最新本

崔鑫編

升學會考必備

高中大代數複習指導

現代教育研究社出版

高中複習指導叢書

高中大代數複習指導

崔　鑫　編

上海現代教育研究社出版

1 9 4 7

升學考試必讀

高中大代数複習指導

每冊實售

編者　崔鑫

出版者　現代教育研究社

發行者　上海四馬路中市　北新書局

分行發所　各省北新分局

民國卅六年三月新二版

目　　錄

高中大代數複習指導

綜合除法及餘數定理

綜合除法 當除式爲 $x-b$,被除式爲 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}+a_n$;吾人可由下法求得商 Q 及餘數 R。今設 $C_0, C_1, C_2\cdots\cdots C_{n-1}$ 表 Q 之係數,則

$$\begin{array}{cccccc|l} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_{n-1} & a_n & b \\ & c_0b & c_1b & \cdots & c_{n-2}b & c_{n-1}b & \\ \hline c_0 & c_1 & c_2 & & c_{n-1} & R & \end{array}$$

卽(1) 將被除式的係數按 x 之降羃寫爲一行,將除數 b 寫於右邊,形如上式.

(2) 將 a_0 落下寫爲 c_0;但 a_0 與 c_0 之數完全相同,不過 a_0 代表被除式之係數;c_0 表示商 Q 之係數.

(3) 用 b 乘 c_0 爲 c_0b,放於 a_1 下方,a_1+c_0b 而得 c_1.

(4) 同樣用 c_1 乘 b 得 c_1b,c_1b+a_2 而得 c_2.

(5) 如此同樣舉行至第末項得 $a_n+c_{n-1}b$ 卽爲餘數 R.

例 以 $x-2$ 除 $3x^4-5x^3-4x^2+3x-2$.

$$\begin{array}{ccccc|l} 3 & -5 & -4 & +3 & -2 & 2 \\ & 6 & 2 & -4 & -2 & \\ \hline 3 & 1 & -2 & -1 & -4 & \end{array}$$

故 $Q=3x^3+x^2-2x-1$ $R=-4$.

【注意】 當除式爲 $x+b$ 時,則變爲 $x-(-b)$. 以 $-b$ 代 b 演算.當 $ax-b$ 爲除式時,應變爲 $x-\dfrac{b}{a}$,以 $\dfrac{b}{a}$ 代 b 再用綜合除法演算.

例　以 $3x+1$ 除 $3x^3+16x^2-13x-6$

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & 16 & -13 & -6 & -1/3 \\ & -1 & -5 & +6 & \\ \hline 3 & 15 & -18 & 0 & \end{array}$$

故得　$Q=3x^2+15x-18$　　$R=0$

餘數定理　一 x 多項式（polynomial in x）被 $x-b$ 除，得一餘數，此餘數等於以 b 代 x 於多項中所得之結果．故設以 $f(x)=0$ 代被除式，則 $f(b)=0$ 代其餘式．此稱餘數定理（The Remainder Theorem）．

例　試以 $x-2$ 除 $3x^4+x^2-1$．求其餘數．

1．　$f(x)\equiv 3x^4+x^2-1$

$f(2)=51$ 卽為所求．

2．　應用綜合除法

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ & 6 & 12 & 26 & 52 & \\ \hline 3 & 6 & 13 & 26 & 51 & \end{array}$$

故　$Q=3x^3+6x^2+13x+26$．　　$R=51$

推論1．　當 $x=b$ 時多項式 $f(x)$ 之餘數若爲零，則多項式 $f(x)$，含有 $x-b$ 之因式．

推論2．　設多項式 $f(x)$，當 $x=a$，b，c，……時之餘數皆爲零，則 $f(x)$ 含有 $(x-a)(x-b)(x-c)$……之因式．

雜例1．　應用餘數定理求m之值，設 $x^3+mx^2-20x+6$ 能被 $x-3$ 整除．

$3^3+3^2m-20\times3+6=0$

$9m=27$　　$m=3$．

2．　設 $(x+2)$ 及 $(x-4)$ 皆能整除 $2x^3-x^2+lx+m$，試求 l 及 m 之值．

〔解〕　若 $x+2$ 能整除 $2x^3-x^2+lx+m$，則 $m-2l=20$

若 $x-4$ 可整除之，則 $4l+m=-112$．

由上兩式得　$l=-22$．　$m=-24$

3. 應用剩餘定理，設 $ax^3+bx^2-47x-15$ 能爲 $(3x+1)$ 及 $(2x-3)$ 所整除時，其 a, b 之値爲何．（北洋工院 1936）

二項式定理

I. 多項式之連乘　形如 $(a+b+c)(d+e)(f+g+h)\cdots\cdots$ 連乘之方法爲：盡吾人之可能方法，於每一因子（factor）內各取一項相乘所得諸積之和．又設第一因子有K項，第二因子有 l 項，第三因子有m項等等；在各相似項未合併以前，則其完全乘積之項數爲 $K\cdot l\cdot m\cdots\cdots$．

II. 一次二項之積：

$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\cdots\cdots(x+a_n)\equiv x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots\cdots+A_n$．在此式中 A_1，A_2，等等如下：

$A_1=\Sigma a_1=a_1+a_2+a_3\cdots\cdots+a_n$，

$A_2=\Sigma a_1\cdot a_2=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3\cdots\cdots+a_{n-1}a_n$，

$A_3=\Sigma a_1\cdot a_2\cdot a_3=a_1a_2a_3+a_1a_2a_4\cdots\cdots+a_{n-2}a_{n-1}a_n$，$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$A_n=a_1a_2a_3a_4\cdots\cdots a_n$，

III. 二項式定理　形如 $(x+b)^n$ 之展開式中，

1. 其展開式爲 $n+1$ 項．
2. x 之指數逐項減一，而 b 之指數逐漸增一，然各項內 x 及 b 指數之總和皆爲 n．
3. 首項係數爲 1，第二項係數爲 n，其他項之係數得按下法求之：

以任一項內 x 之指數，乘該項之係數，再以 b 之指數加一除之，所得之商卽爲次項之係數．

IV. 二項展開式：　下爲二種展開方式．

$$(x+b)^n=x^n+nx^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{(1+1)}x^{n-2}b^2$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.(2+1)}x^{n-3}b^3+\cdots\cdots+b^n.$$ 此式或作下形式：

$$(x+b)^n=x^n+nx^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^{n-2}b^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}x^{n-3}b^3+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}+\cdots\cdots+b^r.$$

$$(x+b)^n=C_0^nx^n+C_1^nx^{n-1}b+C_2^nx^{n-2}b^2+C_3^nx^{n-3}b^3+\cdots$$
$$\cdots+C_r^nx^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n.$$

V.　普通項　二項展開式中之第 $(r+1)$ 項，稱普通項，是項之展開後之係數為：

$$C_r^nx^{n-r}b^r.\text{或作}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^{n-r}b^r$$

VI. 二項展開式中之最大係數：

1. 設 n 為偶：　$C^n_{\frac{n}{2}}$ 為最大係數.

2. 設 n 為奇：　$C^n_{\frac{n-1}{2}}$ 或 $C^n_{\frac{n+1}{2}}$ 為最大係數.

(證法見後之排列與組合)

VII. 二項連級數：

例：$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{\underline{|2}}x^2$

$$+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{\underline{|3}}x^3+\cdots\cdots=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$$
$$+\cdots\cdots\cdots$$

VIII. 自然對數之底　當 n 漸近無限大時，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 之極限即為自然對之底e.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\left(\frac{1}{n}\right)^3$$
$$+\cdots\cdots$$

$$=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\lfloor\underline{2}}=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor\underline{3}}+\cdots\cdots$$

若 n 爲無限大時，則上式變爲

$$e=1+1+\frac{1}{\lfloor\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\underline{3}}+\frac{1}{\lfloor\underline{4}}\cdots\cdots=2.718281828\cdots\cdots$$

IX. 定理

1. 在 $(1+x)^n$ 之展開式中，奇項係數之和，等於其偶項係數之和。（清華）

【證】 $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\cdots\cdots$

設 $x=-1$，則得

$$O=C_0-C_1+C_2-C_3\cdots\cdots+(-1)^nx^n.$$

故 $C_0+C_2+C_4\cdots\cdots=C_1+C_3+C_5\cdots\cdots$

2. $(1+x)^n$ 之展開式中，諸項係數之和等於 2^n

【證】 $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\cdots\cdots$

設 $x=1$，則得

$$2^n=C_0+C_1+C_2+C_3+\cdots\cdots+C_n$$

$=$ 諸項係數之和。

X. 雜例：

1. 試求 $(3-2x)^7$ 展開式中 x^4 之係數。

【解】 在 $(3-2x)^7$ 之展開式中，含 x^4 之項爲第五項，故其係數根據普通項法則，應爲：

$$\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{\lfloor\underline{4}}3^3\cdot2^4x^4=15120x^4.$$

2. 試求 $(a^2-4x^2)^{-\frac{5}{2}}$ 展開式中之第$(r+1)$項。（北洋1936）

【解】 其展開中之第 $(r+1)$ 項爲。

$$\frac{\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}-1\right)\cdots\cdots\left(-\frac{5}{2}-r+1\right)}{\lfloor\underline{r}}a^{(-5-2r)}\cdot(2x)^{2r}.$$

3. 設 $(a+b)^{20}$ 展開式中之第4r項之係數與第 $(r+2)$ 項之係數相等，求其係數之值。（北洋1936）

【解】 根據二項展開式，第4r項之係數為 C^{20}_{4r-1}．第$(r+2)$項之係數為 C^{20}_{r+1}．故

$C^{20}_{4r-1}=C^{20}_{r+1}$ 或 $20-(4r-1)=r+1$.

解之． $r=4$.

（$\because C^n_{n-r}=C^n_r$．故 $20-(4r-1)=r+1$．見後排列與組合．）

故其係數之值為 $C^{20}_5=15504$.

4． 試證 $C_0+2C_1+3C_2+\cdots\cdots+(n+1)C_n=(n+2)2^{n-1}$．其中 $C_0, C_1, C_2\cdots\cdots$為 $(1+x)^n$ 展開式之係數．

【證】 $C_0+2C_1+3C_2\cdots\cdots+(n+1)C_n=[C_0+C_1+C_2\cdots\cdots+C_n]$
$+[C_1+2C_2+3C_3+\cdots\cdots nC_n]$

$$=2^n+\left[n+2\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}+3\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}+\cdots\cdots n\right]$$

$$=2^n+n\left[1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{\lfloor 2}+\cdots\cdots+1\right]$$

$$=2^n+n2^{n-1}=(n+2)2^{n-1}.$$

5． 設 $(1+x)^n=1+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4\cdots\cdots+C_nx^n$.

求證 $1+C_1^2+C_2^2+C_3^2\cdots\cdots C_n^2=\dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n\cdot\lfloor n}$.

【證】 既 $(1+x)^n=1+C_1x+C_2x^2+\cdots\cdots+C_nx^n$

及 $(1+x)^n=C_n+C_{n-1}x+C_{n-2}x^2\cdots\cdots+C_2x^{n-2}+C_1x^{n-1}+x^n$.

顯然 $1+C_1^2+C_2^2+C_3^2+C_4^2\cdots\cdots+C_n^2$

$=$右邊兩式乘積中 x^n 之係數和

$=$左邊兩式乘積中 x^n 之係數和

$=(1+x)^{2n}$ 展開式中 x^n 之係數和

$$=\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\cdot\lfloor n}.$$

【注意】 上題卽求證諸係數之平方和等於$\dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n\cdot\lfloor n}$。

6. 求證 $C_0-2C_1+3C_2-4C_3+\cdots\cdots+(-1)^n(n+1)C_n=0$

【證】 $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots\cdots+C_nx^n\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$(1+\dfrac{1}{x})^{-2}=1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\cdots\cdots(-1)^n(n+1)\dfrac{1}{x^n}\cdots(2)$

(1),(2) 兩式相乘則

$C_0-2C_1+3C_2-4C_3+\cdots\cdots+(-1)^n(n+1)C_n$

$=$右兩式乘積中 x^0 之係數,

$=$左兩式乘積中 x^0 之係數,

$=(1+x)^n(1+\dfrac{1}{x})^{-2}$ 中 x^0 的係數,

但 $(1+x)^n(1+\dfrac{1}{x})^{-2}$ 展開式中 x^0 之係數爲 0

故 $C_0-2C_1+3C_2-4C_3\cdots\cdots+(-1)^n(n-1)C_n=0$

7. 求證 $2C_0+C_1+2C_2+C_3+\cdots\cdots=3\cdot 2^{n-1}$。(交通)

【證】 $2C_0+C_1+2C_2+C_3+\cdots\cdots$

$=[C_0+C_1+C_2+\cdots\cdots]+[C_0+C_2+C_4\cdots\cdots]$

$=2^n+\dfrac{2^n}{2}=2^n(1+\dfrac{1}{2})=3\cdot 2^{n-1}$。

8. 證 $C_0C_1+C_1C_2+C_2C_3+\cdots\cdots+C_{n-1}C_n$.

$$=\frac{\lfloor 2n}{\lfloor(n+1)\lfloor(n-1)}.$$

9. 求 $(x-\dfrac{1}{x})^{2n}$ 之中間一項 (平大1935)

【解】 若將$(x-\dfrac{1}{x})^{2n}$ 展開,可得 $(2n+1)$ 項

故其中項爲 $n+1$ 項.

故 中項$=\pm\, C_n^{2n}x^{(2n-n)}(\dfrac{1}{x})^n$

$$=\pm\, C_n^{2n}x^n(\frac{1}{x^n})=\pm C_n^{2n}.$$

若 n 爲奇，則取負值，若爲偶，則取正值。

二次方程式與極大極小

I.　二次方程式之根　$ax^2+bx+c=0$ 爲二次普通式，其二根爲：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

II.　二次方程式之討論　設二次方程式爲 $Ax^2+Bx+C=0$，

若 $A\neq0$，$B\neq0$，$C=0$ 則一根爲零，

若 $A\neq0$，$B=0$，$C=0$ 則兩根爲零，

若 $A=0$，$B\neq0$　　則一根爲無限大，

若 $A=0$，$B=0$，$C\neq0$ 則兩根爲無限大，

若 $A\neq0$，$B=0$，$C\neq0$ 則兩根異號等值。

III. 極大 Maxima 極小 minima。　吾人若想某二次式之極大值，先設法將原方式變爲 $a-(x-b)^2$，命 $x=b$，則爲所求；若求其極小，則先將原式變爲 $(x-b)^2+a$ 之形式，命 $x=b$，則爲所求。

IV. 根之判別式　二次式之根含有 B^2-4ac 項，此項稱根之判別式；常以△代表。若△爲正，則爲有理根，若非完全平方則爲無理根，但其根皆爲實，兩根不等；若△爲零，爲有理根，且兩根相等；若爲負，則爲虛根，且共軛。

V　雜例

1.　a 爲何數，$x^2-ax+a+3=0$ 之兩根始相等？

【解】　兩根相等之條件爲：

$$\triangle=(-a)^2-4(a+3)\times1=0$$

即　$a^2-4a-12=0$　　$\therefore a=6$；　或 $a=-2$。

2.　設 $x^2+x+2=0$ 之二根爲A及B．試求 A^3+B^3，

$$\frac{A}{B^2}+\frac{B}{A^2}，及\ A^3B+B^3A\ 之值。$$

由二項式定理(II)知 $A+B=-1$，$A\cdot B=2$。

$A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)=-1+6=5.$

$\frac{A}{B^2}+\frac{B}{A^2}=\frac{A^3+B^3}{A^2B^2}=\frac{5}{4}$

$A^3B+AB^3=AB(A^2+B^2)=AB[(A+B)^2-2AB]=2(1-4)$

$=-6.$

3. 設 $ax^2+bx+c=0$ 一根爲他根之 $\frac{1}{3}$ 倍，

求證 $3b^2=16ac.$

證： 設一根爲3A，則他根爲A，

知 $3A+A=-\frac{b}{a}$， 則$16A^2=\frac{b^2}{a^2}$

又 $3A^2=\frac{c}{a}$

$\therefore \frac{16}{3}=\frac{b^2}{ac}$

$\therefore 3b^2=16ac$

4. 欲方程式 $x^2+2Kx+2K^2+3K-4=0$ 有實根，K 之値當爲何？

【解】 若此方程式有實根，必 $(2K)^2-4(2K^2+3K-4)\geqq 0.$

卽 $4K^2-8K^2-12K+16\geqq 0$

卽 $-4K^2-12K+16\geqq 0$

卽 $-(K^2+3K-4)\geqq 0$

卽 $(K-1)(K+4)\leqq 0$

$\therefore -4\leqq K\leqq 1.$

5. 若方程式 $(x-K)^2+3(x-2K)=0$ 之一根爲零，求K之値？（自解之）

6. 若方程式 $m(x^2-x+1)+Kx=x-m^2+2$ 的兩根都是零，求K及m之値.

【解】 將方程式化爲標準式，得

得 $mx^2+(K-m-1)x+m^2+m-2=0$

若兩根皆爲零，則

$K-m-1=0$…………………(1)

$$m^2+m-2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

解(2)式，得 $m=1$ 或 -2

代入(1)式，得 $K=2$ 或 -1

7. 在下列方程式 $mx^2+2x^2+2m-3mx+9x-10=0$，m 應爲何值 (a)兩根相等，(b)兩根爲實數不相等，(c)兩根爲虛根. (北洋1935)

8. 若 $x^2+px+q=0$ 中一根爲他根之兩倍，求 p 與 q 之關係式.

【解】 設一根爲 2A，則他根爲 A.

故 $3A=-p$， 或 $9A^2=p^2$

又 $2A^2=q$.

故得 p, q 之關係式爲：

$$2p^2-9q=0$$

9. 若 $ax^2+bx+c=0$ 中一根爲他根之 n 倍，求 a, b, c 與 n 之關係式.

【解】 仝上 得其關係式爲 $(n+1)^2a^2c-ab^2n=0$

10. 設 α, β 爲 $ax^2+bx+c=0$ 之二根，試求以 $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}$ 做二根之方程式.

【解】 由題知所求之方程式爲：

$$\left(x-\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(x-\frac{\beta}{\alpha}\right)=0$$

即 $x^2-\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\right)x+1=0$

即 $\alpha\beta x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha\beta=0$

即 $\alpha\beta x^2-[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]+\alpha\beta=0$

但 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$， $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

故所求之方程式爲

$$\frac{c}{a}x^2-\left[\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right]x+\frac{c}{a}=0$$

即　$acx^2-(b^2-2ac)x+ac=0$

11. 求 $2x^2-4x+5$ 之極小値.

【解】　$2x^2-4x+5=2(x^2-2x+1)+3$

$$=2(x-1)^2+3$$

故當 $x=1$ 時，此式之極小値爲 3.

12. 求 $3-4x+x^2$ 之極大値.

【解】　$3-4x+x^2=3-(4+4x+x^2)+4$

$$=7-(x+2)^2$$

故當 $x=-2$ 時，此式之極大値爲 7.

13. 試求 x 及 y 之最大與最小値，設 x，y 之關係式爲

$$x^2+4y^2-8x-16y-4=0$$

【解】　先以 x 爲定數，求變數 y.

$$y=\frac{4\pm\sqrt{-(x+2)(x-10)}}{2}.$$

欲 y 爲實數，開方號內必爲正數，故

$$-2\leqq x\leqq 10$$

即 x 之極大値爲10，極小値爲-2.

再以 y 爲定數，求變數 x.

$$x=4\pm\sqrt{-4(y+1)(y-5)}$$

同理：　$-1\leqq y\leqq 5$

即 y 之極小値爲-1，極大値爲5.

【註】　若想使某兩因式相乘之積得正數，必使因式中之變數較其常數之大者，更大，較其小者更小；反之若相乘之積爲負數，則變數較其常數之大者小，較小者大.

14. 解不等式　$x(x^2-3x+2)(2x^2+7x+3)>0$

【解】　題意問 x 等於何値時，此式得正數.

原式可寫爲：

$$x(x-1)(x-2)(2x+1)(x+3)>0$$

各因式之根排列爲：

$$-3<-\tfrac{1}{2}<0<1<2.$$

故此不等式之解答爲：

$x>0$；　$0<x<1$；

$-3<x<-\frac{1}{2}$.

15　解不等式

$$1+\frac{x-4}{x-3}>(x-2)/(x-1)$$

【解】　原式可寫爲 $1+\dfrac{x-4}{x-3}-\dfrac{x-2}{x-1}>0$

或爲　$\dfrac{x^2-4x-1}{(x-1)(x-3)}>0$

即　$\dfrac{[x-(2+\sqrt{3})][x-(2-\sqrt{3})]}{(x-1)(x-3)}>0$

將分子分母之根排列得.

$(2-\sqrt{3})<1<3<(2+\sqrt{3})$

故此不等式之解答爲：

$x>(2+\sqrt{3})$

$1<x<3$；　$x<(2-\sqrt{3})$

16. 解　$\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-6}+\sqrt{3x-5}=0$

移項：$\sqrt{2x-3}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{5x-6}$

平方化簡得：$\sqrt{(2x-3)(3x-5)}=1$

再平方得　$6x^2-19x+14=0$

故　$x=2$ 或 $\dfrac{7}{6}$

覆驗結果，知 $\dfrac{7}{6}$ 爲增根，當去之.

