+0.077841	+0.035837	+0.775378	−0.000028
K_7	−0.000073	+0.000044	+0.001139	+0.074587	+0.035120	−0.000108	+0.179058
K_8	0	−0.000005	+0.002601	−0.000007	−0.000002	−0.177616	+0.045754
K_9	−0.000002	+0.000067	+0.000690	+0.000083	+0.000018	−0.172121	+0.044912
K_{10}	−0.000111	+0.000032	−0.000009	−0.082720	+0.042172	+0.002150	+0.000310
K_{11}	+0.000925	−0.000269	+0.000076	−0.031626	−0.001444	−0.018003	−0.002596
K_{12}	−0.000075	+0.003470	−0.000984	+0.004259	+0.000938	+0.104148	+0.000446
K_{13}	+0.000008	−0.000354	+0.009281	−0.000436	−0.000096	−0.026680	+0.004088
Σ	−0.017903	+0.098404	+0.085702	−0.227817	+0.238141	+0.481985	+0.273310

↑接上同	w_8 +0.02	w_9 +3.06	w_{10} +0.52	w_{11} −1.0924	w_{12} +3.1346	w_{13} +3.0871	Σ $=K_i$	
	0	−0.000031	−0.000383	−0.006734	−0.001567	+0.000157	−0.016709	1
	0	−0.000278	−0.000022	−0.000397	−0.014698	+0.001479	+0.094870	2
	−0.000093	−0.003776	+0.000009	+0.000149	+0.005511	−0.051163	+0.013081	3
	0	+0.000147	−0.024864	+0.019970	+0.007714	−0.000775	−0.530941	4
	0	−0.000067	−0.026107	−0.001876	−0.003501	+0.000352	+0.339958	5
	+0.000856	+0.126907	−0.000269	−0.004737	−0.078669	+0.019847	+0.953613	6
	−0.000855	−0.128440	−0.000151	−0.002650	−0.001307	−0.011796	+0.144568	7
	−0.002966	−0.065811	+0.000001	+0.000004	+0.000154	−0.026941	−0.224834	8
	−0.000430	−0.446849	−0.000003	−0.000051	−0.001978	−0.007153	−0.582817	9
	0	−0.000018	−0.104229	−0.004018	−0.000937	+0.000096	−0.147282	10
	0	+0.000150	+0.001913	+0.033624	+0.007837	−0.000790	−0.010203	11
	+0.000001	−0.001934	−0.000155	−0.002731	−0.101248	+0.010194	+0.016329	12
	−0.000175	−0.007090	+0.000016	+0.000280	+0.010350	−0.096105	−0.106913	13
	−0.003662	−0.527091	−0.154246	+0.030832	−0.172337	−0.162598	−0.057280 −0.057280	

欲將此值与第七章第七節所得之結果比較，必須注意各 k 与 K 之关系。兹再按小 k 之次序列出，以資比較：

$$k_1 = K_{11} = -0.0102,$$

$$k_2 = K_{12} = +0.0163,$$

$$k_3 = K_{13} = -0.1069,$$

$$k_4 = K_{10} = -0.1473,$$

$$k_5 = K_1 = -0.0167,$$

$$k_6 = K_4 = -0.5309,$$

$$k_7 = K_5 = +0.3400,$$

$$k_8 = K_2 = +0.0949,$$

$$k_9 = K_6 = +0.9536,$$

$$k_{10} = K_7 = +0.1446,$$

$$k_{11} = K_8 = -0.2248,$$

$$k_{12} = K_3 = +0.0131,$$

$$k_{13} = K_9 = -0.5828.$$

比較两法所得之値其差均在小数点后第四位。將此代入繫数方程內，卽求得各改正数之値（比較第七章第七節之条件方程表）。

		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
$k_1=-0.0102$	a				-0.0218	$+0.0329$	-0.0111
$k_2=+0.0163$	b						
$k_3=-0.1069$	c						
$k_4=-0.1473$	d	$+0.1473$	-0.1473	$+0.1473$	-0.1473		
$k_5=-0.0167$	e					-0.0167	$+0.0167$
$k_6=-0.5309$	f				$+0.5309$	-0.5309	
$k_7=+0.3400$	g				-0.3400		$+0.3400$
$k_8=+0.0949$	h						
$k_9=+0.9536$	i						
$k_{10}=+0.1446$	j						
$k_{11}=-0.2248$	k						
$k_{12}=+0.0131$	l						
$k_{13}=-0.5828$	m						
	v	$+0.1473$	-0.1473	$+0.1473$	$+0.0218$	-0.5147	$+0.3456$
測站檢核		0		0			
	vv	0.0217	0.0217	0.0217	0.0005	0.2649	0.1194

(續 一)

v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}
−0.0073	+0.0108	−0.0036		−0.0115	+0.0247	−0.0131		
						+0.0318	−0.0438	+0.0120
		+0.1473	−0.1473					
+0.0167	−0.0167			−0.0167	+0.0167			
	+0.5309	−0.5309			−0.5309	+0.5309		
−0.3400		+0.3400		−0.3400		+0.3400		
							−0.0949	+0.0949
						−0.9536	+0.9536	
						−0.1446		+0.1446
−0.3306	+0.5250	−0.0472	−0.1473	−0.3682	−0.4895	−0.2086	+0.8149	+0.2515
−0.0001				+0.0001				
0.1093	0.2756	0.0022	0.0217	0.1356	0.2396	0.0435	0.6641	0.0633

（續　二）

v_{16}	v_{17}	v_{13}	v_{19}	v_{20}	v_{21}	v_{22}	v_{23}	v_{24}	v_{25}
		−0.0064	+0.0243	−0.0179					
+0.0142	−0.0246	+0.0104			+0.0183	−0.0551	+0.0368		
							−0.1141	+0.1460	−0.0319
			+0.0167	−0.0167					
		−0.5309	+0.5309						
		−0.3400		+0.3400					
+0.0949	−0.0949				−0.0949	+0.0949			
	−0.9536	+0.9536				+0.9536	−0.9536		
−0.1446		+0.1446			−0.1446		+0.1446		
							+0.2248	−0.2248	
								−0.0131	+0.0131
							+0.5828		−0.5828
−0.0355	−1.0731	+0.2313	+0.5719	+0.3054	−0.2212	+0.9934	−0.0787	−0.0919	−0.6016
0					0				
0.0013	1.1515	0.0535	0.3271	0.0933	0.0489	0.9868	0.0062	0.0084	0.3619

（續　三）

v_{26}	v_{27}	v_{28}	v_{29}	v_{30}	v_{31}	v_{32}	v_{33}	v_{34}	v_{35}	v_{36}	wk
											+0.0111
		+0.0091	−0.0246	+0.0155							+0.0511
−0.0707	+0.2150	−0.1443			−0.2100	+0.3953	−0.1853	−0.0907	+0.2022	−0.1115	−0.3300
											−0.0766
											−0.0025
											−0.9185
											−0.2856
			+0.0949	−0.0949							−0.0702
		+0.9536	−0.9536								−3.9574
		−0.1446		+0.1446							−0.1547
	+0.2248	−0.2248				−0.2248	+0.2248	−0.2248	+0.2248		−0.0045
+0.0131	−0.0131				−0.0131	+0.0131			+0.0131	−0.0131	−0.0073
+0.5828		−0.5828			+0.5828		−0.5828	+0.5828		−0.5828	−1.7834
+0.5252	+0.4267	−0.1338	−0.8833	+0.0652	+0.3597	+0.1836	−0.5433	+0.2673	+0.4401	−0.7074	−7.5285 = [kw]
		0				0			0		
0.2758	0.1821	0.0179	0.7802	0.0043	0.1294	0.0337	0.2952	0.0714	0.1937	0.5004	7.5278 = [vv]

此步計算之檢核共有两种：一为各測站所有方向改正数之和必为零，最多差至万分之一秒。另一檢核为 $[vv]$ 与 $[wk]$ 之計算，二者均附于上表內，其結果相差亦極微，可証明計算之無誤。但最后之檢核，应將各改正数代于原有之条件方程式內，以驗其是否能完全滿足。茲將其結果列于下表：

条件方程式検算

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
$v_i =$	+0.1473	−0.1473	+0.1473	+0.0218	−0.5147	+0.3456	−0.3306	+0.5250	−0.0472	−0.1473	−0.3682	−0.4895
a				+0.0467	+1.6612	−0.3752	−0.2352	−0.5566	−0.0165		−0.4154	+1.1831
b												
c												
d	−0.1473	−0.1473	−0.1473	+0.0218					+0.0472	−0.1473		
e					−0.5147	−0.3456	+0.3306	+0.5250			−0.3682	+0.4895
f				−0.0218	−0.5147			−0.5250	−0.0472			−0.4895
g				−0.0218		+0.3456	+0.3306		−0.0472		+0.3682	
h												
i												
j												
k												
l												
m												
S	−0.1473	−0.1473	−0.1473	+0.0249	+0.6318	+0.3752	+0.4260	−0.5566	−0.0637	−0.1473	−0.4154	+1.1831

条件方程式核算(续一)

v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}	v_{17}	v_{18}	v_{19}	v_{20}	v_{21}	v_{22}	v_{23}	v_{24}	v_{25}
−0.2086	+0.8149	+0.2515	−0.0355	−1.0731	+0.2313	+0.5719	+0.3054	−0.2212	+0.9934	−0.0787	−0.0919	−0.6016
−0.2688					+0.1446	−1.3631	+0.5370					
−0.4064	−2.1876	+0.1852	−0.0310	+1.6202	+0.1472			−0.2487	−3.3575	−0.1775		
										−0.0840	+0.1256	−0.1798
						−0.5719	+0.3054					
+0.2086					+0.2313	−0.5719						
−0.2086					−0.2313		+0.3054					
	−0.8149	+0.2515	−0.0355	+1.0731				+0.2212	+0.9934			
+0.2086	+0.8149			+1.0731	+0.2313				+0.9934	+0.0787		
+0.2086		+0.2515	+0.0355		+0.2313			+0.2212		−0.0787		
										+0.0787	−0.0919	
											+0.0919	−0.6016
										+0.0787		−0.6016
−0.2580	−2.1876	+0.6882	−0.0310	+3.7664	+0.7544	−2.5069	+1.1478	+0.1937	−1.3707	−0.1041	+0.1256	−1.3830

條件方程式核算(續二)

v_{26}	v_{27}	v_{28}	v_{29}	v_{30}	v_{31}	v_{32}	v_{33}	v_{34}	v_{35}	v_{36}	Σ	w_i
+0.5252	+0.4267	−0.1338	−0.8833	+0.0652	+0.3597	+0.1836	−0.5433	+0.2673	+0.4401	−0.4074		
											+1.0922	−1.0924
		−0.0740	+1.3340	+0.0620							−3.1349	+3.1346
+0.3472	−0.8581	−0.1806			+0.7066	−0.6789	−0.9418	+0.2268	−0.8323	−0.7375	−3.0868	+3.0871
											−0.5202	+0.52
											−0.1499	+0.15
											−1.7302	+1.73
											+0.8409	−0.84
			−0.8833	−0.0652							+0.7403	−0.74
		−0.1338	+0.8833								+4.1495	−4.15
		+0.1338		+0.0652							+1.0684	−1.07
	−0.4267	−0.1338				+0.1836	+0.5433	+0.2673	−0.4401		−0.0196	+0.02
+0.5252	−0.4267				−0.3597	+0.1836			+0.4401	+0.7074	+0.5602	−0.56
−0.5252		−0.1338			−0.3597		−0.5433	−0.2673		−0.7074	−3.0596	+3.06
+0.3472	−1.7115	−0.5230	+1.3340	+0.0620	−0.0128	−0.3117	−0.9418	+0.2268	−0.8323	−0.7375	−3.2497 −3.2498	+3.2493

由上表 Σ 及 w_i 两列数値之比較，可知各条件經平差后完全满足。

由$[vv]$之值，求得每观測方向之中誤差为

$$m=\sqrt{\frac{7.5278}{13}}=\pm 0''.761.$$

此三角鎖系按二等方法在日間观測，且因天气关系未能利用回照器，是以观測中誤差較大，但仍在二等三角網規定限度之內。

第八節 博尔茲代替法①

第三節所述擴展法之弊在求出介繫数之后，仍須將第二組之約化法方程式列出并解算之，是以每次增加的条件不宜于过多。博氏之代替法仍承繼擴展法之原理，但不必計算第二組法方程式之全体。其理論如下：

今設有两組条件方程式，各为四个：

$$\left.\begin{aligned}
a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n+w_1&=0,\\
b_1v_1+b_2v_2+\cdots+b_nv_n+w_2&=0,\\
c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_nv_n+w_3&=0,\\
d_1v_1+d_2v_2+\cdots+d_nv_n+w_4&=0;
\end{aligned}\right\}\text{第一組}\qquad(63)$$

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots+\alpha_nv_n+w_5&=0,\\
\beta_1v_1+\beta_2v_2+\cdots+\beta_nv_n+w_6&=0,\\
\gamma_1v_1+\gamma_2v_2+\cdots+\gamma_nv_n+w_7&=0,\\
\delta_1v_1+\delta_2v_2+\cdots+\delta_nv_n+w_8&=0.
\end{aligned}\right\}\text{第二組}\qquad(64)$$

若專以第一組条件独自平差，得各繫数之擴展式为：

$$\left.\begin{aligned}
k_1^0&=f_{11}w_1+f_{12}w_2+f_{13}w_3+f_{14}w_4,\\
k_2^0&=f_{21}w_1+f_{22}w_2+f_{23}w_3+f_{24}w_4,\\
k_3^0&=f_{31}w_1+f_{32}w_2+f_{33}w_3+f_{34}w_4,\\
k_4^0&=f_{41}w_1+f_{42}w_2+f_{43}w_3+f_{44}w_4.
\end{aligned}\right\}\qquad(65)$$

① 見 H. Boltz: Substitutionsverfahren Zum Ausgleichen grosser Dreiecksnetze in einem Guss nach der M. d. Kl. Q. Veröff. d. Preuss. Geod. Instituts N. F. Nr. 108, Potsdam 1939.

同样若專以第二組条件平差，卽得

$$\left.\begin{aligned}k_5^0&=f_{55}w_5+f_{56}w_6+f_{57}w_7+f_{58}w_8,\\k_6^0&=f_{65}w_5+f_{66}w_6+f_{67}w_7+f_{68}w_8,\\k_7^0&=f_{75}w_5+f_{76}w_6+f_{77}w_7+f_{78}w_8,\\k_8^0&=f_{85}w_5+f_{86}w_6+f_{87}w_7+f_{88}w_8.\end{aligned}\right\}\tag{66}$$

根据擴展法原理，如將(63)，(64)兩組条件方程合併平差，則$k_1,\cdots k_4$各繫数与單独用第一組条件平差所得之繫数$k_1^0,\cdots k_4^0$有下列之关系：

$$\left.\begin{aligned}k_1&=k_1^0+z_{5\cdot1}k_5+z_{6\cdot1}k_6+z_{7\cdot1}k_7+z_{8\cdot1}k_8,\\k_2&=k_2^0+z_{5\cdot2}k_5+z_{6\cdot2}k_6+z_{7\cdot2}k_7+z_{8\cdot2}k_8,\\k_3&=k_3^0+z_{5\cdot3}k_5+z_{6\cdot3}k_6+z_{7\cdot3}k_7+z_{8\cdot3}k_8,\\k_4&=k_4^0+z_{5\cdot4}k_5+z_{6\cdot4}k_6+z_{7\cdot4}k_7+z_{8\cdot4}k_8.\end{aligned}\right\}\tag{67}$$

式中$z_{5\cdot1},\cdots z_{8\cdot1},z_{5\cdot2},\cdots z_{8\cdot2},\cdots$为介繫数，其意义可由第三節(24)，(25)兩式类推，玆不贅述。

同样亦可將k_5,k_6,k_7,k_8之公式列出，盖如以(64)为第一組条件，而以(63)为第二組条件，卽得：

$$\left.\begin{aligned}k_5&=k_5^0+z_{1\cdot5}k_1+z_{2\cdot5}k_2+z_{3\cdot5}k_3+z_{4\cdot5}k_4,\\k_6&=k_6^0+z_{1\cdot6}k_1+z_{2\cdot6}k_2+z_{3\cdot6}k_3+z_{4\cdot6}k_4,\\k_7&=k_7^0+z_{1\cdot7}k_1+z_{2\cdot7}k_2+z_{3\cdot7}k_3+z_{4\cdot7}k_4,\\k_8&=k_8^0+z_{1\cdot8}k_1+z_{2\cdot8}k_2+z_{3\cdot8}k_3+z_{4\cdot8}k_4.\end{aligned}\right\}\tag{68}$$

式(67)与(68)完全相对。此处二者均为理論上之形式，实际上因三角網佈置之情形，其中之介繫数多为零，可由前節之例中看出。

为解釋代替法之理論起見，玆設第一組条件方程式內之第一二兩式与第二組之各条件完全無关，第二組內之第七、八兩条件亦与第一組之条件完全無关，則下列介繫数必均为零：

$$\left.\begin{aligned}z_{7\cdot1}=z_{7\cdot2}=z_{7\cdot3}=z_{7\cdot4}=z_{8\cdot1}=z_{8\cdot2}=z_{8\cdot3}=z_{8\cdot4}=0,\\z_{1\cdot5}=z_{1\cdot6}=z_{1\cdot7}=z_{1\cdot8}=z_{2\cdot5}=z_{2\cdot6}=z_{2\cdot7}=z_{2\cdot8}=0.\end{aligned}\right\}\tag{69}$$

于是(67)，(68)兩式將化为下列之形式：

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= k_1^0 + z_{5\cdot1}k_5 + z_{6\cdot1}k_6, \\ k_2 &= k_2^0 + z_{5\cdot2}k_5 + z_{6\cdot2}k_6, \\ k_3 &= k_3^0 + z_{5\cdot3}k_5 + z_{6\cdot3}k_6, \\ k_4 &= k_4^0 + z_{5\cdot4}k_5 + z_{6\cdot4}k_6; \end{aligned}\right\} \qquad (67)^*$$

$$\left.\begin{aligned} k_5 &= k_5^0 + z_{3\cdot5}k_3 + z_{4\cdot5}k_4. \\ k_6 &= k_6^0 + z_{3\cdot6}k_3 + z_{4\cdot6}k_4, \\ k_7 &= k_7^0 + z_{3\cdot7}k_3 + z_{4\cdot7}k_4, \\ k_8 &= k_8^0 + z_{3\cdot8}k_3 + z_{4\cdot8}k_4. \end{aligned}\right\} \qquad (68)^*$$

(67)*,(68)*两組方程式名为代替方程式。对于两組方程均有关系之繫数,如此处之k_3,k_4,k_5,k_6,名为主繫数。因上列两組方程內之$k_1^0, k_2^0 \cdots k_8^0$以及各介繫数$z_{5\cdot1},z_{5\cdot2}\cdots$等均为已知数,故吾人只須求得主繫数之值,代入代替方程式內,即可求得所有各繫数$k_1, k_2,\cdots k_8$之值。欲求主繫数k_3, k_4, k_5, k_6,僅須(67)*,(68)*两組內之各主繫数代替方程式:

$$\left.\begin{aligned} k_3 &= k_3^0 + z_{5\cdot3}k_5 + z_{6\cdot3}k_6, \\ k_4 &= k_4^0 + z_{5\cdot4}k_5 + z_{6\cdot4}k_6; \end{aligned}\right\}\text{第一組} \qquad \left.\begin{aligned} k_5 &= k_5^0 + z_{3\cdot5}k_3 + z_{4\cdot5}k_4, \\ k_6 &= k_6^0 + z_{3\cdot6}k_3 + z_{4\cdot6}k_4. \end{aligned}\right\}\text{第二組} \qquad (70)$$

此处两組各为二个方程式,实际上两組主繫数代替方程式之数目可以不等,故为計算之簡便起見,最好將較多一組之主繫数代入較少一組內。今設將(70)之第二組代入第一組內,即得公式如次:

$$\left.\begin{aligned} A_{3\cdot3}k_3 + A_{3\cdot4}k_4 + K_3 &= 0, \\ A_{4\cdot3}k_3 + A_{4\cdot4}k_4 + K_4 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

式中之$A_{3\cdot3}, A_{3\cdot4}, A_{4\cdot3}, A_{4\cdot4}, K_3, K_4$等为下列之縮寫:

$$\left.\begin{aligned} A_{3\cdot3} &= z_{5\cdot3}z_{3\cdot5} + z_{6\cdot3}z_{3\cdot6} - 1, \\ A_{3\cdot4} &= z_{5\cdot3}z_{4\cdot5} + z_{6\cdot3}z_{4\cdot6}, \\ A_{4\cdot3} &= z_{5\cdot4}z_{3\cdot5} + z_{6\cdot4}z_{3\cdot6}, \\ A_{4\cdot4} &= z_{5\cdot4}z_{4\cdot5} + z_{6\cdot4}z_{4\cdot6} - 1, \\ K_3 &= k_3^0 + z_{5\cdot3}k_5^0 + z_{6\cdot3}k_6^0, \\ K_4 &= k_4^0 + z_{5\cdot4}k_5^0 + z_{6\cdot4}k_6^0. \end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

因普通 $z_{3\cdot5}\neq z_{5\cdot3}$, $z_{3\cdot6}\neq z_{6\cdot3}$, $\cdots$ 故式(71)并不对称。是以其解算不能用普通之高斯約化法。若按不定式解开,即得:

$$\left.\begin{aligned}k_3&=j_{3\cdot3}k_3^0+j_{3\cdot4}k_4^0+j_{3\cdot5}k_5^0+j_{3\cdot6}k_6^0,\\k_4&=j_{4\cdot3}k_3^0+j_{4\cdot4}k_4^0+j_{4\cdot5}k_5^0+j_{4\cdot6}k_6^0.\end{aligned}\right\}\tag{73}$$

