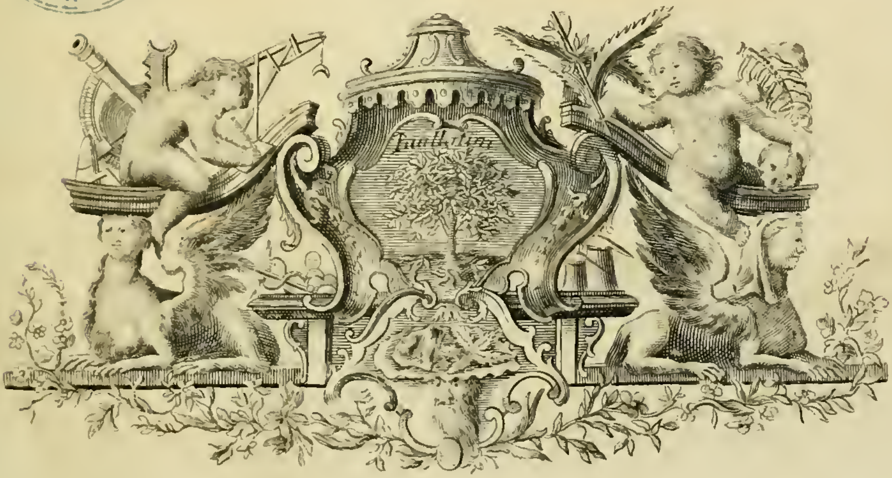
COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE.

TOMVS VIII.

AD ANNVM MDCCXXXVI.



PETROPOLI,
TYPIS ACADEMIAE cIↄIↄCCXLI.

INDEX
COMMENTARIORVM.

IN CLASSE
MATHEMATICA.

Dan.

IN CLASSE

PHYSICA.

Ioan.

IN CLASSE
HISTORICA.

*** *** ***

OB-

OBSERVATIONES
ASTRONOMICAE
ET
METEOROLOGICAE.

CLAS-

CLASSIS PRIMA

CONTINENS

MATHEMATICA.

METHODVS VNIVERSALIS SERIERVM CONVERGENTIVM SVMMAS QVAM PROXIME INVENIENDI.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

INcidi iam pridem in peculiarem ſerierum ſummas proxime inueniendi modum, qui integratione perficiebatur, et admodum facile cuiusuis ſeriei propoſitae conuergentis ſummam exhibebat. Dedi etiam huius methodi ſpecimina iam aliquoties, in diſſertatione de ſeriebus harmonicis; eam autem fuſius exponere magisque perficere tum temporis non vacabat, etiamſi perſpicerem ex ea multa praeclara ſubſidia ad ſummationem ſerierum poſſe deriuari. Hac autem ratione ſerierum ſummationem ad integrationem reducebam. Poſito numero terminorum n, eorumque ſumma s, ſi creſcat n vnitate, ſummae s augmentum erit terminus ſeriei ſequens, qui per n dabitur. Sit is x, eritque Tabula I.

x quantitas valde exigua, si n fuerit numerus satis magnus. Consideratis nunc 1 et x instar incrementorum momentaneorum quantitatum n et s erit $dn:ds = 1:x$ ideoque $ds = x dn$ et $s = \int x dn$. In qua integratione quidem constantem incognitam addi oportet, quae autem si summa s a summa seriei in infinitum continuatae, quae ex eadem integratione innotescit, subtrahatur, rursus exit ex calculo. Hoc itaque modo obtinetur terminorum ab x vsque in infinitum summa, quae ad summam s ipso actu inueniendam addita, dabit seriei propositae in infinitum continuatae summam.

§. 2. Obseruaui autem hoc modo semper summam seriei nimis paruam prodire, id quod mihi occasionem praebuit cogitandi, an alio simili tamen modo summa nimis magna possit produci, quo limites habeantur, intra quos vera seriei summa sit constituta. In quo negotio maximam afferri lucem animaduerti, si, quae ante per solum calculum praestiteram, ad considerationem linearum curuarum reducantur. Hoc enim modo inspectio figurae non solum imaginationis vim adauget, sed etiam ad iudicandum et inueniendum ingens affert subsidium. Traduxi autem sequenti modo seriei summationem ad figuram geometricam, cuius quadratura ipsam summam exhibet.

Figura 1. §. 3. Sit series, cuius summa inuestigatur, $a + b + c + d + e +$ etc. in qua terminus cuius index est n sit x quantitas scilicet ex n vtcunque composita. Sumantur in axe AP partes AB, BC, CD, DE etc. inter se aequales et vnitate denotentur. In punctis A, B, D, etc.

etc. erigantur applicatae Aa, Bb, Cc, Dd etc. reſpectiue aequales terminis ſeriei propoſitae a, b, c, d, etc. Atque ſumta $AP = n - 1$ fiat applicata $Pp = x$. Ad has applicatas et portiones axis $= 1$ compleantur parallelogramma Aβ, Bγ, Cδ, Dε, etc. vsque ad Pϱ. Horum igitur parallelogrammorum ſumma exprimet ſeriei $a + b + c + d +$ etc. $- - - - - - - + x$ ſummam. Quare ad huius ſeriei ſummam inueniendam methodo opus eſt commoda, qua horum parallelogrammorum aggregatum quam proxime poſſit definiri.

§. 4. Per puncta $a, b, c, d, e, f - - - - p$ intelligatur ducta linea curua $abcdef - - - - p$, cuius haec erit natura, vt poſita abſciſſa $AP = n - 1 = t$ ſit applicata $Pp = x$. Quia autem x eſt quantitas ex n et conſtantibus compoſita, ſi loco n ponatur $t + 1$, habebitur aequatio inter coordinatas t et x pro iſta curua. Vel ſi terminus ſeriei vltimum x ſequens ponatur y, cuius ergo index erit $n + 1$, aequatio inter n ſeu AQ et y ſeu Qq exprimet quoque naturam curuae $abc - - - pq$. Data autem hac ſerie dabitur etiam y per n, vnde oritur aequatio inter n et y curuae naturam exprimens.

§. 5. Facta iam hac linea curua perſpicuum eſt aream curuae inter abſciſſam AQ et applicatas Aa ac Qq contentam minorem eſſe quam aggregatum omnium rectangulorum Aβ + Bγ etc. $- - - +$ Pϱ; quippe differentia eſt ſumma omnium triangulorum $ab\beta$, $bc\gamma$ $- - - - - - pq\varrho$. Cum autem aggregatum illorum rectangulorum exhibeat ſummam ſeriei $a + b + c - - - + x$, erit haec ſumma maior quam area AaqQ. Quae vero area cum ſit $=\int y\,dn$, hoc integrali ita accepto vt euaneſcat poſito $n=0$; erit $a+b+c-----+x > \int y\,dn$.

Figura 2. §. 6. Inuento ergo vno limite, quo ſumma ſeriei eſt maior, alterum ſimilem ſequenti modo inueſtigo. Sumtis iterum in axe AP partibus aequalibus AB, BC, CD, ----- PQ, quae ſingulae vnitate exprimantur; applicatae ita conſtituantur vt ſit $B\beta = a$, $C\gamma = b$, $D\delta = c$, ſumtoque $AP = n$ ſit $P\pi = x$, et $Q\varrho = y$. Quemadmodum autem eſt y terminus vltimum x ſequens; ita ſit A terminus primum a antecedens; cui aequalis capiatur $A\alpha$. Quo facto aggregatum rectangulorum $Ba + Cb + Dc ---- Po$ erit aequale ſummae ſeriei $a + b + c + d ----- + x$.

§. 7. Nunc ſimili modo per puncta α, β, γ --- π concipiatur ducta linea curua $\alpha\beta\gamma\pi$, cuius haec erit natura, vt ſumta abſciſſa $AP = n$ ſit applicata $P\pi = x$. Area ergo, quae inter hanc curuam et abſciſſam AP comprehenditur, erit $=\int x\,dn$ integrali hoc ita accepto vt euaneſcat poſito $n = 0$. Area vero iſta maior eſt quam rectangulorum Ba, Cb ----- Po aggregatum, quocirca erit $a+b+c+d------+x < \int x\,dn$. Sunt ergo huius ſeriei limites $\int x\,dn$ et $\int y\,dn$.

§. 8. Obtinebimus autem adhuc propiores ſummae huius ſeriei determinationes, conſideratis triangulis paruis, in vtraque figura neglectis. Addi autem oportet in prima figura haec triangula ad aream curuae $\int y\,dn$, vt ſumma ſeriei obtineatur. Haec vero triangula ſunt

curui-

curuilinea, atque maiora quam si essent rectilinea, quia curua conuexitatem obuertit. Summa autem horum triangulorum rectilineorum est aequalis $(Aa - Qq)AB:2$ seu $\frac{a-y}{2}$. Quare si ad $\int y\,dn$ addatur $\frac{a-y}{2}$ non satis addetur; ideoque erit $a + b + c - - - - - - + x > \int y\,dn + \frac{a-y}{2}$.

§. 9. In secunda figura ab area $A\alpha\pi P$, quae est $= \int x\,dn$, subtrahi deberent omnia triangula $\alpha a \beta$, $\beta b \gamma$ $- - - - \omega o \pi$, ad veram rectangulorum summam inueniendam. Sumatur autem loco trianguli curuilinei $\alpha a \beta$ minus rectilineum triangulum, quod oritur producta recta per γ et β donec occurrat rectae $A\alpha$, quod erit $= \frac{a-b}{2}$ horumque triangulorum omnium summa erit $\frac{a-y}{2}$. Quia vero $\frac{a-y}{2}$ minus est quam summa omnium curuilineorum triangulorum, si $\frac{a-y}{2}$ subtrahatur a $\int x\,dn$, erit $a + b + c - - - - - + x < \int x\,dn - \frac{a+y}{2}$. Figura 2.

§. 10. Horum duorum nouorum limitum prior vero valori multo est propior quam posterior. Ille autem $\int y\,dn + \frac{a-y}{2}$ aliquantulum minor est quam summa $a + b + c - - - - - - + x$ differentia enim est aggregatum omnium segmentorum arcubus ab, bc etc. et chordis ab, bc comprehensorum. Ad haec segmenta vero proxime aestimanda producatur chorda sequens cb in n vsque et an in m bifariam secetur recta lm, quae proxime pro tangente curuae in b haberi poterit. Hinc erit denuo quam proxime segmentum aba, pars tertia trianguli abm, et consequenter pars sexta trianguli abn. Figura 3.

§. 11.

§. 11. Si ergo fuerit $Aa = a$, $Bb = b$ et $Cc = c$, erit $an = a - 2b + c$, et ob $AB = 1$, triangulum $abn = \frac{a-2b+c}{2}$. Huius igitur pars fexta $\frac{a-2b+c}{12}$ aequalis eſt ſegmento primo aba; ſimiliter ergo erit ſecundum ſegmentum $= \frac{b-2c+d}{12}$ et vltimum $= \frac{x-2y+z}{12}$, denotante z terminum indicis $n+2$. Fiet ergo ſumma omnium ſegmentorum $= \frac{a-b}{12} - \frac{y+z}{12}$, quae addita ad ſuperiorem ſummam dat $a + b + c - - - - - - - + x = \int y\,dn + \frac{a}{2} - \frac{y}{2} + \frac{(a-b)}{1} - \frac{(y-z)}{12}$.

§. 12. Valor hic inuentus valde prope accedit ad veram ſeriei aſſumtae ſummam, quia in eo ne ſegmenta quidem neglecimus. Propoſita autem ſerie conuergente effici poteſt, vt haec formula quantumuis prope ad veram ſummam accedat; hocque fieri poteſt, dum aliquot terminorum initialium ſumma reipſa computetur, et ſequentes demum loco a, b, c etc. ſubſtituantur. Quo enim plures termini initiales reipſa addantur, eo exactior proueniet ſeriei ſumma. Atque ſi ſeriei in infinitum continuatae ſumma deſideretur, euaneſcent y et z; atque in $\int y\,dn$ poſito $n = \infty$ erit ſumma ſeriei infinitae $= \int y\,dn + \frac{7a}{12} - \frac{b}{12}$.

§. 13. Vt ſi quaeratur ſumma millies mille terminorum huius ſeriei $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ etc. addantur decem termini initiales actu prodibitque $1,928968$. Reliquorum autem terminorum $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13}$ etc. $- - - - \frac{1}{1000000}$ ſumma inuenietur hoc modo: eſt $a = \frac{1}{11}$, $b = \frac{1}{12}$, $x = \frac{1}{n+10}$ et $y = \frac{1}{n+11}$ et $z = \frac{1}{n+12}$ atque $\int y\,dn = l\frac{n+11}{11}$. Poſito nunc $n = 999990$; erit ſumma deſiderata $= l\frac{1000001}{11}$

+

Fig. 1.

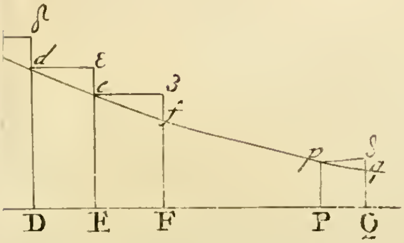


Fig. 2.

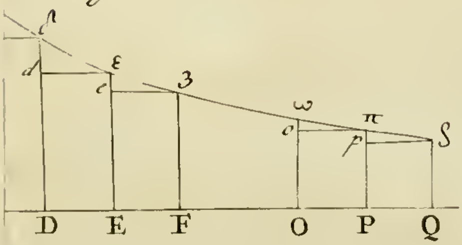
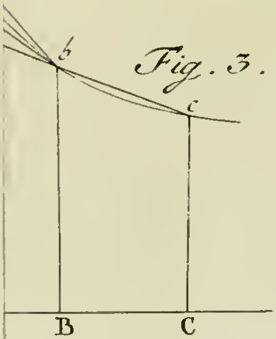


Fig. 3.



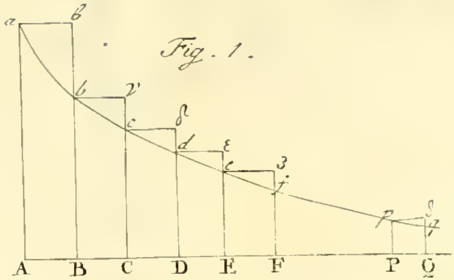


Fig. 1.

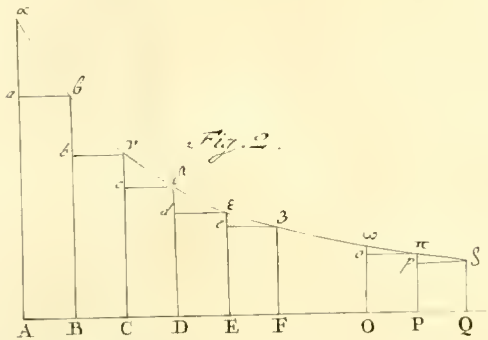


Fig. 2.

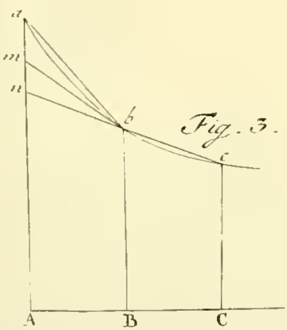


Fig. 3.

$+\frac{1}{22}+\frac{1}{132}-\frac{1}{144}-\frac{1}{2555562}-\frac{1}{12833012}+\frac{1}{12833524}+2,928968$ seu $=14,392669$. q. pr.

§. 14. Proposita sit nunc haec series $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}$ etc., cuius summa in infinitum desideretur. Si primo decem termini initiales addantur habebitur $1,549768$. Pro reliquis vero erit $a=\frac{1}{121}$, $b=\frac{1}{144}$; $x=\frac{1}{(n+10)^2}$ et $y=\frac{1}{(n+11)^2}$. Ex his fit $\int y\,dn=\frac{1}{11}-\frac{1}{n+11}$; atque posito $n=\infty$ erit $\int y\,dn=\frac{1}{11}$. Seriei ergo propositae in infinitum continuatae summa erit $\frac{1}{11}+\frac{7}{12.121}-\frac{1}{12.144}+1,549678$. Quae expressio in partibus decimalibus dat $1,644920$.

INVENTIO SVMMAE CVIVSQVE SERIEI EX DATO TERMINO GENERALI.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Cum, quae superiore dissertatione de summatione serierum methodo geometrica exposui, diligentius considerassem, eandemque summandi rationem analytice inuestigassem; perspexi, id, quod geometrice elicui, deduci posse ex peculiari quadam summandi methodo, cuius iam ante triennium in Dissertatione de summatione serierum mentionem feceram; postmodum vero de ea non amplius cogitaueram. Vim igitur analyticae methodi penitius perscrutatus, deprehendi non solum formulam geometrice inuentam in ea contineri; sed etiam eius ope adhuc pluribus terminis adiiciendis magis perfici posse, ita vt tandem veram summam absolute exhibeat. Geometrica autem via eosdem terminos inuenire summe difficile videtur.

§. 2. In illa autem dissertatione de summatione serierum, si fuerit terminus generalis cuiuspiam seriei x, eiusque index n, vniuersali modo pro termino summatorio exhibui sequentem formam $\int x\,dn + \frac{x}{2} + \frac{dx}{12\,dn} - \frac{d^3x}{720\,dn^3} +$ etc. ex qua differentialia ipsius x, quia x per n dari ponitur, a differentialis dn, quod constans assumitur, potestatibus, destruentur; ita vt summa algebraica obtineatur, si quidem $x\,dn$ integrationem admittat. In integratione vero ipsius $x\,dn$ tanta adiici debet constans, vt tota expressio euanescat posito $n = 0$.

§. 3. Quia igitur hanc formulam eiusque vsum accuratius in ista dissertatione persequi constitui; ante omnia modum, quo eam formulam sum consecutus exponam: Singularis enim est analysis, qua in hac re sum vsus, et complura satis praeclara in Analytica suppeditat, partim noua partim iam cognita, quae autem nusquam quantum recordor, satis euidenter sunt demonstrata.

§. 4. Ex natura calculi infinitesimalis sequitur, si fuerit y quomodocunque per x et constantes datum, atque loco x ponatur $x + dx$ tum abiturum y in $y + dy$. Si

Si iam porro x elemento dx augeatur, vel x abeat in $x + 2\,dx$; tum loco y habebitur $y + 2\,dy + ddy$. Atque si x denuo elemento dx crescat, y transibit in $y + 3\,dy + 3\,ddy + d^3y$, vbi coefficientes sunt iidem qui in potestatibus binomii. Ex his sequitur si loco x ponatur $x + m\,dx$ tum y abire in hanc formam: $y + \frac{m}{1}dy + \frac{m(m-1)}{1.\ 2.}ddy + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ \ 3.}d^3y +$ etc.

§. 5. Sit iam ad nostrum institutum m numerus infinite magnus, quo $m\,dx$ quantitatem finitam significare queat; erit valor, quem y, posito $x + m\,dx$ loco x, habebit, iste: $y + \frac{m\,dy}{1} + \frac{m^2d^2y}{1.2} + \frac{m^3d^3y}{1.2.3} + \frac{m^4d^4y}{1.2.3.4} +$ etc. Si nunc fiat $m\,dx = a$ seu $m = \frac{a}{dx}$, induet y, si pro x ponatur $x + a$, hanc formam $y + \frac{a\,dy}{1\,dx} + \frac{a^2\,ddy}{1.2.dx^2} + \frac{a^3d^3y}{1.2.3.dx^3}$ + etc. in qua omnes termini sunt finitae magnitudinis.

§. 6. Hanc ipsam seriem, quae valorem ipsius y transmutatum exhibet, si loco x ponatur $x + a$, primus produxit *Cl. Taylor* in Methodo Increm. inu. eamque ad multos egregios vsus accommodauit. Sequitur scilicet primum eleuatio binomii ad quamcunque dignitatem. Vt si quaeratur valor ipsius $(x + a)^m$ pono $y = x^m$; eritque $(x + a)^m$ valor ipsius y, si loco x ponatur $x + a$. Cum igitur sit $dy = m\,x^{m-1}dx$; $d^2y = m(m-1)x^{m-2}dx^2$ et ita porro erit $(x + a)^m = x^m + \frac{m\,a\,x^{m-1}}{1} + \frac{m(m-1)a^2x^{m-2}}{1.2}$ + etc.

§. 7. Hanc porro feriem *Taylorus* adhibet ad radicem ex quacunque aequatione proxime inueniendam, id quod hoc pacto perficit. Sit aequatio quaecunque incognitam z inuoluens, nempe $Z = o$, vbi Z eft quantitas ex incognita z et cognitis vtcunque compofita. Deinde fumit x pro valore ipfi z prope aequali, et quantitatem ipfius Z, quae prodit fi loco z ponatur x ponit $= y$, ita vt foret $y = o$, fi x effet verus ipfius z valor.

§. 8. At cum x a vero ipfius z valore aliquantum discrepet, ponit verum ipfius z valorem effe $x + a$. Quare perfpicuum eft fi in y loco x ponatur $x + a$, tum euaniturum y. At loco x fi ponatur $x + a$ tum abibit y in $y + \frac{a\,dy}{1.\,dx} + \frac{a^2\,ddy}{1.2.\,dx^2} + \frac{a^3\,d^3y}{1.2.3.\,dx^3} +$ etc. Hancob rem ergo erit $o = y + \frac{a\,dy}{1.\,dx} + \frac{a^2\,ddy}{1.2.\,dx^2} +$ etc. Ex qua aequatione valor ipfius a erutus dabit complementum a ad x addendum requifitum, quo obtineatur incognita z.

§. 9. Quia autem x ad z prope accedere ponitur, erit a quantitas valde parua, ita vt prae duobus terminis initialibus fequentes omnes euanefcere queant. Hocque pacto oritur $a = -\frac{y\,dx}{dy}$ atque $z = x - \frac{y\,dx}{dy}$ qui eft valor ipfius z multo magis propinquus quam x tantum. Vt pro hac aequatione $z^3 - 3z - 20 = 0$ erit $y = x^3 - 3x - 20$ et $dy = 3x^2 - 3$ ideoque $z = x - \frac{x^3 + 3x + 20}{3xx - 3} = \frac{2x^3 + 20}{3xx - 3}$. Sumto nunc primo $x = 3$ erit $z = 3\frac{1}{12}$, hocque valore denuo pro x pofito proxime z inuenietur.

§. 10. Si porro detur conditio quaecunque functionis y, quae certo ipfius x cafu locum habeat, formula fuperior abibit

abibit in aequationem, in qua proprietas ipsius y continebitur. Vt si y huiusmodi fuerit functio ipsius x vt euanescat posito $x = 0$; pono $a = -x$, fiet enim hoc modo $x + a = 0$, atque erit $0 = y - \frac{xdy}{1.dx} + \frac{x^2 ddy}{1.2.dx^2} - \frac{x^3 d^3y}{1.2.3.dx^3}$ + etc. seu $y = \frac{xdy}{1.dx} - \frac{x^2 ddy}{1.2 dx^2} + \frac{x^3 d^3 y}{1.2.3.dx^3}$ − etc. In qua aequatione omnium earum functionum ipsius x natura continetur, quae euanescunt posito $x = 0$.

§. 11. Si pro y ponatur $\int z dx$; erit $dy = z dx$; $ddy = dz dx$; $d^3 y = d^2 z dx$ etc. quibus valoribus substitutis habebitur $\int z dx = \frac{xz}{1} - \frac{x^2 dz}{1.2.dx} + \frac{x^3 ddz}{1.2.3.dx^2}$ − etc. in qua aequatione integrale ipsius $z dx$ per seriem infinitam exhibetur. Atque haec est generalis quadratura curuarum, quam *Cl. Ioh. Bernoulli* in Act. Lips. tradidit; analysin autem, qua ad hanc seriem peruenit, non adiunxit.

§. 12. Missis autem his, quae ad nostrum institutum minus pertinent, pergo ad series. Sit igitur series quaecunque A + B + C + D - - - - - - + X; in qua A denotat terminum primum; B secundum; et X eum cuius index est x; ita vt X sit terminus generalis seriei propositae. Ponatur autem summa huius progressionis A + B + C + D - - - - + X = S; erit S terminus summatorius; atque tam S quam X, si series fuerit determinata, ex x et constantibus erunt composita.

§. 13. Quia iam S exhibet summam tot terminorum seriei, quot sunt vnitates in x; si in S loco x scribatur $x - 1$, habebitur prior summa termino vltimo X

 immi-

X imminuta. Hac igitur ſubſtitutione abibit S in $S - X$. Comparentur ergo haec cum ſuperiore formula; erit $S = y$ et $a = -1$; quamobrem valor ipſius S transmutatus ſeu $S - X$ erit $= S - \frac{dS}{1\,dx} + \frac{ddS}{1.2.dx^2} - \frac{d^3S}{1.2.3.dx^3} + \text{etc.}$ Ex quo oritur iſta aequatio $X = \frac{dS}{1.dx} - \frac{ddS}{1.2.dx^2} + \frac{d^3S}{1.2.3.dx^3} - \frac{d^4S}{1.2.3dx^4} + \text{etc.}$

§. 14. Ope huius ergo aequationis ex dato termino ſummatorio ſeriei cuiusque inuenitur terminus generalis. Quod autem, cum alias ſit facillimum, ſuperfluum foret hac methodo ad terminum generalem ex ſummatorio inueniendum vti. Id autem maxime commodi huic aequationi accidit, vt ſinguli termini ſint euoluti, eaque idcirco ad ſingulares vſus poſſit accommodari. Methodo enim cognita haec ſeries $X = \frac{dS}{1.dx} - \frac{ddS}{1.2.dx^2} + \frac{d^3S}{1.2.3.dx^3} - \text{etc.}$ poteſt inuerti vt ex termino generali X determinetur ſummatorius S; quod ipſum maxime deſideratur.

§. 15. Ponamus igitur $\frac{dS}{dx} = \alpha X + \frac{\beta dX}{dx} + \frac{\gamma ddX}{dx^2} + \frac{\delta d^3X}{dx^3} + \frac{\varepsilon d^4X}{dx^4} + \text{etc.}$ ita vt ſit $S = \alpha\int X dx + \beta X + \frac{\gamma dX}{dx} + \frac{\delta ddX}{dx^2} + \text{etc.}$ Erit ergo $\frac{ddS}{dx^2} = \frac{\alpha dX}{dx} + \frac{\beta ddX}{dx^2} + \frac{\gamma d^3X}{dx^3} + \frac{\delta d^4X}{dx^4} + \text{etc.}$ et $\frac{d^3S}{dx^3} = \frac{\alpha ddX}{dx^2} + \frac{\beta d^3X}{dx^3} + \frac{\gamma d^4X}{dx^4} + \text{etc.}$ et $\frac{d^4S}{dx^4} = \frac{\alpha d^3X}{dx^3} + \frac{\beta d^4X}{dx^4} + \text{etc.}$ atque $\frac{d^5S}{dx^5} = \frac{\alpha d^4X}{dx^4} + \text{etc.}$

§. 16. Subſtituantur ergo iſtae ſeries loco cuiusque termini ſuperioris ſeriei; et termini ſimiles inter ſe comparentur nihiloque aequales ponantur. Quo facto coëfficentes α, β, γ etc. ita determinabuntur, vt ſit, vti ſequitur:

$\alpha = 1$

$$\alpha = 1$$
$$\beta = \tfrac{\alpha}{2}$$
$$\gamma = \tfrac{\beta}{2} - \tfrac{\alpha}{6}$$
$$\delta = \tfrac{\gamma}{2} - \tfrac{\beta}{6} + \tfrac{\alpha}{24}$$
$$\varepsilon = \tfrac{\delta}{2} - \tfrac{\gamma}{6} + \tfrac{\beta}{24} - \tfrac{\alpha}{120}$$
$$\zeta = \tfrac{\varepsilon}{2} - \tfrac{\delta}{6} + \tfrac{\gamma}{24} - \tfrac{\beta}{120} + \tfrac{\alpha}{720} \text{ etc.}$$

§. 17. Coëfficientes ergo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. feriem conftituunt huius indolis, vt quisque terminus ex omnibus antecedentibus determinetur; exiftente termino primo $= 1$. Numeri autem per quos finguli terminorum antecedentium diuidi debent, conftituunt progreffionem a *Wallifio* hypergeometricam dictam; 2, 6, 24, 120, 720, 5040, etc. Ipfa autem feries coëfficientium α, β, γ etc. ita eft comparata, vt vix credam pro ea terminum generalem poffe exhiberi.

§. 18. Pro inftituto ergo noftro contenti effe debemus feriem coëfficientium quousque libuerit continuaffe, id quod ex lege progreffionis facile perfici poteft. Inueni autem hanc feriem, vt fequitur:

$$+ 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3.2} + 0 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6} - 0$$
$$+ \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.6} + 0 - \frac{3}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}$$
$$- 0 + \frac{5}{1 - - - - - - - 11.6} + 0 - \frac{691}{1 - - - - - - 13.210}$$
$$- 0 + \frac{35}{1 - - - - - - - - 15.2} + 0 - \frac{3617}{1 - - - - - - - 17.30}$$

in qua ferie notabile eft, quod omnes termini pares praeter fecundum euanefcant.

§. 19.

§. 19. Si ergo loco α, β, γ etc. hi termini substituantur; habebitur terminus summatorius $S = \int X\,dx + \frac{X}{1.2} + \frac{dX}{1.2.3.2dx} - \frac{d^3X}{1.2.3.4.5.6dx^3} + \frac{d^5X}{1 - - - - - 7.6dx^5} - \frac{3d^7X}{1 - - - 9.10.dx^7} + \frac{5d^9X}{1 - - - - - - - - 11.6dx^9} + \frac{691d^{11}X}{1 - - - - 13.210dx^{11}} + \frac{35d^{13}X}{1 - - - - - 15.2dx^{13}} - \frac{3617d^{15}X}{1 - - - - - - - 17.30dx^{15}} +$ etc.

§. 20. Series haec insignem habet vsum in summis progressionum algebraicarum inueniendis, quarum in terminis generalibus x nusquam in denominatorem ingreditur. Quia enim hac ratione x vbique habet exponentes affirmatiuos integros, eius differentialia tandem euanescent, atque series abrumpetur, vnde ipse terminus summatorius finito terminorum numero reperietur. In quo inueniendo statim omnes termini, qui x non continent reiici possunt, quia in $\int X\,dx$ tanta constans addi debet, quae faciat vt fiat $S = o$, posito $x = o$.

§. 21. Quo vsus huius formulae clarius percipiatur, exempla quaedam afferre conuenit. Sit ergo $X = x$ seu series summanda haec $1 + 2 + 3 - - - - - - + x$; propter $\int X\,dx = \frac{x^2}{2}$ erit summa $S = \frac{x^2 + x}{2}$, est enim $\frac{dX}{dx}$ constans, et propterea reiicitur, et sequentia differentialia sponte euanescunt. Sit porro $X = x^2$ seu ista series $1 + 4 + 9 - - - - + x^2$ summanda, erit $\int X\,dx = \frac{x^3}{3}$ et $\frac{dX}{dx} = 2x$ ideoque summa seriei $S = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$.

§. 22. Sit nunc haec series generalis potestatum numerorum naturalium proposita $1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n +$ etc. cuius terminus generalis est x^n. Habebitur ergo $X = x^n$ et $\int X\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Differentialia autem

ita

ita se habebunt vt sit $\frac{dX}{dx} = nx^{n-1}$; $\frac{d^3X}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$; $\frac{d^5X}{dx^5} = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}$; etc. His igitur valoribus substitutis erit terminus summatorius seriei propositae $S = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{2} + \frac{nx^{n-1}}{2.6} - \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{2.3.4.30} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}}{2.3.4.5.6.42} - \frac{n(n-1)----(n-6)x^{n-7}}{2.3------8.30} + \frac{n(n-1)-----(n-8)5x^{n-9}}{2.3------10.66} - \frac{n(n-1)---(n-10)691x^{n-11}}{2.3------13.2730} + \frac{n(n-1)--(n-12)7x^{n-13}}{2.3---14.6} - \frac{n(n-1)-----(n-14)3617x^{n-15}}{2.3---------16.510} +$ etc. Ad quam seriem, quousque opus est continuandam, oportet, vt superior illa series α, β, γ, etc. eousque continuetur.

§. 23. Ex hac igitur generali summatione seriei cuius terminus generalis est x^n confici possunt summae specialium serierum potestatum vt sequitur:

$\int x^1 = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$

$\int x^2 = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$

$\int x^3 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}$

$\int x^4 = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30}$

$\int x^5 = \frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{2} + \frac{5x^4}{12} - \frac{x^2}{12}$

$\int x^6 = \frac{x^7}{7} + \frac{x^6}{2} + \frac{x^5}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x}{42}$

 $\int x^7 =$

$$\int x^7 = \frac{x^8}{8} + \frac{x^7}{2} + \frac{7x^6}{12} - \frac{7x^4}{24} + \frac{x^2}{12}$$

$$\int x^8 = \frac{x^9}{9} + \frac{x^8}{2} + \frac{2x^7}{3} - \frac{7x^5}{15} + \frac{2x^3}{9} - \frac{x}{30}$$

$$\int x^9 = \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^9}{2} + \frac{3x^8}{4} - \frac{7x^6}{10} + \frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{20}$$

$$\int x^{10} = \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{10}}{2} + \frac{5x^9}{6} - x^7 + x^5 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x}{66}$$

$$\int x^{11} = \frac{x^{12}}{12} + \frac{x^{11}}{2} + \frac{11x^{10}}{12} - \frac{11x^8}{8} + \frac{11x^6}{6} - \frac{11x^4}{8} + \frac{5x^2}{12}$$

$$\int x^{12} = \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{12}}{2} + x^{11} - \frac{11x^9}{6} + \frac{22x^7}{7} - \frac{33x^5}{10} + \frac{5x^3}{3} - \frac{691x}{2730}$$

$$\int x^{13} = \frac{x^{14}}{14} + \frac{x^{13}}{2} + \frac{13x^{12}}{12} - \frac{143x^{10}}{60} + \frac{143x^8}{28} - \frac{143x^6}{20} + \frac{65x^4}{12} - \frac{691x^2}{420}$$

$$\int x^{14} = \frac{x^{15}}{15} + \frac{x^{14}}{2} + \frac{7x^{13}}{6} - \frac{91x^{11}}{30} + \frac{143x^9}{18} - \frac{143x^7}{10} + \frac{91x^5}{6} - \frac{691x^3}{90} + \frac{7x}{6}$$

$$\int x^{15} = \frac{x^{16}}{16} + \frac{x^{15}}{2} + \frac{5x^{14}}{4} - \frac{91x^{12}}{24} + \frac{143x^{10}}{12} - \frac{429x^8}{16} + \frac{455x^6}{12} - \frac{691x^4}{24} + \frac{35x^2}{4}$$

$$\int x^{16} = \frac{x^{17}}{17} + \frac{x^{16}}{2} + \frac{4x^{15}}{3} - \frac{14x^{13}}{3} + \frac{52x^{11}}{3} - \frac{143x^9}{3} + \frac{260x^7}{3} - \frac{1382x^5}{15} + \frac{140x^3}{3} - \frac{3617x}{510}$$

§. 24. Sin autem x non vbique habuerit exponentes affirmatiuos in termino generali feriei, tum quoque expreffio fummae infinitis conftat terminis; quia huiusmodi feries generalem fummationem non admittunt, fed quasque quadraturas inuoluunt. Interim tamen obferuaui ope huius methodi eiusmodi feries facile admodum proxime fummari poffe, quod infignem habet vtilitatem in feriebus, quae parum conuergunt, et alias difficulter fummantur. Quod quomodo efficiendum fit, exemplis docebo.

§. 25. Confiderabo igitur primum feries harmonicas, et prae ceteris quidem hanc $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ etc. cuius terminus generalis eft $\frac{1}{x}$; fummatorius vero, fit S, quaeritur. Eft ergo $X = \frac{1}{x}$ et $\int X\,dx =$ Conft. $+ lx$. Atque porro $\frac{dX}{dx} = \frac{-1}{x^2}$; $\frac{d^3X}{dx^3} = \frac{-1.2.3}{x^4}$; $\frac{d^5X}{dx^5} = -\frac{1.2.3.4.5}{x^6}$ etc. His fubftitutis prodit S $=$ Conft.

+

$+ lx + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6} + \frac{1}{240x^8} - \frac{1}{132x^{10}} + \frac{691}{32760x^{12}} - \frac{1}{12x^{14}} +$ etc. Vbi conſtans addenda ita debet eſſe comparata vt poſito $x = 0$ fiat $S = 0$; Ex hoc vero ob omnes terminos infinite magnos conſtans determinari non poteſt.

§. 26. Ad conſtantem vero determinandam alium caſum aſſumi oportet, quo ſumma ſeriei eſt cognita; qui ergo habebitur, ſi certus terminorum numerus in vnam ſummam colligatur. Addantur ergo 10 termini initiales $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{10}$; reperieturque eorum ſumma $= 2,9289682539682539$; cui aequalis eſſe debet ſumma eorundem terminorum ex formula nempe, Conſt. $+ l10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{1200} + \frac{1}{1200000} - \frac{1}{252000000} + \frac{1}{24000000000} - \frac{1}{1320000000000}$ etc. Quo facto reperietur propter $l10 = 2,302585092994045684$ conſtans illa addita $= 0,5772156649015329$; hacque ſemel determinata ſumma quotcunque terminorum huius ſeriei reperietur.

§. 27. Hac igitur ratione inueſtigaui ſummam 100, 1000, 10000 etc. terminorum ſeriei $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ etc. inuenique vt ſequitur:

$$\begin{aligned}
\int 10 &= 2,9289682539682539 \\
\int 100 &= 5,1873775176396203 \\
\int 1000 &= 7,4854708605503449 \\
\int 10000 &= 9,7876060360443823 \\
\int 100000 &= 12,0901461298634280 \\
\int 1000000 &= 14,3927267228657236
\end{aligned}$$

 §. 28.

§. 28. Si primus tantum terminus ſeriei 1 capiatur; erit $S = 1$, et $x = 1$ ideoque $lx = o$. Habebitur ergo ex aequatione $0,42278433509846 70 = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120} - \frac{1}{252} + \frac{1}{240} - \frac{1}{132} + \frac{691}{32760} - \frac{1}{12} +$ etc. Huius ergo ſeriei admodum irregularis et ne conuergentis quidem inuenta eſt ſumma quam proxime. Seriei autem in infinitum continuatae ſumma erit $= l\infty + 0,57721566490153 29$, quae prodit poſito $x = \infty$.

§. 29. Progrediamur nunc ad hanc ſeriem $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$ etc. conſiderandam, in qua eſt $X = \frac{1}{2x-1}$ et $\int X dx =$ Conſt. $+ \frac{1}{2} l(2x-1)$ atque $\frac{dX}{dx} = \frac{-2}{(2x-1)^2}$; $\frac{d^3X}{dx^3} = \frac{-2.4.6}{(2x-1)^4}$; $\frac{d^5X}{dx^5} = \frac{-2.4.6.8.10}{(2x-1)^5}$ etc. His igitur inuentis erit ſeriei propoſitae ſumma $S =$ Conſt. $+ \frac{1}{2} l(2x-1) + \frac{1}{2(2x-1)} - \frac{1}{6(2x-1)^2} + \frac{1}{15(2x-1)^4} - \frac{8}{63(2x-1)^6} + \frac{8}{15(2x-1)^8} - \frac{128}{33(2x-1)^{10}} + \frac{256.691}{4095(2x-1)^{12}} - \frac{2048}{3(2x-1)^{14}} + \frac{1024.3617}{255(2x-1)^{16}} -$ etc.

§. 30. Conſtans autem quantitas in hoc caſu actu addendis aliquot terminis non tam expedite poteſt determinari quam in caſu praecedenti. Hoc vero caſu ſubſidium aliquod vſu venit, quo haec conſtans ex praecedente determinari poteſt. Scilicet ſeriei $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$ etc. in infinitum continuatae ſumma eſt $=$ Conſt. $+ \frac{1}{2} l\infty$. Subtrahatur ab huius ſeriei duplo prior ſeries harmonica; habebitur $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$ etc. cuius ſumma vt conſtat eſt $l2$. Erit ergo $l2 =$ conſt. $+ l\infty - l\infty - 0, 577215$ etc. ideoque haec conſtans quaeſita $= 0, 63518142273073 92$.

§. 31.

§. 31. Pergo ad feries magis compofitas, et confidero hanc $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc. reciprocam quadratorum, cuius terminus generalis eft $\frac{1}{x^2} = X$. Erit ergo $\int X dx = \text{Conft.} - \frac{1}{x}$, atque $\frac{dX}{dx} = \frac{-2}{x^3}$; $\frac{d^3X}{dx^3} = \frac{-2.3.4}{x^5}$; $\frac{d^5X}{dx^5} = \frac{-2.3.4.5.6}{x^7}$ etc. His fubftitutis erit $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \cdots \frac{1}{x^2} = S = \text{Conft.} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{30x^5} - \frac{1}{42x^7} + \frac{1}{30x^9} - \frac{5}{66x^{11}} + \frac{691}{2730x^{13}} - \frac{7}{6x^{15}} +$ etc. Vbi conftantis quantitas ex cafu fpeciali debet determinari.

§. 32. Ipfo ergo actu addidi decem terminos initiales feriei iftius, quorum fummam inueni 1, 549767731166540. Ad hanc ergo cum fit hoc cafu $x = 10$, fi addatur $\frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \frac{1}{6000} - \frac{1}{3000000} + \frac{1}{4200000000} - \frac{1}{300000000000} + \frac{1}{1320000000000000} - \frac{691}{27300000000000000000} + \frac{7}{6000000000000000000}$ — etc. Ex hoc ergo prodit conftans illa addenda $= 1$, 64493406684822643647. Huicque conftanti aequalis eft feriei in infinitum continuatae fumma; pofito enim $x = \infty$ fit $S = \text{Conft.}$ euanefcentibus omnibus terminis.

§. 33. Simili modo pro ferie reciproca cuborum $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} +$ etc. fi addantur decem termini initiales habebitur eorum fumma haec 1, 197531985674193. Vnde inuenitur conftans, quae in fummatione huius feriei addi debet $= 1$, 202056903159594. Atque huic numero aequalis eft feriei $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64}$ in infinitum continuatae fumma. Atque pro biquadratis $1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} +$ etc. et fumma $= 1$, 08232323371 10824.

34 Consideremus nunc hac methodo seriem, qua area circuli, cuius diameter est $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} -$ etc. vel $\frac{2}{1.3} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{9.11} + \frac{2}{13.15}$ etc. cuius terminus generalis est $\frac{2}{(4x-3)(4x-1)}$ vel resoluendo in factores $\frac{1}{4x-3} - \frac{1}{4x-1}$. Ad summam ergo huius seriei quam proxime inueniendam est $X = \frac{1}{4x-3} - \frac{1}{4x-1}$ atque $\int X\,dx = \text{Const.} - \frac{1}{4}\, l \frac{4x-1}{4x-3}$; et $\frac{dX}{dx} = \frac{-4}{(4x-3)^2} + \frac{4}{(4x-1)^2}$; $\frac{d^3X}{dx^3} = \frac{-4.8.12}{(4x-3)^4} + \frac{4.8.12}{(4x-1)^4}$ etc. Ex his erit seriei $\frac{2}{1.3} + \frac{2}{5.7} - - - - + \frac{2}{(4x-3)(4x-1)}$ summa $S = \text{Const.} - \frac{1}{4}\, l \frac{4x-1}{4x-3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4x-3} - \frac{1}{4x-2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(4x-3)^2} - \frac{1}{(4x-1)^2}\right) + \frac{8}{15}\left(\frac{1}{(4x-3)^4} - \frac{1}{(4x-1)^4}\right) - \frac{256}{63}\left(\frac{1}{(4x-3)^6} - \frac{1}{(4x-1)^6}\right) + \frac{1024}{15}\left(\frac{1}{(4x-3)^8} - \frac{1}{(4x-1)^8}\right) - \frac{4^8}{33}\left(\frac{1}{(4x-3)^{10}} - \frac{1}{(4x-1)^{10}}\right) +$ etc. Haec vero series etiamsi decem termini addantur non satis conuergit, quo valor constantis commode possit exhiberi. Constans autem quater sumta exhibet peripheriam circuli existente diametro $= 1$.

INVE-

INVESTIGATIO BINARVM CVRVARVM, QVARVM ARCVS EIDEM ABSCISSAE RESPONDENTES SVMMAM ALGEBRAICAM CONSTITVANT.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

PRoblema, cuius solutionem hac dissertatione exponere constitui, sequentes continet conditiones. Requiruntur in eo I. duae curuae algebraicae, quarum II. neutra sit rectificabilis, quae tamen ita debent esse comparatae, vt duo arcus III. eidem abscissae respondentes IV. summam constituant algebraicam. Harum quatuor conditionum quacunque omissa problema fit solutu admodum facile, omnibus autem satisfacere maxime videtur difficile. Prima quidem conditione omissa, si admittantur curuae transcendentes, reliquis conditionibus facile satisfiet. Si secunda omittatur, quaelibet duae curuae algebraicae et rectificabiles problemati satisfacient. Tertia quidem neglecta difficilior est solutio, sed tamen ex iis quae Celeb. Viri *Hermanus* et *Bernoullius* de reductione quadraturarum ad rectificationes cur-

curuarum algebraicarum dederunt, ſolutio facile deducitur. Quarta autem conditio, ſi omittatur, ne quidem problema erit, cum omnes curuae algebraicae non rectificabiles reliquis conditionibus ſatisfaciant.

§. 2. Ad generalem huius problematis ſolutionem vtor formulis, quas citati Viri Celeb. dederunt pro curuis vel rectificabilibus, vel quarum rectificatio a data quadratura pendet. His enim formulis effici poteſt, vt curuae ſint algebraicae, vt ſint non rectificabiles, atque vt arcuum ſumma ſit rectificabilis. Monſtrabo vero etiam, quomodo abſciſſae aequales reddi poſſint. Quo facto omnibus conditionibus erit ſatisfactum, atque problema generaliter ſolutum. Tam late enim iſtae formulae patent, vt, niſi praeter neceſſitatem reſtrictio adhibeatur, omnes omnino curuas problemati ſatisfacientes exhibere debeant.

§. 3. Deſignatis igitur curuis quaeſitis per litteras A et B, erit ex illis formulis

	in Curua A		in Curua B
abſciſſa	$\frac{(dP^2-dQ^2)^{\frac{3}{2}}}{dQddP-dPddQ}$	abſciſſa	$\frac{(dp^2-dq^2)^{\frac{3}{2}}}{dqddp-dpddq}$
applicata	$P+\frac{dQ(dP^2-dQ^2)}{dQddP-dPddQ}$	applicata	$p+\frac{dq(dp^2-dq^2)}{dqddp-dpddq}$
arcus	$Q+\frac{dP(dP^2-dQ^2)}{dQddP-dPddQ}$	arcus	$q+\frac{dp(dp^2-dq^2)}{dqddp-dpddq}$

His formulis iam obtinetur, quod alias maximam pareret difficultatem, vt ambae curuae ſint algebraicae, ſi modo ſi modo P ponatur quantitas algebraica. Deinde rectificabiles non erunt, ſi Q et q quantitates tranſcendentes inuoluunt. Tertio arcuum ſumma erit rectificabilis ſi $Q+q$ fuerit quantitas algebraica, etiamſi Q et q ſeorſim tales non ſint. Cum autem his conditionibus fuerit ſatisfactum, abſciſſae inter ſe aequales ſunt efficiendae.

§. 4. Efficiamus primo abſciſſas inter ſe aequales eritque $\frac{(dP^2-dQ^2)^{\frac{3}{2}}}{dQ\,ddP-dP\,ddQ}=\frac{(dp^2-dq^2)^{\frac{3}{2}}}{dq\,ddp-dp\,ddq}$. Fiat ad hoc praeſtandum $dQ=R\,dP$ et $dq=r\,dp$. Quo poſito habebitur $\frac{(1-R^2)^{\frac{3}{2}}dP}{-dR}=\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}dp}{-dr}$, hincque $dP=\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}dR\,dp}{(1-R^2)^{\frac{3}{2}}dr}$; quod differentiale, quia P debet eſſe quantitas algebraica, eſt integrabile reddendum. Sunt autem R et r quantitates algebraicae, ob curuas A et B algebraicas, quare et $\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}dR}{(1-R^2)^{\frac{3}{2}}dr}$ erit quantitas algebraica. Poſito igitur breuitatis gratia $\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}dR}{(1-R^2)^{\frac{3}{2}}dr}=T$, erit $dP=T\,dp$, ſeu $P=Tp-\int p\,dT$. Quo ergo P ſit quantitas algebraica, facio $\int p\,dT=N$, eritque $p=\frac{dN}{dT}$ et $P=\frac{T\,dN}{dT}-N$.

§. 5. Hac igitur ratione iam aſſecuti ſumus valores algebraicos pro P et p, quibus ſubſtitutis vtriusque curuae abſciſſae fiunt aequales. Praeterea curuae ipſae erunt algebraicae, ſi modo R, r et N fuerint tales. Sed quo arcuum ſumma fiat quoque algebraica, Q et q ita determinari debent, vt $Q + q$ ſit quantitas algebraica. Eſt vero $Q + q = \int R\, dP + \int r\, dp = RP + rp - \int P dR - \int p\, dr$. Ponatur igitur $\int P dR + \int p\, dr = M$, eritque $P = \frac{dM - p\,dr}{dR}$. Atque $Q + q = RP + rp - M$.

§ 6. Cum autem iam ſupra inuentum ſit $p = \frac{dN}{dT}$ et $P = \frac{T\,dN}{dT} - N$, ſubſtituantur hi valores in aequatione $P dR + p\,dr = dM$. Quo facto prodibit $\frac{T\,dN\,dR}{dT} - N dR + \frac{dN\,dr}{dT} = dM$. Quia vero M eſt quantitas algebraica, oportet vt hic ipſius dM valor poſſit integrari. Integratione autem inſtituta prodit $M = \frac{TN\,dR}{dT} + \frac{N\,dr}{dT} - \int N (dR + d.\frac{T\,dR}{dT} + d.\frac{dr}{dT})$. Sit itaque hoc integrale $= u$, ideoque debet eſſe $N = \frac{du}{dR + d.\frac{T\,dR}{dT} + d.\frac{dr}{dT}}$; vbi pro R, r et u quantitates quaecunque algebraicae accipi poterunt.

§. 7. Sumtis igitur pro R, r et u functionibus quibuscunque indeterminatae z, dabitur quoque T in z cum ſit $T = \frac{(1 - r^2)^{\frac{3}{2}} dR}{(1 - R^2)^{\frac{3}{2}} dr}$. Atque ex poſtrema aequatione reperietur quoque N in z. Inuenta autem N habebitur $M = \frac{TN\,dr}{dT} + \frac{N\,dR}{dT} - u$. Similique modo dabuntur

buntur P et p per z ex aequationibus $P=\frac{TdN}{dT}-N$ et $p=\frac{dN}{dT}$. Denique habebitur $Q+q=RP+rp-M$.

§. 8. His igitur determinationibus consecuti sumus primo; vt curuarum A et B abscissae sint aequales, secundo vt vtraque curua sit algebraica, et tertio vt arcuum summa sit rectificabilis. Quare videamus, an quoque conditioni reliquae, qua vtraque curua per se debet esse irrectificabilis, sit satisfactum. Hoc quidem iam factum esse videtur, cum nusquam neque Q neque q seorsim integrabiles fecerimus. Attamen ne forte algebraici valores pro Q et q proueniant, cauendum tantum est ne $\frac{drdN}{dT}$ fiat integrabile. Nam cum sit $dq=rdp$ erit $q=rp-\int pdr=rp-\int\frac{drdN}{dT}$. Atque $Q=RP-M+\int\frac{drdN}{dT}$.

§. 9. Quo autem appareat, quomodo euitari possit integrabilitas ipsius $\frac{drdN}{dT}$, problema etiam quinta adiecta conditione soluam, qua postuletur vt curua vtraque non solum sit irrectificabilis, sed etiam vt vtriusque rectificatio a data pendeat quadratura, puta a $\int Zdz$. Ad hoc igitur efficiendum debebit $\int\frac{drdN}{dT}$ ad $\int Zdz$ reduci. Est vero $\int\frac{drdN}{dT}=\frac{Ndr}{dT}-\int Nd.\frac{dr}{dT}=\frac{Ndr}{dT}-\int\frac{du\,d.\frac{dr}{dT}}{dR+d.\frac{TdR}{dT}+d.\frac{dr}{dT}}$ posito loco N eius valore §. 6. inuento.

§. 10. Ponatur breuitatis gratia $\frac{d.\frac{dr}{dT}}{dR+d.\frac{TdR}{dT}+d.\frac{dr}{dT}}=S$, quae ergo quantitas ex solis r et R est composita.

 posita.

posita. Quare erit $\int \frac{dr\,dN}{dT} = \frac{N\,dr}{dT} - \int S\,du = \frac{N\,dr}{dT} - Su + \int u\,dS$. Fiat igitur $\int u\,dS = \int Z\,dz$, vnde reperitur $u = \frac{Z\,dz}{dS}$. Hoc igitur pro u valore accepto, vtriusque curuae inuentae rectificatio a quadratura $\int Z\,dz$ pendebit. Erit enim $\int \frac{dr\,dN}{dT} = \frac{N\,dr}{dT} - \frac{SZ\,dz}{dS} + \int Z\,dz$. Deinde cum eadem quadratura infinitis modis possit exhiberi, non solum per arbitrarios ipsarum R et r valores varietas infinita obtinetur, sed etiam per innumeros ipsius u valores; quibus tamen omnibus efficitur, vt curuarum inuentarum omnium rectificatio a quadratura proposita $\int Z\,dz$ pendeat.

§. 11. Hac igitur ratione innumerabilibus modis solui problema non solum, vt initio proposueram, sed adiecta insuper conditione pendentiae rectificationis curuarum inueniendarum a data quadratura. Problema igitur hactenus solutum ita est proponendum. Duas inuenire curuas algebraicas, quarum vtriusque rectificatio a data pendeat quadratura, duorum autem arcuum eidem abscissae respondentium summa sit rectificabilis.

§. 12. Ipsae autem curuae quaesitae determinabuntur ex assumtis pro literis R et r valoribus algebraicis atque ex u propositam quadraturam introducente. Ex his enim reperiuntur P et p, quibus inuentis erit curuae A abscissa $= \frac{(1-R^2)^{\frac{3}{2}}\,dP}{-dR}$ et applicata $= P + \frac{R\,dP(1-R^2)}{-dR}$. Alterius vero curuae B abscissa $= \frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\,dp}{-dr}$, quae aequa-

lis

lis erit illius abſciſſae; at applicata erit $= p + \frac{rdp(1-r^2)}{-dr}$ Arcus autem curuae A exprimetur formula $\frac{dP(1-R^2)}{-dR} + \int R\,dP$, et curuae B arcus eidem abſciſſae reſpondens erit $\frac{dp(1-r^2)}{-dr} + \int r\,dp$. Pendebit autem tam $\int R\,dP$ quam $\int r\,dp$ a $\int Z\,dz$. nihilo tamen minus $\int R\,dP + \int r\,dp$ algebraice poterit exhiberi.

§. 13. Denique ex ipſa ſolutione ſatis intelligitur me non monente eadem opera ſolui poſſe problema, ſi non arcuum ſumma, ſed differentia eorum debeat eſſe algebraica, vel etiam ſumma ſeu differentia quorumcunque multiplorum horum arcuum. Quamobrem ſuperfluum foret, hos quoque caſus attingere. Ad inſtitutum quidem plenius perſequendum requireretur, vt exempla quaedam euoluerentur, ſed cum ad prolixiſſimos calculos eſſet perueniendum, ea potius omitto, aliisque inueſtiganda relinquo.

DE OSCILLATIONIBVS FILI FLEXILIS QVOTCVNQVE PONDVSCVLIS ONVSTI.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabb. II. III. IAm ante complures annos, cum *Cl. Bernoullius* hic commoraretur, quaeſtio inter nos incidebat, de curuatura catenae circa alterum terminum fixum oſcillantis. Experientia autem nos docebat curuas maxime irregulares easque diuerſiſſimas ſatisfacere, ex quo problema non ſolum difficillimum, ſed etiam vires humanas, niſi reſtrictio adhibeatur, exſuperans iudicauimus. Hanc ob rem noſtras cogitationes ad oſcillationes infinite paruas tantum aduertimus, quo caſu ſolutionem multo minus laboris requirere facile praeuideramus. Neque vero has infinite paruas oſcillationes omnes perſequi idoneum viſum eſt, ſed eas duntaxat, in quibus ſingulae catenae partes ſimul ad lineam verticalem tanquam ad ſtatum naturalem perueniunt. Obſeruauimus enim ſaepius accidere, vt catena oſcillans nunquam tota in directum extendatur, neque eius partes omnes ſimul per lineam verticalem tranſeant; facile autem praeuidebamus oſcillationes initio ita temperari poſſe, vt ſingulae partes ſimul ad lineam verticalem ſint peruenturae. Ex quibus ſequens formauimus problema; Inne-

nire

nire curuaturam catenae ita oſcillantis, vt eius ſingulae partes ſimul ad lineam verticalem perueniant, atque longitudinem penduli ſimplicis eodem tempore ſuas oſcillationes abſoluentis.

§. 2. Ad hoc autem problema ſoluendum catena conſideranda eſt tanquam filum perfecte flexile et grauitatis expers, infinitis ponduſculis oneratum. Eodem enim modo catena conſiderari ſolet, quando catenae in vtroque termino ſuſpenſae figura ſeu curua catenaria inquiritur. Quo igitur ad ſolutionem huius problematis via debito modo ſternatur filum flexile et grauitatis expers eſt conſiderandum, quod primum vnico tum duobus, deinceps tribus, quatuor, etc. ponduſculis ſit oneratum, quo ex his concluſio ad caſum infinitorum ponduſculorum fieri queat. Hinc ſequentes natae ſunt quaeſtiones praeliminares: ſi filum perfecte flexile duobus, tribus, et deinde quotcunque ponduſculis in datis diſtantiis a ſe inuicem diſpoſitis, fuerit oneratum, inuenire poſitionem ponduſculorum extra ſtatum naturalem vt ſingula ſibi permiſſa ad lineam verticalem ſeu in ſtatum naturalem ſimul perueniant; atque hoc inuento determinare longitudinem penduli ſimplicis iſochroni. In his vero ſemper oſcillationes infinitae paruae tantum conſiderantur, quippe quae omnes, vt patebit, inter ſe ſunt iſochronae; quamobrem illa ponduſculorum poſitio infinite parum a linea verticali diſcrepabit.

§. 3. Atque hac ſunt quaeſtiones, quas *Cl. Bernoullius* ante abitum ſolutas dedit ſine demonſtrationibus, nunc

nunc vero ſimul demonſtratas huc miſit. Cum vero iam illo tempore hae quaeſtiones Illum inter eiusque Patrem et me agitarentur, ipſe quoque earum ſolutiones dedi cum hiſce *Bernoullii* ſolutionibus egregie conſpirantes. At cum nunc perſpiciam eius methodum a mea prorſus differentem, ad augmentum ſcientiae non parum vtile fore iudicaui, ſi et meam methodum hac diſſertatione expoſuero. Cum enim huius modi quaeſtiones ſint nouae et ad mechanicae partem adhuc nouam, et a nemine pertractatam pertineant, nihil magis ad excolendam hanc mechanicae partem eſt exoptandum, quam plures methodi, quibus idem problema ſolui queat.

Figura I. §. 4. Quo igitur a ſimpliciſſimis exordiar, ſit filum grauitatis expers OA vnico ponduſculo A oneratum, quod cum linea verticali Oa angulum infinite paruum AOα conſtituat. Hoc igitur pendulum ſibi permiſſum oſcillationes faciet eundo in ſitum Oa, tantumque vltra illum tranſiendo. Hoc nobis erit pendulum ſimplex, cum quo ſequentia pendula compoſita comparabimus; Dum vero hoc pendulum ad Oa mouetur corpori A deſcribenda eſt via Aa, reipſa quidem arcus circularis centro O deſcriptus, ſed qui cum horizontali Aa propter angulum AOa infinite paruum congruet. Inueſtigandum ergo eſt, quanta vi acceleratrice corpus A per Aa propellatur. Corpus vero A vi grauitatis, quae aequalis eſt ponderi corporis A, deorſum ſecundum directionem AM trahitur; haec ergo vis ſi reſoluatur in duas laterales Am, et Mm, altera in directione

tione Am tota ad tendendum filum insumetur, altera vero in directione Mm corpus per Aa vrgebit. At ob triangula OAa, AMm similia erit vis filum AO tendens $= \frac{A.Oa}{AO} = A$, et vis corpus per Aa trahens $= \frac{A.Aa}{AO}$; vis vero accelerans habebitur, diuisa vi absoluta $\frac{A.Aa}{AO}$ per massam A mouendam, vnde vis accelerans est $\frac{Aa}{AO}$. Perspicitur ex hoc si spatium percurrendum Aa diuidatur per vim accelerantem, prodituram esse longitudinem penduli AO, isochroni cum motu per Aa. Quare si in sequentibus casibus determinauerimus vim acceleratricem, qua quodque corpus ad verticalem sollicitatur, habebimus simul longitudinem penduli simplicis isochroni. Atque cum in casu plurium corporum, singula simul peruenire debeant ad verticalem, cuiusque vis acceleratrix proportionalis esse debet distantiae a linea verticali Oa, ex quo positio corporum determinabitur.

§. 5. Sint filo OAB in O fixo duo annexa ponduscula A et B, et situs fili infinite parum a verticali Ob differens. Demittantur ex A et B in verticalem Ob perpendicula Aa, Bb, quae vt viae considerari poterunt a corpusculis absoluendae. Fili pars BA producatur vsque ad lineam verticalem in P, et OA in p vsque. Ex praecedentibus iam liquet vim grauitatis corporis B duplicem exerere effectum, alterum quo corpus B per Bb vrgetur, quae vis erit $= \frac{B.Bb}{BP}$, alterum vero, quo tenditur filum BA, quae vis est $= B$, ob ang. BPb infinite paruum. Hac vero vi Figura 2.

 cor-

corpus A afficietur ſecundum directionem AB, ad cuius effectum inueniendum reſoluatur ae in duas, alteram in directione $Ap = \frac{B.Ap.}{AB} = B$, quae filum OA tendit: alteram in directione horizontali, quae erit $= \frac{B.Bp}{AB}$, atque pro negatiua eſt habenda, quia motum per Aa retardat. Atque in hoc conſiſtit effectus ponderis B. Pondus A vero vt ante vrgebit per Aa vi $= \frac{A.Aa}{AO}$, et filum OA tendet vi $= A$. Sollicitabitur ergo corpus A vi acceleratrice $\frac{Aa}{AO} - \frac{B.Bp}{A.AB}$, et corpus B vi acceleratrice $\frac{Bb}{BP}$. Quo igitur corpora A et B ſimul ad lineam verticalem perueniant, hae vires acceleratrices proportionales eſſe debebunt viis deſcribendis ſcilicet $\frac{Aa}{AO} - \frac{B.Bp}{A.AB} : Aa = \frac{Bb}{BP} : Bb$. Et longitudo penduli iſochroni erit $BP = \frac{A.AO.AB.Aa}{A.AB.Aa - B.AO.Bp}$.

§. 6. Eſt vero $BP = bP$ propter ang. bPB infinite paruum, atque ob $Bb - Aa : ab = Bb : bP$ erit $BP = \frac{Bb.ab}{Bb - Aa}$. Atque cum ſit $bp = \frac{Aa.Ob}{Oa}$, erit $Bp = Bb - \frac{Aa.Ob}{Oa}$. Deinde propter $OA = Oa$ et $AB = ab$ habebitur haec analogia $A.Aa.Ob - B.Bb.Oa + B.Aa.Ob : A.Aa.Oa = Bb - Aa : Bb$ Sit longitudo penduli iſochroni $= f$, habebuntur hae duae aequationes $\frac{Bb.ab}{f} = Bb - Aa$ atque $\frac{A.Aa.Oa.ab}{f} = A.Aa.ab - B.Bb.Oa + B.Aa.Ob$. Vel eliminata f prodibit iſta aequatio $A.Aa.Bb.Oa - A.Aa^2.Oa = A.Aa.Bb.ab - B.Bb^2.Oa + B.Aa.Bb.Ob$. Quae aequatio cum duas habeat radices, duplicem dabit ſitum ponduſculorum A

et B,

et B, in quorum vtroque ſimul ad verticalem pertingunt. Motus vero erit huiusmodi, vt inter mouendum OA et AB maneant eiusdem longitudinis et punctum P in eodem loco reſtet.

§. 7. Si fili partes OA et AB fuerint inter ſe aequales, erit $Oa = ab$ et $Ob = 2Oa$, vnde ſequentes duae oriuntur aequationes $\frac{Bb.Oa}{f} = Bb - Aa$ et $\frac{Aa.Oa}{f} = Aa - \frac{B.Bb}{A} + \frac{2B.Aa}{A}$; vel haec vnica $A.Aa^2 = B.Bb^2 - 2B.Aa.Bb$, vnde oritur $\frac{Bb}{Aa} = 1 \pm \sqrt{(1 + \frac{A}{B})}$, pro duplici ponduſculorum ſitu.

§. 8. Si praeterea ponduſcula A et B fuerint inter ſe aequalia, erit $\frac{Bb.Oa}{f} = Bb - Aa$ et $\frac{Aa.Oa}{f} = 3Aa - Bb$. atque $\frac{Bb}{Aa} = 1 \pm \sqrt{2}$. Altero ergo ſitu Aa et Bb in eandem partem verticalis Ob cadunt, altero in diuerſas.

§. 9. Sint nunc filo in O fixo tria ponduſcula, A, B et C annexa infinite parum a verticali Oc diſſita. Ducantur horizontales Aa, Bb, Cc, ſeu viae a corporibus ſimul deſcribendae; et producantur BA in P; CB in Q; item OA in p et AB in q. His poſitis pondus C efficiet, vt partim corpus C ſecundum Cc vrgeatur vi $= \frac{C.Cc}{CQ} = \frac{C.Cc}{cQ}$ partim vero filum BC tendatur vi $= \frac{C.cQ}{CQ} = C$. Hac autem vi corpus B ſollicitabitur in directione BC. Reſoluatur haec vis in duas, quarum altera eſt horizontalis et corpus B a verticali Oc retrahat $= \frac{C.Cq}{BC} = \frac{C.Cq}{bc}$; altero vero tendat filum BA quae eſt $= \frac{C.Bq}{BC} = C$. Nunc ſumatur pondus B, quo partim Figura 3.

vrgebitur B verſus Bb vi $= \frac{B.Bb}{BQ} = \frac{B.Bb}{bQ}$ partim vero tenditur filum BA vi $= B$. Tota ergo vis qua filum BA tenditur eſt $B + C$, hac vi corpus A ſollicitabitur horizontaliter ab verticali Oc vi $= \frac{(B+C)Bp}{BA} = \frac{(B+C)Bp}{ab}$, atque filum AO tendetur vi $= B + C$. Pondus denique A efficiet vt corpus A ſecundum Aa ſollicitetur vi $= \frac{A.Aa}{AO} = \frac{A.Aa}{aO}$, ſimulque tendatur filum AO vi $= A$; ita vt tota vis, quae filum AO tenditur, ſit $= A + B + C$.

§. 10. His igitur colligendis corpus C per Cc vrgebitur vi $= \frac{C.Cc}{cQ}$; at corpus B per Bb vrgebitur vi $= \frac{B.Bb}{bP} - \frac{C.Cq}{bc}$, atque corpus A per A$a$ trahetur vi $= \frac{A.Aa}{aO} - \frac{(B+C)Bp}{ab}$. Cum igitur ſingula corpora ſimul ad lineam verticalem peruenire debeant, ſi ponatur longitudo penduli iſochroni $= f$, erit $\frac{C.Cc}{f} = \frac{C.Cc}{cQ}$ ſeu $f = cQ$, atque $\frac{B.Bb}{f} = \frac{B.Bb}{bP} - \frac{C.Cq}{bc}$; ac $\frac{A.Aa}{f} = \frac{A.Aa}{aO} - \frac{(B+C)Bp}{ab}$. Ex quibus tribus aequationibus dato ſitu corpuſculi A, determinabitur ſitus ponduſculorum B et C, quo omnia tria corpora ſimul ad verticalem perueniant. Prodibit autem triplex ſitus propter aequationem cubicam reſoluendam. Motus vero ad verticalem ita fiet, vt fila OA, AB et BC eandem ſeruent longitudinem et puncta P et Q inuariata maneant.

§. 11. Si et corpora A, B et C fuerint inter ſe aequalia et diſtantiae aequales, erit ob $cQ = \frac{Cc.bc}{Cc - Bb}$, $bP = \frac{Bb.ab}{Bb - Aa}$ et $Cq = Cc - 2Bb + Aa$ et $Bp = Bb - 2Aa$;

$2Aa$; $\frac{Oa}{f} = \frac{Cc - Bb}{Cc}$ et $\frac{Oa}{f} = -\frac{Cc + 3Bb - 2Aa}{Bb}$ atque $\frac{Oa}{f} = \frac{5Aa - 2Bb}{Aa}$. Hinc elicitur $Cc = \frac{Aa.Bb}{2Bb - 4Aa}$ et Bb inuenitur ex hac aequatione:

$$4Bb^3 = 12Aa.Bb^2 - 3Aa^2.Bb - 8Aa^3.$$

Hinc fit quam proxime:

$Bb = 2,295\,Aa$ vel
$Bb = 1,348\,Aa$ vel
$Bb = -0,643\,Aa$.

§. 12. Sit nunc filum quotcunque ponduscculis oneratum in punctis A, B, C, D etc. quorum vltimum sit F; ducantur per haec singula puncta horizontales Aa, Bb, Cc, etc. et singulae fili partes vtrinque producantur vt ante factum est. Consideretur corpus quodcunque C, quod duplici vi sollicitatur, vi propriae grauitatis scilicet, et vi tendente fili portionem CD, tenditur vero hoc filum a vi, quae aequalis est summae omnium sequentium ponduscculorum D + E + F, vt in praecedentibus vidimus. Propria vero corporis C grauitas efficit, vt corpus per Cc vrgeatur vi $= \frac{C.Cc}{cQ}$. At vis tendens filum CD, resoluta retrahet corpus C a verticali vi $= \frac{(D+E+F)Dr}{cd}$. Quare tota vis, qua C secundum Cc vrgetur erit $= \frac{C.Cc}{cQ} - \frac{(D+E+F)Dr}{cd}$. Si ergo tempus per Ca aequale esse debeat tempori, quo pendulum simplex longitudinis f descensum absoluit, erit $\frac{C.Cc}{f} = \frac{C.Cc}{cQ} - \frac{(D+E+F)Dr}{cd}$. Similis aequatio inuenitur pro singulis corpusculis, ita vt prodeant tot aequationes, quot Figura 4

 sunt

ſunt corpuscula. Ex quibus aequationibus ſitus corpusculorum determinabitur, qui pro numero eorum variari poterit.

§. 13. Longitudo penduli iſochroni f ſemper aequalis eſt vltimae fili parti E F ad lineam verticalem Of vsque productae, nempe rectae F T. Atque figura OABC etc. in deſcenſu ita immutabitur vt puncta P, Q, R, S, T maneant inuariata. Ex quo perſpicitur diſtantias Aa, Bb, etc. in eadem ratione diminitum iri, id quod etiam ex hoc intelligitur, quod hae diſtantiae Aa, Bb, Cc etc. ſimul debeant confici; atque ſimiliter, quia vires acceleratrices his diſtantiis ſunt proportionales. Praeterea ex his elucet, ſi figura fili fuerit huiusmodi, vt alicubi tranſeat per lineam verticalem vt in C, in oſcillationibus huius fili punctum C perpetuo in eodem loco eſſe permanſurum. Pars igitur penduli CDEF circa punctum fixum C oſcillationes eodem tempore abſoluet, quo totum pendulum OABCDEF, ſimili modo intelligitur etiam ſupra O filum cum corpusculis continuari poſſe manente tempore oſcillationum. Ex parte ergo infima fili EF ſuperiores partes omnes in infinitum vsque poterunt determinari, vt totum filum perpetuo in oſcillando ad lineam verticalem perueniat.

Figura 5. §. 14. Sint nunc tam omnia corpuscula quam eorum inter ſe interualla aequalia, erunt EF, DE, CD etc. nec non ef, de, cd etc. inter ſe aequalia. Ponatur longitudo penduli ſimplicis iſochroni FT ſeu $f\text{T}=f$, et F$f=a$, et diſtantia duorum corpusculorum proximorum

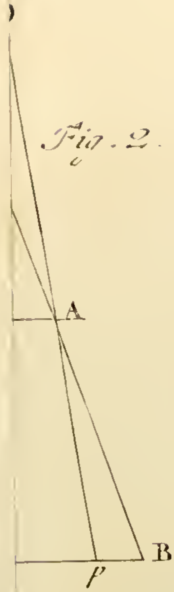


Fig. 2.

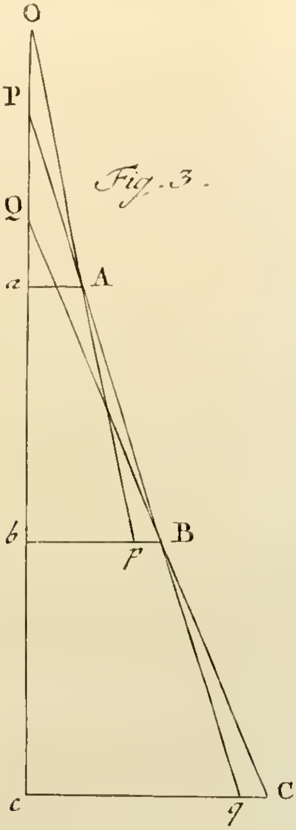
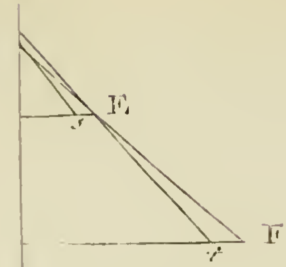


Fig. 3.

4.



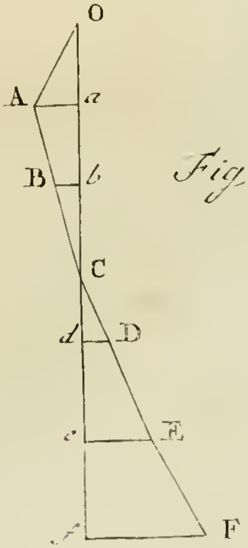


Fig. 5.

Fig. 1.

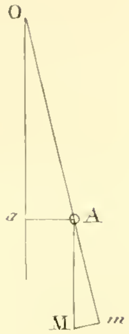


Fig. 2.

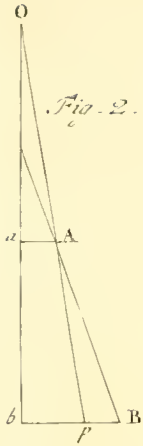


Fig. 3.

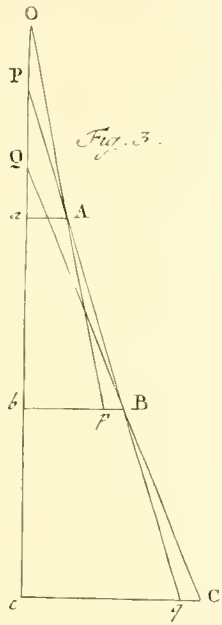


Fig. 4.

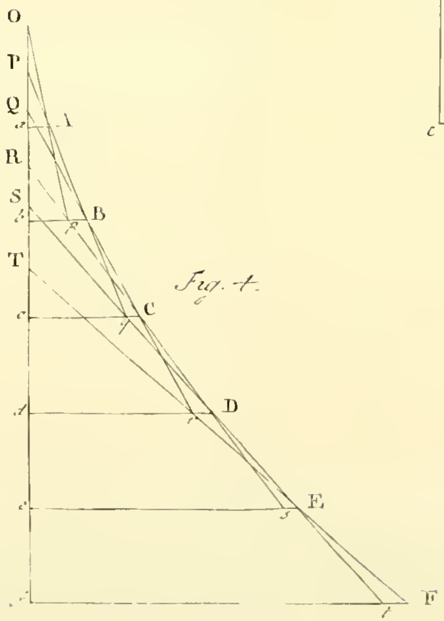
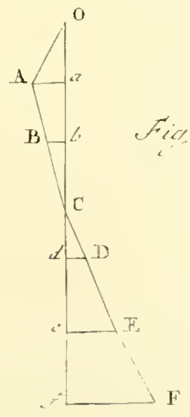


Fig. 5.



morum $= b$; ex his determinari poterit ſitus cuiusque corporis. Nam vis ſollicitans corpus E per Ee aequalis eſt $\frac{E.Ee}{eS} - \frac{F.Ft}{ef}$, quae aequalis eſſe debet $\frac{E.Ee}{f}$, vnde ob aequalia corpora erit $\frac{Ee}{f} = \frac{Ee}{eS} - \frac{Ft}{ef}$. Eſt vero $Ff - Ee : ef = a : f$ vnde $Ee = \frac{a(f-b)}{f}$. Porro eſt $Ee - Dd : b = Ee : eS$. et $Ft = Ff - 2Ee + Dd$. Vnde inuenitur $Dd = \frac{a(2ff - 4bf + b^2)}{2ff}$. Quia porro eſt $\frac{Dd}{f} = \frac{Dd}{dR} - \frac{2Es}{ed}$ et $\frac{Dd - Cc}{b} = \frac{Dd}{dR}$ et $Es = Ee - 2Dd + Cc$ prodibit $Cc = \frac{a(6f^3 - 18bf^2 + 9bbf - b^3)}{6f^3}$. Simili modo ob $\frac{Cc}{f} = \frac{Cc}{cQ} - \frac{3Dr}{b}$ et $\frac{Cc}{cQ} = \frac{Cc - Bb}{b}$ et $Dr = Dd - 2Cc + Bb$ obtinebitur $Bb = \frac{a(24f^4 - 96bf^3 + 72b^2ff - 16b^3f + b^4)}{24f^4}$. Quae eſt diſtantia quinti corpuſculi a linea verticali. Hinc concluditur diſtantia corpusculi $(n+1)$ indicis a linea verticali $= a\left(1 - \frac{nb}{1.f} + \frac{n.(n-1)b^2}{1.\ 4.\ f^2} - \frac{n(n-1)(n-2)b^3}{1.\ 4.\ 9.\ f^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)b^4}{1.\ 4.\ 9.\ 16.\ f^4} - \text{etc.}\right)$

§. 15. Si interualla OA, AB, BC etc. fuerint infinite parua, vt tanquam elementa curuae OABCD etc. conſiderari queant, innoteſcet hinc natura huius lineae curuae, quae oſcillans tota eodem momento ad lineam verticalem pertingit. Nam cum in quouis loco ſit $\frac{C.Cc}{f} = \frac{C.Cc}{cQ} - \frac{(D+E+E)Dr}{cd}$, ſi fc ſumatur pro abſciſſa et Cc pro applicata, erit CQ ſubtangens curuae in C, $(D+E+F)$ erit pondus omnium ponduſculorum, quibus pars fili infra C eſt onerata, cd eſt elementum abſciſſae et Dr per differentiale ſecundi gradus applicatae dabitur. Symbola ergo loco horum ſubſtituta exprimentnaturam

curuae

curuae quaesitae. Atque haec curua erit ipsa figura catenae oscillantis, quae in lineam rectam mutatur, quoties ad lineam verticalem peruenit. At siue catena vbique sit eiusdem crassitiei, siue secus, elementa curuae OA, AB, BC etc. nihilominus aequalia accipi possunt, dummodo ponduscula pro natura catenae recte assumantur. Sumtis autem elementis curuae aequalibus, elementa abscissae quoque erunt aequalia, atque Dr erit differentiale secundi gradus applicatae.

Figura 6. §. 16. Sit igitur OMB catena seu funis vtcunque crassus ex O suspensus, atque talem figuram habens OMB, vt figuram rectilineam OA induat, cum in situm verticalem peruenerit. Exprimat curua DQ crassitiem funis in singulis punctis, ita vt pondus portionis BM exponatur area APQD, et pondus elementi Mm areola PpqQ. Nunc ad naturam curuae OMB inueniendam ponatur $Op = t$, $pM = y$; et $AP = x$ atque $PQ = p$, erit $t + x$ quantitas constans, et $dt = -dx$. Pondus igitur funis BM erit $= \int p\,dx$, quod respondet in superiori aequatione ipsi $(D + E + F)$, atque quod ibi erat C hic nobis erit $p\,dx$, vel $p\,dt$ si ab O computamus; Cc vero erit y, et cQ subtangens $PT = \frac{y\,dt}{dy} = \frac{-y\,dx}{dy}$, atque $cd = dt$. Posito autem elemento dt constante huius respectu, quia y crescit, erit Dr in superiore casu $= ddy$. His ergo in aequatione superiore $\frac{C.Cc}{f} = \frac{C.Cc}{cQ} - \frac{(D+E+F)Dr}{cd}$ substitutis prodibit ista aequatio $\frac{y\,p\,dt}{f} = \frac{p\,dt\,dy}{dt} - \frac{ddy \int p\,dx}{dt}$, quae loco dt posito $-dx$ abit in hanc $\frac{y\,p\,dx^2}{f} = -ddy \int p\,dx - p\,dx\,dy$, vbi f denotat subtangentem AF in infimo ſimo catenae puncto B. Quare ſi ſit $x = 0$ debebit eſſe $\frac{-y\,dx}{dy} = f$, id quod aequatio iam indicat, facto enim $\int p\,dx = 0$ ſit $\frac{y\,dx}{f} = -dy$.

§. 17. Ad hanc aequationem ad differentialem primi gradus reducendam pono $y = e^{\int z\,dx}$, erit $dy = e^{\int z\,dx} z\,dx$ et $ddy = e^{\int z\,dx}(dz\,dx + z^2\,dx^2)$ exiſtente e numero, cuius log. eſt $= 1$. His ſubſtitutis prodit $\frac{p\,dx}{f} = -dz\int p\,dx - z^2\,dx\int p\,dx - pz\,dx$, quae poſito $z = \frac{u}{\int p\,dx}$ tranſit in hanc $\frac{p\,dx}{f} = -du - \frac{u^2\,dx}{\int p\,dx}$, quae ſi conſtrui poterit, ſimul habebitur curua quaeſita. At per ſeries commodius definietur ex data abſciſſa x applicata y. Hac quidem aequatione magnitudo ipſius applicatae y non determinatur, ſed applicatarum inter ſe relationes. Quare ſi curua fuerit conſtructa pro finito ipſius y valore, poſtea applicatae n eadem ratione in infinitum diminuantur, quo prodeat curua quaeſita.

§. 18. Si catena vbique fuerit eiusdem craſſitiei ita vt p ſit quantitas conſtans; habebitur pro curuatura huius catenae quaeſita haec aequatio $\frac{y\,dx^2}{f} = -x\,ddy - dx\,dy$, ſeu $\int y\,dx = -\frac{fx\,dy}{dx}$. Vnde ſequens elegans huius curuae proprietas conſequitur: aream A P M B aequari facto ex conſtante A F et portione Nt, quam tangens T M ad A B producta et verticalis M N abſcindunt, ſeu Nt ſemper proportionas eſt areae A P M B. Facta vero in hac aequatione ſubſtitutione $y = e^{\int z\,dx}$ prodibit $\frac{dx}{f} = -x\,dz - z^2 x\,dx - z\,dx$; atque facto $zx = u$ erit $\frac{dx}{f} = -du - \frac{u^2\,dx}{x}$. Quae aequatio, cum integrationem non admit-

admittat, ad feries eft confugiendum. Dat autem aequatio $ydx^2 + fxddy + fdxdy = 0$ fequentem feriem, pofito a pro prima applicata AB; $y = a(1 - \frac{x}{1.f} + \frac{x^2}{1.4.f^2} - \frac{x^3}{1.4.9.f^3} + \frac{x^4}{1.4.9.16 f^4} -$ etc.) eritque $dy = -\frac{adx}{f}(1 - \frac{x}{1.2.f} + \frac{x^2}{1.4.3.ff} - \frac{x^3}{1.4.9.4.f^3} +$ etc.). Ex quibus aequationibus omnia, quae de curua quaefita requiri poffunt, inueniri licet.

§. 19. Ex aequatione pro curua inuenta apparet facta x negatiua curuam infra B in infinitum quoque progredi, quae autem pars ad catenam repraefentandam eft inepta. Radius ofculi vero curuae in M eft $\frac{dx^2}{-ddy}$, ob elementum curuae aequale elemento abfciffae, eft vero

$$\frac{dx^2}{ddy} = \frac{ff}{a(\frac{1}{1.2} - \frac{x}{1.2.3.f} + \frac{x^2}{1.4.3.4.f^2} - \frac{x^3}{1.4.9.4.5.f^3} + \frac{x^4}{1.4.9.16.5.6f^4})}.$$

Quare vbi haec feries in denominatore fit $= 0$, fit $ddy = 0$, ibique curua habebit punctum flexus contrarii.

§. 20. Tota autem curuae pars fupra B, quae in infinitum afcendit, ad catenam repraefentandam erit accommodata; quare inueftigari conuenit figuram portionis curuae fupra B Et quidem fi $x = f$ feu $AP = AF$ fiet $y = 0,223892a$, fi $x = 2f$ fit $y = -0,19654a$ curua ergo in hac altitudine in alteram partem rectae OA vergit. Loca in quibus curua per verticalem OA tranfit inueniri debent ex hac aequatione $1 = \frac{x}{1.f} - \frac{x^2}{1.4.f^2} + \frac{x^4}{1.4.9.f^3} - \frac{x^4}{1.4.9.16.f^4} +$ etc. quae dabit infinitos valores loco x, feu pro diftantiis interfectionum curuae et verticalis ab imo puncto A. Primae autem interfectio-

nis

nis O inuenitur distantia $OA = 1,44f$, ita vt FO ipsius FA sit fere dimidium. Reliqua puncta intersectionum magis distant. Simili modo curua in infinitis punctis habebit tangentem verticalem, atque etiam infinita puncta flexus contrarii; Figuram curuae exhibui in fig. 7. in qua tria intersectionum puncta O, O, O repraesentantur. Figura 7.

§. 21. Consideremus etiam catenas non aequaliter crassas, quarum tamen figura facilius possit determinari. Ad hoc igitur ponamus $p = x^n$ et $\int p\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, ex quibus conficitur haec aequatio; $\frac{y\,dx^2}{f} + \frac{x\,ddy}{n+1} + dx\,dy = 0$, quae reductione in §. 17 adhibita transit in hanc $\frac{x^n dx}{f} = -du - (n+1)u^2 x^{-n-1} dx$. Haec vero aequatio, quia conuenit cum ea, quam *Com. Riccati* proposuit, separationem admittit quoties $2n$ est numerus integer impar, siue affirmatiuus siue negatiuus. Sit $2n = -1$, seu $p = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ita vt crassities catenae sit reciproce vt radix quadrata ex longitudine catenae a puncto infimo B sumta; aequatio differentio-differentialis adeo integrationem admittet, erit nimirum $\frac{y^2dx^2}{2f} + 2x\,ddy + dx\,dy = 0$, quae in dy ducta et integrata dat $\frac{y^2dx^2}{2f} + x\,dy^2 = \frac{a^2dx^2}{2f}$ posita $AB = a$, seu $\frac{dx}{\sqrt{2fx}} = \frac{-dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$, cuius integralis est $\sqrt{\frac{2x}{f}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}} =$ arcui circuli, cuius cosinus est $\frac{y}{a}$, existente radio $= 1$.

§. 22. In hac igitur curuatura puncta O, O, O, etc. in quibus curua verticalem AO secat, habentur ponendo $y=0$. Posita autem ratione diametri ad peripheriam $1:\pi$, erit $-\int\frac{dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$ posito $y=0$ terminus ex hac serie $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ etc. horum enim arcuum cosinus sunt $=0$. Quare erit AO terminus quilibet ex hac serie $\frac{f\pi^2}{32}, \frac{9f\pi^2}{32}, \frac{25f\pi^2}{32}, \frac{49f\pi^2}{32}$, etc. Inter quosuis binos nodos applicata maxima est $=a$, vbi etiam tangens est verticalis. Facto autem $y=\pm a$ erit $\int\frac{-dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$ terminus ex hac serie $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}$, etc. Distantiae ergo horum punctorum ab infimo A constituent hanc seriem $\frac{f\pi^2}{8}, \frac{f\pi^2}{2}, \frac{9f\pi^2}{8}, 2f\pi^2, \frac{25f\pi^2}{8}$ etc. vbi terminis primo, tertio, quinto etc. respondet $=-a$, reliquis $y=a$. Puncta flexus contrarii huius curuae habebuntur faciendo $ddy=0$. Est vero $ddy=\frac{-ydx^2}{2fx}-\frac{dxdy}{2x}=\frac{-ydx^2}{2fx}+\frac{dx^2\sqrt{(a^2-y^2)}}{2x\sqrt{2fx}}$. Quare puncta flexus contrarii ibi erunt, vbi est $\frac{y}{\sqrt{(a^2-y^2)}}=\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{2x}}$, seu vbi est $\frac{\sqrt{(a^2-y^2)}}{y}=-\int\frac{dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$. Ad ea igitur inuenienda quaerantur arcus, qui aequales sint suis cotangentibus; sint hae cotangentes $=t$ erit $\sqrt{\frac{2x}{f}}=t$ seu $x=\frac{ftt}{2}$. Hoc vero cum infinitis casibus accidere possit, prodibunt infinita puncta flexus contrarii.

§. 23. Quicunque autem fuerit numerus n aequatio differentio-differentialis $\frac{ydx^2}{f}+\frac{xddy}{n+1}+dxdy=0$ in seriem conversa dabit $y=a\left(1-\frac{x}{f}+\frac{(n+1)x^2}{1.2.(n+2)f^2}-\frac{(n+1)^2x^3}{1.2.3.(n+2)(n+3)f^3}+\frac{(n+1)^3x^4}{1.2.3.4.(n+2)(n+3)(n+4)f^4}-\text{etc.}\right)$. Ponatur $\frac{-(n+1)x}{f}=q$ erit $\frac{y}{a}=1+\frac{q}{1.(n+1)}+\frac{q^2}{1.2.(n+1)(n+2)}+$

q^3

$\frac{q^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot (n+1)(n+2)(n+3)}$ + etc. Ad huius ſeriei ſummam methodo mea conſtruendam pono eius ſummam eſſe $\int R z^m dz(1-z^b)^k$: H hoc integrali ita accepto vt euaneſcat poſito $z=0$, et poſtmodum poſito $z=1$. H vero eſt $=\int z^m dz(1-z^b)^k$ ſi poſt integrationem ponatur $z=1$: at $m+1$ et $k+1$ et b debent eſſe numeri affirmatiui. Sit $R=1+Ag(1-z^b)+Bg^2(1-z^b)^2+Cg^3(1-z^b)^3+$ etc. quae ſeries talis debet accipi vt ſummationem admittat. His poſitis $\frac{\int R z^m dz(1-z^b)^k}{H}$, ita acceptum vt euaneſcat poſito $z=0$, aequabitur huic ſeriei $1+\frac{A(k+1)}{(m+b(k+1)+1)}bg+\frac{B(k+1)(k+2)}{(m+b(k+1)+1)(m+b)(k+2)+1)}b^2g^2+$ etc. Cui ergo ſeriei illa inuenta pro $\frac{y}{a}$ eſt aequalis ponenda.

§. 24. Pono autem $A=\frac{1}{\pi(\pi+\rho)}$, $B=\frac{A}{(\pi+2\rho)(\pi+3\rho)}$, $C=\frac{B}{(\pi+4\rho)(\pi+5\rho)}$ etc. et ſcripto s^2 loco $g(1-z^b)$ erit $R=1+\frac{1}{\varrho^2}e^{\frac{s}{\varrho}}s^{\frac{\rho-\pi}{\rho}}\int e^{\frac{-2s}{\rho}}ds\int e^{\frac{s}{\rho}}s^{\frac{\pi-\rho}{\rho}}ds$. Quae duplex integratio ita eſt accipienda vt facto $s=0$, fiat $R=1$, et $dR=0$. Fiat nunc in hac ſerie $bg=q$, vt quisque terminus huius ſeriei in terminum reſpondentem illius transmutetur. Quo igitur termini indicis η fiant aequales, habebitur iſta aequatio $\eta(\eta+n)(\eta+k)=(2\eta\rho+\pi-2\varrho)(2\eta\varrho+\pi-\rho)(\eta k+m+1+bk)$, ex qua erit $1=4b\varrho^2$; $k+n=4\varrho^2(m+1+bk)+2\varrho b(2\pi-3\varrho)$; $nk=b(\pi-2\varrho)(\pi-\varrho)+2\varrho(2\pi-3\varrho)(m+1+bk)$, atque $0=(\pi-2\varrho)(\pi-\varrho)(m+1+bk)$. Vnde tres ſequuntur ſolutiones. Prima eſt $\pi=2\varrho$; hinc erit $k+n=4\varrho^2(m+1+bk)+2\varrho^2 b$; $kn=2\varrho^2(m+1+bk)$ et $1=4\varrho^2 b$, ex quibus prodit $k=\frac{1}{2}$; $b=2$, $m=2n-2$, $\varrho=\frac{\pm 1}{2\sqrt{2}}$ et $\pi=\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$, quae solutio semper locum habet, si modo $2n>1$. Secunda solutio habetur ponendo $\pi=\varrho$, tumque erit $\varrho^2=\frac{1}{4b}$; $k+n=2\varrho^2(2m+2+2bk-b)$ et $nk=-2\varrho^2(m+1+bk)$, vnde sequitur $k=-\frac{1}{2}$; $b=2$; $m=2n$; $\varrho=\frac{\pm 1}{2\sqrt{2}}$ et $\pi=\frac{\pm 1}{2\sqrt{2}}$ haec solutio valet si modo $2n+1$ est numerus affirmatiuus. Tertia solutio dat $m+1+bk=0$, quae quia $m+1$, b et $k+1$ debent esse numeri affirmatiui, k erit inter 0 et -1 interceptum, sit $k=-\varkappa$, erit $m+1=b\varkappa$; $\varrho^2=\frac{1}{4b}$; $n-\varkappa=2\varrho b(2\pi-3\varrho)$ et $-n\varkappa=b(\pi-2\varrho)(\pi-\varrho)$, atque ex his duae nascuntur solutiones, quarum altera est $\varrho=1$; $\pi=2n+1$; $k=+n-\frac{1}{2}$; $b=\frac{1}{4}$; et $m+1=\frac{1}{8}-\frac{n}{4}=\frac{1-2n}{8}$. Altera solutio est $\varrho=1$; $\pi=2n+2$, $k=n+\frac{1}{2}$; $b=\frac{1}{4}$ et $m+1=-\frac{1-2n}{8}$; debet ergo n esse numerus negatiuus atque $-n<\frac{3}{2}$, et $-n>\frac{1}{2}$.

§. 25. Locum habeat secunda solutio vt maxime generalis, erit $s=\sqrt{\frac{q}{2}}(1-z^2)$ et $R=1+8e^{2s\sqrt{2}}\int e^{-4s\sqrt{2}} ds\int e^{2s\sqrt{2}}ds=\frac{e^{2s\sqrt{2}}+e^{-2s\sqrt{2}}}{2}=\frac{e^{2\sqrt{q}(1-zz)}+e^{-2\sqrt{q}(1-zz)}}{2}$.

Deinde inuenitur H si in $\int z^{2n}dz(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ita integrato, vt euanescat posito $z=0$, ponatur $z=1$. Hoc inuento erit $\int\frac{z^{2n}dz(e^{2\sqrt{q}(1-zz)}+e^{-2\sqrt{q}(1-zz)})}{2H\sqrt{(1-zz)}}$, si post integrationem ponatur $z=1$, aequale ipsi $\frac{y}{a}$. Exibit enim z ex calculo et remanebit tantum q, cuius loco

si

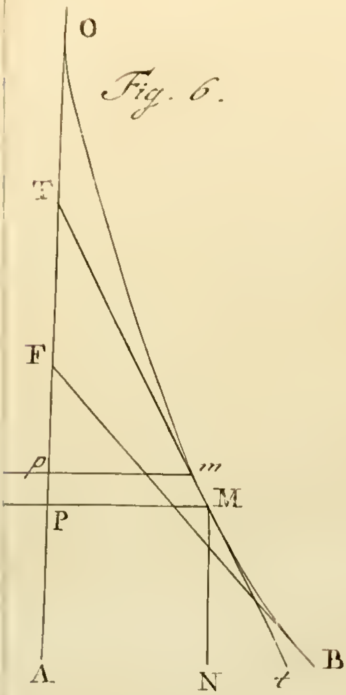


Fig. 6.

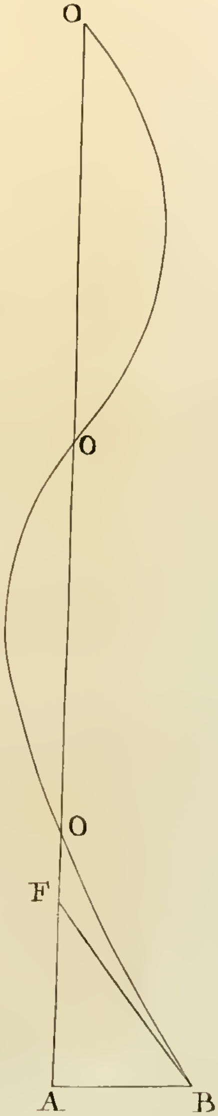


Fig. 7.

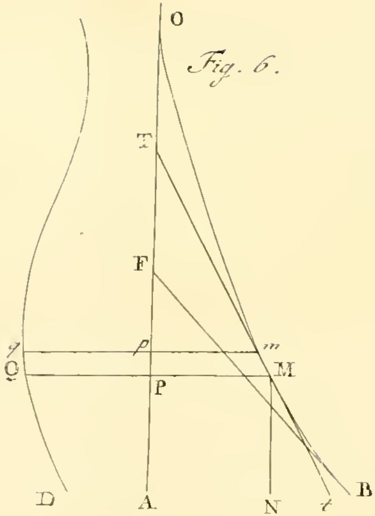


Fig. 6.

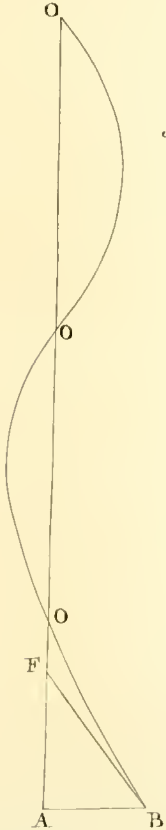


Fig. 7.

ſi ſubſtituatur $\frac{-(n+1)x}{y}$ habebitur aequatio pro curua quaeſita in qua intederminatae x et y ſunt a ſe inuicem ſeparatae. Ponatur $\sqrt{(1-zz)}=t$, erit $z=\sqrt{(1-tt)}$ et $dz=\frac{-tdt}{\sqrt{(1-tt)}}$, quibus ſubſtitutis erit $\frac{y}{a}=+$

$$\int\frac{(1-tt)^{\frac{2n-1}{2}}dt}{2H}(e^{2t\sqrt{q}}+e^{-2t\sqrt{q}})$$ ſi ita integretur, vt euaneſcat poſito $t=0$, et poſtmodum ponatur $t=1$. Quoties igitur $\frac{2n-1}{2}$ eſt numerus integer affirmatiuus ſeu $2n$ numerus integer affirmatiuus impar, hoc integrale re ipſa poteſt exhiberi. Hinc igitur quoque fluit conſtructio aequationis Riccatianae cum ea, quam ante aliquot annos dedi, congruens.

ME-

METHODVS COMPVTANDI AEQVATIONEM MERIDIEI,

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula IV. AD verum meridiei tempus inueniendum inter alia Aſtronomi vti ſolent binis obſeruationibus aequalium ſolis altitudinum, quarum altera ante altera poſt meridiem ſunt factae. Ex huiusmodi obſeruationibus facile quidem videtur verum meridiei tempus cognoſci ſumendo tempus medium inter tempora, quibus illae obſeruationes ſint factae; quemadmodum hoc modo tempus culminationis ſtellae fixae ex binis obſeruationibus aequalium altitudinum recte concluditur. Sed id, quod in ſtella fixa hanc concluſionem legitimam reddit, in ſole locum non habet, quippe qui perpetuo declinationem mutat. Si enim ſol, vti ſtella fixa, ſemper in eodem circulo parallelo verſaretur, tempus medium inter duas illas obſeruationes verum eſſet tempus meridiei, neque vlla correctione opus haberemus.

§. 2. Cum autem ſol continuo ex alio parallelo in alium progrediatur, facile perſpicitur tempus medium inter duo tempora, quibus aequales ſolis altitudines ſunt obſer-

obſeruatae, a vero meridiei tempore diſcrepare debere. Si enim exempli gratia ſole ab ariete ad cancrum aſcendente hora nona antemeridiana altitudo ſolis fuerit 30°; hora tertia pomeridiana, inter quae tempora meridies in medio interiacet, altitudo ſolis maior erit, quam 30°; quia interea ſol propius ad polum et idcirco in noſtris regionibus propius quoque ad Zenith acceſſit. Quamobrem demum poſt horam tertiam ſol ad altitudinem 30° perueniet; ex quo perſpicitur, errorem commiſſum iri, ſi tempus medium inter tempora, quibus ſolis altitudo 30° eſt obſeruata, pro vero meridie haberetur. Tempus enim medium hoc caſu poſt meridiem incidet; et hanc ob rem, quo verum meridiei tempus obtineatur, oportet a tempore medio aliquid ſubtrahere; quod eſt id ipſum, quod hac diſſertatione determinare conſtitui.

§. 3. Simili modo intelligitur, ſi ſol a Borea ad Auſtrum deſcendat, contrarium accidere, et ad tempus aliquid addi debere. Atque haec temporis particula, quae ad tempus medium inter obſeruationum tempora vel adiici vel ob ipſo demi debet, vocatur aequatio meridiei. Tabula vero aequationis meridiei continet has aequationes pro ſingulis declinationis ſolis gradibus, et pro variis interuallis temporis inter obſeruationes ambas intercepti ad daram poli eleuationem computatas. Huiusmodi igitur tabula aſtronomo valde eſt neceſſaria, quo ex ea verum meridiei tempus hac methodo, quae eſt facilis et a refractionibus non turbatur, cognoſcere, atque horologia corrigere queat.

§. 4. Pendet autem haec meridiei aequatio primo ab eleuatione poli eius loci, in quo est obseruator; tum etiam a differentia temporum, quibus obseruationes sunt factae; et denique a motu solis, quo variatio declinationis definitur. Pro variis igitur poli eleuationibus peculiares requiruntur tabulae aequationis meridiei; neque tabula pro hoc loco computata in aliis locis vsum habere potest, nisi quae sub eodem parallelo sunt sita. Praeterea eadem tabula ad datam poli eleuationem computata non perpetuo valere potest; quia motus solis verus ratione declinationis quotannis paululum variatur. Tam parum autem haec mutatio efficere valet, vt incrementum vel decrementum aequationis hinc ortum vix vnquam ad vnum minutum secundum saltem in locis, quae ab aequatore non vltra 60° distant, ascendere queat. Varietas autem eleuationis poli magnum discrimen aequationi meridiei inducit; cum aequationes ad hunc locum accommodatae, sint fere duplo maiores iis, quae pro Parisiis valent. Adhuc maiores fiunt in locis polis propioribus, et sub ipsis polis fiunt infinite magnae; eo quod ibi meridies non datur. Quo igitur propior polo alterutri est locus obseruatoris, eo magis haec correctio est necessaria; et pro Petropoli quidem sine hac correctione error in determinatione meridiei ad 50 minuta secunda ascendere posset.

§. 5. Huius correctionis mentio est facta in Edit. II. Tabularum Astronomicarum *Philippi de la Hire*, in quibus etiam methodus est tradita hanc meridiei aequationem inueniendi. Inserta est etiam eidem libro tabula

aequa-

aequationis meridiei pro latitudine Lutetiae Parifiorum, quae vsque ad minuta tertia eft computata: id quod neceffarium eft, nifi in minutis fecundis errare velimus; etiamfi minuta tertia dignofcere non valeamus. Tabula ifta pro fingulis gradibus declinationis folis eft computata: fed tantum ab interuallo inter obferuationes quatuor horarum vsque ad decem extenditur. Praeterea illa tabula hoc vitio laborat, quod eaedem aequationes pro fignis afcendentibus et defcendentibus valeant; cum tamen motus folis per figna afcendentia et defcendentia non fit idem; id quod quidem in minutis tertiis tantum discrimen parit; fed ex eo differentia in minutis fecundis oriri poteft. Nam horum numerorum $20''$, $35'''$ et $20''$, $25'''$ differentia tantum eft $10'''$; interim tamen pro priore aftronomi accipere folent $21''$, pro pofteriore autem tantum $20''$, quod eft difcrimen vnius integri minuti fecundi.

§. 6. Methodus autem LaHiriana computandi aequationem meridiei valde eft prolixa et multum temporis requirit ad aequationem pro vnico cafu inueniendam; ad completam autem tabulam aequationis meridiei conficiendam expeditiffimus calculator pluribus menfibus opus haberet. Praeterea cum hae aequationes in minutis tertiis defiderentur, tabulae noftrae finuum et tangentium non fufficiunt; fed perpetuo opus eft interpolatione, quod incredibilem laborem parit. Cogitaui ergo, cum nuper huiusmodi tabula pro noftro obferuatorio defideraretur, de alia methodo aequationem meridiei inueniendi, quae breuis effet, et ad quam tabulae finuum et tangentium sufficerent. Perspexi autem statim, ad hoc obtinendum methodum ita comparatam esse oportere, vt aequatio non ex differentia angulorum, quorum sinus vel tangentes calculum ingrediuntur, sit determinanda, sed ex certo quodam angulo vel arcu; cuius sinus non in considerationem veniat. Angulorum seu arcuum enim, quorum differentia minuta temporis tertia producat, sinus in tabulis consuetis non reperiuntur, sed interpolatione inueniri deberent, id quod euitare statui.

§. 7. Ad huiusmodi methodum inueniendam coniunxi cum trigonometria sphaerica calculum infinitesimalem, cuius beneficio statim desideratae indolis methodum sum adeptus. Hoc autem modo calculum infinitesimalem ad vtilitatem meam conuerti: declinationis solis variationem diurnam tanquam infinite paruam quantitatem sum contemplatus; cum, quando maxima est 24′ non excedat; et quemadmodum arcus 24′ minutorum pro lineola recta haberi potest, ita eodem iure pro elemento infinite paruo haberi potest, respectu scilicet arcuum finitae magnitudinis seu potius totius peripheriae. Hoc pacto, dum calculum iuxta praecepta calculi infinitesimalis sum persecutus, obtinui, vt plures termini, qui tanquam differentialia secundi gradus considerari potuerunt, ex calculo excesserint, et tandem breuis et facilis formula aequationem meridiei exhibens prodierit. Ex hac igitur formula non solum facile erat tabulam pro hoc loco computare; sed etiam quoties vbique

vbique locorum duae obſeruationes aequalium ſolis altitudinum capiuntur, facili labore ſine tabula correctio meridici computari poteſt.

§. 8. Ad operationes iam meas exponendas neceſſe mihi eſt ſequentia praemittere. Si anguli vel arcus cuiuspiam AM ſinus PM fuerit $=A$, et coſinus $CP=a$ $=\sqrt{(1-A^2)}$ poſita pro ſinu toto AC vnitate; arcus vero AM augeatur elemento quam minimo Mm: erit arcus aucti ſinus $=A+a.Mm$, et coſinus $=a-A.Mm$. Eſt enim arcus AMm ſinus $=pm=PM(A)+mN$; et propter triangula ſimilia CPM, mNM eſt $CM(1):CP(a)=Mm:Nm$, vnde fit $Nm=a.Mm$, ideoque $pm=A+a.Mm$. Simili modo reperitur $MN=Pp=A.Mm$; cum igitur arcus AMm coſinus ſit $=Cp=CP(a)-Pp$, erit coſinus arcus aucti $AMm=a-A.Mm$. Perſpicuum autem eſt haec tantum locum habere, quando arculus Mm tam eſt exiguus, vt ſine errore pro lineola recta poſſit haberi. Cum igitur in ſequentibus declinatio ſolis interuallo duarum obſeruationum nequidem dimidio gradu augeri queat, arcusque dimidii gradus a lineola recta non multum diſcrepet, hoc lemmate ad definiendos ſinus et coſinus declinationis ſolis auctae vel minutae tuto vti poterimus. Error ſaltem, qui ex curuatura tam parui arcus oriri poſſet, vix ad minuta tertia aſcendere poteſt; tantillum vero errorem, qui minuta ſecunda afficere nequit, merito non curamus. Figura 1.

§. 9. His praemiſſis concipiatur hemiſphaerium APBE, in quo punctum P repraeſentet polum terrae Figura 2.

 et

et Z zenith loci, pro quo aequatio meridiei desideratur. Erit itaque recta AEB aequator et CD, *cd* circuli paralleli; PZE vero meridianus loci propositi. Porro PZ est complementum eleuationis poli, et hanc ob rem arcus meridiani ZE aequabitur ipsi poli eléuationi. Obseruetur iam sol ante meridiem in S, dabitur arcus ZS complementum scilicet altitudinis solis; PS vero est complementum declinationis solis, quod autem non datur, cum solis declinationes pro puncto meridiei inueniantur, in obseruatione autem distantia a meridie incognita ponatur. Ascendat sol ab aequatore versus boream; dum igitur perpetuo eius declinatio crescit, non in circulo parallelo CD mouebitur, sed oblique incedet via per lineam SOT repraesentatam. Post meridiem ergo, cum solis eadem altitudo obseruatur, sol non amplius erit in parallelo CD, sed in alio superiore proximo *cd*, et quidem in puncto T, cuius a zenith distantia ZT aequalis est distantiae ZS, quia altitudines solis in S et T sunt aequales positae, et ZS atque ZT harum altitudinum sunt complementa.

§. 10. Quando hae aequales solis altitudines obseruantur, momenta obseruationum ope boni horologii oscillatorii diligentissime notari debent. Vocatur autem bonum horologium, quod aequabiliter mouetur, et periodum in duodecim seu viginti quatuor horis absoluit, etiamsi eius hora duodecima cum vero meridie non congruat; per has enim ipsas obseruationes indagatur discrimen inter horam duodecimam horologii et verum meridiem, quo pacto horologium perfecte corrigitur,

et

et ad ſolis motum accommodatur. Ope horologii igitur boni licet non correcti cognoſcitur interuallum temporis inter momenta duarum illarum obſeruationum, quod tempus in gradus aequatoris conuerſum dat angulum SPT. Quaeritur autem angulus SPZ; hic enim in tempus conuerſus dat interuallum inter tempus obſeruationis antemeridianae et verum meridiem; ex quo correctio horologii ſponte ſequitur. Datur vero porro arcus meridani PO, qui eſt complementum declinationis ſolis in ipſo meridiei momento, ex ephemeridibus; at arcus PS et PT propter angulos SPZ et TPZ incognitos non dantur.

§. 11. Si ſol declinationem non mutaret, ſed perpetuo in eodem parallelo CD permaneret, obſeruatio pomeridiana incideret ſole exiſtente in t, cuius puncti a Z diſtantia Zt aequalis foret diſtantiae SZ. Hoc igitur caſu cum quoque ſit $PS = Pt$, biſecabit meridianus PZE angulum SPt; atque cum hic angulus in tempus conuerſus ſit interuallum inter momenta obſeruationum, manifeſtum eſt, ſi hoc interuallum in duas partes aequales diuidatur verum meridiei tempus eſſe proditurum. Contra vero ex his intelligitur ſolis declinatione immutata tempus medium inter momenta obſeruationum in ipſum meridiem incidere non poſſe, cum angulus TPZ maior ſit angulo SPZ, differentia exiſtente angulo TPt. A tempore itaque medio inter duas obſeruationes quicquam ſubtrahi debet ad verum meridiei tempus inueniendum; atque ea temporis particula, quae ſubtrahi debet, in arcum aequatoris conuerſa aequalis erit dimidio

angulo

angulo TPt. In id igitur nobis erit incumbendum, vt quantitatem anguli TPt eliciamus; quo facto habebimus meridiei aequationem. Huius enim anguli dimidium in tempus conuerſum dat tempuſculum a medio inter obſeruationes tempore ſubtrahendum noſtro caſu, quo ſolem in ſignis aſcendentibus ponimus. In ſignis vero deſcendentibus tempusculum eodem modo inuentum, addi debet ad tempus inter obſeruationes medium.

§. 12. Quo igitur rem ad calculum deducam, ſit ſinus arcus $PZ = A$, eiusque coſinus $= a$, poſito radio $= 1$, ſinus complementi declinationis ſolis ſeu ſinus arcus $PO = B$, eiusque coſinus $= b$, ita vt ſit $B^2 + b^2 = 1$. Porro ſit angulus $SPT = 2N$ grad. erit dimidium anguli $SPT = N$ grad.; ponatur huius dimidii anguli ſinus $= C$, eiusque coſinus $= c$, erit quoque $C^2 + c^2 = 1$. Denique ſit incrementum declinationis ſolis diurnum $= dt$; in ſignis deſcendentibus idem dt decrementum declinationis denotabit. Incrementum vero hoc vel decrementum in minutis ſecundis exactiſſime requiritur, ſiquidem aequatio meridiei in minutis tertiis temporis deſideratur. Cum autem ephemerides declinationem ſolis in minutis primis tantum continere ſoleant, dabo deinceps modum ex motu ſolis diurno vero, qui potiſſimum in minutis ſecundis habetur variationem declinationis diurnam in minutis ſecundis quoque computandi, ita vt non opus ſit vlla interpolatione in conſuetis ſinuum et tangentium tabulis. Anguli vero quaeſiti TPt dimidium vocabo dx; dabit ergo dx in tempus conuerſum aequationem meridiei quaeſitam. Aſſumo autem

autem pro variatione declinationis diurna et dimidio angulo TPt denominationes differentiales dt et dx, quia ſunt quantitates tam paruae, vt reſpectu reliquorum arcuum pro infinite paruis haberi queant, et quia arcus ipſis dt et dx in aequatore reſpondentes a lineolis rectis non diſcrepant.