17. 解　$2x^2-6x+5\sqrt{x^2-3x-1}-5=0$

原式變爲：

$2(x^2-3x+1)-5\sqrt{x^2-3x-1}-3=0$

即　$[(\sqrt{x^2-3x+1})-3][(2\sqrt{x^2-3x+1})+1]=0$

故　$\sqrt{x^2-3x+1}=3$.………………………… (1)

或　$\sqrt{x^2-3x+1}=-\frac{1}{2}$………………………… (2)

第(2)式不合理，解第一式得：

$x=5$ 與 -2.

18. 求 $\sqrt{4+3\sqrt{4+3\sqrt{4+3\sqrt{4+\cdots}}}}$ 之值

【解】 設 $x=\sqrt{4+3\sqrt{4+3\sqrt{4+\cdots}}}$

則 $x^2=4+3x$

即 $x^2-3x-4=0$

故 $x=-1$ 或 4

但 -1 不合理，

故原式之值為 4.

19. 求 $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{\cdots\cdots}}}}$ 之值

【解】 $x=a$.

20. 解 $(x^2+14x+24)(x^2+11x+24)=4x^2$ (清華1936)

【解】 原式寫為：

$[(x^2+10x+24)+4x][(x^2+10x+24)+x]=4x^2$

即 $(x^2+10x+24)^2+5x(x^2+10x+24)+4x^2=4x^2$

即 $x^2+10x+24=0$ 或

$(x^2+10x+24)+5x=0$

解之得：$x=-4$; -6; $\frac{1}{2}(-15\pm\sqrt{129})$

21. 解 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$

【解】 原式可寫為：

$[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]=24$

$[(x^2+5x)+4][(x^2+5x)+6]=24.$

即 $(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)=0$

即 $(x^2+5x)(x^2+5x+10)=0$

由是：$x=0$; -5; $\frac{1}{2}(-5\pm i\sqrt{15})$

【註】 i 代表 $\sqrt{-1}$，$i\sqrt{15}=\sqrt{-15}$.

22. 設 x 為實數，證：

$\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ 之值必小於 5，大於 9.

【證】 設 $\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}=y.$

化簡得： $x=\dfrac{-(y-17)\pm\sqrt{(y-17)^2-(y-17)(7y-71)}}{(y-1)}$

據13題註．$[(y-17)^2-(y-17)(7y-71)]>0$

即 $8(y^2-14y+45)>0$

即 $8(y-5)(y-9)>0$

故 y 必小於 5，大於 9.

23. $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ 中，x 之值為實數，其值為何？

【解】 其值在 3 與 $\frac{1}{3}$ 之間．

比，比例

I. 比　一數 a 為 b 之若干倍，則曰 a 對於 b 之比；常以 a:b 表之．其中 a 曰前項，b 曰後項．

若 $a>b$ 則曰優比．

若 $a<b$ 則曰劣比．

若 $a=b$ 則曰等比．

II. 比之性質

1. 比之前後項，以同一數乘除之，其比值不變．
2. 設 a，b 及m皆為正數，若 $(a+m):(b+m)$ 較 $a:b$ 大，則 $a<b$．反之，若 $a>b$ 則 $(a+m):(b+m)$ 較 $a:b$ 為小．

III. 等比定理

若 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$，

則每一比 $=\dfrac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}$

$=\dfrac{pa+qc+re+\cdots\cdots}{pb+qd+rf+\cdots\cdots}$

IV. 不等比定理

若 $\frac{a_1}{b_1}$，$\frac{a_2}{b_2}$，$\frac{a_3}{b_3}+\cdots\cdots\frac{a_n}{b_n}$之值不等，且分子分母俱爲正數．

則 $\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}$必較諸比中最大者之值小，而較最小者爲大．

V．比例　若 $a:b$ 與 $c:d$ 之比例相等，則 a,b,c,d 成比例．

VI．比例定理

若　$a:b=c:d$　則：

(1)　$ad=bc$

(2)　$a:c=b:d$

(3)　$b:a=d:c$

(4)　$a\pm b:b=c\pm d:d$

(5)　$a\pm b:a\mp b=c\pm d:c\mp d$

VII．雜例

1．若　$x:(mz-ny)=y:(nx-lz)=z:(ly-mx)$，則

(1) $lx+my+nz=0$　　(2) $x^2+y^2+z^2=0$

證　(1) $\frac{x}{mz-ny}=\frac{y}{nx-lz}=\frac{z}{ly-mx}$

$$=\frac{lx+my+nz}{lmz-lny+mnx-mlz+lny-mnx}$$

$$=\frac{lx+my+nz}{0}$$

故　$lx+my+nz=0$

(2) 原式可寫爲：

$$\frac{x^2}{x(mz-ny)}=\frac{y^2}{y(nx-lz)}=\frac{z^2}{z(ly-mx)}$$

分子分母各相加，則分母變爲零；故知 $x^2+y^2+z^2=0$

2．若　$a:b=x:y$，求證：

$(a^3+2b^3):ab^2=(x^3+2y^3):xy^2$

【證】設　$a:b=x:y=r$．

故　$a=rb$，　$x=ry$．

故　$(a^3+2b^3)/ab^2=(r^3b^3+2b^3)/rb^3=(r^3+2)/r.$

$(x^3+2y^3)/xy^2=(r^3y^3+2y^3)/ry^3=(r^3+2)/r.$

3．若　$\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$

求證　$\dfrac{x+y+z}{a+b+c}=\dfrac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{2(ax+by+cz)}$

【證】 原式之比$=\dfrac{x+y+z}{a+b+c}$……………………(1)

又原式之比$=\dfrac{x(y+z)}{(y+z)(b+c-a)}=\dfrac{z(x+y)}{(x+y)(a+b-c)}$

$=\dfrac{y(z+x)}{(z+x)(c+a-b)}.$

$=\dfrac{\text{分子之和}}{\text{分母之和}}=\dfrac{x(y+z)+y(z+x)+z(y+x)}{2(ax+by+cz)}$

……………………………………(2)

由(1)(2)兩式即明矣.

4．若　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$

求證：

$$\frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}+\frac{z^2+c^2}{z+c}=\frac{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}{(x+y+z)+(a+b+c)}$$

【證】 設　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=K$

則　$x=aK,\quad y=bK,\quad z=cK.$

代入左式得　$\dfrac{a^2K^2+a^2}{aK+a}+\dfrac{b^2K^2+b^2}{bK+b}+\dfrac{c^2K^2+c^2}{cK+c}$

$=\dfrac{(K^2+1)a}{K+1}+\dfrac{(K^2+1)b}{K+1}+\dfrac{(K^2+1)c}{K+1}$

$=\dfrac{(K^2+1)(a+b+c)}{K+1}\cdot\dfrac{a+b+c}{a+b+c}$

$=\dfrac{K^2(a+b+c)^2+(a+b+c)^2}{K(a+b+c)+(a+b+c)}$

$$=\frac{(Ka+Kb+Kc)^2+(a+b+c)^2}{(Ka+Kb+Kc)+(a+b+c)}$$

$$=\frac{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}{(x+y+z)+(a+b+c)}$$

5. 若 $a:b=c:d$ 求證：

$$\frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}.$$

【證】 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=K$

則 $b=\frac{a}{K}$, $\quad d=\frac{c}{K}$

故 $$\frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{\frac{a^2}{K}+\frac{c^2}{K}}{\frac{a^2}{K}-\frac{c^2}{K}}=\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}.$$

6. 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則 $\frac{a+b}{c+d}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$ （清華）

【證】 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=r$

則 $a=br$, $\quad c=dr$.

$a+b=b(r+1)$, $\quad c+d=d(r+1)$

故 $\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d}$.

又 $\sqrt{a^2+b^2}=b\sqrt{r^2+1}$

$\sqrt{c^2+d^2}=d\sqrt{r^2+1}$

故 $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}=\frac{b}{d}$

故 $\frac{a+b}{c+d}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$.

7. 設 $a:b=c:d$ 求證

$$\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}=\sqrt{ac+\frac{c^3}{a}}:\sqrt{bd+\frac{d^3}{b}}$$

【證】 同上.

8. 若 $x:a=y:b=z:c$,

則 $\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$

【證】 設 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}=K$, 則

$x=aK$, $y=bK$, $z=cK$, $x+y+z=K(a+b+c)$.

$$\therefore \frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(aK)^3}{a^2}+\frac{(bK)^3}{b^2}+\frac{(cK)^3}{c^2}$$

$$=K^3(a+b+c)$$

$$=\frac{K^3(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$$

9. 若 $b^2+c^2=a^2$, 求證:

$(a+b+c):(c+a-b)=(a+b-c):(b+c-a)$

【證】 由 $b^2+c^2=a^2$, 故 $(b+c)^2-a^2=2bc$

$[(b+c)+a][(b+c)-a]=(b+c)^2-a^2=2bc\cdots(1)$

又由 $b^2+c^2=a^2$ $a^2-(b-c)^2=2bc$

$[a+(b-c)][a-(b-c)]=a^2-(b-c)^2=2bc\cdots(2)$

由(1)及(2)式, 卽明矣.

10. 設 $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$ 求證:

$$\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}.$$

11. 若 $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}$ 求證:

$(a^2+b^2+c^2)(p^2+q^2+r^2)=(ap+bq+cr)^2$.

【證】 設 $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}=R$ 則

$a=pR$, $b=qR$, $c=rR$.

$(a^2+b^2+c^2)(p^2+q^2+r^2)=R^2(p^2+q^2+r^2)^2$

且 $(ap+bq+cr)^2=[R(p^2+q^2+r^2)]^2$

$$=R^2(p^2+q^2+r^2)^2.$$

$\therefore$ $(a^2+b^2+c^2)(p^2+q^2+r^2)=(ap+bq+cr)^2$

12. 若 $\dfrac{x}{l(mb+nc-la)}=\dfrac{y}{m(nc+la-mb)}=\dfrac{z}{n(la+mb-nc)}$，

求證：$\dfrac{l}{x(by+cz-ax)}=\dfrac{m}{y(cz+ax-by)}=\dfrac{n}{z(ax+by-cz)}$

【證】 原式可寫為：

$$\frac{\frac{x}{l}}{mb+nc-la}=\frac{\frac{y}{m}}{nc+la-mb}=\frac{\frac{z}{n}}{la+mb-nc}$$

後兩等式相加 $=\dfrac{\frac{y}{m}+\frac{z}{n}}{2la}$ ＝前後兩等式相加＝前兩等式相加。

即 $\dfrac{ny+mz}{a}=\dfrac{lz+nx}{b}=\dfrac{mx+ly}{c}$

即 $\dfrac{nxy+mxz}{ax}=\dfrac{lyz+nxy}{by}=\dfrac{mxz+lyz}{cz}$,

$=\dfrac{2lyz}{by+cz-ax}$ ＝兩相似式

(兩式相加，減第三式而得上完全式，希讀者練習。)

以 2xyz 除上式得

$$\frac{l}{x(by+cz-ax)}=\frac{m}{y(cz+ax-by)}=\frac{n}{z(ax+by-cz)}$$

不　等　式

I. 重要不等式有三。

1. (1) x 為正，若 $\dfrac{a+x}{b+x}>\dfrac{a}{b}$，則 $a<b$。

若 $\dfrac{a+x}{b+x}<\dfrac{a}{b}$，則 $a>b$。

(2) x 為負，若 $\dfrac{a+x}{b+x}>\dfrac{a}{b}$，則 $a>b$。

若 $\dfrac{a+x}{b+x}<\dfrac{a}{b}$，則 $a<b$。

2. $\frac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}$ 比 $\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$，$\frac{e}{f}$，………中之最大者小，最小者大.

3. a 及 b 爲兩正數，則其:

等差中項>等比中項>調和中項.

II. 雜例.

1. 證不等式　$a^2+b^2>2ab$.

【證】 設　$(a-b)^2>0$

$a^2-2ab+b^2>0$，　$a^2+b^2>2ab$.

2. 試證　$\frac{1}{2}(x+y)>\sqrt{xy}$　　$\frac{1}{2}(a^2+b^2)>\sqrt{a^2b^2}$

【證】 設　$a^2=x$. 由第一題即得.　　$\frac{1}{2}(a^2+b^2)-ab>0$

3. 試證　$a^2+b^2+c^2>bc+ca+ab$.

【證】 $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab>0$

故　$\frac{1}{2}[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b^2)]>0$

但此式大於零爲已知之事實.（$b\neq c$，得相減後再平方，永得正數）

$\therefore$　$a^2+b^2+c^2>bc+ca+ab$.

4. 求證　$a^3+b^3+c^3>3abc$　（交通）

【證】 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

但　$(a+b+c)>0$，　$(a^2+b^2c^2-ab-bc-ca)>0$

故　$a^3+b^3+c^3>3abc$.

今令　$x=a^3$，　$y=b^3$，　$z=c^3$.

則　$\frac{x+y+z}{3}>\sqrt[3]{xyz}$

同理可得下定理:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a\cdots\cdots}{n}>\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdots}$$

5. 試證　$a^5+b^5>a^4b+ab^4$

【證】 $a^5+b^5-a^4b-ab^4$

$=a^4(a-b)-b^4(a-b)$

$=(a-b)(a^2-b^2)(a^2+b^2)$

$=(a-b)^2(a+b)(a^2+b^2)$

$=$正數.

故　$a^5+b^5>a^4b+ab^4$

6. 試證　$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n>\underline{\lvert n}$.

【證】$\frac{1+2+3+\cdots\cdots+n}{n}>\sqrt[n]{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots n}$

左邊分子之中項爲$\frac{n+1}{2}$，其總和爲$\frac{n(n+1)}{2}$.

故　$\frac{n(n+1)}{2n}>\sqrt[n]{\underline{\lvert n}}$.

即　$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n>\underline{\lvert n}$.

7. 設　$a\neq b$，皆爲正，試證：

$(a+b)(a^3+b^3)>(a^2+b^2)^2$

【證】欲此不等式成立，但須：

$a^4+a^3b+ab^3+b^4>a^4+2a^2b^2+b^4$

但須，$a^3b+ab^3>2a^2b^2$

但須　$a^2+b^2>2ab$

但須　$a^2-2ab+b^2>0$

但　$(a-b)^2>0$　爲已知之事實.

$\therefore$　$(a+b)(a^3+b^3)>(a^2+b^2)^2$ 爲確.

8. 解　$(x+1)(x-3)(x-4)>0$

〔解〕$[x-(-1)](x-3)(x-4)>0$

因　$-1<3<4$

$\therefore$　$x>4$.　或　$-1<x<3$

9. 試證　$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2>abc(a+b+c)$

對　　數

I. 定義：　等式 $y=a^x$ 內，指數 x 名爲 y 關於 a 底之對數，用次之符號表之：

$x=\log_a y$

II. 對數之性質.

1. 若 $0<x<1$, 則 $\log_a x<0$

若 $x>1$, 則 $\log_a x>0$.

2. $\log_a 1=0$ 因 $a^0=1$.

3. $\log_a a=1$ 因 $a^1=a$.

4. 若 $a>1$.

則. $\underset{x\to\infty}{\mathrm{Lim.}}\ \mathrm{Log}_a x=+\infty$.

5. 若 $a>1$

則 $\underset{x\to 0}{\lim.}\ \log_a x=-\infty$

6. $\log A\cdot B=\log A+\log B$

7. $\log \frac{A}{B}=\log A-\log B$

8. $\log A^n=n\cdot\log A$

9. $\log\sqrt[n]{A}=\frac{1}{n}\log A$

10. 若 x_1, x_2, x_3 ……諸數爲等比級數,則其對數成等差級數.

III. 雜例.

1. 設 $(a^2+b^2)=7ab$ 求證:

$\log[\frac{1}{3}(a+b)]=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$ (北大)(清華1936)

【證】 $a^2+b^2=7ab$

$(a+b)^2=9ab$

$\frac{1}{3}(a+b)=\sqrt{ab}$

故 $\log[\frac{1}{3}(a+b)]=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$.

2. 已知 $\log 3=0.4771$,

試求. $\log\sqrt[3]{81\sqrt[4]{729\times 9^{-\frac{2}{3}}}}$ 之值.

【解】 $\log\sqrt[3]{81\sqrt[4]{729\times 9^{-\frac{2}{3}}}}$

$$=\log\left(81\cdot729^{\frac{1}{4}}\cdot9^{-\frac{2}{12}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=\log\left(3^{4}\cdot3^{\frac{6}{4}}\cdot3^{-\frac{4}{12}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=\log 3^{\frac{31}{18}}=\frac{31}{18}\times0.4771$$

$$=0.8217.$$

3. 已知 $\log 3=0.4771$ 求

$$\log\sqrt[3]{81\sqrt[4]{729\times9^{\frac{4}{3}}}}$$ （清華）

解之得 0.9277.

4. 如對數底爲 $2\sqrt{2}$

試求 $32\sqrt[5]{4}$ 之對數.

【解】 設 x 爲所求之對數.

則 $(2\sqrt{2})^{x}=32\sqrt[5]{4}=2^{5}\cdot4^{\frac{1}{5}}$

$$=2^{\frac{27}{5}}$$

但 $(2\sqrt{2})^{x}=2^{\frac{3}{2}x}$.

$$\frac{3}{2}x=\frac{27}{5}$$

即 $x=\frac{27}{5}\times\frac{2}{3}=3\frac{3}{5}$。

5. 已知 $\log 3=0.4771$.

求 $\log\left[(2\cdot7)^{3}\times(.81)^{\frac{1}{3}}\div(90)^{-\frac{5}{4}}\right]$ 之值.

【解】 $2\cdot7=\frac{27}{10}$. 再立方解之得 2.7781.

6. 設 $a^{2}+b^{2}=6ab$.

證 $\log\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}[\log a+\log b]$

7. 證 $\log\sqrt[3]{\frac{(x+1)^{3}+1}{x^{3}-1}}=\frac{1}{3}[\log(x+2)-\log(x-1)]$

【證】 $\log\sqrt[3]{\frac{(x+1)^{3}+1}{x^{3}-1}}=\log\sqrt[3]{\frac{(x+2)(x^{2}+x+1)}{(x-1)(x^{2}+x+1)}}$.

$$=\log\sqrt[3]{\frac{(x+2)}{(x-1)}}=\tfrac{1}{3}[\log(x+2)-\log(x-1)].$$

8. 證 $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}>100$

【證】 吾人欲證此題爲眞必先知:

$\log 3=0.4771,\quad \log 7=.8451,\quad \log 2=.3010.$

$\log 10=1.\qquad \log 100=2.$

$$\text{故}\quad \log\left(\frac{21}{20}\right)^{100}=100[\log 21-\log 20]$$

$$=100[\log 3+\log 7-\log 2-\log 10]$$

$$=100[0.4771+0.8451-0.3010-1]$$

$$=2.12.$$

$\log 100=2.$

$\because\quad 2.12>2.$

故 $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}>100$

9. 由對數級數

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\cdots\cdots$$

$$\text{證}\quad \log_e\frac{M}{N}=2\left[\frac{M-N}{M+N}+\frac{1}{3}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^5+\cdots\cdots\right]$$

【證】 $\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots$

$$\log_e(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots$$

$$\log_e\frac{1+x}{1-x}=\log_e(1+x)-\log_e(1-x)$$

$$=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right]$$

設 $\frac{1+x}{1-x}=\frac{M}{N}$,

則　$x=\dfrac{M-N}{M+N}$.

故　$\log_e\dfrac{M}{N}=2\left[\dfrac{M-N}{M+N}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{M-N}{M+N}\right)^3+\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{M-N}{M+N}\right)^5+\cdots\cdots\right]$　（清華）

10. 試求對數換底之公式.

【解】 設　$a^x=N$　　卽 $x=\log_a N$

卽　$a^{\log_a N}=N$

兩邊皆取以 b 爲底之對數.

卽　$\log_b a^{\log_a N}=\log_b N$

$\log_a N\cdot\log_b a=\log_b N$

故　$\log_a N=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}$卽爲所求.

11. 試解　$13^{2x+5}=14^{x+7}$

【解】 $(2x+5)\log 13=(x+7)\log 14$.

故　$x=\dfrac{7\log 14-5\log 13}{2\log 13-\log 14}=2.268$

12. 解　$3^x-3^{-x}=\dfrac{3}{2}$.

令　$n=3^x$.　則得

$n-\dfrac{1}{n}=\dfrac{3}{2}$　　$n=2$.

$x=\log_3 2=\dfrac{\log 2}{\log 3}=\dfrac{0.3010}{0.4771}=0.6309$

13. 解　$x^{2\log x}=10x$.

【解】 $x^{2\log x}=10x$.

$\log x^{2\log x}=\log x+1$

$2\log^2 x-\log x-1=0$

$(2\log x+1)(\log x-1)=0$

故　$\log x=-\frac{1}{2}$ 不合理.（任何數之對不得爲負數）

$\log x=1 \qquad x=10.$

13. 解 $\frac{1}{2}\log(x+7)+\log\sqrt{3x+1}=1$

【解】 $\frac{1}{2}[\log(x+7)+\log(3x+1)-2]=0$

即 $\frac{1}{2}[\log(x+7)+\log(3x+1)-\log 100]=0$

$$\frac{1}{2}\log\frac{(x+7)(3x+1)}{100}=0$$

$$\frac{(x+7)(3x+1)}{100}=1$$

解之. $x=3$ 或 $\frac{31}{3}$.

