Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 23

Übungsaufgaben

AUFGABE 23.1. Epimenides der Kreter sagte: „Alle Kreter sind Lügner“. Ist diese Aussage ein Widerspruch?

AUFGABE 23.2. Eine Person sagt: „Ich lüge (jetzt)“. Kann das wahr sein?

AUFGABE 23.3. In der *Russellsche Antinomie* wird die Definition

$$M = \{N \mid N \text{ ist eine Menge, die sich nicht selbst enthält}\}$$

betrachtet. Kann M eine Menge sein?

AUFGABE 23.4. Betrachte die Aussage: „Der Barbier von Sevilla rasiert alle Männer, die sich nicht selbst rasieren“. Rasiert er sich selbst?

AUFGABE 23.5.*

Es sei M eine beliebige Menge. Zeige, dass es keine surjektive Abbildung von M in die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ geben kann.

AUFGABE 23.6. Die Klasse 8c hat an jedem Wochentag eine Stunde mathematische Logik. Der Lehrer sagt am Freitag: „nächste Woche werden wir eine Klassenarbeit schreiben, und das wird eine Überraschung sein“. Begründe, dass der Lehrer lügt.

AUFGABE 23.7. Das Brennersche Putzparadoxon besagt: „Immer wenn ich putze, sieht es danach so aus, wie bei einer durchschnittlichen Hausfrau vor dem Putzen“. Ist dies ein Widerspruch, eine Antinomie, ein Paradoxon, oder einfach nur mangelndes Talent?

AUFGABE 23.8. Eine natürliche Zahl heißt *besonders*, wenn sie eine für sie spezifische, benennbare Eigenschaft erfüllt. Die 0 ist als neutrales Element der Addition und die 1 ist als neutrales Element der Multiplikation besonders. Die 2 ist die erste Primzahl, die 3 ist die kleinste ungerade Primzahl, die 4 ist die erste echte Quadratzahl, die 5 ist die Anzahl der Finger einer Hand, die 6 ist die kleinste aus verschiedenen Faktoren zusammengesetzte Zahl, die 7 ist die Anzahl der Zwerge im Märchen, u.s.w., diese Zahlen sind also alle besonders. Gibt es eine Zahl, die nicht besonders ist? Gibt es eine kleinste Zahl, die nicht besonders ist?

Aufgabe 23.9. Es sei Γ eine korrekte entscheidbare arithmetische Ausdrucksmenge, die die Peano-Arithmetik umfasse. Es sei $\alpha(x)$ das zugehörige Ableitungsprädikat. Zeige aus den in Bemerkung 23.7 aufgeführten Eigenschaften für einen Fixpunkt q mit

$$\Gamma \vdash \neg\alpha(GN(q)) \leftrightarrow q\,,$$

dass weder $\Gamma \vdash q$ noch $\Gamma \vdash \neg q$ gilt.

Aufgabe 23.10. Es sei Γ eine korrekte entscheidbare arithmetische Ausdrucksmenge, die die Peano-Arithmetik umfasse. Es sei $\alpha(x)$ das zugehörige Beweisbarkeitsprädikat und es sei q ein Fixpunkt zum negierten Ableitungsprädikat, also

$$\Gamma \vdash \neg\alpha(GN(q)) \leftrightarrow q\,.$$

(1) Welche Eigenschaften aus Bemerkung 23.7 gelten in $\mathbb{N}$?
(2) Gilt

$$\neg\alpha(GN(q)) \leftrightarrow q$$

in $\mathbb{N}$?
(3) Welche der Ausdrücke $q, \neg q, \alpha(GN(q)), \neg\alpha(GN(q))$ gelten in $\mathbb{N}$?

Aufgabe 23.11.*

Es sei Γ eine arithmetische Ausdrucksmenge und α ein einstelliges Prädikat mit

$$\Gamma \vdash \alpha(n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es einen Satz q mit

$$\Gamma \vdash \alpha(GN(q)) \leftrightarrow q$$

gibt.

Aufgabe 23.12. Es sei Γ eine arithmetische Ausdrucksmenge und α ein einstelliges Prädikat mit

$$\Gamma \vdash \neg\alpha(n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es einen Satz q mit

$$\Gamma \vdash \alpha(GN(q)) \leftrightarrow q$$

gibt.

