

Analysis I

Vorlesung 19

In dieser Vorlesung untersuchen wir mit Mitteln der Differentialrechnung, wann eine Funktion

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist, (lokale) Extrema besitzt und wie ihr Wachstumsverhalten aussieht. Da man nur reelle Zahlen der Größe nach miteinander vergleichen kann, nicht aber komplexe Zahlen, muss die Wertemenge reell sein. Die Definitionsmenge könnte grundsätzlich beliebig sein, und wir werden im zweiten Semester entsprechende Überlegungen für Funktionen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R} anstellen, hier ist aber die Definitionsmenge \mathbb{R} bzw. ein Teilintervall davon.

SATZ 19.1. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen und sei*

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die in $a \in D$ ein lokales Extremum besitzt und dort differenzierbar sei. Dann ist

$$f'(a) = 0.$$

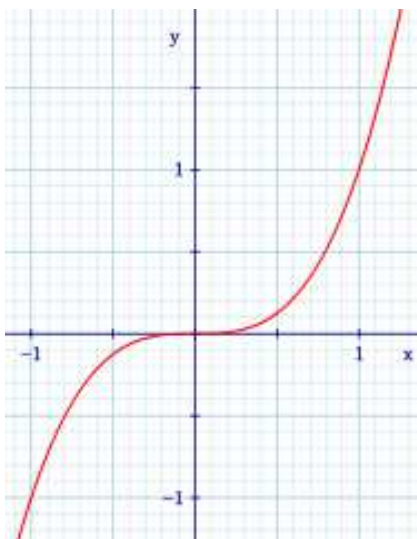
Beweis. Wir können annehmen, dass f ein lokales Maximum in a besitzt. Es gibt also ein $\epsilon > 0$ mit $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in [a - \epsilon, a + \epsilon]$. Es sei $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $a - \epsilon \leq s_n < a$, die gegen a („von unten“) konvergiere. Dann ist $s_n - a < 0$ und $f(s_n) - f(a) \leq 0$ und somit ist der Differenzenquotient

$$\frac{f(s_n) - f(a)}{s_n - a} \geq 0,$$

was sich dann nach Lemma 6.3 auf den Limes, also den Differentialquotienten, überträgt. Also ist $f'(a) \geq 0$. Für eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a + \epsilon \geq t_n > a$ gilt andererseits

$$\frac{f(t_n) - f(a)}{t_n - a} \leq 0.$$

Daher ist auch $f'(a) \leq 0$ und somit ist insgesamt $f'(a) = 0$. \square



Man beachte, dass das Verschwinden der Ableitung nur ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Extremums ist. Das einfachste Beispiel für dieses Phänomen ist die Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, die streng wachsend ist, deren Ableitung aber im Nullpunkt verschwindet. Ein hinreichendes Kriterium wird in Korollar 19.7 weiter unten gegeben, siehe auch Satz 22.6.

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

SATZ 19.2. *Es sei $a < b$ und sei*

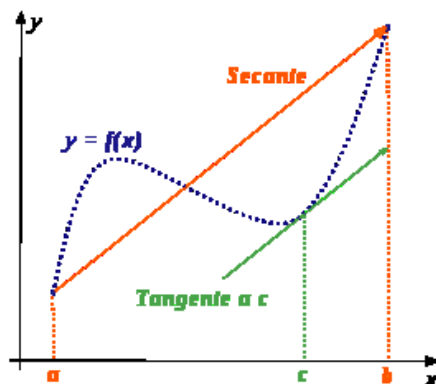
$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf $]a, b[$ differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit

$$f'(c) = 0.$$

Beweis. Wenn f konstant ist, so ist die Aussage richtig. Sei also f nicht konstant. Dann gibt es ein $x \in]a, b[$ mit $f(x) \neq f(a) = f(b)$. Sagen wir, dass $f(x)$ größer als dieser Wert ist. Aufgrund von Satz 13.10 gibt es ein $c \in [a, b]$, wo die Funktion ihr Maximum annimmt, und dieser Punkt kann kein Randpunkt sein. Für dieses c ist dann $f'(c) = 0$ nach Satz 19.1. \square

Der vorstehende Satz heißt *Satz von Rolle*.



Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt anschaulich gesprochen, dass es zu einer Sekante eine parallele Tangente gibt.

Der folgende Satz heißt *Mittelwertsatz der Differentialrechnung*. Er besagt beispielsweise, dass bei einem differenzierbaren eindimensionalen Bewegungsvorgang die Durchschnittsgeschwindigkeit mindestens einmal als Momentangeschwindigkeit auftritt.

SATZ 19.3. *Es sei $a < b$ und sei*

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf $]a, b[$ differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Diese Funktion ist ebenfalls stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Ferner ist $g(a) = f(a)$ und

$$g(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a).$$

Daher erfüllt g die Voraussetzungen von Satz 19.2 und somit gibt es ein $c \in]a, b[$ mit $g'(c) = 0$. Aufgrund der Ableitungsregeln gilt also

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

KOROLLAR 19.4. *Es sei*

$$f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$. Dann ist f konstant.