14. 解 $\left.\begin{array}{l} 3^x=y^3 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 18y^x-y^{2x}=81 \cdots (2) \end{array}\right\}$

【解】 由(2), $(y^x-9)^2=0$

$\therefore\ y^x=9 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

由(1) $x\log 3=2\log y \cdots\cdots\cdots (4)$

由(3) $x\log y=2\log 3 \cdots\cdots\cdots (5)$

(4)(5) 兩式相乘得:

$x^2=4 \qquad \therefore\ x=\pm 2$

$x=2,\ y=3; \qquad x=-2,\ y=\frac{1}{-3}.$

15. $(\frac{1}{2})^{1000}$ 之第一位有效數字與小點數間共有若干個零?

【解】 $\log(\frac{1}{2})^{1000}=1000(\log 1-\log 2)$

$=1000(0-.30103)$

$=-301.03$

$=\overline{302}+.97$

故$(\frac{1}{2})^{1000}$之第一位有效數字與小數點間共有 301 個零.

【註】 凡指數爲變數如 $2x^y$, 必用對數解.

16. 解下聯立方程.

1. $2^x=16^y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$x+4y=4. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

2. 試證 $\log_b a\cdot\log_a b=1.$ (清華1935)

【解】 1. 由(1) $x\log 2=y\log 16$.

$\therefore\ x=\dfrac{\log 16}{\log 2}y=4y$

將 x 之値代入(2)式

得 $4y+4y=4$.

$\therefore\ y=\frac{1}{2}$

$\therefore\ x=2$.

聯立方程式

I. 兩方程式有一爲一次者,用代入法解之.

II. 兩方程式有一能分解因式者：

例. 解1. $\begin{cases}2x^2+4xy+2y^2+3x+3y-2=0\cdots\cdots\cdots(1)\\3x^2-32y^2+5=0\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$

由(1) $2(x+y)^2+3(x+y)-2=0$

解之 $x+y=\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots(3)$

或 $x+y=-2\cdots\cdots\cdots(4)$

解 (2), (3) 及 (2), (4) 得

$\begin{cases}x=1\\y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{3}{29}\\y=\dfrac{23}{58}\end{cases}$

$\begin{cases}x=-3\\y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{41}{29}\\y=-\dfrac{17}{29}\end{cases}$

III. 兩方程式合併後能分解因式者.

例. 試解： $x^2+2xy+4y^2+3x=0\cdots\cdots\cdots(1)$

$xy+3y+1=0\cdots\cdots\cdots(2)$

【解】 第(2)式乘 2 再與第(1)式相加得：

$(x+2y)^2+3(x+2y)+2=0 \cdots\cdots (3)$

解(3)式 $x+2y=-1 \cdots\cdots (4)$

$x+2y=-2 \cdots\cdots (5)$

解 (2)(4)；(2)(5) 吾人可得其根爲：

$-3\pm2\sqrt{3}$，$1\mp\sqrt{2}$；$-3\pm\sqrt{5}$，$(1\mp\sqrt{5})/2$

IV. 配爲和差.

例. 試解 $x^2+y^2=58 \cdots\cdots (1)$

$x-y=10 \cdots\cdots (2)$

【解】 (2)平方： $x^2-2xy+y^2=100 \cdots\cdots (3)$

(1)−(3) $-2xy=42 \cdots\cdots (4)$

(1)−(4) $(x+y)^2=16 \cdots\cdots (5)$

即 $(x+y)=\pm4 \cdots\cdots (6)$

解 (2),(6) 得 $\left.\begin{array}{l}x=7\\y=-3\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=3\\y=-7\end{array}\right\}$

V. 施用除法.

例. 試解 $x^4+x^2y^2+y^4=21 \cdots\cdots (1)$

$x^2+xy+y^2=7 \cdots\cdots (2)$

【解】 (1)÷(2) $x^2-xy+y^2=3 \cdots\cdots (3)$

(2)−(3) $xy=2 \cdots\cdots (4)$

(2)+(4) $x+y=\pm3$

(3)−(4) $x-y=\pm1$

解之即得： $\left.\begin{array}{l}x=\pm1\\y=\pm2\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}x=\pm2\\y=\pm1\end{array}$

VI. 兩方程式俱爲齊次者，

例. 試解 $x^2-3xy+3y^2=13 \cdots\cdots (1)$

$x^2+xy+y^2=19 \cdots\cdots (2)$

【解】 令 $y=mx$，代入.

則得 $x^2(1-3m+3m^2)=13 \cdots\cdots (3)$

$x^2(1+m+m^2)=19 \cdots\cdots (4)$

$$\therefore \quad \frac{1-3m+3m^2}{1+m+m^2}=\frac{13}{19}$$

$$13(1+m+m^2)=19(1-3m+3m^2)$$

$$22m^2-35m+3=0$$

$$(2m-3)(11m-1)=0$$

$$\therefore \quad m=\frac{3}{2}$$

但 $x^2(1+m+m^2)=19$, $\therefore$ $x^2=4$.

故 $\left.\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ y=\pm 3 \end{array}\right\}$

或 $m=\frac{1}{11}$，代入(4)得

$$\left.\begin{array}{l} x=\pm\frac{1}{7}\sqrt{7} \\ y=\pm\frac{1}{7}\sqrt{7} \end{array}\right\}$$

VII. 雜例

1. 解 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4}$ ……………………(1)

$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{16}$ ……………………(2)

【解】 命 $\frac{1}{x}=v$ $\frac{1}{y}=u$

則原題變爲：

$$\left.\begin{array}{l} v+u=\frac{3}{4} \\ v^2+u^2=\frac{5}{16} \end{array}\right\}$$

解之卽明.

2. $6x^2-xy-2y^2=56$ …………………… (1)

$5x^2-xy-y^2=19$ …………………… (2)

$7\times(1)$. $42x^2-7xy-14y^2=392$ ………(3)

$8\times(2)\qquad 40x-8xy-8y^2=392\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$(3)-(4)\qquad 2x^2+xy-6y^2=0$

$(2x-3y)(x+2y)=0$

$x=\frac{3}{2}y$, 或 $x=-2y$.

用代入法解之卽得.

$\left.\begin{array}{l}x=\pm 3\sqrt{35}/5\\ y=\pm 2\sqrt{35}/5\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{l}x=\pm 2\sqrt{21}/3\\ y=\mp\sqrt{21}/3\end{array}\right\}$

3. 解 $x^4+y^4=97\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$x+y=5\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

【解】 令 $x=u+v$, $y=u-v$

則得 $(u+v)^4+(u-v)^4=97\cdots\cdots\cdots(3)$

$2u=5\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

將(4)式代入(3)式化簡得：

$16v^4+600v^2-151=0$

解之. $v=\pm\frac{1}{2}$ 或 $\pm\frac{i\sqrt{151}}{2}$.

$u=\frac{5}{2}$.

$\therefore\quad x=2,\ 3,\ \frac{5\mp i\sqrt{151}}{2}$.

$y=3,\ 2,\ \frac{5\pm i\sqrt{151}}{2}$.

又可用下法解之.

(2) 式自乘四次

$x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4=625.\cdots\cdots(5)$

$(5)-(1)\quad 4x^3y+6x^2y^2+4x^3y=528\cdots(6)$

(2)式平方 $x^2+2xy+y^2=25\cdots\cdots\cdots(7)$

(7)式乘 $4xy$. $\quad 4x^3y+8x^2y^2+4xy^3=100xy\cdots\cdots(8)$

$(8)-(6)\quad x^2y^2-100xy+528=0$

$\therefore\quad (xy-6)(xy-44)=0$

$xy=6$. 或 $xy=44$.

$\left.\begin{array}{l} xy=6 \\ x+y=5 \end{array}\right\}$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} xy=44 \\ x+y=5 \end{array}\right\}$

上兩式用代入法解之卽得.

4. 解 $x-y=2$ ……………………(1)

$x^5-y^5=242$ ……………………(2)

【解】 設 $x=u+1$, $y=u-1$

$\therefore$ $(u+1)^5-(u-1)^5=242$.

卽 $u^4+2u^2-24=0$

$(u^2+6)(u^2-4)=0$.

$u=\pm2$ 或 $u=\pm i\sqrt{6}$.

故 $\left.\begin{array}{l} x=\pm2+1 \\ y=\pm2-1 \end{array}\right\}$ 或 $\begin{array}{l} x=\pm i\sqrt{6}+1 \\ y=\pm i\sqrt{6}-1 \end{array}$

5. $x+y+z=13$ ……………………(1)

$x^2+y^2+z^2=65$ ……………………(2)

$xy=10$ ……………………(3)

【解】 $(3)\times2+(2)$ $(x+y)^2+z^2=85$

令 $u=x+y$, 則得

$u+z=13$.

$u^2+z^2=85$

解之 $z=6$ $\quad u=7$.

或 $z=7$ $\quad u=6$.

卽 $\left.\begin{array}{l} x+y=7 \\ xy=10 \end{array}\right\}$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} x+y=6 \\ xy=10 \end{array}\right\}$

解之得. $x=5$, 2 或 $3\pm i$

$y=2$, 5, 或 $-3\mp i$

6. 解 $x(y+z)+2=0$

$y(z-2x)+21=0$

$z(2x-y)-5=0$

【解】 三式可寫爲

$$xy+xz=-2$$
$$2xy+yz=-24$$
$$2xy-yz=5$$

故 $xy=3 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$xz=-5 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

$yz=-15 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

(3)×(2)×(1)得 $x^2y^2z^2=15\times15$

$xyz=15 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

(4)÷(1) $z=\pm5$.

(4)÷(2) $y=\mp3$.

(4)÷(3) $x=\mp1$.

7. 解 $(x+y)(x+z)=2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$(y+z)(y+x)=3 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

$(z+x)(z+y)=6 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

(1)×(2)÷(3) $(x+y)^2=1$.

故 $x+y=\pm1 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

同理 $y+z=\pm3 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

$z+x=\pm2 \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$

(4)+(6)−(5).

$2x=\pm(1+2-3)$

∴ $x=0$ 或 0

$y=1$ 或 1

$z=2$ 或 -2

8. 解聯立方程式

$2x^2+3y^2=4a^2-5xy \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$3x+2y+a=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$ (北大1935)

【解】 由(2) $y=\dfrac{-a-3x}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

將(3)代入(1)式

$$2x^2+3\frac{(-a-3x)^2}{4}+5x\frac{(-a-3x)}{2}=4a^2$$

化簡得：

$$8x^2+3(-a-3x)^2+10(-a-3x)x=16a^2$$

或　$8x^2+3a^2+18ax+27x^2-10ax-30x^2=16a^2$

$$5x^2+8ax-13a^2=0$$

卽　$(5x+13a)(x-a)=0$

故　$x=-\frac{13}{5}a$；或 $x=a$。

將 x 之値代入(3)式

得　$y=\dfrac{-a+\frac{39}{5}a}{2}=\frac{34}{10}a=3\frac{2}{5}a$。

或　$\frac{-4}{2}a=-2a$。

9\. 解　$x+y+z=6$ ……………………………… (1)

$x^2+y^2+z^2=14$ ……………………………… (2)

$yz=2$ ……………………………… (3)　(清華1935)

【解】 (2)+2(3)得　$x^2+y^2+z^2+2yz=18$

或　$x^2+(y+z)^2=18$ ……………………… (4)

由(1)式得　$y+z=6-x$ ……………………… (5)

將(5)代入(4)式

得　$x^2+(6-x)^2=18$

$$x^2+36-12x+x^2=18$$

$x^2-6x+9=0$　　卽 $x=3$。

將 x 之値代入(5)

得　$y+z=3$ ……………………………… (6)

由(3)及(6)得

$y=2$ 或 1

$z=1$ 或 2。

部份分式

定義　有一分式欲分析之爲若干分式之代數合，此若干分數式

名爲原分式之部份分式.

II. 定理　對於分母之不重複一次因式 $x-a$ 分成之相當項爲 $\frac{A}{(x-a)}$；重複一次因式 $(x-a)^n$ 分成之相當項爲：

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+\cdots\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

對於分母之不重複二次因 x^2+px+q 分成的相當項爲：

$\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$；重複之因式$(x^2+px+q)^n$ 分成之相當項爲：

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots\cdots+\frac{B_n+C_n}{(x^2+px+q)^n}.$$

【註】 變部份分式時，若爲假分式，必先變爲眞分式，而後再變爲部份分式.

I. 分解 $\frac{23x-11x^2}{(2x-1)(9-x^2)}$ 爲部份分式

【解】 設 $\frac{23x-11x^2}{(2x-1)(9-x^2)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{3-x}+\frac{C}{3+x}$

即 $23x-11x^2=A(3-x)(3+x)+B(2x-1)(3+x)$

$+C(2x-1)(3-x)$

使 $2x-1=0$　　得 $A=1.$

使 $3-x=0$　　得 $B=-1.$

使 $3+x=0$　　得 $C=4.$

$\therefore$ $\frac{23x-11x^2}{(2x-1)(9-x^2)}=\frac{1}{2x-1}+\frac{-1}{3-x}+\frac{4}{3+x}.$

2. 試證 $\frac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{(x-2)}$

$+\frac{9}{2(x-3)}.$

3. 分解 $\frac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}$ 爲部份分式.

【解】 設 $\frac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}=\frac{A}{1-2x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$

則 $3x^2+x-2=A(x-2)^2+B(1-x)(x-2)+C(1-x)$

設　$1-2x=0$　　$A=\frac{1}{3}$

$x-2=0$　　$C=-4$

將上式展開使 x^2 之係數相等，則

$$3=A-2B,\quad 即\ B=-\frac{5}{3}$$

$$\therefore\quad \frac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}=\frac{1}{3(1-2x)}+\frac{-5}{3(x-2)}-\frac{4}{(x-2)}$$

4. 試分解 $\dfrac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)}$ 爲部份分式．

【解】 設 $\dfrac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)}=\dfrac{Ax+B}{(x^2-x+1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2-x+1}$

$+\dfrac{E}{x-3}$．

則 $5x^2-4x+16=(Ax+B)(x-3)$

$+(Cx+D)(x^2-x+1)(x-3)$

$+E(x^2-x+1)^2$．

設 $x-3=0$　　則 $E=1$．

代入E值，移項，以 $(x-3)$ 除之．

$-(x^3+x^2+x+3)=Ax+B+(Cx+D)(x^2-x+1)$

上式再被 x^2-x+1 除之，得

$$-x-2-\frac{2x+3}{x^2-x+1}=\frac{Ax+B}{x^2-x+1}+Cx+D$$

故 $-x-2=Cx+D$　　$C=-1$　$D=-2$．

$-(2x+3)=Ax+B$　　$A=-2$　$B=-3$．

故 $\dfrac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)}=\dfrac{2x+3}{(x^2-x+1)^2}+\dfrac{x-2}{x^2-x+1}$

$+\dfrac{1}{x-3}$

5. 證 $\dfrac{42-19x}{(x^2+1)(x-4)}=\dfrac{2x-11}{x^2+1}-\dfrac{2}{x-4}$．

6. 分解 $\dfrac{9x^3-24x^2+48x}{(x-2)^4(x+1)}$ 爲部份分式．

【解】 設 $\dfrac{9x^3-24x2+48x}{(x-2)^4(x+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{f(x)}{(x-2)^4}$.

則 $9x^3-24x^2+48x=[f(x)](x+1)+A(x-2)^4$

命 $x+1=0$ 則 $A=-1$.

代入A值，則

$$(x+1)[f(x)]=(x-2)^4+9x^3-24x^2+48x$$
$$=x^4+x^3+16x+16.$$

$\therefore$ $f(x)=x^3+16$

但 $x^3+16=(x-2)^3+6(x-2)^2+12(x-2)+24$.

【註】 上法見方程之變易.

故 $\dfrac{f(x)}{(x-2)^4}=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{6}{(x-2)^2}+\dfrac{12}{(x-2)^3}$

$+\dfrac{24}{(x-2)^4}$.

$\therefore$ $\dfrac{9x^3-24x^2+48x}{(x-2)^4(x-1)}=\dfrac{1}{(x+1)}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{6}{(x-2)^2}$

$+\dfrac{12}{(x-2)^3}+\dfrac{24}{(x-2)^4}$.

7. 分解 $\dfrac{5x^3+6x^2+5x}{(x^2-1)(x+1)^3}$ 爲部份分式.

8. 分解 $\dfrac{x^4-12}{(x+2)^2(x^2-3)}$ 爲部份分式. (上海交大1935)

【解】 原題爲假分式,故先用除法.

$$\frac{x^4-12}{(x+2)^2(x^2-3)}=1+\frac{-4x^3-x^2+12x}{(x+2)^2(x^2-3)}$$

$$=1+\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-3}$$

由是得, $-4x^3-x^2+12x=A(x+2)(x^2-3)+B(x^2-3)$
$+(Cx+D)(x+2)^2$.

設 $x=-2$ $B=4$

$x=\sqrt{3}$ $+\sqrt{3}C+D=-3(2-\sqrt{3})^2$

$x=-\sqrt{3}$ $-\sqrt{3}C+D=3(2+\sqrt{3})^2$

$\therefore\quad D=-21$

$C=12.$

比較 x^3 之係數，得 $A+C=-4$。

$A=-16.$

$$\therefore\quad \frac{x^4-12}{(x+2)^2(x^2-3)}=1-\frac{16}{x+2}+\frac{4}{(x+2)^2}+\frac{12x-21}{x^2-3}.$$

9. 化 $\dfrac{x^3+7x^2-x-8}{(x^2+x+1)(x^2-3x-1)}$ 爲部份分式。

（答 $\dfrac{13x-23}{3(x^2-3x-1)}-\dfrac{10x-1}{3(x^2+x+1)}$）。

10. 分解下分數爲散分式：　（唐山交大1935）

$$\frac{20x^2+34x+8}{(x^3+2x^2-2x-4)(x+2)^2}$$

【解】 原題分母可再化爲 $(x^2-2)(x+2)^3$

故設 $$\frac{20x^2+34x+8}{(x^2-2)(x+2)^3}=\frac{Ax+B}{x^2-2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+2)^2}+\frac{E}{(x+2)^3}.$$

則 $$20x^2+34x+8=(Ax+B)(x+2)^3+C(x^2-2)(x+2)^2+D(x^2-2)(x+2)+E(x^2-2).$$

設 $x=-2$　　則 $E=10.$

$x=\pm\sqrt{2}$　則 $(\pm\sqrt{2}+2)^3(\pm\sqrt{2}A+B)=48\pm34\sqrt{2}.$

$\therefore\quad A=B=1.$

使兩邊係相等．則　$C=-1$

使 $x=0$　　$D=-3.$

故 $$\frac{20x^2+34x+8}{(x^2-2)(x+2)}=\frac{x+1}{x^2-2}-\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^3}+\frac{10}{(x+2)^3}.$$

11. 化 $\dfrac{2x^3-7x^2}{(x^3+1)(x^2-x+1)}$ 為部份分式，(唐山交大1934)

級　數

I.　等差級數：　級數之每前後連續兩項之差之相等者曰等差級數．今設 a 為首項，d 為公差，n 為項數，l 為末項，s 為總和；故得下公式

1. $l=a+(n-1)d$.

2. $s=\dfrac{n}{2}(a+l)=\dfrac{n}{2}(2a+\overline{n-1}d)$

【例】 求等差級數 $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$，$\dfrac{1}{1-x}$，$\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$……n項之和．

【解】 公差 $d=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}$，

n項之和 $S_n=\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{2}{1+\sqrt{x}}+\dfrac{(n-1)\sqrt{x}}{1-x}\right)$

$$=\frac{n}{2(1-x)}(2+\overline{n-1}\sqrt{x}-2\sqrt{x}).$$

II.　等比級數(幾何級數)　級數之每前後連續兩項之比相等者曰等比級數．今設首項為 a，公比為 r，項數為 n，末項為 l，總和為 s，故得下公式．

1. $l=ar^{n-1}$.

2. $s=\dfrac{a-lr}{1-r}=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$.

【例】 三數成等差級數，其和為 9.，若此三數依次增加 1，3，13，則成等比級求此三數．(清華1934)

【解】 設 x 為中數，　d 為公差．

則 x－d 為小數，　x＋d 為大數．

按題設知．

$$x-d+x+x+d=9.$$

即　$3x=9$.

$x=3$.

又知　$x-d+1$,　$x+3$,　$x+d+13$ 為等比級數.

即　$4-d$,　6　$d+16$　為等比級數.

$\therefore$　$6^2=(4-d)(d+16)$

即　$d^2+12d-28=0$

或　$(d-2)(d+14)=0$

即　$d=2$　或　-14.

故所求之三數為

1,　3,　5

或　17,　3,　-11.

