

## Singularitätentheorie

### Vorlesung 14

#### Das Jacobiideal und die Milnorzahl

DEFINITION 14.1. Es sei  $F \in K[X_1, \dots, X_n]$  ein Polynom  $\neq 0$ . Man nennt

$$J_F := (\partial_1 F, \dots, \partial_n F)$$

das *Jacobiideal* von  $F$ .

Das Jacobiideal ist ein Ideal im Polynomring  $K[X_1, \dots, X_n]$ . Für einen Punkt  $P = (a_1, \dots, a_n) \in V$  betrachtet man das Jacobiideal auch in der Lokalisierung  $K[X_1, \dots, X_n]_{(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)}$ . Da wir an lokalen Eigenschaften interessiert sind, ist diese Interpretation wichtiger.

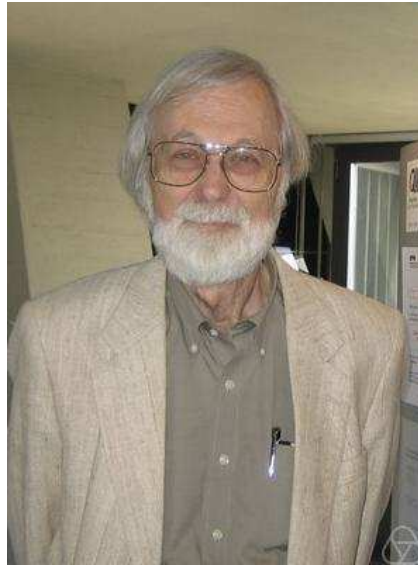
LEMMA 14.2. *Es sei  $F \in K[X_1, \dots, X_n]$  ein Polynom  $\neq 0$  und  $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$  die zugehörige Hyperfläche und  $P \in V$ . Dann ist das Jacobiideal  $J_F$  im lokalen Ring  $K[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{m}_P}$  genau dann das Einheitsideal, wenn  $P$  ein glatter Punkt der Hyperfläche ist.*

*Beweis.* Die Glattheit bedeutet im Fall eines Polynoms nach der Definition einfach, dass die partiellen Ableitungen im Punkt  $P$  insgesamt eine surjektive Abbildung

$$((\partial_1 F)(P), \dots, (\partial_n F)(P)) : K^n \longrightarrow K$$

definieren. Dies ist genau dann der Fall, wenn mindestens ein Eintrag  $\neq 0$  ist. Im lokalen Ring  $K[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{m}_P}$  bedeutet dies, dass nicht alle partiellen Ableitungen im maximalen Ideal  $\mathfrak{m}_P$  enthalten sind, was genau dann der Fall ist, wenn sie das Einheitsideal erzeugen.  $\square$

DEFINITION 14.3. Es sei  $F \in K[X_1, \dots, X_n]$  ein Polynom  $\neq 0$ ,  $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$  die zugehörige Hyperfläche und  $P \in V$  ein Punkt. Man nennt die  $K$ -Dimension des Restklassenringes  $K[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{m}_P} / J_{F,P}$  die *Milnorzahl* im Punkt  $P$ .



John Milnor

Aufgrund von Lemma 14.2 ist  $P$  genau dann ein glatter Punkt der Hyperfläche, wenn seine Milnorzahl gleich 0 ist. Insofern ist die Milnorzahl ein sinnvolles Singularitätsmaß.

Häufig kann man die Milnorzahl auch direkt als Dimension der Restklassenalgebra des Polynomrings ausrechnen und muss nicht in der Lokalisierung arbeiten. Dies beruht auf dem folgenden allgemeinen Resultat.

LEMMA 14.4. *Es sei  $R$  ein kommutativer Ring,  $I \subseteq R$  ein Ideal, das als Radikal mit dem maximalen Ideal  $\mathfrak{m}$  übereinstimmt. Dann ist*

$$R/I \cong R_{\mathfrak{m}}/IR_{\mathfrak{m}}.$$

*Beweis.* Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R_{\mathfrak{m}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ R/I & \longrightarrow & R_{\mathfrak{m}}/IR_{\mathfrak{m}} \end{array}$$

