Prof. Dr. H. Brenner — Osnabrück WS 2020/2021

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 3

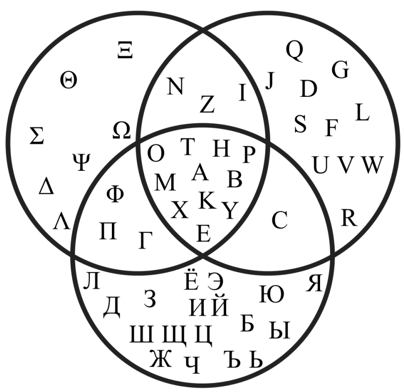
Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1. Bestimme für die Mengen

$$M = \{a, b, c, d, e\},\ N = \{a, c, e\},\ P = \{b\},\ R = \{b, d, e, f\}$$

die Mengen

(1) $M \cap N$,
(2) $M \cap N \cap P \cap R$,
(3) $M \cup R$,
(4) $(N \cup P) \cap R$,
(5) $N \setminus R$,
(6) $(M \cup P) \setminus (R \setminus N)$,
(7) $((P \cup R) \cap N) \cap R$,
(8) $(R \setminus P) \cap (M \setminus N)$.



Aufgabe 3.2. Es sei LA die Menge der Großbuchstaben des lateinischen Alphabets, GA die Menge der Großbuchstaben des griechischen Alphabets und RA die Menge der Großbuchstaben des russischen Alphabets. Bestimme die folgenden Mengen.

(1) $GA \setminus RA$.
(2) $(LA \cap GA) \cup (LA \cap RA)$.
(3) $RA \setminus (GA \cup RA)$.

(4) $RA \setminus (GA \cup LA)$.
(5) $(RA \setminus GA) \cap ((LA \cup GA) \setminus (GA \cap RA))$.

Aufgabe 3.3.*

Es seien A, B und C Mengen. Beweise die Identität

$$A \setminus (B \cap C) \, = \, (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Aufgabe 3.4. Es seien A, B und C drei Mengen. Man beweise die folgenden Identitäten.

(1) $A \cup \emptyset = A$,
(2) $A \cap \emptyset = \emptyset$,
(3) $A \cap B = B \cap A$,
(4) $A \cup B = B \cup A$,
(5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(6) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
(7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
(8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
(9) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Aufgabe 3.5. Beweise die mengentheoretischen Fassungen einiger aristotelischer Syllogismen. Dabei bezeichnen A, B, C Mengen.

(1) Modus Barbara: Aus $B \subseteq A$ und $C \subseteq B$ folgt $C \subseteq A$.
(2) Modus Celarent: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \subseteq B$ folgt $C \cap A = \emptyset$.
(3) Modus Darii: Aus $B \subseteq A$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \cap A \neq \emptyset$.
(4) Modus Ferio: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \not\subseteq A$.
(5) Modus Baroco: Aus $B \subseteq A$ und $B \not\subseteq C$ folgt $A \not\subseteq C$.

Aufgabe 3.6. Gilt für die Vereinigung von Mengen die „Abziehregel“, d.h. kann man aus $A \cup C \, = \, B \cup C$ auf $A \, = \, B$ schließen?

Aufgabe 3.7.*

Es seien A, B, C Mengen. Zeige, dass die beiden folgenden Aussagen zueinander äquivalent sind.

(1) $A \, \subseteq \, B \cup C$.
(2) $A \setminus B \, \subseteq \, C$
(3) $A \setminus C \, \subseteq \, B$.

Aufgabe 3.8. Skizziere die Produktmenge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe 3.9. Beschreibe für je zwei (einschließlich dem Fall, dass das Produkt mit sich selbst genommen wird) der folgenden geometrischen Mengen die Produktmengen.

(1) Ein Geradenstück I.

(2) Eine Kreislinie K.
(3) Eine Kreisscheibe D.
(4) Eine Parabel P.

Welche Produktmengen lassen sich als eine Teilmenge im Raum realisieren, welche nicht?

AUFGABE 3.10. Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x,y) \mid x = 7 \text{ oder } y = 3\}$,
(2) $\{(x,y) \mid 7x \geq 3y \text{ und } 4x \leq y\}$,
(3) $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 0\}$,
(4) $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

AUFGABE 3.11. (1) Skizziere die Menge

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - 7y = 3\right\}$$

und die Menge

$$N = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 5\right\}.$$

(2) Bestimme den Durchschnitt $M \cap N$ zeichnerisch und rechnerisch.

Es empfiehlt sich, die in den folgenden Aufgaben formulierten Mengenidentitäten zu veranschaulichen.