III. 無窮項遞減等比級數.　無窮項遞減等比級數之總和 s, 與前者少有不同, 求之如下.

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$$

設　$-1<r<1$ 在 $n\longrightarrow\infty$ 時, $r^n\longrightarrow 0$

$$\therefore\quad S_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{1-r}.$$

【例】　試求　$\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+\cdots\cdots$

級數之級限, 設 $n\longrightarrow\infty$　(北大)

【解】　此級數為等比級數, 公比為 $\frac{2}{3}$, 以 S_n 表 n 項之和.

$$\text{則}\quad S_n=\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}}=3\sqrt{\frac{3}{2}}-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-\frac{1}{2}}.$$

但　$n\longrightarrow\infty$　$\therefore$　$3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-\frac{1}{2}}\longrightarrow 0$

$$\therefore\quad S_n=3\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

IV. 調和級數.　級數之倒數成等差級數者曰調和級數.

V. 中項.　設 a, b 為前後兩項.

1. 等差級數中項　$A=\dfrac{a+b}{2}$.

2. 等比級數中項　$G=\sqrt{ab}$.

3. 調和級數中項　$H=\dfrac{2ab}{a+b}$

【例】 求證　等比級數之中項爲等差中項及調和中項之比例中項.

【證】 $A.H=\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{2ab}{a+b}=ab=G^2$

VI. 高級等差級數. 設 a_1 爲首項 a_n 爲第 n 項. n 爲項數, d_1, d_2, d_3,……d_r 爲第 1, 2, 3,……r 次逐差. 則得下列公式.

1. $$a_n=a_1+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{\underline{|2}}d_2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{(n-1)\cdots\cdots(n-r)}{\underline{|r}}dr$$

2. $$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}d_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}d_2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r)}{\underline{|r+1}}dr.$$

【例】 試求　1^3, 2^3, $3^3\cdots\cdots n^3$ 之和.

【解】 與級數爲　1, 8, 27, 64, 216……

第一次逐差　7, 19, 37, 61, 91……

第二次逐差　12, 18, 24, 30……

第三次逐差　6, 6, 6……

第四次爲零.

已求得逐差, 可代入(2)公式得

$$S_n=n+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}.7+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}.12$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}6.$$

化簡　$S_n=\dfrac{n^4+2n^3+n^2}{4}=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$=(1+2+3\cdots\cdots n)^2.$$

VII. 雜例.

1. 設級數

$(y^2+2x)+(y^4+4x)+(y^6+6x)+\cdots\cdots$

試求 n 項之總和.

【解】 將上級數寫爲

$$(y^2+y^4+y^6+\cdots\cdots)+(2x+4x+6x+\cdots\cdots)$$

$$=\frac{y^2(1-y^{2n})}{1-y^2}+\frac{n}{2}(2x+2nx)$$

$$=\frac{y^2(1-y^{2n})}{1-y^2}+n(x+nx).$$

2. 有三數成等差級數，其和爲 15，其立方和爲 495，試求此三數. (答 3，5，7)

3. 試證 $\sin^2 30$， $\sin^2 45$， $\sin^2 60$， $\sin^2 90$ 成等差級數.

4. 設 $x<1$. 試求 $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$ 無窮項之總和.

【解】 設 $S=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$

則 $xS=x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots$

$\therefore$ $S-xS=1+x+x^2+x^3\cdots\cdots$

$$=\frac{1}{1-x}.$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{(1-x)^2}$$

5. 試求下級數無窮項之和.

$$S=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\cdots\cdots$$

【解】 $\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}\cdots\cdots$

$$(1-\frac{1}{2})S=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3.$$

$S=6$.

6. 求下高級等差級數之總和.

$S=1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+n^2$.

【解】 $n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$,

$(n-1)^3-(n-2)^3=3(n-1)^2-3(n-1)+1$

$(n-2)^3-(n-3)^3=3(n-2)^2-3(n-2)+1$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$3^3-2^3=3\cdot3^2-3\cdot3+1$

$2^3-1^3=3\cdot2^2-3\cdot2+1$

$1^3-0^3=3\cdot1^2-3\cdot1+1$

相加得：

$$n^3=3(1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+n^2)-3(1+2+3\cdots\cdots+n)+n$$

$$=3S-\frac{3n(n+1)}{2}+n$$

$$3S=n^3-n+\frac{3n(n+1)}{2}$$

$$S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

7. 求 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4\cdots\cdots n$ 項之和.

【解】 第n項爲 $n(n+1)=n^2+n$.

$\therefore$ 其總合爲 $\Sigma n^2+\Sigma n$

$$\Sigma n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{(由上題)}$$

$$\Sigma n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\therefore\ S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}+1\right)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

8. 若 a, b, c, 爲 A.P.（等差級數）

則 $a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$, $c^2(a+b)$ 爲 A.P.

【證】 $a^2(b+c)-b^2(c+a)=a^2b-b^2a+a^2c-b^2c$

$$=ab(a-b)+c(a^2-b^2)$$

$$=(a-b)(ab+ca+cb)$$

$\because$ $a-b=b-c$

$\therefore$ $b^2(c+a)-c^2(a+b)=bc(b-c)+a(b^2-c^2)$

$$=(b-c)(bc+ab+ac)$$

$$=(a-b)(bc+ab+ac)$$

9. 四數爲 A.P. 其平方和爲 120，第一與第四之積比他兩項之積少 8，求四數.

答 ±2，±4，±6，±8.

10. 設 a, b, c 爲 A.P.; b, c, d 爲 H.P.（調和級數）

求證 $a:b=c:d$

【證】 題設 $a-b=b-c$ …………………………… (1)

$$\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{1}{d}-\frac{1}{c} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由(2) $\dfrac{b-c}{bc}=\dfrac{c-d}{cd}$

$\therefore$ $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$

$\therefore$ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$.

11. 三數爲 G.P.（幾何級數），和爲 14，平方和爲 84，試求各數.

12. a, b, c 爲 A.P. 設 x 爲 a, b 之等比中項，y 爲 b, c 等比中項，則 x^2, b^2, y^2 爲 A.P.

【證】 $a-b=b-c$,　　$2b=a+c$

$x^2=ab$,　　$y^2=bc$

又 $x^2+y^2=b(a+c)=2b^2$

$\therefore$ x^2, b^2, y^2 爲 A.P.

13. 若 a, b, c 爲 H.P. 則

$$\frac{a}{b+c-a},\ \frac{b}{c+a-b},\ \frac{c}{a+b-c}\text{亦爲 H.P.}$$

【證】 題設 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$ 以 $a+b+c$ 乘之

得 $\frac{a+b+c}{b}-\frac{a+b+c}{a}=\frac{a+b+c}{c}+\frac{a+b+c}{b}$

即 $\left(\frac{a+b+c}{b}-2\right)-\left(\frac{a+b+c}{a}-2\right)=\left(\frac{a+b+c}{c}-2\right)$

$-\left(\frac{a+b+c}{b}-2\right)$

即 $\frac{a-b+c}{b}-\frac{b+c-a}{a}=\frac{b+a-c}{c}-\frac{a+c-b}{b}$

$\therefore\ \frac{a}{b+c-a},\ \frac{b}{c+a-b},\ \frac{c}{a+b-c}$ 爲 H.P.

14. 設 a, b, c, 爲 A.P., b, c, d 爲 G.P. c, d, e 爲 H.P. 則 a, c, e, 爲 G.P.

【證】 由題 $2b=a+c,\quad c^2=bd,\quad d=\frac{2ce}{c+e}$

以上三式連乘之則

$2bc^2d=(a+c)\,bd\frac{2ce}{c+e}$ 化簡得

$c=\frac{e(a+c)}{c+e}$

$\therefore\ c(c+e)=e(a+c)\qquad \therefore\ c^2=ae.$

故 a, c, e 爲 G.P.

15. a, b, c, 爲 H.P.

則 $a-\frac{b}{2},\ \frac{b}{2}\qquad c-\frac{b}{2}$ 爲 G.P.

【證】 由題 $\frac{2ac}{a+c}=b\qquad \therefore\ \frac{b}{2}(a+c)=ac$

即 $ac-\frac{b}{2}(a+c)=0$

$$\therefore \quad \frac{b^2}{4}=\frac{b^2}{4}-\frac{b}{2}(a+c)+ac.$$

$$=\left(a-\frac{b}{2}\right)\left(c-\frac{b}{2}\right)$$

故 $a-\frac{b}{2}$，$\frac{b}{2}$，$c-\frac{b}{2}$ 爲 G.P.

16. 設 a 爲 b 及 c 之等差中項.

b 爲 a 及 c 之等比中項

則 c 爲 a 及 b 之調和中項

【證】 $2a=b+c$;　　$b^2=ac$

$$\therefore \quad 2a=\frac{ac}{b}+c$$

$$\therefore \quad c=\frac{2ab}{a+b}$$

17. 有三數爲等差級數，而其兩外項之積爲中項之五倍，而兩大數之和等於最小數之八倍，求各數.

【解】 設三數爲 $x-y$, x, $x+y$.

則 $(x-y)(x+y)=5x$

即 $x^2-5x=y^2$

又 $x+(x+y)=8(x-y)$

即 $y=\frac{2}{3}x.$

$$\therefore \quad \frac{4}{9}x^2-x^2+5x=0$$

$\therefore$ $x=0$，不合理.

$x=9.$　　$y=6.$

18. 若 a, b, c 爲 H.P.

求證 $\frac{2}{b}=\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}.$

【證】 $\because \quad \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$

$$\therefore \quad \frac{b-a}{ab}=\frac{b-c}{bc},$$

即 $\frac{a}{b-a}=-\frac{c}{b-c}$

即 $\frac{a}{b-a}+1+\frac{c}{b-c}+1=2$

即 $\frac{b}{b-a}+\frac{b}{b-c}=2.$

或 $\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{2}{b}.$

19. 幾何級數之第一項，第二項及第三項與第三項，第四項，第五項之和之比爲 1:4；而其第七項爲384，求此級數.

【解】 由題得下式 a 爲首項，r 爲公比.

$$\frac{a+ar+ar^2}{ar^2+ar^3+ar^4}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{a(1+r+r^2)}{ar^2(1+r+r^2)}=\frac{1}{4} \qquad \therefore \quad \frac{1}{r^2}=\frac{1}{4}$$

$\therefore \quad r=\pm 2.$

又 $ar^5=384.$ $\quad \therefore \quad a=6$

故此級數應爲 6, ±12, 24,……

20. 若 $\frac{a+b}{1-ab}$, b, $\frac{b+c}{1-bc}$ 爲 A.P.，則 a, $\frac{1}{b}$, c 爲H.P.

【證】 $\frac{a-b}{1-ab}-b=b-\frac{b-c}{1-bc}$

即 $\frac{a(1+b^2)}{1-ab}=-\frac{c(1+b^2)}{1-bc}$

$\therefore \quad a(1-bc)=-c(1-ab)$

$\therefore \quad 2abc=c+a$

$\therefore \quad 2b=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}$

$\therefore \quad \frac{1}{a}, b, \frac{1}{c}$ 爲A.P.

$\therefore \quad a, \frac{1}{b}$, c 爲H.P.

22. 問 $2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots\cdots 至無窮}}}$ 爲何數　（平大工院1936）

【解】 原式 $=2\times 2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{1}{8}}\cdots\cdots\cdots\cdots$

$=2^{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots\right)}$

今2之指數爲一無窮收歛級數其公比 $r=\frac{1}{2}$，

首項爲1.

其和 $S=\dfrac{1}{(1-\frac{1}{2})}=2$

$\therefore\quad 2^{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots\right)}=2^2=4.$

卽 $2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots\cdots\cdots}}}=4.$

排列及組合

I. 定義 a, b, c 三個物件中，選出二個之方法，若論其次序有 ab, ba, ac, ca, bc, cb 六種，若不論其次序有 ab, bc, ca 三種. 二種方法所得之結果不同，故從 n 個物件中取出 r 個，(i) 若論其次序曰排列，(ii)若不論其次序曰組合.

II. 符號: 排列通常以 ${}_nP_r$ 或 P_r^n 代表之，其演算之方法爲:

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)$$

組合通常以 ${}_nC_r$ 或 C_r^n 代表之.

$${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{\underline{|r}}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}$$

III. 定理:

1. $P_n^n=n!$

2. 有 n 個物件在圓周上排列，則其排列之方法爲:

$$(n-1)!=\underline{|n-1}$$

若有 n 個物件，取 r 個在圓周上排列，則排列之方法爲:

$$\frac{{}_nP_r}{\underline{|r}}$$

3. n 個不同之珠子，穿成一環，則其方法爲:

$\underline{|(n-1)}/2$.（因前後可轉，故被 2 除）

4. n 個物件中，有 p 個相同，另有 q 相同，又有 r 個相同，則其排列之種數爲：

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|p}\ \underline{|q}\ \underline{|r}}$$

【證】 設排列之種數爲 A.

命 p 個相同之物件爲 $p_1, p_2, p_3 \cdots\cdots P_p$ 若此 p 個相同之物件爲不同，則從一種排列可生出 $\underline{|p}$ 種，從A種生出 $Ap!$ 種.

命 q 個之物件爲 $q_1, q_2, q_3 \cdots\cdots q_q$，若此 q 個相同之物件爲不同，則從一種排列可生出 $\underline{|q}$ 種，從 $AP!$ 種生出 $Ap!q!$ 種.

命 r 個相同之物件爲 $r_1, r_2, r_3 \cdots\cdots r_r$，若 r 個相同之物件爲不同，則從一種排列可生出 $r!$，從 $Ap!\,q!$ 種可生出 $A\,\underline{|p}\,\underline{|q}\,\underline{|r}$ 種

此卽 n 個不相同之物件之排列之種數. 故

$$Ap!q!r! = n! \quad 卽 \quad A = \frac{n!}{p!q!r!}$$

IV. 雜例 A.

1. 若 ${}_nP_6 = 20{}_nP_4$ 求 n 之値.

【解】 $P_6^n = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$.

$P_4^n = n(n-1)(n-2)(n-3)$

$\therefore\quad n(n-1)(n-2)(n-3)\{(n-4)(n-5)-20\} = 0$

卽 $n(n-1)(n-2)(n-3)(n^2-9n) = 0$

$n^2(n-1)(n-2)(n-3)(n-9) = 0$

$\therefore\quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 9.$

但 $n \geqq r$.　　$\therefore\quad n = 9$.

2. 用 0, 1, 2……9 之10個數字，可作幾個三位數.

【解】 ${}_{10}P_3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$ 個.

但 0 在最高位（百位）之數非三位數，當去之.

0 在最高位之數有 $9P_2 = 72$.

故能作成之三位數有 ${}_{10}P_3 - {}_9P_2 = 648$.

3. 可以重復時，0, 1, 2⋯⋯9, 10 個數字可作二位之時幾個?

【解】 $10^2 = 100$,

但 0 在最高位有十個，當減去故有

$100 - 10 = 90$ 個。

4. 以五種玩具分給二個小孩之方法有幾?

【解】 設甲乙兩個孩子，a, b, c, d, e 五種玩具，a 分給甲或分給乙有 2 種方法；b 分給甲或分給乙有兩種方法，c, d, e如之，故總共之方法當爲$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ 種

5. 十個人請兩位客人用茶，環桌而坐，但兩位客人不能分離，有幾種坐法.

【解】 $$2 \times \frac{\underline{|(12-1)}}{12-1} = 2 \times \underline{|10}.$$

6. 用四不同色彩之旗子，問可作出若干種不同之暗號. 但每次可用不同之數目作暗號.

【解】 ${}_4P_1 + P_2^4 + P_3^4 + P_4^4 = 64$. 4, 1, 2,

7. 七個小孩列成一行，但有一個特殊小孩不得位於首尾. 6

【解】 在共七人中，一小孩有五個位置，此小孩定準一地位後，可與其他之六個小孩之 $\underline{|6}$ 排列法互相配合，故有 24

$5 \times \underline{|6}$ 種排列方法.

8. 四男四女，環桌而坐，但男女必須相隣，問有幾種坐法.

【解】 若女子先坐，共有 $\underline{|(4-1)}$ 種坐法，男子之坐法爲 $\underline{|4}$,

故共有 $\underline{|(4-1)}\,\underline{|4}$ 種坐法.

V. 定理.

1. $C_r^n = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$,

【證A】 a, b, c⋯⋯n 共 n 個物件.

從此 n 個物件中取 r 個之組合有 C_r^n 種，可分爲兩種即有含 a 者與不含 a 者.

(1) 既含 a,則只能從其餘之 $n-1$ 個中選擇 $r-1$ 個，則其選擇之種數爲 ${}_{n-1}C_{r-1}$，

(2) 既不含 a,定爲從其餘之 $n-1$ 個物件中選擇 r 個，則其選擇之種數爲 ${}_{n-1}C_r$。

但(1)(2)已包含其全體,故 ${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$

【證B】

$$ {}_nC_r+{}_nC_{r-1}=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,(n-r)!}+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,(n-r+1)!} $$

$$ =\frac{\underline{|n}\,(n-r+1)+\underline{|n}\,r}{\underline{|r}\,(n-r+1)!} $$

$$ =\frac{\underline{|n}\,(n-r+1+r).}{\underline{|r}\,(n-r+1)!} $$

$$ =\frac{\underline{|n}\,(n+1)}{\underline{|r}\,(n-r+1)}=C_r^{n+1} $$

2　${}_nC_r={}_nC_{n-r}$，

【證】 $${}_nC_r=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,(n-r)!}$$

$$ {}_nC_{n-r}=\frac{n!}{\underline{|n-r}\,\{n-(n-r)\}!}=\frac{n!}{\underline{|n-r}.r!} $$

故　${}_nC_r={}_nC_{n-r}$.

3. ${}_nC_r$ 之最大値若 n 爲偶時，則爲 $\frac{n}{2}=r.$，若 n 爲奇時，則 $\frac{n+1}{2}=r$，或 $\frac{n-1}{2}=r$ 時爲所求.

【證】 因 ${}_nC_r={}_nC_{r-1}+\frac{n-r+1}{r}$.

故若　$n-r+1\geqq r$.　則 ${}_nC_r\geqq{}_nC_{r-1}$.

又　$n-r+1\geqq r$，　則 $n+1\geqq 2r$

卽　$\frac{n+1}{2}\geqq r$

故若　$r<\frac{n+1}{2}$，　則 ${}_nC_r>{}_nC_{r-1}$

若 $r=\frac{n+1}{2}$， 則 ${}_nC_r={}_nC_{r-1}$

若 $r>\frac{n+1}{2}$ 則 ${}_nC_r<{}_nC_{r-1}$

然 r 必為正整數，故若

(1) n 為偶時，則 ${}_nC_r$ 以 $r=\frac{n}{2}$ 時為最大.

(2) n 為奇時，則 ${}_nC_r$ 以 $r=\frac{n+1}{2}$ 與 $\frac{n-1}{2}=r$ 時為最大.

4. 重複組合.

由 n 個不同之物中，如可重複取其 r 個之組合數，等於從 $n+r-1$ 個不同之物中每次取 r 個組合數，即

$${}_{n+r-1}C_r \text{或} \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n+r-1)}{\underline{|r}}.$$

VI. 雜例.

1. 有骰子四粒，則擲法有幾?

【解】 ${}_{6+4-1}C_4=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{\underline{|4}}=126$.

2. 設 ${}_nC_6={}_nC_{12}$， 求 ${}_nC_{16}$ 之值.

【解】 ${}_nC_{n-6}={}_nC_{12}$， $\therefore\ n-6=12$

$\therefore\ n=18$.

$\therefore\ {}_{18}C_{16}=153$.

3. ${}_{2n}P_3=2\cdot{}_nP_4$. 求 n 之值.

(答 $n=8$.)

4. 設 ${}_nP_r=272$. ${}_nC_r=136$， 求 n 及 r.

【解】 由 ${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{\underline{|r}}$

$\therefore\ 136=\frac{272}{\underline{|r}}$ 解之 $r=2$.

由是，${}_nC_2=136$. $\therefore\ \frac{n(n-1)}{\underline{|2}}=136$. $\therefore\ n=17$.

5. ${}_{28}C_{2r}:{}_{24}C_{2r}=225:11$， 求 r 之值.

(答 $r=7$)。

6. 設 ${}_nC_{r-1}:{}_nC_r:{}_nC_{r+1}=2:3:4$，求 n 及 r。

【解】 $\frac{{}_nC_{r-1}}{2}=\frac{{}_nC_r}{3}=\frac{{}_nC_{r+1}}{4}$

但 ${}_nC_r={}_nC_{r-1}\times\frac{n-r+1}{r}$

又 ${}_nC_{r+1}={}_nC_r\times\frac{n-r}{r+1}$

$\therefore\ \frac{1}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{n-r+1}{r}$

又 $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\times\frac{n-r}{r+1}$

由是得 $n=34$ $r=14$。

7. 用 0, 1, 2, 3, 4 之五數字作任意之數，可得若干種。

【解】 一位數字 $={}_5P_1-1=4$

二位數字 $={}_5P_2-{}_4P_1=16$。

三位數字 $={}_5P_3-{}_4P_2=48$。

四位數字 $={}_5P_4-{}_4P_3=96$。

五位數字 $={}_5P_5-{}_4P_4=96$。

故共有 $4+16+48+96+96=260$ 個

8. 從 7 英人 4 美人中組織六人會方法有幾而：

(1) 會中恰有兩美人。

(2) 會中至少有兩美人。

【解】 (1) ${}_4C_2\cdot{}_7C_4=210$。

(2) ${}_4C_2\cdot{}_7C_4+{}_4C_3\cdot{}_7C_3+{}_4C_4\cdot{}_7C_2=371$。

或然率 Chance

I. **定義** 有 n 個情形，出現的機會是均等的，其中 a 種情形有利於 a，則這出現的或然率是 $p=\frac{a}{n}$，不出現的是 $\frac{n-a}{n}=1-p$。

II. **複雜或然率**

兩件或幾件事中,一件事出現與否同其餘的能不能出現,不發生關係,叫作獨立事件.