§. 13. Cum ſol interuallo vnius diei declinationem aequabiliter mutare cenſendus ſit, ex variatione declinationis ſolis diurna inuenitur variatio declinationis interuallo temporis inter momenta duarum obſeruationum. Quemadmodum igitur ſe habet interuallum 24 horarum ad interuallum inter duas obſeruationes, ita ſe habent 360 gradus ad ang. SPT qui eſt 2N; quamobrem fiat vt 360 ad 2N ita dt ad $\frac{Ndt}{180}$, quod erit incrementum declinationis, dum ſol angulum SPT circa polum conficit. Huic ergo quantitati $\frac{Ndt}{180}$ aequalis eſt differentia inter PS ſeu Pt et PT; quare erit $PS-PT=Pt-PT=\frac{Ndt}{180}$. Cum deinde angulus TP$t$ poſitus ſit $=2dx$; erit angulus $SPt=2N-2dx$, et hinc huius dimidium angulus SPO ſeu $tPO=N-dx$; atque angulus $TPO=N+dx$. Superiore ergo modo variatio declinationis, dum ſol angulum SPO abſoluit, inuenitur ex analogia $360:N-dx=dt:\frac{Ndt}{360}-\frac{dtdx}{360}$, vbi terminus $\frac{dtdx}{360}$, quia ad differentialia ſecundi gradus pertinet, tuto reiici poteſt; ita vt tam pro $PS-PO$, quam pro $PO-PT$ accipi poſſit $\frac{Ndt}{360}$. Nihilo vero difficilior euadet formula, imo ne quidem immutabitur, ſi quis pro $PS-PO$ voluerit ſumere $\frac{Ndt-dtdx}{360}$ et pro $PO-PT$ hunc valorem $\frac{Ndt+dtdx}{360}$.

§. 14. Cum iam ſit arcus PO ſinus $=$ B et coſinus $= b$, erit per lemma praemiſſum arcus PS ſeu PO $+ \frac{Ndt - dtdx}{360}$ ſinus $= B + \frac{bNdt - bdtdx}{360}$ et coſinus $= b - \frac{BNdt + Bdtdx}{360}$; qui ſunt ſimul ſinus et coſinus arcus Pt. Arcus vero PT ſeu PO $- \frac{Ndt - dtdx}{360}$ ſinus erit $= B - \frac{bNdt - bdtdx}{360}$ et coſinus $= b + \frac{BNdt + Bdtdx}{360}$. Praeterea cum ſit angulus SPO ſeu tPO $= N - dx$, anguli N vero ſinus ſit C coſinusque c, erit anguli SPO ſeu tPO ſinus $= C - c\,dx$ et coſ. $= c + C dx$; ſimilique modo erit anguli TPO ſin. $= C + c dx$ et coſin. $= c - C dx$. Quantitate ergo dx tanquam data conſiderata, in triangulo ſphaerico tPZ data ſunt latera PZ et Pt vna cum angulo ZPt; ſimiliterque in triangulo ſphaerico TPZ data ſunt latera PZ et PT vna cum angulo TPZ. Ex his igitur triangulis, quia tria ſunt data, inueniri poterunt latera Zt et ZT. Qui arcus cum ſint aequales, dabunt aequationem, ex qua dx poterit determinari.

§. 15. Habemus ergo duo triangula ſphaerica reſoluenda, in quorum vtroque dantur duo latera cum angulo intercepto et tertium latus quaeritur. Ex his igitur datis, quomodo tertium latus ſit inueniendum antea regulam exhibebo, in qua demiſſione perpendiculi non
Figura 3. eſt opus. Si fuerint in triangulo ſphaerico ZPT data latera ZP et TP vna cum angulo ZPT erit coſ. ZT $=$ coſ. ZPT. $ſ$ZP. $ſ$PT $+$ coſ. ZP. coſ. PT; cuius regulae demonſtratio ex trigonometricis ab hic defuncto Prof. *Maiero* Tom. II. Comment. inſertis facile deriuatur. Per hanc regulam igitur orietur coſ. Z$t = ABc$

$+ ab$

$+ ab + ABCdx + \frac{AbcNdt - aBNdt + aBdtdx - Abcdtdx + AbCNdtdx}{360}$ atque ex altero triangulo erit cos. $ZT = ABc + ab - ABCdx - \frac{AbcNdt + aBNdt + aBdtdx - Abcdtdx + AbCNdtdx}{360}$. Cum autem sit $Zt = ZT$ erunt et cosinus aequales; quamobrem sequens habebitur aequatio: $ABCdx + \frac{AbcNdt - aBNdt}{360} = 0$, ex qua prodit $dx = \frac{Ndt}{360}\left(\frac{a}{AC} - \frac{bc}{BC}\right)$, in qua si arculus dt conuertatur in minuta tertia temporis habebitur statim dx in minutis tertiis temporis expressum; ideoque ipsa meridiei aequatio.

§. 16. Quo haec formula clarius perspiciatur loco symbolorum restituamus litteras figurae prodibitque aequatio meridiei $= \frac{\text{ang. } SPT.dt}{720^\circ} \left(\frac{1}{\text{tang. } PZ, \int \frac{1}{2} SPT} - \frac{1}{\text{tang. } PO. \text{ tang. } \frac{1}{2} SPT}\right)$. Ad calculum autem ex hac regula instituendum notari oportet sinum totum hic esse positum $= 1$, qui vero in tabulis sinuum et tangentium poni solet $= 10000000$. Quare quo vniformitas conseruetur, loco numeratoris 1, in formula inuenta poni debet quadratum sinus totius. Ne autem hac cautela sit opus formulam immuto, ita vt in numeratore et denominatore idem habeatur dimensionum numerus. Exsistente enim sinu toto $= 1$ est $\frac{1}{\text{tang. } PZ} = \text{cot. } PZ = \text{tang.}$ ZE seu est tangens eleuationis poli; atque $\frac{1}{\text{tang } PO} =$ cot. $PO = $ tang. OE seu est tangens declinationis solis. His igitur substitutis erit aequatio meridiei $= \frac{\text{ang. } SPT.dt}{720^\circ}$

$\left(\frac{\text{tang. } ZE}{\text{ſin. } \frac{1}{2} SPT} - \frac{\text{tang. } OE}{\text{tang. } \frac{1}{2} SPT}\right)$. Ex hac formula ſtatim apparet ſub polo aequationem hanc fieri infinite magnam: fit enim ZE arcus 90°, cuius tangens eſt infinite magna. Sub ipſo aequatore autem euaneſcit tang. ZE, ideoque aequatio meridiei fit negatiua; ſeu addi debet, cum alias ſubtrahi deberet, niſi OE fiat negatiuum, ſeu ſol verſus Auſtrum declinet. Formula tandem inuenta ad declinationem ſolis borealem eſt accommodata; at ſi fuerit auſtralis ob OE negatiuum, erit aequatio meridiei $= \frac{\text{ang. } SPT . dt}{720°}\left(\frac{\text{tang. } ZE}{\text{ſin. } \frac{1}{2} SPT} + \frac{\text{tang } OE}{\text{tang. } \frac{1}{2} SPT}\right)$ quae exigua diſcrepantia calculum admodum contrahit.

§. 17. Ipſe autem calculus ex hac formula ſequenti modo commodiſſime inſtituitur. Multiplicetur horarum inter obſeruationes elapſarum numerus per 15, quo habeatur numerus graduum anguli SPT, huiusque numeri ſumatur logarithmus. Deinde quaeratur modo poſt deſcribendo variatio declinationis diurna in minutis ſecundis, horumque numeri per 4 multiplicati logarithmus addatur ad priorem logarithmum et a ſumma ſubtrahatur logarithmus numeri 720; quo facto habebitur logarithmus ipſius $\frac{\text{ang. } SPT . dt}{720}$. Deinde a logarithmo tangentis eleuationis poli ſubtrahatur logarithmus ſinus dimidii anguli SPT et ex tabula logarithmorum numerorum naturalium quaeratur numerus reſiduo reſpondens, qui erit $= \frac{\text{tang. } ZE}{\text{ſin. } \frac{1}{2} SPT}$. Simili modo a logarith-

mo

mo tangentis declinationis ſolis ſubtrahatur logarithmus tangentis dimidii anguli SPT, et ex tabula logarithmorum reſiduo quaeratur numerus reſpondens, qui erit $= \frac{\text{tang. } OE}{\text{tang.} \frac{1}{2} SPT}$. Tum in caſu declinationis borealis hic numerus ab illo ſubtrahatur, in caſu auſtralis vero declinationis hi numeri ad ſe inuicem addantur; numerique qui prodiit ſumatur iterum logarithmus, isque addatur ad logarithmum $\frac{\text{ang. } SPT.dt}{720^\circ}$ ante inuentum. Quo facto numerus aggregato illorum logarithmorum reſpondens erit numerus minutorum tertiorum aequationem meridiei conſtituentium.

§. 18. Videtur quidem haec regula ſatis prolixa, et multum temporis requirere ad tabulam aequationis meridiei computandam; ſed qui paulisper in calculando eſt exercitatus, ſtatim videbit non opus eſſe pro ſingulis aequationibus totam operationem repetere; ſed plures numeros vnius operationis in reliquis retineri. De me ſaltem aſſeuerare poſſum, me haud quatuor dies integros ad totam tabulam huic loco inſeruientem impendiſſe; quae tamen tabula plusquam ſexies amplior eſt, quam ea quae pro latitudine Lutetiae in Tabulis Lahirianis extat. Peculiares enim tabulas confeci pro ſignis aſcendentibus et deſcendentibus, quo inſtituto labor fere erat duplicatus. Praeterea tabulam ab vnius horae interuallo inter obſeruationes ſucceſſiue vsque ad octodecim horas continuaui, cum Pariſienſis tantum a quatuor horis vsque ad decem procedat.

§. 19. Antequam regulam hanc exemplo illuſtrem neceſſe eſſe iudico methodum tradere, qua ex motu ſolis diurno in ecliptica incrementum vel decrementum diurnum declinationis inueniri queat; idque in minutis ſecundis; ad quod requiritur motus ſolis in ecclipticа in
Figura 4. minutis ſecundis quoque. Sit igitur in hemiſphaerio ARBA, R polus, AB aequator et EC eccliptica cum aequatore angulum ACE 23°, 29′ conſtituens. Sit ſol in M eiusque declinatio arcus PM; progrediatur ſol vno die in eccliptica per arculum Mm quem vocemus dk; erit incrementum declinationis $= mp - MP = mN = dt$. Sit vt ante iam poſuimus ſinus arcus $PM = b$ et coſinus $= B$ erit ſinus arcus $mp = b + B\,dt$. Vocetur ſinus anguli $ACE = e$ fiatque vt $e : 1 = ſPM\,(b) : ſCM$. erit ergo ſin. $CM = \frac{b}{e}$. Sit coſinus arcus CM $= f$ erit ſin. $Cm = \frac{b}{e} + f\,dk$. Eſt vero $ſACE\,(e)$: ſin. tot. $(1) = ſ.pm\,(b + B\,dt) : ſ.Cm\,(= \frac{b}{e} + f\,dk)$ ſiue $ef\,dk = B\,dt$. Ex quo inuenitur $dt = \frac{ef\,dk}{B}$. Cum igitur ſit $e =$ ſin. 23°, 29′, $f =$ coſ. diſtant. Solis ab aequinoctio et $B =$ coſ. declin. ſolis; definitur dt per dk; et quia dk in minutis ſecundis ex ephemeridibus habetur, dt quoque in minutis ſecundis exprimetur.

§. 20. Hoc expoſito praeſcriptas operationes in ſequente exemplo abſoluemus. Sub eleuatione Poli 52°, 27′ obſeruatur ſolis altitudo ante meridiem hora 8. min. 21. eademque ſolis altitudo poſt meridiem redibat hora 3. min. 49; quae momenta ope horologii boni etiamſi non correcti ſunt notata. Oſtendebant autem illo die ephe-

ephemerides Solem in ♉, 16°, 35′, 6″, eiusque declinationem 16°, 49′. Quaestio est vero, in quod tempus a horologio indicatum verus meridies inciderit. Reperitur autem motus solis diurnus verus ex ephemeridibus $= 57', 4'' = 3424''$; quare est $dk = 3424''$. Distantia porro solis ab aequinoctio proximo est 46°, 35′, cuius anguli cosinui aequatur f, atque est $e =$ sin. 23°, 29′ et $B =$ cos. 16°, 49′. Ex quibus iuuenitur dt, vt sequitur:

$$\begin{array}{lll} le = l \text{ sin. } 23^\circ, 29' & = & 9,6004090 \\ lf = l \text{ cos. } 46^\circ, 35' & = & 9,8371456 \\ ldk = l\,3424 & = & 3,5345338 \\ \hline lefdk & = & 22,9720884 \\ lB = l\text{cos. } 16^\circ, 49' & = & 9,9810187 \\ \hline & & 12,9910697 \end{array}$$

Hic autem ob vniformitatem, quia in numeratore duo sunt sinus, vnicus vero in denominatore, log. sinus totius 10 subtrahi debet, eritque residuum

$$2,9910697 = ldt.$$

§. 21. Non opus est vt huius logarithmi numerus respondens quaeratur, cum in altera formula logarithmus ipsius dt sit adhibitus, interim tamen ex tabulis eruitur $dt = 979'' = 16', 19''$, quae est variatio declinationis diurna. Si 979″ per 4 multiplicetur, habebitur numerus minutorum temporis tertiorum ipsi dt respondens. Cum igitur ex hac formula dt prodeat in minut. secundis, multiplicetur altera formula per 4 eritque aequa-

Figura 2. aequatio meridiei $= \frac{\text{ang. SPT}.\, dt}{180} \left(\frac{\text{tang. ZE}}{\text{fin.} \frac{1}{2}\text{SPT}} - \frac{\text{tang OE}}{\text{t.} \frac{1}{2}\text{SPT}} \right)$ min. tert. temporis. Nunc pro formula eſt $ZE = 52°, 27'$ et $OE = 16°, 49'$; atque cum interuallum duarum obſeruationum ſit 7 hor. 28′ erit angulus $SPT = 112°$; et $\frac{1}{2}SPT = 56°$. His praeparatis inſtituatur operatio vt ſequitur:

$$
\begin{array}{ll}
\text{l. ang. SPT} = l\,112 = & 2,0492180 \\
\text{l. } dt \text{ - - - - } = & 2,9910697 \\
\hline
 & 5,0402877 \\
\text{l. } 180 \text{ - - - - - } & 2,2552725 \\
\hline
\text{l. } \frac{\text{ang. SPT}.dt}{180} = & 2,7850152
\end{array}
$$

Alterum membrum hoc modo inuenietur:

$$
\begin{array}{ll}
\text{l. tang. ZE} = \text{l. tang. } 52°, 27' = & 10,1142350 \\
\text{l. f.} \tfrac{1}{2}\text{SPT} = \text{l. f. } 56° = & 9,9185742 \\
\hline
\text{l. } \frac{\text{tang. ZE}}{\text{f.} \frac{1}{2}\text{SPT}} = & 0,1956608
\end{array}
$$

Erit ergo

$$\frac{\text{tang. ZE}}{\text{fin.} \frac{1}{2}\text{SPT}} = 1,569.$$

Porro eſt

$$
\begin{array}{ll}
\text{l. tang. OE} = \text{l. t. } 16°, 49' = & 9,4803451 \\
\text{l.tang.} \tfrac{1}{2}\text{SPT} = \text{l.t. } 56° = & 10,1210126 \\
\hline
\text{l. } \frac{\text{tang. OE}}{\text{tang.} \frac{1}{2}\text{SPT}} = & -\ 1,3593325
\end{array}
$$

vbi

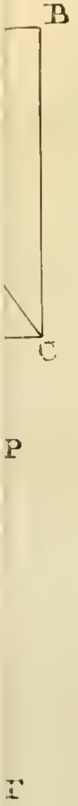
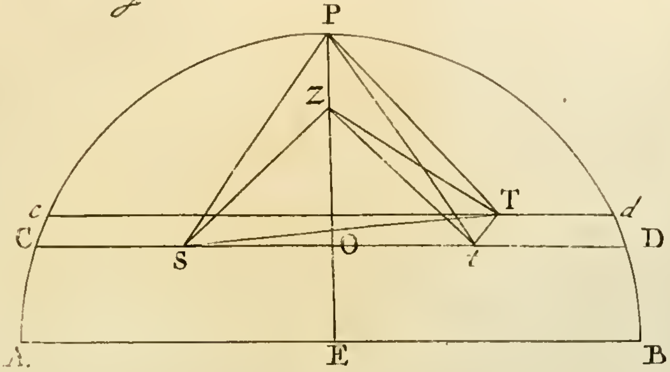


Fig. 2.



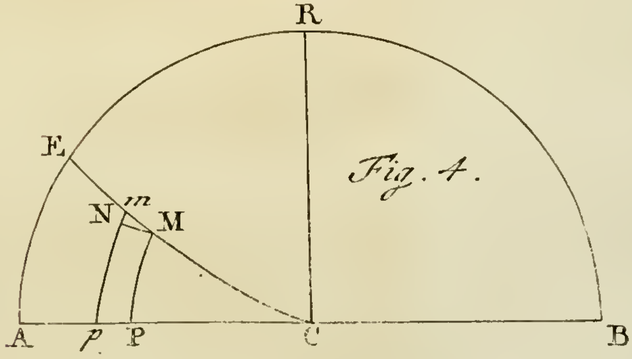


Fig. 4.

Fig. 1.

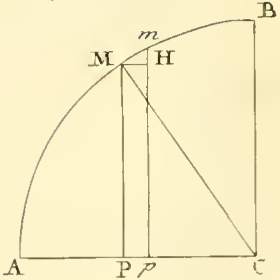


Fig. 2.

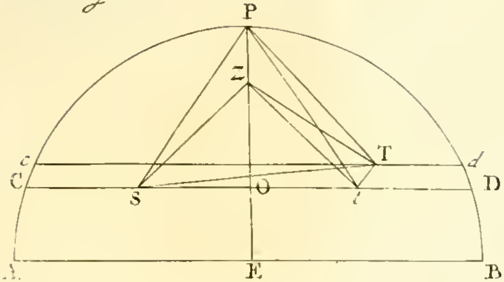
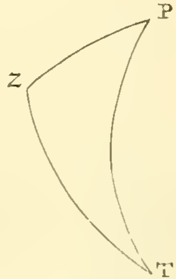


Fig. 3.



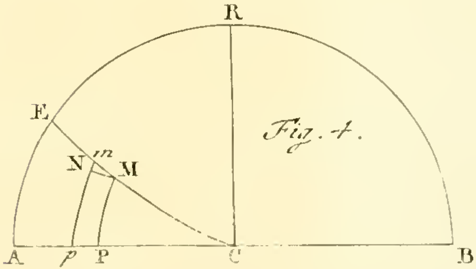


Fig. 4.

vbi notandum eſt ſignum — characteriſticam 1 tantum, non vero reliquos numeros afficere. Erit ergo

$$\frac{\text{tang. } OE}{\text{tang. } \frac{1}{2} SPT} = 0,229;$$

ideoque

$$\frac{\text{tang. } ZE}{\text{ſin. } \frac{1}{2} SPT} - \frac{\text{tang. } OE}{\text{tang. } \frac{1}{2} SPT} = 1,340,$$

cuius numeri logarithmus eſt $= 0,1271048$

qui additus ad $l. \frac{\text{ang. } SPT. dt}{180} = 2,7850152$

dat log. aequationis meridiei $= 2,9121200$.

Quare ipſa aequatio erit 817 minut. tert. ſeu aequatio meridiei huic caſui reſpondens eſt $13''$, $37'''$, quae minuta ſecunda et tertia tempus denotant.

§. 22. Quia in hac obſeruatione ſol in tauro verſatur, eius declinatio creſcit, et hanc ob rem aequatio inuenta a tempore medio inter tempora obſeruationum ſubtrahi debet, quo momentum meridiei proueniat. Inuenitur autem tempus medium addendis temporibus obſeruationum

$$\begin{array}{rr} & 8^h.\ 21' \\ & 3^h.\ 49' \\ \text{vna cum 12 horis} & 12^h. \\ \hline & 24^h.\ 10' \\ \hline \text{ſumendoque huius dimidium} & 12^h.\ \ 5' \end{array}$$

a quo tempore ſi ſubtrahatur $13''$, $37'''$, habebitur verum meridiei tempus hora 12, cum $4'$, $46''$, $23'''$; vnde horologium exactiſſime corrigi poteſt.

DE CONSTRVCTIONE AEQVATIONVM OPE MOTVS TRACTORII, ALIISQVE AD METHODVM TANGENTIVM INVERSAM PERTINENTIBVS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Tab. V. Fig. 1. Motu tractorio curuae lineae describuntur, dum filum datae longitudinis altero termino pondus annexum habens, altero termino in data linea siue recta siue curua protrahitur; atque ea linea curua, quam pondus motu suo describit, tractoria vocatur. Vt si filum BA in A pondere onustum, termino B in linea data BN protrahatur, linea AM, in qua alter terminus A mouebitur, erit curua tractoria. Huius curuae ista nota est proprietas, quod filum perpetuo positum sit in tangente curuae tractoriae; scilicet quando filum est in situ NM, et hoc modo punctum M curuae tractoriae generat, erit recta MN tangens curuae in puncto M; ex qua proprietate solius calculi ope ex data curua BN pro tractoria AM aequatio potest inueniri.

§. 2. Ratio autem huius descriptionis ex mechanica est petenda, quia a motus natura pendet. Mouetur enim corpus semper in ea directione in qua protrahitur, si quidem quiescit; atque hoc casu directio fili, quo corpus trahitur, est tangens curuae a corpore descriptae.

ſcriptae. At ſi corpus iam habeat motum, eius directio a directione fili diſcrepabit. Quare quo motus directio perpetuo in poſitionem fili incidat, oportet vt motus corpori iam impreſſus quouis momento pereat. Ad hoc ergo obtinendum requiritur, vt haec deſcriptio perficiatur ſuper plano horizontali et ſatis aſpero, illud quidem, ne vis grauitatis directionem immutet, hoc vero vt frictione omnis motus iam acquiſitus pereat. Praeterea filum tardiſſime protrahi debet, quo effectus frictionis ſit eo maior, et corpus nihil de priſtino motu retineat.

§. 3. Si igitur hoc modo curua tractoria A M deſcribatur, ea hanc habebit proprietatem, vt ex quouis puncto M ducta tangens M N vsque ad datam curuam B N ſit datae magnitudinis. Ex quo perfacilis oritur modus ex data curua tractoria A M inueniendi curuam BN cuius illa eſt tractoria pro data fili longitudine. At ex data curua P N innumerabiles oriri poſſunt tractoriae longitudine fili immutata, prout initio poſitio fili BA ad curuam B N fuerit inclinata. Longe autem difficilius eſt per calculum ex data curua B N inuenire tractoriam A M quam ex tractoria A M data curuam B N.

§. 4. Obſeruaui autem geometricam conſtructionem tractoriae A M ſemper pendere a reſolutione aequationis $ds + ss\,dz = Z\,dz$, denotante Z functionem quamcunque ipſius z. Quare cum haec aequatio conſtructu ſit valde difficilis, quippe multo generalior quam haec $ds + ss\,dz = z^m\,dz$, quae a *Com. Riccati* quondam erat propoſita, eius conſtructio ope tractorii motus attentionem meretur. Quae conſtructio cum ſit praeterea ad-

 modum

modum ſimplex et facilis, operae pretium erit aequationis tam difficilis conſtructionem ad motum tractorium reduxiſſe.

§. 5. Pono igitur in curua data BN abſciſſam AQ $= t$, et applicatam QN $= u$; dabiturque u per t et conſtantes. Pro curua autem quaeſita pono AP $= x$ et PM $= y$; ſitque $dy = p\,dx$; longitudinem fili vero AB vel MN pono $= b$. His poſitis erit $\sqrt{(1+pp)} : 1 =$ MN(b): PQ$(t-x)$, et $\sqrt{(1+pp)} : p =$ MN(b):QN$-$PM $(u-y)$. Hinc igitur fit $\frac{b}{\sqrt{(1+pp)}} = t-x$ et $\frac{bp}{\sqrt{(1+pp)}} = u - y$, atque ex his porro $pt - px = u - y$. Hanc poſtremam aequationem differentio ponendo $p\,dx$ loco dy, quo facto prodit $p\,dt + t\,dp - x\,dp = du$ atque $x = t + \frac{p\,dt}{dp} - \frac{du}{dp}$. Eſt vero ex prima aequatione $x = t - \frac{b}{\sqrt{(1+pp)}}$, vnde obtinetur iſta aequatio $du = p\,dt + \frac{b\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$, in qua duae tantum inſunt variabiles p et t, quia u per t datur.

§. 6. Eſt autem p cotangens anguli MNQ poſito ſinu toto $= 1$, quare haec aequatio ope motus tractorii reſoluitur, per illum enim innoteſcet angulus MNQ, eiusque conſequenter cotangens cui aequalis eſt p. Ad irrationalitatem autem tollendam pono $\sqrt{(1+pp)} = p + q$ ſeu $q = \sqrt{(1+pp)} - p$; quia antem $\sqrt{(1+pp)}$ eſt coſecans anguli MNQ et p eius cotangens, erit per elementa trigonometrica q tangens ſemiſſis anguli MNQ. Per hanc vero ſubſtitutionem eſt $p = \frac{1-qq}{2q}$ et $\sqrt{(1+pp)} = \frac{1+qq}{2q}$ atque $dp = \frac{-dq(1+qq)}{2qq}$. Hinc ergo erit $\frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{-dq}{q}$, atque ſuperior aequatio transibit in hanc $2q\,du = dt - qq\,dt - 2b\,dq$.

§. 7.

§. 7. Ad hanc aequationem vlterius reducendam, pono $du = \frac{bdr}{r}$, eritque $2bqdr + 2brdq = rdt - rqqdt$; in qua t et r a se mutuo pendent, qui t est $= AQ$, et $blr = QN$. Porro fiat $qr = s$ seu $q = \frac{s}{r}$ erit $2bds = rdt - \frac{ssdt}{r}$. Sit nunc $\frac{dt}{r} = 2bdz$ et $rdt = 2bZdz$, erit $rr = Z$ et $r = \sqrt{Z}$. Praeterea est $dt^2 = 4b^2Zdz^2$ et $t = 2b\int dz\sqrt{Z}$. Per z igitur curua BN ita determinatur, vt sit $AQ = 2b\int dz\sqrt{Z}$ et $QN = \frac{b}{2}lZ$. Quia ergo curua BN datur, dabitur simul Z per z. Factis autem his substitutionibus habebitur $ds + ssdz = Zdz$.

§. 8. Proposita ergo aequatione $ds + ssdz = Zdz$ valor ipsius s per z sequenti modo poterit definiri. Construatur curua BN huiusmodi vt sumta abscissa $AQ = 2b\int dz\sqrt{Z}$, sit applicata $QN = \frac{b}{2}lZ$. Tum filo longitudinis b secundum curuam BN protracto describatur tractoria AM. Deinde ducatur tangens MN, quae etiam ipso filo exhibebitur, innotescetque angulus MNQ, cuius dimidii tangens sit $= q$. Hoc facto erit $s = qr = q\sqrt{Z}$.

§. 9. Coordinatae autem AP et PM curuae tractoriae ita se habebunt: erit $AP = x = t - \frac{b}{\sqrt{(1+pp)}} = t - \frac{2bq}{1+qq}$, et $y = u - \frac{bp}{\sqrt{(1+pp)}} = u - \frac{b(1-qq)}{1+qq}$. Quia autem est $t = 2b\int dz\sqrt{Z}$ et $u = \frac{b}{2}lZ$, atque $q = \frac{s}{r} = \frac{s}{\sqrt{Z}}$; erit $x = 2b\int dz\sqrt{Z} - \frac{2bs\sqrt{Z}}{s+Z}$ et $y = \frac{b}{2}lZ + \frac{bs - bZ}{s+Z}$. Ex his iam aliae nascuntur constructiones aequationis $ds + ssdz = Zdz$. Per motum enim tractorium innotescunt

 coor-

coordinatae x et y curuae AM, atque ex his erit vel $s = \frac{Z(t-x)}{2b\sqrt{Z - t + x}}$, vel $s = \frac{Z(b-u+y)}{b+u-y}$.

§. 10. Aequatio vero inter x et y ex data aequatione inter t et u facile inuenitur. Eſt enim ex aequationibus ſupra inuentis $t = x - \frac{b}{\sqrt{(1+pp)}} = x + \frac{bdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ et $u = y + \frac{bp}{\sqrt{(1+pp)}} = y + \frac{bdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Quare ſi in aequatione data inter t et u loco t et u iſti valores ſubſtituantur prodibit aequatio inter x et y pro tractoria AM quaeſita, quae erit differentialis primi gradus ſi aequatio inter t et u fuerit algebraica. Ex hac vero aequatione, quae plerumque fit maxime intricata, nihil, quod ad cognitionem curuae AM attinet, poterit concludi. Omnium autem huiusmodi aequationum reſolutio pendebit a reſolutione huius $ds + ssdz = Zdz$.

§. 11. Si ergo proponatur haec aequatio $ds + s^2dz = a^2z^{2n}dz$, quae eſt ea ipſa quam *Com. Riccati* reſoluendam propoſuit, erit $Z = a^2z^{2n}$ et $\int dz\sqrt{Z} = \frac{az^{n+1}}{n+1}$ atque $lZ = 2la + 2nlz$. Hinc erit $t = \frac{2abz^{n+1}}{n+1}$, et $u = bla + nblz$. Quia autem eſt $t = \frac{2abz^{n+1}}{n+1}$, erit

$$lt = l\frac{2ab}{n+1} + (n+1)lz \text{ ſeu } lz = \frac{lt - l2ab + l(n+1)}{n+1}$$

Quo valore in aequatione altera $u = bla + nblz$ ſubſtituto, et applicatis u pro lubitu auctis vel diminutis habebitur iſta aequatio $u = \frac{nb}{n+1}lt$, ſeu $tdu = \frac{nbdt}{(n+1)}$; quae eſt aequatio inter t et u, et indicat curuam BN eſſe

esse logarithmicam, cuius subtangens constans est $= \frac{nb}{n+1}$.

§. 12. Pro hoc ergo casu construatur logarithmica DN ad asymtoton AB, cuius subtangens sit $= \frac{nb}{n+1}$. Producatur quaecunque applicata AE, quae pro axe habeatur, et motu tractorio filum longitudinis b altero termino in logarithmica protrahatur, describatque alter terminus tractoriam CMN. Demittantur ex punctis M et N perpendicula MP et NQ erit $s = \frac{Z.PQ}{2b\sqrt{Z-PQ}} = \frac{a^2 z^{2n}.PQ}{2abz^n - PQ}$ sumto $z = \sqrt[n+1]{\frac{2(n+1)AQ}{ab}}$ Vnica ergo logarithmica omnes casus aequationis $ds + ssdz = a^2 z^{2n} dz$ possunt construi, dummodo sit tangens MN seu filum ad subtangentem logarithmicae vt $n+1$ ad n. Figura 2.

§. 13. Sequente praeterea modo aequatio $ds + ssdz = a^2 z^{2n} dz$ potest construi. Super axe construatur curua paraboloides, dictis $AQ = t$ et $QL = z$, hac aequatione expressa $z^{n+1} = \frac{2(n+1)t}{ab}$. Deinde filo longitudinis b super logarithmica DN, vt ante est praeceptum describatur tractoria CM. Tum in paraboloide sumatur applicata $QL = z$, eaque producatur, donec logarithmicam secet in N. Ex N ducatur recta NM longitudinis b ad tractoriam, et ex M demittatur perpendiculum MP. Quibus factis erit $s = \frac{4(n+1)^2 AQ^2.PQ}{bb(4(n+1)AQ.QL - PQ.QL^2)}$ Vel etiam posita tangente dimidii anguli $MNQ = q$, erit $s = \frac{2(n+1)AQ.q}{b.QL}$.

§. 14. Cum methodus, qua in reductione aequationis constructae ad descriptionem tractoriae sum vsus, maximam habeat vtilitatem in resolutione problematum generalium, quae ad methodum tangentium inuersam referuntur, hic nonnulla huiusmodi problemata adiungam, eorumque resoluendorum modum ostendam. Cuius rei ratio quo facilius percipiatur, ante exponendum est, quam variis modis natura cuiusque curuae possit determinari, et quinam sint illi modi, ex quibus facillime diiudicari possit, an curua proposita sit algebraica, an transcendens.

§. 15. Vsu iam maxime receptum est, vt natura cuiusque curuae exprimatur aequatione inter duas coordinatas orthogonales abscissam scilicet et applicatam, quippe ex qua quaelibet curuae puncta facillime possunt inueniri. Ex huiusmodi aequatione sponte sequitur, vtrum curua sit algebraica an secus; nam si aequatio est algebraica curua quoque talis censetur, sin vero aequatio fuerit transcendens, curua quoque transcendens habetur. Eadem vero conclusio deduci potest ex aequatione inter alias rectas lineas, quae curuae naturam exprimat, si modo positio earum rectarum non ab ipsa curua pendeat, sed vel ad datum punctum vel datam lineam referatur.

§. 16. At si positio earum linearum, inter quas aequatio curuae naturam exprimit, sine curuae ipsius cognitione definiri non potest, ex ea aequatione etiam singula curuae puncta immediate inueniri non possunt. Ex huiusmodi quoque aequatione, etsi est algebraica,

tamen

tamen non sequitur curuam esse algebraicam, sed saepe maxime erit transcendens. Quamobrem tum ad constructionem tum ad cognitionem curuae huiusmodi aequatio in aliam est transmutanda, quae sit inter lineas, quarum positio a curua non pendeat.

§. 17. Optimum igitur ad cognoscendam et construendam curuam remedium erit, aequationem, si fuerit inter lineas, quarum positio ab ipsa curua pendeat, transmutare in aequationem consictam inter abscissam et applicatam. In hoc autem negotio summa cura est adhibenda, ne in prolixissimos calculos et resolutu difficillimas aequationes incidamus. Facillima enim videtur illa transmutatio in aequationem inter abscissam et applicatam, sed hoc modo plerumque in inextricabiles tricas delabimur; Id quod vnico exemplo ostendere sufficiet.

§. 18. Exprimatur curuae AM natura aequatione Figura 3.
inter normalem in curuam MN et portionem axis AN; quarum MN vocetur u et AN, t; sitque aequatio curuae naturam exprimens haec simplex admodum $u^2 = at$. Si nunc ponatur abscissa AP $= x$ et applicata PM $= y$, atque curuae elementum quod est $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$, erit MN $= u = \frac{yds}{dx}$ et AN $= t = x + \frac{ydy}{dx}$. Quare si hi valores in aequatione substituantur, habebitur quidem haec aequatio $y^2 ds^2 = axdx^2 + aydxdy$, inter x et y, ex qua neque constructio curuae apparet, neque etiam an sit algebraica an secus.

§. 19. In hoc quidem casu aequatio inuenta $y^2 ds^2 = a x dx^2 + a y dx dy$, quia differentialia duas tantum habent dimensiones, in aequationem vnius dimensionis mutari potest, prodibit enim posito $dx^2 + dy^2$ loco ds^2 et extracta radice quadrata haec aequatio $2 y dy = a dx \pm dx \sqrt{(a^2 + 4 a x - 4 y^2)}$ ex qua autem non tam facile natura curuae cognoscitur. Ex quo intelligitur, si magis compositam aequationem inter t et u assumsissemus, tum nequidem ad aequationem differentialem vnius dimensionis perueniri potuisse. Interim tamen a Cel. *Bernoullio* in Act. Lips. ostensum est, quoties detur aequatio algebraica inter t et u, toties quoque aequationem inter x et y fore algebraicam.

§. 20. Hanc ob rem alia via est procedendum, si ex aequatione inter t et u aequationem inter x et y eruere velimus, atque hoc obseruaui commodissime effici posse eadem methodo, qua ante constructionem aequationis $ds + ss dz = Z dz$ ad motum tractorium reduxi. Hac enim methodo statim apparebit, quibus casibus aequatio inter t et u quaecunque proposita ad aequationem algebraicam inter x et y deducat, vel si curua fuerit transcendens quadraturam dabit simplicissimam, a qua curuae constructio pendet.

§. 21. Retineamus igitur eundem casum, sitque aequatio inter $AN = t$ et $MN = u$ quaecunque; maneant etiam $AP = x$, $PM = y$ et $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$; erit $t = x + \frac{y dy}{dx}$ et $u = \frac{y ds}{dx}$. Ponatur $dy = p dx$; erit $t = x + p y$ et $u = y \sqrt{(1 + pp)}$ seu $y = \frac{u}{\sqrt{(1+pp)}}$. Differenferentietur haec aequatio, habebitur $dy = pdx = \frac{du}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{updp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$, illa aequatio autem differentiata dat $dt = dx + ppdx + ydp$ posito pdx loco dy, ex qua obtinetur $dx = \frac{dt}{1+pp} - \frac{ydp}{1+pp}$; quae per p multiplicata loco que y eius valore substituto dat $pdx = \frac{pdt}{1+pp} - \frac{pudp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$; qua cum illa coniuncta prodit $\frac{pdt}{\sqrt{(1+pp)}} = du$.

§. 22. Ex hac aequatione inuenta statim obtinetur $p = \frac{du}{\sqrt{(dt^2 - du^2)}}$ et $\sqrt{(1+pp)} = \frac{dt}{\sqrt{(dt^2 - du^2)}}$. Ex quibus erit $y = \frac{u\sqrt{(dt^2 - du^2)}}{dt}$ atque $x = t - py = t - \frac{udu}{dt}$. Quamobrem si aequatio inter t et u fuerit algebraica, aequatio inter x et y quoque erit algebraica, ex eaque constructio curuae quaesitae facile fluit. Atque a qua quadratura pendet aequatio inter t et u ab eadem quadratura pendebit aequatio inter x et y, et consequenter quoque constructio ipsius curuae.

§. 23. In casu speciali quem ante considerabamus erat $u^2 = at$, ideoque $t = \frac{u^2}{a}$ et $dt = \frac{2udu}{a}$ atque $\sqrt{(dt^2 - du^2)} = \frac{du}{a}\sqrt{(4u^2 - a^2)}$. His igitur substitutis proueniet $y = \frac{1}{2}\sqrt{(4u^2 - a^2)}$ atque $x = \frac{u^2}{a} - \frac{a}{2}$. Haec autem dat $4u^2 = ax + 2a^2$; qui ipsius $4u^2$ valor in illa aequatione substitutus dat hanc inter x et y aequationem algebraicam $2y = \sqrt{(4ax + aa)}$ hoc est $y^2 = ax + \frac{a^2}{4}$, quae est aequatio pro parabola abscissis in axe ex foco sumtis.

Figura 4. §. 24. Si curuae AM tangens MT ad axem PA vsque producatur, atque ex A ad axem perpendicularis AV erigatur, detur aequatio inter TA et AV, qua curuae natura exprimitur; oporteatque inuenire aequationem inter abſciſſam AP et applicatam PM, ſeu conſtruere curuam, quae omnes rectas per puncta T et V ductas tangat. Poſitis $AT = t$, $AV = u$, et $AP = x$, $PM = y$; erit $AT = \frac{y\,dx}{dy} - x = t$ et $AV = u = y - \frac{x\,dy}{dx}$; dataque ponitur relatio inter t et u; quae ſit quaecunque.

§. 25. Sit nunc $dy = p\,dx$ erit $t = \frac{y}{p} - x$ et $u = y - px$. Haec vero poſterior aequatio differentiata poſito $p\,dx$ loco dy dat $du = -x\,dp$ et $x = \frac{-du}{dp}$. Hi valores vero in priore aequatione loco x et y ſubſtituti dant $t = \frac{u}{p}$ ſeu $p = \frac{u}{t}$. Erit ergo $dp = \frac{t\,du - u\,dt}{tt}$ ideoque $x = \frac{tt\,du}{u\,dt - t\,du}$ et $y = u + \frac{tt\,du}{u\,dt - t\,du}$. Vnde iterum patet quoties aequatio inter t et u fuerit algebraica, toties curuam AM quoque fore algebraicam, propter aequationem inter x et y algebraicam.

§. 26. Manente aequatione inter AT, t et AV, u quacunque, ſi loco rectarum ſuper axe AT verticibus T infinitae parabolae TVM deſcribantur per puncta V transeuntes, inuenienda proponitur curua AM, quae ab his parabolis omnibus tangatur. Poſitis $AP = x$ et $PM = y$ et $dy = p\,dx$, erit ex natura parabolae TVM, $t : u^2 = t + x : y^2$, vnde habetur $y^2 = u^2 + \frac{u^2 x}{t}$. Quia porro parabola TVM tangere debet curuam AM, communem habebunt tangentem in puncto M atque ideoquoque

ſub-

ſubtangentem communem. Eſt vero ſubtangens parabolae in $M = 2PT = 2t + 2x$, quae aequalis eſſe debebit $\frac{ydx}{dx} = \frac{y}{p}$ ſubtangenti curuae quaeſitae AM, vnde oritur $y = 2pt + 2px$.

§. 27. Harum duarum aequationum ſi prior per poſteriorem diuidatur, prodit $y = \frac{u^2}{2pt}$, quo valore in altera aequatione ſubſtituto prodit $x = \frac{u^2}{4p^2t} - t$. Differentietur nunc vtraque aequatio; erit $dy = pdx = \frac{udu}{pt} - \frac{u^2dt}{2ptt} - \frac{u^2dp}{2p^2t}$ et $dx = \frac{udu}{2p^2t} - \frac{u^2dt}{4p^2tt} - \frac{u^2dp}{2p^2t} - dt$. Ex quibus aequationibus dx eliminato prodit $\frac{udu}{2pt} + pdt = \frac{u^2dt}{4p^2t}$ ſeu $pp = \frac{u^2}{4tt} - \frac{udu}{2tdt}$. Hinc ergo erit $x = \frac{2ttdu}{udt - 2tdu}$ et $y = \frac{u^2\sqrt{dt}}{\sqrt{(u^2dt - 2tudu)}}$. Ex quo perſpicitur curuam AM toties eſſe algebraicam, quoties aequatio inter t et u talis fuerit.

§. 28. Duo haec poſteriora problemata alio quidem modo facilius reſolui poſſunt quaerendo punctum quo duae curuae proximae concurrunt, in eo enim erit contactus curuae quaeſitae AM. Semper autem punctum concurſus M algebraice poteſt determinari, ſi tam curuae TVM, quam aequatio inter t et u algebraicae fuerint. Ideo autem haec problemata hic adieci, quo appareat, quomodo ad aequationem algebraicam inter x et y per plures differentiales aequationes perueniri queat.

§. 29. Si infinitae rectae RN intra angulum rectum A quomodocunque fuerint diſpoſitae, ita vt earum poſitio exprimatur aequatione quacunque inter AN, t et AR, u; inuenienda proponatur curua BM, quae omnes

 has

has rectas ad angulos rectos traiiciat. Positis $AP=x$, $PM=y$ et $dy=pdx$ erit $PN=\frac{ydy}{dx}=py$, quia RN in curuam est normalis; ideoque $t=x+py$; deinde est $dy:dx=p:1=t:u$, vnde erit $t=pu$ seu $p=\frac{t}{u}$, et $dy=\frac{tdx}{u}$. Per illam vero aequationem est $y=u-\frac{ux}{t}$; quare differentiando $dy=\frac{tdx}{u}=du-\frac{udx}{t}-\frac{xdu}{t}+\frac{uxdt}{tt}$, in qua aequatione duae insunt variabiles x et t, quia u per t datur.

§. 30. Aequatio postrema reducta in hanc abit $dx+x\left(\frac{tdt+udu}{tt+uu}-\frac{dt}{t}\right)=\frac{tudu}{tt+uu}$, quae per $\frac{\sqrt{(tt+uu)}}{t}$ multiplicata fit integrabilis; erit autem integrale $x=\frac{t}{\sqrt{(tt+uu)}}\int\frac{udu}{\sqrt{(tt+uu)}}$; quo cognito habebitur simul $y=u-\frac{u}{\sqrt{(tt+uu)}}\int\frac{udu}{\sqrt{(tt+uu)}}$. Quoties ergo $\frac{udu}{\sqrt{(tt+uu)}}$ integrationem admittit, toties curua BM erit algebraica. Ceterum autem constructio pendet a quadratura $\int\frac{udu}{\sqrt{(tt+uu)}}$.

§. 31. Consideremus huius problematis casum, quo RN perpetuo eiusdem magnitudinis manet; seu quo $\sqrt{(tt+uu)}=a$, vel $u=\sqrt{(u^2-t^2)}$. Erit ergo $\int\frac{udu}{\sqrt{(tt+uu)}}=\frac{-tt}{2a}$; vbi constantem non adiicio, ne ad maxime compositas aequationes deducar. Hoc inuento erit $x=\frac{-t^3}{2a^2}$ atque $t=-\sqrt[3]{2a^2x}$, et propterea $u=(a^2-\sqrt[3]{4a^4x^2})$ Quia vero est $y=\frac{u(t-x)}{t}$ erit $x=\frac{\pm(x+\sqrt[3]{2a^2x})}{\sqrt[3]{2a^2x}}\sqrt{(a^2-\sqrt[3]{4a^4x^2})}$ quae sumendis quadratis transit in hanc $\frac{3ax^2}{\sqrt[3]{4ax^2}}=a^2-x^2-y^2$, haec sumendis cubis in sequentem:

$(a^2-x^2$

$(a^2 - x^2 - y^2)^3 = \frac{27}{4} a^2 x^4$, quae eſt pro linea ſexti ordinis.

§. 32. Dantur autem praeter hanc curuam infinitae aliae quaeſtioni aeque ſatisfacientes, quae inuenientur, ſi ad integrale ipſius $\frac{u\,du}{\sqrt{(tt+uu)}}$ quantitas quaecunque conſtans addatur. Maxime autem aequatio inter x et y erit compoſita, propterea quod ex aequationibus indeterminata t eliminari debet, quae ad quatuor dimenſiones aſcendit. Interim tamen conſtructio erit facilis.

§. 33. Simili modo problema ſolui poteſt, ſi loco rectarum puncta R et N iungentium, curuae quaecunque per haec puncta ducantur, quae a quaeſita ad angulos rectos ſecari debeant. Ad hoc oſtendendum Figura 6. data ſit quaecunque aequatio inter $AS = t$ et $AR = u$, ductaque ſit quarta ellypſeos pars SMR per puncta R et S, cuius igitur centrum erit in A et ſemiaxes coniugati AS ac AR. Infinitas vero has ellipſes ad angulos rectos traiiciat curua BM, quae quaeritur. Ponantur $AP = x$ et $PM = y$ atque $dy = p\,dx$, erit ex natura ellipſis $y = \frac{u}{t} \sqrt{(tt - xx)}$, ſeu $y^2 = u^2 - \frac{u^2 x^2}{t^2}$.

§. 34. Ad ellipſin in puncto M ducatur normalis MT; erit haec per conditionem problematis ſimul tangens curuae quaeſitae BN. Quatenus autem MT eſt tangens curuae BM erit $PT = \frac{u^2 x}{t^2}$. At quatenus MT eſt tangens curuae BM erit $PT = \frac{y\,dx}{dy} = \frac{y}{p}$. Quocirca habebitur iſta aequatio $y = \frac{p u^2 x}{t^2}$; cuius differentialis eſt $dy = p\,dx = \frac{p u^2 dx}{t^2} + \frac{2 p u x du}{tt} + \frac{u^2 x dp}{dt} - \frac{2 p u^2 x dt}{t^3}$, ex qua fit

fit $p\,dx = \frac{2ptuxdu + tu^2xdp - 2pu^2xdt}{t(t^2 - u^2)}$. Prior vero aequatio differentiata dat $y\,dy = \frac{p^2u^2x\,dx}{tt} = u\,d\,u - \frac{u^2x\,dx}{t^2} - \frac{ux^2du}{tt} + \frac{u^2x^2dt}{t^3}$ seu $ux\,dx = \frac{t^3du - tx^2du + ux^2dt}{t(pp+1)}$.

§. 35. Si ex duabus aequationibus differentialibus dx eliminetur, habebitur $u^2\,x^2 = \frac{p(tt-uu)(t^3du - tx^2du + ux^2dt)}{(pp+1)(2ptdu + tudp - 2pudt)}$. Integrales vero aequationes coniunctae y eliminata dant $x^2 = \frac{t^4}{tt+ppuu}$. Hic ipsius x^2 valor si in illa aequatione substituatur, proueniet $tu(pp+1)(2ptdu + tudp - 2pudt) = p(tt-uu)(p^2udu - tdt)$. Ponatur $p = \frac{qtt}{uu}$ orietur ista aequatio $\frac{tudq}{q} = \frac{(tt-uu)(q^2t^3du + u^3dt)}{q^2t^4 + u^4}$ a cuius aequationis constructione vel separatione ipsius q ab u et t, pendet constructio curuae quaesitae.

§. 36. Habeat exempli causa AR ad AS rationem datam, seu sint omnes ellipses inter se similes erit $u = nt$; atque generalis aequatio abibit in hanc $\frac{dq}{q} = \frac{(1-nn)(q^2dt + n^2dt)}{q^2t + n^4t}$, in qua variabiles t et q separari possunt, prodibit namque $\frac{(1-nn)dt}{t} = \frac{(q^2+n^4)dq}{q(q^2+n^2)} = \frac{n^2dq}{q} + \frac{(1-n^2)qdq}{q^2+n^2}$, quae integrata dat $\left(\frac{t}{\sqrt{(q^2+n^2)}}\right)^{1-nn} = C\,q^{n^2}$ seu $t = a\,q^{\frac{n^2}{1-n^2}}\sqrt{(q^2+n^2)}$. Fiet ergo $u = n\,a\,q^{\frac{n^2}{1-n^2}}\sqrt{(q^2+n^2)}$ et $x = n\,a\,q^{\frac{n^2}{1-n^2}}$ et $y = q\,x$. Inter x et y ergo elicitur ista aequatio $x = b^{1-n^2}y^{n^2}$ pro curuis parabolicis; quod congruit cum iis, quae de traiectoriis orthogonalibus iam pridem sunt detecta.

§. 37. Quando in astronomia physica ex data vi centripeta curua determinatur, quam corpus proiectum descriſcribit, peruenitur ſtatim ad aequationem inter diſtantiam corporis a centro virium et perpendiculum ex centro in tangentem curuae demiſſum. Difficulter autem ex tali aequatione cognoſci poteſt, vtrum curua deſcripta ſit algebraica an tranſcendens; difficilius vero eſt aequationem inter coordinatas orthogonales ſimpliciſſimam inuenire. Methodo vero noſtra hactenus vſitata haec quaeſtio facile expeditur.

§. 38. Sit centrum virium A et curua a corpore proiecto deſcripta BM; ponatur diſtantia $AM = t$ et in tangentem MT ex A demiſſum perpendiculum $AT = u$, ſitque curuae natura aequatione inter t et u expreſſa. In axe per A prolibitu ducto ſit abſciſſa $AP = x$, applicata $PM = y$, et $dy = p\,dx$; erit $t = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ et $u = \frac{y - px}{\sqrt{(1 + pp)}}$. Haec poſterior aequatio vero differentiata dat $du\sqrt{(1 + pp)} + \frac{u\,p\,dp}{\sqrt{(1 + pp)}} = -x\,dp$, vnde erit $x = \frac{-du\sqrt{(1 + pp)}}{dp} - \frac{pu}{\sqrt{(1 + pp)}}$ et $y = \frac{-p\,du\sqrt{(1 + pp)}}{dp} + \frac{u}{\sqrt{(1 + pp)}}$. Figura 3.

§. 39. Subſtituantur hi ipſorum x et y valores in aequatione $tt = x^2 + y^2$, quo facto habebitur $tt = u^2 + \frac{du^2(1 + pp)^2}{dp^2}$, vnde oritur $\frac{dp}{1 + pp} + \frac{du}{\sqrt{(tt - uu)}} = 0$. Denotet $\int \frac{du}{\sqrt{(tt - uu)}}$ arcum cuius tangens eſt q exiſtente ſinu toto $= 1$; erit $A\,p + A\,q = A\,b$ denotante A arcum cuius tangens eſt quantitas adiuncta. Quocirca erit $p = \frac{b - q}{1 + bq}$, et $\sqrt{(1 + pp)} = \frac{\sqrt{(1 + bb)(1 + qq)}}{1 + bq}$. Cum autem ſit $\frac{du}{dp} = \frac{-\sqrt{(tt - uu)}}{1 + pp} = \frac{-(1 + bq)^2\sqrt{(tt - uu)}}{(1 + bb)(1 + qq)}$ erit $x = \frac{(1 + bq)\sqrt{(tt - uu)} - (b - q)u}{\sqrt{(1 + bb)(1 + qq)}}$ atque $y = \frac{(b - q)\sqrt{(tt - uu)} + (1 + bq)u}{\sqrt{(1 + bb)(1 + qq)}}$.

 §. 40.

§. 40. Quoties ergo aequatio inter t et u eſt algebraica ſimulque ita comparata, vt $\int \frac{du}{\sqrt{(tt-uu)}}$ denotet arcum circuli, cuius tangens algebraice poteſt exhiberi; toties curua a corpore deſcripta erit algebraica, eiusque aequatio inter coordinatas orthogonales algebraica per inuentas formulas inuenitur.

§. 41. Si detur relatio inter radium oſculi MO et partem eius MN ſeu normalem aequatione quacunque, aequatio inter coordinatas AP, PM hac ratione poterit inueniri, ex qua ſtatim appareat quibus caſibus curua fiat algebraica. Sit nempe $MN = t$ et $MO = u$ dataque ſit aequatio quaecunque inter t et u; Ponatur $AP = x$, $PM = y$ atque $dy = p\,dx$. Erit ergo elementum curuae $= dx\sqrt{(1+p^2)}$ et $ddy = dp\,dx$ poſito dx conſtante. Ex his igitur erit $MN = t = y\sqrt{(1+pp)}$ et $MO = u = \frac{-dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$. Ex quarum aequationum poſteriore fit $dx = \frac{-u\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$; prior differentiata dat $dy = p\,dx = \frac{dt+pp\,dt-pt\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$. His ergo aequationibus coniunctis habebitur $pu\,dp = pt\,dp - dt - pp\,dt$.

§. 42. Aequatio haec inuenta, quia u per t dari ponitur, admittit variabilium ſeparationem, abit enim in hanc $\frac{p\,dp}{1+pp} = \frac{dt}{t-u}$, cuius integralis eſt $l\sqrt{(1+pp)} = \int \frac{dt}{t-u}$. Sit $\int \frac{dt}{t-u} = lq$ erit $\sqrt{(1+pp)} = q$ et $y = \frac{t}{q}$. Hinc ergo porro eſt $dy = \frac{q\,dt-t\,dq}{qq} = p\,dx = dx\sqrt{(qq-1)}$; ideoque

ideoque $x = \int \frac{q\,dt - t\,dq}{qq\sqrt{(qq-1)}}$. Ex quo perſpicitur, vt curua AM fiat algebraica, duo requiri, primo ſcilicet vt $\int \frac{dt}{t-u}$ logarithmis poſſit exhiberi, atque tum, vt $\frac{q\,dt - t\,dq}{qq\sqrt{(qq-1)}}$ integrationem admittat.

§. 43. Sit MO multiplum ipſius MN ſeu $u = mt$, erit $q = a^{m-1}t^{1-m}$ atque $y = \frac{t^m}{a^{m-1}}$. Erit autem porro $dy = \frac{mt^{m-1}\,dt}{a^{m-1}} = p\,dx = dx\sqrt{(a^{2m-2}t^{2-2m}-1)}$, vnde fit $dx = \frac{mt^{2m-2}\,dt}{a^{m-1}\sqrt{(a^{2m-2}-t^{2m-2})}}$ atque $x = \int \frac{mt^{2m-2}\,dt}{a^{m-1}\sqrt{(a^{2m-2}-t^{2m-2})}}$ Ex quo perſpicitur curuam fore algebraicam ſi haec formula fuerit integrabilis; hoc autem euenit, quoties vel $\frac{m}{m-1}$ fuerit numerus impar affirmatiuus ſeu $m = \frac{2i+1}{2i}$, vel $\frac{m}{1-m}$ numerus par affirmatiuus ſeu $m = \frac{2i+1}{2i+2}$ denotante i numerum integrum affirmatiuum. Caſus autem quo $m = 1$ dat $t = u$ atque $dt = 0$ ſeu $t = u =$ conſtanti, ex quo cognoſcitur curuam eſſe circulum.

§. 44. Data ſit nunc aequatio quaecunque inter arcum AM et radium oſculi MO, ex qua determinari debeat aequatio inter coordinatas AP et PM. Quod antequam quomodo inueniendum ſit oſtendam, obſeruari conuenit hanc curuas exprimendi rationem per aequationem inter arcum et radium oſculi maxime ad curuas cognoſcendas eſſe accommodatam. Aequatio enim inter coordinatas orthogonales, vel inter radium et perpendiculum in tangentem tam varias et diuerſas formas

 ſumen-

ſumendis aliis axibus aliisque abſciſſarum initiis induere poteſt, vt, ad quamnam curuam pertineat, quamuis curua ſit notiſſima, ſaepe difficulter perſpici poſſit. Aequatio vero quae inter curuam et radium oſculi exhibetur pro diuerſis tantum punctis, in quibus curuae initium ponitur, variari poteſt, quae tamen varietas facillime cognoſcitur. Si igitur conſuetum eſſet naturam curuarum per huiusmodi aequationes indicare, difficultas commemorata quidem tolleretur, at vtrum curua eſſet algebraica an tranſcendens non tam facile appareret. Huic vero incommodo ſequenti modo occurreretur.

§. 45. Sit arcus $AM = s$ et radius oſculi $MO = r$ dataque ſit aequatio quaecunque inter s et r. Ponantur $AP = x$, $PM = y$ ſitque $dy = pdx$; hisque poſitis erit $ds = dx\sqrt{(pp+1)}$ et $r = \frac{-dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$. Ex illa vero aequatione eſt $dx = \frac{ds}{\sqrt{(pp+1)}}$, ex hac autem $dx = \frac{-rdp}{(pp+1)^{\frac{3}{2}}}$. Quamobrem proueniet haec aequatio $ds(pp+1) = -rdp$ ſeu $\frac{-ds}{r} = \frac{dp}{1+pp}$. Denotet $\int\frac{ds}{r}$ arcum circuli cuius tangens ſit q poſito radio 1; eritque $At.b - At.q = At.p$; vnde fit $p = \frac{b-q}{1+bq}$ et $\sqrt{(pp+1)} = \frac{\sqrt{(1+bb)(1+qq)}}{1+bq}$. Ex his oritur $dx = \frac{(1+bq)ds}{\sqrt{(1+bb)(1+qq)}}$ et $dy = \frac{(b-q)ds}{\sqrt{(1+bb)(1+qq)}}$. Vnde intelligitur ſi primo $\int\frac{ds}{r}$ denotet arcum circuli cuius tangens algebraice per q poſſit exhiberi; atque deinde tam $\frac{ds}{\sqrt{(1+qq)}}$ quam $\frac{qds}{\sqrt{(1+qq)}}$ integrationem admittat fore curuam algebraicam.

§. 46.

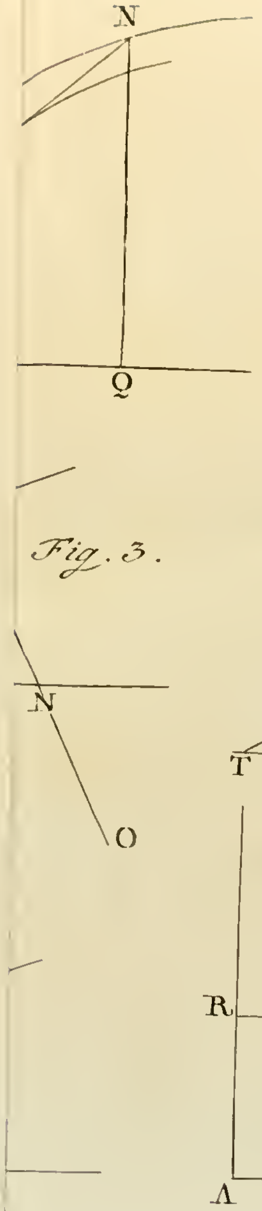


Fig. 3.

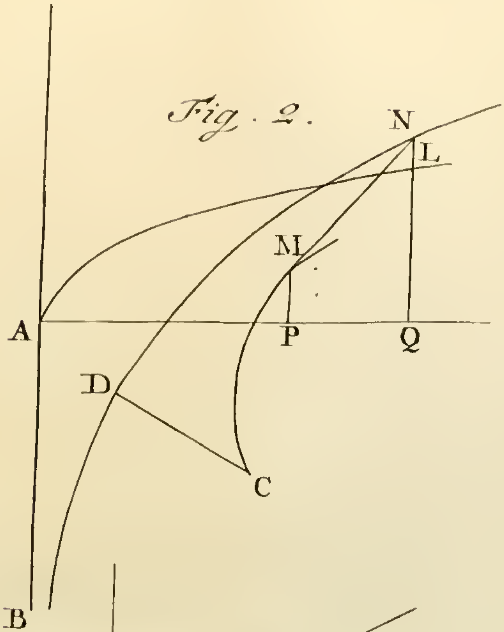


Fig. 2.

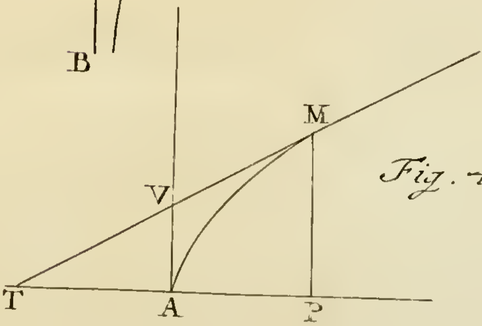


Fig. 4.

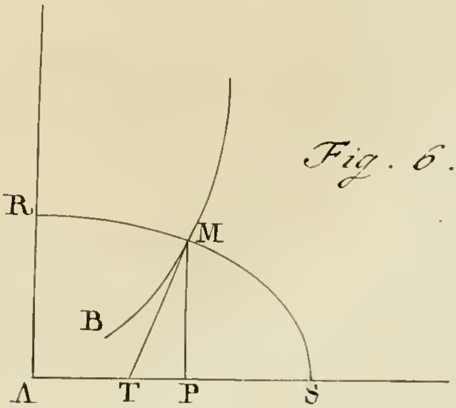


Fig. 6.

Fig. 1.

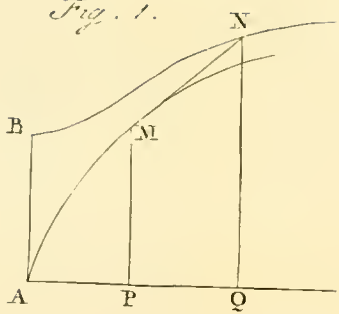


Fig. 2.

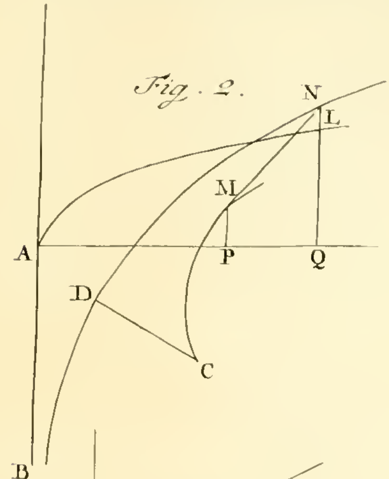


Fig. 3.

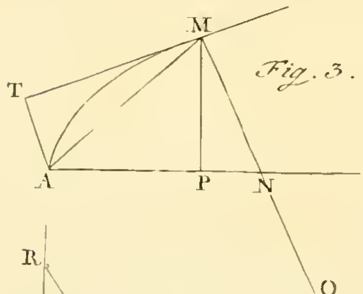


Fig. 4.

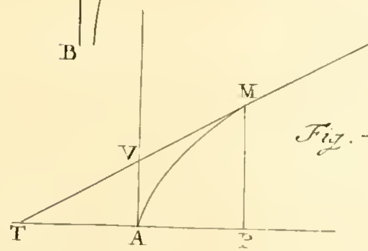


Fig. 5.

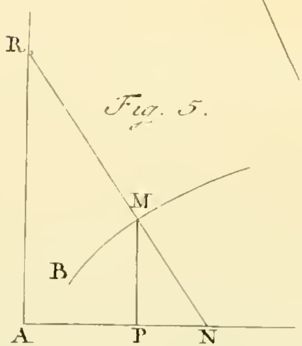
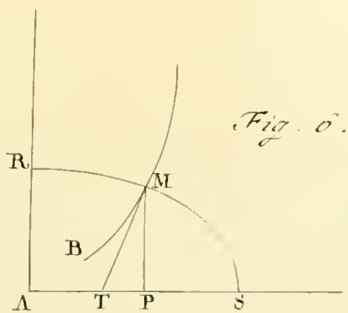


Fig. 6.



§. 46. Sin autem $\frac{ds}{r}$ abſolute poteſt integrari, fieri quoque poteſt vt curua ſit algebraica: vt ſit $\int \frac{ds}{r} = v$, erit $At.p = b - v$ et $p = t.A(b-v)$. Ex his fit $x = \int ds$ coſ. $A(b-v)$ et $y = \int ds$ ſin. $A(b-v)$. Quoties ergo haec integralia ita poſſunt exhiberi vt nonniſi ſin. $A(b-v)$ et coſin. $A(b-v)$ contineant, toties ob $1 = \square$ ſin. $A(b-v) + \square$ coſ. $A(b-v)$ aequatio algebraica inter x et y obtinetur. Vt ſi fuerit $r = a$ erit $x = a$ ſin. $A(b-v)$ et $y = a$ coſ. $A(b-v)$ ideoque $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ſeu $y^2 = a^2 - x^2$, aequatio pro circulo cuius radius eſt $= a$.

SOLVTIO PROBLEMATVM RECTIFICATIONEM ELLIPSIS REQVIRENTIVM.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula VI. AGitata iam ſuperiori ſeculo inter Geometras ſunt huiusmodi problemata, in quibus linea curua requirebatur, quae ab infinitis poſitione datis curnis arcus aequales abſcinderet. Communicauerunt etiam illo tempore Cl. Cl. Geometrae elegantes ſolutiones pro caſu, quo curuae poſitione datae inter ſe ſunt ſimiles, vti cum ab infinitis circulis, vel parabolis arcus aequales abſcindendi eſſent. Nemo autem, quantum conſtat, vlterius eſt progreſſus, neque quisquam pro curuis diſſimilibus problemati ſatisfecit, etiamſi iam tum quaeſtio de infinitis ellipſibus proponeretur. Atque etiamnum, cum Inſigni Geometrae per litteras ſignificaſſem, me aequationem pro curua, quae ab infinitis ellipſibus disſimilibus arcus aequales abſcinderet, inueniſſe; ille mihi reſpondit huius problematis ſolutionem in ſua non eſſe poteſtate, meque ſimul rogauit, vt meam ſolutionem in non contemnendum analyſeos augmentum communicarem.

§. 2. Huius autem quaeſtionis ſumma difficultas in hoc conſiſtit, quod diuerſarum et diſſimilium ellipſium rectificationes a ſe mutuo non pendeant. Hanc enim ob ob causam curuae ab infinitis ellipsibus arcus aequales abscindentis aequationem inuentu maxime difficilem esse oportet, eo quod etiam concessa vnius ellipsis rectificatione, reliquarum tamen omnium rectificatio ab ista non pendeat. Deinde methodus, qua in huiusmodi problematis vti solent, ita est comparata, vt tantum ad curuas similes accommodari possit; pro curuis dissimilibus autem nullam afferat vtilitatem.

§. 3. Quod autem mihi primum viam ad huiusmodi difficilia problemata patefecit, est praecipue vniuersalis mea series summandi methodus. Hac enim inuenta statim aequationem differentialem, in qua indeterminatae nullo pacto a se inuicem separari possunt, ope rectificationis ellipsium dissimilium construxi; atque paulo post maxime agitatae aequationis Riccatianae constructionem et resolutionem communicaui.

§. 4. Postmodum autem, cum haec per series operandi methodus nimis operosa et non satis genuina videretur; in aliam magis naturalem methodum, et huius modi quaestionibus magis accommodatam inquisiui; atque tandem ex voto obtinui, ita vt eius beneficio non solum priora problemata, quae serierum ope resolueram, sed etiam innumera alia, ad quae tractanda series non sufficiunt, perficere potuerim. Methodum etiam hanc fuse exposui in dissertatione de infinitis curuis eiusdem generis anno praecedente proposita; quia vero ne nimis essem prolixus, nulla adieci exempla, non satis apparet, quam late ea pateat, quamque amplum in re analytica aperiat campum.

§. 5.

§. 5. Quo igitur huius methodi vis et vtilitas melius percipiatur, hac dissertatione eam ad infinitas ellipses accommodabo, atque non solum monstrabo, quomodo ab infinitis ellipsibus arcus aequales abscindi debeant, sed etiam innumerabilium tam primi quam secundi gradus aequationum differentialium resolutionem ope rectificationis ellipsium perficere docebo.

§. 6. Quod enim ad curuam, quae ab infinitis ellipsibus arcus aequales abscindat, attinet, eius constructio eo ipso est facilis, quod ope rectificationis curuarum quae facillime describi possunt, perfici queat. Atque hanc ipsam constructionem longe anteferendam esse censeo aliis per quadraturas curuarum peractis constructionibus. Non igitur tam illius curuae constructio requiritur, quam eius aequatio, quo quales aequationes tam facile construi queant cognoscatur. Hanc ob rem analysis non parum augmenti accipiet, si illae aequationes proferantur, quae ope rectificationis ellipsium constructionem admittunt.

Figura 1. §. 7. Considero igitur primum infinitas ellipses AMDB, quae omnes alterum axem, cuius semissis est CD, habeant eundem, axes vero transuersos AB diuersos. Si nunc vel ab his omnibus ellipsibus vel arcus aequales sint abscindendi, vel in data ratione inaequales, vel curua sit inuenienda, cuius constructio ope harum ellipsium quomodocunque praescribitur; ad talia problemata omnia soluenda opus est, vt aequatio habeatur inter arcum AM, abscissam AP et axem AB, in qua hae tres quantitates insint tanquam variabiles.

§. 8.

§. 8. Huiusmodi ergo problematum ſolutio perficietur, ſi quaeratur aequatio modularis, quemadmodum in citata diſſertatione de curuis infinitis eiusdem generis docui, inter arcum AM, et abſciſſam AP et axem AB quoque variabilem. Quo igitur ad huiusmodi aequationem modularem perueniam pono abſciſſam $AP = t$; applicatam $PM = u$; arcum $AM = z$; ſemiaxem variabilem $AC = a$; ſemiaxem conſtantem $CD = c$. His vero poſitis erit $u = \frac{c}{a}\sqrt{(2at - tt)}$ ſeu poſito $t = ax$ erit $u = c\sqrt{(2x - xx)}$; atque $dt = adx$ et $du = \frac{cdx - cxdx}{\sqrt{(2x - xx)}}$. Ex his igitur fiet $dz = \frac{dx\sqrt{(2a^2x - a^2x^2 + c^2 - 2c^2x + c^2x^2)}}{\sqrt{(2x - xx)}}$, poſitoque $a^2 - c^2 = b^2$ erit $z = \int \frac{dx\sqrt{[c^2 + b^2(2x - xx)]}}{\sqrt{(2x - xx)}}$.

§. 9. Integrali huic inuento aequatur ergo z, ſi integratio fiat poſito tantum x variabili, b vero et c conſtantibus. Praeterea in integratione talis addi debet conſtans, vt euaneſcat z poſito $x = 0$. At quia aequatio deſideratur in qua a ſeu eius loco b aeque tanquam variabilis inſit ac x et z; quaeritur aequatio differentialis quae proditura eſſet, ſi $\int \frac{dx\sqrt{[c^2 + b^2(2x - xx)]}}{\sqrt{(2x - xx)}}$ denuo differentietur, poſito praeter x etiam b variabili.

§. 10. Ponatur nunc ſecundum methodum anno praeterito traditam x conſtans et differentietur quantitas $\frac{\sqrt{[cc + bb(2x - xx)]}}{\sqrt{(2x - xx)}}$ prodibit $\frac{bdb\sqrt{(2x - xx)}}{\sqrt{[cc + bb(2x - xx)]}}$. Quamobrem poſito quoque b variabili erit $dz = \frac{dx\sqrt{[cc + bb(2x - xx)]}}{\sqrt{(2x - xx)}} + db\int \frac{bdx\sqrt{(2x - xx)}}{\sqrt{[cc + bb(2x - xx)]}}$, quod poſtremum integrale ita debet accipi vt euaneſcat poſito $x = 0$; in eo vero iterum b tanquam conſtans ineſt. Ponatur breuitatis gratia $R = \frac{dz}{db} - \frac{dx\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}{db\sqrt{(2x-xx)}}$, erit $R = \int\frac{bdx\sqrt{(2x-xx)}}{\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}$.

§. 11. Si nunc integrale, cui R aequatur reduci poſſet ad integrationem formulae, cui z aequalis eſt, pro R inueniri poſſet valor finitus per z; qui ſubſtitutus in altera aequatione daret aequationem modularem quaeſitam. Sed hae duae integra.iones a ſe inuicem non pendent, vt facile tentanti animaduertetur. Quamobrem vlterius progredi oportet, et vltimam aequationem denuo differentiare, vti primam, ponendo quoque b variabilem. Inuenietur autem hoc modo $dR = \frac{bdx\sqrt{(2x-xx)}}{\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}} + db\int\frac{ccdx\sqrt{(2x-xx)}}{[cc+bb(2x-xx)]^{\frac{3}{2}}}$, quod integrale iterum ita accipi debet vt euaneſcat poſito $x=0$.

§. 12. Ponatur iterum $S = \frac{dR}{db} - \frac{bdx\sqrt{(2x-xx)}}{db\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}$ erit $S = \int\frac{ccdx\sqrt{(2x-xx)}}{[cc+bb(2x-xx)]^{\frac{3}{2}}}$; quae formula cum non ſit integrabilis, videndum eſt, num eius integratio ab alterutra praecedentium vel ab vtraque pendeat. Quod quo appareat ponatur $S+\alpha R+\beta z = Q$, vbi α et β ab x et z ſint quantitates liberae; Q vero vtcunque ex x et b et conſtantibus compoſita; debet autem Q talis eſſe quantitas vt euaneſcat poſito $x=0$. Poſito ergo b conſtante debebit eſſe $dQ = dS + \alpha dR + \beta dz$; vbi in differentiali ipſius Q b tanquam conſtans conſiderari debet.

§. 13. At poſito b conſtante eſt $dS = \frac{ccdx\sqrt{(2x-xx)}}{[cc+bb(2x-xx)]^{\frac{3}{2}}}$

et

et $dR = \frac{b\,dx\sqrt{(2x-xx)}}{\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}$ et $dz = \frac{dx\sqrt{[cc+bb(2x\ xx)]}}{\sqrt{(2x-xx)}}$.
Hanc ob rem erit $\frac{dQ}{dx} = [cc(2x-xx) + \alpha bcc(2x-xx) + \alpha b^3(2x-xx)^2 + \beta c^4 + 2\beta b^2c^2(2x-xx) + \beta b^4 (2x-xx)^2] : [cc+bb(2x-xx)]^{\frac{3}{2}}\sqrt{(2x-xx)}$. Ponatur ad similem formam obtinendam $Q = \frac{(\gamma x+\delta)\sqrt{(2x-xx)}}{\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}$ qui valor per ſe euaneſcit poſito $x=0$.

§. 14. Differentietur nunc Q poſito tantum x variabili erit $\frac{dQ}{dx} = [\gamma cc(2x-xx) + \gamma bb(2x-xx)^2 + \gamma ccx + \delta cc - \gamma ccx^2 - \delta ccx) : (cc+bb(cc+bb(2x-xx)]^{\frac{3}{2}}\sqrt{(2x-xx)}$. Quia ergo denominatores iam ſunt inter ſe aequales, fiant numeratores quoque aequales, aequandis terminis in quibus ipſius x ſimiles ſunt dimenſiones; erit

I. $\gamma bb = \alpha b^3 + \beta b^4$;
II. $\gamma b^2 = \alpha b^3 + \beta b^4$;
III. $4\gamma bb - 2\gamma cc = 4\alpha b^3 + 4\beta b^4 - cc - \alpha bcc - 2\beta b^2c^2$;
IV. $3\gamma cc - \delta cc = 2cc + 2\alpha bcc + 4\beta b^2c^2$; et
V. $\delta cc = \beta c^4$.

Hinc inuenitur $\alpha = \frac{1}{b}$; $\beta = \frac{-1}{b^2+c^2}$; $\gamma = \frac{cc}{bb+cc}$ et $\delta = \frac{cc}{bb+cc}$.

§. 15. His ergo valoribus ſubſtitutis prodibit $\frac{cc(x-1)\sqrt{(2x-xx)}}{(bb+cc)\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}} = S + \frac{R}{b} - \frac{z}{b^2+c^2}$. Quia autem eſt $R = \frac{dz}{db} - \frac{dx\sqrt{[cc+bb(2x+xx)]}}{db\sqrt{(2x-xx)}}$ et $S = \frac{dR}{db} - \frac{bdx\sqrt{(2x-xx)}}{db\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}$

 atque

atque $x = \frac{t}{a}$ et $bb = a^2 - c^2$; atque ideo $bb + cc = a^2$; $dx = \frac{adt - tda}{a^2}$, et $db = \frac{ada}{b}$, erit $Q = \frac{cc(t-a)\sqrt{(2at-tt)}}{a^3\sqrt{[a^2c^2+(a^2-c^2)(2at-tt)]}}$, et $\frac{R}{b} = \frac{dz}{ada} - \frac{(adttda)\sqrt{[a^2-c^2+(a^2-c^2)(2at-tt)]}}{a^2da\sqrt{(2at-tt)}}$ atque $S = \frac{c^2dz}{a^2da}$ $+ \frac{(a^2-c^2)}{a^2da} d. \frac{dz}{da} - \frac{(a^2-c^2)}{a^3da} d. \frac{dt}{da} \sqrt{\frac{a^2c^2+(a^3-cc)(2at-tt)}{2at-tt}} + \frac{(2a^2-3c^2)(adt-tda)}{a^5da}$ $\sqrt{\frac{a^2c^2+(a^2-cc)(2at-tt)}{2at-tt}} - \frac{(2aa-2cc)(adt-tda)}{a^3da} \sqrt{\frac{2at-tt}{a^2c^2+(a^2-cc)(2at-tt)}}$

$$+ \frac{cc(a-t)(a^2-c^2)(adt-tda)^2}{a^3da^2(2at-tt)^{\frac{3}{2}}\sqrt{[a^2c^2+(a^2-cc)(2at-tt)]}}.$$

§. 16. Ne autem in nimis prolixos calculos incidamus, retineamus literas b, x, et z, erit $S = \frac{1}{db} d. \frac{dz}{db} - \frac{1}{db} d. \frac{dx}{db} \sqrt{\frac{(cc+bb(2x-xx)]}{2x-xx}} - \frac{2bdx}{db} \sqrt{\frac{cx-xx}{cc+bb(2x-xx)}} + \frac{ccdx^2(1-x)}{db^2(2x-xx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}$. His ergo loco S et R substitutis habebitur aequatio modularis ista, $\frac{z}{bb+cc} = \frac{cc(1-x)\sqrt{(2x-xx)}}{(bb+cc)\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}} - \frac{dx}{bdb}\sqrt{\frac{cc+bb(2x-xx)}{2x-xx}} - \frac{2bdx}{db}\sqrt{\frac{2x-xx}{cc+bb(2x-xx)}}$

$$+ \frac{ccdx^2(1-x)}{db^2(2x-xx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}} + \frac{dz}{bdb} + \frac{1}{db} d. \frac{dz}{db}$$

$$- \frac{1}{db} d. \frac{dx}{db} \sqrt{\frac{cc+bb(2x-xx)}{2x-xx}}.$$

Atque haec est aequatio differentialis secundi gradus, in qua z, x et b aeque variabiles sunt positae. Ex hac autem aequatione sequentia problemata soluuntur.

Problema I.

Figura 2. §. 17. *Si curua* EMN *ad axem* APQ *ita construatur, vt eius applicata quaeque* PM *aequalis sit quadranti* AF *ellipsis, cuius semiaxium coniugatorum alter sit ipsa*

ipsa abscissa AP *alter vero constans* AE *seu* PF: *inuenire aequationem inter abscissam* AP *et applicatam* PM *naturam huius curuae exprimentem.*

Solutio.

Perspicuum est curuam EMN transire per punctum E, quoniam euanescente semiaxe ellipsis AP, quadrans ellipsis abit in alterum semiaxem constantem AE. Recta porro AT ad angulum semirectum cum AP inclinata erit asymtotos curuae EMN, quia posito semiaxe AP infinite magno quadrans ellipticus huic ipsi semiaxi fit aequalis. Ad aequationem autem inueniendam sit $AE = c$; $AP = t$ et $PM = AF = z$; atque cum abscissa AP respectu ellipsis AF sit aequalis semiaxi eius, erit haec quaestio casus specialis aequationis inuentae, quo est $t = a$, seu $x = 1$. Posito ergo $x = 1$, abibit superior aequatio in hanc: $\frac{z}{bb+cc} = \frac{dz}{bdb} + \frac{1}{db} d. \frac{dx}{db}$. At quia est $bb = a^2 - c^2 = t^2 - c^2$ erit $bdb = tdt$, et $db = \frac{tdt}{\sqrt{(tt-c^2)}}$. Atque posito dt constante erit $ddb = -\frac{cc\,dt^2}{(tt-cc)^{\frac{3}{2}}}$. Hinc ergo fit $d. \frac{dz}{db} = \frac{ddz\sqrt{(tt-cc)}}{tdt} + \frac{cc\,dz}{tt\sqrt{(tt-cc)}}$, vnde oritur haec aequatio $\frac{z}{tt} = \frac{dz}{tdt} + \frac{ddz(tt-cc)}{ttdt^2} + \frac{ccdz}{t^3dt}$, seu $tzdt^2 = (tt+cc)dtdz + tddz(tt-cc)$, quae est aequatio quaesita pro curua proposita. Q. E. I.

 §. 18.

§. 18. Aequationem hanc sequenti modo ad differentialia primi gradus reduco ponendo $z = e^{\int s dt}$ existente $l e = 1$; erit ergo $dz = e^{\int s dt}\, s dt$ et $ddz = e^{\int s dt}(ds dt + s s dt^2)$. Quibus valoribus substituendis oritur sequens aequatio $t dt = (t^2 + c^2) s dt + t(tt - cc) ds + t s^2 (t^2 - c^2) dt$; quae ita est comparata, vt nullis adhuc cognitis artificiis indeterminatae a se inuicem separari possint. Interim vero constructio huius aequationis ope rectificationis ellipsis constat.

§. 19. Ne vero cuiquam dubium oriatur quod posito $t = 0$ fieri debeat $z = c$; cum tamen superiores integrationes ita accipi debeant, vt posito $x = 0$ fiat quoque $z = 0$. Monendum est quod quidem in hoc casu quo $z = c$ sit $t = 0$, non vero est quoque $x = 0$; quia est $x = \frac{t}{a}$ et $t = a$, ideoque $x = 1$, ita vt in hoc casu nusquam sit $x = 0$, propterea z vspiam euanescere debeat.

§. 20. Quemadmodum in hoc problemate posuimus $t = a$; ita quoque quaecunque aequatio inter t et a et constantes potest accipi, et curua EMN definiri ita vt quaeuis applicata PM aequalis sit respondenti arcui elliptico AF. Habebitur enim loco superioris aequationis haec aequatio $\frac{z}{tt} = \frac{(tt + cc) dz}{t^3 dt} + \frac{(t - tcc) ddz}{tt dt^2} + T$, denotante T eam ipsius t functionem, quae ex terminis aequationis generalis, in quibus non inest z oritur, si loco x ponatur $\frac{t}{a}$ et loco b eius valor $\sqrt{(a^2 - c^2)}$ atque loco a eius valor in t ex aequatione inter a et t assumta substituatur. Neque vero haec aequatio tractatu est difficilior

ficilior quam praecedens, in qua terminus T deeſt; reduci enim poteſt haec aequatio ad illam, vti iam alibi oſtendi.

Problema 2.

§. 21. *Datis infinitis ellipſibus* AOF, ANG, AMH, *quarum alter ſemiaxis* AE *ſit conſtans, alter vero variabilis vt* AI, AK, et AL; *inuenire aequationem pro curua* BONMC, *quae ab his omnibus ellipſibus arcus aequales* AO, AN, AM *abſcindat.* Figura 3.

Solutio.

Ducta ad axem AC quacunque applicata MP curuae quaeſitae; ſit AP $= t$, PM $= u$ et AE $= c$; Ellipſis vero AMH ſemiaxis variabilis AI ſit $= a$; et arcus abſciſſus AM qui eſt conſtantis quantitatis ſit $= f$. Poſitis nunc $x = \frac{t}{a}$; et $b = \sqrt{(a^2 - c^2)}$ erit $z = f$; et $u = c\sqrt{(2x - xx)}$. His igitur ſubſtitutis generalis aequatio inter z, x et b abit in hanc $\frac{f}{bb+cc} = \frac{cc(1-x)\sqrt{(2x-xx)}}{(bb+cc)\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}$

$$- \frac{dx}{bdb}\sqrt{\frac{cc+bb(2x-xx)}{2x-xx}} - \frac{2bdx}{db}\sqrt{\frac{2x-xx}{cc+b(2x-xx)}}$$

$$+ \frac{ccdx^2(1-x)}{db^2(2x-xx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}} - \frac{1}{db}\,\mathrm{d}.\frac{dx}{db}$$

$\sqrt{\frac{cc+bb(2x-xx)}{2x-xx}}$. Quia vero eſt $2x - xx = \frac{u^2}{c^2}$ multiplicetur vbique per $\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]} = \frac{\sqrt{(c^4+bbuu)}}{c}$ et prodibit $\frac{f\sqrt{(c^4+bbuu)}}{a^2c} = \frac{cu(1-x)}{a^2} - \frac{c^3dx}{budb} - \frac{3budx}{cdb} + \frac{c^5dx^2(1-x)}{u^3db^2} - \frac{(c^4+bbuu)}{cudb}\,\mathrm{d}.\frac{dx}{db}$. In hac aequatione ſi loco b ſubſti-

ſubſtituatur $\frac{\sqrt{(tt-ccxx)}}{x}$ et propter $x = \frac{c-\sqrt{(cc-uu)}}{c}$ prodibit tandem aequatio differentialis ſecundi gradus inter t et u, nempe coordinatas curuae quaeſitae. Q. E. I.

Figura 4. §. 22. At ſi infinitae ellipſes AMF, ANG et AOH omnes habeant axem horizontalem communem ita vt C ſit centrum omnium, pro hoc caſu peculiarem aequationem modularem erui oportet, antequam curuam MNO definire licet, quae ab omnibus arcus aequales AM, AN, AO abſcindat. Sit igitur $AC = c$, $CF = a$, $AP = t$, $PM = u$ et arcus $AM = z$. His poſitis erit $u = \frac{a}{c}\sqrt{(2ct-tt)}$ et $du = \frac{acdt-atdt}{c\sqrt{(2ct-tt)}}$ ideoque fiet $z = \int\frac{dt}{c}\sqrt{\frac{a^2c^2+(cc-aa)(cct-tt)}{2ct-tt}} = \int\frac{du}{da}\sqrt{\frac{aa-uu}{a^4-a^2u^2+ccuu}}$, atque poſito $u = ay$ erit $z = \int dy\sqrt{(a^2+\frac{ccyy}{1-yy})}$, quod integrale ita debet accipi vt z euaneſcat poſito $y = 0$.

§. 23. Si haec denuo differentietur poſito praeter y et a variabili habebitur $dz = dy\sqrt{(a^2+\frac{ccyy}{1-yy})}+da\int\frac{ady}{\sqrt{(a^2+\frac{ccyy}{1-yy})}}$ atque poſito $\frac{dz}{da}-\frac{dy}{da}\sqrt{(a^2+\frac{ccyy}{1-yy})} = R$ erit $R = \int\frac{ady}{\sqrt{(a^2+\frac{ccyy}{1-yy})}}$. Hinc eodem modo fiet

$$dR = \frac{ady}{\sqrt{(a^2+\frac{ccyy}{1-yy})}}+da\int\frac{ccyydy}{(1-yy)(a^2+\frac{ccyy}{1-yy})^{\frac{3}{2}}}$$ ſeu

$$\frac{dR}{da}-\frac{ady}{\sqrt{(a^2+\frac{ccyy}{1-yy})}} = \int\frac{ccyydy}{(1-yy)(aa+\frac{ccyy}{1-yy})^{\frac{3}{2}}} = S$$ breuitatis gratia. Ponatur nunc $S+\alpha R+\beta z = Q$; vbi α et β ſunt quantitates ab y liberae; Q vero functio

ipſarum

ipsarum a et y quae euanescat posito $y=0$. Nunc ad α et β et Q inuenienda differentietur haec aequatio posito a constante, erit $\frac{ccyydy\sqrt{(1-yy)}}{[aa(1-yy)+ccyy]^{\frac{3}{2}}}+$
$\frac{\alpha a dy\sqrt{(1-yy)}}{\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}}+\frac{\beta dy\sqrt{[a^2(1-yy)+ccyy]}}{\sqrt{(1-yy)}}$
$=(ccyy-ccy^4+\alpha a^3-2\alpha a^3y^2+\alpha a^3y^4+\alpha accyy-\alpha accy^4+$
$\beta a^4-2\beta a^4y^2+\beta a^4y^4+\beta a^2c^2y^2-2\beta a^2c^2y^4+\beta c^4y^4)$
$dy:(a^2(1-yy)+ccyy)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1-yy)}=dQ.$

§. 24. Sit $Q=\frac{\gamma y\sqrt{(1-yy)}}{\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}}$; sumtoque huius differentiali posito a constante, et aequatis terminis homologis erit $\alpha a+\beta a^2=\gamma$; $\beta cc=-\gamma$; et $1+\alpha a+2\beta a^2=0$. Ex his fit $\alpha=\frac{a^2+c^2}{a(a^2-cc)}$; $\beta=\frac{-1}{a^2-c^2}$ et $\gamma=\frac{cc}{aa-cc}$. Hisque valoribus substitutis peruenietur tandem ad hanc aequationem modularem: $\frac{z}{aa-cc}-\frac{(a^2+c^2)dz}{ada(a^2-c^2)}$
$+\frac{1}{da}d.\frac{dz}{da}-\frac{ccyy\sqrt{(1-yy)}}{(a^2-c^2)\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}}-\frac{(a^2+c^2)dy\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}}{a(a^2-c^2)da\sqrt{(1-yy)}}$
$-\frac{2ady\sqrt{(1-yy)}}{da\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}}-\frac{ccydy^2}{da^2(1-yy)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}}$
$-\frac{1}{da}d.\frac{dy}{da}\sqrt{\frac{a^2(1-yy)+ccyy}{1-yy}}$, in qua a aeque sumtum est variabile ac y et z, estque $y=\frac{u}{a}$.

§. 25. Si nunc ex infinitis ellipsibus, quarum omnium alter axis est constans $2c$; alter variabilis $2a$; construatur curua EMN hac lege vt cuicunque abscissae $AP=a$ respondeat applicata PM, quae aequalis est quadranti elliptico sub semiaxibus a et c. Hoc ergo casu erit $u=a$ et $y=1$, atque $PM=z$. Quare posito da constanti Figura 2.

 ha-

habebitur pro curua EMN haec aequatio: $azda^2 = (a^2 + c^2)dadz + a(aa - cc)ddz$. Quae aequatio est ea ipsa quam in solutione problematis I. (§. 17.) inuenimus; congruit enim hic casus cum illo problemate: atque quod ibi erat t hic est a.

Problema 3.

Figura 4. §. 26. *Descriptis infinitis ellipsibus* AMF, ANG, AOH *commune centrum* C *communemque verticem* A *habentibus; inuenire curuam* MNO *quae ab his omnibus ellipsibus arcus aequales* AM, AN, AO *abscindat.*

Solutio.

Posito omnium harum ellipsium semiaxe constante $AC = c$; ellipsisque cuiusuis AMF semiaxe altero variabili $CF = a$; atque curuae MNO abscissa $AP = t$; et applicata $PM = u$. Fiat $\frac{u}{a} = y$; sitque longitudo $= f$ cui omnes arcus AM, AN, aequales sumantur. His positis et cum antecedentibus collatis erit $z = f$; ideoque

$$\frac{f}{a^2 - c^2} + \frac{ccyy\sqrt{(1-yy)}}{(a^2-c^2)\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}} + \frac{(a^2+c^2)dy\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}}{a(a^2-c^2)da\sqrt{(1-yy)}} + \frac{2ady\sqrt{(1-yy)}}{da\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}} + \frac{ccydy^2}{da^2(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}}$$

$$+ \frac{1}{da}d.\frac{dy}{da}\sqrt{\frac{a^2(1-yy)+ccyy}{1-yy}} = 0$$ seu $$\frac{f\sqrt{(1-yy)}}{(a^2-c^2)\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}} + \frac{ccyy(1-yy}{(a^2-c^2)(a^2(1-yy)+ccyy)} + \frac{(a^2+c^2)dy}{a(a^2-c^2)da} + \frac{2ady(1-yy)}{da(a^2(1-yy)+ccyy} \frac{ccdy^2}{da^2(1-yy)(a^2(1-yy)+ccyy)} + \frac{1}{da}d.\frac{dy}{da} = 0.$$

In qua aequatione si loco a ponatur $\frac{u}{y}$ et deinde loco y hic valor $\frac{\sqrt{(2ct-tt)}}{c}$; prodibit aequatio inter coordinatas t et u curuae quaesitae. Q. E. I.

DE

1.

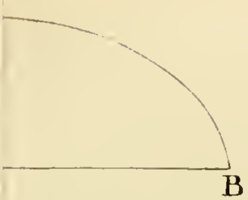
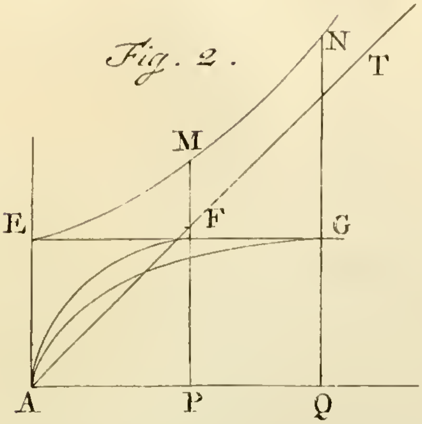


Fig. 2.



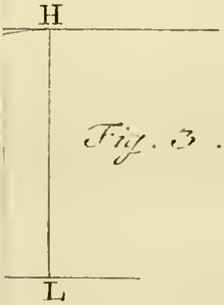


Fig. 3.

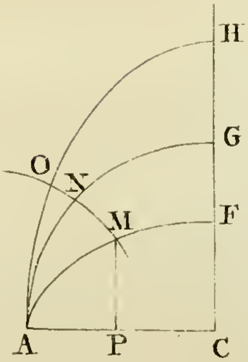


Fig. 4.

Fig. 1.

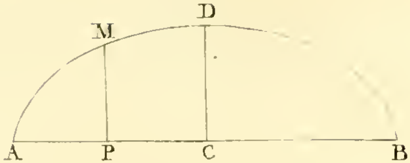
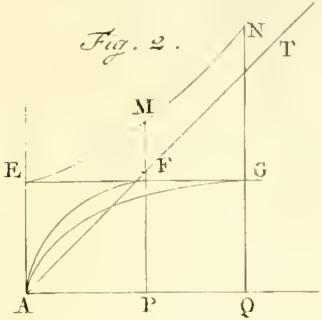


Fig. 2.



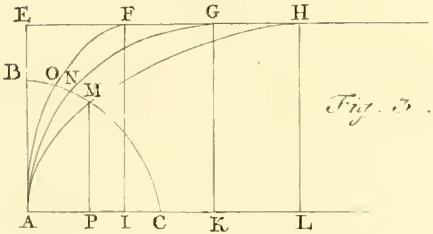


Fig. 3.

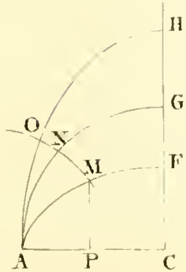


Fig. 4.

DE LEGIBVS QVIBVSDAM MECHANICIS, QVAS NATVRA CONSTANTER AFFECTAT, NONDVM DESCRIPTIS, EARVMQVE VSV HYDRODYNAMICO, PRO DETERMINANDA VI VENAE AQVEAE CONTRA PLANVM INCVRRENTIS.

Ab Auctoribus, fallaci inductis experimento, falso aestimata.

AVCTORE

Daniele Bernoulli.

PARS PRIMA.

§. I.

Corpus ſtatum quietis amittit motumque acquirit a preſſionibus idem in antecedentia vrgentibus; et e contrario a motu ad quietem reducitur a preſſionibus contranitentibus. Poſſunt quidem hae preſſiones infinitis modis inter ſe variare, idque quouis temporis puncto; at nemo eſt qui non videat, quo maiores ſint, eo minori tempore datum velocitatis gradum illas in corpore dato generare aut deſtruere: preſſiones autem ſiue vrgentes ſiue reſiſtentes hic tantum conſidero directas. Tabula VII.

Finge iam corpus, cuius maſſa ſit $= m$, quod a quiete tempore t obtinuerit velocitatem v, idemque puta vlterius directe vrgeri preſſione p: noſti fore $m\,dv = p\,dt$ et $mv = \int p\,dt$: igitur ſi pro v aſſumatur praeſcriptus aliquis velocitatis gradus, definietur inde $\int p\,dt$: Hac de re ſu-fuſius egi in *Comm. Tom. I. pag.* 131. *et ſeqq.*, vbi quantitatem *elementarem* $p\,dt$, quae productum eſt ex preſſione in elementum temporis, voce ſimplici *preſſionis momentaneae* indicaui: Eadem hic quoque vtemur atque ſic affirmabimus *ſummam omnium preſſionum momentanearum, vtcunque variantium, quae definito corpori definitam velocitatem impreſſerint a quiete, ſemper eandem eſſe*, ita etiam eadem ſemper erit nec a priori diuerſa ſumma omnium *preſſionum momentanearum*, quae idem corpus, ſimili velocitate motum, contraniſu ſuo ad quietem reducere poſſint.

§. 2. Igitur haud inepte de corpore moto affirmabitur, ineſſe illi definitam aliquam *preſſionum momentanearum* collectarum quantitatem, ſiue motus quantitatem, idque eodem iure, quo dicitur, quod corpori moto ineſt definita *virium viuarum* quantitas: et ſunt reuera ambo principia inter ſe admodum ſimilia; ſcis enim quantitatem *virium viuarum* corpori inſitarum deſignari per $\frac{1}{2}m\,v\,v$ et eſſe $\frac{1}{2}m\,v\,v = \int p\,dx$ (deſignato per dx elemento ſpatii, quod tempuſculo dt percurritur), id eſt, $=$ ſummae productorum ex ſpatiolo et preſſione: ſi igitur iſtud productum voce ſimplici *preſſionis ſpatialis* deſignemus, mutatis verbis nunc dicemus, *ſummam omnium preſſionum ſpatialium vtcunque variantium, quae definito corpori definitam velocitatem impreſſerint a quiete, ſemper eandem eſſe*: Et hanc propoſitionem, quae proprie ipſam *virium viuarum* conſeruationem exprimit, alteri §. 1. exexpreſſae, ſimillimam eſſe ſic vides: prima pro ſubiecto habet productum ex maſſa in velocitatem, ſecunda productum ex maſſa in quadratum velocitatis.

§. 3.

§. 3. Haec vero ita se habent in corpore simplici: cum plura sunt corpora, vario nexu inter se cohaerentia motuque diuerso agitata, tunc pari ratione, omnibus nunc nota, in illis conseruatur *virium viuarum* in summam collectarum quantitas: sed et aliqua conseruatur ratione, vtut minus generali magisque intricata atque perplexa, motus quantitas: Verum haec nunc missa facio, quia ad institutum nostrum non pertinent: hac enim dissertatione ea tantum, quae corpori simplici accidunt, constitui prosequi.

§. 4. Praeter variationes velocitatum, quarum ratione praefatae leges innotuerunt, aliud est mutationum genus, in quo natura pariter leges praescriptas habet generales, quarum cognitio in soluendis problematibus mechanicis haud parum erit vtilis: pertinent autem ad mutatas in corpore moto directiones. Nondum pertractatum fuit, quod sciam, ab aliis argumentum, quod adeoque paullo accuratiori explanabo atque commentabor oratione, quamuis sua natura non admodum difficile.

§. 5. Sicuti motus in corpore generatur, non in instanti, sed tempore et continuata pressione, ita quoque directio in corpore moto a pressionibus, sub alia directione applicatis, aliquo temporis interuallo ad datum angulum mutatur. Igitur directionis in corpore moto mutatio aliquid est, quod cum noua in eodem corpore generata velocitate comparari debet: neque certe mutationes, quas a percussione in directione corporis prouenire videmus, considerandae sunt, tanquam quae fiant in instanti, sicuti nec mutationes, quas velocitates subeunt

eunt a percussione: notum enim nunc est omnibus, percussionem aliud non esse, quam ingentem pressionem admodum parum durantem. Cum itaque directionis mutatio analoga sit cum motus generatione, e re erit vnius mensuram ad alteram reducere, quo ipso videbimus leges, quas natura post mutatas vtcunque in corpore moto directiones constantissime sequatur.

Directio autem in corpore mutatur vel seruata eadem semper velocitate vel eadem vtcunque mutata. Incipiam a casu priori et quamuis infinitae omnino sint causae mechanicae, quae corpus a via recta continue deflectere possint, non interrupta motus vniformitate, attamen vna nobis erit instar omnium, modo data et praescripta via corporis adhibeatur.

§. 6. Igitur fingemus super tabula horizontali ca-
Figura 1. nalem data lege incuruatum BD, ad cuius latera corpus moueatur. Sic vtrique satisfiet conditioni; corpus nempe velocitatem seruabit vniformem, simulque praescriptam nunquam deseret viam. Hic sunt latera canalis, quae corpus a via recta perpetuo deflectunt, nisu ad curuam perpendiculari, tantusque est nisus iste, quanta corpori inest vis centrifuga, et tanta quoque censenda est potentia, quae corpus perpendiculariter ad directionem motus propellat.

Opportunus hic monendi locus est, non sine circumspectione, potentiam corpus a via recta declinantem, aestimandam esse, proptereaque recte distinguendas ab inuicem esse potentias ad propositum finem vtiles ab inutilibus: In praesenti autem casu, rem recte a nobis

deci-

decisam esse, patet ex eo, quod posito corpore in *m* sumtaque pro radio osculi linea *m*H val *n*H, possimus latusculo *mn* substituere filum *m*H vel *n*H puncto H affixum, vbi manifestum est, potentiam corpori perpendiculariter ad curuam applicatam idemque a via recta detorquentem, esse aequalem corporis vi centrifugae: haec alio inferius exponendo magis explicabuntur exemplo.

Ducantur porro B et D tangentes BF et CD: hac denotabunt motus directiones pro iisdem punctis B et D, angulus vero DCF is est, quem voco *angulum mutatae directionis.* Sit velocitas corporis ea, quae generatur lapsu libero per altitudinem A: haec autem velocitas erit exprimenda per $\sqrt{2A}$, si tempusculum indicetur a spatiolo diuiso per velocitatem: Denique si potentiam ad curuam perpendicularem multiplicemus per tempusculum, habebimus *potentiam momentaneam* curuae perpendicularem, atque si eadem potentia resoluatur in duas alias coordinatis parallelas et vna quaeuis multiplicetur per tempusculum, obtinebitur *potentia momentanea* in directione axis aut in directione ad axem perpendiculari. His praemissis facilius nunc erit intelligere sequentes propositiones.

Theorema.

§. 7. *Quaecunque sit via corporis, erit semper pro eadem velocitate eodemque angulo mutatae directionis, eadem summa omnium potentiarum momentanearum ad curuam perpendicularium.*

De-

Demonſtratio.

Aſſumatur pro axe linea BG ad tangentem BF perpendicularis: Sit $Bg = x$; $gh = dx$; $gm = y$; $on = dy$; $Bm = s$; $mn = ds$; maſſa corporis $= m$: tempus per $Bm = t$ et per $mn = dt$; Radius oſculi $mH = R =$ (ſumtis elementis curuae inter ſe aequalibus) $\frac{-dxds}{ddy}$ vel $\frac{dyds}{ddx}$: Sic erit *potentia momentanea* ad curuam perpendicularis $= \frac{2A}{R} m\,dt = \frac{2A}{R} \times m \times \frac{ds}{\sqrt{2A}} = \frac{ds}{R} \times m\sqrt{2A}$: Quia porro $m\sqrt{2A}$ eſt quantitas vbique eadem, erit ſumma omnium praedictarum potentiarum $= m\sqrt{2A} \times \int \frac{ds}{R}$. Notum autem eſt, exprimere $\int \frac{ds}{R}$ *angulum mutatae directionis* DCF: Eſt ergo tandem ſumma omnium *popotentiarum momentanearum* ad curuam perpendicularium aequalis angulo DCF multiplicato per $m\sqrt{2A}$, id eſt, per maſſam corporis eiusdemque velocitatem, aut, vt alias loquuntur, per quantitatem motus, qui omnes factores ſunt per hypotheſin conſtantes. Q. E. D.

Corollarium.

§. 8. Cum ſumma *potentiarum momentanearum* directarum, qua corpus maſſam habens m a quiete acquirit velocitatem $\sqrt{2A}$, ſit $m\sqrt{2A}$ (per §. 1.) erit haec ſumma (quae etiam quantitatem motus corpori inſitam exprimit) ad ſummam potentiarum in paragrapho proximo definitarum, vt radius ad arcum, qui *angulum* mutatae directionis ſubtendit, et vt radius ad quadrantem circuli, quando angulus iſte eſt rectus.

Theo-

Theorema.

§. 9. *Seruatis iisdem hypothesibus, erit quoque summa potentiarum momentanearum axi parallelarum constans, nominatimque talis, quae se habeat ad quantitatem motus corpori insitam, vt sinus anguli mutatae directionis ad sinum totum.*

Demonstratio.

Potentia momentanea ad curuam perpendicularis est $= \frac{ds}{R} \times m \sqrt{2A}$ (per §. 7.): inde deducitur potentia momentanea axi BG parallela $\frac{dy}{R} \times m \sqrt{2A} =$ (posito pro R valore $\frac{dyds}{ddx}$) $\frac{ddx}{ds} \times m \sqrt{2A}$, cuius integrale est $\frac{dx}{ds} \times m \sqrt{2A}$ (constantem non addo quia in puncto B, ob situm axis BG ad BF perpendicularem, est $\frac{dx}{ds} = 0$); Est autem in puncto D, $\frac{dx}{ds}$ sinus anguli mutatae directionis, designato sinu toto per vnitatem: Igitur summa potentiarum momentanearum axi parallelarum se habet ad quantitatem motus $m \sqrt{2A}$, vt sinus anguli mutatae directionis ad sinum totum. Q. E. D.

Theorema.

§. 10. *Iisdem positis erit etiam summa potentiarum momentanearum ad axem perpendicularium siue directioni motus initiali oppositarum constans; et ea quidem se habebit ad quantitatem motus corpori insitam, vt differentia inter sinum totum et cosinum anguli mutatae directionis ad sinum totum.*

Demonſtratio.

Potentia momentanea in directione FB eſt $= \frac{dx}{R} \times m\sqrt{2A} =$ (poſito pro R valore $\frac{-dxds}{ddy}$) $\frac{-ddy}{ds} \times m\sqrt{2A}$, cuius integrale, debita addita conſtante, fit $(1 - \frac{dy}{ds}) \times m\sqrt{2A}$: ſed in puncto D eſt $\frac{dy}{ds}$ coſinus anguli mutatae directionis: Inde igitur patet, ſummam potentiarum momentanearum directioni motus initiali oppoſitarum ſe habere ad quantitatem motus $m\sqrt{2A}$, vt differentia inter ſinum totum et coſinum anguli mutatae directionis ad ſinum totum. Q. E. D.

§. 11. Similia forent theoremata, quamuis paullo minus concinna, ſi loco potentiarum momentanearum axi parallelarum eidemue perpendicularium alias ſub quacunque directione conſtante conſideraſſemus.

Caeterum theoremata nunc expoſita motum in corpore ponunt vniformem: iam vero rem explorabimus cum corpora et velocitatem et directionem pro lubitu mutant. Iſti ſatisfaciemus deſiderato generaliſſime, ſi praeter hypotheſes §. 6. expoſitas inſuper ponamus corpus in ſingulis punctis potentia vtcunque variabili in directione tangentiali verſus antecedentia vrgeri: ita enim corpus et praeſcriptam viam deſcribet et vbiuis velocitatem habere poterit qualemcunque. Equidem potuiſſent loco praefatarum potentiarum tangentialium aliae quaeuis fingi: adhibebo autem primo loco tangentiales, ne dubium eſſe poſſit circa aeſtimationem potentiae directionem mutantis; deinde aliis vtar, vt appareat earum

rum exemplo, quanam circumſpectione potentia directionem mutans inquirenda ſit, qua de re, animum Lectoris in anteceſſum occupaui paragrapho ſexto.

In iſtis quidem hypotheſibus legem ratione potentiarum momentanearum ad viam corporis vbique perpendicularium ſummae non obſeruaui, quae aliquam cum lege paragraphi ſeptimi affinitatem haberet: verum reſpectu potentiarum momentanearum axi parallelarum eidemue perpendicularium, theoremata ſe rurſus mihi obtulerunt, attentione ob vtilitatem ſuam digna et generaliora iis, quae §.§ 9. et 10. fuerunt definita, in reliquis autem non diſſimilia, quae nunc adiungam.

Theorema.

§. 12. *Quaecunque ſit via corporis et qualescunque velocitatum mutationes, erit ſemper pro eadem velocitate finali eodemque angulo mutatae directionis eadem ſumma potentiarum momentanearum ad directionem initialem* BF *perpendicularium et ea quidem talis, quae ſe habeat ad quantitatem motus corpori in* D *inſitam, vt ſinus anguli mutatae directionis ad ſitum totum.*

Demonſtratio.

Sit velocitas corporis in puncto quouis $m = \sqrt{2v}$; in $D = \sqrt{2b}$; potentia tangentialis in $m = p$ vtcunque variabilis: reliquae hypotheſes et denominationes retineantur, quas antea adhibuimus. Iam vero potentiae corpus in directione BG vrgentes, de quibus in hac propoſitione ſermo eſt, duplicis ſunt ordinis: prima claſſis

 com-

comprehendit potentias ab actione canalis, corpus vbique a via recta detorquentis; altera potentias tangentiales: potentia in m ad curuam perpendicularis est $= \frac{2mv}{R}$, quae resoluta in duas alias secundum BG et FB agentes (quarum solam priorem hic considerandam habemus) dat $\frac{dy}{ds} \times \frac{2mv}{R}$; haecque multiplicata per dt siue per $\frac{ds}{\sqrt{2v}}$ facit potentiam momentaneam in directione BG $= \frac{mdy\sqrt{2v}}{R}$: similiter potentia tangentialis p dat pro potentia, directionem desideratam BG habente, $\frac{pdx}{ds}$, haecque multiplicata per dt, facit potentiam momentaneam alteram in directione BG $= \frac{pdxdt}{ds}$. Igitur ambae praefatae potentiae momentaneae simul sumtae sunt $\frac{mdy\sqrt{2v}}{R} + \frac{pdxdt}{dt}$ quarum nunc quaeritur integrale: ad hoc determinandum considero, ob directionem tangentialem potentiae p, esse $pdt = \frac{mdv}{\sqrt{2v}}$, simulque pro R substituo $\frac{dyds}{ddx}$, atque sic pro quantitate integranda obtineo $\frac{mddx\sqrt{2v}}{ds} + \frac{mdvdx}{ds\sqrt{2v}}$: huius autem integrale, vbi nulla requiritur quantitas constans addenda, est $= \frac{mdx\sqrt{2v}}{ds}$, quae igitur exprimit summam omnium potentiarum momentanearum, quas corpus suscipit, dum ex B in m transfertur: si loco puncti m accipiatur punctum vltimum D, fit $\frac{dx}{ds}$ sinus anguli mutatae directionis DCF, et $\sqrt{2v}$ tunc exprimit velocitatem finalem corporis in D seu $\sqrt{2b}$: vnde tandem sequitur, summam potentiarum momentanearum in directione BG se habere ad quantitatem motus, corpori in D insitam, vt sinus anguli mutatae directionis ad sinum totum. Q. E. D.

Co-

Corollarium.

§. 13. Hic ergo nec velocitas initialis nec velocitatum intermediarum mutationes qualescunque quicquam conferunt, modo eadem ſit velocitas finalis, atque ſic vltimum hoc theorema in concluſione non differt ab illo, quod §. 9. fuit exhibitum, quamuis multo ſpecialius magisque reſtrictum.

Theorema.

§. 14. *Quaecunque ſit via corporis et qualescunque velocitatum mutationes, erit ſemper pro data velocitate in* B *et pro data quoque finali in* D *vt et pro dato angulo mutatae directionis eadem ſumma potentiarum momentanearum directioni initiali* BF *parallelarum; et quidem aequalis differentiae inter quantitatem motus, quam corpus in fine habet, multiplicatam per coſinum anguli mutatae directionis, et inter quantitatem motus corpori ab initio motus inſitam.*

Demonſtratio.

