復興初級中學教科書

幾何教員準備書

余介石　胡術五　徐子豪編著

商務印書館發行

復興初級中學教科書

幾何教員準備書

余介石 胡術五 徐子豪編著

商務印書館發行

中華民國二十三年五月初版
九月三版
(57321·1)

初級中學用
復興教科書 幾何教員準備書 一冊
每冊定價大洋玖角
外埠酌加運費匯費

編著者 胡術五 余介石 徐子豪
主編兼發行人 王雲五 上海河南路
印刷所 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠

(本書校對者胡達聰)

B五六〇三

復興初中教科書

幾何

教員準備書

編輯大意

1. 本書專爲教師謀教授的便利而編.

2. 將教本材料依照部章預作時間的支配,以備教授時有所斟酌.

3. 就教本每編作教材摘要,以備省覽及督促學生溫習之助.

4. 提出教授要點,供教師教授前後的準備和注意.

5. 練習問題除一目了然者外,均有答數,或提示,或略解以節教師演證的時間和精力.

6. 與教本相補而編,教本爲整潔謹嚴起見或有不容暢敍的地方,於此均加以補充的說明.

復興初中教科書

幾何

教員準備書

目錄

第一編　基本圖形及其作圖……1

第二編　量法　圖形和度量……15

第三編　理解幾何引論……33

第四編　三角形……45

第五編　平行論　四邊形……77

第六編　圓和軌跡……103

第七編　比例論……139

第八編　幾何計算……169

雜　題……189

復興初中教科書

幾何

教員準備書

第一編　基本圖形及其作圖

(一)　教材的說明

幾何學的結構和證明方法,與算術代數的運算不同.初學好像初走生路,往往不易了解,以前的教本多數開始便羅列許多抽象的公理,定理等,使學生囫圇呑棗,強事記憶,不但枯燥無味惹人厭倦,且使興趣濃厚的幾何變成莫明其妙的迷樓幻閣,豈非恨事!

本編先就眼前事物引起幾何觀念,間用摺紙法使學者由實驗切實認識幾何上基本定義定理等,既易了解,且便記憶.

幾何基本作圖,多設練習,不加證明以悟理論幾何的基本.遇有可以就實驗極易明瞭作圖的理由,亦附帶作簡單的說明,總以不涉艱深,不費苦思爲主,以免

發生厭倦。

(二) 教材的摘要

名稱 本編講過的名稱如下:—

平面幾何學;立體幾何學;立體;面;平面;曲面;線;直線;曲線;點;幾何元素;幾何圖形;幾何作圖;圓規;圓;圓心;半徑;角;頂點;邊;直角;銳角;鈍角;垂線;線段;端;延線;輔助線;中點;三角板;疊合法;分角線;平行線;切線;切點;花紋圖形。

本編實驗習題中所引起的名稱如下:—

垂直平分線;直徑;弦;半圓;三角形;外接圓;內角;外角;內切圓;等腰三角形;四邊形;平行四邊形;梯形。

記號 本編所用的記號如下:—

點常用大寫英文字母如 A, B, P 等來記。直線常用二點記出,如 AB 線,CD 線等。有時亦用一個小寫字母記出如 a 線,l 線等。

角常記以 $\angle BAC$,中間一個字母 A 必須是角的頂點。

幾何元素的關係 有四條如下:—

(一) 立體以面為界。

(二) 面以線為界。

(三) 線以點為界。

(四) 線相交成點。

由實驗引出關於幾何基本的公法和簡單定理 有五條如下:—

(一) 二點決定唯一的直線。

(二) 圓上任何點皆距圓心等遠。

(三) 已知圓心和半徑,即可作一圓。

(四) 經過線上一點,或線外一點,有一條垂線,但只有一條垂線可作。

(五) 凡是直角都相等。

基本作圖:

關於直線的作圖法 有五種如下:—

(一) 取等長線段法 已知 AB, XY 二線段, AB 小於 XY, 求在 XY 上取線段等於 AB.

(二) 平分線段法 已知 AB 線段,求分 AB 為兩等分。

(三) 過一已知點作一線的垂線法。

因點的位置不同,分兩種作法。

(1) 過已知線上一點作其垂線。

(2) 過已知線外一點作其垂線。

(四) 過一已知點作一已知線的平行線法。

(五) 等分線段法　分已知線段爲任意等分。

關於角的作圖法　有兩種如下:—

(一) 平分角法　已知$\angle BAC$,求分爲兩等分。

(二) 作等角法　已知$\angle BAC$,求在一直線上於一已知點作一角等於$\angle BAC$。

關於圓的作圖法　有二種如下:—

(一) 過不在一直線上已知三點的圓的作法。

(二) 過一已知點作圓的切線法。

因點的位置不同,分兩種作法。

(1) 作圓上一已知點的切線。

(2) 自圓外一已知點作圓的切線。

(三)　教材的分配

在教學上,本編最好分做11課教授,另加溫習一小時.分法約略如下:—

第 1 課——從第1節"幾何學目的"起到習題一末了止.習題即在教室口頭問答。

第 2 課——從第6節"線"起到習題二末了止.習題1到4即在教室口頭問答.第5題略加討論用紙照剪在課外書面畫圖註出答案。

第 3 課——從第10節"幾何作圖和所用儀器"起到第12節"圓規用法"止.同時並在教室做習題三的1到4諸題的書面練習,最好能當時交卷.

第 4 課——從第13節"角"起並做完習題三.5,6兩題可口頭問答.7題用書面練習,並寫出答案,當時交卷.

第 5 課——從第15節"線段"起到習題四末了止.習題四中1至4可在教室略加討論,即做書面練習.以後各題命學生課外做書面練習.

第 6 課——從第18節"基本作圖題三".起到習題五末了止.除1,2,3三題可在教室做書面練習外第4題亦應在教室略加討論並以後各題命學生在課外做書面練習.

第 7 課——從第21節"疊合法"起到習題六末了止.1,2兩題可在教室作書面練習.其餘各題應略加說明命學生在課外做書面練習.

第 8 課——從第24節"平行線"起到第26節"基本作圖題八"止.並在教室命學生做習題七的1,2兩題,當時交卷.

第 9 課——在教室內討論並做完習題七各題.來不

及的在課外補完.

第10課——從第27節"基本作圖題九"起到第29節"基本作圖題七一"止.並在教室做習題八中1,2兩題.

第11課——從第30節"花紋圖形"起到做完習題八止.來不及的命學生在課外補完.

第12課——依照教材的摘要溫習本編.

(四) 教授的要點

教授本編,教師應備的器具大略如次:直尺,粉筆,圓規,三角板,及其他可以說明幾何元素的實物.例如鉛筆便可示學生以平面,曲面及面與體的關係之類.因為初學若不澈底了解幾何的基本觀念,以後影響很大.必須盡量多舉眼前實物反復解說使學者認清各名稱的界說.

遇到可以用實驗方法說明的地方務須命學生一一親自去做.例如第4節平面曲面的分別,應各用直尺實行就筆筒,皮球等物去試出曲面與平面的不同.餘類推.

候學生都能很自信的認清幾何元素後再進一步

說明幾何元素與實物似是而實非的理論.同時並告以作圖表示幾何元素必須力求精確.例如幾何上的點,最好當用交線×來表示,不能用·表示之類.因爲所作的圖也是實物,無論如何精細亦只得其近似.若任意塗抹更有毫釐千里之差了.在此預提警告,不但可以漸漸養成學生整潔精細的習慣,並且於將來幾何作圖大有裨益.

學生應備的用具如直尺,圓規,三角版等,也須命其預先置備.練習習題二的時候,教師更應預備硬紙或圖畫紙若干以備發給學生做第5題.

習題中有借以引起其他名稱如習題四第7題之類.教師應於教室提出,細加講說.

由習題用實驗方法推出的結論,爲實驗幾何的主要目的,尤關重要.例如上舉第7題"弦和直徑的長短比較"應令學生多畫幾個圖來實驗,自己寫出結論,教師不宜預告.偸嬾的學生往往嬾得多做,或問結果,或抄他人的結論,所以此種題最好在教室中分出時間,做書面練習,當時交卷.

基本作圖題爲研究幾何圖形的根本,極其重要.應令學生照樣作圖,同時用實驗方法考其是否眞確.例

如線的平分,角的平分可從平分線,或平分點摺轉驗其是否相等.等線等角的作圖,可用疊合法驗其是與已知線或角是否相等.垂線作圖可依垂線摺轉疊合,驗兩角是否相等.餘類推.

花紋圖形爲幾何圖形的應用,且寓美觀於規律之中,尤足助學者興趣,如有時間教師最好在書外儘量搜羅,以作補充.

(五) 習題解答

習題一 在教科書的第3頁.

四個口答題,答語略.

習題二 在教科書的第5頁.

(1) 點和線的關係,可用一句話說出;線和面,面和體的關係,可以換一句話說出麼?

[提示] 仿第8節答出.

(2) 如以兩點表點,則兩點下降成線時,可以代表點線間的什麼關係?和§8所說的相同麼?

[答] 點密集成線.不同.

(3) 精於武術的人舞起棍子來,可以潑水不入,勝如銅牆鐵壁.今以棍表線,這例可以表示線與面間的

何種關係?和§6所說的同不同?

[答] 線移動成面.不同.

(4) 用銅元直立桌面上,用力旋轉.這例可以表示體與面間的何種關係?和§3所說的同不同?

[答] 面旋轉成體.不同.

(5) 照題實驗,答語略.

習題三 在教科書的第9頁.

這些都是實驗題,答語略.

(4) 題結論:

同半徑的圓相等.

習題四 在教科書的第12頁.

(2) 已知 AB, CD 二線段,求其和及差(AB 長於 CD).

[提示] 照§16基本作圖題一作等於 AB 的線段,再於延線上作等於 CD 的線段.即得所求的和.

於 AB 上取與 CD 等長的線段,剩下來的即所求的差.

(3) 求將一已知線段,分為4等分,8等分,16等分.

[提示] 照基本作圖題二連續平分.

(1),(4),(5),(8) 諸實驗或口答題答語略.

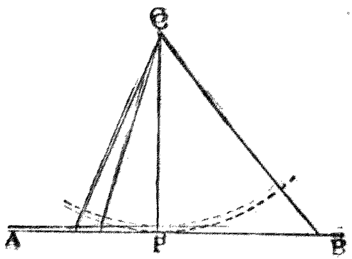
(6) 自 AB 的垂直平分線上任取一點 P,連 PA, PB

而比較二者的長短多試幾次,推出一條結論來。

[結論] 自垂直平分線上任一點 P,與被平分線兩端的連線恆相等。

(7) 在一已知圓內,試比較直徑和弦的長短,而寫出一條結論來。

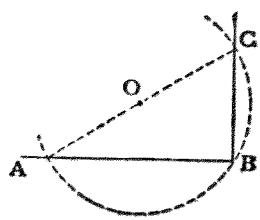
[結論] 圓內任意畫弦均短於直徑。



(9) 已知 CP 垂直於 AB。其他各線,叫做斜線。設法比較各線段的長短,而推出一條結論。

[結論] 垂線最短,小於任一斜線。斜線與 AB 的交點離 P 愈遠的,則其線愈長。

習題五 在教科書的第15頁。



(4) 如在線段端點求作其垂線,往往要將這線段延長,再依基本作圖題三的方法去求。右圖表示不必延長,亦可作出。試說明其作法步驟。

[答] 以任意適當點 O 為圓心, OB 為半徑畫圓弧,

與線段交於A,連AO得直徑與圓弧之交點C,連CB即所求在端點B垂直於線段的線。

其餘實驗諸題,答語略.

習題六　本教科書的第19頁.

(1　將一已知再分爲4等分,角分爲8等分.

[提示]　照基本作圖題五,連續平分.

(2)　試用摺紙法平分一角.

[提示]　從頂點摺轉使兩邊疊合.所得摺痕卽角的平分線.

其餘實驗諸題,答語略.

習題七　本教科書的第23頁.

(4)　說出一種用摺紙驗明二直線平行的方法來.

[答]　任意摺轉一線使兩段疊合,若他一線同時也能兩段疊合,則兩線平行.

(6)　分一條已知線段成三部份,使成1:2:3的比.

[提示]　照基本作圖題八的作圖,作六等分先連$B6$,再在3,1分點作平行線.

其餘諸實驗題,答語略.

習題八　本教科書的第26頁.

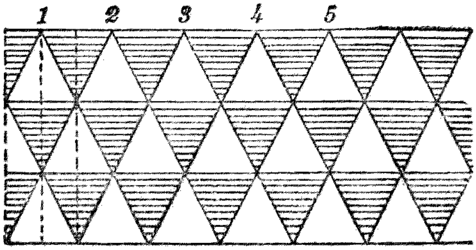
(1),(2)兩題答語略.

(3) 甲乙丙三家,不在一直路上,求掘一井,隔三家距離要一樣遠近,問有什麼方法?

[提示] 照基本作圖題九.視 A, B, C 三點代表三家.圓心 O 即所求掘井的地點.

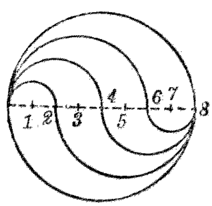
(4) 畫下面的各種花紋圖形.

(i)

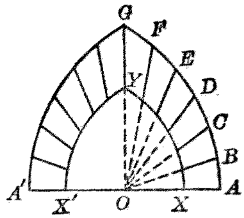


[提示] 先作四條等距離平行線,分爲任意等分如 1, 2, 3…等.每段再作垂直平分線,如圖中虛線.最後照圖畫平行線即得.完全畫好後,應將輔助線擦去.

(ii) [提示] 先畫直徑,再分爲八等分.以 1, 7 分點做圓心,以直徑 $\frac{1}{8}$ 的長做半徑上下畫半圓.照樣以 2, 3; 6, 5 爲圓心,依次以直徑 $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$ 做半徑上下畫半圓.

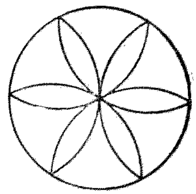


(iii) [提示] O 爲 AA 的中點,取 $AX=A'X'$ 以 AA' 做



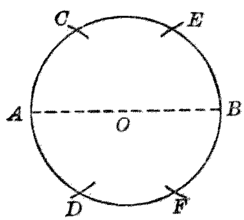
圓心. OA 做半徑畫兩弧交於 G. 以 X, X' 做圓心, OX 做半徑畫兩弧交於 Y. 再等分 AG, $A'G$ 兩弧,得 $A, B, \cdots$ 等點.

連各等分點至 O 作諸線即得.

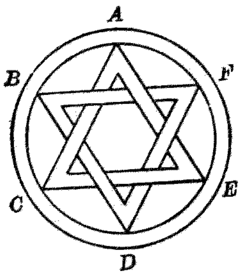


(iv) [提示] 任意畫直徑 AB, 再以 A, B 做圓心, AO 做半徑畫弧,於圓周上,得 C, D, E, F 諸點.

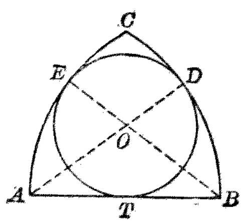
以圓周上六點做圓心, AO 做半徑,在圓內畫弧,即得.



(v)



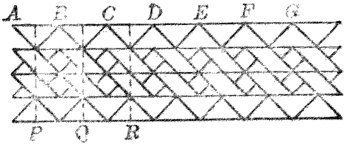
[提示] 照上圖於內圓周上作得六點, 連 ACE 及 DBF 作三角形,擦去輔助線即得.



(vi) [提示] T 爲 AB 中點.以 O 做圓心適宜長做半徑作圓切

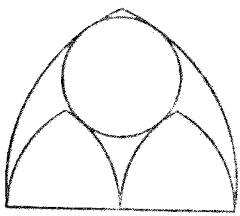
AB 於 T. 再以 A, B 做圓心, 過 O 的直線 AD 做半徑畫兩弧一端交於 C, 他端交 AB 線兩端或其延線上.

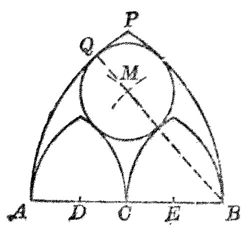
(vii) [提示] 先作五條等距離的平行線再等分之得 A, B,…等點.又平分 AB 諸距離得 P, Q,…等點.再照圖連續即得.



(viii) [提示] 畫 AB 線, 分爲四等分.用 A, B 做圓心, AB 做半徑畫兩弧交於 P.

再用 A, B 做圓心, AE, BD 做半徑畫弧得交點 M. 連 BM 並延長交 AP 弧於 Q.用 M 做圓心, MQ 做半徑畫圓.再用 A, C, B 做圓心, AC 做半徑畫四弧即得.





第二編　量法　圖形和度量

(一)　教材的說明

前編用摺紙與疊合法,實驗幾何圖形的種種關係,並由此可以推得許多重要結論.但並不管圖形的數量關係.

本編再就數量關係,用量法來實驗幾何圖形的種種關係,亦可由此推出許多重要結論.這兩編都非幾何的正式開始,不過便於初學了解,如理論幾何的預備.

直接或間接量法,雖只能得幾何圖形的近似關係,但於實用方面極其重要.本編於相似形及求積等多設實例以明其效用.並且均由淺顯的實驗方法以導出公式極便於初學的了解和記憶.

(二)　教材的摘要

名稱　本編講過的名稱如下:——

量法,單位,直接量法,折線,距離,相似形,多角形,間接量

法,三角形元素,數值三角學,面積,長方形,平行四邊形,菱形,對角線,任意多角形,正多角形,頂心距,邊心距,辛普孫法則,二面角,面角,體積,表面積,含線面,柱面,錐面,柱體,錐體,直柱,直角柱,直圓柱,直錐體,直角錐,直圓錐,斜高球。

本編實驗習題中所引起的名稱如下:—

平角,等邊三角形,正方形,圓周率,環形,弓形。

記號 本編所用的記號如下:—

用△表三角形;大寫字母A表面積;C表圓周;V表體積,S表面積;小寫字母h表高;b表底邊;r表半徑;l表斜高;希臘字母π表圓周率。

公式 本編講過的公式如下:—

(一) 長方形面積公式 $A=hb.$

(二) 平行四邊形面積公式 $A=hb.$

(三) 梯形面積公式 $A=h(a+b)/2.$

[註] a, b各表上,下底的長度。

(四) 三角形面積公式 $A=\frac{1}{2}hb.$

(五) 正多角形面積公式

$$A=\frac{1}{2}(\text{邊數}\times\text{邊長}\times\text{邊心距})$$

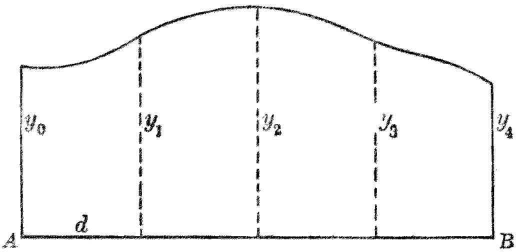
(六) 圓周公式 $C=2\pi r.$

（七）圓面積公式　$A=\pi r^2$.

（八）辛普孫氏求一般面積的差近公式

$$A=\frac{1}{3}d(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4).$$

［註］ d 是底邊長的四分之一，即 $\frac{AB}{4}$.
y 是由曲線到底邊垂線的長度.



（九）長立方體積公式　$V=abc$

［註］ a, b, c 各表長,闊,高.

（十）長立方體表面積公式　$S=2(ab+bc+ca)$

（十一）直角柱表面積公式　$S=2A+Ph$

［註］ A 是底面積，P 是底周長度.

（十二）直圓柱表面積公式　$S=2\pi r^2+2\pi rh$

$=2\pi r(r+h)$

（十三）直角錐表面積公式　$S=A+\frac{1}{2}Pl$

（十四）直圓錐表面積公式　$S=\pi r^2+\pi rl$

（十五）球面積　$S=4\pi r^2$

(十六) 直角柱體積公式 $V=hA$

(十七) 直圓柱體積公式 $V=\pi hr^2$

(十八) 直角錐體積公式 $V=\frac{1}{3}hA$

(十九) 直圓錐體積公式 $V=\frac{1}{3}\pi hr^2$

(二十) 球體積公式 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

本編所述由實驗量法推得的結論,有三條如下:

(一) 三角形三個角的和等於一平角。

(二) 二點間的距離,以直線爲最短。

(三) 兩相似三角形有下列條件,

(i) 對應角相等

(ii) 對應邊的比相等。

三角形有下述情形之一,便完全決定,即可依基本作圖法,把他畫出:

(一) 已知三邊.但須任二邊的和大於第三邊。

(二) 已知二邊和夾角。

(三) 已知二角和一邊.有兩種情形如下:

(i) 二已知角在已知邊的兩端。

(ii) 一已知角與已知邊相對。

(四) 已知二邊和與一邊相對的角。

[註] (四)因情形較複,本書從略,待講數值之角時補充.

面積求法:

(一) 長方形面積 量底和高(即長與闊),再依公式計算.

(二) 平行四邊形面積 量底和高,依公式計算.

(三) 梯形面積 量上下底和高,依公式計算.

(四) 三角形面積 量底和高,依公式計算.

(五) 任意多角形面積 自一頂作對角線,分成許多三角形,再照三角形求積的和.

(六) 正多角形面積 量邊長,並由表算出邊心距,再依公式求面積.

(七) 圓面積 量半徑,依公式計算.

(八) 曲線形面積 用辛普孫氏法求.

(九) 長方體表面積 量長,闊,高,依公式計算.

(十) 直角柱表面積 量底周,體高,並求出底面積,再依公式計算.(底周有時亦可算出)

(十一) 直圓柱表面積 量高和底半徑,依公式計算.

(十二) 直角錐表面積 量斜高,底周(或算出)並求出底面積,再依公式計算.

(十三) 直圓錐表面積　量斜高,及底半徑;依公式計算.

(十四) 球面積　求得半徑再依公式計算.

體積求法:

(一) 長立方體積　量長,闊,高,依公式計算.

(二) 直角柱體積　量高,並求得底面積,再依公式計算.

(三) 直圓柱體積　量高和底半徑,再依公式計算.

(四) 直角錐體積　量高,並求得底面半積,再依公式計算.

(五) 直圓錐體積　量高和底半徑再依公式計算.

(六) 球體積　求得半徑,再依公式計算.

(三)　教材的分配

在教學上本編最好分做16課教授,另加溫習一小時.分法約略如下:—

第13課——從第31節"量法"起到第34節"實際上作圖"止.並命學生照習題九中從1到5各題做書面練習.

第14課——在教室補做習題九的6,7,8三題當時交卷,並教第35節"距離"命學生在課外做習題十的第一題.

第15課——從第36節"相似形"起到習題十末了止.實用各題應先加說明.

第16課——從第38節"三角形的作圖題"起到第41節的作法止.並點出習題十一中從1到7諸題用第40節41節法可作者令學生做書面練習.

第17課——從第42節的作法起到習題十一末了止.除補完1—7習題外,以後各題在教室略作口頭問答,再令學生作書面練習.

第18課——從第43節"面積"起到第45節"平行四邊形面積"止.並令學生做習題十二中的1, 2, 3三題.

第19課——從第46節"梯形面積"起到做完習題十二諸題.來不及的可在課外補完.第9題應特別提出,略加說明.

第20課——從第48節"任意多角形的面積"起第49節"多角形內角和"止.並命學生在課室內實驗填表,寫出公式,當時交卷.

第21課——從第50節"正多角形"起到習題十三末了止.來不及的令學生在課外補完.

第22課——從第53節"圓周率"起到做完習題十四中

1到5各題.來不及的令學生課外補完.

第23課——講第55節"平面積一般求法"並略說明第7,8,10等題.命學生做完習題十四.

第24課——從第56節"空間的平面與直線"起到第57節"二面角"止.並令學生在教室做習題十五的第1題.

第25課——從第58節'體積"起到習題十五末了止.

第26課——講完第60節"簡單立體"並用紙剪模型,口頭問答使學生明白爲止.

第27課——講完第61節"各簡單立體表面積"並命學生做習題十六從1到9中求面積各題.

第28課——講完第62節"各簡單立體體積"並命學生做完習題十六.

第29課——照教材的摘要溫習本編.或作口頭問答,或令學生作黑板練習.

(四) 教授的要點

教授本編,教師應備的用具大略如次:

有度尺,分角器,及硬紙剪成的立體模形,若備有木製模型以備說明更好.

凡與幾何定理有關的實驗題如習題十的第1題,應令學生在課室多畫圖自量,並寫出結論來.其他類似之題都應如此.

應用各題應於講授餘暇,略爲說明.遇到由習題引起之幾何名詞,亦應於講授餘暇,作口頭問答以引起注意.如習題十一中的"等邊三角形"及"正方形"之類.

習題照預擬的分配,往往多數學生不能如期完卷,實爲一大阻礙.如有此情形,應隨時在教室擇一二學生作黑板練習,其餘留心參閱,以圖補救.

講到求面積體積等處時,最好於可能範圍中,設法實地測量如桌,硯,黑板,教室,操場,等等,不但可以做記憶公式的幫助.並可增加學習算學的興趣.

圓周的量法,若用圓形物在直線上滾轉須注意不可滑走,若用線繞須擇彈性甚小的線,則計算所得的π值愈近似.

球半徑的簡單量法,可用兩塊平板平行夾住球體,再量兩板間的垂直距離,則得球直徑,再由此算出半徑.

講各公式時,如有特例,宜特爲提出,例如於長方形求面積公式後,應附帶說及正方形面積公式.

$$A=(\text{邊長})^2.$$

同樣於長立方柱體體積之後,應附帶說及正立方體體積公式　$V=(\text{邊長})^3$.

(五)　習題解答

習題九　在教科書第31頁.

這些都是實驗題,答語略.

(7)(8)兩題的結論是

三角形三個角的和等於一平角.

習題十　在教科書第35頁.

(1)　在一圓內,作三條弦線,三條相等,一條較長(或較短)比較自圓心到各弦線上距離的長短.

[答]　相等的弦與圓心距離相等,較長的弦離圓心較近(或較短的弦離圓心較遠)

(2)　實驗題,答語略.

(3)　5尺長的竹竿直立地上,竿影恰好是3尺.若同時樹影是6尺4寸,求樹高.

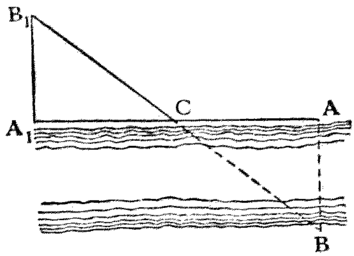
[答]　10.67尺.

(4)　臨窗遠眺,直持5寸長的鉛筆,使F端與目齊,眼望上端,和山頂在一直線上.已知人距鉛筆1尺2寸,距

山脚約77丈,求山高.

［答］ 32.08 丈.

(5) 欲求一河的闊可沿河岸,量一段適宜的長 AA_1 與河闊 AB 垂直,并在其中取一適宜的 B_1C 點.



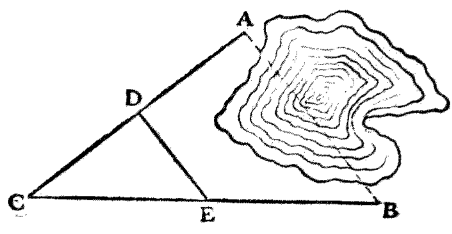
自 A_1 向後行至 B_1,望見和 C, B 在一直線上.則

$AB : AC = A_1B_1 : A_1C$

設 $A_1A=6$ 丈, $A_1C=3$ 丈 2 尺, $A_1B_1=2$ 丈 4 尺, 求河闊.

［答］ 2 丈 1 尺.

(6) A, B 二地爲山所阻不能直達.今取一可直達 A, B 二地之一處 C, 并取 AC 的中點 D, BC 的中點 E. 量得 DE 的距離.試寫出 AB 和 DE 的關係式來(AC, BC 的長,都不必知道)



設 $DE=100$ 丈, 求 A 和 B 相隔的距離.

［解］ $AB=2\ DE=200$ 丈.

習題十一 在教科書第41頁.

求作下列各三角形(自1至7)並量其他各元素。

實驗題答語略。

下列五題何故不能作圖.依作法試試看。

(8) $AB=1.4$ 寸, $BC=3.8$ 寸, $CA=2.2$ 寸.

(9) $AB=2.5$ 寸, $BC=2.4$ 寸, $CA=4.9$ 寸.

[答] (8) $AB+CA<BC$

(9) $AB+BC=CA$

參閱§40討論。

(10) $BC=3.2$ 寸, $\angle CBA=94^\circ$, $\angle ACB=88^\circ$

(11) $AB=2.9$ 寸, $\angle BAC=122^\circ$, $\angle CBA=78^\circ$

(12) $BC=4$ 寸, $\angle BAC=108^\circ$, $\angle CBA=89^\circ$

[答] 上列三題兩角的和均等於或大於一平角.

參閱§42(二)的註。

(13), (14), (15), (16) 四實驗題,答語略。

習題十二 在教科書第45頁.

求下列各題中用?號記出各項.

	圖形＼量	A	h	b	a
(1)	長方形	567.1方寸	?	10.7寸	——
(2)	平形四邊形	?	262公分	60.3公分	——

(3)	平行四邊形	287.1方公分	26.1公分	?	——
(4)	三　角　形	?	10.1寸	36公分	——
(5)	三　角　形	1平方呎	?	4吋	——
(6)	梯　　　形	?	2寸2分	1尺3寸1分	3寸2分
(7)	梯　　　形	17250方尺	?	250尺	350尺
(8)	梯　　　形	22000方吋	$7\frac{1}{3}$呎	18.75呎	?

[答]　(1)　$h=53$ 寸

(2)　$A=15798.6$ 平方公分

(3)　$b=11$ 公分

(4)　$A=545.4$ 方寸

(5)　$h=72$ 吋

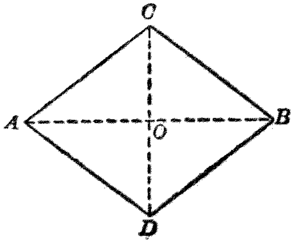
(6)　$A=17.93$ 方寸

(7)　$h=57.5$ 尺

(8)　$a=22.92$ 呎

(9) 各邊都等的四邊形,叫做菱形(Rhombus).試畫一菱形如右圖,幷連接對頂的線(叫對角線 diagonals),看這二線段是否垂直.

試求出用二對角線長表面積的公式來.



[提示]　$\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\times CO.$

$\triangle ABD=\frac{1}{2}AB\times OD.$

$\therefore \quad A=\frac{1}{2}(AB\times CD).$

(10)　實驗題,答語略。

習題十三　在教科書第50頁。

都是實驗題,答語略。

習題十四　在教科書第53頁。

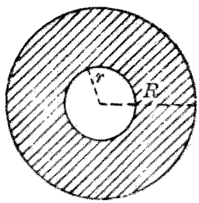
(1), (2), (3) 三實驗題,答語略。

(4)　如圓面積爲100平方公分,求其半徑.

[答]　$r=\dfrac{10}{\sqrt{\pi}}$.

(5)　求以直徑d表圓面積的公式.

[答]　$A=\dfrac{1}{4}\pi d^2$.



(6)　有同一圓心的大小二圓,大的半徑爲R,小的爲r.

求二圓間的面積,這形叫環形(Ring).

[答]　$A=\pi(R^2-r^2)$

(7)　已知扇形弧長的s,半徑爲r,求其面積公式.

[答]　$A=\dfrac{1}{2}sr$

(8)　扇形二半徑夾角與360°的比,等於弧長與圓周的比.設已知半徑爲r,夾角爲A.求所對弧長.

［解］ 設弧長爲 s.

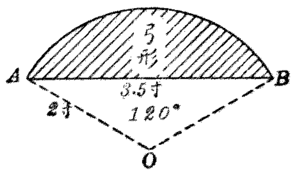
$$A : 360° = S : 2\pi r$$

$$S = \frac{1}{180}\pi A r.$$

(9) 已知扇形的半徑爲 5, 夾角爲 30 度,求弧長.

［答］ $S = 2.618.$

(10) 一弧和其附弦圍成的圖形稱爲弓形 (Segment of a circle).



試求右圖的弓形面積.

［解］ 弓形 = 扇形 − $\triangle AOB$.

AB 爲內接正三角形的一邊.

從 O 到 AB 的距離 $= 0.289 \times 3.5 = 1$ 寸 (看 $p.$44 表)

$$\therefore \quad \triangle OAB = \frac{1}{2} \times 1 \times 3.5 = 1.75 \text{ 方寸}$$

又　　扇形 $= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 2^2 = 4.19$ 方寸

$$\therefore \quad \text{弓形} = 4.19 - 1.75 = 2.44 \text{ 方寸}$$

習題十五　在教科書第 57 頁.

都是實驗題.

習題十六　在教科書第 63 頁.

求下列各題中用?號記出的各項.

	圖形＼量	V	S	A	P	h	r	l
(1)	方柱體	——	?	81方寸	——	9寸	——	——
(2)	五角柱體	——	?	110方尺	25寸	32寸	——	——
(3)	圓柱體	?	?	——	——	3寸	$1\frac{1}{2}$寸	——
(4)	直圓錐	?	——	——	——	48寸	14寸	——
(5)	正方錐體	40.5立方公尺	——	?	——	4.5公尺	——	——
(6)	球	?	153.86平方公尺	——	——	——	?	——
(7)	直圓錐體	?	?	——	——	8尺	6尺	10尺
(8)	球	?	?	——	——	——	2尺3寸	——
(9)	正方錐體	?	?	——	32寸	3寸	——	5寸

［答］ (1) $S=486$ 方寸

(2) $S=228$ 方尺

(3) $S=13.5\pi$ 方寸

$V=6.75\pi$ 立方寸

(4) $V=3136\pi$ 立方寸

(5) $A=27$ 方公尺

(6) $r=3.64$ 公尺

$V=26.49$ 立方公尺

(7) $V=100.5$ 立方尺

$S=301.4$ 方尺

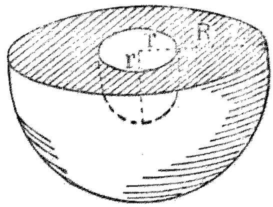
(8)　$S=21.16\pi$ 方尺

$V=16.22$ 立方尺

(9)　$V=64$ 立方寸

$S=144$ 方寸

(10)　有一個中空的半球形鐵缽如右圖外半徑是 R, 裏半徑是 r. 試證此鐵缽的表面積是:　$\pi(3R^2+r^2)$.



[解]　半球外面積 $=2\pi R^2$

半球內面積 $=2\pi r^2$

環形面積　$=\pi(R^2-r^2)$

∴　鐵缽的表面積 $=2\pi R^2+2\pi r^2+\pi(R^2-r^2)$

$=\pi(3R^2+r^2)$

(11)　地球直徑長7920哩,求地球的體積和面積.若地球比重爲5.6,求地球的重量.

[解]　$V=828\times10^8$ 立方哩

$S=627\times10^5$ 平方哩

又1哩 = 1.61公里, 1立方公里水重 1000 公斤

∴　重量 $=3455\times10^{11}$ 公斤

(12) 六吋徑的球鍍以半吋厚的銅.若每立方吋的銅值銀一角六分,問鍍費若干?

[答] 2.88π 元。

第三編　理解幾何引論

證法基本事件

(一)　教材的說明

本編所講,終算是眞正幾何.由實驗方法的不可靠,用淺顯的幻圖證明感官往往得謬誤的結果;用量法亦只能得近似的結果不能得普遍的眞理,以導出理解幾何的必要.

幾何公理,公法,及基本定理,本極易了解.初學往往不曉得應用,好像匠人徒然有了斧頭,而不能運用,所以應特加訓練.

本編於此,特加注意.在證定理之前(看§73)詳述解析的重要.先羅列已知,且與證題有關的公理,定理等,再選擇應用,實爲初學一大便利.

本編所講幾何基本定理,處處提示與前兩編由實驗所得的結果.互相比較,使學者由回憶,而對於算理的認識愈透徹.

(二) 教材的摘要

名稱 本編講過的名稱如下:—

證理幾何學;公理;定理;公法;普通公理;代換公理;定義;幾何公理;周角;餘角;補角;共軛角;隣角;對頂角;餘鄰角;補鄰角;假設(即前提);結論;解析;間接證法;系。

公法 本編提到的作圖公法如下:—

(一) 過兩點可作一直線。

(二) 直線可任意延長。

(三) 已知圓心和半徑可作一圓。

公理 本編講過或復述的公理如下:—

(一) 代換公理 <u>在一式中的量,都可用等量來替換,而不改其結果。</u>

(二) 直線公理 <u>通過二點,有一直線,但只有一直線。</u>

(三) 二點距離公理 <u>二點中間,直線段最短。</u>

(四) 直角公理 <u>凡直角皆相等。</u>

(五) 垂線公理 <u>過已知直線上一點,可作一垂線,但只可作一垂線。</u>

(六) 移形公理 <u>凡圖形得移其位置,而不變其形狀大小。</u>

定理 本編講過的定理如下:—

(一)等角餘角定理 同角或等角的餘角必定相等.

(二)等角補角定理 同角或等角的補角,必定相等.

(三)對頂角定理 二直線相交,所成的對頂角相等.

(四)中點定理 一線段只有一中點.

(五)中分角線定理 一角只有一中分角線.

(六)等圓半徑定理 同圓或等圓的半徑必定相等.

[系] 同圓或等圓的直徑必定相等.

(七)圓心定理 一圓只有一心.

記號 本編所用過的記號如下:—

平角的記號是 $st.\angle$; 直角的記號是 $rt.\angle$.

(三) 教材的分配

在數學上,本編最好分做六課教授,另加溫習一小時,分法約略如下:

第 30 課——從第 63 節"證法的需要"起到習題十七的末了止.習題可在教室做書面練習.來不及的,在課外補完.

第 31 課, 第 32 課——從第 66 節"定義"起到習題十八末了止.

依教授情形隨意分作兩課。

2, 3, 4, 5, 6 諸題在教室問答.其餘諸題命學生在課外做書面練習。

第 33 課——從第 70 節"隣角,對頂角"起到第 71 節"等角的餘角補角"末了止。在教室內做習題十九的 1, 2 兩題的口頭問答,並做 3, 4, 5, 6 四題的書面練習,來不及的,課外補完。

第 34 課——從第 72 節"定理的形式"起到做完習題十九止.習題可命學生在課外做書面練習.

第 35 課——講完第 74 節"中點,分角線."並在教室內做習題二十的 1 至 4 四題的黑板練習仍命學生在課外復做書面練習.

第 36 課——從第 75 節"間接證法"到第 76 節"圓的特性"末了止.並做完習題二十的 5 到 11 諸題.第 5 題可在教室口頭問答,其餘做書面練習.來不及的課外補完。

第 37 課——依照教材摘要溫習本編,作口頭問答.倘有餘時擇要做黑板練習.

(四) 教授的要點

初學幾何的人,除開不知解析的方法,不能應用已知的理外,還有一個通病,就是往往認不請命題中的前提和結論,因果倒置.有了前病,必致證題時不得其門而入,有了後病,必致勞而無功,寫了許多,全不合格,初學往往因此灰心.以後便有荊棘滿途之嘆了.

這兩病的最大原因;一是初學缺少幾何證法的經驗,一是教師命學生練習之前,不曾注意多加說明.應照本編§72的例,多方解釋,並於教室中,選簡易命題反復練習,養成學生認淸前提和結論,及應用已知眞理的能力.以後所講,便不難迎刃而解.