III. 乘法定理　一組獨立事件能完全出現的或然率,是各事件出現或然率的乘積.

例如一袋內裝四白球五黑球,取出一球後,放入再取,則兩次皆得白球之或然率爲$\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}$

如不放入,則第一次得白球的或然率是$\frac{4}{9}$,第二次是$\frac{3}{8}$,故二次皆得白球之或然率爲$\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{6}$

IV. 完全或然率

兩件事或數件事不能同時出現的,叫作不共立事件.

V. 加法定理　一組不共立事件中,有一出現的或然率,是各事件出現或然率的和.

【證】　設有甲乙兩不共立事件,則有

(1) 甲出現,乙不出現.

(2) 甲不出現,乙出現.

(3) 甲不出現,乙不出現.

三種情形,利於每類出現之情形各有 n_1, n_2, n_3 種,則出現的或然率各爲

$$P_1=\frac{n_1}{n_1+n_2+n_3},\ P_2=\frac{n_2}{n_1+n_2+n_3},\ P_3=\frac{n_3}{n_1+n_2+n_3}$$

利於(1)或(2)出現的情形共有 n_1+n_2 種,所以或然率是

$$\frac{n_1+n_2}{n_1+n_2+n_3}=p_1+p_2.$$

如甲乙有一出現,則必(1)或(2)出現,所以有一事出現的或然率是 p_1+p_2.

【例】　求骰子兩粒,一次擲出之輕最小爲 9 之或然率.

【解】　9 點出現之或然率爲 $\frac{4}{36}$

10點出現之或然率爲$\frac{3}{36}$

11點出現之或然率爲$\frac{2}{36}$

12點出現之或然率爲$\frac{1}{36}$

故所求之或然率$=\frac{4+3+2+1}{36}=\frac{5}{18}$.

VI. 重復的試驗.

定理1. 如在一次試驗中某事出現的或然率是 p, 則在 n 次試驗中,這事恰好出現 r 次的或然率是 ${}_nC_r p^r(1-p)^{n-r}$.

定理2. 已知某事件出現的或然率是p,行 n 次試驗，這事出現的或然率爲P.則

$$n=\frac{\log(1-P)}{\log(1-p)}.$$

【證】 這事在n 次試驗中都不出現之或然率爲 $(1-p)^n$ 此事出現(至少一次)之或然率爲P.故

$$P=1-(1-p)^n$$

$$(1-p)^n=1-P$$

$$\therefore \quad n=\frac{\log(1-P)}{\log(1-p)}$$

例. 一粒骰子連擲幾次,方能使 6 點之或然率爲 $\frac{1}{2}$

【解】 $p=\frac{1}{6}$, $\quad P=\frac{1}{2}$

$$n=\frac{\log\frac{1}{2}}{\log\frac{5}{6}}=3\cdot8.$$

但 n 必爲整數,故 $n=4$.

VII. 雜例

1. 袋中紅球 5, 白球 7, 任取其二，求其所取者皆爲白球之或然率.

【解】 $C_2^7/C_2^{12}=\frac{7}{22}$

2. 有 n 個人同坐一圓桌，其中有二人相隣與不相隣或然率之

比為 $2:(n-3)$. 試證之.

3. 今有甲乙兩囊,甲容紅球五,白球七;乙容紅球三,白球十二.求由此囊任取出一紅球之或然率.

【解】 選擇甲囊之或然率 $=\frac{1}{2}$

此後由甲囊取一紅球之或然率 $=\frac{5}{12}$.

故此紅球由甲囊取出之或然率 $=\frac{1}{2}\times\frac{5}{12}=\frac{5}{24}$

同樣,此紅球由乙囊取出之或然率 $=\frac{1}{2}\times\frac{3}{15}=\frac{1}{10}$

此兩事件不相容,故所求之或然率 $=\frac{5}{24}+\frac{1}{10}=\frac{37}{120}$

4. 袋中四球不知何色,偶取其二,皆係紅色,將此二者之一返諸袋中,繼續三次自袋中取出一球,但每次取出後,卽返置袋中,求三次取出皆係紅球之或然率。(交通1935)

【解】 依題意,袋中至少不得少過二紅球,至多不得過三紅,因四紅球卽無機會大小之可言.

(1) 若只有二紅球,則返其一後,祇有一紅球,每次取得紅球之機會為 $\frac{1}{3}$.

三次所取得皆係紅球之機會為 $\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$.

(2) 若袋中含有三紅球,每次取得紅球之或然率為 $\frac{2}{3}$。

三次取得皆係紅球之機會為 $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

故所求之或然率為:

$$\frac{1}{27}+\frac{8}{27}=\frac{1}{3}.$$

5. A.B. 兩袋,A袋有黑球二,白球七,B袋有黑球5,白球2,設從兩袋之任一袋內取出黑球1,求所取之黑球出自第一袋之或然率.

[答 $\frac{2}{9}\left(\frac{2}{9}+\frac{5}{9}\right)$]

6. 置黑白兩種球於三袋中,第一袋有黑球三,白球二,第二袋有白球四,黑球一,第三袋有白球三,黑球七,今任於一袋中取出一球,試求從第三袋取出黑球之或然率.

【解】 於第三袋中取出黑球之或然率為:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{10}\Big/\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{10}\right]$$

7. 有球袋三個,每袋有白二黑七;又有球袋二個,每袋有白一黑四,從袋中任取一黑球,求該黑球係從前三袋內取出之或然率.

【解】 共五袋,第一種佔$\frac{3}{5}$,

第二種佔$\frac{2}{5}$,

$$\text{故或然率}=\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}}=\frac{15}{43}.$$

8. 甲乙丙三人擲骰為戲,共用三骰,先擲得十點者獲獎 x 元,又設 x 乘其或然率為其希望值,問各人獲獎之希望值.

【解】 三骰擲出 $6^3=216$ 種樣式,其中十點出現之情形為

1, 3, 6; 1, 4, 5; 2, 3, 5 (各發現六次)

2, 2, 6; 2, 4, 4; 3, 3, 4 (各發見三次)

在 216 種樣中,十點只有27種.

由是甲第一次擲得十點之或然率為$\frac{27}{216}=\frac{1}{8}$.

甲若失敗,乙第一次擲得十點之或然率為$\frac{1}{8}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{64}$

甲乙皆失敗,丙第一次擲得十點之或然率為$\frac{1}{8}\times\frac{7}{8}\times\frac{7}{8}$

第二輪開始,依前理甲獲獎之或然率$=\left(\frac{7}{8}\right)^3\frac{1}{8}$

乙獲奬之或然率爲$\left(\frac{7}{8}\right)^4\frac{1}{8}$

丙獲奬之或然率爲$\left(\frac{7}{8}\right)^5\frac{1}{8}$.

故三人獲奬之或然率爲:

甲: $\frac{1}{8}+\left(\frac{7}{8}\right)^4\frac{1}{8}+\left(\frac{7}{8}\right)^6\frac{1}{8}+\cdots\cdots$

$=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{7}{8}\right)^3\right]=\frac{64}{511}$.

乙: $\frac{64}{511}\times\frac{7}{8}=\frac{56}{511}$.

丙: $\frac{56}{511}\times\frac{7}{8}=\frac{49}{511}$.

故三人之希望值爲:

甲: $\frac{64}{511}x$.　乙: $\frac{56}{511}x$,　兩 $\frac{49}{511}x$.

9. 甲於三張有彩九張無彩劵中,任意抽出三張,乙在兩張有彩六張無彩中,得任意抽出兩張,試證甲乙兩人得彩或然率之比爲 952:715

【解】 甲: $\frac{{}_3C_1\cdot{}_9C_2+{}_3C_2\cdot{}_9C_1+1}{{}_{12}C_3}=\frac{136}{{}_{12}C_3}$.

乙: $\frac{{}_2C_1\cdot{}_6C_1+1}{{}_8C_2}=\frac{13}{{}_8C_2}$.

甲:乙 $\frac{136}{{}_{12}C_3}\div\frac{13}{{}_8C_2}=\frac{136\times3\times2}{12\times11\times10}\times\frac{8\times7}{13\times2}=\frac{952}{715}$.

10. 袋中有黑球99白球1,任意取得一球時,旁有人云,所出之球爲白,而此人之證言,十次中有九次確實,求其果爲白之機會.

【解】 球爲白之機會$=\frac{1}{100}$.

不爲白之機會$=\frac{99}{100}$.

又證言確實之機會 $=\frac{1}{100}\times\frac{9}{10}$

而不確實之機會 $=\frac{99}{100}\times\frac{1}{10}$

所求之機會 $=\dfrac{\frac{1}{100}\times\frac{9}{10}}{\frac{1}{100}\times\frac{9}{10}+\frac{99}{100}\times\frac{1}{10}}=\frac{1}{15}$.

數學之歸納法

I. 數學歸納法之證明為兩部份所組成.

1. 檢驗. 檢査此定理於少數情況之下為眞確.
2. 補助定理: 設此定理於第K種情況為眞，則在 K+1 種情形亦為眞.

II. 雜例

1. 用術學歸納法證.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

【證】 (1) 檢驗.

$n=1 \qquad 1^2=1$.

$n=2. \qquad 1^2+2^2=\frac{2\times3\cdot5}{6}=5$

故 $n=1, 2$ 時此公式為眞確

(2) 補助定理.

設 $n=K$ 時此公式仍為正確.

則 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots K^2=\frac{K(K+1)(2K+1)}{6}$ ..(1)

於各邊加 $(K+1)^2$ 則得

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+K^2+(K+1)^2$$

$$=\frac{K(K+1)(2K+1)}{6}+(K+1)^2$$

$$=\frac{K(K+1)(2K+1)+6(K+1)^2}{6}$$

$$=(K+1)[2K^2+K+6(K+1)]$$

$$=\frac{(K+1)(2K^2+7K+6)}{6}$$

$$=(K+1)(K+2)(2K+3)/6$$

$$=(K+1)[(K+1)+1][2(K+1)+1]/6\cdots(2)$$

當K用 $K+1$ 代時，(1)式與(2)式相同，

故此公式當 $n=K$，$(K+1)$ 時皆正確，

故此公式於 n 等於何值時皆爲正確．

2． 試證

$$1^3+3^3+5^3+\cdots\cdots+(2n-1)^3=(2n^2-1)n^2 \text{（焦作1936）}$$

3． 證

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots n^3=[\tfrac{1}{2}n(n+1)]^2.$$

【證】 上式當 $n=1$ 時，2 時爲正確．

設 $n=K$ 時亦正確則

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+K^3=[\tfrac{1}{2}K(K+1)]^2.$$

兩端各加 $(K+1)^3$ 則

$$1^3+2^3+\cdots\cdots+K^3+(K+1)^3=[\tfrac{1}{2}K(K+1)]^2+(K+1)^3$$

$$=\tfrac{1}{4}(K^2+4K+4)(K+1)^2$$

$$=\{\tfrac{1}{2}(K+1)[(K+1)+1]\}^2$$

故當 $n=K$ 及 $K+1$ 時皆爲正確，故當 n 爲何數皆爲正確，故此公式成立．

4． 用算學的歸納法，證明下列恆等式．

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2 \text{（北大）}$$

【證】 $\because$ $(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2=[\tfrac{1}{2}n(n+1)]^2$ 由上題即明．

5． 用術學歸納法證．

$$\tfrac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots\cdots+\cos nx$$

$$=\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{2(1-\cos x)} \qquad \text{（北大1935）}$$

【證】 當 $n=1$ 時

$$\tfrac{1}{2}+\cos x=\frac{\cos x-\cos 2x}{2(1-\cos x)}$$

$$=\frac{\cos x-2\cos^2 x+1}{2(1-\cos x)}$$

$$=\frac{(1-\cos x)(1+2\cos x)}{2(1-\cos x)}$$

$$=\tfrac{1}{2}+\cos x.$$

故當 $n=1$ 時,此式爲正確.

設當 $n=K$ 時,此式爲正確.

則 $\tfrac{1}{2}+\cos x+\cdots\cdots+\cos Kx=\dfrac{\cos Kx-\cos(K+1)x}{2(1-\cos x)}$

兩端皆加 $\cos(K+1)x$

則 $\tfrac{1}{2}+\cos x+\cdots\cdots+\cos Kx+\cos(K+1)x$

$$=\frac{\cos Kx-\cos(K+1)x}{2(1-\cos x)}+\cos(K+1)x.$$

$$=\frac{\cos Kx-\cos(K+1)x+2\cos(K+1)x-2\cos x\cos(K+1)x}{2(1-\cos x)}$$

$$=\frac{\cos(K+1)x+\cos Kx-[\cos(K+2)x+\cos Kx]}{2(1-\cos x)}$$

$$=\frac{\cos(K+1)x-\cos(K+2)x}{2(1-\cos x)}$$

$$=\frac{\cos(K+1)x-\cos[(K+1)+1]x}{2(1-\cos x)}$$

故當 n 等於 K 及 $K+1$, 皆爲正確.

已知 $n=1$ 時爲正確.

故當 n 等於任何數時此式皆爲正確.

多項式定理

I. 定理. 設 $a+b+c+\cdots\cdots+K$ 代表一多項式,則

$$(a+b+c+\cdots\cdots+K)^n=\Sigma\frac{n!}{\alpha!\beta!\cdots\cdots K!}a^\alpha b^\beta\cdots\cdots K^k$$

$$\alpha+\beta+\cdots\cdots+k=n.$$

根據上定理可求出多項展開式中諸項之係數.

II. 雜例

1. 試求 $(1+2x-x^2)^5$ 之展開式中 x^4 之係數.

【解】 $(1+2x-x^2)^5=\sum\frac{5!}{\alpha!\beta!\gamma!}2^{\beta}(-1)^{\gamma}x^{\beta+2\gamma}$

故知 $\alpha+\beta+\gamma=5$, ……………………(1)

$\beta+2\gamma=4$ ……………………(2)

則(1)與(2)式之正整數解爲

$\alpha=2 \quad 1 \quad 3$

$\beta=2 \quad 4 \quad 0$

$\gamma=1 \quad 0 \quad 2$

故所求之係數爲

$$\frac{5!}{2!2!}2^2(-1)+\frac{5!}{4!}2^4(-1)^0+\frac{5!}{3!2!}(-1)^2=-30$$

2. 試求 $(1+2x+3x^2)^4$ 之展開式中 x^5 之係數.

$$(1+2x+3x^2)^4=\sum\frac{4!}{\alpha!\beta!\gamma!}2^{\beta}3^{\gamma}x^{\beta+2\gamma}$$

故 $\alpha+\beta+\gamma=4$.

$\beta+2\gamma=5$

適合上式之值爲: $\alpha=0 \quad \beta=3 \quad \gamma=1$ 及 $\alpha=1 \quad \beta=1 \quad \gamma=2$.

故所求之係數爲 $\frac{4!}{3!}2^3\cdot3+\frac{4!}{2!}2\cdot3^2=312$.

3. 試求 $(1+2x+3x^2+4x^3)^4$ 展開式中 x^7 之係數. (北大1936)

4. 求 $(1-2x+3x^2)^{-3}$ 展開式中 x^4 之係數.

【解】 $(1-2x+3x^2)^{-3}=[1-(2x-3x^2)]^{-3}$

$=1+3(2x-3x^2)+6(2x-3x^2)^2+10(2x-3x^2)^3$

$+15(2x-3x^2)^4+\cdots\cdots$

所求之係數爲上展開式中 x^4 之係數. 爲

$$6\cdot9+10\cdot3(2)^2(-3)+15(2)^4=-66.$$

5. 求 $(1+3x+2x^2)^3$ 展開式中 x^3 之係數, (答-9)

6. 求 $(2-4x+3x^2)^{-3}$ 展開式中 x^4 之係數 (答$\frac{53}{4}$)

7. 求 $(1+x+x^2+x^3+x^4)^5$ 展開式中"中項"之係數.

【解】 此展開式中,最高次爲 x^{20}, 故此展開式有21項.第11項之係數爲 x^{10} 之係數,故

$$\frac{5}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!\epsilon!}\times x^{\beta+2\gamma+3\delta+4\epsilon}$$

故 $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon=5$

$\beta+2\gamma+3\delta+4\epsilon=10$

適合上兩式之値爲:

$\alpha=0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 0$

$\beta=3\ 2\ 2\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$

$\gamma=0\ 2\ 1\ 0\ 1\ 3\ 0\ 3\ 2\ 1\ 0\ 5$

$\delta=1\ 0\ 2\ 0\ 1\ 1\ 3\ 0\ 2\ 0\ 2\ 0$

$\epsilon=1\ 1\ 0\ 2\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 2\ 1\ 0$

故 x^{10} 之係數爲:

$$\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{2!2!}+\frac{5!}{2!2!}+\frac{5!}{2!}+5!+\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{3!}$$

$$+\frac{5!}{2!2!}+\frac{5!}{2!2!}+\frac{5!}{2!2!}+1=381.$$

行 列 式

I. 行列式記法.

$$a_1b_2-a_2b_1$$

此式含四量,爲兩兩乘積之差,簡記爲.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

是謂之行列式, 縱曰行,橫曰列; a_1, b_2 等曰元,故上式亦稱四元行列式

行列式之展開法, 即由行列式之左上隅至右下隅之對角線上兩元之積減去他對角線兩元之積.

例 $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}=3.9-7.4=-1$

II. 第三級行列式　形如 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 曰第三級行列式，或簡寫爲 $|a_1\ b_2\ c_3|$ 之第一主對角線．上行列式之展開式爲

$$a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+a_2b_3c_1-c_1b_2a_3-c_2b_3a_1-b_1a_2c_3$$

III. 子行列式(Minors)或稱子式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

而 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 卽稱爲 a_1 之子行列式，故三級行列式可按 K 列及m行之"元"展開之，展開後子行列式之符號如下：

$$S=\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

IV. 餘行列式(Confactor)　某行列式之餘行列式，卽其子行列式前附有如 S 圖所示之對應符號之子行列式也．

【例】 (II)之行列式中C_2之餘行列式爲：

$$C_2=-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore\quad D=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1.$$

$$D=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3$$

V. 定理．

1． 行列式中任意一行(或列)之各元以m乘，等於以m乘此行列式．

$$\begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3\cdot3 & 4 & 1 \\ 2\cdot3 & 7 & 8 \\ 3.1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3.\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2． 行與列互換，結果之值不變．

3． 行列式中兩行或兩列互換，行列式之符號改變．

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

4. 行列式有兩列或兩行完全相同或成比列，則行列式之值爲零. 如

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot4+3+2\cdot3\cdot2-2\cdot2\cdot3-3-2\cdot4=0$$

5. 行列式中,有一行或一列爲多項式,則此行列式，可分爲多個行列式.

【例】
$$\begin{vmatrix} b+c & b & a \\ c+a & c & b \\ a+b & a & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b & a \\ c & c & b \\ a & a & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{vmatrix}$$

6. 於任意一行或列之各元，加任意他一行或列之m 倍則行列式之值不變.

例
$$\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & b+c+a \\ b & 1 & b+c+a \\ c & 1 & c+a+b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

7. 設行列式之元爲 x 之有理整函數，當 $x=a$ 時,行列式之值爲零,則此行列式含有 $x-a$ 之因子

【例】 求證.

$$\triangle=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$$

【證】 若 $a=b$, $b=c$, $c=a$ 時 $\triangle=0$

$$故\quad \triangle=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}=K(a-b)(b-c)(c-a)$$

比較恆等式兩邊任一項之係得K之值爲1.

故　$\triangle=(a-b)(b-c)(c-a)$.

VI. 雜例.

1. 將 $\begin{vmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 4\\ 3 & 6 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 2 & 5\\ 3 & 1 & 6\end{vmatrix}$ 化爲一行列式.

【解】 $$\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 2 & 5\\ 3 & 1 & 6\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 4 & 3\\ 2 & 5 & 2\\ 3 & 6 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4 & -3\\ 2 & 5 & -2\\ 3 & 6 & -1\end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 4\\ 3 & 6 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 2 & 5\\ 3 & 1 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 4\\ 3 & 6 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 4 & -3\\ 2 & 5 & -2\\ 3 & 6 & -1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 4 & 7-3\\ 2 & 5 & 4-2\\ 3 & 6 & 2-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4 & 4\\ 2 & 5 & 2\\ 3 & 6 & 1\end{vmatrix}$$

2. 求證 $\begin{vmatrix}1 & a & a^3\\ 1 & b & b^3\\ 1 & c & c^3\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

【證】 在 $\begin{vmatrix}1 & a & a^3\\ 1 & b & b^3\\ 1 & c & c^3\end{vmatrix}=\triangle$ 行列式中,若 $a=b$, $b=c$, $c=a$

行列式之値爲零,故 $(a-b)$,$(b-c)$,$(c-a)$ 爲其因式,

故　$\triangle=K(a-b)(b-c)(c-a)$………

但在行列式之主對角線爲 bc^3 爲四次式,在上式之展開式中之最高爲三次式,故少一"一次式",一次式之標準式爲

$(a+b+c)$，且K爲1，故

$$\Delta=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

3\. 試證 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix}=(x+y)(y+z)(z+x)(xy+yz+zx)$.