von  $R$ -Algebrahomomorphismen. Ein Element

$$f \notin \mathfrak{m}$$

ist eine Einheit in  $R/I$ . Es gibt nämlich oberhalb von  $I + (f)$  kein maximales Ideal, da es oberhalb von  $I$  nur  $\mathfrak{m}$  gibt, und somit ist  $I + (f) = R$ . Daher gibt es  $a \in I$  und  $b \in R$  mit  $a + bf = 1$ , was wiederum  $bf = 1$  in  $R/I$  bedeutet. Somit gibt es nach Lemma Anhang 1.5 auch einen natürlichen  $R$ -Algebrahomomorphismus

$$R_{\mathfrak{m}} \longrightarrow R/I.$$

Daraus ergibt sich auch ein Algebrahomomorphismus

$$R_{\mathfrak{m}}/IR_{\mathfrak{m}} \longrightarrow R/I.$$

Die Hintereinanderschaltungen müssen dabei Isomorphismen sein.  $\square$

LEMMA 14.5. *Es sei  $F \in K[X_1, \dots, X_n]$  derart, dass  $F$  nur einen kritischen Punkt  $P$  besitzt. Dann ist die Milnorzahl gleich der  $K$ -Vektorraumdimension von  $K[X_1, \dots, X_n]/J_F$ .*

*Beweis.* Nach Voraussetzung ist

$$J_F := (\partial_1 F, \dots, \partial_n F) \subseteq \mathfrak{m}_P$$

mit einem einzigen maximalen Ideal  $\mathfrak{m}_P$  zu einem Punkt  $P \in K^n$ . Nach Lemma 14.4 gilt

$$R/J_F = R_{\mathfrak{m}_P}/J_F R_{\mathfrak{m}_P}$$

und somit stimmt auch die  $K$ -Dimension überein.  $\square$

BEISPIEL 14.6. Wir betrachten die durch ein Polynom der Form

$$F = X^a + Y^b + Z^c$$

gegebene Hyperfläche im Nullpunkt (mit  $a, b, c \geq 1$ ). Der Körper sei so, dass die Exponenten in  $K$  von 0 verschieden seien. Das Jacobiideal ist

$$(aX^{a-1}, bY^{b-1}, cZ^{c-1}) = (X^{a-1}, Y^{b-1}, Z^{c-1}).$$

Im Restklassenring (vergleiche Lemma 14.5)

$$K[X, Y, Z]_{(0,0,0)}/(X^{a-1}, Y^{b-1}, Z^{c-1}) = K[X, Y, Z]/(X^{a-1}, Y^{b-1}, Z^{c-1})$$

bilden die Monome  $X^i Y^j Z^k$  mit  $0 \leq i \leq a-1$ ,  $0 \leq j \leq b-1$ ,  $0 \leq k \leq c-1$ , eine  $K$ -Basis und somit ist die Milnorzahl dieser Hyperfläche gleich  $(a-1)(b-1)(c-1)$ .

Die Milnorzahl kann unendlich sein.

BEISPIEL 14.7. Wir betrachten die durch ein Polynom der Form

$$F = X_1 \cdots X_n$$

gegebene Hyperfläche im Nullpunkt. Das Jacobiideal ist

$$J_F = (X_2 \cdots X_n, X_1 X_3 \cdots X_n, \dots, X_1 \cdots X_{n-1}).$$

Wir betrachten den Restklassenring  $K[X_1, \dots, X_n]_{(0, \dots, 0)}/J_F$ . Bei  $n = 2$  ist dieser eindimensional und die Milnorzahl ist 1. Bei  $n \geq 3$  hingegen sind die Monome

$$X_1^n, n \in \mathbb{N},$$

linear unabhängig und daher besitzt der Restklassenring die  $K$ -Dimension unendlich. Die Milnorzahl dieser Hyperfläche ist also unendlich.

