

Fisica 1



Meccanica e Termodinamica

26 gennaio 2022





wikilearn
collaborative textbooks

This book is the result of a collaborative effort of a community of people like you, who believe that knowledge only grows if shared.
We are waiting for you!

Get in touch with the rest of the team by visiting <http://join.wikilearn.org>

You are free to copy, share, remix and reproduce this book, provided that you properly give credit to original authors and you give readers the same freedom you enjoy.

Read the full terms at <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>



Indice

1	Meccanica	1
2	Parte Prima - Meccanica del punto	2
2.1	Cos'è la meccanica newtoniana	2
2.2	Cinematica del Punto	2
2.3	Moto rettilineo	3
2.3.1	Velocità	3
2.3.2	Accelerazione	4
2.3.3	Velocità e accelerazione a “confronto”	5
2.3.4	Tipi di moto	5
2.4	Moto circolare	8
2.4.1	Moto generico in due dimensioni	8
2.4.2	Scomposizione generica del moto in 3 dimensioni	9
2.4.3	Moto circolare	10
2.5	Moto armonico	11
2.6	Moto parabolico dei corpi	13
2.7	Primo e secondo principio della dinamica	15
2.8	Forza peso e forze vincolari	18
2.9	Terzo principio della dinamica	20
2.10	Forza elastica	21
2.11	Forza centripeta	22
2.12	Quantità di moto e impulso	24
2.13	Momento angolare	25
2.14	Pendolo semplice	26
2.14.1	Pendolo a cono	28
2.15	Energia cinetica e lavoro	29
2.16	Energia del pendolo	32
2.17	Lavoro della forze di attrito, della forza peso e della forza elastica	35

2.17.1	Lavoro della forza d'attrito	35
2.17.2	Lavoro della forza peso	36
2.17.3	Lavoro della forza elastica	36
2.18	Forze conservative ed energia potenziale	36
2.18.1	Forza conservativa	36
2.18.2	Energia potenziale	37
2.18.3	Conservazione dell'energia meccanica	39
2.18.4	Dall'energia potenziale alla forza	40
2.19	Oscillatore armonico	41
2.20	Oscillatore armonico smorzato e forzato	43
2.20.1	Oscillatore armonico smorzato	43
2.20.2	Oscillatore armonico forzato	45
2.21	Oscillatori accoppiati	47
3	Parte Seconda - Meccanica dei sistemi	49
3.1	Sistemi di punti e corpo rigido	49
3.2	Centro di massa	49
3.3	Conservazione della quantità di moto	52
3.4	Sistema di riferimento del centro di massa	52
3.5	Mutua interazione: problema dei due corpi	54
3.6	Sistemi a massa variabile	55
3.7	Moto di un razzo	56
3.8	La seconda legge cardinale	57
3.9	Teorema di König per il momento angolare	58
3.9.1	Il momento esterno rispetto a un polo qualunque	58
3.10	Corpo rigido in rotazione	59
3.11	Coppia di forze	60
3.12	Sistemi di forze parallele	61
3.13	Pendolo fisico	62
3.13.1	Pendolo fisico a cono	63
3.14	Moto di una trottola	64
3.14.1	Il moto di precessione	64
3.14.2	Il moto di nutazione	66
3.15	Sistemi in equilibrio	67
3.16	Esempi di problemi di statica	67
3.16.1	Appoggio al piano	67
3.16.2	Esercizi di statica	68



3.17	Moto di rotolamento	71
3.18	Urti elastici e anelastici	72
4	Parte Terza - Teoria della gravitazione universale	74
4.1	La legge di gravitazione	74
4.1.1	La legge di gravitazione	74
4.1.2	L'esperienza di Cavendish	75
4.2	Campo gravitazionale	76
4.2.1	Terra e forza peso	76
4.3	Teorema di Gauss per il campo gravitazionale	77
4.3.1	Teorema di Gauss per il campo gravitazionale	77
4.3.2	Considerazioni del teorema di Gauss	79
4.3.3	Il campo gravitazionale terrestre	80
4.4	Energia di campo gravitazionale	82
4.4.1	Energia gravitazionale	82
4.4.2	Energia della forza peso	83
4.4.3	Velocità di fuga	84
4.5	Il moto dei corpi celesti e le leggi di Keplero	85
4.5.1	Le tre leggi di Keplero	85
4.6	Considerazione col problema dei due corpi	92
5	Parte Quarta - Meccanica dei fluidi	94
5.1	Cosa sono i fluidi	94
5.2	Fluidi in quiete	95
5.3	Legge di Stevino	96
5.4	Legge di Archimede e esperienza di Torricelli	97
5.4.1	Legge di Archimede	97
5.4.2	Esperienza di Torricelli	98
5.5	Conseguenze della legge di Stevino	100
5.5.1	Vasi comunicanti	100
5.5.2	Legge di Pascal	101
5.5.3	Martinetto idraulico	101
5.6	Fluidi in moto	102
5.7	Legge di Bernoulli	104
5.7.1	Legge di Bernoulli	104
5.7.2	Effetto Venturi	106
6	Parte Quinta - Onde meccaniche	107



6.1	Le onde meccaniche	107
6.2	Onde sinusoidali	108
6.2.1	Principio di sovrapposizione	109
6.3	Onde longitudinali	110
6.3.1	Il suono come onda longitudinale	111
6.4	Onde trasversali	112
6.5	Interferenza	113
6.5.1	Battimenti	115
6.6	Onde stazionarie	116
7	Parte Sesta - Meccanica relativistica	118
7.1	La fisica dopo Maxwell	118
7.1.1	Introduzione alla relatività ristretta	118
7.1.2	Dopo l'elettromagnetismo	118
7.1.3	L'etere luminifero	119
7.2	Esperienza di Michelson-Morley e l'ipotesi di Einstein	120
7.3	Trasformazioni di Lorentz e composizione delle velocità	122
7.3.1	Trasformazioni di Lorentz	122
7.3.2	Composizione delle velocità secondo le trasformazioni di Lorentz	124
7.4	Conseguenze dell'ipotesi di Einstein: dilatazione dei tempi e contrazione delle lunghezze	125
7.4.1	Dilatazione dei tempi	125
7.4.2	Contrazione delle lunghezze	126
7.5	Spazio di Minkowsky	127
7.5.1	Breve accenno tensoriale	130
7.6	Cinematica Relativistica	130
7.6.1	Paradosso dei gemelli	132
7.7	Dinamica Relativistica	132
7.7.1	Quantità di moto e energia a riposo	132
7.7.2	Leggi del moto	133
7.8	Lagrangiana in relatività e l'effetto Compton	135
7.8.1	La lagrangiana in relatività	135
7.8.2	Effetto Compton	136
8	Termodinamica	138
9	Parte Settima - Continuazione della Meccanica e Primo principio	139



9.1	Introduzione al corso	139
9.2	Sistemi termodinamici e trasformazioni reversibili o quasi statiche .	140
9.2.1	Sistema termodinamico standard	140
9.2.2	Trasformazioni reversibili e/o quasi statiche	141
9.3	Equazioni di stato di sistemi termodinamici	142
9.4	Definizione operativa di temperatura	144
9.4.1	Scala Celsius	144
9.4.2	Scala Kelvin	144
9.5	Leggi dei gas e equazione di stato dei gas perfetti	145
9.5.1	Leggi di Gay-Lussac	145
9.5.2	Equazione di stato dei gas perfetti	146
9.6	Lavoro termodinamico	147
9.6.1	Definizione operativa di calore	149
9.6.2	Espressione del lavoro isoterma	149
9.7	Prima esperienza di Joule e Primo principio della termodinamica .	149
9.7.1	Calore specifico di un corpo solido	150
9.7.2	Problema fondamentale della calorimetria	151
9.8	Seconda esperienza di Joule	151
9.8.1	Calore specifico del gas perfetto a pressione e volume costanti	152
10	Parte Ottava - Trasporto di calore ed energia interna	153
10.1	Processi di trasporto	153
10.2	Legge di Fourier	153
10.2.1	Esempio di un caso stazionario: il termometro	155
10.3	Trasformazione adiabatica	156
10.3.1	Adiabatica reversibile	156
10.3.2	Adiabatica irreversibile	157
10.4	Transizioni e diagrammi di fase	158
10.5	Termometro a gas	160
10.6	Legge di Van der Waals	162
10.6.1	Viriale di Van der Waals	165
10.7	Studio microscopico dell'energia interna	165
10.8	Distribuzione di Maxwell	168
11	Parte Nona - Cicli termodinamici e Secondo principio	171
11.1	Cicli termodinamici	171
11.1.1	Ciclo di politropiche	171



11.1.2	Ciclo di Carnot	172
11.2	Macchine termiche e frigoriferi	174
11.2.1	Frigorifero di Carnot	174
11.3	Secondo principio della termodinamica	175
11.4	Teorema di Carnot	176
11.4.1	Definizione di temperatura dal ciclo di Carnot	176
11.5	Integrale di Clausius e definizione di Entropia	177
11.5.1	Definizione di entropia per il gas perfetto	178
11.6	Equazione di Clausius-Clapeyron	180
11.7	Macrostat, microstat, entropia in funzione dei microstat	182
11.8	Funzioni termodinamiche e relazioni di Maxwell	184
11.8.1	Equazione di Clausius-Clapeyron con l'energia libera di Gibbs	187
12	Appendice A - Formulari	189
12.1	Formulario del punto materiale	189
12.1.1	Cinematica	189
12.1.2	Dinamica	190
12.1.3	Energia e Lavoro	191
12.1.4	Pendolo con lavoro	191
12.1.5	Oscillatori armonici	192
12.2	Formulario dei sistemi e corpo rigido	192
12.2.1	Sistemi	192
12.2.2	Problema dei due corpi	192
12.2.3	Teorema di Koenig	193
12.2.4	Seconda equazione cardinale	193
12.2.5	Momenti di inerzia	193
12.2.6	Corpi rotanti	194
12.2.7	Pendolo fisico	194
12.2.8	Urti	195
12.3	Formulario di fluidomeccanica	195
12.3.1	Statica dei fluidi	195
12.3.2	Dinamica dei fluidi	196
12.4	Formulario delle onde elastiche	196
12.4.1	Onde meccaniche	196
12.4.2	Onde sinusoidali	197
12.4.3	Onde longitudinali	197
12.4.4	Onde trasversali	197



12.4.5	Intensità e energia	198
12.4.6	Interferenza	198
12.4.7	Onde stazionarie	198
13	Appendice B - Richiami di analisi a una variabile	200
13.1	Calcolo di derivate	200
13.2	Sommario sullo studio di funzione	205
13.2.1	Sommario	205
13.2.2	Esempio di studio di funzione	209
13.3	Calcolo di primitive	211
13.4	Calcolo di aree	215
13.4.1	Funzioni esponenziali	215
13.4.2	Funzioni dispari	216
13.5	Eq. differenziali del secondo ordine non omogenee	217
13.5.1	Condizione di risonanza	218
14	Fonti per testo e immagini; autori; licenze	220
14.1	Testo	220
14.2	Immagini	227
14.3	Licenza dell'opera	229



Capitolo 1

Meccanica



Capitolo 2

Parte Prima - Meccanica del punto

2.1 Cos'è la meccanica newtoniana

La meccanica newtoniana, o meccanica classica, descrive le interazioni che avvengono tra corpi a livello macroscopico, osservabili direttamente nella vita quotidiana. Tra le grandezze studiate dalla meccanica classica ci sono velocità, accelerazione, energia meccanica, lavoro.

Tutto quello che sappiamo sul moto dei corpi lo dobbiamo a Galileo Galilei (1564-1642) e a Isaac Newton (1642-1727). Galileo fu il primo a mettere in discussione le teorie di Aristotele, ritenute da secoli verità inconfutabili. Newton riprese gli studi di Galileo ed enunciò le tre leggi fondamentali della dinamica, che descrivono l'interazione fra corpi, oltre a trovare un'espressione per la forza gravitazionale.

La meccanica classica però non è applicabile in tutte le situazioni. Se le velocità dei corpi che interagiscono sono molto alte, cioè prossime alla velocità della luce, dobbiamo sostituire la meccanica newtoniana con la teoria della relatività speciale di Einstein. Ancora, se le interazioni avvengono a livello subatomico, dobbiamo prendere in considerazione la meccanica quantistica. La meccanica newtoniana è un caso particolare di queste due grandi teorie della fisica moderna. Ed è tuttavia un caso molto importante, in quanto ci permette di studiare sia fenomeni che riguardano oggetti della vita quotidiana (come il moto di un pallone da calcio, una macchina in frenata, una ruota che gira...) sia fenomeni astronomici (come il moto dei pianeti intorno al Sole, o il comportamento delle galassie).

Gli argomenti del corso saranno: meccanica del punto materiale, meccanica dei sistemi di punti, meccanica del corpo rigido, meccanica dei fluidi.

2.2 Cinematica del Punto

La *cinematica* è quella parte della meccanica che si occupa di descrivere il moto di un corpo, senza analizzarne le cause.

A prima vista studiare il moto di un corpo che si muove nello spazio può sembrare complicato. Basti pensare a un aereo, costituito dalle ali, dalla fusoliera, o a una



persona che corre, con tutti quei muscoli e articolazioni, movimenti della braccia ecc. Però, a pensarci bene, un aereo percorre di norma moltissimi chilometri. E alzando lo sguardo al cielo lo vediamo come un puntino lontano. Lo stesso vale per il corridore, da lontano non ci preoccupiamo dei movimenti delle braccia, ma siamo interessati a misurare quanto tempo percorre 100 metri, per esempio. Queste considerazioni ci portano a dire che se lo spazio percorso da un corpo è molto maggiore delle sue dimensioni, possiamo trattare quest'ultimo come se fosse un punto.

Un *punto materiale* è un oggetto privo di dimensioni che permette di semplificare l'osservazione del moto, in quanto vengono così eliminate le complicazioni derivanti dall'estensione stessa del corpo.

Bisogna però ricordare che questa assunzione funziona solo per il moto di traslazione. Come vedremo nel capitolo sul corpo rigido, se vogliamo studiare il moto di una ruota che gira non possiamo certo considerarla un punto.

La cinematica è usata dai produttori di automobili, quando devono determinare le performance delle loro macchine prima e durante una corsa. I geologi usano questa fisica per misurare il moto delle placche tettoniche e predire i terremoti. O ancora, i ricercatori medici usano la cinematica per mappare il flusso di sangue attraverso l'arteria di un paziente, allo scopo di determinare l'eventuale ostruzione dell'arteria. Ci sono innumerevoli altri esempi. Noi inizieremo con il moto rettilineo, per poi studiare il moto di un corpo in due dimensioni.

2.3 Moto rettilineo

Definizione (traiettoria)

luogo geometrico dei punti occupati dal punto materiale in movimento.

Il moto rettilineo si svolge su una traiettoria rettilinea. Il punto si muove dunque lungo una retta, su cui vengono arbitrariamente fissati origine e verso, e il moto di questo è descrivibile tramite la sola coordinata $x = x(t)$ (moto a una dimensione). attraverso lo studio delle *variazioni* della posizione del punto nel tempo è possibile definire la velocità del punto; mentre una variazione di velocità nel tempo fa acquisire al punto un'accelerazione.

2.3.1 Velocità

Definizione (velocità media)

Si definisce *velocità media* il rapporto tra lo spostamento e l'intervallo di tempo in cui esso si verifica:

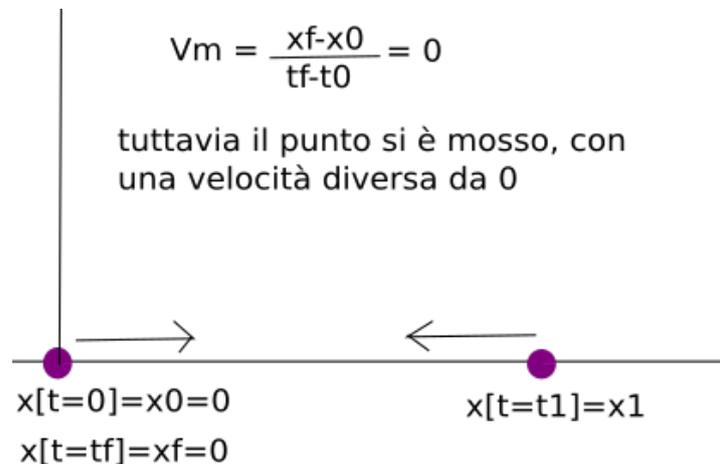
$$v_m(t_1, t_2) = \frac{\Delta x_{12}}{\Delta t_{12}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Questo dato è però insufficiente a descrivere il moto di un punto:



Esempio

Un punto che parte dalla posizione x_0 con velocità v e nella posizione x_1 inverte il verso del moto per poi fermarsi in x_0 , ha $\langle v \rangle = 0$ poiché posizione iniziale e finale coincidono.



Per definire le caratteristiche effettive del moto è quindi necessario ridurre l'intervallo di tempo considerato, facendolo tendere a zero. Si calcola cioè la *derivata dello spazio in funzione del tempo*

Definizione (velocità istantanea)

Si definisce *velocità istantanea* il seguente limite:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m(t, t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}.$$

Nota la velocità istantanea, si può ricavare la funzione $x(t)$ (**legge oraria** o **equazione del moto**) attraverso l'operazione inversa della derivazione, *l'integrazione*.

Se la velocità non è costante ma varia nel tempo, il punto possiede un'accelerazione.

2.3.2 Accelerazione

Definizione (accelerazione media)

Si definisce come accelerazione media il rapporto tra la variazione di velocità in un intervallo di tempo e l'intervallo di tempo stesso:

$$a_m(v_1, v_2) = \frac{\Delta v_{12}}{\Delta t_{12}}.$$



anche in questo caso l'accelerazione media non è sufficiente a descrivere accuratamente il moto, pertanto è opportuno calcolare tale variazione in un intervallo di tempo tendente a zero.

Definizione (accelerazione istantanea)

Si definisce come accelerazione istantanea la quantità:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} .$$

2.3.3 Velocità e accelerazione a “confronto”

	v	a
0	quiete	moto uniforme
costante	moto uniforme	moto uniformemente accelerato
+	il punto si muove nello stesso verso dell'asse	la velocità cresce
-	il punto si muove nel verso opposto dell'asse	la velocità decresce

Posso correlare tra loro spostamento, velocità iniziale, velocità finale e accelerazione tramite il seguente procedimento:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} & a &= \frac{dv}{dx} v & a \cdot dx &= dv \cdot v \\ \int_{x_0}^x a dx &= \int_{v_0}^v v dv & \int_{x_0}^x a dx &= \left[\frac{v^2}{2} \right]_{v_0}^v \\ \int_{x_0}^x a dx &= \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} & 2 \int_{x_0}^x a dx &= v^2 - v_0^2 \end{aligned}$$

Se a è costante (moto rettilineo uniformemente accelerato) si ha $a_0 = a(x)$, quindi:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$$

2.3.4 Tipi di moto

Moto rettilineo uniforme

Con $v_0 = \langle v \rangle = v(t)$, cioè con velocità costante.

In questo caso la **Legge oraria** è:

$$\begin{aligned} v &= v_0 ; & \frac{dX}{dt} &= v_0 ; & dx &= v_0 \cdot dt ; \\ \int_{x_0}^{x_t} dx &= \int_0^t v_0 dt ; & \int_{x_0}^{x_t} dX &= v_0 \int_0^t dt ; \\ [x]_{x_0}^{x(t)} &= v_0 [t]_0^t ; & x(t) - x_0 &= v_0(t - 0) ; \\ && \Rightarrow x(t) &= x_0 + v_0 \cdot t \end{aligned}$$



Moto uniformemente accelerato

Se l'accelerazione è costante ($\langle a \rangle = a(t)$), il moto è detto **uniformemente accelerato**.

l'equazione di tale moto è ricavabile attraverso una doppia integrazione dell'accelerazione istantanea: **Legge oraria**

$$\begin{aligned}
 a_0 &= a & a_0 &= \frac{dv}{dt} & dv &= a_0 \cdot dt \\
 \int_{v_0}^{v(t)} dv &= \int_0^t a_0 dt & \int_{v_0}^{v(t)} dv &= a_0 \int_0^t dt \\
 [v]_{v_0}^{v(t)} &= a_0 [t]_0^t & v(t) - v_0 &= a_0 \cdot (t - 0) \\
 v(t) &= v_0 + a_0 \cdot t \\
 v(t) &= \frac{dx}{dt} & v_0 + a_0 \cdot t &= \frac{dx}{dt} & dx &= (v_0 + a_0 \cdot t) dt \\
 \int_{x_0}^{x(t)} dx &= \int_0^t (v_0 + a_0 \cdot t) dt & \int_{x_0}^{x(t)} dx &= v_0 \int_0^t dt + a_0 \int_0^t t \cdot dt \\
 [x]_{x_0}^{x(t)} &= v_0 [t]_0^t + a_0 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^t \\
 x(t) - x_0 &= v_0 \cdot t + a_0 \frac{t^2}{2} \\
 \Rightarrow x(t) &= x_0 + v_0 \cdot t + a_0 \frac{t^2}{2}
 \end{aligned}$$

Moto di un grave in 1 dimensione

$$|\vec{a}| = 9,8 \frac{m}{s^2} = g$$

Lascio cadere un corpo dall'altezza h (trascurando la resistenza dell'aria):

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Si considerino $y_0 = h$ in cui h è l'altezza da cui si lascia cadere il corpo, $v_0 = 0$ e $a = g$. Si ottiene in tal modo:

$$y = h - \frac{g}{2} t^2$$

Per ricavare il tempo d'impatto t_i pongo $y = 0$:

$$y = 0 \quad h - \frac{g}{2} t^2 = 0 \quad t^2 = \frac{2h}{g}$$

$$t_i = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$



Per ricavare la velocità d'impatto v_i pongo $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ nell'equazione $v = v_0 + a_0 t$. Considero inoltre $v_0 = 0$ e $a = g$:

$$v = -gt = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2hg}.$$

Moto in 1 dimensione con attrito viscoso

Nel moto in 1-D con attrito viscoso agisce una forza $k > 0$ che frena il moto, causando una diminuzione dell'accelerazione a che quindi è direttamente proporzionale alla costante $-k$: più è grande k , più sarà frenato il moto.

$$a = -kv \quad k > 0$$

Sapendo anche che $a = \frac{dv}{dt}$, si può dedurre la seguente equazione:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -kv & \frac{dv}{v} &= -k dt \\ \int_{v_0}^{v(t)} \frac{1}{v} dv &= -k \int_0^t dt & [\ln v]_{v_0}^{v(t)} &= -k[t]_0^t \\ \ln v(t) - \ln v_0 &= -k(t - 0) & \ln \frac{v(t)}{v_0} &= -kt \\ e^{\ln \frac{v(t)}{v_0}} &= e^{-kt} & \frac{v(t)}{v_0} &= e^{-kt} \\ v(t) &= e^{-kt} \cdot v_0 \end{aligned}$$

Diagramma orario della funzione $v(t) : e^{-kt} = \frac{1}{e^{kt}}$, quindi $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{kt}} = 0$. Posso dedurre da ciò che il grafico della funzione $v(t)$ è una curva esponenziale, con $v(t)$ che tende a 0 al tendere di t all'infinito.

La velocità a un tempo $t = \tau = \frac{1}{k}$ è:

$$v(\tau) = \frac{1}{e^{\frac{1}{k}k}} \cdot v_0 \simeq \frac{1}{2,7} v_0$$

Quindi $v(\tau)$ è pari a circa $\frac{1}{3}$ della velocità iniziale v_0

Legge oraria: Sapendo che $v(t) = \frac{dx}{dt}$, si ricava che:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_0 e^{-kt} & dx &= v_0 e^{-kt} dt \\ \int_0^{x(t)} dx &= \int_0^t v_0 \cdot \frac{1}{e^{kt}} dt \\ x(t) &= v_0 \cdot (1 - e^{-kt}) \end{aligned}$$



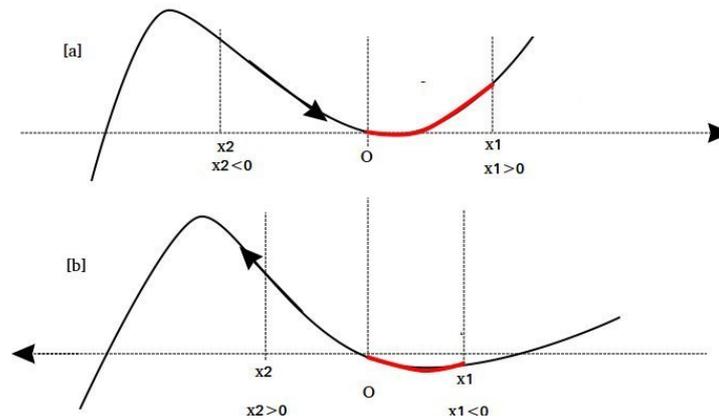
2.4 Moto circolare

2.4.1 Moto generico in due dimensioni

Considerata una traiettoria curvilinea su cui viene fissata arbitrariamente un'origine O e il verso di percorrenza:

Definizione (Ascissa curvilinea (1))

Si definisce *ascissa curvilinea* la lunghezza del tratto di curva che congiunge x_1 ad O . Se x_1 si trova verso x positive secondo il verso di percorrenza stabilito l'ascissa curvilinea x_1O o Ox_1 è positiva, se x_1 si trova verso x negative l'ascissa curvilinea è negativa. La velocità del punto definisce la concordanza tra il verso fissato e il verso di percorrenza della curva: velocità positive sono quelle che fanno muovere il punto secondo il verso fissato, negative quelle che lo fanno muovere nel verso opposto



La **velocità media**

$$V_m(t_1, t_2) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

è rappresentata dal vettore che ha stessa direzione del segmento x_1x_2 e verso coincidente con quello del moto. Si può quindi notare come, ancor meno che nel moto a una dimensione, la velocità media dia informazioni poco dettagliate riguardo al moto del punto.

Applicando l'operazione di limite si ottiene la **velocità istantanea**

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_m(t, t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{dX}{dt}$$

il cui vettore è tangente alla traiettoria nella posizione x_1 in cui si trova il punto nell'istante t considerando.



Derivando una seconda volta si ottiene l'accelerazione istantanea

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

il cui vettore è parallelo al raggio di curvatura in x_1 , dunque perpendicolare al vettore $v(t)$.

2.4.2 Scomposizione generica del moto in 3 dimensioni

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ sono versori, e sono quindi costanti in tutto lo spazio. $\vec{x}(t)$ è il versore posizione. Scomponendolo sui tre assi x , y e z si ottiene:

$$\vec{x}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j} + z(t) \cdot \hat{k}$$

Ricavo, a partire dalla scomposizione di $\vec{x}(t)$, la scomposizione sui tre assi del vettore velocità $\vec{v}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k}$$

Sapendo inoltre che

$$\vec{v}(t) = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

Deduco la seguente uguaglianza

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Si può inoltre ricavare la scomposizione sui tre assi del vettore accelerazione $\vec{a}(t)$:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k}$$

Analogamente a quanto mostrato nel paragrafo sovrastante riguardante la velocità, dimostro che dato che

$$\vec{a}(t) = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

allora si deduce che

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$



2.4.3 Moto circolare

Definizione (Moto circolare)

Si definisce *moto circolare* il caso particolare di moto curvilineo che abbia traiettoria circolare di centro O e raggio R

Definizione (Coordinata curvilinea)

Si definisce *coordinata curvilinea* (e si indica con s) la lunghezza orientata dell'arco

- **Legge oraria:**

$$\theta = \theta(t)$$

Se il moto è circolare uniforme, la velocità angolare è costante: $\omega = \omega_0$, quindi si ha che:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0; \quad d\theta = \omega_0 dt;$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\theta = \int_{t_0}^t \omega_0 dt;$$

$$[\theta]_{\theta_0}^{\theta(t)} = \omega_0 [t]_{t_0}^t; \quad \theta(t) - \theta_0 = \omega_0 t - \omega_0 t_0;$$

Dato che $t_0 = 0s$, $\omega_0 t_0 = 0$, perciò:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t$$

ponendo $\theta_0 = 0_{\text{rad}}$,

$$\theta = \omega t$$

- **Scomposizione del moto:** Applicando quanto appreso nel caso generale del moto curvilineo in due dimensioni sulle componenti dei vettori $\mathbf{v}(\mathbf{t})$ e $\mathbf{a}(\mathbf{t})$ a quello specifico del moto circolare, ottengo:

$$\begin{cases} x(t) = r \cos \theta = r \cos(\omega t) \\ y(t) = r \sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_x(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega r \sin(\omega t) \\ V_y(t) = \omega r \cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dV_x}{dt} = -\omega^2 r \cos(\omega t) \\ a_y(t) = \frac{dV_y}{dt} = -\omega^2 r \sin(\omega t) \end{cases}$$

dove a è detta *accelerazione centripeta*



Definizione (Accelerazione centripeta)

accelerazione che causa il curvamento della traiettoria, senza modificare il modulo della velocità angolare ω

→ Per questo si parla di moto *uniforme* nonostante sia presente un'accelerazione!

• **legame tra v, ω, a**

$$\theta = \frac{S}{R}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{R}$$

Dato che $V = \frac{dS}{dt}$ si può dedurre che

$$\omega = \frac{1}{R} \cdot \frac{dS}{dt}$$

.

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(\omega^2 R \cos(\omega t))^2 + (\omega^2 R \sin(\omega t))^2} = \omega^2 R \sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)}$$

Dato che $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ si deduce che $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$ e dunque

$$|\bar{a}| = \omega^2 R \cdot 1 = \omega^2 R$$

Tenendo inoltre conto del fatto che $\omega = \frac{V}{R}$, si può ricavare l'accelerazione in funzione della velocità istantanea

$$a_c = \frac{V^2}{R}$$

2.5 Moto armonico

Proiettando il moto circolare uniforme sugli assi cartesiani, è evidente come questo risulti essere la composizione di due moti armonici semplici. La legge oraria di questo particolare *moto vario* è: *[1]

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

dove:

A = ampiezza

ω = pulsazione

$\omega t + \phi$ = fase del moto

ϕ = fase iniziale

Essendo il moto descritto dalla funzione coseno o seno, ha delle caratteristiche spaziali ben precise:

1. Il coseno è una funzione limitata superiormente e inferiormente, dunque assume dei valori estremi (± 1). Un punto che si muove di moto armonico quindi **oscilla tra due posizioni limite** corrispondenti a $\pm A$



2. La funzione coseno inoltre è periodica, pertanto anche il moto armonico è **un moto periodico**, e cioè:

Definizione (moto periodico)

il moto di un punto si dice periodico quando ad intervalli di tempo regolari il punto ripassa nella stessa posizione con la stessa velocità.

Per calcolare il periodo di un moto armonico, ovvero il tempo dopo cui il moto si ripete, basta ricordare che il periodo di $\sin x$ è 2π e sfruttare la definizione:

si considerino due istanti, t e $t' = t + T$, con T periodo del moto. Per definizione di moto periodico la posizione del punto in t è uguale alla posizione t' , per cui $x(t) = x(t')$. Essendo il periodo di $\cos \theta$ 2π , deve valere $\omega t + \phi = \omega t' + \phi + 2\pi$, quindi $\omega(t - t') = 2\pi$

Ecco quindi il **periodo**

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

L'inverso del periodo si definisce **frequenza**

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

La frequenza si misura come $[\nu] = [T^{-1}]$ ovvero $\frac{1}{s} = 1Hz = \frac{1\text{ciclo}}{s}$

Periodo e frequenza sono indipendenti dall'ampiezza e dalla fase iniziale, dipendono invece dalla pulsazione ω . In particolare possiamo fare le seguenti considerazioni: più la pulsazione è grande, più il moto è lento (T grande e ν piccolo), più la pulsazione è piccola, più il moto è veloce (T piccolo e ν grande)

Velocità e Accelerazione si ricavano per derivazione dalla legge oraria:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

Da qui si ricava che l'accelerazione è proporzionale allo spostamento con segno negativo:

$$a = -\omega^2 x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{equazione del moto armonico}$$

Questa, definita **equazione del moto armonico**, è la *condizione necessaria e sufficiente affinché un moto sia armonico*. Soffermiamoci sul significato di questa affermazione. Se nello studio di un moto si trova un'accelerazione proporzionale allo spostamento con segno negativo e costante di proporzionalità C , si può immediatamente dedurre che la legge oraria del moto sarà quella di un moto armonico $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, con pulsazione $\omega = \sqrt{C}$. Un ottimo esempio è



costituito dal moto di un corpo sottoposto ad una **forza elastica**. Viceversa se si conosce l'equazione di un moto ed essa rappresenta un moto armonico si può dire che l'accelerazione a cui il corpo è sottoposto è della forma $a = -\omega^2 x$.

Sovrapponendo i grafici di posizione, velocità e accelerazione, è possibile notare come questi differiscano tra loro solo per una differenza di fase:

- Posizione e velocità sono in quadratura di fase (cioè sfasate di $T/4$ quindi di $\pi/2$)
- Posizione e accelerazione in opposizione di fase (cioè sfasate di $T/2$ e quindi di π)

A e ϕ sono costanti, e una volta note permettono di calcolare le condizioni iniziali ($t=0$):

$$\begin{cases} x_0 = A \sin \Phi \\ v_0 = \omega A \cos \Phi \end{cases}$$

Viceversa tali costanti possono essere ricavate conoscendo le condizioni iniziali x_0 e v_0

- [1] è analogo esprimere il moto tramite un $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ o $x(t) = A \cos(\omega t + \phi')$. Infatti usando gli archi associati $\sin(\phi) = \cos(\frac{\pi}{2} - \phi)$ e basta porre $\phi' = \frac{\pi}{2} - \phi$ per avere perfetta equivalenza. Le due funzioni differiscono solo per la fase iniziale.

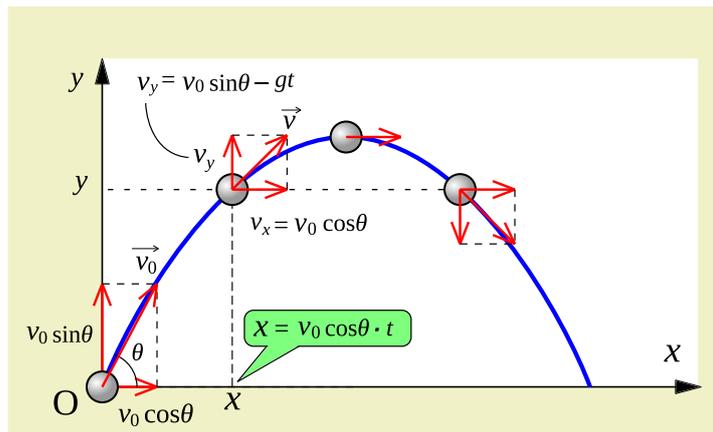
2.6 Moto parabolico dei corpi

Il moto parabolico è un moto bidimensionale combinazione di due moti rettilinei simultanei ed indipendenti (non si influenzano), uno rettilineo uniforme ed uno uniformemente accelerato.

Moto di un proiettile lanciato con velocità V_0 e angolo θ all'origine.

In questo caso il proiettile subisce accelerazione costante lungo l'asse y per effetto della forza di gravità, mentre sull'asse x il moto è uniforme in quanto non agiscono forze e non vi è accelerazione. Vediamo dunque che si tratta di un esempio di moto parabolico.





Condizioni iniziali

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{0x} = V_0 \cos \theta \\ V_{0y} = V_0 \sin \theta \end{cases}$$

Scomposizione del moto

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + V_{0x}t \\ y(t) = V_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = V_0 \cos \theta \cdot t & [1] \\ y(t) = V_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 & [2] \end{cases}$$

Traiettoria

Ricavo t dalla [1] e lo sostituisco nella [2] per avere $y(x)$:

$$t = \frac{x}{V_0 \cos \theta};$$

$$y(x) = V_0 \sin \theta \frac{x}{V_0 \cos \theta} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2 \theta};$$

$$y(x) = \tan \theta x - \frac{g}{2 V_0^2 \cos^2 \theta} x^2$$

Gittata

Pongo $y(x) = 0$ per ricavare lo spazio totale percorso orizzontalmente (e, dunque, la gittata):



$$\tan \theta x - \frac{g}{2} \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2 \theta} = 0;$$

$$\frac{V_0 \sin \theta x}{V_0 \cos \theta} - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \theta} = 0$$

$$\frac{2 \sin \theta \cos \theta V_0^2 x - gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \theta}$$

Dato che $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$:

$$x(V_0^2 \sin 2\theta - gx) = 0;$$

per la legge di annullamento del prodotto, ricavo:

$$x = 0$$

che è la posizione del punto di lancio, e

$$x = \frac{\sin 2\theta \cdot V_0^2}{g}$$

che rappresenta la gittata.

Quota massima

Per ricavare la massima quota y_{max} sostituisco t_{imp} nella [2]:

$$y_{max} = \frac{V_{0y}^2}{2g} = \frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

2.7 Primo e secondo principio della dinamica

Se la cinematica ha il compito di descrivere il moto, senza preoccuparsi delle cause che lo determinano, la dinamica si occupa invece di quest'ultimo problema. Vogliamo rispondere cioè a domande del genere: perché avviene il moto? Perché un corpo ha un certo moto piuttosto che un altro?

Il primo scienziato moderno a occuparsi di queste questioni fu Galileo, che fece i suoi esperimenti con un piano inclinato. Una biglia lanciata in salita diminuiva progressivamente la sua velocità, mentre per una discesa la velocità aumentava. E tali accelerazioni o decelerazioni erano tanto maggiori o minori a seconda dell'inclinazione del piano. Allora formulò la seguente ipotesi: in assenza di inclinazione la velocità della biglia rimane costante, cioè essa si muove indefinitamente di moto rettilineo uniforme. Questo è ovviamente un esperimento mentale, perché servirebbe infatti un piano infinito per verificare che la biglia prosegue il suo moto rettilineo uniforme all'infinito. Usando però un piano liscio e abbastanza lungo, la condizione descritta può essere riprodotta con buona approssimazione, per un breve periodo di tempo. Galileo capì proprio questo: se potessimo togliere l'attrito



della biglia con l'aria e con il piano, il corpo non si fermerebbe mai. Se un corpo si ferma è perché agisce una forza esterna. Questo concetto costituisce il primo principio della dinamica, detto *principio di inerzia* o *prima legge di Newton*. Esso afferma quanto segue:

Un corpo non soggetto a forze mantiene indefinitamente il suo stato di moto rettilineo uniforme.

E' importante osservare che lo stato di quiete (un corpo fermo) è un caso particolare di moto rettilineo uniforme con velocità nulla.

Ora, cos'è esattamente una forza? Una forza può essere una spinta, una trazione, ma non solo. Vedremo più avanti altri esempi. Diciamo però subito che una forza è una grandezza vettoriale, cioè ha un modulo, una direzione e un verso. D'altra parte questo sembra molto naturale. Possiamo infatti lanciare una pallina verticalmente verso l'alto o orizzontalmente in avanti. Il moto risultante dipende quindi dalla direzione della forza impressa alla pallina.

Torniamo ora al primo principio. Esso è in qualche modo contro-intuitivo, descrive una condizione ideale, quella di un corpo non soggetto a forze. Questo, come è noto dall'esperienza di tutti i giorni, non accade mai. In questo stesso momento siamo sottoposti alla forza di gravità, per esempio. Se siamo in macchina e affrontiamo una curva ci sentiremo tirare verso l'esterno della stessa. Il mondo è in definitiva dominato da forze esterne, dagli attriti ecc. Come possiamo dunque conciliare un qualcosa di ideale con qualcosa di reale e tangibile? Il problema si risolve considerando l'effetto complessivo delle forze. Possiamo allora formulare il primo principio della dinamica nel modo seguente:

Se la risultante delle forze agenti su un corpo è nulla, il corpo si muove di moto rettilineo uniforme.

Al fine di dare una definizione operativa di forza, supponiamo di svolgere il seguente esperimento. Attacciamo un oggetto a una molla e tiriamo allungando la molla. Il corpo, inizialmente fermo, si muove. Misuriamo quindi un'accelerazione a_0 . Attacciamo un secondo oggetto di dimensioni diverse dal primo e tiriamo con la stessa forza: registreremo un'altra accelerazione a_1 .

Il rapporto delle accelerazioni sarà:

$$\frac{a_0}{a_1}$$

Se produco un allungamento maggiore, cioè se tiro con più forza e misuro le due accelerazioni a'_0 e a'_1 , il rapporto sarà uguale a quello precedente, cioè:

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a'_0}{a'_1}$$

Deve esistere allora una proprietà intrinseca dei corpi, che chiamiamo massa. Scegliendo come massa campione m_0 la massa, pari a 1 kg, di un cilindro di platino iridio conservato all'Ufficio di Pesi e Misure di Sevres, vicino a Parigi, possiamo definire la massa di un corpo qualsiasi come:

$$m = m_0 \frac{a_0}{a}$$



E questa è la nostra definizione operativa di massa. Definiamo ora come forza unitaria F la forza necessaria per accelerare di 1 m/s^2 il corpo campione di massa 1 kg . Dalla relazione precedente possiamo ricavare una legge generale

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Questa è la *seconda legge di Newton* o *seconda legge della dinamica*. E' importantissima perché ci permette di dare una descrizione dinamica di qualsiasi moto. Una forza è quindi la grandezza che esprime e misura l'interazione tra sistemi fisici, cioè tra due o più corpi, o tra un corpo e l'ambiente.

Se una forza agisce su un punto materiale, tale forza sarà uguale in modulo al prodotto della variazione di velocità, cioè accelerazione del punto, per la sua *massa inerziale*. Usiamo il termine massa inerziale perché la massa esprime l'inerzia del punto, cioè la sua resistenza a a variare il proprio stato di moto. A parità di forza applicata un corpo di massa maggiore accelera di meno di un corpo di massa minore.

Se dunque possiamo trascurare le dimensioni di un corpo e considerarlo un punto, non possiamo tuttavia privarlo della sua massa. Una semplice formula esprime così un concetto molto importante: le forze producono accelerazioni. L'unità di misura della forza è il *Newton*, abbreviato con la lettera N .

In Fisica ci sono quattro forze fondamentali: la forza gravitazionale, esercitata tra corpi dotati di massa, la forza elettromagnetica, esercitata tra corpi carichi elettricamente, la forza debole e la forza forte, agenti su scala subatomica e responsabili per esempio della radioattività e della stabilità del nucleo atomico. La meccanica classica si occupa della forza gravitazionale e di leggi di forza empiriche come forza d'attrito, forza elastica, tensione di fili ecc (che in ultima analisi dipendono da forze elettriche).

Se su un punto materiale agiscono più forze, per conoscerne l'effetto complessivo dovremo sommarle vettorialmente, quindi la seconda legge di Newton diventa:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Se la risultante delle forze è nulla, anche l'accelerazione è nulla e il corpo o è in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme. Abbiamo così ritrovato il primo principio della dinamica.

Viene ora spontaneo chiedersi quali sono i limiti di validità di questa legge sperimentale.

Essa è valida nei cosiddetti sistemi di riferimento inerziali, cioè quelli che si muovono di moto rettilineo uniforme rispetto a un punto fisso. Nei sistemi accelerati, detti non inerziali, la legge subirà delle correzioni. In un tale sistema di riferimento, infatti, un osservatore noterà delle forze a cui non saprà associare un origine. Esse vengono appunto chiamate forze apparenti.

In realtà non esiste un vero e proprio sistema di riferimento inerziale, in quanto l'universo stesso è in una condizione di espansione accelerata. Però possiamo considerare con ottima approssimazione un sistema solidale con le stelle fisse, cioè



quei corpi celesti posti ad una distanza talmente elevata dalla Terra da sembrare immobili.

La legge di Newton è valida inoltre per corpi che si muovono a velocità molto inferiori a quelle della luce nel vuoto. Se vogliamo studiare fenomeni riguardo quest'ultimo aspetto, dovremo abbandonare la meccanica classica e far riferimento alla teoria della relatività speciale.

2.8 Forza peso e forze vincolari

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto il concetto di forza e abbiamo visto come essa causi un cambiamento del moto di un corpo. Iniziamo ora a parlare di due forze fondamentali, forze che sperimentiamo ogni giorno della nostra vita: la forza peso e la forza vincolare. Partiamo da un'esperienza comune: prendiamo una pallina e teniamola in mano. A un certo punto apriamo la mano: la pallina cade. Come intuì Galileo, il moto della pallina è uniformemente accelerato. Ma se c'è un'accelerazione c'è anche una forza che causa tale accelerazione. Nel nostro caso è la forza di gravità della Terra. La Terra attrae verso il suo centro tutti i corpi sulla e in prossimità della sua superficie. Il peso di una persona non è altro che la forza con cui la Terra la attrae. Si parla per questo di forza peso, e si dice che su un corpo agisce la sua forza peso. Per un corpo di massa m il suo peso vale:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

dove g è l'accelerazione di gravità. Se su un corpo agisce solo il suo peso, si dice che il corpo è in caduta libera. Nell'usare questa equazione in fenomeni fisici locali, cioè quei fenomeni che si svolgono su brevi distanze (una strada, una stanza, un tavolo ecc...) faremo le seguenti assunzioni:

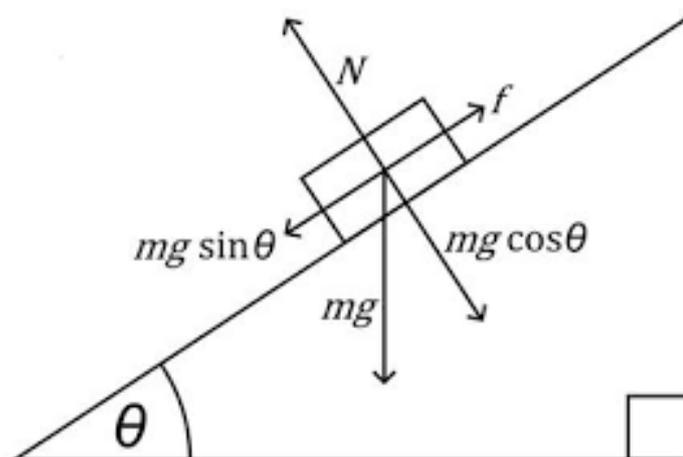
- useremo per g il suo valore medio, $9,8 \text{ m/s}^2$;
- la direzione della forza peso sarà sempre verticale, ovvero per noi la Terra sarà a tutti gli effetti piatta.

Ora raccogliamo la pallina caduta e mettiamola sul tavolo. Notiamo che rimane ferma. Dobbiamo allora concludere, in virtù del secondo principio della dinamica, che sulla pallina agisce un'altra forza, oltre al suo peso. In generale, quando un corpo preme contro una superficie, quest'ultima, anche se rigida, si deforma seppur lievemente e preme sul corpo con una forza detta normale, in quanto perpendicolare alla superficie di contatto.

Non esiste un'espressione generale per la forza normale: a seconda della particolare situazione fisica avrà un certo valore. Nel caso del tavolo orizzontale la normale ha lo stesso modulo della forza peso ma verso opposto. Supponiamo però di avere un corpo fermo su un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Adottiamo un sistema di riferimento con assi x, y , uno in direzione perpendicolare al piano e l'altro parallelo a quest'ultimo. In direzione perpendicolare al piano agiscono due forze: la componente della forza peso diretta in questa direzione e la normale. Poiché il corpo è fermo, le due forze devono essere uguali in modulo, quindi la forza normale in questa situazione vale (vedi figura):



$$\vec{N} = m\vec{g} \cos \theta$$



Quando ci pesiamo su una bilancia, la bilancia non misura il nostro peso, ma la forza normale. Se salissimo su un ascensore che accelera verso l'alto, la bilancia segnerebbe un valore più alto. Aumenta infatti la forza normale, mentre la forza peso è sempre la stessa.

Dunque se siamo fermi in piedi sul pavimento, o seduti da qualche parte, su di noi agiscono solo due forze: la forza peso e la forza normale esercitata dalla superficie su cui ci troviamo. In realtà ciò è vero solo se consideriamo la Terra come un sistema di riferimento inerziale. Essa infatti ruota su sè stessa e come abbiamo visto nel relativo capitolo, un moto circolare uniforme è un moto accelerato. La Terra non è quindi un sistema di riferimento inerziale. Di conseguenza ogni corpo sulla sua superficie è soggetto a una forza apparente, detta forza centrifuga. Tuttavia il contributo di questa forza è completamente trascurabile (solo all'Equatore si sente di più: ci fa sentire un po' più leggeri) e quindi, quando consideriamo situazioni fisiche locali, che riguardano corpi che si muovono per brevi distanze, ha senso considerare la Terra come se fosse ferma.

Continuiamo ora con l'analisi delle forze. La forza normale è solo un esempio di *forza vincolare*. Ogni volta che esiste un vincolo che impedisce il moto di un corpo in una data direzione, esiste una forza esercitata dal vincolo stesso sul corpo. Nel caso della pallina ferma sul tavolo, il vincolo è costituito appunto dal tavolo.

Vediamo ora un altro esempio di forza vincolare. Prendiamo un filo, attacchiamo un'estremità al soffitto, e all'estremità libera attacchiamo una massa. Poiché la massa è ferma, oltre alla forza peso agisce un'altra forza. Essendo la massa a contatto solo con il filo, tale forza è esercitata dal filo stesso ed è chiamata tensione. Più in generale, ogni volta che una corda o una fune è attaccata a un corpo ed è tirata, essa tira il corpo con una forza \vec{T} , diretta lungo la corda e in verso concorde al moto del corpo.

Nella maggior parte dei casi possiamo fare le seguenti due assunzioni: la corda è inestensibile e ha massa trascurabile. Il fatto che la corda sia inestensibile ci dice



che, se due corpi sono legati dalla stessa corda, le loro accelerazioni sono uguali. Cosa comporta il fatto che la massa sia trascurabile? Che il filo sviluppa alle sue estremità due forze uguali e contrarie, pari alla tensione. Vediamo perché.

Ogni pezzetto di filo è tirato da una parte e dall'altra da tutti gli altri pezzi di filo. In particolare, su ogni estremità libera del filo agisce una forza esterna. Queste forze esterne devono essere uguali alla tensione del filo. Infatti, se la massa è nulla, allora la risultante delle forze deve essere nulla, altrimenti per $F=ma$ il filo avrebbe un'accelerazione infinita. Quindi la tensione è la stessa in tutto il filo, e se il filo collega due corpi tirerà entrambi con la stessa forza di modulo pari alla tensione.

Concludiamo con qualche osservazione. Se la forza normale agente su un corpo diminuisce fino a diventare nulla, significa che il corpo e la superficie si toccano ma la superficie non esercita nessuna forza. Se la forza normale diventa negativa, allora il corpo si stacca dalla superficie. E' questo il caso, per esempio, di un corpo che percorre il giro della morte. Se la sua velocità iniziale non è sufficientemente alta, il corpo nel punto più alto si stacca. Ancora, se la tensione diventa negativa, significa che la corda non è più tesa e il corpo si stacca della corda.

2.9 Terzo principio della dinamica

Può capitare che a volte, durante uno scatto di rabbia, battiamo un pugno contro un tavolo. E' evidente che se il pugno è forte sentiremo un po' di dolore. Cos'è successo di preciso? Noi abbiamo applicato una forza al tavolo, e il tavolo ha esercitato sul nostro pugno una forza di uguale intensità, ma in verso opposto alla nostra. E' come se fossimo rimasti fermi e qualcuno ci avesse pestato la mano.

Più in generale, quando due corpi si spingono o si tirano, si dice che interagiscono, cioè ciascun corpo sperimenta la forza esercitata dall'altro. Questo è quanto afferma la *terza legge di Newton*, anche nota come principio di azione e reazione:

Se un corpo A esercita una forza sul corpo B, il corpo B contemporaneamente esercita una forza su A uguale in modulo e direzione, ma opposta in verso. Cioè

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$$

Le due forze hanno inoltre la stessa retta d'azione.

Vediamo un esempio. Una formica di massa m è attratta dalla Terra con una forza $\vec{F} = m\vec{g}$. Per la terza legge di Newton, la Terra è attratta dalla formica con una forza $\vec{F} = -m\vec{g}$. Ovviamente, data l'enorme massa della Terra, l'accelerazione subita dal nostro pianeta è a tutti gli effetti uguale a zero.

A questo punto non bisogna confondere la terza legge della dinamica con la seconda legge. Se un libro è posato su un tavolo, la forza normale del tavolo non è la reazione al peso. Infatti, come detto prima, se la Terra esercita una forza verso il basso sul libro (il suo peso), allora il libro esercita una forza verso l'alto sulla Terra, e questa è la forza di reazione. Il motivo per cui la normale è uguale al peso del libro segue dal fatto che la sua accelerazione è nulla, il che richiede che le forze siano uguali e opposte (secondo principio).



La terza legge di Newton spiega perché possiamo camminare. Quando facciamo un passo in avanti, la nostra gamba spinge il pavimento all'indietro, il quale ci spinge in avanti con la stessa forza, permettendoci quindi di camminare. O ancora, immaginiamo di essere su una barca a remi e di voler seguire il corso di un fiume. Se non c'è corrente, per spostarci dobbiamo necessariamente remare. A ogni remata i remi spingono l'acqua all'indietro, cioè si esercita una forza sull'acqua. Per la terza legge di Newton, si esercita una forza anche sulla barca, che ci permette proprio di spostarci in avanti.

2.10 Forza elastica

Se comprimiamo una molla, un pallone, allungiamo un elastico, avvertiamo una forza che tende ad annullare la deformazione del corpo e a riportarlo nello stato iniziale. Questa forza, esercitata dal corpo stesso, è detta *forza elastica*.

Per studiare gli effetti di questa forza consideriamo una molla, di lunghezza l_0 . Fissiamo un estremo della molla a un gancio e applichiamo una forza all'estremo libero, allungando la molla, che avrà ora una lunghezza l . Poiché la molla è ferma, ci deve essere una forza uguale e opposta alla forza esterna applicata. Questa forza, esercitata dalla molla stessa, è proporzionale alla deformazione $\Delta l = x$ subito. Infatti, allungando la molla ancora di più, dovremo applicare una forza maggiore per tenerla ferma. Se la forza agisce lungo un asse orizzontale x , con l'origine in corrispondenza dell'estremità libera della molla a riposo e con verso positivo nel verso di allungamento, si ha:

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

Questa equazione è nota come *legge di Hooke*. La costante di proporzionalità k è detta costante elastica della molla, ed è una misura della durezza di una molla. Più grande è k , più è difficile deformare la molla.

Il segno meno della forza è dovuto al fatto che il suo verso è sempre opposto a quello dello spostamento dell'estremo libero. Infatti

- se allunghiamo la molla, lo spostamento è positivo, ma la forza elastica è diretta nel verso opposto al verso scelto come positivo, quindi avrà un segno meno.
- se comprimiamo la molla, la forza elastica sarà positiva, ma lo spostamento è negativo, quindi anche in questo caso i due vettori avranno segno opposto.

Tali considerazioni sono indipendenti dal verso positivo che scegliamo per il sistema di riferimento. La forza elastica è dunque una forza di richiamo, perché tende a riportare la molla alla condizione iniziale.

Supponiamo ora di attaccare un punto materiale di massa m all'estremità di libera della molla. Se la molla viene deformata e poi rilasciata, oscillerà avanti e indietro. Trascurando gli attriti il moto del punto sarà armonico semplice. L'accelerazione è data da:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

La soluzione di questa equazione differenziale ci fornisce la legge oraria del moto:



$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

dove A e φ sono determinate dalle condizioni iniziali $x(0)$ e $v(0)$. Per esempio, se $\varphi = \pm\pi/2$, cioè prendendo come posizione iniziale per il punto la posizione che occupa durante la massima deformazione, l'equazione del moto diventa $x(t) = \pm A \cos \omega t$. E se la massa viene rilasciata con velocità nulla l'ampiezza delle oscillazioni è uguale alla deformazione.

La pulsazione e il periodo del moto sono dati rispettivamente da:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Infine facciamo due osservazioni.

La legge di Hooke ha un limite di validità. Se la molla viene allungata troppo si osserva sperimentalmente che essa perde la sua elasticità, acquisendo una deformazione permanente. Da questo punto in poi il suo comportamento non potrà più essere descritto da questa equazione.

E' poi importante notare che se la molla ha massa trascurabile, eserciterà ai sui estremi forze uguali in modulo e opposte in direzione. Per esempio, se attacchiamo una massa all'estremità di una molla, mentre all'estremo libero la tiriamo verso l'alto, la molla eserciterà due forze: una applicata alla nostra mano, diretta verso il basso, e una applicata alla massa, diretta verso l'alto. Questo perché la massa della molla è zero, quindi la risultante delle forze agenti sulla molla (forza della massa e forza della mano, applicate agli estremi della molla) deve essere zero, altrimenti la molla avrebbe un'accelerazione infinita.

2.11 Forza centripeta

Abbiamo visto che il moto di un punto materiale che percorre una traiettoria circolare è accelerato, in quanto la direzione del vettore velocità cambia continuamente. Per la seconda legge di Newton, deve esistere una forza che causa tale accelerazione. Si tratta della *forza centripeta*, che vale in modulo:

$$F = m \frac{v^2}{R}$$

dove v è la velocità tangenziale di un punto di massa m che percorre una circonferenza di raggio R . Come visto nel relativo capitolo, $a = v^2/R$ è l'accelerazione centripeta del corpo.

La forza centripeta quindi impedisce a un corpo di muoversi in linea retta, piegando la sua traiettoria. Ovviamente la direzione della forza è la stessa dell'accelerazione, è cioè diretta verso il centro della circonferenza su cui si muove il corpo. A questo punto bisogna fare attenzione: il fatto che la forza centripeta sia diretta verso il centro della circonferenza non significa che il corpo accelera verso il centro. Se non ci fosse questa forza il corpo partirebbe per la tangente in linea retta. La forza centripeta, ripetiamo, serve solo a curvare la traiettoria



del corpo. Se è presente anche un'accelerazione tangenziale l'accelerazione risultante non sarà diretta verso il centro, in quanto sarà somma vettoriale di due accelerazioni fra di loro ortogonali. Inoltre non è necessario che la traiettoria sia perfettamente circolare, basta che sia curva. In questo caso possiamo considerare la circonferenza tangente alla traiettoria in ogni punto.

Notare come la forza centripeta non è una forza a sé stante. Forze centripete posso essere infatti la forza d'attrito, la forza gravitazionale, la tensione di un filo, o qualsiasi altra forza. Il nome ci dice solo che la risultante di certe forze ha direzione radiale. Vediamo alcuni esempi.

- Supponiamo di essere sul sedile posteriore di una macchina che a un certo punto affronta una curva. L'unica forza agente sulla macchina diretta verso il centro è la forza di attrito tra strada e pneumatici. Poiché la macchina non si muove in direzione radiale la forza di attrito è di tipo statico, e questa è la forza centripeta agente sulla macchina. Ma se ci muoviamo di moto circolare solidali con la macchina ci deve essere una forza centripeta anche su di noi. Se l'attrito fornito dal sedile è basso, durante la curva slitteremo fino ad andare addosso alla portiera esterna alla curva. La forza normale della portiera fornisce dunque la forza centripeta necessaria per farci seguire il moto circolare della macchina.

- Consideriamo una stazione orbitante attorno alla Terra. In questo caso la forza centripeta agente sugli astronauti e sulla stazione è data dalla forza di gravità della Terra, diretta verso il centro della stessa. Gli astronauti fluttuano perché sono in caduta libera. Sulla stazione e sul suo contenuto agisce la forza peso e non c'è accelerazione relativa fra astronauti e stazione: non è possibile per gli astronauti premere contro il suolo della stazione, in quanto essa sta cadendo con loro. Difatti sulla Terra quello che ci dà il senso di "peso" è in realtà la reazione vincolare del suolo, che ci impedisce di sprofondare, trasmessa attraverso le nostre ossa al resto del corpo. Se saltiamo quindi da una certa altezza (non troppo alta), durante i brevi secondi di caduta l'unica forza agente su di noi è la forza di gravità (siamo cioè in caduta libera, proprio come gli astronauti). Se mentre cadiamo mettiamo sotto i nostri piedi una bilancia, questa non segnerà nessun peso. Ovviamente la stazione orbitante non precipita sulla Terra, in quanto quando è stata lanciata le è stata conferita una certa velocità tangenziale. La forza di gravità quindi si limita a piegare la sua traiettoria impedendo che la stazione se ne parta per la tangente nelle profondità dello spazio.

- Prendiamo un secchio pieno d'acqua e facciamolo girare in un piano verticale. Se nel punto più alto della traiettoria la velocità del secchio è abbastanza alta, l'acqua non uscirà. Infatti, con una giusta velocità, il secchio esercita una forza normale sull'acqua, che, combinata con il peso della stessa, fornisce la giusta forza centripeta perché il moto sia circolare. Quindi, nonostante l'intuito ci porti erroneamente a credere che l'acqua debba per forza cadere (in fondo le forze sono dirette verso il basso, quindi l'acqua dovrebbe accelerare verso il basso), questo non succede perché la risultante di peso e normale è una forza centripeta, che serve solo a curvare la traiettoria e non fa accelerare i corpi verso l'interno. Il caso limite è quando la forza normale è zero. In questo caso è solo il peso ad avere il ruolo di forza centripeta. Se la velocità è bassa, la forza normale è negativa. Significa che l'acqua perde contatto con il secchio e ci cade addosso! Sarebbe quindi necessaria avere un'altra forza affinché l'acqua si muova di moto circolare. Vediamo quindi di determinare la velocità minima nel punto più alto. Proiettando



la seconda legge di Newton in direzione verticale, abbiamo:

$$mg + N = m \frac{v^2}{R}$$

dove m è la massa dell'acqua e R è il raggio della circonferenza, cioè la lunghezza del nostro braccio. Imponendo $N \geq 0$ abbiamo:

$$v \geq \sqrt{gR}$$

2.12 Quantità di moto e impulso

Abbiamo visto che una delle grandezze fisiche fondamentali della cinematica è la velocità. In dinamica facciamo un passo avanti, considerando anche la massa di un punto materiale in movimento. In questo capitolo introduciamo un grandezza che lega tra loro queste due quantità. Consideriamo dunque un punto materiale di massa m che si muove nello spazio con velocità \vec{v} .

Definizione (quantità di moto)

Si definisce *quantità di moto* il vettore:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Possiamo allora scrivere la seconda legge della dinamica come:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Questa è in realtà la formula più generale della seconda legge di Newton, valida anche quando la massa non è costante. L'azione di una forza modifica dunque una o più di queste quantità: massa, modulo, direzione e verso della velocità.

Dall'equazione precedente abbiamo:

$$\vec{F}dt = d\vec{p}$$

Definizione (impulso)

Si definisce *impulso* l'integrale della forza rispetto al tempo:

$$\vec{J} = \int_{t_0}^t \vec{F}(t)dt$$

In generale non conosciamo la legge di dipendenza della forza col tempo. Tuttavia, è possibile considerare il valore medio di tale forza, ed essendo questo costante, lo si può portare fuori dall'integrale, ottenendo la semplice relazione $\vec{J} = \vec{F}_m \Delta t$.

Integrando anche il secondo membro dell'equazione otteniamo



$$\vec{J} = \Delta\vec{p}$$

che rappresenta il *teorema dell'impulso*: l'azione di una forza su un punto per un certo intervallo di tempo causa una variazione della quantità di moto dello stesso.

Gli airbag delle auto vengono costruiti a partire da questo principio. Il loro scopo è di aumentare il tempo di impatto, in modo da minimizzare la forza dell'urto. Dall'altro lato un karateka riesce a spezzare un mattone poiché esercita una forza molto intensa in un intervallo di tempo molto piccolo (il colpo è secco).

2.13 Momento angolare

Introduciamo ora una nuova grandezza fisica che avrà grande importanza nel moto di rotazione, il *momento angolare*. Supponiamo che un punto materiale di massa m si muova nello spazio. Consideriamo un punto O , detto polo, che può essere fermo o in moto. Sia \vec{v} la velocità del punto rispetto al sistema di riferimento in cui studiamo il moto.

Definizione (momento angolare)

Definiamo momento angolare del punto materiale il prodotto vettoriale:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

dove \vec{r} è il raggio vettore che indica la posizione del punto rispetto al polo.

Sottolineiamo che il polo non coincide necessariamente con l'origine del sistema di riferimento scelto. Vediamo ora un esempio di calcolo di momento angolare. Supponiamo che il moto sia curvilineo e che avvenga su un piano. Sappiamo già che in coordinate polari la velocità si può scrivere come

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$$

dove \vec{v}_r e \vec{v}_θ sono rispettivamente le velocità radiale e trasversale. Dalla definizione di momento angolare abbiamo che

$$\vec{L} = \vec{r} \times m(\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = \vec{r} \times m\vec{v}_\theta$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che il prodotto vettoriale tra due vettori paralleli è nullo. Il momento angolare è quindi perpendicolare al piano su cui avviene il moto e vale in modulo

$$L = mr^2\frac{d\theta}{dt}$$

In particolare, se il moto è circolare uniforme con velocità angolare ω , allora $L = mr^2\omega$.