4\. 求 $\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 之值

【解】 四行相加作爲新第一行.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

第三,三,四各列減第一列

$$\Delta=3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-3$$

5\. 解 $\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}=0$

【解】 原式可寫爲

$$\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ x+1 & x+1 & x+1 \\ x+2 & 2(x+2) & 6(x+2) \end{vmatrix}$$

原式則變爲

$$(x+1)(x+2)\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

當 $x=-1$ 時，上行列式等於零.

故所求之根爲 $-1,\ -1,\ -2$,

• 6. 求證.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)(a+b-c-d)$$

• 7. 求證 $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & c & b \\ -y & -c & 0 & a \\ -z & -b & -a & 0 \end{vmatrix} = (ax-by+cz)^2$

【證】

$$原式=\frac{1}{a}\begin{vmatrix} 0 & ax & y & z \\ -x & 0 & c & b \\ -y & -ac & 0 & a \\ -z & -ab & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{a}\begin{vmatrix} 0 & ax-by+cz & y & z \\ -x & 0 & c & b \\ -y & 0 & 0 & a \\ -z & 0 & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{a}(ax-by+cz)\begin{vmatrix} -x & c & b \\ -y & 0 & a \\ -z & -a & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{-1}{a}(ax-by+cz)(-a^2x-acz+aby)$$

$$=(ax-by+cz)^2$$

• 8. 設 w 爲 1 之立方根，求證

$$\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 \\ w & w^2 & 1 \\ w^2 & 1 & w \end{vmatrix} = 0$$

【證】 $原式=\begin{vmatrix} 1+w+w^2 & w & w^2 \\ 1+w+w^2 & w^2 & 1 \\ 1+w+w^2 & 1 & w \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 0 & w & w^2 \\ 0 & w^2 & 1 \\ 0 & 1 & w \end{vmatrix}=0$$

VII. 行列式之乘法.　設兩行列式爲$\triangle$及$\triangle'$相乘得$\triangle''$行列式，$\triangle''$之各元爲由$\triangle$之 i 列各元以 $\triangle'$之K列之各元相對應各元相乘積之和爲$\triangle''$之第 i 列第K行之元.

【例】　設　$\triangle=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$,　$\triangle'=\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}$

則　$\triangle''=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_1p_1+a_2q_1 & a_1p_2+a_2q_2 \\ b_1p_1+b_2q_1 & b_1p_2+b_2q_2 \end{vmatrix}$$

VIII. 行列式之應用.

設　$a_1x+a_2y+a_3z=K$ ………………………(1)

　　$b_1x+b_2y+b_3z=l$ ………………………(2)

　　$c_1x+c_2y+c_3z=m$ ………………………(3)

則　$x=\left|\dfrac{K\quad b_2\quad c_3}{a_1\quad b_2\quad c_3}\right|$

$y=\left|\dfrac{a_1\quad l\quad c_3}{a_1\quad b_2\quad c_3}\right|$

$z=\left|\dfrac{a_1\quad b_2\quad m}{a_1\quad b_2\quad c_3}\right|$

而 $|\,l\quad b_2\quad c_3\,|=\begin{vmatrix} K & a_2 & a_3 \\ l & b_2 & b_3 \\ m & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$\triangle=|\,a_1\,b_2\,c_3\,|=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

若$\triangle \neq 0$，則(1)，(2)，(3) 有解

$\triangle = 0$，則(1)，(2)，(3) 無解

若 $l = m = K = 0$

$\triangle = 0$ 則有無限解。

$\triangle \neq 0$ 則只有零解。

IX. 雜例

1. $$\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = ?$$

【解】

$$原式 = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c^2+b^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & b^2+a^2 \end{vmatrix}$$

2. 求證。

$$\begin{vmatrix} A_1 & -B_1 & C \\ -A_2 & B_2 & -C_2 \\ A_3 & -B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2$$

此處 $A\ A$ ……是 a_1，a_2……之子式，且

$$b_1A_1 - b_2A_2 + b_3A_3 = 0$$

$$a_2A_1 - b_2B_1 + C_2C_1 = 0$$

……………………

【證】 設原式之右式為 D，左式為 D′，則

$$D \cdot D' = \begin{vmatrix} a_1A - b_1B_1 + c_1C_1 & a_2A_1 - b_2B_1 + c_2C_1 \\ -a_1A + b_1B_2 + c_1C_2 & -a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 \\ a_1A_3 \quad b_1B_3 \quad c_1C_3 & a_2A_3 - b_2B_3 \quad c_2C_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & a_3A_1-b_3B_1+c_3C_1 \\ \cdots & \cdots & -a_3A_2+b_3B_2-c_3C_2 \\ \cdots & \cdots & a_3A_3-b_3B_3+c_3C_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{vmatrix}=D^3$$

故　$D=D'^2$

5.　解　$7x+3y-2z=7.$

$2x+5y+3z=21$

$5x-y+5z=18$　　（北大）

【解】

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 21 & 5 & 3 \\ 18 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix}}=1.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 7 & 7 & -2 \\ 2 & 21 & 3 \\ 5 & 18 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix}}=2$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 21 \\ 5 & -1 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{630+315-14-175+145-108}{175+45+4+50+21-30}$$

$$=3$$

4.　解　$2x+3y-5z=3$

$x-2y+z=0$

$3x+y+3z=7.$

【解】　$x=\frac{10}{7}$　　$y=1$,　　$z=\frac{4}{7}$

7.　解 $\begin{vmatrix} a & -a & a & a \\ -b & b & b & b \\ c & c & -c & c \\ d & d & d & -d \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$　（交通）

【解】 $\begin{vmatrix} a & -a & a & a \\ -b & b & b & b \\ c & c & -c & c \\ d & d & d & -d \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix}$

$=abcd\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ a+b & a+b & b-a & a-b \\ c+d & c+d & d-c & c-d \end{vmatrix}$

8.　求證. $\begin{vmatrix} 1 & p & q & r+s \\ 1 & q & r & p+s \\ 1 & r & s & p+q \\ 1 & s & p & q+r \end{vmatrix}=0$　（稅專）

【證】 原式之第二行第三行第四行相加作爲新第二行.

得 $\begin{vmatrix} 1 & p+q+r+s & q & r+s \\ 1 & q+r+p+s & r & p+s \\ 1 & r+s+p+q & s & p+q \\ 1 & s+p+q+r & p & q+r \end{vmatrix}$

$=(p+q+r+s)\begin{vmatrix} 1 & 1 & q & r+s \\ 1 & 1 & r & p+s \\ 1 & 1 & s & p+q \\ 1 & 1 & p & q+r \end{vmatrix}=0$

9.　設 a, b, c 爲 △ABC中對 A, B, C 三角之相當邊，求

證下行列式

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & \cos^2\frac{A}{2} \\ b & b^2 & \cos^2\frac{B}{2} \\ c & c^2 & \cos^2\frac{C}{2} \end{vmatrix} = 0$$

【證】 $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{s(s-a)}{bc}=\frac{s^2a-sa^2}{abc}$

$$\cos^2\frac{B}{2}=\frac{s(s-b)}{ca}=\frac{s^2b-sb^2}{abc}$$

$$\cos^2\frac{C}{2}=\frac{s(s-c)}{ab}=\frac{s^2c-sc^2}{abc}$$

自第三行減第一行之$\frac{s^2}{abc}$倍，再加第二行之 a

得 $\begin{vmatrix} a & a^2 & 0 \\ b & b^2 & 0 \\ c & c^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

10. 設 α, β, γ 為 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 之三根，試求下行列式之值，但求時不得展開．

$$D=\begin{vmatrix} (\beta+\gamma)^2 & \alpha\beta & \gamma\alpha \\ \alpha\beta & (\alpha+\gamma)^2 & \beta\gamma \\ \gamma\alpha & \beta\gamma & (\alpha+\beta)^2 \end{vmatrix}$$

【解】 設 $\alpha=0$ 則

$$D=(\beta+\gamma)^2\begin{vmatrix} \gamma^2 & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \beta^2 \end{vmatrix}=0$$

故 α 為D之一因子．

因為對稱式，故 β, γ 亦為其因子，

又設 $\beta+\gamma=-\alpha$ 則

$$D=\begin{vmatrix} \alpha^2 & \gamma\beta & \gamma\alpha \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \gamma\alpha & \beta\gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}=0$$

故　$\alpha+\beta+\gamma$ 爲D之一因式

同理　$\gamma+\alpha+\beta$, $\beta+\gamma+\alpha$ 均爲其因子，由是

$$D=K\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)^3$$

原行列式爲六次式，故K爲常數，應用比較係數法，知 $K=2$

又因 α, β, γ 爲 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 方式之根，故

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a} \qquad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

$$\therefore\quad D=2\left(-\frac{d}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)^3=2\frac{b^3d}{a^2}.$$

· 化下行列式爲因式　(清華1935)

$$A\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} \qquad B\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^2 \end{vmatrix}$$

【解】 A. 若 $a=b$ 此行列式爲 0，故此行列式有 $(a-b)$ 之因式，同理有 $(b-c)$ 及 $(c-a)$ 之因式.

$$\therefore\quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)[L(a^2+b^2+c^2)+m(ab+bc+ac)]$$

左方 a 之最高次爲 a^3 故右方之 $-La^4b$ 一項應爲 0

$\therefore\quad L=0$

左方之 a^3b^3 一項相當右方之 ma^2b 一項

$\therefore\quad m=1.$

$$\therefore\quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca).$$

$$B\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

若 $a=b$ 此行列式爲 0，故有 $(a-b)$ 之因式，同理有 $(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ 之因式

故 $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = K(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

左方之 bc^2d^3 一項相當右方之 Kbc^2d^3 一項

$\therefore\ bc^2d^3 = Kbc^2d^3$

$\therefore\ K=1.$

故 $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

消去法雜例

1. 從 $lx+my=a$

$mx+ly=b$

$l^2+m^2=1$

消去 l 及 m.

【法】 設 $l=\cos\theta$　　$m=\sin\theta$.

則 $x\cos\theta+y\sin\theta=a$

$x\sin\theta-y\cos\theta=b$

上兩式平方再相加得

$x^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+y^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=a^2+b^2$

或 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 卽爲所求.

2. 從 $x+y=a$ ……………………(1)

$x^2+y^2=b^2$ ……………………(2)

$$x^4+y^4=c^4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

消去 x，y.

【法】 (1)平方減(2)式. $2xy=a^2-b^2 \cdots\cdots\cdots (4)$

(2)平方減(3)式. $2x^2y^2=c^4-b^4 \cdots\cdots (5)$

由(4)式(5)式得： $2(c^4-b^4)=a^4-2a^2b^2+b^4$

或 $a^4-2a^2b^2+3b^4-2c^4=0$.

3. 從 $mx-ny=a(m^2-n^2)$.

$nx+my=2amn$

$m^2+n^2=1$

【法】 與1題同，得 $x^2+y^2=a^2$

4. 從 $x(p+q)=y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$p-q=K(1+pq) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

$xpq=a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

消去 p 及 q，

【法】 由(1)式 $p+q=\dfrac{y}{x} \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

由(2)及(4)式 $2p=\dfrac{y+K(x+a)}{x} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

又 $2q=\dfrac{y-K(x+a)}{x} \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$

由(5)(6)及(3)之關係.

故 $\dfrac{y+K(x+a)}{2x}\times\dfrac{y-K(x+a)}{2x}\times x=a$

化簡上式得

$$y^2-4ax=K^2(x+a)^2$$

5. 從 $x-y=a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$x^2-y^2=b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

$x^3-y^3=c^3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

消去 x，y.

【法】 (2)÷(1) $x+y=\dfrac{b^2}{a}$

$$(3)\div(1)\quad x^2+xy+y^2=\frac{c^3}{a}$$

$$\therefore\quad xy=\frac{b^4}{a^2}-\frac{c^3}{a}$$

但　$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy=\dfrac{b^4}{a^2}-a^2$

故　$4\left(\dfrac{b^4}{a^2}-\dfrac{c^3}{a}\right)=\dfrac{b^4}{a^2}-a^2$

或　$a^4-4ac^3+3b^4=0$ 卽爲所求.

6. 從　$\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x}=a$ ……………………(1)

$$\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}=b\ \text{……………………}(2)$$

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)=c\ \text{……}(3)$$

消去 x, y 及 z

【法】 (1)×(2)及(3)式之展開,放 x, y, z 項於一邊,得其關係式爲 $ab=c+1$

7. 從　$y^2+z^2=ayz$

$z^2+x^2=bzx$

$x^2+y^2=cxy$

消去 x, y, z.

【法】 原式可變爲:

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=a\ \text{……………………}(1)$$

$$\frac{z}{x}+\frac{x}{z}=b\ \text{……………………}(2)$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=c\ \text{……………………}(3)$$

(1)×(2)×(3) 得

$$2+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{z^2}{x^2}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=abc\ \text{……}(4)$$

(1) 式平方 $\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}=a^2-2$

同理 $\frac{z^2}{x^2}+\frac{x^2}{z^2}=b^2-2,\qquad \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=c^2-2$

代入(4)式得

$$2+(a^2-2)+(b^2-2)+(c^2-2)=abc$$

或 $a^2+b^2+c^2-4=abc.$

8. 從 $a_1x+b_1y+c_1=0$

$a_2x+b_2y+c_2=0$

$a_3x+b_3y+c_3=0$

消去 x, y.

【法】 用下消去式之展開即爲所求.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

9. 從 $ax^3+bx^2+cx+d=0$

$fx^2+gx+h=0$

消去 x.

【法】 應用結式(Resultants)之展開——Sglvesfey 法

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ f & g & h & 0 & 0 \\ 0 & f & g & h & 0 \\ 0 & 0 & f & g & h \end{vmatrix}=0$$

方程式論

(一)根與係數之關係

I. 定理: 在下方程式中

$$x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + b_3x^{n-3} + \cdots\cdots + b_n = 0$$

設其根爲 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \cdots\cdots \beta_n$.

則 $\beta_1+\beta_2+\beta_3+\cdots\cdots+\beta_n = \Sigma\beta = -b_1$

$\beta_1\beta_2+\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_3+\cdots\cdots+\beta_{n-1}\beta_n = \Sigma\beta_1\beta_2 = b_2$

$\beta_1\beta_2\beta_3+\beta_2\beta_3\beta_4+\cdots\cdots+\beta_{n-2}\beta_{n-1}\beta_n = \Sigma\beta_1\beta_2\beta_3 = -b_3$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\cdots\beta_n = (-1)^n b_n$

【注意】(1) 首項必須爲1,若非爲1可先變爲1.

(2) 缺項之係以零看待之.

II. 雜例

1. 設 α, β, γ 爲方程式 $2x^3+x^2-4x+1=0$ 之根，試求下列各值.

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$; (2) $\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\alpha\gamma}+\dfrac{1}{\beta\gamma}$.

【解】 已知 $\alpha+\beta+\gamma = -\frac{1}{2}$,

$\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma = -2$

及 $\alpha\beta\gamma = -\frac{1}{2}$

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$= \frac{1}{4} - 2(-2) = 4\frac{1}{4}$,

(2) $\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\alpha\gamma} = \dfrac{\alpha+\gamma+\beta}{\alpha\beta\gamma} = \dfrac{(-\frac{1}{2})}{(-\frac{1}{2})} = 1$.

2. 若 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之三根爲等比級數,求係數之關係.

【解】 設 $\dfrac{a}{b}$, a, ab 代表其三根，則得.

$$\frac{a}{b}+a+ab = -p \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{a^2}{b}+a^2+a^2b = q \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\frac{a}{b}\cdot a\cdot ab = -r \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

由(3)式,得 $a = \sqrt[3]{-r}$

$(2)\div(1)$，得 $a=\dfrac{-q}{p}$

$\therefore\quad -r=\dfrac{-q^3}{p^3}$

或 $q^3-p^3r=0$ 卽爲所求．

3．設 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 爲方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 之根，試求 (a) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ 及 (b) $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2$ 之值．

【解】 由題知 $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}.$$

(a) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\Sigma\alpha^2-\Sigma\alpha\beta)+3\alpha\beta\gamma.$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)]+3\alpha\beta\gamma$$

$$=-\frac{b}{a}\left[\frac{b^2}{a^2}-\frac{3c}{a}\right]-\frac{3d}{a}$$

$$=-\frac{[b^3-3abc+3a^2d]}{a^3}$$

(b) $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=\left(\frac{c}{a}\right)^2-2\left(-\frac{d}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$=\frac{(c^2-2bd)}{a^2}$$

4．設 a，b，c 爲方程式

$$x^3+2x^2+3x+3=0$$

之三根，求作一方程式，其根爲

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),\quad b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right),\quad c\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right).$$

【解】 由題設知

$$ab+bc+ca=3$$

$$abc=-3$$

今 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{ab+ac}{bc}=\frac{a(ab+ac+bc)}{abc}-1$

$$=-a-1$$

同理：$b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)=-b-1.$

$c\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)=-c-1.$

今設 y 爲新方式之變數.

則 $y=-x-1$. 卽 $x=-y-1$.

故新方式爲

$$(-y-1)^3+2(-y-1)^2+3(-y-1)+3=0$$

化簡得 $y^3+y^2+2y-1=0$.

5. 求方程式 $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ 有兩等根之條件

【解】 欲此方程式有兩等根，必須方程式

$$f(x)=ax^3+3bx^2+3cx+d=0$$

及其導來式 $f(x)=ax^2+2bx+c=0$ 有公共根，

故其條件爲：

$$\begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & 0 \\ 0 & a & 3b & 3c & d \\ a & 2b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & 2b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & 2b & c \end{vmatrix}=0$$

(二)方程式之變易

I. 方程式變易法則. 設原方程爲

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0$$

1. 若將 $f(x)=0$ 變爲另一方程式 $f_1(x)=0$，而 $f_1(x)=0$ 之諸根與 $f(x)=0$ 之諸根，數值相等而符號相反：若 n 爲奇數，則變更含 x 之偶次之符號；若爲偶次，則變含 x 之奇次之係數.

2. 若 $f_1(x)=0$ 之諸根為 $f(x)=0$ 諸根之K倍:則於原方式之第二項乘K,第三項乘K^2,第 r 項乘K^{r-1}.

3. 若 $f_1(x)=0$ 之諸根為 $f(x)=0$ 諸根之倒數: 則將原方程式之係數,前後倒換之.

4. 若 $f_1(x)=0$ 之諸根較 $f(x)=0$ 之諸根少一常數K;(a)將原式之 x 代以 $y+K(\because\ x-K=y,\ x=y+K)$ 代簡之,或應用綜合除法法則,見例(4)

【例】.

1. 設 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 為方程式 $x^4+7x^3-x^2-x+12=0$ 之根,求一方程,其根為 $-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta$.

【解】 由上(1)法則知所求之方程式為:

$$x^4-7x^3-x^2+x+12=0.$$

2. 求一方程式, 其諸根為 $x^3-2x^2+x-10=0$ 之 $\frac{1}{3}$ 倍.

【解】 由第二法則, 知所求之方程為

$$x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}x-\frac{10}{27}=0$$

或 $27x^3-18x^2+3x-10=0$

3. 試求一方程式,其諸根為 $x^3-10x+8=0$ 諸根之倒數.

【解】 由法則 3 知所求之方程式為:

$8x^3-$ [illegible]0[illegible] $+$ [illegible] $=0$

4. 試求一方程式,其諸根較 $2x^3-7x^2-3x+1=0$ 之諸根少4。

【解】 (1) 所求之方根式為:

$$2(y+4)^3-7(x+4)^2-3(y+4)+1=0$$
$$=2y^3+17y^2+37y+5.$$

(2) 應用綜合除法原理.

$$\begin{array}{cccc}
2 & -7 & -3 & +1 \\
 & 8 & 4 & 4 \\
\hline
2 & +1 & +1 & 5=c_3 \\
 & 8 & 36 & \\
\hline
2 & 9 & 37=c_2 & \\
 & 8 & & \\
\hline
2 & 17=c_1 & c_0=2. &
\end{array}$$

所求之方式爲 $c_0x^3+c_1x^2+c_2x+c_3=0$

$=2x^3+17x^2+37x+5=0$

II. 雜例.

1. 設 α, β, γ 爲方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之三根，求以α^2，β^2，γ^2 爲根之公程式 （北洋1936)(高工1936)

【解】 新根與舊根之關係爲 $y=x^2$.

$\therefore \quad x=\pm\sqrt{y}$.

代入得 $(\pm\sqrt{y})^3+p(\pm\sqrt{y})^2+q(\pm\sqrt{y})+r=0$

化簡,平方得 $y^3+(2q-p)y^2+(q^2-2pr)y-r^2=0$

2. 設 α, β, γ 爲方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根,試求一方程式其根爲:

(1) $\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}$, $\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}$, $\dfrac{\gamma\alpha}{\beta}$;　　(2) $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}$, $\dfrac{\beta}{\alpha+\gamma}$, $\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$.

【解】 (1) $\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\gamma^2}=\dfrac{r}{\gamma^2}$.

