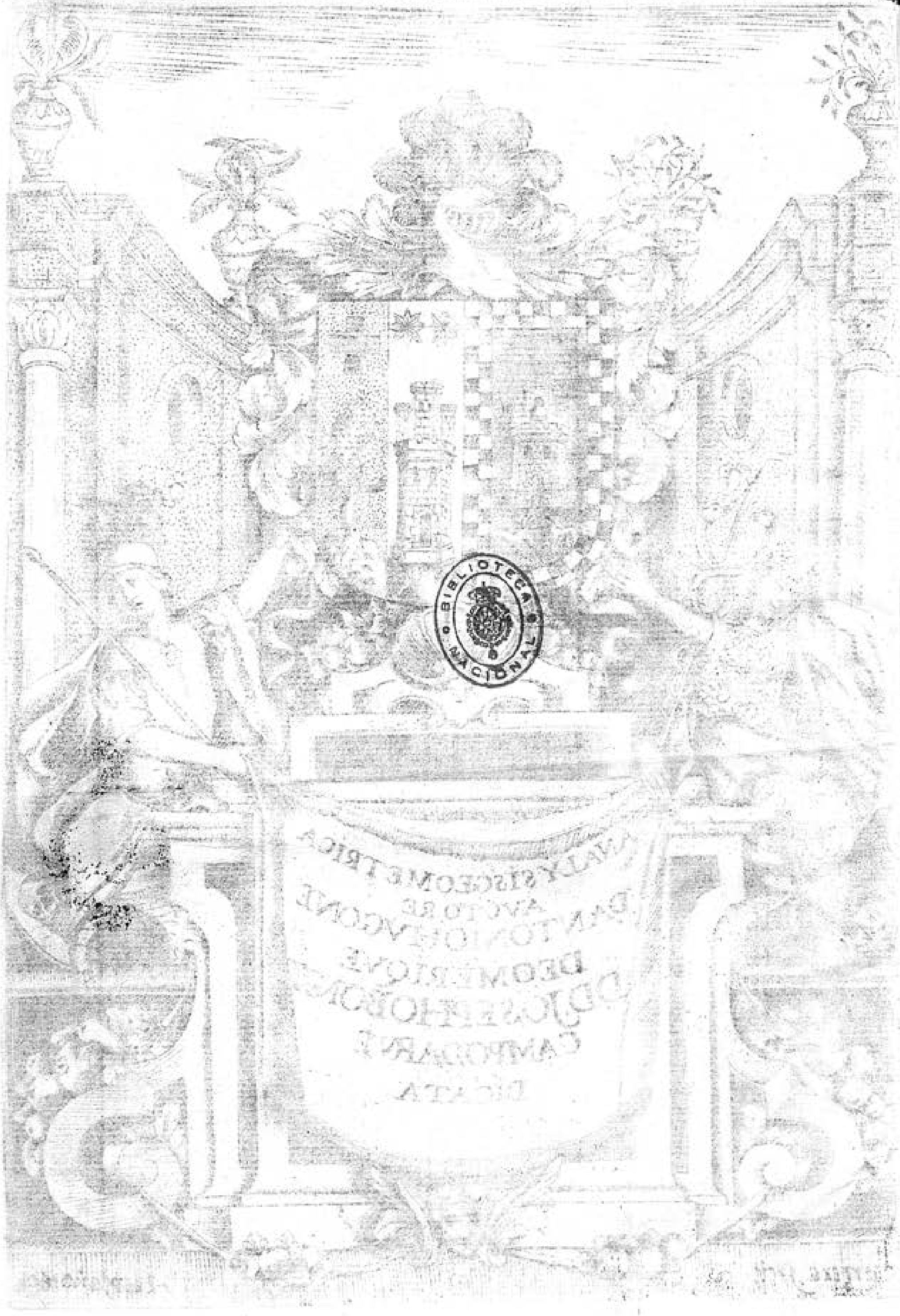

ANALYSIS GEOMETRICA
AVCTORE
D. ANTONIO HVGONE
DE OMERIQVE
D.D. JOSEPHO BONET
CAMPODARVE
DICATA
herrera fecit
Hisp. año 1660



ANALYSIS GEOMETRICA

SIVE

NOVA, ET VERA METHODVS RESOLVENDI

TAM

PROBLEMATA GEOMETRICA,

QVAM

ARITHMETICAS QVÆSTIONES.

PARS PRIMA DE PLANIS.

AVTHORE

D. ANTONIO HVGONE DE OMERIQVE,

SANLVCARENSE.

AD

ILLVSTREM DOMINUM

D. IOSEPHVM

BONET CAMPODARVE.

GADIBVS typis Christophori de Requena, anno Domini 1698.

CVM PRIVILEGIO.

ILLVSTRI DOMINO

D. JOSEPHO BONET CAMPODARVE.

DVplici iure, Amplissime Vir, Analysis mea Te Patronum quærit, à sua enim officiosa gratitudine impulsa, & à studiosa nobilitate tua correpta ad Te confugit. Nondum embryon titillabat in mente, & iam favores Dominationis tuæ prælibabat, concitabatur fætus & partus tandem in lucem editur, vt si quid emolumenti Orbis Mathematicus exinde hauriat, liberalitati tuæ potius, quam studio meo debitum fateatur. Iure ergo hac devincta obligatione, quod beneficium recipit, obsequium reddit. Nil minus, quam Solia, & Murices omni tempore Mathesi fuere patrocinium; non vt tam alta protectione ab invidia muniatur, cum sibi præcipuum vendicet assertas veritates ratione potius, quam authoritate; propugnare; sed vt in centro quiescat, & propria explendescat sede, cum nihil magis Principibus, & Magnatibus hoc studij genere analogicum videatur. Iure igitur hoc attracta magnete sub auspicijs tuis Analysis mea, &

¶ 2 quies-

quiescere,& explendescere intendit. Tu enim antonomasticè *El Contador* vocaris, &, quos natura sortitus es, splendoribus fulges. Quid de Te, quid de tuis Maioribus dicam? Modestiæ tuæ institutis arceor, observantiæ meæ stimulis vrgeor; sed dum vtrisque cogor, me cũctis satisfecisse arbitror, si ea dumtaxat, quæ de Te omnibus satis nota suspiciuntur, & de Tuis apud alios fusè scripta legũtur, breviter exposuero.

Ex Cæsar-Augusta Aragonum Capitali Cæsarea Ciuitate, quà natus, Matritum te penè pubentem contulisti, vt ardentem spiritum in Regali servitio, quæstoris munere, si posses, exerceres; siquidem inter cæteras humanas litteras, quibus operam navasti, Mathematicus genius in Arithmetica Te ita practicè detinuit, vt nova compendia circa minutias, prius quam duodecimum annum ageres in publicam vtilitatem ederes; ea tamen, quæ ad rationum libros ducendos pertinebant, tibi metipsi servans, quod quibusdam, qui Regia conventione, & authoritate Galeonum Classes instruendas susceperant, ansam tribuit, vt tanti momẽti negotium dexteritati tuæ commendarent, Te, licet invitum, Gades attrahendi, vbi magis in hac directione mirandum, quam Exteris, quorum ex omnibus nationibus plurimi extant, imitandum præstasti. Non tibi propriæ negotiationes ex voto successerunt,

runt, quod rurſus occaſio fuit, vt Te, & quæſtorem hæc Regalis Vectigalium arx, & Ciuem hoc Illuſtriſsimum totius Orbis Emporium obtinerent. Nec meritis tuis debiti defuerunt honores. Indiarum Comercij Regio titulo Quæſtor condecoraris, & cæterarum expeditionum primus tot ſolus amplecteris, quot pluribus indigebant Quæſtoribus. Nil ſit quin directione tua diſpoſitum, & integritati tuæ commiſſum in Regalis Ærarij cedat incremētum, & in mirabilis dexteritatis tuæ laudem, & æſtimationem reſultet: Quid ad vtrumque non contribuiſti laboris? Ad negotiorum exitus novas ſubminiſtraſti formulas, & ad calculi facilitatem novas inveniſti praxes, ita vt inſtantaneæ operationes in quantitatibus magnis, eis, quas logarithmi exhibent, longè præſtantiores videantur. Novi tamen tabularum canonis clavem tibi reſervas, donec publicam facias, quod, ni aſſiduæ occupationes præpedirent, iam eſſes executus. Quid mirum, ſi Te Natura habilem, & paternæ habilitatis hæredem fecerit. Sumptuoſiſsimi pro Antiqua, Auguſta, & Regia fundatione, atque celeberrimi pro pîo, provido, & prudenti ſtudio Illuſtriſsimorum Senatorum, Xenodochij, quod Cæſar-Auguſtæ decus, & toti orbi miraculum eſt, Rationalis fuit D. Orontius Bonet Dom. Tuæ digniſsimus Parens, ita præ cæteris in hac facul-

tatę

tate expeditus, vt si aliquid arduum occurreret computandum, quod ad Magistratum spectaret, statum illi commissum esset, in quibus insignem peritiam suam, quemadmodum in cæteris in ipso Consistorio eximij consilij sui sententiam vltro contribuebat.

Non tui Gadibus degentis oblita est Aragonia, Te potius litteris sub Regis nomine citatorijs ad generalia Regni Commitia, pro ipsius coronatione celebranda, & iterum, iterumque ad ea deinceps celebrata, convocavit, vt in *Infantionum stamento* ipse interesses, quemadmodum Pater tuus in munera in gubernatione Civitatis, & Regni Quiritibus solis obtinenda, conscriptus astiterat.

Hæc quidem in testimonium nobilitatis tuæ dicta sufficerent; non tamē ideo gloriosa cognomina tua silentio relinquam. Floret in Vrbe Jacca primorum Regum sede antiquissima Domus Bonet, quæ in duas divisa Dominos agnoscit, vnius D. Antonium Bernardum Bonet, & alterius D. Petrum Paulum Bonet, quorum hic nepos, ille consobrinus est Dom. Tuæ. Coronatur clarissimo sanguine de La-Sala, & Abarca nodo ita stricto, vt vtraque familia La-Sala, & Bonet Capellæ S. Michaelis in Cathedrali Ecclesia sitæ, atque à Joanne de La-Sala, & Joanna Bonet consortibus fundatæ, vsu, dominio, & Patronatu æquè fungantur, quemadmodum Capellæ in foro vulgo *de*

el

el Campo erectæ ad oſtenſionem, quæ quotannis fit corporis S. Oroſiæ Pyreneorum montium Patronæ, dominio fruuntur, & concurrentià cum Capitulo Eccleſiaſtico,& Sæculari Senatu eo die, qui in perpetuam memoriam Sacri Corporis traditionis, anno 759, Iudice Ciuitatis Martino de La-Sala factæ, feſtus celebratur.

Arduum equidem foret, nec hæc epiſtola capere poſſet, ſi clariſsimas ſtirpes La-Sala, & Abarca,quibus præter alias, tua ſplendet illaqueata,ſeorſim deſcribendas ſuſciperem. De ſtricta tamen vnione ambarum aliquid ſaltem referam. Dominus Domus Abarca, Arcis Olim in qua ipſius progenitor D. Sancius Abarca, huius nominis primus,coronatus fuit Rex, Palatij hodie Comitis de La-Roſa, trium quas habebat filiarum vnam Duci Gandiæ, alteram Duci Villæformoſæ, & tertiam Domino Domus La-Sala vxores tradidit. Conſanguinitatem alia connectarunt connubia D. Franciſcus de La-Sala vxorem duxit D. Franciſcam Abarca, cui parentes fuere D. Philipus Abarca Dominus eiuſdem Domus, & D. Franciſca Iñiguez æquè Regio ſanguine D. Garciæ Iñiguez ſecundi Regis Suprarbis, primi Garci-Ximenez, & Reginæ D. Iñigæ primogeniti, procreata. D. Joſephus de La-Sala Dominus Samanès in Domo Abarca cum filia Domini Gauini matrimonium contraxit.

D.Pe-

D. Petrus de La-Sala, & Abarca Domui Ximenez pariter à Regibus descendenti nuper Sororem dedit in matrimonium cum filio eiusdem Domus, cui mater erat D. Hyeronima Bonet, consobrina tua, & D. Michaelis Hyeronimi Bonet in Cathedrali Jaccensi Ecclesia Canonici, Viri ingenio, prudentia, & litteratura celeberrimi dignissima Soror. Nec vlterius pergam quin prius prædicti D. Petri, quem hospitem tibi carissimum cognovi, mortem tecum condoleam. Quid non expectandum erat à nobili Iuvene, qui Regis servitio deditus, dux iam factus, & Septam profectus ita accensum spiritum contra Mauros exercuit, vt magis quam hostibus proprio ardori succubuerit: sistam tamen cùm tibi D. Josephus Antonius Torrejon La-Sala, & Abarca consobrinus tuus tibi solamini fuerit, qui morte D. Petri successor Domus, & spiritus hæres ipsius memoriam suscitare, & Maiorum suorum vestigia insequi aggreditur, cui si arma placent, ipsius Pater D. Josephus Torrejon La-Sala, & Abarca, qui pro servitijs, & Regi, & Patriæ factis Castelli Speluncæ Castellanus effici tandem meruit, exemplar præclarum est. Si vero litteris incumbere lubeat, quid non imitandum præstat Doctissimus avunculus eius D. D. Blasius Torrejon La-Sala & Abarca, in Cathedrali Jaccensi Ecclesia Archidiaconus Gorgæ, Olim Ecclesiæ, Iudex, & Vicarius

rius Generalis Archiepiſcopatus Hiſpalenſis, nunc tandem in S. Tribunali Aragoniæ Apoſtolicus Inquiſitor, qui ita eruditus, & prudens eminet, vt omnes, qui eum noverint, tam voce, quam ſcriptis ſuaviter in ſtuporem rapiat.

Non ſolum Jaccæ Domus Bonet floreſcit, huius enim cognominis viris illuſtribus ditatæ plures extant in Orbe, quarum illa origo. Ita earum, quæ per totam Aragoniam diſperſæ, nobiliſsimæ ſuſpiciuntur, tua illi propinquiſsima fatetur; licet non deſit alia quæ ſibi principium omnium adiudicet. Sed quamvis propter immemorialem antiquitatem anceps ſit origo, ſtat pro te monumentum, Vulgo *Salva de Infançonia*, quod in Barcinonenſi archivo cuſtoditur, vnde conſtat Regem Alphonſum in Commitijs Oppido Alagon, anno 1289 celebratis, Joannem Bonet civem Oppidi Alfajarin claro ſanguine huius cognominis procreatum, & Oppido Grañen oriundum declaraſſe, ex quo ædes extant in oppidis ipſis, necnon Sallen, & La-Freſneda.

Ex prædicto Oppido Alagon Matritum profectus illuſtris Vir D. Ioannes Paulus Bonet Monaſterij Clariſſarum Virginum Patronus, Ordinis S. Jacobi Eques, Regis Philippi IV. Dapifer, atque in Sacro, & Supremo Aragoniæ Conſilio ſuæ Maieſtatis à ſecretis, ingenioſiſsimum librum mutos loqui docentem in lucem edidit, atque mirabiles dotes, quibus præditus erat, ad Galliam, Italiam, & Mauritaniam Legatus ostendit.

In Valentia D. Jacobus Pallàs Regio sanguine cretus de Domo Pallàs in Cattalonia sita, Comitum de Sinarcas progenitor, D. Elisabetham Bonet vxorem duxit, & tanti Viri virtute, & splendore non parum condecoraris.

Nec deest qui ex hoc Principatu Cattaloniæ Bonetes originarios faciat, asserens exinde se in Aragoniam contulisse, quando sub victoriosis Regis D. Jacobi vulgo el *Conquistador* vexillis hi fortissimi viri contra Mauros belligerantes ita virtute, & strenuitate præclaruerunt, vt recuperatà Valentia, & subiugatis Balearibus tantum in Maiorica territorij Nicolaus Bonet nactus fuerit, quantum Oppidum Santani mandato Regis D. Jacobi II. anno 1300 fundatum, & alia plura occupare videntur.

Nec tantæ gloriæ exors remansit Nauarra: Extat enim exinde Castellum, cui insignia sunt argentea Aquila expansis alis, quæ ingenij, & audaciæ symbolum heroicum cognomen Bonet posteritati commemorat.

Nec Gallia hac gloria caruit, absque alia enim origine, quin immemoriali huius clarissimi cognominis possessione, Viris omni tempore illustribus vigentia, in oppidis Poyton, & Nivernois palatia eminent.

Italia tamdem quot, quantosque Viros literis,

teris, & armis, immo, & sanctitate celleberrimos, hoc nobilissimo cognomine insignitos, sortita fuerit, quis recensebit? Pro me loquatur Joannes Petrus Crecensis, qui dum Amphiteatrum Romanum scriberet, iam à 1200 retro annis Bonetes floruisse asserit, eorumque gloriæ augustos totius Orbis terminos existimat. Inter plurimos, quorum gesta refert, magnum illum Senatorem Bonete, quo Mediolanum conscripto Patre honorabatur, commemorat, & Cremonam, quia tanti Viri patria, inter alia, fælicē reputat. Venerabilem Cominum Bonet, inter alios martyres æquites S. Afræ Brixiæ annumeratum, comminiscitur, qui pro defensione S. Romanæ Ecclesiæ, dum ipsa contra Henricum Germanorum Regem, ob schisma, quod in Italia proteruus suscitaverat, bella gerebat, sanguinem effudit. Eusebium Bonete fortissimum Christi militem in eodem bello calamo, & ense dimicantem describit. Sanctum tandem Eusebium (ne omnes repetam) quem sanguine, & virtutibus ipsius Magister S. Hyeronimus nobilissimum extollit, nec ipsius æmulus Rufinus perficiari audet, immo S. Ecclesia in eiusdem lectionibus approbat, hac illustrissima stirpe procreatum affirmat.

Præter Castellum, pileum, sive Virretum (quod Itali Bonete proferunt, nos vero si more Jaccensi vtimur, aut Cattalonico dicimus Bonet) ratione huius Inclyti cognominis, vt

pote

pore fortitudinis,&ingenij expreſsio propria, nobilitatis tuæ iure inſignia conſervas. Sunt qui litteris principium tribuunt, alij vero,qui potius quam Minervæ, Martis hæredes eſſe gloriantur, pileum Regis, quadam traditione, fuiſſe aſſerunt , quem perditum expugnato Caſtello , è hoſtium manibus extorſit Vir ille illuſtris, & fortis, qui propterea Caſtello , & pileo inſignitus,& Bonet cognominatus ſtirps creditur omnium. Litteris nigrum Virretum ſavet in aliquibus Scutis depictum;in alijs vero purpureus pileus arma reſonat , vtrumque profecto eis,qui tot ſæculis, litteris , & armis pares fulſerunt convenire videtur.

Quod autem ad aliud attinet cognomen Campodarve brevius me expediam , ſed non minora dicam. Illi fortiſsimi Viri , qui Æterni Regis Vexillum, dum Mauros tanto tempore HiſpanasProuincias infeſtantes in Campis Jacetanis profligabant , ſuper arbore aſpicere meruerũt,Inclyti ſunt progenitores tui.Quod quidem miraculum campum , qui paleſtra, montem , qui teſtis , Regem , qui dux tantæ victoriæ fuerant, hoc glorioſo cognomine honoravit. Rex enim Suprarbis dictus fuit , primus ſcilicet Aragoniæ, Progenitor vero tuus Campodarbe , ſive Campodarve cognominatus, an quia in ipſo prælio ſtrenuus miles præ cæteris excelluerit , vti & ipſe Campus etymon ſumpſerit, an vero ab ipſo Regio ſangui-

ne

ne originem traxerit, apud Cronologicos non invenitur. Hoc quidem postremum Robur & Crux, quæ in miraculi testimonium primi Regis insignia sunt , & Scutum venustanr tuum suadere videntur. Verum quomodocumque sit antiquissimam huius cognominis nobilitatem Castella , quorum alterum in Oppido Campodarve in prædicto Campo, eodem nomine fundato, alterum in Oppido Boltaña, æquè testantur. Istius Dominus, Præsentis avus, sororem habuit D. Catharinam Campodarve, quam paternam aviam obtinere , & tam præclari sanguinis particeps fieri meruisti.

Te igitur beneficum, Mathematicum , & generosum Analysis mea Mæcenatem iure merito exquisivit. Officia gratitudinis meæ benignus accipe , & amicitiam erga me iam pridem habitam prosequitor , atque in publicum emolumentum sub diuina protectione fœlix viue, diu viue.

Dominationis Tuæ

Obsequentissimus Servitor

D. Antonius Hugo de Omerique.

R.A.

R. A.P. JACOBI KRESA,

Societatis Jesu in Collegio Imperiali Matritensi Mathematatum Professoris Regij

CENSVRA.

POTENTISSIME DOMINE.

E*X mandato Celsitud. V. legi librum, cui titulus:* Analysis Geometrica, *Auctore D. Antonio Hugone de Omerique cive Gaditano, quem in lucem publicam edere desiderat. Perlegi opus insigne, nec mole mirandum, nec quæstionibus, quas pertractat peregrinum, sed novitate, ac facilitate methodi rarum, & vniversalitate resolvendi problemata singulare, quæ enim ab alijs per varios gyros, & labyrinthos deprehensa tandem fuere, vno eodemque tramite percurrit, & invenit, & multa solo proponendi modo Resoluta iam ostendit, & demõstrat; OEdipum dicerem in multis, qui Problema vno versu, non in medium, sed in vniversum orbem currere compellat. Multi Analysim speciosam tentarunt, & insignia monumenta Reipublicæ literariæ reliquerunt, multi resolutiouem Geometricam tractarunt, & egregiam Mathematis operam in eo locarunt, sed hæc Analysis Geometrica vtrumque amplexa fœliciorem sortem nacta mihi videtur in fertili solo Bœticæ, & celeberrimo portu Gaditano, vt eius Resolutiones vel poma Hesperidum aurea, vel lectas Americæ opes non*

in-

injuria dicere possem, si conferantur cum Authoribus, quos ad marginem citat dum eadem Problemata proponit. Selegit rara Quæsita Antecessorum, & quos fœlices reperit quia tempore præcesserunt in proponendo, fœlicius antecedit in resolvendo, aperto latissimo philomathis campo percurrendi cætera, quæ Antiquis vel invia, vel prærupta fuerunt. Quare typis dignissimum opus censeo, futurum gratissimum omnibus, & Reipublicæ literariæ perutile. Sic censeo, salvo, &c. In Collegio Imperiali Matritensi Societatis JESV. 13. Decembris 1697.

Jacobus Kresa.

SVMMA PRIVILEGIJ.

CArolus II. Dei Gratia Hispaniarum Rex, &c. Diplomate suo sanxit, ne quis librum cui titulus est: *Analysis Geometrica*, Authore D. Anton. Hugone de Omerique citra ipsius authoris voluntatem proximis decem annis imprimat, aut alibi terrarum impressum in Castellæ Regni ditiones importet, venalemque habeat: qui secus faxit confiscatione librorum, & aliâ gravi pœna multabitur. Vti latius patet in eodem diplomate dato Matriti 21. Decembris 1697. à D. Francisco Daza Regio Secretario referendato, & apud D. Raphaelem Saenz de Maza registrato.

LICENTIA ORDINARII.

D. D. Antonius Portillo, & Cardos Inquisitor Ordinarius, Vicarius Generalis Matritensis ad impressionem huius libri, cui titulus est: *Analysis Geometrica*, Authore D. Antonio Hugone de Omerique, licentiam concessit, vt latius ex ipsa licentia constat. Data Matriti die 5. Decembris 1697.

TAXA.

TAxatum est folium sex marauitinis, vt patet ex certificatione D. Raphaelis Saenz Maza. Datà Matriti die 27 Januarij 1698.

R.A.

R. A. P. JOSEPHI DE CAÑAS

Societatis Iesu in Collegio Gadicensi Olim Matheseos Professoris Regij, de Analysi Geometrica D. Antonij Hugonis de Omerique

IUDICIUM.

QVi primus ferri ex affrictu Herculei lapidis verticitatem, atque immobilem in vtrumque polum conversionem sagaci observatione notavit, is profecto ingentium vtilitatum, & emolumentorum segete humanum ditauit genus, & sibi tam præclari inuenti gloria nomen immortale quæsiuit. Nota erat satis superque veteribus illis philosophis huius lapidis raptrix ferri vis: tamen maximam illam, & nobilissimam virtutem, quà scilicet ferro illitus, & affrictus illud Boream versus assiduò spectare faciat eorum observationes nè verbo quidem attigere. Hinc totam veterum nauigandi Occeanum solertiam in notitia stellarum Promontoriorum, terrarum, littorumque diversitate positam; qui si in alto mari vbi præter cœlum, & vndam nihil pateret, tempestatis sæuitia depulsi deprehenderētur, nauis dirigendæ disciplinam nullam tenuerunt aliam, quam quæ Astrorum, Solis, & Lunæ situ, motuque commonstrabatur; si tamen casu non infrequenti cœlum nubilum, aut obscurum Astrorum inspectione prohiberet, tum imaginaria quadam locorum, ad quæ tendebant, conceptione, aut visis fortè marinis

¶¶¶ *avi-*

avibus, aut demum ventorum impetu; & aquarum cursu, pro itineris duce uti cogebantur. Quo factum est ut immensa telluris spatia nostra ætate detecta, & toto interjecto occeano diuulsa nisi tam diuini inventi beneficio, ut antiquis ignorata ita nobis perpetua oblivione sepulta mansissent. Haud absimile quidem Euclidianis elementis accidisse neminem mihi inficiari existimem, qui Hugonianam istam Analysim sedula meditatione perpenderit. Enim vero Geometricam Analysim hucusque in cassum plurimi è nobilissimis huius ætatis ingenijs (ut veteres omittam) tentavere, in quibus palmam sibi præripere ausi sunt Vieta, Descartes, Schooten symbolis quibusdam adjuti latentis quantitatis, & obuolutæ speciem, & imaginem subobscure repræsentantibus. His tamen sæpe longis itineribus portum tenuere, sæpius viæ difficultate, quasi vi tempestatis depulsi, retro acti sunt; numquam tamen Geometrica demonstratione (licet de ijs concinnandis eruditum ediderit tractatũ Schooten) viam, quam monstrarunt utcumque sternere potuere. Inerat ea vis Euclidianis elementis: abdita tamen, & incomperta, ut in magnete verticitas, quam non casu aliquo, uti de magnete perhibetur, sed acri & pœnè diuino ingenio, nec minus indefesso studio primitus detectam novo isto connatu à lucidissimo, & eximio Viro D. Antonio Hugone de Omerique serio pronunciare non abnuam. Cur hæc asseram? In promptu est Analysis ipsa, dum seuera, sed attenta meditatione percur-

ra-

ratur: maiora præstat quā spondet. Hucusque littora, & promontoria in Geometrica navigatione legebantur: nunc Occeanum totius Geometriæ, quantus quantus est, certis itineribus adiri posse pronūcio: atque adeo tantam huic facultati nostra ætate, & uno opere isto accessionem factam, quantam retro actis quindecim sæculis suis in eruditis elementorū commentationibus Arabes, Græci, Latinique non fecere quidem, sed facturos se receperunt. Si quis etiam nunc ingenio suo confisus inquisitionem de integro suscipere affectet, mihi assensurum non despero, nisi eo præiudicio agatur, quo maxima pars hominum præsentibus non æqua in antiquitatem propendet, & credit nos antiquorum pensa, & inventa longo intervallo æquare non posse; & si noua alicuius scientiæ accessio tentetur, hunc huiusce rei euentum fore, vt aut in ipsa incidat, quæ ab antiquitate libata sunt, aut sanè in alia, quæ ab antiquitate iam pridem indicata, & reiecta in oblivionem iam merito cessere; aut spreta gente, & facultate humana vtriusque temporis, sive antiqui, sive novi, auctiore scientiarum statu plane desperato, quæ obstetricante suo, aut suorum labore non parturiunt, sensuum fallacias, & iudicij infirmitatem reputare non dubitant. At ea est huius scientiæ maiestas, quæ sibi suis calculis authoramentum conciliet; & ea est huius noui operis solidarum demonstrationum constantia, & acolouthia, vt quemlibet quantumvis renuentem, vel nuda tantum elementorum notitia imbutum facili si negotio in sententiam trahat. Quo maximæ doctori amicissimo gratiæ habendæ sunt, qui Rempublicam litterariam ætate, & sæculo adeo eruditis tali honorario auxit, quò nullus profecto aut excogitare solertius, aut capessere fortius, aut exequi subtilius, aut perficere fœlicius potuisset. Et à quo, vt à maximo huius ætatis ingenio, mihi longa consuetudine noto, maiora sperare auguror: faxit Deus, illi vita supersit: altiorem si superest, statum Geometria, quam hucvsque obtinuit, è Bœtica nostra Hispania nanciscetur. Sic opto, & D. O. M. præcor. In Domo Professa Hispalensi Societ. Iesu Kalend. Februar. A. M.DC.XCVIII.

Josephus de Cañas.

R. A. P. CAROLI POVVEL

Societatis Jesu in Collegio Gadicensi Matheseos Professoris Regij in Analysi Geometrica D. Antonij Hugonis de Omerique

IVDICIVM.

NObile, vt creditur, foret metallum argentum viuum, vulgo mercurius, si sua non sibi obesset subtilitas, nam pondere auro, colore argento affinis, principiumque agnoscitur vniversale omnium, sed potius his omnibus renunciat, leuesque evanescit in auras, quam medijs quibuscumque ad soliditatis finem perducatur. Non hoc vnicè de

in-

inconsistenti hoc terræ dono profero; habet Mathematica, quæ cæteroqui solidas confert scientias, etiã suum mercurium, Analiticam inquam statica virtute æquilibrantem potentias, Arithmetica specie pollentem, principiumque universalis Matheseos; sed vsque nunc soliditatis geometricæ impatientem. Cum esset in statu pure numeroso, qualem eam nouerat Diophantus, vsque adeo informis erat, vt confusis quantitatibus primitivis, nil nisi rem discretam, hancque in particulari tantũ, cuderet, donec Franciscus Vieta prædictas quantitates contra violentiam concussionum ita symbolis involuit vt etiam rem continuam, & in vniversali proderet: Verum quæ symbolis inclusi, tam valide imaginationi præclusit, vt summo Francisci à Schooten nixu, vix aliqua improbe, nedum in concinnè inde excludi potuerint. Nunc tandem Eximius Vir D. Antonius Hugo de Omerique, Analysim olim à Platone ideatam, ad Geometricam consistentiam, quod vnice desiderabatur, perduxit, cathegoriamque nobilium scientiarum hoc mercurio in pretiosum metallum consolidato auxit. Rem vere magnam! Non tamen, vt in magnis fierit solet, auget propterea apparatum, mediaue quibus tantum finem assequitur, quin potius missas facit Vietæ species vt expeditius, materiam sub proprijs coloribus contemplatur vt clarius, rerum propensionibus attendit, vt connaturalius, incognita æque omnia in communi eorum causa insequitur vt compendiosius, in simplicioribus quantitatitibus versatur, vt facilius, prospicit gressus faciẽdos, vt securius, scopum expandit vt certius, Geometricè licet argumentãdo Arithmetica complectitur vt universalius, verbis cooperatur vt efficacius, ritè concinnata adhibet elementa vt elegantius, differentes aperit vias vt iucundius, & ex certa scientia præeligit commodiores vt vtilius problema simul solvat, construat, & demonstret. Elementa inquam ritè concinnata adhibet, nam quæ sexcenti alij Interpretes commentati sunt, ideo formidine cuiusque legentis animum inquietarunt, quod laborarent ignorantia huiusce finis, sive, vt ita dicam, obiecti attributionis vnicè docentis quæ & qualia esse debeant elementa ad se conducentia; vnde asserere audeam plus emolumenti ex huius analyseos introductione in elementa redundare, quam ex sexcentorum hucvsque Interpretum lucubrationibus. Hanc nudam potius descriptionem, quam exquisitam laudem expediuit complacentia mea quadriennis, quam in dies augere non desinit, iugis huius analyseos exercitatio, Deo de re tam vtili dentur gratiæ, Authori congratulatio, mihi detentionis in limine venia. In Collegio Gadicensi Societatis Jesu 20 Januarij 1698.

Carolus Povvel.

LEC-

LECTORI

EArum, quas inter vitæ varietates digerere potui, has lucubrationes Geometricas tibi Lector amice ſincero impertior animo. Vnum rogo, propoſitiones, tam quas cum Authoribus in margine citatis conferre poteris, quam reliquas à me excogitatas, ante omnia diſcutere velis, methodumque ſi habueris potiorem, Orbi Mathematico, qui tot ſæculis anxius eam inquiſiuit, decludere digneris, primus ero, qui tibi grates referam; ſin vero veram viam analyticam in hac prima parte aperuiſſe videar, gratus incede, benignus corrige, fœlix promove, & reliqua, quæ ſuperſunt, expecta. Vale.

ERRORES CORRIGENDI

Pag.	*Lin.*	*Error.*	*Corrige.*
3.	1.	conceſsit	conceſsi
6.	17.	media	mediam
7.	8.	quorum	quarum.
20.	20.	vel	&
33.	1 & 13	dimiando	dimidiando
38.	7.	4.	3.
45.	6.	ſit	ſi
	15.	permant	perm.ant.
	16.	vt *c.b.b.*&	vt *c.b.*&
49.	2.	Societati	Societatis
50.	23.	multiplicator vel diviſor factus	multiplicationem, vel diviſionem factam
51.	15.	ſubtractio	ſubtrahendo
	33.	deprehentur	deprehendetur
53.	36.	imprimam	impropriam
55.	23.	extremas	extremos
	24.	mutu	mutua
	25.	productioni	productione
57.	25.	E	Et
60.	2.	ſubtractionem ratione	ſubtractione rationum
63.	30.	Joannis	Joannes
68.	14.	argumentatur	argumentamur
69.	4.	idem	idem
70.	6.	*4bxa*	*4bax*
71.	15.	concludẽtem	concluderem
77.	14.	eadem	eamdem
84.	9.	cadet	cadat
	18.	*fb*	*fc*
88.	6.	ſit	ſi
	11.	e	&
	13.	rec	rectos
89.	4.	omnibus	cum omnibus

	7.	altitudinem	altitudinum
91.	14.	sufficere	sufficeret
	21.	vnam	vna
96.	7.	linea	lineæ
	19.	animadvertisse	animaduertisset
108.	in fig.	*n.b.x.a.q.*	*a.b.x.c q.*
113.	14	*bg*	*kg*
	16.	*bk* ad *bg*	vt *bk* ad *kg*
114.	7.	*ac* ad *bc*	*ab* ad *bc*
117.	10.	inveniatur	inveniantur
122.	21.	$24\frac{2}{1}$	$24\frac{1}{2}$
135.	1.	numerus	numeros
140.	8.	quod si	si
141.	14.	at	ad
152.	11.	$\frac{1}{2}bx$	$1\frac{1}{2}bx$
158.	penult.	sit	si
169.	13.	*xb*	*xc*
	14.	*xc*	*xb*
173.	22.	differentiæ	aggregata
177.	11.	est	&
180.	11.	sit	sit si
184.	7.	*ab*	*bg*
	8.	*bg*	*ab*
189.	2.	triangulæ	triangula
192.	7.	1 *ab*	$\frac{1}{3}$ *ab*
198.	1.	manifestum	manifesta
199.	13.	fueri	fuerit
207.	5.	*bc*	*ac*
210.	5.	*axd*	*bxd*
217.	11.	*aby*	*dby*
229.	11.	*yzv*	*yzx*
233.	in fig.	deest alia recta *bx*	
242.	in margine	17.	27.
250.	5.	ergo	ergo rectangulum *abx* ad
260.	16.	sit	si
270.	18.	*ayb*	*ayc*
279.	9.	*mp*	*md*

281.	15.	æquales	æqualia
293.	11.	*bax*	*abx*
303.	20	itaque rectangulum *gyk* quadrato *m* erit æquale. Dele totum.	
305.	16.	vrsupandæ	vsurpandæ
318.	11 & 13.	$7\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$
323.	5	*bc* ad *bx*	*bd* ad *bx*, & divid. vt *ax*. ad *xc* ita *xd* ad *bx*.
326.	14.	$+ 2\frac{1}{2}xb$	$+ 12\frac{1}{2}xb$
333.	in fig.	*k*	*x*
335.	10.	*g* & *k*	*g* & *h*
	ibidem	ijs	ea
347.	16.	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$
360.	8.	elysim	ellipsim
361.	28.	*xy*	*vy*
364.	10.	si	sic
392.	8	*bc*	*ac*
405.	18.	quartam	quartum
	21.	si	sic
	30.	75	95
	32.	integris	in integris
408.	9.	nuris	numeris
409.	11.	ex	est
412.	penult	7.	17
413.	9.	sit	fit
414.	13.	*aya* — 216	*aya* — 219
416.	16.	minime	minimæ
417.	8.	emergi	emergere
418.	9.	*ya* + q	*yax* + q
427.	5.	22	42
	6.	41	21
429.	2.	suas	suos
430.	11.	radices	radices semissium
432.	1.	binomi	binomij
434.	5.	differentia	differentiæ
437.	30.	cum 1 & 2	cum 3 & 2
440.	antepen.	quadratum	quadratum sinus.

ANA.

ANALYSIS GEOMETRICA.

INTRODVCTIO.

QVID SIT ANALYSIS.

POstquam elementis Geometricis instructus fuerit, qui Geometra vocari cupit, fructumque colligere laboris sui: aliquam sibi viam paratam habere debet, cuius ope vim, & facultatem cuiuscumque Geometricæ propositionis resolutionem inveniendi acquirat.

Hæc quidem via, quæcumque illa sit, analysis, seu resolutio dicitur, & omnium consensu ita definitur. *Assumptio quæsiti tamquam concessi, per ea, quæ deinceps consequuntur ad aliquod concessum procedens.* Regressus verò à concesso ad quæsitum *Synthesis*, seu compositio nominatur. Ve-

A rum-

rumenimvero iſta definitio nihil nobis certi promittit. In aſſumptione quidem quæſiti tamquam conceſsi aliqua ineſt interdum difficultas, in eo conſiſtens, quod data, & quæſita adcommodam contiguitatem reduci debeant. Iam verò poſito quæſito tamquam conceſſo, quænam ex multis quæ deinceps conſequuntur eligemus? Quorſum tendimus? Hæc omnia profecto nobis incerta reliquerunt Authores, vnde fit, quod quando abſtruſa, & intricata inter data, & quæſita eſt connexio, hæreat analyſta, quò ſe convertat neſciens. Fateantur omnes, neque veterum quiſquam perficiari auderet cum poſtquam tot, tantaque volumina hac de re conſcripſiſſent, vt nobis tradit Pappus initio libri ſeptimi; nullam tamen habuiſſe veram rationem reſolvendi, ex ipſorum propoſitionibus non temerè ſuſpicentur iuniores. Ex recentioribus autem Algebræ ſpecioſæ cultores hanc vim reſolvendi ſibi adiudicare videntur. Vtinam æquè facilis, ac reſolutio algebrica, eſſet geometrica demonſtratio; ſed tantum abeſt, vt poſtquam multos annos in concinnandis demonſtracionibus geometricis ex calculo Algebrico conſumpſiſſem, violentam eſſe methodũ in Geometricis putaverim, viamque omnino Geometricam ineundam concluſerim.

Analyſim igitur noſtram nos ita definimus.

Aſſump-

Assumptio quæsiti tamquam concessi, per necessarias consequentias ad certum, & determinatum finem progrediens. Hæc equidem definitio nobis securum gressum promittere videtur. Conabimur promissa adimplere; sed quoniam arduam nimis aggredimur materiam, scopum tetigisse nobis suadere non audemus; suspiciendos potius tantorum virorum, qui de resolucione scripsere veneramur labores, atque fælicioribus ingenijs nostros iudicandos, promovendosque, si forte conducere visi fuerint, relinquimus.

DE FINE ANALYSEOS.

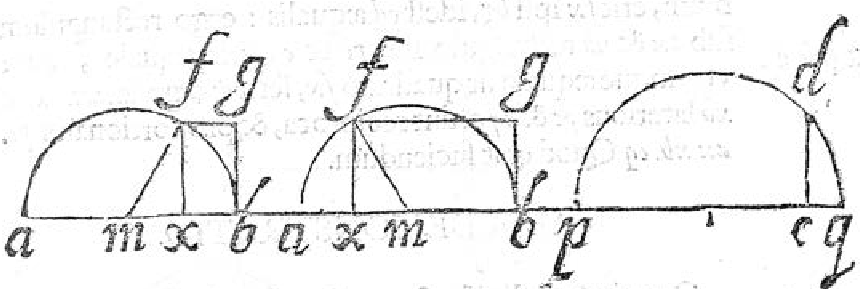
OMnium problematum, quæ proponi possunt, resolutio ita se habet (mirabile dictu) vt evolutis eorum conditionibus, magnitudo incognita, alij magnitudini notæ æqualis tandem appareat, vel tantum necesse sit medium, seu quartum terminum proportionalem, vel duos terminos, quorum summa, aut differentia nota sit, duobus datis terminis reciprocos invenire. Vel, quod in idem recidit: ex quatuor terminis proportionalibus datis extremis, dataque summa, aut differentia mediorum, singulos exhibere. Quod cum ita sit, hoc problema, quod pasim construendum occurrit, in elementis expressum haberi debebat. Sunt enim elementa quædam principia demonstrata, & ab omnibus supposita, vt à probationibus, & effectionibus communibus, & frequentibus abstinere liceat. Itaque illud ostendendum, & elementis adiungendum iudicavimus. Cæterum cum magnitudinum reciprocarum, vel vtraque linea recta, vel vtraque planum esse posint, vel denique mixtum ex vtraque altera sit linea recta, & altera planum (quo in casu summa, aut differentia petitur ab ipso plano, & potentia rectæ) hoc loco de duobus primis accidentibus, quæ ad problemata plana pertinent, agemus. Tertium veró, & quæ ex eo oriuntur ad problemata solida spectantia, vt in nostræ methodi explicatione commodius procedere posimus, speciali tractationi solidorum reservabimus. Hoc tamen animadversum volumus, problema planum ideó vocari, non quia in illo de planis agitur; sed quia illius constructio vna ad summum media proportionali indiget. Solidum vero non quia solida tractantur, quod in problemate plano contingere solet; sed quoniam duas saltem medias proportionales opportet inuenire.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA

ELEMENTIS ADDENDA.

DVAS RECTAS, QVARVM SVMMA, aut differentia nota sit, duabus rectis datis reciprocas invenire.



DATA SVMMA.

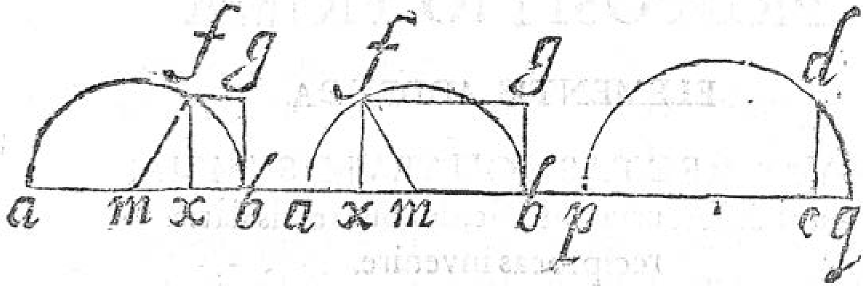
Oporteat primo duas rectas invenire *ax* & *xb*, quarum summa sit data *a b*, datis *p c* & *c q* reciprocas.

CONSTRVCTIO.

Inter *pc* & *cq* media inveniatur *cd*, cui æqualis ex vtrovis termino *b* rectæ datæ *ab* perpendicularis excitetur *bg*, ipsique *ab* parallela ducatur *gf*, occurrens semicirculo super eandem *ab* descripto in *f*, & demittatur perpendicularis *fx*. Dico *ax*. *xb*, quarum summa est data *ab*, reciprocas esse datis *pc* & *cq*. 13.6. el.

DEMONSTRATIO.

Cum enim ex constructione sit *bgfx* parallelogrammum, 34.1. el.



mum, erit fx ipsi bg, ideſt cd æqualis : ergo rectangulum ſub ax & xb rectangulo ſub pc & cq erit æquale, cum
14.6. el. vtrumque æquale ſit quadrato fx, ſeu cd: ergo latera ax & xb lateribus pc & cq erunt reciproca, & proportionales pc. ax xb. cq Quod erat faciendum.

ALIA DEMONSTRATIO.

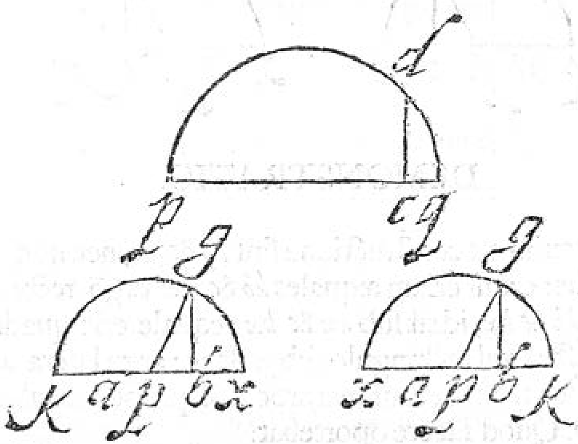
5. 1. el. Quoniam ab diviſa eſt æqualiter in m & inæqualiter in x erit rectangulum axb cum quadrato mx æquale qua-
47. 1. el. drato mb, ſeu mf; ſed quadratum mf æquatur quadratis mx & xf: ergo quadrata mx & xf æqualia erunt rectangulo axb cum quadrato mx, & dempto communi quadrato mx, remanebit rectangulum axb æquale quadrato xf, ſeu cd, ideſt rectangulo pcq: ergo latera ax & xb lateribus pc & cq erunt reciproca, & proportionales pc ax. xb cq. Quod erat faciendum.

DETERMINATIO.

Oportet autem rectam cd, mediã ſcilicet inter reciprocas datas pc & cq, non maiorem eſſe, quam mb, ſemiſumma videlicet partium reciprocarum quæſitarum ax & xb; aliter enim ſemicirculus afb rectam non caperet fx ipſi cd æqualem, vnde impoſsibile erit problema illud, quod talibus

libus partibus construi debeat, vt ex ipsa constructione satis apparet. Prætereat quoniam in constructione liberum est alteram partem *ax* iam pro parte maiore, iam pro minore constituere, poterit propterea problema talibus partibus construendum non raro duas accipere solutiones. Quod semel monuisse sufficiat.

DATA DIFFERENTIA.

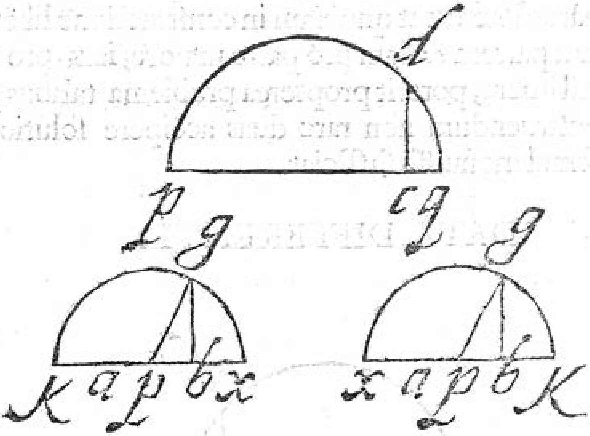


Oporteat secundo duas rectas invenire *ax* & *bx*, quorum differentia sit data *ab*, reciprocas datis *pc* & *cq*, vel ipsi *cd*, quæ media est inter illas.

CONSTRVCTIO.

Ex vtrovis termino *b* rectæ datæ *ab* perpendicularis erigatur *bg* ipsi *cd* æqualis, bisectaque *ab* in *p* ducatur *pg*, cuius intervallo semicirculus describatur *k g x*. Dico *ax*, & *bx*, quarum differentia est data *ab*, reciprocas esse datis *pc* & *cq*, seu ipsi *cd*.

DE-



DEMONSTRATIO.

Cum enim ex constructione sint *kp* & *px*, nec non *ap* & *pb* æquales: erunt etiam æquales *kb* & *ax*: ergo rectangulum sub *kb* & *bx*, ideſt sub *ax* & *bx* æquale erit quadrato *bz*, hoc eſt *cd* vel rectangulo sub *pc* & *cq*: ergo latera *ax* & *bx* lateribus *pc* & *cq* erunt reciproca, & proportionales *pc*. *ax*. *bx*. *cq*. Quod facere oportebat.

DETERMINATIO.

Poſſumus in constructione alteram partem *ax* iam pro parte maiore, iam pro minore accipere, vnde aliquando problema talibus partibus construendum duas poterit solutiones admittere.

ALIA DEMONSTRATIO.

6.2.el. Quoniam *ab* diviſa eſt bifariam in *p*, & ei adijcitur *bx*, seu *xa*, erit rectangulum sub *ax* & *bx* cum quadrato *pb*
47.1.el. æquale quadrato *px*, ideſt *pg*, seu quadratis *pb* & *bg*: ergo demp-

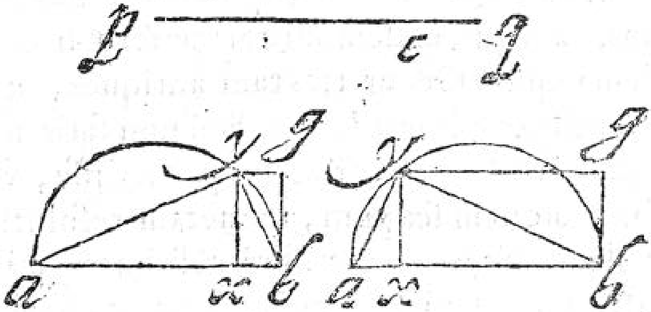
dem pro communi quadrato *pb*, erit rectangulum sub *ax* & *bx* æquale quadrato *bg*, idest *cd*, vel rectangulo sub *pc* & *cq*, atque latera *ax* & *bx* lateribus *pc* & *cq* erunt reciproca, & proportionales *pc*. *ax*. *bx*. *cq*. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

Multis alijs modis, quos consulto omittimus, construi, & demonstrari poterit hoc problema, quod Geometras tam antiquos, quam recentiores minime latuit. Sed non satis miror eius vniversalitatem ita illos præterijsse, vt ipsum tamquam scopum, ac metam resolutionis in elementis non præmisserint. Primam quidem partē R. P. Clauius ex Pelletario, tamquam speciale problema, ad prop. 13. lib. 6. elementorum attulit. Secundam sanè eadem facilitate afferre potuisset, si vtrarumque simul vtilitas ipsi obvia fuisset.

PROPOSITIO II.

DVO QVADRATA, QUORUM SVMMA, aut differentia nota sit, duobus quadratis datis reciproca invenire.



DATA SVMMA.

Sint primo invenienda duo quadrata *ay. by*, quorum summa sit quadratum datum *ab*, datis quadratis *pc*, & *cq* reciproca.

CONSTRVCTIO.

Ad datas *ab. pc. cq* quarta inveniatur *bg*, & ipsi reciproca inveniantur (per præcedentem) segmenta *ax. xb*, & connectantur *ay. by*. Dico quadrata *ay*, *by*, quorum summa est quadratum *ab* reciproca esse quadratis *pc*, & *cq*.

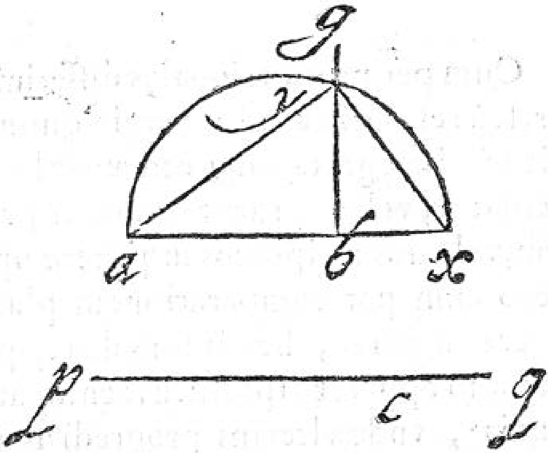
DEMONSTRATIO.

Cum enim ex const. *ab* ad *pc* sit vt *cq* ad *bg*, hoc est ad *xy*, Et, ob similitudinem triangulorum *aby xby*, *ab* ad *ay* sit

ſit vt *by* ad *xy*: erit ex æquo *pc* ad *ay* vt *by* ad *cq*. Ergo etiam eorum quadrata erunt proportionalia, quod erat faciendum.

DATA DIFFERENTIA.

Sint ſecundo inueniẽda duo quadrata *ay* & *by*, quorum differẽtia ſit quadratum datũ *ab* datis quadratis *pc* & *cq* reciproca.



CONSTRVCTIO.

Ad datas *ab*. *pc*. *cq* quarta inueniatur *bg*, cui (per præcedentem) reciproca inueniantur ſegmenta *ax*. *bx*, quorum differentia ſit *ab*, deſcribatur ſemicirculus *a y x* ſecans *bg*. in *y* & ducantur *ay*. *xy*. Dico quadrata *ay* & *by*, quorum differentia eſt quadratum datum *ab* reciproca eſſe quadratis datis *pc* & *cq*.

DEMONSTRATIO.

Cum enim ex conſtructione ſit *ax* ad *bg* vt *bg* ad *bx*, & per 8.6.el. ſit *ax*. ad *xy*, vt *xy* ad *bx*; æquales erunt *bg* & *xy*. Eſt autem ex conſtr. *ab* ad *pc*, vt *cq* ad *bg*, hoc eſt ad *xy*, & ob ſimilitudinem triangulorum *aby*. *bxy* eſt *ab* ad *ay*, vt *by* ad *xy*: ergo ex æquo erit *pc* ad *ay*, vt *by* ad *cq*, & eorum qua-

quadrata erunt proportionalia. Quod facere oportebat.

DE ÆQVATIONIBVS QUADRATIS.

Cum per proportionales differimus, analysis, seu resolutio tandiu pergit quousque magnitudo incognita alij notæ æqualis tandem inveniatur, vel quartum terminum proportionalem, vel duos reciprocos inquirere oporteat. At vero cum per comparationem planornm arguere cogimur, hoc ipsum de reciprocis sæpe sub alio apparet aspectu. Est enim meta resolutionis, vnde vlterins progredi non expedit, quædam æquatio, quæ quamvis in proportionales resoluta, partes reciprocas redderet inveniendas; nihilominus in se ipsa manens, finis resolutionis haberi debet proprijssimus.

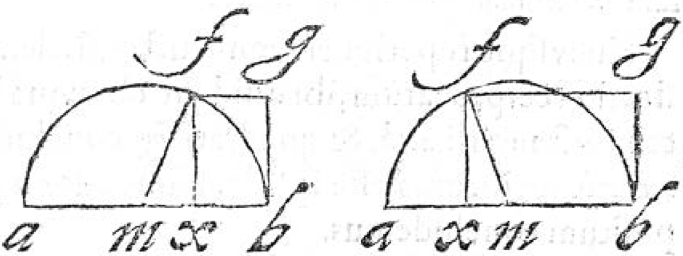
Hæc igitur vltima æquatio tripliciter accidit, & quamvis per modum corollarij primæ Propositionis explicari poterat; vberioris doctrinæ gratia tribus sequentibus propositionibus eam explanare conabimur.

PRO-

PROPOSITIO III.

RECTAM INVENIRE, CUIVS QVAdratum cum dato quadrato æquale ſit rectangulo ſub ipſa, & alia recta data.

Sint datæ rectæ *ab. bg* & oporteat rectam *ax* invenire cuius quadratum cum quadrato dato *bg* æquale ſit rectangulo ſub ipſa, & data *ab.*



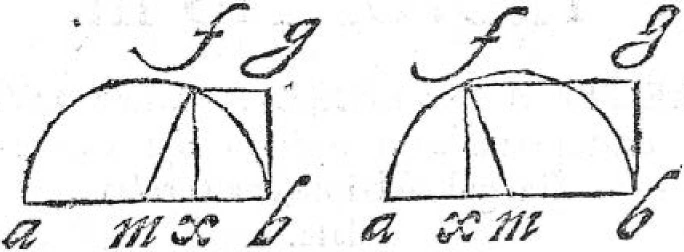
Hoc eſt reſoluere hanc æquationem, vel aliam eiuſdem formæ.

$$axa + bgb \;\text{—A—}\; bax.$$

CONSTR. & DEMONSTR.

Conſtituãtur *ab. bg* ad rectos angulos, biſectaque *ab* in *m*, centro *m* intervallo *am* ſemicirculus deſcribatur, & ipſi *ab* parallela ducatur *gf*, demittaturque perpendicularis *fx*, quæ æqualis erit ipſi *gb*. Dico tam *ax*, quam *xb*. rectam eſſe, de qua quæritur.

Quo-



Quoniam enim *ab* divisa est æqualiter in *m*, & inæqualiter in *x*: erit rectangulum à *xb* cum quadrato *mx* seu *xm* æquale quadrato *am*, seu *mf*, idest quadratis *mx*, & *xf*, vnde dempto communi quadrato *mx* remanebit rectangulum *axb* æquale quadrato *xf*, seu *bg*.

Hucvsque repetita est constructio, & demonstratio reciprocarum, ibi quidem ob æqualitatem rectanguli *axb*, & quadrati *bg* concluditur *ax*. *xb*. reciprocas esse ipsi *bg*. Nunc autem propositum concludemus.

Quoniam igitur rectangulum *axb* æquale est quadrato *bg*, addito communi quadrato *ax*, erit quadratum *ax* cum quadrato *bg* æquale rectangulo *axb* cum quadrato *ax*, hoc est rectangulo *bax*. Igitur rectam invenimus *ax*, &c.

prop. 3. 2. elem.

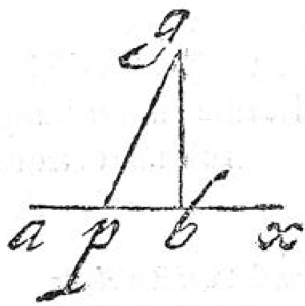
Eodem modo ostenditur rectam *xb* problema efficere, quia cum quadratum *bg* æquale sit rectangulo *axb*, addito communi quadrato *xb*, erit quadratum *xb* cum quadrato *bg*. æquale rectangulo *axb* cum quadrato *xb*, idest rectangulo *abx*. Igitur rectam *xb*, &c. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSITIO IV.

RECTAM INVENIRE, CVIVS QVAdratum æquale ſit rectangulo ſub ipſa, & alia recta data, vna cum quadrato dato.

Sint datæ rectæ *ab*, & *bg* oporteatque invenire rectam *ax*, cuius quadratum æquale ſit rectangulo ſub ipſa *ax* & data *ab*. vna cum quadrato dato *bg*.



Hoc eſt reſolvere hanc æquationem, vel aliam eiuſdem formæ.

$$axa \_\Lambda\_ xab + bgb$$

CONSTR. & DEMONSTR.

Inclinentur *ab*. *bg* ad rectos angulos, biſectaque *ab* in *p* ducatur *pg*, cui æqualis ponatur *px*. Dico *ax* eſſe rectam, de qua quæritur.

Quoniam enim *ab* biſecta eſt in *p*, & ei adijcitur *bx*: erit rectangulum *axb* cum quadrato *pb* æquale quadrato *px*, 6.2. el.
ſeu *pg*, ideſt quadratis *pb*, & *bg*, & dempto communi quadrato *pb*: erit rectangulum *axb* æquale quadrato *bg*. 47.1. el.

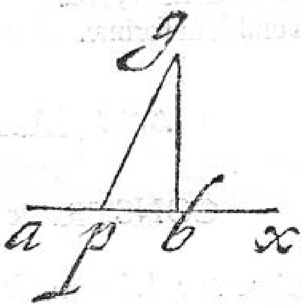
Ecce eadem conſtructio, & demonſtratio reciprociprocarum, ibi enim concluditur (propter æqualitatem) *ax*, & *xb* reciprocas esse ipsi *bg*: propositum autem ita concludetur.

Quoniam rectangulum *axb* æquale est quadrato *bg*; ad-
2.2.el. dito communi rectangulo *xab*: erunt rectangula *axb*, & *xab*, ideſt quadratum *ax* æquale rectangulo *xab*, & quadrato *bg*. Quod facere oportebat.

PROPOSITIO V.

RECTAM INVENIRE, CVIVS QVAdratum cum rectangulo ſub ipſa, & alia recta data æquale ſit dato quadrato.

Sint datæ rectæ *ab*, & *bg*, & oporteat rectam invenire *bx*, cuius quadratum cum rectangulo *abx* æquale ſit quadrato *bg*.



Hoc eſt reſolvere hanc æquationem, vel aliam ſimilem.

$$bxb + abx \; \text{-}\Lambda\text{-} \; bgb.$$

CONSTR. & DEMONSTR.

Inclinentur *ab bg* ad rectos angulos, & diviſa *ab* bifariam

riam in p, ducatur pg, cui æqualis fiat px. Dico bx rectam esse, de qua quæritur.

Quoniam igitur bisecta est ab in p, & adijcitur bx: erit rectangulum axb cum quadrato pb æquale quadrato px, 6.2.el.
idest pg, vel quadratis pb, & bg. Vnde dempto communi 47.1.el.
quadrato pb erit rectangulum axb æquale quadrato bg.

Huc vsque, eadem est constructio, & demonstratio reciprocarum, immo prop. antecedentis.

Quoniam rectangulum axb æquale est quadrato bg; & etiam æquale rectangulo abx, cum quadrato bx: erit quadratum bx cum rectangulo abx æquale quadrato bg, quod 3.2.el.
erat ostendendum.

Sunt igitur conspectus æquationum quæ vocantur quadratæ, in hunc modum.

$$axa + bgb \ \text{-}\Lambda\text{-}\ ab{:}ax.$$

$$axa \ \text{-}\Lambda\text{-}\ ab{:}ax + bgb.$$

$$bxb + ab{:}bx \ \text{-}\Lambda\text{-}\ bgb.$$

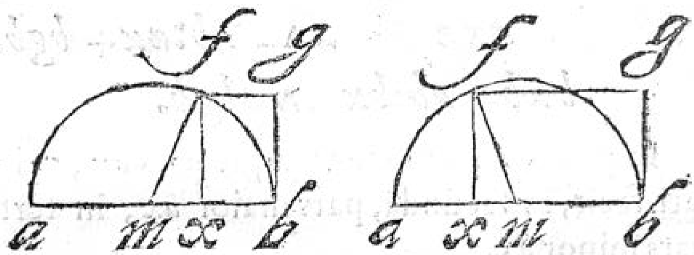
In prima æquatione vtraque pars ax, vel xb satisfacit, in secunda, pars maior ax, in tertia pars minor bx.

Algebræ quidem cultores numquam de reciprocis cogitarunt; sed in aliquā harum æquationum, quæ easdem reciprocas exhibent, semper inciderunt. Cum igitur ipsæ reciprocæ æquè veræ rectæ lineæ sint, neque vna earum dignosci possit, quin altera simul innotescat, non ideo radices falsæ iure vocari videntur siquidem nihil falsi sortiantur.

RESOLVTIO IN NVMERIS PARTIVM reciprocarum,& æquationum,quæ vocantur quadratæ.

Quando problema in numeris resolvendum proponitur,hoc est cum quantitates magnitudinum in numeris exprimuntur, facile ex prædictis regulam sibi quisque eruere poterit; rem nihilominus exemplis placet explicare.

DATA SVMMA.



Quæruntur duo numeri (*ax*, & *xb*) quorum aggregatum sit 10. (*ab*) reciproci duobus numeris datis 6 & $3\frac{1}{2}$ (*pc*, & *cq*).

VEL PROP. 3.

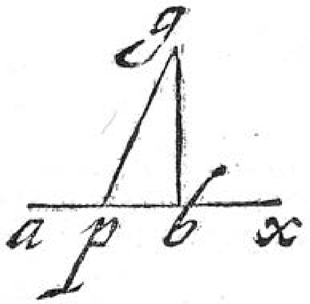
Quæritur numerus (*ax* vel *xb*) cuius quadratum cum quadrato dato 21 (*bg*, seu *fx*) æquale sit rectangulo sub ipso numero (*ax* vel *xb*) & dato numero 10 (*ab*.) Dimidium aggregati (*ab*) 10 est 5. (pro *mf* seu *mb*) à cuius quadradrato 25 si auferatur 21. (productum à 6 & $3\frac{1}{2}$, quod quadratum *fx* seu *bg* repreſentat) remanebit 4. cuius √. (ideſt radix quadrata) eſt 2. (pro *mx*) qui numerus 2 ſi dimidio aggregati 5 (*am*) addatur, & ab ipſo (*mb*) auferatur, provenient numeri quæſiti 7 & 3. (pro *ax*, & *xb*) erunt enim proportionales 6.7.3.$3\frac{1}{2}$, eritque tam 7 quam 3 numerus qui æquationem prædictam efficit, quia 49 quadratum ipſius 7 cum 21 facit 70. productum videlicet ſub ipſo 7, & dato 10. Et eodem modo 9 quadratum ipſius 3 cum 21 facit 30 nempe rectangulum ſub ipſo 3, & dato 10.

ALIVD EXEMPLVM.

Quæruntur duo numeri, quorum ſumma ſit 8 reciproci datis numeris 7, & 2. Vel. Quæritur numerus, cuius quadratum cum quadrato dato 14. æquale ſit producto ſub ipſo, & dato numero 8.

Dimidium aggregati 8 eſt 4 à cuius quadrato 16. auferatur 14 (productum à 7, & 2. vel quadratum datum 14) & remanebit 2, cuius radix eſt √2. quæ ſi addatur ipſi 4, & ab eo auferatur, provenient numeri quæſiti 4 + √2, & 4 -- √.2. qui reciproci ſunt datis numeris 7, & 2. quia proportionales ſunt 7, 4 + √2, 4 -- √2, 2. Et tam 4 + √2. quam 4 -- √2. æquationi propoſitæ ſatisfacit, quadratum enim 18 + 8 √2. ipſius 4 + √2. cum quadrato 14. facit 32 + 8 √2, quod aggregatum æquale eſt producto ſub ipſo 4 + √2. & dato 8. Et eodem modo quadratum 18 --- 8 √2, ipſius 4 --- √2 cum quadrato 14 facit 32 --- 8 √2, nempe rectangulum, vel productum ſub ipſo 4 --- √2, & dato 8.

DATA DIFFERENTIA.



Quæruntur duo numeri (*ax* & *bx*) quorum differentia (*ab*) sit 12 reciproci datis numeris (*pc*, & *cq*) 7 & 4.

VEL PROP. 4.

Quæritur numerus (*ax*) cuius quadratum æquale sit rectangulo sub ipso (*ax*) & dato numero 12 (*ab*) vna cum quadrato dato 28 (*bg*)

VEL PROP. 5.

Quæritur numerus (*bx*) cuius quadratum cum rectangulo sub ipso (*bx*) & dato numero 12 (*ab*) æquale sit quadrato dato 28. (*bg*)

Dimidium differentiæ (*ab*) 12 est 6. cuius quadrato 36 (*pb*) addatur 28 (productum sub *pc*.*cq* 7 & 4. vel quadratũ datum 28 & exurgent 64, cuius √ est 8. (pro *pg* seu *px*) si igitur prædictum dimidium (*cp* seu *pb*) 6. addatur ipsi 8. vel ab eo auferatur, provenient numeri quæsiti (*ax* & *bx*) 14, & 2. qui omnia complent. Sunt enim 14, & 2 reciproci datis numeris 7, & 4. quia proportionales sunt 7. 14. 2. 4. Et numerus maior 14. æquationem efficit prop. 4. quia quadratum 196. ipsius 14. æquale est rectangulo sub ipso 14 & dato 12 nempe 168 vna cum quadrato dato 28. Et numerus minor 2. æquationem efficit prop. 5. quia 4. quadratum ipsius 2. cum 24. rectangulo sub ipso 2. & dato 12 facit 28, nempe quadratum datum 28.

ALIVD EXEMPLVM.

Quæruntur duo numeri quorum differentia sit 14. reciprоciproci datis numeris 18 & 2.

Vel quæritur numerus cuius quadratum æquale sit rectangulo sub ipso, & dato numero 14 vna cum dato quadrato 36.

Vel quæritur numerus cuius quadratum cum rectangulo sub ipso, & dato numero 14 æquale sit quadrato dato 36.

Dimidium differentiæ 14 est 7. cuius quadrato 49 si addatur 36 (productum sub 18, & 2, vel quadratum datum 36) componetur 85, cuius radix quadrata est $\sqrt{85}$, & addito, & abblato dimidio differentiæ nempe 7. erunt $\sqrt{85} + 7$, & $\sqrt{85} - 7$. numeri quæsiti, differunt enim 14, & reciproci sunt datis 18, & 2 quia sunt proportionales 18. $\sqrt{85} + 7$. $\sqrt{85} - 7$. 2. Atque $134 + 14\sqrt{85}$. quadratum maioris $\sqrt{85} + 7$ æquale est rectangulo sub ipso $\sqrt{85} + 7$, & dato 14. nempe $98 + 14\sqrt{85}$, vna cum quadrato dato 36. Et tandem $134 - 14\sqrt{85}$. quadratum minoris $\sqrt{85} - 7$, cum $14\sqrt{85} - 98$ producto sub ipso $\sqrt{85} - 7$, & dato 14. facit 36. qui æqualis est quadrato dato 36.

DE QVADRATIS RECIPROCIS, VEL de æquatione quadrato-quadrata.

In numeris eodem modo resolvitur prop. 2. ac prima resoluta est, hoc solum addito, nempe quod ex inventis numeris extrahantur radices. Nam si duos numeros oporteat exhibere, quorum quadrata æqualia sint dato quadrato 10, & datis quadratis 6 & $3\frac{1}{2}$ reciproca; quærendi erunt duo numeri, quorum summa sit 10 datis 6 & $3\frac{1}{2}$ reciproci, & per præcedentem operatiotionem obtinebimus 7 & 3, quorum radices sunt √.7, & √.3 pro quæsitis numeris, &c.

Hic obiter notandum est magnitudines, quas Arithmetici, & etiam Geometræ, qui ex calculo Algebrico demonstrationes Geometricas concinnāt, quadrato-quadratum, quadrato-cubum, &c. vocant, per proportionem simplicem, aut compositam explicari debere. Nam altiorem magnitudinem sub tribus dimensionibus, nempe sub longitudine, latitudine, & profunditate natura concludit, neque alias noscit.

DE ARGVMENTATIONE.

Quæcumque sit connexio inter data, & quæsita ad proportionalitatem, vel ad æqualitatem naturaliter revocatur, vnde in resolutionibus per proportionales, vel per æqualitatem, argumentari oportet, eodem scilicet modo, quo ipsa resolutio, commodius, & proprius secundum præscriptas conditiones, instituenda videatur. In vtroque modo signis +, & ---, hoc est plus, & minus vti licet, nam vbi Geometria his vocibus vtitur, his characteribus claritatis, & brevitatis gratia vtendum videtur.

Cum autem per proportionales differendo, omnes modos, qui ex lib. 5. elem. erui possunt, vsurpare debeamus, non inconsultum erit, om-

nes

nes argumentationes, quæ ibi habentur, & aliquas, quas illis adiungimus recensere, & simul omnes aliquo vniversali conceptu demonstrare, in gratiam eorum, quibus demonstrationes elementorum circa hanc rem molestæ fiunt.

Nomina quibuscumque magnitudinibus imponere liberum est, & ab omnibus vsitatum. Quis enim magnitudinem quamlibet conceptam vocari *a*, vel *b*, prohibebit? Quis denominatorem cuiuscumque rationis *m*, vel *p* interdicet nominari? Ita similiter cum dicimus sit *a* quæcumque magnitudo; cur non concipere licebit numerum, lineam, planum, vel solidum? Et cum dicimus sit *a* quævis magnitudo, & sit *ap*, alia magnitudo composita quidem ex ipsa *a* iuxta quamlibet multiplicationem *p*, cur non concipiendæ erunt magnitudines *ap* & *a* eiusdem generis, quarum habitudo sit ipsa *p*? Illa scilicet multiplicatio secundum quam ipsa *ap* continet ipsam *a*, vel ab ea continetur. His positis sit pro huius rei fundamento sequens propositio.

PROP.

PROP. FUNDAMENTALIS.

PROPOSITIS QUIBUSCUMQUE QUAtuor magnitudinibus proportionalibus factum sub extremis æquale est facto sub medijs: & contra.

Sint a, & b duæ quælibet magnitudines, & sint ap, & bp aliæ duæ compositæ quidem ex ipsis a, & b iuxta quãcumque multiplicationem p: ergo erit eadem ratio inter ap, & a, quam inter bp, & b, quandoquidem ipsa ap continet ipsam a, vel ab ea continetur, eodem modo, ac ipsa bp ipsam b continet, vel ab ea continetur; nimirum per multiplicationem eamdem: ergo ap. a. bp. b. sunt quatuor magnitudines verè, & realiter proportionales: ergo apb factum sub extremis æquale patet apb facto sub medijs; ergo concipiantur vel numeri, vel lineæ, vel plana, vel solida, generaliter demonstratum est factum sub extremis æquale esse facto sub medijs.

ALITER.

Sit ratio, quæ inter duas magnitudines quascumque eiusdem generis a, & b existit $\frac{a}{b}$, hoc est, a dividenda (seu potius deprimenda) per b, & sit $\frac{c}{d}$ ratio inter c & d, & sic omnes rationes more arithmetico exprimantur. Hoc posito.

Sint primo quatuor quæcumque magnitudines proportionales a. b. c. d. Dico ad factum sub extremis æquale esse bc facto sub medijs. Cum enim ex hypothesi sint proportionales a. b. c. d; erit ratio $\frac{a}{b}$ æqualis rationi $\frac{c}{d}$ ergo si æqualiter eleventur per b erit a æqualis $\frac{bc}{d}$, & si

iterum

iterum eleventur per d erit ad æquale bc; ergo ad factum sub extremis æquale erit bc facto sub medijs.

Sint secundo $a.b.c.d.$ quatuor magnitudines, ita vt factum ad sub extremis æquale sit facto bc sub medijs. Dico propositas magnitudines proportionales esse. Cum enim ex hypothesi sit ad æquale bc; si æqualiter deprimantur per d erit a æqualis $\frac{bc}{d}$, & si iterum deprimantur per b erit $\frac{a}{b}$ æqualis $\frac{c}{d}$, hoc est ratio $\frac{a}{b}$ æqualis rationi $\frac{c}{d}$: ergo $a.b.c.d.$ sunt proportionales, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc facilè colligitur, si propositis quatuor terminis $a.b.c.d.$ factum sub extremis ad maius fuerit facto sub medijs bc: rationem a ad b maiorem esse ratione c ad d. Nam cum ad supponatur maius, quam bc, si æqualiter deprimantur per d, erit a maior quam $\frac{bc}{d}$ & si iterum deprimantur per b erit $\frac{a}{b}$ maior quam $\frac{c}{d}$ hoc est ratio a ad b maior ratione c ad d. Et contra si ratio $\frac{a}{b}$ maior fuerit ratione $\frac{c}{d}$, elevando per b, erit a maior quam $\frac{bc}{d}$, & iterũ elevando per d erit ad factum sub extremis maius bc facto sub medijs, &c.

Eodem modo ostenditur si propositis quatuor terminis factum sub extremis minus fuerit facto sub medijs, rationem primi ad secundum minorem esse ratione tertij ad quartum, & contra, &c.

Per hanc vnicam propositionem omnes modi argumentandi, â se invicem independenter, demonstrantur.

FORMULÆ ARGVMENTANDI PER PROPORTIONALES.

def. 12. 5.

ALTERNANDO.

Alternando arguitur, cum, propositis quatuor terminis proportionalibus, com paratur antecedens ad antecedentem.

Sint prop. *ap. a. bp. b.*
Ergo altern. sunt prop. *ap. bp. a. b.*
Qnia sub extremis, & medijs *apb.*

Si antecedentes fuerint diversi generis, alternatio locum non habet. Noluerunt enim Geometræ inter magnitudines heterogeneas considerare rationem. Ego vero alternationem non horrerem, tum quia ratio inter homogeneas poterit conservari, tum etiam quia inter lineam,& planum (exempli gratia) rationem constituere licet: illam scilicet latitudinem, quæ provenit ex applicatione plani ad lineam. Vnde si duo plana ad duas lineas applicata, vtrumque vtrique, latitudines produxerint æquales: absurdum non existimo dicere, quod ita se habeat (secundum quantitatem, idest latitudinem) alterum planum, ad suam rectam (deprimentem) vt reliquum planum ad rectam suam. Maximè cum verum sit, esse vt planum ad planum ita recta ad rectam, nam aliter latitudines non efficerent æquales.

N O T A.

Hunc modum argumentandi per alternationem, sive per

per mutationem non memini apud Authores observatum vidisse, nisi quando propositis quatuor terminis proportionalibus, secundus, & tertius eorum loca permutant. Sed pari ratione primus, & quartus loca permutare possunt. Nam si fuerint proportionales *a.b.c.d.* erit *ad* —Λ— *bc*, & permutando etiam erunt proportionales *d.b.c.a.* quia eodem modo *ad* —Λ— *bc*.

Sint prop.	*a. b. c. d.*
Ergo alter S.P.	*d. b. c. a.*
Quia semper	*ad* —Λ— *bc*

Pari iure si fuerit factum *ab*, ideſt ſub *a* & *b* ad factum *cd*, ideſt ſub *c* & *d*, vt *f* ad *g*: erit factum ſub extremis *abg* facto ſub medijs *cdf* æquale. Et ſecundus & tertius inter ſe, & primus, & quartus inter ſe dimenſiones poterunt permutare, poterimus inquã dicere ergo permutando, *a* ad *c* erit, vt factum *df* ſub *d* & *f* ad factum *bg* ſub *b* & *g*: Quia factum ſub extremis *abg* facto ſub medijs *cdf* eſt æquale, vti erat ante permutationem. Et ſic de reliquis dimenſionibus.

Sint prop.	*ab. cd. f. g.*
Et erit.	*abg* —Λ— *cdf.*
Ergo alt. S.P.	*a. c. df. bg.*
quia etiam erit.	*abg* —Λ— *cdf.*

Hunc modum permutandi dimenſiones terminorum proportionalium lectoribus commendamus, quia ipſe in noſtra methodo non parvam præbet facilitatem.

INVERTENDO.

Arguitur, cum conſequens ad antecedentem comparatur. def. 13. 5.

Sint prop.	*ap. a. bp. b.*
Ergo inv. S.P.	*a. ap. b. bp.*
quia ſub extrem. & med.	*apb.*

COM-

COMPONENDO.

Arguitur, cum aggregatum rationis (ideſt terminorum
def.14. rationis) ad conſequentem comparatur.
5.p.18.

Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
Ergo comp. S.P.	*ap+ a.*	*a.*	*bp+ b.*	*b.*
Quia ſub extrem. & med.		*apb+ ab.*		

Huic modo argumentandi duos ſequentes adiungit R.P. Clauius, omnino vtiles, & neceſſarios.

PER COMPOSITIONEM RATIONIS CONVERSAM.

Arguitur, cum aggregatum rationis antecedenti comparatur.

Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
Ergo per comp. R. conv. S.P.	*ap+ a.*	*ap.*	*bp+ b.*	*bp.*
Quia ſub extr. & med.		*appb +apb.*		

PER COMPOSITIONEM RATIONIS CONTRARIAM.

Arguitur, quando antecedens ad aggregatum rationis comparatur.

Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
Ergo per comp. R. contr. S.P.	*ap.*	*ap +a.*	*bp.*	*bp+ b.*
Quia ſub extr. & med.		*appb +apb.*		

DI-

DIVIDENDO.

Arguitur, cum differentia rationis (ideſt inter terminos rationis) confertur conſequenti. def.15. pro.17. Lib.5. el.

Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
Ergo diuid.S.P.	*ap—a.*	*a.*	*bp—b.*	*b.*
Quia ſub ext.& med.		*apb—ab.*		

Huic etiam modo duos ſequentes, duobus prioribus correſpondentes, adiungit R.P. Clavius.

PER DIVISIONEM RATIONIS CONVERSAM.

Arguitur, cum conſequens ad differentiam, rationis comparatur.

Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
Ergo per diviſ.R.conv.S.P.	*a.*	*ap—a.*	*b.*	*bp—b.*
Quia ſub ext.& med.		*apb—ab.*		

PER DIVISIONEM RATIONIS CONTRARIAM

Arguitur, quando antecedens confertur differentiæ, quà ſuperatur à conſequente.

Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
Ergo per diviſ.R.cont.S.P.	*ap.*	*a—ap.*	*bp.*	*b—bp.*
Quia ſub ext.& med.		*apb—appb.*		

CON-

CONVERTENDO.

Arguitur, quando antecedens ad differentiam rationis
def.16. comparatur.

5.	Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
pro.19.	Ergo conv.S.P.	*ap.*	*ap--a.*	*bp.*	*bp--b.*
	Quia sub extr.& med.		*appb--apb.*		

VT VNVS AD VNUM, ita aggregata.

Argumentari licet, quando, vt quilibet antecedens ad
p.12.5. suum consequentem, ita infertur esse omnes antecedentes simul, ad omnes consequentes simul. Oportet tamen, vt sint eiusdem generis, vt in alternatione diximus.

Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
Ergo vt 1.ad 1.ita agg.& S.P.	*ap.*	*a.*	*ap+bp.*	*a+b.*
Quia sub extr.& med.		*aap +apb.*		

VEL ETIAM SIC.

Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
Ergo vt agg.ita 1.ad 1.	*ap +bp.*	*a +b.*	*bp.*	*b.*
Quia sub ext.& med.		*apb+ bbp.*		

Hic modus argumentandi contrariam argumentationem non habet apud Euclidem, neque in modis argumentandi enumeratur. Cum autem vtilis sit ad ommittendam alternationem; vt eo vti liceat sequens modus, qui

qui illi contrarius est, elementis adiungendus videtur.

VT VNVS AD VNVM, ita differentiæ.

Arguere licet quando, vt quilibet antecedens ad suum consequentem, ita infertur esse differentiam duorum antecedentium, ad differentiam duorum consequentium, & è contra.

Sint prop.	*ap. a. bp. b.*
Ergo vt 1. ad 1. ita diff.	*ap. a. ap—bp. a—b.*
Quia sub ext. & med.	*aap—apb.*

VEL ETIAM SIC.

Sint prop.	*ap. a. bp. b.*
Ergo vt diff. ita 1. ad 1. & S.P.	*ap—bp. a—b. bp. b.*
Quia sub ext. & med.	*apb—bbp.*

EX ÆQVALITATE.

Ita ex æqualitate arguere licet.

Supponantur prop.	*a.*	*b.*	*d.*	*e.*
Et etiam.	*b.*	*c.*	*e.*	*f.*
Ergo ex æqual. S. P.	*a.*	*d.*	*c.*	*f.*
Et altern.	*a.*	*c.*	*d.*	*f.*

Demonstratio patet clarissima, quia ratio *a* ad *d* in prima proportione est, vt *b* ad *e*; sed ratio *b* ad *e* in secunda proportione est vt *c* ad *f*: ergo ratio *a* ad *d* vna, eademque est cum ratione *c* ad *f*.

EX

EX ÆQVALITATE.

Iterum ex æqualitate arguitur hoc modo.

Sint prop.	*a.*	*b.*	*e.*	*f.*
Et etiam.	*b.*	*c.*	*d.*	*e.*
Ergo ex æqual. S. P.	*a.*	*c.*	*d.*	*f.*

Demonſtratio liquet, quia in prima proportione factum *af* æquale eſt *be*; ſed in ſecunda, *be* eſt æquale *cd*; ergo *af* erit æquale *cd*; ergo *a. c. d. f.* erunt proportionales, cum eadem æqualia facta reſtituant.

Hos duos modos arguendi ex æqualitate paulo aliter tradit Euclides. Sint, *inquit*, tres magnitudines *a. b. c*, & aliæ tres *d. e. f.* vel æqualiter plures, ſintque proportionales *a. b. d. e*, & etiam ſint proportionales *b. c. e. f*; ergo ex æqualitate (*infert ille*) erunt proportionales *a. c. d. f.* Vbi notandum, vim concluſionis in eo poſitam eſſe, quod *a. b. d. e*, & etiam *b. c. e. f* ſint proportionales: ergo quod ſint ex vna parte *a. b. c*, & ex altera *d. e. f*, quid ad rem? Idem dicendum eſt de ſecundo modo, & in vtroque, cur ratio ordinata, & perturbata definiatur, planè neſcio: in primo enim rationem communem, directam, vel alternam video, & in ſecundo reciprocam, vtramque legitimè ordinatam.

prop. 22 & 23. 5. el.

def. 18. & 19. 5. el.

Porro quomodocumque conſideretur, ex eo infertur concluſio, quod in vtraque proportione duo exiſtant æquales termini, nempe *b*, & *e*. Vnde legitimè inter reliquos fit comparatio.

DIMIDIANDO, VEL DVPLICANDO.

p. 15. 5.

Præter dictos modos, frequenter arguitur duplicando, tri-

triplicando,&c. vel dimiando, aut tripartien[illegible] &c. vel omnes terminos, vel antecedentes,vel consequentes, vel denique duos,qui vnam rationem constituunt.

Sint prop.	$ap.$	$a.$	$bp.$	$b.$
Ergo duplicando antec.S.P.	$2ap.$	$a.$	$2bp.$	$b.$
Quia sub extr.& med.		$2apb.$		

Et sic de cæteris. Vnde hic modus,elevandi, & deprimendi vocari poterat, vt vniversalis intelligatur.

DIMIDIANDO, ET DVPLICANDO.

Hunc modum argumentandi addere prædictis summa nos cogit commoditas, quæ ex eo oritur.

Dimiando igitur,& duplicando,vel duplicando, & dimidiando,argumentari licet, quando duplicatur antecedens vnius rationis,& alterius consequens dimidiatur, & contra.

Sint prop.	$ap.$	$a.$	$bp.$	$b.$
Ergo dupl.& dimid.S.P.	$2ap.$	$a.$	$bp.$	$\frac{1}{2}b.$
Quia sub extr.& med.		$apb.$		

VEL SIC.

Sint prop.	$ap.$	$a.$	$bp.$	$b.$
Ergo dimid.& dupl.S.P.	$ap.$	$\frac{1}{2}a.$	$2bp.$	$b.$
Quia sub ext.& med.		$apb.$		

Idem procedit triplicando,& tripartiendo, & sic deinceps,vnde hic modus, elevandi,& deprimendi simul vocari poterit.

COMPONENDO, ET DIVIDENDO.

Componendo,& dividendo ſimul, vel è contra dividendo,& componendo, arguere licet, quando aggregatum rationis differentiæ comparatur, vel differentia aggregato.

Sint prop.	ap.	a.	bp.	b.
Ergo comp.& div.	$ap+a$,	$ap-a$,	$bp+b$,	$bp-b$.
Quia ſub extr.& med.		$appb-ab$.		

VEL SIC.

Sint prop.	ap.	a.	bp.	b.
Ergo diuid.& comp.	$ap-a$.	$ap+a$,	$bp-b$,	$bp+b$.
Quia ſub ext.& med.		$appb-ab$.		

Hunc modum elegantiſſimum experimur,& facilè, ſi ſtylus noſter non placuerit, fas erit oſtendere, vt elementis illum liceat adiungere. Nam compon. fiunt aggregata in ratione conſequentium,& ſimiliter divid. differentiæ rationum remanent in eadem ratione conſequentium; vnde aggregata,& differentiæ eamdem ſeruant rationem. Eadem facilitate, ſiqui alij fuerint, qui in elementis non extent, demonſtrari poterunt. Hæc de proportionalibus. Transeamus iam ad argumentà rationum inæqualium.

FORMVLÆ ARGVMENTANDI PER RATIONES INÆQVALES.

Om-

Omnes argumentationes, quibus in proportionalibus, ideſt in duabus æqualibus rationibus, vtimur, in duabus etiam rationibus inæqualibus, cum opus fuerit, vſurpare debemus. Huiuſmodi argumentandi fundamentum iecimus in Corollario propoſitionis fundamentalis, quibus hæc adde.