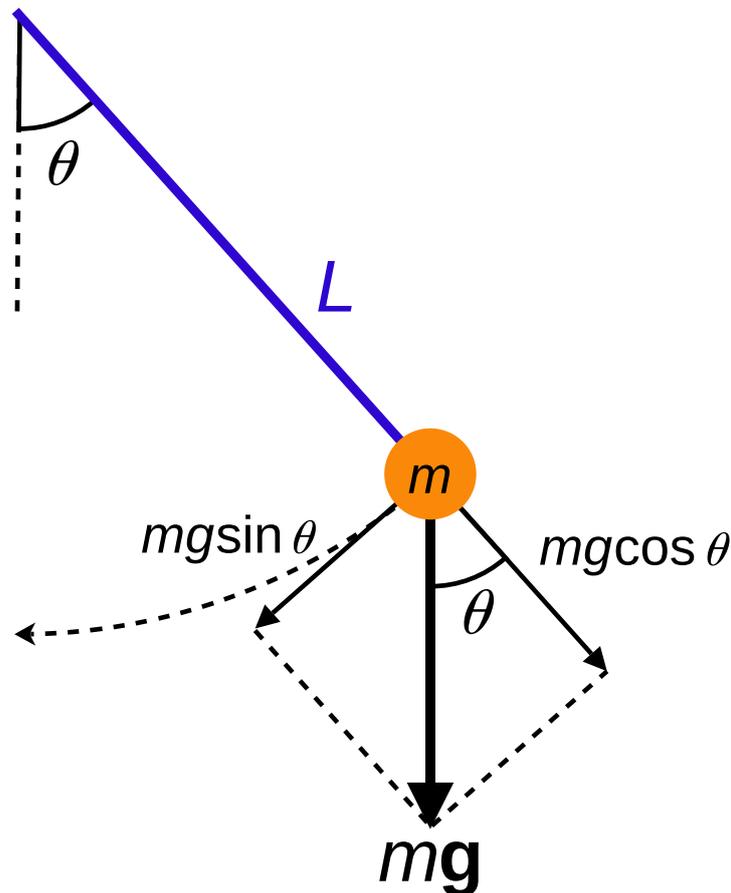


2.14 Pendolo semplice

In questo capitolo vediamo come possiamo applicare la seconda legge di Newton per studiare il moto di un pendolo semplice.

Il pendolo semplice è un sistema fisico costituito da una massa puntiforme attaccata all'estremità di un filo inestensibile. Se spostiamo il filo dalla verticale la massa sarà soggetta a un moto oscillatorio, che, trascurando ogni attrito, continuerà fino a una nuova interazione col sistema.

Il moto di un pendolo è un moto circolare il cui raggio R è uguale alla lunghezza L del filo. Le forze agenti sulla massa sono il suo peso e la tensione del filo. Per determinare la legge oraria del moto, consideriamo innanzitutto un sistema di riferimento con due assi in direzione tangenziale (tangente alla traiettoria) e centripeta (diretta lungo il filo). Chiamiamo θ l'angolo formato dal filo con la verticale. Conveniamo che per spostamenti a destra della verticale gli angoli saranno positivi, mentre per spostamenti a sinistra della verticale saranno negativi.



Scomponendo le forze abbiamo:

$$\begin{cases} T - mg \cos \theta = ma_c \\ -mg \sin \theta = ma_t \end{cases}$$



Il segno meno è dovuto al fatto che la direzione della componente della forza peso lungo la traiettoria è opposta alla direzione dello spostamento del punto. Se il punto si trova a destra della verticale, la forza è negativa perché opposta al verso definito positivo. Se il punto si trova a sinistra della verticale la forza è positiva, ma gli angoli negativi, quindi anche il loro seno sarà negativo. E' evidente quindi l'analogia con la forza elastica.

Ricordando che l'accelerazione angolare è data da:

$$\alpha = \frac{a_t}{R}$$

possiamo ricavare l'accelerazione del punto:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

Per angoli qualunque la soluzione di questa equazione differenziale è piuttosto complicata. Consideriamo dunque piccoli valori di θ . Sviluppando in serie:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots$$

Quindi per angoli piccoli, in genere minori di 13° , possiamo approssimare $\sin \theta$ a θ . L'equazione differenziale del moto diventa:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

che coincide con quella del moto armonico semplice. La legge oraria del moto è allora:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Poiché la funzione seno oscilla tra valori compresi nell'intervallo $[-1, +1]$, l'angolo assumerà valori compresi tra $[-\theta_0, +\theta_0]$. Quindi θ_0 corrisponde al massimo angolo di oscillazione, ovvero $\theta_0 = \theta_{\max}$.

La pulsazione e il periodo del moto (cioè il tempo impiegato a compiere un'oscillazione completa) sono dati rispettivamente da

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Un'importante considerazione da fare è che il periodo non dipende dalla massa, né dall'angolo iniziale del punto materiale (isocronismo delle piccole oscillazioni).

Ricordando ora la definizione di angolo in radianti, ovvero: $\theta = \frac{s}{L}$, dove s rappresenta lo spostamento lungo la traiettoria, possiamo ricavare le leggi orarie dello spostamento e della velocità tangenziale (si noti che $\dot{\theta}$ rappresenta la velocità angolare):

$$s(t) = L\theta_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad v(t) = L\dot{\theta} = L\omega\theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$



Concludiamo con un'osservazione di carattere sperimentale. Finora abbiamo trattato la massa attaccata al filo alla stregua di un punto materiale, privo di dimensioni. Nella realtà, però, se volessimo fare esperimenti con un pendolo dovremmo ricorrere a piccoli oggetti sferici, i quali hanno un diametro, seppur piccolo. Di conseguenza come raggio della circonferenza dovremo considerare la lunghezza del filo più il raggio della pallina. Il non accorgersi di questo particolare comporta un errore sistematico nelle misure.

2.14.1 Pendolo a cono

Un pendolo a cono è un pendolo semplice che, invece di oscillare attorno alla verticale, ruota attorno ad essa, restando fermo su una quota e mantenendo l'angolo θ con la verticale costante. Le caratteristiche di questo tipo di moto sono:

- l'angolo θ con la verticale aumenta con l'aumentare della velocità;
- esiste una traiettoria stabile circolare a una certa quota;
- esiste una relazione tra θ e la velocità di rotazione ω .

Per un punto materiale, vale:

$$m\vec{a} = \vec{f}^{\text{tot}} = \vec{T} + m\vec{g}$$

Inoltre, poiché mantiene la sua quota stabile, avremo che la componente $a_z = 0$; quindi sull'asse verticale è vera la relazione:

$$T \cos \theta - mg = 0$$

Il punto materiale compie una traiettoria circolare, ovvero possiede un'accelerazione centripeta. La forza centripeta che fornisce questa accelerazione è la componente orizzontale della tensione (infatti la forza peso non ha componenti orizzontali):

$$f_c = ma_c = T \sin \theta \Rightarrow m\omega^2 r = T \sin \theta$$

Ricordiamo che il raggio della circonferenza è dato da $r = l \sin \theta$, dove l è la lunghezza del filo.

Ricavando la tensione dalla prima espressione, ovvero $T = \frac{mg}{\cos \theta}$, la sostituiamo in questa, ricavando una relazione tra θ e ω :

$$m\omega^2 r = \frac{mg}{\cos \theta} \sin \theta \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l \cos \theta}$$

Passiamo ora a studiare i momenti del problema. Consideriamo due poli: il polo O è l'estremo opposto al punto materiale del filo, quello fisso, mentre O' è il centro della circonferenza tracciata dal punto, che si trova sulla stessa verticale di O . Calcoliamo prima il momento angolare e delle forze rispetto a O' :



$$\begin{aligned}\vec{J}_{O'} &= \vec{r} \wedge m\vec{v} \\ |\vec{J}_{O'}| &= rmv \text{ diretto lungo } z \\ \Rightarrow \vec{\tau} &= \frac{d\vec{J}}{dt} = 0\end{aligned}$$

Poiché il momento angolare è costante, il momento delle forze totali rispetto a O' è nullo, quindi:

$$\vec{\tau} = (\vec{r}_1 \wedge \vec{T} + \vec{r}_2 \wedge m\vec{g}) = \vec{r} \wedge (\vec{t} + m\vec{g}) = \vec{r} \wedge \vec{F}_c = 0$$

Calcoliamo i momenti rispetto al punto O :

$$\vec{J} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \Rightarrow |\vec{J}| = lmv$$

A tal proposito, ricordiamo che v è sempre perpendicolare al filo. Il momento delle forze esterne sarà uguale a:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge (\vec{T} \sin \theta) \Rightarrow |\vec{\tau}| = T \sin \theta l \cos \theta$$

La direzione del momento angolare \vec{J} quindi varia e non si mantiene costante durante il moto.

2.15 Energia cinetica e lavoro

Da sempre l'uomo ha cercato di capire come produrre e usare in modo efficiente l'energia. Uno dei compiti principali della fisica è studiare i vari tipi di energia esistenti in natura, i loro effetti, e capire come i sistemi fisici scambiano tra loro questa quantità. Il XX secolo ha visto un grande avanzamento in questo campo, con la scoperta dell'energia nucleare.

Innanzitutto cosa significa il termine energia? Il concetto, apparentemente, è vasto. Basta pensare alle forme di energia che conosciamo: energia eolica, nucleare, elettrica... Vedremo però che in realtà tutte queste forme di energia si possono ricondurre a solo due tipi fondamentali, e che l'energia si può definire in modo molto semplice. Anticipiamo innanzitutto che l'energia è una quantità scalare, un numero che associamo a un sistema fisico. Ogni qualvolta il sistema interagisce con un altro sistema, il numero associato al primo sistema può, ad esempio, diminuire, mentre aumenta quello associato al secondo sistema. In altre parole non si perde né si crea dal nulla energia. Il principio di conservazione dell'energia non è stato finora mai confutato dall'esperimento e rappresenta una proprietà notevole del nostro universo. E' come quando andiamo a prelevare i soldi: essi passano dal bancomat alla nostra tasca, senza che si perdano (si spera).

Tutti i corpi in movimento posseggono energia. D'altra parte ciò sembra molto naturale: se siamo ammalati difficilmente ci alziamo dal letto. O ancora, un atleta professionista ci batte sicuramente nei 100 metri piani perché ha più "energia" di



noi. Quindi, intuitivamente, maggiore è la velocità di un corpo, maggiore è la sua energia. Vediamo ora come possiamo quantificare questa energia.

Supponiamo che su un punto materiale agisca una forza costante \vec{F} che forma un angolo θ con l'orizzontale (un asse x orientato). Durante uno spostamento Δx la forza cambia la velocità del punto da v_0 a v_1 . Detta F_x la componente orizzontale della forza si ha:

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a_x \Delta x$$

D'altra parte per la seconda legge di Newton:

$$F_x = ma_x$$

risolvendo la prima equazione per a_x e inserendola nella seconda abbiamo:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_x \Delta x$$

Definiamo la quantità $\frac{1}{2}mv^2$ come l'*energia cinetica* di un corpo di massa m che si muove con velocità v .

Quando una forza sposta un corpo, si dice che la forza ha compiuto un *lavoro*. Se la forza non è bilanciata, come nell'esempio precedente, allora causa anche una variazione di energia cinetica del corpo. Il lavoro di una forza costante durante uno spostamento Δx vale:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} = F \cos \theta \Delta x = F_x \Delta x$$

Dunque a compiere lavoro è solo la componente della forza parallela allo spostamento, e non la componente perpendicolare.

Supponiamo ora che un punto materiale si muova, lungo una traiettoria qualsiasi, sotto l'azione di una forza variabile in modulo e direzione. Vogliamo trovare il lavoro compiuto dalla forza durante uno spostamento del punto dalla posizione A a quella B. Dividiamo dunque la traiettoria in segmenti Δs , abbastanza piccoli cosicché la forza si possa considerare costante durante questi spostamenti. Il lavoro totale sarà la somma dei lavori parziali compiuti durante questi piccoli spostamenti. Ovviamente il risultato ottenuto sarà solo un'approssimazione dell'effettivo valore del lavoro, tanto migliore quanto più piccoli sono i segmenti. Mediante un passaggio al limite abbiamo:

$$W = \lim_{\Delta s \rightarrow \infty} \sum \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Il lavoro è dunque l'integrale di linea della forza. E' una grandezza scalare, in quanto definito da un prodotto scalare, e la sua unità di misura è il Joule (J).

Nel caso più generale il punto materiale si muove nello spazio. Usando gli assi cartesiani come sistema di riferimento possiamo scrivere uno spostamento infinitesimo come:



$$d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

Se il punto si sposta da una posizione di coordinate (x_0, y_0, z_0) a una di coordinate (x_f, y_f, z_f) , possiamo allora scrivere il lavoro come:

$$W = \int_{x_0}^{x_f} F_x dx + \int_{y_0}^{y_f} F_y dy + \int_{z_0}^{z_f} F_z dz$$

Facciamo ora alcune considerazioni.

- Se su un corpo agiscono più forze il lavoro totale è la somma dei lavori compiuti da ogni singola forza.
- Solo le componenti della forza parallele allo spostamento compiono lavoro. Questo significa che le forze centripete non compiono mai lavoro.
- Affinché ci sia lavoro deve esserci uno spostamento. Se spingiamo forte contro una parete sentiamo una certa fatica, a causa delle continue contrazioni dei muscoli. Tuttavia non c'è lavoro compiuto sulla parete, dato che questa non si sposta.

Oltre alla definizione mediante un integrale che abbiamo appena dato, ne possiamo dare una equivalente, ma forse più intuitiva, che mette in risalto il significato fisico del lavoro.

Una forza compie lavoro quando agisce su un corpo (un punto materiale, un corpo esteso..) che si sposta percorrendo una traiettoria qualsiasi, purché tale traiettoria non sia perpendicolare alla direzione della forza.

Per esempio compiamo lavoro quando spostiamo un mobile, alziamo un bicchiere, trituriamo il cibo per mangiarlo. O ancora, l'attrito compie lavoro quando frena i corpi in movimento, compie lavoro un gas che si espande, e gli esempi sono innumerevoli.

Consideriamo ora un lavoro infinitesimo lungo una traiettoria. Indicata con F la forza parallela allo spostamento abbiamo che:

$$dW = Fds = m \frac{dv}{dt} ds = mvdv$$

integrando abbiamo:

$$W = \int_{v_0}^{v_f} mv dv = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

indicando con E_k l'energia cinetica del punto materiale possiamo scrivere la seguente relazione:

$$W = \Delta E_k$$

che rappresenta il *teorema dell'energia cinetica*. Quando una forza compie lavoro su un punto materiale può aumentare l'energia cinetica del punto (compiendo



lavoro positivo), oppure diminuirla (in questo caso il lavoro è negativo). Questo ci suggerisce un'altra definizione di energia cinetica. L'energia cinetica di un corpo che si muove con velocità v è il lavoro che le forze esterne applicate al corpo hanno dovuto compiere per portare la sua velocità da 0 a v . Un lavoro positivo indica una forza motrice, un lavoro negativo è associato a una forza resistente che si oppone al moto del punto.

E' importante poi notare che nel teorema dell'energia cinetica W rappresenta la somma dei lavori di ciascuna forza che agisce sul punto materiale nel tratto considerato. Questo perché la nostra F è in generale una risultante di più forze. Quindi se una persona sposta una cassa a velocità costante, sta compiendo un lavoro non nullo. Invece, se consideriamo la risultante tra forza applicata e forza d'attrito dinamico, il lavoro è nullo, perché non c'è variazione di energia cinetica.

Osservazione: è possibile partire dalla definizione di lavoro come integrale e poi dimostrare comunque il teorema dell'energia cinetica, definendo quindi il valore trovato $\frac{1}{2}mv^2$ come *energia cinetica del punto materiale*. Non è l'unico caso della meccanica in cui si può dimostrare un teorema partendo da considerazioni e definizioni differenti.

Infine, in molte situazioni è utile considerare la velocità di erogazione del lavoro. Definiamo potenza istantanea la derivata del lavoro rispetto al tempo:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

ricordando che $dW = F \cos \theta ds$, dove θ è l'angolo che la forza forma con lo spostamento, possiamo scrivere:

$$P = \frac{F \cos \theta ds}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

dove v è la velocità istantanea del punto materiale lungo la traiettoria. L'unità di misura della potenza è il Watt (W).

2.16 Energia del pendolo

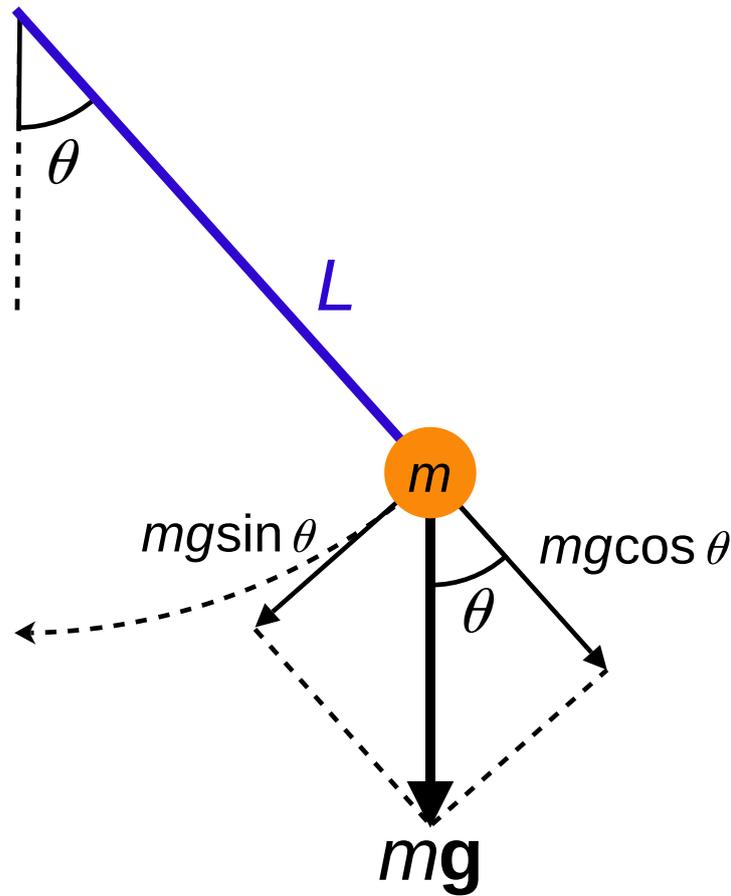
Riprendiamo il discorso del pendolo semplice, stavolta studiandolo sfruttando le conoscenze sul lavoro e l'energia cinetica. Ricordiamo, prima di iniziare lo studio, le formule del lavoro che conosciamo e lo schema del pendolo:

$$L = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$L = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2)$$





Prendiamo come esempio di riferimento l'immagine qui sopra. Consideriamo il punto iniziale del moto il punto in cui è disegnato il punto materiale, mentre l'estremo finale del moto sarà il centro di oscillazione. Dallo studio sul [moto del pendolo](#) abbiamo osservato che il punto ha velocità nulla agli estremi di oscillazione e velocità massima al centro; tuttavia, in quel caso abbiamo dovuto compiere un'approssimazione dell'angolo, ottenendo quindi un valore della velocità approssimato anch'esso. Sfruttiamo il lavoro e l'energia per calcolare con precisione la velocità massima del sistema. Abbiamo quindi:

$$v_i = 0$$

$$v_f = v_{\max}$$

Poiché sappiamo che $L_{\text{tot}} = \Delta K$, avendo le velocità iniziali e finali possiamo calcolarci il lavoro della forza totale agente sul punto:

$$\begin{aligned} L_{\text{tot}} = \Delta K &= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 &= \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \end{aligned}$$

Quindi abbiamo che $L_{\text{tot}} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$; tuttavia possiamo calcolare il lavoro partendo anche dalla definizione stessa:



$$L_{\text{tot}} = \int_i^f \vec{f}_{\text{tot}} \cdot d\vec{s} = \int_i^f (\vec{P} + \vec{T}) \cdot d\vec{s} =$$

$$\Leftrightarrow \int_i^f \vec{P} \cdot d\vec{s} + \int_i^f \vec{T} \cdot d\vec{s} = \int_i^f \vec{P} \cdot d\vec{s}$$

Questo perché sappiamo che \vec{T} è perpendicolare allo spostamento lungo tutto il moto, per definizione di \vec{T} , quindi il prodotto scalare è nullo. Quindi:

$$L_{\text{tot}} = \int_i^f \vec{P} \cdot d\vec{s} = \int_i^f mg \cos \phi ds = \int_i^f mg \sin \theta ds$$

Questo perché il coseno di ϕ , cioè l'angolo formato tra il peso e lo spostamento, è equivalente al seno di θ . Prima di procedere con il calcolo finale, ricordiamo che possiamo scrivere ds come $Ld\theta$, questo per la definizione di angolo. Infine:

$$L_{\text{tot}} = \int_i^f mg(\sin \theta)Ld\theta = mgL \int_i^f \sin \theta d\theta$$

$$\Leftrightarrow mgL \int_0^{\theta_0} \sin \theta d\theta = -mgL \cos \theta \Big|_0^{\theta_0}$$

$$\Leftrightarrow -Lmg(\cos \theta_0 - \cos 0) = Lmg(1 - \cos \theta_0)$$

Siamo giunti a calcolare il lavoro compiuto dalle forze del sistema in due modi diversi; un'analisi immediata: i due risultati sono entrambi positivi perché la forza peso spinge lungo tutto il moto, con verso concorde allo spostamento stesso. Uguagliamo i due risultati ottenuti:

$$\begin{cases} L_{\text{tot}} = \frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2 \\ L_{\text{tot}} = Lmg(1 - \cos \theta_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2 = Lmg(1 - \cos \theta_0) \\ v_{\text{max}}^2 = 2Lg(1 - \cos \theta_0) \end{cases}$$

Dallo studio del moto che abbiamo compiuto in qualche capitolo fa, troviamo che $v_{\text{max}} = L\omega_{\text{max}}$. Sostituendo a ω il suo valore, e ricordando che, in questo studio, $\theta_0 = \theta_{\text{max}}$ perché l'angolo di partenza del moto coincide all'angolo massimo, abbiamo ricavato che:

$$v_{\text{max}}^2 = \theta_0^2 Lg$$

Questo perché approssimammo $\sin \theta \approx \theta$. Tuttavia, partendo dal giusto risultato, ovvero quello ottenuto con lo studio delle forze, possiamo anche questa volta approssimare $\cos \theta_0$ con il suo sviluppo in serie di Taylor:

$$\cos \theta_0 = 1 - \frac{\theta_0^2}{2}$$

Sostituendo nella formula:

$$v_{\text{max}}^2 = 2Lg(1 - \cos \theta_0) \approx 2Lg(1 - 1 + \frac{\theta_0^2}{2}) = \theta_0^2 Lg$$



Che è concorde con il risultato ottenuto nel precedente studio. L'idea di compiere approssimazioni per risolvere problemi che non hanno una soluzione analitica è, se l'approssimazione viene fatta con criterio, un ottimo modo per compiere gli studi necessari. Questo era solo un esempio di come sfruttare l'energia e il lavoro per calcolare moti particolarmente complicati.

2.17 Lavoro della forze di attrito, della forza peso e della forza elastica

Dopo aver definito il lavoro di una forza, è utile sfruttare questa definizione per calcolare i lavori di forze il cui modulo ci è noto, come la forza d'attrito e la forza peso.

2.17.1 Lavoro della forza d'attrito

Ricordiamo che il modulo della forza di attrito *dinamico* vale:

$$f_{att} = \mu_d N = \mu_d mg$$

Applichiamola nella formula del lavoro:

$$W = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_A^B f ds \cos \phi = \int_A^B -\mu_d mg ds = -\mu_d mg \int_A^B ds = -\mu_d mg \Delta s$$

Abbiamo considerato in questo calcolo un moto rettilineo, in cui l'angolo ϕ tra la forza e lo spostamento è $\phi = \pi$, per cui vale $\cos \phi = -1$. Δs è l'effettiva traiettoria percorsa durante il moto: il lavoro della forza di attrito dipende dallo spostamento percorso.

E' bene ora fare una precisazione: questa formula rappresenta il lavoro compiuto dall'attrito su un punto materiale o su un corpo perfettamente rigido. Se consideriamo un oggetto esteso reale che viene lanciato lungo un pavimento con attrito, si nota che durante il moto esso si riscalda, il che sta a indicare la comparsa, nel blocco, di energia termica, cioè energia associata al moto disordinato delle molecole che lo compongono. Quindi l'energia (cinetica) iniziale del blocco non è stata del tutto azzerata. Una parte di energia viene convertita in energia termica, l'altra parte viene dissipata dall'attrito, cioè un po' viene trasferita dal blocco al pavimento e un po' diventa suono. Questa energia trasferita è il lavoro dell'attrito, che quindi risulta essere minore di quello che troveremmo usando la formula ricavata precedentemente. Il lavoro è in questo caso inferiore al prodotto forza per spostamento. Come mai?

Un oggetto reale non è mai perfettamente rigido. Questo implica che la forza di attrito agisce su punti del corpo il cui moto risulta ostacolato con effetti di deformazione locale. In altre parole, se il blocco nel complesso si muove di una certa distanza, le asperità microscopiche della superficie di contatto si spostano di una distanza minore, perché si deformano. Possiamo anche dire che l'attrito lavora su una distanza efficace minore di quella effettivamente percorsa dal blocco nel suo complesso.



Solo se il corpo è un punto materiale (privo di dimensioni) o un corpo perfettamente rigido, il lavoro dell'attrito è effettivamente $-\mu_d mg \Delta s$. In questo caso l'energia cinetica del corpo va nel pavimento e nell'aria, e il corpo non si scalda.

2.17.2 Lavoro della forza peso

Come fatto per la forza di attrito, sfruttiamo la definizione di lavoro. Ricordiamo il modulo della forza peso:

$$P = mg$$

Prendiamo un sistema di riferimento con asse z verticale, diretto verso l'alto; possiamo scrivere la forza peso in coordinate cartesiane, ovvero:

$$\vec{P} = (0, 0, -mg)$$

Ricordiamo che anche il vettore $d\vec{s}$ può essere scritto in coordinate:

$$d\vec{s} = (dx, dy, dz)$$

Per cui, per il lavoro, avremo che:

$$W = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (-mg) dz = -mg(z_B - z_A)$$

Nel caso della forza peso, a differenza della forza d'attrito, possiamo notare che il lavoro non dipende dal percorso compiuto ma dipende solo dagli estremi del percorso, in particolare solo dalle coordinate lungo l'asse verticale. Vedremo in seguito che le forze per cui vale ciò vengono definite *conservative*.

2.17.3 Lavoro della forza elastica

Come abbiamo visto qualche capitolo fa, un corpo attaccato a una molla può compiere un moto armonico oscillatorio. La forza elastica compie quindi un lavoro lungo tutto il moto, che possiamo calcolare.

$$W = \int_{x_i}^{x_f} \vec{f}_{el} \cdot d\vec{s} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = -k \int_{x_i}^{x_f} x dx = -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2)$$

Notiamo che, esattamente come la forza peso, anche in questo caso il lavoro dipende solo dagli estremi dello spostamento.

2.18 Forze conservative ed energia potenziale

2.18.1 Forza conservativa

Diamo immediatamente la definizione di forza conservativa.



Definizione (Forza conservativa)

Si definisce *forza conservativa* una forza il cui lavoro non dipende dal percorso compiuto ma solo dalle posizioni iniziale e finale della traiettoria, ovvero:

$$W_{A,B} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = g(A, B)$$

Dove g è una funzione.

Un altro modo per definire le forze conservative è quello di dire che, su un qualsiasi percorso chiuso, il lavoro è nullo, ovvero:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Possiamo studiare meglio questo caso. Prendiamo un percorso chiuso, e dividiamolo in un percorsi diversi tra loro, uno che va nel verso \overline{AB} , l'altro che va nel verso opposto \overline{BA} . Per comodità, li indicheremo con (I) e (II). Avremo quindi che:

$$\begin{aligned} \oint \vec{f} \cdot d\vec{s} &= \text{(I)} \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} + \text{(II)} \int_B^A \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 \\ \text{(I)} \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} &= -\text{(II)} \int_B^A \vec{f} \cdot d\vec{s} \\ \text{(I)} \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} &= \text{(II)} \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

Quindi è riconfermato che il lavoro dipende solo dagli estremi e non dal percorso compiuto.

2.18.2 Energia potenziale

Analizziamo il calcolo del lavoro di una forza conservativa. Nel caso in cui si volesse calcolare il lavoro da un punto P_0 a un punto B , preso un punto A qualsiasi, allora varrà la relazione:

$$W(P_0, B) =: W(P_0, A) + W(A, B)$$

Perché sappiamo che, per le forze conservative, il lavoro dipende solo dai punti estremi del percorso. Dall'espressione precedente si ricava immediatamente:

$$W(A, B) = W(P_0, B) - W(P_0, A) = g(A, B) = g(P_0, B) - g(P_0, A)$$

Dove g è una funzione, che chiameremo **funzione potenziale**. Dalla precedente ricaviamo che:

$$W(A, B) = g(B) - g(A)$$



Ovvero un altro modo di esprimere il lavoro solo in funzione degli estremi.

Definizione (Energia potenziale)

Si definisce energia potenziale E_p di una forza *conservativa*:

$$E_p = -g$$

Da questa definizione possiamo esprimere il lavoro di una forza conservativa come:

$$W(A, B) = -\Delta E_p = -[E_p(B) - E_p(A)]$$

Ovvero il lavoro equivale all'opposto della differenza di energia potenziale.

Adesso sfrutteremo la definizione di energia potenziale per calcolarla in caso di forze conservative note, ricordando che bisogna sempre definire un punto dove l'energia potenziale vale zero.

Energia potenziale della forza peso

Come abbiamo visto nel precedente capitolo, il lavoro della forza peso vale:

$$W = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{s} = -mg(z_B - z_A) = -(mgz_B - mgz_A)$$

Abbiamo appena visto che il lavoro può essere anche scritto come:

$$W = -\Delta E_p$$

L'energia potenziale della forza peso è quindi:

$$E_p = mgz$$

dove abbiamo scelto il terreno come livello di riferimento in cui l'energia potenziale vale zero. Questa è una convenzione naturale, ma non è l'unica. Difatti il livello zero può essere scelto a piacimento, non influisce sul lavoro della forza peso perché esso è definito dalla variazione di energia potenziale, quindi la costante arbitraria scompare.

Energia potenziale elastica

Nel precedente capitolo abbiamo visto come anche il lavoro della forza elastica dipendesse solo dagli estremi; esso vale:

$$W = \int_A^B \vec{f}_{el} \cdot d\vec{s} = -\frac{k}{2}(x_B^2 - x_A^2)$$

È immediato definire l'energia potenziale della forza elastica come:



$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

Anche qui conveniamo che l'energia potenziale della molla sia nulla nell'estremo libero di una molla a riposo. Nella precedente formula x indica quindi la distanza di un estremo dal punto di equilibrio della molla.

Alla luce di questi esempi possiamo dare una nuova definizione di energia potenziale. L'energia potenziale di un corpo è il lavoro eventuale delle forze conservative applicate al corpo, cioè il lavoro che le forze conservative compirebbero in relazione a un eventuale spostamento del corpo dalla posizione iniziale al livello zero di riferimento. Attenzione a non definire l'energia potenziale come il lavoro che le forze "devono" compiere per spostare il corpo nella posizione di riferimento. Se, per esempio, un ascensore si trova al piano terra, e noi scegliamo come livello zero di riferimento per l'energia potenziale il terzo piano, la definizione ci costringerebbe a dire che l'energia potenziale dell'ascensore è il lavoro che la forza di gravità deve compiere per sollevarlo fino al terzo piano, il che stona un po'.

2.18.3 Conservazione dell'energia meccanica

Abbiamo studiato due relazioni del lavoro, una volta come differenza di energia cinetica, adesso sfruttando l'energia potenziale. Si possono relazionare i due casi:

$$W = \Delta E_k = -\Delta E_p$$

cioè

$$E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B}$$

da cui

$$E_{k,A} + E_{p,A} = E_{k,B} + E_{p,B}$$

dove A e B indicano due configurazioni diverse in cui si può trovare il punto materiale. Quindi se su un punto materiale agiscono solo forze conservative, o se le eventuali forze non conservative non compiono lavoro, la somma di energia cinetica ed energia potenziale, detta anche *energia meccanica* del punto, si conserva. Vediamo cosa succede invece se agiscono anche forze non conservative. Il lavoro totale è uguale alla somma delle forze conservative W_c e delle forze non conservative W_{nc} :

$$W = W_c + W_{nc} = E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B} + W_{nc} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

da cui, indicando con E_m l'energia meccanica del punto materiale

$$W_{nc} = E_{m,B} - E_{m,A}$$

Le forze non conservative causano una variazione di energia meccanica del punto materiale. Una classe particolare di forze non conservative sono le forze di attrito.



In molti casi esse dissipano l'energia posseduta da un corpo. Per esempio, se un blocco scivola lungo un pavimento con attrito, una parte dell'energia cinetica del blocco rimane nel blocco, mentre una parte viene dissipata, cioè passa dal blocco al pavimento, diventando energia termica del pavimento, e dal blocco all'aria, propagandosi sotto forma di onde sonore (lo sentiamo il blocco che scivola). Tuttavia, non sempre l'attrito ha ruolo di forza dissipatrice. Se una sfera rotola senza strisciare è perché esiste una forza di attrito statico, che agisce sul punto di contatto, che le impedisce di slittare. Poiché il punto di contatto è istantaneamente fermo, la forza di attrito in questo caso non compie lavoro. Questo è il motivo per cui abbiamo sottolineato il fatto che l'energia meccanica si può conservare anche se agiscono forze non conservative.

Facciamo un'ultima considerazione sul lavoro. Al compimento di lavoro si accompagnano due fenomeni: trasferimento e trasformazione di energia. Illustriamoli con degli esempi.

Se diamo un calcio a un pallone, una parte di energia che si trovava inizialmente nel nostro corpo, che abbiamo assunto col cibo, si trova ora sotto forma di energia cinetica nel pallone. In questo caso il lavoro è un trasferimento di energia dal nostro corpo al pallone.

Invece, quando la Terra fa cadere un corpo, certamente compie lavoro sul corpo, perché questo si sposta, ma non c'è nessun trasferimento di energia dalla Terra al corpo. È vero sì che il corpo acquista energia cinetica che prima non aveva, ma perde la stessa quantità sotto forma di energia potenziale. Questa volta non c'è trasferimento ma trasformazione di energia potenziale in energia cinetica.

Il compimento di lavoro non implica quindi il trasferimento di energia, come erroneamente molti sostengono, definendo anzi il lavoro come energia in transito. Per noi la definizione di lavoro non è altro che la seguente, già introdotta nel capitolo precedente:

Definizione (Lavoro)

Una forza F compie lavoro quando agisce su un corpo (punto materiale, corpo esteso...) che si sposta percorrendo una traiettoria qualsiasi, purché tale traiettoria non sia perpendicolare alla direzione della forza. Per un percorso da A a B il lavoro vale:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

2.18.4 Dall'energia potenziale alla forza

Mettiamo caso di avere nota l'espressione dell'energia potenziale, e vogliamo ricavare la forza che l'ha generata. Ricordiamo un caso studiato nella definizione di lavoro:

$$dW = \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

Nel precedente paragrafo abbiamo visto come $dW = -dE_p$, quindi possiamo scrivere:



$$\vec{f} \cdot d\vec{s} = -dE_p \quad \vec{f} = -\frac{dE_p}{d\vec{s}}$$

Attenzione: questo calcolo non è banale come sembra. L'energia potenziale è infatti uno *scalare*, mentre la forza è una grandezza *vettoriale*. Avremo quindi la derivata di uno scalare rispetto a un vettore. In questi casi, si usa la notazione di **gradiente** e **derivata parziali**. Una derivata parziale si usa quando è presente una funzione in più variabili e la si vuole derivare solo rispetto ad una di esse: si eseguirà la derivata rispetto a quella variabile considerando le altre variabili presenti come costanti. Per fare un esempio:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 y 2\pi z) = 2xy 2\pi z$$

Nulla di estraneo quindi. Il **gradiente** invece è un vettore dello spazio con coordinate le derivate parziali della funzione presa, ovvero:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \right)$$

Riprendendo il discorso dell'energia potenziale, avremo quindi che:

$$\vec{f} = -\frac{dE_p}{d\vec{s}} = -\nabla E_p$$

Possiamo scrivere la forza in coordinate cartesiane, semplificando l'espressione precedente:

$$\vec{f} = \begin{cases} f_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ f_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ f_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases}$$

Prendiamo l'esempio della forza peso: abbiamo che $U = mgz$, e vogliamo ricavarne la forza. Avremo quindi che:

$$\vec{P} = \begin{cases} f_x = -\frac{\partial(mgz)}{\partial x} = 0 \\ f_y = -\frac{\partial(mgz)}{\partial y} = 0 \\ f_z = -\frac{\partial(mgz)}{\partial z} = -mg \end{cases}$$

Da cui $\vec{P} = (0, 0, -mg)$, coerente con la formula della forza peso che conosciamo.

2.19 Oscillatore armonico

L'*oscillatore armonico semplice* è un sistema fisico il cui stato dinamico è descritto dall'equazione differenziale:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$



dove x è una grandezza fisica che oscilla con legge armonica.

I fenomeni periodici sono frequentissimi in natura. Nei capitoli precedenti abbiamo visto alcuni esempi: il pendolo (semplice e composto) e il sistema molla-punto materiale. Per il pendolo, il moto è armonico semplice solo per piccoli spostamenti dalla verticale. Se gli angoli sono grandi il moto è ancora periodico, ma non armonico. Allo stesso modo, la legge di Hooke è un'approssimazione del comportamento di una molla, tanto migliore quanto gli allungamenti sono piccoli. E' quindi importante rendersi conto che la condizione di oscillatore armonico semplice si verifica per un sistema che si allontana di poco da una posizione di equilibrio.

Con i metodi dell'Analisi Matematica si può dimostrare che la soluzione più generale dell'equazione differenziale dell'oscillatore armonico semplice è:

$$x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$$

che può essere riscritta come

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

ponendo $a = A \cos \phi$ e $b = A \sin \phi$. L'ampiezza A e la fase ϕ sono determinate dalle condizioni iniziali del moto.

Può capitare che in alcune situazioni ci si trovi di fronte all'equazione differenziale non omogenea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = f(t)$$

dove $f(t)$ è una qualsiasi funzione del tempo. In questo caso la soluzione più generale è:

$$x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t + x_p(t)$$

dove $x_p(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Un esempio chiarirà le idee. Consideriamo una molla appesa verticalmente al soffitto, a cui è appesa una massa m . La molla viene tirata leggermente e lasciata andare. Vogliamo trovare la legge oraria del moto. Per la seconda legge della dinamica abbiamo che:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx$$

ponendo $\omega^2 = k/m$ ci riconduciamo all'equazione differenziale non omogenea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = g$$

Una soluzione particolare di questa equazione è $x_p = \frac{mg}{k}$. Dalle condizioni iniziali abbiamo che:



$$x(0) = \frac{2mg}{k} = A \sin \phi + \frac{mg}{k}; \quad v(0) = 0 = \omega A \cos \phi$$

Quindi la legge oraria è:

$$x(t) = \frac{mg}{k}(1 + \cos \omega t)$$

2.20 Oscillatore armonico smorzato e forzato

Nel precedente capitolo abbiamo studiato il caso di un oscillatore armonico *ideale*, ovvero senza alcun tipo di forzature o forza resistenti che ne alterino il comportamento. Studiamo qui questi due differenti casi.

2.20.1 Oscillatore armonico smorzato

Il caso di riferimento è una molla poggiata su un piano orizzontale, privo di attrito, a cui è connessa una massa che si muove di moto oscillatorio come visto in un precedente capitolo. Abbiamo studiato anche la forza di attrito viscoso, dovuta alla *resistenza dell'aria*. Questi due casi possono legarsi tra loro: una molla in orizzontale, senza attriti col piano, incontra nel suo moto una certa resistenza dell'aria. Una considerazione preliminare da fare è che la resistenza dell'aria lungo il moto orizzontale è *diversa* da quella lungo il moto verticale, e questo è dovuto alle caratteristiche dell'atmosfera. Possiamo tuttavia trattare i due casi come se fossero idealmente uguali, con la resistenza dell'aria descritta da $f_{\text{aria}} = -Bv$.

Per trattare quindi la molla smorzata dall'aria, studiamo le forze agenti sul punto materiale:

$$\begin{aligned} \vec{f}_{\text{tot}} &= \vec{f}_{\text{molla}} + \vec{f}_{\text{aria}} \\ f_{\text{tot}} &= -kx - Bv \\ ma &= -kx - Bv \\ m \frac{d^2x}{dt^2} &= -kx - B \frac{dx}{dt} \\ m\ddot{x} + B\dot{x} + kx &= 0 \end{aligned}$$

Si ottiene quindi un'equazione differenziale del *secondo ordine omogenea*. Per un migliore studio del problema, applichiamo dei cambi di variabile:

$$\begin{cases} \gamma = \frac{B}{2m} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

Otteniamo quindi l'equazione di un oscillatore armonico smorzato, ovvero:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Si può studiare una soluzione al problema; sfruttando le conoscenze delle equazioni differenziali, si può dimostrare che la funzione:



$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t)$$

È soluzione dell'equazione differenziale scritta sopra. Calcolando le derivate prime e seconde, sostituendole nell'equazione dell'oscillatore smorzato, otterremo che:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

Ovvero:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Una breve analisi del risultato ottenuto. In primis, possiamo notare che $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ equivale alla *pulsazione assoluta* dell'oscillatore armonico, ovvero quella ottenuta nel caso in cui non è presente una qualsiasi resistenza da parte dell'aria. Inoltre, se poniamo $\gamma \rightarrow 0$, che equivale a porre $B \rightarrow 0$, otterremo che $e^{-\gamma t} = 1$, quindi la soluzione del problema sarà:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t)$$

Concorde col caso in cui non è presente attrito nell'aria. Si noti che, in questo caso, quando $\gamma \rightarrow 0$ avremo che $\omega \rightarrow \omega_0$, ovvero la pulsazione tende alla pulsazione assoluta dell'oscillatore.

Calcolo della perdita di energia

Sappiamo che l'energia potenziale di una molla equivale a

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$

Nel nostro caso, però, la x è variabile, quindi in quella espressione andrebbe sostituita la funzione $x(t)$ a x . Quel che però vogliamo calcolare è la *perdita di energia* ad ogni ciclo, ovvero: quanta energia perde il sistema dopo ogni oscillazione completa? Per questo motivo, facciamo partire il punto materiale da uno degli estremi, e calcoliamo l'energia quando, dopo un'oscillazione completa, è tornato in quel punto. Agli estremi, il valore di $x(t)$ non risente del contributo della funzione seno, poiché, in quel punto, esso è uguale a 1. Avremo quindi che:

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t}$$

Valida *solo per i punti di estremo* dopo un'oscillazione completa. Possiamo sostituirla nella formula dell'energia potenziale, che, agli estremi di una molla, coincide con l'energia totale posseduta dal punto; avremo quindi che:

$$E(t) = \frac{1}{2} k (x_0 e^{-\gamma t})^2$$

$$E(t) = \frac{1}{2} k x_0^2 e^{-2\gamma t}$$



Notiamo immediatamente che, l'energia del sistema, è una funzione del tempo. Chiamato T il periodo di oscillazione del sistema, avremo che:

$$\Delta E = E(t + T) - E(t)$$

Svogliamo i calcoli:

$$\begin{aligned} \Delta E &= E(t + T) - E(t) \\ &= \frac{1}{2} k x_0^2 \left(e^{-2\gamma(t+T)} - e^{-2\gamma t} \right) \\ &= \frac{1}{2} k x_0^2 \left(e^{-2\gamma t} \cdot e^{-2\gamma T} - e^{-2\gamma t} \right) \\ &= \frac{1}{2} k x_0^2 e^{-2\gamma t} \left(e^{-2\gamma T} - 1 \right) \\ \Delta E &= E(t) \left(e^{-2\gamma T} - 1 \right) \end{aligned}$$

Studiamo adesso un caso particolare, quello in cui $2\gamma \ll 1$; questo caso corrisponde ad una bassa resistenza dell'aria. Possiamo sviluppare in serie di Taylor per ottenere:

$$\Delta E = E(t)(1 - 2\gamma T - 1) = E(t)(-2\gamma T)$$

Il nostro obiettivo era calcolare l'energia persa ad ogni ciclo, quindi avremo che:

$$\left| \frac{\Delta E}{E} \right| = 2\gamma T$$

Che è la perdita di energia *percentuale* del sistema *ad ogni ciclo compiuto*. Un'importante considerazione che possiamo fare è che questa **non** dipende dal ciclo, ma è costante, ovvero **il sistema perde la stessa quantità di energia dopo ogni ciclo**. Questo risultato ci indica che, per esempio, un'onda sonora (che vedremo presto essere un'oscillatore) perde energia espandendosi nello spazio. È per questo motivo che un suono o un rumore vengono percepiti con più forza quando si è in prossimità della sorgente rispetto a quando si è ad una notevole distanza. Infatti, se il professore in aula urla, gli studenti seduti alle prime file sentiranno un suono molto forte e quasi insopportabile, mentre quelli seduti in piccionaia sentiranno un suono forte ma comunque sopportabile.

2.20.2 Oscillatore armonico forzato

Il caso dell'oscillatore armonico forzato è strettamente legato all'esempio delle onde sonore che si propagano nell'aria; queste, incontrando la resistenza dell'aria, vengono via via smorzate, fino ad affievolirsi ad opportune distanze. Il timpano umano, che si comporta da ricettore, funziona anch'esso da oscillatore armonico, solo che, invece di produrre l'onda, la riceve. Per riceverla, deve quindi essere stimolato da una forza esterna, che sia chiamata comunemente **forzante**. Quando il ricettore, ovvero il timpano, oscilla alla stessa frequenza dell'onda esterna, ovvero è condizione di risonanza, possiamo percepire il suono, che viene elaborato dal cervello.



Studiamo un modello ideale che rappresenti questa situazione. Abbiamo una molla posta nelle stesse condizioni del paragrafo precedente, con l'aggiunta di una forza esterna di modulo $F \sin(\Omega t)$ che, ad ogni ciclo, agisce sulla molla, forzando l'oscillazione ad essere completa, cosa che, se non vi fosse alcuna forza esterna, non si presenterebbe, causando un'oscillazione *smorzata*. Lo studio dinamico delle forze agenti sul punto materiale all'estremo della molla è quindi:

$$\vec{f}_{tot} = \vec{f}_{molla} + \vec{f}_{aria} + \vec{f}_{esterna}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + kx = F \sin(\Omega t)$$

In questo caso, Ω rappresenta la pulsazione della forza esterna, diversa dalle due pulsazioni ω e ω_0 che rappresentano, rispettivamente, la pulsazione finale del sistema e quella assoluta del sistema in condizione ideali senza resistenze o forzanti. Riscriviamo l'equazione scegliendo il precedente cambio di variabili, con una aggiunta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = \frac{B}{2m} \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ A = \frac{F}{m} \end{array} \right.$$

Otteniamo quindi l'equazione seguente, che è una equazione differenziale del secondo ordine non omogenea:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = A \sin(\Omega t)$$

La soluzione di questa equazione è fornita dalla soluzione generale, quando il termine a destra dello è nullo, che abbiamo ricavato sopra, aggiunta a una soluzione particolare del problema, che si può dimostrare essere:

$$x(t) = x_0 \sin(\Omega t - \delta)$$

Prima di parlare del cambio di variabili, è importante considerare questo termine; la soluzione generale presentava un termine $e^{-\gamma t}$ che, quando t raggiunge valori molto grandi, annulla il contributo del termine. Resta quindi solo la soluzione particolare, qui sopra scritta, a descrivere efficientemente il sistema dopo un dato periodo di tempo. In questa soluzione, i cambi di variabile eseguiti sono stati:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma\Omega^2}} \\ \delta = \arctan\left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) \end{array} \right.$$

Il grafico di x_0 in funzione di t è una semplice sinusoide, con valori compresi tra $\pm x_0$. L'interessante è invece graficare x_0 in funzione di Ω : il grafico assumerà un andamento completamente diverso: presenterà un picco nel caso in cui $\Omega \rightarrow \omega_0$.

Come nel caso precedente, in cui abbiamo calcolato la perdita di energia, possiamo qui calcolare il diminuire della frequenza di pulsazione, che sarà uguale a (ci esoneriamo dai calcoli):



$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\gamma}{\omega_0}$$

2.21 Oscillatori accoppiati

Un sistema di oscillatori accoppiati presenta due oscillatori armonici che sono soggetti anche a una forza di mutua interazione. L'esempio più semplice che possiamo fare è quello di due punti collegati attraverso due molle a dei supporti fermi, ad esempio un muro, che sono a loro volta collegati tra loro da un'altra molla. Per semplicità, consideriamo le due masse uguali, ovvero $m_1 = m_2 = m$, le costanti elastiche delle due molle agli estremi uguali, pari a k , e la costante della molla centrale k_{12} essere $k_{12} \ll k$.

Per definire le posizioni dei corpi sfruttiamo le lunghezze a riposo delle due molle: chiameremo x_1 la distanza del corpo 1 dalla lunghezza a riposo della molla 1, mentre x_2 è la distanza del corpo 2 dalla lunghezza a riposo della molla 2. Considerato l'effetto della molla centrale, avremo che il corpo di destra sarà spostato dalla lunghezza a riposo verso il centro, quindi verso destra, mentre il corpo di sinistra sarà spostato verso sinistra in direzione del centro. Preso un sistema di riferimento rettilineo e parallelo e al piano, crescente da sinistra verso destra, avremo che:

$$\begin{aligned} x_1 & \text{ allungamento corpo 1} \\ -x_2 & \text{ allungamento corpo 2} \end{aligned}$$

L'allungamento della molla centrale sarà quindi pari a $x_2 - x_1$. Il sistema che si ottiene è un sistema a due gradi di libertà.

Le forze che agiscono sui corpi sono invece:

$$\begin{aligned} f &= -kx_1 \text{ forza molla 1} \\ f &= -kx_2 \text{ forza molla 2} \\ f &= k_{12}(x_2 - x_1) \text{ forza molla centrale sul corpo 1} \\ f &= k_{12}(x_2 - x_1) \text{ forza molla centrale sul corpo 2} \end{aligned}$$

Otteniamo il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\left\{ \begin{aligned} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= \underbrace{-kx_1}_{\text{forza di richiamo}} + \underbrace{k_{12}(x_2 - x_1)}_{\text{forza di interazione}} \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= \underbrace{-kx_2}_{\text{forza di richiamo}} + \underbrace{k_{12}(x_2 - x_1)}_{\text{forza di interazione}} \end{aligned} \right.$$

Esplicitando i termini otteniamo:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{k+k_{12}}{m} x_1 &= \frac{k_{12}}{m} x_2 \quad [1] \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{k+k_{12}}{m} x_2 &= \frac{k_{12}}{m} x_1 \quad [2] \end{aligned} \right.$$

In questo sistema sono presenti due oscillatori *accoppiati*, in cui il moto di uno è in funzione del moto dell'altro. Un modo per disaccoppiarli è attraverso il



metodo dei moti normali: si trovano due moti e si fa in modo che le equazioni degli oscillatori siano combinazione lineare dei moti normali. Per fare ciò definiamo due nuovi termini:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{x_1 - x_2}{2}$$

A questo punto, compiamo due operazioni. Prima sommiamo le equazioni [1] e [2] e le dividiamo per 2; dopo le sottraiamo e le dividiamo nuovamente per due, ottenendo le equazioni del moto di x e y :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k+2k_{12}}{m}y = 0 \end{cases}$$

Notiamo immediatamente che sono due oscillatori *disaccoppiati*, e ne conosciamo la soluzione:

$$x = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$y = y_0 \sin(\bar{\omega} t + \bar{\varphi}) \quad \bar{\omega} = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}}$$

Ricordando le definizioni di x e y :

$$x_1 = x + y = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + y_0 \sin(\bar{\omega} t + \bar{\varphi})$$

$$x_2 = x - y = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - y_0 \sin(\bar{\omega} t + \bar{\varphi})$$

I moti $x(t)$ e $y(t)$ sono i due moti normali; come possiamo notare, x_1 e x_2 sono due combinazioni lineari dei moti normali.

Un'osservazione rapida che possiamo fare è che, se $y_0 = 0$ la molla centrale non si allunga, ma i due corpi oscillano parallelamente.

Finiamo di studiare il caso, semplificando il problema. Poniamo quindi: $\varphi = \bar{\varphi} = 0$ e $x_0 = y_0$, con $x_2 = 0$ al tempo $t = 0$. Le due equazioni diventano così:

$$x_1 = x + y = x_0 \sin(\omega_0 t) + x_0 \sin(\bar{\omega} t)$$

$$x_2 = x - y = x_0 \sin(\omega_0 t) - x_0 \sin(\bar{\omega} t)$$

Utilizzando le regole di prostaferesi terminiamo finalmente lo studio ottenendo le due equazioni finali del moto:

$$x_1 = 2x_0 \sin\left(\frac{\omega_0 + \bar{\omega}}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_0 - \bar{\omega}}{2}t\right)$$

$$x_2 = 2x_0 \sin\left(\frac{\omega_0 - \bar{\omega}}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_0 + \bar{\omega}}{2}t\right)$$



Capitolo 3

Parte Seconda - Meccanica dei sistemi

3.1 Sistemi di punti e corpo rigido

Dopo aver studiato la meccanica del punto materiale, è immediato pensare che, nella realtà, non esistono punti materiali, ma esistono solo corpi che hanno forma e dimensioni assolutamente non paragonabili a quelle di un punto. La meccanica newtoniana non si ferma quindi allo studio del modello del punto, bensì parte da questo per arrivare a descrivere il moto di tutti i corpi materiali reali.

È bene quindi definire i **sistemi di punti materiali**: essi non sono nient'altro che un insieme di punti materiali che vengono studiati complessivamente. Come vedremo dettagliatamente, lo studio di un sistema si rifà spesso allo studio del punto materiale, tenendo tuttavia conto di movimenti complessivi del sistema, come nel caso delle rotazioni.

I sistemi di punti possono essere più o meno rigidi, a seconda di come è definito il sistema. Se le distanze interne al sistema tra i punti appartenenti a esso variano nel tempo, allora il sistema sarà *non rigido*; allo stesso modo, quando le distanze interne restano invece costanti nel tempo, avremo a che fare con un sistema *rigido*.

Un sistema rigido è anche chiamato **corpo rigido**: esso è un sistema materiale di punti *indeformabile*. Come è intuitivo pensare, esso è una buona schematizzazione degli oggetti reali. Un corpo rigido presenta, in totale, 6 gradi di libertà, di cui 3 sono dovuti agli assi del centro di massa, che vedremo meglio nei prossimi capitoli, e i restanti 3 agli angoli di rotazione di questi assi rispetto a un sistema di riferimento esterno considerato fisso.

3.2 Centro di massa

Lo studio della dinamica del punto materiale ci ha permesso di descrivere moltissimi fenomeni. Vogliamo però ora fare un passo avanti, e studiare la dinamica di un sistema costituito da più punti materiali. Facciamo alcune considerazioni generali. Su ogni punto agisce una forza \vec{F}_i , risultante delle forze esterne agenti sul punto, che indicheremo con $\vec{F}_i^{(e)}$, e delle forze interne al sistema, esercitate dagli



altri punti, $\vec{F}_i^{(i)}$. In generale, la risultante delle forze interne agenti sull' i -esimo punto è diversa da zero, però la somma di tutte le forze interne è nulla. Infatti, in virtù del terzo principio della dinamica, la forza che un punto esercita sull'altro è uguale ed opposta alla forza che quest'ultimo esercita sul primo punto. Ora, ogni punto avrà una sua grandezza, cioè una velocità, quantità di moto, accelerazione ecc. Definiamo quindi grandezze analoghe per l'intero sistema. Per esempio, la quantità di moto del sistema sarà la somma delle quantità di moto di ciascun punto:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

O ancora, l'energia cinetica totale del sistema sarà la somma delle energie cinetiche di ciascun punto:

$$E_k = \sum_i E_{k,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

mentre la velocità del sistema non è la somma delle velocità dei singoli punti, e neanche l'accelerazione del sistema è la somma delle accelerazioni dei punti, come vedremo.

A ben vedere però, descrivere il moto di un insieme di più punti pare complicato. Per esempio, se lanciamo in aria una palla da golf (che possiamo considerare come un insieme continuo di punti, gli atomi che la costituiscono) senza imprimerle rotazioni, il suo moto è facile da descrivere, è parabolico. Se, invece, lanciamo per aria un martello (un altro insieme continuo di punti) il suo moto risulta più complicato. Non possiamo trattare il martello alla stregua di un punto materiale perché ogni sua parte segue traiettorie differenti. Tuttavia, se potessimo scattare molte fotografie durante il suo moto per poi confrontarle, ci accorgeremmo che difatti esiste un punto del martello che si muove di moto parabolico: il suo *centro di massa*.

In generale definiamo il centro di massa di un sistema di n punti materiali come il punto geometrico la cui posizione è individuata, rispetto a un determinato sistema di riferimento, dal vettore

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + \dots + m_n}$$

Le componenti di questo raggio vettore lungo tre assi cartesiani orientati saranno quindi

$$x_{cm} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}, \quad y_{cm} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}, \quad z_{cm} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

Se i punti si spostano anche la posizione del centro di massa varia. La sua velocità sarà

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{P}}{M}$$



e derivando otteniamo l'accelerazione

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{M}$$

Se il moto del sistema è studiato in un sistema di riferimento inerziale, in assenza di forze apparenti, allora possiamo scrivere la seconda legge della dinamica per un singolo punto come

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}$$

quindi

$$M \vec{a}_{cm} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i (\vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}) = \vec{R}^{(e)}$$

dove $\vec{R}^{(e)}$ indica la risultante delle forze esterne agenti sul sistema (si noti come la risultante delle forze interne sia nulla). Abbiamo quindi ottenuto la seguente equazione

$$\vec{R}^{(e)} = M \vec{a}_{cm}$$

che esprime il *teorema del centro di massa*. Il centro di massa si muove come un punto materiale a cui è applicata la risultante delle forze esterne e in cui è concentrata tutta la massa del sistema. Ci siamo ricondotti al problema precedente: per studiare la dinamica di un sistema di corpi possiamo studiare il moto di un singolo punto materiale, cosa che sappiamo fare bene. Tornando all'esempio del martello, ogni punto di esso avrà una sua traiettoria, ma quella del centro di massa è semplice: è una parabola. Questo perché l'unica forza esterna agente sul martello è la forza peso. Quindi solo le forze esterne possono modificare il moto del centro di massa. Se siamo fermi e alziamo un braccio, è stata la forza dei nostri muscoli, forza interna al sistema uomo, ad averlo accelerato verso l'alto. Il nostro centro di massa però è rimasto fermo. In altre parole, non possiamo spostarci senza l'aiuto di una forza esterna. Quando camminiamo, è la forza di attrito col pavimento che ci spinge in avanti.

E' bene ora fare alcune osservazioni. Il moto del centro di massa rappresenta il moto globale dei punti materiali che costituiscono il sistema. Il fatto che il centro di massa abbia una certa velocità \vec{v}_{cm} significa che in media il sistema si sta spostando in una data direzione, anche se nessuna delle velocità dei singoli punti coincide necessariamente con \vec{v}_{cm} . Inoltre, dire che il centro di massa si muove come se lì fossero concentrate tutte le forze esterne non significa che tali forze agiscano solo sul centro di massa. Può succedere benissimo che sul centro di massa non agisca nessuna forza, ma agiscano su altri punti del sistema. Per esempio, se siamo in piedi sul pavimento la forza normale agisce sui nostri piedi, e non sul nostro centro di massa, che si trova da qualche parte a metà del nostro corpo. Il teorema ci dice solo che, se vogliamo studiare il moto del centro di massa, possiamo "far finta" che lì agiscano le forze esterne.

Facciamo infine una considerazione sul centro di massa in sé. Il centro di massa di un sistema può non essere un punto del sistema. Per esempio, il centro di massa



di una sfera omogenea è il centro della sfera, ma il centro di massa della cupola di San Pietro non è un punto della cupola, ma si trova all'interno della cavità. O ancora, se due punti materiali di massa m si vengono incontro con la stessa velocità, il centro di massa del sistema si trova fermo a metà del segmento che congiunge i due punti. Infatti

$$x_{cm} = \frac{mx_1 + mx_2}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad v_{cm} = \frac{mv - mv}{2m} = 0$$

3.3 Conservazione della quantità di moto

Come caso particolare del teorema del centro di massa abbiamo che, se la risultante delle forze esterne è nulla, allora l'accelerazione del centro di massa è nulla. Quindi

$$\Delta \vec{P} = 0$$

ovvero la quantità di moto del sistema, cioè la quantità di moto del centro di massa, non cambia. Se la risultante delle forze esterne è nulla si dice anche che il sistema è *isolato*. Questa legge di conservazione, nota come *principio di conservazione della quantità di moto*, ci permette di analizzare una grande numero di situazioni. Per esempio, supponiamo che una persona si trovi su un carrello, inizialmente fermo, che si trova su un piano orizzontale con attrito trascurabile. Supponiamo inoltre che la persona tenga in mano un sasso. Cosa succede se lancia il sasso orizzontalmente in avanti?

La forza che esercita sul sasso è una forza interna al sistema costituito da carrello, persona e sasso, quindi non può influenzare il moto del centro di massa. Non essendoci forze esterne, concludiamo che il centro di massa, inizialmente fermo, deve rimanere fermo anche dopo che il sasso è stato lanciato. Se m_1 è la massa totale di persona e carrello, m_2 la massa del sasso e v la velocità (orizzontale) con cui viene lanciato il sasso, possiamo scrivere:

$$m_1 \vec{u} + m_2 \vec{v} = 0$$

da cui

$$\vec{u} = -\frac{m_2}{m_1} \vec{v}$$

ovvero il carrello si muove con velocità di modulo u nel verso opposto al moto del sasso. Ragionevolmente possiamo supporre che $m_1 \gg m_2$, da cui $u \ll v$: la velocità del carrello è molto più piccola di quella del sasso.

3.4 Sistema di riferimento del centro di massa

Nello studio della dinamica dei sistemi di punti è spesso utile considerare il sistema di riferimento del centro di massa. Un tale sistema di riferimento ha queste caratteristiche:



- l'origine degli assi si trova nel centro di massa;
- gli assi sono sempre paralleli rispetto a quelli di un sistema di riferimento inerziale;
- non è in generale un sistema inerziale, poiché in generale non è nulla la risultante delle forze esterne agenti sul sistema.

Indicando con un apice le grandezze riferite al sistema di riferimento del centro di massa possiamo scrivere per ogni punto

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{cm}$$

dove \vec{r}_i è il raggio vettore che identifica la posizione dell'*i*-esimo punto rispetto a un sistema di riferimento inerziale e \vec{r}_{cm} è il vettore che unisce le origini dei due sistemi di riferimento. Dal teorema delle velocità relative con $\omega = 0$ abbiamo che

$$\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{cm}$$

Poiché abbiamo assunto il centro di massa come riferimento valgono le relazioni

$$\vec{r}'_{cm} = 0, \quad \vec{v}'_{cm} = 0$$

da cui

$$\sum_i m_i \vec{v}'_i = 0$$

ovvero la quantità di moto del sistema, somma delle quantità di moto dei singoli punti, è nulla se viene calcolata nel sistema di riferimento del centro di massa. Facciamo ora alcune considerazioni energetiche. L'energia cinetica del sistema così come è misurata nel sistema di riferimento inerziale è:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

che possiamo scrivere come

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_{cm})^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum_i m_i \vec{v}'_i \vec{v}_{cm}$$

Il primo termine rappresenta l'energia cinetica del sistema di punti così come è misurata nel sistema di riferimento del centro di massa, il secondo termine è l'energia cinetica del centro di massa, misurata nel sistema di riferimento inerziale, e infine l'ultimo termine è nullo, in quanto sappiamo che la quantità di moto del sistema misurata nel sistema del centro di massa è nulla. In definitiva possiamo scrivere

$$E_k = E'_k + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$



che rappresenta il *teorema di König per l'energia cinetica*. L'energia cinetica di un sistema di punti materiali è uguale alla somma dell'energia cinetica del sistema misurata nel sistema di riferimento del centro di massa più l'energia cinetica del centro di massa stesso, misurata nel sistema inerziale.

3.5 Mutua interazione: problema dei due corpi

Il problema della mutua interazione riguarda casi in cui sono presenti due punti materiali i quali si esercitano a vicenda una forza. Prendiamo un caso semplificato: due corpi di massa m_1 e m_2 , posti a distanza \vec{r} , esercitando ognuno una forza attrattiva sull'altro, la cui direzione è la retta congiungente i due punti materiali. Avremo che le due forze sono uguali ed opposte: chiameremo il loro modulo f .