故新舊方程式之關係爲 $\dfrac{r}{x^2}=y$

或 $x=\pm\sqrt{\dfrac{r}{y}}$ 代入得:

$$\left(\pm\frac{r}{y}\right)^3+p\left(\pm\sqrt{\frac{r}{y}}\right)^2+q\left(\pm\sqrt{\frac{r}{y}}\right)+r=0.$$

化簡得

$ry^3+(q^2-2pr)y^2+r(p^2-2q)y+r^2=0.$

(2) $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}=\dfrac{\alpha}{-p-\alpha}$.

新舊方程式變數之關係爲$\dfrac{x}{-p-x}=y$.

或 $x=\dfrac{py}{y+1}$

代入，得

$$\left(\frac{py}{y+1}\right)^3+p\left(\frac{py}{y+1}\right)^2+q\left(\frac{py}{y+1}\right)+r=0.$$

化簡得：

$(r-pq)y^3+(p^3-2pq+3r)y^2+(3r-pq)y+r=0$.

3. 設 a, b, c 爲 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之三根， 求作方程式之根爲. $a-\frac{1}{bc}$, $b-\frac{1}{ac}$, $c-\frac{1}{bc}$.

【解】 設 $x=a$. 　則 $a-\frac{1}{bc}=y$.

但 $a-\frac{1}{bc}=a+\frac{a}{r}$

$\therefore\ y=x+\frac{x}{r}$ 　 $x=\frac{ry}{1+r}$ 代入：

得 $\left(\frac{ry}{1+r}\right)^3+p\left(\frac{ry}{1+r}\right)^2+q\left(\frac{ry}{1+r}\right)+r=0$

化簡得 $r^2y^3+pr^2(1+r)y^2+q(1+r)^2y+(1+r)^3=0$

4. 設 $x^3+2x^2+3x+4=0$ 之根爲 α, β, γ, 試求諸方程式，其根爲：

(1) $\beta^2+\gamma^2$, $\gamma^2+\alpha^2$, $\alpha^2+\beta^2$,

(2) $\alpha(\beta+\gamma)$, $\beta(\gamma+\alpha)$, $\gamma(\alpha+\beta)$

(3) $\beta\gamma+\frac{1}{\alpha}$, $\alpha\gamma+\frac{1}{\beta}$, $\alpha\beta+\frac{1}{\gamma}$.

(4) $\frac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}$, $\frac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta}$, $\frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}$.

【解】 (1) 設 $\alpha=x$; 　 $\beta^2+\gamma^2=y$.

但 $\beta^2+\gamma^2=\beta^2+\gamma^2+\alpha^2-\alpha^2$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha^2$$

$$=(-2)^2-2\times3-\alpha^2=-2-\alpha^2$$

$\therefore\ y=-2-x^2$. 　 $x=\sqrt{-y-2}$.

代入得 $(\pm\sqrt{-y-2})^3+2(\pm\sqrt{y-2})^2$

$$+3(\pm\sqrt{-y-2})+4=0.$$

化簡得：$y^3+4y^2-3y+2=0$

(3) 設 $x=\alpha$, 　 $y=\beta\gamma+\frac{1}{\alpha}$

但 $\beta\gamma+\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha\beta\gamma+1}{\alpha}$.

$\therefore\quad y=\frac{-4+1}{x}\qquad x=-\frac{3}{y}$

代入得: $\left(\frac{-3}{y}\right)^3+2\left(-\frac{3}{y}\right)^2+3\left(\frac{-3}{y}\right)+4=0$

化簡得: $4y^3-9y^2+18y-27=0$.

(2) 設 $\alpha=x\qquad \alpha(\beta+\gamma)=y$.

但 $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha(-2-\alpha)$

$\therefore\quad y=x(-2-x)$

$\therefore\quad x=-1\pm\sqrt{1-y}$.

代入得: $(-1\pm\sqrt{1-y})^3+2(-1\pm\sqrt{1-y})^2$

$+3(-1\pm\sqrt{1-y})+4=0$

化簡得 $y^3-6y^2+17y-8=0$

(4) 設 $\alpha=x.\qquad y=\frac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}$.

但 $\frac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}=\frac{\alpha}{\beta+\gamma+\alpha-2\alpha}=\frac{\alpha}{-2-2\alpha}$

故 $y=\frac{x}{-2-2x}$ 或 $x=-\frac{2y}{1+2y}$

代入得 $\left(-\frac{2y}{1+2y}\right)^3+2\left(-\frac{2y}{1+2y}\right)^2$

$+3\left(-\frac{2y}{1+2y}\right)+2=0$

化簡得 $8y^3+16y^2+9y+2=0$

5. 試消去下式之第二項:

$x^3+2x^2+4x+1=0$

【解】 設 $x=y+K$ 代入化簡得

$y^3+(3K+2)y^2+(3K^2+4K+4)y$

$+(K^3+2K^2+4K-1)=0$

設 $3K+2=0\qquad \therefore K=-\frac{2}{3}$ 代入得

$27y^3+72y-83=0$

(三)雜定理之應用

I. 底卡兒氏符號定理: (Descartes's rule of signs). 方程式 $f(x)=0$ 之正根數,不能較多於其變號,其負根數, 不能較多於 $f(-x)=0$ 之變號.

【例】 $f(x)=x^5+6x^4-3x^3-2x^2+x-1=0$

上式之正根數不能多於三個.(⟶表示變號.)

II. 無理底之位置.

設 a, B 皆非方程式 $f(x)=0$ 之根, 若 $f(a)$ 及 $f(b)$ 結果之符號相反,則 $f(x)=0$ 於 a, b 之間有奇個根; 若符號相同,則 $f(x)=0$ 於 a, b 之間有偶個根或無根存在.

III. 用霍氏法求正根.

【例】 試用霍氏 Horner 法求根至五位小數.設方程式為

$$x^3-6x^2+3x+5=0$$

【解】 設 $f(x)=x^3-6x^2+3x+5=0$

則因 $f(1)=+3$　　$f(2)=-5$.

故於 1, 2 之間有奇個根,試求其一.

1	−6	+3	+5	1·42311………
	1	−5	−2	
1	−5	−2	3	
	1	−4		
1	−4	−6		
	1			
1	−3			
1	−30	−600	3000	
	4	−104	−2816	
1	−26	−704	184	
	4	−88		
1	−22	−792		
	4			
1	−180	−79200	184000	

	2	356	159112
1	−178	−79556	24888
	2	−352	
1	−176	−79908	
	2		
1	174	−79908	24888
	2	−7991	24888
		6	23991
	2	−7985	897
		6	
	2	−7979	
		−798	897
			−798

IV. 重根法則. $f(x)=0$ 之單根，非其導來式 $f'(x)=0$ 之根，但 $f(x)=0$ 之重根，則爲 $f'(x)=0$ 之單根，$f(x)=0$ 之 r 次重根則爲 $f'(x)=0$ 之 $(r-1)$ 次重根

【例】 下式若有重根，試求之。

$$f(x)=x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4=0.$$

【解】 此處 $f'(x)=5x^4-4x^3-15x^2+2x+8$.

$f(x)=0$ 及 $f'(x)=0$ 之最大公約爲 $\phi(x)=x^3-3x-2$

解 $\phi(x)=0$ 得 -1，-1，2，

故 $f(x)=0$ 之三重根爲 -1，二重根爲 2，故其根爲：-1，-1，-1，2，2.

V. 司妥姆氏定理，(Sturm's theorem)。

設 a, b 爲二實數，皆非 $f(x)=0$ 之根，則

$f(a)$，$f_1(a)$，$f_2(a)$…………f_m 及

$f(b)$，$f_1(b)$，$f_2(b)$…………f_m

變號數目之差，卽 $f(x)=0$ 於 a, b 間所有實根之數目。

$f(x)$，$f_1(x)$，$f_2(x)$…………f_m 稱 Sturm 函數。

【例】 應用上定理決定方程式

$$x^3+3x^2-4x+1=0$$

實根之位置.

【解】 $f(x)=x^3+3x^2-4x+1$

$f_1(x)=3x^2+6x-4$

先求 Sturm 函數.

$$\begin{array}{lrrr|lr|l}
f_1(x) & 3 & +6 & -4 & f(x) & 1+3-\ 4+1 & 1+1 \\
 & 6 & +12 & -8 & & 3+9-12+3 & \\
 & 6 & -3 & & & 3+6-\ 4 & \\
\cline{2-4}\cline{5-6}
 & & 15 & -8 & & 3-\ 8+3 & \\
 & & 30 & -16 & & 3+\ 6-4 & \\
 & & 30 & -15 & & & \\
\cline{3-4}\cline{6-6}
 & & & & & -14+7 & \\
 & & & -1 & & -\ 2+1 & 3+15 \\
 & & & f_3=1 & & f_2(x)=2x-1 &
\end{array}$$

故： $f(x)=x^3+3x^2-4x+1$

$f_1(x)=3x^2+6x-4$

$f_2(x)=2x-1$

$f_3=1$

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3	
$x=-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	三個變號
$x=0$	$+$	$-$	$-$	$+$	二個變號
$x=+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	無 變 號

故得 $f(x)=0$ 有一負根,有二正根.

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	f_3	
$x=0$	+	−	−	+	二個變號
$x=1$	+	+	+	+	無變號

故知其二正根位於0與+1之間.同理知其負根位於−4與−5之間,再用霍氏方法求之.

VI. 雜例.

用司套姆定理求方程式

$$x^4-12x^2+12x-3=0$$

實根之位置

【解】 $f(x)=x^4-12x^2+12x-3$

$f_1(x)=4x^3-24x+12$

$f_2(x)=2x^2-3x+1$

$f_3(x)=17x-9$

$f_4=8.$

故得三正根,有二根位於 0 與 1 之間, 有一根位於 2, 3 之間;有一負根,位於−3與−4之間.

雜 公 式

I. 卡爾登公式 (Cardan's formula).

$x^3+px+q=0$ 之三根為:

$$x_1=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$$

$$x_2=\sqrt[3]{A}\,w+\sqrt[3]{B}\,w^2$$

$$x_3=\sqrt[3]{A}\,w^2+\sqrt[3]{B}\,w$$

上公式中:

$$A=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.$$

$$B=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

$$w=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad w^2=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}.$$

【注意】 應用上公式求三次方程式之根時:

(1) 首項必爲1.

(2) 必缺第二項.若原式不缺第二項,可將方程式之根減小一常數K,即代 $(y+K)=x$ 於原式,化簡,使 x^2 之係數爲零,解K之値代入卽得,演算完後,再於各根加一常數K,見方程式之變易.

II. 佛瑞氏解四次式法 (Ferrari's Solution)

方程式 $x^4+ax^2+bx+c=0$ 之根卽

$$x^2+\sqrt{u_1-a}\,x+\left(\frac{u_1}{2}-\frac{b}{2\sqrt{u_1-a}}\right)=0$$

$$x^2-\sqrt{u_1-a}+\left(\frac{u_1}{2}+\frac{b}{2\sqrt{u_1-a}}\right)=0$$

之根. u_1 代表下關係式之一立方根

$$u^3-au^2-4cu+(4ac-b^2)=0$$

III. 德慕佛氏公式 (De Moivre's formula)

由 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 得

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2K\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2K\pi}{n}\right).$$

而 $K=0,1,2,3,\cdots\cdots(n-1)$ 等值.

【例】 試應用德慕佛定理

(1) 求1之立方根

(2) 證 $\sqrt[3]{1}$ 之一個複數根 (Complex root) 之平方,等於另一複數根.

(3) 證此任一之複數根,等於1.

(4) 證若n爲奇數,則n個1之n次根(r-th root) 之乘

積，等於1，若 n 爲偶數，則其乘積等於 -1。

【證】 (1) 已知 $1=1(\cos\ \theta+i\ \sin\ \theta)$

設其有 $P(\cos\ w+i\ \sin\ w)$ 式之立方根。

則 $P^3(\cos\ w+i\ \sin\ w)^3=1(\cos\ \theta+i\ \sin\ \theta)\cdots(1)$

但 $P^3(\cos\ w+i\ \sin\ w)^3=P^3(\cos^3\ w+i\ \sin\ 3w)$

故由(1)可寫爲

$$P^3(\cos^3\ w+i\ \sin\ 3w)=1(\cos\ \theta+i\ \sin\ \theta)\cdots(2)$$

(2)式等號兩邊之二複數既相等，其絕對值必等，且其角度必僅差360°之倍數，即

$$P^3=1 \qquad 3w=\theta+K360$$

$$\therefore\ P=1 \qquad w=K\cdot120$$

而 1 之立方根有三個，即

(a) $1(\cos\ \theta+i\ \sin\ \theta)=1 \qquad (K=0時)$

(b) $1(\cos\ 120+i\ \sin\ 120)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (K=1)$

(c) $1(\cos\ 240+i\ \sin\ 240)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (K=2)$

(2) 1 之複根有二，即 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 與 $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

故 $$(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2=1^2(\cos\ 120+i\ \sin\ 120)^2$$
$$=1(\cos\ 240+i\ \sin\ 240)$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2=1^2(\cos\ 240+i\ \sin\ 240)^2$$
$$=1(\cos\ 480+i\ \sin\ 480)$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(3) $$(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3=1^3(\cos\ 120+i\ \sin\ 120)^3$$

$$=1(\cos 360+i\sin 360)$$
$$=1.$$

$$\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=1^3(\cos 240+i\sin 240)^3$$
$$=1(\cos 720+i\sin 720)$$
$$=1.$$

(4) 設 a, b, c⋯⋯f 爲此 n 個 1 之 n 次根.

則此 n 個數爲方程式

$x^n-1=0$ 之 n 個根.

由根與係數之關係得 $(-a)(-b)\cdots\cdots(-f)$

$=(-1)^n abc\cdots\cdots f=-1$

卽 $abc\cdots\cdots f=\dfrac{-1}{(-1)^n}$

故當 n 爲奇數,此乘積之值爲1

當 n 爲偶數,此乘積之值爲−1.

無 窮 級 數

I.　級數之收斂 (Convergence) 與發散 (divergence)

設一級數 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots$.其無窮項之總和若漸近一一定值 S. 而以 S 爲極限者謂之爲收斂級數;若其極限爲無限大,或無一定之極限爲放散級數.

II.　審歛法.

1.　直接比較法.

設 $u_1+u_2+u+\cdots\cdots\cdots(1)$ 爲一正項級數

$v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots\cdots(2)$ 爲已知正項收歛級數

(1) 若 $u_1>V_1$, $u_2<v_2\cdots\cdots$

(2) 或 $\dfrac{u_1}{V_1}<c$, $\dfrac{u_2}{V_2}<c\cdots\cdots$

(3) 或 $\dfrac{u_2}{u_1}<\dfrac{V_2}{V_1}$, $\dfrac{u_3}{u_2}<\dfrac{V_3}{V_2}\cdots\cdots$

(1)式爲收歛

$$\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\cdots\cdots$$

各項皆小於已知收歛級數

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots$$

之相當項，故亦爲收歛級數。

2. Cauchy's ratio Test.

設級數 $u_1+u_2+\cdots\cdots u_n+u_{n+1}+\cdots\cdots$

並設 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=p$

當 $p<1$ 時爲收歛。

當 $p>1$ 時爲發散。

當 $p=1$ 時，必改變方程式爲：

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\frac{\alpha}{n}}$$

當 $\alpha>1$ 時爲收歛

$\alpha\leqq 1$ 時爲發散。

【例】 $1+\dfrac{2}{10}+\dfrac{3}{10^2}+\dfrac{4}{10^3}+\cdots\cdots$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{10^n}\div\frac{n}{10^{n-1}}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{10}$$

$$P=\frac{1}{10}<1$$

故此級數爲收歛級數。

3. 雜級數。

幾何級數。 $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots$ 當 $|r<1|$ 時爲收歛。

P 級數. $1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\cdots\cdots$ 時 $p>1$ 時收歛

e 級數 $1+\dfrac{1}{\underline{|1}}+\dfrac{1}{\underline{|2}}+\dfrac{1}{\underline{|3}}+\cdots$ 其總和爲 $e=2.718$.

對數級數. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\cdots$其總和為

$\log_e(1+x)$

指數級數 $1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots$當$|x|<\infty$時為收斂.

其總和為e^x

調和級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$

交錯級數 $a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots\cdots$當前項大於後項，第n項之極限為零則為收斂.

全國各省市會考試題纂要

1. 解下列方程式 (南京)

$$x^4-3x^2+2=0.$$

【解】 命 $y=x^2$.

則原式變為 $y^2-3y+2=0$.

即$(y-1)(y-2)=0$

即 $y=1$ 或 2.

故 $x=\pm1$ 或 $\pm\sqrt{2}$.

2. 求x之值 $6^{(x+1)}=8$ (南京)

已知 $\log 2=0.30103$ $\log 3=0.47712$

【解】 $6^{(x+1)}=8$.

$\log 6^{x+1}=\log 8$.

$(x+1)\log 6=\log 8$.

$x\log 6+\log 6=\log 8$.

故 $x=\frac{\log 8-\log 6}{\log 6}=\frac{3\log 2-(\log 2+\log 3)}{\log 2+\log 3}$

$$=\frac{3\times0.30103-(0.30103+0.47712)}{0.30103+0.47712}=0.16056$$

3. 解 $\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-6}+\sqrt{3x-5}=0$ (上海)

【解】 由原式

得 $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{5x-6}$

平方得 $(2x-3)+(3x-5)+2\sqrt{(2x-3)(3x-5)}$

$=5x-6$。

即 $5x-8+2\sqrt{6x^2-19x+15}=5x-6$。

$\sqrt{6x^2-19x+15}=1$。

平方上式，得 $6x^2-\overset{x}{19}+14=0$

$(6x-7)(x-2)=0$

$x=\frac{7}{6}$ 或 2

但 $x=\frac{7}{6}$ 之根與本題不合，故棄去。

4. 解 $x+y+z+u=0 \cdots\cdots(1)$ （上海）

$3x+z+u=0 \cdots\cdots(2)$

$3y+2z=0 \cdots\cdots(3)$

$x^2+y^2+zu=0 \cdots\cdots(4)$

【解】 (1)−(2) $y=2x \cdots\cdots(5)$

以(5)代入(3) $6x+2z=0$

$z=-3x \cdots\cdots(6)$

以(6)代入(2) $u=0 \cdots\cdots(7)$

以(5)(6)(7)代入(4)

$x^2+(2x)^2+0=5$

$\therefore\ x=\pm 1$。

故得 $\begin{cases} x=+1 \\ y=+2 \\ z=-3 \\ u=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \\ z=3 \\ u=0 \end{cases}$

5. 化簡下列二式 （上海）

(1) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$

(2) $\dfrac{2}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{2x^2-4x+2}-\dfrac{1}{1-x^2}$

【解】 (1) $$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}=\frac{1}{1-\dfrac{x}{x+1}}=\frac{1}{\dfrac{x+1-x}{x+1}}=x+1$$

(2) $$\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{2x^2-4x+2}-\frac{1}{1-x^2}$$

$$=\frac{2}{(x-1)^2(x+1)^2}-\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{4-(x+1)^2+2(x+1)(x-1)}{2(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$=\frac{4-x^2-2x-1+2x^2-2}{2(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{x^2-2x+1}{2(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x-1)^2}{2(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{1}{2x^2+4x+2}$$

6. 設一等比級數之第一項爲2，第四項爲1024，求第二項與第三四項 (上海)

【解】 由題知 $1024=2r^{4-1}$

故 $r^3=512$ 卽 $r=8$.

∴ 第二項爲 $2\times8^{2-1}=16$

第三項爲 $2\times8^{3-1}=128$

7. 應用剩餘定理求 a 與 b 之値，若 x^3+ax^2+2x+b 能爲 $(x-1)(x+4)$ 除盡之 (上海)

【解】 由剩餘定理 $x=1$ 及 $x=-4$ 得

$1+a+2+b=0$

卽 $a+b+3=0$ ……………………(1)

$-64+16a-8+b=0$

卽 $16a+b-72=0$ ………… (2)

(2)−(1) $15a+69=0$

$$\therefore\ a=-\frac{23}{5}$$

代入(1)　$b=\frac{23}{5}-3=\frac{8}{5}$

8. 求證 $\begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{vmatrix}=16.$　(上海)

9. 化 $\frac{x+x-3}{(x-2)(x^2-4x+3)}$ 爲分項分式(卽部份分式)(上海)

【解】 原式可變爲 $\frac{x^2+x-3}{(x-2)(x-1)(x-3)}$

設其分項分式爲 $\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-3}$

卽 $\frac{x^2+x-3}{(x-2)(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-3}$

$$\begin{aligned} x^2+x-3 &= A(x-1)(x-3)+B(x-2)(x-3) \\ &\quad +C(x-2)(x-1) \\ &= (A+B+C)x^2+(-4A-5B-3C)x \\ &\quad +(3A+6B+2C) \end{aligned}$$

$\therefore$ $A+B+C=1$ ………………… (1)

$-4A-5B-3C=1$ ……… (2)

$3A+6B+2C=-3$ ……… (3)

由(1)　$A=1-B-C$ ………………… (4)

(4)代入(2)　$-4(1-B-C)-5B-3C=1$　(5)

$B+7C=-5$ …………… (6)

(4)代入(3)　$3(1-B-C)+6B+2C=-3$

$3B-C=-6$ …………… (7)

3·(6)　$-3B-21C=15$ ………………… (8)

(7)+(8)　$-22C=9.$

$C=-\frac{9}{22}$ ………………… (9)

代入(7)　$\therefore$　$B=-\frac{47}{22}$ ………………… (10)

代入(4)　$A=1+\frac{47}{22}+\frac{9}{22}=\frac{39}{11}$.

$$\therefore\quad \frac{x^2+x-3}{(x-2)(x^2-4x+3)}=\frac{39}{11x-22}-\frac{47}{22x-22}-\frac{9}{22x-66}.$$

10. 某甲買牛馬各若干頭，馬一頭之價爲31元，牛一頭之價爲20元，計牛價共較馬價多7元，求牛馬各若干頭.

