1° 或性質ヲ有スル點ハ或圖形上ニアル。

2° 圖形上ノ總テノ點ハ或性質ヲ有スル。

此二通リノ證明ヲ要スル。併シ常ニ此證明法ヲ執ラントスレバ甚ダ困難ナ場合ガ多イ。ソコデ斯様ナ時ニハ此等ト同價値ナル對偶命題ヲ用フルノデアル。即チ 1° ヲ用フルニ困難ナル時ニハ其對偶命題タル

「或圖形上ニアラザル點ハ或性質ヲ有セズ」。

ヲ證明スル，又 2° ヲ用フルニ困難ナル時ニハ其對偶命題タル

「或性質ヲ有セザル點ハ此圖形上ニアラズ」。

ヲ證明スルノデアル。ヨツテ軌跡問題ノ證明法ニハ次ニ掲ゲル四通リノ證明法ガアル。

第一證明法

1° 圖形上ノ凡テノ點ハアル性質ヲ有スル

2° 圖形上ニアラザル點ハアル性質ヲ有セズ

第二證法明

1° 或性質ヲ有セザル凡テノ點ハ圖形上ニアラズ

2° 圖形上ニアラザル凡テノ點ハ或性質ヲ有セズ。

第三證明法

1° 或性質ヲ有スル點ハ此圖形上ニ在ル

2° 圖形上ノ凡テノ點ハアル性質ヲ有スル。

第四證明法

1° 或性質ヲ有セザル凡テノ點ハ圖形上ニアラズ。

2° 或性質ヲ有スル凡テノ點ハ圖形上ニ在ル。

以上ノ四通リノ方法ハ何レモ同價値ノモノデアルカラ，其何レヲ採ルモ差支ヘガナイ。ケレドモ最初ノ程ハ第一證明法ニヨルヲ便トスベク，漸次習熟スルニ從ヒ第三證明法ニヨルヲ便トスル。殊ニ軌跡ノ形狀ガ知ラレタルモノニアツテハ第一證明法ヲ用フルコト甚ダ便利デアルガ,軌跡ノ形狀ガ與ヘラレズ單ニアル性質ヲ有スル點ノ軌跡ヲ求メヨトイフガ如キニ至ツテハ第三證明法ニヨルヲ可トシ,而カモ或性質ヲ有スル點ハ或圖形上ニアルトイフ方カラ證明スルノガ得策デアル。

軌跡トイフ文字ハらてん語ノ Locus トイフ語ヲ譯シタノデ,ソレハ英語ノ場所 (Place) トイフ意義デ彼ノ有名ナぷらとー (Plato 429?—347B.C.) ガ始メテ用ヒタ語デアル。ぷらとーハ最初圓周トハ如何ナルモノカトイフコトヲ定義スル爲メニ「一ツノ點ガ一ツノ定點ノ周リヲ一定ノ距離ヲ保ツテ動クトキ，其點ノ通過スル道ガ圓周デアル」トシタガ,コノ定義ハ物理的ノ臭ヒガスルガ,之ヲ數學的ニ直ストドウスレバ良イカト考ヘ,遂ヒニ「一定點カラ一定ノ距離ニアル點ノ軌跡ハ圓周デアル」トシタノデアル。ぷらとーガ非常ニ幾何學ヲ尊重シ宇宙ノ眞理ヲ之ニヨツテ解決セントシタ。嘗ツテ或人ハ「神ノ任務ハ如何」ト問フタ時彼ハ言下ニ「幾何學デアル」トイツタ。 9.7.