Prendiamo un sistema di riferimento con l'origine nel centro di massa del sistema. In questo modo il sistema non sarà accelerato, bensì si muoverà di moto costante, per tale è un sistema di riferimento inerziale per il quale valgono le leggi della dinamica. Avremo quindi che:

$$\begin{aligned}\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} &= \vec{0} \\ m_1\vec{r}_1 &= -m_2\vec{r}_2 \\ \frac{r_1}{r_2} &= \frac{m_2}{m_1}\end{aligned}$$

Dove nell'ultima espressione si è passati al modulo delle distanze. Studiamo a questo punto il moto di uno dei due corpi, prendiamo in analisi quello con massa m_2

$$\vec{f}(r) = m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}$$

Notiamo due cose: primo, che la forza è funzione della distanza tra i due punti. Secondo, che la distanza tra i due punti coincide con la somma delle distanze dei punti dal centro di massa, ovvero: $r = r_1 + r_2$. Per scriverlo in maniera migliore, evidenziamo r_2 come: $r = r_2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)$. Poiché abbiamo visto poco sopra la relazione che lega il rapporto dei due raggi, possiamo a questo punto scrivere:

$$\begin{aligned}r &= r_2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = r_2 \frac{m_1 + m_2}{m_1} \\ \vec{r}_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}\end{aligned}$$

Andiamo adesso a sostituire questa espressione nella formula della forza:

$$\vec{f}(r) = m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Diamo una definizione rapida:

Definizione (Massa ridotta)



Si definisce *massa ridotta* di un sistema a due punti:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Detto questo, otteniamo infine:

$$\vec{f} = \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Questa conclusione è importante: il problema di due punti in mutua interazione può essere ridotto a un solo corpo avente come massa la **massa ridotta**. Questa conclusione riguarda *tutti* i casi di mutua interazione.

3.6 Sistemi a massa variabile

Fin'ora abbiamo visto problemi relativi a punti materiali o sistemi di punti materiali di massa fissata, cioè costante nel tempo. La descrizione dinamica del moto per essi è determinata dall'equazione di Newton $\sum_{i=1}^n \vec{F} = m\vec{a}$, riscritta come $\vec{R}^{(e)} = M\vec{a}$ nel caso di più punti materiali. In realtà situazioni in cui la massa varia non sono rare, basti pensare a una scala mobile, o a un razzo che espelle carburante. Per analizzare questi tipi di moto dobbiamo ricordare che la forza è uguale alla derivata temporale della quantità di moto, però ora dobbiamo derivare anche la massa:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

Vediamo subito una situazione concreta. Supponiamo che su un nastro trasportatore di massa m_0 si muova con velocità orizzontale v_0 . A un certo punto sul nastro vengono depositate verticalmente delle scatole, di modo che la massa totale aumenti linearmente nel tempo, con k costante di proporzionalità. Nel caso non agisca nessuna forza esterna possiamo applicare la legge di conservazione della quantità di moto tra l'istante iniziale e un istante generico. Quindi

$$m_0 v_0 = m(t) v(t)$$

da cui

$$v(t) = \frac{m_0 v_0}{m_0 + kt}$$

La velocità del nastro trasportatore quindi diminuisce nel tempo. Il punto interessante qui è che, seppur ci sia variazione di velocità, e quindi accelerazione, non c'è forza. Nei sistemi a massa variabile quindi sembra che la seconda legge della dinamica non sia più valida. Il dubbio si risolve subito pensando che la legge a cui dobbiamo far riferimento in generale è $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, che si riduce a $\vec{F} = m\vec{a}$ solo se la massa è costante, e questo è vero per i punti materiali.



3.7 Moto di un razzo

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto i sistemi a massa variabile. Qui vogliamo discutere un esempio esemplare di tali sistemi, analizzando il moto di un razzo. Il fenomeno è semplice: il motore del razzo espelle il carburante a grande velocità, e, per la conservazione della quantità di moto, il razzo si muove nel verso opposto (si noti che non è il motore in sé che spinge il razzo). Vogliamo dare ora una descrizione quantitativa di questo fenomeno.

Fissiamo dunque un sistema di riferimento inerziale con verso positivo nel verso di moto (orizzontale) del razzo, che a un certo istante ha una massa m e che si muove con velocità v . Se il razzo espelle una massa infinitesima dm la velocità del razzo diventa $v + dv$, mentre dm si muove con velocità in modulo v^* rispetto a quest'ultimo e in senso opposto. Tenendo conto della formula per le velocità relative, la velocità di dm rispetto a un sistema inerziale è pari a $v - v^*$. Assumendo che non ci siano forze esterne nella direzione orizzontale, la quantità di moto si conserva:

$$mv = (m - dm)(v + dv) + dm(v - v^*)$$

da cui, trascurando il prodotto di quantità infinitesime,

$$mdv = v^* dm$$

cioè

$$dv = \frac{dm}{m} v^*$$

Supponendo che la massa venga espulsa con un tasso costante possiamo scrivere:

$$m(t) = m_0 - kt$$

con differenziale $dm = kdt$ positivo, perché abbiamo considerato dm come valore assoluto della massa espulsa. Integrando

$$\Delta v = \int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t \frac{v^* k}{m_0 - kt} dt = -v^* \int_{t_0}^t \frac{-k}{m_0 - kt} dt = v^* [\ln m_0 - \ln (m_0 - kt)]$$

quindi la legge della velocità è:

$$v(t) = v_0 + v^* \ln \frac{m_0}{m_0 - kt}$$

Supponiamo ora che il razzo venga lanciato verticalmente. Lungo la direzione verticale agisce la forza di gravità, e la quantità di moto del razzo non si conserva. Trascurando la variazione di g con la quota, se prima $dp = mdv - v^* dm = 0$, ora

$$dp = mdv - v^* dm = Fdt = -mgdt$$



e

$$dv = v^* \frac{dm}{m} - gdt$$

Integrando

$$\Delta v = \int_{t_0}^t \frac{v^* k}{m_0 - kt} dt - \int_{t_0}^t g dt$$

E la legge della velocità è:

$$v(t) = v_0 + v^* \ln \frac{m_0}{m_0 - kt} - gt$$

In caso di moto verticale il moto viene rallentato.

3.8 La seconda legge cardinale

Per quanto riguarda la meccanica del punto materiale, le leggi fondamentali che descrivevano il moto di un punto erano 3; nei sistemi esse diventano 2, ricordando però che le 3 leggi della dinamica valgono poi per i singoli punti del sistema. Le leggi fondamentali dei sistemi si chiamano **leggi cardinali**; la prima è già stata affrontata nel capitolo sul centro di massa, ed afferma:

$$\vec{F}^{tot} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

Questa descrive la variazione di moto di un sistema. Per descrivere invece le rotazioni, si utilizza la seconda, ovvero:

$$\vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{J}}{dt}$$

Questa legge è semplicemente la legge del momento angolare del punto materiale, sommata però sull'indice i . Ricordiamo che :

$$\vec{J} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{f}$$

Come vedremo nei prossimi capitoli, la seconda legge cardinale permette di descrivere tutti i diversi tipi di moto di un sistema; il suo utilizzo è di importanza fondamentale nella soluzione di problemi ed esercizi.

La legge è valida sia per un polo fisso che per un qualsiasi tipo di polo mobile, con un'aggiunta che vedremo nel prossimo capitolo.



3.9 Teorema di König per il momento angolare

Come abbiamo visto per l'energia cinetica, anche il momento angolare può essere scritto come:

$$\vec{J}_0 = \vec{J}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge M\vec{v}_{CM}$$

.

Questo non è altro che l'equivalente del teorema di König per il momento angolare.

Teorema (di König per il momento angolare)

Il momento angolare di un sistema rispetto a un polo fisso equivale alla somma del momento angolare del centro di massa e del sistema rispetto ad esso.

$$\vec{J}_0 = \vec{J}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge M\vec{v}_{CM}$$

.

Dimostrazione

Ricordando che:

$$\begin{aligned}\vec{r}_i &= \vec{r}'_i + \vec{r}_{CM} \\ \vec{v}_i &= \vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}\end{aligned}$$

Scriviamo il fattore \vec{J}_0 :

$$\begin{aligned}\vec{J}_0 &= \sum_i (\vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i) = \sum_i \left[(\vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}) \wedge m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}) \right] = \\ &= \sum_i (m_i \vec{r}'_i \wedge \vec{v}_{CM}) + \sum_i (\vec{r}'_i \wedge m_i \vec{v}'_i) + \\ &+ \sum_i (\vec{r}_{CM} \wedge m_i \vec{v}'_i) + \sum_i (\vec{r}_{CM} \wedge m_i \vec{v}_{CM}) = \\ &= M\vec{r}'_{CM} + \vec{J}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge M\vec{v}'_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge M\vec{v}_{CM} \\ &\Rightarrow \vec{J}_0 = \vec{J}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge M\vec{v}_{CM}\end{aligned}$$

Questo teorema è largamente utilizzato in teoria sia in astrofisica, per descrivere il moto di un pianeta che ruota su se stesso e anche attorno a una stella, tipo la Terra con il Sole, ma anche in fisica particellare, per descrivere lo spin di una particella.

Un risultato molto simile è il dimostrare come la seconda legge cardinale valga sia per un polo fisso che per un polo mobile.

3.9.1 Il momento esterno rispetto a un polo qualunque

Prendiamo un polo Ω qualunque, anche mobile; il momento angolare di un sistema \vec{J}_Ω rispetto a questo polo sarà:



$$\vec{J}_\Omega = \sum_i \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

Dove \vec{r}'_i rappresenta la distanza dell' i -esimo punto del sistema dal polo. Per calcolare il momento delle forze esterne, deriviamo rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{J}_\Omega}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{v}_i \right) = \\ &= \sum_i \vec{v}'_i \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{a}_i \\ &= \sum_i \frac{d}{dt} [(\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \wedge (m_i \vec{v}_i)] + \vec{\tau}_\Omega^{ext} \\ &= \sum_i \vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_i - \sum_i \vec{v}_\Omega \wedge m_i \vec{v}_i + \vec{\tau}_\Omega^{ext} \\ &\Rightarrow -\vec{v}_\Omega \wedge M \vec{v}_{CM} + \vec{\tau}_\Omega^{ext} = \frac{d\vec{J}}{dt} \\ &\Rightarrow \vec{\tau}_\Omega^{ext} = \frac{d\vec{J}}{dt} + \vec{v}_\Omega \wedge M \vec{v}_{CM} \end{aligned}$$

Possiamo osservare che, se Ω corrisponde al centro di massa, oppure è un polo fisso, la velocità rispetto ad esso $\vec{v}_\Omega = 0$ è nulla, quindi la seconda legge cardinale diventa nella forma con cui la conosciamo, ovvero $\vec{\tau}_\Omega^{ext} = \frac{d\vec{J}}{dt}$.

3.10 Corpo rigido in rotazione

Prendiamo un corpo rigido, che sia in rotazione attorno a un asse fisso a . Il corpo ruota con velocità angolare ω , che può anche variare nel tempo, ma è uniforme su tutto il corpo; preso un elementino di massa dm , che si trova a distanza h dall'asse di rotazione, avremo che la sua velocità tangenziale è $v = h\omega$.

Calcoliamo allora l'energia cinetica del corpo rigido in rotazione; poiché parliamo di corpo rigido, questo è un sistema continuo di punti materiali, quindi:

$$dK = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} dm h^2 \omega^2$$

Da cui otteniamo la relazione:

$$K = \int \frac{1}{2} h^2 \omega^2 dm = \frac{\omega^2}{2} \int h^2 dm$$

Il termine $\frac{\omega^2}{2}$ è costante; il secondo termine, invece, $\int h^2 dm$, si chiama **momento di inerzia** del corpo rigido e dipende dalla massa e dalla geometria del corpo. Nel prossimo capitolo calcoleremo i momenti di inerzia di solidi noti.

Per quanto riguarda l'energia cinetica, definito il *momento di inerzia* come: $I = \int h^2 dm$, si ha che l'energia cinetica di un corpo rigido, rotante attorno ad un asse fisso, è:



$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Nel caso generale, in cui, oltre a ruotare, stia anche traslando, avremo che, per il teorema di König, l'energia cinetica sarà data:

$$K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Nel caso particolare in cui il corpo ruoti attorno a un punto fisso O diverso dal centro di massa l'energia cinetica è invece pari a:

$$K = \frac{1}{2}I_O\omega^2$$

Dove per I_O si intende il momento di inerzia relativo ad un asse passante per O , ma lo vedremo più dettagliatamente nel prossimo capitolo.

3.11 Coppia di forze

Trattiamo brevemente il caso in cui, ad un corpo rigido, è applicata una coppia di forze parallele di verso opposto. Vettorialmente, $\vec{f}_2 = -\vec{f}_1$. Nell'esempio più semplice possibile, prendiamo due punti materiali, uniti da una sbarretta rigida di massa trascurabile, ai quali vengono applicate le due forze: il loro effetto è causa una rotazione dell'asta che unisce i due punti con velocità angolare ω .

L'effetto è spiegato dalla seconda legge cardinale. Il momento delle forze esterne non è nullo; chiamata b la lunghezza della corda e $r_1 = r_2$ le distanze dei due punti dal centro di massa, avremo:

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{f}_i = \vec{r}_1 \wedge \vec{f}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{f}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \wedge \vec{f}_1 = b f$$

Il risultato è, ovviamente, il modulo del momento causato dalla coppia di forze, ovvero il modulo di una delle due forze moltiplicato per la distanza tra i due punti di applicazione. In questo caso abbiamo però considerato le due forze uguali e discordi; se fossero state di modulo differente e verso concorde, andavano calcolati i momenti delle forze, che avrebbero avuto senso discorde (perché avrebbero causato due rotazioni di verso opposto) e il maggiore avrebbe prevalso.

Per chiudere il capitolo, sfruttiamo l'esempio del sistema composto da due punti materiali uniti. Calcoliamo allora il momento angolare del sistema:

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \sum_i \vec{r}_i \wedge m\vec{v}_i = \vec{r}_1 \wedge m\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \wedge m\vec{v}_2 = \\ &= \frac{b}{2}mv_1 + \frac{b}{2}mv_2 \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo considerato i moduli. Ricordiamo che $v = \omega r$ e, in questo caso, $v_1 = v_2 = \omega \frac{b}{2}$; sostituendo:



$$|\vec{J}| = 2 \left(\omega m \frac{b^2}{4} \right) = I\omega$$

Infatti il fattore $2m\frac{b^2}{4}$ corrisponde al momento d'inerzia del sistema, definito dalla somma $\sum_i m_i r_i^2$. Vettorialmente avremo:

$$\vec{J} = I\vec{\omega}$$

A questo punto, possiamo scrivere la seconda legge cardinale in un altro modo, che stavolta descrive appieno la rotazione del sistema:

$$\vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt} (I\vec{\omega}) = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

Dove $\vec{\alpha}$ è l'accelerazione angolare del sistema.

3.12 Sistemi di forze parallele

Un sistema di forze parallele è un insieme di forze che si applicano tutte lungo la stessa direzione *in ogni punto* di un sistema di punti materiali.

Preso un sistema di riferimento inerziale centrato in Ω esterno al sistema di punto, calcoliamo il momento delle forze esterne $\vec{\tau}$ rispetto a questo punto. Poiché tutte le forze sono dirette lungo una stessa direzione che indichiamo con \hat{u} possiamo scrivere ogni forza come $\vec{f}_i = f_i \hat{u}$. Inoltre vale $\sum_i m_i = M$.

Il momento delle forze sarà uguale a:

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{f}_i = \sum_i \vec{r}_i \wedge f_i \hat{u} = \left(\sum_i f_i \vec{r}_i \right) \wedge \hat{u}$$

Il fattore $\sum_i f_i \vec{r}_i$ corrisponde a $\sum_i f_i \vec{r}_c$, dove \vec{r}_c **non** è il centro di massa, bensì *il centro di applicazione* della forza così definito:

Definizione (Centro di applicazione della forza)

In un sistema di forze parallele, esse possono considerarsi come applicate ad un unico punto, chiamato centro di applicazione, che vale:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i f_i \vec{r}_i}{\sum_i f_i}$$

Tornando al calcolo del momento delle forze:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \left(\sum_i f_i \vec{r}_i \right) \wedge \hat{u} = \left(\sum_i f_i \right) \vec{r}_c \wedge \hat{u} = \vec{r}_c \wedge \sum_i f_i \hat{u} \\ \Rightarrow \vec{\tau}_\Omega &= \vec{r}_c \wedge \vec{F} \end{aligned}$$



Dove con $\vec{F} = \sum_i f_i \hat{u}$. Il caso particolare di notevole interesse è la forza peso, infatti, applicando la definizione di centro di applicazione di una forza, possiamo notare che esso *coincide* col centro di massa del corpo. Infatti:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{g}}{\sum_i m_i \vec{g}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \vec{r}_{CM}$$

Quando, quindi, si considera la forza peso come tutta applicata al centro di massa di un sistema o corpo rigido non si sta compiendo alcuna approssimazione: essa è veramente applicata al baricentro del corpo.

3.13 Pendolo fisico

Nella meccanica del punto materiale abbiamo già trattato del **pendolo**, trattando in quel caso un semplice punto materiale appeso ad un filo. Nella realtà, però, abbiamo a che fare con strumenti ben diversi, con caratteristiche fisiche ben diverse che non possono essere approssimabili a punti materiali: trattiamo qui di pendoli fisici, ovvero di oggetti che pendolano.

Qualsiasi oggetto può comportarsi da pendolo fisico; l'esempio più immediato, e rilevante per confronto con il pendolo semplice, è una sbarretta omogenea che può ruotare attorno a un estremo. La variabile che descrive il moto del corpo è l'angolo θ che la sbarretta forma con la verticale, quindi il problema presenta un solo grado di libertà. Come verso positivo, scegliamo l'angolo che forma a destra della verticale.

Le forze agenti sul corpo sono la reazione del vincolo \vec{R} , che è applicata al perno attorno al quale ruota il corpo; non conosciamo nulla di questa forza, ne modulo, ne direzione o verso. Conosciamo invece la forza peso $M\vec{g}$ applicata al centro di massa della sbarretta, ovvero al centro geometrico, e diretta verso il basso. Per studiare il moto sfruttiamo la seconda legge cardinale dei sistemi, scegliendo come polo il punto O attorno al quale la sbarretta ruota. Avremo quindi:

$$\vec{\tau}^{ext} = \vec{r}_1 \wedge M\vec{g} + \vec{r}_2 \wedge \vec{R} = \vec{r}_1 \wedge M\vec{g}$$

Avendo scelto come polo O il braccio della forza vincolare è nullo e non contribuisce quindi al momento. Il fattore $\vec{r}_1 \wedge M\vec{g}$ ha invece modulo:

$$|\vec{r}_1 \wedge M\vec{g}| = \frac{l}{2} Mg \sin \theta$$

La distanza dal polo del centro di massa è infatti metà sbarretta, e l'angolo formato tra il braccio e la forza peso è lo stesso che l'asta forma con la verticale. Notiamo inoltre che il momento è *di richiamo*: per angoli positivo esso assume segno negativo e l'asta ruota in senso orario, tendendo a tornare alla posizione d'equilibrio; analogamente, per angoli negativi ha verso positivo, l'asta ruota in senso antiorario e torna sempre verso la posizione di equilibrio. La componente lungo l'asse z sarà quindi:

$$\tau_z = -\frac{l}{2} Mg \sin \theta$$



Applichiamo ora la legge cardinale:

$$\tau_z = \frac{dJ}{dt} = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{l}{2} Mg \sin \theta$$

Otteniamo l'espressione:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{l Mg}{2I} \sin \theta = 0$$

Per angoli piccoli approssimiamo $\sin \theta \approx \theta$, ottenendo l'equazione differenziale di un oscillatore armonico:

$$\ddot{\theta} + \frac{l Mg}{2I} \theta = 0$$

La pulsazione del moto sarà $\omega = \sqrt{\frac{l Mg}{2I}}$, mentre la soluzione del problema è data dall'equazione:

$$\theta(t) = \theta_{MAX} \sin(\omega t + \varphi)$$

Ricordiamo che il momento d'inerzia di una sbarretta ruotante attorno a un asse passante per l'estremo è $I = \frac{Ml^2}{3}$; sostituendolo nell'espressione della pulsazione:

$$\omega = \sqrt{\frac{l}{2} \frac{M}{Ml^2} 3g} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{g}{l}}$$

Che è molto simile a quella ottenuta per il pendolo semplice, che ricordiamo essere $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

3.13.1 Pendolo fisico a cono

Come per il pendolo semplice, anche per il pendolo fisico può esserci il caso in cui l'oggetto non oscilli bensì ruoti attorno a una quota fissa, mantenendo l'angolo θ con la verticale costante. Le forze agenti restano sempre \vec{R} , reazione vincolare, e $M\vec{g}$, forza peso, applicata al centro della sbarretta. Come polo scegliamo anche questa volta il punto di vincolo O , per cui la reazione vincolare non contribuisce al momento in questo caso. Quindi sarà:

$$\vec{\tau}^{ext} = \vec{r} \wedge M\vec{g}$$

In modulo avremo che $\tau = \frac{l}{2} Mg \sin \theta$. Per il momento angolare, invece:

$$\vec{J} = \int \vec{r} \wedge dm\vec{v} \Rightarrow |\vec{J}| = \int_0^l r dm v = \lambda \int_0^l r dr v$$

Però, come già sappiamo, questo procedimento porta a

$$|\vec{J}| = I\omega = \left(\frac{Ml^2}{3} \sin \theta \right) \omega$$



La componente verticale del momento angolare sarà data da $J_z = J \sin \theta = \frac{Ml^2}{3} \sin^2 \theta \omega$

Il momento delle forze esterne, in modulo, è uguale a $|\vec{\tau}| = \left| \frac{d\vec{J}}{dt} \right| = J_z \omega = \frac{Ml^2}{3} \sin^2 \theta \omega^2$; uguagliandolo al momento sopra calcolato:

$$\frac{Ml^2}{3} \sin^2 \theta \omega^2 = \frac{l}{2} Mg \sin \theta \Rightarrow \omega^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l \sin \theta}$$

3.14 Moto di una trottola

Il moto di una trottola è largamente studiato in meccanica razionale, con un studio matematicamente più rigoroso e approfondito. Qui forniremo le conoscenze di base che introducono alla variazione del momento angolare \vec{J} di un corpo rigido.

Una trottola è un oggetto di dimensioni fisiche apprezzabili, di solito una sfera o, in ogni caso, una forma simmetrica che ne permetta una buona rotazione, capace di poter stare in equilibrio, ruotando, su un solo punto. Le uniche forze agenti sulla trottola, quando questa è in rotazione, sono la reazione normale al piano \vec{N} , applicata nel punto di contatto col piano, e la forza peso $m\vec{g}$, applicata al suo centro di massa.

3.14.1 Il moto di precessione

Data una velocità di rotazione ω alla trottola, calcoliamone i momenti delle forze, scegliendo come polo il punto di contatto col piano; in questo caso il contributo della reazione vincolare è nullo, e il momento totale delle forze è:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge m\vec{g}$$

Il corpo, in rotazione, possiede un momento angolare $J = I\omega$. L'effetto del momento della forza peso è quello di *far ruotare* l'asse di rotazione: infatti, se mettiamo la trottola in rotazione verticale sul punto di appoggio, questa si trova in equilibrio *precaro*: l'asse di rotazione tende ad inclinarsi, iniziando anch'esso a ruotare attorno alla verticale. Questo processo viene chiamato **moto di precessione**, ed è descritto dalla seconda legge cardinale dei sistemi. Infatti, come sappiamo:

$$\vec{\tau}^{ext} = \frac{\Delta J}{\Delta t}$$

In questo caso abbiamo preferito parlare di intervalli di tempo piuttosto che di infinitesimi: questo perché gli intervalli di tempo che andiamo a considerare sono apprezzabili quantitativamente. Sostituendo nella precedente formula il momento calcolato prima, troveremo che

$$(\vec{r} \wedge m\vec{g}) \Delta t = \Delta \vec{J}$$

Ovvero, dopo un certo intervallo di tempo Δt , possiamo apprezzare una variazione nel vettore momento angolare $\Delta \vec{J}$, che coincide con lo spostamento di questo



dall'asse verticale. Dalla precedente formula è immediato che, più è grande il momento angolare, più lungo sarà il tempo impiegato a inclinare l'asse di rotazione. Poiché il modulo del momento di rotazione è dato da $J = I\omega$, *maggiore sarà la velocità di rotazione, maggiore sarà il tempo necessario ad inclinare l'asse.*

Notiamo anche che, a variare, sono solo direzione e verso del momento; in questo caso *approssimiamo* la velocità di rotazione al caso in cui essa si **mantenga costante**. In realtà non è così, ma ne parleremo a fine capitolo.

Dopo un certo tempo, il vettore \vec{J} formerà con la verticale un angolo $\Delta\theta$; inoltre, mantenendo questo angolo costante, esso girerà attorno alla verticale, spostandosi di un angolo $\Delta\varphi$. Notiamo che le componenti del vettore \vec{J} restano costanti in modulo; inoltre la proiezione sulla verticale $J \cos \theta$ resta costante anche in direzione e verso, mentre la componente orizzontale $J \sin \theta$ ruota assieme all'asse, segnando appunto l'angolo $\Delta\varphi$. Avremo quindi che:

$$\frac{\Delta J}{J \sin \theta} = \Delta\varphi$$

Dividendo rispetto al tempo, otteniamo:

$$\frac{\Delta J}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right) J \sin \theta$$

Il fattore $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ lo chiamiamo Ω_p , *omega di precessione*, ovvero la *velocità di rotazione dell'asse*.

Ricordando il momento della forza peso calcolato all'inizio, è possibile ricavarsi esplicitamente Ω_p :

$$\begin{aligned} |\vec{r} \wedge m\vec{g}| &= r m g \sin \theta \\ r m g \sin \theta &= \frac{dJ}{dt} = J \sin \theta \Omega_p \\ r m g &= J \Omega_p = I \omega \Omega_p \\ \Omega_p &= \frac{r m g}{I \omega} \end{aligned}$$

Anche da questo risultato notiamo che *più è grande il momento angolare del corpo, più lentamente esso precede*.

Un caso particolare è il *moto della Terra attorno al Sole*. Infatti, come sappiamo, anche la Terra presenta un asse di rotazione *inclinato*, per cui anche in questo caso c'è un moto di precessione, causato inoltre anche da:

- la presenza della Luna e di altri corpi celesti;
- il fatto che la Terra non è perfettamente rigida;
- il fatto che la Terra non è perfettamente sferica.

Conosciamo la velocità di rotazione della Terra, pari a $\omega = \frac{2\pi}{1 \text{ d}}$; è possibile inoltre calcolare la velocità di precessione, che è uguale a:



$$\Omega_T = \frac{2\pi}{26\,000\text{ y}}$$

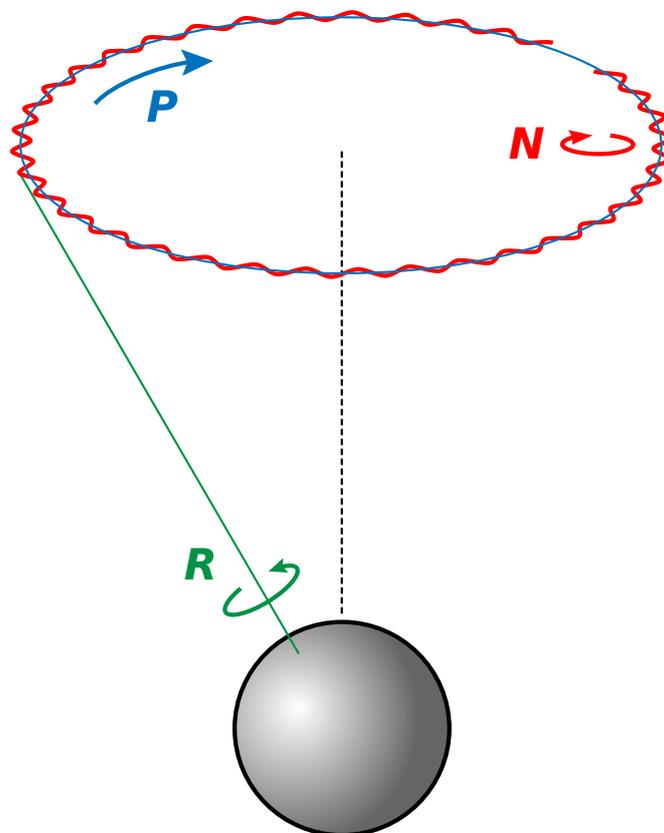
Notiamo che è lentissima, e infatti non risentiamo, nella nostra vita quotidiana, di questo effetto. Tuttavia questo c'è, e comporta diversi problemi che si manifestano a lungo tempo, che sono già in fase di studio.

3.14.2 Il moto di nutazione

Nel precedente calcolo del moto di precessione abbiamo considerato la velocità di rotazione attorno all'asse ω come se fosse costante; in realtà essa non lo è, e infatti:

$$\vec{J} = I\vec{\omega} \neq \text{cost}$$

Questo perché il moto di precessione *influenza* la rotazione del corpo: in generale, $\vec{\omega}$ varia istante per istante, sia in modulo che direzione, causando un moto assai complesso da studiare. Avremo quindi, oltre a un moto di precessione che fa ruotare l'asse attorno alla verticale, un ulteriore moto, detto **di nutazione**, che fa *oscillare* quest'asse di rotazione. Nella figura sottostante possiamo notare i tre moti del corpo: in verde la rotazione attorno all'asse, in blu la precessione e in rosso la nutazione.



3.15 Sistemi in equilibrio

Parliamo ora di sistemi o corpi rigidi *in equilibrio*. Mentre per i punti materiali la statica si studia prima della dinamica, per i sistemi essa è, solitamente, approcciata per ultima, perché risulta più facile studiarne prima la dinamica. Le condizioni di un sistema in equilibrio, infatti, prevedono conoscenze approfondite della dinamica: insomma, per capire se un corpo è fermo, è importante sapere come esso si muove, così da poter vedere che esso, in realtà, non si muove. Ovvero si studia l'assenza di movimento. In pratica, un corpo in equilibrio non si muove. Se sappiamo come si muove, possiamo vedere che non si muove e vedere che in equilibrio. Insomma s'è capito.

Definizione (Configurazione di equilibrio di un corpo rigido)

Se un sistema si trova nella **configurazione di equilibrio** in un certo istante, vi permane nei tempi successivi.

In formule, questo si traduce sfruttando le due leggi cardinali dei sistemi; se il centro di massa è *fermo*, e il corpo *non ruota* attorno ad esso. Quindi:

$$\begin{aligned}\vec{Q} &= 0 \\ \vec{J} &= 0\end{aligned}$$

O, per utilizzare le due leggi cardinali:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}^{tot} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = 0 \\ \vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{J}}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

Per studiare l'equilibrio di un corpo, quindi, basta imporre le condizioni di equilibrio. Come vedremo nel prossimo capitolo, dove forniremo degli esempi di problemi di statica, vedremo che le cose non sono così immediate.

3.16 Esempi di problemi di statica

Tratteremo in questo capitolo di esempi di problemi di statica. Tratteremo casi particolari, discutibili in vari modi.

3.16.1 Appoggio al piano

Un corpo rigido viene poggiato a un piano orizzontale senza attrito. Le uniche forze agenti sono la reazione normale \vec{N} e la forza peso $M\vec{g}$. Quest'ultima sappiamo essere applicata al centro di massa, ma la reazione del piano? La definizione di reazione vincolare afferma che essa è *una forza che il piano esercita su ogni punto d'appoggio del corpo, tale da contrastare la forza peso e permettere al piano di reggere il corpo*. Secondo quanto detto, quindi, anche la forza vincolare, come la forza peso, si comporta come un sistema di forze parallele: ogni punto di contatto tra piano e corpo è soggetto a una reazione vincolare, e a la somma di tutti i sin-



goli contribuiti *deve essere tale* da contrastare la forza peso. L'insieme dei punti del corpo a contatto con il piano viene chiamato **poligono d'appoggio**.

Ora, che la somma di tutti i contribuiti sia, in modulo, uguale alla forza peso lo sapevano già da tempo; l'unica cosa che non sappiamo con certezza, però, è *il punto di applicazione della forza*. Sempre secondo la definizione di reazione vincolare, questa **si esercita lungo la verticale del centro massa**, ovvero sul punto, appartenente al poligono d'appoggio, ortogonale al baricentro del corpo. Il problema è: *e se il centro di massa si trovasse, verticalmente, esterno al poligono d'appoggio?*

In questo caso, il corpo *non è in quiete*. La reazione vincolare, infatti, viene applicata **al punto più vicino alla verticale del centro di massa**, qualora questa cada fuori dal poligono d'appoggio. Allora il momento delle forze *non è più nullo*: se chiamo P il punto in cui si applica la reazione vincolare, il momento delle forze rispetto a quel punto è *diverso da zero*, il corpo presenta quindi una rotazione dovuta al momento della forza peso e cade a terra.

In questi casi, può risultare interessante controbilanciare le cose, e applicare una forza, diretta verso il basso come la forza peso, in un altro punto A del poligono d'appoggio diverso da P : per far sì che vi sia equilibrio, deve essere soddisfatta la legge:

$$\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{r} \wedge m\vec{g} - \vec{r}_2 \wedge \vec{f}_a = 0$$

3.16.2 Esercizi di statica

Esempio

Iniziamo a parlare di problemi di statica. Il primo esempio che diamo è quello di una sbarra poggiata a un muro. Tra la scala e il muro verticale *non vi è attrito*, mentre tra la scala e il pavimento si. Si richiede di trovare il coefficiente di attrito statico μ_s minimo affinché vi sia equilibrio.

Le forze agenti sulla sbarra sono \vec{P} forza peso, applicata al centro geometrico della sbarra; \vec{r} reazione vincolare del muro verticale, applicata nel punto di contatto tra sbarra e muro; \vec{R} reazione vincolare del pavimento, applicata nel punto di contatto Ω tra sbarra e pavimento; \vec{f}_{att} forza di attrito, applicata anch'essa nel punto Ω di contatto tra pavimento e sbarra; supponendo che la scala scivoli allontanandosi dal muro, questa si oppone allo spostamento. Appliciamo la prima condizione di equilibrio:

$$\vec{R} + \vec{P} + \vec{r} + \vec{f}_{att} = \vec{0}$$

Come polo scegliamo il punto Ω dove la sbarra è a contatto col pavimento. Calcoliamo i momenti delle forze relativamente a questo punto; le forze che si applicano in questo punto, ovvero \vec{R} e \vec{f}_{att} non contribuiscono al momento. Appliciamo la seconda condizione di equilibrio:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_P + \vec{\tau}_r = 0$$



Per comodità, ci scriviamo le forze agenti in coordinate cartesiane. Il problema permette che le forze possano essere scritte solo nelle coordinate x e y :

$$\begin{aligned}\vec{P} &= (0, -mg) \\ \vec{R} &= (0, R) \\ \vec{r} &= (r, 0) \\ \vec{f}_{att} &= (-f, 0)\end{aligned}$$

Le coordinate della forza risultante saranno quindi:

$$\begin{aligned}F_x = r - f = 0 &\Rightarrow f = r \\ F_y = -mg + R = 0 &\Rightarrow R = mg\end{aligned}$$

Passiamo al calcolo del momento. Facciamo un po' di considerazioni di segno: consideriamo il caso in cui il muro si trovi a sinistra della sbarra; la reazione del muro fornisce un momento sull'asse z negativo, perché mette il corpo in rotazione oraria. La forza peso, invece, ne fornisce un contributo positivo, poiché causa una rotazione antioraria. Possiamo quindi scrivere:

$$\tau_z = -lr \cos \theta + mg \frac{l}{2} \sin \theta$$

Dove θ è l'angolo che la sbarra forma col muro verticale. La distanza tra il polo e il punto di applicazione della reazione \vec{r} è tutta la lunghezza della sbarra, mentre per la forza peso è la metà, ovvero $\frac{l}{2}$, esattamente il punto in cui si applica la forza peso. A questo punto, poniamo $\tau_z = 0$:

$$rl \cos \theta = mg \frac{l}{2} \sin \theta \Rightarrow r = \frac{mg}{2} \tan \theta$$

Grazie al calcolo delle forze fatto prima, possiamo porre $f = r$ e $mg = R$:

$$\begin{aligned}f &= \frac{mg}{2} \tan \theta < \mu_s R \\ \mu_s R &> \frac{mg}{2} \tan \theta \\ \mu_s mg &> \frac{mg}{2} \tan \theta \\ \mu_s &> \frac{\tan \theta}{2}\end{aligned}$$

Il problema può considerarsi risolto.

Esempio

Prendiamo questa volta un'asta di lunghezza L fissata a un muro attraverso vincolo girevole, che ne permette la rotazione; l'altro estremo dell'asta è fissata, tramite una corda tesa, allo stesso muro, tale che l'asta sia in posizione di equilibrio orizzontale. Consideriamo la massa della sbarra *trascurabile*. Su di essa viene poggiato un punto materiale di massa m . L'angolo che la corda forma con l'asta orizzontale sia θ . Inoltre, la corda ha un limite di tensione T_{max} dopo il



quale essa si spezza. In funzione dei parametri dati, ricavare le componenti della forza vincolare \vec{F} e la distanza massima x_{max} in cui può essere poggiato il punto materiale. (*suggerimento*: x_{max} corrisponde col punto di rottura della corda).

L'asta è in equilibrio, quindi la somma delle forze è nulla. Studiamo le forze agenti: $m\vec{g}$ è la forza peso del punto materiale, applicata nella posizione x del punto; \vec{T} è la tensione della corda, applicata lungo la corda stessa nell'estremo dell'asta e \vec{F} è la reazione del vincolo, applicata nel punto A di contatto tra asta e muro. Avremo quindi:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F} = 0$$

È utile, anche stavolta, scrivere le forze in coordinate cartesiane; scelto il punto A come origine, facciamo coincidere l'asse x con l'asta orizzontale, mentre l'asse y sarà il muro. Le componenti delle forze sono quindi:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= (F_x, F_y) \\ \vec{T} &= (-T \cos \theta, T \sin \theta) \\ \vec{P} &= (0, -mg)\end{aligned}$$

Avremo quindi che la somma delle componenti lungo ogni asse è nulla:

$$\begin{cases} F_x - T \cos \theta = 0 & \text{lungo } x \\ F_y + T \sin \theta - mg = 0 & \text{lungo } y \end{cases}$$

Lungo l'asse z , invece, abbiamo il momento delle forze. Come polo scegliamo il punto di contatto tra asta e muro, così da rendere nulla la componente della forza vincolare. Avremo che:

$$\tau_z = TL \sin \theta - mgx = 0$$

Ricordiamo che il punto materiale si trova nella posizione incognita x , corrispondente al braccio della forza peso. Dall'ultima relazione possiamo ricavarci la tensione del filo *in funzione* di x :

$$T(x) = \frac{mg}{L \sin \theta} x$$

Questo valore di T va riportato nelle componenti scritte sopra; avremo quindi che:

$$\begin{aligned}F_x &= T \cos \theta = \frac{mg}{L} \cot \theta x \\ F_y &= mg - T \sin \theta = mg - \frac{mg}{L} x = mg \left(1 - \frac{x}{L}\right)\end{aligned}$$

L'ultimo punto è il calcolare il punto di rottura; poniamo nell'espressione della tensione $T = T_{max}$, ottenendo:

$$\frac{mg}{L \sin \theta} = T_{max} \Rightarrow x_{max} = \frac{T_{max} L \sin \theta}{mg}$$



Il problema è risolto.

3.17 Moto di rotolamento

Il moto di rotolamento riguarda solo ed esclusivamente i corpi rigidi; un punto materiale, infatti, non ha dimensioni notevoli da poter essere considerato *rotolante*. Consideriamo un cilindro su un piano inclinato. Come premessa, diciamo che *in assenza di attrito* si ha un rotolamento perfetto: ovvero il corpo scivola sul piano senza ruotare attorno al suo centro di massa, che si muove con accelerazione costante:

$$a_{CM} = g \sin \theta$$

Per schematizzare bene una rotazione reale, immaginiamo che il cilindro non sia perfettamente liscio, bensì sia una ruota dentata: in ogni istante del moto *il punto di appoggio rimane fisso*. Questo particolare è importante, ed è proprio questa caratteristica a permettere il rotolamento. Chiamiamo A il punto di appoggio al piano, O il centro del corpo e B il punto opposto a A ; data ω velocità angolare di rotazione, avremo che:

$$\begin{aligned} v_A &= 0 \\ v_O &= \omega r \\ v_B &= 2\omega r \end{aligned}$$

Studiamo il moto del corpo e le forze agenti; supponiamo ci sia attrito sul piano inclinato, così da permettere il rotolamento. Le forze agenti saranno \vec{N} reazione vincolare del piano, $m\vec{g}$ forza peso e \vec{f}_{att} la forza di attrito. Studiamo le condizioni affinché il corpo possa rotolare, sfruttando le due leggi cardinali.

$$\begin{aligned} \vec{F}^{tot} &= m\vec{a}_{CM} \\ \vec{\tau} &= \frac{d\vec{J}}{dt} \end{aligned}$$

Come polo scegliamo *il punto* A : i contributi delle reazione vincolare e della forza di attrito al momento sono *nulli*. Avremo quindi:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge m\vec{g} \Rightarrow \tau_y = rm g \sin \theta \quad \tau_x = \tau_z = 0$$

Applicando la seconda legge cardinale:

$$rm g \sin \theta = \frac{dJ}{dt} = \frac{d(I_A \omega)}{dt} = I_A \alpha = I_A \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Il momento di un cilindro ruotante attorno a un estremo è $I_A = \frac{3}{2}MR^2$; Possiamo calcolare l'accelerazione del centro di massa, che sarà diretta lungo il piano inclinato:



$$\begin{aligned}
 I_A \alpha &= r m g \sin \theta \\
 \alpha &= \frac{r m g \sin \theta}{I_A} = \frac{2}{3} \frac{g \sin \theta}{r} \\
 a_{CM} &= \alpha r = \frac{2}{3} g \sin \theta
 \end{aligned}$$

Passiamo adesso alla prima legge cardinale:

$$F = m a_{CM} \Rightarrow m a_{CM} = m g \sin \theta - f_{att}$$

Lungo il piano, infatti, la reazione normale non ha componente; possiamo calcolare la forza di attrito, ovvero:

$$f_{att} = m g \sin \theta - m a_{CM} = m g \sin \theta - \frac{2}{3} m g \sin \theta = \frac{1}{3} m g \sin \theta$$

L'attrito, però, non è dinamico, ma è da considerarsi *statico*: il punto di appoggio è sempre *fisso*, quindi non vi è attrito dinamico; per questo motivo vale:

$$f_{att} \leq \mu_s N = \mu_s m g \cos \theta$$

Sostituendo nella formula l'espressione della forza d'attrito ricavata otteniamo:

$$\mu_s m g \cos \theta \geq \frac{1}{3} m g \sin \theta \Rightarrow \mu_s \geq \frac{1}{3} \tan \theta$$

Questa è la condizione affinché vi sia *rotolamento* senza che il corpo scivoli sul piano. Ovviamente, se avessimo preso come sistema di riferimento il centro di massa e non un sistema esterno, avremmo notato che, dal quel punto di vista, il cilindro ruotava semplicemente attorno al suo centro.

3.18 Urti elastici e anelastici

Parliamo adesso di urti. Si ha un urto quando due oggetti in movimento relativo entrano a contatto; si possono avere due tipi di urti: *urti elastici* o *urti anelastici*, in quest'ultimo caso totalmente o parzialmente.

In un urto elastico viene *conservata* sia la quantità di moto che l'energia cinetica di un sistema; in un urto anelastico, invece, non vi è conservazione di energia cinetica: se l'urto è *parzialmente* anelastico vi è una perdita, di solito percentuale, di energia cinetica; se invece si ha un urto *totalmente* anelastico, non è possibile scrivere una relazione dell'energia cinetica tra prima e dopo l'urto.

In un urto, vanno considerate le forze agenti; si distingue tra forze impulsive e non impulsive, ovvero quelle forze per le quali vale il teorema dell'impulso. Possiamo affermare che, se una forza rimane *limitata* nel corso del tempo, essa è impulsiva, e gioca quindi a favore di un urto elastico: ad esempio, se mandiamo a sbattere una pallina contro una scatola non fissata su un piano, vi sarà un urto elastico (sotto opportune condizioni) tra i due oggetti; se invece fisso la scatola con un chiodo, la forza vincolare esercitata dal chiodo *non rimane limitata nel tempo*,



e la scatola, dopo l'urto, non si muoverà, quindi non vi sarà presente un urto elastico.

In generale, in un problema d'urti, è bene porre l'attenzione a tutte le forze agenti sul sistema e ai momenti di queste; se vi sono forze dissipative, come forze d'attrito o momenti rallentanti, non potranno esserci urti completamente elastici; quando invece tutte le forze agenti sono di tipo conservativo, ad esempio la forza peso, allora ci sono le condizioni affinché avvengano urti elastici. È bene, però, porre sempre una particolare attenzione alle condizioni del problema: possono essere presenti particolari, anche minimi, che alterano l'impulsività delle forze in gioco.



Capitolo 4

Parte Terza - Teoria della gravitazione universale

4.1 La legge di gravitazione

Fin dall'antichità, gli uomini hanno seguito il corso degli astri nel cielo; fin dall'antichità l'uomo ha dovuto lottare contro la gravità, affinché potesse costruire edifici stabili. La legge di Gravitazione universale, studiata già da Galileo e poi enunciata da Newton, lega i due fenomeni in questione, unendo le cause del moto degli astri a quelle della gravità in una unica forza universale della natura.

4.1.1 La legge di gravitazione

La **legge di Gravitazione universale** afferma che *tra due punti materiali si esercita una forza attrattiva direttamente proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza.*

Il modulo di questa forza attrattiva, che chiameremo **forza di gravitazione**, è:

$$|f_g| = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Dove $m_{1,2}$ indicano le masse dei punti materiali e r la distanza tra essi. G è la **costante di gravitazione universale**, ovvero è valida in tutti i fenomeni fisici della natura, e vale:

$$G = 6.667259 \cdot 10^{-11} \text{ N} \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

La direzione della forza è la retta congiungente i due punti materiali; il verso è attrattivo, va quindi verso la massa generatrice della forza. Quindi, per scrivere vettorialmente la formula della forza:

$$\vec{f}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$



Un altro modo per esprimere la forza è tramite le sue componenti cartesiane. Preso un sistema di riferimento con origine nel punto in cui si trova la massa generatrice, avremo che:

$$\vec{r} = (x, y, z) \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \rightarrow \vec{r} = \hat{r} r \quad \vec{f}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

Possiamo quindi scrivere le componenti della forza, che saranno:

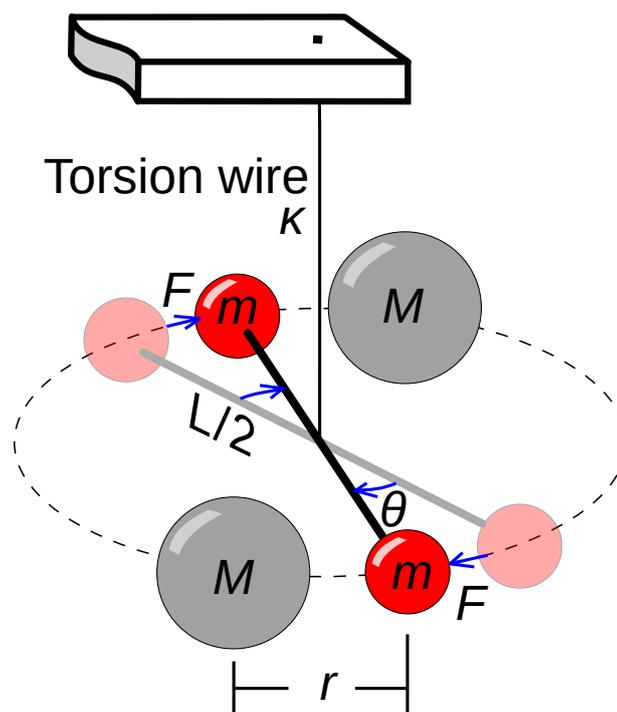
$$\vec{f}_g = -G m_1 m_2 \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Un'ultima considerazione sulla forza di gravitazione; anche il corpo che subisce la forza la esercita sul corpo generatrice. Questo può essere spiegato in due modi:

- sfruttando il 3° principio della dinamica;
- dallo stesso enunciato della legge di gravitazione si può intuire che i due punti materiali esercitano l'uno sull'altro una forza attrattiva.

4.1.2 L'esperienza di Cavendish

È immediato chiedersi come sia stato possibile calcolare con precisione il valore della costante G , anche alla luce del suo valore, nettamente inferiore alle masse con cui di solito si ha a che fare in esperimenti diretti. Il calcolo preciso è stato effettuato grazie all'esperienza di Cavendish, sfruttando il meccanismo in figura.



Il meccanismo è formato da un cavo inestensibile con una costante elastica di torsione K conosciuta; al cavo è legata una semplice bilancia a due bracci, alle cui estremità sono legate due piccole masse. Avvicinando delle masse più grandi, le due piccole masse subiranno la forza attrattiva gravitazionale, e produrranno una coppia di forze sulla bilancia, che la farà ruotare. A questo punto entra in gioco la costante K , la quale impedirà al cavo di torcersi all'infinito e facendolo fermare in posizione di equilibrio ad un determinato angolo θ . Del problema sono noti tutti i parametri: le due masse, la loro distanza, la costante di torsione e l'angolo finale, per cui è possibile calcolarsi la forza di gravitazione e, quindi, la costante G .

4.2 Campo gravitazionale

Definizione (Campo vettoriale)

Si definisce *campo vettoriale* una funzione vettoriale della posizione, ovvero che associa ad ogni punto dello spazio un vettore.

Dalla legge di gravitazione universale sappiamo che ogni corpo dello spazio esercita su un altro una forza attrattiva; in più, per la Terra (o tutti gli altri corpi celesti), sappiamo esistere la forza di gravità. Possiamo quindi legare le due forze:

$$\vec{f}_g = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{\vec{f}_g}{m} = \vec{g} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r}$$

Chiameremo quindi \vec{g} campo gravitazionale; poiché il campo gravitazionale corrisponde all'accelerazione della forza di gravitazione, possiamo concludere che l'accelerazione è funzione della distanza, il che è una peculiarità propria della forza di gravitazione universale.

4.2.1 Terra e forza peso

La forza peso \vec{P} è un caso particolare della forza di gravitazione:

$$\vec{f}_g = m\vec{g} \quad \rightarrow \quad \vec{g} = -G \frac{M_T}{R_T^2} \hat{r} = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

Le costanti M_T , R_T sono rispettivamente massa e raggio della Terra, che valgono:

$$M_T = 5.974 \cdot 10^{21} \text{ kg}$$

$$R_T = 6371 \text{ km}$$

La scrittura $\vec{f}_g = m\vec{g}$ può essere considerata un'altra scrittura della forza di gravitazione universale, dove \vec{g} è il campo gravitazionale $\vec{g} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r}$

Il problema riguardo la forza di gravità della Terra è che, nell'enunciato della legge di gravitazione, venivano presi in esame due punti materiali. Nel caso della



terra, però, è impossibile trascurare le sue dimensioni, tanto che il raggio della Terra corrisponde alla distanza tra le due masse, perché viene considerata la massa terrestre tutta concentrata in un unico punto, al centro, ovviamente, della Terra. Questo modo di studiare la legge di gravitazione è legittimato dal teorema di Gauss per il campo gravitazionale, che vedremo nel prossimo capitolo.

4.3 Teorema di Gauss per il campo gravitazionale

Il teorema di Gauss per il campo gravitazionale mette in relazione diversi fattori tra essi; uno di questi è il flusso di un vettore attraverso una superficie, che definiamo immediatamente. Inoltre, la dimostrazione del teorema di Gauss prevede conoscenze di analisi matematica in più variabili, di cui faremo a meno, cercando di dare una dimostrazione egualmente valida.

Definizione (Flusso di un vettore)

Dato un campo vettoriale \vec{v} che attraversa una superficie S , si definisce **flusso di \vec{v} attraverso S** :

$$\Phi_v := \int_S \vec{v} \cdot \hat{n} dS$$

Diamo alcune spiegazioni e considerazioni su questa definizione.

1. Il flusso di un vettore *non* è un vettore, ma uno scalare, poiché risultato di un integrale.
2. L'integrale è un integrale *di superficie*.
3. Si divide la superficie in infinitesimi dS , si calcola il flusso su ognuno di essi e si sommano assieme, riunendo il tutto nel segno di integrale.
4. \hat{n} è il versore *normale* all'infinitesimo di superficie, ha quindi modulo unitario, direzione perpendicolare alla superficie nel punto e verso definito dal flusso (uscente o entrante).
5. In ogni punto della superficie cambiano sia il vettore \vec{v} che il versore \hat{n} .

4.3.1 Teorema di Gauss per il campo gravitazionale

Teorema (di Gauss per il campo gravitazionale)

Il flusso del campo gravitazionale USCENTE da una superficie CHIUSA non dipende né dalla superficie né dalla posizione del corpo che genera il campo ma dipende SOLO dalla massa contenuta nella superficie.

La dimostrazione di questo teorema richiede conoscenze di [analisi in più variabili](#) che, di solito, non sono in possesso dello studente quando affronta per la prima volta lo studio della gravitazione. Diamo qualche definizione e strumento per procedere.



Definizione (Angolo solido)

Come per la definizione di angolo vale la relazione:

$$\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2} = \alpha$$

Dove $s_{1,2}$ sono gli archi di circonferenza e $r_{1,2}$ sono i raggi, vale la seguente relazione per *archi di superficie*:

$$\frac{S_1}{r_1^2} = \frac{S_2}{r_2^2} = \Omega$$

Dove $S_{1,2}$ sono gli archi di superficie. Ω si chiama **angolo solido** e il suo valore massimo è 4π , infatti:

$$\Omega_{\max} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

(La superficie di una sfera vale $4\pi r^2$)

Inoltre, come per gli integrali di funzione ad una variabile, vale che:

$$\int_S dS = S$$

Ovvero la somma degli infinitesimi di superficie corrisponde alla superficie stessa. Allo stesso modo:

$$\int_S d\Omega = \Omega_{\max}$$

Perché la somma degli infinitesimi di angolo solido di una superficie chiusa, come nel caso presente, è uguale a un angolo solido massimo.

Possiamo ora procedere con la dimostrazione del teorema.

Dimostrazione

Sfruttiamo la definizione di flusso:

$$\Phi_v := \int_S \vec{v} \cdot \hat{n} dS$$

Nel nostro caso, il vettore è il campo gravitazionale $\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\hat{r} = -g\hat{r}$, quindi:

$$\Phi_g = \int_S \vec{g} \cdot \hat{n} dS = - \int_S g\hat{r} \cdot \hat{n} dS$$

Il segno meno del campo gravitazionale è stato portato direttamente fuori dal segno di integrale. Analizziamo il prodotto scalare $\hat{r} \cdot \hat{n}$. I versori hanno entrambi modulo uguale a 1, quindi il loro prodotto scalare $\hat{r} \cdot \hat{n} = \cos\theta$, dove θ è ovviamente l'angolo compreso tra i due. Quindi è lecito scrivere:



$$\Phi_g = - \int_S g \cos \theta dS$$

Prendiamo adesso in analisi l'infinitesimo di superficie dS ; posso tracciare un'infinitesimo di superficie che sia *perpendicolare* al raggio, che chiamerò dS_{\perp} . Poiché l'angolo tra l'infinitesimo della superficie chiusa e l'infinitesimo di superficie perpendicolare corrisponde all'angolo tra i vettori \hat{r} e \hat{n} , l'area dell'infinitesimo perpendicolare dS_{\perp} vale proprio $dS_{\perp} = dS \cos \theta$. Quindi il flusso può anche essere scritto come:

$$\Phi_g = - \int_S g dS_{\perp}$$

A g sostituiamo il suo valore numerico, ovvero:

$$\Phi = - \int_S GM \frac{dS_{\perp}}{r^2}$$

A questo punto, posso confondere, nell'infinitesimo, la superficie perpendicolare con quella di una sfera; quindi la somma totale, ovvero l'integrale, di tutti i dS_{\perp} è la circonferenza di una sfera. A questo punto sfrutto la definizione di angolo, sostituendo a $\frac{dS_{\perp}}{r^2}$ l'infinitesimo di angolo solido $d\Omega$ ottenendo la formula finale del flusso:

$$\Phi_g = -GM \int_S \frac{dS_{\perp}}{r^2} = -GM \int_S d\Omega$$

Il valore finale calcolato è quindi:

$$\Phi_g = -4\pi GM$$

Che è il valore del flusso del campo gravitazionale di una massa racchiusa in una superficie. Come volevasi dimostrare, esso è indipendente sia dalla posizione del corpo generante il campo che dalla superficie che lo racchiude: questo vuol dire che, preso un corpo con massa, qualsiasi superficie chiusa che lo contenga avrà un flusso di campo gravitazionale pari a $-4\pi GM$.

4.3.2 Considerazioni del teorema di Gauss

La prima domanda che ci si pone, dopo aver studiato il teorema di Gauss è la seguente: e se la massa fosse esterna alla superficie? Il teorema di Gauss parla effettivamente di massa interna, ma può accadere di voler calcolare il flusso di una massa esterna a una superficie chiusa attraverso la superficie stessa.

Il caso particolare è molto semplice. Della superficie chiusa prendo un piano che sia perpendicolare alla congiungente con la massa. Questo piano divide la superficie in due superfici S_1 e S_2 le quali hanno, rispetto alla massa, i vettori $\hat{n}_{1,2}$ opposti in versi opposti; quindi il flusso avrà modulo uguale per entrambe le superfici, dettato dal teorema di Gauss, ma in un caso sarà positivo, nell'altro



negativo. Quindi, per calcolare il flusso attraverso la superficie totale, basta sommarli entrambi, ottenendo che *il flusso di un campo gravitazionale generato da una massa esterna attraverso una superficie chiusa è nullo*.

Un'altra domanda che ci si pone è: e se le masse fossero più di una? In questo, anche il vettore \vec{g} è diverso, vale infatti:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \cdots + \vec{g}_n = \sum_{i=1}^n \vec{g}_i$$

Quindi il flusso totale vale:

$$\Phi_{\text{tot}} = \int_S \vec{G}_{\text{tot}} \cdot \hat{n} dS = \sum_{i=1}^n \int_S \vec{g}_i \cdot \hat{n} = \sum_{i=1}^n \Phi_{g_i}$$

Ricordando il valore del flusso dettato dal teorema di Gauss:

$$\Phi_g = -4\pi GM \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\text{tot}} = -4\pi G \sum_{i=1}^n M_i$$

Che è concorde con l'enunciato del teorema. Questa considerazione è molto importante perché permette di calcolare facilmente il flusso gravitazionale di sistemi di punti materiali il cui vettore campo gravitazionale potesse essere difficile da calcolare; un caso immediato a cui poterlo è per calcolare il campo gravitazionale della Terra la quale, come già detto nel capitolo precedente, non può assolutamente essere approssimata ad un punto materiale.

4.3.3 Il campo gravitazionale terrestre

Per calcolare il campo gravitazionale terrestre sfruttando il valore del flusso attraverso una superficie chiusa che contenga la Terra. Per evidenti comodità prenderemo questa superficie *sferica* di raggio r e centrata nel centro della Terra che, come sappiamo, è un geoide e non una sfera perfetta, ma vedremo che questo particolare è irrilevante. Ricordiamo che $\vec{g} = -g(r)\hat{r}$.

Calcoliamo prima il flusso partendo dalla definizione stessa di flusso:

$$\Phi = \int_S \vec{g} \cdot \hat{n} dS$$

Sostituiamo a \vec{g} il suo valore. Poiché la superficie chiusa presa in analisi è *sferica*, i vettori \hat{r} e \hat{n} sono paralleli, perché entrambi perpendicolari alla superficie in ogni punto. In particolare, essendo vettori, sono uguali, quindi il loro prodotto scalare è $\hat{r} \cdot \hat{n} = 1 \cdot 1 \cos 0 = 1$. Quindi:

$$\Phi = -g(r) \int_S \hat{r} \cdot \hat{n} dS = -g(r) \int_S dS = -4\pi r^2 g(r)$$

Adesso sfruttiamo invece il teorema di Gauss, che ci dice che il flusso attraverso la superficie gaussiana presa in considerazione vale:



$$\Phi = -4\pi GM_T$$

Dove M_T è ovviamente la massa della Terra. Eguagliando i due flussi trovati:

$$-4\pi GM_T = -4\pi r^2 g(r)$$

Possiamo calcolare il campo gravitazionale terrestre in funzione *della distanza dal centro della Terra*:

$$g(r) = G \frac{M_T}{r^2}$$

Poiché abbiamo preso una superficie sferica, esso sarà sempre uguale in modulo, per simmetria sferica, con direzione radiale e verso entrante, quindi, per scrivere il campo in forma vettoriale basta sfruttare la simmetria sferica ottenendo:

$$\vec{g} = -G \frac{M_T}{r^2} \hat{r} \quad \text{con } r > R_T$$

Questo risultato è di importanza rilevante perché, qualsiasi oggetto in prossimità della superficie della Terra, è soggetto a un campo gravitazionale che dipende esclusivamente dalla sua distanza dal centro della Terra: è quindi lecito pensare alla massa terrestre come se fosse tutta concentrata al centro di essa, poiché il flusso del campo gravitazionale non dipende da dove si trova la massa e, quindi, possiamo scegliere per comodità quel punto privilegiato.

Il campo gravitazionale all'interno della Terra

Una domanda utile da porsi è: e se il punto in cui voglio calcolare il campo è *interno* alla massa? Per esempio, si vuole calcolare il campo gravitazionale terrestre a 200km di profondità. Avremo in questo che $r < R_T$, dove con r calcoliamo la distanza del punto dal centro della Terra. Come fatto per il calcolo del campo in un punto esterno alla Terra, o in prossimità della sua superficie, calcoliamo il flusso del campo in due modi: sfruttando prima la definizione di flusso, per poi passare al teorema di Gauss, confrontando infine i due risultati ottenuti.

Partiamo dalla definizione di flusso. Prendiamo una superficie sferica, con centro in corrispondenza del centro della Terra, che passi per il punto in cui si vuole calcolare il campo. Avremo che il campo $g(r)$ dipende solo dalla distanza dal centro; come sopra, per simmetria sferica la direzione è radiale e il verso entrante, quindi possiamo scrivere il campo in formula vettoriale:

$$\vec{g} = -g(r) \hat{r}$$

Sostituendo nella formula del flusso perveniamo allo stesso risultato calcolato poco fa:

$$\Phi_g = \int_S \vec{g} \cdot \hat{n} dS = -g(r) 4\pi r^2$$



Sfruttiamo adesso il teorema di Gauss; questo ci dice che il flusso uscente è pari a:

$$\Phi_g = -4\pi Gm(r)$$

Perché in questa formula è presente $m(r)$? Ciò è dovuto al fatto che la massa da considerare è *solo quella contenuta nella superficie*, che sarà quindi diversa dalla massa totale della Terra; sarà essa una funzione della distanza dal centro r . Possiamo calcolare il valore di questa massa solo facendo un'importante assunzione: assumiamo cioè che **la densità della Terra sia uniforme**, e non dipenda dalla distanza dal centro. Come sappiamo, ciò non è vero, ma possiamo per ora compiere questa assunzione per giungere a un valore teorico valido.

Avremo quindi che la densità, definita come $\rho = \frac{M_T}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, è uniforme; calcoliamo $m(r)$:

$$m(r) = \rho V = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = M \frac{r^3}{R^3}$$

Si ricorda che con R si indica il raggio totale della Terra; sostituiamo questo valore nella formula del flusso secondo il teorema di Gauss:

$$\Phi_g = -4\pi GM \frac{r^3}{R^3}$$

A questo punto, dobbiamo solo confrontare i due risultati:

$$\begin{aligned} -4\pi GM \frac{r^3}{R^3} &= -g(r)4\pi r^2 \\ g(r) &= G \frac{M}{R^3} r \end{aligned}$$

Ricordando la formula vettoriale, possiamo infine scrivere vettorialmente il campo gravitazionale all'interno della Terra, che sarà pari a:

$$\vec{g} = -G \frac{M}{R^3} r \hat{r} \quad \text{con } r < R$$

4.4 Energia di campo gravitazionale

4.4.1 Energia gravitazionale

Sappiamo che una qualsiasi massa M esercita su un corpo di massa m una forza attrattiva pari a $\vec{f}_g = -G \frac{Mm}{R^2} \hat{r}$.

Per ovvi vantaggi prendo un sistema di riferimento con origine degli assi nel punto in cui si trova la massa M generatrice della forza; il vettore \vec{r} distanza delle due masse sarà quindi il vettore posizione del corpo m in questo sistema di riferimento.

Se il corpo si muove lungo una traiettoria, allora la forza gravitazionale compie un lavoro; vogliamo calcolarlo.