【解】　設牛 x 頭，馬 y 頭，由題意得

$$20x-31y=7$$

即　$x=\frac{31y+7}{20}=y+\frac{11y+7}{20}$ …………(1)

因 x，y 必爲正整數，則$\frac{31y+7}{20}$亦爲正整數，故

$11y-7$ 必爲20之倍數.

今令　$11y+7=20a$.

$\therefore\ y=\frac{20a-7}{11}=a+\frac{9a-7}{11}$ …………(2)

同樣　$9a-7=11b$

$\therefore\ a=\frac{11b+7}{9}=b+\frac{2b+7}{9}$ …………(3)

同樣　$2b+7=9c$.

$\therefore\ b=\frac{9c-7}{2}=4c+\frac{c-7}{2}$ …………(4)

同樣　$c-7=2d$.

$\therefore\quad c=2d+7$ …………(5)

(5)式代入(4)式　$b=9d+28$ …………(6)

(6)式代入(3)式　$a=11d+35$ …………(7)

(7)式代入(2)式　$y=20d+63$ …………(8)

(8)式代入(1)　$x=31d+98$

當 $d>-\frac{98}{31}$　　$d>-\frac{63}{20}$時 x，y 皆爲正値

即　$d=-3$　則 $x=5$　　$y=3$

$d=-2$　　$x=36$　　$y=23$

……………………………………

$d=2$　　$x=160$　$y=103$.

11. 解下無理方程式

$\sqrt{x+9}=\sqrt{2x+35}-\sqrt{x+2}$　　　（江蘇省）

12. 方程式 $2x^2-3x+7=0$ 之根爲 α, β. 求作以 $2\alpha+\beta$ 及 $\alpha+2\beta$ 爲根之方程式.

【解】 由題意　$\alpha+\beta=\dfrac{3}{2}$　　$\alpha\beta=\dfrac{7}{2}$

$$\therefore\quad [x-(2\alpha+\beta)][x-(\alpha-2\beta)]$$

$$=x^2-(3\alpha+3\beta)x+2\alpha^2+5\alpha\beta+2\beta^2$$

$$=x^2-3x(\alpha+\beta)+2(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta$$

$$=x-\frac{9}{2}x+\frac{9}{2}+\frac{7}{2}$$

$\therefore$　$2x^2-9x-16=0$ 爲所求.

13. 應用二項式定理求 $\sqrt[3]{1025}$ 之值至三位小數.（江蘇省）

【解】 $\sqrt[3]{1025}=(1000+25)^{\frac{1}{3}}=10(1+0.025)^{\frac{1}{3}}$

$$=10\left(1+\frac{0.025}{3}-\frac{(0.025)^2}{9}+\cdots\cdots\right)$$

此係交錯級數. 故得

$u_0=1.$　　$u_1=+0.0083.$　　$u_2=-0.000069.$

$\therefore$　$\sqrt{1025}=10(1+0.0083)=10.083$

（因只算至三位小數，故爲將 u_2 計算在內）

14. 應用 Hormer's Method 求 $x^3+2x-28=0$ 之實根之近似值至三位小數.　　　（江蘇省）

15. 求級數 $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots\cdots$ n項之和.（江蘇省）

【解】 此級數之 n 項爲　$\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

因 $\frac{b-a}{ab}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$

則 $\frac{2}{1\cdot 3}=\frac{3-1}{1\cdot 3}=1-\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3\cdot 5}=\frac{5-3}{3\cdot 5}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$

....

$$\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$$

相加 $2\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$

$$=1-\frac{1}{2n+1}.$$

$$S=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+n}.$$

15. 問K為何數，則 $(2+K)x^2+2Kx+1=0$ 之兩根相等？實根？虛根 （浙江省）

16. 試依 y 升冪展 $(x-3y)^{\frac{1}{3}}$ 至前四項止． （安徽省）

(答 $x^{\frac{1}{3}}-\frac{y}{x^{\frac{2}{3}}}-\frac{y^2}{x^{\frac{5}{3}}}-\frac{10y^3}{6x^{\frac{8}{3}}}\cdots\cdots$)

17. 求 $(2x-\frac{x}{2})^8$ 之中項 （江西省）

【解】 依二項式定理展開之，得 $70x^8$

18. 10人圍坐使其中 AB 二人常相鄰求其排列法若干

【解】 $\frac{(10-1)!}{2!}=181,440$ 種 （江西省）

19. 方程式之根為 $3x^2-4x+1=0$ 之根之 3 倍，其方程式如何． （江西省）

(答 $x^2-4x+3=0$)

20. 設方程式 $x^2+2(K+2)x+9K=0$ 之兩根相等，求 K 之值． （湖南省）

(答 K=1 或 4)

21．求 $(1+2x)^6$ 展開式之中央項．（湖南省）

（答　$1120x^4$）

22．設　$\log x+\log(x-3)=1$ 求 x 之值．

【解】　由題得

$$\log x(x-3)=\log 10$$

$$10=x(x-3)$$

$$x^2-3x-10=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{2}$$

$$\therefore\quad x=5\quad\text{或}\quad x=-2.$$

23．試求 $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ 之近似值至小數三位．（湖北省）

【解】 $$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}=\frac{7+2\sqrt{21}+3}{7-3}$$

$$=4.791$$

24．若二次方程式 $(r+2)x^2-rx+1=0$ 之根相等，則 r 之值爲何　（四川省）

（答　$r=2+2\sqrt{3}$　或 $r=2-2\sqrt{3}$）

25．證　$A^2+B^2+C^2>BC+CA+AB$　（四川省）

解見不等式

26．證明　${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{n-1}$．　（四川省）

解見排列與組合．

27．設證 $(a+b)^n$ 展式內，諸係數之和爲 2^n．　（北平市）

解見二項式定理．

28．試解下列方程式

(1)　$x^3-1=0$

(2)　$x^4+1+x^3+x-4x^2=0$．

【解】　(1)　$x^3-1=0$．

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\therefore\quad x=1\quad\text{或}\quad\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

(2) 原式可變爲

$$x^4-x^3+2x^3-2x^2-2x^2-2x-x+1=0$$

$$x^3(x-1)+2x^2(x-1)-2x(x-1)-(x-1)=0$$

$$(x-1)(x^3+2x^2-2x-1)=0$$

$$(x-1)(x^3-x^2+3x^2-3x+x-1)=0$$

$$(x-1)^2(x^2+3x+1)=0$$

$\therefore\quad x=1$

或 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

29. 討論 $ax+by=c$
$a'x+b'y=c'$ (青島市)

【解】 由題解 x, y 得

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

若 $ab'-ba'$ 不等於零，則有一有限解.

若 $ab'-ba'$ 等於零，則其解爲無限大.

若 $ab'-ba'=0$, $cb'-bc'=0$, $ac'-ca'=0$.

則 x, y 之値不定.

30. 用綜合除法求 $x-1$ 除 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 之餘除.
(青島市)

(答 $a_0x^2+a_1x+a_2$).

31. 求方程式 $x^3-8=0$ 之三根. (山東省)

【解】 $x^3-8=0$

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

卽 $x=2$.　或 $-1\pm i\sqrt{3}$.

32. 求 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & x^2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$ 內 x 之値 (河北省)

【解】 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & x^2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x+6x^2+6-9x-2x^2-2=0$

即 $4x^2-8x+4=0$

$\therefore \quad x=1$。

33. 求 $(x^2-x^{-1})^{14}$ 內 x^{10} 之係數 （河北省）

【解】 x^{10} 之係數爲 $C_2^{14}=91$。

34. 化 $\dfrac{x-1}{x^2+3x+2}$ 爲部份分式 （察哈爾）

【解】 $\dfrac{x-1}{x^2+3x+2}=\dfrac{x-1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}$

$\therefore \quad x-1=A(x-2)+B(x-1)=Ax+2A+Bx+B$

$\qquad =(A+B)x+2A+B$

$\therefore \quad A+B=1$ 與 $2A+B=-1$

$\therefore \quad A=-2 \qquad B=3$

$\therefore \quad \dfrac{x-1}{x^2+3x+2}=\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{2}{x-1}$。

35. 求作一個二次方程式，令其二根爲 $(3+2i)$，$(3-2i)$

【解】 $[x-(3+2i)][x-(3-2i)]=x^2-6x+B$。 （河南省）

36. 設方程式 $x^2+K(x+1)+3=0$ 之兩根相等，求K之值 （河南省）

（答 $K=6$ 或 -2）

37. 求 $(1+2x)^8$ 展開式中之第五項 （河南省）

（答 $1120x^4$）

38. 試求下方程式正根及負根數目之最大限度。

$x^5-2x^4-3x^3+4x^2+x+1=0$ （山西省）

【解】 設上方程式爲 $f(x)=0$

則可知 $f(x)=0$ 之變號有二，故知正根之最大限度有二。

$f(-x)=0$ 之變號爲 $--++-+$

故知其變號爲三，負根之最大限度爲三。

39. 試解 $\frac{x+7}{9-4x^2}-\frac{1-x}{2x+3}=\frac{4}{2x-3}$ 方程式 （山西省）

【解】 將原題化簡得

$$-(x+7)-(1-x)(2x-3)=4(2x+3)$$

再化簡得 $2x^2-14x-16=0$

$$x=\frac{(+14\pm\sqrt{(14)^2+4\times2\times16})}{4}$$

$\therefore$ $x=8$ 或 $x=-1$。

40. 解 $\left(\frac{1-x}{x-2}\right)^2=8\left(\frac{1-x}{x-2}\right)-15$ （廣東省）

【解】 上式兩邊以 $(x-2)^2$ 乘之

$$(1-x)^2=8(1-x)(x-2)-15(x-2)^2$$

化簡得 $24x^2-86x+77=0$

$$\therefore\ x=\frac{(86\pm\sqrt{(86)^2-4\times24\times77})}{2\times24}=\frac{86\pm2}{48}$$

$\therefore$ $x=\frac{11}{6}$ 或 $x=\frac{7}{4}$。

41. 有級數 11, 16, 21, 26 若干項之和爲 297, 求級數之項數

【解】 此爲等差級數 $d=16-11=5$

今設所求之項數爲 n

則 $279=\frac{n}{2}\{2\times11+(n-1)\times5\}$

卽 $5n^2+17n-558=0$

解之得 $n=9$ 或 $-12\cdot4$。

此處負根不合題意，故 $n=9$。

42. 有四男四女圍坐圓桌，男與男不相鄰，女與女不相鄰，問坐法有幾。 （福建省）

【解】 其坐法爲 $\frac{(8-1)!}{(4-1)!(4-1)!}=140$種。

43. 已知 $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$, 試計算 $\log 4$,

log 5, log 6, log 8, log 9 之值　　　　（福建省）

【解】 $\log 4=\log(2\times2)=\log 2+\log2=0.60206$

$$\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-0.30103$$

$$=0.69897.$$

$\log 6=\log(2\times3)=\log 2+\log 3=0.77815.$

$\log 8=\log(2)^3=3\log 2=0.90309.$

$\log 9=\log(3)^2=2\log 3=095424.$

44．解次方程式 $\frac{4}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{1-x}=0$　　　　（廣西省）

【解】 原式可變爲 $\frac{1}{(x+1)(x-1)}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{1-x}=0$

卽 $4+(x-1)+(x+1)=0$

卽 $2x=4$　　$\therefore x=2.$

45．解次方程式 $2x^2-4x+3\sqrt{x^2-24x+6}=15$　　（廣西省）

【解】 平方化簡得 $x=-1$ 或 3.

46．試展開次行列式求其數值．　　　　（貴州省）

$$D=\begin{vmatrix}3 & -2 & 4\\ 5 & 6 & -3\\ 7 & -1 & 8\end{vmatrix}$$

【解】

$$D\begin{vmatrix}3 & -2 & 4\\ 5 & 6 & -3\\ 7 & -1 & 8\end{vmatrix}=3\times6\times8+(-2)\times(-3)\times7+5\times(-1)\times4-7\times6\times4-(-3)(-1)\times3-(-2\times5\times8)$$

$$=144+42-20-168-9+80$$

$$=69.$$

復　　習

1．分解 $x^4+2x^3+3x^2+2x+1.$

（答　$(x^2+x+1)^2$

2. 分解　x^8+y^8

（答　$(x^4+y^4+\sqrt{2}x^2y^2)(x^4+y^4-\sqrt{2}x^2y^2)$

3. 分解　$x^2+3xy+2y^2+3xz+5yz+2z^2$

4. 解　$x^3+y^3=18xy$，

$x+y=12$　　（答　4，8；8，4）

5. 解　$\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-8x+15}-\dfrac{x^2}{6x-2x^2}=\dfrac{11}{5}$　　（答　$x=8$）

6. 解　$\sqrt{4x+3}+\sqrt{12x+1}=\sqrt{24x+10}$

7. 解　$3x^2+x+2x\sqrt{3x^2+x}+x^2=9$。

【解】　$\sqrt{3x^2+x}+x=3$。　　$\sqrt{3x^2+x}+x=-3$。

故　$x=1,\ -\dfrac{9}{2}$其他爲增根。

8. 設　$\dfrac{x}{q+r-p}=\dfrac{y}{r+p-q}=\dfrac{z}{q+p-r}$。

求證　$(q-r)x+(r-p)y+(p-q)z=0$

9. 設　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$

求證　$\dfrac{a^2c+ac^2}{b^2d+bd^2}=\dfrac{(a+c)^3}{(b+d)^3}$

又證　$a+d=b+c+\dfrac{(a-b)(a-c)}{a}$。

10. 一無窮等比級數之和爲15，各項平方和爲45。試求此級數。

（答　$5,\ \dfrac{10}{3},\ \dfrac{20}{9}$）

11. 求　$0.4\dot{2}\dot{3}$…… 之分數。

【解】　$.4\dot{2}\dot{3}=\dfrac{4}{10}+\dfrac{23}{1000}+\dfrac{23}{100,000}+\cdots\cdots$

$$=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}+\frac{23}{10^5}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}(1+\frac{23}{10^2}+\frac{23}{10^4}+\cdots\cdots)$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}}\right)$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}\cdot\frac{100}{99}$$

$$=\frac{419}{990}.$$

12. 求 $1+\frac{4}{5}+\frac{7}{5^2}+\frac{10}{5^3}+\cdots\cdots$至無窮項之和。

(答 35/16)

13. 二數之等差中項爲4，其調和中項爲$\frac{16}{5}$，試求此二數。

(答 2; 8)

14. 設以 1, 2, 3……p 爲首項。

以$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$……$\frac{1}{p+1}$爲等比 r 之無級數其對應和

爲 S_1, S_2……S_p

試證 $S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots+S_p=\frac{p}{2}(p+3)$

15. 設 b 及 r 皆爲眞分數，試求下無窮級數之和。

$1+(1+b)r+(1+b+b^2)r^2+(1+b+b^2+b^3)r^3+\cdots\cdots$

(答 $1/[(1-r)(1-br)]$)

16. 求 $a+\frac{1}{3}$, $3a-\frac{1}{6}$, $5a+\frac{1}{12}$,……2p項之和。

(答 $4p^2a+\frac{2}{9}(1-\frac{1}{2p})$.)

17. 設 b 爲 a, c 之調和中項，

求證 $\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$

18. 設調和級數的第 p, q; r 各項相應的爲 a, b, c

求證　$(q-r)bc+(r-p)ca+(p-q)ab=0$

【證】設 α, β 爲相當等差級數之首項及公差.

則　$\frac{1}{a}=\alpha+(p-1)\beta$

$\frac{1}{b}=\alpha+(q-1)\beta$

$\frac{1}{c}=\alpha+(r-1)\beta$

上三式相應的乘以 $q-r$, $r-p$, $p-q$.

再相加得　$(q-r)bc+(r-p)ca+(p-q)ab=0$

19. 設 1, w, w^2 爲 1 之立方根

證　$(1+w-w^2)^3-(1-w+w^2)^3=0$

又　$(a+wb+w^2c)(a+w^2b+wc)=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$

20. $ax^2+bx+c=0$ 之根爲 α, β. 求作一方程式其根爲 $(\alpha-\beta)^2$ 及 $(\alpha+\beta)^2$.

21. 解　$8x^{\frac{3}{2n}}-8x^{-\frac{3}{2n}}=63$

（答　$x=2^{2n}, \frac{1}{2^{2n}}$）

22. 解　$x(2x+1)(x+2)(2x-3)=63$.

23. 設　$C^{18}_{r}=C^{18}_{r+2}$　　求　C^{r}_{5} 之值

24. 展開　$(1-x)^{-2}$

25. 試求 $(x+a)^n$ 展開式中之最大項.

【解】$\because$　$(x+a)^n=x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$

求　$\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$ 展開式之最大項卽可.

設　T_{r+1} 爲 $r+1$ 項, T_r 爲 r 項

則　$T_{r+1}=\frac{n-r+1}{r}\ \frac{a}{x}T_r$

若　$T_{r+1}>T_r$

必 $\dfrac{n-r+1}{r}\cdot\dfrac{a}{x}>1$

即 $\left(\dfrac{n+1}{r}-1\right)\dfrac{a}{x}>1$

即 $\dfrac{n+1}{r}>\dfrac{x}{a}+1$

即 $r<\dfrac{n+1}{\dfrac{x}{a}+1}$

26. 設 $x=\dfrac{1}{3}$ 求 $(1+4x)^8$ 展開式中之最大項.

由25題 $T_{r+1}=\dfrac{8-r+1}{r}\cdot 4xT_r$

$$=\frac{9-r}{r}\cdot\frac{4}{3}\cdot T_r$$

若 $T_{r+1}>T_r$.

$\dfrac{9-r}{r}\cdot\dfrac{4}{3}>1$

即 $36-4r>3r$

即 $36>7r$

∴ $r=5$. 即第六項爲最大.

27. 解 $9x^4-3x^3-7x^2-3x-2=0$ (清華1935)

28. 有七項等差級數，已知其和爲77，其各項平方和爲959. 求各項.

【解】 命 d 爲公差，中項爲 a，則此級數爲

$a-3d,\ a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d.$

故知其和爲 $7a=77$ 即 $a=11$.

又 $(a-3d)^2+(a-2d)^2+(a-d)^2+a^2+(a+d)^2$
$+(a+2d)^2+(a+3d)^2=959$.

即 $7a^2+28d^2=959$

$d=2$.

故此級數爲

5, 7, 9, 11, 13, 15, 17.

29. 解　$a^2e^{-ax}-b^2e^{-bx}=0$　　(清華1935)

【解】 以 e^{bx} 乘各項，得

$$a^2e^{(b-a)x}-b^2=0$$

即　$e^{(b-a)x}=\dfrac{b^2}{a^2}$

$\therefore$　$(b-a)x=\log_e b^2-\log_e a^2$

$\therefore$　$x=\dfrac{2(\log_e b-\log_e a)}{b-a}$.

30. 解　$\log_{10} x\cdot\log_e x=\log_{10} x^2$　　(清華1935)

【解】 移項，得

$$\log_{10} x(\log_e x-2)=0$$

$\therefore$　$\log_{10} x=0$

則　$x=1$.

$\log_e x=2$.

則　$x=e^2$

31. 將骰子二粒，甲先乙後，輪流投之，約定誰先投骰子上面點數之和為 7 時，則得獎洋 132 元.求甲乙二人之期望金額各若干　(北洋1936)

32. 應用餘數定理，設 $ax^3+bx^2-47x-15$ 能為 $(3x+1)$ 及 $(2x-3)$ 所整除時，a, b 之值為何.　(北洋1936)

33. 某門鎖着的或然率為 $\frac{1}{2}$；今 A 君從八個鑰匙取三個鑰匙去開此門，但在此八個鑰匙中，只一個能開此門，問 A 君能進此門之或然率.

【解】 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{C_2^7}{C_3^8}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{16}$.

34. 證 $\begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=(a-1)^6$

35. 設　$x=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2ab}{a^2-b^2}}$.

證　$\frac{ab}{a^2+b^2}\left(x^{\frac{a}{b}}+x^{\frac{b}{a}}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$

36. 若　$x+\frac{1}{y}=1$，　$y+\frac{1}{z}=1$　則 $z+\frac{1}{x}=1$ 試證之.

【證】由假設得　$z=\frac{1}{1-y}$，　$\frac{1}{x}=\frac{y}{y-1}$

$$z+\frac{1}{x}=\frac{1}{1-y}+\frac{y}{y-1}=\frac{1}{1-y}-\frac{y}{1-y}=1$$