證題的格式務須整潔簡明依法開列.本書習題解答,不過略解或提示而已.

證明直覺靠不住的圖形,最好多示數例,使學生深感理證的必要.不致有憑藉直覺猜擬幾何圖形性質的危險.

習題二十中的分點諸題應在教室先作黑板練習

講間接證法時應說及必須命題情形非此即彼而設有其他情形存在的道理,如習題二十的5題那犯人是"聾"或"不聾,"決不許有"半聾"或"似聾非聾"等情形的可能.

(五) 習題的解答

習題十七 在教科書的第67頁.

都是問答和實驗題,答語略.

習題十八 在教科書第72頁.

(1) 答語略.

(2) 如二角互為餘角,能不能有一角為鈍角?這二角一定是何種角?

[答] 不能.銳角.

(3) 如二角互為補角,這二角的大小如何?能不能二個都是銳角,或二角都是鈍角?

[答] 不能.只能一個是鈍角.或兩個都是直角.

(4) 如二角互為共軛角.這二角的大小如何?

[答] 二角或都是平角;或一鈍角,一反角;或一銳角,一反角.

(5) 何種角與他的餘角相等?與他的補角相等?與他的共軛角相等?

[答] 45°角.直角.平角.

(6) 鐘表上長針走了周角時,短針走過幾直角?又長針走幾平角時,方使短針走半直角?

[答] 一直角.三平角.

(7) $\angle a$ 的餘角是什麼?補角呢?共軛角呢?

[答] $(90-a)^\circ$ 角,$(180-a)^\circ$ 角,$(360-a)^\circ$ 角.

(8) 互爲餘角的二角是 $2a^\circ$ 和 $3a^\circ$.求 a°.

[提示] 用方程式 $2a+3a=90^\circ$ 求.

(9) 互爲補角的二角爲 $\left(\frac{3x}{2}\right)^\circ$ 和 $(x+30)^\circ$.求 x°.

[提示] 用方程式 $\left(\frac{3x}{2}\right)^\circ+(x+30)^\circ=180^\circ$ 求.

(10) 共軛的二角相差 100°.求這二角.

[提示] 設一角爲 x,則另一角爲 $x+100$.

再用方程式 $x+x+100^\circ=360^\circ$ 求.

(11) 證明平面定理:凡平角皆相等.

照教科書上的註做.

(12) 二補隣角的平分線成功什麼角?

[答] 直角.

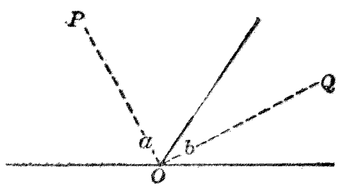
可證如下:

$\angle a+\angle b=180^\circ$ (定義)

$\frac{1}{2}(\angle a+\angle b)=90^\circ$ (?)

$\frac{\angle a}{2}+\frac{\angle b}{2}=$ 直角

$\therefore$ $\angle POQ=$ 直角(?)



習題十九　在教科書第78頁.

(1), (2) 兩題答語略.

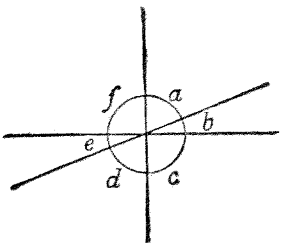
(3) 二直線相交成二組對頂角,中有一直角,求他角.

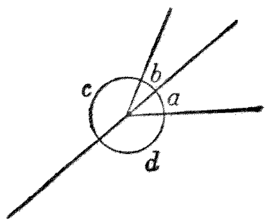
［提示］ 由對頂角定理 (§ 73) 及等角補角定理 (§ 71) 易證其他三角都是直角.

(4) 試證: 等角或同角的共軛角必定相等.

［提示］ 用共軛角定義及等量減等量公理證.

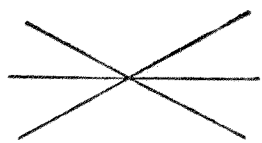
(5) 下面左圖內 $\angle a+\angle b=85^\circ$, $\angle b+\angle c=120^\circ$. 求各角.





［答］ $\angle b=25^\circ=\angle e$; $\angle a=60^\circ=\angle d$;

$\angle c=95^\circ=\angle f$.



(6) 上面右圖內, $\angle a=\angle b$, 試證 $\angle c=\angle d$.

［提示］ 用等角補角定理 (§ 71) 及等量減等量公理證.

(7) 試證: 一角的平分線必平分他的對頂角(上右圖)

[提示] 用對頂角定理及代換公理證.

(8) 二直線相交,一組對頂角比他組對頂角和要大 16°, 求各角.

[提示] 設較小的一組對頂角中每一角爲 $x°$,

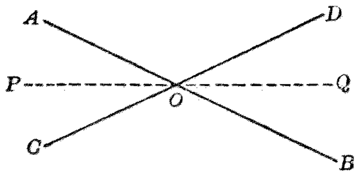
再用方程式 $2x+2x+16=360°$. 求 $x°$.

並且較大的一組對頂角中每一角爲 $(x+8)°$ 甚易求得.

(9) 二直線相交,二組對頂角各是 $(5x+7)°$, $(3x+37)°$ 求各角度數.

[提示] 用方程式 $2(5x+7)+2(3x+37)=360°$ 先求出 x, 易得二組對頂角各是 92°, 88°.

(10) 二對頂角的平分角線,成功什麽角? 這二條分角線成功一條直線麽?



[解] $\angle AOB=$ 平角 (定義)

即 $\angle AOD+\angle DOQ+\angle QOB=$ 平角,

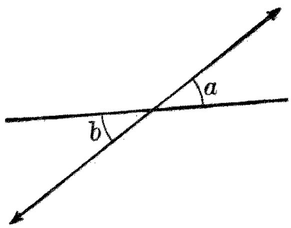
$\therefore$ $\angle AOC=\angle BOD$ (對頂角)

又 OP, OQ 各爲平分角線.

$\therefore$ $\angle POA=\angle DOQ=\angle QOB$

∴ $\angle POA+\angle AOD+\angle DOQ=$ 平角 (代換公理)

∴ PO 與 OQ 成直線。



(11) 在直線上一點向上下各引一直線使 $\angle a=\angle b$ 如右圖。證明他們成爲一條直線.

[提示] 用等角補角定理先證 $\angle a$, $\angle b$ 的補角相等.再照上用代換公理證。

習題二十 在教科書第82頁。

(1) 線段 AB 上有一點 C, 使 $AC:CB=2:3$, 試證只有這一點能如此。

[提示] 仿照 §74, (一) 證。

(2) 在上題中,如 AB 線段上有一點 D, 使 $BD:DA=2:3$. 那麼 D 點是否與 C 點相合? 如 $BD:DA=3:2$. 則如何?

[提示] 不相合.如 $BD:DA=3:2$ 則相合。

可仿照 §74 (一) 證法找出 $\dfrac{BD}{BA}$ 及 $\dfrac{AC}{CB}$ 的關係來證。

(3) 在線段 AB 的過 B 端延長線上, 有一點 C 使 $AC:BC=3:2$. 試證只有這一點能如此。

[提示] 仿照 §74 (一) 證。

(4) 我們能不能在線段 AB 過 B 端的延長線上,得一點 C,使 $AC:BC=2:3$?

[答] 不能。因爲分量不能大於全量。

(5) 某犯人欲避法官的審問,故意裝聾,弄得法官無法審判。後來想出一法。令人在犯人背後,故意放一空鎗,把犯人嚇了一跳。我們能不能就此斷定那犯人是不聾麽?什麽緣故?

[提示] 可仿照 §75 的例來證。

(6) 試證:二條直線相交,只能定一點。

[提示] 可用間接證法,假設有兩點相交,再由二點決定一直線的道理來證假設不眞。

(7) 試證:二等圓相疊合時,圓心必定相合。

[提示] 用間接證法,假設有二心,再由 §76 (二)的圓心定理來證假設不眞。

(8) 試證:二等圓圓心相合時,二圓必定疊合。

[提示] 用間接證法,假設二圓不疊合,再由 §76 的等圓定義來證假設不眞.

(9) 半徑不等的二圓能完全疊合麽?什麽緣故?

[提示] 用間接證法,假設能完全疊合,再由 §76 的等圓定義來證假設不眞.

(10) 二圓不等,他們的直徑能相等麼?

[提示] 仿上題用間接證法及等圓直徑系來證.

(11) 將大小二圓圓心相合,則小圓必定完全落在大圓之內.

[提示] 照教科書的註證.

第四編　三角形

疊合法

(一)　教材的說明

前編已說過幾何證法的必要和格式.以後便就幾何本身,為以前由實驗方法所得的結果作謹嚴的理論的證明.或由此更得用實驗方法不易求到的新理.

三角形為幾何全部中最重要的一個統系.本編專述三角形邊角的關係及兩三角形相互間的定理.分全等形及非全等形兩大類.

前編間接證法,僅粗示簡例,就兩種不相容的情形,證其不合於彼,必合於此.本編§104所述則為較複雜的應用,就二種以上的相異情形,包舉一圖形一切可能的狀況,例如二量a, b或相等,或$a>b$,或$a<b$而不容有第四種狀況.用間接證法,根據已知的理,破其二為非眞,即可決定其餘一為眞了.

(二)　教材的摘要

名稱　本編所講過的名稱如下:—

全等形;逆定理;頂垂線(即高),外角;內外分角線;間接元素;斜邊;不等量;歸謬證法;轉換法.

記號 本編所用的記號如下:—

"≡"表示全等形;"△"表示三角形;"(s. a. s.)"表示有兩邊夾一角對應相等的全等三角形;"(a. s. a.)"表示有兩角夾一聯邊對應相等的全等三角形;"(s. s. s.)"表示有三邊對應相等的全等三角形;">"表示大於;"<"表示小於;"≥"表示大於或等於;"≠"表示不等於;"≯"表示不大於;"≮"表示不小於.

疊合法 關於全等形的基本應用可分二層如下:

(一) 線段疊合 將此線的一端點與彼線的一端點疊合,若兩線段同向疊起來,另一端點亦疊合,即兩線段全等.

(二) 角的疊合. 將兩角的頂點和一邊疊合,若他一邊亦疊合,即兩角全等.

定理 分三種如下:—

[1] 關於全等三角形的

(一) 全等三角形定理一(s. a. s.) <u>兩三角形有二邊夾一角對應相等,則兩三角形必全等.</u>

(二) 全等三角形定理二(a. s. a) <u>兩三角形有二角一</u>

聯邊對應相等,則兩三角形必全等.

(三) 全等三角形定理三(s. s. s.) 兩三角形中如三邊彼此對應相等,則兩三角形必全等.

(四) 全等直角三角形定理一. 兩直角三角形有斜邊及一銳角對應相等,則必爲全等形.

(五) 全等直角三角形定理二. 兩直角三角形中,有一斜邊及他一邊,對應相等,則必爲全等形.

[2] 關於一個三角形的邊和角的

(一) 等腰三角形定理一. 三角形二邊如相等,對二邊的角也必相等.

(二) 等腰三角形定理二. 三角形二角如相等,對二角的邊也必相等.

(三) 三邊關係定理. 三角形中,無論那二邊的和,必大於第三邊

[系] 三角形中從大邊減去小邊的較,必小於第三邊.

(四) 外角定理. 將三角形一邊延長,所成外角必大於不相隣的任一內角.

[系] 一個三角形中,只能有一鈍角或一直角.

(五) 邊角關係定理一(大角的對邊也大). 一個三角

形中,若一角大於他角,則這角所對的邊,也大於他角所對的邊.

[系] 從直線外一點到這線上的一切線段,以垂線為最短.

(六) 邊角關係定理二(大邊的對角也大). 一個三角形中,若一邊大於他邊,則這邊所對的角也大於他邊所對的角.

[3] 關於非全等三角形的

(一) 非全等三角形定理一(腰間角大底邊大). 兩三角形,有兩邊彼此對應相等,則這兩邊夾角大的所對的邊也大.

(二) 非全等三角形定理二(底大腰間角也大). 兩三角形有二邊彼此對應相等,則底邊大的對角也大.

全等三角形定理三的應用:

(一) 平分已知線段作法的證明.

(二) 過線上一點垂線作法的證明.

(三) 過線外一點垂線作法的證明.

(四) 已知角平分角線作法的證明.

公理 本編所講過的公理如下:—

(一) 垂線公理二。過已知線外一點,可作這線的一垂線,但只可作一垂線。

(二) 全分公理。全量必大於分量。

不等量公理:

(一) 如 a 與 b 是同類二量;則必定,且只能合於下面三式之一,

$$a=b;\ a>b;\ a<b.$$

(二) 如 $a>b$, $b\geqslant c$ 或 $a\geqslant b$, $b>c$, 則必有

$$a\geqslant c.$$

(三) 如 $a>b$, $c>d$ 則 $a+c>b+d$.

(四) 如 $a>b$, $c=d$ 則 $a-c>b-d$.

$$c-a<d-b.$$

(五) 如 $a>b$, $c>d$, 則 $ac>bd$.

(六) 如 $a>b$, $c=d$, 則 $a/c>b/d$.

$$c/a<d/b.$$

(三) 教材的分配

在教學上本編最好分做十四課講授,另加溫習一小時.分法約略如下:—

第 38 課
第 39 課——從第 77 節"全等形"起到習題二一末了止.照實際講授情形隨意分做兩課教授.習題可擇一二題在教室做黑板練習,其餘命學生在課外做書面練習.

第 40 課
第 41 課——從第 81 節"等腰三角形"起到習題二二末了止.照實際講授情形分做兩課教授.每課稍留時間在習題二二中選一二題在教室做書面練習,當時交卷.其餘各題命學生在課外做書面練習.

第 42 課——講完第 86 節"全等三角形定理三"並在教室中做習題二三第 1, 2 兩題的口頭問答第 3, 4 兩題的書面練習.

第 43 課——從第 87 節"全等三角形定理三的應用"起到第 92 節"三角形中間接元素"末了止.習題二三第 5 以後各題在教室內略做黑板練習,在課外用書面做完.

第 44 課
第 45 課——從第 93 節"垂線公理二"起到習題二四

末了止.依實際講授情形分做兩課教授.每課在教室中酌提簡單習題(如習題二四中的1, 2,)作口頭及黑板練習,來不及的令學生在課外用書面補完.

第 46 課——講完第 99 節"不等量公理"並在教室用書面做習題二五第 1 題,當時交卷.第 2, 3 兩題亦令在學生在課外做書面練習.

第 47 課——從第 100 節"幾何方面不等量的基本諸理"起到第 101 節"不等量證法"末了止.並命學生做完習題二五第 4 題以後各題的書面練習.

第 48 課
第 49 課——從第 102 節"外角定理"起到習題二六末了止.照實際教授情形,分做兩課講授.習題可分兩次在教室用書面做完.

第 50 課——從第 105 節"邊角關係定理二"起到第 106 節"三邊關係定理的又一證法"末了止.並命學生在教室內用書面做習題二七的第 1 題,當時交卷.

第 51 課——從第 107 節"非全等三角形定理一"起到

習題二七末了止.選一二題在教室中作書面練習,餘在課外補完.

第 52 課——照前面的教材摘要温習全編.

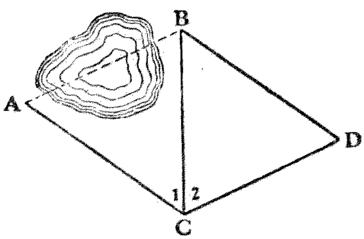
(四) 教授的要點

疊合法是幾何中一種不得已的基本證法.凡可以用已知定理來證的全等形,應不用疊合法爲宜.如必須應用時,須注意"教材的摘要"疊合法下面兩條.因爲初學無法證題時,往往想用疊合法,並且用時往往失當,易犯似是而非的弊病.

講到逆定理時應使學生特別注意定理的逆理不盡眞.因爲初學不但有逆理皆眞的懸想,且記憶定理時,不記淸前提和結論,更易發生此誤.

關於不等量的六條公理,在證題時極爲重要,可用數目實例,解釋明白,使學生澈底明瞭其道理和應用,

(五) 習題的解答



習題二一 在教科書第 87 頁.

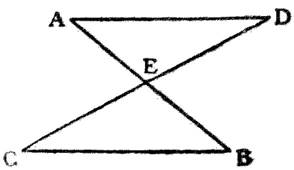
(1) 問答題,答語略.

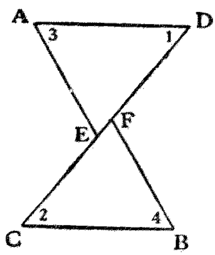
(2)　如右圖，A, B 二點被一塘分隔．要量 AB 的距離，可自一適宜的點 C，使聯得 CA, CB 二線段，不爲塘所阻．另用測量儀器測得 $\angle 2=\angle 1$，幷取 $CD=CA$，證 $BD=BA$．爲什麼？

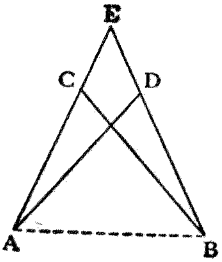
［提示］　用 §80 (s. a. s.) 證．$\triangle ABC \equiv \triangle BCD$，

$\therefore\ BD=BA$　　(全等形對應部份)

(3)　在下左圖內，AB 和 CD 二線段彼此在交點 E 平分證明 $\triangle ADE \equiv \triangle BCE$．







［解］　$AE=EB,\ CE=ED,$　　(題設)

$\angle AED=\angle CEB,$　　(對頂角定理)

$\therefore\ \triangle ADE \equiv \triangle BCE$　　(s. a. s.)

(4)　在上頁中圖內已知 CD 是直線，$DF=CE$，$AD=BC$，$\angle 1=\angle 2$．證明 $\angle 3=\angle 4$ 且 $AE=BF$．

［解］　$CF=DE$　　(代換公理二第一式)

$\therefore\ \triangle AED \equiv \triangle BCF$　　(s. a. s.)

$\therefore\quad \angle 3=\angle 4$ (對應部分)

$AE=BF$ (" " " ")

(5) 在上頁右圖內，已知 $AE=BE$, $AC=BD$. 證明 $AD=BC$, 又 $\angle ACB=BDA$.

[解] $AE=BE$ (題設)

$ED=EC$ (代換公理二第二式)

$\angle E=\angle E$ (公共)

$\therefore\quad \triangle AED\equiv\triangle BEC$ (s. a. s.)

$\therefore\quad AD=BC$ (對應部分)

又 $\angle ADE=\angle BCE$ (" " " ")

$\therefore\quad \angle BDA=\angle ACB$ (等角補角定理)

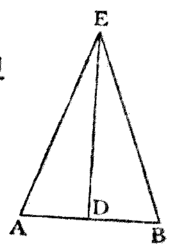
(6) 聯上題圖中 AB. 證明 $\triangle ABC\equiv\triangle BAD$.

[解] $AC=BD$ (題設)

$BC=AD$ (上題已證)

$\angle ACB=\angle BDA$ (" ")

$\therefore\quad \triangle ABC\equiv\triangle BAD$ (s. a. s)



(7) 右圖中 $AE=BE$, 又 ED 是 $\angle AEB$ 的平分線. 證明 $\angle EAB=\angle EBA$.

[提示] $\triangle AED\equiv\triangle BED$ (s. a. s.)

$\therefore\quad \angle EAB=\angle EBA$ (對應角)

(8) 證明右圖中 ED 是 AB 的垂直平分線.

[提示] 由上題結果易知

$\angle ADE=\angle BDE$　(對應角)

$=rt.\angle$　(相等補鄰角)

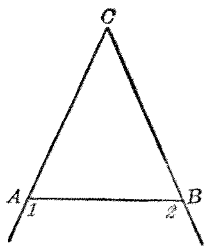
$\therefore\ ED\perp AB$　(垂線定義)

又因 $AD=DB$　(對應邊)

$\therefore$ ED 平分 AB.

習題二二　在教科書第91頁.

(1) 延長一等腰三角形二等邊如右圖,則二外角 $\angle 1$, $\angle 2$ 必等.



[解] $\angle CAB=\angle CBA$ (等腰△定理)

$\therefore\ \angle 1=\angle 2$　(等角的補鄰角)

(2) 如 $\angle 1=\angle 2$, 試證必為一等腰三角形.

[解] $\angle CAB=\angle CBA$　(等角的補鄰角)

$\therefore\ AC=BC$　(等腰△定理二)

$\therefore\ \triangle ABC$ 爲等腰.　(等腰△定義)

(3) 一三角形中各邊都等,試證各角必等.

[提示] 先用等腰△定理一證得兩角相等.

再換一頂點仍用上理又證得此二角中的

一角與第三角相等.

最後由代換公理便可證三角相等.

(4) 上題的逆定理也能成立麼?

[提示] 用等腰△定理二照上題證法可證逆定理也能成立.

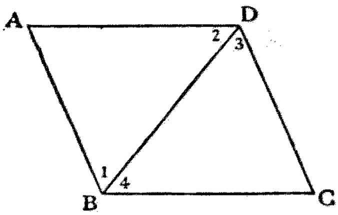


圖 1

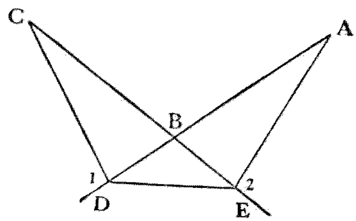


圖 2

(5) 圖 1 內, $\angle 1=\angle 3$, $\angle 2=\angle 4$, 證明 $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$.

[解] $\angle 1=\angle 3$, $\angle 2=\angle 4$ (題設)

$BD=BD$ (公共)

$\therefore$ $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ (a. s. a.)

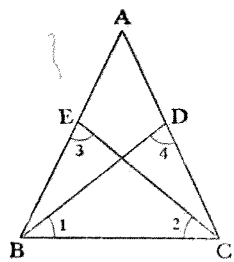


圖 3

(6) 圖 2 內, $BD=BE$, $\angle 1=\angle 2$, 證明 $AB=CB$.

[解] $\angle BDE=\angle BED$ (等腰△定理一)

$\angle BDC=\angle BEA$ (等角的補鄰角)

$\angle CDE=\angle AED$ (代換公理二第一式)

$DE = DE$　(公共)

$\therefore$　$\triangle CDE \equiv \triangle ADE$　($a. s. a.$)

$\therefore$　$CE = AD$　(對應邊)

$\therefore$　$AB = CB$　(代換公理二第二式)

(7)　圖 3 內, $\angle ABC = \angle ACB$, 且 $\angle 1 = \angle 2$, 證明 $BE = CD$, 又 $\angle 3 = \angle 4$.

[提示]　$\triangle BEC \equiv \triangle BDC$　($a. s. a.$)

$\therefore$　$BE = CD$　(對應邊)

$\angle 3 = \angle 4$　(對應角)

(8)　證明上題圖中 $\triangle AEC \equiv \triangle ADB$.

[解]　$\angle ABD = \angle ACE$　(代換公理二第二式)

$BD = EC$　(上題已證全等形對應邊)

$\angle ABC = \angle ADB$　(等角的補鄰角)

$\therefore$　$\triangle AEC \equiv \triangle ADB$　($a. s. a.$)

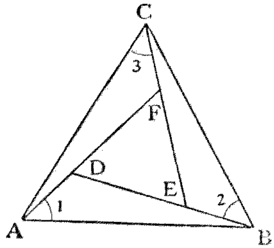
[註]　本題亦可用等腰△定理二,由 $AB = AC$ 及公共角 A, 與 $\angle ABD = \angle ACE$ 的關係證.

(9)　由上二題,證明等腰三角形定理二.

[提示]　由上兩題兩組全等三角形結果之得

$$AB = AC.$$

(10) 右圖中 $AB=BC=CA$. 又 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$. 證明 $DE=EF=FD$.



[提示]　$\angle A=\angle B=\angle C$ (第 3 題結果)

$\angle CAF=\angle ABD=\angle BCE$ (代換公理二,第二式)

$\therefore\ \triangle CAF\cong\triangle ABD\cong\triangle BCE$ $(a.\ s.\ a.)$

$\therefore\ AF=BD=CE$ (對應邊)

及　$AD=BE=CF$ (對應邊)

$\therefore\ DE=EF=FD$ (代換公理二,第二式)

(11) 如 $DE=EF=FD$, 且 $BA=EB=FC$. 證明 $AB=BC=CA$.

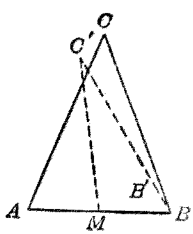
[提示]　$\angle D=\angle E=\angle F$ (第三題結果)

$\angle AFC=\angle BDA=\angle CEB$ (等角的補鄰角)

$\therefore\ \triangle AFC\cong\triangle BDA\cong\triangle CEB$ $(s.\ a.\ s)$

$\therefore\ AB=BC=CA$ (對應邊)

(12) 用間接證法證明等腰△底上中點垂線必過對頂.



[提示] 假設中點 M 垂線不過頂 C 而與一邊交於另一點 C'.

則　$AM=MB$ (題設)

$C'M = C'M$ (公共)

$rt.\triangle AC'M \equiv rt.\triangle AC'M$ $(s.\ a.\ s.)$

於是有 $\angle A = \angle B'$ (對應角)

與 $\angle A = \angle B$ 不能並眞

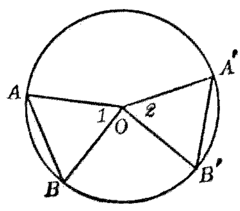
習題二三 在教科書第97頁.

(1) 有三根棒,用釘拼合各端成一三角形.這個三角形還能改變式樣麼?何故?

[答] 不能.因爲三邊已定,三角形便決定了;若能改變式樣,便不能與原式全等,就違背全等三角形定理三了.

(2) 四根棒釘成的四邊形式樣是固定的麼?何故?

[答] 不固定. 因四邊形可看作兩個三角形.這兩個三角形只有兩邊已定.所以三角形沒有決定.



(3) 如右圖中的圓,O是圓心,又 $AB = A'B'$, 證明 $\angle 1 = \angle 2$

[解] $AB = A'B'$ (題設)

$OA = OA'$, $OB = OB'$ (同圓半徑)

$\therefore$ $\triangle OAB \equiv \triangle OA'B'$ $(s.\ s.\ s.)$

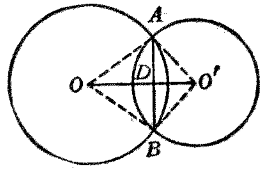
$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$ (對應角)

(4)　如上圖中的圓，已知 $\angle 1=\angle 2$，證明 $AB=AB'$

(解)　$\triangle OAB \equiv \triangle OA'B'$　(s. a. s.)

$\therefore\ AB=A'B'$　(對應邊)

(5)　此 O 和 O' 為圓心的二圓，相交於 A, B 二點．證明 OO' 是 AB 的垂直平分線



[解]　$OA=OB$　(同圓半徑)

$O'A=O'B$　(″ ″ ″ ″)

$OO'=OO'$　(共公)

$\therefore\ \triangle AOO' \equiv \triangle BOO'$　(s. s. s.)

$\therefore\ \angle AOD=\angle BOD$　(對應角)

又因　$OD=OD$　(公共)

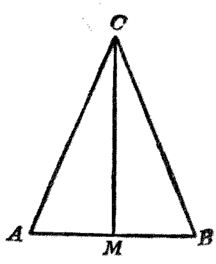
$\therefore\ \triangle OAD \equiv \triangle BOD$　(s. a. s.)

$\therefore\ AD=BD$

又　$\angle ADO=\angle BDO=rt.\angle$

$\therefore\ OO' \perp AB.$

(6)　作一等腰△底邊上中線，由此證明等腰△定理一，并證明這中線即對頂那角的內分角線．



[解]　$AC=BC$ (等腰△定義)

$AM = MB$　　(題設)

$CM = CM$　　(公共)

$\therefore\ \triangle ACM \equiv \triangle BCM.$　　(s. s. s)

$\therefore\ \angle CAB = \angle CBA.$　　(對應角)

即等腰△定理一。

又　$\angle ACM = \angle BCM$　　(對應角)

即中線 CM 平分頂角 C。

(7) 證明一三角形中如一邊上的高和中線相合,則必爲一等腰△,以這邊爲底。

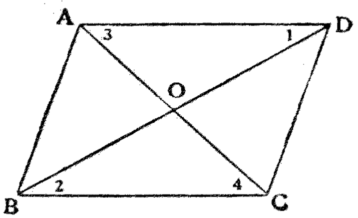
[解] 設 CM 爲 $\triangle ABC$ 的 AB 邊上的高,與中線相合,即 $AM = MB$ (上題圖)

$\angle AMC = \angle BMC = rt.\angle$　(垂線定義)

$\therefore\ \triangle ACM \equiv \triangle BCM$　　(s. a. s.)

$\therefore\ \angle A = \angle B$　　(對應角)

(8) 右圖(在下頁)中 $AB = CD$, $AD = BC$, 證明 $\angle BAD = \angle DCB$, $\angle ADC = \angle CBA$.



[解]　BD 公共,

$\therefore\ \triangle BAD \equiv \triangle BCD$　　(s. s. s.)

$\therefore\quad \angle BAD=\angle DCB$ (對應角)

又 AC 公共

$\therefore\quad \triangle ADC\equiv\triangle CBA$ (s. s. s.)

$\therefore\quad \angle ADC=\angle CBA$ (對應角)

(9) 證明上圖中 $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, 再證明 AC, BD 互相平分.

〔解〕 由上題證得第一組全等△,便有

$\angle 1=\angle 2$ (對應角)

由上題證得第二組全等△,便有

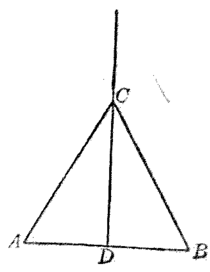
$\angle 3=\angle 4$ (對應角)

又 $\triangle OAD\equiv\triangle OBC$ (a. s. a.)

$\therefore\quad AO=OC,$ (對應邊)

$BO=OD.$ (對應邊)

(10) 試證一線段的垂直平分線上任一點距兩端等遠.



〔解〕 C 爲垂直平分線 CD 上任一點.

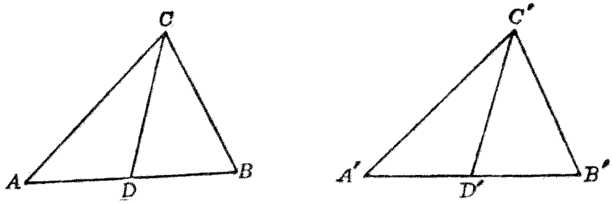
$\angle ADC=\angle BDC=rt.\angle$

(垂線定義)

$\therefore\quad \triangle ACD\equiv\triangle BCD$ (s. a. s.)

$\therefore\quad CA=CB$ (對應邊)

(11) 如二三角形全等,則對應的中線必各相等.



［解］ $AD=A'D'$ (代換公理二第四式)

$\therefore\quad \triangle ACD \equiv \triangle A'C'D'$ (s. a. s.)

$\therefore\quad CD=C'D'$ (對應邊)

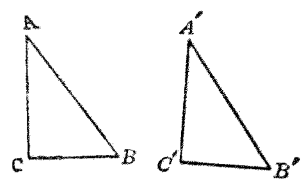
同樣可證其他兩邊的相當中線相等.

習題二四　在教科書第102頁.

(1) 一竿直立在地面上,竿頂繫一定長的繩拉直這繩,則無論如何移動,他端隔竿脚的距離必為一定.何故?

［答］ 竿可代表由繩的他端對於地面的垂線.照垂線公理二此種垂線只能有一根,故距離一定.

(2) 二個等長梯子,各直靠一牆頭上,如二梯與地面所成的角(即這梯與自梯脚到牆垂線二者所成角)相等.試證二牆必等高.



［解］ 如圖 AB, $A'B'$ 是二梯

AC, $A'C'$ 是牆高

$rt.\triangle ABC \equiv rt.\triangle A'B'C'$

($rt.\triangle$ 定理一)

$\therefore\quad AC = A'C'$ (對應邊)

(3) 直角三角形內,除必有一直角外,還要知道幾件其他元素,方能決定?試分條列出,并註明取根據的理.

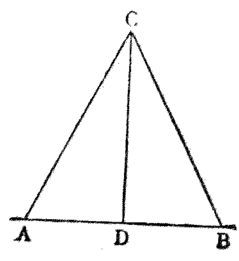
[答] (一)夾直角的二邊 (s. a. s.)

(二)直角的一邊和此邊他端上一角. (a. s. a.)

(三)斜邊及一銳角. (全等直角△定理一)

(四)斜邊及他一邊 (全等直角△定理二)

(4) 如右圖中 $CD \perp AB$, 且 $CA = CB$, 試證 $AD = BD$. 這理的逆,是否成立?



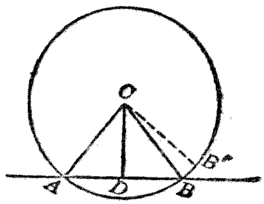
[解] $rt.\triangle CAD \equiv rt.\triangle CBD$

(全等直角△定理二)

$\therefore\quad AD = BD$ (對應邊)

逆理成立.可用(s. a. s.)證

(5) 由上題證明一圓與一直線至多只能交於二點.



[解] 一圓與任意一直線交於

A, B. 設有第三交點 B'.

則半徑 CA, CB, 與垂線 CD 依上題結果,有

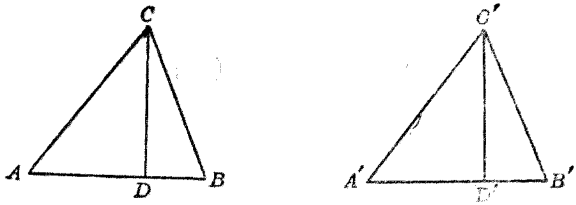
$rt.\triangle CAD \equiv rt.\triangle CB'D$.

但 $rt.\triangle CAD \equiv rt.\triangle CBD$.

$\therefore$ B' 必與 B 重合

$\therefore$ 一圓至多只能交一直線於二點.

(6) 證明二全等△中相當的高必相等.

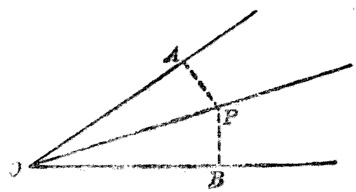


[解] 兩形疊合, 由 C (或 C') 只能作一垂線至 AB (或 $A'B'$) (垂線公理二)

$\therefore$ $CD = C'D'$

同理可證其他二相當高相等.

(7) 自一角的分角線任取一點作到二邊上垂線, 試證這二垂線的長相等.

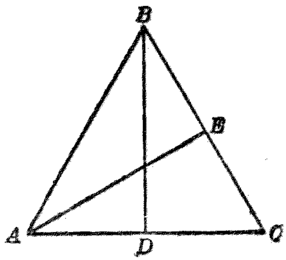


[解] $rt.\triangle POA \equiv rt.\triangle POB$.

(全等直角△定理一)

$\therefore$ $PA = PB$.

(8) 如一三角形中有二高相等，則必爲等腰△.



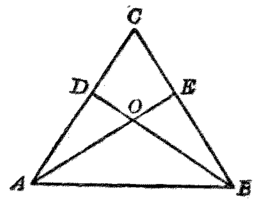
[解] AB 公共，

$rt.\triangle ABE \equiv rt.\triangle ABD$

(全等直角△定理二)

$\therefore \angle A=\angle B$ (對應角)

(9) 自一等腰△底上二頂點，作到對邊的高，則這二高必等．且二高相交時必另成一等腰三角形.



[解] $\angle A=\angle B$ (等腰△定理一)

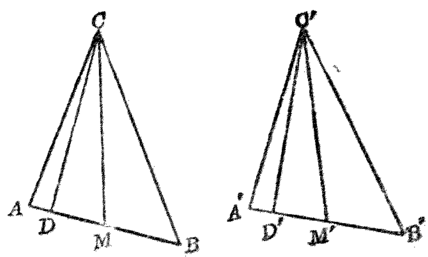
$\therefore rt.\triangle ABE \equiv rt.\triangle BAD.$ (全等直角△定理一)

$\therefore AE=BD$ (對應邊)

又 $\angle BAE=\angle ABD$ (對應角)

$\therefore \triangle AOB$ 等腰 (等腰△定理二)

(10) 如一三角形中有一邊和邊上的高與中線，和另一三角形中相當件對應相等，則必爲全等.



[解]　$CD=C'D'$,

$CM=C'M'$　(題設)

$\therefore$　$rt.\triangle CDM \equiv rt.\triangle C'D'M'$　(全等 $rt.\triangle$ 定理二)

$\therefore$　$DM=D'M'$　(對應邊)

$DB=D'B'$　(代換公理二,第一式)

$\therefore$　$rt.\triangle CDB \equiv rt.\triangle C'D'B'$　($s.a.s.$)

$\therefore$　$BC=B'C'$　(對應邊)

$\angle B=\angle B'$　(對應角)

又因　$AB=A'B'$　(題設)

$\therefore$　$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$　($s.a.s.$)

習題二五　在教科書第106頁.

(1)　在不等量公理第三到第六諸條中,令 $c=d=m$,寫出這種特例的式子來.

[答]　不等量公理特例(三)

如 $a>b$, 則 $a+m>b+m$.

(四)　如 $a>b$, 則 $a-m>b-m$; $m-a<m-b$.

(五)　如 $a>b$, 則 $am>bm$.

(六)　如 $a>b$, 則 $a/m>b/m$,

$m/a<m/b$.

(2)　說明不等式中移項,去係數(設為正數)的法則.

[答] (一)移項後前面加一負號.

例如 $a+c>b+d$,

移項 $a>b+d-c$ (上題特例四)

或 $a+c-d>b$ (上題特例四)

(二)去係數時,將此係數除不等式他端各項.

例如 $\frac{m}{n}a>b$

去係數, $a>\frac{n}{m}b$. (上題特例六,第一式)

(3) 證明如 $a>b$, 則 $a^n>b^n$.(a, b 都是正量)

[解] $a>b$

$a^2>b^2$ (不等量公理五)

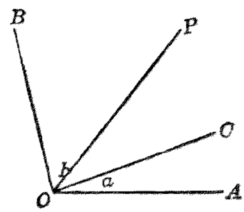
同理 $a^3>b^3$

$\cdots\cdots\cdots$

$\therefore\ a^n>b^n$.

(4) 答語略.

(5) 大小二角相隣,試證其和的分角線,必在大角內.



[解] 設 $\angle b>\angle a$

OP 平分 $\angle AOB$.

$\angle AOP=\angle BOP$ (平分角線定義)

即　$\angle a+\angle POC=\angle b-\angle POC$　(代換公理)

移項　$\angle a+2\angle POC=\angle b$

$\angle b+\angle b>\angle a+(\angle a+2\angle POC)$ (不等量公理三)

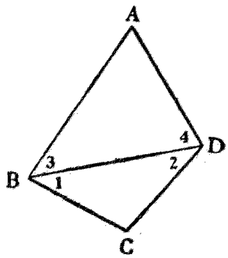
即　$2\angle b>2\angle a+2\angle POC$

$\therefore\ \angle b>\angle a+\angle POC$　(不等量公理六)

卽　$\angle b>\angle AOP$　(代換公理)

$\therefore\ \angle b>\angle BOP$　(代換公理)

(6)　如右圖中 $\angle ABC$, $\angle ADC=rt.\angle$, 而 $\angle 1>\angle 2$, 試證 $\angle 3<\angle 4$.