$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f}_g \cdot d\vec{s} = \int_A^B \left(-G \frac{Mm}{r^2} \right) \hat{r} \cdot d\vec{s}$$

Il prodotto scalare $\hat{r} \cdot d\vec{s}$ è la proiezione dell'infinitesimo di spostamento sulla direzione radiale, e corrisponde a dr . Il lavoro diventa infine: ^{*}[1]

$$L_{AB} = -GMm \int_A^B \frac{dr}{r^2} = GMm \left[\frac{1}{r} \right]_A^B$$

$$L_{AB} = GMm \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Quindi il lavoro della forza gravitazionale non dipende dal percorso compiuto ma solo dagli estremi A e B. Per definizione di forza conservativa, la forza gravitazionale risulta essere una forza conservativa. Posso quindi definire un'energia potenziale:

$$L_{AB} = -\Delta U = U_i - U_f = U(A) - U(B)$$

Si definisce quindi:

Definizione (Energia potenziale gravitazionale)

$$U(r) = -G \frac{Mm}{r} + \text{cost}$$

Ricordiamo che la scelta dell'energia potenziale è *arbitraria* (*simmetria di gauge globale*), quindi alla costante aggiunta può essere assegnato qualsiasi valore. Se scegliamo il valore più comodo, ovvero $\text{cost} = 0$, poniamo che l'energia gravitazionale all'infinito è nulla, ovvero:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = 0$$

4.4.2 Energia della forza peso

Sappiamo che la forza peso è un caso particolare della forza gravitazionale; preso un sistema di riferimento $S = (O, x, y, z)$, possiamo esprimere il vettore del campo gravitazionale in prossimità della superficie:

$$\vec{g} = (0, 0, -g)$$

Dove $g = -G \frac{M_T}{R_T^2} \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$. Possiamo calcolare il lavoro della forza peso, per quindi definire una sua energia potenziale:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f}_P \cdot d\vec{s} = -mg \int_A^B dz = mg(z_A - z_B)$$

Quindi avremo:

Definizione (Energia potenziale della forza peso)



L'energia potenziale della forza si definisce come:

$$U(\vec{P}) = mgz + \text{cost}$$

Anche in questo caso, la scelta dell'energia è arbitraria. Scegliere la costante nulla vuol dire che l'energia sarà nulla quando la quota del corpo sarà nulla, rispetto al sistema di riferimento preso (può essere preso un sistema di riferimento la cui quota nulla sia al livello del mare, così come può esserne preso un altro con quota nulla a 100 metri di altitudine).

4.4.3 Velocità di fuga

Nel lancio di un grave che abbia una componente della velocità iniziale verticale, deve esistere un limite per cui, se la componente verticale lo supera, il corpo sfuggirebbe al campo gravitazionale terrestre; quel limite viene chiamato **velocità di fuga**. In questo calcolo che faremo trascureremo le resistenze dell'aria e tratteremo la Terra come un sistema di riferimento inerziale.

Per prima cosa, calcoliamo l'energia meccanica al momento del lancio, quando $r = R_T$:

$$E_i = K + U = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{M_T m}{r}$$

Se il corpo sfugge al campo terrestre, arriverà ad un punto in cui è così distante da far sì che U possa essere trascurata; per semplicità, immaginiamo che, una volta sfuggito al campo gravitazionale, il corpo proceda di moto rettilineo senza subire altre forze. A quel lontanissimo punto, l'energia avrà solo la componente cinetica, ovvero:

$$E_f = \frac{1}{2}mv^2$$

Poiché sappiamo che l'energia meccanica si conserva, l'energia iniziale sarà uguale all'energia finale. Ma, poiché l'energia finale ha solo la componente cinetica che, *per definizione*, è positiva, questo vuol dire che anche l'energia iniziale è positiva, ovvero:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{M_T m}{R_T} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 \geq G\frac{M_T m}{R_T}$$

Da questa formula possiamo calcolare che la velocità iniziale risulterà essere:

$$v_0 \geq \sqrt{2G\frac{M_T}{R_T}}$$

Il valore $\sqrt{2G\frac{M_T}{R_T}}$ si chiama velocità di fuga e, date le costanti:



$$G = 6.66t \cdot 10^{-11} N \frac{m^2}{kg^2}$$

$$M_T = 5.97 \cdot 10^24 kg$$

$$R_T = 6.37 \cdot 10^6 m$$

Possiamo calcolarla, e si avrà che:

$$v_f = \sqrt{2G \frac{M_T}{R_T}} = 11200 \frac{m}{s} = 40000 \frac{km}{h}$$

Qualsiasi corpo con velocità verticale superiore a questo valore sfuggirà quindi al campo terrestre. È immediato notare che il valore è molto alto (quasi 40 volte la velocità del suono) quindi, così come avviene per il lancio di razzi verso lo spazio, è conveniente spingere il corpo lungo tutta la sua ascesa, piuttosto che fornire un impulso tale da conferirgli quelle velocità fin da quando è sulla superficie terrestre.

[1] Si ricorda che $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$

4.5 Il moto dei corpi celesti e le leggi di Keplero

Lo studio dei moti degli astri è sempre stata una delle attività che l'uomo ha compiuto, spesso legandole a mitologie o a religioni. Ci si è sempre chiesti che moto seguissero i corpi celesti; fino all'età moderna, il sistema astronomico prevalentemente accettato era quello aristotelico-tolemaico, anche chiamato geocentrico, che vedeva la Terra al centro dell'universo e tutti i corpi celesti ruotare attorno ad essa. Per descrivere con cura i moti osservati empiricamente e, allo stesso tempo, restare fedeli al sistema geocentrico, le orbite dei pianeti assumevano traiettorie strane, compiendo giri larghi, poi più corti, poi restando a girare attorno a un punto. Evidentemente, non era il sistema astronomico giusto.

Fu nel 1543 che venne pubblicato lo scritto di Niccolò Copernico in cui l'astronomo *poneva fine* alla centralità della Terra, sia fisicamente che filosoficamente, asserendo e dimostrando matematicamente come al centro del sistema solare, e dell'universo fino ad allora conosciuto, vi fosse il Sole e non la Terra.

Gli studi di Copernico vennero continuati da celebri studiosi; nel regno papale, la difesa dell'eliocentrismo da parte di Galileo gli costò il famoso processo che portò all'abiura. Fu Keplero, contemporaneo di Galileo, che diede un forte impulso alla teoria geocentrica: proseguendo nello studio degli astri, giunse a formulare 3 leggi empiriche che descrivono il moto dei corpi celesti. Isaac Newton, quando studio la gravitazione dei corpi, riuscì a dimostrare le tre leggi matematicamente, sfruttando le leggi della meccanica che egli aveva studiato.

4.5.1 Le tre leggi di Keplero

Enunciamo ora le tre leggi di Keplero per il moto dei corpi celesti:

1. le orbite descritte dai pianeti attorno al Sole sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei due fuochi;



2. il raggio vettore che congiunge il centro del Sole al pianeta spazza aree proporzionali ai tempi impiegati per descriverle;
3. i quadrati dei periodi di rivoluzione del moto attorno al Sole sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle loro orbite.

Come detto nel paragrafo precedente, Isaac Newton riuscì a dimostrare le tre leggi di Keplero semplicemente partendo dallo studio della meccanica. Forniremo adesso una dimostrazione matematica delle tre leggi.

Dimostrazione

Partiamo col dimostrare la **seconda legge di Keplero**. Sia m il pianeta e M il Sole; per semplicità, trattiamo il caso in cui $m \ll M$. Sappiamo che sul pianeta il Sole esercita la forza di gravità, pari a $\vec{f}_g = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}$. Come primo passo, calcoliamo il *momento della forza*, prendendo come polo il centro del Sole. Si avrà che:

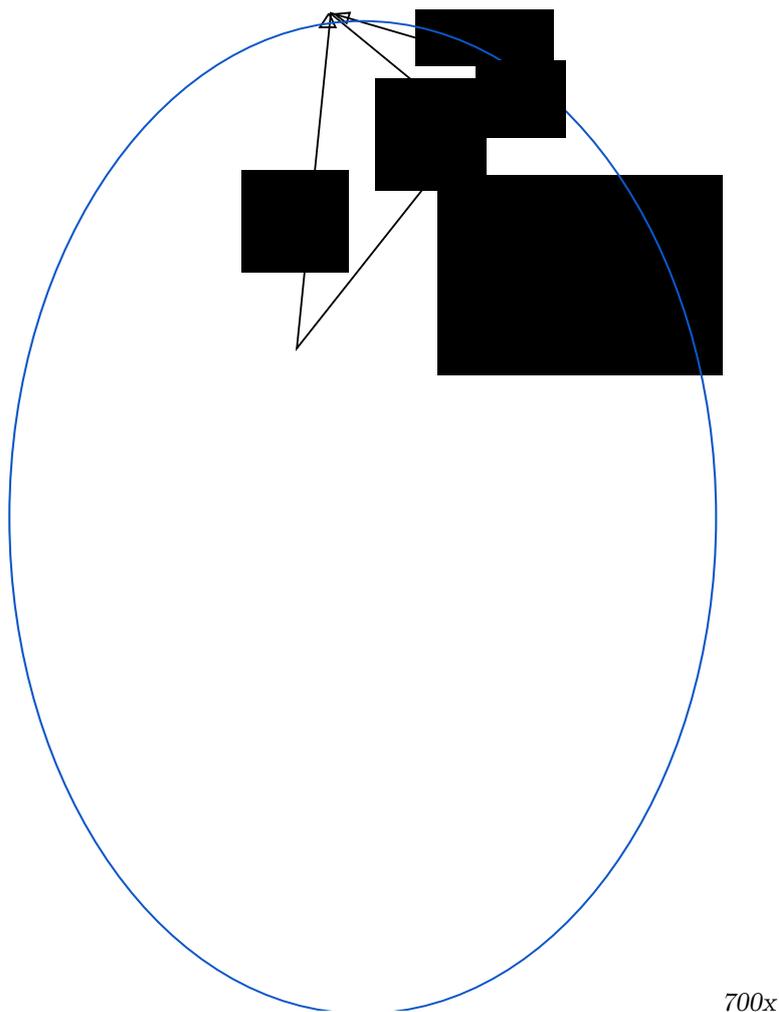
$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{f} = \left(-G \frac{Mm}{r^2} \right) \vec{r} \wedge \hat{r} = 0$$

Questo perché il vettore \vec{r} e il versore \hat{r} hanno la stessa direzione e lo stesso verso, quindi il loro prodotto vettoriale è *nullo*. Su questo dobbiamo soffermarci; dal teorema del momento, sappiamo che:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Quindi, se il momento della forza è nullo, il momento angolare deve necessariamente essere *costante*. Ma il momento angolare è un vettore, che ha modulo, direzione e verso; se il vettore è costante, vuol dire che queste tre grandezze lo sono a loro volta: quindi direzione e verso sono costanti. Poiché il vettore momento è *perpendicolare* al piano formato dai vettori \vec{r} e \vec{v} , anche questo piano sarà a sua volta costante. La conclusione, fondamentale, è che **la traiettoria dell'orbita è sempre contenuta in un piano**.





Nell'immagine qui sopra è raffigurata, in maniera approssimativa, un infinitesimo di traiettoria. Come si vede dalla figura, il vettore \vec{r} ha spazzato un infinitesimo di area dA , il cui valore è:

$$dA = \frac{|\vec{r}|h}{2} = \frac{|\vec{r}||d\vec{r}|\sin\theta}{2} = \frac{|\vec{r} \wedge d\vec{r}|}{2}$$

Ricordando che $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, da cui ricaviamo che $d\vec{r} = \vec{v}dt$, otteniamo che:

$$dA = \frac{|\vec{r} \wedge \vec{v}|}{2} dt$$

Come ultimo passaggio moltiplico e divido per m , la massa del pianeta:

$$dA = \frac{|\vec{r} \wedge m\vec{v}|}{2m} dt = \frac{|\vec{j}|}{2m} dt$$

La conclusione è immediata:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{j}|}{2m}$$



Il termine $\frac{dA}{dt}$ viene chiamata **velocità areolare**, e abbiamo appena dimostrato che essa è costante (poiché lo sono sia \vec{j} che m); questo vuol dire che il raggio vettore spazza aree uguali in intervalli di tempo uguali, concludendo la dimostrazione della seconda legge di Keplero.

Passiamo alla prima legge; una breve introduzione alla dimostrazione: questa viene spesso fatta utilizzando il calcolo integrale. Forniremo qui una dimostrazione alternativa ma la cui conclusione è la stessa, sfruttando le equazioni differenziali.

Dimostrazione

L'obiettivo è dimostrare che la traiettoria dell'orbita è un'ellisse, quindi dovremo ricavarci la funzione $r(\phi)$, essendo passati allo studio del piano in coordinate polari. Facciamo delle considerazioni preliminari. Valgono anche qui le conclusioni della dimostrazione scorsa, tra cui l'assunzione che $m \ll M$.

Il pianeta non possiede la stessa velocità lungo tutta la sua traiettoria; possiamo quindi scrivere il vettore velocità come somma di due componenti, una parallela al versore \hat{r} e una normale ad esso:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r\hat{r} \\ \vec{v} &= \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}\end{aligned}$$

Dove con \dot{r} si è indicata la derivata del raggio rispetto al tempo; dallo studio del moto circolare, si è visto che la derivata di un versore corrisponde alla derivata dell'angolo percorso lungo una direzione normale, ovvero $\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\phi}\hat{n}$, dove $\hat{n} \perp \hat{r}$. Possiamo quindi scrivere la formula vettoriale della velocità come:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{n}$$

Dalla precedente dimostrazione, abbiamo visto come il momento angolare del pianeta sia costante nel tempo; possiamo esplicitarlo:

$$\vec{j} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \vec{r} \wedge m(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{n})$$

Ricordiamo ancora una volta che $\hat{r} \wedge \hat{r} = 0$ e che $\vec{r} = r\hat{r}$, quindi:

$$\vec{j} = r\hat{r} \wedge mr\dot{\phi}\hat{n} = mr^2\dot{\phi}(\hat{r} \wedge \hat{n})$$

I versori \hat{n} e \hat{r} sono perpendicolari tra loro per definizione di \hat{n} ; il loro prodotto vettoriale sarà quindi un versore perpendicolare al piano formato da entrambi, ovvero l'ultimo vettore della terza disponibile, che chiameremo \hat{k} . Il momento angolare ha quindi espressione:

$$\vec{j} = mr^2\dot{\phi}\hat{k}$$

Il cui modulo $|\vec{j}| = mr^2\dot{\phi}$, ovvero costante. Definiamo a questo punto una nuova grandezza del moto del pianeta, anch'essa costante, che chiameremo **momento angolare per unità di massa**:



$$l = \frac{|\vec{j}|}{m} = r^2 \dot{\varphi} = \text{cost}$$

Da questa definizione posso ricavarmi la derivata dell'angolo $\dot{\varphi} = \frac{l}{r^2}$, che dipende da una costante del moto, l , e da una funzione del tempo $r(t)$.

Passiamo alla seconda parte della dimostrazione. Calcoliamo l'energia meccanica del pianeta lungo il moto; sappiamo che essa è la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale gravitazionale (per semplicità, consideriamo che il pianeta non subisca altre forze):

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

Per sfruttare questa espressione, dobbiamo calcolare v^2 , che possiamo anche scrivere come $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$. Svolgiamo i calcoli, ricordando che $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{n}$:

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \dot{r}^2 + 2\dot{r}r\dot{\varphi} \underbrace{(\hat{r} \cdot \hat{n})}_{=0} + r^2\dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

Ricordando che $\dot{\varphi} = \frac{l}{r^2}$, sostituiamo nella formula dell'energia questo valore trovato per v^2 :

$$E = \frac{1}{2}m \left(|\dot{r}|^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) - G\frac{mM}{r}$$

Questa è l'espressione dell'energia **in funzione del tempo**. A noi interessa trovare l'equivalente in funzione dell'angolo; per far ciò dobbiamo compiere qualche cambio di variabile.

Per prima cosa, diciamo che la derivata rispetto al tempo viene indicata col punto, quindi \dot{r} e $\dot{\varphi}$ sono derivate rispetto al tempo; per indicare la derivata del raggio rispetto all'angolo, ovvero $\frac{dr}{d\varphi}$, useremo l'apicetto, quindi

$$r' = \frac{dr}{d\varphi}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt}$$

Possiamo esprimere \dot{r} in funzione dell'angolo, ovvero:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = r' \dot{\varphi} = r' \frac{l}{r^2}$$

Definiamo a questo punto una funzione dell'angolo:

$$u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)}$$

La cui derivata è $u' = \frac{du}{d\varphi} = -\frac{r'}{r^2}$



Poiché, dal calcolo fatto poco fa, abbiamo trovato $\dot{r} = r' \frac{l}{r^2}$, possiamo infine scrivere:

$$\dot{r} = -u' l$$

Alla luce di tutto quel che abbiamo detto finora, andiamo a fare le dovute sostituzioni nell'espressione dell'energia:

$$E = \frac{1}{2} m \left(\underbrace{|\dot{r}|^2}_{=u'^2 l^2} + \underbrace{\frac{l^2}{r^2}}_{=l^2 u^2} \right) - \underbrace{G \frac{mM}{r}}_{=GMm u}$$

$$E = \frac{1}{2} m (l^2 u'^2 + l^2 u^2) - GMm u$$

Che, finalmente, è l'espressione dell'energia in funzione dell'angolo. Da questa espressione posso semplificare la massa del pianeta m : come si è ormai visto, essa non influenza il moto del pianeta; inoltre, poiché l'energia è costante, avremo semplicemente che:

$$\frac{1}{2} (l^2 u'^2 + l^2 u^2) - GM u = \frac{E}{m} = \text{cost}$$

Quest'espressione finale è tutto ciò di cui avevamo bisogno (direte voi che non l'avevamo di sicuro a portata di mano, ma i tesori non sono nascosti sotto lo zerbino di casa, per quanto possa essere una cosa triste). Ora, non ci resta che *derivarla*. Non si finisce mai di essere sadici.

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{2} (l^2 u'^2 + l^2 u^2) - GM u \right) = 0$$

$$\frac{1}{2} l^2 (2u') u'' + \frac{1}{2} l^2 (2u) u' - GM u' = 0$$

$$l^2 u'' u' + l^2 u u' - GM u' = 0$$

$$u'' + u = \frac{GM}{l^2}$$

Scritta così non è proprio il massimo; quel che voglio vedere, in realtà, è:

$$\left(u - \frac{GM}{l^2} \right)'' + \left(u - \frac{GM}{l^2} \right) = 0$$

Questa espressione la riconosciamo tutti: è la classica espressione di un oscillatore armonico. Sappiamo la sua soluzione:

$$u - \frac{GM}{l^2} = c \cos(\varphi - \varphi_0)$$

La costante φ_0 , in realtà, è arbitraria: essa dipende dalla scelta del sistema di riferimento. Poiché si può scegliere il sistema in qualsiasi modo lo si voglia, ne prendiamo uno tale che $\varphi_0 = 0$, in modo da poterla non considerare nell'espressione. La costante c invece è un numero reale qualsiasi: quella che abbiamo scritto



sopra *non* è la soluzione particolare al problema, bensì la *generale*, che comprende tutte le possibili soluzioni.

Dalla scorsa espressione mi ricavo $u(\varphi)$:

$$u(\varphi) = \frac{GM}{l^2}(1 + e \cos \varphi)$$

Cosa è quella e lì? Da dove è uscita? Non è la costante di Nepero, bensì viene chiamata **eccentricità**, e il suo valore, in questo caso, è:

$$e = \frac{cl^2}{GM}$$

È giunto finalmente il momento di ritornare a $r(\varphi) = \frac{1}{u(\varphi)}$:

$$r(\varphi) = \frac{1}{u(\varphi)} = a \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \varphi}$$

La costante $a = \frac{l^2}{GM(1-e^2)}$ rappresenta, come vedremo tra poco, il semiasse maggiore dell'ellisse. È una promessa: abbiamo finito con i cambi di variabile in questa dimostrazione. Anche perché ne sono già stati fatti troppi, forse.

L'equazione finale di $r(\varphi)$ è la funzione che definisce la traiettoria del moto del pianeta. È stata ardua, ma ce l'abbiamo fatta. Ora, non ci resta che deriv... No, scherziamo. Dobbiamo solo fare delle considerazioni.

Per l'eccentricità e si distinguono tre casi:

$$0 \leq e < 1$$

$$e = 1$$

$$e > 1$$

Nel primo caso, la traiettoria sarà un' *ellisse*; in particolare, una circonferenza nel caso $e = 0$. Nel secondo caso avremo invece una parabola, mentre nel terzo un'iperbole. Poiché l'unica di queste traiettorie ad essere chiusa è l'ellisse, e sappiamo che i pianeti non vanno a fare shopping in altri sistemi solari, perché sono clienti fedeli al Sole, possiamo concludere che **l'orbita dei pianeti è un'ellisse**. È dimostrata la prima legge di Keplero.

Prima di chiudere la dimostrazione, vediamo come a è il semiasse maggiore; ricordando l'espressione $r(\varphi)$ di sopra:

- se $\varphi = 0$, allora avremo $r = a(1 - e) = r_-$, la minima distanza dal Sole, chiamata **perielio**;
- se $\varphi = \pi$, allora avremo $r = a(1 + e) = r_+$, la massima distanza dal Sole, chiamata **afelio**.

Per tutto il moto, avremo che $r_- \leq r \leq r_+$; inoltre

$$r_- + r_+ = a(1 - e) + a(1 + e) = a(1 - e + 1 + e) = 2a$$



Quindi, in conclusione, $a = \frac{r_- + r_+}{2}$ è il **semiasse maggiore** dell'ellisse.

Promessa: la dimostrazione della terza legge sarà veloce.

Dimostrazione

Valgono tutte le considerazioni e le soluzioni trovate nelle precedenti dimostrazioni. Per semplicità di calcolo, prendiamo il caso in cui $e = 0$, ovvero la traiettoria è una circonferenza. Con qualche calcolo in più è possibile compiere questa dimostrazione anche nel caso generale dell'ellisse, ma non sentiamo la necessità di farlo.

Se la traiettoria è una circonferenza, il moto del pianeta sarà un moto circolare uniforme. La sua accelerazione centripeta sarà:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

La forza centripeta, nel moto di un pianeta, corrisponde alla forza di gravitazione:

$$\begin{aligned} f_c &= f_g = m a_c \\ G \frac{Mm}{r^2} &= m \omega^2 r \\ \omega^2 r^3 &= GM = \text{cost} \end{aligned}$$

Ricordando l'espressione che lega periodo e velocità angolare $\omega = \frac{2\pi}{T}$, avremo che:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi^2}{T^2} r^3 &= GM \\ \frac{r^3}{T^2} &= \frac{GM}{4\pi^2} = \text{cost} \end{aligned}$$

Questo vuol dire che $r^3 \propto T^2$, come volevasi dimostrare.

4.6 Considerazione col problema dei due corpi

Tutte le considerazioni fatte in questo corso hanno presentato un'importante assunzione: che $m \ll M$. Facciamo una bene considerazione finale, sfruttando il problema dei due corpi.

Il caso della forza di gravitazione è un caso molto particolare: essa è una forza di interazione che comprende, nel suo modulo, le masse dei due punti. Studiamo il moto del corpo con massa minore, tenendo conto il problema dei due corpi:

$$f(r) = \mu \frac{d^2 r}{dt^2} = G \frac{m_1 m_2}{R^3} \vec{r} = G \frac{\mu M_{\text{tot}}}{R^3} \vec{r}$$

In questo caso, il corpo di massa minore viene considerato come se avesse la massa ridotta, mentre il corpo di massa maggiore viene considerato avere la massa totale del sistema. Non rifaremo tutte le dimostrazioni di questo corso, basta sapere che,



tenendo conto di queste due considerazioni, i risultati ottenuti sono *identici* e valgono quindi il teorema di Gauss e le leggi di Keplero, anche senza considerare, come abbiamo finora fatto, la massa del pianeta trascurabile.



Capitolo 5

Parte Quarta - Meccanica dei fluidi

5.1 Cosa sono i fluidi

I fluidi sono sistemi di punti materiali di forma indefinita: assumono infatti la forma del recipiente che li contiene. Si dividono in:

- **gas**, i quali non hanno né forma, né volume definiti, bensì assumono le caratteristiche del recipiente;
- **liquidi**, i quali non hanno forma ma volume definito, e possono essere più o meno comprimibili.

A differenza dei sistemi rigidi, che sono solidi e indeformabili, i fluidi presentano caratteristiche diverse e numerose complicazioni nella descrizione del loro moto. Microscopicamente, un fluido è un sistema *discreto*, formato da numerose particelle che si muovono in moto relativo l'una rispetto alle altre. Tuttavia, possiamo schematizzarli come un sistema *continuo*, per rendere più facile il loro studio. A tal fine, tratteremo tutti i liquidi come **incomprimibili**, ovvero di volume fisso e costante nel tempo, e studieremo caso per caso il fluido prendendo in considerazione un volumetto dV cubico, il quale è abbastanza grande da poter essere trattato come un sistema continuo (quindi ha un numero elevato di particelle) ma sufficientemente piccolo per poter essere considerato un infinitesimo. Esso ci fornisce, quindi, una descrizione *complessiva* del fluido.

Su un volumetto dV agiscono due tipi di forze:

1. forze di superficie $\vec{F}^{(s)}$, esercitate dal fluido circostante sulla superficie del volumetto;
2. forze di volume $\vec{F}^{(v)}$, proporzionale al dV o alla dm del volumetto, che sono applicate nel centro di massa del volumetto.

Ogni forza di superficie può essere scomposta in due componenti, una perpendicolare e una parallela alla superficie, che chiameremo rispettivamente sforzo normale e sforzo di taglio:



$$d\vec{F}^{(s)} = d\vec{F}_n^{(s)} + d\vec{F}_t^{(s)}$$

$d\vec{F}_n^{(s)}$ è detta anche **forza per unità di superficie** o, semplicemente, **pressione**. Se la forza è *uniforme* su tutta la superficie, avremo che:

$$P = \frac{F_n}{S}$$

Nel sistema internazionale, l'unità di misura della pressione è il Pascal, corrispondente a:

$$\frac{1\text{N}}{1\text{m}^2} = 1 \text{ Pa}$$

Lo sforzo di taglio $\frac{dF_t^{(s)}}{dS}$ è invece dovuto all'attrito del fluido con le pareti del recipiente o con il resto del fluido stesso; nel nostro studio, considereremo fluidi *non* viscosi, per cui non sarà presente lo sforzo di taglio. Qualora il fluido fosse viscoso, invece, lo sforzo di taglio, che si presenta in caso di moto del fluido, causerebbe lo spostamento di diversi strati di fluido e, in casi particolari, anche la creazione di vortici.

5.2 Fluidi in quiete

Un fluido si dice *in quiete* quando:

- non ci sono moti complessivi del fluido;
- una qualsiasi superficie del fluido ha lo stesso numero di particelle entranti e uscenti.

A proposito di questa ultima considerazione, è importante considerare che il fluido, anche se complessivamente e macroscopicamente è in quiete, presenta microscopicamente dei moti non uniformi: le particelle del fluido si muovono in maniera sparsa e disordinata in qualsiasi condizione del fluido.

Come già accennato nel capitolo precedente, in un fluido *statico* lo sforzo di taglio è nullo. Se vi fosse, il fluido si muoverebbe a strati, e ciò non è coerente col caso che stiamo studiando. Per tale motivo, avremo che tutte le forze di superficie saranno forze di pressione, ovvero:

$$d\vec{F}^{(s)} = d\vec{F}_n^{(s)} = PdS$$

La pressione in un fluido statico è dovuta agli urti tra le particelle; considerata una qualsiasi superficie del fluido, per il terzo principio della dinamica (e per la condizione di fluido in quiete) avremo che le particelle entranti sono uguali in numero a quelle uscenti, quindi gli urti in un verso sono completamente bilanciati dagli urti nel verso opposto, causando cioè il fluido statico. La stessa considerazione può essere fatta per le pareti del contenitore, le quali esercitano sul fluido una pressione uguale ed opposta a quella che esercita il fluido su di esse.



5.3 Legge di Stevino

Consideriamo un volumetto dV ; esso avrà una massa infinitesima dm , che sarà uguale a:

$$dm = \rho dV$$

Dove ρ è la densità del fluido, che in questo caso considereremo *uniforme*. Sul volumetto agiranno quindi le seguenti forze:

$$\begin{aligned} d\vec{F}^{(s)} &= P dS \\ d\vec{F}^{(v)} &= \vec{g} dm = \vec{g} \rho dV \end{aligned}$$

Infatti, le uniche forze di volume agenti sono le forze peso delle particelle, che quindi si sommano nella forza peso complessiva del volumetto, applicata al centro di massa, e la forza di superficie corrisponde alla pressione del fluido. Considero un sistema di riferimento cartesiano, dove sia l'asse z la quota, a tre assi esterno al fluido. Poiché esso è in quiete, avremo che:

$$\begin{aligned} \vec{F}^{\text{tot}} &= 0 \\ d\vec{F}^{(s)} + d\vec{F}^{(v)} &= 0 \end{aligned}$$

Consideriamo un volumetto *cubico*. Analizziamo le due facce perpendicolare all'asse y e le forze che agiscono su di esse. Le uniche forze agenti sono le forze di superficie, applicate al centro geometrico delle due superfici. I due centri avranno coordinate (x, y, z) e $(x, y + dy, z)$. Le due forze, dirette verso il centro del volumetto, saranno quindi:

$$\begin{aligned} d\vec{F}_1^s &= P(x, y, z) dS \\ d\vec{F}_2^s &= P(x, y + dy, z) dS \end{aligned}$$

Poiché la risultante delle forze deve essere nulla, avremo che $d\vec{F}_1^s + d\vec{F}_2^s = 0$, quindi (si ricorda che le forze hanno verso opposto):

$$P(x, y, z) dS - P(x, y + dy, z) dS = 0$$

Da cui $P(x, y, z) = P(x, y + dy, z)$, ovvero la pressione resta *costante* lungo l'asse delle y . Lo stesso ragionamento può essere fatto anche per l'asse delle x , da cui concludiamo che:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Che è un altro modo per dire che *i punti con la stessa quota hanno la stessa pressione*.

Cosa accade invece lungo l'asse z ? In questo caso non agiscono solo le forze di superficie lungo le due facce, ma anche la forza di volume, corrispondente alla



forza peso, è esercitata perpendicolarmente su di esse. Ricordando che $dS = dx dy$ e che $dV = dx dy dz$, avremo quindi che:

$$P(x, y, z)dx dy - P(x, y, z + dz)dx dy - g\rho dx dy dz = 0$$

$$[P(x, y, z) - P(x, y, z + dz)] = g\rho dz$$

Sviluppo in serie il termine $P(x, y, z + dz)$, che diventa $P(x, y, z) + \frac{\partial P}{\partial z} dz$, sostituisco nell'espressione precedente ottenendo:

$$-\frac{\partial P}{\partial z} dz = g\rho dz$$

Da cui la conclusione:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -g\rho$$

Ovvero la pressione sull'asse z non è costante. Consideriamo allora un fluido in quiete in un recipiente, e prendiamo due punti A e B a diversa quota, con $z_B > z_A$. Calcoliamo la differenza di pressione:

$$P_B - P_A = \int_A^B dP = \int_A^B \frac{\partial P}{\partial z} dz = - \int_A^B (g\rho) dz = -\rho g(z_B - z_A)$$

Chiamata $z_B - z_A = h$ la differenza di quota, possiamo riscrivere la precedente espressione come segue:

$$P_B = P_A - \rho gh$$

Questa è conosciuta anche come **legge di Stevino**, e afferma che, in liquido in quiete, la pressione aumenta con l'aumentare della profondità.

5.4 Legge di Archimede e esperienza di Torricelli

5.4.1 Legge di Archimede

La legge di Archimede è una legge sperimentale antica, che viene attribuita al genio siracusano vissuto nel III secolo a.C. La legge, ricavata empiricamente, afferma che *un corpo immerso in un fluido in quiete riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del fluido spostato, applicata al baricentro del fluido spostato*.

In parole semplici, ogni volta che inseriamo un corpo in un fluido in quiete, questo sposta una parte di quel fluido, la quale ha un proprio peso, e questo peso è pari alla forza che il fluido esercita sul corpo. Questa legge spiega anche perché molti materiali galleggiano se immersi in acqua. Vediamone la dimostrazione.

Consideriamo prima il fluido, in quiete, senza un corpo immerso, e prendiamo in analisi un volume ben definito V , che non sia un infinitesimo ma che abbia delle dimensioni proprie e apprezzabili anche macroscopicamente. Poiché il fluido è in



quiete, tutte le forze di superficie esercitate sul volume sono forze di pressione, mentre la forza di volume è proprio la forza peso. Poiché il fluido è in quiete e la somma delle forze deve essere nulla, conoscendo la direzione della forza peso, possiamo infine affermare che la risultante delle forze di pressione \vec{F}_A è diretta verso l'alto. Quindi, per la prima legge cardinale dei sistemi avremo che:

$$\begin{aligned}\vec{F}_A + \vec{F}_P &= 0 \\ |\vec{F}_A| &= \rho_f g V\end{aligned}$$

Se invece abbiamo un corpo immerso, di cui prendiamo un volume pari al volume di fluido prima analizzato, la forza di volume cambia, è pari infatti alla forza peso del corpo $P_c = \rho_c V g$. Però, la forza di superficie resta la stessa, perché, invece che il corpo materiale, è come se vi fosse ancora il volume d'acqua, ovvero $F_A = \rho_f V g$. Avremo quindi che la risultante delle forze

$$R = (\rho_f - \rho_c) V g \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Se } \rho_f > \rho_c \text{ va verso l'alto e il corpo galleggia} \\ \text{Se } \rho_f < \rho_c \text{ va verso il basso e il corpo affonda} \end{array} \right.$$

Tutto dipende quindi dalla densità del corpo, non dal suo peso o volume: una piccola pallina di ferro affonderà comunque, mentre una grande tavola di legno galleggerà comunque. La spinta di Archimede è proprio la legge sfruttata per permettere alle enormi navi di galleggiare: poiché la loro densità complessiva è inferiore di quella dell'acqua, questa non affondano. Possiamo anche calcolare il filo del galleggiamento: quando un corpo galleggia, presenterà una parte di volume immersa, mentre il restante è fuori dall'acqua. Chiamato V_i il volume immerso, avremo che:

$$F_A = F_P \Rightarrow \rho_f V_i g = \rho_c V g \frac{V_i}{V} = \frac{\rho_c}{\rho_f} < 1$$

In questo caso, c'è equilibrio e il corpo galleggia. Possiamo fare un esempio veloce, ovvero quello dell'iceberg. Conosciuta la densità del ghiaccio e dell'acqua di mare, rispettivamente $\rho_g = 0.917g/cm^3$ e $\rho_a = 1.025g/cm^3$, possiamo calcolare il volume immerso pari a:

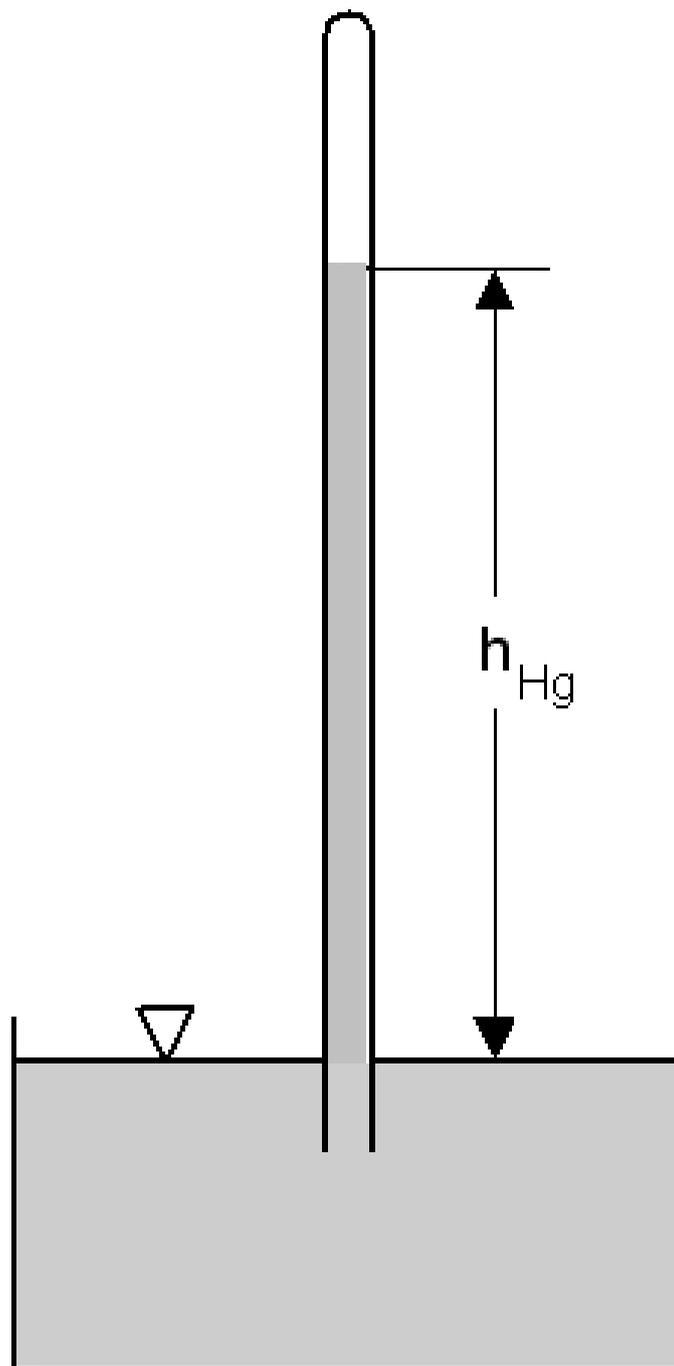
$$\frac{V_i}{V} = \frac{\rho_g}{\rho_a} = 0.895$$

Ovvero circa il 90% del volume dell'iceberg è immerso. Il Titanic ne sa qualcosa.

5.4.2 Esperienza di Torricelli

Come è lecito pensare, anche l'atmosfera terrestre è un fluido, composto da diversi elementi chimici, distribuiti più o meno uniformemente. Anche questa esercita una pressione sulla superficie terrestre, e il primo che riuscì a calcolarla fu Torricelli, sfruttando quello che venne poi chiamato *barometro di Torricelli*.





Lo strumento in figura qui sopra ha lo scopo di misurare la pressione atmosferica, sfruttando la legge di Stevino. Esso è composto da un tubo di vetro verticale, in cui è inserito un fluido (mercurio, che a temperatura ambiente è liquido) che viene ribaltato su una vasca. Il fluido inizia a fuoriuscire e riversarsi in essa, per poi fermarsi e restare in equilibrio. Infatti, i punti con la stessa quota, a contatto con la superficie, sono soggetti alla pressione atmosferica. Il punto del fluido più in alto, rimasto nel tubo, ha invece pressione nulla: nello spazio tra fluido e tubo

si è venuto a creare il vuoto, azzerando la pressione. In realtà, dire che vi è il vuoto in quel piccolo spazio è un'approssimazione, poiché vi sarà in realtà vapore saturo di mercurio. Considerando quel punto a pressione zero, possiamo calcolare la differenza di pressione fra il punto più alto e il punto più basso nel tubo che, ricordiamo, ha pressione pari a quella atmosferica. Avremo quindi:

$$P(z) = P_0 + \rho gh$$

Chiamiamo P_0 la pressione nel punto più basso, ovvero quella atmosferica. La pressione nel punto più alto, che chiameremo c è nulla, ovvero:

$$P_c = 0 = \rho gh + P_0$$

Da cui deriva immediatamente:

$$P_0 = \rho gh = 1.02 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

L'altezza misurata nel tubo è pari a $0.76m$, mentre la densità del mercurio è $13.6g/cm^3$. La scelta del mercurio come liquido è dovuta proprio a questa sua caratteristica di essere un liquido molto denso: si sarebbe potuto utilizzare un qualsiasi altro fluido, anche l'acqua, ma avrebbe richiesto un tubo alto circa 10 000 metri, cosa assai scomoda da costruire all'epoca. Il mercurio, invece, permetteva all'esperienza di riuscire anche con un tubo di vetro alto appena 1 metro.

Dopo questa esperienza, il millimetro di mercurio, che ha come simbolo $mmHg$, è diventato un'unità di misura della pressione. Anche l'atmosfera, il cui simbolo è atm è un'unità di misura della pressione largamente utilizzata in chimica. I loro rispettivi valori sono:

$$760mmHg = 1.02 \cdot 10^5 Pa \quad 1atm = 1.02 \cdot 10^5 Pa$$

5.5 Conseguenze della legge di Stevino

La legge di Stevino ha delle conseguenze, non immediate, di importanza rilevante per il loro utilizzo nella vita di tutti i giorni. Ne tratteremo tre in questo capitolo.

5.5.1 Vasi comunicanti

Consideriamo un liquido perfetto omogeneo, ovvero con $\rho = \text{cost}$ in quiete. Un sistema di vasi comunicanti prevede due contenitori aperti verso l'alto e collegati tra loro con un tubicino. Non interessa che le basi dei contenitori si trovino alla stessa altezza, così come non è importante che il tubo sia piano o in diagonale. Sulle due aperture, infatti, agisce la stessa pressione atmosferica, quindi il liquido raggiunge la stessa quota in entrambi i contenitori.



5.5.2 Legge di Pascal

La legge di Pascal afferma che *in un liquido omogeneo in quiete, la variazione di pressione prodotta in un punto del fluido si trasmette inalterata a tutti gli altri punti del fluido.*

Per dimostrarla, prendiamo un recipiente con del fluido e analizziamo due punti, un punto A posto sulla superficie del fluido e un punto B interno al fluido. Avremo quindi che $z_b < z_A$. Per tale, la relazione che lega le due pressioni è $P_B = P_A - \rho gh$, dove $h = z_B - z_A$.

Trasmettiamo una variazione di pressione nel punto A ; in esso sarà allora presente una pressione $P'_A = P_A + \Delta P_A$. Calcoliamo la nuova pressione nel punto B :

$$P'_B = P'_A - \rho gh = (P_A + \Delta P_A) - \rho gh = P_B + \Delta P_A$$

È quindi dimostrata la legge di Pascal.

5.5.3 Martinetto idraulico

Il martinetto idraulico è uno strumento largamente utilizzato nella vita quotidiana: il suo utilizzo pratico è quello di permettere di sollevare corpi dal peso anche molto elevato applicando una forza di molto inferiore al peso del corpo. L'esempio immediato è il voler sollevare l'automobile dal meccanico per una riparazione.

Consideriamo un fluido *incomprimibile* e un sistema di vasi comunicanti; la caratteristica fondamentale di questo sistema è che, le aperture verso l'alto abbiamo sezioni molto diverse tra loro, che chiameremo A e a , con $a \ll A$. Sulle due aperture vengono posti dei piani che chiudono il fluido.

Sulla sezione grande A agisce una forza F_A , in cui sono comprese sia la forza peso del corpo che la pressione atmosferica. Sulla sezione minore agisce invece una forza f_a . Le due sezioni si troveranno ad altezze nettamente differenti: le due pressioni devono essere bilanciate, quindi avremo che:

$$P_0 = \frac{F_A}{A} + \rho gh_1 = \frac{f_a}{a} + \rho gh_2$$

Da cui otteniamo:

$$\frac{f_a}{a} = \frac{F_A}{A} + \rho g(h_1 - h_2)$$

Osserviamo il fattore $\rho g(h_1 - h_2) \cdot A$. Questo rappresenta l'ipotetico peso di fluido che si troverebbe sulla sezione A e compreso tra le altezze h_1 e h_2 . Questo fattore è *di molto* minore della forza che esercita il corpo sul fluido: infatti il corpo abbassa il piano, e affonderebbe facilmente nel fluido, per cui i pesi sono nettamente differenti. Possiamo quindi trascurare questo fattore nella precedente espressione, ottenendo:

$$f_a = \frac{a}{A} F_A$$



Poiché il rapporto $\frac{a}{A} \ll 1$ m avremo che la forza necessaria ad alzare il corpo sarà molto minore del peso del corpo stesso. È però importante sapere che il lavoro compiuto non diminuisce, a diminuire è solo la forza impiegata. Per poter eguagliare il lavoro della forza peso, quindi, la forza minore dovrebbe compiere uno spostamento molto grande; nella realtà ciò è possibile grazie a un sistema di entrata e uscita del fluido che permette alla leva su cui si preme col piede di risalire senza che il corpo scenda: in questo modo, abbassando più e più volte la leva, si riesce a sollevare l'auto.

5.6 Fluidi in moto

Lo studio del moto di un fluido può rivelarsi difficile, tant'è vero che resta una delle branche della fisica più complicate, nonostante con gli anni siano subentrate altre branche concettualmente molto complesse. Poiché un fluido è, in realtà, un sistema microscopicamente discreto, lo studio del moto delle singole particelle richiede conoscenze molto approfondite di matematica e della meccanica statistica. Per tale motivo, tratteremo qui i fluidi come se fossero sistemi continui. In generale, esistono due approcci per studiare i fluidi in moto:

1. Approccio lagrangiano, in cui si studia il moto di un determinato volumetto di fluido;
2. Approccio euleriano: si considera una posizione fissa e si determinano le variabili del fluido in quella posizione al variare del tempo.

In questo corso useremo l'approccio euleriano; sceglieremo quindi una posizione fissa e, al variare del tempo, studieremo le variabili del moto che descrive il fluido. È quindi giusto parlare di una velocità che, oltre al tempo, sia anche funzione della posizione.

Definizione

Definiamo

$$\vec{v}(t, \vec{r})$$

La velocità del fluido quando passa nella posizione \vec{r} al tempo t .

Prima di studiare il moto di un fluido, diamo delle definizioni preliminari.

Definizione (Linee di flusso)

Le linee di flusso sono delle curve che, in ogni istante e in ogni punto, hanno come tangente il vettore velocità che il fluido ha in quel punto e in quell'istante.

Le linee di flusso, che possono chiamarsi anche *campo di velocità*, descrivono il moto del fluido.

È bene precisare che un elemento di fluido *non* segue necessariamente le linee di flusso: questo descrivono solo il comportamento del fluido *istante per istante*, non continuamente nel tempo.



È anche immediato pensare che due o più linee di flusso *non* possano intersecarsi: qualora lo facessero si avrebbero due o più vettori tangenti al punto in quell'istante, ma la velocità in una posizione e in un istante è una.

Quando si studia un fluido in moto, si devono tener conto anche degli sforzi di taglio. Per tutti i fluidi reali esso è presente, ma in un *fluido perfetto* no. In questo caso si parla di fluido non viscoso.

Definizione (Liquido perfetto)

Si definisce **liquido perfetto** un liquido *incomprimibile* e *non viscoso*.

Poiché questo corso è un introduzione alla meccanica dei fluidi, considereremo solo fluidi in *moto stazionario*.

Definizione (Moto stazionario)

Quando la velocità $\vec{v}(t, \vec{r})$ non dipende dal tempo, ma solo dalla posizione, ovvero:

$$\vec{v}(t, \vec{r}) = \vec{v}(\vec{r})$$

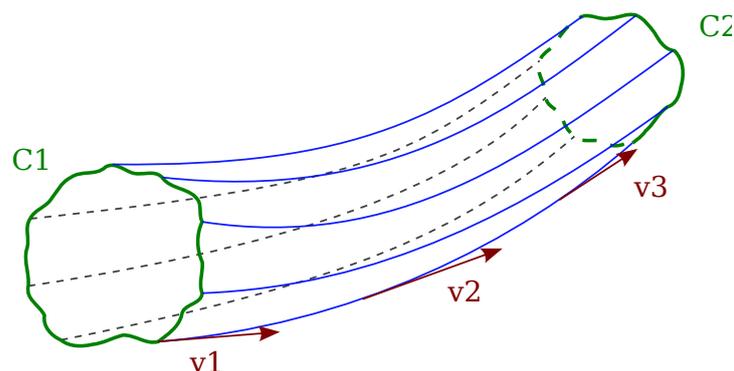
si parla allora di **moto stazionario**.

In un moto stazionario, le linee di flusso sono **costanti** e corrispondono alle **traiettorie** del fluido.

Lo studio del moto di un fluido non viene fatto su tutto il volume del fluido: spesso è utile o rilevante studiarne solo una parte, che si chiama *tubo di flusso*.

Definizione (Tubo di flusso)

Un tubo di flusso di un liquido perfetto in moto stazionario è una superficie che racchiude un insieme di linee di flusso. È una curva chiusa, così come tutte le linee che contiene.



In verde si notano le curve che generano il tubo di flusso, mentre in blu vi sono le linee di flusso.



In caso di moto stazionario, un tubo di flusso descrive efficacemente un insieme ben definito di liquido in moto. Considerata una porzione di tubo di flusso, è importante, nello studio di un moto, parlare di *portata*.

Definizione (Portata del tubo di flusso)

Si definisce **portata** il volume di liquido che passa nel tubo nell'unità di tempo, ovvero:

$$q = \frac{dV}{dt}$$

Poiché la quantità di massa nel tubo è sempre la stessa, in due istanti di tempo avremo due masse $dm_{1,2}$. Allora è immediato che:

$$\begin{aligned} dm_1 &= dm_2 \\ \rho dV_1 &= \rho dV_2 \\ dV_1 &= dV_2 \end{aligned}$$

Da cui ricaviamo che $\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_2}{dt}$, ovvero che **la portata è costante nel tubo**. Questa espressione è nota anche come *legge di conservazione della massa* oppure **equazione di continuità**.

Nel caso in cui la sezione del tubo sia *perpendicolare* al vettore velocità, chiameremo il tubo di flusso *elementare*. In questo caso, avremo che un dato volume di fluido V si sposta, in un istante dt , di una lunghezza dl nel tubo; la lunghezza può essere anche scritta $dl = v dt$. Poiché la velocità è perpendicolare alla sezione, avremo che:

$$dV = S dl = S v dt \quad \Rightarrow \quad q = \frac{dV}{dt} = \frac{S v dt}{dt} = S v$$

Che è un ulteriore modo di determinare la portata di un tubo. Poiché essa è costante, avremo che $S_1 v_1 = S_2 v_2$, quindi se la sezione diminuisce la velocità aumenta, così come il contrario. Nel caso generale in cui la sezione non sia perpendicolare alla velocità, si considera nel calcolo solo la componente della velocità che sia normale alla sezione.

Ricordando la definizione di *flusso di un vettore*, ovvero $\Phi_S(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \hat{n} dS$, notiamo che il flusso di un fluido *coincide* con la sua portata.

5.7 Legge di Bernoulli

5.7.1 Legge di Bernoulli

Studiamo ora una legge che legghi le varie grandezze che scrivono il moto di un fluido. Prendiamo un tubo di flusso compreso tra due superfici A_1 e A_2 ; le due superfici sono prese abbastanza piccole da poter trascurare la differenza di quota agli estremi delle superfici, quindi avremo che z_1 e z_2 descrivono la quota complessiva di tutte e due le superfici; però esse hanno quota diversa, quindi $z_1 < z_2$.



Il fluido è in *moto stazionario*; nell'istante $t + dt$, esso si è spostato nel tubo, e si troverà ora compreso tra due superfici A'_1 e A'_2 . Calcoliamo il lavoro compiuto dalle forze.

Le forze che agiscono sul fluido sono:

- \vec{F}_P , la forza peso;
- \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , le forze di pressione che il fluido esercita sulle due superfici agli estremi del tubo. Poiché il fluido è in moto, anche queste compiono lavoro.

Possiamo esprimere le due forze di pressione come:

$$F_1 = P_1 A_1 \quad F_2 = P_2 A_2$$

La forza F_1 compirà lavoro positivo, poiché lo spostamento è concorde al verso della forza; al contrario, la forza F_2 compirà lavoro negativo, perché lo spostamento è di verso discorde con quello della forza. Possiamo calcolare il lavoro delle forze di pressione, che sarà uguale a:

$$dL_{\text{pressione}} = P_1 A_1 dl_1 - P_2 A_2 dl_2$$

Il lavoro della forza peso sarà invece:

$$dL_{\text{peso}} = -dm g(z_2 - z_1) = dm g(z_1 - z_2)$$

Notiamo che il lavoro della forza peso è negativo perché c'è stato un aumento di quota. Possiamo allora scrivere il lavoro totale compiuto dal sistema:

$$dL_{\text{tot}} = P_1 A_1 dl_1 - P_2 A_2 dl_2 + dm g(z_1 - z_2)$$

Possiamo scrivere $dm = \rho dV$ e $dV = Adl$, avremo quindi che $\rho A_1 dl_1 = \rho A_2 dl_2$. Possiamo tutto scrivere in funzione di dm come $\frac{dm}{\rho} = A_1 dl_1 = A_2 dl_2$. Andiamo a sostituire nell'espressione del lavoro.

$$dL_{\text{tot}} = dm \left[\frac{P_1 - P_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) \right]$$

Adesso applico il teorema dell'energia cinetica, poiché il fluido ha velocità, quindi il lavoro totale corrisponde alla variazione di energia cinetica:

$$\begin{aligned} dL_{\text{tot}} &= dK = \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 \\ \frac{P_1}{\rho} + gz_1 + \frac{1}{2} v_1^2 &= \frac{P_2}{\rho} + gz_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \\ P + \rho gz + \frac{1}{2} \rho v^2 &= \text{cost} \end{aligned}$$

Questa espressione è anche conosciuta come **legge di Bernoulli**.



5.7.2 Effetto Venturi

Un caso particolare della legge di Bernoulli è il cosiddetto *effetto Venturi*. Consideriamo un fluido perfetto in moto stazionario in un tubo orizzontale, la cui sezione si restringa. Sappiamo che la portata si conserva, quindi:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Ovvero se $A_2 < A_1$ avremo $v_2 > v_1$. Applico la legge di Bernoulli:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Se $v_2 > v_1$, ne consegue allora che $P_1 > P_2$. Questo fenomeno è largamente utilizzato, come ad esempio nella forma delle ali di un aeroplano: esse infatti permettono alla velocità del fluido di avere valori diversi sopra e sotto le ali, producendo una variazione di pressione che spinge l'aereo verso l'alto. Un esempio più comune è quello del foglio di carta: prendete un qualsiasi foglio di carta non rigida, tenetelo saldo davanti la bocca, poi soffiare sulla superficie verticale. Produrrete una variazione di pressione che spingerà il foglio verso l'alto.



Capitolo 6

Parte Quinta - Onde meccaniche

6.1 Le onde meccaniche

Quando applichiamo una perturbazione, ovvero una variazione, a una qualsiasi grandezza fisica di un determinato mezzo, si verifica una *propagazione ondosa*, ovvero la perturbazione si propaga attraverso il mezzo che riempie lo spazio.

Un esempio classico di un fenomeno d'onda è il lancio di un sasso in uno stagno d'acqua: successivamente all'impatto del sasso con la superficie d'acqua, si possono vedere delle circonferenze d'acqua che si allontanano progressivamente dal punto d'impatto. Quelle circonferenze possono essere considerate un esempio materiale di onda.

Un'osservazione diretta dall'esperienza empirica del lancio del sasso è che, a propagarsi, non è materia, bensì *il moto della materia*: le particelle d'acqua cambiano sia la loro velocità che la loro quota, dando origine così a un propagarsi di *energia cinetica* e *energia potenziale*. Gli anelli d'acqua che si formano possono essere considerati come **luoghi geometrici** dei punti che, in un determinato istante, subiscono la perturbazione; questi luoghi geometrici vengono chiamati comunemente **fronti d'onda**. Quando si ha una propagazione nello spazio si è soliti parlare di **onde sferiche** ma, come nel caso dell'acqua, si può considerarle anche **onde piane**.

La propagazione di un'onda dipende *fortemente* dalle caratteristiche fisiche del mezzo; nell'acqua è presente una *forza di richiamo* tra le particelle, che possiamo schematizzare come una *forza elastica*. In questi, allora, parleremo di **onde elastiche** in *mezzi elastici*. La forza elastica, tuttavia, ha degli effetti dissipativi che tendono a *smorzare* la perturbazione; nella nostra analisi trascureremo questi effetti. Qualora, però, essi risultano impossibili da trascurare, perché troppo forti, parliamo di **onde smorzate**: un esempio è il lancio di un sasso, invece che in uno stagno d'acqua, in una pozzanghera di fango; in quel mezzo la forza di richiamo ha un effetto dissipativo molto forte, e il risultato è che non possono essere apprezzati fronti d'onda evidenti, quindi la perturbazione viene stroncata quasi sul nascere.

Le onde elastiche descrivono efficacemente molti fenomeni naturali, tra i quali



la *propagazione del suono* nell'aria. Nei mezzi elastici possono crearsi due tipi di onde: le **onde longitudinali**, che si hanno quando le particelle si propagano nella stessa direzione in cui si propaga l'onda, per esempio, quando si comprime una piccola parte di una molla molto lunga e possiamo vedere come, seguendo la direzione della molla, le parti successive adiacenti siano interessate dalla perturbazione contraendosi a loro volta; le **onde trasversali**, invece, si hanno quando le particelle si propagano in direzione ortogonale a quella di propagazione dell'onda, per esempio quando si fa oscillare una corda di chitarra. In questo corso tratteremo approfonditamente entrambi questi fenomeni.

Parliamo adesso in termini matematici. Le onde, oltre che a parole, possono essere descritte da funzioni matematiche. Una funzione d'onda descrive come la perturbazione si propaga nello spazio, ovvero come, all'istante t , si muovono le particelle interessate del mezzo. Avremo quindi che la funzione d'onda può essere scritta:

$$\alpha(x, t)$$

Questo tipo di funzione rappresenta, al variare del tempo, come varia la posizione della particella. Le onde possono considerarsi *progressive* o *regressive*: a cambiare non è altro che la direzione di propagazione. Scelto un verso positivo, si hanno onde progressive quando l'onda si propaga verso il semiasse positivo; al contrario, si hanno onde regressive quando la direzione di propagazione segue il semiasse negativo. In generale, un'onda che si propaga con una determinata velocità v , la funzione può essere scritta anche come:

$$\alpha(x, t) = f(x - vt)$$

(nel caso di onde progressive). Se l'onda fosse stata regressiva, avremmo avuto $f(x + vt)$. Per descrivere la velocità possiamo considerare la funzione a due istanti diversi t_1 e t_2 ; se, in questi due istanti, avremo le posizioni delle particelle \bar{x}_1 e \bar{x}_2 , allora la velocità dell'onda può essere scritta come:

$$\frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{t_2 - t_1} = v$$

Matematicamente parlando, una funzione d'onda *soddisfa* la seguente equazione differenziale alle derivate parziali; diamo per buono questo dato, tenendo conto che, nel corso, per valutare se si ha o meno una funzione d'onda, effettueremo questo test. L'equazione che descrive le funzioni d'onda è:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

6.2 Onde sinusoidali

Un caso interessante da studiare sono quei tipi di onde descritte da una funzione sinusoidale:



$$\alpha(x, t) = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x \mp vt) \right]$$

In questa funzione A indica l'ampiezza d'onda, ovvero i valori massimi assunti dalla funzione; possiamo notare come questo parametro sia indipendente sia da x che da t , e quindi parliamo di una onda non smorzata. Il parametro λ si chiama **lunghezza d'onda** e determina il periodo *spaziale* dell'onda, ovvero la distanza tra due massimi consecutivi. Oltre al periodo spaziale, le onde posseggono anche un periodo temporale dato da $T = \frac{\lambda}{v}$; possiamo dimostrare come, dopo ogni periodo, l'onda si ripeta:

$$\frac{2\pi}{\lambda} [x \mp v(t + nT)] = \frac{2\pi}{\lambda} \left[x \mp v \left(t + n \frac{\lambda}{v} \right) \right] = \frac{2\pi}{\lambda} [x \mp vt + n\lambda] = \frac{2\pi}{\lambda} (x \mp vt) + 2\pi n$$

Vale quindi la relazione $\lambda = vT$. Un altro modo di scrivere la funzione di un'onda sinusoidale è:

$$\alpha(x, t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

In cui ω è detta **pulsazione** e vale:

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi}{T}$$

Mentre φ vale $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \bar{x} + j\pi$, nei casi:

$$\begin{aligned} j &= 0 & \text{se } (x - vt) \\ j &= 1 & \text{se } (x + vt) \end{aligned}$$

A volte, però, risulta più comodo scrivere la funzione nel seguente modo:

$$\alpha(x, t) = A \sin(kx \mp \omega t + \varphi)$$

In questa espressione, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ viene chiamato **numero d'onda**, mentre la pulsazione $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi}{T}$. Il fattore φ viene chiamato **fase** e dipende esclusivamente dalle condizioni iniziali del problema.

Un'onda del tipo $\alpha(x, t) = \frac{2\pi}{\lambda} (x \mp vt)$ è detta **armonica**. Questa, in teoria, dovrebbe continuare in un grafico all'infinito sia per il tempo che per lo spazio, ovvero $-\infty \leq t \leq +\infty$ e $-\infty \leq x \leq +\infty$; questo caso è quanto mai improbabile, e quindi si studia una *porzione* d'onda limitata, che viene chiamata **treno d'onda sinusoidale**. Una caratteristica delle onde armoniche è che questa seguono il principio di sovrapposizione e il teorema di Fourier.

6.2.1 Principio di sovrapposizione

Il **principio di sovrapposizione** afferma che se, in un mezzo elastico, si propagano più onde di funzione $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ l'onda risultante è descritta da:



$$\alpha(x, t) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots$$

Ovvero le singole componenti si sommano **solo se** la perturbazione risultante non porta il mezzo a lavorare oltre il limite di elasticità. *Possiamo dimostrare come la risultante soddisfi l'equazione differenziale delle onde; facciamo il caso di due contributi, valido come esempio generale:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial^2 (\alpha_1 + \alpha_2)}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (\alpha_1 + \alpha_2)}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Nel secondo passaggio abbiamo sommato membro a membro. Così come la somma di due contributi è una funzione d'onda, lo stesso vale quando i contributi sono in numero maggiore, sempre rispettando il limite di elasticità del mezzo.

Teorema (di Fourier)

Un'onda periodica di periodo T e lunghezza d'onda λ , quindi avente $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, che sia di forma qualunque, e sia $\alpha(kx \mp \omega t)$ la sua funzione, sotto opportune ipotesi può essere scritta come:

$$\begin{aligned} \alpha(kx \mp \omega t) &= A_0 + A_1 \cos(kx \mp \omega t) + B_1 \sin(kx \mp \omega t) + \\ &+ A_2 \cos(2(kx \mp \omega t)) + B_2 \sin(2(kx \mp \omega t)) + \dots \end{aligned}$$

I coefficienti $A_0, A_1, A_2 \dots B_1, B_2 \dots$ decrescono col crescere del numero d'onda k . La scrittura fornita dal teorema è anche chiamata **serie di Fourier** e lo studio di un'onda attraverso lo sviluppo di Fourier è detto **analisi armonica**. Non forniremo qui la dimostrazione del teorema.

6.3 Onde longitudinali

Come già detto, le onde longitudinali si propagano nella stessa direzione di propagazione dell'onda. Prendiamo allora, come esempio, una sbarra di materiale elastico, di sezione costante S ; lungo questa si propaga una perturbazione $\alpha(x, t)$. Un elemento di sbarra, di lunghezza dx , viene sottoposto alla forza di richiamo $d\vec{F}$ quando è investito dalla perturbazione. Per il secondo principio della dinamica:

$$dF = dm a = \rho S dx a = \rho S dx \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$$

Abbiamo scritto la massa come $dm = \rho dV$, considerando che il volume dell'elemento vale $dV = S dx$. L'accelerazione a cui è sottoposto l'elemento è esattamente $a = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$. La forza di richiamo è espressa dalla legge di Hooke per materiali metallici sottoposti a compressione, con E modulo di Young:



$$F(x) = -ES \frac{dh}{h} = -ES \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

La compressione si propaga lungo tutto il mezzo; scegliamo un asse orizzontale e poniamo l'elemento considerato tra le posizioni x e $x + dx$; la forza agisce in questo intervallo in versi opposti, quindi:

$$dF = F(x) - F(x + dx) = -\frac{\partial F}{\partial x} dx$$

In questa sostituiamo l'espressione ricavata dalla legge di Hooke, per poi uguagliarla a quella trovata sfruttando il secondo principio della dinamica:

$$\begin{aligned} dF &= -\frac{\partial F}{\partial x} dx = ES \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} dx \\ ES \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} dx &= \rho S dx \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} &= \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Che riconosciamo essere la funzione di un'onda, che ha velocità pari a $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Come possiamo notare, la velocità dell'onda *dipende solo* da caratteristiche fisiche del mezzo e non dalla perturbazione.

6.3.1 Il suono come onda longitudinale

Lo studio di una compressione che si propaga in un mezzo è strettamente legato al caso del suono, il quale, infatti, trattasi di una compressione delle particelle dell'aria che si propaga nello spazio.

