

Lineare Algebra und analytische Geometrie I**Arbeitsblatt 21****Die Pausenaufgabe**

AUFGABE 21.1. Überprüfe, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zur Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

ist und bestimme, falls ein Eigenvektor vorliegt, den zugehörigen Eigenwert.

Übungsaufgaben

AUFGABE 21.2. Was sind bei einer linearen Abbildung

$$\varphi: K \longrightarrow K$$

die Eigenwerte und die Eigenvektoren von φ ?

AUFGABE 21.3. Es seien

$$\varphi, \psi: V \longrightarrow V$$

Endomorphismen auf einem K -Vektorraum V und es sei $v \in V$ ein Eigenvektor von φ und von ψ . Zeige, dass v auch ein Eigenvektor von $\varphi \circ \psi$ ist. Was ist der Eigenwert?

AUFGABE 21.4. Bestimme die Eigenvektoren und die Eigenwerte zu einer linearen Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die durch eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ gegeben ist.

AUFGABE 21.5. Zeige, dass der erste Standardvektor ein Eigenvektor zu einer jeden oberen Dreiecksmatrix ist. Was ist der Eigenwert?

AUFGABE 21.6.*

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix. Zeige, dass ein Eigenwert zu M ein Diagonaleintrag von M sein muss.

AUFGABE 21.7. Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

derart, dass φ keine Eigenwerte besitzt, dass aber eine gewisse Potenz φ^n , $n \geq 2$, Eigenwerte besitzt.

AUFGABE 21.8. Zeige, dass jede Matrix

$$M \in \text{Mat}_2(\mathbb{C})$$

mindestens einen Eigenwert besitzt.

AUFGABE 21.9. Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass

$$\text{kern } \varphi = \text{Eig}_0(\varphi)$$

gilt.

AUFGABE 21.10. Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Sei $\lambda \in K$ und sei

$$U = \text{Eig}_\lambda(\varphi)$$

der zugehörige Eigenraum. Zeige, dass sich φ zu einer linearen Abbildung

$$\varphi|_U: U \longrightarrow U, v \longmapsto \varphi(v),$$

einschränken lässt, und dass diese Abbildung die Streckung um den Streckungsfaktor λ ist.

AUFGABE 21.11. Es sei $\varphi: V \rightarrow V$ ein Isomorphismus auf einem K -Vektorraum V mit der Umkehrabbildung φ^{-1} . Zeige, dass $a \in K$ genau dann ein Eigenwert von φ ist, wenn a^{-1} ein Eigenwert von φ^{-1} ist.

AUFGABE 21.12. Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von φ und $P \in K[X]$ ein Polynom. Zeige, dass $P(\lambda)$ ein Eigenwert von $P(\varphi)$ ist.

AUFGABE 21.13.*

Es seien V_1, \dots, V_n Vektorräume über dem Körper K und

$$\varphi_i: V_i \longrightarrow V_i$$

lineare Abbildungen. Es sei $a \in K$ ein Eigenwert zu φ_k für ein bestimmtes k . Zeige, dass a auch ein Eigenwert zur Produktabbildung

$$\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n: V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \times \cdots \times V_n$$

ist.

AUFGABE 21.14. Zeige, dass $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert zu einer durch eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi: K^2 \longrightarrow K^2$$

ist, wenn λ eine Nullstelle des Polynoms

$$X^2 - (a + d)X + ad - cb$$

ist.

Der Begriff des Eigenvektors ist auch für unendlichdimensionale Vektorräume definiert und wichtig, wie die folgende Aufgabe zeigt.

AUFGABE 21.15. Es sei V der reelle Vektorraum, der aus allen unendlich oft differenzierbaren Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} besteht.

a) Zeige, dass die Ableitung $f \mapsto f'$ eine lineare Abbildung von V nach V ist.

b) Bestimme die Eigenwerte der Ableitung und zu jedem Eigenwert mindestens einen Eigenvektor.¹

c) Bestimme zu jeder reellen Zahl die Eigenräume und deren Dimension.

¹In diesem Zusammenhang spricht man auch von *Eigenfunktionen*.