式中之 j 亦不对称,即 $j_{4\cdot3}\neq j_{3\cdot4}$。

將(73)代入(70)之第二組內,即可得 k_5,k_6 之擴展式,再由(67)*,(68)*两組方程式中,即可求得所有之繫数值,与全体平差之結果無異。

以上系代替法之原理。茲再將代替法与擴展法之不同点說明之:在擴展法中,求出第一組代替方程式(67)*后,即將其代入第二組法方程式中,而求約化后之法方程式,解此法方程式以得第二組之繫数值。在代替法中,則不僅求第一組代替方程式(67)*,并求第二組代替方程式(68)*。將此两組中之主繫数代替方程式取出而解算之,以求得各主繫数值,再將各主繫数值代入代替方程式中,求出其他各繫数之值。当两組較大三角網欲合併平差时,如暫时不顧及基綫方位角等条件,两組間互相有关之条件为数常甚少,亦即主繫数之数目常甚小,是以此时应用代替法,解算主繫数代替方程式之工作,較用擴展法須解算第二組全体法方程之工作为輕。此为代替法与擴展法相較之主要优点。但吾人如顧及边長、基綫、方位角等类条件,則仍不能离开擴展法。故最適当之步驟为先用代替法將全網各部之角度方程式及一部边長方程式合併,然后再分別用擴展法將两組相連之边長条件以及基綫条件等加于前已合併之結果中。

此外尙須注意者,即用一次代替法之后,各繫数已不能保留原有按条件不符值 w 所列之擴展形式,而成为按初步繫数值擴展之形式,如式(73)。是以如欲再度应用代替法將另一部三角網合併,其介繫数之計算不复能依第三節式(24),(25)之形式,因此时 f 值已不知矣。但此时吾人可循另外一法。

將(18)与(24)或(25)比較,可知介繫数 z 与繫数 k 完全相当。在

第一第二两組未合併之前，第五条件之繫数値为 k_5^0；既合併之后，其値为 k_5，k_5 与 k_5^0 之关系为：[見式(68)*]

$$k_5 = k_5^0 + z_{3\cdot5}k_3 + z_{4\cdot5}k_4. \tag{74}$$

今設在(63)，(64)所列八个条件之外，再加一第九个条件，并命專以第二組条件(64)而論时，第五个条件与第九个条件間之介繫数为 $z_{9\cdot5}^0$，当第一二两組条件合併后，第五个条件与第九个条件間之介繫数为 $z_{9\cdot5}$，則 $z_{9\cdot5}$ 与 $z_{9\cdot5}^0$ 間之关系，亦必与式(74)中 k_5 与 k_5^0 間之关系完全相当。此理論可用与証明式(26)相同之方法証明之。实則由以上之比較，吾人已極易看出其必然性，故此处不再加以証明。依此可將 $z_{9\cdot5}$ 与 $z_{9\cdot5}^0$ 間之关系照式(74)書出如下：

$$z_{9\cdot5} = z_{9\cdot5}^0 + z_{3\cdot5}z_{9\cdot3} + z_{4\cdot5}z_{9\cdot4}, \tag{75}$$

其他介繫数如 $z_{9\cdot6}$，$z_{9\cdot7}$，$\cdots$ 亦有同样之公式。根据同一理論，凡相当于式(73)者必有介繫数之关系方程式：

$$\left.\begin{aligned} z_{9\cdot3} &= j_{3\cdot3}z_{9\cdot3}^0 + j_{3\cdot4}z_{9\cdot4}^0 + j_{3\cdot5}z_{9\cdot5}^0 + j_{3\cdot6}z_{9\cdot6}^0, \\ z_{9\cdot4} &= j_{4\cdot3}z_{9\cdot3}^0 + j_{4\cdot4}z_{9\cdot4}^0 + j_{4\cdot5}z_{9\cdot5}^0 + j_{4\cdot6}z_{9\cdot6}^0. \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

由此可求出相当于主繫数 k_3, k_4 之介繫数 $z_{9\cdot3}$，$z_{9\cdot4}$，代入(75)，卽可求出 $z_{9\cdot5}$。

采用以上方法，吾人無需知 $k_1, k_2, \cdots k_8$ 之擴展式，亦可求出新的介繫数。是以代替法之另一优点为不必永久保持冗長之擴展式。蓋在大規模之三角網中，擴展式之項数可延至数十項，对于計算，極不清楚，易生錯誤，代替法中能避免此种形式，实为一重要之進步。

代替法之应用，主要为大規模三角網之合併，但本書之目的，僅在解釋此法，故举一小例如下，藉以示其計算之步驟，但未能尽顯此法之优点也。

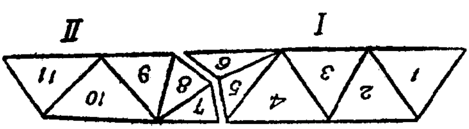

圖 10.10.

例：玆有一三角鎖如圖 10.10 之形式，系于三角形單鎖之中夾一四边中点

形，今試用代替法求其角度条件之繫数擴展式。

此三角鎖如以点綫法表示之，即为圖 10.11 之形狀。由此吾人可讀出其法方程式之关系。今將此圖形分为两部：I 部为 1, 2, 3, 4, 5, 6 六个三角形；II 部为 7, 8, 9, 10, 11 五个三角形。此两部繫数單独之擴展式，可按第五節所述三角形單鎖之規則書出：

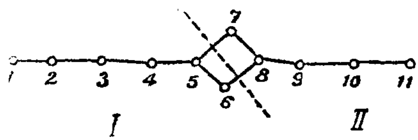

圖 10.11.

I 部：$k_1^0 \to k_6^0$

$$754k_1^0=-144w_1-55w_2-21w_3-8w_4-3w_5-1w_6,$$
$$754k_2^0=-55w_1-165w_2-63w_3-24w_4-9w_5-3w_6,$$
$$754k_3^0=-21w_1-63w_2-168w_3-64w_4-24w_5-8w_6,$$
$$754k_4^0=-8w_1-24w_2-64w_3-168w_4-63w_5-21w_6,$$
$$754k_5^0=-3w_1-9w_2-24w_3-63w_4-165w_5-55w_6,$$
$$754k_6^0=-1w_1-3w_2-8w_3-21w_4-55w_5-144w_6.$$

II 部：$k_7^0 \to k_{11}^0$

$$288k_7^0=-55w_7-21w_8-8w_9-3w_{10}-1w_{11},$$
$$288k_8^0=-21w_7-63w_8-24w_9-9w_{10}-3w_{11},$$
$$288k_9^0=-8w_7-24w_8-64w_9-24w_{10}-8w_{11},$$
$$288k_{10}^0=-3w_7-9w_8-24w_9-63w_{10}-21w_{11},$$
$$288k_{11}^0=-1w_7-3w_8-8w_9-21w_{10}-55w_{11}.$$

由圖 10.11 之点綫表示法，可知在以 k_5 为主項之法方程式中尙有 $-2k_7$ 一項，以 k_6 为主項之法方程式中有 $-2k_8$ 一項，同理在以 k_7 及 k_8 为主項之法方程式內，分别有 $-2k_5$ 及 $-2k_6$ 之項。是以在 I 部諸繫数之擴展式中，如命 $w_5=-2$，其余之 w 为零，即得 $z_{7.1} \to z_{7.6}$ 諸介繫数之値。命 $w_6=-2$，其余之 w 均为零，即得 $z_{8.1} \to z_{8.6}$ 之値，同理由 II 部之繫数擴展式中可分别求得 $z_{5.7} \to z_{5.11}$ 及 $z_{6.7} \to z_{6.11}$ 之値，此外之介

繫数则均为零。兹将各介繫数之值列下:

$$
\begin{array}{llll}
377z_{7.1}=3, & 377z_{8.1}=1, & 144z_{5.7}=55, & 144z_{6.7}=21,\\
377z_{7.2}=9, & 377z_{8.2}=3, & 144z_{5.8}=21, & 144z_{6.8}=63,\\
377z_{7.3}=24, & 377z_{8.3}=8, & 144z_{5.9}=8, & 144z_{6.9}=24,\\
377z_{7.4}=63, & 377z_{8.4}=21, & 144z_{5.10}=3, & 144z_{6.10}=9,\\
377z_{7.5}=165, & 377z_{8.5}=55, & 144z_{5.11}=1; & 144z_{6.11}=3.\\
377z_{7.6}=55; & 377z_{8.6}=144; & &
\end{array}
$$

由此列出代替方程式如下:

$$
\begin{aligned}
377k_1 &= 377k_1^0 + 3k_7 + 1k_8,\\
377k_2 &= 377k_2^0 + 9k_7 + 3k_8,\\
377k_3 &= 377k_3^0 + 24k_7 + 8k_8,\\
377k_4 &= 377k_4^0 + 63k_7 + 21k_8,\\
377k_5 &= 377k_5^0 + 165k_7 + 55k_8,\\
377k_6 &= 377k_6^0 + 55k_7 + 144k_8,\\
144k_7 &= 144k_7^0 + 55k_5 + 21k_6,\\
144k_8 &= 144k_8^0 + 21k_5 + 63k_6,\\
144k_9 &= 144k_9^0 + 8k_5 + 24k_6,\\
144k_{10} &= 144k_{10}^0 + 3k_5 + 9k_6,\\
144k_{11} &= 144k_{11}^0 + 1k_5 + 3k_6.
\end{aligned}
$$

此中 k_5, k_6, k_7, k_8 为主繫数,兹将其代替方程式特别提出如下:

$$
\begin{aligned}
377k_5 &= 377k_5^0 + 165k_7 + 55k_8,\\
377k_6 &= 377k_6^0 + 55k_7 + 144k_8,\\
144k_7 &= 144k_7^0 + 55k_5 + 21k_6,\\
144k_8 &= 144k_8^0 + 21k_5 + 63k_6.
\end{aligned}
$$

欲得主繫数之擴展式,可将 k_7, k_8 两式代入 k_5, k_6 之式内,或反而行之,由此得

$$
\begin{aligned}
9048k_5 &= 9048k_5^0 + 3960k_7^0 + 1320k_8^0 + 1705k_5 + 1155k_6,\\
54288k_6 &= 54288k_6^0 + 7920k_7^0 + 20736k_8^0 + 6049k_5 + 10227k_6;
\end{aligned}
$$

併項得

$$7343k_5 - 1155k_6 = 9048k_5^0 + 3960k_7^0 + 1320k_8^0,$$
$$-6049k_5 + 44061k_6 = 54288k_6^0 + 7920k_7^0 + 20736k_8^0.$$

此处可注意者，即两式并無对称之关系。是以不能用高斯法方程式之約化法，而必須用普通代数方法解算之。茲將其結果化为分数式：

$$k_5 = +1.259389k_5^0 + 0.198079k_6^0 + 0.580089k_7^0 + 0.259389k_8^0,$$
$$k_6 = +0.172898k_5^0 + 1.259304k_6^0 + 0.259389k_7^0 + 0.506231k_8^0.$$

代至 k_7, k_8 之代替方程式内，即得：

$$k_7 = +0.506231k_5^0 + 0.259304k_6^0 + 1.259389k_7^0 + 0.172898k_8^0,$$
$$k_8 = +0.259304k_5^0 + 0.579833k_6^0 + 0.198079k_7^0 + 1.259304k_8^0.$$

將此代入各代替方程式内，并將各 k_0 化为初步擴展式中之 w_1, w_2, … 等項，即得合併后之繫数擴展式如下：

（各系數均以小数点后第六位为單位）

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}
k_1	191005	73015	28040	11100	5274	2358	2358	1801	686	257	86
k_2	73015	219045	84119	33313	15821	7074	7074	5402	2058	772	257
k_3	28040	84119	224318	88836	42188	18865	18865	14406	5488	2058	686
k_4	11104	33313	88836	233193	110744	49520	49520	37815	14406	5402	1801
k_5	5274	15821	42188	110744	290044	129695	129695	99040	37729	14149	4716
k_6	2358	7074	18865	49520	129695	253116	86449	129652	49391	18522	6174
k_7	2358	7074	18865	49520	129695	86449	253116	129652	49391	18522	6174
k_8	1801	5402	14406	37815	99040	129652	129652	289916	110444	41417	13806
k_9	686	2058	5488	14406	37729	49391	49391	110444	232550	87206	29069
k_{10}	257	772	2058	5402	14149	18522	18522	41417	87206	220202	73401
k_{11}	86	257	686	1801	4716	6174	6174	13806	29096	73401	191134

第九節 以大地綫代替三角鎖

当三角網之佈置，系由分段之三角鎖或四边形鎖連接而成时，則可設想每段三角鎖由一大地綫代替之。此大地綫連接每節之两端，其長度及两端方位角，可以該段三角鎖独自平差后所得之經緯度計算之。

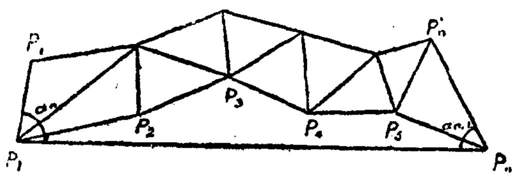

圖 10.12.

茲設圖 10.12 由 P_1 至 P_n 为一三角形單鎖，当此三角鎖已經平差之后，即可由各三角形推算各边之边長，然后求得每点之經緯度。由 P_1, P_n 两端点之經緯度可反算大地綫 P_1, P_n 之長度及其两端方位角。此大地綫即可代表由 P_1 至 P_n 之一段三角鎖。

以大地綫代替三角鎖之应用，始于赫尔默特。当彼計算德國及欧洲各三角点之垂綫偏差时，即由三角網中选出若干条三角鎖，連接于所有拉伯拉斯点之間，將每个三角鎖化算为一大地綫，于是整个成为一大地綫網。当时之目的虽非为大三角網之平差，且其所利用者亦非欧洲大三角網之全部，而系由此选出之三角鎖，但此种理想对于由三角鎖構成網狀时之平差問題頗有帮助。故 1931 年芬蘭南部之环形網卽采用此法平差，苏联之三角網亦采用此法，其詳細步驟虽各有不同，而原理則均系以大地綫代替三角鎖也。

以大地綫代替三角鎖之利点在能將平差分为两步進行：第一步系每段鎖之独自平差；第二步則为联合各鎖之平差。第一步平差有时称为初步平差；第二步則称为主要平差。盖第二步平差后所得者为最后之結果，各鎖尙須以此为強制条件再行分別平差也。第一步平差所包括者为鎖內之各圖形条件，基綫条件与拉伯拉斯条件，故与普通之平差方法初無差異。第二步平差則不复以原來之观測值——方向或角度——为原子，而以其函数，卽大地綫之長度及两端方位角为虛拟观測值

举行平差。此时之条件可分为两种：一为各端点間之拉伯拉斯条件；一为当大地綫閉合时所成之多边形条件。举行主要平差时，如能附列各虛拟观測值与原來观測值之等值关系，則此种平差之結果，必与用原來观測值全体平差之結果完全脗合，是为嚴格方法，系要格于 1936 年所首創。如假定虛拟观測值猶如独立观測之結果，給以適当之权而直接用之以列出条件方程式，則結果必不嚴格，此为簡略方法，赫尔默特卽用之，南芬环形三角網之平差亦用是法。

無論采用嚴格或簡略方法，其初步平差之步驟均大致相同，故本節先將其方法略述于后。但此外尙有一先決問題，卽大地綫之分段問題。無論采用嚴格或簡略方法，均須以基綫擴大边为分段之处，如圖 10.12 中之 P_1P_1' 及 P_nP_n' 均应为由基綫直接擴大之边，其長度应視为固定者。此种边为两相鄰三角鎖之公共边，故亦称为接合边。大地綫之初步長度，实卽由此两基綫出發，經过全鎖平差所求得者。大地綫两端与接合边所成之角度名为接合角（圖 10.12 中之 α_{1n} 与 α_{n1}）；大地綫之两端点名为接合点（圖中之 P_1 与 P_n）。所有接合点最好均为拉伯拉斯点。

初步平差之步驟，可分条述之于后：

(1) 列出鎖中之角度、边長、基綫、拉伯拉斯条件及其相当之法方程式。此数种条件之列法，已詳見第七章及第八章，玆不再述。

(2) 列出大地綫長度及其两端接合角成为各观測方向之函数，幷求其微分式。此步工作之意义：一方面为求得此三函数之权系数和，在嚴格与簡略平差中均將应用之；另一方面为准备以求得之大地綫長度及两端接合角为強制条件时之应用。故此时可將此条件列出，而無常数項，幷計算其相当之法方程式，附于(1)項法方程式之后。

(3) 解算(1)項之法方程式，將(2)項之三个法方程式随同約化，以求其权系数和。

(4) 計算各方向之初步改正数，代入(1)項之法方程式中，驗其有無誤差。

(5) 以初步改正后之方向値計算大地綫之長度及其两端接合角。倘在第(2)步中已用方向之观測値求出此三函數之初步値，此时可將各改正數代入其微分式中檢核之。

第十節　約蘭得之大地綫平差法

約蘭得于举行南芬环形三角鎖平差时，創用此法，后經波罗的海大地測量学会采用，作联接波罗的海周圍各國三角測量之东海环形鎖(Ostseering)之平差。玆以南芬环形三角鎖为例，概述此法之步驟。

由前節所述之初步平差求得各大地綫之長度及两端接合角后，卽可由此計算各接合点之大地位置。圖 10.13 示南芬环形鎖化为大地綫多边形之情形。此多边形計共五边，$P_1, P_2\cdots P_5$ 为接合点，P_1P_1'，P_2P_2'，$\cdots P_5P_5'$ 为接合边。圖中以 $S_{1\cdot2}, S_{2\cdot3}\cdots$等示各大地綫之長度，以 $\alpha_{1\cdot2}, \alpha_{2\cdot1}\cdots$等示各接合角。計算 $P_1, P_2\cdots$各点之大地位置时，系以 P_2 为原点，取其經緯度及 P_2, P_2' 之方位角为出發値，分两路計算：第一路由 P_2 經 P_3, P_4 至 P_5；第二路由 P_2 經 P_1 至 P_5。其計算大地位置之公式系采用史賴伯法，如大地綫之長度过長，則分段計算。

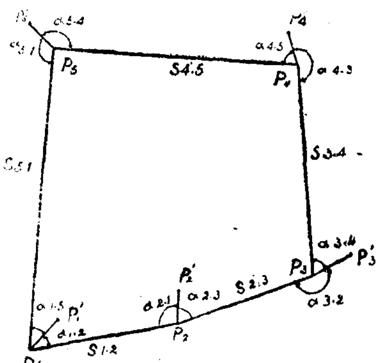

圖 10.13.

由两路計算 P_5 之經緯度設为 $B_5'L_5'$ 及 $B_5''L_5''$，又大地綫 P_5, P_4 之方位角为 $A_{5\cdot4}'$ 及 $A_{5\cdot4}''$，則此大地綫網之閉合条件应为：

$$\left.\begin{aligned} B_5'-B_5''&=0, \\ L_5'-L_5''&=0, \\ A_{5\cdot4}'-A_{5\cdot4}''&=0. \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

今將 B_5', B_5'', L_5', L_5'', $A_{5\cdot4}'$, $A_{5\cdot4}''$ 对于 $S_{1\cdot2}$, $S_{2\cdot3}\cdots\alpha_{1\cdot2}$, $\alpha_{2\cdot1}\cdots$之

微分式列出，設 $S_{1\cdot2}$, $S_{2\cdot3}\cdots$之改正数以 $s_{1\cdot2}$, $s_{2\cdot3}\cdots$ 表示之，$\alpha_{1\cdot2}$, $\alpha_{2\cdot1}$, $\cdots$之改正数以 $u_{1\cdot2}$, $u_{2\cdot1}$, $\cdots$表示之，則 B'_5, B''_5, L'_5, L''_5, $A'_{5\cdot4}$, $A''_{5\cdot4}$ 均可列为此种改正数之函数。將此諸函数代入条件方程式(77)內，卽得以各改正数所列之条件方程。

在簡略方法中，假定 $S_{1\cdot2}$, $S_{2\cdot3}\cdots$, $\alpha_{1\cdot2}$, $\alpha_{2\cdot1}$, $\cdots$为独立观測值，故卽以各改正数之平方和应为最小之条件，依(77)之条件方程举行条件平差。最小条件为：

$$[pss]+[puu]=\text{最小值。}$$

在約蘭得之方法中，未顧及各接合点 P_1, P_2, $\cdots$間之拉伯拉斯条件。倘大地綫網之情形并不如此簡單，其理論亦相同，每个大地綫多边形均有如(77)之条件三个。

当此主要平差完畢之后，所得者为改正后之大地綫長度与接合角值，以之代入上節所述之初步平差最后三条件中，得其不符值，卽可再將此三个法方程式繼續于初步平差中原有法方程式之后而解算，从此可得各繫数之新值，更由此求出各方向之最后改正值。

第十一節　爱格之大地線嚴格平差法

爱格法与約蘭得法主要之分別，在前者不以大地綫之長度及两接合角为直接观測值，而按照等值观測之理論，將其化为独立之函数。兹將其步驟述之于下：

經过初步平差后，大地綫長度及其两端接合角可列为观測方向值之函数：

$$\left.\begin{aligned}x&=S^0_{12}+f_1v_1+f_2v_2+\cdots+f_nv_n,\\y&=\alpha^0_{12}+f'_1v_1+f'_2v_2+\cdots+f'_nv_n,\\z&=\alpha^0_{21}+f''_1v_1+f''_2v_2+\cdots+f''_nv_n.\end{aligned}\right\}\tag{78}$$

式中 S^0_{12}, α^0_{12}, α^0_{21} 等为由观測值計算所得之大地綫長度及其两接合角，v_1, v_2, $\cdots v_n$ 为观測方向值之改正数，f_1, f_2, $\cdots f_n$ 为函数 x 依各改正

数微分之系数，$f'_1, f'_2, \cdots f'_n$ 为函数 y 之微分系数，$f''_1, f''_2, \cdots f''_n$ 为函数 z 之微分系数。x, y, z 则为大地綫長度及两接合角之平差值，其权倒数各为：