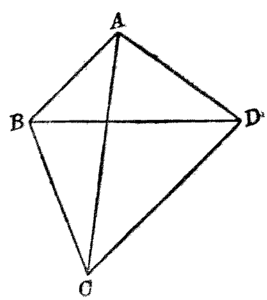
[解]　$\angle ABC-\angle 1<\angle ADC-\angle 2$

(不等量公理四,第二式)

$\therefore\ \angle 8<\angle 4$　(代換公理)

(7)　如上題圖中,各角大小均不加限制,聯 AC. 試證

$AB+BC+CD+DA>AC+BD$.



[解]　$AB+BC>AC$,

$BC+CD>BD$,

$CD+DA>AC$,

$DA+AB>BD$,

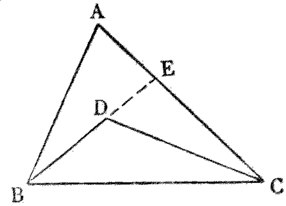
(三角形三邊關係定理)

上四式相加,

$2(AB+BC+CD+DA)>2(AC+BD)$ (不等量公理三)

$\therefore\ AB+BC+CD+DA>AC+BD$ (第1題特例六)

(8) 證明右圖中 $AB+AC$ 必大於 $DB+DC$.



[解] $AB+AE>EB$,

即 $AB+AE>ED+DB$

(三邊關係定理)

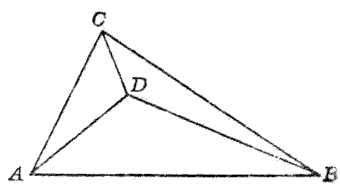
同理 $EC+ED>DC$

$\therefore\ AB+AE+EC+\underline{ED}>DB+DC+\underline{ED}$.

(不等量公理三)

即 $AB+AC>DB+DC$ (第1題特例四)

(9) 從三角形內任一點,作到三頂點的線段,試證諸線段的和必大於三邊和的一半.



[解] 用三邊關係定理,得

$DA+DB>AB$,

$DB+DC>BC$,

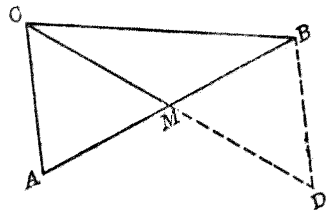
$DC+DA>CA$.

三式相加,

$2(DA+DB+DC)>AB+BC+CA$(不等量公理三)

$\therefore\ DA+DB+DC>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$ (第1題特例六)

(10) 試證三角形一邊上中線,必小於其餘二邊和的一半.



[解] 從中點 M 延長 CM 到 D, 使 $MD=CM$ 連 BD. 則

$\triangle ACM \equiv \triangle BDM$　　(s. a. s.)

$\therefore\ CA=BD$　　(對應邊)

$CB+BD>CD$　　(三邊關係定理)

即　$CB+CA>2CM$　　(代換公理)

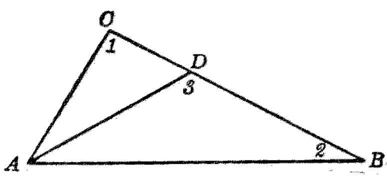
$\therefore\ CM<\frac{1}{2}(CA+CB)$

習題二六　在教科書第110頁.

(1) 含有鈍角的△中,那一邊最長?

[答] 對鈍角的邊最長.

(2) 證明任一△中的內分角線,必較夾那角的較長一邊爲短.



[解] 設　$\angle 1>\angle 2$,

AD 是 $\angle A$ 的分角線

$AB>AC$　　(邊角關係定理--)

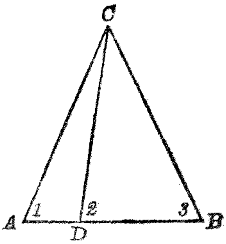
又　$\angle 3>\angle 1$　　(外角定理)

∴ $\angle 3 > \angle 2$ (不等量公理二)

∴ $AB > AD$ (邊角關係定理一)

或 $AD < AB$

(3) 證明等腰△底邊上任一點到對頂的聯線必小於那等邊.



[解] $\angle 2 > \angle 1$ (外角定理)

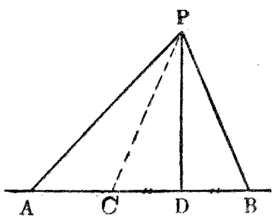
$\angle 3 = \angle 1$ (等腰△定理一)

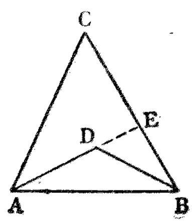
∴ $\angle 2 > \angle 3$ (代換公理)

∴ $BC > CD$ (邊角關係定理一)

或 $CD < BC$.

(4) 如下左圖 $PD \perp AB$, 而 $AD > BD$, 試證 $PA > PB$.





[解] 在 DA 上取 $DC = DB$, 連 PC.

$rt.\triangle PCD \equiv rt.\triangle PBD$ (s. a. s.)

∴ $PC = PB$ (對應邊)

$\angle PCD$ 是銳角 (外角定理,系)

$\therefore$ $\angle PCA$ 是鈍角

$\therefore$ $\angle PCA > \angle PAC$ (外角定理,系)

$\therefore$ $PA > PC$ (邊角關係定理一)

$\therefore$ $PA > PB$ (代換公理)

(5) 看上面右圖,試證 $\angle ADB > \angle ACB$

[解] $\angle AEB > \angle ACE$

即 $\angle AEB > \angle ACB$ (外角定理)

又 $\angle ADB > \angle AEB$ (外角定理)

$\therefore$ $\angle ADB > \angle ACB$ (不等量公理)

(6) 看下面左圖內, $CD = CB$, 試證 $\angle CBA > \angle CAB$.

[解] $\angle CBA > \angle DBC$ (全分公理)

$\angle CBA > \angle CDB$ (代換公理)

$\angle CDB > \angle CAB$ (外角定理)

$\therefore$ $\angle CBA > \angle CAB$ (不等量公理二)

(7) 由上題直接證明邊角關係定理一的逆定理.

[解] $\angle CDB = \angle CBA$ (等腰△定理一)

$\angle CBA > \angle CBD$ (全分公理)

$\therefore$ $\angle CBA > \angle CDB$ (代換公理)

又因 $\angle CDB > \angle CAB$ (外角定理)

$\therefore$ $\angle CBA > \angle CAB$ (不等量公理二)

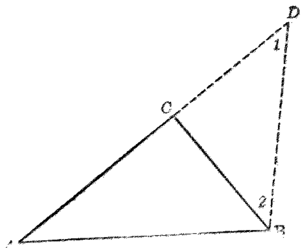
(8) 下右圖中 $BC=DC$. 試不直接用三邊關係定理證明 $AD>AB$.

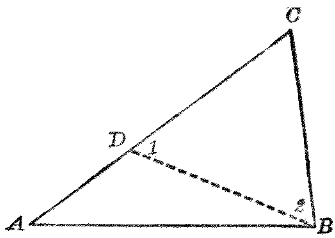
[解] $\angle ABD>\angle 2$ (全分公理)

$\angle 1=\angle 2$ (等腰△定理一)

$\therefore\ \angle ABD>\angle 1$ (代換公理)

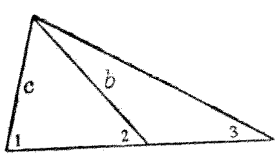
$\therefore\ AD>AB$ (邊角關係定理一)



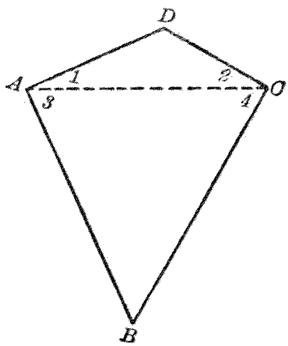


習題二七 在教科書第115頁.

(1) 下面圖一中 $b>c$ 比較 $\angle 1$ 和 $\angle 3$ 的大小.



圖一



圖二

［解］　$\angle 1 > \angle 2$　（邊角關係定理二）

$\angle 2 > \angle 3$　（外角定理）

$\therefore \angle 1 > \angle 3$　（不等量公理二）

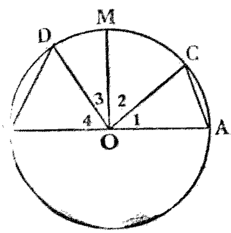
(2)　上面圖二內 $AD \perp AB$, $CD \perp CB$, $AD > CD$, 試證 $BC > BA$.

［解］　$\angle 2 > \angle 1$　（邊角關係定理二）

$\angle 4 < \angle 3$　（不等量公理四）

$\therefore BC > BA.$　（邊角關係定理一）

(3)　圖三內, O 是圓心, $MO \perp AB$, $\angle 2 > \angle 3$, 試證 $BD > AC$.



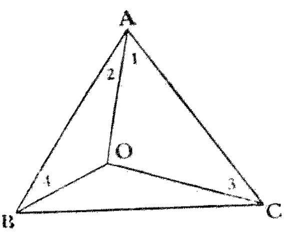
圖三

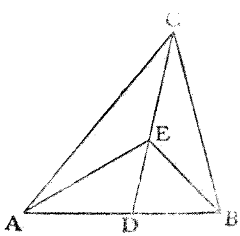
［解］　$\angle 4 > \angle 1$（不等量公理四）

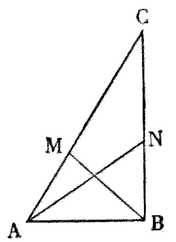
$\therefore BD > AC$

（非全等△定理一）

(4)　下面左圖內, $AB = AC$, $\angle 1 > \angle 2$, 試證 $\angle 3 > \angle 4$.







［解］　$OC > OB$　（非全等△定理一）

$\angle OBC > \angle OCB$ (邊角關係定理一)

$\therefore\ \angle 4 < \angle 3$ (不等量公理四)

(5) 上中圖內，CD 是中線，$AC > BC$，試證 $AE > BE$.

[解] $\angle ADE > \angle BDE$ (非全等三角形定理二)

$\therefore\ AE > BE$ (非全等三角形定理一)

(6) 上右圖內，$AC > BC$，且 $AM = BN$，試證 $AN > BM$.

[解] $\angle ABN > \angle BAM$. (邊角關係定理二)

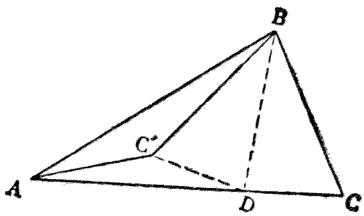
$\therefore\ AN > BM$ (非全等△定理一)

(7) 試用§107的圖直接證明非全等三角形定理二.

[解] 可用全分公理證得 $\angle CAB > \angle CAD$，再由全等△關係，及代換公理，便得

$$\angle CAB > \angle CBA \text{ 即 } > \angle C'B'A'.$$

(8) 如右圖中 $BC' = BC$，BD 是 $\angle CBC'$ 的分角線，試由此直接證明非全等三角形定理一.



[解] $\angle ABC > \angle ABC'$ (全分公理)

$\triangle BC'D \equiv \triangle BCD$ (s. a. s.)

$DC' = DC$ (對應邊)

$AD + DC' > AC'$ (三邊關係定理)

$\therefore\ AC > AC'$ (代換公理)

第五編 平行論 四邊形

(一) 教材的說明

平行線爲幾何中另一重要統系,且爲各種幾何分野的一種根據.本編專講平行線及由平行線關係而判別的各種四邊形.

三線所成的八個角,尋常教本多立名目,沒有什麼重要用處,反使初學勉強記憶,頭腦不清.本編爲免此弊,僅就簡明關係,區爲內角,外角,錯角,應角四種.

三角形內角和定理,及幾個系,在幾何上也極其重要,本編很自然的接講於平行線之後,並附及多角形內外角和的公式.

(二) 教材的摘要

名稱 本編所講過的名稱如下:—

錯角;應角;鄰邊;凸多角形;等形.

記號 本編所講過的記號如下:—

"∥"是平行線的記號;"▱"是平行四邊形的記號.

定理 本編所講過的定理如下:—

(一) 平行判別定理一 二條直線被另一直線所截,如果有一對錯角相等,則這二直線必定平行.

(二) 平行判別定理二 二條直線被另一直線所截,如果有一對應角相等,則這二直線必定平行.

[系] 二直線被另一直線所截,如同在截線一側的二內(或外)角相補,則這二直線必定平行.

(三) 平行性質定理一 兩平行線被一線所截,所成錯角必等.

(四) 平行性質定理二 兩平行線被一線所截,所成應角必等.

[系] 兩平行線被另一線所截,所成同在一側的二內(或外)角必相補.

(五) 交線判別定定理 兩直線被另一直線所截,如所成同側的二內角的和小於180°,則向這側延長時,必至相遇.

(六) 三角形內角和定理 凡三角形裏三個角的和必等於兩直角.(即180°)

[系一] 凡三角形任一外角均等於二內對角的和.

[系二] 兩三角形中,如有二角對應相等,則第三角亦必相等.

[系三] 兩三角形有二角一邊對應相等,則爲全等形(a. a. s.)

[系四] 直角三角形中直角外,餘二角必爲相餘的銳角.

(七) 全等平行四邊形定理 二個平行四邊形,有二鄰邊和夾角對應相等,則爲全等形.

[系] 二長方形,有二鄰邊對應相等,則爲全等形.二正方形有一邊對應相等,則爲全等形.

(八) 三線平行定理 兩線都和另一直線平行,則必互相平行.

(九) 平行線內等線段定理. 一組平行線在另一線上截取等長線段,則這組平行線,在任何直線上,都截取等長線段.

[系一] 過三角一邊中點而與他邊平行的直線,必經過第三邊中點.

[系二] 平分梯形一不平行邊而與二平行邊平行的線,必平分他一不平行邊.

平行公理 過一已知直線外一點,只能作一直線

與他平行。

公式:

(一) n 角形內角和 $=(n-2)180°$

(二) n 角形外角和 $=360°$

決定平行四邊形的條件有三種如下:—

(一) 二對對邊都是平行線。

(二) 二對相等的對邊。

(三) 一對平行而又相等的對邊。

平行四邊形的重要特性有四條如下:—

(一) 被對角線分爲二個全等三角形。

(二) 對邊都相等,對角也都相等。

(三) 對角互補。

(四) 二對角線互相平分。

[系] 平行四邊形若有一角是直角,則其餘三角,也必均爲直角。

四邊形的類別:

- 四邊形
  - 平行四邊形
    - 正方形
    - 斜方形
    - 長方形
  - 梯形
    - 等腰梯形
    - 梯形
  - 不平行四邊形
    - 箏形
    - 四邊形

(三) 教材的分配

在教學上,本編最好分做十課講授,另加温習一小時.分法約略如下:—

第53課——從第109節"三線八角"起到第111節"平行線"末了止.並在教室內做習題二八第1題的口頭問答,及第2題的書面練習.來不及,則命學生在課外補完.

第54課——講完第112節"平行判別定理二"並做完習題二八.可在教室擇一二題做黑板練習,其餘命學生在課外做書面練習.

第55課}
第56課}——從第113節"平行公理"起到習題二九末了止.依實際教授情形分做兩課.每課終了,預選分習題命學生作書面練習.

第57課——從第117節"三角形內角和定理"起到習題三十末了止.可擇一二簡易題做黑板練習,其餘命學生在課外做書面練習.

第58課——從第120節"四邊形"起到第121節"全等平行四邊形定理"末了止.並在教室做習題

三一第1,2兩題的口頭問答.

第59課——講完第122節"平行四邊形的作圖",並命學生做完習題三一的書面練習.

第60課——講完第123節"決定平行四邊形的他種條件",並在教室內命學生做習題三二第1,2,3諸題的書面練習.

第61課——講完第124節"平行四邊形性質",並命學生做完習題三二的書面練習.

第62課——從第125節"三線平行定理"起到習題三三末了止.習題可命學生在課外做書面練習.

第63課——照教材摘要溫習本編.前課如有疑問或未了的地方亦可在此抽空加以討論.

(四) 教授的要點

講平行公理時,可附帶略說及非歐几里得幾何發展的大概(可看余介石編非歐幾何學講義,由中央大學算學系印行),以示此公理對於本書的重要,並使學者略知幾何組織的情形.

"平行性質定理"爲"平行判別定理"的逆定理;"平行四邊形性(二),(三)"爲"決定平行四邊形條件"

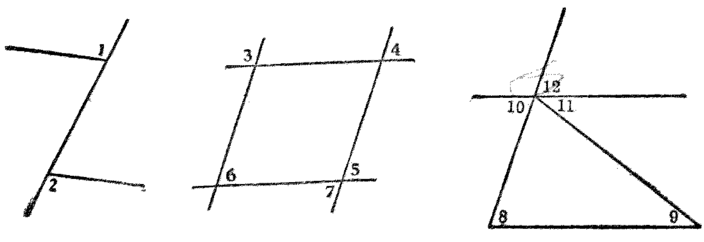
的逆理,應特別提示現可使學生由比較關係容易了解,且可幫助記憶.

書中示明由學生自行補出的證明如133頁,及137頁.宜在教室命學生在黑板上推證,或用書面補出,當時交卷,作爲練習.

(五) 習題的解答

習題二八 在教科書第120頁.

(1) 說出下列各圖中各種關係角的名稱:



〔答〕

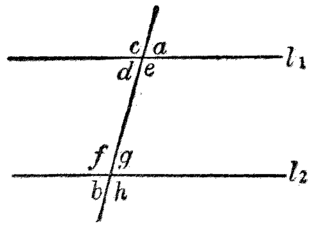
錯角 $\begin{cases}\angle 1,\ \angle 2\\ \angle 4,\ \angle 7\\ \angle 8,\ \angle 10\\ \angle 9,\ \angle 11\end{cases}$　應角 $\begin{cases}\angle 4,\ \angle 5\\ \angle 5,\ \angle 6\\ \angle 8,\ \angle 12\end{cases}$

(2) 若右圖中,$\angle a$, $\angle b$如下列各關係:

(一) $\angle a=60°$, $\angle b=50°$,

(二) $\angle a=60^\circ$, $\angle b=70^\circ$.

(三) $\angle a=60^\circ$ $\angle b=60^\circ$.



討論各情形中這二直線延長時能否相交?如相交,交點是在截線右邊,還是在左邊?

[答] (一) 相交。右邊

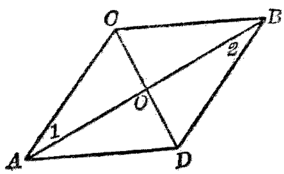
(二) 相交。左邊。

(三) 不能相交。

(3) 舉出上圖中各組等角,以使 $l_1 \parallel l_2$

[答] $\angle a=\angle b$; $\angle a=\angle g$; $\angle b=\angle d$; $\angle c=\angle h$; $\angle c=\angle f$; $\angle e=\angle f$; $\angle e=\angle h$; $\angle d=\angle g$.

(4) 二線段相交,互相平分,證明連接各端點所成的四直線是兩對平行線。



[解] $OA=OB$, (題設)

$OC=OD$, (題設)

$\angle AOC=\angle BOD$ (對頂角)

$\therefore$ $\triangle AOC \equiv \triangle BOD$ (s. a. s.)

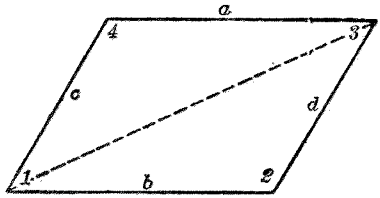
$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$ (對應角)

$\therefore$ $AC \parallel BD$ (平行判別定理一)

同樣可證　$\triangle BOC \equiv \triangle AOD$

得　$AD \parallel BC$.

(5)　如右圖中 $a=b,\ c=d$, 證明 $a \parallel b,\ c \parallel d$. 且 $\angle 1=\angle 3$, $\angle 2=\angle 4$.



［解］連對角線, 可由 (s. s. s.) 證明 △ 全等, 於是 $\angle 2$, $\angle 4$ 相等; 並照上題證法可得 $a \parallel b$.

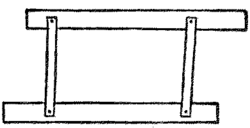
再連另一對角線照樣證 $c \parallel d$, $\angle 1=\angle 3$.

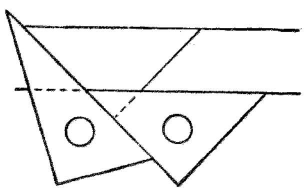
(6)　證明 § 25 的作圖題.

［解］　$\angle CPD=\angle BCP$

$\therefore\ DE \parallel AB$　　　　(平行判別定理一)

(7)　證明用平行尺作平行線的方法(下左圖)





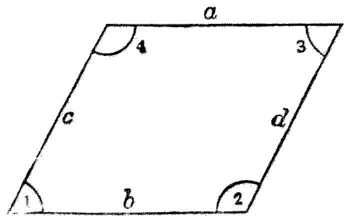
［解］畫對角線,再照第(5)題證.

(8)　證明用三角板作平行線的方法(上右圖)

［解］　$\angle 1$, $\angle 2$ 兩角相等, 由平行判別定理二證所

畫線平行.

習題二九 在教科書的125頁.



(1 如下圖中$a=b$, $c=d$,證明 $\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4=180°$.

[解] 照習題二八的第5題證 $c \parallel d$

$$\therefore \quad \angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4=180°$$

(平行性質定理二,系)

(2) 在上圖中如有一直角,則三角必均爲直角(得長方形和正方形)

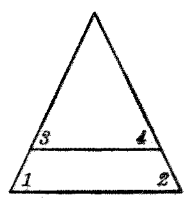
[解] 由上題證得,

$a \parallel b$, $c \parallel d$ 並得

$$\angle 1+\angle 2=\angle 2+\angle 3=\angle 3+\angle 4=180°,$$

如 $\angle 1$ 爲直角,則 $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ 均爲直角而得長方形,若 $a=b=c=d$ 則得正方形.

(3) 在等腰△中,作一線與底平行,試證仍成一等腰△.



[解] $\angle 1=\angle 2$ (等腰△定理一)

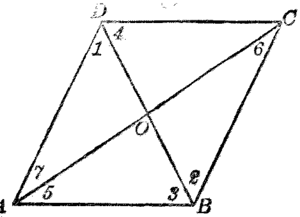
$\angle 1=\angle 3$, $\angle 2=\angle 4$

(平行性質定理二)

$\therefore \quad \angle 3 = \angle 4$　　(代換公理)

再由等腰△定理二及等腰△定義,證

(4) 右圖中,如 $AB=CD$, $AD=BC$, 試證 $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.



[解]　$\triangle ABD \equiv \triangle BCD$　($s.s.s$)

$\angle 1 = \angle 2$,　(對應角)

$\angle 3 = \angle 4$,　(對應角)

$\therefore \quad AD \parallel BC$,　(平行判別定理一)

$AB \parallel CD$.　(平行判別定理一)

(5) 上圖中,如 $AB=CD$, 又互相平行,則 $AD=BC$ 也互相平行.

[解]　$\angle 3 = \angle 4$　(平行性質定理一)

$\triangle ABD \equiv \triangle BCD$　($s.a.s$)

$\therefore \quad AD = BC$　(對應邊)

$\angle 1 = \angle 2$　(對應角)

$\therefore \quad AD \parallel BC$　(平行判別定理一)

(6) 上圖(仍是4題的圖)中如 $AB=BC=CD=DA$, 則 $AC \perp BD$.

[解]　$\angle 5 = \angle 6$　(等腰△定理一)

$\angle 6 = \angle 7$　(平行性質定理一)

$\therefore\quad \angle 5=\angle 7$ （代換公理）

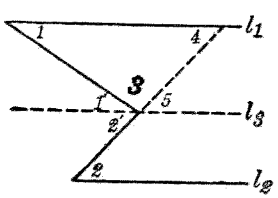
$\therefore\quad \triangle AOB\equiv\triangle AOD$ （$s.a.s.$）

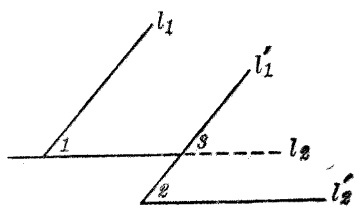
$\therefore\quad \angle AOD=\angle AOB,$ （對應角）

$=rt.\angle$ （相等補鄰角）

$\therefore\quad AC\perp BD$ （垂線定義）

(7) 如下左圖內，$\angle 3=\angle 1+\angle 2$，證明 $l_1\parallel l_2$.





［解］ 過 $\angle 3$ 頂點作 $l_3\parallel l_1$,

$\angle 1'=\angle 1$ （平行性質定理一）

但 $\angle 1'+\angle 2'=\angle 1+\angle 2$

$\therefore\quad \angle 2'=\angle 2$

$\therefore\quad l_3\parallel l_2$ （平行判別定理一）

又 $\angle 4=\angle 5$ （平行性質定理一）

$=\angle 2'$ （對頂角）

$=\angle 2$

$\therefore\quad l_1\parallel l_2$ （平行判別定理一）

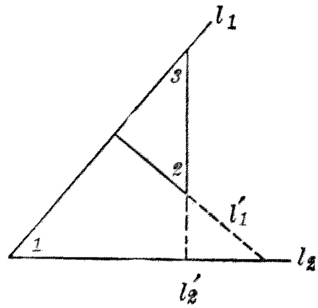
(8) 一角二邊與他角二邊對應平行，試證二角必等。

〔解〕 如上右圖內,

$l_1 \parallel l_1'$, $l_2 \parallel l_2'$,　　(題設)

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 3 = \angle 2$　　(平行性質定理二)

(9) 一角二邊與他角二邊對應垂直,試證二角必等.



〔解〕 如右圖內,

$l_1 \perp l_1'$, $l_2 \perp l_2'$

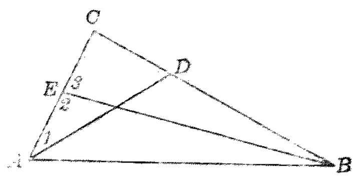
$\angle 3$ 與 $\angle 2$ 相補,

$\angle 3$ 與 $\angle 1$ 相補

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$.

(10) 證明三角形內任意二內分角線必定相交.

〔解〕 如右圖內,



AD, BE 是二內分角線.

$\angle 1 < \angle A$ (全分公理)

$\angle 2 + \angle A < 180°$,

否則與原設 BA, BE 相交衝突

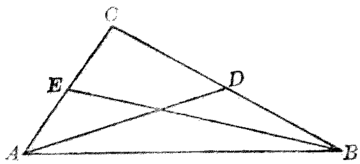
$\therefore$ $\angle 2 + \angle 1$ 更小於 $180°$

$\therefore$ AD, BE 相交.　　(交線判別定理)

(11) 證明三角形內任意二中線必定相交.

〔解〕 下面圖內,

AD, BE 是 A, B 二角的平分線.證法與上題相仿.



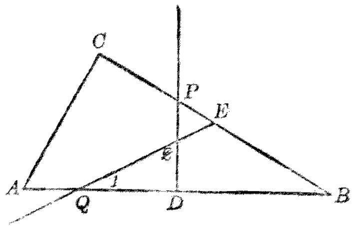
(12) 證明三角形任意二邊上垂直平分線相交.

[解] $\angle 1, \angle 2$ 均小於 $\angle PDB$,

$\therefore \angle 1 < 90°$

$\therefore \angle 1 + rt. \angle PDQ < 180°$

$\therefore$ PD, EQ 相交.

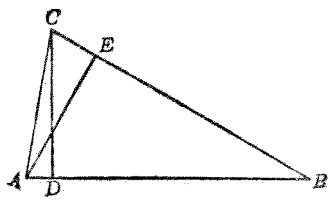


(13) 證明三角形內任意二高必定相交.

[解] 如右圖,

AE, CD 是二高.

證法同上.



習題三十 在教科書第129頁.

(1) 證明§42的作圖題第二部份.

[解] 用三角形內角和定理的"系二"證.

(2) 等腰直角三角形的三內角各爲幾度?

[答] 90°. 45°, 45°

(3) 一等邊△內角爲幾度?分爲二個全等的直角

三角形後,諸角各爲幾度? 又夾直角二邊,有什麼關係?

［答］ 60°. 分爲二個全等直角三角後,三內角的度數爲 90°, 60°, 30°. 垂直,平分.

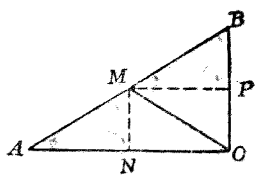
(4) 試作右列各角: 45°, 60°, 30°, 75°.

(一) 依基本作圖法,作直角,再平分或作直角後取相等兩邊,作等腰直角△,則底邊上兩角都是 45. (2 題)

(二) 仿 (3) 題作, 60° 及 30° 角.

(三) 可作 45° 與 30° 的和角.

(5) 證明 $rt.\triangle$ 斜邊中點,距三頂點等遠.



［解］ 從中點 M 作 $MN \parallel BC$, $MP \parallel AC$,

$$\triangle MNC \equiv \triangle MPC$$

$$\therefore \quad MP = NC$$

又 $\angle BPM = \angle BCA = rt.\angle$

$\triangle AMN \equiv \triangle MPB$ (全等直角△定理一)

$$\therefore \quad MP = AN$$

$$\therefore \quad AN = NC$$

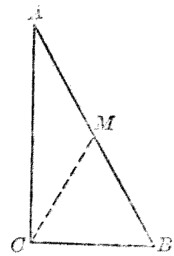
$$\angle ANM = \angle BCA = rt.\angle$$

$\therefore$ $rt.\triangle ANM \equiv rt.\triangle NMC$ $(s.\ a.\ s.)$

$\therefore$ $\angle MAN = \angle NCM$ (對應角)

$\therefore$ $MA = MC = MB$

(6) <u>如 $rt.\triangle$ 中的二銳角,一爲 $30°$,一爲 $60°$,則其斜邊爲最短邊的二倍.</u>



[解] 如右圖,$\angle B = 60°$, $\angle A = 30°$

由上題結果,$MC = MA$

$\angle MCA = \angle A$ (等腰$\triangle$定理一)

$\angle BMC = \angle MCA + \angle A$ ($\triangle$內角和定理系一)

$\therefore$ $\angle BMC = 60°$

$\therefore$ $\triangle BMC$ 爲等邊三角形,

$MB = BC$

$\therefore$ $AB = 2BC$.

(7) <u>如 $rt.\triangle$ 中斜邊爲最短邊的二倍,則其二銳角必一爲 $30°$,一爲 $60°$ 度.</u>

[解] 由(5)題結,有 $MB = MC$.

又因題設 $MB = BC$,

$\therefore$ $\triangle MBC$ 爲等邊$\triangle$.

$\therefore$ $\angle B = 60°$ (習題二二第3題)

$\therefore$ $\angle A = 30°$ (三角形內角和定理)

(8) 各角都等的 n 角形,每一內角是幾度?

［答］ $\dfrac{(n-2)180^\circ}{n}$

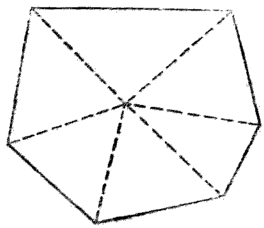
(9) 求5角形,7角形,15角形,100角形等各內角和.

用公式求.

(10) 內角和爲 540°, 720°, $24rt.\angle$ 的多角形,各有幾邊?

［答］ 5邊; 6邊; 14邊.

(11) 自 n 角形內一點,引至各頂點聯線,分他爲 n 個 $\triangle$,因此證明 n 個形內角和公式.又順次作和各邊平行的直線,由此證明 n 角形外角和公式.



［解］ 每一$\triangle$內角和 $=180^\circ$

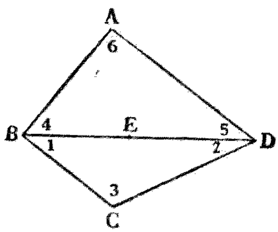
n 個$\triangle$內角和 $=n180^\circ$

$\therefore$ n 角形內角和 $=n180^\circ-360^\circ$

$=n180-2\times180^\circ$

$=(n-2)180^\circ$

(12) 右圖 $\angle1+\angle2+\angle3=\angle4+\angle5+\angle6$,試證 B, E, D 三點在一直線上.



［解］ $\angle1+\angle2+\angle3+\angle4+\angle5+\angle6=2(180^\circ)$

(多角形內角和公式)

$$\therefore\ \angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle 4+\angle 5+\angle 6$$
$$=180^\circ$$

由三角形內角和定,間接可證 A, E, D 在一直線上。

習題三一 在教科書第134頁.

(1) 平行四邊形四邊固定,這圖形是否固定?

[提示] 查照習題二三的1, 2兩題作答.

(2) 說明牙醫用守平臺,店鋪面收展鐵門的理.

[提示] 由上題結果,故可收展自如.

(3) 作一▱,已知二邊爲3寸, 4.5寸,夾角是60°

[提示] 照122節作圖.

(4) 作一長方形,已知二邊爲2.5寸和5寸.

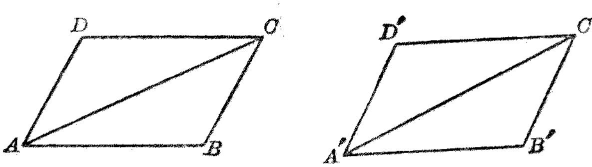
[提示] 照122節作夾角爲90°的圖.

(5) 作一正方形已知一邊長4寸.

[提示] 照122節作二邊均4寸,夾角90°的圖.

(6) 試證二鄰邊及一對角線對應相等的二平行四邊形,必爲全等形.

[解] (一)



如圖　$AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $AC=A'C'$

$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$　　(s. s. s.)

$\angle B=\angle B'$　　(對應角)

$\therefore$ $\square ABCD\equiv\square A'B'C'D'$　　(§ 121)

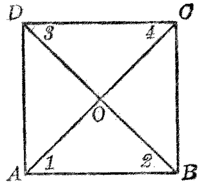
[解] (二) 若假設 $AB=A'B'$, $AD=A'D'$, $AC=A'C'$, 可由平行性質定理一先證 $\triangle ACD\equiv\triangle ABC$ 及 $\triangle A'C'D'\equiv\triangle A'B'C'$ 因得

$$AB=CD,\qquad A'B'=C'D'$$

再照上面(一)證.

習題三二　在教科書第137頁.

(1)　證明正方形的對角線相等,而分全形爲四個全等等腰直角三角形.



[解]　$rt.\triangle ABC\equiv rt.\triangle ABD$　　(s. a. s.)

$\therefore$ $AC=BD$　　(對應邊)

又 $\angle 1=\angle 4$, $\angle 2=\angle 3$,　　(平行性質定理一)

$\therefore$ $\triangle AOB\equiv\triangle COD$　　(a. s. a.)

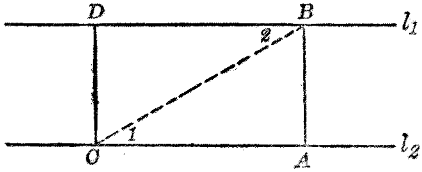
$\therefore$ $AO=OC$, $BO=OD$　(對應邊)

$\therefore$ $AO=BO=CO=DO$

$\triangle AOD\equiv\triangle AOB\equiv\triangle BOC\equiv\triangle COD$,　　(s. s. s.)

且均爲等腰三角形.

(2) 證明二條平行線間一切公共垂線都等長.



[解] 如圖 $l_1 \parallel l_2$

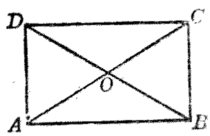
AB, CD 是公共垂線.畫對角線 BC,

$\angle 1 = \angle 2$ (平行性質定理一)

$rt.\triangle ABC \equiv rt.\triangle BCD$ (全等直角△定理一)

$\therefore \quad AB = CD.$ (對應邊)

(3) 如平行四邊形對角線相等,則爲一長方形,相等并且互相垂直,則成一正方形.



[解] (一) $\triangle ABC \equiv \triangle BCD$ (s. s. s.)

$\therefore \quad \angle B = \angle C$

但 $\angle B$ 與 $\angle C$ 相補

$\therefore \quad \angle B = \angle C = rt.\angle$

$\therefore \quad ABCD$ 爲一長方形.

(二) 如 $AC \perp BD$,

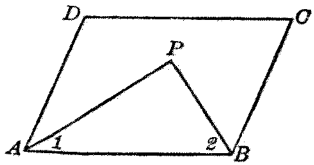
則 $BO = OD$, (平行四邊形性質四)

$\therefore \triangle AOB \equiv \triangle AOD$ (s. a. s.)

$\therefore$ $AD=AB$ (對應邊)

$\therefore$ $ABCD$ 爲一正方形.

(4) 試證▱二鄰角分角線必互相垂直.



［解］ $\angle A+\angle B=180^\circ$

(平行四邊形性質三)

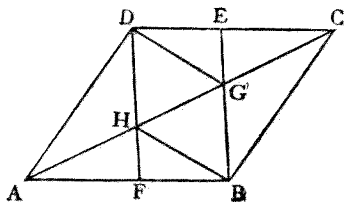
$\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B=90^\circ$

$\therefore$ $\angle 1+\angle 2=90^\circ$

$\therefore$ $\angle APB=rt.\angle$ (三角形內角和定理)

$\therefore$ $AP\perp BP$ (垂線定義)

(5) 如右圖中, E, F 是▱$ABCD$ 二對邊中點, 試證 $BEDF$, $BGDH$ 都是▱.



［解］(一) $AB=CD$ (▱性質二)

$\therefore$ $BF=DE$

$\therefore$ $BEDF$ 是▱ (決定平行四邊形條件三)

(二) $\angle BFD=\angle BED$ (▱性質二)

$\therefore$ $\angle AFH=\angle CEG$ (等角的補鄰角)

$\angle CAB=\angle ACD$ (平行性質定理)

$\therefore$ $\triangle AHF\equiv\triangle CEG$ (a. s. a.)

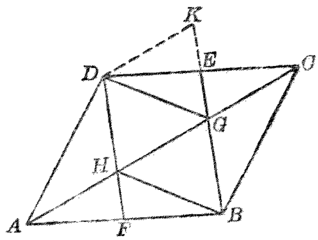
$\therefore \quad HF = EG$ （對應邊）

因 $\quad BE = DF$ （▱性質二）

$\therefore \quad DH = BG$ （代換公理）

$\therefore \quad BGDH$ 是▱ （決定▱條件三）

(6) 證明上圖中 $AH = HG = GC$.



［解］由上證全等△AHF 及 CEG 中,

$AH = GC$ （對應邊）

由 D 作 $DK \parallel HG$ 交 BE 的延線於 K, 則

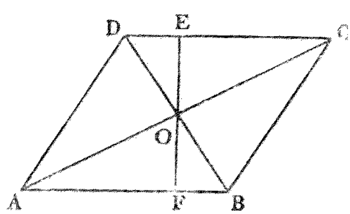
$HGKD$ 爲一▱. （決定▱條件一）

$\therefore \quad DK = HG$ （▱性質二）

但 $\triangle DEK \equiv \triangle CEG$ （$a.s.a.$）

$\therefore \quad DK = GC$, $\quad \therefore \quad AH = GC = HG$.

(7) 如右圖 $ABCD$ 是▱, EF 爲過 O 點任一線, 試證 $OE = OF$.