Sint duæ quæcumque magnitudines *a*, & *b*, & ſint aliæ duæ eiuſdem generis *am*, & *bp*. compoſitæ quidem ex ipſis *a*, & *b*, iuxta quaslibet inæquales multiplicationes *m*, & *p*, quarum *m* ſupponatur maior. Ratio igitur *am* ad *a* maior erit, quam ratio *pb* ad *b*, quando quidem *am* pluries continet ipſam *a*, quam *bp* ipſam *b*, ex eo quod *m* ponatur maior, quam *p*: ergo hæ quatuor magnitudines *am*. *a*. *bp*. *b*. duas rationes inæquales conſtituunt, in quibus *bam* factum ſub extremis maius patet *abp*. facto ſub medijs, quia ſi æqualiter deprimantur per *ab* remanebunt *m*, & *p*, quarum *m* ponitur maior. His poſitis ita procedere licet.

ALTERNANDO.

Sit ratio.	*am*. *a*. $+q$. *bp*. *b*.
Ergo altern.	*am*. *bp*. $+q$. *a*. *b*.
Quia factum.	*bam*. $+q$. *abp*

Quod ita lege, ſit ratio *am* ad *a* maior quam ratio *bp* ad *b*.

b: ergo alternando erit ratio *am* ad *bp* maior, quam ratio *a* ad *b*. Demonstratur quia *bam* factum sub extremis maius est *abp* facto sub medijs, ex præcedentibus.

Si autem antecedentes non fuerint eiusdem generis, idem dicendum est, quod in proportionalibus.

His characteribus ob brevitatem vtimur, videlicet $+q$. hoc est maior quam , vel maius quam, & $-q$. hoc est minor, vel minus quam.

In hunc modum reliquæ omnes argumentationes institui, & demonstrari poterunt, quas consulto omittimus, ne nimis prolixi videamur.

NOTA.

In magnitudinibus proportionalibus *ap*. *bp*. *a*. *b*. posuimus *p* pro numero, quo magnitudines *a* & *b* auctæ sunt, quapropter omnes quatuor eamdem speciem conservant. Sed scitu dignum arbitramur, ipsam *p* supponi posse pro nova dimensione. Itaque si *a* & *b* lineæ rectæ fuerint, & ipsas æqualiter, idest sub æqualibus angulis, elevatas concipiamus per rectam *p*. provenient plana *ap* & *bp*, quæ inter se erunt in eadem ratione, quam habent inter se bases *a*, & *b*, & manifestum fit id ipsum, quod in prima prop. lib. 6. elem. ostenditur. Et eodem modo si *a* & *b* plana fuerint resultabunt *ap* & *bp* solida in eadem ratione, &c.

Præ

Præterea ſi *a* & *b* numeri primi ponantur, & *ap* & *bp* numeri compoſiti, quorum communis menſura ſit *p*, omnia, quæ de numeris primis,& compoſitis in elementis oſtenduntur, facili negotio expedientur.

Nolumus tamen prædictos modos arguendi, in quæſtionem revocare,neque ſuper his in arenam deſcendere, vnuſquiſque commodiores demonſtrationes eligere poterit, cum nobis ſufficiat prædictas veritates ſuppoſitas habere.

Hoc tamen monere volumus demonſtrationes proportionalium hunc in modum etiam inſtitui poſſe. Supponamus quatuor magnitudines proportionales *a. b. c. d*, quo poſito : per propoſitionem fundamentalem erit *ad* factum ſub extremis, *bc* facto ſub medijs æquale.

Ergo ſi fuerint prop.	$a.$	$b.$	$c.$	$d.$
Erunt etiam comp. prop.	$a+b.$	$b.$	$c+d.$	$d.$
Quia ſub extr. & med.	$ad+bd.$	—∧—	$bc+bd$	
& auſ. *bd*.	ad	—∧—	bc	

Quemadmodum æqualia erant ante compoſitionem. Et ſic de cæteris.

DE RATIONE COMPOSITA.

Ratio ex rationibus componi dicitur quando do rationum quantitates inter se multiplicatæ aliquam effecerint rationem. Ita definitio 5. lib. 6. elementorum. Et quoniam Authores, vt hanc definitionem explicent, ad numeros confugiunt; nos abstractius, & vniversalius rem breviter explanare conabimur.

Porro quid ratio sit nos docet definitio 4. lib. 5. elementorum, videlicet ratio est comparatio duarum magnitudinum eiusdem generis inter se, secundum habitudinem, idest quatenus vna alteram continet, vel ab altera continetur. Rationis vero quantitas illa est, quæ iisdem terminis ipsius rationis (sive illi numeri, sive lineæ, sive plana, sive solida sint) constituitur, quod diversum est à denominatore rationis. Est enim denominator ille numerus, qui rationaliter, vel irrationaliter explicat quoties antecedens contineat consequentem. In quantitate discreta facta comparatione numeri ad numerum ratio patet, & vtrisque terminis quantitas constituta conspicitur, & insuper dividendo antecedentem per consequentem denominator innotescit. Verbi gratia.

Sint duo numeri 12 & 3. Si igitur comparatur 12 ad 3 secundum habitudinem, hæc comparatio dicitur ratio; si verò ipsi 12 & 3 accipiuntur, quatenus ipse 12 divisibilis est per ipsum 3, hæc assumptio amborum quantitas est illius

illius rationis; si tandem numerus 12 dividitur per numerum 3 quotiens 4 denominator est eiusdem rationis, ostendit enim , & exprimit habitudinem, hoc est quod numerus 12 quater contineat numerum 3.

In quantitate autem continua res aliter se habet, nam ratio, & ipsius rationis quantitas semper expressæ liquent; verum rationis denominator ocultus manet, quod enim in quantitate discreta natura dispensavit fieri, in continua prohibuit. Sint duæ rectæ lineæ *a* & *b*, si comparamus *a* ad *b* secundum habitudinem, dicimus ratio *a* ad *b*, & huius rationis quantitas ijsdem *a* & *b* conficitur, & dicimus *a* per *b*, quatenus magnitudinem *a* divisibilem concipimus per magnitudinem *b*. Cæterum ars non extat ad dividendam *a* per *b*, ita vt nobis scire liceat quomodo *a* contineat *b*, hoc est quoties *b* metiatur ipsam *a*, & insuper quanta sit pars remanens, vt denominator rationis *a* ad *b* (qui numerus est) exhiberi posit.

Hinc si *a*, & *b* duæ quælibet magnitudines fuerint eiusdem generis, & litteræ *a* & *b*, quibus ipsæ magnitudines denotantur, instar minutiæ hoc modo disponantur $\frac{a}{b}$, representata manebit tam ratio, quam ipsius rationis quantitas. Ratio quidem cum fractionem proferamus

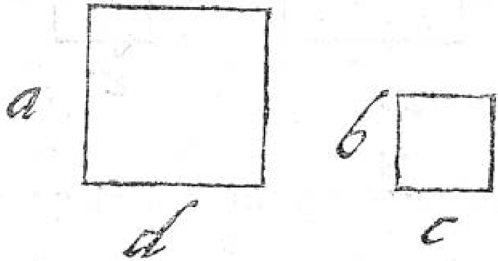
mus a ad b, quantitas verò cum ipſam pronunciemus a per b, quibus poſitis omnia, quæ de ratione compoſita inveſtigari, & demonſtrari debeant, facili negotio poterunt obtineri.

Ex prædictis facile explicabimus quid ſit ratio compoſita, nam ſi quantitas alicuius rationis æqualis fuerit quantitati, quæ gignitur ex multiplicatione quantitatum aliquarum rationum, illam rationem ex his rationibus compoſitam eſſe dicimus (nec minus verè illam his omnino æqualem dicere poſſumus) ſint duæ rationes $\frac{a}{b}$ & $\frac{b}{c}$, quarum quantitates ſunt $\frac{a}{b}$ & $\frac{b}{c}$, ſi igitur hæ duæ quantitates ſecundum leges fractorum inter ſe multiplicentur, proveniet quantitas $\frac{ab}{bc}$, quæ ſi deprimatur per ipſam b, reſultabit quantitas æquivalens $\frac{a}{c}$, quæ rationem repreſentat a ad c: ergo ratio $\frac{a}{c}$ æqualis eſt vtriſque rationibus $\frac{a}{b}$ & $\frac{b}{c}$, & ex illis compoſita dicitur, at itaq̃ argumentari poſſumus, vt a ad b, & b ad c, ita eſt a ad c, & loco rationis ſimplicis a ad c ſubrogare poſſumus rationem compoſitam a ad b, & b ad c, & è contrà, quia reſpectus a ad c, vtriſque reſpectibus a ad b, &

b ad

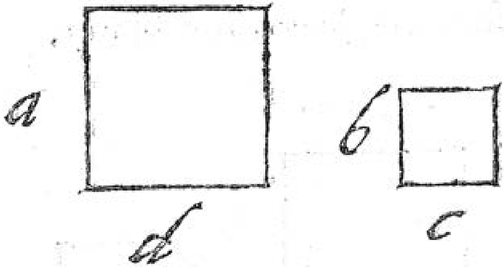
b ad c æquivalet.

Prædicta exemplo confirmabimus.



Sint duo parallelogramma rectangula, primum ſub lateribus a, & d, ſecundum ſub b & c contenta. Factum igitur ad ſub lateribus a, & d aream continet primi, factum vero bc ſub lateribus b & c aream ſecundi comprehendit, quare vt factum ad ad factum bc, ita eſt parallelogrammum ad parallelogrammum. Sed ratio $\frac{ad}{bc}$, ideſt facti ad factum, componitur ex rationibus $\frac{a}{b}$, & $\frac{d}{c}$ (nam ſi hæ duæ quantitates $\frac{a}{b}$, & $\frac{d}{c}$ inter ſe multiplicentur eamdem quantitatem producent $\frac{ad}{bc}$) ergo vt factum ad ad factum bc, ita eſt a ad b, & d ad c. Et ſi fiat

 ratio



ratio $\frac{b}{q}$ rationi $\frac{d}{c}$ æqualis, si fiat inquam vt d ad c, ita b ad q, quantitas $\frac{b}{q}$, quantitati $\frac{d}{c}$ erit æqualis; ac proinde si quantitates $\frac{a}{b}$, & $\frac{b}{q}$ inter se multiplicentur, quantitas proveniens $\frac{ab}{bq}$, hoc est, si deprimatur per b, quantitas $\frac{a}{q}$ æqualis erit quantitati $\frac{ad}{bc}$: ergo vt a ad b, & d ad c, ita est a ad q, &c.

His ita præmissis sequentes propositiones observa.

NVM. I.

Si fuerint quæcumque magnitudines eiusdem generis: ratio primæ ad vltimam componitur ex rationibus intermedijs.

Sint a. b. c. d. &c.

Dico vt $a. b.$ & $b. c.$ & $c. d.$ ita $a. d.$

Sint

Sint magnitudines $a.b.c.d.$&c. Dico rationem primæ a ad vltimam d. componi ex rationibus intermedijs a ad b, & b ad c, & c ad d. Nam si harum rationum quantitates $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$ inter se multiplicentur, quantitas proveniet $\frac{abc}{bcd}$ quæ, si deprimatur per bc, relinquet quantitatem $\frac{a}{d}$, hoc est rationem a ad d. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc liquido constat quomodo ratio simplex composita fiat, & composita in simplicem convertatur. Si enim fuerit ratio a ad b, & inter terminos a & b. quilibet eiusdem generis interjiciatur x: erit vt a ad b ita a ad x, & x ad b, quia quantitates $\frac{a}{x}$ & $\frac{x}{b}$ quantitatem producunt $\frac{ax}{xb}$, hoc est, deprimendo per x, quātitatem $\frac{a}{b}$. Et eodem modo si plures interjiciantur quantitates.

$a.\quad b.$

vt $a.\ b$ ita $a.\ x$ & $x.\ b.$

Si vero quantitas fuerit composita $\frac{ac}{bd}$, videlicet quæ componitur ex rationibus a ad b, & c ad d, ipsamque in rationem simplicem convertere velimus. Fiat ratio $\frac{b}{g}$, vni ex componentibus $\frac{c}{d}$, æqualis, hoc est fiat vt c ad d ita b consequens alterius rationis ad g. Vnde ratio $\frac{ac}{bd}$ æqualis erit rationi $\frac{ab}{bg}$, hoc est, deprimendo per b, rationi $\frac{a}{g}$. Et loco rationis compositæ $\frac{ac}{bd}$ subrogare poterimus rationem simplicem æqualem $\frac{a}{g}$, & ita deinceps si ex pluribus rationibus composita sit ratio.

NVM. 2.

Si fuerint duæ rationes compositæ æquales: facta sub antecedentibus vnius, & consequentibus alterius inter se erunt æqualia.

Sit vt $a.b$ & $c.d.$ ita $f.g.$ & $h.k.$
Dico $acgk$ —Λ— $fhbd$.

Sit vt a ad b, & c ad d, ita f ad g, & h ad k. Dico factum sub antecedentibus primæ rationis a & c, & consequentibus secundæ g & k nempe $acgk$ æquale esse facto $fhbd$, scilicet sub antecedentibus secundæ f, & h, & consequentibus primæ b & d.

Est enim vt a ad b, & c ad d ita factum ac ad factum bd, & similiter vt f ad g, & h ad k, ita factum fh ad factum gk: Ergo vt ac ad bd ita erit fh. ad gk, & factum sub extremis $acgk$ facto sub medijs $fhbd$ æquale. Quod erat ostendendum.

CO-

COROLLARIVM.

Hinc constant duo elegantissimi modi argumentandi in rationibus compositis. Videlicet permutationis, & inversionis. Possunt enim tam antecedentes inter se quam consequentes inter se in qualibet ratione composita permutari. Et sit ratio composita rationi compositæ fuerit æqualis: quilibet antecedens vnius, & quilibet consequens alterius etiam possunt permutari. Et præterea, quælibet ratio vnius inverti poterit, hoc est poterit ad alteram transponi inversè sumpta, nam semper facta sub antecedentibus vnius, & consequentibus alterius erunt inter se æqualia.

PERMVTANDO.

Sit vt *a. b*, & *c. d.* ita *f. g.* & *h. k.*
Ergo permant. vt *c b. b.* & *a. d.* ita *h. g.* & *f k.*
Nam. *c a g k* — ∧ — *h f b d.*

Videlicet facta sub antecedentibus vnius, & consequentibus alterius semper sunt inter se æqualia, vti in principio erant.

Eodem modo.

Sit vt *a. b*, & *c. d.* ita *f. g*, & *h. k*
Ergo permut. conseq. vt *a. d*, & *c. b* ita *f. k*, & *h. g.*
Nam facta. *a c g k* — ∧ — *f h d b.*
&c.

RVRSVS PERMVTANDO.

Sit	vt	*a. b*: & *c. d.* ita *f. g.* & *h. k.*
Ergo perm. ant. & conſ.	vt	*g. b* & *k. d.* ita *f. a.* & *h. c*
Nam facta.		*gk ac* —∧— *fh bd.*

Nempe facta ſub antecedentibus vnius, & conſequentibus alterius ſemper inter ſe permanent æqualia.

INVERTENDO.

Sit	vt	*a. b*, & *c. d* ita *f. g*, & *h. k*
Ergo invert.	vt	*a. b.* ita *f. g*, & *h. k*, & *d. c*
Nam		*agkc* —∧— *fhdb.*

Et quemadmodum ratio *c* ad *d* ad alteram partem æquationis tranſpoſita eſt inverſa, ita ſimiliter quælibet alia ratio, vel etiam omnes ex vna ad alteram partem tranſponi poterunt, ſi inverſæ ſumantur: nam ſemper facta ſub antecedentibus vnius rationis, & conſequentibus alterius inter ſe erunt æqualia, quemadmodum æqualia erant ante inverſionem.

N V M. 3.

Si fuerint quæcumque proportiones: facta ſub terminis homologis proportionalia erunt.

Sint proportionales	*a.*	*b.*	*c.*	*d.*
Et etiam ſint prop.	*g.*	*h.*	*k.*	*l.*
Dico facta eſſe prop.	*ag.*	*bh.*	*ck.*	*dl.*

Sunt

Sunt enim in prima proportione rationes æquales $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ & in secunda $\frac{g}{h}$ & $\frac{k}{l}$. Igitur si multiplicẽtur quantitates æquales $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ per quantitates æquales $\frac{g}{h}$ & $\frac{k}{l}$, proueniẽt quantitates æquales $\frac{ag}{bh}$ & $\frac{ck}{dl}$, & erit vt factum ag ad factum bh, ita factum ck ad factum dl. Facta ergo sub terminis homologis, &c. Quod erat ostendendum. Et eodem modo proceditur si plures fuerint proportiones.

COROLLARIUM 1.

Hinc manifestum fit, si fuerint duæ proportiones $a. b. c. d.$ & $g. h. k. l.$ hanc oriri proportionalitatem compositam, videlicet vt a ad b, & g ad h ita esse c ad d, & k ad l. Nam vt factum ag ad bh ita est ck ad dl.

COROLLARIUM 2.

Hinc etiam colligitur, si fuerit quælibet proportionalitas composita. Verbi gratia.

Ut a ad b & g ad h, ita c ad d, & k ad l; fuerit autem vna ratio illarum a ad b, vni rationi harum c ad d æqualis: reliquam rationem g ad h, reliquæ rationi k ad l esse etiam æqualem. Cum enim sit vt a ad b, & g ad h ita c ad d, & k ad l: erunt quantitates æquales $\frac{ag}{bh}$ & $\frac{ck}{dl}$; sed po-

nun-

nuntur quantitates æquales $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$: igitur, dividendo illas per iſtas, remanebunt quantitates æquales $\frac{g}{h}$ & $\frac{k}{l}$, eritque ratio g ad h rationi k ad l, æqualis. Vt proponebatur.

Hæc ſane nobis de ratione compoſita dicta ſufficiunt. Sed quoniam aſſerimus rationem compoſitam æqualem omnino eſſe rationibus componentibus; vnde quiſque inferre poteſt ipſam rationem compoſitam aggregatam eſſe ipſarum rationum componentium (circa quam rem non parum inter Authores controvertitur) non ideo inconſultum erit algorithmum rationis, quem R. P. Carolus Powel è Societate Ieſu Olim Leodij, nunc Gadibus Matheſeos Profeſſor docet, curioſis impertiri.

R. P. CAROLI POVVELL Societati Iesu, in Collegio eiusdem Societatis Gadibus Regij Professoris Mathematicæ.

Algorithmvs Rationvm.

QVandoquidem obiectum Mathematicæ est quantitas in abstracto, haud aliter discernere potest inter quantitates diversas eiusdem generis, quam ratione inæqualitatis, nam æqualitas hìc idem sonabit ac identitas, quæ ex duobus terminis requisitis ad constituendam rationem, facit tantum vnum, estque proinde in rationibus nihil, sive medium inter positivas & negativas, hoc est maioris, & minoris inæqualitatis. Def. 3. 5. el.

Infinitis porro modis induci potest in quantitates eiusdem generis inæqualitas, hoc est ratio; comprehenduntur autem à nobis tantum illi quos suppeditat Arithmetica, per Additionem, Subtractionem, Multiplicationem, Divisionem, Compositionem, & Resolutionem potentiarum, omnes citra mutationem speciei quantitatum in quas agunt.

Compositio potentiarum, innominata licet ab Arithmeticis, vendicat sibi quintum locum, iure quo multiplicatio tertium, superstruitur enim illi, quemadmodum illa additioni; resolutio potentiarum, sicut & divisio, duplex est, & vsque adeo, vt quantumvis arithmeticè operando idem sit, dato dividendo, & divisore eiusdem speciei exquirere numerum quotientem, ac dato dividendo, & numero diviſore, quærere eiuſdem ſpeciei cum dividendo partem quotam, tamen longe diverſo modo datâ potētiâ, & radice exquiratur Numerus exponens, & data potentia cum Exponente quæratur radix, nam ille, quantumcumque eo indiguerint viginti illi viri qui ipſos viginti annos laborando Canones Logarithmorum condiderunt, vſque adhuc ſumma improbitate laborat.

Hæ operationes, ſex licet numero, tres tantum ſpecies perfectas rationum conſtituunt, nam binæ, & binæ operando contrariè producunt eaſdem, tantum in diverſo ſtatu negativo vel poſitivo; Primam, educunt additio vel ſubtractio per quantitatem denominatricem eiuſdem ſpeciei cum terminis æqualibus propoſitis, addendo, vel ſubtrahendo eam vni eorum in diſcrimen ab altero: & vocatur Arithmetica. Secundam. Multiplicatio, vel diviſio per numerum multiplicantem, vel dividentem vtrumvis terminum, & vocatur geometrica. Tertiam. Compoſitio, vel reſolutio potentiarum per numerum exponentem agentem in alterutrum terminorum, & vocatur potentialis.

Antequam omnium ſpecimen exhibeatur, iuvat præmonere exponentem fractum v.g. $\frac{1}{3}$, nihilo minus quam multiplicator, vel diviſor fractus, operari contrariè ſono vocum, extrahendo radicem cum facere præ ſe fert potentiam, & vice verſâ, quod eo diligentius notandum, in quantum Arithmetici needum mentionem fecerūnt potentiarum fractarum, quas tamen non eſt huius loci exponere.

Proponatur aliquod vnum bis positum. $\overset{3.}{27a}$ —Λ— $\overset{3.}{27a}$.

Antecedenti addatus, vel consequenti subtrahatur quantitas $\overset{3.}{3a}$.

vtrouis modo fit eadem ratio arithmetica positiva. $\overset{3.}{30a}$ ad $\overset{3.}{27a}$, vt $\overset{3.}{27a}$ ad $\overset{3.}{24a}$.

Nam si ex antecedente subtrahatur consequens $\overset{3.}{27a}$. $\overset{3.}{24a}$.

Vtrobique deprehendetur denominator $\overset{3.}{3a}$.

Qui antecedenti subtr. vel conseq. add. restituet æqualitatem. $\overset{3}{27a}$ —Λ— $\overset{3}{27a}$, &c.

Ubi si antecedenti subtrahatur consequens $\overset{3.}{27a}$.

Deprehentur denominator in addendo & subtractio nullus 0.

Nam antecedenti vel conseq. additus vel subtr. æquation. relinquit intactā $\overset{3.}{27a}$ —Λ— $\overset{3.}{27a}$.

Sed si antecedenti subtrahatur , vel conseq. addat. eadem quantitas $\overset{3.}{3a}$.

Fiet eadem ratio quæ ante, sed negativa $\overset{3.}{24a}$ ad $\overset{3.}{27a}$, vt $\overset{3.}{27a}$ ad $\overset{3.}{30a}$.

Nam si ex anteced. per operationem impropriam subtr. consequens $\overset{3.}{27a}$. $\overset{3.}{30a}$.

Deprehendetur denominator qui ante, sed negans — $\overset{3.}{3a}$.

Qui antecedenti suo modo subtr. vel conseq. add. restituet æqualitat. $\overset{3.}{27a}$ —Λ— $\overset{3.}{27a}$. &c.

Antecedens multiplicetur vel conseq. dividatur per numerum $\overset{1}{3a}$.

Fit eadem ratio geometrica positiva $\overset{4}{81a}$ ad $\overset{3}{27a}$. vt $\overset{3}{27a}$ ad $\overset{2}{9a}$.

Nam si antecedens altero modo dividatur à consequente $\overset{3.}{27a}$. $\overset{2.}{9a}$.

Deprehentur idem denominator $3a$.

Qui antecedentem dividens, vel consequent. mult. restituet æqualitat. $\overset{3.}{27a}$ —Λ— $\overset{3.}{27a}$. &c.

Vbi

Vbi si antecedens dividatur à conseq. — 3. 27a.

Deprehendetur denomin. in multipl. & dividend. nullus — 1.

Nam antecedent. vel conseq. multit. vel divi. æqualitat. relinquit intactã — 3. 27a ⟵Λ⟶ 3. 27a.

Sed si antecedens divid. vel conseq. multit. per eundem numerum — 1. 3a.

Fiet eadem ratio quæ ante, sed negativa. — 2. 9a ad 3. 27a, vt 3. 27a ad 4. 81a.

Nam si antecedens per operationem impropriam dividat. à conseq. — 3. 27a 4. 81a.

Deprehendet. denominat. qui ante sed deprimens — $\frac{1}{3a^{1}}$

Qui antecedent. suo modo divid. vel conseq. multit. restituet æqualitat. — 3. 27a ⟵Λ⟶ 3. 27a.

Anteced. agatur in potentiam, vel conseq. in radicem per numerum — 3.

Fit eadem ratio potentialis positiva — 9. 19683a ad 3. 27a, vt 3. 27a ad 1. 3a

Nam si antecedens conferat potentiã cum conseq. — 3. 27a. 1. 3a.

Deprehendetur idem denominator — 3.

Qui antecedent. agens in radicem vel conseq. in potent. restituet æqualit. — 3. 27a ⟵Λ⟶ 3. 27a.

Vbi si antecedens mensuretur à conseq. vt radice — 3. 27a.

Deprehendetur denominat. in potentijs nullus — 1.

Nam in anteced. vel conseq. agens, æqualit. relinquit intactam — 3. 27a ⟵Λ⟶ 3. 27a.

Sed si anteced. agatur in radic. vel conseq. in potent. per eundem numer. — 3.

Fiet eadem ratio quæ ante, sed negativa. — 1. 3a ad 3. 27a, vt 3. 27a ad 9. 19683a.

Nam si anteced. per operation. imprimam mensuretur à conseq. — 3. 27a. 9. 19683a.

De-

Deprehendetur denominator qui ante sed extrahens $\frac{1}{3}$

Qui antecedent. agens suo modo in radic. vel cons. in pot. restit. æqualit. $\overset{3.}{27a} \text{---}\Lambda\text{---} \overset{3.}{27a}$.

Comperto qua ratione rationes 1. ponantur positivè, neutiquam, & negativè, hoc est quomodo addantur, & subtrahantur æqualitati, sive nihilo rationis, quandoquidem denominatores eius arithmeticus 0, geometricus 1, & potentialis item 1 nihil tribuant vtrivis termino de novo vnde distinguantur (nam omne quod est sine respectu ad aliud est vnum) eadem citra dubium methodo erunt addendæ, & subtrahendæ alicui, hoc est invicem, quæque in sua specie, licebitque fundare saltem rationem arithmeticam inter rationes, eodem iure quo ipsæ dantur, hoc est quo per se ipsas se distinguunt ab æqualitate sive nihilo, quæ proinde, sicut 0 in absolutis, potest in respectivis esse terminus huiuscemodi rationis; & ex prædictis sunt arithmeticè proportionales.

Rationes
- arithmeticæ $\overset{3.}{30a}$ ad $\overset{3.}{27a}$.
- geometricæ $\overset{4.}{81a}$ ad $\overset{3.}{27a}$. > $\overset{3.}{27a}$. ad $\overset{3.}{27a}$ < $\overset{3.}{24a}$ ad $\overset{3.}{27a}$.; $\overset{2.}{9a}$ ad $\overset{3.}{27a}$.; $\overset{1.}{3a}$ ad $\overset{3}{27a}$.
- potential. $\overset{9.}{19683a}$ ad $\overset{3.}{27a}$.

Correspondentibus arithmeticè denominatoribus arithmeticis $+\overset{3}{3a}.0.-\overset{3}{3a}$, geometricè geometricis $\frac{3a.}{1}$ 1. $\frac{1}{3a}$, & geometricè potentialibus $\frac{3}{1}$ 1. $\frac{1}{3}$ vtrique enim æquè denotant repetitam operationem, hi multiplicationem vnitatis per quam consequens, vt radix multiplicans, est *vnum*; illi additionem consequentis positi extra statum nihili, nihilo.

Cum ergo addenda est, vel subtrahenda ratio rationi, exquiratur vnius illarum denominator, ope cuius aliquo

ex

ex modis prædictis alteri prout prius æqualitati applicetur, & feriato termino per denominatorem immutato, ratio summa vel residua manebit pœnes terminum novum, & alterum à denominatore immunem; quod non est aliud quam per regulam trium , operando ad modum rationum, rationem protrahere , vel contrahere quantitatem alterius rationis applicatæ ad terminum communem vtrique; hinc ex solo intuitu constat definitionem illam 20. lib. 5. Euclidis, qua inter quaslibet quantitates ordine positas, ratio primæ ad vltimam componitur ex rationibus intermedijs, in omni genere rationis, non indigere expositione quam adhibent nonnulli in remedium tantum erroris à se prius commissi in expositione ipsius rationis: & quandoquidem rationes potentiales indigeant commodiori modo hoc idem præstandi, & regula trium in illis sit parum vsitata, iuvabit, & sufficiet inibi tantum exempla facere: proinde.

Proponatur ratio aliqua potentialis $b^{144.}$ ad $b^{12.}$

Cui sit addenda ratio $27a^{3.}$ ad $3a^{1.}$

Huius mensurato anteced. à conf. quæratur denom. 3.

Qui antecedent. alterius cubicans, vel è conseq. extrahens radicem tertiam, facit potentialiter proportionales $27a^{3.}$ ad $3a^{1.}$, vt $b^{432.}$ ad $b^{144.}$ vel vt $b^{12.}$ ad $b^{4.}$

Et connectit duas ration. per terminum commun. $b^{144.}$ vel $b^{12.}$

Quo constituto in medio $b^{432.}$ $b^{144.}$ $b^{12.}$ vel $b^{144.}$ $b^{12.}$ $b^{4.}$

Manet ratio summa pœnes extremas $b^{432.}$ ad $b^{12.}$, vt b^{144} ad $b^{4.}$

Ex alia vel eadem ratione $b^{144.}$ ad $b^{12.}$

Sit subtrahendaque ante addita est ratio $27a^{3.}$ ad $3a^{1.}$

Denominata a 3

Ex

Ex antec. alterius extrahatur radix 3. vel cubicetur conseq

Fiet potential. proport. $27a^{3.}$ ad $3a^{1.}$, vt $b^{144.}$ ad $b^{48.}$ vt $b^{36.}$ ad $b^{12.}$

Et connectentur duæ rationes per terminum communem

$b^{144.}$ vel $b^{12.}$

Quo constituto in extremo sic $b^{144.}$ $b^{48.}$ $b^{12.}$ vel sic $b^{144.}$ $b^{36.}$ $b^{12.}$

Manebit ratio differentialis pœnes reliquos

$b^{48.}$ ad b^{12}, vt $b^{144.}$ ad $b^{36.}$

Ratio ergo $b^{144.}$ ad $b^{12.}$ maior est ratione $b^{144.}$ ad $b^{12.}$ per rationem denominatricem. $27a^{3.}$ ad $3a^{1.}$

Ratio autem $b^{144.}$ ad $b^{12.}$ maior est ratione $b^{48.}$ ad $b^{12.}$ per eandem rationem denominatricem. $27a^{3.}$ ad $3a^{1.}$

Ergo sunt arithmetice proportionales rationes potentiales $b^{144.}$ ad $b^{4.}$, $b^{144.}$ ad $b^{12.}$, & $b^{48.}$ ad $b^{12.}$

Correspondētib. geometricæ denominatorib. 36. 12. & 4. nec non arithmetice rationibus geometricis exponentium 144 ad 4, 144 ad 12, & 48 ad 12. ad differentiam 3 ad 1. proinde in exponentibus datur vbique specimen rationum geometricarum.

Quod regula trium alio modo executioni mandetur quam qui ordinariè adhibeatur, facit præter conformitatem cum doctrinà præcedente ipsa rei necessitas, nam in potentijs nihil datur correspondens æquationi producendæ inter terminos medios, & extremas proportionis actos in invicem, quia potentia non ex mutua; sed ex identica productioni exurgit. Quod simul est in causa cur rationes potentiales nequeant per sequentem viam compositionis, agendo terminos homologos iuxta institutum ratiotionum in invicem, addi vel ſubtrahi, qui eſt commodior quatenus evitat terminos negativos, vel fractos, & à denominatoribus præſcindit, prout ſequitur.

Proponatur ratio arithmetica $16a^{3}$ ad $4a^{3}$.

Cui ſit addenda ratio $27a^{3}$ ad $24a^{3}$.

Addatur antecedens antecedenti, & conſequens conſequenti ecce ſumma rationum $43a^{3}$ ad $28a^{3}$.

Ex eadem vel alia ratione $16a^{3}$ ad $4a^{3}$.

Sit ſubtrahenda quæ ante addita eſt ratio $27a^{3}$ ad $24a^{3}$,

Hoc eſt inverſa ſeu facta negativa $24a^{3}$ ad $27a^{3}$.

Addatur vt ante, ecce differentia rationum $40a^{3}$ ad $31a^{3}$.

Sunt ergo arithmetice proportionales rationes

$43a^{3}$ ad $28a^{3}$; $16a^{3}$ ad $4a^{3}$, & $40a^{3}$ ad $31a^{3}$.

Exiſtente communi denominatrice ratione $27a^{3}$ ad $24a^{3}$.

Correſpondentibus item arithmeticè denominatoribus $15a^{3}$. $12a^{3}$, & $9a^{3}$

Ita vt ſumma denominatorum $12a^{3}$, & $3a^{3}$.

Sit denominator ſummæ, & differentia differentiæ.

Deberet ſubtractio ſine inverſione exerceri per ſubtractionem, niſi interdum immineret periculum terminorũ negativorum, ſicut & in geometricis per diviſionem, niſi ob periculum fractorum, prout ſequitur.

Pro-

Proponatur ratio geometrica $144a^2b^2$ ad $12ab$.

Cui sit addenda ratio $27a^3$ ad $9a^2$.

Antecedens ducatur in antecedentem: & consequens in consequent. ecce summa rationum $3888a^5b^2$ ad $108a^3b$.

Ex eadem vel alia ratione $144a^2b^2$ ad $12ab$.

Sit subtrahēda quæ ante add. est ratio sic invers. $9a^2$ ad $27a^3$.

Ecce differentia rationum $1296a^4b^2$ ad $324a^4b$.
Sunt ergo arithmetice proportionales rationes
$3888a^5b^2$ ad $108a^3b$, $144a^2b^2$ ad $12ab$, & $1296a^4b^2$ ad $324a^4b$

Existente communi denominatore ratione $27a^3$ ad $9a^2$.

Correspondentib. geometr. denominatorib. $36a^2b$. $12ab$. $4b$.
Ita vt in geometricis æque ac potentialibus productum denominatorum $12ab$, & $3a$ sit denominator summæ, & quotiens differentiæ.

Ratio huius processus patet ex eo quod si vni rationum addatur hoc modo æqualitas expressa in antecedente al- Ax.16.
terius bis posito, quod vtique rationem non lædet, & al- & 20.1
teri similiter in consequente huius, rite disponentur ratio- p.15.5.
nes additioni iuxta priorem modum, quia consequens 1.6. &
vnius, & antecedens alterius conflabuntur æque ex con- 25.11.
sequente, & antecedente earumdem primo oblatis; prout hic conspectui exhibetur.

Sunto rationes arithmetic. addend. $16a^3$ ad $4a^3$, & $27a^3$ ad $24a^3$.

Iuxta dicta sic vtriq; addit. æqual. $27a^3$ —Λ— $27a^3$ $4a^3$ —Λ— $4a^3$

E manebit summa pœnes extrema $43a^3$ ad $31a^3$, & $31a^3$ ad $28a^3$.

Nam æqualitas in medio, cum idem sic ac identitas, potest

sic contrahi $\overset{3.}{43a}.\ \overset{3.}{31a}.\ \overset{3.}{28a}.$

Et relinquentur pure rationes addendæ ad communem terminum in medio, hoc est sublato illo addentur. Idem eveniet in geometricis interiecto $324\,a^4b$ ijsdem terminis summæ qui superius producti sunt. Demonstrata sic additione, supervacaneum est subtractionem commonstrare, cum pendeat ex toto ab additione.

Comperto qua ratione rationes primo & denuo ponantur tam positive, quam negative, hoc est quomodo addantur, & subtrahantur nihilo vel invicem, eadem citra dubiũ methodo poterit iterato addi & subtrahi quævis determinata nihilo, & de inceps quotiescumque libuerit, hoc est saltem pedetentim (deficientibus etiamsi modis hisce compendiosioribus, & æquivalentibus) multiplicari per numerum positivum, vel negativum, nec non in vicibus integris mensurari à minori: dividi etiam per numerum, sed aliter; & cum divisor est numerus primus, per simplicem quantumvis difficilem operationem: licebitque fundare etiam rationẽ geometricam inter rationes. Cœtero-qui etiamsi foret possibilis ductio rationis in rationem, iuxta placita huiuscemodi operationis, mutaretur species vtriusvis ductarum, & infinitaretur, hoc est impossibilitaretur ratio inter productam, & quamvis producentium.

Proponatur ratio aliqua arithmetica $\overset{3.}{27a}$ ad $\overset{3.}{24a}.$

Multiplicanda per numerum $3.$

Multiplicetur vterque terminus per 3, fiet ratio tripla præcedentis $\overset{3.}{81a}$ ad $\overset{3.}{72a}.$

Altera vel eadem ratio $\overset{3.}{27a}$ ad $\overset{3.}{24a}.$

Sit dividenda item per $3.$

Dividatur vterque terminus per 3, fiet ratio subtripla præcedentis $\overset{3.}{9a}$ ad $\overset{3.}{8a}.$

Sunt

Sunt ergo geometrice proportionales rationes

$81a^{3}$ ad $72a^{3}$, $27a^{3}$ ad $24a^{3}$, & $9a^{3}$ ad $8a^{3}$.

Existente communi denominatore numero 3.

Correspondentibus item geometricè denominatoribus

$9a^{3}$. $3a^{3}$. $1a^{3}$.

Ita vt triplum denominatoris $3a$ sit denominator rationis triplæ, & subtriplum subtriplæ.

Proponatur ratio geometrica $27a^{3}$ ad $9a^{2}$.

Multiplicanda per 3.

Cubicetur vterque terminus, fiet $19683a^{9}$ ad $729a^{6}$.

Altera vel eadem ratio $64b^{6}$ ad $8b^{3}$.

Sit dividenda item per 3.

Extrahat. ex vtroq; termino radix cubica, fiet $4b^{2}$ ad $2b$.

Sunt ergo geometricè proportionales rationes

$19683a^{9}$ ad $729a^{6}$, $27a^{3}$ ad $9a^{2}$, $64b^{6}$ ad $8b^{3}$, & $8b^{2}$ ad $2b^{1}$.

Correspondentib. potent. denomin. $27a^{3}$. $3a^{1}$. $8b^{3}$. & $2b^{1}$.

Ita vt cubus denominatoris $3a^{1}$, sit denominator rationis triplæ, & radix cubica denominatoris $8b_{3}$, denominator subtriplæ.

Hic modus procedendi fundatus in compositione quæ cum rationibus potentialibus addendis non quadrat, nedum multiplicandis quadrabit, proinde confungiendum est in his ad illum quo in progreſsionibus ratio quæcumque, & qualiſcumque continuatur pedetentim verſus vtramvis partem certum numerum terminorum, vel inter datos extremos quæritur medius ad quem ratio ab vno extremo verſus alterum certum numerum vicium

con-

continuata, præciſè pertingat, & fundatur in ſimplici additione, vel ſubtractionem ratione prout ſequitur.

Proponatur ratio potentialis $27a^{3}$ ad $3a^{1}$.
Multiplicanda per 3.
Cubicetur denominator 3, & ex antecedente extrahatur radix, vel potius conſeq. agatur in potentiam expoſitam à cubo 27, & ecce inter terminum novum, & innovatum ratio tripla propoſitæ $7625597484987a^{27}$ ad $3a^{1}$.
Eadem vel altera ratio b^{64} ad b^{8}.
Sit dividenda etiam per 3.
Extrahatur radix cub. ex denomin. 8, & per radicem 2.
Extrahatur ex anteced. radix vel quadretur vt ante conſeq. & ecce ratio ſubtripla b^{16} ad b^{8}.
Sunt ergo geometric. proport. in ratione tripla rationes $7625597484987a^{27}$ ad $3a^{1}$, $27a^{3}$ ad $3a^{1}$, b^{64} ad b^{8}, b^{16} ad b^{8}.
Correſpondentib. potential. denominatorib. 27. 3. 8. 2. & in exponentibus datur ſimul ſpecimen rationum geometricarum: ita vt denominatores vtriuſque generis eiſdem ſubiaceant legibus. De arithmeticis ſupervacaneum eſt ſimile in gradu remiſsiori commentari.

Porro inter duas rationes exquirere denominatorem geometricum (ſi forte integer eſt) defectu artis ſpecialis, eſt exercere pedetentim multiplicationem minoris donec æquet maiorem numerando additiones; tantum in arithmeticis valet etiam diviſio denominatoris maioris per illum minoris, ob rationem ſuperius allatam.

Sed improprietas eſt ſermonis loquendo de *intereſſe*, vt termini vno plures annis fructificationis ita proponantur quaſi magis in illis quam in rationibus correſpondentibus numero annorum verſaretur cardo difficultatis; neque minor ineptia monſtratur in indagando duos medios con-

continuè proportionales inter extremos datos, quasi omnium numerorum maxime facilis captu binarius, esset offendiculo, & non potius ternarius cum reliquis primis qui semper æqualis sunt pertinaciæ hìc in trisectione, & reliquis divisionibus rationum geometricarum, & alibi in divisionibus angulorum, quorum conceptus geometricè respectivus ad totum circuitum circuli, facit vt aliquo modo illos sibi vendicet status rationum geometricarum.

Falluntur ergo qui quantitates rationum geometricarum statuunt in earum denominatoribus de quibus non egit Euclides, nam (quidquid sit de arithmeticis omnium rationum maximè materialibus) huiusmodi denominatores simul & rationum potentialium (de quibus nemo licet ordine sequentibus hactenus commentatus est) in omni rigore sunt numeri qua rationales, qua irrationales, & quod quælibet ratio habet quantitatis, mutuatur à cõtinua non à discretà; error surrepsit in denominando quasdam rationes à numeris *duplam*, *triplam*, &c. quod aliqui incauti ita intellexerunt quasi in geometricis locum haberent *binarij*, *ternarij*, &c. non animadvertentes huiuscemodi voces *dupla*, *tripla*, &c. hìc appellare supra antecedentem *duplum*, *triplum*, &c. consequentis, non ipsas rationes quæ in se sunt *vnæ*, neque dicuntur *dupla*, *tripla*, &c. nisi relate ad aliam cuius sunt *duplicatæ*, *triplicatæ*, &c. Et sic fatente Christophoro Clavio intellexerunt Euclidem Interpretes nonnulli, inter quos nominat solummodo Federicum Commandinum, est vero eiusdem sententiæ Zambertus, Nicolaus Tartalea, qui inter cætera, ad hunc locum, arguens Campanum errorum in expositione huius definitionis 10. lib. 5. commissorum (si fortè Campanus fuit ille expositor) salubriter monet cavendum esse à ponendis exemplis rerum alio spectantium in numeris: Athanasius Kircherus in sua Musurgia l. 3. c. 3. sub titulo *De Logistica Rationum*; & quidem nullibi vehementior instantia fieri potest quam hìc, quis enim Musi-

Def. 10. 5.

cæ

cæ intelligens neget intervallum quod dicitur diapente, hoc eſt quinta, componi ex additione tertiæ minoris ad tertiam maiorem? Notum eſt autem tertiam minorem confici ex ſonis in ratione 6 ad 5, maiorem in ratione 5 ad 4, & quintam vt 6 ad 4, quæ eſt, iuxta dicta, ſumma rationum præcedentium, ergo ſi vera eſt additio intervallorum, vera etiam eſt illa rationum. Eſt item M. Ozanam in ſuo Dictionario Mathematico Gallice edito, ad definitionem rationis compoſitæ, quamvis ſibi poſtea contradicat verſans adhuc in Arithmetica, cum definit rationem inter duas rationes geometricas eſſe rationem geometricam denominatorum, & ſuper hoc male ſtruit cum P. Gregorio à Sancto Vincentio, & alijs proportionalitatem rationum geometricarum arihmeticam loco geometricæ: & Ionas More Eques in ſua Arithmetica Anglice ſcriptà: plures citare non ſinit librorum parcitas. Verum ad exemplum tanti viri, præcurrente Volumnio Rodulpho, deviarunt non pauci, inter quos Gregorius à Sancto Vincentio, qui hac maxime ex cauſa vitiavit ſuam Quadraturam Circuli; Andreas Tacquet in Elementis, Ægidius Franciſcus Gotignies in ſua Logiſtica vniverſali, Bernardus Lamy, Joannes VVallis, & alij ſubijcientes rationes geometricas legibus fractorum, etiamſi hi eſſentialiter ſint numeri, illæ, fatente Gregorio à Sancto Vincentio, quantitatis tantum in obliquo: cœteroqui ſi adeo ſatagimus abſtrahere à rationibus geometricis quod habent quantitatis, vel ſaltem certas quantitates earum loco ſubſtituere, quæ cum illis ſtrictam analogiam ineant, numeri denominatores (quos aliqui interpretes ad def. 5. 6. abutentes verbis Euclidis, vocant quantitates rationum, cum conſtet quantitates, quæ ad efficiendam rationem ex rationibus compoſitam, inter ſe multiplicantur, eſſe ipſarum terminos, quin & numerus multiplicatus per numerum, non producit pluſquam numerum) deficiunt in eo quod intendere debeant operationes gradum vnum vt proxi-

mè

mè inferioribus in rationibus correſpondeant: qui verò perficiunt ſunt Logarithmi certæ cuipiam rationi, e: g: decuplæ, aſſumptæ in vnitatem aptati, nam reductis omnibus rationibus geometricis ad minimum conſequentem 1, ideſt ad denominatores loco antecedentium, & incapacem denominandi geomrtricè vnitatem loco conſequentis, & collatis omnibus cum denominatore 10, vt radice, ipſi 10 obtinget exponens 1, denominatoribus maioribus numero 10, Logarithmi maiores vnitate, minoribus minores, hoc eſt fracti, denominatori æqualitatis vnitati, omnis potentiæ incapaci, 0, minus quam vnitati, id eſt fractis denominatoribus rationum negativarum minoris inæqualitatis, Logarithmi negativi, & horum Logarithmorum additio correſpondebit additioni, rationum denominatarum à numeris quorum ſunt Logarithmi, ſubtractio ſubtractioni, &c, Et, quod fortaſsis à paucis animadverſum eſt, diviſio maioris per minorem, menſurationi vnius rationis per alteram.

De rationibus arithmeticis, & potentialibus allatis præcipuè ad clariorem expoſitionem geometricarum, ſuperfluum eſt ſermonem ex dictis ſponte fluentem amplius protrahere.

Difficultates R. P. Chriſtophori Clavij (cui ſoli benè reſpondiſſe eſt cœteris omnibus ſatisfeciſſe) omnes offendunt in rationibus quas vocat, æqualitatis, & minoris inæqualitatis, nondum à quoquam in debito ſtatu negativo collocatis, adeoque vere vrſit adverſarios ſuos, ſi verum eſt voluiſſe illos, ſtatus negativi immemores, ſemper loqui de rationibus maioris inæqualitatis, cum ille, & defenſor illius contra Meibomium Ioannis VVallis, in ſtatu vti crediderunt fracto, ab hiſce offendiculis liberi incederent; verum quidem eſt, numeros fractos multum ſymbolizare cum negativis, vti patet in Logarihmis, adeoque ſpeciem veritatis præ ſe fert eorum diſcurſus, qui tamen hallucinari deprehendetur in alijs rationibus non geometricis

In lib. ad hoc edito, & in ſua hiſtoria Algebr. c. 20.

cis; ſolique ſtatui negativo debetur hæc prerrogativa omnes pari cum libertate percurrere ; neque inconſequens eſſe videtur credere illos qui relationes minoris inæqualitatis propter denominatores geometricos fractos habent pro rationibus fractis , eaſdem propter denominatores arithmeticos negativos habituros , vel ſaltem habere debere, pro negativis; quod tamen videtur abſurdum cum inquantitatibus abſolutis , quod ſub vna conſideratione eſt negativum vel fractum, idem ſub omni conſideratione ſoleat eſſe negativum, vel fractum.

Obijcit præterea P. Clavius, quod ſi Compoſitio Rationum eſt earum additio , Euclidis definitio 10. l.5. hac de re vertatur in theorema, adeoque indigeat demonſtratione. Reſpondet Nicolaus Tartalea ſuper hoc Campano, Euclidem non aſſerere *eſſe* , ſed *dici* rationes ſecum compoſitas *duplicatam. triplicatam*, *&c.* Sed & ſolet Euclides in ſuis definitionibus indifferenter vti vocabulis *eſt*, & *dicitur* ad ſignificandum ea quæ ex ipſis terminis debent eſſe nota, inter quæ tam in hac def. 10. quam 20. l.5. Secutus communem notionem , quod quæ in communi extremo connectuntur habeantur pro additis; definivit in 10. quomodo ratio eadem ſibi addita multiplicetur, & in 20. quomodo quæcumque rationes in longum addantur; demonſtrat vero ad prop. 23. l. 6. Compoſitionem per *ad fin. l.9.* ductionem ab hac additione non differre, reducendo eam ad ſtatum huius, quo argumento vti conatur P. Clavius ad demonſtrandum exinde illud quod fit ducendo ſive multiplicando non poſſe eſſe aliud quam multiplicationem; ſed potius retorquendum eſt argumentum, dicendo id quod fit extendendo in longum , non poſſe eſſe aliud quam additionem, præſertim manente materiali rationis pœnes ipſos terminos, quomodocumque nobis placitum fuerit comparationem inter eos facere.

cap.20. hiſtor. Alg. Obijcit D. Ioannes VVallis, adhibito textu Græco, duplicem eſſe compoſitionem rationum, vnam per additionem,

nem, alteram per multiplicationem, adeoque Euclidi conformem esse doctrinam Clavij. Respondet Commandinus, Iuniores proportionem definitam 14 vel decimo quinto loco in lib. 5. apposuisse, neque compositionem magnitudinum eandem esse quæ compositio proportionum, augetur quidem per eam denominator vnitate, sed quanti hoc intersit rationis, aliunde petendum est, nam denominator exiguus sic auctus multum, grandis parum rationem auget.

Duplicitas quæ magis vrget est comparationis, quæ videtur inferre inter duas rationes minoris inæqualitatis, vnam simul esse maiorem, & minorem altera; nam quæ est plus minoris inæqualitatis, ad communem consequentem præbebit minorem antecedentem, ergo est minor; & *p.8.5.* potest simul esse *duplicata*, vel *triplicata*, &c. alterius, ergo in linea multiplicationis est maior, & evertitur totus *def.10.5.* fere liber quintus Elementorum. Respondetur negativa sub respectu arithmetico, prout fere vnice conferuntur rationes in l. 5. esse maiora quo minus recedunt à nihilo; at sub respectu geometrico, vt minus efficacia in multiplicando, esse minora:

Sic --4 in hac Analogia arithmetica +4. +2. --2. --4.
Est minor quam --2, at in hac geometrica +4. +2. --4. --2.
Est maior, nam vtrobique prior ratio +4 ad +2 est maioris inæqualitatis, ergo est posterior arithmetica --2 ad --4, & geometrica --4 ad --2. Et idem contingit fractionibus $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{2}$ sub respectu geometrico 4 ad 2 vt $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{4}$.
& potentiali 4 ad 2 vt $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{2}$.

Quod affert P. Clavius de antecedente, & consequente vt agente, & passo, & non vtroque agente vel vtroque passo, alienum est ab ipsa definitione rationis, quæ consistit inter duas quantitates eiusdem generis: sed si lubet exhibere specimen doctrinæ rationum in agentibus solis, haud malo loco erimus; nam sunt agentia alia alijs vehementiora, in ijsdem gradibus cum operationibus arithmeticis supra citatis. Homo agens nudis viribus in pondus, addit vires nihilo; si adiuvatur ab alio, adduntur vires viribus, & est virtus composita duorum ad illam unius in ratione arithmetica denominata à viribus auxiliatricibus alterius; si solus adhibet vectem, multiplicat vires in ratione geometrica denominata à vicibus quibus longitudo vectis à potentia ad hypomoclion continet distantiam ab hypomoclio ad passum; si adiuvatur ab altero etiam cum vecte similiter immediate agente in passum, augetur virtus multiplicata per additionem alterius item multiplicatæ, in ratione arithmetica ab illa denominata, quasi nulla adesset multiplicatio, quæ sistit quæque in suo vecte: sed si vectem agit in vectem, prout sit per axes in peritrochio, multiplicationem addit multiplicationi, & producit virtutem compositam quæ est ad illam vnius vectis in ratione geometrica facti ex longitudinibus amborum, ad solam longitudinem dicti vectis, denominata à longitudine alterius, intelligendo semper per longitudines vectium vices quibus pars spectans ad potentiam continet alteram spectantem ad pondus; componitur autem ratio geometrica ad vtramvis vectis vnius, in ratione arithmetica denominata ab altera vectis alterius: si adhibet plures vectes æquales agentes in invicem, auget vires primi in ratione potentiali denominata à numero eorum, & rationem primi vectis per eundem multiplicat: quæ omnia ad amussim quadrant doctrinæ hic traditæ, viderint adversarij si tam vniversaliter, & consecutivè suam ita materiæ applicare valeant.

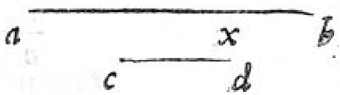
FOR-

FORMVLÆ ARGUMENTANDI PER LIB. 2. ELEMENTORUM.

ARGUMENTATIONES LIB. 2. ELEMENTORUM, omnes de diviſione rectæ lineæ verſantur, quodquidem vnam conſtituit implicitam conditionem, in quacumque propoſitione, in qua de comparatione planorum agitur, & recta aliqua occurrit diviſa, aut dividenda. Quoniam igitur harum argumentationum frequentiſsimus, & vtiliſsimus eſt vſus, breviter de illis ſtylo noſtro verba faciemus.

PER 1. 2. ELEMENT.

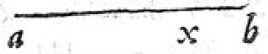
Per primam lib. 2. Elementorum arguitur, cum aſſeritur, rectangulum ſub duabus rectis lineis æquale eſſe rectangulis ſub altera earum, & ſingulis ſegmentis alterius



Sint duæ rectæ lineæ *ab*, & *cd*, quarum *ab* diviſa ſit in quotcumque partes *ax*, & *xb*, &c.
Ergo per 1. 2. el. *ab:cd* —∧— *ax:cd* + *xb:cd*.

PER 2. 2. ELEM.

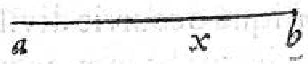
Arguitur quando diviſa recta vtcumque, concluditur rectangula sub tota, & quolibet segmentorum æqualia esse quadrato totius



Sit recta *ab* vtcumque divisa in *x*
Ergo per 2.2.elem. $abx + bax$ —Λ— aba.

PER 3. 2. ELEM.

Per 3.2.arguitur quando divisa recta vtcumque, asseritur rectangulum sub tota, & vno segmentorum æquale esse rectangulo sub segmentis, vna cum quadrato prædicti segmenti



Sit recta *ab* divisa vtcumque in *x*
Ergo per 3.2.el. abx —Λ— $axb + xbx$.
Vel etiam, ergo bax —Λ— $axb + axa$.

PER 4. 2. ELEM.

Per 4.2.argumentatur quando divisa recta vtcumque, dicitur quadratum totius æquale esse quadratis segmentorum, vna cum duplo rectangulo sub ipsis contento.

Sit recta *ab* divisa vtcumque in *x*.
Ergo per 4.2.el. aba —Λ— $axa + xbx + 2\,axb$.

PER 5. 2. ELEM.

Per 5.2.arguitur, quando divisa recta in æqualia, & non æqualia, asseritur rectangulum sub inæqualibus segmentis, vna cum quadrato intermediæ sectionum æquale esse quadrato dimidiæ.

Sit

a m x b

Sit recta *ab* diuisa æqualiter in *m*, & inæqualiter in *x*.
Ergo per 5.2.el. $axb + mxm \llcorner\Lambda\lrcorner ama$.

PER 6. 2. ELEM.

Per 6.2. argumentatur quando diuisa recta bifariam, ei alia adijcitur, & asseritur, rectangulum sub composita, & adjecta, vna cum quadrato dimidiæ æquale esse ei, quod ex dimidia, & adjecta, tamquam ab vna linea describitur quadrato.

a m b x

Sit recta *ab* bifariam secta in *m*, & ei adijciatur *bx*.
Ergo per 6.2.el. $axb + ama \llcorner\Lambda\lrcorner mxm$.

PER 7. 2. ELEM.

Per 7.2. arguitur quando diuisa vtcumque linea recta, infertur quadrata totius, & vnius segmentorum æqualia esse duplo rectangulo sub tota, & dicto segmento, vna cum quadrato alterius.

a x b

Sit recta *ab* vtcumque diuisa in *x*.
Ergo per 7.2.el. $aba + axa \llcorner\Lambda\lrcorner 2bax + xbx$
Vel etiam, ergo $aba + xbx \llcorner\Lambda\lrcorner 2abx + axa$

PER 8. 2. ELEM.

Per 8.2. arguitur, quando diuisa recta vtcumque, concluditur quadruplum rectanguli sub tota, & vno segmentorum, vna cum quadrato alterius; æquale esse ei, quod à tota,

tota, & dicto segmento, tamquam ab vna recta describitur quadrato

$v \quad a \quad x \quad b \quad y$

Sit recta *ab* vtcumque divisa in *x*, & fiat *by* ipsi *xb* æqualis.
Ergo per 8.2.el. $4abx + axa \sqcup\!\Lambda\!\sqcup aya.$
Uel fiat *va* ipsi *ax* æqualis.
Ergo per 8.2.el. $4bxa + xbx \sqcup\!\Lambda\!\sqcup vbv.$

PER 9. 2. ELEM.

Per 9.2. arguitur quando divisa recta in æqualia, & non æqualia, asseritur quadrata partium inæqualium æqualia esse duplo quadrato dimidiæ, vna cum duplo quadrato intermediæ.

$a \quad m \quad x \quad b$

Sit recta *ab* divisa æqualiter in *m*, & inæqualiter in *x*.
Ergo per 9.2.el. $axa + xbx \sqcup\!\Lambda\!\sqcup 2ama + 2mxm.$

PER 10. 2. ELEM.

Arguitur quando divisa recta bifariam, ei adijcitur alia, & concluditur quadrata compositæ, & adiectæ, æqualia esse duplo quadrato dimidiæ vna cum duplo quadrato intermediæ (idest eius, quæ à dimidia, & adiecta componitur.)

$a \quad m \quad b \quad x$

Sit recta *ab* bisecta in *m*, & ei adijciatur *bx*
Ergo per 10.2.el. $axa + bxb \sqcup\!\Lambda\!\sqcup 2ama + 2mxm.$

Hæ sunt æquationes, quæ in lib. 2. elementorum ex divisione rectæ lineæ originem trahunt. Sed quoniam Eucli-

clides, eiusque interpretes æqualitatem tantum inter quadrata, & rectangula contemplati sunt; non abs re erit, si Lectorem meum monitum velim, ipsos eodem modo inter rhombos, & parallelogramma æquiangula æqualitatem contemplari potuisse, vt doctrina vniversalior evaderet. Itaque primum theorema sic ego proponerem.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, seceturque ipsarum altera in quotcumque segmenta: factum sub illis duabus rectis in quovis angulo æquale erit factis in eodem angulo sub insecta, & singulis segmentis divisæ.

Et expositis duabus figuris parallelogrammis, quarum vna sub angulo recto, & altera sub alio quovis angulo contineretur, iisdem verbis, de rectangulis, & quibusvis parallelogrammis concluderetur propositum. Et eodem modo de reliquis theorematibus, quæ de sectione rectæ lineæ versantur. Quod, cum opus fuerit, quisque exequi poterit.

Præterea monere volumus has propositiones lib. 2. el. In terminis vniversalioribus explicari debuisse, propterea quod recta, quæ intermedia vocatur, iam semidifferentia, iam semisumma sit partium inæqualium, vt manifestum fiet in subsequentibus.

DE

DE PRINCIPIJS elementarijs.

Omne problema ab alio independenter resolvi debet, videlicet ex solis principijs elementarijs, quapropter omnia illa principia vniversalia, à quibus resolutionis ars dependere videatur, in elementis debent contineri. Sunt qui magna, & erudita volumina scripsere, propositionibus plena, quarum concatenatio ita indissolubilis persistit, vt vel vnam propositionem intelligere nequeas ni omnes antecedentes perceperis. Sunt etiam qui adeo meditatione magnitudinum delectantur, vt speciales, & peculiares connexiones, quas inter illas speculantur, nobis statim proponunt. Immo cum aliquod resolverint problema, ipsum ceu theorema tradunt, tamquam regulam ad tale problema resolvendum. Vnde fit, quod infinita ferè existant particularia præcepta, quibus inaccessibilis (aliunde facilis, & iucunda) videatur Geometria.

Uerè duo præcipua Geometram decere existimo, nimirum elementa perficere, & analysim promovere. Perficientur quidem elementa, si illa tantum theoremata complectantur, quæ vniversales, & primitivas doceant magnitudinum con-

connexiones , & illa ſolum problemata contineant, quæ vniverſales effectiones erudiant. Hæc ſola, principia ſanè vocantur, reliqua enim omnia tam theoremata, quam problemeta ad artem reſolutivam pertinent. Promovebitur vero analyſis, ſi ad vniverſalem modum reſolvendi præcepta faciliora tradantur. Vtrumque iam alijs relinquimus, & interim ſequentes propoſitiones, quæ nobis neceſſariæ viſæ ſunt, per modum corollarij, aut ſcholij in elementis explicatas cupimus. Nam quamvis mens erat loco huius introductionis, ipſa elementa (ſervato ordinę propoſitionum Euclidis) arbitratu noſtro concinnata præmittere ; nos á propopoſito abſtinere temporis incommoditas coegit.

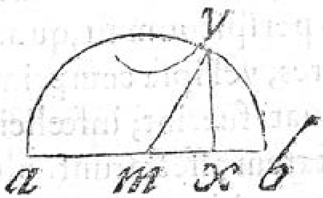
Quod enim elementa perficere oporteat, ex eo perſpicuum fit, quod plerique omnes Scriptores, vel ipſa comprimere, vel ipſa protrahere conati fuerint; infœliciter tamen. Qui enim brevitatem affectarunt, plura omiſerunt neceſſaria, qui verò integritati conſuluerunt, plura aggregarunt inutilia. Et omnes (quod mirum eſt) nævulos, quibus elementa laborant, & qui Matheſeos nitorem deturpare videntur, prætermiſſos reliquerunt.

In ipſo limine Iohannes Luneſclos parallogiſmum deprehendit. In prima enim prop. lib. 1 ſe circulos interſecaret negat, non quia falſum;

ſed quia non oſtenſum. Superpoſitio in quarta, & octava eiuſdem libri mechanicam olet. Propoſitio 42. diminuta proponitur, & determinata demonſtratur. Et huiuſmodi alia multa, quæ inſinuare ſufficiat; plura quidem, quam vt hic recenſeri poſsint.

PROPOSITIO VI.

Scholiū ad prop 5.2.el. Differentia duorum quadratorum æqualis eſt rectangulo ſub aggregato, & differentia laterum.



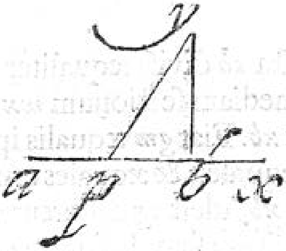
Sint duo latera *mb*. *mx*. Et fiat *am* ipſi *mb* æqualis, deſcriptoque ſuper *ab* ſemicirculo, erigatur perpendicularis *xy*, & iungatur *my*. Quoniam igitur *ab* diviſa eſt æqualiter in *m*, & inæqualiter in *x*, erit
5.2.el. rectangulum *axb* cum quadrato *mx* æquale quadrato *mb*, ſeu *my*, hoc eſt quadratis *xy*, & *mx*: ergo dempto communi quadrato *mx*, erit quadratum *xy*, diffe-
47.1.el. rentia ſcilicet quadratorum *my*, ideſt *mb*, & *mx*, æquale rectangulo *axb*, hoc eſt ſub *ax* (ſumma laterum *am*, ideſt *mb*, & *mx*) & *xb* (differentia eorumdem) Quod erat oſtendendum.

ALITER.

Sint

Sint duo latera *pb*. *px*, & fiat *ap* ipsi *pb* æqualis, erigaturque perpendicularis *by*, ita vt ducta *py* æqualis sit ipsi *px*. Quoniã igitur *ab* bisecta est in *p*, & adijcitur *bx*: erit rectangulum *axb* cum quadrato *pb* æquale quadrato *px*, seu *py*, hoc est quadratis *pb*, & *by*, vnde dempto communi quadrato *pb*, remanebit quadratum *by*, differentia videlicet quadratorum *py*, idest *px*, & *pb* æquale rectangulo *axb*, idest sub *ax* (aggregato laterum *px* & *pb*, idest *ap*.) & *bx* (differentia eorumdem *px*, & *pb*.) Quod erat ostendendum.

Scholiõ ad prop 6.2.el.



6.2.el.

COROLLARIVM.

Ex hac propositione perspicuum est, si recta *ab* dividatur æqualiter in *m*, & inæqualiter in *x*: rectangulum *axb* æquale esse differentiæ quadratorum *mx*, & *mb*.

Et etiam si recta *ab* dividatur bifariam in *p*, & ei adijciatur *bx*: rectangulum *axb* æquale esse differentiæ quadratorum *px* & *pb*.

PROPOSITIO VII.

Si recta linea divisa fuerit in partes æquales, & inæquales: intermedia sectionum semidifferentia est partium inæqualium.

Scholiõ ad 5.2. elem.

a g m x b

Sit recta *ab* divisa æqualiter in *m*, & inæqualiter in *x*. Dico intermediam sectionum *mx* semidifferentiam esse partium *ax*, & *xb*. Fiat *gm* æqualis ipsi *mx*, & quoniam *am*, & *mb* sunt æquales: & æquales erunt residuæ *ag*. *xb*: Igitur inter *ax*, & *xb*, idest *ag* differentia erit *gx*, idest dupla *mx*, adeoque ipsa *mx* semidifferentia. Quod ostendere oportebat.

CORROLLARIUM.

Hinc facile infertur differentiam quadratorum *ax* & *xb* æqualem esse rectangulo sub *ab* & 2*mx*, idest dupla *mx*, videlicet sub aggregato, & differentia laterum, vel quod idem est, duplo rectangulo sub *ab* & *mx*.

PROPOSITIO VIII.

Schol. ad 6.2. el. Si recta linea divisa fuerit bifariam, & ei adijciatur quæpiam: intermedia sectionum, idest composita ex dimidia, & adiecta, semisumma est adiectæ, & compositæ ex tota, & adiecta.

k a m b x

Sit recta *ab* divisa æqualiter in *m*, & ei quæpiam adijciatur *bx*. Dico intermediam sectionum *mx* semisummam esse partium *ax*, & *bx*. Fiat *ka* ipsi *bx* æqualis. Quoniam igitur *am*, & *mb*, nec non *ka*, & *bx* sunt æquales, & æquales

les erunt km, & mx: ergo kx ſumma erit partium ax, & bx, ideſt ka, adeoque mx ſemiſumma. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM 1.

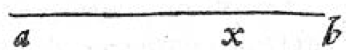
Hinc manifeſtum fit rectangulum ſub ab & $2mx$. ideſt dupla mx, vel quod idem eſt duplum rectangulum ſub ab, & mx æquale eſſe differentiæ quadratorum ax. bx, videlicet ſub aggregato, & differentia laterum.

COROLLARIVM 2.

Etiam patet ſemidifferentiam am partium ax, & bx, & ſemiſummam earumdem mx, partem maiorem componere ax. Item differentiam inter eadem ſemidifferentiam mb, & eamdem ſemiſummam mx, partem eſſe minorem bx. Hoc ipſum inferre licet ex antecedente propoſitione.

PROPOSITIO IX.

Duo quadrata æqualia ſunt quadrato differentiæ laterum vna cum duplo rectangulo ſub iiſdem lateribus comprehenſo. *Schol. ad 7.2. el.*



Sint duo quadrata, quorum latera ſint rectæ ab, & ax.

Sunt

Sunt igitur bina quadrata *ab*, & *ax* æqualia quadrato *xb*,
7.2.el. nempe differentiæ laterum *ab*, & *ax*, vna cum duplo rectangulo *bax*, videlicet ſub iſdem lateribus *ab*, & *ax* comprehenſo. Ergo duo quadrata,&c. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO X.

Schol. ad 9.2. el. **Duo quadrata æqualia ſunt duplo quadratorum ſemiſummæ, & ſemidifferentiæ laterum.**

a m x b

Sit recta *ab* diviſa æqualiter in *m*, & inæqualiter in *x*. Sunt igitur quadrata *ax*,& *xb* æqualia duplo quadratorum
9.2.el. *am*, & *mx*; ſed *am* eſt ſemiſumma laterum *ax*,& *xb*; & *mx* eorundem ſemidifferentia: ergo quadrata *ax*, & *xb* æqua-
per 7. huius lia ſunt duplo quadratorum ſemiſummæ *am*, & ſemidifferentiæ laterum *mx*. Quod erat oſtendendum.

ALITER.

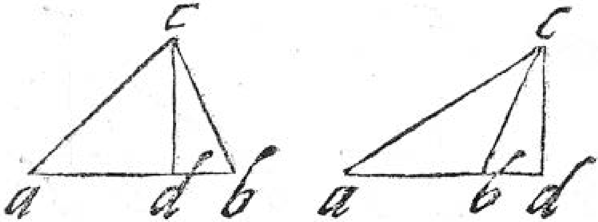
a m b x

Sit recta *ab* diviſa æqualiter in *m*, & ei adijciatur quæpiam *bx*. Sunt igitur quadrata *ax*,& *bx* æqualia duplo qua-
10.2.el. dratorum *am*, & *mx*; ſed *am* eſt ſemidifferentia, & *mx* ſemiſumma laterum *ax*,& *bx*. Igitur quadrata *ax*, & *bx* æ-
per 8. huius. qualia ſunt duplo quadratorum ſemiſummæ, & ſemidifferenriæ laterum; nempe *mx*, & *am*. Quod erat oſtendendum.

PRO-

PROPOSITIO XI.

In omni triangulo differentia quadratorum laterum æqualis est differentiæ quadratorum, quæ fiunt à ſegmentis baſeos. *Schol. ad 47. 1. el.*



Sit triangulum quodcumque *abc*, cuius perpendiculum *cd*, ſitque latus *ac*, latere *bc* maius. Dico differentiam inter quadrata *ac*, & *cb* æqualem eſſe differentiæ inter quadrata *ad*, & *db*. Cum enim quadratum *ac* æquale ſit quadratis *ad* & *cd*, quadratum vero *bc* æquale quadratis *db*, & *cd*: erit (auferendo æqualia ab æqualibus) differentia inter quadrata *ac*, & *bc* æqualis differentiæ inter quadrata *ad*, & *db*. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

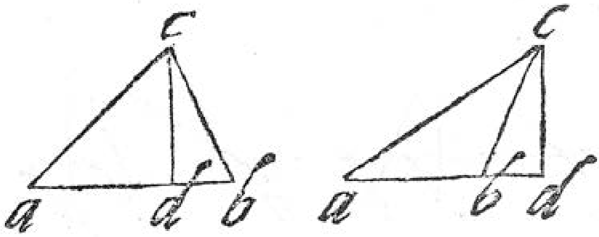
Cum autem differentia quadratorum *ad db* æqualis ſit (*per 6. huius*) rectangulo ſub aggregato, & differentia partium: perſpicuum fit, in omni triangulo differentiam quadratorum laterum æqualem eſſe rectangulo ſub aggregato, & differentia ſegmentorum baſeos.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Schol. ad 47. 1. el.

In omni triangulo quadrata laterum, & ſegmentorum baſeos permutatim ſumpta inter ſe ſunt æqualia.



Sit triangulum *acb*, cuius perpendiculum *cd*. Dico quadrata lateris *ac*, & alterni ſegmenti *db* æqualia eſſe quadratis lateris *cb*, & alterni ſegmenti *ad*.

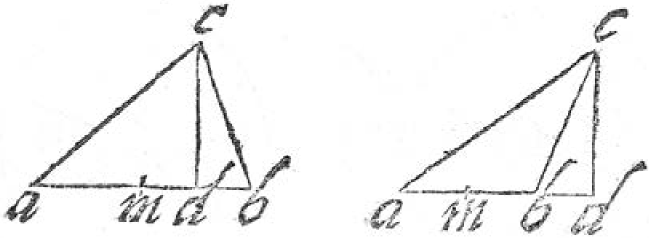
Eſt enim quadratum *ac* æquale quadratis *ad*, & *dc*: ergo addito quadrato *db*, erunt quadrata *ac*, & *db* æqualia quadratis *ad*, & *dc*, & *db*, hoc eſt quadratis *ad* & *cb*. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XIII.

Schol. ad 9. & 10. l. 2. elem.

In omni triangulo quadrata laterum ſimul ſumpta æqualia ſunt duplo quadratorum ſemibaſis, intermediæ, & perpendiculi.

Eſto



Esto triangulum quodcumque *abc*, cuius perpendiculum *cd*, basis autem *ab* divisa sit bifariam in *m*. Dico quadrata laterum *ac*, & *bc* æqualia esse duplo quadratorum *am*. *md*, & *cd*.

Cum enim quadratum *ac* æquætur quadratis *ad*, & *cd*, quadratum vero *cb* quadratis *db*, & *cd*: erunt quadrata *ac*,& *bc* æqualia quadratis *ad*, & *ab* cum duobus quadratis *cd*; sed quadrata *ad*, & *db* (per 9. & 10. lib. 2. elem.) æquantur duobus quadratis *am*, & duobus *md*: ergo quadrata *ac*, & *bc* æqualia erunt duplo quadratorum *am*, *md*, & *cd*. Quod erat ostendendum.

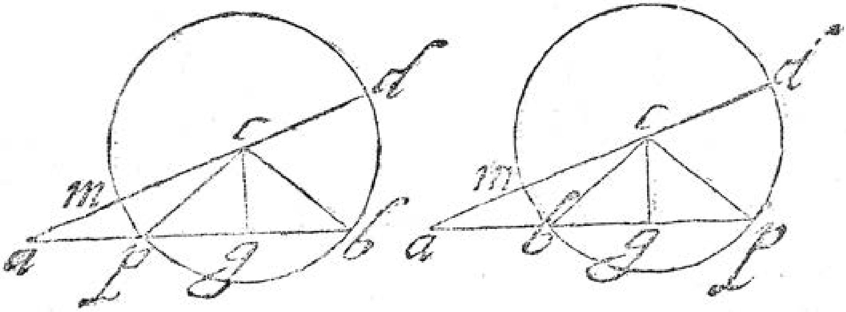
NOTA.

Si recta ducatur *mc*, poterit ipsa rectarum *md*, & *dc* quadrata, quare quadrata laterum *ac*, & *cb* æqualia erunt duobus quadratis *am*, & duobus *mc*.

PROPOSITIO XIV.

In omni triangulo, rectangulum sub aggregato, & differentia laterum æquale est rectangulo sub aggregato, & differentia segmentorum baseos. *Schol. ad 36. 3. el.*

L Esto



Esto tam oxygonium, quam ambligonium triangulum *acb*, latera *ac*, & *cb*, basis *ab*, & perpendiculum *cg*. Minore latere *cb* vt radio circulus describatur *bpd*, secans basim *ab* (productam in ambligonio triangulo) in *p*. Ducatur *pc*, & latus *ac* protrahatur ad *d*. Erit igitur in vtroque triangulo *ad* summa laterum, & *am*. Eorumdem differentia, eritque in oxygonio basis *ab* aggregatum segmentorum, & *ap* ipsorum differentia: sed in ambligonio *ap* erit aggregatum, & ipsa basis *ab* differentia segmentorum sui ipsius *ag*, & *bg*: ergo (*per 36.3. elem.*) rectangulum *dam* sub aggregato, & differentia laterum æquale erit rectangulo *bap* sub aggregato, & differentia (vel sub differentia, & aggregato) segmentorum baseos, quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

Scholiō ad 14. li.6.el. Cum igitur rectangula sint æqualia *dam*. *bap*. erit (*ex 14. lib.6. el.*)

IN OMNI TRIANGVLO.

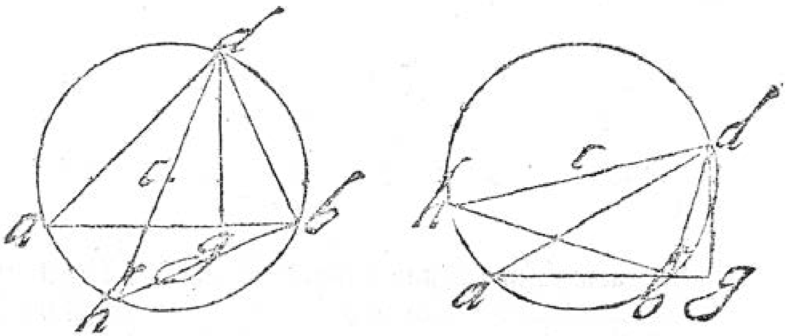
Vt *ab* basis
Ad *ad* summam laterum.
Ita *am* differentia laterum.
Ad *ap* summam, siue differentiam segmentorum baseos.

Vide-

Videlicet ſummam in ambligonio, differentiam in oxygonio triangulo.
Et etiam quadrando, dimidiando, &c.

PROPOSITIO XV.

In omni triangulo: rectangulum ſub lateribus æquale eſt rectangulo ſub perpendiculo, & diametro circuli circumſcripti. *Scholiō ad 14. 6. elem.*



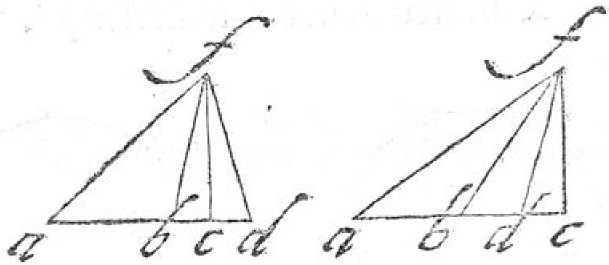
Sit triangulum *adb*, cuius altitudo *dg*, & circumſcribatur circulus, cuius centrum *c*, ducatur diameter *dh*, & iungatur *hb*. Dico rectangulum ſub lateribus *adb* æquale eſſe rectangulo ſub perpendiculo *dg*, & diametro circuli circumſcripti *dh*.

Quoniam enim anguli *a*, & *h* ſunt æquales (vt pote inſiſtentes ſuper eamdem *db*) & anguli *g*, & *dbh* in ſemicirculo recti; erunt triangula *adg* *dbh* ſimilia, quare vt *ad* ad *dg*, ita erit *dh* ad *db*: ergo rectangulum ſub lateribus *adb* æquale erit rectangulo ſub perpendiculo *dg*, & diametro *dh*. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XVI.

Schol. ad 31. 3. el.

In omni triangulo angulus comprehensus à perpendiculari, & recta, quæ angulum verticis bifariam dividit, semidifferentia est angulorum ad basim.



Sit triangulum *afd*, cuius perdendicularis *fc*, rectaque *fb* bifariam secet angulum verticis *afd*. Dico angulum *bfc* semidifferentiam esse angulorum ad basim *a*, & *d*.

Perpendicularis *fc* cadet intus. Cum enim anguli *a*, & *afc*, ideſt anguli *a*. *afb*, & *bfc* æquales sint angulis *cfd*, & *d*. (quia vtraque pars recto est æqualis) si addatur angulus *bfc*; erunt anguli *a*, & *afb*, & duo anguli *bfc* æquales angulis *bfc*. *cfd*. & *d*, ideſt angulis *bfd*, & *d*. Vnde si auferantur anguli æquales *afb*. *bfd*: remanebunt angulus *a*, & duo anguli *bfc* æquales angulo *d*. Superat igitur angulus *d*. angulum *a* duobus angulis *bfc*, adeoque angulus *bfc* semidifferentia est eorumdem.

Perpendicularis *fb* cadat extra. Quoniam igitur angulus *adf* æqualis est internis *dfc*, & *dcf*; angulus vero rectus *dcf* æquatur angulis *a*, & *afc*: erit angulus *adf* æqualis angulis *a*. *afc*, & *dfc*, hoc est angulis *a*. *afd*, & duobus *dfc*, vel angulis *a*, duobus *bfd*, & duobus *dfc*, vel tandem angulis *a*. &

a, & duobus *bfc*. Superat igitur angulus *adf* angulum *a* duobus angulis *bfc*. Itaque ſemidifferentia eoremdem erit angulus *bfc*. Quod erat oſtendendum.

N O T A.

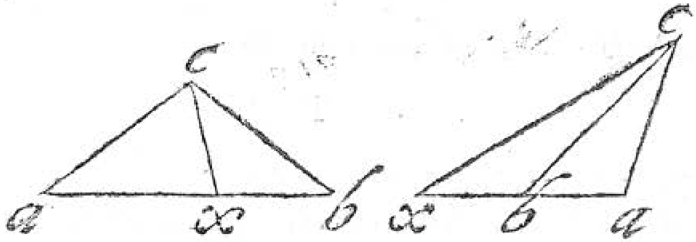
Cum perpendicularis *fc* extra triangulum cadit, perſpicuum eſt ipſum angulum verticalem *afd* differentiam eſſe angulorum ad perpendicularem *afc*. *dfc*.

At vero cum perpendicularis *fc* cadit intra, ipſe angulus *bfc* (qui ſemidifferentia eſt angulorum ad baſim) ſemidifferentia etiam eſt angulorum ad perpendicularem *afc*. *cfd*. Dantur enim anguli æquales *afb* , & *bfd*, quare ſi addatur angulus *bfc*: erit angulus *afc* æqualis angulis *bfd* , & *bfc*, hoc eſt angulis *cfd*, & duobus *bfc* , quare angulus *bfc* ſemidifferentia eſt angulorum *afc*, & *cfd*.

PROPOSITIO XVII.

In omni triangulo ſi à vertice ad baſim (etiam protractam, ſi opus fuerit) recta ducatur cum vno laterum angulum conſtituens æqualem angulo ad baſim, ipſi lateri oppoſito: erit quadratum ipſius lateris æquale rectangulo ſub baſe, & ſegmento contermino. Rectangulum vero ſub lateribus æquale rectangulo ſub baſe, & ipſa recta ducta. *Schol. ad 8.6. el.*

Sit



Sit quodvis triangulum *abc*, & à vertice *c* in basim *ab* recta ducatur *cx*, faciens cum latere *ac* angulum *acx* æqualem angulo *abc* ipsi lateri *ac* opposito. Dico quadratum ipsius lateris *ac* æquale esse rectangulo sub base *ab*, & segmento contermino *ax*. Rectangulum verò sub lateribus *acb* æquale rectangulo sub base *ab*, & ipsa recta ducta *cx*.

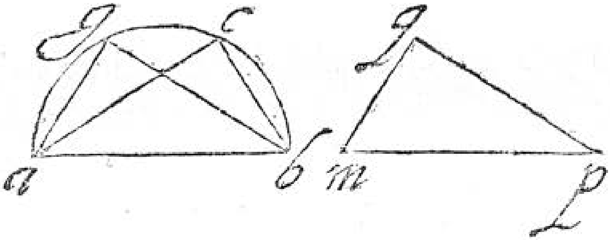
Cum enim angulus *acx* angulo *abc* sit æqualis, & angulus *bac* communis, triangula erunt similia *abc*, & *axc*: ergo erit vt *ab* ad *ac*, ita *ac* ad *ax*, & quadratum *ac* æquale rectangulo sub *ab*, & *ax*. Et etiam erit vt *ab* ad *bc*, ita *ac* ad *cx*, & rectangulum sub *ac*, & *bc* rectangulo sub *ab*, & *cx* æquale. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XVIII.

Schol. ad 23. 6. el.

Si triangula vnum angulum vni angulo æqualem habuerint: ratio laterum vnius trianguli circa maiorem angulum maior erit ratione laterum alterius circa minorem angulum. Et è contra si ratio laterum vnius trianguli circa alium angulum maior fuerit ratione laterum alterius circa alium angulum ille isto erit maior.

Sint



Sint duo quæcumque triangula *acb. mqp*, angulos *c.* & *q.* æquales habentia, sitque angulus *m* maior angulo *a*. Dico rationem *mp.* ad *mq.* maiorem esse ratione *ab.* ad *ac.* Et è contra si ratio *mp* ad *mq* maior fuerit ratione *ab* ad *ac*, angulum *m.* maiorem esse angulo *a*.

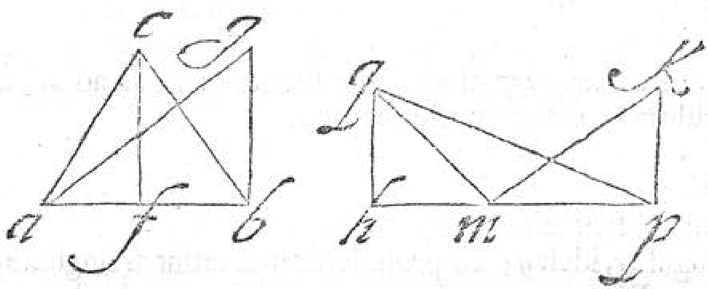
Circa *acb* segmentum circuli describatur angulum capiens *acb*, & fiat angulus *bag* angulo *m* æqualis, & iungatur *gb*. Erit igitur angulus *g* in eodem segmento æqualis angulo *c*, idest *q*; ac proinde similia erunt triangula *agb. mqp*. Est autem *ag* minor quam *ac* quia remotior à centro: ergo ratio *ab ag*, idest ratio *mp. mq* maior erit ratione *ab ac*.

Conversam autem hoc modo ostendemus. Si igitur ratio *mp. mq* maior fuerit ratione *ab ac*, fiat vt *mp* ad *mq*, ita *ab* ad *ag*, quæ necessario erit minor quam *ac*, vt sit ratio *mp. mq*, idest *ab. ag* maior ratione *ab. ac*, vti ponitur: ergo punctum *g* cadet in peripheria inter *a*, & *c* : ergo angulus *bag*, idest angulus *m*, angulo *bac* maior erit, quod ostendere oportebat.

Hæc propositio aliquando vtilis esse poterit, & illis adijci, quas R. P. Clavius in Scholio prop. 23. lib. 6. el. num. 1. & 4. attulit.

PROPOSITIO XIX.

Schol. ad 15. 6.el. Triangula æqualia bases & altitudines habent reciprocas: Et si bases, & altitudines fuerint reciprocæ, triangula erunt æqualia.



Sit triangula æqualia *abc*, & *mpq*, & primi sit basis *ab*, & altitudo *cf*, secundi vero basis *mp*, & altitudo *qh*. Dico proportionales esse *ab mp. qh cf.*

Fiant super easdem bases *ab*, & *mp*, & sub eorum altitudinibus *bg*, & *pk*, in angulis rectis *b*, & *p* triangula *abg*, & *mpk*, quæ æqualia erunt propositis, è inter se: ergo triangula *abg*, & *mpk*, idest *abc*, & *mpq*, circa æquales angulos rec- 15.6.el. *b*, & *p* latera habent reciproca, idest bases, & altitudines, & proportionales sunt *ab mp pk bg*, hoc est *ab mp qh cf*.

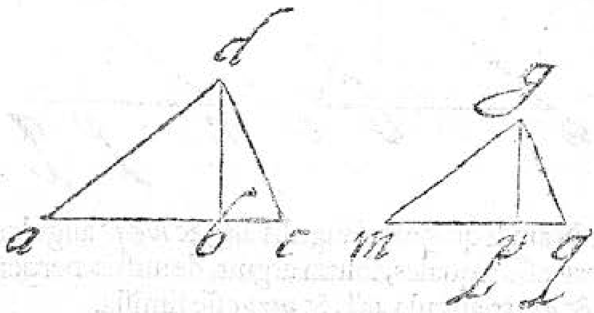
Pari ratione si bases, & altitudines fuerint reciprocæ, hoc est si fuerint proportionales (in triangulis *abc*, & *mpq*.) *ab mp. qh cf*, vel (in ipsis æqualibus *abg*, & *mpk*) *ab mp pk bg*: triangula erunt æqualia inter se *abg*, & *mpk*: ergo etiam ipsis æqualia *abc*, & *mpq*. Quod erat ostendendum.

PRO-

PROPOSITIO XX.

In triangulis ſimilibus, ſi ab æqualibus angulis demittantur perpendicula: omnes partes vnius trianguli, omnibus partibus homologis alterius vnam, eamdemque rationem inter ſe habebunt, videlicet altitudinem.

Schol. ad 4. 6. el.