Procedit vt in §. 12. mutando dx in dy atque ddx in $-ddy$ et viciſſim, ſimulque conſiderando potentias vtriusque claſſis ad directionem BF reductas non conſpirare ſed in diuerſa abire; atque ſic intelligitur, eſſe potentiam momentaneam in directione BF ab actione canalis ortam $= \frac{-mdx\sqrt{v}}{R}$ (ſignum hic pono negatiuum, quia potentia agit ab F verſus B) alteram vero potentiam momentaneam in eadem directione BF, potentiae tangentiali debitam, eſſe $= \frac{pdydt}{ds}$. Igitur ambae

 iſtae

iſtae potentiae momentaneae ſimul ſumtae nunc ſunt $-\frac{mdx\sqrt{2v}}{R}+\frac{pdydt}{ds}$, quas vt in §. 12. integrationis cauſa muto in $\frac{mddy\sqrt{2v}}{ds}+\frac{mdvdy}{ds\sqrt{2v}}$. Huius quantitatis integrale ita debet eſſe conſtitutum, vt in B ſit $=0$, vnde illud faciendum eſt $=\frac{mdy\sqrt{2v}}{ds}-m\sqrt{2a}$, intelligendo per $\sqrt{2a}$ velocitatem initialem. Iſta igitur quantitas exprimit ſummam omnium potentiarum momentanearum directioni initiali BF parallelarum cum eademque conſpirantium, dum corpus ex B in m transfertur, et eadem quantitas negatiue ſumta, nempe $m\sqrt{2a}-\frac{mdy\sqrt{2v}}{ds}$, deſignat ſummam potentiarum momentanearum, directioni BF oppoſitarum: ſi iam loco puncti m accipiatur punctum D, fiet $\frac{dy}{ds}$ coſinus anguli mutatae directionis atque $\sqrt{2v}=\sqrt{2b}$: vnde ſi coſinus iſte dicatur c, erit tandem integrale quaeſitum $mc\sqrt{2b}-m\sqrt{2a}$ aut $m\sqrt{2a}-mc\sqrt{2b}$, vt habet propoſitio. Q. E. D.

Corollarium 1.

§. 15. Si angulus mutatae directionis eſt rectus, fit $c=0$, et ſumma praedictarum potentiarum momentanearum $=m\sqrt{2a}$, ita vt quaecunque fuerit velocitas in fine D, tunc ſit ſemper iſta ſumma aequalis quantitati motus, corpori ab initio motus, inſitae.

Corollarium 2.

§. 16. Poſita velocitate initiali in B aequali velocitati finali in D, oritur theorema §. 10. quaecunque interim fuerit lex variationum in velocitatibus intermediis.

diis. Hisce corollariis vtemur in parte huius differtationis altera ad problemata hydrodynamica foluenda.

Scholium.

§. 17. Demonftrationes noftrae oftendunt, propofitiones has effe generaliffime veras, easque omnino fe extendere ad caufas mechanicas, quibus directio et velocitas in corpore vbiuis mutentur, qualescunque; fiue fint elaftra, fiue fila corpus trahentia, fiue impulfus aut quicquid libuerit aliud, quod idem iam monui §. 11. vbi fimul promifi, me alias quoque quam tangentiales adhibiturum effe potentias, corporis velocitatem mutantes; tum vt propofitionum vniuerfalitas magis pateat, tum etiam vt appareat, quomodo in hoc negotio potentiae momentaneae fint accipiendae.

Ponamus itaque loco potentiarum tangentialium §§. 11. 12. et feqq. confideratarum, nunc potentias alias vtcunque variabiles π corpus vbique in directione applicatis parallela follicitantes, reliquas vero denominationes et hypothefes retineamus omnes rurfusque theorema paragraphi duodecimi demonftrandum accipiamus.

Erit hic iterum potentia momentanea ab actione curuae orta in directione $BG = \frac{mdy\sqrt{2v}}{R}$: fed potentia π, quamuis per fe indifferens fit ad corpus in directione BG vrgendum, attamen vnita cum actione curuae aliquid confert, propptereaque refoluenda eft in duas alias, alteram tangentialem $\frac{dy}{ds}\pi$, alteram ad curuam perpendicu-

rem

rem $\frac{dx}{ds}\pi$; illa eſt tractanda vt factum fuit cum potentia tangentiali §. 12. atque ſic quod ibi fuit p, hic eſt $\frac{dy}{ds}\pi$; haec vero, nempe $\frac{dx}{ds}\pi$, plane eſt reiicienda, quia deſtruitur a contrario et aequali actione curuae: ſubſtituto igitur pro p valore $\frac{dy}{ds}\pi$, reliqua fient vt citato §. 12. eademque orietur concluſio, quando ibi littera p in fine ratiocinii plane ex calculo euanuit.

Ita quoque theorema paragraphi 14. in praeſenti hypotheſi potentiarum applicatis parallelarum, vt ibi, demonſtrabitur, poſtquam potentia π reſoluta fuerit in perpendicularem ad curuam eamque reiiciendam et in tangentialem rurſus reſoluendam in duas alias ſecundum directiones BG et BF, quarum ſola poſterior conſideranda erit. Denique perſpicuum eſt, idem futurum fuiſſe concluſum, ſi ſub quacunque directione variabili potentiae corpus accelerantes vel retardantes adhibitae fuiſſent. Partem diſſertationis alteram proxime.

DIS-

DISSERTATIONIS
DE
LEGIBVS MECHANICIS
NONDVM DESCRIPTIS
PARS ALTERA,

in qua Legum iſtarum in prima parte expoſitarum vſus hydrodynamicus oſtenditur.

§. 1.

PRima, quae ſciam, experimenta pro determinanda vi venae aqueae in planum incurrentis inſtituta fuerunt ſub auſpiciis Academiae Scientiar. Pariſ. A. 1679, eaque videre eſt in hiſtoria praefatae Academiae a *D. Du Hamel* conſcripta *Sect. III. Cap. V.* Poſt haec ſecuta ſunt innumera alia: ſumta autem fuerunt cum aquis ex cylindro ampliſſimo per lumen vniformiter effluentibus; et quamuis ſucceſſus nunquam praeconceptae Auctorum ideae ex aſſe reſponderit, ſtatuerunt tamen omnes, vim venae a plano mox prae foramine exceptae aequalem eſſe ponderi cylindri aquei ſupra foramen ad altitudinem aquae exſtructi. Veram hanc eſſe naturae legem vsque adeo non dubitarunt, vt quicquid experimenta ſuperabundarent, id omne circumſtantiis tribuerent alienis nec in rei natura poſitis, non ſatis profecto perpendentes, minui inde potius quam augeri vim aquae.

§. 2. Vt vero aliquo appareat exemplo, quantum fictam illam naturae legem experientia probet improbetue, vnum referam fide dignum: altitudo aquae in vase erat duorum pedum Paris. foramen circulare in fundo horizontali factum diametrum habebat quatuor linearum, et vis venae aqueae obseruata fuit aequalis ponderi vnius vnciae cum tribus quartis. At vero pondus cylindri aquei foramini incumbentis subducto calculo vix ac ne vix quidem aequat vnciam vnam cum tribus octauis: differentia igitur est minimum trium octauarum vnius vnciae partium, quae omnino tres vndecimas praememorati cylindri aquei ponderis efficiunt, ita vt mirer fuisse discrimen ab Academicis, quorum cura teste *D. Du Hamel* sumta fuerunt experimenta, neglectum fere aut vnice tributum ei, quod lamina aquas excipiens a foramine aliquantum remouere necesse fuerit: fac enim remotam fuisse vel duobus pollicibus, non aliud inde incrementum orietur, quam vigesima quarta propemodum pars totius vis, quae nondum decimam sextam partem vnius vnciae efficit. Patet igitur opinionem autorum experimento isto non solum non confirmari, sed potius improbari: idem vero plane fiet perspicuum ex sequentibus: interim tamen ita inualuit, vt quisque sibi religioni duxerit de ea vel minimum dubitare.

§. 3. Iam vero hic libenter quaeram, quare comparatio instituatur inter pondus cylindri aquei foramini effluxus incumbentis et vim venae? nempe altitudinem istius cylindri considerant, tanquam altitudinem ex qua corpus

corpus libere cadendo acquirat ipſam aquarum effluentium velocitatem: Verum enim vero aquae effluentes iſtum velocitatis gradum nunquam attingunt, quia omnia tolli nequeunt impedimenta: igitur non tam altitudo cylindri aquei hic conſideranda venit, quam altitudo velocitati aquarum reali reſpondens: nec enim quaeritur, quanta velocitate aquae in planum incurrerent ſublatis omnibus obſtaculis, ſed quanta reuera incurrant.

Porro foramen effluxus conſideratur tanquam amplitudo venae; ſed et hoc non ſatis apte: vena enim prae foramine plerumque contractionem aliquam patitur, quae antequam a *Newtono* obſeruata eſſet, multorum errorum origo fuit: quis autem non videt loco foraminis effluxus conſiderandam ab Auctoribus fuiſſe amplitudinem venae contractae, aut potius experimenta ita inſtituenda fuiſſe (quod fieri poſſe notum eſt) vt contractio venae nulla oriretur. Comparetur nunc animo vis aquae experimento ſuperioris paragraphi inuenta cum pondere cylindri aquei formati non a foramine effluxus ſed a vena contracta, nec ab altitudine aquae in in vaſe contentae, ſed ab altitudine, quae velocitati ipſi reſpondere potuit, et facile erit colligere diſcrimen longe maius ſic oriri, quam quod §. 2. definitum fuit. Atque id eſt, quo ſibi illudi paſſi ſunt experimentorum aeſtimatores.

§. 4. Exiſtimaui animum Lectoris praeparandum eſſe, vt perſpecta experimentorum adhuc in hac re ſumtorum dubia facie nolit nimium illis fidere, atque ſi aliqua non male conuenire videat cum recepta regula, id mero

P 2 ro

ro tribuat casui: possunt enim duae in proximo paragrapho annotatae rationes rem ita mutare, vt vis aquarum oriatur modo maior, modo minor pondere cylindri aquei illius, quem adhiberi solent. Haec de experimentis: videamus nunc, quid in theoria profecerint: hic vero rem ita considerabimus, vt appareat, quid futurum sit, si nulla suboriatur venae contractio, et aquae simul omni velocitate, quam in theoria habere possint (ea nempe quae debeatur toti aquarum altitudini supra foramen) exiliant, ita vt nunc *cylindrus aqueus correctus* non differat a *non-correcto* communiter adhibito: intelligo autem per *cylindrum aqueum correctum* illum, cuius basis est aequalis amplitudini venae contractae et cuius altitudo est eadem illa altitudo, quae generare potest velocitatem aquarum, qualis est in loco venae contractae: *cylindrus* vero *aqueus* simpliciter ita dictus aut *non correctus* mihi cum aliis est ille, qui foramini ad altitudinem aquae in vase contentae imminet.

§. 5. Primus, quod sciam, qui aquarum vim aliter quam experientia inquisiuerit, fuit *Newtonus*: neque tamen vim venae fluidae, qualis ex vase effluit, sed potius resistentiam fluidi corpus, cui resistit, vndiquaque circumdantis inquisiuit: hasque fluidi actiones a se inuicem diuersas censendas esse animaduertit, quod idem etiam inferius ostendam. Quae habet *Newtonus* eo redeunt, vt si particulae fluidi omnes immediate et directe in planum incidant, totaque sua velocitate instar corpusculorum perfecte elasticorum resiliant, tunc vis aquarum quadrupla sit ponderis cylindri aquei supra definiti, atque si particulae quidem omnes immediate directeque

recteque in planum incidant, ſed plane non reflectantur tanquam corpuscula mollia, tunc vis aquarum prioris ſit dimidia, *vid. Princ. Math. Phil. Nat. pag.* 301. *edit.* 2. vbi tamen res longe aliis verbis profertur. Atque cum his exacte conueniunt, quae ego ex legibus motuum a percuſſione deducta atque demonſtrata dedi in *Comm. Tom. II. p.* 305. *et ſeqq.* Verum haec hypotheſis. qua nempe ponuntur particulae omnes immediate et directe in planum incidere nequaquam admitti poteſt; nemo enim concipiet quomodo aliter id fieri poſſit, quam ſi particulae poſt impulſum ſuum ſtatim annihilentur. Ea igitur relicta refugi ad experimentum *p.* 307. *Comm. Tom. cit.* deſcriptum, cuius euentus is fuit, qui plerumque eſſe ſolet: nam mihi videre viſus ſum, vim aquarum eſſe exacte aequalem ponderi *cylindri aquei non correcti*, qua in re plus quam par eſt auctoritatem ſecutus ſum praedeceſſorum meorum: debebam vtique experimentum repetere ſub diuerſis faciebus, quod ſi feciſſem, fieri non potuiſſet, quin diuerſa reperiſſem relata ad pondera *cylindrorum aqueorum non correctorum*: conformitas enim in experimentorum ſucceſſibus expectanda non eſt, niſi *cylindri aquei* conſiderentur *correcti*, quae res ex ſe nimium manifeſta eſt, quam vt poſſit vnus pro altero perinde haberi, quod animo perpendens auſus fui ſententiam, ab omnibus a plusquam 65 annis receptam, rurſus deſerere tumque argumentum de nouo ruminari. Cogitata mea hic afferam, primum quidem dicturus de vena aquea, quae in planum directe, tum etiam de ea, quae oblique in-

 currit,

currit, hisque aliqua ſubiuncturus de reſiſtentia quam corpora fluidis tota ſubmerſa patiuntur.

§. 6. Quoties venam aqueam in planum perpendiculariter incurrentem obſeruaui, aliquid vidi ipſi accidere, quo vis illius accurate determinatur, ita vt poſito phaenomeno, nullus amplius errori locus detur. Id vero, de quo loquor, phaenomenon in eo conſiſtit, quod particulae aqueae omnes planum deſerunt ſecundum ipſius plani
Figura 2. directionem. Res clarius intelligetur ex figura ſecunda, in qua, denotante AB axem venae fluidae in planum EE impingentis, filamenta venam componentia haud procul a plano maxime inflecti conſpiciuntur, ita vt tandem in D et C, vbi planum deſerunt, directionem habeant ipſi plano parallelam ſiue ad axem AB perpendicularem, orbem formantia inſtar cryſtalli egregie pellucidum. Ad id vero requiritur, vt planum EF ſit notabiliter maius amplitudine ſiue craſſitie venae: alias enim continget, ſi recte iudico, quod videmus in figu-
Figura 3 ra tertia, vbi particulae in D et C in directione mouentur obliqua, dicam tantum de caſu priore: eo enim referuntur omnia experimenta ab Auctoribus inſtituta.

§. 7. Puta iam particulas aqueas omnes ad angu-
Figura 2. lum rectum vsque inflecti ab obſtaculo plano EF, quod fieri autopſia docet: aquam autem venam formare cylindricam ponimus eamque perpetuo velocitate affluere vniformi. facile ſic eſt intelligere omnem preſſionem, quam planum FE ſuſtinet in directione AB, ſua reactione in particulas aqueas redundare, et eſſe hanc reactionem a B verſus A agentem, quae easdem particu-

las

las ad angulum rectum deflectat, id eſt, vt terminis in priori huius diſſertationis parte adhibitis vtar, quae in particulis *angulum mutatae directionis* rectum producat. Igitur ſi vim inquiramus ſub directione BA, quae continua ſua actione poſſit omnes particulas aqueas in directione contraria affluentes ad angulum rectum ab hac via detorquere, habebimus eo ipſo vim, quam planum FE ſuſtinet, deſideratam. Id vero obtinebimus ope §. 15. *Part. I.* vbi demonſtrauimus ex paragrapho eum praecedente: *quod ſi maſſa* m *mota primum velocitate* $\sqrt{2a}$ (*id eſt*, *velocitate debita altitudini* a) *a potentiis directioni initiali oppoſitis*, *directionem ſuam mutauerit vsque ad angulum rectum*, *eſſe ſummam omnium potentiarum momentanearum aequalem* $m\sqrt{2a}$. His praemonitis rem ſic aggredior.

§. 8. Sit velocitas aquarum in $A = \sqrt{2a}$: aſſumatur adlibitum tempus aliquod t, ponaturque eo tempore affluere quantitatem ſeu maſſam aut pondus aquae m, ſit potentia quaeſita, quam planum FE ſuſtinet et quae particulas aqueas perpetuo a via deflectit, $= p$: hanc ſi multiplicaueris per tempus t, habebis ſummam omnium potentiarum momentanearum directioni AB oppoſitarum, quae ſingulas particulas maſſae aqueae m durante tempore t affluentis a directione initiali ad angulum rectum vsque deflectere fecit, quae ſumma proinde eſt pt: eſt vero vi theorematis in proximo paragrapho citati $pt = m\sqrt{2a}$: vnde habetur $p = \frac{m\sqrt{2a}}{t}$. Atque ſic veram preſſionem, quam planum FE ſuſtinet, accurate determinauimus: ſupereſt tantum, vt quantitatem inuentam

tam $\frac{m\sqrt{2a}}{t}$ reducamus ad menſuram ab Auctoribus adhiberi ſolitam, nempe ad rationem quam habet cum *cylindro aqueo*, ſed eo *correcto*, cuius ſcilicet baſis ſit aequalis amplitudini venae in A et cuius altitudo ſit $= a$, quae altitudo reſpondet verae velocitati aquae in A. Sit igitur amplitudo venae in $A = 1$, et tunc erit m ſpatium, quod aqua tempore t percurrit, quia nempe m exprimit quantitatem ſeu pondus aquae tempore t affluentis, et quantitas eſt aequalis producto ex amplitudine venae 1 eiusque longitudine m tempore t percurſa: eſt porro tempus exprimendum ſpatio m diuiſo per velocitatem $\sqrt{2a}$, vnde $t = \frac{m}{\sqrt{2a}}$: ſubſtituto hoc valore in formula $p = \frac{m\sqrt{2a}}{t}$, prodit $p = 2a$, id eſt, aequalis maſſae ſeu ponderi cylindri aquei, cuius baſis $= 1$, et cuius altitudo $= 2a$, ſiue tandem aequalis duplo ponderi *cylindri aquei correcti.*

§. 9. Dupliciter differt iſta vis venae aqueae determinatio a vulgari: noſtra nempe duplum indicat cylindrum loco ſimplicis et eum *correctum* loco cylindri *non-correcti*. In theoria non curatur niſi primum diſcrimen, quando aquae ex vaſe exilire cenſentur velocitate, quae toti aquarum altitudini ſupra foramen reſpondent et vena aquea vbique foraminis amplitudinem conſeruare ponitur, ſic vt *cylindrus aqueus correctus* non differat theoretice a *non-correcto*: neque haec vt aliter ſint ipſa rei natura poſtulat, ſed caſu contingit. Verum in experimentis ſumendis atque ad calculum reuocandis, alterius illius diſcriminis maxime eſt ratio habenda, cum differant plerumque notabiliter ambo praefati ſati cylindri nullique ſint diuerſitatis limites: poſſunt enim ex vaſe pleno eoque quantumuis alto aquae velocitate emanare minima, ſi per ſtrictiorem et longiorem canalem effluant: quis autem tunc dicat vim aquarum eiectarum altitudini reſpondere fluidi interni. Interim cylindri aquei quorum mentionem modo fecimus, non raro differunt in ratione praeter propter ſubdupla, quo factum eſt, vt vno errore alterum fere compenſante, falſitatem opinionis ab omnibus a tam longo tempore receptae, nemo quidem ſuſpicatus fuerit.

§. 10. In hac noſtra disquiſitione non vſi ſumus alia hypotheſi phyſica, quam quod particulae aqueae ſingulae directionem mutent ad angulum vsque rectum ab illiſione in planum: reliqua omnia ſunt tam certa, quam mechanica puriſſima. Allatam vero hypotheſin phyſicam et experientia docet et mente facile eſt concipere. Caeterum commode hic accidit, quod expreſſe monendum exiſtimo, vſumque theorematis §. 15. Part. I. valde pro hoc negotio commendat; quascunque nempe in praeſenti caſu finxeris velocitatis variationes in particulis aqueis, dum ab A vsque ad D perueniunt, ſemper tamen eundem eſſe calculum eandemque prodire vim venae aqueae; quod niſi ita eſſet, vis iſta determinari non poſſet. Quamuis enim in theoria velocitates particularum in A et D aequales cenſeri poſſint ex *conſeruatione virium viuarum*, dubitandum tamen non eſt quin actu aliquam patiantur velocitatis diminutionem particulae aqueae dum a via continue deflectuntur: Hinc fieri exiſtimo, vt vires venarum oblique incidentium accurate determinari nequeant, qua de re in sequentibus plura afferam.

§. 11. Theoriam hanc nouam multis quidem declaraui amicis, priusquam de illa aliqua experimenta sumsissem, certus de eius bonitate: Postquam vero eam publice exponere constituissem, sensi e re mea fore, vt experimenta experimentis auctoritatesque auctoritatibus opponerem, ne inauditus fortasse reiicerer. Igitur praeparatis omnibus ad experimentum conuenerunt in aedibus meis D. Emanuel König, Pater meus, Patruelisque Nicolaus Bernoulli, quibus primo caussam totam exposui, caetera deinde aggressus vt sequitur.

Mensura vsus sum pedis Parisini in 400 particulas aequales diuisi, atque vt ante omnia pondus cylindri aquei dati determinare liceret experimento a memet facto, adhibui vas cylindricum ex lamina ferrea factum, cuius cauitatis diameter erat 92 part. eoque repleto aquis ad altitudinem 131 part. atque explorato ad bilancem tum pondere vasis vacui, tum pleni, vidi pondus cylindri istius aquei esse 122 drachmarum: Inde cognouimus pondus cylindri aquei alterius (cuius diameter esset 19. part.) esse 8, 937 drachmarum: talis autem cylindrus nobis mox veniet considerandus. Vas porro aderat am-
Figura 4. plissimum ABCD aquis plenum vsque in AD cum adaptato tubo EF perfecte cylindrico et horizontaliter posito: Per hunc cum aquae effluebant, nullam pati poterat vena contractionem, secus ac fit cum per simplex foramen fluunt: velocitas etiam aquarum ab initio haberi potest pro vniformi ob earum directionem horizon-

rizontalem, quod idem minime fit, cum aquae verticaliter effluunt. Denique hoc modo aquae dum prae foramine F in planum incurrunt eidem non adhaerent, atque si adhaerent in nostro experimento nullius momenti forent, quae alias suo pondere experimentum accurate sumendum turbant. Haec in causa sunt quod potius iactu horizontali quam verticali vsus sum. Tum etiam ad experimentum requirebatur, vt cognoscerem velocitatem realem aquarum in F altitudinemque eidem debitam: hanc vero obtinui ex obseruatis prius altitudine verticali FG et amplitudine iactus horizontali GH: notum enim est, altitudinem velocitati aquarum in F debitam esse aequalem $\frac{GH^2}{4FG}$. Erat autem FG = 900 part. vt et GH = 900 part. vnde altitudo pro velocitate aquarum effluentium generanda deducitur 225 part. diametrum autem tubi EF inuenimus = 19 part. Igitur *cylindrus aqueus correctus* hic diametrum basis habet 19. part. et altitudinem 225. part. atque supra vidimus pondus talis cylindri esse 8, 937. drachmarum. Porro vectem adhibuimus rectangulum LMN satis leuem atque liberrime mobilem circa axem in R perpendiculariter ad planum vectis transfixum: punctum autem R tale assumtum fuerat, vt situs alterius cruris esset in vecte sibi relicto horizontalis, alterius verticalis: PL diameter est orbiculi plani venam in centro suo perpendiculariter excipientis: in QN autem alius erat orbiculus horizontaliter positus, cui ponduscula superimponi possent, quanta requirerentur in experimento, vt situs vectis naturali similis esset dum venam exciperet: centrum

trum autem inferioris orbiculi tantum diſtabat a puncto M, quantum ſuperioris orbiculi a puncto R.

Hisce omnibus ad experimentum ſufficienti accuratione praeparatis, iamque effiuentibus aquis per tubum EF, vidimus pondus orbiculo QN ſuperimponi potuiſſe, quantum theoria noſtra requirebat, nempe 17. drachmarum et parum quod excurrebat. Idem vero experimentum ſolus ſub aliis circumſtantiis repetii ſimili cum ſucceſſu, ita vt de veritate theorematis noſtri §.8. dubitari non poſſit.

§. 12. Ab impetu aquarum directo veniamus ad obliquum: dico autem hunc recte aeſtimari non poſſe tum ob velocitatum intermediarum mutationes, quae ad rem faciunt, ſecus atque in caſu priori, tum etiam ob inaequalem in particulis directionis mutationem: dicemus tamen de hoc etiam caſu aliqua, vt appareat, quaenam hypotheſes phyſicae ad rectam rei aeſtimationem requirantur.

Fingatur itaque vena aquea AB in planum EF oblique incurrens: Hic quidem plures erunt particulae ad partem D deflectentes quam ad partem oppoſitam C: priores autem minorem ſubeunt directionis mutationem quam poſteriores, et propterea etiam minorem ad planum EF exerunt preſſionem: Non liquet autem, quanam proportione particulae aqueae ad diuerſa latera deuoluantur, nec quaenam velocitates ipſis ſuperſint in D et C, ideoque nec earum impreſſio in planum EF determinari poteſt. Ponantur interim omnia cognita, quae ad proble-

problematis ſolutionem requiruntur, maiorisque facilitatis cauſa vena non cylindrica ſed pryſmatica, ita vt de tota vena intelligi poſſint, quae nunc de lamina fluida C A D dicentur: Sit amplitudo venae in A $= 1$; quantitates aquae in D et C eodem tempore praeterfluentes rationem habeant vt p ad π; velocitas aquarum in A ſit $= \sqrt{2a}$; in D $= \sqrt{2b}$ et in C $= \sqrt{2\beta}$. Notetur hic *angulum mutatae directionis* in particulis D eſſe angulum A B E atque in particulis C angulum A B F, vnde ſi ſinus totus vocetur 1; coſinus anguli A B E $= c$, atque adeo coſinus anguli A B F $= -c$, ſique idem inſtituatur ratiocinium, quod fecimus paragr.. 8. atque ſi tandem recte adhibeatur theorema §. 14. P. I. inuenietur preſſio rami aquei A B D in planum E F ſecundum directionem A B $= \frac{p}{p+\pi} \times (2a - 2cb)$ et preſſio alterius rami A B C ſecundum eandem directionem A B $= \frac{\pi}{p+\pi} \times (2a + 2c\beta)$: atque preſſio vtraque coniuncta ſecundum praefatam directionem A B $= \frac{p(2a-2cb)+\pi(2a+2c\beta)}{p+\pi}$: haecque ſi multiplicetur per ſinum anguli A B E ſeu per $\sqrt{(1-cc)}$, obtinetur preſſio aquae ad planum E F perpendicularis, quae ſic erit $= \frac{p(2a-2cb)+\pi(2a+2c\beta)}{p+\pi} \times \sqrt{(1-cc)}$.

Iſta vero preſſio non ſola eſt conſideranda; eſt enim alia inſuper preſſio ad planum E F perpendicularis deriuanda a preſſionibus ad directionem venae A B perpendicularibus. De his notandum eſt, quod ea quae oriuntur a particulis in D praeterfluentibus contrariae ſint illis quae a particulis in C praeterfluentibus producuntur: quod ſi notatum fuerit, reperietur per methodum §. 8. huius

huius Partis, et per theorema §. 12. Part. I. eſſe preſſionem coniunctam vtriusque rami in directione ad AB perpendiculari $\frac{p-\pi}{p+\pi}\times 2aV(1-cc)$, haecque multiplicata per coſinum anguli ABE dat alteram preſſionem aquae ad planum EF perpendicularem $=\frac{p-\pi}{p+\pi}\times 2acV(1-cc)$.

Ambae vero preſſiones ad planum EF perpendiculares ſimul ſumtae dant preſſionem venae quaeſitam $=\frac{p\times(2a-2cb)+\pi(2a+2cb)}{p+\pi}\times V(1-cc)+\frac{p-\pi}{p+\pi}\times 2acV(1-cc)$.

§. 13. Apparet ex hac ipſa, quam nunc dedi, expreſſione pro vi venae aqueae oblique in planum incurrentis, tam incertam atque vagam eſſe iſtius vis determinationem, quam incerta et accurata eſt, cum directe vena planum ferit. Parum accurate certe dicitur ab Auctoribus, ſi res ipſa conſideretur, vires venae aqueae ſub diuerſis directionibus contra planum fluentis ſe habere vt ſinus angulorum incidentiae, quamuis forte id recte dicatur *in abſtracto*. In theoria quidem velocitas aquarum tam in C quam in D non differre poni poteſt a velocitate in A, eoque poſito fit $b=\beta=a$, et ſic tota preſſio $=2aV(1-cc)$, vt vulgo ſtatuitur. Videtur autem, iſtas poſitiones non omnino ipſi rei naturae ſatisfacere. Ego quidem coniicio preſſionem obliquam rationem habere ad preſſionem directam paullo maiorem, quam putatur, qua de re aliquando experimenta ſumam.

Si ſtatuatur omnem aquam ad eandem partem fluere, nempe ad D, (quod in directione non parum obliqua ſatis apte poni poſſe puto) erit $\pi=0$, ipſaque preſſio

=

Comment. Acad. Sc. Tom. VIII. Tab.

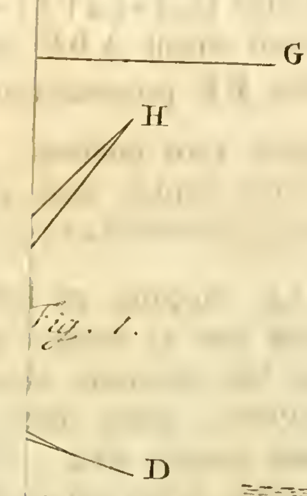


Fig. 1.

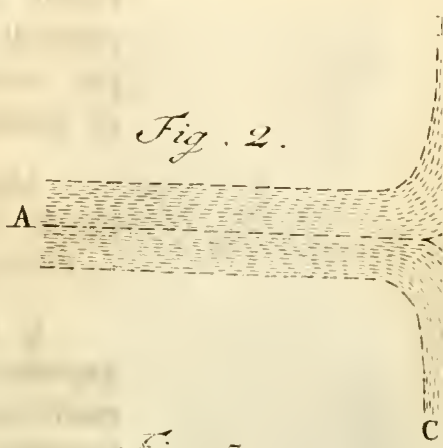


Fig. 2.

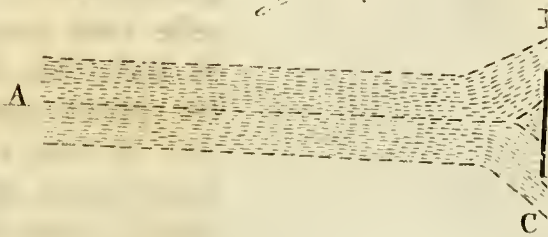
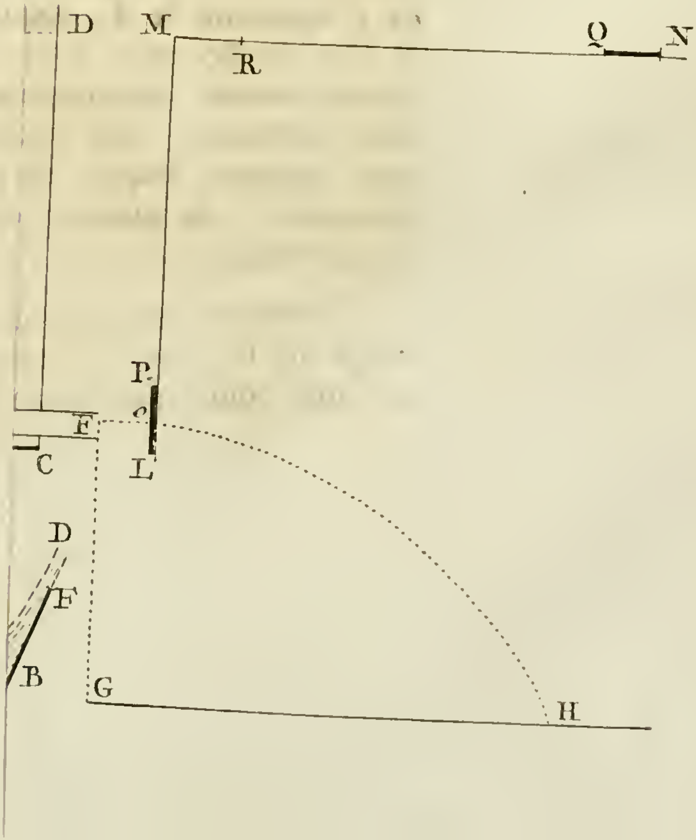


Fig. 3.



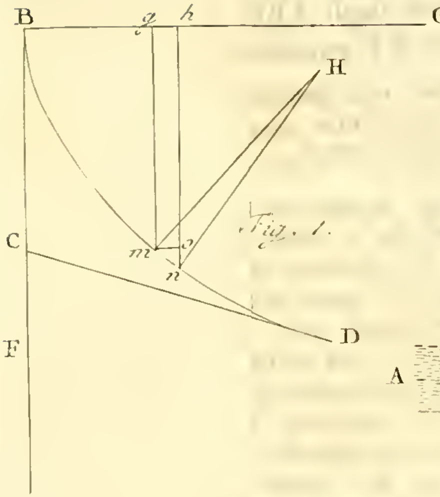


Fig. 1.

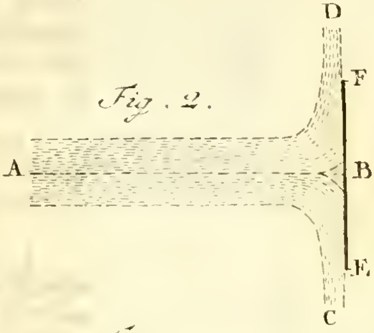


Fig. 2.

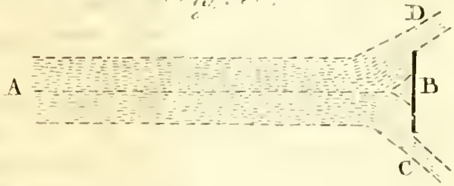
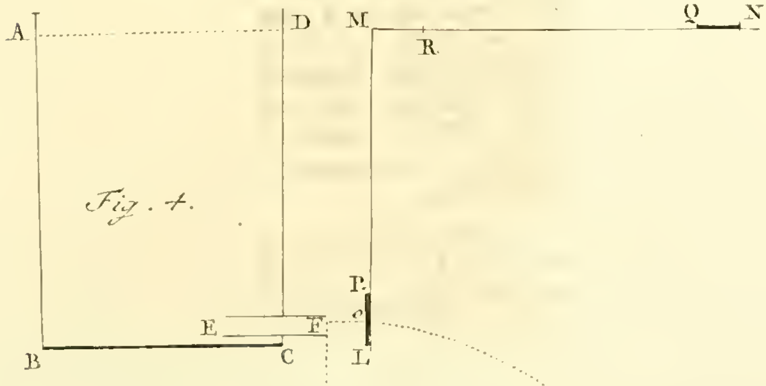


Fig. 3.



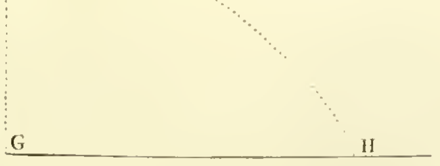


Fig. 4.

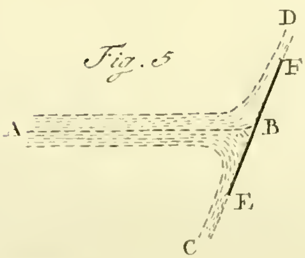


Fig. 5

$=(2a+2ac-2bc)\sqrt{(1-cc)}$. Iſta vero attentione eo magis digna puto, quod ſimul inſeruiant ad leges motuum in corporibus non elaſticis a percuſſione obliqua recte definiendas.

Denique fieri etiam poſſe puto, praeſertim quando aquae magna velocitate et oblique in planum irruunt, vt aquarum magna pars inſtar corporis elaſtici reſiliat, quod ſi fit, vis earum contra planum neceſſario creſcit.

§. 14. Prouti vis venae oblique incidentis accurate definiri nequit, ita vim fluidi infiniti in plana ſubmerſa, licet directe incidentis aut reſiſtentiam corporum, vt dicitur, a fluidis praeciſione geometrica determinari poſſe nego: cuius rei ratio vt appareat, recordandum hic erit, quod dixi §. *6*. requiri ad rectam aeſtimationem vis venae aqueae, vt planum conſideretur amplitudine venae veluti infinite maius: ita enim quiuis perſpiciet, aliquid hic eſſe iſti hypotheſi e diametro oppoſitum: flumen enim in planum ſibi ſubmerſum incurrens, vena quaſi eſt, ipſo plano infinities maior, vnde fit vt particulae aqueae obiectum planum praeterfluentes ratione longe alia directionem mutent, quam quae figura ſecunda repraeſentatur, neque apparet quonam numero particulae in flumine directionem mutent. Vtrumque facit, ne vis fluminis contra planum accurate habeatur: atque ſic nec reſiſtentia, quam corpora in fluido infinito mota patiuntur, definiri poteſt, niſi ad experimenta recurratur.

SO-

SOLVTIO PROBLEMATIS AD GEOMETRIAM SITVS PERTINENTIS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula VIII. PRaeter illam Geometriae partem, quae circa quantitates verſatur, et omni tempore ſummo ſtudio eſt exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit *Leibnitzius*, quam Geometriam ſitus vocauit. Iſta pars ab ipſo in ſolo ſitu determinando, ſitusque proprietatibus eruendis occupata eſſe ſtatuitur; in quo negotio neque ad quantitates reſpiciendum, neque calculo quantitatum vtendum ſit. Cuiusmodi autem problemata ad hanc ſitus Geometriam pertineant, et quali methodo in iis reſoluendis vti oporteat, non ſatis eſt definitum. Quamobrem, cum nuper problematis cuiusdam mentio eſſet facta, quod quidem ad geometriam pertinere videbatur, at ita erat comparatum, vt neque determinationem quantitatum requireret, neque ſolutionem calculi quantitatum ope admitteret, id ad geometriam ſitus referre haud dubitaui: praeſertim quod in eius ſolutione ſolus ſitus in conſiderationem veniat, calculus vero nullius prorſus ſit vſus. Methodum ergo meam quam ad huius generis problemata

mata ſoluenda inueni, tanquam ſpecimen Geometriae ſitus hic exponere conſtitui.

§. 2. Problema autem hoc, quod mihi ſatis notum eſſe perhibebatur, erat ſequens: Regiomonti in Boruſſia eſſe inſulam A der Kneiphof dictam, fluuiumque eam cingentem in duos diuidi ramos, quemadmodum ex figura videre licet: ramos vero huius fluuii ſeptem inſtructos eſſe pontibus, a, b, c, d, e, f, et g. Circa hos pontes iam iſta proponebatur quaeſtio, num quis curſum ita inſtituere queat, vt per ſingulos pontes ſemel et non plus quam ſemel transeat. Hocque fieri poſſe, mihi dictum eſt, alios negare alios dubitare; neminem vero affirmare. Ego ex hoc mihi ſequens maxime generale formaui problema; quaecunque ſit fluuii figura et diſtributio in ramos, atque quicunque fuerit numerus pontium, inuenire, vtrum per ſingulos pontes ſemel tantum transiri queat, an vero ſecus? Figura 1.

§. 3. Quod quidem ad problema Regiomontanum de ſeptem pontibus attinet, id reſolui poſſet facienda perfecta enumeratione omnium curſuum, qui inſtitui poſſunt; ex his enim innoteſceret, num quis curſus ſatisfaceret, an vero nullus. Hic vero ſoluendi modus propter tantum combinationum numerum et nimis eſſet difficilis atque operoſus, et in aliis quaeſtionibus de multo pluribus pontibus ne quidem adhiberi poſſet. Hoc porro modo ſi operatio ad finem perducatur multa inueniuntur, quae non erant in quaeſtione; in quo procul dubio tantae difficultatis cauſa conſiſtit. Quamobrem miſſa hac methodo, in aliam inquiſiui, quae plus non largiatur, quam oſtendat, vtrum talis curſus inſtitui queat, an ſecus; talem enim methodum multo ſimpliciorem fore ſum ſuſpicatus.

§. 4. Innititur autem tota mea methodus idoneo modo ſingulos pontium transitus deſignandi, in quo vtor litteris maiusculis A, B, C, D, ſingulis regionibus adſcriptis, quae flumine ſunt ſeparatae. Ita ſi quis ex regione A in regionem B transmigrat per pontem *a* ſiue *b*, hunc tranſitum denoto litteris AB, quarum prior praebet regionem ex qua exierat viator, poſterior vero dat regionem in quam pontem transgreſſus peruenit. Si deinceps viator ex regione B abeat in regionem D per pontem *f*, hic tranſitus repraeſentabitur litteris BD; duos autem hos tranſitus ſucceſſiue inſtitutos AB et BD denoto tantum tribus litteris ABD, quia media B deſignat tam regionem, in quam primo tranſitu peruenit, quam regionem ex qua altero tranſitu exit.

§. 5. Simili modo ſi viator ex regione D progrediatur in regionem C per pontem *g*, hos tres transitus ſucceſſiue factos quatuor litteris ABDC denotabo. Ex his enim quatuor litteris ABDG intelligetur viatorem primo in regione A exiſtentem tranſiiſſe in regionem B, hinc eſſe progreſſum in regionem D, ex hacque vltra eſſe profectum in C: cum vero hae regiones fluuiis ſint a ſe inuicem ſeparatae, neceſſe eſt vt viator tres pontes transierit. Sic transitus per quatuor pontes ſucceſſiue inſtituti quinque litteris denotabuntur; et ſi viator trans quotcunque pontes eat, eius migratio per litterarum numerum, qui vnitate eſt maior

ior quam numerus pontium, denotabitur. Quare transitus per ſeptem pontes ad deſignandum octo requirit litteras.

§. 6. In hoc deſignando modo non reſpicio, per quos pontes tranſitus ſit factus, ſed ſi idem tranſitus ex vna regione in aliam per plures pontes fieri poteſt, perinde eſt per quemnam transeat, modo in deſignatam regionem perueniat. Ex quo intelligitur, ſi curſus per ſeptem figurae pontes ita inſtitui poſſet, vt per ſingulos ſemel ideoque per nullum bis transeatur; hunc curſum octo litteris repraeſentari poſſe, easque litteras ita eſſe debere diſpoſitas, vt immediata litterarum A et B ſucceſſio bis occurrat, quia ſunt duo pontes *a* et *b* has regiones A et B iungentes, ſimili modo ſucceſſio litterarum A et C quoque debet bis occurrere in illa octo litterarum ſerie; deinde ſucceſſio litterarum A et D ſemel occurret; ſimiliterque ſucceſſio litterarum B et D, itemque C et D ſemel occurrat neceſſe eſt.

§. 7. Quaeſtio ergo huc reducitur, vt ex quatuor litteris A, B, C et D ſeries octo litterarum formetur, in qua omnes illae ſucceſſiones toties occurrant quoties eſt praeceptum. Antequam autem ad talem diſpoſitionem opera adhibeatur, oſtendi conuenit, vtrum tali modo hae litterae diſponi queant an non. Si enim demonſtrari poterit talem diſpoſitionem omnino fieri non poſſe, inutilis erit omnis labor, qui ad hoc efficiendum locaretur. Quamobrem regulam inueſtigaui, cuius ope tam pro hac quaeſtione, quam pro

 omnibus

omnibus similibus, facile discerni queat, num talis litterarum dispositio locum habere queat.

Figura 2. §. 8. Considero ad huiusmodi regulam inueniendam vnicam regionem A, in quam quotcunque pontes *a*, *b*, *c*, *d* etc. conducant. Horum pontium contemplor primo vnicum *a*, qui ad regionem A ducat; si nunc viator per hunc pontem transeat vel ante transitum esse debuit in regione A vel post transitum in A perueniet; quare in supra stabilito transitus designandi modo oportet vt littera A semel occurrat. Si tres pontes puta *a*, *b*, *c* in regionem A conducant, et viator per omnes tres transeat, tum in designatione eius migrationis littera A bis occurret, siue ex A initio cursum instituerit siue minus. Simili modo si quinque pontes in A conducant, in designatione transitus per eos omnes littera A ter occurrere debet. Atque si numerus pontium fuerit quicunque numerus impar, tum si is vnitate augeatur, eius dimidium dabit, quot vicibus littera A occurrere debeat.

Figura 1. §. 9. In casu igitur pontium transeundorum Regiomontano, quia in insulam A quinque pontes deducunt *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, necesse est, vt in designatione transitus per hos pontes littera A ter occurrat. Deinde littera B, quia in regionem B tres pontes conducunt, bis debet occurrere, similique modo littera D bis debet occurrere, atque etiam littera C bis. In serie ergo octo litterarum, quibus transitus per septem pontes deberet designari, littera A ter adesse deberet, litterarum vero

B, C,

B, C, et D vnaquaeque bis; id quod in ſerie octo litterarum omnino fieri nequit. Ex quo perſpicuum eſt, per ſeptem pontes Regiomontanos talem tranſitum inſtitui non poſſe.

§. 10. Simili modo de omni alio caſu pontium ſi quidem numerus pontium, qui in quamque regionem conducit fuerit impar, iudicari poteſt, an per ſingulos pontes tranſitus ſemel fieri queat. Si enim euenit, vt ſumma omnium vicium, quibus ſingulae litterae occurrere debent, aequalis ſit numero omnium pontium vnitate aucto, tum talis tranſitus fieri poteſt; ſin autem vt in noſtro exemplo accidit, ſumma omnium vicium maior fuerit numero pontium vnitate aucto, tum talis tranſitus nequaquam inſtitui poteſt. Regula autem quam dedi pro numero vicium A ex numero pontium in regionem A deducentium inueniendo aeque valet; ſiue omnes pontes ex vna regione B, vt in figura repraeſentatur, ducant, ſiue ex diuerſis; tantum enim regionem A conſidero, et inquiro quot vicibus littera A occurrere debeat. Figura 2.

§. 11. Si autem numerus pontium, qui in regionem A conducunt, fuerit par, tum circa tranſitum per ſingulos notandum eſt, vtrum initio viator curſum ſuum ex regione A inſtituerit an non. Si enim duo pontes in A conducant, et viator ex A curſum inceperit, tum littera A bis occurrere debet, ſemel enim adeſſe debet ad deſignandum exitum ex A per alterum pontem, et ſemel quoque ad deſignandum reditum in A per alterum pontem. Sin autem viator ex alia regione cursum inceperit, tum ſemel tantum littera A occurret, ſemel enim poſita tam aduentum in A quam exitum inde denotabit, vt huiusmodi curſus deſignare ſtatui.

§. 12. Conducant iam quatuor pontes in regionem A, et viator ex A curſum incipiat, tum in deſignatione totius curſus littera A ter adeſſe debebit, ſi quidem per ſingulos ſemel transierit. At ſi ex alia regione ambulare inceperit, tum bis tantum littera A occurret. Si ſex pontes ad regionem A conducant, tum littera A, ſi ex A initium eundi eſt ſumtum, quater occurret, at ſi non ex A initio exierit viator, tum ter tantum occurrere debebit. Quare generaliter ſi numerus pontium fuerit par, tum eius dimidium dat numerum vicium, quibus littera A occurrere debet, ſi initium non eſt in regione A ſumtum; dimidium vero vnitate auctum dabit numerum vicium, quoties littera A occurrere debet, initio curſus in ipſa regione A ſumto.

§. 13. Quia autem in tali curſu nonniſi ex vna regione initium fieri poteſt, ideo ex numero pontium, qui in quamuis regionem deducunt, ita numerum vicium, quoties littera quamque regionem denotans occurrere debet, definio, vt ſumam numeri pontium vnitate aucti dimidium, ſi numerus pontium fuerit impar; ipſius vero numeri pontium medietatem, ſi fuerit par. Deinde ſi numerus omnium vicium adaequet numerum pontium vnitate auctum, tum tranſitus deſideratus ſuccedit, at initium ex regione, in quam impar pontium nume-

numerus ducit, capi debet. Sin autem numerus omnium vicium fuerit vnitate minor, quam pontium numerus vnitate auctus, tum transitus succedet incipiendo ex regione, in quam par pontium numerus ducit, quia hoc modo vicium numerus vnitate est augendus.

§. 14. Proposita ergo quacunque aquae pontiumque figura, ad inuestigandum, num quis per singulos semel transire queat, sequenti modo operationem instituo. Primo singulas regiones aqua a se inuicem diremtas litteris A, B, C etc. designo. Secundo sumo omnium pontium numerum, eumque vnitate augeo, atque sequenti operationi praefigo. Tertio singulis litteris A, B, C etc. sibi subscriptis, cuilibet adscribo numerum pontium ad eam regionem deducentium. Quarto eas litteras, quae pares adscriptos habent numeros signo asterisco. Quinto singulorum horum numerorum parium dimidia adiicio, imparium vero vnitate auctorum dimidia ipsis adscribo. Sexto hos numeros vltimo scriptos in vnam summam coniicio, quae summa, si vel vnitate minor fuerit vel aequalis numero supra praefixo, qui est numerus pontium vnitate auctus, tum concludo transitum desideratum perfici posset. Hoc vero est tenendum, si summa inuenta fuerit vnitate minor, quam numerus supra positus, tum initium ambulationis ex regione asteristico notata fieri debere, contra vero ex regione non signata si summa fuerit aequalis numero praescripto. Ita ergo pro casu Regiomontano operationem instituo, vt sequitur:

Nume-

Numerus pontium 7, habetur ergo 8

	Pontes	
A,	5	3
B,	3	2
C,	3	2
D,	3	2

Quia ergo plus prodiit quam 8, huiusmodi tranſitus nequaquam fieri poteſt.

Figura 3. §. 15. Sint duae inſulae A et B aqua circumdatae, quacum aqua communicent quatuor fluuii, quemadmodum figura repraeſentat. Traiecto porro ſint ſuper aquam inſulas circumdantem et fluuios quindecim pontes *a*, *b*, *c*, *d*, etc. et quaeritur, num quis curſum ita inſtituere queat, vt per omnes pontes transeat, per nullum autem plus quam ſemel. Deſigno ergo primum omnes regiones, quae aqua a ſe inuicem ſunt ſeparatae litteris A, B, C, D, E, F cuiusmodi ergo ſunt ſex regiones. Dein numerum pontium 15 vnitate augeo, et ſummam 16 ſequenti operationi praefigo.

		16
A*	8	4
B*	4	2
C*	4	2
D	3	2
E	5	3
F*	6	3
		16

Tertio

Tertio litteras A, B, C etc. ſibi inuicem ſubſcribo, et ad quamque numerum pontium, qui in eam regionem ducunt pono, vt ad A octo ducunt pontes, ad B quatuor etc. Quarto litteras, quae pares adiunctos habent numeros aſteriſco noto. Quinto in tertiam columnam ſcribo parium numerorum dimidia, impares vero vnitate augeo, et ſemiſſes appono. Sexto tertiae columnae numeros inuicem addo, et obtineo ſummam 16. quae cum aequalis ſit numero ſupra poſito 16, ſequitur tranſitum deſiderato modo fieri poſſe, ſi modo curſus vel ex regione D vel E incipiatur, quippe quae non ſunt aſteriſco notatae. Curſus autem ita fieri poterit E *a* F *b* B *c* F *d* A *e* F *f* C *g* A *h* C *i* D *k* A *m* E *n* A *p* B *o* E *l* D vbi inter litteras maiuſculas pontes ſimul collocaui, per quos ſit tranſitus.

§. 16. Hac igitur ratione facile erit in caſu quam maxime compoſito iudicare, vtrum tranſitus per omnes pontes ſemel tantum fieri queat, an non. Hoc tamen adhuc multo faciliorem tradam modum idem dignoſcendi, qui ex hoc ipſo modo non difficulter eruetur, poſtquam ſequentes obſeruationes in medium protulero. Primo autem obſeruo omnes numeros pontium ſingulis litteris A, B, C adſcriptos ſimul ſumtos duplo maiores eſſe toto pontium numero. Huius rei ratio eſt, quod in hoc computo, quo pontes omnes in datam regionem ducentes numerantur, quilibet pons bis numeretur; refertur enim quisque pons ad vtramque regionem, quas iungit.

§. 17. Sequitur ergo ex hac obſeruatione ſummam omnium pontium, qui in ſingulas regiones conducunt, eſſe numerum parem, quia eius dimidium pontium numero aequatur. Fieri ergo non poteſt, vt inter numeros pontium in quamlibet regionem ducentium vnicus ſit impar; neque etiam vt tres ſint impares, neque quinque, etc. Quare ſi qui pontium numeri litteris A, B, C, etc, adſcripti ſunt impares, neceſſe eſt vt eorum numerus ſit par, ita in exemplo Regiomontano quatuor erant pontium numeri impares litteris regionum A, B, C, D adſcripti, vti ex §. 14. videre licet; atque in exemplo praecedente §. 15, duo tantum ſunt numeri impares, litteris D et E adſcripti.

§. 18. Cum ſumma omnium numerorum litteris A, B, C etc. adiunctorum aequet duplum pontium numerum, manifeſtum eſt illam ſummam binario auctam, et per 2 diuiſam dare numerum operationi praefixum. Si igitur omnes numeri litteris A, B, C, D etc. adſcripti fuerint pares, et eorum ſingulorum medietates capiantur ad numeros tertiae columnae obtinendos, erit horum numerorum ſumma vnitate minor, quam numerus praefixus. Quamobrem his caſibus ſemper transitus per omnes pontes fieri poteſt. In quacunque enim regione curſus incipiatur, ea habebit pontes numero pares ad ſe conducentes, vti requiritur. Sic in exemplo Regiomontano fieri poteſt, vt quis per omnes pontes bis transgrediatur, quilibet enim pons, quaſi in duos erit diuiſus, numerusque pontium in quamuis regionem ducentium erit par.

§. 19.

§. 19. Praeterea ſi duo tantum numeri litteris A, B, C etc. adſcripti fuerint impares, reliqui vero omnes pares, tum ſemper deſideratus tranſitus ſuccedet, ſi modo curſus ex regione ad quam pontium impar numerus tendit incipiatur. Si enim pares numeri biſecentur atque etiam impares vnitate aucti, vti praeceptum eſt, ſumma harum medietatum vnitate erit maior quam numerus pontium, ideoque aequalis ipſi numero praefixo. Ex hocque porro perſpicitur, ſi quatuor vel ſex vel octo etc. fuerint numeri impares in ſecunda columna, tum ſummam numerorum tertiae columnae maiorem fore numero praefixo, eumque excedere vel vnitate, vel binario vel ternario etc. et idcirco tranſitus fieri nequit.

§. 20. Caſu ergo quocunque propoſito ſtatim facillime poterit cognoſci, vtrum tranſitus per omnes pontes ſemel inſtitui queat an non, ope huius regulae. Si fuerint plures duabus regiones, ad quas ducentium pontium numerus eſt impar, tum certo affirmari poteſt, talem tranſitum non dari. *S*i autem ad duas tantum regiones ducentium pontium numerus eſt impar, tunc transitus fieri poterit, ſi modo curſus in altera harum regionum incipiatur. Si denique nulla omnino fuerit regio, ad quam pontes numero impares conducant, tum tranſitus deſiderato modo inſtitui poterit, in quacunque regione ambulandi initium ponatur. Hac igitur data regula problemati propoſito pleniſſime ſatisfit.

§. 21. Quando autem inuentum fuerit talem transitum institui posse, quaestio superest quomodo cursus sit dirigendus. Pro hoc sequenti vtor regula; tollantur cogitatione quoties fieri potest, bini pontes, qui ex vna regione in aliam ducunt, quo pacto pontium numerus vehementer plerumque diminuetur, tum quaeratur, quod facile fiet, cursus desideratus per pontes reliquos, quo inuento pontes cogitatione sublati hunc ipsum cursum non multum turbabunt, id quod paululum attendenti statim patebit; neque opus esse iudico plura ad cursus reipsa formandos praecipere.

THEO-

THEOREMATVM QVORVNDAM AD NVMEROS PRIMOS SPECTANTIVM DEMONSTRATIO.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Plurima quondam a *Fermatio* theoremata arithmetica ſed ſine demonſtrationibus in medium ſunt prolata, in quibus, ſi vera eſſent, non ſolum eximiae numerorum proprietates continerentur, verum etiam ipſa numerorum ſcientia, quae plerumque analyſeos limites excedere videtur, vehementer eſſet promota. Quamuis autem iſte inſignis Geometra de pluribus, quae propoſuit, theorematis aſſeruerit ſe ea vel demonſtrare poſſe, vel ſaltem de eorum veritate eſſe certum: tamen nusquam, quantum mihi conſtat, demonſtrationes expoſuit. Quin potius *Fermatius* videtur maximam theorematum ſuorum numericorum partem per inductionem eſſe aſſecutus, quippe quae via fere vnica ad huiusmodi proprietates eruendas patere videatur. At vero quam parum inductionibus in hoc negotio tribui poſſit pluribus exemplis poſſem declarare; ex quibus autem vnicum ab ipſo *Fermatio* deſumtum attuliſſe ſufficiat. Loquor nimirum de illo theoremate, cuius falſitatem iam aliquot ab hinc annis oſtendi, quo *Fermatius* aſſerit omnes numeros hac forma $2^{2^n}+1$ comprehenſos eſſe numeros primos. Ad veritatem autem huius propoſitionis euincendam inductio omnino ſufficere videatur. Nam praeterquam quod omnes iſti numeri minores quam 100000 ſint reuera primi, demonſtrari etiam facile poteſt nullum numerum primum, 600 non excedentem hanc formulam $2^{2^n}+1$, quantumuis magnus etiam numerus pro n ſubſtituatur, metiri. Cum tamen nihilominus conſtet hanc propoſitionem veritati non eſſe conſentaneam, facile intelligitur, quantum inductio in huiusmodi ſpeculationibus valeat.

§. 2. Hanc ob rationem omnes huiusmodi numerorum proprietates, quae ſola inductione nituntur, tam diu pro incertis habendas eſſe arbitror, donec illae vel apodicticis demonſtrationibus muniantur vel omnino refellantur. Non plus etiam illis theorematis, quae ego ipſe illi ſchediasmati, in quo de memorato theoremate *Fermatiano* numerisque perfectis tractaui, ſubieci, fidendum eſſe cenſerem, ſi tantum inductionibus, qua via quidem ſola tum temporis ad eorum cognitionem perueni, niterentur. Nunc vero, poſtquam peculiari methodo demonſtrationes horum theorematum firmiſſimas ſum adeptus, de veritate eorum non amplius eſt dubitandum. Quocirca tam ad veritatem illorum theorematum oſtendendam, quam ad methodum ipſam, quae forte etiam in aliis numerorum inueſtigationibus vtilitatem

litatem afferre poterit, in hac diſſertatione meas demonſtrationes explicare conſtitui.

§. 3. Propoſitio autem, quam hic demonſtrandum ſuscepi, eſt ſequens:

Significante p *numerum primum, formula* $a^{p-1}-1$ *semper per* p *diuidi poterit, niſi* a *per* p *diuidi queat.*

Ex hac enim propoſitione demonſtrata ſponte reliquorum theorematum veritas fluit. Caſum quidem formulae propoſitae, quo eſt $a=2$, iam ab aliquo tempore demonſtratum dedi; attamen tum demonſtrationem ad generalem formulam extendere non licuit. Quamobrem primo huius caſus probationem afferre conueniet, quo tranſitus ad generaliora eo facilior reddatur. Demonſtranda igitur erit ſequens propoſitio:

Significante p *numerum primum imparem quemcunque, formula* $2^{p-1}-1$ *ſemper per* p *diuidi poterit.*

Demonſtratio.

Loco 2 ponatur $1+1$, eritque $(1+1)^{p-1}= 1+\frac{p-1}{1}+\frac{(p-1)(p-2)}{1.\ 2}+\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.\ 2.\ 3.}+\frac{(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$ etc. cuius ſeriei terminorum numerus eſt $=p$ et proinde impar. Praeterea quilibet terminus, quamuis habeat fractionis ſpeciem dabit numerum integrum; quisque enim numerator, vti ſatis conſtat, per ſuum denominatorem diuidi poteſt. Demto igitur ſeriei termino primo 1 erit $(1+1)^{p-1}-1=2^{p-1}-1=\frac{p-1}{1}+\frac{(p-1)(p-2)}{1.\ 2}+\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.\ 2.\ 3}+\frac{(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}+$ etc.

quorum

quorum numerus eſt $= p - 1$ et propterea par. Colligantur igitur bini quique termini in vnam ſummam, quo terminorum numerus fiat duplo minor; erit $2^{p-1} - 1 = \frac{p(p-1)}{1.\ 2} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ 6}$ + etc. cuius ſeriei vltimus terminus ob p numerum imparem erit $\frac{p(p-1)(p-2) \text{ - - - - - - - - - - } 2}{1.\ 2.\ 3 \text{ - - - - - - - - - - } (p-1)} = p$. Apparet autem ſingulos terminos per p eſſe diuiſibiles, nam, cum p ſit numerus primus et maior quam vllus denominatorum factor, nusquam diuiſione tolli poterit. Quamobrem ſi fuerit p numerus primus impar, per illum ſemper $2^{p-1} - 1$ diuidi poterit. Q. E. D.

Aliter

Si $2^{p-1} - 1$ per numerum primum p diuidi poteſt, diuidi quoque poterit eius duplum $2^p - 2$ et viciſſim. At eſt $2^p = (1+1)^p = 1 + \frac{p}{1} + \frac{p(p-1)}{1.\ 2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.\ 2.\ 3} \text{ - - - - - - - - - } \frac{p}{1} + 1$. Quae ſeries terminis primo et vltimo truncata dat $\frac{p}{1} + \frac{p(p-1)}{1.\ 2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.\ 2.\ 3} + \text{ - - - - - - - - } \frac{p(p-1)}{1.\ 2} + p = 2^p - 2$. Perſpicuum autem eſt iſtius ſeriei quemuis terminum per p eſſe diuiſibilem, ſi quidem p fuerit numerus primus. Quamobrem etiam ſemper $2^p - 2$ per p et propterea quoque $2^{p-1} - 1$ per p diuidi poterit, niſi ſit $p = 2$. Q. E. D.

§. 5. Cum igitur $2^{p-1} - 1$ per numerum primum imparem p diuidi queat; facile intelligitur per p quoque diuidi poſſe hanc formulam $2^{m(p-1)} - 1$ denotante m numerum quemcunque integrum. Quare ſequentes formulae quoque omnes $4^{p-1} - 1$, $8^{p-1} - 1$, $16^{p-1} - 1$ etc.

etc. per numerum primum p diuidi poterunt. Demonſtrata igitur eſt veritas theorematis generalis pro omnibus caſibus, quibus a eſt quaeuis binarii poteſtas, et p quicunque numerus primus praeter binarium.

§. 5. Demonſtrato nunc hoc theoremate eius ope ſequens quoque demonſtrabimus.

Theorema.

Denotante p *numerum primum quemcunque praeter* 3, *per illum ſemper haec formula* $3^{p-1}-1$ *diuidi poterit.*

Demonſtratio.

Si $3^{p-1}-1$ per numerum primum p excepto 3 diuidi poteſt, tum 3^p-3 per p diuidi poterit, quoties p fuerit numerus primus quicunque, et viciſſim. Eſt vero $3^p = (1+2)^p = 1 + \frac{p}{1}.2 + \frac{p(p-1)}{1.\ 2}4 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.\ 2.\ 3}8$ - - - - $+ \frac{p}{1}.2^{p-1} + 2^p$, cuius ſeriei ſinguli termini praeter primum et vltimum per p diuidi poterunt, ſi quidem p fuerit numerus primus. Per p igitur diuidi poteſt iſta formula 3^p-2^p-1, quae aequalis eſt huic 3^p-3-2^p+2. At 2^p-2 ſemper per p numerum primum diuidi poteſt; ergo etiam 3^p-3. Quare $3^{p-1}-1$ ſemper per p diuidi poteſt, quoties p fuerit numerus primus excepto 3. Q. E. I.

§. 6. Eodem modo vlterius progredi liceret ab hoc ipſius a valore ad ſequentem vnitate maiorem. Sed quo demonſtrationem generalis theorematis magis concinnam magisque genuinam efficiam, ſequens praemitto

Theorema.

Denotante p *numerum primum, si* $a^p - a$ *per* p *diuidi potest; tum per idem* p *quoque formula* $(a + 1)^p - a - 1$ *diuidi poterit.*

Demonstratio.

Resoluatur $(1 + a)^p$ consueto more in seriem, erit $(1 + a)^p = 1 + \frac{p}{1} a + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} a^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 + \text{- - - - - - - - -} \frac{p}{1} a^{p-1} + a^p$; cuius seriei singuli termini per p diuidi possunt praeter primum et vltimum; si quidem p fuerit numerus primus. Quamobrem $(1 + a)^p - a^p - 1$ diuisionem per p admittet; haec autem formula congruit cum hac $(1 + a)^p - a - 1 - a^p + a$. At $a^p - a$ per hypothesin per p diuidi potest, ergo et $(1 + a)^p - a - 1$. Q. E. D.

§. 7. Cum igitur, posito quod $a^p - a$ per p numerum primum diuidi queat, per p quoque haec formula $(a + 1)^p - a - 1$ diuisionem admittat; sequitur etiam $(a + 2)^p - a - 2$, item $(a + 3)^p - a - 3$ et generaliter $(a + b)^p - a - b$ per p diuidi posse. Posito autem $a = 2$, quia $2^p - 2$, vti iam demonstrauimus, per p diuidi potest, perspicuum est formulam $(b + 2)^p - b - 2$ diuisionem per p admittere debere, quicunque integer numerus loco b substituatur. Metietur ergo p formulam $a^{p-1} - 1$, nisi fuerit $a = p$ vel multiplo ipsius p. Atque haec est demonstratio generalis theorematis, quam tradere suscepi.

ME-

METHODVS VNIVERSALIS SERIES SVMMANDI VLTERIVS PROMOTA.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Methodus vniuerſalis ſeries ſummandi, quam exeunte praeterito anno expoſui, latiſſime quidem patet, cum ex ſolo termino generali ſeriei dato exhibeat formulam ſummae ſeriei aequalem; interim tamen difficulter ad eiusmodi ſeries, quarum termini generales algebraice exprimi non poſſunt, ſed vel exponentiales quantitates inuoluunt vel etiam tranſcendentes, accommodatur. Cum enim poſito termino X, cuius index eſt x, ſit ſumma ſeriei a primo termino vsque ad X aequalis $\int X\,dx + \frac{X}{1.2} + \frac{dX}{1.2.3.2dx} - \frac{d^3X}{1.2.3.4.5.6dx^3} +$ etc. facile apparet ſi X ſaltem huiumodi quantitates a^x inuoluat, tam expreſſionem $\int X\,dx$ quam differentialia ipſius X ad logarithmos deduci, vnde maxima oritur moleſtia in ſumma quaeſita ſaltem proxime aſſignanda.

§. 2. Praeterea etſi X fuerit quantitas algebraica, tamen ſaepius eius differentialia, quae ad ſummam obtinendam ſumi debent, tam fiunt complicata, vt non ſolum difficulter exhiberi queant, ſed etiam ſeriem non multum conuergentem praebeant, vti id euenit in ſerie $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99}$ etc. circuli quadraturam continente. Cuius difficultatis ratio in eo potiſſimum verſatur, quod

 indi-

indices terminorum vnitate crescentes assumsi, quas si alio numero crescentes sumsissem, terminus generalis X forte tractabilior prodiisset. Denique si terminus generalis X ne quidem exhiberi potest, vt id in plurimis seriebus accidit, tum data formula summam exhibens ne vsum quidem habere potest.

§. 3. His difficultatibus quomodo occurrere possem diu sum meditatus, tandemque obseruaui ex eodem principio, cuius ope illam formulam inuenissem, alias quoque formulas elici posse ad quasque series summandas idoneas; quibus exhibitis pro quauis oblata serie, ea formula sit eligenda, quae esset commodissima. Ex quouis autem huiusmodi formularum genere conueniens visum est, vt binae formulae tradantur, quarum altera apta sit ad series a termino primo ad datum vsque terminum summandas, cuiusmodi erat formula iam ante a me communicata, altera vero ad series a dato termino in infinitum vsque summandas. Quamuis enim haec posterior summatio ex priore fluat, tamen expediet pro hoc casu peculiarem formulam praebuisse.

§. 4. Incipiam igitur a seriebus, quarum terminus generalis algebraice potest exhiberi, pro quibus etiam methodus in praecedente schediasmate data inseruit; sed indices in progressione quacunque arithmetica progredientes assumam, quo formula inuenta latius pateat saepiusque commodiorem calculum suppeditet. Sit igitur series ab initio ad datum vsque terminum summanda cum indicibus sequens:

$$\overset{a}{A} + \overset{a+b}{B} + \overset{a+2b}{C} - - - - - - + \overset{x}{X} = S$$

vbi indices quantitate b crefcunt, primique termini A index eft a. Ponatur huius feriei fumma $= S$, in qua expreffione fi loco x fubftituatur $x-b$, perfpicuum eft eam exhibituram fummam eandem demto X feu fore aequalem ipfi $S - X$. At fi in S loco x ponatur $x-b$ tum prodibit $S - \frac{bdS}{1\,dx} + \frac{b^2 ddS}{1.2dx^2} - \frac{b^3 d^3 S}{1.2.3dx^3} +$ etc. vnde habitur fequens aequatio $X = \frac{bdS}{1.dx} - \frac{b^2 ddS}{1.2dx^2} + \frac{b^3 d^3 S}{1.2.3dx^3} - \frac{b^4 d^4 S}{1.2.3.4dx^4}$ $+$ etc. Ex hac vero aequatione elicitur ifta formula

$$S = \int \frac{Xdx}{b} + \frac{X}{1.2} + \frac{bdX}{1.2.3.2dx} - \frac{b^3 d^3 X}{1.2.3\,4.5.6dx^3} + \frac{b^5 d^5 X}{1.2.3 - - - 7.6dx^5}$$
$$- \frac{3b^7 d^7 X}{1.2.3 - - - - 9.10dx^7} + \frac{5b^9 d^9 X}{1.2.3 - - - 11.6dx^9} - \frac{691 b^{11} d^{11} X}{1.2.3 - - - 13.210dx^{11}}$$
$$+ \frac{35 b^{13} d^{13} X}{1.2.3 - - - - 15.2dx^{13}} - \frac{3617 b^{15} d^{15} X}{1.2.3 - - - 17.30dx^{15}} + \frac{243279 b^{17} d^{17} X}{1.2.3 - - - 19.1890dx^{17}}$$

etc. cui expreffioni tanta quantitas conftans eft addenda vt pofito $x = a$ fiat $S = A$, vel pofito $x = a-b$ fiat $S = 0$.

§. 5. Si ponatur $X = x^n$, feu fi inuenienda fit fumma huius feriei $a^n + (a+b)^n + (a+2b)^n + - -$ $+ x^n$, erit $\int X dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$; $\frac{dX}{dx} = n x^{n-1}$, $\frac{d^3 X}{dx^3} = n$ $(n-1)(n-2)x^{n-3}$ etc. Hinc ergo erit fumma quaefita

$$S = \frac{x^{n+1}}{(n+1)b} + \frac{x^n}{1.2} + \frac{nbx^{n-1}}{1.2.3.2} - \frac{n(n-1)(n-2)b^3 x^{n-3}}{1.2.3.4.5.6}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)b^5 x^{n-5}}{1.2.3.4.5.6.7.6} - \text{etc.} - \frac{a^{n+1}}{(n+1)b} +$$
$$+ \frac{a^n}{1.2} - \frac{nba^{n-1}}{1.2.3.2} + \frac{n(n-1)(n-2)b^3 a^{n-3}}{1.2.3.4.5.6} - \frac{\quad}{\quad}$$

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)b^5 a^{n-5}}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,6} + \text{etc.}$ adiecta debita constante. Summa ergo seriei $a+(a+b)+(a+2b)+ - - - + x$ erit $= \frac{x^2}{2b} + \frac{x}{2} + \frac{b}{12} - \frac{a^2}{2b} + \frac{a}{2} - \frac{b}{12} = \frac{x^2 - a^2 + bx + ab}{2b}$, atque summa seriei $a^2 + (a+b)^2 + (a+2b)^2 + - - - - + x^2 = \frac{x^3}{3b} + \frac{x^2}{2} + \frac{bx}{6} - \frac{a^3}{3b} + \frac{a^2}{2} - \frac{ab}{6} = \frac{2x^3 - 2a^3 + 3bx^2 + 3a^2b + b^2x - ab^2}{6b}$ Quae expressiones similes sunt eis, quas pro summis potestatum numerorum naturalium in superiori dissertatione dedi, atque ex iis quoque facile formantur.

§. 6. Sit nunc ad alteram huius generis formulam inueniendam series a dato termino X, cuius index sit x in infinitum vsque summanda, haec scilicet

$$\overset{x}{\mathrm{X}} + \overset{x+b,}{\mathrm{Y}} + \overset{x+2b}{\mathrm{Z}} + \text{etc. infinitum} = \mathrm{S}.$$

In summa ergo S si pro x scribatur $x+b$ prodibit $\mathrm{S}-\mathrm{X}$, erit adeo $\mathrm{X} = \frac{-b\,d\mathrm{S}}{1.dx} - \frac{b^2 dd\mathrm{S}}{1.2\,dx^2} - \frac{b^3 d^3\mathrm{S}}{1.2.3\,dx^3} - \text{etc.}$ vnde vt supra reperietur $\mathrm{S} = -\int \frac{\mathrm{X}dx}{b} + \frac{\mathrm{X}}{1.2} - \frac{b\,d\mathrm{X}}{1.2.3.2dx} + \frac{b^3 d^3\mathrm{X}}{1.2.3.4.5.6dx^3} - \frac{b^5 d^5 \mathrm{X}}{1.2.3 - - - 7.6dx^5} + \frac{3b^7 d^7 \mathrm{X}}{1.2.3. - - - 9.10dx^7} - \frac{5b^9 d^9 \mathrm{X}}{1.2.3 - 11.6dx^9} + \frac{691\, b^{11} d^{11} \mathrm{X}}{1.2.3 - - - 13.210dx^{11}} - \frac{35 b^{13} d^{13} \mathrm{X}}{1.2.3 - - - - 15.2dx^{13}} + \frac{3617 b^{15} d^{15} \mathrm{X}}{1.2.3 - - - - 17.30dx^{15}} - \frac{2423279 b^{17} d^{17} \mathrm{X}}{1.2.3 - - - - 19.1890dx^{17}} + \text{etc.}$ Cui formulae tanta constans est adiicienda vt fiat $\mathrm{S} = 0$, si ponatur $x = \infty$; si enim terminus X iam fuerit infinitesimus seu vltimus in serie, summa debet esse euanescens, si quidem series finitam habeat summam, pro quo casu haec formula est accommodata.

§. 7. Quo vsus huius formulae appareat, sit $\mathrm{X} = \frac{1}{x^2}$ seu ista series $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+b)^2} + \frac{1}{(x+2b)^2} + \text{etc.}$ in infinitum sum-

ſummanda erit ob $\int X\,dx = -\frac{1}{x}$, $\frac{dX}{dx} = \frac{-2}{x^3}$, $\frac{d^3X}{dx^3} = \frac{-2.3.4}{x^5}$ etc. $S = \frac{1}{bx} + \frac{1}{2x^2} + \frac{b}{6x^3} - \frac{b^3}{30x^5} + \frac{b^5}{42x^7} - \frac{b^7}{30x^9} + \frac{5b^9}{66x^{11}} - \frac{691b^{11}}{2730x^{13}} + \frac{7b^{13}}{6x^{15}} - \frac{3617b^{15}}{510x^{17}} + \frac{2423279b^{17}}{35910x^{19}} -$ etc. quae expreſſio conſtantem non requirit, cum per ſe euaneſcat poſito $x = \infty$. Eo magis autem conuergit haec ſeries, quo maior fuerit x reſpectu ipſius b. Quare ſi datae ſeriei aliquot termini initiales addantur actu, reliquorum hac methodo ſumma inuenta illi aggregato addita dabit ſummam propoſitae ſeriei in infinitum continuatae.

§. 8. Sed miſſis his, quae priorem regulam tantum commodiorem reddunt, progredior ad ſeries ſummandas, ad quas illa formula non ſufficit. Sit nimirum ſeries ſummanda, in qua ſigna terminorum alternantur, vti

$$\overset{a,}{A} - \overset{a+b,}{B} + \overset{a+2b,}{C} - \overset{a+3b,}{D} \text{ - - - - - - } + \overset{x,}{X} - \overset{x+b}{Y} = S$$

in qua ſerie cum ſit Y talis functio ipſius $x+b$ qualis X eſt ipſius x, erit $Y = X + \frac{b\,dx}{1\,dx} + \frac{b^2\,ddX}{1.2.dx^2} + \frac{b^3d^3X}{1.2\;dx^2} +$ etc. Deinde ſi in S loco x ponatur $x-2b$ prodibit $S-X+Y$; erit ergo $-Y+X = \frac{2b\,dS}{1\,dx} - \frac{4b^2\,ddS}{1.2.dx^2} + \frac{8b^3d^3S}{1.2.3dx^3} - \frac{16b^4d^4S}{1.2.3.4.dx^4} + \frac{32b^5d^5S}{1.2.3.4.5dx^5} -$ etc. $= -\frac{b\,dX}{1.dx} - \frac{b^2d^2X}{1.2dx^2} - \frac{b^3d^3X}{1.2.3\,dx^3} - \frac{b^4d^4X}{1.2.3.4dx^4} -$ etc. Ponatur $\frac{dS}{dx} = \frac{\alpha\,dX}{dx} + \frac{\beta d^2X}{dx^2} + \frac{\gamma d^3X}{dx^3} + \frac{\delta d^4X}{dx^4}$ etc. et comparandis terminis homologis prodibit $S = C - \frac{X}{2} - \frac{3bdX}{4dx} - \frac{b^2\,ddX}{2\,dx^2} - \frac{3b^3d^3X}{16\,dx^3} - \frac{b^4d^4X}{24\,dx^4} - \frac{9b^5d^5X}{1440\,dx^5} -$ etc. et introducendo Y erit $S = C + Y + \frac{X}{2} + \frac{bdX}{1.2.2dx} - \frac{b^3d^3X}{1.2.3.4.2\,dx^3} + \frac{3b^5d^5X}{1.2.3.4.5.6.2dx^5}$ etc. Atque ideo erit A − B + C

$+ C - D + E - F - - - - - + X = \text{Const.} + \frac{X}{2} + \frac{bdX}{1.2.2dx}$ $\frac{b^3 d^3 X}{1.2.3.4.2dx^3} + \frac{3b^5 d^5 X}{1.2.3.4.5.6.2dx^5}$ etc. vbi constans vt ante ita debet esse comparata, vt fiat haec summa $= A$ posito $x = a$.

§. 9. Vlterius autem huius formulae terminis continuatis prodibit posita summa huius seriei

$$\overset{a,}{A} - \overset{a+b,}{B} + \overset{a+2b,}{C} - \overset{a+3b,}{D} - - - - - + \overset{x}{X} = S$$

$S = \text{Const.} + \frac{X}{1.2} + \frac{bdX}{1.2.2dx} - \frac{b^3 d^3 X}{1.2.3.4.2dx^3} + \frac{3b^5 d^5 X}{1.2.3.4.5.6.2dx^5} - \frac{17b^7 d^7 X}{1.2.3.4.5.6.7.8.2dx^7} + \frac{155b^9 d^9 X}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.2dx^9} - \frac{2073b^{11} d^{11} X}{1.2.3 - - - - - 12.2dx^{11}} + \frac{382276b^{13} d^{13} X}{1.2.3. - - - - - - 14.2dx^{13}} -$ etc. Si ergo quaerendus sit valor huius progressionis $a^2 - (a+b)^2 + (a+2b)^2 - (a+3b)^2 +$ etc. $- - - - - + x^2$, qui sit S: erit ob $\frac{dX}{dx} = 2x$, $S = \text{Const.} + \frac{x^2}{2} + \frac{bx}{2}$. Constans vero C inuenietur ponendo $x = a$ eritque $S = \frac{a^2 - ab + x^2 + bx}{2}$. Exempli gratia erit $1 - 4 + 9 - 16 + 25 - - - - + 121 = 66$.

§. 10. Consideremus nunc huiusmodi seriem in infinitum productam, scilicet

$$S = \overset{x,}{X} - \overset{x+b,}{Y} + \overset{x+2b}{Z} - \text{etc. in infinitum.}$$

Erit ergo $S + \frac{2bdS}{1.dx} + \frac{4b^2 ddS}{1.2dx^2} + \frac{8b^3 d^3 S}{1.2.3.dx^3} +$ etcet. $= S - X + Y$, seu $X - Y = -\frac{2bdS}{1.dx} - \frac{4b^2 ddS}{1.2dx^2}$ etc. vnde cum sit $Y = X + \frac{bdX}{1.dx} + \frac{b^2 ddX}{1.2dx^2} + \frac{b^3 d^3 X}{1.2.3dx^3} +$ etc. inuenietur $S = \frac{X}{1.2} - \frac{bdX}{1.2.2dx} + \frac{b^3 d^3 X}{1.2.3.4.2dx^3} - \frac{3b^5 d^5 X}{1.2.3.4.5.6.2dx^5} + \frac{17b^7 d^7 X}{1.2.3 - - - - 8.2dx^7} - \frac{155b^9 d^9 X}{1.2.3 - - - 10.2dx^9} + \frac{2073b^{11} d^{11} X}{1.2.3 - - - 12.2dx^{11}} - \frac{38227 l^{13} d^{13} X}{1.2.3 - 14.2dx^3}$

$+$ etc.

$+$ etc. $+$ Const. Quae constans ita debet esse comparata vt fiat $S = 0$ posito $x = \infty$. Huius igitur formulae ope plurimae series lente conuergentes, in quibus terminorum signa alternantur, valde prope summari poterunt.

§. 11. Sit $X = \frac{1}{x}$, ita vt inueniri debeat summa huius seriei $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+2b} - \frac{1}{x+3b} +$ etc. in infinitum. Cum ergo sit $X = \frac{1}{x}$ erit $\frac{dX}{dx} = \frac{-1}{x^2}$, $\frac{d^3X}{dx^3} = \frac{-2.3}{x^4}$, $\frac{d^5X}{dx^5} = \frac{-2.3.4.5}{x^6}$ hincque fiet $S = \frac{1}{2x} + \frac{b}{2.2x^2} - \frac{b^3}{4.2x^4} + \frac{3b^5}{6.2x^6} - \frac{17b^7}{8.2x^8} + \frac{155b^9}{10.2x^{10}} - \frac{2073b^{11}}{12.2x^{12}} + \frac{38227b^{13}}{14.2x^{14}}$ etc. vbi constantis additione non est opus. Vt sit $b = 2$ atque $x = 25$, erit seriei $\frac{1}{25} - \frac{1}{27} + \frac{1}{29} - \frac{1}{31} + \frac{1}{33} -$ etc. summa $= \frac{2}{100} + \frac{8}{100^2} - \frac{256}{100^4} + \frac{8.4^6}{100^6} - \frac{17.4^8}{100^8} + \frac{31.128.4^{10}}{100^{10}} - \frac{691.256.4^{12}}{100^{12}} + \frac{5461.2048.4^{14}}{100^{14}}$ etc. $= 0,020797471918$ q. pr. ad quam si praecedentium terminorum $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ etc. $- - - - - \frac{1}{23}$ actu inuenta summa addatur, prodibit quarta peripheriae pars radio existente $= 1$.

§ 12. Hae iam formulae hactenus traditae, quo facile expediri queant calculo, requirunt, vt X sit functio algebraica ipsius x, cuius differentialia cuiusque gradus commode exhiberi queant. Vix enim vel ne vix quidem istae formulae in vsum vocari possent, si huiusmodi quantitas exponentialis n^x in termino generali progressionis inesset. Pro huiusmodi ergo progressionibus, hoc termino generali $X n^x$, vbi X vt ante denotat functionem algebraicam ipsius x, contentis peculia-

 res

res formulas ſummatrices erui conueniet. Sit itaque iſta Series

$$A\overset{a,}{n^a} + B\overset{a+b.}{n^{a+b}} + C\overset{a+2b}{n^{a+2b}} + \text{- - - -}\ X\overset{x}{n^x}$$

ad ſummandum propoſita; ponaturque ſumma $= Sn^x$. Haec formula autem poſito $x-b$ loco x abibit in hanc $n^{x-b}(S - \frac{bdS}{1\,dx} + \frac{b^2d^2S}{1.2dx^2} - \frac{b^3d^3S}{1.2.3dx^3} + \text{etc.})$ quae aequalis eſſe debet priori ſummae Sn^x demto vltimo termino Xn^x. Habebitur ergo iſta aequatio $Sn^b - Xn^b = S - \frac{bdS}{1.dx} + \frac{b^2d^2S}{1.2dx^2} - \frac{b^3d^3S}{1.2.3dx^3} + \frac{b^4d^4S}{1.2.3.4dx^4} - \text{etc.}$ Ex qua aequatione valor ipſius S erui debet.

§. 13. Ponatur igitur $n^b = m$, eritque $S = \frac{mX}{m-1} - \frac{\alpha bdX}{1(m-1)^2dx} + \frac{\beta b^2ddX}{1.2(m-1)^3dx^2} - \frac{\gamma b^3d^3X}{1.2.3(m-1)^4dx^3} + \frac{\delta b^4d^4X}{1.2.3.4(m-1)^5dx^4} - \frac{\varepsilon b^5d^5X}{1.2.3.4.5(m-1)^6dx^5} + \text{etc.}$ Hinc terminis homologis comparandis poſito breuitatis ergo $m-1=p$ vt ſequitur

$$\alpha = m$$
$$\beta = 2\alpha + mp$$
$$\gamma = 3\beta + 3\alpha p + mp^2$$
$$\delta = 4\gamma + 6\beta p + 4\alpha p^2 + mp^3$$
$$\varepsilon = 5\delta + 10\gamma p + 10\beta p^2 + 5\alpha p^3 + mp^4 \text{ etc.}$$

vnde pro litteris α, β, γ, δ etc. ſequentes obtinentur valores:

$$\alpha = m$$
$$\beta = 2m + mp$$
$$\gamma = 6m + 6mp + mp^2$$
$$\delta = 24m + 36mp + 14mp^2 + mp^3$$
$$\varepsilon = 120m + 240mp + 150mp^2 + 30mp^3 + mp^4 \text{ etc.}$$

hic

hic quilibet numerus eſt multiplum ſupraſcripti cum praecedente iuncti, vti

$$
\begin{aligned}
30 &= 2(1 + 14)\\
150 &= 3(14 + 36)\\
240 &= 4(36 + 24)\\
120 &= 5(24 + 0)
\end{aligned}
$$

vel reſtituto $m - 1$ loco p, vti ſequitur:

1. $\alpha = m$
2. $\beta = m + m^2$
3. $\gamma = m + 4m^2 + m^3$
4. $\delta = m + 11\,m^2 + 11\,m^3 + m^4$
5. $\varepsilon = m + 26\,m^2 + 66\,m^3 + 26\,m^4 + m^5$
6. $\zeta = m + 57\,m^2 + 302\,m^3 + 302\,m^4 + 57\,m^5 + m^6$ etc.

qui valores ita progrediuntur, vt ſit coefficiens ψ, cuius index eſt k, $= m + (2^k - \frac{(k+1)}{1})\,m^2 + (3^k - \frac{(k+1)}{1}\,2^k + \frac{(k+1)k}{1.2})\,m^3 + (4^k - \frac{(k+1)}{1}\,3^k + \frac{(k+1)k}{1.2}\,2^k - \frac{(k+1)k(k-1)}{1.\;2.\;3})\,m^4 + \text{- - - - - - - -} + m^k$.

§. 14. Ex his ergo colligitur ſeriei propoſitae

$$\overset{a,}{\mathrm{A}}\,n^a + \overset{a\;\;b,}{\mathrm{B}}\,n^{a+b} + \overset{a+2b}{\mathrm{C}}\,n^{a+2b} \text{ - - - - - - } + \overset{x}{\mathrm{X}}\,n^x$$

$$\text{ſumma} = n^x\left(\frac{n^b\,\mathrm{X}}{n^b - 1} - \frac{n^b\,b\,d\mathrm{X}}{1\,(n^b-1)^2\,dx} + \frac{(n^{2b}+n^b)\,b^2\,dd\mathrm{X}}{1.2\,(n^b-1)^3\,dx^2} - \frac{(n^{3b}+4n^{2b}+n^b)\,b^3\,d^3\,\mathrm{X}}{1.\;2.\;3\,(n^b-1)^4\,dx^3} + \frac{(n^{4b}+11n^{3b}+11n^{2b}+n^b)\,b^4\,d^4\mathrm{X}}{1.\;2.\;3.\;4\,(n^b-1)^5\,dx^4} - \text{etc.}\right)$$

$+ \text{Conſt.}$

$+$ Const. quae ita debet esse comparata vt posito $x = a$ fiat summa $= A n^a$. Si ponatur $n^b = -1$, abibit series in pure algebraicam, in qua signa terminorum alternantur; hincque eadem formula ponendo -1 loco n^b, resultat, quam pro eodem casu iam supra §. 9. inuenimus. Seriei vero in infinitum excurrentis

$$\overset{x}{X} n^x + \overset{x+b}{Y} n^{x+b} + \overset{x+2b}{Z} n^{x+2b} + \text{etc.}$$

in infinitum summa est

$$= n^x \left(\frac{-X}{n^b - 1} + \frac{n^b b\, dX}{1(n^b-1)^2 dx} - \frac{(n^{2b}+n^b)b^2\, ddX}{1.\,2\,(n^b-1)^3\, dx^2} + \frac{(n^{3b}+4n^{2b}+n^b)b^3 d^3X}{1.\,2.\,3\,(n^b-1)^4\, dx^3} - \frac{(n^{4b}+11\,n^{3b}+11\,n^{2b}+n^b)b^4 d^4 X}{1.\,2.\,3.\,4\,(n^b-1)^5\, dx^4} + \text{etc.} \right) + \text{Const.}$$

quae constans ita debet esse comparata vt posito $x = \infty$ summa fiat $= 0$: quod quidem semper accidere solet per se, ita vt constante non sit opus, si quidem series conuergit, summamque habet finitam.

§. 15. Ex priore formula pro huiusmodi seriebus ad datum vsque terminum summandis intelligitur, si X fuerit functio algebraica talis ipsius x, vt tandem altiora eius differentialia euanescant, tum terminum summatorium reuera exhiberi posse. Quamobrem si series cuius terminus generalis est X fuerit summabilis, tum quoque series, cuius terminus generalis est $X n^x$, erit summabilis. Sic proposita serie $a^2 n^a + (a+b)^2 n^{a+b} + (a+2b)^2 n^{a+2b} - - - - - - + x^2 n^x$ erit eius summa $= x^n$

$(n^b x^2$

$\left(\frac{n^b x^2}{n^b-1}-\frac{2n^b b x}{(n^b-1)^2}+\frac{(n^{2b}+n^b)b^2}{(n^b-1)^3}\right)+$ Conſt. quae conſtans facto $x=a$ et ſumma $=a^2 n^a$ prodibit $=n^a$ $\left(a^2-\frac{n^b a^2}{n^b-1}+\frac{2n^b ab}{(n^b-1)^2}-\frac{(n^{2b}+n^b)b^2}{(n^b-1)^3}\right)$.

§. 16. Altera praeterea formula ingentem praeſtat vtilitatem in ſeriebus infinitis ſummandis, quod vt clarius pateat propoſita ſit ſeries $\frac{n^x}{x}+\frac{n^{x+2}}{x+2}+\frac{n^{x+4}}{x+4}+\frac{n^{x+6}}{x+6}+$ etc. cuius ſumma ſit $=S$. Erit ergo $b=2$, et $X=\frac{1}{x}$, vnde fiet ſumma $S=n^x\left(\frac{-1}{(n^2-1)x}-\frac{2n^2}{(n^2-1)^2x^2}-\frac{4(n^4+n^2)}{(n^2-1)^3x^3}-\frac{8(n^6+4n^4+n^2)}{(n^2-1)^4x^4}-\frac{16(n^8+11n^6+11n^4+n^2)}{(n^2-1)^5x^5}-\text{etcet.}\right)$ Sit nunc $x=25$ et $n^2=-\frac{1}{3}$ ſeu $n=\frac{1}{\sqrt{-3}}$, erit $\frac{1}{\sqrt{-3}})\frac{1}{25.3^{12}}-\frac{1}{27.3^{13}}+\frac{1}{29.3^{14}}-\frac{1}{31.3^{15}}+$ etcet.$)=\frac{1}{3^{12}\sqrt{-3}}\left(\frac{3}{4.25}+\frac{3}{8.25^2}-\frac{3}{8.25^3}-\frac{3}{16.25^4}+\frac{15}{8.25^5}\text{ etc.}\right)$. Cum igitur in circulo radii $=1$ ſit arcus triginta graduum $=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3.3}+\frac{1}{5.3^2}-\frac{1}{7.3^3}+\frac{1}{9.3^4}-\text{etc.}\right)$, ſi horum terminorum actu 12 addantur, erunt ſequentes reliqui $\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{25.3^{12}}-\frac{1}{27.3^{13}}+\frac{1}{29.3^{14}}-\text{etc.}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3^{12}}\left(\frac{1}{4.25}+\frac{1}{8.25^2}-\frac{1}{8.25^3}-\frac{1}{16.25^4}+\frac{5}{8.25^5}+\right.$ etc.

§. 17. Si termini ſeriei ſummandae ex factoribus fuerint compoſiti ita vt ſeries huiusmodi habeat formam.

$$\overset{a}{A}+\overset{a+b}{A}B+\overset{a+2b}{A}BC+----+\overset{x}{A}BC\ldots VX$$

 pona-

ponatur summa $= S \cdot ABC \text{-----} VX$. Abibit ergo haec summa posito $x-b$ loco x in hanc $ABC \text{--} V$ $(S - \frac{bdS}{1.dx} + \frac{b^2ddS}{1.2.dx^2} - \frac{b^3d^3S}{1.2.3.dx^3}$ etc.) quae aequalis esse debet priori summae demto termino vltimo, id est huic quantitati $AB \text{----} V(SX - X)$. Hanc ob rem habebitur ista aequatio $SX - X = S - \frac{bdS}{1.dx} + \frac{b^2ddS}{1.2dx^2} - \frac{b^3d^3S}{1.2.3dx^3}$ $\frac{b^4d^4S}{1.2.3.4dx^4}$ — etc.

Ex hac aequatione valor ipsius S erutus erit iste $S = \frac{X}{X-1} + E + F + G +$ etc. qui termini ita progre-progrediuntur, vt posito $\frac{X}{X-1} = D$ sit $E = \frac{-bdD}{(X-1)dx}$; $F = \frac{-bdE}{1(X-1)dx} + \frac{b^2ddD}{1.2(X-1)dx^2}$; $G = \frac{-bdF}{1(X-1)dx} + \frac{b^2ddE}{1.2(X-1)dx^2} - \frac{b^3d^3D}{1.2.3(X-1)dX^3}$; atque ita porro. Adeo vt summa seriei propositae sit $= ABC \text{-----} VX(D + E + F + G$ ----- etc.). Seriei vero in infinitum continuatae

$$\overset{x}{A B} C \text{---} VX + \overset{x+b}{A B} CD \text{----} VXY + \text{etc.}$$

summa erit $= ABC \text{-----} VX(1 - D - E - F - G$ ----- etc.) + Const. Vt si quaeratur summa huius seriei $\frac{1}{1.2.3 \text{-----} x} + \frac{1}{1.2.3 \text{----} x(x+1)} +$ etc. in infinitum erit $b = 1$, $X = \frac{1}{x}$, atque $D = \frac{1}{1-x}$. Tum vero $E = \frac{-x}{(1-x)^3}$; $F = \frac{x(2+x)}{(1-x)^5}$ etc. summa ergo seriei propositae ob constantem euanescentem erit $= \frac{1}{1.2.3 \text{--} x}(1 + \frac{1}{x-1} - \frac{x}{(x-1)^3}$ $+ \frac{x(x+2)}{(x-1)^5}$ etc.). Ex his vero traditis facile intelligitur, cuiusmodi summae formam assumere oporteat in quouis casu oblato, quo summa minimo labore inueniatur.

CVR-

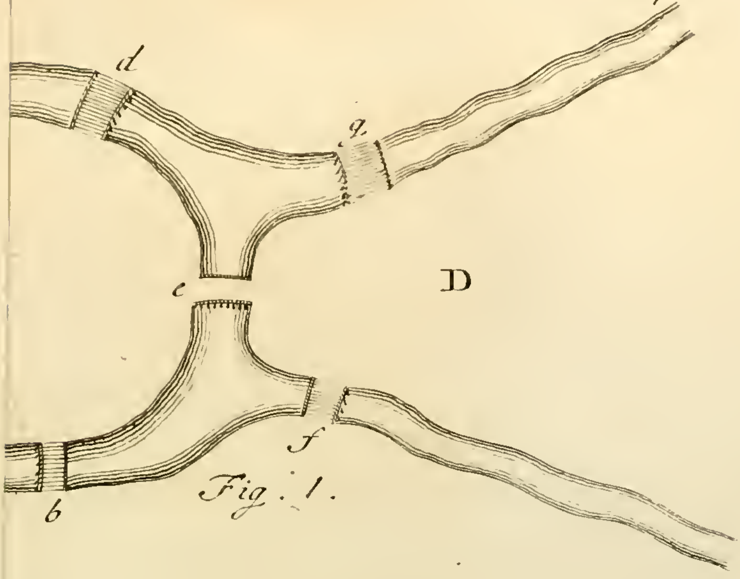


Fig. 1.

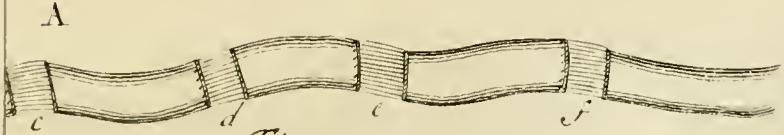


Fig. 2.

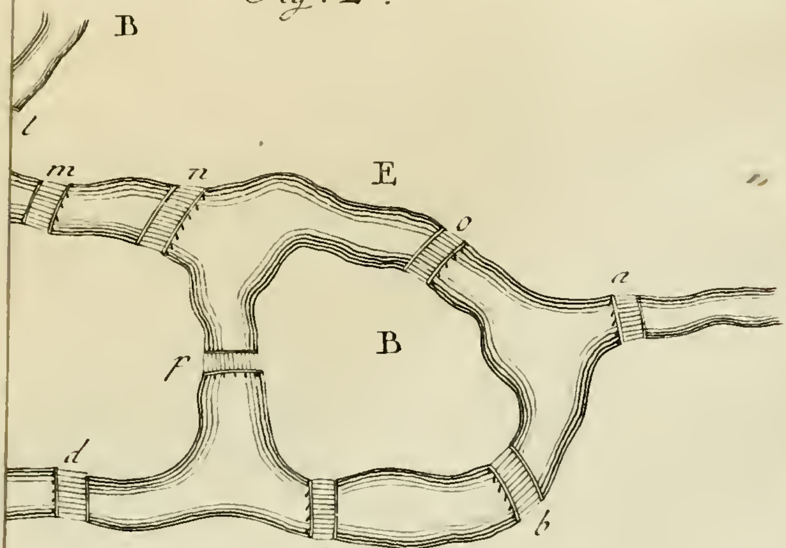


Fig. 3.

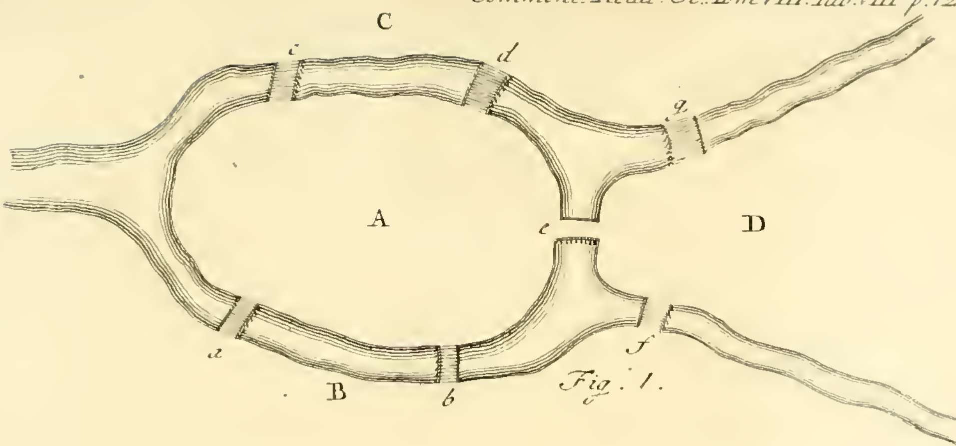


Fig. 1.

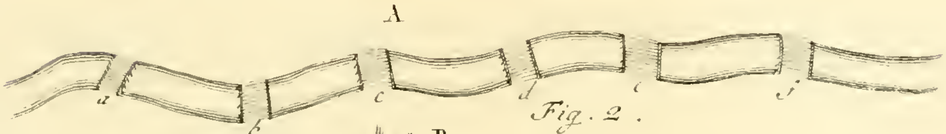


Fig. 2.

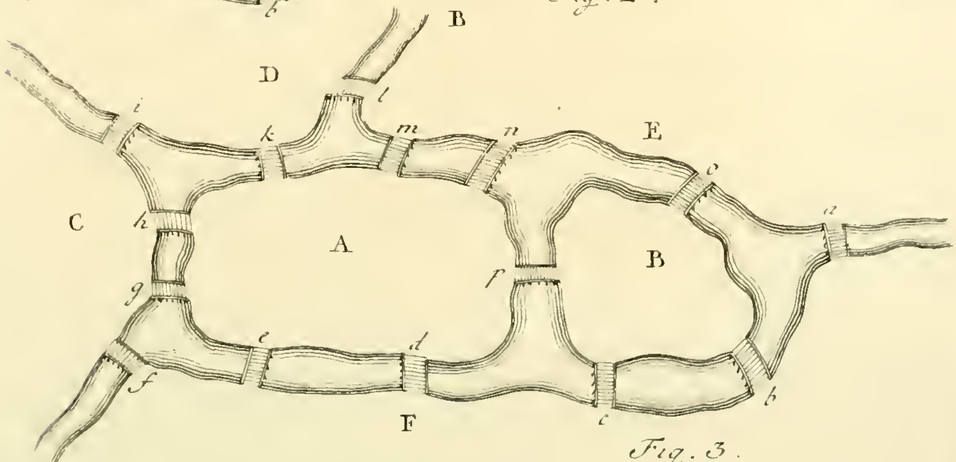


Fig. 3.

CVRVARVM MAXIMI MINIMIVE PROPRIETATE GAVDENTIVM INVENTIO NOVA ET FACILIS.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

QVanquam hoc problema, quod ſub initio huius Tabb. IX. X.
ſeculi ab acutiſſimo Geometra *Iac. Bernoulli* cum erat propoſitum tum ſolutum, iam a pluribus eximiis viris tractatum atque diuerſas ſolutiones nactum, a me vero demum ante aliquot annos in latiore ſenſu prolatum eſt; atque methodo tam facili ſolutum, vt nihil amplius deſiderari poſſe videatur: tamen nuper in eiusmodi huius generis quaeſtiones incidi, ad quas ſoluendas formulae tum temporis a me exhibitae, non erant ſufficientes, adeo vt coactus fuerim nouas formulas latius patentes contemplari, atque pro iis ad problema ſoluendum idoneos valores inueſtigare. In hoc autem negotio occupatus non ſolum faciliorem quam ante detexi viam ad ſolutiones huiusmodi problematum perueniendi, ſed etiam omnes 24 formulas, quas ante tractaueram, in vnicam ſum complexus, atque praeterea ad alias adhuc latius patientes calculum accommodare licuit.

§. 2.

§. 2. Quo autem calculum, qui pro formulis tantopere compositis modo designandi consueto nimis fieret prolixus et taediosus, tractabiliorem redderem, visum est a recepto signandi modo aliquantum recedere, atque alia signa adhibere, quibus cum breuitati tum potissimum distinctioni consuleretur. Sic quantitatem variabilem y in situm proximum promotam ita designabo $\overset{\mathrm{I}}{y}$, hancque si denuo in situm proximum transferatur ita $\overset{\mathrm{II}}{y}$; et si vlterius in situm proximum promoueatur mihi indicabitur per $\overset{\mathrm{III}}{y}$ et ita porro, adeo vt mihi sit

$$\overset{\mathrm{I}}{y} = y + dy$$

$$\overset{\mathrm{II}}{y} = y + 2\,dy + ddy$$

$$\overset{\mathrm{III}}{y} = y + 3\,dy + 3\,ddy + d^3y \text{ etc.}$$

Simili igitur modo in sequentibus erit

$$\overset{\mathrm{I}}{dy} = dy + ddy$$

$$\overset{\mathrm{II}}{dy} = dy + 2\,ddy + d^3y$$

$$\overset{\mathrm{III}}{dy} = dy + 3\,ddy + 3\,d^3y + d^4y$$

atque similiter porro

$$\overset{\mathrm{I}}{ddy} = ddy + d^3y$$

$$\overset{\mathrm{II}}{ddy} = ddy + 2\,d^3y + d^4y$$

$$\overset{\mathrm{III}}{ddy} = ddy + 3\,d^3y + 3\,d^4y + d^5y \text{ etc.}$$

§. 3. His praemonitis problemata primae classis aggredior, in quibus quaeritur curua, quae inter omnes omnino curuas inter eosdem terminos sitas maximi vel minimi cuiusdam proprietate gaudeat. Sit igitur oa curua quaesita ad axem OA relata, ponaturque $OA = x$, $Aa = y$, et arcus $oa = s$. Tum sumtis duobus abscissae elementis aequalibus $AB = BC = dx$, ducantur applicatae Bb et Cc. Deinde concipiantur duo alia elementa curuae proxima $a\beta$, βc puncta a et c iungentia. Quibus factis manifestum est ex natura maximorum vel minimorum quantitatem, quae pro curua oa maxima vel minima esse debet, eam siue ad elementa abc siue ad elementa $a\beta c$ referatur in vtroque casu eundem valorem producere debere. Quamobrem differentia inter valores, qui prodeunt ex consideratione tum elementorum abc tum $a\beta c$, si nihilo aequalis ponatur, dabit aequationem, qua natura curuae exprimetur. Ista autem differentia semper ad huiusmodi formam reduci potest $P.b\beta$, in qua P per solas quantitates x, y, s, earumque differentialia vna cum constantibus determinatur. Quocirca ista aequatio $P = o$, exprimet naturam curuae quaesitae. Figura 1.

§. 4. Proposito ergo quocunque problemate, quod inter omnes omnino curuas intra eosdem terminos constitutas determinare iubet eam, quae maximi vel minimi proprietate gaudeat, ex formula, quae maximum vel minimum esse debet, elici oportet valorem ipsius P, qui nihilo aequalis positus dabit aequationem pro curua quaesita. Totum ergo hoc negotium absoluetur; si regula tradatur, cuius ope ex data expressione, quae maximum minimumue esse debet, inueniri queat valor P. Ad huiusmodi autem regulam inueniendam exprimat $\int Q\,dx$ eam quantitatem, quae in curua quaesita maxima esse debeat vel minima, sitque Q quantitas vtcunque composita ex x, y, et s, horumque differentialibus dx, dy, et ds. Seu posito $dy = p\,dx$, vt sit $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$, sit quantitas vtcunque composita ex x, y, s et p; ita vt eius differentiale huiusmodi sit habiturum formam $dQ = L\,ds + M\,dy + N\,dx + V\,dp$. Quae formula vtique multo latius patet, quam omnes 16 priores formulae, quas in praecedente dissertatione exhibui.

§. 5. Considerentur ab et bc tanquam curuae inueniendae elementa genuina, dum altera $a\beta$ et βc tantum ad conceptum maximi minimiue formandum sint in subsidium vocata. Cum igitur $\int Q\,dx$ debeat esse maximum vel minimum in curua oa, ea expressio pro elemento ab dabit $Q\,dx$ et elemento bc vero $\overset{\mathrm{I}}{Q}\,dx$, adeo vt elemento ab respondeat expressio $Q\,dx$ et elemento bc haec $\overset{\mathrm{I}}{Q}\,dx$, vtrique autem elemento coniunctim $ab + bc$ ista formula $(Q + \overset{\mathrm{I}}{Q})\,dx$. Iam quaerantur expressiones, quae elementis assumtitiis $a\beta$ et βc respondeant; hae enim coniunctae et a $(Q + \overset{\mathrm{I}}{Q})\,dx$ subtractae dabunt residuum ipsi $P.b\beta$ aequale et propterea determinabunt valorem ipsius P, ex quo aequatio pro curua obtinebitur. Expressio autem $Q\,dx$, quae respondet elemento ab transibit in expressionem respondentem elemento $a\beta$, si loco p seu $\frac{bM}{aM}$ scribatur $p + \frac{b\beta}{dx}$ seu $\frac{\beta M}{aM}$;

quanti-

quantitates enim x, y et s a puncto a, quod vtrique elemento ab et $a\beta$ commune est, pendent tantum, ideoque inuariatae manent.

§. 6. Differentia ergo inter expressiones, quae elementis ab et $a\beta$ respondent, obtinebitur si Qdx differentietur, et loco ds, dy et dx scribatur o, loco dp vero $\frac{b\beta}{dx}$. Cum autem sit differentiale ipsius $Qdx = dQdx = (Lds + Mdy + Ndx + Vdp)dx$, erit illa differentia $= V.b\beta$. Porro ex expressione $\overset{I}{Q}dx$ elemento bc respondente, vbi $\overset{I}{Q}$ est talis functio ipsarum $\overset{I}{s}, \overset{I}{y}, \overset{I}{x}$, et $\overset{I}{p}$ qualis ante erat Q ipsarum s, y, x et p, inuenietur expressio respondens elemento βc, si loco $\overset{I}{y} = Bb$, scribatur $\overset{I}{y} + b\beta$, loco $\overset{I}{s} = oa + ab$ vero $\overset{I}{s} + \beta m = \overset{I}{s} + \frac{dy.b\beta}{ds}$ atque loco $\overset{I}{p} = \frac{cN}{bN}$ ponatur $\overset{I}{p} - \frac{b\beta}{dx}$. Quamobrem differentia inter expressiones elementis bc et βc habebitur, si $\overset{I}{Q}dx$ differentietur et loco $d\overset{I}{y}$ scribatur $b\beta$, loco $d\overset{I}{s}$ vero $\frac{dy.b\beta}{ds}$ atque loco $d\overset{I}{p}$ ponatur $-\frac{b\beta}{dx}$. Cum igitur sit $d\overset{I}{Q}dx = (\overset{I}{L}d\overset{I}{s} + \overset{I}{M}d\overset{I}{y} + \overset{I}{N}dx + \overset{I}{V}d\overset{I}{p})dx$, erit haec differentia $= \frac{\overset{I}{L}dxdy.b\beta}{ds} + \overset{I}{M}dx.b\beta - \overset{I}{V}.b\beta$. Differentia ergo inter expressiones elementis $ab + bc$ et elementis $a\beta + \beta c$ respondentes erit $(V + \frac{\overset{I}{L}dxdy}{ds} + \overset{I}{M}dx - \overset{I}{V})b\beta = (\frac{Ldxdy}{ds} + Mdx - dV)b\beta = P.b\beta$. Aequatio

tio ergo pro curua quaesita erit haec $P = \frac{L\,dx\,dy}{ds} + M\,dx - dV = 0$, seu $L\,dx\,dy + M\,dx\,ds = ds\,dV$.

§. 7. Si ergo quaerenda sit curua oa, in qua $\int Q\,dx$ vel maius sit vel minus, quam inter omnes alias curuas intra eosdem terminos sitas, atque Q fuerit functio quaecunque ipsarum x, y, s et p posito $p = \frac{dy}{dx}$ sequens habebitur regula ad valorem ipsius P inueniendum. Differentietur primo Q et in differentiali ponatur $ds = 0$, $dy = 0$, $dx = 0$ atque $dp = 1$; deinde differentietur $\overset{I}{Q}$ et in differentiali ponatur $d\overset{I}{s} = \frac{dx\,dy}{ds}$, $d\overset{I}{y} = dx$, $d\overset{I}{x} = 0$, atque $d\overset{I}{p} = -1$. His factis haec differentialia duo coniuncta dabunt valorem ipsius P. Ita casu quo posuimus $dQ = L\,ds + M\,dy + N\,dx + V\,ds$ prodibit per hanc regulam vt ante $P = \frac{L\,dx\,dy}{ds} + M\,dx - dV$. Sit exempli gratia propositum curuam inuenire, in qua $\int \frac{ds^2}{u\,dy + \sqrt{(c^2 ds^2 - u^2 dx^2)}}$ denotante u functionem quamcunque ipsius x, sit minimum. Posito ergo $dy = p\,dx$ erit $\int Q\,dx = \int \frac{(1+pp)\,dx}{pu + \sqrt{(c^2(1+pp) - u^2)}}$ et $Q = \frac{1+pp}{pu + \sqrt{(c^2(1+pp) - u^2)}}$. Erit ergo $L = 0$, $M = 0$, et $V = \frac{c^2(1+p^2)p - 2pu^2 + u(pp-1)\sqrt{(c^2(1+p^2) - u^2)}}{(pu + \sqrt{(c^2(1+p^2) - u^2)})^2 (c^2(1+p^2) - u^2)}$. Cum autem sit $dV = P = 0$, erit $V =$ const. atque $(au - u^2)(p^2 - 1) - c^2(p^2 + 1) = \frac{(2u-a)(1+pp)c^2 p + 2pu(au - u^2)}{\sqrt{(c^2 + c^2p^2 - u^2)}}$ quae reducitur ad hanc $dy = \frac{(u^2 - au - cc)\,dx}{c\sqrt{((u-a)^2 - c^2)}}$.