Trattiamo quindi il caso di un mezzo elastico omogeneo che occupi tutto lo spazio *uniformemente*. Chiamato $\frac{1}{k}$ il *coefficiente di compressibilità* volumica del mezzo, studiamo come varia la pressione dell'aria. Dalla legge di Hooke $dF = -ES \frac{dh}{h}$ sappiamo che questa è la forza di richiamo, che genera quindi una *pressione* sulle superfici dello spazio:

$$\begin{aligned} dP &= \frac{dF}{S} = -\frac{ES}{S} \frac{Sdh}{Sh} \\ dP &= -E \frac{dV}{V} \\ \frac{dV}{V} &= -\frac{1}{k} dP \end{aligned}$$

Dove si è considerato $E = k$: il coefficiente di elasticità coincide con il coefficiente di compressibilità. Attraverso uno sviluppo identico a quello fatto per un mezzo elastico, si può giungere a ricavare la velocità dell'onda, pari a

$$v = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$$



Il caso interessante da considerare è quello dei gas. Quando un oggetto vibra, si presentano locali variazioni di pressione dP corrispondenti a locali variazioni di densità. Dalle leggi della termodinamica, sappiamo valere nei gas la relazione:

$$PV^\gamma = \text{cost}$$

Dove γ è una costante dei gas, che vale:

$$\begin{cases} \gamma = \frac{5}{3} \text{ gas monoatomico} \\ \gamma = \frac{7}{5} \text{ gas biatomico} \end{cases}$$

Differenziando la relazione tra pressione e volume, otteniamo:

$$\begin{aligned} P\gamma V^{\gamma-1}dV + VdP &= 0 \\ P\gamma dV + VdP &= 0 \\ \frac{dV}{V} &= -\frac{1}{\gamma P}dP \end{aligned}$$

In questi casi, il coefficiente di compressibilità volumica vale $k = \gamma P$. La velocità di propagazione di un'onda elastica nei gas, quindi, vale:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

A volte può essere utile scriverla in funzione della temperatura e del peso molecolare del gas presente; sfruttando quindi **l'equazione di stato dei gas perfetti**:

$$\frac{m}{M}RT = PV \Rightarrow \frac{RT}{M} = P \frac{V}{m} = \frac{P}{\rho}$$

Possiamo esprimere la velocità come:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$$

Dove R è la costante universale dei gas, T la temperatura e M il peso molecolare del gas.

6.4 Onde trasversali

Nelle onde trasversali il moto delle particelle è *ortogonale* alla direzione di propagazione dell'onda. Immaginiamo una corda tesa sulla quale imprimiamo una perturbazione: essa inizierà ad oscillare. La velocità di propagazione dell'onda, intuitivamente, aumenta all'aumentare della tensione del filo, che rappresenta la forza di richiamo elastica.

Consideriamo una corda omogenea, di tensione $\vec{\tau}$ e densità lineare $\mu = \frac{dm}{dx}$. La massa sarà quindi $dm = \mu dx$, scelto un asse orizzontale parallelo alla corda a riposo. Studiamo un tratto compreso tra x e $x + dx$ sottoposto alla perturbazione,



quindi dislocato di una quantità $y = \alpha(x, t)$ dalla posizione di riposo. La tensione del filo può essere schematizzata come $\vec{\tau}(x)$ e $\vec{\tau}(x + dx)$; in modulo le due tensioni sono uguali, ma cambiano direzione e verso:

$$\vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow \tau \sin(\theta + d\theta) - \tau \sin\theta = dma = \mu dx \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$$

Gli angoli che vengono a formarsi, però, sono sempre molto piccoli se la tensione è forte; quindi possiamo approssimare a:

$$\begin{aligned} \tau(\theta + d\theta) - \tau\theta &= \mu \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} dx \\ \tau d\theta &= \mu \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} dx \end{aligned}$$

L'angolo θ coincide con la pendenza della corda, ovvero $\theta \approx \tan\theta = \frac{\partial \alpha}{\partial x}$; per ottenere l'espressione di $d\theta$, deriviamo quella appena trovata rispetto al tempo:

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} dx$$

Lo sostituiamo nell'espressione trovata prima, ottenendo la funzione dell'onda:

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} dx &= \mu \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} dx \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} &= \left(\frac{\mu}{\tau}\right) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Da cui ricaviamo che la velocità di propagazione dell'onda è $v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$ che, come nei casi precedenti, dipende ancora una volta solo dalle caratteristiche del mezzo.

6.5 Interferenza

In questo capitolo studieremo cosa accade in un mezzo se si propagano più onde contemporaneamente.

Supponiamo che in una regione di spazio si propagano due onde di uguale lunghezza d'onda e sfasate tra loro di un fattore δ ; queste onde le chiameremo **coerenti** e, ipotizzando abbiano la stessa ampiezza, possiamo esprimerle come:

$$\begin{aligned} \alpha_1(x, t) &= A \sin(kx - \omega t) \\ \alpha_2(x, t) &= A \sin(kx - \omega t - \delta) \end{aligned}$$

Vedremo come il risultato delle due onde non sia intuitivo; si è portati a dire che l'ampiezza della risultante sia la somma delle due, e invece vedremo come anche essa non sia uniforme nello spazio. Innanzitutto, le due onde hanno la stessa intensità pari a:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} A^2 \rho \omega^2 v$$



Per il *principio di sovrapposizione*, possiamo scrivere il fenomeno risultante come:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx - \omega t - \delta)$$

Scritta così, non è proprio il massimo, sfruttando le leggi di prostaferesi, ovvero $\sin a + \sin b = 2 \cos \left(\frac{a-b}{2}\right) \sin \left(\frac{a+b}{2}\right)$, possiamo scrivere la risultante come:

$$\alpha(x, t) = 2A \cos \left(\frac{kx - \omega t - kx + \omega t + \delta}{2}\right) \sin \left(\frac{kx - \omega t + kx - \omega t - \delta}{2}\right)$$

Svolgendo i calcoli, otteniamo la funzione dell'onda risultante:

$$\alpha(x, t) = 2A \cos \frac{\delta}{2} \sin \left(kx - \omega t - \frac{\delta}{2}\right)$$

Osserviamo che anche la risultante ha una natura ondulatoria. La lunghezza d'onda è *pari* a quella delle onde generatrici, ma l'ampiezza $|2A \cos \frac{\delta}{2}|$ non è la somma delle ampiezze precedenti, bensì dipende da δ . Avremo allora

$$\begin{aligned} \text{Se } \cos \frac{\delta}{2} &= \pm 1 \text{ interferenza costruttiva} \\ \text{Se } \cos \frac{\delta}{2} &= 0 \text{ interferenza distruttiva} \end{aligned}$$

Ricaviamoci adesso l'intensità dell'onda risultante, ovvero:

$$I_r = \frac{1}{2} \rho \omega^2 v A^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 v \left(4A^2 \cos^2 \frac{\delta}{2}\right) = 4I \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

Come l'ampiezza, anche l'interferenza dipende da δ ; come prima, si hanno interferenze costruttive o distruttive.

Come possiamo esprimere lo sfasamento δ ? Questo si può fare sia temporalmente che spazialmente. Consideriamo l'istante $t = 0$; le due onde si esprimono:

$$\begin{aligned} \alpha_1(x, 0) &= A \sin kx \\ \alpha_2(x, 0) &= A \sin(kx - \delta) = A \sin \left[k \left(x - \frac{\delta}{k}\right) \right] \end{aligned}$$

Le due onde hanno la stessa ampiezza, stessa lunghezza d'onda ma sono sfasate spazialmente. Allora possiamo ragionare in termini di spazio, quindi:

$$\begin{aligned} \text{Se } \frac{\delta}{k} &= 0, 2\pi, 4\pi \dots \text{ le ampiezze si sommano, interferenza costruttiva} \\ \text{Se } \frac{\delta}{k} &= \pi, 3\pi, 5\pi \dots \text{ le ampiezze si sottraggono, interferenza distruttiva} \end{aligned}$$

Oltre allo sfasamento spaziale, può esserci il caso del ritardo temporale; scelta una posizione $x = 0$, le due onde saranno:



$$\alpha_1(0, t) = -A \sin \omega t$$

$$\alpha_2(0, t) = -A \sin \omega \left(t + \frac{\delta}{\omega} \right)$$

Le due onde sono ritardate di un tempo $\tau = \frac{\delta}{\omega}$. Questo vuol dire che le due onde sono coerenti e generate da due punti diversi dello spazio S_1 e S_2 , e giungono con tempi diversi in due punti P_1 e P_2 . Questo genera un fenomeno di interferenza: in alcune regioni dello spazio si ha un'interferenza costruttiva, in altre distruttiva. La conservazione dell'energia è *mantenuta*, solo che la densità di energia nello spazio non è più costante, ma varia da regione a regione.

6.5.1 Battimenti

Anche il fenomeno dei battimenti rientra nelle interferenze; questi si hanno quando i numeri d'onda delle due onde sono diversi, ma di una quantità molto piccola, ovvero:

$$\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \approx 10^{-2}$$

Possiamo scrivere le due onde come sappiamo fare e ricavarne la risultante sfruttando ancora una volta prostaferesi:

$$\alpha_1(x, t) = A \sin(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$\alpha_2(x, t) = A \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$\alpha(x, t) = 2A \cos \left[\left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right) x - \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t \right] \sin \left[\left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right) x - \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t \right]$$

Se sono soddisfatte le ipotesi del problema, ovvero che i numeri d'onda differiscano di poco, possiamo allora approssimare:

$$\omega_1 \approx \omega_2 \approx \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega$$

$$k_1 \approx k_2 \approx \frac{k_1 + k_2}{2} = k$$

Quindi scriviamo l'onda risultante come:

$$\alpha(x, t) = 2A \cos \left[\left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right) x - \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t \right] \sin(kx - \omega t)$$

$$\alpha(x, t) = B(x, t) \sin(kx - \omega t)$$

L'onda $B(x, t)$ ha *ampiezza modulata* e velocità:

$$v_B = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega_1 \omega_2}{k_1 - k_2}$$

Ricordando che $\omega_1 = k_1 v$ e $\omega_2 = k_2 v$, allora otteniamo che:



$$v_B = \frac{k_1 v - k_2 v}{k_1 - k_2} = v$$

In conclusione, nel fenomeno dei battimenti, l'onda risultante è il prodotto tra un'onda modulata e un'onda modulante, con la stessa velocità; sentiremo quindi un suono che scompare periodicamente.

6.6 Onde stazionarie

A differenza dei tipi di onde finora studiate, le **onde stazionarie** non si propagano nello spazio. Queste nascono dalla sovrapposizione di onde aventi stessa frequenza, stessa lunghezza d'onda e stessa ampiezza, ma si propagano in direzioni opposte. Le due onde hanno, genericamente, funzione:

$$\begin{aligned}\alpha_1(x, t) &= A \sin(kx - \omega t) \\ \alpha_2(x, t) &= A \sin(kx + \omega t)\end{aligned}$$

L'onda risultante ha funzione quindi (utilizzando le espressioni di prostaferesi):

$$\alpha(x, t) = 2A \cos \omega t \sin kx$$

L'onda, quindi, non si propaga, ma rimane in una porzione limitata dello spazio. Un punto di generica coordinate x oscilla di moto armonico con pulsazione ω e ampiezza $2A \sin kx$. Vi saranno anche punti fermi che non oscillano, quelli per i quali $\sin kx = 0$, ovvero quando:

$$kx = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = n \frac{\lambda}{2}$$

Con n numero intero. Questi punti si troveranno, quindi, a multipli interi di metà lunghezza d'onda, e vengono chiamati **nodi dell'onda stazionaria**. Così come questi punti non oscillano, altri punti oscilleranno di ampiezza massima; per questi vale $\sin kx = 1$, quindi:

$$kx = \frac{2n+1}{2}\pi \Rightarrow x = \frac{(2n+1)\frac{\pi}{2}}{\frac{2\pi}{\lambda}} = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$$

Questi punti vengono invece chiamati **ventri dell'onda stazionaria**.

In un'onda stazionaria, quindi, ogni punto oscilla con pulsazione $\omega = kv = \frac{2\pi v}{\lambda}$, e avranno frequenza pari a $\nu = \frac{v}{\lambda}$.

Un esempio classico di onda stazionaria è una corda vibrante, i cui estremi sono fissati, come le corde di uno strumento musicale; la lunghezza L della corda sarà tale che $L = n \frac{\lambda}{2}$, ovvero conterrà un numero intero di mezze lunghezze d'onda. Quando è presente un solo ventre, avremo che $L = \frac{\lambda}{2}$, e la corda si trova alla sua **armonica fondamentale**; per $n > 2$, si dice che la corda si trova alle **armoniche superiori**.



Quando una corda vibra, il contributo maggiore alla vibrazione è dato dalla sua armonica fondamentale, mentre le armoniche superiori contribuiscono in minor modo. Il mescolamento dei vari modi di vibrazione, chiamati **modi normali**, definisce il **timbro** di uno strumento musicale.

Come abbiamo visto, la lunghezza d'onda di un'onda stazionaria è determinata da vincoli geometrici. La frequenza del suono generato da una corda oscillante, tuttavia, dipende dalla velocità di propagazione dell'onda che, come abbiamo visto meglio trattando le onde trasversali, vale

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

Da cui deriva che la frequenza del suono generato da una corda vibrante è:

$$\nu = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

Dove λ è la lunghezza d'onda dell'onda, mentre τ e μ sono caratteristiche fisiche della corda vibrante.



Capitolo 7

Parte Sesta - Meccanica relativistica

7.1 La fisica dopo Maxwell

7.1.1 Introduzione alla relatività ristretta

In questo breve corso di relatività, tratteremo solo la teoria ristretta, quindi parleremo solo di sistemi inerziali non accelerati. Perderemo tanto del formalismo matematico che caratterizza la teoria a causa dello scopo del corso: essere una semplice introduzione alla meccanica relativistica in ambito ristretto.

7.1.2 Dopo l'elettromagnetismo

Nel 1864 James Clerk Maxwell pubblicò il testo “*A Dynamical Theory of Electromagnetic Field*” in cui riunisce in un’unica teoria i risultati sperimentali e teorici concernenti i campi elettrico e magnetico ottenuti nel corso del XIX secolo. Il testo e la teoria di Maxwell sono considerati uno dei risultati più importanti della storia della fisica, tanto da esser paragonati al lavoro di Isaac Newton.

Il termine della teoria di Maxwell ebbe conseguenze interessanti che tratteremo tra poco. Ci soffermiamo ora sul fatto che, dopo questa teoria, nella comunità scientifica c’era la sensazione che ormai tutto fosse stato scoperto. All’orizzonte, oltre che confermare le teorie già studiate o, magari, trovare qualche curiosità scientifica, non si prospettava nulla di nuovo. Addirittura, la teoria meccanica di Hamilton che abbiamo studiato finora è stata scritta poco prima della teoria di Maxwell (nel 1833), quindi, oltre a riformulare ciò che già si sapeva, non si pensava si potesse andare oltre. La cosa carina di questa storia è che nel giro di 15 anni cambiò tutto.

La teoria dell’elettromagnetismo di Maxwell viene considerata come la branca finale della fisica classica; le sue conclusioni e le considerazioni che seguirono diedero il via alle teorie moderne della fisica che compongono quindi la fisica moderna. Una delle conclusioni più importanti dell’elettromagnetismo è che i campi elettrico e magnetico non sono due enti distinti, ma si propagano nello spazio ortogonalmente tra loro sotto forma di onde elettromagnetiche (costituendo così il noto *campo elettromagnetico*). Queste conclusioni furono dedotte da



Heinrich Hertz il quale per primo verificò sperimentalmente l'esistenza delle onde elettromagnetiche e, nello stesso periodo, verificò anche che **la luce è un'onda elettromagnetica**. L'equazione d'onda che le onde elettromagnetiche soddisfano è la seguente.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(x, y, z, t) = 0$$

Dove $\Psi(x, y, z, t)$ è una qualsiasi funzione dipendente dalle coordinate spaziali e dal tempo, come ad esempio il campo elettrico o magnetico. È proprio da questa equazione differenziale che sorgono problemi. Infatti, questa *non è invariante per trasformazioni galileiane*: cambiando sistema di riferimento e applicando quindi le trasformazioni di Galileo, l'equazione si sfalda assumendo una forma diversa (e più brutta rispetto a quella bella ordinata qui sopra).

Quando accade una cosa simile, ovvero che la descrizione matematica di un fenomeno cambia notevolmente a seconda del sistema di riferimento in cui si studia, si cerca un **sistema privilegiato**, ovvero un sistema di riferimento per il quale valga l'equazione iniziale (quella scritta qui sopra), mentre negli altri sistemi si devono applicare le trasformazioni di Galileo. Questo sistema non poteva essere la Terra per motivi evidenti e ben diversi, tra i quali il fatto che la Terra non è un sistema inerziale, e la cosa è abbastanza scomoda. La scelta ricadde sul **sistema delle stelle fisse**, ovvero quelle stelle poste a distanze così elevate dalla Terra da essere praticamente immobili nella volta celeste. Quindi le onde elettromagnetiche (e la luce) sono descritte da quella bella equazione differenziale nel sistema delle stelle fisse: negli altri casi, devono essere applicate le trasformazioni di Galileo.

7.1.3 L'etere luminifero

Fino a qui, nessun problema. Il sistema delle stelle fisse non è null'altro che un sistema di riferimento come tutti gli altri, anzi, è addirittura inerziale, quindi non fa proprio così schifo. I problemi sorsero altrove. Abbiamo detto che si scoprì che luce è un'onda elettromagnetica, per di più **un'onda trasversale**. Per quel che si sapeva all'epoca delle onde trasversali, queste necessitavano di un mezzo abbastanza rigido per propagarsi. Il problema è che, se creiamo il vuoto in una bottiglia di vetro, la luce vi passa attraverso. La cosa oggi può sembrare banale, ma solo perché lo sappiamo fin da bambini quello che accade. All'epoca, si pensò di risolvere il problema parlando di **etere luminifero**, un mezzo che aveva le seguenti proprietà:

- è molto rarefatto;
- è molto rigido;
- è ineffabile sperimentalmente (ovvero non può essere visto)

Ora, se la logica ha ancora un suo perché, se qualcosa è molto rarefatto è assurdo che sia rigido. Che poi sia inosservabile, questo era una conseguenza dell'esperienza: facendo il vuoto in una bottiglia, la luce continua a propagarsi, quindi l'etere vi è rimasto, ma non può essere visto. Insomma, l'etere era un mezzo che permeava il tutto, caratterizzato da specifiche proprietà.



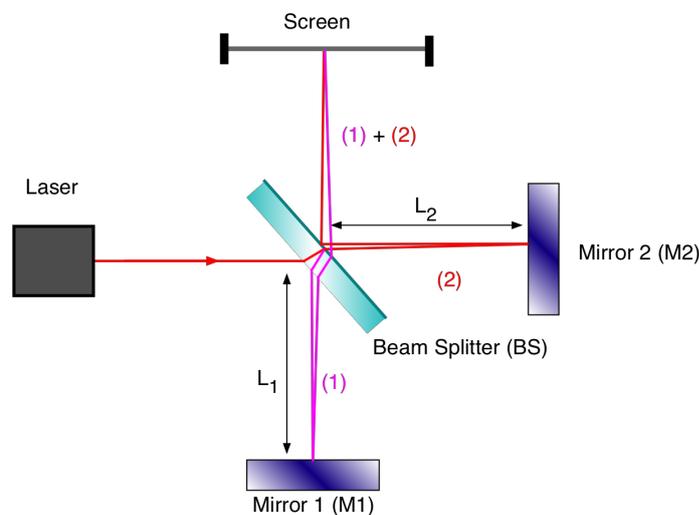
Il fenomeno dell'aberrazione stellare, inoltre, dimostrava che l'etere **era in quiete rispetto alle stelle fisse**. Per aberrazione stellare si intende un fenomeno ottico che fa sembrare in moto oggetti fermi; fu scoperto e confermato nel 1728, studiando la posizione nel cielo di determinate stelle considerate fisse: si vide che queste compivano delle ellissi nel cielo, effetto causato dal moto della Terra e dal diverso verso che ha la sua velocità nel corso dell'orbita.

Un altro esperimento che confermava l'esistenza dell'etere era l'effetto Doppler di un'onda luminosa con velocità di segno opposto: si vide che i risultati erano in accordo con le trasformazioni di Galileo. In pratica, l'etere faceva schifo, però sembrava dover esistere davvero.

7.2 Esperienza di Michelson-Morley e l'ipotesi di Einstein

A cambiare le cose fu un esperimento divenuto celebre con il nome di **fallimento di Michelson-Morley**, che valse a Michelson il premio Nobel per la fisica nel 1907. L'esperimento aveva come scopo dimostrare l'esistenza dell'etere, e il nome di **fallimento** deriva dal fatto che le conclusioni furono diverse da quelle aspettate.

L'esperimento fa uso dell'interferometro di Michelson, uno strumento che studia le interferenze di due onde luminose generate da un singolo fascio di luce.



Schema dell'interferometro di Michelson-Morley

Schema

Il fascio di luce parte dalla sorgente, per poi incontrare uno specchio semi-argentato, che divide in due il fascio: una parte viene rifratta, percorre l_2 e arriva a un altro specchio, mentre l'altro raggio viene riflesso, percorre l_1 e incontra a sua volta uno specchio. I due fasci di luce tornano poi allo specchio semi-argentato, da cui poi arrivano ad uno schermo finale in cui si può notare l'interferenza luminosa causata dalla sfasatura dei due fasci.

Non è banale che i due fasci siano sfasati; se le due lunghezze l_1 e l_2 fossero uguali, i due fasci sarebbero concordi dopo esser tornati allo specchio. Tuttavia, considerata la lunghezza d'onda della luce, le due distanze sono "umane", ovvero



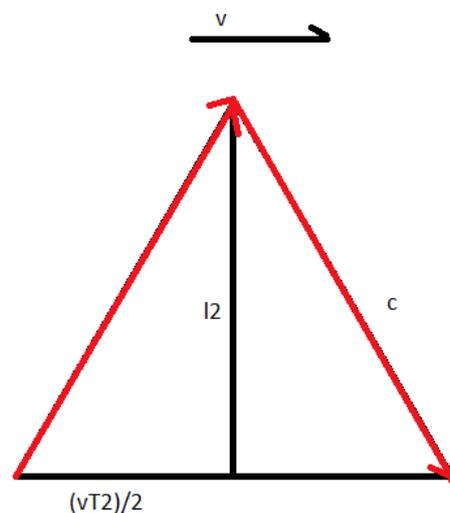
qualche metro e, sebbene siano simili tra loro ($l_1 \sim l_2$), non sono così simili da essere precisi alla lunghezza d'onda della luce, provocando la sfasatura che, infine, determina il formarsi sullo schermo di **frange d'interferenza**.

Tutto l'apparato era montato su un disco di marmo (affinché fosse il più rigido possibile), il quale poggiava su del mercurio liquido. La scelta del mercurio fu causata dal fatto che, considerate le piccole lunghezze d'onda dei fasci, le vibrazioni terrestri avrebbero potuto incidere non poco sui risultati finali. Inoltre, in questo modo, l'apparato poteva essere ruotato. È infatti questo il punto cruciale dell'esperimento: nella prima parte, si metteva l'interferometro nel sistema di riferimento **Terra** (ovvero concorde alla velocità della Terra relativa rispetto all'etere), poi si ruotava e si metteva nel sistema di riferimento **etere** (ovvero perpendicolare alla velocità della Terra relativa all'etere).

Calcoliamo il tempo impiegato dal fascio di luce per arrivare dalla sorgente allo schermo. Consideriamo che la Terra si muovi da sinistra verso destra con velocità v ; il tempo impiegato dal primo raggio sarà pari a:

$$T_1 = \frac{l_1}{c+v} + \frac{l_1}{c-v} = \frac{2l_1}{c\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

Questo perché la velocità del fascio di luce si somma a quella della Terra secondo le **trasformazioni di Galileo**. Calcoliamo il tempo impiegato dal secondo raggio; questo, poiché la Terra si muove anche attraverso l'etere, percorre una traiettoria triangolare (il fascio trasla assieme alla Terra):



Dal teorema di Pitagora ricaviamo che il tempo impiegato dal secondo raggio è:

$$T_2 = \frac{2}{c} \sqrt{l_2^2 + \left(\frac{vT_2}{2}\right)^2} \Rightarrow T_2 = \frac{2l_2}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



Da qui possiamo ricavare la differenza tra i due tempi, che crea l'interferenza:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{l_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_1}{\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)} \right)$$

Ruotando il sistema di 90° , questo cambia, perché, essendo $l_1 \neq l_2$ i due raggi ora sono a percorsi inversi rispetto a prima; otteniamo quindi:

$$\Delta T' = \frac{2}{c} \left(\frac{l_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \right)$$

Notiamo che $\Delta T \neq \Delta T'$, quindi l'interferenza sarà diversa; infatti, posto $\tau = \Delta T' - \Delta T$, questo non è nullo, bensì:

$$\tau = \frac{2}{c} (l_1 + l_2) \left[\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]$$

Quindi, le due interferenze dovranno essere diverse, considerate diverse le differenze di tempo tra i due fasci. Se l'esperimento è chiamato *fallimento di Michelson-Morley* c'è un motivo: le frange d'interferenza erano identiche. Ovvero, sia ponendo il sistema nel sistema concorde con l'etere, che opposto, non si avevano effetti sulle interferenze. Non è giusto dire che questo esperimento decretò l'inesistenza dell'etere, anche perché Einstein stesso, qualche anno dopo, ne parlò in modo diverso come campo spazio-temporale, ma fu il colpo decisivo alla teoria dell'etere.

La conseguenza di questo esperimento era che, se esiste, **l'etere deve essere in quiete rispetto alla Terra**. Il primo tentativo di accordare l'esistenza dell'etere a questo fatto fu quello di considerarlo come un fluido incompressibile, e la Terra si muoveva in esso causando un moto laminare: la parte di fluido attorno alla Terra si muoveva con essa, ma via via che ci si allontanava l'etere sarebbe stato fermo e la Terra in moto. Ovviamente, questa ipotesi faceva davvero schifo. A cambiare le carte in tavola fu un certo Albert Einstein, all'epoca uno sconosciuto impiegato dell'ufficio brevetti di Berna. La sua ipotesi cambiava totalmente il paradigma di pensiero che finora era utilizzato: in breve, possiamo riassumerlo dicendo che **il modulo della velocità della luce è costante in ogni sistema di riferimento e le leggi fisiche hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali**. Da qui, lo stesso Einstein formulò la teoria della relatività, ristretta prima, generale poi.

7.3 Trasformazioni di Lorentz e composizione delle velocità

7.3.1 Trasformazioni di Lorentz

L'ipotesi di Einstein non ha poche conseguenze. La prima e fondamentale è quella di **rivedere le trasformazioni del moto**, adattandole al nuovo sistema. In



realtà, queste erano già state ricavate. Il fisico olandese Hendrik Lorentz, qualche anno prima, trovò un sistema di trasformazioni che rendevano l'equazione delle onde elettromagnetiche *invarianti rispetto a cambi di sistemi*, ovvero, passando da un sistema a un altro seguendo queste trasformazioni, la forma dell'equazione differenziale non variava. Egli le ricavò come **puro espediente matematico**, rispondendo alla domanda "Secondo quali trasformazioni l'equazione delle onde è invariante?"; non pensava che queste potessero essere delle vere trasformazioni. Per un moto relativo all'asse x , le trasformazioni sono le seguenti:

$$\left| \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

Il perché Lorentz non pensava potessero essere vere è ben chiaro: il tempo **non è più costante**, ovvero, cambiando sistema di riferimento, cambia anche il tempo. All'epoca, pensare una cosa simile era assurdo: si riteneva, infatti, che il tempo fosse assoluto e uguale in ogni sistema di riferimento. Einstein pensò semplicemente che è la natura ad essere fatta così, e la nostra difficoltà ad accettare questa cosa è dovuta al fatto che siamo esseri biologici che vivono a basse velocità, per i quali il tempo è, in buona approssimazione, assoluto.

Una piccola osservazione su queste trasformazioni: sono lineari, e le equazioni differenziali non cambiano per trasformazioni lineari. Inoltre, la somma di due trasformazioni è ancora trasformazione, esistono l'elemento neutro e l'inverso: queste trasformazioni formano quindi un *gruppo*, detto **gruppo di Lorentz**.

Ora vediamo brevemente come, a partire dalle trasformazioni galileiane e dall'ipotesi che il modulo della velocità è costante, possiamo arrivare alle trasformazioni di Lorentz.

Consideriamo una lampadina che si accende situata nell'origine; la luce si propaga nello spazio seguendo la legge:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

Considerando il tempo assoluto, e la velocità della luce costante, in un altro sistema di riferimento avremo che:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t^2$$

Applichiamo adesso le trasformazioni di Galileo:

$$\left| \begin{array}{l} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right. \Rightarrow x^2 - 2vtx + v^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$



A questo punto, per far tornare i conti, dobbiamo per forza abbandonare l'ipotesi che il tempo sia assoluto; per questo, poniamo $t' = t + \varphi \cdot x$ dove φ è una generica funzione. Esplicitando il quadrato:

$$x^2 - 2vtx + v^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2(t^2 + 2\varphi xt + \varphi^2x^2)$$

Da questo ricaviamo che $\varphi = -\frac{v}{c^2}$. Sostituendo questo valore nell'espressione qui sopra:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + v^2t^2 - 2vtx &= c^2t^2 - 2vtx + \frac{v^2}{c^2}x^2 \\ x^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 &= c^2t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \end{aligned}$$

A questo punto, per poter ottenere l'equazione da cui siamo partiti, necessitiamo di dividere x' e t' per un fattore $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, ottenendo le trasformazioni di Lorentz.

7.3.2 Composizione delle velocità secondo le trasformazioni di Lorentz

Ricordiamo la composizione delle velocità secondo Galileo: partendo da $x' = x - vt$, differenziando questa espressione otteniamo la composizione $\dot{x}' = \dot{x} - v$.

Lo stesso procedimento lo applichiamo alle trasformazioni di Lorentz: differenziandole, otteniamo

$$\begin{cases} dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Dato allora una generica $u_x = \frac{dx}{dt}$, quale sarà la $u'_x = \frac{dx'}{dt'}$?

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

Allo stesso modo possiamo calcolare le altre componenti della velocità:

$$\begin{aligned} u'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \\ u'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \end{aligned}$$



7.4 Conseguenze dell'ipotesi di Einstein: dilatazione dei tempi e contrazione delle lunghezze

L'ipotesi di Einstein che il modulo della velocità della luce è costante in tutti i sistemi di riferimento inerziali ha conseguenze **non banali**. Come abbiamo già potuto notare dalle trasformazioni di Lorentz, viene a cadere il concetto di tempo assoluto, che fin da Aristotele era il paradigma diffuso e accettato dalla comunità scientifica. Questo è un effetto interessante: a conseguenza dell'ipotesi di Einstein, siamo di fronte ad una **dilatazione dei tempi** quando cambiamo sistema di riferimento.

7.4.1 Dilatazione dei tempi

Facciamo un esempio, studiando un modello. Consideriamo un'astronave che passa per l'origine del nostro sistema di riferimento con velocità orizzontale $v = \text{cost}$. Su questo razzo sono presenti due specchi, a distanza di un metro l'uno dall'altro; un raggio luminoso parte da uno dei due specchi, viene riflesso dal secondo e torna al laser d'origine. Questo sarà il nostro particolare *orologio*, che misura il tempo in spazio percorso dal raggio luminoso. Un intervallo fondamentale è un periodo completo, che sarà pari a $\Delta t' = \frac{l}{c} = 2\text{m}$, posto ovviamente $c = 1$. L'apice indica che ci troviamo nel sistema di riferimento del razzo e non a terra.

L'evento che studiamo è proprio il raggio di luce che parte dal laser. Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}\Delta t' &= 2\text{m} \\ \Delta x' &= 0 \\ \Delta y' &= 0 \\ \Delta z' &= 0\end{aligned}$$

Consideriamo ora la grandezza $\Delta s' = \Delta t'^2 - (\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) = 4$. Di questa grandezza ne parleremo in seguito, per ora prendiamola così per buona.

Spostiamoci adesso nel sistema a terra. Il raggio luminoso si sposta assieme al razzo (esattamente come nel caso di Michelson-Morley, percorre una traiettoria triangolare, con la base pari a Δx e i lati obliqui di dimensione c). Avremo le seguenti variazioni:

$$\begin{aligned}\Delta x &= v\Delta t \\ \Delta y &= 0 \\ \Delta z &= 0 \\ \Delta t &= 2\sqrt{l^2 + \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2} = 2\sqrt{l^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

Notiamo che $\Delta t' \neq \Delta t$. In particolare $\Delta t' = \frac{2}{c}$, applicando le trasformazioni di Lorentz:



$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow (\Delta x = 0) \quad \Delta t = \Delta t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Da questo otteniamo che $\Delta t = \frac{2}{c} \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}$. Ovvero, $\Delta t > \Delta t'$, ovvero i tempi **si dilatano per velocità più basse**. Notiamo tuttavia che il Δs definito come sopra resta invariato in entrambi i sistemi di riferimento (il calcolo è solo algebra elementare).

7.4.2 Contrazione delle lunghezze

Adesso, passiamo a considerare un altro fenomeno fisico, stavolta di tipo particellare. Attraverso dei particolari rilevatori, riusciamo ad osservare un gran numero di **muoni** che arrivano a Terra, formati all'inizio dell'atmosfera terrestre (generati dal vento solare che incontra l'atmosfera). Questo fenomeno è di per sé poco interessante, se non fosse che i **muoni non potrebbero arrivare a terra**. (Nota bene: la storia è diversa dalla leggenda del calabrone che non può volare perché ha le ali troppo piccole eccetera.)

Infatti, la velocità dei muoni è pari a $v = 0.99999c$, molto prossima a quella della luce; tuttavia, la vita media di un muone è pari a $10^{-7}s$, dopo i quali decade in un elettrone e un antineutrino. Facendo un breve calcolo, lo spazio percorso, con quella velocità e in quel tempo, è al massimo qualche centinaio di metri (con fluttuazioni statistiche sulla vita del muone). Il limite dell'atmosfera si trova a venti chilometri (all'incirca) da terra. Bene.

Un modo di spiegare questo fenomeno è che, nel sistema di riferimento Terra, che ha velocità molto più basse di quelle del muone, il tempo si dilata secondo trasformazioni di Lorentz:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Poiché $\frac{v^2}{c^2} \rightarrow 1$, avremo che $\Delta t \gg \Delta t'$: l'intervallo di tempo si dilata così tanto, infatti, da permettere al muone di arrivare a terra con la sua velocità caratteristica.

E se invece ci mettessimo nel sistema di riferimento del muone? Se ci sediamo sul muone (stringetevi), il tempo $10^{-7}s$ restano quello che sono, e la velocità è quella che è, cioè, dopo qualche centinaio di metri, il muone dovrebbe decadere e noi cadremmo nel vuoto (perché eravamo seduti sul muone). Allora, come è possibile che nel sistema di riferimento Terra i muoni arrivano al suolo, ma nel sistema di riferimento muone no?

Semplicemente, come il tempo si dilata, lo spazio si contrae. Consideriamo la stessa astronave dell'esempio precedente: su questa è presente un metro di lunghezza l' . Nell'istante in cui l'astronave passa all'origine, l'astronauta misura in un intervallo $\Delta t' = 0$ la lunghezza di un metro a terra. È fondamentale che la misura sia fatta in un istante pressoché nullo (altrimenti l'astronave va via e il metro si trova ad essere lungo qualche chilometro). Questa lunghezza è pari a:



$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Risulta quindi essere $\Delta x' < \Delta x$: lo spazio si contrae a seconda del sistema di riferimento. Il muone, quindi, riesce ad arrivare a terra perché lo spazio che percorre è molto minore di quello che vediamo noi.

Queste due conseguenze posero fine all'assolutismo dello spazio e del tempo: queste due misure, infatti, sono **relative** al sistema di riferimento in cui vengono misurate. C'è una ragione, quindi, se viene chiamata "teoria della relatività".

7.5 Spazio di Minkowsky

Come anticipammo già all'inizio del corso, tralascieremo molti aspetti interessanti riguardanti il formalismo di questa teoria. Tuttavia, è bene parlare dello **spazio di Minkowsky**, chiamato così in onore del suo creatore H. Minkowsky, ovvero lo spazio vettoriale in cui si muove la teoria della relatività.

Se consideriamo lo spazio euclideo \mathbb{E}^3 , formato da vettori a tre componenti (x, y, z) , questo risulta essere uno spazio vettoriale completo, con una norma generata da un prodotto scalare e con la sua caratteristica distanza euclidea. Inoltre, il prodotto vettoriale definito come:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Risulta essere **invariante per trasformazioni ortogonali**, come rotazioni e traslazioni. Però, questo non può essere lo spazio in cui può muoversi la teoria della relatività: tempo e spazio, come abbiamo visto, variano cambiando sistema di riferimento (ovvero apportando opportune trasformazioni), come conseguenza della costanza di c .

Lo spazio da noi cercato è uno spazio di **dimensione quattro**: ci interessano infatti i **quadrivettori**, ovvero vettori a quattro componenti, di cui la prima, che si indica con l'indice 0, è la coordinata temporale, mentre le tre successive, numerate da 1 a 3 sono le coordinate spaziali. Ci interessa, inoltre, definire un **prodotto vettoriale** che, se applicato a due vettori dello spazio, resti invariante per trasformazioni di Lorentz.

Definizione (prodotto di Minkowsky)

Dati due quadrivettori A, B :

$$\begin{aligned} A & (A_0, A_1, A_2, A_3) \\ B & (B_0, B_1, B_2, B_3) \end{aligned}$$

Si definisce **prodotto di Minkowsky** oppure **norma di Minkowsky** il prodotto così definito:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} := A_0 B_0 - (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3)$$



Questo prodotto scalare è **invariante per trasformazioni di Lorentz**.

Uno spazio vettoriale di dimensione quattro su cui è verificata la norma di Minkowsky viene chiamato **spazio di Minkowsky**.

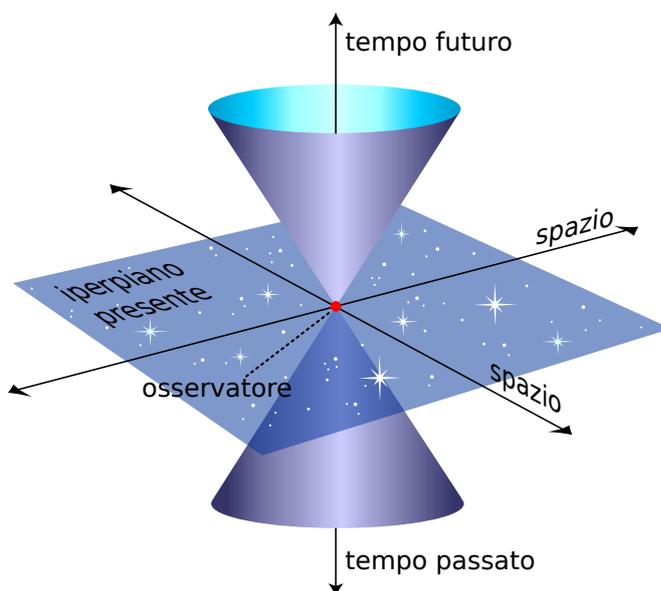
Osserviamo come la norma di Minkowsky *non sia definita positiva*. Dati due eventi dello spazio E_1 e E_2 , la norma:

$$|E_1 E_2|^2 = c^2(t_2 - t_1) - ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2)$$

Può essere **maggiore, minore o uguale a 0**. Questo valore resta invariante cambiando sistema di riferimento secondo trasformazioni di Lorentz. Inoltre, abbiamo i seguenti casi:

- se $|E_1 E_2|^2 > 0$, diremo che questo è un **vettore di genere tempo**;
- se $|E_1 E_2|^2 = 0$, diremo che questo è un **vettore di genere luce**;
- se $|E_1 E_2|^2 < 0$, diremo che questo è un **vettore di genere spazio**.

Lo spazio si può disegnare in un piano (o rappresentare in tre dimensioni); nell'immagine seguente vediamo una schematizzazione dello spazio di Minkowsky: notiamo il **cono di luce** a cui appartengono tutti i vettori di tipo luce; la velocità della luce è il limite naturale che non può essere superato. I vettori che sono "interni" al cono di luce sono di genere tempo, e lo resteranno in ogni sistema di riferimento; quelli che sono esterni al cono, invece, sono di genere spazio, e lo resteranno in ogni sistema di riferimento.



Figurazione tridimensionale dello spazio di Minkowsky. Il cono di luce delimita lo spazio dei vettori di genere tempo da quello dei vettori di genere spazio.

Consideriamo due eventi *contemporanei*, ovvero che avvengono nello stesso tempo (per esempio, giacenti entrambi sull'iperpiano presente). In un altro sistema di



riferimento, i due eventi possono **non coincidere temporalmente**: le coordinate temporali possono variare per trasformazioni di Lorentz, a restare costante è la norma di Minkowsky; ciò è possibile solo se il vettore differenza tra i due eventi è di **genere spazio**. In quel sistema di riferimento, allora, uno dei due eventi sarà avvenuto prima nel tempo. Per questo motivo, i due eventi **non possono essere in rapporto causale l'uno con l'altro**. È in questo punto che la teoria della relatività di Einstein si scontra con la teoria quantistica, nel fenomeno **dell'entanglement**.

Allo stesso modo, possono esistere due eventi che avvengono in luoghi diversi i quali, in un altro sistema di riferimento, accadono nello stesso luogo (o hanno le stesse coordinate spaziali); ciò è possibile solo se il loro vettore differenza è di **genere tempo**.

Le curve che rappresentano le *traiettorie* nel grafico dello spazio-tempo di Minkowsky (piano o tridimensionale), si dicono **linee di universo**. Possono essere rappresentate come curve in funzione di un generico parametro λ :

$$\phi(\lambda) = (x_0(\lambda), x_1(\lambda), x_2(\lambda), x_3(\lambda))$$

Un parametro che di solito risulta essere utile o particolarmente interessante è il **tempo proprio**.

Definizione (Tempo proprio)

Si definisce **tempo proprio** di un sistema (o evento) *inerziale* il tempo del sistema di riferimento *proprio* dell'evento considerato.

Per fare un esempio, supponiamo di avere un'astronave che viaggia a velocità costante nello spazio, al cui interno c'è un orologio. Il tempo proprio di quell'astronave sarà il tempo segnalato dall'orologio al suo interno, non dal nostro orologio a terra (che, come abbiamo visto, misura un tempo diverso).

La definizione è valida per sistemi inerziali; infatti, come è poi ben dimostrato nella teoria della **relatività generale**, l'accelerazione ha effetti sullo spazio-tempo, che provocano variazioni diverse. Quindi, c'è da fare una piccola precisazione: questa definizione resta ancora valida per *sistemi non inerziali* a patto che si definisca il tempo proprio di un sistema non inerziale come il tempo di un sistema *inerziale* che si sovrappone istante per istante al sistema non inerziale, avente in ogni punto la stessa velocità del sistema accelerato considerato. Risulta essere un po' artificiosa, però, nel caso di sistemi accelerati, il regime della relatività speciale viene a mancare e si passa ad applicare la teoria generale.

Definizione (Intervallo di tempo proprio)

Si definisce **intervallo di tempo proprio**:

$$\frac{ds}{c} = \frac{\sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}}{c} =: d\tau$$

Ricordiamo che il fattore ds è invariante per trasformazioni di Lorentz, quindi anche l'intervallo di tempo proprio $d\tau$ risulta esserlo.



7.5.1 Breve accenno tensoriale

Apriamo una piccola parentesi legata alla norma di Minkowsky; notiamo che la norma quadra di un vettore è pari a:

$$|x|^2 = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 x_i x_j \cdot \hat{g}_{i,j}$$

Dove \hat{g} è una matrice **versore** tale che $g_{00} = 1$ e $g_{ii} = -1, i = 1, 2, 3$, ovvero è una matrice 4×4 del tipo:

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

In **relatività generale** questa non è una matrice diagonale, ma presenta altri elementi: questa matrice diventa un **tensore** che rappresenta proprio la **curvatura dello spazio-tempo** in presenza di masse che lo deformino.

7.6 Cinematica Relativistica

Come abbiamo accennato nel precedente paragrafo, possiamo descrivere le linee di universo come funzioni del tempo proprio τ . Ora iniziamo a fare considerazioni di meccanica relativistica, introducendo le grandezze fondamentali con le quali si studiano eventi nello spazio di Minkowsky. Breve precisazione di notazione: l'indice i sulle coordinate dei quadrivettori indica tutte le coordinate, quindi $i = 0, 1, 2, 3$, al contrario, l'indice α indica solo le coordinate spaziali, ovvero $\alpha = 1, 2, 3$.

Definizione (Quadrivelocità)

Siano le coordinate di un quadrivettore ($x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$), si definisce **quadrivelocità**:

$$U_i = \frac{dx_i(\tau)}{d\tau}$$

Notiamo che la quadrivelocità non può essere di genere spazio: se così fosse, infatti, avremmo che la sua norma $|\underline{U}| > c$, supera la velocità della luce, e non è possibile. Risulta quindi essere un vettore di tipo tempo e, quindi, interno al cono di luce.

Data la velocità *classica* di coordinate $v_\alpha = v_x, v_y, v_z$, scriviamoci le coordinate del vettore \underline{U} in funzione di queste. Ricordiamo la relazione delle trasformazioni di Lorentz:

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$



Da questo, sostituendo il valore trovato di $d\tau$ nella definizione di quadrivelocità, otteniamo:

$$U_i = \frac{dx_i(\tau)}{d\tau} = \frac{dx_i(\tau)}{dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \begin{cases} U_0 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ U_\alpha = \frac{v_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Inoltre, la norma quadra della quadrivelocità risulta essere costante:

$$\begin{aligned} |\underline{U}|^2 &= U_0^2 - U_1^2 - U_2^2 - U_3^2 = \left(\frac{d(ct)}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = \\ &= \frac{(c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)}{d\tau^2} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = c^2 \frac{d\tau^2}{d\tau^2} = c^2 \end{aligned}$$

Come anticipato, quindi, la norma quadra è costante, positiva, e quindi la quadrivelocità è un vettore di genere tempo in ogni sistema di riferimento inerziale.

La scelta di definire la quadrivelocità è portata dall'utilizzo delle trasformazioni di Lorentz. La matrice di trasformazione, infatti, è una matrice 4×4 , mentre la velocità classica è un vettore in tre coordinate spaziali. Inoltre, la comodità di lavorare in uno spazio quadri-dimensionale rende comodo lo studio di come variano tempo e spazio lungo tutto lo spazio.

Definizione (Quadriaccelerazione)

Si definisce il vettore **quadriaccelerazione**:

$$\underline{A} = \frac{d\underline{U}}{d\tau}$$

Notiamo che, posto $U_\alpha = \frac{v_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, possiamo esplicitare le componenti A_α della quadriaccelerazione:

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \frac{dU_\alpha}{d\tau} = \frac{dU_\alpha}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{\frac{dv_\alpha}{dt}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + v_\alpha \left(-\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{v_\alpha^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{c^2} \frac{dv_\alpha v_\alpha}{dt} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{a}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v_\alpha^2}{c^2} \frac{a}{\sqrt{\left(1 - \frac{v_\alpha^2}{c^2}\right)^2}} \right) \end{aligned}$$

Fa un po' schifo scritta così, effettivamente. In relatività, si usa passare a due parametri noti, β e γ , che valgono:

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$



Utilizzando questi parametri, l'espressione qui sopra può essere scritta in forma più elegante (come molte altre espressioni della teoria).

7.6.1 Paradosso dei gemelli

Il paradosso dei gemelli è un semplice esperimento mentale proposto da Einstein. Alla luce di ciò che abbiamo detto finora, potrà essere chiaro.

Il problema è semplice: due gemelli vengono messi su due astronavi e **sottoposti agli stessi effetti accelerativi** (ovvero subiscono le stesse variazioni di velocità), solo che uno dei due trascorre nello spazio più tempo, viaggiando a velocità più elevate di quelle della Terra. Quindi, un gemello atterra prima dell'altro e, una volta arrivati entrambi a terra, confrontano i loro *tempi propri*: il risultato finale è che, essendo stato uno dei due più tempo nello spazio a velocità elevate, questo sarà più giovane del fratello.

7.7 Dinamica Relativistica

Dopo aver definito le grandezze fondamentali della cinematica, lo studio si sposta alla dinamica dei corpi in relatività. Procediamo con calma, ragionando su quel che abbiamo finora osservato. Possiamo iniziare col dire i quadrivettori velocità e accelerazione sono *ortogonali secondo Minkosky*, ovvero il loro prodotto scalare di Minkowsky è nullo $\underline{U} \cdot \underline{A} = 0$. Poiché vale $|\underline{U}|^2 = c^2$, possiamo anche scrivere:

$$0 = \frac{d|\underline{U}|^2}{d\tau} = \frac{dU \cdot U}{d\tau} = 2 \cdot U \cdot \frac{dU}{d\tau} = 2U \cdot A = 0$$

Ricordiamo che la derivata di c^2 è 0 perché è una costante.

Detto questo, e ricordando che U è un vettore di genere tempo, la quadriaccelerazione A risulta essere di **genere spazio**.

7.7.1 Quantità di moto e energia a riposo

Definizione (Massa propria)

Si definisce **massa propria** di un corpo la massa che il corpo ha nel sistema di riferimento rispetto a cui è in quiete. Si indica con m_0 . Per i sistemi di riferimento non inerziali, vale la stessa osservazione fatta per il tempo proprio.

Questa definizione è molto ambigua. Che senso ha descrivere la massa propria? Ovvero, la massa non è costante in ogni sistema di riferimento? Questa era l'ipotesi posta da Newton per poter studiare la dinamica degli oggetti, ma, in relatività, cade anche questo assunto: la massa varia in base al sistema di riferimento in cui la si misura. Passiamo alla definizione di quantità di moto relativistica.

Definizione (Quadrivettore quantità di moto)

Si definisce **quadrivettore quantità di moto**:



$$\underline{P} = m_0 \cdot \underline{U}$$

Note le coordinate della quadrivelocità, possiamo esplicitare le coordinate della quantità di moto. Le sue coordinate spaziali valgono:

$$P_\alpha = m_0 \frac{v_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = v_\alpha \cdot m$$

Dove m è la massa *vista da un altro sistema di riferimento*, e si chiama **massa dinamica o relativa**. L'espressione generale è $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m(v)$ ed è una funzione della velocità del sistema di riferimento in cui la si misura.

La componente temporale della quantità di moto, invece, vale

$$P_0 = \frac{cv_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = c \cdot m$$

Definizione (Energia a riposo)

Si definisce **energia a riposo** e si indica con E_0 :

$$E_0 = cP_0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c = mc^2$$

L'energia a riposo indica che, solo perché esiste una massa, questa **ha una sua energia a riposo**. Questa energia, come possiamo notare, ha un valore molto alto. È stato sviluppato un modo per poterla sfruttare, ed è la fissione nucleare, che riesce a trasformare questa energia a riposo di atomi radioattivi in energia utilizzabile. Inoltre, l'espressione dell'energia a riposo ci dice anche che **la massa è solo un'altra forma di esprimere l'energia**.

7.7.2 Leggi del moto

Passiamo ora a studiare le leggi della dinamica che regolano il moto.

Definizione (Quadriforza)

Si definisce **quadriforza**:

$$\underline{K} = m_0 \underline{A}$$

Questa, se è nota la definizione operativa di \underline{K} , è già **un'equazione del moto**. Tuttavia, la definizione operativa della quadriforza non ci interessa. Ricordando che la teoria della relatività resta ancora una teoria **deterministica** (a differenza della teoria quantistica), possiamo passare dalla quadriforza alla velocità e alla forza *classiche* del nostro sistema di riferimento. Infatti:



$$\underline{K} = m_0 \underline{A} = m_0 \frac{dU}{d\tau} = m_0 \frac{dU}{dt} \frac{dt}{d\tau} = m_0 \frac{dU}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato le trasformazioni di Lorentz per cui $dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Da questa ricaviamo che:

$$\underline{K} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0 \frac{dU}{dt}$$

Vediamo ora le componenti spaziali:

$$K_\alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = F_\alpha = m_0 \frac{dU_\alpha}{dt} = m_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{v_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Formalmente, questa è uguale alla legge di Newton, con la sottile differenza che la massa dipende dalla velocità. Possiamo infine scrivere:

$$F_{alpha} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v_\alpha \right) = \frac{d}{dt} (P_\alpha)$$

La componente temporale, invece, posto $\underline{U} \cdot \underline{A} = 0 \rightarrow \underline{U} \cdot \underline{K} = 0$, vale:

$$U_0 K_0 - U_\alpha K_\alpha = 0 \Rightarrow k_0 = \frac{U_\alpha k_\alpha}{U_0}$$

Ricordando l'espressione di $U_0 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, riprendiamo la generica espressione di

$\underline{K} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0 \frac{dU}{dt}$ e vediamo quanto vale questa per la coordinata temporale:

$$K_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0 \frac{d}{dt} \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow c K_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dE}{dt}$$

Valgono sempre $U_\alpha = \frac{v_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ e $U_0 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$; da queste otteniamo che $\frac{U_\alpha}{U_0} = \frac{v_\alpha}{c}$;

il nostro obiettivo è sempre quello di esplicitare $K_0 = \frac{U_\alpha}{U_0} K_\alpha$; andiamo a sostituire questo valore nell'espressione trovata qui sopra:

$$c \frac{U_\alpha}{U_0} \underbrace{\left(K_\alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)}_{F_\alpha} = \frac{dE}{dt} \Rightarrow v_\alpha F_\alpha = \frac{dE}{dt}$$

Che è il rispettivo del **teorema delle forze vive** in meccanica classica. Notiamo anche che $v_\alpha \cdot F_\alpha = v \cdot F$ ovvero il prodotto scalare euclideo. Abbiamo ottenuto due leggi fondamentali, simili alle leggi della meccanica classica:



$$F_\alpha = \frac{dP_\alpha}{dt}$$

$$F_\alpha v_\alpha = \frac{dE}{dt}$$

Ricordiamo che queste valgono nella teoria della relatività, dove abbiamo considerato $E = m(v)c^2$.

Inoltre, ci sono due regole generali che dominano la dinamica relativistica: come la dinamica classica, valgono sia **la conservazione della quantità di moto** che **la conservazione dell'energia**, ovvero:

$$\sum_{h=1}^n m_{0h} \underline{U}_h = \sum_{h'=1}^n m_{0h'} \underline{U}_{h'}$$

$$\sum_{h=1}^n m_h c^2 = \sum_{h'=1}^n m_{h'} c^2$$

La conservazione della quantità di moto, ad esempio, permette di **rilevare le particelle neutre**. La presenza dei neutrini, infatti, è stata ipotizzata proprio per una violazione della conservazione della quantità di moto: prima di affermare che non sia vero, infatti, si è ipotizzato che esistessero piccolissime particelle neutre, i neutrini appunto, che non fossero osservabili da rilevatori magnetici ma che prendessero una piccola parte della quantità di moto al decadere di una particella, così da equilibrare il totale.

7.8 Lagrangiana in relatività e l'effetto Compton

7.8.1 La lagrangiana in relatività

L'equazione del moto in meccanica relativistica, ottenuta come:

$$\frac{dP}{dt} = F \quad \Rightarrow \quad P = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Può essere espressa nel **formalismo lagrangiano**, prendendo come variabili generalizzate le variabili cartesiane (o le componenti spaziali nello spazio di Minkowsky). Tuttavia, la definizione di lagrangiana vista finora $L = T - U$ ha poco significato in relatività. Che valore assume T ? Per questo motivo, si assume come *definizione di lagrangiana* in relatività l'espressione:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V(x)$$

Dove, ovviamente, $V(x)$ è l'energia potenziale. Non discuteremo dei motivi per i quali la lagrangiana assume questa forma.

Ricordando che $v^2 = \sum_{\alpha=1}^3 v_\alpha^2$, si possono applicare le equazioni di Eulero-Lagrange assumendo come lagrangiana l'espressione scritta sopra per poter ricavare le leggi del moto:



$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial x_\alpha}$$

Abbiamo che:

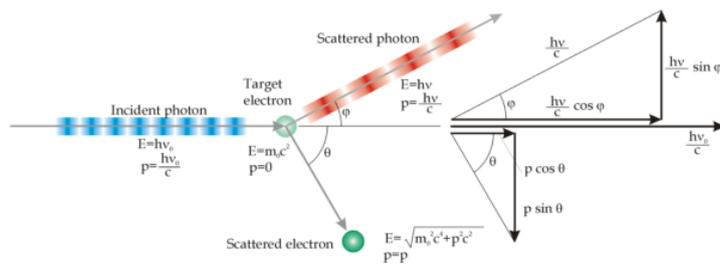
$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v_\alpha} &= -m_0 c^2 \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(-\frac{2v_\alpha}{c^2} \right) = \frac{m_0 v_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = P_\alpha \\ \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} &= -\frac{\partial V}{\partial x_\alpha} = F_\alpha \\ \Rightarrow \frac{\partial P_\alpha}{\partial t} &= F_\alpha \end{aligned}$$

Esattamente come ci aspettavamo.

7.8.2 Effetto Compton

L'esperimento di Compton è successivo all'esperimento fotoelettrico di Einstein (il quale valse ad Einstein il Nobel nel 1921); questo aveva dimostrato la **natura corpuscolare** della luce, studiando l'interazione tra fotoni ed elettroni. Tuttavia, si notò che l'interazione dipendeva non dall'intensità di radiazione, bensì *dalla frequenza*: fasci di luce molto intensi, a basse frequenze, interagivano poco con gli elettroni di un metallo, a differenza di fasci poco intensi ma con frequenza molto alte, che permettevano agli elettroni di schizzare fuori dal reticolo metallico.

L'effetto Compton (che valse a Arthur Compton il premio Nobel nel 1927) studia proprio questo effetto: studiando l'energia del fotone come *funzione della sua frequenza*, si riesce a spiegare l'effetto fotoelettrico. Nell'immagine qui sotto è ben schematizzato l'effetto Compton, con le grandezze di energie relative ad lato di interesse.



Compton scattering

600x225

Possiamo quindi ricavare una relazione tra l'angolo di *scattering* del fotone ϕ e la sua frequenza ν , che cambia in ν' dopo lo scattering. Sfruttando la conservazione della quantità di moto e dell'energia *relativistiche* si spiega questo fenomeno. La quantità di moto di un fotone è pari a $P = \frac{h\nu}{c}$, dove h è la **costante di Planck** di alto interesse e utilizzo in fisica quantistica; l'energia del fotone è proprio $E = h\nu$. Per risolvere il problema, si sfrutta il *teorema del coseno*:

$$\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^2 = \left(\frac{h\nu}{c} \right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c} \right)^2 - 2 \frac{h\nu}{c} \frac{h\nu'}{c} \cos \phi$$



La conservazione dell'energia, invece, impone, considerata l'energia dell'elettrone come $E = m_0c^2$ a riposo, poi come energia in movimento:

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Risolvendo il sistema, si ottiene:

$$\frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = \left(\frac{h}{m_0c} \right) (1 - \cos \phi)$$
$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \phi)$$

La differenza tra le frequenze del fotone, o tra le rispettive lunghezze d'onda, è quindi in funzione dell'angolo di scattering. La grandezza $\frac{h}{m_0c}$ si chiama **lunghezza d'onda Compton**. Questa lunghezza è equivalente a un fotone avente come energia la stessa **energia a riposo della particella**: da qui si aprì il dibattito sulla dualità onda-corpuscolo della materia, arrivando poi all'ipotesi di De Broglie.



Capitolo 8

Termodinamica



Capitolo 9

Parte Settima - Continuazione della Meccanica e Primo principio

9.1 Introduzione al corso

La termodinamica è la *continuazione naturale* della meccanica, e del confronto tra i modelli ideali studiati nella teoria e gli strumenti reali usati poi in laboratorio; per fare un esempio, il pendolo ideale, una volta lasciato oscillare isolato, continua a farlo fino a che non ci sia un intervento esterno. Sappiamo bene che, nella realtà, i pendoli si fermano in tempi anche relativamente brevi, a causa delle forze d'attrito tra il corpo appeso e l'aria.

Dalla fluidodinamica sappiamo che l'aria non è altro che un fluido, composto da un numero grandissimo di particelle che non hanno forma stabile, ma volume definito; un pendolo oscillante, quindi, si trova immerso in un fluido e, durante il suo continuo moto oscillatorio, avvengono numerosi **urti**, elastici e non, tra pendolo e particelle. Il risultato di un **urto** è, generalmente, la variazione dell'energia cinetica dei due oggetti in urto relativo: dal **teorema** dell'energia cinetica sappiamo che, a una variazione di energia cinetica, corrisponde un certo lavoro effettuato o subito dal corpo. Possiamo quindi dire che, un pendolo in moto oscillatorio a contatto con l'aria, *cede continuamente energia* all'ambiente circostante, attraverso gli urti microscopici tra le particelle superficiali che compongono il pendolo e quelle libere dell'aria.

Il fermarsi del pendolo può, quindi, essere giustificato anche studiando il fenomeno sotto un punto di vista puramente meccanico. Quel che non ci si spiega è il secondo effetto del rallentare del pendolo: il fatto che questo si *scaldi*, a seconda anche del materiale di cui è formato. Ovviamente, possiamo rendercene conto solo empiricamente, andando a toccare il pendolo e percependolo più caldo di quanto non fosse all'inizio. Questo fenomeno non possiamo spiegarlo solo con la meccanica: c'è bisogno di parlare di **termodinamica**.

Diremo che, quando il pendolo è in oscillazione, lo **stato termodinamico dell'ambiente** risulta alterato; per ora, questa espressione non vuol dire nulla, non sappiamo neanche cosa sia uno stato termodinamico, lo vedremo attentamente in



seguito. Quando lo stato termodinamico dell'ambiente viene alterato, esso si riequilibra **attraverso lo scambio di energia sotto forma di calore**; tornando al nostro esempio del pendolo, possiamo quindi osservare due fenomeni distinti:

1. Perdita di energia meccanica del pendolo tramite urti e lavoro, **alterando lo stato termodinamico**;
2. Ritorno all'equilibrio termodinamico attraverso lo **scambio di calore**: l'aria, che ha ricevuto energia meccanica dal pendolo, la cede nuovamente ad esso attraverso calore, portando all'equilibrio termodinamico.

Sappiamo che, la presenza di lavoro, è determinata dalla variazione di una coordinata spaziale sotto l'effetto di una forza; su cosa basarci per identificare uno scambio di calore, non abbiamo parametri analitici a cui fare riferimento. Il **parametro termodinamico** che identifica gli scambi di calore attraverso la sua variazione è la **temperatura**, di cui tratteremo più approfonditamente in seguito.

Indicheremo il calore con la lettera Q e il lavoro con W ; analizzando i due processi che caratterizzano il fermarsi di un pendolo, vediamo che l'energia viene scambiata prima come lavoro, poi come calore. Potremo quindi dire:

$$U = Q + L$$

Questa espressione rappresenta il **primo principio della termodinamica**; ovviamente, abbiamo dato una rappresentazione descrittiva dei fenomeni che portano allo scambio di calore, e l'espressione nota come primo principio è in realtà:

$$U = Q - L$$

Anche questo verrà trattato più approfonditamente nei prossimi capitoli.

9.2 Sistemi termodinamici e trasformazioni reversibili o quasi statiche

9.2.1 Sistema termodinamico standard

Il sistema termodinamico standard che useremo come modello per quasi tutto il corso è un cilindro rigido, con pareti che possono essere o no isolate termicamente (se lo sono, le chiameremo **pareti adiabatiche**), contenente un gas; il cilindro è chiuso da un pistone mobile, che può quindi aumentare o diminuire il volume del gas all'interno del cilindro.

Schiacciando il pistone mobile, compiamo lavoro sul nostro sistema. Empiricamente, osserviamo un **innalzamento della temperatura**. Dal punto di vista dinamico, il lavoro che compiamo sul sistema si trasferisce alle particelle di cui esso è composto, le quali aumentano le loro velocità. È quindi evidente la correlazione che esiste tra la temperatura del sistema e le velocità delle sue particelle:



possiamo quindi definire la temperatura come *quel parametro che indica l'agitazione termica di un sistema*, dove con “agitazione termica” intendiamo il moto caotico delle sue particelle.

A tal proposito, ricordiamo che la velocità media delle particelle è **nulla**, anche perché, se non lo fosse, il gas dovrebbe muoversi e andare da qualche parte, ma resta fermo nel nostro bel cilindro sigillato. La loro **velocità quadratica media**, invece, è diversa da zero, infatti le particelle non sono mai ferme.

Il numero delle particelle del gas dipende dalle moli di gas considerato; inoltre, per poter descrivere cinematicamente il moto di ogni particella, avremmo bisogno di **6N** parametri, 3 per la posizione e altrettanti per gli angoli di inclinazione del moto. Già da questo, risulta evidente che studiare il moto di ogni singola particella analiticamente porta al suicidio cerebrale; questo obiettivo se lo pone la fisica computazionale, sfruttando le capacità di calcolo dei computer.

Per quanto riguarda la fisica classica, non si va a studiare le condizioni *microscopiche* del sistema, ma andiamo a osservare quelle *macroscopiche*: t, p, V ovvero temperatura, pressione e volume. Una definizione di temperatura, molto qualitativa, è data sopra; per quanto riguarda il volume, non dovrebbero esserci problemi o incomprensioni, ricordando che $V = m \cdot \rho$. L'espressione della pressione può essere scritta come $p = \frac{|d\vec{F}|}{dS}$, ripresa dalla fluidodinamica. Queste tre variabili saranno al centro di tutto il corso di termodinamica, e gli esercizi consisteranno, spesso, nel dover ricavare la funzione di una di queste, o espressioni da queste derivanti, come calore o energia.