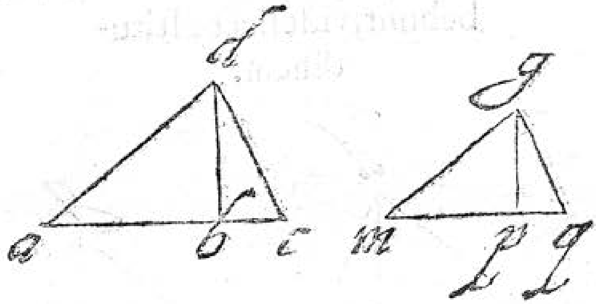
Sint duo triangula ſimilia *acd*, & *mqg*; ſintque anguli *a. c. d.* angulis *m. q. g.* æquales, & ab æqualibus *d*, & *g* perpendiculares cadant *db*, & *gp*. Cum igitur *a*, & *m*, inter ſe, nec non *c*, & *q* inter ſe ponantur æquales, & ad *b*, & *p* ſint recti, triangula ad altitudinem vnius *abd*, & *bcd* triangulis ad altitudinem alterius *mpg*, & *pqg* erunt ſimilia, vtrumque vtrique, quapropter vt *bd* ad *pg*, ita erit *ad* ad *mg*, & ita *ab* ad *mp*, & ita *dc* ad *gq*, & ita *bc* ad *pq*. Vt igitur altitudines ita ſunt partes vnius ad partes homologas alterius. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Hinc patet triangula ſimilia, æqualia etiam eſſe, ſi præterea pars aliqua vnius, parti homologæ alterius fuerit æqualis, nam proportio erit æqualitatis.

NOTA.

Totalis æqualitas duorum triangulorum ex tribus conditionibus, quarum vna saltem sit æqualitatis, procedit. Vbi notandum, quod æqualitas duorum angulorum in triangulis non sit conditio æqualitatis, sed tantum propor-



tionis. Nam si quis in triangulis *adc*, & *mgq*. angulos *a*, & *m* dixerit esse æquales, solum arguit, demissis perpendiculis *db*, & *gp*, triangula *adb*, & *mgp* esse similia.

Itaque totalis æqualitas duorum triangulorum ex tribus partibus æqualibus, nempe ex tribus lateribus, in prop. 8. lib. 1. element. ostenditur. Ex duabus verò partibus æqualibus, & vna proportione, scilicet ex duobus lateribus, & angulo comprehenso, in prop. 4. Et denique ex vna parte æquali, & duabus proportionibus, videlicet ex duobus angulis, & vno laterum in prop. 26. eiusdem libri.

Hic quidem sistit Euclides, qui perpendicula, & segmenta baseos, & anguli verticalis, ab ipsis perpendiculis facta, cum de æqualitate totali triangulorum ageret, neglexit. Nos autem operæpretium duximus tyrones animaduertere, ipsa perpendicula, & segmenta, partes etiam esse præcipuas triangulorum, & ex ipsis, illas tres conditiones, à quibus eorum totalis æqualitas dependet, constitui posse; v.g. Si in triangulis *adc*, & *mgq*. latus *ad*, & angulus *adc* æqualia fuerint lateri *mg*, & angulo *mgq*, & præterea bases,

&

& altitudines proportionales; æqualia, & similia, ideſt totaliter æqualia erunt triangula, &c.

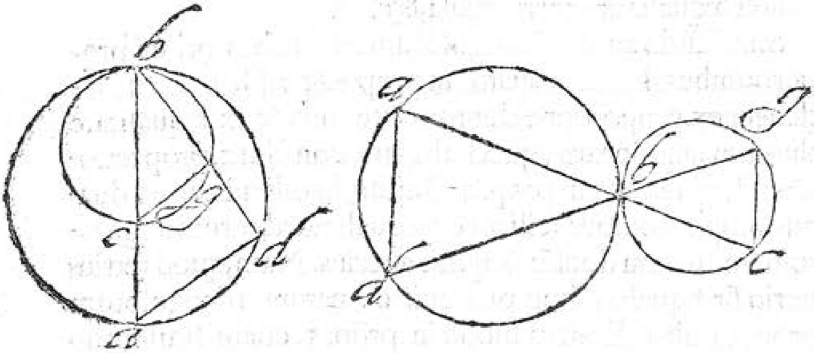
Similitudo autem triangulorum ex duabus oritur proportionibus. Et ita probatur in prop. 6. & 7. lib. 6. elem. videlicet ex proportione duorum laterum, & ex æqualitate duorum angulorum, quod alteram conſtituit proportionem. Pari ratione in prop. 4. ſimilitudo oſtenditur ex duabus proportionibus, ſcilicet ex æqualitate duorum angulorum vnius cum duobus angulis alterius. Nam, quod tertius tertio ſit æqualis, hoc provenit ex natura triangulorum prop. 32. lib. 1. Eodem modo in prop. 5. etiam ſimilitudo demonſtratur ex duabus proportionibus, nam licet ex tribus proponatur; ex duabus poſitis, tertia ex æqualitate rationis neceſſario procedit, vnde ſufficere dicere triangula eſſe ſimilia *adc*, & *mgp*, ex eo, quod *ad* ad *ac* ſit vt *mg* ad *mq*, & *ad* ad *dc* vt *mg* ad *gq*, cum ex æqualitate neceſſario ſit *ac* ad *dc*, vt *mq* ad *gq*.

Ita ſimiliter triangula erunt ſimilia ſi angulus angulo fuerit æqualis, & proportionales baſes, & altitudines, &c.

Hæc quidem ſufficiunt, vt quiſque totalem æqualitatem ex tribus conditionibus, quarum vnam ſaltem ſit æqualitatis: & ſimilitudinem ex duabus proportionibus, proponere, & demonſtrare poſſit.

PROPOSITIO XXI.

Si duo circuli ſe mutuo tetigerint, per contactum autem quælibet ducatur recta, ſimilia ſegmenta ſecabit, atque in puncto contactus in ratione diametrorum dividetur.



Sint duo circuli *abd*, *bgc* ſe interius, vel exterius contingentes in *b* puncto, per quod recta quælibet ducatur *dbg*. Per centra autem ducatur *abc*, quæ neceſſario tranſibit per *b*, & iungantur *ad*, & *gc*.

Quoniam igitur anguli *d*, & *g* in ſemicirculo ſunt recti, & ad *b* æquales, erunt in triangulis *abd*, & *bgc*, reliqui *a*, & *c* etiam æquales, videlicet quos capiunt ſegmenta *db*, & *bg*, quare ipſa ſimilia erunt. Et quoniam triangula *abd*, & *bgc* ſunt æquiangula erit recta *db* ad rectam *bg*, vt diameter *ab* ad diametrum *bc*, quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

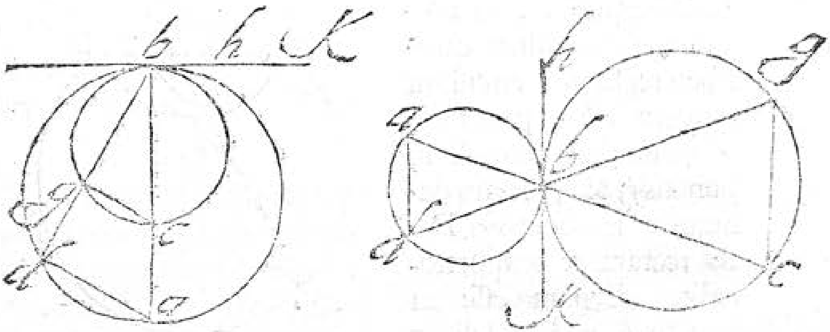
Hinc manifeſtum fit ſi per contactum duorum circulorum ſe interius, vel exterius, contingentium, duæ quælibet ducantur rectæ triangula fieri ſimilia, qualia eſſent triangula *abd*, & *bgc*, etiam ſi *abc* non tranſiret per centra, quia vtraque diuiditur in *b*. in ratione diametrorum, vnde latera circa communem angulum *b*. ſunt proportionalia.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Si circa duo triangula similia sub eodem vertice, & basibus parallelis constituta, circuli describantur: sese in eodem vertice contingent.

Hæc propositio conversa est antecedentis.



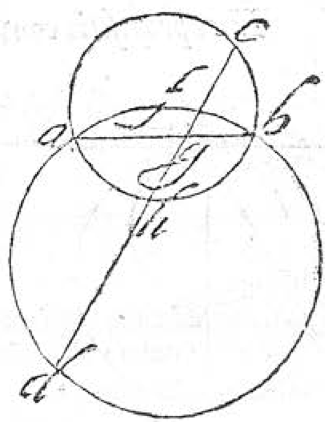
Sint duo triangula similia *abd*, & *cbg* sub eodem vertice *b*, & basibus parallelis constituta. Circa triangulum alterum *cbg* circulus *cbg* describatur, & per *b* tangens ducatur *bk*. Deinde circa triangulum reliquum *abd* circulus describatur *abd*.

Quoniam ex constructione *bc* secat, & *bk* tangit circulum *cbg* erit angulus *g* angulo *cbk* æqualis; sed ob similitudinem triangulorum, angulus *g* æquatur angulo *d*: ergo æquales erunt anguli *cbk*, & *d*; sed angulus *cbk* æquatur angulo *abh*: ergo angulus *abh* æqualis erit angulo *d*, quare (per conversam 32.3.elem.) *ab* secat, & *bh* tangit circulum *abd*; sed *bh* etiam ex const. tangit circulum *cbg*: ergo circuli *abd*, & *cbg* se contingent in *b*, quod ostendere oportebat.

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

Si duo circuli se intersecuerint: recta, quæ vtrumque circulum secat, proportionaliter dividetur à peripherijs, & recta, quæ puncta intersectionum coniungit.



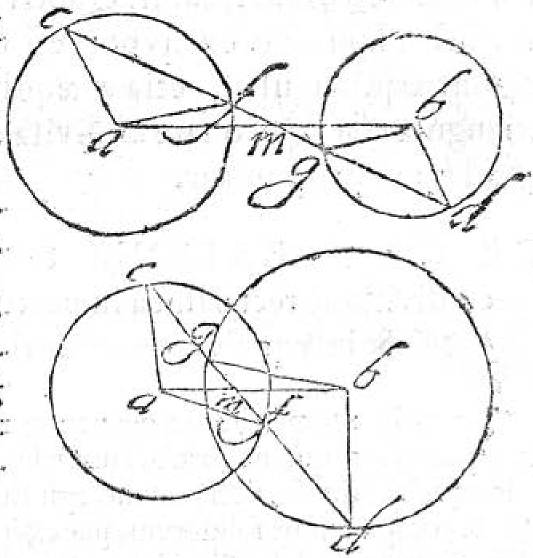
Circuli *acb. afb.* se intersecent in punctis *a*, & *b*, ductaque *ab*, secet vtrumque circulum quælibet recta *dc*, circulum quidem *acb* in punctis *c*, & *h*; circulum vero *afb* in punctis *f*, & *d*; rectam denique *ab* in puncto *g*. Dico rectam *dc* proportionaliter divisam esse in punctis *h. g. f.* videlicet proportionales esse *fc. gf. dh. hg.*

Quoniam enim in circulo *acbh* sunt proportionales *ag. gc. gh. gb*, & in circulo *afbd.* proportionales *ag. gf. dg. gb*: erunt ex æqualitate proportionales *gc. gf. dg. gh.* & dividendo *fc. gf. dh. gh.* quod erat, &c.

PROPOSITIO XIV.

Si recta, quæ centra iungit duorum circulorum, in ratione semidiametrorum dividatur, & per punctum divisionis quælibet recta ducatur, similia segmenta secabit.

Quan-



Quando circuli se contingunt, recta quæ centra iungit, in ipso contactus puncto, in ratione dividitur semidiametrorũ, & recta, quæ per contactum ducitur similia segmenta secat, vt ostensum est, *prop.21.huius.*

Sint iam duo circuli se non contingentes *cf*, & *gd*, quorum centra *a*, & *b*, ducatur *ab*, & dividatur in *m* in ratione semidiametrorum, & per *m* quælibet ducatur recta *cd*, secans circulum *cf* in *c*, & *f*, circulum vero *gd* in *g*, & *d*, iunganturque *ac*, & *af*, nec non *bg*, & *bd*.

Quoniam ex constructione est *am* ad *mb*, vt *ac* ad *bd*, & altern. *am* ad *ac*, vt *mb* ad *bd*, & anguli ad *m* sunt æquales; similia erunt triangula *acm*, & *mbd*, adeoque angulus *c* angulo *d* æqualis; sed angulo *c* æquatur angulus *cfa*, & angulo *d* angulus *bgd*: ergo in triangulis *acf*, *bgd* reliquus *caf* reliquo *gbd* erit æqualis, quare similia erunt segmenta *cf*, & *gd*. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

Conversa ita proponi potest. Si recta duos circulos secans, similia segmenta secet; transiens per rectam, quæ centra iungit: ipsam in ratione semi-

ſemidiametrorum ſecabit. Quod facile demonſtratur. Nam cum ex hypotheſi triangula *bgd. acf* ſint æquiangula; etiam æquiangula erunt triangula *afm. bgm*, quare *ab* diviſa erit in *m*, vt *af* ad *bg*: vt proponitur.

DE COMPARATIONE SOLIDORVM ex diviſione rectæ linea in partes æquales, & in æquales procedentium.

Quemadmodum in libro 2. elementorum de comparatione planorum, quæ ex partibus rectæ lineæ æqualiter, & inæqualiter diviſæ, fieri poſſunt, egit Euclides: Ita ſimiliter de comparatione ſolidorum, quæ ex ipſa diviſione effici poſſunt, agere debuiſſe videtur. Sunt enim tam hæc, quam illa, principia neceſſaria. Quod cum R. P. Jacobus Kreſa è Societate Ieſu Olim in Academia Olomucenſi in Moravia, & in Vniverſitate Pragenſi in Bohemia, nunc in Collegio Imperiali Matriti Mathematum Profeſſor, erga me ſemper humaniſsimus, & methodi meæ conſcius, animadvertiſſe; in elementis Euclidis, quæ Hiſpano idiomate in lucem edidit, ipſa principia poſuit. Quæ nos in ſecunda parte huius operis, in qua de reſolutione problematum ſolidorum agere intendemus, recenſebimus.

His omnibus ita præmiſsis, Methodum iam noſtram aggrediamur.

ANA-

ANALYSIS GEOMETRICA.

LIB. I.

AGENS DE RESOLVTIONE PER PROPORTIONALES.

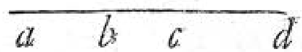
INSTRVCTIO.

TOta ars analytica in repetitione, & reductione terminorum problematis consistit. Repetitio quidem fit, cum aliqua linea, vel aliquis angulus positione mutatur; reductio verò cum magnitudo aliqua, vel aliqua ratio in aliam convertitur æqualem. Quando autem, & quomodo repetitio, & reductio fieri debeant, docet ipsa necessitas magistra rerum, & ipsa Natura dictat. Itaque oportet nos monitos esse in hoc artificio totam rem consistere, vt cautè procedamus in resolutionibus, & terminos poblematis ita repetamus, vel reducamus, vt exinde commodiores consequentias eruere possimus. Sequentes admonitio-nes observa, quæ ad nostram methodum conducunt.

ADMONITIO 1.

Omnis linea incognita, & quæsita in puncto aliquo ignoto terminatur, vnde, vt confusio vitetur, puncta incognita vltimis litteris alphabeti, *v. z. y. x*, &c. notari debent, vt à punctis notis *a. b. c. d.* &c. distinguantur, & si opus fuerit vnum, idemque punctum duabus litteris annotari potest, quando scilicet in eo linea aliqua nota, & aliqua incognita concurrunt.

ADMONITIO 2.



In nominandis magnitudinibus morem antiquum conservamus. Factum sub rectis *ab*, & *bc*, hoc est rectangulum; seu parallelogrammũ sub *ab*, & *bc* in quocumque angulo comprehensum, *abc* scribimus, vel etiam hoc modo *ab*:*bc* duobus videlicet punctis interjectis, præcipue quando puncto communi carent illæ rectæ, sub quibus factum continetur, vt si factum sub rectis *ab*, & *cd* scribere velimus, brevitatis gratia, ipsum hoc modo *ab*:*cd* denotanotabimus. Quadratum verò, vel etiã rhombum ex recta *ab* deſcriptum, ſeu deſcribendum *aba* ſcribemus, cubum tandem ex ipſa *ab* efficiendum ab^3. indicabimus, hoc eſt factum ſub tribus æqualibus dimenſionibus *ab*. *ab*. *ab*. & ſic de cæteris, mappa enim analytica prolixitatem non patitur.

DEFINITIO PRIMA.

Rationem additivam dicimus, cuius termini ad additionem, ideſt ad compoſitionem diſpoſiti ſunt. Rationem vero ſubtractivam, quando ad ſubtractionem, hoc eſt ad diviſionem apti reperiuntur.

$\overline{a \qquad b \; x \qquad c}$

Sit recta *ac* diviſa in punctis *b*, & *x*: rationem igitur, quæ inter *ab*, & *bx* exiſtit, additivam dicimus, quia termini *ab*, & *bx* totam *ax* componunt. Rationem verò inter *ax*, & *bx* ſubtractivam vocamus, quia termini *ax*, & *bx* recta differunt *ab*, & ſic de alijs

ADMONITIO 3.

Si in analyſi ordo ſervetur litterarum ſicuti in figura puncta procedunt, ex ſola earum inſpectione manifeſtum erit, an ratio additiva, ſubtractivave ſit, & conſequenter an componere, vel dividere oporteat. In ratione enim *ac. ax*, quæ ſubtractiva eſt, punctum commune *a* neceſſariò alternat; quod in ratione additiva *ab. bx*, vel *bx. ab*. accidere non poteſt, ſi prædictus ordo ſervetur.

ADMONITIO 4.

Quamlibet rationem ex additiva in ſubtractivam, & ex ſubtractiva in additivam convertere licet repetitione alterutrius termini.

Si enim rationem additivam inter *ab*, & *bd* in ſubtractivam convertere velimus, fiat *bc* ipſi *ab* æqualis, & ita ratio inter *bc*, & *bd*, ideſt *ab*, & *bd*, ſubtractiva erit. Et ſimiliter ſi rationem ſubtractivam *bd. bc* in additivam oporteat revocare, fiat *ab* ipſi *bc* æqualis, & ratio *bd. ab*, quæ eadem eſt cum ratione *bd. bc*, erit additiva, & ſic de alijs.

ADMONITIO 5.

Quando propositta aliqua proportione, in recta linea existente, per proportionales argumentari oportet;nullo alio modo procedere licet, nisi per compositionem, vel per divisionem. Itaque si vtraque ratio additiva fuerit, componendo, vel per compositionem; si verò subtractiva, dividendo, vel per divisionem arguere debebit Analysta. Ita vt eo semper argumento vtatur, quod ad conservationem terminorum notorum commodius videatur.

Cæterum si vna ratio additiva, & altera subtractiva fuerit, vel hæc in additivam, vel illa in subtractivam reducenda erit, vt vtraque sit eiusdem generis. Quod facile per præcedentem admonitionem obtinetur, & semper obseruari debet, quando termini rationis reducendæ cogniti sunt. Attamen si extiterint incogniti, & eorum summa, aut differentia nota fuerit, plærumque maiore claritate res expedietur per prop. 7. & 8. Introductionis, quarum notitia, differentia terminorum rationis additivæ, & aggregatum rationis subtractivæ exprimi possunt; vnde per divisionem, vel compositionem arguere licebit.

DE-

DEFINITIO SECVNDA.

Rationem communem vocamus illam, quæ duabus proportionibus communis exiſtit, ſiue ipſa directa, ſiue reciproca ſit.

Sint duæ proportiones *a. b. d. e.* & *b. c. e. f*, quarum vtraque duos habet æquales terminos *b*, & *e* rationem directam inter ſe conſtituentes. Hanc igitur rationem, communem vocamus, quia communis eſt vtriſque analogijs.

a.	*b.*	*d.*	*e.*
b.	*c.*	*e.*	*f.*

Eodem modo ſint duæ proportiones *a.b.c.f*, & *b. c. d. e*, quarum vtraque duos ſortitur terminos æquales *b*, & *e*, rationem inter ſe reciprocam efficientes. Hanc igitur rationem, communem vocamus, quia communis eſt vtriſque proportionibus.

a.	*b.*	*e.*	*f.*
b.	*c.*	*d.*	*e.*

ADMONITIO 6.

Si igitur duæ fuerint proportiones rationem habentes communem: ex æqualitate arguere licebit. Si verò ratio defuerit communis, ipſa introducenda erit, vt vlterius progregredi poſsimus. Quod quidem reductione alicuius rationis in aliam ipſi æqualem fieri poteſt.

Et eodem modo ſi aliqua proportio in triangulo, aliave figura exiſtat,& termini deſint ad progreſſum:neceſſario repetitione alicuius anguli nova proportio adhibenda erit, vt in duabus proportionibus duo conſtituantur æquales termini, & ex æquo arguere valeamus. Vnde perſpicuum fit illum angulum tranſponendum eſſe, qui cum angulis,& lineis figuræ tam cognitis,quam incognitis commodiorem præbeat ſimilitudinem triangulorum.

ADMONITIO 7.

Poſito iam quæſito, tamquam conceſſo totus conatus eò tendere debet, vt magnitudines notæ ſemper retineantur in argumentationibus, & punctum incognitum extinguatur, & evaneſcat quantum fieri poſsit. Et cum Analyſta conſcius ſit, in vna proportione rationem additivam,ſeu ſubtractivam;&in duabus proportionibus rationem communem conſtituendam eſſe, ſi iam conſtituta non ſit, per neceſſarias conſequentias ad finem problematis perveniet. Hoc eſt per neceſſarias conſequentias analyſim perſequetur, donec mag-

magnitudo incognita alij magnitudini notæ æqualis appareat, vel punctum incognitum in quarto termino proportionali, vel in duobus medijs, ſive extremis, quorum ſumma, aut differentia nota ſit, tandem reperiatur, nam quartus proportionalis, vel duo reciproci ſatisfacient, & ſolutum erit problema.

ADMONITIO 8.

Finita denique analyſi, ordo conſtructionis, & demonſtrationis manifeſtus, & expreſſus apparet. Nam ad conſtructionem nil aliud requiritur, niſi id ipſum efficere, quod in analyſi factum, ſeu faciendum ſupponitur. Et ad demonſtrationem nil aliud, niſi à fine analyſeos incipiendo, ijſdem; ſeu contrarijs argumentationibus ad principium retrogradiendo progredi. Nam ſi analyſis alternando, invertendo, aut convertendo arguit, etiam ſyntheſis alternare, invertere, aut convertere debet. Cæterum ſi analyſis componit, ſyntheſis dividit, & è contra, &c.

Exemplis præcepta perſpicua fient.

PROPOSITIO I.

Datam rectam *ac*, vtcumque diviſam in *b*, rurſus ſecare in *x*, inter *b*, & *c*, vt *ax*. *xc*. *bx* ſint proportionales.

Vide Franciſcũ Schooten de concinn. demõſtrationibus.

a *b* *x* *c* *q*

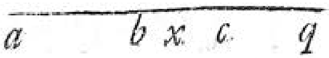
ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax*.	*xc*.	*xc*.	*bx*.	
Ergo componendo E.P.	*ac*.	*xc*.	*bc*.	*bx*.	
Fiat *cq* —∧— *bc*			*cq*.		
Et quia vt agg. ita eſt 1. ad 1. E.P.	*aq*.	*bc*.	*cq*.	*bx*.	12.5.el

Ergo ſolutum.

DECLARATIO.

In hac propoſitione quæſitum eſt, vt rectæ *ax*. *xc*. *bx*. proportionales fiant: ergo ex ipſa definitione analyſeos poni debent, tamquam iam factæ proportionales *ax*. *xc*. *xc*. *bx*. Hoc poſito, quis non videt primam rationem *ax*. *xc*. additivam, & etiam additivam ſecundam rationem *xc*. *bx*? Ergo neceſſario per compoſitionem progrediendum erit; neque aliud nobis excogitare expedit. Ergo compon. erunt proportionales *ac*. *xc*. *bc*. *bx*. & ecce tibi punctum incognitum *x* in duobus terminis extinctum. Rurſus quis non videt inter terminos adhuc incognitos *xc*. *bx* rationem additivam? Ergo reliqua ratio inter terminos notos *ac*. *bc*, quæ ſubtractiva eſt, in additivam debet revocari. Fiat proinde *cq* ipſi *bc* æqualis, & erit ratio inter *ac*. *cq*. (quæ eadem



est cum ratione *ac. bc*) etiam additiva, sicuti est ratio *xc. bx*
12.5.el. Sunt autem aggregata antecedentium, & consequentium, vt vnus antecedens ad vnum consequentem : ergo vt aggregata ita vnus ad vnum, & exurgent proportionales *aq. bc. cq. bx*. Et punctum incognitum *x* tantummodo manet in quarto termino tribus notis terminis proportionali. Ergo solutum est problema ex sola consideratione rationum; immo ex sola inspectione litterarum, & in mappa analytica ordo constructionis, & demonstrationis manifestus, & expressus apparet.

CONST. ET DEMONST.

Fiant, *cq* ipsi *bc* æqualis, & proportionales *aq. bc. cq. bx*. Dico *ax. xc. bx* esse proportionales.

Cum enim sit *aq* ad *bc*, vt *cq* ad *bx* ex const. (& differentiæ sint vt vnus ad vnum) erit *ac* ad *xc*, vt *cq*, idest *bc* ad *bx*: ergo divid. erit *ax* ad *xc*, vt *xc* ad *bx*. Quod erat faciendum.

In mappa perceptibilior patet analysis, quam
Vide argum. in Introd. vt vnus ad vnũ. ita diff.
si profluente discursu exponeretur. Immo constructio, & demonstratio ita simul patent, vt vlterior explicatio quasi superflua videatur. Facta enim constructione, demonstratio à fine incipiens in hunc modum debet proferri.

DE-

DEMONSTR.

Quoniam ex conſt. S.P.	*aq.*	*bc.*	*cq.*	*bx.*
Et vt diff. ita eſt 1. ad 1. E.P.	*ac.*	*xc.*	*cq.*	*bx.*
Ideſt			*bc.*	
Ergo divid. E.P.	*ax.*	*xc.*	*xc.*	*bx.*
Quod erat faciendum.				

Nos tamen ſemper ſyntheſim, more antiquo, explicabimus in gratiam eorum, qui in ipſa mappa ſiſtere nolint.

ALITER.

Loco argumentationis vt aggregata, ita vnus ad vnum, componendo, & alternando arguere licet.

ANALYSIS.

Sint igit, prop.	*ax.*	*xc.*	*xc.*	*bx.*
Ergo comp. E.P.	*ac.*	*xc.*	*bc.*	*bx.*
Et altern.	*ac.*	*bc.*	*xc.*	*bx.*
Fiat *cq* —A— *bc.*		*cq.*		
Et comp. E.P.	*aq.*	*cq.*	*bc.*	*bx.*
Ergo ſolutum.				

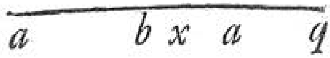
CONSTR.

Vt antea.

DEMONSTR.

Cum enim ex conſtr. ſit *aq* ad *cq* vt *bc* ad *bx*, & divid. *ac* ad *cq*, ideſt ad *bc*, vt *xc* ad *bx*, & altern. *ac* ad *xc*, vt *bc* ad *bx*: erit divid. *ax* ad *xc*, vt *xc* ad *bx*. Quod erat faciendum.

ALITER.



Breviùs problema poterit expediri hoc modo.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax*.	*xc*.	*xc*.	*bx*.
Ergo comp. E.P.	*ac*.	*xc*.	*bc*.	*bx*.

Ergo ſolutum, cum manifeſtum ſit rectam *bc* dividendam eſſe in *x* in ratione *ac* ad *bc*.

CONSTR. ET DEMONST.

10.6.*el*. Dividatur *bc* in *x* in ratione *ac* ad *bc*, ita vt ſit *ac* ad *xc*, vt *bc* ad *bx*. Et diuid. erit *ax* ad *xc*, vt *xc* ad *bx*. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

Hæc omnia ſanè naturaliſsima videntur, tam in lineis, quam in numeris. In lineis quidem, quia cum *bx* ex analogia innoteſcat, punctum *x* determinabitur, & ſimul vtraque *ax*, & *xc*; in numeris verò, quia ſi ipſi *bx* addatur nota *ab*, cognita erit quantitas *ax*, & ſi ex nota *bc* auferatur ipſa *bx*, remanebit quantitas *cx* manifeſta.

Ve-

Verum si è principio rectam ax, seu xc resolutam velimus, oportebit commodam argumentationem eligere, vt terminus resolvendus retineatur.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	ax.	xc.	xc.	bx.
Ergo per comp. E.P.	ax.	ac.	xc.	bc.

Ergo solutum. Nam si ac dividatur in x in ratione ac ad bc, erit tam ax, quam xc positione, & longitudine manifesta.

Nos autem nullam incognitarum determinatè quærimus; de breviore, & faciliore modo resolvendi punctum incognitum tantum curamus, cùm semel cognito, sit resolutio peracta.

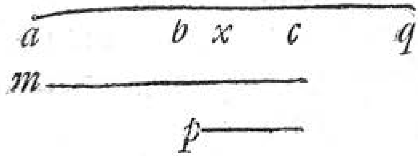
Porro si magnitudines, quæ conditiones, constituunt, separatæ proponantur, ad commodam contiguitatem facile reducentur.

Sit idem problema ita propositum.

PROBLEMA.

Tres rectas proportionales invenire ita vt data m sit aggregatum primæ, & secundæ, data verò p aggregatum secundæ, & tertiæ.

Super



Super quamlibet rectam indefinitam aq supponatur ax prima,& fiat ac ipsi m æqualis, vnde necessario xc erit secunda. Fiat denique cb, ipsi p æqualis, & erit bx tertia. Itaque reductio erit peracta, cum ax prima,& xc secunda, totam ac, ideſt datam m componant, secunda verò xc, & tertia bx totam bc, ideſt datam p conſtituant. Et cum oporteat proportionales facere $ax.\ xc.\ bx$, analysis omnino, vt antea inſtituenda erit, & sic de alijs eſt intelligendum.

Analysis profecto nostra quæstiones arithmeticas eodem modo expedit, ac problemata geometrica, supponendo rectas lineas pro numeris, & quamvis prædicta doctis sufficerent, placet vberioris explicationis gratia ob oculos exempla ponere.

QVÆSTIO ARITHMETICA.

Tres numeros proportionales invenire, vt summa primi, & secundi sit 35, summa verò secundi, & tertij sit 14.

Exponatur quælibet recta ac, & intelligatur valere 35, dividatur in x,& quæsitorum numerorum primus, & secuncundus erunt *ax*, & *xc*. Ponatur alia *bc*, quæ concipiatur valere 14, & erit *bx* tertius: ergo solum restat proportionales facere rectas *ax*. *xc*. *bx*, quæ quæsitos numeros repre sentant. Repetatur analysis.

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*ax*.	*xc*.	*xc*.	*bx*.
Ergo comp. E.P.	*ac*.	*xc*.	*bc*.	*bx*.
Fiat *cq* — x — *bc*			*cq*.	
Ergo vt agg. ita 1. ad 1. & E.P.	*aq*.	*bc*.	*cq*.	*bx*.

Ergo resolutio est manifesta.

RESOLVTIO.

Si 49 (*aq*) aggregatum 35, & 14, dat 14 (*bc*) quid dabit 14? (*cq*) Dabit 4 (pro *bx*) & tantus erit numerus tertius: ergo secundus erit 10, cum vterque sit 14: ergo primus erit 25, cum primus, & secundus sint 35.

Sunt igitur tres quæsiti numeri 25. 10. 4, in quibus tres præscriptæ conditiones inueniuntur, quod arithmeticè examinatur, & geometricè, si opus fuerit, demonstrari poterit.

Fusè quidem hanc primam propositionem explicuimus, vt nobis in sequentibus breviores esse liceat.

PRO-

PROPOSITIO II.

Vide Franc. Schootē. de concin. demonstr.

Datam rectam *ac* sectam in *b*, protrahere ad *x*, ita vt *ax*. *bx*. *cx*. ſint proportionales.

a q b c x

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*ax*.	*bx*.	*bx*.	*cx*.
Ergo divid. E.P.	*ab*.	*bx*.	*bc*.	*cx*.
Fiat *qb* = *bc*			*qb*.	
Ergo vt diff. ita 1. ad 1. & E.P.	*aq*.	*bc*.	*qb*.	*cx*.
Ergo ſolutum.				

CONSTR. ET DEMONSTR.

Fiant *qb*, & *bc* æquales, & proportionales *aq*. *bc*. *qb*. *cx*. Dico factum.

Cum enim ſit *aq* ad *bc*, vt *qb* ad *cx*, erit *ab* ad *bx*, vt *qb*, ideſt *bc* ad *cx* (hoc eſt aggregata vt vnus ad vnum) & comp. *ax* ad *bx*, vt *bx* ad *cx*. Quod erat faciendum.

DETERMINATIO.

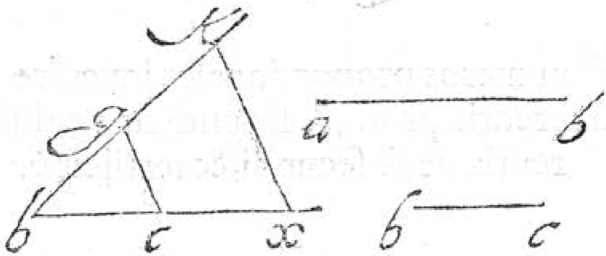
14.5.el. Quoniam *bx* maior eſt, quam *cx*, neceſſario data *ab* maior debet eſſe, quam data *bc*. Aliter impoſsibile eſſet problema, vt perſpicuum eſt in analyſi, quare de ſimilibus determinationibus, quas quilibet obſervare poterit, raro curá geremus.

SCHO-

SCHOLION.

In elementis hæc propoſitio neceſſaria videtur, nimirum : Duas rectas, quarum ſumma , aut differentia nota ſit, in data ratione ad invenire. *Primam partem R. P. Clauius in Scholio ad prop.* 10. *lib.* 6. *Elementorum attulit. Pari iure ſecundam afferre debuit. Et quamvis doctis ſatis obvia ſit; placet tamen ipſam hic ita proponere, & demonſtrare.*

Ad datam differentiam duas rectas inuenire in data ratione.



Oporteat invenire duas rectas *bx*, & *cx*, quarum differentia ſit *bc* , in ratione data vt *ab* ad *bc*. Ponantur ex *b*, quemlibet angulum facientes, *bk*,& *bg* datis *ab*,& *bc* æquales, iunctaque *gc*, ducatur ipſi parallela *kx*. Et erit *bx* ad *cx*, *bk* ad *bg*, ideſt vt *ab* ad *bc*, vt oportebat.

Hoc poſito propoſitum problema brevius poterit expediri.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax.*	*bx.*	*bx.*	*cx.*
Ergo divid. E.P.	*ab.*	*bx.*	*bc.*	*cx.*

Ergo ſolutum.

CONSTR. ET DEMONSTR.

Ad datam differentiam *bc* inveniantur *bx*, & *cx* in ratione *ac* ad *bc*, & proportionales erunt *ab. bx. bc. cx.*, & compon. *ax. bx. bx. cx.* vt oportebat.

QVÆSTIO.

Tres numeros proportionales invenire, vt differentia primi, & ſecundi ſit 15, differentia verò ſecundi, & tertij ſit 6.

Valeat *ab.* 15. & *bc.* 6, ſitque *ax* numerus primus: ergo ſecundus erit *bx*, differunt enim 15. vt petitur: ergo tertius erit *cx*, quia *bx*, & *cx*, ſecundus, & tertius differunt 6. vt oportet. Ergo ſolum reſtat proportionales facere *ax. bx. cx.* Inſtituatur analyſis.

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*ax.*	*bx.*	*bx.*	*cx.*
Ergo divid. E.P.	*ab.*	*bx.*	*bc.*	*cx.*
Fiat *qb* —Λ— *bc*			*qb.*	
Ergo vt diff. ita 1. ad 1. & E.P.	*aq.*	*bc.*	*bc.*	*cx.*
Ergo ſolutum.	9.	6.	6.	4.

RESOLVTIO.

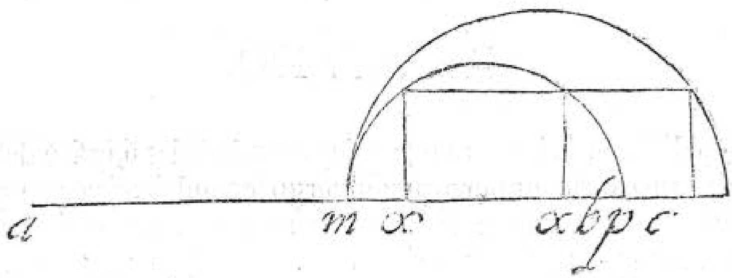
Si 9 differentia inter numeros datos 15 & 6. dat 6, ipſe 6 dabit 4 pro tertio numero quæſito: ergo ſecundus erit 10 cum differentia vtriuſque ſit 6: ergo primus erit 25 cum differre debeant 15 primus, & ſecundus. Sunt igitur 25. 10. 4 tres quæſiti numeri, tres præſcriptas conditiones amplectentes, vt arithmeticè probatur, & geometricè oſtenditur.

N O T A.

Vnum idemque problema tam geometricum, quam arithmeticum diverſis modis proponi poteſt. v.g. Rectam, vel numerum invenire *ax*, à quo ſi auferantur ſeorſim recta data *ab*, vel numerus datus 15, & recta data *ac*, vel numerus datus 21: ſint proportionales ipſa recta quæſita, & reſiduæ , vel ipſe numerus quæſitus, & reſidui, hoc eſt *ax. bx. cx.*

PROPOSITIO III.

Datam rectam *ac* divisam in *b*, rursus secare in *x* inter *a*, & *b*, vt sint proportionales *ax*. *xc*. *xb*.



Quoniam igitur in proportionalibus *ax*. *xc*. *xc*.*xb*. prima ratio est additiva, secunda verò subtractiva, perspicuum est iuxta instructionem, vel hanc in additivam, vel illam in *per 7. Introd.* subtractivam esse convertendam. Sed quoniam termini sunt incogniti, bisecetur *ac* in *m*, & erit $2mx$ differentia partium *ax*, & *xc*, & similiter bisecetur *bc* in *p*, & erit $2xp$ *per 8.* aggregatum partium *xc*, & *xb*. Vnde per divisionem, vel per compositionem procedere licebit.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax*.	*xc*.	*xc*.	*xb*.
Ergo comp. E.P.	*ac*.	*xc*.	$2xp$.	*xb*.
Et dimid. anteced.	*mc*.	*xc*.	*xp*.	*xb*.
Ergo convert. E.P.	*mc*.	*mx*.	*xp*.	*bp*.

Er-

Ergo ſolutum. Quia cum punctum incognitum x in terminis medijs tantum exiſtat, vlterius progredi non licet. Et quoniam nulla extat ratio, vnde inferre poſsimus, quænam ex incognitis mx, & xp ſit altera maior: erit in arbitrio noſtro accipere in conſtructione mx iam pro parte maiore iam pro minore, & duæ exurgent diverſæ ſolutiones, quibus eadem conuenit demonſtratio.

CONSTR. ET DEMONST.

Biſecentur ac in m, & bc in p, ipſiſque mc, & bp, ſeu pc, reciprocæ inveniatur mx, & xp, quarum ſumma ſit mp. Dico factum. *prop. 1. Introd.*

Sunt enim ex conſtr. proportionales $mc.\ mx.\ xp.\ bp.$ & convert. $mc.\ xc.\ xp.\ xb$, & duplicando antecedentes $ac.\ xc.\ 2xp.\ xb$; ſed $2xp$, ideſt dupla xp aggregatum eſt terminorum xc; & xb: ergo divid. erunt proportionales $ax.\ xc.\ xc.\ xb.$ Quod erat faciendum.

ALITER.

Poſſumus, vt dictum eſt, per diviſionem procedere hoc modo.

ANALYSIS.

Sint igit, prop.	$ax.$	$xc.$	$xc.$	$xb.$
Ergo divid. E.P.	$2mx.$	$xc.$	$bc.$	$xb.$
Et dimid. anteced.	$mx.$	$xc.$	$bp.$	$xb.$
Ergo per comp. E.P.	$mx.$	$mc.$	$bp.$	$xp.$

Ergo ſolutum.

CONSTR. Vt antea.

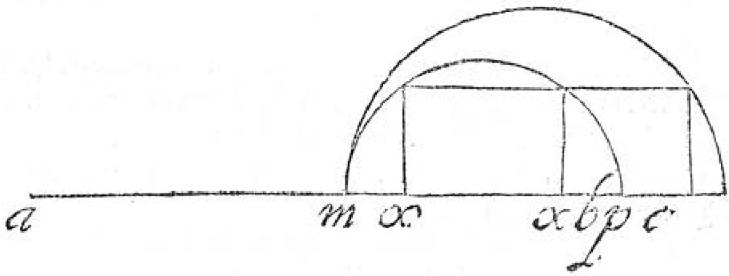
DE-

DEMONSTR.

Sunt enim ex conſt.proportionales *mx. mc. bp. xp*,& per divisionem *mx. xc. bp. xb*, & duplicando antecedentes 2*mx. xc. bc. xb*; ſed 2*mx* differentia eſt terminorum *ax*, & *xc*: ergo comp.erunt proport. *ax. xc. xc. xb*. Quod facere oportebat.

per 7. Introd.

ALITER.



Poſſumus etiam per compoſitionem, & diviſionem ſimul,procedere,& problema brevius reſolvere.Hoc modo.

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*ax.*	*xc.*	*xc.*	*xb.*
Ergo comp.& divid.E.P.	*ac.*	2*mx.*	2*xp*	*bc.*
Et dimidiando omnes	*mc.*	*mx.*	*xp.*	*bp.*

Ergo ſolutum,& conſtructio vt antea.

DEMONSTR.

Sunt enim ex conſt. proportionales *mc. mx. xp. bp*, & duplicando omnes *ac.* 2*mx.* 2*xp. bc*; ſed *ac* eſt ſumma, &

2*mx*

$2mx$ differentia terminorum ax, & xc, & eodem modo $2xp$, & bc summa sunt, & differentia terminorum xc, & xb: ergo dividendo, & componendo simul, erunt proportionales $ax.xc.xc.xb$. Quod oportuit facere.

Si quadratum ex dimidio summæ reciprocarum quæsitarum minus fuerit rectangulo sub reciprocis notis: problema construi non poterit, vt animaduertimus in prop. 1. Introductionis. Et quamvis hæc admonitio sufficiat: placet tamen id ipsum vberioris doctrinæ gratia, ex ipsa analysi demonstrare.

DETERMINATIO.

Si rectangulum sub mc, & bp maius fuerit quadrato dimidiæ mp non erunt proportionales $ax.xc.xc.xb$.

Cum enim maximum rectangulum mxp, nempe, quod mx & xp comprehendere possunt, æquale sit $\frac{1}{4}$ mpm, idest quadrato ex dimidia mp, quo maius ponitur rectangulum sub mc, & bp: erit propterea rectangulum sub mc, & bp maius rectangulo mxp: ergo ratio $mc.mx$ maior erit ratione $xp.bp$, & convert. ratio $mc.xc$ maior ratione $xp.xb$, & duplicando antecedentes ratio $ac.xc$. maior ratione $2xp.xb$, & tandem dividendo, ratio $ax.xc$. maior ratione $xc.xb$: ergo $ax.xc.xb$. non erunt proportionales, vt oportebat. *Vide propsit. fundam. Introd.*

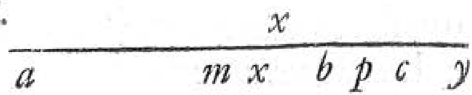
In hunc modum hanc limitationem, quæ frequenter occurrit, poterit analysta, cum opus fuerit, demonstrare, & cautus procedere in determinatione problematis quando duas rectas reciprocas inquirat, hoc est an ipsum impossibile sit, an

verò

verò vnam tantum, vel duas accipere posſit ſolutiones, quod ſemel, & iterum monuiſſe ſufficiat. Nos enim raro de conſtructionibus, & determinationibus curabimus.

ALITER.

Quando vna ratio fuerit additiva, altera verò ſubtractiva, & termini incogniti: ſæpe facilior, & ſemper elegantior erit prædictus modus reſolvendi. Attamen repetitione alterutrius termini vtramque rationem eiuſdem naturæ conſtituere poſſumus, & problema aliter demõſtrare, vt diximus in Inſtructione.



Dividantur *ac*, & *bc* in *m*, & *p* bifariam.

ANALYSIS

Sint igit. prop.	*ax.*	*xc.*	*xc.*	*xb.*
Fiat $cy \,\llcorner\!\wedge\!\lrcorner\, xb$.				*cy.*
Ergo comp. E.P.	*ac.*	*xc.*	*xy.*	*xb.*
Et dimid. anteced.	*mc.*	*xc.*	*xp.*	*xb.*
Et convert.	*mc.*	*mx.*	*xp.*	*bp.*

Ergo ſolutum.

CONST. ET DEMONST.

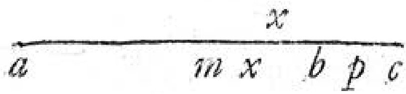
Biſecentur *ac*, & *bc* in *m*, & *p*, & ipſis *mc*, & *bp* reciprocæ in inveniantur *mx*, & *xp*, quarum summa sit *mp*. Dico factum. Fiat *cy* ipsi *xb* æqualis, & erunt *xp*, & *py* æquales.

Est enim ex constr. *mc* ad *mx*; vt *xp* ad *bp*, & convert. *mc* ad *xc*, vt *xp* ad *xb*, & duplicando antecedentes *ac* ad *xc*, vt *xy* ad *xb*, idest ad *cy*: ergo dividendo erit *ax* ad *xc*, vt *xc* ad *cy*, idest ad *xb*. Quod erat faciendum.

Eodem modo repeti poterit terminus *ax*, vt ratio *ax* ad *xc*, in subtractivam revocetur.

QVÆSTIO.

Tres numeros proportionales exhibere, vt summa primi, & tertij sit 29, summa verò primi, & secundi sit 35.



Valeat quælibet recta *ac* 35, divisaque in *x* sint *ax*, & *xc* primus, & secundus. Valeat alia recta *ab*. 29, & quia *ax* est primus, erit *xb* tertius: ergo oportet proportionales facere rectas *ax*. *xc*. *xc*. *xb*, quæ tres quæsitos numeros representant. Repetatur analysis.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax*.	*xc*.	*xc*.	*xb*.
Ergo comp. E.P.	*ac*.	*xc*.	2*xp*.	*xb*.
Et dimid. anteced.	*mc*.	*xc*.	*xp*.	*xb*.
Ergo convert. E.P.	*mc*.	*mx*.	*xp*.	*bp*.
Ergo	$\frac{1}{2}mp + \sqrt{\frac{1}{4}mpm - mc : bp}$.			
Et	$\frac{1}{2}mp - \sqrt{\frac{1}{4}mpm - mc : bp}$.			

Q Erunt

Erunt valoreses reciprocarum mx, & xp, vt constat ex prop. 1. Introductionis.

RESOLVTIO.

Datur ac —Λ— 35, vnde mc —Λ— $17\frac{1}{2}$
Et ab —Λ— 29.
Ergo bc —Λ— 6. vnde bp —Λ— 3
Ergo mp —Λ— $14\frac{1}{2}$
Et $\frac{1}{2}mp$ —Λ— $7\frac{1}{4}$, cuius quadr: $52\frac{9}{16}$

mc: in bp, id est $17\frac{1}{2}$ in 3 est $52\frac{8}{16}$

Differentia $\frac{1}{16}$
√. est $\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}mp$ est $7\frac{1}{4}$
Ergo summa, & diff. $7\frac{1}{2}$ & 7
pro mx. & xp

Ergo si mx sit $7\frac{1}{2}$ erit ax 25, quia am est $17\frac{1}{2}$
& erit xc. 10.
& xb. 4.
Sed si mx sit 7. erit ax. $24\frac{1}{2}$, quia am est $17\frac{1}{2}$
& erit xc. $10\frac{1}{2}$
& xb. $4\frac{1}{2}$.

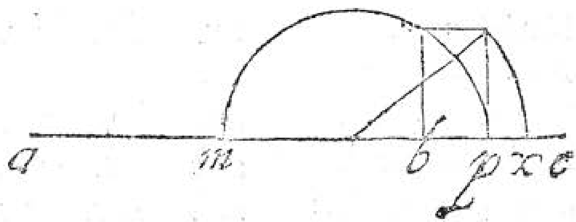
Sunt igitur tres quæsiti numeri 25. 10. 4, & etiam $24\frac{2}{1}$. $10\frac{1}{2}$. $4\frac{1}{2}$. nam tam hi, quam illi præscriptas conditiones adimplent.

PRO-

PROPOSITIO IV.

Datam rectam *ac*, vtcumque divisam in *b*, iterum dividere in *x* inter *b*, & *c*, vt sint proportionales *ax*. *bx*. *xc*.

Bisecentur *ab*, & *bc* in *m*, & *p*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax*.	*bx*.	*bx*.	*xc*.
Ergo comp. E.P.	2*mx*.	*bx*.	*bc*.	*xc*.
Et dimid. anteced.	*mx*.	*bx*.	*pc*.	*xc*.
Ergo convert. E.P.	*mx*.	*mb*.	*pc*.	*px*.
Ergo solutum.				

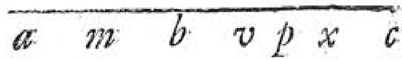
CONST. ET DEMONST.

Bisecentur *ab*, & *bc* in *m*, & *p*, ipsisque *mb*, & *bp* (seu *pc*) reciprocæ inveniantur *mx*, & *px*, quarum differentia sit *mp*. Dico factum. *prop.* 1. *Introd.*

Sunt enim ex constr. proportionales *mx*. *mb*. *pc*. *px*, & convert. *mx*. *bx*. *pc*. *xc*, & duplicando antecedentes 2*mx*. *bx*. *bc*. *xc*; sed 2*mx* aggregatum est partium *ax*, & *bx*: ergo dividendo erunt proportionales *ax*. *bx*. *bx*. *xc*. Quod erat faciendum. *prop.* 8. *Introd.*

 ALI-

ALITER.



ANALYSIS.

Sint igit, prop.	$ax.$	$bx.$	$bx.$	$xc.$
Fiat bv —Λ— $xc.$				$bv.$
Ergo divid. E.P.	$ab.$	$bx.$	$vx.$	$xc.$
Et dimid. anteced.	$mb.$	$bx.$	$px.$	$xc.$
Ergo per comp. E.P.	$mb.$	$mx.$	$px.$	$pc.$
Ergo ſolutum.				

CONSTR. ET DEMONST.

Biſecentur *ab*, & *bc* in *m*, & *p*, ipſiſque *mb*, & *pc* (ſeu *bp*) reciprocæ inveniantur *mx*. *px*, quarum differentia ſit *mp*. Dico factum. Agatur *bv* ipſi *xc* æqualis, & quoniam *bp*, & *pc* ſunt æquales; etiam reſiduæ *vp*, & *px* inter ſe, & compoſitæ *bx*, & *vc* inter ſe, erunt æquales. Cum igitur ſit ex conſtructione *mb* ad *mx*. vt *px* ad *pc*: erit per diviſ. *mb* ad *bx*, vt *px* ad *xc*, & duplicando antecedentes *ab* ad *bx*; vt *vx* ad *xc*, ideſt ad *bv*, componendoque *ax* ad *bx*, vt *vc*, ideſt *bx* ad *xc*. Quod erat faciendum.

QVÆS-

QVÆSTIO.

Tres numeros proportionales invenire, vt primus, & ſecundus differant 15; ſecundus verò, & tertius componant 14.

a *m* *b* *px* *c*

Valeant *ab*. 15, & *bc* 14, & ſit *ax* numerus primus: ergo ſecundus erit *bx*, cum differant *ab*, ideſt 15: ergo tertius erit *xc*, quia cum *bx* ſecundo facit totam *bc*, ideſt 14. Ergo fieri debent proportionales *ax*. *bx*. *bx*. *xc*. Biſecentur *ab* in *m*, & *bc* in *p*, & repetatur.

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*ax*.	*bx*.	*bx*.	*x.c*
Ergo comp. E.P.	2*mx*.	*bx*.	*bc*.	*xc*.
Et dimid. ant.	*mx*.	*bx*.	*pc*.	*xc*.
Et convert.	*mx*.	*mb*.	*pc*.	*px*.

Ergo $\frac{1}{2}mp + \sqrt{\frac{1}{4}mpm + mb : pc}$

Et $-\frac{1}{2}mp + \sqrt{.\frac{1}{4}mpm + mb : pc}$

Erunt valores numerorum *mx*, & *px*, vt explicatum eſt in prop. 1. Introductionis.

RE-

RESOLVTIO.

Datur ab —Λ— 15
Et bc —Λ— 14
Ergo mp —Λ— $14\frac{1}{2}$
Et $\frac{1}{2}mp$ —Λ— $7\frac{1}{4}$ eius quadr. $52\frac{9}{16}$
mb in pc ideſt $7\frac{1}{2}$ in 7. eſt $52\frac{8}{16}$

Summa $105\frac{1}{16}$
V. eſt $10\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}mp$. eſt $7\frac{1}{4}$

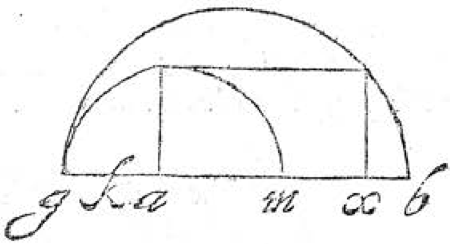
Ergo ſumma, & diff. $17\frac{1}{2}$ & 3. pro mx, & px. Ergo ſi mx fuerit $17\frac{1}{2}$ erit ax 25. quia am eſt $7\frac{1}{2}$, vel ſi px fuerit 3 erit ax 25, quia ap eſt 22.

Determinato primo, qui valet 25, erit ſecundus 10, vt differant 15, & tertius erit 4, vt cum ſecundo componat 14, & proportionales erunt 25. 10. 4. vt oportebat.

PRO-

PROPOSITIO V.

Datam rectam *ab* ita secare in *x*, vt rectangulum sub segmentis *ax*, & *xb* æquale sit rectangulo sub differentia eorundem, & data *ka*.



Bisecetur *ab* in *m*, & erit $2mx$ differentia segmentorum *ax*. *xb*, itaque conditio erit, vt rectangulum *axb* rectangulo sub *ka*, & $2mx$ sit æquale, vel vt sint proportionales *ka*. *ax*. *xb*. $2mx$. Fiat *ga* dupla ipsius *ka*. Prop. 7. Introd.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ka*.	*ax*.	*xb*.	$2mx$.
Ergo dimid. & duplic. E.P.	*ga*.	*ax*.	*xb*.	*mx*.
Et per comp.	*ga*.	*gx*.	*xb*.	*mb*.
Ergo solutum.				

CONSTR. ET DEMONSTR.

Fiat *ga* dupla ipsius *ka*, divisaque *ab* bifariam in *m*, ipsis

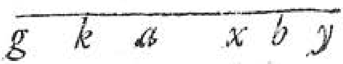
ga,

prop. 1. Introd. ga, & am, seu mb, reciprocæ inveniantur gx, & xb, quarum summa sit gb. Dico factum.

Sunt enim ex constr. proportionales $ga.\ gx.\ xb.\ mb$, & per divis. $ga.\ ax.\ xb.\ mx$, dimidiandoque, & duplicando $ka.\ ax.\ xb.\ 2mx$; sed $2mx$ differentia est segmentorum ax, & xb: ergo rectangulum axb æquale erit rectangulo sub data ka, & differentia eorumdem segmentorum $2mx$. Quod erat faciendum.

ALITER.

Supponatur ax segmentum maius, & ipsi æqualis recta xy, quo posito erit by differentia segmentorum ax, & xb: ergo debent esse proportionales $ka.\ ax.\ xb.\ by$.



ANALYSIS.

Sint igitur prop.	$ka.$	$ax.$	$xb.$	$by.$
Ergo per comp. E.P.	$ka.$	$kx.$	$xb.$	$xy.$
Idest				$ax.$
Fiat gk = ka.	$gk.$			
Ergo per comp. E.P.	$gk.$	$gx.$	$xb.$	$ab.$
Ergo solutum				

CONSTR. & DEMONSTR.

Ipsis rectis datis ab, & ka, seu gk, reciprocæ inveniantur gx, & xb, quarum summa sit gb, idest aggregatum ipsius ab, & duplæ ka. Dico factum. Ponatur xy ipsi ax æqualis.

Cum igitur sit ex constr. gk ad gx, vt xb ad ab: erit per divi-

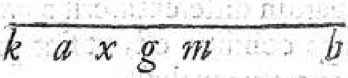
divisionem *gk*, ideſt *ka* ad *kx*, vt *xb* ad *ax*, ideſt ad *xy*: ergo erit per diviſionem *ka* ad *ax*, vt *xb* ad *by*. Ergo rectangulum *axb* æquale erit rectangulo ſub data *ka*, & differentia partium *by*. Quod erat faciendum.

N O T A.

Hæc reſolutio coincidit cum præcedente, propterea quod rectangulum ſub *gk* & *ab* æquale ſit rectangulo ſub *ga*, & *mb*.

SCHOLION.

Sanè cum recta *ab* dividenda proponitur in *x*, vt rectangulum ſub partibus æquale ſit rectangulo ſub differentia earumdem, & data *ka*: nulla exprimitur ratio, vnde inferre liceat, an *ax* ſit ſegmentum maius, an minus. Vnde perinde erit ipſum ſupponere minus.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ka.*	*ax.*	*xb.*	*2xm.*
Fiat *ag.* — *x* — 2*ka.*	*ag.*			
Ergo dupl. & dim. S. P.	*ag.*	*ax.*	*xb.*	*xm.*
Et convert.	*ag.*	*xg.*	*xb.*	*mb.*

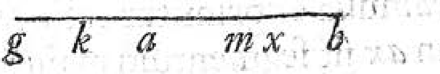
Ergo ſolutum, & patet conſtructio, & demonſtratio.

At quamvis in priore analysi recta *gb* aggregatum erat duplæ *ka*, & simplicis *ab*, in hac autem posteriore est earumdem differentia: non ideo inferri debet duplex resolutio; sed vna eademque ex vtraque analysi concipi, quandoquidem à fine vtriusque retrogradiendo, ad idem principium legitimè perveniatur, nimirum ad terminos *ka. ax. xb. 2xm*; seu *2mx*, nullo alio facto discrimine inter illos, nisi, vt *ax* iam maior, iam minor sit, quam *xb*.

Hinc mirabilem affinitatem reciprocarum, iam data summa, iam data differentia quisque contemplari poterit.

QVÆSTIO.

Datum numerum 24 in duas partes dividere, vt rectangulum sub ipsis factum æquale sit facto sub ipsarum partium differentia, & dato numero $22\frac{1}{2}$.



Valeat *ab*. 24. & *ka* valeat $22\frac{1}{2}$, & sint partes quæsitæ *ax*, & *xb*, quarum differentia erit *2mx*, si *ab* dividatur bifariam in *m*. Ergo conditio est, vt sint proportionales *ka. ax. xb. 2mx*. Repetatur analysis.

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*ka.*	*ax.*	*xb.*	*2mx.*
Fiat *ga* —Λ— *2ka.*	*ga.*			
Ergo dupl. & dim. S. P.	*ga.*	*ax.*	*xb.*	*mx.*
Et per compos.	*ga.*	*gx.*	*xb.*	*mb.*

Ergo

Ergo resolutum, & pro incognitis *gx*, & *xb*, iuxta explicationem reciprocarum prop. 1. Introd.

Habebimus $\frac{1}{2}gb + \sqrt{\tfrac{1}{4}gbg - ga:mb}$

Et $\frac{1}{2}gb - \sqrt{.\tfrac{1}{4}gbg - ga:mb}$

RESOLVTIO.

Dantur *ab* $=$ 24, & *ka* $=$ $22\frac{1}{2}$

Ergo *mb* $=$ 12. & *ga* $=$ 45

Vnde *gb* $=$ 69, summa *ga*, & *ab*

Et $\frac{1}{2}gb$ $=$ $34\frac{1}{2}$, cuius quadr. $1190\frac{1}{4}$

ga in *bm*, est 540

Differentia est $650\frac{1}{4}$

$\sqrt{}$. est $25\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}gb$ est $34\frac{1}{2}$

summa, & diff. 60. & 9.

Sunt igitur 60, & 9. valores incognitarum *gx*, & *xb*.

Ergo si *xb* valeat 9, *ax* valebit 15, & numerus datus 24 divisus erit in 15, & 9, quorum differentia 6 multiplicata per numerum datum $22\frac{1}{2}$ exhibebit 135, qui numerus æqualis est facto sub partibus 15, & 9. vt oportebat.

ALITER.

Idem profecto obtinebitur si posterior analysis instituta fuisset, in qua *gb* differentia erat datarum *ab*, & *ag*.

Erant enim prop. *ag*. *xg*. *xb*. *mb*.

Vnde $\frac{1}{2}gb + \sqrt{.\tfrac{1}{4}gbg + ag:mb}$.

Et $-\frac{1}{2}gb + \sqrt{.\tfrac{1}{4}gbg + ag:mb}$.

Valores erunt incognitarum *xg*, & *xb*.

Dantur ab —Λ— 24, & ka —Λ— $22\frac{1}{2}$
Ergo mb —Λ— 12, & ag —Λ— 45
Vnde gb —Λ— 21. diff. inter ab, & ag.
Et $\frac{1}{2}gb$ —Λ— $10\frac{1}{2}$ eius quadr. $110\frac{1}{4}$.

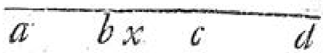
ag in mb	540
Summa	$650\frac{1}{4}$
$\sqrt{}$. est	$25\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}gb$. est	$10\frac{1}{2}$
Summa, & diff.	36. & 15.

pro incognitis xg, & xb: ergo si xb valeat 15, ax valebit 9. & numerus 24 divisus erit in 9, & 15. vt antea.

PRO-

PROPOSITIO VI.

Datam rectam ad sectam in b, & c vtcumque, iterum secare in x inter b, & c, vt rectangulum axb æquale sit dxc rectangulo. Hoc est vt sint proportionales $ax.\ xc.\ xd.\ bx.$ Vide R. P. Greg. à S. Vincen. l. 1. prop. 64. tom. 1.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	$ax.$	$xc.$	$xd.$	$bx.$
Ergo comp. E. P.	$ac.$	$xc.$	$bd.$	$bx.$

Ergo solutum, cum pateat bc dividendam esse in x in data ratione ac ad bd.

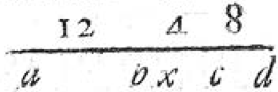
CONST. ET DEMONST.

Dividatur bc in x in ratione data, ac ad bd, vt sint proportionales $ac.\ xc.\ bd.\ bx$, vnde divid. erunt etiam proportionales $ax.\ xc.\ xd.\ bx.$ Quod erat faciendum.

QVÆSTIO.

Datum numerum 8. ita in duas partes dividere, vt rectangulum sub vna parte, & aggregato ipsius partis, & numeri dati 12 æquale sit rectangulo sub altera parte, & aggregato eiusdem partis, & numeri dati 4.

Va-



Valcant *bc* 8. *ab*. 12. & *cd*. 4. & sint partes quæsitæ *bx*, & *xc*. Ergo conditio est, vt rectangulum *axb*, rectangulo *dxc* sit æquale.

ANALYSIS.

Sint igit.	*axb* —Λ— *dxc*			
Ergo E.P.	*ax*	*xc.*	*xd.*	*bx.*
Et comp.	*ac.*	*xc.*	*bd.*	*bx.*

Ergo solutum, cum pateat numerum datum *bc*, idest 8. divideadum esse in ratione data *ac* ad *bd*.

RESOLVTIO.

Si 32 (aggregatum *ac*, & *bd*) dat 8. (*bc*) 12 (*bd*) dabit 3 (pro *bx*) vel si 32 dat 8, *ac* 20 dabit 5. pro *xc*

Sunt igitur partes quæsitæ 3 & 5. nam si ipsi 3. addatur 12 componetur 15, & rectangulum sub 3, & 15. erit 45. & si ipsi 5 addatur 4, constituetur 9, & rectangulum sub 5, & 9 erit etiam 45, vt oportebat.

SCHOLION.

Hæc eadem quæstio in his terminis proponi poterit.

Qua-

Quatuor numerus proportionales exhibere, vt ſumma primi, & ſecundi ſit 20, ſecundus & tertius differant 4, & ſumma tertij, & quarti componat 12.

Exponatur quælibet recta *ac*, quæ valere intelligatur 20, diviſaque in *x* ſint *ax*, & *xc*, primus, & ſecundus. Ponatur alia *cd*, quæ valeat 4: ergo *xd* erit tertius. Ponatur alia *bd*, quæ valeat 12: ergo quartus erit *bx*, & ſolum reſtat proportionales facere *ax*. *xc*. *xd*. *bx*. Repetatur analyſis.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax*.	*xc*.	*xd*.	*bx*.
Ergo comp. E. P.	*ac*.	*xc*.	*bd*.	*bx*.

Ergo ſolutum. Nam cum *bd* valeat 12, & *cd* ſit 4, erit *bc*. 8, qui dividendus erit in ratione *ac* ad *bd*, ideſt 20 ad 12, & venient 5. & 3. pro *xc*, & *bx*, ideſt pro ſecundo, & quarto, vnde primus erit 15, & tertius 9. & omnes quatuor 15. 5. 9. 3, qui aſsignatas conditiones ſortiuntur.

PROPOSITIO VII.

Datam rectam ita ſecare, vt rectangulum ſub tota, & ſegmento minore æquale ſit rectangulo ſub maiore ſegmento, & differentia vtriuſque.

a *m* *x* *b*

Sit data *ab* dividenda in *x*, vt petitur, biſecetur in *m*, & *Prop. 7. Introd.* erit 2*mx* differentia ſegmentorum *ax*, & *xb*, vnde conditio erit, vt rectangulum ſub *ab*, & *xb* æquale ſit rectangulo ſub *ax*, & 2*mx*, vel vt ſint proportionales *ab*. 2*mx*. *ax*. *xb*.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ab*.	2*mx*.	*ax*.	*xb*.
Et dimid. primos	*am*.	*mx*.	*ax*.	*xb*.
Ergo per comp. E. P.	*am*.	*ax*.	*ax*.	*ab*.
Ergo ſolutum.				

CONSTR. ET DEMONSTR.

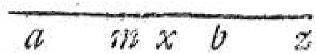
Biſecetur *ab* in *m*, & inter *am*, & *ab* media inveniatur *ax*. Dico factum.

Sunt enim ex conſtr. proportionales *am*. *ax*. *ax*. *ab*, & per diviſ. *am*. *mx*. *ax*. *xb*, & duplicando primos *ab*. 2*mx*. *ax*. *xb*: ergo rectangulum ſub tota *ab*, & ſegmento minore *xb* æquale erit rectangulo ſub ſegmento maiore *ax*, & differentia vtriuſque 2*mx*. Quod erat faciendum.

ALI-

ALITER.

Esto data *ab* dividenda,&c. Bisecetur in *m*, & supponatur *xz* ipsi *ax* æqualis, quo posito erit *bz* differentia segmentorum *ax*, & *xb*, ideſt *xz*, & *xb*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ab.*	*bz.*	*ax.*	*xb.*
Ergo per comp. E.P.	*ab.*	*az.*	*ax.*	*ab.*
Et dimid. primos	*am.*	*ax.*	*ax.*	*ab.*

Ergo ſolutum.

CONSTR. & DEMONSTR.

Secetur *ab* bifariam in *m*, & inter *am*, & *ab* media inveniatur *ax*. Dico factum. Ponatur *xz* ipſi *ax* æqualis.

Quoniam igitur ex conſtr. ſunt proportionales *am. ax. ax. ab.* & duplicando primos *ab. az. ax. ab*, & per diviſ. *ab. bz. ax. xb*: erit rectangulum ſub tota *ab*, & ſegmento minore *xb* æquale rectangulo ſub ſegmento maiore *ax*, & differentia vtriuſque *bz*. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO VIII.

Vide Carolū Renaldinū de resol. & comp. l.3. pag. 452.

Latus reperire, à quo ablatis duobus datis lateribus, residua constitutam inter se habeant rationem.

a $\overline{b \;\; c \;\; x}$ $\overline{m \;\; p \;\; q}$

Sint latera data *ac*, & *ab*, ratio data *mq* ad *mp*, & sit latus quæsitum *ax*: ergo residua erunt *bx*, & *cx*.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*bx.*	*cx.*	*mq.*	*mp.*
Ergo divid. E.P.	*bc.*	*cx.*	*pq.*	*mp.*

Ergo solutum.

CONST. ET DEMONST.

Fiant proportionales *pq. mp. bc. cx.* Dico *ax* esse latus quæsitum, quia comp. erit vt *mq* ad *mp*, ita *bx* ad *cx*. Quod facere oportebat.

N O T A.

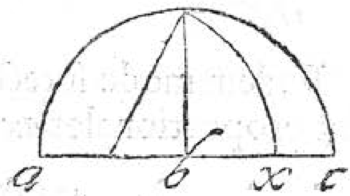
Brevius quidem res expediri potest. Nam posito quæsito tanquam concesso, hoc est vt fiant proportionales *bx. cx. mq. mp.* resolutio patet, cum manifestum sit ad datam differentiam *bc.* rectas esse inveniendas *bx. cx.* in ratione data *mq.* ad *mp.* Quod per scholion prop. 2. huius facile obtinetur.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Secta linea recta in duas partes vtcumque, alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint proportionales. *Vide R. P. Clavii ad prop. 17 lib. 6. el.*

Esto data *ac* vtcumque divisa in *b*, & sit *bc* dividenda in *x*, vt sint proportionales *ab. bx. xc.* *à S. Vincen. l. 1. prop. 77*



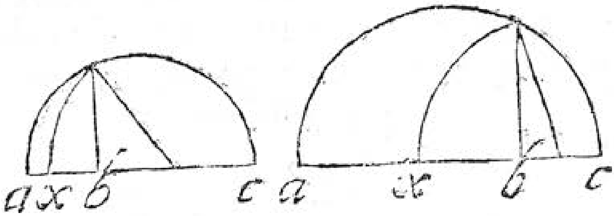
ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ab.*	*bx.*	*bx.*	*xc.*
Ergo per comp. E. P.	*ab.*	*ax.*	*bx.*	*bc.*
Ergo solutum,				

CONSTR. ET DEMONSTR.

Ipsis *ab*, & *bc* reciprocæ inveniantur *ax*, & *bx*, quarum differentia sit ipsa *ab*, hoc est fiant proportionales *ab. ax. bx. bc*, & per divis. erit *ab* ad *bx*, vt *bx* ad *xc*. Quod facere oportebat. *Prop. 1. Introd.*

SCHOLION.



Eodem modo si recta *ab* esset dividenda, vt sint proportionales *ax.xb.xb.bc.*

ANALYSIS.

Sint igitur prop:	*ax.*	*xb.*	*xb.*	*bc.*
Ergo comp. E.P.	*ab.*	*xb.*	*xc.*	*bc.*

Ergo solutum, & patet constructio, & demonstratio, & etiam obvium est, quod si *ab* minor fuerit in hoc casu, quam *bc* proportionem esse minoris inæqualitatis, maioris verò si maior fuerit, quam dupla, & omnino æqualitatis si dupla fuerit.

PRO-

PROPOSITIO X.

Vide R. P. Zaragoz. Geom. magna in minim. tom. 2. prob. 20

Datam rectam dividere, vt alia data sit media inter segmentum maius, & differentiam vtriusque.

Esto dividenda data *ab* in *x*, & supponatur *xz* segmento maiori *ax* æqualis, quare *bz* differentia erit segmentorum *ax*, & *xb*, sitque data *g*, quæ inter *ax*, & *bz* debeat esse media.

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*ax*.	*g*.	*g*.	*bz*.
Ergo duplic. primos E.P.	*az*.	2*g*.	*g*.	*bz*.
Ergo solutum.				

CONSTR. & DEMONSTR.

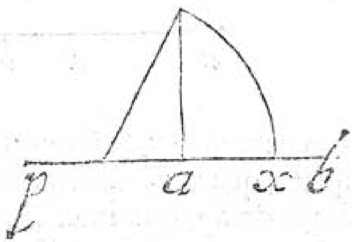
At datam *g*, & ipsius duplam (2*g*) reciprocæ inveniantur *az*, & *bz*, quarum differentia sit *ab*, & bisecetur *az* in *x*. Dico factum.

Cum enim ex constr. sint proportionales *az*. 2*g*. *g*. *bz*: erunt dimidiando primos, etiam proportionales *ax*. *g*. *g*. *bz*. Quod faciendum erat.

PRO-

PROPOSITIO XI.

Datam rectam *ab* extrema , ac media ratione secare in *x*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ab.*	*ax.*	*ax.*	*xb.*
Fiat *pa* —∧— *ab.*	*pa.*			
Ergo per comp. E.P.	*pa.*	*px.*	*ax.*	*ab.*
Ergo solutum				

CONSTR. & DEMONST.

prop. 1. Introd. Fiat *pa* ipsi *ab* æqualis, & eidem reciprocæ inveniantur *px*, & *ax*, quarum differentia sit *pa* , idest ipsa *ab*. Dico factum.

Cum enim ex constr. sit *pa* ad *px* , vt *ax* ad *ab* : erit per divis. *pa*, idest *ab* ad *ax*, vt *ax* ad *xb*. Quod facere oportebat.

SCHOLION.

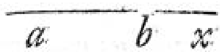
Ecce propositionem celebrem, quæ apud Euclidem,

dem; & alios multos per comparationem planorum involuta demonſtratur, per proportionales tantum expeditam.

Eadem facilitate invenietur tota, dato altero ſegmentorum

Dato ſegmento maiore.

Eſto data *ab* ſegmentum maius, ſitque invenienda tota *ax* diviſa in *b* extrema, ac media ratione.



ANALYSIS.

Sint igit. prop. *ax. ab. ab. bx.*

Ecce in limine ipſo analyſeos problema reſolutnm. Nam ſi datæ *ab* inveniantur reciprocæ *ax*, & *bx*, quarum differentia ſit ipſa *ab*: erit vt tota *ax* ad ſegmentum maius *ab*, ita idem ad ſegmentum minus *xb*, vt oportebat.

Dato ſegmento minore.

Sit tandem data *ab* ſegmentum minus, & ſit invenienda tota *ax* diviſa in *b* extrema, ac media ratione.

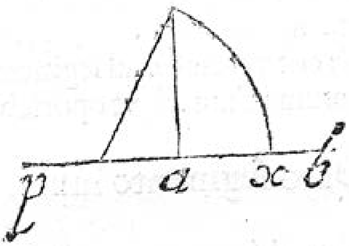
ANA-

ANALYSIS.

Sint igit.prop.	*ax.*	*bx.*	*bx.*	*ab.*
Fiat *bc* —Λ— *ab.*				*bc.*
Ergo divid.E.P.	*ab.*	*bx.*	*cx.*	*bc.*

Ergo ſolutum. Nam ſi ipſi *ab* inveniantur reciprocæ *bx*, & *cx*, quarum differentia ſit *bc*, ideſt ipſa *ab*, hoc eſt ſi fiant proportionales *ab. bx. cx. bc*: erit compon. *ax*.ad *bx*, vt *bx* ad *bc*, ideſt ad *ab*, vt oportebat.

Semper elegantius per proportionales, quam per comparationem planorum ſolvitur, cum fieri poteſt, quoduis problema. Placet tamen propoſitum per lib.2.el. enodare, licet non ſit id ipſum huius loci.



ANALYSIS.

Sit	*axa* —Λ— *abx*
Ergo addit. *bax* erit	*axa* + *bax* —Λ— *abx* + *bax*
Ideſt per 2.2.el.	*aba*
Et ſi fiat *pa* —Λ— *ab*.	*axa* + *pax* —Λ— *aba.*
Ergo ſolutum.	

CON-

CONSTR. ET DEMONSTR.

Fiat *pa* ipsi *ab* æqualis, & inveniatur *ax*, cuius quadratum cum rectangulo *pax*, sit æquale quadrato *ab*. Dico factum. *per 5. Introd.*

Cum enim quadratum *ax* cum rectangulo *pax*, ideſt *bax* æquale ſit quadrato *ab*, ſive rectangulis *bax*, & *abx*: erit ſubtracto rectangulo *bax*, quadratum *ax* æquale rectangulo *abx*. Quod faciendum erat.

PROPOSITIO XII.

Vide R. P. Claviũ ad prop. 17 lib. 6. el.

Ad duas rectas datas, aliam in proportione harmonica invenire.

SIT INVENIENDA MEDIA.

Ad datas *ac. ab* ſit invenienda media *ax* in proportione harmonica.

Proportio harmonica conſtituitur, cum trium terminorum ita ſe habet primus ad tertium, vt differentia primi, & ſecundi ad differentiam ſecundi, & tertij.

Sunt igitur termini.	*ac.*	*ax.*	*ab.*	
Et differentiæ.		*xc.*	*bx.*	
Ergo conditio, vt ſint prop.	*ac.*	*ab.*	*xc.*	*bx.*

ANALYSIS.

Sint igit. prop. *ac. ab. xc. bx.*

Ergo solutum, cum pateat *bc* dividendam esse in *x* in ratione *ac. ab.*

CONST. ET DEMONST.

Dividatur *bc* in *x* in ratione *ac* ad *bc*, vt sint proportionales *ac. ab. xc. bx.* Dico *ac. ax. ab* esse in proportione harmonica, quia extremi sunt, vt differentiæ.

SIT INVENIENDA MAIOR.

a b c x

Ad datas *ac. ab* sit invenienda maior *ax* in proportione harmonica.

Sunt igit. termini *ax. ac. ab.*

Et differentiæ *cx. bc.*

Ergo conditio vt sint prop. *ax. ab. cx. bc.*

Ergo solutum, cum manifestum sit ad datam differentiam *ac*, rectas esse inveniendas *ax. cx.* in ratione *ab. bc*, vt sint prop. *ax. ab. cx. bc*, & erunt extremi, vt differentiæ.

Per Schol. prop 2. huius.

SIT INVENIENDA MINOR.

a x b c

Ad datas *ac. ab* sit invenienda minor *ax* in proportione harmonica.

T

Erunt

Erunt termini.	*ac.*	*ab.*	*ax.*	
Et differentiæ.		*bc.*	*xb.*	
Ergo conditio vt sint prop.	*ac.*	*ax.*	*bc.*	*xb.*

Ergo solutum. Patet enim rectam *ab* dividendam esse in *x* in ratione *ac. bc*, vt sint proportionales *ac. ax. bc. xb.* Itaque extremi erunt vt differentiæ.

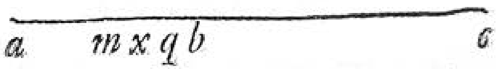
SCHOLION.

Tres sunt præcipuæ proportiones, seu medietates, de quibus fit mentio apud Authores, videlicet Arithmetica, geometrica, & harmonica, quibus alias addiderunt Antiqui, alias Recentiores, omnes videre licet in lib. 3. Collectionum Pappi Alexandrini. Cum autem diversitas oriatur ex diversis modis comparandi terminos, & differentias inter se: analysis nostra quamcumque medietatem eadem facilitate, qua harmonicam expedivit, expedire poterit.

PROPOSITIO XIII.

Datam rectam ita ſecare, vt ſegmenta, & alia recta data proportionem harmonicam conſtituant.

Dato ſegmento maiore.



Sit primo datum ſegmentum maius aq, & ſit data ab diuidenda in x, vt aq. ax. xb ſint in proportione harmonica. Biſecetur ab in m, & erit $2mx$ differentia ſegmentorum ax, & xb. per prop. 7. Introductionis.

Erunt igitur termini	aq.	ax.	xb.	
Et differentiæ.		xq.	$2mx$.	
Et conditio, vt ſint prop.	aq.	xb.	xq.	$2mx$.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	aq.	xb.	xq.	$2mx$.
Fiat bc —∧— $2aq$.	bc.			
Ergo dupl. & dimid. E. P.	bc.	xb.	xq.	mx.
Et per compoſ.	bc.	xc.	xq.	mq.
Ergo ſolutum.				

CONSTR. & DEMONST.

Fiat bc dupla datæ aq, biſectaque ab in m, ipſis bc, & mq reci-

reciprocæ inveniantur *xc*, & *xq*, quarum differentia ſit *qc*. Dico factum.

Sunt enim ex conſt. proportionales *bc. xc. xq. mq.* & per diviſ. *bc. xb. xq. mx*, & dimidiando, & duplicando *aq. xb. xq. 2mx.* videlicet extremi, vt differentiæ: ergo *aq. ax. xb.* erunt in harmonica proportione. Quod erat faciendum.

Dato ſegmento minore.

g   a   m x p   b

Eſto data *pb* ſegmentum minus, & ſit data *ab* dividenda in *x*, vt *ax. xb. pb* ſint in proportione harmonica. Biſecetur *ab* in *m*, & erit *2mx* differentia ſegmentorum *ax*, & *xb*. prop. 7. Introductionis.

Erunt termini.		*ax.*	*xb.*	*pb.*
Et differentiæ,			*2mx.*	*xp.*
Et conditio vt ſint prop.	*ax.*	*pb.*	*2mx.*	*xp.*

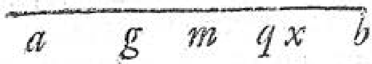
ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax.*	*pb.*	*2mx.*	*xp.*
Fiat *ga* —Λ— *2pb.*		*ga.*		
Ergo duplic. & dimid. S.P.	*ax.*	*ga.*	*mx.*	*xp.*
Et comp.	*gx.*	*ga.*	*mp.*	*xp.*

Ergo ſolutum, & manifeſta constructio, & demonſtratio.

Data

Data media.



Sit tandem data *ab* diuidenda in *x*, & sit data *qb* media. Fiat *ag* eidem *qb* æqualis.

Erunt termini.	*ax.*	*qb.* seu *ag.*	*xb.*	
Et differentiæ.	*gx.*		*qx.*	
Et conditio, vt sint prop.	*ax.*	*xb.*	*gx.*	*qx.*

ANALYSIS.

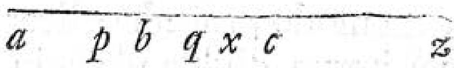
Sint igit. prop.	*ax.*	*xb.*	*gx.*	*qx.*
Et diuid.	*2mx.*	*xb.*	*gq.*	*qx.*
Et dimid. anteced.	*mx.*	*xb.*	*mq.*	*qx.*
Ergo per comp. E.P.	*mx.*	*mb.*	*mq.*	*mx.*

Ergo solutum, & in ipsa analysi ordo patet constructionis, & demonstrationis, cum satis perspicuum sit *gq* duplam esse ipsius *mq*, propterea, quod *ab* bisecta sit in *m* (vt *2mx* differentia sit partium *ax*, & *xb*.) & *ag* facta sit ipsi *qb* æqualis.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Datam rectam *ac* diuisam in *b*, rursus secare in *x* inter *b*, & *c*, ita vt *ax* ad duplam *bx* sit vt ipsa *bx* ad *xc*.



Quoniam igitur fieri debent proportionales *ax*. 2*bx*. *bx*. *xc*. fiat *xz* dupla ipsius *bx*; & *pb* tertia pars *ab*; & *bq* tertia pars *bc*. ad quod nos vrget analysis.

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*ax*.	2*bx*.	*bx*.	*xc*.
Hoc est		*xz*.		
Ergo per compos. E.P.	*ax*.	*az*.	*bx*.	*bc*.
Et tripartiendo conseq.	*ax*.	*px*.	*bx*.	*bq*.
Et diuid.	*ap*.	*px*.	*qx*.	*bq*.
Ergo solutum.				

CONSTR. & DEMONSTR.

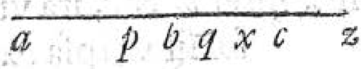
Fiat *pb* tertia pars rectæ *ab*, & *bq* tertia pars rectæ *bc*, ipsisque *ap*, & *bq* reciprocæ inueniantur *px*, & *qx*, quarum differentia sit ipsa *pq*. Dico factum. Ponatur *xz* dupla ipsius *bx*, & erit *px* triens totius *az*.

Cum enim ex const. sint proportionales *ap*. *px*. *qx*. *bq*, & compon. *ax*. *px*. *bx*. *bq*, & triplicando consequentes *ax*.

az.

$az.\ bx.\ bc$: erit per divis. ax ad xz, ideſt ad duplam bx, vt ipſa bx ad bc. Quod facere oportebat.

SCHOLION.



Eodem modo procedere licet ſi recta ac diviſa in b, iterum dividenda ſit in x inter b, & c, vt ſint proportionales $ax.\ 3bx.\ bx.\ 2xc.$

Fiat pb —Λ— $\frac{2}{5}\,ab$, & bq —Λ— $\frac{2}{5}\,bc$.
Hoc eſt $2\frac{1}{2}\,pb$ —Λ— ab, & $2\frac{1}{2}\,bq$ —Λ— bc.

ANALYSIS.

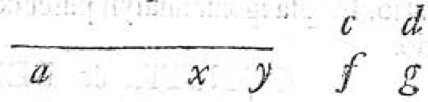
Sint igit. prop.	$ax.$	$3bx.$	$bx.$	$2xc.$
Et dimid. conſeq.	$ax.$	$1\frac{1}{2}bx.$	$bx.$	$xc.$
Fiat xz —Λ— $1\frac{1}{2}\,bx$		$xz.$		
Ergo per compoſ. E. P.	$ax.$	$az.$	$bx.$	$bc.$
Et part. conſeq. per $2\frac{1}{2}$.	$ax.$	$px.$	$bx.$	$bq.$
Et divid.	$ap.$	$px.$	$qx.$	$bq.$

Ergo ſolutum. Neque vlla ineſt dificultas, vt intelligatur $2\frac{1}{2}\,px.$ æqualem eſſe ipſi az, cum $2\frac{1}{2}bx$: ſit æqualis bz, & $2\frac{1}{2}pb$ —Λ— ab, vnde $2\frac{1}{2}pb$, & $2\frac{1}{2}bx$, ideſt $2\frac{1}{2}px$ æqualis erit toti az. Et ſic de alijs.

PRO-

PROPOSITIO XV.

Duas rectas invenire in ratione data tam directa, quam reciproca.



Sint inueniendæ duæ rectæ *ay*, & *ax* in ratione directa *c* ad *d*, & in ratione reciproca *f*, & *g*.

CONDITIONES.

Vt ſint proport.	*ay.*	*ax.*	*c.*	*d.*
Vt ſint prop.	*ay.*	*f.*	*g.*	*ax.*

Quis ergo non videt rationem directam *c* ad *d* in aliam æqualem conuertendam eſſe, cuius alter terminorum ſit vel *f*, vel *g*; vel rationem reciprocam *f*, & *g* in aliam æqualem reuocandam, cuius alter terminorum ſit vel *c*, vel *d*, vt ratio communis ſtatuatur, & ex æquo arguere liceat?

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*ay.*	*ax.*	*c.*	*d.*
Fiant prop. *c.d.g.p.*			*g.*	*p.*
Sint etiam prop.	*ay.*	*f.*	*g.*	*ax.*
Ergo ex æqual. E.P.	*f.*	*ax.*	*ax.*	*p.*

Est enim in vtraque proportione communis ratio *ay* ad *g*, cum in prima non iam termini *c*, & *d*; sed *g*, & *p* ad comparationem assumantur. Ergo resolutum est problema ex sola reductione terminorum ad argumentum ex æqualitate, hoc est vt in vtraque proportione duo æquales termini existant ita dispositi, vt inter reliquos fieri possit comparatio. In ipsa igitur analysi patet constructio,& demonstratio.

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt *c* ad *d* ita *g* ad *p*, & inter *f*, & *p* media inveniatur *ax*, vt autem *d* ad *c* ita fiat *ax* ad *ay*. Dico rectas *ay*, & *ax*, quæ constructæ sunt in ratione *c* ad *d* reciprocas esse ipsis *f*, & *g*.

Cum enim ex constr. sit *f* ad *ax*, vt *ax* ad *p*, & *ay* ad *ax*, vt *c* ad *d*, idest vt *g* ad *p*: erit ex æqualitate *ay* ad *g*, vt *f* ad *ax* (communis ratio *ax* ad *p*.) Duas igitur rectas *ay*, & *ax* exhibuimus,&c. Quod facere oportebat.