§. 8. Ope huius regulae etiam facile erit pro aliis expressionibus valorem ipsius P inuenire, id quod exemplo

emplo formularum posteriorum dissertationis meae declarabo. Sit expressio, quae maximum minimumue esse debet, $\int Q\,dx \int R\,dx$, atque $dQ = L\,ds + M\,dy + N\,dx + V\,dp$ et $dR = E\,ds + F\,dy + G\,dx + I\,dp$ posito $dy = p\,dx$. Quod ergo ante erat $\overset{I}{Q}$ nunc nobis est $Q\int R\,dx$, et quod erat $\overset{I}{Q}$ nunc erit $\overset{I}{Q}\int R\,dx + \overset{I}{Q} R\,dx$. Prioris autem formulae differentiale est $(L\,ds + M\,dy + N\,dx + V\,dp)\int R\,dx + Q\,R\,dx$; vnde positis $ds = 0$, $dy = 0$, $dx = 0$ et $dp = 1$ resultat valor $V\int R\,dx$. Posterioris autem formulae differentiale est $(\overset{I}{L}\,\overset{I}{ds} + \overset{I}{M}\,\overset{I}{dy} + \overset{I}{N}\,dx + \overset{I}{V}\,\overset{I}{dp})(\int R\,dx + R\,dx) + \overset{I}{Q} R\,dx + \overset{I}{Q}\,dx\,(E\,ds + F\,dy + G\,dx + I\,dp)$, quod iuxta praecepta posito $ds = 0$, $dy = 0$, $dx = 0$, $dp = 1$, $\overset{I}{ds} = \frac{dx\,dy}{ds}$, $\overset{I}{dy} = dx$ et $\overset{I}{dp} = -1$, dabit hunc valorem $(\frac{\overset{I}{L}\,dx\,dy}{ds} + \overset{I}{M}\,dx - \overset{I}{V})(\int R\,dx + R\,dx) + \overset{I}{Q}\,I\,dx$. His coniunctis et neglectis negligendis fit $P = (\frac{L\,dx\,dy}{ds} + M\,dx)\int R\,dx - dV\int R\,dx - R\,V\,dx + Q\,I\,dx = -\,d.V\int R\,dx + dx(\frac{L\,dy}{ds} + M)\int R\,dx + Q\,I\,dx = 0$. Quae est aequatio pro curua quaesita.

§. 9. Si aliae etiam expressiones in his non contentae fuerint propositae, quae maximum minimumue esse debeant, semper per regulam datam, qua poni debet $ds = 0$, $dy = 0$, $dx = 0$, $dp = 1$, $\overset{I}{ds} = \frac{dx\,dy}{ds}$, $\overset{I}{dy} = dx$, et $\overset{I}{dp} = -1$, valor ipsius P, et inde simul aequatio pro curua inuenta reperietur. Vt inuenienda ſit curua, in qua $\frac{\int s dx}{\int y dx}$ debeat eſſe maximum vel minimum, erit $Q = \frac{s}{\int y dx} - \frac{y \int dx}{(\int y dx)^2}$, atque $\overset{I}{Q} = \frac{\overset{I}{s}}{\int y dx} - \frac{\overset{I}{s} y dx}{(\int y dx)^2} - \frac{\overset{I}{y} \int s dx}{(\int y dx)^2} - \frac{\overset{I}{y} s dx}{(\int y dx)^2} + \frac{2 \overset{I}{y} y dx \int s dx}{(\int y dx)^3}$. Hinc differentiando ex Q oritur o, atque ex $\overset{I}{Q}$ oritur $\frac{dx dy}{ds \int y dx} - \frac{y dx^2 dy}{ds (\int y dx)^2} - \frac{dx \int s dx}{(\int y dx)^2} - \frac{s dx^2}{(\int y dx)^2} + \frac{2 y dx^2 \int s dx}{(\int y dx)^3} = P$. Neglectis ergo negligendis fiet $P = \frac{dx dy \int y dx - ds dx \int s dx}{ds (\int y dx)^2}$. Poſito itaque hoc pro P inuento valore $= o$ prodibit aequatio pro curua quaeſita $dy \int y dx = ds \int s dx$. Ponatur $dy = q ds$, erit $dq \int y dx = s dx$ ſeu $\int y dx = \frac{s dx - q y dx}{dq}$. Quae denuo differentiata poſito dx conſtante dat $y dq^2 = ds dq - y dq^2 - q dy dq - s ddq + q y ddq$ ſeu $2 y dq^2 + q dy dq - q y ddq = ds dq - s ddq$ vel reſtituto $q s ds^2 dds^2 + 2 s dy^2 dds^2 = 3 y ds dy dds^2 + s ds dy^2 d^3 s - y dy^3 d^3 s$.

§. 10. Ex his praeceptis iam ſatis intelligitur, ſi expreſſio, quae maximum vel minimum eſſe debeat, ſit non ſolum ipſarum x, y, s et p functio quaecunque, ſed etiam praeter ea integrales formulas contineat; quemadmodum eam tractari, atque tandem ad aequationem naturam curuae exprimentem perueniri oporteat. Valet itaque iſta methodus pro omnibus expreſſionibus, quae partim ex integralibus, partim denique ex harum differentialibus ſunt conflatae; adeo vt ad omnes omnino quaeſtiones ſoluendas ſufficere videatur. Interim tamen incidi nuper in quaeſtionem quae ad hanc methodum referri non poterat, ſed peculiarem ſolutionem requirebat.

bat. Ita autem, illa quaeſtio erat comparata, vt in formula $\int Q dx$, quae maximum minimumue eſſe debet, praeter x, y, s eorumque differentialia etiam differentialia ſecundi gradus eſſent contenta. Facile autem intelligitur, quoties differentialia ſecundi gradus occurrant, tum hactenus tradita praecepta non valere, ſed nouam omnino methodum requiri.

§. 11. Cum autem differentialia ſecundi gradus bina elementa afficiant, ita vt translatio puncti b in β, differentialia ſecundi gradus elementi ante ab ſiti immutent, non difficulter perſpicietur, ad huiusmodi quaeſtiones ſoluendas praeter elementa ab et bc inſuper praecedens et ſequens in computum duci debere. Sint igitur $a\,b\,c\,d\,e$ quatuor elementa curuae inueniendae, quorum bina tantum media bcd, vt ante fecimus, in ſitum proximum $b\gamma d$ transferantur. Ponatur $OA = x$, $Aa = y$, et $oa = s$, atque elementis abſciſſae x aequalibus ſumtis, erit $Bb = \overset{\mathrm{I}}{y}$, $Cc = \overset{\mathrm{II}}{y}$, $Dd = \overset{\mathrm{III}}{y}$ et $Ee = \overset{\mathrm{IV}}{y}$. Figura 2.

Poſito praeterea $dy = p\,dx$, erit $\frac{cM}{dx} = p$, $\frac{cN}{dx} = \overset{\mathrm{I}}{p}$, $\frac{dP}{dx} = \overset{\mathrm{II}}{p}$ atque $\frac{eQ}{dx} = \overset{\mathrm{III}}{p}$. Quia denique differentialia ſecundi gradus in formula propoſita ineſſe ponuntur fiat $dp = r\,dx$ ita vt ſit $ddy = r\,dx^2$, et $dds = \frac{p\,r\,dx^2}{\sqrt{(1+pp)}}$. His poſitis erit $r = \frac{ddy}{dx^2} = \frac{cN - bM}{dx^2}$ atque $\overset{\mathrm{I}}{r} = \frac{dP - cN}{dx^2}$ et $\overset{\mathrm{II}}{r} = \frac{eQ - dP}{dx^2}$.

§. 12. Si iam elementa $abcde$ in elementa $ab\gamma de$ transire concipiantur, valores ante inuenti incrementa vel decrementa accipient. Fient autem incrementa haec

vt

vt ex inspectione figurae apparet, sequentia: $ds = 0$, $dy = 0$, $dx = 0$, $dp = 0$; denotant enim ds, dy, dx, dp, incrementa ipsarum s, y, x, et p, dum punctum c in γ transfertur, haec vero mutatio has quantitates non afficit, sed translato c in γ abibit r in $\frac{\gamma N - bM}{dx^2}$, erit itaque incrementum quod r interea capit seu $dr = \frac{c\gamma}{dx^2}$. Porro erit $\overset{\mathrm{I}}{ds} = 0$, $\overset{\mathrm{I}}{dy} = 0$, $\overset{\mathrm{I}}{dp} = \frac{c\gamma}{dx}$ et $\overset{\mathrm{I}}{dr} = \frac{dp - \gamma N}{dx^2} - \frac{dP + cN}{dx^2} = \frac{-2c\gamma}{dx^2}$. Deinceps autem fiet $\overset{\mathrm{II}}{ds} = \gamma n = \frac{cN \cdot \gamma e}{bc} = \frac{\overset{\mathrm{I}}{dy} . c\gamma}{\overset{\mathrm{I}}{ds}}$; $\overset{\mathrm{II}}{dy} = c\gamma$; $\overset{\mathrm{II}}{dp} = \frac{-c\gamma}{dx} = \overset{\mathrm{II}}{dr} = \frac{c\gamma}{dx^2}$. Denique erit $\overset{\mathrm{III}}{ds} = \frac{\overset{\mathrm{I}}{dy} . c\gamma}{\overset{\mathrm{I}}{ds}} - \frac{\overset{\mathrm{II}}{dy} . c\gamma}{\overset{\mathrm{II}}{ds}} = -c\gamma \, d. \frac{\overset{\mathrm{I}}{dy}}{\overset{\mathrm{I}}{ds}}$; atque $\overset{\mathrm{III}}{dy} = 0$, $\overset{\mathrm{III}}{dp} = 0$, $\overset{\mathrm{III}}{dr} = 0$; haec enim elementa non amplius a mutatione puncti c afficiuntur.

§. 13. Sit nunc curua inuenienda, in qua debeat esse maximum vel minimum $\int Q dx$, in qua expressione Q sit compositum quomodocunque ex x, y, s, harumque quantitatum differentialibus tam primi quam secundi gradus; ita vt Q futura sit functio quaecunque ipsarum x, y, s, p et r. Iam quia $\int Q dx$ pro omni curuae portione ab o incipiente debet esse maximum vel minimum, necesse est, vt tale quoque sit pro elementis $abcde$. Quare $\int Q dx$ eundem valorem habere debebit tam in elementis $abcde$ quam in $ab\gamma de$. Pro elementis autem $abcde$ dat ista formula hunc valorem $Q dx + \overset{\mathrm{I}}{Q} dx + \overset{\mathrm{II}}{Q} dx + \overset{\mathrm{III}}{Q} dx$, huius ergo differentiale

ex

ex translatione puncti c in γ ortum debet esse $= 0$, vel dabit valorem ipsius $P.c\gamma$. Posito autem $dQ = L\,ds + M\,dy + N\,dx + V\,dp + W\,dr$, erit pro differentialibus valoribus exhibitis substituendis vt sequitur:

$$\mathrm{d}.\,Q\,dx = \frac{W.c\gamma}{dx}$$

$$\mathrm{d}.\,\overset{\mathrm{I}}{Q}\,dx = \overset{\mathrm{I}}{V}.\,c\gamma - \frac{2\overset{\mathrm{I}}{W}.c\gamma}{dx}$$

$$\mathrm{d}.\,\overset{\mathrm{II}}{Q}\,dx = \frac{\overset{\mathrm{II}}{L}\,dx\,\overset{\mathrm{I}}{dy}\,c\gamma}{\overset{\mathrm{I}}{ds}} + \overset{\mathrm{II}}{M}\,dx.\,c\gamma - \overset{\mathrm{II}}{V}.\,c\gamma + \frac{\overset{\mathrm{II}}{W}.c\gamma}{dx}$$

$$\mathrm{d}.\,\overset{\mathrm{III}}{Q}\,dx = -\overset{\mathrm{III}}{L}\,dx\,\mathrm{d}.\frac{\overset{\mathrm{I}}{dy}}{\overset{\mathrm{I}}{ds}}\,c\gamma$$

Quorum valorum summa dabit hanc expressionem $P = \frac{ddW}{dx} - dV + \frac{L\,dx\,dy}{ds} + M\,dx$ neglectis negligendis. Pro curua quaesita ergo habebitur ista aequatio

$$ddW - dV\,dx + \frac{L\,dx^2\,dy}{ds} + M\,dx^2 = 0.$$

posito perpetuo dx constante.

§. 14. Quo hanc regulam exemplo illustremus sit nobis propositum inter omnes curuas per puncta A et M transeuntes eam determinare, quae cum sua euoluta AO minimum spatium AOM comprehendat. Positis ergo $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$, erit radius osculi $MO = -\frac{ds^3}{dx\,ddy}$ posito dx constante. Facto ergo $dy = p\,dx$ erit $ds = dx\sqrt{(1 + pp)}$ et $ddy = dp\,dx$, vnde fiet Figura 3.

radius osculi $MO = \frac{-dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$. Atque posito dp

 $= r\,dx$

$= r\,dx$ erit is $= -\frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{r}$. Hinc area AMO erit $= -\frac{1}{2}\int\frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}ds}{r} = -\frac{1}{2}\int\frac{(1+pp)^2 dx}{r}$; oportet ergo vt ſit $\int\frac{(1+pp)^2dx}{r}$ minimum; quare habebimus $Q = \frac{(1+pp)^2}{r}$ et $dQ = \frac{4pdp(1+pp)}{r} - \frac{(1+pp)^2dr}{r^2}$. Erit itaque $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, $V = \frac{4p(1+pp)}{r}$ et $W = -\frac{(1+pp)}{r^2}$. Quocirca cum ſit $ddW = dVdx$; erit $dW = Vdx + Adx$. Erit autem $W = \frac{-ds^4}{dx^2dp^2} = \frac{-ds^4}{ddy^2}$ et $V = \frac{4dyds^2}{dx^2dp} = \frac{4dyds^2}{dxddy}$. Hanc ob rem erit $-\frac{4ds^2dy}{ddy} + \frac{2ds^4d^3y}{ddy^3} = \frac{4dyds^2}{ddy} + Adx$ ſeu $\frac{ds^4d^3y}{ddy^3} = \frac{4dyds^2}{ddy} + Adx$ ſiue $(1+pp)^2dxddp = 4p(1+pp)dxdp^2 + Adp^3$. Ponatur $dx = \frac{dp}{r}$ vt ſit $ddp = \frac{dpdr}{r}$, erit $\frac{(1+pp)^2dp^2dr}{r^2} = \frac{4p(1+pp)dp^3}{r} + Adp^3$, ſeu $\frac{(1+pp)^2dr - 4(1+pp)rpdp}{r^2} = Adp$, cuius integrale eſt $B - Ap = \frac{(1+pp)^2}{r}$ ſeu $\frac{Bdp - Apdp}{(1+pp)^2} = dx$. Si ponatur $B = 0$, fiet $x = \frac{a}{1+pp} = \frac{adx^2}{ds^2}$ atque $xdx^2 + xdy^2 = adx^2$, vnde erit $dy = dx\sqrt{\frac{a-x}{x}}$, quae eſt aequatio pro cycloide in A maximum radium oſculi habente. At ſi $A = 0$ erit $\frac{Bdp}{(1+pp)^2} = dx$ ſeu $\frac{Bpdp}{(1+pp)^2} = dy$ erit ergo $y = \frac{a}{1+pp}$ ſeu $y = \frac{adx^2}{ds^2}$ vnde fit $x = \int\frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(a-y)}}$, quae eſt pro cyclode in A cuspidem habente. Generatim vero erit $ds = \frac{Bdp - Apdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$, cuius integralis eſt $s = \frac{ap+b}{\sqrt{(1+pp)}}$ ſeu $sds = ady + bdx$, quae integrata dat $s^2 = 2ay + 2bx$, et

$\sqrt{(2ay}$

$s = V(2ay + 2bx)$, quae itidem est pro cycloide ad ad axem oblique ductum. Ex quibus perspicitur quaestioni propositae aliam curuam non satisfacere praeter cycloidem; ita vt inter omnes curuas per puncta A et M transeuntes nulla sit nisi cyclois, quae cum sua euoluta tam exiguum spatium comprehendat.

§. 15. Sit nunc propositum inter omnes curuas AM determinare eam in qua $\int\frac{ddy}{ds}$ sit maximum vel minimum. Ponatur ergo $dy = pdx$ et $dp = rdx$ erit $\int\frac{ddy}{ds} = \int\frac{rdx}{V(1+pp)}$ ideoque $Q = \frac{r}{V(1+pp)}$ et $dQ = \frac{dr}{V(1+pp)} - \frac{rpdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$. Quare erit $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, $V = -\frac{rp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$ et $W = \frac{1}{V(1+pp)}$. Cum igitur sit $ddW = dVdx$ erit $dW = Vdx + Adx$, hoc est $\frac{-pdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-rpdx}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + Adx = \frac{-pdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Adp}{r}$. Erit itaque $dp = 0$ et $y = \alpha x$ seu linea quaesita recta; quae terminorum destructio inde oritur, quod sit $\int Qdx = \int\frac{dp}{V(1+pp)}$ integrabile. At si quaeratur curua in qua $\int\frac{ddy}{yds}$ sit maximum vel minimum, fiet $Q = \frac{r}{yV(1+pp)}$ et $dQ = \frac{dr}{yV(1+pp)} - \frac{rpdp}{y(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{rdy}{y^2V(1+pp)}$, ita vt sit $L = 0$, $M = \frac{-r}{y^2V(1+p)}$, $V = \frac{-rp}{y(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$ et $W =$

 $yV(1$

$\frac{1}{y\sqrt{(1+pp)}}$. Hinc erit $ddW - dV\,dx + M\,dx^2 = 0$; quae euoluta dat hanc aequationem $\frac{2dp+ppdp}{p+p^3} = \frac{2dy}{y}$ cuius integralis est $y^2 = \frac{a^2 p^2}{\sqrt{(1+p^2)}} = \frac{a^2 dy^2}{dx\,ds}$; quae reducta dat $dx\sqrt{2} = \frac{dy}{y}\sqrt{[-y^2 \pm \sqrt{(y^4+4a^4)}]}$ cuius integratio a circuli et hyberbolae quadraturis pendet.

§. 16. Quanquam in his exemplis posuimus quantitatem Q absolute dari, tamen regula data aeque locum habet, eodemque modo potest vsurpari, si Q tantum per aequationem differentialem detur, ita vt valor ipsius Q per integrationem assignari nequeat. Huiusmodi casum quidem iam tractaui, cum curuam brachystochronam in quocunque medio resistente determinarem. Eundem igitur casum ad vsum regulae §. 6. datae plenius ostendendum hic euoluere conueniet. Propositum ergo sit curuam AM inuestigare, super qua corpus a quibuscunque potentiis sollicitatum in medio quocunque resistente celerrime descendat. Ad hoc problema soluendum ponatur $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$; trahaturque corpus in M a vi P in directione applicatae MP, et ab alia vi Q in directione MQ parallela axi AP; constat enim ad has duas vires potentias quascunque reduci posse. Posito ergo $dy = p\,dx$ et $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$ erit vis tangentialis accelerans ex iis orta $= \frac{Q - Pp}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{Q\,dx - P\,dy}{ds}$ vis normalis vero erit $= \frac{Qp+P}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{Q\,dy + P\,dx}{ds}$.

Figura 4.

§. 17. Sit nunc celeritas in M debita altitudini v et resistentia aequalis sit R functioni cuicunque ipsius v. His

His positis erit $dv = Qdx - Pdy - Rds$. Tempus vero, quo corpus arcum AM absoluit, erit $= \int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}$, quod debet esse minimum. Quae formula cum superiore $\int Q dx$ comparata dat $Q = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}$; ex qua erit $dQ = \frac{pdp}{\sqrt{v(1+pp)}} - \frac{dv\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$ et loco dv valore substituto erit $dQ = \frac{Rds\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} + \frac{Pdy\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} - \frac{Qdx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} + \frac{pdp}{\sqrt{v(1+pp)}}$. Fit igitur $L = \frac{R\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$, $M = \frac{P\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$, $N = \frac{-Q\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$ atque $V = \frac{p}{\sqrt{v(1+pp)}}$. Cum autem sit per regulam datam $Ldxdy + Mdxds = dVds$ seu $Lpdx + Mdx\sqrt{(1+pp)} = dV\sqrt{(1+pp)}$ erit substitutis valoribus inuentis et per $\sqrt{(1+pp)}$ diuisione facta

$$\frac{Rpdx + Pdx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} = d.\frac{p}{\sqrt{v(1+pp)}} = \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v}} - \frac{pdv}{2v\sqrt{v(1+pp)}} = \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v}} - \frac{Qpdx + Pp^2dx + Rpdx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v(1+pp)}}$$

substitutis loco dv et in eius expressione loco dy et ds valoribus assumtis.

§. 18. Si nunc haec aequatio reducatur prodibit sequens $\frac{Pdx + Qpdx}{2v\sqrt{(1+pp)}} = \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$; in qua ergo aequatione non amplius inest resistentia R. Ad indolem igitur huius aequationis inuestigandam duco curuae radium osculi MO quem pono z, exprimet $\frac{2v}{z}$ vim centrifugam, qua corpus curuam iuxta normalem MS premit. Erit autem ob dx constans assumtum $z = \frac{ds^3}{dxddy}$

 =

$= \frac{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$, ita vt fit $\frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx}{z}$. Hoc ergo valore fubftituto et per dx diuifo fiet $\frac{1}{z} = \frac{P+Qp}{2v\surd(1+pp)}$ feu $\frac{2v}{z} = \frac{P+Qp}{\surd(1+pp)}$. Exprimit autem vt modo meminimus $\frac{2v}{z}$ vim centrifugam, cuius directio eft normalis MS, atque vt ante notauimus $\frac{P+Qp}{\surd(1+pp)}$ exhibet vim normalem ex refolutione potentiarum follicitantium P et Q ortam et in directione MS curuam prementem. Quocirca in hypothefi potentiarum quarumcunque follicitantium et refiftentiae cuiuscunque ea curua eft brachyftochrona, quae premitur a corpore fuper ea moto vi duplo maiore, quam a fola vi centrifuga.

§. 19. His igitur fufficienter expofitis, quae tum ad methodum hanc inter omnes curuas eam determinandi, quae maximi minimiue cuiusdam proprietate gaudeat, intelligendam, tum etiam ad eius vfum in quibusque huius generis problematis declarandum neceffaria vifa funt; progredior ad fequentem huius generis quaeftionum claffem, quae proprie fub problematis ifoperimetrici nomine eft nota, in qua non ex omnibus curuis intra datos terminos fitis, fed iis tantum, quae vel aeque funt longae vel aliam quamcunque proprietatem communem habent, inueniri debet ea curua, quae maximi vel minimi cuiusdam proprietate gaudeat. Hocque eft problema tanti in re analytica vfus, tantaeque dignitatis, in quo enodando acutiffimi Viri *Bernoullii*, *Taylorus* atque *Hermannus* ingentem collocauerunt operam; cuiusque ego etiam in differtatione ante aliquot annos de prob-

problemate isoperimetrico solutionem satis breuem atque facilem tradidi, ope formularum, quibus cuiusque generis quaestiones admodum expedite resolui possunt.

§. 20. Quod hae duae proprietates, quarum altera omnium curuarum communis esse debet, altera vero in quaesita maximum minimumue, inter se commutari et altera in alterius locum collocari queant, iam satis constat; atque ego etiam pro plurimis huiusmodi proprietatibus exhibui formulas sub littera P consignatas, quae nulla facta distinctione inter binas proprietates propositas vsurpari atque statim ad aequationem pro curua quaesita deduci possunt. Hic quidem eodem vtar modo, et per huiusmodi formulas P totum negotium absoluam; sed triplici ratione illam priorem methodum ad maiorem perfectionis gradum sum euecturus. Primum enim exponam methodum magis genuinam, cuius ope eiusmodi formulae multo facilius elici possunt. Deinde ingentem formularum ibi traditarum numerum contraham, ita vt omnes illae coniunctae in vnica vel duabus contineantur. Tertio etiam eiusmodi proprietates, quae vel curuis communes vel in quaesita maximum minimumue esse debent, euoluam et ad formulas deducam, ad quas inueniendas prior mea methodus vel nimis difficulter vel omnino non sufficiebat.

§. 21. Sit igitur $\int Q dx$ quantitas seu proprietas quae vel omnibus curuis puncta o et a iungentibus communis vel in quaesita maxima minimaue esse debeat; constat eam in vtroque casu in elementa $a\, b\, c\, d$ aeque competere debere ac in elementa $a\, \beta\, \gamma\, c$. Quare si illa quantitas $\int Q dx$ ad elementa $abcd$ applicetur, et Tabula X. Figura 1.

tum

tum eius valor quaeratur translatis punctis b et c in proxima β et γ, oportebit vt differentia inter hos duos valores ſit $=0$. Differentia autem iſta ſtatim habebitur, ſi valor ipſius $\int Q\,dx$, qui reſpondet elementis ab cd ita differentietur, vt puncta tantum b et c variari ponantur; quare et hoc ipſum differentiale debebit eſſe $=0$. Hoc autem differentiale huiusmodi habebit formam $A.b\beta - B.c\gamma = 0$, quae cum forma in priori diſſertatione ſtabilita $P.b\beta - (P + dP).c\gamma = 0$ comparata dabit $\frac{dP}{P} = \frac{B-A}{A}$ ex qua aequatione valor ipſius P reſpondens quantitati $\int Q\,dx$ inuenietur. Hoc autem facto problema quodque propoſitum facile reſoluetur per hanc regulam: ſi inter omnes curuas, in quibus $\int S\,dx$ eundem habeat valorem, quaeratur ea, in qua $\int T\,dx$ ſit maximum vel minimum; tum quaeratur valor ipſius P reſpondens vtrique formulae $\int S dx$ et $\int T dx$, atque alter alteri per conſtantem quamcunque multiplicato aequalis ponatur, ac reſultans aequatio exprimet naturam curuae quaeſitae.

§. 22. Quemadmodum autem, ſi propoſita fuerit quaecunque formula $\int Q\,dx$, differentiam inter valores huius formulae elementis $abcd$ et $a\beta\gamma d$ inueniri oporteat, ſequenti modo patebit. Poſitis vt ante $OA = x$, $Aa = y$, $oa = s$ et elemento dx conſtante, itemque $dy = p\,dx$; erit $Bb = \overset{I}{y}$, $Cc = \overset{II}{y}$ et $Dd = \overset{III}{y}$, item $oab = \overset{I}{s}$, $oabc = \overset{II}{s}$, $oabcd = \overset{III}{s}$, denique $\frac{bM}{dx} = p$, $\frac{cN}{dx} = \overset{I}{p}$, et $\frac{dP}{dx} = \overset{II}{p}$. Translatis nunc punctis b et c in β et γ quanti-

quantitates istae accipient sequentia incrementa, posito breuitatis gratia $q = \frac{dy}{ds}$.

$ds = 0$	$\overset{I}{ds} = q.b\beta$	$\overset{II}{ds} = -dq.b\beta - \overset{I}{q}.c\gamma$
$dy = 0$	$\overset{I}{dy} = b\beta$	$\overset{II}{dy} = -c\gamma$
$dx = 0$	$\overset{I}{dx} = 0$	$\overset{II}{dx} = 0$
$dp = \frac{b\beta}{dx}$	$\overset{I}{dp} = \frac{-b\beta - c\gamma}{dx}$	$\overset{II}{dp} = \frac{c\gamma}{dx}$.

§. 23. Sit iam proposita formula $\int Q dx$, quae vel communis vel maxima minimaue esse debeat, ideoque aequaliter expressa tam pro elementis $abcd$ quam $a\beta\gamma d$; sit autem Q functio quaecunque ipsarum x, y, s et p posito $dy = p dx$; ita vt dQ habiturum sit huiusmodi formam $L ds + M dy + N dx + V dp$. Elementis autem $abcd$ respondebit iste valor $Q dx + \overset{I}{Q} dx + \overset{II}{Q} dx$, qui secundum translationem punctorum b et c in β et γ differentiatus differentialibus ipsarum $s, y, p, \overset{I}{s}, \overset{I}{y}, \overset{I}{p}, \overset{II}{s}, \overset{II}{y}, \overset{II}{p}$ sumtis vti est praeceptum, dabit sequens differentiale.

$$dQdx = V.b\beta$$
$$d\overset{I}{Q}dx = \overset{I}{L}qdx.b\beta + \overset{I}{M}dx.b\beta - \overset{I}{V}.b\beta - \overset{I}{V}.c\gamma$$
$$d\overset{II}{Q}dx = -\overset{II}{L}dxdq.b\beta - \overset{II}{L}\overset{I}{q}dx.c\gamma - \overset{II}{M}dx.c\gamma + \overset{II}{V}.c\gamma$$

quod positum $= 0$ dat

$$(-dV + \overset{I}{L}qdx + \overset{I}{M}dx - \overset{II}{L}dxdq)b\beta = (-d\overset{I}{V} + \overset{II}{L}\overset{I}{q}dx + \overset{II}{M}dx)c\gamma$$

Erit ergo

$$\frac{dP}{P} = \frac{-ddV + \overset{\mathrm{I}}{L}\,dx\,dq + dx\,d(\overset{\mathrm{I}}{L}\,q + \overset{\mathrm{I}}{M})}{-dV + dx(\overset{\mathrm{I}}{L}\,q + \overset{\mathrm{I}}{M})}$$

Ex qua aequatione integrata prodibit valor

$$P = e^{\int \frac{L\,dx\,dq}{-dV + dx(Lq + M)}} \left(-dV + dx(Lq + M)\right)$$

denotante e numerum cuius log. eſt 1.

§. 24. Pro quaeſtionibus autem ad primam claſſem pertinentibus eidem formulae $\int Q\,dx$ reſpondere inuenimus ſupra §. 6. hunc valorem $P = -dV + dx(LQ + M)$, qui valor a nunc inuento pro quaeſtionibus ſecundae claſſis tantum differt quantitate exponentiali. Quare ſi L euaneſcat, quod accidit quando Q non ab s, ſed tantum ab x, y et p pendet, tum vtraque formula in eandem recidit $P = -dV + M\,dx$, quae ergo pro quaeſtionibus ſecundae claſſis aeque valet ac pro quaeſtionibus primae claſſis. Ex praecedente autem mea diſſertatione aeque ac ex iſta intelligitur eandem formulam $P = -dV + M dx$, quae reſpondet quantitati $\int Q\,dx$ exiſtente $dQ = M\,dy + N\,dx + V\,dp$, quoque ad quaeſtiones claſſis tertiae atque omnium ſequentium ſufficere; in quibus quaeri ſolet inter omnes curuas duas pluresue proprietates communes habentes ea curua, quae maximi minimiue proprietate gaudeat; ita vt his caſibus pro ſequentibus claſſibus nouos pro P valores eruere non ſit opus.

§. 25.

§. 25. Valor autem ipsius $P = c^{\int \frac{L\,dx\,dq}{-dV + (Lq + M)\,dx}}$ $[-dV + dx(Lq + M)]$, quem pro quantitate $\int Q\,dx$ existente Q functione quacunque ipsarum x, y, s harumque differentialibus, ita vt sit $dQ = L\,ds + M\,dy + N\,dx + V\,dp$, tam late patet, vt non solum 16 priores formulas omnes in praecedente mea dissertatione exhibita complectatur, sed insuper innumerabilibus aliis quaestionibus soluendis inseruiat; ad quas illae formulae sunt insufficientes; quorum vtrumque exemplo declarari conueniet. Propositum igitur sit inter omnes curuas AM, quae ad axem AB aequales constituunt areas AMQ, eam determinare, quae in fluido secundum axis AB directionem mota minimam patiatur resistentiam. Sumtis abscissis AP in recta AC ad axem AB normali, ponaturque $AP = x = QM$, $PM = y = AQ$, et $AM = s$, erit area $AQM = \int x\,dy$, quae omnibus curuis per A et M transeuntibus communis esse debet. Deinde resistentia, quam elementum Mm in fluido motum patitur, est vt Mm ductum in quadratum sinus ang incidentiae Mmn hoc est vt $\frac{dx^2}{ds}$, impediet ergo motum vi $\frac{dx^3}{ds^2}$, ita vt tota resistentia, quae minima esse debet, futura sit $= \int \frac{dx^3}{ds^2}$. Tabula X. Figura 2.

§. 26. Formulae igitur, pro quibus valores ipsius P quaerere debemus, sunt $\int x\,dy$ et $\int \frac{dx^3}{ds^2}$. Consideremus primo hanc $\int x\,dy$, quae posito $dy = p\,dx$, abit in $\int xp\,dx$, haecque cum $\int Q\,dx$ comparata dat $Q = xp$ et $dQ = p\,dx + x\,dp$. Erit itaque $L = o$, $M = o$, $N = p$ et

 $V = x$

$V = x$, vnde fiet $P = -dx$. Altera forma $\int \frac{dx^3}{ds^2}$ transit in hanc $\int \frac{dx}{1+pp}$, ita vt ſit $Q = \frac{1}{1+pp}$ et $dQ = \frac{-2pdp}{(1+pp)^2}$. Fiet ergo pro hac formula $L = o$, $M = o$, $N = o$ atque $V = \frac{-p}{(1+pp)^2}$, cui reſpondebit conſequenter $P = \frac{dp}{(1+pp)^2} - \frac{4p^2 dp}{(1+pp)^3} = \frac{dp - 3ppdp}{(1+pp)^3}$. His inuentis ponatur alter ipſius P valor aequalis multiplo alterius, et prodibit $dx = \frac{adp - 3ap^2 dp}{(1+pp)^3}$ atque $x = \frac{ap}{(1+pp)^2}$. Cum autem ſit $dy = pdx$, erit $y = px - \int x dp = \frac{ap^2}{(1+pp)^2} - \int \frac{apdp}{(1+pp)^2} = \frac{a+3app}{2(1+pp)^2}$. Curua ergo quaeſita erit algebraica, atque eliminata p inuenietur ſequens inter x et y pro curua aequatio

$$y^4 - 2y^2x^2 + x^4 = 18cx^2y + 2cy^3 - 27c^2x^2$$

mutato pro arbitrio conſtantis a valore.

Tabula IX. Figura 4. §. 27. Nunc ad exemplum proferendum, ad quod formulae prius datae non ſufficiunt, ſit in hypotheſi potentiarum corpus ſollicitantium et reſiſtentia quacunque inter omnes curuas AM ſuper quibus corpus ex A deſcendens in M eandem acquirit velocitatem, inuenienda ea curua AM, ſuper qua corpus ex A in M citiſſime perueniet. Poſito ergo vt ante §. 16. 17. $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$, et potentia corpus ſecundum MP ſollicitante $= P$, potentia corpus ſecundum MQ trahente $= Q$, celeritate in M debita altitudini v et reſiſtentia $= R$, erit $dv = Qdx - Pdy - Rds$. Duae igitur formulae, quae ſunt propoſitae, erunt $\int dv = \int [Q - Pp - R\sqrt{(1+pp)}]dx$ atque $\int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}$. Pro prima igitur formula erit $Q = Q - Pp - R\sqrt{(1+pp)}$; ponatur $dQ = Sdy + Xdx$ et $dP = Tdy + Ydx$ (ab x enim et y tantum pendebunt Q et P) atque $dR = Zdv$ $= ZQ$

$= ZQdx - ZPdy - ZRds$; erit itaque noſtrum $dQ = Sdy + Xdx - Pdp - Tpdy - Ypdx - \frac{Rpdp}{\sqrt{(1+pp)}} - ZQdx \sqrt{(1+pp)} + ZPdy\sqrt{(1+pp)} + ZRds\sqrt{(1+pp)}$. Hanc ob rem fiet $L = ZR\sqrt{(1+pp)}$, $M = S - Tp + ZP\sqrt{(1+pp)}$ $V = -P - \frac{Rp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Ex his ob $q = \frac{dy}{ds} = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$ atque $dq = \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$ ſequens eruetur valor ipſius $P =$

$$e^{\int \frac{ZRdxdp}{(S+Y)dx(1+pp)+Z(Pdx+Qdy)\sqrt{(1+pp)}+\frac{Rdp}{\sqrt{(1+pp)}}}} \left[(S+Y)dx(1+pp)+Z(Pdx+Qdy)\sqrt{(1+pp)}+\frac{Rdp}{\sqrt{(1+pp)}}\right].$$

Altera vero formula $\int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}$ modo vt ſupra tractata dabit $L = \frac{R\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$, $M = \frac{P\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$ et $V = \frac{p}{\sqrt{v(1+pp)}}$ atque $dV = \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v}} - \frac{pdv}{2v\sqrt{v}(1+pp)}$ adeo vt fiat $P =$

$$e^{\int \frac{Rdxdp}{(Pdx+Qdy)\sqrt{(1+pp)}-\frac{2vdp}{\sqrt{(1+pp)}}}} \left[(Pdx+Qdy)\sqrt{(1+pp)}-\frac{2vdp}{\sqrt{(1+pp)}}\right]$$

Duorum horum valorum ipſius P multipla quaecunque ſibi aequalia poſita dabunt aequationem pro curua quaeſita, quam autem vlterius perſequi calculi prolixitas non permittit.

§. 28. Sit nunc formula, quae vel omnibus curuis communis eſſe debet vel in quaeſita curua maximum minimumue, haec $\int Qdx \int Rdx$; ſit autem $dQ = Lds + Mdy + Ndx + Vdp$ et $dR = Eds + Fdy + Gdx + Idp$. Dabit ergo haec formula pro elementis $abcd$ hanc expreſſionem $Qdx\int Rdx + \overset{I}{Q}dx \int \overset{I}{R} dx + \overset{II}{Q}dx \int \overset{II}{R} dx$. Huius differentiale ſecundum data praecepta dabit vt ſequitur: Tabula IX. Figura 1.

$$d.\,Q\,dx\int R\,dx = V.\,b\beta\int R\,dx$$

$$d.\,\overset{I}{Q}\,dx\int \overset{I}{R}\,dx = \overset{I}{L}\,q\,dx.\,b\beta\int \overset{I}{R}\,dx + \overset{I}{M}\,dx\,b\beta\int \overset{I}{R}\,dx - \overset{I}{V}\,(b\beta + c\gamma)\int \overset{I}{R}\,dx + \overset{I}{Q}\,I\,dx.\,b\beta$$

$$d.\,\overset{II}{Q}\,dx\int \overset{II}{R}\,dx = -\overset{II}{L}\,dx\,dq.\,b\beta\int \overset{II}{R}\,dx - \overset{II}{L}\,\overset{I}{q}\,dx.\,c\gamma\int \overset{II}{R}\,dx - \overset{II}{M}\,dx.\,c\gamma\int \overset{II}{R}\,dx + \overset{II}{V}.\,c\gamma\int \overset{II}{R}\,dx + \overset{II}{Q}\,I\,dx.\,b\beta + \overset{II}{Q}\,(\overset{I}{E}\,q + \overset{I}{F})\,dx^2.\,b\beta - \overset{II}{Q}\,\overset{I}{I}\,dx\,(b\beta + c\gamma)$$

Haec differentialia si ponantur $= 0$ prodibit $b\beta(-d.\,V\int R\,dx + (\overset{I}{L}\,q + \overset{I}{M})\,dx\int \overset{I}{R}\,dx - \overset{II}{L}\,dx\,dq\int \overset{II}{R}\,dx + \overset{II}{Q}\,I\,dx + \overset{II}{Q}\,(E\,q + F)\,dx^2 - d.\,\overset{I}{Q}\,I\,dx) = c\gamma(-d.\,\overset{I}{V}\int \overset{I}{R}\,dx + (\overset{II}{L}\,\overset{I}{q} + \overset{II}{M})\,dx\int \overset{II}{R}\,dx + \overset{II}{Q}\,\overset{I}{I}\,dx$. Ex hac aequatione orietur $\frac{dP}{P} =$

$$\frac{-dd.\,V\int R\,dx + dx\,d\,(\overset{I}{L}\,q + \overset{I}{M})\int \overset{I}{R}\,dx - \overset{II}{Q}(E\,q + F)\,dx^2}{-d.\,V\int R\,dx + (\overset{I}{L}\,q + \overset{I}{M})\,dx\int \overset{I}{R}\,dx} + \frac{+\overset{II}{L}\,dx\,dq\int \overset{II}{R}\,dx + \overset{II}{Q}\,dI\,dx + d.\,\overset{I}{Q}\,I\,dx}{\overset{II}{Q}\,I\,dx - \overset{II}{L}\,dx\,dq\int \overset{II}{R}\,dx - d.\,\overset{I}{Q}\,I\,dx}.$$

Hincque erit $P = e^{\int \frac{Q\,dI\,dx + L\,dx\,dq\int R\,dx - Q(E\,q + F)\,dx^2}{-d.\,V\int R\,dx + (L\,q + M)\,dx\int R\,dx + Q\,I\,dx}}(-d\,V\int R\,dx + (L\,q + M)\,dx\int R\,dx + Q\,I\,dx)$; qui ergo valor ipsius P respondet quantitati $\int Q\,dx\int R\,dx$, quae non solum omnes formulas 24 ante a me prolatas comprehendit, sed etiam longe latius patet.

§. 29. Ex his intelligitur methodo exposita etiam alias formulas $\int Q\,dx$, in quibus Q non solum per x, y, s et p,

s et p, ſed praeterea a quibuscunque integrationibus quin etiam a conſtructione aequationum quarumcunque differentialium pendet, ad valorem ipſius P inueniendum reduci poſſe. Tantum autem peculiari modo eſt opus, ſi in Q differentialia ſecundi altiorumue graduum contineantur, pro quibus caſibus plura quam tria elementa Tabula X. conſiderari debent. Contineat igitur Q in $\int Q\,dx$ prae- Figura 3. ter x, y et s, eorumque differentialia etiam differentialia ſecundi gradus in ſe, ita vt poſito $dy = p\,dx$ et $dp = r\,dx$ futurum ſit $dQ = L\,ds + M\,dy + N\,dx + V\,dp + W\,dr$. Ex qua expreſſione vt valor ipſius P eruatur, neceſſe eſt quinque elementa $abcdef$ conſiderare, quorum quidem duo duntaxat puncta c et d in loca proxima γ et δ transferantur. Hac igitur translatione per differentiationem repraeſentata fiet

$$\begin{array}{l|l|l|l}
ds = 0 & \overset{\mathrm{I}}{ds} = 0 & \overset{\mathrm{II}}{ds} = q.c\gamma & \overset{\mathrm{III}}{ds} = -dq.c\gamma - \overset{\mathrm{I}}{q}.d\delta \\
dy = 0 & \overset{\mathrm{I}}{dy} = 0 & \overset{\mathrm{II}}{dy} = c\gamma & \overset{\mathrm{III}}{dy} = -d\delta \\
dx = 0 & \overset{\mathrm{I}}{dx} = 0 & \overset{\mathrm{II}}{dx} = 0 & \overset{\mathrm{III}}{dx} = 0 \\
dp = 0 & \overset{\mathrm{I}}{dp} = \frac{c\gamma}{dx} & \overset{\mathrm{II}}{dp} = \frac{-c\gamma - d\delta}{dx} & \overset{\mathrm{II}}{dp} = \frac{d\delta}{dx} \\
dr = \frac{c\gamma}{dx^2} & \overset{\mathrm{I}}{dr} = \frac{-2c\gamma - d\delta}{dx^2} & \overset{\mathrm{II}}{dr} = \frac{c\gamma + 2d\delta}{dx^2} & \overset{\mathrm{III}}{dr} = \frac{-d\delta}{dx^2}.
\end{array}$$

$\overset{\mathrm{IV}}{ds} = -dq.c\gamma + \overset{\mathrm{I}}{dq}.d\delta$, reliqua euaneſcunt. Quocirca ſi valor elementis $abcdef$ reſpondens differentietur, et loco differentialium valores aſſignati ſubſtituantur, prodibit differentia inter illum valorem et eundem elementis $ab\gamma\delta ef$ reſpondentem.

§. 30.

§. 30. Quo igitur hanc differentiam pro valore qui ex $\int Q dx$ oritur et elementis $abcdef$ respondet, inueniamus, differentiare oportet hanc formulam $Qdx + \overset{I}{Q}dx + \overset{II}{Q}dx + \overset{III}{Q}dx + \overset{IV}{Q}dx$ secundum regulam datam prodibitque

$$dQdx = \frac{W.c\gamma}{dx}$$

$$d\overset{I}{Q}dx = \overset{I}{V}.c\gamma - \frac{2\overset{I}{W}.c\gamma}{dx} - \frac{\overset{I}{W}.d\delta}{dx}$$

$$d\overset{II}{Q}dx = \overset{II}{L}qdx.c\gamma + \overset{II}{M}dx.c\gamma - \overset{II}{V}.c\gamma - \overset{II}{V}.d\delta + \frac{\overset{II}{W}.c\gamma}{dx} + \frac{2\overset{II}{W}d\delta}{dx}$$

$$d\overset{III}{Q}dx = -\overset{III}{L}dxdq.c\gamma - \overset{III}{L}\overset{I}{q}dxd\delta - \overset{III}{M}dx.d\delta + \overset{III}{V}.d\delta - \frac{\overset{III}{W}.d\delta}{dx}$$

$$d\overset{IV}{Q}dx = -\overset{IV}{L}.dxdq.c\gamma + \overset{IV}{L}dxd\overset{I}{q}.d\delta.$$

Haec differentia nihilo aequalis posita dabit $c\gamma(\frac{ddW}{dx} - d\overset{I}{V} + (\overset{II}{L}q + \overset{II}{M})dx - (\overset{III}{L} + \overset{IV}{L})dxdq) = d\delta(\frac{dd\overset{I}{W}}{dx} - d\overset{II}{V} + (\overset{III}{L}\overset{I}{q} + \overset{III}{M})dx) - \overset{IV}{L}dxd\overset{I}{q})$, quae aequatio comparata cum canonica $P.c\gamma = (P + dP)d\delta$ dat

$$\frac{dP}{P} = \frac{d^3W - dd\overset{I}{V}dx + dx^2.d(\overset{II}{L}q + \overset{I}{M}) - dx^2d.\overset{III}{L}dq + \overset{IV}{L}dx^2dq}{ddW - dxd\overset{I}{V} + dx^2(\overset{II}{L}q + \overset{II}{M}) - (\overset{III}{L} + \overset{IV}{L})dx^2dq}$$

Hinc ergo integrando prodibit sequens valor ipsius

$$P = e^{\int \frac{Ldx^2dq}{ddW - dVdx + dx^2(Lq+M)}}[ddW - dVdx + dx^2(Lq + M)]$$

posito vt hactenus $q = \frac{dy}{ds}$.

§. 31. Perspicuum igitur est hunc valorem ipsius P facto $L = 0$ fore $ddW - dVdx + Mdx^2$, ideoque non diuer-

diuerſum ab eo, quem pro prima claſſe eiusdem formulae $\int Q dx$ reſpondentem inuenimus §. 13. Atque generalius etiam valet pro omnibus ſequentibus claſſibus, ſi in $\int Q dx$, Q pendeat quomodocunque ab x, y eorumque differentialibus tam primi gradus quam ſecundi, non vero ab s perpetuo ipſi eandem formulam $P = ddW - dVx + Mdx^2$ reſpondere, ex hacque omnes omnino quaeſtiones poſſe reſolui. Similiter etiam colligere licet, ſi Q praeter x, y et eorum differentialia tum primi tum ſecundi gradus quoque differentialia tertii et altiorum graduum inuoluat, eundem valorem pro P inuentum omnibus claſſibus inſeruire. Scilicet ſi ponatur $dy = pdx$, $dp = rdx$, $dr = tdx$, $dt = udx$ etc. fueritque $dQ = Ndx + Mdy + Vdp + Wdr + Xdt + Ydu$ etc. tum ipſi $\int Q dx$ reſpondebit ſequens valor ipſius $P = M - \frac{dV}{dx} + \frac{ddW}{dx^2} - \frac{d^3X}{dx^3} + \frac{d^4Y}{dx^4} -$ etc. qui ipſius P valor locum habet in omnibus claſſibus.

§. 22. Ad vſum huius formulae monſtrandum quaerenda ſit inter omnes omnino curuas ea, in qua $\int \frac{d^3y}{dxdy}$ ſit maximum vel minimum. Ponatur ergo $dy = pdx$, $dp = rdx$, $dr = tdx$, quibus ſubſtitutis debebit iſta formula $\int \frac{tdx}{p}$ eſſe maximum vel minimum. Fiet igitur $Q = \frac{t}{p}$ atque $dQ = -\frac{tdp}{p^2} + \frac{dt}{p}$, quare erit $N = 0$, $M = 0$, $V = -\frac{t}{p^2}$, $W = 0$, $X = \frac{1}{p}$, Y etc. $= 0$. Hinc prodit valor ipſius $P = \frac{-dV}{dx} - \frac{d^3X}{dx^3}$, qui poſito aequalis nihilo et integratus dat $Vdx^2 + ddX = Adx^2$. Subſtitutis autem loco V et X valoribus inuentis prodibit $-\frac{tdx^2}{p^2}$ —

$-\frac{ddp}{p^2}+\frac{2dp^2}{p^3}=A\,dx^2$. Eſt autem $t=\frac{dr}{dx}=\frac{ddp}{dx^2}$, vnde erit $-\frac{2ddp}{p^2}+\frac{2dp^2}{p^3}=A\,dx^2$. Cum porro ſit $dx=\frac{dp}{r}$ atque $ddx=0$, erit $ddp=\frac{dpdr}{r}$, quibus ſurrogatis habebitur $-\frac{2dr}{rp^2}+\frac{2dp}{p^3}=\frac{Adp}{r^2}$ quae transit in hanc $\frac{-2prdr+2r^2dp}{p^3}=A\,dp$, cuius integralis eſt $B-\frac{r^2}{p^2}=A\,p$. Hinc fiet $r=\frac{dp}{dx}=\sqrt{(Bp^2-Ap^3)}$ ſeu $dx=\frac{dp}{\sqrt{(Bp^2-Ap^3)}}$. Poſito nunc $B=0$ et mutata conſtante erit $dx=\frac{-adp}{2p\sqrt{p}}$ ſeu $x=\frac{a}{\sqrt{p}}$, atque $p=\frac{a^2}{x^2}=\frac{dy}{dx}$, ex qua fit $y=b-\frac{a^2}{x}$, quae eſt pro hyperbola intra aſymtotos. Poſito vero $A=0$ fit $x=lp$ et $\frac{dy}{dx}=p=e^{\frac{x}{a}}$. Vnde oritur $y=ae^{\frac{x}{a}}$ et $x=al\frac{y}{a}$; quae eſt pro curua logarithmica.

§. 33. In formula autem generali $\int Q\,dx$ ſi in Q ingrediatur vel arcus s vel alia quantitas integralis vt $\int R\,dx$, tum valor ipſius P magis erit compoſitus pro quaeſtionibus ſecundae quam primae claſſis, accedente ſcilicet quantitate exponentiali. Pro ſequentibus autem claſſibus valor ipſius P nequidem exhiberi poteſt, ſed tum in ſolutione problematum, in quibus huiusmodi formulae occurrunt, ad modum confugiendum eſt quem in praecedente diſſertatione expoſui. Interim tamen haec regula ſemper poteſt magna cum vtilitate adhiberi. Si Q pendeat ab s ita vt in eius differentiali inſit terminus $L\,ds$, et in quaeſtionibus ſecundae ſequentiumue claſſium vna conditio ſit vt omnes curuae ſint aeque longae, i. e. ſi $\int ds$ fuerit vna proprietatum, quae vel omnibus curuis communis vel in quaeſita maximum minimumue

eſſe

esse debeat, tum tuto vsurpari poterit valor ipsius P ad primam classem pertinens. Simili modo etiam si in $\int Q dx$ pendeat Q ab alia quantitate integrali vt $\int R dx$, tum quoque valor ipsius P ad primam classem pertinens potest vsurpari, si quidem $\int R dx$ etiam inter proprietates, quae omnibus curuis communes esse debent, reperiatur. Hoc itaque artificio quaestiones alias difficillimae solutu admodum faciles redduntur.

§. 34. Quod autem, si Q in $\int Q dx$ contineat in se vel arcum s vel aliam quantitatem integralem, tum valor ipsius P pro classe secunda magis fiat compositus, quam pro prima, atque in sequentibus classibus plane non exhiberi queat, nisi vel s vel aliae omnes quantitates integrales, quae in Q continentur, simul inter quantitates propositas reperiantur, quae omnibus iis curuis communes esse debent, ex quibus quaesita debet determinari, eius difficultatis ratio in hoc consistit; quod translato b in β, haec mutatio non tantum expressionem ad elementa abc pertinentem afficiat et immutet, sed insuper ipsius $\int Q dx$ valorem, qui omnibus sequentibus elementis post c competit, afficiat atque immutet; quemadmodum si re ipsa ad sequentia elementa hunc ipsius $\int Q dx$ valorem applicemus, statim elucebit. Sed si Q in $\int Q dx$ tantum ab x et y horumque differentialibus cuiusque ordinis pendeat, tum hoc incommodum locum non habet, sed quomodocunque punctum b varietur, tamen haec variatio in sequentia post c elementa nullum omnino habet influxum, vti ex allatis facile intelligitur. Tabula IX. Figura 1.

Tabula IX. Figura 4.

§. 35. Si inter omnes curuas puncta o et z iungentes ea debeat determinari, in qua formula Q neque ab s neque alia quantitate integrali pendeat, debeat esse maximum vel minimum, tum curua oz vtique hanc habebit proprietatem, si eius quaeuis portio oa eadem praerogatiua gaudeat. At si Q pendeat vel ab s vel ab alia quantitate integrali, tum curua oz habere poterit $\int Q dx$ maximum vel minimum, etiamsi eius nulla portio hac praerogatiua gaudeat, cum translato b in β tota curuae portio cz alium induat valorem ex $\int Q dx$, qui valor forte maior vel minor esse potest, etiamsi valor elementis abc competens non sit maximus vel minimus. Quamobrem si quaeratur inter omnes curuas puncta definita o et z iungentes ea, in qua $\int Q dx$ inuoluente Q vel s vel aliam quantitatem integralem, debeat esse maximum minimumue, tum positio elementorum abc non ex eo debet determinari, quo valor $\int Q dx$ ad ea applicatus fiat maximus minimusue, sed potius illa positio est quaerenda, quae pro omnibus sequentibus elementis $cdefg$ etc. atque adeo pro tota portione az generet maximum minimumue valorem ipsius $\int Q dx$.

§. 36. Haec autem determinatio positionis elementorum abc sequenti modo debet institui. Translato b in β effici debet, vt eadem quantitas $\int Q dx$ tam in curuam $abc---z$ quam in $a\beta c---z$ redundet. Posito autem Q ab s pendere vt sit $dQ = L ds + M dy + N dx + V dp$ posito $dy = p dx$, erit differentia inter valores curuae $abc----z$ et curuae $a\beta c---z$ respondentes,

dentes, quae aequalis esse debet o, sequens (posito $q = \frac{dy}{ds}$) $V.b\beta + \overset{I}{L}qdx.b\beta + \overset{I}{M}dx.b\beta - \overset{I}{V}.b\beta - \overset{II}{L}dxdq.b\beta - \overset{III}{L}dxdq.b\beta - \overset{IV}{L}dxdq.b\beta$ etc. donec ad punctum z erit peruentum. Abscissae autem OC respondet valor $\overset{II}{L}$; quare si punctum z in c incideret haberetur praeter terminos $V.b\beta + \overset{I}{L}qdx.b\beta + \overset{I}{M}dx.b\beta - \overset{I}{V}.b\beta$ tantum $-\overset{II}{L}dxdq.b\beta$. Sin autem in d incideret haberetur $-dxdq.b\beta(\overset{II}{L} + \overset{III}{L})$ et responderet abscissae $AC + dx$. Sumto autem in ipso puncto z, et posito abscissae interuallo $CZ = ndx$ erit terminus adiiciendus et respondens abscissae $OZ = OC + ndx$ iste $-dxdq.b\beta(\overset{II}{L} + \overset{III}{L} + \overset{IV}{L} - - - - - - + L^{n+II})$. At cum sit n numerus infinitus, erit iste terminus $= -dxdq.b\beta(n\overset{II}{L}$ $+ \frac{n^2 dL^{II}}{1.2} + \frac{n^3 ddL^{II}}{1.2.3} + \frac{n^4 dL^{II}}{1.2.3.4}$ etc.).

§. 37. Cum autem distantia OZ sit data ideoque constans, ponatur ea $= a$, erit $x + ndx = a$, hincque $n = \frac{a-x}{dx}$. Quo substituto erit terminus iste ab $V.b\beta$ $+ \overset{I}{L}.qdx.b\beta + \overset{I}{M}dx.b\beta - \overset{I}{V}.b\beta$ auferendus sequens:

$$dq.b\beta[(a-x)L + \frac{(a-x)^2 dL}{1.2dx} + \frac{(a-x)^3 ddL}{1.2.3dx^2} \text{ etc.}]$$

At $\int Ldx$ si post integrationem ponatur a loco x, abit in hanc expressionem:

$$\int L\,dx + (a-x)L + \frac{(a-x)^2\,dL}{1.2\,dx} + \frac{(a-x)^3\,ddL}{1.2.3.dx} + \text{etc.}$$

quae expreſſio cum ſit conſtans, ponatur $= A$ erit ergo

$$A - \int L\,dx = (a-x)L + \frac{(a-x)^2\,dL}{1.2.dx} + \text{etc.}$$

quare quantitas ſubtrahenda illa erit haec

$$dq.\,b\,8\,(A - \int L\,dx).$$

Hanc ob rem habebitur pro curua quaeſita iſta aequatio

$$-dV + dx(Lq + M) = A\,dq - dq\int L\,dx.$$

Atque valor ipſius P tam pro quaeſtionibus primae claſſis quam ſequentium erit ſemper idem ſcilicet

$$P = -dV + dx(Lq + M) + dq\int L\,dx$$

vbi $\int L\,dx$ ita ponitur eſſe integratum, vt euaneſcat ſumto puncto indefinito a in puncto fixo z ſeu poſito $x = a$. Simili quoque modo erit progrediendum ſi Q ab alia quantitate integrali pendeat.

CLAS-

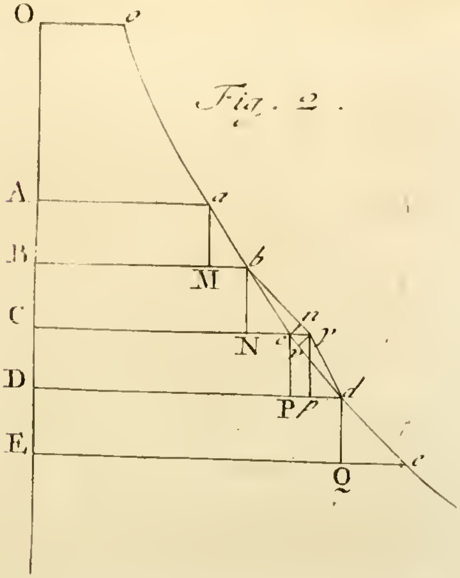


Fig. 2.

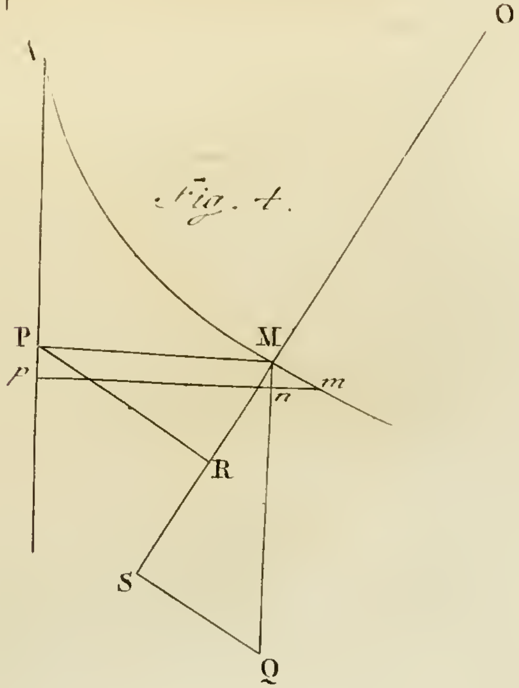


Fig. 4.

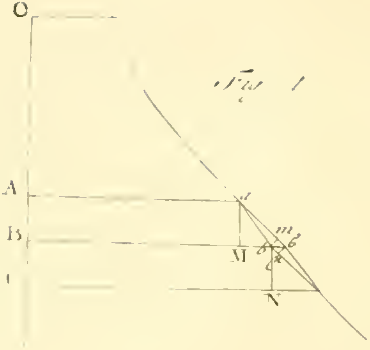


Fig. 1.

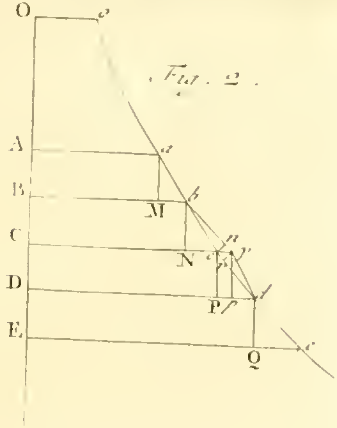


Fig. 2.

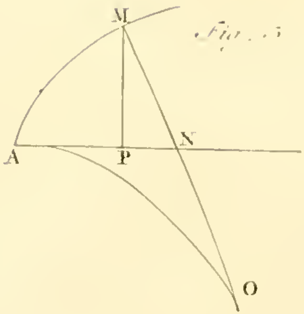


Fig. 3.

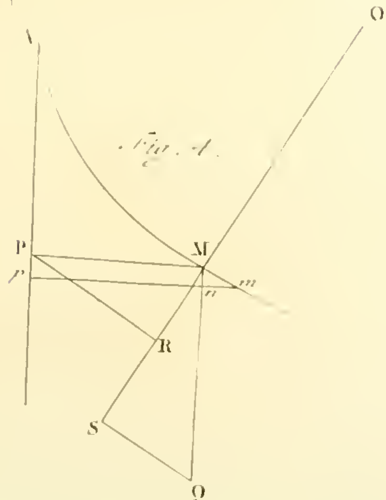


Fig. 4.

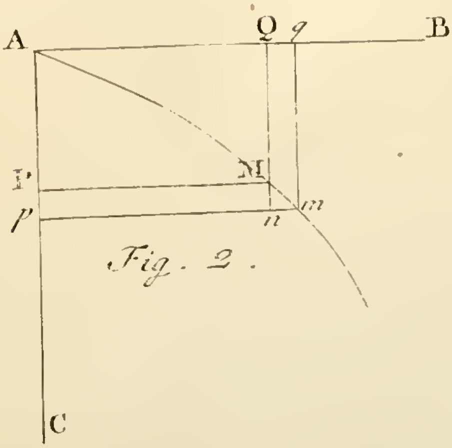
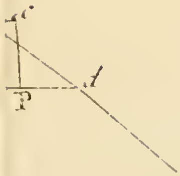


Fig. 2.



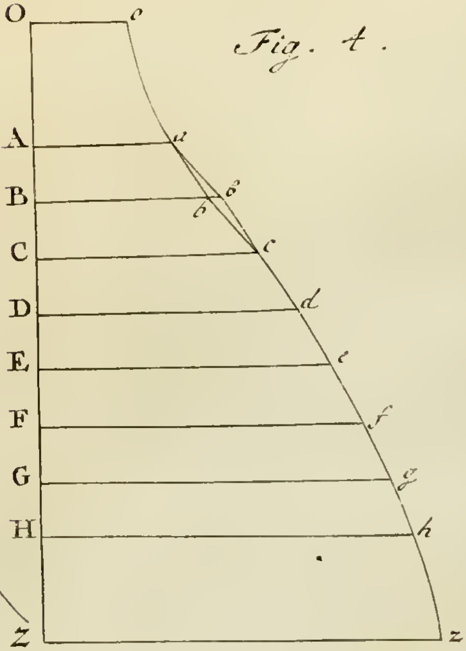
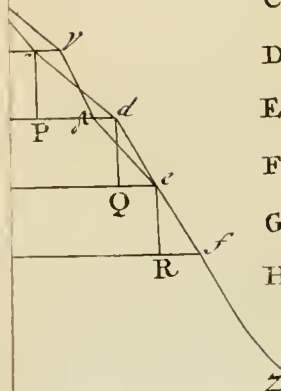


Fig. 4.



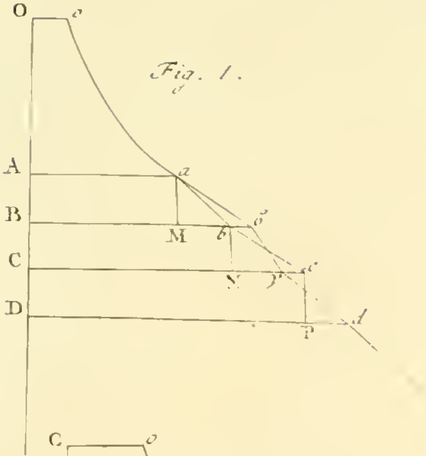


Fig. 1.

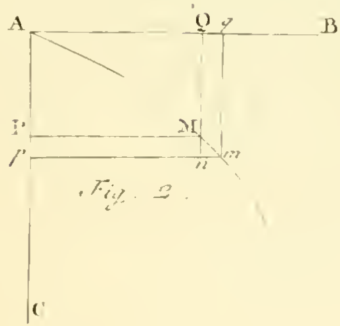


Fig. 2.

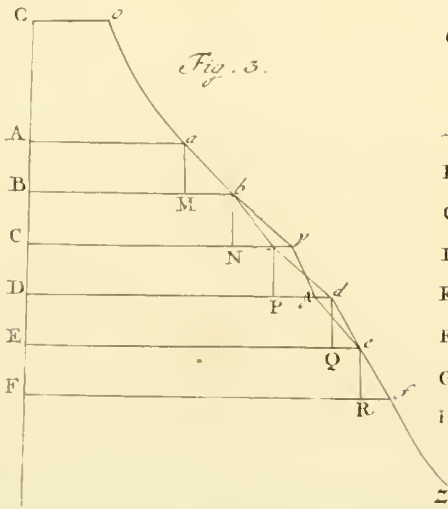


Fig. 3.

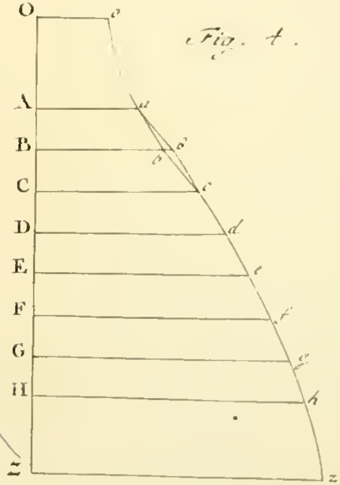


Fig. 4.

CLASSIS SECVNDA

CONTINENS

PHYSICA.

DE

FICVBVS

E

TRVNCO ARBORIS ENATIS.

AVCTORE

I. A.

Anno 1735 Iulio menſe Ficum vulgarem, hominis circiter altitudinem aſſecutam, ex Aeſtiua Imperiali Peterhoff vocata, vbi per aliquot annos culta fuit, huc miſſam accepimus, ex cuius caudice mox ſupra radicem enatae ſunt ficus tres, communi pedunculo breui, lignoſo et craſſo inſidentes, virides, aliis eiusdem arboris in ramis ex alis foliorum conſueto modo naſcentibus perfecte ſimiles, niſi quod baſi anguſtiori et tenuiori praeditae eſſent et in ſummitate dehiſcerent, ita vt interna ipſarum ſuperficies huic plantarum generi peculiaribus floſculis penitus referta cerneretur. Harum media eiusdem primo cum lateralibus magnitudinis erat, cum examini arborem ſubmitterem, ſed flacceſcere paulatim Tabula XI. Figura 2.

 coepit,

coepit, tandemque prorſus exaruit. In ſinu, quem haec et alia lateralis efformabant, paruus conſpiciebatur apex, ſimilis illis, quos huius arboris extremitates ramorum ferunt, quique nihil aliud ſunt, quam futurorum foliorum fructuum omniumque partium rudimenta. In pedunculo
Figura 2. Lit. a. vero ficus has gerente tres cicatrices apparebant paulo excauatae, quae an foliorum vel aliarum adhuc ficuum delapſarum veſtigia fuerint, pro certo affirmare non audeo; arborem enim demum vidi, poſtquam iam obduratae
Figura 2. Lit b. eſſent. Amputatus a caudice pedunculus cum aliqua
Figura 1 corticis parte lignum ramorum eodem modo abſciſſorum ſimile habuit. Idem per longum ſectus, lignoſam ſuam partem mox extra corticem caudicis valde anguſtatam, in pedunculo vero iterum ampliorem redditam, exhibuit.

Cauſam huius monſtroſi ficuum prouentus ſuspicor hanc eſſe: gemmam ex loco caudicis, vbi nunc pedunculus tribus ficubus onuſtus videbatur, excreſcentem caſu quodam impeditam eſſe, quo minus omnibus ſuis partibus, foliorum ſcilicet et internodiorum rudimentis, incrementum capere et in longum ſeſe expandere potuerit, creſcentibus ſolis iſtis tribus ficubus.

Internodiorum ſurculi infimorum rudimenta in ficulnea gemma oculo nudo conſpici poſſunt, ſi vagina, intra quam foliolum conuolutum adhuc cum fructus rudimento, huius alam occupante, delitescit, ab internodii geniculo, cui accreſcit, auellatur. Foliolo iſto et futurae ficus rudimento indies creſcente, vagina ſeſe aperit, marceſcit, cadit et annulare veſtigium in geniculo internodii relinquit.

quit. Idem fit cum proxime ſequentibus vaginis et foliolis, donec omnium in gemma contentorum internodiorum, foliorum et ficuum rudimentorum euolutio facta ſit. Hoc per totum annum in gemmis ſummos ramorum apices occupantibus obſeruari poteſt.

Talis ſtructurae gemmam principium monſtroſarum harum ficuum fuiſſe patet vel ex apice illo in ſinu, quem media et lateralium vna efformabant, conſpicuo, de quo ſupra mentionem fecimus: hunc enim ope microſcopii magna cura examinatum omnes gemmae partes in ſe continere deprehendi, vaginas, foliola minutiſſima conuoluta, et ficuum rudimenta.

Si iam concipiatur infima iſtius gemmae internodiorum rudimenta impedita fuiſſe quacunque cauſa in eorum augmento, ficuum interim rudimentis ſeſe euoluentibus et in dies creſcentibus, ita vt tandem tres ſimul vni pediculo ex tribus quaſi internodiis coalito, inſidere viderentur, patebit monſtroſi huius partus modus et ratio. Folia, ſi quaedam ſeſe explicare coeperunt, ſtatim delapſa ſunt, relictis iſtis veſtigiis ſeu cicatricibus. Apici autem gemmae in ſinu ficuum reſiduo, ab his ſufficiens ad vlteriorem euolutionem nutrimentum detractum eſt.

Ceterum notare operae pretium duco, pedunculo hoc fructifero et aliis ramis e trunci medio excreſcentibus amputatis, arborem in loco minus temperato poſitam et iuſto nimis, me neſciente, irrigatam, admodum laborare coepiſſe: guttatim enim emanabat hinc inde

Bb 2 per

per corticem prope radicem liquor cinereus, illum corrumpens, et ex cinereo in fuſcum colorem vergens. Haſce guttas ab extrauaſato, ſtagnante et corrupto lacteo arboris liquore prouenire iudicans, ob nimiam irrigationem, minorem in aëre frigidiori perſpirationem plantis adeo neceſſariam et amputatas ficus et ramos, qui antea magnam ſatis copiam ſuperflui humoris exhalauerant, hypocauſtum calefieri curaui ad augendam perſpirationem et inciſiones feci in cortice iam putreſcere incipienti, vt corruptus liquor facilius effluere poſſet; quo facto arbor ad priſtinum vegetumque rediit ſtatum.

DE

DE POMO EX TRVNCO ARBORIS ENATO

DISSERTATIO,

IN QVA VARIA TRADVNTVR AD THEORIAM VEGETATIONIS PLANTARVM APPRIME FACIENTIA.

AVCTORE
Christiano Wolfio.

Si quid meum in ſcientia naturali iudicium eſt, Phyſicus Aſtronomum imitari debet. Quamobrem quae de Medico Aſtronomum imitante docui in Horis ſubſeciuis A. 1729. Trim. brum. n. IV. p. 154. et ſeqq. ea ad Phyſicum quoque transferenda. Ad hoc imitamentum refero obſeruationum quarumcunque, ſiue rariorum, ſiue maxime vulgarium, ad aliquem vſum translationem, iisdemque non ex raritate, qua animum rerum nouarum cupidum oblectant, ſed ex vſu, quem in theoriis condendis, examinandis et limandis habere poſſunt. Equidem obſeruatio, de qua dicere conſtitui, in rariſſimarum numero eſt, non tamen tam ob raritatem, qua in admirationem facile coniicit theoriae verae vegetationis ignaros, quam ob vſum, quem praeſtat, in hac ipſa theoria examinanda et corroboranda, attentionem Phyſicorum mereri mihi videtur. Theoria vegegetationis plantarum nondum ita exculta, vt non manum auxiliatricem et emendatricem adhuc desideret. Etsi praeclara sint, quae *Malpighius*, *Nehemias Crew*, *van Leeuwenhoek* et alii de anatomia plantarum dedere; nondum tamen satisfaciunt ad vsum partium singularum euincendum, nedum ad theoriam vegetationis omnibus suis numeris absolutam condendam. Haec ratio ante multos annos me impulit, vt ad eam animum aduerterem et via analytica in eandem inquirerem, quemadmodum docui specimine aliquo in tentamine de vera causa multiplicationis frumenti idiomate patrio primum conscripto et postea cum appendice secunda vice edito, nunc vero in sermonem Anglicanum conuerso ab Anonymo. Et eodem fine in Tractatu Germanico de vsu partium per obseruationes et experimenta in vsum partium, quae sunt plantis, accuratius inquirere coepi. Quantum in hac theoria profecerim, aliorum erit iudicium, quando eandem publici iuris facturus. In praesente experiri lubet, quid valeat in reddenda ratione effectus naturae insoliti. Nihil tamen sumam ad illam spectans, nisi quod vel obseruatione, vel experimento quodam comprobauero.

Effectus ille naturae insolitus pomum est, quod ex trunco arboris enatum praeter omnem spem ac expectationem deprehensum est in horto Viri cuiusdam nobilis, cum autumno A. 1733. poma decerperentur. Inferior pediculi pars, qua trunco infigebatur, cortice obducta, sed omni foliorum ornatu destituta conspiciebatur. Malum ipsum erat maturum, nec in figura eius externa quic-

quicquam apparebat insoliti: alterius tamen erat speciei, quam cetera quae malus ferebat. Notandum vero arborem ex illarum fuisse genere, quae gerunt ramos ex peregrinis surculis trunco insitis natos. Quaesitum ex me fuit, quomodo fieri potuerit, vt praeter naturae consuetudinem truncus ederet malum, et cur idem alterius fuerit speciei, quam quae gerebat malus more consueto edita.

Responsio ad quaestionem alteram nihil prorsus difficultatis habet. In vulgus notum est, truncum cum radicibus nequaquam mutare speciem, si peregrini surculi eidem inseruntur. Quis enim est qui nesciat stolones ex radicibus et stirpe istiusmodi arborum emissos eiusdem esse speciei, cuius erat arbor, antequam surculi eidem insererentur, nec ligni substantiam ac corticem a specie pristina abire. Immo quis est, qui nesciat, si surculi peregrini inseruntur relicto aliquo ramo, quem ante gerebat sibi proprium, illos ferre fructus eius speciei, cuius erat arbor, vnde resecabantur, hunc vero edere fructus consuetos? Quamobrem cum arbor, ex cuius trunco prodiit pomum, ramos peregrinos gereret, insoliti nihil hoc habet, quod pomum praeter naturae consuetudinem genitum a ceterorum specie abierit.

Enimuero ad quaestionem priorem, quomodo ex trunco arboris enasci potuerit malum, non adeo facilis responsio est. Neque enim principia vegetationis, ex quibus reddenda effectus insoliti ratio, hactenus Physicis

cis, quantum conſtat, ſatis explorata ſunt. Niſi tamen totus fallor, ea mihi obtulit partim induſtria in obſeruando, partim ſagacitas in experimentando. Agedum itaque! videamus, quid valeat theoria vegetationis, praeſertim arborum, quam dudum animo concepi et iteratis nouisque obſeruationibus atque experimentis in dies vberius confirmare annitor.

Nullus itaque dubito, pomum praeter naturae conſuetudinem editum a trunco prodiiſſe e gemma grauida, quae A. 1732 protruſa verno tempore A. 1733 flores et folia genuit. Etenim ne fructus arborum, veluti mala, naſcantur ſine floribus lex naturae adeo ſancta videtur, vt, cum anno praeterito mala plura monſtroſa bicorporea, nonniſi vno pediculo inſtructa, deprehenderem, in ſingulis tamen vtrique malo ſuus fuerit flos. Equidem non ignoro malum per quadraginta continuos annos maliferam absque floribus, quam in literis ad Cl. *Iurinum* datis et in Actis philoſophicis Societatis Regiae Londinenſis pagina 199. publici iuris factis deſcribit *Paulus Dudlejus*; ea tamen, ſi rem attentius conſideres, minime probat legem iſtam a natura fuiſſe violatam. Cum ſapor malorum fuerit immitis, manifeſto indicio, quod ſuccus nutritius vitio digeſtionis nimis adhuc crudus fuerit, vt per exilia vaſcula, quae eum foliis florum aduehunt, aſcendere minime potuerit; non tam malorum rudimentis in gemmis adhuc latentibus prima foliorum ſtamina defuiſſe, quam deficiente ſucco nutritio non explicata fuiſſe videntur. Praeterea pro explorato habeo, absque foliorum miniſterio ad ad maturitatem perfectam non peruenire fructus. Succurrit obſeruatio recens, qua idem confirmatur. Pauci elapſi ſunt anni, ex quo non nemo rei hortenſis et theoriae vegetationis ignarus vitem foliis orbauerat, vt vuae ſoli expoſitae maturitatem citius conſequerentur, miratus euentum prorſus contrarium, vbi nullam matureſcere obſeruauit, tempeſtate licet maturationi amica. Non eſt, quod excipias, nulla circa pediculum folia fuiſſe reperta. Inſuetum non eſt pomis matureſcentibus folia exſucca decidere, praeſertim vbi ſuccus nutritius minime abundat.

Spes erat, quae dixi, obſeruatione deciſiua confirmandi. Cum enim initio veris malos ſingulas per totum hortum, in quo non exigua earundem copia, ſtudioſe contemplarer, non ſine voluptate incidi in gemmam grauidam, quae in imo trunci, vbi ad latera protendebantur rami, vltra corticem paucarum linearum interuallo prominebat. Malis floreſcentibus eadem in flores et folia explicabatur, nec floribus, neque foliis quicquam deerat, quo a ceteris, quibus rami ſuperbiebant, differrent. Enimuero quoniam hoc anno in omni diſtrictu circa vrbem inſecta quaedam minima floribus malorum erant infeſta, vt vna propemodum nocte tantum non omnes decore ſuo priuarentur, oculis per aliquot iam dies formae nitore paſtis; accidit vt omnes, in quibus ſpem collocaueram, corrumperentur, etſi tantus eſſet malorum praeter omnium ex illa florum ſtrage propemodum vniuerſali nihil boni praeſagientium expectationem prouentus, quantum alio anno fuiſſe nemo recordatur. Poſtquam vero foliis ſaluis flores perierunt omnes, non multo poſt ingens inde protrudebatur ſurculus.

Ex trunco arborum protrudi ſurculos noto notius eſt, idemque obſeruaui, quemadmodum alias ſaepius ita nuperrime in Pyro annoſa et procera, in quam ex muſaeo patebat proſpectus, quod ſi cogitemus ſurculo corticem perrumpenti inſidere gemmam, aut ex male nutrito, parte ſuperiore corrupta, antequam in debitam longitudinem extendatur, quemadmodum accidit floribus in gemma obſeruationis praecedentis, et in omni plantarum genere ob defectum ſucci nutritii quovis tempore accidere ſolet, talem prouenire; vbi haec vere ſequente explicatur flores ex cortice prodire videbuntur, quales ramorum ſurculi ſuberbire ſolent. Enimvero cum hoc rariſſime contingat, florum quoque et multo magis fructuum ex trunco prouentus rariſſimus, ſicuti et alia naturae phaenomena minus frequentia ſunt, quae plures habent cauſas nonniſi raro concurrentes.

Vt vero intelligatur, quomodo tam ſurculi ex trunco per corticem prorumpant, quam gemmae grauidae prodeant, diſtinctius explicandum, propterea quod Phyſicis theoria vegetationis arborum, quae principia ſuppeditat, hactenus non ſatis perſpecta fuit. Tenendum itaque ſuccum nutritium, qui in vtriculis ſubſtantiam medullarem componentibus praeparatur, plenam eſſe rudimentis gemmarum, quemadmodum ſemen animalium atque hominum innumera animalcula alit. Etenim in Tracta-

Tractatu de vſu partium, quem Germanico idiomate conſcripſi et in quo etiam vſum ſingularum partium plantarum expono, clariſſimis atque circumſpectis obſeruationibus docui, gemmas ex medulla prodire et per fiſtuloſam ligni ſubſtantiam erumpere, vbi folia ſurculo adhaerent. Immo hoc vniuerſaliter verum eſſe in omni plantarum genere iam olim euici in Tentamine de vera cauſa multiplicationis frumenti idiomate patrio conſcripti et hoc ipſo anno in Anglicanum translati Praeterea dudum docui, ſicuti ſingulis annis nouae naſcuntur fiſtulae circa eas, quae anno praeterito excreuerant, in orbem diſpoſitae, ita nouam quoque produci ſubſtantiam medullarem loco intermedio, quae ex vtriculis compoſita fiſtulas anni praecedentis immediate ambit et anno quoui gemmas ſuppeditat, quemadmodum medulla primo. Medullarem enim ſubſtantiam gemmis protruſis penitus exhauriri, vt ad vlteriorem arboris vegetationem prorſus inutilis euadat, et autopſia microſcopica teſtatur, et plantae ſingulae, quae vbi ſemina dedere ſtatim emoriuntur, clariſſime loquuntur. Quoniam itaque trunci arborum ſingulis annis non minus ſubſtantia medullari, quam vtriculoſam eſſe diximus, quam noua fiſtularum ſerie augentur; nunquam ipſis deſunt gemmarum atque florum rudimenta, productioni ſurculorum et gemmarum grauidarum profutura: deeſt ſaltem pabulum ſufficiens, quo illa opus habent, vt fiſtulas ligneas a ſe inuicem diuellant corticemque perforantes foras erumpant.

Nihil in his ſuppono, quod protritis rei hortenſis gnarorum obſeruationibus non confirmetur. Ecquis enim eſt qui neſcit, amputatis arborum ramis, antequam in frondes abeant gemmae, ex truncis laetos progerminare ſurculos? Immo idem vere praeterito obſeruaui in *Lauro ceraſo*, quae per hiemem neglecta folia depoſuerat omnia, vt nutrimento in trunco praeſente omni non haberet opus, ac alias ſaepius ſimile quid me vidiſſe memini atque in vulgus notum eſſe exiſtimo. Nec eſt quod excipias, ramis praeſentibus ac in vigore conſtitutis aduehi cum ſucco nutritio iſta ſurculorum rudimenta, quae in trunco explicantur. Conſtat enim, ſi truncus cum ramis non ſit eiusdem ſpeciei, quemadmodum iam ſupra notaui, qui ex trunco protruduntur ſurculi a ramorum ſpecie abire. Eorum itaque rudimenta ſubſtantiae medullari trunci ineſſe debent, cum eidem ſubſtantiae in ramis inſint alia. Neque adeo alia eſſe poteſt cauſa, quod ordinarie in ſtatum euolutionis non transferantur, quam quod ſuccus nutritius, quo ad ſubeundam hanc mutationem indigent, ſurſum aſcendat. A partibus enim arborum ſupremis, quae alimento egent, ſuccum nutritium quaſi prolectari, nemo ignorat. Inde nimirum eſt quod gemmis ſtemmati alieno inſertis non omnes adimantur frondes vt ſuccus nutritius per truncum felicius aſcendat, pleraeque tamen auellantur, ne deſit gemmae eidem adnaſcendae pabulum ſufficiens.

Enimuero ne quid ea in re ſupereſſet dubii, experimentum plenam fidem facturum inſtituere libuit, Pomona fauente. Nimirum cum autumno A. 1733. pirum

Pyrum annoſam, quam paulo ante teſtem appellaui, deiici curaſſem, partem quandam rami maioris, qui craſſitie ſua truncum arboris aemulabatur, et cuius diameter pede vno paulo maior erat, ſtillicidio ſupponi iuſſi horizontaliter, ita vt aquam per corticem imbiberet, et a radiis ſolaribus per totam fere diem tuta iaceret, ne lignum exſiccaretur. Aeſtate modo praeterita ibi loci, vbi aliquod rami veſtigium erat, multi progerminarunt ſurculi, quorum vnus alterue ad duorum propemodum pedum altitudinem excreuit. Neceſſe igitur erat, quemadmodum vult theoria vegetationis arborum, quam animo conceperam et quae mihi ſurculorum edendorum ſpem faciebat, vt in ſubſtantia medullari ſeu vtriculoſa et ſurculorum rudimenta laterent, et alimentum ipſis conueniens aqua pluuiali diluendum ſufficiente copia adeſſet.

Notandum praeterea eſt, in eodem ſucco nutritio, quem inſpiſſatum ſeruari conſtat in vtriculis, quorum congeries eſt ſubſtantia medullaris, florum rudimenta copioſa latere, a rudimentis gemmarum ſeparata, quae cum in gemmas cum ſucco nutritio deferuntur, eas impraegnant. Licuit mihi vere praeterito eſſe adeo felici, vt in obſeruationem inciderem, qua hanc theoriae partem clariſſime confirmari exiſtimo. Demtis enim arbori humili (quale arborum genus lingua vernacula Zwerg-Bäume, quaſi pumiliones in arborum genere appellamus) omnibus ſurculis, quibus gemmae adhaerebant et ramis maximam partem amputatis, ita vt non niſi partes trunco vicinae relinquerentur, cum harum vna effrondeſceret, in altera per corticem flores nudi prorumpebant, qui breuioribus pediculis eidem quaſi infixi ap-

 pa-

parebant. Flores hi male nutriti foliola ſua explicabant, nec quicquam ipſis deerat ad ſtructuram pertinens ad iuſtam tantummodo magnitudinem non pertingebant. Marceſcentes decidebant, nullo ſui veſtigio relicto; cortex vero cum ligno poſtea exaruit. Ecquis non videt flores iſtos fuiſſe eos, quorum rudimentis gemmae anni praeſentis impraegnari debebant, niſi rami cum ſurculis fuiſſent reſecti? Quoniam vero ſoli absque ceteris partibus, quae in gemma grauida deprehenduntur, prodiere, vt ne minimum quidem illarum veſtigium conſpici poſſet, et ſingulares quaſi per corticem diſſeminati fuere, quin a rudimentis gemmarum diſcreti in vtriculis reperiantur, vnde gemmas per fiſtuloſam ſubſtantiam ligni prorumpere ſupra diximus, dubitari haud quaquam poteſt. Obiter obſeruamus rudimenta gemmarum, quae hoc anno erumpunt, nec non rudimenta florum, quibus impraegnantur, iam genita fuiſſe anno ſuperiore, quemadmodum et nutrimentum, quo gemmae anno ſuperiore protruſae praeſente explicabuntur, anno ſuperiore iam praeparatum fuit et in vtriculis aſſeruatur hoc anno nonniſi diluendum et per fiſtulas ad partes organicas explicandas aduehendum: id quod in praeſente multis adſtruere non licet, ab attento rerum naturalium obſeruatore facile animaduertendum, cum vniuerſali plantarum omnium conſenſu nitatur, quae non primo ſtatim anno ſemina edunt, atque emoriuntur, vtut etiam in his analogi quiddam obſeruetur.

Atque haec principia minime conficta, quales vulgo ſunt Phyſicorum hypotheſes, ſed experientiae congrua,

grua, ſufficiunt vt intelligatur, quomodo truncus arboris ediderit malum. Nimirum aeſtate A. 1732 ex trunco arboris prorupit ſurculus, qui cum male nutriretur ad eam proceritatem minime extendebatur, ad quam vulgo protendi ſolent, qui inde prodeunt. Cum folia nullo fere interuallo a ſe inuicem diſtarent et ſubſtantia medullaris ineſſet perpauca, ad radices foliorum nullae vegetari poterant gemmae. Aſt gemma, quae apici inſedit, florum rudimentis impraegnabatur, quae inſtar ceterorum in ſurculis ramorum, cum anno 1733 gemma explicaretur, maturitatem ſuam adepta in flores abibant. Pericarpio vnius nutrito, malum creſcebat atque iuſto tempore cum ceteris, quae ferebat arbor, matureſcebat. Surculus A. 1732 male nutritus ab obſeruatoribus minus circumſpectis pro parte pediculi habitus, vt ideo pars pediculi dimidia eaque infima cortice veſtita viſa fuerit.

Nihil itaque amplius reſtat, quam vt dubium tollatur, quod circa noſtram effectus naturae inſoliti explicationem vni alteriue ſubnaſci poteſt. Etenim ſi theoria noſtra ſtandum, in trunco ſeu ſtipite arboris perinde ac in ramis eorumque ſurculis ſingulis annis naſcuntur vtriculi, in quibus non modo nutrimentum commodum gemmarum praeparatur, ſed earum quoque rudimenta vna cum rudimentis florum, quibus gemmae impraegnantur, maxima copia gignuntur, vndecunque tandem prodeant. Semper adeo fieri poterat, vt ex trunco vegetarentur gemmae grauidae earundemque beneficio fructus eidem adnaſcerentur. Experientia tamen

men contrarium docet. Rarius ex ſtipite emittuntur ſurculi, immo fere nunquam prodeunt gemmae grauidae, ita vt vix fidem inueniſſet affirmaturus edi fructus inde poſſe. Immo valde vereor, ne Phyſicorum bene multi theoriam vegetationis hoc ipſo ad abſurdum eſſe deductam, quod inde conſequatur ſtipites arborum fructus ferre poſſe. Enimuero difficultas iſta, quantumuis ſpecioſa videatur, reuera tamen nulla eſt. Multa ſunt in naturae poteſtate, quae tamen ad actum minime perducuntur, deficientibus cauſis actum determinantibus: id quod dudum quoad vegetationem luculentis admodum exemplis docui in Tentamine de vera cauſa multiplicationis frumenti. Ita experimentis non minus, quam obſeruationibus comprobaui, in medulla, quae partem caulis nodoſam replet in quouis frumenti genere, contineri plantulas iis, quae ex ſemine vegetantur, prorſus ſimiles, quae et radices agere, et in ariſtas excreſcere poſſunt. Rariſſime tamen id accidere nemo eſt qui ignorat. Nihil adeo ſingulare eſt, quod, quae in medullari ſtipitis ſubſtantia latent, gemmarum atque florum rudimenta in ſtatum euolutionis minime transferantur.

DE


fig: 2
a
b

Fig. 1.

DE MELILOTO SILIQVA MEMBRANACEA COMPRESSA.

AVCTORE

I. A.

NOua haec Meliloti ſpecies ex ſeminibus in Sibiria collectis et ollae fictili terra repletae commiſſis octauo circiter anno poſt lectionem, inſigni fibroſarum radicum alte lateque porrectarum contextu primo a ſatu anno valde luxuriabat. Tabula XII.

Cauliculi ex vna radice plures, quatuor, quinque et ſex ſubinde enaſcuntur quadranguli, ex viridi purpuraſcentes, quandoque erecti, vt plurimum vero ſirpini, aut aliarum plantarum adminiculo ſeſe ſuſtentantes, bipedales et tripedales, in multos laterales ramulos diuiſi, quibus adnaſcuntur folia terna, ſingulis pediculis innaſcentia, ad Meliloti Officinarum Germaniae folia accedentia, ſed rotundiora et breuiora, coſta communi ſemunciali innixa, ad cuius exortum foliola duo acutiſſima aurita et profunde dentata conſpiciuntur.

Ex alis harum coſtarum, nec non ex ſummitatibus caulium et ramulorum pediculi oriuntur tribus aut quatuor vt plurimum floribus papilionaceis, luteis, nigri-

nigricantibus ſtriis notatis, et in praetenuem ſpicam diſpoſitis, onuſtae. Maiores ſunt reliquis huius generis, et longioribus pediculis ſuſtentantur. Vexillum eorum ſtriatum, breue, obtuſum; alae eiusdem fere cum vexillo magnitudinis, parum hiscentes; carina breuiſſima intra alas deliteſcens. Omnes hae partes calyce excipiuntur virideſcente, monophyllo, in plura ſegmenta acutiſſima ſecto.

Flores emarcidos et delapſos ſequuntur ſiliquae latae, compreſſae, membranaceae, dimidiam et ſaepe integram vnicam longae, quadrantem latae, primo virides, poſtea per maturitatem nigricantes, neruoſae, rigidae, ſeminibus paruis reniformibus, flauis, quatuor vt plurimum foetae.

Odoris omnis expers eſt. Folia deguſtata herbidum et paululum adſtringentem ſaporem linguae imprimunt.

Tabula XII. ramum huius plantae cum ſiliqua naturali magnitudine repraeſentat.

QVIN-

a mem: bra- nacea, compressa

MELILOTUS siliqua mem- bra- nacea, compressa

QVINQVE NOVA PLANTARVM GENERA.

AVCTORE

Ioan. Amman.

GENVS PRIMVM.
LEONTOPETALOIDES.

LEONTOPETALOIDES eſt plantae genus flore AB monopetalo, infundibuliformi, multifido; quem ſequitur fructus ſiue veſica C, ſeminibus foeta ouatis D. Tabula XIII.

LEONTOPETALOIDES foliis profunde laciniatis, radice tuberoſa.

Radix ſpecioſae huius plantae, quae in India Orientali ſponte prouenit, ſubrotunda eſt, tuberoſa, extus cinerea, intus alba, duos cum dimidio circiter pollices lata, paucas hinc inde fibras emittens.

Caules ex ea ſurgunt vt plurimum quatuor, nudi, non ramoſi, praealti, teretes, cineracei, ſtriis nigricantibus creberrimis notati, digiti minoris craſſitie, medulla viridi farcti. Duorum huiusmodi caulium ſummitates in folia expanduntur ampliſſima, valde tenuia, varie et profunde laciniata, laete viridia.

 E duo-

E duorum autem reliquorum extremis flores enafcuntur quam plurimi, monopetali, infundibuliformes, in vmbellam denfe congefti, inferne tubulati, fuperne in fex fegmenta acuta diuifi, coloris lutei, calyculis contenti monophyllis, viridibus, in aliquot fegmenta diffectis, et pediculis fuftentatis itidem viridibus, pollicem plus minus longis et paulo incuruis.

Floribus his delapfis fuccedunt fructus fiue veficae angulatae et inflatae, virides, deorfum inflexae, in medio, vbi latiffimae funt, vnciam circiter latae, in apicem definentes purpurafcentem. Intus vero continentur femina plura, maiuscula, ouata et ftriata, coloris lateritii dilutioris.

LEONTOPETALOIDES dicitur haec planta, quia ad Leontopetalon a Clariffimo Tournefortio in Inftitutionum fuarum Corollario definitum, quam proxime accedit.

GENVS SECVNDVM.

RICINOCARPODENDRON.

Tabula XIV. RICINOCARPODENDRON eft plantae genus flore A B rofaceo, tribus fcilicet petalis in orbem pofitis conftante, in quorum medio tubus B vrceolatus, per quem ex calyce furgit piftillum, quod deinde abit in fructum C trigonum, intus in tria loculamenta diuifum D, feptis intermediis a fe inuicem discreta, quorum fingula femen continent cortice duro obductum.

Rici-

Comment. Acad. Sc. Tom. VIII. Tab XIII. p. 211.

Leontopetaloides partes magnitudine naturali repraesentatae.

EONTOPETALOIDES

LEONTOPETALOIDES

RICINOCARPODENDRON foliis alatis, fructu coccineo.

Elegantis huius arboris rami recti sunt et cortice obducti cinereo-fusco.

Folia ex trium vel quatuor pinnarum coniugationibus composita, Fraxineis quodammodo similia sunt, pinnis longioribus, acutioribus et non serratis.

Flores circa foliorum alas egrediuntur, in tenuem spicam dispositi, albi ex tribus petalis planis et tubo vrceolato, medium eorum occupante, constantes.

Fructus primo viridis est, postea ex rubro flauescit, per maturitatem vero coccineus euadit, magnitudine nucis Iuglandis, Ricini fructui similis, in tria loculamenta diuisus, quorum vnumquodque semen continet oblongum, cortice duro, extus nigro, intus rubente obductum, quo nucleus includitur albi coloris, in duos lobos distinctus. Fructus hi per maturitatem dehiscunt et sponte in Indicis regionibus semina sua effundunt.

RICINOCARPODENDRON nomen est compositum ex vocibus Ricinus, καρπος, fructus et δενδρον arbor, quasi diceretur arbor fructu Ricini.

GENVS TERTIVM.

SIPHONANTHEMVM.

SIPHONANTHEMVM est plantae genus flore A monopetalo, tubulato, multifido; ex cuius calyce sur- Tabula XV.

 git

git pistillum, quod deinde abit in fructum B quatuor baccas sibi inuicem appositas referentem, in quatuor loculamenta C diuisum, seminibus D foeta subrotundis.

SIPHONANTHEMVM salicis folio, flore flauescente.

E caulibus rectis, viridibus, striatis, folia nullo ordine ad breuia satis interualla oriuntur, quae salignis quodammodo similia sunt, tres plus minus vncias longa, vtrinque angustata, pollicem praeter propter lata, in acutum mucronem terminata, breuissimis pediculis insidentia, tam superne quam inferne intense viridia.

Versus summitatem caulium vel ex latere foliis opposito, vel paulo supra originem foliorum, aut ex ipsis horum alis pediculi enascuntur virides, crassiusculi, pollicares plus minus, in alios minores pedunculos tres, quatuor vel quinque vmbellae in modum diuisi, quorum singuli calycem gerunt vnifolium, in quinque segmenta dissectum, vnde flores oriuntur, ex biunciali seu triuncali, e viridi flauescenti gracillimoque tubo in calathum quadripartitum expansi, coloris pallide flauescentis, in cuius medio emicant stylus purpureus, incuruus, et quatuor vt plurimum stamina eiusdem coloris, apicibus fuscis, triangularibus instructa.

Flores subsequuntur fructus quadricapsulares, virides, qui ex quatuor quasi baccis compositi videntur. In singulis loculamentis semen continetur vnicum, subrotundum, coloris e viridi flauescentis.

SIPHON-


RICINOCARPO-
-DENDRON
D


RICINOCARPO-
-DENDRON
D
E
A
B
B

SIPHONANTHEMVM nomen eſt compoſitum ex vocabulis graecis σιφον, tubus, et ανθεμον, flos, quaſi diceres plantam flore tubulato.

GENVS QVARTVM.
PTEROSPERMADENDRON.

PTEROSPERMADENDRON eſt plantae genus flore A roſaceo, plurimis ſcilicet petalis in orbem poſitis conſtante, ex cuius calyce ſurgit piſtillum embryone *a* inſtructum, qui deinde abit in fructum C lignoſum, ſiliquoſum, apice dehiſcentem, in quinque loculamenta D diuiſum, ſeminibus foeta alatis E. Tabula XVI.

I. PTEROSPERMADENDRON ſuberis folio anguloſo, ſubtus incano, floribus albis. Arbor Champaccae ſuberis folio, fructu ligneo, ſeminibus alatis referto *Muſ. Petiuer. n.* 349.

Rami huius arboris recti ſunt, paucos hinc inde laterales ramulos emittentes, cortice obducti extus fuſco, intus viridi. Lignum quoque ſubuiridis eſt coloris.

Folia nullo ordine diſpoſita longa ſunt tres circiter pollices, ſeſcunciam lata, verſus extremum anguloſa, craſſa, ſuperne viridia, inferne incana, pediculis admodum breuibus appenſa. Neruus medius foliorum, auerſa praecipue parte conſpicuus, tenui, valde breui fuluaque lanugine obtectus eſt.

Flores,

Flores, qui ex foliorum alis et ramulorum summitatibus oriuntur modo singulares, modo bini aut terni, albi sunt coloris, ex quinque petalis constantes vnciam circiter longis et valde acutis, staminibus pluribus eiusdem coloris et longitudinis cum petalis, et pistillo paulo incuruo, albi itidem coloris.

Calyx monophyllus, crassus, aequalis fere cum flore magnitudinis, in quinque segmenta diuiditur, oblonga, acuta, retroflexa, crassa, intus viridia et glabra, extus fulua lanugine obsita.

Embryo tandem, qui versus extremitatem pistilli conspicitur, fit fructus lignosus, fuscus, oblongus, vtrinque angustatus, in medio tumidus, nucis Iuglandis magnitudine, apice per maturitatem dehiscens, in quinque loculamenta diuisus, quorum singula plura semina continent; oblonga, compressa, Aceris instar alata; coloris rufi, nucleum album condentia. Ceterum hi fructus ita dehiscunt, vt singula loculamenta in duas findantur partes, quo facto semina sponte decidunt.

Tab. XVII. II. PTEROSPERMADENDRON foliis auritis, flore fructuque maiori. An Solda *Hort. Malabar. Vol. VI. Tab.* 58. *p.* 103. *Tab.*?

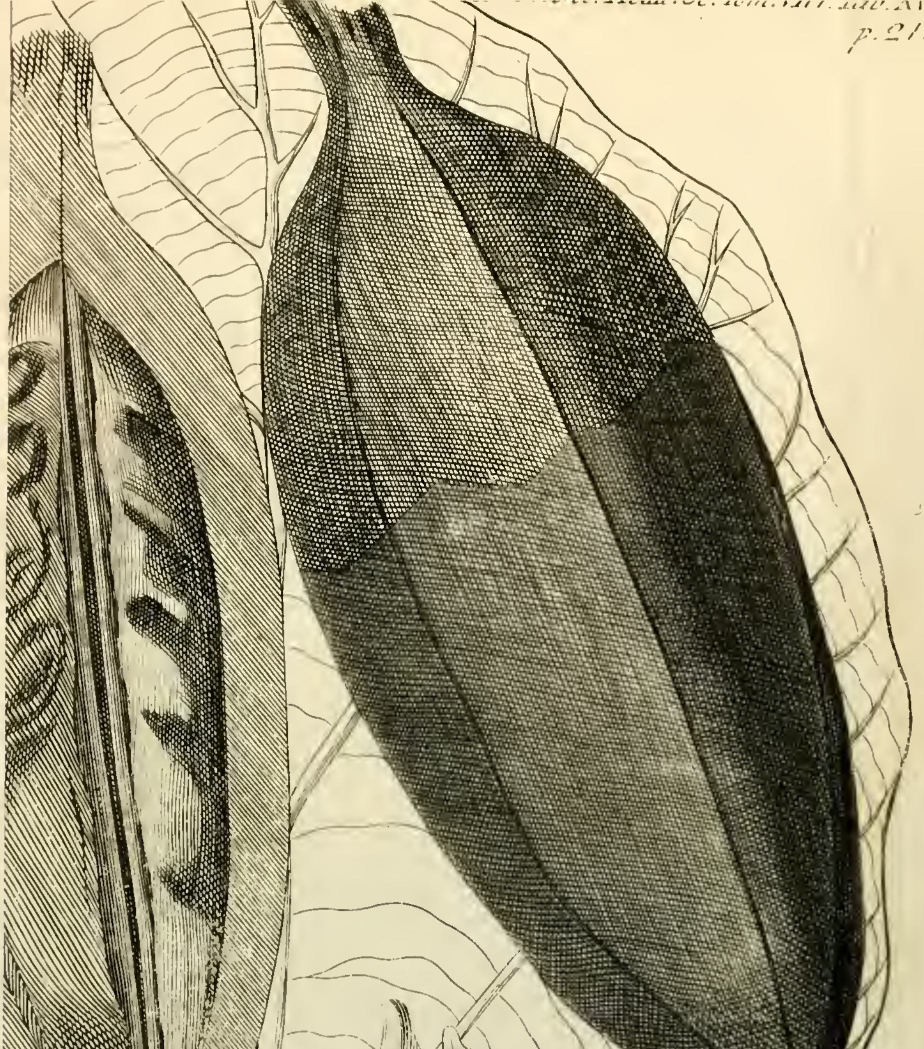
A praecedenti differt foliis amplioribus, obtusioribus, sinuatis et auritis; florum petalis longioribus et angustioribus; calycis segmentis longioribus itidem, crassioribus et obtusioribus; fructu longiori et crassiori, longitudine scilicet quatuor vel quinque pollicum, crassitie duorum fere, semina quam praecedentis multo maiora continente.

An


SIPHONANTHE-
-MUM.
A
B

TEROSPER- MADENDRON

PTEROSPER-MADENDRON



Pterospermaden
dri II magnitudo
partium naturalis.

PTEROSPER. MADENDRON II.

PTEROSPER. MADENDRON II.

An sequentes plantae proprie ad hoc genus pertineant, iis determinandum relinquimus, quibus eas florentes et fructus ferentes videre continget.

1. Alcea arbor populnea fronde, tota argentea, quinquecapsularis, siue Ebenus viridis ex Insula St. Helenae, vbi ab Anglis indigenis *Blakwood* et *Ebony*, id est, lignum nigrum et Ebenus cognominatur *Pluken. Mant. p. 6. Tab.* 333.

2. Alcea arborea populi nigrae foliis prona parte albicantibus, flore amplissimo rubicundo, ex Insula St. Helenae, vbi *Redwood*, id est, lignum rubrum Anglis nuncupatur. *Eiusd. ib.*

In speciminibus ipsis *Plukenetianis*, quae nunc seruantur in Musaeo Ill. Equitis *Hans Sloane*, fructus duarum harum plantarum, cum fructibus huius generis exacte conueniunt structura, multo vero minores sunt, magnitudine vix nucem Auellanam aequantes.

3. Alcea Floridana, quinquecapsularis, Laurinis foliis leuiter crenatis, seminibus coniferarum instar alatis *Pluk. Almag. p.* 7. *Tab.* 352, et *Catesby Hist. Nat. Carolin. et Florid. Tab.* 44. *p.* 44.

4. Est mihi quoque fructus Arboris ad hoc genus forte pertinentis, quem mecum communicauit *G. Houston* Medicus et Botanicus peritissimus, qui eum circa Veram Crucem in Noua Hispania ad littus Sinus Mexicani sitam vrbem collegit. Hic a primae huius generis speciei fructu non aliter differt, quam quod sit pentagonus.

Fructus Cedri Barbadensis, alatis Fraxini foliis, non crenatis, fructu singulari, quinis involucris crassis, validis, cochleato-cauis, totidem semina membranis adaucta, et columnae canaliculatae pentagonae, praegrandi adnata, occludentibus, ornato *Pluk. Almag. p.* 92. *Tab.* 157, *Fig.* 1. ab huius quoque generis fructu tantum in eo diuersus est, quod axi pentagono affixa sint.

PTEROSPERMADENDRON nomen compositum est ex vocibus graecis πτερον, ala, σπερμα, semen et δενδρον, arbor, quasi diceretur arbor semine alato.

GENVS QVINTVM.
MICHELIA.

Tab. XVIII. MICHELIA est plantae genus flore A monopetalo, anomalo, tubulato, vtrinque patenti et quasi bilabiato; ex cuius calyce surgit pistillum, quod deinde abit in fructum B carnosum, officulo foetum in duo loculamenta diuiso D, quarum vnumquodque semen continet vnicum.

MICHELIA spinosa, floribus luteis.

Rami singularis huius fruticis cortice obducuntur laete viridi. Recti non sunt, sed parum hinc inde intorti, ramulos emittentes modo singulares, modo binos sibi inuicem oppositos seu coniugatos, spinis admodum acutis, viridibus, semvnciam longis, ad foliorum hinc inde exortum armatos.

Folia

LIA

MICHELIA

Folia obtinet vtplurimum coniugata, subinde terna aut quaterna, vtrinque angustata, in medio vnciam circiter lata, sesquipollicem longa, superne laete viridia, inferne pallidiora, pediculis valde breuibus ramis ramulisque ad sesuncialia plus minus interualla adnata.

Summitates tam ramorum quam ramulorum terminantur in spicas longas, laxas florum luteorum speciosorum, monopetalorum, tubulatorum, in quatuor segmenta inaequalia dissectorum, quorum superius amplum valde, fornicatum, inferius vero et lateralia multo minora sunt et extrorsum flexa. In horum medio conspiciuntur stamina duo crassiuscula, sulphurei coloris, apicibus subrotundis, concoloribus praedita; inter haec autem pistillum eiusdem cum staminibus coloris, longitudinis et crassitiei. Calyx valde breuis est, monophyllus, viridis, superius in obtusa aliquot segmenta dissectus.

Floribus succedunt fructus carnosi, globosi, primo virides, per maturitatem flauescentes, nucis Iuglandis magnitudine, carne multa, pallida praediti, et ossiculo foeti ouato, dilute fusco, laeui, in duo loculamenta diuiso, in quibus nuclei continentur, albi intus coloris.

MICHELIAE nomen huic plantae imposui a Petro Antonio Michelio, Florentino, Ioannis Gastonis Magni Etruriae Ducis, Botanico celeberrimo.

DE FIGVRA TERRAE,

DISSERTATIO I.

AVCTORE

Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

Tabula XIX. et XX. INter praecipua feculi huius inuenta referendae mihi videntur meditationes, quae a recentioribus Philofophis de Figura Globi noftri terraquei prolatae funt: conftituunt vero Problema Geographiae Mathematicae difficillimum. Sparfae funt partim hinc et inde de hac materia Eruditorum confiderationes in variis Diariis; partim vero etiam non ea perfpicuitate donatae funt, vt a quouis primo ftatim intuitu intelligi poffint. Quare cum hoc tempore de nouo vigeat haec quaeftio, et praecipuorum Phyficorum cura huic Problemati per Experientiam refoluendo quam maxime fit intenta: fperaui, non incongruum fore, fi praecipua huc pertinentia in vnum quafi fyftema colligerem, eaque eo ordine et perfpicuitate, quantam quidem rei difficultas permittit, pertractarem, vt folius Analyfeos ope eruantur, atque tum eo facilius hodiernis oculis pateant Quae enim a fummis Viris *Hugenio*, *Newtono*, *Hermanno*, atque aliis quibusdam, in medium prolata funt circa hanc quaeftionem, optime quidem, et profundo ingenio eruta funt, et demonftrata, fed methodo veterum

rum Synthetica, hoc eſt, tali, quae inuentum proponit, inuentionis autem fontem non detegit. Atque ad hanc tractationem eo promtius etiam acceſſi, quoniam in Tractatu Germanico, *De Geographia Mathematica et Phyſica*, nuper conſcripto, eam, vtpote quae altioris indaginis eſt, omittere coactus ſui.

§. 2. Omnes de figura Terrae opiniones huc redeunt, vt prima earum ſit *Antiquiſſima*, quae terram partim latiſſima planitie extenſam, partim profundo alveo excauatam, partim etiam alio, non minus incongruo, modo formatam, ſtatuit; quae omnes ſententiae pro infantia quaſi huius doctrinae haberi poſſunt. Enumerat earum potiores *Varenius* Geographiae Generalis Lib. I. Sect. 2. Cap. 3. cunctae autem, non tam propter earum vetuſtatem, quam infirmitatem, hodie obſoleuerunt. Secunda vocari poteſt *Antiqua*, quae variis perpenſis firmioribus argumentis, tandem in figura Terrae perfecte globoſa acquieuit. Tertia eſt *Hugeniana*, quae ſtatuit figuram Terrae a perfecte globoſa recedere nonnihil, ita quidem, vt Diameter Aequatoris Axem Terrae per Polos ductum nonnihil excedat; et tradita eſt ab *Hugenio* in Tractatu eius: *Diſcours de la cauſe de la peſanteur*, pag. 157. Quarta eſt *Newtoniana*, quae cum Hugeniana fere coincidit, in eo autem potiſſimum differt, quod proportionem inter Diametrum Aequatoris et Axem paulo diuerſam producat. Denique Quinta eſt celeberrimorum *Gallorum*, qui, Experientia confiſi, figuram Telluri Hugenianae et Newtonianae contrariam

 tribuunt,

tribuunt, hoc eſt, quae Diametrum Aequatoris habeat paulo minorem, Axem vero maiorem.

§. 3. Ratio, qua dictae vltimae tres ſententiae nixae, a figura Telluris aut perfecte globoſa, aut vero oblongiori, recedunt, in eo vnice poſita eſt, quod Terra circa Axem ſuum motu diurno, ſpatio 24 horarum, vertatur, qui motus Vertiginis vocatur, et de quo praefati Authores minime dubitant. Eſt itaque *Copernicus* autor, qui Terram non ſede ſolum ſua dimouit, ſed figuram quoque eius mutauit. Vt vero explanatius definire poſſim, quid ad quamlibet harum ſententiarum ſpectet, non inutile eſſe iudico, ſequentia in anteceſſum probe diſtinguere et conſiderare. Perpendenda igitur erunt (I.) Figura Terrae ante rotationem eius exiſtens; dum nempe animum ab eius motu Vertiginis abſtrahimus; et quam Cel. *de Mairan* in Comment. Acad. Scient. Pariſ. 1720 Primitiuam vocat. (II.) Figura Terrae, quam induit poſt eius rotationem factam, accedente nimirum motu Vertiginis, quam figuram praefatus *de Mairan* vocat Actualem. (III.) Vis Centrifuga, quam graue vnumquodque in ipſo Aequatore terreſtri poſitum, habet. Dum enim Terra motu Vertiginis circumrotatur, vti notiſſimum hodie eſt, et teſtibus Experimentis Phyſicis, Vis Centrifuga orietur in vnoquoque graui, quod in ſuperficie Terrae poſitum eſt. Atque haec vis centrifuga nulla eſt in vtroque Polo ipſo, maior ſubinde in Circulis a Polo magis diſtantibus, et maioribus, maxima denique in Aequatoris Circulo ipſo; quae igitur maxima vis centrifuga Aequatoris maxime etiam in conſideratio-

nem

nem veniet, vtpote reliquis intermediis locis pro fundamento et basi futura. (IV.) Pondus grauis vniuscuiusque absolutum. Cogita, pondus corporis cuiuslibet in superficie Terrae positi, vi grauitatis niti deorsum, id est, versus Centrum Terrae, et vim centrifugam, a motu Vertiginis Terrae oriundam, niti sursum, id est, recedendo a Centro Terrae: vt destruat, necesse est, huius pars aliqua illius partem aliquam. Quia vero, vti vidimus, vis centrifuga in ipso Polo nulla est, et accedendo ad Aequatorem continuo crescit: erit etiam in ipso Polo destructio grauitatis nulla, sed haec destructio crescet accedendo propius ad Aequatorem. Quare pondus vniuscuiusque corporis in Polo ipso erit maximum, quod ideo vocatur Absolutum; in Aequatore vero minimum, in intermediis autem locis erit pondus corporis etiam medium inter maximum et minimum; quare (V.) Consideranda etiam erit illa ratio vel proportio, iuxta quam pondera in diuersis a Polo Parallelis posita decrescunt. Ipsum vero illud pondus residuum, quod, detracto vis centrifugae in directionem grauitatis effectu, adhuc superest, vocari poterit Pondus Respectiuum, vel, cum Newtono, Solicitatio Acceleratrix. (VI.) Perpendendae etiam erunt, in vnaquaque sententia circa figuram Terrae, longitudines penduli alicuius pondere onusti, singula minuta secunda oscillantis. Cum enim tempora harum oscillationum ab actione grauitatis in ponduscula pendulis his annexa pendeat: et actio grauitatis in Terrae figura actuali sit inaequalis: sequitur longitudinem etiam penduli, singula minuta secunda oscillantis fore in diuersis superficiei terrestris locis inaequaaequalem. Hinc, modo ponderibus in Terra analogo, confideranda veniet longitudo penduli fimplicis, fingula minuta fecunda ofcillantis, fub Polo, fub Aequatore, et in locis intermediis, vna cum ratione, iuxta quam abbreuiatio huius penduli, pergendo a Polo ad Aequatorem, progreditur. (VII.) Examinanda erit, ex figura Terrae Actuali, ratio Axis Telluris, a Polo ad Polum ducti, ad Diametrum Aequatoris. (VIII.) Cum magnitudo gradus vnius terreftris, pergendo ab Aequatore verfus Polos, neceffario vel crefcat, vel decrefcat, prout vna aut altera praefatarum fententiarum affumitur: determinari debet in qualibet opinione etiam proportio huius inaequalitatis. Denique (IX.) etiam excutienda occurret directio grauitatis, via nempe alicuius grauis, quam fequeretur, fi a fuperficie Terrae libere caderet eousque, dum in ftatum quietis perueniret; quam viam Cel. *de Mairan* vocat Directricem grauitatis. Atque haec funt praecipua, quae ab Auctoribus, qui de hac quaeftione Figurae Terrae foliciti fuerunt, funt pertractata.