46. 軌跡ノ證明法。

前節ニ於テ軌跡ノ證明法ニハ四通リアルコトヲ述ベタ次ニ夫等ヲ例示セウ。

第一證明法ニヨル例題

例一，二定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ線分ノ垂直二等分線デアル。

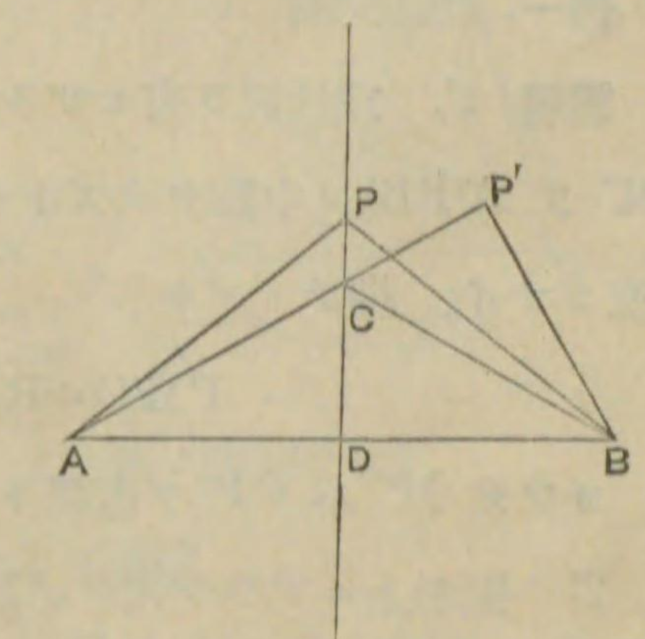
證明 1° 圖形上ノ凡テノ點ハ，アル性質ヲ有スルコトノ證明

AB ノ垂直二等分線上ニ任意ノ點 P ヲトリ，

PA, PB ヲ結ブト

$$\triangle PAD \equiv \triangle PBD$$

$$\therefore \quad PA = PB$$



即チ P 點ハ二定點 A, B カラ等距離ニアル。

2° 圖形上ニアラザル凡テノ點ハ，アル性質ヲ有セザルコトノ證明

垂直二等分線外ニ任意ノ點 P′ ヲトレ，P′A, P′B ヲ結ブト其何レカ一ツハ二等分線ト交ル。コレヲ C トスレバ

$$AC = CB$$

圖ノ如キ場合ハ $CB + CP' > P'B$

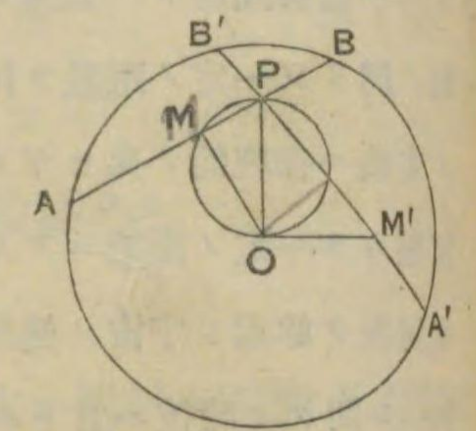
即チ $AC + CP' = AP' > P'B$

即チ二等分線外ノ凡テノ點ハ二定點 A,B カラ不等距離ニアル。

例二, 定圓 O 内ノ定點 P ヲ通ル任意ノ弦ノ中點ノ軌跡ハ線分 OP ヲ直徑トスル圓周デアル。

證明 1° 圖形上ノ總テノ點ハアル性質ヲ有スルコトノ證明。

OP ヲ直徑トスル圓周上ノ任意ノ一點 M ヲトリテ, 直線 MP 直線ガ O 圓周ト交ル點ヲ A,B トス。



今 OM ヲ結ベバ

$$\widehat{PMO}=R\angle$$

∴ M ハ弦 AB ノ中點デアル。

2° 圖形上ニアラザル總テノ點ハ, アル性質ヲ有セヌコトノ證明

OP ヲ直徑トスル圓周外ニ任意ノ一點 M′ ヲトリ, M′P ヲ結ブ直線ガ圓 O ノ周ト交ル點ヲ A′, B′ トスル。OM′ ヲ結ブト角 PM′O ハ直角ニ等シクナイカラ, M′ ハ弦 AB ノ中點デナイ。

第二證明法ニヨル例題

例一, 問題同前

證明 1°, 或性質ヲ有セザル凡テノ點ハ圖形上ニアラザルコトノ證明

M′ ヲ A′PB′ ノ中點ナラズトセヨ。(前圖) M′O ヲ結ブト OM′ ハ A′B′ ト直交シナイ。即チ

$$\widehat{PM'O}\neq R\angle$$

ヨツテ M′ ハ OP ヲ直徑トスル圓周上ニアラズ

2° 圖形上ニアラザ凡テノ點ハ或性質ヲ有セヌコトノ證明

前題ノ後半ト同一デアルカラ省略スル。

例二, 二定點カラ等距離ニアル點ノ軌跡ハ線分ABノ垂直二等分線デアル,(第一證明例一)

證明 1° アル性質ヲ有セザル凡テノ點ハ圖形上ニアラザルコトノ證明。

P′ ヲ不等距離ニアル點トシ, (第一證明法例一ト同シ圖)

$$P'A>P'B$$

トスル。P′ カラ AB ニ垂線 P′D′ ヲ引ケバ

$$P'A^2=AD'^2+D'P'^2$$

$$P'B^2=D'B^2+D'P'^2$$

然ルニ $P'A>P'B$

デアルカラ $AD'>D'B$

ヨツテ D′ ハ線分 AB ノ二等分點デナイ。從ツテ P ハ BC ノ垂直二等分線上ニナイ。

2° 圖形上ニアラザル凡テノ點ハアル性質ヲ有セヌコトノ證明。

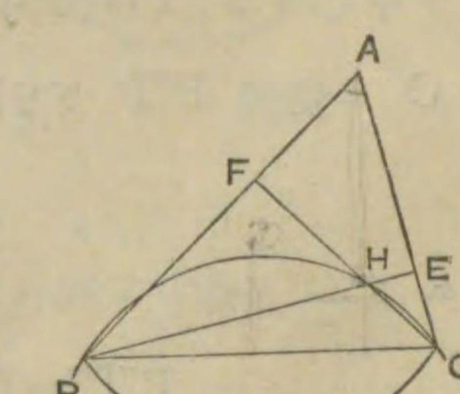
コレハ前證明法ノ後半ト同一デアルカラ省略スル。

第三證明法ニヨル例題

例一, 底邊ノ位置大サ及ビ頂角ノ大サガ與ヘラレタ三角形ノ垂心ノ軌跡如何。

證明 1° 或性質ヲ有スル點ハ或圖形上ニ在ルコトノ證明。

BC ヲ與ヘラレタ位置ニアル底邊ナリトシ,頂角ノ大サヲ α トシ, 垂心ヲ H トスルト



$$\hat{E}=\hat{F}=R\angle$$

デアルカラ

$$\widehat{BHC}=2R\angle-\hat{A}=2R\angle-\alpha$$

即チ $\widehat{BHC}$ ハ一定デアル。故ニ求ムル軌跡ハ線分 BC ヲ弦トシ, 定角 $2R\angle-\alpha$ ヲ容ル丶二ツノ圓弧ノ群デアル。