9.2.2 Trasformazioni reversibili e/o quasi statiche

Supponiamo ora di avere il nostro sistema termodinamico standard in uno stato di equilibrio, dove quindi le tre variabili t, p, V restano costanti se il sistema è lasciato, isolato, a sé stesso. Chiameremo **trasformazione** qualsiasi fenomeno che alteri l'equilibrio termodinamico del sistema, portando il sistema da uno stato di equilibrio A a un secondo stato di equilibrio B .

Esistono diverse trasformazioni possibili: alcune di queste mantengono una delle tre variabili costante, osservando come variano le altre due; altre avvengono in particolari casi di isolamento termico. Definiamo adesso due tipi di trasformazioni.

Definizione (Trasformazioni reversibili)

Diremo che una trasformazione che porta un sistema termodinamico da uno stato di equilibrio iniziale A a uno stato di equilibrio finale B è **reversibile** se è possibile percorrerla al contrario, ovvero tornare da B ad A passando esattamente per tutti gli stadi intermedi.

Una trasformazione reversibile può essere, per esempio, l'abbassamento del pistone del nostro sistema compiuto molto lentamente, facendo sì che il gas all'interno sia sempre in equilibrio termico. Dopo di ché, alleggeriamo gradualmente la pressione sul pistone, e osserviamo che il gas si espande, tornando esattamente al volume di partenza, il tutto reso possibile senza scatti eccessivi in compressione o dilatazione. Per far ciò, il gas deve trovarsi in stati di equilibrio intermedi per tutta la durata della trasformazione. In questo caso, la trasformazione non è solo



reversibile, ma è anche **quasi statica**.

Definizione (Trasformazioni quasi statiche)

Una trasformazione quasi statica è una trasformazione che passa per stati di equilibrio, avviene generalmente in **tempi molto lunghi**, da cui deriva il nome.

Un'importante osservazione da fare è che una trasformazione reversibile (del nostro sistema termodinamico standard) è sempre quasi statica, mentre non è vero il contrario; facciamo un esempio di trasformazione quasi statica ma *irreversibile*. Invece del solito cilindro a pistone mobile, prendiamo come sistema termodinamico una scatola chiusa e termicamente isolata, al cui interno gira una ruota, senza attriti con le pareti. Abbassando lentamente e gradualmente un freno, che rallenta il moto rotatorio della ruota, la portiamo fino a quando non si ferma completamente. Osserviamo, alla fine di questo processo, un innalzamento della temperatura all'interno della scatola. Se ora, con la stessa gradualità, rialziamo il freno dalla ruota, questa non riprenderà a girare. La trasformazione è quasi statica, ma non reversibile.

Se la ruota avesse ripreso a girare, si sarebbe potuto creare un *perpetuum mobile*, ovvero una macchina a moto perpetuo, che assorbe calore dall'ambiente trasformandolo in calore. Ciò è reso impossibile, come vedremo, dal secondo principio della termodinamica.

9.3 Equazioni di stato di sistemi termodinamici

Per avere un sistema termodinamico, occorre avere qualche grammo di sostanza; in generale, parleremo di moli. A seconda della sostanza considerata, poi, le moli peseranno qualche grammo in più o in meno. Ricordiamo che le variabili di interesse sono quelle macroscopiche che descrivono lo stato del sistema, ovvero t, p, V . Studiare lo stato di un sistema termodinamico significa cercare una qualche relazione che leghi le tre variabili; il massimo che possiamo cercare è una funzione delle tre che sia nulla, ovvero:

$$f(t, p, V) = 0$$

Una funzione di questo genere viene chiamata **equazione di stato del sistema**. Ovviamente, non sempre è possibile trovare una relazione simile.

Un altro aspetto di interesse particolare è trovare come sono legate tra loro le variazioni delle tre incognite; in particolare, vogliamo trovare un modo per esprimere una delle tre in funzione delle rimanenti, per esempio, vogliamo trovare una $V(t, p)$ che ci dia il volume del sistema al variare della temperatura e della pressione.

In molti casi, questa funzione è incognita; ci sono svariate cose da fare, quando si cerca la forma analitica di una funzione di cui non sappiamo nulla. Prima di tutto, scriviamo l'incremento di volume in funzione delle due variabili; potremo quindi scrivere:



$$\Delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)_p \Delta t + \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_t \Delta p$$

I termini tra parentesi indicano le derivate parziali rispetto alla variabile interessata; il pedice alla parentesi, invece, indica quale delle tre variabili viene mantenuta *costante*. Ad esempio, il primo termine dell'addizione è quindi una derivata parziale del volume rispetto alla temperatura a pressione costante.

Studiamo proprio questo primo caso, ovvero quando la pressione è costante. Il volume sarà quindi solo funzione della temperatura: per poter esprimerlo, scriviamolo in sviluppo di Taylor:

$$V(t) = V_0(1 + \beta\Delta t + \gamma\Delta t^2 + \dots)$$

Ci fermiamo al termine di primo ordine del polinomio; deriviamo questa funzione trovata, ottenendo:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)_p = V_0\beta$$

β si chiama **coefficiente di dilatazione termica a pressione costante** ed esprime, appunto, di quanto si dilata il volume della sostanza considerata al variare della temperatura. Ogni sostanza ha un coefficiente di dilatazione diverso, così come sono diversi i coefficienti dei solidi da quelli dei fluidi. Se ripetiamo lo stesso procedimento per la derivata rispetto alla pressione a temperatura costante, otterremo:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_t = \left(-\frac{1}{k} \right) V_0$$

Al posto di scrivere un coefficiente β abbiamo utilizzato un k negativo, che si chiama **coefficiente di compressibilità volumica a temperatura costante**; come per il coefficiente di dilatazione, questo assume valori diversi a seconda della sostanza considerata.

Sostituendo i due termini così trovati nell'espressione di ΔV , otterremo:

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta t - \frac{1}{k} V_0 \Delta p = V_0 \left(\beta \Delta t - \frac{1}{k} \Delta p \right)$$

Per ricavare i coefficienti di dilatazione e compressibilità, quindi, si procede con l'esperienza di laboratorio, osservando prima come, al variare della temperatura a pressione costante, vari il volume della sostanza, e poi rifacendo lo stesso procedimento per temperatura costante e pressione che varia.

Il procedimento seguito per ricavare ΔV può essere fatto per ricavare Δp ; si otterranno sempre due coefficienti da dover calcolare in laboratorio.



9.4 Definizione operativa di temperatura

9.4.1 Scala Celsius

Abbiamo già parlato di temperatura, nel primo capitolo, descrivendola come il parametro termodinamico che indica l'agitazione termica di un sistema e attraverso la cui variazione si individuano gli scambi di calore. In linea di massima, questa può essere considerata la definizione qualitativa di temperatura.

Ma poiché essa si tratta di una grandezza fisica, e dobbiamo poterla misurare, abbiamo bisogno di una definizione operativa. Per costruire un **termometro**, ovvero lo strumento per misurare la temperatura, possiamo sfruttare la legge che abbiamo ottenuto nel precedente capitolo, ovvero:

$$V(t) = V_0(1 + \alpha\Delta t)$$

Tramite questa espressione, sappiamo che una sostanza si espande con l'innalzarsi della temperatura, e che ogni sostanza ha un proprio coefficiente di dilatazione. Il funzionamento del classico termometro a mercurio non è altro che la dilatazione termica: il mercurio liquido, infatti, ha un coefficiente di dilatazione abbastanza alto, da permettere di apprezzarne la variazione di volume. Non resta altro che racchiuderlo in un'ampolla sottile, così da poter visualizzare al meglio la dilatazione.

Abbiamo appena costruito uno strumento che non ci misura la temperatura, ma che ci rileva variazioni di essa. Per poter **misurare** la temperatura, c'è bisogno di una scala di valori. Questa scala va costruita a partire da *almeno due* punti fissi: infatti, sappiamo che per due punti passa una ed una sola retta. I due punti scelti devono essere *fissi*, ovvero, a pressione costante, devono essere sempre gli stessi. I migliori fenomeni fisici che fanno al caso nostro, allora, sono i passaggi di stato: questi avvengono sempre alla stessa temperatura, una volta fissata la pressione.

Scegliendo come 0 la temperatura in cui acqua e ghiaccio coesistono, e ponendo al 100 il punto di ebollizione dell'acqua, otteniamo la **scala Celsius**, che si indica con °C. Per ottenere il nostro termometro, basterà segnare con 0 il livello raggiunto dal mercurio allo scioglimento del ghiaccio, con 100 quello raggiunto all'ebollizione e dividere in 100 parti uguali l'intervallo ottenuto.

9.4.2 Scala Kelvin

Rappresentiamo in un grafico (t, V) la funzione $V(t)$ considerata (ricordiamo che la t in questo caso è sempre la temperatura e non il tempo), ponendo, per $t = 0$, il volume a V_0 , e rappresentando, in corrispondenza di $t = 100$, il volume raggiunto dal sistema al punto in cui l'acqua bolle. A questo punto, uniamo i due punti con l'unica retta possibile e, in laboratorio, confrontiamola con i dati sperimentali, ovvero prendiamo temperature comprese nell'intervallo tra 0 e 100 e vediamo se il volume corrispondente giace o meno sulla retta tracciata, con quale errore ecc.

L'aspetto interessante non sta, però, nel confrontare teoria ed esperienza, prassi ormai ripetuta della fisica; l'aspetto interessante sta nel prolungare la retta oltre



l'asse delle ordinate, andando quindi a vedere il comportamento della sostanza a temperature inferiori a 0 °C: prima o poi, la retta incontra l'asse delle ordinate. Questo significa che esiste una temperatura in cui il volume del gas considerato va a zero. Ovviamente, sappiamo che ogni sostanza liquefa, quindi il volume del gas non potrebbe mai andare a zero, anche per altri motivi legati all'energia cinetica media delle particelle; possiamo però calcolare quanto vale questa temperatura che, *se fosse possibile* raggiungerla con un gas, si avrebbe volume nullo.

Riprendendo la funzione già vista, sostituiamo il valore nullo nell'espressione:

$$0 = V_0(1 + \beta t^*) \quad t^* = -\frac{1}{\beta}$$

Dai dati ricavati in laboratorio, avremo che t^* è uguale a -273.15 °C; a questo punto, risulta comodo *cambiare scala* e passare alla **scala Kelvin**, o delle temperature assolute, ponendo

$$\begin{cases} 0K = -273.15C \\ T = t - t^* \end{cases}$$

La nuova temperatura così ottenuta, T , rappresenta la scala delle temperature assolute. Da adesso in poi, utilizzeremo questa scala invece della scala Celsius.

9.5 Leggi dei gas e equazione di stato dei gas perfetti

9.5.1 Leggi di Gay-Lussac

Parlando di equazioni di stato, avevamo raggiunto un'espressione del volume in funzione della temperatura a pressione costante; questo procedimento può essere ripetuto allo stesso modo per ottenere la pressione in funzione della temperatura a volume costante. Avremo quindi le due funzioni:

$$\begin{aligned} V(t) &= V_0(1 + \beta t) \\ p(t) &= p_0(1 + \beta t) \end{aligned}$$

In questo caso, avevo usato ancora la scala delle temperature Celsius, avendola infatti indicata con t . Vogliamo però passare alla scala Kelvin delle temperature assolute; ricordando che $T = t - t^*$ e che possiamo esprimere $t^* = -\frac{1}{\beta}$, otterremo due diverse funzioni:

$$\begin{aligned} V(T) &= V_0\left[1 + \beta\left(T - \frac{1}{\beta}\right)\right] = V_0(1 + \beta T - 1) = V_0\beta T \\ p(T) &= p_0\left[1 + \beta\left(T - \frac{1}{\beta}\right)\right] = p_0(1 + \beta T - 1) = p_0\beta T \end{aligned}$$

Queste due leggi, rispettivamente, vengono chiamate **prima e seconda legge di Gay-Lussac**. Queste esprimono la dipendenza di volume e pressione dalla temperatura, quando l'altra variabile viene mantenuta costante.



Prima di proseguire, soffermiamoci un attimo a considerare le conseguenze di queste leggi. Prendiamo il caso di voler compiere prima una trasformazione **isobara**, ovvero a pressione costante; per far ciò, basta lasciare il pistone mobile del nostro sistema termodinamico standard libero di muoversi, e annullare tutti gli attriti tra pistone e pareti del cilindro, senza effettuare forze sul pistone: il gas si troverà così a pressione costante di 1 atmosfera. La prima legge di Gay-Lussac ci dice che, in queste condizioni, *aumentando* la temperatura, il gas si espande. Da un punto di vista logico, se notiamo che la temperatura ci indica il movimento generale delle particelle che compongono il gas, aumentandola forniamo energia a queste particelle, che aumentano la loro velocità, urtando con più energia cinetica il pistone, facendolo quindi alzare fino a raggiungere l'equilibrio tra la pressione esterna e la pressione interna del gas. Il volume risulta aumentato di conseguenza.

Passiamo invece al secondo caso, in cui vogliamo compiere una trasformazione **isocora** a volume costante. Per far ciò basta semplicemente fissare in qualche modo il pistone mobile, cosicché non possa alzarsi o abbassarsi. Aumentando la temperatura, ovvero fornendo energia alle particelle che formano il gas, notiamo un *logico* aumento di pressione: queste particelle urteranno con più energia le pareti del cilindro e, per definizione di pressione, si ha un conseguente innalzamento della pressione, perché il gas non è libero di espandersi, ma resta concentrato in un volume costante, quindi le particelle non possono andare che a sbattere sempre di più contro le pareti. Ovviamente, le pareti reggeranno fino a un limite di pressione, oltre il quale esploderanno.

9.5.2 Equazione di stato dei gas perfetti

Una sostanza che ha un comportamento *in accordo* con le due leggi di Gay-Lussac si dice **gas perfetto**; nella realtà fisica, non esistono gas perfetti, ma esistono gas quasi-perfetti o che hanno un comportamento molto simile a questo, e sono i *gas nobili*, gli elementi del gruppo VIII sulla tavola periodica. Questi gas non interagiscono tra loro, per via della regola dell'ottetto, e, se presi molto rarefatti, si comportano come dovrebbe comportarsi un gas perfetto.

Consideriamo ora di poter lavorare con un gas perfetto; consideriamo due trasformazioni consecutive, una prima isobara e una seconda isocora. Su un diagramma (V, p) le isobare saranno segmenti orizzontali, mentre le isocore sono segmenti verticali; prendiamo quindi una prima trasformazione da A a B rappresentata da un segmento orizzontale, poi una seconda che va da B a C rappresentata da un segmento verticale.

Avremo che il gas è passato dalla configurazione V_A, p_A, T_A a V_B, p_B, T_B , terminando infine in V_C, p_C, T_C . Nella prima trasformazione, la pressione è costante, ovvero $p_A = p_B$; uguagliando le configurazioni iniziali e finali della trasformazione, otterremo:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{T_B}{T_A}$$

Nella seconda trasformazione, il volume resta costante, ovvero $V_B = V_C$; come prima, uguagliamo le configurazioni iniziali e finali, ottenendo:



$$\frac{p_C}{p_B} = \frac{T_C}{T_B}$$

Le due relazioni così ottenute possono essere moltiplicate tra loro membro a membro, ottenendo:

$$\frac{V_B p_C}{V_A p_A} = \frac{T_B}{T_A} \cdot \frac{T_C}{T_B}$$

Possiamo scrivere V_C al posto di V_B perché sono uguali (trasformazione isocora); semplificando al secondo membro dell'uguaglianza, otteniamo:

$$\frac{V_C p_C}{V_A p_A} = \frac{T_C}{T_A}$$

Da questa relazione otteniamo un'informazione importante:

$$\frac{pV}{T} = \text{cost}$$

Questa relazione ci dà l'indizio che siamo vicini a un'equazione di stato, basta ricavare la costante di relazione. Per nostra fortuna, c'è stato chi lo ha fatto al posto nostro. Parliamo dell'**esperienza di Dalton**, uno degli esperimenti più famosi e importanti della fisica. Egli vide che, a T e p fissate, raddoppiando la quantità di sostanza considerata, *il volume raddoppiava*. In un certo senso, possiamo scrivere che $V = \sigma n$ dove n sono le moli di sostanza considerata. Possiamo infine scrivere l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$pV = nRT$$

Dove p, V, T sono le variabili termodinamiche del sistema, n è il **numero di moli** del gas e R si chiama **costante universale dei gas** e ha valori diversi a seconda delle dimensioni fisiche che vengono di volta in volta prese nel sistema; i suoi valori sono comunque tabulati.

9.6 Lavoro termodinamico

Consideriamo adesso un sistema termodinamico standard, che da adesso in poi conterrà del **gas perfetto** invece che del gas qualunque; in questo caso, inoltre, consideriamo che tra pistone mobile e pareti **non vi sia attrito**. Di questo sistema, prendiamo una trasformazione quasi statica che produca una variazione nella posizione del pistone mobile pari a dr , che può essere negativo o positivo a seconda dei casi.

Facciamo considerazione energetiche; il lavoro totale compiuto dal sistema e dall'ambiente circostante resta *nullo*, infatti il lavoro che il sistema compie sull'ambiente viene ricambiato dall'ambiente stesso. Un'altra prova di ciò è il fatto che il pistone, a fine trasformazione, resta fermo, con un'energia cinetica quindi nulla. Poiché partiva da fermo, e termina la trasformazione fermo, il lavoro totale compiuto da tutto l'universo è zero. Possiamo quindi scrivere:



$$0 = \delta L_{tot} = \delta L_s + \vec{F}_e \cdot d\vec{r}$$

Con δL_s indichiamo l'infinitesimo lavoro compiuto dal sistema; \vec{F}_e indica la forza esterna che compie lavoro sul sistema e $d\vec{r}$ indica l'infinitesimo spostamento del pistone. Se abbiamo compressione o espansione, varierà il segno del $d\vec{r}$ e del lavoro compiuto dalle forze esterne, che possiamo anche indicare con $F_e = p_e S$, avendo quindi due espressioni:

$$\begin{cases} \delta L_s - p_e S |dr| \rightarrow_{dr>0} \delta L_s - p_e dV \\ \delta L_s + p_e S |dr| \rightarrow_{dr<0} \delta L_s - p_e dV \end{cases}$$

La prima espressione indica il caso di espansione, ovvero in cui il sistema compie lavoro sull'ambiente esterno, mentre la seconda espressione indica una compressione, ovvero il caso opposto dove è il sistema a subire lavoro. Poiché tra pistone mobile e contenitore non c'è attrito, le forze esterne sono completamente bilanciate da quelle interne (equilibrio meccanico); per questo motivo, possiamo porre $p_e = p$, dove p è la pressione del gas. Ricordando inoltre che $drS = dV$, la definizione di **lavoro termodinamico** è, quindi:

$$\delta L_s = p dV$$

Se $dV > 0$, il sistema compie lavoro sull'ambiente esterno; se $dV < 0$ è l'ambiente a compiere lavoro, e quindi il sistema *subisce* lavoro. Data una trasformazione, quindi, che passa per stati di equilibrio per andare da A a B , il lavoro che compie il sistema sarà dato da

$$L = \int_A^B p dV$$

Attenzione, perché l'integrale è **calcolato lungo tutta la trasformazione**. Su un diagramma (p, V) , le trasformazioni sono tutte quelle curve che uniscono due punti. Il lavoro sarà, quindi, l'area sottesa dalla curva in quell'intervallo. È per questo motivo che, se ci sono diverse trasformazioni che permettono il passaggio tra i due stati considerati, in ognuna di esse il lavoro compiuto dal sistema sarà diverso. Quello che però non cambia è la *variazione di energia* che il sistema subisce. Questo lo vedremo più approfonditamente prima con il primo principio della termodinamica.

Osserviamo inoltre che l'espressione del lavoro sopra scritta vale per *trasformazioni quasi-statiche*; cosa possiamo dire se la trasformazione non è quasi statica?

Consideriamo una trasformazione irreversibile a pressione esterna costante, con il sistema che va in equilibrio meccanico con l'ambiente (ovvero $p_{ext} = p_{gas}$). Se la trasformazione fosse reversibile, il sistema passerebbe da una T_i iniziale a una T_f attraverso infiniti stati di equilibrio intermedi dT ; poiché non lo è, si passa da T_i a T_f repentinamente e, per questo motivo, *non ha senso descrivere la pressione durante la trasformazione*. Nel piano (p, V) si rappresenta con una linea tratteggiata o spezzata. In questo caso, la formula del lavoro $L = \int_A^B p dV$ non ha senso, in quanto non è ben definito il tragitto che va da A a B .



9.6.1 Definizione operativa di calore

Uno dei due modi di alterare l'energia di un sistema è compiere (o far compiere) lavoro sul sistema; l'altra maniera è quella di fornire esso **calore**. La definizione operativa di calore è storica: osservando che, per alzare la temperatura di un corpo, occorre fornire energia, ha senso la scrittura:

$$\delta Q = C \delta T$$

Dove C è la **capacità termica** del corpo, esprimibile anche in funzione della massa del corpo attraverso la relazione:

$$C = c m dT$$

Dove c indica il **calore specifico** della sostanza calcolato in unità di massa. Il calore specifico *dipende* dalla temperatura.

Si definisce *unità di calore*, meglio conosciuta come **caloria**, la quantità di energia necessaria per scaldare un grammo d'acqua da 14.5°C a 15.5°C , assumendo che non si compia lavoro (l'espansione dell'acqua è minima).

9.6.2 Espressione del lavoro isoterma

Consideriamo adesso una trasformazione isoterma reversibile a $T = \text{cost}$ fissata; vogliamo calcolare il lavoro compiuto dal gas durante la trasformazione. Consideriamo il caso in cui il gas sia **perfetto**, sfruttando la legge dei gas si esprime la pressione come $p = \frac{nRT}{V}$. Possiamo allora utilizzare l'espressione generale del lavoro termodinamico:

$$L = \int_A^B p dV = \int_i^f \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_i^f \frac{dV}{V} = nRT \log \frac{V_f}{V_i}$$

La temperatura T resta costante lungo tutta la trasformazione, tuttavia il calore scambiato dal sistema *non è nullo*: tramite lavoro (compiuto o subito), varia l'energia interna delle particelle, la cui temperatura dovrebbe a sua volta variare; a far sì che sia costante, allora, è il contributo del calore scambiato. Come vedremo nel prossimo capitolo, questo si esprime con l'enunciato del primo principio.

9.7 Prima esperienza di Joule e Primo principio della termodinamica

Nel capitolo precedente abbiamo dato la definizione operativa di calore, distinguendolo dal lavoro come un'altra maniera di alterare lo stato di un sistema. Questa è stata l'idea che ha pervaso la comunità scientifica per oltre 50 anni nel XIX secolo, quando si credeva addirittura che il calore fosse un fluido invisibile che, passando da un corpo all'altro, determinasse la temperatura di un dato oggetto (addirittura aveva anche un altro nome, il famoso **calorico**). Inoltre, le due unità di misura erano differenti: per il lavoro si usava il joule, per il calore la caloria.



Tuttavia, lo stesso Joule pensava che le due cose avessero ben a che fare tra loro. Cercando infatti una relazione tra esse, arrivò alla formulazione del primo principio della termodinamica, attraverso l'esperimento noto come **prima esperienza di Joule**.

Preso un contenitore *isolato termicamente*, vi mise dentro una nota quantità di acqua; il sistema era fornito di un mulinello a pale, ovvero un sistema di pale meccaniche che era possibile mettere in moto dall'esterno, tirando un filo. Al filo era appesa una massa che, scendendo per forza di gravità, metteva le pale in rotazione. L'isolamento del contenitore non permetteva scambi di calore con l'esterno. Quando la massa era libera di scendere, le pale si mettevano in moto e la temperatura finale dell'acqua risultava essere maggiore rispetto a prima: sul sistema veniva compiuto una quantità di lavoro pari alla differenza di energia potenziale gravitazionale del peso.

Allora, riportato il sistema allo stato iniziale, Joule mise in contatto termico alla parete inferiore del contenitore (stavolta non isolante) un calorimetro contenente una miscela di acqua e ghiaccio a 0 °C. Il calore che l'acqua avrebbe ceduto al calorimetro non avrebbe alzato la temperatura della miscela, ma avrebbe fornito calore al ghiaccio, facendolo sciogliere (è noto il calore latente di fusione del ghiaccio).

Riportando su una tabella le varie altezze percorse dal peso libero di scendere e la massa di ghiaccio fuso di volta in volta, ovvero tabulando lavoro compiuto sul sistema e calore ceduto dal sistema, Joule osservò che il rapporto era costante, pari a:

$$\frac{L}{Q} = 4.186 \frac{J}{\text{cal}}$$

L'esperimento fu ripetuto diverse volte, confermando il risultato ottenuto. L'intuizione di Joule fu allora quella che il calore potesse calcolarsi in joule, e che lavoro e calore non fossero altro che due forme diverse di una stessa cosa. Inoltre, osservò anche che, in una trasformazione ciclica, si otteneva

$$Q - L = 0$$

In meccanica, il lavoro compiuto da forze conservative può essere espresso tramite una funzione di stato. Allora, presupponendo che, se si torna allo stato iniziale, vale $\Delta U = 0$, si può scrivere l'enunciato del primo principio come:

$$\Delta U = Q - L$$

Dove ΔU indica l'**energia interna di un sistema**. Il segno meno davanti al lavoro è per convenzione storica.

9.7.1 Calore specifico di un corpo solido

Considerato il primo principio della termodinamica $\Delta U = Q - L$, in buona approssimazione possiamo considerare un corpo solido come un corpo rigido che



non si deforma e, quindi, non compie lavoro se riscaldato. Allora ha senso scrivere $\Delta U = Q$.

Definita la **capacità termica** di un corpo come $C = cm$, possiamo esprimere il calore specifico come:

$$c = \frac{C}{m} := \frac{\delta Q}{dT}$$

Il δQ si esprime con una δ perché dipende dalla trasformazione, a differenza del dT che è invece assoluto. Per un solito, vale anche:

$$c = \frac{1}{m} \frac{dU}{dT}$$

9.7.2 Problema fondamentale della calorimetria

Prendiamo due corpi a diverse temperature $T_1 \neq T_2$; se messi a contatto tra loro in un contenitore isolato dall'ambiente, la variazione di energia interna totale nel contenitore sarà nulla, ovvero:

$$\Delta U = 0 \quad Q_1 + Q_2 = 0$$

Abbiamo approssimato i due corpi come corpi rigidi indeformabili. Scambiando calore, i due corpi arrivano a una temperatura di equilibrio: determinare questa temperatura è considerato il **problema fondamentale della calorimetria**. Supposto $T_1 < T_2$, avremo che la temperatura finale T_f sarà $T_1 < T_f < T_2$. Possiamo allora scrivere:

$$m_1 c_1 (T_f - T_1) + m_2 c_2 (T_f - T_2) = 0$$

Da questa si ottiene che la temperatura di equilibrio è pari a:

$$T_f = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

9.8 Seconda esperienza di Joule

La seconda esperienza di Joule ha propositi diversi dalla prima; dopo aver *verificato* sperimentalmente l'esistenza del primo principio, Joule si propose di trovare un'espressione che permettesse di calcolare l'energia interna che, come abbiamo detto, è una funzione di stato, cioè dipenderà esclusivamente dai parametri termodinamici p, V, T del sistema in un determinato stato di equilibrio.

L'apparato sperimentale della seconda esperienza è molto semplice: Joule racchiuse un gas in un contenitore isolato termicamente; il contenitore era diviso in due ambienti, in uno vi era il gas, nell'altro il vuoto, separati da un setto. Aprendo il setto, il gas si espande in tutto il contenitore (viene chiamata **espansione libera** una trasformazione che avviene in queste condizioni). Si osservò che la temperatura del gas *variava di molto poco*.



L'esperienza venne ripetuta diverse volte, ogni volta prendendo un gas più rarefatto della precedente; si osservava che, più il gas era rarefatto, meno variava la temperatura. Si definisce quindi **gas ideale** un gas *al limite di bassissima densità*.

Nell'espansione libera, non vi sono scambi di calore tra sistema e ambiente (il contenitore è isolato); inoltre, poiché il volume totale del contenitore non varia (varia il volume del gas, ma non del contenitore) il gas non compie o subisce lavoro sull'ambiente; quindi risulta essere:

$$\Delta U = Q - L = 0$$

Inoltre, durante la trasformazione la pressione non è ben definita, il volume aumenta e la temperatura resta costante. Per questo motivo, si suppone che l'energia interna fosse funzione **della sola temperatura**, e non degli altri parametri termodinamici.

9.8.1 Calore specifico del gas perfetto a pressione e volume costanti

Per poter ricavare un'espressione dell'energia interna, possiamo sfruttare le espressioni dei calori specifici. Dato il primo principio $\Delta U = Q - L$, vale in una qualunque trasformazione infinitesima:

$$dU = \delta Q - \delta L$$

Dove ricordiamo che calore e lavoro dipendono dalla trasformazione, mentre l'energia interna, essendo funzione di stato, ha una variazione assoluta. Ricordando l'espressione del calore specifico $c = \frac{\delta Q}{dT}$, per un gas perfetto risulta di interesse notevole il numero di moli, e non la massa; avremo quindi che il **calore specifico a volume costante** di un gas perfetto sarà pari a:

$$c_V = \frac{1}{n} \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_V = \frac{1}{n} \left(\frac{dU}{dT} \right)_V + \left(\frac{\delta L}{dT} \right)_V = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT}$$

(il contributo del lavoro è nullo perché è a volume costante). Da questa ricaviamo che l'espressione dell'energia interna di un gas perfetto è data da $U(T) = nc_V T$.

A pressione costante, invece:

$$c_p = \frac{1}{n} \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_p = \frac{1}{n} \left[\frac{dU}{dT} + \left(\frac{\delta L}{dT} \right)_p \right] = \frac{1}{n} \left[\frac{dU}{dT} + \left(p \frac{dV}{dT} \right)_p \right]$$

Sfruttando la legge del gas perfetto $pV = nRT$, differenziandola otteniamo $p dV + V dp = nR dT$; poiché $p = \text{cost}$, vale $dV = \frac{nR dT}{p}$; sostituendola nell'espressione qui sopra:

$$c_p = \frac{1}{n} \left[\frac{dU}{dT} + nR \frac{dT}{dT} \right] = c_V + R$$



Capitolo 10

Parte Ottava - Trasporto di calore ed energia interna

10.1 Processi di trasporto

Il calore può essere trasferito in tre modi:

- **conduzione:** il trasferimento per conduzione avviene quando due corpi a diverse temperature vengono messi in contatto tra loro, favorendo appunto la conduzione di calore. Per i solidi, la velocità media delle particelle varia anche se queste sono vincolate a stare in un reticolo (le loro posizioni infatti sono oscillanti e aumenta la velocità di vibrazione della particella).
- **convezione:** a differenza della conduzione, durante il trasporto per convezione vi è anche trasporto di materia, oltre che di calore. Un esempio sono i moti convettivi nella Terra oppure i moti convettivi generati dai termosifoni nelle stanze.
- **irraggiamento:** il trasporto di calore per irraggiamento è il più particolare di tutti: non vi è contatto, né scambio di materia. Il trasporto di calore è spiegato dalla meccanica quantistica: le particelle in movimento trasmettono calore anche senza contatto, attraverso onde elettromagnetiche. Con il famoso problema del corpo nero, si vide infatti che c'era una lunghezza d'onda per la quale l'irraggiamento era massimo (dalla teoria classica l'irraggiamento tendere all'infinito al crescere della lunghezza d'onda); inoltre, la lunghezza d'onda in cui è presente il picco di massimo irraggiamento *dipende* dalla temperatura. Alcuni strumenti utilizzano le onde irraggiate per misurare la temperatura di un corpo, come, ad esempio, il **pirometro ottico**.

10.2 Legge di Fourier

La legge di Fourier per la conduzione di calore risponde all'esigenza di trovare una relazione tra la variazione di calore e la variazione di temperatura in un corpo solido. Considerato un corpo rigido di superficie S e spesso un infinitesimo dx ,



prendiamo un flusso di calore, per esempio da sinistra a destra (con $T_s > T_d$), stiamo cercando una relazione del tipo:

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(x, y, z; t) \leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial x}(x, y, z; t)$$

Ovvero una qualche relazione tra la variazione temporale di calore (poiché il calore si misura in joule, abbiamo che $\frac{\text{J}}{\text{s}} = 1\text{W}$, è una potenza) e la variazione di temperatura lungo lo spessore della sbarra.

Sperimentalmente, si vide che la relazione era la seguente:

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(x, y, z; t) = -S\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x, y, z; t)$$

Dove S è la sezione del solido e λ una costante che dipende dal materiale, chiamata **conducibilità termica**. Il segno meno è una convenzione: se la temperatura diminuisce, allora il calore sta procedendo in quella direzione (moralmente, potremmo dire che il calore “deve ancora arrivare” alle zone dove la temperatura è più bassa, quindi il calo di temperatura è “parallelo” alla direzione del calore).

L’espressione ottenuta vale per sistemi **non** stazionari. Se ipotizzassimo che la temperatura non dipenda dal tempo, ovvero considerassimo la condizione di equilibrio, allora il calore entrante da un verso esce dall’altro e l’energia interna non varia, ottenendo l’espressione:

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda S \frac{dT}{dx}$$

Questa espressione è integrabile:

$$\begin{aligned} \int_{T(0)}^{T(L)} dT &= \int_0^L -\frac{1}{\lambda S} \frac{dQ}{dt} dx \\ T(L) - T(0) &= -\frac{L}{\lambda S} \dot{Q} \\ \dot{Q} &= -\frac{\lambda S}{L} (T(L) - T(0)) \end{aligned}$$

L’ultima espressione è nota come **legge di Fourier per sistemi stazionari**.

Consideriamo ora il caso generale, ovvero una situazione di non equilibrio. Avremo che la variazione di calore in un determinato punto della sbarra è diversa da un punto poco lontano, ovvero $\dot{Q}(x) \neq \dot{Q}(x + dx)$. La variazione di energia interna non è quindi nulla:

$$\frac{dU}{dt} = \dot{Q}(x) - \dot{Q}(x + dx)$$

L’espressione della variazione di energia interna l’abbiamo già vista: $dU = cmdT$; quindi avremo che $\frac{dU}{dt} = cm \frac{dT}{dt}$. Inoltre, la massa della sbarra può essere anche studiata in funzione della densità $m = \rho dV = \rho S dx$; fatte queste considerazioni, possiamo riscrivere



$$\begin{aligned}
 cm \frac{dT}{dt} &= \dot{Q}(x) - \dot{Q}(x + dx) \\
 c\rho S dx \frac{dT}{dt} &= \dot{Q}(x) - \dot{Q}(x + dx) \\
 \rho x S \frac{dT}{dt} &= \frac{\dot{Q}(x) - \dot{Q}(x + dx)}{dx} = -\frac{\partial \dot{Q}}{\partial x}
 \end{aligned}$$

Ricordando l'espressione trovata prima, ovvero che $\frac{\partial \dot{Q}}{\partial x} = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}$, sostituendola nell'espressione qui sopra:

$$\begin{aligned}
 \lambda S \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \rho c S \frac{dT}{dt} \\
 \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \rho c \frac{dT}{dt} \\
 \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}
 \end{aligned}$$

L'ultimo risultato è noto anche come **equazione differenziale di Fourier per il caso non stazionario**. La cosa interessante è che risulta essere *vagamente* simile all'equazione di Schrödinger, anche se hanno ben poco a che fare l'una con l'altra.

10.2.1 Esempio di un caso stazionario: il termometro

Anche un termometro segue la legge della conduzione termica di Fourier; infatti, se consideriamo le pareti del bulbo spesse dx , con la temperatura del mercurio pari a T_0 e quella dell'acqua da misurare pari a T^* , possiamo applicare la legge di Fourier nel caso stazionario:

$$mc \frac{dT}{dt} = \dot{Q} = -\frac{\lambda S}{D} (T(t) - T^*)$$

Ovviamente, i parametri m e c sono relativi al mercurio presente nel bulbo del termometro. Riordinando l'espressione qui sopra otteniamo:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\lambda S}{Lmc} (T - T^*)$$

Procediamo con un opportuno cambio di variabile; chiameremo $\xi = T - T^*$, da cui risulta $d\xi = dT$, in quanto T^* è costante; così facendo, l'espressione diventa:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\lambda S}{Lmc} \xi$$

Anche questa è integrabile:

$$\begin{aligned}
 \int_{\xi(0)}^{\xi(t)} \frac{d\xi}{\xi} &= \int_0^t -\frac{\lambda S}{Lmc} dt' \\
 \log \left(\frac{\xi(t)}{\xi(0)} \right) &= -\frac{\lambda S}{lmc} t
 \end{aligned}$$



Osserviamo che le dimensioni di $\frac{\lambda S}{Lmc}$ sono quelle di s^{-1} , ovvero di una frequenza; allora chiamo questo fattore $\frac{\lambda S}{Lmc} = \tau$, e otteniamo:

$$\frac{\xi(t)}{\xi(0)} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Riordinando si ottiene che $\xi(t) = \xi(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$; ricordando il cambio di variabile prima fatto, abbiamo che:

$$T(t) - T^* = (T_0 - T^*)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Osserviamo che, se $t = \tau$, abbiamo che $T(\tau) - T^* = (T_0 - T^*)e^{-1}$, ovvero circa il 35% del percorso totale; potremmo quindi dire che il termometro misura una temperatura vicina alla temperatura di equilibrio con il corpo dopo un tempo $t \approx 3\tau$; ricordiamo che, tuttavia, l'equilibrio si raggiunge solo per $t \rightarrow \infty$.

10.3 Trasformazione adiabatica

Una trasformazione adiabatica è caratterizzata dal fatto che **non sono presenti scambi di calore** durante tutta la trasformazione, ovvero $Q = 0$ per tutta la trasformazione; dal primo principio ne consegue anche che $\Delta U = -L$: questo è un modo *sempre* valido per calcolare il lavoro di un'adiabatica, che, a volte, può risultare difficile a seconda dei casi (soprattutto quando la trasformazione è irreversibile). Consideriamo una compressione adiabatica, dove si passa da P_0 a $P_0 + \Delta$. Valuteremo distintamente il caso reversibile e il caso irreversibile.

10.3.1 Adiabatica reversibile

Partiamo, come già detto, dal primo principio. Abbiamo che $\Delta U = -L$, poiché il calore scambiato è nullo. Poiché la trasformazione è reversibile, possiamo anche scrivere $dU = -\delta L$ e, sfruttando la definizione di lavoro termodinamico, vale anche $dU = -pdV$.

Consideriamo che adesso il nostro sistema sia un gas perfetto: possiamo allora scrivere:

$$\begin{aligned} nc_V dT &= -pdV \\ nc_V dT &= -nRT \frac{dV}{V} \\ \frac{dT}{T} &= -\frac{R}{c_V} \frac{dV}{V} \end{aligned}$$

Ricordando le espressioni tra c_p e c_V , possiamo scrivere $R = c_p - c_V$, da cui otteniamo che:

$$\frac{R}{c_V} = \frac{c_p - c_V}{c_V} = \frac{c_p}{c_V} - 1 = \gamma - 1$$



Dove $\gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1$ è una costante termodinamica che varia per diversi tipi di gas. Fatte queste considerazioni, possiamo tornare alla nostra equazione differenziale e integrarla:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$\log \frac{T_2}{T_1} = (1 - \gamma) \log \frac{V_2}{V_1} = \log \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{(1-\gamma)}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{(1-\gamma)}$$

$$\frac{T_2}{V_2^{1-\gamma}} = \frac{T_1}{V_1^{1-\gamma}}$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{cost}$$

Abbiamo ottenuto l'espressione della trasformazione adiabatica reversibile dei gas perfetti. Possiamo sfruttare la legge dei gas per ottenere le altre due relazioni equivalenti; scrivendo $T = \frac{pV}{nR}$, otteniamo che:

$$\frac{pV}{nR} V^{\gamma-1} = \text{cost} \quad \rightarrow \quad pV^\gamma = \text{cost}$$

Che è l'espressione più nota per l'adiabatica; esprimendo anche il volume come $V = \frac{nRT}{p}$, otteniamo l'ultima espressione:

$$P \left(\frac{T}{p} \right)^\gamma = \text{cost} \quad \rightarrow \quad p^{\gamma-1} T^\gamma = p T^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{cost}$$

In un grafico (p, V) la trasformazione adiabatica è rappresentata da una curva più ripida dell'isoterma (la cui relazione era, lo ricordiamo, $pV = \text{cost}$).

Possiamo calcolare la temperatura di arrivo T_{rev} sfruttando la legge dell'adiabatica:

$$p_0 T_0^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = (p_0 + \Delta) T_{rev}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

$$T_{rev} = T_0 \left(1 + \frac{\Delta}{p_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

10.3.2 Adiabatica irreversibile

Consideriamo anche stavolta una compressione, in cui si passa dallo stato p_0, T_0, V_0 allo stato $p_0 + \Delta, T_{irr}, V_{irr}$. In questo caso, poiché la trasformazione è irreversibile, non possiamo sfruttare la condizione di quasi staticità per calcolare l'espressione del lavoro. Tuttavia, il primo principio è sempre valido, e vale $\Delta U = -L$. L'espressione generale del lavoro è ancora valida, per cui potremo scrivere:

$$nc_V \Delta T = -(p_0 + \Delta)(V_{irr} - V_0)$$

$$nc_V (T_{irr} - T_0) = -(p_0 + \Delta)(V_{irr} - V_0)$$



Consideriamo ancora una volta il sistema come se fosse un gas perfetto; possiamo allora esprimere i volumi in funzioni di pressioni e temperature, così da calcolarci la temperatura di arrivo:

$$\begin{aligned} n c_V (T_{irr} - T_0) &= -(p_0 + \Delta) \left(\frac{n R T_{irr}}{p_0 + \Delta} - \frac{n R T_0}{p_0} \right) \\ n c_V (T_{irr} - T_0) &= n R \left[T_0 \left(1 + \frac{\Delta}{p_0} \right) - T_{irr} \right] \\ T_{irr} [n c_V + n R] &= n R T_0 \left(1 + \frac{\Delta}{p_0} \right) + n c_V T_0 \\ T_{irr} c_V &= R T_0 \left(1 + \frac{\Delta}{p_0} \right) + c_V T_0 \\ T_{irr} &= T_0 \left(1 + \frac{R \Delta}{c_p p_0} \right) \end{aligned}$$

Confrontiamo adesso i due risultati, ovvero le due temperature di arrivo dopo le trasformazioni reversibili e irreversibili:

$$\begin{aligned} T_{rev} &= T_0 \left(1 + \frac{\Delta}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\ T_{irr} &= T_0 \left(1 + \frac{R \Delta}{c_p p_0} \right) \end{aligned}$$

Sviluppiamo la temperatura di arrivo reversibile in Taylor, ricordando che $f(x) = (1+x)^\alpha$ diventa $1 + \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Big|_{x_0} \cdot x$:

$$T_{rev} = T_0 \left(1 + \frac{\Delta}{p_0} \frac{\gamma-1}{\gamma} \right)$$

Esplicitando:

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{\frac{c_p}{c_V} - 1}{\frac{c_p}{c_V}} = \frac{c_p - c_V}{c_V} \frac{c_V}{c_p} = \frac{R}{c_p}$$

Otteniamo proprio che:

$$T_{rev} = T_0 \left(1 + \frac{\Delta R}{p_0 c_p} \right) = T_{irr}$$

Ovvero i casi reversibile e irreversibile arrivano alla stessa temperatura! Questo ovviamente ha senso: lo sviluppo di Taylor tratta casi in cui $\Delta \rightarrow 0$ è infinitesimo, quindi le due trasformazioni si avvicinano molto tra loro.

10.4 Transizioni e diagrammi di fase

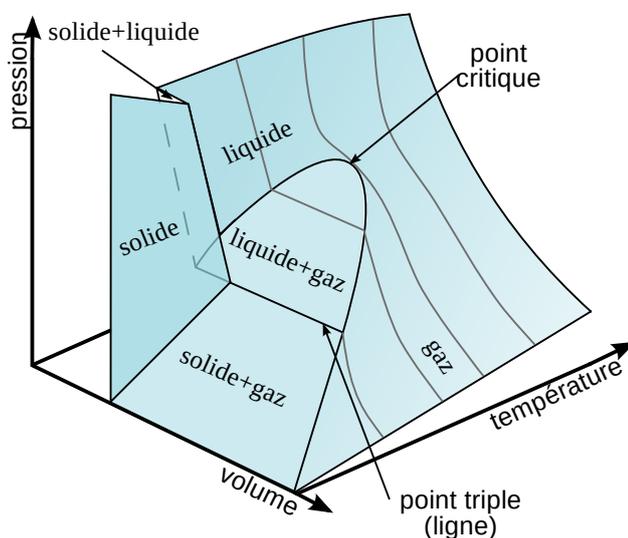
Le transizioni di fase, o passaggi di stato, sono trasformazioni in cui la materia passa da uno **stato di aggregazione** all'altro. Gli stati in cui si può trovare la materia sono, generalmente, tre:



- solido;
- liquido;
- gassoso.

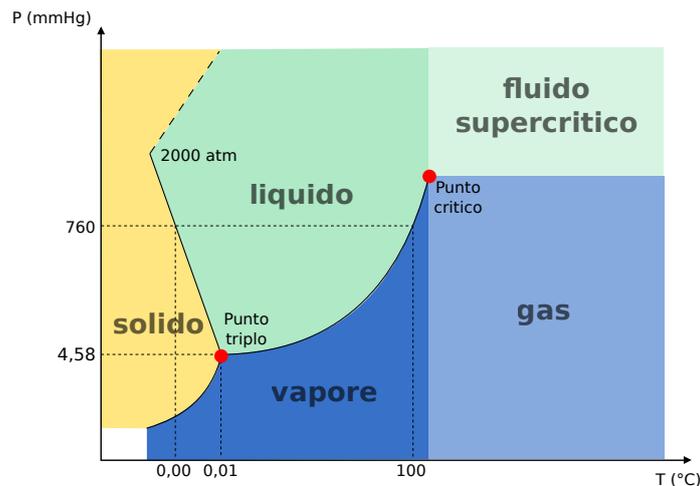
Da distinguere il caso del *vapore*, che è diverso dallo stato gassoso di un sistema.

Le transizioni di fase sono caratterizzate dal fatto che **la temperatura non varia durante la trasformazione**: il calore che viene fornito al sistema, infatti, non va ad alzare la temperatura del sistema bensì viene tutto utilizzato per convertire il sistema da uno stato all'altro. Le transizioni di fase possono essere graficate in un **diagramma di fase**, che rappresenta il variare dei tre parametri termodinamici e in che stato si presenta il sistema. Qui sotto c'è il diagramma di fase tridimensionale dell'acqua.



In questo diagramma vediamo la presenza di un **punto critico** e di un **punto triplo**, quest'ultimo rappresentato come una linea nel piano (p, V) . Un piano ottimo per riuscire a distinguere i due punti è il piano (p, T) , come vediamo qui sotto.





Vediamo anche la differenza tra vapore e gas; la linea che intercorre tra la fase liquida e la fase di vapore è la curva di transizione (in questo caso dal liquido al gas), la cui espressione la ricaveremo più avanti, nota come equazione di Clausius-Clapeyron. La curva di transizione tra lo stato solido e gassoso, invece, risulta avere pendenza negativa: è una caratteristica dell'acqua, questa: infatti, nella stragrande maggioranza delle sostanze la curva ha pendenza positiva. Qualsiasi trasformazione che, nel piano (p, T) , tagli le curve di transizione è una transizione di fase, dove il sistema viene portato da uno stato all'altro.

Il **punto triplo** è quel particolare stato termodinamico al confine tra i tre stati della materia dove la sostanza è in condizione di miscela dei tre stati: variando leggermente i parametri termodinamici, infatti, la sostanza può diventare solida, liquida o gassosa. Il **punto critico**, invece, rappresenta i valori *critici* delle variabili termodinamiche al di là dei quali *non vi è più transizione di fase*: esiste solo lo stato gassoso oltre il punto critico.

Ponendo attenzione al piano (p, V) , invece, osserviamo una caratteristica *campana* che separa gli stati liquido e gassoso; le curve che passano nella campana mantengono la loro temperatura costante (perché sappiamo che le transizioni avvengono a temperature fisse), ma anche la loro pressione resta costante: sono quindi delle curve *isoterme* di sistemi reali, in cui il sistema cambia stato di aggregazione variando solo il volume, mentre temperatura e pressione restano costanti lungo tutta la trasformazione. Oltre il punto critico (ben oltre, in realtà) le curve isoterme prendono la forma che conosciamo di iperboli equilatera: è il caso limite dove un gas reale può essere considerato senza problemi un gas perfetto.

10.5 Termometro a gas

Oltre ai comuni termometri a mercurio, è possibile anche costruire dei termometri a gas. Un modo perverso di poter determinare la temperatura di un gas è quello di osservarne l'espansione; tuttavia, una maniera più comoda (perché meno ingombrante, se consideriamo che i gas possono occupare anche diversi litri) è quella di determinare la temperatura tramite la pressione.



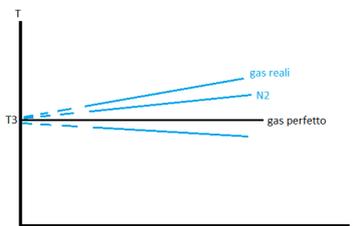
Possiamo prendere un gas molto rarefatto, in condizioni di gas ideale, rinchiuso in un contenitore rigido. Tramite un manometro, possiamo determinare la pressione del gas, che varierà a seconda della temperatura esterna con cui il gas è in contatto. La prima procedura è, ovviamente, la taratura: ipotizzando che il gas abbiamo un comportamento simile a quello di un gas perfetto, possiamo sfruttare la legge di stato:

$$T = \left[\frac{V_0}{nR} \right] p$$

Per poter procedere nella taratura, quindi, sfruttiamo i punti fissi, ovvero le transizioni di fase. Un altro punto fisso noto, e utile, è il **punto triplo dell'acqua**, che si ha a $T_3 = 273.16 \text{ K}$, a cui corrisponde una specifica pressione *del gas* p_3 alla temperatura del punto triplo dell'acqua. Rappresentando il comportamento del termometro in un piano (p, T) , questo sarà lineare, e avremo la relazione tra temperatura e pressione:

$$T = \frac{T_3}{p_3} p$$

Per i gas non perfetti, il comportamento è diverso da quanto aspettato nei gas perfetti; infatti, la temperatura del punto triplo non viene misurata allo stesso modo per tutte le pressioni, ma varia, come vediamo nel seguente grafico (T, p) .



Per dare un senso a questo comportamento, si procede in quello che è chiamato lo **studio del viriale**, ovvero studiamo lo sviluppo di Taylor dell'equazione di stato dei gas perfetti. Abbiamo che:

$$p = \frac{n}{V} RT \quad \frac{n}{V} = \rho \text{ densità molare}$$

Allora sviluppando in Taylor:

$$p \approx RT(\rho + B_2(T)\rho^2) + \dots$$

$$\frac{pV}{nRT} \approx (1 + B_2(T)\rho + \dots)$$



Ricordando che, per il nostro termometro, vale la relazione $T = \frac{T_3}{p_3} p$, andandola a sostituire:

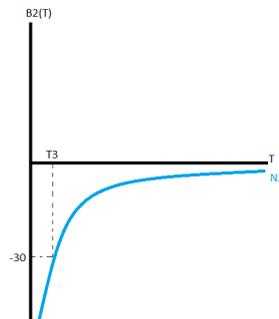
$$T_{app}^* = \frac{T_3}{p_3} p = T_3 \cdot \frac{\frac{nRT}{V} (1 + B_2(T)\rho)}{\frac{nRT_3}{V} (1 + B_2(T_3)\rho)} = \frac{T(1 + B_2(T)\rho)}{(1 + B_2(T_3)\rho)}$$

La temperatura T_{app}^* è la temperatura che il termometro misura in realtà, diversa dalla temperatura T_3 che dovrebbe in realtà misurare. Calcoliamo allora la variazione di temperatura misurata relativa:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{T_{app} - T}{T} = \frac{T \frac{(1+B_2(T)\rho)}{(1+B_2(T_3)\rho)} - T}{T} = \frac{(1 + B_2(T)\rho)}{(1 + B_2(T_3)\rho)} - 1 = \frac{1 + B_2(T)\rho - 1 - B_2(T_3)\rho}{1 + B_2(T_3)\rho}$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{(B_2(T) - B_2(T_3))\rho}{1 + B_2(T_3)\rho}$$

Il coefficiente $B_2(T)$ si chiama **viriale della sostanza**, ed è noto e tabulato per ogni gas reale. Se la temperatura di riferimento è molto lontana dalla temperatura del punto triplo T_3 , possiamo ignorare il viriale $B_2(T)$. Il numeratore determinerà allora la pendenza della retta del gas nel precedente grafico; nel caso dell'azoto molecolare N_2 , infatti, vale $B_2(T_3) = -30 \frac{\text{cm}^3}{\text{mol}}$; ignorando il coefficiente $B_2(T)$, al numeratore avremo un $-(-30\rho) = +30\rho$, ovvero una retta a pendenza positiva. Qui sotto un grafico qualitativo del valore di $B_2(T)$ per l'azoto.



10.6 Legge di Van der Waals

Finora abbiamo trattato poco i gas reali, osservando che, nella loro trattazione, vanno tenuti in conto diversi fattori, decidendo quindi di approssimare a gas perfetto i vari sistemi. Tuttavia, abbiamo anche incontrato due diversi casi in cui la legge dei gas perfetti fallisce: la seconda esperienza di Joule e il termometro a gas. Vediamo allora come si può modificare la legge dei gas perfetti per adattarla alla realtà.

Il primo fattore di cui bisogna tener conto parlando di gas reali è che le particelle che li compongono *occupano un volume proprio*: nei gas perfetti, infatti, si approssima a zero il volume occupato dalle particelle del gas. Posto allora n numero

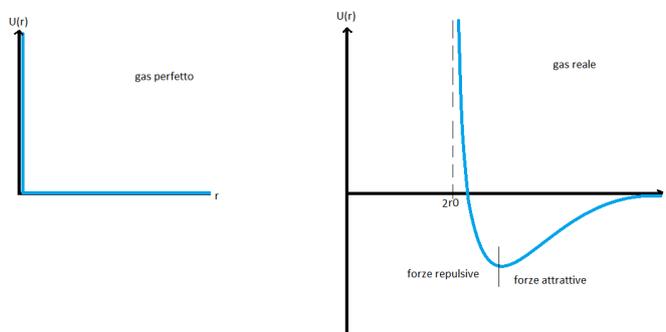


di moli e b il volume occupato da una mole, la prima modifica che possiamo fare alla legge dei gas è:

$$pV = nRT \quad \rightarrow \quad p(V - nb) = nRT$$

Sottraendo al volume totale nb , leviamo il volume occupato dalle particelle, portando il sistema al caso di un gas ideale.

Posto r_0 il raggio medio di una particella, vale che $\frac{b}{N_A} = V_0 = r_0^3$, in buona approssimazione. Il potenziale di interazione tra due particelle, accettando il modello planetario, è simile al potenziale efficace dei pianeti; inoltre, il potenziale dei gas reali varia molto da quello dei gas perfetti, come vediamo nella seguente immagine.



A sinistra, il potenziale di interazione di un gas perfetto, che cresce all'infinito quando la distanza tra le particelle tende a 0, restando poi costante (per far risultare meglio la cosa, è stato posto nullo) per tutte le altre distanze. A destra, il potenziale di interazione di gas reali, simile al modello planetario.

La seconda approssimazione che dobbiamo eliminare è la non interazione tra le particelle. Un gas reale, infatti, ha la caratteristica di essere *totalmente non interagente*, ovvero le particelle che lo compongono non si vedono neanche alla lontana. In un gas reale, ovviamente, come vediamo anche dal grafico del potenziale, non è così. Tuttavia, se le particelle non si trovano ai bordi del contenitore, con o senza interazione la loro **posizione media** non varia; sui bordi del contenitore tutto cambia.

Le particelle ai bordi sono attratte da quelle a loro vicine, causando una *diminuzione della pressione*: essendo attratte dalle particelle vicine, queste “sbattono” meno violentemente sulle pareti, ovvero esercitano meno pressione. La pressione quindi diminuisce, possiamo scrivere:

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - \text{QUALCOSA}$$

Non resta che, quindi, determinare quel “**QUALCOSA**”. Questo dipende, in primis, *dalla densità* del gas: raddoppiando la densità, raddoppiano le particelle nel contenitore, quindi raddoppia la forza attrattiva che risente una particella sul bordo. Tuttavia, anche le particelle che ne risentono raddoppiano, quindi la



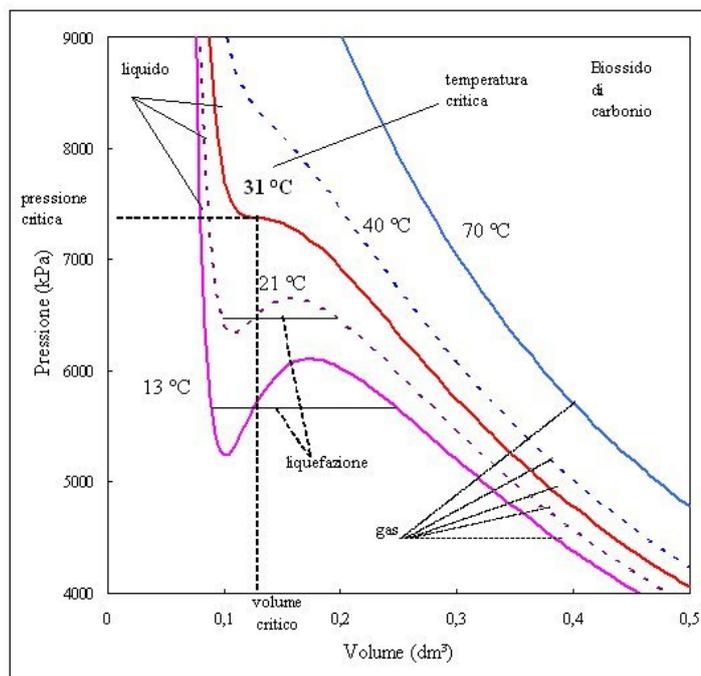
dipendenza dalla densità è **quadratica**, dipende cioè da un fatto $\left(\frac{n}{V}\right)^2$. Allora, possiamo scrivere quella che è nota come **equazione di Van der Waals** per i gas reali:

$$\left(p + a \left(\frac{n}{V}\right)^2\right) (V - nb) = nRT$$

Questa legge è legata direttamente al potenziale di Van der Waals, e descrive il comportamento di gas reali *sotto la campana del punto critico*. Come facciamo a vedere se approssima o meno il comportamento? Esplicitiamo un po' meglio la legge di Van der Waals, per vedere cosa ne ciccia fuori:

$$\begin{aligned} \frac{pV^2 + an^2}{V^2}(V - nb) &= nRT \\ (pV^2 + an^2)(V - nb) &= nRTV^2 \\ pV^3 - n(pb + RT)V^2 + an^2V - an^3b &= 0 \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto una *cubica in V*, ovvero ci sono ben tre valori che incontrano la retta di fase, come possiamo vedere nell'immagine qui sotto (il gas considerato è l'anidride carbonica CO_2).



La linea di liquefazione dell'anidride carbonica a diverse temperature; si nota subito l'andamento cubico.

La soluzione al problema è usare un punto fisso noto (ad esempio il punto critico) e ricavare i parametri a e b in funzione delle variabili termodinamiche al punto critico p_c, V_c, T_c



10.6.1 Viriale di Van der Waals

Come fatto per i gas perfetti, si può studiare lo sviluppo in serie di Taylor del gas di Van der Waals per poterne calcolare i coefficiente del viriale. Iniziamo col riscrivere in una forma alternativa la legge di Van der Waals:

$$\frac{1}{1 - \frac{bn}{V}} - \frac{an}{RTV} = \left(p + a \frac{n^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

Con i coefficienti che valgono $a = \frac{27R^2T^2}{64p}$ e $b = \frac{RT}{8p}$. A questo punto, sviluppiamo in Taylor, ricordando che vale:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

L'espressione generale dello sviluppo di Taylor nel punto $x = 0$ è $f(x) \approx f(0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0} \cdot x + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=0} \cdot x^2 + 0(x^3)$. Nel caso di $\frac{1}{1-x}$ abbiamo che $f(0) = 1$, $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ e $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$. Andando a sostituire, ricordando che la nostra funzione è $\frac{1}{1 - \frac{nb}{V}}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{nb}{V}} &= 1 + \frac{bn}{V} + \frac{b^2n^2}{V^2} + \dots \\ \frac{1}{1 - \frac{nb}{V}} - \frac{an}{RTV} &= 1 + \left(b - \frac{a}{RT} \right) \frac{n}{V} + b^2 \frac{n^2}{V^2} + \dots \end{aligned}$$

Da cui otteniamo che $B_2(T) = \left(b - \frac{a}{RT} \right)$ e $B_3(T) = b^2$. Andando a sostituire i valori dei coefficienti riportati all'inizio, otteniamo:

$$B_2(T) = \left(\frac{RT}{8p} - \frac{27R^2T^2}{68pRT} \right) \quad B_3(T) = \left(\frac{RT}{8p} \right)^2$$

10.7 Studio microscopico dell'energia interna

Abbiamo già calcolato l'espressione dell'energia interna come sola funzione della temperatura, attraverso la formula $dU = nc_v dT$, a partire dalla seconda esperienza di Joule. Tuttavia, è possibile darle un significato microscopico e un'espressione che descriva questo studio microscopico.

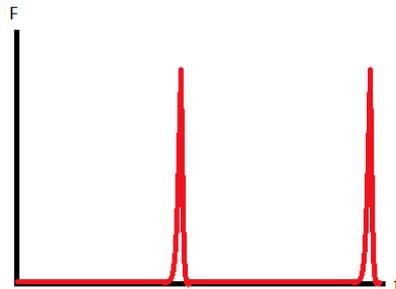
In quanto energia interna, è logico che essa sia caratteristica delle particelle che compongono il gas, e che quindi abbia senso una trattazione microscopica. Nel nostro caso prenderemo a modello il gas perfetto, le cui particelle sono a-volumiche e non interagenti tra loro. Consideriamo un cubetto di gas perfetto, possiamo esprimere la pressione che questo esercita sulle pareti del cubo come:

$$p = \frac{|\Delta F|}{|\Delta S|}$$

Ha senso scrivere ΔF in quanto ci aspettiamo che la pressione sia *costante* lungo tutta la superficie. Consideriamo ora il caso di una sola particella libera che sbatte



sulla superficie: un grafico (F, t) della forza esercitata dalla particella sulla parete avrà un andamento simile a quello qui sotto.