§. 4. Neglecta figura Terrae Antiquiffima, vtpote nullis plane rationibus, aut infirmiffimis, nixa: confiderabo paululum figuram Terrae *Antiquam*, hoc eft, perfecte globofam. Huius rotunditatis argumentum praecipuum duxerunt Veteres ex eo, quod fumto in Meridiano Terrae loco quouis, progrediendo verfus Polum alterutrum, animaduertamus conftanter in aequalibus factis itineribus Polo nos aequaliter appropinquari. Huius argumenti vim commode per Globum artificialem oftendi poffe, dicit Varenius l. c. fed Geometrice poterit

erit idem ſic effici. Sit A M m ſuperficies Terrae in Meridiano, quaecunque demum ea ſit, B ſtella Polaris, vel Polus coeleſtis ipſe, cuius adeo diſtantia a Terra, reſpectu radiorum oſculi in M et m, erit infinite magna, quoniam certo conſtat, Curuam A M m eſſe in ſe redeuntem. Sint M D, $m d$, tangentes punctorum M et m, repraeſentabunt eae Horizontes locorum M et m, et anguli D M B, dmB, Eleuationes Poli locorum M et m. Erit autem differentia harum Poli eleuationum angulus D M B $-$ dmB, hoc eſt, ob parallelas M B, mB, et angulum D M B $=$ D m B, $=$ D m B $-$ dm B $=$ D $m d$. Producto radio oſculi R M in N, erunt triangula M m N et N R m ſimilia; quare angulus ad R $=$ angulo M m N, hoc eſt, aequalis differentiae Eleuationum Poli locorum M et m. Haec autem differentia debet eſſe proportionalis facto itineri per M m, quare, proportionalitate per Aequationem expreſſa, poſitoque M $m = ds$, et conſtante arbitraria $= \alpha$, erit, quia angulus quisque eſt arcus ſuus, diuiſus per radium, ang. R $= \frac{ds}{MR}$, vnde habebitur $\alpha ds = \frac{ds}{MR}$, aut $MR = \frac{1}{\alpha}$. Cum itaque curua A M m talis ſit, vt habeat radium oſculi vbique conſtantem: patet eam nullam aliam eſſe poſſe, praeter circularem. Figura 1.

§. 5. Haec quidem rotunditas perfecta, Terrae ex Obſeruationibus Aſtronomicis aſſerta, vera tantum eſt, et cum figura Terrae Actuali concordat, ſi minutiae quaedam itinerum terreſtrium Eleuationibus Poli analogorum, de quibus noſtro demum tempore controuerſia

 na-

nata eſt, negligantur. Suadent vero rationes Phyſicae, et a *Newtono* Princ. Lib. III. Prop. 18. quaſi Axiomatis loco aſſumitur, Terram perfectiſſimam rotunditatem habituram fore, ſi motu Vertiginis deſtituatur, et ſimul olim tota fluida fuiſſet. Ponamus enim haec tria: 1. Terram motu Vertiginis deſtitui, 2. eſſe fluidam, et vbique homogeneam; et 3. grauia omnia niti verſus interiora globi terreſtris; quorum illud, nemine contradicente, ſupponi poteſt; iſtud ſufficit, ſi Terra olim fluida fuerit, aut, ſi non plane fluida fuerit, ex materia vniformiter molli conſtiterit, vel etiam talis ſit, vt figuram, quam nunc habet, conſeruare poſſet, ſi etiam nunc fluida fieret; hoc vero neceſſario ita ſe habere debet, niſi partes Terrae ſint dispergendae: ſequetur ex his, quod directio grauium omnium in Terrae ſuperficie poſitorum Figura 2. debeat eſſe perpendicularis ad hanc ſuperficiem. Nam ſit Terrae ſuperficies PE, atque in ea particula grauis quaecunque D, quae habeat niſum grauitatis ſuae in directione D6 ad ſuperſiciem PE non normali: reſoluatur hic niſus D6 in duos laterales, Tangentialem nempe $D\alpha$, et Normalem $D\gamma$; idem ergo tunc erit, ac ſi particula D traheretur a potentiis $D\alpha$ et $D\gamma$. Cum vero directioni tangentiali $D\alpha$ nihil reſiſtat, quia tota extra ſuperficiem PE cadit: ſequeretur, particulam D verſus eam directionem moueri debere, et ſeparari a Terrae corpore, quod contra manifeſtam experientiam eſt. Ceſſat vero hoc incommodum, ſi directio particulae grauis D ſtatuatur perpendicularis ad Terrae ſuperficiem, quia tunc particulae vicinae vi tangentiali reſiſtunt. Aliam demonſtrationem huius proprietatis grauium nium, ab hac diuerſam, habet quoque *Hermannus*, Phoron. pag. 363. ex deſcenſu grauis, quantum is fieri poteſt, maximo, petitam. Adiungamus itaque tribus prioribus ſuppoſitis hoc quartum, directionem nempe grauium perpendicularem eſſe ad ſuperficiem Terrae; ſine qua lege neque nauis ſupra mare quieta permanere, neque ipſae maris aquae ſuſtinere pondera ſua poſſent; ita vt Cel. *de Mairan* hunc effectum pro inuiolabili naturae vniuerſae lege habeat, in Comm. Acad. Sc. 1720, facillime poterit euinci, Terrae figuram eſſe debere perfectiſſime circularem. Sit enim Terra CAM pertuſa vsque in centrum C duobus canalibus communicantibus AC et MC, quorum vterque perpendicularis ſit reſpectiue ad A et M; debebunt certe haec pondera aquarum in canalibus contentarum inter ſe aequari. Sunt vero haec pondera aquarum, ſi canales ſint aeque ampli, et aqua vniformiter denſa, vti ipſae rectae CA et CM, quare poſita $AP = x$, $PM = y$, erit MC normalis; PC vero ſubnormalis curuae AM; et hinc ob $CA = CM$, erit $x + \frac{y\,dy}{dx} = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$, vel $x\,dx + y\,dy = y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ aut vero etiam, $-dx = \frac{2xy\,dy - y^2 dx}{x^2}$, quae aequatio integrata efficit ſequentem $Cx - x^2 = y^2$, quae manifeſto indicat, curuam AM debere eſſe circularem, cuius diameter $= C$, vt prioribus ſuppoſitis reſpondeat. Figura 3.

§. 6. Ponendum itaque omnino erit, primitiuam Terrae figuram fuiſſe perfecte ſphaericam; niſi ſimplicitati naturae vim inferre velimus. Statutum hoc etiam eſt a praecipuis Philoſophorum hodiernorum. Quo praemiſſo,

missso, accedam ad sententiam, de figura Terrae determinanda, Hugenianam, qui, occasione ex inclyta illa Richerii obseruatione, de abbreuatione penduli Parisiensis prope aequatorem, arrepta, gradum quasi atque aditum ad indagandam Telluris figuram primus aperuit.
Figura 4. Sit hunc in finem Telluris figura Primitiua AHE, quam *Hugenius* posuit Circularem, ponam ego vero curuam qualemcunque; ex huius rotatione circa Axem AL oriatur corpus Terrae primitiuum, et pergat deinde Terra gyrari semper circa eundem axem AL. Quoniam itaque Terra ponitur tota fluida, et rotari aequabiliter circa AL, orietur in quolibet eius superficiei puncto, ex. gr. H, vis centrifuga, quae pellet corpusculum H in directione BH, perpendiculari ad AL, sursum, ita vt hoc corpusculum peruenturum sit in G. Quare Terra figuram suam primitiuam non retinebit, sed assumet aliam AGF, quae indaganda est. Posset quidem videri, quod, accedente motu vertiginis, Terra assumere debeat figuram
Figura 5 BDF ex figura primitiua ADE, ita vt, manente eadem materiae quantitate, in Polo A ea tantum introcedat, quantum in F pristinos limites suos egreditur. Sed non possum mihi persuadere, quod hoc ita sit. Sequeretur enim exinde, quod necessario punctum aliquod Terrae primitiuae D maneat inuariatum, quamuis conatus centrifugus ibi adsit. Quare malo supponere: punctum Polare A manere inuariatum in Terra Primitiua et Actuali; sed ad extensionem AGF conciliandam Fig. IV., materiam in AHEL contentam fieri successiue rariorem pergendo a Polo versus Aequatorem. Con-
Figura 4 siderabo nunc particulam H, habebit ea, ante motum Verti-

Vertiginis Terrae, grauitatem ſuam abſolutam, et, ex Hugenii mente, in omnibus Terrae locis conſtantem, aequalem nempe illi grauitati, quae eſſet ſub Polo ipſo, cuius directio erit perpendicularis ad ſuperficiem AHE, nempe HC; producatur haec Normalis CH in directum arbitrarie, vsque in I, et exponat recta HI pondus abſolutum et conſtans corporis H, quod vocabo p. Concipiatur nunc, corpus H eſſe in I, atque trahi ibidem pondere ſuo abſoluto IH, et vi centrifuga IK vel HG: efficient hae duae vires agentes, vt corpus I ſequatur Diagonalem IG Parallelogrammi IHGK; quare in Terra Actuali AGF directio grauium erit IGD, quae recta GD proinde normalis ſit oportet ad ſuperficiem Terrae actualis AGF. Itaque poſitis $FL = a$, $AL = b$, $EL = c$, $LB = x$, $BG = y$, $BH = u$, et vi centrifuga in $F = n$, repraeſentabit punctum A Terrae Polum, recta GB Parallelum, et recta FL Aequatorem. Quoniam igitur vires centrifugae corporum diuerſos circulos tempore eodem periodico percurrentium, ſunt in ratione directa radiorum illorum circulorum: erit $FL(a):BG(y) = n:\frac{ny}{a}$, quae erit vis centrifuga corporis conſiderati G. Ob HC normalem ad AHE, erit ſubnormalis $BC = -\frac{udu}{dx}$. Ponendum nunc eſt, rectam KG produci in M, duci rectam GN, parallelam cum AL, et, iunctis punctis G, C, eſſe rectam GC parallelam ipſi HC, vel GM, ob puncta H et G fere coincidentia. Quo poſito, erunt triangula GBC et MNG ſimilia; igitur $BC(\frac{-udu}{dx}):BG(y) = NG(x):NM = \frac{yxdx}{-udu}$. Porro, ob GD normalem ad AGF, erit ND

 ſub-

ſubnormalis $= \frac{x\,dx}{-dy}$. Erit etiam $GC = \sqrt{}(BC^2 + BG^2) = \frac{\sqrt{}(u^2du^2 + y^2dx^2)}{dx}$, et habebitur analogia haec ſequens, nempe: $BC\left(\frac{-u\,du}{dx}\right) : GC\left(\frac{\sqrt{}(u^2du^2+y^2dx^2)}{dx}\right) = NG(x) : MG = \frac{x\sqrt{}(u^2du^2+y^2dx^2)}{-u\,du}$. Ob parallelas GB et FM, erunt quoque anguli IGH, et GDM aequales, et hinc triangula IHG et GMD ſimilia, quare orietur analogia ſequens: $IH(p) : HG\left(\frac{ny}{a}\right) = GM\left(\frac{x\sqrt{}(u^2du^2+y^2dx^2)}{-u\,du}\right) : MD = NM - ND = \frac{xy\,dx}{-u\,du} + \frac{x\,dx}{dy}$. Ergo extremis et mediis in ſe ductis, factaque diuiſione per x, oritur Aequatio generalis pro natura curuae AGF haec ſequens: $\frac{p\,dx}{dy} - \frac{py\,dx}{u\,du} = -\frac{ny\sqrt{}(y^2dx^2+u^2du^2)}{a\,u\,du}$. Si igitur determinetur ſpecies curuae AHE, dabitur u in meris x et conſtantibus; quo dato habebitur Aequatio ſpecialis differentialis curuae quaeſitae AGF.

§. 7. Ponamus, ex mente Hugenii, Terram primitiuam fuiſſe perfecte ſphaericam, hoc eſt, curuam AHE eſſe circulum, cuius radius $LA = b$, erit $x^2 + u^2 = b^2$, et $u\,du = -x\,dx$; quo valore ſubſtituto, oritur Aequatio differentialis curuae AGF haec ſequens: $\frac{p\,dx}{dy} + \frac{py}{x} = \frac{ny\sqrt{}(x^2+y^2)}{ax}$, quae legitime reducta praebet ſequentem aequationem $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{}(x^2+y^2)} = \frac{ny\,dy}{ap}$, cuius integralis eſt, adiecta conſtante arbitraria poſtmodum determinanda, $C + \sqrt{}(x^2+y^2) = \frac{ny^2}{2ap}$. Obſeruandum vero eſt, quod abeunte x in o, fiat $y = a$, vnde deducitur $C = \frac{na}{2p} - a$, et aequatio completa eſt $\sqrt{}(x^2+y^2) = \frac{ny^2}{2ap} + a - \frac{na}{2p}$,

quae

quae ab Asymmetria liberata, et posito $\frac{ap}{n}=f$, membrisque ordinatis, sit Aequatio curuam AGF exprimens $y^4=(4f^2+2a^2-4af)y^2+4f^2x^2+4a^3f-4a^2f^2-a^4$, quae est aequatio *Hugeniana*, quam dedit in *Discursu de la cause de la pesanteur*, multo operosius deductam; nimirum ante inuentum Calculum Integralem, et ab eo pendentem methodum tangentium inuersam. Eandem hanc aequationem, pro casu *Hugeniano*, dedit quoque Cel. *Hermannus* in *Responsione ad Considerationes secundas Nieuwentitii*, *pag.* 35. *eiusque in Phoronomia* dedit Constructionem Syntheticam pag. 364. Imo vero eam adhuc ex principio aequilibrii in canale inflexo deduxit pag. 365. Patet vero ex his: directionem grauium in Terra Actuali *Hugeniana*, esse non versus centrum Terrae L, sed iuxta rectam GD.

§. 8. In praecedente aequatione determinata fuit constans arbitraria C ex eo, quod euanescente x, fiat $y=a$. Potest vero eadem constans etiam inueniri ex eo, quod euanescente y, fiat $x=b$, ex quo fit $C=-b$, quare erit $-b=\frac{na}{2p}-a$, aut $2bp=2ap-an$, quare orietur $a:b=LF:LA=2p:2p-n$; est vero, quod postea § 11. independenter ab his demonstrabitur, $n=\frac{p}{289}$; quare $LF:LA=2:2-\frac{1}{289}=578:577$, quae est proportio, quam iuxta *Hugenii* placita habet in Terra Actuali diameter Aequatoris ad axem per Polos ductum.

§. 9. Extracta radice aequationis inuentae §. 7. oritur $y^2=2f^2+a^2-2af+2f\sqrt{(x^2+(f-a)^2)}$, vnde apparet, curuam AGF in hac hypothesi non posse esse Sectio-

Sectionem Conicam, nisi fit $f = a$, quo facto fiet $y^2 = a^2 \pm 2ax$. Quicquid vero curuarum ex hac suppositione prodeat, quarum vnam consideravit *Hugenius*; neutra cum natura consistere potest, quia est $f = a$, hoc est, $f = \frac{ap}{n} = a$, aut $p = n$. Deberet itaque vis centrifuga corporis in aequatore terrestri positi plane exhaurire pondus omne corporis; adeoque sub Aequatore corpora nullum haberent pondus, quod experientiae plane repugnat. Vt vero etiam sciatur, an pro figura Terrae actuali assumendum sit in valore ipsius y^2, ab initio huius §. inuento $+ 2f\sqrt{(xx + (f-a)^2)}$ an vero $- 2f\sqrt{(xx + (f-a)^2)}$ consideretur, quod abeunte x in o, fiat $y = a$, hoc autem casu erit $a = f \pm (f-a)$. Si iam assumeretur signum $+$, orietur $a = f = \frac{ap}{n}$ hoc est $p = n$, quod experientiae repugnat. Si vero assumatur signum $-$, orietur $a = a$, quod est verissimum, itaque pro natura curuae figurae terrestris actualis, assumi debet aequatio $y^2 = 2f^2 + a^2 - 2af\sqrt{(x^2 + (f-a)^2)}$.

§. 10. Nituntur praecipua solutionum praecedentium eo fundamento, quod assumto motu Terrae circa axem suum 17 vicibus celeriori quam nunc est, vis centrifuga corporis alicuius sub Aequatore positi aequalis futura sit toti huius corporis ponderi absoluto. Id
Figura 6. sequentem in modum demonstrat *Hugenius*: Sit pendulum simplex AG oscillans per arcum minimum GBH; notum est ex doctrina pendulorum, quod vocata longitudine penduli $AB = l$, grauitatis actione $= g$, sit tempus per arcum $GBH = \frac{\pi\sqrt{2l}}{\sqrt{g}}$, posita ratione Diametri

tri ad Peripheriam $= 1 : \pi$, vel posita grauitatis actione g constanti, erit idem tempus per GBH, hoc est tempus vnius oscillationis $= \pi \sqrt{2l}$. Huic asserto iungatur alterum, nempe: si corpus quoddam reuoluatur aequabiliter in peripheria circuli, celeritate debita altitudini A, ita vt celeritas ipsa sit $= \sqrt{A}$: erit huius corporis vis centrifuga ad pondus ipsum corporis, vti 2 A ad radium circuli, in quo mouetur corpus; hoc est, vocato pondere corporis $= p$, vi centrali $= v$, et radio circuli in quo mouetur $= r$, erit $v : p = 2A : r$, vel $v = \frac{2Ap}{r}$. Huius circuli peripheria est $= 2\pi r$, et celeritas qua corpus circumuoluitur $= \sqrt{A}$, igitur $\frac{2\pi r}{\sqrt{A}}$ erit tempus, quo haec peripheria absoluitur a corpore; quod tempus, si debeat esse aequale tempori duarum oscillationum penduli, hoc est, eius itui et reditui, poni debet $\frac{2\pi r}{\sqrt{A}} = 2\pi \sqrt{2l}$, vnde fit $\frac{r^2}{2A} = l$. Atque si insuper etiam debeat esse vis centrifuga aequalis ponderi absoluto corporis, poni debet $\frac{2Ap}{r} = p$, vnde fit $2A = r$, qui valor in aequatione iam inuenta $\frac{r^2}{2A} = l$ substitutus, efficit $r = l$; hoc est: si corpus aliquod moueatur aequabiliter in circulo, cuius radius est r, ea quidem celeritate, vt vis centrifuga et pondus eius sese destruant: absoluet hoc corpus vnicum circuitum sui circuli eo tempore, quo pendulum longitudinis r facit duas oscillationes; vel, eo tempore, quo radius circuli in quo mouetur facit duas oscillationes minimas. Igitur in applicatione ad Terram, si corporis alicuius sub Aequatore circa Terram reuoluentis vis centrifuga debeat exaequare pondus huius corporis: neceſſe eſt, vt hoc corpus eo tempore feratur ſemel circa Terram, quo radius Telluris faceret duas oſcillationes; quod itaque tempus duarum oſcillationum radii Telluris indagandum reſtat. Cum experientia doceat, quod pendulum longitudinis 881 dimidiarum linearum Pariſienſium abſoluat oſcillationem vnicam tempore vnius minuti ſecundi, quaeritur quo tempore abſoluat oſcillationem vnicam pendulum 5649350400 dimidiarum linearum, quot quidem continet radius Terrae. Quoniam igitur longitudines pendulorum ſunt in ratione duplicata temporum, quibus ſingulae oſcillationes fiunt, erit vocato tempore in minutis ſecundis vnius oſcillationis a radio Terrae factae x, haec analogia: $881 : 5649350400 = 1'' : x^2$, vnde oritur x, vel tempus, quo radius Terrae vnicam oſcillationem abſolueret $= 2532''$, vel $42'\, 12''$, ergo idem radius duas oſcillationes abſolueret tempore $1^h\, 24'\, 24''$, vel $1^h\, 24\tfrac{1}{2}'$, vti ponit *Hugenius*. Terra autem in Aequatore, reſpecta Fixarum, abſoluit vnicum circuitum tempore $23^h\, 56'$, et corpus, cuius vis centrifuga aequaret pondus ipſius, circumraperetur tempore $1^h\, 24'\, 24''$, vnde haec tempora ſunt vti 86160 ad 5064, vel vti 17 ad $1\tfrac{72}{5064}$, hoc eſt, quam proxime, vti 17 ad 1. Itaque ſi corpus aliquod ſub aequatore ferretur 17 vicibus celerius quam Terra ipſa: nullam haberet grauitatem. Ex quo fundamento etiam *Hugenius*, hypotheſi ſuae grauitatis innixus, ſtatuit, materiam grauificam 17 vicibus celerius circa Terram moueri, quam mouetur Terra ipſa circa axem.

§. 11.

§. 11. Si Terra 17 vicibus celerius moueretur ac nunc, eſſet corporis alicuius ſub Aequatore poſiti celeritas, ad celeritatem quae nunc eſt, vti 17 ad 1. ſed in circulis aequalium diametrorum vires centrifugae ſunt in duplicata ratione celeritatum; igitur poſita vi centrifuga ſub Aequatore, qualis nunc reuera eſt, $= n$, eſſet in ſtatu Terrae 17 vicibus celerius motae, ibidem vis centrifuga $= 17^2 . n = 289 n$. Sed in hoc caſu vis centrifuga eſſet praeciſe aequalis ponderi toti ipſius corporis (§. 10.) ergo $289 n = p$, vel vis centrifuga in ipſo Telluris aequatore, hoc eſt, $n = \frac{p}{289}$, quod ſupra (§. 8.) ſuppoſuimus.

§. 12. Ex Mechanicis conſtat, tempus oſcillationis per arcum infinite paruum eſſe $= \frac{\pi \sqrt{2l}}{\sqrt{g}}$. Et quoniam vires centrifugae corporum diuerſos circulos tempore eodem percurrentium ſunt in ratione directa radiorum illorum circulorum: erit $FL : GB =$ vis centrifuga in Aequatore $(\frac{p}{289})$: vim centrifugam Paralleli BG $= \frac{p.GB}{289.FL} = GR$. Haec vis centrifuga agit iuxta directionem BG in corpus G, ſed ſimul afficit quoque directionem grauitatis IGD. Vt itaque innoteſcat, quantam ponderis abſoluti partem deſtruat haec vis centrifuga, reſoluatur ea in duas alias, $G\beta$ directioni grauitatis perpendicularem, et $G\alpha$ directioni grauitatis directe contrariam; atque erit completo rectangulo $\alpha G \beta R$, et poſito ſinu toto $= 1$, ſin. $R\alpha G (1) : GR (\frac{p.GB}{289.FL} =$ ſin. $\alpha RG : \alpha G = \frac{p.GB}{289.FL} \times$ ſin. αRG. Eſt autem ſinus $\alpha RG =$ Figura 4.

Gg 2 Coſ.

Cof $\alpha GR =$ Cof. $BGD =$ Cof. BHL quam proxime, hoc eft, fin. $BLH = \frac{BH}{HL} = \frac{GB}{FL}$, quo fubftituto fit $\alpha G = \frac{p.GB^2}{289.FL^2}$. Cum igitur haec portio vis centrifugae in G directe in contrarium agat grauitati in G, nempe ipfi lG, fequitur, grauitatem abfolutam hac portione minuendam effe, vt habeatur grauitas actualis in puncto $G = p - \frac{p.GB^2}{289.FL^2}$. Itaque in expreffione generali, qua duratio ofcillationis per arcum aliquem minimum indicatur, $\frac{\pi\sqrt{2l}}{\sqrt{g}}$, loco ipfius g fubftitui debet $p - \frac{p.GB^2}{289.FL^2}$ vt habeatur tempus ofcillationis vnicae penduli in parallelo BG; quo facto, erit tempus ofcillationis vnicae penduli in loco $G = \frac{\pi\sqrt{2l}}{\sqrt{(p - \frac{p.GB^2}{289.FL^2})}}$. Pofitis itaque longitudine penduli a grauitate abfoluta folicitati, hoc eft, penduli in ipfo Polo terreftri A pofiti, cuius penduli Polaris longitudinem ponam $= l$, et longitudine penduli alterius in Parallelo quocunque, BG, $= x$, erit ob aequalia tempora ab his pendulis infumta, $\frac{\pi\sqrt{2x}}{\sqrt{(p - \frac{p.GB^2}{289.FL^2})}} = \frac{\pi\sqrt{2l}}{\sqrt{p}}$, vnde fit $x = l - \frac{l.GB^2}{289.FL^2}$; hoc eft: pendulum Polare fingula minuta fecunda pulfans, debet in loco G abbreuiari parte $\frac{GB^2}{289.FL^2}$ fui, vt in G quoque fingula minuta fecunda ofcillet; atque erit generaliter haec analogia inftituenda, vti quadratum finus totius (FL^2), ad quadratum Cofinus Latitudinis loci G (BG^2) ita $\frac{1}{289}$ ad abbreuiationem penduli in loco datae Latitudinis G faciendam, vt in loco G fingula minuta fecunda pendulum ita abbreuiatum ofcillet; quam analogiam *Hugenius* quoque, fed alio modo, inuenit. Ex aequatione autem ante

ante inuenta, $x = l - \frac{l.GB^2}{289.FL^2}$, ſequitur haec analogia: Longitudo penduli polaris (l) eſt ad longitudinem penduli in loco G (x) $= 1 : 1 - \frac{GB^2}{289.FL^2}$; atque ob pondus actuale in G $= p - \frac{p.BG^2}{289.FL^2}$, fit analogia altera: pondus abſolutum (p) eſt ad pondus in G $= 1 : 1 - \frac{GB^2}{289.FL^2}$; quare, combinando has duas analogias, habebitur: longitudo penduli polaris eſt ad longitudinem penduli iſochroni in loco G, vti pondus abſolutum, vel pondus polare, ad pondus in G; vel, vti *Newtonus* hoc effert, longitudines pendulorum aequalibus temporibus oſcillantium, ſunt vti grauitates. *Princip. Lib. III. Prop.* 20.

§. 13. Quoniam longitudo penduli Pariſienſis ſingula minuta ſecunda oſcillantis, iuxta *Caſſinum* eſt 3 pedum $8\frac{1}{2}$ lin. Pedis Pariſini Regii, ſiue 881 dimidiarum lin.; atque ex analogia paulo ante inuenta abbreuiatio penduli Pariſienſis debet eſſe $\frac{1}{867}$ penduli Polaris, poſita latitudine Pariſiorum 48° 51′, erit retenta denominatione penduli polaris l haec aequatio: $l - \frac{l}{867} = 881$ dimid. lin. vnde deducitur longitudo penduli Polaris, vel l, $= 882.323$ dimid. lin. vel 3 pedum $9\frac{323}{2000}$ lin. pro qua longitudine *Hugenius* aſſumſit 3 ped. $9\frac{1}{6}$ lin. His itaque praeſuppoſitis calculaui ſequentem Tabellam, in qua videre licet, quae in praecipuis Terrae latitudinibus debeat eſſe, iuxta *Hugenii* ſententiam, proportio abbreuiationis penduli Polaris, Abbreuiatio ipſa, et denique quae debeat eſſe ipſa longitudo talis penduli, quod ſingulas oſcillationes ſimplices tempore vnius minuti ſecundi abſoluit; denique adiuncta quoque eſt longitudo penduli ex ſententia *Newtoni*, vt differentia eo facilius perſpiciatur.

Latit. ° ′	*Abbr. prop.*	*Abbreuiatio.*	*Pend. Hugen.* ped. lin.	*Pend. Newt.* ped. lin.
0 0	$\frac{1}{289}$	3.053 dim. lin.	3 7.635	3 7.468
4 56	$\frac{1}{291}$	3.032	3 7.645	3 7.481
10 0	$\frac{1}{298}$	2.961	3 7.681	3 7.526
20 0	$\frac{1}{327}$	2.698	3 7.812	3 7.692
30 0	$\frac{1}{385}$	2.292	3 8.015	3 7.948
40 0	$\frac{1}{49}$	1.793	3 8.265	3 8.261
48 51	$\frac{1}{660}$	1.323	3 8.500	3 8.556
50 0	$\frac{1}{707}$	1.260	3 8.531	3 8.594
60 0	$\frac{1}{1156}$	0.763	3 8.780	3 8.907
64 34	$\frac{1}{1567}$	0.563	3 8.880	3 9.032
70 0	$\frac{1}{2470}$	0.357	3 8.983	3 9.162
80 0	$\frac{1}{9584}$	0.092	3 9.115	3 9.329
90 0	$\frac{1}{\infty}$	0.000	3 9.161	3 9.387

In Insula Cayenna prope Aequatorem, cuius latitudo est 4° 56′, inuenta fuit a *Richerio* decurtatio penduli Parisini facienda $1\frac{1}{4}$ lin. vel 1. 250 lin. quae a longitudine penduli Parisini subtracta relinquit 3 pedes 7. 250 lin. pro longitudine penduli in dicta Insula ex obseruatione reperta; ex Theoria autem, vi Tabulae antecedentis, eadem longitudo deprehenditur 3 ped. 7. 645 lin. igitur Theoria excedit obseruationem $\frac{395}{1000}$ lineae. Archangelopoli in Russia, cuius vrbis Latitudo est 64° 34′ inuentus est excessus penduli simplicis supra pendulum Parisiense a Clar. *de la Croyere* $\frac{3}{20}$ lineae vel 0. 150 lin. ex Tabula autem antecedente reperitur idem excessus, iuxta Theoriam *Hugenianam*, 0. 380 lin. itaque Theoria rursus excedit obseruationem quantitate $\frac{230}{1000}$ lin. Quam discre-

discrepantiam Theoriae et Experientiae, in minutiis quidem consistentem, *Hugenius* nulli alii causae, nisi summae difficultati penduli longitudinem accuratissime obseruandi, adscribit. Posset etiam adscribi incertitudini longitudinis penduli Parisini; nam in definienda eius longitudine notabiliter inter se variant Celeberrimi *Galli*.

§. 14. Restat nunc etiam assignandus angulus DKH, quem nempe in figura Terrae actuali PDE efficit directio penduli actualis KH cum recta KDC in Terrae centrum C ducta a puncto suspensionis K, quem angulum *Hugenius* non reperire docet, sed eum tantum Parisiis indicat esse $5' 45''$. Pro hoc triangulo KDH igitur generaliter soluendo, et angulo DKH, ex data ratione laterum KD et DH, et angulo ipso KDH, qui nempe pro angulo Latitudinis censetur, inueniendo, considerandum est, rectam KD exprimere pondus absolutum p vocatum, rectam DH vero exprimere vim centrifugam Paralleli DO, quae ante inuenta est $= \frac{p.DO}{289.EC}$. Erit itaque posito sinu toto $= 1, = EC$, et cosinu Latitudinis $= b$, $KD:DH = p : \frac{pb}{289} = 289 : b$, ex quo fit $KD + DH : KD - DH = 1 + \frac{b}{289} : 1 - \frac{b}{289}$. Iam vero ex Trigonometria plana notum est, esse in quouis triangulo summam laterum ad differentiam eorum vti tangens semisummae angulorum quaesitorum ad tangentem semidifferentiae eorundem angulorum. Cum igitur semisumma angulorum K et H data sit, ob angulum datum $KDH = CDO = DCE =$ Latitudini loci D datae, poterit inueniri ex dicta analogia semidifferentia angulorum K et H, et consequenter etiam ipse angulus K. Figura 7.

Pona-

Ponatur ergo tang. $\frac{H+K}{2}=t$, tang. $\frac{H-K}{2}=z$, atque erit $1+\frac{b}{289}:1-\frac{b}{289}=t:z$, vnde eruitur $z=t:\frac{1-\frac{b}{289}}{1+\frac{b}{289}}t$, quae operatio vt solis Logarithmis absolui queat, ponatur in

Figura 8. semicirculo BDGA radius CB$=1$, et anguli BCD cosinus $=CE=\frac{b}{289}$, $\frac{1}{2}$BCD vero tangens $=\theta$, erit itaque $BE=1-\frac{b}{289}$, $AE=1+\frac{b}{289}$. Porro ob $BD:DA=\frac{1}{2}BD:\frac{1}{2}BA=DH:HC$, et $BE:AE=BD^2:DA^2$, erit $BE:AE=DH^2:HC^2$. Est autem $DH:HC=\theta:1$, ergo $\frac{1-\frac{b}{289}}{1+\frac{b}{289}}=\theta^2$, consequenter $z=\theta^2 t$, et log. $z=2$ log. $\theta+$ log. t, ex quo oritur sequens regula: 1. Logarithmus Cosinus Latitudinis datae minuatur Logarithmo numeri 289, eritque residuum Logarithmus Cosinus anguli BCD. 2. Duplo Logarithmo Tangentis $\frac{1}{2}$BCD addatur Logarithmus tang. $\frac{H+K}{2}$, atque a summa subtrahatur duplum Logarithmi sinus totius, remanebit Logarithmus tang. $\frac{H-K}{2}$. 3. Ab inuenta semisumma $\frac{H+K}{2}$ subtrahatur inuenta semidifferentia $\frac{H-K}{2}$, et remanebit angulus minor K. Ex hoc fundamento computaui sequentem Laterculum:

Lati-

Latitudo Loci	*Angulus* K.
° ′	′ ″
0 0	0 0
10 0	2 5
20 0	3 51
30 0	5 10
40 0	5 53
44 57 1″	5 57
50 0	5 53
60 0	5 11
70 0	3 50
80 0	2 4
90 0	0 0

§. 15. Apparet ex hoc laterculo, quod angulus K, pergendo ab Aequatore versus Polum, crescat, et postea decrescat; itaque idem angulus alicubi erit maximus. Vt itaque determinetur illa Latitudo, in qua angulus K est maximus, sit eius sinus $= x$, Cos. $= y$. Latitudinis KDH vero sinus sit $= a$, cosinus $= b$. Antea ostensum est, esse KD:DH $= 289:b$, est autem KD:DH $=$ sin. KHD: sin. K $=$ sin. (K$+$D):sin. K $= ay + bx : x$, igitur erit $289x = aby + b^2 x$, vnde oritur $\frac{x}{y} = \frac{ab}{289 - b^2}$ $= \frac{a\sqrt{(1-aa)}}{288 + aa} =$ tang. K. Sumatur iam a pro variabili, et capiatur inuentae expressionis differentiale, quod, per methodum de maximis et minimis, statuendum $= o$, ex quo fiet aequatio sequens: $288\, da \sqrt{(1 - a^2)} - \frac{288\, a^2\, da}{\sqrt{(1-a^2)}} - a^2\, da \sqrt{(1 - a^2)} - \frac{a^4\, da}{\sqrt{(1-a^2)}} = o$ quae per da diuisa, et debito modo reducta, dabit $\sqrt{\frac{288}{577}} = a$, ex quo deducitur La- Figura 7.

titudo quaesita $= 44° \, 57' \, 1''$, in qua angulus K est maximus. Vt porro etiam acquiratur magnitudo ipsa anguli K maximi, substituatur valor huius a inuenti in formula $\frac{a\sqrt{(1-aa)}}{288+aa}$, et habebitur Tangens ipsa anguli K maximi $= \frac{1}{34\sqrt{288}}$, vnde apparet, angulum K maximum esse, quando est $5' \, 57''$.

§. 16. Si pendulum aliquod, Parisiis singula minuta secunda pulsans, transferatur sub Aequatorem terrestrem: esset tempus Parisiense $= \frac{\pi\sqrt{2l}}{2\sqrt{(p-\frac{pb^2}{289})}}$ per §. 12. tempus autem sub Aequatore terrestri $= \frac{\pi\sqrt{2l}}{2\sqrt{(p-\frac{p}{289})}}$, ergo tempus oscillationis vnicae huius penduli Parisiis $1''$, esset ad idem tempus sub Aequatore $= \sqrt{(1-\frac{1}{289})}$: $\sqrt{(1-\frac{b^2}{289})} = \frac{\sqrt{288}}{17} : \sqrt{(1-\frac{b^2}{289})}$. Sit in semicirculo AED, radius $CD = 1$, $CB = \frac{b}{17}$, eritque $BD = 1 + \frac{b}{17}$, $AB = 1 - \frac{b}{17}$, et $BE = \sqrt{AB \times BD} = \sqrt{(1-\frac{b^2}{289})}$. Est autem BE sinus anguli ACE, cuius cosinus est $= \frac{b}{17}$, qui ergo angulus per Logarithmos inueniri potest. Sit nunc sinus anguli $ACE = A$, eritque analogia: $1''$ est ad tempus aequatoreum penduli Parisiensis $= \frac{\sqrt{288}}{17} : A$, aut tempus aequatoreum $= \frac{17 A \times 1''}{\sqrt{288}}$ quod itaque tempus facillime per Logarithmos potest inueniri. Quia Parisiorum Latitudo est $48° \, 51'$, erit

Figura 9.

$lb =$

l. b = 9.8182474
l. 17 = 1.2304489

8.5877985 cui respondent 2° 13′ 6″
89 5960

ang. ACE - - - 87 4654

l. 17 = 1.2304489
l A = 9 9996740
l. 3600″″ = 3.5563025

14.7864254
$\frac{1}{2}$ l. 288 = 1.2296962

13.5567292
l. sin. t = 10 0000000

3 5567292 cui respondent 3603″″

cum igitur pendulum Parisiense sub Aequatorem translatum, inuariata sui longitudine, retardet singulis minutis secundis quantitate 3″″, retardabit illud spatio 24 horarum $\frac{1}{50}$ vnius horae, hoc est 1′ 12″, pro qua retardatione *Hugenius*, sine demonstratione adiuncta, posuit 1′ 5″.

§ 17. Ex hac igitur sententia *Hugeniana* sequitur, quod Terra circa Polos debeat esse paulo depressior, eleuatior autem sub Aequatore; ita quidem vt Axis per Polos ductus sit ad diametrum Aequatoris vti 577 ad 578. Ex quo deinde deducitur, quod Gradus in Meridiano terrestri mensurati pergendo ab Aequatore versus Polos, crescere debeant. Quod quidem hunc in modum ostenditur. Sit Quadrans Meridiani terrestris PNB, in P Polus, in B Aequator. Et quoniam Gradus in Terra Figura 10.

Hh 2 meti-

metimur et definimus lineis perpendicularibus ad superficiem Terrae, ope Instrumentorum Astronomicorum, sint duae tales rectae ad superficiem Terrae perpendiculares CD et FG, quae productae concurrent in aliquo puncto E Euolutae HEKX, si arcum GD comprehendunt valde paruum, eruntque DE, GE, duo radii osculi Curuae PGB, definientes ex. gr. minutum secundum GD, si angulus DEG sit vnius minuti secundi. Pari modo distantia NO erit vnius minuti secundi, si angulus NKO, factus a continuatione duarum perpendicularium LN, MO, sit vnius minuti secundi. Sed ex doctrina de Curuarum Euolutis intelligitur, Euolutam curuae PB habituram fore talem figuram, et situm, qualem repraesentat HEKX. Erunt autem, ob angulos GED, OKN aequales, sectores GED, OKN, similes, quare fiet analogia: GD : NO = DE : NK = minus ad maius; atque igitur in hac hypothesi gradus, pergendo ab Aequatore ad Polos, crescent; id quod eodem fere modo etiam demonstrauit Cel. *de Mairan*, *in Comm. Ac. Sc.* 1720. Habebunt itaque magnitudines graduum in meridiano terrestri inter se rationem directam radiorum osculi.

§ 18. Quodsi itaque, in Theoretica Graduum Terrae aestimatione, approximatione velimus esse contenti, res sequenti modo poterit tractari. Quoniam per §. 7. aequationem Terrae figuram exprimentem inuenimus sequentem, $\sqrt{(x^2+y^2)} = \frac{ny^2}{2ap} + a - \frac{na}{2p}$, et postea in §. 8. deductum fuit, esse $b = a - \frac{na}{2p}$, aut etiam $\frac{n}{2p} = \frac{a-b}{a}$, orietur ex priori aequatione, facta substitutione, haec

sequens:

sequens: $V(x^2+y^2)=\frac{ny^2}{2ap}+b$, et postea adhuc, pro $\frac{n}{2p}$ substituendo valorem inuentum $\frac{a-b}{a}$, haec: $V(x^2+y^2)=\frac{(a-b)y^2}{a^2}+b$, et denique, ponendo $a-b=c$, orietur aequatio $V(x^2+y^2)=\frac{cy^2}{a^2}+b$. Quaeratur iam curuae, hac aequatione expressae, radius osculi, sed, quoniam alias calculus prolixissimus oriretur, approximatione tantum, atque tali quidem, vt ob paruitatem ipsius $\frac{a-b}{a^2}$, hoc est, ipsius $\frac{c}{a^2}$, omnes dimensiones ipsius c, altiores quam prima, negligantur; et denique series *Newtoniana* pro extractione radicis quadratae adhibeatur. Quo facto, quoniam abscissis a centro computatis, et posito dy constante, radius osculi est $=\frac{ds^3}{-dy\,ddx}$, denotante ds Elementum Curuae, inuenietur is in hac curua quam proxime $\frac{a^2b-3cy^2}{a^2-2bc}$; et ex hoc sequetur, esse radium osculi in Aequatore BH $=\frac{a^2b-3ca^2}{a^2-2bc}$, quia ibidem fit $y=a$; et radium osculi in Polo PX $=\frac{a^2b}{a^2-2bc}$, quia hic fit $y=0$. Erit ergo Gradus sub Aequatore ad Gradum sub Polo vti radius osculi Aequatoris ad radium osculi sub Polo (§. 17.), hoc est, vti $b-3c:b$, vel, ob $c=a-b$, vti $4b-3a$ ad b, hoc est, ob $a:b=578:577$ vti 574 ad 577. Erit vero etiam differentia inter Gradum Polarem et Gradum N, Latitudinis BN, vti $\frac{a^2b}{a^2-2bc}-\frac{a^2b-3cy^2}{a^2-2bc}$, hoc est, vti $3cy^2$, ex quo patet, quod decrementa Graduum versus Aequatorem a Gradu Polari, sint inter se quam proxime in duplicata ratione ipsarum $N\alpha$, hoc est, Cosinuum Latitudinis. Pro determinando

 nunc

nunc Graduum maximo, hoc eſt, Polari, in Hexapedis Pariſinis, ſit Gradus Polaris magnitudo $= z$, et Gradus in loco alio N, Latitudinis datae, magnitudo e hexapedd.; eritque per priora $z : e = a^2 b : a^2 b - 3 c y^2$, ergo $z = \frac{a^2 b e}{a^2 b - 3 c y^2}$. Ponatur ſinus totus $= 1$, et Latitudinis Coſinus $= q$, eritque in Triangulo αNY ſinus totus $(1) : NY(a) =$ ſinus $\alpha YN(q) : \alpha N(y)$, vnde $y = aq$, qui valor ſubſtitutus, efficit $z = \frac{e}{1 - \frac{3 c a q}{b}}$. Vt haec magnitudo Logarithmis inueniri queat, ponatur in ſemicirculo

Figura 9 AED radius $AC = 1$, Coſinus anguli $BCE = \frac{q\sqrt{3c}}{\sqrt{b}}$, eritque $AB = 1 - \frac{q\sqrt{3c}}{\sqrt{b}}$, $BD = 1 + \frac{q\sqrt{3c}}{\sqrt{b}}$, et $BE^2 = 1 - \frac{3 c q^2}{b}$, quare $z = \frac{e}{PM^2}$. PM autem habetur per Logarithmos ex eo, quod ſit ſinus anguli BCE, cuius Coſinus per Logarithmos datur ex valore $\frac{q\sqrt{3c}}{\sqrt{b}}$. Aſſumam itaque cum *Newtono Princ. Lib. III. Prop.* 19. menſuram Gradus inter Latitudines 45° et 46° a *Caſſino* captam, hexapedarum Gallicarum 57292, atque facies calculi ineundi talis erit, poſitis $a = 578$, $b = 577$, $c = 1$, $e = 57292$,

Log. Coſ. Lat. 45°	- - -	9.8494850	
½ log. 3	- - -	0 2385606	
		10.0880450	
½ log. b	- - -	1 3805879	
		8.7074577 - -	2° 55′ 21″ BEC
			87 4 39 BCE

huius

huius BCE Logarithmus ſinus = logarith. BE eſt = 9. 9994347, quapropter porro ponendum erit

log. e + 2 log. rad. - - - -	24. 7580940
2 log. PM - - - -	19. 9988694
	4. 7592246

cui reſpondent in Tabulis 57441.

Erit igitur in Hypotheſi *Hugeniana* Gradus terreſtris meridiani ſub ipſo Polo, ſeu inter Latitudines 89° et 90°, = 57441 Hexapedarum *Gallicarum* quam proxime.

§. 19. Poſtquam obtinuimus magnitudinem Gradus Polaris, facile nunc erit inueſtigare magnitudines omnium reliquorum Graduum in integro Meridiani Quadrante. Nam ſit loci cuiuscunque N, in Meridiano PNB poſiti, Latitudinis BN Coſinus $= q$, magnitudo Gradus in N $= z - u$, et magnitudo Gradus Polaris $= z$, atque vti ante $\alpha N = y$, ſinus totus $= 1$. Erit ex praecedentibus $z : z - u = a^2 b : a^2 b - 3 c y^2$; itaque per conuerſam rationem orietur haec analogia $z : u = a^2 b \cdot 3 c y^2$, quare $u = \frac{3 c y^2 z}{a^2 b}$, vel ob $y = a q$, $u = \frac{3 c q^2 z}{b} = \frac{3 q^2 z}{b}$ ob $c = 1$. Quare decrementa Graduum a Gradu Polari haud difficulter poterunt obtineri. Ex quo fundamento ſequens enata eſt Tabella, Graduum *Hugenianorum*, quibus *Newtonianos* adiunxi, vt differentia eo melius pateat. Figura 10.

Lati-

Latitudo		*Grad. Hugen.*		*Grad. Newton.*
0	—	57142	—	56909
10	—	57151	—	56931
20	—	57177	—	56996
30	—	57217	—	57096
40	—	57266	—	57218
50	—	57318	—	57348
60	—	57366	—	57470
70	—	57406	—	57570
80	—	57432	—	57635
90	—	57441	—	57657

Differentias horum Graduum ſumenti ſtatim patebit, eas ab initio creſcere, et poſtea pari paſſu iterum decreſcere; quare alicubi in iis maximum dabitur, cuius locum etiam inueſtigabo. Sit igitur Quadrans meridiani terreſtris ADE, et in eo Latitudo quaecunque ED, cuius ſinus BC ſit p, Coſinus vero $BD = q$, poſito ſinu toto $= 1$. Sitque praeterea angulus DCd infinite paruus, vt coincidat eius ſinus cum arculo Dd, quem vocabo ds, eiusque coſinus erit $= \sqrt{(1 - ds^2)} = 1$. Erit itaque iuxta Trigonometriae leges, coſ. $(ED - Dd) = db = q + pds$; ſed ex praecedentibus eſt magnitudo Gradus in $D = z - u = z - \frac{3q^2z}{b}$, ergo magnitudo Gradus in d erit $= z - \frac{3zq^2 + 6zpqds}{b}$, et differentia igitur horum graduum erit $\frac{6zpqds}{b}$, quae quantitas aequalis eſſe debet maximo. Facta eius differentiatione habetur, ob z et ds conſtantes, $\frac{6zds(pdq + qdp)}{b} = 0$, aut

Figura 11.

vero

vero etiam $p\,dq = -q\,dp$. Eſt autem ob $q = \sqrt{(1-p^2)}$, $dq = \frac{-p\,dp}{\sqrt{(1-p^2)}}$, quo ſubſtituto, et facta diuiſione per dp, oritur $\frac{p^2}{\sqrt{(1-p^2)}} = \sqrt{(1-p^2)}$, vnde fit $2p^2 = 1$, et $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Notum autem eſt, quod $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ſit ſinus anguli ſemirecti; quare ſub Latitudine 45° differentia praefata omnium erit maxima.

§. 20. Poteſt vero etiam, non conſiderata Telluris figura primitiua, inueniri Curua figurae eius actualis *Hugeniana*, ſi hypothetice aſſumatur, grauitatem, ex materia quacunque vorticoſa oriundam, eius naturae eſſe, vt ea corpora quaecunque verſus fixum aliquod punctum vrgeat; vti quidem etiam ab *Hugenio* ipſo, nec non *Hermanno*, factum eſt, qui figuram actualem ſine conſideratione primitiuae eruerunt, quae ab antecedenti non differt. Illud igitur, quod mihi adhuc pertractandum reſtat, coniungam cum hoc ſolutionis modo, aſſumendo aliam adhuc hypotheſin, nempe, grauitatem in diuerſis Meridiani locis abſolutam non eſſe eandem, et aequalem ſemper Polari, vti *Hugenius* ſuppoſuit; ſed eam variare in ratione quacunque multiplicata diſtantiarum a Centro Terrae. Poſitis itaque, vt hucusque factum eſt, $BC = a$, $AC = b$, $CP = x$, $PM = y$, CM Figura 12.
$= z$, pondere abſoluto in $A = p$, vi centrifuga in Aequatore $B = n$, erit pondus abſolutum in Polo $A\,(p)$ ad pondus abſolutum in loco quocunque $M = AC^c : MC^c = b^c : z^c$, et hinc pondus abſolutum in M, quod hucusque cum *Hugenio* erat etiam p, iam in hac hypo-

theſi

thesi generaliori $= \frac{z^c}{b^c}p$. Per §. 6. est $a : y = n :$ vim centrifugam in $M = \frac{ny}{a}$. Pondus itaque M trahetur grauitate absoluta sua versus centrum Terrae C, quam exponat ipsa recta MC, et vim centrifugam in M exponat recta MN. Cum itaque corpus M trahatur ab vtraque recta MC et MN, sequetur id, completo Parallelogrammo MNQC, directionem Diagonalis MQ, quae igitur MQ normalis sit oportet ad Terrae figuram actualem AMB per §. 5. Erit itaque pondus absolutum in M $\left(\frac{pz^c}{b^c}\right)$ ad vim centrifugam in M $\left(\frac{ny}{a}\right)$ $= MC : MN = MC : CQ = z : CQ$, quare $CQ = \frac{nyb^c}{apz^{c-1}}$. Est autem OQ subnormalis, Abscissis a centro C sumtis, $= -\frac{xdx}{dy}$, quare $CQ = \frac{ydy + xdx}{dy} = \frac{zdz}{dy}$, ob $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Vnde aequatis his duobus valoribus ipsius CQ, habetur aequatio pro curua Terrae actuali AMB haec: $b^c nydy = apz^c dz$, quae integrata, adiecta constante C, efficit hanc: $C + \frac{b^c ny^2}{2} = \frac{apz^{c+1}}{c+1}$. Quoniam autem abeunte x in b, fiunt $y = o$, $z = b$, fit $C = \frac{apb^{c+1}}{c+1}$, atque rursus abeunte y in a, fiunt $x = o$, $z = a$, eruitur $C = \frac{pa^{c+2}}{c+1} - \frac{b^c na^2}{2}$; quare ae-

quatis

quatis his valoribus ipſius C, fit $\frac{b^c n}{2p} = \frac{a^{c+1} - b^{c+1}}{a.(c+1)}$. Poſito itaque in aequatione curuae, loco ipſius C, valore prius inuento $\frac{apb^{c+1}}{c+1}$, fit aequatio completa $\frac{ab^{c+1}}{c+1} + \frac{b^c n y^2}{2p} = \frac{az^{c+1}}{c+1}$, et ſuppoſito valore ipſius $\frac{b^c n}{2p}$, emergit tandem $a^2 b^{c+1} + (a^{c+1} - b^{c+1}) y^2 = a^2 (x^2 + y^2)^{\frac{c+1}{2}}$.

§ 21. Si iuxta *Hugenii* ſententiam grauitas abſoluta debeat eſſe vbique conſtans: debebit eſſe $\frac{pz^c}{b^c} = p$, quod aliter fieri non poteſt, niſi ponatur $c = 0$. Quo poſito emergit aequatio pro curua Terrae $b + \frac{(a-b).y^2}{a^2} = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, quae eadem eſt cum aequatione ſuperius § 18. inuenta. Si ponatur $c = 1$, hoc eſt, ſi grauitas corporum abſoluta diſtantiis locorum a centro Terrae ipſis directe proportionalis ſit, quem caſum examinauit Cel. *Hermannus Phoron. Lib. II. Prop.* 82. orietur aequatio pro curua Terrae $a^2 b^2 = b^2 y^2 + a^2 x^2$, quae eſt Ellipſis Conica, in qua Abſciſſis a centro computatis, ſemiaxis maior eſt $= a$, ſemiaxis vero minor $= b$. Si ponatur $c = -1$, ex aequatione integrata nihil ſequitur, ſed confugiendum erit ad differentialem $b^c n y dy = apz^c dz$, ex qua oritur $\frac{ny^2}{2b} = C + ap. \log. \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Aliis caſibus enumerandis ſuperſedeo: ſed hoc adhuc adiungo, debere in omnibus huius hypotheseos casibus semper esse $a > b$. Nam ob inuentam §. 20. aequationem $\frac{ab^c n}{2p} = \frac{a^{c+1} - b^{c+1}}{c+1}$, deberet $\frac{ab^c n}{2p}$ fieri quantitas negatiua, si esset $a < b$; quantitas autem $\frac{ab^c n}{2p}$ nequit fieri negatiua, nisi n, hoc est, vis centrifuga sub aequatore, esset negatiua; quod cum impossibile sit: sequitur, semper esse debere $a > b$, nisi Naturae leges plane inuertantur. Considerando autem aequationem ante allegatam $\frac{ab^c n}{2p} = \frac{a^{c+1} - b^{c+1}}{c+1}$, et ponendo $\frac{a-b}{a} = e$, elicitur $a^{c+1} = (b + ae)^{c+1} = b^{c+1} + (c+1).aeb^c + \frac{(c+1).c.a^2 e^2 b^{c-1}}{1.2} + \text{etc.} = b^{c+1} + (c+1).aeb^c + o$, si $\frac{a-b}{a}$, aut e, sit valde parua. Hinc deducitur porro $\frac{a^{c+1} - b^{c+1}}{c+1} = aeb^c$, quare habebitur $n = 2pe = \frac{2pa - 2pb}{a}$, vel denique $2pb = 2pa - na$, vnde deriuari potest analogia sequens: $a : b = 2p : 2p - n$, ex quo sequitur, in suppositione, quod excessus ipsius a supra b sit non nimis magnus, seruare axes BC et AC quam proxime eandem rationem, etiamsi grauitates absolutae sint in quacunque ratione multiplicata ipsarum MC, semper vero esse diametrum Aequatoris maiorem Axe per Polos ducto, vt modo indicatum est; vnde etiam grauitates sub Polo et sub Aequatore erunt quam proxime semper in ratione constante.

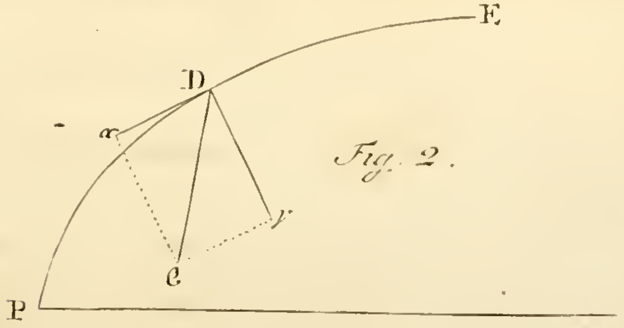


Fig. 2.

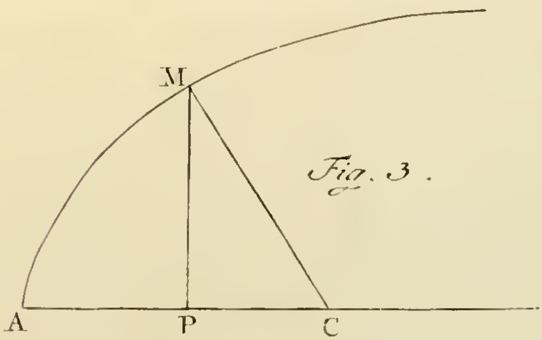


Fig. 3.

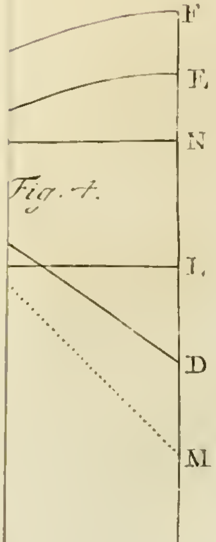


Fig. 4.

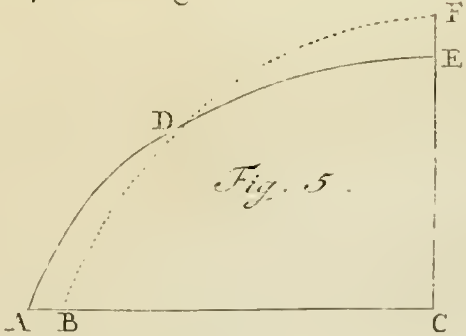


Fig. 5.

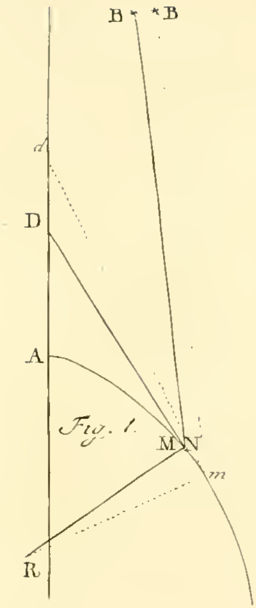


Fig. 1.

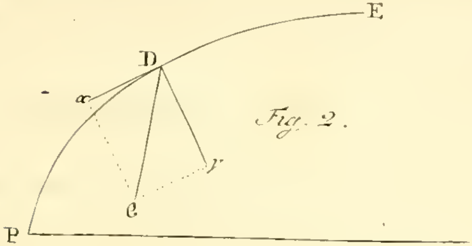


Fig. 2.

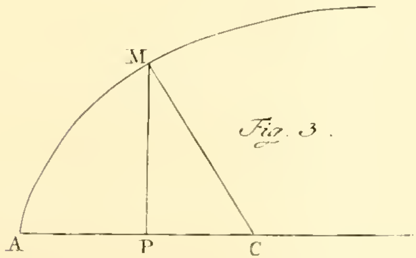


Fig. 3.

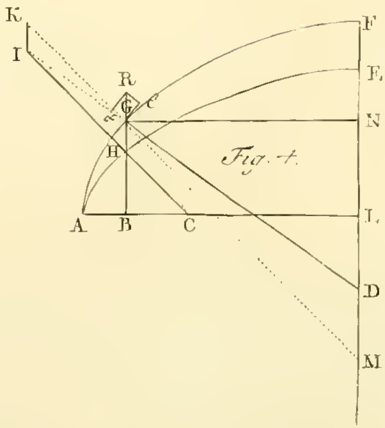


Fig. 4.

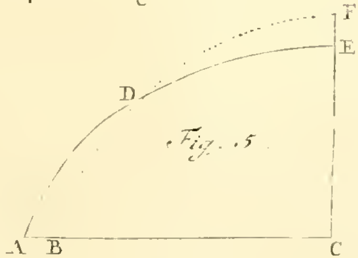
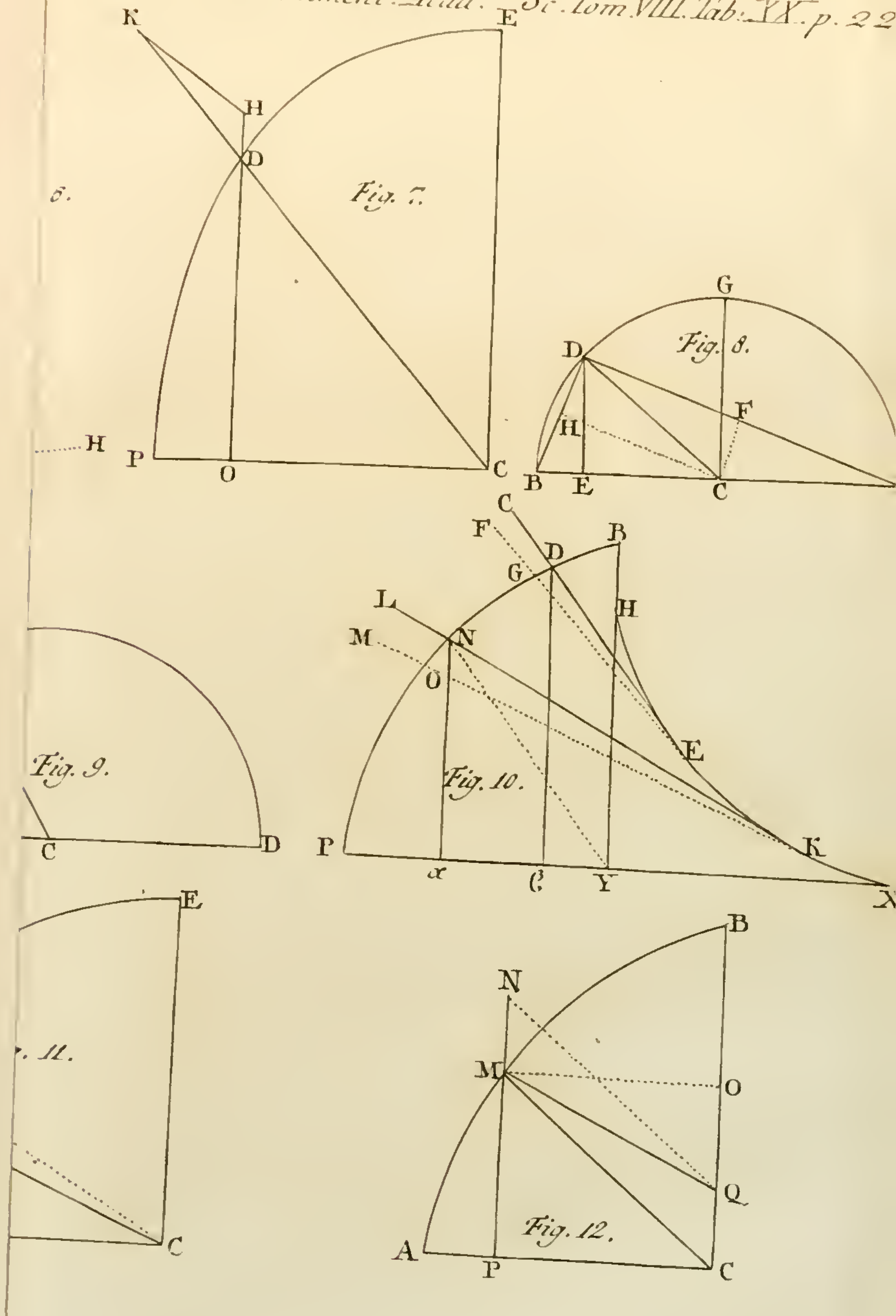
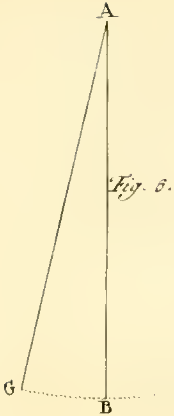
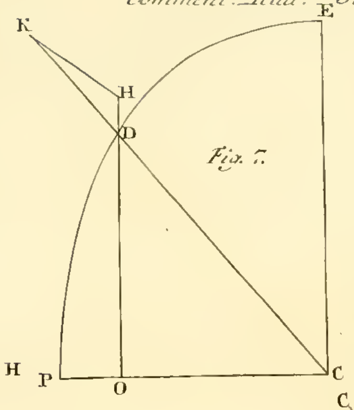


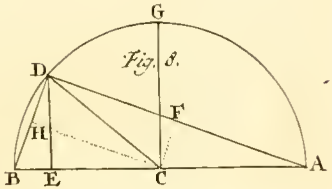
Fig. 5.

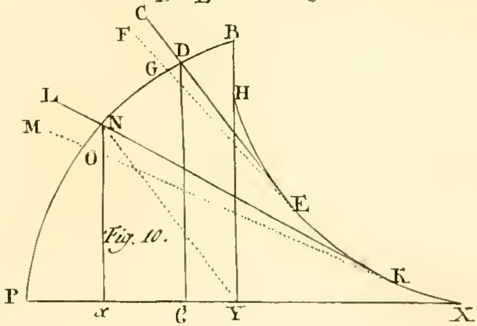


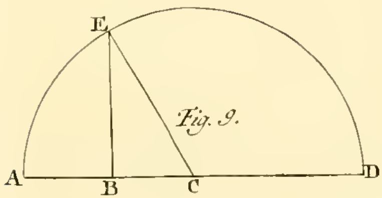
6.
Fig. 7.
K
H
D
E
P
O
C
Fig. 8.
G
D
F
H
B
E
C
Fig. 9.
C
D
Fig. 10.
C
F
B
D
G
L
H
M
N
O
E
K
P
α
β
Y
X
. 11.
E
C
Fig. 12.
B
N
M
O
Q
A
P
C

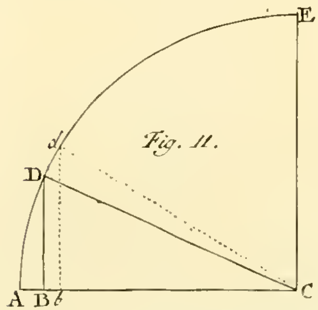

A
Fig. 6.
G
B

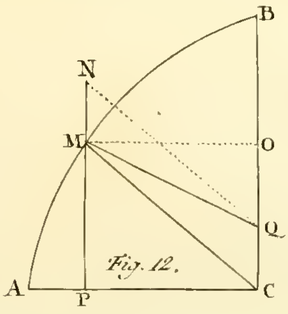

K
E
H
D
Fig. 7.
H
P
O
C


G
Fig. 8.
D
F
H
B
E
C
A


C
F
B
D
G
H
L
M
N
O
E
Fig. 10.
K
P
α
β
Y
X


E
Fig. 9.
A
B
C
D


E
d
Fig. 11.
D
A
B
b
C


B
N
M
O
Q
Fig. 12.
A
P
C

DE
VI VENAE AQVEAE
CONTRA PLANVM INCVRRENTIS
EXPERIMENTA,

AVCTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

Misit ad Academiam nostram ante aliquod tempus Dissertationem eruditissimam Cl. *Dan. Bernoulli*, cui titulus est: *De Legibus quibusdam Mechanicis, quas natura constanter affectat, nondum descriptis, earumque vsu Hydrodynamico, pro determinanda vi venae aqueae contra planum incurrentis.* In qua, calculo elegantissimo, et fundamentis ex intima motus natura petitis, profundo sane ingenio, determinat vim seu impetum, quem vena aquea ex vase repleto prosiliens, et in planum aliquod oppositum incurrens, contra hoc planum exserit. Cumque theoriam exinde formatam Experimento ibidem exposito confirmasset: iussus ab *Illustri Academiae Praeside* fui ego, vt idem Experimentum repeterem, et quae deprehenderem Academiae exponerem. Feci ergo huius Theoriae periculum, summa qua potui diligentia et exactitudine. Ante vero quam enarrare possim, quid per Experimenta mea edoctus fuerim: haud abs re fore puto breuiter repetere ea, in quibus ingeniosissima *Theoria Bernoulliana* consistit. Tabula XXI.

Pro determinanda vi venae aqueae in planum incurrentis prima Experimenta facta esse dicit in Academia Parisiensi, Anno 1669, teste *Duhammelio*, in Historia illius Academiae. Post haec secuta esse multa alia. Statuisse autem omnes Physicos ex his Experimentis, praedictam vim venae aqueae, mox ante foramen, ab asserculo aliquo exceptae, aequalem esse ponderi cylindri aquei, cuius basis sit foramen, per quod aqua exsilit; altitudo autem ea, quae est aquae totius supra foramen exstantis. Ita, iuxta hanc Hypothesin, esset vis, quam aqua per GM exsiliens in planum asserculum OP exserit, aequalis ponderi cylindri aquei, cuius basis est area foraminis GM, et altitudo GA. Asserit porro, Hypothesi huic Experimenta nunquam ex asse respondisse; cuius dissensus inter Experimenta et ratiocinia duplicem affert causam. Primo enim putant huius sententiae Patroni celeritatem aquae per GM exsilientis eam esse, quam graue aliquod libere per GA delapsum acquirere posset; quo ipso inducti sunt, vt cylindrum aqueum altitudinis GA assumerent. Sed notum hodie est, hoc non verum esse, nisi foramen GM statuatur infinite paruum; in foramine autem finitae magnitudinis celeritatem venae aqueae exeuntis istum gradum celeritatis nunquam attingere. Secundo statuitur in hac opinione, amplitudinem venae exeuntis eandem esse, quae est foraminis, per quod effluit; aut vtriusque eandem esse Diametrum; sed cognitum hodie est, venam aqueam per foramen e vase erumpentem contrahi sensibiliter, cum e foramine exiit; quam venae aqueae contractionem *Newtonus* primus obseruauit. Remedium itaque his duobus incommodis allaturus Clariss. *Bernoulli*, statuit, cele-

Figura 1

celeritatem aquae per GM exsilientis non assumendam esse eam, quae debetur altitudini aquae supra foramen, GA, sed pro quolibet casu Experimentis inquirendum esse in celeritatem realem, quam aqua effluens actu ipso habet; quod per Mechanicae regulas semper fieri potest. Deinde amplitudinem venae assumendam esse non eam, quae aequalis sit amplitudini foraminis, sed quae aequalis sit amplitudini venae contractae; aut vero, euitandam esse hanc contractionem, quod fit, si aqua non per solum foramen GM, sed per tubulum YE, foramini GM insertum, effluit.

His praemissis, appellat Cylindrum aqueum correctum eum, cuius basis est amplitudo venae contractae; (nisi scilicet, haec contractio venae, immisso foramini tubulo, impediatur) et cuius altitudo est ea, quae debetur celeritati reali et actuali, quam vena aquea mox post effluxum suum habet, et quae in quolibet casu peculiari Experimento determinanda est. Tandem vero statuit, vim venae aqueae per tubulum YE in planum OP incurrentis, aequalem esse duplo ponderi huius cylindri aquei correcti.

Vt igitur in hanc Theoriam Experimentis inquirerem, assumsi vas ligneum ABCD quadratum, cuius latus est AB $=\frac{15}{12}$ pedis Londinensis, et altitudo 2 pedum. Huic vasi inserui tubulum YE, ex orichalco confectum, interne bene politum, vt aqua eo liberius effluere posset. Deinde in parte anteriori vasis adaptaui vectem STV, e ligno quercino confectum, sub angulo recto inflexum, et circa Hypomochlium H liberrime

rime mobilem; huius vectis brachio HS inserui annulum I, ex quo dependebat lanx K, ponduscculis oneranda, et quae ope annuli I facillime hinc et inde moueri supra brachium poterat. In parte inferiori vero huius vectis affixus erat orbiculus OP rotundus, et ligneus, tubulo YE directe oppositus, in quem vena incurreret. Totus vero hic vectis inflexus nullo pondere in I oneratus, perfectam aequilibrium seruabat. Vasi ligneo AD inferne adiuncta est cista etiam lignea NR, in cuius fundo NQ amplitudo NL iactus liberi, quem vena aquea sibi relicta efficeret, obseruari potuit. Tandem vero semper curaui, vt fundus hic NQ in quouis Experimento esset perfecte horizontalis, et vectis inflexus, plane non oneratus, esset in exactissimo aequilibrio; dum nempe semper effeci, vt brachium TV esset perpendiculo proxime applicato parallelum. His ita praeparatis, cepi

Experimentum I.

die 2. Iunii 1736. vbi primum obseruaui, quam amplitudinem vena aquea libere, remoto nempe vecte, effluens efficeret; et inueni, in Scala Geometrica accuratissime confecta, distantiam $ZL = 4542$ partium talium, qualium 2000 quamproxime efficiunt pedem Londinensem, (qua mensura in sequentibus constanter vtar) demissa nempe a fine tubuli Y perpendiculari YZ in fundum cistae adiunctae. Ipsa vero haec perpendicularis XZ, cuius initium e medio tubuli sumsi, erat 2017 part. pro amplitudine iactus liberi autem assumsi distan-

distantiam ZL, quoniam vena XL in X incipit Parabolam iactus sui describere. Pondus lancis, cum annulo et filamentis simul erat 829 Granorum, pondus vero K, lanci adhuc impositum, erat 720 Gr. ita vt pondus totum, aequilibrium cum vi venae aqueae erumpentis producens, fuerit 1549 Gr. Porro inueni HI $=$ 2010 part. TX, cuius initium a recta per medium brachium ST transeunte sumsi, $=$ 2218 part. Denique vt pondus aquae, qua vas repletum erat, deprehenderem, impleui eadem aqua cylindrum, cuius diameter est 675 part. altitudo autem 685, cuius voluminis aquei pondus, detracto pondere vasis, deprehendi 13111 Gr. Diameter GM erat 89 part. Igitur pro altitudine celeritati effluxus liberi debita, notum est, quod haec altitudo, supponendo semitam venae ita erumpentis esse Parabolicam, sit $= \frac{ZL^2}{4XZ}$, ex quo sequitur, altitudinem celeritati actuali, qua aqua per foramen X erumpebat, debitam fuisse 2557 part. Erat autem altitudo ipsa aquae supra foramen in vase, GA $=$ 3738 part. vnde apparet, quod alias cognitum est, quod celeritas actualis aquae erumpentis plane non respondeat altitudini aquae supra lumen. Quoniam nunc indagari debet pondus cylindri aquei correcti, hoc est, cylindri aquei, cuius basis est area GM, ob euitatam per tubulum venae aqueae contractionem, et altitudo 2557, sit hunc in finem vas, cuius aqua repleti pondus examinaui $\alpha\beta\gamma\delta$, atque erunt pondera, aquae in hoc vase contentae, et aquae cylindro correcto comprehensae, inter se vti volumina horum cylindrorum, ob densitatem aquae vtrobique eandem, hoc est, vti $\beta\gamma^2 \times \alpha\beta$ ad $GM^2 \times 2557$. Figura 4.

Ex qua analogia inuenitur pondus cylindri aquei correcti $= 850\frac{1}{2}$ Gr. et huius duplum 1701. Gr. quae est, ex Theoria, vis venae aqueae contra orbiculum OP incurrentis. At vero datum in K pondus totale, quod P vocabo, sustinet, in statu aequilibrii, impetum in X factum aequalem $\frac{HI}{TX} \times P$; vnde ex obseruatione colligitur hic impetus $= 1403$ Gr. ex quo sequitur, Theoriam excedere pondus in experimento obseruatum 298 Granis. Caeterum in hoc Experimento, et reliquis, obseruaui etiam, quod orbiculus OP, brachio TS nullo pondere externo onerato foramini admotus, eidem quasi affixus maneret, ita vt aquae motum fere omnem sisteret. Fuit etiam prominentia tubi extra vas maius, nempe $GY = 218$ part. atque distantia orbiculi OP ab extremo tubuli $Y = 135$ part.

Experimentum II.

institutum fuit d. 3. Iunii, atque in eo vas maius, leniter aquam semper affundendo, constanter plenum fuit seruatum, tubus vero EY vtrinque breuior factus est. Tum inueni distantiam $ZL = 4608$ part. $YZ = 2058$. pondus totale in I appensum 1549 Gr. $HI = 2095$, $GM = 89$. pondus vero aquae cylindrico vase $\alpha\beta\gamma\delta$ contentae retinui, quale illud heri repereram. Ex his itaque fit altitudo debita celeritati aquae in X exsilientis $= 2579$ part. pondus cylindri aquei correcti $= 860$. Gr. et huius duplum 1720 Gr. colligitur vero ex obseruatione impetus in orbiculum realiter factus $= 1463$ Gr. vnde Theoria rursus pondus in Experimento obseruatum excedit 257 Granis.

Ex-

Experimentum III.

feci d. 5. Iunii, vase maiori constanter pleno seruato, tubi vero prominentiam GY plane abscindi curaui, retinuique solam GE. Atque tum inueni distantiam NL = 4755 part. MN e medio foraminis GM sumtam, = 2053, pondus totale in I appensum = 1549 Gr HI = 2127. GM = 86. pondus aquae, cylindrico vase alio contentae, cuius diameter est = 453, altitudo = 744, deprehendi 6191 Gran. Ex quibus oritur altitudo debita celeritati aquae in GM exsilientis = 2753 part. pondus cylindri aquei correcti = $825\frac{1}{2}$ Gr et huius duplum 1651 Gr. Colligitur autem ex obseruatione impetus in orbiculum realiter factus 1486 Gr. vnde Theoria denuo pondus ab Experimento indicatum excedit 165 Granis.

Experimentum IV.

institui d. 18. Iunii, praesente et iuuante Clariss. *Eulero* nostro: et maiori vase rursus constanter pleno seruato, per continuam lenem affusionem aquae, inuenimus distantiam NL = 4557 part. MN = 2044, pondus totale in I appensum 1609 Gr. HI = 1928. GM = 88. TX = 2213. pondus aquae cylindricae, cuius diameter = 686, et altitudo = 442, erat 8477 Gr. Ex quibus emergit altitudo debita celeritati aquae in GM exsilientis = 2539 part. pondus cylindri aquei correcti = 801 Gr. et huius duplum 1602 Gr. Colligitur autem ex obseruatione actualis impetus in orbiculum factus 1401 Gr. vnde Theoria adhuc pondus ab Experientia indicatum excedit 201 Granis.

Experimentum V.

sumtum est ab ipso Clariss. *Bernoullio*, et in laudatissima ipsius Dissertatione descriptum, cuius circumstantias ad meam Figuram referam. Erant itaque ZL = 900 part. quarum 400 faciunt pedem Parisinum, YZ = 900 part. pondus in I appensum dicitur fuisse paulo maius quam 1020 Gr. sumam ergo 1021 Gr. Erat autem in vecte ipsi adhibito HI = TX, GM = 19 part. pondus aquae cylindricae cuius diameter 92 et altitudo 131 part. erat 122 Drachm. vel 7320 Gr. Ex his emergit altitudo debita celeritati aquae libere exsilientis = 225 part. pondus cylindri aquei correcti = 536 G. huius duplum = 1072. Obseruatio vero ipsa dedit impetum aquae in orbiculum = 1021 Gran. hinc Theoria etiam tum pondus ab Experientia indicatum excessit 51 Granis. Denique

Experimentum VI.

sumtum fuit 2. Febr. 1737, et repetitum 7. Febr. praesente *Illustri Praeside*, et plerisque Membris Academiae. Inuenta autem fuit distantia NL = 4469, MN = 2015, pondus totale in I appensum 1549 Gr. HI = 1983, GM = 86, TX = 2188 part. pondus aquae cylindricae, cuius diameter 128, altitudo 278 part. erat 190 Gr. Ex quibus emergit altitudo debita celeritati aquae in GM exsilientis = 2478 part. pondus cylindri aquei correcti = 764 Gr. et huius duplum = 1528 Gr. Colligitur autem ex obseruatione actualis impetus in orbiculum OP factus = 1403 Gr. vnde rursus Theoria pondus ab experientia indicatum excedit 125 Granis.

TEN-

Fig. 1.

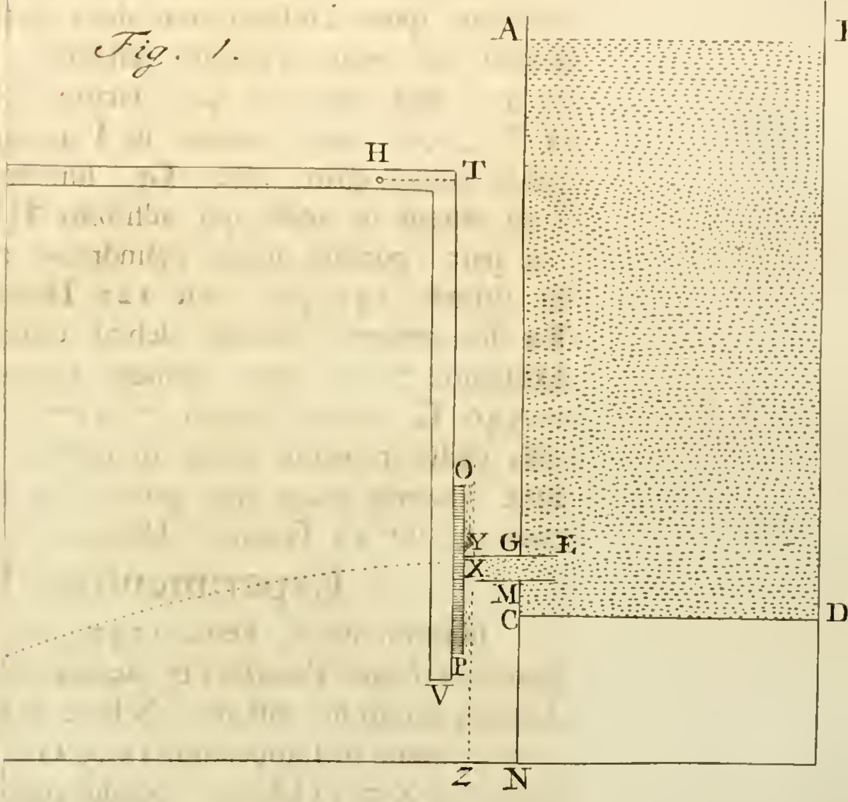


Fig. 2.

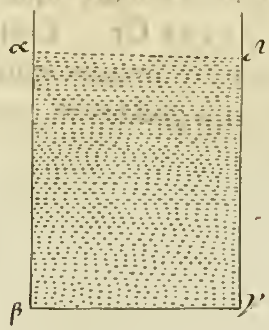


Fig. 1.

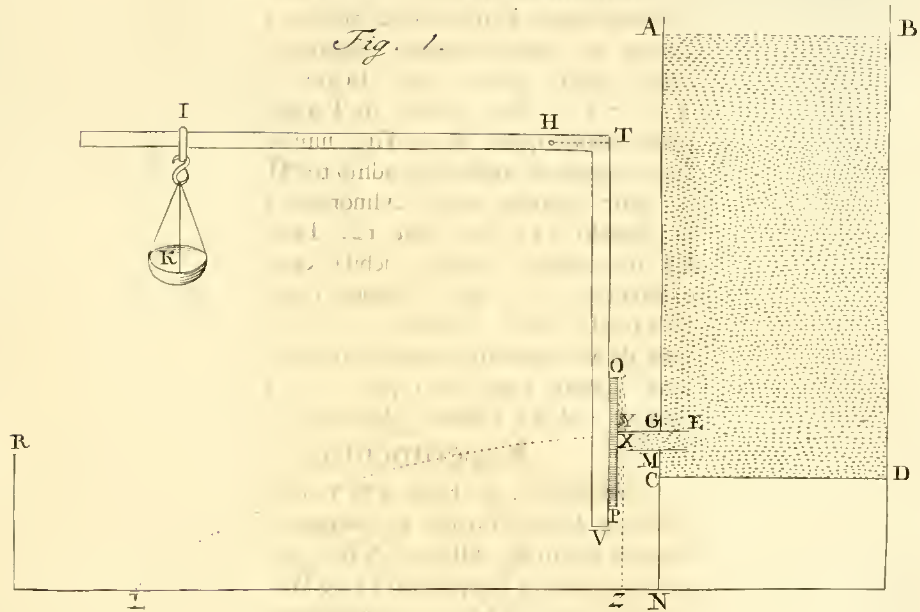
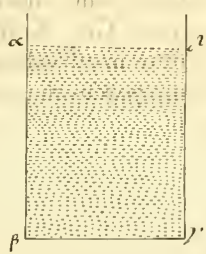


Fig. 2.



TENTAMEN THEORIAE, QVA ASCENSVS AQVAE IN TVBIS CAPILLARIBVS EXPLICATVR.

AVTORE
Iosia Weitbrecht.

Canales vitrei angustiores, vulgo tubali capillares dicti, vtrinque aperti, quando altera sui extremitate superficiem aquae attingunt, vel illi immerguntur, aqua in illis ad altitudinem satis notabilem ascendit. Hoc Phaenomenon ab experientibus adeo manifestum et constans deprehensum est, vt, postquam inter Physicos innotuit, nullum dubium de illo sit relictum. De caussa autem ascensus non aeque conuenit. Indagarunt illam multi egregii et solertes Viri, in vias diuersas, imo saepe plane contrarias deducti; imo in hac nostra quoque Academia haec ipsa quaestio olim agitata fuit; siquidem Excellentissimus *Bulffingerus* plurima hunc in finem Experimenta instituit, et praecipuas antecessorum sententias neruose excussit. (*) Spes quidem subnata erat ex dissertationis eiusdem paragrapho vltimo, fore aliquando, vt Vir Excellentissimus singularem theoriam Tabb. XXII. et XXIII.

 conde-

(*) Vid. Differt. Experimentalis de Tubulis Capillaribus Comm. Tom. II. pag 233.

conderet: ſed in notis reſponſioni Cel. *Iurini* ad dubia ſua datae annexis Comment. Tom. III. p. 291. in explicatione *Iuriniana* ſe adquieſcere faſſus eſt. Litem ergo deciſam et veritatem in aprico poſitam putares. Fateor autem, cum in enodandis quaeſtionibus quibusdam phyſiologicis occupatus inopinato ad tuborum capillarium actionem deflecterer, varia mihi ſubnata eſſe dubia, quae ex principiis hactenus ſtabilitis ſolui non poterant; vnde factum eſt, vt non ſolum animum ad hanc materiam paullo ſtudioſius appellere, operae pretium eſſe iudicarem: ſed et ſimul quaedam adminicula detegerem, quae imprimis doctrinae huic ab attractione petitae maiorem lucem affundere videbantur.

Explicatio autem *Iuriniana*, quemadmodum illa in Transact Angl. nr. 355. et 363, atque in his diſſertationibus ſeorſim impreſſis proponitur, haec eſt: *Aqua in tubulo capillari ſuſtinetur ſupra libellam vi attractiua ſuperficiei tenuis annularis tubuli internae, cui ſumma aquae ſuſpenſae ſuperficies cohaeret et contigua eſt. Nam iſta ſola pars tubi eſt, a qua receſſura ſit aqua inter deſcenſum, et proinde ſola illa eſt, quae vi attractionis ſeu cohaeſionis, aquae deſcenſum impediat.* Non animus eſt, hanc ſententiam, fauorabilibus experimentis munitam, et cui veritas, ſed non ſatis depurata, immixta eſt, ſpecialiter nunc examinare; ſed ſufficit, generaliter indicare, quamuis cauſſam ſuſpenſionis quodammodo explicare videatur, illam tamen non ſatisfacere phaenomeno aſcenſus, qui certe non tam facile ex iſta ſtabilita theſi ſequitur; cuin imo ipſe Celeb. *Iurinus*, vt aſcenſum effectui daret, partim reliquos annulos

los ſuperſiciei internae intermedios ab orificio tubuli ad ſummitatem attractae aquae, partim vero abolitam grauitationem aquae ſuspenſae per vim attractiuam, et hinc facilitatam preſſionem aquae in vaſe contraponderantis ad maiorem altitudinem, in ſubſidium vocare coactus eſt, quod tamen adminiculum iisdem cum hypotheſi *Carreana* difficultatibus laborat. Reliquae, quae fieri poſſent, obiectiones clariores euadent in progreſſu huius meae tentatae commentationis, qua ſententiam meam phaenomeno attractionis generali innixam ſequentibus propoſitionibus aſſertam dabo.

PROPOSITIO I.

Quando duo corpora in mutuam viciniam delata, ad ſe inuicem accedunt, absque potentia manifeſta hactenus cognita extrinſecus agente, vt vnum continuum efficiant: Talis mutuus congreſſus vocari ſolet Attractio, et vis, quae hunc congreſſum producit, eſt vis attractiua.

Scholium.

Talem attractionem dari, adeo euidenter in pluribus corporibus obſeruatur, vt omni iure a ſagaciſſimis noſtrorum temporum Phyſicis tamquam phaenomenon generale ſit receptum. Quamuis autem cauſſa huius mutuae acceſſionis vel Attractionis proxima nos adhuc latere omnes fateantur: hoc tamen non impedit, quo minus aliorum effectuum cauſſae in Attractione quaerantur; quemadmodum multi effectus ex grauitate corporum deducuntur, quamuis grauitatis ipſius cauſſa nondum ſit determinata.

Qui

Qui ergo quaeſtionem aliquam ad phaenomenon tale naturae generale reduxit, ille problemati omnino hactenus ſatisfeciſſe putandus eſt.

PROPOSITIO II.

Quando vis attractiua congreſſis ſemel corporibus indeſinenter agit, corpora cohaerere, ſuſtentari, ſuspendi, retineri dicuntur pro vario corporum ſitu.

Corollarium 1.

Cohaeſio igitur talis corporis vnius cum alio, vel ſuspenſio, ſuſtentatio etc. nil *eſt*, niſi *continua attractio* ſiue continuata vis attractiuae actio.

Corollarium 2.

Quaecunque igitur *corpora* ſenſu propoſitionis primae, mutuo congreſſa *cohaerent*, ſuspenduntur, retinentur: ea *attrahi* quoque *dici poſſunt.*

PROPOSITIO III.

Aqua a vitro ſuspenditur vel retinetur, et viciſſim.

Demonſtratio.

1. Aquam a vitro ſuspendi, ſiue illam ab hoc re-
Exper. 1. tineri, experimentis patet. Quando enim aqua ad tubulum vel etiam ad laminam vitream politam guttatim adſpergitur, illa immota adhaeret. Quodſi etiam gutta
Exper. 2. ad laminam verticaliter poſitam vel ad tubulum defluens ad oram infimam peruenit, non decidit, ſed a laminae margine

margine suspenditur; in tubulo autem motu retrogrado intra cauitatem eius resorbetur. (vid. *Musschenbr. Exp X. c.* 1.) Si quoque vitrum inclinetur ad horizontem: gutta A aucto pondere non secundum perpendicularem AB decidit, sed iuxta latus tubuli vel laminae ad infimam oram C deuoluitur, quod fieri non posset, nisi gutta a vi aliqua retineretur. 2. Vitrum quoque ab aqua retinetur et suspenditur. Madefiat enim lamina vitrea vel eburnea, et imponatur tubulus horizontaliter: ille ab aqua aegre sursum diuellitur; et si laminam madefactam inuertas, vt deorsum spectet tubulus, ille non decidit. Exper. 3. Exper. 4. Figura 1. Exper. 5.

PROPOSITIO IV.

Aqua a vitro attrahitur et viciſſim.

Demonſtratio.

Huius Propositionis veritas non solum ex antecentibus clare elucescit; dum enim in Experimentis Prop. II:. nihil adsit nisi aqua et vitrum, et praeterea nulla alia vis externa manifesta premens et trahens; suspensio talis autem nil nisi continuata sit attractio (Prop. II. Cor. 1. 2.): sequitur necessario, haec duo corpora se mutuo attrahere: sed patet illa etiam ex consideratione modi suspensionis. Quodsi enim lamina vitrea AB guttae G admouetur, vt cohaesio fiat, gutta non in solo puncto contactus suspenditur, sed basi latiuscula per superficiem vitri diffunditur. Similiter, si tubulus AB ad guttam G inclinetur: in ipso momento contactus ad latus tubuli tam deorsum ad *c* quam sursum versus *d* dif- Exper. 6. Fig. 2. et 3. Exper. 7. Fig. 4. et 5.

 fluit.

fluit. Cum igitur particulae quaedam aqueae ad vitrum succeſſiue accedant et ſuspendantur, quae ab initio non in contactum veniunt, ſequitur *attractionem inter vitrum et aquam intercedere.*

Scholium 1.

Laudandi igitur ſunt omnino ingenioſiſſimi Viri, qui reiectis aliis hypotheſibus, phaenomenon Attractionis ad hoc negotium transtulerunt. Interim quiuis facile concedit, in ſimplici allegatione huius attractionis aquae ad vitrum non ſubſiſtendum eſſe: neque enim ad plenariam ſolutionem problematis propoſiti ſufficit dicere: *aqua ad vitrum attrahitur: Ergo aqua in tubulis capillaribus aſcendit.* Oportet etiam oſtendere, *quomodo* et *quare* aqua ad hanc vel illam altitudinem, ſub his vel illis circumſtantiis aſcendat? verbo: *leges aſcenſus explicari debent ſtricte ex phaenomeno et legibus attractionis.* Quousque vero ſola aquae ad vitrum attractio huic quaeſtioni ſatisfaciat, ex ſequentibus clarius patebit, quando circumſtantias aſcenſus plenius euoluemus.

Scholium 2.

Mercurium quoque *a vitro retineri et attrahi* quidam voluere dubitare. Sed veritatem rei demonſtrauit Cel. *Iurinus* in Diſſ. II. Prop. IV. et manifeſtum quoque eſt
Exper. 8. ex eo, quod globuli mercuriales minimi, tubulis capillaribus externe adeo pertinaciter adhaerere ſoleant, vt abſtergi ſe non patiantur; id quod, dum replendis mercurio thermometris occupatus eſſem, meo ſaepe incommodo

modo expertus ſum. Sed video me nimis operoſum eſſe in re clara: propero igitur ad

PROPOS. V.

Aqua ad aquam attrahitur.

Demonſtratio.

Huius propoſitionis nulla putem opus eſſe demonſtratione (*). Interim tamen non poſſum reticere elegans aliquod phaenomenon, quo attractio particularum aquearum mutua ad oculum demonſtratur, et quod mihi occurrit, cum in alio quodam experimento faciendo occupatus eſſem. Siphonem ABCD, cuius crus vnum AB altius erat amplum, alterum CD breuius capillare, repleui aqua. Crus capillare anguſtiſſimum a C ad D ſenſim craſſeſcebat. Hoc ſiphone perpendiculariter erecto, orificiis A et D ſurſum ſpectantibus, particula aquea per orificium D protruſa deſcendit, et annulum ſphaeroidem oblongum, qui tubulum circumcirca cingebat, formans ſubſtitit e gr. in 1 P. Cum hic annulus addita noua particula ex orificio D defluente turgeſceret, porro deſcendit in 2 P, vbi denuo auctus deſcendit et ſubſtitit ad 3 P. donec gutta ſatis ponderoſa facta tandem ad C vsque deflueret. Cum hi annuli 1 P. 2 P. 3 P etc. per nouam acceſſionem ita ſucceſſiue augerentur, manifeſto vidi, e. gr. annulum 1 P non quieſcere, donec augmento ſuo ditatus fuiſſet, ſed quando hoc augmentum ex orificio D protruſum in viciniam ſuam peruenerat, multum eleuari, et tum demum cum illo illo coaleſcentem verſus 2 P deſcendere. Similiter annulus 2 P ad notabilem quantitatem eleuatus ſuperiori annulo 1 P Exper. 9. Fig. 6.

(*) Vid. Iurini Diſſ. II. Prop. I.

in viciniam suam descendenti in occursum venit; quod itidem cum annulo 3 P accidit, quando antecedens ad illum appropinquauerat. Quod iucundissimum spectaculum luculenter demonstrat, mutuùm accessum dari inter particulas aqueas, quando in viciniam iustam et requisitam constituuntur.

Scholium.

Particulas Mercurii ad se inuicem attrahi, vide in allegata Iur. Differt. II. Pr. II.

PROPOSITIO VI.

Attractioni resistit grauitas molecularum aquearum.

Demonstratio.

Moleculas aqueas vtcunque paruas grauitare tamen et pondus habere, ex natura corporis sequitur ita, vt nemo, spero, negauerit. Dubitantem vero experientia docet. Ducatur enim tubus AB lateraliter ad angulum rectum in Capillarem angustum rectum BC, sed longum, et repleatur aqua, vt haec per capillarem BC sensim protrudatur per orificium C: videbis guttulam G ab extremitate C pendentem inflectere tubulum capillarem elasticum BC, et quo magis gutta accrescit, eo magis tubulum incuruari: delapsa autem gutta, tubulum iterum post aliquas vibrationes recta extendi. *Aqua igitur suspensa grauitat*, resistit igitur vi attractiuae, quae descensum, quem gutta vi ponderis affectat, impedit.

Exper. 10. Figura 7.

Corollarium I.

Crescente igitur gutta aquea, crescit resistentia: sunt enim pondera in ratione massae, et resistentiae in ratione ponderum, vt statica docet.

Corol-

Corollarium 2.

Quodſi igitur *pondus guttae maius euadit*, quam reactio attractionis ſuſtinere poteſt: *cohaeſio rumpitur*, et gutta decidit.

PROPOSITIO VII.

Vis attractiua, quae inter particulas aqueas intercedit, non niſi guttam retinere et cohibere poteſt.

Demonſtratio.

Hoc abunde patet per experimentum antecedens (Prop. VI.), dum primo aqua ex orificio C minutatim extruditur, quae, vbi ſenſim in guttam coaluit, tandem abrumpitur et decidit. Probant hoc etiam omnia ſtillicidia. Et fluxus aquae guttatim delabentis, et proſilientis non niſi celeritate differunt, imo radius aquae proſilientis nil eſt niſi ſeries guttarum aquearum velociſſime ſeſe inſequentium.

Corollarium I.

Patet igitur ratio, quare *vapores aquei*, quando in guttam ſatis notabilem coaluere, *in lamina vitrea* perpendiculariter erecta, vti e. gr. in feneſtris, tandem *defluant*.

Corollarium 2.

Quia gutta aquea, quae a vitro ſuspenditur, nihilominus decidit, quando in nimiam molem excreuit: (Pr. VI. Cor. 2.) Sequitur vim vitri attractiuam non poſſe plus ſuſtinere, quam vis attractiua particularum aquearum permittit: i. e. *vltra guttulam a vitro non poſſe ſuſpendi.*

PROPOSITIO VIII.

Magnitudo guttae non ſemper eſt eadem, ſed pro latitudine baſeos, a qua dependet, paullo minor et maior eſſe ſolet.

Demonſtratio.

Guttae in Experimento decimo (Prop. VI.) decidentis diameter lineam vix aequat. Quando vero tu-
Exper. 11. Figura 8. bulum in alium ſitum detuleris, vt aqua ex orificio C protruſa iuxta longitudinem tubuli BC verſus angulum craſſiorem B defluat, ibique in vnam maſſam colligatur: Videbis non ſolum omnem aquam latius diffundi, ſed guttam quoque abrumpendam multo maiorem euadere.

PROPOSITIO IX.

Aqua ad vitrum fortius attrahitur, quam ad aquam.

Demonſtratio.

Exper. 12. Figura 7. Quando in principio particula aquea effluxit ex orificio C, cruris capillaris BD ſiphonis ABC; illa non continuo decidit, ſed pro maiore minoreue eleuatione vel inclinatione cruris BC ad horizontem BH motu retrogrado haerebit e. gr. ad D, et guttulam ellipticam G
Figura 9. formabit. [vid. Fig. 9. (A).] Aucto pondere per affluxum nouarum particularum guttula quoque turgidior et magis prolongata (B) euadet. Accreſcente pondere gutta ſeparari incipit, et lapſum minitari. Separatio autem non fit proxime ad canaliculum BC, ſed in notabili diſtantia inci-

incipit aqua ſuspenſa in duas partes diuidi (C), quarum ſuperior D ad vitrum haeret, inferior autem guttam lapſuram G conſtituit; et in loco diuiſionis in collum quaſi coantari, vbi ſe mutuo tangunt et continent. Quod collum primo latiusculum poſtquam ſenſim ſtrictius (D) factum eſt, vt puncta contactuum retinendae G non ſufficiant: haec inferior decidit (E); pars vero ſuperior D cum canaliculo capillari BC ſurſum reſilit. Nimirum cohaeſio particularum aquearum ſollicitatur a duabus viribus, ab attractione vitri, atque a pondere ſuo. Quamdiu cohaeſio iſta ſatis fortis eſt ad reſiſtendum iſtis potentiis (Prop. VI.) aqua indiuulſa manet. Quando vero pondus ita auctum fuit, vt aut attractio vitri, aut attractio particularum aquearum mutua (Prop. VII.) guttam maiorem retinere non poſſit; neceſſario disruptio fiet, et quidem in loco debiliori. Quodſi igitur mutua aquae cohaeſio fortior eſſet, quam vis attractiua vitri: neceſſario omnis aqua a vitro auelli deberet. Hoc vero non fit, ſed vitrum retinet, quod attrahere poteſt; collum, cohaeſionis baſin exponens decreſcit; et gutta pondere ſuo ſatis onuſta decidit. *Aqua* igitur *non tam fortiter ad ſe attrahitur*, *quam ad vitrum.*

Scholium.

Phaenomenon plane *contrarium manifeſtatur in Mercurio.* Huius enim globulus minimus vitro adhaerens augeatur, vt pondus vim attractiuam vitri (Pr. VI. Sch. 2.) ſuperet: tum tota, quanta maſſa eſt, in vnum globum coaleſcens decidit, neque quicquam (dummodo purus Mer- Exper. 13.

cu-

curius fuerit) ad vitri ſuperficiem relinquitur. *Mercurius* igitur *fortius ad ſe congreditur*, *quam a vitro trahitur.*

Corollarium 1.

Vitrum ergo *aquam omnem*, *quam attraxit*, *nunquam dimittit*, ſed retinet quantum poteſt, niſi potentia contraria et maior quam vis attractiua aquae aut vitri acceſſerit. Hinc fit,(*) vt gutta aquea, quae (Exp. 2. et 4.) in lamina vitrea pondere ſuo deuoluitur, ſemitam quandam madidam poſt ſe relinquere ſoleat, et in genere omnia vaſa, in quibus aqua cohibita fuit, poſt effuſionem madida reſtent: cum e contra mercurii nullum ſuperſtes maneat veſtigium.

Corollarium 2.

Quia ſuperficies vitri non omnem a ſe aquam dimittit, ſequitur, quando gutta delabitur, *illam ſemper aliquid de mole ſua inter deſcendendum perdere* et minui.

PROPOSITIO X.

In explicando aſcenſu aquae in tubis capillaribus diſtinguendum eſt inter effectus, qui ab actione vitri in aquam et viciſſim, et inter eos, qui ab actione particularum aquearum in ſe inuicem dependent et producuntur.

Huius Poſtulati aequitas ſole meridiano clarior eſt, vt neminem fore iure putem, qui illud denegare audeat. Hoc enim omnis phyſicae ſcientiae ſcopus et finis eſt, vt

(*) Vid. et Iurin. l. c. Prop. V. in fine.

vt ſingularium effectuum verae cauſſae pateſiant. Interim tamen factum eſt, vt plurimi illud (non dicam, neglexerint, ſed) non ſatis attenderint, et hinc in deuia deflexi a veritate aberrauerint. Sed intellectus humanus interdum vult admoneri. Quapropter cum in phaenomeno aſcenſus occurrat vitrum et aqua, vitrum autem aquam attrahat et viciſſim (Pr. IV.), neque minus particulae aqueae ſe mutuo (Pr. V.) attrahant: ſuum cuique tribuendum eſt, et ſedulo curandum, ne cautelam hanc ex oculis dimittamus.

PROPOSITIO XI.

Vbicunque datur punctum vitreum, et particula aquea, in debita diſtantia: ibi datur attractio.; et ſi diſtantia aequalis eſt, attractio etiam aequalis eſt.

Demonſtratio.

Vt attractio fiat, corpora in debitam diſtantiam transferri debent, quae ſi nimia ſit, effectus omnis irritus redditur. Hinc vitrum in aquam non agit niſi in vicinia, et ſi vitrum a gutta aquea plus iuſto ſeparatur, vtrumque quieſcit. Hoc experientiae eſt. Sit iam globulus vitreus C, circumdatus vbique cruſta aqueae ſphaerica AAAA, in diſtantia aequali AC, quanta requiritur, vt attractio in effectum deduci poſſit. Dico, nullum punctum eſſe in ſuperficie huius globuli vitri, quod non in cruſtam aqueam agat, et illam ad ſe ſecundum omnium radiorum directionem attrahat, et quidem in omni diſtantia AC aequaliter; ſiue, quod idem eſt, globulum hunc, ab omnibus punctis cruſtae aqueae Figura 10.

ſphaericae aequaliter ſollicitari. Vis enim attractiua vitri et aquae ſemper adeſt; et ſi cetera paria ſint, ſi eadem eſt particularum aquearum, et vitrearum conditio et poſitio; nulla eſt ratio, quare vnum punctum vitri plus attrahat, et alterum otioſum ſit? *Omnia* igitur *puncta vitri aequaliter attrahunt.*

PROPOSITIO XII.

Figura 10. *Conſideretur globulus ille vitreus* C, *tamquam punctum et centrum ſphaerae, cuius radius eſt diſtantia* AC, *ad quam vis attractiua centri vitrei ſe exerere poteſt; ſuperficies autem eſt cruſta aquea* AAA. *Hanc ſphaeram a ſemicirculo* ACAA *circa diametrum* ACA *rotando genitam, dico ſphaeram attractionis vel actiuitatis, et radius* AC *eſt radius attractionis vel actiuitatis.*

PROPOSITIO XIII.

Radius actiuitatis, ad quem aqua a vitro attrahitur, eſt breuiſſimus.

Demonſtratio.

Quando tubulus capillaris extremitate ſua altera ad guttam aqueam in plano cuiuscunque materiae poſitam, vel in vaſculo contentam admouetur, et in diſtantia, quanta minima oculis discerni poteſt, ſeruatur: illa ta-
Exper. 14. Figura 11. men mutationem figurae nullam patitur; hactenus igitur non mouetur aut eleuatur: ſed omnis aſcenſus incipere videtur in ipſo momento contactus, et in eodem ipſo momento quoque circa ſuperficiem tubuli externam agger quaſi aqueus, *f*, ad notabilem altitudinem eleuatur, in

cuius

cuius figuram *Cl. Musschenbroek* in diff. de attractione spec. Exp. I. studiosius inquisiuit. Cum igitur nulla quantitas nudis oculis, vtut parua, assignari possit, quae distantiam, ad quam vitrum attrahere incipit, exprimat: sequitur omnino *radium actiuitatis esse breuissimum.*

Scholium.

Non dico, hunc radium esse infinite paruum, aut nullum. Posset enim forte detegi per microscopium, et ad radium tubuli capillaris angustissimi, datam et finitam rationem habere. Forte etiam maior est, quam apparet, sed in protractiori distantia debilior, vt effectus eius per ponduscullum guttae attrahendae vel eleuandae resistens (Pr. VII.), et per vim, qua illa cum plano aut cum aqua in vasculo cohaeret (Pr. V.), irritus reddatur. Hoc tantum volo, vt vis attractiua vitri intra limites suos a natura concessos coerceatur, nec plus oneris ei imponatur, quam ferendo par sit.

Corollarium I.

Quicquid igitur *arcere aquam a vitro potest*, ita, vt non recipiatur intra sphaeram actiuitatis, *illud accessum* Exper. 15. *mutuum impedit*; vnde intelligitur, quare, si sebo liquefacto internos tubuli parietes inunxeris, aqua interior vltra libellam cum exteriore non ascendat. *Vis* enim *attractiua non abolita est*, *sed impedita.* (*)

(*) Vid. Mem. de l'Ac. Par. ad an. 1705. et Comm. Acad. Petr. Tom. II. pag. 269.

Corollarium 2

Quia diſtantia, ad quam particulae aqueae in ſe inuicem agere incipiunt, ſatis notabilis eſt, vt oculis manifeſto diſtingui poſſit congreſſus earum mutuus (Prop.V. Dem.): *radius actiuitatis particularum aquearum longior eſſe videtur quam radius actiuitatis vitri.*

Corollarium 3.

Quia gutta aquea inſignis diametri ſuspendi a vitro poteſt (Exp. 10. 11. et 12), antequam cohaeſio rumpatur, cui diametro tamen radius actiuitatis vitri breuiſſimus non aequatur: ſequitur, *vitrum plus aquae attrahere poſſe, quam quo radius eius pertingere poteſt, mediante cohaeſione particularum aquearum inter ſe*; quantum nimirum vis attractiua iſtarum particularum (Pr. VII. C. 2.) ſine rupturae metu permittit.

PROPOSITIO XIV.

In tubulo capillari omnia puncta ſuperficiei tam externae, quam internae et baſeos attrahunt, quando particula aquea intra ſphaeram actiuitatis puncti alicuius vitrei eſt conſtituta.

Demonſtratio.

Neceſſitas huius Propoſitionis patet ex Prop. IV. et XI. Tubulus enim vitrum eſt, hinc et vitri natura ei competit; et quoduis punctum in tubulo, proprio ſuo actiuitatis radio gaudere concipi poteſt. Sed actu ita fieri, Experimenta quoque oſtendunt. Sit tubulus AB, quoad latera B*c* quidem craſſiſſimus, ſed cum orificio *c* anguſtiſſimo. Admoueatur baſis B, ſuperficiei aquae: vi-

Expcr. 16. Figura 12.

de-

debis, circa ſuperficiem externam attrahi aquam in forma aggeris eleuati, *f* (Exp. 14.), interne vero aquam ſimiliter ad altitudinem quandam B*b* aſcendere. Non dubium hic eſt, quin omnia puncta ſuperficiei externae atque internae, quibuscum aqua cohaeret, vim ſuam attractiuam, exercuerint. Immergatur tubulus profundius: ſemper idem erit phaenomenon, aſcendet nimirum aqua interne ad altitudinem B*d*, externe autem ad *g* vsque: dicendum eſt igitur, ſimiliter annulos omnes peripheriarum, quae ſuperficiem tubuli internam a *b* ad *d*, et externam ab *f* ad *e* conſtituunt, portionem ſuam attraxiſſe. Quod ratiocinium itidem verum eſt, ſi tubulus ita immergatur, vt aqua vsque ad *e*, vel vsque ad ſummitatem A aſcendat. Quodſi tandem ante immerſionem digitum ſuperiori orificio A admoueris, ne quid aquae in tubum intret, et poſt factum contactum retraxeris, videbis ab omni illa lata baſi B*c* guttam aqueam ſuspendi. Quod item accidit, inuerſo tubulo, cum baſi A. *Tota igitur ſuperficies tam interna quam externa, et baſes tubuli capillaris aquam attrahunt, quando haec intra ſphaeram actiuitatis comprehenditur.*

Corollarium I.

Quia interna tubuli ſuperficies aeque attrahit atque alia quaecunque lamina vitrea; de tubulis verum eſſe debet, quicquid de vitro in genere praedicatur Propoſitione IX. et X. Hinc tubulus, qui ſemel aquam attraxit, illam non totam dimittit (Prop. IX. C. 1.); et quando in tubulo ſicco inuerſo quantitas attracta delabitur ad orificium alterum, illa ſemper aliquid de mole ſua amittit.

Etiamſi denique talis tubulus ad ſenſum plenarie euacuetur; numquam tamen omni aqua attracta perfecte priuari poteſt; ſed *reſtat canaliculus aliquis aqueus tenuiſſimus, interiori concauae ſuperficiei tubuli quaſi agglutinatus*, ita, vt hac ratione tubulum diametri breuioris, quam ante attractionem fuerat, nanciſcaris.

Corollarium 2.

Quia etiam actio vis attractiuae a ſingulis punctis contactus exercita (Pr. X.) vbique aequalis eſt: ſequitur, *quoduis punctum ſuperficiei internae tubuli capillaris* (ceteris paribus) *aequaliter attrahere.* Nulla igitur eſt ratio, quare annulo ſupremo huius ſuperficiei, cui ſumma aquae attractae ſuperficies cohaeret et contigua eſt, plus virtutis tribuatur, quam reliquis ſuperficiei annulis iſti ſupremo aequalibus. Si enim omnes aequaliter attrahunt, omnes etiam aequaliter retinent (Prop. II.); quatenus haec retentio a ſola vi propria attractiua annulorum vitri proficiſcitur (Pr. IX. Cor. 1.).

PROPOSITIO XV.

Aſcenſus aquae et ſuſtentatio eius in tubis capillaribus, qui diametrum habent, duplo radio actiuitatis maiorem, non dependet vnice et immediate a ſola actione vitri aquam attrahente.

Demonſtratio.