2° 圖形上ノ凡テノ點ハアル性質ヲ有スルコトノ證明。

圓弧上ニ任意ノ點 H′ ヲトリ BH′ ニ垂直ニ CE′ ヲ引キ次ニ CH′ ニ垂直ニ BF′ ヲ引キ CE′, BF′ ノ交點ヲ A′ トスルト △A′BC ニ於テ

$$\hat{E'}=\hat{F'}=R\angle$$

ニシテ且ツ $\widehat{E'H'F'}=2R\angle-\alpha$

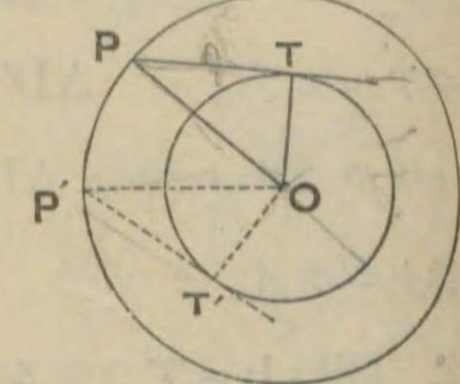
デアルカラ $\hat{A'}=\alpha$

デアル。而シテ H′ ハ △A′BC ノ垂心ナルコトガ明カデアル。

例二， 定圓ニ引ク切線ノ長サガ其圓ノ直徑ニ等シイ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

證明 1° 或性質ヲ有スル凡テノ點ハ或圖形上ニアルコトノ證明。

圓 O ノ直徑ノ長サニ等シイ切線ノ一ツノ位置ヲ PT トシ，T ヲ切點トスル。



今 PO, TO ヲ結ブト △PTO ハ $O\hat{T}P$ ハ直角ナル直角三角形デアル。

故ニ

$$PO^2=PT^2+TO^2$$

ソコデ圓 O ノ半徑ヲ r トスルト

$$PO^2=(2r)^2+r^2=5r^2$$

故ニ $PO=\sqrt{5}r$ ニ等シイ。ヨツテ P ハ O ヲ中心トシ，$\sqrt{5}r$ ヲ半徑トスル圓周上ニアル。

2° 圖形上ノ凡テノ點ハ或性質ヲ有スルコトノ證明。

O ヲ中心トシ，PO ヲ半徑トスル圓周上ノ任意ノ一點 P′ ヲトリ，P′ カラ原圓 O ニ切線 P′T′ ヲ引キ T′O ヲ結ブト三角形 P′T′O ハ直角三角形デアル。

