Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 23

Aufgaben

Aufgabe 23.1. Wo wird im Beweis zu Lemma 23.1 verwendet, dass $q \neq 2$ ist. Welche der angeführten Eigenschaften gelten bei $n = q = 2$, welche nicht? Wie sieht es bei $q = 2$ und $n = 4$ aus?

Aufgabe 23.2. Interpretiere Satz 23.2 im Fall $n = 3$, also im Fall der Eisenstein-Zahlen $R_3 = \mathbb{Z}[\frac{-1+\mathrm{i}}{2}]$. Vergleiche insbesondere mit Aufgabe 9.29.

Aufgabe 23.3. Interpretiere Satz 23.2 im Fall $n = 4$, also im Fall der Gaußschen Zahlen $R_4 = \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Vergleiche insbesondere mit Aufgabe 9.26.

Aufgabe 23.4. Bestimme das Zerlegungsverhalten im Kreisteilungsring R_7 für die Primzahlen $q = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$.

Aufgabe 23.5. Bestimme das Zerlegungsverhalten im Kreisteilungsring R_8 für die Primzahlen $q = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$.

Aufgabe 23.6. Bestimme das Zerlegungsverhalten im Kreisteilungsring R_9 für die Primzahlen $q = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$.

Aufgabe 23.7. Es sei p eine Primzahl und sei R_p der p-te Kreisteilungsring. Bestimme die Zerlegungsgruppe und die Trägheitsgruppe zu einem Primideal $\mathfrak{q}$ über (p).

Aufgabe 23.8. Es sei $R_n = \mathbb{Z}[X]/(\Phi_n)$ der n-te Kreisteilungsring und sei p eine Primzahl, die n nicht teile. Es sei f die multiplikative Ordnung von p in der Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/(n))^\times$. Zeige, dass p^r genau dann die Norm eines Ideals von R_n ist, wenn r ein Vielfaches von f ist.

Aufgabe 23.9. Untersuche Korollar 23.3 für den Fall $q = 2$, insbesondere bei $n = 1$ und $n = 2$.

Aufgabe 23.10. Zeige, dass Korollar 23.3 (7) ohne die Bedingung der Unverzweigtheit nicht zu den anderen Eigenschaften der Aussage äquivalent ist.

Zur folgenden Aufgabe vergleiche Aufgabe 21.3.

Aufgabe 23.11. Es sei p eine Primzahl und

$$R_p = \mathbb{Z}[X]/\big(X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X^2 + X + 1\big)$$

der p-te Kreisteilungsring. Es sei

$$H \subseteq (\mathbb{Z}/(p))^{\times} \cong \operatorname{Gal}(K_p|\mathbb{Q})$$

eine Untergruppe der Galoisgruppe, und es seien

$$H_1 = H,\, H_2, \ldots, H_k \subseteq (\mathbb{Z}/(p))^{\times}$$

die Nebenklassen zu H. Zeige, dass der Invariantenring R_p^H die Ganzheitsbasis

$$f_j = \sum_{a \in H_j} X^a$$

zu $j = 1, \ldots, k$ besitzt.

Aufgabe 23.12. Bestimme die Ganzheitsbasen für die Unterringe zu sämtlichen Untergruppen der Galoisgruppe in der Situation von Aufgabe 23.11 für $p = 5$.

Aufgabe 23.13.*

Bestimme die Ganzheitsbasen für die Unterringe zu sämtlichen Untergruppen der Galoisgruppe in der Situation von Aufgabe 23.11 für $p = 7$.

Aufgabe 23.14. Bestimme die Ganzheitsbasen für die Unterringe zu sämtlichen Untergruppen der Galoisgruppe in der Situation von Aufgabe 23.11 für $p = 11$.

Aufgabe 23.15.*

Es sei $S = \mathbb{Z}[2\zeta] \subseteq R_5$ der durch 2ζ erzeugte Unterring des fünften Kreisteilungsringes, wobei $\zeta = e^{2\pi \mathrm{i}/5}$ die erste primitive fünfte Einheitswurzel bezeichnet.

(1) Bestimme eine Gleichung für S über $\mathbb{Z}$.

(2) Zeige, dass die Galoisoperation auf dem fünften Kreisteilungskörper keine Gruppenoperation auf S induziert.
(3) Bestimme $S \cap \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$.

Die folgende Aufgabe gibt in Verbindung mit Aufgabe 22.24 eine natürliche Erklärung für das in Aufgabe 22.20 beobachtete Verhalten.

Aufgabe 23.16.*

Wir betrachten die Körperkette

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[X]/\big(X^3 - 3X + 1\big) \subseteq K_9$$

und die zugehörige Kette von Zahlbereichen

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[X]/\big(X^3 - 3X + 1\big) \subseteq R_9.$$

Wenn ζ eine neunte primitive Einheitswurzel bezeichnet, so sei

$$X = \zeta + \zeta^{-1},$$

vergleiche Aufgabe 22.23. Zeige, dass für jede Primzahl $p \neq 3$ in

$$\mathbb{Z}/(p)[X]/\big(X^3 - 3X + 1\big)$$

eine der Beziehung

$$X^p = \begin{cases} X \\ X^2 - 2 \\ -X^2 - X + 2 \end{cases}$$

gilt. Zeige ferner, dass es allein von der Restklasse von p modulo 9 abhängt, welche der drei Fälle gilt.

Aufgabe 23.17.*

Zeige, dass im sechsten Kreisteilungsring R_6 weder $\sqrt{6}$ noch $\sqrt{-6}$ enthalten ist.

Aufgabe 23.18. Es sei p eine ungerade Primzahl und

$$g = \sum_{r=0}^{p-1} \left(\frac{r}{p}\right) \zeta^r$$

die (erste) quadratische Gaußsumme. Es sei σ ein Automorphismus des p-ten Kreisteilungsringes. Zeige $\sigma(g) = g$ genau dann gilt, wenn unter den Isomorphismen

$$\operatorname{Aut}(R_p) \cong (\mathbb{Z}/(p))^\times \cong (\mathbb{Z}/(p-1), +, 0)$$

σ durch eine gerade Zahl repräsentiert wird.

Aufgabe 23.19.*

Berechne mit Hilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und seiner Ergänzungssätze das Legendre-Symbol

$$\left(\frac{53}{311} \right) .$$

Aufgabe 23.20.*

Berechne mit Hilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und seiner Ergänzungssätze das Legendre-Symbol

$$\left(\frac{563}{1231} \right) .$$

Bemerkung: 563 und 1231 sind Primzahlen.

Aufgabe 23.21.*

Beschreibe mittels geeigneter Kongruenzbedingungen diejenigen ungeraden Primzahlen p mit der Eigenschaft, dass 7 ein Quadratrest modulo p ist.

Gibt es unendlich viele solche Primzahlen?

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5