L'impulso, dalla meccanica, è definito come:

$$\Delta q = \text{teorema dell'impulso} \leftarrow I := \int_{\Delta t} F dt \rightarrow \text{teorema della media integrale} = \bar{F} \Delta t$$

Guardando la prima e l'ultima uguaglianza, otteniamo che $\Delta q = \bar{F} \Delta t$, dove q indica la quantità di moto. Ora, la variazione di quantità di moto della particella, considerato che questa sbatte alla parete per poi tornare indietro, è pari a $\Delta q = 2mv_x$, dove non consideriamo le componenti y, z perché non sono di interesse specifico. Preso che il cubo ha il lato lungo l , la particella percorre due volte la distanza l (lungo la coordinata x) prima di tornare a sbattere alla parete, con la velocità v_x ; quindi, l'intervallo di tempo che intercorre tra due urti successivi sulla stessa parete è pari a $\Delta t = \frac{L}{v_x}$. Andando a sostituire tutto ciò nell'espressione della pressione:

$$p = \frac{|\Delta F|}{|\Delta S|} = \frac{2mv_x v_x}{2\Delta S L}$$

Sommando su tutte le particelle che formano il gas otteniamo che la pressione totale è pari a:

$$p = \sum_i \frac{m}{V} (v_{xi})^2$$

Moltiplicando e dividendo per il numero di particelle N :

$$p = \frac{mN}{V} \sum_i \frac{(v_{xi})^2}{N} = \frac{mN}{V} \langle v_x^2 \rangle$$



Poiché il sistema è isotropo, vale $\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$, quindi abbiamo che $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$; moltiplicando e dividendo per due l'espressione appena sopra:

$$p = \frac{2N}{V} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle \right) = \frac{2}{3} \frac{N}{V} u$$

Dove $u = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$ è l'**energia cinetica media per particella**. Eguagliando questa espressione della pressione con la stessa espressione ricavata dalla legge dei gas perfetti:

$$\begin{aligned} \frac{nRT}{V} &= \frac{2}{3} \frac{N}{V} u \\ \frac{2}{3} Nu &= nRT \end{aligned}$$

La costante dei gas R è anche definita come $nR = NK_B$, dove N è il numero di particelle, n il numero di moli e K_B è la costante di Boltzmann. Poiché il gas perfetto non presenta interazione tra particelle, ne consegue che l'energia potenziale delle particelle è nulla e quindi l'energia interna totale delle particelle del gas sia tutta cinetica. Possiamo allora concludere che l'energia interna ha la seguente espressione:

$$U = \frac{3}{2} NK_B T$$

Questo nel caso monoatomico (abbiamo considerato una sola particella libera), per il quale vale $c_V = \frac{3}{2} R$. In generale, in **meccanica statistica** esiste quello che è noto come **teorema del viriale** che afferma che *l'energia interna di un sistema dotato di hamiltoniana è pari a $\frac{1}{2} K_B T$ per ogni termine quadratico presente nell'hamiltoniana*. Nel caso biatomico, dove, oltre ai tre gradi di libertà dovuti alla posizione della particella nello spazio, si aggiungono due termini rotatori $I\omega^2$ all'hamiltoniana, che indicano la rotazione della coppia di particelle; per questo, l'energia interna sarà pari a:

$$U = \frac{5}{2} NK_B T$$

E $c_V = \frac{5}{2} R$; nel caso, invece, di un sistema biatomico oscillante, come nel caso di un gas reale (dovuto al potenziale di Van der Waals), all'hamiltoniana si aggiungono un termine cinetico e un termine potenziale dovuti alla vibrazione, che può essere studiato come due corpi in mutua interazione (in cui ha la massa totale del sistema e l'altro la massa ridotta). Avremo quindi:

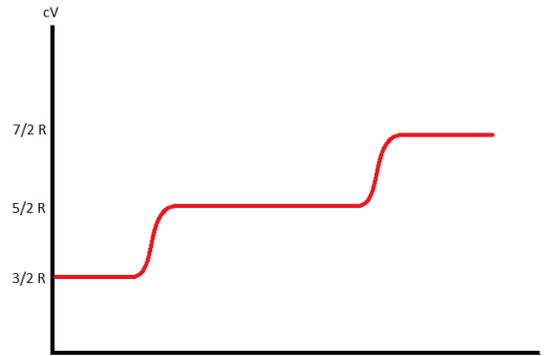
$$U = \frac{7}{2} NK_B T$$

Ricapitolando, abbiamo la seguente tabella dei valori:

Se andassimo quindi a graficare il valore di c_V in funzione della temperatura T , per un gas biatomico vibrante, dovremmo avere un andamento **costante**. In realtà, non è così. Il grafico ottenuto è:



Caso fisico (gas)	Energia interna	c_V	c_p
Monoatomico	$\frac{3}{2} N K_B T$	$\frac{3}{2} R$	$\frac{5}{2} R$
Biatomico	$\frac{5}{2} N K_B T$	$\frac{5}{2} R$	$\frac{7}{2} R$
Biatomico vibrante	$\frac{7}{2} N K_B T$	$\frac{7}{2} R$	$\frac{9}{2} R$



Ciò è dovuto alla natura quantistica del sistema; vale infatti che l'energia non è quantità continua, bensì multipla della frequenza di oscillazione. Abbassando la temperatura, l'energia si abbassa, il sistema non vibra più e si passa da $\frac{7}{2} R$ a $\frac{5}{2} R$; continuando a scendere di temperatura, anche le rotazioni terminano (queste possono essere considerate delle oscillazioni a loro volta) e il sistema diventa rigido, restando con soli tre gradi di libertà dati dalla posizione, che non collasserà mai, passando da $\frac{5}{2} R$ a $\frac{3}{2} R$ e restando costante con quel valore fino allo zero.

10.8 Distribuzione di Maxwell

La **distribuzione di Maxwell**, nota anche come *distribuzione delle velocità*, è una funzione che descrive la probabilità, in un sistema composto da particelle, che una particella abbia una velocità compresa tra v e $v + dv$, che corrisponde anche alla probabilità della particella di avere energia compresa tra E e $E + dE$.

Procediamo per gradi. Ipotizziamo di avere a che fare con un gas monoatomico perfetto, e consideriamo un infinitesimo di massa $dm = \rho(\vec{r}) dx dy dz$, dove $\rho(\vec{r})$ è la densità in funzione della posizione; in tal caso abbiamo a che fare con un **sistema non omogeneo**. Inoltre, sapendo che, definita con m la massa della singola particella, vale la relazione per il numero di particelle N :

$$dN = \frac{\rho(\vec{r})}{m} dx dy dz = n(\vec{r}) dx dy dz$$

Dove $n(\vec{r})$ è la densità di particelle in funzione della posizione, otteniamo che la **probabilità di avere una particella in un infinitesimo di volume** è pari a:



$$dp = \frac{n(\vec{r})}{N} dx dy dz$$

Ovviamente, ci aspettiamo che su tutto il volume valga $\int_V \frac{n(\vec{r})}{N} dx dy dz = 1$.

Consideriamo adesso la probabilità che una determinata particella abbia una certa velocità v ; possiamo fare un ragionamento analogo a quello fatto per la posizione della particella:

$$dp(\vec{v}) = \rho(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$$

Poiché il gas è perfetto e il nostro sistema è perfettamente isotropo, possiamo passare alle coordinate sferiche $\rho(\theta, \varphi, |v|)$:

$$dp(\vec{v}) = \rho(\theta, \varphi, |v|) v^2 \sin \theta d\theta d\varphi dv$$

Poiché in realtà la densità ρ dipende solo dalla velocità v e non dalle coordinate di latitudine e longitudine, si può integrare sulle variabili θ, φ ottenendo:

$$\rho(v) v^2 dv \cdot 4\pi$$

Inoltre, avendo preso come modello un gas perfetto, non interagente, tutta l'energia delle particelle è dovuta al termine cinetico, quindi la loro energia totale è $E = \frac{1}{2} m v^2$, possiamo esprimere questa probabilità come probabilità di energia:

$$dp(E) = \rho(E) 4\pi v^2 dv$$

Dal punto di vista microscopico, ci aspettiamo che gli urti tra le particelle siano totalmente elastici; la probabilità di avere un urto tra due particelle a diverse energie sarà allora pari a $p(E_1, E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2)$, posto ovviamente che E_1 e E_2 siano due eventi indipendenti tra loro. Allora, se da un urto tra due particelle a diverse energie con rispettive velocità v_1 e v_2 si ottengono le velocità v'_1 e v'_2 , allora la probabilità che questo accada è la stessa che dalle velocità v'_1 e v'_2 si ottengano v_1 e v_2 . Per chiarire, valgono le espressioni:

$$p(E_1, E_2) = p(E'_1, E'_2) \quad p(E_1) \cdot p(E_2) = p(E'_1) \cdot p(E'_2)$$

Poiché abbiamo detto che gli urti sono tutti elastici, vale che $E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2 = (E_1 + x)(E_2 - x)$, da cui otteniamo:

$$p(E_1) \cdot p(E_2) = p(E_1 + x) \cdot p(E_2 - x)$$

L'unica funzione sensata che rispetti questa condizione è del tipo $p(E) = Ae^{-\alpha E}$. Inoltre, deve ovviamente valere che $\int p(E) dE = 1$ e quindi $\int p(E) E dE = E_{\text{tot}}$. Quindi, ritornando alla nostra probabilità di velocità, essendo $E = \frac{m}{2} v^2$, possiamo sostituire:

$$p(E) = p(v) = Ae^{-\alpha m \frac{v^2}{2}}$$



Da queste otteniamo le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}\int_V A e^{-\alpha m \frac{v^2}{2}} 4\pi dv &= 1 \\ \int 4\pi N p(v) dv &= N \\ \int 4\pi N p(v) \frac{1}{2} m v^2 dv &= E_{\text{tot}} = \frac{3}{2} N K_B T\end{aligned}$$

Da questa otteniamo la funzione distribuzione di velocità di Maxwell:

$$dp(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi K_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2K_B T}} v^2 dv$$

Quando le velocità v sono grandi, domina il termine esponenziale (che tende ad abbassare la curva), mentre per velocità piccole domina il termine quadratico, che alza la curva.



Capitolo 11

Parte Nona - Cicli termodinamici e Secondo principio

11.1 Cicli termodinamici

Un ciclo termodinamico è definito come **una serie di trasformazioni termodinamiche che riportano il sistema allo stato iniziale**. Ci sono diversi tipi di cicli, ne studieremo due tipi caratteristici.

11.1.1 Ciclo di politropiche

Consideriamo un ciclo composto da quattro trasformazioni *a due a due accoppiate*, che siano politropiche, ovvero del tipo $pV^\alpha = \text{cost}$. Consideriamo le quattro trasformazioni singolarmente; distingueremo i due tipi di politropiche con diversi esponenti a e b . Le leggi che regolano le quattro trasformazioni, che passano per i quattro stati termodinamici A, B, C, D sono dunque:

$$\begin{aligned} p_A V_A^a &= p_B V_B^a \\ p_B V_B^b &= p_C V_C^b \\ p_C V_C^a &= p_D V_D^a \\ p_D V_D^b &= p_A V_A^b \end{aligned}$$

Moltiplichiamo tutte queste espressioni, ottenendo $V_A^a V_B^b V_C^a V_D^b = V_A^b V_B^a V_C^b V_D^a$; così fa un po' schifo, rimettendo le cose in ordine:

$$V_A^{(a-b)} V_C^{(a-b)} = V_B^{(a-b)} V_D^{(a-b)} \Rightarrow V_A V_C = V_B V_D$$

Ovvero il prodotto dei volumi opposti nel ciclo è uguale a due a due, così come resta uguale il **fattore di compressione** del ciclo, ovvero $\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_D}{V_C}$. Questa è una caratteristica di tutte le politropiche e dei cicli formati da quattro politropiche accoppiate.



Prima di procedere, vediamo l'espressione del calore specifico di una politropica generica. Data la legge $pV^k = \text{cost}$, quale sarà il rispettivo calore specifico c_k ? Ricordiamo che vale

$$c_k = \left(\frac{\delta Q}{\partial T} \right)_k = \frac{dU}{dT} + \left(\frac{pdV}{dT} \right)_k$$

Valutiamo l'espressione di pdV per la politropica:

$$kpV^{k-1}dV + V^k dp = 0 \quad kpdV + Vdp = 0$$

Ora sfruttiamo questa espressione sostituendola nella legge del gas perfetto, opportunamente differenziata:

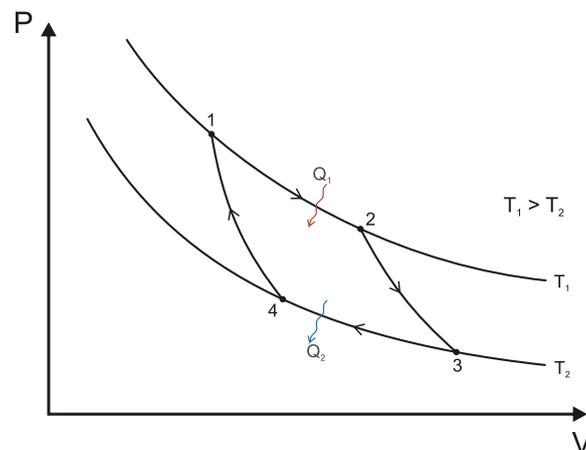
$$\begin{aligned} pV &= nRT \\ pdV + Vdp &= nRdT \\ pdV - kpdV &= nRdT \\ pdV &= \frac{nRdT}{1-k} \end{aligned}$$

Sostituendola nella formula per c_k otteniamo:

$$c_k = \frac{nc_V dT}{dT} + \frac{nRdT}{(1-k)dT} = nc_V + \frac{nR}{1-k}$$

11.1.2 Ciclo di Carnot

Il più famoso dei cicli termodinamici è il **ciclo di Carnot**, composto da due isoterme e due adiabatiche **tutte reversibili**. Nel piano (p, V) è rappresentato come nell'immagine seguente.



Le isoterme sono a temperatura T_1 e T_2 , con $T_1 > T_2$.



Calcoliamoci lavoro compiuto/subito e calore ceduto/assorbito per ogni trasformazione:

$$AB \quad L = nRT_1 \log \left(\frac{V_B}{V_A} \right) = Q > 0$$

$$BC \quad Q = 0 \quad L = -\Delta U = -nc_V(T_2 - T_1) > 0$$

$$CD \quad L = nRT_2 \log \left(\frac{V_D}{V_C} \right) = Q < 0$$

$$DA \quad Q = 0 \quad L = -\Delta U = -nc_V(T_1 - T_2) < 0$$

Il lavoro totale compiuto dal ciclo sarà pari a:

$$L_{\text{tot}} = nRT_1 \log \frac{V_B}{V_A} + nRT_2 \log \frac{V_D}{V_C}$$

Sfruttando la caratteristica dei cicli di politropiche discussa poco sopra, abbiamo che $\frac{V_D}{V_C} = \frac{V_B}{V_A}$, quindi otteniamo che il lavoro totale del ciclo è pari a

$$L_{\text{tot}} = nR(T_1 - T_2) \log \frac{V_B}{V_A}$$

Per compiere questo lavoro, ovviamente, è stato ceduto al sistema del calore, che assorbe calore solo nella trasformazione AB . Quando si ha a che fare con un ciclo termodinamico è inutile parlare di lavoro compiuto, in quanto si deve cedere del calore al sistema per compierlo; allora un termine di confronto tra cicli è il **rendimento**, un numero adimensionale definito come:

$$\eta = \frac{L_{\text{tot}}}{Q_{\text{ass}}}$$

Questo valore è compreso $0 < \eta < 1$. Il ciclo di Carnot, in particolare, lavora tra due sorgenti, per essere più precisi, **lavora con sole due sorgenti**, ed è reversibile; per queste caratteristiche, è unico nel suo genere e presenta un rendimento altissimo. Infatti, in base a quanto calcolato prima, possiamo esprimere il rendimento come:

$$\eta = \frac{nR(T_1 - T_2) \log \frac{V_B}{V_A}}{nRT_1 \log \frac{V_B}{V_A}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Come vedremo col secondo principio, questo valore è il **limite superiore per il rendimento di macchine termiche**.

Discutiamo brevemente la validità del rendimento. Questo è definito bene per valori del lavoro positivi $L > 0$, dall'espressione vista poco fa abbiamo che

$$\eta = \frac{L_{\text{tot}}}{Q_{\text{ass}}} = \frac{|Q_{\text{ass}}| - |Q_{\text{ced}}|}{|Q_{\text{ass}}|} = 1 - \frac{|Q_{\text{ced}}|}{|Q_{\text{ass}}|}$$

Ora, sul calore assorbito c'è libertà assoluta, ma sul calore ceduto no. Infatti, se il lavoro è negativo, il rendimento non è ben definito, o meglio, ha poco senso una macchina termica a rendimento negativo. Per questo abbiamo due casi limite:



$$\begin{aligned} Q_{\text{ced}} &= 0 & \eta &= 1 \\ Q_{\text{ced}} &= Q_{\text{ass}} & \eta &= 0 \end{aligned}$$

Quindi otteniamo che $0 \leq \eta \leq 1$; come vedremo col secondo principio, non potremo però avere un rendimento esattamente uguale a 1.

11.2 Macchine termiche e frigoriferi

Abbiamo visto come ha poco senso parlare di rendimento per macchine termiche con lavoro totale negativo; tuttavia, esistono numerosi cicli termodinamici il cui lavoro totale è negativo. Moralmente, basta prendere qualsiasi ciclo reversibile con lavoro positivo e invertirlo per ottenere un altro ciclo reversibile con lavoro in modulo uguale a quello di prima, ma negativo. In questi casi, non parleremo più di macchine termiche, perché il ciclo **non compie lavoro** (bensì lo subisce), ma parleremo più propriamente di **macchine frigorifere** o **pompe di calore**. La differenza tra le due, dal lato teorico, è ininfluente, ma dal lato costruttivo no: infatti un frigorifero serve a raffreddare un ambiente, mentre una pompa di calore a riscaldarlo. Tuttavia, il loro funzionamento è identico.

Partiamo subito col dire che è errato affermare che **un frigorifero è una macchina termica a lavoro negativo**. Questo è vero, ma è una conseguenza: la caratteristica delle macchine frigorifere (o pompe di calore) è, infatti, quella di **assorbire calore da una sorgente fredda per poi cederlo ad una sorgente calda**. Nel caso dei frigoriferi, si assorbe calore dall'interno della macchina cedendolo all'esterno, mentre le pompe di calore (come i condizionatori) assorbono calore dall'esterno (freddo) cedendolo all'interno (caldo). Per questi due tipi di macchine, il rendimento η risulterebbe sempre negativo per via del lavoro subito. Per questo, si definisce il **coefficiente di prestazione**, meglio conosciuto come COP :

$$\begin{aligned} \text{COP}_{\text{frigo}} &= \frac{|Q_{\text{ass}}|}{|L_{\text{tot}}|} \\ \text{COP}_{\text{pompa}} &= \frac{|Q_{\text{ced}}|}{|L_{\text{tot}}|} \end{aligned}$$

Poiché sappiamo che $|L| = |Q_{\text{ass}}| - |Q_{\text{ced}}|$ da cui $|Q_{\text{ced}}| = |Q_{\text{ass}}| + |L|$, abbiamo anche la relazione:

$$\text{COP}_{\text{pompa}} = \frac{|Q_{\text{ced}}|}{|L_{\text{tot}}|} = \frac{|Q_{\text{ass}}|}{|L_{\text{tot}}|} + 1 = \text{COP}_{\text{frigo}} + 1$$

11.2.1 Frigorifero di Carnot

Consideriamo ora il frigorifero di Carnot, ovvero il ciclo di Carnot invertito. Per questa macchina, il $\text{COP}_{\text{frigo}}$ ha un'espressione tipica:

$$\text{COP}_{\text{frigo}} = \frac{|Q_{\text{ass}}|}{|L_{\text{tot}}|} = \frac{|Q_{\text{ass}}|}{|Q_{\text{ass}}| - |Q_{\text{ced}}|} = \frac{1}{\frac{|Q_{\text{ass}}|}{|Q_{\text{ass}}|} - 1} = \frac{1}{\frac{|Q_f|}{|Q_c|} - 1} = \frac{1}{\frac{T_f}{T_c} - 1} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$



11.3 Secondo principio della termodinamica

Il **secondo principio della termodinamica** è, cronologicamente, precedente al primo (infatti fu enunciato qualche decennio prima), e pone dei limiti alla costruzione di macchine termiche e frigoriferi, in particolare al rendimento o al coefficiente di prestazione. Esistono diversi enunciati, tutti facenti parte della letteratura scientifica, e tutti dimostrabilmente equivalenti, e sono tutti frutto **dell'osservazione empirica e dei tentativi di costruire macchine termiche sempre più efficienti**. I due enunciati classici più noti sono quelli di **Clausius** e **lord Kelvin**.

Assioma (Enunciato di lord Kelvin)

“Non è possibile costruire una macchina termica il cui **unico risultato** sia quello di **convertire interamente il calore ricevuto in lavoro**.”

Assioma (Enunciato di Clausius)

“Non è possibile costruire una macchina termica il cui **unico risultato** sia quello di **trasferire interamente calore da una sorgente fredda a una sorgente calda**.”

Facciamo delle osservazioni preliminari. Tutte le parole degli enunciati hanno importanza fondamentale; per esempio, nell'enunciato di Kelvin è fondamentale il passaggio ”**unico risultato**”: conosciamo una trasformazione che trasforma tutto il calore assorbito in lavoro, ed è la trasformazione isoterma, tuttavia questa ha come risultato quello di portare il sistema da uno stato A a uno stato B , e quindi non contraddice questo enunciato. Allo stesso modo, si possono costruire frigoriferi reversibili che trasferiscono calore da una sorgente fredda a una calda, ma deve essere fornito calore affinché ciò sia possibile, altrimenti la macchina non funzionerebbe (in natura il calore fluisce dai corpi più caldi a quelli più freddi).

Come detto, è dimostrabile l'equivalenza dei due postulati. Vediamo come, se neghiamo uno dei due, si nega di conseguenza l'altro.

Neghiamo l'enunciato di Kelvin, è quindi possibile una macchina che converta tutto il calore assorbito in lavoro, ovvero una macchina il cui rendimento è $\eta = 1$. Prendiamo allora una macchina che assorba calore da una sorgente fredda e lo converta interamente in lavoro; questo lavoro, poi, viene fornito ad un'altra macchina, che cede calore a una sorgente più calda. L'unione delle due macchine è una macchina termica il cui unico risultato è quello di trasferire calore da una sorgente fredda a una calda, ovvero abbiamo appena negato il postulato di Clausius.

Procediamo in senso opposto. Neghiamo Clausius, ovvero affermiamo che sia possibile trasferire calore da una sorgente fredda a una calda senza altri costi o risultati. Allora, prendiamo una macchina che compia questo ciclo, assorbendo una determinata quantità di calore da una sorgente fredda e cedendola a quella calda. Affiancata a questa macchina, c'è una macchina termica che assorbe calore dalla sorgente calda, ne cede una quantità alla sorgente fredda e compie lavoro. Se facciamo in modo che la quantità di calore ceduta dalla seconda macchina sia uguale a quella assorbita dalla prima, l'unione delle due macchine è una macchi-



na termica che assorbe e cede calore dalla stessa sorgente fredda (che quindi non entra più in gioco) e trasforma tutto il calore assorbito dalla sorgente calda in lavoro, negando Kelvin.

Infine, possiamo vedere come i due enunciati pongano limiti alle caratteristiche delle macchine termiche. Consideriamo il postulato di Kelvin: il suo enunciato limita il rendimento di una macchina. Infatti non sarà mai possibile convertire tutto il calore assorbito in lavoro, ovvero $\eta \neq 1$. Per questo motivo, il range del rendimento diventa $0 \leq \eta < 1$. Ovviamente è sempre possibile creare una macchina termica a rendimento nullo, ovvero che trasporti calore da una sorgente calda a una fredda, ma sarebbe la macchina termica più inutile del mondo.

Soffermandoci invece sull'enunciato di Clausius, poiché non è possibile che il lavoro si trasporti da una sorgente fredda a una calda interamente, non potremo mai costruire un frigorifero che necessita di lavoro per funzionare. In termini di COP, se non è possibile che il lavoro subito dalla macchina sia $|L| = 0$, allora non potremo mai avere un $\text{COP} = \infty$. Ovviamente è sempre possibile avere un COP nullo (o pari a 1 per la pompa di calore), ma sarebbe il frigorifero più inutile del mondo, perché subisce lavoro trasformandolo tutto in calore ceduto alla sorgente più calda, senza assorbitirne da quella fredda.

11.4 Teorema di Carnot

Il teorema di Carnot è molto semplice, e ne abbiamo già parlato discutendo il rispettivo ciclo.

Teorema (Teorema di Carnot)

Il ciclo di Carnot è la macchina **col più alto rendimento possibile** tra le macchine che lavorano tra due sorgenti.

Ovviamente, è più alto del rendimento sia di macchina reversibili che irreversibili, che lavorano tra due sorgenti. Ricordiamo anche che il ciclo di Carnot *non* lavora tra due sorgenti, ma solo con quelle due sorgenti.

Dimostrazione

Consideriamo una macchina di Carnot e una macchina generica, che assorbono lo stesso calore da una stessa sorgente calda. Neghiamo la tesi del teorema, ovvero che è possibile che la macchina generica abbia un rendimento più alto di quello di Carnot. Affianchiamo le due macchine e invertiamo la macchina di Carnot: questa cederà alla sorgente calda la stessa quantità di calore che assorbe la macchina generica. In totale, la macchina che si ottiene unendo la macchina generica con quella di Carnot non fa altro che assorbire calore da una sorgente fredda e trasformarlo tutto in lavoro, negando il secondo principio della termodinamica. Da qui la tesi.

11.4.1 Definizione di temperatura dal ciclo di Carnot

A partire dal rendimento di Carnot, è possibile definire la scala di temperatura Kelvin. Infatti, sappiamo che il rendimento di una generica macchina deve essere



minore di quello di Carnot, ovvero:

$$\eta = 1 + \frac{|Q_{\text{ced}}|}{|Q_{\text{ass}}|} < 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

Da questa otteniamo che $\frac{|Q_f|}{|Q_c|} < -\frac{T_f}{T_c}$, ovvero:

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} < 0$$

Da questa possiamo definire la temperatura di un corpo come:

$$T^* = \frac{Q^*}{Q_0} T_0$$

Dove, ovviamente, i calori e le temperature sono considerati in un ciclo di Carnot.

11.5 Integrale di Clausius e definizione di Entropia

Ricordiamo quanto detto nel precedente capitolo sul ciclo di Carnot; per un ciclo a due temperature, vale:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$$

Nel caso in cui il ciclo sia unione di due cicli di Carnot, l'espressione viene leggermente modificata (infatti una parte di isoterma viene percorsa sia in un verso che nell'altro, annullandosi) diventando:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q'_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} \leq 0$$

Dove con Q'_2 intendiamo il calore che entra effettivamente in gioco dalla sorgente 2, a cui è tolto il calore assorbito e ceduto dal ciclo. Questa formula generalizza il caso di un ciclo a due sorgenti. In generale potremo dunque dire che:

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

Per un numero finito di sorgenti di calore. Se abbiamo infinite sorgenti, ovvero si ha a che fare con un ciclo reale, si può dividere il ciclo in infiniti cicli di Carnot che lo compongono, e la formula diventa un integrale su tutto il ciclo, ovvero:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

Questo è anche chiamato **integrale di Clausius**. Vale inoltre che $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$ solo **per una macchina reversibile**. In questo caso, dalla analisi matematica sappiamo che *deve* esistere una funzione di stato, un potenziale, che descriva il fenomeno. La funzione esiste ed è nota come **entropia** e si indica con S :



$$\int_A^B \frac{\delta q}{T} = S(B) - S(A) = \Delta S$$

L'ipotesi che la trasformazione sia reversibile è **fondamentale**: se non lo fosse, non avrebbe senso l'integrale lungo tutta la trasformazione. Consideriamo infatti un ciclo composto da due trasformazioni: una trasformazione BA reversibile e una AB irreversibile. Dall'integrale di Clausius abbiamo che:

$$\begin{aligned} \oint \frac{\delta Q}{T} &\leq 0 \\ \int_{A \text{ irr}}^B \frac{\delta Q}{T} + \int_{B \text{ rev}}^A \frac{\delta Q}{T} &\leq 0 \\ \int_{A \text{ rev}}^B \frac{\delta Q}{T} &\geq \int_{A \text{ irr}}^B \frac{\delta Q}{T} \\ \Delta_{\text{rev}} S_{AB} &\geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \end{aligned}$$

Questo è sempre vero. Se consideriamo il caso di una trasformazione **adiabatica**, dove $\delta Q = 0$, l'integrale di Clausius sarà nullo; se la trasformazione è reversibile, la variazione di entropia è nulla, altrimenti sarà positiva. Poiché l'universo è **ciò di più adiabatico che esista**, ne concludiamo che **l'entropia dell'universo può solo aumentare o, al massimo, per trasformazioni reversibili, restare costante**.

11.5.1 Definizione di entropia per il gas perfetto

Definizione (Entropia)

Si definisce la funzione di stato termodinamico **entropia** come:

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

Questo è concorde con quanto detto finora. Vediamo adesso di darne un'espressione che metta in relazione le coordinate termodinamiche di un sistema. Per il gas perfetto, per esempio, c'è una formulazione esplicita dell'entropia. Infatti, considerata una trasformazione reversibile:

$$\frac{\delta Q}{T} = \frac{dU + \delta L}{T} = \frac{nc_V dT}{T} + \frac{pdV}{dT} = nc_V \frac{dT}{T} + nR \frac{nRT dV}{TV} = nc_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

Vale allora, per una trasformazione reversibile AB :

$$\Delta S_{AB} = S_B - S_A = \int_A^B nc_V \frac{dT}{T} + \int_A^B nR \frac{dV}{V} = nc_V \log \frac{T_B}{T_A} + nR \log V_B V_A$$



Che è sempre vera per trasformazioni reversibili. Ovviamente, le trasformazioni note hanno espressioni proprie. Infatti, con un po' di conti, valgono le seguenti relazioni, per trasformazioni **reversibili**.

$$\text{isoterma } \Delta S_{AB} = nR \log \frac{V_B}{V_A}$$

$$\text{isocora } \Delta S_{AB} = nc_V \log \frac{T_B}{T_A}$$

$$\text{isobara } \Delta S_{AB} = nc_p \log \frac{T_B}{T_A}$$

$$\text{adiabatica } \Delta S_{AB} = 0$$

Una piccola precisazione: nel caso di un'adiabatica irreversibile, l'entropia dell'ambiente continua ad essere nulla, mentre l'entropia del gas aumenterà, rendendo di fatto positiva la variazione di entropia dell'universo.

Oltre al piano (p, V) , si possono rappresentare le trasformazioni anche nel cosiddetto **diagramma entropico**, ovvero un piano (T, S) . In particolare, in questo piano, avremo che:

- le isoterme reversibili saranno dei tratti di retta orizzontale;
- le adiabatiche reversibili saranno dei tratti di retta verticale;
- le isobare reversibili saranno dei tratti di esponenziale a bassa pendenza;
- le isocore reversibili saranno dei tratti di esponenziale a pendenza leggermente più alta delle isobare.

Per quanto riguarda le adiabatiche e le isoterme, è immediato che abbiano quella rappresentazione. Per le isobare e le isocore, invece, si può dimostrare. Partiamo dall'isobara, vale:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dQ}{dT} \right|_p &= T \left. \frac{dS}{dT} \right|_p = c_p \\ \left. \frac{dS}{dT} \right|_p &= \frac{c_p}{T} \\ \frac{dT}{T} &= \frac{dS}{c_p} \\ \log \frac{T}{T_0} &= \frac{\Delta S}{c_p} \\ T &= T_0 \cdot e^{\frac{\Delta S}{c_p}} \end{aligned}$$

Per l'isocora si può fare un ragionamento analogo:

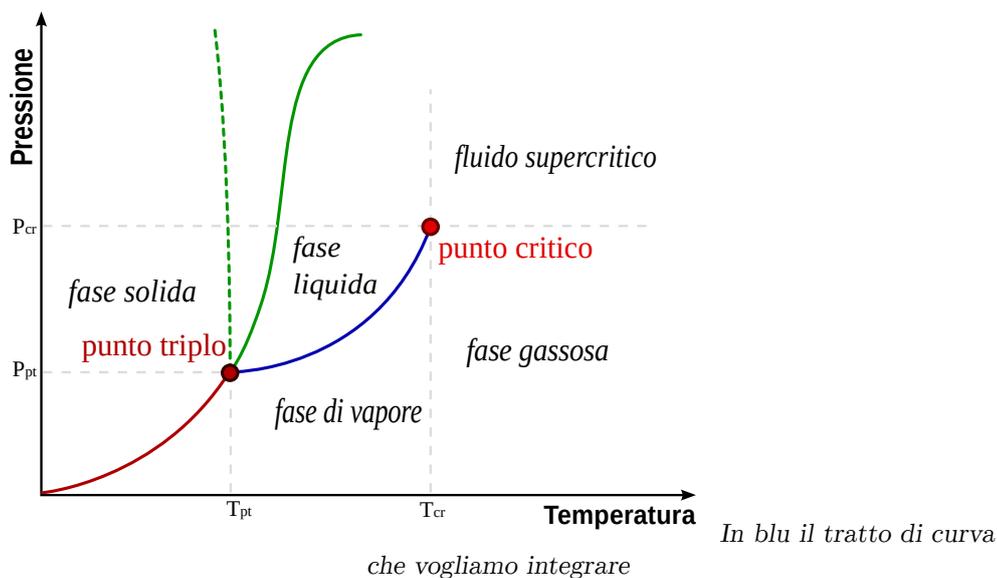


$$\begin{aligned} \left. \frac{dQ}{dT} \right|_V &= T \left. \frac{dS}{dT} \right|_V = c_V \\ \left. \frac{dS}{dT} \right|_V &= \frac{T}{c_V} \\ \frac{dT}{T} &= \frac{dS}{c_V} \\ \log \frac{T}{T_0} &= \frac{\Delta S}{c_V} \\ T &= T_0 \cdot e^{\frac{\Delta S}{c_V}} \end{aligned}$$

Poiché risulta essere $c_p > c_V$ e questi compaiono al denominatore dell'esponente, ne risulta che la pendenza dell'isobara è più bassa di quella dell'isocora.

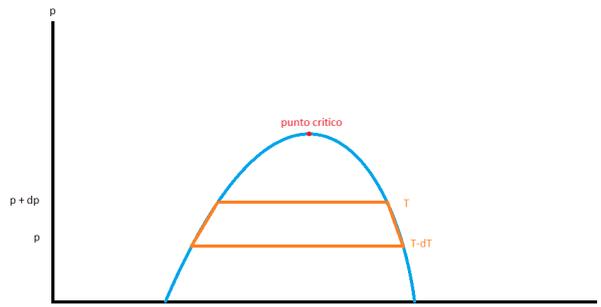
11.6 Equazione di Clausius-Clapeyron

Ricordate le transizioni di fase? Nel piano (p, T) era possibile rappresentarle, ottenendo un andamento simile (che varia da sostanza a sostanza) a quello nell'immagine seguente.



L'equazione di Clausius-Clapeyron descrive la variazione di pressione in funzione della temperatura durante una transizione di fase, ovvero è una funzione $p(T)$ il cui grafico è la curva di coesistenza che si può vedere nel piano. Per poterla ricavare, consideriamo il ciclo nel piano (p, V) evidenziato nell'immagine seguente.





considerato

In arancio il ciclo

Quando $dp \rightarrow 0$, il ciclo tende a un ciclo di Carnot (in approssimazione). Definito il calore durante la transizione come $Q = M\lambda$, possiamo sfruttare il rendimento del ciclo:

$$\begin{aligned} \frac{L}{Q_{\text{ass}}} &= \eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} \\ \frac{dp\Delta V}{M\lambda} &= 1 - \frac{T - dT}{T} \\ \frac{dp(V_g - V_l)}{M\lambda_{\text{evap}}} &= \frac{dT}{T} \end{aligned}$$

Dove V_g e V_l sono i **volumi saturi** allo stato gassoso e liquido, perché abbiamo considerato la transizione liquido-gas. Dall'ultima espressione ricaviamo direttamente l'**equazione di Clausius-Clapeyron**:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{M\lambda_{\text{evap}}}{T(V_g - V_l)}$$

Possiamo anche integrarla per ottenere una funzione esplicita di p , indicata con $\bar{M} = \frac{M}{n}$ la **massa molare** della sostanza. Se consideriamo il fatto che $V_g \gg V_l$, possiamo approssimare $(V_g - V_l) \approx V_g$ e sostituire al posto di V_g la sua espressione secondo la legge di stato dei gas, ottenendo:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{M\lambda_{\text{evap}}}{T \cdot V_g} = \frac{\bar{M}\lambda_{\text{evap}}p}{RT^2}$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} &= \int_{T_0}^T \frac{\bar{M}\lambda_{\text{evap}}}{R} \frac{dT}{T^2} \\ \log \frac{p}{p_0} &= -\frac{\bar{M}\lambda_{\text{evap}}}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \\ p &= p_0 \cdot e^{-\frac{\bar{M}\lambda_{\text{evap}}}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)} \end{aligned}$$



Questa formula vale per il passaggio liquido-gas con due approssimazioni: la sostanza è approssimata a un gas perfetto e abbiamo considerato $V_g \gg V_l$.

11.7 Macrostat, microstat, entropia in funzione dei microstat

Abbiamo visto la generica espressione dell'entropia per un gas perfetto:

$$\Delta S = n c_v \log \frac{T_2}{T_1} + n R \log \frac{V_2}{V_1}$$

Consideriamo adesso il caso particolare dell'espansione libera, la stessa trasformazione della seconda esperienza di Joule. Questa è un'adiabatica, perché non vi sono scambi di calore, isoterma, perché la temperatura resta costante, irreversibile. Poiché è isoterma, l'espressione dell'entropia del gas è:

$$\Delta S_{gas} = n R \log \frac{V_2}{V_1} > 0$$

Poiché, inoltre, è adiabatica, l'entropia dell'ambiente non varia, quindi questa variazione di entropia coincide con quella di tutto l'universo, che aumenta in quanto trasformazione irreversibile. L'unico risultato della trasformazione è stato un ampliamento di volume del gas. Possiamo quindi dire che esiste una relazione tra il "disordine" di un sistema e la corrispondente entropia? Vediamolo proprio considerando questa trasformazione.

Definizione (Macrostat)

Si definisce **macrostat** una qualunque descrizione macroscopica del sistema. Per esempio, per un sistema di N particelle, se queste si trovano in due compartimenti divisi il macrostat potrebbe essere *ci sono k particelle a sinistra e $N - k$ particelle a destra*.

Definizione (Microstat)

Si definisce **microstat** una qualunque descrizione microscopica del sistema. Nel caso precedente, ovvero di un sistema con N particelle, nella descrizione del microstat non si tiene conto di quante particelle in totale ci sono in un comparto o in un altro, ma si tiene conto della posizione di ogni singola particella. Le combinazioni possibili, ovvero i possibili microstat, saranno quindi:

$$w = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Per un sistema binario, la somma dei macrostat corrisponde col prodotto, ovvero $w(1+2) = w(1) \cdot w(2)$.

Il massimo dei microstat è quando $k = \frac{N}{2}$.

Vediamo ora come possiamo esprimere l'entropia in funzione dei microstat. Consideriamo sempre il gas perfetto come modello fisico: in questo caso l'entropia è



una funzione di stato estensiva (che dipende dal volume del gas) e vale, per un sistema binario $S(1 + 2) = S(1) + S(2)$. Da questa relazione ne ricaviamo che l'entropia di due macrostati:

$$S(w_1 \cdot w_2) = S(w_1) + S(w_2)$$

Questo costituisce un vincolo che la nostra funzione S dovrà quindi rispettare, un vincolo del tipo $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2) \forall x_1, x_2$. Considerato un $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, possiamo chiamare $x_2 = 1 + \varepsilon$, e la nostra condizione diventa:

$$f(x + \varepsilon x) = f(x_1) + f(1 + \varepsilon)$$

Data questa, sviluppiamo la nostra f in Taylor:

$$f(x) = \varepsilon x f'(x) = f(x) + f(1) + \varepsilon f'(1)$$

Poiché risulta $f(1)$ a piacere, possiamo porla nulla $f(1) = 0$. L'espressione diventa così:

$$\varepsilon x f'(x) = \varepsilon f'(1) \quad \text{con } f(1) = 0$$

Ne risulta che la funzione cercata è di carattere **logaritmico**, ovvero $S(w) = c \log(w)$. Cerchiamo ora la costante per il gas perfetto. Consideriamo sempre il caso dell'espansione libera, un caso particolare dove il volume raddoppia, ad esempio. Abbiamo che la variazione di entropia è pari a $\Delta S = nR \log 2$. Questa possiamo anche scriverla in funzione dei microstati:

$$\Delta S = c \log \left(\frac{w_f}{w_i} \right) = c \log \left(\frac{\frac{N!}{\left(\left(\frac{N}{2}\right)!\right)^2}}{1} \right)$$

Possiamo approssimare $\log N! \approx N \log(N) - N$, quindi riscrivendo l'espressione precedente:

$$c \left[N \log N - N - 2 \left(\frac{N}{2} \log \frac{N}{2} - \frac{N}{2} \right) \right] = \\ c(N \log N - N - N \log N + N \log 2 + N) = cN \log 2 = \Delta S$$

Uguagliando i risultati:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta S = nR \log 2 \\ \Delta S = nc \log 2 \end{array} \right\} nR = cN \Rightarrow c = K_B$$

Da cui otteniamo l'espressione dell'entropia in funzione dei microstati:

$$S = K_B \log(w)$$



11.8 Funzioni termodinamiche e relazioni di Maxwell

Nell'ultimo capitolo del corso parleremo di funzioni termodinamiche, ricavando poi le rispettive relazioni di Maxwell. Iniziamo la trattazione con le funzioni finora trovate, che sono U l'energia interna e S l'entropia. Abbiamo anche trovato che, per una trasformazione spontanea, come l'espansione libera, vale $\Delta U \geq 0$ $\Delta S \geq 0$.

Inoltre, possiamo benissimo esprimere l'energia interna come funzione del volume e dell'entropia, ovvero:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial S} dS + \frac{\partial U}{\partial V} dV$$

Dal primo principio sappiamo anche che $dU = \delta Q - \delta L = TdS - pdV$; uguagliando i due differenziali otteniamo che:

$$\begin{aligned} T &= \left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_V & \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} &= \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_S \\ -p &= \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_S & \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} &= -\left. \frac{\partial p}{\partial S} \right|_V \end{aligned}$$

Ne otteniamo quindi la **prima relazione di Maxwell**:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_S = -\left. \frac{\partial p}{\partial S} \right|_V$$

Definizione (Entalpia (H))

Si definisce la funzione di stato **entalpia** e si indica con H la funzione:

$$H = U + pV$$

Differenziamola come fatto per l'energia interna:

$$dH = dU + pdV + Vdp$$

Sostituendo il differenziale dell'energia in questa:

$$dH = TdS - pdV + pdV + Vdp = TdS + Vdp$$

Se quindi consideriamo una trasformazione a $p = \text{cost}$, otteniamo che $dH = TdS = \delta Q$, ovvero l'entalpia descrive appieno la trasformazione a pressione costante. È per questo che piace molto ai chimici, in quanto la gran parte delle reazioni chimiche si svolge a pressione stabile. Dal differenziale trovato, ne ricaviamo che l'entalpia può essere scritta come funzione dell'entropia e della pressione:

$$dH = TdS + Vdp \Leftrightarrow dH = \frac{\partial H}{\partial S} dS + \frac{\partial H}{\partial p} dp$$



Da queste ne ricaviamo che:

$$T = \left. \frac{\partial H}{\partial S} \right|_p \quad \frac{\partial^2 H}{\partial S \partial p} = \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_S$$

$$V = \left. \frac{\partial H}{\partial p} \right|_S \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial S} = \left. \frac{\partial V}{\partial S} \right|_p$$

Da cui otteniamo la **seconda relazione di Maxwell**:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_S = \left. \frac{\partial V}{\partial S} \right|_p$$

Definizione (Energia libera di Helmholtz (F))

Si definisce la funzione di stato termodinamico **energia libera di Helmholtz** e si indica con F la funzione:

$$F = U - TS$$

Procediamo come fatto finora, differenziando:

$$\begin{aligned} dF &= dU - TdS - SdT = \\ &= TdS - pdV - TdS - SdT = \\ &= -pdV - SdT \end{aligned}$$

Ne concludiamo che l'energia libera di Helmholtz può essere funzione del volume e della temperatura:

$$dF = \left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_T dV + \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_V dT \Leftrightarrow dF = -pdV - SdT$$

Da queste ne ricaviamo che:

$$-p = \left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_T \quad \frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} = - \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V$$

$$-S = \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_V \quad \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} = - \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T$$

Da cui otteniamo la **terza relazione di Maxwell**:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V = \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T$$

Vediamo adesso la variazione dell'energia libera in una trasformazione spontanea; abbiamo che $\Delta F = \Delta U - T\Delta S$ supposta $T = \text{cost}$; questo corrisponde a $\Delta F = Q - L - T\Delta S = Q - T\Delta S$, supposto sia anche $V = \text{cost}$. Da questa ne ricaviamo che:

$$T\Delta S = Q - \Delta F \geq \frac{Q}{T}$$



Ovvero, se il sistema è a temperatura e volume costanti (e non è isolato), la trasformazione spontanea **tende all'equilibrio che minimizza l'energia libera di Helmholtz**. Nel caso non sia il volume costante, avremo $\Delta F = Q - L - T\Delta S$, cioè:

$$T\Delta S = Q - L - \Delta F \geq \frac{Q}{T}T$$

Ovvero il lavoro che compie il sistema non è qualsiasi, ma deve essere tale che $L \leq -\Delta F$, resta vincolato da F .

Definizione (Energia libera di Gibbs (G))

Si definisce la funzione di stato termodinamico **energia libera di Gibbs** e si indica con G la funzione:

$$G = H - TS$$

Procediamo come ormai siamo abituati, differenziando:

$$\begin{aligned} G &= U + pdV - TS \\ dG &= dU + pdV + Vdp - TdS - SdT \\ dG &= TdS - pdV + pdV + Vdp - TdS - SdT \\ dG &= Vdp - SdT \end{aligned}$$

L'energia libera di Gibbs può essere allora funzione della pressione e della temperatura:

$$dG = Vdp - SdT \Leftrightarrow dG = \frac{\partial G}{\partial p} dp + \frac{\partial G}{\partial T} dT$$

Procedendo come prima:

$$\begin{aligned} V &= \left. \frac{\partial G}{\partial p} \right|_T & \frac{\partial^2 G}{\partial p \partial T} &= \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p \\ -S &= \left. \frac{\partial G}{\partial T} \right|_p & \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial p} &= \left. -\frac{\partial S}{\partial p} \right|_T \end{aligned}$$

Da cui otteniamo la **quarta relazione di Maxwell**:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p = - \left. \frac{\partial S}{\partial p} \right|_T$$

Riassumendo, possiamo finalmente scrivere le quattro relazioni di Maxwell in lista:



$$\begin{cases} \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_S = - \left. \frac{\partial p}{\partial S} \right|_V \\ \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_S = \left. \frac{\partial V}{\partial S} \right|_p \\ \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V = \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T \\ \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p = - \left. \frac{\partial S}{\partial p} \right|_T \end{cases}$$

Vediamo adesso cosa descrive la funzione G ; consideriamo $T = \text{cost}$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \Delta G &= Q - p\Delta V + p\Delta V - T\Delta S = Q - T\Delta S \\ T\Delta S &= Q - \Delta G \geq \frac{Q}{T}T \\ \Delta G &\leq 0 \end{aligned}$$

Ovvero, vale come l'energia libera di Helmotz, solo che in questo caso a essere costanti sono temperatura e pressione. È per questo motivo che la funzione G è molto utile a descrivere i passaggi di stato, che sono appunto trasformazioni a temperatura e pressioni costanti. Infatti, possiamo usarla per ricavare l'equazione di Clausius-Clapeyron.

11.8.1 Equazione di Clausius-Clapeyron con l'energia libera di Gibbs

Consideriamo sempre la trasformazione liquido-gas. Il numero di moli della miscela sarà pari a $n = n_l + n_v$, ovvero alle moli di liquido più le moli di vapore. Chiamiamo *frazione molare* $f = \frac{n_v}{n}$; l'energia libera di Gibbs della miscela sarà, ovviamente, la somma delle energie del liquido e del vapore; definita con \bar{G} l'energia libera di Gibbs per unità di mole, abbiamo:

$$G = G_l + G_v = n_l\bar{G}_l + n_v\bar{G}_v = nf\bar{G}_v + n(1-f)\bar{G}_l$$

Dobbiamo imporre che sia $dG = 0$:

$$0 = dG = \frac{\partial G}{\partial p} dp + \frac{\partial G}{\partial T} dT + \frac{\partial G}{\partial f} df$$

Poiché durante i passaggi di stati pressione e temperatura sono costanti, ne ricaviamo che $\frac{\partial G}{\partial f} = 0$, ovvero:

$$n\bar{G}_v - n\bar{G}_l = \bar{G}_v = \bar{G}_l$$

La funzione $G(T)$ sarà quindi continua, e varranno:

$$\begin{aligned} d\bar{G}_v &= V_v dp - S_v dT \\ d\bar{G}_l &= V_l dp - S_l dT \end{aligned}$$



Mettendo in ordine, ovvero $d\bar{G}_v = d\bar{G}_l$, otteniamo:

$$(V_v - V_l)dp - (S_v - S_l)dT = 0$$

Da cui ricaviamo l'equazione di Clausius-Clapeyron:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{S_v - S_l}{V_v - V_l} = \frac{\lambda}{T} \frac{1}{V_v - V_l}$$



Capitolo 12

Appendice A - Formulari

12.1 Formulario del punto materiale

12.1.1 Cinematica

Moto rettilineo

$$a(t) = \text{cost}$$

$$v(t) = v_0 + at$$

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Moto circolare

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$
$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Moto parabolico

$$x(t) = (v_0 \cos \theta_0)t$$

$$y(t) = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$x_{\text{gittata}} = \sin(2\theta_0) \frac{v_0^2}{g}$$

$$y(x) = \tan \theta_0 x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2$$

$$y_{\text{quota max}} = \frac{3}{2} \sin^2 \theta_0 \frac{v_0^2}{g}$$



Trasformazioni di Galileo

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = t \\ x' = x - v_{0x}t \\ y' = y - v_{0y}t \\ z' = z - v_{0z}t \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} v'_x = v_x - v_{0x} \\ v'_y = v_y - v_{0y} \\ v'_z = v_z - v_{0z} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{array} \right.$$

12.1.2 Dinamica

$$\vec{f}_{tot} = \sum_i^n \vec{f}_i = ma$$

Piano inclinato

$$\begin{array}{l} a = g \sin \theta \\ v = (g \sin \theta)t + v_0 \\ s = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}(g \sin \theta)t^2 \end{array} \quad L = \frac{h}{\sin \theta} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_0 = 0 \\ s_0 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} t = \sqrt{\frac{2h}{g \sin^2 \theta}} \\ v = g \sin \theta \sqrt{\frac{2h}{g \sin^2 \theta}} \end{array}$$

Quantità di moto e impulso

$$\begin{aligned} \vec{q} &= m\vec{v} \\ \vec{f} &= m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{q}}{dt} \\ \vec{I} &= \int_{t_0}^t f dt \quad \langle \vec{f} \rangle \Delta t = \Delta \vec{q} \end{aligned}$$

Momento della forza e momento angolare

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{r} \wedge \vec{f} \\ \vec{j} &= \vec{r} \wedge \vec{q} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \\ \vec{\tau} &= \frac{d\vec{j}}{dt} \end{aligned}$$

Pendolo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta(t)$$



$$\theta(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad T = \sqrt{\frac{l}{g}} 2\pi$$

Attrito

$$F < \mu_s N \quad F = \mu_d N$$

Forza elastica

$$f = -kx$$

12.1.3 Energia e Lavoro

$$L = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad L = \Delta K$$

12.1.4 Pendolo con lavoro

$$v_{max}^2 = 2lg(1 - \cos \theta_0)$$

Moto di una molla

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$v_{max} = \Delta \sqrt{\frac{k}{m}} = A\omega$$

Energia Potenziale

$$U_{peso} = mgh \quad U_{molla} = \frac{1}{2}kx^2 \quad U_{grav} = -G \frac{mM}{r}$$

$$\vec{f} = -\nabla U \quad \left\{ \begin{array}{l} f_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ f_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \\ f_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \end{array} \right.$$



12.1.5 Oscillatori armonici

Smorzato

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{B}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\gamma = \frac{B}{2m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t)$$

$$\left| \frac{\Delta E}{E} \right| = 2\gamma T$$

Forzato

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A \sin(\Omega t)$$

$$x(t) = x_0 \sin(\Omega t - \delta)$$

$$\begin{cases} x_0 = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma\Omega^2}} \\ \delta = \arctan\left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) \end{cases}$$

12.2 Formulario dei sistemi e corpo rigido

12.2.1 Sistemi

Centro di massa:

$$\vec{r}_{CM} = \sum_i \frac{m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$\vec{v}_{CM} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{M}$$

$$\vec{a}_{CM} = \sum_i \frac{m_i \vec{a}_i}{M}$$

Prima equazione cardinale:

$$\vec{F}_{CM}^{tot} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

12.2.2 Problema dei due corpi

Massa ridotta:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$



12.2.3 Teorema di Koenig

$$K = \frac{1}{2}M_{tot}v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

Il secondo fattore è l'energia cinetica del sistema *rispetto* al centro di massa.

12.2.4 Seconda equazione cardinale

$$\vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{J}}{dt}$$

Coppia di forze

$$C = bf$$

Dove b è la distanza tra le due forze applicate e f il modulo di una delle due (si considerano forze che producono momento concorde e di modulo uguale)

Rispetto a un polo qualsiasi

Dato un polo $\Omega \neq$ centro di massa :

$$\vec{\tau}_{\Omega}^{ext} = \frac{d\vec{J}_{\Omega}}{dt} + \vec{v}_{\Omega} \wedge M\vec{v}_{CM}$$

12.2.5 Momenti di inerzia

Rispetto al centro di massa.

Anello omogeneo o cilindro cavo di massa M e raggio R (valido per tutti i prossimi casi):

$$I_c = MR^2$$

Disco omogeneo o cilindro pieno omogeneo:

$$I_c = \frac{MR^2}{2}$$

Sbarretta omogenea di lunghezza l :

$$I_c = \frac{Ml^2}{12}$$

Disco di raggio r_2 con buco di raggio r_1 (dove si considera $r_1 + r_2 = r$, ovvero il raggio totale del disco se fosse pieno):



$$I_c = \frac{M}{2}(r_1^2 + r_2^2)$$

Sfera omogenea:

$$I_c = \frac{2}{5}MR^2$$

Teorema di Huygens-Steiner

$$I_a = I_c + Md^2$$

Dove d è la distanza tra l'asse c passante per il centro di massa e l'asse a generico rispetto al quale si calcola il momento d'inerzia.

12.2.6 Corpi rotanti

Abbiamo:

$$J = I\omega$$

Vettorialmente:

$$\vec{J} = I\vec{\omega}$$

Energia cinetica di un corpo ruotante:

$$K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

12.2.7 Pendolo fisico

Equazione del moto:

$$\ddot{\theta} + \frac{lMg}{2I}\theta = 0$$

Dove

$$\omega = \sqrt{\frac{lMg}{2I}}$$

Caso particolare: sbarretta omogenea ruotante attorno a un estremo:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$$



12.2.8 Urti

Urto **elastico**: si conservano quantità di moto e energia cinetica:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{cost} \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \text{cost} \end{cases}$$

Se l'urto è **anelastico** si conserva solo la quantità di moto, mentre l'energia cinetica viene ridotta di un fattore percentuale.

12.3 Formulario di fluidomeccanica

12.3.1 Statica dei fluidi

Forze di superficie agenti su un volumetto:

$$d\vec{F}^{(s)} = d\vec{F}_n^{(s)} + d\vec{F}_t^{(s)}$$

Pressione:

$$dP = \frac{dF_n^{(s)}}{dS} \Rightarrow \text{se la forza è uniforme } P = \frac{F_n}{S}$$

Legge di Stevino

$$P_B = P_A - \rho g h$$

Con $z_B > z_A$ e $h = z_B - z_A$

Legge di Archimede

Spinta di Archimede:

$$R = (\rho_{fluido} - \rho_{corpo}) V g$$

Proporzionalità tra volume immerso e densità:

$$\frac{V_i}{V_{tot}} = \frac{\rho_{corpo}}{\rho_{fluido}}$$

Legge di Pascal

Impressa una variazione di pressione in un punto ΔP_A :

$$P'_B = P_B + \Delta P_A$$



12.3.2 Dinamica dei fluidi

Portata

$$q = \frac{dV}{dt} = Sv$$

Equazione di continuità:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

Legge di Bernoulli

$$P + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{cost}$$

Anche scrivibile come:

$$z + \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{cost}$$

Effetto Venturi

Fluido in moto stazionario che passa attraverso due sezioni $A_1 > A_2$; avremo che:

$$v_1 < v_2$$

$$P_1 > P_2$$

12.4 Formulario delle onde elastiche

12.4.1 Onde meccaniche

Funzione generale di un'onda meccanica:

$$\alpha(x, t)$$

Equazione differenziali alle coordinate parziali che ogni funzione d'onda soddisfa:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$



12.4.2 Onde sinusoidali

Funzione generale di un'onda sinusoidale:

$$\alpha(x, t) = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x \mp vt) \right]$$

Lunghezza d'onda: $\lambda = vT$

Altri modi per scrivere le onde sinusoidali:

$$\alpha(x, t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\alpha(x, t) = A \sin(kx \mp \omega t + \varphi)$$

Con numero d'onda $K = \frac{2\pi}{\lambda}$, pulsazione $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi}{T}$

Principio di sovrapposizione

La risultante di più onde che si propagano nello stesso mezzo è:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots$$

12.4.3 Onde longitudinali

Equazione differenziale delle onde longitudinali:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$$

Con $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

In un mezzo omogeneo che riempi uniformemente lo spazio (aria o gas):

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{k} dP$$

Con velocità: $v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$, oppure, in funzione dei parametri del gas: $v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$

12.4.4 Onde trasversali

Equazione differenziale delle onde trasversali:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\tau} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$$

Con velocità: $v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$



12.4.5 Intensità e energia

L'intensità definita come:

$$I = \frac{dE}{dSdt}$$

Esprimibile in funzione dei parametri dell'onda

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v$$

Intensità di riferimento per la scala in decibel $I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$; intensità in decibel:

$$I_{db} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

Proporzionalità tra ampiezza dell'onda e distanza: $A \propto \frac{1}{r}$

12.4.6 Interferenza

Risultante di due onde che si propagano nello stesso mezzo con stessa lunghezza d'onda, stessa pulsazione e stessa ampiezza:

$$\alpha(x, t) = 2A \cos \frac{\delta}{2} \sin \left(kx - \omega t - \frac{\delta}{2} \right)$$

Intensità dell'onda risultante:

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 v 4A^2 \cos^2 \frac{\delta}{2} = 4I \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

Battimenti

Risultante di un battimento:

$$\alpha(x, t) = 2A \cos \left[\left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right) x - \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t \right] \sin(kx - \omega t) = B(x, t) \sin(kx - \omega t)$$

12.4.7 Onde stazionarie

Espressione generale di un'onda stazionaria:

$$\alpha(x, t) = 2A \cos \omega t \sin kx$$

Posizione dei nodi: $x_N = n \frac{\lambda}{2}$ e dei ventri: $x_V = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$

Frequenza del suono generato da una corda vibrante:



$$\nu = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$



Capitolo 13

Appendice B - Richiami di analisi a una variabile

13.1 Calcolo di derivate

Data la definizione di derivata, possiamo sfruttarla, applicandola, per ottenere quelle che sono conosciute come *regole di derivazione*. Nei seguenti teoremi abbrevieremo con *RdD* l'espressione *regola di derivazione*.

Teorema (RdD per la somma)

Siano $f(x), g(x)$ due funzioni derivabili in x_0 . Si ha:

$$D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

Dimostrazione

Applichiamo la definizione di derivata:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Teorema (RdD per il prodotto con una costante)

Sia $f(x)$ una funzione derivabile in x_0 e sia $k \in \mathbb{R}$ una costante reale. Si ha:

$$D[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x)$$

Dimostrazione

Applichiamo la definizione di derivata:



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{kf(x+h) - kf(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k[f(x+h) - f(x)]}{h} = k \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \cdot f'(x)$$

Questi due teoremi sono le due regole fondamentali di derivazione; si noti che la derivata è *applicazione lineare*.

Procediamo ora a calcolare le derivate di funzioni note.

Teorema (RdD per la costante)

Sia $f(x) = k \in \mathbb{R}$. Si ha:

$$Dk = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione

Applichiamo la definizione di derivata:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = 0$$

Teorema (RdD per la potenza)

Sia $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ la nostra funzione; si ha:

$$Dx^\alpha = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

Dimostrazione

Applichiamo la definizione di derivata:

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{(x_1)^\alpha - x^\alpha}{x_1 - x} &= \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{(x_1 - x) \cdot (x_1 - x)^{\alpha-1}}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \rightarrow x} (x_1 - x)^{\alpha-1} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x} x_1^{\alpha-1} + x_1^{\alpha-2} \cdot x + \dots + x^{\alpha-1} = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Si osservi che, quando $x_1 \rightarrow x$ tutti i prodotti diventano della forma $x^{\alpha-1}$, che sono in particolare esattamente α

Osservazione La derivazione della potenza vale anche per valori di α negativi, razionali o irrazionali (es. π); si ha quindi (lo si provi):

$$\begin{aligned} D\sqrt{x} &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \\ D\frac{1}{x} &= -\frac{1}{x^2} \\ D\frac{1}{\sqrt[7]{x^3}} &= -\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt[7]{x^{10}}} \end{aligned}$$



Teorema (RdD per l'esponenziale)

Abbiamo $f(x) = e^x$; si ha che:

$$De^x = e^x$$

Dimostrazione

Applichiamo la definizione:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

Si noti il limite notevole all'ultimo passaggio

Osservazione Il fatto che la derivata dell'esponenziale sia l'esponenziale stessa induce ad un'importante conclusione: l'esponenziale cresce come se stessa; ciò induce ad affermare che sia una delle funzioni dalla crescita più rapida all'infinito, cosa che verrà poi dimostrata in seguito.

Teorema (RdD per il seno)

Sia $f(x) = \sin x$. Si ha:

$$D \sin x = \cos x$$

Dimostrazione

Applichiamo la definizione di derivata:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \frac{\sin h}{h} \cdot \cos x = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x}{h} \cdot (\cos h - 1) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \cos x &= 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x \end{aligned}$$

Teorema (RdD per il coseno)

Sia $f(x) = \cos x$. Si ha:

$$D \cos x = -\sin x$$

Dimostrazione

Applichiamo la definizione di derivata:



$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} = 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x \end{aligned}$$

Osservazione Il legame tra le funzioni seno e coseno attraverso l'operatore derivata non deve sorprendere; è noto infatti che il coseno è una traslazione di $\frac{\pi}{2}$ verso destra della funzione seno. Dedurre le ultime considerazioni.

Teorema (RdD per il logaritmo)

Sia $f(x) = \ln x$. Si ha:

$$D \ln x = \frac{1}{x}$$

Dimostrazione

Applichiamo la definizione di derivata:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}$$

Applicando un opportuno cambio di variabile:

$$\begin{cases} t = \frac{h}{x} \\ \frac{1}{h} = \frac{1}{x \cdot t} \end{cases}$$

Possiamo riscrivere il limite come segue e, ricordando i limiti notevoli:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{x \cdot t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{x}$$

Osservazione Che la derivata del logaritmo sia definita per $x \neq 0$ è in accordo con il dominio del logaritmo, ovvero $x > 0$.

Dopo aver ottenuto le *regole di derivazione* di funzioni note, passiamo a sfruttare la definizione per ottenere regole di derivazione di relazioni tra funzioni. Abbiamo già visto, a inizio capitolo, la derivazione della somma; vedremo di seguito le altre relazioni fondamentali mancanti.

Teorema (Regola di Leibniz per la derivazione del prodotto)

Osservazione preliminare Si è preferito attribuire la giusta paternità di tale regola a Gottfried Leibniz invece che chiamarla genericamente *regola di derivazione*.

Siano $f(x), g(x)$ due funzioni derivabili in x_0 . Si ha:

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$



Osservazione preliminare Questa formula è di importanza fondamentale per il calcolo integrale, come vedremo nella prossima sezione.

Dimostrazione

Applichiamo la definizione di derivata:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = \\ & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x) + f(x+h) \cdot g(x) - f(x+h) \cdot g(x)}{h} \\ & = \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Abbiamo aggiunto e sottratto al numeratore $f(x+h)g(x)$ e messo in evidenza per ottenere la formula finale.

Teorema (RdD per il rapporto)

Osservazione Seppur logicamente esatta, *un figlio non è la giusta* derivata di un rapporto.

Siano $f(x), g(x)$ due funzioni derivabili, con $g(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Si ha:

$$D \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Dimostrazione

Applichiamo la definizione di derivata:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h \cdot g(x)g(x+h)} \\ & = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h \cdot g(x)g(x+h)} \\ & = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x)g(x+h)} \cdot \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\ & = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

Osservazione Utilizzando la formula di derivazione del rapporto, possiamo calcolare $D \tan x$:

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Teorema (RdD per la funzione composta)

Siano $f(x), g(x)$ due funzioni derivabili. La loro composta $f[g(x)]$ è derivabile e vale:

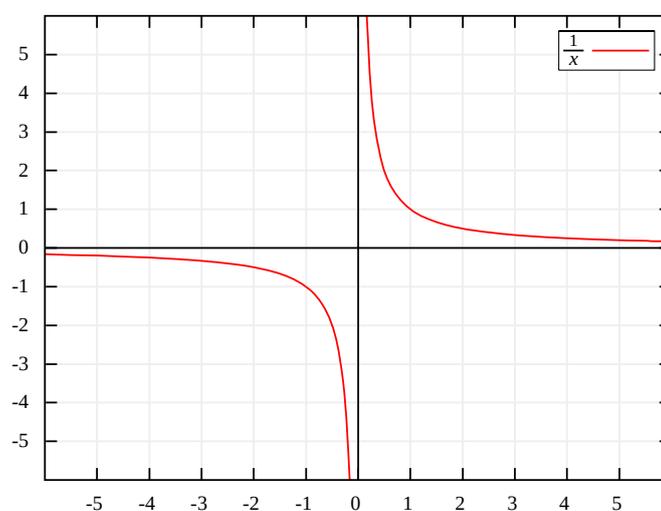


$$Df[g(x)] = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

13.2 Sommario sullo studio di funzione

13.2.1 Sommario

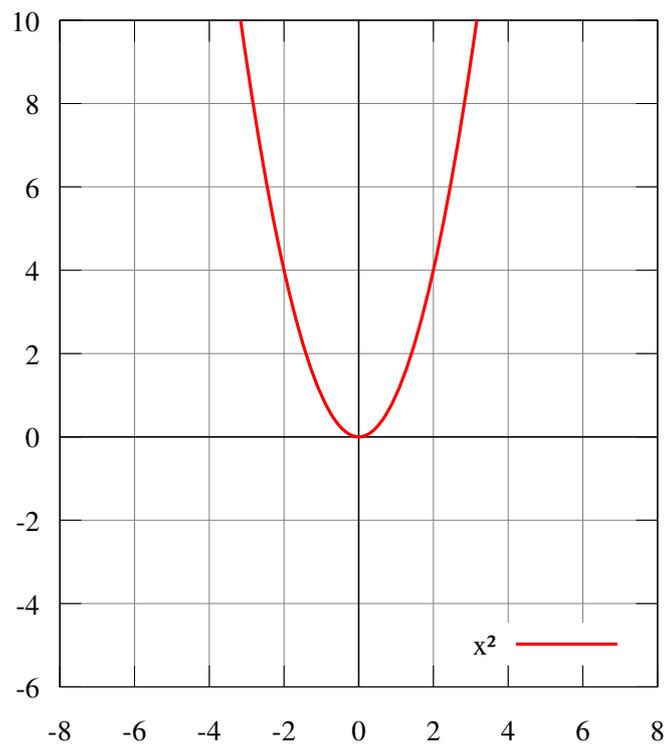
1. **Studio del dominio della funzione:** in che intervallo è definita la funzione? Dove è continua? Dove è discontinua? Quali sono gli asintoti verticali? Nell'immagine si vede un'iperbole che ha un asintoto verticale in 0.