故ニ

$$P'T'^2=P'O^2-T'O^2=(\sqrt{5}r)^2-r^2=4r^2$$

故ニ

$$P'T'=2r$$

仍ツテ O ヲ中心トシ $\sqrt{5}r$ ヲ半徑トスル圓周上ノ凡テノ點ハ所要ノ性質ヲ有スル。

第四證明法ニヨル例題

例一， 問題同前

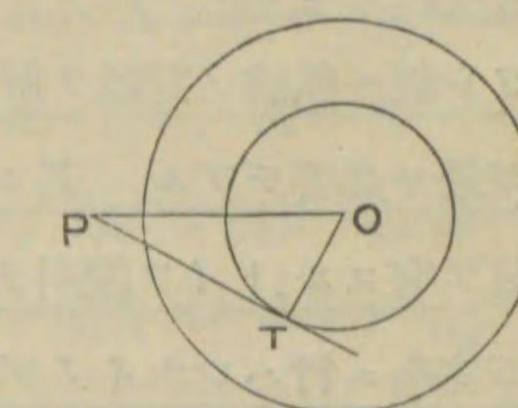
證明 1° 或性質ヲ有スル凡テノ點ハ圖形上ニアルコトノ證明。

コレハ前題ノ前半ト同一ナルヲ以テ省略スル。

2° 或性質ヲ有セザル凡テノ點ハ圖形上ニアラザルコトノ證明。

PT ヲ圓 O ノ一ツノ切線トシ，P ヲ $PT\neq 2r$ ナル如キ點トスルト，

$$PO^2=PT^2+TO^2 \qquad PO^2=PT^2+r^2$$



然ルニ $PT\neq 2r$ ナルニヨリ $PO^2\neq 5r^2$

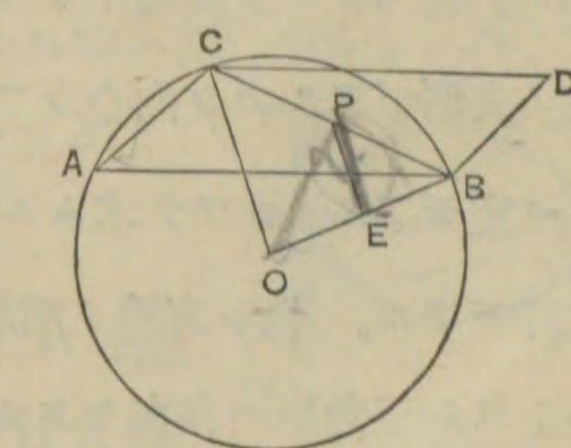
故ニ $PO\neq\sqrt{5r}$

從ツテ P ハ O ヲ中心トシ $\sqrt{5r}$ ヲ半徑トスル圓周上ニアラズ。

仍ツテ求ムル軌跡ハ O ヲ中心トシ $\sqrt{5r}$ ヲ半徑トスル圓周デアル。

例二， AB ヲ與ヘラレタ圓ノ定弦トシ，AC ヲ動弦トスル時，AB, AC ヲ二隣邊トスル平行四邊形ノ對角線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

證明 1° 或性質ヲ有スル凡テノ點ハ圖形上ニ在ルコトノ證明。



AB, AC ヲ二隣邊トスル平行四邊形 ABCD ニ於テ對角線ハ互ニ二等分スルガ故ニ BC ノ中點 P ハ軌跡上ノ一點デアル。

圓ノ中心 O ト B トヲ結ビ，ソノ中點ヲ E トシ PE ヲ結ブト

$$PE=\frac{1}{2}OC=\frac{1}{2}r \qquad \text{(但シ } r \text{ ハ圓ノ半徑)}$$

故ニ P ハ定點 E ヲ中心トシ定長 $\frac{1}{2}r$ ヲ半徑トスル圓周上ニアル。

2° 或性質ヲ有セザル凡テノ點ハ圖形上ニアラザルコトノ證明。

P′ ヲ BC 上ニアツテ其ノ中點ナラザル點トセヨ。然レバ P′ ハ動弦 BC ノ中點デハナイ。

故ニ CO ニ平行ニ P′E′ ヲ引クトキ E′ ハ E トハ一致セズ且ツ

$$P'E'\neq\frac{1}{2}r$$

ヨツテ P′ ハ先キニ畫イタ圓周上ノ點デハナイ。

47. 初等平面幾何學デハ其軌跡ノ圖形ハ直線，圓及ビ平面ニ限ルノデアル。勿論問題ニヨルト直線ノ一部分タル線分ノ時アリ，圓周ノ一部分タル圓

弧ナル時アリ又時トシテハ平面ノ全部デハナクテ限ラレタル平面デアル場合モアル。ノミナラズ往々ニシテ此等數種ノ群カラ成立ツテ居ル場合モアル。

ソレ故ニ軌跡ノ問題ヲ解クニハ,ソノ要件ニ適スル圖形ヲ正確ニ記述スルコトガ最モ必要デアル。若シ其限界ガ明カデナケレバ,「圖形上ノ凡テノ點ガ或性質ヲ有スル」トイフ證明ヲナス場合ニ此圖形トイフノガ不明デアル爲メニ證明ガ完全ニ行ハレナイノデアル。故ニ軌跡ノ限界ヲ明記スルコトヲ忘レテハナラヌ。次ニ一二ノ例ニ就イテ說明シヨウ。

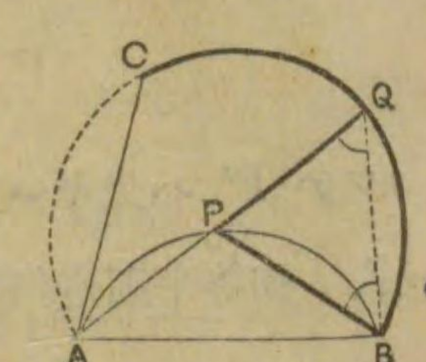
例一　與ヘラレタ底邊ノ上ニ立チ,與ヘラレタ頂角ヲ有スル三角形ノ內心ノ軌跡ヲ求メヨ。

BC ヲ與ヘラレタ底邊トシ α ヲ與ヘラレタ頂角トセバ內心ハ兩底角ノ二等分線ノ交點デアルカラ內心ガ二ツノ點 B,C ニ對シテ張ル角ハ $R\angle+\frac{\alpha}{2}$ デアルカラ一定デアル。ヨツテ求ムル軌跡ハ底邊ヲ弦トシ定角 $R\angle+\frac{\alpha}{2}$ ヲ容ルヽ圓弧ノ群デアル。但シ底邊ノ兩端點ハ軌跡トハ云ヒ難イ。何トナレバ兩端點ヲ內心トスル三角形ハ存在セヌカラデアル。

例二　圓 O ノ外部ニアル一點 P カラ割線ヲ引ク時,此割線ガ截リ取ル圓ノ弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

コノ場合ニハ求ムル軌跡ハ OP ヲ直徑トスル圓周ノ圓 O 內ニ在ル弧デアツテ圓周ノ全部デハナイ。ノミナラズコノ圓周ト圓 O トノ二ツノ交點モ嚴格ニイフト軌跡トハイヘヌ。何トナレバ此等ノ二ツノ交點ニ對應スルモノハ割線デハナクテ點 P カラノ切線デアルカラデス。