AUFGABE 3.12.*

Es seien M und N Mengen und seien $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$ Teilmengen. Zeige die Gleichheit

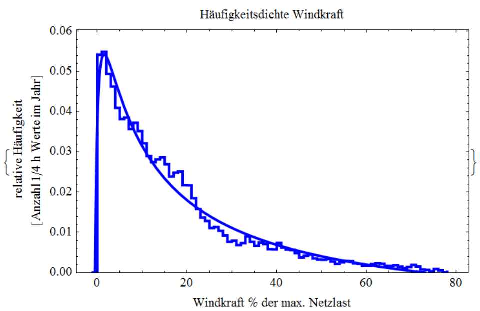
$$(A \times N) \cap (M \times B) \, = \, A \times B.$$

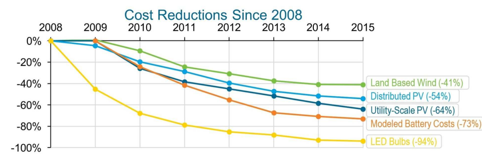
AUFGABE 3.13. Es seien M und N Mengen und seien $A_1, A_2 \subseteq M$ und $B_1, B_2 \subseteq N$ Teilmengen. Zeige die Gleichheit

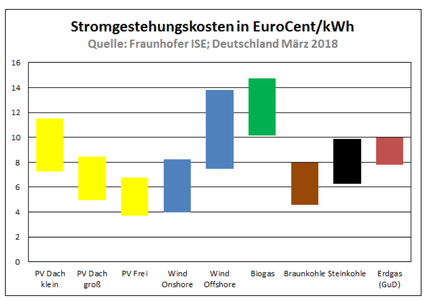
$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \, = \, (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

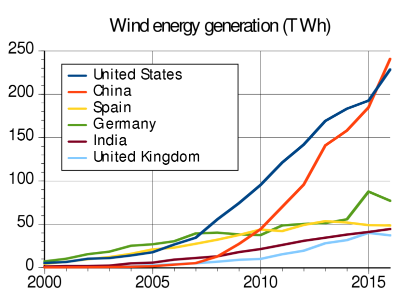
AUFGABE 3.14. Es sei P eine Menge von Personen und V die Menge der Vornamen von diesen Personen und N die Menge der Nachnamen von diesen Personen. Definiere natürliche Abbildungen von P nach V, nach N und nach $V \times N$ und untersuche sie in Hinblick auf die relevanten Abbildungsbegriffe.

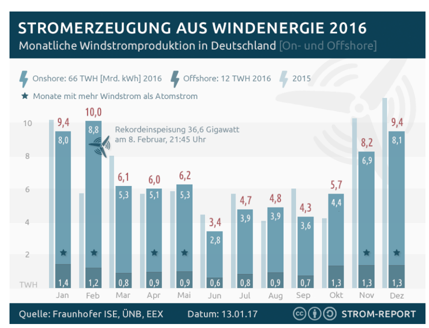
AUFGABE 3.15. Bestimme für die folgenden Diagramme, welche empirischen Abbildungen in ihnen dargestellt werden (sollen). Was sind jeweils die Definitionsmengen, die Wertemengen, mit welchen Einheiten wird gearbeitet? Wird (pro Bild) nur eine Abbildung dargestellt oder mehrere? Handelt es sich überhaupt um Abbildungen? Welche Informationen werden über die Abbildung hinaus gegeben? Werden die empirischen Abbildungen mathematisiert?











Aufgabe 3.16. Man gebe Beispiele für Abbildungen

$$\varphi, \psi \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

derart, dass φ injektiv, aber nicht surjektiv ist, und dass ψ surjektiv, aber nicht injektiv ist.

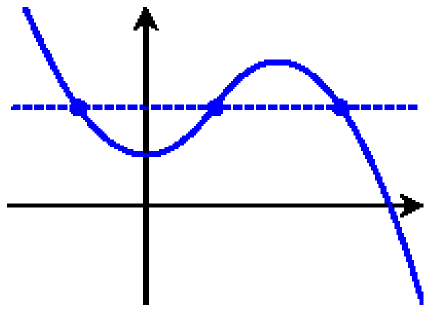
Aufgabe 3.17. Man beschreibe eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3.18. Untersuche für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n,$$

auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 3.19. Wie sehen die Graphen der Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus, die Sie in der Schule kennengelernt haben?



Aufgabe 3.20. Woran erkennt man am Graphen einer Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

ob f injektiv bzw. surjektiv ist?

Aufgabe 3.21. Welche bijektiven Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder zwischen Teilmengen von $\mathbb{R}$) kennen Sie aus der Schule? Wie heißen die Umkehrabbildungen?

Aufgabe 3.22. Es seien L und M Mengen. Zeige, dass die Abbildung

$$\tau\colon L \times M \longrightarrow M \times L,\ (x, y) \longmapsto (y, x),$$

eine bijektive Abbildung zwischen den Produktmengen $L \times M$ und $M \times L$ festlegt.

Aufgabe 3.23. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F\colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Es sei

$$G\colon M \longrightarrow L$$

eine Abbildung, die $F \circ G = \mathrm{id}_M$ und $G \circ F = \mathrm{id}_L$ erfüllt. Zeige, dass dann G die Umkehrabbildung von F ist.