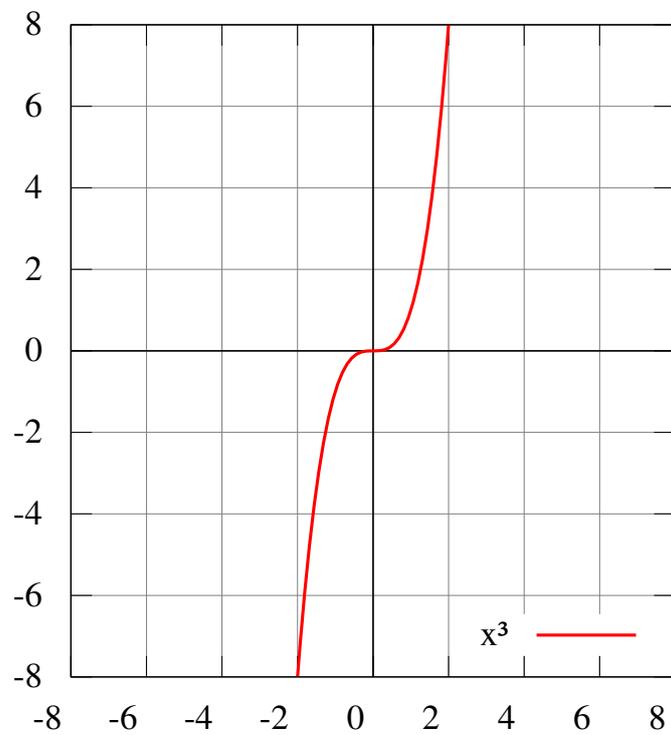
2. **Considerazioni di parità:** La funzione ha qualche particolare simmetria? Ricordiamo che se $f(x) = f(-x)$ la funzione è *pari*, nonchè *simmetrica rispetto all'asse y*, mentre se $f(x) = -f(-x)$ la funzione è *dispari*, nonchè *simmetrica rispetto all'origine*;

- esempio di funzione pari: x^2





- esempio di funzione dispari: x^3

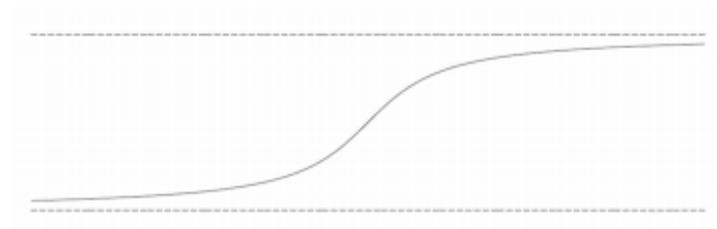


3. **Studio del segno e degli zeri della funzione:** dove la funzione è positiva? dove negativa? dove si annulla?;



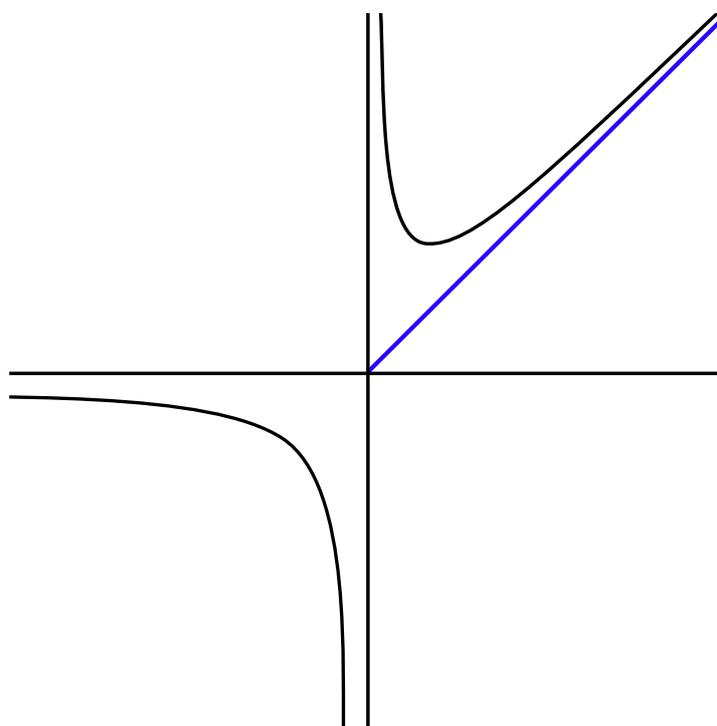
4. Studio dei *limiti della funzione* per i punti di estremo del dominio e ricerca degli **asintoti orizzontali e obliqui**:

- un asintoto orizzontale si ha se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (asintoto orizzontale destro) o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l'$ (asintoto orizzontale sinistro). In particolare se $l = l'$ l'asintoto è lo stesso a destra e sinistra (la funzione ha lo stesso andamento asintotico per $x \rightarrow \pm\infty$);



- un asintoto obliquo si ha se la funzione tende a $+\infty$ o a $-\infty$ a una retta di equazione $y = mx + q$. Se tale retta esiste, ossia se $\exists m, q$ t.c. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx - q = 0$, i suoi parametri sono determinati dalle equazioni:

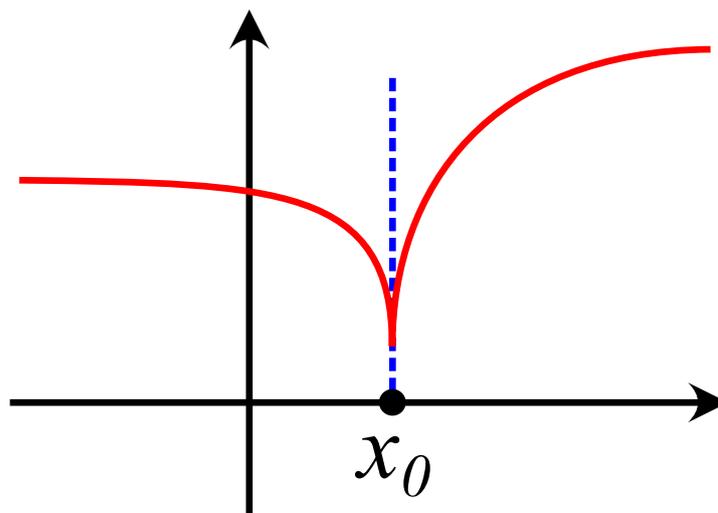
$$\begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \\ q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx \end{cases}$$



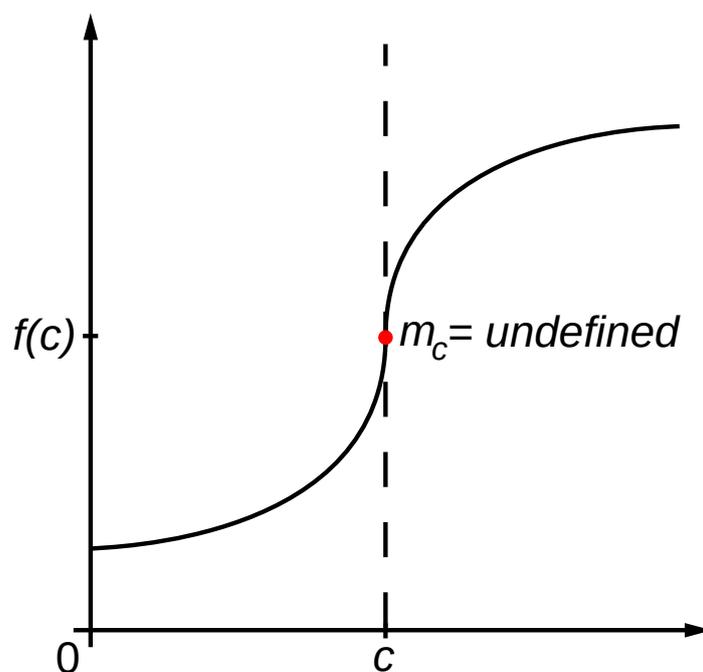
5. Studio della derivabilità e calcolo della derivata prima:

- nei punti di non derivabilità la funzione può presentare una *cuspid*, un *flesso a tangente verticale* o un *punto angoloso*
 - cuspid: i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale sono infiniti con segno opposto.

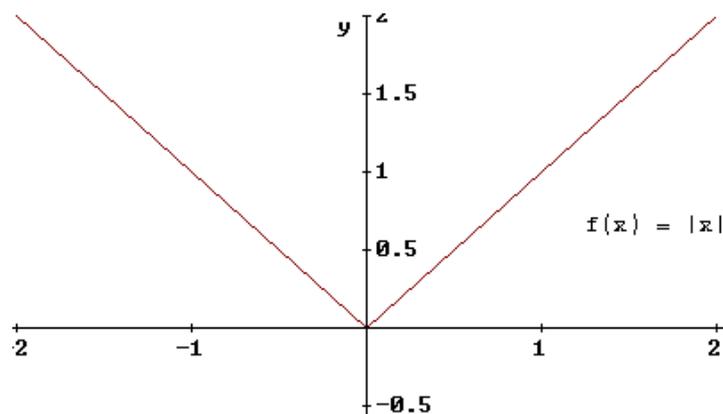




- flesso a tangente verticale: i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale sono infiniti con segno concorde.



- punto angoloso: i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale esistono finiti ma non coincidenti.



6. **Studio del segno e degli zeri della derivata prima:** dove $f'(x) > 0$ $f(x)$ è crescente, dove $f'(x) < 0$ $f(x)$ è decrescente;
7. Determinare **punti di minimo, massimo e flesso orizzontale** della funzione. Tali punti sono tutti caratterizzati dall' avere $f'(x)|_{x_0} = 0$ e si distinguono per l'andamento della derivata in un intorno del punto:
 - minimo: la funzione è decrescente a sinistra del punto ($f'(x) < 0$ per $x \rightarrow x_0^-$) e crescente a destra ($f'(x) > 0$ per $x \rightarrow x_0^+$)
 - massimo: la funzione è crescente a sinistra del punto ($f'(x) > 0$ per $x \rightarrow x_0^-$) e decrescente a destra ($f'(x) < 0$ per $x \rightarrow x_0^+$)
 - flesso orizzontale: la derivata prima non cambia segno in un intorno del punto.
8. **Studio della derivata seconda**, determinando intervalli di convessità, concavità e punti di flesso obliqui;
9. Disegnare un **grafico probabile** della funzione.

13.2.2 Esempio di studio di funzione

Studiamo la funzione $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-3}$

Studio del dominio

Le condizioni di esistenza da porre sono:

$$x^2 - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{3}$$

La funzione dunque è definita negli intervalli $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, +\sqrt{3}) \cup (+\sqrt{3}, +\infty)$. Possiamo avere asintoti verticali per $x \rightarrow -\sqrt{3}^\pm$, $x \rightarrow +\sqrt{3}^\pm$, che studieremo nel dettaglio quando faremo i limiti agli estremi del dominio.

Considerazioni di parità

$$f(-x) = \frac{-x^3+1}{x^2-3} \neq f(x) \Rightarrow \text{funzione non pari}$$

$$-f(-x) = -\frac{-x^3+1}{x^2-3} \neq f(x) \Rightarrow \text{funzione non dispari}$$

Studio del segno e degli zeri



1. segno del numeratore: $x^3 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$
2. segno del denominatore: $x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{3} \vee x > +\sqrt{3}$
3. zeri: li trovo imponendo l'annullarsi del numeratore $\Rightarrow x = -1$

Riassumendo quanto detto:

Limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty$$

controllo: è un risultato coerente con il segno della funzione nell'intervallo considerato? Sì!

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^-} = -\infty$$

controllo: è un risultato coerente con il segno della funzione nell'intervallo considerato? Sì!

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^+} = +\infty$$

controllo: è un risultato coerente con il segno della funzione nell'intervallo considerato? Sì!

$$\lim_{x \rightarrow +\sqrt{3}^-} = -\infty$$

controllo: è un risultato coerente con il segno della funzione nell'intervallo considerato? Sì!

$$\lim_{x \rightarrow +\sqrt{3}^+} = +\infty$$

controllo: è un risultato coerente con il segno della funzione nell'intervallo considerato? Sì!

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$$

controllo: è un risultato coerente con il segno della funzione nell'intervallo considerato? Sì!

1. asintoti orizzontali: nessuno
2. asintoti verticali: $x = \pm\sqrt{3}$
3. asintoti obliqui:

$$\begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{x \cdot (x^2-3)} = 1 \\ q = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1-x^3+3x}{x^2-3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+1}{x \cdot (x^2-3)} = 1 \\ q = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+1-x^3+3x}{x^2-3} = 0 \end{cases}$$

asintoto obliquo $y = x$

Derivata

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 3) - (x^3 + 1)2x}{(x^2 - 3)^2} \\ &= \frac{x(x^3 - 9x - 2)}{(x^2 - 3)^2} \end{aligned}$$



1. punti di non derivabilità: $x \in \mathcal{D}_{f'} \cap \mathcal{D}_f$ t.c funzione non derivabile Poichè i possibili punti di non derivabilità sono $x = \pm\sqrt{3}$, già esclusi dal dominio, ove la funzione è continua è anche derivabile

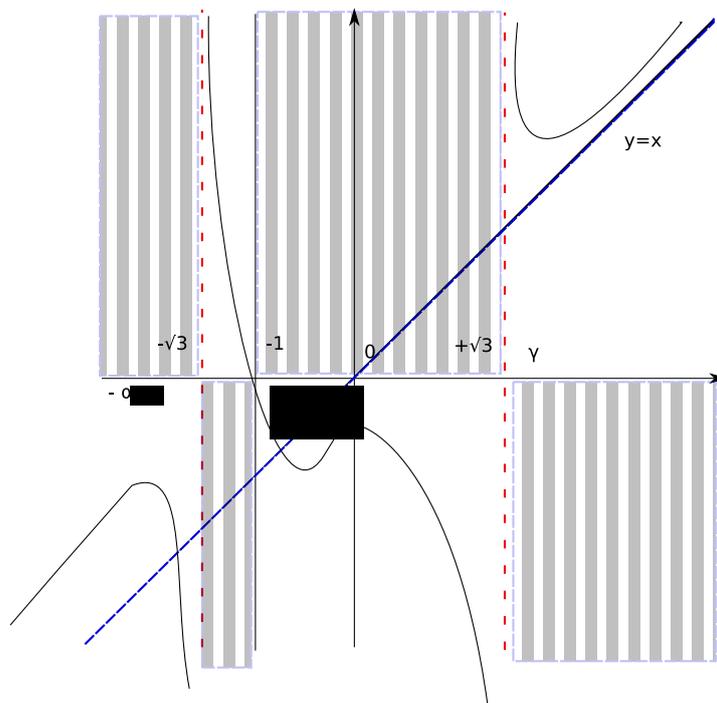
- segno numeratore:

$$x(x^3 - 9x - 2) \geq 0$$

Il polinomio di terzo grado presenta 3 zeri, due minori di 0, siano $-\alpha, -\beta$ e uno maggiore di 0, sia γ , determinabili in valore con metodi di approssimazione numerica ma facilmente individuabili da un semplice studio di funzione. Il numeratore è scomponibile in $x(x + \alpha)(x + \beta)(x - \gamma)$, si annulla in $\alpha, \beta, 0, \gamma$ ed è positivo negli intervalli $(-\infty, -\alpha] \cup [-\beta, 0] \cup [\gamma, +\infty)$

- segno denominatore: sempre positivo all'interno del dominio.

Saltiamo lo studio della derivata seconda e procediamo al disegno del grafico mettendo insieme le informazioni ricavate.



13.3 Calcolo di primitive

Come abbiamo visto, il teorema fondamentale del calcolo ci semplifica il lavoro quando si richiede l'integrale di una funzione continua, portando a svolgere un calcolo di primitive. A differenza delle derivate, per le quali avevamo una definizione che, applicata, permetteva di ricavare formule di derivazioni utili in numerosi casi, per gli integrali indefiniti bisogna rifarsi all'esperienza, alla logica



e all'ingegno. Come già detto nel precedente capitolo, non tutte le funzioni ammettono una primitiva in forma compatta, ed alcune non le ammettono proprio. Esistono però formule particolari che semplificano il lavoro.

Iniziamo col dare una tabella di integrali immediati, ricavati invertendo le regole di derivazione.

Funzione	Primitiva($c \in \mathbb{R}$)
$f(x) = x^\alpha$ con $\alpha \neq -1$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c$
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \arctan x + c$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arcsin x + c$
$f(x) = \tan x$	$F(x) = \ln \cos x + c$

Osservazione $\int \tan x \, dx$ non è un integrale immediato. Verificare che $\frac{d \ln|\cos x|}{dx}$ è esattamente uguale a $\tan x$.

Proprio l'ultimo caso offre l'opportunità di chiarire una volta per tutte il metodo di conferma del risultato: se si è in dubbio sulla funzione primitiva, si può sempre provare a derivarla; se la derivata è la funzione di partenza, allora la primitiva è quella giusta; altrimenti, si rifanno i calcoli o si prova un altro metodo. Diamo adesso due metodi di integrazione che, usati appropriatamente, faciliteranno i calcoli e permetteranno di calcolare integrali particolarmente complicati.

Definizione (Integrazione per sostituzione)

Data la formula di derivazione della funzione composta:

$$Df[g(x)] = f'[g(x)] \cdot g'(x) .$$

Possiamo integrare i membri per ottenere la formula:

$$\int Df[g(x)] \, dx = \int f'[g(x)] \cdot g'(x) \, dx$$

$$\Leftrightarrow \int f'[g(x)] \cdot g'(x) \, dx = f[g(x)] + c .$$

L'ultima formula è conosciuta anche come *formula di integrazione per sostituzione*.

L'utilizzo di questa formula, una volta riconosciute le funzioni sotto simbolo di integrale, permette la soluzione di funzione che sembrerebbero astruse ad una prima occhiata. Facciamo un esempio del doppio utilizzo di questa formula.

Esempio Calcoliamo $\int \cos^3 x \cdot \sin x \, dx$.

1. Se riconosciamo immediatamente che:

$$f'[g(x)] = \cos^3 x ,$$



$$g'(x) = \sin x dx$$

Possiamo calcolare immediatamente la primitiva:

$$\int \cos^3 x \cdot \sin x dx = -\frac{\cos^4 x}{4} + c.$$

2. Possiamo procedere altrimenti operando una *sostituzione di variabile* nel seguente modo:

$$\begin{cases} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{cases}$$

La funzione da integrare diventa quindi:

$$\int \cos^3 x \cdot \sin x dx = \int t^3 \cdot (-dt) = -\int t^3 dt$$

Che è un integrale immediato. Procedendo otteniamo:

$$-\int t^3 dt = -\frac{t^4}{4} + c$$

Tornando alla variabile x:

$$-\frac{t^4}{4} + c = -\frac{\cos^4 x}{4} + c$$

Che corrisponde al risultato trovate individuando funzione composta e derivata come al punto 1.

Osservazione Alcune volte, invece di sostituire ad una funzione una variabile ausiliaria si può sostituire alla variabile di partenza una funzione ausiliaria. Vediamo un caso in cui questo procedimento risulta comodo.:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

Può essere calcolato in vari modi, ma se sostituiamo come di seguito:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ \sqrt{1-x^2} = |\sin t| = \sin t \\ dx = -\sin t dt \end{cases}$$

Si noti che, essendo $f(x)$ una funzione definita positiva per $-1 \leq x \leq 1$, il modulo può essere omesso. Si osservi anche che la funzione è la semicirconferenza goniometrica nel semiasse positivo delle ordinate. Quindi il suo integrale definito è? *Esercizio veloce*

Otteniamo un integrale del tipo:



$$- \int \sin^2 t \, dt$$

Che può essere risolto sia sostituendo il $\sin^2 t$ con formule goniometriche equivalenti, sia usando il metodo seguente.

Definizione (Integrazione per parti)

Il metodo più noto, e a volte più efficace, di soluzione di integrali è il cosiddetto *metodo di risoluzione per parti*. Si ricava partendo dalla formula di Leibniz per la derivazione del prodotto, integrando i membri e ordinandoli nel seguente modo:

$$\begin{aligned} D[f(x) \cdot g(x)] &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ \int D[f(x) \cdot g(x)] \, dx &= \int f'(x) \cdot g(x) \, dx + \int f(x) \cdot g'(x) \, dx \\ \Leftrightarrow \int f(x) \cdot g'(x) \, dx &= f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx \end{aligned}$$

Osservazione Da una prima occhiata, potrebbe sembrare che risolvere per parti un integrale non porti alcun vantaggio: un integrale di partenza avevamo, un integrale abbiamo dopo averla applicata. In realtà non è così: molto spesso, applicare l'integrazione per parti porta ad una riduzione di termini sotto il segno di integrale, semplificando le funzioni fino a farle ricondurre ad un integrale noto o immediato. L'esperienza aiuta in questi casi, ma è bene osservare che i *polinomi*, attraverso un numero finito di derivazioni, si *annullano*, trasformandosi in numeri reali.

Osservazione Dalla formula di integrazione per parti, si può risolvere un integrale che non è stato inserito nella tabella iniziale, poiché non banale; parliamo di $\int \ln x \, dx$. Applicando la formula, consideriamo

$$\begin{cases} f(x) = \ln x \\ g'(x) dx = 1 \cdot dx \end{cases}$$

(Si ricordi che dx può essere sempre scritto come $1 \cdot dx$)

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ \Leftrightarrow x \cdot \ln x - \int dx &= x \cdot \ln x - x + c \end{aligned}$$

Notazione Spesso, quando si parla di calcolare integrali definiti, si usa la seguente notazione:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \left[\int f(x) \, dx \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Che equivale a dire *l'integrale definito da a a b di $f(x)dx$ vale il suo integrale indefinito calcolato negli estremi di integrazione*



Osservazione L'integrale indefinito è un insieme infinito di funzioni. È consigliabile porre $c = 0$ quando si calcola l'integrale definito.

Osservazione Per le funzioni periodiche $\sin x$ e $\cos x$ è comodo notare che l'integrale è anch'esso periodico. Infatti vale (lo si provi):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 1$$

Prestando attenzione agli intervalli in cui le funzioni diventano negative (e di conseguenza anche i loro integrali definiti), quest'informazione può essere sfruttata per calcolare, in intervalli più lunghi, i sottografici delle funzioni.

È il momento delle brutte notizie; a differenza delle derivate, non tutti gli integrali sono risolvibili in forma esplicita. Spieghiamoci:

$$\int e^{x^2} \, dx$$

Non ammette una forma esplicita. Potete sbattere la testa al muro per tutti gli anni della vostra vita, purtroppo è così; prendere o lasciare, la matematica a volte riserva sgradite sorprese.

Osservazione “Ma se io utilizzassi i polinomi di Taylor?” potreste chiedere, riguardo all'integrale qui sopra. È un giusta osservazione per quello che riguarda il calcolo *approssimato* dell'integrale definito, come vedremo nel capitolo successivo.

13.4 Calcolo di aree

Lo scopo di questo capitolo sarà quello di spiegare, utilizzando gli strumenti finora spiegati, come calcolare le aree. Non andremo ad aggiungere altre nozioni alla teoria già data, semplicemente utilizzeremo quelle che abbiamo già.

Alla fine del capitolo precedente abbiamo visto come l'integrale delle funzioni periodiche sia anch'esso periodico, stando attenti ai segni. Vale la regola generale:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos x \, dx = 0$$

È facile dimostrarlo utilizzando il teorema fondamentale del calcolo; non ci perderemo più di molto tempo a calcolarli.

13.4.1 Funzioni esponenziali

Passiamo alla funzione esponenziale; in generale:

$$\int_0^1 e^x \, dx = [e^x]_0^1 = e - e^0 = e - 1$$



E teniamocelo buono da parte. Ora, ricordate la triste notizia riguardante $\int e^{x^2} dx$? Supponiamo avessimo da calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

Un buon modo per uscirne vivi è quello di sfruttare i polinomi di Taylor; ricordando quello dell'esponenziale:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

Possiamo trovare il polinomio di e^{x^2} . Come? Semplicemente sostituendo x^2 a x nel polinomio, ovvero:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \dots$$

E sostituirlo nell'integrale:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \int_0^1 (1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4) dx$$

E così procedere. Il problema è che avremo un'approssimazione dell'integrale, e non il risultato perfetto, che sarà uguale quindi a:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \dots$$

L'osservazione da fare è che questa serie converge, ed è quindi limitata superiormente.

13.4.2 Funzioni dispari

Cambiamo totalmente argomento, ora. Facciamo una breve osservazione grafica riguardante le funzioni dispari: essendo simmetriche rispetto all'origine, c'è da aspettarsi che:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

Ora lo dimostreremo matematicamente. Per prima cosa, possiamo sfruttare le proprietà dell'integrale:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

Operiamo sul primo termine attraverso sostituzioni di variabile: operando questo cambio di variabile:



$$\begin{cases} s = -x \\ ds = -dx \end{cases}$$

Otteniamo questo integrale:

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = - \int_a^0 f(-s)ds \Leftrightarrow \int_0^a f(-s)ds$$

Quindi, ricapitolando il tutto e sfruttando la disparità della funzione:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx = - \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0$$

Esattamente quello che avevamo intuito graficamente.

13.5 Eq. differenziali del secondo ordine non omogenee

Si è preferito dividere in due il discorso sulle equazioni differenziali del secondo ordine perché ci soffermeremo su un caso particolare: la condizione di risonanza. Passiamo a studiare le equazioni del secondo ordine **non omogenee**. In generale, fanno parte di questa famiglia le espressioni:

$$y'' + 2by' + cy = f(t)$$

L'osservazione che possiamo fare e che facciamo nasce dallo studio delle equazioni differenziali del primo ordine non omogenee: come abbiamo visto, le soluzioni di queste equazioni sono della forma

$$y = y_0 + y_1$$

y_0 è soluzione dell'equazione omogenea associata

y_1 è soluzione dell'equazione non omogenea

Questo è possibile grazie al *principio di sovrapposizione*, per cui possiamo sempre scrivere:

$$y = y - y_0 + y_0 \quad y - y_0 = y_1$$

Per quanto riguarda l'equazione omogenea, ne abbiamo discusso nel precedente capitolo. Non ci resta quindi che cercare le soluzioni alla non omogenea. Non ci dilungheremo sui vari casi, tratteremo solo il caso delle **forzanti periodiche**, ovvero i casi in cui $f(t) = \sin(\omega t)$ o $\cos(\omega t)$, ovviamente con $\omega \in \mathbb{R}$.

Come nel caso precedente, cerchiamo soluzioni nel campo dei complessi \mathbb{C} ; osserviamo che:



$$\begin{cases} \Re e^{i\omega t} = \cos(\omega t) \\ \Im e^{i\omega t} = \sin(\omega t) \end{cases}$$

Si ricorda che $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$. L'obiettivo, come detto prima, è trovare y_1 soluzione dell'equazione, che possiamo riscrivere come:

$$\begin{aligned} z'' + abz' + cz &= e^{i\omega t} \\ (\Re z)'' + 2b(\Re z)' + c(\Re z) &= \cos(\omega t) \\ (\Im z)'' + 2b(\Im z)' + c(\Im z) &= \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Mi aspetto soluzioni della forma $z(t) = \eta e^{i\omega t}$ con $\eta \in \mathbb{C}$. Calcoliamo le derivate per sostituirle nella equazione:

$$\begin{aligned} z'(t) &= i\omega\eta e^{i\omega t} \\ z''(t) &= -\omega^2\eta e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Passiamo all'equazione:

$$\begin{aligned} -\omega^2\eta e^{i\omega t} + 2bi\omega\eta e^{i\omega t} + c\eta e^{i\omega t} &= e^{i\omega t} \\ -\omega^2\eta + 2bi\omega\eta + c\eta &= 1 \end{aligned}$$

È adesso necessaria una discussione su tutto questo. Abbiamo trovato un'equazione del secondo grado in η che, risolta, ci da i valori da sostituire nella funzione $z(t) = \eta e^{i\omega t}$. Una volta che questo è stato fatto, a seconda della forzante presente (coseno o seno) la nostra soluzione sarà la parte reale o immaginaria, rispettivamente. Ma c'è un caso in cui non abbiamo soluzioni, ovvero:

1. Se $i = 0$ e $c = \omega^2$, NON ABBIAMO SOLUZIONI.

Siamo sicuri?

Osservazione $z(t) = t\eta e^{i\omega t}$ è soluzione. Verificare!

13.5.1 Condizione di risonanza

Questo caso particolare è particolarmente significativo, in fisica, riguardo gli *oscillatori armonici* (di costante elastica -1). Il caso di cui parliamo è descritto dalla seguente equazione:

$$y'' + y = \sin(\omega t) \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Anzitutto, calcoliamo la soluzione dell'equazione omogenea associata, ovvero cerchiamo soluzioni all'espressione:

$$y'' + y = 0$$

Il polinomio caratteristico associato è:



$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i$$

Da cui ricaviamo direttamente (la dimostrazione è elementare, basta applicare il procedimento studiato nel capitolo precedente) la funzione risolvente l'equazione omogenea, che è:

$$y_0(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

Dobbiamo adesso trovare una soluzione all'equazione non omogenea; come descritto sopra, sia:

$$\sin(\omega t) = \Im e^{i\omega t}$$

E cerco soluzioni della forma $z(t) = \eta e^{i\omega t}$; calcoliamo le derivate:

$$\begin{aligned} z'(t) &= i\omega\eta e^{i\omega t} \\ z''(t) &= -\omega^2\eta e^{i\omega t} \\ \Leftrightarrow (-\omega^2 + 1)\eta &= 1 \\ \Leftrightarrow \eta &= \frac{1}{1 - \omega^2} \end{aligned}$$

Posto $\omega \neq \pm 1$. Quindi la soluzione sarà del tipo :

$$z(t) = \frac{e^{i\omega t}}{1 - \omega^2} \quad \Rightarrow \quad y_1(t) = \Im z(t) = \frac{\sin(\omega t)}{1 - \omega^2}$$

Non ci resta che sommare le due soluzioni per ottenere l'integrale generale:

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{\sin(\omega t)}{1 - \omega^2}$$

Osserviamo come ω sia fattore di amplificazione delle oscillazioni: più la frequenza si avvicina a 1, più la funzione tende a esplodere a $+\infty$. Ci resta però un ultimo caso da analizzare, ovvero quando $\omega^2 \rightarrow \pm 1$. Dopo aver trovato la soluzione particolare, sfruttando le condizioni imposte dal problema di Cauchy, si studia il limite per $\omega \rightarrow \pm 1$, analizzando il comportamento della funzione in quel caso.

Se capitasse che $\omega = \pm 1$, si noti che $z(t) = \eta t e^{i\omega t}$ è anch'essa soluzione. Si ripete il procedimento qui sopra elencato e si risolve l'equazione.



Capitolo 14

Fonti per testo e immagini; autori; licenze

14.1 Testo

- **Corso:Meccanica del punto materiale/Introduzione/Cos'è la meccanica newtoniana** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Introduzione/Cos'%C3%A8_la_meccanica_newtoniana?oldid=29179 *Contributori:* Ruben, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Cinematica del punto materiale/Cinematica del Punto** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Cinematica_del_punto_materiale/Cinematica_del_Punto?oldid=29135 *Contributori:* Sofia, Ruben, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Cinematica del punto materiale/Moto rettilineo** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Cinematica_del_punto_materiale/Moto_rettilineo?oldid=49408 *Contributori:* Roopi, Sofia, Toma.luca95, Ruben, FiammettaPagano, Bianca Pinolini, Davide Ghilardi, Dan, WikiToBot, Move page script, Hal9000, Albatro74 e Anonimo: 1
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Cinematica del punto materiale/Moto circolare** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Cinematica_del_punto_materiale/Moto_circolare?oldid=47946 *Contributori:* Roopi, Sofia, Toma.luca95, FiammettaPagano, Bianca Pinolini, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Cinematica del punto materiale/Moto armonico** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Cinematica_del_punto_materiale/Moto_armonico?oldid=47914 *Contributori:* Roopi, Sofia, Toma.luca95, V.e.padulano, FiammettaPagano, J.motta1, Linda, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Cinematica del punto materiale/Moto parabolico dei corpi** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Cinematica_del_punto_materiale/Moto_parabolico_dei_corpi?oldid=29141 *Contributori:* Sofia, J.motta1, Bianca Pinolini, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Dinamica del punto materiale/Primo e secondo principio della dinamica** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Dinamica_del_punto_materiale/Primo_e_secondo_principio_della_dinamica?oldid=29163 *Contributori:* Roopi, Sofia, Ruben, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Dinamica del punto materiale/Forza peso e forze vincolari** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Dinamica_del_punto_materiale/Forza_peso_e_forze_vincolari?oldid=48767 *Contributori:* Sofia, Ruben, Dan, WikiToBot, Move page script e Axis96



- **Corso:Meccanica del punto materiale/Dinamica del punto materiale/Terzo principio della dinamica** *Fonte:* https://it.wikiversity.org/wiki/Corso%3Ameccanica_del_punto_materiale/Dinamica_del_punto_materiale/Terzo_principio_della_dinamica?oldid=29167 *Contributori:* Ruben, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Dinamica del punto materiale/Forza elastica** *Fonte:* https://it.wikiversity.org/wiki/Corso%3Ameccanica_del_punto_materiale/Dinamica_del_punto_materiale/Forza_elastica?oldid=29155 *Contributori:* Roopi, Sofia, Ruben, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Dinamica del punto materiale/Forza centripeta** *Fonte:* https://it.wikiversity.org/wiki/Corso%3Ameccanica_del_punto_materiale/Dinamica_del_punto_materiale/Forza_centripeta?oldid=43890 *Contributori:* Ruben, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Dinamica del punto materiale/Quantità di moto e impulso** *Fonte:* https://it.wikiversity.org/wiki/Corso%3Ameccanica_del_punto_materiale/Dinamica_del_punto_materiale/Quantita_di_moto_e_impulso?oldid=47795 *Contributori:* Sofia, Toma.luca95, Ruben, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Dinamica del punto materiale/Momento angolare** *Fonte:* https://it.wikiversity.org/wiki/Corso%3Ameccanica_del_punto_materiale/Dinamica_del_punto_materiale/Momento_angolare?oldid=47923 *Contributori:* Sofia, Toma.luca95, Ruben, FiammettaPagano, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Dinamica del punto materiale/Pendolo semplice** *Fonte:* https://it.wikiversity.org/wiki/Corso%3Ameccanica_del_punto_materiale/Dinamica_del_punto_materiale/Pendolo_semplice?oldid=49451 *Contributori:* Valsdav, Sofia, Ruben, Lucieferr, Dan, WikiToBot, Move page script e Rp60
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Lavoro ed energia/Energia cinetica e lavoro** *Fonte:* https://it.wikiversity.org/wiki/Corso%3Ameccanica_del_punto_materiale/Lavoro_ed_energia/Energia_cinetica_e_lavoro?oldid=29187 *Contributori:* Sofia, Ruben, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Lavoro ed energia/Energia del pendolo** *Fonte:* https://it.wikiversity.org/wiki/Corso%3Ameccanica_del_punto_materiale/Lavoro_ed_energia/Energia_del_pendolo?oldid=49453 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Move page script e Rp60
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Lavoro ed energia/Lavoro della forze di attrito, della forza peso e della forza elastica** *Fonte:* https://it.wikiversity.org/wiki/Corso%3Ameccanica_del_punto_materiale/Lavoro_ed_energia/Lavoro_della_forze_di_attrito_e_della_forza_peso_e_della_forza_elastica?oldid=29193 *Contributori:* Ruben, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Lavoro ed energia/Forze conservative ed energia potenziale** *Fonte:* https://it.wikiversity.org/wiki/Corso%3Ameccanica_del_punto_materiale/Lavoro_ed_energia/Forze_conservative_ed_energia_potenziale?oldid=49455 *Contributori:* Toma.luca95, Ruben, WikiToBot, Move page script e Rp60
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Oscillatori armonici/Oscillatore armonico** *Fonte:* https://it.wikiversity.org/wiki/Corso%3Ameccanica_del_punto_materiale/Oscillatori_armonici/Oscillatore_armonico?oldid=29203 *Contributori:* Roopi, Ruben, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Oscillatori armonici/Oscillatore armonico smorzato e forzato** *Fonte:* https://it.wikiversity.org/wiki/Corso%3Ameccanica_del_punto_materiale/Oscillatori_armonici/Oscillatore_armonico_smorzato_e_forzato?oldid=49457 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Move page script e Rp60
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Oscillatori armonici/Oscillatori accoppiati** *Fonte:* https://it.wikiversity.org/wiki/Corso%3Ameccanica_del_punto_materiale/Oscillatori_armonici/Oscillatori_accoppiati?oldid=48771 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Move page script e Axis96
- **Corso:Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi/Introduzione/Sistemi di punti e corpo rigido** *Fonte:* https://it.wikiversity.org/wiki/Corso%3Ameccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Introduzione/Sistemi_di_punti_e_corpo_rigido?oldid=39772 *Contributori:* Dan, WikiToBot e Move page script



- **Corso:Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi/Dinamica dei sistemi di punti/Centro di massa** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Dinamica_dei_sistemi_di_punti/Centro_di_massa?oldid=29059 *Contributori:* Roopi, Ruben, Lucieferr, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi/Dinamica dei sistemi di punti/Conservazione della quantità di moto** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Dinamica_dei_sistemi_di_punti/Conservazione_della_quantit%C3%A0_di_moto?oldid=29061 *Contributori:* Ruben, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi/Dinamica dei sistemi di punti/Sistema di riferimento del centro di massa** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Dinamica_dei_sistemi_di_punti/Sistema_di_riferimento_del_centro_di_massa?oldid=29068 *Contributori:* Ruben, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi/Dinamica dei sistemi di punti/Mutua interazione: problema dei due corpi** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Dinamica_dei_sistemi_di_punti/Mutua_interazione%3A_problema_dei_due_corpi?oldid=49508 *Contributori:* Toma.luca95, Dan, WikiToBot, Move page script e Rp60
- **Corso:Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi/Dinamica dei sistemi di punti/Sistemi a massa variabile** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Dinamica_dei_sistemi_di_punti/Sistemi_a_massa_variabile?oldid=29070 *Contributori:* Ruben, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi/Dinamica dei sistemi di punti/Moto di un razzo** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Dinamica_dei_sistemi_di_punti/Moto_di_un_razzo?oldid=29063 *Contributori:* Ruben, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi/Seconda legge cardinale/-La seconda legge cardinale** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Seconda_legge_cardinale/La_seconda_legge_cardinale?oldid=29088 *Contributori:* Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi/Seconda legge cardinale/-Teorema di König per il momento angolare** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Seconda_legge_cardinale/Teorema_di_K%C3%B6nig_per_il_momento_angolare?oldid=49513 *Contributori:* Toma.luca95, Dan, WikiToBot, Move page script e Rp60
- **Corso:Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi/Seconda legge cardinale/-Corpo rigido in rotazione** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Seconda_legge_cardinale/Corpo_rigido_in_rotazione?oldid=29086 *Contributori:* Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi/Seconda legge cardinale/-Coppia di forze** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Seconda_legge_cardinale/Coppia_di_forze?oldid=29084 *Contributori:* Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi/Seconda legge cardinale/-Sistemi di forze parallele** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Seconda_legge_cardinale/Sistemi_di_forze_paralleli?oldid=47778 *Contributori:* Toma.luca95, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi/Seconda legge cardinale/-Pendolo fisico** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Seconda_legge_cardinale/Pendolo_fisico?oldid=49523 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Move page script e Rp60
- **Corso:Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi/Seconda legge cardinale/-Moto di una trottola** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Seconda_legge_cardinale/Moto_di_una_trottola?oldid=29093 *Contributori:* Dan, WikiToBot e Move page script



- **Corso:Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi/Statica, urti e rotolamento/- Sistemi in equilibrio** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Statica%2C_urti_e_rotolamento/Sistemi_in_equilibrio?oldid=47834 *Contributori:* Toma.luca95, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi/Statica, urti e rotolamento/Esempi di problemi di statica** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Statica%2C_urti_e_rotolamento/Esempi_di_problemi_di_statica?oldid=49528 *Contributori:* Toma.luca95, Dan, WikiToBot, Move page script e Rp60
- **Corso:Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi/Statica, urti e rotolamento/Moto di rotolamento** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Statica%2C_urti_e_rotolamento/Moto_di_rotolamento?oldid=49544 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Move page script e Rp60
- **Corso:Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi/Statica, urti e rotolamento/Urti elastici e anelastici** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Statica%2C_urti_e_rotolamento/Urti_elastici_e_anelastici?oldid=29110 *Contributori:* Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Gravitazione/Capitoli/La legge di gravitazione** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AGravitazione/Capitoli/La_legge_di_gravitazione?oldid=28884 *Contributori:* Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Gravitazione/Capitoli/Campo gravitazionale** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AGravitazione/Capitoli/Campo_gravitazionale?oldid=47928 *Contributori:* Roopi, Toma.luca95, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Gravitazione/Capitoli/Teorema di Gauss per il campo gravitazionale** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AGravitazione/Capitoli/Teorema_di_Gauss_per_il_campo_gravitazionale?oldid=49636 *Contributori:* Toma.luca95, Dan, WikiToBot, Move page script, Rp60 e Anonimo: 1
- **Corso:Gravitazione/Capitoli/Energia di campo gravitazionale** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AGravitazione/Capitoli/Energia_di_campo_gravitazionale?oldid=49640 *Contributori:* Toma.luca95, Dan, WikiToBot, Move page script e Rp60
- **Corso:Gravitazione/Capitoli/Il moto dei corpi celesti e le leggi di Keplero** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AGravitazione/Capitoli/Il_moto_dei_corpi_celesti_e_le_leggi_di_Keplero?oldid=49648 *Contributori:* Toma.luca95, Dan, WikiToBot, Move page script e Rp60
- **Corso:Gravitazione/Capitoli/Considerazione col problema dei due corpi** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AGravitazione/Capitoli/Considerazione_col_problema_dei_due_corpi?oldid=39775 *Contributori:* Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Elementi di meccanica dei fluidi/Statica dei fluidi/Cosa sono i fluidi** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AElementi_di_mechanica_dei_fluidi/Statica_dei_fluidi/Cosa_sono_i_fluidi?oldid=28314 *Contributori:* Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Elementi di meccanica dei fluidi/Statica dei fluidi/Fluidi in quiete** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AElementi_di_mechanica_dei_fluidi/Statica_dei_fluidi/Fluidi_in_quiete?oldid=28316 *Contributori:* Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Elementi di meccanica dei fluidi/Statica dei fluidi/Legge di Stevino** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AElementi_di_mechanica_dei_fluidi/Statica_dei_fluidi/Legge_di_Stevino?oldid=38897 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Move page script e BillyHalley
- **Corso:Elementi di meccanica dei fluidi/Statica dei fluidi/Legge di Archimede e esperienza di Torricelli** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AElementi_di_mechanica_dei_fluidi/Statica_dei_fluidi/Legge_di_Archimede_e_esperienza_di_Torricelli?oldid=49650 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Move page script, BillyHalley e Rp60
- **Corso:Elementi di meccanica dei fluidi/Statica dei fluidi/Conseguenze della legge di Stevino** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AElementi_di_mechanica_dei_fluidi/Statica_dei_fluidi/Conseguenze_della_legge_di_Stevino?oldid=28312 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Move page script e Anonimo: 1



- **Corso:Elementi di meccanica dei fluidi/Dinamica dei fluidi/Fluidi in moto** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AElementi_di_meccanica_dei_fluidi/Dinamica_dei_fluidi/Fluidi_in_moto?oldid=47911 *Contributori:* Toma.luca95, Dan, WikiToBot, Move page script e BillyHalley
- **Corso:Elementi di meccanica dei fluidi/Dinamica dei fluidi/Legge di Bernoulli** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AElementi_di_meccanica_dei_fluidi/Dinamica_dei_fluidi/Legge_di_Bernoulli?oldid=49653 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Move page script e Rp60
- **Corso:Onde meccaniche elastiche/Capitoli/Le onde meccaniche** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AOnde_meccaniche_elastiche/Capitoli/Le_onde_meccaniche?oldid=29357 *Contributori:* Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Onde meccaniche elastiche/Capitoli/Onde sinusoidali** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AOnde_meccaniche_elastiche/Capitoli/Onde_sinusoidali?oldid=49618 *Contributori:* V.e.padulano, Dan, WikiToBot, Move page script e Rp60
- **Corso:Onde meccaniche elastiche/Capitoli/Onde longitudinali** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AOnde_meccaniche_elastiche/Capitoli/Onde_longitudinali?oldid=49619 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Move page script e Rp60
- **Corso:Onde meccaniche elastiche/Capitoli/Onde trasversali** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AOnde_meccaniche_elastiche/Capitoli/Onde_trasversali?oldid=49625 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Move page script e Rp60
- **Corso:Onde meccaniche elastiche/Capitoli/Interferenza** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AOnde_meccaniche_elastiche/Capitoli/Interferenza?oldid=49631 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Move page script e Rp60
- **Corso:Onde meccaniche elastiche/Capitoli/Onde stazionarie** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AOnde_meccaniche_elastiche/Capitoli/Onde_stazionarie?oldid=49634 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Move page script e Rp60
- **Utente:Dan/Meccanica Analitica/Relatività Speciale/La fisica dopo Maxwell** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_Analitica/Relativit%C3%A0_Speciale/La_fisica_dopo_Maxwell?oldid=39575 *Contributori:* Ale e Dan
- **Utente:Dan/Meccanica Analitica/Relatività Speciale/Esperienza di Michelson-Morley e l'ipotesi di Einstein** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_Analitica/Relativit%C3%A0_Speciale/Esperienza_di_Michelson-Morley_e_l'ipotesi_di_Einstein?oldid=49953 *Contributori:* Ale, Dan, Axis96 e EdoardoFossati
- **Utente:Dan/Meccanica Analitica/Relatività Speciale/Trasformazioni di Lorentz e composizione delle velocità** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_Analitica/Relativit%C3%A0_Speciale/Trasformazioni_di_Lorentz_e_composizione_delle_velocit%C3%A0?oldid=39583 *Contributori:* Ale e Dan
- **Utente:Dan/Meccanica Analitica/Relatività Speciale/Conseguenze dell'ipotesi di Einstein: dilatazione dei tempi e contrazione delle lunghezze** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_Analitica/Relativit%C3%A0_Speciale/Conseguenze_dell'ipotesi_di_Einstein%3A_dilatazione_dei_tempi_e_contrazione_delle_lunghezze?oldid=39567 *Contributori:* Ale e Dan
- **Utente:Dan/Meccanica Analitica/Relatività Speciale/Spazio di Minkowsky** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_Analitica/Relativit%C3%A0_Speciale/Spazio_di_Minkowsky?oldid=39581 *Contributori:* Ale e Dan
- **Utente:Dan/Meccanica Analitica/Relatività Speciale/Cinematica Relativistica** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_Analitica/Relativit%C3%A0_Speciale/Cinematica_Relativistica?oldid=39563 *Contributori:* Ale e Dan
- **Utente:Dan/Meccanica Analitica/Relatività Speciale/Dinamica Relativistica** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_Analitica/Relativit%C3%A0_Speciale/Dinamica_Relativistica?oldid=39569 *Contributori:* Ale e Dan
- **Utente:Dan/Meccanica Analitica/Relatività Speciale/Lagrangiana in relatività e l'effetto Compton** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_Analitica/Relativit%C3%A0_Speciale/Lagrangiana_in_relativit%C3%A0_e_l'effetto_Compton?oldid=39579 *Contributori:* Ale e Dan



- **Corso:Termodinamica classica/Continuazione della Meccanica e Primo principio/Introduzione al corso** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Continuazione_della_Meccanica_e_Primo_principio/Introduzione_al_corso?oldid=47412 *Contributori:* V.e.padulano e Dan
- **Corso:Termodinamica classica/Continuazione della Meccanica e Primo principio/Sistemi termodinamici e trasformazioni reversibili o quasi statiche** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Continuazione_della_Meccanica_e_Primo_principio/Sistemi_termodinamici_e_trasformazioni_reversibili_o_quasi_statiche?oldid=50200 *Contributori:* Toma.luca95, Irene, Dan e Piff
- **Corso:Termodinamica classica/Continuazione della Meccanica e Primo principio/Equazioni di stato di sistemi termodinamici** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Continuazione_della_Meccanica_e_Primo_principio/Equazioni_di_stato_di_sistemi_termodinamici?oldid=33986 *Contributori:* Dan
- **Corso:Termodinamica classica/Continuazione della Meccanica e Primo principio/Definizione operativa di temperatura** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Continuazione_della_Meccanica_e_Primo_principio/Definizione_operativa_di_temperatura?oldid=33991 *Contributori:* Dan
- **Corso:Termodinamica classica/Continuazione della Meccanica e Primo principio/Leggi dei gas e equazione di stato dei gas perfetti** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Continuazione_della_Meccanica_e_Primo_principio/Leggi_dei_gas_e_equazione_di_stato_dei_gas_perfetti?oldid=50202 *Contributori:* Val-sdav, Dan, BillyHalley e Piff
- **Corso:Termodinamica classica/Continuazione della Meccanica e Primo principio/Lavoro termodinamico** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Continuazione_della_Meccanica_e_Primo_principio/Lavoro_termodinamico?oldid=50203 *Contributori:* Crisbal, Dan e Piff
- **Corso:Termodinamica classica/Continuazione della Meccanica e Primo principio/Prima esperienza di Joule e Primo principio della termodinamica** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Continuazione_della_Meccanica_e_Primo_principio/Prima_esperienza_di_Joule_e_Primo_principio_della_termodinamica?oldid=50204 *Contributori:* Dan e Piff
- **Corso:Termodinamica classica/Continuazione della Meccanica e Primo principio/Seconda esperienza di Joule** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Continuazione_della_Meccanica_e_Primo_principio/Seconda_esperienza_di_Joule?oldid=39766 *Contributori:* Dan
- **Corso:Termodinamica classica/Trasporto di calore ed energia interna/Processi di trasporto** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Trasporto_di_calore_ed_energia_interna/Processi_di_trasporto?oldid=39447 *Contributori:* Dan
- **Corso:Termodinamica classica/Trasporto di calore ed energia interna/Legge di Fourier** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Trasporto_di_calore_ed_energia_interna/Legge_di_Fourier?oldid=39462 *Contributori:* Dan
- **Corso:Termodinamica classica/Trasporto di calore ed energia interna/Trasformazione adiabatica** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Trasporto_di_calore_ed_energia_interna/Trasformazione_adiabatica?oldid=39465 *Contributori:* Dan
- **Corso:Termodinamica classica/Trasporto di calore ed energia interna/Transizioni e diagrammi di fase** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Trasporto_di_calore_ed_energia_interna/Transizioni_e_diagrammi_di_fase?oldid=39467 *Contributori:* Dan
- **Corso:Termodinamica classica/Trasporto di calore ed energia interna/Termometro a gas** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Trasporto_di_calore_ed_energia_interna/Termometro_a_gas?oldid=39471 *Contributori:* Dan
- **Corso:Termodinamica classica/Trasporto di calore ed energia interna/Legge di Van der Waals** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Trasporto_di_calore_ed_energia_interna/Legge_di_Van_der_Waals?oldid=39489 *Contributori:* Dan



- **Corso:Termodinamica classica/Trasporto di calore ed energia interna/Studio microscopico dell'energia interna** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Trasporto_di_calore_ed_energia_interna/Studio_microscopico_dell'energia_interna?oldid=39493 *Contributori:* Dan
- **Corso:Termodinamica classica/Trasporto di calore ed energia interna/Distribuzione di Maxwell** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Trasporto_di_calore_ed_energia_interna/Distribuzione_di_Maxwell?oldid=39867 *Contributori:* Dan
- **Corso:Termodinamica classica/Cicli termodinamici e Secondo principio/Cicli termodinamici e Secondo principio/Cicli termodinamici e Secondo principio/Cicli termodinamici e Secondo principio** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Cicli_termodinamici_e_Secondo_principio/Cicli_termodinamici?oldid=39727 *Contributori:* Dan
- **Corso:Termodinamica classica/Cicli termodinamici e Secondo principio/Macchine termiche e frigoriferi** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Cicli_termodinamici_e_Secondo_principio/Macchine_termiche_e_frigoriferi?oldid=39729 *Contributori:* Dan
- **Corso:Termodinamica classica/Cicli termodinamici e Secondo principio/Secondo principio della termodinamica** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Cicli_termodinamici_e_Secondo_principio/Secondo_principio_della_termodinamica?oldid=39732 *Contributori:* Dan
- **Corso:Termodinamica classica/Cicli termodinamici e Secondo principio/Teorema di Carnot** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Cicli_termodinamici_e_Secondo_principio/Teorema_di_Carnot?oldid=39733 *Contributori:* Dan
- **Corso:Termodinamica classica/Cicli termodinamici e Secondo principio/Integrale di Clausius e definizione di Entropia** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Cicli_termodinamici_e_Secondo_principio/Integrale_di_Clausius_e_definizione_di_Entropia?oldid=39741 *Contributori:* Dan
- **Corso:Termodinamica classica/Cicli termodinamici e Secondo principio/Equazione di Clausius-Clapeyron** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Cicli_termodinamici_e_Secondo_principio/Equazione_di_Clausius-Clapeyron?oldid=39739 *Contributori:* Dan
- **Corso:Termodinamica classica/Cicli termodinamici e Secondo principio/Macrostat, microstat, entropia in funzione dei microstat** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Cicli_termodinamici_e_Secondo_principio/Macrostat%2C_microstat%2C_entropia_in_funzione_dei_microstat?oldid=39751 *Contributori:* Dan
- **Corso:Termodinamica classica/Cicli termodinamici e Secondo principio/Funzioni termodinamiche e relazioni di Maxwell** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ATermodinamica_classica/Cicli_termodinamici_e_Secondo_principio/Funzioni_termodinamiche_e_relazioni_di_Maxwell?oldid=39753 *Contributori:* Dan
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Formulari/Formulario del punto materiale** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Formulari/Formulario_del_punto_materiale?oldid=49493 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Move page script e Rp60
- **Corso:Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi/Formulari/Formulario dei sistemi e corpo rigido** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Formulari/Formulario_dei_sistemi_e_corpo_rigido?oldid=29076 *Contributori:* Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Elementi di meccanica dei fluidi/Formulari/Formulario di fluidomeccanica** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AElementi_di_meccanica_dei_fluidi/Formulari/Formulario_di_fluidomeccanica?oldid=28308 *Contributori:* Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Onde meccaniche elastiche/Formulari/Formulario delle onde elastiche** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AOnde_meccaniche_elastiche/Formulari/Formulario_delle_ond_e_elastiche?oldid=29370 *Contributori:* Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Calcolo differenziale a una variabile per la fisica/Calcolo Differenziale/-Calcolo di derivate** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ACalcolo_differenziale_a_una_variabile_per_la_fisica/Calcolo_Differenziale/Calcolo_di_derivate?oldid=47871 *Contributori:* Sofia, Toma.luca95, Dan, WikiToBot, Albe.casse e Move page script



- **Corso:Calcolo differenziale a una variabile per la fisica/Calcolo Differenziale/-Sommar**io sullo studio di funzione *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ACalcolo_differenziale_a_una_variabile_per_la_fisica/Calcolo_Differenziale/Sommario_sullo_studio_di_funzione?oldid=40568 *Contributori:* Riccardo Iaconelli, Roopi, Sofia, Dan, WikiToBot, Albe.casse e Move page script
- **Corso:Calcolo Integrale a una variabile per la fisica/Capitoli/Calcolo di primiti**ve *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ACalcolo_Integrale_a_una_variabile_per_la_fisica/Capitoli/Calcolo_di_primitive?oldid=47846 *Contributori:* Sofia, Toma.luca95, Davide Ghilardi, Dan, WikiToBot, Albe.casse e Move page script
- **Corso:Calcolo Integrale a una variabile per la fisica/Capitoli/Calcolo di aree** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ACalcolo_Integrale_a_una_variabile_per_la_fisica/Capitoli/Calcolo_di_aree?oldid=28159 *Contributori:* Alessandro Longo, Dan, WikiToBot, Albe.casse e Move page script
- **Corso:Basi di equazioni differenziali a una variabile/Capitoli/Eq. differenzia**li del secondo ordine non omogenee *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ABasi_di_equazioni_differenziali_a_una_variabile/Capitoli/Eq._differenziali_del_secondo_ordine_non_omogenee?oldid=28096 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Albe.casse e Move page script

14.2 Immagini

- **File:1-over-x-plus-x_abs.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d3/1-over-x-plus-x_abs.svg *Licenza:* CC-BY-SA-3.0 *Contributori:* Own work *Artista originale:* Cronholm144 (talk · contribs)
- **File:A(t).jpg** *Fonte:* <http://pool.wikitolearn.org/images/pool/9/93/A%28t%29.jpg> *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Ascissa_curvilinea.jpg** *Fonte:* http://pool.wikitolearn.org/images/pool/3/3a/Ascissa_curvilinea.jpg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Asymptote03.png** *Fonte:* <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/8a/Asymptote03.png> *Licenza:* Public domain *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Carnot_cycle_p-V_diagram.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/06/Carnot_cycle_p-V_diagram.svg *Licenza:* Public domain *Contributori:* Own work *Artista originale:* Keta
- **File:Cavendish_Torsion_Balance_Diagram.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/91/Cavendish_Torsion_Balance_Diagram.svg *Licenza:* Public domain *Contributori:* Own work This W3C-unspecified vector image was created with Inkscape . *Artista originale:* Chris Burks (Chetvorno)
- **File:Compton_scattering_600x225.png** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fc/Compton_scattering_600x225.png *Licenza:* Public domain *Contributori:* Own work *Artista originale:* Astarte.Mauro
- **File:Cusp_function.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/38/Cusp_function.svg *Licenza:* CC0 *Contributori:* Own work *Artista originale:* Fulvio314
- **File:CvT.png** *Fonte:* <http://it.wikitolearn.org/images/it/2/20/CvT.png> *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Diagramma di fase acqua_2.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/51/Diagramma_di_fase_acqua_2.svg *Licenza:* GFDL *Contributori:*
 - Diagramma di fase acqua.svg

Artista originale: Diagramma di fase acqua.svg: utente:jhc..



File:Diagramma_v(t).jpeg Fonte: http://pool.wikitolearn.org/images/pool/6/65/Diagramma_v%28t%29.jpeg Licenza: ? Contributori: ? Artista originale: ?

File:Diagramma_x(t).jpeg Fonte: http://pool.wikitolearn.org/images/pool/c/cf/Diagramma_x%28t%29.jpeg Licenza: ? Contributori: ? Artista originale: ?

File:Energiainterna.png Fonte: <http://it.wikitolearn.org/images/it/1/16/Energiainterna.png> Licenza: ? Contributori: ? Artista originale: ?

File:Eqclapeyron.png Fonte: <http://it.wikitolearn.org/images/it/f/f5/Eqclapeyron.png> Licenza: ? Contributori: ? Artista originale: ?

File:Function_x\char"005E\relax{}2.svg Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/dd/Function_x%5E2.svg Licenza: CC-BY-SA-3.0 Contributori: Self-made using gnuplot Artista originale: Qualc1

File:Function_x\char"005E\relax{}3.svg Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f5/Function_x%5E3.svg Licenza: CC-BY-SA-3.0 Contributori: self-made, based on Image:Function_x^2.svg by Qualc1 Artista originale: Oleg Alexandrov

File:Hyperbola_one_over_x.svg Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/43/Hyperbola_one_over_x.svg Licenza: CC-BY-SA-3.0 Contributori: No machine-readable source provided. Own work assumed (based on copyright claims). Artista originale: No machine-readable author provided. Ktims assumed (based on copyright claims).

File:Miche-Morley.png Fonte: <http://it.wikitolearn.org/images/it/f/fb/Miche-Morley.png> Licenza: ? Contributori: ? Artista originale: ?

File:Michelson_Interferometer_scheme.png Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/bd/Michelson_Interferometer_scheme.png Licenza: CC BY-SA 3.0 Contributori: Werner Boeglin, Dept. of Physics, FIU, Miami Artista originale: Polytec GmbH

File:P-V-T_Diagram_(Water).fr.svg Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/ba/P-V-T_Diagram_%28Water%29.fr.svg Licenza: CC BY-SA 3.0 Contributori: Own work. (Translated from File:P-V-T Diagram (Water).de.svg) Artista originale: McZusatz

File:Phase-diag2-it.svg Fonte: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c1/Phase-diag2-it.svg> Licenza: Public domain Contributori:

da en.Wikipedia, trasferita su Commons da User:Sfan00_IMG con CommonsHelper

(Original text : SVG conversion from raster image Image:Phase-diag.png; some additions from Image:Phase diagram.png) Artista originale: Creator:Matthieumarecha

File:Piano_inclinato.png Fonte: http://pool.wikitolearn.org/images/pool/a/a1/Piano_inclinato.png Licenza: ? Contributori: ? Artista originale: ?

File:Potenzialevanderwaals.png Fonte: <http://it.wikitolearn.org/images/it/3/34/Potenzialevanderwaals.png> Licenza: ? Contributori: ? Artista originale: ?

File:Praeession.svg Fonte: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/bb/Praeession.svg> Licenza: CC-BY-SA-3.0 Contributori:

- ``

Artista originale: User Herbye (German Wikipedia). Designed by Dr. H. Sulzer

File:Prinzip_Torricelli.jpg Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0d/Prinzip_Torricelli.jpg Licenza: CC BY-SA 2.0 de Contributori: Quelle: "Übungsaufgaben zur Thermodynamik mit Mathcad" (2002) Fachbuchverlag Leipzig Artista originale: Volker Sperlich

File:Punto_angoloso.png Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a0/Punto_angoloso.png Licenza: Public domain Contributori: ? Artista originale: ?

File:Simple_pendulum_generalized_coordinates.svg Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/25/Simple_pendulum_generalized_coordinates.svg Licenza: CC0 Contributori: Own work Artista originale: This SVG version by Maschen, based on user:Gurjete Ukaj's File:Pendulum.gif.

File:Sommario-Studio-Funzione2.svg Fonte: <http://it.wikitolearn.org/images/it/9/97/Sommario-Studio-Funzione2.svg> Licenza: ? Contributori: ? Artista originale: ?

File:Streamlines_and_streamtube.svg Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/73/Streamlines_and_streamtube.svg Licenza: Public domain Contributori: Own work (Image



based on now-deleted [File:Streamlines and streamtube.png](#)) This *W3C-unspecified vector image* was created with *Inkscape* . *Artista originale*: *Twisp*
File:Termometrogas.png *Fonte*: <http://it.wikitolearn.org/images/it/0/04/Termometrogas.png>
Licenza: ? *Contributori*: ? *Artista originale*: ?

File:VanderWaals_liquefazione_CO2.jpg *Fonte*: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e6/VanderWaals_liquefazione_CO2.jpg *Licenza*: CC-BY-SA-3.0 *Contributori*:

Originally from [it.wikipedia](#); description page is (was) [here](#) *Artista originale*: User Marc Lagrange on [it.wikipedia](#)

File:Vec666.svg *Fonte*: <http://pool.wikitolearn.org/images/pool/3/30/Vec666.svg> *Licenza*: ? *Contributori*: ? *Artista originale*: ?

File:Velmedia.png *Fonte*: <http://pool.wikitolearn.org/images/pool/0/07/Velmedia.png> *Licenza*: ? *Contributori*: ? *Artista originale*: ?

File:Vertical_tangent.svg *Fonte*: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e9/Vertical_tangent.svg *Licenza*: Public domain *Contributori*: Own work (Original text: *self-made*) *Artista originale*: pbroks13*talk?

File:Viriale.png *Fonte*: <http://it.wikitolearn.org/images/it/b/b8/Viriale.png> *Licenza*: ? *Contributori*: ? *Artista originale*: ?

File:World_line2-it.svg *Fonte*: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/43/World_line2-it.svg *Licenza*: CC BY-SA 3.0 *Contributori*:

- [World_line2.svg](#)

Artista originale:

derivative work: [Ylebru](#) (talk)

File:⊠⊠⊠⊠⊠.svg *Fonte*: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/dd/%E6%96%9C%E6%96%B9%E6%8A%95%E5%B0%84%E3%81%AE%E9%81%8B%E5%8B%95.svg> *Licenza*: CC0 *Contributori*: Own work *Artista originale*: ⊠⊠⊠⊠⊠

14.3 Licenza dell'opera

- [Project:Copyright Creative Commons Attribution Share Alike 3.0 & GNU FDL]
- [Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0](#)