SATZ 14.8. *Es sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper,*

$$F \in K[X_1, \dots, X_n]$$

*ein Polynom  $\neq 0$ ,  $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$  die zugehörige Hyperfläche und  $P \in V$  ein Punkt. Dann ist die Milnorzahl im Punkt  $P$  genau dann endlich, wenn  $P$  eine (allenfalls) isolierte Singularität ist.*

*Beweis.* Wir können direkt annehmen, dass  $P$  ein singulärer Punkt der Hyperfläche ist. Dann ist

$$J_F \subseteq \mathfrak{m}_P$$

im lokalen Ring  $K[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{m}_P}$ . Wenn  $P$  eine isolierte Singularität, so gibt es ein  $g \in K[X_1, \dots, X_n]/(F)$ ,  $g \notin \mathfrak{m}_P$ , in diesem Hyperflächenring derart, dass  $P$  der einzige singuläre Punkt in  $D(g)$  ist. Dies bedeutet nach Lemma 14.2, dass das Jacobiideal  $J_F$  im Ring  $K[X_1, \dots, X_n]_g$  nur in dem einzigen maximalen Ideal  $\mathfrak{m}_P$  enthalten ist. Dies bedeutet nach dem Hilbertschen Nullstellensatz, dass das Radikal des Jacobiideals gleich  $\mathfrak{m}_P$  ist. Somit gibt es ein  $r \in \mathbb{N}$  mit

$$\mathfrak{m}_P^r \subseteq J_F$$

in  $K[X_1, \dots, X_n]_g$ . Dann gibt es einen surjektiven Algebromorphismus

$$K[X_1, \dots, X_n]_g / \mathfrak{m}_P^r \longrightarrow K[X_1, \dots, X_n]_g / J_F$$

und die Endlichkeit links impliziert die Endlichkeit rechts.

Sei umgekehrt

$$K[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{m}_P} / J_F$$

endlich als  $K$ -Vektorraum. Dann hat  $K[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{m}_P} / J_F$  die Krulldimension 0 und in diesem lokalen Ring haben  $J_F$  und  $\mathfrak{m}_P$  das gleiche Radikal, d.h. es gilt

$$\mathfrak{m}_P^r \subseteq J_F \subseteq \mathfrak{m}_P$$

mit einem gewissen  $r$ . Diese Beziehung kann man durch endlich viele Gleichungen ausdrücken, und damit gelten sie auch in  $K[X_1, \dots, X_n]_g$  für ein geeignetes  $g$ , das eine offene Umgebung von  $P$  beschreibt. Dies bedeutet wiederum, dass auf  $D(g)$  der Punkt  $P$  der einzige singuläre Punkt ist.  $\square$

LEMMA 14.9. *Es sei  $K$  ein Körper,  $L: K^n \rightarrow K^m$  eine lineare Abbildung und*

$$L: K[Y_1, \dots, Y_m] \longrightarrow K[X_1, \dots, X_n]$$

*der zugehörige  $K$ -Algebromorphismus der Polynomringe. Dann gilt für das Jacobiideal zu  $F \in K[Y_1, \dots, Y_m]$  die Beziehung*

$$J_{F \circ L} = L(J_F),$$

*wobei  $L(J_F)$  das Erweiterungsideal ist.*

*Beweis.* Die Kettenregel, angewendet auf

$$K^n \xrightarrow{L} K^m \xrightarrow{F} K,$$

liefert

$$\left( \frac{\partial(F \circ L)}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial(F \circ L)}{\partial X_n} \right) = \left( \frac{\partial F}{\partial Y_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial Y_m} \right) \circ L.$$

Somit ist

$$\frac{\partial(F \circ L)}{\partial X_i} \in \left( \frac{\partial F}{\partial Y_1} \circ L, \dots, \frac{\partial F}{\partial Y_m} \circ L \right) = L(J_F)$$

und

$$J_{F \circ L} \subseteq L(J_F).$$

□

### Die Hesse-Matrix

Wir erinnern an die Hesse-Matrix. Deren Definitheitseigenschaften sind im reellen Fall entscheidend, ob in einem kritischen Punkt ein lokales Extrema der Funktion vorliegt oder nicht, siehe Satz 50.2 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)).

DEFINITION 14.10. Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{K}$ ,  $G \subseteq V$  eine offene Menge und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei eine Basis  $v_i, i = 1, \dots, n$ , von  $V$  gegeben mit den zugehörigen Richtungsableitungen  $D_i := D_{v_i}, i = 1, \dots, n$ . Zu  $P \in G$  heißt dann die Matrix

$$\begin{pmatrix} D_1 D_1 f(P) & \cdots & D_1 D_n f(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n D_1 f(P) & \cdots & D_n D_n f(P) \end{pmatrix}$$

die *Hesse-Matrix* zu  $f$  im Punkt  $P$  bezüglich der gegebenen Basis.