SCHOLION.

Vt ex æqualitate rationis commode argumentari liceat; hæc tria notanda occurrunt. Primum est singulas proportiones in se resolvendas esse, si iam resolutæ non fuerint. Secundum, ex commoda reductione alicuius rationis, communem rationem statuendam esse, si iam constituta non sit. Tertium est, vnam tantum conditionem earum, quas inventæ lineæ habere debent, demonstrandam esse, nam reliquæ pertinent ad constructionem.

Hinc

Hinc manifestum fit, analysim aliter, & aliter institui posse.

ALITER.

Sint prop.	*ay.*	*ax.*	*c.*	*d.*
Fiant prop. *c. d. h. g.*			*h.*	*g.*
Sint etiam prop.	*ay.*	*f.*	*g.*	*ax.*
Ergo ex æquo E. P.	*h.*	*ay.*	*ay.*	*f.*

Est enim communis ratio *g. ax.*

ALITER.

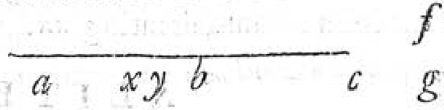
Sint igit. prop.	*ay.*	*ax.*	*c.*	*d.*
Et etiam.	*ay.*	*f.*	*g.*	*ax.*
Fiant prop. *c. f. g. k.*		*c.*	*k.*	
Ergo ex æquo E. P.	*k.*	*ax.*	*ax.*	*d.*

Nam communis ratio est *ay. c*, &c.

PROPOSITIO XVI.

Ad datam rectam duas rectas in proportione harmonica invenire, quæ tamen inter se habeant rationem datam.

DATO EXTREMO MAIORE.



Sit primo data *ab* extremum maius, & ratio data *f* ad *g*. Et sint quæsitæ lineæ *ay*, & *ax*.

Erunt termini.	*ab*.	*ay*.	*ax*.	
Differentiæ.		*yb*.	*xy*.	
Conditio vt sint prop.	*ab*.	*ax*.	*yb*.	*xy*.
Conditio vt sint prop.	*ay*.	*ax*.	*f*.	*g*.

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*ab*.	*ax*.	*yb*.	*xy*.
Fiat *bc* —Λ— *ab*.	*bc*.			
Ergo vt 1. ad 1. ita agg. & E.P.	*ab*.	*ax*.	*yc*.	*ay*.
Sed etiam S.P.	*ay*.	*ax*.	*f*.	*g*.
Ergo ex æqual. E.P.	*g*.	*f*.	*ab*.	*yc*.

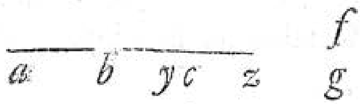
Quia communis ratio est *ax* ad *ay*. Ergo solutum, cum punctum *y* sit determinatum.

CONS-

CONST. ET DEMONST.

Fiat *bc* ipsi *ab* æqualis, & vt *g* ad *f* ita *ab* ad *yc*, & ita *ax* ad *ay*. Dico rectas *ay*, & *ax*, quæ constructæ sunt in ratione data *f* ad *g*, esse ad datam *ab* in proportione harmonica. Cum enim ex const. sit *ab*, idest *bc* ad *yc*, vt *ax* ad *ay*: erit convert. *ab* ad *yb*, vt *ax* ad *xy*, & altern. *ab* ad *ax*, vt *yb* ad *xy*: ergo *ab*. *ay*. *ax* proportionem harmonicam constituent, cum sint extremi, vt differentiæ. Duas igitur rectas, &c. Quod erat faciendum.

DATO EXTREMO MINORE.



Sit secundo data *ab* extremum minus, ratio data *f* ad *g*, & quæsitæ lineæ *az*, & *ay*.

Erunt termini.		*az*.	*ay*.	*ab*.
Differentiæ.		*yz*.	*by*.	
Conditio, vt sint prop.	*az*.	*ab*.	*yz*.	*by*.
Conditio, vt sint prop.	*az*.	*ay*.	*f*.	*g*.

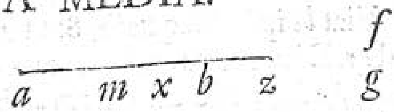
ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*az*.	*ab*.	*yz*.	*by*.
Fiat *bc* $\sqcup\!\lambda\!\sqcup$ *ab*.		*bc*.		
Ergo vt 1. ad 1. ita diff.	*az*.	*ab*.	*ay*.	*yc*.
Sed etiam S.P.	*az*.	*ay*.	*f*.	*g*.
Ergo ex æquo E.P.	*f*.	*g*.	*ab*.	*yc*.

Quia communis ratio est *az* ad *ay*. Ergo solutum, & patet constructio, & demonstratio.

DA-

DATA MEDIA.



Sit tandem data *ab* media, ratio data *f* ad *g*, & rectæ *az*, & *ax* ſint, de quibus quæritur.

Erunt termini.		*az.*	*ab.*	*ax.*
Differentiæ,		*bz.*	*xb.*	
Conditio vt ſint prop.	*az.*	*ax.*	*bz.*	*xb.*
Conditio, vt ſint prop.	*az.*	*ax.*	*f.*	*g.*

ANALYSIS.

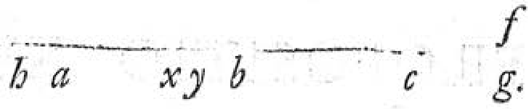
Sint igit. prop.	*az.*	*ax.*	*bz.*	*xb.*
Biſecetur *ab* in *m*.				
Ergo vt 1. ad 1. ita diff. & E. P.	*az.*	*ax.*	*ab.*	*2mx.*
per 7. Introd. Et dimidiando vltimos.	*az.*	*ax.*	*am.*	*mx.*
Sed etiam S. P.	*az.*	*ax.*	*f.*	*g.*
Ergo ex æquo E. P.	*f.*	*g.*	*am.*	*mx.*

Ergo ſolutum; & patet conſtructio, & demonſtratio.

SCHOLION.

Similiter procedendum erit ſit ratio data ſit reciproca.

Sint



Sint inveniendæ duæ rectæ *ay*, & *ax* ad datam *ab*, extremum maius, in proportione harmonica; reciprocæ tamen datis *f*, & *g*.

Erunt termini.	*ab.*	*ay.*	*ax.*	
Differentiæ.		*yb.*	*xy.*	
Condit. vt ſint prop.	*ab.*	*ax.*	*yb.*	*xy.*
Condit. vt ſint prop.	*ay.*	*f.*	*g.*	*ax.*

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ab.*	*ax.*	*yb.*	*xy*
Fiat *bc* ⊣∧⊢ *ab*	*bc.*			
Ergo vt 1. ad 1. ita agg. & E.P.	*ab.*	*ax.*	*yc.*	*ay.*
Sed etiam S.P.	*ay.*	*f.*	*g.*	*ax.*
Fiant prop. *ha. f. g. ab.*		*ha.*	*ab.*	
Ergo ex æqual. E.P.	*yc.*	*ay.*	*ay.*	*ha.*
Et comp.	*ac.*	*ay.*	*hy.*	*ha.*

Ergo ſolutum, & patet conſtructio, & demonſtratio.

Eodem modo ſi datum fuerit extremum minus, vel media, quæ omnia, nè excercitandi voluptatem ſtudioſis adimam, conſultò indigeſta relinquo.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

Vide Franc. Vietam in Pseudomesolabo.

Quatuor rectarum continuè proportionalium dato aggregato, tum extremarum, tum mediarum, singulas exhibere.

Sit data recta *ab* aggregatum mediarum, & data *bc* aggregatum extremarum. Oportet igitur ipsas *ab*, & *bc* ita secare in *x*, & *y*, vt sint continuè proportionales *yc*. *ax*. *xb*. *by*. Hoc est, vt sint prop. *yc*. *ax*. *xb*. & etiam *ax*. *xb*. *by*. Supponatur *va* ipsi *yc* æqualis, vnde *vy* toti *ac* æqualis erit.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*yc*.	*ax*.	*ax*.	*xb*.
Ideſt	*va*.			
Ergo comp. E.P.	*vx*.	*ax*.	*ab*.	*xb*.
Sint etiam prop.	*ax*.	*xb*.	*xb*.	*by*.
Ergo per comp. E.P.	*ax*.	*ab*.	*xb*.	*xy*.
Ex æquo ig. E.P.	*vx*.	*ab*.	*ab*.	*xy*.

Ergo solutum, cum aggregatum extremarum *vx*. & *xy*. sit toti *ac* æquale.

CONSTR. & DEMONSTR.

Inveniantur ipsi *ab* reciprocæ rectæ *h*, & *k*, quarum aggregregatum ſit tota *ac*, & dividatur *ab* in *x* in ratione *h* ad *ab*, ponanturque *xv*, & *xy* ipſis *h*, & *k* æquales, vnde æquales erunt *va*, & *yc*. Dico *yc. ax. xb. by.* continuè eſſe proportionales.

Cum enim ex conſtr. ſit *h*, ideſt *vx* ad *ax*, vt *ab* ad *xb*, erit divid. *va*, ideſt *yc* ad *ax*, vt *ax* ad *xb*. Eſt autem ex conſtr. *vx* ad *ab*, vt *ab* ad *xy*: ergo ex æquo *ax* ad *xb* erit vt *ab* ad *xy*, & 1. ad 1. vt differentiæ, hoc eſt *ax* ad *xb*, vt *xb* ad *by*. Igitur continuè proportionales erunt *yc. ax. xb. by.* Quod facere oportebat.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum ſit aggregata eſſe proportionalia, ea, quæ ex prima, & ſecunda, ex ſecunda, & tertia, atque ex tertia, & quarta conflantur, cum oſtenſæ ſint proportionales rectæ *vx. ab. xy.*

QVÆSTIO.

Quatuor numerorum continuè proportionalium ſumma primi, & quarti eſt 12, ſumma verò ſecundi, & tertij 8. quæruntur ſinguli.

OPERATIO.

Datur *bc* ─Λ─ 12.
Et *ab* ─Λ─ 8.
Ergo *ac* ─Λ─ 20. omnes quatuor.
Et $\frac{1}{2}$ *ac* ─Λ─ 10. quadr. 100.
ab ─Λ─ 8. quadr. 64.
Diff. 36.
√ est 6.
$\frac{1}{2}$ *ac*. 10.
Summa 16. pro *vx*. primo, & secund.
Diff. 4. pro *xy*. tertio, & quarto.

vx ─Λ─ 16.
ab ─Λ─ 8 *ab*. *ab*.
G 24. dat 8. 8. dabit $2\frac{2}{3}$ pro tertio. *xb*.
Ergo $5\frac{1}{3}$ pro secund.
Et $10\frac{2}{3}$ pro primo.
Et $1\frac{1}{3}$ pro quarto.

Sunt igitur quatuor numeri continuè proportionales $10\frac{2}{3}$. $5\frac{1}{3}$. $2\frac{2}{3}$. $1\frac{1}{3}$, de quibus quærebatur.

ALIA.

Summa primi, & quarti est 10, summa secundi, & tertij 6. quæruntur singuli continuè proportionales.

OPE-

OPERATIO.

bc —Λ— 10
ab —Λ— 6
Ergo *ac* —Λ— 16
Et $\frac{1}{2}$*ac* —Λ— 8 quad. 64
ab —Λ— 6 quad. 36
Diff. 28
$\sqrt{}$.est $2\sqrt{}.7.$
$\frac{1}{2}$ *ac* 8
Summa $8 + 2\sqrt{}\,7$. pro prim. & secund.
Diff. $8 - 2\sqrt{}\,7$. pro tertio, & quart.

$8 + 2\sqrt{}\,7$.
ab. 6

Ergo si $14 + 2\sqrt{}\,7$. dat 6 quid 6?
Vel si $7 + \sqrt{}\,7$. dat 3 quid 6?
E lev. per $7 - \sqrt{}\,7$. per $7 - \sqrt{}\,7$
Vel si 42 dat $21 - 3\sqrt{}\,7$. quid 6?
Vel si 7 dat $21 - 3\sqrt{}\,7$. quid 1? dabit $3 - \frac{3}{7}\sqrt{}\,7$ pro tert.
Ergo $3 + \frac{3}{7}\sqrt{}\,7$ pro secun.
Et $5 + 1\frac{4}{7}\sqrt{}\,7$ pro prim.
Et $5 - 1\frac{4}{7}\sqrt{}\,7$ pro quart.

Sunt igitur quatuor numeri continuè proportionales, de quibus quæritur.

$$5 + 1\tfrac{4}{7}\sqrt{}\,7,\quad 3 + \tfrac{3}{7}\sqrt{}\,7,\quad 3 - \tfrac{3}{7}\sqrt{}\,7,\quad 5 - 1\tfrac{4}{7}\sqrt{}\,7.$$

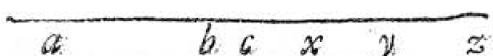
EXAMEN.

	$5 + 1\frac{4}{7}\sqrt{7}$	$3 + \frac{3}{7}\sqrt{7}$	$3 - \frac{3}{7}\sqrt{7}$	$5 - 1\frac{4}{7}\sqrt{7}$
Vel	$35 + 11\sqrt{7}$	$21 + 3\sqrt{7}$	$21 - 3\sqrt{7}$	$35 - 11\sqrt{7}$
	$21 - 3\sqrt{7}$	$21 + 3\sqrt{7}$	$21 - 3\sqrt{7}$	$21 + 3\sqrt{7}$
	$735 + 231\sqrt{7}$	$441 + 63\sqrt{7}$	$441 - 63\sqrt{7}$	$735 - 231\sqrt{7}$
	$-231 - 105\sqrt{7}$	$63 + 63\sqrt{7}$	$63 - 63\sqrt{7}$	$-231 + 105\sqrt{7}$
	$504 + 126\sqrt{7}$ ⸺Δ⸺	$504 + 126\sqrt{7}$,	$504 - 126\sqrt{7}$ ⸺Δ⸺	$504 - 126\sqrt{7}$

Ergo cum rectangulum sub primo, & tertio æquale sit quadrato secundi, & rectangulum sub secundo & quarto æquale quadrato tertij: continuè proportionales erunt inventi numeri.

PROPOSITIO XVIII.

Quatuor rectarum continuè proportionalium data differentia tum extremarum, tum mediarum, singulas invenire.



Sit data *ac* differentia extremarum, & data *bc* differentia mediarum, sit *ax* prima, vnde *cx* erit quarta, sit *by* secunda, & *cy* erit tertia, & omnes quatuor *ax*. *by*. *cy*. *cx*, quas continuè proportionales oportet facere.

Supponatur *bz* ipsi *ax* æqualis, & erit *xz* ipsi *ab* etiam æqualis.

CON-

CONDITIONES.

Vt ſint proport.	*ax.*	*by.*	*by.*	*cy.*
Vt ſint prop.	*by.*	*cy.*	*cy.*	*cx.*

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax.*	*by.*	*by.*	*cy.*
Ideſt	*bz.*			
Et divid.	*yz.*	*by.*	*bc.*	*cy.* —
Sint etiam prop.	*by.*	*cy.*	*cy.*	*cx.*
Et conv.	*by.*	*bc.*	*cy.*	*xy.* —
Ergo ex æquo E. P.	*yz.*	*bc.*	*bc.*	*xy.*

Ergo ſolutum cum *xz* ſumma extremarum *yz*, & *xy* ſit ipſi *ab* æqualis.

CONSTR. & DEMONSTR.

Ipſi *bc* reciprocæ inveniantur duæ rectæ *m*, & *p*, quarum ſumma ſit ipſa *ab*, & vt *m* ad *bc* ita fiat *by* ad *cy*, ponanturque *yz*, & *xy* ipſis *m*, & *p* æquales, vnde *xz*, & *ab*, nec non *bz*, & *ax* æquales erunt. Dico *ax. by. cy. cx* eſſe in continua analogia. *Vide Schol. prop. 2. huius.*

Cum enim ex conſtr. ſit *m*, ideſt *yz* ad *by*, vt *bc* ad *cy*: erit comp. *bz*, ideſt *ax* ad *by*, vt *by* ad *cy* (vt oportet.) Rurſus cum *yz* ad *by* ſit vt *bc* ad *cy*, & etiam ex conſtruct. ſit *yz* ad *bc*, vt *bc* ad *xy*: erit ex æquo *by* ad *cy*, vt *bc* ad *xy* (ratio communis *yz* ad *bc*) & 1. ad 1. vt differentiæ, hoc eſt *by* ad *cy*, vt *cy* ad *cx*, vt oportet, continue igitur proportionales erunt *ax. by. cy. cx*. Quod erat faciendum.

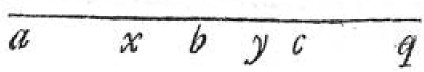
CO-

COROLLARIVM.

Hinc patet differentias esse proportionales primæ, & secundæ, secundæ, & tertiæ, atque tertiæ, & quartæ, cum ostensæ sint proportionales *yz. bc. xy.*

PROPOSITIO XIX.

Quatuor rectarum continuè proportionalium dato aggregato tum primæ, & secundæ, tum tertiæ, & quartæ singulas invenire.



Sit *ab* aggregatum primæ, & secundæ, & *bc* tertiæ, & quartæ, & omnes quatuor continuè proportionales sint *ax. xb. by. yc.*

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax.*	*xb.*	*xb.*	*by.*
Et comp.	*ab.*	*xb.*	*xy.*	*by.*—
Sint etiam prop.	*xb.*	*by.*	*by.*	*yc.*
Et per comp.	*xb.*	*xy.*	*by.*	*bc.*—
Ergo ex æquo E.P.	*ab.*	*xy.*	*xy.*	*bc.*

Ergo si inter *ab*, & *bc* media inveniatur *cq*, ipsi æqualis erit *xy*.

Erant

Erant autem prop.	*xb.*	*xy.*	*by.*	*bc.*
Ideſt.		*cq.*		
Ergo agg. vt 1. ad 1.	*xy.*	*bq.*	*by.*	*bc.*
Ideſt.	*cq.*			

Ergo ſolutum.

CONSTR. ET DEMONSTR.

Inter *ab*, & *bc* media inveniatur *cq*, & vt *cq* ad *bq* ita fiat *by* ad *bc*, ponaturque *xy* ipſi *cq* æqualis. Dico *ax. xb. by. yc.* eſſe in continua analogia.

Cum enim ex conſtr. ſit *cq*, ideſt *xy* ad *bq*, vt *by* ad *bc*: erit *xb* ad *cq*, ideſt ad *xy*, vt *by* ad *bc* (hoc eſt diff. vt 1. ad 1.) & per diviſ. *xb* ad *by*, vt *by* ad *yc*. vt oportet.

Rurſus cum *xb* ad *xy* ſit vt *by* ad *bc*, & ex conſtr. ſit *ab* ad *xy*, vt *xy* ad *bc*: erit ex æquo *ab* ad *xb*, vt *xy* ad *by*. (communis ratio *xy. bc.*) & divid. *ax* ad *xb*, vt *xb* ad *by*, vt oportet. Quatuor igitur, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

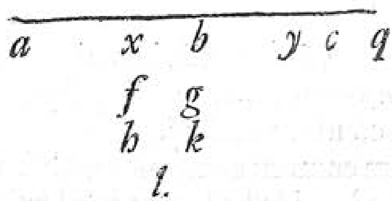
Patet aggregata eſſe proportionalia illa quæ ex prima, & ſecunda, ex ſecunda, & tertia, atque ex tertia, & quarta conficiuntur, cum oſtenſæ ſint proportionales *ab. xy. bc.* Quod etiam in antecedentibus manifeſtum fuit.

Eodem modo proceditur datis differentijs.

PRO-

PROPOSITIO XX.

Datas rectas *ab*, & *bc* secare in *x*, & *y*, vt *ay* ad *xc* sit vt *f* ad *g*, atque *xb* ad *yc* vt *h* ad *k*.



CONDITIONES.

Vt sint prop.	*ay.*	*xc.*	*f.*	*g.*
Vt sint prop.	*xb.*	*yc.*	*h.*	*k.*

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ay.*	*xc.*	*f.*	*g.*
Et etiam.	*xb.*	*yc.*	*h.*	*k.*
Sive si fiat			*bc.*	*cq.*
Ergo agg. vt 1. ad 1.	*xc.*	*yq.*	*h.*	*k.*
Vel si fiat			*g.*	*l.*
Ergo ex æquo E. P.	*ay.*	*yq.*	*f.*	*l.*

Ergo solutum.

CONST. ET DEMONST.

Fiat vt *h* ad *k* ita *bc* ad *cq*, & ita *g* ad *l*, dividatur *aq* in *y* in ratione *f* ad *l*, & fiat *ay* ad *xc*, vt *f* ad *g*, vt petitur. Dico *xb* ad *yc*, esse vt *h* ad *k*.

Cum

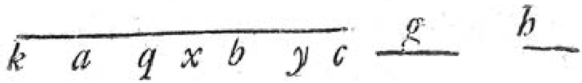
Cum enim ex constr. sit ay ad yq, vt f ad l; & ay ad xc, vt f ad g: erit ex æquo xc ad yq, vt g ad l, ideſt vt bc ad cq, & quia differentiæ ſunt vt vnus ad vnum, erit xb ad yc, vt bc ad cq, ideſt vt b ad k, vt petitur. Rectas igitur ab, & bc diviſimus, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

Si prius quam analyſim aggrediaris, præſcriptas conditiones perſpexeris, ſatis tibi obvium erit, terminum xb ad terminum xc reducendum eſſe, vt ex æqualitate rationis arguendo, punctum x extinguatur, quemadmodum nos perſecuti ſumus. Sed notare oportet ſimili artificio terminum xb ad terminum xc revocari potuiſſe, vt idem eveniret, & ita ſimiliter terminum ay ad terminum yc, vel yc ad ay converti debuiſſe, vt punctum y prius evaneſceret. Vnde manifeſtum fit analyſim aliter, & aliter inſtitui poſſe.

PROPOSITIO XXI.

Datas rectas *ab*, & *bc* ita dividere in *x*, & *y*, vt ſint proportionales *ax*. *xb*. *by*. *yc*, & etiam *ay*. *xc*. *g*. *h*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax*.	*xb*.	*by*.	*yc*.
Ergo comp. E. P.	*ab*.	*xb*.	*bc*.	*yc*.
Sint etiam prop.	*ay*.	*xc*.	*g*.	*h*.
Vel ſi fiat			*ac*.	*qc*.
Ergo diff. vt 1. ad 1.	*yc*.	*qx*.	*g*.	*h*.
Vel ſi fiat			*bc*.	*ka*.
Ergo ex æquo E. P.	*qx*.	*ka*.	*xb*.	*ab*.
Et agg. vt 1. ad 1.	*qb*.	*kb*.	*xb*.	*ab*.

CONSTR. & DEMONST.

Fiat vt *g* ad *h* ita *ac* ad *qc*, & ita *bc* ad *ka*, & vt *qb* ad *kb* ita *xb* ad *ab*, & ita *yc* ad *bc*. Dico factum.

Eſt enim ex conſtr. *ab* ad *xb*, vt *bc* ad *yc*, & erit divid. *ax* ad *xb*, vt *by* ad *yc*, vt oportebat. Sed etiam ex conſtr. eſt *qb* ad *kb*, vt *xb* ad *ab*, & quia differentiæ ſunt vt vnus ad vnum, erit *qx* ad *ka*, vt *xb* ad *ab*. Erat autem *ab* ad *xb*, vt *bc* ad *yc*: ergo ex æquo erit *yc* ad *qx*, vt *bc* ad *ka*, ideſt vt *ac* ad *qc*. Hoc eſt (quia differentiæ ſunt vt vnus ad vnum) *ay* ad *xc*,

vt

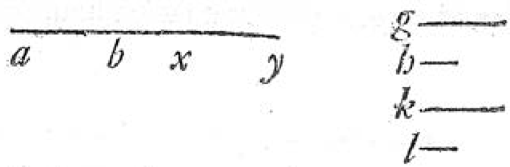
vt ac ad qc, ideſt vt g ad h, vt oportebat. Rectas igitur ab, & bc diviſimus,&c. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

Si recta g minor eſſet, quam recta h, punctum q ante punctum a caderet, & operatio eadem eſſet.

PROPOSITIO XXII.

Duo latera exhibere, ita vt ſi ab vtroque datum dematur ſegmentum, reſidua ſint in data ratione; rectangulum verò ſub ipſis reſiduis æquale ſit dato plano.



Factum iam eſto, ſuntoque latera quæſita ay, & ax, à quibus ſi dematur ſegmentum datum ab, reſidua erunt by, & bx, quæ datam rationem g ad h obtineant, rectangulum verò ſub ipſis æquale exhibeant dato quadrato k.

ANALYSIS.

Sint igit.prop.	$by.$	$bx.$	$g.$	$h.$
Fiant prop. $g.h.k.l.$			$k.$	$l.$ —
Sed per conditionem	$by : bx$	— ∧ —	$k:k.$	
Vnde erunt prop.	$by.$	$k.$	$k.$	$bx.$ —
Ergo ex æqual. E.P.	$l.$	$bx.$	$bx.$	$k.$
Ergo ſolutum.				

CONSTR. & DEMONSTR.

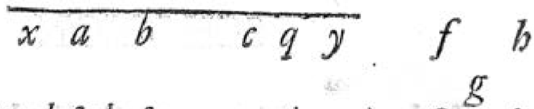
Fiat vt g ad h ita k ad l, & inter l, & k media inveniatur bx, vt autem eſt h ad g ita fiat bx ad by. Dico ay, & ax rectas eſſe quæſitas. Si enim ab vtraque datum dematur ſegmentum ab, erunt reſiduæ by, & bx ex conſtructione, vt g ad h (vt petitur) ſive vt k ad l; ſed etiam ex conſtr. l ad bx, eſt vt bx ad k: ergo ex æquo erit by ad k, vt k ad bx (communis ratio bx ad l:) ergo rectangulum ſub by, & bx; æquale erit quadrato k (vt petitur) Rectas igitur exhibuimus ay, & ax, &c. quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXIII.

Vide Renald. pagin. 462. *to.* 3.

Duo latera reperire, ita vt vtrumque ab altero datum ſegmentum accipiens ad reſiduum conſtitutam habeat rationem.

Sint



Sint datæ rectæ *ab*, & *bc*, & oporteat invenire rectas *xb*, & *by*, ita vt si recta *xb* à recta *by* segmentum acceperit *bc*, sit composita *xc* ad residuam *cy*, vt *f* ad *g*. Si verò recta *by* à recta *xb* segmentum acceperit *ab*, sit composita *ay* ad residuam *xa* vt *g* ad *h*. Ergo.

CONDITIONES.

Vt sint prop.	*xc*.	*cy*.	*f*.	*g*.
Et etiam	*ay*.	*xa*.	*g*.	*h*.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*xc*.	*cy*.	*f*.	*g*.
Sive si fiat			*ac*.	*cq*.
Ergo diff. vt 1. ad 1. & E. P.	*xa*.	*qy*.	*f*.	*g*.
Sint etiam prop.	*ay*.	*xa*.	*g*.	*h*.
Ergo ex æquo E. P.	*h*.	*f*.	*qy*.	*ay*.

Ergo solutum.

CONST. ET DEMONST.

Fiat vt *f* ad *g*, ita *ac* ad *cq*, & vt *h* ad *f* ita *qy* ad *ay* (hoc est vt differentia, qua *f* superat *h*, ad ipsam *f*, ita *aq* ad *ay*.) Et tandem vt *g* ad *h* ita *ay* ad *xa*. Dico factum.

Est enim ex constr. *ay* ad *xa*, vt *g* ad *h*, vt petitur, & etiam est vt *h* ad *f*, ita *qy* ad *ay*: ergo ex æquo erit *xa* ad *qy*, vt *f* ad *g*, sive vt *ac* ad *cq*, & quia differentiæ sunt vt vnus ad vnum, erit *xc* ad *cy*, vt *f* ad *g*, vt petitur. Rectas igitur exhibuimus *xb*, & *by*, &c. Quod oportebat facere.

SCO-

SCHOLION.

In hoc problemate nil aliud determinandum apparet, nisi quod recta *f* maior debeat esse, quam recta *b*.

PROPOSITIO XXIV.

Datas rectas *ab*. *bc*. *cd*. secare in *x*. *y*. *z*. his conditionibus.

f. *g*.
p. *q*. *k*.
h. *l*. *m*.

a *x* *b* *q* *y* *c* *z* *d* *p*

CONDITIONES.

Vt sint proport.	*ay*.	*xc*.	*f*.	*g*.
Et etiam	*xb*.	*cz*.	*p*.	*q*.
Nec non	*bz*.	*yd*.	*h*.	*l*.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ay.*	*xc.*	*f.*	*g.*—
Sint etiam prop.	*xb.*	*cz.*	*p.*	*q.*
Vel si fiant prop.			*bc.*	*qc.*
Ergo agg. vt 1. ad 1. & E.P.	*xc.*	*qz.*	*p.*	*q.*
Vel si fiant			*g.*	*k.*—
Ex æquo igitur E.P.	*qz.*	*ay.*	*k.*	*f.*—
Sint etiam prop.	*bz.*	*yd.*	*h.*	*l.*
Vel si fiat			*bp.*	*ad.*
Ergo diff. vt 1. ad 1. & E.P.	*zp.*	*ay.*	*h.*	*l.*
Vel si fiat			*m.*	*f.*—
Ergo ex æquo E.P.	*qz.*	*zp.*	*k.*	*m.*

Ergo solutum.

CONSTR. ET DEMONSTR.

Fiat vt *p* ad *q* ita *bc* ad *qc*, & ita *g* ad *k*, & vt *h* ad *l* ita *bp* ad *ad*, & ita *m* ad *f*. Deinde dividatur *pq* in *z* in ratione *k*, ad *m*, vt sint proportionales *qz. zp. k. m.* Et cum punctum *z* notum sit, fiat *bz* ad *yd*, vt *h* ad *l*, & *ay* ad *xc*, vt *f* ad *g*, & completæ erunt prima, & tertia conditio. Dico etiam esse proportionales *xb. cz. p. q.* quod secundam conditionem constituit.

Cum enim ex constr. sit *bz* ad *yd*, vt *h* ad *l*, idest vt *bp* ad *ad*: erit *zp* ad *ay*, vt *h* ad *l*, siue vt *m* ad *f* (hoc est differentiæ vt vnus ad vnum.) Sed etiam ex construct. est *qz* ad *zp*, vt *k* ad *m*: ergo ex æquo erit *qz* ad *ay*, vt *k* ad *f*. (Ratio communis *zp. m.* (sed ex constr. est *ay* ad *xc*, vt *f* ad *g*: igitur ex æqualitate erit *xc* ad *qz*, vt *g* ad *k* (Ratio communis *ay. f*) idest vt *bc* ad *qc*, & quia differentiæ sunt vt vnus ad vnum: erit *xb* ad *cz*, vt *bc* ad *qc*, idest vt *p* ad *q*, vt per secundam conditionem requiritur. Rectas igitur *ab. bc. cd.* divisimus, &c. quod facere oportebat.

SCHO-

SCHOLION.

Eadem facilitate problemata expediri poterunt, quando quatuor, aut plures rectæ dividendæ fuerint in totidem puncta incognita.

QVÆSTIO.

Datos tres numeros 11. $7\frac{1}{2}$. $3\frac{1}{2}$. ita ſingillatim in duas partes dividere, vt ſex numeri conſtituantur his conditionibus.

Vt ſumma primi, ſecundi, & tertij ad ſummam ſecundi, tertij, & quarti ſit, vt 4 ad 3.
Vt ſecundus ad quintum ſit vt 3 ad 1.
Ut ſumma tertij, quarti, & quinti, ad ſummam quarti, quinti, & ſexti ſit, vt 3 ad 2.

ANALYSIS.

Sint dati numeri ab. bc. cd, & dividantur in x. y. z. ergo ſex numeri quæſiti erunt ax. xb. by. yc. cz. zd.

Sit vt 4 ad 3 ita f ad g.
Et vt 3 ad 1 ita p ad q.
Et vt 3 ad 2 ita h ad l.

Ergo analyſis omnino vt antea erit inſtituenda, vnde ſequens oritur.

OPE-

OPERATIO.

Fiat vt p ad q ita bc ad qc.
Ideſt vt 3 ad 1 ita $7\frac{1}{2}$ ad $2\frac{1}{2}$
& ita g. ad k.
Ideſt 3. ad 1.
Fiat vt l ad h ita ad ad bp.
Ideſt vt 2 ad 3 ita 22 ad 33
& ita f ad m.
Ideſt 4 ad 6.
Eſt autem bc —Λ— $7\frac{1}{2}$.
Eſt erat qc —Λ— $2\frac{1}{2}$.
Ergo erit bq —Λ— 5.
Sed erat bp —Λ— 33.
Ergo erit qp —Λ— 28.
Fiat vt $m+k$ ad k ita pq ad qz
Ideſt vt 7. ad 1. ita 28 ad 4
Sed qc eſt $2\frac{1}{2}$
Ergo erit cz $1\frac{1}{2}$ pro quinto.
Ergo erit zd 2. pro ſexto.

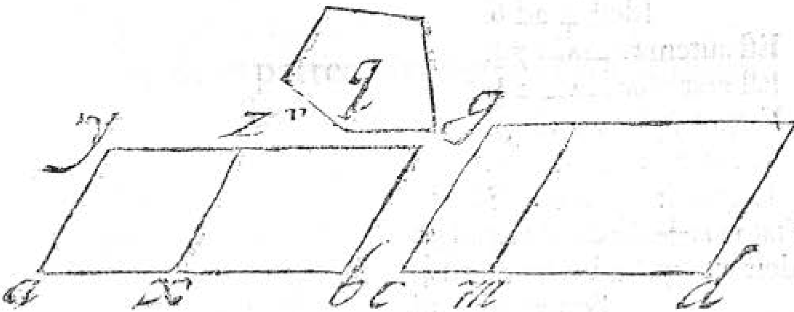
Fiat vt q ad p ita cz ad xb
Ideſt vt 1 ad 3 ita $1\frac{1}{2}$ ad $4\frac{1}{2}$ pro ſecundo
Ergo $6\frac{1}{2}$ pro primo.

Fiat vt g ad f ita xc ad ay
Ideſt vt 3 ad 4 ita 12 ad 16
Sed eſt ab 11
Ergo by erit 5 pro tertio.
Et yc erit $2\frac{1}{2}$ pro quarto.

Sunt igitur ſex quæſiti numeri $6\frac{1}{2}$. $4\frac{1}{2}$. 5. $2\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. 2, quos invenire oportebat.

PROPOSITIO XXV.

Prop. 28 & 29. l. 6. elem. Ad datam rectam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens, vel excedens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato.



PRIMA PARS.

Sit primo ad datam *ab* applicandum parallelogrammum *axz* æquale rectilineo dato *q*, deficiensque parallelogrammo *bxz*, quod simile sit parallelogrammo dato *dcg*.

Ad latus *cg* in angulo *c* constituatur parallelogrammum
45. 1. el. *mcg* æquale rectilineo dato *q*.

ANALYSIS

14. 6. el.	Ob æqual. *axz. mcg.* S.P.	*cm.*	*ax.*	*xz.*	*cg.*
4. 6. el.	Et ob simil. *bxz. dcg.* S.P.	*cd.*	*cg.*	*xb.*	*xz.*
	Ergo ex æqual. E.P.	*cm.*	*ax.*	*xb.*	*cd.*

Ergo solutum.

CON-

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat parallelogrammum *mcg* rectilineo dato *q* æquale, & ipsis *cm*, & *cd* reciprocæ inveniantur *ax*, & *xb*, quarum summa sit data *ab*. Deinde in angulo *x* æquali ipsi *c* proportionales fiant *cd*. *cg*. *xb*. *xz*. (hoc est parallelogrammum facere *bxz*. simile dato *dcg*) compleaturque totum *bxy*. Dico parallelogrammum *axz*, quod ex const. deficit parallelogramo *bxz* simili dato *dcg*, æquale esse rectilineo dato *q*.

Cum enim sint proportionales ex constr. *cm*. *ax*. *xb*. *cd*, & ex similitudine parallelogrammorum *bxz*. *dcg*, *cd*. *cg*. *xb*. *xz*: erunt ex æqualitate proport. *cm*. *ax*. *xz*. *cg* (communis ratio *xb*. *cd*.) ergo parallelogrammum *axz* æquale erit parallelogrammo *mcg*, idest rectilineo dato *q*. Quod erat faciendum.

DETERMINATIO.

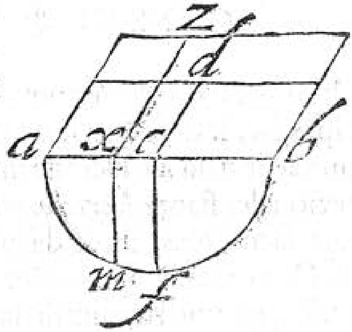
Si media inter *cd*, & *cm* maior foret semisse datæ *ab*, perspicuũ est iuxta determinationem prop. 1. Introd. problema construi non posse. Vnde satis superque constat id ipsum, quod in prop. 27. lib. 6. elem. ostenditur: libet tamen hoc theorema stylo nostro resolvere, & demonstrare.

THEOREMA.

Omnium parallelogrammorum ad eamdem rectam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis similibus, maximum est id, quod à dimidia describitur. *prop. 27 6. el.*

 Sint

Sint ad datam *ab* applicata duo parallelogramma *axz. acd*, parallelogrammis defficientia similibus *bxz. bcd*. Dico parallelogrammũ *acd.* super dimidia *ac* descriptum maximum esse omnium, &c.



ANALYSIS.

Si igitur *axz* non est minus quam *acd*.

Vide	Sit fieri potest.	*axz* +q. *acd*.
coroll.	Ergo dissolu. ratio.	*ax. ac.* +q. *cd. xz.*
propos.	Sed ob simil. *bxz. bcd.*	*cd. xz.* —∧— *cb. xb.*
fundament. in	Ergo ratio.	*ax. ac* +q. *cb. xb.*
Introd.	Et producendo.	*axb* +q. *acb.*

Quod fieri non potest: ergo resolutum est theorema, cuius demonstratio, vel à principio negativè, vel à fine affirmativè ita se habet.

CONSTR.

Super *ab* describatur semicirculus, & ex punctis *x*, & *c* excitentur perpendiculares *xm. cf.*

DEMONSTR.

Si igitur *axz* non est minus quam *acd*, sit maius, si fieri potest: ergo dissolvendo erit ratio *ax* ad *ac* maior ratione

cd ad

cd ad *xz*; sed ob similitudinem *bxz*. *bcd* ratio *cd* ad *xz*. æquatur rationi *cb* ad *xb*: ergo ratio *ax* ad *ac* maior erit ratione *cb* ad *xb*: ergo rectangulum *axb* sub extremis, idest quadratum *xm* maius erit rectangulo *acb* sub medijs, idest quadrato *cf*, quod fieri non potest, cum *xm* minor sit, quam *cf* (per 15.3.elem.) ergo *axz* minus erit quam *acd*. Quod ostendere oportebat.

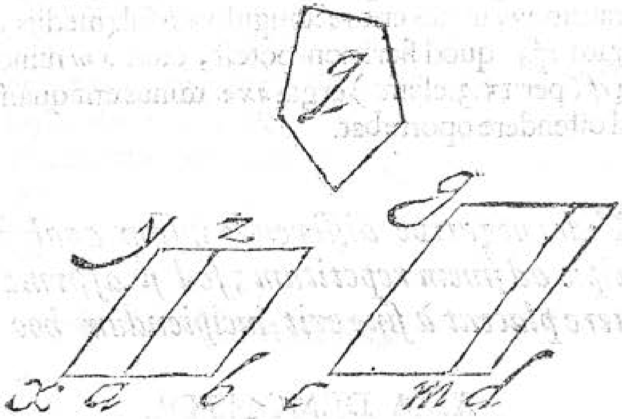
Vides negativè differendo ipsam analysim à principio ad finem repetitam; sed si affirmativè arguere placeat à fine erit incipiendum hoc modo.

ALIA DEMONSTR.

Cum igitur *axb*, idest quadratum *xm* minus sit quam *acb*, idest quadratum *cf* (15.3.elem.) erit dissolvendo ratio *ax* ad *ac* minor ratione *cb* ad *xb*; sed ratio *cb* ad *xb* æquatur rationi *cd* ad *xz* (ob similitudinem *bxz*. *bcd*) ergo ratio *ax* ad *ac* minor erit ratione *cd* ad *xz*: ergo (producendo) *axz* factum sub extremis minus erit *acd* facto sub medijs. Quod ostendere oportebat.

SE-

SECVNDA PARS.



Sit ſecundo ad datam *ab* applicandum parallelogrammum *bxy* æquale rectilineo dato *q* (vel parallelogrammo *mcg*, quod ei æquale ſit factum) excedens parallelogrammo *axy*, quod ſimile ſit parallelogrammo dato *dcg*.

ANALYSIS.

Ob æqualit. *bxy. mcg.* S.P.	*cm.*	*xb.*	*xy.*	*cg.*
Et ob ſimilit. *axy. dcg.* S.P.	*cd.*	*cg.*	*xa.*	*xy.*
Ergo ex æqual. E.P.	*cd.*	*xa.*	*xb.*	*cm.*

Ergo ſolutum.

CONST. ET DEMONST.

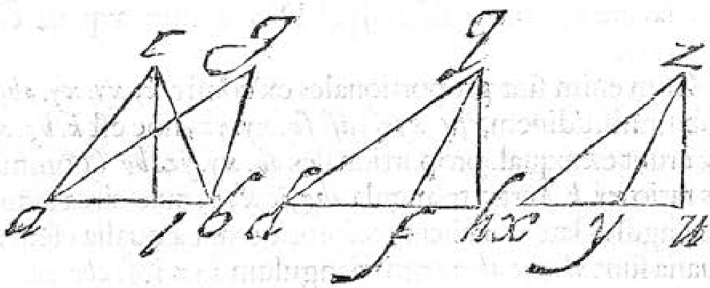
Ipſis *cd*, & *cm* reciprocæ inveniantur *xa*, & *xb*, quarum differentia ſit data *ab*, & in angulo *x*, æquali ipſi *c*, fiant proportionales *cd. cg. xa. xy.* (hoc eſt parallelog. facere *axy* dato *cdg* ſimile.) Dico parall. *bxy* ad datam *ab* applica-
tum

tum, excedensque parallelog. *axy* simili dato *dcg*, æquale esse rectilineo dato *q*.

Cum enim sint proportionales (ex const.) *cd. xa. xb. cm.* & (ob similitudinem *axy. dcg*) *cd. cg. xa. xy*: erunt ex æqualitate proportionales *cm. xb. xy. cg.* (communis ratio *xa. cd.*) ergo parallelogrammum *bxy* æquale erit parallelog. *mcg*, idest ex constr. rectilineo dato *q*. Quod facere oportebat.

PROPOSITIO XXVI.

Triangulum dato æquale, & alteri dato simile constituere.



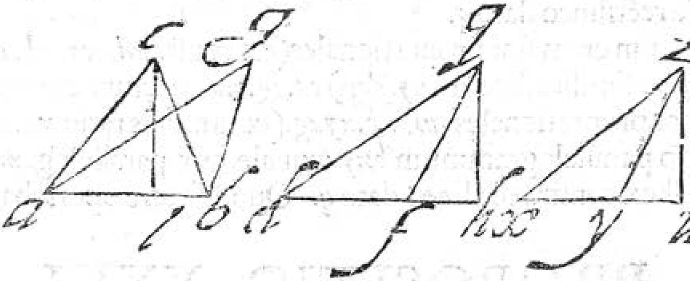
Sit inveniendum triangulum *xyz* æquale dato *abc*, & simile dato *dfq*.

Super eamdem basim *ab*, & inter parallelas *ab*, & *cg* in angulo *abg* æquali dato *f*, triangulum fiat *abg*, quod æquale erit ipsi *abc*, eruntque anguli *abg. f.* & *y.* æquales.

ANALYSIS.

Ob æqual. *abg. xyz.* S.P.	*ab.*	*xy.*	*yz.*	*bg.*	15.6.el. 5.6.el.
Ob simil. *dfq. xyz.* S.P.	*df.*	*fq.*	*xy.*	*yz.*	
Fiant prop. *k. ab. df. fq.*	*k.*	*ab.*			
Ergo ex æqual. E.P.	*k.*	*xy.*	*xy.*	*bg.*	
Ergo solutum.					

CON-



CONSTR. & DEMONST.

Fiant proportionales *fq. df. ab. k*, & inter *k* & *bg.* media invenietur *xy*. In angulo autem *y* æquali dato *f* fiant proportionales *df. fq. xy. yz*, & iungatur *xz* (hoc est triangulum facere *xyz* simile dato *dfq.*) Dico ipsum æquale esse dato *abc*.

Cum enim sint proportionales ex constr. *k, xy. xy. ab*, & (ob similitudinem *dfq. xyz*) *df. fq. xy. yz*, hoc est *k. bg. xy. yz*: erunt ex æqual. proportionales *ab. xy. yz. bg* (communis ratio *xy. k*) ergo triangula *abg*, & *xyz*, quæ circa æquales angulos latera habent reciproca, erunt æqualia; sed æqualia sunt *abc*, & *abg*: ergo triangulum *xyz* ipsi *abc* erit æquale. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

Si constituere oporteret parallelogrammum dato æquale, & alteri dato simile: excepto nomine omnia convenient, quia nobis perinde est plana *xyz. abg. dfq*, triangula, ac parallelogramma concipere.

Præterea quoniam propositum problema po-

poſitione; non tamen longitudine reſolutum eſt propterea quod quantitas *bg* ſciri non poteſt, niſi à trigonometria petatur determinatis gradibus angulorum. Oportet ideo, vt in numeris reſolvi poſsit problema, ad perpendicula recurrere, quæ ex datis lateribus manifeſta fiunt.

Inveniantur igitur perpendiculares *cl. qh* in triangulis datis *abc. dfq*, & trianguli quæſiti *xyz* eſto perpendicularis *zv*. Cum ergo baſes, & altitudines in triangulis æqualibus ſint reciprocæ, & in ſimilibus proportionales, eadem facilitate procedet analyſis. *Prop.* 19 *&* 20. *Introd.*

ANALYSIS.

Ob æqual. *abc. xyz.* S.P.	*ab.*	*xy.*	*zv.*	*cl.*
Et ob ſimil. *dfq. xyz.* S.P.	*df.*	*qh.*	*xy.*	*zv.*
Fiant prop. *qh. df. cl. m.*	*m.*	*cl.*		
Ergo ex æqual. E.P.	*m.*	*xy.*	*xy.*	*ab.*

Ergo ſolutum.

CONSTR. ET DEMONSTR.

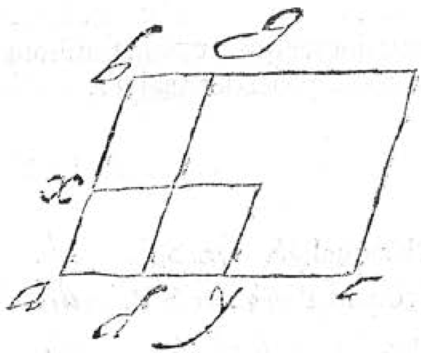
Fiat vt *qh* ad *df*, ita *cl* ad *m*, & inter *m*, & *ab* media inveniatur *xy*. Vt autem *df* ad *xy*, ita fiat *qd* ad *xz*, & *qf* ad *zy*; & *qh* ad *zv*, & factum erit triangulum *xyz* dato *dfq* ſimile. Dico ipſum dato *abc* æquale eſſe.

Cum enim ex conſt. ſint proportionales *m. xy. xy. ab.* & etiam (ob ſimilitudinem triangulorum *dfq. xyz*) *df. qh. xy. zv*, ideſt *m. cl. xy. zv*: erunt ex æquo proportionales *ab. xy. zv. cl.* (communis ratio *xy. m.*) ergo triangula *abc. xyz*, quæ baſes, & altitudines habent reciprocas, æqualia erunt. Quod facere oportebat.

PROPOSITIO XXVII.

Ex dato parallelogrammo, parallelogrammum æquiangulum abſcindere, quod dati ſit imperata pars, & cuius latera ſint in ratione data.

Sit parallelogrammum datum *cab*, ex quo abſcindere oporteat parallelogrammum *yax*, quod tertia pars ſit totius *cab*, & cuius latera *ax*, & *ay* ſint in ratione data *ab* ad *g*.



Fiat *ad* tertia pars ipſius *ac*, & erit para-
1.6.el. llelogrammum *dab* triens totius *cab*, & ipſi æquale erit conſtituendum *yax*.

ANALYSIS.

Ob æqual. *dab*. *yax*. S.P.	*ad*.	*ay*.	*ax*.	*ab*.
Sed debent eſſe proport.	*ax*.	*ay*.	*ab*.	*g*.
Ergo ex æqual. E.P.	*ad*.	*ay*.	*ay*.	*g*.

Ergo ſolutum.

CONSTR. & DEMONST.

Inter *ad*, & *g* media inueniatur *ay*, & fiat *ax* ad *ay*, vt *ab* ad *g*. Dico factum. Sunt

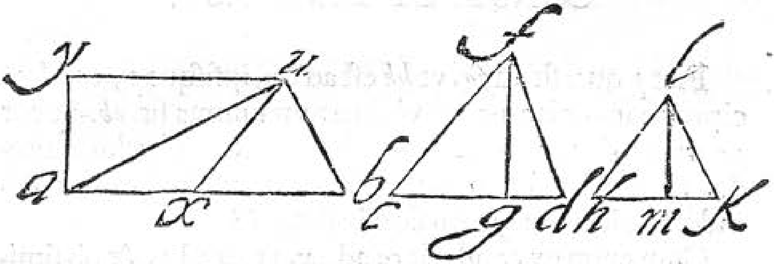
Sunt enim ex conſt. proportionales *ax. ay. ab. g*, vt oportebat, & etiam *ad. ay. ay. g*: ergo ex æquo erit *ad* ad *ay*, vt *ax* ad *ab*. (communis ratio *ay. g.*) & parallelogrammum *yax* æquale ipſi *dab*, ideſt trienti totius *cab*, vt oportebat. Ex dato igitur parallelogrammo, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

Perſpicuum eſt rectam *g* non maiorem rectà *ac* dari debere, vt triangulum abſcindi poſsit.

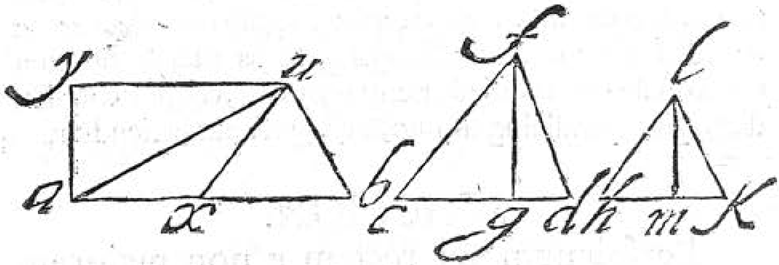
PROPOSITIO XXVIII.

Super datam rectam duo triangula ſub eadem altitudine conſtituere, quorum vnum æquale, alterum verò ſimile ſint duobus datis triangulis.



Super datam *ab* ſint conſtituenda ſub eadem altitudine duo triangula *axv. xbv*, hoc quidem ſimile dato *blk*, illud vero æquale dato *cfd*.

Demittantur perpendicula *fg. lm*. Et ſit altitudo quæſita *ay*. Et quoniam in triangulis æqualibus, baſes, & altitudines ſunt reciprocæ, & in ſimilibus proportionales, in hunc modum inſtituetur analyſis. *prop. 19 & 20. Introd.*



ANALYSIS

Ob æqual. axv. cfd. S.P.	cd.	ax.	ay.	fg.
Et ob ſimil. xbv. hkl. S.P.	xb.	ay.	hk.	lm.
Vel ſi fiant prop.			p.	fg.
Ergo ex æquo. E.P.	cd.	ax.	xb.	p.
Ergo ſolutum.				

CONST. ET DEMONST.

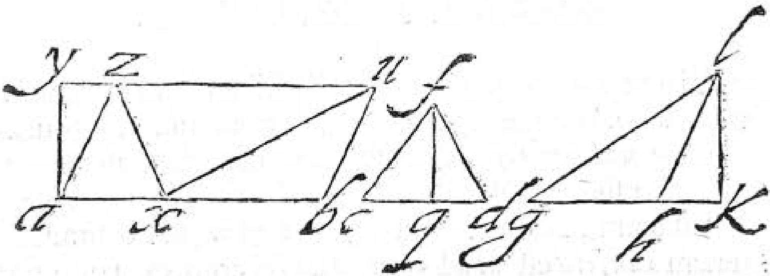
Fiat p quæ ſit ad fg, vt hk eſt ad lm, ipſiſque p, & cd reciprocæ inveniantur ax. xb, quarum ſumma ſit ab. Super xb triangulum fiat xbv dato hlk ſimile, ſitque ipſius altitudo ay. Dico quodcumque triangulum axv ſuper ax, & ſub eadem altitudine ay æquale eſſe dato cfd.

Cum enim ex conſtr. ſit cd ad ax, vt xb ad p, & ob ſimilitudinem xbv. hlk ſit xb ad ay, vt hk ad lm, ideſt ex conſtr. vt p ad fg: erit ex æquo cd ad ax, vt ay ad fg (communis ratio xb. p.) ergo triangula erunt æqualia axv. cfd, cum habeant baſes, & altitudines reciprocas. Super rectam igitur datam, &c. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSITIO XXIX.

Super datam rectam duo triangulæ constituere sub eadem altitudine, duobus datis triangulis similia.



Super datam rectam *ab*, sub eadem altitudine sint constituenda triangula *azx*, *xvb* datis *cfd*. *glh* similia.

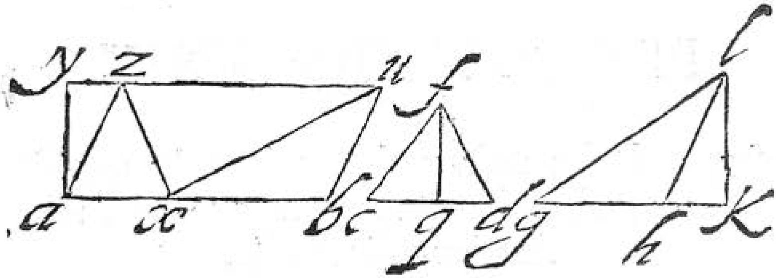
Demittantur perpendicula *fq*. *lk*. Et sit altitudo quæsita *ay*. Quoniam igitur in triangulis similibus bases, & altitudines sunt proportionales, ita procedet analysis. *prop.20 Introd.*

ANALYSIS.

Ob simil. *azx*. *cfd*. S.P.	*ax*.	*ay*.	*cd*.	*fq*.
Et ob simil. *xbv*. *ghl*. S.P.	*xb*.	*ay*.	*gh*.	*lk*.
Vel si fiant prop.			*m*.	*fq*.
Ergo ex æquo E.P.	*ax*.	*xb*.	*cd*.	*m*.

Ergo solutum.

CON-



CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt *lk* ad *gh* ita *fq* ad *m*, & dividatur *ab* in *x* in ratione *cd* ad *m*. Deinde ſuper *ax*, & *xb* triangula conſtituantur *azx*. *xvb* datis *cfd*. *glh*. ſimilia, ſitque triangulum *azx* ſub altitudine *ay*. Dico ſub eadem eſſe triangulum *xvb*.

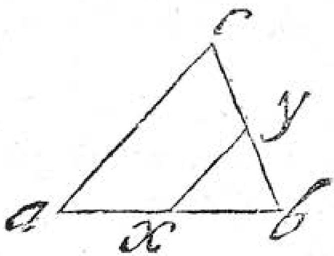
Eſt enim ex conſtr. *ax* ad *xb*, vt *cd* ad *m*, & ob ſimilitudinem *azx*. *cfd* eſt *ax* ad *ay* vt *cd* ad *fq*: ergo ex æquo erit *xb* ad *ay*, vt *m* ad *fq*, hoc eſt ex conſtr. vt *gh* ad *lk*; ſed triangula *xvb*. *glh* ſunt ſimilia, quare *gh* ad *lk* debet eſſe vt *xb* ad altitudinem: ergo *ay* altitudo erit trianguli *xbv*. Super datam igitur rectam duo triangula, &c. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSITIO XXX.

Triangulum datum rectà vni laterum parallela in quascumque rationes diuidere.

Sit datum triangulum *abc* rectà *xy*, lateri *ac* parallela, ita diuidendum, vt triangulum *xby* tertia pars sit ipsius *abc*.



ANALYSIS

Sit igitur	$xby \ \underline{\Delta}\ \frac{1}{3}abc.$			
Ergo S. P.	$\frac{1}{3}ab.$	$xb.$	$by.$	$bc.$
Sed ob simil. S. P.	$ab.$	$bc.$	$xb.$	$by.$
Ergo ex æquo E. P.	$ab.$	$xb.$	$xb.$	$\frac{1}{3}ab.$
Ergo solutum.				

CONSTR. & DEMONSTR.

Inter *ab*, & ipsius tertiam partem media inueniatur *xb*, ducaturque ipsi *ac* parallela *xy*. Dico factum.

Cum enim sint proport. ex constr. *ab. xb. xb.* $\frac{1}{3}$*ab*, & ob simil. *ab. bc. xb. by.* erunt ex æquo prop. $\frac{1}{3}$*ab. xb. by. bc* (ratio communis *xb. ab.*) ergo triangulum *xby* triens erit totius *abc*. Quod erat faciendum.

SCHO-

SCHOLION.

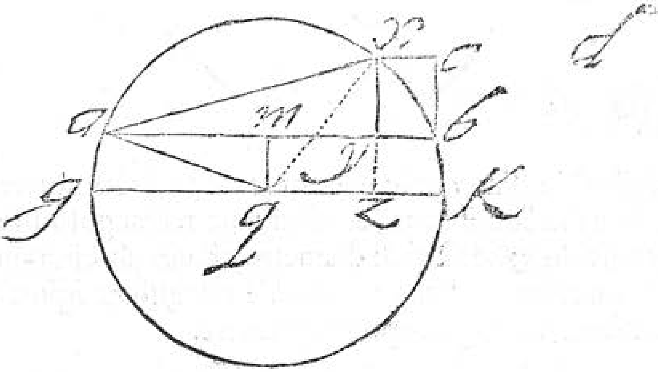
Ex prop. 19. lib. 6. elem. conſtat triangula ſimilia eſſe in duplicata ratione laterum homologorum, hoc eſt vt quadrata ipſorum laterum; vnde quadratum *xb* æquabitur trienti quadrati *ab*, & proportionales erunt *ab*. *xb*. *xb*. ${}_{1}ab$, & erit conſtructio eadem, & demonſtratio brevior.

Vtroque modo expediri poterunt omnes caſus circa diviſionem trianguli lineis vni laterum parallelis. Neque in re facillima nos detineri expedit.

PRO-

PROPOSITIO XXXI.

Data baſe, altitudine, & rectangulo ſub cruribus invenire triangulum. *Vide Vietam appendicul. 1.*



Eſto triangulum, de quo quæritur *axb*. Datur baſis *ab*, altitudo *bc*, & rectangulum *axb* ſub lateribus æquale ponitur quadrato *d*. Circumſcribatur circulus, cuius diameter *gk*.

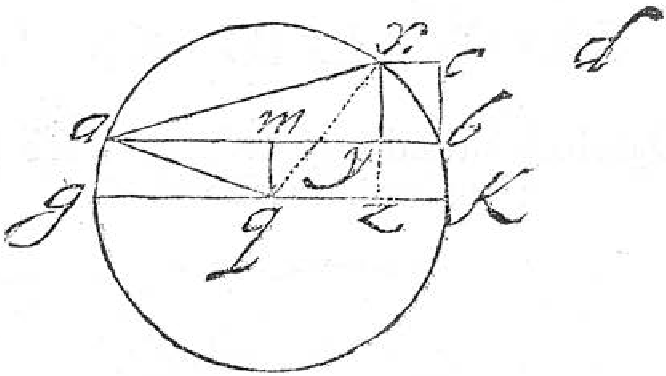
ANALYSIS

Sint igitur prop.	*d.*	*ax.*	*xb.*	*d.*
Sed per 15. Introd. S.P.	*cb.*	*ax.*	*xb.*	*gk.*
Ergo ex æquo E.P.	*cb.*	*d.*	*d.*	*gk.*
Ergo ſolutum.				

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt *cb* ad *d* ita *d* ad *gk*. Et circa diametrum *gk* circulus deſcribatur, in quo aptetur *ab*, & ipſi normalis *xy*, æ-

Bb qualis



qualis altitudini *bc*, & iungantur *ax*, & *xb*. Erit igitur rectangulum sub lateribus *ax*, & *xb* æquale rectangulo sub perpendiculo *xy*, id est *cb*, & diametro *gk*, circuli circumscripti. Hoc est ex constr. quadrato *d*. Triangulum igitur construximus, &c. Quod oportebat facere.

SCHOLION.

Si in numeris proponatur problema, bisecta *ab* in *m*, & *gk* in *q*, ducantur *aq*, & *qx*, protrahaturque *xy* ad *z*. In triangulo igitur rectangulo *amq* notæ sunt *am*, & *aq*, quare *mq*, id est *yz* nota erit, & quia *xy* datur, erit cognita tota *xz*, vnde in triangulo rectangulo *qxz* innotescet *qz*, id est *my*, adeoque nota fient segmenta baseos *ay*, & *yb*, & exinde latera trianguli *ax*, & *xb*, &c.

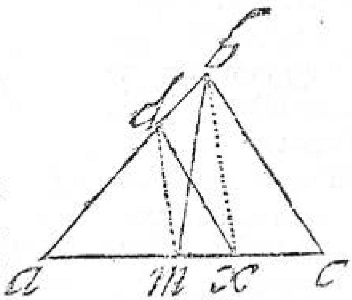
PRO-

PROPOSITIO XXXII.

Datum triangulum ex dato puncto in data ratione dividere.

Vide R. P. Tacquet in Geomet pract. c. 14. li. 2. R. P. Zarag. in Geomet. magn. tom. 2. probl. 8.

EX VERTICE.



Sit primo dividendum triangulum *abc* ex vertice *b* in ratione data *am* ad *mc*. Ergo si ducatur *bm* factum erit quod petitur, sunt enim triangula *abm*, & *mbc*, vt bases *am*, & *mc*. per 1. 6. elem.

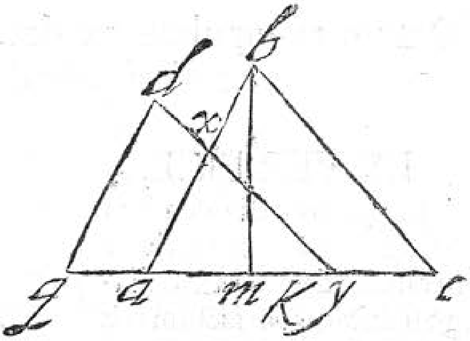
EX PVNCTO IN LATERE.

Sit secundo dividendum ex dato in latere puncto *d*, & sit quæsita linea *dx*. Ergo triangulum *dax* æquari debet triangulo *bam*, & cum habeant communem angulum *a* latera erunt reciproca. Quare si fiat vt *ad* ad *ab* ita *am* ad *ax*, & ducatur *dx*. Factum erit quod postulatur.

NOTA.

In hoc casu considerare oportet an positio puncti dati commoda sit ad divisionem vnius, vel vtriusque laterum oppositorum, in ratione data, vt pateat an constructio variari possit, partes tamen divisionis semper inter se æquales erunt, & solutio vnica.

EX PVNCTO EXTRA.



Sit tertio dividendum triangulum *abc* ex dato extra illud puncto *d*, & sit quæsita linea *dxy*: ergo triangulum *axy* æquari debet ipsi *abm*. Ducatur autem *dq* ipsi *ab* parallela occurrens basi *ac* protractæ in *q*, vt punctum *d* cum triangulo *abc* connexionem habeat, erunt enim triangula *qdy*, & *axy* similia, hoc est angulum *q* angulo *a* æqualem facere.

ANALYSIS

Ob æqual. *abm*. *axy*. S.P.	*ab*.	*ax*.	*ay*.	*am*.
Fiant prop. *qd*. *ab*. *am*. *ak*.	*qd*.			*ak*.—
Et ob simil. *qdy*. *axy*. S.P.	*qd*.	*qy*.	*ax*.	*ay*.—
Ergo ex æquo. E.P.	*qy*.	*ay*.	*ay*.	*ak*.
Et divid.	*qa*.	*ay*.	*ky*.	*ak*.
Ergo solutum.				

CONST. ET DEMONST.

Fiat vt *qd* ad *ab* ita *am* ad *ak*, & ipsis *qa*, & *ak* reciprocæ inveniantur *ay*, & *ky*, quarum differentia sit ipsa *ak*, iungaturque *dy* secans latus *ab* in *x*. Dico factum.

Cum enim ex constr. sint proportionales *qa*. *ay*. *ky*. *ak*, & compon. *qy*. *ay*. *ay*. *ak*, & (ob similitudinem triangulo-

rum

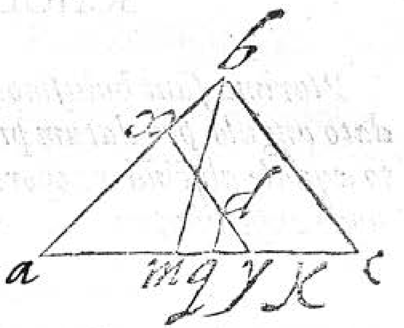
rum *qdy. axy*) *qd. qy. ax. ay*: erunt ex æquo proportionales *qd. ax. ay. ak*. (communis ratio *qy. ay*) hoc eſt ex conſtr. *ab. ax. ay. am*: ergo triangula *abm. axy*, quæ circa communem angulum *a* latera habent reciproca, erunt æqualia, adeoque vt triangulum *abm* ad triangulum *mbc*, hoc eſt vt *am* ad *mc*, ita erit triangulum *axy* ad quadrilaterum *xycb*. Triangulum igitur *abc* diviſimus, &c. quod facere oportebat.

N O T A.

Etiam in hoc caſu conſideranda eſt poſitio dati puncti *d*, an ipſa apta ſit, vt ſuper latus oppoſitum *bc* fieri poſsit conſtructio quemadmodum ſuper latus oppoſitum *ac* facta eſt.

EX PVNCTO INTRA.

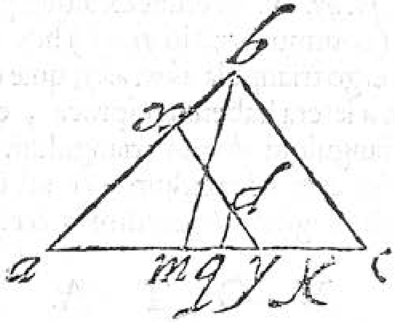
Sit quartò dividendum triangulum *abc* ex dato intra illud puncto *d*, & ſit quæſita linea *xdy*. Ducatur *dq* ipſi *ab* parallela, & analyſis eodem modo procedet vti in caſu antecedente.



ANALYSIS.

Ob æqual. *abm. axy*. S.P.	*ab.*	*ax.*	*ay.*	*am.*
Fiant prop. *qd. ab. am. ak.*	*qd.*			*ak.* —
Et ob ſimil. *qdy. axy*. S.P.	*qd.*	*qy.*	*ax.*	*ay.* —
Ergo ex æqual. E.P.	*qy.*	*ay.*	*ay.*	*ak.*
Et per diviſ.	*aq.*	*ay.*	*yk.*	*ak.*

Ergo



Ergo solutum, & manifestum constructio, & demonstratio. Cæterum cum ipsis *aq*, & *ak* reciprocas oporteat invenire *ay*, & *yk*, quarum summa sit ipsa *ak*, notandum erit an problema impossibile sit, an vero vnam, duasve solutiones admittat. Et etiam vtrum super latus *bc*, vel super latus *ab* fieri possit constructio, quod à positione pendet puncti dati, vt in antecedentibus casibus.

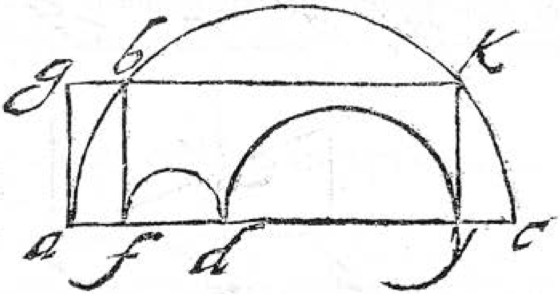
SCHOLION.

Plurima sunt huiusmodi problemata, vt si ex dato angulo per datum punctum triangulum dato æquale abscindere oporteret, quæ omnia eodem modo expediuntur.

PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

Semicirculo existente *abc*, & puncto *d*, describere in *ac* per *d* semicirculum, ita vt si ducatur contingens *fb* sit ipsi *ad* æqualis. *Vide Pappum lib. 7. prop. 87*



ANALYSIS, CONSTR. & DEMONST.

Hoc problema facillimum est. Si enim perpendicularis excitetur *ag* ipsi *ad* æqualis, ducaturque ipsi *ac* parallela *gk*, secans circumferentiam in *b*, & *k*, & demittantur perpendiculares *bf*, & *ky*: puncta *f*, & *y* problema efficient, quia descriptis semicirculis *fd*. *dy*, contingentes erunt *bf*. *ky*, & æquales ipsi *ga*, idest *ad*, vt petitur.

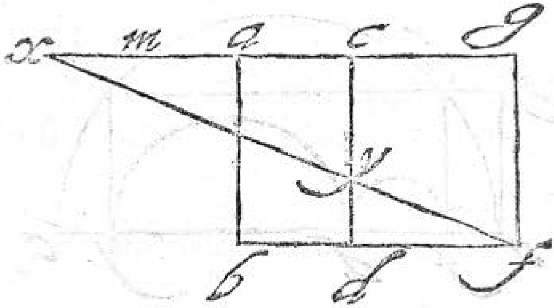
Quod si *ad* maior fueri dimidio ipsius *ac* problema construi non posse, perspicuum est, quia eam non caperet semicirculus, vt ad primam propositionem Introd. animadvertimus, ac propterea hanc determinationem in huiusmodi problematibus semper omittimus. Si autem *ad* dimidio *ac* fuerit æqualis, vnica erit resolutio, si vero minor duas accipiet noster casus.

PRO-

PROPOSITIO XXXIV.

Vide Pappum lib. 7. prop. 164.

Parallelogrammo dato *abdc*, à dato puncto *f* rectam ducere *fyx*, & facere triangulum *xcy* æquale parallelogrammo dato *abdc*.



Quoniam igitur triangulum *xcy* æquari debet parallelogrammo *ad*: erit parallelogrammum sub *xc*, & *cy* duplum parallelogrammi *ad*: quare si fiat *ma* ipsi *ac* æqualis, erit parallelogrammum sub *mc*, & *cd* parallelogrammo sub *xc*, & *cy* æquale. Compleatur parallelogrammum *dfgc*, & erit *gf* ipsi *cd* æqualis.

ANALYSIS.

Sit igitur	*xc:cy*	— ∧ —	*mc:cd.*	
Ergo S.P.	*mc.*	*xc.*	*cy.*	*cd.*
Sed ob simil *xcy. xgf.* S.P.	*xg.*	*gf.*	*xc.*	*cy.*
Ideft		*cd.*		
Ergo ex æqual. E.P.	*xg.*	*xc.*	*xc.*	*mc.*
Et divid.	*cg.*	*xc.*	*xm.*	*mc.*
Ergo solutum.				

CONS-

CONSTR. & DEMONSTR.

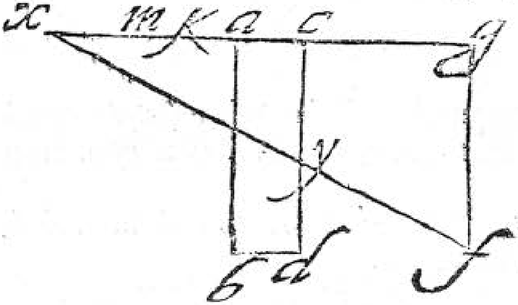
Fiat *mc* dupla ipsius *ac*, & compleatur parallelogrammum *dfgc*, ipsisque *cg*, & *mc* reciprocæ inveniantur *xc*, & *xm*, quarum differentia sit *mc*, & iungatur *xf* secans latus *cd* in *y*. Dico factum.

Est enim ex const. *cg* ad *xc*, vt *xm* ad *mc*, & compon. *xg* ad *xc*, vt *xc* ad *mc*; sed ob similitudinem triangulorum *xcy*. *xgf* est *xg* ad *gf*, idest ad *cd* vt *xc* ad *cy*: igitur ex æqualitate *mc* ad *xc* erit vt *cy* ad *cd*: ergo parallelogrammum sub *xc*, & *cy* æquale erit parallelogrammo sub *mc*, & *cd*, & dimidiando triangulum *xcy* parallelogrammo *abcd*. Quod facere oportebat.

SCHOLION.

Quod autem punctum *f* ponatur in latere protracto *bd*, vel extra illud parum refert. Nam eodem modo procedit analysis.

Sit datum punctum *f* extra latus *bd*, & fiat *fg* ipsi *cd* parallela.



ANALYSIS.

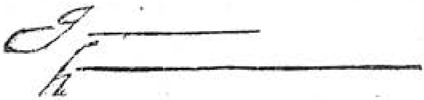
Sit igit.	*xc:cy*	— Λ —	*mc:cd.*	
Ergo S. P.	*mc.*	*xc.*	*cy.*	*cd.*
Vel si fiant	*kc.*			*fg.*
Sed ob simil. S.P.	*xc.*	*cy.*	*xg.*	*gf.*
Ergo ex æquo E.P.	*kc.*	*xc.*	*xc.*	*xg.*
Et per divis.	*kc.*	*xk.*	*xc.*	*cg.*

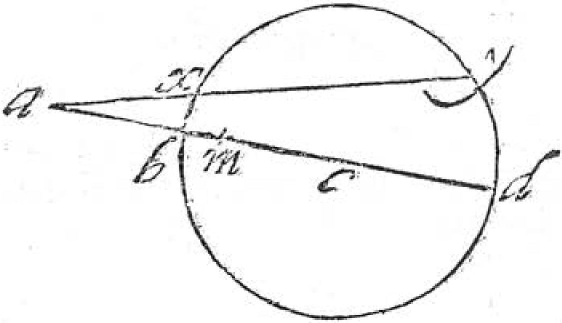
Ergo solutum; & manifesta constructio, & demonstratio.

Vide R. P.Greg. tom. 1. lib. 3. prop.46 de quadratura circuli.

PROPOSITIO XXXV.

Ex dato puncto rectam ducere, quæ à dato circulo secetur in data ratione.





Ex dato puncto *a* sit ducenda recta *axy*, quæ à dato circulo *bxy* secetur in *x*, & *y*, ita vt *ax* ad *xy* sit in ratione data *g* ad *h*.

Ex dato puncto *a* per centrum *c* ducatur *abcd*, & fiat vt *g* ad *h* ita *am* ad *md*.

ANALYSIS.

	Sint igit.prop.	*ax.*	*xy.*	*am.*	*md.*
36.3. &	Ergo per comp.E.P.	*ax.*	*ay.*	*am.*	*ad.*
14.6.*el.*	Sed S.P.	*ad.*	*ay.*	*ax.*	*ab.*
	Ergo ex æqual.E.P.	*am.*	*ax.*	*ax.*	*ab.*
	Ergo solutum.				

CON-

CONSTR. & DEMONST.

Inter *am*, & *ab* media inveniatur *ax*, quæ ex dato puncto *a* circulo occurrat in *x*, & producatur ad *y*. Dico *ax* ad *xy* esse vt *am* ad *md*, ideſt vt *g* ad *h*.

Eſt enim ex conſtr. *am* ad *ax*, vt *ax* ad *ab*; ſed *ad* ad *ay* eſt vt *ax* ad *ab*: ergo vt *am* ad *ax* ita erit *ad* ad *ay*, & altern. vt *am* ad *ad* ita *ax* ad *ay*: ergo per diviſ. vt *am* ad *md* ita erit *ax* ad *xy*, quod facere oportebat.

SCHOLION.

Quoniam *ab* minima, & *ad* maxima ſunt omnium, quæ ex dato puncto *a* in datum circulum duci poſſunt, perſpicuum propterea eſt minimam rationem omnium, quæ aſsignari debeant, eſſe vt *ab* ad *bd*.

PROPOSITIO XXXVI.

Dato circulo, per datum in eo punctum rectam ducere, quæ in dato puncto secetur in ratione data.

Circulus *bdy* sit datus, & per datum in eo punctum *a* oporteat rectam ducere *xay* ita vt *xa* ad *ay* sit in ratione data vt *g* ad *h*.

Per centrum *c*, & datum punctum *a* diameter ducatur *bd*.

ANALYSIS

	Sint igitur prop.	*xa.*	*ay.*	*g.*	*h.*
	Vel si fiant			*ad.*	*k.*
35.3.&	Sed S. P.	*ba.*	*xa.*	*ay.*	*ad.*
14.6.el.	Ergo ex æqual. E. P.	*ba.*	*ay.*	*ay.*	*k.*
	Ergo solutum.				

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt *g* ad *h* ita *ad* ad *k*, & inter *ba*, & *k* media inveniatur.

tur *ay*, quæ ex puncto dato *a* circulo occurrat in *y*, & protrahatur *ya* ad *x*. Dico *xa* ad *ay* esse vt *g* ad *h*. Quoniam enim ex constr. est *ba* ad *ay* vt *ay* ad *k*; & vt *ba* ad *ay* ita *xa* ad *ad*: igitur *xa* ad *ad* erit vt *ay* ad *k*,& altern. *xa* ad *ay*, vt *ad* ad *k*, idest vt *g* ad *h*, quod facere oportebat.

SCHOLION.

Quoniam autem *ba* maxima, & *ad* minima sunt omnium, quæ per datum punctum *a* duci possunt, patet proprerea maximam rationem, quæ ipsis *xa*, & *ay* asignari potest, esse vt *ba* ad *ad*.

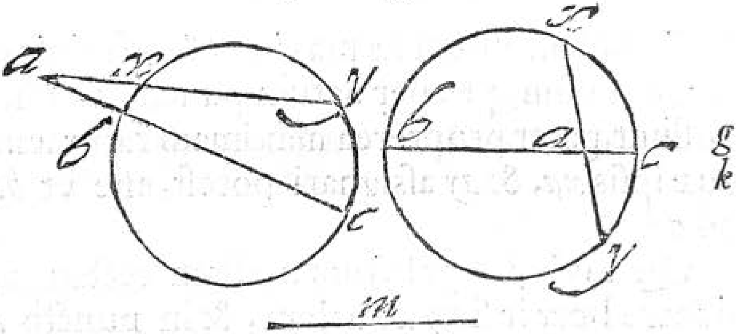
Quamvis per punctum *a* aliam rectam *zv* ducere licet ipsi *xy* æqualem, & in puncto *a* in eadem ratione divisam (nam cum *ay*, & *az* æquales fiant, & æquales erunt *ax*, & *av*, quia æqualiter distabunt à centro) non tamen ideò dicendum erit problema duas admittere solutiones; sed vnam tantum, quæ positione variari poterit, quod etiam in antecedente propositione fieri potest, & etiam in alijs multis.

PRO-

PROPOSITIO XXXVII.

Vide Marinum Getaldum in Apollonio redivivo, probl. 1.

In dato circulo aptare rectam lineam magnitudine datam, quæ ad datum punctum pertingat.



In dato circulo *bxc*, ex puncto *a* siue extra , siue intra dato, oportet rectam ducere *axy*, ita vt aptata sit *xy* æqualis datæ *m*.

ANALYSIS

Ducatur per centrum , & per datum punctum *a* recta *abc*, & per 35. & 36.3. elem. erunt proportionales *ab*. *ay*. *ax*. *ac*. Ergo solutum, cum aggregatum, seu differentia ipsarum *ay*, & *ax* sit data *m*.

CONST. ET DEMONST.

Ipsis *ab*. *ac* reciprocæ inveniantur duæ rectæ lineæ *g*, & *k*, quarum differentia sit data *m*, quando punctum *a* extra circulum datur; vel quarum summa sit ipsa *m*, quando intra

intra circulum fuerit datum punctum *a*. Ex quo aptetur *ay* æqualis ipsi *g*, & producatur ad *x*. Dico *xy* æqualem esse datæ *m*.

Est enim ex constructione *ab* ad *g*, vt *k* ad *bc*; sed (per 35. & 36. 3. elem.) *ab* ad *ay* est vt *ax* ad *bc*: ergo cum *ay* facta sit æqualis ipsi *g*: erit *ax* ipsi *k* æqualis. Data autem *m* iam aggregatum iam differentia est ipsarum *g*, & *k*: ergo etiam ipsarum *ay*, & *ax* Quod facere oportebat.

SCHOLION.

Perspicuum est datam rectam *m* numquam posse diametro *bc* maiorem esse (quia in circulo maxima est diameter) neque medià proportionali inter *ab*, & *ac* minorem, quando punctum *a* intra circulum fuerit datum (vt patet ex limitatione prop. 1. Introd.) Potest tamen alia aptari ex puncto, vel per punctum *a*, quæ æqualis sit ipsi *ay*, vel *xy*, & duæ erunt positiones; sed vnica resolutio quoad longitudinem in vtroque casu.

IN NVMERIS.

Sit primo datum punctum extra circulum, valeatque *ab*. 18. & *ac*. 50, & data *m* 25. Ergo duos numeros oportet invenire, quorum differentia sit 25 reciprocos ipsis 18. & 50. Ergo per prop. 1. Introductionis.

$\frac{1}{2}m$. $12\frac{1}{2}$. quadratum	$156\frac{1}{4}$
Factum sub 18, & 50.	900
Summa	$1056\frac{1}{4}$
$\sqrt{}$. est	$32\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}m$ est	$12\frac{1}{2}$
Summa, & differentia	45 & 20.

Est igitur *ay*. 45. & *ax* 20, quorum differentia *xy* est 25. vt oportebat.

Sit

Sit secundo punctum *a* intra circulum, & valeat *ab* 18, & *ac*.50 & data *m* 65. Ergo duos numeros oportet invenire, quorum summa sit 65 reciprocos ipsis 18 & 50.

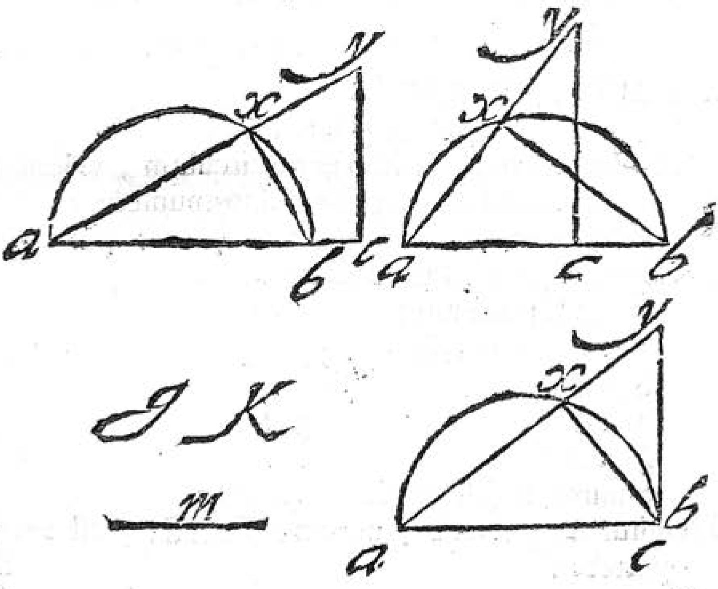
$\frac{1}{2}$*m*. $32\frac{1}{2}$ quadrat.	$1056\frac{1}{4}$
Factum sub 18 & 50	900
Differentia	$156\frac{1}{4}$
√.est	$12\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$ *m* est	$32\frac{1}{2}$
Summa, & differentia	45. & 20.

Est igitur *ay* 45. & *ax* 20: ergo tota *xy* 65, vt oportebat.

Vide Marinum Getaldum in Apollonio redivivo, probl. 2.

PROPOSIT. XXXVIII.

Dato semicirculo, & rectâ linea ad diametrum perpendiculari, inter ipsam rectam, & circumferentiam semicirculi ponere lineam rectam magnitudine datam, quæ ad semicirculi angulum pertingat.



Sit

Sit datus ſemicirculus axb,& ad diametrum ab perpendicularis cy, oportet ex a rectam ducere axy, ita vt intercepta xy æqualis ſit rectæ datæ m. Ducatur xb, & ſimilia erunt triangula axb, & ayc, cum habeant angulos rectos axb,& c,& a communem.

ANALYSIS.

Ob ſimil. $abx.acy$. S.P. $ab.\ \ ax.\ \ ay.\ \ ac.$
Ergo ſolutum, cum differentia inter ax, & ay debeat eſſe data m.

CONSTR. & DEMONSTR.

Ipſis ab,& ac duæ rectæ lineæ reciprocæ g, & k inveniantur, quarum differentia ſit data m, & ex a aptetur ay æqualis maiori ipſarum k, ſecans circumferentiam in x. Dico xy æqualem eſſe datæ m.

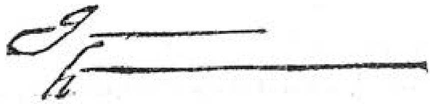
Cum enim ex conſtr. ſit ab ad g vt k, ideſt ay ad ac,& ex ſimilitudine triangulorum axb, ayc, ſit ab ad ax,vt ay ad ac, æquales etiam erunt ax, & g; ſed inter g,& k differentia eſt recta m: ergo etiam inter ax,& ay. Poſita eſt igitur xy æqualis datæ m. Quod facere oportebat.

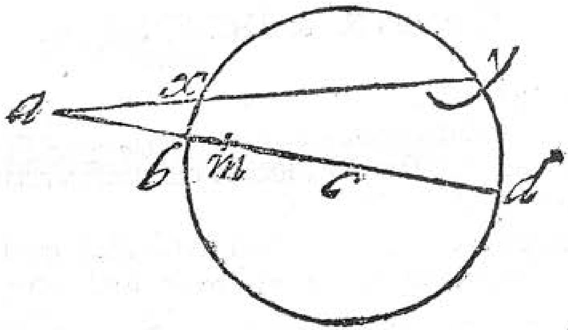
SCHOLION.

Quando diameter protracta fuerit, ſatis obvium eſt omnibus, minimam, quæ inter circumferentiam, & perpendicularem interijci poteſt, ipſum eſſe ſegmentum bc.

PROPOSITIO XXXIX.

Ex dato puncto in datum circulum rectam ducere, vt rectangulum sub segmentis æquale sit dato plano.





Ex dato puncto *a* in datum circulum *axd* rectam oporteat ducere *axy*, vt rectangulum sub segmentis *ax.xy* sit æquale rectangulo sub datis *g*, & *h*, vel, quod idem est, vt sint proportionales *g. ax. xy. h.* Ex *a* per centrum *c* recta ducatur *abcd*.

ANALYSIS

Sint igit. prop.	*g.*	*ax.*	*xy.*	*h.*
Sive si fiant prop.	*ab.*	*ax.*	*xy.*	*am.*
Sed per 36.3.el.S.P.	*ad.*	*ay.*	*ax.*	*ab.*
Ergo ex æquo E.P.	*ad.*	*ay.*	*am.*	*xy.*
Et vt 1. ad 1. ita differ.	*ad.*	*ay.*	*md.*	*ax.*
Idest vt supra.	*ax.*	*ab.*		

Ergo solutum.

CONS

CONSTR. & DEMONST.

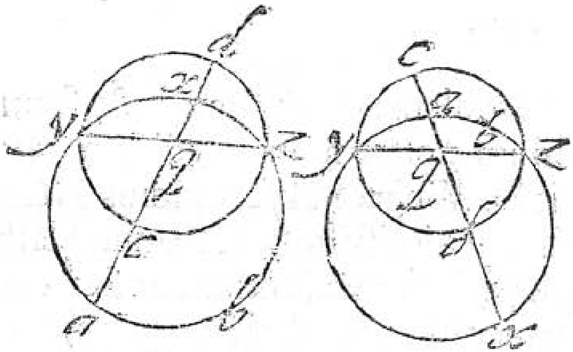
Fiat vt *ab* ad *g* ita *h* ad *am*,& inter *md*,& *ab* media inveniatur *ax*, quæ protrahatur ad *y*. Dico factum.