Aufgabe 3.24. Wir betrachten die Mengen

$$L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},\ M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\} \text{ und } N = \{R, S, T, U, V, W, X, Y, Z\}$$

und die Abbildungen $\varphi\colon L \to M$ und $\psi\colon M \to N$, die durch die Wertetabellen

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	c	i	a	g	d	e	h	b

und

y	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$\psi(y)$	X	Z	Y	S	Z	S	T	W	U

gegeben sind.

(1) Erstelle eine Wertetabelle für $\psi \circ \varphi$.
(2) Sind die Abbildungen φ, ψ, $\psi \circ \varphi$ injektiv?
(3) Sind die Abbildungen φ, ψ, $\psi \circ \varphi$ surjektiv?

Aufgabe 3.25. Bestimme die Hintereinanderschaltungen $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$ für die Abbildungen $\varphi, \psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$\varphi(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 5 \text{ und } \psi(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 1$$

definiert sind.

Aufgabe 3.26. (1) Kann eine konstante Abbildung bijektiv sein?
(2) Ist die Hintereinanderschaltung einer konstanten Abbildung mit einer beliebigen Abbildung (also die konstante Abbildung zuerst) konstant?
(3) Ist die Hintereinanderschaltung einer beliebigen Abbildung mit einer konstanten Abbildung (also die konstante Abbildung zuletzt) konstant?

Aufgabe 3.27.*

Es seien L, M, N und P Mengen und es seien

$$F \colon L \longrightarrow M,\ x \longmapsto F(x),$$

$$G \colon M \longrightarrow N,\ y \longmapsto G(y),$$

und

$$H \colon N \longrightarrow P,\ z \longmapsto H(z),$$

Abbildungen. Zeige, dass dann

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F$$

gilt.

Aufgabe 3.28.*

Es seien L, M und N Mengen und

$$F \colon L \longrightarrow M,\ x \longmapsto F(x),$$

und

$$G \colon M \longrightarrow N,\ y \longmapsto G(y),$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$G \circ F \colon L \longrightarrow N.$$

Zeige die folgenden Eigenschaften.

(1) Wenn F und G injektiv sind, so ist auch $G \circ F$ injektiv.

(2) Wenn F und G surjektiv sind, so ist auch $G \circ F$ surjektiv.
(3) Wenn F und G bijektiv sind, so ist auch $G \circ F$ bijektiv.

Aufgabe 3.29.*

Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f\colon\ L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 3.30. (4 Punkte)

Es seien A und B zwei Mengen. Zeige, dass die folgenden Aussagen zueinander äquivalent sind.

(1) $A \subseteq B$,
(2) $A \cap B = A$,
(3) $A \cup B = B$,
(4) $A \setminus B = \emptyset$,
(5) Es gibt eine Menge C mit $B = A \cup C$,
(6) Es gibt eine Menge D mit $A = B \cap D$.

Aufgabe 3.31. (2 Punkte)

Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x, y) \mid 2x = 5 \text{ und } y \geq 3\}$,
(2) $\{(x, y) \mid -3x \geq 2y \text{ und } 4x \leq -5y\}$,
(3) $\{(x, y) \mid y^2 - y + 1 \leq 4\}$,
(4) $\{(x, y) \mid xy = 0\}$.

Aufgabe 3.32. (3 Punkte)

Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f\colon\ L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch g surjektiv.

Aufgabe 3.33. (4 Punkte)

Wir betrachten einen Computer, der nur zwei Speicher besitzt, in denen jeweils eine natürliche Zahl stehen kann. Zu Beginn eines jedes Programms (also einer Aneinanderreihung von Befehlen) lautet die Belegung $(0, 0)$. Der Computer kann einen Speicher leeren, einen Speicher um 1 erhöhen, zu Befehlen springen (unbedingter Sprungbefehl) und die beiden Inhalte der Speicher der Größe nach miteinander vergleichen. Ferner kann es zu einem Befehl wechseln, wenn die Vergleichsbedingung erfüllt ist (bedingter Sprungbefehl). Schließlich gibt es einen Druckbefehl, bei dem das momentane Belegungspaar ausgedruckt wird. Schreibe ein Computerprogramm, das jedes Paar $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ genau einmal ausdruckt.

Aufgabe 3.34. (4 Punkte)

Bestimme die Hintereinanderschaltungen $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$ für die Abbildungen $\varphi, \psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$\varphi(x) = x^3 + 2x + 1 \text{ und } \psi(x) = x^2 - 5$$

definiert sind.

Aufgabe 3.35. (3 Punkte)

Betrachte auf der Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ die Abbildung

$$\varphi \colon M \longrightarrow M, \, x \longmapsto \varphi(x),$$

die durch die Wertetabelle

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	2	5	6	1	4	3	7	7

gegeben ist. Berechne φ^{1003}, also die 1003-te Hintereinanderschaltung (oder *Iteration*) von φ mit sich selbst.

Abbildungsverzeichnis