Sit tubulus capillaris ABC, cuius diameter BC $= d$, ſit maior, quam duplus radius actiuitatis vitri, qui ſit $= b$: dico, cylindrum aqueum, comprehenſum ſub baſi BC,

et

et altitudine conuenienti BD; non attrahi aut ſuſtineri totum vnice et immediate a vi attractiua vitri. Quia enim vitrum non agit extra ſphaeram actiuitatis ſuae (Pr. I. XI.): igitur, quaecunque et quotcunque puncta in interna ſuperficie tubuli imaginatus fueris; ſingula tamen non agent, niſi in diſtantia per radium actiuitatis ſuae $=b$, expreſſa; non igitur attrahunt aquam immediate niſi illam, quae intra ſphaeram huius radii delata fuerit, et reliquiarum attractio neceſſario ab alia quadam vi dependet. Similiter quia vitrum immediate retinere aut ſuſtentare plus non poteſt, quam attraxit (Prop. VII.): ideo etiam pars cylindri illa, quae a vitro non attracta eſt, et tamen retinetur, neceſſario ab alia quadam vi ſuſtentari debet.

Corollarium I.

Cylinder igitur aqueus ſub baſi BC, et altitudine $AB=a$ comprehenſus in duas partes diuiſus eſſe ſupponi poteſt; in canaliculum aqueum, ſuperficiei tubuli internae proxime adhaerentem Ap et qr; qui canaliculus ex meris annulis aqueis conſtare concipitur, vt FGEH, quorum latitudo aequalis eſt radio actiuitatis $FE=HG=b$; ſumma autem altitudinem $=a$ conficit. Altera vero pars eſt cylindrulus reſtans, pHq, comprehenſus ſub baſi EH, cuius diameter eſt $=d-2b$, et ſub eadem altitudine $=a$; quarum partium ſola *illa, quae a virtute attractiua vitri attollitur et ſuſtentatur, canaliculus eſt*; cum interea *cylindrulus mediante alia quadam eleuari et retineri* debeat. Figura 14. Figura 15.

Corol-

Corollarium 2.

Quia radius actiuitatis vitri est breuissimus (Pr. XIII): sequitur *canaliculum illum tenuissimum fore*, et tamquam lamellam subtilem cylindricam concauam concipi debere; imo fortasse aequalis est canaliculo illi (Prop. XIV. C. 1.), qui post euacuationem in tubulo restat, aut certe non multo maior. Sequitur etiam, differentiam inter cylindrum, cuius baseos diameter est $=d$, et inter alium, cuius diameter $=d-2b$, esse exiguam; interim tamen, quia $2b$ constans manet, quo angustiores tubuli sunt, eo minor est ratio diametri d ad $2b$.

Corollarium 3.

Quia radius b vix perceptibilis est; diametri vero tubulorum, quales ante conficiuntur, semper quantitatem vtcunque assignabilem habeant: *semper plus aquae in se recipiunt*, *quam actioni peripheriae suae interioris immediatae competit*.

Corollarium 4.

Quia Cylindrulus pHq non attrahitur aut sustentatur immediate a virtute vitri; in tubulo autem nil sit cognitum, nisi vitrum et aqua: huius *attractionis et sustentationis caussa necessario in aqua ipsa quaeritur*. De hac enim constat, (Prop. V.) quod ipsius particulae se mutuo attrahant, et quod vi huius mutuae attractionis, vitrum plus attrahere possit, quam radius suus (Pr. XIII. Cor. 3.) immediate permittit.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

Sine attractione mutua particularum aquearum nulla eleuatio aut ſuſpenſio fieri poteſt, in tubis capillaribus.

Demonſtratio.

Pone attractionem mutuam particularum aquearum euaneſcere: tum nulla erat ratio, quare ex. gr. annulus infimus ſuperficiei internae tubuli, ad oram orificii, plus attrahat, quam intra ſphaeram actiuitatis ſuae cadit; et quia annulus ſuperficiei proximus maiore attrahendi virtute (Pr. XIV. Cor. 2.) non pollet, quam primus, nulla quoque eſt ratio, quare annulus primus portionem ſuam attractam dimittat, et ſuperiori cedat. Nihil igitur aquae attolleretur, ſi nulla daretur particularum aquearum cohaeſio. Pone autem, tubulum repleri ad altitudinem debitam, modo qualicunque; tum vero annihilari mutuam cohaeſionem pH, inter particulas aqueas: neceſſario cylindrulus pHq delaberetur, et nil niſi canaliculus (Pr. XV. Cor. 1.) aqueus reſtaret, vltra cuius latitudinem radius actiuitatis ſuperficiei vitri non pertingit. Nullus igitur ſuſpenſioni locus foret; et *vera eſt Propoſitio.* Figura 14.

Corollarium I.

Absque cohaeſione particularum aquearum igitur, *ne canaliculus quidem formari poteſt*: haec enim eſt, qua mediante aqua diſtans in viciniam punctorum ſuperficiei internae iuxta longitudinem tubi fertur, vt intra ſphaeram actiuitatis cadat. *Tota* igitur *aquae quantitas in altum eleuatur a vi attractrice ſuperficiei internae tubuli, mediante* *cohaesione, quae inter particulas aqueas se mutuo attrahentes et insequentes intercedit*; quia praeter hanc cohaesionem (Pr. XV. Cor. 4.) nulla alia virtus cognita est.

Corollarium 2.

Quia vis attractiua particularum aquearum non nisi guttam (Prop. VII.) sustinere potest; qua nimium aucta cohaesio (Pr. VI. Cor. 2.) rumpitur: patet ratio, *quare in tubo maiori, cuius radius maior est, quam guttae conuenit, nulla eleuatio aut sustentatio locum habeat*: namque idem est, ac si per resistentiam guttae vis attractiua annihilaretur.

PROPOSITIO XVII.

Ingressui aquae in tubum capillarem resistit aqua in vase vi mutuae attractionis, quae inter particulas aqueas intercedit, et vi grauitatis.

Demonstratio.

Exper. 17. Quando aqua ad libellam in vase consistens tubum capillarem admotum intrare debet; tunc guttula intrans in monticulum eleuatur supra libellam. Dum igitur haec guttula situm suum pristinum relinquit, et altiorem occupat, auulsio quaedam a reliqua massa fieri debet, quae in abolita cohaesione particularum consistit. Auulsio igitur per cohaesionem sufflaminatur. Porro monticulus ille violenter eleuatur, quia vi grauitatis (Prop. VI.) in ratione ponduscuto sui, vtut parui, deorsum potius quam sursum nititur. Pars igitur virium eleuantium impendi debet in superanda cohaesione ista particularum aquearum, quae

quae a vi attractrice (Prop. V.) proficifcitur, et in vincenda grauitate ponduſculi eleuati. Atque *hoc ſenſu verum eſt, quod in propoſitione adſeritur.*

PROPOSITIO XVIII.

Quando particula aquea a diuerſis viribus trahitur: motus eius dirigitur verſus plagam illam, vbi vires maiores erunt.

Demonſtratio.

Concipiatur particula aquea $= A$, quae ſollicitatur a vi attractiua plani vitrei directe oppoſiti $= B\mathfrak{B}$. Quia omnia huius plani puncta aequali vi attrahente pollent: in iisdem etiam a puncto medio b diſtantiis, $AB = A\mathfrak{B}$, aequaliter agunt. Nulla igitur eſt ratio, quare particula aquea A, (quae grauitatis expers ſupponitur) in vnum latus magis quam in alterum inclinetur; ſed illa neceſſario in recta diagonali AD progredietur vsque ad Ab. Augeatur vero vis vnius lateris Bb, vi alterius lateris $b\mathfrak{B}$ manente eadem, vt ratio illius ad hanc e. gr. ſit $= AC : AB$; tunc motus particulae aqueae non dirigetur amplius in recta media AD, ſed lateraliter in diagonali Ad. Quo magis igitur vis AC reſpectu AB creſcit, eo minor fit angulus BAd, eoque magis particula aquea in linea Ad ad lineam AC appropinquat. *Motus igitur particulae aqueae verſus illam plagam dirigitur, vbi vires maiores erunt.* Figura 16.

Corollarium.

Quando igitur vires trahentes in linea perpendiculari poſitae concipiuntur, ita, vt vis ſuperior Bb maior ſit vi inferiore $b\mathfrak{E}$: *particula aquea* A non ad punctum *b* accedet, ſed pro ratione differentiae virium paullo *altius in aliquo puncto lineae* B*b* *conſiſtet.*

PROPOSITIO XIX.

Aqua in tubo capillari aſcendit, quando vis aquam eleuans maior eſt, quam vires deprimentes, ſeu aſcenſum impedientes.

Demonſtratio.

Quando tubulus capillaris ſuperficiei aqueae admouetur, particula aquea aſcenſura in ipſo contactu a tribus diuerſis viribus ſollicitatur. Primo enim verſus annulum infimum ſuperficiei internae vitri impellitur vi mutuae attractionis, quae inter vitrum et aquam intercedit (Pr. IV.). Deinde huic aſcenſui reſiſtit maſſula eleuanda pondere ſuo; et denique attractio, quae inter particulas aqueas ipſas in vaſe intercedit, auulſionem illius ſufflaminat, quae fieri debet, vt cylindrulus generetur (Pr. XVII.); quibus duabus viribus effectus vis primae infringitur. Eſt autem vis attractiua fortior inter aquam et vitrum, quam inter aquam et aquam (Pr. IX.): ponduſculum autem cylindruli primi, qui intra annulum infimum ſuperficiei internae vitri generari et comprehendi debet, nullius adhuc momenti. Motus igitur aquae determinatur verſus plagam vis maioris (Pr. XVIII.), id eſt, verſus vitrum. Aqua igitur tantillum intrat. Et quia tubulus perpendiculariter erigitur, vt annulus vitreus in aquam ſubiectam agens locum ſuperiorem occupet: haec neceſſario verſus ſuperiora dirigitur (Pr. XVIII. Cor.), id eſt, aqua in tubulo

bulo ascendit. Idem ratiocinium valet, quando iam portionem aquae tubulum intrasse, et cylindrum aliquem aqueum generatum esse supponas; idque tam diu, quam vis eleuans dictas vires oppositas superat. Concipiatur Figura 17. ex. gr. planum perpendiculare vitreum V. cui e regione opponatur columna aquea A, sensim generanda; sit vis attractiua vitri $= ab = a$B, vis attractiua aquae $= a$S. Quia igitur (abstrahendo tantisper a pondere) ista vis hac maior est: particula aquea a non in linea recta ac mouebitur, sed paullo altius dirigetur, atque in aliquo puncto lineae bc consistet; hoc est, si loco plani vitrei substituatur superficies interna tubuli, aqua non in infimo margine haerebit, sed eleuabitur. Atqui haec ratio semper obtinet, in quacunque altitudine particulam a concipias; semper enim vis aB maior est, quam vis aS. Aqua igitur semper eleuabitur, et ascensus talis continuabitur, quam diu excessus ille virium eleuantium constabit.

PROPOSITIO XX.

Aqua in tubum capillarem ascendit virtute attractiua totius superficiei internae tubi successiue adplicita; concurrente mutua particularum aquearum cohaesione.

Demonstratio.

Concipiatur tota superficies interna tubi ABC diuisa Figura 18. in tot circulos seu annulos, quot dantur puncta in linea AB. Tangat extremitas tubuli BC superficiem aquae: tunc circulus infimus BC attrahet aquam, ad distantiam, quae aequatur radio actiuitatis, quo singula puncta peri-

 phe-

pheriae illius circuli gaudent, et denotatur per lineam A a vel Br, sitque $= b$ (Pr. XV.). Formatur inde annulus
Figura 15. FGEH, qui principium canaliculi generandi constituit, et cuius latitudo est eadem distantia A$a = b$. Huic annulo adhaeret circumquaque particula aquea, seu lamella tenuis rg (EH. Fig. 15.), quae initium cylindruli medii $xrgy$, cuius diameter est $= d - 2b$ (Pr. XV. Cor. 1.), constituit, et quae vi huius cohaesionis simul (Pr. XIX.) eleuatur. Facta hac quantulacunque eleuatione lamella propius accedit ad circulum proximum bc, vt eius peripheria ab huius radio actiuitatis pertingi possit, et nouus annulus bh, canaliculi augmentum generetur; in simul vero lamella prima hk viam rb emetitur, et post se trahit lamellam nouam priori aequalem, vt cylindrulus ad altitudinem rb vel Bb accrescat. Eadem eueniunt ad circulos $2bc$, $3bc$, etc. eousque, donec aqua ad altitudinem debitam xy sit eleuata. Demonstratio autem, quod ascensus aquae hoc et non alio modo fiat, ex antecedentibus plana et facilis est. Nam primo quidem nulla est ratio, quare particulis aqueis in vicinia debita constitutis, omnia puncta superficiei internae attractionem suam actu non exerceant (Pr. XI.). Quotiescunque igitur accidit, vt e. gr. circulus superficie $2bc$ lamellam proxime inferiorem hk attingere possit; necessario sequitur attractio atque eleuatio, propter vim annuli vitrei, quae maior est, quam cohaesio lamellae cum annulo canaliculi sui correspondentis (Pr. XIX.). Porro propter breuitatem radii actiuitatis vitri ex. gr. circulus superficiei $3bc$, non potest agere in distantem superficiem aquae in vasculo; oportet igitur, vt particulae aqueae in viciniam eius debitam deferantur,

ferantur, si attractio actu exerceatur (Pr. XIII. X.). Natura autem non facit saltum, sed antequam lamella infima rg ad circulum $3bc$ perueniat, necessario omnes circulos intermedios bc, $2bc$, tangere debet. Singuli igitur circuli superficiei non agunt nisi successiue; itemque canaliculus non nisi successiue generatur. At vero, ne annulus canaliculi secundus bb quidem formari posset, nisi lamella prima rg, vi attractionis, quae inter particulas aqueas intercedit, cum principio canaliculi Br cohaereret, atque huius cohaesionis ope propius ad circulum bc admoueretur. Non igitur nisi *per successiuam virium eleuantium applicationem, accedente vi cohaesionis mutuae particularum aquearum, ascensus aquae in tubulo capillari fieri potest.*

Corollarium.

Vera igitur *est propositio Haucksbejana*, quae aquam in tubulo capillari ascendere asserit attractione totius concauae superficiei ipsius tubuli, cui cylinder aqueus successiue adhaeret. Vera est, inquam, *cum de ascensu sermo est.* Sed nolim ea applicari ad suspensionem vel conseruationem aquae iam eleuatae; neque etiam consequentia valet, vti infra docebitur.

PROPOSITIO XXI.

In tubo capillari singuli cylindruli aquei xrgy *in diuersis altitudinibus considerati ascendunt vel eleuantur supra libellam, vi attractiua solius annuli vitrei superficiei concauae tubuli, qui immediate supra summam aquae superficiem constituitur.* Figura 18.

Demon-

Demonſtratio.

Tota quidem interna tubuli ſuperficies concaua aquam attrahit: non autem ſimul, eodem temporis momento; ſed ſucceſſiue (Pr. XX.). At vero neque illa ſuperficiei pars DB, cui aqua iam attracta accumbit, amplius quicquam attrahere vel eleuare poteſt: neque pars reliqua vacua DA in longiorem diſtantiam agit, quam breuitas radii (Pr. XI. XIII.) permittit. Ergo ſolummodo vnicus ille annulus vitreus, qui ſingulis aſcenſus tempusculis ſuperficiei aquae ſucceſſiue proximus fit (Pr. XX), reſtat, a cuius virtute attractiua propter viciniam in actum deducta eleuatio ſingulis momentis dependet.

Corollarium.

Quia eleuatio ſingulis tempusculis ab vnico annulo dependet, qui omnes inter ſe aequales eſſe cenſentur: hinc etiam *vis attractiua eleuans ſemper eadem, et quouis aſcenſus momento conſtans eſt.*

PROPOSITIO XXII.

Cylinder aqueus, qui intra tubulum capillarem aſcendit et ſuspenditur, ponderat, et grauitate ſua eleuationi et ſuſpenſioni reſiſtit.

Demonſtratio.

Figura 14. Attractioni reſiſtere maſſam guttulae, vi ponderis ſui et grauitatis, patet in genere ex Propoſitione VI. Cum vero grauitas indiuulſa corporis proprietas ſit: ipſa ratio concludere iubet, etiam cylindrum aqueum intra tubuli cauitatem genitum non ſolum grauem eſſe et pondus habere: ſed etiam vi grauitatis et ponderis ſui re-

resistere vi alteri attractrici, quae sollicitationibus suis aut ascensum efficere aut descensum impedire nititur. Canaliculus quidem virtute vitri attractiua cohibetur omnino, atque adeo firmiter agglutinatur, vt *pondere suo proprio* diuelli et descendere nequeat (Pr. XIV. Cor. 1.). Est enim crassities canaliculi minima (Pr. XV. Cor. 2.), et ponduseulum eius respectu vis attractricis minimum; potest igitur iste canaliculus censeri, quasi pondere careret. De cylindrulo autem medio pHq aliter statuendum est. Ille enim iam non retinetur vi attractiua vitri, sed ope cohaesionis mutuae particularum aquearum (Prop. XV. Cor. 4.), et massa sua massam canaliculi superat, hinc et pondus maius habet, et vi ponderis sui cohaesioni isti resistit. Sed quia haec res, vtut clarissima, dubitationibus tamen obnoxia facta est: ad experientiam ipsam prouocamus, quae de praesentia huius grauitationis et resistentiae abunde testatur. 1. Si enim tubulum, qui aquam ad sufficientem altitudinem CD attraxit, inuertas: aqua attracta non haeret quiescens in superiore tubuli parte, sed reuera descendit vsque ad orificium inferius. 2. Si tubulum profundius immergas, vt plus aquae CE capiat, quam per attractionem recipere potest: tum remoto tubulo ex vase omnis aqua superflua ED descendit, donec iterum ad altitudinem debitam CD peruenit. 3. Si tubulum, qui perpendiculariter erectus aquam ad AB hausit, ad horizontem inclinaueris; aqua in tubulo denuo progreditur eo vsque, donec altitudo perpendicularis DE (quae ad longitudinem tubi BD se habet, vt sinus rectus anguli eleuationis DBE ad radium) altitudini pristinae aequalis fuerit. An igitur (Exper. 1.) sim-

Exper. 18. Figura 13.

Exper. 19. Fig. 19.

Exper. 20. Fig. 20.

ſimplex inuerſio grauitationem et pondus attulit, quod non aderat prius? An (Exper. 2.) ſola aquae quantitas ſuperflua ED grauitat? et quidem adeo vt portionem CD loco ſuo detrudere poſſit? cur non omnis aqua effluit? an grauitatio deſinit, quando portio ED in locum Cylindri DC deſcendit? An (Exper. 3.) per inclinationem tubuli pondus aquae euaneſcit? ſi hoc? cur aqua non ad alterum tubi extremum aſcendit? Annon potius dicendum eſt in experimento primo, niſum ad deſcenſum adfuiſſe perpetuo, nunc vero, ſublato impedimento vel ſuperato, illum actu ſequutum eſſe et quidem vi grauitatis et ponderis: in ſecundo, nullam eſſe differentiam inter portionem aquae attractae ordinariam CD et ſuperfluam DE, et huius deſcenſum non continuari, niſi quod effectus grauitationis per vim contrariam (quaecunque illa denique ſit) ſufflaminetur: in tertio, aquam in inclinato tubulo denique progredi, quod portio ponderis cylindri nunc ſuſtineatur a latere tubuli, circulum igitur ſuperficiei proximum ob diminutam ponderis reſiſtentiam in ſuam attractiuam exercere; aſcenſum vero denuo ceſſare, quando altitudines perpendiculares iterum fiant aequales, quia in hoc caſu etiam pondera ante et poſt inclinationem (vt ſtatica docet) ſint aequalia? *Vera igitur eſt Propoſitio.*

Scholium.

Ex his dirimi poſſe putauerim quaeſtionem, quid de illorum conſilio ſtatuendum ſit, qui adiumentum aſcenſus in abolita grauitatione quaeſiuerunt. Quamuis enim canaliculum pondere quaſi carere concedimus; et praeterea cylindrulum

lindrulum ita suspensum nullam pressionem in aquam subiectam exercere fatendum sit: tamen nimis praecipitanter inducta mihi videtur hypothesis (quam *Vossianam*, aut *Borellianam* aut *Carreanam* denique dixeris), quasi per istam non-grauitatem vel non-pressionem in inferiora, pondus cylindri in tubo leuius factum esset respectu aquae in vase contraponderantis, et hinc ob ruptum aequilibrium ascenderet, vti fieri solet cum duobus fluidis diuersae grauitatis specificae; hypothesis, quae multorum Virorum intelligentium assensum nacta est, et cuius refutatio magno cum apparatu instituta fuit, quae tamen receptis simplicissimis principiis staticis ac hydrostaticis repugnat. Quid enim? dependeat lapis A a fune, et admoueatur lapidis basi potentia B, ita tamen, vt nude tangat. An igitur leuior euasit lapis, quia a fune dependet? An lex *Newtoniana* hic per miraculum tollitur? an minor potentia requiritur, quando illa ascendere et lapidem sursum tollere nititur; quia in solo contactu antecedaneo lapis A potentiam B non premit? an igitur cylinder aqueus non omni grauitate sua resistit potentiae illum porro eleuare nitenti, propterea, quia cum vitro cohaeret? Consideremus rem distinctius. Canaliculus cum vitro adeo fortiter cohaeret (Pr. XIV. Cor. 1.), vt numquam dimittatur semel attactus. Tantum igitur abest, vt haec cohaesio ascensum adiuuet, vt potius illum potentissime impediat, imo plane tollat; quapropter res in hoc casu eo recidit, ac si latus vitri crassius et orificium tubuli angustius factum esset? Putem vero diametrorum inaequalitatem non mutare altitudines aequales in tubis communicantibus; sed posito tubulo minoris diametri, minoris quoque diametri

Figura 21.

 cylin-

cylindrum aqueum in vase contraponderare censendum esse. Cylindrulus autem aut cum canaliculo ita cohaeret, vt diuelli nequeat, aut potest diuelli et moueri. Si diuelli nequit: nullus quoque erit ascensus. Si potest, dum re- uera inter ascendendum intra canaliculum mouetur; aut extra sphaeram cohaesionis pellitur, aut intra illam sub- sistit. Si hoc; nonne resistentia tanto maior est; quip- pe iam non simplex ponduscŭlum cylindruli eleuandi, sed et simul vis cohaesionis cum canaliculo superanda est, tantum abest, vt ascensus per cohaesionem facilitetur;
Figura 22. quemadmodum in situ figurae 22. potentia *b* non solum pondus lapidis *a*, sed et vim funis renitentem superare debet, quando ascensum continuari velis. Quodsi vero aqua sphaeram cohaesionis excedit: an non in ipsa diuul- sione et mutatione loci vis attractiua inter canaliculum et cylindrulum quasi agere cessat, et praetensa leuitas eo ipso euanescit?

PROPOSITIO XXIII.

Cohaesio, quae inter ipsas particulas aqueas, ex qui- bus cylindrulus medius componitur, vi mutuae attractionis in- tercedit, maior est et fortior, quam cohaesio cylindruli to- tius cum superficie canaliculi.

Demonstratio.

Figura 23. Concipiatur totus canaliculus A*a*B*b*CD intra tu- buli cauitatem genitus in tot annulos diuisus, quot dan- tur puncta in linea superficiali tubi AB. Diuidatur etiam totus cylindrulus intra canaliculum comprehensus in toti- dem lamellas (sectiones vel strata dixeris), ex. gr. 1. 2. 3. 4. 5 etc. quibus totidem annuli canaliculi respondent. In

In propatulo eſt, ſingulas lamellas non tantum cum annulis ſuis correſpondentibus vi mutuae attractionis, quae inter particulas aqueas intercedit, cohaerere, ſed etiam lamellas ipſas inter ſe cohaerere; hoc eſt: totum cylindrum non ſolum vnam maſſam continuam conſtituere, ſed et tota ſuperficie ſua conuexa cum ſuperficie concaua canaliculi ſecundum longitudinem lineae *ab* continuari. Porro: denotent circelli 1. 2. 3. 4. 5. lamellas cylindruli; lineae longitudinales *c* cohaeſionem lamellarum inter ſe; laterales *d* cohaeſionem cum canaliculo: dico, cohaeſiones *ccc* etc. fortiores eſſe, quam cohaeſiones *ddd* etc. Magnitudo enim cohaeſionis lamellarum inter ſe eſt in ratione baſeos cylindruli, et cohaeſio lateralis *d* eſt in ratione peripheriae. Sunt autem baſes in ratione diametrorum duplicata, peripheriae contra ſunt in ratione ſimplici. *Fortius* igitur *cohaeret cylindrulus inter ſe, quam cum canaliculo.* Figura 24.

Corollarium.

Quando igitur *lamella ſuprema in motum agitur, tunc totus cylindrulus mouetur*, nam citius cohaeſio *ab* inter ipſum et canaliculum rumpitur, quam vt maſſa cylindruli diuidatur.

PROPOSITIO XXIV.

Pondus a virtute attractiua annuli vitrei proxime ſuperioris quouis momento eleuandum aequale eſt ponderi cylindruli totius inter canaliculum moti.

Demonſtratio.

Quando cylindrulus aqueus, cuiuscunque altitudinis tubulum ingreſſus, vlterius eleuari debet: hoc fieri non poteſt, quin lamella ſuprema cylindruli, quae ſola a vi

attractiua annuli vitrei proxime superioris ad ascensum sollicitatur (Pr. XXI.), omnes subsequentes lamellas et sibi continuas (Pr. XXIII.), simul secum eleuet ac post se trahat. Omnes igitur lamellae, i. e. cylindrulus totus, qui ex illis componi concipitur, intra cauitatem canaliculi, cui contiguus est, mouetur simul, et cohaesio su-
Figura 24. perficiei communis *ab*. Atqui totus cylindrulus ponderat et grauitat (Pr. XXII.). Ergo *vis attractiua annuli illius vitrei quouis ascensus momento totius cylindruli pondus eleuare debet.*

Corollarium 1.

Figura 23. Quo altius aqua in tubum ascendit, eo magis cylindruli massa augetur; pondus autem in ratione massarum aestimatur. Datis igitur diuersis cylindruli altitudinibus in eodem tubulo B*d* et B*δ*: *annulus* 5*δ* *altiore loco positus pondus maius*, nimirum cylindrum altitudinis B*δ*, *eleuare debet*, *quam angulus inferior* 4*d*, qui nonnisi cylindrulum altitudinis B*d* eleuare debeat.

Corollarium 2.

Quia vis eleuans semper eadem et constans manet (Pr. XXI. Cor.); pondus autem eleuandum pro ratione altitudinis aquae ascendentis (Cor. 1.) continuo crescit: sequitur quoque *resistentiam a vi illa eleuante superandam* (Pr. XXII.) *continuo augeri*; *excessum* igitur *virium eleuantium continuo decrescere*, *et celeritatem*, *qua aqua in tubo ascendit*, *diminui*.

Corollarium 3.

Ex eadem caussa (Cor. 2.) sequitur, *ascensum non nisi ad determinatam aliquam altitudinem fieri posse*; quam vbi

vbi cylindrulus ascendens attigit, *aequilibrium oritur inter vim eleuantem et pondus eleuandum.*

PROPOSITIO XXV.

Cylindrulus aqueus intra tubulum eleuatus et quiescens a solo annulo supremo canaliculi suspenditur.

Demonstratio.

Quando tubulum, qui aquam ad datam altitudinem hausit, remoueas, atque extra vasculum erectum teneas: omnem illam aquam admissam atque eleuatam videbis immotam haerere et quasi suspendi. Atqui haec suspensio totius massae a virtute attractiua vitri immediate prouenire non potest. Vitrum enim non nisi canaliculum radio suo actiuitatis conuenientem attrahit et sustentat. Cylindrulus igitur a vitro immediate non suspenditur. (Pr. XV.) Sed neque attractio quae inter canaliculi et cylindruli superficies *ab* mutuo sibi contiguas intercedit ad suspensionem cylindruli quicquam confert. Cohaesiones enim, quas inter singulos annulos et lamellas respondentes (P. XXIII. Dem.) finximus, se inuicem destruunt; quia quantum vna lamella sursum vel deorsum trahitur, tantum per lamellas vtrinque proximas, itemque per annulos vtrinque proximos, qui tam in lamellas respondentes, quam in laterales proxime superiores et inferiores agunt, impeditur. Vnde lamellae istae indifferenter se habent quocum annulo cohaereant; siquidem cohaesio lateralis *d* facile soluitur, et totus cylinder mouetur, vbi primum vis aliqua motum producens accesserit. Solus nexus lamellae supremae per nullam aliam incumbentem, in quam annuli supremi attractio agere posset, destruitur. Sola igitur cohaesio inter annulum supremum et lamellam supremam la-

Exper. 21.

Figura 23.

Figura 24.

efficax permanet, a qua omnes reliquae lamellae ſubſequentes vi mutuae attractionis particularum aquearum dependent. *Totus* igitur *cylindrulus*, *ope lamellae ſuae ſupremae a ſolo annulo canaliculi ſupremo ſuspenditur.*

Scholium.

Si cui libuerit inter cauſſam ſuspenſionis etiam referre ſollicitationem continuam annuli vitrei proxime ſuperioris (Pr. XXI.); cuius praeſentia negari non poteſt, etſi ad plenarium aſcenſum producendum inſufficiens ſit: equidem non admodum refragabor; ſed meminiſſe tamen oportet, hanc cauſſam euaneſcere, quando tubulus breuior aut certe non longior eſt, quam altitudo, ad quam aqua in illo aſcendere poſſet.

Corollarium I.

Falſa eſt igitur *propoſitio Hauksbejana* (Pr.XX.Cor.), quando de cauſſa ſuspenſionis aquae iam eleuatae et quieſcentis quaeritur. E contrario *vera eſt propoſitio Iuriniana* ſupra allata, ſi duas cautelas adhibueris. Oportet enim meminiſſe: primo, etſi canaliculus a nobis ſuppoſitus tenuiſſimus ſit, vt maſſa tota parum differat (Pr. XV. Cor. 2.); tamen non omnem aquam, ſed ſolum cylindrulum ab illo annulo vitreo ſuſtentari: deinde, ſuſtentationem illam vel ſuspenſionem non immediate a vi attractiua annuli vitrei, ſed mediate, ope annuli ſupremi canaliculi aquei, peragi. Correcta igitur iſta propoſitio ita enunciari poteſt: *Cylindrulus aqueus in tubulo capillari ſuſtinetur ſupra libellam vi attractiua ſuperficiei tenuis annularis internae tubuli*, *mediante annulo canaliculi aquei*, *cui ſumma cylindruli ſuspenſi ſuperficies cohaeret et contigua eſt.*

Co-

Corollarium 2.

Quia vis ſuspendens ſemper eſt eadem, nimirum vis attractiua, quae inter particulas aqueas ſupremi annuli canaliculi et ſupremae lamellae intercedit; pondus autem ſuspendendum continuo creſcit: ſequitur, *ſuspenſionem nonniſi ad determinatam aliquam altitudinem locum habere; quam vbi aqua aſcendens attigit, aequilibrium oritur inter vim ſuspendentem et pondus ſuspenſum.*

PROPOSITIO XXVI.

Aſcenſus aquae in tubulo ceſſat, quando potentiae, quae aquam ad aſcenſum et deſcenſum ſollicitant, ad aequilibrium redactae ſunt.

Demonſtratio.

Potentiae, quae aquam in tubulo aſcendentem ad motum ſollicitant, ſunt duae praecipuae quoad directionem contrariae; nimirum vis attractiua annuli vitrei proxime ſupra ſuperficiem aquae conſtituti, quae aquam attollit (Pr. XXI.), et pondus aquae eleuatae, quae vi grauitatis deſcendere nititur (Pr. XXII.). Dico *praecipuae*, quia potentia tertia (Pr. XVII. XVIII.) cum pondere conſpirans, et conſtans in hac conſideratione tuto omitti poteſt. Aſcenſus aquae continuatur, quamdiu exceſſus potentiae eleuantis conſtat (Pr. XIX.). Exceſſus autem ille continuo decreſcit propter augmentum ponderis (Pr. XXIV. Cor. 2.). Quando igitur maſſa aquae aſcendentis eo vsque excreuit, vt momenta vtriusque potentiae aequalia euadant: oritur aequilibrium (Pr. XXIV. Cor. 3.), et exceſſus ille virium eleuantium euaneſcit. Nulla igitur adeſt ratio, quare aſcenſus continuetur. Quieſcit igitur aqua, et *aſcenſus ceſſat, quando potentiae, quae aquam ad motus contrarios ſollicitant, ad aequilibrium redactae ſunt.*

Corollarium 1.

Quamdiu igitur aequilibrium perdurat: omnis aqua in tubulum eleuata in quiete ſuſtentatur. *Quicquid* vero *hoc aequilibrium turbat, illud vel aſcenſum vlteriorem, vel deſcenſum promouet.*

Corollarium 2.

Potentiarum altera (Pr. XXVI. XXII.) motum aquae producentium eſt pondus cylindruli aquei eleuati. *Quodſi* igitur, ex cauſſa quacunque, *tubulus aquae quantitatem maiorem hauſit, quam quae a vi attrahente vitri eleuari poterat: aequilibrium tollitur et cylindrulus deſcendit.*

PROPOSITIO XXVII.

Aſcenſus aquae in tubulo ceſſat, quando cylindruli maſſa ita excreuit, vt vis attractiua inter annulum canaliculi et lamellam ſupremam cylindruli, maius pondus ſuſtinere nequeat.

Demonſtratio.

Figura 23. Suppone, aquam ad altitudinem eam ex. gr. $4d$ aſcendiſſe, in qua vis attractiua annuli cum cylindruli ſuſpenſi pondere ad aequilibrium redacta eſt (Pr. XXV. Cor. 2). In hoc caſu aqua eleuata ad eam molem excreuit, vt illa aucta, cohaeſionis vis inſufficiens ſit. Quodſi enim velles, vt aſcenſus continuaretur: ſequeretur, ab annulo canaliculi nouo 5δ plus ponderis debere ſuſpendi quam ab annulo proxime inferiore $4d$, qui ante hanc augmentationem ſupremus fuerat. Atqui hoc fieri

non

non poteſt, vbi ſemel ad aequilibrium peruentum eſt; quia vis attractiua annulorum ſingulorum vbique aequalis eſt. Annulus igitur canaliculi nouus conſtitui non poſſet ſine metu rupturae cylindruli dependentis adaucti. Tolleretur igitur cohaeſio, et ſequeretur in aſcenſu deſcenſus, quod eſt abſurdum. *Ceſſat* igitur *aſcenſus*, *quando vis ſuspendens et maſſa ſuspenſa in aequilibrio conſtituuntur.*

Corollarium 1.

Quodſi igitur tubulus ex cauſſa quacunque aquam ad altitudinem tantam hauſit, vt *pondus cylindruli* ab annulo canaliculi ſupremo *ſuspenſi maius* ſit, quam quod a vi attractiua particularum aquearum retineri poſſit: *aequilibrium iſtud tollitur*; et cohaeſio rumpitur; vnde aqua deſcendit, donec aequilibrium redeat.

Corollarium 2.

Circulus ſuperficiei internae tubuli, qui proximus eſt ſummitati cylindruli, ſollicitat lamellam continuo ad aſcenſum (Pr. XXI.). Attrahere autem aut eleuare plus nequit, quam cohaeſio particularum aquearum (Pr. VIII. Cor. 2.), quae ſuspenſionem (Pr. XXV.) determinat, permittit. Ceſſat igitur aſcenſus, quando vis iſta ſuspendens cum pondere ſuspenſo ad aequilibrium redacta eſt, *quia ſollicitationes circuli vitrei ſupremi minores ſunt, quam vt annulum canaliculi nouum conſtituant ſine metu rupturae cylindruli dependentis.*

PROPOSITIO XXVIII.

Altitudo, ad quam fluidum quodcunque in tubo capillari aſcendit, eſt in ratione directa differentiae virium at-

tractiuarum fluidi ad vitrum, et fluidi ad se; et in ratione reciproca diametri fluidi eleuandi.

Demonſtratio.

Figura 25. Sit vis, qua fluidi particulae ſe mutuo attrahunt $=q$; vis autem, qua fluidum ad tubum vitreum attrahitur $=p$. Diameter tubi ABC $=d$; Altitudo $=c$. Quia ad obtinendum effectum, qui eſt eleuatio fluidi intra tubum moti, applicatio virium harum fit ſecundum annulos ſucceſſiue applicitos, qui ſunt vt peripheriae columnarum (Pr. XX. XXI.): erit vis, qua fluidum ſurſum trahitur, (Pr. XVII. XIX.) vt $d(p-q)$; cui, facto aequilibrio, aequale eſſe debet pondus columnae eleuatae cd^2. Erit ergo, (deſignante m numerum conſtantem) $cd^2 = d(p-q)$ et $c = \frac{m(p-q)}{d}$.

Corollarium 1.

Quia attractio aquae ad vitrum maior eſt, quam attractio mutua particularum aquearum (Pr. IX.) erit $p-q$, quantitas affirmatiua: *Altitudo* igitur BP *eſt affirmatiua, et aqua in tubo ſupra libellam eleuatur.*

Corollarium 2.

Quia ſolus cylindrulus aqueus intra canaliculum, qui indiuulſus manet (Pr. XIV. Cor. 1. et Pr. XXIV.), mouetur et eleuatur: applicatio virium iſtarum conſiſtit in ſoluenda cohaeſione, quae intercedit inter annulum canaliculi ſupremum, et reſpondentis lamellae cylindruli (Pr. XXV.) peripheriam: haec autem peripheria eſt, vt diameter (non totius tubi, ſed) cylindruli (Pr. XV. Cor. 1. Pr. XXIV.) $=d-2b$. Erit igitur vis, qua aqua aſcendit

dit (Pr. XVII. XIX.) $= (p-q)(d-2b)$, pondus cylindruli $= c(\overline{d-2b})^2$. *Et altitudo* $c = \frac{m(p-q)}{d-2b}$, *in ratione reciproca diametri cylindruli.*

Corollarium 3.

Sint duo tubi cylindrici, ABC, cuius diameter $= d$, et altitudo PB $= c$, alter $\alpha\beta\gamma$, cuius diameter $= \delta$, et altitudo $\pi\beta = \varkappa$. Quia differentia virium $p-q$, constans est, erit $c:\varkappa = (\delta-2b):(d-2b)$. i. e. *Altitudines aquae ascendentis in tubis cylindricis diuersae diametri sunt reciproce vt diametri cylindrorum eleuandorum*, seu *in ratione reciproca diametri ipsorum tuborum quam proxime*, quippe diameter cylindruli, ob exiguitatem radii actiuitatis b quam proxime ad tubi ipsius, seu totius columnae aqueae diametrum accedit. Figura 25. et 26.

Corollarium 4.

Quia (Cor. 3.) $c:\varkappa = \delta-2b:d-2b$, sequitur *altitudines in tubo angustiore paullo maiores esse, quam debeant, si altitudines essent praecise, vt tuborum diametri reciproce.* Quo angustior enim est tubus, eo minor est d, eo sensibilior euadit differentia inter d et $d-2b$; eo maior erit igitur quantitas $\delta-2b$, respectu quantitatis $d-2b$, id quod etiam experimentis respondet.

Scholium 1.

Altitudines aquarum ascendentium esse in ratione diametrorum reciproca, ex experimentis diu cognouerunt Viri Celeberrimi, qui circa hoc negotium versati sunt.(*) Quae autem ipse obseruaui, sunt sequentia: (NB. Numeri

(*) Vid. Musschenbr. l. c. C. II. totum, it. Comm. Ac. T. II. Diss. cit. §. XXX.

meri denotant centesimas partes pollicis, quales duodecim constituunt pedem Anglicanum.)

Exper. 22.

Diameter tubi.		*Altitudo ascensus.*
0, 6. lin.	—— ——	7, 2. lin.
0, 4½ —	—— ——	9, 5. —
minor 0, 4. maior 0, 5. } med. 0, 4½	——	9, 2. —
0, 5 —	—— ——	8, 5. —
0, 6 —	—— ——	7, 1. —
0, 8 —	—— ——	5, 3. —
0, 2½ circiter —	——	17, 2. —

Quae dimensiones cum assignata proportione, positis tamen cautelis (Cor. 2. 3. 4.), satis conueniunt.

Corollarium 5.

Quando tubulus cum aqua ad datam altitudinem eleuata a vasculo remouetur; tum vis, qua aqua in tubo cum aqua in vase cohaesit (Prop. XVII.) euanescit, et sola restat vis sollicitans $=p$. Est igitur $p(d-2b)=c\,(\overline{d-2b})^2$, et $c=p:\overline{d-2b}$. *Aqua* igitur *ad maiorem altitudinem attrahitur extra aquam, quam trahi potest intra illam*, quia $p>p-q$.

Corollarium 6.

Quia differentia virium $p-q$, infinities variari potest; hinc etiam *diuersissimae altitudines oriuntur pro diuersitate fluidorum, quae attrahuntur.* (*)

Corol-

(*) Vid. Musschenbr. l. cit. C. III.

Corollarium 7.

Si fluidi attractio mutua maior eſt, quam attractio ad vitrum, vti eſſe ſolet *in Mercurio* (Pr. IX. Schol.); hoc eſt, ſi $p < q$: tum fluidum ne quidem ad libellam aſcendit, et *defectus erit* pariter *reciproce, vti diametri.*

Corollarium 8.

Per attractionem, quae inter particulas aqueas intercedit, non niſi gutta ſuſtentari poteſt, qua nimis aucta cohaeſio rumpitur (Pr. VII). Neque igitur per vim attractiuam annuli ſupremi canaliculi (Pr. XXV. XXVII.) plus quam gutta, absque deſcenſus metu cohiberi poteſt. *Pondus* igitur *cylindruli*, qui ab hoc annulo ſupremo dependet, *pondus guttulae excedere non debet.* Deprehendit autem *Exc. Bulffingerus* (Diſſ. cit. §. XXVII.) totam maſſam columnarum, quarum altitudo eſt in ratione diametrorum reciproca, non excedere guttulam tantam, quanta ab orificio tubuli infimo dependere poteſt. Patet igitur ratio vehementer probabilis et congrua, quare aſcenſus ceſſat, quando altitudines ad datam proportionem accreuerunt, quia videlicet per aſcenſum vlteriorem gutta maior eleuari deberet, quam per cohaeſionem aquae ſuſtineri poteſt. Et quia in tubulis orificii maioris, ſed eiusdem vbique diametri, annuli canaliculorum quoque maiores ſunt, ſequitur in tubulis amplioribus maiorem quoque guttam (Prop. VIII.) attrahi poſſe, modo diameter iſta dimenſionem (Prop. XVI. Cor. 2.) iuſtam non excedat. Exper. 23.

Scholium 2.

Atque ita in aprico collocatam eſſe rationem puto, quare aſcenſus aquae tandem ceſſet, et quare deſcenſus ſe-

ſequatur, quando tubulus plus iuſto hauſit. Quae proprietas theoriam noſtram omnino eo magis commendat, quo difficilius hactenus fuit ad iſtas quaeſtiones reſpondere. (Prop. XIV. Cor. 2.) Omni enim iure *Exc. Bulffingerus* hypotheſin de adhaeſione et abolito pondere examinans, in diſſertationis ſuae §. XXVIII. inſtat et vrget: "Si "prima aquae portiuncula fiſtulam ingreſſa pondere ca-"ret reſpectu ſuccedentis ſecundae: carebit et ſecunda fi-"ſtulam ingreſſa reſpectu tertiae: namque et ſecunda la-"teribus adhaerebit ſibi contiguis. Sic item tertia re-"ſpectu quartae: et quis erit finis ſucceſſionis? Quae eſt "ratio, cur non in omni fiſtula ad ſummitatem aqua "aſcendit, cum nulla fiſtulam ingreſſa deorſum premit "in ſibi ſubiectam? Suspenditur, inquis, quantum latera
Figura 19. "valent ſuſtinere. Bene eſt. Si latera inde a C ad D "poſſunt ſuſtinere quantitatem DD poterunt et latera a D "ad E ſuſtinere quantitatem DE, et ſic porro, do-"nec ad finem laterum A perueuias." Quae autem contra cohaeſionem hic dicuntur; opponi etiam debent, ſi cauſſam ascenſus vel ſuspenſionis in actione vitri ſola quaeſiueris. Videlicet: verum eſt, quod omnia puncta ſuperficiei internae tubuli (Pr. XIV. Cor. 2.) aequaliter attrahant; aequalem igitur particulam aquae poſſunt ſuſtinere. Quare igitur aſcenſus vel ſuspenſio ad finem vsque fiſtulae, vtcunque longae non continuatur? quod omnino fieri deberet, ſi a ſola attractione vitri res omnis penderet. Videmus inde neceſſitatem ſuperinductae virtutis attractiuae, quae inter particulas aquae (Prop. XVI.) ipſas intercedit, et per quam aequilibrium denique (Pr. XXIV. Cor. 3. XXV. Cor. 2.) generatur.

Pro-

PROPOSITIO XXIX.

In tubis cylindricis quantitas aquae a superficie eadem attracta minor est in tubis diametri minoris; maior autem in tubis diametri maioris.

Demonstratio.

Haec propositio ex natura figurae circularis vera esse intelligitur. Separetur in circulo A limbus $CEDFcedf$. Sit diameter $CD = d$, latitudo limbi $Cc = b$. Diameter circuli $B = \delta$, et latitudo limbi Gg eadem $= b$. Erit igitur in circulo A peripheria $CEDF = \frac{22}{7} d$, et peripheria minor $cedf = \frac{22}{7}(d - 2b)$. In circulo B, peripheria maior $= \frac{22}{7}\delta$ et minor $= \frac{22}{7}(\delta - 2b)$. Est autem in quouis circulo area limbi totius $= \frac{22}{7} Dc . Cc$. Erit ergo area limbi dimidii $CEDced = \frac{11}{7} b(d - b)$. Abscindatur in circulo B portio peripheriae GH, quae sit aequalis peripheriae dimidiae circuli A, vnde erit $GH = \frac{11}{7} d$. Quia $BH : GH = Bh : gh$; erit $gh = \frac{11}{7} \frac{d(\delta - 2b)}{\delta}$. Est autem area portionis limbi $GHhg$ $= \overline{GH + gh} . \frac{1}{2} Gg = \frac{11}{7} \frac{bd}{\delta}(\delta - b)$. Ergo area limbi dimidii in circulo A, est ad aream portionis limbi $GHgh$ in circulo $B = \frac{11}{7} b(d-b) : \frac{11}{7} \frac{bd}{\delta}(\delta - b) = \delta d - \delta b : \delta d - bd$. Hoc est: erunt inter se in ratione composita, ex reciproca diametrorum, et directa differentiae inter diametros circulorum et radium actiuitatis. Si igitur $\delta > d$; erit etiam $\delta b > db$. et $\delta b - \delta b < \delta d - bd$. *Consequenter eadem peripheria* CED et GH *in minori circulo* A *minus attrahit aquae, quam in maiore* B.

Corollarium I.

Quia in quouis circulo area limbi $CEDFcedf = \frac{22}{7} Dc . Cc$: erunt areae limborum in duobus circulis A et B, quorum diametri ſunt d et δ, et radius actiuitatis b, $= b(d-b):b(\delta-b)$. Et quando altitudines ſunt in ratione reciproca, erunt canaliculi, ſeu quantitates a ſola vi attrahente vitri eleuatae, ſimiliter $= \delta(d-b): d(\delta-b) = d\delta - b\delta : d\delta - bd$, et quia $b\delta > bd$: *Erit maſſa canaliculi minor in circulo minore, maior in maiore.*

Corollarium 2.

Quia peripheriae minores circulorum A et B ſunt inter ſe $= d-2b:\delta-2b$, erunt areae $=(d-2b)^2:(\delta-2b)^2$. Conſequenter cylindruli, quorum altitudines ſunt in ratione reciproca diametrorum ſuorum, ſunt inter ſe $= d-2b:\delta-2b$. i. e. Sunt in ratione diametrorum ſuorum directa. Si igitur $\delta > b$, *cylindrulus minor continebitur in tubo minori, maior in maiori.*

Scholium.

Hauksbejus, qui attractionem primus in hanc ſcenam introduxit, arbitratus eſt, totam internam ſuperficiem, cui aqua ſuſpenſa cohaeret, hanc virtutem actu exercere. Atque hoc quidem omni iure poſtulauit (P.XX.Cor. 1.). Interim placuit Viris, poſtliminio hanc materiam recolentibus, ſententiam iſtam relinquere. Neruus autem contradictionis in eo conſiſtit, quod ſupponerent, totam columnam, quanta eſt a ſola vi attractrice vitri immediate eleuari; cum igitur altitudines in ratione reciproca diametrorum eſſent, (quod et *Hauksbejus* agnouerat) et conſequenter columna attractae in ratione directa diametrorum, ſuperficies cylindricae autem vitri attrahentes aequales eſſe deberent: neceſſario inde ſequi, quod eadem

cauſſa

caussa effectus inaequales ederet, id quod absurdum esset. At vero, quia primo suppositio ista a veritate abhorret (vid. Pr. XV.); deinde differentia ista quantitatum eleuatarum necessario ex figura circulari columnae cylindricae (Pr. XXIX. fluit: putem, *Hauksbejum* ex hoc capite minus feliciter refutari, sed rem alia via aggrediendum (Pr. XX. Cor. et XXV. Cor. 1.) esse.

PROPOSITIO XXX.

Si pondus Cylindruli cum vi attrahente annuli in aequilibrio positum augeatur per vim accessoriam, conspirantem cum ponduscule in eandem directionem: aequilibrium rumpitur, et aqua descendit.

Demonstratio.

Quando potentiae aquam in tubulo mouentes in aequilibrium perueniunt: motus cessat (Pr. XXVI. Cor. 1.) et aqua quiescit. Turbato hoc aequilibrio nouus motus oritur, et quidem in plagam illam, in quam potentia mouens et praeualens dirigitur. Aqua autem ratione ponderis deorsum grauitat. *Quodsi* igitur *vis accessoria cum hac grauitatione conspirat: aqua in tubulo descendit*; namque idem est, ac si pondus auctum fuisset.

Corollarium I.

En fundamentum caussae pro explicatione phaenomeni, supra (Pr. XXII. Dem. Exp. 18.) a nobis allegati, et quod in Diss. Bulff. 31. est, *quod* nimirum *aqua ad altitudinem debitam eleuata in tubulo inuerso ad extremitatem alteram descendat.* Nam superficiei internae tubuli puncta omnia attrahunt; ergo et circulus D infra Figura 29.

canaliculum proximus attrahit. Ad pondus igitur cylindri BD per annulum canaliculi supremum ad A sustentati accedit noua vis circuli vitrei D, quae cylindrulum deorsum nitentem ad descensum sollicitat; inde aequilibrium tollitur, et descensus actu sequitur. Quod autem circa circulum D accidit; id circa alium quemcunque consequi debet, quia semper eadem est ratio et eadem sollicitatio superficiei vitreae. Descensus igitur prius non cessat, quam vis illa accessoria cessat, nimirum quando aqua ad orificium inferius A peruenit.

Scholium.

Hoc vero phaenomenon ex theoria Iuriniana explicari nequit. Si enim superficies annularis D, cui summa aquae suspensae superficies cohaeret et contigua est, Figura 29. vi sua attractiua totum cylindrum BD retinet, ne grauitate sua descendat, in situ ordinario: quare eadem vis attractiua pressionem eiusdem cylindri non sustinet in tubulo inuerso (Fig. 25.)? cum sola inuersione nec in vi, nec in pondere quicquam mutatum sit. Demus vero cy- Figura 30. lindrum descendere debere ex alia qualicunque caussa. Quare ille non subsistit, quando in situm DE peruenit? quando nimirum summa aquae suspensae superficies cum eodem summo annulo vel circulo D cohaeret. Ceterum nostram explicationem veram esse constat ex eo, quia descensus cylindri Exper. 24. DE cessat, et in eo situ quiescit, quando superficies tubuli interna EA, oleo illinitur, vt vis attractiua vitri (Pr. XIII. Cor. 1.) agere non possit.

Corollarium 2

Sit ista vis accessoria aequalis vi cylindrulum ad ascensum sollicitanti, vel tantillo minor, sed contraria; pondus-

ponduſculum vero aquae ratione virium iſtarum ſit infinite paruum: particula aquea ita vtrinque ſollicitata in quocunque loco tubuli poſita haerebit immota. Sit nempe intra tubulum AB particula aquea C, quae ſollicitatur tam ſurſum quam deorſum ab annulis ſuperficierum vitri, particulam vtrinque proxime attingentibus. Sit ſollicitatio ſuperior $= S$; inferior $= f$; pondus particulae $= p$: erit $S = f + p$, et particula immota haerebit. Idem eſt, ſi tubulus horizontaliter poſitus ingentem cylindrum aqueum continet: tunc enim pondus eius ſuſtentatur a ſolo latere tubuli, et quaſi euaneſcit; aqua igitur quieſcit, quia ſollicitationes virium attractionis ad vtramque cylindri baſin aequales ſunt.

Figura 31. Exper. 25.

Figura 32. Exper. 26.

Scholium Generale.

En Theoriam aſcenſus et ſuspenſionis aquae in tubulis capillaris, planam, facilem, ex conſideratione phaenomenorum minus compoſitorum genitam, et principiis ſimpliciſſimis adſtructam. Quae ſi vera eſt, aliarum refutatione ſtrictiori non eſt opus Euadet illa perfectior, quando theoria attractionis in genere latius erit exculta. Malui autem in hoc negotio prouocare ad experimenta talia, in quibus phaenomena a pauciſſimis cauſſis apertis, quam pluribus inuicem mixtis dependent. Poſſunt hoc modo facilius euitari fallaciae cauſſarum. Sunt aliqua experimenta inter Muſſchenbroekiana, quae huic theoriae contradicere videntur; ſed ne haec diſſertatio in maiorem molem excreſcat: reſponſiones, quae nunc facile in promtu eſſent, dabo in ſcriptione ſingulari; in quam etiam ſolutiones aliorum plurium phaenomenorum, quae difficiliora eſſe, et aliorum hypotheſibus fauere videntur, reiiciam.

DE THERMOMETRIS CONCORDANTIBVS.

AVCTORE
Iosia Weitbrecht.

§. 1.

CONstat inter Physicos, Thermometra Florentina, quibus vulgo vtuntur, duobus imprimis laborare defectibus: altero, quod nullam graduum caloris mensuram certam et determinatam exhibeant, altero quod ne ipsa quidem Thermometra inter se concordent in eodem calore, nec obseruationes diuersis instrumentis inter se comparari queant. Vtrumque plurimum hactenus impediuit incrementum scientiarum. Restitit igitur problema sequens: *Inuenire methodum vniuersalem, secundum quam conficiantur Thermometra talia, quae diuerso locorum interuallo in eodem calore quocunque posita, mensuram eandem exhibeant, et quorum variationes non simpliciter decrementa et incrementa caloris, sed et illorum quantitatem, et quae ad aliam magnitudinem referri potest, indicent.*

§. 2. Ad hunc scopum perueniendi multi varias ingressi sunt vias. Per industriam excellentis in his rebus artificis *Fahrenheitii*, et alterius cuiusdam nactum esse scimus Cel. *Wolffium* (*), a quouis duo Thermometra, quorum

(*) Vide eius Experimenta Physica germanica.

quorum bina inter ſe conueniunt, ſed duo vnius non conueniunt cum duobus alterius, et menſuram graduum habent arbitrariam. Tentauit ſimilia apud nos *Cl. Leutmannus* noſter. Cui bono autem iſtiusmodi Thermometra in eodem aſſere, quorum ſtruendorum methodus non conſtat, et quibus forte perditis aut fractis non poſſunt condi alia ſimilia, vt obſeruationes ſequentes prioribus reſpondeant? *Cel. Muſſchenbroeckius* (*) methodum aliquam generaliorem tradit Thermometra concordantia conficiendi. Sed praeterquam, quod plane non vniuerſalis ſit, et nonniſi ad paucum numerum extendi poſſit: illa tot operoſiſſimis cautelis obnoxia eſt, vt eo ipſo minus tuta ac certa euadat, et euitari vix queat, quin aut in eligendis tubis et cylindris aequalibus, aut in implendis mercurio aere priuato inſtrumentis, aut in inueniendo frigoris gradu primo, accuratiſſimi quoque artificis induſtria deficiat. Denique ſcalam graduum, quam Thermometris ſuis applicat, cum *Fahrenheitio* plane arbitrariam eligit. Nulla enim ratio eſt, quare longitudinem Tubi, quam Mercurius a frigore per ſal ammoniacum excitato ad frigus aquae in glaciem abeuntis percurrit, in 32 gradus diuidat, quam in alium quemcunque numerum diuidere potuiſſet. Neque haec menſura plus cognitionis ad metiendam frigoris intenſitatem affert, quam diuiſio in Florentinis adhiberi ſolita. Nondum igitur horum Virorum induſtria finem quaeſitum obtinuit, ſed remanſerunt ſemper incommoda priſtina. Vt de plurium aliorum tentaminibus nunc taceam.

§. 3.

(*) In Notis ad Experimenta Acad. del Cimento.

§. 3. Poſtremo *Cl. Dominus De L'Isle* noſter ad hoc negotium animum appellens methodum aliam felici ſucceſſu tentauit, quam alibi (*) fuſius deſcripſit, vnde Thermometrum obtinuit, cuius diuiſiones ad maſſam Mercurii contentam relationem haberent. Summa autem huius methodi huc redit, vt terminum aliquem fixum et conſtantem aſſumſerit, a quo gradus numerare incipiat, eligendo in hunc finem calorem aquae bullientis; diuiſiones autem ita adornauerit, vt in quouis gradu e. gr. centies milleſima pars mercurii contineatur, obſeruando, quantum ſpatium in tubo data portio mercurii in magno aliquo frigore occupet. Poſtquam Thermometrum hoc primarium ſeu *normale* confectum fuit; quamplurima alia minora, ſecundaria, leuiſſimo negotio conſtruxit; dum absque ſcrupuloſo delectu proportionis, quam tubus et cylinder inter ſe habere debent, illa Mercurio replet, qui per calorem aquae bullientis ſurſum pellitur, aut ſi abundat, plane expellitur, vt terminum diuiſionis nanciſcatur; quo facto inſtrumenta in aerem ſatis frigidum reponit, et totam illam viam, quam Mercurius a ſummo calore ad ſummum frigus in tubo decurrit, in tot diuidit partes centies milleſimas, ſeu gradus, quot Thermometrum normale in eadem aeris temperie repoſitum indicat.

§. 4. Non dubium eſt, quin, ſi quis Methodum *Delislianam* imitatri velit, ſimile thermometrum concordans nanciſcatur. Hoc vero praeſtare difficillimum eſt. Cum

(*) Vid. eius Memoires pour ſervir a l'hiſtoire et au progres de l'Aſtron. de la Geogr. & de la Phyſ. pag. 267.

Cum enim opera potiſſimum danda ſit, vt terminum aliquem frigoris magni conſtantem habeas et retineas, donec confectum ſit inſtrumentum: id, quod ab aere, cuius calor per horulas ſubinde mutatur, expectare vix queas: numquam tutus eris, an diuiſio graduum cum diuiſione maſſae mercurialis exacte conueniat? Vt igitur methodus certa ſit, oportet, primo, vt in poteſtate artificis ſit, eundem ſemper frigoris gradum conſeruare; deinde, vt ſciatur, quomodo ſe habeat volumen mercurii in calore aquae feruentis ad volumen in iſto determinato et fixo frigoris gradu, in Thermometro.

§. 5. Terminum fixum frigoris ipſa aqua gelaſcens nobis exhibet. Quemadmodum enim aqua nonniſi ad certum gradum caloris efferueſcit et ebullit, qui augeri nullo igne poteſt: ita etiam ille calor nonniſi ad certum gradum minui poteſt, etiamſi aquam in intenſiſſimi frigoris viciniam, quod vmquam arte aut natura producitur, repoſueris. Talis autem gradus frigoris eſt, quando ita gelaſcit, vt illa iamiam in glaciem conuerti incipiat, vel ſaltim glacies in illa non liqueſcit; id quod per experimenta luculenter conſtat, quae pro inuenienda varietate caloris aquae fluentis in flumine Neva inſtitui, et de quibus ad Ill. Societatem 1734. et 1735. (*) retuli.

§. 6. Thermometrum, quibus memorata (§. 5.) experimenta feci, fuit vnum ex ſecundariis *Delislianis*, cuius capacitas in 10000 partes diuiſa erat, et in quo Mercurius in aqua gelaſcente ſemper ad gradum 152^{mum} conſtiterat. Cum repeterem experimentum Thermometro alio: Mercurius ſimiliter ad eundem locum haerebat.

(*) Vid. Comm. Tom. VII. pag. 235.

Arbitratus igitur ſum, hunc gradum $\frac{152}{10000}$mum eſſe verum terminum frigoris aquae gelaſcentis; et iuxta hanc hypotheſin aliquot thermometra confeci, quae omnino perfecte conſpirare videbantur. Sed ſuſpicio mihi ſubnata eſt, vt de veritate rei dubitarem, cum obſeruarem, reliqua Thermometra ſecundaria Delisliana, etſi in eadem aeris temperie, vel in aqua eadem gelaſcente repoſita, plerumque vno, duobus, pluribusue gradibus inter ſe differre. Cuius diſcrepantiae cauſſam, quemadmodum hic loci non eſt indagare: ita illam plane nollem in deficientem autoris induſtriam reiicere. Vt tamen cognoſcerem, quod nam ex ſecundariis cum primario maxime conueniret? praeſente *Cl. Dn. De L'Isle* primo Thermometrum meum in ipſum fluuium glacie tectum demiſi, quod iuxta praedictam hypotheſin confeceram, vt certo conſtaret, nullam mutationem caloris aquae factam eſſe; deinde etiam expertus ſum, quomodo ſe Mercurius in Thermometro Delisliano normali haberet in eodem frigore. Inuenimus autem, Mercurium in meo haerere ad 152^{dum} gradum; cum in altero tantummodo indicabantur 1495 (ſeu quod idem eſt $149\frac{1}{2}$) gradus: vnde differentia $2\frac{1}{2}$ graduum ſe manifeſtabat.

§. 7. In hac rerum incertitudine operae pretium duxi ad experimenta confugere; quae duobus diuerſis modis inſtitui, et nunc paullo fuſius recenſebo. Modus

Tab. XXIII. Figura I. alter hic erat. Sumſi Thermometrum vacuum, ex tubo A et cylindro C conſtans; et pondus eius per bilancem quaeſiui; tum repleui cylindrum et aliquam partem tubi ita, vt Mercurius in aqua gelaſcente e. gr. circa A hae-

haereret, et pari modo in pondus Mercurii inquiſiui. Quo facto Thermometrum immiſi in aquam bullientem, vt terminus B innoteſceret, ad quem Mercurius in huius aquae calore aſcenderet. Longitudinem viae, quam Mercurius a calore aquae bullientis ad calorem gelaſcentis A B percurrit, menſuraui; et repoſito iterum inſtrumento in aquam gelaſcentem, totum ſpatium iſtud Mercurio addito repleui, et huius denique augmenti pondus inueni. Alter modus talis fuit. Sumſi Thermometrum ſimile vacuum; ponderaui, et in aqua gelaſcente ad plenitudinem tubi vsque Mercurio repleui. Inuento pondere Mercurii transtuli inſtrumentum in aquam bullientem, et expulſa per huius calorem omni ſuperflua portione quaeſiui pondus Mercurii reſtantis, et terminum denique ad quem ille in aqua gelaſcente deſcenderet, obſeruaui. Ex his datis calculus emergebat pro determinandis diuerſis voluminibus Mercurii reſtantis, et applicanda ſcala diuiſionum. Totam autem Maſſam Mercurii, et capacitatem vitri aſſumſi diuiſam in 100000 partes aequales. Bilanx, qua primo vſus ſum, fuit pharmaceutica cum eo pertinentibus inſtrumentis. Menſura fuit decima pars lineae, quarum decem pollicem, duodecim vero pollices pedem Anglicanum conſtituunt. Thermometra adhibita vocabo A.) B.) C.) etc.

Experimentum I.

In Thermometro A.) quod vacuum pendet = 384. gran. erat Pondus Mercurii in aqua gelaſcente

in A. haerentis — — — — = 1861. gr.

vna cum augmento Mercurii in B. - = 1890. gr.

Ergo augmentum ipſum, ſpatium
AB occupans - - - = 29 gr.
Longitudo viae AB — — = 316. dec. part. lin.

Ex his datis ſequens emergit calculus: Nimirum, quia, vti eſt Maſſa totalis ad 100000: ita ſunt maſſae partiales ad quaeſita reſpectiue; erit

$$1890 : 100000 = 1861 : 98465\tfrac{1150}{1890}$$
$$\text{et } 1890 : 100000 = 29 : 1534\tfrac{740}{1890}.$$

Porro; quia in ſpatio AB continentur Mercurii 29. grana; ſi ponamus, tubum eousque produci, donec omnem Mercurii maſſam capere poſſit; erit longitudo ſpatii, quam adimplet Maſſa 1861. gr., $= 20278\frac{14}{29}$ d. p. l., ergo longitudo totalis pro Maſſa totali $= 20594\frac{14}{29}$ dec. part. lin. Quapropter erit

$$20594\tfrac{14}{29} : 100000 = 20278\tfrac{14}{29} : 98465\tfrac{36340}{59724}$$
$$\text{et } 20594\tfrac{14}{29} : 100000 = 316 : 1534\tfrac{23884}{59724}.$$

Experimentum II.

Sumſi Thermometrum aliud B.), pendens 224. gr. cuius tubulus ratione cylindri paulo anguſtior erat. Caſu accidit, vt eſſet aequale cum priori

Pondus Mercurii primi in A = 1861. gr.
ſed vna cum augmento in B = 1889. gr.
Ergo augmentum ipſum = 28. gr.
Longitudo viae AB = 325. p. d. l.

Eſt igitur iuxta proportiones conſuetas

$$1889 : 100000 = 1861 : 98517\tfrac{1317}{1889}$$
$$\text{et } 1889 : 100000 = 28 : 1482\tfrac{502}{1889}.$$

Porro

Porro longitudo tubi, pro Maſſa 1861, erit $= 21600\frac{25}{28}$

Ergo longitudo pro Maſſa totali $= 21925\frac{25}{28}$

Quapropter $21926 : 100000 = 21601 : 98517\frac{16258}{21926}$

et $21926 : 100000 = 325 : 1482\frac{5669}{21926}$

longitudo viae a Zero ad frigus aquae gelaſcentis.

Experimentum III.

Retinui Thermometrum antecedens, et Mercurium, qui in aqua gelaſcente ſteterat ad B, pepuli per aquam bullientem vsque ad D: et ſpatium BD poſtmodum addito nouo Mercurio impleui. Erat autem

Pondus Maſſae totalis	=	1920. gr.
Si iam ponamus Maſſam partialem iuxta Exp. II. fuiſſe	=	1889. gr.
erit augmentum in BD	=	31. gr.
Longitudo viae BD	=	352. p. d. l.

Vnde ſequitur: $1920 : 100000 = 1889 : 98385\frac{800}{1925}$

et $1920 : 100000 = 31 : 1614\frac{1120}{1923}$

Porro ſpatium pro maſſa Mercurii 1889. erit $= 21449\frac{9}{31}$

Ergo longitudo totalis pro Mercurio, 1920. gr. $= 21801\frac{9}{31}$

Quapropter erit $21801 : 100000 = 21449 : 98385\frac{8615}{21801}$

et $21801 : 100000 = 352 : 1614\frac{13186}{21851}$,

quae eſt longitudo viae a Zero ad frigus aquae glaſcentis.

Quia vero nulla ratio ſufficiens eſt, quare augmentum Mercurii in Experimento II. ſit tantum 28. gr.; cum tamen in Experimento primo fuerit = 29. gr. et Maſſa partialis in vtroque ſit aequalis = 1861. gr. Quia etiam ſpatium, quod Maſſa Mercurii 1889. in Experimento

II. et III. occupat, diuerſum ſit, nimirum $21925\frac{25}{28}$, et $21449\frac{9}{31}$, cum tamen cetera paria ſint: ſequitur numerum 1889. falſo acceptum eſſe.

Quodſi igitur loco illius ponatur = 1890. gr.
erit augmentum = 30. gr.

Erit igitur $1920 : 100000 = 1890 : 98437\frac{960}{1920}$
et $1920 : 100000 = 30 : 1562\frac{960}{1920}$

Porro longitudo pro Maſſa partiali 31. gr. eſt = 352 d. p. l.
Ergo longitudo pro Maſſa part. 1890. gr. erit = 22176
et longitudo tota pro Maſſa totali = 22528

Quapropter $22528 : 100000 = 22176 : 98437\frac{11264}{22528}$
et $22528 : 100000 = 352 : 1562\frac{11262}{22528}$,

quae eſt longitudo viae AB a Zero ad frigus aquae gelaſcentis.

Experimentum IV.

Repleui Thermometrum C.) iuxta modum alterum (§. 7.) in aqua gelaſcente Mercurio ad plenitudinem vsque, et fuit

Pondus Mercurii totale = 1951. gr.
Pondus Mercurii reſtantis poſt expulſionem in feruida = 1922. gr.
Ergo portionis elapſae pondus = 29. gr.
Longitudo viae, quam Mercurius in gelida deſcendit = 374. p. d. l.

Quapropter erit iuxta proportiones conſuetas:

$1951 : 100000 = 1922 : 98513\frac{1177}{1951}$
et $1951 : 100000 = 29 : 1486\frac{814}{1951}$.

Porro

Porro longitudo tubi, quem adimplet
Mercurius reſtans $= 24787\frac{5}{29}$.
Ergo longitudo totalis pro maſſa totali $= 25161\frac{5}{29}$ d.p.l.
Quapropter $25161 : 100000 = 24787 \cdot 98513\frac{17407}{25161}$
et $25161 : 100000 = 374 : 1486\frac{7754}{25161}$, d.p.l.
quae eſt longitudo viae a Zero ad gradum frigoris.

Experimentum V.

In Thermometro D.)
Pondus maſſae Mercurii totalis eſt $= 2550$. gr.
Pondus Mercurii reſtantis $= 1512$. gr.
Ergo Portio elapſa $= 38$. gr.
Longitudo ſpatii, quod portio elapſa occupauit $= 570$.d.p.l.
Quapropter erit $2550 : 100000 = 2512 : 98509.\frac{2050}{2550}$
itemque $2550 : 100000 = 38 : 1490\frac{500}{2550}$.
Porro longitudo tubi pro Maſſa Mercurii
reſtante $= 37680$.p.d.l.
pro Maſſa totali $= 38250$.p.d.l.
Erit ergo $38250 : 100000 = 37680 : 98509\frac{30759}{38250}$
et $38250 : 100000 = 570 : 1490\frac{7550}{38250}$

§. 8. Ex his obſeruationibus variae determinationes deducuntur pro diuidendo ſpatio AB a termino caloris aquae bullientis ad calorem aquae gelaſcentis. Diſtant enim hi duo termini iuxta

Experimentum I. $= 1534\frac{74}{139}$ gr. ſiue $= 153\frac{1}{2}$ circiter
II. $= 1482\frac{502}{1889}$ gr. $= 148\frac{1}{5}$ gr.
III 1) $= 1614\frac{1120}{1923}$ gr. $= 161\frac{1}{2}$ gr.
2) $= 1562\frac{962}{1920}$ gr. $= 156\frac{1}{4}$ gr.
IV. $= 1468\frac{814}{1914}$ gr. $= 148\frac{3}{5}$ gr.
V. $= 1490\frac{10}{11}$ gr. $= 149\frac{1}{10}$ grad.

Vtus

Vtut autem fatendum ſit, primo obtutu diuerſitatem ingentem videri: omne tamen diſcrimen fortaſſe ab errore aliquo minimo, qui ex nequitia bilancis ponderumue obſeruationibus facillime ſe ingerere potuit, obortus eſt, vt aut pondus maſſae totalis aut partialis, aut fortaſſe vtrumque minus iuſte determinauerimus.

§. 9. Vt igitur errorem detegamus et proſequamur, ponamus veram eſſe hypotheſin, quod mercurius ex calore aquae ſummo ad calorem aquae minimum viam percurrat, quae eſt ad ſpatium reliquum, quod occupat, vt 152: 10000, et quod volumen Mercurii expanſi ad contractum ſit, vt 10000:9848. Inde ſequitur, Maſſas inuentas partiales eſſe ad Maſſam totalem, vt 9848:10000, itemque vt 152: 10000. Sit igitur error in Maſſa totali, erit iuxta

Exp. I.	9848:100000	$= 1861:1889\frac{7128}{9848}\left(\frac{3}{4}\right)$	ergo in	1890	erratum	$+\frac{1}{4}$
II.	– : —	$= 1861:1889\frac{7128}{9840}\left(\frac{3}{4}\right)$	—	1889	—	$-\frac{3}{4}$
III. 1)	– : —	$= 1889:1918\frac{1536}{9848}\left(\frac{1}{6}\right)$	—	1920	—	$+1\frac{5}{6}$
2)	– : —	$= 1890:1919\frac{1688}{9848}\left(\frac{1}{6}\right)$	—	1920	—	$+\frac{5}{6}$
IV.	– : —	$= 1922:1951\frac{6552}{9848}\left(\frac{2}{3}\right)$	—	1951	—	$-\frac{2}{3}$
V.	– : —	$= 2512:2550\frac{7600}{9848}\left(\frac{4}{5}\right)$	—	2550	—	$-\frac{4}{5}$

Quodſi vero maſſam totalem exacte ponderatam eſſe, et errorem in partiali reſtante iacere putemus, ſimilis orietur differentia:

Exper. I.	10000 : 152	$= 1890 : 28\frac{7280}{10000}\left(\frac{3}{4}\right)$	a quo	29	differt	$+\frac{1}{4}$
II.	— : –	$= 1889 \cdot 28\frac{7280}{10000}\left(\frac{3}{4}\right)$	—	28	—	$-\frac{3}{4}$
III. 1)	— : –	$= 1920 : 29\frac{1040}{15000}\left(\frac{1}{6}\right)$	—	31	—	$+1\frac{5}{6}$
2)	— : –	$= 1919 : 29\frac{1688}{15000}\left(\frac{1}{6}\right)$	—	30	—	$+\frac{5}{6}$
IV.	— : –	$= 1951 : 29\frac{6552}{10000}\left(\frac{2}{3}\right)$	—	29	—	$-\frac{2}{3}$
V.	— . –	$= 2550 : 38\frac{7600}{10000}\left(\frac{3}{4}\right)$	—	38	—	$-\frac{3}{4}$

Vide-

Videmus in experimento primo, numerum 1890, qui quantitatem maſſae totalis ex obſeruatione erutam exprimit, non differre a numero 1889, quem hypotheſis ſuggerit, niſi vna quarta parte vnius grani: interim tamen hanc minimam differentiam nihilominus in cauſſa eſſe, cur terminus gelationis ſesqui gradibus profundior poni deberet. Quemadmodum vero in experimento primo Maſſa totalis iuſto maior aſſumta fuit: ita e contrario in experimento ſecundo (dum caſu accidit, vt Maſſa partialis vtrinque aequalis eſſet) iuſto minor aſſignata eſt. Et, quia error ſemel admiſſus alios plures gignit, non mirum eſt, quod in experimento tertio, in quo maſſa partialis 1889. gr. perperam pro vera aſſumebatur, differentia maior orta fuerit, quae omnino minor euaſit, cum maſſae determinatio altera, nempe 1890. gr. ſubſtituebatur. Pari modo in reliquis experimentis quarto nimirum et quinto vni grano non aequiparatur.

§. 10. Verum enim vero non putandum eſt, hypotheſin hanc adſciticiam veram eſſe, quia tam prope ad obſeruationes accedit; ſed eo ipſo, quia res ad minutias redit, iudicium potius ſuspendendum eſt. Quodſi enim aliam adoptare velimus, in qua longitudo viae AB ſit e. gr. $\frac{150}{1030}$; vel, (quae in diuiſione Thermometri Del'isliani primarii locum obtinuit) ($\frac{1405}{1000000}$): videbimus, illas aeque bene, imo aliqua ex parte accuratius cum experimentis concordare. Sit enim Longitudo AB, vel Maſſa partialis in illo ſpatio contenta $= \frac{150}{1033}$, erit iuxta

Exper. I.	9850 : 10000	= 1861 : 1889 $\frac{335}{985}$ $(\frac{1}{3})$	a quo 1890	diff. + $\frac{2}{3}$
II.	— : —	= 1861 : 1889 $\frac{335}{985}$ $(\frac{1}{3})$	— 1889	− $\frac{1}{3}$
III.	— : —	= 1889 : 1917 $\frac{755}{985}$ $(\frac{2}{3})$	— 1920	+ 2 $\frac{1}{3}$
—	— : —	= 1890 : 1918 $\frac{770}{985}$ $(\frac{3}{4})$	—	+ 1 $\frac{1}{4}$
IV.	— : —	= 1922 : 1951 $\frac{265}{985}$ $(\frac{1}{4})$	— 1951	− $\frac{1}{4}$
V.	— : —	= 2512 : 2550 $\frac{250}{985}$ $(\frac{1}{4})$	— 2550	− $\frac{1}{4}$

item, iuxta

Exper. I.	10000 : 150	= 1890 : 28 $\frac{350}{1000}$ $(\frac{1}{3})$	a quo 29	diff. + $\frac{2}{3}$
II.	— : —	= 1889 : 28 $\frac{335}{1000}$ $(\frac{1}{3})$	— 28	— − $\frac{1}{3}$
III.	— : —	= 1920 : 28 $\frac{800}{1000}$ $(\frac{4}{5})$	— 31	— + 2 $\frac{1}{5}$
	— : —	= 1919 : 28 $\frac{785}{1000}$ $(\frac{4}{5})$	— 30	— + 1 $\frac{1}{5}$
IV.	— : —	= 1951 : 29 $\frac{265}{1000}$ $(\frac{1}{4})$	— 29	— − $\frac{1}{4}$
V.	— : —	= 2550 : 38 $\frac{250}{1000}$ $(\frac{1}{4})$	— 30	— − $\frac{1}{4}$

Sit vero $AB = \frac{1495}{100000}$: erit iuxta

Exper. I.	98505 : 100000	= 1861 : 1889 $\frac{33055}{98505}$ $(\frac{1}{3})$	− 1890	diff. + $\frac{2}{3}$
II.	— : —	= 1861 : 1889 $\frac{33055}{98505}$ $(\frac{1}{3})$	− 1889	— − $\frac{1}{3}$
III.	— : —	= 1889 : 1917 $\frac{65915}{98505}$ $(\frac{2}{3})$	− 1920	— + 2 $\frac{1}{3}$
	— : —	= 1890 : 1918 $\frac{69410}{98505}$ $(\frac{7}{10})$	−	— + 1 $\frac{3}{10}$
IV.	— : —	= 1922 : 1951 $\frac{16745}{98505}$ $(\frac{1}{6})$	− 1951	— − $\frac{1}{6}$
V.	— : —	= 2512 : 2550 $\frac{12250}{98505}$ $(\frac{1}{8})$	− 2550	— − $\frac{1}{8}$

itemque iuxta

Exper. I.	10000 : 1495	= 1890 : 28 $\frac{25550}{100000}$ $(\frac{1}{4})$	— 29	diff. + $\frac{3}{4}$
II.	— : —	= 1889 : 28 $\frac{24055}{100000}$ $(\frac{1}{4})$	— 28	— − $\frac{1}{4}$
III.	— : —	= 1920 : 28 $\frac{70400}{100000}$ $(\frac{7}{10})$	— 31	— + 2 $\frac{3}{13}$
	— : —	= 1919 : 28 $\frac{68905}{100000}$ $(\frac{2}{3})$	— 30	— + 1 $\frac{1}{3}$
IV.	— : —	= 1951 : 29 $\frac{16748}{100000}$ $(\frac{1}{6})$	— 29	— + $\frac{1}{6}$
V.	— : —	= 2550 : 38 $\frac{12250}{100000}$ $(\frac{1}{8})$	— 38	— + $\frac{1}{8}$

§. 11.

§. 11. Ex his ſpeciminibus patet, experimenta noſtra ad plures hypotheſes adplicari poſſe, nec quicquam ſtabile exinde concludi. Quapropter, quamuis differentia omnis ab errore quodam proficiscatur, qui adeo exiguus eſt, vt vix adtentionem mereri videatur: illum tamen plane non negligendum eſſe intelligimus; quin potius exinde ſequitur, ſi ad certitudinem aliquam peruenire velimus, nos etiam ad quartam partem grani in ponderanda maſſa mercurii ſcrupuloſos eſſe debere. Hunc in finem denuo ad experimentorum repetitiones confugi, et loco fallacis bilancis pharmaceuticae aliam accuratiorem elegi, nimirum illam, quae a *s'Graueſandio* ſub nomine bilancis hydroſtaticae deſcripta inter inſtrumenta phyſica academica reperitur, et ponduſculis minutiſſimis inſtructa eſt. Quae inueni, ſunt ſequentia.

Experimentum VI.

Thermometrum E.) quod pendet $200\frac{1}{2}$ gr. repleui Mercurio in aqua gelaſcente ad plenitudinem vsque: erat

Pondus Maſſae Mercurii totalis	= 2567. gr.
Pondus Maſſae partialis reſtantis	= 2528. gr.
Portionis igitur expulſae	= 39. gr.

Experimentum VII.

In Thermometro F.) quod pendet 146. gr. erat

Pondus Maſſae Mercurii totalis	= $2732\frac{1}{8}$ gr.
Pondus Maſſae partialis poſt expulſionem reſtantis	= 2691. gr.
Pondus ergo portionis expulſae	= $41\frac{1}{8}$ gr.

Experimentum VIII.

In Thermometro G.) quod pendet 484. gr. pleno, erat

Pondus Maſſae Mercurii totalis		$= 5554\frac{3}{8}\ (\frac{1}{2})$ gr.
— — poſt expulſionem reſtantis		$= 5470\frac{1}{4}$ gr.
Pondus igitur portionis expulſae		$= 84\frac{1}{4}$ gr.

§ 12. Ex his obſeruationibus ſequentes emergunt calculi. Nimirum, vti ſunt Maſſae Mercurii totales ad 100000: ita maſſae partiales ad quaeſita reſpectiue; quapropter erit iuxta

Exper. VI. $2567 : 100000 = 2528 : 98480\frac{1840}{2567}$

et $— : — = 39 : 1519\frac{727}{2567}$

Exper. VII. $2732\frac{1}{2} : 100000 = 2691 : 98481\frac{1335}{5465}$

et $— : — = 41\frac{1}{2} : 1518\frac{4130}{5465}$

Exper. VIII. $5554\frac{1}{2} : 100000 = 5470\frac{1}{4} : 98483\frac{2176\frac{1}{2}}{5554\frac{1}{2}}$

et $— : — = 84\frac{1}{4} : 1516\frac{4678}{5554\frac{1}{2}}$

§. 31. Apparet, hos calculos multum appropinquare ad hypotheſin, quae maſſam partialem in ſpatio $AB = \frac{152}{10000}$ ponit; eſt enim iuxta

Exper. VI. $10000 : 152 = 2567 : 39\frac{184}{10000}(\frac{1}{54})$ a quo 39 diff. $-\frac{1}{54}$

VII. $— : — = 2732\frac{1}{2} : 41\frac{5340}{10000}(\frac{8}{15})$ — $41\frac{1}{2}$ — $-\frac{1}{30}$

VIII $— : — = 5554\frac{1}{2} : 84\frac{4284}{10000}(\frac{3}{7})$ — $84\frac{1}{4}$ — $-\frac{5}{28}$

Sed

Sed nec aliae hypotheſes multum abludunt. Sit enim $AB = \frac{150}{15333}$: erit iuxta

Exper. VI. $10000 : 150 = 2567 : 38\frac{5050}{15333}(\frac{1}{2})$ a quo 39 diff. $+\frac{1}{2}$
VII. —— : — $= 2732\frac{1}{2} : 40\frac{0875}{15333}(\frac{72}{85})$ —— $41\frac{1}{8}$ — $+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$
VIII. —— : — $= 5554\frac{1}{2} : 83\frac{3175}{15333}(\frac{5}{16})$ —— $84\frac{1}{4}$ — $+\frac{15}{16}$

item

Exp. VI. $10000 : 9850 = 2567 : 2528\frac{4950}{15333}(\frac{1}{2})$ a quo 2528 diff. $-\frac{1}{2}$
VII. —— : —— $= 2732\frac{1}{2} : 2691\frac{5125}{15333}(\frac{1}{2})$ —— 2691 — $-\frac{1}{8}$
VIII. —— : —— $= 5554\frac{1}{2} : 5471\frac{1325}{15333}(\frac{2}{11})$ —— $5470\frac{1}{4}$ — $-\frac{10}{11}$

Sit vero $AB = 149\frac{1}{2} : 10000$, erit iuxta

Exp. VI. $100000 : 1495 = 2567 : 38\frac{37665}{153333}(\frac{3}{8})$ a quo 39 diff. $+\frac{5}{8}$
VII. —— : —— $= 2732\frac{1}{2} : 40\frac{90087}{153333}(\frac{9}{13})$ —— $41\frac{1}{2}$ — $+\frac{8}{13}$
VIII. —— : —— $= 5554\frac{1}{2} : 83\frac{3977}{153333}(\frac{1}{23})$ —— $84\frac{1}{4}$ — $+1\frac{1}{5}$

item

Exp. VI. $100000 : 98508 = 2567 : 2528\frac{62735}{153333}(\frac{5}{8})$ a quo 2528 diff. $-\frac{5}{8}$
VII. —— : —— $= 2732\frac{1}{2} : 2691\frac{136636}{153333}(\frac{2}{13})$ —— 2691 — $-\frac{2}{13}$
VIII. —— : —— $= 5554\frac{1}{2} : 5471\frac{46024}{153333}(\frac{1}{2})$ —— $2470\frac{1}{4}$ — $-1\frac{1}{4}$

§. 14. Dices: ita nos priſtina laborare incertitudine. Verum, ſi cui libuerit, rem ipſam tentare, ille mirari deſinet, quare nullum experimentum, omni licet cura et circumſpectione, et eadem methodo inſtitutum cum altero conſpiret. Experietur enim mecum, in ipſo Mercurio latere ineuitabile ſucceſſus impedimentum. Ab hoc videlicet ſeparari non poteſt proprietas naturalis, qua particulae ſuae mutuo ſe attrahunt. Quodſi igitur e. gr. thermometrum vel in frigore vel in feruore ad plenitudinem repleas, rariſſime obtinere poteris, vt haec repletio exacte ad libellam fiat, ſed plerumque Mercurii ſummitas aut depreſſior aut altior erit orificio tubi, neque minus a margine orificii quaſi fugit, et in tumorem eleuatur, qui maior eſt pro maiore diametro luminis tubi. Hinc omne diſcrimen ad minimum quendam globulum mercurialem reducitur, qui quidem ſi deficit ſuperaddi, ſi abundat, nullatenus auferri poteſt, vnde etiam vix cauetur, quin pondus verum Mercurii aliquota parte vnius grani immutetur.

§. 15. Cum igitur propemodum deſperandum ſit de talibus experimentis, quae adeo accurate inter ſe conſpirent, vt plane nulla laborent differentia: liberum nobis erit, talem eligere hypotheſin, quae cum obſeruationibus quam proxime conuenit. Inter omnes autem illa proportio optionem mereri mihi videtur, quae Maſſam Mercurii partialem in B ad maſſam totalem (vel longitudinem viae AB, quam Mercurius a ſummo calore aquae feruentis ad infimum calorem aquae gelaſcentis percurrit, ad totam vitri capacitatem) ponit $= 150 : 10000$, vel in Thermometris maioribus $= 1500 : 100000$. Quamuis enim non negandum ſit, tria vltima experimenta, et imprimis VI^{tum}, potius expoſcere, vt ſit $AB = \frac{152}{10000}$: quia tamen non perfecte correſpondent; aeque ac cetera ſcrupulum animo relinquunt. Rationes autem, quae ad illius proportionis optionem me determinant, ſunt ſequentes: quia, quamuis ſimiliter, vti omnes, ab obſeruationibus diſcrepet, in omnibus tamen mediam fere diſtantiam ac differentiam ſeruat: deinde ipſa eſt, quae ad experimentum Thermometro Delisliano normali (§. 6.) factum quam proxime accedit. Tandem nulla diuiſione

ſcala

ſcala graduum commodius adaptari poteſt. Denique, ſi quoque poneretur illam non eſſe veriſſimam: differentia magnitudinis graduum iuxta reliquas hypotheſes concinnatorum in Thermometris minoribus, in quibus gradus vix $\frac{3}{10}$ lin. raro $\frac{1}{2}$ lineam aequant, inſenſibilis euadit. Diuidatur enim ſcala in 150. partes, et longitudo graduum ſit $= \frac{3}{15}$ lin.; ſi eadem ſcala diuidatur in 152. gr. erit differentia graduum $= \frac{1}{250}$ lin.; ſi autem diuiſio fiat in $149\frac{1}{2}$ partes, erit differentia graduum $= \frac{1}{1000}$ lineae. Sit autem longitudo gradus in ſcala prima $= \frac{1}{2}$ lineae; tum erit differentia graduum in diuiſione ſecunda $= \frac{1}{50}$ lin.; et in diuiſione tertia $= \frac{1}{850}$ lineae, quae igitur cum impoſſibile ſit, vt in oculos incurrat, merito pro inſenſibili habenda eſt.

§. 16. Methodus igitur vniuerſalis, conſtruendi Thermometra concordantia, talis eſto:

Fiat inſtrumentum vitreum, cuius pars inferior eſt cylinder amplior, ſuperior tubus anguſtior. Magnitudo inſtrumenti poteſt eſſe qualiscunque. Proportio inter cylindrum et tubum ſeruetur talis, qualis ſufficit, vt gradus in ſcala diuiſionum ſatis diſtingui poſſint; quo maior ratio eſt capacitatis cylindri ad capacitatem tubi, eo maiores fiunt gradus. Optima eſt, ſi diameter cylindri eſt 3. 4. vel 5. linearum, longitudo 2. vel 3. pollicum; diameter tubi $\frac{1}{5}$ vel $\frac{3}{10}$ lineae, longitudo 10. vel 12. pollicum; id quod ſolo intuitu facile diiudicare diſces, vbi primum breui exercitio habitum tibi adquiſiueris. Tale inſtrumentum repleatur Mercurio puro, quovsque placuerit; quo facto immitte inſtrumentum in aquam bullientem, vt vt Mercurius aſcendat, vel ſi ſuperabundat, illum expelle. Terminum ſummum, ad quem Mercurius quieſcit, obſerua, itemque et terminum infimum, quando inſtrumentum in aquam gelaſcentem transtuliſti. Longitudinem interualli intra hos duos terminos diuide in 150. partes aequales; adſcribendorum numerorum principium eſto terminus ſummus; diuiſionem denique continua infra terminum infimum, quo vsque tubi longitudo id conceſſerit. Quia obſeruatum eſt hactenus Petropoli, Mercurium in ſummo aeris frigore parum deſcendiſſe vltra gradum 200^{mum}: igitur pro captandis variationibus aeris ſufficit, ſi repletio ita fiat, vt Mercurius in frigore aquae gelaſcentis circa tertiam partem longitudinis tubi haereat; hunc in finem, ſi depreſſior erit, aut Mercurii maſſa debet augeri, ſi longitudo tubi id permittit, aut capacitas cylindri minui debet: ſi altior; portionem de Mercurio demere oportet. Quodſi vero thermometrum pro inueniendis multo vehementioribus frigoribus inſeruiat; opus eſt, vt terminus frigoris aquae in mediam circiter longitudinem tubi incidat. Atque hoc modo Thermometrum confectum erit, et ſi plura iuxta eandem methodum adornaueris, omnia inter ſe concordabunt in calore eodem, in diuerſo autem magnitudinem differentiae reſpectu voluminis Mercurii indicabunt.

§. 17. In conſtruendo et replendo inſtrumento itemque et in adaptanda ſcala cautelae quaedam et artificia obſeruari debent, quae nunc placet adiungere.

Notum eſt inter artifices, cylindrum et tubum non poſſe combinari, niſi ſint eiusdem materiae vitreae. Cylinder

linder in infima ſui parte in figuram conicam ducitur, ſeruata in apice eius apertura anguſtiſſima. Repletio fit, exugendo aerem per alterum tubi extremum, vt Mercurius per apicis inferioris aperturam intret, vel, ſi Mercurii copia tibi ſuppetit totum cylindrum in illum immittendo, vt ſua grauitate intret. Repletum inſtrumentum inuerte, applicando digitum ad tubi orificium, et apicem claude ad flammam lychni, quam per alium tubulum vitreum, qui in capillarem ductus eſt, celerrime afflas. Ne flamma nimis ad Mercurium appropinquat, oportet cylindrum ad tres quatuorue lineas vacuum relinquere, et propterea partem Mercurii, ſi abundauerit, per tubum dimittere. Quia hoc modo inter apicem clauſum et Mercurium ſpatium exiſtit aere repletum: ille facile abigitur, ſi tubi ſummitatem duobus dexterae digitis prehendas, atque ita perpendiculariter ſuspenſo inſtrumento dexteram manum ad ſiniſtram allidas. Saepe vna alterave ſucceſſione aer omnis auolat. Quodſi vero res minus ſuccedat, oportet, vt ad manus habeas filum tenue ferreum, quibus Muſici vtuntur, quo ſi per tubuli orificium ad cylindri apicem immiſſo bullulas aeris reliquas tetigeris, hae cedentem fili extremitatem inſequentes reciprocatis aliquibus motibus facile extrahentur. Si forte inſtrumentum non ſatis, aut nimis repletum fuerit, huius ipſius fili ope mercurius commode addi aut demi poteſt, ſi in primo caſu iuxta illud per infundibulum tenue infunditur; ita enim Mercurius ad vnum latus fili deſcendit, ad alterum vero aeri ſpatium relinquitur, vt auolare poſſit, id quod multo melius eſt, quam ſi infundibulum tubulo capillari longiſſimo inſtructum adhibueris, quia hi facile diffringuntur; in altero casu per idem filum admisso aere Mercurium superfluum dirimes, diremptum autem facile extrahis. Ad obtinendos terminos caloris et frigoris videtur quidem sufficere, vt solus cylinder aquae immittatur; sed securius est, vt totum instrumentum ad libellam fere Mercurii immergatur, cui fini super ignem vrceus altior argillaceus aut ferreus inseruit. Aquae gelascentis frigus maximum est in flumine glacie tecto, aut in vase quodam amplo, quando ingruente magno gelu aeri exposita crusta glaciali obducitur. Coctio fiat, quando altitudo Mercurii in Barometro satis notabilis est, quae aliquando continuari et igne vrgeri debet, vt summum calorem obtineas; et si plura Thermometra conficere velis, talia tempora elige, quibus aer eandem aut non multum differentem specificam grauitatem habet. Pro notandis terminis et mensurando interuallo para tibi asserem ex ligno duriore, vel si placet ex orichalco, duos pollices et plures latum, dimidium crassum, longitudinis conuenientis: exsculpatur sinus satis spatiosus pro locando cylindro, vt aqua vbique appellere possit. Inferne applicetur fulcrum ligneum, aut, quod melius, ferreum, vt sedes instrumenti inuariata maneat, et, ne fluctuet, duobus locis tubum retinaculis ex filo ferreo aut cannabino firma. Porro super duas lamellas chartae durioris duc lineam rectam subtilem atramento, et ope cerae mollioris post tubum, ad asseris superficiem applica alteram ad terminum frigoris, alteram ad terminum caloris; quando iam instrumentum in aquis tenetur, has lamellas tam diu hinc inde moue, donec lineae in illis ductae cum punctis altitudinem Mercurii exacte

exacte respondeant; quarum linearum distantiam dein ope circini optime mensurabis. Tandem super asserem expande chartam glutine, duc in ea duas lineas longitudinales parallelas, intra quarum cancellos tubus excurrat, et ope lamellarum memoratarum (vel si *Mercurius* in aqua bulliente tubum exacte adimplet, sola applicatione instrumenti) quaere in lineis duo puncta terminis altitudinum respondentia; horum interuallum diuide in duas partes aequales, partes dimidias diuide in tres alias; partes has sextas subdiuide iterum in quinas, et singulas diuisiones quatuor punctis aequaliter a se inuicem distantibus interstingue. Ita ductis ad assignata puncta lineolis subtilibus parallelis, parasti scalam, et applicito vitro, totum instrumentum. Lineae non possunt separatim in charta duci, quia, quando deinde agglutinatur, per madorem glutinis expanditur, et hinc vera diuisio mutatur. Cui vero placuerit scalam aeri incidere, captis terminis in separata lamina id peragere, et factis diuisionibus illam affigere poterit. Orificium tubi globulo ceraceo clauditur, ne puluerulentae sordes illabantur et ad conseruandum vacuum. Posset quidem extremitas tubi, in quo Mercurius in aqua bulliente non summum ascendit, in tubulum capillarem duci, et Mercurio per calorem dilatato, aereque expulso, hermetice sigillari: sed aliud incommodum inde nascitur. Quodsi enim in transportando Thermometro Mercurius succussiones patitur, ille in globulos dirimi solet intra tubum, quorum reuniendorum caussa orificium iterum aperiri deberet.

§ 18. Non opus esse mihi videtur, multis verbis praedicare insignem facilitatem huius methodi, quae alias operosissimas longe antecedit, dum secundum illam intra paucas horas machina leui negotio construi potest; hoc enim perspicuum est harum rerum intelligentibus, et qui periculum experimenti facere cupiunt. Restat potius obiectiones aliquas occupare et refellere, quae contra illam in medium proferri possunt.

§ 19. Dici potest, experimenta nostra non exprimere perfecte vera volumina diuersa massae mercurialis, in diuersis caloris gradibus, quia ob cylindri vitrei contractionem et dilatationem, quam patitur, dum ex aqua frigida in bullientem et vicissim defertur, non eadem vbique cauitatis amplitudo conseruetur; hinc quoque assignatam propositionem 150.10000 inter respectiuas massas Mercurii et capacitates vitri falsam esse. Nihil habeo, quod regeram contra veritatem obiectionis. Sed nec institutum nostrum est, quaerere, quae sit grauitas specifica massae mercurialis sub diuersis voluminibus in diuerso statu caloris, *in genere*. Oportet nos potius scire specialiter, quomodo se habeat diuersum volumen in diuerso statu caloris, *quatenus mercurius in instrumento, cuius capacitas variabilis est, continetur*. Imo, si quis esset, qui veram diuersitatem et rationem voluminum Mercurii per varios gradus caloris dilatati assignare sciret: nullum tamen commodum ad hoc negotium inde redundaret, quia naturae effectus ab experimentis non possunt separari, et vitrum semper dilatabile manet. Quodsi igitur scalam graduum secundum longitudinem tubi, cuius capacitas ob crassitiem laterum inuariata supponi potest, iuxta veram Thesin diuidere velles: illa nihilominus numquam veram Mercurii contractionem indicatura esset; cum e contra, si quae differentia ex hac vitri proprietate oritur, quae tamen parua est, illa per omnes gradus, quas iuxta methodum

dum noſtram ponimus, aequabiliter diffunditur, quia mutati ne vel leuiſſima caloris Mercurii facta, vitrum ſimiliter mutationem ſuam proportionaliter patitur.

§. 20. Secundo loco, quia nondum cognitum, eandem grauitatem ſpecificam eſſe omnium aquarum, e. gr. Viſtulae, Rheni, Sequanae, Tagi, Tiberis, Wolgae, Lenae, quae eſt fluuii Neuae: dubitandi cauſſa ſubnaſcitur, an per eundem caloris et frigoris gradum ebullitio vel congelatio harum aquarum effici poſſit? vnde vniuerſalitati methodi multum decederet. Equidem, quamuis metum hunc vanum eſſe putauerim, ſi ſermo eſt de aquis dulcibus fluminum magnorum, et quae non ex ſolis torrentibus aut fontibus mineralibus confluunt: tamen, quia huius nodi ſolutio vnice ab experientia dependet; operam dedi, vt diuerſis in locis experimenta Thermometris noſtris inſtituerentur. Quapropter ante omnia *Cl. Dn. Gmelinum* de hac re certiorem feci, et petii, vt Thermometris iſtis, quae ab Academia accepit, exploraret, quinam gradus caloris ſe manifeſtarent in aquis tractuum ſeptentrionalium in itinere ſuo occurrentibus. Quodſi forte accideret, vt differentiae quaedam demonſtrabiles orirentur, nulla melior afferri medela poteſt, quam vt obſeruator, qui hiſce rebus incumbit et delectatur, eadem methodo qua nos egimus, in rationem grauitatis ſpecificae, quam Mercurius ſub diuerſo volumine in diuerſis gradibus caloris aquarum ſuarum ſeruant, inquirat, et ſecundum illam thermometra ſibi conficiat. Cognita autem iſta ratione, differentiae quoque thermometrorum facile inter ſe combinari et ad vnam menſuram reduci poterunt.

 COGI-

COGITATIONVM PHYSIOLOGICARVM

DE CIRCVLATIONE SANGVINIS

CAPVT III.

DE

QVANTITATE MOTVS SANGVINIS.

AVTORE

Iosia Weitbrecht.

§. 1.

POstquam in capitibus antecedentibus (*) non solum motum sanguinis in genere, sed et potentias motum istum producentes contemplati sumus: natura rei ipsius poscit, vt animum quoque ad inquirendum in quantitatem huius motus adpellamus. Hoc enim omnis cognitionis physicae scopus est, vt non solum caussas et effectus rerum intelligamus, sed vt quantitates illorum etiam mensurare discamus: siquidem ad eo maiorem perfectionis gradum scientia corporis animalis euehitur; quo accuratius phaenomena eius et proprietates determinare valemus. Merito igitur quaeritur: *Quantus est motus sanguinis?* Quae quaestio vtut paucissimis verbis enunciata, adeo late tamen diffunditur, vt limites eius circumscribere atque adaequatam responsionem dare difficillimum sit. Solutionem igitur huius problematis impraesentiarum nec ausus sum dare, propter maximam, qua laboramus, datorum seu conditionum praecognitarum inopiam atque incertitudinem; neque etiam necessarium iudicaui, cum in iis, quae post *Iacobum Keilium*, *Cel. Iurinus* limatissimo iudicio

(*) Vid. Commentar. Tom. VI. Cap. I. pag. 276. et Tom. VII. C. II. p. 235.

iudicio determinauit, concessis quibusdam postulatis facile adquiescere possimus, donec maiores progressus in praeliminarium propositionum acquisitione ope anatomicorum atque hydraulicorum experimentorum ac principiorum fecerimus. Sed hoc tantummodo agere propositum mihi est, vt in naturam tam quaestionis quam responsionis inquirendo, normam et cautelas aliquas detegam, iuxta quas vel mihi vel aliis circa hanc materiam versaturis progrediendum erit, vt ad pleniorem problematis solutionem olim perueniamus.

§. 2. Ad problema igitur soluendum ante omnia requiritur, vt recta methodo illud aggrediamur, deinde, vt certa quaedam data, seu conditiones, quae necessario cognitae esse debent, iuste determinemus. Methodus autem in eo consistit, vt, quemadmodum in omni motu, consideretur tam massa sanguinis mouenda, quam velocitas eius, quae ex spatio, dato tempore percurso, aestimari debet. Hic autem motus cum sanguini non sit insitus, nec fortuito generetur, eo ipso manuducimur ad indagandam quantitatem motus sanguinis ex corde dato tempore prorumpentis, et porro ad scrutandam mensuram potentiae cordis, quae isti sanguinis portioni motum imprimit.

§. 3. Recte igitur omnino egerunt isti bini Viri ingeniosissimi, vt separatim primo de celeritate sanguinis in vasis suis moti, et de quantitate huius motus egerint, tum vero in potentiam cordis inquisiuerint, quae motum positis istis conditionibus, producere posset; quamuis vterque viam ab altero diuersam incesserit. Cum autem, vt *Cel. Iurinus* optime indicat, et nos Cap. II. quodammodo at-

attigimus, vix ſperanda ſit determinatio virium cordis a priori: eo minus aſſenſum ſibi comparabunt illi, qui pro definienda vi cordis, quam ignorant, velocitatem ſanguinis vt datam aſſumunt, quam tamen adhuc quaerere debebant; id quod a petitione principii parum abludit.

§. 4. Per quantitatem motus autem non intelligenda eſt illa, quae aeſtimari ſolet ex maſſa, quamlibet arteriae ſectionem data velocitate datoque tempore transeunte. Sed conſiderari debet motus totius maſſae ſanguineae, quatenus in vaſis ſuis omnibus iunctim ſumtis data celeritate progreditur, plane vti *Cel. Iurinus* rem adgreſſus eſt. Illa enim velocitas tantum relatiua eſt atque ab hac neceſſario dependet. Vnde non ſufficit dicere, velocitates eſſe in ratione ſectionum reciproca, ſed determinare oportet ex aliis principiis, quanta alterutra et imprimis haec poſterior eſſe debeat.

§. 5. Porro, quia velocitas ſanguinis intra vaſa a quantitate motus ſanguinis ex corde dato tempore prorumpentis dependet: huius portionis velocitas methodo *Keiliana* minus recte tamquam reſpectiua determinari mihi videtur per ſpatium ex quantitate dato tempore prorumpente per orificium aortae diuiſa ortum. Haec enim abſoluta potius velocitas eſſet. Multo melius igitur, meo quidem iudicio, *Cel. Iurinus* motum totius ſanguinis determinauit per maſſam portionis vna ſyſtole prorumpentis, ductam in celeritatem, qua eodem tempore totam canalis ſanguinei longitudinem percurrere poteſt. Quippe motus ſanguinis naturalis id requirit, vt non ſolum vnica portio proiecta per ſpatium a *Keilio* indicatum progrediatur; ſed et tota maſſa ſanguinea eodem tempore in motum ciri et per ſpatium ſimile pro-

progredi debet, vnde idem effectus oritur, ac si sola portio proiecta per totam canalis sanguinei cohaerentis longitudinem progressio fuisset. Vid. Cap. I. l. c. §. 25.

§. 6. Recte etiam a *Cel. Iurino* animaduersum est, velocitatem sanguinis non assumi posse aequabilem, id quod partim generationi motus, partim ipsi experientiae auersatur. Hinc ipse in indaganda potentia cordis velocitatem sanguinis vt variabilem considerauit. Huius inaequalitatis leges difficulter inuenientur, nisi actio cordis, hoc est, tam potentia eius quam adplicatio ad certos limites restringatur, qui calculo subiici possint. Ita e. g. cor posset considerari tamquam vas aqua plenum cum affixo tubo laterali, cuius orificium sit clausum, vt aqua quiescat. Aperiatur enim repente hoc orificium, aqua incipiet effluere celeritae minima, quae vero dato tempore maxima euadet, quo facto iterum minuetur: ex quo casu similis variatio velocitatis sanguinis ex corde protumpentis quodammodo posset determinari. Sit e. g. vas cylindricum TEFV, initio vsque ad TV repletum, Tab. XXIII. Figura II. quod annexum habeat tubum horizontalem FDC. Ponatur vasis verticalis altitudo $FV = a$, horizontalis longitudo $FC = b$ vasis verticalis amplitudo seu sectio in TV vel $AB = m$, sectio tubi $CD = n$. Durante aquae effluxu in tubo verticali iam subsederit aqua vsque in AB, sitque, posita $BF = t$, altitudo debita celeritati qua aqua hoc momento in CD effluit $= z$, ita vt sit celeritas aquae effluentis vt $\sqrt{z}$: haec celeritas quouis momento ita determinabitur, vt sit $z = \frac{mm}{(mm - nn)(mm - nn)}\Big((m^2 - n^2)t + mnb - [(m^2 - n^2)a + mnb]\Big)\Big(\left(\frac{nt + mb}{na + mb}\right)^{\frac{(mm - n^2)}{nn}}\Big)$. Hinc

 sequi-

ſequitur, celeritatem aquae initio, cum eſt $t = a$, eſſe $= 0$; ſubito autem creſcere vsque ad certum terminum, quem cum ſuperauerit, iterum decreſcere. Ex quo etiam definiri poterit altitudo aquae FD in vaſe verticali, cui celerrimus effluxus reſpondet; quemadmodum haec omnia ex principiis a *Cel. Bernoullio* in Hydrodynamices Sect. III. ſtabilitis facile deducuntur. Reperietur autem altitudo

$$FB = \left(a + \frac{mb}{n}\right)\left(\frac{b + \frac{n}{m}a}{b + \frac{m^2 - n^2}{mn}a}\right)^{\frac{nn}{m^2 - 2n^2}} - \frac{mb}{n}.$$

§. 7. Non autem ſufficit, vt hanc velocitatis variationem aſſignare valeamus, niſi etiam ſimul demonſtremus, quousque illae in toto arteriarum et venarum tractu ſimul locum habeat. Oportet igitur prius ſatisfacere illis quaeſtionibus, quas in Cap. II. de maſſa mouenda propoſui: an totus ſanguis arterioſo-venoſus vi cordis in motum agatur? an vero arterioſus ſolus? et porro: an ſanguis arterioſus omnis ſimul, an vero ſucceſſiue moueatur? pro diuerſitate enim reſponſionis diuerſiſſimae quoque velocitatis et quantitatis motus aeſtimationes producentur. Si enim, quod mea ſententia eſt, ſolus ſanguis arterioſus tempore ſyſtoles vi cordis mouetur: tum in menſura motus *Iuriniana* loco canalis arterioſo-venoſi, ſolae arteriae ſubſtitui debent. Si porro iſte ſanguis arterioſus ſolus quidem, ſed tamen ſimul eodem temporis momento moueatur: tum etiam ſupponere licet, quod velocitatis variatio in omnibus arteriis quoque aequaliter diſperſa et ſimultanea ſit. Quo conceſſo vera maneret propoſitio *Keiliana*, quod, ſi ſumma ſectionum transuerſarum ramorum, qui ex arteriis ori-

oriuntur ad sectionum truncorum vbique eandem rationem haberet; (posita ratione diuisionum $= A:B$, et numero diuisionum $= n$) velocitas in prima diuisione ad velocitatem in vltima foret $= 1:(A:B)^n$. Et in genere, posita ratione diuisionum et sectionum quacunque: foret adhucdum, eodem tempore velocitas sanguinis in ramo quocunque ad velocitatem in aorta, vti est sectio aortae ad summam sectionum omnium ramorum in iisdem ab aorta distantiis. Verum etiam ac firmum perstaret *Iurinianum* illud Corollarium, quod datis quibuscunque arteriis binis aequalem sanguinis molem transmittentibus maior impetus sanguinis futurus sit in arteria a corde remotiore quam in propiore; quod omnino paradoxon videri illis debet, qui contrarium statuunt. Quodsi autem ne solus quidem arteriosus sanguis in singulis arteriis eodem tempore, sed successiue, intra vnius systoles moram tamen, moueatur: tum non solum omnes hae propositiones, si non conciderent, pluribus tamen difficultatibus ac restrictionibus obnoxiae forent, sed et ne canon quidem ille generalis hydraulicus, quod velocitates fluidi intra canalem moti eodem tempore in ratione sint sectionum reciproca, in oeconomia animali locum haberet.

§. 8. Quia autem non solum *Cel. Iurinus* in literis suis humanissimis ad me datis me monuit, vt iterum iterumque perpendam, an non tempore systoles aliqua saltem portio ex arteriis in venas proiiciatur; sed et forte alii de hac re nondum plane conuicti erunt: non possum, quin praeter ea, quae iam in Cap. I. et II. de hac et altera quaestione in medium attuli, ad sententiam meam roborandam hic adiungam considerationem phaenomenorum, quae partim in motu ſanguinis maximo, hoc eſt, in vigore febris, et in motu minimo, nimirum in articulo mortis occurrunt. In illo enim ſanguis non ſolum in vltimas arterias ſed et in vaſa ſeroſa impellitur; in hoc autem, pulſante licet corde, ne quidem in arteriis minimis pulſus ſentitur: id quod manifeſto eſt iudicio, poſſe impetum ſanguinis e corde prorumpentis nunc maiori nunc minori maſſae ſanguineae imprimi, dari igitur terminum aliquem medium, ad quem motus mediocris ſeu naturalis perueniat, et probabile eſſe, hunc terminum circa connexionem arteriarum et venarum inueniri, vnde ſequeretur, in motu naturali non modo ſolum ſanguinem arterioſum vi cordis propelli, ſed et hunc ipſum motum tantummodo ſucceſſiue fieri, vtut interuallum temporis minimum ſit, nec rationem aſſignare valeamus diſtantiarum, ſecundum quam iſta ſucceſſio fiat.

§. 9. Quod denique ad quantitatem actionis cordis attinet, omnis res eo redit, vt iuſta et commoda (§. 6.) applicatio huius potentiae inueniatur, quae ad naturalem actionem cordis in ſanguinem quam proxime accedit. *Cel. Iurinus* actionem cordis ita animo concepit, quaſi illa tota in vnum ictum concentrata eſſet; quae methodus quemadmodum aliorum inſtitutum, qui actionem cum preſſione ponderis alicuius comparant, multis paraſangis antecedit, vtpote ad concipiendam atque aeſtimandam motus generationem multo fauorabilior ac certior: ita multo perfectior euaderet, ſi ad ſucceſſiuam applicationem laterum cordis ſeſe contrahentium et in ſanguinem accumbentem impingentium reduci poſſet, quemadmodum in Cap. II. §. 23. indicaui; quippe quae conſideratio cum actione naturali propius conueniret.