例三　與ヘラレタ弧 AB ノ上ニ任意ノ一點 P ヲトリ,AP ヲ BP ニ等シク延長シタル端點 Q ノ軌跡ヲ求メヨ。

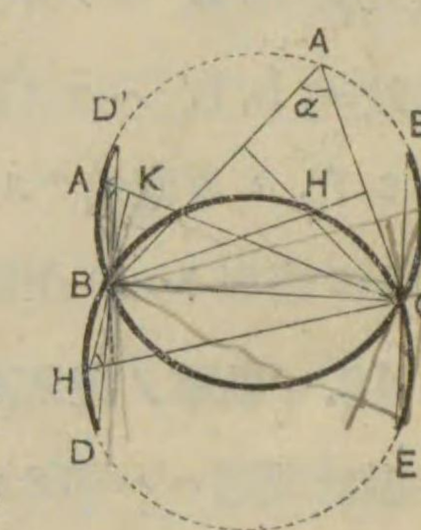


此場合ニハ三角形 PQB ハ二等邊デ且ツ $\hat{P}$ ハ一定デアルカラ $\hat{Q}$ モ一定デアル。故ニ所要ノ軌跡ハ AB ヲ弦トシ $\hat{P}$ ノ半分ヲ容レル弓形ノ弧デアル。併シ其全部デナイ。今其次第ヲ考ヘンニ最初 P ガ與ヘラレタ

圓弧ノ上ニ沿ヒナガラ B 點ニ近ヅクト Q モ亦 B 點ニ近ヅクカラ軌跡ハ B 點カラ初マル。次ニ P ヲ前ト反對ノ方向ニ動カシテ A ニ近ヅカシメルト,AP ノ長サガ漸次減少シ遂ヒニ P ガ A ニ一致スルニ至ル。故ニ Q ハ A 點ニ於ケル切線 AC ノ上ニ至ツテ止ムコトニナル。從ツテ所要ノ軌跡ハ弧 ACB ノ一部分デアル。但シ, B,C 二點ハ軌跡カラ除外スルモノトス。

例四　底邊 BC ノ位置及ビ大サ並ニ頂角 A ノ大サガ一定デ α ニ等シイ時三角形 ABC ノ垂心ノ軌跡ヲ求メヨ。

此問題ハ仲々ニ六ツカシイカラ限界ダケノ明示ニ止メズ詳細ニ說明シヨウ。



先ヅ條件ニ適スル任意ノ點ヲ H トシ, α ヲ銳角トスルト, 三角形 ABC ノ底角 B, C ガ共ニ銳角ナル時ハ, H ハ BC ニ關シテ頂點 A ト同ジ側ニアツテ且ツ

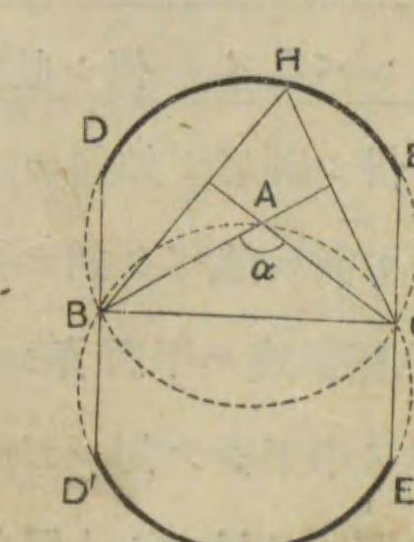
$$B\hat{H}C=2R\angle-\alpha$$

デアル。又角 B,C ノ一ツガ直角ナル時ハ H ハ其直角頂ニ一致シ, 角 B, C ノ一ツガ鈍角ナル時ハ H ハ BC ニ關シテ A ト反對ノ側ニアツテ且ツ $B\hat{H}C=\alpha$ 故ニ H ハ BC ヲ弦トシ, 頂點 A ト同ジ側ニ α ノ補角ヲ容レル弓形ノ弧又ハ其共軛弧ノ上ニアル。

サテ底邊ノ兩端 B, C カラ之ニ垂線ヲ引キ此圓周トノ交點ヲ夫々 D, E トシ, B カラ AC ニ下シタ垂線ノ足ヲ K トスルト

$$B\hat{K}C=R\angle$$

故ニ H ガ BC ニ關シテ A ト反對ノ側ニアル時ハ $C\hat{B}H$ ガ直角ヨリモ大トナルカラ H ハ優弧 DBCE (コレヲ S ト名ヅケテ置ク) ノ上ニアル。次ニ α ガ直角ナル時ハ H ハ BC ヲ直徑トスル圓周上ニアル。



又 α ガ鈍角ナル時ハ H ハ BC ニ關シテ恒ニ A ト同ジ側ニアツテ而カモ $B\hat{H}C=2R\angle-\alpha$ デ且ツ $B\hat{K}C=R\angle$ デアルカラ $C\hat{B}H$ ハ銳角デアル。故ニ此