Beweis. Wenn f nicht konstant ist, so gibt es $x < x'$ mit $f(x) \neq f(x')$. Dann gibt es aufgrund von Satz 19.3 ein c , $x < c < x'$, mit $f'(c) = \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \neq 0$, ein Widerspruch zur Voraussetzung. \square

SATZ 19.5. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und*

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) *Die Funktion f ist genau dann auf I wachsend (bzw. fallend), wenn $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in I$ ist.*
- (2) *Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ ist und f' nur endlich viele Nullstellen besitzt, so ist f streng wachsend.*
- (3) *Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$ ist und f' nur endlich viele Nullstellen besitzt, so ist f streng fallend.*

Beweis. (1). Es genügt, die Aussagen für wachsende Funktionen zu beweisen. Wenn f wachsend ist, und $x \in I$ ist, so gilt für den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

für jedes h mit $x+h \in I$. Diese Abschätzung gilt dann auch für den Grenzwert für $h \rightarrow 0$, und dieser ist $f'(x)$. Sei umgekehrt die Ableitung ≥ 0 . Nehmen wir an, dass es zwei Punkte $x < x'$ in I mit $f(x) > f(x')$ gibt. Aufgrund des Mittelwertsatzes gibt es dann ein c mit $x < c < x'$ mit

$$f'(c) = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} < 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. (2). Es sei nun $f'(x) > 0$ mit nur endlich vielen Ausnahmen. Angenommen es wäre $f(x) = f(x')$ für zwei Punkte $x < x'$. Da f nach dem ersten Teil wachsend ist, ist f auf dem Intervall $[x, x']$ konstant. Somit ist $f' = 0$ auf diesem gesamten Intervall, ein Widerspruch dazu, dass f' nur endlich viele Nullstellen besitzt. \square

KOROLLAR 19.6. *Eine reelle Polynomfunktion*

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $d \geq 1$ besitzt maximal $d-1$ lokale Extrema, und die reellen Zahlen lassen sich in maximal d Intervalle unterteilen, auf denen abwechselnd f streng wachsend oder streng fallend ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 19.10. \square

KOROLLAR 19.7. *Es sei I ein reelles Intervall,*

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $a \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls. Es gelte $f'(a) = 0$. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Wenn $f''(a) > 0$ ist, so besitzt f in a ein isoliertes lokales Minimum.
 (2) Wenn $f''(a) < 0$ ist, so besitzt f in a ein isoliertes lokales Maximum.

Beweis. Siehe Aufgabe 19.10. □

Eine Verallgemeinerung dieser Aussage werden wir in Satz 22.6 kennenlernen.

Der zweite Mittelwertsatz und die Regel von l'Hospital

Die folgende Aussage heißt auch *zweiter Mittelwertsatz*.

SATZ 19.8. *Es sei $b > a$ und seien*

$$f, g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige, auf $]a, b[$ differenzierbare Funktionen mit

$$g'(x) \neq 0$$

für alle $x \in]a, b[$. Dann ist $g(b) \neq g(a)$ und es gibt ein $c \in]a, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Beweis. Die Aussage

$$g(a) \neq g(b)$$

folgt aus Satz 19.2. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(x).$$

Es ist

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(a) \\ &= \frac{f(a)g(b) - f(a)g(a) - f(b)g(a) + f(a)g(a)}{g(b) - g(a)} \\ &= \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)} \\ &= \frac{f(b)g(b) - f(b)g(a) - f(b)g(b) + f(a)g(b)}{g(b) - g(a)} \\ &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(b) \\ &= h(b). \end{aligned}$$

Also ist $h(a) = h(b)$ und Satz 19.2 liefert die Existenz eines $c \in]a, b[$ mit

$$h'(c) = 0.$$

Umstellen ergibt die Behauptung. □

Aus dem zweiten Mittelwertsatz erhält man den ersten Mittelwertsatz zurück, wenn man für g die Identität nimmt.



L'Hospital (1661-1704)

Zur Berechnung von Grenzwerten einer Funktion, die als Quotient gegeben ist, ist die folgende *Regel von l'Hospital* hilfreich.

KOROLLAR 19.9. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a \in I$ ein Punkt. Es seien*

$$f, g: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen, die auf $I \setminus \{a\}$ differenzierbar seien mit $f(a) = g(a) = 0$ und mit $g'(x) \neq 0$ für $x \neq a$. Es sei vorausgesetzt, dass der Grenzwert

$$w := \lim_{x \in I \setminus \{a\}, x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert. Dann existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{x \in I \setminus \{a\}, x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

und sein Wert ist ebenfalls w .

Beweis. Zur Ermittlung des Grenzwertes benutzen wir das Folgenkriterium. Da g' im Intervall keine Nullstelle besitzt und $g(a) = 0$ ist, besitzt auch g nach Satz 19.2 außer a keine Nullstelle. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $I \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Zu jedem x_n gibt es nach Satz 19.8, angewandt auf $I_n := [x_n, a]$ bzw. $[a, x_n]$, ein c_n (im Innern von I_n) mit

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls gegen a , so dass nach Voraussetzung die rechte Seite gegen $\frac{f'(a)}{g'(a)} = w$ konvergiert. Daher konvergiert auch die linke Seite gegen w , und wegen $f(a) = g(a) = 0$ bedeutet das, dass $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ gegen w konvergiert. \square

BEISPIEL 19.10. Die beiden Polynome

$$3x^2 - 5x - 2 \text{ und } x^3 - 4x^2 + x + 6$$

haben beide für $x = 2$ eine Nullstelle. Es ist also nicht von vornherein klar, ob der Limes

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$$

existiert und welchen Wert er besitzt. Aufgrund der Regel von l'Hospital kann man den Grenzwert über die Ableitungen bestimmen, und das ergibt

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x - 5}{3x^2 - 8x + 1} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}.$$

Abbildungsverzeichnis

Quelle = X Cubed.svg , Autor = Benutzer Pieter Kuiper auf Commons, Lizenz = PD	2
Quelle = Mvt2 italian.svg , Autor = Benutzer 4C auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	3
Quelle = Guillaume de l'Hôpital.jpg , Autor = Benutzer Bemoeial auf Commons, Lizenz = PD	6
Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz.	9
Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt.	9