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{P_x} &= [\alpha\alpha] = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]} - \cdots,\\ \frac{1}{P_y} &= [\beta\beta] = [f'f'] - \frac{[af']^2}{[aa]} - \frac{[bf'\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]} - \cdots,\\ \frac{1}{P_z} &= [\gamma\gamma] = [f''f''] - \frac{[af'']^2}{[aa]} - \frac{[bf''\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]} - \cdots\end{aligned}\right\} \tag{79}$$

α, β, γ 为 x, y, z 三函数之权系数。同样亦可求得权系数之乘積和 $[\alpha\beta]$, $[\beta\gamma]$, $[\alpha\gamma]$ 如下：[参閱第九章之式(99)]

$$\left.\begin{aligned}[\alpha\beta] &= [ff'] - \frac{[af][af']}{[aa]} - \frac{[bf\cdot 1][bf\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} - \cdots,\\ [\beta\gamma] &= [f'f''] - \frac{[af'][af'']}{[aa]} - \frac{[bf'\cdot 1][bf''\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} - \cdots,\\ [\gamma\alpha] &= [ff''] - \frac{[af][af'']}{[aa]} - \frac{[bf\cdot 1][bf''\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} - \cdots\end{aligned}\right\} \tag{80}$$

此种权系数之平方和及乘積和又可按(79)，(80)两式簡書如下：

$$\left.\begin{aligned}&[\alpha\alpha] = [ff\cdot r], \quad [\beta\beta] = [f'f'\cdot r], \quad [\gamma\gamma] = [f''f''\cdot r],\\ &[\alpha\beta] = [ff'\cdot r], \quad [\beta\gamma] = [f'f''\cdot r], \quad [\alpha\gamma] = [ff''\cdot r].\end{aligned}\right\} \tag{81}$$

r 为初步平差时該三角鎖条件方程之总数。$[ff\cdot r]$ 卽为 $[ff]$ 經过 r 次約化后所得之值。是以(81)內之各值均可于初步平差时順帶求出。

今再設 x, y, z 为三个虛拟观測之函数，此三个虛拟观測之改正数命之为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，則此函数可書为：

$$\left.\begin{aligned}x &= S^0_{1\cdot 2} + \alpha'_1\lambda_1 + \alpha'_2\lambda_2 + \alpha'_3\lambda_3,\\ y &= \alpha_{1\cdot 2} + \beta'_1\lambda_1 + \beta'_2\lambda_2 + \beta'_3\lambda_3,\\ z &= \alpha_{2\cdot 1} + \gamma'_1\lambda_1 + \gamma'_2\lambda_2 + \gamma'_3\lambda_3.\end{aligned}\right\} \tag{82}$$

$\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \beta'_1 \cdots \gamma'_3$ 为九个不定系数，欲使虛拟之改正数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 与以前之眞正观測改正数 $v_1, v_2, \cdots v_n$ 完全等值，必須使此九个不定系数可以

滿足下列条件：

$$\left.\begin{array}{lll}[\alpha'\alpha']=[\alpha\alpha], & [\beta'\beta']=[\beta\beta], & [\gamma'\gamma']=[\gamma\gamma], \\ [\alpha'\beta']=[\alpha\beta], & [\alpha'\gamma']=[\alpha\gamma], & [\beta'\gamma']=[\beta\gamma].\end{array}\right\} \quad (83)$$

(83)各式之右方为已知数。欲使九个系数滿足六个条件，吾人可使九个中之任意三个为零，今命 $\beta'_1, \gamma'_1, \gamma'_2$ 为零，則自(83)可得下列关系，并由此求出其他各系数：

$$\left.\begin{array}{lr}\gamma_3'^2=[\gamma\gamma], & \text{由此求出 } \gamma'_3 \\ \beta'_3\gamma'_3=[\beta\gamma], & ,,\quad \beta'_3 \\ \alpha'_3\gamma'_3=[\alpha\gamma], & ,,\quad \alpha'_3 \\ \beta_2'^2+\beta_3'^2=[\beta\beta], & ,,\quad \beta'_2 \\ \alpha'_2\beta'_2+\alpha'_3\beta'_3=[\alpha\beta], & ,,\quad \alpha'_2 \\ \alpha_1'^2+\alpha_2'^2+\alpha_3'^2=[\alpha\alpha]. & ,,\quad \alpha'_1\end{array}\right\} \quad (84)$$

其次一步工作为將式(82)代入大地綫之条件方程內。設第一条大地綫之函数以 x_1, y_1, z_1 表示之，第二条以 x_2, y_2, z_2 表示之，則条件方程式之普遍形式为：

$$\left.\begin{array}{l}p_{1\cdot1}x_1+p_{1\cdot2}y_1+p_{1\cdot3}z_1+p_{2\cdot1}x_2+p_{2\cdot2}y_2+p_{2\cdot3}z_2+\cdots=0, \\ q_{1\cdot1}x_1+q_{1\cdot2}y_1+q_{1\cdot3}z_1+q_{2\cdot1}x_2+q_{2\cdot2}y_2+q_{2\cdot3}z_2+\cdots=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{array}\right\} \quad (85)$$

將(82)代入(85)內，卽可得以 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为未知数之条件方程，其普遍式为：

$$\left.\begin{array}{l}p'_{1\cdot1}\lambda_{1\cdot1}+p'_{1\cdot2}\lambda_{1\cdot2}+p'_{1\cdot3}\lambda_{1\cdot3}+p'_{2\cdot1}\lambda_{2\cdot1}+p'_{2\cdot2}\lambda_{2\cdot2}+p'_{2\cdot3}\lambda_{2\cdot3}+\cdots+w_1=0, \\ q'_{1\cdot1}\lambda_{1\cdot1}+q'_{1\cdot2}\lambda_{1\cdot2}+q'_{1\cdot3}\lambda_{1\cdot3}+q'_{2\cdot1}\lambda_{2\cdot1}+q'_{2\cdot2}\lambda_{2\cdot2}+q'_{2\cdot3}\lambda_{2\cdot3}+\cdots+w_2=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{array}\right\}$$

$$(86)$$

由式(86)以 $[\lambda\lambda]=$ 最小值为条件举行条件平差，卽可得各虛拟改正数 $\lambda_{1\cdot1}, \lambda_{1\cdot2}, \cdots$ 等值，代入(82)內，得 x, y, z 諸函数之平差值，然后再以之为強制附合条件將初步平差重新改作，与簡略法相同。

此法与簡略法計算工作之比較，最主要者为：

(1) 須按式(81)求 $[\alpha\beta]$,$[\beta\gamma]$,$[\alpha\gamma]$ 諸值($[\alpha\alpha]$,$[\beta\beta]$,$[\gamma\gamma]$則在簡略法中亦須求出);

(2) 求 α',β',γ' 之工作;

(3) 將式(85)化为式(86)之形式。

以上为多作之計算工作,但嚴格法中可以不必求初步平差中之繫数值与改正数 v,卽經过初次平差后之大地綫長度与两端接合角之值,亦不需要,蓋(82)中之 S^0_{12},α^0_{12},α^0_{21} 仍可用由观測值計算所得之值也。

第十二節　鮑威法

美人鮑威于作美國西部大三角網之平差时(1924 年),設計一法,与大地綫法頗有类似之处,惟其主要平差系用間接观測平差法,以經緯度为未知数。此法亦为簡略法,因各点之經緯度差原为观測值之函数,而于主要平差时,則以之为独立观測值。

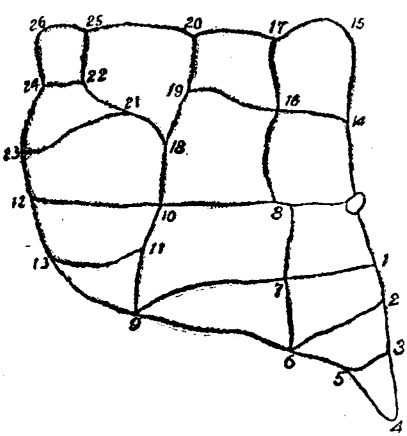

圖 10.14. 美國西部三角鎖。

玆以美國西部大三角網之平差为例以說明此法。該網系由多个四边形鎖所組成,大略如圖 10.14 之形狀。在平差之前先于各鎖交合之处,卽圖中以1, 2, 3,···等表示之处,各选一接合圖形。接合圖形应極簡單,同时与各鎖相接合处,最好僅有一接合边。此外則接合圖形中最好能包括一基綫擴大边及一拉伯拉斯方位角。

第一步工作为各接合圖形之独自平差。倘接合圖形中包括有基綫擴大边及拉伯拉斯方位角,則其比例尺及方位角可以完全确定;否則此两种原素应由其相鄰最近之一个或多个基綫及方位角遞算,而取其中

数。其目的在使独自平差后之接合圖形之比例尺与方位角为固定值，此后不再改变。

第二步工作为各接合圖形間四边形鎖之單独平差，求出两接合点間之經緯度差。

第三步工作为各接合圖形初步經緯度之計算。接合圖形之比例尺及方位角既已确定，故可由每个接合圖形中取出一点代表此圖形之經緯度，此点可名为接合点。經緯度計算之出發点系以 Meades Ranch 为原点（圖中以 O 表示之），按各点所标之次序計算，由是得接合点之初步經緯度。

第四步工作为观測方程式之列出。以第二步之結果为观測值，以各接合点之經緯度改正数为未知数。此种方程式極为簡單，l_1, l'_1 表示四边形鎖(1)两端之經緯度差，x_1, y_1 及 x_2, y_2 为該鎖两端接合点之經緯度（平差值），則观測方程式为：

$$\text{經度}\quad l_1+v_1=x_1-x_2,$$
$$\text{緯度}\quad l'_1+v'_1=y_1-y_2.$$

將第二步之結果代入 l_1, l'_1，又將第三步各接合点之初步經緯度代入式之右方，即可化之为改正数方程式，改正数方程式之数目为 2 乘單鎖之数目。因經度之方程式与緯度之方程式互不相关，故可分别平差。

第五步为依第四步之改正数方程式而举行間接观測平差，用以求各接合点之最后經緯度。

此法在計算上極为簡單，蓋在主要平差时，較約蘭得之簡略法尙少方位角之条件，因此与嚴格之結果亦相差愈多。

第十三節　坐标平差法

关于交会三角点应用坐标平差之原理，已于第九章中論及，但一般三角網之平差則頗少采用此法。蓋此法之主要困难，在須知所有三角点之近似坐标，然后始能列改正数方程式，而在大三角網中此种近似坐标頗不易求得較精密之值。倘欲求相当精密之近似坐标值，勢必先举行頗为繁巨之預备計算工作，而此种工作在平差后并無多大用处也。

所謂点之坐标者，可为平面坐标，亦可为經緯度坐标。在小规模三角網中如交会定点法，均用平面坐标；但在大规模三角網之平差，則以应用經緯度坐标为宜。盖应用平面坐标时，必須顧及方向及距离改正，在面積較大之平面投影中，此种改正值漸趋增大，勢必用較精密之公式計算，不如逕用經緯度坐标之簡單。

坐标平差之改正数方程式与第九章第三節所論大致相同，惟此处之公式系以大地綫出發，故不若平面坐标时之簡單。今設一大地綫两端点之經緯度为 B_1L_1, B_2L_2，由此所得之大地綫長度为 S_{12}，其两端之方位角为 A_{12} 与 A_{21}。設由平差所得之經緯度改正为 dB_1, dL_1, dB_2, dL_2，其相当之長度与方位角变化为 dS_{12} 与 dA_{12},dA_{21}。

此外設在測站 P_1 所測之方向以 r_{12},r_{13},$r_{14}\cdots$ 表示之，其近似定向値为 z_1，經过平差后之方向改正数为 v_{12}, v_{13}, v_{14}, $\cdots$ 定向改正数为 dz_1。

凡直接由基綫擴大之边，其長度視为直接測定者，如 P_1P_2 为此种边，其測得之長度以 s_{12} 表示之。

凡直接用天文測定之經度及方位角均于其上加一星表示之，如測站 P_1 之天文經度与方位角为 L_1^* 与 A_{12}^*，其改正数为 δL_1^* 与 δA_{12}^*。

今先求方向观測之改正数方程式：例如方向 a_{12} 之改正数方程式为

$$v_{12}=(A_{12}-r_{12}+z_1)+dz_1+dA_{12}, \tag{87}$$

括号內之値为常数項，其余各方向之改正数方程式倣此，可以类推。

此外尙有天文观測之改正数，以拉伯拉斯方程列出之。拉伯拉斯条件为

$$(A_{12}+dA_{12})-(A_{12}^*+\delta A_{12}^*)-\{(L_1+dL_1)-(L_1^*+\delta L_1^*)\}\sin B_1=0. \tag{88}$$

今如以 u 表示天文改正数，即

$$u_{12}=\delta A_{12}^*-\delta L_1^*\sin B_1, \tag{89}$$

則式(88)可化为改正数方程之形式：

$$u_{12}=\{(A_{12}-A_{12}^*)-(L_1-L_1^*)\sin B_1\}+dA_{12}-dL_1\sin B_1. \tag{90}$$

如 P_1P_2 为基綫擴大之边，其長度 s_{12} 应为固定的，故可列一条件：

$$S_{12}+dS_{12}=s_{12},$$

或化为对数式:

$$\log S_{12}+d\log S_{12}=\log s_{12}. \tag{91)*$$

此条件可用以消去 P_1, P_2 两点坐标中之一个。

改正数方程式(87)与(90)之右方尙未化为未知数之函数。(87)中之定向改正数 dz_1 可于改正数方程內消除之,亦可于法方程式內消除之。此外尙須將 dA_{12} 及 dS_{12} 与未知数 dB_1, dL_1, dB_2, dL_2 之关系列出。此处可参考大地測量之公式,卽

$$\left.\begin{aligned}dA_{12}=\frac{1}{m_{12}}\Big\{&M_1\sin A_{12}\left(\frac{dm}{dS}\right)_{21}dB_1-N_1\cos B_1\frac{\sin A_{12}}{\sin A_{21}}\cos A_{21}dL_1+\\&+M_2\sin A_{21}dB_2-N_2\cos B_2\cos A_{21}dL_2\Big\},\\dS_{12}=-\frac{1}{\rho''}\Big\{&M_1\cos A_{12}dB_1+N_1\cos B_1\sin A_{12}dL_1+\\&+M_2\sin A_{21}dB_2-N_2\cos B_2\cos A_{21}dL_2\Big\}.\end{aligned}\right\} \tag{92}$$

此公式中之 M_1, M_2, N_1, N_2 各为 P_1, P_2 两点之子午圈与卯酉圈之曲度半徑。m_{12} 为大地綫 P_1P_2 之归化長度,$\left(\frac{dm}{dS}\right)_{21}$ 为 m_{12} 依 S_{12} 之微分系数。m 之公式为:

$$\left.\begin{aligned}m&=a\sin\frac{S}{a}=S-\frac{S^3}{6a^2},\\\frac{dm}{dS}&=\cos\frac{S}{a}=1-\frac{S^2}{2a^2}\end{aligned}\right\} \tag{93}$$

a 为地球椭圓体之長半徑。由以上两式可知,当 $S\leqq 50$ 公里时,右方之第二項極为微小,故为平差之用,可棄之不顧,于是:

$$m_{12}=S_{12},\qquad \left(\frac{dm}{dS}\right)_{21}=1. \tag{93)*$$

又为化簡式(92)計,以四个新未知数 x_1, y_1, x_2, y_2 代原有之 dB_1, dL_1, dB_2, dL_2, 設

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{1}{C}M_1dB_1, & x_2&=\frac{1}{C}M_2dB_2,\\ y_1&=\frac{1}{C}N_1\cos B_1dL_1; & y_2&=\frac{1}{C}N_2\cos B_2dL_2. \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

C 为一任意常数,其作用为使 x,y 之値大小適宜。倘命 $C=\rho''$,則 x,y 之單位卽为公尺,約蘭得則命 $C=10^5$。

此外倘有一化簡之处,卽由两端方位角差 $\Delta A=A_{21}=A_{12}$ 之公式:

得

$$\left.\begin{aligned} \sin\Delta A&=\frac{S_{12}}{N_1}\tan B_1\sin A_{21},\\ \frac{\sin A_{12}}{\sin A_{21}}\cos A_{21}&=\cos A_{12}-\frac{S_{12}}{N_1}\tan B_1. \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

將(93),(94),(95)之关系代入(92)之两式內,并顧及

$$d\log S=\frac{\mu}{S}dS,$$

則可得化簡之关系:

$$\left.\begin{aligned} dA_{12}&=\left\{\frac{C}{S_{12}}\sin A_{12}\cdot x_1-\frac{C}{S_{12}}\cos A_{12}\cdot y_1+\frac{C}{S_{12}}\sin A_{21}x_2-\right.\\ &\qquad\left.-\frac{C}{S_{12}}\cos A_{21}y_2\right\}+\frac{C}{N_1}\tan B_1y_1,\\ d\log S_{12}&=-\frac{\mu}{\rho''}\left\{\frac{C}{S_{12}}\cos A_{12}\cdot x_1+\frac{C}{S_{12}}\sin A_{12}\cdot y_1+\right.\\ &\qquad\left.+\frac{C}{S_{12}}\cos A_{21}\cdot x_2+\frac{C}{S_{12}}\sin A_{21}\cdot y_2\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{92)*$$

(92)* 之最后一項可与式(87)之 dz_1 归併,因由式(94)之 y_1 式中可知

如命

$$\left.\begin{aligned} \frac{C}{N_1}\tan B_1y_1&=\sin B_1\cdot dL_1.\\ \zeta_1&=dz_1+\sin B_1\cdot dL_1, \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

卽可將該項自 dA_{12} 中取出。今以 $-l_{12}$ 代改正方程式(87)之常数項,以 $-l_{12}^*$ 代改正数方程式(90)之常数項,并將(92)* 內之各系数用下列簡單方法代表之:

$$\left.\begin{array}{ll} a_{12}=\dfrac{C}{S_{12}}\sin A_{12}, & b_{12}=\dfrac{C}{S_{12}}\cos A_{12}, \\ a_{21}=\dfrac{C}{S_{12}}\sin A_{21}; & b_{21}=\dfrac{C}{S_{12}}\cos A_{21}. \end{array}\right\} \tag{97}$$

則根据(92)与(96)可將改正数方程式(87)与(90)化为

$$\left.\begin{aligned} v_{12}&=-l_{12}+\zeta_1+a_{12}x_1-b_{12}y_1+a_{21}x_2-b_{21}y_2, \\ u_{12}&=-l_{12}^{*}\qquad+a_{12}x_1-b_{12}y_1+a_{21}x_2-b_{21}y_2. \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

基綫条件 (91)* 为

$$O=\frac{\rho''}{\mu}(\log s_{12}-\log S_{12}+b_{12}x_1+a_{12}y_1+b_{21}x_2+a_{21}y_2), \tag{99}$$

倘 P_1P_2 为基綫擴大边，卽可列出 (99) 式，而利用之以消除一未知数。

例如由(99)得:

$$a_{12}x_1=-\frac{a_{12}^2}{b_{12}}y_1-\frac{a_{12}b_{21}}{b_{12}}x_2-\frac{a_{12}\cdot a_{21}}{b_{12}}y_2-\frac{a_{12}\rho''}{b_{12}\mu}(\log s_{12}-\log S_{12}), \tag{99*}$$

用(99)*可將 x_1 之項自改正数方程式(98)中約去，所有含 x_1 之其他改正数方程式亦可用此式約去。

改正数方程式(98)系以 P_1P_2 一方向为例所列者，如將所有方向之改正数方程式均列出，卽可由之求出法方程式，其步驟与普通間接觀測之方法相同，茲不贅述。惟天文观測之精度自不及方向觀測之精度，故在約蘭得之南芬环形網之平差中，命天文改正数 u 之权为1:22，是以所有天文改正数方程式 u 均以 $\sqrt{\frac{1}{22}}$ 乘之。

以上已將应用坐标法平差之基本公式与作法加以說明。至于坐标法与繫数法比較之利弊，可分述如下:

利点:

(1)　在網形較为复雜之时，用坐标平差較为有利，因其法方程式之数目較少；

(2)　应用坐标法，可直接求出各点坐标之中誤差及誤差橢圓；

(3) 改正数方程式甚为簡單，不似复雜網形中之条件方程，不易列出；

(4) 可以分段平差，每次約化至各段交界点之坐标改正为止，然后相加作最后之解算，其結果与全体平差相同。

弊点：

(1) 必須先求出各点坐标之近似值，此近似值之精度与平差結果之良好与否至为有关，故于平差之前，須費許多工作以求近似坐标值；

(2) 法方程式不如繁数法中由角度条件所構成法方程式之簡單。

就上述之利弊比較，似以坐标法利益較多，但其最大之阻碍为必須有近似坐标值，此步工作，頗为繁巨，故一般極少采用之。

第十一章　誤差理論

第一節　偶然誤差之或是率

在第一章第二節中吾人已对偶然誤差之特征加以敍述。至于偶然誤差出現之規律則应以或是率为根据，用数学方法求得之。

或是率之理論及算法为数学之一部份，不拟在此詳論。为应用計，僅將其要旨簡述如下：

或是率計算乃对偶然事件發生之可能性作預計之法也。所謂偶然事件者，卽該事件之是否發生，不能于事先依据任何原則作确定之結論。最淺近之例，如購獎劵者对于其所購獎劵之能否得中，不能依据任何原則于事先得知，故其所購獎劵如適中獎卽为偶然事件；但其中獎之可能性則可以按照或是率之定理計算求之。

一事件發生之或是率为該事件能發生情形之数目与所有可能情形数目之比例。設有獎存單共售出一万号，而头獎僅有一个，今有一人購得有獎存單一張，若問其中头獎之或是率为若干，則依前述定义，能發生之情形僅有一个，卽当搖出头獎号数適与其所購之号数相符之时也；但搖獎之时，所有一万号碼俱有搖出之可能，故所有可能之情形共有一万个，据此則該号中头獎之或是率为万分之一。