場合ニハ H ハ劣弧 DE (之ヲ S′ ト名ヅケル)ノ上ニアル。次ニ此等ノ逆ヲ一括シテ證明センニ, S 上ニ任意ノ點 H′ ヲトリ, B,C カラ夫々 CH′, BH′ ニ垂線 BP, CQ ヲ引クト, 相交ル二直線ニ夫々垂直ナル二直線ハ又相交ルカラ BQ, CQ ハ相交ル。

今其ノ交點ヲ A′ トスルト, BH′ ⊥ A′C, CH′ ⊥ A′B デアルカラ, H′ ハ △A′BC ノ垂心トナリ, 且ツ ∠BA′C = α トナル。即チ S 上ノ任意ノ點 H′ ハ恒ニ要件ニ適スル。尙ホ BC ニ關シテ圓弧 S ト對稱ナル圓弧 S′ ニ就テモ亦同樣ニ論ズルコトガ出來ル。依テ所要ノ軌跡ハ BC ニ關シテ對稱ナル二定圓弧 L, L′ デアル。

玆ニ L, L′ ハ α ガ銳角ナルトキハ共ニ優弧, α ガ鈍角ナルトキハ共ニ劣弧ニシテ, α ガ直角ナルトキハ共ニ半圓周トナリ, 從ツテ此ノ場合ニハ軌跡ハ BC ヲ直徑トスル全圓周トナル。

48. 軌跡ノ發見法

軌跡問題ニハ初メカラ軌跡ノ圖形ガ明示セラレタモノト,然ラザルモノトノ二種類アル。若シ圖形ガ示セラレテ居ルカ,示サレテ居ラヌニシテモ容易ニ分リ易イ場合ニハ,先ヅ圖形上ニ任意ノ一點ヲトリ此點ガ條件ニ適スルコトヲ證明シ,次ニ此圖形上ニアラザル任意ノ一點ヲトツテ其點ガ條件ニ適セヌ所以ヲ證明スレバヨイ。即チ第四十六節ニ述ベタ第一證明法ヲ採用スレバ良イ。

次ニ圖形ガ明示セラレテ居ラナイ場合ニハ先ヅ條件ニ適スル一點ガアツタト假定シ,此點ガ有スベキ性質ヲ研究シテ以ツテ軌跡ハ如何ナル圖形上ニアルカヲ決定シ, ソレカラ今定メタ圖形上ノ任意ノ點ガ條件ニ適スル所以ヲ證明スレバ良イ。但シ此場合ニハ軌跡ノ限界ヲ明示スコトヲ忘レテハナラヌ。

併シ圖形ガ如何ナルモノカヲ發見スルコトハ實ハ容易ナ事デハナイ。ケレドモ前ニ述ベタ如ク初等平面幾何學デハ軌跡トナルベキ圖形ハ直線, 線分, 圓周, 圓弧或ハ平面若シクハ夫等ノ群ニ限ラレテ居ルノデアル。仍ツテ是等ノ圖形ノ中果シテ何レガ所要ノ軌跡デアルカヲ決定センニハ條件ニ適スル點ヲ澤山探シテ見ルト大體其形狀ヲ察知スルコトガ出來ル。殊ニ問題ニ特別ナル關

係ヲ有スル軌跡ノ點ヲ求メルト,一層明瞭ニ圖形ヲ豫知スルコトガ出來ル。カカル點ヲ特殊點トイフノデアル。

尙詳言スルト軌跡ガ直線ナル場合ニハ, 通常二ツノ定點ヲ過ルカ, 一定點ヲ過リ且ツ定方向ヲ有スルコトヲ確カメタラ良シク,又軌跡ガ圓周ナル場合ニハ其中心及ビ半徑ガ一定ナルカ,又ハ其弦ト之ニ對スル圓周角トガ一定ナルカ或ハ又其圓周ガ過ルベキ三ツノ點ヲ發見スレバ良イノデアル。所ガ軌跡タルベキ圖形ガ二ツノ直線トカ, 二ツノ圓弧トカヨリ成ル場合ガ多イノデアルガ, 其時ニ餘程ノ注意ヲ拂ハナイト,夫等ノ一部分ヲ見逃ガシテシマフ事ガアル。ソレト同時ニ又軌跡ナラザル部分ヲ軌跡トシテシマフ事モアル。軌跡問題ニハ其軌跡ノ圖形ヲ漏レナク採擇シ,軌跡ナラザルモノヲ凡テ捨テヽシマハネバナラヌ所ニ困難點ガアルノデアル。

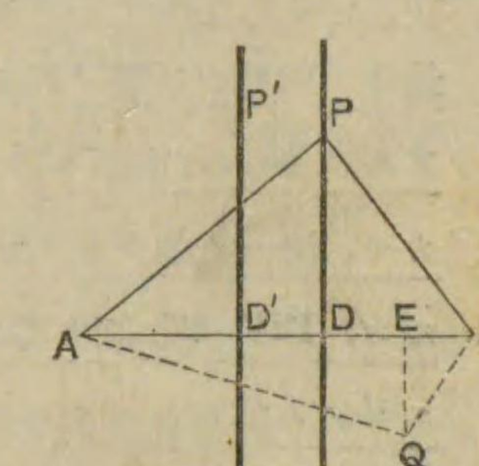
49. 本節ニ於テ二三ノ例題ヲ示サントス。

(1) 軌跡ハ無限直線トナル例題

例一. 二定點 A, B ヨリノ距離ノ上ノ正方形ノ差ガ定値 m^2 ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 A カラノ距離ヲ大ナリトス。然ルトキハ與ヘラレタ線分 AB ヲ D 點デ內分シ, AD^2-DB^2 ガ定値 m^2 ニ等シカラシムレバ, 所要ノ軌跡ハ D ヲ過リ, AB ヘノ垂直線 PD デアル。