［解］ $BO = DO$

（平行四邊形性質四）

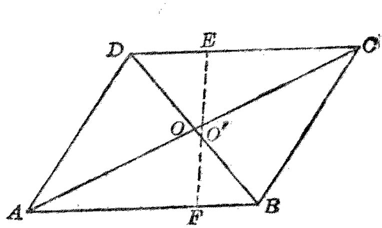
$\angle EOD = \angle BOF$ （對頂角）

$\angle EDO = \angle FBO$　(平行性質定理一)

$\therefore\ \triangle EOD \equiv \triangle BOF$　(a. s. a.)

$\therefore\ OE = OF$　(對應邊)

(8) 如上圖中 $DE=BF$, 試證 EF 必過 O 點.



[解] 設 EF 不過 O 而與對角線 BD 交於另一點 O', 則因

$\angle BDE = \angle DBF$;

$\angle FED = \angle EFB$,　(平行性質定理一)

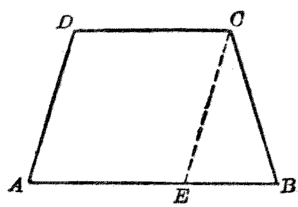
$\therefore\ \triangle O'ED \equiv \triangle O'FB$　(a. s. a)

$\therefore\ O'B = O'D$　(對應邊)

但　$OB = OD$　(▱性質四)

$\therefore\ O, O'$ 必重合,而 EF 必過 O 點.

(9) 證明梯形底端二角如相等,則爲等腰梯.



[解] 從 C 畫 $CE \parallel DA$,

$\angle DAE = \angle CEB$

(平行性質定理二)

$\therefore\ \angle CEB = \angle CBA$　(代換公理)

$\therefore \quad CE=CB$ (等腰△定理二)

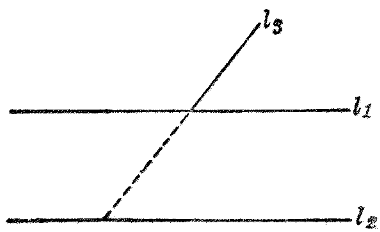
但 $AD=CE$ (▱性質二)

$\therefore \quad AD=BC$ (代換公理)

即 $ABCD$ 為等腰梯形.

習題三三 在教科書第140頁.

(1) 證明一線如同二平行線之一相交,必和他一線相交.



[解] 用間接證法,設

$l_3 \parallel l_2$

則因 $l_1 \parallel l_2$,

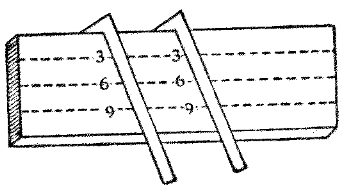
必 $l_1 \parallel l_3$ 與原設衝突.

$\therefore$ l_3 必與 l_2 相交.

(2) 證明§26的等分已知線段作法

[提示] 用平行線內等線段定理證.

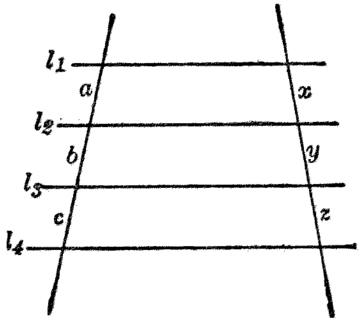
(3) 木匠要四等分木板,就用曲尺記下3, 6, 9等點,再照樣在別處記點.依連線分割即得,爲什麼緣故?



[解] 根據平行線內等線段定理證,

因尺前後位置平行，

分點距離相等。



(4) §126 定理圖中 $a=b=c$，$x=y=z$. 試證 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3 \parallel l_4$.

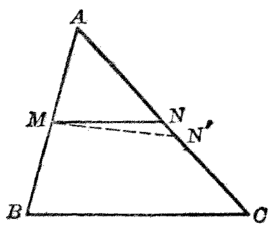
［提示］可用間接證法，

設諸線不平行，而證

其謬。

(5) 證明 §126 中系一，系二的逆定理，連三角形或梯形二腰中點的線必和底平行。

［提示］可用間接證法，設其不與底平行，再另設一線與底平行由一邊中點 M 遇他邊於 N'



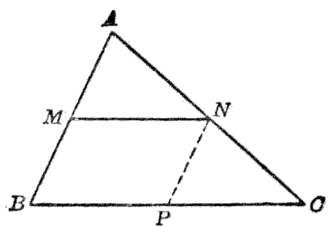
則　　N' 爲 AC 中點（系一）

$\therefore$ N 與 N' 必合爲一點

$\therefore$ $MN \parallel BC$.

系二的逆理同樣可證。

(6) 證明 §126 系一中 $MN=\frac{1}{2}BC$.



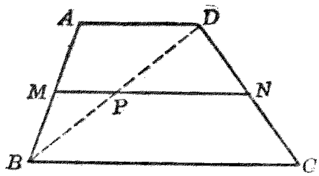
［解］過 N 作 $NP \parallel AB$，

則　　$BP=PC$

又　$BP=MN$　(▱性質二)

$\therefore\ MN=\frac{1}{2}BC.$

(7) 證明§126系二中$MN=\frac{1}{2}(AD+BC)$

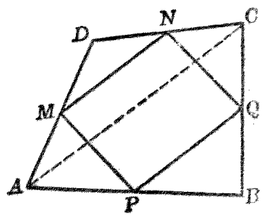


[解] 作對角線BD, 再由上題結果, $MP=\frac{1}{2}AD$,

$PN=\frac{1}{2}BC$,

$\therefore\ MN=\frac{1}{2}(AD+BC).$

(8) 連結任何四邊形鄰邊中點, 必成一▱.



[解] 連對角線AC,

$MN \parallel AC$,

$PQ \parallel AC$　(§126系一)

$\therefore\ MN \parallel PQ$　(三線平行定理)

同理連對角線BD, 可證$MP \parallel NQ$.

$\therefore\ MNQP$為一▱.　(決定▱條件一)

第六編　圓和軌跡

(一)　教材的說明

圓爲曲線圓形中最簡單,最重要的一種.本編專講關於圓的角,弧,弦各種定理及兩圓相關的定理.

下半編更就圓說明軌跡的意義和證法,極爲明白自然.再接講分角線,內心,外心,高心,垂心,重心等,學者可以迎刃而解.以前教科書,往往於三角形後突講軌跡,學者既苦兩層證法的難解,又未易認識軌跡的意義,以致生很大的窒礙.

(二)　教材的摘要

名稱　本編講過的名稱如下:—

優弧;劣弧;圓心角;圓周角;公弦;內公切線;外公切線;同心圓;軌跡外心;內心;高心(垂心);重心.

由習題述及的名稱如下:—

四分弧;旁心;旁切圓;尤拉線.

記號　本編用過的記號如下:—

圓的記號是⊙;弧的記號是⌒;

定理 本編所講定理如下:—

弧和圓心角的關係定理:

(一) 同圓或等圓內,如二圓心角相等,則所抱的弧也等;逆言之,如二弧相等,則所付的二圓心角也相等.

(二) 圓心角被對弧所度.

(三) 在同圓或等圓內,圓心角大的所對弧也大,小的所對的弧也小;逆言之,大弧所對的圓心角大,小弧所對的圓心角小.

關於弦的定理:

(一) 在同圓或等圓內,等弧所對的弦也等,大弧所對的弦也大;逆言之,等弦所對的弧也等,大弦所對的弧也大.

(二) 垂徑分弦定理 從圓心到弦上的垂線,必平分這弦.

[系一] 圓心與一弦中點的聯線,必與這弦垂直.

[系二] 一弦的平分垂直線必過圓心.

[系三] 從圓心到弦上的垂線,平分對這弦線的圓心角.

(三) 弦心距定理　同圓或等圓內,等弦距圓心等遠,大弦距圓心較近.

(四) 弦心距定理的逆定理　同圓或等圓內,距圓心等遠的弦必等,距圓心較近的弦大.

關於圓周角的定理:

(一) 圓周角定理　圓周角被所截弧的一半所度.

[系一] 凡截取同弧,而在這弧所對弦同側的各圓周角必等.

[系二] 凡截取同弧而在這弧所對弦異側的二圓周角必相輔.

[系三] 凡截取半圓的圓周角必為直角.

(二) 弦切角定理　弦端切線與弦所成角被這弦所對弧的一半所度.

[系] 弦端切線與弦所成的角,等於截這弦所對弧的任何圓周角.

關於切線的定理:

(一) 切線定理　一圓半徑在圓上端點的垂線,即那圓的切線.

[系一] 過切點的半徑,必垂直於切線.

[系二] 過切點而與切線垂直的線,必經過圓心.

(二) 切線長定理　自圓外一點至圓上二切線長相等。

[系]　二切線與連二切點的弦成等角

多角形與圓的關係定理:

(一) 圓內接正多角形定理　順次連接圓上等分點諸弦成這圓內接正多角形。

(二) 圓外切正多角形定理　順次作圓上等分點切線,成這圓的外切正多角形。

二圓的相互關係,分六種如下:

(一) 相離　一圓在他圓外而不相交。

(二) 外切　一圓在他圓外而交於一點。

(三) 相交　二圓交於二點。

(四) 內切　一圓含他圓而交於一點。

(五) 相含　一圓含他圓而不相交。

(六) 同心　二圓相含,而共心。

軌跡題的兩層證明:

(一) 凡在軌跡上的點都合某幾何條件。

(二) 凡不在軌跡上的點,必不合某條件

關於軌跡的定理如下:—

(一) 圓　一動點與一定點距離為一定時,其軌跡為圓。

(二) 分角線定理　一角的分角線即距這角二邊等遠

點的軌跡.

(三) 平分垂直線定理　一線段的平分垂直線,即距二端點等遠的軌跡.

(四) 三角外接圓定理　三角形三邊的垂直平分線必共過一點.(外心)

[系一]　共過的點是三角形外接圓心.

[系二]　不在直線上的三點可定一圓.

(五) 三角形內切圓定理　三角形三內分角線必共過一點.(內心)

[系]　共過的點是三角形內切圓心.

(六) 正多角形與圓關係定理　凡是正多角形都有一個外接圓和內切圓.

(七) 三角形垂心定理　三角形三高(即頂垂線)相交於一點(高心)

(八) 三角形重心定理　三角形三中線共過一點,且這點各中線上與頂點距離,爲該中線全長的三分之二(重心)

(三)　教材的分配

在教學上,本編最好分做15課講授,另加溫習一小

時.分法約略如下:—

第 64 課——從第 127 節"關於圓的要件"起到習題三四末了止.習題中 1, 2 兩題可在教室做口頭問答,其餘做書面練習.

第 65 課——講完第 130 節.命學生在教室中補出本節的證明,當時交卷.並指出習題三五中的 1, 2, 3 三題命學生在課外做書面練習.

第 66 課——講完第 131 節"垂徑分弦定理"並命學生做完習題三五的書面練習.

第 67 課——從第 132 節"弦心距定理"起到 133 節的逆定理止.並命學生做習題三六的 1, 2 兩題

第 68 課——從第 134 節"切線"起到 135 節"切線定理"止,並命學生做完習題三六的書面練習.

第 69 課
第 70 課
——從第 136 節"圓周角"起到習題三七末了止.依講授實際情形分做兩課,習題亦應適宜的分作兩次練習.

第 71 課——從第 140 節"多角形與圓"到習題三八末了止.習題可命學生在課外做書面練習.

第 72 課——從第 144 節"二圓關係"起到習題三九末

了止.習題可命學生在課外做書面練習.

第73課
第74課 ——從第147節"軌跡"起到習題四十末了止.

依講授實際情形分做兩課.習題亦應適宜的分作兩次練習.

第75課
第76課 ——從第150節"三角形外接圓定理"起到習題四一末了止.依講授實際情形分做兩課.

第77課——從第154節"三角形垂心定理"起到習題四二末了止.習題中的第1,2兩題最好在教室內做黑板練習,其餘各題在課外做書面練習.

第78課——照教材的摘要温習本編.

(四)　教授的要點

量弧與量角所用的單位同量度,但弧是指長短而言,角是指大小而言,以弧的長短來度角的大小,初學往往莫明其妙,教師應於第128節詳述弧與角分度的密切關係.

講第130節後最好當時命學生在教室中將(一)(二)的證明完全補出,即作練習,同時並可令程度較好的

學生在黑板上寫出，以資全體的觀摩，由教師稍加指正.

切線定理和他的兩個系，初學常苦辨認不清，故在教材的分配中，單獨列做一課，增多教室討論的時間.

軌跡在幾何上甚爲重要，而比較的難懂，教師應注意取圓做例，詳細說明軌跡的意義，和他的兩層證法的必要. 若稍不留心，以後各節便如墜五里霧中了.

(五) 習題的解答

習題三四 在教科書下册第 44 頁.

(1) 用量角器作已知度數的角，是根據什麽道理?

［答］ 根據以弧度角的道理.

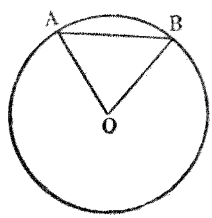
(2) 一直徑所成的圓心角是幾度? 所對的弧是全圓的幾分之幾? 這弧叫做什麽?

［答］ 180；二分之一；半圓.

(3) 證明互相垂直的二直徑，分圓爲四等弧.

［提示］ 互直二直徑分圓心爲四直角

(4) 如 AB 弧等於半徑，證明 $\widehat{AB}$ 爲全圓六分之一.



［解］ $\triangle OAB$ 爲等邊三角形.

$\therefore \angle AOB = 60°$

$\therefore\quad \widehat{AB}=60^\circ$

(5)　在 $\odot O$ 中已知 $\angle AOB=m^\circ$，求 $\angle OAB$ 的度數.

［答］　$\angle OAB=\frac{1}{2}(180^\circ-m^\circ)$

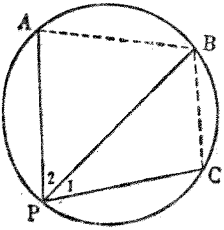
(6)　如 $\angle APB$ 的度數等於 $\widehat{AB}$ 的度數，P 點是不是即爲圓心？在什麼時候，纔必爲圓心？

［答］　不一定。

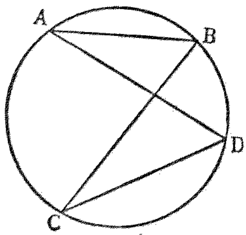
必須 $PA=PB$，P 纔必爲圓心。

習題三五　在教科書下册第 7 頁.

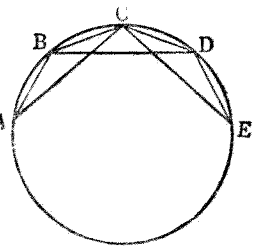
(1)　圖一內 $PA=PC$，$\angle 1>\angle 2$，試證 $\widehat{AB}>\widehat{BC}$.



圖一



圖二



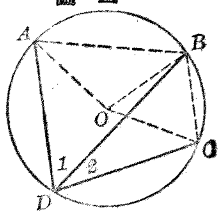
圖三

［解］　$AB>BC$

（非全等三角形定理一）

連 A, B, C 至圓心 O。

$\therefore\quad \widehat{AB}>\widehat{BC}$　(§ 130, 二)



圖四

(2)　圖二內 $AB=CD$ 試證 $AD=BC$.

［解］　$\widehat{AB}=\widehat{CD}$　　(§ 130, 二)

$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CB}$ (普通公理)

$\therefore\ AD=BC$ (§130, 一)

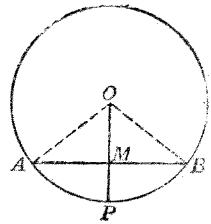
(3) 上面圖三內 $AB=BC=CD=DE$,試證 $AC=BD=CE$.

[解] 照上題根據§130,(二)及普通公理,知

$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CE}$,

$\therefore\ AC=BD=CE$ (§130, 一)

(4) 證明平分一弦的半徑,也平分這弦所對的弧.

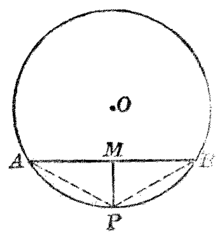


[解] $OM\perp AB$ (§131, 系一)

$\angle AOP=\angle POB$ (§131, 系三)

$\therefore\ \overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{PB}$ (§129)

(5) 證明連結一弦中點和其所對弧中點的直線,必經過圓心.



[解] 如圖 M, P 各是 $\overline{AB}$ 及 $\overset{\frown}{AB}$ 的中點.

$AP=PB$ (§130, 二)

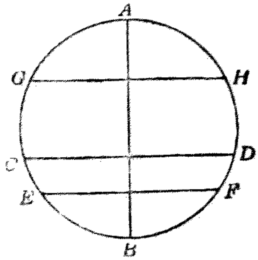
$\triangle AMP\equiv\triangle BMP$ ($s.\ s.\ s.$)

$\therefore\ \angle AMP=\angle BMP=rt.\angle$

$\therefore\ PM$ 過圓心 O (§131, 系二)

(6) 證明圖中一直徑如平分一弦,必平分與這弦平

行的一切諸弦.



設直徑 AB 平分 CD 弦,

EF, GH 等均與 CD 平行

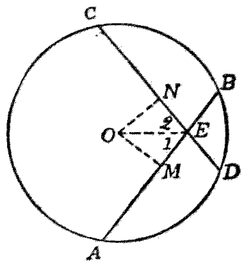
$AB \perp CD$ (§ 131, 系一)

[解] 由平行性質定理二, 知

直徑 AB 垂直於 EF, GH 諸線

$\therefore$ AB 平分 EF, GH.　　(垂徑分弦定理)

習題三六　在教科書下册第11頁.



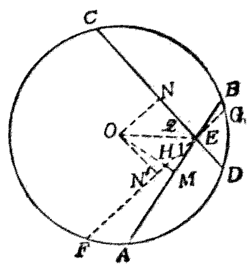
(1) 在右圖中試證如 $\angle 1 = \angle 2$, 則 $AB = CD$; 如 $\angle 1 > \angle 2$, 則 $AB < CD$.

[解] $\triangle MOE \equiv \triangle NOE$

(全等直角△定理一)

$OM = ON$　　(對應邊)

$\therefore$ $AB = CD$ (弦心距逆理)



又, 如 $\angle 1 > \angle 2$,

過 E 作 FG, 使 $\angle OEF = \angle 2$

由上題證得 $ON' = ON$,

及　$FG = CD$

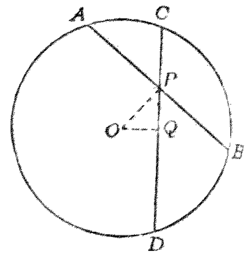
因　$OH > ON'$, $OM > OH$

$\therefore$ $OM > ON'$

即 $AB<FG$ (圓心距逆定理)

$\therefore$ $AB<CD$ (代換公理)

(2) 證明過圓內一點 P 的弦，以與過 P 點的半徑垂直的為最短.

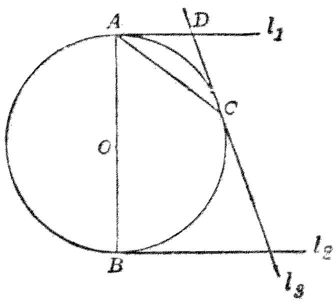


〔解〕 設 $AB\perp OP$, CD 為過 P 任意弦作 $OQ\perp CD$,

$OP>OQ$ (非全等△定理,系)

$\therefore$ $AB<CD$

(3) 證明直徑二端的切線必平行，其餘的必相交.



〔解〕 $l_1\perp AB$, $l_2\perp AB$

(切線定理)

$\therefore$ $l_1\parallel l_2$

(‖判別定理二,系)

又 AC 為不過圓心的弦,

l_1, l_3 切圓於 AC 弦的兩端,

因 l_1 與 l_3 均不垂直於 AC,

否則照切線定理 AC 須過 O, 與原設衝突,

$\angle DAC+\angle DCA<180°$

$\therefore$ l_1 與 l_3 相交 (交線判別定理)

(4) 證明過圓上一點,只有一切線. 過圓外一點,有

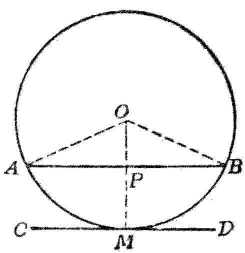
幾切線呢?

［解］ 用垂線公理一及切線定理證.

［答］ 由兩點決定一直線,可知過圓外一點有兩條切線.

(5) 證明過弧中點,而與所對弦平行的線必爲切線.

［解］ 連 OM, OA, OB



$\angle AOM=\angle BOM$ (§ 129)

$\triangle AOP \equiv \triangle BOP$ (s. a. s.)

$\therefore$ $AP=PB$ (對應邊)

$\therefore$ $CM \perp AB$

(垂徑分弦定理,系一)

$\angle OPA=\angle OMC=rt.\angle$

(平行性質定理二,及垂線定義)

$\therefore$ CD 是切線 (切線定理)

(6) 如一點在圓內,則與圓心的距離必小於半徑;如在圓外,則距離大於半徑.試由這理及垂線最短(非全等三角形定理的系)的理,來證切線定理.

［解］ 用全分定理證明第一部分.

如下圖, AB 於 P 點垂直於半徑 OP.

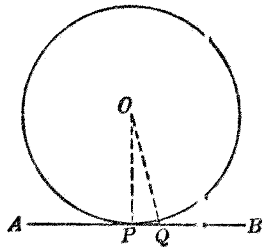
從圓心任作一線至 AB 如 OQ,

則 $OQ>OP$

$\therefore$ Q 點在圓外

故 AB 只與圓交於一點 P

為圓的切線。



習題三七 在教科書下册第16頁。

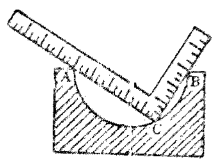
(1) 證明習題五第4題的作垂線法。

[提示] 用圓周角定理,系三證。

(2) 證明§§28, 29的作切線法。

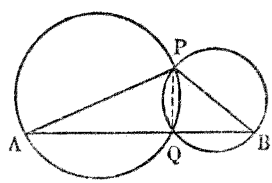
[提示] 均照上題證。

(3) 木匠在木板上挖一半圓如右圖,如欲割得準確,則用直角尺試驗時,應當怎樣?



[答] 根據圓周角定理的系三,如直角尺的頂點和曲尺兩邊與所挖半圓周緊靠,如圖內的 A, B, C 三點,則半圓準確。

(4) 如右圖, AP, BP 是二圓中直徑,試證 A, Q, B 三點在一直線上。



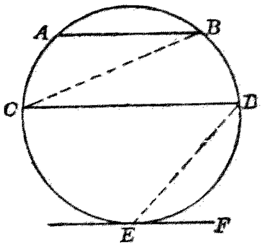
[解] $\angle AQP=\angle BQP=rt.\angle$

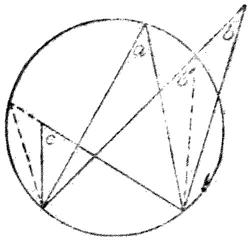
(圓周角定理系三)

$\therefore\quad \angle AQP+\angle BQP=180^\circ$

$\therefore\quad A, Q, B$ 在一直線上。

(5) 證明平行二弦,或平行的一弦一切線所夾的二弧必相等(看下面左圖)。





〔解〕　$\angle ABC=\angle BCD$　(平行性質定理二)

$\therefore\quad \widehat{AC}=\widehat{BD}$　(普通公理)

又　$\angle CDE=\angle DEF$　(平行性質定理二)

$\angle CDE$ 被 $\dfrac{\widehat{CE}}{2}$ 所度　(圓周角定理)

$\angle DEF$ 被 $\dfrac{\widehat{DE}}{2}$ 所度　(弦切角定理)

$\therefore\quad \widehat{CE}=\widehat{DE}$　(普通公理)

(6) 如上右圖,$\angle a$ 是圓周角,$\angle b$ 頂點在圓外,$\angle c$ 的頂在圓內,試證 $\angle a>\angle b>\angle c$.

〔解〕　$\angle a=\angle b'$　(圓周角定理,系一)

$\angle b'>\angle b$　(外角定理)

$\therefore\quad \angle a > \angle b$ (代換公理)

同樣可證 $\angle c > \angle a.$

$\therefore\quad \angle c > \angle a > \angle b.$

(7) 如上右圖,測得 AB 旁暗礁可以圍在一個形內.若在 A, B 二處設燈塔,測定圓周角 $\angle ACB$,則海船 S 行駛時,只要 $\angle ASB < \angle ACB$, 就不會觸礁,何故?

[解] 由上題結果,如 $\angle ASB < \angle ACB$

則 S 必在弓形的外面,不會觸礁.

(8) 二弦在圓內相交,證明所成角被所截二弧的和的一半所度(看下圖二,注意 $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ 的關係)

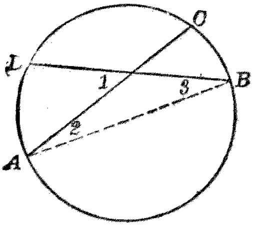


圖 一

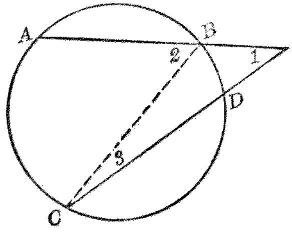


圖 二

[解] $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$

(外角定理)

$\angle 2$ 被 BC 弧的一半所度

(圓周角定理)

$\angle 3$ 被 AD 弧的一半所度

(圓周角定理)

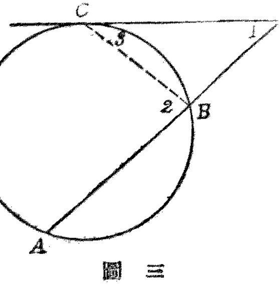


圖 三

$\therefore$　$\angle 1$ 被 $\frac{1}{2}(\widehat{BC}+\widehat{AD})$ 所度。　(普通公理)

(9)　二弦在圓外相交，證明所成角，被所截二弧的較的一半所度(看上圖二)。

[解]　$\angle 2=\angle 1+\angle 3$　(外角定理)

移項，　$\angle 1=\angle 2-\angle 3$

照上題證法，

$\therefore$　$\angle 1$ 被 $\frac{1}{2}(\widehat{AC}-\widehat{BD})$ 所度。

(10)　一弦和一切線相交，證明所成角被所截二弧的較的一半所度(看上圖一)

[解]　照上題證法。

$$\angle 1=\angle 2-\angle 3$$

$\therefore$　$\angle 1$ 被 $\frac{1}{2}(\widehat{AC}-\widehat{BD})$ 所度。

(11)　二切線所成角，與截弧有什麼關係？

[提示]　於頂點任意作一切線再用上題結果，可證所成角亦被所截二弧的較的一半所度。

(12)　就 $\angle A$ 爲直角及鈍角兩種情形，討論 § 139 的作圖題。

[答]　(一) $\angle A$ 爲直角。

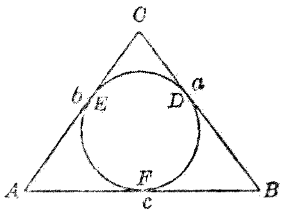
B 及 B' 兩交點，必有一點 DA 延長線上，所以 Q 至多只有一解。如所作弧與 AD 相切或不相交，則均無解。

(二) $\angle A$ 爲鈍角.

B 及 B' 兩交點,必有一在 DA 延長線上,所以至多只有一解.如所作弧與 AD 必相切,或不相交,或兩交點都在 DA 延長線上,則均無解.

習題三八　在教科書下册第22頁.

(1) 已知一圓外切三角形各邊長爲 a, b, c 求自各頂點到圓的各切線長.



[解]　$AF=AE$ (切線長定理)

同理　$BF=BD$

$CD=CE$

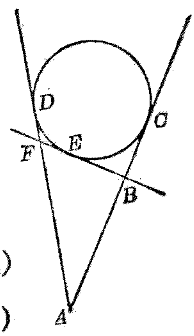
$\therefore\quad AF+BF+CD=\frac{1}{2}(a+b+c)$

但　$AF+BF=C$　(題設)

$\therefore\quad OD=CE=\frac{1}{2}(a+b-c)$

同樣可得　$BF=BD=\frac{1}{2}(a+c-b)$

$AF=AE=\frac{1}{2}(b+c-a)$



(2) 在一圓二切線所截劣弧上取一點,再作一切線,與這二切線成一△.證明其周界的長爲一定.

[解]　$AD=AC$　(切線長定理)

$BE=BC$　(切線長定理)

$AB=AB$

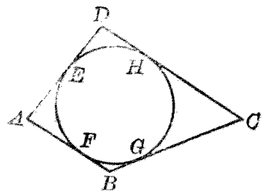
三式相加, $AD+BE+AB=AC+BC+AB$

或 $AF+FE+BE+AB=AC+AC$

即 $\triangle ABF$ 周界 $=2(AC)$

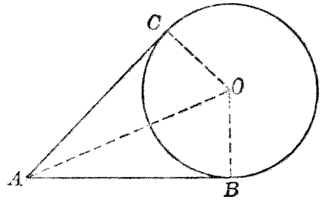
無論 E 點在劣弧上的位置如何,$\triangle ABF$ 常合於此關係,其周界恆等於 AC.

(3) 證明圓外切四邊形二對邊長的和必等於他二對邊長的和.



[解] 用切線長定理得四個等式,兩端相加即得.

(4) 試證二切線交角為自交點至圓心直線所平分.



[解] $OB=OC$ (同圓半徑)

$AB=AC$ (切線長定理)

AO 公共

$\triangle AOB \equiv \triangle AOC$ (s. s. s.)

$\therefore \angle OAB=\angle OAC$ (對應角)

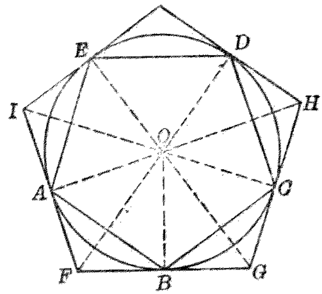
(5) 連接圓心與內接(或外切)正多角形頂點,則分這正多角形為若干全等等腰三角形.試加證明.

[解] (內接正多角形)

$OA=OB=OC=\cdots$ (半徑)

$AB=BC=\cdots$.

(正多角形定義)



$\therefore\ \triangle OAB\equiv\triangle OBC\equiv\cdots$

(s. s. s)

又 (外切正多角形)

$\triangle OAF\equiv\triangle OFB$ (全等直角△定理二)

$FI=FG$ (正多角形定義)

$FA=FB$ (切線長定理)

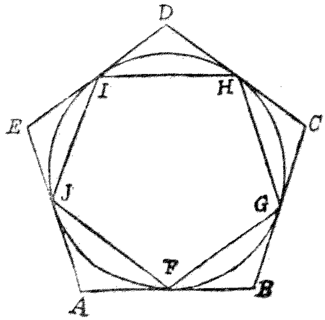
$\therefore\ AI=BG$ (普通公理)

$\therefore\ rt.\triangle AOI\equiv rt.\triangle BOG$ (s. a. s.)

同樣易證諸直角三角形均全等

$\therefore\ \triangle FOI\equiv\triangle FOG\equiv\cdots$, 以 $OF=OI=OG=\cdots$ 爲腰.

(6) <u>證明一圓的外切正多角形周界大於同邊數的內接正多角形周界.</u>



$AF+AJ>FJ$. (距離公理)

$BF+BG>GF$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$AF+FB+\cdots>FJ+GF+\cdots$.

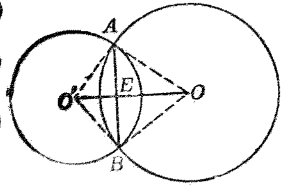
即　$AB+BC+\cdots>FJ+GF+\cdots$

(7)　如將一圓內接正 n 多角形,邊數加倍,則後者周界必大於原形周界.但對於外切正多角形,則反減小.

[提示]　均可照上題證.

習題三九　在教科書下冊第25頁.

(1)　二圓相交,證明聯二圓心的直線必和公弦垂直.



[解]　$\triangle AOO' \equiv \triangle BOO'$　(s. s. s.)

$\therefore$　$\angle ADE = \angle BOE$ (對應角)

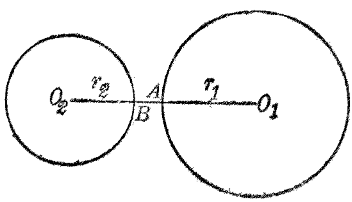
$\therefore$　$\triangle AOE \equiv \triangle BOE$　(s. a. s.)

$\therefore$　$\angle AEO = \angle BEO = rt.\angle$

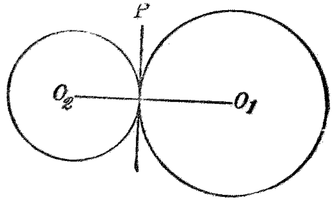
$\therefore$　$AB \perp OO'$　(垂線定義)

(2)　有 $\odot O_1$, 和 $\odot O_2$, 半徑各爲 r_1, r_2. 而 $r_1 > r_2$. 試證

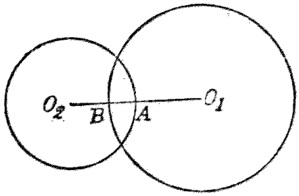
條件	$r_1+r_2<o_1o_2$	$r_1+r_2=o_1o_2$	$r_1+r_2>o_1o_2>r_1-r_2$	$r_1-r_2=o_1o_2$	$r_1-r_2<o_1o_2$
關係	二圓相離	二圓外切	二圓相交	二圓內切	二圓相容



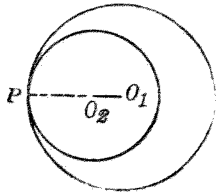
(一)



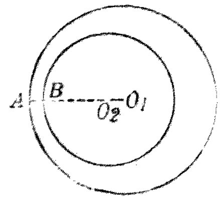
(二)



(三)



(四)



(五)

[解] (一) $O_1O_2=r_1+AB+r_2$

$$r_1+r_2=O_1O_2-AB$$

$$\therefore\quad r_1+r_2<O_1O_2$$

(二) 於切點 P 作公切線,由切線定理的系一,及垂線公理,可證 O_1O_2 必過切點 P.

$$\therefore\quad O_1O_2=r_1+r_2$$

(三) $r_1+r_2=O_1B+AO_2$

$$=O_1B+AB+BO_2=O_1O_2+AB$$

$$\therefore\quad r_1+r_2>O_1O_2$$

$$O_1O_2=O_1B+BO_2$$

$$=r_1-(r_2-AB)=r_1-r_2+AB$$

$$\therefore\quad O_1O_2>r_1-r_2$$

(四) 於 P 點作公切線,照(三)同樣可證 O_1O_2 過 P.

$$O_1O_2=O_1P-O_2P$$

$$=r_1-r_2$$

（五）延長 O_1O_2 至兩圓周，

$$O_1O_2=O_1A-O_2A$$

$$=r_1-(r_2+BA)=r_1-r_2-BA$$

$\therefore\quad O_1O_2>r_1-r_2$

(3) 如 $\odot P$，$\odot Q$ 是相離二等圓，怎樣去作公切線？

［提示］（一）作內公切線，照 § 145 作內公切線法，只須把"二圓半徑和爲半徑作輔助圓"改爲"以等圓直徑爲半徑作輔助圓。"

（二）作外公切線，只須連 PQ，於 P，Q 兩點作 PQ 的垂線交兩圓即得 A，B 二點，連 AB 便是一根公切線。

(4) 就二圓種種關係，述公切線作法，并注意各種關係中，內外公切線的條數。

［解］（一）相離，教科書已經講過。

（二）外切．外公切線兩條，作法同（一）

內公切線一條，只須於切點作兩圓心聯線的垂線便是。

（三）相交．無內公切線。

外公切線二條，作法同（一）

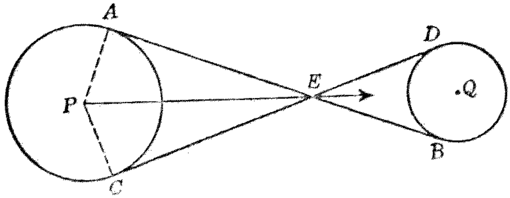
（四）內切．無內切線

外公切線一條，只須於切點 P 作兩圓心聯線

的垂線便是.(P 與兩圓心在一直線上，在 (2) 題中已經說及他的證明)

(五) 相容. 內外公切線都沒有.

(5) 試證兩圓二內公切線交點,必在聯圓心的線上.



[解] 設二內公切線相交於 E, 聯 PE 線假設不過 Q, 在這線上一點 Q' 連 BQ', DQ'.

則因 $\triangle APE \equiv \triangle CPE$ (s. s. s.)

$\angle AEP = \angle CEP$ (對應角)

$\angle DEQ' = \angle BEQ'$ (等角的對頂角)

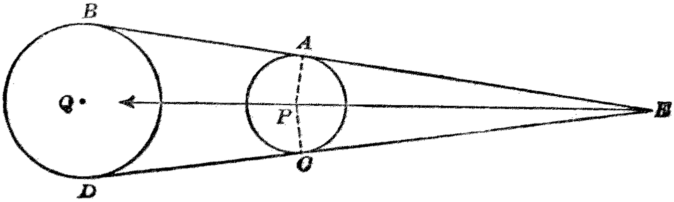
$EB = ED$ (切線長定理)

$\therefore$ $\triangle DQ'E \equiv \triangle BQ'E$ (s. a. s.)

$\therefore$ $Q'B = Q'D$ (對應邊)

$\therefore$ Q' 必為圓心,而與 Q 合為一點.

(6) 試證兩圓二外公切線交點,必在聯圓心的線上.



[解] 先證$\triangle APE\equiv\triangle CPE$,再證$EP$的連線過$Q$.證法略同上題.

(7) 試證兩圓二內(或外)公切線上,二切點間等距.

[解] 看上兩題的圖.

(一) 二內公切線,

$EA=EC,\ EB=ED$　　(切線長定理)

$\therefore\ EA+EB=EC+ED$

即　$AB=CD$

(二) 二外公切線,

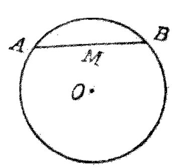
$EB=ED,\ EA=EC$　　(切線長定理)

$\therefore\ EB-EA=ED-EC$

即　$AB=CD$

習題四十　在教科書下冊第29頁.

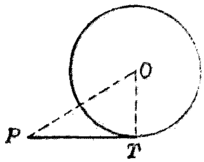
(1) 證明一圓內等弦中點的軌跡爲一同心圓.



[解] 如圖,與AB弦相等之弦均與圓心O等距(弦心距定理),再依垂徑分弦定理,知由O至各等弦中點M等距,故M點之軌跡爲一同心圓,半徑爲OM.

(2) 在一圓上,切線長爲一定的另一端點軌跡,爲一同心圓,試加證明.

[解]　$\overline{OP}^2 = \overline{OT}^2 + \overline{TP}^2$

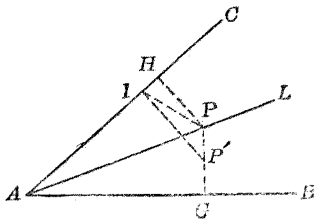


∴　OT, TP 爲定長,

故　OP 亦爲定長。

∴　P 點軌跡爲半徑等於 OP 之同心圓.