Cum enim ſit ex conſtr. *md* ad *ax*, vt *ax* ad *ab*, & per 36.3.el. *ad* ad *ay*, vt *ax* ad *ab*: erit ex æquo *ad* ad *ay*, vt *md* ad *ax*, & quia vt vnus ad vnum ita ſunt differentiæ, erit *ad* ad *ay*, ideſt *ax* ad *ab*, vt *am* ad *xy* quare rectangulum *axy* rectangulo *bam*, ideſt ſub *g*, & *h* erit æquale. Quod facere oportebat.

Hoc problema excogitavit, & ſecundum methodum noſtram in prædictum modum reſolvit D. Michael Hyeronimus Hernando iuvenis ingenioſiſsimus, & rerum Mathematicarum peritiſsimus, amicus noſter chariſsimus, & manifeſtum eſt rectangulum ſub datis *g*, & *h* minus eſſe debere rectangulo *dab*, vt conſtrui poſsit problema.

PROPOSITIO XXXX.

Dato circulo, datiſque duobus punctis, ſive extra, ſive intra illum: per data duo puncta circulum deſcribere, qui dati circuli peripheriam biſariam ſecet.



Sit datus circulus, cuius centrum *q*, dataque ſint puncta *a*, & *b*, ſive extra, ſive intra illum. Oportet circulum deſcribere *ayzb*, qui dati circumferentiam biſariam ſecet in *y*, & *z*, qua propter recta *yz* tranſibit per centrum *q*. Et ducta recta *ad* circulum *ayb* ſecabit in *x*.

ANALYSIS.

	In circulo *cyd*. S.P.	*cq*.	*yq*.	*qz*.	*qd*.
35.3.el.	Et in circulo *ayx*. S.P.	*aq*.	*yq*.	*qz*.	*qx*.
	Ergo ex æquo E.P.	*aq*.	*cq*.	*qd*.	*qx*.
	Ergo ſolutum.				

CONS-

CONST. ET DEMONST.

Per *q* centrum ex vtrovis datorum puncto *a* recta ducatur *acqd*, & fiant proportionales *aq. cq. qd. qx*. Per puncta autem *x. a. b.* circulus describatur *axb*, secans priorem in puncto *y*, ex quo per *q* ducatur recta *yqz*. Dico circulum *axb* in punctis *y*, & *z* bifariam dividere circumferentiam circuli dati *cd*.

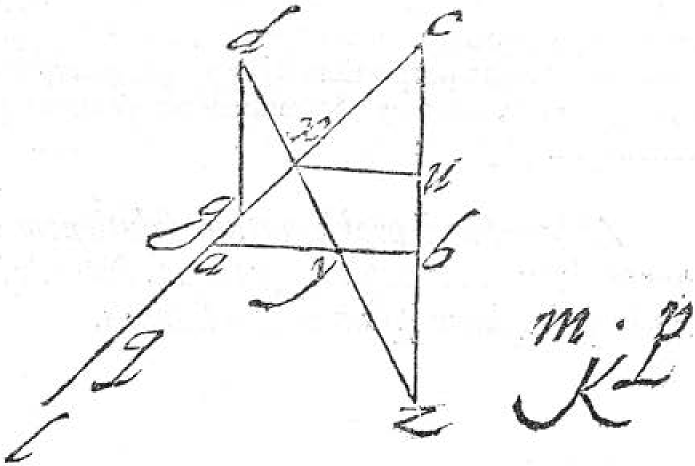
Cum enim sint proportionales (ex constructione) *aq. cq. qd. qx*, & (quia se intersecant in circulo *axb*) *aq. yq. qz. qx*: erunt ex æquo proportionales *cq. yq. qz. qd*: ergo recta *yqz* erit in circulo dato *cyd*, & transiens per centrum *q* bifariam diuidet peripheriam. Quod erat faciendum. ex conu. 35. lib. 3. el.

Ad huiusmodi problematum solutionem non parum iuvat contemplatio prop. 23. Introductionis, in quem finem ipsam ibi tradidimus.

PRO-

PROPOSITIO XXXXI.

Dato triangulo *abc*, ex dato extra illud puncto *d* rectam ducere *dxyz*, ita vt interceptæ *xy*, & *yz* sint in ratione data *m* ad *p*.



Ducatur *dg* ipsi *bc* parallela, hoc est angulum *d* angulo *z* æqualem facere, & ex puncto *x* ipsi *ab* parallela intelligatur *xv*.

CONDITIONES.

Ex condit. S.P.	*m.*	*p.*	*xy.*	*yz.*
Vel per 2.6.el.			*vb.*	*bz.*
Ob simil. *dgx. xcz.* S.P.	*dg.*	*gx.*	*cz.*	*xc.*
Ob simil. *abc. xvc.* S.P.	*ac.*	*bc.*	*ax.*	*vb.*

ANA-

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*m.*	*p.*	*vb.*	*bz.* —
Et etiam.	*ac.*	*bc.*	*ax.*	*vb.*
Fiant prop.	*k.*	*m.*		—
Ergo ex æquo E.P.	*p.*	*k.*	*bz.*	*ax.*
Fiant prop.	*cb.*	*qa.*		
Ergo vt 1. ad 1. & E.P.	*p.*	*k.*	*cz.*	*qx.*
Fiant prop.	*gd.*	*lq.*		—
Et sint etiam prop.	*dg.*	*gx.*	*cz.*	*xc.* —
Ergo ex æquo E.P.	*lq.*	*qx.*	*gx.*	*xc.*
Et per comp.	*lq.*	*lx.*	*gx.*	*gc.*
Ergo solutum.				

CONSTR. & DEMONST.

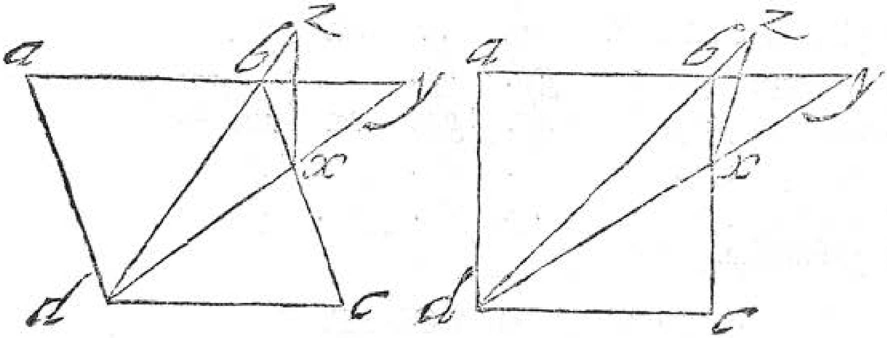
Ducatur *dg* ipsi *bc* parallela, & vt *bc* ad *ac* ita fiat *m* ad *k*, & vt *p* ad *k* ita *cb* ad *qa*, & ita *gd* ad *lq*, ipsisque *lq*, & *gc* reciprocæ inveniantur *lx*, *gx*, quarum differentia sit *lg*. Per *x* ducatur *dxyz*. Dico factum. Ducatur ipsi *ab* parallela *xv*.

Cum enim ex constr. sit *lq* ad *lx*, vt *gx* ad *gc*, & per divis. *lq* ad *qx* vt *gx* ad *xc*, & ob similitudinem triangulorum *dgx*. *xcz* sit *dg* ad *cz*, vt *gx* ad *xc*: erit ex æquo *dg* ad *lq*, idest *cb* ad *qa* vt *cz* ad *qx*, & (quia vt 1. ad 1. ita sunt differentiæ) *cb* ad *qa*, hoc est *p* ad *k*, vt *bz* ad *ax*. Est autem (ob similitudinem triangulorum *abc*. *xvc*) *ac* ad *bc*, idest *k* ad *m*, vt *ax* ad *vb*: ergo ex æquo erit *m* ad *p*, vt *vb* ad *bz* (Ratio communis *k*. *ax*.) idest *xy* ad *yz*. Quod oportebat facere.

PRO-

PROPOSITIO XXXXII.

Dato quadrato, ſive rhombo *abcd*, ex angulo *d* ad oppoſitum protractum latus *ab* rectam ducere *dxy*, & facere *xy* æqualem rectæ datæ *m*.



ANALYSIS.

Sit igitur.	*xy*	$\sqcup\Lambda\sqcup$	*m*.	
Per 2.6.elem.S.P.	*ab*.	*by*.	*dx*.	*xy*. —
Fiat angulus	*dxz*	$\sqcup\Lambda\sqcup$	*dby*.	
Et ob ſimil.*dxz*.*dby*.E.P.	*db*.	*by*.	*dx*.	*xz*. —
Ergo ex æquo E.P.	*db*.	*ab*.	*xy*.	*xz*.
Sed angulus	*xbz*	$\sqcup\Lambda\sqcup$	*dby*, ſive *dxz*.	
Ergo ob ſimil.*dxz*.*xbz*.E.P	*dz*.	*xz*.	*xz*.	*bz*.

Ergo ſolutum.

CONSTR. & DEMONSTR.

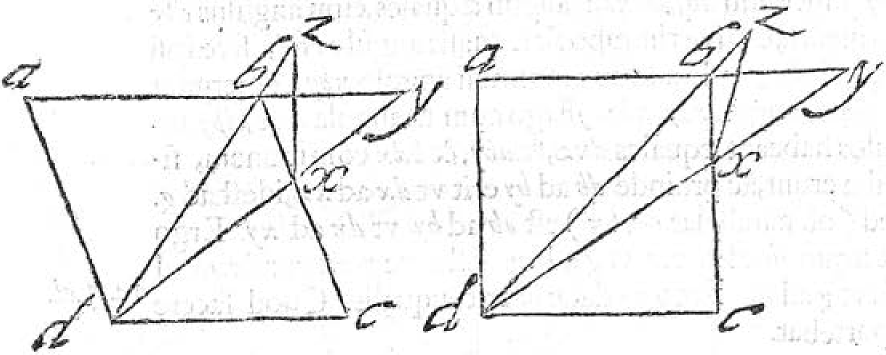
Fiat vt *db* ad *ab* ita *m* ad *g*, cui reciprocæ invenian- tur

tur dz. bz, quarum differentia sit db. Ponatur ex puncto z. recta zx ipsi g æqualis,& per x ducatur dxy. Dico xy æqualem esse datæ m.

Cum enim ex constr. sit dz ad g, vt g ad bz, hoc est dz ad xz, vt xz ad bz: triangula erunt æquiangula dzx,& bzx, 5.6.el. eritque angulus dxz æqualis angulo xbz, hoc est angulo dby (sunt enim dby,& xbz anguli æquales, cum angulus dbc in quadrato, siue rhombo sit æqualis angulo abd, siue ipsi æquali ybz, vnde addito communi angulo xby, emergunt æquales anguli dby. xbz.) Ergo cum triangula dxz, dby angulos habeant æquales dxz,& aby; & bdx communem, similia erunt, ac proinde db ad by erit vt dx ad xz, id est ad g. Sed (ob parallelas ad. bx) est ab ad by, vt dx ad xy. Ergo ex æquo ab ad db erit vt g ad xy. Est autem ex constr. ab ad db, vt g ad m. Ergo xy datæ m erit æqualis. Quod facere 14.5.el. oportebat.

ALITER.

Aliter etiam problema ingredi possumus, videlicet per 4.6.elementorum.



ANALYSIS.

Per 4.6.el.S.P.	*ad.*	*dy.*	*bx.*	*xy.*
Fiat angulus.	*bzx* —∧— *y*			
Et cum angulus.	*dby* —∧— *xbz.*			
Similia erunt triang.	*dby.* ∧ *xbz.*			
Et prop.	*db.*	*dy.*	*bx.*	*xz.*
Ergo ex æquo E.P.	*db.*	*ad.*	*xy.*	*xz.*
Et ob simil. *dzx. bzx.*	*dz.*	*xz.*	*xz.*	*bz.*
Ergo solutum.				

CONSTRVCTIO.

Vt antea.

DEMONSTRATIO.

Quoniam ex constr. *dz* ad *g* est vt *g* ad *bz*, idest *dz* ad *xz*, vt *xz* ad *bz*: triangula erunt æquiangula *dzx*, & *bzx*, adeoque angulus *bxz* angulo *bdx* æqualis ; sed angulus

xbz

xbz æquatur angulo dby: ergo ſimilia erunt triangula dby, & xbz, & erit db ad dy, vt bx ad xz, ideſt ad g. Eſt autem (ob ſimilitudinem triangulorum ady. bxy) ad ad dy, vt bx ad xy: igitur ex æquo db ad ad erit vt xy ad g. Sed ex conſtr. eſt db ad ad, vt m ad g: ergo xy datæ m erit æqualis. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

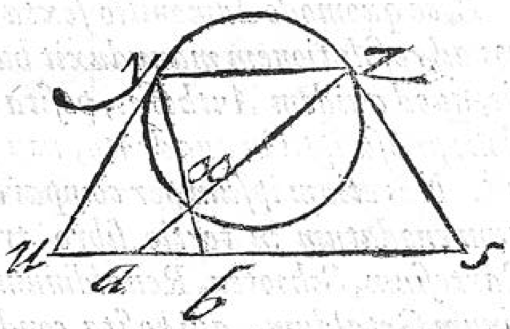
Ecce quomodo admonitio ſexta Introductionis nos ad reſolutionem manuduxit huius problematis, quod quidem Authores, poſità tantum conditione præſcripta in quadrato, non parum vexauit. Nos etiam ipſum per comparationem planorum enodatum in tertio libro tKademus. Vide Carteſium, Schooten, Renaldinum, &c. Et Marinum Getaldum, qui poſita conditione in quadrato, aut rhombo problema reſoluit.

PROPOSIT. XXXXIII.

Vide Pappū lib. 7. pr. 105

Circulo poſitione dato *xyz*, & datis duobus punctis, extra illum, *a*, & *b*, ab ipſis ſi inflectatur *axb*, & producatur, facere *yz* ipſi *ab* parallelam.

Dato circulo, datiſque punctis *a* & *b* : oportet quærere punctū *x*, per quod ſi ducantur *bxy*, & *axz* faciant *yz* ipſi *ab* parallelam.



ANALYSIS

Sint igit. parallelæ	*ab*.	*yz*.		
Et ob ſimil. *axb*. *yxz*. E.P.	*ab*.	*bx*.	*yz*.	*yx*.
Fiat angulus	*byv* —Λ— *yzx*, ſive *bax*.			
Et E.P. ob ſimil. *ybv*. *yxz*.	*yz*.	*yx*.	*yb*.	*vb*.
Ergo ex æquo E.P.	*ab*.	*bx*.	*yb*.	*vb*.
Et rectangulum	*abv* —Λ— *ybx*, vel quad. tan. *b*.			
Ergo ſolutum.				

CONST. ET DEMONST.

Fiat rectangulum *abv* æquale quadrato tangentis *b*, ideſt

idest eius, quæ ex *b* contingat circulum, ductaque tangente *vy*, iungatur *yb* secans circulum in *x*, & per *x* ducatur *axz*, & connectatur *yz*. Dico ipsam datæ *ab* esse parallelam.

Cum enim rectangula *abv*. *ybx* sint inter se æqualia (quia vtrumque est æquale quadrato tangentis *b*, illud quidem ex constructione, hoc verò ex 36. 3. elem.) erit *ab* ad *bx*, vt *yb* ad *vb*, ac propterea triangula erunt æquiangula *abx*. *vby*, & angulus *v* angulo *x* æqualis. Sed (quia *vy* tangit, & *yb* secat) angulus *vyb* angulo *z* est æqualis: ergo triangula erunt similia *vyb*. *yxz*, & *yz* ad *yx* erit vt *yb* ad *vb*: ergo ex æquo *ab* ad *bx* erit vt *yz* ad *yx*, ac proinde triangula erunt æquiangula *abx*. *xyz*, & angulus *abx* angulo *xyz* æqualis: igitur parallelæ erunt rectæ *ab*, & *yz*. Quod erat faciendum.

ALITER.

Sint igitur parallelæ	*yz*. *ab*.	
Ergo angulus	*yza* —Λ— *baz*.	29. 1. el.
Fiat angulus	*byv* —Λ— *yza*.	
Ergo angulus	*byv* —Λ— *baz*.	
Ergo in circulo sunt	*y*. *x*. *a*. *v*.	22. 3. el.
Ergo rectangulum	*vba* —Λ— *ybx*.	36. 3. el.
Sed rectangulum	*ybx* —Λ— quad. tang. *b*.	36. 3. el.
Ergo rectangulum	*vba* —Λ— quad. tang *b*.	
Ergo solutum.		

CONSTR. & DEMONST.

Fiat rectangulum *vba* quadrato tangentis *b* æquale, & ducatur tangens *vy*, iunctàque *yb* circulum secante in *x*, duca-

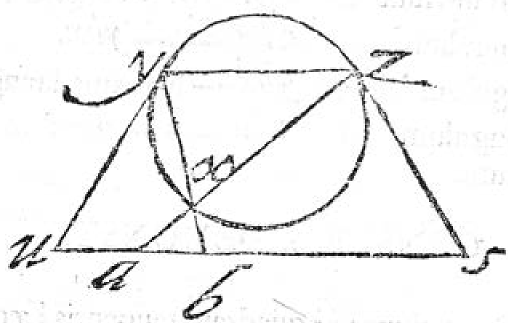
ducatur *axz*, & connectatur *yz*, quam dico datæ *ab* esse parallelam.

Cum enim rectangulum *vba* æquale sit quadrato tangentis *b*, cui etiam æquale est rectangulum *ybx*: erunt rectangula inter se æqualia *vba*, & *ybx*, quare puncta *y. x. a. v.* erunt in circulo: ergo angulus *byv* quadrilateri *yvax*, angulo externo *baz* erit æqualis; sed quia *vy* tangit, & *yb* secat, angulus *byv* æquatur angulo *yza*: ergo anguli alterni *yza. baz* inter se erunt æquales, & rectæ proinde *yz. ab.* parallelæ. Quod faciendum erat.

Hæc resolutio per lib. 3. elem. eamdem exhibet constructionem, quà Pappus vsus est.

ALITER.

Profecto quando angulus *byv* factus supponebatur æqualis angulo *yza*; pari iure supponi poterat angulus *azs* angulo *byz*, siue *aby* æqualis, vnde in hunc modum variari poterat.



ANA-

ANALYSIS.

Sit igitur parallelæ	*ab.*		*yz.*		
Ergo ob simil. *axb.yxz.* E.P	*ab.*	*ax.*	*yz.*	*xz.*	
Fiat angulus	*azs* —Λ— *byz.*				
Et ob simil. *azs.yxz.* E.P.	*yz.*	*xz.*	*az.*	*as.*	
Ergo ex æquo E.P.	*ab.*	*ax.*	*az.*	*as.*	
Et rectangulum	*bas* —Λ— *zax*, siue quad.tang.*a*.				

Ergo solutum, & patet constructio, & demonstratio.
Etiam per 3.lib.elem.institui poterit.

ANALYSIS.

Sint igitur parallelæ	*yz.*	*ab.*			
Ergo angulus	*byz* —Λ— *yba.*				29.1.*el.*
Fiat angulus	*azs* —Λ— *byz.*				
Ergo angulus	*azs* —Λ— *yba.*				
Ergo in circulo sunt puncta	*z.*	*x.*	*b.*	*s.*	22.3.*el.*
Ergo rectangul. (36.3.*el.*)	*sab* —Λ— *zax*, siue quad.tang.*a*.				

Ergo solutum, & manifesta constructio, & demonstratio.

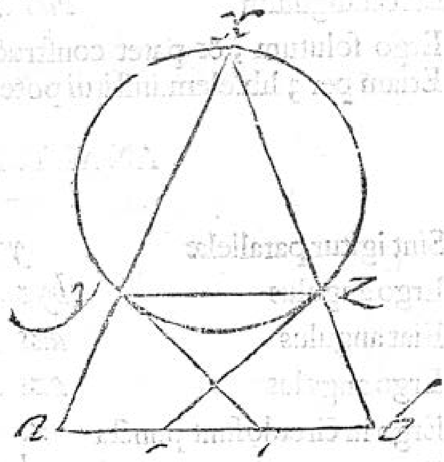
PRO-

PROPOSIT. XXXXIV.

Vide Pappii l.7. propos. 107

Circulo positione dato *xyz*, & datis duobus punctis (extra illum) *a*, & *b*: inflectere *axb*, & facere *yz* ipsi *ab* parallelam.

Hoc problema parum, vel nihilo differt ab antecedente.



ANALYSIS.

	Sint igitur parallelæ	*yz.*		*ab.*
	Fiat angulus	*vyz*	—Λ—	*x.*
29.1.*el.*	Sed ob parallelas, angulus	*vyz*	—Λ—	*yva.*
	Ergo angulus	*yva*	—Λ—	*x.*
22.3.*el.*	Ergo in circulo sunt	*x. y. v. b.*		
36.3.*el.*	Ergo rectangulum	*bav*	—Λ—	*xay.*
36.3.*el.*	Sed rectangulum	*xay*	—Λ—	quad.tang.*a.*
	Ergo rectangulum	*bav*	—Λ—	quad.tang.*a.*

Ergo solutum.

CON-

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat rectangulum *bav* æquale quadrato, tangentis *a*, ideſt eius rectæ, quæ à puncto *a* circulum contingit, & ducatur tangens *vy*, per *y* autem ducatur *ax*, iungaturque *xb* ſecans, circumferentiam in *z*, & connectatur *yz*. Dico *yz* ipſi *ab* eſſe parallelam.

Quoniam igitur rectangulum *bav* æquale eſt quadrato contingentis *a*. (ideſt eius, quæ à puncto *a* circulum contingit) & eidem quadrato æquale eſt rectangulum *xay*: æqualia erunt rectangula *bav*. *xay*, & ideo puncta *x*. *y*. *v*. *b*. erunt in circulo, & anguli *yva*, & *x* æquales (quandoquidem externus *bvy*, & *x* duobus rectis æquãtur) ſed angulus *vyz* angulo *x* eſt æqualis (quia *vy* tangit, & *yz* ſecat) ergo æquales erunt inter ſe anguli *vyz*. *yva*, adeoque parallelæ *yz*. *ab*. Quod erat faciendum.

ALITER.

Sint igitur parallelæ	*yz*.		*ab*.
Fiat angulus	*yzs*	—Λ—	*x*.
Sed ob parallelas, angulus	*yzs*	—Λ—	*zsb*.
Ergo angulus	*zsb*	—Λ—	*x*.
Ergo in circulo ſunt	*x*. *z*.	*s*.	*a*.
Ergo rectangulum	*abs*	—Λ—	*xbz*.
Sed rectangulum	*xbz*	—Λ—	quad. tang. *b*.
Ergo rectangulum	*abs*	—Λ—	quad. tang. *b*.

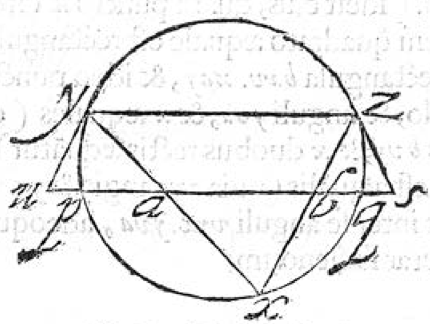
Ergo ſolutum, & patet constructio, ex qua eadem *yz* provenit.

Per proportionales etiam duobus modis variari poterit analyſis.

PROPOSIT. XXXXV.

Vide Pappi l.7. propos.108

Circulo *xyz* positione dato, & datis duobus punctis (intra illum) *a*, & *b*. ab ipsis inflectere *axb*, & facere *yz* ipsi *ab* parallelam.



ANALYSIS.

	Sint igitur parallelæ	*yz*.	*ab*.
	Ergo angulus	*yzx*	—Λ— *abx*.
	Fiat angulus	*xyv*	—Λ— *yzx*.
	Ergo angulus	*xyv*	—Λ— *abx*.
ex conv. 22.3.el.	Ergo in circulo sunt	*y*. *v*. *x*.	*b*.
35.3.el.	Ergo rectangulum	*yax*	—Λ— *vab*.
35.3.el.	Sed rectangulum	*yax*	—Λ— cuilibet per *a*
	Ergo rectangulum	*vab*	—Λ— cuilibet per *a*
	Ergo solutum.		

CON-

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat rectangulum *vab* æquale cuilibet per *a*, puta *paq*, & ducatur contingens *vy*. Per *a* ducatur *yx*, & *xz* per *b*, iungaturque *yz*. Dico *yz* ipsi *ab* parallelam esse.

Quoniam enim rectangulum *vab* rectangulo *yax* (idest *paq*) est æquale, erunt puncta *y*. *v*. *x*. *b*. in circulo. Quare anguli *xyv*. *abx* (super eamdem *vx*) æquales erunt; sed quia *vy* tangit, & *yx* secat, angulus *vyx* angulo *yzx* est æqualis: igitur, & æquales erunt anguli *yzx*. *abx*, ac propterea *yz*. *ab* parallelæ. Quod erat faciendum.

ALITER.

Sint igitur parallelæ	*yz*.	*ab*.
Ergo angulus	*xyz* —Λ—	*xab*.
Fiat angulus	*xzs* —Λ—	*xyz*.
Ergo angulus	*xzs* —Λ—	*xab*.
Ergo in circulo sunt	*a*. *x*.	*s*. *z*.
Ergo rectangulum.	*abs* —Λ—	*xbz*,
Sed rectangulum	*xbz* —Λ—	cuilibet per *b*.
Ergo rectangulum	*abs* —Λ—	cuilibet per *b*.

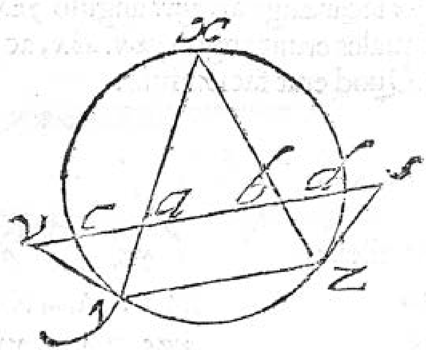
Ergo solutum, & patet constructio, & demonstratio.

Etiam per proportionales duobus modis problema expediri poterit.

PROPOSIT. XXXXVI.

Vide Pappii l.7. propos.109

Circulo positione dato *xyz*, & datis duobus punctis (intra illum) *a*, & *b*, inflectere *axb*, ita vt *yz* sit parallela ipsi *ab*.



ANALYSIS

Sint igit. parallelæ	*yz*.	*ab*.
Ergo angulus	*abx* —Λ—	*yzx*.
Fiat angulus	*ayv* —Λ—	*abx*.
Ergo angulus	*ayv* —Λ—	*yzx*.
Et in circulo sunt	*x*. *v*. *y*.	*b*.
Ergo rectangulum	*vab* —Λ—	*xay*.
Sed rectangulum	*xay* —Λ—	cuilibet per *a*.
Ergo rectangulum	*vab* —Λ—	cuilibet per *a*.

Ergo solutum.

CONSTR. & DEMONST.

Fiat rectangulum *vab* æquale cuilibet per *a* (puta *cad*) Ducatur tangens *vy*, & per *a* recta *yx*, & per *b* recta *xz*, iungaturque *yz*. Dico *yz*. *ab* esse parallelas.

Quoniam igitur rectangulum *vab* factum est æquale cuilibet per *a* (quale est *cad*) & eidem æquale est rectangulum *xay*: æqualia erunt rectangula *vab*. *xay*, quapropter puncta *x*. *v*. *y*. *b*. erunt in circulo, & anguli *ayv*. *abx* (super eamdem *xv*) æquales inter se; sed quia *vy* tangit, & *xy* secat, angulus *ayv* angulo *yzx* est æqualis: igitur æquales erunt anguli *yzv*. *abx*, adeoque parallelæ *yz*. *ab*. Quod erat faciendum.

Etiam hoc modo eadem proveniet yz.

ALITER.

Sint igitur parallelæ	*ab*. *yz*.	
Ergo angulus	*bax* —Λ— *zyx*.	
Fiat angulus	*szb* —Λ— *zyx*.	
Ergo angulus	*szb* —Λ— *bax*.	22.3.*el*.
Et in circulo sunt	*x*. *a*. *z*. *s*.	35.3.*el*.
Ergo rectangulum	*abs* —Λ— *xbz*.	
Sed rectangulum	*xbz* —Λ— cuilibet per *b*.	
Ergo rectangulum.	*abs* —Λ— cuilibet per *b*.	

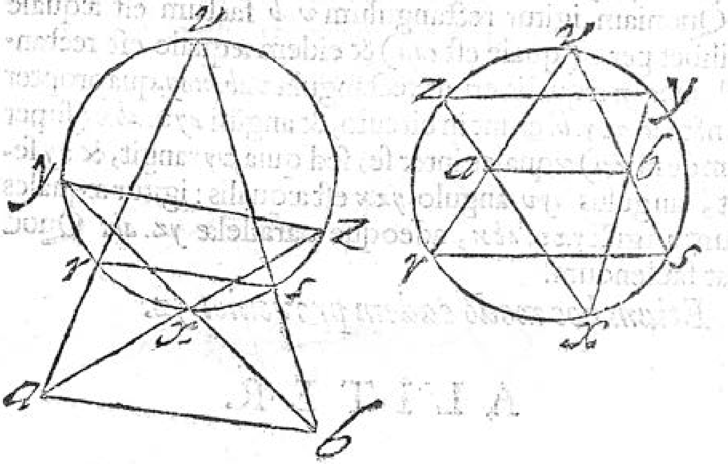
Ergo solutum, cum rectangulum *abs* fieri possit æquale cuilibet per *b*, quale est *cbd*.

PRO-

PROPOSIT. XXXXVII.

Vide Vietam in Apollon. Gallo probl. 8.

Datis duobus punctis, & circulo, per data duo puncta circulum describere, qui datum contingat.



Hoc problema duas admittit solutiones, sive extra, sive intra circulum dentur puncta.

Sint data puncta *a*, *b*. (extra, vel intra) & datus circulus *yxz*.

ANALYSIS.

Esto *x* punctum contactus: ergo si per *x* protrahantur ad circumferentiam (vti factum est in antecedentibus) rectæ *az*, *by*, ita vt iuncta *yz* sit ipsi *ab* parallela: erunt triangula *axb*. *yxz* sub eodem vertice *x* similia, ac proinde circulus, qui per puncta *a*.*x*.*b*. descriptus fuerit, circulum *yxz* contingat in *x*. vt petitur. *prop. 22 Introd.*

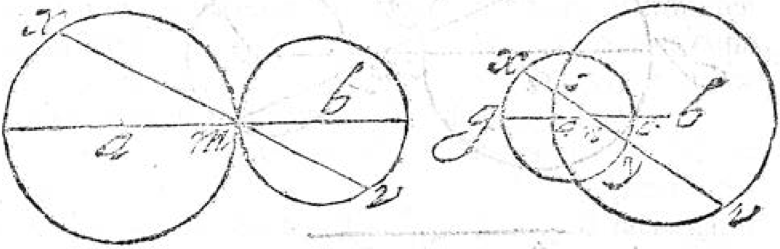
Eodem modo sit *v* punctum contactus: ergo si inflectatur *avb*, ita vt iuncta *rs* eidem *ab* sit parallela: erunt triangula *avb*. *rvs* sub eodem vertice *v* similia, & circulus, qui per puncta *a*.*v*.*b*. descriptus fuerit circulum *yxz* continget in *v*. vt petitur.

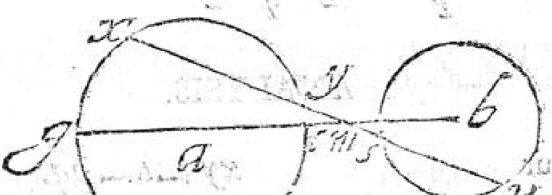
Ergo solutum est problema, & manifesta constructio, & demonstratio.

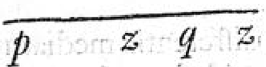
PRO-

PROPOSIT. XXXXVIII.

Datis duobus circulis, vtcumque dispositis, rectam ducere, quæ similia segmenta secet angulum dato æqualem capientia.



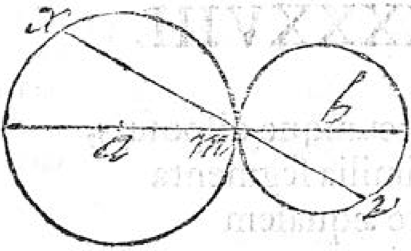


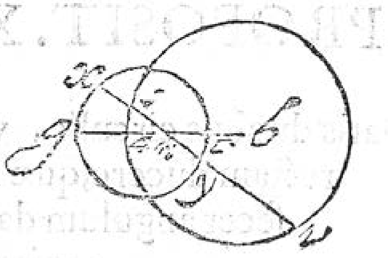


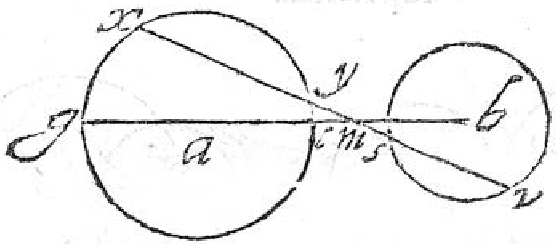
Sint duo circuli se non contingentes xy, & sv, quorum centra a, & b, iungatur ab, & in ratione semidiametrorum dividatur in m. Et per m rectam oporteat ducere xv, quæ segmenta secet xy, & sv angulum capientia dato d æqualem.

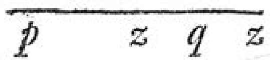
Producatur am, & fiat diameter gc, à circulo autem xy segmentum abscindatur capiens angulum dato æqualem, sitque ipsius subtensa recta pq.

ANA









ANALYSIS.

Sit igitur	xy —∧— pq.
Sed per 35. & 36. 3. elem.	xmy —∧— gmc.
Ergo E.P.	gm. xm. ym. mc.
Ergo ſolutum.	

Eſt enim ſumma, aut differentia mediarum xm, & ym ſemper nota, videlicet xy, ideſt pq, ſumma quidem ſi circuli ſe ſecuerint, differentia vero ſi ſe non ſecuerint.

CONST. ET DEMONST.

Fiant quæ iam dicta ſunt, & ipſis gm, & mc reciprocæ inveniantur pz, & zq quarum ſumma ſit pq (ſi circuli ſe ſecuerint) vel pz, & qz, quarum differentia ſit ipſa pq (ſi non

non se secuerint) & ex puncto *m* aptetur *mx* ipsi *pz* æqualis, & producatur ad *v*, secans circulum *xy* in *x*, & *y*, circulum vero *sv* in *s*, & *v*. Dico segmenta *xy*, & *sv* angulos capere dato æquales.

Quoniam igitur ex constructione est *gm* ad *pz*, vt *zq* ad *mc*: erit rectangulum *pzq* æquale rectangulo *gmc*; sed rectangulo *gmc* æquale est rectangulum *xmy*: ergo rectangula erunt æqualia *pzq*, & *xmy*, & quoniam *xm* facta est æqualis ipsi *pz*, æquales erunt *xy*, & *pq*; sed *pq* segmentum subtendit, quod angulum capit dato æqualem: ergo segmentum *xy* etiam eumdem angulum capiet, & similiter segmentum *sv*, quia similia sunt segmenta *xy*, & *sv*, cum recta *xv* transeat per *m* punctum, in quo recta, quæ centra iungit *ab* divisa est in ratione semidiametrorum. *prop. 24 Introd.*

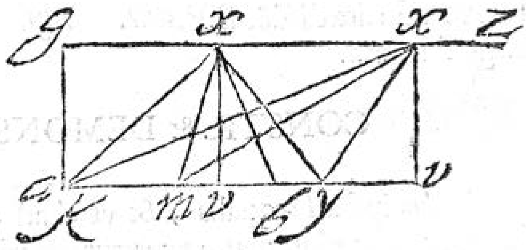
Si circuli se tetigerint in *m*, & ex *m* aptetur *mx* ipsi *pq* æqualis, & protrahatur ad *v* factum erit. Datis igitur duobus circulis vtcumque dispositis, &c. Quod faciendum erat.

PROPOSIT. XXXXIX.

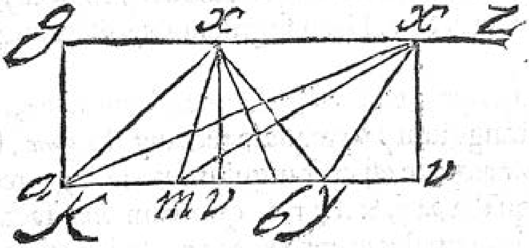
Data base, altitudine, & ratione laterum triangulum invenire.

Vide Victam appendicula I

Esto triangulum, de quo quæritur *axb* super data base *ab* in altitudine data *ag*, & ratio laterum *ax*. *xb* sit data, vt *am* ad *mb*.



Ipsi *ab* parallela ducatur *gz*, & iungatur *xm*, quæ bifariam dividet angulum *axb*.



ANALYSIS.

Sint igit.prop. *ax. xb. am. mb.*
Ergo per 3.6.el.angulus. *mxb* —Λ— *axm.*
Fiat angulus *bxy* —Λ— *bax.*
Et erit angulus *mxy* —Λ— *axm* + *bax.*
Ideſt externo *ymx.*
Ergo per 6.1.el. *xy* —Λ— *my.*
Sed ob ſimil.*axy.bxy*.S.P. *ay. xy. xy. by.*
Ideſt *my. my.*
Et divid. *am. my. mb. by.*
Fiat *km* —Λ— *mb* *km.*
Et vt 1.ad 1.ita diff.& E.P.*am. my. ak. mb.*
Ergo ſolutum.

CONSTR. & DEMONST.

Fiat *km* ipſi *mb* æqualis, & vt *ak* ad *mb* ita *am* ad *my*. Centro autem *y* intervallo *my* arcus deſcribatur, qui ſi non peruenerit ad rectam *gz*, problema reddet impoſsibile, ſi vero ipſam tetigerit, vnicam dabit ſolutionem, duplicem tandem ſi ſecuerit. Secet iam in punctis *x. x*, & iungantur

ax.

ax. mx. bx. Dico triangula *axb* esse de quibus quæritur.

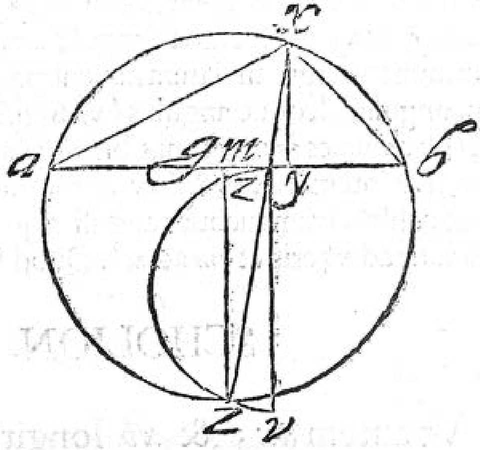
Estenim ex constr. *am* ad *my*, vt *ak* ad *mb*, & (quia vnus ad vnum est vt differentiæ) erit *am* ad *my*, vt *km*, idest *mb* ad *by*, & compon. *ay* ad *my*, vt *my* ad *by*, hoc est ex constr. *ay* ad *xy*, vt *xy* ad *by*: ergo triangula *axy. bxy* (quæ circa communem angulum latera habent proportionalia) erunt æquiangula, adeoque angulus *bxy* angulo *bax* erit æqualis; sed (ob æquales *my. xy*) angulus *mxy* æqualis est angulo *ymx*, sive internis *axm*, & *bax*: ergo (auferendo æqualia ab æqualibus) remanebunt anguli æquales *axm*, & *mxb*, quare *ax* ad *xb* erit vt *am* ad *mb*. Quod facere oportebat.

SCHOLION.

Vt autem *ax*, & *xb* longitudine innotescant, demittatur perpendiculum *xv*, quod longitudine notum erit, vtpote æquale rectæ longitudine datæ *ag*, & in triangulo *mxy*, cuius latera *my. xy*. cognoscuntur, nota fient segmenta *mv. vy*. & exinde *av. vb*, & consequenter *ax. xb*.

ALITER.

Esto triangulum, de quo quæritur *axb* super data base *ab*, in altitudine *xy* datæ *h* æquali, cuius latera *ax*. *xb*. sint in data ratione vt *am* ad *mb*.



Circumscribatur circulus, & ducatur *xmz*, quæ bifariã diuidet angulum *axb*.

ANALYSIS

Sint igitur prop.	*ax*.	*xb*.	*am*.	*mb*.
Ergo angulus		*axz* ⊥Λ⊥ *zxb*.		
Et S.P.	*am*.	*mx*.	*mz*.	*mb*.
Fiat angulus		*zmv* ⊥Λ⊥ *mxy*.		
Et ob simil. *mxy*. *mzv*. E.P.	*xy*.	*mx*.	*mz*.	*mv*.
Idest	*h*.			
Ergo ex æqual. E.P.	*h*.	*am*.	*mb*.	*mv*.

Ergo solutum.

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt *h* ad *am* ita *mb* ad *mv*, quæ datæ *ab* perpendicularis ponatur, & super ipsam semicirculus describatur *vzm*. Si igitur bisectã *ab* in *g*, demissa perpendicularis *gz* ipsum semicirculum nec tangat, nec secet, construi non poterit problema, si tetigerit vnica erit resolutio, duplex verò si secuerit. Secet iam in punctis *z*. *z*. & per puncta *a*. *z*. *b*. cir-

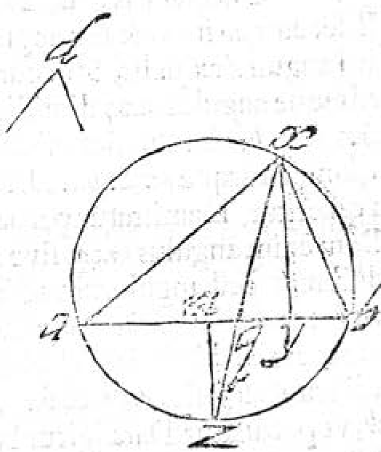
circulus describatur, ductaque per m recta zmx, iungantur ax. xb. & demittatur perpendicularis xy. Dico triangula axb esse de quibus quæritur.

Sunt enim ex constr. triangula similia mzv. mzg, & mxy, quare xy ad mx est vt mz ad mv, & quoniam puncta a. x. b. z. sunt in circulo, est am ad mx, vt mz ad mb: ergo ex æquo erit xy ad am vt mb ad mv; sed ex constr. est h ad am, vt mb ad mv, æqualis igitur erit xy datæ h. Et quoniam gz rectam ab bifariam secat, & ad angulos rectos, erunt arcus az. zb, idest anguli axz. bxz æquales, ac proinde ax ad xb erit vt am ad mb. Triangulum igitur iam oxygonium, iam ambligonium exhibuimus, &c. Quod erat faciendum.

Ecce incidimus in ingeniosam solutionem Vietæ transpositione cuiusdam anguli.

PROPOSITIO L.

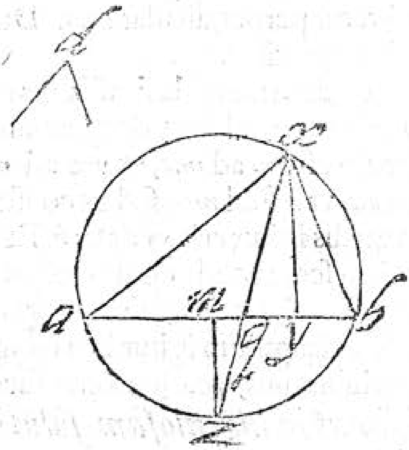
Data base, ratione laterum, & differentia angulorum ad basim: triangulum constituere.



Sit triangulum, de quo quæritur axb, cuius basis ab sit data, & ratio laterum, vt aq ad qb, differentia autem angulorũ ad basim sit datus angulus d. Ergo si ducatur qx bifariam dividet angulũ axb, eritque, ductà perpendiculari xy, angulus qxy semidifferentia angulorum ad basim, adeoque æqualis dimidio anguli dati d. Bisecetur ab in m.

prop. 16 Introd.

ANA-



ANALYSIS.

Sint igit, prop.	*ax.*	*xb*	*aq.*	*qb.*
Fiat angulus		*mzq*	— ∧ —	*qxy.*
Sed angulus		*qxy*	— ∧ —	$\frac{1}{2}d$.
Ergo angulus		*mzq*	— ∧ —	$\frac{1}{2}d$.
Ergo ſolutum.				

CONSTR. & DEMONSTR.

Biſecetur *ab* in *m*, & fiat angulus *mqz* dimidio complementi anguli *d* æqualis, & occurrat *qz* perpendiculari *mz* in *z*. Itaque angulus *mzq* dimidio *d* erit æqualis. Per puncta autem *a. z. b.* circulus deſcribatur *azb*, & protrahatur *zq* ad *x*, iunganturque *ax*, & *bx*. Dico triangulum *axb* eſſe, de quo quæritur. Demittatur perpendicularis *xy*.

Cum enim angulus *mzq*, ſive ipſi æqualis *qxy* (qui ſemi differentia eſt angulorum ad baſim) æqualis ſit dimidio *d*: erit totus *d* differentia ipſorum angulorum, vt petitur. Cum autem *mz* bifariam dividat circumferentiam *azb*, anguli erunt æquales *axq*, & *bxq*, adeoque *ax* ad *xb*, vt *aq* ad *qb*, vt poſtulatur. Data igitur baſe, &c. Quod erat faciendum.

ANA-

ANALYSIS GEOMETRICA.

LIB. II.

AGENS ADHVC DE RESOLVTIONE PER PROPORTIONALES.

INSTRUCTIO

Liber primus per ſimplices rectas proportionales problematum ſolutionem expedivit. Hic autem ſecundus liber id ipſum proſequitur, & problemata enodare aggreditur, quorum alia per argumenta rationis compoſitæ commodiſsimè reſolvuntur; alia ex ſola conſtitutione terminorum datorum, apparent reſoluta. Itaque ſi duo plana duabus rectis (vel etiam duobus planis) proportionalia exiſtant, neque per 1.6. elem. ad ſimplices rectas ipſa plana revocari poſsint; adhibendæ erunt argumentationes rationis compoſitæ. At vero ſi, propoſito problemate, ex terminis datis, figura conſtitui poſsit, cui ſimilis ſit figura quæ-

quæſita (quod quidem ſæpius accidere ſolet) conſtituenda erit ſimilitudo, & per rationem compoſitam , vel ex ſimilitudine arguendo problema facillimè enodabitur.

PROPOSITIO I.

Datam rectam *ac*, ſectam in *b*, rurſus ſecare in *x*, inter *a*, & *b*, vt quadratum *ax* ad rectangulum *xbc* ſit vt *f* ad *g*, ſive vt *ga* ad *bc*.

ANALYSIS.

Sint igit. prop. *axa. xbc. ga. bc.*
Ergo producendo *axa:bc* —Λ— *xbc:ga.*
Et deprimendo per *bc*. *axa* —Λ— *xb:ga.*
Et diſſolvendo E.P. *ga. ax. ax. xb.*
Et per compoſ. *ga. gx. ax. ab.*
Ergo ſolutum.

CONST. ET DEMONST.

Ipſis *ga*, & *ab* reciprocæ inveniantur *gx*, & *ax* , quarum differentia ſit *ga*. Dico factum.

Cum enim ſint ex conſtr. proportionales *ga. gx. ax. ab*, & per diviſ. *ga.ax.ax.xb*: erit quadratum *ax* rectangulo ſub *ga*, & *xb* æquale, & elevando per *bc*, erit factum ſub *ax.ax.*

bc

bc æquale facto sub ga. xb. bc, vnde dissolvendo erunt proportionalia ax.a. xbc. ag. bc. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

Hanc methodum deprimendi, & elevandi magnitudines non omnibus, in problematibus omnino planis, placituram puto; ipsa tamen naturalissima videtur, nam, præter quam doctrinæ solidorum facile aptari potest, per simplicem considerationem quatuor proportionalium demonstratur, quandoquidem, si duo facta æqualia, æquiangula fuerint, quomodocumque poterunt in terminos proportionales dissolvi, qui si producantur eadem facta restituant. Maximè cum hæc methodus non exigat, vt ipsa solida construantur (quod quidem improprium, & molestum in problemate plano à Geometris meritò iudicatur) sed solum constructa concipit, & planam omnino constructionem instituendam docet. Cum tamen analysim nostram omnes modos resolvendi amplecti credamus, alias afferemus solutiones.

ALITER.

g a x b c

Vide argum. alternationis in Introd. pag. 17.

Sint prop.	*axa.*	*xbc.*	*ga.*	*bc.*
Sive permut. dimens.	*ax.*	*xb.*	*bc:ga.*	*bc:ax.*
Ideſt per 1.6. elem.	*ax.*	*xb.*	*ga.*	*ax.*
Ergo per compoſ. E.P.	*ax.*	*ab.*	*ga.*	*gx.*

CONSTR. & DEMONSTR.

Ipſis *ab. ag* reciprocæ inveniantur *ax. gx*, quarum differentia ſit *ga*. Dico factum.

Cum enim ex conſtr. ſit *ax* ad *ab*, vt *ga* ad *gx* : erit per diviſ. *ax* ad *xb*, vt *ga* ad *ax*, ſive vt rectangulum ſub *ga*, & *bc* ad rectangulum ſub *ax*, & *bc*: ergo permutando dimenſiones, erit quadratum *ax* ad rectangulum *xbc* vt *ga* ad *bc*. Quod erat faciendum.

Aliter ex ratione compoſita.

g a x b c

num. II num. I. de ratione compoſita in Introd.

Sint igit. prop.	*axa. xbc. ga. bc.*
Ideſt vt	*ax. xb*, & *ax. bc* ita *ga. bc.*
Et invert. vt	*ax. xb.* ita *ga. bc.* & *bc. ax.*
Ideſt vt	*ax. xb.* ita *ga.* *ax.*
Et per comp. vt	*ax. ab* ita *ga. gx.*
Ergo ſolutum.	

CONS-

CONSTR. & DEMONST.

Ipsis *ab*, & *ga* reciprocæ inveniantur *ax*, & *gx*, quarum differentia sit *ga*. Dico factum.

Est enim ex constr. *ax* ad *ab*, vt *ga* ad *gx*, & per divis. *ax* ad *xb*, vt *ga* ad *ax*, vel vt *ga* ad *bc*, & *bc* ad *ax*: ergo invert. erit *ax* ad *xb*, & *ax* ad *bc*, hoc est quadratum *ax* ad rectangulum *xbc*, vt *ga* ad *bc*. Quod erat faciendum.

Aliter ex 1.6. elem.

Sint igit. prop.	*axa.*	*xbc.*	*ga.*	*bc.*
Fiat rectangulum	*ga:xb* —∧— *axa.*			
Idest fiant prop.	*ga.*	*ax.*	*ax.*	*xb.*
Et per comp. E.P.	*ga.*	*gx.*	*ax.*	*ab.*
Ergo solutum.				

CONST. ET DEMONST.

Ipsis *ga*. & *ab* reciprocæ inveniantur *gx*, & *ax*, quarum differentia sit *ga*, hoc est fiant proportionales *ga. gx. ax. ab*, & per divis. *ga. ax. ax. xb*, & erit rectangulum sub *ga*, & *xb* æquale quadrato *ax*: ergo quadratum *ax*, idest rectangulum sub *ga*, & *xb* ad rectangulum *xbc* (ob eamdem altitudinem *xb*) erit vt *ga* ad *bc*. Quod erat faciendum.

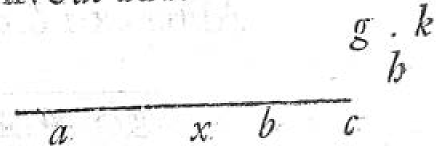
NOTA.

Hunc vltimum modum resolvendi præferendum existimo, cum nisi necessitas vrgeat ad solida ascendere, vel ad rationem compositam recurrere non deceat.

PROPOSIT. II.

Vide Renaldin. pag. 487. pag. 461.

Datam rectam *ac*, sectam in *b*, rursus secare in *x*, inter *a*, & *b*, vt rectangulum *cax* ad rectangulum *xbc* sit in ratione data *g* ad *k*, sive *ac* ad *b*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop. *cax*. *xbc*. *ac*. *b*.
Ergo si fiat *xbc* —Λ— *ax* : *b*.
Erit solutum.

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt *bc* ad *b* ita *ax* ad *xb*, hoc est dividatur *ab* in *x* in ratione *bc* ad *b*, & erit rectangulum sub *ax*, & *b* æquale rectangulo *xbc*. Ergo rectangulum *cax* ad *xbc*, idest ad rectangulum sub *ax*, & *b* (ob eamdem altitudinem *ax*) erit vt *ac* ad *b*. Quod erat faciendum.

ALITER.

Sint igit. prop. *cax*. *xbc*. *g*. *k*.
Hoc est vt *ac*. *bc*. & *ax*. *xb*. ita *g*. *k*.
Et invert. vt *ax*. *xb*. ita *g*. *k* & *bc*. *ac*.
Ergo solutum.

num. II deratio ne com-posit.

CONS-

CONSTR. & DEMONST.

Fiat *ax* ad *xb* vt *g* ad *k*, & *bc* ad *ac* (hoc est vt rectangulum sub *g*, & *bc* ad rectangulum sub *k*, & *ac*) & erit invertendo *ac* ad *bc*, & *ax* ad *xb*, idest rectangulum *cax* ad rectangulum *xbc*, vt *g* ad *k*. Quod erat faciendum.

ALITER.

Sint prop.	*cax*.	*xbc*.	*ac*.	*h*.
Sive permut. dimens.	*ax*.	*xb*.	*ac*:*bc*.	*h*:*ac*.
Ideſt per 1.6.el.	*ax*.	*xb*.	*bc*.	*h*.
Ergo ſolutum.				

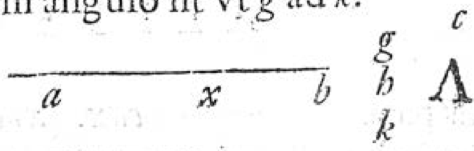
CONSTR. & DEMONSTR.

Dividatur *ab* in *x*, vt *ax* ad *xb* ſit vt *bc* ad *h*, ſive vt rectangulum ſub *ac*: & *bc* ad rectangulum ſub *h*, & *ac*, & erit permutando dimenſiones rectangulum *cax* ad rectangulum *xbc*, vt *ac* ad *h*. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSITIO III.

Datam rectam *ab* ita ſecare in *x*, vt parallelogrammum ſub *ax*, & data *g*, in angulo dato *c* ad parallelogrammum ſub *xb*, & data *h* in eodem angulo ſit vt *g* ad *k*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax:g.* *xb:h.* *g.* *k.*
Ergo ſi fiat	*ax:k* —Λ— *xb:h.*

Factum erit quod petitur.

CONSTR. ET DEMONSTR.

Fiat vt *h* ad *k* ita *ax* ad *xb*; & in angulo dato *c* æquali, fiant parallelogramma tum ſub *ax*, & *g*, tum ſub *xb*, & *h*. Dico ipſa eſſe, vt *g* ad *k*.

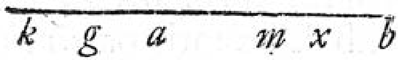
Cum enim ex conſtr. ſit vt *h* ad *k* ita *ax* ad *xb*: erunt parallelogramma æqualia ſub *ax*, & *k*, atque ſub *xb*, & *h*: ergo parallelogrammum ſub *ax*, & *g* ad parallelogrammum ſub *xb*, & *h*, ideſt ſub *ax*, & *k* (ob eamdem altitudinem *ax*) erit vt *g* ad *k*. Quod erat faciendum.

Etiam permutando dimenſiones, vel invertendo rationes expediri poterit problema vt factum eſt in antecedentibus.

PRO-

PROPOSITIO IV.

Datam rectam *ab* secare in *x*, vt differentia quadratorum *ax*, & *xb* ad rectangulum *axb* sit vt *p* ad *q*, seu vt *ab* ad *ga*. *Vide Renald. tom. 3. pa. 478. & 517.*



Dividatur *ab* bifariam in *m*, & erit 2*mx* differentia partium *ax*, & *xb*, eritque rectangulum sub *ab*, & 2*mx* (videlicet sub aggregato, & differentia laterum) æquale differentiæ quadratorum *ax*, & *xb*. Fiat *ka* dupla ipsius *ga*. *Per 7. Introd.*

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ab*:2*mx*.	*axb*.	*ab*.	*ga*.
Ergo si fiat	*ga*:2*mx* —∧— *axb*.			
Factum erit quod postulatur.				
Sint ergo prop.	*ga*.	*ax*.	*xb*.	2*mx*.
Et duplic. & dimid.	*ka*.	*ax*.	*xb*.	*mx*.
Et per comp.	*ka*.	*kx*.	*xb*.	*mb*.
Ergo solutum.				

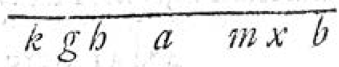
CONSTR. & DEMONST.

Fiat *ka* dupla ipsius *ga*, & rectis *ka*, & *am* (seu *mb*) reciprocæ inveniantur *kx*, & *xb*, quarum summa sit *kb*. Itaque proportionales erunt *ka*. *kx*. *xb* *mb*, & per divis. *ka*. *ax*. *xb*. *mx*, & dimidiando, & duplicando *ga*. *ax*. *xb*. 2*mx*: ergo rectangulum sub *ga*, & 2*mx* rectangulo *axb* erit æquale.

le. Ergo rectangulum sub *ab*, & 2*mx*, ideſt differentia quadratorum *ax*, & *xb*, ad rectangulum *axb*, ideſt ſub *ga*, & 2*mx* (ob eamdem altitudinem 2*mx*) erit vt *ab* ad *ga*. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO V.

Datam rectam *ab* dividere in *x*, vt rectangulum ſub differentia partium *ax*, & *xb*, & data *ga* ad rectangulum ſub ipſis partibus conſtitutam habeat rationem vt *p* ad *q*, ſive vt *ga* ad *ha*.



Dividatur *ab* bifariam in *m*, & erit 2*mx* differentia partium *ax*, & *xb*: ergo conditio eſt vt rectangulum ſub *ga*, & 2*mx* ad rectangulum *axb* ſit vt *ga* ad *ha*. Fiat *ka* dupla ipſius *ha*. *prop. 7. Introd.*

ANALYSIS

Sint igit. prop.	*ga*:2*mx*.	*axb*.	*ga*.	*ha*.
Ergo ſi fiat	*axb* ⌴∆⌴ *ha*:2*mx*.			
Solutum erit				
Sint ergo prop.	2*mx*.	*xb*.	*ax*.	*ha*.
Et dimid. & duplic.	*mx*.	*xb*.	*ax*.	*ka*.
Ergo comp. E.P.	*mb*.	*xb*.	*kx*.	*ka*.
Ergo ſolutum.				

CONS-

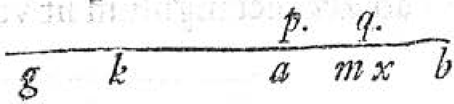
CONSTR. & DEMONST.

Fiat *ka* dupla ipsius *ha*, ipsisque *ka*, & *am* (idest *mb*) reciprocæ inveniantur *xb*, & *kx*, quarum summa sit *kb*. Dico factum.

Cum enim ex constr. sint proportionales *mb. xb. kx. ka*, & divid. *mx. xb. ax. ka*, & duplicando, & dimidiando 2*mx. xb. ax. ha*: erit rectangulum sub 2*mx*, & *ha* rectangulo *axb* æquale: ergo rectangulum sub *ga*, & 2*mx* ad rectangulum *axb*. idest sub 2*mx*, & *ha* (ob eamdem altitudinem 2*mx*.) erit vt *ga* ad *ha*. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO VI.

Datam rectam *ab* bisectam in *m*, ita dividere in *x*, vt rectangulum *abx* ad bina rectangula sub *ax*, & *mx*, & sub *ab*, & *mx*. sit vt *p* ad *q*. *Vide Renaldin. to. 3 pag. 479.*



Perspicuum est si fiat *ka* ipsi *ab* æqualis rectangulum *kxm* æquari rectangulis sub *ax*, & *mx*, atque sub *ab*, idest *ka*, & *mx*. Ergo conditio est vt sint proportionalia *abx. kxm. p q*. *per 1. 2. eb.*

Fiat vt *p* ad *q* ita *ab* ad *gk*.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*abx.*	*kxm.*	*ab.*	*gk.*
Ergo si fiat		*xb:gk* ⸺Δ⸺ *kxm.*		
Solutum erit				
Sint ergo prop.	*gk.*	*kx.*	*mx.*	*xb.*
Et per compos.	*gk.*	*gx.*	*mx.*	*mb.*
Ergo solutum.				

Ii CONS-

p. q.

g k a m x b

CONSTR. & DEMONSTR.

Ipſis *gk*, & *mb* reciprocæ inveniantur *gx*, & *mx*, quarum differentia ſit *gm*, itaque proportionales erunt *gk. gx. mx. mb*, & per diviſ. *gk. kx. mx. xb*, vnde rectangulum ſub *gk*, & *xb* rectangulo ſub *kx*, & *mx* erit æquale. Ergo rectangulum *kxm*, ideſt ſub *xb*, & *gk* (ob eamdem altitudinem *xb*) erit vt *ab* ad *gk*, ſive vt *p* ad *q*. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO VII.

Datam rectam *ad*, ſectam in *b*, & *c*, iterum ſecare in *x*, inter *b*, & *c*, vt rectangulum *axb* ad *dxc* rectangulum ſit vt *ac* ad *xc*.

g a b x c d

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*axb.*	*dxc.*	*ac.*	*xc.*
Sive per 1. 6. el.			*ac:xd.*	*dxc.*
Ergo per 14. 5. el.	*axb* —∧— *ac:xd.*			
Et E. P.	*ac.*	*ax.*	*bx.*	*xd.*
Fiat *ga* —∧— *ac.*	*ga.*			
Ergo per comp. E. P.	*ga.*	*gx.*	*bx.*	*bd.*
Ergo ſolutum.				

CONS-

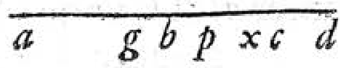
CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat *ga* rectæ *ac* æqualis, ipſiſque *ga*. *bd* reciprocæ inveniantur *gx*. *bx*, quarum differentia ſit *gb*. Dico factum.

Eſt enim ex conſtr. *ga* ad *gx*, vt *bx* ad *bd*, & per diviſ. *ga*, ideſt *ac* ad *ax*, vt *bx* ad *xd*, quare rectangulum *axb* rectangulo ſub *ac*, & *xd* erit æquale; ergo rectangulum *axb*, ideſt ſub *ac*, & *xd* ad rectangulum *dxc*, ob eamdem altitudinem *xd*, erit vt *ac* ad *xc*. Quod erat faciendum.

PROPOSIT. VIII.

Datam rectam *ad*, ſectam in *b*, & *c*, rurſus ſecare in *x*, inter *b*, & *c*, vt rectangulum *cax* ad *xcd* rectangulum ſit vt *bx* ad *bp*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*cax*.	*xcd*.	*bx*.	*bp*.
Et permut. dimenſ.	*ax*.	*xc*.	*bx:cd*.	*bp:ac*
Vel ſi fiat				*cd:gb*
Et per 1.6. el. E. P.	*ax*.	*xc*.	*bx*.	*gb*.
Et comp.	*ac*.	*xc*.	*gx*.	*gb*.

Ergo ſolutum.

a g b p x c d

CONST. ET DEMONST.

Fiat rectangulum ſub *cd*, & *gb* rectangulo ſub *bp*, & *ac* æquale, ipſiſque *ac*, & *gb* reciprocæ inveniantur *xc*, & *gx*, quarum ſumma ſit *gc*. Dico factum.

Cum enim ex conſtr. ſit *ac* ad *xc* ad *xc*, vt *gx* ad *gb*; erit divid. *ax* ad *xc*, vt *bx* ad *gb*, ſive vt rectangulum ſub *bx*, & *cd* ad rectangulum ſub *cd*, & *gb*, hoc eſt ſub *bp*, & *ac*: ergo permutando dimenſiones rectangulum *cax* ad rectangulum *xcd* erit vt *bx* ad *bp*. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO IX.

Vide R. P. à S. Vincen. tom. 1. lib. 1. prop. 84.

Datam rectam *ac*, ſectam in *b*, rurſus ſecare in *x*, inter *a*, & *b*, vt quadratum *ax* ad rectangulum *cxb* ſit vt *mp* ad *gp*.

a x b c *m g p k y*

Inter *mp*, & *gp* intelligatur interjecta quædam *py*.

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*axa.*	*cxb.*	*mp.*	*gp.*
Ergo ſi fiant prop.	*ax.*	*xc.*	*mp.*	*py.*
per III. Et etiam.	*ax.*	*xb.*	*py.*	*gp.*

de rati. compoſ. Solutum erit. Nam facta ſub terminis homologis erunt pro-

proportionalia, videlicet *axa. cxb. mpy. gpy*, ideſt per 1.6. el. *axa. cxb. mp. gp.* vt petitur.

Sint igit. prop.	*ax.*	*xc.*	*mp.*	*py.*
Et per compoſ.	*ax.*	*ac.*	*mp.*	*my.*
Fiant prop. *ab. ac. mp. mk.*		*ab.*	*mk.*	—
Sint etiam prop.	*ax.*	*xb.*	*py.*	*gp.*
Et per compoſ.	*ax.*	*ab.*	*py.*	*gy.* —
Ergo ex æquo E.P.	*py.*	*gy.*	*mk.*	*my.*
Et per diviſ.	*py.*	*gp.*	*mk.*	*ky.*
Ergo ſolutum.				

CONSTR. ET DEMONSTR.

Fiat vt *ab* ad *ac*, ita *mp* ad *mk*, ipſiſque *gp. mk* reciprocæ inveniantur *py. ky*, quarum differentia ſit *pk*. Itaque proportionales erunt *py. gp. mk. ky*, & per compoſ. *py. gy. mk. my*. Denique fiat *ax*, quæ ſit ad *ab*, vt *py* eſt ad *gy*, ſeu *mk* ad *my*. Dico factum.

Cum enim ſit *ax* ad *ab* vt *py* ad *gy*: erit per diviſ. *ax* ad *xb* vt *py* ad *gp*. Rurſus cum *ax* ad *ab* ſit vt *mk* ad *my*, hoc eſt (ob proportionales *ab. ac. mp. mk*) *ax* ad *ac* vt *mp* ad *my*: erit per diviſ. *ax* ad *xc*, vt *mp* ad *py*: erat autem *ax* ad *xb* vt *py* ad *gp*: ergo facta ſub terminis homologis erunt proportionalia, videlicet quadratum *ax* ad rectangulum *cxb*, vt rectangulum *mpy* ad rectangulum *gpy*, hoc eſt vt *mp* ad *gp*. Quod erat faciendum.

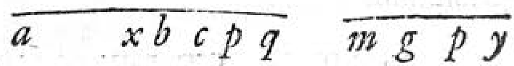
ALI-

ALITER.

Si in ipſa analyſi punctum *y* prius extinguatur, ita evadet conſtructio.

Sit iterum dividenda *ab*,&c. & debeant proportionales fieri,vt antea.

ax.	*xc.*	*mp.*	*py.*
ax.	*xb.*	*py.*	*gp.*



ANALYSIS.

Sint igit.prop.	*ax.*	*xc.*	*mp.*	*py.*	
Et per compoſ.	*ax.*	*ac.*	*mp.*	*my.*	
Fiant prop.*mg.mp.ac.ap.*		*ap.*	*mg.*		—
Sint etiam prop.	*ax.*	*xb.*	*py.*	*gp.*	
Et compon.	*ab.*	*xb.*	*gy.*	*gp.*	
Fiant prop. *mg. gp. ab. bq.*	*bq.*			*mg.*	
Et comp.E.P.	*xq.*	*xb.*	*my.*	*mg.*	—
Et ex æquo.	*xq.*	*xb.*	*ap.*	*ax.*	
Et conv.	*xq.*	*bq.*	*ap.*	*xp.*	

Ergo ſolutum.

CONSTR. & DEMONST.

Fiat vt *mg* ad *mp* ita *ac* ad *ap*, & vt *mg* ad *gp*, ita *ab* ad *bq*, ipſiſque *ap. bq.* reciprocæ inveniantur *xq*, & *xp*, quarum differentia ſit *pq*. Dico factum.

Eſt

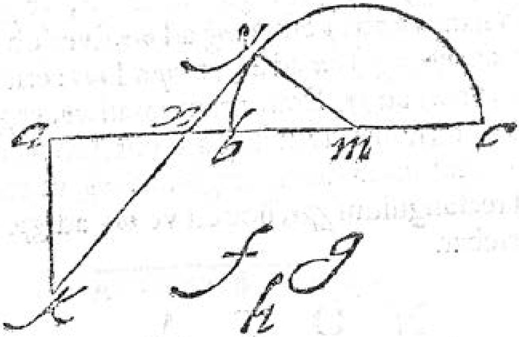
Est enim *xq* ad *bq* vt *ap* ad *xp* ex constr. & conv. *xq* ad *xb*, vt *ap* ad *ax*. Fiat *my*, quæ sit ad *mg*, vt *xq* ad *xb*, seu vt *ap* ad *ax*. Et quoniam *xq* ad *xb* est vt *my* ad *mg*: erit divid. *bq* ad *xb*, vt *gy* ad *mg* (hoc est ob proportionales *mg. gp. ab. bq.*) *ab* ad *xb*, vt *gy* ad *gp*, & divid. *ax* ad *xb*, vt *py* ad *gp*. Rursus quoniam *ax* ad *ap* est vt *mg* ad *my*, sive (ob proportionales *ap. ac. mp. mg.*) *ax* ad *ac*, vt *mp* ad *my*: erit per divis. *ax* ad *xc*, vt *mp* ad *py*. Erat autem *ax* ad *xb*, vt *py* ad *gp*: ergo facta sub terminis homologis erunt proportionalia, videlicet quadratum *ax* ad rectangulum *cxb*, vt rectangulum *mpy* ad rectangulum *gpy*, hoc est vt *mp* ad *gp*. Quod facere oportebat.

N O T A.

Quod autem proportionales fieri debeant *mg. mp. ac. ap.* ex subsequentibus pendet, itaque hæc reductio suspensa manet, donec pervenitur ad proportionales *ab. xb. gy. gp*, & necessitas patet reducendi terminum *gy* ad terminum *my*, qui supra extat, quod fieri non potest, nisi terminus *mg* vsurpetur, & proportionales fiant *mg. gp. ab. bq*, vnde proportionales emergunt comp. *xq. xb. my. mg*, & compertum fit statuendas esse proportionales *mg. mp. ac. ap*, vt ratio communis stabilita sit *mg. my*, & ex æquo arguendo evanescat punctum *y*.

ALI-

ALITER.



Sit dividenda *ab* in *x* vt quadratum *ax* ad rectangulum *cxb* sit vt *f* ad *g*.

Super *bc* semicirculus describatur *byc*, vt tangens *xy* rectangulum possit *cxb*.

ANALYSIS

Sint igit.prop.	*axa.*	*xyx.*	*f.*	*g.*
Sive si fiat			*b:h.*	*bmb.*
Et E.P.	*ax.*	*xy.*	*h.*	*bm.*
Sive				*my.*
Fiat angulus		*xak* ─∧─ *xym.*		
Et E. P.	*ax.*	*xy.*	*ak.*	*my.*
Ergo per 14.5.el.		*ak* ─∧─ *h.*		
Ergo solutum.				

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt *g* ad *f* ita quadratum *bm* ad quadratum rectæ *ak*, quæ cum *ac* angulum constituat rectum, & ducatur tangens

gens *ky* fecans *ab* in *x*. Dico factum.

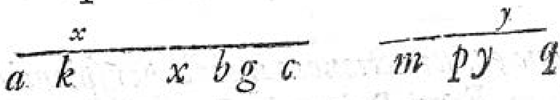
Sunt enim similia triangula rectangula *axk*. *xym*, quare *ax* ad *xy* erit vt *ak* ad *my*, ideſt ad *mb*, adeoque quadratum *ax* ad quadratum *xy*, ideſt ad rectangulum *cxb*, vt quadratum *ak* ad quadratum *mb*, ideſt vt *f* ad *g*. Quod erat faciendvm.

SCHOLION.

In hanc conſtructionem incidit perſpicaciſsimum ingenium Ex[mi]*. Principis Rogerij Ventemiglia, qui prius (præter alias ſcientias) Matheſim calluerat, quam viginti annos ætatis ſuæ compleviſſet. Et ipſam mihi, qui illi problema reſolvendum propoſueram, dignatus fuit Matriti degens tranſmittere.*

PROPOSITIO X.

Datam rectam *ac* diviſam in *b* iterum dividere in *x*, inter *a*, & *b*, vt rectangulum *axb* ad quadratum *xc* ſit vt *mp* ad *pq*.



Interjiciatur inter *mp*. *pq* quædam *py*.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*axb*.	*xcx*.	*mp*.	*pq*.
Ergo ſi fiant prop.	*ax*.	*xc*.	*mp*.	*py*.
Et etiam prop.	*xb*.	*xc*.	*py*.	*pq*.
Solutum erit, cum hoc fieri poſsit.				
Sint ergo prop.	*ax*.	*xc*.	*mp*.	*py*.
Et per compoſ.	*ax*.	*ac*.	*mp*.	*my*.
Fiant prop. *mq*. *mp*. *ac*. *ak*.		*ak*.	*mq*.	
Sint etiam prop.	*xb*.	*xc*.	*py*.	*pq*.
Et per diviſ.	*bc*.	*xc*.	*yq*.	*pq*.
Fiant prop. *mq*. *pq*. *bc*. *gc*.	*gc*.			*mq*.
Ergo per diviſ. E.P.	*xg*.	*xc*.	*my*.	*mq*.
Et ex æqualitate.	*xg*.	*xc*.	*ak*.	*ax*.
Et per diviſ.	*xg*.	*gc*.	*ak*.	*kx*.

Ergo ſolutum.

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt *mq* ad *mp* ita *ac* ad *ak*, & vt *mq* ad *pq* ita *bc* ad *gc*, ipsisque *gc*. *ab* reciprocæ inveniantur *xg*. *bx*, quarum summa sit *kg*. Dico factum.

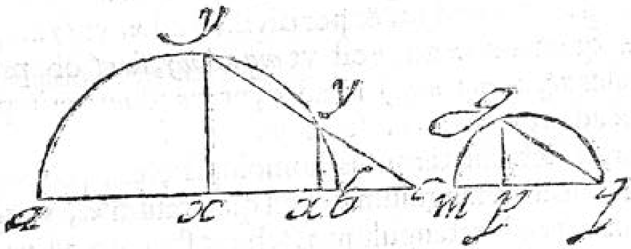
Est enim ex const. *xg* ad *gc* vt *ak* ad *kx*, & per compos. *xg* ad *xc* vt *ak* ad *ax*. Fiat *my*, quæ sit ad *mq*, vt *xg* est ad *xc*, sive *ak* ad *ax*. Et quoniã *xg* ad *xc* est vt *my* ad *mq*: erit per divis. *gc* ad *xc*, vt *yq* ad *mq*, sive (ob proportionales *gc*. *bc*. *pq*. *mq*.) *bc* ad *xc*, vt *yq* ad *pq*, & per divis. *xb* ad *xc* vt *py* ad *pq*. Rursus quoniam *ax* ad *ak* est vt *mq* ad *my*, seu (ob proportionales *ak*. *ac*. *mp*. *mq*.) *ax* ad *ac*, vt *mp* ad *my*: erit per divis. *ax* ad *xc*, vt *mp* ad *py*; sed erat antea *xb* ad *xc*, vt *py* ad *pq*. Ergo facta sub terminis homologis erunt proportionalia, videlicet rectangulum *axb* ad quadratum *xc*, vt rectangulum *mpy* ad rectangulum *qpy*, hoc est vt *mp* ad *pq*. Quod facere oportebat.

NOTA.

Ex constructione exacta perspicuum fiet an problema impossibile sit, an vero vnam, duasve solutiones admittat iuxta determinationem prop. 1. *Introductionis.*

ALITER.

Sit recta *ac*, divisa in *b*, iterum dividenda in *x* inter *a*, & *b*, vt rectangulum *axb* ad quadratum *xc* sit in ratione data vt *mp* ad *pq*.



ANALYSIS.

Esto factum, & super *ab* semicirculus describatur, vt perpendicularis *xy* rectangulum possit *axb*, ducaturque *cy*. Perspicuum igitur est, ex terminis rationis datæ triangulum constitui posse, cui simile debeat esse triangulum *xyc*. Ergo solutum.

CONSTR. & DEMONSTR.

Inter *mp*. *pq* sit media *pg*, ductaque *gq*, fiat angulus *acy* angulo *pqg* æqualis. Si igitur crus *cy* semicirculo super *ab* descripto non occurrerit, problema construi non poterit, sit tetigerit vnica erit resolutio. At vero si secuerit in punctis *y*. *y*, demittantur perpendiculares *yx*. *yx*. Dico *ab* sectam esse in punctis *x*. *x*, vt petitur.

Sunt

Sunt enim triangula *xyc* triangulo *pgq* similia, quare *xy* ad *xc* erit vt *pg* ad *pq*, adeoque quadratum *xy*, ideſt rectangulum *axb* ad quadratum *xc*, vt quadratum *pg* ad quadratum *pq*, hoc eſt vt *mp* ad *pq*. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XI.

Datam rectam *ac*, ſectam in *b*, protrahere ad *x*, vt rectangulum *axc* ad quadratum *bx* ſit vt *mp* ad *gp*.

Inter *mp*, & *gp* interjiciatur quædam *yp*.

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*axc.*	*bxb.*	*mp.*	*gp.*
Ergo ſi fiant prop.	*ax.*	*bx.*	*mp.*	*yp.*
Et etiam.	*cx.*	*bx.*	*yp.*	*gp.*
Factum erit quod petitur.				
Sint ergo prop.	*ax.*	*bx.*	*mp.*	*yp.*
Et convert.	*ax.*	*ab.*	*mp.*	*my.*
Fiant prop.		*fa.*	*gm.*	
Sint etiam prop.	*cx.*	*bx.*	*yp.*	*gp.*
Et per diviſ.	*bc.*	*bx.*	*gy.*	*gp.*
Vel ſi fiant prop.	*bq.*			*gm.*
Ergo divid. E. P.	*xq.*	*bx.*	*my.*	*gm.*
Et ex æqualitate	*xq.*	*bx.*	*fa.*	*ax.*
Et per compoſ.	*xq.*	*bq.*	*fa.*	*fx.*
Ergo ſolutum.				

CONS-

$\overline{f \quad a \quad b \quad c \quad x \quad q} \quad \overline{g \quad m \quad y \quad p}$

CONSTR. ET DEMONSTR.

Fiat vt *gm* ad *mp* ita *ab* ad *fa*, & vt *gm* ad *gp* ita *bc* ad *bq*, ipsisque *bq*. *fa*. reciprocæ inveniantur *xq*. *fx*, quarum summa sit *fq*. Dico factum.

Cum enim sit ex constr. *xq* ad *bq* vt *fa* ad *fx*: erit per divis. *xq* ad *bx*, vt *fa* ad *ax*. Fiat *my*, quæ sit ad *gm*, vt *xq* ad *bx*, sive vt *fa* ad *ax*. Cum igitur *xq* ad *bx* sit vt *my* ad *gm*: erit compon. *bq* ad *bx*, vt *gy* ad *gm*, sive (ob proportionales *bq*. *bc*. *gp*. *gm*.) *bc* ad *bx*, vt *gy* ad *gp*, & per divis. *cx* ad *bx*, vt *yp* ad *gp*. Rursus cum *ax* ad *fa*, sit vt *gm* ad *my*, sive (ob proportionales *fa*. *ab*. *mp*. *gm*) *ax* ad *ab*, vt *mp* ad *my*: erit convert. *ax* ad *bx* vt *mp* ad *yp*; sed erat antea *cx* ad *bx*, vt *yp* ad *gp*. Ergo facta sub terminis homologis erunt proportionalia, hoc est rectangulum *axc* ad quadratum *bx*, vt rectangulum *mpy* ad rectangulum *gpy*, sive vt *mp* ad *gp*. Quod faciendum erat.

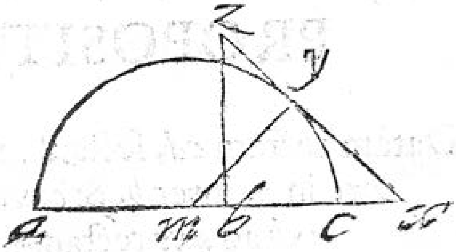
nu. III. de rat. compos.

ALITER.

Datam rectam *ac* sectam in *b* producere ad *x*, vt rectangulum *axc* ad quadratum *bx* sit vt *p* ad *q*.

Des-

Describatur super *ac* semicirculus, vt tangens *xy* rectangulum possit *axc*. Bisecetur *ac* in *m*, & iungatur *my*.



22

ANALYSIS

Sint igit. prop.	*axc.*	*bxb.*	*p.*	*q.*
Idest	*xyx.*			
Vel si fiat			*ff*	*gg.*
Et E.P.	*xy.*	*bx.*	*f.*	*g.*
Fiat angulus		*xbz*	⊥Λ⊥	*myx.*
Et ob simil. *bzx.ymx.* E.P.	*xy.*	*bx.*	*my.*	*bz.*
Idest			*mc.*	
Ergo ex æquo E. P.	*f.*	*g.*	*mc.*	*bz.*
Et quadrando	*ff.*	*gg.*	*mcm.*	*bzb.*
Idest	*p.*	*q.*		
Ergo solutum.				

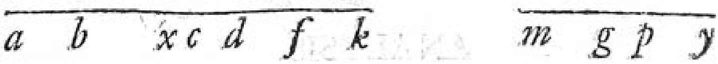
CONST. ET DEMONST.

Fiat vt *p* ad *q* ita quadratum *mc* ad aliud, cuius latus sit *bz*, quæ ad *ac* perpendicularis ponatur, & ex *z* tangens ducatur *zyx*. Dico factum.

Sunt enim similia triangula rectangula *myx*:*bzx*, quare *xy* ad *xb* erit vt *my* ad *bz*, adeoque quadratum *xy*, idest rectangulum *axc* ad quadratum *bx*, vt quadratum *my*, idest *mc* ad quadratum *bz*, hoc est vt *p* ad *q*. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XII.

Datam rectam *ad*, ſectam in *b*, & *c*, rurſus ſecare in *x*, inter *b*, & *c*, vt rectangulum *axb* ad *dxc* rectangulum ſit vt *mp* ad *gp*.



Interjiciatur *py* inter *mp*, & *gp*.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*axb.*	*dxc.*	*mp.*	*gp.*	
Ergo ſi fiant prop.	*ax.*	*xd.*	*mp.*	*py.*	
Et etiam.	*bx.*	*xc.*	*py.*	*gp.*	

nu. III. de rati. compoſ. Solutum erit. Nam facta ſub terminis homologis propoſitam reſtituent analogiam.

Sint igit. prop.	*ax.*	*xd.*	*mp.*	*py.*	
Et per compoſ.	*ax.*	*ad.*	*mp.*	*my.*	
Fiant prop. *mg. mp. ad. ak.*		*ak.*	*mg.*		—
Sint etiam prop.	*bx.*	*xc.*	*py.*	*gp.*	
Et compon.	*bc.*	*xc.*	*gy.*	*gp.*	
Fiant prop.	*cf.*			*mg.*	
Ergo comp. E.P.	*xf.*	*xc.*	*my.*	*mg.*	—
Et ex æqualitate.	*xf.*	*xc.*	*ak.*	*ax.*	
Et convert.	*xf.*	*cf.*	*ak.*	*xk.*	

Ergo ſolutum.

CONS-

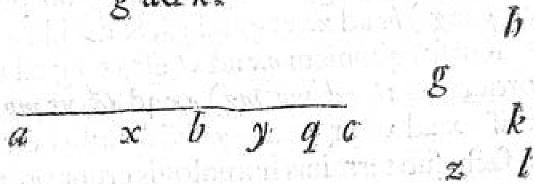
CONSTR. & DEMONST.

Fiat vt *mg* ad *mp* ita *ad* ad *ak*, & vt *mg* ad *gp* ita *bc* ad *cf*, ipsisque *cf*. *ak* reciprocæ inveniantur *xf*. *xk*, quarum differentia sit *fk*. Dico factum.

Est enim ex const. *xf* ad *cf*, vt *ak* ad *xk*, & convert. *xf* ad *xc*, vt *ak* ad *ax*. Fiat *my*, quæ sit ad *mg*, vt *xf* est ad *xc*, sive vt *ak* est ad *ax*. Et quoniam *xf* ad *xc* est vt *my* ad *mg* : erit divid. *cf* ad *xc* vt *gy* ad mg, hoc est (ob proportionales *cf*. *bc*. *gp*. *mg*) *bc* ad *xc* vt *gy* ad *gp*, & divid. *bx* ad *xc* vt *py* ad *gp*. Rursus quoniam *ax* ad *ak* est vt *mg* ad *my*, sive (ob proportionales *ak*. *ad*. *mp*. *mg*) *ax* ad *ad*, vt *mp* ad *my* : erit per divis. *ax* ad *xd* vt *mp* ad *py*; sed *bx* ad *xc* erat vt *py* ad *gp*: ergo facta sub terminis homologis erunt proportionalia, scilicet rectangulum *axb* ad *dxc* rectangulum, vt rectangulum *mpy* ad rectangulum *gpy*, hoc est vt *mp* ad *gp*. Quod faciendum erat. *nu. III. de rati. compos.*

PROPOSIT. XIII.

Datas rectas *ab*, & *bc* ita ſecare in *x*, & *y*, vt rectangulum *axb* ad *byc* rectangulum ſit vt *g* ad *h*; rectangulum verò ſub *ax*, & *yc*, ad rectangulum ſub *xb*, & *by* ſit vt *g* ad *k*.



ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*axb.*	*byc.*	*g.*	*h.*
Et etiam	*ax:yc.*	*xb:by.*	*g.*	*k.*
Ergo ſi fiant prop.	*ax.*	*by.*	*g.*	*z.*
Nec non	*xb.*	*yc.*	*z.*	*h.*
Et etiam.	*ax.*	*by.*	*g.*	*z.*
Nec non	*yc.*	*xb.*	*z.*	*k.*
Ex æquo E. P.	*k.*	*z.*	*z.*	*h.*
Et cognita erit *z*: vnde facilis apparet progreſſus.				
Sint ergo prop.	*ax.*	*by.*	*g.*	*z.*
Vel ſi fiat			*ab.*	*bq.*
Ergo diff. vt 1. ad 1. & E. P.	*xb.*	*yq.*	*g.*	*z.*
Sint etiam prop.	*xb.*	*yc.*	*z.*	*h.*
Vel ſi fiat			*g.*	*l.*
Et ex æqual. E, P.	*yc.*	*l.*	*yq.*	*z.*

Ergo ſolutum

CONS.

CONSTR. & DEMONSTR.

Inter *k*, & *h* media inveniantur *z*, & vt *g* ad *z* ita fiat *ab* ad *bq*, & vt *z* ad *h*, sive vt *k* ad *z* ita *g* ad *l*. Deinde fiant proportionales *yc*. *l*. *yq*. *z*, & etiam *xb*. *yc*. *g*. *l*. Dico factum. *per Scholi. prop. 2. lib. 1.*

Cum enim sit *yc* ad *l*, vt *yq* ad *z*, & *xb* ad *yc*, vt *g* ad *l*: erit ex æquo *xb* ad *yq*, vt *g* ad *z*, sive ex constr. vt *ab* ad *bq*, vnde (quia differentiæ sunt vt vnus ad vnum) erit *ax* ad *by*, vt *ab* ad *bq*, idest vt *g* ad *z*. Est autem *xb* ad *yc*, vt *g* ad *l*, idest vt *z* ad *h*: ergo facta sub terminis homologis erunt proportionalia, videlicet rectangulum *axb* ad rectangulum *byc*, vt rectangulum sub *g*, & *z* ad rectangulum sub *z*, & *h*, hoc est vt *g* ad *h*, vt oportebat. Rursus quoniam *ax* ad *by* est vt *g* ad *z*, & *yc* ad *xb*, vt *h* ad *z*, idest vt *z* ad *k*, erunt facta proportionalia sub terminis homologis, nempe rectangulum sub *ax*, & *yc*, ad rectangulum sub *by*, & *xb*, vt rectangulum sub *g*, & *z* ad rectangulum sub *z*, & *k*, hoc est vt *g* ad *k*, vt oportebat. Rectas igitur *ab*, & *bc*, &c. Quod erat faciendum. *nu. III. de rat. compos.*

QVÆSTIO.

