Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 48

Übungsaufgaben

Für dieses Aufgabenblatt darf die Beziehung zwischen totalem Differential und partiellen Ableitungen bzw. Richtungsableitungen nicht verwendet werden, außer bei Aufgabe 48.12 bis Aufgabe 48.15 und bei Aufgabe 48.20.

Aufgabe 48.1. Sei $\varphi\colon V \to W$ eine total differenzierbare Abbildung mit $(D\varphi)_P = 0$ für alle $P \in V$. Zeige, dass φ konstant ist.

Aufgabe 48.2. Ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^2,$$

im Punkt -3 total differenzierbar? Was ist das totale Differential in diesem Punkt?

Aufgabe 48.3. Berechne für die Addition

$$+\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x+y,$$

und für die Multiplikation

$$\cdot\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x\cdot y,$$

das totale Differential.

Aufgabe 48.4. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto \min(x,y).$$

(1) Skizziere die Funktion.
(2) Zeige, dass f stetig ist.
(3) Bestimme für jeden Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ und jede Richung $v \in \mathbb{R}^2$, ob die Richtungsableitung in diesem Punkt und in diese Richtung existiert.
(4) Bestimme für jeden Punkt, ob in diesem Punkt die Funktion f total differenzierbar ist.

Aufgabe 48.5. Sei $\varphi\colon V \to W$ konstant mit $\varphi(v) = w \in W$ für alle $v \in V$. Zeige, dass φ differenzierbar ist mit totalem Differential 0.

Aufgabe 48.6. Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Es sei $\varphi\colon G \to W$ im Punkt $P \in G$ differenzierbar mit dem Differential $(D\varphi)_P$. Zeige, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ die Beziehung

$$(D(a\varphi))_P = a\,(D\varphi)_P$$

gilt.

Aufgabe 48.7. Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Polynomfunktion. Zeige, dass f im Nullpunkt total differenzierbar ist. Man gebe dabei explizit das totale Differential und die Abweichungsfunktion an.

Aufgabe 48.8. Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Polynomfunktion. Zeige, dass f in jedem Punkt total differenzierbar ist. Man gebe dabei explizit das totale Differential und die Abweichungsfunktion an.

Aufgabe 48.9. Seien V, W_1 und W_2 endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume.

(1) Seien $L_1\colon V \to W_1$ und $L_2\colon V \to W_2$ $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen. Zeige, dass die Abbildung

$$L_1 \times L_2\colon V \longrightarrow W_1 \times W_2,\ v \longmapsto (L_1(v), L_2(v)),$$

$\mathbb{R}$-linear ist.

(2) Seien $f_1\colon V \to W_1$ und $f_2\colon V \to W_2$ im Punkt $P \in V$ differenzierbare Abbildungen. Zeige, dass die Abbildung

$$f = (f_1 \times f_2)\colon V \longrightarrow W_1 \times W_2,\ Q \longmapsto (f_1(Q), f_2(Q)),$$

im Punkt P differenzierbar ist mit dem totalen Differential

$$(Df)_P = (Df_1)_P \times (Df_2)_P\,.$$

Die folgende Aufgabe verwendet das Konzept Äquivalenzrelation.

Eine *Äquivalenzrelation* auf einer Menge M ist eine Relation $R \subseteq M \times M$, die die folgenden drei Eigenschaften besitzt (für beliebige $x, y, z \in M$).

(1) Es ist $x \sim x$ (*reflexiv*).
(2) Aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$ (*symmetrisch*).
(3) Aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$ (*transitiv*).

Dabei bedeutet $x \sim y$, dass das Paar (x, y) zu R gehört.

Aufgabe 48.10. Seien V, W endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Weiter seien $f, g\colon G \to W$ Abbildungen und $P \in G$. Wir nennen f, g im Punkt P *tangential äquivalent*, wenn der Limes

$$\lim_{v \to 0} \frac{(f-g)(P+v)}{\|v\|}$$

existiert und gleich 0 ist.

(1) Zeige, dass dadurch eine Äquivalenzrelation auf der Abbildungsmenge von G nach W gegeben ist.
(2) Es sei f total differenzierbar. Zeige, dass f zu seiner linearen Approximation tangential äquivalent ist.
(3) Es seien f und g tangential äquivalent. Zeige, dass in diesem Fall f genau dann in P total differenzierbar ist, wenn dies für g gilt, und dass ihre totalen Differentiale im Punkt P übereinstimmen.

Aufgabe 48.11. Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeige, dass die Skalarmultiplikation

$$\varphi\colon \mathbb{R} \times V \longrightarrow V,\, (s, v) \longmapsto sv,$$

in jedem Punkt $P = (s, v)$ total differenzierbar ist mit

$$(D\varphi)_P\,(t, w) = tv + sw.$$

Aufgabe 48.12. a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (x, y) \longmapsto \left(xy - 2y^3 + 5,\, x^3 - xy^2 + y\right),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt $(1, 2)$?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung $(4, -3)$.

d) Berechne den Wert von φ in diesem Punkt.

Aufgabe 48.13. a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (x, y, z) \longmapsto (xy - zy + 2z^2, \sin(x^2yz)),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt $(1, -1, \pi)$?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung $(2, 0, 5)$.

d) Berechne den Wert von φ in diesem Punkt.

Aufgabe 48.14. Bestimme das totale Differential der Determinante

$$\det\colon \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\, M \longmapsto \det M,$$

für $n = 2, 3$ an der Einheitsmatrix.

Aufgabe 48.15.*

Wir betrachten die Abbildung

$$(x, y) \mapsto \varphi(x, y) = x^y .$$

(1) Was ist der Definitionsbereich $G \subseteq \mathbb{R}^2$ dieser Abbildung?
(2) Berechne die Jacobi-Matrix von φ in jedem Punkt $P \in G$.
(3) Ist die Funktion total differenzierbar?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 48.16. (5 Punkte)

Untersuche die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ bei } (x, y) \neq (0, 0)\,, \\ 0 \text{ bei } (x, y) = (0, 0)\,, \end{cases}$$

auf partielle Ableitungen und totale Differenzierbarkeit.

Aufgabe 48.17. (4 Punkte)

Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Menge, $\varphi\colon G \to W$ eine Abbildung und $L\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind.

(1) φ ist differenzierbar in P mit dem totalen Differential L.
(2) Der Limes

$$\lim_{v \to 0, v \neq 0} \frac{\varphi(P + v) - \varphi(P) - L(v)}{\|v\|}$$

existiert und ist gleich 0.
(3) Der Limes

$$\lim_{v \to 0, v \neq 0} \frac{\|\varphi(P + v) - \varphi(P) - L(v)\|}{\|v\|}$$

existiert und ist gleich 0.

Aufgabe 48.18. (4 Punkte)

Seien $f_1, \ldots, f_n$ differenzierbare Funktionen in einer Variablen. Bestimme das totale Differential der Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)).$$

Aufgabe 48.19. (5 Punkte)

Bestimme für die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x\,|y|\,,$$

für jeden Punkt P und jede Richtung v, ob die Richtungsableitung in P in Richtung v existiert und ob die Funktion in P total differenzierbar ist.

Aufgabe 48.20. (4 Punkte)

a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y) \longmapsto (x+y^2, xy, \exp x),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt $(3,2)$?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung $(-1,-7)$.

d) Berechne den Wert von φ in diesem Punkt.

Abbildungsverzeichnis