Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 4

Aufgaben

Aufgabe 4.1. Es sei

$$\varphi\colon K^3 \longrightarrow K^2,\ (x,y,z) \longmapsto (xy,xz).$$

Bestimme die glatten Punkte zur Nullstellenmenge von φ. Für welche Punkte kann man (bei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) den den Satz über implizite Abbildungen anwenden, für welche muss man die Definition 3.15 heranziehen?

Aufgabe 4.2. Zeige, dass das Stanley-Reisner-Ideal I_Δ (über einem Körper) zu einem simplizialen Komplex ein Radikal ist.

Aufgabe 4.3. Zeige, dass das Stanley-Reisner-Ideal I_Δ (über einem Körper) zu einem simplizialen Komplex nur dann ein Primideal ist, wenn Δ nur eine Facette besitzt.

Aufgabe 4.4. Es sei $I_\Delta \subseteq K[X_v,\, v \in V]$ das Stanley-Reisner-Ideal zu einem simplizialen Komplex Δ und sei S eine Seite von Δ. Zeige

$$I_\Delta \subseteq (X_v,\, v \notin S) =: \mathfrak{p}_S.$$

Zeige ferner, dass $\mathfrak{p}_S$ ein Primideal im Polynomring ist und dass es keine Primideale zwischen I_Δ und $\mathfrak{p}_S$ für Facetten S gibt.

Aufgabe 4.5. Es sei $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine Achsenraumkonfiguration. Zeige, dass der singuläre Ort von V ebenfalls eine Achsenraumkonfiguration ist.

Aufgabe 4.6. Zeige, dass es im Polynomring in n Variablen genau $\binom{d+n-1}{n-1}$ Monome vom Grad d gibt.

Aufgabe 4.7. Zeige, dass es im Polynomring in n Variablen genau $\binom{d+n}{n}$ Monome vom Grad $\leq d$ gibt.

Aufgabe 4.8. Wir betrachten das maximale Ideal

$$\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_n) \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$$

im Polynomring über einem Körper K und seine Potenzen $\mathfrak{m}^d$. Zeige, dass die Monome

$$X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n},\ \sum_{i=1}^n \nu_i < d,$$

eine K-Basis des Restklassenringes $K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{m}^d$ bildet.

Aufgabe 4.9. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal in einem kommutativen Ring R. Zeige, dass die Potenzen $\mathfrak{a}^n$, $n \in \mathbb{N}_+$, alle dasselbe Radikal besitzen.

Aufgabe 4.10. Es sei $\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_n) \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$ das durch die Variablen erzeugte maximale Ideal im Polynomring über einem Körper K und f ein Polynom mit $f \in \mathfrak{m}^s$. Zeige, dass für jede formale partielle Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} \in \mathfrak{m}^{s-1}$$

gilt.

Aufgabe 4.11. Berechne in $\mathbb{Q}[X, Y, Z]/(XY, XZ)$ das Produkt

$$\begin{aligned}&\left(3 + 3X - 5X^2 - 4Y - 2Y^2 + 3Z - Z^3 + YZ - Y^2Z + 2YZ^3\right)\\ &\qquad \cdot \left(-2 + 3X - X^3 + Y + Z + 5Y^3 - Z^2 - 2YZ + Y^2Z^2\right).\end{aligned}$$

Aufgabe 4.12. Es sei $R = K[X, Y]/(XY)$ und $\mathfrak{m} = (X, Y)$ das maximale Ideale von R. Bestimme eine Formel für die K-Dimension der Restklassenringe $R/\mathfrak{m}^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4.13. Es sei $R = K[X, Y]/(XYZ)$ und $\mathfrak{m} = (X, Y, Z)$ das maximale Ideale von R. Bestimme eine Formel für die K-Dimension der Restklassenringe $R/\mathfrak{m}^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4.14. Es sei $R = K[X_1, \ldots, X_n]/I_\Delta$ ein Stanley-Reisner-Ring der Dimension d (d.h. die maximale Elementanzahl in einer Facette von Δ sei d) und $\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_n)$ das homogene maximale Ideal davon. Vergleiche die Größenordnung der Funktion

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ s \longmapsto \dim_K (R/\mathfrak{m}^s),$$

mit der entsprechenden Funktion für einen Polynomring in d Variablen.

Aufgabe 4.15. Sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass R genau dann ein lokaler Ring ist, wenn $a + b$ nur dann eine Einheit ist, wenn a oder b eine Einheit ist.

Aufgabe 4.16. Sei R ein kommutativer Ring. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen.

(1) R hat genau ein maximales Ideal
(2) Die Menge der Nichteinheiten $R \setminus R^\times$ bildet ein Ideal in R.

Aufgabe 4.17. Sei R ein lokaler Ring mit Restekörper K. Zeige, dass R und K genau dann die gleiche Charakteristik haben, wenn R einen Körper enthält.