Oporteat duos datos numeros (*ab*, & *bc*) 16, & 13 ita singillatim in duas partes dividere, vt factum sub partibus 16 ad factum sub partibus 13 sit vt 3 ad 2 (vt *g* ad *h*) factum verò sub prima parte ipsius 16, & secunda parte ipsius 13 ad factum sub secunda 16, & prima 13 sit vt 25 ad 24, sive vt 3 ad $\frac{72}{25}$ (idest vt *g* ad *k*.)

Sint partes quæsitæ *ax*. *xb*. *by*. *yc*, & ex præcedente analysi hæc sequitur.

OPERATIO.

Inter *h*, & *k*. 2 & $\frac{72}{25}$ media est $\frac{12}{5}$ pro *z*, fiat vt *z* ad *h* ita *g* ad *l*, idest vt $\frac{12}{5}$ ad 2 ita 3 ad $2\frac{1}{2}$, & inter *z*, & *l*. $\frac{12}{5}$, & $2\frac{1}{2}$ differentia erit $\frac{1}{10}$ pro *l* -- *z*.

Fiat vt *g* ad *z* ita *ab* ad *bq*, hoc est vt 3 ad $\frac{12}{5}$ ita 16 ad $12\frac{4}{5}$, & inter *bc*, & *bq*, idest 13, & $12\frac{4}{5}$ differentia erit $\frac{1}{5}$ pro *qc*.

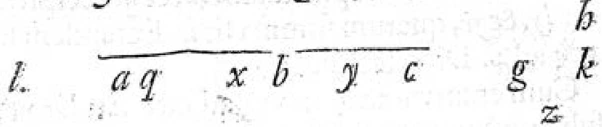
Fiat vt *l* - *z* ad *qc*, ita *l* ad *yc*, hoc est vt $\frac{1}{10}$ ad $\frac{1}{5}$ ita $2\frac{1}{2}$ ad 5 pro *yc*. secunda parte ipsius 13, vnde prima erit 8 (pro *by*.) Fiat tandem vt *z* ad *k* ita *yc* ad *xb*, idest vt $\frac{12}{5}$ ad $\frac{72}{25}$ ita 5 ad 6 pro *xb* secunda parte numeri dati 16, vnde prima erit 10.

Sunt igitur 10. 6. 8. 5. partes, de quibus quæritur, quæ conditiones asſignatas adimplent.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Datas rectas *ab*, & *bc* ita ſecare in *x*, & *y*, vt rectangulum *abx* ad *cby* rectangulum, ſit vt *g* ad *h*: rectangulum vero *acx* ad *ayc* rectangulum ſit vt g ad *k*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*abx*.	*cby*.	*g*.	*h*.
Et etiam.	*acx*.	*ayc*.	*g*.	*k*.
Ergo ſi fiant prop.	*ab*.	*bc*.	*z*.	*h*.
Et etiam	*xb*.	*by*.	*g*.	*z*.

Manifeſta erit ſolutio. Cum autem *z* prima fronte innoteſcat, ita erit progrediendum.

Sint igit. prop.	*xb*.	*by*.	*g*.	*z*.
Vel ſi fiant			*bc*.	*qb*.
Ergo agg. vt 1. ad 1. & E. P.	*xc*.	*qy*.	*g*.	*z*.
Et per 1. 6. el.	*acx*.	*ac:qy*.	*g*.	*z*.
Sed debent eſſe prop.	*acx*.	*ayc*.	*g*.	*k*.
Ergo ex æquo E. P.	*ac:qy*.	*ayc*.	*z*.	*k*.
Vel ſi fiant			*ac*.	*la*.
Siue per 1. 6. el.			*ac:qy*.	*la:qy*.
Ergo ex 14. 5. el.		*ayc*	— Λ —	*la:qy*.
Et E. P.	*la*.	*ay*.	*yc*.	*qy*.
Et per compoſ.	*la*.	*ly*.	*yc*.	*qc*.

Ergo ſolutum.

CONS-

h

$l.\quad aq\quad x\ b\ y\ c\quad g\quad k$

z

CONSTR. ET DEMONSTR.

Fiat z ad h vt ab eſt ad bc, & vt g ad z ita bc ad qb, & vt z ad k ita ac ad la. Ipſis autem la, & qc reciprocæ inveniantur ly, & yc, quarum ſumma ſit lc. Et tandem fiat xb ad by vt g ad z. Dico factum.

Cum enim xb ad by ſit vt g ad z,& ab ad bc, vt z ad k: facta ſub terminis homologis erunt proportionalia, ſcilicet rectangulum abx ad rectangulum cby, vt rectangulum ſub g, & z ad rectangulum ſub z, & h, hoc eſt vt g ad h, vt oportebat. Rurſus cum xb ad by ſit vt g ad z, ſive vt bc ad qb, erunt aggregata vt vnus ad vnum, hoc eſt xc ad qy, ſive rectangulum acx ad rectangulum ſub ac, & qy, vt g ad z. Eſt autem la ad ly, vt yc ad qc, & per diviſ. la ad ay, vt yc ad qy, quare rectangulum ayc æquale erit rectangulo ſub la, & qy: ergo rectangulum ſub ac,& qy ad rectangulum ayc (nempe ſub la, & qy) erit vt ac ad la, ſive vt z ad k; ſed erat rectangulum acx ad rectangulum ſub ac, & qy, vt g ad z: ergo rectangulum acx ad ayb rectangulum erit ex æquo, vt g ad k, vt oportebat (ratio communis, ſeu termini comparationis, ſi mavis, rectangulum ſub ac, & qy, & recta z.) Rectas igitur ab,& bc diviſsimus,&c. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSITIO XV.

Quatuor terminos proportionales exhibere, ita vt primus ad quartum ſit in ratione data *g* ad *k*, ſecundus verò ad tertium in ratione etiam data *m* ad *p*, & præterea aggregatum ſecundi, & quarti ſit datum, nempe recta *ab*.

g   *k*.   *q*.

x   *y*   *a*   *z*   *b*   *m*.   *p*.   *f*.

Sint quatuor termini, de quibus quæritur *xy*. *az*. *ya*. *zb*.

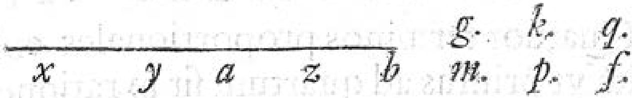
CONDITIONES

Vt ſint prop.	*xy*.	*az*.	*ya*.	*zb*.
Vt ſint prop.	*xy*.	*zb*.	*g*.	*k*.
Vt ſint prop.	*az*.	*ya*.	*m*.	*p*.
Vt	*az*+ *zb* —Λ— *ab*.			

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*xy*.	*az*.	*ya*.	*zb*.
Et etiam	*zb*.	*xy*.	*k*.	*g*.
Ergo rectang. E.P.	*xy:zb*.	*az:xy*.	*ya:k*.	*zb:g*.
Ideſt per 1.6.el.	*zb*.	*az*.		
Sunt autem prop.	*az*.	*ya*.	*m*.	*p*.
Vel ſi fiat			*k*.	*q*.
Vnde	*az:q* —Λ— *ya:k*.			
Ergo ſubſtit. E.P.	*zb*.	*az*.	*az:q*.	*zb:g*.
Et permut. dimenſ.	*zbz*.	*aza*.	*q*.	*g*.
Vel ſi fiant			*qq*.	*ff*.
Et erunt prop.	*zb*.	*az*.	*q*.	*f*.
Et compon.	*ab*.	*az*.	*q*+*f*.	*f*.
Ergo ſolutum.				

CONS-



CONST. ET DEMONST.

Fiat vt *m* ad *p* ita *k* ad *q*, & inter *q*, & *g* media inveniatur *f*, dividaturque *ab* in *z* in ratione *q* ad *f*. Itaque *az*, & *zb* erunt secundus & quartus terminus, vt petitur. Deinde vt *m* ad *p*, seu vt *k* ad *q* ita fiat *az* secundus ad *ya* tertium, & vt *k* ad *g* ita *zb* quartus ad *xy* primum, vt petitur. Dico *xy*. *az*. *ya*. *zb*. etiam esse proportionales.

Cum enim sit *zb* ad *az* vt *q* ad *f*: erit etiam quad. *zb* ad quad. *az*, vt quad. *q* ad quad. *f*, idest vt *q* ad *g*. Hoc est permutando dimensiones *zb* ad *az* vt rectangul. sub *az*, & *q* ad rectang. sub *zb*, & *g*; sed rectangulum sub *az*, & *q* æquatur rectangulo sub *ya*, & *k* (cum sint proportionales *az*. *ya*. *k*. *q*.) ergo vt *zb* ad *az*, vel vt rectang. sub *zb*. & *xy* ad rectang. sub *az*, & *xy*, ita erit rectang. sub *ya*, & *k* ad rectang. sub *zb*, & *g*. Est autem vt *zb* ad *xy* ita *k* ad *g*: ergo deptimeudo antecedentem analogiam per istam, vt *xy* ad *az* ita erit *ya* ad *zb*. Quatuor igitur terminos proportionales exhibuimus &c. Quod facere oportebat.

SCHOLION.

Tantæ molis est fugere aliquando principia solida in problematibus planis, placet propterea more arithmetico eamdem propositionem hunc in modum resolvere.

ANA-

$$\frac{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad g. \quad k. \quad q.}{x \quad y \quad a \quad z \quad b \quad m. \quad p. \quad f.}$$

CONDITIONES.

Vt ſint prop. $xy.\quad az.\quad ya.\quad zb.$
Et etiam $xy.\quad zb.\quad g.\quad k.$
Et etiam $az.\quad ya.\quad m.\quad p.$
Seu ſi ſiat $k.\quad q.$
Vt ſit $az + zb$ —Λ— ab.

ANALYSIS.

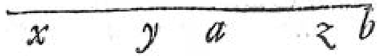
Per 1.& 2.cond.eſt $\frac{az:ya.}{zb.}$ —Λ— $\frac{zb:g}{k.}$ quia —Λ— xy.
Ergo producendo $az:ya:k$ —Λ— $zbz:g$.
Sed per 3.condit. $ya:k$ —Λ— $az:q$.
Ergo ſubſt.erit $aza:q$ —Λ— $zbz:g$.
Et E.P. $g.\quad q.\quad aza.\quad zbz.$
Vel ſi f ſit media $gg:\ ff.$
Ergo latera E.P. $g.\quad f.\quad az.\quad zb.$
Ergo ſolutum, & patet conſtructio, & demonſtratio.

QVÆSTIO.

Quatuor numeros exhibere proportionales ita vt primus ad quartum ſit vt 8 ad 5, ſecundus ad tertium vt 7 ad 4, & aggregatum ſecundi, & quarti ſit 27.

Hæc quæſtio ſupponendo g, & k valere 8, & 5, & m, & p. 7, & 4, &c. expediri poteſt, vt antea. Placet nihilominus ita procedere.

 Sint



Sint quæsiti numeri *xy. az. ya. zb.* ita vt *ab* summa secundi, & quarti valeat 27.

ANALYSIS.

	Sint igit. prop.	*xy.*	*az.*	*ya.*	*zb.*
	Et etiam.	*zb.*	*xy.*	5.	8.
	Ergo rectang. E.P.	*xy:zb.*	*az:xy.*	5*ya.*	8*zb.*
nu. III. de rati. compos.	Idest per 1.6.el.	*zb.*	*az.*	5*ya.*	8*zb.*
	Sed etiam S.P.	*az.*	*ya.*	7.	4.
	Vel si fiat			5.	$2\frac{6}{7}$
	Ergo	$2\frac{6}{7}$ *az* —∧— 5.*ya.*			
	Et substit. E.P.	*zb.*	*az.*	$2\frac{6}{7}$ *az.*	8*zb.*
	Idest augendo per 7.			20*az.*	56*zb*
	Et deprim. per 4.			5*az.*	14*zb*
	Ergo per 16.6.el.	14*zbz* —∧— 5*aza.*			
	Et E.P. per 14.6.el.	14.	5.	*aza.*	*zbz.*
	Vel per 20.6.el.	196.	70.		
	Ergo etiam latera E.P.	14.	$\sqrt{70}$.	*az.*	*zb.*
	Et per comp.	14.	$14+\sqrt{70}$	*az.*	*ab.*
	Idest				27.

Ergo solutum, & manifestum fit analysim nostram numeros etiam admittere, si illis operari placuerit, absque præiudicio demonstrationis.

OPE-

OPERATIO.

Si $14+\sqrt{70}$ dat 14. quid 27?
Elev. per $14-\sqrt{70}$ $14-\sqrt{70}$.
Vel si 126. dat $196-14\sqrt{70}$ quid 27?
Vel si 9. dat $14-\sqrt{70}$ quid 27?
Vel si 1. dat $14-\sqrt{70}$ quid 3? dabit quidem $42-3\sqrt{70}$ pro secundo numero *az*.
Ergo $-15+3\sqrt{70}$ pro quarto *zb*.
Est enim 27. aggregatum vtriusque.

Nunc si 5 dat 8 quid $-15+3\sqrt{70}$? dabit quidem $-24+4\frac{4}{5}\sqrt{70}$ pro primo numero *xy*.

Mox si 7 dat 4. quid $42-3\sqrt{70}$? dabit quidem $24-1\frac{5}{7}\sqrt{70}$. pro tertio numero *ya*.

Erunt igitur quatuor quæsiti numeri.

$$-24+4\tfrac{4}{5}\sqrt{70},\quad 42-3\sqrt{70},\quad 24-1\tfrac{5}{7}\sqrt{70},\quad -15+3\sqrt{70}.$$

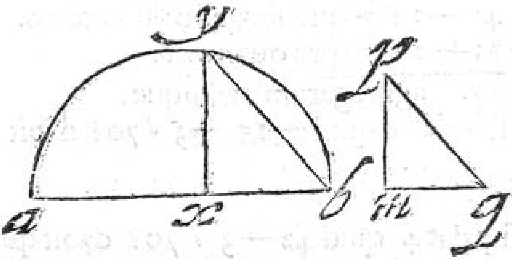
$-15+3\sqrt{70}$		$42-3\sqrt{70}$
$+360-72\sqrt{70}$		$1008-72\sqrt{70}$
$+1008-72\sqrt{70}$		$360-72\sqrt{70}$
$1368-144\sqrt{70}$	— Λ —	$1368-144\sqrt{70}$

Qui etiam sunt proportionales, cum factum sub extremis facto sub medijs sit æquale, vt patet. Quatuor igitur numeros exhibuimus, &c. Quod facere oportebat.

Etiam per præcedentem analysim, more arithmetico, quæstio enodari poterit, & quidem breuius, operatio verò eadem erit.

PROPOSIT. XVI.

Datam circuli diametrum ab ita secare in x, vt perpendicularis xy ad segmentum xb sit in ratione data vt mp ad mq.



ANALYSIS.

Ducatur by, & patet ex terminis rationis datæ triangulum posse fieri, cui simile sit triangulum xyb. Ergo solutum.

CONSTR. ET DEMONSTR.

Constituantur ad angulos rectos $mp.mq$, ductaque pq fiat angulus aby angulo q æqualis, & demittatur perpendicularis xy. Erunt igitur triangula rectangula xyb. mpq similia, quare xy ad xb erit vt mp ad mq. Quod facere oportebat.

SCHOLION.

Quoniam propositum problema positione tantum est resolutum, placet aliam analysim instituere, vnde quanta sit xy, vel xb scire possimus.

ALI-

ALITER.

Sint igit. prop.	*xy.*	*xb.*	*mp.*	*mq.*
Et quadrando.	*xyx.*	*xbx.*	*mpm.*	*mqm.*
Sive per 8.6.el.	*axb.*			
Hoc est per 1.6.el.	*ax.*	*xb.*	*mpm.*	*mqm.*
Et compon.	*ab.*	*xb.*	*mpm+mqm.*	*mqm.*
Ergo solutum.				

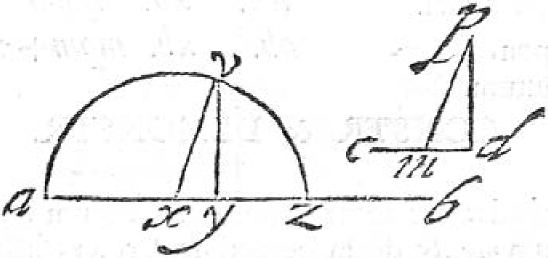
CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat *ab* ad *xb* vt aggregatum quadratorum *mp. mq* ad quadratum *mq*, & ducta perpendiculari *xy*, factum erit. Nam dividendo erit *ax* ad *xb*, sive rectangulum *axb* ad quadratum *xb*, hoc est quadratum *xy* ad quadratum *xb*, vt quadratum *mp* ad quadratum *mq*, adeoque *xy* ad *xb*, vt *mp* ad *mq*. Quod erat faciendum.

Quod si semicirculus datus *ayb* non iam semicirculus; sed portio circuli proponatur ad primam analysim confugiendum erit, & quanta sit *xy*, aut *xb* à trigonometria petendum determinatis quantitatibus *ab. mp. mq*, & valore anguli *ayb*.

PROPOSITIO XVII.

Dato aggregato trium proportionalium, dataque ratione mediæ ad differentiam extremarum: singulas exhibere.



Sit aggregatum data recta *ab*, & ratio data *dp* ad *cd*. Sint quæsitæ partes *ay*. *zb*. *yz* quo posito, si recta *az* bisecta supponatur in *x*: erit 2*xy* differentia extremarum, & descripto semicirculo *avz*, erectàque perpendiculari *yv*: erit ipsa rectæ *zb* æqualis. Ergo si iungatur *xv* perspicuum erit ex terminis rationis datæ triangulum posse fieri, cui simile debeat esse *xvy*.

prop. 7. Introd.

ANALYSIS

Inclinentur *cd*, & *dp* ad rectos angulos, bisectaque *cd* in *m* ducatur *mp*.

Et ob simil. *xvy*. *mpd*. E.P.	*xv*.	*vy*.	*mp*.	*pd*.
Idest	*ax*.	*zb*.		
Et duplic. anteced.	*az*.	*zb*.	2*mp*.	*pd*.

Ergo solutum.

CONSTR. & DEMONST.

Dividatur *ab* in *z* in ratione duplæ *mp* ad *pd*, & super *az*, bi-

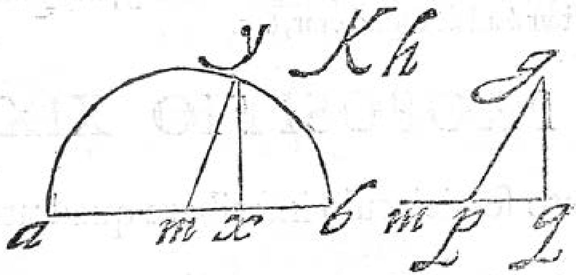
bisectà in x, semicirculus describatur avz, & fiat angulus zxv angulo dmp æqualis, demittaturque perpendicularis vy. Dico ay. zb. yz esse, de quibus quæritur.

Cum enim ex constr. triangula sint similia xvy. mpd, erit xv, idest ax ad vy, vt mp ad pd, & duplicando antecedentes az ad vy, vt $2mp$ ad pd; sed ex constr. est az ad zb, vt $2mp$ ad pd: æquales igitur erunt vy, & zb, ac proinde proportionales ay. zb. yz, vt petitur. Rursus ob similitudinem xvy. mpd erit vy, idest zb ad xy vt dp ad mp, & duplicando consequentes, zb (media) ad duplam xy (differentiam extremarum ay, & yz) vt dp ad cd, vt postulatur. Dato igitur aggregato. &c. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XVIII.

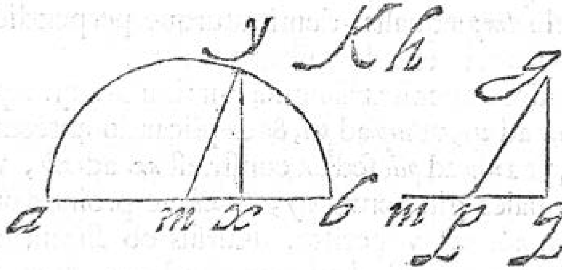
Vide Renald. tom. 3. pag. 406.

Datam rectam ab secare in x, vt rectangulum sub partibus, ad quadratum differentiæ earumdem habeat datam rationem k ad h.



Factum iam sit, & describatur super ab, bisectà in m, semicirculus ayb, vt perpendicularis xy rectangulum possit axb. Quoniam igitur mx semidifferentia est partium ax. xb, ductà my, patet ex terminis rationis datæ, triangulum posse fieri, cui simile sit triangulum mxy. *prop. 7. Introd.*

CONS-



CONSTR. & DEMONST.

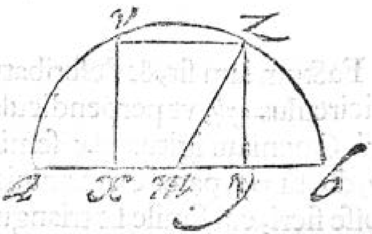
Fiat vt *k* ad *h* ita quadratum quodpiam *gq* ad quadratum *mq*. Inclinentur ad angulos rectos *mq*. *gq*, & bisecetur *mq* in *p*, ductaque *pg*, fiat *mb* ad *mx*, vt *pg* est ad *pq*, erectaque perpendiculari *xy*, iungatur *my*. Dico factum.

Quoniam igitur *my*, ideſt *mb* eſt ad *mx*, vt *pg* ad *pq*: ſi-
7.6.el. milia erunt triangula rectangula *myx*. *pgq*, quare *xy* ad *mx* erit vt *gq* ad *pq*, & duplicando conſequentes *xy* ad duplam *mx* vt *gq* ad *mq*, adeoque quadratum *xy*, ideſt rectangulum *axb* ad quadratum duplæ *mx*, ideſt ad quadratum differentiæ partium *ax*, & *xb*, vt quadratum *gq* ad quadratum *mq*, ideſt vt *k* ad *h*. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XIX.

In dato ſemicirculo inſcribere quadratum.

Factum iam ſit, & in ſemicirculo dato *avb* inſcriptum ſit quadratum *xyzv*. Biſecetur diameter *ab* in *m*, & ducatur *mz*.



ANA-

ANALYSIS.

Quoniam igitur quadrati latera ſunt inter ſe æqualia, æquales propterea erunt rectæ *xv*, & *yz*, & æqualiter diſtabunt à centro *m*, quare *xm*, & *my* erunt æquales : ergo *my* dimidia erit ipſius *zy*: ergo quadratum *mz*, ideſt quadratum *mb* quinque poterit quadrata *my* (ſiquidem *yz*, vt pote dupla ipſius *my*, quatuor poteſt quadrata *my*.) Ergo ſolutum.

CONST. ET DEMONST.

Inter *mb*, & ipſius quintam partem media inveniatur proportionalis *my*, fiatque ei æqualis *xm*, & excitentur perpendiculares *xv*, & *yz*, & connectantur *vz*, & *mz*. Dico *xyzv* quadratum eſſe, de quo quæritur.

Quoniam igitur quadratum *my* æquale eſt ex conſtr. rectangulo ſub *mb*, & ipſius quinta parte: erunt quintuplicando, quinque quadrata *my* æqualis quadrato *mb*, ideſt *mz*; ſed quadratum *mz* æquale eſt quadratis *my*, & *yz*: ergo quinque quadrata *my* æqualia erunt quadratis *my*, & *yz*, ac propterea *yz* quadratum quatuor quadratis *my* erit æquale: ergo *yz* dupla erit ipſius *my*, nempe ipſi *xy* æqualis, ſed etiam ſunt æquales *xv*, & *yz*: ergo *xyzv* quadratum erit in ſemicirculo dato conſtitutum. Quod erat faciendum.

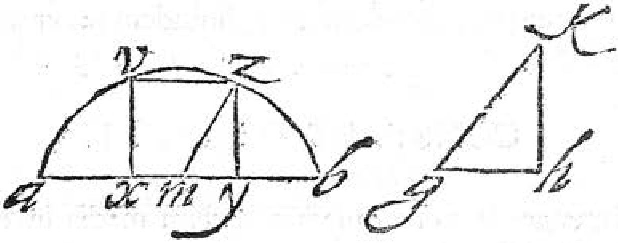
SCHOLION.

Hoc problema proponi poteſt hoc modo:

Datam *ab* dividere in *y*, vt rectangulum ſub ſegmentis æquale ſit quadrato differentiæ eorumdem.

PROPOSIT. XX.

In data portione circuli quadratum constituere.



Esto iam factum, & in portione circuli data *avb*, constitutum sit quadratum *xyzv*, & bisecetur *ab* in *m*, ducaturque *mz*.

ANALYSIS.

Quoniam igitur *xv*, & *yz* sunt æquales, æqualiter distabunt à centro, adeoque *xm*, & *my* erunt æquales: ergo *yz* dupla erit ipsius *my*: ergo triangulum effici poterit, cui simile debeat esse triangulum *myz*.

CONSTR. ET DEMONSTR.

Exponatur quævis *gh*, & ad angulos rectos ipsius dupla ponatur *hk*, iungaturque *gk*. Deinde angulo *g* angulus fiat æqualis *bmz*, & demittatur perpendicularis *zy*, factâque *xm* ipsi *my* æquali, erigatur perpendicularis *xv*, iungaturque *vz*.

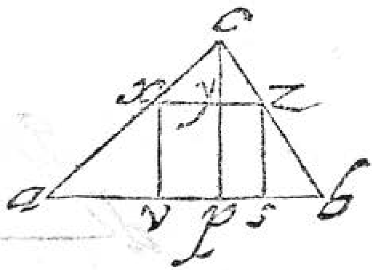
Quoniam igitur triangula rectangula *myz*. *ghk* sunt æquiangula, erit vt *my* ad *yz* ita *gh* ad *hk*; sed *hk* dupla est ipsius *gh*: ergo *yz* dupla erit ipsius *my*, adeoque ipsi *xy* æqualis; sed *xv*, & *yz* sunt æquales: ergo *xyzv* quadratum erit de de quo quæritur. In data igitur portione, &c. Quod erat faciendum.

In hunc modum etiam antecedens problema solvi poterit positione.

PROPOSITIO XXI.

In dato triangulo quadratum inscribere.

In triangulo dato *abc* inscriptum iam sit quadratum *svxz*. Demittatur perpendicularis *cp* secans latus *xz* in *y*, & erit *yp* singulis lateribus quadrati æqualis.



ANALYSIS.

Ob simil. *abc*. *xzc*. S.P. *ab*. *cp*. *xz*. *cy*.
Idest *yp*. prop. 20 Introd.
Ergo solutum.

CONSTR. & DEMONST.

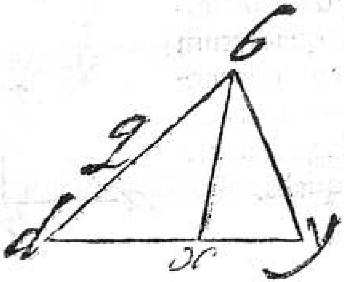
Dividatur perpendicularis *cp* in *y* in ratione basis *ab* ad ipsam *cp*, & per *y* ipsi *ab* parallela ducatur *xz*, demittanturque perpendiculares *xv*, & *zs*. Dico *xzsv* esse quadratum, de quo quæritur.

Cum enim in triangulis similibus bases, & altitudines sint proportionales, erit *ab* ad *cp* vt *xz* ad *cy*; sed ex constr. *ab* ad *cp* est vt *yp* ad *yc*: ergo *xz* ipsi *yp* erit æqualis; sed ob parallelismum *xz*, & *vs* inter se, & *vx*. *yp*. *zs* inter se sunt æquales; ergo *xzsv* quadratum erit. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXII.

Vide Renald. tom. 3. pag. 337.

In triangulo *dby* datur latus *db*, & angulus ad verticem *dby* bisectus ponitur à recta *bx*, & ratio rectanguli *dby* ad rectangulum *dxy* est vt *f* ad *g*, seu vt *db* ad *qb*: quæruntur puncta *x*, & *y*.



ANALYSIS

Sint igit. prop.	*dby.*	*dxy.*	*db.*	*qb.*
Ideſt per 1.6.el.			*dby.*	*qby.*
Ergo per 14.5.el.		*dxy*	— ∧ —	*qby.*
Et E.P.	*qb.*	*dx.*	*xy.*	*by.*
Ideſt per 3.6.el.			*dx.*	*db.*
Ergo ſolutum.				

CONSTR. & DEMONSTR.

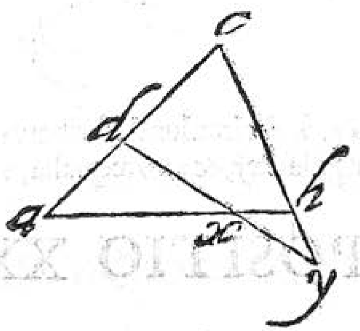
Inter *qb*, & *db* media inveniatur *dx*, quæ ex puncto *d* rectæ *bx* occurrat in *x*, & protrahatur ad *y*. Dico factum.

Eſt enim *qb* ad *dx* ex conſtr. vt *dx* ad *db*, & ex 3.6.el. vt *xy* ad *by*, quare rectangulum *dxy* æquale erit rectangulo *qby*: ergo rectang. *dby* ad rectang. *dxy*, ideſt *qby* (ob eamdem altitudinem *by*) erit vt *db* ad *qb*. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

Dato triangulo *abc* oporteat ex puncto in latere dato *d* rectam ducere *dxy* ita vt rectangulum *dxy*, rectangulo *axh* sit æquale.



ANALYSIS.

Sit igit. rectang. *dxy* —A— *axh*.
Ergo E.P. *dx*. *ax*. *xh* *xy*.

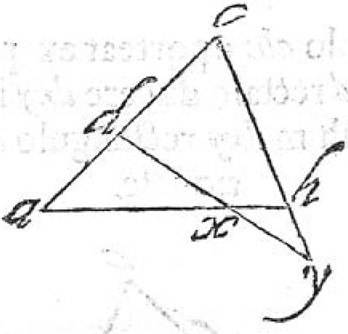
Ergo solutum. Nam cum anguli ad *x* sint æquales, & latera circa illos proportionalia, similia erunt triangula *dxa*, & *xhy*.

CONSTR. & DEMONST.

Ad rectam datam *ad*, & punctum *d* angulus fiat *ady*, angulo *ahy* æqualis, & cum anguli ad *x* sint æquales, similia erunt triangula *adx*, & *xhy*, & erit *dx* ad *ax*, vt *xh* ad *xy*: ergo rectangulum *dxy* rectangulo *axh* erit æquale. Quod faciendum erat.

ALI-

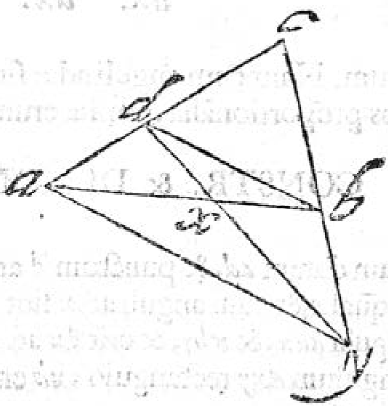
ALITER.



35.3.el. Si per puncta *a. h. d.* circulus describatur secans latus *ch* in *y*: erunt rectangula *dxy*, & *axh* æqualia, vt oportet.

PROPOSITIO XXIV.

Dato triangulo *abc* ex dato in latere puncto *d* rectam ducere *dxy*, ita vt triangula *adx*, & *bxy* sint æqualia.



ANALYSIS.

Sint igit. triang.	*dxa* — Δ — *bxy*.
Ergo per 15.6 el. E. P.	*dx*. *xb*. *xy*. *ax*.
Ergo ſolutum.	

CONSTR. & DEMONSTR.

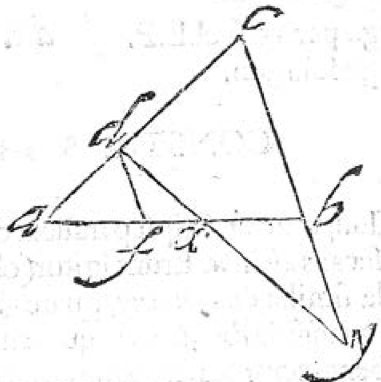
Iungatur *db*, & ipſi parallela ducatur *ay*, connectaturque *dy* ſecans *ab* in *x*. Erunt igitur (ob parallelas *ab*, & *ay*) triangula ſimilia *dxb*, & *axy*, quare *dx* ad *xb* erit vt *xy* ad *ax*: ergo triangula *dxa*, & *bxy*, quæ circa angulos æquales latera habent reciproca, æqualia erunt. Quod oportebat facere.

ALIA DEMONSTRATIO.

Ob parallelas *db*, & *ay*, erunt triangula æqualia *ady*, & *aby*, demptoque communi *axy*, remanebunt æqualia triangula *dxa*. *bxy*. Quod oportebat facere.

ALI-

ALITER.



Ducatur lateri *cb* parallela *df*, quod idem est ac facere angulum *fdx* angulo *y* æqualem.

ANALYSIS.

Sint igit. triang.	*axd*	—Λ—	*bxy*.	
Ergo per 15.6. el. E.P.	*dx*.	*xb*.	*xy*.	*ax*.
Sed ob simil. *fdx*. *xby*. S.P.	*xb*.	*xy*.	*fx*.	*dx*.
Ergo ex æquo E.P.	*ax*.	*xb*.	*xb*.	*fx*.
Et comp.	*ab*.	*xb*.	*fb*.	*fx*.
Ergo solutum.				

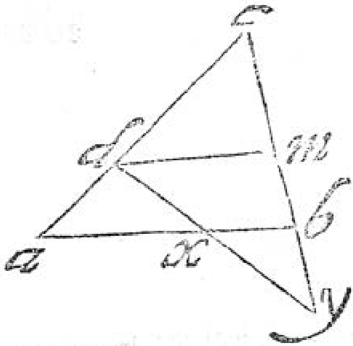
CONSTR. & DEMONSTR.

Ducatur *df* lateri *cb* parallela, & dividatur *fb* in *x* in ratione ipsius *fb* ad *ab*, vt sint proportionales *ab*. *xb*. *fb*. *fx*, & divid. *ax*. *xb*. *xb*. *fx*; cum autem ob similitudinem triangulorum *fdx*. *xby* sint proportionales *xb*. *xy*. *fx*. *dx*: erunt ex æquo proportionales *dx*. *xb*. *xy*. *ax*. (ratio communis *fx*. *xb*.) ergo triangula *axd*. *bxy*, quæ circa communem angulum *x* latera habent reciproca, æqualia erunt. Quod oportebat facere.

PRO-

PROPOSITIO XXV.

Dato triangulo *abc*, ex dato in latere puncto *d* rectam ducere *dxy*, & facere rectangula *dyx*, & *abx* æqualia.



Ducatur ipsi *ab* parallela *dm*.

ANALYSIS.

Sit igitur	*dyx* —A— *abx*.			
Ergo E.P.	*ab.*	*dy.*	*xy.*	*xb.*
Sed ob simil. *xby*. *dmy*. S.P.	*xy.*	*xb.*	*dy.*	*dm.*
Ergo ex æquo E.P.	*ab.*	*dy.*	*dy.*	*dm.*
Ergo solutum.				

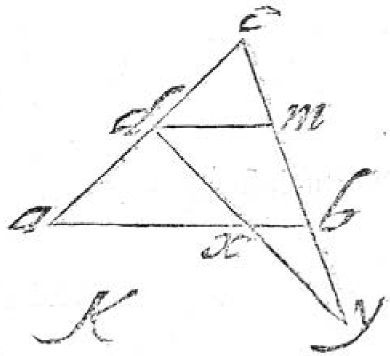
CONSTR. & DEMONSTR.

Inter *ab*, & *dm* media inveniatur *dy*, quæ ex puncto *d* occurrat lateri *cb* in *y*, secans *ab* in *x*. Dico factum.

Cum enim ex constr. sit *ab* ad *dy*, vt *dy* ad *dm*, & ob similitudinem *dym*, & *xyb*, sit *dy* ad *dm*, vt *xy* ad *xb*: erit ex æquo *ab* ad *dy*, vt *xy* ad *xb*, & rectangulum *dyx* rectangulo *abx* æquale, Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXVI.

Dato triangulo *abc*, ex puncto in latere dato *d* rectam ducere *dxy*, & facere rectangula *dyx*: *abx* in ratione data vt *k* ad *ab*.



Ducatur *dm* ipsi *ab* parallela.

ANALYSIS

Sint igit. prop.	*dyx*. *abx*. *k*. *ab*.
Sive per 1.6.el.	*k*:*bx*. *abx*.
Ergo per 14.5.el.	*dyx* —Λ— *k*:*bx*.
Et E.P.	*k*. *dy*. *xy*. *bx*.
Ideſt ob ſimil. *yxb*. *ydm*.	*dy*. *dm*.
Ergo ſolutum.	

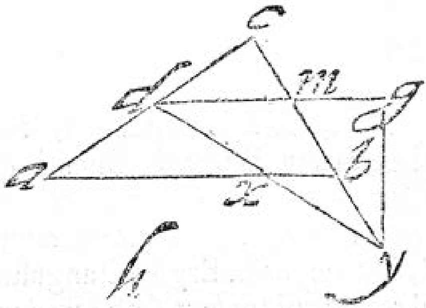
CONSTR. & DEMONSTR.

Inter *k*, & *dm* media inveniatur *dy*. Dico factum. Eſtenim *k* ad *dy*, vt *dy* ad *dm*, ideſt vt *xy* ad *xb* (ob ſimilitudinem triangulorum *yxb*, & *ydm*) quare rectangula *dyx*, & ſub *k*, & *xb* erunt æqualia. Ergo rectangulum *dyx*, ideſt ſub *k*, & *xb*, ad rectangulum *abx* (ob eamdem altitudinem *xb*) erit vt *k* ad *ab*. Quod faciendum erat.

PRO-

PROPOSITIO XXVII.

Dato triangulo *abc* ex dato in latere puncto *d* rectam ducere *dxy*, & facere rectangulum *ydx* ad rectangulum *bax*, vt *h* ad *ab*.



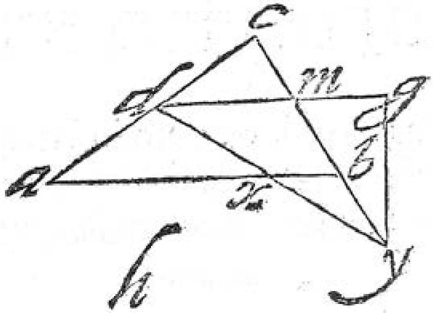
Ducatur ipsi *ab* parallela *dm*.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ydx. bax. h. ab.*
Sive per 1.6.el.	*h:ax. bax.*
Ergo per 14.5.el.	*ydx* —Λ— *h:ax.*
Et erunt prop.	*h. dy. dx. ax.*
Fiat angulus	*dyg* —Λ— *a.*
Et erunt prop.	*dg. dy. dx. ax.*
Ergo	*dg* —Λ— *h.*
Ergo solutum.	

CONST. ET DEMONST.

Ipsi *ab* parallela ducatur *dg* datæ *h* æqualis, & super *dg*



ſegmentum circuli deſcribatur angulum capiens angulo *a* æqualem, & ad punctum *y*, in quo latus *cb* protractum ſecatur à circulo, rectæ ducantur *dxy*, & *gy*. Dico factum.

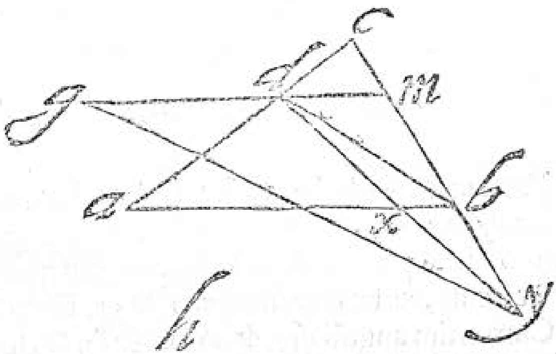
Cum enim anguli *a*, & *dyg* inter ſe, & altern. *axd*, & *xdg* inter ſe ſint æquales: triangula erunt ſimilia *axd*. *dgy*, & erit *dg*, ideſt *h* ad *dy*, vt *dx* ad *ax*, & rectangulum *ydx* rectangulo ſub *h*, & *ax* æquale. Ergo rectangulum *ydx*, ideſt ſub *h*, & *ax* ad rectangulum *bax* (ob eamdem altitudinem *ax*) erit vt *h* ad *ab*. Quod facere oportebat.

PRO-

PROPOSIT. XXVIII.

Dato triangulo *abc*, ex dato in latere puncto *d* rectam ducere *dxy*, ita vt rectangulum *ydx* ad *abx* rectangulum, sit vt *h* ad *ab*.

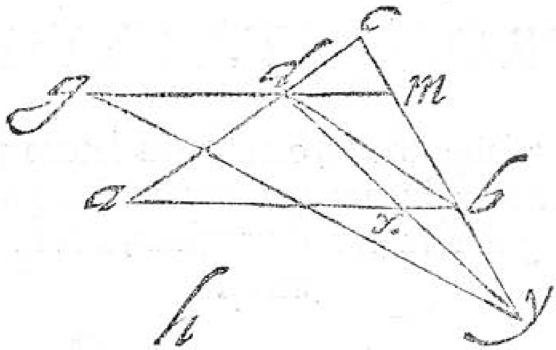
Iungatur *db*, & ipsi *ab* parallela ducatur *dm*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ydx.*	*bax.*	*h.*	*ab.*
Sive per 1.6.el.			*h:ax.*	*abx.*
Ergo per 14.5.el.		*ydx* $\llcorner\!\Lambda\!\lrcorner$ *h:xb.*		
Et erunt prop.	*h.*	*dy.*	*dx.*	*xb.*
Fiat angulus		*dyg* $\llcorner\!\Lambda\!\lrcorner$ *abd.*		
Et ob simil. *dgy.dxb.* E.P.	*dg.*	*dy.*	*dx.*	*xb.*
Ergo		*dg* $\llcorner\!\Lambda\!\lrcorner$ *h.*		
Ergo solutum.				

CONS-



CONSTR. & DEMONST.

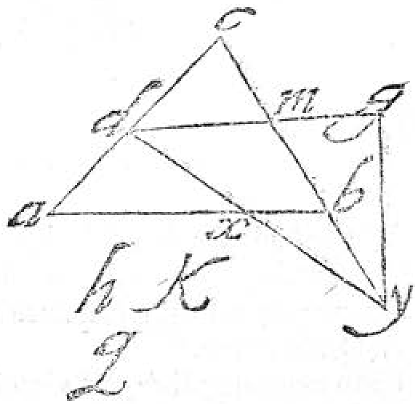
Producatur *md* ad *g*, vt fiat *dg* datæ *h* æqualis, & super ipsam *dg* segmentum circuli describatur angulum capiens angulo *abd* æqualem, & ad punctum *y*, in quo latus *cb* secatur à circulo, rectæ ducantur *dxy*, & *gy*. Dico factum.

Cum enim anguli *dyg*, & *abd* inter se, & alterni *dxb*, & *xdg* inter se sint æquales: triangula erunt similia *dyg*, & *dxb*, & erit *dg*, idest *h* ad *dy* vt *dx* ad *xb*, & rectangulum *ydx* rectangulo sub *h*, & *xb* æquale. Ergo rectangulum *ydx*, idest sub *h*, & *xb*, ad rectangulum *abx* (ob eamdem altitudinem *xb*) erit vt *h* ad *ab*. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSITIO XXIX.

Dato triangulo *abc*, ex dato in latere puncto *d* rectam ducere *dxy*, ita vt rectangulum *dxy* ad *axb* rectangulum sit vt *h* ad *k*.

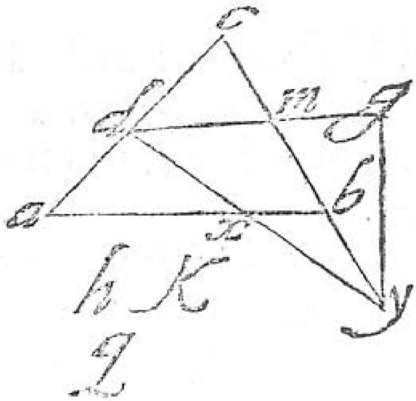


Ducatur ipsi *ab* parallela *dm*.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*dxy. axb. h. k.*
Hoc est vt	*dx. ax, & xy. xb.* ita *h. k.*
Sive ob simil. *dyn.xyb.*	*& dy. dm.*
Idest E. P.	*ydx. dm:ax. h. k.*
Vel si fiat	*q. dm.*
Vel per 1.6.el.	*q:ax. dm:ax.*
Ergo per 14.5.el.	*ydx* —∧— *q:ax.*
Et erunt prop.	*q. dy. dx. ax.*
Fiat angulus	*dyg* —∧— *a.*
Et erunt prop.	*dg. dy. dx. ax.*
Ergo	*dg* —∧— *q.*
Ergo solutum.	

CONS-



CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt *k* ad *h* ita *dm* ad *dg*: ſuper quam ſegmentum circuli deſcribatur angulum capiens angulo *a* æqualem, & ad punctum *y*, in quo latus *cb* à circulo ſecatur, ducantur *dxy*, & *gy*. Dico factum.

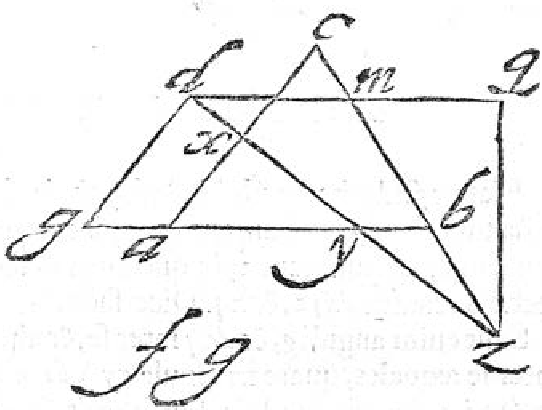
Cum enim anguli *dyg*, & *a* inter ſe, & alterni *xdg*, & *axd* inter ſe, ſint æquales: ſimilia erunt triangula *dyg*. *axd*, & erit *dg* ad *dy*. vt *dx* ad *ax*, & rectangulum *ydx* rectangulo ſub *dg*, & *ax* æquale. Ergo rectangulum *ydx* (ideſt ſub *dg*, & *ax*) ad rectangulum ſub *dm*, & *ax* erit vt *dg* ad *dm*, ideſt vt *h* ad *k*. Sed ratio rectanguli *ydx* ad rectangulum ſub *dm*, & *ax*. componitur ex ratione *dx* ad *ax*, & ratione *dy* ad *dm*, hoc eſt (ob ſimilitudinem triangulorum *dym*, & *xyb*.) ratione *xy* ad *xb*: ergo vt *dx* ad *ax*, & *xy* ad *xb*, hoc eſt vt rectangulum *dxy* ad rectangulum *axb* ita erit *h* ad *k*. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSITIO XXX.

Dato ttiangulo *abc* ex dato extra illud puncto *d* rectam ducere *dxyz*, vt rectangulum *xyz* ad rectangulum *ayb* ſit in ratione data vt *f* ad *g*.

Ducantur lateribus *ac*, & *ab* parallelæ *dg*,& *dm*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop. *xyz. ayb. f. g.*

Ideſt vt *xy. ay*,& *yz. yb.* ita *f. g.*

Siue ob ſimilitud. *dy. gy*,& *dz. dm.* ita *f. g.*

Vel ſi fiat *k. dm.*

Ergo invert. *dy.gy.* ita *k. dm*,& *dm. dz.* *nu. II. de rat. compoſ.*

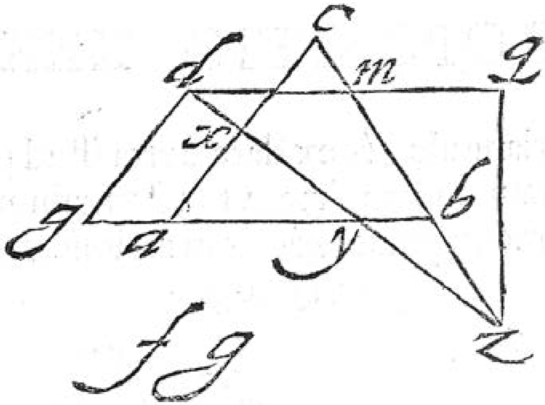
Ideſt ita *k. dz.*

Fiat angulus *dzq* —Λ— *g.*

Et E.P. *dy. gy. dq. dz.*

Ergo *k* —Λ— *dq.*

Ergo ſolutum.



CONSTR. & DEMONST.

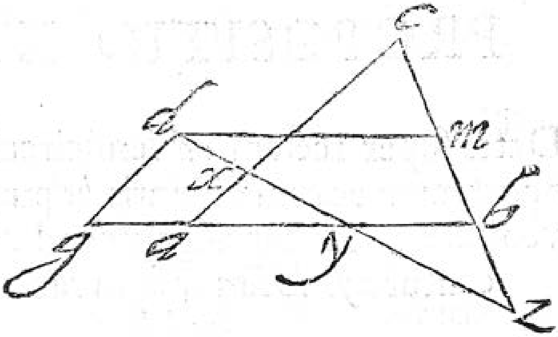
Fiat vt *f* ad *g* ita *dq* ad *dm*, & ſuper *dq* ſegmentum deſcribatur circuli, quod angulum capiat angulo *g*, ſive *a*, æqualem, & ad punctum *z*, in quo latus *cb* ſecatur à circulo, rectæ ducantur *dxyz*, & *zq*. Dico factum.

Sunt enim anguli *g*, & *dzq* inter ſe, & alterni *gyd*, & *ydq* inter ſe æquales, quare triangula *gyd*, *dzm* ſimilia erunt, & vt *dy* ad *gy* ita erit *dq* ad *dz*, ſive ita erit *dq* ad *dm*, & *dm* ad *dz*, & invert. vt *dy* ad *gy*, & *dz* ad *dm* ita *dq* ad *dm*; ſed vt *dy* ad *gy* ita eſt *xy* ad *ay* (ob parallelas *gd. ax.*) & vt *dz* ad *dm*, ita eſt *yz* ad *yb* (ob parallelas *dm. yb.*) ergo vt *xy* ad *ay*, & *yz* ad *yb*, hoc eſt vt rectangulum *xyz* ad rectangulum *ayb* ita erit *dq* ad *dm*, ideſt *f* ad *g*. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXXI.

Dato triangulo *abc* ex puncto extra illud dato *d* rectam ducere *dxyz*, & facere rectangula æqualia *xyz*, & *ayb*.

Du-



Ducatur dg lateri ac parallela, & dm parallela lateri ab.

ANALYSIS

Sit igit. xyz –Λ– ayb.
Ergo E.P. $xy.\ ay.\ yb.\ yz.$
Ideſt ob ſimilitud. $dy.\ gy.\ dm.\ dz.$
Erg o ſi fiat angulus. dzm –Λ– g.
Erunt prop. $dy.\ gy.\ dm.\ dz.$
Ergo ſolutum.

CONST. ET DEMONST.

Ducantur dg, & dm lateribus ac, & ab parallelæ, & ſuper dm ſegmentum circuli deſcribatur angulum capiens angulo g, vel a æqualem, & ad punctum z, in quo latus cb ſecatur à circulo, recta ducatur $dxyz$. Dico factum.

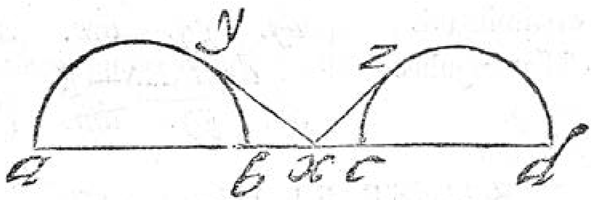
Cum enim angulus dzm angulo g, ſiue a, factus ſit æqualis: erunt (ob parallelismum) triangula inter ſe ſimilia axy. gdy. dmz. ybz. Quare dy ad gy, ideſt xy ad ay, erit vt dm ad dz, ideſt vt yb ad yz, & rectangulum xyz rectangulo ayb æquale. Quod erat faciendum.

Eodem modo procedere licebit quando punctum intra triangulum datum fuerit, vel quando conditio æqualitatis, vel proportionis variata proponatur. Non enim omnes caſus excogitabiles exprimi poſſunt.

PROPOSITIO XXXII.

Datis super rectam *ad* semicirculis *ayb. czd*, oporteat in eorum distantia *bc* punctum *x* invenire, à quo si contingentes ad circulos ducantur *xy. xz* sint ipsæ in ratione data *g* ad *h*.

g h



Hæc propositio eadem est cum propositione 12. huius libri. Nam tangentium *xy*, & *xz* quadrata, æqualia sunt rectangulis *axb*, & *dxc* vtrumque vtrique, quapropter cum ratio tangentium data sit, data etiam erit ratio quadratorum, videlicet rectangulorum *axb*, & *dxc*. Ergo conditio est, vt data *ad* divisa in *b*, & *c*, rursus dividatur in *x*, inter *b*, & *c*, vt rectangula *axb. dxc* sint in ratione data, quod factum est in prædicta propositione.

Hinc videre licet vnum idemque problema sub diversis aspectibus apparere posse.

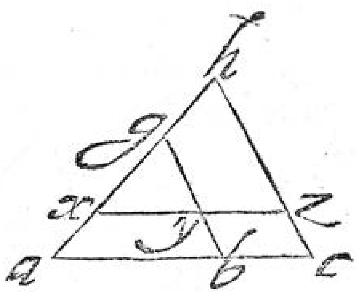
PROPOSITIO XXXIII.

Sit datum triangulum *abc*, cuius basis *ac* divisa sit vtcumque in *b* puncto, ex quo ducta sit vtcumque recta *bg*. Oporteat rectam ducere ipsi *ac* parallelam *xyz*, quæ à recta *bg* secetur in *y*, ita vt rectangulum *xyz* sit quadrato rectæ datæ *m* æquale. *Vide Renald tom. 3. pag. 333.*

Hoc problema duos habet casus, vel enim recta *bg* vni laterum *hc* est parallela, vel non

CASVS PRIMVS.

Sit *bg* lateri *hc* parallela, quo posito erit *yz* ipsi *bc* æqualis.



m. *f.*

ANALYSIS.

Sit igitur	*xyz* —Λ— *mm*.			
Ergo E.P.	*xy*.	*m*.	*m*.	*yz*.
Ideſt				*bc*.
Sed ob ſimil. *abg*. *xyg*. S.P.	*ab*.	*ag*.	*xy*.	*xg*.

Ergo ſolutum.

CONSTR. & DEMONSTR.

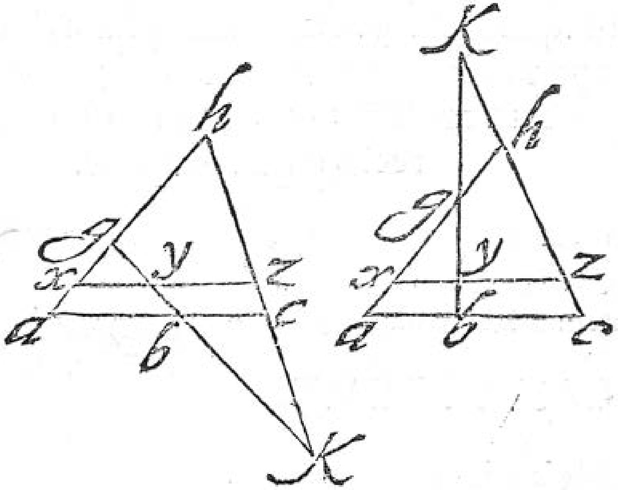
Fiat vt *bc* ad *m* ita *m* ad aliam, puta *f*, & vt *ab* ad *ag* ita *f* ad *xg*. Per *x* ducatur ipsi *ac* parallela *xyz*. Dico factum.

Cum enim ex construct. ſit *ab* ad *ag*, vt *f* ad *xg*, & ob ſimilitudinem *abg*. *xyg*. ſit *ab* ad *ag*. vt *xy* ad *gx* : erit *xy* rec-

rectæ *f* æqualis; sed ex constr. est *bc*, idest ipsi æqualis *yz* ad *m*, vt *m* ad *f*, hoc est ad *xy*: ergo rectangulum *xyz* quadrato *m* erit æquale. Quod erat faciendum.

CASVS SECVNDVS.

Non sit iam *bg* parallela lateri *ch*; sed ipsi protracta occurrat in *k*.



m. *p.* *q.*

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*xy.*	*m.*	*m.*	*yz.*
Sed ob simil. *abg*. *xyg*. S.P.	*xy.*	*gy.*	*ab.*	*bg.*
Sive si fiat			*m.*	*p.*
Ergo ex æquo E.P.	*m.*	*yz.*	*gy.*	*p.* —
Sed ob simil. *yzk*. *bck*. S.P.	*yz.*	*yk.*	*bc.*	*bk.*
Vel si fiat			*m.*	*q.* —
Ergo ex æquo E.P.	*yk.*	*q.*	*p.*	*gy.*

Ergo solutum.

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt *ab* ad *bg* ita *m* ad *p*, & vt *bc* ad *bk* ita *m* ad *q*, ipsisque

que *p*. *q* reciprocæ inveniantur *gy*. *yk*, quarum ſumma in prima figura, ſive quarum differentia in ſecunda figura, ſit *gk*. Et tandem per *y* ipſi *abc* parallela ducatur *xyz*. Dico factum.

Cum enim ex conſtr. ſit *yk* ad *q*, vt *p* ad *gy*, & ob ſimilitudinem *yzk*. *bck* ſit *yz* ad *yk*, vt *bc* ad *bk*, ideſt vt *m* ad *q*: erit ex æquo *m* ad *yz*, vt *gy* ad *p*. Sed ob ſimilitudinem *abg*. *xyg* eſt *xy* ad *gy*, vt *ab* ad *bg*, hoc eſt vt *m* ad *p*. Ex æquo igitur erit *xy* ad *m*, vt *m* ad *yz*. Quod facere oportebat.

ALITER.

Sit	*xyz* —⌃— *mm*.
Sed eſt vt	*xyz*. *gyk*. ita *xy*. *gy*, & *yz*. *yk*.
Ideſt ob ſimil.	ita *ab*. *bg*, & *bc*. *bk*.
Ergo E.P.	*xyz*. *gyk*. *abc*. *gbk*.
Ideſt	*m m*.
Ergo ſolutum.	

CONSTR. & DEMONSTR.

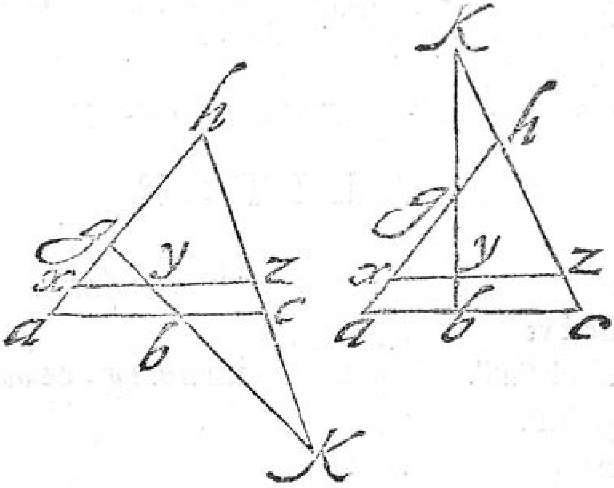
Fiat vt rectangulum *abc* ad *gbk* rectangulum ita quadratum *m* ad aliud, cuius lateri inveniantur reciprocæ *gy*. *yk* quarum ſumma, aut differentia ſit *gk*, vt antea. Itaque rectangulum *gyk* quadrato *m* erit æquale: per *y* ducatur *xyz*. Dico factum.

Eſt enim vt rectangulum *xyz* ad *gyk* rectangulum, ita *xy* ad *gy*, & *yz* ad *yk*, ſive ob ſimilitudinem ita *ab* ad *bg*, & *bc* ad *bk*, hoc eſt ita rectangulum *abc* ad *gbk* rectangulum; ſed ex conſtr. vt *abc* ad *gbk* ita eſt quadratum *m* ad rectangulum *gyk*. Ergo rectangulum *xyz* quadrato *m* erit æquale. Quod erat faciendum.

SCHO-

SCHOLION.

Si iniunctum esset rectam *xyz* ipsi *ac* parallelam ducere, quæ in *y* secta foret in ratione data, in hoc secundo casu vt *m* ad *d* ecce



				m. *p.* *q.* *d.*

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*xy.*	*yz.*	*m.*	*d.*
Sed ob simil. *xyg. abg.* S. P.	*xy.*	*gy.*	*ab.*	*bg.*
Sive si fiat			*m.*	*p.*
Ergo ex æquo E. P.	*gy.*	*p.*	*yz.*	*d.*
Sunt autem ob simil. prop.	*yz.*	*yk.*	*bc.*	*bk.*
Sive si fiat			*d.*	*q.*
Ergo ex æquo E. P.	*gy.*	*yk.*	*p.*	*q.*

Et solutum erit, notaque constructio, & demonstratio. Et omnibus satis obvia determinatio totius problematis.

Huc vsque dicta de resolutione per proportionales sufficere videntur. Transeamus iam ad resolutionem per comparationem planorum. A-

ANALYSIS GEOMETRICA,

LIB. III.

AGENS DE RESOLVTIONE PER comparationem planorum.

INSTRUCTIO.

CVm problema propoſitum per ſimplices terminos euolui, tractarique poteſt, facillimè per argumentationes proportionalium analyſis expeditur. At verò cum per terminos compoſitos, hoc eſt ſignis plus, vel minus affectos, problema enodari debet, argumentationes lib. 2. elementorum neceſſario erunt vrſupandæ, donec propoſita proportio, ſeu æquatio ad ſimplicimos terminos fuerit reducta. Cum igitur prædicta argumentatio lib. 2. el. nil aliud ſit, quam aliqua plana in alia æqualia convertere, perſpicuum eſt totum ſcopum analyſeos in eo conſiſtere, quod plana incognita ad alia nota, vel falrem notiora, ſeu commodiora reducantur. Sic enim æqualia pro æqualibus ſubrogando, æqualia æqualibus addendo, vel ab æqualibus auferendo æqualia, tandiu proſequitur analyſis vſque dum vel magnitudo incognita aliȷ notæ æqualis, vel ad alias notas proportionalis appareat, vel tandem ad duas partes reciprocas inueniendas, ſeu ad aliquam trium æquationum, de quibus facta eſt mentio prop. 3.4.5. Introductionis deveniamus, & problema reſolutum habeamus.

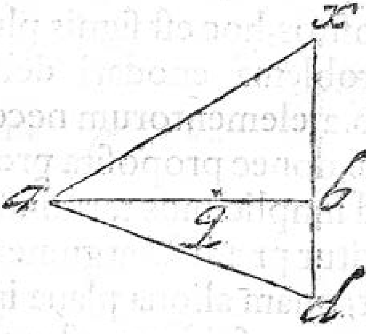
PROPOSITIO I.

Vide Franci. Schootẽ de concinandis demonſt.

Data *ab* vtcumque ſecta in *q*: ex eius termino *b* perpendicularem excitare *bx*, ita vt coniuncta *ax* æqualis ſit ipſis *qb*, & *bx* ſimul ſumptis.

ANALYSIS.

Perſpicuum eſt, ſi fiat *bd* ipſi *qb* æqualis, angulos *xad*, *xda* conſtituendos eſſe æquales. Ergo ſolutum.



CONS-

CONSTR. & DEMONST.

Cadat perpendicularis *bd* ipsi *qb* æqualis, iunctàque *ad*, angulus fiat *dax* angulo *adx* æqualis: & erit *ax* ipsi *xd*, id est *bx*, & *qb* æqualis. Quod erat faciendum.

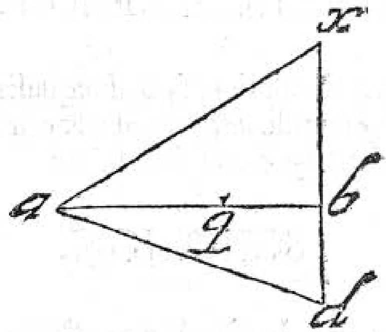
SCHOLION.

Eodem modo fieri potest constructio in quocumque angulo *abx*, præter rectum, proposito, quo in casu, quanta sit *ax* à trigonometria petendum est. In nostro autem casu ita procedere licet.

ANALYSIS.

Sit igitur	ax	$-\Lambda-$	$bx + bd$
Et quad. per 4.2.el.	axa	$-\Lambda-$	$bxb + bdb + 2dbx$
Sed per 47.1.el.	axa	$-\Lambda-$	$bxb + aba.$
Ergo	$bxb + aba$	$-\Lambda-$	$bxb + bdb + 2dbx$
Et auf. bxb.	aba	$-\Lambda-$	$bdb + 2dbx$

Ergo solutum.



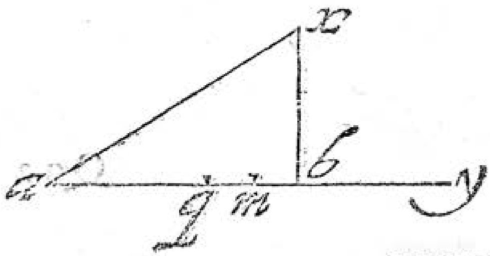
CONSTR. & DEMONSTR.

A quadrato *ab* quadratum auferatur *bd*, & residuum applicetur ad duplam *bd*, & sit latitudo proveniens *bx*. Hoc est quadratum facere *bd* cum duplo rectangulo *dbx* æquale quadrato *ab*, quare addendo quadratum *bx*, erunt quadrata *ab*, & *bx*, hoc est erit quadratum *ax* æquale quadratis *bx*, & *bd* cum duplo rectangulo *dbx*, idest quadrato *xd*: igitur ipsa *ax* ipsi *xd*, idest *bx*, & *bd* erit æqualis: quod faciendum erat.

ALITER.

Si per proportionales placeat construere problema, ita poterit analysis institui.

Bisecetur *qb* in *m*, & supponatur *by* ipsi *bx* æqualis.



ANA-

ANALYSIS.

Sit igit.	$ax = qb + bx.$
Sed per 47.1.el.	$axa = aba + bxb.$
Hoc est	$qyq = aba + byb.$
Ergo auf. *byb*.	$qyq - byb = aba.$
Ideſt per 6. Introd.	$2:qb:my.$
Ergo E.P.	$2qb. \quad ab. \quad ab. \quad my.$
Ergo ſolutum.	

CONST. ET DEMONST.

Biſecetur *qb* in *m*, & fiat vt dupla *qb* ad *ab* ita *ab* ad *my*. Erigatur *bx* ipſi *by* æqualis, & iungatur *ax*. Dico factum.

Cum enim ſit 2*qb* ad *ab*, vt *ab* ad *my*: erit rectangulum ſub 2*qb*, & *my*, hoc eſt differentia quadratorum *qy*, & *by* æqualis quadrato *ab*, quare addito quadrato *by*, ideſt *bx*: erit quadratum *qy* æquale quadratis *ab*, & *bx*, hoc eſt quadrato *ax*: ergo ipſa *ax* ipſi *qy*, ideſt ipſis *qb*, & *bx* æqualis erit. Quod facere oportebat.

PRO-

PROPOSITIO II.

Datam rectam in duas partes secare, quarum quadrata æqualia sint dato plano.

Esto data *ab* diuidenda in *x*, vt quadrata *ax*. *xb*. æqualia sint quadrato dato *pq*. Bisecetur *ab* in *m*.

ANALYSIS.

Sint igit. *axa* + *xbx* —Λ— *pqp*.
Sed per 9.2.el. *axa* + *xbx* —Λ— 2 *ama* + 2 *mxm*.
Ergo 2 *ama* + 2 *mxm* —Λ— *pqp*.
Et dimidiand. *ama* + *mxm* —Λ— $\frac{1}{2}$ *pqp*.

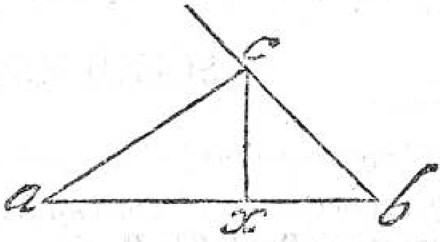
Ergo solutum. Vlterius enim progredi non licet, cum quantitas ignota *mxm* æquari posit quantitati cognitæ. Vnde problematis constructio patet, & etiam determinatio. Nam si à dimidio quadrati *pq* auferri non posit quadratum *am*, problema erit imposibile.

CONSTR. & DEMONST.

A dimidio quadrati *pq* (idest à quadrato rectæ, quæ media sit inter *pq*, & $\frac{1}{2}$ *pq*) auferatur quadratum *am*, & quadrati residui sit latus *mx*. Itaque quadrata *am*. *mx* æquabuntur dimidio quadrati *pq*, & duplicando, duo quadrata *am*, & duo *mx*, hoc est quadrata *ax*, & *xb*. æqualia erunt quadrato *pq*. Quod erat faciendum.

SCHO-

SCHOLION.



Hoc problema ita poſitione reſolvi poteſt. Fiat angulus *abc* ſemirectus, & ex puncto *a* applicetur *ac* æqualis datæ *pq*, demittaturque perpendicularis *cx*. Dico *ax.xb* eſſe rectas quæſitas, quia quadratum *ac*, ideſt *pq* æquale erit quadratis *ax*, & *cx*, ideſt quadratis *ax*, & *xb*, vt oportebat.

Conſtat tamen problema conſtrui non poſſe, ſi recta *ac* rectam *bc* non atingat.

QVÆSTIO.

Datum numerum 16 in duas partes dividere, quarum quadrata æqualia ſint quadrato 200.

Si recta *ab* valeat 16, & quadratum *pq* valeat 200. per præcedẽtem analyſim ſatis manifeſta erit reſolutio. Placet tamen hoc modo procedere. Sint partes quæſitæ *ax*, & *xb*.

ANALYSIS.

a *m* *x* *b*

Sint igit.	*axa*+ *xbx*	—Λ—	200
Ideſt per 9. 2. el.	2*ama* +2*mxm*	—Λ—	200
Ideſt quia *am* eſt 8.	128 +2*mxm*	—Λ—	200
Ergo aufer. 128. erit	2*mxm*	—Λ—	72
Et dimidiando	*mxm*	—Λ—	36
Et extrahendo radices	*mx*	—Λ—	6
Ergo, quia *am* eſt 8. erit	*ax*.	—Λ—	14
Et	*xb*.	—Λ—	2

Sunt

Sunt igitur 14, & 2 numeri, de quibus quærebatur. Quod ex ipsa analysi demonstrari potest.

SCHOLION.

Cum ego primo in hanc novam methodum incidissem; in Collegio Gadicensi Societatis Jesu Mathematum Professor Regius erat R. P. Josephus de Cañas eiusdem Societatis, in omni litterarum genere Vir eruditissimus, qui speciosam Algebram quà plenè imbutus erat, vnicam viam analyticam ad Matheseos penetralia pertingenda, esse credebat. Quid mirum, cum tot doctissimi viri huc vsque id ipsum sibi firmiter habuerint persuasum. Cum igitur ipse Pater analysim circa lineas geometricè versari vidisset, ipsam approbavit, & libenter amplexus fuit. Cupiebat tamen eam circa numeros æquè versantem, vt methodus vniversalis dici posset, non eo contentus, quod ex geometrica analysi operatio arithmetica deduceretur; sed ipsos numeros in analysi colludentes volebat. Id propterea facere conatus sum, an consecutus fuero ex proposita quæstione, & alijs huius operis iudicandum relinquo.

PRO-

PROPOSITIO III.

Datam rectam in duas partes secare, quarum quadrata differant quadrato dato. *Vide Renald tom. 3. pag. 408.*

a *m* *x* *b* *p* *q*

Esto data *ab* dividenda in *x*, vt differentia quadratorum *ax*. *xb* æqualis sit quadrato *pq*.

Dividatur *b* bifariam in *m*, & erit 2*mx* differentia partium *ax*. *xb*, eritque rectangulum sub *ab*, & 2*mx*, nempe sub aggregato, & differentia laterum, æquale differentiæ quadratorum *ax*.*xb*. Vnde analysis ita procedit. *Per 7. Introd.*

ANALYSIS.

Sit igitur *axa* — *bxb* —Λ— *pqp*.
Hoc est per 7. Introd. *ab*:2*mx* —Λ— *pqp*.
Et dissolv. E. P. *ab*. *pq*. 2*mx*.
Ergo solutum

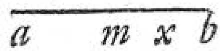
CONSTR. & DEMONSTR.

Ad datas *ab*. *pq* tertia proportionalis inveniatur, cuius dimidia sit *mx*. Dico factum.

Cum enim sint proportionales *ab*. *pq*. 2*mx*, rectangulum sub *ab*, & 2*mx*, idest differentia quadratorum *ax*.*xb* æquabitur quadrato *pq*. Quod erat faciendum.

QVÆSTIO.

Datum numerum 13 in duas partes secare, quarum quadrata differant dato numero plano 26.



Valeat 13 quælibet recta ab, & secetur bifariam in m, & sint partes quæsitæ ax, & xb.

ANALYSIS.

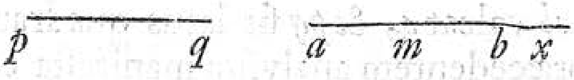
Sint igitur.	$axa - xbx = 26.$
Ideſt per 6. Introd.	$ab : 2mx$
Vel, quia ab eſt 13.	$26\,mx.$
Ergo part. per 26. erit	$mx = 1.$
Et quia am eſt $6\frac{1}{2}$. erit	$ax = 7\frac{1}{2}.$
Et	$xb = 5\frac{1}{2}.$

Sunt igitur $7\frac{1}{2}$, & $5\frac{1}{2}$ numeri, de quibus quærebatur.

PRO-

PROPOSITIO IV.

Data differentia laterum, dataque ſumma quadratorum, ipſa latera ad invenire.



Sit data *ab* differentia partium *ax*. *bx*, de quibus quæritur, data autem *pq*, cuius quadrato æquari debeant quadrata *ax*, & *bx*. Biſcecetur *ab* in *m*.

ANALYSIS.

Sint igit. $axa + bxb = pqp$.
Sed per 10. 2. el. $axa + bxb = 2ama + 2mxm$.
Ergo $2ama + 2mxm = pqp$.
Et dimiando $ama + mxm = \frac{1}{2}pqp$.
Ergo ſolutum.

CONSTR. & DEMONST.

A dimidio quadrato *pq* (ideſt eius rectæ, quæ media ſit inter *pq*, & $\frac{1}{2}pq$) auferatur quadratum *am*, ſitque latus quadrati reſidui *mx*. Itaque quadratà *am*. *mx* æquabuntur dimidio quadrato *pq*, & duplicando, duo quadrata *am*, & duo *mx*, ideſt quadrata *ax*, & *bx* æqualia erunt quadrato *pq*. Quod erat, &c.

QVÆSTIO.

Quæruntur duo numeri, qui differant 4, & ipsorum quadrata componant $68\frac{1}{2}$.

Si *ab* valeat 4, & *pq* sit latus quadrati $68\frac{1}{2}$. per præcedentem analysim manifesta erit resolutio. Placet tamen more arithmetico in hunc modum procedere.

Sint numeri quæsiti *ax*, & *bx*, quorum differentia *ab* sit 4, & semidifferentia *am* sit 2.

ANALYSIS.

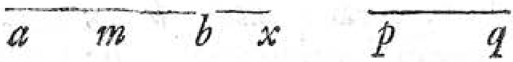
Sint igit.	$axa + bxb$ —Λ—	$68\frac{1}{2}$
Ideſt per 10.2.el.	$2ama + 2mxm$.	
Et dimidiando	$ama + mxm$ —Λ—	$34\frac{1}{4}$
Hoc eſt	4	
Ergo aufer.4.erit	mxm —Λ—	$30\frac{1}{4}$
Et extrahendo √.	mx —Λ—	$5\frac{1}{2}$
Ergo, quia *am* eſt 2.erit	ax. —Λ—	$7\frac{1}{2}$
Et quia *mb* eſt 2.erit	bx. —Λ—	$3\frac{1}{2}$

Sunt igitur numeri quæsiti $7\frac{1}{2}$, & $3\frac{1}{2}$, qui differunt 4, & ipsorum quadrata componunt $68\frac{1}{2}$, vt oportebat.

PRO-

PROPOSITIO V.

Data differentia laterum, dataque differentia quadratorum, ipsa latera adinvenire.



Sint *ax.bx* latera quæsita, quorum differentia sit data *ab*, sitque data *pq*, cuius quadrato æquari debeat differentia quadratorum *ax.bx*.

Quoniam igitur bisecta *ab* in *m* est *mx* semisumma par- per 8.
tium *ax. bx*, & rectangulum sub *ab*, & 2*mx* (videlicet sub Introd.
aggregato, & differentia laterum) æquale differentiæ quadratorum *ax. bx*; analysis ita se habebit.

ANALYSIS.

Sit igitur	$axa - bxb = pqp$.
Hoc est per 8. Introd.	$ab:2mx = pqp$.
Et dissolv. E.P.	$ab.\ pq.\ pq.\ 2mx$.
Ergo solutum.	

CONSTR. & DEMONSTR.

Ad datas *ab.pq* tertia inveniatur, cuius dimidia sit *mx*. Itaque proportionales erunt *ab.pq.2mx*: quare rectangulum sub *ab*, & 2*mx*, idest differentia quadratorum *ax. bx* æqualis erit quadrato *pq*. Igitur rectas invenimus *ax. bx*, &c. Quod erat faciendum.

QVÆS-

QVÆSTIO.

Duos numeros exhibere, qui differant 4, & eorum quadrata 28.

a *m* *b* *x*

Sint numeri quæſiti *ax*, & *bx*, quorum differentia *ab* valeat 4.

ANALYSIS.

Sint igit.	$axa - bxb = 28.$
Ideſt per 8. Introd.	$ab{:}2mx.$
Sive quia *ab* eſt 4.	$8\,mx.$
Ergo part per 8. erit.	$mx = 3\frac{1}{2}$
Et quia *am* eſt 2 erit.	$ax = 7\frac{1}{2}$
Et quia *mb* eſt 2 erit	$bx = 1\frac{1}{2}$

Sunt igitur $7\frac{1}{2}$, & $1\frac{1}{2}$ numeri, de quibus quærebatur.

PRO-

PROPOSITIO VI.

Datam rectam *ab* dividere in *x*, vt quadrata partium ad quadratum differentiæ earundem ſit vt *fh* ad *hk*.

Biſecetur *ab* in *m*, & erit 2*mx* differentia partium *ax*.*xb*, adeoque 4*mxm* ipſius differentiæ quadratum. *per 7. Introd.*

ANALYSIS.

Sint igit.prop.	$axa + xbx$.	$4mxm$. fh. hk
Ideſt per 9.2.el.	$2ama + 2mxm$	
Et dimid.conſeq.		$2mxm$ gh.
Ergo divid.E.P.	$2ama$.	$2mxm$. fg. gh
Et dimid.primos	ama.	mxm. fg. gh.
Ergo ſolutum.		

CONST. ET DEMONST.

Fiat *gh* ipſius *hk* dimidia, & vt *fg* ad *gh* ita quadratum *am* ad quadratum *mx*. Dico factum.

Cum enim ſit quadratum *am* ad quadratum *mx*, vel duo quadrata *am* ad duo *mx*, vt *fg* ad *gh*: erunt compon. duo quadrata *am*, & duo *mx*, hoc eſt quadrata *ax*, & *xb* ad duo quadrata *mx*, vt *fh* ad *gh*, & duplicando conſequentes, quadrata *ax*, & *xb* ad quatuor quadrata *mx*, videlicet ad quadratum differentiæ partium *ax*, & *xb*, vt *fh* ad *hk*. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSIT. VII.

Datam rectam *ab* protrahere ad *x*, vt quadratum *ax* ad rectangula *abx*, & *axb* ſit vt *mq* ad *mp*.

ANALYSIS.

Sint igit. prop. $axa.$ $abx+axb.$ $mq.$ $mp.$
Ideſt per 2.2. $axb+xab$
Ideſt per 3.2. $axb+abx+aba$
Ergo conv. E. P. $axa.$ $aba.$ $mq.$ $pq.$
Ergo ſolutum.

CONSTR. & DEMONST.

Fiat vt *pq* ad *mq* ita quadratum *ab* ad quadratum *ax*. Dico factum.

Cum enim ſit quadratum *ax*, ideſt rectangulum *axb* cum rectangulo *xab*, vel cum rectangulo *abx*, & quadrato *ab*, ad quadratum *ab*, vt *mq* ad *pq*: erit convert. quadratum *ax* ad rectangula *axb*, & *abx* vt *mq* ad *mp*. Quod facere oportebat.

QVÆSTIO.

Duos numeros invenire, qui differant 5. ita vt quadratum maioris ad rectangulum ſub ipſis, vna cum rectangulo ſub minore, & differentia vtriuſque ſit vt 9. ad 5.

Va-

Valeat *ab*. 5, & sint quæsiti numeri *ax*, & *bx*, & sit *pq* ad *mp*, vt 9 ad 5. Ergo si analysis, vt antea, instituatur quæ satis commoda videtur, manifesta erit resolutio.

Fiat proinde vt 4, differentia 9, & 5, ad 9, ita 25. quadratum differentiæ datæ ad $56\frac{1}{4}$, cuius √. est $7\frac{1}{2}$ pro *ax*: ergo *bx* erit $2\frac{1}{2}$. Sunt igitur $7\frac{1}{2}$, & $2\frac{1}{2}$ numeri, de quibus quærebatur.

PROPOSIT. VIII.

Datam rectam *ac* vtcumque sectam in *b* rursus secare in *x* inter *b*, & *c*, vt rectangulum *axb* æquale sit rectangulo *bxc* cum quadrato *xc*.

ANALYSIS.

Sit igitur	*axb* —∧— *bxc* + *xcx*.
Sed per 3. 2. el.	*bcx* —∧— *bxc* + *xc x*.
Ergo	*axb* —∧— *bcx*.
Et erunt prop.	*ax*. *bc*. *xc*. *bx*.
Fiat *qa* —∧— *bc*.	*qa*.
Ergo comp. E.P.	*qx*. *qa*. *bc*. *bx*.
Ergo solutum.	

CONSTR. ET DEMONSTR.

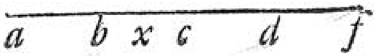
Fiat *qa* ipsi *bc* æqualis, & ipsis *qa*, & *bc*, ideſt ipsi *bc* reciprocæ inveniantur *qx*. *bx*, quarum differentia sit *qb*. Dico factum.

 Quo-

Quoniam igitur vt *qx* ad *qa* ita eſt *bc* ad *bx*: erit dividendo vt *ax* ad *qa*, ideſt ad *bc* ita *xc* ad *bx* : ergo rectangulum *axb* æquale erit rectangulo *bcx*, hoc eſt rectangulo *bxc* cum quadrato *xc*. Quod erat faciendum.

PROPOSIT. IX.

Datam rectam *ac* vtcumque diviſam in *b*, iterum ſecare in *x*, inter *b*, & *c*, vt rectangulum *axb* æquale ſit rectangulo *bxc* cum duobus quadratis *xc*.



ANALYSIS.

Sit igit.	*axb* —Λ— *bxc* + 2*xcx*.			
Sed per 3.2.el.	*bcx* —Λ— *bxc* + 1*xcx*.			
Ergo	*axb* —Λ— *bcx* + *xcx*.			
Fiat *cd* —Λ— *bc*, & erit	*bcx* —Λ— *dcx*.			
Ergo	*axb* —Λ— *dcx* + *xcx*.			
Hoc eſt per 3.2.el.	*axb* —Λ— *dxc*.			
Ergo erunt prop.	*ax*.	*xc*.	*xd*.	*bx*.
Et comp.	*ac*.	*xc*.	*bd*.	*bx*.
Fiat *cf* —Λ— *bd*.			*cf*.	
Ergo vt agg. ita 1. ad 1. & E.P.	*af*.	*bc*.	*cf*.	*bx*.
Ergo ſolutum.				

CONS-

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiant *cd.* & *df* ipſi *bc* æquales,& proportionales *af.bc.cf.bx*. Dico factum.

Cum enim vt *af* ad *bc* ita ſit *cf* ad *bx*,& vt differentiæ ita vnus ad vnum, erit vt *ac* ad *xc* ita *cf*, ideſt *bc* ad *bx*, & rectangulum *axb* æquale rectangulo *dxc*,ideſt rectangulo *dcx*, & quadrato *xc*, vel propter æquales *bc*, & *cd*, rectangulo *bcx*, & quadrato *xc*; ſed rectangulum *bcx* æquatur rectangulo *bxc* cum quadrato *xc*: ergo rectangulum *axb* æquale erit rectangulo *bxc* cum duobus quadratis *xc*. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO X.

Datam rectam *ab* ita ſecare in *x*, vt rectangula ſub *ax*,& data *kq*, atque ſub *xb*, & data *kp* ſimul ſumpta æquali a ſint dato quadrato *m*.

ANALYSIS.

Sint igit. $ax:kq + xb:kp \;\_\!\wedge\!\_\; m.$

Ideſt per 1.2.el. $ax:pq + ax:kp + xb:kp \;\_\!\wedge\!\_\; m.$

Hoc eſt per eamdem $ax:pq + ab:kp \;\_\!\wedge\!\_\; m.$

Ergo ſolutum.

CONSTR. & DEMONSTR.

A dato quadrato m auferatur rectangulum ſub ab, & kp, & reſiduum applicetur ad datam pq; ſitque latitudo proveniens ax. Hoc eſt facere plana ſub ax, & pq, atque ſub ab, & kp æqualia quadrato m. Dico factum.

Eſt enim rectangulum ſub ax, & pq cum rectangulo ſub ab, & kp, ideſt cum recta ngulis ſub ax, & kp, atque ſub xb, & kp, æquale quadrato m; ſed rectangula ſub ax, & pq, atque ſub ax, & kp æquantur rectangulo ſub ax, & kq: ergo rectangula ſub ax, & kq, & ſub xb, & kp æqualia erunt dato quadrato m. Quod erat faciendum.

DETERMINATIO.

Determinatio cuiuſcumque problematis ex ipſa patet analyſi. Ergo in propoſito caſu nil aliud determinatur, niſi quod rectangulum ſub datis ab, & kp minus ſit quadrato dato m.

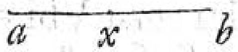
QVÆSTIO.

Vide Franci. Schootē de concinandis demonſt.

Oenopola duplex habet vinum, vnius 8 ſtufris, alterius 14 ſtufris conſtat cantharus. Vult autem mixtionem facere, ita vt dolium, vel 80 cantharos vini vendere poſſit 700 ſtufris. Quæritur quot cantharos vtriuſque ad mixtionem ſumere debeat?

Hanc

Hanc quæstionem suppo nendo *ab* valere 80, *kq*. 14, *kp*. 8, & *m* 700. geometrice per præcedentem analysim resolvere, & demonstrare licet. At vero si sola quæritur resolutio, hoc modo procedendum erit.



Valeat quælibet recta *ab* 80, & sit *ax* numerus cantharorum vini 14 stufris, & *xb* numerus cantharorum vini 8 stufris: ergo 14 *ax*, & 8 *xb* æquabuntur 700.

ANALYSIS

Sint igit.	$14ax + 8xb$	—Λ—	700
Idest per 1.2.el.	$6ax + 8ax + 8xb$	—Λ—	700
Vel per eandem	$6ax + 8ab$	—Λ—	700
Idest, quia *ab* est 80.	640		
Ergo aufer. 640. erit	$6ax$	—Λ—	60
Ex sexti part.	ax	—Λ—	10
Vnde	xb	—Λ—	70

Ergo solutum, & patet 10 cantharos vini 14 stufris, & 70 cantharos vini 8 stufris sumendos esse, cum 10 per 14, & 70 per 8 faciant 700. vt petitur.

ALIA

ALIA QVÆSTIO.

Vide Schootē ibidem. Ancilla forum petit habens $9\frac{1}{2}$ stufros, vt ijs poma, & pira emat. Vbi veniens 10 poma ipsi offeruntur 1 stufro, & 25 pira 2 stufris. Quæritur si vtriusque frutus simul 100 habere velit, quot poma, & pira seorsim accipere debeat?