或是率如以数学方法表示之，則永远为一分数。最大时为 1，卽該事件必能發生；最小时为 0，卽該事件决無發生之可能。

前所举有獎存單之例，乃極明顯者。然有时不如此明顯之偶然事件亦能以数学方法表示其或是率。其法虽較繁难，而其理則并無二致。观測时之偶然誤差卽屬此类。偶然誤差發生之原因不能确定，其大小

更不能循任何方法預为測定，故其出現，純系偶然之事，亦必合于或是率計算之原則無疑，今試以数学方法表示之。

設有一誤差为 ε，則此誤差出現之或是率必为 ε 之函数。今以 $f(\varepsilon)$ 表示一誤差發生于 0 与 ε 間之或是率，則一誤差發生于 $\varepsilon+d\varepsilon$ 間之或是率必为：

$$W=f(\varepsilon+d\varepsilon)-f(\varepsilon)=f'(\varepsilon)d\varepsilon=\varphi(\varepsilon)d\varepsilon.$$

因 $d\varepsilon$ 为一極小之值，故 W 即代表誤差出現于 ε 与 $\varepsilon+d\varepsilon$ 間之或是率。此函数 $\varphi(\varepsilon)$ 即称为誤差分佈定律，或簡称为誤差定律。

一誤差發生于任意两界数 a 及 b 之間之或是率可以

$$W_a^b=\int_a^b \varphi(\varepsilon)d\varepsilon$$

表示之。若 a 及 b 两界数为 $-\infty$ 与 $+\infty$ 則其或是率为 1，因誤差之值必在 $-\infty$ 与 $+\infty$ 之間也。故：

$$W_{-\infty}^{+\infty}=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\varepsilon)d\varepsilon=1.$$

欲求此誤差定律，必須作相当之假定。高斯求此誤差定律时，假定多次观測結果之算学平均值最近于其眞值。观測之次数逐漸增加，則其算学平均值即漸近乎眞值。此外尙有根据不同之假定，求出此同一定律。其最著名为哈根原子誤差之假定。玆將高斯及哈根引証之方法分述如下。

第二節 根据算学平均值之假定求誤差定律

設吾人量一長度，观測次数为 n 而精度相同，n 为一甚大之数目。今欲由此 n 值求長度之最或是值，而此 n 值均系由同样精度之观測得來，勢不能偏袒任何一值，或放棄任何一值，故数学上最適宜之方法乃求此 n 值之算学平均值，而承認此值为長度之最或是值。若观測次数 n 漸漸增多而至于無窮，則其算学平均值即趋近于長度之眞值。現即

根据此假定以求誤差定律 $\varphi(\varepsilon)$ 之公式。

設一組直接观測之結果为 $l_1, l_2, l_3, \cdots l_n$, 其眞值为 X, 則每次观測之誤差为:

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_1 = X - l_1,\\ \varepsilon_2 = X - l_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\\ \varepsilon_n = X - l_n.\end{array}\right\} \tag{1}$$

今將各次观測所生誤差 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots \varepsilon_n$ 之或是率以 $\varphi(\varepsilon_1), \varphi(\varepsilon_2), \varphi(\varepsilon_3), \cdots \varphi(\varepsilon_n)$ 表示之,則按或是率之定律,所有 n 个誤差 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots \varepsilon_n$ 同时出現之或是率为各个誤差或是率之乘積,即:

$$\varphi(\varepsilon_1)\cdot\varphi(\varepsilon_2)\cdot\varphi(\varepsilon_3)\cdots\varphi(\varepsilon_n). \tag{2}$$

倘 X 为眞值,則此組誤差同时出現之或是率必应为最大。

玆为演化之便利計,先化(2)为自然对数式,其关系如下:

$$\log\varphi(\varepsilon_1) + \log\varphi(\varepsilon_2) + \cdots + \log\varphi(\varepsilon_n) = \text{最大值。} \tag{3}$$

又因 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ 等諸值与 X 值有关系〔見式(1)〕,故如將(3)依 X 求微分,而使其結果等于零,俾符合(3)为最大值之条件时,得:

$$\frac{d\log\varphi(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1}\cdot\frac{d\varepsilon_1}{dX} + \frac{d\log\varphi(\varepsilon_2)}{d\varepsilon_2}\cdot\frac{d\varepsilon_2}{dX} + \cdots + \frac{d\log\varphi(\varepsilon_n)}{d\varepsilon_n}\cdot\frac{d\varepsilon_n}{dX} = 0. \tag{4}$$

由(1)得:

$$\frac{d\varepsilon_1}{dX} = \frac{d\varepsilon_2}{dX} = \cdots = \frac{d\varepsilon_n}{dX} = 1,$$

故(4)可寫为:

$$\frac{d\log\varphi(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} + \frac{d\log\varphi(\varepsilon_2)}{d\varepsilon_2} + \cdots + \frac{d\log\varphi(\varepsilon_n)}{d\varepsilon_n} = 0,$$

亦可作下列寫法:

$$\frac{d\log\varphi(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 d\varepsilon_1}\varepsilon_1 + \frac{d\log\varphi(\varepsilon_2)}{\varepsilon_2 d\varepsilon_2}\varepsilon_2 + \cdots + \frac{d\log\varphi(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n d\varepsilon_n}\varepsilon_n = 0. \tag{5}$$

以上系就誤差出現之或是率求出眞誤差 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots \varepsilon_n$ 間之关系。

假定观测值 $l_1, l_2, l_3, \cdots l_n$ 之算学平均值 x 为最或是值，且当 n 为無窮大时，x 趋近于眞值，或用数学公式表示之：

$$x = \frac{[l]}{n} \xrightarrow{n\to\infty} X, \tag{6}$$

则(1)内之 X 亦可于此情形下代以算学平均值 x，更將(1)内各式相加得：

$$[\varepsilon] = nx - [l]. \tag{7}$$

联合(6)，(7)两式，卽得下列之关系：

$$[\varepsilon] = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots + \varepsilon_n = 0. \tag{8}$$

(5)及(8)俱可表示眞誤差 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots \varepsilon_n$ 間之关系，在任何情形之下，两者均須完全相符，是以(5)内所有 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ 等之系数，必須相等，因得：

$$\frac{d\log\varphi(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 d\varepsilon_1} = \frac{d\log\varphi(\varepsilon_2)}{\varepsilon_2 d\varepsilon_2} = \cdots = \frac{d\log\varphi(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n d\varepsilon_n} = k.$$

k 为一常数。如对任意一誤差 ε 而言，必須

$$\frac{d\log\varphi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = k\varepsilon. \tag{9}$$

由此条件卽可求得誤差定律 $\varphi(\varepsilon)$ 之形式。求(9)之積分，得

$$\log\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2}k\varepsilon^2 + c,$$

c 为積分常数，將对数展开，以 e 为自然对数之底，则

$$\varphi(\varepsilon) = e^c \cdot e^{\frac{1}{2}k\varepsilon^2}. \tag{10}$$

由此已可知一誤差或是率之数学表示。其中 k, c 等常数尙待決定。

根据另一章第二節所述之偶然誤差三特征，較小誤差之或是率必高于較大誤差之或是率。故(10)中之 k 必为一負数，今以

$$\frac{1}{2}k = -h^2$$

表示之，同时令

$$e^c = A,$$

A 为一新常数，則(10)卽变为

$$\varphi(\varepsilon)=Ae^{-h^2\varepsilon^2}. \tag{11}$$

常数 A 之值可依本章第一節所論：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\varepsilon)d\varepsilon=1$$

之关系求之，卽

$$A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=1. \tag{12}$$

欲解此定值積分式，吾人設

$$t=h\varepsilon,\qquad dt=hd\varepsilon,$$

以之代入(12)，得

$$\frac{A}{h}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=1.$$

由積分可求得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi},①$$

故

$$A=\frac{h}{\sqrt{\pi}}.$$

代入(11)，卽得誤差定律之公式

$$\varphi(\varepsilon)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}. \tag{13}$$

此誤差定律有时亦称为高斯誤差定律。高斯導出时卽用上述之方法。

第三節 根据原子誤差之假定以求誤差定律

哈根②假定每个偶然誤差均系由多数極小之原子誤差所組合而成，

---

① 設此定積分之值为 I，則 I^2 亦可書为 $I^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$. 此乃一旋轉曲面 $Z=e^{-(x^2+y^2)}$ 与 xy 平面間之体積也。此体積以極坐标表示之，則得 $I^2=2\pi\int_0^{\infty}re^{-r^2}dr=\pi$，故 $I=\sqrt{\pi}$.

② Hagen: Die Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin, 1837.

此种原子誤差彼此均相等，但其符号可正可負。此种假定初視之似覺不甚合理，因原子誤差缺少零値，然若細究原子誤差之各种組合，卽可知零値之誤差亦可出現。如有原子誤差两个，其値为 δ，則其正負各种組合已含零値二个，$+2\delta$ 及 -2δ 各一个。如原子誤差之数目增多，則偶然誤差之分佈逐漸合理。表1表示一个乃至六个原子誤差，按所有正負組合構成观測誤差时，各种誤差之出現次数。

表 1. 各种誤差之出現次数

n	-6δ	-5δ	-4δ	-3δ	-2δ	$-\delta$	0	$+\delta$	$+2\delta$	$+3\delta$	$+4\delta$	$+5\delta$	$+6\delta$
1						1		1					
2					1		2		1				
3				1		3		3		1			
4			1		4		6		4		1		
5		1		5		10		10		5		1	
6	1		6		15		20		15		6		1

表1所列誤差出現之次数，相当于二項式之系数，故宜由下列开展式求之：

$$(t^{+\delta}+t^{-\delta})^n = t^{n\delta}+(n)_1 t^{(n-2)\delta}+\cdots+(n)_i t^{(n-2i)\delta}+\cdots.$$

如一誤差 ε_i 之大小为$(n-2i)\delta$，則其出現之次数卽为式中以$(n-2i)\delta$为指数一項之系数，卽$(n)_i$。其中 δ 代表原子誤差，n 代表原子誤差之数目，如所有誤差之总数目——卽全体观測次数——为 N，則依或是率定义，誤差 ε_i 之或是率 $\varphi(\varepsilon_i)$ 为

$$\varphi(\varepsilon_i)=\frac{(n)_i}{N}, \tag{14}$$

同理可得

$$\varphi(\varepsilon_{i+1})=\frac{(n)_{i+1}}{N}, \tag{15}$$

式中 $\varepsilon_{i+1}=(n-2i-2)\delta$.

由二項式定理：

$$(n)_{i+1}=(n)_i\frac{n-i}{i+1},$$

故由(15)減去(14)卽得所有 ε_{i+1} 与 ε_i 之間誤差出現之或是率，亦卽代表或是率之变化 $\Delta\varphi(\varepsilon)$：

$$\Delta\varphi(\varepsilon)=\varphi(\varepsilon_{i+1})-\varphi(\varepsilon_i)=\frac{(n)_i}{N}\cdot\frac{n-2i-1}{i+1}. \tag{16}$$

今再命

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon_i+\varepsilon_{i+1}}{2}=(n-2i-1)\delta,\ \Delta\varepsilon=\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_i=-2\delta,$$

則

$$\varphi(\varepsilon)=\frac{1}{2}\left\{\varphi(\varepsilon_i)+\varphi(\varepsilon_{i+1})\right\}=\frac{(n)_i}{N}\cdot\frac{n+1}{2(i+1)}. \tag{17}$$

以(17)除(16)，則得

$$\frac{\Delta\varphi(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}=\frac{2(n-2i-1)}{n+1}=-\frac{\varepsilon\Delta\varepsilon}{(n+1)\delta^2}. \tag{18}$$

如原子誤差 δ 之値为極小，而其数目 n 为無窮大，則 $\Delta\varphi(\varepsilon)$ 及 $\Delta\varepsilon$ 可寫成微分式，$(n+1)\delta^2$ 为一不定数，命之为 $\frac{1}{2h^2}$，(18)卽变为

$$\frac{d\varphi(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}=-2h^2\varepsilon d\varepsilon.$$

積分之，卽得誤差定律：

$$\varphi(\varepsilon)=Ae^{-h^2\varepsilon^2}. \tag{19}$$

A 为積分常数，其値已于前節中求出，等于 $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$.

由以上之推導，可見依哈根之假定，如原子誤差之数目为 ∞，則可得与高斯完全相同之誤差定律。但亦可証明，虽 n 之数目較小，根据原子誤差所得之公式，亦与高斯之誤差定律相差甚微。例如 $n=6$ 时，若按高斯誤差定律計算，因

$$\frac{1}{2h^2}=(n+1)\delta^2,$$

則

$$h^2=\frac{1}{14\delta^2},\qquad A=\frac{h}{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{\delta\sqrt{14\pi}}.$$

令 $\varepsilon=0,\ \pm 2\delta,\ \pm 4\delta,\cdots$ 代入(19)，而計算或是率

$$W=\varphi(\varepsilon)d\varepsilon,\qquad (d\varepsilon=-2\delta),$$

則得

$$\begin{array}{llllll} \varepsilon=0, & \pm 2\delta, & \pm 4\delta, & \pm 6\delta, & \pm 8\delta; \\ W=\varphi(\varepsilon)d\varepsilon=0.302, & 0.227, & 0.096, & 0.023, & 0.004. \end{array}$$

若完全按哈根之假定，由六个原子誤差之各种組合数目計算之，則可由表1內查出誤差之出現次数。因誤差总数 $N=64$，$W=\frac{(n)}{N}$，故

$$\begin{array}{lllll} \varepsilon=0, & \pm 2\delta, & \pm 4\delta, & \pm 6\delta, & \pm 8\delta; \\ W=0.313, & 0.234, & 0.094, & 0.016, & 0. \end{array}$$

与按高斯誤差定律所求出之值相差固極微也。

第四節 誤差或是率函数之展开

由前两節之結果，已知偶然誤差分布之定律为：

$$\varphi(\varepsilon)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}. \tag{20}$$

$\varphi(\varepsilon)$ 为誤差 ε 出現之或是率，h 为一常数，高斯名之曰"精准率"，因 h 之值随观測之精度而異也。茲設有一量，用两种精度不等之方法观測之，則在观測較精准之一組中，其誤差等于零值之或是率，定較观測欠精准之另一組为大。今試令公式(20)內之 $\varepsilon=0$，則得

$$\varphi(0)=\frac{h}{\sqrt{\pi}},$$

即誤差等于零之或是率与 h 成正比例。易言之，如 h 之值大，則誤差等于零之或是率大，亦即表示观測較为精准。

根据此誤差定律，則一次观測之誤差，出現于任意两界数 a 及 b 間

之或是率为

$$W_a^b=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_a^b e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon. \tag{21}$$

今令 $t=h\varepsilon$ 代入(21)，則 $dt=hd\varepsilon$, a 及 b 两界数亦应变为 $t=ah$ 及 $t=bh$，由此卽得

$$W_a^b=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t=ah}^{t=bh} e^{-t^2}dt.$$

此为任意两界数 a 及 b 之間之或是率。普通所需要者常为界于 $-a$ 及 $+a$ 間之或是率，亦可書为

$$W_{-a}^{+a}=2W_0^a=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ah} e^{-t^2}dt, \tag{22}$$

因 $\varphi(+\varepsilon)=\varphi(-\varepsilon)$ 也。

欲求此積分式之值，必須將其展为級数：

$$e^{-t^2}=1-\frac{t^2}{1!}+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+\frac{t^8}{4!}+\cdots,$$

$$\int e^{-t^2}dt=t-\frac{t^3}{3\cdot 1!}+\frac{t^5}{5\cdot 2!}-\frac{t^7}{7\cdot 3!}+\frac{t^9}{9\cdot 4!}-\cdots,$$

$$\int_0^{ah} e^{-t^2}dt=ah-\frac{(ah)^3}{3\cdot 1!}+\frac{(ah)^5}{5\cdot 2!}-\frac{(ah)^7}{7\cdot 3!}+\frac{(ah)^9}{9\cdot 4!}\cdots,$$

故

$$W_{-a}^{+a}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(ah-\frac{(ah)^3}{3\cdot 1!}+\frac{(ah)^5}{5\cdot 2!}-\frac{(ah)^7}{7\cdot 3!}+\frac{(ah)^9}{9\cdot 4!}\cdots\right), \tag{23}$$

但此式僅能用于 ah 值較小时，否則此級数收歛甚慢，不便应用。在后一情况下可改用下列公式求之：

$$\int e^{-t^2}dt=\int -\frac{1}{2t}\,de^{-t^2}=-\frac{1}{2t}\,e^{-t^2}-\frac{1}{2}\int\frac{e^{-t^2}}{t^2}\,dt$$

$$=-\frac{1}{2t}\,e^{-t^2}+\frac{1}{2^2t^3}\,e^{-t^2}+\frac{1\cdot 3}{2^2}\int\frac{e^{-t^2}}{t^4}\,dt.$$

如此繼續部分積分，卽可求得下列級数：

$$\int e^{-t^2}dt = -\frac{1}{2t}e^{-t^2}\left\{1-\frac{1}{2t^2}+\frac{1\cdot3}{(2t^2)^2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{(2t^2)^2}\cdots\right\}. \qquad (24)$$

欲求定积分$\int_0^{ah} e^{-t^2}dt$之值，可利用

$$\int_0^{ah} e^{-t^2}dt=\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt-\int_{ah}^{\infty} e^{-t^2}dt$$

之关系。由(22)令 $a=\infty$，则因誤差介于 $\pm\infty$ 之間之或是率为 1，故

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

由(24)得

$$\int_{ah}^{\infty} e^{-t^2}dt=\frac{e^{-(ah)^2}}{2ah}\left\{1-\frac{1}{2(ah)^2}+\frac{1\cdot3}{4(ah)^4}-\frac{1\cdot3\cdot5}{8(ah)^6}+\cdots\right\},$$

故

$$\int_0^{ah} e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\frac{e^{-(ah)^2}}{2ah}\left\{1-\frac{1}{2(ah)^2}+\frac{1\cdot3}{4(ah)^4}-\frac{1\cdot3\cdot5}{8(ah)^6}+\cdots\right\}.$$

而

$$W_{-a}^{+a}=1-\frac{e^{-(ah)^2}}{\sqrt{\pi}ah}\left\{1-\frac{1}{2(ah)^2}+\frac{1\cdot3}{4(ah)^4}-\frac{1\cdot3\cdot5}{8(ah)^6}+\cdots\right\}. \qquad (25)$$

根据(23)及(25)两式，予 ah 以不同之值，可計算誤差出現于 $\pm a$ 之間之或是率。玆列表于下以明之。

表 2. 或是率函數之值

ah	W_{-a}^{+a}	ah	W_{-a}^{+a}	ah	W_{-a}^{+a}	ah	W_{-a}^{+a}
0.0	0.00000	1.0	0.84270	2.0	0.99532	3.0	0.9999779
0.1	0.11244	1.1	0.88020	2.1	0.99702	3.1	0.9999884
0.2	0.22270	1.2	0.91031	2.2	0.99814	3.2	0.9999940
0.3	0.32863	1.3	0.93401	2.3	0.99886	3.3	0.9999969
0.4	0.42839	1.4	0.95229	2.4	0.99931	3.4	0.9999985
0.47694	0.5						
0.5	0.52050	1.5	0.96611	2.5	0.99959	3.5	0.9999996
0.6	0.60386	1.6	0.97635	2.6	0.99976	3.6	0.9999996
0.7	0.67780	1.7	0.98379	2.7	0.99987	3.7	0.9999998
0.8	0.74210	1.8	0.98909	2.8	0.99992	3.8	0.9999999
0.9	0.79691	1.9	0.99279	2.9	0.99996	∞	1.0

上表中 $ah=0.47694$ 之值，应特别提出。此值正对或是率为 0.5 处。即当 $ah=0.47694$ 时，誤差在 $-a$ 与 $+a$ 間之或是率与在此界外之或是率適为相等。关于此点之意义以后將詳論之。

第五節　誤差分佈曲綫

根据誤差定律，吾人可以誤差之大小为横坐标，以誤差之或是率为縱坐标，繪一曲綫以表示誤差之分佈，此曲綫謂之誤差分佈曲綫，其形狀如圖 11.1。

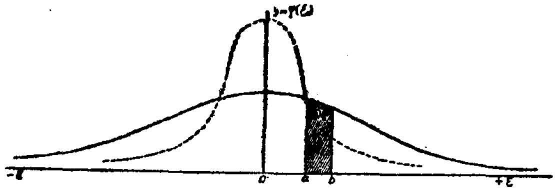

圖 11.1　誤差分佈曲綫。

此曲綫与 y 軸对称，当 ε 等于零时，其或是率 y 为最大，ε 等于 $\pm\infty$ 时，或是率已趋于零。此曲綫与 y 軸相交之处为 $\varphi(0)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}$，即誤差为零之或是率。倘观測之精度較高，則 h 大，$\varphi(0)$ 亦大，此曲綫之形狀逐漸接近于 y 軸（見圖 11.1 之虛綫），因曲綫与 ε 軸間之面積代表所有誤差或是率之总和，即为 1，故無論 h 等于何值，曲綫与 ε 軸間之面積固应常相等也。

任意两界数 a 及 b 之間誤差出現之或是率，可以 $\varepsilon=a$，$\varepsilon=b$ 两縱綫間曲綫以下至 ε 軸之面積代表之，如圖 11.1 所示。

由实际經驗，倘观測誤差純为偶然性質，而观測次数甚多时，則按照誤差大小及其数目所繪之曲綫与按照誤差分佈定律所繪制者極为相似，由是可証明高斯誤差分佈定律与实际情形相符合，其例詳于他節。

第六節　最小二乘法之理論

在第一章第七節中曾述及最小二乘法之原理为：

"解算任意一平差問題时，在相等精度之观測値上应加之改正数，其平方之和应为最小"。

亦卽

$$[vv]=\text{最小値。} \tag{26}$$

上式可卽由式(13)加以証明。当吾人根据各观測値求得各未知数之最或是値后，則各观測値之改正数 $v_1, v_2, \cdots v_n$ 必最近于眞誤差 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$，且其共同出現之或是率必为最大，卽

$$\varphi(v_1)\varphi(v_2)\cdots\varphi(v_n)=h^n\pi^{-\frac{n}{2}}e^{-h^2(v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2)} \tag{27}$$