(3)　證明分角線定理的(二)′



[解]　P' 如不在軌跡上一點,過 P' 作 AB 的垂線遇軌跡 AL 於 P,

則　　$PG = HP$,

$P'G < PG$　　(全分定理)

$IP' + P'P > IP$　　(三邊關係定理)

$IP > PH$　　(垂線距離最短)

∴　$IP' + P'P > PH$　　(普通公理)

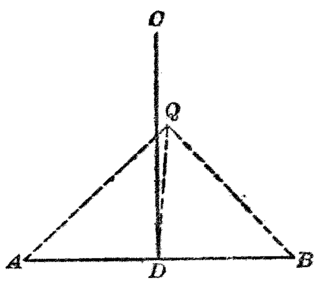
$> PG$

$> PP' + P'G$

∴　$IP' > P'G$,

卽 P' 不合條件

(4)　證明垂線平分線定理的(二)



[解]　設 $QA = QB$,連 QA, QB, QD.

則　$\triangle QAD \equiv \triangle QBD$　　(s. s. s.)

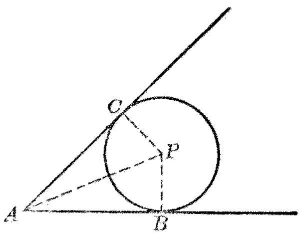
$\therefore$　$\angle ADQ = \angle BDQ = rt.\angle$

$\therefore$　Q 點必在垂直平分線 CD 上.

(5)　證明相交二直線所成二組對頂角的二分角線,爲距這二交線等遠的點構成的軌跡.

［提示］仿分角線定理證.

(6)　有常切一角二邊的諸圓,求圓心的軌跡.

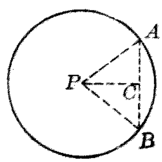


［提示］$rt.\triangle APB \equiv rt.\triangle APC$

(s. s. s.)

P 點在分角線上.

(7)　有過二定點的諸圓,求圓心的軌跡.

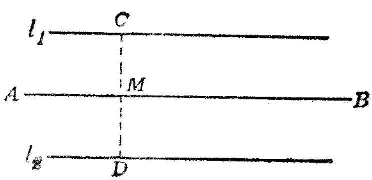


［提示］連 AB, 並從 P 作 AB 的垂線,則由垂徑分弦定理可證.

$rt.\triangle PCA \equiv rt.\triangle PCB$

$\therefore$　P 點在 AB 的垂直平分線上.

(8)　求距二平行線等遠點的軌跡.



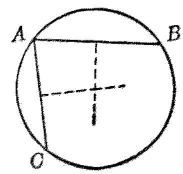
［解］作 $CD \perp l_1$, 於中點 M

作 $AB \parallel l_1$ 及 l_2

再依法證明。

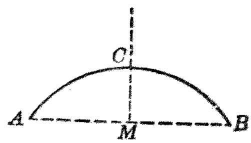
習題四一　在教科書下冊第34頁。

(1)　已知一圓,求其圓心.



［解］由三角形外接圓定理,作任意二弦 AB, AC, 再作二弦的垂直平分線,所得交點便是圓心。

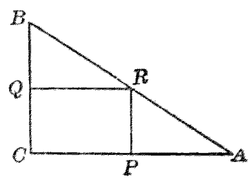
(2　已知一弧,求平分爲二.



［解］連 AB 弦,作弦的垂直平分線,交弧 AB 於 C.

$\therefore\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$　　(習題三五的第4題)

(3)　證明 rt.△ 夾直角二邊平分垂直線交於斜邊上.



［解］兩垂直平分線交點 R 是外接圓心(三角形外接圓定理)

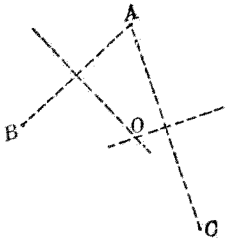
$\because$　C 是直角

$\therefore$　AB 爲外接圓直徑(圓周角定理的系三)

$\therefore$　R 必在 AB 上與 AB 的中點重合.

［註］本題亦可用平行線內等線段定理的系一證兩垂直平分線均平分 AB 來證明。

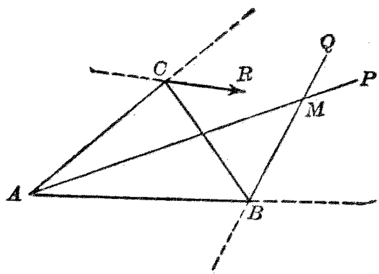
(4) 證明§27的作圖題.



〔解〕 連AB, BC即所作圓的弦,再作兩弦的垂直平分線,得交點O. O即所作圓的心.

(垂徑分弦定理的系二)

(5) 證明三角形一內分角線,與他二角外分角線必相交於一點.這點叫做旁心.(Ex-center)



〔解〕 AP為距AB, AC等遠的軌跡 (分角線定理)

BQ為距AB, BC等遠的軌跡 (分角線定理)

∴ 交點M為距AB, BC, CA等遠的點.

但 CR為距BC, CA等遠的軌跡.

∴ M點必在CR上,即CR必過M.

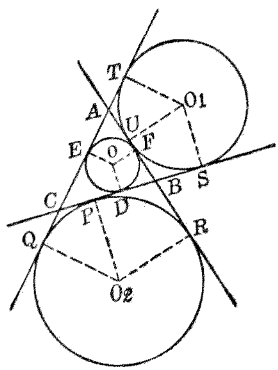
(6) 求作一圓和一△一邊及他二邊的延長線相切.這圓叫旁切圓.(Ex-scribed circle).一△有三旁切圓.

〔解〕 照上題作得交點M,以M為心,M至BC邊或

至其他二邊延長線上的距離爲半徑,即得一旁切圓.

照樣改作他一角的內分角線及其餘任一角的外分角線可另得兩個旁切圓.

(7) 已知三角形邊長爲 a, b, c, 求三角形各邊上內切圓與旁切圓各切點間距離.



[解] $\triangle ABC$ 內切圓 O 的切點爲 D, E, F. 旁切圓如 O_1, O_2 的切點爲 P, Q, R, S, T.

由習題三八,第1題已求得各頂點與內切圓切點之距離如下

設 $Ai = AE = AF = \frac{1}{2}(b+c-a)$

$= s-a.$　　〔設 $s = a+b+c$〕

則 $Bi = s-b,$　　$Ci = s-c.$

由切線長定理,知

$$AQ+AR = AC+CQ+AB+BR = AC+CP+AB+BP$$

$$= AC+CB+AB = a+b+c = s$$

設 A_0 表示此距離,則同樣可得

$$A_0 = B_0 = C_0 = s$$

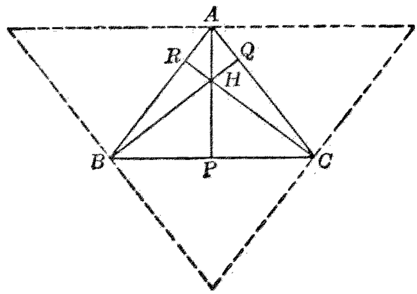
又因 $BU = BS = CS - CB = C_0 - a = s - a$

$\therefore$ $FU = b - a$　　　餘照求

習題四二　在教科書下册第37頁.

(1)　一△的垂心,是否一定在△內?

[答]　不一定,



(2)　如 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,說明 A 是 $\triangle BCH$ 的垂心, B 是 $\triangle ACH$ 的垂心, C 是 ABH 的垂心.

[解]　$\triangle BCH$ 中,

$AP\perp BC$, $BA\perp CH$, $CA\perp BH$, 相交於 A

$\therefore$ A 是 $\triangle BCH$ 的垂心　　(△垂心定理)

餘二點照樣說明

(3)　證明等邊△中內心,外心,垂心,重心四點相合.

[解]　由習題二二,第12題結果,可證一等邊△的各中線也是垂線,也就是各邊的垂直平分線,

$\therefore$ 重心,垂心,外心相合.

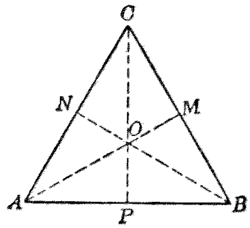
再由習題二三,第7題結果,可證一等邊△的各中線也是內分角線,

$\therefore$ 重心,內心相合.

$\therefore$ 四心相合.

(4)　證明如一△中內心,外心,垂心,重心四點有二

相合,則必盡相合而成一等邊△.



[解] (一) 如內心,外心相合,

則 AM 等是各角的分角線.

AM 等也是各邊的垂直平分線

∴ O 點也是重心

(△重心定理)

O 點也是垂心 (△重心定理)

$\triangle APC \equiv \triangle BPC$ (s. a. s.)

∴ $AC = BC$ (對應邊)

同樣可證 $BC = AB$

∴ $\triangle ABC$ 爲等邊三角形.

(二) 如內心垂心相合,

則由 $\triangle APC \equiv \triangle BPC$, $\triangle AMB \equiv \triangle AMC, \cdots$ (a. s. a.)

∴ $AP = PB$, $BM = MC$, $CN = NA$ (對應邊)

∴ O 也是重心和外心.

三角形等邊證法同(一)

(三) 如內心,重心相合,

則由疊合法可證 $\triangle ACP \equiv \triangle BCP, \cdots$

因得 CP 等亦爲垂線.

∴ O 也是外心和垂心.

三角形等邊證法同(一)

(四) 爲外心,垂心相合,

則 CP 等是垂直平分線,故 O 也是重心.

又由 $\triangle APC\equiv\triangle BPC$　　　(s. a. s.)

因得 CP 等也是內分角線

$\therefore$ O 也是內心.

三角形等邊證法同(一)

(五) 如外心,重心相合,

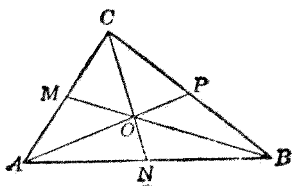
則由 $\triangle APC\equiv\triangle BPC$　　　(s. a. s.)

餘證同上.

(六) 如垂心,重心相合.

證略同上.

(5) 證明△中三中線的和必小於這△周界的二分之三,而大於周界的四分之三.



[解] 用三邊關係定理得

$AC+CP>AP$, 等三式

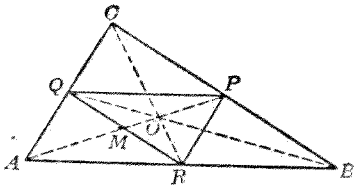
又用同理得

$MC+CB>BM$, 等三式

六式相加即得 $(AC+CB+BA)\frac{3}{2}>(AP+BM+CN)$

第二部分可由$\triangle OAB$等用同樣理寫出諸不等式，再相加便得證明。

(6) <u>聯△三邊中點，成功一新△，原形的重心是新△的什麼？</u>



[解] $PQ \parallel AB$, $PR \parallel AC$

(平行線內等線段定理的系一逆理，證見習題三三，5)

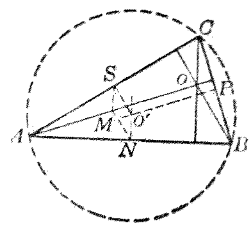
$\therefore$ $PQAR$ 是 ▱　　(決定▱條件一)

$\therefore$ $QM = MR$　　(▱性質四)

同樣可證BQ平分PR，CR平分PQ

$\therefore$ 原形的重心也是新△的重心。

(7) <u>試證從△垂心到各角頂的距離，等於從△外接圓心，到各對邊距離的2倍。</u>



[解] 左圖O是垂心，O'是外心。

由平行線內等線段定理的系一，易證從N, S作平行$O'S$及$O'N$的線必相交於AO的中點M。

$\therefore$ $SMNO'$ 是 ▱　　(決定▱條件一)

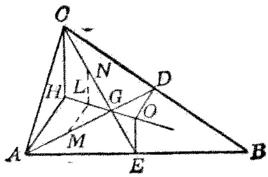
$\therefore$ $O'N = SM$　　(▱性質二)

但　　$CO = 2(SM)$ (平行線內等線段定理系一)

$\therefore \quad CO=2(O'N)$　　(普通公理)

同樣可得其餘二頂與O,及其餘二邊與O'的關係與此式相當的兩式.

(8) 證明△裏外心,垂心,重心三點在一直線上.這直線叫尤拉(Euler)線.



[解] H是垂心,G是重心連HG直線,並從AB邊的中點E作垂線與HG交於O,連OD線.並取AG, HG, CG的中點M, L, N,

$\because \quad CH \parallel OE$　　(平行判別定理二的系)

$CH \parallel NL$　　(平行線內等線段定理系一)

$\therefore \quad OE \parallel NL$　　(三線平行定理)

又因　$GN=GE=\frac{1}{2}GC$ (重心定理,普通公理)

$\therefore \quad \triangle GNL \equiv \triangle GEO$　　($a.\ s.\ a.$)

$\therefore \quad GL=GO$　　(對應邊)

再因　$GM=GD$　　(理見上)

$\angle MGL=\angle DGO$　　(對頂角)

$\therefore \quad \triangle MGL \equiv \triangle DGO$　　($s.\ a.\ s.$)

$\therefore \quad \angle GML=\angle ODG$　　(對應角)

$\therefore \quad ML \parallel OD$　　(平行判別定理一)

∴ $OD \parallel AH$ (三線平行定理)

但 $AH \perp BC$

∴ $OD \perp BC$ (平行性質定理二的系)

∴ O 爲外心與 G, H 在一直線上。

第七編　比例論

(一)　教材的說明

比例為幾何上一種極重要的應用.本編專講比例於比的觀念,及公式的成立,都用極淺顯的方法和例來說明.

內分,外分,及調和分割於研究幾何上亦關重要,本編附帶作簡明的敍述.

最後詳講比例的應用於相似三角形的各重要定理,及多角形相似諸定理.

應用相似三角形定理而製的儀器,如比例分線規,對角線尺,圖形縮放器等,亦附帶講到,不但使學者順便得到普通畫圖上用器的常識,並可增加學習的興趣.

(二)　教材的摘要

名稱　本編講過的名稱如下:—

比;比例;比例線段;內分;外分;調和分割;相似多角形;相

似三角形;割線;比例中項。

記號　本編用過的記號如下:—

比的記號是"∶"或用分數式表示。相似的記號是"∽"或"∽"。

定理　本編講過的定理如下:—

(一)三角形兩邊成比例線段定理　和三角形底邊平行的直線,分其餘兩邊成比例線段。

[系一]　諸平行線截兩直線,其相當線段成比例。

[系二]　分三角形兩邊成比例線段的直線,與第三邊平行。

(二)三角形內分比例線段定理　三角形的內分角線內分底邊成兩線段與其餘兩邊成比例。

(三)三角形外分比例線段定理　三角形的外分角線外分底邊成兩線段與其餘兩邊成比例。

關於相似三角形的定理如下:—

(一)相似三角形判別定理一　兩三角形若各角彼此相等,便相似。

[系一]　兩三角形有兩角彼此相等便相似。

[系二]　兩直角三角形有一銳角彼此相等便相似。

[系三]　兩三角形,各和另一三角形相似,則此兩

三角形相似.

〔系四〕 三角形底的平行線及兩邊所成的三角形和原形相似.

(二) 相似三角形判別定理二　兩三角形有兩邊對應成比例,且夾角相等,便相似.

(三) 相似三角形判別定理三　兩三角形三邊對應成比例,便相似.

(四) 直角三角形母子相似定理　直角三角形斜邊上的高,分原形爲兩個直角三角形,各與原形相似,且彼此相似.

(五) 比例中項定理一　直角三角形斜邊上的高,爲分斜邊所成二線段的比例中項.

(六) 比例中項定理二　直角三角形中夾直角的任一邊,爲斜邊上被高所分而對這一邊的一段與斜邊的比例中項.

(七) 畢氏定理　直角三角形中斜邊的平方,等於夾直角二邊的平方和.

關於相似多角形的定理如下:—

(一) 相似多角形定理　從相似多角形一對應頂點,引各對角線必分兩形爲同個數同位置的許多

相似三角形.

(二) 相似多角形周界比定理 兩相似多角形周界的比,等於任兩對應邊的比.

(三) 相似多角形定理 邊數相同的正多角形相似.

(四) 正多角形周界比定理 邊數相同的二正多角形,其周界的比,等於頂心距或邊心距的比.

關於圓的定理如下:—

(一) 交弦和交割線段定理 一圓的二弦或其延線的交點,內分或外分此二弦所成二線段的積相等.

(二) 相交切割線段定理 從圓外一點,引一切線及割線,則切線長平方等於此點外分割線上弦,所成兩線段的積.

比例定律如下:—

(一) 加法定律 四量成比例,則兩比的二量相加,也成比例.

(二) 減法定律 四量成比例,則兩比的二量相減,也成比例.

(三) 加減定律 四量成比例,則兩比的二量各相加減也成比例.

(四) 連比例定律 如 $a, b, c, \cdots\cdots a', b', c', \cdots\cdots$ 等成連

比,即
$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots,\text{則}$$

$$\frac{a+b+c+\cdots\cdots}{a'+b'+c'+\cdots\cdots}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots$$

作圖法　本編講過的作圖法如下:—

(一)比例線段的作圖。

(二)內分線段法。

(三)外分線段法。

(四)比例中項作圖。

利用相似三角形理做成的儀器:

(一)比例分線規。

(二)對角線尺。

(三)圖形縮放器。

(三)　教材的分配

在教學上本編最好分做12課講授,另加温習一小時. 分法約略如下:—

第79課——從第156節"線段比"起到習題四三末了止.習題命學生在課外做書面練習.

第80課——上課如有未了的地方或疑問,可略加補述.本課講完第160節"比例定律"並命學生

做習題四四的第1,2兩題的書面練習,最好當時交卷或做黑板練習.

第81課——從第161節"線段的內分和外分"起到第163節"三角形外分比例線段定理"止.並命學生做完習題四四的書面練習.

第82課——從第164節"內分線段法"起到習題四五末了止.時間有餘,習題中的第1,2兩題可命學生做黑板練習,餘做書面練習.

第83課
第84課——從第167節"相似多角形"起到習題四六末了止.照講授實際情形分做兩課,習題可任意擇一二題命學生做黑板練習,餘分兩次做書面練習.

第85課——從第171節"交弦和交割線段定理"起到習題四七末了止.

第86課
第87課——從第174節"直角三角形母子相似定理"起到習題四八末了止.斟酌實際情形分做兩課講授.習題依照講授情形,命學生分兩次做書面練習.

第88課}
第89課}——從第178節"相似多角形定理"起到習題四九末了止.照上分配講授時間有餘,可任意擇一二題命學生做黑板練習.

第90課——照教材摘要,温習本編.

(四) 教授的要點

關於線段比例的應用,講授時教師可令學生注意地圖,校舍圖及其他統計圖的作法和意義.

幾條比例定律的公式前面教材的分配中,單做一課講授,原意是使課室中有餘暇,教師可以考察學生能否完全了解,若班中學生在代數中研習已熟,不須複習,教師宜斟酌情形,不必單做一課,或竟略去.

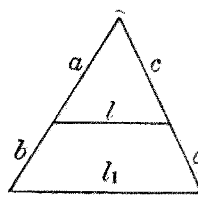
線段的內分,外分,初學往往因線段混淆無辜錯誤,應特別令其注意本節的註中的讀法.

本編所講的應用比例理做成的三種儀器,教師最好能備有實物,說明用法,讓學生自求理解,並做習題四七的第5,6兩題.內地偏僻,此種儀器若不易購,則照圖製造,亦非甚難.若能聯絡手工教材,叫學生自製更好.

習題四三的第7題結果,即比例的互換定律,教師應令學生注意。

相似形的性質,爲幾何計算的基本,又爲數三角的根據,應用極大,宜加意講授,多做練習,庶學生能運用自如.教師若能搜羅實際應用問題,如習題四六第8,9諸題一類,命學生自行測量演算,更可引起學算興趣。

(五)　習題的解答



習題四三　在教科書下册第42頁.

(1)　設 $l \parallel l_1$, $a=3$, $b=2$, $d=2\cdot5$, 求 c。

［答］　3.75.

(2)　設 $l \parallel l_1$, $a=4$, $c=6$, $d=8$, 求 b.

［答］　$5\frac{1}{3}$.

(3)　如 $a=b$, c 和 d 的關係怎樣? 由此可證明以前的那一條定理.

［答］　$c=d$. 可證明“平行線內等線段定理”的系一的逆理。

(4) 證明和梯形兩底平行的直線,分割兩腰成比例線段(圖一)。

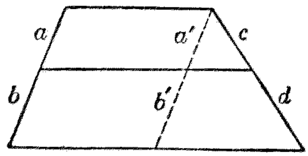


圖 一

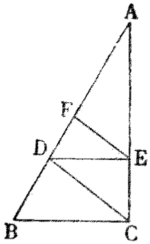


圖 二

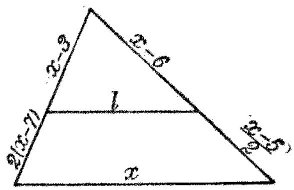


圖 三

[解] $\frac{a'}{b'}=\frac{c}{d}$. (三角形兩邊成比例線段定理)

但 $a=a'$, $b=b'$ (平行四邊形性質)

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

(5) 圖二 $DE \parallel BC$, $FE \parallel DC$, 證明 $\frac{AF}{FD}=\frac{AD}{DB}$.

[解] $\frac{AF}{FD}=\frac{AE}{EC}$, $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{DB}$,

$$\therefore \quad \frac{AF}{FD}=\frac{AD}{DB}.$$

(6 如上圖三 $l \parallel x$, 求三邊的長。

[解] 解方程式,

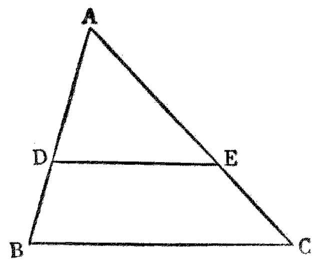
$$\frac{x-3}{2(x-7)}=\frac{x-6}{\frac{x-5}{2}}.$$ 求得 x, 再代入求邊長.

(7) 已知三線段 a, b, c. $a=2.5$; $b=3.5$; $c=5$. 求作 x 和 y 兩個第四比例線段使 $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$, $\frac{a}{c}=\frac{b}{y}$, 驗 x,y 兩線段的長,並用代數方法證明其相等.

[解] 照 §158 作法. 並由 $ax=bc$, $ay=bc$ 證明其相等.

[註] 本題結果,即比例交換定律.

<u>習題四四</u> 在教科書下冊第 47 頁.



(1) $\triangle$ ABC 中 $DE \parallel BC$, 證明

(一) $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$;

(二) $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$; (三) $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$; (四) $\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{EC}$.

[解] 由 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$,

再用加法定律, 即得 (二)

由 (二) 再用習題四三第7題結果,即得 (四)

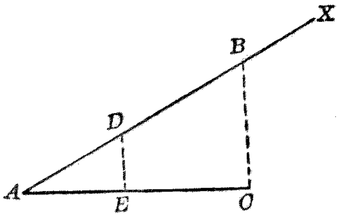
由 $1\div\frac{AD}{DB}=1\div\frac{AE}{EC}$. 即得 (一) (即互換定律)

再由上第7題結果即得(三)。

(2) 試從比例加法定律,推出求作第四比例線段的另一方法來.

[解] 已知 $a+b$, b, c 求作 x 使成 $a:b=c:x$, 先作線段 AC 等於 $a+b$, 再在線上取分點 E, 使

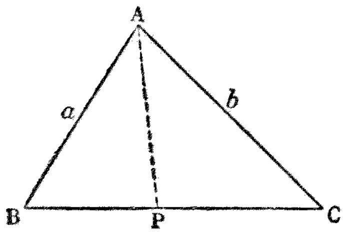
$AE=a$, 則 $EC=b$.



再從 A 任引一線 AX, 於上取 $AD=C$, 連 ED.

由 C 作平行於 ED 的線 CB 即得 $DB=x$.

(3) $\triangle ABC$ 中, AP 平分 $\angle A$; $a=3$, $b=4$, $BP=2$, 求 PC.



[答] $2\frac{2}{3}$.

(4) 同圖 $a=3$ 寸, $b=6$ 寸, $BC=7$ 寸, 求 BP 和 PC.

[解] $\frac{BP}{PC}=\frac{a}{b}$. (三角形內分比例線段定理)

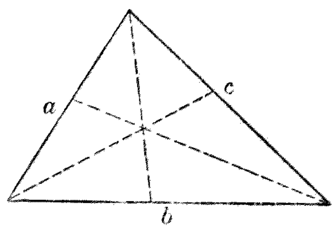
$\frac{BC}{PC}=\frac{a+b}{b}$. (加法定律)

代入求得　$PC=4\frac{2}{3}$.

$BP=2\frac{1}{3}$.

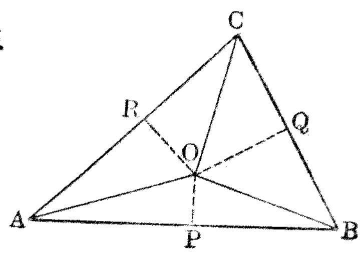
(5)　三角形的三邊,順次爲7寸,8寸,9寸.求各角的平分線,內分對邊所成的三對線段.

［解］依次照上題求.



(6)　從$\triangle ABC$內任意點O,引OA, OB, OC三線.再作三線所成三角的平分線OP, OQ, OR.

則　$$\frac{AP}{PB}\times\frac{BQ}{QC}\times\frac{CR}{RA}=1.$$



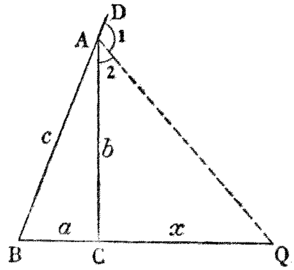
［解］用三角形內分比例線段定理,可得下三式:

$$\frac{AP}{BP}=\frac{OA}{OB};\quad \frac{BQ}{QC}=\frac{OB}{OC};$$

$$\frac{CR}{RA}=\frac{OC}{OA}.$$

三式兩端相乘,卽得.　$$\frac{AP}{PB}\times\frac{BQ}{QC}\times\frac{CR}{RA}=1.$$

(7) 如右圖 AQ 平分外角 CAD, $a=2$, $b=5$, $c=6$. 求 x.



［解］ 用三角形外分比例線段定理,得 $\dfrac{a+x}{x}=\dfrac{c}{b}$,

代入求得 $x=10$.

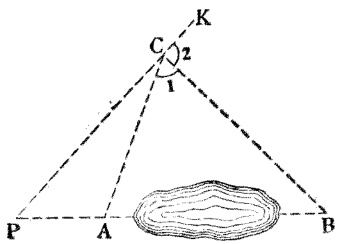
(8) 同圖 $b=2$, $c=3$, $x=4$. 求 BQ.

［答］ 6.

(9) 三角形的三邊順次爲8寸,10寸,12寸求外角平分線外分三邊所成的三對線段.

［解］ 順次照(7)題求,便得三對線段爲40寸,20寸,48寸.

(10) 要測不便直接去量的 AB 兩點間的距離,先揀一點 C, 作 CK 使 $\angle 2=\angle 1$. 再延長 KC 到 P, 使 P, A, B 三點在同一直線上.量那幾條線段,便可算出 AB.?



［答］ 量 CP, CB, PA 便可由三角形外分比例線段定理算出 AB.

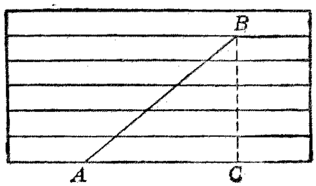
習題四五　在教科書下册第52頁.

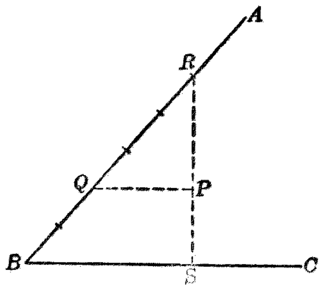
(1)　內分一線段成3:5.

(2)　外分一線段成7:4.

〔解〕各照教科書的§§164, 165作圖.

(3)　一線段可放在橫格紙上,把他分成2:3如下左圖(或任何比).試說明其理由.





〔答〕因平行橫格均分垂直線爲2:3.由三角形兩邊成比例線段定理$AC:CB=2:3$.

(4)　過$\angle ABC$內一點P,求作一直線遇AB於R, BC於S,使$\frac{RP}{PS}=\frac{3}{2}$.

〔解〕過P作$PQ \parallel BC$.

平分BQ爲二,

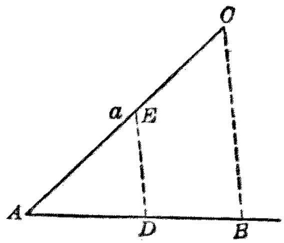
再以平分BQ的單位長,從Q向A取三等分得R點.

連RP線,延長交BC得S,則照上題可證

$$RP : PS = 3 : 2.$$

(5) 已知二線段的比及其和,求作二線段.

〔解〕 已知二線段的和爲 a, 比爲 $m : n$. 可作一線 $AC=a$, 從 A 任引一線,於上取 AD, DB 二線段爲 m, n. 連 BC, 再從 D 作 $DE \parallel AC$, 則由三角形兩邊成比例線段理可證　$AE : EC = m : n$.



(6) 已知二線段的比及其差,求作二線段.

〔解〕 如上圖,只須取 AE 等於其差;取 $AB = m$, $BD = n$. 先連 DE, 再由 B 作 $BC \parallel DE$ 卽得.

可用三角形兩邊成比例線段理及比例加法定律證明.　$AC : EC = m : n$.

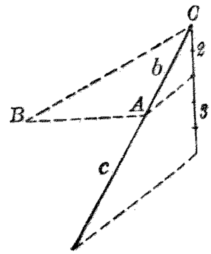
(7) 長方形兩邊和爲5寸,長與闊的比等於7∶4.求作這長方形.

〔解〕 先作一直角,再照(5)題的作法便得長,闊.再於此兩線不相交的一端各作垂線,或作對邊的平行線.

(8) 長方形兩邊差爲1寸,長與闊的比等於5∶2.求作這長方形.

〔解〕 參照(6)(7)兩題作。

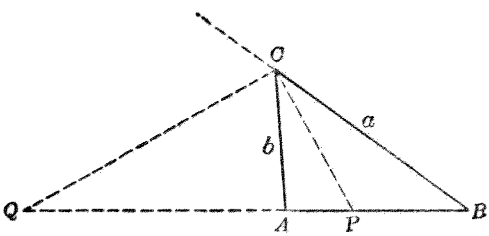
(9) 已知三角形的二邊 a, b 和 $b : c = 2 : 3$, 求作這三角形。



〔解〕 先由已知 2, 3, b 三線照比例線段的作圖作出 c.

再用 A, C 做心, 依次用 c, a 做半徑畫弧,如能得交點 B, 則聯交點至 A, C 便得三角形。

(10) 試證△任一角的內外平分線調和分割對邊。



〔解〕 $AP : PB = b : a$ (△內分比例線段定理)

$BQ : QA = a : b$ (△外分比例線段定理)

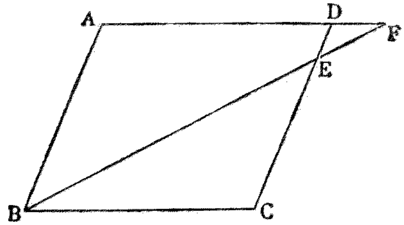
或 $QA : BQ = b : a$ (習題四四第一題)

$\therefore$ $AP : PB = QA : BQ$ (普通公理)

$\therefore$ P, Q 調和分割 BA (調和分割定義)

習題四六 在教科書下册第58頁。

(1) ABCD是平行四邊形,延長AD至F,連結BF.把圖中所有成比例的線段,用比例式表出.



〔解〕 $\triangle ABF \backsim \triangle CEB.$

$\triangle DEF \backsim \triangle CEB.$

$\triangle ABF \backsim \triangle DEF.$

再由相似定義寫出比例式.

(2) 兩相似三角形對應高的比,等於對應邊的比.

〔解〕 由相似定義,得

$$AC : A'C' = AB : A'B' = BC : B'C'$$

$$\angle A = \angle A'$$

$\therefore$ $\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$ (相似△判別定理一,系二)

$\therefore$ $CD : C'D' = AC : A'C' = \cdots\cdots$

(3) 兩相似△對應角平分線的比,等於對應邊的比.

〔解〕 如下圖,由相似定義及普通公理,得

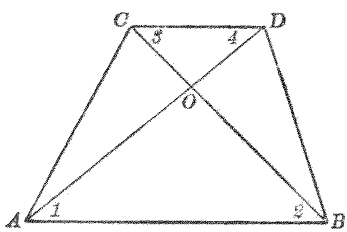
$$\angle C = \angle C'$$

$$\angle CAP = \angle C'A'P'$$

$\therefore \quad \triangle ACP \backsim \triangle A'C'P'$ (相似△判別定理一)

$\therefore \quad AP : A'P' = AC : A'C' = \cdots\cdots$

(4) 梯形的二對角線互分爲比例線段。又若下底是上底的二倍,則對角線的交點,在三分之一處。



[解] $\angle 1 = \angle 4, \angle 2 = \angle 3$

(平行性質一)

$\therefore \quad \triangle AOB \backsim \triangle DOC$ (相似△判別定理一)

$\therefore \quad AO : OD = BO : OC$ (相似△定義)

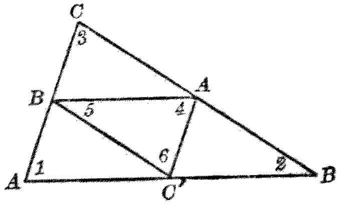
又因 $AO : OD = BO : OC = AB : CD$

若 $AB = 2(CD)$

則 $AO = 2(OD), \quad BO = 2(OC)$

$\therefore$ 交點 O 在三分之一處。

(5) 連結三角形三邊中點的線段所成三角形和原三角形相似.



[解] 由平行線內等線段定理的系一及平行四邊形定義,知

$AB'A'C'$, $BC'B'A'$, $CA'C'B'$

均是平行四邊形.

$\therefore \quad \angle 1=\angle 4,\ \angle 2=\angle 5,\ \angle 3=\angle 6$ (▱性質二)

$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ (相似△判別定理一)

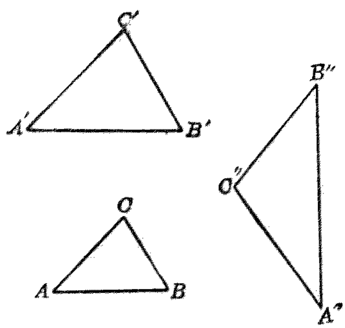
(6) 用相似兩定理,證明連結三角形兩邊中點的直線等於第三邊的一半.

[解] 由上題得

$A'B'=AC',\ A'B'=C'B$ (▱性質二)

$\therefore \quad A'B'=\frac{1}{2}(AB)$

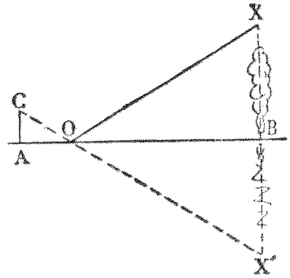
(普通公理)



(7) 兩三角形的各邊對應平行或對應垂直,便相似.

[解] 設$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$各邊對應平行;又與$\triangle A''B''C''$各邊對應垂直.

由習題二九第8題結果,先證$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$,再用相似三角形判別定理一證其相似。



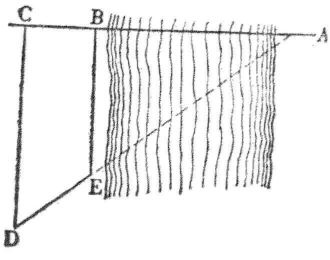
(8) 測量家從C點看樹在池中的影子,望得C, D, X'三點共線,若測得CA, XB都和地面垂直.又量得$CA=5$尺,$AD=62$尺,$BD=30$尺.試推算樹高。

[解] $rt.\triangle BDX\equiv rt.\triangle BDX'$ (s. a. s.)

$rt.\triangle ADC\backsim rt.\triangle BDX'$ (相似△判別定理系二)

$\therefore$ $rt.\triangle ADC\backsim rt.\triangle BDX$ (相似△判別定理系三)

再寫出比例式求BX.



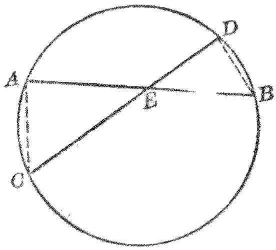
(9) 要量河闊AB,先找一點C和A, B共線,次作CD, BE二平行線使D, E, A共線.問量那幾條線段,可算出河闊AB?

[解] $AB:AC=BE:CD$ (相似△判別定理系四)

即 $AB:(AB+BC)=BE:CD$

故只須量BC, BE, CD便可算出AB.

(10) 圓的二弦 AB, CD 相交於 E.試證 $\triangle AEC$ 和 $\triangle BED$ 相似.



［解］ 用圓周角定理的系一及對頂角定理證.

(11) 從圓外一點 A 引二線遇圓於 B, C 和 D, E. 證明 $ACD \backsim \triangle ABE$.

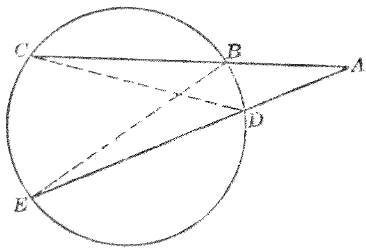
［解］ A 角公共,

又 $\angle AEB = \angle ACD$

(同被 $\overset{\frown}{BD}$ 的一半所度)

$\therefore$ $\triangle ACD \backsim \triangle ABE$

(相似 $\triangle$ 判別定理系一)



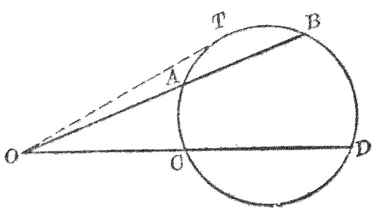
習題四七 在教科書下冊第63頁.

(1) 應用§172定理,證明交割線段定理.

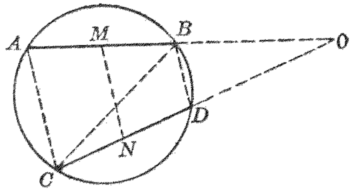
［解］ 由 A 作切線 AT,

則依§171定理

$\overline{AT}^2 = OA \cdot OB = OC \cdot OD.$



(2) 在§171右圖中,如 $OB=OD$, 則 $ABDC$ 為梯形.試加證明.



[解] $AO \cdot OB = CO \cdot OD$.

若 $OB=OD$,

則 $AO=CO$, $AB=CD$.

(普通公理)

聯 AC, BD, BC 及 AB, CD 中點 MN 諸線可證

$$MN \parallel AC,\ MN \parallel BD.$$

$\therefore\ AC \parallel BD$　(三線平行定理)

故 $ABDC$ 為一等腰梯形,　(梯形定義)

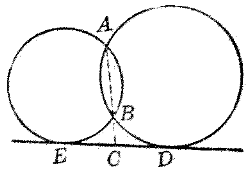
(3) 試由交弦交割定理,推出已知三線段的第四比例線段的又一作法.

[解] 設已知 OA, OB, OC, 求第四比例線段 OD.

由交弦交割定理,　$AO:OD=CO:OB$.

任作一圓,於圓周上任一點 A(看教科書§171的圖)為心, AO, OB 的和為半徑畫弧與圓得交點 B, 再於 AB 弦上取 AO, (或以 AO, OB 的差做半徑作 AB 弦, 再由 B 端延至定長 BO.) 以 O 為心, OC 為半徑畫弧,交圓於 C, 延長 OC (或連 OC),即得 OD 線段.

(4)　如二圓相交，則聯其交點的延長線，平分其公切線在二切點間的一段長.



［解］　$\overline{EC}^2=CB\cdot CA$,

$\overline{CD}^2=CB\cdot CA$,

$\therefore\quad EC=CD$　　(相交切割線定理,及普通公理)

(5)　對角線尺是根據何條定理造成?