DEFINITION 14.11. Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{K}$ ,  $G \subseteq V$  eine offene Menge und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei eine Basis  $v_i, i = 1, \dots, n$ , von  $V$  gegeben mit den zugehörigen Richtungsableitungen  $D_i := D_{v_i}, i = 1, \dots, n$ . Ein kritischer Punkt  $P \in G$  heißt *nichtausgeartet*, wenn die Determinante der Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} D_1 D_1 f(P) & \cdots & D_1 D_n f(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n D_1 f(P) & \cdots & D_n D_n f(P) \end{pmatrix}$$

nicht 0 ist.

DEFINITION 14.12. Es sei  $K$  ein Körper,  $F \in K[X_1, \dots, X_n]$  ein Polynom und  $P \in K^n$  ein kritischer Punkt von  $F$ . Dann heißt  $P$  *nichtausgeartet*, wenn die Determinante der Matrix

$$\left( \frac{\partial}{\partial X_i} \frac{\partial F}{\partial X_j} (P) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

ungleich 0 ist.

Die folgende Aussage brauchen wir, um Milnorzahl 1 charakterisieren zu können.

LEMMA 14.13. *Es sei  $K$  ein Körper und seien*

$$g_1, \dots, g_n \in (X_1, \dots, X_n) \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$$

*Polynome. Dann ist die Matrix*

$$\left( \frac{\partial g_j}{\partial X_i} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

*genau dann im Nullpunkt invertierbar, wenn die Idealgleichheit*

$$(g_1, \dots, g_n) = (X_1, \dots, X_n)$$

*in der Lokalisierung  $K[X_1, \dots, X_n]_{(X_1, \dots, X_n)}$  gilt.*

*Beweis.* Wir setzen  $R = K[X_1, \dots, X_n]_{(X_1, \dots, X_n)}$  und  $\mathfrak{m} = (X_1, \dots, X_n)$  in  $R$ . Die Abbildung

$$R \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, g \longmapsto (g - g(0))$$

entspricht über die Identifizierung (siehe Lemma 13.5)

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \Omega_{R|K} \otimes_R R/\mathfrak{m} \cong K^n$$

der Ableitung, die wiederum in den Komponenten wegen Lemma 12.5 den partiellen Ableitungen von  $g$  entsprechen. Somit ist die von

$$\varphi: R^n \longrightarrow \mathfrak{m}, e_j \longmapsto g_j,$$

induzierte Abbildung

$$R^n \longrightarrow \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong K^n$$

durch  $e_j \mapsto \left( \frac{\partial g_j}{\partial X_1}(0), \dots, \frac{\partial g_j}{\partial X_1}(0) \right)$  gegeben.

Wenn die Determinante der Matrix ungleich 0 ist, so ist diese Abbildung surjektiv. Wegen dem Lemma von Nakayama ist dann bereits  $\varphi$  surjektiv. Wenn die Determinante gleich 0 ist, so ist die Gesamtabbildung nicht surjektiv und dann ist auch die vordere Abbildung nicht surjektiv.  $\square$

LEMMA 14.14. *Es sei  $K$  ein Körper,  $f \in K[X_1, \dots, X_n]$  ein Polynom und  $P \in K^n$  ein kritischer Punkt von  $f$ . Dann ist  $P$  genau dann ein nicht-ausgearteter kritischer Punkt, wenn die partiellen Ableitungen  $\partial_i f$  in der Lokalisierung  $K[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{m}_P}$  das maximale Ideal erzeugen, wenn also das Jacobiideal im Punkt  $P$  mit dem maximalen Ideal übereinstimmt, und dies ist genau dann der Fall, wenn die Milnorzahl von  $f$  in  $P$  gleich 1 ist.*

*Beweis.* Wende Lemma 14.13 auf

$$g_j := \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

an.  $\square$

## Abbildungsverzeichnis

- Quelle = John Milnor.jpg , Autor = Gert-Martin Greuel, Lizenz =  
CC-by-sa 2.0 2
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus  
Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine  
Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren  
Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor  
bzw. Hochlader und der Lizenz. 9
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias  
Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und  
unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9