必为最大。因 h 及 π 均为常数，故欲令(27)为最大，必須

$$v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2=[vv]=\text{最小値。}$$

此卽最小二乘法之來源也。由此引伸，尙可求出一廣义之法則：凡一組精度不等之观測，其每个誤差或是函数中之 h 亦必不同。此时(27)变为：

$$\varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2)\cdots\varphi_n(v_n)=\pi^{-\frac{n}{2}}\cdot h_1h_2\cdots h_n e^{-(h_1^2v_1^2+h_2^2v_2^2+\cdots+h_n^2v_n^2)}. \tag{28}$$

如欲令(28)为最大，必須

$$h_1^2v_1^2+h_2^2v_2^2+\cdots+h_n^2v_n^2=[h^2vv]=\text{最小値。} \tag{29}$$

式(29)为一更普遍之公式，其中亦卽 h 与中誤差 m 成反比(見本章第七節)，h^2 与权 p 成正比，故上式亦可寫作：

$$[pvv]=\text{最小値。} \tag{30}$$

第七節　中誤差、平均誤差及或是誤差之几何意义

中誤差、平均誤差及或是誤差之定义已于第一章第四節中論及。如观測誤差分佈确如高斯之誤差定律，則此种精度表示法均具有其几何意义。今仍自誤差或是率函数 $\varphi(\varepsilon)$ 出發，設有某一組观測，則誤差出現于 ε 至 $\varepsilon+d\varepsilon$ 間之或是率应为 $\varphi(\varepsilon)d\varepsilon$。以其出現之或是率乘以其本値 ε 之平方，而自 $-\infty$ 至 $+\infty$ 積分之，卽可得中誤差 m 之平方，故

$$m^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon^2\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon^2e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon. \tag{31}$$

此定積分式可以下法求之：誤差介于$-\infty$至$+\infty$之或是率为1，故

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=1,$$

或
$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=\frac{\sqrt{\pi}}{h}.$$

两方均依 h 微分之，則得

$$-2h\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon^2e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon\,dh=-\frac{\sqrt{\pi}}{h^2}\,dh,$$

或
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon^2e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=\frac{\sqrt{\pi}}{2h^3}. \tag{32}$$

以之代入(31)卽得

$$m^2=\frac{1}{2h^2},$$

或
$$m=\frac{1}{h\sqrt{2}}. \tag{33}$$

由此可知中誤差与精准率之关系。吾人倘可証明，m 之值正相当于誤差分佈曲綫之轉变点。將誤差函数 $\varphi(\varepsilon)$ 依 ε 微分二次，令其結果等于零，卽得轉变点 ε 之值：

$$\varphi(\varepsilon)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2},$$

$$\varphi'(\varepsilon)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}(-2h^2\varepsilon)=-\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2},$$

$$\varphi''(\varepsilon)=-\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}\left\{e^{-h^2\varepsilon^2}-\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2}\cdot 2h^2\varepsilon\right\}.$$

命括弧內之值为零，卽得

$$1-2h^2\varepsilon^2=0,$$

或
$$\varepsilon=\frac{1}{h\sqrt{2}}=m.$$

今再求平均誤差之几何意义。根据(31)同样之理由，吾人可書寫平均誤差 t 之公式如下：

$$t=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|\varepsilon|e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon, \tag{34}$$

或

$$t=-\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-h^2\varepsilon^2}d(-h^2\varepsilon^2)=\frac{1}{h\sqrt{\pi}}. \tag{35}$$

平均誤差 t 之几何意义，为其縱綫通过誤差曲綫与 ε 軸間所夾半面積之重心。此处半面積系指以 y 軸平分之对称面積而言。其証明可由下列重心横坐标 ε_0 之積分式得之：

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon. \tag{36}$$

$\frac{1}{2}$ 系該面積之值，因誤差曲綫与 ε 軸間之总面積为 1 也。比較(34)及(36)两式，卽可知 t 卽相当于 ε_0 之值。

至于或是誤差 r 之值，已于前節中求出。按或是誤差 r 之定义：誤差之絕对値，其大于此数之或是率应与小于此数之或是率相等；易言之，卽：

$$W_{-r}^{+r}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{rh}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}.$$

由本章第四節表 2 知，当 $rh=0.47694$ 时，$W_{-r}^{+r}=\frac{1}{2}$；故

$$r=\frac{0.47694}{h}. \tag{37}$$

或是誤差 r 之几何意义为：通过 r 值之縱綫，平分以 y 軸为界介于誤差曲綫与 ε 軸間之面積。因此面積卽代表誤差之或是率也。

綜上所述，吾人可將中誤差 m，平均誤差 t，或是誤差 r，与精准率 h 之数学关系列表于下：

表 3.

	$1/h$	m	t	r
$1/h$	1	1.4142	1.7726	2.0966
m	0.7071	1	1.2533	1.4826
t	0.5642	0.7979	1	1.1829
r	0.4769	0.6745	0.8453	1

第八節　理論与实际之比較

以上各節中由理論所推得之結果，亦可由实际之經驗証明之。茲試举例說明之。由同例尙可証明高斯誤差分佈定律与实际情形相符合。

例：　此例系取自德國一部大三角測量之成果，其誤差 ε 得自各三角形三角总和与其应得值(180°＋球面角超)之差。由总共 162 三角形中，將 ε 按大小分为 $0''.00 \longrightarrow 0''.19, 0''.20 \longrightarrow 0''.39, 0''.40 \longrightarrow 0''.59, \cdots$ 等八組，其各組內之正負值，均各分列于一行。

將表 4 之結果，与誤差之三特性相比較(参考第一章第一節)，均約略符合。今更求其中誤差 m，則

根据所有之正誤差而得之中誤差为：

$$\pm\sqrt{\frac{31.3845}{89}}=\pm\sqrt{0.3526}=\pm 0''.59,$$

根据所有之負誤差而得之中誤差为：

$$\pm\sqrt{\frac{28.7364}{73}}=\pm\sqrt{0.3936}=\pm 0''.63,$$

根据所有之正負誤差而得之中誤差为：

$$\pm\sqrt{\frac{60.1209}{162}}=\pm\sqrt{0.371116}=\pm 0''.609.$$

表 4.

第一組	
0″.0→0″.19	
ε(+)	ε(−)
+0.00	−0.00
+0.02	−0.01
+0.03	−0.03
+0.04	−0.04
+0.05	−0.04
+0.06	−0.05
+0.06	−0.05
+0.06	−0.05
+0.07	−0.05
+0.07	−0.10
+0.10	−0.10
+0.10	−0.12
+0.12	−0.12
+0.12	−0.13
+0.13	−0.13
+0.13	−0.14
+0.16	−0.14
+0.17	−0.15
+0.18	−0.16
+0.19	−0.18
+0.19	−0.19
三角之总数 21	21

第二組	
0″.20→0″.39	
ε(+)	ε(−)
+0.20	−0.24
+0.20	−0.24
+0.21	−0.24
+0.21	−0.25
+0.22	−0.25
+0.23	−0.26
+0.24	−0.27
+0.24	−0.27
+0.25	−0.28
+0.29	−0.30
+0.30	−0.31
+0.30	−0.32
+0.30	−0.32
+0.32	−0.33
+0.35	−0.34
+0.36	−0.36
+0.37	−0.37
+0.39	−0.37
+0.39	−0.39
三角之总数 19	19

第三組	
0″.40→0″.59	
ε(+)	ε(−)
+0.40	−0.40
+0.41	−0.41
+0.43	−0.48
+0.45	−0.49
+0.46	−0.51
+0.46	−0.52
+0.46	−0.52
+0.48	−0.54
+0.48	−0.58
+0.50	
+0.50	
+0.52	
+0.52	
+0.53	
+0.55	
+0.56	
+0.57	
+0.58	
三角之总数 18	9

第四組	
0″.60→0″.79	
ε(+)	ε(−)
+0.60	−0.61
+0.61	−0.64
+0.61	−0.65
+0.64	−0.67
+0.64	−0.72
+0.67	−0.74
+0.67	−0.77
+0.71	
+0.73	
−0.74	
+0.75	
+0.79	
+0.79	
三角之总数 13	7

第五組	
0″.80→0″.99	
ε(+)	ε(−)
+0.83	−0.80
+0.83	−0.84
+0.84	−0.87
+0.87	−0.89
+0.87	−0.90
+0.88	−0.91
+0.91	
+0.93	
+0.95	
+0.98	
+0.98	
三角之总数 11	6

第六組	
1″.00→1″.19	
ε(+)	ε(−)
+1.00	−1.00
+1.01	−1.01
+1.09	−1.01
+1.11	−1.09
+1.15	−1.10
	−1.12
三角之总数 5	6

第七組	
1″.20→1″.39	
ε(+)	ε(−)
+1.39	−1.27
	−1.37
	−1.37
三角之总数 1	3

第八組	
1″.40→1″.59	
ε(+)	ε(−)
+1.52	−1.49
	−1.54
三角之总数 1	2

由式(11)之关系，可自中誤差 m，求精准率 h，其值为：

$$h=\frac{1}{\sqrt{2}m}=1.161.$$

既得 h 值，則各誤差發生之或是率，均可由誤差定律理論推断之。

表 5 列其結果，比較最末两列之数目，可知由誤差理論推算者，与实际情形極相接近。易言之，可以証明誤差分佈定律与实际情形相脗合。

表 5.

誤　　差	正誤差数目	負誤差数目	誤差总数（实际情形）	誤差总数（由誤差定律推算）
0″.0—0.195	21	21	42	41
0.195—0.395	19	19	38	38
0.395—0.595	18	9	27	30
0.595—0.795	13	7	20	22
0.795—0.995	11	6	17	15
0.995—1.195	5	6	11	8
1.195—1.395	1	3	4	5
1.395—1.595	1	2	3	2
1.595—1.795	0	0	0	1
1.795—1.995	0	0	0	0
	总　　数		162	162

关于表 5 最末一列之計算，兹举第一行 41 为例，說明之如下：

$$t=ah,\qquad a=0.195,$$

$$t=0.195\times1.161=0.2264.$$

由表二(第四節)用遞較法，求得相当于 $t=0.2264$ 时之

$$W_{-a}^{+a}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt$$

值为 0.2507，乘以誤差总数 162 得

$$0.2507\times162=41.$$

其余各数之計算，均依此类推。

此外表 3 中由理論推得之結果，亦可由实际之經驗証明之。今試仍以表 4 所列之誤差为例，其平均誤差应为：

$$t=\pm\frac{|\varepsilon|}{n}=\pm\frac{78.89}{162}=\pm 0''.487=0.800\,m.$$

至于或是誤差，可以誤差表（表 4）內所列之誤差，按大小排列之，其居中之誤差，即为或是誤差。盖此誤差有一特征，即其他各誤差之出現，比其值大者与比其值小者之数目均相等。其值为：

$$r=\pm 0.40=\pm 0.657\,m.$$

此二值与表 3 內相当之因数 0.7979 及 0.6745 相比較，固頗相近也。

第九節 由有限数目之眞誤差計算所得 t 及 m 值之中誤差

本章第一節所述誤差 c 次冪之平均数（命之为 S_c），乃系由無窮多个眞誤差 ε 所求出之 $|\varepsilon^c|$ 之平均数值。今設誤差之数目有限，則可將 S_c 之公式寫成

$$S_c=\frac{1}{n}\left(|\varepsilon_1^c|+|\varepsilon_2^c|+\cdots+|\varepsilon_n^c|\right)=\frac{1}{n}[|\varepsilon^c|],\tag{38}$$

但此时之 S_c 值，并非其眞确值。

玆想像有無窮多組之观测值，由每組之 n 个观测值可求出一 S_c 之值，命之为 $s_c', s_c'' \cdots$，將此無窮多 s_c 值平均，必可得其确值 S_c，每个 s_c 值之誤差即为 (s_c-S_c)，每个 s_c 值之中誤差平方 m_c^2 即为

$$\left(\frac{[|\varepsilon^c|]}{n}-S_c\right)^2 \text{之平均值。}$$

而

$$\left(\frac{[|\varepsilon^c|]}{n}-S_c\right)^2=\frac{[|\varepsilon^{2c}|]}{n^2}+2\frac{[|\varepsilon_i^c\varepsilon_k^c|]}{n^2}(i\neq k)-2S_c\frac{[|\varepsilon^c|]}{n}+S_c^2.\tag{39}$$

現拟討論者，即此式右方各項之平均值。

第一項之平均値为 $\frac{S_{2c}}{n}$，因 $S_{2c}=\frac{[|\varepsilon^{2c}|]}{n}$。

第二項中$[|\varepsilon_i^c\varepsilon_k^c|]$共含$\dfrac{n(n-1)}{2}$个乘積，每个乘積之平均值均为$S_c^2$，故此項之平均值为：

$$\frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot S_c^2=S_c^2\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

第三項內$\dfrac{[|\varepsilon^c|]}{n}$之平均值为$S_c$，故第三項之平均值为$-2S_c^2$。至于公式(39)左方之平均值为$m_c^2$，故

$$m_c^2=\frac{S_{2c}}{n}+S_c^2\left(1-\frac{1}{n}\right)-2S_c^2+S_c^2,$$

$$m_c^2=\frac{1}{n}(S_{2c}-S_c^2). \tag{40}$$

不論c等于任何值，式(40)均可应用。

玆欲求者乃$c=1$及$c=2$时之值。

$$c=1,\quad S_c=t,\quad S_{2c}=m^2,\quad m_t^2=\frac{1}{n}(m^2-t^2); \tag{41}$$

$$c=2,\quad S_c=m^2,\quad S_{2c}=u^4,\quad m^2_{(m^2)}=\frac{1}{n}(u^4-m^4). \tag{42}$$

m_t及$m_{(m^2)}$为t及m^2之中誤差，u^4为眞誤差ε四次冪之平均值。

由本章第七節求出之結果为：

$$t=\frac{1}{h\sqrt{\pi}},\qquad t^2=\frac{1}{h^2\pi}. \tag{43}$$

$$m=\frac{1}{h\sqrt{2}},\qquad m^2=\frac{1}{2h^2},\qquad m^4=\frac{1}{4h^4}. \tag{44}$$

今所需者为u^4之值，而該式可用積分式求之：

$$u^4=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^4e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon.$$

由本章第七節式(32)，將其两方依h微分之，可得

$$-2h\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon^4e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon=-\frac{3\sqrt{\pi}}{2h^4},$$

故 $$u^4=\frac{3}{4h^4},\tag{45}$$

將(43),(44)及(45)各値代入(41)及(42)两式,則得

$$m_t^2=\frac{1}{nh^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\right)=\frac{\pi-2}{2\pi nh^2}=\frac{\pi-2}{2n}t^2,\tag{46}$$

$$m^2{}_{(m^2)}=\frac{1}{nh^4}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2nh^4}=\frac{2}{n}m^4.\tag{47}$$

(47)式中之 m_{m^2} 乃为計算中誤差平方 m^2 之中誤差。如欲得計算中誤差 m 本身之中誤差,可按誤差傳播定律,以 m 为 m^2 之一函数:

$$m=f(m^2)=(m^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\partial m}{\partial m^2}=\frac{1}{2m}.$$

故 m 之中誤差 m_m 与 m^2 之中誤差 m_{m^2} 有下列关系:

$$m_m=\frac{1}{2m}m_{m^2}\tag{48}$$

由(46),(47),(48),可得計算平均誤差 t 及中誤差 m 时之中誤差 m_t 及 m_m 为

$$m_t=\sqrt{m_t^2}=\sqrt{\frac{\pi-2}{2n}}t=0.7555\frac{t}{\sqrt{n}},\tag{49}$$

$$m_m=\frac{1}{2m}m_{m^2}=\sqrt{\frac{1}{2n}}m=0.7071\frac{m}{\sqrt{n}}.\tag{50}$$

由(49)及(50)两式,可知 t 与 m 計算之精度,均与观測次数 n 之平方根成反比。若將 m_t, m_m 与 t, m 之比較大小,用比例数表示之,則

$$\frac{m_t}{t}=0.7555\frac{1}{\sqrt{n}},\qquad \frac{m_m}{m}=0.7071\frac{1}{\sqrt{n}}.\tag{51}$$

最后尙須指出:m 之值不僅可直接自 ε^2 算出,亦可間接由 t 定之,由本章第七節之表 3,可知:

$$m=1.2533\,t,\tag{52}$$

故如由$|\varepsilon|$之值，先計算 t，再乘以 1.2533，亦可得 m 之值。一般而論，此值与直接由 ε^2 所算之值，不全相同。究竟何者較为可靠？欲答此問，須令由式(52)所求之 m 为 m'，其中誤差 $m_{m'}$ 为

$$m_{m'}=1.2533\,m_t=0.7555\frac{1.2533\,t}{\sqrt{n}},$$

或
$$m_{m'}=0.7555\frac{m'}{\sqrt{n}}\tag{53}$$

比較(50)及(53)即可知：直接用 ε^2 所求之 m 較間接由 t 所求得者为精准可靠。

更廣义論之，則 m 不僅可由一次冪$|\varepsilon|$或二次冪$|\varepsilon^2|$之总和求之，且可由任意次冪之总和求之。按上述相似之步驟，可得下列之結果，即由$|\varepsilon^2|$計算 m 所得之值，最为可靠也。

$$m=1.2533\frac{[|\varepsilon|]}{n}\left(1\pm\frac{0.7555}{\sqrt{n}}\right),$$

$$m=\sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}}\left(1\pm\frac{0.7071}{\sqrt{n}}\right),$$

$$m=0.8557\sqrt[3]{\frac{[|\varepsilon|^3]}{n}}\left(1\pm\frac{0.7371}{\sqrt{n}}\right),$$

$$m=0.7598\sqrt[4]{\frac{[\varepsilon^4]}{n}}\left(1\pm\frac{0.8165}{\sqrt{n}}\right).$$

第十節　直接观測及間接观測內中誤差計算之精度

直接观測中由 v 計算中誤差之公式按第三章第二節式(12)为：

$$m^2=\frac{[vv]}{n-1}.\tag{54}$$

今設以中誤差之真值为 m，則由(54)所求得之值之差誤为 $\frac{[vv]}{n-1}-m^2$，將其平方展开即得：

$$\left(\frac{[vv]}{n-1}-m^2\right)^2=\frac{[vv]^2}{(n-1)^2}-2m^2\frac{[vv]}{n-1}+m^4. \qquad (55)$$

若自無窮多次求左方之平均值，即得計算中誤差 m^2 之中誤差平方，可書作 $m^2{}_{m^2}$，其值卽等于右方各項平均值之和。已知者为 $\frac{[vv]}{n-1}$ 無窮多次之平均值卽为 m^2，故式(55)右方后二項之和为 $-m^4$，其右方第一項之平均值可展开求之。因

$$[vv]=[\varepsilon\varepsilon]-\frac{[\varepsilon]^2}{n}①,$$

故
$$[vv]^2=[\varepsilon\varepsilon]^2-2[\varepsilon\varepsilon]\frac{[\varepsilon]^2}{n}+\frac{[\varepsilon]^4}{n^2}. \qquad (56)$$

式(56)右方第一項之平均值可依下法求之：

$$[\varepsilon\varepsilon]^2=[\varepsilon^4]+2[\varepsilon_i^2\varepsilon_k^2],$$

$[\varepsilon^4]$ 之平均值为 u^4〔参考第九節式(42)〕，$[\varepsilon_i^2\varepsilon_k^2]$ 共含 $\frac{n(n-1)}{1.2}$ 項，每項之平均值为 $m^2\cdot m^2$，故 $[\varepsilon\varepsilon]^2$ 之平均值为：

$$n\cdot u^4+n(n-1)m^4. \qquad (57)$$

式(56)右方第二項可寫作

$$-\frac{2[\varepsilon\varepsilon][\varepsilon]^2}{n}=-\frac{2}{n}[\varepsilon\varepsilon]\{[\varepsilon\varepsilon]+2[\varepsilon_i\cdot\varepsilon_k]\}=$$

$$=-\frac{2}{n}\{[\varepsilon\varepsilon]^2+2[\varepsilon\varepsilon][\varepsilon_i\cdot\varepsilon_k]\},$$

$[\varepsilon\varepsilon]^2$ 之平均值，前已求出，而 $[\varepsilon_i\varepsilon_k]$ 之平均值为零②，故第二項之平均值为：

$$-\frac{2}{n}\{nu^4+n(n-1)m^4\}=-2u^4-2(n-1)m^4. \qquad (58)$$

(56)右方第三項为：

---

① 因 $\varepsilon_i=v_i+(X-x)$，X 为未知数之眞值，x 为自观測値求得之平均値，故 $[v]=0$ $=[\varepsilon]-n(X-x)$，$[\varepsilon\varepsilon]=[vv]+2[v](X-x)+n(X-x)^2=[vv]+\frac{[\varepsilon]^2}{n}$。

② $\varepsilon_i\varepsilon_k$ 之平均数可如下求之：設令 ε_i 固定，而令 ε_k 变换，因 ε_k 之分佈定律爲对称，故当 ε_k 为正数时与 ε_i 之乘積和，必与 ε_k 之負数时之乘積和相抵消，是以 $\varepsilon_i\varepsilon_k$ 之平均值为零。同理欲求 $\varepsilon^p{}_i\varepsilon^q{}_k$ 之平均値，僅須 p 与 q 中之一为奇数，則 $\varepsilon^p{}_i\varepsilon^q{}_k$ 之平均数卽为零。

$$\frac{[\varepsilon]^4}{n^2}=\frac{([\varepsilon]^2)^2}{n^2}=\frac{1}{n^2}\{[\varepsilon]^4+6[\varepsilon_i^2\varepsilon_k^2]+\text{含有 }\varepsilon\text{ 一次之乘積和}\},$$