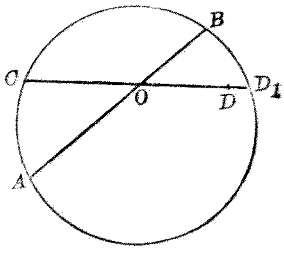
［答］　相似三角形兩邊成比例線段定理.

(6)　圖形縮放器中 O, P, P' 三點,何以總在一條直線上?

［解］　看教科書下冊第62頁的圖.

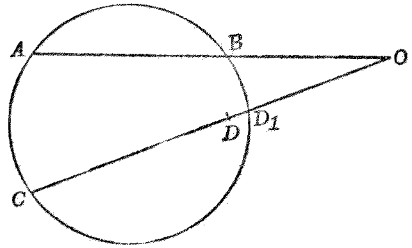
因任聯三點中的兩點成線,則第三點常依 $OQ:OR$ (或 $OQ:QR$) 的比內分(或外分)這連線成兩段與成比例.

(7)　試證交弦和交割線段定理的逆定理,即如 AB, CD 二線段或他們的延長線,交於 O 點,而有 $AO\cdot OB=CO\cdot OD$ 的關係,則 A, B, C, D 四點必定在一圓上.



［解］　A, B, C 之點作一圓,和

CO 或其延長線交於 D_1 點,則



$AO \cdot OB = CO \cdot OD_1$ (交弦和交割線段定理)

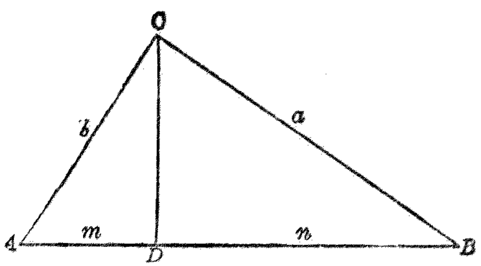
又 $AO \cdot OB = CO \cdot OD$ (假設)

$\therefore \quad OD_1 = OD$

且 D 與 D_1 同在 O 點一側,所以 D_1 與 D 相合.

習題四八 在教科書下册第69頁.

(1) 證明右圖中 $a^2 : b^2 = n : m$.



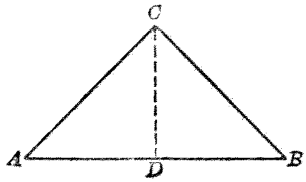
[解] 由比例中項定理二,

得 $a^2 = n(AB)$,

$$b^2=m(AB).$$

$$\therefore \quad a^2:b^2=n:m.$$

(2) 試證 $rt.\triangle$ 斜邊與他一邊平方差,等於第三邊平方.



[解] 用畢氏定理公式移項證.

(3) 求一等腰直角三角形中三邊的比.

[解] 由直角△母子相似定理,

得 $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CD}{AC}$,

又 $\overline{CD}^2=\sqrt{AD\cdot DB}$ (比例中項定理一)

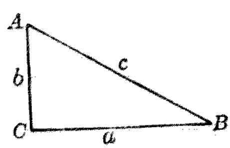
但 $AD=DB$ (習題二四第4題)

$\therefore \quad CD=AD=\dfrac{1}{2}AB$ (普通公理)

代入第一式可得 $\overline{AB}^2=2\,\overline{CA}^2$

$\therefore \quad AB:CA(\text{或 } CB)=\sqrt{2}.$

(4) 一 $rt.\triangle$ 中,斜邊爲最短邊二倍,求三邊的比.



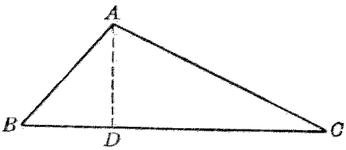
[解] 由畢氏定理, $c^2=a^2+b^2$,

及 $c=2b$ 兩式可求得

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{a}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \frac{b}{c}=\frac{1}{2}.$$

(5) 如 AD 爲 $\triangle ABC$ 的高,求證 $\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{BD}^2-\overline{CD}^2$.

［解］ 由畢氏定理,得



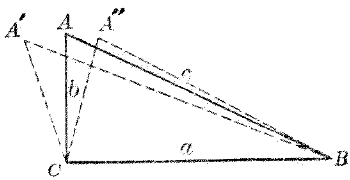
$$\overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2,$$

$$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2,$$

兩式相減卽得

$$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{BD}^2-\overline{CD}^2.$$

(6) 如 $\triangle ABC$ 中一邊平方等於他二邊的平方和,試證必爲一直角三角形.如一邊平方大於二邊的平方和,則必有一鈍角.

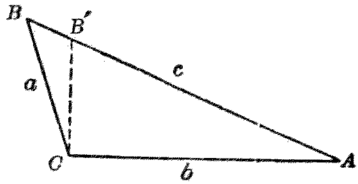


［解］ 設 $\angle C$ 非直角,則 $\angle C \gtrless rt.\angle$;則在 C 點必可作一 BC 的垂線,如 CA',或 CA''. 用 C 做圓心,CA 做半徑於垂線上取弧,使 $CA'=CA''=b$,連 A' 或 A'' 至 B. 則依畢氏定理應有 $\overline{A'B}^2$ (或 $\overline{A''B}^2$) $=a^2+b^2$

$$\therefore\quad A'B\ (\text{或 } A''B)=AB$$

但　　$A'B>AB>A''B$　　(非全等△定理一)

爲不可能,故 $\angle C$ 應爲直角.



又　如 $c^2>a^2+b^2$

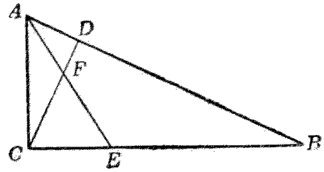
則 c 上必可有一點如 B',

使　$AB'^2=a^2+b^2$

∴　由上證

$$\angle B'CA=rt.\angle$$

$$\therefore\quad \angle BCA>rt.\angle$$



(7)　有 $rt.\triangle ABC$, CD 爲弦上的高, 與 $\angle A$ 的分角線 AE 相交於 F. 求證

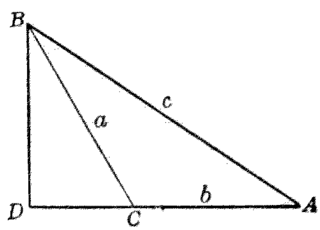
$DF:FC=CE:EB.$

[解]　於兩 $\triangle ABC$ 及 ADC 中

$\frac{AC}{AB}=\frac{CE}{EB};\quad \frac{AD}{AC}=\frac{DF}{FC}$　　(△內分比例線段)

但　$\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$　　(直角△母子相似定理)

∴　$DF:FC=CE:EB$　　(普通公理)



(8)　已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=120°$. 求證 $c^2=a^2+b^2+ab.$

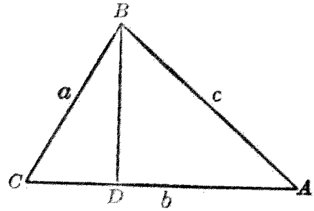
[提示]　如 $\angle C=120°$, 則

$$\angle ACD=60°$$

$$CD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a$$

代入畢氏定理的通例(二)即得所求的結果.

(9) 已知△ABC中$\angle C=60°$,求c與a, b的關係.

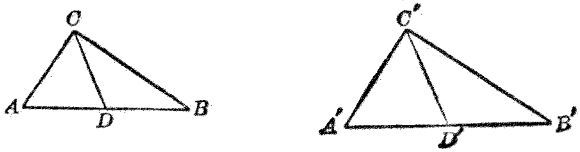


[答] $c^2=a^2+b^2-ab$.

證法和上題相同.

習題四九 在教科書下册第74頁.

(1) 證明相似三角形周界的比,等於對應中線的比.



[解] 由相似定義,得

$$\angle A=\angle A'$$

及 $$\frac{AC}{A'C'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{AD}{A'D'}$$ (因D, D'是中點)

$\therefore$ △ACD∽△$A'C'D'$ (相似△判別定理二)

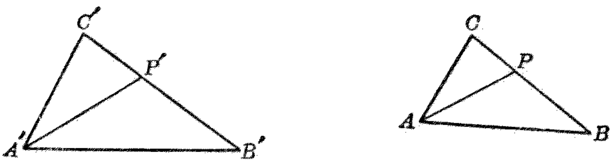
$$\therefore \frac{P}{P'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{CD}{C'D'}$$

(2) 證明相似三角形周界的比等於對應分角線的比.

[解] 由內△分比例線段定理,

有 $$\frac{AC}{AB}=\frac{CP}{PB},\quad \frac{A'C'}{A'B'}=\frac{C'P'}{P'B'}$$

但 $$\frac{AC}{AB}=\frac{A'C'}{A'B'}$$ (相似定義)



$\therefore\ CP:PB=C'P':P'B'$ (普通公理)

$\therefore\ \triangle ACP\backsim\triangle A'C'P'$ (相似△判別定理二)

餘證略同上題。

(3) 兩相似三角形的周界為18寸和15寸.大三角形的一中線為6·5寸.求小三角形的對應中線.

[答] $5\frac{5}{12}$寸.

(4) 兩相似多角形一對對應邊為25寸和15寸,小多角形的周長72寸,求大多角形的周長.

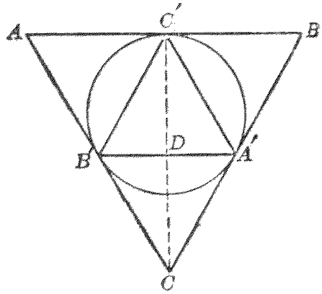
[答] 12尺.

(5) 求一圓的內切和外接正三角形,邊與邊的比,和高與高的比.

[解] $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$ (相似△判別定理一)

由切線長定理及正三角形定義,易證內接△各頂

點的外切△邊的中點.



$\therefore$ 內接△的邊爲外切△邊的 $\frac{1}{2}$

(平行線內等線段定理系一)

$\therefore$ 內接正△邊：外切正△邊 $=1:2$.

菱形 $A'C'B'C$ 的對角線互相垂直,可由全等三角形證明,

$$C'D=DC$$

$$\therefore\ \text{內接正△高：外切正△高}=1:2$$

(6) 設兩圓的半徑爲5寸,10寸,求內接於兩圓的正六邊形周界的比.

[答]

$$P:P'=1:2$$

(P, P' 順次表小圓及大圓周界)

(7) 內接於半徑2吋的圓的正多角形,其周界爲 a 吋,問與其等邊數,內接於半徑3吋的圓的正多角形,周界若干?

[答] $P=\frac{3}{2}a$ 寸.

(8) 如正多角形的周界增加2倍,則頂心距(即外接圓半徑)須增加若干?

[答] 2倍.

第八編　幾何計算

(一)　教材的說明

本編專講幾何圖形面積的計算.直線形以長方形爲根據,在第二編已用割補術等實驗方法說明,現在再加以理論的證明.

曲線形本編只講圓的面積,爲便初學計.不用極限理來解述,而以圓與正多角形關係,用直觀方法證明,以求淺顯易知.

編中並舉幾何圖形證明代數恆等式的例,以見幾何代數互相闡明的效用.並附有類似的習題以資練習.

(二)　教材的摘要

名稱　本編講過的名稱如下:—

等積形;弧度角.

記號　本編常用等號"="來表示等積.

定理　本編講過的定理如下:—

(一)長方形面積定理 長方形面積,等於高和底的乘積.

[系一] 二等高(或底)長方形面積的比,等於二底(或高)的比.

[系二] 二長方形面積的比,等於其底與高乘積的比.

(二)平行四邊形面積定理 平行四邊形面積等於底乘高.

[系] 同在二條平行線內,同底或等底的二平行四邊形必等積.

(三)三角形面積定理 三角形面積等於高與底乘積的一半.

[系一] 同在二條平行線內,同底或等底的二個三角形必等積.

[系二] 二三角形面積的比,等於其底與高乘積的比.

[系三] 二相似三角形面積的比,等於其任一相當邊平方或相當高平方的比.

(四)梯形面積定理 梯形面積等於兩底的半和與高的乘積.

(五) 正多角形面積定理　一正多角形面積,等於邊心距與周界乘積的一半.

(六) 圓周率定理　任何圓圓周與其半徑的比,爲一定數.

[系一]　$c=\pi d=2\pi r$

[系二]　在以 r 爲半徑的圓中 m° 的弧的長等於

$$\frac{m}{360}\times 2\pi r$$

(七) 圓面積定理　圓面積等於半徑和圓周的乘積的一半.

[系一]　圓面積等於半徑平方和圓周率的乘積.

[系二]　二圓面積的比,等於半徑平方比.

(八) 扇形面積公式:　$A=\frac{m}{360}\times\pi r^2$

作圖法　本編講過的作圖法如下:—

(一) 作等積形法.

(二) 已知圓的內接外切正方形作法.

(三) 已知圓內接外切正六角形作法.

[系一]　已知圓內接正六角形邊長和圓半徑相等.

[系二]　聯一圓內接正六角形相隔頂點得這圓的內接等邊三角形.

(四)圓周率求法.

圓與正多角形同性公理 凡正多角形特性,與邊數多寡無關的,也是圓的特性.

代數恆等式的幾何證明. 本編講述二例如下:—

(一)證明代數分配律 $(a+b)c=ac+bc$.

(二)證明平方差公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

(三) 教材的分配

在教學上,本編最好分做10課講授,另加温習二小時.分法約略如下:—

第91課——從第182節"面積"起到習題五十末了止.習題命學生做書面練習,若講授時間有餘,可擇一二題在課室做黑板演習.

第92課——從第186節"平行四邊形面積定理"起到習題五一末了止.

第93課——從第189節"作等積形法"起到第190"節正多角形面積定理"末了止.並命學生做習題五二第1, 2, 3, 4等題的書面練習.

第94課——講完第191節"代數恆等式的幾何證明",並命學生做習題五二的第5題的書面練習.

最好在課室中能當時做出.

第95課——從第192節"圓的相關量"起,到習題五三末了止。

第96課
第97課——從第197節"圓與正多角形同性公理"起到習題五四末了止。依實際講授情形,分做兩課.

第98課——從第200節"圓面積定理"起到習題五五末了止。

第99課——照本編教材摘要做口頭問答及黑板溫習。

第100課——溫習全書

(四)　教材的要點

講授本編各幾何形的面積定理,可在書外令學生實地做簡單的測量題,如校址地積,操場,窗戶等等,以明幾何的應用。

圓周和圓面積定理,因初學不易了解極限觀念,故只宜用直觀方法於講§193時畫簡明的圖,使學生易於明白。

習題五二的第 5 題由學生自動的做出不但於代數,幾何相互的關係上得點知識,研習的興趣,也可增加不少.

§192 中所用的符號, P_n, P_{2n} 等教師應注意先行說明.

(五)　習題的解答

習題五十　在教科書下冊第 78 頁.

(1)　設有二等高長方形,底長的比爲 $\frac{m}{n}$,試仿 §158 的方法,直接證明上面的系一.

[解]　設公共單位分兩長方形的底各爲 m', 與 n' 分.

則 $$m':n'=m:n.$$

$\therefore$　兩面積的比爲 $m'h:n'h=m':n'=m:n.$

(2)　有三個長方形 I, II, III, I 和 II 等高,而底的比爲 $b:b'$, II 和 III 等底,而高的比爲 $h:h'$. 試求 I 與 II, II 與 III 面積的比,并推出 I 和 III 面積的比.

[解]　$\frac{\text{I}}{\text{II}}=\frac{b}{b'}$,　$\frac{\text{II}}{\text{III}}=\frac{h}{h'}$ (長方形面積定理的系一)

兩式兩端相乘,　　$\therefore$ $\frac{\text{I}}{\text{III}}=\frac{bh}{b'h'}$.

(3)　取 III 爲面積的單位,而就上題推證長方形面積定理.

［解］取上題結果公式，立見長方形面積等於高底相乘。

(4) 二等積長方形的底如相等，問高是不是也相等？

［答］相等。可寫出系二的公式來證明。

(5) 二等積長方形中高的比與底的比有何關係？

［解］由長方形面積定理的系一，有

$$A=bh,\quad A'=b'h'$$

$$\because\quad A=A'\qquad(\text{題設})$$

$$\therefore\quad b:b'=h':h.$$

(6) 求正方形面積與邊長關係，并用詳細一些的說法（§185註）。

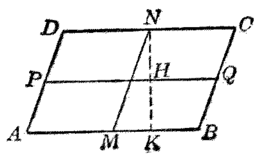
［解］由長方形面積定理及正方形定義，可得

$$A=b^2\qquad(b\text{表每邊的長})$$

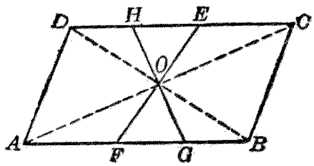
詳細說法，可仿照§184註寫出。

習題五一　在教科書下册第82頁。

(1) 證明連接▱對邊中點的二線段，分全形爲四個等積▱。



［解］由平行線內等線段的系一先證 $NH=HK$。再由中點關係及▱面積定理證。



(2) 證明經過▱對角線交點的任何線,分全形爲二個等積梯形或▱.

[解] (一) 與 AD 平行的 EF 分爲二個▱.

∵ O 爲 AC 中點. (▱性質四)

∴ EF 平分 CD 及 AB. (∥內等線段定理系一)

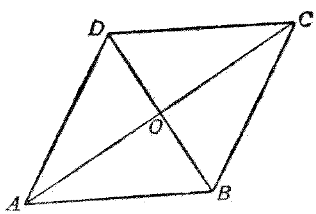
∴ ▱$ADEF$=▱$EFBC$. (▱面積定理的系)

(二) HG 爲過 O 任意線分爲二個梯形 $ADHG$, $CHGB$. 由對頂角定理,及平行性質定理一先證

$$\triangle DOH=\triangle BOG,\quad \triangle EOC=\triangle FOA.$$

$$\therefore\ DH=BG,\quad EC=AF.$$

因得兩梯形的兩底及高均相等.



(3) 證明斜方形面積等於其二對角線乘積的一半.

[解] 先證 $AC\perp BD$.

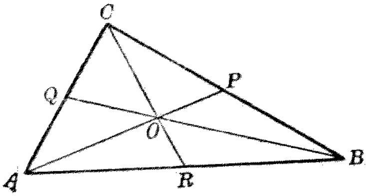
(習題二九, 6)

∴ $\triangle ABC=\frac{1}{2}AC\cdot OB$, (三角形面積定理)

$\triangle ADC=\frac{1}{2}AC\cdot OD$

∴ ▱$ABCD=\frac{1}{2}AC\cdot BD$. (普通公理)

(4) 證明△三中線,分原形爲6個等積△.



[解] 視$\triangle AOB$, $\triangle AOQ$,以BO, OQ爲底,則

$$\tfrac{1}{2}\triangle AOB=\triangle AOQ.$$

(因由重心定理, $BO=2(OQ)$; 由垂線公理二則同高)

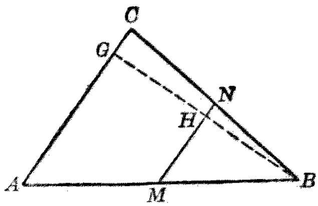
又 $\triangle AOQ=\triangle QOC.$ (底$AQ=QC$,又同高)

同樣 $\triangle QOC=\tfrac{1}{2}\triangle COB=\triangle COP=\triangle BOP=\tfrac{1}{2}\triangle AOB.$

$$=\triangle AOR=\triangle BOR.$$

∴ 六個△等積.

(5) 證明連接△任二邊中點所成小△面積爲原形的四分之一.



[解] 作底AC的高BG.

由平行線內等線段定理的系一,可證

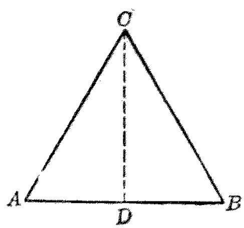
$$BH=HG=\tfrac{1}{2}BH.$$

又 $MN=\tfrac{1}{2}AC$ (習題三三, 6)

∴ $\triangle BMN=\tfrac{1}{4}\triangle BAC.$

(普通公理,代入公式)

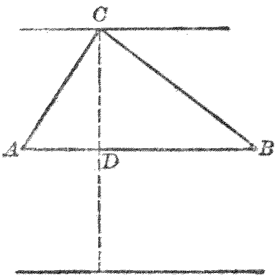
(6) 已知等邊三角形邊長爲a,求其面積.(看習題四八第4題)



［解］ 按習題四八第4題,便知 $CD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,

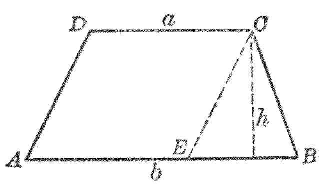
再由△面積定理求得面積爲 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

(7) 已知△底邊位置及長短,且面積大小有定,求其對頂點軌跡.



［解］ 底 AB 的長,及面積一定,即△的高 CD 一定,故知頂點 C 的軌跡爲距離 AB 等於 CD 而平行於 AB 的二直線.再照軌跡證明.

(8) 試分一梯形爲一△和一▱,而求其面積公式.



［解］ ▱$AECD=ah$.

△$BCE=\frac{1}{2}(b-a)h$.

(9) 已知一等腰梯形的二底爲 a, b, 他二等邊均爲 1,求其面積.

［解］ 設上圖爲等腰,並 $AD=BC=1$,則照上面(6)題法,可求得 $h=\frac{1}{2}\sqrt{(2+b-a)(2-b+a)}$.

$$\therefore \text{面積}=\frac{1}{4}(a+b)\sqrt{(2+b-a)(2-b+a)}.$$

習題五二 在教科書下册第86頁.

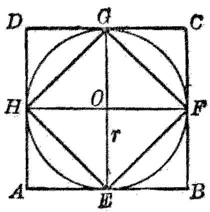
(1) 求作一等腰三角形與一已知△等積.

[解] 可自已知△底邊中點作垂線,再取垂線長等於原形的高.連垂線上端至底邊兩端卽得.

(2) 求作一正方形與一已知△等積.

[解] 設已知△的高爲h,底邊爲$2b$,所求正方形的邊爲a.由$a^2=hb$,知a爲h,b的比例中項.故可照比例中項作圖,作已知△高和底邊一半的比例中項卽得正方形的邊.

(3) 已知圓半徑爲r,求其內接正方形和外切正方形的面積.



[解] 由□性質四及習題二九的第6題知GE, HF互相平分且垂直於圓心O.

由畢氏定理,求得內接正方形邊長$=r\sqrt{2}$.

$$\therefore \quad \square EFGH=2r^2.$$

由切線長定理及□性質,易證外接□$ABCD$被GE, HF分爲四全等小正方.

$$\therefore \quad ABCD=4r^2.$$

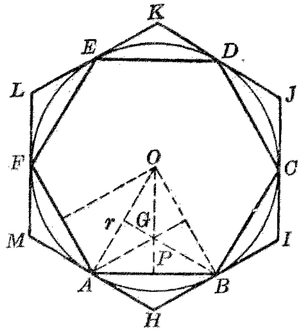
[又解] 外切正方形的邊心距爲r,周界爲$8r$.

$$\therefore \quad ABCD=4r^2. \qquad \text{(正多角形面積定理)}$$

再由　$\triangle EOF \equiv \triangle EBF$, 知 $ABCD = 2(EFGH)$

$$\therefore \quad EFGH = 2r^2$$

(4) 已知圓半徑爲 r, 求其內接正六角形和外切正六角形的面積.



[解] 由多角形定義及垂徑分弦定理,易證右圖中虛線畫的△都全等.

再由多角形內角和定理,可證 $\triangle AOB$ 等爲等邊.故

$$AB = r, \quad AP = \tfrac{1}{2}r.$$

由畢氏定理求得 $OP = \dfrac{r}{2}\sqrt{3}$.

$$\therefore \quad \text{內接正六角形面積} = \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2.$$

又從 A, B 各作 $\triangle OAB$ 內對邊的垂線, 因 $\triangle OAB$ 等邊,易證 $\triangle AGB \equiv \triangle BGO \equiv \triangle OGA$ 及 $AGBH$ 爲斜方形.

$$\therefore \quad \triangle OAB = \frac{3}{4} \square AGBH.$$

但 $\triangle OAB$ 爲內接正六角形六分之一.

$\square AGBH$ 爲外切正六角形六分之一.

$$\therefore \quad \text{外切正六角形面積} = \frac{4}{3}(\text{內接正六角形})$$

$$= 2\sqrt{3}\,r^2.$$

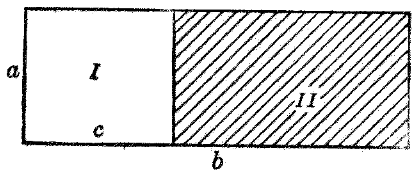
(5) 用幾何方法證明下面的代數恆等式:

(一) $a(b-c)=ab-ac$; (二) $a(b+c+d)=ab+ac+ad$;

(三) $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$;

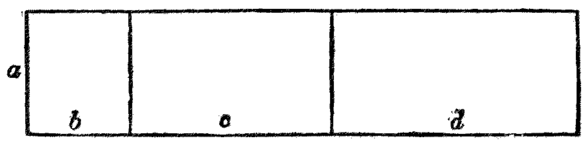
(四) $(a+b)(c-d)=ac+bc-ad-bd$.

[解] (一)

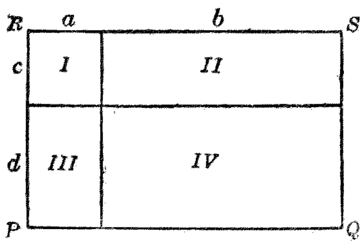


II 表 (一) 式

(二)



(三)



$\square PQSR=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}$.

(四) 就上圖設 $PR=c$, 即可證明.

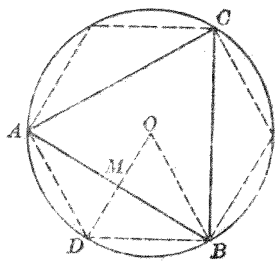
習題五三　在教科書下册第91頁.

(1) 求作圓內接外切正八角形,正十六角形.

［解］ 照內接正方形作法，再作邊垂徑，引長此徑卽得正方形邊對弧的平分點．再由此等分點照 § 194 法連成便得．內接外切正八角形．

正十六角形可於內接正八角形邊上，照上再做一次．

(2) 求已知圓內接等邊△每邊與半徑的比．



［解］ $\triangle ABC$ 爲內接等邊△．

(§ 196 的系二)

因 OD 垂直平分 AB，$BD=OB$，

又 $\triangle MOB\equiv\triangle MDB$ （習題二四，4）

由畢氏定理，可得 $MB=\frac{\sqrt{3}}{2}r$，

$\therefore\quad AB=\sqrt{3}r,\ AB:r=\sqrt{3}:1$

(3) 求作一正六角形，使邊長等於已知線段．

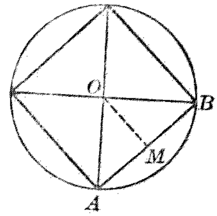
［解］ 用已知線段做半徑先作一圓，再照 § 196 作正六角形．

(4) 證明圓內接等邊△的邊心距等於圓半徑的一半．

［解］ 由 (2) 題 $\triangle MOB\equiv\triangle MDB$

$\therefore\qquad OM=MD=\frac{1}{2}r$

(5) 求圓內接正方形邊心距與半徑約.



〔解〕 邊心距 OM 爲 AB 的垂徑.

$AM=\frac{1}{2}AB$ （垂徑分弦定理）

$AB=r\sqrt{2}$ （習題五二第2題）

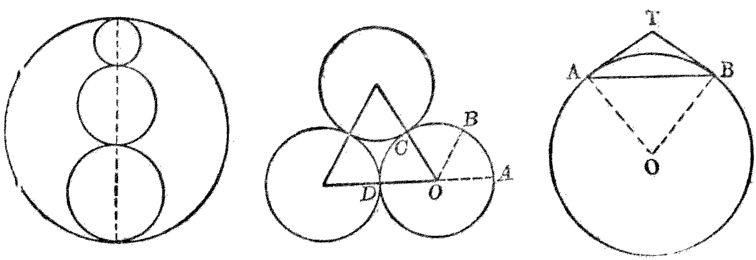
$\therefore\ AB:r=\sqrt{2}:1$

(6) 在圓上任取若干點作內接外切多角形,再將邊數加多(不限於倍增),問 § 194 所說情形,是否仍合?

答語略.

習題五四　在教科書下册第95頁.

(1) 將一圓直徑,分爲任意幾段,用各段爲直徑連作小圓,如下左圖.證明小圓周總和等於大圓周.



〔解〕 設小圓直徑爲 d_1, d_2, d_3, 大圓直徑爲 D, 由圓周率定理的系一,

$\therefore$ 小圓周的總和 $=\pi(d_1+d_2+d_3)$

$=\pi D=$ 大圓周

(2) 以一等邊三角形三頂點爲心,每邊長的一半做半徑,作等圓兩兩外切,求三角形內三弧的長.

[解] 因等邊△的三個內角各爲 $60°$

∴ 一弧的長 $=\frac{1}{3}\pi r$　(圓周率定理的系二)

∴ 三弧的長 $=\pi r$.

[又解] 就△一邊延長成一圓的直徑如 OA.

再平分外角, ∴ $\triangle OAB\equiv\triangle OBC$

∴ $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=60°$

∴ 所求三弧即半圓 $DA=\pi r$.

(3) 上右圖中 AT, BT 爲二切線,試證 $AT+TB>\overset{\frown}{AA}>AB$.

[解] AB 爲內接多角形的一邊; TA 爲外接多角形的一邊.

∴ $TA+TB>\overset{\frown}{AB}>AB$　(習題五三第6題)

(4) 已知一弧和半徑等長,求其度數.

[解] 設弧爲 $m°$, 則

$$\frac{m}{360}\times 2\pi r=2r \qquad \text{(圓周率定理系二)}$$

∴ $$m=\frac{360}{\pi}$$

(5) 求 $1°$ 等於幾弧度角.

[答] $\frac{\pi}{360}$.

(6) 但圓內接正方形起,依§199的公式,求到內接正八角形,以定π的差近值.(可用二位小數).

[解] 內接正方形邊長爲$r\sqrt{2}$ (習題五二,3題)

卽 $S_4=r\sqrt{2}$ 可設$r=1$,代入公式

$$S_{2n}=r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{Sn}{r}\right)^2}}$$ 依次照求

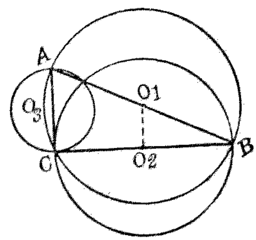
習題五五 在教書科下册第98頁.

(1) 求證圓面積 $S=\frac{1}{4}\pi d^2$

[解] $S=\pi r^2$ (圓面積定理系一)

$$=\pi\times\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\pi d^2$$

(2) 用rt.△三邊爲直徑作圓,試證斜邊圓面積,等於他二邊上者的和.



[解] $O_1O_2=\frac{1}{2}AC=O_3A$

(習題三三,6題)

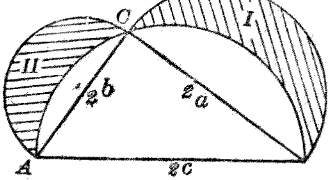
由畢氏定理,有

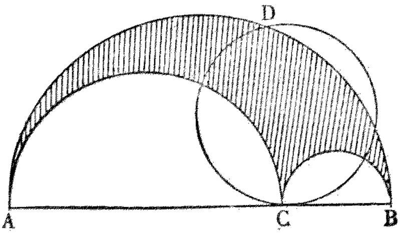
$$\overline{O_1B}^2=\overline{O_1O_2}^2+\overline{O_2B}^2$$

卽 $$r_1^2=r_2^2+r_3^2$$

∴ $$\pi r_1^2=\pi(r_2^2+r_3^2)$$ (普通公理)

(3) 在rt.△三邊上作半圓,如下左圖.證明I, II兩個初月形面積和等於這rt.△面積.





〔解〕 $rt.\triangle ABC=2ab.$ （畢氏定理）

兩小半圓面積和 $=\pi(a^2+b^2)=\pi c^2.$

$\therefore\ I+II=$(兩小半圓)$+\triangle ABC-$(大半圓)

$$=\pi c^2+2ab-\pi c^2$$

$$=2ab=rt.\triangle ABC.$$

(4) 在線段 AB 上取一點 C, 作三半圓, 如上右圖. 證明黑影部分等於用 CD 為直徑的圓面積.

〔解〕 CD 為兩小半圓的公切線垂直於 AB,

黑影部分 $=$ 大半圓 $-$ 兩小半圓

$$=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{CB}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{8}\pi(AB^2-AC^2-CB^2)$$

但 ABC 為 $rt.\triangle$, 而 D 為直角, （半圓的圓周角）

由畢氏定理, 有

$$\overline{CD}^2=\overline{AD}^2-\overline{AC}^2,\qquad \overline{CD}^2=\overline{BD}^2-\overline{CB}^2$$

兩式相加，得　$2\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-\overline{AC}^2-\overline{CB}^2$

$$=\overline{AB}^2-\overline{AC}^2-\overline{CB}^2$$

$\therefore$ 黑影部分 $=\dfrac{1}{8}\pi\times2\overline{CD}^2=\dfrac{1}{4}\pi\overline{CD}^2$

$=$ 以 CD 爲直徑的圓　　(見(1)題)

(5)　求作一圓，使其面積爲二已知圓面積的差。

〔解〕設已知二圓，半徑爲 r_1，r_2；所求圓半徑爲 r。

由　$\pi r^2=\pi(r_1^2-r_2^2)$

得　$r^2=r_1^2-r_2^2$.

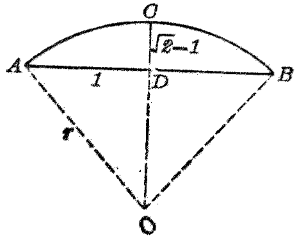
可作一 $rt.\triangle$，以 r_1 爲斜邊，r_2 爲夾直角的一邊而求得他一邊即 r.

(6)　已知一圓圓周與面積等值，求其半徑。

〔答〕　$r=2$.

(7)　有一弓形，已知弦長2寸，自劣弧中點到弦上距離(稱爲矢)爲 $\sqrt{2}-1$ 寸。求弧長和弓形面積。

〔解〕假設半徑爲 r，則按畢氏定理應有



$$r^2=1^2+(r-\sqrt{2}+1)^2$$

解上方程式得　$r=\sqrt{2}$ 寸

故　$OD=\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)=1$ 寸

而　$\angle AOD=45^\circ$ 即 $\angle AOB=90^\circ$.

$\therefore$ 弧長 $=\frac{1}{4}\times 2\pi r=\frac{1}{2}\sqrt{2}\pi$ 寸

又 扇形 $=\frac{1}{4}\pi r^2=\frac{1}{2}\pi$ 方寸

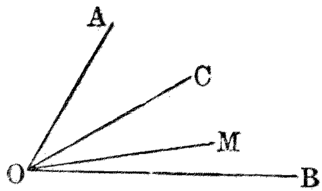
$\triangle AOB=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$ 方寸

$\therefore$ 弓形 $=\frac{1}{2}\pi-1$ 方寸

雜　題

雜題　在教科書下册第 100 頁.

(1)　OC 是 $\angle AOB$ 的二等分線, OM 是 $\angle AOB$ 內的任一直線, 證明 $\angle AOM$ 與 $\angle BOM$ 的差, 等於 $\angle MOC$ 的二倍.



[解]　$\angle AOM = \angle AOC + \angle MOC$　　(題設)

$\angle BOM = \angle BOC - \angle MOC$　　(題設)

兩式相減

$\therefore \angle AOM - \angle BOM = 2\angle MOC$　(普通公理)

(2)　上題若 OM 在 $\angle AOB$ 之外, 則 $\angle AOM$ 與 $\angle BOM$ 的和等於 $\angle MOC$ 的二倍.

[提示]　將上題兩式相加 ($\angle BOM = \angle MOC - \angle BOC$)

(3)　直線 AB 的中點是 O, 在此直線上作一任意點 M, 則 AM 與 BM 的差, 等於 MO 的二倍.

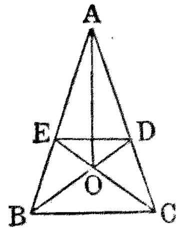
[提示]　與題 (1) 相同

(4)　上題若 M 點在 AB 的延長線上, 則 AM 與 BM 的

和等於 MO 的二倍.

［提示］ 與題(2)相同

(5) 如圖, $AB=AC$, $AD=AE$, 求證 (1) $BD=CE$, (2) $\angle ABD=\angle ACE$ (3) $OB=OC$, (4) OA 平分 $\angle BAC$.



［解］ $\triangle ABD\equiv\triangle ACE$　　(s. a. s.)

$\therefore$　$BD=CE$ 及 $\angle ABD=\angle ACE$

(對應邊, 對應角)

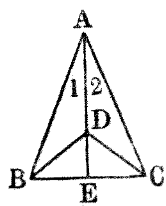
$\angle OBC=\angle OCB$　　(等腰底角,等角的鄰角)

$\therefore$　$OB=OC$　　(等腰三角形)

$\triangle AOB\equiv\triangle AOC$　　(s. s. s)

$\therefore$　$\angle OAB=\angle OAC$　$\therefore$　OA 平分 $\angle BAC$　(對應角

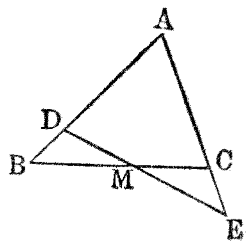
(6) 兩同底的等腰三角形, 頂點的聯線或引長線, 一定垂直於底邊.



［提示］ 先證明 $\triangle ABD\equiv\triangle ACD$,

次證明 $\triangle ABE\equiv\triangle ACE$, $\therefore$ $AE\perp BC$

(7) $\triangle ABC$, 通過 BC 上一點 M 作一直線, 與 AB 相交於 D, 與 AC 的引長線相交於 E, 若 $BM=ME$, $DM=CM$. 則 $AD+AE=AB+AC$.



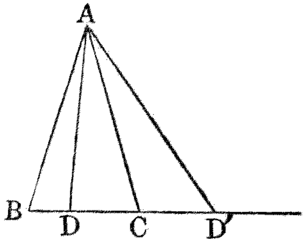
［解］ $\triangle MBD\equiv\triangle MEC$　　(s. a. s)

$\therefore\ BD=CE$　(對應邊)

$AD=AB-BD,\ AE=AC+BD$　(題設)

$\therefore\ AD+AE=AB+AC$　(普通公理)

(8) 自等腰三角形 ABC 的頂角 A 到底邊 BC 作任意直線 AD，則 AD 一定小於兩腰.

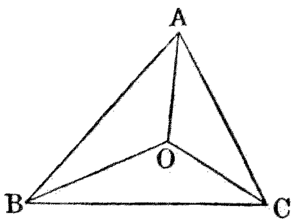


〔提示〕 在 $\triangle ABD$ 及 $\triangle ACD$ 中用大角對大邊,小角對小邊來證明.

(9) 上題若從 A 到 BD 的延長線上作任意線 AD'，則 AD' 必大於兩腰.

〔提示〕 與上題相同.

(10) O 點爲 $\triangle ABC$ 形內的一點,則 OA, OB, OC 的和小於周邊，而大於周邊的一半.



〔解〕 $AB+AC>OB+OC$

(習題二五 8.)