CLAS-

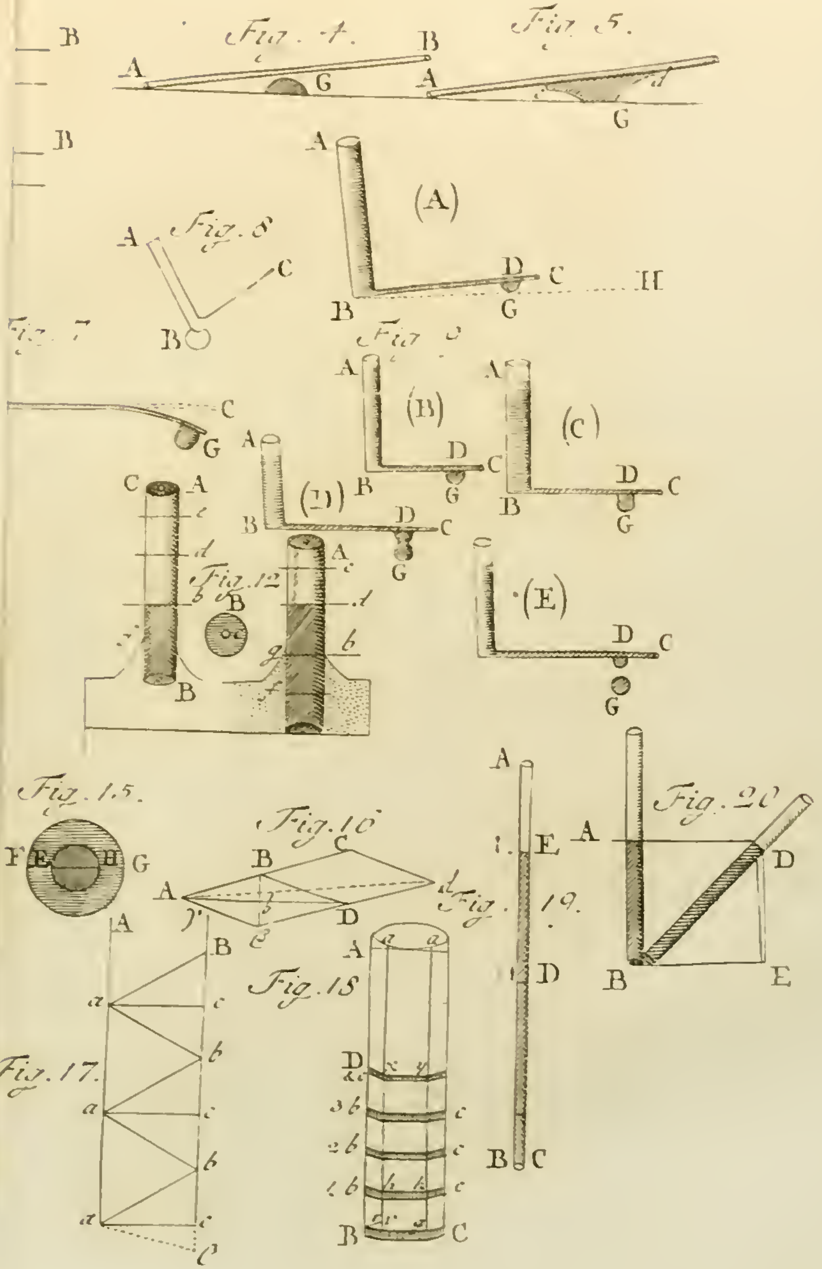


Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 7.
(A)
(B)
(C)
(D)
(E)
Fig. 12
Fig. 15.
Fig. 16
Fig. 17.
Fig. 18
Fig. 19.
Fig. 20

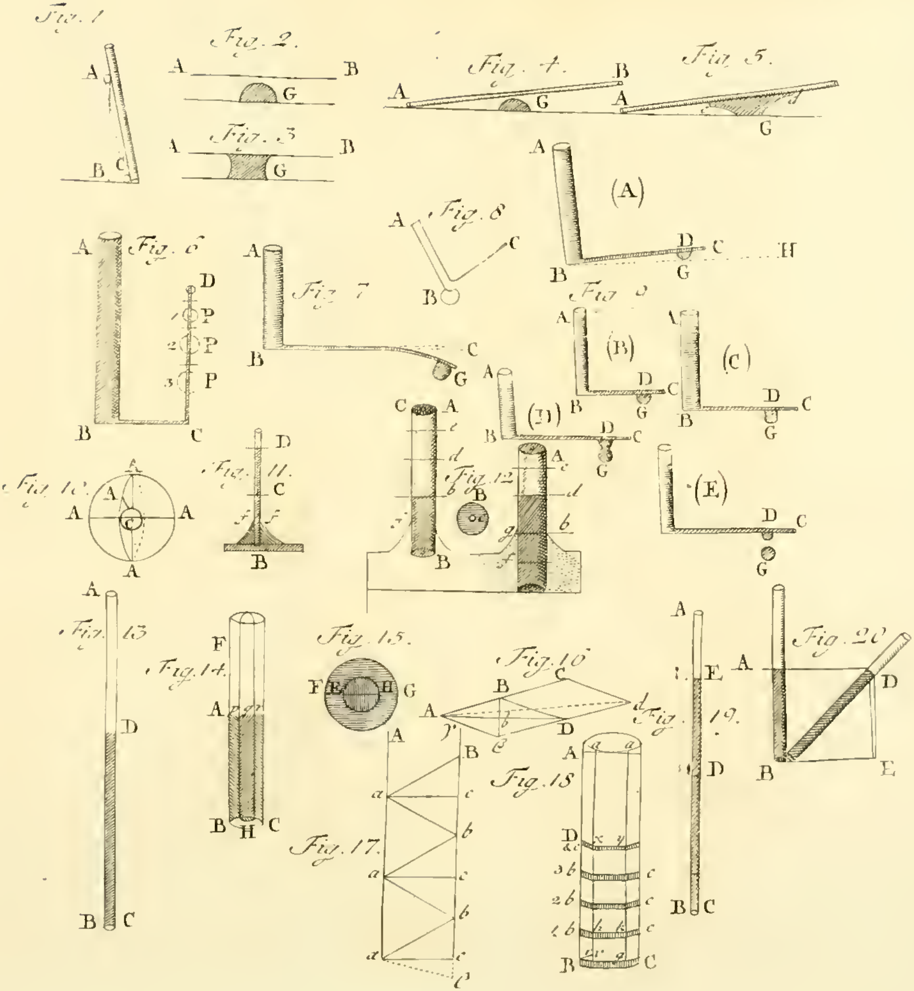
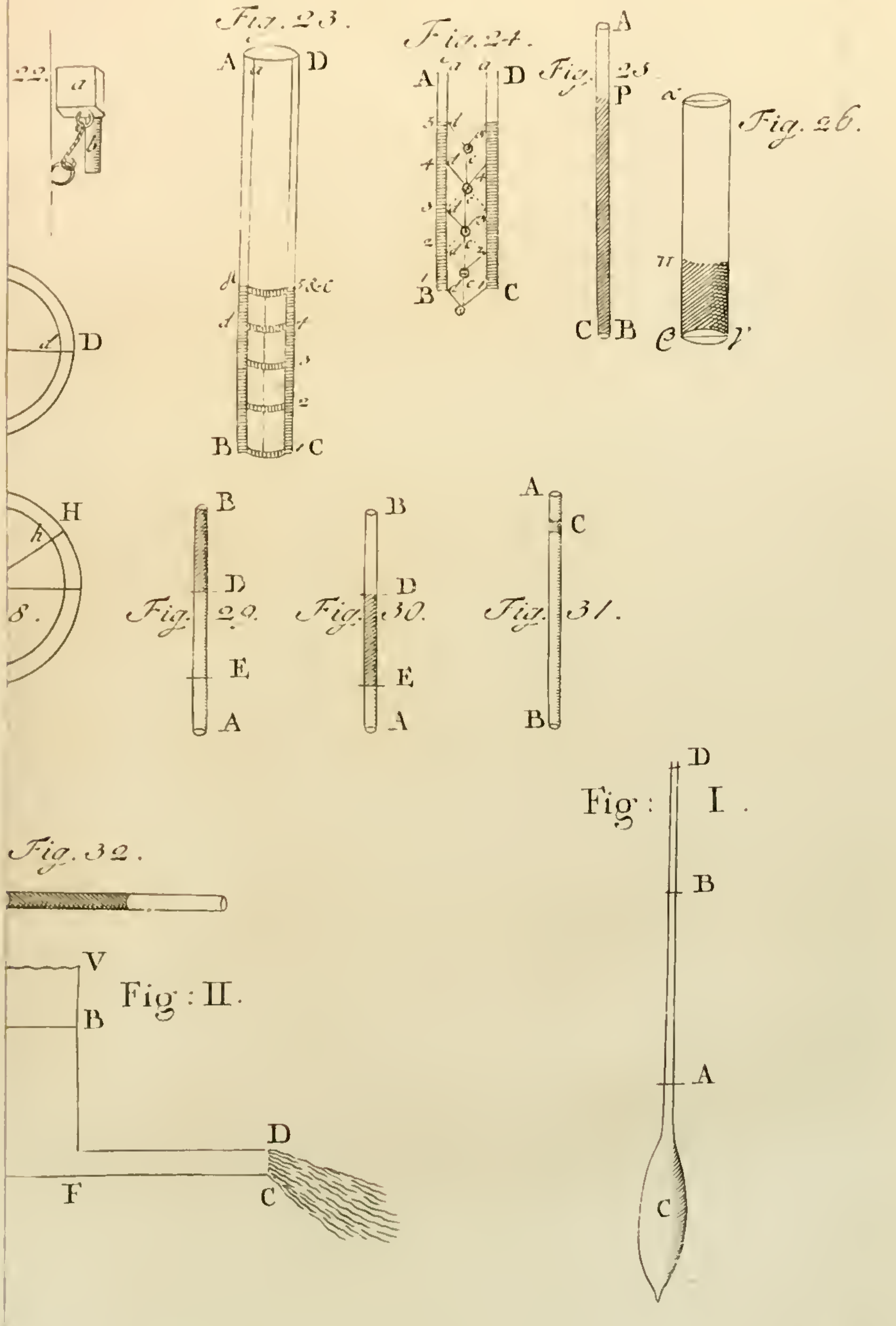


Fig. 1
Fig. 2.
Fig. 3
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
(A)
(B)
(C)
(D)
(E)
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16
Fig. 17.
Fig. 18
Fig. 19.
Fig. 20



22.
Fig. 23.
A D
B C
Fig. 24.
A D
B C
Fig. 25
A P C B
Fig. 26.
D
H
8.
Fig. 29.
B D E A
Fig. 30.
B D E A
Fig. 31.
A C B
Fig. 32.
Fig: I.
D B A C
Fig: II.
V B D F C

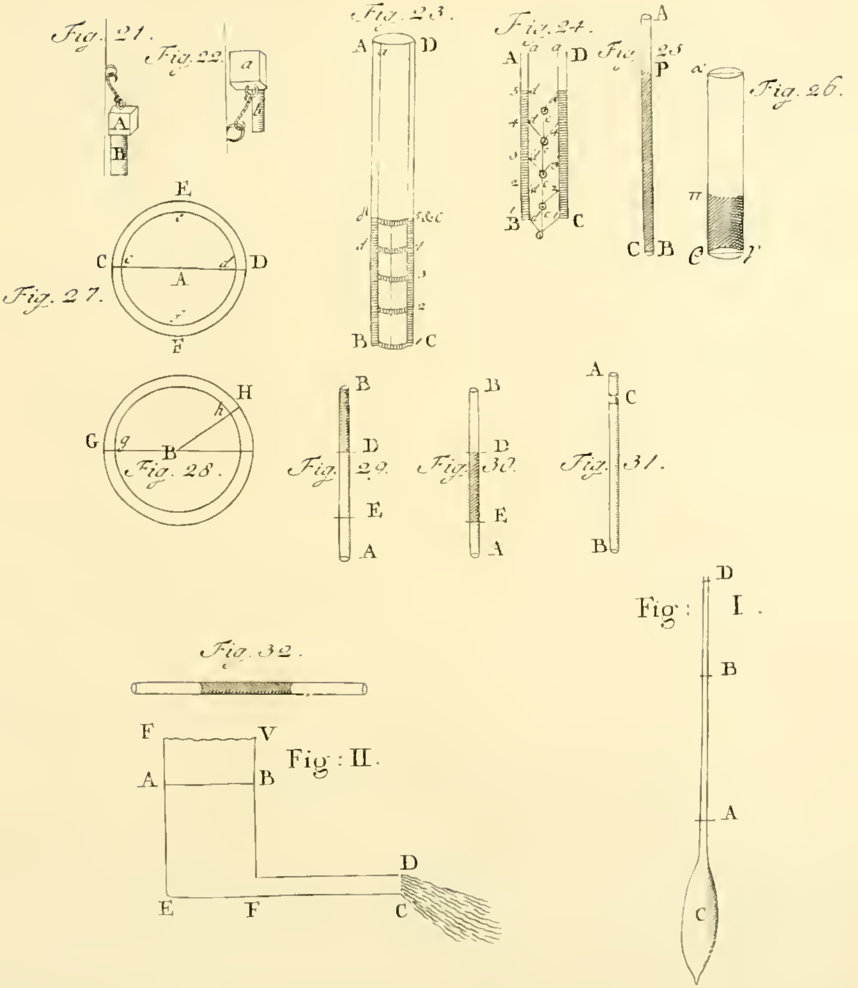


Fig. 21.
A
B
Fig. 22.
a
Fig. 23.
A D
B C
Fig. 24.
A D
B C
Fig. 25
A
P
C B
Fig. 26.
α
π
C V
Fig. 27.
E
C D
A
F
Fig. 28.
H
G
B
Fig. 29.
B D E A
Fig. 30.
B D E A
Fig. 31.
A C B
Fig. 32.
Fig: I.
D B A C
Fig: II.
F V
A B
D
E F C

CLASSIS TERTIA.

CONTINENS

HISTORICA.

DE
NVMO MVSEI IMPERATORII AMIDENO.

AVCTORE

T. S. Bayer.

NVllus fere ex omni antiquitate numus maioribus doctissimorum antiquariorum disputationibus nobilitatus fuit, quam is, quem produco, quemue Ioannes Valens *inter rarissimos reponendum* iudicauit; Ioannes Harduinus autem et fere etiam Ezechiel Spanhemius, ex tanta prisci aeris copia vnicum sui generis in gaza Regis Francorum superesse arbitrati sunt. Eius ἔκτυπον Spanhemius primus edidit ad Iuliani Caesares (*a*), et fide praestantium apud Parisinos antiquariorum custodumque Regii cimeliarchii subnixus EMI. in eo legentium, ad Emisenos retulit. Mox idem illustris vir, difficultatum, quibus haec sententia vrgeatur, magnitudinem cernens, cum praeterea litteras illas in numo exesas parum agnosci moneretur, posterioribus curis (*b*) sententiam retractauit, atque pro EMI. legendum censuit EΔE. vt pro Emiseno numo euaderet Edessenus. Anno post Tab. XXIV. Figura 1.

Har-

(*a*) p. 96. (*b*) Ad Iuliani Caesares p. 491. Confer eundem de Praestantia et vsu numismatum Tomo I. p. 603. seq.

Harduinus in numis vrbium et populorum illustratis (*c*) vtramque opinionem repudiauit. Emisam item, vt Spanhemius, a Mesopotamia, in qua numus fuit cusus, nimis remotam priori sententiae repugnare monuit, altera autem in sententia, *pereruditi*, vt aiebat, *Spanhemii*, non potuit acquiescere, quod . . . MI. *conspicue legatur*, *corrosa modo littera*, *iniuria hominum potius*, *quam vetustate*. Igitur AMI. legebat, vt esset Amida Mesopotamiae. Contra Ioannes Valens (*d*) concedebat quidem, *ingeniose* hoc excogitatum esse, at primam litteram *paullulum detritam* adseuerabat, ergo numum ad Emisenos relatum sic descripsit:

Tab. XXIV. Figura 2. ΑΥΤ. ΚΑΙ. ΑΥ. ΑΛΕΞΑΝΔΡΟϹ. C. *Alexander laureatus*, *medio corpore tenus*, *dextra hastam*, *humero laeuo clupeum gerit*.

ΕΜΙ. ΚΟ. ΜΗ. ΜΕϹϹΟΠ. *In area* A. Ἐμισῶν Κολωνίας Μητροπόλεως Μεσσοποταμίας πρώτης. *Mulier turrita et velata*, *insidens rupibus ante arulam*, *dextra spicas tenet*.

Harduinus Valenti in Antirrhetico diligenter respondit, coniecturamque suam vindicauit (*e*). Spanhemius ea, quae contra se Harduinus dixerat, aegre tulit: nam et aliae simultatum inter eos caussae erant complures. Itaque cum de praestantia et vsu numismatum postremo labore et eximio tractaret, defensionem sui suscepit (*f*). Viderat interim et ipse numum, cum Electoris Brandeburgici legatione apud Regem Franciae defungeretur. Igitur negabat, vel a se ipso, vel a Federico Morello, cuius in his stu-

(*c*) p. 37. ed. Paris 1684. (*d*) In numismatis coloniarum et municipiorum parte altera p. 120. (*e*) p 92. (*f*) Tomo I p 604.

ſtudiis exercitationem, quanta fuerit, nemo ignorat, litteras MI. atque omnino priores tres vel quatuor agnoſci potuiſſe, Harduino autem et aliis, ipſi, puta, Vaillantio gratulabatur, *quibus tam perſpicaces et lyncei oculi contigiſſent.* Obiicit deinde nonnulla Harduino, ne ei Amida ſua nimis placeret, tum Valenti negotium faceſſit eique vertit vitio, quod *non ad numi ipſius a ſe probe et accurate inſpecti fidem, eius ectypum protuliſſet, ſed ſicuti ad Iuliani Caeſares ab ipſo vulgatus fuerat.* Ad poſtremum, vbi vtcumque coniecturam ſuam de Edeſſa adſeruerat, moderati animi inſigne documentum dedit. Non enim diffitebatur, ſi quid earum litterarum in numo legi poſſit, ob diſertam Meſopotamias mentionem ad nullam vrbem melius, quam ad Amidam, *cum eruditiſſimo Harduino* referri poſſe. Quid interim Ioannes Harduinus? Cum numi vrbium et populorum illuſtrati in eius operibus ſelectis iterum ederentur, totum hoc ſuum de Amida vrbe expunxit (*g*), hunc vero numum inter Emiſenos ſtrictim recenſuit: EMI. KO. MH. MECCOΠ: *et in ipſa area* A. *Hoc eſt: Emeſa colonia metropolis Meſopotamiae, prima: numus eſt Seueri Alexandri in theſauro regio.* Hoc quid erat aliud, quam caſtra ſua deſerere et in Valentis fidem atque clientelam ſe conferre? Enimuero diſſimulauit Harduinus, ne quis hoc ipſum perſentiſceret. Ea cauſſa Iobertus quoque, qui totus ab Harduino pependit, omniaque eius παϱάδοξα, tamquam inuenta perpetuitate digna conſecrauit, ſtudioſe cauit, ne

 quid

(g) Amſtelodami A. 1709 p 15. 54 Librarius omnem operam in hac editione nauatam in ſe recepit ſenſerunt tamen eruditiſſimi viri, et praecipue Maturinus Veyſſiere Lacroſus V C. in Vindiciis veterum ſcriptorum, ipſum Harduinum emendationum omnium auctorem, ſub librarii nomine latere voluiſſe.

quid ſibi de Amida elaberetur. Ceterum non eſt infrequens in numis, vt pro ratione aciei, qua cuiusque pollent oculi, et vel lucis, vel vmbrae incidentis, alio alius plus minusue in obtritis veſtigiis cernat. Quam ob cauſſam tametſi me Harduini ſententia oblectabat, tamen citius Valenti, vt exercitatiſſimo viro credere me oportuit, adfirmanti, EMI in numo exſtare, quam Harduino neganti, primam litteram apparere. Ergo in hiſtoria Oſrhoëna (*b*) mei experimentum feci ingenii atque vt Valenti opem ferrem, Meſopotamiam aliam inter Orontem et Chryſorrhoam coepi conſtituere. Vix tamen pedem quaſi porta ad capiendam nouam prouinciam extuleram, cum iam eundem referrem et Harduino me adiungerem, neque enim animaduerteram, eum ſigna ſua reliquiſſe.

Praeter numi auctoritatem oculorumque, quae cuique obtigit, aciem, rationes quoque fuerunt, quibus quaſi armis in hoc certamine ſummi viri congreſſi ſunt, quaeue iucundae nobis ſpectatu et ad operam noſtram perſequendam commemoratione dignae videntur. Hic Spanhemius et Harduinus initio plane conſentiebant, hoc in numo non potuiſſe ſignari Emiſam, quippe quod extra Meſopotamiam longe ab Euphrate, proxime ad Libanum montem et ad Orontem fluuium eſſet reiecta, ſiue eius prouincia Cyrrheſtica fuerit, ſiue Apamene, ſiue magis Phoenicia: nam ſcriptores veteres inter ſe diſſentiunt. Vrgebatur Valens: tamen diſſimulabat. Tamquam nihil ad ſe, aut ad cauſſam pertineret, quod in hac quaeſtione vim habebat maximam, *cum*, inquiebat, *Emiſa Meſopotamiae in hoc numo tribuatur*, *fecit*, *vt duas in hac prouincia*, *ſicut*

(*b*) p 188. 189.

ſicut in aliis proximis, metropoles conſtitutas eſſe crediderimus, vnam cis Euphratem, alteram trans fluuium: quod confirmare videtur littera A. in area numi, quam interpretati ſumus, πρώτης, vt in Carrhenis Δ pro Δευτέρας non ſemel obſeruauimus. Emiſa quidem prima metropolis conſtituta, Carrhae vero vrbs, ſecunda. Tantum apud Valentem potuit litterae vnius a ſe lectae fiducia. Non diffitebatur Spanhemius, quibusdam in prouinciis metropoles fuiſſe duas, at mirabatur, quemadmodum Valens Meſopotamiae metropolin daret, quae ipſius confeſſione, cis Euphratem in Phoenicia eſſet adſcripta. Deinde ei in memoriam reuocabat Edeſſam, quae ſub eodem Alexandro Seuero, item vt Carrhae, metropolis diceretur in numis, et vero ſine controuerſia Meſopotamiae. Cum autem etiam numum Carrharum ſub M. Aurelio Μητροπόλεως πρώτης dignitate inſignitum obiectat, temporum diuerſitas et fortunae iſtarum vrbium viciſſitudo facit, vt hac re quemquam minime oporteat commoueri. Contra Spanhemii coniecturam nihil admodum Valens: Harduinus vero primum litteras MI. conſpicue poſitas opponebat, tum conſuetudinem in numis Edeſſenis obſeruatam, *in quibus*, inquit, ΕΔΕ. *pro* ΕΔΕCCA. *vel* ΕΔΕCCAIΩΝ (i) *haud temere videas.* Non inuictum hoc, neque tamen prorſus contemnendum illarum in numis regionum erat, ſi praeſertim totum auerſae typum huicce notationi adiungas, qualis neque apud Ioannem Valentem,

(i) ΕΔΕCCΗΝΩΝ, vt Spanhemius in Harduini ſententia comiter emendauit, non ΕΔΕCCAIΩΝ. Sed confundit etiam alias Harduinus Edeſſaeos in Macedonia et Edeſſenos in Meſopotamia. Vide Hiſtoriam Oſrhoënam p. 122.

tem, neque apud Henricum Noriſium (*k*) aut apud alios in Emiſenorum numis reperitur. Ad Edeſſenos enim quam proxime accedit, niſi quod aſtra deſint. Spanhemius numum a Ioanne Valente editum inſcriptumque ΚΟΛΩ. ΜΑΡ. ΕΔΕ. Harduino rependit. Eſt apud eundem Valentem numus cum Elagabali προτομὴ et vultu ſolis radiati, inſcriptus ΕΜΙ. ΚΟΛ. *Emiſa colonia* et exſtant quoque in aliarum vrbium numis huiuscemodi formae exempla. Quamquam non eſt reticendum, propter nimium elegantiae et concinnitatis ſtudium antiquarios plerosque effeciſſe, vt eorum in operibus haud ſcias, plusne huicce rei et ſuo iudicio, quam veritati inſeruierint. Facile contingere potuit, vt, ſi quae litterae, quemadmodum innumeris in numiſmatibus accidit, margine inter cudendum detruncato abſciſſae ſunt, ab antiquariis deinde ſine notatione relinquerentur, tamquam ſi deeſſent nullae. In hoc inſtituto veteres numos exprimendi tamquam integros, nusquam tuta fides. Qui numos Graecos copioſe tractarit, quid dicam, quantumque detrimenti ea ex concinnitate importatum ſit, ſecum velim recolat. Antonius Pagius, grauiſſimus idem et aequiſſimus cenſor, cum a numo Traiani, vt eum Carolus Patinus ediderat, prope circumuentus atque in anguſtias eſſet redactus, deinde autem eum a Toinardo et Valente cognouiſſet, Hadriani eſſe, *hinc*, inquiebat (*l*) paullo quidem commotior, ſed ab iuſta indignatione, *intelligere eſt*, *quantum obſint eruditioni antiquarii*, *dum*, *quae in numis et inſcriptionibus habentur*, *non ſatis accurate deſcribunt*, *et*, *quod peius*, *ali-*

(*k*) In Epochis Syro Macedonum p. 95. (*l*) In Critica Hiſtorica Chronologica Tom. I. p. 107. ed. Antuerp. Confer eundem p. 235.

aliquando corrumpunt, correctionis praetextu, ne quidem lectores monendo, quid in iis immutarint. Sed crebra illa eius querela fuit, neque enim quisquam magis ſentire hoc detrimentum potuit, quam magnus Pagius.

Inter haec ſententiarum diuortia atque diſſidia, Harduini quoque fuit, coniecturam ſuam de Amida ſtabilire: neque enim ſatis hoc ei fuit viſum, nullius nomen vrbis in Meſopotamia, illud MI. initio vocis continere, niſi ſimul demonſtraretur, Amidae vrbi et coloniae et metropoleos dignitatem conuenire poſſe. Hoc iterum difficile fuit factu. *Ad Amidam*, inquiebat, *e Meſopotamiae primariis vrbibus nummus hic attinet, de qua ſaepenumero Ammianus.* Quod nemo erat inficiaturus, neque enim obſcurum eſt, Ammiani Marcellini aetate inter inſignia contra Perſas propugnacula Amidam fuiſſe, id nobis videlicet demonſtrare potuit Harduinus. Sed producitur quoque ab eodem ex Concilii Conſtantinopolitani primi ſubſcriptionibus: *Marcus Amidenſis prouinciae Meſopotamiae.* Et ex Hieroclis notitia Eccleſiaſtica: Ἐπαρχία Μεσοποταμίας τῆς ἄνω ἤτοι τετάρτης Ἀρμενίας, Ἀμιδᾶ μητρόπολις. *Eparchia Meſopotamiae ſuperioris, ſeu quartae Armeniae, Amida metropolis.* Addit denique: AMID. in numis Conſtantini M. occurrit, qua voce ſignata Amidae moneta intelligitur. Inſcriptiones Concilii Conſtantinopolitani dignae ſunt relatu, vt, quae A. C. 381. Theodoſio Imp. qui ſtatus eccleſiarum in Meſopotamia fuerit, demonſtrant. Erat autem ſic diſtributa in duas prouincias (*m*).

(*m*) Conciliorum ab Harduino editorum Tomo I. p. 815.

Prouinciae Osrhöenae.
Eulogius, Edessenus.
Vitus, Carrensis.
Abramus, Batnensis.
Prouinciae Mesopotamiae
Mareas, Amidensis.
Bathes, Constantinianensis
Iobianus, Imeriensis.

In concilio Ephesino, epistolae episcoporum ad Cyrillum Alexandrinum subscripsit (*n*), *Asterius episcopus Amidae Mesopotamiae.* Et cum deinde ad partes Ioannis Antiocheni sese aggregasset, epistolae synodi orientalium et epistolae ad Antiochenos subscripsit (*o*), *Asterius episcopus Amidae, metropolitanus.* In Concilio Chalcedonensi (*p*): *Symeon episcopus Amidae, metropolis Mesopotamiae* (*q*). Nondum tamen vel sic aetatem Ammiani sumus antegressi. Nam Hierocles quanto deinde recentior scriptor est? Habemus etiam luculentiorem, Nilum Archimandritam cognomento Doxopatrium (*r*), qui, cum tredecim sub Patriarcha Antiocheno metropoles recenset, tertio loco τὴν Ἐδέσης ponit et sub ea episcopos vndecim, decimo loco τὴν Ἀμίδης et sub ea octo episcopos. Sed ex Syris scriptoribus de dignitate ecclesiastica Amidenae vrbis diligentissime egit (*s*) Iosephus Simonius Assemanus, quem honoris caussa nomino. Quod Harduinus AMID. ex numis Constantini M. subiunxit, vt Amida ante Constan-

(*n*) Conciliorum ab Harduino editorum Tomo I. p. 1351 (*o*) Ib. p. 1533 et 1560 (*p*) Ib Tomo II p 269. (*q*) Confer Cardinalem Norisium de epochis Syro Macedonum p 111. (*r*) Apud Leonem Allatium de consensione ecclesiae Occid et Orientalis p. 166. (*s*) In dissertatione de Monaphysitis voce *Amida* et Tomo II. Bibliothecae Vaticanae p. 48.

ſtantium Imper. videretur celebrari, id, quemadmodum fieri potuerit, non video. Quis enim vnquam eiusmodi numum vidit? Ne Harduinus quidem in numis ſeculi Conſtantiniani vel veſtigium aliquod huiusce numi reliquit impreſſum. Manet igitur Amida ante Conſtantium Imper. obſcura. Tanto fidentiori animo Valens aduerſarium eſt aggreſſus: *Harduinus*, inquit, *numum ad Amidam Meſopotamiae in Conciliis metropolin reuocauit, quaſi in imperio idem eſſet, qui poſtmodum in eccleſia fuit ordo. Amidae ad Tigrim in numis nulla mentio, cuius frequens eſſet, ſi metropolis dignitate hoc tempore ornata fuiſſet, ſicut crebra eſt Emiſae.* In eandem ſententiam Spanhemius, ſed mitioribus verbis diſſeruit. Harduinus vero non ita imperite egit, vt plane contemni a Valente mereretur. Tametſi enim ab Imperatoribus Chriſtianis quaedam metropoles in eccleſia ſint conſtitutae, quae antea in orbe Romano eadem dignitate minime cenſerentur, tamen haud facile vetuſtas imperii metropoles, praeterquam graui de cauſſa neglexerunt, celebritatem vero vrbium vel maxime ſpectarunt. De hac re inſignis Doxopatrii illius locus exſtat (*t*), quem, quia paullo eſt prolixior, lectores mei apud Leonem Allatium requirent. Denique cum Valens tum Spanhemius, omnium in imperio metropolium eandem videntur conditionem ſtatuiſſe, cum in quibusdam id ἀξίωμα nullam prouinciae diuiſionem, ſed honorem tantummodo vrbi tributum comprehendat. Itaque quoties Harduinus ad notitias eccleſiaſticas prouocat, quod ſaepe facit, priſcae celebritatis, ni aliunde eadem fuerit teſtatior, grande fieri praeiudicium ſenſit. Cum autem illius aduerſa-

(*t*) l. c. p. 160. ſq.

uerſarii numos alios Amidae vel vrbis, vel coloniae et metropoleos requirant, vtcumque iure factum videri posſit, tamen ſumma eſt iniuria. Nam, qui haud raro numos vnicos concedi ſibi poſtularunt, iidem Harduino, vt hunc haberet Amidae vrbis vnicum, pro imperio interdixerunt. Crebra, infit Valens, Emiſae metropoleos in numis facta eſt mentio. Nempe, vt confitetur Valens, tamquam prouinciae Meſopotamiae nulla. Hic, ſi quis dicat, numus eſt vnicus Emiſae in quo mentio ſit facta, intercedam pro Harduino eodemque iure, Amidae vnicum eſſe, poſtulabo.

His fluctuationibus iactatus fuit numus. Nunc eundem ex Muſeo Imperatorio exhibui multo luculentiorem, in quo illae maxime litterae, quae tantum turbarum pepererunt, ante alias ſunt conſpicuae. Eſt autem in eo:

Imperator Caeſar, Marcus Seuerus Alexander laureatus, faſcibus ad ceruicem fluitantibus, loricatus, ſiniſtra clupeum tenens, neque dextera, neque haſta ſignata, vt in Pariſino aiunt cerni . . . V. K. M. A. C. ΑΛЄΞΑΝΔ. . . Αὐτοκράτωρ Καῖσαρ Μάρκος Αὐρήλιος, Σευῆρος Ἀλέξανδρος.

Figura muliebris, ſedens in rupe ante arulam, ſiniſtram rupi imponit, dextera protendit duas ariſtas, ad pedem fluuii genius medio corpore procedit: ΑΜ· ΚΟ. Μ. . . ΜЄϹϹΟΠ. *in area* Α.

Tum caput, tum nauis in hoc numo aliquam diuerſitatem a Pariſino oſtentant, ſed qualis ferme eſſe ſolet in numis eadem in moneta, non vno cuſis praelo Littera Α in nomine vrbis ſic propemodum ſignata eſt vti Λ ſic

quoque

quoque in ceteris huius numi vocibus, quod item in illius aetatis numis frequentissimum est. Legimus autem plane et perspicue, nemo vt ambigere possit, AM˙ Punctum ad caput τȣ̃ M, sic factum est, vt mihi initio I paruum fuerit visum. Ast nulla aciei intentione opus est, vt agnoscatur˙, eundemque ad modum reliqua in numo puncta sunt facta. Quare, cum, qui numum gazae Regiae Parisiis inspexerunt, in eo MI. clarissimis ductibus litterarum cerni testentur, potuit isthuc alio ab praelo accedere: cum vero neque Spanhemius, neque Morellus, extremam litteram deprehenderint, potest etiam fieri, vt illud ipsum punctum alios fefellerit. Fuit in Mesopotamia Αμμαια, teste Claudio Ptolemaeo (*u*), sed in mediterraneis, cum huius numi vrbem ad fluuium aliquem celebrem fuisse, etiam ipso ex numo demonstrari queat. Et huius quidem *Amaeae* memoria nullo alio testata fuit monumento, vt, quae vrbs fuerit, explicare queam. Nihil iam reliquum est, quam, vt Amidam in numo signari, cum Harduino, immo eodem etiam repugnante statuamus.

Video nihilo minus, quod in me onus susceperim: subeundum tamen esse sentio. Principio, vt fassus sum antea, ita prae me nunc fero, ante Constantium Imper. nullo in scriptore istius nomen vrbis reperiri. Ipso imperante Constantio, Ἐξήγησις ὅλȣ τȣ̃ κόσμȣ ab homine Syro, et, vt videtur, mercatore Antiocheno scripta fuit, cuius vetus interpretatio Latina exstat a Iacobo Gothofredo primum edita. Nondum aliqua ibi Amida: tantum

(*u*) p. 143. Ita etiam in Manuscr Segueriano apud Montefalconem in Bibliotheca Coisliniana p. 711.

tum excellentes vrbes et Perſarum viribus metuendae Niſibis atque Edeſſa. In Geographo Rauennate, qui illo fuit poſterior, vtpote in vno omnium, quotquot ſunt, corruptiſſimo ſcriptore, poteſt alicui *Amaude* (*x*) *Amidae* videri, quamquam Manuſcr. Vrbinatenſe hic *Amande* (*y*) habet, quod ab illa voce abhorret. Forte huius Rauennatis auctoribus Αμȣδις ſiue Αμῶδις ex Procopio Caeſarienſi cognita fuit, de quo caſtello Henricus Valeſius ad Ammianum Marcellinum, quod ſatis ſit, dixit (*z*). Fuiſſe autem ante Conſtantium Imp. Amidam, Ammianus teſtis eſt idoneus. Neque adeo miror, ante illum fere ſcriptorem mentionem Amidae a nullo eſſe factam. Nam omnium vrbium ad Tigridem ſitarum vetus fama ſub tanta clade veterum monumentorum et ruina ſepulta, aut ſubobſcura eſt, aut nulla. Huc accedit, quod vrbes in Meſopotamia propter et indigenarum et colonorum diuerſitatem multa habuere nomina, aliter eas Graecis, aliter Syris, Arabibus, Perſis, aliter denique Armenis nuncupantibus, ex quibus nominibus alia aliis temporibus ſcriptoribusue inſignitiora fuerunt. *Amida* vtique Arabicum eſt

آمد *Amid*, *Onuſta*, *vt nauis oneraria*, *quae plena eſt*, dici ſolet (*a*). Inter Syros Gregorius Bar Hebraeus Malatienſis etiam *Amid* ſcripſit (*b*). Ceteri Syri, vt Dionyſius Patriarcha (*c*), Georgius Iacobi Sarugienſis diſcipulus (*d*), Chronicon Edeſſenum (*e*), Fauſtus Naironus Maronita (*f*), *Amed* pronunciant. Arabes quoque *Amed* et *Emed*

(*x*) p. 70. ed. Porcheronis. (*y*) p. 5. ed. Hudſon. (*z*) p 154. ed. Gron. (*a*) Golius in Lexico p. 155. Antonius Giggacus et Meſgnien Meninsky hac voce deſtituuntur. (*b*) In Aſmani Bibliotheca Vaticana Tom. II. p. 322. (*c*) Ib. p. 48. (*d*) Ib. Tom. I. p. 288. (*e*) Ib. Tom. I. p 395. (*f*) In Euoplia fidei p. 46. et in diſſertatione de Maronitis p. 49.

Emed dicere, Aſſemanus teſtatur (*g*). Inde nonnulli exiſtimarunt, apud Cedrenum et Ioannem Scylitzen (*h*) Σαϱακηνικὸν Εμὲτ *Amidam* dici, quod, prouti in fabula, perinde duco, vt quisque accipiat. Turcis hodie, tametſi Harduinus negat, قرا امد *Kara Amid*, a moenibus ex nigricante ſaxo ductis. Iacobus quoque Golius animaduertit (*i*), et ديار بكر *Diàr bekr*, quod nomen toti prouinciae tribuitur, in qua veluti metropolis eſt, et امد علي دجلة *Amid ali Digjlat*, ſeu, *Amidam ad Tigrim* nuncupari. Quod vero vrbi nomen fuerit Graecum a Seleucidis impoſitum, non inuenio. Petrus Montanus quidem, vetus *Amidae* nomen viſus ſibi eſt in *Ammaea* Ptolemaei reperiſſe, eumque ſecutus eſt Aſſemanus in diſſertatione de Monophyſitis. Hanc opinionem iam reiecit Iacobus Golius (*k*), quod Ammaea a Tigri nimis fuerit remota, et Amidam potius cum Ptolemaei Δὑϱϐηλα (in Manuſcr. Segueriano eſt (*l*) Δόϱϐηλα) comparari poſſe cenſuit, quod noſtrum non eſt, vel refellere, vel plane adſeuerare. Perſae quidem mirificam Amidae vetuſtatem praedicant, cum a Thahamurathe primae dynaſtiae Perſarum tertio rege conditam referant (*m*). Quis autem his eorum fabulis immoretur? Gratiam tamen habeamus tam Perſis, quam Arabibus, quod ſitum vrbis definiuerunt, qualiscumque tandem eorum in obſeruando fuerit induſtria. Naſſir Eddin et Vlugbegus ſub gradu 73. 40′ longitudinis, inde ab inſulis Fortunatis Amidam collocarunt, et ſub

 gradu

(*g*) In diſſertatione de Monophyſitis, voce *Amida*. (*h*) Tom. I. p. 135. (*i*) Ad Alfraganum p. 241 Vide Herbelotum quoque. (*k*) l. c. (*l*) Montfauconii Bibliotheca Coisliniana p. 710. (*m*) Herbelotus p. 108. Confer. p. 1016.

gradu latitudinis 38. 0′, quae latitudo *Durbetae* Ptolemaei eſt: nam longitudo Ammaeae propemodum congruit. Eledriſus (*n*) Amidam ab Samoſatis LXXVII. M. P. diſtare tradit, ab Niſibi, LXXVIII. M. P. ab Edeſſa CLVIII. Et ſunt aliarum quoque interualla vrbium notata: ſed vaga atque incerta omnis illa Eledriſi dimenſio eſt. Ita autem propinqua fuit Armeniae Amida, vt ager omnis Amidenus vsque ad Antiochiam a nonnullis, in Armenia cenſeretur, teſte Procopio (*o*).

Chronicon Edeſſenum (*p*) ad annum ſuum 660, qui annus ab autumno A. C. 348. iniit: ܒܢܐ ܩܘܣܛܢܛܝܘܣ ܒܪ ܩܘܣܛܢܛܝܢܘܣ ܠܐܡܕ ܡܕܝܢܬܐ *aedificauit Conſtantius filius Conſtantini Amid ciuitatem.* Eodem modo Dionyſius Telmarienſis Iacobitarum Patriarcha ad illum annum. Aſſemanus iam monuit, Syrorum hoc eſſe, aedificatas tradere vrbes, quae moenibus ductis ſint inſtauratae. Econtrario Ammianus Marcellinus (*q*): *Hanc ciuitatem, olim perquam breuem, Caeſar etiam tum Conſtantius, vt accolae ſuffugium poſſint habere tutiſſimum, eo tempore, quo Antoninupolin oppidum aliud ſtruxit, turribus circumdedit amplis et moenibus, locatoque ibi conditorio muralium tormentorum, fecit hoſtibus formidatam, ſuoque nomine voluit appellari.* Locus nobilis, ſed aeque difficilis. Ioannes Harduinus et Ioſephus Simonius Aſſemanus (*r*), ex eo concludunt, Amidam a Conſtantii nomine fuiſſe dictam, de qua re vehementer ambigo. Et dicit hoc quidem ſcriptor tenebricoſus

(*n*) p. 202. 203. ed. Pariſ. (*o*) De B. P. p. 49. et de Aedificiis p. 52. Confer locum ex Hierocle ſupra citatum. (*p*) In Bibliotheca Orient. Vaticana Tom. I. p. 395. Confer Aſſemanum ib. p. 26. et 196. (*q*) p. 159. ed. Gron. (*r*) In diſſertatione de Monophyſitis.

cosus verbis planis: sed Antinonupolis, cuius tamquam eodem tempore conditae recordatur, memoriae eius heic quoque subrepsisse videtur. Illa enim dicta fuit a Constantii nomine. Quae, malum, inquies, Antinonupolis? Quis veterum Romanorum Graecorumque eius mentionem coloniae iniecit? Habemus Edessam in numis Antoninianam, cum colonia in eam ab Antonino Caracalla esset deducta, quod ipsum nesciretur, nisi numi scriptorum silentium explerent. Non haec tamen Marcellini Antinonupolis fuit. Fuit igitur alia colonia militum Romanorum, ab aliquo Antoninorum deducta, quantumuis scriptores et numi de ea reticeant. Quae fuerit, non inuenerunt, quemadmodum indicarent, vel Valesii fratres, vel Iacobus Gronouius. Et adhuc ignoraremus, nisi insignis locus in Chronico Edesseno a me esset animaduersus, qui me ad Antinonupolin deduceret. Quemadmodum Ammianus Amidam et Antoninupolin eodem tempore a Constantio munitam fuisse commemorat, sic Chronicon Edessenum, postquam ad A. C. 660 de Amida dixerat condita, ad A. 661. refert: بنا توب هو قو سطنطيوس اتلا مل ينتا هي دمن قل يم انطيغو ليس متقريا هوة *Aedificauit etiam Constantius Telam vrbem, quae olim Antipolis dicebatur. Antipolis* vocabulum sine omni dubio ἐξ Ἀντωνεινȣπό-λεως, vt Ammianus habet, corruptum fuit. Et huic vero vrbi Constantius nomen suum vel potius patris Constantini imposuit. Testis inter alios est Dionysius Telmariensis, quamquam vbique pro Constantio fratrem Constantinum nominauit, qui error ab Assemano iam est notatus.

 tatus.

tatus. Ita autem Dionysius de Tela: وهو بنا لتلا موزلت دبيت نهرين عل شمه قوسطنطينانوليس شمهه *et ille condidit Telam Mauzalat Mesopotamiae vrbem suoque de nomine Constantinopolin appellauit.* Iam hunc quoque Dionysii errorem in nomine *Constantinopoleos* Assemanus sustulit. Quemadmodum deinde in orientalium monumentis celebratissima est Tela, sic eadem in Actis Conciliorum et scriptoribus Graecis Latinisque denique etiam Syris quibusdam, nomine *Constantiniae.* Christophorus Cellarius ex Stephano Byzantio et Suida, vetus nomen Graecum huius vrbis edidit *Nicephorium.* Quidquid sit de Nicephorio, non illa vtique vrbs Tela fuit, seu Constantinia. Nam Theophanes Byzantius ab Assemano iam in hac quaestione testis productus, Constantiniam ad occidentem Nisibis stadiis 56, totidem stadiis ab Amida ad septemtrionem remotam prodidit. Qui situs vt in Ptolemaei prouinciam Anthemusiam conuenit, ita a Nicephorio ad Euphratem penitus abhorret. Quare verissimum est, quod Assemanus censuit (*s*), Anthemunta seu Anthemusiada et Anthemusiam eam priscis Graecis fuisse vocitatam. Isidorus Characenus (*t*): εἶτα Χάρακα Σίδου, ὑπὸ δ'Ἑλλήνων Ανθεμουσιας πόλις, vt in Hoescheliana editione et in Manuscr. Io. Albertus Fabricius in editione Hoescheliana: χαρακσπασίνου rescripsit. Sed illud Χάρακα Σίδου corruptum mihi videtur ex veteri Armenico aut Syriaco nomine vrbis et potius sine emendatione relinquendum esse. Telae vtique, vt Χάραξ diceretur, non conuenit, quippe quae non in valle, sed in colle sita fuit, vnde ei nomen *Tela* obtigit, quod Syriace *montem*

(*s*) In dissertatione de Monophysitis voce *Tela.* (*t*) p. 2. ed. Hudson.

tem aut *collem* ſignificat. Anthemuſias vrbs nobilis. Tacitus, a Tiridate, quem Tiberius Caeſar Parthis regem dederat, captam refert (*v*). Capta item cum omni prouincia Anthemuſia a Traiano Caeſare (*u*). Quid mirum, ſi a L. Veri Antonini legatis recepta, propter opportunitatem ſitus coloniae honore aucta et Antoninopolis nuncupata fuit.

Nunc, Ammiani loco illuſtrato, de tempore quo Amida a Conſtantio inſtaurata fuit, quaeremus. Ammianus tradit, a Conſtantio adhuc Caeſare auctam fuiſſe et munitam. Nihil, vt ita ſit, prohibet. Nam Conſtantium Caeſarem a patre Conſtantino orienti fuiſſe praefectum, ex S. Rufo Feſto (*x*) conſtat. *Conſtantinus*, inquit, *rerum dominus, extremo vitae expeditionem parauit in Perſas, ſub cuius aduentum, Babyloniae in tantum regna trepidarunt, vt ſupplex ad eum legatio Perſarum accurreret, et facturos imperata promitteret: nec tamen pro aſſiduis eruptionibus, quas ſub Conſtantio Caeſare per orientem tentauerant, veniam meruerunt.* Hoc Sex. Rufi loco id ipſum, quod diximus, Antonius Pagius aſſeruit (*y*). Sed Iulianum Caeſarem quoque teſtem habeo. Is enim ad Conſtantium, poſtquam eum a patre in Aſiam translatum fuiſſe dixit (*z*), τοῖς Παρθυαίων καὶ Μήδων ἔθνεσιν ἀντετάχθης μόνος. *Parthis*, inquit, *Medisque oppoſitus eras ſolus.* Deinde etiam res a Conſtantio in Meſopotamia praeclare geſtas praedicat. Nullo tamen adhuc Amida fuit loco, cum Conſtantinus M. decederet. Nam in

(*v*) Annalium l. VI c. 41. (*u*) Sex. Rufus, Eutropius, Hiſtoria Miſcella. (*x*) c. 26. (*y*) In Critica in Baronii Annales Tom. I. p. 433. (*z*) Orat. I. p. 13.

in diuisione imperii, vt Eunapius commemorat, Constantio Asia Orientisque imperium vsque ad Nisibin obtigit. Iam cum duorum itinere dierum citerior esset Nisibis, quam Amida, si iam tum Amida in celebritate fuisset, ad eam citius Eunapius, quam ad Nisibin, imperii fines porrexisset. Sed non admodum hoc validum est: cum eundem in modum quaeri possit, cur Eunapius imperium Romanum non ad Tigrim fluuium protenderit, quod inde a Diocletiano adhuc quinque prouincias Transtigritanas tenebat. Nempe in nobili aliqua vrbe desinere cupiebat sophista, Amida autem obscura erat. Nihil hoc tamen impedit, quin Chronico Edesseno suum annum Amidae penitus absolutae perfectaeque concedamus, quod propter Antoninopolin pariter instauratam Ammianus tempora susceptae consummataeque munitionis permiscuisse videtur. Sunt vtique auctores, qui initia imperii Constantiani maximis operibus nobilitata confiteantur. Saepe Tigrim ponte ex ratibus strato traiectum Iulianus Caesar testatur (*a*), ἤγερθη δ᾽ ἐπ᾽ αὐτῷ φρούρια, *castella quoque ad eum excitata sunt*. Addit deinde, Constantium agrum Transtigritanum late vastasse, Persis ne quidem prospicere audentibus Ea quoque initia imperii Libanius in Basilico magnifice extulit, vbi Constantium laudat (*b*), πόλεις, τὰς μὲν κινοῦντα, τὰς δὲ κατοικίζοντα. Denique locus et plane illustris est in Themistio Euphrada, cum Constantium item laudat (*c*), ἀνακαθηράμενον καὶ φραξάμενον τὰ πρὸς ἕω, *oriente perpurgato et communito contra tyrannos esse profectum*, et quidem ἀπὸ τοῦ τίγριδος ῥέιθρων τὰ ὅπλα τρέψαντα ἐπὶ

(*a*) Oratio. I. p. 22. (*b*) Oratio. in Imperatorem Constantium p. 298, ed. Petauii. (*c*) p. 301.

ἐπὶ ἑσπέριον ὠκεανὸν, *ab ipſis Tigridis fluentis arma vertiſſe ad occidentalem oceanum.* Profectus eſt Conſtantius Imp. aduerſus Magnentium et Vetranionem A. C. 350. ſub auctumnum. Anno ante perfecta fuerant munimenta Amidae, eodem Telae ſeu Conſtantiniae. Nihil aptius ad Themiſtium illuſtrandum dici poteſt. Et cum nocturnum ad Singaram praelium, A. C. 345. commiſſum fuit, hac clade illata, Conſtantius excitatus fuiſſe videtur, vt quam firmiſſimam ad Tigridem arcem Amidam eſſe vellet, ſi quid ſecus aliquando Singarae accidiſſet.

Dicat mihi nunc quispiam, hanc tu tamen vrbem nullis ante Conſtantium monumentis celebrem, et coloniam militum Romanorum et metropolin ſub Alexandro Seuero fuiſſe largieris? Nempe id mecum conſtitui largiri, cum huicce numo fidem tribui conueniat. Cuius auctoritate ſcriptoris tot vrbes in Meſopotamia et colonias exſtitiſſe et metropoles, ad hunc diem teſtatum fuit? tamen vbi numi teſtes producuntur, dubium eſſe poteſt nullum. At multi de ceteris numi exſtant: videlicet, ſi, vt de Amida, ſinguli, id ipſum, quod propter multitudinem credimus, vt opinor, negaremus? Ab antiquariis vero nulla alia cauſſa haeſitatum fuit in hoc numo, quam, quod prima littera non eſſet perſpicua, quo ſcrupulo ſublato, nihil reliquum eſt, quam vt victas manus demus numoque fidem noſtram adiungamus. Vt autem res ipſa maiori in luce verſetur, Meſopotamiae fata animo recolamus, quae alibi quidem attigimus, ſed ita, ſi ad Oſrhöenam hiſtoriam pertinerent. Loginqua ſub Lucullo, Pompeio, Craſſo, Antonio non attingam. Zoſimus iactat

 (*d*),

(*d*), a Caesare Augusto limites imperii Tigrim atque Euphraten constitutos fuisse, deinde prouincias eas in Romanorum potestate permansisse, donec Iuliani Imper. clade amissae, recuperari nequiuerint. Nusquam tantum malae fidei vnum in locum aggestum reperias, quantum in hoc Zosimi est, qui, vt Iulianum laudibus efferret, ab ipsa impudentia pigmenta emendicasse videtur. Bene tamen haberet, si hoc vno in loco strenue ineptiisset Zosimus. Philo, qui Augusti temporibus fuit proximus, cum de legatione ad Caium Caesarem, illum, inquam, Germanici filium commentaretur et orbis Romani amplitudinem opesque ipso in exordio ornatissimis verbis praedicaret, sic fatus est (*e*); ἀρχὴν τῶν πλείστων καὶ ἀναγκαιοτάτων μερῶν τῆς οἰκουμένης, ἃ δὴ καὶ κυρίως ἄν τις οἰκουμένην εἴποι, δυσὶ ποταμοῖς ὁριζομένην, Ευφράτη τε καὶ Ῥήνῳ, τῷ μὲν ἀποτεμνομένῳ Γερμανίαν καὶ ὅσα θηριωδέστερα ἔθνη, Ευφράτῃ δὲ Παρθύην καὶ τὰ Σαρματῶν γένη καὶ Σκυθῶν. *Imperium plurimarum et maxime necessariarum partium orbis, quas quis proprie orbem terrarum appellare queat, duobus fluuiis definitum, Euphrate et Rheno, quorum hic quidem Germaniam ceterasque immaniores gentes disiungit, Euphrates autem Parthiam et Sarmaticos Scythicosque populos.* Et ne alios testes in hac quaestione legitima producam, iam eum vel Iulianus ὁ θαυμάσιος conuincet. Is enim, vt irridendum Augustum suis daret, mira eum modestia in Caesaribus producit, res suas strictim referentem, et isthuc vero etiam (*f*), ὅρια διττά, ὥσπερ ὑπὸ τῆς φύσεως ἀποδεδομένα, Ἴστρον καὶ Ευφράτην ποταμοὺς ἐθέμην. *Duos ter-*

(*d*) l. III. c. 32 p. 334. ed. Cell. (*e*) p. 993. ed. Paris. (*f*) p. 326.

terminos, tamquam a natura tributos, Istrum et Euphratem posui. Quare, vbi Iuliano alibi (*g*) Tigris Persiae Romanique orbis ὅρος ἀρχαῖος *vetus terminus* dicitur, tempora Imperatorum, qui post Augustum fuerunt, respiciuntur. Neque tamen Mesopotamia semel acquisita Romanorum in potestate mansit, neque post Iulianum caesum, Romanorum in potestate numquam fuit. Hoc quidem nostrum nunc non est refellere, isthuc autem alterum S. Rufus breuiter confutat, qui, cum Mesopotamiam ab Hadriano Persis redditam dixisset, ita infit (*h*): *sed postea sub Antoninis duobus Marco et Vero et Seuero, Pertinace ceterisque Principibus Romanis quater amissa, quater recepta Mesopotamia est.* A Traiano igitur, vt Rufus eodem loco testatur, *limes orientalis supra ripam Tigridis constitutus est.* Et alibi (*i*): *Antemusium opimam Persidis regionem accepit ac tenuit.* Scilicet Persidis regio Anthemusia, quod in Persarum ditione fuisset. Numus est insignis apud Angelonum, in quo Traianus paludatus inter duos amnes stat, puta Tigridem et Euphratem. ARMENIA. ET. MESOPOTAMIA. IN. POTESTATEM. P. R. REDACTAE. Rufus: *Prouincias fecit, Armeniam, Assyriam, et Mesopotamiam, quae intra Tigridem atque Euphratem sita, irriguis amnibus instar Aegypti foecundantur.* Coloniam tamen ab eodem deductam inuenio nullam, credo, quod iis aduersus Persas praesidiis in Mesopotamia vti nollet. Satis deinde constat, Hadrianum, vt de laudibus Optimi Principis detraheret, Mesopotamiam restituisse Persis, vt orbis Romani terminus iterum esset Euphrates. L. Antoninus

 Verus

(*g*) Orat. I. p. 23. (*h*) c. XIV. (*i*) c. XX.

Verus per Statium Priſcum, Auidium Caſſium et Marcium Verum, Parthos, vt habet Chronicon Edeſſenum (*k*), ſub-egit, hoc eſt, Meſopotamiam recuperauit. Prima, quod conſtet, colonia, deducta eſt Carrhas. Nam numus eius exſtat, inſcriptus: ΚΟΛ. ΑΥΡ. ΚΑΡΡΗΝΩΝ. *Colonia Aurelia Carrhenorum.* Ea deinde, L. Vero defuncto, cum Meſopotamia regenda daretur Auidio Caſſio, a M. Antonino etiam metropoleos primae dignitate aucta eſt. Nam numus eius in cimeliarchio Regis Franciae (*l*): ΚΟΛ. ΑΥΡ. ΚΑΡΡΗΝΩΝ. ΦΙΛΟΡ. Μ. Α. Αὐρηλίας Καῤῥηνῶν Φιλορωμάιων Μητροπόλεως πρώτης, inſcriptus exſtat. In auerſa: ΜΑΡ. ΑΥΡ. ΦΙΛΟΡ. Μ. Α. ΑΙΡ. Μάρκῳ Αὐρηλίῳ Φιλορωμάῳ Μητροπόλεως πρώτης *anno CXI.* Hunc annum Harduinus cum Septembri A. V. C. 924. et 11°. M. Antonini coniungit, cuius ſententiae cauſſas edidit nullas (*m*). Nos cum illo Carrhenorum anno, A. V. C. 926. aut 927. certis de cauſſis comparauimus (*n*). Deinde Carrhae ſub Commodo cunctisque Imperatorum ceterorum in numis, tantummodo metropolis. Obſeruatum eſt a Ioanne Valente (*o*) Singaram ad Tigridem in numo Seueri Alexandri ΑΥΡ. CΕΠ. ΚΟΛ. ΣΙΝΓΑΡΑ dici, itaque eidem videtur a Marco et Lucio Vero colonia ea ante Septimium deducta, vnde appellata fuerit *Aurelia.* Sed an ſuperſtite Vero, an deinde a ſolo Marco definiri item non poteſt. Similiter in numo Philippi Niſibis *Iulia*, *Aurelia*, *Septimia* ſignata eſt. Res geſſit in Meſopotamia L. Septimius Seuerus, nouasque deduxit colonias aut veteres in-ſtau-

(*k*) l. c p. 390. (*l*) Io. Harduinus in numis vrbium illuſtratis p. 80. ed. Amſt. (*m*) Neque l. c. neque in Chronologia V. T. p. 636. (*n*) In hiſtoria Oſrhoëna p. 186. (*o*) Tomo II. p. 122. et p. 197.

ſtaurauit. Singaram deducta eſt Legio II. Parthica, vt ex Gordiani et Gallieni numis Ezechiel Spanhemius demonſtrauit (*p*). De Niſibi teſtem habemus Dionem Caſſium in epitome Xiphilini (*q*): ἀξίωμα τῇ Νισίβει δὺς, ἱππεῖ ταύτην ἐπέτρεψεν. *Dignitate auxit Niſibin eamque equitatui commiſit.* Seu Septimiam coloniam equitum eſſe iuſſit. In duobus nummis Iuliae Paulae, quae Elagabalo fuit nupta, CЄΠ. ΚΟΛΩ. NЄCIBI. Fuit ex Septimii coloniis etiam Rheſaena, quod ex vno Traiani Decii numo Ioannes Valens nos docuit (*r*). In eo eſt colonus cum bobus, inſcriptio: CЄΠ. ΚΟΛ. PHCAINHCIΩN. L. HIP. Explicuit Valens: Σεπτιμία Κολώνεια Ρησαινησίων Λικόβαντος ξίη, ſeu *anno* 118, tamquam ſi ea coloniae Rheſaenam deductae epocha fuerit, quae ad Hadrianum vsque adſcendat. Sed multimodis haec coniectura ſuſpecta eſt. Primum in ſex numis Decii diuerſo typo ſignatis, in quinque numis Herenniae Hetruſcillae coniugis eius et in vno Q. Herennii Decii Caeſaris illud L. HIP. occurrit. Quis ſibi perſuaderi patietur, eodem omnes anno cuſos fuiſſe? Et ponamus, fuiſſe cuſos anno tertio, eodem et poſtremo Decii, quo anno cum Herennio Caeſare conſulatum geſſit A. C. 251. Ita caput huius epochae ab A. C. 134. et 18. Hadriani exſurgit. Quod autem tantum Hadriani in Rheſaenenſes beneficium exſtare potuit, cum Meſopotamia ab eo, ſimul atque imperium adiit, fuiſſet derelicta? Quare cum alius huius coloniae numus partem Graece, partem Latine inſcriptus eſt PHCAINHCIΩN. LEG. III. GAL. ita ſimiliter in illis factum putabimus,

(*p*) Ad Iuliani orationem T. I. p. 171. (*q*) p 320. (*r*) T. II. p. 122. 197.

vt colonia militaris deducta fuerit et Legio III. Gallica et Legio aliqua Hipponenſis. His rebus in Meſopotamia ſic conſtitutis, dicere potuit Septimius Imp. vt eum praedicaſſe auctor eſt Dio Caſſius (*s*), magnam ſe regionem imperio adquiſiuiſſe eamque propugnaculum Syriae effeciſſe. Antoninus Caracalla deinde regno Oſrhöeno ſublato, Edesſam coloniam fecit. Ea haud ita multo poſt a Macrino Imp. metropoleos dignitate aucta fuit, vtique ſic, vt potiori loco eſſet, quam Carrhae, cuius vrbis numi deinde tantum μητροπόλεως, vel, vt ſub Elagabalo, μητροπόλεως δευτέρας axioma gerunt. Quae autem potuit eſſe prima, niſi Edeſſa, vrbs tum vt maxime opibus florentiſſima? Nulla deinde alia ad id tempus in Meſopotamia metropolis fuit. Et argumentum huiusce rei in Hiſtoria Oſrhoëna protuli, quod Edeſſam oportuerit grandi deuinctam fuiſſe beneficio, cum in Macrini numo, A. O. M. ЄΔЄCCA inſcribatur, Αυτωνειανὴ Οπελιανὴ Μακρινιανὴ Εδεσσα, vt cum Harduino legi (*t*). Malim nunc quidem, *Antoniniana*, *Opeliana*, *Metropolis*, *Edeſſa*. *Antoniniana* ab Antonino Caracalla coloniae in eam deductae cauſſa, *Opeliana* ob metropoleos honorem munere Opelii Macrini Imp. in eam delatum. Antoninus Elagabalus Meſopotamiam neglexit.

Hic ſtatus coloniarum et metropoleon ante Alexandrum Seuerum in Meſopotamia fuit. Is bellum cum Perſis geſſit, vt eam ab Antonino neglectam (*u*) recuperaret. Nota eſt Elagabali ſocordia, qui, dum laſciuiret, totum

(*s*) l. c. p. 320. (*t*) In hiſtoria Oſrhöena p. 191. (*u*) Aelius Lampridius c. 56.

totum Romanum orbem fecit nihili. At hic nulla alia eius culpa fuit, quam quod aduersus necopinatos casus non satis vel praesidiis vel imperio muniuit. Nam, quoad Elagabalus fuit, non iam illas Parthorum vires exstitisse reperio, vt tot iactatae calamitatibus fractaeque intestino malo, Romanas prouincias ad se traxisse videantur. Vtcumque rerum potentes exstiterunt Persae, tamen aliqua regni Persici species, arctis circumscripta spatiis mansit, sed obscura eius regni est memoria. Tandem Artaxerxes Persarum rex Parthos subegit. Inde iam epocha regni Persici, ab A. C. 226. Kal. Octobribus, exorditur, vt Antonius Pagius demonstrauit. Iidem Mesopotamiam, nondum satis munitam ab Alexandro Imper. inuaserunt. Contra eos profectus est Aurelius Alexander Seuerus A. C. 229. Anno post, confecto bello, rediit et VII. Kal. Octobris triumphauit, Antonio Pagio iterum demonstrante. De hac expeditione Sextus Rufus (v): *Aurelius Alexander quasi fato quodam in exitium Persicae gentis natus: ipse Persarum regem nobilissimum Xerxem* (Artaxerxem) *gloriose vicit.* Apud Aelium Lampridium (x), Alexander in Senatu dixit: *Persas P. C. vicimus. Terras Interamnanas, Mesopotamiae scilicet, neglectas ab impura illa bellua, recepimus. Artaxerxem potentissimum regem, tam re, quam nomine, fusum fugauimus, ita vt eum terra Persarum fugientem videret.* Herodianus his nonnihil obstrepit, nihilque fere, nisi cladem Romanorum exercituum, non inultam tamen praedicat. Hunc, vt Alexandro minus aequum, tam Aelius Lampridius, quam Iulius Capitolinus nominatim perstringunt. Mouet me mode-

(v) c. 22. (x) c. 56.

modeſtia Alexandri, quae in eo omnium teſtimonio fuit ſumma, vt nihil eum glorioſius de rebus ſuis apud Senatum iactitaſſe opiner. Contra in clade Romanorum non modo Herodianus, bonus cum primis ſcriptor, ſed multo magis Dio Caſſius me mouet (*y*). Nihilo minus ex Herodiano quoque colligi poteſt, exercitum Alexandri, qui per Armeniam in regiones Tigridi adiacentes irrupit, res magnas contra Perſas geſſiſſe. Et Herodianus quidem, Artaxerxem multis ſuorum deſideratis ſuperiorem fuiſſe praedicat, tamen idem teſtatur, non minoribus eum cladibus ſuorum debilitatum in Perſiam ſe recepiſſe, militem dimiſiſſe, et pacem coluiſſe. Ἐτῶν οὖν τριῶν ἢ τεττάρων ἡσύχασαν, οὐδ᾽ ἐν ὅπλοις ἐγένοντο. *Annos igitur tres aut quatuor quieuerunt, neque in armis fuerunt.* Quartus ille annus in extremum Alexandri incidit. Quae illae tam voluntariae, tamquae diuturnae induciae, ſi illo bello Perſae non fuerint repreſſi? Quid adeo Artaxerxes, neque cum Alexander mox ex Syria decederet, neque cum inde ad Germanicum bellum proficiſceretur, nihil tamen auſus eſt, niſi Alexandro ſuperſtite nimis validi in Meſopotamia Romani fuerint? Et Pagius quidem Perſis ſcriptoribus hoc loco nimium tribuit (*z*), cum vanitatem eorum facile poſſet diſpicere. Aiunt, Alexandrum fuſum multis ſtragibus *terram Elam et Hamat et Sinear, cum parte Ion et Palaeſtinam vsque ad Arabiam* Perſis ceſſiſſe. *Elam* ſeu Perſia, in poteſtate Romanorum numquam fuit: *Hamat* ſeu Syriam et *Ion* ſeu Aſiae minoris partem et Palaeſtinam in Perſarum manus minime perueniſſe, ne opus quidem eſt, vt operoſe demonſtrem. Qui tam foeda com-

(*y*) Vide Hiſtoriam Oſrhoënam p. 193. ſeq. (*z*) Tomo I. p. 212.

commenti sunt, iis de *Sinear* seu Mesopotamia, quis credat? Quae cum ita sint, anno seu 229. seu potius A. C. 230. bello confecto, Amidam colonia deducta est, partem vt milites, qui ad Tigridem fortiter sese gesserant, beneficio illo reficerentur, partem quod etiam ad Tigridem defendendum hoc castellum fuit accommodatissimum. Sed hoc quoque fortium virorum honori datum, vt metropolis ea esset colonia et adeo prima. Quid autem? imminutane hunc in modum Edessae coloniae dignitas fuit, quam primam Mesopotamiae fuisse, alibi demonstrauimus? Nempe ita commeriti fuisse videntur Edesseni. Cognosce mihi hunc locum Georgii Syncelli (*a*), quem Iosephus Scaliger in Excerpta Eusebiana, eo nondum edito, transtulerat (*b*): Οὐράνιος δέ τις ἐν Ἐδέσσῃ τῆς Ὀσροηνῆς αὐτοκράτωρ ἀναγορευθεὶς καὶ κατὰ Ἀλεξάνδρου τυραννήσας διαφθείρεται. *Vranius quidam, qui Edessae in Osrhöena Imperator appellatus, contra Alexandrum tyrannidem inuasit, opprimitur.* Huius Vranii mentionem etiam Zosimus (*c*) iniecit: Οὐράνιος δέ τις ἐκ δούλου γένους ἀναῤῥηθεὶς, παραχρῆμα μετὰ τῆς ἁλουργίδος Ἀλεξάνδρῳ προσήχθη, *Vranius quidam ex seruili genere Imperator dictus, statim, vt erat purpuratus, ad Alexandrum deductus est.* *Vranii* nomen suspicor a Graecis, ex Persico huius hominis deprauatum fuisse. Dictum, opinor, *Vararanem.* Et ponit haec Georgius inter caedem Vlpiani et inter bellum Persicum media. Itaque Alexander iusta in Edessenos indignatione, metropoleos quidem atque coloniae honorem reliquisse, primatu autem mulctasse eos videtur.

(*a*) p. 357. ed. Paris. (*b*) p. 84. (*c*) l. 1. c. 12.

Sed non diuturna ea felicitas Amidae coloniae et metropoleos fuit. Quales milites in Mesopotamia fuerint, cum Aurelius Alexander bellum gereret, Dio Cassius apud Xiphilinum (*d*) prolixe tradidit. Ita videlicet adfecti, vt pars ad Artaxerxem transirent, pars arma contra Persas ferre nollent, mollitia, licentia et impunitate corrupti. Igitur post Alexandri mortem defectio in Mesopotamia consecuta est, vt Edessa tamen in fide maneret, cuius solius vrbis numus exstat cum Caii Iulii Maximi August. προτομῇ. Neque vero hoc bellum fuit apertum. Id enim denique, vt ait Iulius Capitolinus (*e*) *Gordiano iterum et Papiniano Coss. natum est.* Gordianus Aug. II. Cos. cum Pompeiano (hoc enim collegae nomen) A. C. 241. fuit. Persarum rex, vt idem refert (*f*), et suis copiis instructus fuit et Romanis. Romanos ait, quos supra defecisse diximus. Colonias autem in Mesopotamia defecisse ex eo concludo, quod primus impetus belli iam ipsam Antiochiam inuasit, quo penetrare Persae non poterant, nisi Mesopotamiae maxima parte perfidia coloniarum intercepta. Eo denique anno, quo bellum Persicum natum est, Antiochiam a Persis et obsessam esse et captam, ex hoc vexatissimo quidem, at insigni loco Iulii Capitolini teneo (*g*): Gordianus *per Syriam in Antiochiam venit, quae a Persis iam tenebatur: illic frequentibus praeliis pugnauit et vicit, Sapore Persarum rege submoto et post Artaxerxem Antiochiam recepit, Carras et Nisibin, quae omnia sub Persarum imperio erant.* Hic istud, *et*

(*d*) p. 375. (*e*) c 23. (*f*) c. 27. (*g*) In Gordiano c 26. Ex iis, quae hoc loco dico, emenda et exple a me dudum dicta in Historia Osrhöena p. 200. seq. vbi etiam μνημονικὸν ἁμάρτημα *Chosroes* pro *Sapores.*

et post Artaxerxem mirifice torsit criticos, Gruterum, Casaubonum, Salmasium. At nihil aliud Capitolinus dixit, quam Antiochiam fuisse ab Artaxerxe captam, post vero receptam a Gordiano. Parum hoc quidem Latine, sed in Capitolino quis miretur? et duriores etiam sunt criticorum emendationes. Regem quorum hoc bellum gessit Gordianus, Sex. Rufus et Eutropius (*h*) *Xerxem*, Eutropii Metaphrasta Ἀρσην, id est, *Artaxerxem* vocant. Perperam hoc, quod eum ab Gordiano victum tradunt: victus est Sapores Artaxerxis filius. Attamen apparet, auctores habuisse, qui proderent, bellum hoc ab ipso Artaxerxe motum, et, vt Capitolinus indicat, ab eodem quoque Antiochiam captam fuisse. Id autem A. C. 241. contingere non potuit, cum iam decessisset Artaxerxes. Antonius Pagius quidem ad hunc annum: *Artaxerxes obiit currenti anno.* Sed calculus eum fefellit. Georgius Syncellus (*i*) Artaxerxem 15 annos regnasse refert. Accuratius hoc ex Persicis diphtheris Agathias Myrinaeus (*k*), quem Pagius sequitur, annos 14. menses 10. Iam si, vt aequum est, cum Pagio, primum Artaxerxis annum ab A. C. 226. Kal. Octobribus exordiamur, A. C. 240. Septembri ineunte fatis functus est. Tum vero Sapores maiori vi Syriam inuasit. Zosimus (*l*): ἤδη δὲ τῆς βασιλείας οὔσης ἐν ὀχυρῷ, Πέρσαι τοῖς κατὰ τὴν ἑῴαν ἔθνεσιν ἐπιέναι προσεδοκῶντο, τὴν ἀρχὴν Σαπώρου παραλαβόντος μετὰ Ἀρταξέρξην. *Cum iam imperium* (Gordiani) *in tuto esset, Persae gentes orientales aggressuri exspectabantur, cum Sapores post Artaxerxem regno esset potitus.* Quae cum ita sint, necesse est Artaxerxem ex-

 tremis

(*h*) c. 14. (*i*) p. 360. (*k*) p. 134. (*l*) l. 1. c. 18.

tremis annis in Meſopotamia quaedam geſſiſſe; Niſibin vtique et Carrhas proditione, vt opinor, recepiſſe in poteſtatem, vt deinde fama eius bello, quod aperta vi geſtum eſt a Sapore filio, immiſceretur. Herodianus vtique eum tantum, quoad Alexander vixit, quatuor admodum annos, quieuiſſe teſtatur. Sed dum motus inteſtini Romanos agitarent, non antea de bello Perſico cogitatum eſt, quam vbi confirmato Gordiani imperio, Sapores non iam aſtu et corruptione coloniarum rem ageret, ſed maximo apparatu impreſſionem faceret in Syriam. Contra Saporem Gordianus Auguſtus profectus eſt, non A. C. 241. (nam non me modo, ſed etiam Antonium Pagium, acutiſſimum Chronologum locus ille Capitolini feſellit) ſed vt diſſerte teſtatur alio loco Capitolinus (*m*): *Praetextato et Attico Coſſ. Gordianus aperto Iano gemino* (*quod ſignum erat indicti belli*) *profectus eſt contra Perſas cum exercitu ingenti, et tanto auro, vt vel auxiliis vel militibus facile Perſas vincere poſſet.* C. Vettius Atticus, et Aſinius Praetaextatus Coſſ. A. C. 242. fuerunt. De rebus a ſe geſtis ſic Gordianus Aug. ad Senatum ſcripſit (*n*): *Perſas, vt breui multa connectam, ab Antiochenſium ceruicibus, quas iam nexas Perſico ferro gerebant, et reges Perſarum et leges amouimus: Carrhas deinde ceterasque vrbes imperio Romano reddidimus: Niſibin vsque peruenimus: et, ſi dii fauerint, Cteſiphonta vsque veniemus.* Illi reges iterum in tam obſcura fama non modo Saporis, ſed etiam Artaxerxis nos admonent. In Meſopotamia igitur Gordiano Imp. numi ſignati ſunt Edeſſae coloniae et metropoleos, Carrharum eodem titulo, tum

(*m*) c. 26. (*n*) c. 27.

tum coloniarum tantummodo, Nesibis Septimiae, et Singarae Aureliae Septimiae ad Tigridem. Earum coloniarum, quamdiu Misitheus Imperatoris socer et praefectus praetorii vixit, optima fuit conditio. Capitolinus: *Cuius viri tanta in republica dispositio fuit, vt nulla esset vnquam* (forte, *vsquam*) *ciuitas limitanea potior* (seu, *alicuius momenti*) *quae non posset exercitum P. R. ac principem ferre*, (hoc est, *alere*:) *quae totius anni in aceto, frumento et larido atque hordeo et paleis condita non haberet.* Gestum deinde bellum Persicum vsque ad A. C. 244. cuius initio Philippus res turbauit, vt Pagius egregie exsecutus est. Iam Amida, quae in illo rerum tumultu fuit? Credo ego, quodsi ad ceteras colonias in obsequio continendas ab Alexandro condita in fide permansit, opressam fuisse ceterarum coloniarum inuidia: sin aliter, etiam ipsam Persarum in potestatem defectione peruenisse. Cum autem Gordianus Mesopotamiam recepisset, neglecta fuisse videtur, quod Singara ad Tigrim sufficeret et mox deinde M. Iulius Philippus Nisibenis faueret. Nisibin enim nouam coloniam deduxit, quae idcirco in numo ΙΟΥΛ. CЄΠ. ΚΟΛΩ. ΝЄCΙΒΙ. *Iulia Septimia colonia Nesibi.* Accessit deinde etiam metropoleos dignitas. Nam in numo Otaciliae Seuerae Augustae est ΙΟΥΛ. CЄΠ. ΚΟΛΩ. ΝЄCΙΒΙ. ΜЄΤ. *Iulia Septimia colonia Nesibi metropolis.* Sub Messio Traiano Decio et Q. Herennio Messio Decio Edessae et Rhessainae numi sunt. Deinde numi nos destituunt. Vnicum hic profe- Tab. XXIV. Figura 3. ram Rhesaenae coloniae, qui in Museo Imperatorio exstat. Caput in eo est Decii radiatum. In naui nonnihil obtrita figura muliebris, sinistra tenens cornu copiae,

 dextera

dextera ad aram ſacrificans, reſpicit aquilam inſiſtentem laurea tenentemque roſtro ſertum CЄΠ. KOΛ. PHCA. . . . ωN. L. . . . . Sic item ſunt numi Decii Imp. apud Valentem. Hoc vero in noſtro ſingulare eſt, quod e regione auris, inuerſo in capite, alio praelo caput vrbis turritum altius impreſſum fuit. Iactatus igitur fuit hic Decii numus, donec Rheſaena, ſuae vrbis, tamquam liberae, genium imprimeret. Diu iacuit imperii Romani maieſtas in Meſopotamia. Diocletianus primus iacturam reſarciuit talemque reliquit prouinciam, qualem denique tenuit Conſtantius Conſtantini filius.

De ſitu vrbis agrique Amideni conditione ad extremum dicemus, quod argumentum auerſam numi explicabit. Nam hic Genius vrbis in rupe ſedet accliui et ſiniſtram vertici eius imponit, quod vrbs in excelſo locata eſſet. Genius fluminis propter Tigridem vrbi vicinum. Ammianus Marcellinus (*o*): *Et a latere quidem auſtrali geniculato Tigridis meatu ſubluitur propius emergentis: qua euri opponitur flatibus, Meſopotamiae plana deſpectat: vnde aquiloni obnoxia eſt, Nymphaeo amni vicina, verticibus Taurinis vmbratur, gentes Transtigritanas dirimentibus et Armeniam: ſpiranti zephyro contrauerſa Gumathenam contingit, regionem vberem et cultu iuxta foecundam, in qua vicus eſt Abarne nomine, ſoſpitalium aquarum lauacris calentibus notus.* Iſmael Abulfeda apud Iacobum Golium (*p*) cum Ammiani hac deſcriptione plane concordat. Fuit igitur verſus orientem in altum magis euecta, ita vt ex ea agri Meſopotamienſes ſubiecti diſpectaren-

(o) p. 159. (p) p. 240.

ctarentur. Etiam verſus meridiem et Tigrim praeterlabentem ſic ſita fuit. Ammianus (*q*): *In ſummoto loco partis meridianae murorum, quae deſpectat fluuium Tigrim, turris fuit in ſublimitatem exſurgens, ſub qua hiabant rupes abſciſſae, vt deſpici ſine vertigine horrenda non poſſent, vnde cauatis fornicibus ſubterraneis per radices montis ſcalae adusque ciuitatis ducebant planitiem, quo ex amnis alueo haurirentur aquae furtim, vt in omnibus per eas regiones munimentis, quae contingunt flumina, vidimus, affabre politae.* Sed occidentem verſus adſcenſus vrbis impeditus quoque fuit. Ammianus enim ab Samoſatenſi regione Amidam fugiens (*r*), *ciuitatem*, inquit, *petebam anhelo curſu rependo, ex eo latere, quo inceſſebamur, in arduo ſitam, vnoque adſcenſu perangusto meabilem, quem ſciſſis collibus molinae ad calles arctandas aedificatae denſius conſtringebant.* Genium fluminis Tigrim malui interpretari, vt vicinum moenibus, ciuitatique aquam praebentem et percelebrem denique fluuium, quam alium aliquem. In numo Singarae ad Tigridem non poſſum ſatis mirari, cur illuſtris Spanhemius addubitauerit (*s*), geniumne fluminis, ſimiliter ſignatum, Tigrim ederet, an neſcio quem riuum prope eam coloniam. Ammianus vtique (*t*) ad Amidae aquilonem Nymphaeum amnem locauit, et ipſo in meditullio ſub arce, *fons*, infit, *diues exundat, potabilis quidem, ſed vaporatis aeſtibus nonnumquam foetens.* Abulfeda etiam plures in vrbe fontes eſſe teſtatur. Cur autem minora nomina vel Nymphaei, vel fontium, vicino Tigridi Amideni praetuliſſent? Valeſius quidem Nymphae-

---

(*q*) p. 166. (*r*) p. 159. (*s*) Ad primam Orationem Iuliani p. 171. (*t*) p. 159. 160.

phaeum in Sophanene, CCXL. aut CCC. ab Amida ſtadiis, ad Martyropolin a Procopio Caeſarienſi (*u*) prodi animaduertens, Ammianum hoc in nomine offendiſſe autumat. In Ammiano autem nulla tanta fuit oſcitantia, vt, cum Amidam contra Perſas propugnaſſet, amnem aliquem ad boream labi et Nymphaeum ab incolis vocitari ignoraret: neque a nobis Procopius poſtulat, vt aliter ſtatuamus, quam Ammianus memoriae prodidit. Ipſe ille Piſides Diaconus Ammiani fidem ſuffulcit:

Καὶ τὸν μέγιστον ἐκπεράσας Νυμφίον
Ὅστις Τίγρητος ταῖς ῥοαῖς ἐπιῤῥέων
Ἀποστερεῖται που καλεῖσθαι Νυμφίος.

Et maximum traiecit Nymphium,
Qui Tigridis fluctibus influit,
Alicubi vero non dicitur Nymphius.

Ergo Nymphius a Martyropoli orientem verſus in Tigridem ferebatur, ad quem fluuium erat Amida. Sed quidquid dubitationis ſupereſſe potuit, totum hoc de medio ſuſtulit nitidiſſimum Iacobi Golii ingenium (*x*), cum ex Abulfeda oſtendit, باسلنفا *Baſilinſa*, prope *Meyafarekinum* oriri, atque in Tigrim labi duobus ſupra *Ticrit* (quae Martyropolis quondam fuit) paraſangis: ex nominis autem conuenientia concludit, illum ipſum veterem Nymphaeum eſſe. *Quapropter*, inquit, *cum intermedio loco ſita ſit Amida*, *non poteſt ipſa a fluuii illius alueo adeo longe abeſſe*. Spicae, quas figura vrbis dextera tenet, vbertatem agri pollicentur. Forte inde etiam *Amida* Arabice dicta fuit

(u) De B. P. p. 25. et 62. (x) Ad Alphraganum p. 240.

fuit *onuſta*. Iam ſupra ex Ammiano *Gumathenam regionem vberem et cultu foecundam*, ad occidentem vrbis commemoraui. Fruſtra hic Fridericus Lindenbrogius *Commagenam* ſcribi oportere iudicauit. Quanto enim illa ab Tigri ſemota fuit interuallo. Immo Gumathena nomen videtur Armenicum, regionis proxime Amidam vrbem. Sed idem Ammianus quoque (*y*) patentes ad occidentem Amidae *agros*, *pingues cultosque* praedicat.

(*y*) p. 163.

DE DVOBVS DIADEMATIBVS IN MVSEO IMPERATORIO.

AVCTORE
T. S. Bayer.

PRidie eius diei, quo die ANNA AVGVSTA ſanctiſſimis caeremoniis Moſcuae vncta conſecrataque fuit, in ſummorum virorum et doctiſſimorum publica concione apud Academiam et de virtutibus Auguſtae pro tenuitate ingenii dixi, et vt conſuetudo Academiae poſtulabat, de duobus diadematibus Muſei Imperatorii diſſerui. Quaerenti enim mihi et mecum conſideranti, quo argumento illum auſpicatiſſimum diem ex more et inſtituto Academiae inſtaurarem, ne meus ſermo a publicis ſtudiis in Auguſtae venerationem effuſis penitus abhorreret, aut laetiſſimas auditorum cogitationes ab incredibili voluptate auocarem ad alienas ab hoc tempore litteras, nihil opportunius occurrebat, quam ſi de his diadematibus verba Tab. XXIV. Figura 4. facerem. Reperta ſunt ante aliquot annos, vt relatum eſt mihi, in agro Caſanienſi. Exſtitere apud nos, qui arbitrarentur, haec brachiorum ornamenta fuiſſe, qualia a quibusdam populis geſtari accepimus. Apud Saracenos, vt Conſtantinus Porphyrogenneta memoriae tradidit (*a*), inſignia imperii fuerunt annuli. Sed nihil planius eſt et per-

(*a*) De adminiſtrando imperio p. 73 ed. Band.

perſpicuum magis, quam ab annulis, qui in brachiis geſtari potuerint, horum diadematum formam abhorrere, contra ea Byzantiis diadematibus penitus congruere. Antoninus ille Elagabalus exacta in Syria pueritia, *voluit*, vt ait Aelius Lampridius (*b*), *diademate gemmato vti, quo et vſus eſt domi.* Etiam imaginem ſuam pictam illo cum diademate in Vrbem miſit ante aduentum ſuum, vt populum Romanum ſpectaculo huic adſueſaceret (*c*). Siue id honori patrii numinis dederit, cuius in ſacerdotio diadema geſſerat, vt Gisbertus Cuperus ad Lactantium ſibi videri oſtendit, ſiue regum Parthorum aemulatione, abſterritus tamen eſt iudicio populi Romani a peregrino more alieni. Aurelianus Auguſtus quoque, victis Perſis et Zenobia Palmyrenorum regina, diadema ſumpſit (*d*), ita vero, vt poſt eum coronis radiatis laureisque reſtitutis aut galeis receptis, primus Conſtantinus M *perpetuo diademate* ſeſe exornarit, quemadmodum S. Aurelius Victor ſatus eſt. Conſtantinus iuxta ſe fratres quoque et filios diadematibus inſigniri paſſus eſt. Et cum inde vsque a Domitiano Imp. inſtitutum fuiſſet, vt Imperatores ſummo in faſtigio Αὐτοκράτορες et *Auguſti* appellarentur, proximo gradu, ob ſpem ſuccedendi conſiſterent Καίσαρες, deinde fere Auguſti modo cum Caeſaribus hanc diadematis maieſtatem communicarunt, modo hoc ſolo honore ſeſe praetulerunt. Sed in ipſa forma diadematum ſaepe mutatum fuit, praeſertim cum tiara accederet. Spectari id poteſt in numis apud Carolum Ducangium, Anſelmum Bandurium et alios. Anna Comnena Porphyrogenneta Alexii Imp. filia perfectum Auguſtorum diadema, vt

Bbb 2 tum

(*b*) c. 2. 3. (*c*) Herodianus l. V. c. 5. (*d*) Victor in Epitome.

tum fuit, ſic deſcripſit in Alexiade (*e*): τὸ βασιλικὸν διάδημα καθάπερ ἡμισφαίριον εὔγυρον τὴν κεφαλὴν διαδεῖ πανταχόθεν μαργάροις κοσμούμενον, τοῖς μὲν ἐγκειμένοις, τοῖς δὲ καὶ ἐξηρτημένοις. Ἑκατέρωθεν γὰρ τῶν κροτάφων ὁρμαθοί τινες ἀπαιωροῦνται διὰ μαργάρων καὶ λίθων καὶ τὰς παρειὰς ἐπιξέουσι. Καὶ ἐστὶ τοῦτο ἐξῃρημένον τι χρῆμα τοῖς βασιλεῦσι στολῆς. *Imperatorium diadema veluti hemiſphaerium vndique concauum et clauſum caput deuincit, ab omni parte margaritis ornatum tum intextis, tum exſtantibus et pendulis: nam vtrimque ad tempora ex vnionibus et gemmis monilia pendent et genas feriunt:* (ad imitationem taeniarum veterum a diadematibus ſericeis dependentium ad ceruicem) *hoc eximium et proprium Auguſtorum diadema eſt.* Tum vero Anna Porphyrogenneta diademata Sebaſtocratorum et Caeſarum deſcribit: οἱ δὲ Σεβαστοκρατόρων καὶ τῶν Καισάρων στέφανοι σποράδην ἐστὶν ὅπου τῶν μαργάρων καὶ λίθων μετέχοντες ἄνευ τοῦ ἐπισφαιρώματος, *Sebaſtocratorum vero et Caeſarum coronae erant paſſim margaritis gemmisque diſtinctae, at ſine eminenti orbe, ſeu tiara.*

Sentio quidem, poſſe alicui hanc dubitationem inii-ci, quod hi aurei gemmatique circuli tam parui ſint, vix vt aptari capitibus queant, eo neque in diadematum loco ponendos eſſe. Hunc ſcrupulum corona Longobar-
Tab. XXIV. Figura 5. dica, quam ferream vulgo vocant, nobis eximet. Formam huius diadematis, quod Modoetiae prope Mediolanum adſeruatur cum his noſtris conuenire ex tabula cernetis. Amplitudo autem ea eſt, vix vt duorum annorum

(*e*) p. 78. ed. Paris.

rum puer capite gerere poſſit, diametro quinque digitorum: pondus vix trium vnciarum eſt. Modoetenſes ferunt, Helenam Conſtantini Magni matrem clauos ferreos ſanctiſſimae crucis reperiſſe atque eorum vnum Imperatoris filii diademati inſeruiſſe: a Conſtantio deinde diadema dono datum fuiſſe Gregorio M. Pontifici Romano, hinc ad Theolindam perueniſſe, quae Agilulfo primum imponi illud iuſſerit. Aduerſus hos Modoetenſium ſermones, cum praeſertim populus ad venerationem laminae, tamquam e ſacrae crucis claue concinnatae, moueretur, et Antoninus Franchedinus rem ad Viſcontium Archiepiſcopum Mediolanenſem detuliſſet, hic ad Congregationem Rituum, quae Romae eſt, integram cauſſam reieciſſet; Ludouicus Muratorius (*f*) ſententiam ſuam nondum diiudicata cauſſa protulit, quae ſpes omnes Modoëtenſium proſterneret. Inter cetera negauit diadema eſſe, quia ob minutiem geſtari capite non potuerit. Enimuero dum non inficiatur, ſaepe hoc diadema in inauguratione Imperatorum Germanorum adhibitum fuiſſe, ex eo, quod etiam Iuſtus Fontaninus in diſſertatione de corona ferrea Longobardorum contra Muratorium vrget, per ſe apparet, admoueri capiti poſſe. Non eſſe ita antiquum, vt Modoëtenſes poſtulant, concedo. Quis credat Conſtantinum M. ſe ſuosque priuaturum fuiſſe diademate, quod, vt ait Ambroſius in oratione de exceſſu Theodoſii, *claue dominicae crucis connexum fuit*? Contemplemur formas diadematum in numis Byzantiis inde vsque a Conſtantini M. temporibus, ita magis etiam confirmabimur, ſequioris aetatis eam coronae Longobardicae eſſe. Muratorius Modoëtenſes cum

 iſtis

(*f*) Analect. Tom. II. p. 267.

iſtis rumoribus ſuis plorare iubet monumentorumque teſtimonia et auctoritates requirit: Fontaninus vero ſatis veterem illam famam eſſe contendit, et peruulgatam, neque abſurdam. Equidem, vt inter ſummorum virorum diſceptationes meo quodam iudicio vtar, quod fieri plerumque ſolet, non ſine veri falſique miſtura Modoëtenſium famam perſeuerare cenſeo. Factum videtur diadema hoc ad Conſtantinopolitanorum formam, transmiſſumque a Conſtantino ad Longobardos, ſed minime gentium a Magno. Nomen tamen fefellit Magni, cuius illuſtrior ſemper fuit memoria ad populum, quam ceterorum Conſtantinorum. At illa minuties coronae Longobardicae nos confirmat, ne noſtris hisce circulis ob hanc ſolam cauſſam diadematum nomen negemus, quod paullo minores ſint. Non ſunt tam exigui, ac Longobardica corona, quam hic ex Muratorio et Fontanino propoſitam deſcriptamque conferre poteſtis. Scio Ioannem Peringskioldum formam Longobardicae coronae ab hac diuerſam ad Theodorici Regis vitam (*g*) protuliſſe, vt eam illuſtris Sparwenfeldius Modoëtii ipſe pinxerat. Quid hanc diuerſitatem pepererit, dicere non poſſum: at Italis et conſummatiſſimae doctrinae viris, et orta contrauerſia, oculatiſſimis, cur ego potius fidem non adhibeam? Denique etiam de minutie talium diadematum orta mihi eſt ſuſpicio non abſurda, vt arbitror. Cum tot populi, quod ex Conſtantino Porphyrogenneta mihi conſtat, diademata Conſtantinopoli peterent, Conſtantinopolitani, qui inuiti dabant, de pondere detraxiſſe et magnitudine videntur, vt et ſumptui parcerent et maie-

(*g*) p. 573.

maieſtatis imminuerent decus, ne diademata commode geſtari poſſent et circumferri in capite regio.

Hic intercedere videtur Conſtantinus Porphyrogenneta noſtrisque opinionibus obſtare. Ita enim fatur (*b*):

Ἴσθι ὅτι βορέοις ἅπασι γένεσι φύσις ὥσπερ κατέστηκε τὸ ἐν χρήμασι λίχνον καὶ ἄπληστον, καὶ μηδέποτε κορεννύμενον, ὅθεν πάντα ἐπιζητεῖ καὶ πάντων ἐφίεται καὶ οὐκ ἔχει τὰς ἐπιθυμίας ὅρῳ περιγεγραμμένας, ἀλλ' ἀεὶ τοῦ πλείονος ἐπιθυμεῖ, καὶ ἀντὶ μικρᾶς ὠφελείας μεγάλα κέρδη προσπορίζεσθαι βούλεται. Διὸ δεῖ τὰς τούτων ἀκαίρους αἰτήσεις καὶ παῤῥησιαστικὰς ἀξιώσεις διὰ λόγων πιθανῶν καὶ φρονίμων καὶ συνετῶν ἀπολογιῶν ἀνατρέπειν καὶ ἀνακρούεσθαι. Αἵτινες ὅσον ἀπὸ τῆς πείρας ἡμεῖς καταλαβεῖν ἠδυνήθημεν, ὡς ἐν τύπῳ περιλαβεῖν, τοιαῦταί τινες ἔσονται εἰ ἀξιώσουσι ποτὲ καὶ αἰτήσονται, εἴτε Χάζαροι, εἴτε Τοῦρκοι, εἴτε καὶ Ῥῶς,

Cunctis populis ſeptentrionalibus quaedam quaſi natura eſt tributa, opum cupiditas quae expleri atque exſatiari nequeat, vnde omnia expetunt et cuncta deſiderant, neque cupiditates vllo termino habent circumſcriptas, ſed ſemper plura concupiſcunt et pro exigua opera, magna lucra comparare volunt: idcirco oportet eorum importunas petitiones et impudentes poſtulationes blandibus verbis et prudentibus callidisque excuſationibus eludere atque repellere. Quae excuſationes, quantum nos ab experientia potuimus cognoſcere, vt exemplo complectar, iſtiusmodi erunt. Si quando ſeu Chazari, ſeu Turcae, ſiue etiam Roſſi, aut alia gens ex borealibus et

(*b*) p. 63. ed. Band.

Ρῶς, ἢ ἕτερόν τι ἔθνος τῶν βορειῶν καὶ Σκυθικῶν, ὅια πολλὰ συμβαίνει, ἐκ τῶν βασιλέων ἐσθήτων, ἢ στεμμάτων, ἢ στολῶν, ἕνεκά τινος δουλείας καὶ ὑπουργίας αὐτῶν ἀποσταλῆναι αὐτοῖς, οὕτω Χρή σε ἀπολογήσασθαι. κ. τ. λ.

Scythicis, vt ſaepenumero fieri ſolet, ex Imperatoriis veſtibus aut coronis, aut ſtolis, pro aliquo ſeruitio et miniſterio ſuo, ſibi aliquid mitti poſtulent et petant, ita oportet vt te excuſes: etc.

Sic deinde filium inſtruit: ex libris arcanis ad memoriam exſtare, et ſtolas et coronas per angelum ad Conſtantinum M. a Deo fuiſſe caelo demiſſas, iuſſumque ab eo fuiſſe, vt in Magna Sancta Eccleſia Sophiae conſecrata deponerentur, et vt iis Imperatores tantum in publico feſto induerentur: ita igitur Conſtantinum M. conſtituiſſe, vt fieret, et in ſacra eccleſiae menſa ex mandato angeli ſacrum carmen inſcripſiſſe, quo diras omnes ſit imprecatus, ſi quis Imperator extuliſſet ex eccleſia: eadem religione teneri, qui ad earum ſimilitudinem ſeu ſtolas, ſeu coronas conficiendas curaret, niſi cum confectae fuerint, in eadem eccleſia deponerentur. Addit deinde, Leonem Imperatorem, quod auſus eſſet ſacras veſtes et coronam eccleſia efferre domique geſtare, repente in vultu carbone erumpente maximis cum cruciatibus animam efflaſſe, quod de Leone etiam Michael Glycas praedicauit (*i*). Videtis populos ad ſeptemtrionem et nominatim, Chazaros, Turcas, Ruſſos ab Conſtantinopoli tum diademata, tum veſtes regias repetere, et pro officio aliquo poſtulaſſe. Impetra-

(*i*) p. 285.

petrare potuisse Constantinus Porphyrogenneta negat, quod ad diadematum eorum formam alia confici communicarique ius fasque non esset, iis etiam terrore perculsis, qui gestare auderent. Sed haec ita sunt reperta, vt importunae flagitationes reiicerentur, ne vulgato diadematis honore, Imperatorum maiestas vilesceret. Ante eum vero Constantinum, vel gestandi extra ecclesiam diadema, vel ad eius formam alia fabricandi, vel honoris caussa cum aliis communicandi, religionem nullam fuisse inuenio. Communicati honoris testem vetustissimum vide Cyrillum Hierosolymitanum in epistola ad Constantium Augustum (*k*): ἕτεροι μὲν γὰρ, ἀφ᾽ ὧν ἔχουσι τὴν τιμίαν σου, πολλάκις στεφανοῦσι κεφαλὴν χρυσοκολλήτους στεφάνους, λίθοις διαυγεστάτοις πεποικιλμένους προσκομίζοντες. Exstat apud Nicephorum Patriarcham Constantinopolitanum (*l*) insigne Heraclii Augusti factum. Nam cum contra Chosrhoën moueret, ponto deuectus in Lazicam, legatos ad Turcarum principem de foedere misit. Turca Imperatori obuiam processit cum magna auxiliariorum multitudine, et ab equo desiliens sese prostrauit humi. Foedus cum eo sanciuit Imperator, καὶ ὃν περιέκειτο στέφανον, τῆς κεφαλῆς λαβὼν, τῇ τοῦ Τούρκου κεφαλῇ περιέκειτο. *diadema capiti suo detractum Turcae imposuit.* Dicat hic quisquam minoris dignitatis id diadema fuisse, sine tiara, sine reliquo maiestatis splendore: ego vero hoc vltro concedo, neque quidquam amplius postulo, cum et haec Casaniensia diademata, quae produxi, non plenam maiestatis speciem referant. Aio tamen, etiam diadema, perfectum absolutumque summae maiestatis apicem Bulgaris

(*k*) p. 305. ed. Th. Milles. (*l*) p. 11. ed. Paris.

ris fuiſſe conceſſum hoc ipſo imperante Conſtantino Porphyrogenneta, vt excuſationum illam formam prorſus vanam eſſe ſentiamus. Nam cum Ioannes Tzimitzes, Bulgaria recepta, Boriſum Imperatorem in poteſtatem redegiſſet, triumpho in vrbem deuectus, τὰ παράσημα τῆς Βουλγαρικῆς βασιλείας inſignia Bulgarici imperii coram populo Boriſo detraxit (*m*). Erant autem ea inſignia, vt ait Cedrenus, στέφανος ἐκ χρυσοῦ καὶ τιάρα γενησμένη ἐκ βύσσου καὶ πέδιλα ἐρυθρά, *diadema aureum et tiara et caligae rubrae.* Quod Nicephorus et Cedrenus στέφανον *coronam* dixerant, id ego, ambiguitatem vocabuli deuitans, interpretatus ſum *diadema.* Dixi Conſtantino Porphyrogenneta imperante hoc diadema accepiſſe Bulgaros. Nam is Conſtantinus et Romanus Lacapenus eius ſocer imperabant, cum Symeon Bulgarorum, gentis Sclauonicae Princeps maximis cladibus Imperatores adfecit, donec pax coaluit duriſſimis conditionibus. Miſſi ad Symeonem de pace Nicolaus Patriarcha et alii inſignes viri, mandatum retulerunt, vt Romanus Imperator ipſe praeſens a praeſente Symeone pacem precatum veniret. Tanta tum neceſſitas rem Conſtantinopolitanam vrgebat, vt Romanus Lacapenus ad Cosmidii litus adeſſet prior Symeonemque exſpectaret. Venit tandem Symeon cum ſuis ſatellitibus, qui eum clupeis haſtisque auro et argento reſplendentibus ornati medium ducebant, καὶ ὡς Βασιλέα εὐφήμην τῇ τῶν Ρωμαίων φωνῇ *et tamquam Imperatori Graecis vocibus fauſta omina acclamabant.* Prior exorſus Romanus paene ſuplex pacem petiit. Annuit Symeon et diſceſſit, δώροις μεγαλοπρεπέσι τοῦ Βασιλέως δεξιω-

(*m*) Cedrenus p. 682.

Fig. III.

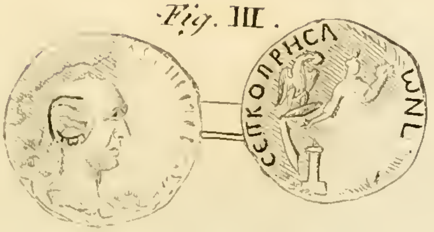


Fig. II.

Fig: V.

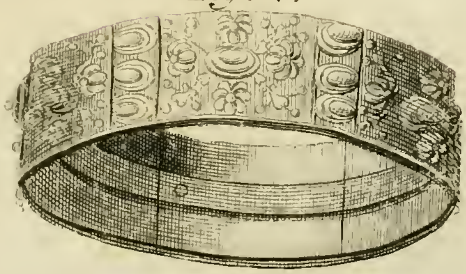


Fig. I.

Fig. III.

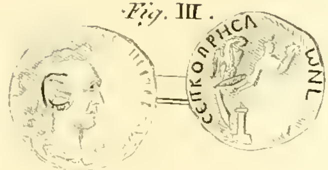
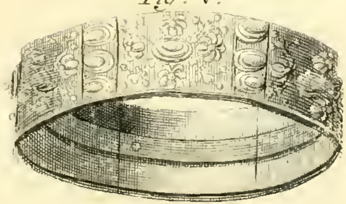


Fig. II.

Fig: IV.

Fig: V.



ξιωσαμένȣ τὸν Συμεὼν, *cum Imperator magnificentissimis muneribus ornasset Symeonem*, vt ait incertus auctor rerum Lacapeni (*n*). Quod aliud tempus ita accommodatum fuit felicitati Bulgaricae, vt diadema ab Imperatore Constantinopolitano extorqueret ambitiosissimus Princeps: nec modo diadema cum tiara ad maximam maiestatem perfectum, sed etiam maiorem confessionem maiestatis suae, ipsum Βασιλέως titulum, in quo Constantinopolitani ita fuerunt parci, vt cum ne Carolo quidem Magno aut Ottoni ceterisque Imperatoribus tribuerint.

(*n*) p. 252. Symeon Logotheta p. 484. seq. Georgius Monachus in nouis Imperatoribus, p. 580. seq.

ORIGINES RVSSICAE.

AVCTORE

T. S. Bayer.

ANte Michaelem Imp. Theophili et Theodorae filium multa Sclauonicarum gentium memoria exſtat apud Byzantios ſcriptores, nulla Ruſſici nominis, quamquam e gente *Ros* legatos omnium primos Conſtantinopolin ad Theophilum Imp. veniſſe, ex Annalibus Francicis Bertinianis demonſtrabo. Quare etiam Hiſtoriographus Anonymus Ruthenus, Michaele Imp. Indictione XV. primum auditum fuiſſe Ruſſicum nomen, aſſeuerauit. In huius Imperatoris temporibus duo anni, Indictione XV. inſigniti fuerunt: annus Chriſti 852. et annus 867. ita vt Indictio XV. Conſtantinopolitana et Ruſſica (Ruſſi enim in Indictionibus et annis mundi Conſtantinopolitanas rationes ſequuntur) a ſuperiorum annorum Kal. Septembribus procedat. Tamen potius A. C. 866. exeuntem et A. C. 867. maximam partem, quam alterum annum in animo habuit Hiſtoriographus: illo enim anno exiſtimauit primam expeditionem a Ruſſis fuiſſe ſuſceptam. Etſi verum rei geſtae annum non tenuit, tamen ab eodem non admodum aberrauit, vt alio loco dicam.

Ne quis forte improuidus fallatur, cum inueniet Ruſſos quosdam vetuſtiorem nominis ſui memoriam in Grae-

Graecis requirere: quidquid eiusmodi est proditum, id vero nobis inseruire non potest. Neque enim nos iuuat, quaecumque de Sclauis exstant, ea raptim transferre ad Russos, vt isti quidem sunt ausi: nomen Russicum desidero. Verum etiam isthuc aliqui reperire sibi sunt visi apud Graecos multo antiquissimum. Ea caussa Theophanis Byzantii locum quendam, tum alia aliorum dicta aut momenta, contra offensionem nimiam, denique Nicephori Gregorae errorem detegam sane perquam absurdum. Theophanes auctor est (*o*), anno tertio et tricesimo Constantini Copronymi Imp. A. C. 752. Bulgarico bello Imperatorem classem instruxisse tria millia chelandiorum: *ipse aduersus Russorum chelandia in Danubium aditum sibi paraturus mouit.* Sic enim Theophanem Latine conuertit Iacobus Goar. Quis hoc loco Russicum bellum non exspectet, aut nauale cum Russis praelium? aut quis saltem Russicum nomen e Theophane nobis non obiiciat, vetustius, quam nos exstare apud Graecos diximus? At Theophanes nihil de Russis, cum ita fatus est: καὶ ἀπελθὼν αὐτὸς εἰς τὰ ῥούσια χελάνδια, ἀπεκίνησε, πρὸς τὸ εἰσελθεῖν εἰς τὸν Δανούβιον ποταμόν. *Imperator in russis chelandiis, quae conscenderat, mouit, vt Danubium intraret*, nimirum contra Bulgaros Danubio finitimos. Τὰ ῥούσια χελάνδια Constantinopoli fuere rubro colore pictae naues. Sic in quatuor factionibus *russati* seu Tertullianeo vocabulo, *russei*, ῥουσαῖοι Constantinopolitanis ab eodem colore. Illa ipsa ῥούσια χελάνδια quae Constantino Porphyrogenretae (*p*) ἀργυρέια ῥούσια, quorum in locum Leo Sapiens Imp.

 δρο-

(*o*) p. 376. (*p*) de A. I. p. 139.

δρομώνια instituit. Vt, quod ait Herodotus (*q*), τὸ δὲ παλαιὸν ἅπασαι νῆες ἦσαν μιλτηλεφέες, *rubrica pictae omnes veterum naues fuerunt*: ita Constantinopoli erant Imperatoriae, exornatae etiam puluinaribus et aulaeis purpureis. Haud dissimilis est error Chronographi Rutheni, cum sic ait: *Andreas apostolus iamdudum Russos baptizauerat: fueratque iam in primo concilio prouinciali Antiocheno Antipater episcopus Russiae haeresinque Pauli Samosateni sua subscriptione damnauerat* (*r*). Dicam initio de S. Andrea. Hippolytus Portuensis S. Irenaei discipulus primus est, qui tradidit, Andream Scythis atque Thracibus praedicasse: de Scythis consentit eius fere aequalis Origenes apud Eusebium. Alii Achaiam adiiciunt. Hieronymus (*s*), Gregorius Nazianzenus (*t*) et Pontius Paullinus (*u*) Scythiam ignorasse videntur. Nam cum maxime de cursu diuinae religionis inter gentes dicunt, Achaiam tantummodo attribuunt Andreae apostolo, aut Epirum. Iam deinde Sophronius Scythis addit Sogdianos et Sacas. Dorotheus vero, ille inquam ὑποβολιμαῖος Dorotheus, totum litus maris et Bithyniam et Pontum et Thraciam et Scythiam edidit, e quo ipsa fere verba in Menologio Basilii Imp. exstant (*x*), denique Nicephorus Callistus (*y*) totum quasi septemtrionem et orientem in acie explicuit, Cappadociam, Galatiam, Bithyniam et Anthropophagos, et Scythiae deserta Εὔξεινόν τε Πόντον ἑκάτερον, Pontum puta Euxinum, et Mare Caspium, et prouincias eorum marium ad boream atque notum, et Thraciam,

(*q*) L. III. c. 58. (*r*) Sic etiam in Menologio Russico edito in Actis Sanctorum a Daniele Papebrochio Maio mense Tomo I p. 54. (*s*) Epistola 148. ad Marcellam. (*t*) Orat. XXV. (*u*) Natali IX. S. Felicis. (*x*) Tom. I. p. 221. (*y*) H. E. I II. c. 39.

ciam, Macedoniam, Theſſaliam, Achaiam. Nouiſſe mores me et Dorothei iſtius et huius Calliſti meditate decet, quibus religio fuit, orbem chriſtianum celare, quae noctu ſomniarint. De Thracia non dubito, neque opus fuit inficeta fraude, qua Nicephorum Imp. ductum memorat Symeon Logotheta (z). Nam cum in venatione haud procul a Byzantio eſſet, inuenta ſcilicet ex improuiſo vetus ara et ad Imperatorem delata hoc cum titulo: *τοῦτό ἐστιν τὸ ἅγιον θυσιαστήριον τοῦ Ἀρχιστρατήγου Μιχαὴλ τοῦ Ἀνατέλλοντος, ὅπερ ἐνεθρόνισεν ὁ ἅγιος Ἀπόστολος Ἀνδρέας*, *hoc eſt ſanctum altare Archiſtrategi Michaelis Orientis, quod dedicauit S. Apoſtolus Andreas.* De Scythia quoque conſentio, quando ita Hippolitus et Origenes tradidere, quorum apud nos auctoritatem valere decet, cum proximi ab aetate illa fuerint. At quam Scythiam dicant, quos populos, etiam atque etiam conſiderandum fuit, ne voce ambigua vtamur, tamquam pueri talis. Thraciae mentio mihi perſuadet, vicinos quoque S. Andream adiiſſe. At tum quidem inde a Danubio ad Boryſthenem Scythae fuere nulli: Getae regionem tenebant, paucis Scythis permixtis. Non nego ſuperiora Boryſthenis Scythas tenuiſſe: at quis mihi praeſtabit, eo vsque penetraſſe S. Andream, aut Boryſthenem traieciſſe? nempe in veterum ſcriptorum ſilentio, neque nouis delector, quos iam vulgus eruditorum exſibilat, neque hariolari meum eſt, ſed pudorem adhibere et verecundiam. Quis deinde mihi Ruſſos iam tum ad Boryſthenem fuiſſe demonſtrabit? videlicet cum alios populos Tiberii Imp. aetate iſthic coluiſſe oſtendere poſſum. At cum in Antiocheno con-

(z) p. 455.

concilio Antipater Russorum episcopus fuisse dicitur, vanitas ἐπ' αὐτοφώρῳ deprehensa est. Nimirum inuenerat ille in subscriptionibus Concilii Antiocheni A. C. 363. Ἀντίπατρον Ῥώσου (a), hinc ex leui nominis congruentia error errorem extrusit. Stephanus Byzantius: Ῥῶσος, τὸ ἐθνικὸν Ῥώσιος, ἀλλὰ καὶ Ῥωσεὺς τὸ κτητικὸν Ῥωσικός. Apud Claudium Strabonem, Ptolemaeum, Athenaeum Ῥωσσός. Vrbs in Cilicia ad Sinum Issicum, testibus Strabone, Cedreno (b), Zonara (c), Syriae adscribitur a Plinio et Athenaeo. Notitiae Graecae: Ῥῶσος Ἀρχιεπισκοπή. Eodem modo offensioni esse possunt episcopi Rhusii. Nam obseruarunt nonnulli, episcopum Russorum in Concilio Constantinopolitano IV. subscripsisse. Immo in subscriptione Concilii contra Photium Patriarcham e veteri Anastasii Abbatis ad Hadrianum Pontificem Romanum interpretatione (d), A. C. 870. *Ioannes misericordia dei archiepiscopus Russii exstat.* In Actis Synodi Photianae, quae ex Vaticana bibliotheca integra edidit Ioannes Harduinus, fragmenta enim tantummodo exstabant apud Beueregium:

Ἀγάθωνος Μωράβων
Φιλίππου Καρπάθου
Τρύφωνος Ῥουσίου

Erat autem Ῥούσιον vrbs in Thracia ad Aegaeum mare, e regione Thasi insulae, antea Τόπειρος. Hieroclis Grammatici Syncedemus (e) in prouincia Rhodopes: τὸ Πυρὸς νῦν Ῥούσιον, lege Τόπυρος: Catalogi duo vrbium, quae nomi-

(a) Tom. I. Conciliorum Harduini p. 740. (b) p. 654. (c) p. 201
(d) Harduini Concil. Tom. V. p. 924. (e) p. 31. ed. Baudurii.

nomina mutarunt, editi ab Anſelmo Bandurio in Imperio Orientali (*f*). Τόπειρος τὸ νῦν Ρέσιον. In Concilio Epheſino A. C. 431. Λουκιανὸς Τοπήρου. Vtriusque Andronici ἔκθεσις, Rhuſium XCIII. e LXXVII. metropolin throni Conſtantinopolitani habet. Iacobus Goar (*g*) ex vno Mſc. ἐκθέσεως Andronici Senioris edidit Ροδιον ex altero Andronici Iunioris Ρώσιον, at rectius alii Ρόσιον. Quare iſta non magis ad Ruſſos pertinent, quam ſi quis e Concilio Aruernenſi aliisque in Francia Ruthenenſe Rutenicumque epiſcopum nobis producat. In Concilio Agathenſi A. C. 506. *Quintianus Rutenus.* Eſt enim, vt Ioannes Harduinus iam monuit, epiſcopatus *Rhodez* in Aquitania orientali, ſub Albienſi archiepiſcopatu. Martyrologium Romanum XVIII. Kal. Iulias: *Apud Ruthenos S. Quinctiani* (*h*). In martyrologio Abbatis Meſſanenſis: *ipſo die Quintiani presbyteri et Titi confeſſoris.*

Nicephorus Gregoras, de dignitatum origine diſputans (*i*), a Conſtantino Magno inquit, Ρωσικὸς τήν τε στάσιν καὶ τὸ ἀξίωμα τοῦ ἐπὶ τραπέζης κεκλήρωται, *Roſicus et locum et dignitatem praefecturae triclinii in aula Conſtantinopolitana accepit.* Sic idem tradit Peloponneſi dominum Principis dignitate a Conſtantino Magno fuiſſe auctum: Atticae dominum, Magni ducis, Boeotiae dominum Magni primicerii, Siciliae principem Regis. Sed, quod in primis eſt ridiculum, Montisferrati princeps, hoc eodem auctore Gregora, Μαρκέσιος. *Marchio* a Conſtantino Magno dictus eſt, tamquam ὁ βασιλικὴν κατέχων σημαίαν, *qui ſignifer ſit Imperatoris*, exigua

(*f*) Tom. II. p. 10. (*g*) ſub finem Codini Tom. II. p. 403.
(*h*) V. Baronii Annales A. C. 506. (*i*) p. 146.

gua deinde apud Latinos exiſtimatione. Carolus Ducangius, hoc omni in genere litterarum incomparabilis, ſimplicitate hominis vehementer offenditur: *merae ſunt*, inquit, *et aniles omnino fabulae, quas refellere, operam eſſet ludere.* Sed veniam, vt puto, meretur Gregoras, cum ipſe inſcitiam deprecatur, quod illarum memoriam rerum ὁ χρόνος συνέχωσε καὶ τὰ μὲν τελέως ἐκάλυψε καὶ λήθης ποταμοῖς ἀφῆκε συμφέρεσθαι, τὰ δ᾽ἀτέκμαρτα συνεχώρησε περὶ τὸν βίον πλανᾶσθαι. Quis huic ſuccenſere poteſt, qui tam vrbana et eleganti ſententia ſeſe muniuit? Fuerit igitur aliquis Roſicus Princeps ante A. C. 1352. (eo enim tempore Gregoras ſcripſit) qui pincernae munus Conſtantinopolitana in vrbe obire glorioſum duxerit: nihil tamen ille ad eam rem pertinet, quam nunc tractamus. *Ruſſica dapiferi dignitas*, inquit Ducangius, *nullibi occurrit.* De Graecis et Latinis monumentis dicit Ducangius, ὁ ἐπιείκελος ἀθανάτων. Addo Ruſſica, ſaepe nimis indulgentia Graecorum honori, in quibus nihil vsquam de hoc munere Ruſſicorum principum reperitur, tamquam Conſtantinopolitano imperio obnoxiorum. Dicam quod mihi videtur, neque patiar Nicephorum nimis traduci. Vt Atticae duces, Boeotiae primicerius, Siciliae rex, Montisferrati marchio Gregorae temporibus profecto fuerunt, ita fuit etiam Roſicus pincerna: neque enim tanta res Gregoram fugere potuit in aula verſantem. At ille Rhoſicus nullus alius fuit, quam Rhoſii vrbis in Cilicia dominus, vt multi iſta aetatae minores Principes illis in tractibus, concedente aula Byzantia exſtiterunt. Nulla eius memoria exſtat? nempe etiam maiorum rerum teſtimonia deficiunt, quas tamen pro-

probabili coniectura tenemus. At Constantinus M. illam Rhosii dignitatem instituit? hoc enimuero vanum est, nec iam ita sustinere auctoritatem Gregoras potest in rebus ante se tot seculis, vt illa in memoria pincernae Rhosii, statum Constantinopolitani imperii non penitus ignorabat. Nam ita quoque in ceterarum dignitatum origine impingit, quae tum quidem erant, obscurae tamen apud Gregoram originis.