$[\varepsilon^4]$ 之平均值为 nu^4, $6[\varepsilon_i^2\varepsilon_k^2]$ 之平均值为 $3n(n-1)m^4$, 所有含 ε 一次乘積和之平均值均为零①。故此項之总平均值为:

$$\frac{1}{n}u^4+\frac{3(n-1)}{n}m^4. \tag{59}$$

由(57),(58)及(59)卽可得(56)之平均值:

$$\left(n-2+\frac{1}{n}\right)u^4+\left(n-2+\frac{3}{n}\right)(n-1)m^4,$$

此乃(55)第一項中 $[vv]^2$ 之平均值,(55)右方各項之总平均值为:

$$m^2{}_{m^2}=\frac{u^4}{n}+\frac{(n^2-2n+3)}{n(n-1)}m^4-m^4=m^4\left\{\frac{u^4}{nm^4}-\frac{n-3}{n(n-1)}\right\},$$

故

$$m_{m^2}=m^2\sqrt{\frac{u^4}{nm^4}-\frac{n-3}{n(n-1)}}. \tag{60}$$

按高斯誤差定律〔見第九節式(44)及(45)〕, 則

$$m^4=\frac{1}{4h^4},\qquad u^4=\frac{3}{4h^4}.$$

故(60)可化为:

$$m_{m^2}=m^2\sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

根据第九節式(48)同一理論, 可得

$$m_m=\frac{1}{2m}m_{m^2}=m\sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}, \tag{61}$$

此卽为依(54)計算中誤差之中誤差。以百分率表示之可書作

$$m=\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}\left(1\pm\sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}\right), \tag{62}$$

計算中誤差除用改正数二次冪之和以外, 尙可由平均誤差間接求之。下列二式均屬此类:

---

① 同第 434 頁註②。

$$t=\pm\frac{[|v|]}{\sqrt{n(n-1)}},\qquad m=1.2533\frac{[|v|]}{\sqrt{n(n-1)}};\tag{63}$$

$$t=\pm\frac{[|v|]}{\sqrt{n\left(n-\frac{4-\pi}{2}\right)}},\qquad m=1.2533\frac{[|v|]}{\sqrt{n\left(n-\frac{4-\pi}{2}\right)}}.\tag{64}$$

式(63)普通名为彼德公式①。式(64)名为费煦納公式②。其導出步驟不于此处贅述。据赫尔默特之研究③，式(63)計算之精度不如式(54)，当 $n=2$ 时，式(64)之精度与式(54)相同。但 n 之数目增加，則其計算精度逐漸不如式(54)。是以实际計算仍以应用式(54)为宜，因計算 v 値之平方，有表可查，工作并不过繁也。

在間接观測內求中誤差之公式按第四章第九節式(81)为

$$m=\sqrt{\frac{[vv]}{n-u}},\tag{65}$$

n 为观測值之数目，u 为未知数之数目。依上述相倣之步驟可求得適合于式(65)之計算中誤差 m 之中誤差④为[参考式(61)]：

$$m_m=m\sqrt{\frac{1}{2(n-u)}}.\tag{66}$$

間接观測內中誤差亦可由平均誤差間接求之，其公式如下：

$$t=\pm\frac{[|v|]}{\sqrt{n(n-u)}},\qquad m=1.2533\frac{[|v|]}{\sqrt{n(n-u)}}.\tag{67}$$

此式名为呂柔公式⑤，其導出并不絕对嚴正，由此公式所得之中誤差亦不若公式(66)之精确，故平常甚少用之。

---

① 彼德(Peters)于 1856 年在 "Astronomishe Nachrichten" 第 44 卷 29 頁發表。

② 費煦納(Fechner)于 1874 年在 Poggendorffs "Annalen der physik" 紀念卷 66—81 頁發表。

③ 見 "Astronomishe Nachrichten" 第 2039 及 2096—2097 号第 85 及 88 卷，1875—1876。

④ 参閱 Helmert: "Ausgleichungsrechnung" 第二版，1924, 139—144 頁。

⑤ 呂柔(Lüroth)于 1889 年 "Astronomische Nachrichten" 第 73 卷 187 頁發表。

第十一節 最大誤差之理論

关于最大誤差之理論已在第一章第五節述及。兹再根据誤差或是率之理論加以推演。偶然誤差最大时可至何值? 易言之,吾人是否可以划一界綫,分清偶然誤差与錯誤?

今自誤差或是率函数出發,取本章(23)及(25)两式。因 h 与 m 之关系为 $h=\frac{1}{\sqrt{2}m}$,故該两式可化为:

$$W_{-a}^{+a}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\left(\frac{a}{m}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{a}{m}\right)^3+\frac{1}{40}\left(\frac{a}{m}\right)^5-\frac{1}{336}\left(\frac{a}{m}\right)^7+\cdots\right\} \tag{68}$$

及

$$W_{-a}^{+a}=1-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{me^{-\frac{a^2}{2m^2}}}{a}\left\{1-\left(\frac{m}{a}\right)^2+3\left(\frac{m}{a}\right)^4-15\left(\frac{m}{a}\right)^6+\right\}. \tag{69}$$

W_{-a}^{+a} 为誤差出現于 $-a$ 与 $+a$ 間之或是率。命 $a=nm$, n 为中誤差之倍数,則 W_{-a}^{+a} 亦可讀为 W_0^{nm}, 因 m 本身卽已含有 $\pm$ 号之意义也。W_0^{nm} 代表誤差出現于零及 n 倍中誤差値間之或是率。(68) 及 (69) 两式亦可化为 n 之函数:

$$W_0^{nm}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(n-\frac{n^3}{6}+\frac{n^5}{40}-\frac{n^7}{336}+\frac{n^9}{3456}\cdots\right) \tag{70}$$

及
$$W_0^{nm}=1-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-\frac{n^2}{2}}}{n}\left\{1-\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^4}-\frac{15}{n^6}+\cdots\right\}. \tag{71}$$

n 小于 2 时,可用式(70)計算 W_0^{nm}, n 大于 2 时,則需用式 (71),始能計算。兹將 W_0^{nm} 之值列于下表:

① 参閱 Czuber: "Theorie der Beobachtungsfehler". Leipzig, 1891 及 S. Newcomb: 'A generalized Theory of the Combination of Observations, so as to obtain the best result'. "American Journal of Mathmatics" 第八卷 1886 年, 343 頁。

表 6. 誤差出現于 0 与 nm 間之或是率

n	W_0^{nm}	n	W_0^{nm}	n	W_0^{nm}	n	W_0^{nm}	n	W_0^{nm}
0.0	0.0000	1.0	0.6827	2.0	0.9545	3.0	0.9973	4.0	0.999937
0.1	0.0797	1.1	0.7287	2.1	0.9643	3.1	0.9981	5.0	0.99999943
0.2	0.1585	1.2	0.7699	2.2	0.9722	3.2	0.9986		
0.3	0.2358	1.3	0.8064	2.3	0.9785	3.3	0.9990		
0.4	0.3108	1.4	0.8385	2.4	0.9836	3.4	0.9993		
0.5	0.3829	1.5	0.8664	2.5	0.9876	3.5	0.9995		
0.6	0.4515	1.6	0.8904	2.6	0.9907	3.6	0.9997		
0.7	0.5161	1.7	0.9109	2.7	0.9931	3.7	0.9998		
0.8	0.5763	1.8	0.9281	2.8	0.9949	3.8	0.9999		
0.9	0.6319	1.9	0.9426	2.9	0.9963	3.9	0.9999		

如欲計算大于 n 倍中誤差出現之或是率，可于此表中查出与 n 值相对之值，以 1 减之卽得。兹命 $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$ 諸整数，由上表中可以計算誤差大于 nm 之或是率，以及于若干次观測中始能出現一次。

表 7.

中誤差倍数 n	誤差大于 nm 之或是率	若干次观測中始能出現一次
1	0.32	3
2	0.046	22
3	0.0027	370
4	0.000063	15800
5	0.00000067	1740000

由此观之，大于中誤差二倍之誤差，已屬不多。就通常观測之次数而言，最大不至于超出中誤差之三倍，而中誤差之五倍則在任何情形之下，均可作为偶然誤差之界限矣。

第十二章　观测誤差之檢查

第一節　檢查之目的

应用最小二乘法以求观測之最或是値系根据偶然誤差之分佈定律，倘观測誤差中含有系統誤差，則以最小二乘法平差之結果，必非最或是値。在此种情形內，平差后所得之观測値改正数与眞誤差相差甚多，其分佈亦必不能与假定之分佈定律相脗合。是故欲确定观測値中是否尙含有尙未發覺之系統誤差，必須于平差后对观測値之改正数作一檢查。有时因观測之性質，可求出眞誤差，則直接檢查眞誤差之分佈，更为可靠。在一般情形內眞誤差均不能知，必須以改正数为根据。此时多余观測之数目应較多，始可得較确切之分佈定律。否則改正数之分佈定律 $\varphi(v)$ 未必与眞誤差之分佈定律 $\varphi(\varepsilon)$ 相同，檢查之結果恐不可靠也。

由观測誤差之檢查，吾人可解答下列諸問題：

（一）观測値中是否含有系統誤差，为平差前所未發覺者；

（二）平差結果是否为最或是値；

（三）是否某观測値之眞确性頗为可疑，必要时可捨棄不用，或重行观測；

（四）平差前各观測値所給予之权数是否適当，抑应改善。

当观測甚少或平差問題極簡單时，观測誤差之檢查無大意义；但在大規模之观測，如面積甚廣之三角網或交叉甚密之水準網，平差后必須举行檢查，庶可确定以上所列諸問題，并可因此而謀改善观測方法，其意义固非僅限于研討平差方法之是否可靠也。

第二節　誤差前置符号数目之檢查

如誤差分佈定律为偶次，則正誤差之数目应与負誤差之数目相等。倘誤差之总数为奇数，則其差应为 1。今設以 V 表示誤差之前置符号，則 V 等于 $+1$ 或 -1。n 个观測誤差前置符号之和为：

$$s=V_1+V_2+\cdots+V_n, \tag{1}$$

其最或是值应为零（n 为奇数时 s 等于 ±1）。欲求 s 之中誤差，須設想有無数个公式(1)，將其两端平方，每个 V^2 均等于 $+1$，而 $[V_iV_k]$ 之平均应为零，故結果 s 之二次冪平均值等于 n，而其中誤差为 $\pm\sqrt{n}$，于是

$$誤差正負符号之和应 =0\pm\sqrt{n}.$$

由第十一章表 6 中可查出介于正負两中誤差間之或是率为 0.6827，即 s 之值介于 $\pm\sqrt{n}$ 之間之或是率为 0.6827。倘一組观測誤差（n 个）之正負符号数目相差之絕对値大于 $\sqrt{n}$，則該組誤差中含有系統誤差之可能性必極大。

倘据之以作上列檢查者并非真誤差 ε 而系改正数 v，則多余观測之数目愈大，其檢查結果愈为可靠。倘多余观測甚少，此檢查即無意义矣。

第三節　誤差前置符号順序之檢查

有时系統誤差并不影响誤差正負号之数目，故前節所述之檢查方法，仍不能求得真象。倘怀疑系統誤差与时間或观測者有关，則可將观測值依时間或观測者为变数而排列之。若在某一时期內或某一观測者所作之观測值較真值均大或均小，則其誤差必均連續为同一符号或僅有極少数不同之符号；而在另一时期內或另一观測者所作之观測中，其誤差可能有較多相反之符号。由此亦可驗得是否有此类系統誤差存在。

在一組按上述順序排列之观測誤差中，設以 f 表示两相鄰誤差符号相同处之总数，w 表示两相鄰誤差符号变換处之总数，其相差为：

$$f-w=V_1V_2+V_2V_3+V_3V_4+\cdots V_{n-1}V_n. \tag{2}$$

因如 V_iV_{i+1} 为 $+1$，則此两課差之符号必相同；設 V_iV_{i+1} 为 -1，則两課差之符号必不同也。設 n 为奇数，則 $f-w$ 之最或是值应为零，因 V_iV_{i+1} 为 $+1$ 或 -1 之或是率相等也。設 n 为偶数，則 $f-w$ 之最或是值应为 ± 1。$(f-w)$ 之中課差可用本章第二節之方法求之，將公式(2)右方平方，即得

$$V_1^2V_2^2+V_2^2V_3^2+V_3^2V_4^2+\cdots+V_{n-1}^2V_n^2, \tag{3}$$

此外尙有 $2V_iV_{i+1}^2V_{i+2}$ 及 $V_iV_{i+1}V_kV_{k+1}$ 等諸項，但其平均值为零，(3)之平均值为 $n-1$。故 $f-w$ 为零之中課差为 $\pm\sqrt{n-1}$。于是

相鄰两課差符号相同之总数减符号变换之总数应为 $0\pm\sqrt{n-1}$。$(f-w)$ 介于 $\pm\sqrt{n-1}$ 間之或是率为 0.68270。如 $f-w$ 之絕对值大于 $\pm\sqrt{n-1}$，則与时間或观测者有关之系統課差，頗有存在之可能。

第四節　正負課差大小之檢查

如課差定律 $\varphi(\varepsilon)$ 为双次者，則当課差数目 n 为無窮多时，課差 ε 之总和 $[\varepsilon]$ 应为零。或正課差之和应等于負課差之和。若 n 为有限数值，則可以 s 表示 ε 之和：

$$s=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n. \tag{4}$$

s 之最或是值为零。設有無窮多个式(4)將其两端平方而求其平均值，則左端为 $s=[\varepsilon]$ 之中課差平方，右端为 $[\varepsilon\varepsilon]$，因 $m^2=\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}$，故計算 $[\varepsilon]$ 之中課差为 $m\sqrt{n}$。此处之 m 乃观測之中課差，于是

$$\text{課差之和}\ [\varepsilon]\ \text{应}=0\pm m\sqrt{n}.$$

倘檢查一組观測課差之結果，發現 $[\varepsilon]$ 大于 $m\sqrt{n}$，則頗可怀疑有系統課差之存在。增加观測次数，并不使 $[\varepsilon]$ 之值愈趋于零，因其中課差反加大，但 $\frac{[\varepsilon]}{n}$ 之值則漸趋减少，以其中課差为 $\frac{m}{\sqrt{n}}$ 也。

此种檢查僅能用于眞課差 ε，倘应用于直接观測平差后求得之改正

数 v，则因最小二乘法之原则本为$[v]=0$，故無須檢查矣。

当各观测之权数不等时，施行此种檢查时应用 $\sqrt{P}\cdot\varepsilon$，P 为該誤差之权数。

除按上法檢查 ε 一次冪之和以外，吾人亦可檢查其二次冪之和，如观測次数 n 为無窮多，正誤差二次和应等于負誤差二次和。或以公式表示之：

$$V_1\varepsilon_1^2+V_2\varepsilon_2^2+V_3\varepsilon_3^2+\cdots+V_n\varepsilon_n^2=0. \tag{5}$$

V 为 ε 之前置符号。如有無窮多个公式(5)而求其二次冪之平均值，則得 $n\mu^4$。

$$\mu^4=\frac{[\varepsilon^4]}{n}.$$

如第一章所示，由此可得：

正誤差平方和与負誤差平方和之差应$=0\pm\mu^2\sqrt{n}$.

因此，檢查之中誤差与 $\sqrt{n}$ 成比例，故增加观測次数，亦不能使正負誤差平方和之差更趋于零。

第五節 阿卑①檢查法

倘將 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ 按一定次序排列，而欲檢查是否有与此次序相关之系統誤差存在，最佳之法乃求 $\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}$ 之值，因此值中可消去系統誤差之全部或大部，阿卑之檢查法卽以此为根据。令

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots+\varepsilon_n^2=A, \tag{6}$$

$$(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+\cdots+(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)^2+(\varepsilon_n-\varepsilon_1)^2=B, \tag{7}$$

則
$$C=A-\frac{B}{2}=\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\cdots+\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n+\varepsilon_n\varepsilon_1. \tag{8}$$

如 ε 全为偶然性質，C 之最或是值应为零，將式(8)两端平方而求其平均值，則所有 $\varepsilon_i^2, \varepsilon_{i+1}^2$ 各項之平均值均为 m^4，共有 n 項，其和为 nm^4，其他各項如 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 等之平均值为零，故 C 之中誤差为 $\sqrt{n}\cdot m^2$。依此，

① Abbe：阿卑。

則阿卑檢査公式如下:

$$A-\frac{B}{2}=0\pm m^2\sqrt{n},$$

亦可化为下式:

$$\frac{2A}{B}=1\pm\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

第六節　修正之阿卑檢查法

在阿卑之檢查法中,公式(7)內含有$(\varepsilon_n-\varepsilon_1)^2$一項。倘有1至$n$次之观測中,其系統誤差并不自1至$n$成循环之情形者,則$\varepsilon_n-\varepsilon_1$一項毫無意义。故可將此項減去而成:

$$B^*=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+\cdots+(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)^2. \tag{9}$$

更令:

$$A^*=[\varepsilon^2]-\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_n^2}{2}, \tag{10}$$

則

$$C^*=A^*-\frac{B^*}{2}=\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\cdots+\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n. \tag{11}$$

將(11)与(8)比較,(11)較(8)少最后一項,故C^*之中誤差亦成为$\pm m^2\sqrt{n-1}$,于是修正之阿卑檢查公式为:

$$A^*-\frac{B^*}{2}=0\pm m^2\sqrt{n-1}$$

或

$$\frac{2A^*}{B^*}=1\pm\frac{1}{\sqrt{n-1}}.$$

亦称为阿卑-赫尔默特之檢查公式。

第七節　全組誤差分佈之檢查

欲知誤差之分佈是否与所假定之誤差分佈定律相符合,或与之相差若干,可將誤差按其正負大小之次序排列,选一適宜之間隔$\Delta\varepsilon$,計数每个間隔中誤差之个数,以間隔之中間値(ε)为横坐标,以其在此間隔中誤差之个数为縱坐标,將各点分别标出,而联以一曲綫。就一般而

論，此曲綫应与第十一章所示之誤差分佈曲綫相似，但如誤差数目有限，則亦可相差甚大。且所选間隔之大小，亦有时影响于曲綫之形狀。如間隔过大，則点数減少，曲綫不易勾繪；間隔过小时，其中数目較不可靠，將使曲綫过于曲折，均不相宜，故間隔之选擇，甚应注意。

观察此曲綫是否与假定之分佈定律符合，最要者为(1)观察大誤差之或是率是否較小誤差之或是率为小。即視曲綫是否自縱軸向橫軸正負两方漸漸下降；(2)观察正負誤差出現之或是率是否大致相同，即視曲綫是否与縱軸成对称形狀。

以上所述之圖解檢查法，較为明顯，且能得整个之印象。但有时用数字比較，可得較精密之結果。根据第十一章之表6，以表中之 $W_0^{n\cdot m}$ 乘以观測次数 N，可計在理論上誤差介于0及 n 倍中誤差 $n\cdot m$ 間之个数。使與实际所得之个数比較，視其有無較大区別，即可知其实际分佈与理論之假定是否相近。作此种比較时，視誤差数之多寡，可更易 n 之間隔，使疏密適宜。誤差愈多，則 n 之間隔可愈減小，檢查亦可更为明顯(参考第十一章第七節之例)。

第八節 改正数之檢查

以上所論全系眞誤差之檢查，如所知者为平差后之改正数时，究竟此种檢查有無意义，殊堪置疑，因改正数之分佈受平差法之影响，固不能尽代表眞誤差之分佈也。平差后所得之未知数值与其眞值相差愈多，則改正数之分佈愈与眞誤差之分佈不同，其影响有如系統誤差。設有一値經多次直接测定而得一平均値，以平均値为根据所求各观測値之改正数与其眞誤差相差均相等，是即平均値之眞誤差。倘各項观測値均有同一之常誤差，則于其改正数中幷不能看出。此时檢查改正数之分佈固与眞誤差相类似，但如欲借此檢查是否有常誤差存在，則絕对不可能矣。

概言之，多余观測数目愈多，改正数之分佈愈与眞誤差之分佈相

似；未知数間之条件愈多时，改正数之值愈与眞誤差之值易于接近。平常最好利用未知数間之条件以求眞誤差，因所有条件方程式中之差異均为眞誤差也。例如一三角形之和与 180° 加球面角超相差之数，即为三角度之眞誤差；又如水準網之平差，每个环形之閉合差亦均为眞誤差。作檢查时应以此为根据，而不以每角度或每条水準綫平差后之改正数为根据。

第九節　实　例

求某水準仪之水準軸与視軸之夾角时，利用直接观測法得下列之結果：

第一日	第二日	第三日	
$+1''.27$	$+0''.03$	$-0''.90$	$-0''.60$
$-0\ .78$	$+0\ .07$	$+0\ .20$	$-0\ .90$
$+0\ .11$	$+0\ .08$	$+0\ .96$	$-0\ .17$
$-0\ .71$	$+0\ .56$	$+0\ .86$	$-0\ .03$

按上表則三日所得之总結果適为 $0''.00$，故上表所列各值即代表其每次观測改正数，在此四組观測之改正数中，第二組与第四組內似有系統之誤差存在。茲按本章所論之各种方法檢查之，則知在此整个之十六項观測值中其誤差可認为均系偶然性質無疑也。

上表所列均系改正数 v，其与眞誤差 ε 之差平均約为：$\frac{m}{\sqrt{n}}$。蓋在直接观測时，設以 X 为观測值之眞值，x 为其最或是值时，則得下列之关系：

$$\varepsilon_i = v_i + (X - x).$$

故知 ε 与 v 之差，其平均值約为 $X-x$ 之中誤差，亦即最或是值 x 之中誤差 $\frac{m}{\sqrt{n}}$ 也。由此節之例，求得：

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{6.77}{16-1}} = \pm 0''.67,$$