AUFGABE 21.16.*

Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus auf einem endlichdimensionalen K -Vektorraum V und sei $v \in V$ ein Eigenvektor zu φ zum Eigenwert $\lambda \in K$. Es sei

$$\varphi^*: V^* \longrightarrow V^*$$

die duale Abbildung zu φ . Wir betrachten Basen von V der Form v, u_1, \dots, u_r mit der Dualbasis v^*, u_1^*, \dots, u_r^* . Man gebe Beispiele für das folgende Verhalten.

- v^* ist Eigenvektor von φ^* zum Eigenwert λ unabhängig von u_1, \dots, u_r .
- v^* ist Eigenvektor von φ^* zum Eigenwert λ bezüglich einer Basis v, u_1, \dots, u_r , aber nicht bezüglich einer Basis v, w_1, \dots, w_r .
- v^* ist bezüglich keiner Basis v, u_1, \dots, u_r ein Eigenvektor von φ^* .

AUFGABE 21.17. Es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und $v \in V$, $v \neq 0$, ein fixierter Vektor. Zeige, dass

$$R(v) = \{\varphi \in \text{End}(V) \mid v \text{ ist Eigenvektor zu } \varphi\}$$

mit der natürlichen Addition und Multiplikation von Endomorphismen ein Ring und ein Untervektorraum von $\text{End}(V)$ ist. Bestimme die Dimension dieses Raumes.

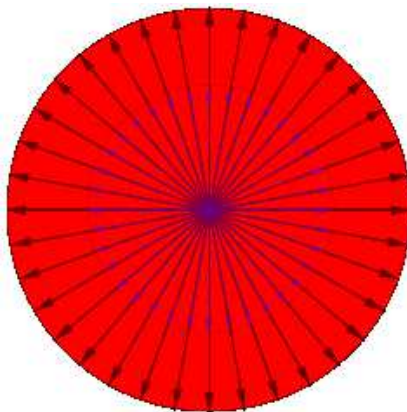
AUFGABE 21.18. Es sei K ein Körper, $c \in K$ und $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$ ein

von 0 verschiedener Vektor. Erstelle ein inhomogenes lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge genau diejenigen $n \times n$ -Matrizen sind, für die a ein Eigenvektor zum Eigenwert c ist. Was ist das Besondere an diesem Gleichungssystem und welche Dimension hat die Lösungsmenge?

AUFGABE 21.19. Es sei M eine reelle $n \times n$ -Matrix. Es sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl, die ein Eigenwert von M ist, wenn man diese als eine komplexe Matrix auffasst. Zeige, dass a schon im Reellen ein Eigenwert von M ist.

Man verallgemeinere die vorstehende Aufgabe für eine Körpererweiterung $K \subseteq L$.

Aufgaben zum Abgeben



AUFGABE 21.20. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann eine Streckung ist, wenn jeder Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, ein Eigenvektor von φ ist.

AUFGABE 21.21. (4 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass M als reelle Matrix keine Eigenwerte besitzt. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume von M als komplexer Matrix.

AUFGABE 21.22. (6 Punkte)

Betrachte die reellen Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

Man charakterisiere in Abhängigkeit von a, b, c, d , wann eine solche Matrix

- (1) zwei verschiedene Eigenwerte,
- (2) einen Eigenwert mit einem zweidimensionalen Eigenraum,
- (3) einen Eigenwert mit einem eindimensionalen Eigenraum,
- (4) keinen Eigenwert,

besitzt.

AUFGABE 21.23. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung mit

$$\varphi^n = \text{Id}_V$$

für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$.² Zeige, dass jeder Eigenwert λ von φ die Eigenschaft $\lambda^n = 1$ besitzt.

AUFGABE 21.24. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und es sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von φ und v ein zugehöriger Eigenvektor. Zeige, dass es zu einer gegebenen Basis v, u_2, \dots, u_n von V eine Basis v, w_2, \dots, w_n gibt mit $\langle v, u_j \rangle = \langle v, w_j \rangle$ und mit

$$\varphi(w_j) \in \langle u_i, i = 2, \dots, n \rangle$$

für alle $j = 2, \dots, n$.

Zeige ebenso, dass dies bei $\lambda = 0$ nicht möglich ist.

²Der Wert $n = 0$ ist hier erlaubt, aber aussageelos.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Homothety in two dim.svg , Autor = Benutzer Lantonov auf
Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0

5