Huius diuturni de Rossico nomine apud Byzantios Scriptores silentii duas caussas esse posse video: alteram e Russorum sententia, alteram e ratiocinio non absurdo. Russi contendunt, circa Michaelis Imp. tempora Ruricum rem publicam primum constituisse nomenque parti cuidam Slauorum indidisse, vt nuncuparentur Russi. Quod, si ita est, Russicum nomen medius fidius a Byzantiis ante cognosci non potuit, quam fuit. Ostendam autem et nomen et rem publicam Russorum Rurici tempora excedere, quocirca altera in caussa potius acquiesco. Populus Russicus ante Michaelem Imp. longius a Constantinopoli, multis populis interiectis, remotus fuit, quam vt spectatorem aliquem rerum suarum nancisci posset. At vbi attollere sese incepit et mercaturas Ponticas exercere, Constantinopolin vero ipsam aggredi bello, tum denique etiam cognitum in vrbe est nomen Russicum et monumentis ad posteritatem celebratum. Ea necessitate motus Constantinus Porphyrogenneta Imp. operam dedit, vt per Cherrhonesitas et finitimos Ponto populos, ad quos saepe legati Romani commeabant, quemadmodum ceterarum gentium ad septemtrionem situs et mores et consilia statusque explorarentur, ita etiam Russorum. Ante hunc vero Constantinum Imp. incredibile, quantum omnis doctrina, etiam plebeia, et vel legendi scribendique copia nulla fuerit Constantinopoli Michaelis Imp. extremis temporibus. Bardas Caesar ad deserta litterarum studia populum vocauit gymnasio condito: tamen ad Constantinum Imp. vsque nullum habemus probabilem historiarum auctorem. Et illi ipsi, quos Constantinus Imp ad conscribendam rerum memoriam induxit, quos comiter adiuuit, adeo infantes fuerunt, vt me eorum saepe suppudeat. Praeterea vero etiam conqueruntur, multarum et maximarum obliuione illa ante sese tempora laborare (*k*). Itaque ab A. C. 805. in quo Theophanes Byzantius desiit, ad exitum Romani Porphyrogennetae et A. C. 963. nihil est in Byzantiis historiis, nisi Σκυθῶν ἐϱημία, raris rerum memoriis, quasi tuguriolis inculta. Pauca sunt scriptorum nomina: si inter sese contendas, vix paucos inuenies exstitisse scriptores, sane ignauos, e quibus ceteri emendicati sunt non modo res, sed etiam verba. A Romani Porphyrogennetae temporibus iam paullulum se attollit Georgius Cedrenus: secundum eum scriptores sic satis boni. Quae cum ita sint, potuit etiam ante Michaelem Imp. nomen Russicum, quemadmodum fuit, ita Constantinopoli non ignorari, tamen deinde per scriptorum desidiam negligi et exstingui.

Nolim autem quisquam arbitretur, me deinceps illorum opinioni patrocinari, qui Russicum nomen in vetustis Romanorum sciptoribus requirunt. Video nonnullis,

(*k*) Continuator Theophanis p. 193.

lis, quorum ab commemoratione abſtineo (*l*), in mentem veniſſe *Rutenos* in Gallia, iam ſub C. Iulii Caeſaris expeditionem, maximam ſuam partem in prouincia Romana, de quibus et Lucanus:

Soluuntur flaui longa ſtatione Ruteni.

Hos, inquam, nonnulli ad Ruſſos referunt. Credo equidem, Saxonem Grammaticum et reliquos iſtarum aetatum cum *Rutenos* dicerent Ruſſos, iſtum Gallicum populum recordatos fuiſſe, vt tum eruditionis perexiguae inanis eſſe ſolebat oſtentatio. Duo interpretes Latini in Marco Paulo Veneto, ille Mulleri *Ruchenos*, alter Franciſcus Pepuris de Bononia Dominicanus *Ruthenos* ediderunt, quamquam ſic etiam Mullerianum interpretem ſcripſiſſe puto, litteras autem, vt in Manuſc. ſaepe accidit, confuſas eſſe. Apponam e Franciſci Pepuris interpretatione locum, quando Mulleriana omnium in manibus eſt (*m*): *Ruthenorum prouincia maxima ad polum ſita eſt: huius terrae populi chriſtiani ſunt et ſeruant in eccleſiaſticis officiis ritum Graecorum: omnes ſunt albi et pulchri valde, flauos capillos habentes: tributarii ſunt regis Tatarorum, cuius ad orientalem plagam affines ſunt: de pellibus ermellinorum, ſabellinorum, vulpium et herculinorum et variorum copia ibi maxima eſt: multae ſunt argenti minerae: eſt autem regio frigida ſupra modum et vsque ad mare oceanum protenditur: in mari illo inſulae quaedam ſunt, in quibus naſcuntur et capiuntur girfalchi et herodii ſeu falcones peregrini in copia magna, qui plurimum ad regiones diuerſas et prouincias deferuntur.* Sed haec talia ſimulac commemorata

(l) V. Ioannem Cluuerum. (m) l. III, c. L.

morata ſunt, omnium faſtidio refelluntur. Graecorum eſt nemo, qui Ruthenos dixerit, quod argumento eſt, ab exemplo populi Gallici nomen duxiſſe, aut ex C. Caeſaris commentariis aut e Plinio. Patiar equidem Ruſſos bono vocabulo Ruthenos dici: vtar ipſe peruulgato iam nomine: at ſtirpes gentis Aquitanicae atque Ruſſicae memoriasque confundi non patiar.

Quas igitur origines gentis Ruſſicae aut alii ediderint, aut nos conſtituere vero quam ſimillimas poſſimus, conſiderandum duco. Primum illi, qui Ruſſos etiam Moſcouitas dixerunt, *Moſchum* Sidonium philoſophum eorum in memorias inuexere.

Bacchum in remotis carmina rupibus
Vidi docentem, credite poſteri:
Nymphasque diſcentes et aures
Capripedum Satyrorum acutas.

Neque enim alius deus talem mentem indere alicui potuit, vt ſic caeſpitaret. Iam quid dicam illum Annii Viterbienſis Beroſum, quoniam is quoque producitur, cui a Saturno Babyloniae rege Moſcum et Magogum viſum eſt repetere, qui colonias deducerent? Quaſi hoc propudium nondum iam ſatis ſit exploſum. At rurſum alii Herodoti, Xenophontis, Strabonis *Moſynaecos* et *Moſchos* patremque *Meſechum* ex ſanctiſſima Moſis Geneſi recordantur, vt Ruſſicas inueniant origines. Quae opinio duorum fere ſeculorum eſt, vt eam a Polonis etiam receperit auctor Synopſeos ſiue Hiſtoriae Ruthenicae, quae Slauonico ſermone ante multos annos Kiouiae eſt edita.

Illo

Illo in errore Samuelem quoque Bochartum fuiſſe inuenio, maximi virum ingenii. Et quoniam ab Ezechiele Propheta (n) גוג נשיא ראש משך ותבל *Gog princeps Roſch Meſech et Thubal*, eo quibusdam *Roſch* ſunt Ruſſi, *Meſech* Moſi, et *Thubal* Toboſcenſces. Equidem video Ezechielem dicere principem *Roſch*, ſiue Araxis et *Meſech* ſiue Moſynaecorum et Moſcorum in Caucaſo: ſint deinde *Thubal* Tibareni, quid igitur deinde illi ad Ruſſos hos noſtros? veluti Ezechielis aetate haud alia regionum ſupra Caucaſum facies fuerit, quam quae nunc eſt. Quae autem tum fere fuerit, e Scythicis noſtris intelligi poteſt, quando Ezechielis dicta nulli tempori aut caſui potius conueniunt, quam Scytharum irruptioni in Aſiam ſuperiorem et Palaeſtinam, tum eorundem diuturno imperio et cladi. At concedunt nobis, multo etiam poſt tum Moſchos tum Tibarenos intra Caucaſum ſe continuiſſe, inde tandem digreſſos aiunt condidiſſe Moſcicum imperium et Thubalenſe ad Thobolem fluuium. Si cui haec placent adeo, non intercedo quin ſua opinione gaudeat et delectetur: modo mihi quoque, vt non lubet his animum aduertere, ita etiam liceat. Dicam, quemadmodum illum in errorem inciderint. Satis diu tenuit ridiculus error, vt Ruſſi dicerentur a Moſcua metropoli, *Moſcouitae* et *Moſcouii*, quod Polonis maxime debuit Europa, et quoniam *Moſci* intra Caucaſum apud veteres ſcriptores exſtabant, eo nomen videlicet vetus, viſum eſt elegantius. Iam erat aditus ille patefactus ad regnum coniecturarum. Neque tamen vel a Graecis vel vetuſtis ſcripto-

(n) c. XXXIIX 2. c. XXXIX. v. 1. Confer Henrici Brenneri notas in Moſem Chorenenſem p. 57. 77.

ſcriptoribus, apud quos perfrequens eſt Ruſſorum memoria, Moſcicum et Moſcouiticum nomen occurrit: nimirum non ante illud tempus, cum Moſcua a Georgio Vladimiri filio Longimano circiter A. C. 1149. condita eſt, et ſerius etiam, donec confirmato magno Moſcouiae ducatu, attollere ſeſe vires Ruſſicae coeperunt. Moſcua autem non a fluuio, (fuit enim fluuio vetus nomen *Smorodinae*) ſed a veteri monaſterio *Moskoi* nomen habuit. *Moskoi* a *Mus* et *Muſik*, *viro*, quaſi *virorum ſedem dicas* (*o*). Quare haud rectius Moſcos dixeris gentem Ruſſicam, quam ſi ego Francos dicam Pariſios, Polonos vero Varſauienſes et Hiſpanorum regem, Carpetanorum. Satius fuerit, iſta aliquando relinquere: nam populo Ruſſico adeo ignotum eſt Moſcouiticum hoc tamquam vniuerſae gentis nomen, adeo ridiculum, ſi explices, vt nihil ſupra.

Iam deinde Graeci Ruſſos ab Scythica ſtirpe repetunt. Terentianus Pamphilus, cui vxor ducenda erat inuito,

niſi ſi id eſt, quod ſuſpicor:
Aliquid monſtri alunt: ea quoniam nemini obtrudi poteſt,
Itur ad me.

Nam quid ego nunc dicam de Scythis? quidquid obſcurae originis eſt et peruetuſtae, vix deliberandi amplius atque conſiderandi ſpatio relicto, deſpondetur Scythis. Continuator Theophanis Byzantii (*p*) οἱ Ρῶς ἔθνος Σκυθικὸν ἀνήμερον καὶ ἄγροικον. Cedrenus (*q*) et Zonaras (*r*): ἔθνος

(*o*) Henricus Brennerus notis in Seriem principum Iberiae p. 86.
(*p*) p. 121. (*q*) p. 551. (*r*) T. II. p. 162.

ἔθνος ὁι Ρῶς Σκυθικὸν περὶ τὸν ἀρκῷον Ταῦρον, ἀνήμερον καὶ ἄγροικον." *Ros gens Scythica ad arctoum Taurum.* Sic Michael Glycas (*s*): ὁι Σκύθαι, τοῦτ' ἔστιν ὁι Ρωσόι. Ioannes Cinnamus (*t*): Ταυροσκυθῶν καὶ Ταυροσκυθικῆς appellationibus delectatur et addit vno loco: ἔστι δ' εν Ταυροσκυθικῆς πόλι, ὄνομα Κιαμα, lege Κιαυα seu Κιαβα, ita enim puto Cinnamum scripsisse. Nassir Eddin كويابه مدينه روس *Cuiabah metropolis Russiae.* Et corruptius Vlugbegus chan non modo in Ioannis Grauii editione, sed etiam vt eum Ioannes Hudson recudit كويا *Cuia.* Non enim Cuiauiam in Polonia dicunt, sed Kiouiam in Russia. Nicetas Choniata (*u*): ἔστι δὲ Γάλιτζα μία των παρὰ τοῖς Ρῶς τοπαρχιῶν οὓς καὶ Σκύθας Υπερβορέους Φασὶν, *Galitza vna est prouinciarum Russorum, quos etiam Scythas Hyperboreos dicunt.* Nicetas Paphlago in vita Ignatii Patriarchae (*x*) τὸ μιαιφονώτατον τῶν Σκυθῶν ἔθνος ὁι λεγόμενοι Ρῶς, *crudelissimus et sanguinolentus Scytharum populus, quem Ros dicunt.* Sic illi fere, credo, vt ne quid puritati sermonis Graeci deteretur. Nam istis temporibus, quibus Cinnamus, Nicetas Choniata et Paphlago fuere, cum vera eloquentiae dignitas et castitas sermonis dudum esset exstincta, quidam inepte seduli satisfacere huic rei visi sunt, si a veris gentium, vt tum erant, nominibus, veluti scaeuis refugerent, prisca autem nomina e vetustis scriptoribus adoptarent. Ergo cum Herodotus, cum ceteri istis in regionibus ad septemtrionem prodidissent Scythas, eo in nomine Graeculi sese iactabant,

(*s*) p. 319. (*t*) p. 136. 137. 127. (*u*) T. V. Concil. Hard. p. 964.

et tum mirifice ſperabant ſe eſſe locutos, cum, quantum poterant,

dicebant *Scythas*. At Scythae illis et Cimmerii et Hunni et Auares, Slaui, Getae, Chazari, Pazinacitae, Vzi, Germani et qui non? Anaſtaſius Sinaita: Σκυθιαν δ'εἰώθασι καλεῖν οἱ παλαιοὶ τὸ κλίμα ἅπαν βόρειον ἔνθα εἰσὶν οἱ Γότθοι καὶ Δάνεις, *Scythiam ſolebant veteres vocare clima totum ſeptemtrionale, vbi ſunt Gothi et Dani.* Si humani generis iſthoc nomen eſt, patiamur Scythas dici etiam Ruſſos: ſin mediocris populus fuere Scythae, pudor ſit nobis, tot populos tam diuerſos tota fere natura, ad eandem ſtirpem referri. Sed ſatis iam de hoc errore in Scythicis diximus. Cur autem Ruſſi Tauroſcythae? Tauros Herodotus a Scythis diſtinxit, vetuſtiores videlicet illa in cherrhoneſo, forte Cimmerii generis. At tandem Scythas illa in Taurica coluiſſe oſtendit Herodotus: quare Tauroſcythas dixere Graeculi Scythas in cherrhoneſo et Σκυθοταύρους, vt Arrianus in periplo Ponti Euxini (*y*). Neque tamen hic conſtitit vagus error, ſed inde tantummodo profectus, toto Septemtrione peregrinatus eſt. Nam Taurum montem aliquem deinde eſſe ſub boream credidere, decepti ſimilitudine vocum, Tauri, qui mons in Aſia eſt et Tauricae gentis, veluti quae in Tauro colat. Euſtathius Theſſalonicenſis (*z*) huiusce Arctoi montis mentionem ſibi viſus eſt apud Herodotum reperiſſe. Nam cum dixiſſet, a Tauro in Aſia diuerſum eſſe. Taurum borealem, οἱ δ'ἐνταῦθα, inquit, Σκύθαι Ταυροσκύθαι λέγονται ἀπὸ τοῦ ἐκεῖ Ταύρου ὄρους, ὅπερ οἶδε

(*y*) p. 20. (*z*) In Dionyſium v. 168.

εἶδε καὶ Ηρόδοτος ἱστορῶν καὶ αὐτὸς ὄρη Ταυρικά, Σκυθικά, *Scythae, qui isthic colunt Tauroscythae dicuntur, a Tauro monte, qui isthic est, quem etiam cognouit Herodotus, recensens et ipse montes Tauricos siue Scythicos.* Vide quantum *Graecia mendax ausa sit* in Geographia. Herodotus cum saepe atque multum tradidisset, Scythiam omnem campestrem esse, ostendit etiam longius a Volga famam montium septemtrionalium remoueri. Montes dicit prope Siberiam nullo nomine, quos Riphaeos postea appellarunt Graeci, nunc dicunt Vergaturios. Nihilo minus Taurum montem quasi Herodoto auctore in Scythiam transtulerunt: vt ille Dionysius Eustathii, qui Cimmerios canit ὑπὸ ψυχρῷ ποδὶ Ταύρου. Vbi ille error in situ deprehensus est, alii Taurum illum suum nulla opera, sine machinis et ferramentis remouerunt versus boream, vsque ad fontes Borysthenis: nam isthic Claudius Ptolemaeus Alanicos montes nobis pinxit. Neque Carpathici montes caruere fama et nomine Tauri: ac ne Alpes quidem, quod illis in montibus Polybius Ταυρίνους seu Ταυρίσκους, ita diuersis locis vocat (*a*), collocauit. Quare Constantinus Manasses (*b*) multum sese iactat in Tauroscythis, qui Heraclio Imp. Constantinopolin cum classe τῶν μονοξύλων obsederint. At Theophanes Byzantius (*c*) nos docet, Auares fuisse, et secundo Danubio classem illam deuectam venisse contra Byzantium. Habes Manassis Taurum in Carpathicis montibus. Hi qui Russos quoque Tauroscythas dixere, ne venustulum nomen intermoreretur, cum natura montes ad Borysthenem extulit nullos,

(*a*) p. 294. 144. 161. (*b*) p. 76. 77. (*c*) p. 264.

nullos, ipſi ageſſerunt cum ingenio ſuo, tum aliorum fide. Quare homines vanos et temerarios relinquamus.

Nouam opinionem Incertus auctor in vita Romani Lacapeni (*d*) protulit, Ruſſos ab ſtirpe eſſe Francos: οἱ Ρῶς, οἱ κ̀ Δρομῖται λεγόμενοι, οἱ ἐκ γένȣς τῶν Φράγγων καθιςάνλαι, *Ruſſi etiam Dromitae dicti, qui e Francorum orti ſunt genere.* Anſelmus Bandurius in Imperio Orientali (*e*) fragmentum Symeonis Logothetae protulit: Ρῶς δὲ οἱ κ̀ Δρομῖται Φερώνυμον ἀπὸ Ρῶς τινος σφοδρȣ̃ διέδραμεν ἀπηχήμαλος τῶν χρησαμένων ἐξ ὑποθήκης ἢ θεοκλυτίας τινος κ̀ ὑπερεχόνlων αὐlȣ̀ς ἐπικέκληνlαι, Δρομῖται δὲ ἀπὸ τȣ̃ ὀξέως τρέχειν αὐlοῖς περιεγένετο. ἐκ γένȣς δὲ Φράγγων καθίςανlαι. Illud ipſum in Symeone Combeſiſii exſtat (*f*) eo loco, vbi multa de gentibus et vrbibus, vnde nomina duxerint, pleraque ieiuna et inepta. Perperam Combeſiſius interpretatus eſt: *Ruſſi, (qui et congruo rei nomine Dromitae nuncupantur) a Ros quodam viro forti, cum ſiue monitu ac conſilio, ſiue diuino quodam afflatu et oraculo pro poteſtate illis vtentium eisque ſuperiorum iniurias noxamque euaſiſſent, dicti ſunt: Dromitae vero vt appellarentur, curſus celeritas cauſſam dedit: genus autem ex Francis ducunt.* Siue Φερώνυμοι ſcripſerit Logotheta, vt Combeſiſii codex habuit, ſiue vt Bandurii Φερώνυμον perinde eſt: his enim modis Scholiaſtae loquuntur, cum vocem ab ſono aliquo, ſeu quo alio caſu deductam *nomen ſuum inde ferre* dicunt, praeſertim cum dicunt ὀνομάζεσθαι παρὰ τὴν τȣ̃ ἤχȣ ἰδιότηλα καλὰ μίμησιν τῆς Φωνῆς. Cum

(*d*) p. 262. (*e*) T. II. p. 33. (*f*) p. 465.

Cum autem ille Φερώνυμοι posuerat, recte subiicit, διαδραμόντες, vt alter Φερώνυμον διέδραμε. At ἀποχήματα Combefisii pro Banduriani codices ἀπηχήματος nihili est. Et cum Combefisius conuertit, *a viro quodam forti Ros*, hoc eum fefellit, quod Ρῶς τινος scriptum est, tamquam *Rossi cuiusdam*. Hic vero mos grammaticorum est, vt isthuc τινὸς post vocem, a qua alteram deriuant, praesertim barbaram, obsoletam, fictam, ponant. Vt cum Scholiasta Theocriti, sic ait (*g*): ἡ κῦρος οἱονεὶ χώρη τις οὖσα, ἀπὸ τοῦ δι' αὐτῆς χεῖσθαι et alibi (*h*) κισσύβιον ποτήριον, παρὰ τὸ χεῖσθαι ἐν αὐτῷ τὸ πίνειν χυσσίπιόν τι ὄν. Sic alii (*i*) κόβαλος, ὀληςὴς, ἀπὸ κόπιδος κοπίβαλός τις ὤν, aut Φιάλη κατὰ μετάθεσιν τοῦ π εἰς Φ πιάλη τις ὤν aut βάρβιτος εἴρηται, οἱονεὶ βαρύμιτός τις ὤν, ὁ βαρεῖαν τὴν Φωνὴν ἀφιείς. In his τὸ τινὸς καὶ τις παρελκόντως κεῖσθαι videtur, cum Latine vertas: Graece tamen et necessarium est et elegans. Cum econtrario ab obscuri hominis nomine vocem ortam obseruant Critici Graeci, tum sic potius efferunt, vt Scholiasta Theocriti, τὸ Λακίνιον ἀκρωτήριον, ἀπὸ τινὸς Λακίνου Κορκυραίου (Philo p. 747. ὡσανεὶ δεχάδα οὖσαν V. quomodo Plato). Iam locum Symeonis Magistri, ipsius vt puto auctoris culpa confusum, sic restitui posse video. Ρῶς οἱ καὶ Δρομίται, Φερώνυμοι, ἀπὸ ῥῶς τινος σφοδροῦ ἀπηχήματος, τῶν χρησαμένων ἐξ ὑποθήκης ἢ θεοκλυτίας τινὸς καθ' ὑπερεχόντων αὐτοὺς, ἐπικέκληνται *Rossi (iidem qui Dromitae) vocabulo dicti sunt, quod ortum habet a Ros, id est, graui et vehementi sono, quem siue ex condicto, siue*

 iussu

(*g*) Id A 47. (*h*) Id. A. v. 27. (*i*) Etymologus magnus passim.

iuſſu aliquo deorum edunt contra hoſtem, cum ſuperior bello eſt. Διέδραμεν aut διαδραμόντες obrepſit Logothetae, cum forte apud alium ante ſe ſic legerit: Ρῶς Φερώνυμον ἀπὸ σφοδροῦ διέδραμεν ἀπηχήματος, ex quo cum faceret adiectis ceteris Φερώνυμοι διαδραμόντες multo magis ſenſum obſcurauit otioſa voce. Cetera deinde, Δρομῖται δ' ἀπὸ τοῦ ὀξέως τρέχειν αὐτοῖς προσεγένετο, malo, vt Combefiſius, quam vt Bandurius περιεγένετο, *Dromitarum nomen illis tributum a celeri curſu.* Cetera Combefiſius recte. Credidi initio, Graecos, cum adſueuiſſent Ruſſos dicere Tauroſcythas, Taurinos autem Polybii recordarentur, eo ipſos tamquam ab Alpibus profectos dixiſſe Francos. Sed alia cauſſa eſt, et dicam tribus verbis, geographiae ſumma inſcientia. Nam Franciam Graeci vocabant magnam Europae partem, praecipue eam, in qua Germanicae vſus linguae fuit. Iam cum domus regia Ruſſorum a Normannis fuit, Varagi autem multi, quos Scandinauos, Normannos, Danos, fuiſſe demonſtrauimus, in officiis palatinis exercituque Ruſſorum verſarentur, magna deinde alia multitudo Scandinaua Slauis permiſta, quorum lingua a Francica non admodum abhorrebat, eo Conſtantinopolitani Ruſſos dixere ortos a Francis, hoc eſt a Scandinauis.

Haec res propius attingit Ruſſorum origines, quales ab omnium rationum rerumque veterum conſideratione informatas animo habeo. Dixi alio loco, mihi videri ante Slauos has terras ſub ſeptemtrione incultas fuiſſe a Fennici corporis gentibus: cauſſas illo ipſo in loco edidi. Neque tamen nego inter Fennos coluiſſe Gothos. Nam

cum

cum Getae principio cum Thracibus eodem corpore ſupra Macedoniam ad Iſtrum vsque egerunt, vicini ad occaſum ceteris Germanicis populis, inde iam eos ſub aetatem Auguſti Caeſaris, et paullo ante eum, traiecto Iſtro Boryſthenem petiiſſe alibi demonſtraui. Sequuntur deinde tempora, cum ad Volgam vsque latiſſimis ſpatiis regnarunt, donec, quod in primis accurate ex Ammiano Marcellino tenemus, ab Hunnis pulſi ſunt. Scio magnam eorum partem in Germaniam, Galliam, Italiam, atque Hiſpaniam, ſeſe effudiſſe: tamen haud paruam eorum manum puto magis ad boream et ipſam in Scandinauiam conceſſiſſe. Non eſt huiusce loci, vt id exequar, dabitur iſti argumento et tempus aliud et maior oportunitas dicendi. Tantum enim abeſt, vt veteres Scandinauiae auctores, qui Iornandem nondum viderant, Scandinauiam vaginam gentium prodant, e qua Gothi tota Europa illuſtres exierint, vt potius iidem illi ſuas incolas non aborigines edant, verum aduentitios, qui alios ſedibus expulerint, vtque Gothicum nomen in Scandinauia ſerius ortum referant, quam fuit illis Gothicis temporibus. Poſt iſta tempora Slaui caput extulerunt. At illi magis auſtrales tractus tenuere, donec eodem, quo Getae iure, regiones inuaſerunt ſub borea. Ita ſuperiores ſeu boreales Slaui, tum Geticis reliquiis, tum Fennis permiſti, et reges ſibi impoſuerunt e Getico corpore, et ab hoc diſperſione nomen Roſſicum. Iſti diſperſi Slaui et quaſi ſati, coniuncti cum ceteris gentibus vnum in corpus atque vno ſub rege, magnas res geſſerunt, ceterisque Slauis ſub iugum miſſis, Boryſthenis maximam tenuere partem, ipſa cum Kiouia. Cum autem Slaui a Geticis ciuibus, quorum

rum ab ſtirpe reges erant, diſſentirent, rege pulſo, Nouogrodienſes faſces contulerunt in Goſtomyslum, quod quidem ita teſtantur Ruſſica monumenta, virum Slauici generis, vt vel nomen indicio eſt; alii Ruſſi alios in principes. Illo autem ipſo Goſtomyslo auctore, multis inteſtinis diſſidiis et tumultibus fracti, ex eius regis, quem pepulerant, domo haeredem Ruricum, circiter A. C. 862. reuocarunt Nouogrodienſes. Rurici filio Igori Oleg tutor fuit: is Kiouiam, interim ab Oſcoldo et Diro, Scandinauici generis principibus, regno Roſſico ſuperioribus rerum conuerſionibus abreptam, eo maxime nomine vindicauit, quod ad iuſtum dominum rediret. Inde iam recuperata ſunt cetera, quae antea Ruſſici et nominis fuere et regni.

Iſta rerum momenta coniunctim poſui, vt ſumma mearum cogitationum vno ambitu ſpectaretur. Quaedam ſunt quae laborioſas demonſtrationes requirunt et alteri magis loco aptas, quare mihi interim concedi tamquam hypotheſes velim, quoniam confici tam celeriter non poſſunt. Ante Ruricum reges Ruſſiae fuiſſe ex Skioldungorum illuſtriſſima domo et alios, tum Snorro Sturlaeus nos docet, tum aliae ſagae Septemtrionales. Et Ruſſicum nomen fuiſſe Rurico antiquius ex eo colligo, quod, cum A. 864. 865. Kiouienſes, qui tum ſub Rurico non erant, Conſtantinopolitanam expeditionem ſuſciperent, iam ita peruulgatum nomen fuit, vt Conſtantinopoli haud aliter, quam Ruſſi dicerentur. Teſtem vide coaeuum Nicetam Paphlagonem, ne forte exiſtimes, ceteros, qui ſerius prodiderunt, recentiori nomine abuſos. Teſtem deinde habes Photium Patriarcham in epiſtola encyclica, quo

quo quis poteſt eſſe maior. Et cum Photius commemorata expeditione illa ſic ait: *Ruſſi, qui infinitos populos ſibi ſubiecerunt, et propterea multum elati aduerſus Romanum imperium manus iniecerunt.* Res tantae geri non potuerunt tanta cum fama gloriae, niſi multo tempore. Immo locum producam ex Annalibus Francicis Bertinianis, dignum vt aureis in tabulis figatur, non modo vt hac ponamus integrum. Hic anonymus (*k*) ad A. C. 839. Theophilo Michaelis patre Imperatore Conſtantinopolitano. *Miſit etiam* Theophilus Imp. *cum eis* (legatis ad Ludouicum Pium Imp.) *quosdam, qui ſe, id eſt gentem ſuam, Rhos vocari dicebant: quos rex illorum, Chacanus vocabulo, ad ſe amicitiae, ſicut aſſerebant, cauſſa direxerat: petens per memoratam epiſtolam, quatenus benignitate Imperatoris redeundi facultatem atque auxilium per imperium ſuum totum habere poſſent: quoniam itinera, per quae ad eum Conſtantinopolin venerant, inter barbaras et nimiae feritatis gentes immaniſſimas habuerant, quibus eos, ne forte periculum inciderent, redire noluit: quorum aduentus cauſſam Imperator diligentius inueſtigans, comperit, eos gentis eſſe Sueonum, exploratores potius regni illius noſtrique, quam amicitiae petitores ratus, penes ſe eousque retinendos iudicauit, quoad veraciter inueniri poſſet, vtrum fideliter eo nec ne peruenerint: idque Theophilo per memoratos legatos ſuos atque epiſtolam intimare non diſtulit, et quod illius amore libenter ſuſceperit, ac, ſi fideles inuenirentur, et facultas abſque illorum periculo in patriam remeandi daretur, cum auxilio remittendos: ſin alias, vna cum miſſis noſtris ad eius praeſentiam dirigendos, vt,*

 quid

(*k*) Apud Ducheſnium Tom. III. p. 195 b.

quid de talibus fieri deberet, ipse decernendo efficeret. Quid iis factum sit, in Annalibus Bertinianis non inuenio. Habes Rossicum nomen A. C. 839. annis XXIII. ante Ruricum. Habes regem Russorum tantae maiestatis, vt se خاقان *Chakan*, more Chazarorum et Turcarum dixerit: quod nomen omni in oriente tantum fuit, quantum Constantinopoli Βασιλέως aut Romae Imperatoris et Augusti, aut Regis regum et Regis magni in Persis atque Parthis. Habes denique testimonium luculentum, reges ab iis ipsis Varagis seu Scandinauis fuisse, e quibus postea fuit Ruricus. Neque iam mirum est, cum Lithuani Russiam *Guday* Russos *Gudas* vocant, scilicet e veteri memoria *Gothiam* et *Gothos*: neque deinde etiam, quod Fenni Suedos (*l*) appellant *Rossalain*, siue *Ros populum* (*alain* enim populum significat) nimirum cum et illi Russorum vetus in se imperium, reges autem generis Scandinauici recordantur. Et cum apud Constantinum Porphyrogennetam Rossica cataractarum nomina a Slauonicis differunt, Slauonica quidem nunc vulgo etiam cognoscuntur, Rossica seu superiorum ad Nouogrodium populorum vocabula Scandinauica magis sunt. Ex quo intelligas, etiam linguae Scandinauicae seu Gothicae veteris aliquem vsum his in regionibus fuisse. Quare cum Septemtrionalium scriptorum, qui quidem veteres sunt neque Olao Magno, aut Rudbequio et Peringskioldo et Saxoni illi Grammatico similes, illorum igitur scriptorum fides his praeiudiciis firmata est, vtar eorum auctoritate alio loco, vt ostendam hanc Augustam Russiae domum vltra

(*l*) V. hoc loco sententiam Henrici Brenneri in notis p. 87. et expende.

vltra Ruricum Skioldungis inſeri et genealogiam probabilem produci vsque ad Chriſtum natum.

Dixi ſupra, Slauos paullatim Septemtrioni ſuccedentes, quod non contiguis regionum tractibus, ſed diſperſi inter alios populos ſedes fixerant, eo dictos fuiſſe Ruſſos. Luithprandus Ticinenſis *παρὰ τὸ ῥούσιον*, vt audiuerat Conſtantinopoli Graecos dicentes *rubrum colorem*, Ruſſos appellatos credidit. Viſum item eſt Graecis quibusdam, qui vbi peregrina vocabula audiebant, confeſtim grammatico ſupercilio e ſuo ſermone aliquid commentabantur ſimile, vnde eſſent ducta. Pari iure ab *equis* dictos putares. Ionas Rugman in Monoſyllabis Islandicis: *Hroſſ*, *equus*. Sic populi quoque Teutonici. At cum et Slaui et Ruſſi ipſi appellatione illa ſunt vſi, non ſane fuit adſcititia a Graecis, quos nondum adierant, cum iam Roſſicum nomen exſtaret: neque vel ipſi Scandinaui vel Ruſſi admodum equeſtri gloria ſeſe iactarunt maior pedeſtris fuit et naualis denique, vt dicam poſtea, adeo non a Scandinauis datum eſt Roſſis nomen, vt etiam diu in Scandinauia ignoratum fuerit. Quare mihi ille Slauonicorum quorundam Scriptorum conſenſus placet, qui a разсѣянїе *Raſſianie* ſeu *diſperſione* et разсѣя *Rasſeia diſperſit*, pro quo *Roſeia* vulgo, nomen hoc deriuant, tamquam *ſparſos et ſatos* dicas Haec mihi potior ſententia nunc videtur, quam quae olim in mentem venit, quae etiam Synopſis auctori fuiſſe videtur, a *Rha* ſeu *Rhos* flumine, Herodoti *Araxe* noſtro Volga nomen accepiſſe. Neceſſe autem eſt, vt primum quot modis Ruſſicum nomen a vetuſtis ſcriptoribus efferatur, explicemus.

mus. Nihil dicam de *Ruthenico* nomine, quod per errorem ab Aquitanico eſt tractum: a Graecis Ruſſi, plerumque οἱ Ρῶς, vt ab Annalium Bertinianorum auctore *Rhos* nonnumquam οἱ Ρωσοὶ appellantur. A Latine commentantibus vario modo. Lambertus Schafnaburgenſis aliique, quod in Germania *Ruſſen* pronunciari audiuerant, ſcripſere *Ruzenos Ruſciam* et *Ruſcos* (*m*) *Ruſſos*, *Ruzzios*, *Ruſſiam*, *Rutziam* (*n*), alii magis corrupte *Ruciam* et *Rutiam* (*o*) ediderunt. Corruptiſſime ad Italicam pronunciationem, qui *Rugiam* et *Rugios* et deinde *Rugos* (*p*). Niſi hoc potius factum ob memoriam Rugiorum, qui in exercitu Attilae fuerunt,

ſubito cum rupta tumultu
Barbaries, totas in te transfuderat arctos
Gallia: pugnacem Rugum comitante Gelono.

vt Sidonius Apollinaris cecinit (*q*). Res in primis notae ex Iornande, cuius hoc in loco quaedam Priſci Panitae reliquiae ab eruditis magni fieri ſolent. Ex eodem Iornande et Paulli Diaconi Longobardicis Excerptisque auctoris ignoti Valeſianis, quicquid id eſt, de Odoacro et Rugiorum rebus ſcimus. Non dico fuiſſe Ruſſos, neque enim demonſtrari poteſt, tamen illorum nomen cum Ruſſico confuſum eſt ſoni congruentia. Ioannes Peringskioldus ad vitam Theodorici regis omnia permiſcuit (*r*): *His tem-*

(*m*) Lambertus p. 156. 157. Annaliſta Saxo p. 265. Annales Hildeshemenſes in Scriptoribus Brunsuicenſibus T. I p. 718 Quedlimburgenſe chronicon ibidem T. II. p. 280. Saxo Chronologus p. 177 (*n*) Liuthprandus l. c. Adamus Bremenſis H. E. p. 58. Chronica Slauica Lindebrogii p. 189. ed. Fabr. (*o*) Hermannus Cornerus p. 482. (*p*) Eggehardus Vragienſis p. 300. Chronographus Saxo p. 169. Vita S. Adalberti in Mabillonii Actis Benedictinis Sec. V. p. 576. (*q*) Panegyrico in Auitum v. 319. (*r*) p. 419.

temporibus, inquit, *Odoacar natione Rugius, siue Saxo Teutonicus (aliis dicitur Russus vel Slauus a lingua Slaua, qua eo tempore vtebantur ad littora maris Balthici) multitudine armatus Turcilingorum, Herulorum, Sueticorum quoque, siue, quos nunc Suedos ab insula nuncupamus, ab extremis fere Saxoniae finibus venit in Galliam.* Nimirum Trithemius Abbas Viro summo imposuit, cum crederet, Rugiam insulam Pomeraniae praetentam, priscam Rugorum Odoacri sedem fuisse: inde cum aliquando Slaui Pomeraniam et Rugiam tenuere, Peringskioldus, modo Saxonas, modo Slauos et Russos fuisse credidit. Et quod Suedos huic memoriae inscrit, id a Sueuorum illis in bellis mentione tractum. At Rugiorum, qui cum Attila et Odoacro fuere, priscas sedes ad Pontum Euxinum et Danubium nobis monstrauit Ioannes Iacobus Mascouius V. C. in Historia Germanorum, elegantissimo opere, vt ad confutandum Trithemii opinionem nostra sedulitate nemo indigeat. Russos, vt ad eos reuertar, tandem Germani superiores dixere *Reussen* seu *Reusen*, dialecto suae indulgentes, vt ille qui Ernesti Ducis Bauariae historiam commentus est. Scandinaui prisci diu ab hoc Russorum nomine abstinuerunt. Nam tametsi Saxo Grammaticus multus est in Russorum memoria et Rutenorum, tamen quantum sibi indulserit, ex Snorrone Sturlaeo apparet. Quid Saxonem fefellerit, alias dicam. Peringskioldus (*s*) e codice Msc. de primis Christianae religionis incrementis in Gothlandia, testimonium produxit, multos e Gothia petiisse Palaestinam *um Ryzaland oc Grickland*, *circum Russiam et Graeciam.* Sed recen-

(*s*) l. c. p.

recentior hic ſcriptor eſt, vetuſtiſſimus quisque nomen ignorauit, et vel *Gardarikiam* dixit, vel *Holmgardiam*, vel *Oſtrogardiam* et *Auſturland.* Hungari Ruſſos et *Franciai nepec Francicum genus* appellant, et *Oroſzoc nepec*, *Oroſſicum populum.* Georgianis *Ruſſet* Ruſſia, vt *Franket* Francia, quod nos Henricus Brennerus amicus noſter, qui inter eos egit, docuit. Turcae et Tartari, vt Abulgaſi Bahadur chan Ruſſiam appellant اوروس واروس *V-rus* et *Orus* ὀξυτόνως et روس *Rus*, quod Arabibus notius eſt, Ruſſum autem روس الاصل *Rus alazel* aut etiam صقالبة *Zkalbat* et numero multitudinis صقلاب *Siklab* ſeu Slauos. Mungali, Calmucci, plerique ad orientem populi *Orus* dicunt. In diplomate quodam foederis inter Ruſſos

et Sinos *Orus i Zachan Kan*, *Ruſſorum Albus* *Chan.* Poloni Ruſſiam vocant *Rus kray* ſeu*Rus regio* *nem* et Ruſſum *Ruſſin.* Ruſſi ipſi ho- die Руская Земля *Ruskaia ſemla* Ruſſiam voci- tant, et Rus ſum рўской *Ruskoi*, русакъ *Ruſak*, quod non in vſu elegantium Ruſſos. рускїя *Ruskia* ſed manet adhuc vetuſtima vocis pronunciatio in Slauonica lin gua россїйскїй *Roſſiski* Roſſiacus et vel in titulis Auguſtae domus: Все россїйскїй et Все росїйс кая *totius Roſſiae.*

Itaque primum *Ros* deinde κατὰ διάλεκτον *Ras* et *Rus* dicti ſunt Slauoni. Vtrumque omnibus in dialectis Slauonicae linguae, praeſertim in compoſitis, *diuidendi*, *dirimendi*, *diſpergendi*, *diffluendi*, *ſpargendi*, *diſſeminandi* ſignificationem habent. Eadem in Prutenico et Lithuanico

nico ſermone ſemper fuit, vnde vetus Pruſſicum vocabulum *Ruſſen*, *diſperſio*. Neque aliud videtur fuiſſe iſthuc Ρῶς, quo Graeci teſtantur, Ruſſos in bello vſos, cum rem male geſtam inclinare ſentirent, quam vt ſe mutuo adhortati ſint, vt fuga ſeſe diſpergerent, e qua deinde ſe recipiebant priſco more in aciem. Procopius Caeſarienſis *t*) teſtatur: Slauos dictos fuiſſe Σπόρους. Graecum vocabulum ſi explices, nihil aliud eſt, quam ſi *diſperſos et diſſeminatos* dicas, quod Slauonice aliter non explicaueris, quam *Ruſſos*. Id iam monuit Stanislaus Sarnicius (*u*): *Sporos quidam Ruſſos, non inepte, id eſt diſperſos exponunt*.

Non aſſeuerate dixerim Roſſicum nomen iam ante Iuſtinianum Imp. vna et eadem in gente Slauonica permanſiſſe. Naſci et occidere potuit. Nam et *Raſchi*, qui nunc in Illyrico degunt, id nominis ab eadem cauſſa accepiſſe videntur, neque eos tamen idcirco cum his Ruſſis proximiori neceſſitudine deuinctos fuiſſe puto, quam quod et ipſi ab ſtirpe ſunt Slauoni. Multum vero noſtram de nomine Ruſſico ſententiam confirmat, quando Slauonico in populo exempla exſtare cernimus vocis in populorum et locorum appellationibus vſurpatae. Et haec ſunt multo etiam vetuſtiora. Vt mea fert opinio, hoc vocabulum *Rhos*, *Ros*, *Rus* a Slauis aut potius ab eorum maioribus Sarmatis etiam Volgae fluuio tributum eſt, quod ſeſe latius diſpergit multa in oſtia: vt in Pruſſia quoque alueus quidam Niemenis *Rus* appellatur. Volgae vetus nomen *Araxes* apud Herodotum, *Rha* Ptolemaei, non differt

(*t*) De B. G. p. 498. (*u*) Annalium Polonicorum L. IV. p. 1017.

differt a Slauonico *Ras*, *Ros* et *Rus*. Recordemur, nunc quoque ipſa in Ruſſia dialectos ita differre, vt, vbi alii quarta vocali vtuntur, iſthic iterum alii pronuncient primam. Sic nomen fluuii in Armenica, quem Araxem Graeci vocant, neque fuit aliud, neque nunc eſt, quam نهر روس *Nahar Rus* aut *Ros*, vnde Araxem fecere Graeci. Eledriſius poſtquam hunc Araxem deſcripſit, ſeptimam climatis partem ingreditur et de نهر روس *Nahr Ros* agit, cui nomen ſit اتل *Atel*, hoc eſt de Volga. Gabriel Sionita et Ioannes Heſronita dubitaſſe videntur, an fluuius *Roſſus*, tamquam ſuo nomine, an *fluuius Rusſiae*, regionis explicari debeat. Si vero Volgae nomen *Rus*, ſiue *Ras* e Slauonico, vt dixi, interpretemur, nihil aliud ſignificat, quam late patentem fluuium et in ramos diſperſum. Ad oſtia Volgae Sarmatici populi coluere, a quibus Slaui egreſſi ſunt: et coluere iam ante Herodotum, vt non abſurdum ſit, ab iis fluuio nomen fuiſſe inditum. Βορȣσκοι Claudii Ptolemai Порусъ *Porus*, ad *Ruſſum* fluuium. Et, vt paullulum excedam finibus, vox illa *Rus* ſeu *Ros*, in Ρωξανάκη, ἔνθα Σάκαις τὸ βασίλειον ἦν, *Roxanace regia Sacarum*, exſtare videtur. Nicolaus Damaſcenus in Excerptis Conſtantini Porphyrogennetae (*x*) tradit, poſt caedem Μαρμάρεω τȣ̃ Θρακω̃ν βασιλέως (vbi recte Henricus Valeſius emendat τω̃ν Σακω̃ν) reginam fuiſſe Ζαριναῖαν. Sunt haec ἐρωτικώτερα, quae de Zarinaea et Stryangaeo narrat et Cteſiae figmentis non diſſimilia, tamen et nomina me mouent et vicinitas Sacarum atque Sarmatarum, vt, ſi, quae Nicolaus Damaſcenus narrat, hiſtoriae finibus exigenda

(*x*) p. 437.

genda cenſeam, tamen nomina retineam, vt peruetuſta. Stephanus Byzantius, Ροξονοκάια πόλις, τὸ ἐθνικὸν Ροξονακαῖος, Ροξονοκαιάτης ϗ Ροξονακαιανὸς. Vidit iam Lucas Holſtenius, eam vrbem dicere Stephanum Byzantium, quam Nicolaus Damaſcenus celebrauit. Et Stephanus cum τὸ ἐθνικὸν huius vrbis tribus modis enunciat, memoriam eius haud paucis in ſcriptoribus reperiſſe videtur. Quid autem Ζαριναία regina? an iſthuc vetus nomen *Czar* eſt? Nempe vt mea opinio fert, is titulus ſummae maieſtatis vetuſtiſſimus fuit apud Sarmaticos populos Perſis چار et چهار *Czar* et *Czehar* eſt *thronus regius*. Et veteres Slauos quoque *Czehar* dixiſſe, Scylitzes Curopalata auctor eſt (*y*). Nam cum Baſilius Porphyrogenneta Imp. aduerſus Ioannem Bulgarum ante ſigna equo inuectus, ab exploratoribus noſceretur, hi cum impetu in caſtra ſeſe receperunt, vociferantes Βεζεῖτε ὁ Τζεόρ Slauonice бѣжите Царь, *fugite Tzar* ſc. adeſt. Scio eius loco Georgium Cedrenum ſcripſiſſe ὁ Τζαίσαρ vt ſit *Caeſar*, ſed magis credo Scylitzen veram lectionem Cedreni conſeruaſſe, et Bulgaros Imperatorem Byzantium vocaſſe Czar. Atque cum Symeon Bulgarus Romano Lacapeno et collegis titulum Βασιλέως extorſit, haud alio vocabulo videtur Bulgarice dictus, quam *Czar* pleno maieſtatis honore. Nam apud Cedrenum (*z*) inter eos, qui Baſilio Porphyrogennetae Imp. ſeſe dediderunt ſunt praeter viduam Vladislaui, proceres ὁ Νεςοριτζης, ὁ Ζαρίτζης ϗ ὁ νεὸς Δοβρομηρὸς, *Neſtoritzes*, *Zaritzes*, et *Dobromirus iunior*. Quo in loco *Zaritzen* credo iuuenem regium fuiſſe. Recordemur deinde in regionibus Sarma-

(*y*) Apud Cedrenum p. 712. (*z*) p. 713.

ticis ad Pontum Euxinum *Zarbienum* Plutarcho commemoratum in Lucullo (*a*) et Ζαριάδρην κυριεύσαντα τῶν ὑπεράνω Κασπίων πυλῶν μέχρι τοῦ Ταναΐδος apud Charetem Milesium in historiis Alexandri Zarmaerum (*b*) Armeniae regem apud Mosem Chorenensem et apud Theophanem Byzantium (*c*) Σαρβαναζᾶν aut quod saepius exstat Σαρβαραζᾶν et apud eundem (*c*) Σαραβλαγᾶν, duces Persarum Regia Bactriorum fuit Ζαριάσπα, celebrata Polybio. Arriano, Straboni, aliis. Huius rationem nominis credidi esse a زه *zab* seu *zeb* et راسب *rasb*, *neruo mansueto mitique*, tamquam vrbem pacificam dicas. Quid vero, si aliquis malit a چار *Tschar*, throno seu principe, et vel ab ارب *asb* quod *pilosum* significat, vel ab اسب *asb*, *esb*, quod equi nomen est? Equidem neque adfirmo, neque nego. At שר *Sar principis* nomen etiam apud vetustissimos Hebraeos frequens fuit. Ludouicus Thomassinus Oratorii Presbyter (*d*) *Hinc Scar et eliso sibilo* κύριος, κοίρανος *forsan et Gallicum Sire*: *hinc forsan et apud Moscos Czar*, *summus eorum princeps.* Non abhorret animus ab hac coniectura, quando aliae quoque voces dignitatum ab vetustissima memoria multas per gentes quasi sparsae et seminatae et multimodis tortae atque tonsae sunt, vt vel in voce *Koenig* Otto Sperlingius multa eruditione ostendit. Et Anglo Saxonicum *Sire*, Runicum *Siar* et *Sir*, quo etiam Noruagi sunt vsi, et codicis argentei vocabulum *Sibor*, vnde Olaus Vormius Teutonicum *her* deriuauit,

(*a*) p 512. (*b*) p. 256. (*c*) p. 259. (*d*) In Glossario vniuersali Ebraico p. 1026.

uauit, eadem omnia ſignificatione *domini*, a Graeco κύϱιος et vt poſtea dixere κῦρ ducta videntur, niſi *Sibor* Gothicum cum Franciſco Iunio et Georgio Hickeſio (*e*) hoc cenſu eximamus et a *victoria* dictum putemus, argumento ſunt, item ex *Sar* potuiſſe fieri κυϱιον, quam ἐκ τȣ̃ κυϱιȣ *Sir*. In Dacia veteri mihi videor eiusdem nominis veſtigia reperiſſe. Ad Sargetiam fluuium fuit Ζαϱμιγέθȣσα βασίλειον, vt Claudius Ptolemaeus, vt alibi idem Ζαϱμισογέθȣσα, quaſi *Myſorum et Getarum thronus*. Sic in titulo apud Gruterum (*f*).

IMP. CAES. ANTONINO
PIO. AVG. COLONIA
SARMIZAEGETHVSA

Iterum apud Gruterum (*g*)

COLONIA. VLPIA. TRAIAN.
AVG. DACICA. SARMIZGETVSA

In aliis fere SARMIZ. in vna Zamoſcii inſcriptione: SARMIZEG. Et nomina vero dignitatum temporis tractu aut altiori maieſtate ſeſe extulerunt, aut vileſcere et infra claſſem coeperunt poni, vt mirum non ſit, ſi idem huic titulo ab omni aeuo acciderit. Hoc loco inuidiam audaciae coniectandique deprecor. Nihil ita talibus coniecturis tribuo, vt aliis obtrudam. Dixi quod mihi videatur: poteſt aliis videri aliter, non repugno. Qui Ruſſicum *Czar* a *Caeſare* deriuant, maioribus difficultatibus vrgentur, quando in aula Byzantia raro vſurpatus eſt titulus *Caeſaris* et fere minori dignitate fuit

 quam

(*e*) In Grammatica Franco Theotiſca p. 98. 2. adde eum in Grammatica Anglo Saxonica p. 120. (*f*) p. 257. 1. (*g*) p. 437. 1.

quam Βασιλέως. Quamquam non nego, orientales nonnumquam Imperatorem Constantinopolitanum كيصر *Kizr* et *Kizar* nuncupasse, proximo ad *Czar* vocem sono: tamen si a Caesare Rutheni nomen isthuc duxerunt, non longius reiectorum populorum pronunciationem aucupaturi fuisse videntur, sed vt Constantinopoli audiebant, dicturi. Et ne quid per aetatem corruptum putes, en tibi vetustissimam Slauonicorum Bibliorum versionem, quae iam tum haud aliter edidit vocem, quam nunc in vsu est, *Czar*.

Vt autem vetusta ante Ruricum tempora maiori in luce versentur, necesse est, de forma rei publicae inter Slauonos quaeri. Non excedam plane spatiis ad vltimam Slauonicarum rerum memoriam, sed me intra viciniam huiusce aeui, quod tractandum suscepi, continebo. Satis constat, multos in populos diuisos fuisse Slauonos. Qui inde ab Albi ad Vistulam vsque coluere, in duodecim censebantur (*b*). Erant deinde ad orientem Chrobati, Seruii, Zachlumitae, Terbuniotae, Rentani, Canalitae, Drebliani, Lenziniani, Vltini, Cribetae, Bolgari, Moraui, Russi et quae alia nomina exstant. Vt e Constantino Porphyrogenneta Imp. constat, singuli populi minores in gentes diuisi, suas sibi res publicas condidere, aut in speciem popularis libertatis, aut principatus. Nam apud plerosque eum statum fuisse reperio, qualem Saxo, poëta Caroli M. aequalis, editus a Reineccio et Leibnitio, cecinit paullo ante se fuisse in Germania:

Quae

(*b*) Ghronographus Saxo ad A. C. 960.

Quae nec rege fuit saltem sociata sub vno,
Vt se militiae pariter defenderet vsu:
Sed variis diuisa modis plebs omnis habebat
Quot pagos, tot paene duces, velut vnius artus
Corporis in diuersa forent hinc inde reuulsi.

Ita accidit, vt quidam populi aliorum poteſtati ſubiicerentur, vt Slaui Byzantio finitimi Imperatoribus Conſtantinopolitanis, vt Chrobati deinde Ottoni Imp. Romano, vel ipſo Conſtantino Porphyrogenneta teſte. Qui ſub Byzantio imperio fuerunt, Michaele Amorienſi Balbo Imp. negligentius rem gerente, iugum Romanum excuſſere. Liberi facti, αὐτόνομοί τε καὶ ἀδέσποτοι καθεστήκεισαν ὑπὸ ἰδίων ἀρχόντων μόνον ἀρχόμενοι, Chrouati, Serui, Zachlumi, Terbuniotae, Canalitae, Diocletiani, Rentani, vt teſtatur Conſtantinus Imp. (*i*) et incertus Auctor rerum Baſilii Macedonis (*k*): quamquam et hic auctor et Cedrenus, alterius Michaelis, qui Theophili filius fuit, quique poſt illum Amorienſem imperauit, ſocordiae tribuunt. Huius autem Michaelis temporibus, cum Slaui in Macedonia et Illyrico ab Agarenicis claſſibus vexarentur, legatos Conſtantinopolin miſere de auxiliis. Legati venerunt Michaële iam defuncto, imperante Baſilio Macedone. Auxilia ab Imperatore ſubmiſſa, pulſi Agareni, Slaui in fidem recepti. At ceteri Slaui, qui longius remoti erant, numquam in Imperio Conſtantinopolitano cenſi, ſuos habuere duces atque magiſtratus, ſuas leges, ſua iura. Conſtantinus, vbi quosdam populos nominauit, ἄρχοντας, inquit (*l*), ὥς φασι, ταῦτα τὰ ἔθνη μὴ

 ἔχει

(*i*) De A. I. p. 87. (*k*) p. 178. Cedrenus p. 576. (*l*) l. c. p. 87.

ἴχει πλὴν Ζουπάνους γέροντας, καθὼς καὶ οἱ λοιποὶ Σκλαβινίαι ἔχουσι τύπον, *principes, vt mihi relatum eſt, hi populi habent nullos, praeter Supanoſſenes, ſicuti et ceteri Slauici populi eandem reipublicae formam ſeruant.* Exemplo ſunt Chrobati in Dalmatia et Illyrico, diuiſi a Bielochrobatis, ſeu Chrobatis Albis Transdanubianis. Hi Chrobati in Ζουπανίας ιά *in Zupanias* XI. diſtribuebantur (*m*), quarum nomina Conſtantinus recenſet partem maximam Slauica, partem indita a Graecis. Ioannes Lucius (*n*): *zupa* et *zupania* explicat *populum* vel *regionem a populo incultam.* Diocletes presbyter, quisquis fuerit, in Hiſtoria Dalmatica tradit, a Suetopolco primo Dalmatarum rege, *Banos* ſuo in regno tamquam Duces et (*Gjupani*) *Supanos* tamquam Comites fuiſſe inſtitutos, vt hi vrbium praefecti, ad omnia concilia ius ſuffragiorum haberent, iſti maiori dignitati principes eſſent. De Seruis Villermus Tyrius (*o*): *hi magiſtratus habent, quos Suppanos vocant.* Qui ſummae rei praeerat apud Seruios, is quoque a Niceta Choniata (*p*) Ζουπάνος appellatur. At a Cinnamo (*q*) Ἀρχιζούπανος τῆς Σερβικῆς. In actis Innocentii III. P. R. apud Ducangium eſt *Megajupanus Seruiae*, partem Graece, partem Slauonice; Μεγαζουπάνος enunciatum, vt *Megagjupan.* De Dalmatis etiam Anna Comnena (*r*), Bolcanum aduenisse ſcribit, ἐπαγόμενον τοὺς τε συγγενεῖς καὶ ἐκκρίτους τῶν Ζουπάνων. Balcanus ille, vt alibi ſcripſit Anna Comnena (*s*) τὸ πᾶν τῆς ἀρχῆς τῶν Δαλματῶν φέρων. Principem Dalmatiae dicit, quem Ἀρχιζουπάνον τῶν Δαλ-

(*m*) Conſtantinus l. c. p. 95. (*n*) Hiſt Dalmat. Lib. I. c. 13. (*o*) p. 977. (*p*) p. 278. (*q*) p. 118. (*r*) p. 265. (*s*) p. 251.

Δαλματῶν Cinnamus (t). Etiam Bohemi ſuos Zupanos habuere. Godofredus Monachus S. Pantaleonis (u): *regnum Boëmiae abiudicatum Odoacro regi per ſententiam principum, praeſentibus Supanis et pluribus nobilibus terrae.* Hiſtoria Auſtralis (x) *Zabiſius Sopanus quidam nobilis et potens Boëmus.* De Polonis Chronicon Montis Sereni teſtimonium perhibet (y): forte inde adhuc *pan*, dominus, vt maioris dignitatis vox abuſu viluerit. Nam *Supani*, nomen dignitatis Senatoriae fuit: vt γέροντας Conſtantini Imp. interpretemur *ſenatores.* A Slauicis gentibus vulgatum etiam inter alterius corporis populos. Lithuani adhuc, ſed veluti proletarium honoris titulum adhibent: Pruſſi veteres, vnius originis populus, eodem vocabulo vſi ſunt. Et habuerunt tamen alia nomina, quibus vterentur tamquam ſuis. Pruſſis *viraeſis*, princeps, *viraeſei*, proceres: ſed et neſcio, an peregrinum, *rekis*, *reykies*, *rykies*, *rickis*, dominus, vt Lithuanis *wieſzpats.* Hungaris *Iſpan*, ab eodem vocabulo. Immo Conſtantinopolitani quoque ſuum ἐπάνω ϗ κατεπάνω magiſtratum ab hac Slauica voce mihi videntur formaſſe, vt multa Slauica receperunt. In Britannica lingua *bann*, fuit *excelſum*, eodem ſenſu in Celtica *pen*, vnde Alpes Penninas dici obſeruatum eſt (z). Celtica Leibnitii *Penfeſtin*, capitis munimentum, galea: Scandinauis *fan*, dominus: Germanis *bann*, *interdictum*, quod cogendi vim continet. Non puto, haec Celtica, Scandinauica, Britannica, Teutonica, a Slauicis, aut Slauica inde ab iſtis eſſe ducta: immo vero videtur hoc vocabulum e maiorum noſtro-

(t) p. 58. 116. (u) ad A C. 1212. p. 280. ed Freh et alibi (x) ad A. C 1209. p. 86. (y) ad A C. 1209. p. 86. (z) Celtica Leibnitii p. 137. 119. adi omnino Ioan. Georgii Vuachteri Gloſſarium Germanicum p. 90. ſeq.

noſtrorum priſco ſermone diuerſis in populis ſupereſſe. At iſthuc *Supani* cum aliis in linguis, ſeu totidem litteris, ſeu leuiter inflexum, vt *Iſpan* Hungarorum, pronunciatur, ſane totum Slauonicum eſt. Chrouati veteres praeter vndecim Supanias, tres alias gentes ſuo in corpore cenſebant, et vnicuique praefectum habebant Βοάνον, a *pan*, vt puto (*a*). Sic in Hungaria ſunt *banni* et *bannatus*, *iurisdictiones*, *dominia*. Ioannes Cinnamus (*b*): Βέλοσις, ὁ τὰ πρῶτα παρὰ Ρηγὶ φέρων, Μαπανην ταύτην καλοῦσιν Οὖννοι τὴν ἀρχήν. Vbi Ducangius maluit Μπάνον, vt ſit ſimile Hungaricae dignitati *banorum*, Slauonico *pan*. Nam Graeci illo aeuo ſic fere ſolebant inanes praefigere litteras, vt apud Georgium Chryſococcam in Syntaxi Perſarum Μπαρταὰ pro Βάρτα ſeu Βίρθα, Μπασρὰ pro Βάσρα, Μπαλχ pro Βαλχ, Μπουχαρὰ pro Βούχαρα. Sic item in multis aliis. Anonymus de conuerſione Vladimiri, cum Graece recenſet litteras Ruſſicas pro *Buki* ſcribit Μπούκη *Mpuki* (*c*).

Inuenio etiam *Kniaſios* et *Kneſios* dignitate praecelluiſſe apud Slauonos. Goarus ad Codinum de officiis aulae Conſtantinopolitanae (*d*) e Codice regis Franciae, μέγας Κνέζις et Κνενζης πάσης Σερβίας. Κνενζης, ne corruptum putes, legas more eius aetatis Κνε-νζης *Kne-nzis* ſiue *Knezis*. Nam vocalis alterius ſyllabae haud aliter pronunciabatur iſtis ſeculis et ante Z in peregrinis vocibus frequenter inanem litteram praefigebant, vt apud Chryſococcam Ντζουρμι eſt جورمي *Gjormi* Mahometis Al-

(*a*) Conſtantinus de A. I. p. 107. (*b*) p. 67. (*c*) Band. Imp. Orient. Tom II. in animaduerſionibs ad Conſtant. Por. p. 115. (*d*) Vide eius Commentarium in Annam Comnenam p. 347.

Alſragani, Ptolemaei Γαράμη. Σαντζαλματα, Naſſireddini سجلماسة *Sagjetmaja.* Ντζὶν Musladini Sadi aliorumque Perſarum صين *Zin* Arabum سين *Sin* ſeu Σιναι vt apud Marcianum Heracleotam et Turcarum atque Perſarum چين *Tſchin*, ſeu Τζιναι vt apud Cosmam Indicopleuſten. Sic Ντιμὶσκ *Damaſcus* Ντιμιὰτ *Damiata.* Sic Anonymus Graecus quem ſupra citaui, ντεβερδω (credo eum ſcripſiſſe ντβέρδω *Tverdo* littera Ruſſica) Carolus de Fraxinis: *idem autem valet, ac dominus, nam ea fuit vocis Kneg notis apud Slauos.* Nicolaus Firleius Caſtellanus Voynicenſis in epiſtola ad filium (*e*), cum de Polubinſciis et Maſſalſciis Ruſſicae ſtirpis familiis in Polonia agit, negat titulum *Kniaz*, quem gentes iſtae gerunt *ducem* reddi Latine poſſe: nam in Ruſſica lingua nihil aliud ſignificare, quam *vici ſeu villae dominum haeredem.* An vmquam in Ruſſia *Kniaz* vi vocis minoris titulus dignitatis fuerit, dubitandi cauſſas habeo multas. Et, ſi iſta quaſi ſtirps eſt, quam Ducangius et Firleius ediderunt, tamen nihil vetat, quin paullatim ſeſe extulerit altius ſignificatio. Nam et *Goſpodarz*, vt Poloni dicunt, Госyдарь vt Rutheni, *patrem familias* proprie ſignificat. Quis autem neſcit Principem ſeu Valachiae ſeu Moldauiae *Hoſpodar* eximio ſenſu appellari: et Imperatorem Ruſſiae dici, ſi quis Ruthenus dicat *Goſſudar.* Et iſto quidem titulo vnumquemque magnae dignitatis virum, alios etiam, cum adulantur, praeſentes compellant, de abſente non vſurpant, niſi de Imperatore. Neque vero mirum eſt, Firleium equitem Polonum, inſtituta patriae ob oculos gerentem, et qualemcumque eminentio-

(*e*) Subiuncta Matthiae Dargodzky libro de titulata nobilitate.

ris nobilitatis exiſtimationem tamquam dignitati ſuae aduerſantem, gradu mouiſſe Kniazios. Iniuria tamen: nam totum iſthuc a Turcis et Perſis et Chazaris fuit, ex خان *Chan* (*f*). *Chan* autem apud illos populos familiam quidem et patrem familias ſignificat, at praeterea aucto vocis gradu, principem quemcumque, vt ne quidem Imperatores Turcae aut Perſarum Reges ab eo refugerint vmquam. Ita reges Seruiae olim Kniaziorum titulo delectati ſunt et duces Lithuaniae, vt Chriſtophorus Hartknochius (*g*) demonſtrauit ex Statuto Lithuanico, quod A. C. 1566. in comitiis Vilnenſibus a Sigismundo Auguſto confirmatum fuit et ex Conſtitutionibus A. 1628. in quibus Magnus Dux Lithuaniae *Kniaz Wielkiego*. Idem obſeruatum eſt in reginis. Dithmarus Merſeburgenſis Slauonicarum rerum peritiſſimus auctor (*h*): *Vxor autem eius Beleknegini, id eſt, pulcra domina vocabatur*.

Polonis *Voivoda*, Palatinus ſeu praefectus prouinciae, et eorum exemplo Lithuanis. Proprie ab ſtirpe ſua *ductorem exercitus* ſignificat: nam *bojowy* Polonis eſt *bellicus*, *militaris*, *caſtrenſis*. Turcas quoque Slauorum aemulatione in Hungaria ſuos Βοεβόδυς *Voevodos* habuiſſe, Conſtantinus Porphyrogenneta auctor eſt. Imperator ἀρχηγὺς *duces belli*, quam conuenientiſſime ad noſtram ſententiam, explicat. Primus Turcarum *Voëvoda* fuit Λεβεδίας (*i*), qui ad Chazaros fugit ſupplex tribus annis antequam

(*f*) Georgius Pachymeres L. III. c. 25. L. X. c. 25. L. V c. 4. Κάνης et Κάνις et Χάνις enunciat: ὁ δὲ Χάνις, inquit βασιλεὺς. Fallitur Protecdi us ille Dicae phylax. Error ex eo natus, quod etiam reges Chanos ſeu Principes dici audiuerat. (*g*) De Rep. Polonica p. 606. etc. (*h*) L. VII. p. 106. (*i*) Conſtantinus de A. I. p. 107.

tequam Pazinacitae Turcas a Tanai et Boryſthene pepulere. Et nomen quidem Λεβεδίας, Turcicum eſt لوان *Lewads* et *Lews*, *ſupplex*. Immo Chazari quoque *Voievodas* habuere: recepto a Slauis finitimis nomine: cetera enim nomina dignitatum Chazaris fuere Turcica خاقان *Chakan*, Imperator, Rex et Πεχ ſeu بك *Beg*, Princeps. In Bolgaris Theophanes Byzantius (*k*) teſtatam reliquit Voievodarum dignitatem, ſi apud eum Βοιλαδας emendes, vt ſit Βοιβάδας.

Ceterum inter Slauicos populos nullum vetus nomen inuenio, quo nobilitas ſeſe extulerit ſupra plebem. Si qua fides Ioanni Georgio Stredowskio (*l*), A. C. 864. ad Radislaum Morauiae regem *Samouitus et Bogarinus Ruſſiae duces* venerunt, eodem venit et Borinogius Bohemorum dux: ceteris in ſcriptoribus Bohemicis Borinogium Bohemum ad Radizlaum profectum video, at duces illos Ruſſiae non inuenio. Iſthuc *Boiarin* plane eſt, quem vulgo dicunt бояринъ *Boiarin*, pro quo elegantius et vetuſtius dici putant болярипъ *Boliarin* et multitudinis numero боляре *Boliare* incertae originis vocabulum. At iſthuc vero nomen non nobilitatis eſt, ſed officii et dignitatis palatinae. Dicunt etiam дворянинъ *Dworianin*, ſed ab agro ſeu praedio, quem quis poſſidet. Et vulgo quidem etiam illi *Dworiane* dicuntur, qui nulla praedia poſſident, orti tamen a parentibus ſunt eius conditionis, vt ſuos agros tenuerint: id vero ſerius inuectum et peregrinum mihi videtur. Eodem modo apud Polonos

(*k*) p. 367. 376. (*l*) Morauiae ſacrae II. 9.

nos *Ziemianie*, *terrestres* dicuntur ab agris, quos possident, quod item nouum videtur. Christophorus Varseuicius (*m*) ita etiam Nouogrodienses nobiles sese vocare testatur: Polonorum vtique imitatione. Isthuc autem, quod nunc maxime in vsu est apud Polonos nobilis viri nomen *Szlachcic* et inde quoque apud Rutenos, a *Schlachta* seu *genere*, totum est Teutonicum, quod Martinus Cromerus iam vidit. Caussa huiusce rei manifesta est: neque enim nobilitas a ciuibus ceteris aut plebe discerni voce potuit, vbi in re ipsa nihil fuit diuersum. Quidquid Slauonici sanguinis fuit, id liberum et per se satis nobile, communi omnium iure. Seruus nemo nisi alio ex populo siue captus bello siue emptus. Quare nobiles ipsi Russi, alia conditio nulla nisi seruorum.

Cum Slaui hac conditione essent, inter se autem bella gererent crebra et alius alium populus, gens vna alteram ad tributa soluenda adigeret, denique vicini Slauos diuexarent; salutaris visa est, vnius principis auctoritas. Nam Chrobati Slauis Paganis tributa pendebant, Constantini Porphyrogennetae aetate (*n*), Albi Chrouati Francis subiecti erant eodem teste Constantino (*o*), et ex eodem de ceteris Slauis in Illyrico et Macedonia partem a Francis, partem a Constantinopolitano imperio pressis constat. Haec inquam necessitas coegit Slauos, vt conseruandae caussa libertatis popularem statum commutarent cum principatu. Chrobati praeter Supanos Constantini aetate Αρχοντα Principem habuere, habuere Seruii. Vt quisque populus principatum cum libertate maturius mutauit, ita sese maxi-

(*m*) In dialogo de origine generis et nominis Poloni p. 39. (*n*) p. 96.
(*o*) p.

maxime extulit: tantum vnius Principis vis ad muniendum ornandumque ſtatum publicum poteſt. Inter primos ſeſe extulere, quod quidem memoria tenemus, Bulgari, quorum Archontes Graeco Byzantiorum vocabulo, adeo et viribus valuerunt et auctoritate, vt et ἀρχόντων et ἀρχιζυπάνων nomina deſpicerent regesque dici mallent. Byzantii, vt erant aſtuti, Ῥῆγας dixere Latino vocabulo, ne Βασιλέως nomen vulgarent. At Symeon rex Romano Lacapeno imperante rem eo perduxit vt et Βασιλέως titulus ſibi tribueretur et ſummae maieſtatis diadema cum tiara. Neque minus principatus honore atque amplitudine regionum excelluerunt Moraui, Marahenſes ſcriptoribus Francicis, Bohemorum maiores, donec immiſſis Turcis ab Arnolpho Imp. oppreſſi ſunt. Si Ruricus primus Ruſſorum rex fuit, paullo ante eum, annis admodum viginti, primum Principem Piaſtum Poloni habuere. Et iſti quidem duo ante Piaſtum ſecula principibus complent, ſed tam incerta fide, vt nullus ſit eorum, quem non mouere loco firmiſſimis ratiociniis poſſis. Saltem duodecim Palatinorum memoria incorrupta videtur, ſic vt duodecim Zupaniae fuerint ante reges et ad formam rei publicae Chrobaticae Zupani. At cum, vt alio dicam loco, regum Ruſſicorum longe altior aetas ante Ruricum ſurgit ex certis iſtarum aetatum non vnius gentis teſtimoniis, multo etiam antiquior eſt forma Roſſiaci principatus, quam Polonici. Et iſtorum regum ante Ruricum tanta fuit maieſtas, vt teſtibus Annalibus Bertinianis, poſtremus eorum ſe nuncupauerit خاقان *Chakan.* Hunnorum reges illo ſeſe titulo extulerunt, vt ex Menandro Protectore conſtat (*p*),

(*p*) In Legationibus p. 117. 138. ed. Reg.

ne Gregorium Turinensem dicam, aut Paulum Varnefridum. Theophylactus Simocutta (q) Chacanum Hunnorum induxit gloriantem, κύριον ἑαυτὸν ἔθνους ἅπαντος, μὴ προσεῖναι τε ὅσον περ ἥλιος ἀνατείνει τὸ βλέμμα, τὸν ἀντιτάξασθαι δυνησόμενον, *dominum se esse gentium omnium, neque esse, quacumque sol circumferat vultum, qui resistere possit.* Is etiam apud potentissimas gentes summae maiestatis titulus fuit. Quare Iazidus Validi filius Chalifa, cum de genere suo gloriaretur dicere est solitus (r): *sum ego Chosrhois filius, mihi pater est Meruanes*

وقيصر جدي وجدي خاقان

Et Kizr (Caesar) *auus et auus Chakan.*

Eum in modum reges Hungarorum titulo Chacani delectati sunt: testes habeo Reginonem Prumiensem, Astronomum illum, Ludouici Pii Imp. familiarem, Eggehardum Vragiensem, alios. Constantinopolitani Ingerem, Suendostlauum, Vladimirum, Iaroslaum Ἄρχοντας seu *Principes* dixere, vt Constantinum Porphyrogennetam Imp., Cedrenum, Zonaram, alios fecisse video. At . . . . Ducae (s) Ρῆξ Ρωσίας *Rex Rossiae*, Ioanni Cantacuzeno Imp. in rerum a se gestarum historia (t) non modo Ρηξ, sed etiam Βασιλεὺς τῶν Ρωσῶν *Russorum Imperator*. Maiori titulo, quam Βασιλέως, ab eo qui nunc quidem scriberet, erat Iosaphus Christodulus, Monachus, paullo ante vero Imperator fuerat, reges Russiae mactari non potuere. Nempe ita Imperator, cum rerum potiretur, loqui adsueuerat, summae maiestatis societatem Russis concedens, vt Adamus Bremensis haud immerito dixerit . . . . Regis Rus-

(q) p. 159. (r) Gregorius Malatiensis I. 211. (s) c. xx. (t) Lib. II, c. xxvi.

Russiae temporibus, quibus fuit: *Kiouiam aemulam imperii Constantinopolitani, clarissimum decus Graeciae.* Illum ego Bremensem inter scriptores septemtrionales primo loco nominauerim, qui Russiae dominos, haud aliter vocitauit, quam Reges. Neque mirum, si Bosouiensis Presbyter, Adami assecla eodem vsus est titulo. Neque aliter vel Arius Polyhistor Islandorum omnium antiquissimus, vel qui eum secutus est, Snorro Sturlaeus. Snorro fere *Riki Valldimars Kong, regnum Valdimari Regis* (u) et de Iaroslai legatis loquens (x), *Sendemenn Iarizleifs Kongs austann oc Holmgardi, legatos* appellat, *Iarislai regis orientalis siue Holmgardiae.* Et ita de Iaroslao saepius. De Valdemaro Iaroslai filio (y). *Valldimar Kongur af Holmgarde, Sonur Iaritsleyfs Kongs oc Ingibiargar Drottningar, Valdemari regis Holmgardiae Iaroslaidis regis et Ingibirgae coniugis.* Neque aliter de regibus ante Ruricum Heruorar saga aliaeque sagae septemtrionales. Et Saxo Grammaticus, qui . . . . Rege Daniae auctore et auspice scripsit, perpetuo Regum titulo principes Russiae mactauit, quod eum a regibus Daniae tribui sciret. Nam et Ericus Pommeranus Rex Daniae, haud aliter appellauit. Polonos veteres eum in numerum referre possum, quando Vincentius Kadlubko, Episcopus Cracouiensis, omnium antiquissimus testimonium perhibere potest sub . . . . Regis Russiae aetatem. Nihil dicam de Ioanne Duglosso, qui ducentis annis secundum Vincentium fuit. Iam scriptores Germani magno numero, *Ingerem regem, Helenam reginam* Eggehardus Vragiensis (z) et Sigebertus Gem-

(u) Tom. I p. 196. 216. 233. 318. (x) Tom. I. p. 511. 513. 516. 733. (y) Tom. II. p. 178. (z) p. 265. 300.

Gemblacenſis (*a*), immo ipſe Liutprandus Ticinenſis (*b*) homo in Conſtantinopolitana regia, ceterisque Germaniae atque Italiae aulis multum verſatus: *Valdemarum regem* Annaliſta ille Saxo (*c*), Iaroslaum regem Adamus Bremenſis (*d*) Eggehardus Vragienſis (*e*) Lambertus Schafnaburgenſis (*f*). Vides conſenſionem gentium fere omnium regio in titulo Ruſſiae.

Quemadmodum ſupra dixi, tria maxima regna e Slauonicis Ruſſicum, Polonicum, Bohemicum iſtis temporibus viguiſſe, ita haec cum perpetuo fortunae curſu ſeſe extulere, cauſſam dedere comminiſcendi tres fratres *Lech Rus et Czech. Rus*, qui ſit conditor Roſſicae rei publicae, *Lech* Polonicae, *Czech* Bohemicae. Neſcio quis Vincentii Kadlubconis commentator, non ita vetus tamen, fuit enim paullo ante Dlugoſſum et poſt A. C. 1434. homo ſupra modum ſimplex, primus hos tres fratres, Annonis filios produxit (*g*). Cum Kadlubco ſcriberet, annis ante commentatorem ducentis et amplius, nondum nati erant, neque Anno pater neque tres germani fratres: credo, vt Palladem Iouis repente proſiluiſſe armatos e cerebro commentatoris. At Kadlubco a Leſcone incipit Polonicas res, aequali et victore Alexandri Macedonis. Hunc tamen Leſconem cum alii, tum Stanislaus Orichouius (*h*) auctor alioqui minime vanus, cum Lecho Commentatoris contendunt. Inde vero a Leſcone omnia illa familiae *Koszyſko*, vsque ad Piaſtos commentitia ſunt, nec ita veteris memoriae tamen, vt vel Alexandrum vel Iulium Cae-

(*a*) Ad A. C. 936. (*b*) p. 144. (*c*) p. 426. (*d*) p. 23. (*e*) p. 446. (*f*) p. 159. (*g*) p. 8. ed. Dobromil. (*h*) Annal. p. 5. ed. Dobrom.

Caesarem attingat, si quis fuit Lesco. *Lechus* quo semine genitus sit, vides: item vt *Rus* et *Czech*. Nempe e veteri nomine gentium. Nam etiam nunc Bohemus Polonis dicitur *Czech*, Lithuanis *Czickas*, veluti gens orta sit a Zichis priscis ad Caucasum. Polonis vero et Russis Polonus *Polak*, Lithuanis *Lynkas*, vnde clarissimus Lengnichius sibi persuasit, nomen a Lazis vetustis esse. Vtcumque vero Martinus Cromerus (*i*) aliique pro Lecho suo pugnant, tamen grauissimis de caussis fratres Annonis filios inter vmbras regnare iubemus. *Illa se iactet in aula* et Lech et Czech et Rus.

En tibi alios tres fratres cum sorore, qui Kiouiam condidere. Historiographus Anonymus Ruthenus: *Kius Polonus erat, et primo illum locum incolebat, vbi* увозъ борковъ *Vvos Boriszew, seu traiectus Borysthenis est, postea vero ipse cum duobus fratribus et sorore Kiouiam condidit.* Chronographus Russus: *Tres fratres Kii Szeroek et Choriw condiderunt vrbem nomine fratris sui natu maioris eamque Kiew dixerunt: sunt qui tradunt, Kium fuisse* Перевозникъ (*Perevoschnick, portitorem*) *qui traiiciendo Borysthene vitam egerit, at falso: ille enim princeps fuit, et expeditione contra Constantinopolin suscepta, ibi ab Imperatore magno honore exceptus fuit: in reditu prope Danubium vrbeculam struxit, quam et hodie Kiewec vocant, sed expulsus ab accolis, cum fratribus et sorore Kiouiae obiit, post defuncto Kio posteri eius successerunt.* Synopsis historiae Russicae primum Kiouiae, deinde Moscuae edita, Principes Rossos fuisse adseuerat, *Kij, Schczek* seu *Schczoek* et

(*i*) De ortu et rebus gestis Polonorum L. I. c. XIII. XV.

et *Korew* ſeu *Chorew*, ſororem eorum *Libed* ad Boryſthenem: multis vrbibus et caſtellis in Polonia occupatis, Kium condidiſſe vrbem *Kiew*, eſſe denique de tempore diſſenſionem, exſtare tamen qui A. C. 401. conditam ferat: *Schczekum* vrbem in monte poſuiſſe nomine *Schczekaviza*: tertium Koreuum, vrbem *Chorevizam*, quae tandem appellata ſit *Vyſchgorod*, denique *Libed* ſororem vrbem ſuo nomine ad fluuium itidem *Libed*. De ſucceſſione nihil certi definiuit Synopſeos auctor, praeterquam quod Stricouium auctorem citat, genus eorum vsque ad Oſcoldum et Dirum non interrupta ſerie nepotum propagatum eſſe. Vti Strycouio non multum tribuere videtur Synopſeos auctor, ita illis adiungit Radinum a quo Rademiczauus populus, Viatcum a quo *Viatczani* ad Volgam, Duliepam a quo Duliepiani ad Bogum, deinde Luczani dicti. Mirum, ni hic quoque Polonici ſcriptores aliquid turbauerint, vt Kiouiae perpetuam poſſeſſionem vindicarent populo ſuo: Roſſicis deinde ſcriptoribus impoſuerint auctoritate ſua. Oſcoldum et Dirum e Polonico genere non fuiſſe, vel nomina argumento ſunt. De Rademiczanis Viatczanis, Duliepianis dixi alias. Kius ille, vereor ne ex Iornande ſit adſcitus. Is enim in Geticis ſcribit (*k*) de *Cniva* Gothorum rege iis ferme ſimilia, quae de Kio Poloni. *Cnivam* exercitum in Moeſiam immiſiſſe, ipſum alia ſeptuaginta millia ſuorum ad *Euſteſium* (*Eoſceſium* in Ambroſiano codice eſt) id eſt *Nouas* duxiſſe et inde Nicopolin: Decio Imp. aduentante receſſiſſe Cniuam in Haemoniam et Philippopolin, rurſus, vt Decium ad Berrhoeam adeſſe cognouit, eodem ſe contuliſſe, et fuſo fugatoque Decio cepiſſe Philippopolin: iterum deinde pugnaſſe cum Decio, eoue in praelio Imperatorem ceci-

(*k*) p. 201. c. XVIII. ed. Murat.

cecidiſſe. Habes nomen Gniuae iſti Kio egregie conueniens, habes expeditionem Conſtantinopolitanam Kii ex iſta Gniuae ad Danubium, et tempus non admodum abhorrens ex eius ſententia, qui A. C. 401. Kium edidit: nam Cniua ante eum annis centum fuit et quinquaginta. Stredouskius (*l*) et . . . . Peſſina (*m*) ad A. C. 855. ſcribunt Radislaum Morauiae regem cum Poloniae Ruſſiaeque ducibus foedus iniiſſe. Eſt deinde apud Stredouskium memoria (*n*) Semouiti et Bogarini ducum Ruſſiae iis fere temporibus. Videtur autem ille Premisliam eorum ſedem indicare, vt ad Kiouiam nihil pertineant. Neque ego, ſi qui his nominibus fuere, duces fuiſſe conceſſerim: Supanos magis, aut Kniaſios, et vrbium praefectos fuiſſe credam. Kiouiam vero vt antiquam cenſeo, ita a quibus condita ſit, ignorare malim, quam decipi. Hoc denique video, ante Ruricum in eorum regum poteſtate fuiſſe vrbem, qui in Ruſſia regnarunt tanta potentia, vt cum iis comparati Piaſti Poloni multo fuerint inferiores. Hoc mihi ſuadet nomen Ruſſorum Kiouienſibus tributum, cum in poteſtate Rurici nondum eſſent, hoc Photii Patriarchae teſtimonium de Ruſſorum ante Ruricum maximis rebus geſtis, hoc denique Annales Bertiniani me docent.

Aeque incerta fama de Nouogrodii vrbis origine. Chronographus in Synopſi: *Peſtilenti morbo totam Slauoviam inuadente, vt vix ſupereſſent, qui mortuos ſepelirent, plerique confugerunt in* бѣлыя . . . . *nunc Bielozero aut* тикое езоро *ſeſe receperunt et Wes vocati ſunt: alii etiam in regiones diſperſi, variisque nominibus dicti: alii etiam ad Danubium, vetuſtas ſedes ſuas, confugerunt: Slovenesk et Rus* (Slauonia

(l) Morauia Sacra II. 5. p 107. (m) in Marte Morauico II. 5. p. 146.
(n) II. 8. p. 231. item c. IX.

et Russia) *adeo desertae sunt, vt a feris solis incolerentur: non multo post Slouani, receptis in societatem Bulgaris et Scythis in desertas regiones redierunt: cum vrbes restaurassent*, угры бѣлые *eos adorti deuincunt, vrbes diruunt, regionem vastant: eo audito Slauoni, qui in Scythiam auffugerant, rediere et Nouogrod vrbem ad Volchouam fluuium condiderunt, vno stadio a veteri vrbe Slouensko: vrbem quoque Rus pristino in loco restaurarunt, et principem esse iusserunt Gostomyslum. Alii in Pole, seu in campos discesserunt, vnde Polaene, id est, Poloni dicti. Alii ad Polotam fluuium. vnde Poloezane appellati. Alii in Mosouiam. Alii ad Bug fluuium, dicti inde Buzane. Accepere alii nomina Dregoviczorum, Kriviczorum, Czud, Merae Drewlanorum, Morywa Siewerorum, Lap, seu Morduae, Maraenae. Omnes eodem nomine Sloueni dicti.* Synopsis Moscuae edita: *Alii Rossi supra lacum Ilmen diffusi sunt, alii ad Volchouam fluuium condidere Nouogrodiam, et Gostomyslum, aliquem virum insignem e suo corpore, principem legerunt.* Etiam hic sentio nihil veteris famae contineri. Nam cum semel constitutum esset, Russos a dispersione dictos fuisse, eo deinde secum scriptores iniuerunt rationem, quemadmodum id acciderit. Hoc vero hariolari est. Id apud me quam verissimum videtur, Nouogrodiam eo maxime dici tamquam Neapolin, quod ante eam fuerat sedes regia *Aldaioburgum*, seu si vim vocis explices, Palaeopolis.

Monendi sunt qui has Dissertationes T. S. *Bayeri* legent, auctorem diem suum obiisse antequam eas perficere posset.

OBSER-

OBSERVATIONES
ASTRONOMICAE
ET
METEOROLOGICÆ.

IOANNIS POLENI
AD
NOBILISSIMVM VIRVM COMITEM
ALEXANDRVM DE POMPEIIS
PATRICIVM VERONENSEM EPISTOLA,
QVA
NONNVLLAE
OBSERVATIONES ASTRONOMICAE
ET
METEOROLOGICAE
CONTINENTVR.

SI nobilibus viris, qui ſcientias melioresque artes non modo ament, verum etiam calleant, fas non eſt quidpiam denegare; me quidem Tibi, Obſeruationem meam nuperae Lunaris Eclipſis petenti, morem gerere, immo obtemperare libenter, oportet. En itaque illam, cui etiam nonnullas alias adiunxi. At vellem, vt Te iure meritoque plurimi facio, ita Tibi maiora induſtriae meae ſpecimina mittere poſſe.

I. OB-

I. OBSERVATIO AVRORAE BOREALIS,

VISAE NOCTE INSEQVENTE DIEM XXIX. MARTII MDCCXXXIX. HABITA PATAVII.

LEnis ſubſolanus flauerat tota die, parique lenitate fluxit a Septemtrionibus tota nocte ventus. Interdiu abunde pluerat.

Circa nonam horam (poſt meridiem) quaſi fortuito, vidi Borealem Auroram ſplendere. Sed a Viris fide dignis poſtea reſciui, eius Aurorae initium circa horam octauam apparuiſſe. Tunc temporis, cum obſeruare coepi, in Barometro mercurius altitudine ſua aequabat Dig. 29. Dec. 20. (vtor menſura Anglici Pedis) quae altitudo inter minores computanda ſane eſt. In Thermometro meo *Amontoniano* erat mercurii altitudo Dig. 48. Dec. 96. Et in Thermometro, quod a ſe peculiari artificio conſtructum Petropoli dono mihi miſit *Celeberrimus Ioſeph Nicolaus de L'Isle* (in quo ex maiore minoreue mercurii denſitate altitudines variantur, menſuraeque initium ſumitur pone vacuum ſuperius ſpatium) numerabantur partes 139.

Cum coepi ego obſeruare, gradibus ferme centum (ſeptuaginta verſus occidentem, triginta verſus orientem) extenſa Aurora videbatur ſecundum finitorem, quem tamen non attingebat; eius erat altitudo graduum ſeptuaginta, et amplius. Rubeſcebat tota (excepto vno aut altero albeſcente tractu) limbus tamen inferior magis, quam ſuperior. Tenuis tota: ac trans eam plures ſtellae, praeſertim

ſertim vero pleraeque Maioris Vrſae, transſpiciebantur: quamobrem indicium hoc (praeter cetera) Auroram equidem eſſe Borealem illud phaenomenum, perſpicue commonſtrabat.

Poſt horae trientem, humilior reddita erat; ac parte occidua attingebat finitorem: inferior limbus ſubobſcurior apparebat; ſuperior vero mire laciniofus. Et ſupra ipſum tres quatuorue veluti rubrae trabes extendebantur; plures autem etiam ante prodierant illiusmodi trabes, ſeu virgae, ac euanuerant.

Quindecim circiter praeteritis horae ſexageſimis, verſus occiduam plagam quodammodo Aurora conceſſerat, plures vero ſeſe efferebant virgae, et quaedam eius partes quaſi fluctuare videbantur; mutationesque creberrimae aliae alias excipiebant.

Deinceps vero quietius (vt ita dicam) languidius, et albidius phaenomenum efficiebatur. Quin etiam ab occidua plaga contrahebatur, perſtans verſus ſeptemtriones. Nonnullae veluti nubes albidulae, tenuiſſimae, ac ſplendentes ad ſummum fere caeli pertingebant.

Circa horam decimam cum dimidia, iam extinguebatur; ac ſolummodo inter Boream et Ortum incerta quaedam exigua albicantia lumina conſpiciebantur. At deinde quid vlterius contingeret, mihi non licuit ſpeculari, nubibus infuſcantibus aëra. Non defuere tamen qui in alia regione eandem Auroram Borealem poſt aliquod temporis interuallum obſeruauerint reuiueſcentem quidem, ſed, breuiſſimo transacto temporis ſpatio, iterum ita euaneſcentem, vt poſt perpaucas ſexageſimas omnino diſſoluta fuerit atque exſtincta.

 II. OB-

II. OBSERVATIO ECLIPSIS SOLIS,

(SIVE, VT NONNVLLI LOQVI AMANT, ECLIPSIS TELLVRIS) QVAE CONTIGIT IV. KAL. IANVAR. MDCCXL. HABITA PATAVII

AB

IO. POLENO

VNA CVM

IOSEPHO BARTOLO et IACOBO DVRERO.

RAra quaedam, admodum ſublimis, nebula aërem infuſcabat: nihilominus vmbra, qua diſcus Solis afficiebatur, poterat ſatis bene, non tamen perfectiſſime, obſeruari.

Temp. H.	Appar. ′	″	Dig.	′	
20.	54.	4.			Vmbrae principium aliquod videbatur videri in limbo ſolaris diſci.
20.	55.	0.			Eclipſis certe coeperat.
20.	58.	40.	0.	15.	
21.	3.	5.	0.	30.	
21.	13.	30.	1.	0.	
21.	20.	36.	1.	15.	
21.	28.	54.	1.	30.	Vix tamen.
21.	38.	23.	1.	15.	
21.	46.	8.	1.	0.	
21.	52.	2.	0.	30.	
21.	59.	8.			Finis Eclipſis.

III. OB-

III. OBSERVATIO LVNARIS ECLIPSIS,

QVAE CONTIGIT NOCTE INSEQVENTE IDVS IANVAR. MDCCXL. HABITA PATAVII

AB

IO. POLENO

VNA CVM

IOSEPHO BARTHOLO.

AB nebula quadam, longe lateque expanſa, aër fuſcus reddebatur. Itaque vmbra, quae obſeruabatur in Lunae diſco, obſcurior (quod velim animaduerti diligenter) ſolito eſſe videbatur. Praeterea vero, vel ſub ipſum Obſeruationis initium, ſparſim in aëre multae nubes cernebantur. Adhibitus eſt tubus opticus longus Pedes regios pariſienſes ſeptem.

Temp.	Appar.		
H.	′	″	
9.	6.	30.	Lunae limbum tenuiſſima penumbra tenere videbatur.
9.	8.	0.	Penumbra diſtincte apparens et certa.
9.	12.	32.	Initium Eclipſis.
9.	16.	16.	Vmbra attingit Grimaldum.
9.	17.	25.	Grimaldum integrum tegit.
9.	23.	12.	Cooperit Ariſtarcum integrum.
9.	33.	0.	Attingit Copernicum.
9.	43.	45.	Platonem totum tegit.
9.	45.	29.	Pertingit ad Tychonem.
			Deinde vero Lunam obtexit denſa nubes, quae tractu temporis euaneſcere viſa eſt.

Temp. *H.*	Appar. ′	″	
10.	10.	2.	Apparebat denuo Luna. Vmbra vero tegere Crisium Mare incipiebat.
10.	18.	12.	Inter Lunam nostrosque oculos nullae interpositae erant nubes (saltem non distinguebantur) at nebula reddebatur crassior. Puncto temporis quodlibet residuum Lunae lumen se oculis nostris prorsus subduxit; itaque tempus illud pro Totalis Immersionis initio reputauimus.

Conuersis tribus circiter horae quadrantibus post Immersionis Totalis principium, nubes plures perspicue apparebant, quae deinde in vnum coeuntes, totum Caelum obtexere: vbi vero id relatum sit, quid superfluum magis foret, quam addere, tunc temporis Lunam videri minime potuisse? sed fortassis inutile haudquaquam erit, si illud animaduertatur, quod etiam anteriore tempore, nimirum etiam per eos tres horae quadrantes articuli huiusce initio commemoratos, inuisam nobis Lunam fuisse; qui caelum diligenter obseruantes, frustra

ſtra nudis oculis, fruſtra oculis tubo optico adiutis, eam perquiſiuimus. Licuit autem coniicere, abſolutam illam integramque Lunae occultationem ortam fuiſſe ab ea nebula, qua (antequam nubes in vnum coirent) iam aër totus fuſcus reddebatur.

Nunc vero, vbi prima coniectura haec propoſita eſt, iuuabitne coniecturam alteram ſuperaddere? atque ponere, nebulam aliquam, non ſatis conſpicuam, neque obſeruabilem, cauſſam fuiſſe illius phaenomeni; cuius ſimilia quaedam in nonnullis Lunae Eclipſibus alias obſeruata fuere (vt colligi facile poteſt vel ex iis, quae *Obſeruatarum Eclipſium Hiſtoriae* mandauit Io. Baptiſta Ricciolus in *Almageſto* ſuo *Nouo*, Lib. V. Cap. XIX.) quamuis ſimilibus illis in caſibus Caelum ceu ſudum fuerit reputatum. An vero potius dicemus, illiusmodi phaenomena habenda eſſe pro ſignis atque indiciis Lunaris Atmosphaerae, cuius ſint variae variis temporibus denſitates? At hic res haſce vlterius perſequi minime conuenit: ſufficiet, Obſeruationem noſtram retuliſſe.

Temp. *H.*	Appar. ′	″	
12.	20.	30.	Per dehiscentes nubes licuit Lunam obſeruare, quae ſuum lumen rurſus acquirere coeperat.
12.	25.	38.	Copernicus totus extra vmbram.
12.	33.	30.	Tycho iam ex vmbra erat egreſſus.
			Tum denuo coiuere nubes, ac ſolummodo vergente ad extremum Eclipſi, potuit Luna obſeruari.
12.	59.	56.	Mare Criſium detegi coeperat.
13.	3.	18.	Totum Mare Criſium apporebat.
13.	9.	26.	Eclipſis finiuiſſe profecto videbatur.

IV.

IAm vero, ad quos deuenerit gradus proxime elapſo menſe Februario vis frigoris, indicabo. Haec dum perſequor, non dubito ſore, vt cuipiam videar fortaſſe rebus nimium hercle minutis, ac ſuperuacaneis etiam, ſi diis placet, vacare: quotus enim eſt quisque, qui praeteritae ignoret inſolentiam tempeſtatis? At profecto hic mihi liceat ſimilitudine vti a rebus petita generis diuerſi. Si quaedam, quorum cognitio antiquis temporibus cuique obuia erat, eaque vulgaris, deſcripta olim fuiſſent, ac litteris conſignata, ſic vt perueniſſet ad poſteros eorum memoria, quam magno negotio, ac moleſtia liberatos ſe intelligerent eruditi homines, quos nunc eſt neceſſe ire per labores improbos, vt quid ea fuerint, inquirant. Quem non mouerunt nerunt lapidem, quas ſe non verterunt in partes iidem ſtudioſi Antiquitatis exploratores, vt valorem eruerent ſeſtertiorum? hos partiti ſunt in minores, in maiores; quae notio, et vis huic ſubiecta eſſet nomini, quando neutro genere enunciatur, expenderunt; omnia demum rimati ſunt: atqui quanti eſſet ſeſtertius res eſſe debuit olim ipſis nota tonſoribus ac foemellis. Superiore vero ſaeculo, quam ſtudioſe quaeſitum inter doctos homines fuit, qui ſitus eſſet, quae conſtitutio remorum in triremibus, in quadriremibus, in quinqueremibus, aliisque antiquis nauigiis, et quam multa hac ſuper re ſcripta ſunt? quem remorum ſitum atque ordinationem, vtpote rem notiſſimam omnibus, quibus notum eſſet mare, nemo ſcriptorum veterum tanti fecit, vt ſcripturae credendam putaret.

Sic vt a rebus in exemplum adductis veniamus ad illam, quae prae manibus eſt, ſi ex antiquis Philoſophis Naturalibus exſtitiſſent, qui quae ſua aetate contigiſſe obſeruarunt (contigiſſe enim multa obſeruatu digna credibile eſt) quaeque tum temporis nota omnibus fortaſſe fuerunt, ob eamque cauſſam, quaſi publica ac vulgaria, relata in commentarios ſunt a nemine, Φαινομένα prodita ſcriptis, mittenda curauiſſent ad poſteros; facile nunc ex multarum eiusmodi obſeruationum comparatione quibusdam ſcientiae Phyſicae partibus afferri lumen poſſet.

Ecce igitur quae me primum cauſa mouerit, vt obſeruarem, quae me deinde impulerit, vt diligenter obſeruatam ſcripto exponerem notam omnibus, et publicam rem. Quoniam vero propoſitum erat mihi maximos frigoris gradus diſcernere, expoſueram aëri libero atque aperto,

aperto, appensum parieti ad Septemtriones aduerso Thermometrum elaboratum atque diuisum ea ratione, qua vti consueuit Fahrenheitius, ingeniosus ille harum rerum artifex, et quam descripsit doctissimus ac celeberrimus vir *Petrus van Musschembroekius* in Opere (pag. 12.) cui titulus: *Tentamina Experimentorum Naturalium captorum in Academia del Cimento* etc.

Instrumenti autem constructio ac diuisio talis est. Cylindrus Thermometri, in quo inest Mercurius, cum acerbius est hyemis frigus, iniicitur in niuem aut in glaciem comminutam, quacum permixta sit par vis salis ammoniaci; atque ad illud punctum, quo Mercurius intra tubulum descendit, primum graduum initium, id est o adnotatur: tum statuitur cylindrus in pura glacie, ac signatur punctum illud, ad quod Mercurius intra tubulum pertingit; interiectumque inter duo illa puncta interuallum diuiditur in partes 32, quae Gradus vocitantur; ex quorum graduum magnitudine scala producitur sursum versus: deinde eodem cylindro aquae ex vino distillato ebullienti iniecto, quamdiu liquor ipse inclusus ebulliat, Mercurius ad gradum 184. fere attollitur: denique iniecto cylindro in aquam puram ebullientem, pariter donec Mercurius quoque ipse ebulliat, is ad gradum vsque 214. euehitur.

Verum quoniam obseruaui, atque expertus sum, si aqua ex vino distillato purgatior fuerit, aut minus purgata; ac, si salis ammoniaci copia maior sit, vel minor, quam copia glaciei, cum qua permiscetur; tam inter ascensiones, quam inter depressiones Mercurii in Thermometro

metro nonnihil nasci discriminis, censerem (*) fore haud inutile, videre, an praestaret capere longitudinem interualli inter duo puncta, alterum purae glaciei, alterum aquae ebullientis, ac secundum eam longitudinem peragere diuisionem, et an id esset conducibilius, quam partiri primum lineam inferiorem inter punctum purae glaciei, et punctum glaciei cum sale ammoniaco permixtae. Fortasse linea illa maior, atque certius determinata, rei melius inseruiret, quam ista.

Sed haec obiter, ac veluti per transennam. Ad propositum vt reuocem me, factum bene putaui, si obseruationes meas omnes redigerem in Tabulam, quam etiam appono indicatam A. Prima eius columna exhibet dies mensis: Secunda gradus integros, omissis minutiis, eleuationis Mercurii in Thermometro, quo vsus sum *Fahrenheitiano*, vt superius dixi: Tertia altitudines Barometri (huius scala diuisa est in digitos, ac partes decimales, sumptas ex pede Anglico): Quarta ventos, quos ego indicaui per initiales litteras nominum transalpinorum *Nord*, *Est*, etc.: Quinta demum caeli aërisque constitutionem. Illud monebo, descriptas obseruationes eadem hora omnes factas a me fuisse, hoc est paulo ante Auroram; idque maxime ob eam caussam, quia tempus illud frigidissimum esse totius diei plerumque solet.

 Si

(*) Quod Illustrissimus Auctor hic tentandum esse censet, an praestaret capere longitudinem interualli inter duo puncta, alterum purae glaciei, alterum aquae bullientis? id Auctor dissertationis antecedentis de Thermometris concordantibus, pag 310. in Academia nostra executus est.

Si quis autem quaerat, quare obſeruationes exhibuerim ſpectantes ad menſem Februarium potius, quam quae ad Ianuarium pertinebant; reſpondebo, id me feciſſe primum ob eam cauſſam, quia menſe Ianuario nunquam peruenerat ad eum gradum frigus, ad quem perueniſſe menſe Februario obſeruatum eſt; deinde ob hanc etiam cauſam aliam, quia res me noua atque inſolens, vt id facerem, mouit; inauditum eſt enim ſub hoc caelo noſtro maximam frigoris vim perceptam fuiſſe poſt 3. Idus Februarias.

Huius porro frigoris vis tanta aliquando (pridie Idus eius menſis) fuit, vt maior potius, quam minor exſtiterit, quam quae tum hac in Vrbe, tum in caeteris finitimis percepta eſt menſe Ianuario An. 1709. quantum calculo fas eſt colligere ex obſeruationibus tum temporis inſtitutis: Thermometris tamen alia ratione conſtructis, ac nunc ſoleant Fahrenheitiana. Quod ſi cui mirum hoc loco videatur, anno iſto non eas contigiſſe concretiones aquarum (puta venetorum aeſtuariorum), quae anno 1709. acciderunt; rei huius, vt mittantur reliquae, haec reddi ratio poteſt ſatis idonea, facilis, et clara. Nam anno quidem 1709. (quo tempore peragebantur obſeruationes, de quibus loquor) fere continua erat frigoris vis illa immodica: contra vero anno hoc (obſeruationum per nos inſtitutarum tempore) ſub ortum ſolis incipiebat nonnihil remitti frigus, ſenſimque pergebat decreſcere vsque ad horam fere quartam poſt meridiem; quo tempore ſingulis prope diebus ſub veſperas acutior ventus ſpirabat ab occaſu (W.) atque hinc frigus increſcebat fere vsque ad Auroram.

Thermometrum Gradus	Barometrum DIG. DEC		Ventus.	Aeris Constitutio
29.	29.	96	S	Nix
30.	29.	66	N W	Coelum nubibus obductum. Et pluit.
27.	29.	46	N W	Coelum nubibus obductum. Et pluit.
26.	29.	56	N	Nix.
24.	29.	40	N	Nix.
30.	29.	72	N	Nubes sparsae.
27.	30.	10	N W	Coelum sudum.
18.	30.	8	W	Coelum sudum.
15.	30.		W	Coelum sudum.
3.	29.	84	W	Coelum sudum.
8.	29.	86	W	Nubes paucae raraeque.
5.	29.	76	W	Coelum sudum.
13.	30.		N W	Coelum sudum.
18.	29.	92.	N W	Coelum sudum.
21.	29.	65.	N W	Coelum sudum.
18.	29.	65.	N W	Coelum nubibus obductum.
20.	29	94	N	Coelum sudum.
14	29.	86.	N W	Coelum sudum.
12.	29.	56.	W	Coelum sudum.
16.	29.	60.	N W	Coelum sudum.
21.	29	66.	W	Nubes rarae.
25.	29.	92.	N	Coelum nubibus obductum.
20.	29.	74	N	Coelum nubibus fere obductum.
22.	29.	64	N E	Coelum sudum.
24.	29.	66.	W	Coelum sudum.
24.	29.	48.	N W	Coelum sudum.
28.	29.	48.	E	Paucae nubes.

Dies S. N. Februarius	Thermometrum Gradus	Barometrum DIG.	DEC.	Ventus.	Aeris Conſtitutio
3.	29.	29.	96.	S	Nix
4.	30.	29.	66.	N W	Coelum nubibus obductum. Et pluit.
5.	27.	29.	46.	N W	Coelum nubibus obductum. Et pluit.
6.	26.	29.	56.	N	Nix.
7.	24.	29.	40.	N	Nix.
8.	30.	29.	72.	N	Nubes sparsae.
9.	27.	30.	10.	N W	Coelum sudum.
10.	18.	30.	8.	W	Coelum sudum.
11.	15.	30.		W	Coelum sudum.
12.	3.	29.	84.	W	Coelum sudum.
13.	8.	29.	86.	W	Nubes paucae raraeque.
14.	5.	29.	76.	W	Coelum sudum.
15.	13.	30.		N W	Coelum sudum.
16.	18.	29.	92.	N W	Coelum sudum.
17.	21.	29.	65.	N W	Coelum sudum.
18.	18.	29.	65.	N W	Coelum nubibus obductum.
19.	20.	29	94.	N	Coelum sudum.
20.	14	29.	86.	N W	Coelum sudum.
21.	12.	29.	56.	W	Coelum sudum.
22.	16.	29.	60.	N W	Coelum sudum.
23.	21.	29	66.	W	Nubes rarae.
24.	25.	29.	92.	N	Coelum nubibus obductum.
25.	20.	29.	74.	N	Coelum nubibus fere obductum.
26.	22.	29.	64.	N E	Coelum sudum.
27.	24.	29.	66.	W	Coelum sudum.
28.	24.	29.	48.	N W	Coelum sudum.
29.	28.	29.	48.	E	Paucae nubes.

roram. Mirari ergo desinamus, si frigus hoc anno, quod per aliquam solummodo, eamque breuem diei partem, vi summa agebat, per ceteras autem diei partes vim illam summam in agendo modo magis remittebat, modo minus (remittebat tamen semper) non potuerit eos effectus edere, quos edidit anno 1709. quo anno fere semper eadem fuit et constans frigoris saeuities summa, tum propter vim venti, tum propter defectum Solis interdiu, aërisque nocturnam serenitatem.

In *Mercurio Historico et Politico* (Tomo Mensis Martii An. 1740. ad calcem) qui apud Batauos typis editur, descriptae sunt obseruationes nonnullae in hyeme A. 1739. et 1740. habitae Harlemi ab *D. Nicolai Duino*, Thermometro Fahrenheitiano. Sed incertum an dies ibi indicati reuocari debeant ad stilum veterem (quod faciendum fortasse videretur esse) ac praeterea obseruationes illae paucis Ianuarii ac Februarii diebus respondent. Ex iis tamen videtur mihi posse colligi, quod et maxime loci conuenit ingenio, frigus in Batauia vehementius fuisse, quam hic apud nos: sed illic quidem summum frigus mense Ianuario contingit; hic mense Februario; ac frigus maximum Februarii hic paullo ante desaeuiit, quam illic frigus maximum eiusdem mensis.

Quod autem ad physicas insolentium frigorum caussas attinet, de iis facile sciri aliquid certi, affirmarique poterit, si tempus appetat, quo pateat manifestius, quare fiat vt ver quandoque vberioribus solito scateat vaporibus, vnde praeter morem modumque pluuiae tempestates existunt;

ſtunt; vt quandoque aëri permiſceantur multo maiore, quam fieri vt plurimum ſoleat, copia ſulphureae particulae, a quibus naſcitur immodicus tempeſtatum feruor. Tum illud etiam fortaſſe conſtabit clarius, quare interdum referciatur aër vi tanta nitroſorum corpuſculorum, quae cauſſam praebeant frigoris praeter modum ſaeui. Naſci enim frigus, aut certe vim eius intendi ex nitri maxime acceſſione, ſuadent in primis glacies arte confectae, quae (quaemadmodum conſtat ex variis certisque experimentis) magis magisque intendi obſeruantur vel aucta partium nitri cum glacie permixtarum magnitudine, vel nitro ad maiorem vim redacto, exempli cauſſa, ſi in glaciem nitri ſpiritus infundatur. Sed vt haec aliquando innoteſcant melius et clarius, opus eſt perdiuturna certarum accuratarumque tum obſeruationum tum experimentorum ſerie: quam ob rem praeſtat, vt ego quidem puto, in commentarios referre omnes illas meteorologicas obſeruationes, quae ſint dignae conſideratu.

Ex multis Datis inter ſe comparatis id ſaepe deducitur, quod minime praeuidebatur, cum primum Data ſingula expenderentur. Ego quidem (vt ingenue fatear) haud admouerem manum operi, niſi prius collecta eſſet tanta materiarum copia, quanta firmo aedificio conſtruendo par eſſe videretur. Quare non addam plura: haec Tu aequi bonique facito, tanquam meae erga Te obſeruantiae monimentum.