而 $$\pm\frac{0.67}{\sqrt{n}}=\pm 0''.17.$$

此値不为过鉅，故由其改正数 v 之关系亦可間接推断其眞誤差 ε 之諸特徵。

在十六項观测誤差中，9 項为正数，7 項为負数，故誤差前置符号数目之差为 2，由理論应为： $0\pm\sqrt{n}=0\pm 4.$

两相隔誤差符号相同处之总数 f 为 8，两相隣誤差符号变换处之总数为 7，故 $f-w=1$。按理論則应为：

$$f-w=0\pm\sqrt{n-1}=0\pm 3.9.$$

正負値誤差之和为零，此为直接观测时 $[v]$ 之特徵。

正誤差平方之和为 3.65，負誤差平方之和为 3.12。其差为 0.53，按理論則应为： $0\pm\mu^2\sqrt{n}=0\pm 2.48.$

其中 $$\mu_4=\frac{[v^4]}{n}=\frac{6.16}{16}=0.385,$$

故 $$\mu^2=\pm 0.620,\ \mu^2\sqrt{16}=\pm 2.48.$$

更驗之以阿卑檢查法，則：

$$A=[\varepsilon^2]=(1.27)^2+(0.78)^2+\cdots(0.17)^2+(0.03)^2=6.77;$$

$$B=(2.05)^2+(0.89)^2+\cdots+(0.14)^2+(1.30)^2=14.84,$$

故 $$A-\frac{B}{2}=6.77-7.42=-0.65,$$

$$\frac{2A}{B}=\frac{13.54}{14.84}=0.91.$$

按理論应各为： $$A-\frac{B}{2}=0\pm m^2\sqrt{n}=0\pm 1.8,$$

$$\frac{2A}{B}=1\pm\frac{1}{\sqrt{n}}=1\pm 0.25.$$

由各种検查，知其均符合于偶然誤差之諸特徵，因可断言不致有系統誤差存在于其間也。

附錄一 方向系数表（为距离一公里之值）

$u = +20.6265 \cos \varphi \qquad v = -20.6265 \sin \varphi$

φ		u	v	φ		u	v	φ		u	v
*180°	0° 0′	+20.63	− 0.00	*188°	8° 0′	+20.43	− 2.87	*196°	16° 0′	+19.83	− 5.69
	10	20.63	0.06		10	20.42	2.93		10	19.81	5.74
	20	20.63	0.12		20	20.41	2.99		20	19.79	5.80
	30	20.63	0.18		30	20.40	3.05		30	19.78	5.86
	40	20.63	0.24		40	20.39	3.11		40	19.76	5.92
	50	20.62	0.30		50	20.38	3.17		50	19.74	5.97
*181°	1° 0′	+20.62	− 0.36	*189°	9° 0′	+20.37	− 3.23	*197°	17° 0′	+19.73	− 6.03
	10	20.62	0.42		10	20.36	3.29		10	19.71	6.09
	20	20.62	0.48		20	20.35	3.35		20	19.69	6.15
	30	20.62	0.54		30	20.34	3.40		30	19.67	6.20
	40	20.62	0.60		40	20.33	3.46		40	19.65	6.26
	50	20.62	0.66		50	20.32	3.52		50	19.64	6.32
*182°	2° 0′	+20.61	− 0.72	*190°	10° 0′	+20.31	− 3.58	*198°	18° 0′	+19.62	− 6.37
	10	20.61	0.78		10	20.30	3.64		10	19.60	6.43
	20	20.61	0.84		20	20.29	3.70		20	19.58	6.49
	30	20.61	0.90		30	20.28	3.75		30	19.56	6.54
	40	20.60	0.96		40	20.27	3.82		40	19.54	6.60
	50	20.60	1.02		50	20.26	3.88		50	19.52	6.66
*183°	3° 0′	+20.60	− 1.08	*191°	11° 0′	+20.25	− 3.94	*199°	19° 0′	+19.50	− 6.72
	10	20.59	1.14		10	20.24	3.99		10	19.48	6.77
	20	20.59	1.20		20	20.22	4.05		20	19.46	6.83
	30	20.59	1.26		30	20.21	4.11		30	19.44	6.89
	40	20.58	1.32		40	20.20	4.17		40	19.42	6.94
	50	20.58	1.38		50	20.19	4.23		50	19.40	7.00
*184°	4° 0′	+20.58	− 1.44	*192°	12° 0′	+20.18	− 4.29	*200°	20° 0′	+19.38	− 7.05
	10	20.57	1.50		10	20.16	4.35		10	19.36	7.11
	20	20.57	1.56		20	20.15	4.41		20	19.34	7.17
	30	20.56	1.62		30	20.14	4.46		30	19.32	7.22
	40	20.56	1.68		40	20.12	4.52		40	19.30	7.28
	50	20.55	1.74		50	20.11	4.58		50	19.28	7.34
*185°	5° 0′	+20.55	− 1.80	*193°	13° 0′	+20.10	− 4.64	*201°	21° 0′	+19.26	− 7.39
	10	20.54	1.86		10	20.08	4.70		10	19.23	7.45
	20	20.54	1.92		20	20.07	4.76		20	19.21	7.50
	30	20.53	1.98		30	20.06	4.82		30	19.19	7.56
	40	20.53	2.04		40	20.04	4.87		40	19.17	7.62
	50	20.52	2.10		50	20.03	4.93		50	18.15	7.67
*186°	6° 0′	+20.51	− 2.16	*194°	14° 0′	+20.01	− 4.99	*202°	22° 0′	+19.12	− 7.73
	10	20.51	2.22		10	20.00	5.05		10	19.10	7.78
	20	20.50	2.28		20	19.98	5.11		20	19.08	7.84
	30	20.49	2.33		30	19.97	5.16		30	19.06	7.89
	40	20.49	2.39		40	19.95	5.22		40	19.03	7.95
	50	20.48	2.45		50	19.94	5.28		50	19.01	8.00
*187°	7° 0′	+20.47	− 2.51	*195°	15° 0′	+19.92	− 5.34	*203°	23° 0′	+18.99	− 8.06
	10	20.47	2.57		10	19.91	5.40		10	18.96	8.11
	20	20.46	2.63		20	19.89	5.45		20	18.94	8.17
	30	20.45	2.69		30	19.88	5.51		30	18.92	8.22
	40	20.44	2.75		40	19.86	5.57		40	18.89	8.28
	50	20.43	2.81		50	19.84	5.63		50	18.87	8.33

$u=+20.6265\cos\varphi \qquad v=-20.6265\sin\varphi$

φ		u	v	φ		u	v	φ		u	v
*204°	24° 0′	+18.84	− 8.39	*213°	33° 0′	+17.30	−11.23	*222°	42° 0′	+15.33	−13.80
	10	18.82	8.44		10	17.27	11.28		10	15.29	13.85
	20	18.79	8.50		20	17.23	11.33		20	15.25	13.89
	30	18.77	8.55		30	17.20	11.38		30	15.21	13.94
	40	18.74	8.61		40	17.17	11.43		40	15.17	13.98
	50	18.72	8.66		50	17.13	11.48		50	15.13	14.02
*205°	25° 0′	+18.69	− 8.72	*214°	34° 0′	+17.10	−11.53	*223°	43° 0′	+15.09	−14.07
	10	18.67	8.77		10	17.07	11.58		10	15.04	14.11
	20	18.64	8.83		20	17.03	11.63		20	15.00	14.15
	30	18.62	8.88		30	17.00	11.68		30	14.96	14.20
	40	18.60	8.93		40	16.96	11.73		40	14.92	14.24
	50	18.57	8.99		50	16.93	11.78		50	14.88	14.28
*206°	26° 0	+18.54	− 9.04	*215°	35° 0′	+16.90	−11.83	*224°	44° 0′	+14.84	−14.33
	10	18.51	9.10		10	16.86	11.88		10	14.80	14.37
	20	18.49	9.15		20	16.83	11.93		20	14.75	14.41
	30	18.46	9.20		30	16.79	11.98		30	14.71	14.46
	40	18.43	9.26		40	16.76	12.03		40	14.67	14.50
	50	18.41	9.31		50	16.72	12.08		50	14.63	14.54
*207°	27° 0′	+18.38	− 9.36	*216°	36° 0′	+16.69	−12.12	*225°	45° 0′	+14.59	−14.59
	10	18.35	9.42		10	16.65	12.17		10	14.54	14.63
	20	18.32	9.47		20	16.62	12.22		20	14.50	14.67
	30	18.30	9.52		30	16.58	12.27		30	14.46	14.71
	40	18.27	9.58		40	16.54	12.32		40	14.41	14.75
	50	18.24	9.63		50	16.51	12.37		50	14.37	14.80
*208°	28° 0′	+18.21	− 9.68	*217°	37° 0′	+16.47	−12.41	*226°	46° 0′	+14.33	−14.84
	10	18.18	9.74		10	16.44	12.46		10	14.28	14.88
	20	18.16	9.79		20	16.40	12.51		20	14.24	14.92
	30	18.13	9.84		30	16.36	12.56		30	14.20	14.96
	40	18.10	9.89		40	16.33	12.60		40	14.15	15.00
	50	18.07	9.95		50	16.29	12.65		50	14.11	15.04
*209°	29° 0′	+18.04	−10.00	*218°	38° 0′	+16.25	−12.70	*227°	47° 0′	+14.07	−15.09
	10	18.01	10.05		10	16.22	12.75		10	14.02	15.13
	20	17.98	10.10		20	16.18	12.79		20	13.98	15.17
	30	17.95	10.16		30	16.14	12.84		30	13.94	15.21
	40	17.92	10.21		40	16.10	12.89		40	13.89	15.25
	50	17.89	10.26		50	16.07	12.93		50	13.85	15.29
*210°	30° 0′	+17.86	−10.31	*219°	39° 0′	+16.03	−12.98	*228°	48° 0′	+13.80	−15.33
	10	17.83	10.37		10	15.99	13.03		10	13.76	15.37
	20	17.80	10.42		20	15.95	13.07		20	13.71	15.41
	30	17.77	10.47		30	15.92	13.12		30	13.67	15.45
	40	17.74	10.52		40	15.88	13.17		40	13.62	15.49
	50	17.71	10.57		50	15.84	13.21		50	13.58	15.53
*211°	31° 0′	+17.68	−10.62	*220°	40° 0′	+15.80	−13.26	*229°	49° 0′	+13.53	−15.57
	10	17.65	10.67		10	15.76	13.30		10	13.49	15.61
	20	17.62	10.73		20	15.72	13.35		20	13.44	15.65
	30	17.59	10.78		30	15.68	13.40		30	13.40	15.68
	40	17.56	10.83		40	15.65	13.44		40	13.35	15.72
	50	17.52	10.88		50	15.61	13.49		50	13.30	15.76
*212°	32° 0′	+17.49	−10.93	*221°	41° 0′	+15.57	−13.53	*230°	50° 0′	+13.26	−15.80
	10	17.46	10.98		10	15.53	13.58		10	13.21	15.84
	20	17.43	11.03		20	15.49	13.62		20	13.17	15.88
	30	17.40	11.08		30	15.45	13.67		30	13.12	15.92
	40	17.37	11.13		40	15.41	13.71		40	13.07	15.95
	50	17.33	11.18		50	15.37	13.76		50	13.03	15.99

$u = +20.6265 \cos \varphi \qquad v = -20.6265 \sin \varphi$

φ		u	v	φ		u	v	φ		u	v
*231°	51° 0′	+12.98	−16.03	*240°	60° 0′	+10.31	−17.86	*249°	69° 0′	+ 7.39	−19.26
	10	12.93	16.07		10	10.26	17.89		10	7.34	19.28
	20	12.89	16.10		20	10.21	17.92		20	7.28	19.30
	30	12.84	16.14		30	10.16	17.95		30	7.22	19.32
	40	12.79	16.18		40	10.10	17.98		40	7.17	19.34
	50	12.75	16.22		50	10.05	18.01		50	7.11	19.36
*232°	52° 0′	+12.70	−16.25	*241°	61° 0′	+10.00	−18.04	*250°	70° 0′	+ 7.05	−19.38
	10	12.65	16.29		10	9.95	18.07		10	7.00	19.40
	20	12.60	16.33		20	9.89	18.10		20	6.94	19.42
	30	12.56	16.36		30	9.84	18.13		30	6.89	19.44
	40	12.51	16.40		40	9.79	18.16		40	6.83	19.46
	50	12.46	16.44		50	9.74	18.18		50	6.77	19.48
*233°	53° 0′	+12.41	−16.47	*242°	62° 0′	+ 9.68	−18.21	*251°	71° 0′	+ 6.72	−19.50
	10	12.37	16.51		10	9.63	18.24		10	6.66	19.52
	20	12.32	16.54		20	9.58	18.27		20	6.60	19.54
	30	12.27	16.58		30	9.52	18.30		30	6.54	19.56
	40	12.22	16.62		40	9.47	18.32		40	6.49	19.58
	50	12.17	16.65		50	9.42	18.35		50	6.43	19.60
*234°	54° 0′	+12.12	−16.69	*243°	63° 0′	+ 9.36	−18.38	*252°	72° 0′	+ 6.37	−19.62
	10	12.08	16.72		10	9.31	18.41		10	6.32	19.64
	20	12.03	16.76		20	9.26	18.43		20	6.26	19.65
	30	11.98	16.79		30	9.20	18.46		30	6.20	19.67
	40	11.93	16.83		40	9.15	18.49		40	6.14	19.69
	50	11.88	16.86		50	9.10	18.51		50	6.09	19.71
*235°	55° 0′	+11.83	−16.90	*244°	64° 0′	+ 9.04	−18.54	*253°	73° 0′	+ 6.03	−19.73
	10	11.78	16.93		10	8.99	18.57		10	5.97	19.74
	20	11.73	16.96		20	8.93	18.59		20	5.92	19.76
	30	11.68	17.00		30	8.88	18.62		30	5.86	19.78
	40	11.63	17.03		40	8.83	18.64		40	5.80	19.79
	50	11.58	17.07		50	8.77	18.67		50	5.74	19.81
*236°	56° 0′	+11.53	−17.10	*245°	65° 0′	+ 8.72	−18.69	*254°	74° 0′	+ 5.69	−19.83
	10	11.48	17.13		10	8.66	18.72		10	5.63	19.84
	20	11.43	17.17		20	8.61	18.74		20	5.57	19.86
	30	11.38	17.20		30	8.55	18.77		30	5.51	19.88
	40	11.33	17.23		40	8.50	18.79		40	5.45	19.89
	50	11.28	17.27		50	8.44	18.82		50	5.40	19.91
*237°	57° 0′	+11.23	−17.30	*246°	66° 0′	+ 8.39	−18.84	*255°	75° 0′	+ 5.34	−19.92
	10	11.18	17.33		10	8.39	18.87		10	5.28	19.94
	20	11.13	17.37		20	8.28	18.89		20	5.22	19.95
	30	11.08	17.40		30	8.22	18.92		30	5.16	19.97
	40	11.03	17.43		40	8.17	18.94		40	5.11	19.98
	50	10.98	17.46		50	8.11	18.96		50	5.05	20.00
*238°	58° 0′	+10.93	−17.49	*247°	67° 0′	+ 8.06	−18.99	*256°	76° 0′	+ 4.99	−20.01
	10	10.88	17.52		10	8.00	19.01		10	4.93	20.03
	20	10.83	17.56		20	7.95	19.03		20	4.87	20.04
	30	10.78	17.59		30	7.89	19.06		30	4.82	20.06
	40	10.73	17.62		40	7.84	19.08		40	4.76	20.07
	50	10.67	17.65		50	7.78	19.10		50	4.70	20.08
*239°	59° 0′	+10.62	−17.68	*248°	68° 0′	− 7.73	−19.12	*257°	77° 0′	+ 4.64	−20.10
	10	10.57	17.71		10	7.67	19.15		10	4.58	20.11
	20	10.52	17.74		20	7.62	19.17		20	4.52	20.12
	30	10.47	17.77		30	7.56	19.19		30	4.46	20.14
	40	10.42	17.80		40	7.50	19.21		40	4.41	20.15
	50	10.37	17.83		50	7.45	19.23		50	4.35	20.16

$u = +20.6265 \cos\varphi \qquad v = -20.6265 \sin\varphi$

φ		u	v	φ		u	v	φ		u	v
*258°	78° 0′	+ 4.29	−20.18	*267°	87° 0′	+ 1.08	−20.60	*276°	96° 0′	− 2.16	−20.51
	10	4.23	20.19		10	1.02	20.60		10	2.22	20.51
	20	4.17	20.20		20	0.96	20.60		20	2.28	20.50
	30	4.11	20.21		30	0.90	20.61		30	2.33	20.49
	40	4.05	20.22		40	0.84	20.61		40	2.39	20.49
	50	3.99	20.24		50	0.78	20.61		50	2.45	20.48
*259°	79° 0′	+ 3.94	−20.25	*268°	88° 0′	+ 0.72	−20.61	*277°	97° 0′	− 2.51	−20.47
	10	3.88	20.26		10	0.66	20.62		10	2.57	20.47
	20	3.82	20.27		20	0.60	20.62		20	2.63	20.46
	30	7.75	20.28		30	0.54	20.62		30	2.69	20.45
	40	3.70	20.29		40	0.48	20.62		40	2.75	20.44
	50	3.64	20.30		50	0.42	20.62		50	2.81	20.43
*260°	80° 0′	+ 3.58	−20.31	*269°	89° 0′	+ 0.36	−20.62	*278°	98° 0′	− 2.87	−20.43
	10	3.52	20.32		10	0.30	20.62		10	2.93	20.42
	20	3.46	20.33		20	0.24	20.63		20	2.99	20.41
	30	3.40	20.34		30	0.18	20.63		30	3.05	20.40
	40	3.35	20.35		40	0.12	20.63		40	3.11	20.39
	50	3.29	20.36		50	0.06	20.63		50	3.17	20.38
*261°	81° 0′	+ 3.23	−20.37	*270°	90° 0′	+ 0.00	−20.63	*279°	99° 0′	− 3.23	−20.37
	10	3.17	20.38		10	0.06	20.63		10	3.29	20.36
	20	3.11	20.39		20	0.12	20.63		20	3.35	20.35
	30	3.05	20.40		30	0.18	20.63		30	3.40	20.34
	40	2.99	20.41		40	0.24	20.63		40	3.46	20.33
	50	2.93	20.42		50	0.30	20.62		50	3.52	20.32
*262°	82° 0′	+ 2.87	−20.43	*271°	91° 0′	+ 0.36	−20.62	*280°	100° 0′	− 3.58	−20.31
	10	2.81	20.43		10	0.42	20.62		10	3.64	20.30
	20	2.75	20.44		20	0.48	20.62		20	3.70	20.29
	30	2.69	20.45		30	0.54	20.62		30	3.76	20.28
	40	2.63	20.46		40	0.60	20.62		40	3.82	20.27
	50	2.57	20.47		50	0.66	20.62		50	3.88	20.26
*263°	83° 0′	+ 2.51	−20.47	*272°	92° 0′	− 0.72	−20.61	*281°	101° 0′	− 3.94	−20.25
	10	2.45	20.48		10	0.78	20.61		10	3.99	20.24
	20	2.39	20.49		20	0.84	20.61		20	4.05	20.22
	30	2.33	20.49		30	0.90	20.61		30	4.11	20.21
	40	2.28	20.50		40	0.96	20.60		40	4.17	20.20
	50	2.22	20.51		50	1.02	20.60		50	4.23	20.19
*264°	84° 0′	+ 2.16	−20.51	*273°	93° 0′	− 1.08	−20.60	*282°	102° 0′	− 4.29	−20.18
	10	2.10	20.52		10	1.14	20.59		10	4.35	20.16
	20	2.04	20.53		20	1.20	20.59		20	4.41	20.15
	30	1.98	20.53		30	1.26	20.59		30	4.46	20.14
	40	1.92	20.54		40	1.32	20.58		40	4.52	20.12
	50	1.86	20.54		50	1.38	20.58		50	4.58	20.11
*265°	85° 0′	+ 1.80	−20.55	*274°	94° 0′	− 1.44	−20.58	*283°	103° 0′	− 4.64	−20.10
	10	1.74	20.55		10	1.50	20.57		10	4.70	20.08
	20	1.68	20.56		20	1.56	20.57		20	4.76	20.07
	30	1.62	20.56		30	1.62	20.56		30	4.82	20.06
	40	1.56	20.57		40	1.68	20.56		40	4.87	20.04
	50	1.50	20.57		50	1.74	20.55		50	4.93	20.03
*266°	86° 0′	+ 1.44	−20.58	*275°	95° 0′	− 1.80	−20.55	*284°	104° 0′	− 4.99	−20.01
	10	1.38	20.58		10	1.86	20.54		10	5.05	20.00
	20	1.32	20.58		20	1.92	20.54		20	5.11	19.98
	30	1.26	20.59		30	1.98	20.53		30	5.16	19.97
	40	1.20	20.59		40	2.04	20.73		40	5.22	19.95
	50	1.14	20.59		50	2.10	10.52		50	5.28	19.94