$a \qquad x \qquad b$

Valeat quælibet recta ab $9\frac{1}{2}$, & sit ax numerus stufrorum, quibus poma, & xb numerus stufrorum, quibus pira emere debeat. Cum igitur 10 poma 1 stufro, & etiam $12\frac{1}{2}$ pira 1 stufro offerantur: erunt 10 ax, & $12\frac{1}{2}$ xb æquales 100.

ANALYSIS.

Sint igit.	$10ax + 12\frac{1}{2}xb$	—∧—	100
Idest per 1.2. el.	$10ax + 10xb + 2\frac{1}{2}xb$	—∧—	100
Et per eamdem	$10ab + 2\frac{1}{2}xb$	—∧—	100
Idest, quia ab est $9\frac{1}{2}$	95.		
Ergo auf. 95. erunt	$2\frac{1}{2}xb$	—∧—	5
Et	xb	—∧—	2
Vnde	ax	—∧—	$7\frac{1}{2}$.

Ergo solutum, & patet 2 stufros in pira, & $7\frac{1}{2}$ in poma impendendos esse, cum $7\frac{1}{2}$ stufris 75 poma, & 2 stufris 25 pira emere possit, & simul sint 100 vt petitur.

PRO-

PROPOSITIO XI.

Datam rectam ab ita ſecare in x, vt rectangulum axb æquale ſit rectangulis ſub ax parte maiori, & data g, atque ſub xb, & data k.

Fiant mb ipſi g, & ap ipſi k æquales.

ANALYSIS.

Sint igitur.	axb —Λ— $ax{:}g + xb{:}k$.
Hoc eſt	axb —Λ— $ax{:}mb + xb{:}ap$
Ergo auf. $ax{:}mb$ erit	$axb - ax{:}mb$ —Λ— $xb{:}ap$
Ideſt per 1.2.el.	axm —Λ— $xb{:}ap$
Ergo E.P.	$ap.\ ax.\ xm.\ xb.$
Et per diviſ.	$ap.\ px.\ xm.\ mb.$

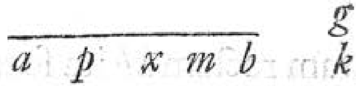
CONST. ET DEMONST.

Ipſis ap, & mb (ideſt k, & g) reciprocæ inveniantur px, & xm, quarum ſumma ſit pm (ideſt differentia qua data ab ſuperat datas g, & k, ſeu mb, & ap) Dico factum.

Cum enim ex conſtr. ſint proportionales $ap.\ px.\ xm.\ mb$, & per compoſ. $ap.\ ax.\ xm.\ xb$: erit rectangulum axm rectangulo ſub xb, & ap æquale, & addendo rectangulum ſub ax, & mb, erit rectangulum axb rectangulis ſub ax, & mb, atque ſub xb, & ap æquale. Quod erat faciendum.

DE-

DETERMINATIO



Oportet datas *g*, & *k*, ſive *mb*, & *ap* minores eſſe ſimul ſumptas data recta *ab*, & præterea rectangulum ſub ipſis *g*, & *k*, ſive *mb*, & *ap* non maius eſſe quadrato dimidiæ *mp*, ideſt quadrato ſemidifferentiæ inter *ab*, & datas *g*, & *k* ſimul ſumptas, nam ſi maius fuerit problema conſtrui non poterit, ſi vero æquale vnica erit reſolutio, ſi tandem minus, duæ erunt ſolutiones, vt conſtat ex prop. 1. Introduct.

Quod autem rectæ *g*, & *k* ſimul ſumptæ minores debeant eſſe data *ab*, ex ipſa analyſi ſatis patet, & hoc modo oſtendi poteſt.

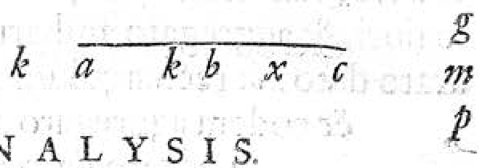
Ponitur axb —Λ— $ax{:}g + xb{:}k$.
Ergo erit axb maius $ax{:}g$ ſua parte.
Et per 1.6.el. xb maior g.
Ead. ration. erit axb maius $xb{:}k$ ſua parte.
Et per 1.6.el. ax maior k.

Ergo *xb*, & *ax*, ideſt *ab* maior debet eſſe rectis *g*, & *k*. &c.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Datam rectam *ab* protrahere ad *x*, vt differentia quadrati dati *g* super rectangulum *abx* ad quadratum *bx* sit vt *m* ad *p*.



ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*gg—abx.*	*bxb.*	*m.*	*p.*
Vel si fiat *abc* —ʌ— *gg.*	*abc.*			
Et erit per 1.2.el.	*ab:xc.*	*bxb.*	*m.*	*p.*
Vel si fiant			*ab.*	*kb.*
Vel per 1.6.			*ab:xc.*	*kb:xc*
Ergo per 14.5. el.	*bxb* —ʌ— *kb:xc.*			
Et E.P.	*kb.*	*bx.*	*bx.*	*xc.*
Et per compos.	*kb.*	*kx.*	*bx.*	*bc.*
Ergo solutum.				

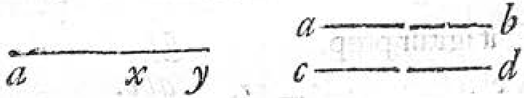
CONSTR. & DEMONST.

Fiat rectangulum *abc* quadrato dato *g* æquale, & vt *m* ad *p* ita *ab* ad *kb*, ipsisque *kb*, & *bc* reciprocæ inveniantur *kx*, & *bx*, quarum differentia sit ipsa *kb*. Dico factum.

Sunt enim ex constr. proportionales *kb. kx. bx. bc*, & per divis. *kb. bx. bx. xc*, quare rectangulum sub *kb*, & *xc* quadrato *bx* erit æquale: ergo rectangulum sub *ab*, & *xc*, differentia scilicet inter rectangulum *abc*, idest quadratum *g*, & rectangulum *abx*, ad quadratum *xb*, ideſt ſub *kb*, & *xc* (ob eamdem altitudinem *xc*) erit vt *ab* ad *kb*, ſeu vt *m* ad *p*. Quod oportebat facere.

PROPOSIT. XIII.

Duas rectas exhibere, vt rectangulum ſub maiori, & aggregato ambarum æquale ſi quadrato dato *ab*: rectangulum vero ſub minore, & eodem aggregato æquale quadrato dato *cd*.



Sint rectæ, de quibus quæritur *ax*, & *xy*, quarum *ax* ſit maior, & aggregatum erit *ay*.

ANALYSIS.

Sit igitur *yax* —∧— *aba*.
Et etiam *ayx* —∧— *cdc*.
Ergo *yax* + *ayx* —∧— *aba* + *cdc*.
Ideſt per 2.2.el. *aya* —∧— *aba* + *cdc*.

Ergo cognitâ iam *ay* notum erit rectangulum *yax*, &c.

CONSTR. & DEMONSTR.

Inveniatur quadratum *ay* quadratis *ab*, & *cd* æquale, & quadratum *ab* applicetur ad ipſam *ay*, ſitque latitudo pro-

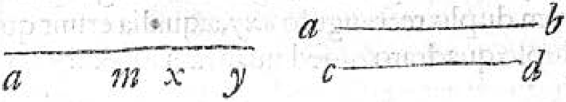
ve-

veniens *ax*. Dico *ax*,& *xy* esse rectas,de quibus quæritur.

Quoniam igitur quadratum *ay* factum est æquale quadratis *ab*, & *cd*, & ipsum quadratum *ay* æquatur rectangulis *yax*, & *ayx*:erunt rectangula *yax*,& *ayx* æqualia quadratis *ab*, & *cd*; sed rectangulum *yax* factum est æquale quadrato *ab*,vt oportebat:ergo auferendo ab æqualibus æqualia, remanebit rectangulum *ayx* quadrato *cd* æquale, vt petebatur. Duas igitur rectas exhibuimus,&c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XIV.

Duas rectas invenire, ita vt earum quadrata simul sumpta æqualia sint dato quadrato *ab*: rectangulum vero sub ipsis contentum æquale quadrato dato *cd*.



Sint rectæ lineæ, de quibus quæritur *ax*, & *xy*.

ANALYSIS.

Sint igitur $axa + xyx \;\text{—}\Lambda\text{—}\; aba$

Sed etiam $2axy \;\text{—}\Lambda\text{—}\; 2cdc.$

Ergo $axa + xyx + 2axy \;\text{—}\Lambda\text{—}\; aba + 2cdc$

Hoc est per 4.2.el. $aya \;\text{—}\Lambda\text{—}\; aba + 2cdc$

Cognita iam *ay* bisecetur in *m*.

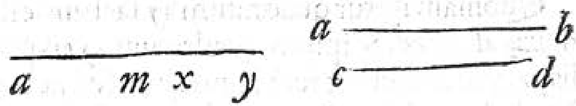
Et per 9.2.el.erunt $axa + xyx \;\text{—}\Lambda\text{—}\; 2ama + 2mxm$

Ergo $2ama + 2mxm \;\text{—}\Lambda\text{—}\; aba$

Et dimidiando $ama + mxm \;\text{—}\Lambda\text{—}\; \tfrac{1}{2}aba.$

Ergo solutum.

CONS-



CONSTR. & DEMONSTR.

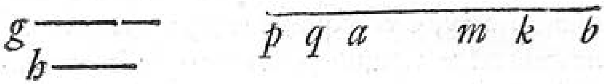
Inveniatur ay cuius quadratum æquale ſit quadrato ab cum duobus quadratis cd, & biſecetur ay in m. Deinde à dimidio quadrati ab auferatur quadratum am,& quadrati reſidui latus ſit mx. Dico ax,& xy rectas eſſe,de quibus quæritur.

Quoniam enim quadrata am, & mx æqualia ſunt dimidio quadrati ab: erunt (duplicando) duo quadrata am, & duo mx, hoc eſt quadrata ax, & xy quadrato ab æqualia, vt oportebat. Eſt autem quadratum ay æquale, ex conſt. quadrato ab cum duplo quadrato cd,& ex 4.2.el. quadratis ax, & xy cum duplo rectangulo axb: ergo quadrata ax, & xy cum duplo rectangulo axy,æqualia erunt quadrato ab cum duplo quadrato cd;ſed quadrata ax,& xy æqualia ſunt quadrato ab: ergo auferendo ab æqualibus æqualia, remanebit duplum rectangulum axb,duplo quadrato cd æquale,adeoque rectangulum axb quadrato cd æquale , vt petebatur. Duas igitur rectas exhibuimus,&c.Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSITIO XV.

Datam rectam *ab* dividere in *x*, vt quadrata *ax*. *xb* simul sumpta ad rectangulum *abx* sit vt *g* ad *h*.



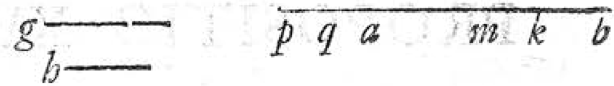
ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*axa* + *xbx*.	*abx*.	*g*.	*h*.
Vel si fiant			*pb*.	*ab*.
Vel per 1.6.el.			*pbx*.	*abx*.
Ergo per 14.5.el.	*axa* + *xbx*	—Λ—	*pbx*.	
Et auf. *xbx*.	*axa*	—Λ—	*pbx* − *xbx*.	
Idest per 3.2.el.			*pxb*.	
Ergo E.P.	*px*.	*ax*.	*ax*.	*xb*.
Et divid.	*pa*.	*ax*.	2*mx*.	*xb*.
Et dimid. anteced.	*qa*.	*ax*.	*mx*.	*xb*.
Et per compos.	*qa*.	*qx*.	*mx*.	*mb*.
Ergo solutum.				

CONST. ET DEMONST.

Fiat vt *h* ad *g* ita *ab* ad *pb*, & agatur *qa* dimidio *pa* æqualis, bisectàque *ab* in *m*, ipsis *qa*, & *mb*, seu *am*, reciprocæ inveniantur *qx*, & *mx*, quarum differentia sit *qm*. Dico factum.

Sunt



Sunt enim ex conſtr. proportionales $qa.qx.mx.mb$, & per diviſ. $qa.ax.mx.xb$, & duplicando antecedentes $pa.ax.2mx.xb$; ſed $2mx$ differentia eſt inter ax, & xb: ergo compon erunt proportionales $px.ax.ax.xb$, quare quadratum ax æquale erit rectangulo pxb, & addito quadrato xb, erunt quadrata ax, & xb æqualia rectangulo pxb cum quadrato xb, hoc eſt rectangulo pbx: ergo quadrata ax, & xb, hoc eſt rectangulum pbx ad rectangulum abx, ob eamdem altitudinem bx, erunt vt pb ad ab, ideſt vt g ad h. Quod erat faciendum.

DETERMINATIO

Propoſitum problema ſolutum eſt ſupponendo rationem datam g ad h eſſe maioris inæqualitatis. Oporteat vero determinare problema, hoc eſt an ipſa ratio æqualitatis, minorisve inæqualitatis dari poſsit.

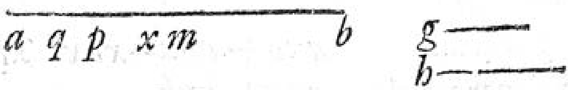
Sit	$axa + xbx \_\Lambda\_ abx.$
Et aufer. xbx.	$axa \_\Lambda\_ abx - xbx.$
Ideſt per 3.2.el.	$axa \_\Lambda\_ axb.$
Et per 1.6.el. erit	$ax \_\Lambda\_ xb.$

Ergo patet problema quamcumque rationem admittere. Nam ſi ratio g ad h fuerit æqualitatis erunt plana $axa + xbx$ æqualia pla-

no

no *abx*, & partes *ax*, & *xb* erunt æquales. Si vero *g* fuerit maior quã *h* erunt plana *axa*+*xbx* maiora plano *abx*, & pars *ax* maior erit parte *xb*. Si tandem *g* minor ponatur minora erunt plana *axa*+*xbx* plano *abx* & pars *ax* minor parte *xb*.

Tres igitur caſus habet problema, quorum primus, quando *g* ponitur maior quam *h* per primam analyſim expeditur, ſecundus vero, quando *g* & *k* ſunt æquales, per ijs, quæ proxime dicta ſunt enodatur. Tertius tandem, quando *g* ponitur minor, hoc modo reſolvitur.



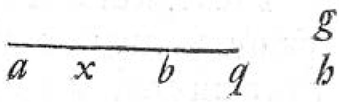
ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*axa*+*xbx*.	*abx*.	*g*.	*h*.	
Vel ſi fiant			*pb*.	*ab*.	
Ideſt per 1.6.el.			*pbx*.	*abx*.	
Ergo per 14.5.el.	*axa*+*xbx* —∧— *pbx*.				
Et aufer. *xbx*.	*axa* —∧— *pbx*—*xbx*.				
Ideſt per 3.2.el.	*axa* —∧— *pbx*.				
Et E.P.	*px*.	*ax*.	*ax*.	*xb*.	
Et divid.	*ap*.	*ax*.	2*xm*.	*xb*.	
Et dimid. anteced.	*aq*.		*xm*.		
Et per diviſ.	*aq*.	*qx*.	*xm*.	*mb*.	
&c.					

PRO-

PROPOSIT. XVI.

Datam rectam *ab* ita secare in *x*, vt quadratum *ax* cum rectangulo *abx* ad quadratum *xb* sit vt *g* ad *h*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	$axa + abx.\ xbx.\ g.\ h.$
Vel si fiant	$aq.\ bq.$
Ergo divid.	$axa + abx -\!- xbx.\ xbx.\ ab.\ bq$
Ideſt per 3.2.el.	$axa + axb.$
Vel per eamdem	$bax.\ xbx.\ ab.\ bq.$
Vel per 1.6.el.	$ab{:}ax.\ bq{:}ax$
Ergo per 14.5.el.	$bq{:}ax \;\text{—}\Lambda\text{—}\; xbx.$
Et E.P.	$bq.\ xb.\ xb.\ ax.$
Et per comp.	$bq.\ xq.\ xb.\ ab.$
Ergo solutum.	

CONSTR. ET DEMONSTR.

Fiat vt *g* ad *h* ita *aq* ad *bq* (hoc eſt vt differentia qua *g* superat *h* ad ipsam *h* ita *ab* ad *bq*) ipsisque *bq*, & *ab* reciprocæ inveniantur *xq*, & *xb*, quarum differentia sit *bq*. Dico factum.

Sunt enim proportionales *bq*. *xq*. *xb*. *ab*, & per divis. *bq*. *xb*.

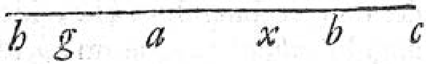
xb. xb. ax, quare rectangulum sub *bq*, & *ax* quadrato *xb* erit æquale: ergo rectangulum *bax*, ideſt quadratum *ax* cum rectangulo *axb*, ad quadratum *xb*, ideſt ad rectangulum sub *bq*, & *ax*, erit vt *ab* ad *bq*, & compon. quadratum *ax* cum rectangulo *axb*, & quadrato *xb*, ideſt cum rectangulo *abx* ad quadratum *xb*, vt *aq* ad *bp*, ſeu vt *g* ad *h*. Quod erat faciendum.

DETERMINATIO.

Oportet rationem datam eſſe maioris inæqualitatis, nam plana *axa*+*abx* maiora ſunt *xbx* plano. Cum ſolum *abx* maius ſit *xbx*.

PROPOSIT. XVII.

Datis rectis *ab*, & *bc*, ſecare *ab* in *x*, vt quadrata *ax*, & *xc* æqualia ſint rectangulis *axb*, & *cxb*.



ANALYSIS.

Sint igit.	$axa + xcx$ —Λ— $axb + cxb$.
Ideſt per 1.2.el.	$ac:xb$
Ergo ad. $2axc$ erunt	$axa + xcx + 2axc$ —Λ— $ac:xb + 2axc$
Ideſt per 4.6.el.	aca
Vel ſi fiat gb —Λ— ac	gbg —Λ— $gbx + 2axc$
Et aufer. gbx. erit	$gbg - gbx$ —Λ— $2axc$.
Ideſt per 2.2.el.	bgx
Et E.P.	$gb.\ 2ax.\ xc.\ gx.$
Et dimid. primos.	$ha.\ ax.$
Ergo per comp. E.P.	$ha.\ hx.\ xc.\ gc.$
Ergo ſolutum.	

CONST. ET DEMONST.

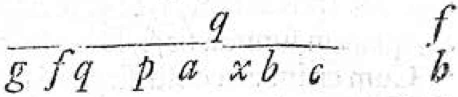
Fiat gb ipſi ac æqualis, & ha ſit eius dimidia, ipſis autem ha, & gc reciprocæ inueniantur hx, & xc, quarum ſumma ſit hc. Dico factum.

Sunt enim ex conſtr. proportionales $ha.\ hx.\ xc.\ gc$, & per diviſ. $ha.\ ax.\ xc.\ gx$, & duplicando primos $gb.\ 2ax.\ xc.\ gx$, quare rectangulum bgx duplo rectangulo axc erit æquale, & addendo rectangulum gbx, erunt rectangula bgx, & gbx, ideſt quadratum gb, ſeu ac, hoc eſt quadrata ax, & xc cum duplo rectangulo axc æqualia rectangulo gbx, ideſt ſub ac, & xb, vna cum duplo rectangulo axc: ergo ſi auferatur duplum rectangulum axc, remanebunt quadrata ax, & xc æqualia rectangulo ſub ac, & xb, hoc eſt rectangulis axb, & cxb. Quod facere oportebat.

PRO-

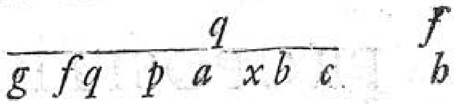
PROPOSITIO XVIII.

Datis rectis *ab*, & *bc*, secare *ab* in *x* vt quadrata *ax*, & *xc* ad rectangula *axb*, & *cxb* sint in ratione data vt *f* ad *b*.



ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*axa* + *xcx*.	*axb* + *cxb*.	*f*	*b*.
Vel per 1.6.el.		*ac*:*xb*.		
Vel si fiant			*gb*.	*ac*.
Vel per 1.6.el.			*gbx*.	*ac*:*xb*.
Ergo per 14.5.el.	*axa* + *xcx* $\sqcup\Lambda\sqcup$ *gbx*.			
Et add. 2 *axc*.	*axa* + *xcx* + 2 *axc* $\sqcup\Lambda\sqcup$ *gbx* + 2 *axc*.			
Ideſt per 4.2.el.	*aca*.			
Vel si fiat	*gbq*.			
Et dimid.	*pbq*	$\sqcup\Lambda\sqcup$ *pbx* + *axc*.		
Et auf. *pbx*.	*pbq* − *pbx*	$\sqcup\Lambda\sqcup$ *axc*.		
Ideſt per 1.2.el.	*pb*:*qx*.			
Ergo E.P.	*pb*. *ax*.	*xc*.	*qx*.	
Fiat *fa* $\sqcup\Lambda\sqcup$ *pb*.	*fa*.			
Ergo per comp. E.P.	*fa*. *fx*.	*xc*.	*qc*.	
Ergo ſolutum.				



CONSTR. & DEMONST.

Fiat vt h ad f sic ac ad gb, & bisecetur in p. Deinde fiat rectangulum gbq quadrato ac æquale, & ponatur fa ipsi pb æqualis. Ipsis autem fa, & qc reciprocæ inveniantur fx, & xc, quarum summa sit fc. Dico factum.

Cum enim ex constr. sit fa ad fx, vt xc ad qc, & per divis. fa, ideſt pb ad ax, vt xc ad qx: erit rectangulum sub pb, & qx rectangulo axc æquale, & addito rectangulo pbx, erunt rectangula sub pb, & qx, atque pbx, hoc eſt erit rectangulum pbq rectangulis pbx, & axc æquale, & duplicando, rectangulum gbq, ideſt quadratum ac, seu quadrata ax, & xc cum duplo rectangulo axc æqualia erunt rectangulis gbx, & duplo axc, vnde dempto communi duplo rectangulo axc, remanebunt quadrata ax, & xc rectangulo gbx æqualia: ergo quadrata ax, & xc, ideſt rectangulum gbx ad rectangulum sub ac, & xb, ideſt ad rectangula axb, & cxb (ob eamdem altitudinem xb) erunt vt gb ad ac, ideſt vt f ad h. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSIT. XIX.

Datam rectam *ac* sectam in *b* rursus secare in *x* inter *a*, & *b*, vt rectangula *axb*, & *cxb* simul sumpta ad quadratum *xc* sint in ratione data vt *g* ad *h*.

ANALYSIS.

Sint igit.prop.	$axb+cxb$.	cxc.	g.	h.
Ideſt per 1.2.el.	$ac{:}xb$.			
Vel ſi fiant			ac.	pc.
Vel per 1.6.el.	$ac{:}xb$.	cxc.	$ac{:}xb$,	$pc{:}xb$.
Ergo per 14.5.el.		cxc —Λ—	$pc{:}xb$.	
Et E.P.	pc.	xc.	xc.	xb.
Et convert.	pc.	px.	xc.	bc.
Ergo ſolutum				

CONSTR. & DEMONSTR.

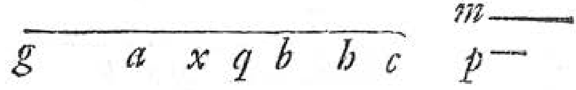
Fiat vt *g* ad *h* ita *ac* ad *pc*, ipſiſque *pc*, & *bc* reciprocæ inveniantur *px*, & *xc*, quarum ſumma ſit ipſa *pc*. Dico factum.

Sunt enim ex conſtr. proportionales *pc*. *px*. *xc*. *bc*, & convert. *pc*.*xc*.*xc*.*xb*, quare rectangulum ſub *pc*, & *xb* quadrato *xc* erit æquale. Ergo rectangulum ſub *ac*, & *xb*, ideſt rectangula *axb*, & *cxb* ad quadratum *xc*, hoc eſt ad rectangulum ſub *pc*, & *xb* (ob eamdem altitudinem *xb*) erunt vt *ac* ad *pc*, ideſt vt *g* ad *h*. Quod facere oportebat.

PRO-

PROPOSITIO XX.

Datam rectam *ac* divisam in *b*, rursus dividere in *x* inter *a*, & *b*, vt rectangulum *axb* cum quadrato *xc* ad rectangulum *cxb* sit in ratione data vt *m* ad *p*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*axb* + *xcx*.		*cxb*.	*m*.	*p*.
Et comp. per 1. 2. el.	*ac:xb* + *xcx*.		*cxb*.	*m* + *p*.	*p*
Et divid. per 2. 2.	*ac:xb* + *xcb*		*cxb*.	*m*.	*p*.
Ideſt per 3. 2.	*ac:xb* + *xbc* + *bcb*				
Vel ſi fiat *ga* —Λ— *hc*.		*xb:ga*.			
Hoc eſt per 1. 2.	*gc:xb* + *bcb*. —*cxb*.			*m*.	*p*.
Vel ſi fiant				*bcb*.	*cqb*
Ergo vt diff. & E.P.	*gc:xb*.		*cxq*.	*m*.	*p*.
Vel ſi fiant				*gc*.	*hc*.
Vel per 1. 6. el.				*gc:xb*,	*hc:xb*.
Ergo per 14. 5. el.		*hc:xb* —Λ— *cxq*.			
Et E.P.	*hc*.	*xc*.	*xq*.	*xb*.	
Et per diviſ.	*hc*.	*xb*.	*xq*.	*qb*.	
Ergo ſolutum.					

CONS-

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat *ga* ipsi *bc* æqualis, & vt *m* ad *p* ita quadratum *bc* ad rectangulum *cqb*, & ita *gc* ad *bc*, ipsisque *bc*, & *qb* reciprocæ inveniantur *xb*, & *xq*, quarum differentia sit *qb*. Dico factum.

Cum enim ex constr. sint proportionales *bc*. *xb*. *xq*. *qb*, & per compos. *bc*. *xc*. *xq*. *xb*: erit rectangulum sub *bc*, & *xb* rectangulo *cxq* æquale: ergo rectangulum sub *gc*, & *xb* ad rectangul. *cxq*, idest sub *bc*, & *xb* (ob eamdem altitudinem *xb*) erit vt *gc* ad *bc*, seu vt quadratum *bc* ad rectangulum *cqb*. Sunt autem aggregata vt vnus ad vnum: ergo rectangulum sub *gc*, & *xb* cum quadrato *bc*, hoc est rectangula sub *ac*, & *xb*, atque sub *xb*, & *ga*, seu *bc*, cum quadrato *bc*, hoc est rectangula sub *ac*, & *xb*, & *xcb* ad rectangulum *cxb* erunt vt quadratum *bc* ad rectangulum *cqb*, idest vt *m* ad *p*, & compon. rectangulum sub *ac*, & *xb* cum quadrato *xc* ad rectangulum *cxb*, vt aggregatum ex *m*, & *p* ad ipsam *p*, & divid. rectangulum *axb* cum quadrato *xc* ad rectangulum *cxb*, vt *m* ad *p*. Quod erat faciendum.

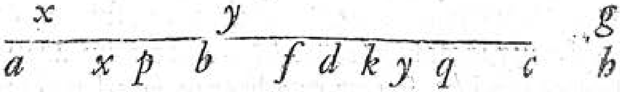
SCHOLION.

Vt autem fiat vt *m* ad *p*, ita quadratum *bc* ad rectangulum *cqb*, perspicuum est constructionem hoc modo instituendam. Fiat vt *m* ad *p* ita quadratum *bc* ad aliud, cuius lateri reciprocæ inveniantur *qb*, & *qc*, quarum differentia sit *bc*.

PRO-

PROPOSIT. XXI.

Datas rectas *ab*, & *bc* ita ſecare in *x*, & *y* vt rectangula *axb*, & *byc* æqualia ſint quadrato dato *g*: rectangula verò *cxb*, & *ayb* æqualia dato quadrato *h*.



ANALYSIS

Sint igitur $axb + byc$ —Λ— gg
Et etiam, $cxb + ayb$ —Λ— hh.
Ergo per 1.2.el. $ac{:}xb + ac{:}by$ —Λ— $gg + hh$.
Vel ſi fiat $ac{:}bq$.
Ergo per 1.6. $xb + by$ —Λ— bq.
Et erit xb —Λ— yq.
Et ſi fiat pq —Λ— ab erit axb —Λ— pyq.
Ergo per 1.cond. $pyq + byc$ —Λ— gg.
Biſecentur *pq*, & *bc* in *f*, & *k*, & ipſa *fk* in *d*.
Ergo addendo *fyf*, & *kyk*
Erunt per 6.2.el. $pfp + bkb$ —Λ— $gg + fyf + kyk$.
Ideſt per 10.2. $pfp + bkb$ —Λ— $gg + 2fdf + 2dyd$.

Ergo ſolutum, & quoniam nulla eſt ratio vt cognita *dy*, nequeat poſitione variari, patet punctum *y* ante, vel poſt punctum *d* aſsignari poſſe, vnde manifeſtum fit problema duas

duas accipere solutiones. Si enim ponatur *dy*, erit *by* maior quam *yc*, & consequenter *xb* minor quam *ax*, propterea quod *xb* æquatur *yq*, at vero si ponatur *yd*, erit *by* minor quam *yc*, & consequenter *xb* maior quam *ax*.

CONSTR. & DEMONST.

Fiat rectangulum sub *ac*, & *bq* quadratis datis *g*, & *h* æquale, & ponatur *pq* æqualis ipsi *ab*. Deinde bisecentur *pq*, & *bc* in *f*, & *k*, & ipsa *fk* in *d*. Et ab aggregato quadratorum *pf*, & *bk* auferatur aggregatum quadrati dati *g*, & dupli quadrati *fd*, & quadrati residui accipiatur dimidium, cuius lateri agatur æqualis tam *yd*, quam *dy*, & ipsis *yq* æquales fiant *xb*, & *xb*. Dico rectas *ax*. *xb*. *by*. *yc*. vtroque modo acceptas esse divisiones quæsitas.

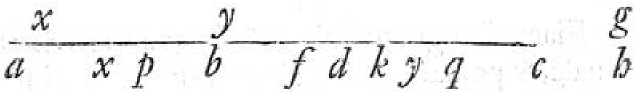
Sunt enim ex constr. quadrata *pf*, & *bk* æqualia quadrato *g*, cum duplo quadratorum *fd*, & *dy*, vel *fd*, & *yd*, hoc est (per 6.2.el.) cum quadratis *fy*, & *ky*, seu *yf*, & *yk*. Vnde (per eandem) si auferantur quadrata *fy*, & *ky*, seu *yf*, & *yk*, remanebunt rectangula *pyq*, & *byc* quadrato *g* æqualia; sed rectangulum *pyq* rectangulo *axb* est æquale (cum *ab*, & *pq*, nec non *xb*, & *yq* factæ sint æquales) ergo rectangula *axb*, & *byc* dato quadrato *g* erunt æqualia, vt oportebat. Rursus quoniam *xb*, & *yq* sunt æquales, erunt *xb*, & *by* ipsi *bq* æquales, & (per 1.6.el.) rectangula sub *xb*, & *ac*, atque sub *by*, & *ac*, hoc est rectangula *axb*, & *cxb* cum rectangulis *byc*, & *ayb*, æqualia erunt rectangulo sub *ac*, & *bq*, hoc est quadratis *g*, & *h*; sed rectangula *axb*, & *byc* ostensa sunt æqualia quadrato *g*: igitur ab æqualibus auferendo æqualia, remanebunt rectangula *cxb*, & *ayb* quadrato *h* æqualia, vt oportebat. Rectas igitur *ab*, & *bc* divisimus, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

Hoc problema placet in numeris proponere, & resolvere.

QVÆSTIO.

Quæruntur quatuor numeri cum his quatuor conditionibus.



1. COND. Aggregatum primi,& secundi sit 16.
2. Aggregatum tertij, & quarti sit 11.
3. Aggregatum productorum, tum sub primo, & secundo,tum sub 3.& quarto sit 72.
4. Aggregatum productorum tum sub secundo,& summa secundi, tertij, & quarti, tum sub tertio,& summa primi secundi, & tertij sit 252.

Exponantur in directum duæ rectæ lineæ *ab*, & *bc*, quæ numeros 16, & 11 repraesentent, & concipiatur quadratum *g* valere 72, & quadratum *h*. 252. divisisque *ab*, & *bc* in *x*, & *y*, erunt quæsiti numeri *ax*. *xb*. *by*. *yc*, & per tertiam conditionem facta *axb*, & *byc* æquabuntur quadrato *g*, & facta *cxb*, & *ayb* per quartam conditionem quadrato *h*. Et ecce tibi quæstio arithmetica in problema geometricum reducta.

Persecutà igitur analysi patet modus resolvendi, & omnium linearum valor facile determinatur in hunc modum.

Quo-

Quoniam	gg	—Λ—	72
Et	hh	—Λ—	252
Erunt gg, & hh		—Λ—	324, ideſt $ac:bq$.
Sed tota	ac	—Λ—	27
Ergo	bq	—Λ—	12
Et quia ab ſeu	pq	—Λ—	16
Erit	pb	—Λ—	4
Sed $\frac{1}{2}pq$ ideſt	pf	—Λ—	8
Ergo	bf	—Λ—	4
Sed $\frac{1}{2}bc$ ideſt	bk	—Λ—	$5\frac{1}{2}$
Ergo	fk	—Λ—	$1\frac{1}{2}$
Et $\frac{1}{2}fk$ ideſt	fd	—Λ—	$0\frac{3}{4}$

Nunc ad reſolutionem. Quadrata pf, & bk ſunt $94\frac{1}{4}$ quadratum autem g, & duplum quadratum fd ſunt $72\frac{18}{16}$, qui numerus ſi auferatur à numero invento $94\frac{1}{4}$ remanebit numerus $21\frac{2}{16}$, cuius dimidium erit $10\frac{9}{16}$, à quo radix erit $3\frac{1}{2}$ pro dy, ſeu yd.

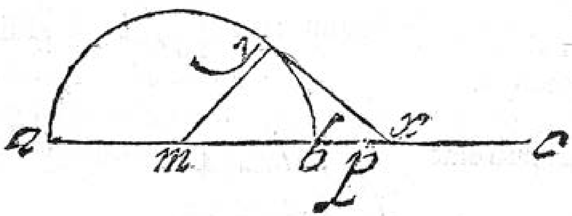
Et quoniam erat	bf	—Λ—	4
Et	fd	—Λ—	$0\frac{4}{3}$
Erit	bd	—Λ—	$4\frac{4}{3}$
Ergo ſi addatur	dy	—Λ—	$3\frac{1}{4}$
Erit	by	—Λ—	8
Sed ſi à	bd	—Λ—	$4\frac{3}{4}$
Auferatur	yd	—Λ—	$3\frac{1}{4}$
Remanebit	by	—Λ—	$1\frac{1}{2}$

Ergo numerus tertius *by* erit 8, seu $1\frac{1}{2}$ vnde quartus *yc* erit 3, seu $9\frac{1}{2}$, & cum *bq* sit 12, & *by* 8 seu $1\frac{1}{2}$, erit *yq*, ideſt *xb* numerus ſecundus 4, seu $10\frac{1}{2}$, vnde *ax* primus erit 12, seu $5\frac{1}{2}$.

Sunt igitur numeri quæſiti tam 12.4.8.3, quam $5\frac{1}{2}$. $10\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. $9\frac{1}{2}$. de quibus quærebatur.

PROPOSIT. XXII.

Dato ſemicirculo, cuius diameter *ab* protracta ſit ad *c*: oporteat punctum determinare *x*, inter *b*, & *c*, vt ſi ducatur contingens *xy* æqualis ſit ipſi *xc*.



Factum iam ſit, & ex centro *m* ducatur *my*, rectus igitur erit angulus *myx*. Biſecetur *mc* in *p*.

ANALYSIS.

Sit igitur	xy —Λ— xc.
Sed	mxm —Λ— $mym + xyx$.
Hoc eſt	$mbm + xcx$.
Ergo auf. xcx erit	$mxm - xcx$ —Λ— mbm.
Hoc eſt per 8. Intr.	$mc:2px$. —Λ— mbm.
Et diſſolv. E.P.	mc. mb. mb. $2px$.
Ergo ſolutum.	

CONSTR. & DEMONSTR.

Dividatur mc bifariam in p, & ad mc, & mb tertia inveniatur, cuius dimidia ſit px. Dico ſi tangens ducatur xy, ipſam æqualem eſſe rectæ xc. Ducatur my.

Quoniam igitur mc eſt ad mb, vt mb ad duplam px: erit rectangulum ſub mc, & dupla px, hoc eſt differentia quadratorum mx, & xc æqualis quadrato mb, & addendo commune quadratum xc, erit quadratum mx æquale quadratis mb, ideſt my, & xc; ſed ob angulum rectum y etiam eſt æquale quadratis my, & xy: igitur quadratum xc quadrato xy erit æquale, adeoque ipſa xy ipſi xc æqualis erit. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

Perſpicuum eſt quadratum tangentis xy æquari rectangulo axb, vnde rectangulum axb 35.3.el.
æquari debet quadrato xc, & proportionales erunt $ax.xc.xc.bx$. Et ecce tibi propoſitio prima lib. 1. quapropter hoc, & illud, vnum idem-

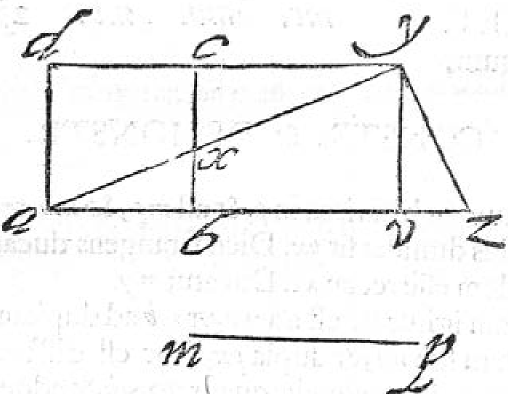
que

que problema eſſe concludes, cuius reſolutio elegantior per proportionales videtur.

Vide Pappū lib. 7. prop. 72 Carteſium to. 1. pag. 83. & 216. Renald. tom. 3. pag. 314.

PROPOSIT. XXIII.

Dato quadrato *ac*, ex angulo *a* ad oppoſitum protractum latus rectam ducere *axy*, & facere *xy* datæ *mp* æqualem.



ANALYSIS.

Sit igitur *xy* —Λ— *mp*.

Fiat angulus *vyz* —Λ— *xab*.

Et erit triangulum *axb* —Λ— *vyz*.

Et recta *ax* —Λ— *yz*.

Et ob ſimil. *axb*. *ayz*. S.P. *ay*. *az*. *ab*. *ax*.

Hinc rectangulum *yax* —Λ— *baz*.

Eſt autem per 47. 1. el. *aza* —Λ— *aya* + *yzy*.

Ideſt *axa*.

Ergo per 7. 2 el. *aza* —Λ— 2*yax* + *xyx*.

Hoc eſt 2*baz* + *mpm*.

Ergo ſolutum

CONS-

CONSTR. & DEMONSTR.

Inveniatur az, cuius quadratum æquale ſit rectangulo ſub ipſa, & dupla ab, vna cum quadrato dato mp. Deſcribatur ſuper az ſemicirculus ſecans protractam dc in y, ducaturque axy. Dico xy ipſi mp æqualem eſſe. Demittatur normalis yv, & iungatur yz. per 4. Introd.

Quoniam igitur angulus ayz in ſemicirculo rectus eſt, erunt triangula ſimilia axb. ayv. vyz. ayz, quorum axb, & vyz erunt etiam æqualia, ob æquales ab, & vy, adeoque ax ipſi yz æqualis, eritque rectangulum yax rectangulo zab æquale, cum ob ſimilitudinem triangulorum axb. ayz proportionales ſint ay. az. ab. ax. Eſt autem quadratum az æquale quadrato ay cum quadrato yz, ideſt ax; ſed quadrata ay, & ax æquantur duplo rectangulo ayx, ideſt duplo baz cum quadrato xy. Ergo quadratum az æquale erit duplo rectangulo baz cum quadrato xy; ſed ex conſtructione factum eſt idem æquale duplo rectangulo baz cum quadrato mp: æqualia igitur erunt quadrata xy, & mp, adeoque ipſa xy datæ mp æqualis. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

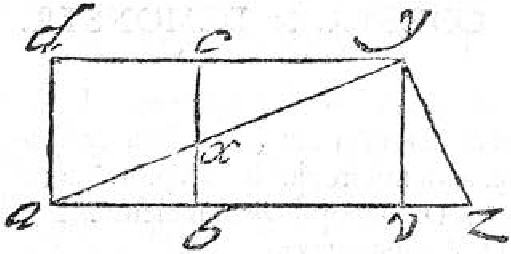
Hoc problema per proportionales reſolutum dedimus prop. 42. lib. 1. & ſi placuerit, ex vltima æquatione huius analyſeos etiam ad proportionales deſcendere, in hunc modum licebit.

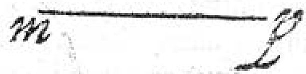
Erat $aza \sqcup\!\wedge\!\sqcup 2baz + mpm$

Ergo auf. $2baz$. erit $aza - 2baz \sqcup\!\wedge\!\sqcup mpm$.

Et prop. $az - 2ab$. mp. mp. az.

Et





Et quærere oportebit ipsi *mp* reciprocas *az*, & *az--2ab*, quarum differentia sit dupla *ab*. Et hoc modo quælibet æquatio in proportionales dissolvi poterit.

Etiam poterit quælibet æquatio quadrata composita ad simplicem revocari hoc modo.

Erat	aza	$=$	$2baz + mpm.$
Ideſt per 2.2.el.	$azb + baz$	$=$	$2baz + mpm.$
Ergo auf. *baz* erit	azb	$=$	$baz + mpm.$
Ideſt per 3.2.el.	$bzb + abz$	$=$	$abz + aba + mpm$
Ergo auf. *abz*. erit	bzb	$=$	$aba + mpm.$

Et quærere oportebit quadratum *bz*, quod æquale sit quadratis *ab*, & *mp*. Et eamdem obtinebimus constructionem, quam Pappus tradidit; nos tamen in æquatione composita libenter quiescimus.

PRO-

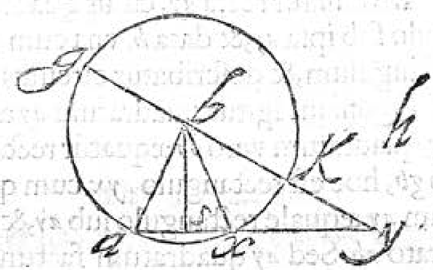
PROPOSITIO XXIV.

Dato trianguli rectanguli vno laterum circa rectum, dataque differentia segmentorum baseos: triangulum invenire.

Vide Cartesium to. 1. pag. 317. Renald. tom. 3. pag. 412.

DATO MINORE LATERE.

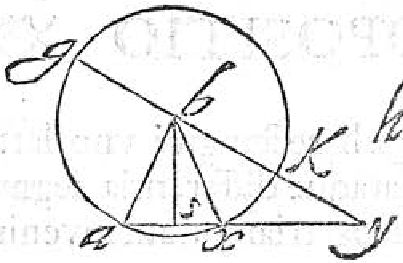
Sit data *ab* latus minus, & data *h* differentia segmentorum baseos. Oporteat, &c.



Data *ab* tamquam radio circulus *agk* describatur, & *xy* differentia sit segmentorum baseos, quare æquari debet datæ *h*.

ANALYSIS.

Sit igitur	xy —Λ— h.
Sed per 47.1.el.	aya —Λ— $aba + byb$.
Et per 6.2.el.	byb —Λ— $gyk + gbg$.
Ideſt	aba.
Et per 36.3.el.	gyk —Λ— ayx.
Ergo	aya —Λ— $ayx + 2aba$.
Ideſt	aya —Λ— $ay{:}h + 2aba$.
Ergo ſolutum.	



CONSTR. & DEMONSTR.

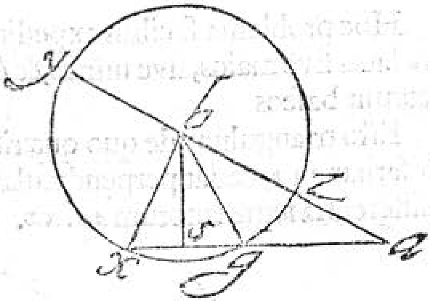
Inveniatur recta *ay*, cuius quadratum æquale sit rectangulo sub ipsa *ay*,& data *h*. vna cum duplo quadrato *ab*. Fiat triangulum,& describatur circulus.

per 4. Introd.

Quoniam igitur quadratum *ay* æquatur quadratis *ab*, & *by*,quadratum vero *by* æquatur rectangulo *gyk* cum quadrato *gb*, hoc est rectangulo *ayx* cum quadrato *ab*: erit quadratum *ay* æquale rectangulo sub *ay*,& *xy* vna cum duplo quadrato *ab*. Sed *ay* quadratum factum est æquale rectangulo sub *ay*, & *h* cum duplo quadrato *ab*: ergo rectangulum sub *ay*,& *xy* cum duplo quadrato *ab*,æquale erit rectangulo sub *ay*,& *h* cum duplo quadrato *ab*, & dempto communi duplo quadrato *ab*,rectangulum sub *ay*, & *xy* æquale erit rectangulo sub *ay*, & *h*, adeoque *xy*,differentia segmentorum baseos, æqualis erit datæ *h*. Triangulum igitur, &c. Quod erat faciendum.

DATO MAIORE LATERE.

Sit data *ab* latus maius, & data *ga* differentia segmentorum baseos.



ANALYSIS.

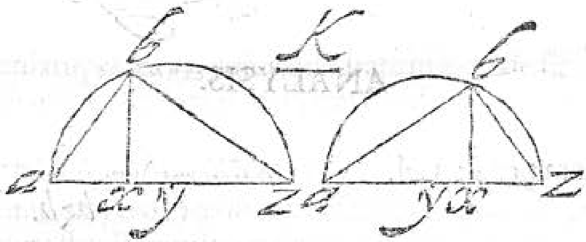
Quoniam per 47.1.el.	$xax \sqsupset xbx + aba.$
Ideſt	$bzb.$
Et per 36.3.el.	$xag \sqsupset yaz.$
Erunt	$xax + xag \sqsupset bzb + yaz + aba.$
Hoc eſt per 6.2.el.	$aba \quad + aba.$
Ergo	$xax + xag \sqsupset 2aba.$

Ergo ſolutum eſt problema, & patet conſtructio, & demonſtratio, ſi inveniatur per 5. Introd. recta *xa*, cuius quadratum cum rectangulo ſub ipſa *xa*, & data *ga* æquale ſit duplo quadrato *ab*.

Dato vtrovis laterum circa rectum.

Hoc problema facilius expeditur per proportionales. Sit *ab* latus siue maius, siue minus, & *k* semidifferentia segmentorum baseos.

Esto triangulum, de quo quæritur *abz*, & diuisa base *az* bifariam in *y*, cadat perpendicularis *bx*. Erit igitur *xy* semidifferentia segmentorum *ax*. *xz*.



ANALYSIS.

prop. 7. Introd.	Per 8.6.el.S.P.	*az*.	*ab*.	*ab*.	*ax*.
	Ideſt	2*ay*.			
	Et dimid. primos	*ay*.	½*ab*.	*ab*.	*ax*.

Ergo solutum, cum inter *ay*, & *ax* differentia sit data, nempe recta *k*.

CONST. ET DEMONST.

Ipsis *ab*, & ½*ab* reciprocæ inueniantur *ay*. *ax*, quarum differentia sit data *k*. Super *az* dupla rectæ *ay* semicirculus describatur, & aptetur *ab*, iungaturque *bx*. Dico triangulum *abz* esse, de quo quæritur.

Cum enim ex constr. sit *ay* ad ½*ab*, ideſt duplicando, *az* ad *ab*, vt *ab* ad *ax*: erit (per conuersam prop. 8.6. elem.) *bx*

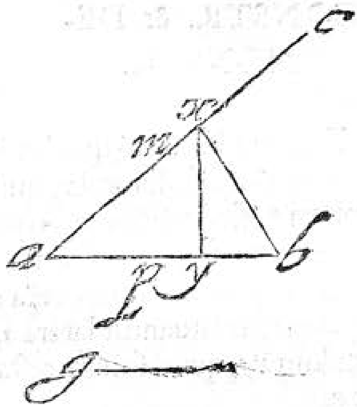
per

perpendicularis, quare segmenta baseos erunt *ax*. *xz*, quorum semidifferentia *xy* ex constructione æqualis est datæ. *k*. Triangulum igitur, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXV.

Data base, altitudine, & aggregato laterum: triangulum exhibere.

Vide Vietam appendicul. 1. R. P. Greg. t. 1. prop. 82.



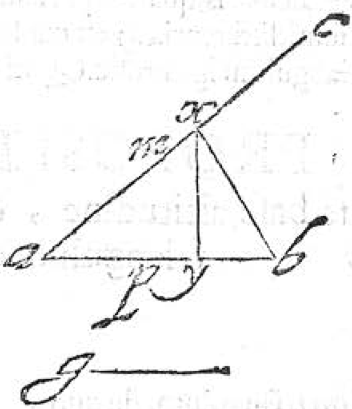
Esto triangulum, de quo quæritur *axb* super data base *ab*, latera autem *ax*. *xb*. datam *ac* componant, & perpendiculum *xy* æquale sit datæ *g*.

Bisecentur *ac*, & *ab* in *m*, & *p*.

ANALYSIS.

Sit igitur	$xy \sqsupset g.$
Et sint	$axa + xcx \sqsupset axa + xbx.$
per 9.2.el.& 13.Int.	$2ama + 2mxm \sqsupset 2apa + 2gg + 2pyp.$
Et dimid.	$ama + mxm \sqsupset apa + gg + pyp.$
Vel si fiat	$k{:}k + pyp.$
Et auf. $k{:}k$.	$ama - k{:}k + mxm \sqsupset pyp.$
Vel si fiat	$ll + mxm.$
Sed per 14.Int. S.P.	$aca.\ \ aba.\ \ pyp.\ \ mxm.$
Ergo subst. E.P.	$aca.\ \ aba.\ \ ll + mxm.\ \ mxm.$
Et divid.	$aca - aba.\ \ aba.\ \ ll.\ \ mxm.$
Ergo solutum.	

CONS-



CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat quadratum *k* quadratis *ap*, & *g* æquale, & quadratum *l* æquale differentiæ, quà quadratum *am* superat quadratum *k*. Et vt differentia quadratorum *ac*, & *ab* ad quadratum *ab* ita fiat quadratum *l* ad quadratum *mx*. Vnde longitudine nota erunt latera *ax*. *xc*, quibus, super base *ab*, æqualia constituantur latera *ax*. *xb*, & demittatur perpendiculum *xy*, quod solum restat ostendere æquale esse datæ *g*.

Cum igitur ex constr. differentia quadratorum *ac*. *ab* ad quadratum *ab* sit vt quadratum *l* ad quadratum *mx*: erit compon. quadratum *ac* ad quadratum *ab*, vt quadrata *l*, & *mx* ad quadratum *mx*: sed quadratum *ac* ad quadrat. *ab* (per 14. Intr.) est vt quadratum *py* ad quadrat. *mx*: æqualia igitur erunt quadrata *l*, & *mx* quadrato *py*. Sunt autem quadrata *l*, & *k*, quadrato *am* æqualia, & quadrata *ap*, & *g* æqualia quadrato *k*: ergo æqualibus æqualia addẽdo erunt quadrata *am*, & *mx* æqualia quadratis *ap*. *g*. & *py*, & duplicando, duplum quadratorum *am*, & *mx*, idest (per 9. 2. el.) quadrata *ax*, & *xc*, siue ex constr. quadrata *ax*, & *xb*, siue (per 13. Introd.) duplum quadratorum *ap*. *py*, & *xy* æquale erit duplo quadratorum *ap*. *g*, & *py*: ergo dimidiando, & demptis quadratis *ap*. *py* remanebit quadratum *xy* quadrato *g* æquale, adeoque ipsa *xy* ipsi *g* æqualis. Quod facere oportebat. CO-

COROLLARIVM.

Ex præcedente analyſi ſequens deducitur analogia ad praxim numerorum haud inutilis.

IN OMNI TRIANGVLO.

Vt differentia quadratorum ſummæ laterum, & baſeos.

Ad quadratum baſeos.

Ita eſt differentia, quà quadratum ſemiſummæ laterum ſuperat quadrata ſemibaſis, & perpendiculi

Ad quadratum ſemidifferentiæ laterum.

QVÆSTIO.

Quæritur triangulum, cuius baſis ſit 44 altitudo 12, & ſumma laterum 52.

OPERATIO.

Summa laterum 52. quadratum 2704.
Baſis 44. quadratum 1936 terminus ſecund.
differentia 768 terminus primus.

Semiſumma lat. 26. quadratum 676.
Semibaſis 22 quad. 484.
Altitudo 12. quad. 144.
Summa 628 628
diff. 48. terminus tertius.

Ergo ſi 768 dat 1936. 48. dabit 121
$\sqrt{}$. eſt 11. ſemidiff. laterum.
eſt 26 ſemiſumma.

Ergo ſumma, & differ. 37. & 15 erunt latera trianguli, de quo quæritur.

SCHO-

SCHOLION.

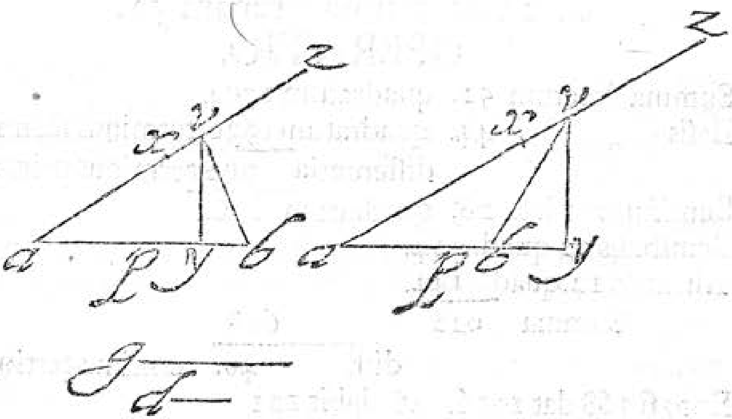
Prædicta analysis partes trianguli omnes longitudine notas exhibet; quod quidem præstare nequit ingeniosa constructio Vietæ, cum illa deducta sit ex inventione circuli, qui per duo data puncta transiens, alium contingat

R.P. Gregorius à Sancto Vincentio vt hanc propositionem enodaret ad elypsim recurrit.

PROPOSIT. XXVI.

Vide Vietam ibidem.

Data base altitudine, & differentia laterum triangulum constituere.



Esto

Esto triangulum, de quo quæritur *avb* super datam basim *ab* in altitudine *vy* datæ *g* æquali, & *xv* semidifferentia laterum *av. vz*, sive *av.vb* sit datæ *d* æqualis.

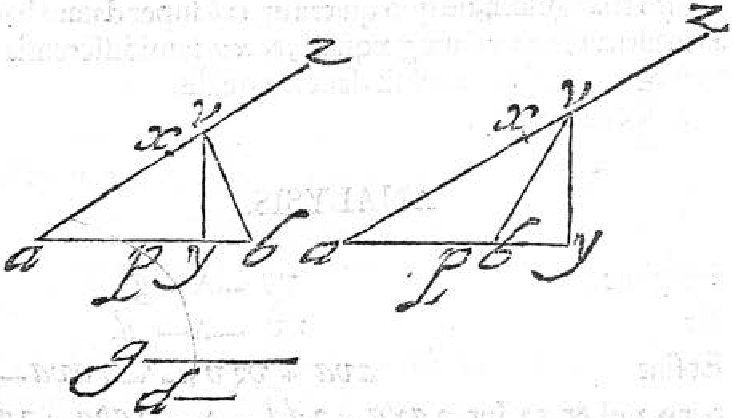
Bisecetur *ab* in *p*.

ANALYSIS.

Sit igitur *vy* —Λ— *g*.
Et *xv* —Λ— *d*.
Et sint *ava* + *vzv* —Λ— *ava* + *vbv*.
per 9.2.el.& 13.Int. 2*axa* + 2*dd* —Λ— 2*apa* + 2*gg* + 2*pyp*.
Et dimid. *axa* + *dd* —Λ— *apa* + *gg* + *pyp*.
Sive si fiat *axa* + *dd* —Λ— *kk* + *pyp*.
Vel auf. *dd* *axa* —Λ— *kk* — *dd* + *pyp*.
Vel si fiat *axa* —Λ— *ll* + *pyp*.
Et auf. *ll*. erit *axa* — *ll* —Λ— *pyp*.
Sed per 14.Int. S.P *axa*. *pyp*. *apa*. *dd*.
Ergo subst. E.P. *axa*. *axa*. — *ll*. *apa*. *dd*.
Et conv. *axa*. *ll*. *apa*. *apa*. — *dd*.
Ergo solutum.

CONSTR. & DEMONST.

Fiat quadratum *k* quadratis *ap*, & *g* æquale, & quadratum *l* æquale differentiæ, quà quadratum *k* superat quadratum *d*, & vt differentia quadratorum *ap*, & *d* ad quadratum *ap* ita fiat quadratum *l* ad quadratum *ax*. Rectæ igitur *ax* (iam longitudine notæ) addatur *xv* æqualis datæ *d*, & fiat *xz* ipsi *ax* æqualis, & rectis *av. vz. ab* triangulum constituatur *avb*. Quod basim habebit datam, & semidifferentia laterum *av. vb*, idest *av. vz*, nempe *xv* æqualis erit datæ *d*. Bisecetur *ab* in *p*, & demittatur perpendiculum *xy*, quod dico datæ *g* esse æquale.



Cum enim ex conſtr. quadratum *ax* ad quadratum *l* ſit vt quadratum *ap* ad differentiam quadrati *ap* ſuper quadratum *d*: erit convert. quadratum *ax* ad differentiam quadratorum *ax*, & *l*, vt quadr. *ap* ad quad. *d*; ſed quadrat. *ax* eſt ad quadrat. *py*, vt quadr. *ap* ad quadrat. *xv*, ideſt *d*: æqualis igitur erit differentia quadratorum *ax*, & *l* quadrato *py*; ſeu quadratum *ax* æquale quadratis *l*, & *py*, ideſt differentiæ quadratorum *k*, & *d* cum quadrato *py*, quare addito quadrato *d* erunt quadrata *ax*, & *d*, quadratis *k*, & *py*, ideſt quadratis *ap*. *g*. & *py* æqualia, & (duplicando) duplum quadratorum *ax*, & *d*, ideſt *xv*, ſive per 9. 2. el. quadrata *av*, & *vz*, ideſt ex conſtr. *av*, & *vb*, ſive per 13. Introd. duplum quadratorum *ap*. *py*, & *vy* æquale erit duplo quadratorum *ap*. *g*. & *py*: ergo dimid. & demptis quadratis *ap*. *py*: quadratum *vy* quadrato *g* erit æquale, adeoque ipſa *vy* ipſi *g* æqualis. Quod facere oportebat.

COROLLARIVM.

Ex hac propoſitione ſequens colligitur analogia, vt patet ad finem analyſeos.

IN

IN OMNI TRIANGVLO.

Vt differentia quadratorum ſemibaſis, & ſemidifferentiæ laterum.
Ad quadratum ſemibaſeos.
Ita eſt differentia, quà quadrata ſemibaſis, & perpendiculi ſuperant quadratum ſemidifferentiæ laterum.
Ad quadratum ſemiſummæ laterum.

QVÆSTIO.

Quæritur triangulum, cuius baſis ſit 44 altitudo 12, & differentia laterum 22.

OPERATIO.

Semibaſis	22.	quadratum 484 pro ſecund. termin.
Semidiff. later.	11.	quadratum 121
		differentia 363 pro prim. termino.

Semibaſis 22 quad. 484.
Altitudo 12. quad. 144.
Summa 628.
Semidiff. lat. 11. quad. 121.
diff. 507. pro tertio termino.

Si igitur 363. dat 484. 507. dabit 676
V. eſt 26. pro ſemiſ. later.
eſt 11. ſemidiff.

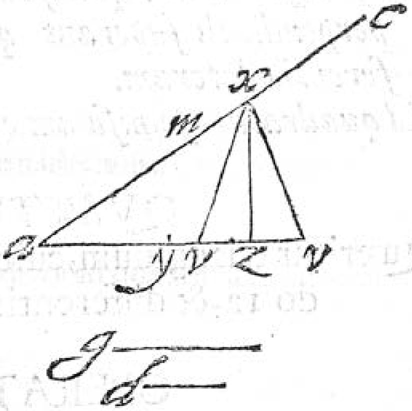
Ergo ſumma, & differ. 37. & 15 erunt latera trianguli, de quo quæritur.

PROPOSITIO XXVII.

Vide Renald. tom. 3. pag. 456. Marin. probl. 2.

Data altitudine, aggregato laterum, & differentia segmentorum baseos: triangulum constituere.

Esto triangulum, de quo quæritur axv, cuius latera $ax.xv$ datam rectam ac componant, vnde xc, & xv erunt æquales. Si altitudo xz datæ g æqualis, & divisa tota base, sive summa segmentorum baseos av bifariam in y, erit yz semidifferentia eorundem segmentorum, & æquari debebit datæ d. Bisecetur ac in m.



ANALYSIS.

Sit igitur $xz \llcorner\wedge\lrcorner g.$

Et $yz \llcorner\wedge\lrcorner d.$

Et sint $axa + xcx \llcorner\wedge\lrcorner axa + xvx.$

Per 9.2.el.& 13.Int. $2ama + 2mxm \llcorner\wedge\lrcorner 2aya + 2dd + 2gg$

Et dimidiando $ama + mxm \llcorner\wedge\lrcorner aya + dd + gg.$

Vel si fiat $\llcorner\wedge\lrcorner aya + kk.$

Et auf. $kk.$ $ama - kk + mxm \llcorner\wedge\lrcorner aya.$

Vel si fiat $ll. + mxm \llcorner\wedge\lrcorner aya.$

Sed per 14. Intr. S.P. $ama.\ \ dd.\ \ aya.\ \ mxm.$

Ergo subst. E.P. $ama.\ \ dd.\ \ ll + mxm.\ \ mxm.$

Et divid. $ama - dd.\ \ dd.\ \ ll.\ \ mxm.$

Ergo solutum.

CONS-

CONSTR. ET DEMONSTR.

Fiat quadratum *k* quadratis *d*, & *g* æquale, & quadratum *l*. æquale differentiæ, quà quadratum *am* superat quadratum *k*, & vt differentia quadratorum *am*, & *d* ad quadratum *d*, ita fiat quadratum *l* ad aliud, cuius latus sit *mx*, & nota erunt latera *ax*, & *xc*, siue *xv*. Deinde vt *d* ad *mx* ita fiat *am* ad *ay*, cuius dupla *av* erit basis quæsita, siue segmentorum summa. Constituatur triangulum *axv*, & demittatur perpendicularis *xz*. Dico ipsum triangulum iam oxygonium, iam ambligonium *axv* esse, de quo quæritur.

Sunt enim ex constr. latera *ax*, & *xv*, idest *xc* rectæ datæ *ac* æqualia, & *am* ad *d* est vt *ay* ad *mx*; sed (per 14. Intr.) est *am* ad *yz*, vt *ay* ad *mx*: æqualis igitur erit *yz*, semidifferentia segmentorum baseos, rectæ datæ *d*. Cum autem ex constr. sit differentia quadratorum *am*, & *d* ad quadratum *d*, vt quadratum *l* ad quadratum *mx*, hoc est compon. quadratum *am* ad quadratum *d*, vt quadrata *l*, & *mx* ad quadratum *mx*, & etiam ex const. sit quadratum *am* ad quadratum *d*, vt quadratum *ay* ad quadratum *mx*: erunt quadrata *l*, & *mx* quadrato *ay* æqualia; sed quadratum *l* æquale est differentiæ quà quadratum *am* superat quadratum *k*, idest quadrata *d*, & *g*: ergo additis ipsis quadratis *d*, & *g*, erunt quadrata *am*, & *mx* æqualia quadratis *ay*, *d*, & *g*, idest quadratis *ay*. *yz*, & *g*, & duplicando, erit duplum quadratorum *am*, & *mx*, idest (per 9. 2. el.) quadrat. *ax*, & *xc*, siue ex const. quadrata *ax*, & *xv*, siue (per 13. Intr.) duplum quadrator. *ay*, *yz*, & *xz* æquale duplo quadratorum *ay*. *yz*, & *g*: ergo dimid. & demptis quadratis *ay*. *yz* remanebit quadratum *xz* quadrato *g* æquale, adeoque ipsa *xz*, altitudo trianguli, rectæ datæ *g* æqualis. Triangulum igitur constituimus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

Hinc sequens patet analogia.

IN

IN OMNI TRIANGVLO.

Est differentia quadratorum semisummæ laterum, & semidifferentiæ segmentorum baseos.
Ad quadratum semidifferentiæ segmentorum baseos.
Vt differentia, quà quadratum semisummæ laterum superat quadrata semidifferentiæ segmentorum baseos, & perpendiculi.
Ad quadratum semidifferentiæ laterum.

QVÆSTIO.

Quæritur triangulum, cuius altitudo sit 20, aggregatum laterum 81, & differentia segmentorum baseos 27.

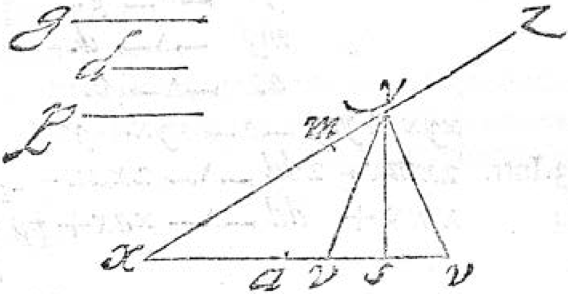
OPERATIO.

Semisumma laterum $40\frac{1}{2}$ quadr. $1640\frac{1}{4}$
Semidiff.segmentor. $13\frac{1}{2}$ quadr. $182\frac{1}{4}$ termin. secundus.
diff. 1458. termin. primus.
Semisumma laterum $40\frac{1}{2}$ quadrat. $1640\frac{1}{4}$
Semidiff.segm. $13\frac{1}{2}$ quadr. $182\frac{1}{4}$
Altitudo 20. quadr. 400.
Summa $582\frac{1}{4}$. $582\frac{1}{4}$
diff. 1058. term. tertius.
Ergo si 1458 dat $182\frac{1}{4}$. 1058 dabit $132\frac{1}{4}$
$\sqrt{}$.est $11\frac{1}{2}$.pro semidif.lat.
Est autem $40\frac{1}{2}$ semisumma.
Ergo summa, & diff. 52, & 29 erunt latera

tera trianguli quæsiti, & quoniam altitudo est data, innotescent segmenta baseos 48, & 21, quorum differentia est 27, vnde basis erit in oxygonio quidem triangulo 69, in ambligonio vero 27, quia vtrisque conveniunt data, quandoquidem in triangulo ambligonio ipsa basis differentia est segmentorum sui ipsius.

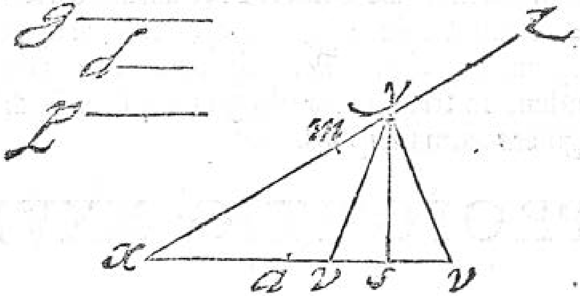
PROPOSITIO XXVIII.

Data altitudine differentia laterum, & differentia segmentorum baseos: triangulum exhibere.



Altitudo data sit *g*, semidifferentia laterum *d*, & semidifferentia segmentorum baseos sit *p*. Esto iam factum, & sit triangulum *xyv*, de quo quæritur. Sint *yv*. *yz*. æquales. Vnde si *xz*, & *xv* bisecentur in *m*, & *a*, demittaturque perpendiculum *ys*: erit *my* semidifferentia laterum, & *as* semidifferentia segmentorum baseos.

ANA-



ANALYSIS.

Sit igitur	*ys* —Λ— *g.*
Et	*my* —Λ— *d.*
Et	*as* —Λ— *p.*
Et sint	*xyx + yzy* —Λ— *xyx + yvy.*
Per 9. 2. el. & 13. Intr.	*2xmx + 2dd* —Λ— *2xax + 2pp + gg.*
Et dimidiando	*xmx + dd* —Λ— *xax + pp + gg.*
Vel si fiat	*kk.*
Et auf. *dd.*	*xmx* —Λ— *xax + kk − dd.*
Sive si fiat	*ll.*
Sive auf. *ll.*	*xmx − ll.* —Λ— *xax.*
Sed per 14. Intr. S.P.	*xmx. xax. pp. dd.*
Ergo subst. E.P.	*xmx. xmx − ll. pp. dd.*
Et convert.	*xmx. ll. pp. pp − dd.*
Ergo solutum	

CONS-

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat quadratum *k* quadratis *p*, & *g* æquale, & quadratum *l* æquale differentiæ quadratorum *k*, & *d*. Et vt differentia quadratorum *p*, & *d* ad quadratum *p* ita fiat quadratum *l* ad quadratum *mx*. Nota igitur erit *xm*, cui si addatur *my* datæ *d* æqualis, & ipsi *xm* ponatur æqualis *mz*. Innotescent latera *xy*, & *yz*, sive *xy*, & *yv*. Deinde fiat vt *p* ad *d* ita *mx* ad *xa*, cuius dupla *xv* basis erit quæsita, sive segmentorum summa. Constituatur triangulum, iam oxygonium, iam ambligonium *xyv*, & demittatur perpendicularis *ys*. Dico factum.

Est enim *my* semidifferentia laterum *xy*. *yz*. sive *xy*. *yv*, datæ *d* æqualis ex constr.

Est autem *as* semidifferentia segmentorum baseos, & (per 14. Introduct.) *xm* ad *xa* est vt *as* ad *my*, ideſt ad *d*; sed ex construct. *xm* ad *xa* est vt *p* ad *d* : æqualis igitur erit *as* datæ *p*. Et etiam quadratum *xm* ad quadratum *xa* erit vt quadratum *p* ad quadratum *d*; sed ex construct. quadratum *xm* ad quadratum *l* est. Vt quadratum *p* ad differentiam qnadratorum *p*, & *d*, sive convertendo, quadratum *xm* ad differentiam quadratorum *xm*, & *l*, vt quadratum *p* ad quadratum *d* : ergo differentia quadrator. *xm*, & *l* æqualis erit quadrato *xa*, hoc est quadratum *xm* æquale erit quadratis *xa*, & *l*, sive quadrato *xa* cum differentia quadratorum *k*, & *d*, & addito quadrato *d*, erunt quadrata *xm*, & *d*, æqualia quadratis *xa*, & *k*, sive quadratis *xa*. *p*. & *g*, & duplicando, duplum quadratorum *xm*, & *d*, ideſt *xm*, & *my*, sive (per 9.2.el.) quadrata *xy*, & *yz*, hoc est ex const. *xy*, & *yv*, sive (ex 13. Intr.) duplum quadratorum *xa*. *as*, & *ys*, ideſt *xa*. *p*, & *ys* æquale erit duplo quadratorum *xa*. *p*, & *g* : ergo dimid. & demptis quadratis *xa*, & *p* remanebit quadratum *ys* quadrato *g*, æquale, adeoque ipsa *ys* (altitudo trianguli) datæ *g* æqualis. Triangulum igitur constituimus, &c. Quod facere oportebat.

COROLLARIVM.

Hinc manifesta fit sequens analogia.

IN OMNI TRIANGVLO.

Est ut differentia quà quadratum semidifferentiæ segmentorum baseos superat quadratum semidifferentiæ laterum.
Ad ipsum quadratum semidifferentiæ segmentorum baseos.
Ita differentia , quà quadrata semidifferentiæ segmentorum, & perpendiculi superant quadratum semidifferentiæ laterum.
Ad quadratum semisummæ laterum.

QVÆSTIO.

Quæritur triangulum, cuius altitudo sit 16, differentia laterum 31 , & differentia segmentorum baseos 33.

OPE-

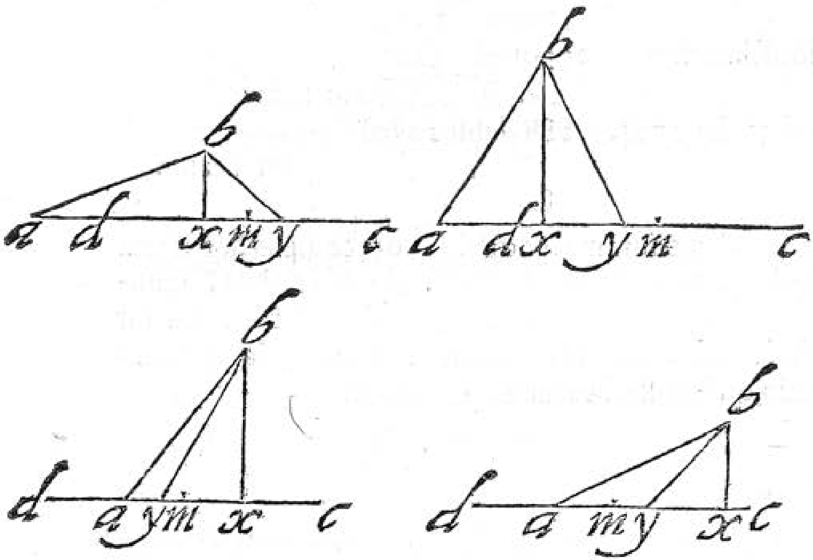
OPERATIO.

Semidiff. segmentor.	$16\frac{1}{2}$ quadr.	$272\frac{1}{4}$	termin. secundus.
Semidiff. later.	$15\frac{1}{2}$ quadr.	$240\frac{1}{4}$	
	diff.	32	termin. primus.
Semidiff. segmentor.	$16\frac{1}{2}$ quadr.	$272\frac{1}{4}$	
Altitudo	16 quadr.	256.	
	Sum.	$528\frac{1}{4}$.	
Semidiff. laterum	$15\frac{1}{2}$ quad.	$240\frac{1}{4}$	
	diff.	288.	term. tertius.
Ergo si 32 dat $272\frac{1}{4}$.	288 dabit	$2450\frac{1}{4}$	
	$\sqrt{}$. est	$49\frac{1}{2}$.	pro semis later.
	Est autem	$15\frac{1}{2}$	semidiff.

Ergo summa, & diff. 65, & 34 erunt latera trianguli quæsiti, & quoniam altitudo 16 est data, innotescent segmenta baseos 63, & 30, quorum differentia est 32. Vnde basis erit 93 in oxygonio triangulo, & 33 in ambligonio, quia ambobus data conveniunt.

PROPOSITIO XXIX.

Dato latcre,ſegmento baſeos alterno , & aggregato alterius lateris, & baſeos:triangulum conſtituere.



Eſto triangulum quæſitum *aby*, cuius latus *ab* ſit datum, ſit alti tudo *bx*,& ſegmentum alternum *xy* ſit rectæ datæ *ad* æquale, & aggregatum alterius lateris *by*,& baſeos *ay* ſit æquale datæ *ac*. Secetur *dc* bifariam in *m*.

ANALYSIS.

Sit igitur by —Λ— yc.
Et ſit xy —Λ— ad.
Ergo erit ax —Λ— dy.
Sunt autem per 12. Intr. $aba + xyx$ —Λ— $byb + axa$.
Hoc eſt $aba + ada$ —Λ— $ycy + dyd$.
Vel per 9.2.el. $2dmd + 2mym$.
Ergo bipartiendo $\frac{1}{2}aba + \frac{1}{2}ada$ —Λ— $dmd + mym$.
Sive ymy.
Ergo ſolutum.

CONST. ET DEMONST.

A dimidio quadratorum *ab. ad* auferatur quadratum *dm*, & latus reſidui ſit *my*, ſive *ym*, & fiat *xy*, ſive *yx* ipſi *ad* æqualis, & excitetur perpendicularis *xb*, donec occurrat datæ *ab* in *b*, ducaturque *by*. Dico triangula *aby* eſſe quæſita.

Cum enim ex conſtr. dimidium quadratorum *ab. ad* æquale ſit quadratis *dm*, & *my*: erunt, duplicando, quadrata *ab. ad*, ideſt ex conſtr. *ab. xy*, ſive (ex 12. Intr.) quadrata *by. ax*, ſive (quia *ax*, & *dy* ſunt æquales, ob æquales *ad. xy*) quadrata *by. dy* æqualia duplo quadrator. *dm. my*, hoc eſt (per 2. el.) quadratis *yc. dy*: ergo dempto quadrato *dy*, erit quadratum *by* quadrato *yc* æquale, adeoque ipſa *by* ipſi *yc* æqualis, ac proinde baſis *ay*, & latus *by*, ideſt *yc* rectam datam *ac* component. Triangula igitur conſtituimus *aby*, &c. Quod erat faciendum.

SCHO-

SCHOLION.

Perſpicuum eſt tam in oxygonio, quam in ambligonio triangulo duas accipere problema ſolutiones, propterea, quod punctum *y* tam ante, quam poſt punctum *m* conſtitui poſſit, & *my* ſive *ym* ſemper ſemidifferentia ſit ſegmentorum *dy*, & *yc*, quorum ſemiſumma eſt *dm*.

QVÆSTIO.

Quæritur triangulum, cuius vnum latus ſit 15, ſegmentum baſis alternum 5, & aggregatum alterius lateris, & baſeos 27.

OPERATIO.

Latus datum	15.	quadratum	225
Segmentum datum	5.	quadratum	25
		Summa	250
		Semiſsis	125.
Aggregat. datum	27.		
Sement. datum.	5		
Diff.	22.		
Semiſsis	11.	quadratum	121.
		Diff.	4
		√. eſt	2
		Prædicta ſemiſsis	11
		Summa, & diff.	13. & 9.

pro altero latero latere, & reliquo ſegmento baſeos indiſtinctè.

Si

Si igitur accipiatur 13 pro altero latere, & 9 pro reliquo ſegmento: triangulum conſtituetur, cuius latera erunt 15, & 13, & baſis 14, diviſa quidem in ſegmenta 9, & 5, vnde altitudo erit 12. Si verò accipiatur 9 pro altero latere, & 13. pro reliquo ſegmento: triangulum efficietur, cuius latera erunt 15, & 9, baſis autem 18, diviſa in ſegmenta 13, & 5, vnde altitudo erit √.56. Et vtrumque triangulum ſatisfacit quæſito.

ALIA QVÆSTIO.

Quæritur triangulum, cuius vnum latus ſit 15 ſegmentum alternum 5, & aggregatum alterius lateris, & baſeos 17.

OPERATIO.

Latus datum 15. quadratum 225.
Segment. datum 5. quadratum 25
Summa 250
Dimidium 125

Aggreg. datum 17
Segment. datum 5
Summa 22.
Dimidium 11. quadratum 121
Differ. 4
√. eſt 2
prædictum dim. 11

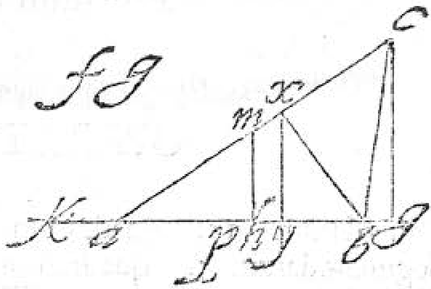
Summa, & diff. 13, & 9 pro altero latere, & reliquo ſegmento. Itaque ſi aſſumantur 13 pro latere, & 9 pro ſegmento, triangulum ambligonium conſtituetur, cuius latera erunt 15, & 13, baſis vero 4. differentia ſeg-

segmentorum sui ipsius 9, & 5, vnde altitudo erit 12. Si assumantur 9 pro latere, & 13 pro segmento, triangulum etiam ambligonium efformabitur, cuius latera 15, & 9, basis autem 8, differentia segmentorum sui ipsius 13, & 5, & altitudo erit $\sqrt{.65}$.

PROPOSITIO XXX.

Data base, aggregato laterum, & ratione inter latus alterum, & perpendiculum: triangulum invenire.

Sit triangulum quæsitum *axb*, in quo basis *ab* sit data, aggregatum laterum *ax*. *xb* sit data *ac*, & ratio lateris *ax* ad perpendiculum *xy* sit vt *f* ad *g*.



ANALYSIS, CONSTR. & DEMONST.

Perspicuum est si fiat vt *f* ad *g* ita *ac* ad *cg*, & constituatur triangulum rectangulum *acg*, à cuius base *ag* abscindatur *ab*, iunctaque *cb*, fiat angulus *cbx* angulo *acb* æqualis: triangulum *axb* esse, de quo quæritur, cum latus *xb* æquale sit ipsi *xc*, & demissa perpendiculari *xy*, sit *ax* ad *xy*, vt *ac* ad *cg*, idest vt *f* ad *g*. Quod facere oportebat.

A L I T E R.

Quoniam autem propositum problema positione, non tamen

tamen longitudine solutum est; placet propterea aliam analysim instituere, vnde quanta sit *ax*, aut *xb* scire possimus.

Bisecentur *ac*, & *ab* in *m*, & *p*, & demittatur *mh* perpendicularis ad *ab*.

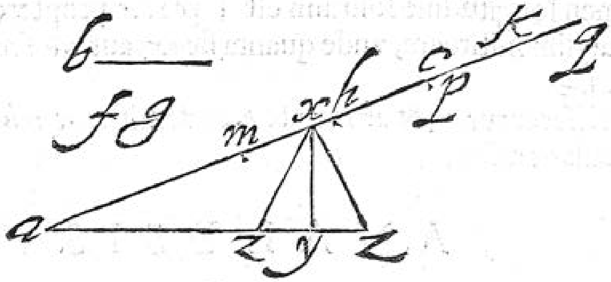
ANALYSIS.

Erunt igit. prop.	*ax.*	*ay.*	*am.*	*ah.*
Et vt diff. ita 1. ad 1.	*mx.*	*hy.*	*am.*	*ah.*
Sed per 14. Intr. S.P.	*am.*	*ap.*	*py.*	*mx.*
Vel si fiat	*kh.*	*am.*		
Ergo ex æquo E. P.	*kh.*	*py.*	*ah.*	*hy.*
Et vt 1. ad 1. ita diff.	*kh.*	*py.*	*ka.*	*ph.*

Ergo longitudine nota erit *py* semidifferentia segmentorum baseos. Vnde reliquæ partes trianguli longitudine etiam innotescent, & simul constr. & demonstr.

PROPOSIT. XXXI.

Data altitudine, aggregato laterum, & ratione segmentorum baseos: triangulum invenire.



Esto *axz* triangulum, de quo quæritur, cuius latera *ax*. *xz* datam *ac* componant, altitudo verò *xy* æqualis sit datæ *b*, & segmenta baseos *ay*. *yz* rationem obtineant datam vt *f* ad *g*.

Secetur bifariam *ac* in *m*, ponanturque *hc*, & *ck* datæ *b*, ideſt *xy*, æquales.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ay*.	*yz*.	*f*.	*g*.	
Et quadrando	*aya*.	*yzy*.	*ff*.	*gg*.	
Et divid.	*aya—yzy*.	*yzy*.	*ff—gg*.	*gg*.	
Hoc eſt per 11. Intr.	*axa—xcx*				
Sive per 7. Introd.	*ac:2mx*.	*yzy*.	*ff—gg*.	*gg*.	
Vel per 47.1.el.	*ac:2mx*.	*xcx—hch*.	*ff—gg*.	*gg*.	
Vel si fiat				*ac*.	*hp*.
Vel per 1.6.el.				*ac:2mx*.	*hp:2mx*.
Ergo per 14.5.el.		*xcx—hch* —Λ— *hp:2mx*.			
Sive per 7. Introd.		*kxh*.			
Ergo E.P.	*hp*.	*xh*.	*xk*.	*2mx*.	
Et dimid. & duplic.	*hq*.	*xh*.	*xk*.	*mx*.	
Et convert.	*hq*.	*xq*.	*xk*.	*mk*.	
Ergo solutum.					

CONS-

CONSTR. ET DEMONSTR.

Dividatur *ac* bifariam in *m*, & ponantur *hc*, & *ck* datæ *b* æquales. Fiat deinde vt differentia quadratorum *f*, & *g* ad quadratum *g*, ita *ac* ad *hp*, quæ duplicetur in *q*, & ipsis *hq*, & *mk* reciprocæ inveniantur *xq*, & *xk*, quarum differentia sit *kq*. Et nota erunt latera *ax*, & *xc*. Rectis autem *ax*, & *xy*, quæ datæ *b*, siue *hc*, aut *ck*, sit æqualis, triangulum rectangulum fiat *axy*, & ducatur *xz* ipsi *xc* æqualis, secans *ay* in punctis *z*. *z*. Dico triangulum *axz* iam ambligonium, iam oxygonium esse, de quo quæritur.

Sunt enim ex constr. latera *ax*.*xz* datæ *ac* æqualia, & altitudo *xy* æqualis datæ *b*, itaque solum restat ostendere segmenta baseos *ay*.*yz* esse in ratione data vt *f* ad *g*.

Quoniam igitur ex constr. est *hq* ad *xq*, vt *xk* ad *mk*, & convert. *hq* ad *xh*, vt *xk* ad *mx*, & dimidiando, & duplicando *hp* ad *xh*, vt *xk* ad 2*mx*: erit rectangulum *kxh*, sub medijs, ideſt differentia quadratorum *xc*, & *hc*, siue *xz*, & *xy*, hoc est quadratum *yz* æquale rectangulo sub extremis *hp*, & 2*mx*. Vnde rectangulum sub *ac*, & 2*mx*, videlicet differentia quadratorum *ax*. *xc*, ideſt *ax*. *xz*, siue (per 11. Intr.) differentia quadratorum *ay*. *yz* ad rectangulum sub *hp*, & 2*mx*, ideſt ad quadratum *yz*, erit vt *ac* ad *hp*, siue ex constr. vt differentia quadratorum *f*, & *g* ad quadratum *g*. Igitur compon. erit quadratum *ay* ad quadratum *yz*, vt quadratum *f* ad quadratum *g*, adeoque *ay* ad *yz*. vt *f* ad *g*. Quod facere oportebat.

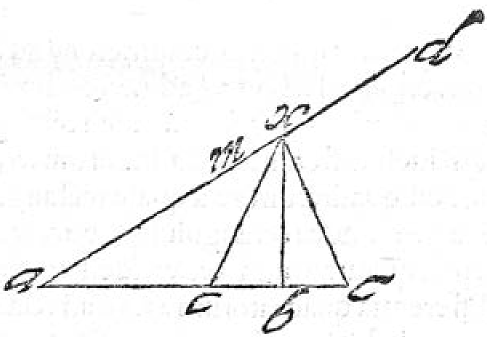
PROPOSITIO XXXII.

Vide Renald. pa. 331. tom. 3.

Data baſe, aggregato laterum, & ratione ſegmentorum baſeos triangulum exhibere.

Dare baſim, & ſegmentorum rationem, perinde eſt, ac ſi ipſa ſegmenta dentur, nam ſi fuerit data baſis *ac*, & ratio ſegmentorum vt *s* ad *r*: fiat vt *s* ad *r* ita *ab* ad *bc*, & ſegmenta erunt *ab*, & *bc*.

Sint igitur ſegmenta baſeos *ab*, & *bc*, atque aggregatum laterum data *ad*: opottet triangulum invenire.



Eſto iam factum & trianguli quæſiti *axc* latus *xc* æquale ſit ipſi *xd*. Biſecetur *ad* in *m*, vt 2*mx* differentia ſit ipſarum *ax*, & *xd*, adeoque rectangulum ſub *ad*, & 2*mx* æquale differentiæ quadratorum *ax*, & *xd*, videlicet ſub aggregato, & differentia laterum.

Prop. 7. Introd.

ANALYSIS.

Sit igit.	$xc = xd$.
Sed per 11. Introd.	$axa - xcx = aba - bcb$.
Hoc eſt	$axa - xdx$.
Vel per 6. Introd.	$ad{:}2mx = aba - bcb$.
Ergo ſolutum.	

CO. NS-

CONSTR. & DEMONST.

Differentia quadratorum *ab*, & *bc* applicetur ad rectam datam *ad*, & latitudinis provenientis dimidia ſit *mx*. Itaque rectangulum ſub *ad*, & 2*mx* æquabitur differentiæ quadratorum *ab*, & *bc*. Erigatur perpendicularis *bx* donec occurrat ipſi *ax* iam longitudine determinatæ, in *x*, ducaturque *xc*.