Aufgabe 23.13. Wir setzen

$$\alpha(x) := \exists y(x = y + y)$$

und es sei die Gödelisierung mit Primzahlen vorausgesetzt. Zeige (ohne den Fixpunktsatz zu verwenden), dass es einen Satz $q \in L_0^{\mathrm{Ar}}$ mit

$$PA \vdash \alpha(GN(q)) \leftrightarrow q$$

gibt.

Aufgabe 23.14. Es sei k eine fixierte positive natürliche Zahl und es sei

$$\alpha(x) := \exists y(x = ky),$$

wobei ky als die k-fache Addition von y mit sich selbst realisiert werde. Es sei die Gödelisierung mit Primzahlen vorausgesetzt. Zeige (ohne den Fixpunktsatz zu verwenden), dass es einen Satz $q \in L_0^{\mathrm{Ar}}$ mit

$$PA \vdash \alpha(GN(q)) \leftrightarrow q$$

gibt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 23.15. (4 Punkte)

Es seien $n_1, \ldots, n_r$ natürliche Zahlen und sei

$$\alpha(x) := (x = n_1) \wedge \ldots \wedge (x = n_r),$$

wobei n_j durch die n_j-fache Summe der 1 mit sich selbst realisiert werde. Zeige, dass es Sätze $p, q \in L_0^{\mathrm{Ar}}$ mit

$$\vdash \alpha(GN(p)) \leftrightarrow p$$

und mit

$$\vdash \neg\alpha(GN(q)) \leftrightarrow q$$

gibt.

Aufgabe 23.16. (3 Punkte)

Folgere aus dem ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz die Unentscheidbarkeit der Arithmetik.

Aufgabe 23.17. (6 Punkte)

Es sei Γ eine korrekte entscheidbare arithmetische Ausdrucksmenge, die die Peano-Arithmetik umfasse. Es sei $\alpha(x)$ das Ableitungsprädikat zu Γ und es sei q ein Fixpunkt zum negierten Ableitungsprädikat, also

$$\Gamma \vdash \neg\alpha(GN(q)) \leftrightarrow q\,.$$

Zeige, dass aus den in Bemerkung 23.7 angeführten Eigenschaften man

$$\Gamma \vdash \neg\alpha(GN(p \wedge \neg p)) \rightarrow \neg\alpha(GN(q))$$

erhalten kann, wobei p ein beliebiger Ausdruck ist.

Aufgabe 23.18. (4 Punkte)

Es sei Γ eine korrekte entscheidbare arithmetische Ausdrucksmenge, die die Peano-Arithmetik umfasse. Es sei $\alpha(x)$ das zugehörige Beweisbarkeitsprädikat und es sei q ein Fixpunkt zum negierten Ableitungsprädikat, also

$$\Gamma \vdash \neg\alpha(GN(q)) \leftrightarrow q\,.$$

Zu einem beliebigen Ausdruck p betrachten wir $\neg\alpha(GN(p \wedge \neg p))$. Welche der Ausdrücke

$$\neg\alpha(GN(p \wedge \neg p)),\ \neg\alpha(GN(q)),\ \neg\alpha(GN(p \wedge \neg p)) \rightarrow \neg\alpha(GN(q))$$

gelten in $\mathbb{N}$?

Aufgabe 23.19. (4 (2+2) Punkte)

Es sei Γ eine arithmetische Ausdrucksmenge und α ein einstelliges Prädikat.

(1) Es gelte
$$\Gamma \vdash \alpha(n)$$
für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ und für alle übrigen natürlichen Zahlen gelte
$$\Gamma \vdash \neg\alpha(n)\,.$$
Zeige, dass es einen Satz q mit
$$\Gamma \vdash \alpha(GN(q)) \leftrightarrow q$$
gibt.

(2) Es gelte
$$\Gamma \vdash \neg\alpha(n)$$
für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ und für alle übrigen natürlichen Zahlen gelte
$$\Gamma \vdash \alpha(n)\,.$$
Zeige, dass es einen Satz q mit
$$\Gamma \vdash \alpha(GN(q)) \leftrightarrow q$$
gibt.

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5