$CA+CB>OA+OB$　(習題二五 8.)

$BA+BC>OA+OB$　(習題二五 8.)

三式相加

$\therefore\quad AB+AC+BC>OA+OB+OC$　(普通公理)

$OB+OC>BC$　(三角形三邊關係定理)

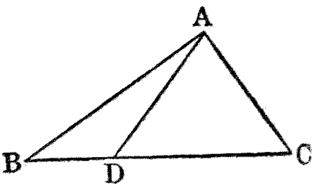
$OC+OA>AC$　(三角形三邊關係定理)

$OA+OB>AB$　(三角形三邊關係定理)

三式相加

$\therefore\quad OA+OB+OC>\frac{1}{2}(AB+AC+BC)$　(普通公理)

(11) 自$\triangle ABC$的頂點A，到底邊BC作任意直線AD，則AD必小於周圍的一半.



[解] $AD<AB+BD$

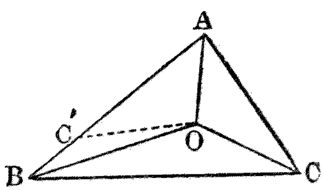
(三角形三邊關係定理)

$AD<AC+CD$　(三角形三邊關係定理)

二式相加:

$\therefore\quad AD<\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$　(普通公理)

(12) 自$\triangle ABC$的頂角A的二等分線上任一點O作OB，OC，則OB與OC的差必小於AB與AC的差.



[解] 作$AC'=AC$

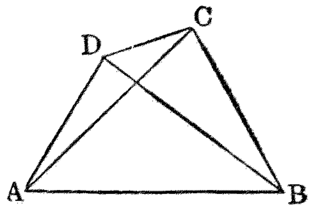
則$BC'>OB'-OC'$　(三角形三邊關係定理)

即 $AB-AC>OB-OC$ (代換公理)

(13) 四邊形 $ABCD$ 中 AB 是最大邊, CD 是最小邊,求證:

$\angle ABC<\angle ADC$

$\angle BCD>\angle BAD$



[解] 作 AC, BD

$\angle ABD<\angle ADB$ (大角對大邊)

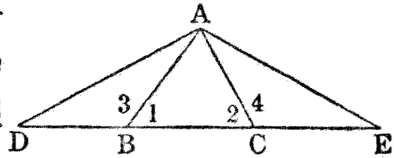
$\angle DBC<\angle BDC$ (大角對大邊)

二式相加

$\therefore$ $\angle ABC<\angle ADC$ (普通公理)

同理證 $\angle BCD>\angle BAD$

(14) 在 $\triangle ABC$ 底邊 BC 的延長線上作 $BD=AC$, $CE=AB$, 若 $AB>AC$, 則 $AD>AE$.



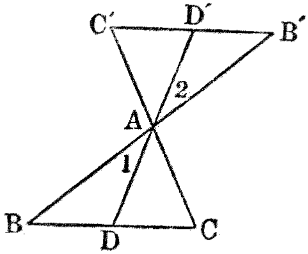
[解] $\angle 2>\angle 1$ (題假,大邊對大角)

$\therefore$ $\angle 3>\angle 4$ (等量減不等量)

$\therefore$ $AD>AE$ (大邊對大角)

(15) 把 $\triangle ABC$ 的兩邊 BA, CA 各就 A 點延長,令 $AB'=AB$, $AC'=AC$, 則 BC 的中點 D, $B'C'$ 的中點 D', 和 A

點必在一直線上。



［解］ $\triangle ABC \equiv \triangle AB'C'$ (s. a. s.)

$\angle B = \angle B'$　(對應角)

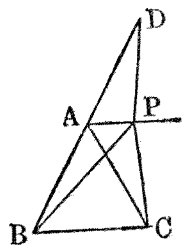
$BD = B'D'$ (對應邊之半)

$\triangle ABD \equiv \triangle AB'D'$ (s. a. s.)

$\angle 1 = \angle 2$　(對應角)

$\therefore$ D, A, D' 在一直線上(對頂角相等)

(16) 等腰三角形 ABC, 頂角之外角 CAD 的二等分線上任一點為 P, 則 $PB+PC>AB+AC$.



［解］ 作 $AD=AC$

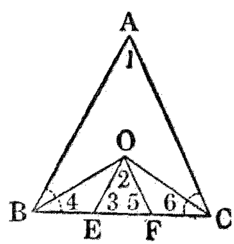
$\triangle ACP \equiv \triangle ADP$　(s. a. s.)

$PD=PC$　(對應邊)

則 $PB+PD>BD$　(三邊關係定理)

$\therefore$ $PB+PC>AB+AC$　(代換公理)

(17) 等邊三角形 ABC 的 B, C 二角的二等平分線交於 O 點, 從 O 作 $OE \parallel AB$, $OF \parallel AC$, 則 $BE=EF=FC$.



［解］ $\angle 2 = \angle 1$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 6$

(平行線同位角)

$\angle 1 = \angle 4 = \angle 6$　(題設)

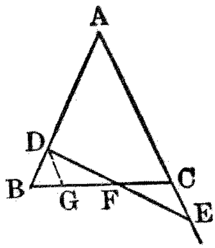
$\therefore$　$\angle 2 = \angle 3 = \angle 5$　(代換公理)

$OE = EF = OF$　(等邊三角形定理)

但　$OE = BE,\ OF = CF$　(內錯角,平分角線)

$\therefore$　$BE = EF = OF$　(代換公理)

(18)　直線 DE 與等腰三角形 ABC 的 AB 邊交於 D, 與 AC 的延長線交於 E, 若 $DF = EF$, 則 $AD + AE = 2AB$.



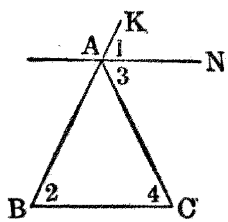
[解]　作 $DG \parallel AC$

$\triangle FGD \equiv \triangle EFC$　(a. s. a.)

$\therefore$　$CE = DG = BD$　(對應邊,等腰)

$\therefore$　$AD + AE = 2AB$　(代換公理)

(19)　$\triangle ABC$ 頂角 A 的外角 CAK 的二等分線 AN, 若 $AN \parallel BC$, 則 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.



[提示]　$\angle 1 = \angle 2,\ \angle 3 = \angle 4,$

$\therefore \angle 2 = \angle 4$

(20)　等腰三角形的頂角若爲底角的二倍,則爲直角三角形.

[提示]　三角之和爲兩直角.

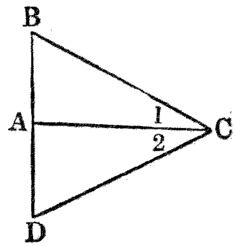
(21) 由直角三角形內直角的頂點作一線到斜邊的中點,則分此三角形爲兩個等腰三角形.

[提示] 應用上題角度關係.

(22) 由三角形的一頂點作中線到底邊,若等於底邊二分之一,則其頂角爲直角.

[提示] 此中線分三角形爲兩等腰三角形,應用第20題角度關係.

(23) 直角三角形的斜邊 BC 若爲他一邊 AB 的二倍,則 $\angle B=2\angle C=\frac{2}{3}$ 直角.



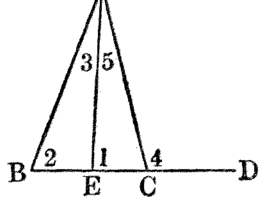
[提示] 延長 BA 至 D, 使 $AB=AD$

$BC=CD$, $\angle 1=\angle 2$

$\therefore$ $BC=BD$ 爲等邊三角形

$\therefore$ $\angle B=2\angle BCA=\frac{2}{3}$ 直角

(24) 三角形 ABC 頂角 A 的二等分線交底邊 BC 於 E, 則 AEC 角等於 B 角與 C 角的外角之和之半.



[解] $\angle AEC=\angle 2+\angle 3$ (外角定理)

$=\angle B+\frac{1}{2}\angle A$

$\angle AEC = \angle A - \angle 5$　(外角定理)

$= \angle A - \frac{1}{2}A$

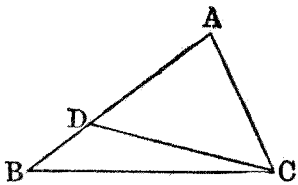
二式相加除二

$\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle B + \angle A)$　(普通公理)

(25)　$\triangle ABC$ 中 $AB > AC$, 在 AB 上取 $AD = AC$, 則

$\angle ADC = \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle ABC)$

$\angle BCD = \frac{1}{2}(\angle ACB - \angle ABC)$



[解]　$\angle ADC = \angle ACD = \angle ACB - \angle BCD$ (題設)

$\angle ADC = \angle ABC + \angle BCD$　(外角定理)

二式相加以二除

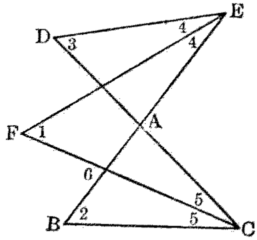
$\angle ADC = \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle ABC)$　(普通公理)

又　$\angle BCD = \angle ADC - \angle ABC$　(外角定理)

代入,即得

$\angle BCD = \frac{1}{2}(\angle ACB - \angle ABC)$　(普通公理)

(26)　$\triangle ABC$ 與 $\triangle ADE$ 的頂角互成對頂角,C 角與 E 角的二等分線交於 F,則 $\angle CFE = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle EDC)$.



[解]　$\angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 5$

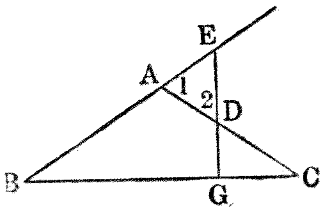
(同等於 $\angle 6$, 外角定理)

$\angle 1+\angle 5=\angle 3+\angle 4$　(同等於 $\angle 6$, 外角定理)

二式相加,整理之,

$\angle 1=\frac{1}{2}(\angle 2+\angle 3)$　(普通公理)

(27) 等腰三角形 ABC 的底角等於頂角的 $\frac{1}{A}$ 在 BC 上作垂線交 AC 於 D, 交 BA 的延長線於 E, 則 $\triangle ADE$ 是等邊三角形.



[提示] 證明 $\angle 1=\frac{2}{3}$ 直角, $\angle 2=\frac{2}{3}$ 直角.

(28) 一多角形內角和爲 1800°, 求其邊數.

[提示] 按 §119 知 n 角形內角和爲 $(n-2)2$ 直角.

$$(n-2)2\times 90^\circ=1800^\circ \quad \text{能得} \quad n=12$$

(29) 自 n 角形任一頂點,可作幾對角線? 一共可作幾條?

[答] 自一頂點,可作 $n-2$ 條.

一共有 $\dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}-n$ 條.

(30) 有多角形,其內角之和,比二倍他的邊數的多邊形小 10 直角,求邊數.

[提示] $(n-2)2$ 直角 $+10$ 直角 $=(2n-2)2$ 直角,求得

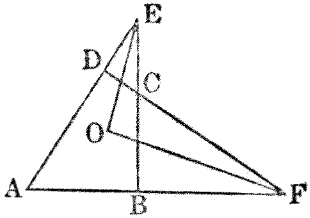
$$n=5.$$

(31) 一 n 角形,有 9 對角線,求其邊數.

[提示] n 角形有 $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}-n$ 條對角線(第 29 題)

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}-n=9,\quad 解得\quad n=6.$$

(32) 四邊形之對邊 AD, BC, AB, DC 其引長線之交角為 E 及 F, 各作二等分線 EO, FO. 證 $\angle EOF=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)$.



[解] $\angle EOF=\frac{1}{2}(\angle EDF+\angle EBF)$ (第 26 題)

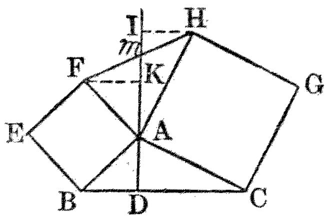
$\angle EDF+\angle FDA+\angle EBF+\angle EBA=4$ 直角 (平角)

$\angle FDA+\angle A+\angle EBA+\angle C=4$ 直角 (第 28 題)

$\therefore\ \angle EDF+\angle EBF=\angle A+\angle C$ (代換公理)

$\therefore\ \angle EOF=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)$ (代換公理)

(33) 三角形的二邊作正方形 $ABEF$, $ACGH$, $AD\perp BC$, AD 的引長線必二等分 FH 於 m. 證 $Fm=Hm$.



[解] 作 FK 及 $HI\perp AD$ 之引長線

$\angle HIK=\angle FKI=$ 直角 (作圖)

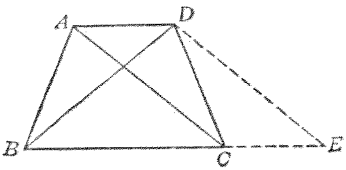
但 $\left.\begin{array}{l}\triangle AFK\equiv\triangle ABD\\ \triangle AHI\equiv\triangle ACD\end{array}\right\}$ $(a.\ s.\ a.)$

$\therefore\quad FK=HI=AD$　　(對應邊)

$\therefore\quad \triangle HIm\equiv\triangle FKm$　　(a. s. a.)

$\therefore\quad Fm=Hm$　　(對應邊)

(34)　兩對角線相等的梯形必爲等斜梯形.



[解]　$AC=BD$　　(題設)

$BC\equiv BC$

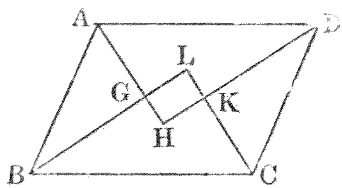
從 D 作 $DE\parallel AC$, $ACDE$ 爲平行四邊形.

故 $DE=AC=BD$, $\therefore\ \angle E=\angle DBC$ (等腰三角形)

$\angle E=\angle ACB=\angle DBC$ $\therefore\ \triangle ABC\equiv\triangle BDC$　(s. a. s.)

$\therefore\quad AB=DC$　　(對應邊)

(35)　平行四邊形的二等分角線若相交,則其所成之四邊形必爲矩形.

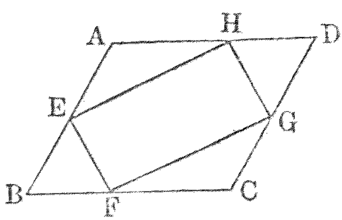


[提示]　$AH\parallel CL$, $BL\parallel DH$

$\angle L+\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C=2$ 直角

$\therefore\ \angle L=$ 直角.

(36　在平行四邊形的四邊 AB, BC, CD, DA 上順次取 E, F, G, H, 若 $AE=BF=CG$

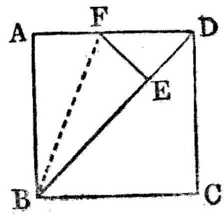


$=DH$，則 $EFGH$ 爲平行四邊形.

〔提示〕 證 $\left.\begin{array}{l}\triangle AEH\equiv\triangle CGF\\ \triangle EBF\equiv\triangle GDH\end{array}\right\}$ $(s.\ a.\ s.)$

$\therefore\quad EH=FG,\quad EF=HG$

(37) 正方形 $ABCD$ 於其對角線 BD 上取 $BE=AB$ 從 E 作垂線於 BD 與 AD 遇於 F. 證 $AF=FE=ED$.



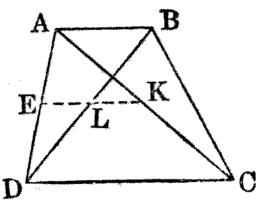
〔提示〕 證 $\triangle ABF\equiv\triangle EBF$ $(s.\ a.\ s.)$

$\therefore\quad AF=FE$ 　(對應邊)

又 $\angle F=\angle D$ 　($\frac{1}{4}$ 直角)

$\therefore\quad FE=ED$ 　(等腰三角形)

(38) 梯形 $ABCD$ 的兩對角線，其中點的連結線 KL 等於平行二邊 AB, CD 差之半.

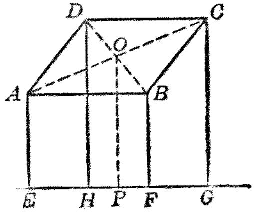


〔提示〕 引長 KL 至 E

$\left.\begin{array}{l}KE=\frac{1}{2}CD\\ LE=\frac{1}{2}AB\end{array}\right\}$ (習題三三.第 6 題)

$KL=KE-LE$

(39) 平行四邊形 $ABCD$ 的各頂角到形外一直線作 AE, BF, CG, DH 等垂線，則 $AE+CG=BF+DH$.

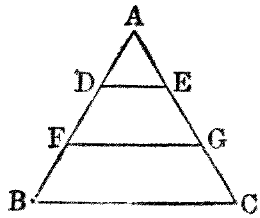


［提示］ 連結對角線 AC, BD 交於 O,從 O 作垂線於形外直線交於 P,

$$OP=\tfrac{1}{2}(AE+CG)=\tfrac{1}{2}(BF+DH)$$

(習題三三,第 7 題)

(40) 三等分三角形的二邊 AB 及 AC 其分點爲 D, F, 及 E, G, 則 $DE=\frac{1}{3}BC$, $FG=\frac{2}{3}BC$.

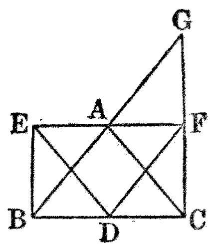


［提示］ $DE=\frac{1}{2}FG$ (習題三三, 6)

$FG=\frac{1}{2}(DE+BC)$　(習題三三, 7)

$\therefore\ FG=\frac{2}{3}BC,\ DE=\frac{1}{3}BC$

(41) 三角形 ABC 於 A 的外角二等分線上作垂線 BE, CF, D 是 BC 的中點,則 $DE=DF=\frac{1}{2}(AB+AC)$.



［解］ 延長 CF 與 AB 交於 G,

$\triangle AFG\equiv\triangle AFC$　($a.\ s.\ a.$)

$\therefore\ AG=AC$　(對應邊)

$DF=\frac{1}{2}BG=\frac{1}{2}(AB+AC)$　(習題三三, 6)

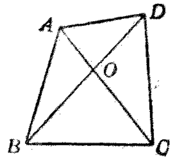
同樣,延長 EB 及 AC,可以證明。

$DE=\frac{1}{2}(AB+AC)$

(42) 四邊形 $ABCD$ 的周邊大於兩對角線的和,而

小於其和的二倍.

［解］ 在 $\triangle ABD$ 及 $\triangle CBD$ 中,



$$\left.\begin{array}{l} AB+AD>BD \\ BC+DC>BD \end{array}\right\} \text{(三邊關係定理)}$$

在 $\triangle ABC$ 及 $\triangle ADC$ 中

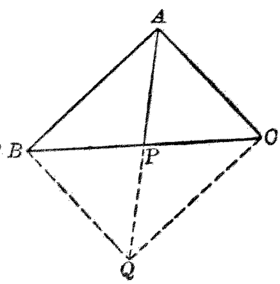
$$\left.\begin{array}{l} AB+BC>AC \\ AD+DC>AC \end{array}\right\} \text{(同理)}$$

四式相加: $AB+BC+CD+DA>AC+BD$

又, 在 $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$, & $\triangle DOA$ 中

$$\left.\begin{array}{l} AO+OB>AB \\ BO+OC>BC \\ CO+OD>CD \\ DO+OA>DA \end{array}\right\} \text{相加, } 2(AC+BD)>(AB+BC+CD+DA)$$

(43) 三角形的頂角 A 爲直角, 則中線 AP 等於 BC 的一半.



〔提示〕 引長 AP 至 Q, 令 $PQ=AP$

證 $ABQC$ 爲一矩形.

$\therefore\quad AP=BP=PC=\frac{1}{2}BC$

(44) 三角形的垂線爲 BE, CF, 而 BC 的中點爲 P. 證 $PE=PF$.

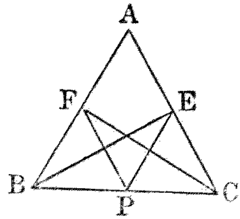
［提示］ 在 $\triangle FBC$ 中，

$FP=\frac{1}{2}BC$ （前題）

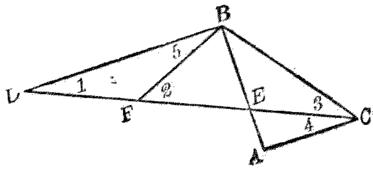
在 $\triangle EBC$ 中

$EP=\frac{1}{2}BC$ （前題）

$\therefore$ $FP=EP$



(45) 直角三角形的一頂角 C，作直線 CED，截 AB 一邊於 E，與 AB 的垂線 BD 遇於 D，而 DE 爲斜邊 BC 的二倍，證 $\angle ACD=\frac{1}{3}\angle ACB$.



［提示］ $\triangle ACE$ 與 $\triangle DEB$ 中

$\angle 1=\angle 4$， 作 $AF=DF$

$\triangle DEB$ 中，$BF=DF=FE$ （43 題）

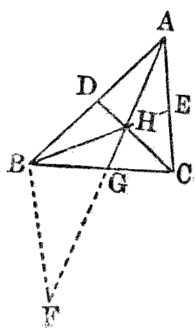
$\therefore$ $BF=BC$

$\angle 2=\angle 1+\angle 5=2\angle 1$

$(\because\ DF=FB)$

$\angle 3=\angle 2=2\angle 1=2\angle 4$.

(46) 三角形三中線的和，必小於周界.



［解］ 引長 AG 至 F，令 $GF=AG$

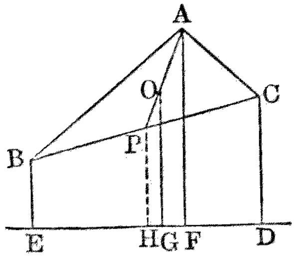
$\triangle BGF \equiv \triangle AGC$　(s. a. s.)　$\therefore BF = AC$

$AB + BF = AB + AC > AF = 2AG$　(三邊關係)

$$\therefore \left.\begin{array}{l} AG < \frac{1}{2}(AB + AC) \\ BE < \frac{1}{2}(AB + BC) \\ DC < \frac{1}{2}(BC + AC) \end{array}\right\}$$ 加之,

$\therefore (AG + BE + DC) < (AB + BC + AC)$

(47) 三角形各角點及重心至形外一直線上作垂線於 D, E, F, G, 各點, 則 $3OG = BE + AF + CD$.



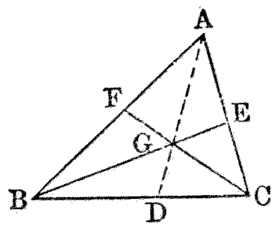
[解]　$OP = \frac{1}{3}AP$ (重心定義)

$3OG = 2PH + AF$　(第 40 題)

$2PH = BE + CD$　(習題三三, 7 題)

$\therefore 3OG = BE + CO + AF.$

(48) 三角形小邊的中線,大於大邊的中線.



[解]　作 AD 之第三中線,

在 $\triangle ACD$ 及 $\triangle ACD$ 中

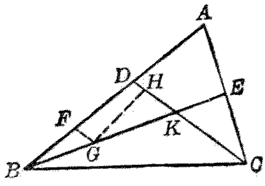
$AB = AB$, $BD = DC$, $AB > AC$

$\therefore \angle ADB > \angle ADC$　(§ 107)

在$\triangle BDG$及$\triangle DGC$中 $\therefore BG>GC$ (§107)

$\therefore$ $BE>CF$ $(BG=\frac{2}{3}BE)$

(49) 三角形小角的二等分線,大於大角的二等分線.



[解] 在$\triangle KBC$中, $KB>KC$

(大角對大邊)

若$KE>$或$=KD$, 則$BE>DC$

今假設$KE<KD$

在KD上作$KH=KE$, $KG=KC$

作$GF\parallel DC$

$\triangle KEC\equiv\triangle KHG$ (s. a. s.)

$\therefore$ $\angle KHG=\angle KEC$ $\therefore\angle KDF>\angle KHG$

$\therefore$ $FG>DH$.

但$\angle GFB>\angle FBG(\frac{1}{2}\angle ABC)$

$\therefore$ $BG>FG>DH$

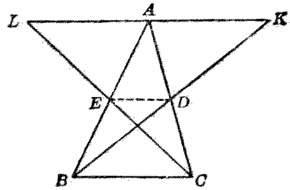
$\therefore$ $KB-KG>KD-KH$

或 $KB+KE>KC+KD$

$\therefore$ $BE>CD$.

(50) 三角形ABC自B, C引中線BD, CE, 各引長至K, L, 使$KD=BD$, $LE=CE$, 則K, L, A在一直線上.

［解］ 連結 ED,



在 $\triangle ABK$ 中 $ED \parallel AK$

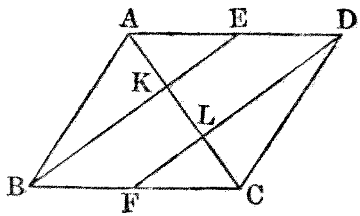
（習題三三，5題）

在 $\triangle ACL$ 中 $ED \parallel AL$

（習題三三，5題）

$\therefore$ A, K, L 在一直線上.

(51) 平行四邊形對邊 AD, BC 的中點,順 E, F, 結 BE, DF, AC, 而 AC 被 BE, FD 分爲三等分.



［解］ $ED=BF$ $\therefore$ $EDBF$ 爲平行四邊形.

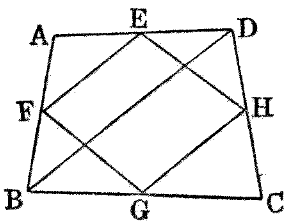
$\therefore$ $EB \parallel DF$

在 $\triangle ALD$ 中, $KE \parallel LD$, $AE=ED$,

$\therefore$ $AK=KL$ （習題三三，5）

同理可證 $KL=LC$

(52) 結合四邊形各邊的中點所成的四邊形,爲平行四邊形,其周邊等於原四邊形對角線之和.

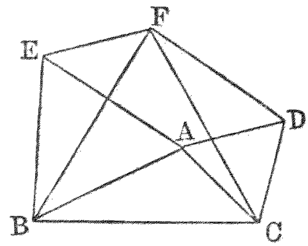


［提示］ 在 $\triangle ABD$ 中

$EF \parallel BD$ 而為 BD 之半. (習題三三, 5, 6)

餘用同理類推.

(53) 在三角形 ABC 各邊上畫等邊三角形 ACD, ABE, BCF. B 與 D 置於 AC 異側, E 與 C 置於 AB 異側, 又 F 與 A 置於 BC 同側, 若結 FE, EA, AD, DF, 則 $EFDA$ 為一平行四邊形.



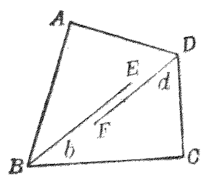
[解] $\triangle EFB \equiv \triangle ABC$ (s. a. s.)

$\therefore \quad EF = AC = AD$

$\triangle CDF \equiv \triangle ABC$ (s. a. s.)

$\therefore \quad FD = BA = AE$

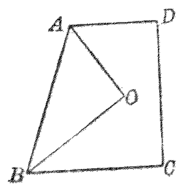
(54) 若四邊形的二對角皆為直角則他二角的平分線必平行.



[提示] $\angle B + \angle D = 2\ rt. \angle s$

$\therefore \quad \angle b + \angle d = rt. \angle s \quad \therefore BE \parallel DF$

(55) 若四邊形的二鄰角皆為直角, 則他二角的平分線必互相垂直.

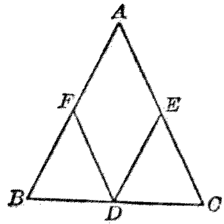


[提示] $\angle A + \angle B = 2\ rt. \angle s$

$\therefore \quad \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = rt. \angle$

$$\therefore\quad \angle O = rt.\angle s.$$

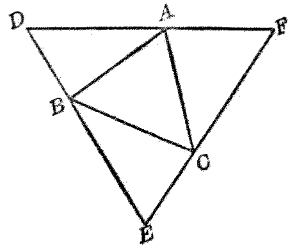
(56) 由等腰△底邊的中點向兩腰的中點作二直線，則形成一菱形.



[提示] $FD \parallel AC$, $FD=\frac{1}{2}AC=AE$

$DE \parallel AB$ 而 $=AF$

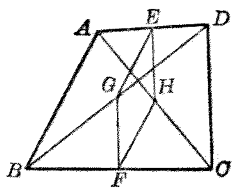
$AF=AE=DE=FD$



(57) 若一三角形的各頂點位於另一△的邊上，則前者的周界小於後者的周界.

[提示] $AD+DB>AB$

餘類推



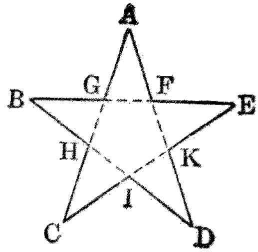
(58) 四邊形二對邊的中點與二對角線的中點可定一平行四邊形.

[提示] $EG=\frac{1}{2}AB$　(在$\triangle ABD$中)

$HF=\frac{1}{2}AB$　(在$\triangle ABC$中)

$\therefore\quad EG=HF$

同理 $EH=HF$



(59) 求證五星形各頂角的和等於二直角.

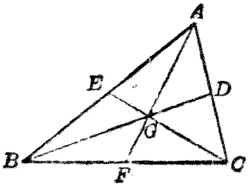
［解］ 在 $\triangle BEI$ 中，$\angle B+\angle E+\angle I=2rt.\angle s$

在 $\triangle CKA$ 中，$\angle C+\angle A=\angle IKD$

在 $\triangle IKD$ 中，$\angle IKD+\angle D=\angle I$

$\therefore\quad \angle B+\angle E+\angle D+\angle C+\angle A=2rt.\angle s.$

(60) 證明三角形三中線的和大於他的周界的四分之三.



［解］ 在 $\triangle BGC$ 中，

$BG+GC>BC,$

即 $\quad \frac{2}{3}BD+\frac{2}{3}CE>BC$

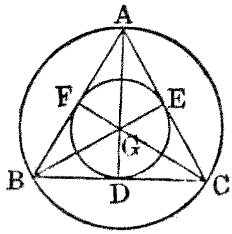
同樣 $\quad \frac{2}{3}CE+\frac{2}{3}AF>AC$

$\qquad \frac{2}{3}AF+\frac{2}{3}BD>AB$

$\therefore\quad \frac{4}{3}(BD+CE+AF)>BC+AC+AB$

或 $\quad BD+CE+AF>\frac{3}{4}(AB+BC+AC)$

(61) 等邊三角形各頂點 A, B, C, 或各邊中點 D, E, F 必在重心 G 爲中心的圓上.



［解］ $AD=BE=CF$ （等邊三角形）

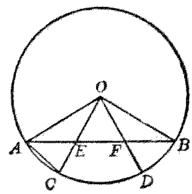
$\therefore\quad AG=BG=CG=\frac{2}{3}AD$

$\therefore\quad A, B, C$ 在一圓上　　（圓定義）

$GD=GE=GF=\frac{1}{3}AD$

$\therefore\quad D, E, F$ 在一圓上　　（圓定義）

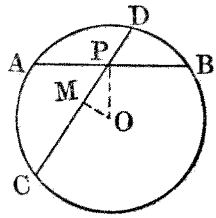
(62) 將弦三等分的半徑,對其弦的弧非三等分,弦爲 AB, 將 AB 三等分的半徑爲 OC, OD.



[提示] 證 AC 弦小於 AE,

$\therefore$ AC 弧小於 CD 弧.

(63) 通過圓內一點 P 的諸弦其中最小者必二等分於 P.

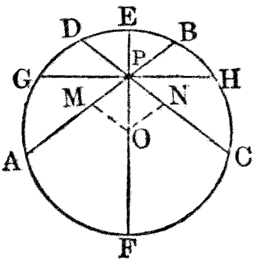


[提示] AB 爲最小弦, CD 爲任意弦

$\triangle OPM$ 中, OP 爲斜邊, 最長,

$\therefore$ AB 兩分於 P. (§ 131)

(64) AB, CD 二弦交角的二等分線若爲直徑 EOF 或爲最小弦 GH, 則其二弦相等.

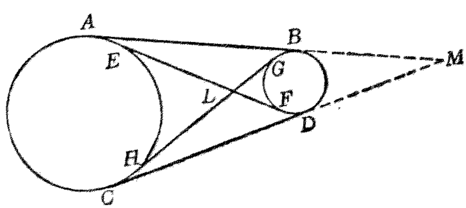


[提示] 作 $OM \perp AB$, $ON \perp DC$

$\triangle MOP \equiv \triangle NOP$ (*a. s. a.*)

$\therefore$ $OM = ON$ $\therefore$ $AB = CD$ (弦心距定理)

(65) 兩圓的外公切線與內公切線各爲等長.

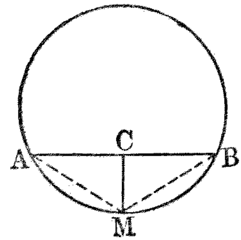


[提示] 延長外公切線至 M. $AM=CM$, $BM=DM$ (§ 142)

$$\therefore\quad AB=CD$$

內公切線 $EL=CL$, $GL=FL$, $\therefore$ $EF=GH$.

(66) 由一弦的中點作一直線到所對弧的中點,必爲此弦的垂直線.

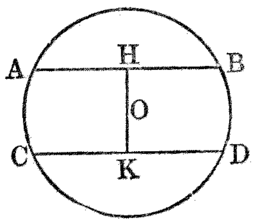


[提示] 聯 AM 和 BM

$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$ $\therefore$ $\overline{AM}=\overline{BM}$ (§ 130)

$\therefore$ $\triangle ACM\cong\triangle BCM$ (s. s. s.)

(67) 通過二平行弦的中點的直線,一定通過圓心.

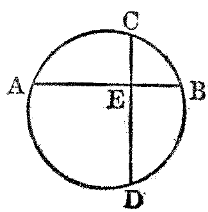


[提示] 自 O 作 OH, OK,

$OH\perp AB$, $OK\perp CD$, 而 $AB\parallel CD$

$\therefore$ OH 與 OK 爲一直線.

(68) 交於直角的二弦爲 AEB, CED, 則 AD 弧 $+BC$ 弧 $=AC$ 弧 $+BD$ 弧 $=$ 半圓周.

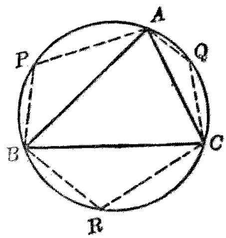


[提示] $\angle AEC=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}$ 所對圓心角 $+\overset{\frown}{BD}$ 所對圓心角$)$

$=90^\circ=\angle AED$ (66 題)

$$\therefore\quad \overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}$$

(69) 三角形 ABC 的外切圓其爲三邊所截弓形的角的和,等於四直角.

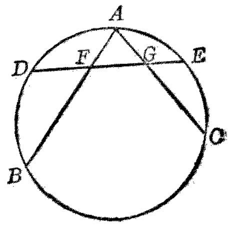


[提示]′ $\angle P+\angle Q+\angle R$

$=\frac{1}{2}(\widehat{AC}+\widehat{BC})+\frac{1}{2}(\widehat{AB}+\widehat{BC})+\frac{1}{2}(\widehat{AB}+\widehat{AC})$

$=\widehat{AB}+\widehat{BC}+\widehat{CA}=4rt.\angle s.$　(§ 137)

(70) AB, AC 兩弧的中點爲 D, E, 而 DE 與此二弦的交點爲 F, G, 則 $AF=AG$.



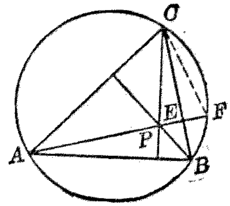
[提示] $\angle F=\frac{1}{2}(\widehat{DB}+\widehat{AE})$,

$\angle G=\frac{1}{2}(\widehat{EC}+\widehat{AD})$　(§ 137)

$\widehat{DB}=\widehat{AD}$, $\widehat{AE}=\widehat{EC}$

$\therefore$ $\angle F=\angle G$, $\therefore$ $AF=AG$

(71) 三角形 ABC 的垂心爲 P, 直線 AP 交於 BC 和外接圓周,順次爲 E, F 證 $PE=EF$.



[解] $\angle FCB=\angle FAB=\angle BCP$

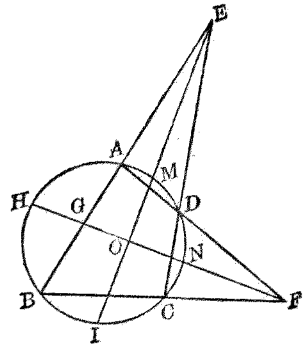
$\angle FEC=\angle CEP=rt.\angle$

$\therefore$ $\triangle CFE\equiv\triangle CPE$　(a. s. a.)

$\therefore$ $PE=EF$

(72) 內接四邊形 $ABCD$ 對邊 AD, BC 的交點爲 F,

另一對邊 AB, CD 的交點爲 E, 證 $\angle AFB$ 與 $\angle BEC$ 的等分線爲直交.



[解] $\angle AEI = \angle DEI$

$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BI} - \overset{\frown}{AM}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{IC} - \overset{\frown}{MD})$

(習題三七, 9.)

$\therefore\ \overset{\frown}{BI} - \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{IC} - \overset{\frown}{MD}$

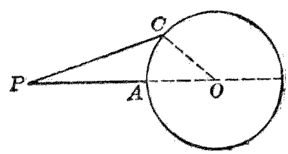
同理 $\overset{\frown}{BH} - \overset{\frown}{CN} = \overset{\frown}{AH} - \overset{\frown}{DN}$

二式相加 $\overset{\frown}{IH} - \overset{\frown}{AM} - \overset{\frown}{CN} = \overset{\frown}{IC} + \overset{\frown}{AH} - \overset{\frown}{MN}$ (公理)

即 $\overset{\frown}{IH} + \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{HM} + \overset{\frown}{IN}$

$\therefore\ \angle IOH = \angle HOM = rt. \angle s.$

(73) 由圓外一點至圓周所作的最短線,爲引長之可以通過圓心之線.



[提示] 引長 P 至 O, 聯結 OC

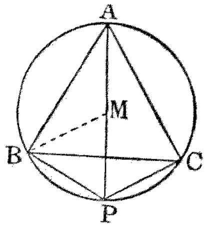
$OA = OC$

$PC + OC > PA + OA$

$\therefore\ PC > PA$ (PC 爲任意線)

(74) 若 ABC 爲圓內切等邊三角形, P 爲 BC 弧上的任一點, 求證: $PA = PB + PC$.

［解］ 在 AP 上取 M 點,使 $PM=PB$.



$\angle BPM=\angle BCA=60^\circ$ (§137 系一)

$\therefore$ $\triangle BPM$ 爲等邊三角形.

在 $\triangle ABM$ 及 BCP 中.