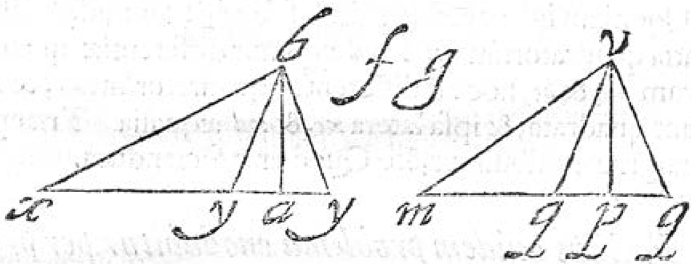
Quoniam igitur rectangulum ſub *ad*, & 2*mx*, ideſt differentia quadratorum *ax*, & *xd* æquatur differentiæ quadratorum *ab*, & *bc*, hoc eſt differentiæ quadratorum *ax*, & *xc*: erunt quadrata, & ipſa latera *xc*, & *xd* æqualia. Triangulum igitur exhibuimus, &c. Quod erat faciendum.

Facilius quidem problema enodabitur per prop. 16. Introd. Si enim fiat vt ſumma laterum ad ſummam ſegmentorum baſeos, ita ipſorum differentia ad differentiam laterum ſolutum erit. Et id ipſum etiam obtineri poterit ſi vltima æquatio in proportionales diſſolvatur.

PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

Data altitudine, ratione laterum , & ratione segmentorum baseos: triangulum invenire.



Esto triangulum *xby*, de quo quæritur , cuius altitudo *ab* sit data, ratio autem laterum *xb. by* sit data vt *f* ad *g*, ratio vero segmentorum baseos *xa. ay* sit vt *mp* ad *pq*.

Super *mq* triangulum concipiatur *mvq* simile quæsito *xby*, & quoniam in *xby* sola pars patet *ab*, in *mvq* verò partes noscuntur *mp. pq*. Facilius propterea erit quærere *mvq*, quam *xby*.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*mv.*	*vq.*	*f.*	*g.*
Et quadr.	*mvm.*	*vqv.*	*ff.*	*gg.*
Et divid.	*mvm—vqv.*	*vqv.*	*ff—gg.*	*gg*
Idest per 11. Introd.	*mpm—pqp.*			
Ergo solutum.				

CONS-

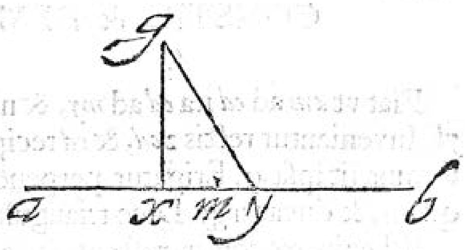
CONST. ET DEMONST.

Fiat vt differentia quadratorum *f*, & *g* ad quadratum *g* ita differentia quadratorum *mp*, & *pq* ad quadratum aliud, cuius latus sit *qv*, & ex puncto *q* occurrat ipsa *qv* perpendiculari, quæ ex *p* erigatur, in *v*, & iungatur *mv*. Denique triangulo *mvq* ad perpendicularem *ab* simile fiat triangulum *xby*. Dico ipsum esse, de quo quæritur.

Cum enim ex constr. differentia quadratorum *mp*. & *pq*, idest differentia quadratorum *mv*, & *vq* ad quadratum *vq* sit vt differentia quadratorum *f*, & *g* ad quadratum *g*: erit compon. quadratum *mv* ad *vq* quadratum, vt quadratum *f*, ad quadratum *g*, adeoque *mv* ad *vq*, vt *f* ad *g*. Est autem triangulum *xby* ex constr. simile triangulo *mvq*: ergo *xb* ad *by* erit vt *f* ad *g*, & *xa* ad *ay*, vt *mp* ad *pq*. Triangulum igitur tam oxygonium, quam ambligonium *xby* constituimus, &c. quod facere oportebat.

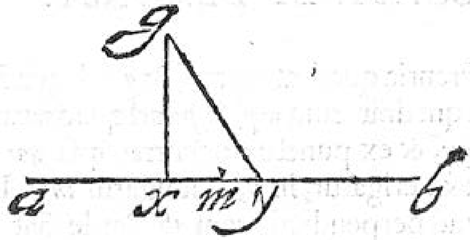
PROPOSIT. XXXIV.

Ex data recta triangulum rectangulum constituere dato plano æquale.



Sit data *ab* dividenda in *x*, & *y*, ita vt triangulum rectangulum lateribus constitutum *ax*. *xy*, & hypothenusa *yb* æquale sit quadrato dato *cd*. Bisecetur *ab* in *m*.

ANA-



ANALYSIS.

Sit igit.	½*axy* —Λ— *cdc*
Et quadruplic.	2*axy* —Λ— 4*cdc*.
Sint etiam	*axa* + *xyx* —Λ— *yby*.
Ergo	*axa* + *xyx* + 2*axy* —Λ— *yby* + 4*cdc*.
Vel per 4.2.el.	*aya*.
Ergo auf. *yby* erit	*aya* — *yby* —Λ— 4*cdc*.
Sive per 7.Intr.	2*ab*:*my*.
Et bipart.	*ab*: *my* —Λ— 2*cdc*.
Ergo E. P.	*ab*. 2*cd*. *cd*. *my*.
Sive	*am*. *cd*.
Ergo ſolutum.	

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt *am* ad *cd* ita *cd* ad *my*, & nota erunt ſegmenta *ay*. *yb*. Inveniantur rectis 2*cd*, & *cd* reciprocæ *ax*. *xy*, quarum ſumma ſit ipſa *ay*. Erigatur perpendicularis *xg* ipſi *ax* æqualis, & ducatur *gy*. Dico triangulum *gxy* eſſe quæſitum.

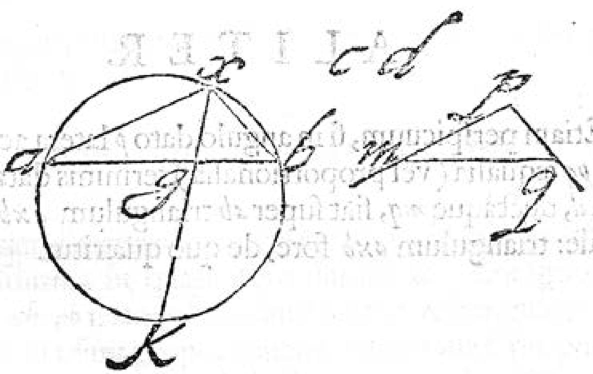
Eſt enim ex conſtr. rectangulum *axy*, ideſt ſub *xg*, & *xy*. duplo quadrato *cd* æquale, quare triangulum rectangulum *gxy* æquale erit dato quadrato *cd*. Eſt etiam eſt conſtr. *am*.

ad *cd*, sive *ab* ad 2*cd*, vt *cd* ad *my*, quare rectangulum sub *ab*, & *my* æquale erit duplo quadrat. *cd*, hoc est ex const. rectangulo *axy*, & duplicando, duplum rectangulum sub *ab*, & *my*, idest differentia quadratorum *ay*, & *yb* æqualis erit duplo rectangulo *axy*. Ergo addito quadrato *yb* erit quadratum *ay*, hoc est erunt quadrata *ax*, & *xy* cum duplo rectangulo *axy* æqualia quadrato *yb* cum duplo rectangulo *axy*, quo vtrimque dempto, remanebunt quadrata *ax*. *xy*, idest *xg*. *xy*, sive quadratum *gy*, quadrato *yb* æquale, adeoque ipsa *gy* ipsi *yb* æqualis. Ex recta igitur *ab* triangulum rectangulum constituimus, &c. Quod erat faciendum.

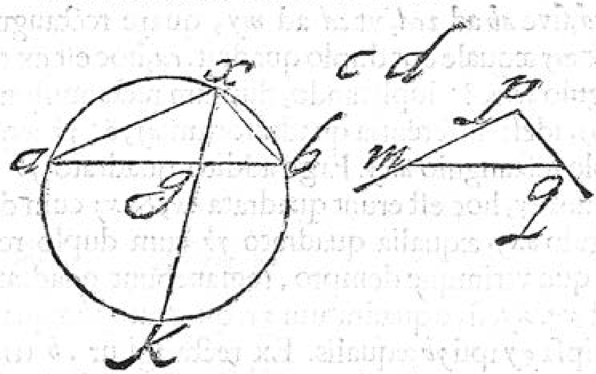
PROPOSITIO XXXV.

Data portione circuli *ab* in recta *ab* inflectere *ax*. *xb* in ratione data. Vide Pappũ lib. 7. propos. 155. Renald. tom. 3. pa. 315.

Hoc idem est ac dicere: Data base, angulo verticis, & ratione laterum triangulum invenire.



Sit data portio circuli *axb*, & oporteat rectas inflectere *ax*. *xb*, in ratione data *c* ad *d*.



Hoc est data base *ab*, angulo verticis *axb*, seu *p*, & ratione laterum *ax.xb*, vt *c* ad *d*, triangulum invenire.

ANALYSIS, CONSTR. & DEMONST.

Perspicuum est, si compleatur circulus, dividanturque circumferentia quidem *ab* bifariam in *k*, recta autem *ab* in *g*, in data ratione: rectam *kgx* divisuram esse angulum *axb* bifariam, ac proinde rectas *ax.xb* fore in ratione data *ag.gb*, idest *c* ad *d*.

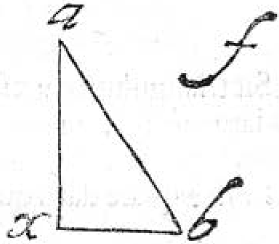
ALITER.

Etiam perspicuum, si in angulo dato *p* latera accipiantur *pm.pq* æqualia (vel proportionalia) terminis datæ rationis *c* ad *d*, ductàque *mq*, fiat super *ab* triangulum *axb* ipsi *mpq* simile: triangulum *axb* fore, de quo quæritur.

PROPOSIT. XXXVI.

Data base trianguli rectanguli, datoque rectangulo sub lateribus: triangulum invenire.

Sit triangulum, de quo quæritur *axb*, cuius basis *ab* sit data, & sit rectangulum sub lateribus *axb* æquale dato quadrato *f*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax.*	*f.*	*f.*	*xb.*
Et quadrando	*axa.*	*ff.*	*ff.*	*xbx.*

Ergo solutum, cum pateat aggregatum extremorum quadratum esse *ab*.

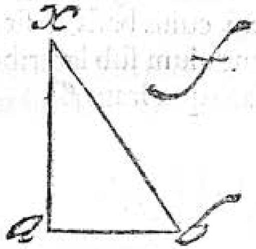
CONSTR. & DEMONSTR.

Quadrato *f* reciproca inveniantur quadrata *ax*, & *xb*, quorum summa sit quadratum datum *ab*. Erit igitur ex rectis *ax. xb. ab* triangulum constitutum rectangulum, & quia quadrata sunt proportionalia, etiam latera proportionalia erunt, videlicet *ax. f. f. xb*, & rectangulum sub *ax. xb* dato quadrato *f* erit æquale. Quod faciendum erat. *Prop. 2. Introd.*

PROPOSITIO XXXVII.

Dato trianguli rectanguli vno laterum circa rectum, datoque rectangulo sub reliquo, & hypothenusa: triangulum exhibere.

Sit triangulum quæsitum *axb*, cuius latus *ab* sit datum, & rectangulum sub reliquo latere *ax*, & hypothenusa *bx* sit æquale dato quadrato *f*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax.*	*f.*	*f.*	*bx.*
Et quadrando	*axa.*	*ff.*	*ff.*	*bxb.*

Ergo solutum. Patet enim differentiam extremorum quadratum esse *ab*.

CONSTR. ET DEMONSTR.

Quadrato dato *f* reciproca inueniantur quadrata *ax. bx*, quorum differentia sit quadratum datum *ab*. Itaque factum erit triangulum rectangulum *axb*, & quoniam quadrata *ax. f. f. bx* sunt proportionalia, etiam latera proportionalia erunt, & rectangulum sub *ax*, & *bx*, quadrato *f* erit æquale. Quod faciendum erat.

ANA-

ANALYSIS GEOMETRICA,

LIB. IV.

AGENS DE CONDITIONIBVS PROBLEMATVM.

INSTRVCTIO.

Conditiones in quocumque problemate dicuntur connexiones illæ, quas inter ſe obtinere debent datæ, & quæſitæ magnitudines.

Conditiones autem, vel inter ſe ſunt convenientes, vel communes, vel repugnantes. Convenientes quidem dicuntur quando determinatis magnitudinibus ſolum conveniunt. Communes verò quando quibuſcumque, vel ſaltem pluribus magnitudinibus aptantur. Repugnantes tandem quando ſibi adverſantur, & nullis magnitudinibus conformantur.

Hinc problema ſecundum præſcriptas conditiones determinatum, diminutum, impoſsibile,

bile,

bile,& abundans dicitur. Determinatum problema eſt quando tot præſcribuntur convenientes conditiones, quot magnitudines incognitæ poſtulantur. Diminutum verò cum plures magnitudines incognitæ depoſcuntur, quam conditiones præbentur, vel ſi totidem dantur, ſunt aliquæ inter ſe communes. Impoſsibile autem, quando propoſitæ conditiones inter ſe repugnant, & nullis magnitudinibus applicari poſſunt. Abundans tandem quando plures conditiones ſtatuuntur, quam incognitæ magnitudines deſiderantur.

Porro conditiones interdum explicitæ, interdum implicitæ proponuntar. Itaque non abs re erit, ſi Analyſta, prius quam reſolutionem aggrediatur, conditiones perpendat,& naturam problematis cognoſcat,vt, ſi completum ſit,determinatas quærat magnitudines; ſi vero diminutum, terminos, vel ordinem omnium reſolutionum poſsibilium exhibeat; ſi autem impoſsibile repugnantiam conditionum oſtendat; & ſi tandem abundans fuerit problema,ſuperfluas, & ineptas reijciat conditiones.

Huc vſque de problematibus completis egimus, de diminutis, & impoſsibilibus nunc reſtat agendum.

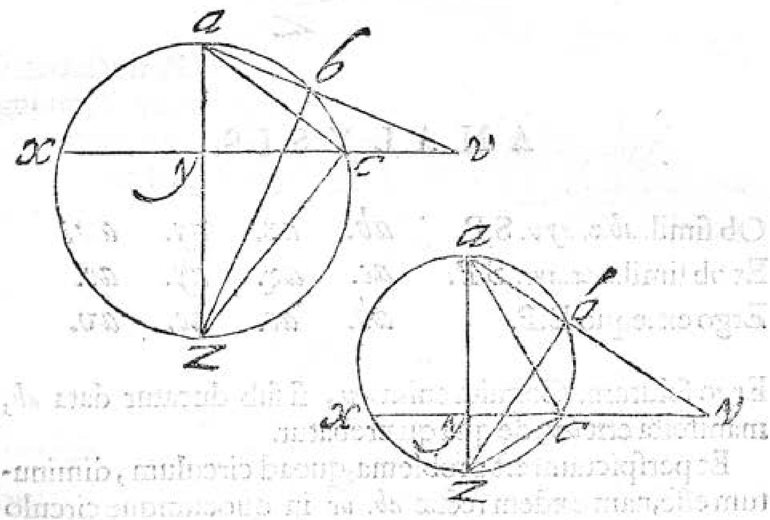
PRO-

PROPOSITIO I.

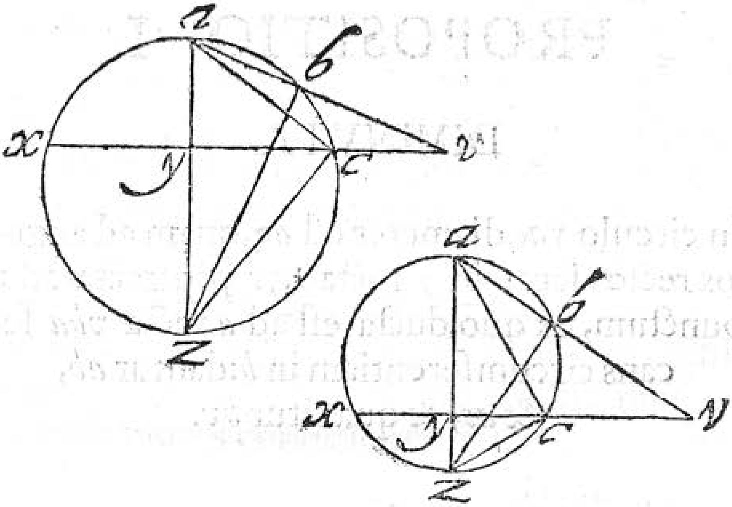
DIMINUTA.

In circulo *xac* diameter est *az*, quam ad angulos rectos secat in *y* recta *xyc* protracta ad *v* punctum, ex quo ducta est ad *a* recta *vba* secans circumferentiam in *b*: dantur *ab*, & *ac*, & quæritur *bv*.

Vide Schoot. ad Cartesium. pa. 155.



Ducantur *bz*, & *cz*, & erunt triangula *abz*. *ayv* inter se, & *acz*, *ayc* inter se similia. Unde patet.



ANALYSIS.

Ob simil. *abz. ayv.* S.P.	*ab.*	*az.*	*ay.*	*av.*
Et ob simil. *acz. ayc.* S.P.	*ac.*	*az.*	*ay.*	*ac.*
Ergo ex æquo E.P.	*ab.*	*ac.*	*ac.*	*av.*

Ergo solutum. Cognita enim *av*, si sub ducatur data *ab*, manifesta erit *bv*, de qua quærebatur.

Et perspicuum est problema, quoad circulum, diminutum esse, nam eædem rectæ *ab. bc* in quocumque circulo aptatæ cuius diameter sit ipsa *ac* maior eamdem *bv* semper exhibebunt.

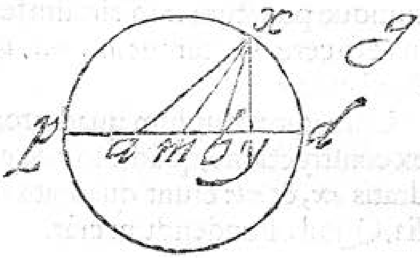
PRO-

PROPOSITIO II.

DIMINVTA.

Datis duobus punctis *a*, & *b* duas rectas inflectere *ax*. *xb*, quarum quadrata sint quadrato dato *g* æqualia.

Quod idem est ac dicere: Data base *ab*, & aggregato quadratorum laterum triangulum exhibere.



Esto factum, & sit triangulum, de quo quæritur *axb*, cuius altitudo *xy*. Bisecetur data *ab* in *m*, & ducatur *mx*.

ANALYSIS.

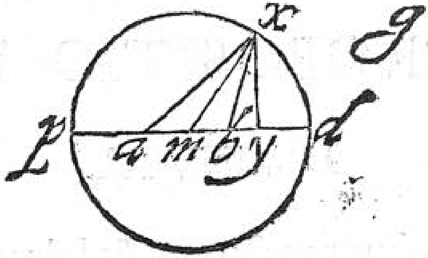
Sint igit. $axa + xbx$ —Λ— gg.

Sed per 13. Introd. $axa + xbx$ —Λ— $2ama + 2mxm$

Ergo gg. —Λ— $2ama + 2mxm$

Uel si auferat. $2ama$ $gg - 2ama$ —Λ— $2mxm$.

Ergo solutum, & cum *mx* sit longitudine, & non positione nota, patet ipsam, semidiametrum posse fieri circuli, cuius circumferentia sit locus puncti quæsiti *x*.



CONSTR. & DEMONSTR.

A quadrato dato *g* duplum quadrati *am* auferatur , & quadrati residui accipiatur dimidium, cuius latus sit *mx*. Intervallo autem *mx* circulus describatur *pxd*. Dico quodcumque punctum *x* in circumferentia acceptum problema efficere. Ducantur *ax*. *mx*. *bx*, & demittatur perpendicularis *xy*.

Cum igitur duplum quadratorum *am*, & *mx* æquale sit, ex constructione, quadrato *g*, & ex 13. Introductionis, quadratis *ax*, & *xb*: erunt quadrata *ax*, & *xb* quadrato *g* æqualia. Quod ostendendum erat.

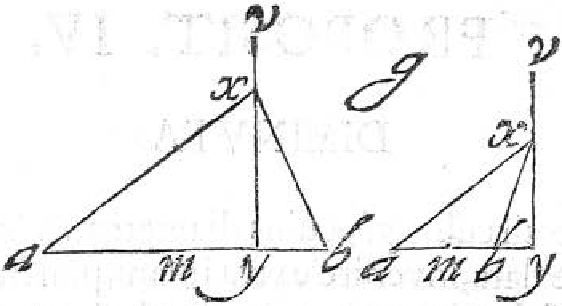
PROPOSIT. III.

DIMINVTA.

Datis duobus punctis *a* , & *b* duas rectas inflectete *ax*. *bx*, quarum quadrata dato quadrato *g* differant.

Quod idem est ac dicere: Data base *ab*, & differentia quadratorum laterum triangulum exhibere.

Esto



Esto iam factum, & sit triangulum axb, de quo quæritur. Demittatur perpendicularis xy, & secetur ab bifariam in m.

ANALYSIS.

Sit igitur $axa - xbx$ —Δ— gg.
Sed per 11. Introd. $axa - xbx$ —Δ— $ab{:}2my$.
Ergo $ab{:}2my$ —Δ— gg.

Ergo solutum, & cum my positione, & longitudine nota sit, erit perpendicularis ex puncto y in infinitum erecta, locus puncti quæsiti x.

CONSTR. ET DEMONSTR.

Bisecetur ab in m, & ad eamdem ab applicetur quadratum g, sitque latitudo proveniens dupla my, hoc est fiat vt ab ad g, ita g ad aliam, cuius dimidium sit my, itaque rectangulum sub ab, & dupla my quadrato g erit æquale. Ex y autem indefinita erigatur perpendicularis yv. Dico quodcumque punctum x in recta yv assumptum problema efficere. Ducantur ax. xb.

Cum enim rectangulum sub ab, & dupla my æquale sit, ex constr. quadrato g, & ex 11. Introductionis, differentiæ quadratorum ax, & xb, erit ipsa differentia quadrato g æqualis. Quod erat ostendendum.

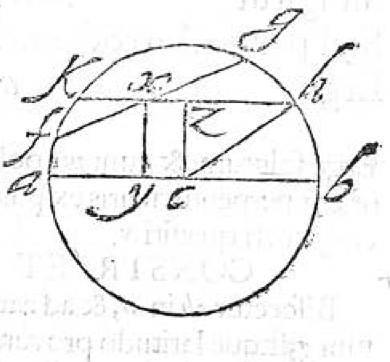
PROPOSIT. IV.

DIMINVTA.

Vide Schootẽ ad Cartesium to. 1. pa. 230.

Dato circulo *agb*, cuius diameter *ab* ſit poſitione data, invenire extra ipſam, punctum *x*, à quo ſi demittatur perpendicularis *xy*, & per idem punctum agatur quædam *fg*, vtrimque à circumferentia terminata, vt rectangulum *fxg* vna cum quadrato *xy* ſit æquale rectangulo *ayb*.

Sit igitur *x* punctum, de quo quæritur, & per illud, ducatur *kh*, ipſi *ab* parallela, erigatur ex centro *c* perpendicularis *cz*, & iungatur *ch*. Vnde quoniam *xy*, & *zc* inter ſe, nec non *xz*. *yc* inter ſe ſunt æquales, & rectangulum *kxh* æquatur cuicumque *fxg*: facile inſtituetur analyſis.



ANALYSIS.

Sit igitur $kxh + czc = ayb.$

Sed $xzx = ycy.$

Ergo erit $xzx + kxh + czc = ayb + ycy.$

Ideſt per 5.2.el. $zhz + czc = aca.$

Ideſt per 47.1. $chc.$

Ergo

Ergo solutum, & quoniam semidiametri $ch.ac$ semper sunt æquales, patet problema esse diminutum, & punctu m x vbicumque extra diametrum ab assumi posse.

CONSTR. & DEMONSTR.

Accipiatur quodcumque punctum x extra ab, & per illud quælibet ducatur fxg, demitaturque perpendicularis xy. Dico rectangulum fxg cum quadrato xy æquari rectangulo ayb.

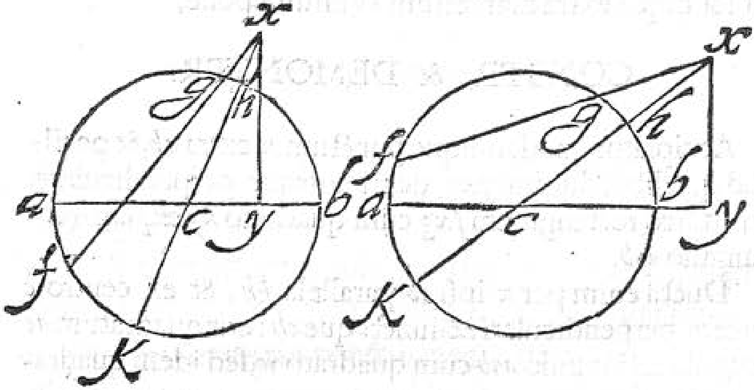
Ductâ enim per x ipsi ab parallela kh, & ex centro c erecta perpendiculari cz; iunctaque ch: erit quadratum ac æquale rectangulo ayb cum quadrato yc; sed idem quadratum ac, idest ch æquale est quadrato cz cum quadrato zh, idest cum quadrato xz. & rectangulo kxb: igitur quadratum cz cum quadrato xz, & rectangulo kxb æquale erit rectangulo ayb cum quadrato yc, & si demantur quadrata æqualia $xz.yc$. remanebit quadratum cz, idest xy cum rectangulo kxh, idest cum quolibet fxg per x, æquale rectangulo ayb. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum fit problema quodvis diminutum esse, quando, evolutis conditionibus, vna pars æquationis alteri emergit omnino æqualis, hoc est quando in vtraque parte æquationis eadem, vel eædem magnitudines existunt. Et eodem modo quando æqualitas non dependet à constructione facienda; sed constat aliunde.

SCHO-

SCHOLION.



Cum punctum x intra circulum quærebatur æquatio erat $fxg + xyx -\!\!\wedge\!\!- ayb$. At verò si extra quærendum sit, erit æquatio in fig. 1. $fxg + ayb -\!\!\wedge\!\!- xyx$. In fig. 2. $fxg -\!\!\wedge\!\!- ayb + xyx$.

IN FIG. 1.

Sint ig. $fxg + ayb -\!\!\wedge\!\!- xyx$.

Ideſt kxh

Add. cyc erunt $kxh + ayb + cyc -\!\!\wedge\!\!- xyx + cyc$.

Ideſt per 5.2.el. $kxh + aca$

Vel per 6.2.el. cxc.

IN FIG. 2.

Sit igitur $kxh -\!\!\wedge\!\!- ayb + xyx$.

Sed $kck -\!\!\wedge\!\!- aca$.

Ergo $kxh + kck -\!\!\wedge\!\!- ayb + aca + xyx$.

Ideſt per 6.2. el. $cxc -\!\!\wedge\!\!- cyc + xyx$.

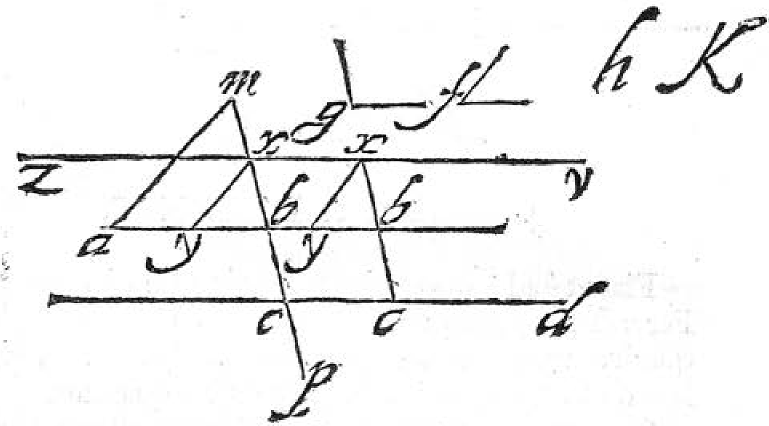
Ergo ſolutum, & patet punctum x vbicumque extra circulum ſumi poſſe, cum ſemper per 47.1.elem.quadratum cx æquale ſit quadratis cy, & xy.

PRO-

PROPOSITIO V.
DIMINVTA.

Datis positione duabus rectis lineis parallelis *ab*, & *cd*, punctum extra ipsas invenire vt *x*, à quo si in datis angulis *f*, & *g* duæ ducantur rectæ lineæ *xy*. *xc*, ipsæ inter se habeant rationem datam vt *h* ad *k*.

Vide Schootē ad Cartesium to. 1. pa. 226.



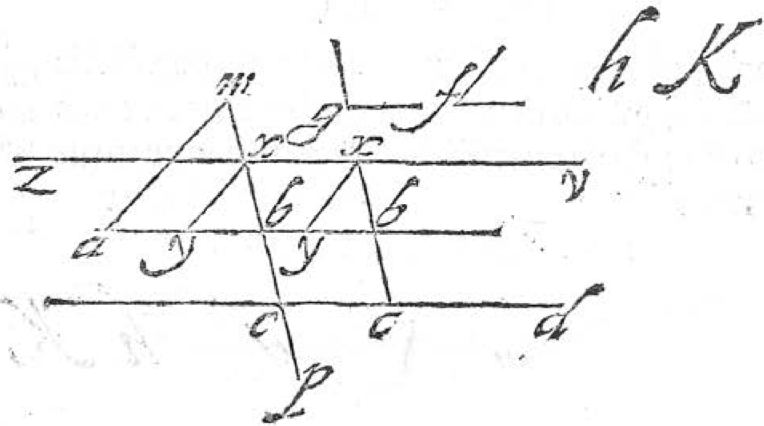
Fiant anguli, *abc* ipsi *g*, & *bam* ipsi *f*, æquales, quibus etiam æquales debent esse anguli *ybc*, & *byx*, quare similia erunt triangula *bam*, & *byx*.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*xy*.	*xc*.	*h*.	*k*.
Vel si fiat			*am*.	*mp*.
Sed ob similit. S. P.	*xy*.	*xb*.	*am*.	*mb*.
Ergo ex æqual. E. P.	*xc*.	*mp*.	*xb*.	*mb*.
Et vt 1. ad 1. ita diff.	*xc*.	*mp*.	*bc*.	*bp*.

Ergo

Ergo solutum, & patet ptoblema esse diminutum, propterea quod *ab*, & *cd* indeterminatæ proponantur.

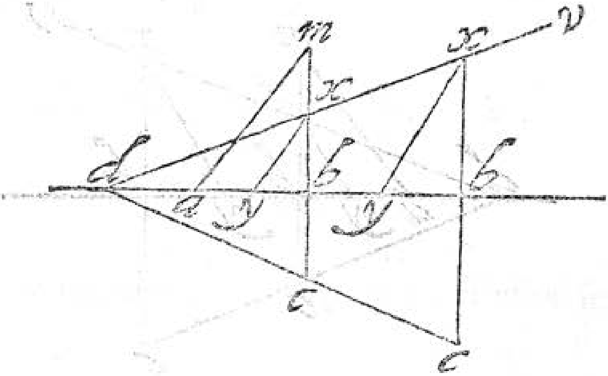


CONSTR. & DEMONST.

Fiat vt *h* ad *k* ita *am* ad *mp*, & vt *bp* ad *bc*, ita *mp* ad *xc*. Per *x* ducatur recta *zv* ipsi *ab* parallela. Dico si in recta *zv* quodcumque assumatur punctum *x*, & ipsis *am*. *bc* parallelæ ducantur *xy*. *xc* ipsas esse, de quibus quæritur.

Cum enim sit *xc* ad *mp*, vt *bc* ad *bp* ex construct. & *xc* ad *mp*, vt *xb* ad *mb* (quia vt vnus ad vnum ita sunt differentiæ) sed ob similitudinem *bam*. *byx* est *xy* ad *xb*, vt *am* ad *mb*: ergo ex æqualitate erit *xy* ad *am* vt *xc* ad *mp* (communis ratio *xb*. *mb*) & altern. *xy* ad *xc*, vt *am* ad *mp*, ideft vt *h* ad *k*. Quod erat

SCHO-

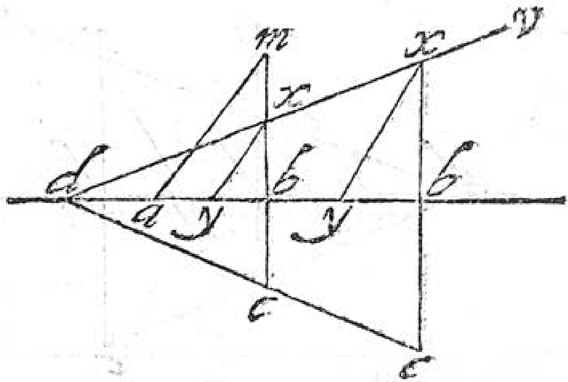


SCHOLION

Eodem prorſus modo erit procedendum ſi rectæ datæ *ab. cd* non iam parallelæ, ſed concurrentes in *d* proponantur.

Nam factis angulis *abc. bam* datis æqualibus, erunt triangula *bam. byx* ſimilia, & invento ſemel ex præcedente analyſi puncto *x*, ſi per illud ex puncto concurſus *d* ducatur indefinita *dv*, erit ipſa locus quæſitus, nam quodcumque punctum in ea acceptum *x*, ductis *xy. xc* ipſis *am. bc* parallelis, problema efficiet, & vt antea demonſtrabitur.

Præterea perſpicuum eſt, cæteris poſitis, illam conditionem, nempe, vt rectæ *xy. xc* ſint in ratione data vt *h* ad *k* in infinitum variari poſſe. Nonnulla afferamus exempla.



Si postuletur quod rectæ *xy. xc* sint reciprocæ datis *h. k.* ecce

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*xy.*	*h.*	*k.*	*xc.*
Vel si fiant.		*am.*	*mp.*	
Sed ob simil. S.P.	*xy.*	*xb.*	*am.*	*mb.*
Ergo ex æquo E.P.	*mp.*	*xc.*	*xb.*	*mb.*

Ergo solutum, & patet constructio, & demonstratio.

Si petatur quod rectæ *xy.xc* quamdam rectam datam *m* componant. Ecce

ANALYSIS

Sint igit.	$xy + xc \sqcap m.$
Ergo.	$xy + xb \sqcap m - bc.$
Sed ob simil. S.P.	*xy. xb. am. mb.*
Et comp.	*xy+ xb. xb. am+mb. mb.*
Ergo subst. E.P.	*m—bc, xb. am+ mb. mb.*

Ergo solutum, & patet constructio, & demonsmonſtratio, & totius problematis determinatio ſatis eſt obvia.

PROPOSITIO VI.

DIMINVTA.

Datam rectam *ac* diviſam in *b*, rurſus ſecare in *x* inter *a*, & *b*, vt rectangulum *axb* cum quadrato *xc* æquale ſit rectangulis tum ſub *ac*, & *xb*, tum ſub *xc*, & *bc*.

ANALYSIS.

Sint igit.	$axb + xcx$ Λ	$ac:xb + xcb.$
Ergo auf. *xcb*.	$xcb.$	$xcb.$
Erit per 2.2. el.	$axb + cxb$ Λ	$ac:xb.$
Et auf. *axb*.	$axb.$	$ax:xb.$
Remanebit per 1.2.	cxb Λ	$cxb.$

Ergo ſolutum, & patet problema diminutum eſſe, adeoque punctum *x* in recta *ab* ad libitum aſſumi poſſe.

DEMONSTR.

Dico quodcumque punctum *x* in recta *ab* aſſumptum problema efficere. Eſtenim rectangulum *axb* cum rectangulo *cxb* æquale rectangulo ſub tota *ac*, & ipſa *xb*; quea-

 addu-

$a \quad x \quad b \quad c$

addendo rectangulum *xcb*, erit rectangulum *axb* cum rectangulis *cxb*, & *xcb*, idest cum quadrato *xc*, æquale rectangulo sub *ac*, & *xb* cum rectangulo *xcb*. Quod ostendere oportebat.

PROPOSIT. VII.

DIMINVTA.

Quatuor rectas proportionales exhibere, ita vt prima ad quartam sit vt *g* ad *k*, aggregatum verò secundæ, & quartæ sit data *ab*.

$x \quad y \quad a \quad z \quad b$ $\qquad g$ k

Sint quatuor rectæ, de quibus quæritur *xy*. *az*. *ya*. *zb*.

CONDITIONES.

Vt sint prop. *xy*. *az*. *ya*. *zb*.
Vt sint prop. *xy*. *zb*. *g*. *k*.
Vt sint $az + zb$ —Λ— *ab*.

Cum igitur tres tantum dentur conditiones, & quatuor quærantur magnitudines, perspicuum est problema esse dimi-

diminutum. Ergo quodcumque punctum z in recta ab aſſumptum problema efficiet. Nam determinatis az, & zb, ſi fiat vt k ad g ita zb ad xy, & vt az ad xy ita zb ad ya, factum erit, quod facere oportebat.

IN NVMERIS.

In numeris eodem modo proceditur. At vero ſi integros exhibere, & determinare oporteat, ita examen fieri poterit.

Sint inueniendi quatuor numeri proportionales, ita vt primus ad quartum ſit vt 8 ad 5, ſecundus vero, & quartus componant 100.

Sunto vt antea, xy. az. ya. zb, & quoniam integros quærimus, erunt xy, & zb. 8, & 5, vel eorum multiplices, quia ipſi minimi inter ſe, & ſemper erit az complementum ad 100, ipſius zb.

Et cum tres termini determinari poſsint; ſi quartam proportionalem admittant, erunt omnes quatuor, de quibus quæritur, & ſi omnes reſolutiones patebunt. Facto igitur examine, vt patet in mappa, ſeptem inueniuntur ſolutiones, videlicet 32. 80. 8. 20, & 80. 50. 80. 50, & 96. 40. 144. 60, & 120. 25. 360. 75, & 128. 20. 512. 80, & 144. 10. 796. 90, & tandem 152. 5. 2888. 75, quæ omnes quæſtioni ſatisfaciunt, neque aliæ eſſe poſſunt integris.

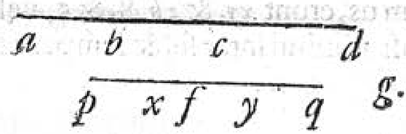
xy.	az.	ya.	zb.
8.	95.		5
16.	90.		10
24.	85.		15
32.	80.	8	20
40.	75.		25
48.	70.		30
56.	65.		35
64.	60.		40
72.	55.		45
80.	50.	80	50
88.	45.		55
96.	40.	144	60
104.	35.		65
112.	30.		70
120.	25.	360	75
128.	20.	512	80
136.	15.		85
144.	10.	796	90
152.	5.	2888	95

PRO-

PROPOSIT. VIII.

DIMINVTA.

Datam rectam *pq* in tres partes dividere in *x*, & *y*, ita vt tria facta sub singulis earum, & singulis datarum *ad.ac.ab* æqualia sint dato plano *g*.



Hoc est tria facta sub $px.ad$, sub $xy.ac$, & sub $yq\ ab$ æqualia facere plano g.

ANALYSIS.

Sint igitur. $px:ad + xy:ac + yq:ab \;\_\wedge\_\; g.$
Vel per 1.2.el. $xy:bc + xy:ab.$
Vel per eamdem $px:bd \quad + px:ab.$
Vel per eamdem $px:bd + xy:bc + pq:ab \;\_\wedge\_\; g.$

Ergo solutum, & patet problema esse diminutum, cum nulla sit conditio, vnde altera incognitarum $px.xy$ innotescat. Quapropter liberum erit punctum x in recta pq assignare, ita vt vltima æquatio existat. Determinatio igitur puncti x ita fieri potest

Sunt

Sunt enim	$px{:}bd + xy{:}bc + pq{:}ab$ —Λ— g.
Vel auf. $pq{:}ab$.	$px{:}bd + xy{:}bc$ —Λ— $g - pq{:}ab$.
Vel si fiat	k.
Ergo	$px{:}bd$ —q. k.
Et	px —q. $\frac{k}{bd}$.

Ergo determinatum eſt punctum x, cum pateat rectam px accipiendam eſſe minorem latitudine proueniente ex applicatione plani k (ideſt differentia plani dati g ſuper rectangulum ſub pq, & ab) ad rectam bd.

CONSTR. & DEMONST.

A dato plano g auferatur rectangulum ſub datis pq. ab, & reſiduum applicetur ad rectam bd, ſitque latitudo proueniens pf. Dico quodcumque punctum x, inter puncta p, & f acceptum, problema efficere. Deinde à prædicto reſiduo ſubtrahatur rectangulum ſub px, & bd, & remanens applicetur ad rectam bc, & latitudo reſultans erit xy. Itaque rectangula ſub px, & bd, atque ſub xy, & bc æqualia erunt differentiæ, qua planum g ſuperat rectangulum ſub pq, & ab, & addito eodem rectangulo, erunt rectangula ſub px, & bd, atque ſub xy, & bc, vna cum rectangulo ſub pq, & ab, hoc eſt vna cum rectangulis ſub px, & ab, ſub xy, & ab, & ſub yq, & ab æqualia plano g: ſed rectangula ſub px, & bd, atque ſub px, & ab æquantur rectangulo ſub px, & ad, rectangula verò ſub xy, & bc, atque ſub xy, & ab æquantur rectangulo ſub xy, & ac: igitur tria rectangula ſub px, & ad, ſub xy, & ac, & ſub yq, & ab æqualia erunt dato plano g. Quod erat faciendum.

Quod autem px minor debeat eſſe, quam pf ſatis manifeſtum eſt ex prædicta determinatione.

QVÆS-

QVÆSTIO DIMINVTA.

Centum personæ, scilicet viri, fœminæ, & pueri in diversorio 800 nummos impenderunt. Solvebant singuli viri 14, singulæ fœminæ, & singuli pueri 6 nummos. Quæritur quot viri, fœminæ, & pueri seorsim erant?

Hæc quæstio, supponendo quod pq valeat 100, ad 14, ac 9, & ab 6, Geometricè per præcedentem analysim expeditur. At verò Arithmeticè, vt omnes solutiones in numeris integris pateant, hoc modo procedere licet.

$p \quad x \quad y \quad q$

Dividatur quælibet recta pq, quæ valeat 100. in x, & y, & sit px numerus virorum, xy fœminarum, & yq puerorum: Ergo

ANALYSIS.

Erunt	$14px + 9xy + 6yq \;{-}\Delta{-}\; 800.$
Ideſt per 1.2.el.	$3xy + 6xy.$
Et per ipsam	$8px \quad + 6px.$
Et per eamdem	$8px + 3xy + 6pq \;{-}\Delta{-}\; 800.$
Ideſt quia pq eſt 100.	600
Ergò aufer. 600 erit	$8px + 3xy \;{-}\Delta{-}\; 200$

Nunc omnes resolutiones poſsibiles in numeris integris hoc modo examinari, & exhiberi poſſunt.

A

A numero remanente 200 auferatur 8 (quia est 8 *px*) & à residuo iterum 8, & si deinceps:

		200.	
pro *px*.	1.	192.	64. pro *xy*.
	2	184	
	3	176	
	4	168.	56

primus *px*.	1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.	22.
secund. *xy*.	64.	56.	48.	40.	32.	24.	16.	8.
tertius *yq*.	35.	40.	45.	50.	55.	60.	65.	70.

donec duo residui numeri multiplices sint ipsius 3 (quia ex 3 *xy*) prima igitur vice habemus 192, qui divisus per 3 dat 64, quare *px*, & *xy* erunt 1 & 64, vnde *yq* erit 35 complementum scilicet ad 100. Quarta autem vice obtinemus 168, qui divisus per 3 exhibet 56, quare *px*, & *xy* erunt 4, & 56, & *yq*. 40. Ita quidem examen progredi potest, sed longe facilius hoc modo. Primi numeri *px* sunt duo inventi valores 1, & 4. & progressio cum eorum excessu 3 dabit 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. Secundi verò numeri *xy* sunt duo inventi valores 64, & 56; & progressio cum eorum excessu 8 exhibebit 64. 56. 48. 40. 32. 24. 16. 8. Tertij denique numeri *yq* sunt duo inventi valores 35, & 40, quorum excessus est 5, & præstabit progressio 35. 40. 45. 50. 55. 60. 65. 70. & terni correspondentes quæstioni satisfacient 1. 64. 35, vel 4. 56. 40. &c. Et ecce tibi octo resolutiones: neque plures erunt in integris.

SCHOLION.

Hæc quidem praxis in multis casibus arithmeticis locum habet. Quapropter alia placet exempla in medium afferre.

EADEM QVÆSTIO IN ALIJS terminis propoſita.

Quidam vult 800 nummos impendere in 100 aves, quarum aliæ 14, aliæ 9, & aliæ 6 nummis conſtant. Quæritur quot aves vnius cuiuſque prætij accipere poſsit?

100.	14. 9. 6.		800		
	8. 3.		600		
			200		
		1	192	64	
		2	184		
		3	176		
		4	168	56	

primi prætij	1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.	22.
Secundi	64.	56.	48.	40.	32.	24.	16.	8.
Tertij.	35.	40.	45.	50.	55.	60.	65.	70.

Differentia inter maximum, & minimum prætium eſt 8, inter medium, & minimum eſt 3. Ergo ſi à numero abſoluto 800 auferatur 600 (productus ex dato numero diſtinguendo 100, & prætio infimo 6) & fiat examen ſubtrahendo ſemper 8, & dividendo per 3. invenientur octo reſolutiones, vt antea, quarum quælibet ſatis facit quæſtioni.

Eodem modo proceditur quamvis prætia ponantur in numeris fractis.

ALIVD

ALIVD EXEMPLVM.

24 nummi impensi sunt in 24 aves, quarum aliæ $1\frac{1}{2}$ aliæ 1. & aliæ $\frac{1}{2}$ constant. Quæritur quot aves vniuscuiusque prætij emptæ sunt?

Aves	prætia			Nummi		
24.	$1\frac{1}{2}$.	1.	$\frac{1}{2}$.	24.		
Differ.		1.	$\frac{1}{2}$.	12.	factus à 24 in $\frac{1}{2}$.	
				12.	residuus.	
Elev. per 2.		2.	1.	24.		
			1.	22.	22.	
			2.	20.	20.	

primi prætij	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
secundi	22.	20.	18.	16.	14.	12.	10.	8.	6.	4.	2.
tertij	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.

Differentia inter maximum, & minimum prætium est 1. inter medium, & minimum est $\frac{1}{2}$. Si igitur à numero absoluto 24 nummorum auferatur 12, factus ex numero avium 24 in infimum prætium $\frac{1}{2}$, remanebit 12. A quo si auferatur 1, & dividatur residuus per $\frac{1}{2}$, & ita deinceps. Uel (vt fractiones vitentur) si differentiæ 1, & $\frac{1}{2}$, & residuus 12 multiplicentur per 2, & fiant 2. 1. & 24, & subtrahatur semper 2, & dividatur per 1. Vtroque modo invenientur 11 solutiones, vt patet.

ALIA QVÆSTIO.

Aurifex triplex habet aurum, primum 22, ſecundum 21,& tertium 18 graduum,ex quibus 40 libras auri 20 graduum vult componere. Quæritur quantum ex vnoquoque aſſumere poſsit ad mixtionem?

Grad.	22.	21.	18.		20	
Diff.		4.	3.		40 lib.	
					800	
					720. ideſt 40 in 18.	
					80.	
				1	76.	
				2	72.	24.
				3	68.	
				4	64.	
				5	60.	20.

primi.	2.	5.	8.	11.	14.	17.
ſecundi	24.	20.	16.	12.	8.	4.
tertij	14.	15.	16.	17.	18.	19.

Differentia inter maximum, & minimum gradum eſt 4, inter medium,& minimum eſt 3. Ergo ſi à numero abſoluto 800 (facto ex multiplicatione 40 lib. in 20 grad.) auferatur numerus 720 (factus ex multiplicatione 40 lib. in 18. grad.) & fiat examen auferendo ſemper 4,& dividendo per 3: obtinebimus ſex ſolutiones, videlicet 2. 24. 14, 5. 20. 15, 8. 16. 16, 11. 12. 17, 14. 8. 18, 7. 4. 19. Neque in integris invenientur plures.

SCHO-

SCHOLION

Observatu dignam arbitror mirabilem genesim harum progressionum. Prima enim (quæ ad primum gradum, prætium, &c. spectat) procedit per differentiam secundi, & tertij. Secunda vero (quæ ad secundum pertinet) per differentiam primi, & secundi. Tertia denique (quæ ad tertium concernit) per differentiam primi, & secundi.

Hinc manifestum sit secundum examen omitti posse. Nam ex primo, numeri sunt inventi 2. 24. 14. *& cum sciamus excessum , quo progressiones procedere debent, ipsæ institui poterunt.*

PRO-

PROPOSIT. IX.

DIMINVTA.

Duos numeros integros exhibere, ita vt quadratum maioris æquale sit rectangulo sub ipsis cum rectangulo sub minore, & numero dato 3, vna cum numero plano dato 219. Et quia plures sunt oporteat determinare omnes.

$a \qquad x \qquad y$

Sint numeri, de quibus quæritur ay. ax.

ANALYSIS.

Sit igit. $aya \;-\Lambda-\; yax + 3ax + 219.$

Et auf. 219. $aya - 219 \;-\Lambda-\; yax + 3ax.$

Et partiendo $\dfrac{aya - 219}{ay + 3} \;-\Lambda-\; ax.$

Vel facta partitione $ay - 3 - \dfrac{210}{ay + 3} \;-\Lambda-\; ax.$

Ergo solutum, cum manifestum sit $ay + 3$ partem fore efficientem numeri 210.

Dvi-

Dividatur igitur 210 in omnes ſuos efficientes 1,& 210, 2 & 105, 3 & 70,&c. Ergo ſi à ſingulis maioribus, numerus dematur 3: erunt reſidui 207. 102. 67,&c. valores numeri *ay*.

210		*ay*.	*ax*.
1	210	207	203
2	105	102	97
3	70	67	61
5	42	39	31
6	35	32	23
7	30	27	17
10	21	18	5
14	15		

Et ſi ab ipſis ſigillatim auferatur aggregatum alterius coefficientis correſpondentis, & numeri 3, remanebunt 203. 97. 61,&c. pro valoribus numeri *ax*.

Sunt igitur numeri, de quibus quæritur 207. & 203, vel 102 & 97, vel 67 & 61, vel 39 & 31, vel 32 & 23, vel 27 & 17, vel 18 & 5, vt patet in mappa, & in integris non reperientur plures.

SCHOLION.

In arithmeticis quæſtionibus, arithmeticis operationibus vti licet. In arithmetica commune eſt, quamuis diviſor dividendum non metiatur, partitionem perſequi, & quotum exprimere per numerum integrum cum fracto. Pari iure in partitionibus analyticis id ipſum ſæpiſsime fieri poteſt, vnde mirabile compendium oritur ad reſolutiones.

Erat

Erat igitur dividendus $aya - 219$. & diviſor $ay + 3$, vnde facta partitione, vt patet in mappa, pars integra eſt $ay - 3$, & pars fracta

$$\begin{array}{l|l} aya - 219 & ay - 3 \dfrac{-210.}{ay + 3.} \\ \underline{\;\; ay + 3 \;\;} & \\ 0. - 3ay - 219 & \\ \quad \underline{\;\; ay + 3 \;\;} & \\ \quad 0. - 210. & \end{array}$$

$\dfrac{-210}{ay + 3}$, & totus quotus $ay - 3 \dfrac{-210}{ay + 3.}$,

& conſtat $ay + 3$ partem eſſe efficientem numeri 210, & perſpicuum fit quomodo huiuſmodi quæſtiones reſolvi debeant.

Quando quæritur de maximis, & minimis, nihil aliud petitur, niſi in problematibus, vel quæſtionibus diminutis determinatio maximæ, & minime reſolutionis.

PROPOSIT. X.

IMPOSSIBILIS.

Datas rectas ab, & bc ita dividere in x, & y, vt ſint proportionales $ax.\ xb.\ by.\ yc$, & etiam $ac.\ ay.\ ab.\ ax$.

ANA-

a x b y c

ANALYSIS.

Sint igit.prop.	*ax.*	*xb.*	*by.*	*yc.*
Et per compoſ.	*ax.*	*ab.*	*by.*	*bc.*
Sed etiam S.P.	*ac.*	*ay.*	*ab.*	*ax.*
Ergo ex æquo E.P.	*ac.*	*ay.*	*bc.*	*by.*
Et vt diff.ita 1.ad 1.	*ab.*	*ab.*	*bc.*	*by.*

Ergo ſolutum, & patet impoſsibilitas, cum *by* pars, toti *bc* æqualis emergi nequeat.

DEMONSTR.

Dico propoſitum problema impoſsibile eſſe. Si enim fieri poteſt ſint *ab*, & *bc* ita diviſæ in *x*,& *y*,vt petitur. Cum igitur ſint proportionales *ax. xb. by. yc.* Et per compoſ. *ax. ab. by. bc*, & etiam ſint proportionales *ac. ay. ab. ax*: erunt ex æquo proportionales *ac. ay. bc. by*; ſed vt differentiæ ita eſt vnus ad vnum: ergo vt *ab* ad *ab*, ita erit *bc* ad *by*: ergo *bc*, & *by* erunt æquales pars, & totum, 14.5.el.
quod eſt abſurdum. Ergo impoſsibile erit propoſitum problema.

PROPOSITIO XI.

IMPOSSIBILIS.

Duas rectas invenire , quarum quadrata ſimul ſumpta æqualia ſint rectangulo ſub ijſdem rectis comprehenſo.

Sint rectæ quæſitæ *ax*. *ay*.

a *x* *y*

ANALYSIS.

Sint ſi fieri poteſt	*axa* + *aya* —Δ— *yax*.
Ergo erit	*yax* +q. *axa*.
Et deprim. per *ax*.	*ay* +q. *ax*.
Sed etiam erit	*yax* +q. *aya*.
Et deprim. per *ay*.	*ax* +q. *ay*.

Ergo cum *ax* non poſsit maior, & minor eſſe quam *ay*, patet impoſsibilitas, & eodem modo demonſtratur.

DEMONSTR.

Dico propoſitum problema eſſe impoſsibile ſi enim fieri poteſt ſint rectæ, de quibus quæritur *ax*, & *ay*, quarum quadrata *axa* , & *aya* æqualia ſint rectangulo ſub ijſdem, nempe *yax* : ergo rectangulum *yax* maius erit ſua parte, nempe quadrato *ax*, & deprimendo per *ax* : erit *ay* maior quam *ax*; ſed etiam *yax* rectangulum maius eſt ſua parte, videlicet quadrato *ay*: ergo deprimendo per *ay*, erit *ax* maior quam *ay*; ſed erat minor antea : ergo impoſsibile erit quod eodem tempore ſit maior, & minor. Impoſsibile igitur erit problema. Quod erat oſtendendum.

PRO-

PROPOSITIO XII.

IMPOSSIBILIS.

Datis rectis *ab. bc. cd*, quarum *ab* ſit maior quam *cd*: oportet dividere *bc* in *x*, ita vt rectangula *abx*, & *xcd* ſimul ſumpta æqualia ſint rectangulo *bcd*.

a b x c d

ANALYSIS.

Sint igitur	$abx + xcd$	—Λ—	bcd.
Ergo auf. *xcd* erit	abx	—Λ—	$bcd - xcd$.
Ideſt per 1.2.el.	abx	—Λ—	$bx:cd$.
Ergo per 1.6.el.	ab	—Λ—	cd.

Ergo ſolutum, & patet problema impoſsibile eſſe, propterea, quod *ab* ponatur maior, quam *cd*. Quod à principio, vel à fine analyſeos demonſtratur.

DEMONSTR.

Dico problema propoſitum eſſe impoſsibile. Si enim fieri poteſt ſit *bc* diviſa in *x*, ita vt rectangula *abx*, & *xcd* æqualia ſint rectangulo *bcd*: ergo auferendo rectangulum *xcd*, erit *abx* rectangulum æquale differentiæ rectangulorum *bcd*, & *xcd*, ideſt rectangulo ſub *bx*, & *cd*: ergo *ab* æqualis erit ipſi *cd*; ſed ponitur maior: ergo impoſsibile erit

 pro-

problema. Quod erat oſtendendum.

a b x c d

ALITER.

Cum enim *ab* ponatur maior, quam *cd*, erit rectangulum ſub *ab*, & *bx* maius rectangulo ſub *bx*, & *cd*, & addito rectangulo *xcd*, erunt rectangula *abx*, & *xcd* rectangulis ſub *bx*, & *cd*, atque ſub *xc*, & *cd*, hoc eſt rectangulo *bcd* maiora; ſed ponuntur æqualia: ergo impoſsibile, &c.

PROPOSIT. XIII.

IMPOSSIBILIS.

Datam rectam *ac* vtcumque diviſam in *b*, rurſus ſecare in *x* inter *b*, & *c*, ita vt rectangulum *axb* cum quadrato *xc* æquale ſit rectangulo *bxc*.

a b x c

ANALYSIS.

Sint igitur	*axb* + *xcx* —Δ— *bxc*.
Ergo	*bxc* +q. *axb*.
Et deprim. per *bx*.	*xc* +q. *ax*.
Sed etiam eſt	*bxc* +q. *xcx*.
Et deprim. per *xc*.	*bx* +q. *xc*.
Ergo	*bx* +q. *ax*.

Quod eſt impoſsibile, cum punctum *x* ponatur inter *b*, & *c*.

DE-

DEMONSTR.

Dico propoſitum problema eſſe impoſsibile. Si enim fieri poteſt, ſit *bc* ita diviſa in *x*, vt rectangulum *axb* cum quadrato *xc* æquale ſit rectangulo *bxc*. Ergo rectangulum *bxc* maius erit ſua parte, nempe rectangulo *axc*, & deprimendo per *bx*, erit *xc* maior quam *ax*. Sed etiam rectangulum *bxc* maius eſt ſua parte, videlicet quadrato *xc*, & deprimendo per *xc*, erit *bx* maior quam *xc*; ſed *xc* erat antea maior quam *ax*: ergo *bx* multo maior erit quam *ax*. Quod eſt abſurdum, ponitur enim punctum *x* inter *b*, & *c*. Impoſsibile igitur, &c. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XIV.

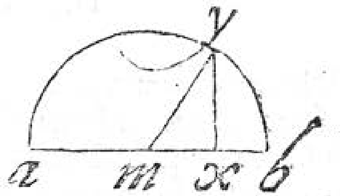
DE NVMERIS QVADRATIS.

Duos numeros invenire, quorum quadrata, vel numerum quadratum componant, vel numero quadrato differant.

Vide R. P. Claviũ ad prop. 29 10. el.

Sint

Sint in triangulo rectangulo *mxy* duo numeri, de quibus quæritur, vel *mx*, & *xy*, quorum quadrata quadratũ *my* componunt, vel *my*, & *mx*, quorũ quadrata quadrato differunt *xy*. Centro *m* intervallo *my* ſemicirculus deſcribatur *ayb*.



ANALYSIS, ET SYNTHESIS.

Cum igitur numeri *my*. *mx*. *xy*: debeant eſſe rationales: perſpicuum ſit numeros *ax*, & *xb* conſtituendos eſſe quadratos (ideſt in ratione duorum quadratorum) Itaque ipſorum ſemiſumma, & ſemidifferentia *my*, & *mx*, ideſt *mb*, & *mx* rationales erunt, & etiam rationalis erit numerus *xy*, vtpote radix illius numeri quadrati ex multiplicatione geniti numerorum *ax*, & *xb*, qui quadrati ponuntur. Ergo ſi pro *ax*, & *xb* duo numeri aſſumantur quadrati 1. & 9 (hoc eſt, ſi rigor arithmeticus ſervandus ſit, duo numeri laterales 1, & 9, in ratione duorum numerorum quadratorum 1, & 9) erunt ipſorum ſemiſumma, & ſemidifferentia 5, & 4 valores ipſorum numerorum *my*, & *mx*, eritque 3, valor ipſius *xy*, radix videlicet producti ſub 1. & 9, vel (quod in idem recidit, & facilius expeditur) numerus factus ex multiplicatione radicum 1, & 3 quadratorum 1, & 9. Ergo numeri 5. 4. 3. erunt de quibus quæritur, nam quadrata ipſorum 4, & 3. quadratum componunt 25, & quadrata ipſorum 5, & 4 quadrato differunt 9. Et ſic invenientur plurimi, & non ipſi tantum, ſed omnes in eorum proportione etiam ſatisfacient quæſito.

Prop. 7. Introd.

CO-

COROLLARIVM.

Hinc facile genesis exhiberi poterit omnium huiusmodi numerorum quadratorum in numeris integris. Nam si exponantur omnes numeri quadrati, & assumantur bini, quorum summa, & differentia numeri sint inter se primi: erunt ipsa summa, & differentia, & duplum facti sub radicibus quadratorum, qui assumuntur numeri quæsiti, & sic genesis omnium innotescet.

Exponantur omnes numeri quadrati 1. 4. 9. 16. &c. quorum radices 1. 2. 3. 4. &c. Si igitur assumantur 1. & 4, exhibebunt pro summa, & differentia, & duplo facto sub ipsorum lateribus, sive radicibus, 5. 3. 4. Si assumantur 4, & 9. dabunt 13. 5. 12. Si assumantur 1, & 16. dabunt 17. 15. 8. Si assumantur 9, & 16. dabunt 25. 7. 24. Et sic omnium genesis manifesta fit. Et non solum ipsi quæsito satisfaciunt; sed omnes etiam in ipsorum proportione.

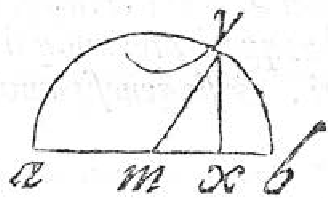
1. 2.	3.	4 &c.
1. 4.	9.	16 &c.
5. 3. 4,	13. 5. 12,	17. 15. 8. &c
		25. 7. 24.

SCHOLION.

Ex hac propositione sequentes praxes manifestæ fiunt.

PRAXIS PRIMA.

Omnes numeros integros quadratos inveni-re, qui bini ſumpti dato numero qua-drato integro differant.



Perſpicuum eſt, ſi datus ſit numerus quadratus xy, ipſius coefficientes eſſe ax, & xb, quorum ſemiſumma, & ſemidifferentia my, & mx erunt, de quibus quæritur. Ergo ſi numerus quadratus datus dividatur in omnes ſuos efficientes: ſemiſumma, & ſemidifferentia binorum coefficientium quæſito ſatisfacient, & ſic omnes ſolutiones patebunt.

Sit iam datus numerus quadratus 144, & oporteat omnes quadratos numeros exhibere, qui bini ſumpti differant dato 144.

Dividatur 144 in omnes ſuos efficientes 1, & 144, 2 & 72, 3 & 48, 4 & 36, 6 & 24, 8 & 18, 9 & 16. (12 & 12 quia nihilo differunt, non ſerviunt.) Aſsignentur ſumma, & differentia binorum coefficientium, 145 & 143, 74 & 70, 51 & 45, &c. & accipiantur ſemiſſes earum, quæ pares ſint 37 & 35, 20 & 16, 15 & 9,

			144.		
	145.	1.	144.	143.	
37.	74.	2.	72.	70.	35
	51.	3.	48.	45.	
20.	40.	4.	36.	32.	16
15.	30.	6.	24.	18.	9
13.	26.	8.	18.	10.	5
	25.	9.	16.	7.	

9, 13 & 5, vt patet in mappa, & ecce quatuor solutiones, nam quadrata numerorum 37 & 35, sive 20 & 16. sive 15 & 9, sive 13 & 5, quadrato differunt 144, neque in integris invenientur plures.

Si semisses accipiantur imparium, vel si coefficientes admitantur fracti: solutiones in infinitum procedent.

ALITER

Quoniam igitur numeros integros quærimus, brevius res expedietur, si quadrans numeri quadrati dati sit integer, & in suos efficientes dividatur. Nam summa, & differentia binorum coefficientium solutionem exhibebunt.

Si igitur 36 quadrans quadrati dati 144 dividatur in suos efficientes 1 & 36, 2 & 18, 3 & 12, 4 & 9. erunt summa, & differētia coefficientium 37 & 35, 20 & 16, 15 & 9, 13 & 5, vt antea, de quibus quærebatur.

144
36

37	1	36	35
20	2	18	16
15	3	12	9
13	4	9	5

Si quadrans quadrati dati fuerit fractus, prima operatio erit instituenda.

COROLLARIVM.

Hinc manifestus fit modus constituendi triangula, quorum latera sint rationalia, & integra Nam si pro perpendiculo numerus (ex. g.) ponatur 12, *facta operatione prædicta, assumi poterunt pro* *vno latere & segmento basis contermino bini coefficientes siue 37 & 35, siue 20 & 16 &c. & pro reliquo latere, & segmento contermino alij duo coefficientes. Itaque triangulum poterit constitui in altitudine 12, cuius latera sint 37 & 20 & segmenta baseos 35 & 16, siue 37 & 15 & segmenta 35 & 9, siue 37 & 13, & segmenta 35 & 5, siue 20 & 15, & segmenta 16 & 9, siue 20 & 13, & segmenta 16 & 5, siue 15 & 13 & segmenta 9 & 5. Et totidem triangula in altitudine 12 constitui poterunt oxygonia, & totidem ambligonia. Quia si determinatis segmentis baseos, ipsorum summa accipiatur pro base, triangulum oxygonium efficietur, ambligonium vero si pro base ipsorum segmentorum assumatur differentia.*

PRAXIS SECVNDA.

Omnes numeros integros quadratos inuenire, qui bini sumpti numero dato differant non quadrato.

Hæc praxis secunda idem habet fundamentum ac prima, concipiendo pro quadrato ipsius *xy* nnmerum planum datum non quadratum.

Sit

Sit datus numerus 168. cuius quadrans 42 diuidatur in ſuos efficientes 1 & 42, 2 & 21, 3 & 14, 6 & 7, & ſumma, & differentia coefficientium, erunt 43, & 41, 23 & 19, 17 & 11, 13 & 1, & quatuor emergunt ſolutiones. Nam quadrata numerorum ſiue 43 & 41, ſiue 23 & 19, ſiue 17 & 11, ſiue 13 & 1 dato numero differunt 168. Vt oportebat.

		168		
		42		
43.	1.		22.	41.
23.	2.		41.	19.
17.	3.		14.	11.
13.	6.		7.	1.

Si quadrans numeri plani dati ſit fractus ad primam operationem praxis primæ recurrendum erit.

COROLLARIVM I.

Ex prædictis facile ſoluitur ſequens quæſtio.

QVÆSTIO DIMINVTA.

Quæritur numerus, ita vt ſi ipſi addatur 97, & ab ipſo auferatur 23; compoſitus, & reſiduus ſint numeri quadrati.

Perspicuum est numeros quadratos, de quibus quæritur, inter se differre 120, aggregato videlicet datorum 97 & 23. Igitur si 30 quadrans ipsius 120 in suos efficientes dividatur 1 & 30, 2 & 15, 3 & 10, 5 & 6 summa, & differentia coefficientium exhibebunt 31 & 29, 17 & 13, 13 & 7, 11 & 1, quorum quadrata 961 & 841, 289 & 169, 169 & 49, 121 & 1. Et si à quadratis aggregatorum 961, 289, 169, 121 auferatur 97; vel si quadratis differentiarum 841. 161. 49. 1 addatur 23: erunt sive residui, sive compositi 864. 192. 72 & 24. quorum quilibet satisfacit quæsito, & in integris non reperientur plures.

$$\begin{array}{r} 97 \\ \underline{23} \\ 120 \\ 30 \end{array}$$

864.	961.	31.	1	30.	29.	841.	864.
192.	289.	17.	2	15.	13.	169.	192.
72.	169.	13.	3	10.	7.	49.	72.
24.	121.	11.	5	6.	1.	1.	24.

Si quadrans aggregati numerorum datorum non fuerit integer, ad operationem primam praxis primæ confugiendum erit.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam colligitur modus inveniendi binomium primum.

Cum enim binomium primum ex numero & radice componatur, dummodo numerus maior sit radice, & differentia potentiarum vtriusque numerus sit quadratus: perspicuum est, binomium primum quærere, nil aliud esse, quam duos numeros quadratos invenire, qui numero non quadrato differant. Itaque si pro parte radicali determiminetur (v.g.) √ 168, & quadrans ipsius plani 168, nempe 42 in suas efficientes dividatur: erunt aggregata cœfficientium 43. 23. 17. 13, & quilibet eorum pars erit rationalis, quæ cum √ 168 binomium primum constituet.

Apotome prima, sive residuum primum differentia est ipsarum partium, quibus binomium primum conficitur. Itaque si binomium primum accipiatur 17 + √ 168 : apotome prima erit 17 — √ 168. Unde perinde erit binomium, ac apotomen quærere.

Quod si genesin binomij primi determinare oporteat: Exponatur omnes numeri quadrati 1. 4. 9. 16. &c. quorum radices 1. 2. 3. 4. &c. & sub singulis quadratis annotentur differentiæ, quibus ipsum quadratum quadrata superat antecedentia (exclusis differentijs, quæ numerum exhibent quadratum) & manifesta fit genesis, de qua quæritur, vt patet in mappa.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	&c.
1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81,	&c.
	3.	8.	15.	24.	35.	48.	63.	80.	&c.
		5.	12.	21.	32.	45.	60.	77.	&c.
			7.	16.	27.	40.	55.	72,	&c.
				9	20.	33.	48.	65.	&c.
					11.	24.	39.	56.	&c
						13.	28.	45.	&c.
							15.	32,	&c.
								17,	&c.

Si enim pro parte rationali binomij primi accipiatur (v.g.) 6, pars radicalis erit √ 35, sive √ 32, sive √ 27, sive √ 20, sive √ 11. & sic de cæteris.

Contemplator quæso mirabilem ordinem progressionum quomodocumque ipsas perpendas.

Si verò data parte rationali (v.g.) 8. determinare oporteat omnes partes radicales, quæ cum dato 8. binomium primum

mum constituant. Duplum ipsius 8 nempe 16 dividatur in omnes suas partes componentes 1 & 15, 2 & 14, 3 & 13, 4 & 12, &c. & multiplicatis binis partibus inter se, & extrahendo radices invenientur √15. √.28. √.39. √48. √55. √.60. √.63, & quælibet earum cum dato numero 8. binomiũ constituet primum, & in integris non erunt plures.

	8.	
	16.	
1 .	15.	√15.
2 .	14.	√.28.
3 .	13.	√.39.
4 .	12.	√48.
5 .	11.	√55.
6 .	10.	√.60.
7 .	9.	√63.

Si accipiantur radices binarum partium componentium, binomium efficietur, quod radix erit binomij determinati. v.g. determinatum iam sit binomium 8+ √60, erit inquam ipsius radix, binomium √5+ √3. Compositum quidem ex radicibus numerorum 5 & 3, qui semisses sunt partium componentium 10 & 6, & sic de reliquis.

PRAXIS TERTIA.

Duos numeros planos similes invenire, qui numero quadrato differant.

Numeri plani similes dicuntur, multiplices, seu submultiplices quadratorum. Ergo si duo numeri quadrati quorum differentia non sit numerus quadratus, multiplicentur per ipsorum differentiam, numeri facti erunt plani similes, quorum differentia erit numerus quadratus. Itaque numeri quadrati 4 & 1, multiplicati per ipsorum differentiam

4 .	1.
3.	
12 .	3.
9 .	4.
5.	
45 .	20.

tiam

tiam 3 exhibebunt 12 & 3 pro planis quæsitis, & eodem modo 9 & 4 per differentiam 5 dabunt 45 & 20, & sic in infinitum.

Numeri plani similes hanc sortiuntur naturam quadratorum, videlicet, quod inter se multiplicati, aut divisi semper factum, aut quotum exhibeant quadratum. Hinc ratio patet multiplicandi quadratos per ipsorum differentiam, vt plani similes eveniant.

COROLLARIVM.

Hinc manifestus fit modus inveniendi binomium secundum, quod ex radice componitur, & numero, ita vt pars radicalis maior sit parte rationali, & radix differentiæ potentiarum partium longitudine sit commensurabilis cum parte radicali. Itaque binomium secundum quærere, idem est, ac duos numeros planos similes inquirere, qui numero differant quadrato, vnde facta operatione antecedente, erit radix quadrati maioris multiplicati per diffentiam amborum pars maior, & ipsa differentia pars minor. prop 50 10.d.

Expositis igitur quadratis 4. & 1. binomium secundum exurget $\sqrt{}\ 12 + 3$. Expositis 9 & 4. emerget $\sqrt{}\ 45 + 5$. Et ita deinceps. Vbi notandum est, radicem quadrati minoris multiplicati per differentiam quadratorum, commensurabilem esse cum parte maiore, vt $\sqrt{}\ 3$ in primo exemplo cum parte maiore $\sqrt{}\ 12$, & $\sqrt{}\ 20$ in secundo cum maiore parte $\sqrt{}\ 45$, &c.

4	1.
3	
$\sqrt{}\ 12 + 3$. bin. 2.	
9	4
5	
$\sqrt{}\ 45 + 5$. bin. 2.	

Hinc

Hinc facile erit genesin binomis secundi ostendere.

SCHOLION.

Profecto antiqui magno labore tractabant radicales. Recentiores vero conservando radices in suis minimis terminis operationes reddunt facillimas. Illi quidem si multiplicare oportebat 3 per $\sqrt{2}$, quadrata partium 9 & 2 multiplicabant, & radicem facti, nempe $\sqrt{18}$ pro facto proferebant. Hi vero insinuatione multiplicationis contenti, partes coniungunt, & pro facto $3\sqrt{2}$ exhibent, hoc est ter $\sqrt{2}$. Immo radicem quamlibet, cum id fieri potest, ad minimam denominationem reducunt, deprimendo planum, cuius est radix, per maximum quadratum, quod ipsum metiri potest. Itaque $\sqrt{50}$, deprimendo planum 50 per quadratum 25, ad $5\sqrt{2}$ reducunt, & loco $\sqrt{50}$, iure merito $5\sqrt{2}$ vsurpant.

Quocirca notare oportet radices quadratas vel inter se esse primas, vel compositas, quemadmodum numeri, primi sunt inter se, vel inter se compositi. Itaque $\sqrt{2}$. $2\sqrt{2}$. $3\sqrt{2}$. $4\sqrt{2}$. $5\sqrt{2}$, &c. (quas antiqui $\sqrt{2}$. $\sqrt{8}$. $\sqrt{18}$. $\sqrt{32}$. $\sqrt{50}$. &c. in tota sua denominatione conservabant) esse inter se compositas, hoc est lon-

longitudine commenſurabiles, plane indicant.

Præterea obſervare oportet, quemadmodum omnis numerus omni radici incommenſurabilis eſt longitudine, ita ſimiliter omnem radicē omni radici, ſi vtraque in ſua minima denominatione poſita eamdem denominationem non habuerit, incommenſurabilem eſſe, vt ſunt $\sqrt{2}$ & $\sqrt{3}$. &c. Et idem intelligendum eſt de radicibus diverſæ ſpeciei.

Ex prædictis facillis colligitur modus inveniendi omnes partes radicales, quæ cum data parte rationali binomium ſecundum conſtituant.

Sit data pars rationalis 15. quæruntur, &c. Quadratum 225 ipſius 15 dividatur in omnes ſuos efficientes 1 & 225, 3 & 75, 5 & 45, 9 & 25, 15 & 15, & (neglectis coefficientibus 1 & 225, 9 & 25, quia ſunt numeri quadrati) ex binis coefficientibus dividatur maior in omnes ſuos efficientes, & dimidium aggregati ipſorū multiplicatum per $\sqrt{}$. coefficientis minoris, pars erit radicalis, de qua quæritur, & ita innoteſcēt omnes. Sunt quadrati 225 coefficientes 3 & 75, quorum maior 75 diviſus in ſuos efficientes exhibet 1 & 75, 3 & 25, 5 & 15, quorum aggregata ſunt 76. 28. 20, & ſemiſſes multiplicatæ per $\sqrt{}$ coefficientis minoris, nempe $\sqrt{3}$, ſunt $38\sqrt{3}$. $14\sqrt{3}$. $10\sqrt{3}$, quarum quælibet ſatisfacit quæſito. Et facta eadem operatione cum reliquis coefficientibus 5 & 45, 15 & 15, vt patet in mappa, erunt omnes partes radicales, de quibus quæritur $38\sqrt{3}$. $14\sqrt{3}$. $10\sqrt{3}$. $23\sqrt{5}$. $9\sqrt{5}$. $7\sqrt{5}$. $8\sqrt{15}$. $4\sqrt{15}$.

	15				
	225				
1	225				
3	75				
	1	75.	76.	$38\sqrt{3}$	
	3	25.	28.	$14\sqrt{3}$	
	5	15.	20.	$10\sqrt{3}$	
5	45.				
	1	45.	46.	$23\sqrt{5}$	
	3	15.	18.	$9\sqrt{5}$	
	5	9.	14.	$7\sqrt{5}$	
9	25.				
15	15				
	1	15.	16.	$8\sqrt{15}$	
	3	5.	8.	$4\sqrt{15}$.	

quarum quælibet cum dato numero 15 binomium secundum constituet. Neque in integris reperientur plures.

Nota si exempli gratia pro parte maiore accipias 10 $\sqrt{}3$. & binomium sit 10 $\sqrt{}3 + 15$, vel in tota sua denominatione $\sqrt{}300 + 15$: radicem differentia potentiarum partium esse 5 $\sqrt{}3$. vel in tota sua denominatione $\sqrt{}75$, semissem videlicet differentiæ coefficientium 5 & 15 multiplicatam per $\sqrt{}3$. & sic de reliquis.

Hinc manifestus fit tibi ordo huius operationis, sunt enim 10 & 5 semisses aggregati, & differentiæ coefficientium 5 & 15, quorum quadrata 100, & 25 plano differunt 75, quare omnibus per 3 multiplicatis plana 300. & 75 quadrato dato 225 differunt, & sic de reliquis.

Sufficiens quidem specimen libri 10. *elem. dedimus, qui totus circa compositionem, & divisionem magnitudinum, sive longitudine tantum, sive longitudine, & potentià incommensurabilium versatur. Vt quisque ex prædictis reliquas ex binis nominibus, aliasque magnitudines, de quibus ibi agitur, secundum præscriptas conditiones (quæ omnes diminutæ sunt) inquirere possit. A quo nos etiam vltro abstinemus, quia hac de re plura habemus in nostra Arithmetica, quæ nondum prelum subiuit. Et quemadmodum prædicto libro ea Euclides, quæ ad plana pertinebant, finiuit, ita & nos resolutioni problematum planorum finem imponimus.*

D. O. M.

Omnis laus, honor, & gloria.

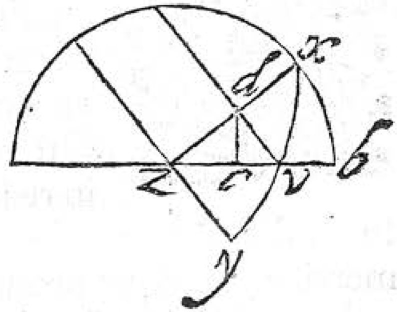
APPEN-

APPENDIX.

ANalysis nostra circa trigonometriam æquè facilè; immo facilius, quam circa geometriam versatur, neque aliter vniversalis dici mereretur. Quanto labore Veteres hac in re insudaverint, & quanto studio Recentiores communem trigonometriam eò vsque promoverint, vnde *datis tribus partibus* triangulum resolvi posit: ijs, qui Authores per legerunt, satis est notum. Vlterius nos progredimur, nostra enim Analysis trigonometrica *datis in vnoquoque triangulorum tribus quibuscumque conditionibus* mappam statuit, per analogias arguit, brevissimis lineis problema solvit, & per logarithmos calculum instituit. Dum tandem, favente tempore, typis mandatur, vnum, vel alterum exemplum (quoad calculum) curiosis porrigere placet.

PROPOSITIO I.

Data altitudine astri in circulo horæ sextæ, elevationem poli investigare, quæ declinationem astri differentiæ ascensionali exhibeat æqualem.



Datur altitudo astri in circulo horæ sextæ, nempe arcus *cd* g. 10. Quæritur altitudo poli *bx*, quæ declinationem astri *yv* æqualem reddat differentiæ ascensionali *zy*.

Analysis nostra quarta argumẽtatione problema soluit, & hanc operationem instituendam docet.

OPERATIO.

Sin.2.g.10. est	9.99335	in logarithmis.
Quadratum	19.98670	
Dividatur per 2.	0.30103	
Vt ergo dimid.quadr.	19.68567	
Ad quad.Radij.	20.00000	
Ita *sin*.g.10.	9.23967	
Ad *sin*.arcus	9.55400	
Cuius *sin*.2.est	9.97020	
Erat dimid.quad.	19.68567,	& naturale 48493 in Radiũ.
Ergo agg.dempto Rad.	19.65587,	& naturale 45269 in Rad.
Ergo	19.97205.	pro summa 93762 in Rad.
Cuius √ est	9.98602.	*sin*.2.g.14.27.pro *yv*, vel *zy*.
Ergo	18.50897	pro diff. 03224.in Rad.
Cuius √ est	9.25443.	*sin*.2.g.79.39.pro *yv*, vel *zy*.

Est igitur declinatio astri *yv*, sive differentia ascensionalis *zy*, tam g.14.27, quam g.79.39. Vnde quoniam altitudo in circulo horæ sextæ est data g. 10, si accipiantur

pro

pro declinatione g.14.27.in triangulo *zcd* innotescet altitudo poli *bx*, de qua quæritur g.44.6; si verò pro declinatione sumantur g.79.39. erit altitudo poli g.10.10. Idem obtinetur positis in triangulo *zyv* tam pro *zy*, quam pro *yv* iam g.14.27.iam g.79.39.

Constat igitur problema duas admittere solutiones. Nam altitudo poli tam g.44.6.quam g.10.10. quando sydus in circulo horæ sextæ elevatum fuerit g. 10. æqualem exhibebit de clinationem syderis differentiæ ascensionali. Sed secunda resolutio soli non convenit, cum maxima ipsius declinatio sit g.23.30.Et notare oportet problema impossibile esse,quando logarithmus, qui *sin*.2.est declinationis, maior appareat radio.

In exemplis nostræ trigonometriæ, operationibus ad proximum minutum contenti sumus, qui maiorem voluerit exactionem secundis uti poterit Itaque quia valorẽ naturalem determinare oportet logarithmi 19.68567, *ipse per Radium deprimitur,& remanet* 9.68567,*qui quæsitus in tabulis sinuum exhibet pro valore naturali* 48493,*vnde,vtroque per Radium multiplicato, logarithmi* 19.68567.*valor est naturalis* 48493 *in Radium. Et eodem modo logarithmus* 19.97205. *accipitur pro summa* 93762 *in Rad. quærendo logarithmũ* 9.97205,*qui respõdet in tabulis summæ naturali* 93763,*& multiplicando per radium,&c.*

Præterea notandũ quoniam in qualibet analogia logarithmica, primus terminus auferri debet à summa 2.*&* 3. *vt quartus appareat, id ipsum obtineri aggregando cum* 1.*&* 2. *termino cõplementum ad* 10 *primi numeri qui locum vnitatis habet*

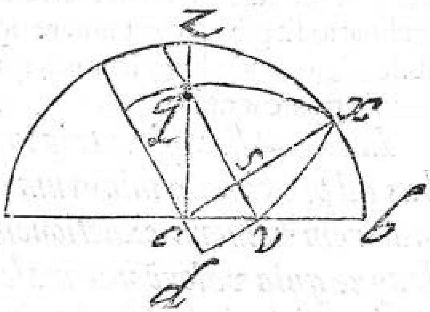
in

in primo termino, & complementum ad 9 reliquorum, & negligendo vnum Radium ad vltimum collectionis.

PROPOSITIO II.

Data horà ortus Astri, dataque eius altitudine in verticali primario: elevationem poli, & declinationem Astri perscrutari.

Datur ortus Astri in hora quarta, nempe arcus *cd*. g. 30, & altitudo ipsius in verticali primario, videlicet arcus *cq* ponitur g. 22. quæritur altitudo poli *bx*, & declinatio Astri *dv*.



Analysis nostra quartà argumentatione problema solvit, & hanc ostendit operationem.

OPERATIO.

Sin. 2. g. 22. est	9.96716 in logarithmis
Quadratum	19.93432
Dividatur per 2.	0.30103
Vt igit. dimid. quadr.	19.63329
Ad factum sub *sin.* g. 22.	9.57357
Et *sec.* 2. g. 30.	10.30103
Ita Radius	10.00000
Ad *tan.* arcus	10.24131
Cuius *secans* est	10.30322
Erat dimid. quadr.	19.63329, & naturale 42972 in Rad.
Aggreg. dempto Rad.	19.93651, & naturale 86419 in Rad.
Ergo	19.63793 pro diff. 43447 in Rad.
V. est	9.81896 *tan.* 2. g. 56. 37 pro *bx*.

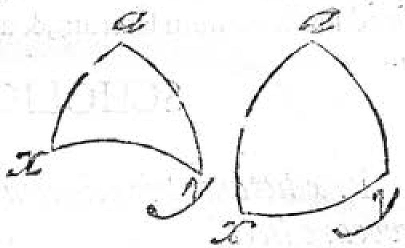
Est

Est igitur altitudo poli, de qua quæritur g 56.37, vnde, quia arcus *cd* est datus, triangulum *cdv* exhibebit pro arcu *dv*, idest pro declinatione Astri g. 18.14. Vel quia datur arcus *cq*, triangulum *zqx* dabit pro complemento arcus *qx*, nempe pro declinatione Astri g. 18.14. quæ cum eadem sit vtroque modo quæsita comprobat calculum.

PROPOSIT. III.

Dato angulo verticis, datisque differentia laterum, & differentia angulorum ad basim: triangulum sphæricum exhibere.

Esto triangulum *x a y*, de quo quæritur. Angulus *a* ponitur g. 80. Differentia laterum *xa*. *ya*. g. 16. Differentia angulorũ ad basim *x*. *y*. g. 40.



Analysis nostra septima argumentatione solvit problema, & hanc docet operationem.

OPERATIO.

Vt *tan*. g. 20. semidiff. ang. ad basim	9.56106
ad *sin*. g. 16. diff. laterum	9.44037
Ita *tan*. 2. g. 40. semianguli verticis	10.07618
ad *k*	9.95549
Vt prædicta *tan*. g. 20.	9.56106
ad *k*	9.95549
Ita prædicta *tan*. 2. g. 40.	10.07618
ad *f*.	10.47061
Est *tan*. g. 8. semidiff. laterum.	9.14780
Ergo aggregatum logarithmorum	19.61841
& divisum per 2.	0.30103
Erit dimidium aggregati	19.31738
Et √.	9.65869

pro

Pro *sin.* g.27.7, vel g.152.53. semisumma laterum.
Est g. 8. g. 8. semidifferentia.
Ergo sum. & diff. g.35.7. & g.19.7. vel g.160.53. & g.144.53. Erunt latera trianguli quæsiti.

Duo igitur triangula constitui poterunt sub angulo verticali g.80. Vnius erunt latera *ay*, & *ax* g.35.7. & g.19.7. alterius vero latera *ax*, & *ay* erunt g.160 53. & g.144.53, quibus cognitis per communem trigonometriam reliquæ partes vtriusque trianguli determinari poterunt. Nos autem brevius pro angulis primi trianguli invenimus pro *x*. g.72.59. pro *y*. g.32.59. Et pro angulis secundi, pro *x*. g.107.1. pro *y*. g.147.1, & pro base vtriusque g. 36. 20. Et perspicuum fit latera, & angulos ad basim vnius complementa esse ad semicirculum laterum, & angulorum ad basim alterius.

SCHOLION.

Prædictam operationem ad hanc analogiam revocare licet.

ANALOGIA.

Vt quadratum *tan.* semidifferentiæ angulorum ad basim.
Ad quadratum *tan.* 2. semianguli verticis.
Ita est rectangulum sub *sin.* differentiæ laterum, & *tan.* semidifferentiæ ipsorum.
Ad duplum quadratum semisummæ laterum.

Vnde cognitis semisummà, & semidifferentià laterum, ipsa latera innotescent, vt anteà.

FINIS.