先ヅ PD 上ノ凡テノ點ハ要件ニ適スルコトノ證明ヲセン。



PD 上ニ任意ノ點 P ヲトリ, PA, PB ヲ結ブト △PDA, △PDB ハ共ニ直角三角形デアル。故ニ

$$AP^2=AD^2+PD^2, \qquad BP^2=PD^2+BD^2$$

故ニ $$AP^2-BP^2=AD^2-BD^2=m^2$$

仍ツテ點 P ハ要件ヲ滿足スル。次ニ逆證明即チ PD 上ニアラザル凡テノ點ハ要件ニ適セヌコトノ證明ヲセンニ, PD 直線外ニ任意ノ點 Q ヲトリ, QA, QB ヲ結ビ, Q カラ AB 又ハ其延長ニ垂線 QE ヲ引クト E ハ D ニハ

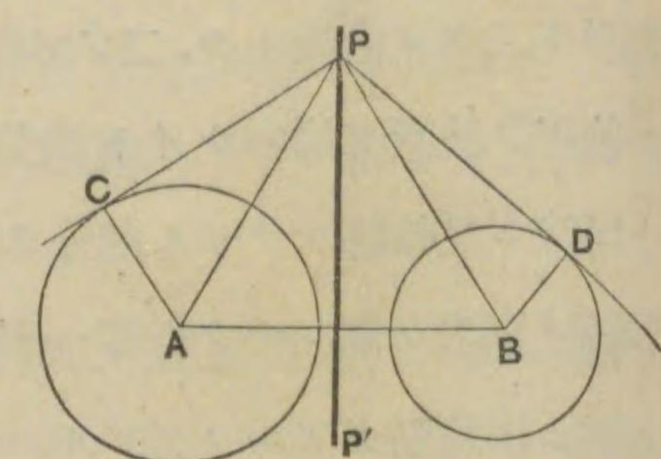
一致セヌ。而シテ

$$AQ^2-BQ^2=AE^2-BE^2$$

EガAB上ニアツテDニ一致セヌカラ $AE^2-BE^2 \neq m^2$ ナルコトガ分カル。ヨツテQハ要件ヲ滿足セヌ。故ニ直線PDガ所要ノ軌跡デアル。

注意　以上ハ $AP>BP$ ナル假定ヲ設ケタ，若シ $AP<BP$ ナル時ハ所要ノ軌跡ハABノ垂直二等分線ニ關シテPDト對稱ノ位置ニアル直線 $P'D'$ デアル。

例二　二ツノ圓ヘ引ケル二ツノ切線ノ相等シキ點ノ軌跡ヲ求メヨ。



解　切線 $PC=PD$ ナリトシ中心ヲA,Bトシ圓Aノ半徑ガ圓Bノ半徑ヨリモ大ナリト假定スル。

$$PC^2=AP^2-AC^2$$

$$PD^2=BP^2-BD^2$$

$$\therefore\quad AP^2-AC^2=BP^2-BD^2$$

即チ

$$AP^2-BP^2=AC^2-BD^2$$

然ルニ圓A,Bハ定圓デアルカラ AC^2-BD^2 ニ一定 $(=m^2)$ デ且ツ二點A,Bハ定點デアルカラ本題ハ例一ノ解法ニ歸スル。

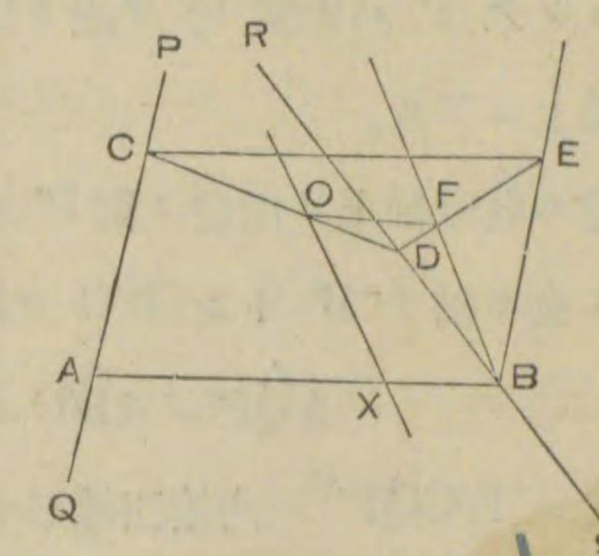
注意　本題ノ如ク軌跡ノ問題ヲ解クニ當リ，其問題ヲ解析シテ次第ニ簡單ナルモノニ導キ，遂ヒニ既知ノ問題ニ歸着セシムル場合ニ特ニ注意スベキコトガアル。ソレハ最後ノ軌跡ガ所要ノ軌跡ニ屬セザル部分ヲモ含ムコトナキヤ否ヤヲ考究スルコトデアル。例ヘバ本題ニ於テPガ二ツノ考ヘラレタ圓A,Bノ外ニアルコトヲ要スルカラ，例一ノ如クシタ場合ノ軌跡 PP' ガ二圓ト交ラナイ時ハ全部所要ノ軌跡トナルガ，PP' ガ二圓ト交ル時ハ二圓ノ外部ニアルモノノミガ所要ノ軌跡デ，内部ニアルモノハ軌跡トハイハレヌ。若シ二圓ガ同心圓ナル時ハ軌跡ハ全クナイ。