Aufgabe 4.18.*

Sei R ein lokaler Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R. Zeige, dass

$$R^\times \longrightarrow (R/\mathfrak{a})^\times$$

surjektiv ist.

Aufgabe 4.19. Bestimme die Unterringe der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, die lokal sind.

Aufgabe 4.20. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $R = K[X_1, \ldots, X_n]$. Zeige, dass sämtliche Lokalisierungen von R an maximalen Idealen zueinander isomorph sind.

Aufgabe 4.21. Sei K ein Körper und betrachte das Achsenkreuz

$$V = V(XY) \subseteq \mathbb{A}_K^2.$$

Bestimme für jeden Punkt $P \in V$, ob der lokale Ring an P ein Integritätsbereich ist oder nicht.

Aufgabe 4.22. Wir betrachten die Neilsche Parabel

$$C = V(X^2 - Y^3) \subseteq \mathbb{A}_K^2$$

über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Zeige, dass sämtliche Lokalisierungen von C an Punkten $P \neq (0,0)$ zueinander isomorph sind, aber nicht zur Lokalisierung im Nullpunkt.

Aufgabe 4.23. Es sei R die Lokalisierung im Nullpunkt der Kurve

$$C = V(Y^2 - X^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}_K^2$$

und es sei S die Lokalisierung des Achsenkreuzes im Nullpunkt. Sind diese beiden lokalen Ringe isomorph?

Aufgabe 4.24. Sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal mit Lokalisierung $R_{\mathfrak{m}}$. Es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal, dass unter der Lokalisierungsabbildung zum Kern gehört. Zeige, dass dann $R_{\mathfrak{m}}$ auch eine Lokalisierung von $R/\mathfrak{a}$ ist.

Aufgabe 4.25. Es sei K ein Körper und R eine endlich erzeugte K-Algebra. Es sei $S = R_{\mathfrak{m}}$ die Lokalisierung von R an einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$. Zeige, dass der Restekörper von S endlich über K ist.

Aufgabe 4.26. Sei R ein kommutativer Ring, sei $f \in R$ und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal. Zeige, dass $f \in \mathfrak{a}$ genau dann gilt, wenn für alle Lokalisierungen $R_{\mathfrak{p}}$ gilt, dass $f \in \mathfrak{a}R_{\mathfrak{p}}$ ist.

Aufgabe 4.27.*

Sei K ein Körper und seien R und S integre, endlich erzeugte K-Algebren. Es sei

$$\varphi\colon\ R \longrightarrow S$$

ein K-Algebrahomomorphismus und $\mathfrak{n}$ ein maximales Ideal in S mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$. Die Abbildung induziere einen Isomorphismus $R_{\mathfrak{m}} \to S_{\mathfrak{n}}$. Zeige, dass es dann auch ein $f \in R$, $f \notin \mathfrak{m}$, gibt derart, dass $R_f \to S_{\varphi(f)}$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 4.28. Sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Dann ist der Restklassenring $S = R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper $Q = Q(S)$ und $R_{\mathfrak{p}}$ ist ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$. Zeige, dass eine natürliche Isomorphie

$$Q(S) \cong R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$$

vorliegt.

Aufgabe 4.29. Es sei Δ ein simplizialer Komplex und

$$R = K[X_1, \ldots, X_n]/I_\Delta$$

der zugehörige Stanley-Reisner-Ring. Es sei $P \in \Delta(K)$ ein Punkt mit dem zugehörigen maximalen Ideal $\mathfrak{m}_P \subseteq R$. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) P ist ein glatter Punkt von $\Delta(K)$.
(2) Die Lokalisierung $R_{\mathfrak{m}_P}$ ist ein Integritätsbereich.
(3) Die Lokalisierung $R_{\mathfrak{m}_P}$ ist isomorph zu einer Lokalisierung eines Polynomringes an einem maximalen Ideal ist.

Aufgabe 4.30. Es sei $V(f_1, \ldots, f_s) \subseteq K^n$ eine affin-algebraische Menge und $g \in K[X_1, \ldots, X_n]$. Zeige, dass durch

$$\varphi \colon V \cap D(g) \longrightarrow W, \, (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \left(x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{g(x_1, \ldots, x_n)} \right),$$

eine stetige Bijektion mit

$$W = V(f_1, \ldots, f_s, gY - 1) \subseteq K^{n+1}$$

gegeben ist.

Aufgabe 4.31. Zeige, dass in der Situation von Aufgabe 4.30 ein Punkt $P \in V$ genau dann glatt ist, wenn $\varphi(P) \in W$ glatt ist.

Wir werden später sehen, dass die Glattheit eine intrinsische Eigenschaft des Punktes bzw. des lokalen Ringes ist.

Abbildungsverzeichnis