$AB=BC,\ BM=BP$

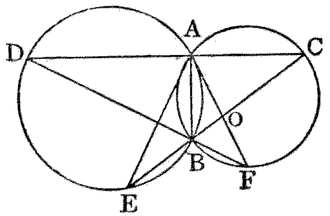
$\angle ABM=\angle PBC$ (同 $=\angle ABP-60^\circ$)

$\therefore$ $\triangle ABM\equiv\triangle BCP$

$\therefore$ $AM=PC$

$\therefore$ $AP=AM+MP=PB+PC$

(75) <u>作直線 CAD 成垂直於兩圓交點的連結線 AB,引長 CB 及 DB 截圓周於 E 及 F,則 AB 必二等分 EAF 角.</u>



［解］ $\overset{\frown}{BF}+\overset{\frown}{FC}=\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{DE}$ $(=180^\circ)$

$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{FC}-\frac{1}{2}\overset{\frown}{AOB}$

$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AOB}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ED}-\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$

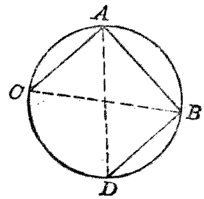
$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{AOB}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{FC}$

$\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{AOB}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ED}$

$\therefore$ $\overset{\frown}{ED}=\overset{\frown}{FC}$

$\therefore$ $\angle DAE=\angle CAF$

$\therefore\quad \angle EAB = \angle BAF$

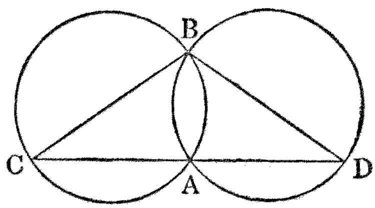


(76)　於一弦的兩端作二弦為其垂線,則此兩弦相等.

［提示］ $\triangle ABC$ 及 $\triangle ABD$ 均為直角三角形　(§137 系三)

$\triangle ABC \equiv \triangle ABD$　(直角$\triangle$, s. s.)

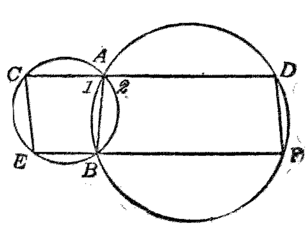
$\therefore\quad AC = BD$



(77)　相等的二圓,相交於 A, B, 過 A 的直線,與圓周的交點為 C, D, 作 BC, BD, 則 $\triangle BCD$ 為二等邊.

［提示］ $\because$ 等圓, ABC 之 $\overset{\frown}{AB} = ADB$ 之 $\overset{\frown}{AB}$

$\therefore\quad \angle C = \angle D$



(78)　過二圓周的交點 AB 引平行直線,各直線與各圓周的交點為 C, D, E, F, 結 CE, DF, 則四角形 $CEFD$ 為平行四邊形.

［提示］ $\angle E$ 與 $\angle 1$ 互為補角　(§137)

$\angle 1$ 與 $\angle 2$ 互為補角　(§137)

$\therefore\quad \angle E=\angle 2$

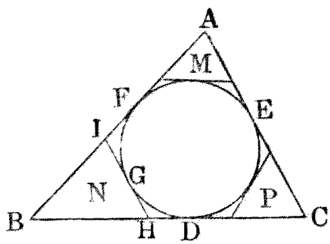
$\angle 2$ 與 $\angle F$ 互為補角

$\therefore\quad \angle E$ 與 $\angle F$ 互為補角

$\therefore\quad CE \parallel DF$

$\therefore\quad CEFD$ 為 $\square$.

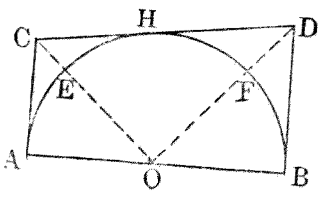
(79) 切於三角形 ABC 的內切圓,於各二邊間作任意的切線所成的三個三角形 M, N, P, 各周邊的和, 等於原形的周邊.



[提示] $HG=HD,\ IG=IF$ (§ 142)

以此類推.

(80) 半圓直徑 AB 兩端的二切線 AC, BD 間作任意的切線 CD, 則中心 O 必對 CD 而成直角.



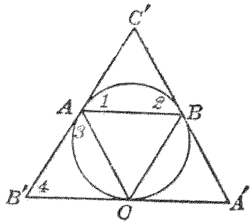
[提示] $\widehat{AE}=\widehat{EH},\ \widehat{BF}=\widehat{FH}$ (§ 142)

$\widehat{EH}+\widehat{HF}=\frac{1}{4}$ 圓周

$\therefore\quad \angle O=rt.\angle.$

(81) 一個圓內的正三角形等於圓外切正三角形

四分之一.



[提示]　$C'A=C'B$　$\therefore$　$\angle 1=\angle 2$

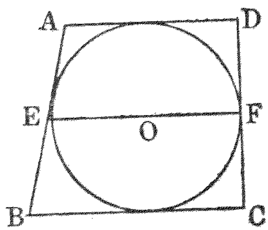
同樣　$\angle 3=4$

$AB=AC$

$\therefore$　$\triangle AC'B\equiv\triangle AB'C$

同樣　$\triangle AC'B\equiv\triangle AB'C\equiv A'BC\equiv ABC$

(82)　通過梯形$ABCD$的內切圓中心O與平行二邊AD, BC平行而作直線交其他的二邊於E, F,則EF等於原形的周邊四分之一.

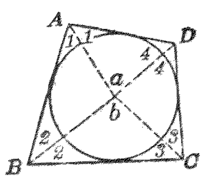


[解]　$AD+BC=AB+DC$　(§ 142)

$EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$

$\therefore$　$EF=\frac{1}{4}(AD+BC+AB+DC)$

(83)　圓的外切四邊形$ABCD$其兩對邊對於中心的角互成補角.

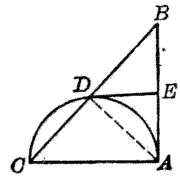


[提示]　$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$

$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180°$

$\therefore$　$\angle a+\angle b=180°$

(84)　以直角三角形的一邊AC為直徑而畫半圓截



斜邊 BC 於 D, 自 D 作切線截 AB 於 E, 則 $BE=DE$.

[解]　作 AD,　$\angle CDA = rt.\angle$

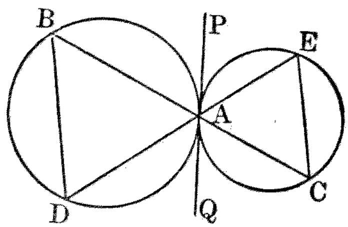
$\therefore\quad \angle ADB = rt.\angle$

$\angle ADE = \angle ACD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$

$\therefore\quad \angle EDB = 90^\circ - \angle ADE$

$= 90^\circ - \angle ACD = \angle ABC$

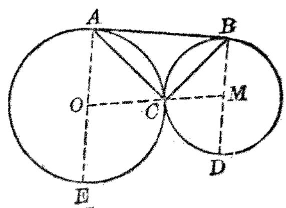
$\therefore\quad BE = DE$　　(等腰三角形)



(85)　通過外切二圓的切點 A 於二圓周間作二直線 BC, DE 則 BD, CE 兩弦必平行.

[提示]　$\angle ADB = \angle PAB = \angle QAC = \angle AEC$

$\therefore\quad BD \parallel CE$



(86)　外切於 C 的兩圓其公共切線爲 AB, 則 ACB 角等於直角.

[提示]　$AE \parallel BD$

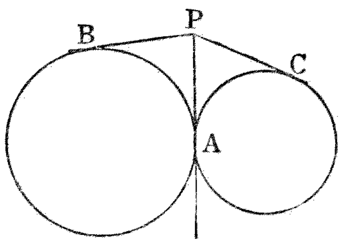
$\therefore\quad \angle O$ 與 $\angle M$ 互爲補角

$\angle A = \frac{1}{2}\angle O,\ \angle B = \frac{1}{2}\angle M$

$\therefore \quad \angle A+\angle B=90°$

$\therefore \quad \angle C=90°$

(87) 兩圓外切於 A 點從 A 的切線上一點 P 至兩圓作切線 PB, PC 則相等.

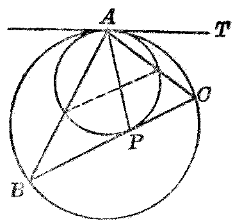


［提示］ $PB=PA$ (§142)

$PC=PA$

$\therefore \quad PB=PC$

(88) 內切於 A 的外圓的弦 BC 若切內圓於 P, 則 BAP 角 $=CAP$ 角.



［提示］ 作 AT

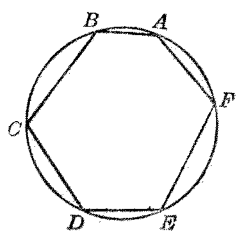
$\angle TAP=\angle APC$

$\angle TAC=\angle ABC$

$\angle ACP=\angle TAP-\angle TAC$

$=\angle APC-\angle ABC=\angle BAP$

(89) 圓的內切與外切六角形 $ABCDEF$, 其間一個角的和各相等.



［提示］ $\angle A=\frac{1}{2}(\widehat{BC}+\widehat{CD}+\widehat{DE}+\widehat{EF})$

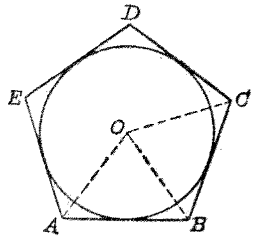
$\angle C=\frac{1}{2}(\widehat{AB}+\widehat{DE}+\widehat{EF}+\widehat{FA})$

$\angle E=\frac{1}{2}(\widehat{AB}+\widehat{BC}+\widehat{CD}+\widehat{FA})$

$\therefore \quad \angle A+\angle C+\angle E=\widehat{AB}+\widehat{BC}+\widehat{CD}+\widehat{DE}+\widehat{EF}+\widehat{FA}$

$=$ 圓周. 他三角亦相同.

(90) 圓的外切等邊多角形的邊數爲奇數,則爲正多角形.



［提示］ $AB=BC,\quad OB=OB$

$\angle OBA=\angle OBC$

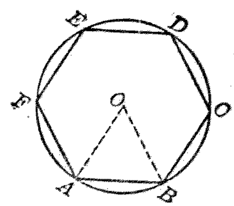
$\therefore \quad \triangle OBA\equiv\triangle OBC \quad (s.\ a.\ s.)$

$\therefore \quad \angle OAB=\angle OCB$

$\angle BAE=\angle BCD$

$\therefore \quad \angle A=\angle C=\angle E=\angle B=\angle D$

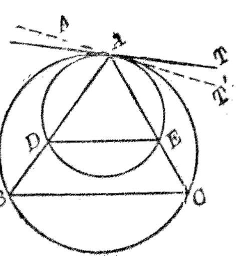
(91) 正六角形的一邊,等於外切圓的半徑.



［提示］ $\triangle OAB$ 等邊三角形

(因各角皆爲 60°)

(92) 平行於 $\triangle ABC$ 的底邊 BC 而作 DE,則 ABC 的外切圓與 ADE 的外切圓相切於 A.



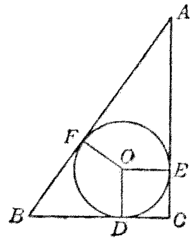
［提示］ 作 AT 切於大圓

$A'T'$ 切於小圓

$\angle TAC=\angle ABC,\quad \angle T'A'E=\angle ADE$

但 $\angle ABC=\angle ADE$ $\therefore$ $AT, A'T'$ 合一.

(93) 外切直角△兩腰的和等於其斜邊與其內切圓的直徑的和.



[提示] $AE=AE$

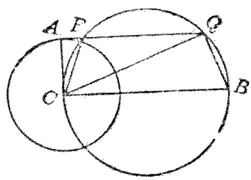
$BD=BF$

$\therefore$ $AB=AC+BC-DC-EC$

但 直徑 $=OE+OD=DC+EC$

$\therefore$ $AB+DC+EC=AC+BC$

(94) 一定圓周上一點 A 的切線,與過此圓中心 C 的一定圓,相交於 P, Q 則 $PC\cdot QC$ 爲一定.



[解] 過 C 引 CB, 連結 BQ

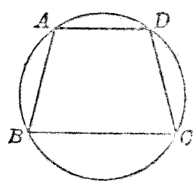
$\angle APC=\angle QBC$

$\therefore$ $\triangle ACP\backsim\triangle QBC$

$\therefore$ $CA:CP=CQ:CB$

$PC\cdot CQ=CA\cdot CB=$ 定量

(95) 圓的內接梯形必等腰.

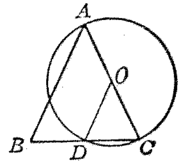


[提示] $\angle A$ 與 $\angle C$ 互補(內接四邊形)

$\angle A$ 與 $\angle B$ 互補 $(AD\parallel BC)$

$\therefore$ $\angle B=\angle C$ $\therefore$ 等腰

(96)　以等腰△的腰爲直徑所作的圓,必平分△的底邊.



[提示]　$OD=OC$　(半徑)

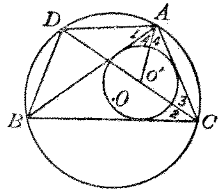
$\therefore\quad \angle ODC=\angle C=\angle B$

$\therefore\quad OD\parallel AB$

但　$AO=OC$

$\therefore\quad BD=DC$

(97)　△的一角的等分線遇其外接圓於一點,則此點必與△的他二頂點及其內切圓心等距.



[提示]　DC 等分 $\angle C$,　$\therefore\ \overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{DB}$

$\therefore\quad \overline{DA}=\overline{DB}$

又　$\angle 1=\angle 2$　$\therefore\quad \angle 1=\angle 3$

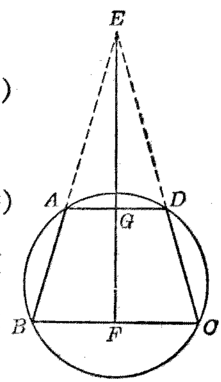
$\angle DAO=\angle 1+\angle 4$

$\angle DOA=\angle 4+\angle 3$　(外角)

$\therefore\quad \angle DAO=\angle DOA$

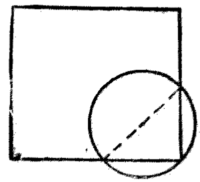
$\therefore\quad DO=DA$　(等腰三角形)

(98)　延長圓的內接梯形的不平行兩邊,則其交點必在他二邊的垂直平分線上.



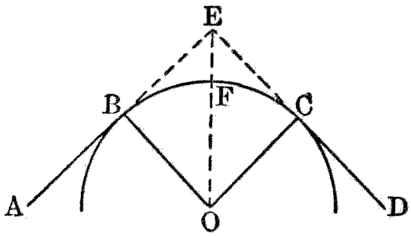
[提示] 因內接於圓內之梯形必爲等腰梯形之故.(第 95 題)

(99) 說明用一張長方形的紙,如何可以求出一個圓的直徑.



[提示] 用§137系三的理參看習題三七第3題.

(100) 鐵路轉灣的地方都是用圓弧,在 AB 和 CD 兩條路之間,用 BC 弧聯接,使他和 AB, CD 相切於 B, C 二點,延長 AB 和 BC, 相交於 E 點, 證明 OE 平分 BC 弧.



[提示] $OB=OC$

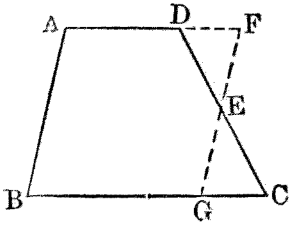
$OE=OE$

$\angle B=\angle C=rt.\angle$

$\therefore\quad \triangle OBE\equiv\triangle OCE$

$\therefore\quad \angle BOE=\angle COE,\quad \therefore\quad \widehat{BF}=\widehat{CF}$

(101) $ABCD$ 爲梯形 AD, BC 爲平行二邊,則 $ABCD$ 等於 $\frac{1}{2}(AD+BC)$ 爲底 AD, BC 間的距爲高的矩形.



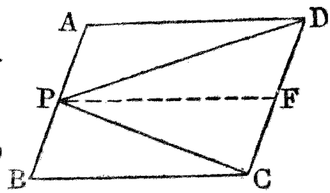
[提示] AD 延長至 F

從 DC 中點 E 作 $FG\parallel AB$

$\triangle DFE \equiv \triangle EGC$　　　$(a.\ s.\ a.)$

$\therefore$　$ABCD = \square ABGE = \frac{1}{2}(AD+BC)$ 爲底, AD, BC 間之距爲高之矩形。

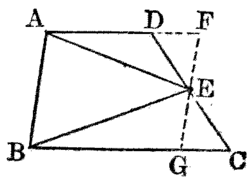
(102)　一點 P 若在平行四邊形一邊 AB 的上面,則三角形 $PAD+$ 三角形 $PBC = \frac{1}{2}\square ABCD$.



[提示]　證明 $\triangle APD = \triangle FPD$

$\triangle BPC = \triangle FPC$

(103)　梯形的不平行的一邊 CD 其中點爲 E, 則三角形 $AEB = \frac{1}{2}$ 梯形 $ABCD$.



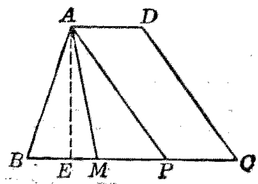
[提示]　梯形 $ABCD = \square ABGF$

(第 101 題)

$\triangle AEB = \frac{1}{2}\square ABGF$　　　(第 102 題)

$\therefore$　$\triangle AEB = \frac{1}{2}ABCD$

(104)　從梯形 $ABCD$ 的 A 平行於 DC 而作 AP, 若三角形 $ABP=$ 平行四邊形 $APCD$, 則 $BC = 3AD$.



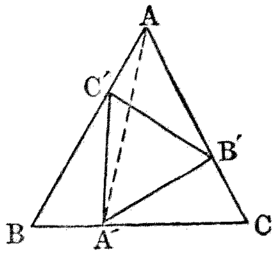
[提示]　$\triangle ABP = \frac{1}{2}BP \cdot AE$ (§ 187)

$\square APCD = PC \cdot AE$　　　(§ 186)

$\because \quad \triangle ABP = \square APCD, \qquad \therefore \quad \frac{1}{2}BP = PC$

$\therefore \qquad BC = 3PC = 3AD.$

(105) 於三角形各邊上取其三分之一 A', B', C', 則 $\triangle A'B'C' = \frac{1}{3}\triangle ABC$.



[解] 連結 AA', 則

$\triangle ABA' = \frac{1}{3}\triangle ABC$

($\because \quad BA' = \frac{1}{3}BC$) (§ 187)

$\triangle BA'C' = 2\triangle AA'C'$ (同理)

$\therefore \quad \triangle BA'C' = \frac{2}{3}\triangle ABA'$

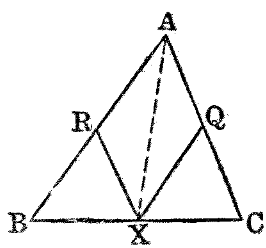
$\therefore \quad \triangle BA'C' = \frac{2}{9}\triangle ABC$

同樣 $\triangle CA'B' = \triangle AB'C' = \frac{2}{9}\triangle ABC$

$\therefore \quad \triangle BA'C' + \triangle CA'B' + \triangle AB'C' = \frac{2}{3}\triangle ABC$

$\therefore \quad \triangle A'B'C' = \frac{1}{3}\triangle ABC.$

(106) 三角形的二邊 AC, AB 其中點爲 Q, R, 而 BC 上任意一點爲 X, 則四邊形 $AQXR = \frac{1}{2}\triangle ABC$.



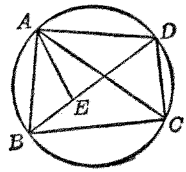
[提示] $\triangle BRX = \frac{1}{4}\triangle ABC$

$\triangle QXC = \frac{1}{4}\triangle ABC$

$\square AQXR = \triangle ABC - \triangle BRX - \triangle QXC$

$=\frac{1}{2}\triangle ABC$

(107) 圓內切四邊形二對角線的積等於每相對二邊的二積的和.



[解] 引 AE, 使 $\angle AED=\angle ABC$

則 $\angle BCA=\angle BDA$

$\therefore$ $\triangle EDA \backsim \triangle BCA$

$\therefore$ $BC\cdot AD=AC\cdot DE$

又 $\angle AEB$ 爲 $\angle AED$ 之補角, $\angle CDA$ 爲 $\angle ABC$ 之補角.

$\therefore$ $\triangle BEA \backsim \triangle CDA$

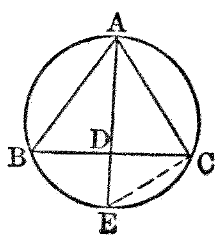
$\therefore$ $AB\cdot CD=AC\cdot EB$

$\therefore$ $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$

(108) 兩個兩等邊三角形的頂角相等者相似.

[提示] 頂角相等,則兩底角亦各相等.

(109) $\triangle ABC$ 頂角 A 的平分線過底邊於 D 遇外切圓周於 E. 證 $AB\cdot AC=AD\cdot AE$.



[解] 作 CE

$\because$ $\angle BAD=\angle EAC$,

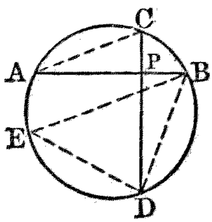
$\angle ABD=\angle AEC$

∴　$\triangle BAD \backsim \triangle EAC$

∴　$AB:AE=AD:AC$

即　$AB\cdot AC=AD\cdot AE$

(110)　二弦正交所成四分線的平方和等於此圓直徑的平方。



〔解〕 作 AC, ED, BD

$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{BDE}$

∴　$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{ED}$, $AC=ED$

$\overline{ED}^2+\overline{BD}^2=\overline{BE}^2$

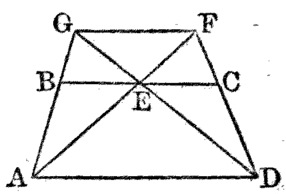
∴　$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{BE}^2$

但　$\overline{AC}^2=\overline{PA}^2+\overline{PC}^2$

$\overline{BD}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$

∴　$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2+\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=\overline{BE}^2$

(111)　梯形 $ABCD$ 二平行邊的一邊爲 BC, 其中點爲 E, 引長 AE 及 DE, 過 CD 及 AB 的引長線於 F 及 G, 證 $FG \parallel AD$.



〔解〕

$$\left.\begin{array}{l}\angle GAD=\angle GBE\\ \angle GDA=\angle GEB\end{array}\right\}$$

∴　$\triangle AGD \backsim \triangle BGE$

$\therefore \quad DG : EG = AD : BE$

同樣　$\triangle AFD \backsim \triangle EFD$

$\therefore \quad AF : EF = AD : CE$

$= BE : CE$

$\therefore \quad DG : EG = AF : EF$

$\therefore \quad DG - EG : EG = AF - EF : EF \qquad (\S\ 160)$

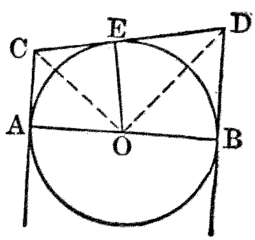
又　$\angle AED = \angle FEG$

$\angle EGF = \angle EDA$

$\triangle AED \backsim \triangle FEG$

$\therefore \quad FG \parallel DA.$

(112) 一圓直徑的兩端,作二切線,於其間又作第三切線,此切線爲切點所分成二分線其相乘的積等於此圓半徑的平方.



[解]　$AC \parallel BD$

$\therefore \quad \angle ACE + \angle BDE = 2 rt. \angle s$

作 OC 又 OD

$\angle ACO = \angle ECO.$

$\angle BDO = \angle EDO$

$\therefore \quad \angle ECO + \angle EDO = rt. \angle$

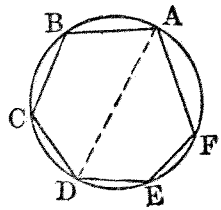
$\therefore \quad \angle COD$ 爲 $rt.\angle$

$OE \perp CD$

$\therefore \quad CE : OE = OE : ED$ (§ 174)

$\therefore \quad CE \times ED = \overline{OE}^2$

(113) 圓內接任意的六角形,每間隔一角的三角的和,必爲四直角.

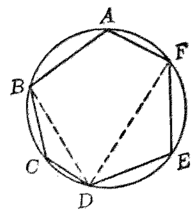


[解] $\angle C + \angle BAD = 2rt.\angle s$

$\angle E + \angle FAD = 2rt.\angle s$

(內接四邊形)

$\therefore \quad \angle A + \angle C + \angle E = 4rt.\angle s$



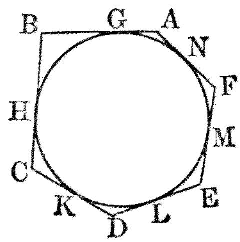
(114) 圓內接六角形,其相對的角的和,大於二直角.

[提示] $\angle A + \angle BDF = 2rt.\angle s$

$\angle D = \angle BDF + \angle BDC + \angle FDE > \angle BDF$

$\therefore \quad \angle A + \angle D > 2rt.\angle s$

(115) 圓外接六角形,每間隔一邊的三邊的和,等於他三邊的和.



[提示] $AG = AN, \ GB = BH$

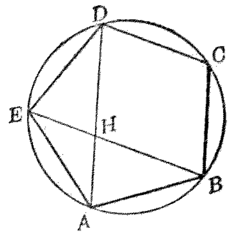
$CK = CH, \ KD = DL$

$EM = LE, \ MF = NF$

各式相加,得

$$AB+CD+EF=AF+BC+DE$$

(116) 有法五角形的二對角線,相交各線的較長一分線,等於五角形的一邊.



[提示] 作五角形的外接圓

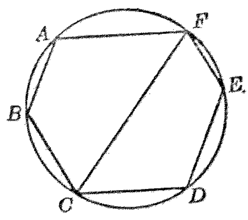
$\because\quad \widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CD}=\cdots\cdots=72°$

$\angle AHB=\frac{1}{2}(\widehat{AB}+\widehat{DE})=72°$　(習題三七,8題)

$\angle DAB=\frac{1}{2}(\widehat{BC}+\widehat{CD})=72°$

$\therefore\quad \triangle AHB$ 等腰　$\therefore\quad HB=AB$

(117) 圓內接六角形,相鄰二邊平行於其相對的邊,則他二邊亦平行.



[解] $AB \parallel DE,\ BC \parallel FE$

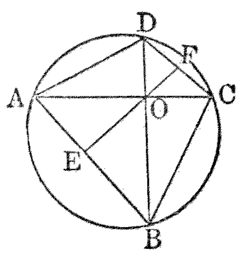
$\therefore\quad \angle ABC=\angle DEF$

連 F, $\angle AFC$, $\angle FCD$

各為 $\angle ABC$, $\angle DEF$

之補角,　$\therefore\quad AF \parallel CD$

(118) 圓內接四邊形的兩對角線,互為垂直,則自其交點引一邊的垂線必二等分其對邊.



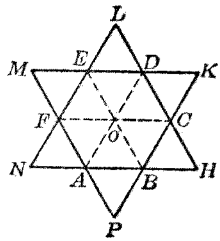
[提示] $\angle COF=\angle AOE=\angle ABO=\angle OCF$

$\therefore\ CF=OF$

同樣 $DF=OF$

$\therefore\ CF=DF$

(119) <u>引長有法六角形的各邊所作星形多邊形為與六邊形的二倍.</u>



[提示] $\angle AOB=\frac{1}{6}\times 360^\circ=60^\circ$

$\angle FAB=\angle ABC=120^\circ$

$\therefore\ \angle OAB=\angle OBA=60^\circ$

$\therefore\ \triangle AOB$ 為等邊

$\angle BAP=\angle ABP=60^\circ$

$\therefore\ \angle APB=60^\circ$

$\therefore\ \triangle PAB$ 為等邊

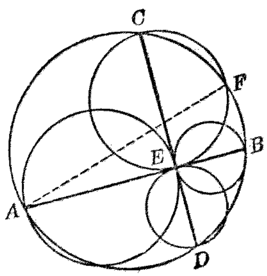
故 $\triangle PAB=\triangle AOB$

餘可類推.

$\therefore$ 星形 $HKLMNP=$

$2ABCDEF$ 六邊形

(120) <u>圓內二弦彼此正交,以所成四分線為直徑作四圓,其和等於與圓.</u>



［提 示］ 四小圓之面積

$$=\tfrac{1}{4}\pi\overline{AE}^2+\tfrac{1}{4}\pi\overline{EB}^2+\tfrac{1}{4}\pi\overline{CE}^2+\tfrac{1}{4}\pi\overline{EB}^2$$

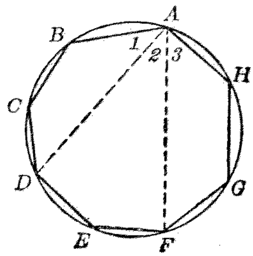
$$=\tfrac{1}{4}\pi(\overline{AE}^2+\overline{EB}^2+\overline{CE}^2+\overline{EB}^2)$$

但 $\overline{AE}^2+\overline{EB}^2+\overline{CE}^2+\overline{EB}^2=$ 直徑 $\overline{AF}^2$ (第 110 題)

$\therefore\ \tfrac{1}{4}\pi(\overline{AE}^2+\overline{EB}^2+\overline{CE}^2+\overline{EB}^2)=\tfrac{1}{4}\pi\overline{AF}^2$

= 與圓面積.

(121) 圓內接八角形,每間隔一角的和爲六直角.



［提 示］ 聯 AD 及 AF

分八角形爲三個內接四邊形.

$\angle 1+\angle C=2\,rt.\angle s$

$\angle 2+\angle E=2\,rt.\angle s$

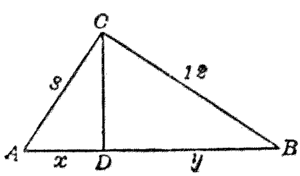
$\angle 3+\angle G=2\,rt.\angle s$

$\therefore\ \angle A+\angle C+\angle E+\angle G=6\,rt.\angle s$

(122) 若三角形的三邊爲 7, 9, 12, 問對 12 的角,是直角,是銳角,還是鈍角?

［提 示］ $12^2>7^2+9^2$

∴ 對 12 之角是鈍角.



(123) 直角△的兩足是 8 寸及 12 寸,求其在弦上的二射影,及

自直角頂至弦的高.

〔解〕 $AB=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}=14.422$

$AB:AC=AC:AD$

$14.422:8=8:x$

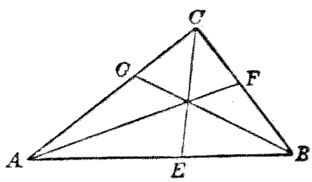
$\therefore\quad x=4.438$ 寸

$BD=AB-AD$

$\therefore\quad y=9.984$ 寸

$DC=\sqrt{AD\times DB}=6.656$ 寸

(124) 若三角形的三邊爲9, 12, 15, 求三角平分線所分得的諸邊的分線.



〔解〕 $AB=15,\ BC=12,\ CA=9$

$AE:EB=AC:BC=9:12$

$\therefore\quad AE=\frac{9}{21}\times 15=6\frac{3}{7}$

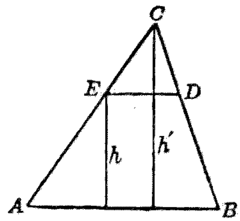
$EB=\frac{12}{21}\times 15=8\frac{4}{7}$

$BF=\frac{15}{24}\times 12=7\frac{1}{2}$

$FC=\frac{9}{24}\times 12=4\frac{1}{2}$

$CG=\frac{12}{27}\times 9=4$

$GA=\frac{15}{27}\times 9=5$



(125)　梯形的二底邊爲 a 及 b，其高爲 h，今引長二足相遇成三角形，求其高幾何。

〔解〕　$AB \parallel ED$

$$h'-h : h' = b : a$$

$$\therefore \quad ah'-ah=bh'$$

$$\therefore \quad h'=\frac{ah}{a-b}$$

$$h'-h=\frac{bh}{a-b}$$

(126)　一窗高 24 尺，一梯離窗脚 10 尺，問此梯幾何長可至窗頂？

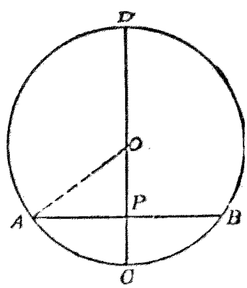
〔解〕　$x=$ 梯長

$$x=\sqrt{24^2+10^2}=\sqrt{576+100}=26$$

(127)　等邊△的高爲 h，求其邊。

〔解〕　$a=$ 邊長

$$a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=h^2, \qquad \therefore \quad a=\frac{2h}{3}\sqrt{3}.$$



(128)　一圓的半徑長 10 寸，今有一點距此圓心 6 寸，求通過此點至圓心作最長弦及最短弦的長。

〔提示〕　CD 爲最長弦 $=20$ 寸

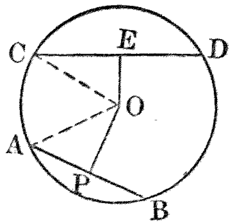
AB 爲最短弦

$$AP=\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{OP}^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$$

$$AP=\tfrac{1}{2}AB$$

$$\therefore\quad AB=16\text{ 寸}$$

(109) 圓心距長10尺一弦的遠為12尺,今有一弦長24尺,求其距圓心的遠.

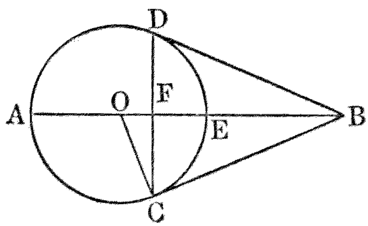


[解] $AB=10\quad OP=12\quad CO=24$

$$OA=\sqrt{\overline{OP}^2+\overline{AP}^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13=OC$$

$$OE=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{CE}^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$$

(130) 一圓的半徑長六寸,今自距圓心10寸的一點作一切線,求其長,又求連二切點一弦的長.



[解] $AB=16\quad BE=4\quad OB=10$

$$\overline{BC}^2=AB\times EB=16\times 4=64$$

$$\therefore\quad BC=8\text{ 寸}=BD$$

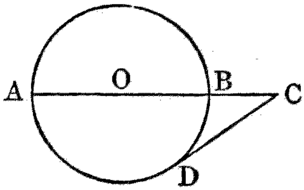
$$OF:FB=\overline{OC}^2:\overline{BC}^2=36:64$$

$$\therefore\quad FB=\frac{64}{100}\times 10=6.4\text{ 寸}$$

$$CF=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{FB}^2}=\sqrt{8^2-6.4^2}=4.8\text{ 寸}$$

$$\therefore\quad DC=2\times CF=9.6\text{ 寸}$$

(131) 一切線長20寸,自其一端作割線過圓心,若此割線在圓外的一分長8寸,求半徑.



[解] $CD=20$, $CB=8$, 求 OB,

$AC:CD=CD:CB$

$AC:20=20:8$

$\therefore\quad AC=50$

$AB=AC-CB=42$

$OB=21$ 寸

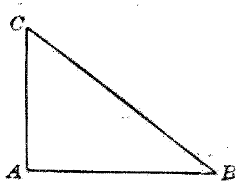
(132) 一圓的半徑爲r,有一弦距圓心的遠爲$\frac{1}{2}r$,求弦的長.

[解] 令 $x=$ 弦長之半

$$x^2=r-\left(\frac{1}{2}r\right)^2=\frac{3}{4}r^2$$

$$\therefore\quad x=\frac{r}{2}\sqrt{3},\qquad 2x=r\sqrt{3}.$$

(133) 求作一正方,與二正方一邊爲3寸一邊爲4寸者的和等值.



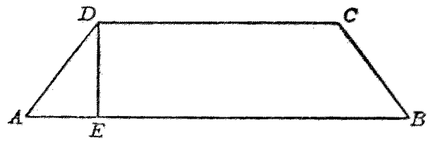
[解] 作 $\angle A$ 直角

命 $AB=4$, $AC=3$

BC 卽所求之一邊

$BC=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2}=5$ 寸

(134) 梯形的兩底邊,一爲16尺,一爲10尺,每足長5尺,求此形的面積.



[解] $AB=16,\quad DC=10,\quad DE=CB=5$

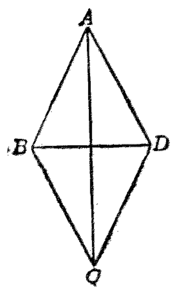
$AE=\frac{1}{2}(AB-DC)=\frac{1}{2}(16-10)=3$ 尺

$\therefore\quad DE=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AE}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ 尺

$\square ABCD=DE\times\frac{1}{2}(AB+CD)$

$=4\times\frac{1}{2}(16+10)=52$ 方尺

(135) 一斜方形含100平方尺,其一對角線爲10尺,問他一對角線幾何?



[解] $BD=10$

$ABCD=100=\frac{1}{2}(AC\times BD)$

$=\frac{1}{2}(AC\times 10)$

$\therefore\quad AC=20$ 尺

(136) 有甲乙丙三家,欲於各人的等距離處掘井,甲乙隔4丈,乙丙隔13丈,丙甲隔15丈,問各家至井距離若干?

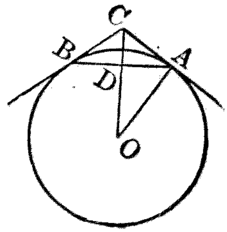
[解] 井在過甲乙丙三家之圓之中心,

$$\therefore\quad R=\frac{abc}{4\triangle}=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

$$=\frac{4\times13\times15}{4\sqrt{16(16-4)(16-13)(16-15)}}$$

$$=\frac{4\times13\times15}{4\times4\times6}=8\frac{1}{8}\text{ 丈}$$

(137) 已知圓的半徑爲 R, 求圓外接正六角形的一邊.



[解] 內接六角形之一邊 $AB=R$

(§ 196)

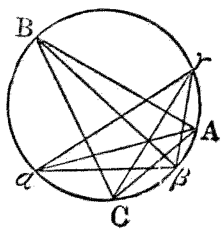
$$AD=\frac{1}{2}R \qquad OD=\frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$\frac{AC}{AO}=\frac{AD}{OD}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\quad AC=\frac{R}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\quad \text{外接六角形之一邊}=2\frac{R}{\sqrt{3}}$$

(138) 圓內接三角形 $\alpha\beta\gamma$ 的各角爲 30°, 100°, 50°. 此三角形的二等分線, 與圓周相交的點爲 A, B, C, 則 $\triangle ABC$ 各角的大若何?



[解] $\angle\alpha=30°\quad \angle\beta=100°\quad \angle\gamma=50°$

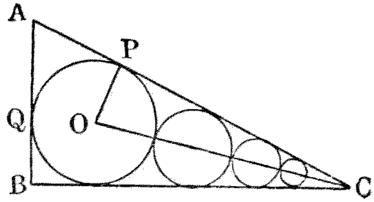
$$\angle BAC=\angle\alpha AC+\angle\alpha AB$$

$$=\angle\alpha\gamma C+\angle\alpha\beta B=25°+50°=75°$$

$\angle ABC=15^\circ+25^\circ=40^\circ$

$\angle ABC=15^\circ+50^\circ=65^\circ$

(139) 直角三角形 ABC，累次內切無數的圓，試求這樣諸徑的和，但已知其直角的二邊，$AB=5$，$BC=12$.



[解] $AB=5,\ BC=12 \qquad \therefore\quad AC=13$

O 之半徑 $r=(5+12-13)\div 2=2$ （第 93 題）

$$AP=AQ=5-2=3$$

$$CP=10$$

$$\therefore\quad OC=\sqrt{10^2+2^2}=2\sqrt{26}$$

$$\therefore\quad 諸直徑之和 =2\sqrt{26}+2$$

$$=2(\sqrt{26}+1)$$

(140) 半徑為 r 的圓，求內接正三角形，正方形，正五角形的面積.

[解] 將正多角形的中心，連結各頂，則所得與邊數同數的相等三角形，所以其面積等於以邊心距為高，一邊為底的三角形面積乘其邊者。

$\therefore$ 內接正三角形面積 $= 3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}r \cdot \frac{1}{2}r$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$$

內接正方形面積 $= 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}r$

$$= 2r^2$$

內接正五邊形面積 $= 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}r \times \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}r$

$$= \frac{5}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,r^2$$