$u = +20.6265\cos\varphi \qquad v = -20.6265\sin\varphi$

φ		u	v	φ		u	v	φ		u	v
*285°	105° 0′	− 5.34	−19.92	*294°	114° 0′	− 8.39	−18.84	*303°	123° 0′	−11.23	−17.30
	10	5.40	19.91		10	8.44	18.82		10	11.28	17.27
	20	5.45	19.89		20	8.50	18.79		20	11.33	17.23
	30	5.51	19.88		30	8.55	18.77		30	11.38	17.20
	40	5.57	19.86		40	8.61	18.74		40	11.43	17.17
	50	5.63	19.84		50	8.66	18.72		50	11.48	17.13
*286°	106° 0′	− 5.69	−19.83	*295°	115° 0′	− 8.72	−18.69	*304°	124° 0′	−11.53	−17.10
	10	5.74	19.81		10	8.77	18.67		10	11.58	17.07
	20	5.80	19.79		20	8.83	18.64		20	11.63	17.03
	30	5.86	19.78		30	8.88	18.62		30	11.68	17.00
	40	5.92	19.76		40	8.93	18.59		40	11.73	16.96
	50	5.97	19.74		50	8.99	18.57		50	11.78	16.93
*287°	107° 0′	− 6.03	−19.73	*296°	116° 0′	− 9.04	−18.54	*305°	125° 0′	−11.83	−16.90
	10	6.09	19.71		10	9.10	18.51		10	11.88	16.86
	20	6.15	19.69		20	9.15	18.49		20	11.93	16.83
	30	6.20	10.67		30	9.20	18.46		30	11.98	16.79
	40	6.26	19.65		40	9.26	18.43		40	12.03	16.76
	50	6.32	19.64		50	9.31	18.41		50	12.08	16.72
*288°	108° 0′	− 6.37	−19.62	*297°	117° 0′	− 9.36	−18.38	*306°	126° 0′	−12.12	−16.69
	10	6.43	19.60		10	9.42	18.35		10	12.17	16.65
	20	6.49	19.58		20	9.47	18.32		20	12.22	16.62
	30	6.54	19.56		30	9.52	18.30		30	12.27	16.58
	40	6.60	19.54		40	9.58	18.27		40	12.32	16.54
	50	6.66	19.52		50	9.63	18.24		50	12.37	16.51
*289°	109° 0′	− 6.72	−19.50	*298°	118° 0′	− 9.68	−18.21	*307°	127° 0′	−12.41	−16.47
	10	6.77	19.48		10	9.74	18.18		10	12.46	16.44
	20	6.83	19.46		20	9.79	18.16		20	12.51	16.40
	30	6.89	19.44		30	9.84	19.13		30	12.56	16.36
	40	6.94	19.42		40	9.89	18.10		40	12.60	16.33
	50	7.00	19.40		50	9.95	18.07		50	12.65	16.29
*290°	110° 0′	− 7.05	−19.38	*299°	119° 0′	−10.00	−18.04	*308°	128° 0′	−12.70	−16.25
	10	7.11	19.36		10	10.05	18.01		10	12.75	16.22
	20	7.17	19.34		20	10.10	17.98		20	12.79	16.18
	30	7.22	19.32		30	10.16	17.95		30	12.84	16.14
	40	7.28	19.30		40	10.21	17.92		40	12.89	16.10
	50	7.34	19.28		50	10.25	17.89		50	12.93	16.07
*291°	111° 0′	− 7.39	−19.26	*300°	120° 0′	−10.31	−17.86	*309°	129° 0′	−12.98	−16.03
	10	7.45	19.23		10	10.37	17.83		10	13.03	15.99
	20	7.50	19.21		20	10.42	17.80		20	13.07	15.95
	30	7.56	19.19		30	10.47	17.77		30	13 12	15.92
	40	7.62	19.17		40	10.52	17.74		40	13.17	15.88
	50	7.67	19.15		50	10.57	17.71		50	13.21	15.84
*292°	112° 0′	− 7.73	−19.12	*301°	121° 0′	−10.62	−17.68	*310°	130° 0′	−13.26	−15.80
	10	7.78	19.10		10	10.67	17.65		10	13.30	15.76
	20	7.84	19.08		20	10.73	17.62		20	13.35	15.72
	30	7.89	19.06		30	10.78	17.59		30	13.40	15.68
	40	7.95	19.03		40	10.83	17.56		40	13.44	15.65
	50	8.00	19.01		50	10.88	17.52		50	13.49	15.61
*293°	113° 0′	− 8.06	−18.99	*302°	122° 0′	−10.93	−17.49	*311°	131° 0′	−13.53	−15.57
	10	8.11	18.96		10	10.98	17.46		10	13.58	15.53
	20	8.17	19.94		20	11.03	17.43		20	13.62	15.49
	30	8.22	18.92		30	11.08	17.40		30	13.67	15.45
	40	8.28	18.89		40	11.13	17.37		40	13.71	15.41
	50	8.33	18.87		50	11.18	17.33		50	13.76	15.37

$$u=+20.6265\cos\varphi \qquad v=-20.6265\sin\varphi$$

φ		u	v	φ		u	v	φ		u	v
*312°	132° 0′	−13.80	−15.33	*321°	141° 0′	−16.03	−12.98	*330°	150° 0′	−17.86	−10.31
	10	13.85	15.29		10	16.07	12.93		10	17.89	10.26
	20	13.89	15.25		20	16.10	12.89		20	17.92	10.21
	30	13.94	15.21		30	16.14	12.84		30	17.95	10.16
	40	13.98	15.17		40	16.18	12.79		40	17.98	10.10
	50	14.02	15.13		50	16.22	12.75		50	18.01	10.05
*313°	133° 0′	−14.07	−15.09	*322°	142° 0′	−16.25	−12.70	*331°	151° 0′	−18.04	−10.00
	10	14.11	15.04		10	16.29	12.65		10	18.07	9.95
	20	14.15	15.00		20	16.33	12.60		20	18.10	9.89
	30	14.20	14.96		30	16.36	12.56		30	18.13	9.84
	40	14.24	14.92		40	16.40	12.51		40	18.16	9.79
	50	14.28	14.88		50	16.44	12.46		50	18.18	9.74
*314°	134° 0′	−14.33	−14.84	*323°	143° 0′	−16.47	−12.41	*332°	152° 0′	−18.21	− 9.68
	10	14.37	14.80		10	16.51	12.37		10	18.24	9.63
	20	14.41	14.75		20	16.54	12.32		20	18.27	9.58
	30	14.46	14.71		30	16.58	12.27		30	18.30	9.52
	40	14.50	14.67		40	16.62	12.22		40	18.32	9.47
	50	14.54	14.63		50	16.65	12.17		50	18.35	9.42
*315°	135° 0′	−14.59	−14.59	*324°	144° 0′	−16.69	−12.12	*333°	153° 0′	−18.38	− 9.36
	10	14.63	14.54		10	16.72	12.08		10	18.41	9.31
	20	14.67	14.50		20	16.76	12.03		20	18.43	9.26
	30	14.71	14.46		30	16.79	11.98		30	18.46	9.20
	40	14.47	14.41		40	16.83	11.93		40	18.49	9.15
	50	14.80	14.37		50	16.86	11.88		50	18.51	9.10
*316°	136° 0′	−14.84	−14.33	*325°	145° 0′	−16.90	−11.83	*334°	154° 0′	−18.54	− 9.04
	10	14.88	14.28		10	16.93	11.78		10	18.57	8.99
	20	14.92	14.24		20	16.96	11.73		20	18.59	8.93
	30	14.96	14.20		30	17.00	11.68		30	18.62	8.88
	40	15.00	14.15		40	17.03	11.63		40	18.64	8.83
	50	15.04	14.11		50	17.07	11.58		50	18.67	8.77
*317°	137° 0′	−15.09	−14.07	*326°	146° 0′	−17.10	−11.53	*335°	155° 0′	−18.69	− 8.72
	10	15.13	14.02		10	17.13	11.48		10	18.72	8.66
	20	15.17	13.98		20	17.17	11.43		20	18.74	8.61
	30	15.21	13.94		30	17.20	11.38		30	18.77	8.55
	40	15.25	13.89		40	17.23	11.33		40	18.79	8.50
	50	15.29	13.85		50	17.27	11.28		50	18.82	8.44
*318°	138° 0′	−15.33	−13.80	*327°	147° 0′	−17.30	−11.23	*336°	156° 0′	−18.84	− 8.39
	10	15.37	13.76		10	17.33	11.18		10	18.87	8.33
	20	15.41	13.71		20	17.37	11.13		20	18.89	8.28
	30	15.45	13.67		30	17.40	11.08		30	18.92	8.22
	40	15.49	13.62		40	17.43	11.03		40	18.94	8.17
	50	15.53	13.58		50	17.46	10.98		50	18.96	8.11
*319°	139° 0′	−15.57	−13.53	*328°	148° 0′	−17.49	−10.93	*337°	157° 0′	−18.99	− 8.06
	10	15.61	13.49		10	17.52	10.88		10	19.01	8.00
	20	15.65	13.44		20	17.56	10.83		20	19.03	7.95
	30	15.68	13.40		30	17.59	10.78		30	19.06	7.89
	40	15.72	13.35		40	17.62	10.73		40	19.08	7.84
	50	15.76	13.30		50	17.65	10.67		50	19.10	7.78
*320°	140° 0′	−15.80	−13.26	*329°	149° 0′	−17.68	−10.62	*338°	158° 0′	−19.12	− 7.73
	10	15.84	13.21		10	17.71	10.57		10	19.15	7.67
	20	15.88	13.17		20	17.74	10.52		20	19.17	7.62
	30	15.92	13.12		30	17.77	10.47		30	19.19	7.56
	40	15.95	13.07		40	17.80	10.42		40	19.21	7.50
	50	15.99	13.03		50	17.83	10.37		50	19.23	7.45

$u=+20.6265\cos\varphi \qquad v=-20.6265\sin\varphi$

φ		u	v	φ		u	v	φ		u	v
*339°	159° 0′	−19.26	− 7.39	*346°	166° 0′	−20.01	− 4.99	*353°	173° 0′	−20.47	− 2.51
	10	19.28	7.34		10	20.03	4.93		10	20.48	2.45
	20	19.30	7.28		20	20.04	4.87		20	20.49	2.39
	30	19.32	7.22		30	20.06	4.82		30	20.49	2.33
	40	19.34	7.17		40	20.07	4.76		40	20.50	2.28
	50	19.36	7.11		50	20.08	4.70		50	20.51	2.22
*340°	160° 0′	−19.38	− 7.05	*347°	167° 0′	−20.10	− 4.64	*354°	174° 0′	−20.51	− 2.16
	10	19.40	7.00		10	20.11	4.58		10	20.52	2.10
	20	19.42	6.94		20	20.12	4.52		20	20.53	2.04
	30	19.44	6.89		30	20.14	4.46		30	20.53	1.98
	40	19.46	6.83		40	20.15	4.41		40	20.54	1.92
	50	19.48	6.77		50	20.16	4.35		50	20.54	1.86
*341°	161° 0′	−19.50	− 6.72	*348°	168° 0′	−20.18	− 4.29	*355°	175° 0′	−20.55	− 1.80
	10	19.52	6.66		10	20.19	4.23		10	20.55	1.74
	20	19.54	6.60		20	20.20	4.17		20	20.56	1.68
	30	19.56	6.54		30	20.21	4.11		30	20.56	1.62
	40	19.58	6.49		40	20.22	4.05		40	20.57	1.56
	50	19.60	6.43		50	20.24	3.99		50	20.57	1.50
*342°	162° 0′	−19.62	− 6.37	*349°	169° 0′	−20.25	− 3.94	*356°	176° 0′	−20.58	− 1.44
	10	19.64	6.32		10	20.26	3.88		10	20.58	1.38
	20	19.65	6.26		20	20.27	3.82		20	20.58	1.32
	30	19.67	6.20		30	20.28	3.76		30	20.59	1.26
	40	19.69	6.15		40	20.29	3.70		40	20.59	1.20
	50	19.71	6.09		50	20.30	3.64		50	20.59	1.14
*343°	163° 0′	−19.73	− 6.03	*350°	170° 0′	−20.31	− 3.58	*357°	177° 0′	−20.60	− 1.08
	10	19.74	5.97		10	20.32	3.52		10	20.60	1.02
	20	19.76	5.92		20	20.33	3.46		20	20.60	0.96
	30	19.78	5.86		30	20.34	3.40		30	20.61	0.90
	40	19.79	5.80		40	20.35	3.35		40	20.61	0.84
	50	19.81	5.74		50	20.36	3.29		50	20.61	0.78
*344°	164° 0′	−19.83	− 5.69	*351°	171° 0	−20.37	− 3.28	*358°	178° 0′	−20.61	− 0.72
	10	19.84	5.63		10	20.38	3.17		10	20.62	0.66
	20	19.86	5.57		20	20.39	3.11		20	20.62	0.60
	30	19.88	5.51		30	20.40	3.05		30	20.62	0.54
	40	19.89	5.45		40	20.41	2.99		40	20.62	0.48
	50	19.91	5.40		50	20.42	2.93		50	20.62	0.42
*345°	165° 0′	−19.92	− 5.34	*352°	172° 0′	−20.43	− 2.87	*359°	179° 0′	−20.62	− 0.36
	10	19.94	5.28		10	20.43	2.81		10	20.62	0.30
	20	19.95	5.22		20	20.44	2.75		20	20.63	0.24
	30	19.97	5.16		30	20.45	2.69		30	20.63	0.18
	40	19.98	5.11		40	20.46	2.63		40	20.63	0.12
	50	20.00	5.05		50	20.47	2.57		50	20.63	0.06
								*360°	180° 0′	−20.63	− 0.00

凡用*号表示之 φ 方向系数之符号，与表内区别对照。

附錄二　中英德文名詞对照表

中　　文	英　　文	德　　文
一　画		
一次函数，直綫函数	linear function	lineare Funktion
二　画		
几何平均值	geometric mean	Geometrisches Mittel
三　画		
三角網	triangulation net	Dreiecksnetz
三角鎖	chain of triangles	Dreieckskette
四　画		
中誤差	mean square error	mittelerer Fehler
方向	direction	Richtung
方向角	bearing, grid azimuth	Richtungswinkel
方向系数	coefficient of direction	Richtungskoeffizienten
方向观测組	sets of direction observation	Richtungssätze
方位角	azimuth	azimut
方程式	equation	Gleichung
反方位角，反向方位角	back azimuth	
分組平差	adjustment in groups	gruppenweise Ausgleichung
不符值	discrepancy	Widerspruch
水平角总和控制	close of horizon	Horizontalabschluss
水准網	level net	Nivellementsnetz
不完全方向测回	incomplete sets of direction observation	unvollstandige Richtungssätze
內方向	inner direction	innere Richtung
內插法	interpolation	Interpolation
引数	argument	Eingangswert
双点定点法	double point interpolation	Doppelpunkteinschaltung

中　　　文	英　　　文	德　　　文
五　　画		
外方向	outer direction	äussere Richtung
平均値	mean value, average value	Mittelwert
平差	adjustment of observation compensation of errors	Fehlerausgleichung
平差値	adjusted value	Ausgeglichener Wert
平差計算	computation of adjustment	Ausgleichungsrechnung
平均誤差	average error	durchschnittlicher Fehler
平面坐标	plane coordinates	Ebene Koordinaten
代替法	method of substitution	Substitutionverfahren
加常数	addition constant	Additionskonstante
四边形	quadrilateral	Viereck
对数解法	logarithmic solution	logarithmische Auflösung
六　　画		
地理坐标	geographical co-ordinates	geographische Koordinaten
行列式	determinant	Determinaten
似眞誤差	apparent error	Scheinbarer Fehler
交会定点法	point interpolation	Punkteinschaltung
全体平差	point insertion	Ausgleichung in einem Guss
边長条件	side conditions	Seitenbedingungen
边方程式	side equation	Seitengleichung
边方程式之極点	pole of side equation	Zentralpunkt für Seitengleichung
多余观测	redundancy in determination	Überschussige Beobachtung
多边中点形	central figure	Zentralfigur
后交会定点法	resection	Rückwärtseinschnitt
权	weight	Gewicht
权單位	unit weight	Gewichtseinheit
权倒数	weight reciprocal	Gewichtsreziproke
权系数	weight coefficient	Gewichtskoeffizienten

中文	英文	德文
七 画		
改正数	residuals	Verbesserung
改正数	correction	Korrektion, Verbesserung
改正数方程式	error equation, residual equation	Fehlergleichung
系数	coefficient	Keeffizient
系統誤差	systematic error	systematischer Fehler
坐标軸綫	coordinate axes	Achsenkreuz
坐标原点	origin of co-ordinates	Koordinatenursprung
坐标誤差	error of co-ordinates	Koordinatenfehler
坐标平差	adjustment by means of co-ordinates	Koordinatenausgleichung
角方程式	angle equations	Winkelgleichungen
角度誤差	angulat error	Winkelfehler
角度复測法	angle measurement by repetition	Repetitionswinkelmessung
完全方向測回	complete sets of direction observation	volle Richtungssätze
杜力特尔	Doolittle	Doolittle
克里格尔	Krueger	Krüger
条件观測	conditional observation	bedingte Beobachtungen
条件方程式	condition equation	Bedingungsgleichung
条件間接观測	indirect observations with condition equations	Vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen
条件不符値	discrepancy in condition equation	Bedingungswiderspruch
八 画		
附合三角網	annexed triangulation net	angeschlossenes Dreiecksnetz
近似値	approximate value	Näherungswert
或是率	probability	Wahrscheinlichkeit
或是誤差	probable error	Wahrscheinlicher Fehler
法方程式	normal equation	Normalgleichungen

中　　文	英　　文	德　　文
弧度	arc-measure	Bogenmass
非一次函数	non-linear function	nicht lineare Funktion
函数	function	Funktion
直接观測	direct observations	unmittelbare Beobachtungen
拉伯拉司	Laplace	Laplace
拉伯拉司方程式	Laplace equation	Laplace'sche Gleichung
定向值	orientation	Orientierungsunbekannte
环形網	ring system	Kranzsysteme
九　画		
耶奈	Jenne	Jenne
約化誤差方程式	reduced residual equation	reduzierte Fehlergleichung
約化法方程式	reduced normal equation	reduzierte Normal gleichung
約但		Jordan
約蘭得		Ielander
点位中誤差	mean square error of a point	Mittlere Punktfehler
总和核驗	check by summation	Sigmaprobe, Summenproben
复測法	method of repetition	Repetitionsverfahren
观測	observation	Beobachtung
观測值	observed value	Beobachtungswert
观測組	series of observations	Beobachtungsreihe
观測誤差	error of observation	Beobachtungsfehler
观測值差	difference of observation	Beobachtungsdifferenzen
观測方程式	observation equation	Beobachtungsgleichung
观測之平差	adjustment of observation	Fehlerausgleichung
十　画		
級數展开	expansion in series	Reihenentwicklung
原子誤差	elementary error	Elementarfehler
真值	true value	wahrer Wert
真誤差	true error	Wahrer Fehler
容許誤差	allowable error	zulässige Fehler

中文	英文	德文
核檢	chec_	Kontrolle, Probe
消去法	method of elimination	Elimainationsverfahren
泰罗	Taylor	
高斯約化法	Gauss algorithmus	Algorithmus von Gauss
高斯	Gauss	Gauss
高斯代替法	Gauss's method of substitution	Substitution verfahren nach Gauss
爱格	Eggert	Eggert
十一画		
閉合差	error of closure	Abschlussfehler
部分平差	partial adjustment, separate adjustment	partiehe Ausgleichung stückweise Ausgleichung
部分消去法	partial climination	partielle Elimination
偶然誤差	accidental error	zufällige Fehler
逐步接近解算	solution by successive approximation	Auflösung durch allmithliche Annährung
組；测回	set	Satz
常誤差	constant error	Konstantfehler
湊整誤差	abrundy error	Abrundungsfehler
規律誤差	regular error	regelmässiger Fehler
基綫網，基綫放大網	base net	Basisnetz
球面方向角	spherical azimuth	sphärische Azimut
球面角超	spherical excess	sphärischer exzess
視距常數	Stadia constant	Konstante des Fadendistanzmessers
接合圖形	Junotion figure	Verbindungsnetze
勒戎德尔	Legendre	Legendre
十二画		
强合，强制	constrained annexnation	Anschlusszwang
强制附合条件	condition for constrained annexation	Anschlusszwangsbedingung
联立方程式	simultaneous equations	

中 文	英 文	德 文
測站平差	local adjustment, station adjustment	Stationsausgleichung
剩余誤差	residual error	Restfehler
最小二乘法	method of least squares	Methode der kleinsten Quadrate
最大誤差	maximum error	Maximalfehler
最或是值	most probable value	wahrscheinlichster Wert
最適当之权分配	most favorable distribution of weights	günstigste Gewichtsverteilung
極坐标	polar co-ordinates	Polar-Koordinaten
等值观測	equivalent observation	Äquivalente Beobachtung
間接观測	indirect observation	Vermittelnde Beobachtung
菲德烈		Friedrich
博尔兹		Boltz
十 三 画		
照准誤差	sighting error	Zielfehler
預拟中誤差	mean square error a priore	Mittlerer Fehler a priore
傳遞方程式		Übertragungsgleichungen
圖形平差	figure adjustment	Netzausgleichung
十 四 画		
網	net	Netz
精度	precision, accuracy	Genauigkeit
精度之檢討	investigation of the accuracy	Genauigkeitsuntersuchung
精准率	measure of precision	Genauigkeitsmasse
誤差定律	law of error	Fehlergesetz
誤差傳播定律	law of propagation of errors	Fehlerfortpflantzungsgesetz
誤差分佈	distribution of error	Fehlerverteilung
誤差分佈曲綫	Curve of probability	Fehlerkurve
誤差極限，極限誤差	limit of error	Grenzfehler
誤差橢圓	error-ellipse	Fehlerellipse
算学平均值	arithmetic mean	arithmetisches Mittel

中文	英文	德文
廣义平均值	weighted mean	*allgemeines Mittel, Mittel* mit Gewicht, Gewichtes Mittel
赫尔默特		Helmert
十五畫		
横坐标	abscissa	Abszisse
十六畫		
積分	integration	Integralrechnung
鮑威	Bowie	Bowie
錯誤	mistake, blunder error	Grober Fehler
十七畫		
檢核	check	Kontrolle Probe
縱坐标	ordinate	Ordinate
十八畫		
簡略法	approximate method	Annäherungsmethod
簡略平差	approximate adjustment	Näherungsausgleichung
擴展法	method of development	*Entwicklungsverfahren*
十九畫		
繫数	correlate	Korrelate
繫数方程式	correlate equations	Korrelatengleichung
繫数法	method of correlates	Korrelatenverfahren
嚴格平差	rigorous adjustment	Strenge Ausgleichung
二十一畫		
蘭孛圓錐正形投影	Lambert conformal conic projection	Lambertsche Winkeltreue *Kegelprojektion*
二十二畫		
讀数誤差	error in reading	Able sefehler
讀数精度	accuracy of reading	Able segenauigkeit