例三　二ツノ定直線PQ,RSノ上ニ夫々二ツノ定點A,Bアリ。PQ上ニ點Cヲトリ，RS上ニ點Dヲトリ，ACトBDトノ比ヲ定比ナラシムル時，線分CDヲ他ノ定比デ分ツ點Oノ軌跡如何。

解　B,Cヲ過リPQ,ABニ平行ナル直線BE及ビCEヲ引キEデ會セ

シム。

又D,Eヲ結ビOFヲABニ平行ニ引キDFトFデ交ラシメルト



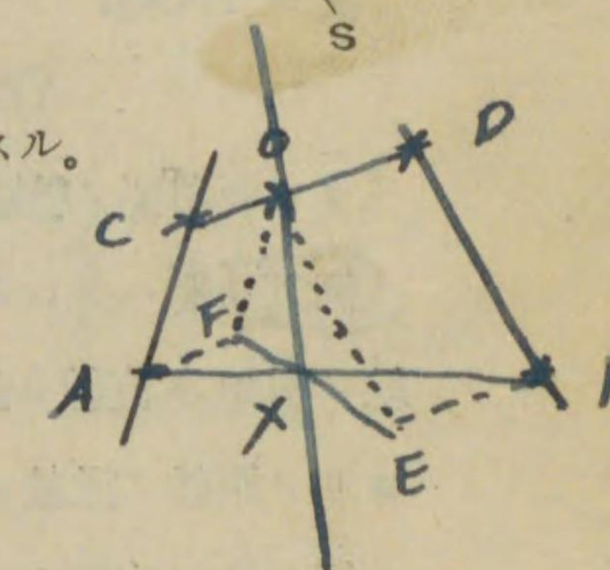
$$AC=BE$$

$$AC:BD=k \qquad (k\text{ハ定値})$$

デアルカラ

$$BE:BD=k$$

デ且ツ $\hat{RBE}$ ハ一定デアル。ヨツテDEノ方向ガ一定スル。



然ルニ假定ニヨリ

$$OC:OD=h \qquad (h\text{ハ定値})$$

デアルカラ　$EF:FD=h$

故ニF點ノ軌跡ハBヲ過ル一ツノ直線デアル。

次ニ　$OF:CE=OD:DC$ ……(1)

デ　$OD:CC$

ハ一定デアルカラ

$OD:DC$ ……(2)

モ一定デアル

然ルニ　$CE=AB$ ……(3)

デアルカラ(1),(2)及ビ(3)カラOFハ定長デアル事ガ分カル，ヨツテO點ハ直線BFニ平行ナル直線OX上ニアル。(逆ノ證明ヲ省ク)

例四　定圓周上ノ定點Aカラ任意ノ弦ABヲ引キ其上ニ一點ヲトリ，$AB.AP=k^2$ ナラシムル時ハP點ノ軌跡ハ一ツノ直線デアル。

解　ACヲ與圓ノ直徑トシ，其直線上ニQヲ求メテ $AC.AQ=k^2$ ナラシム。

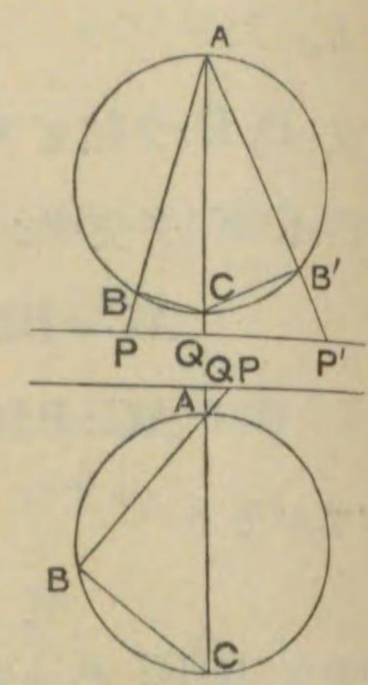
又弦ABヲ引キPヲ $AB.AP=k^2$ ナル如クトリタル點トセヨ。然ル時ハ

$$AB.AP=AC.AQ$$

故ニB,C,Q,Pハ同一圓周上ニアル。故ニ

$$\hat{AQP}=\hat{ABC}=R\angle$$

ヨツテ P ハ定點 Q ヲ過リ定直線 AQ ニ垂直ナル直線上ニアル。



逆ニ此直線上ノ任意ノ點 P′ ヲトリ, P′A ヲ結ビ與圓周ト交ル點ヲ B′ トシ B′C ヲ結ブト

$$A\hat{Q}P' = A\hat{B'}C = R\angle$$

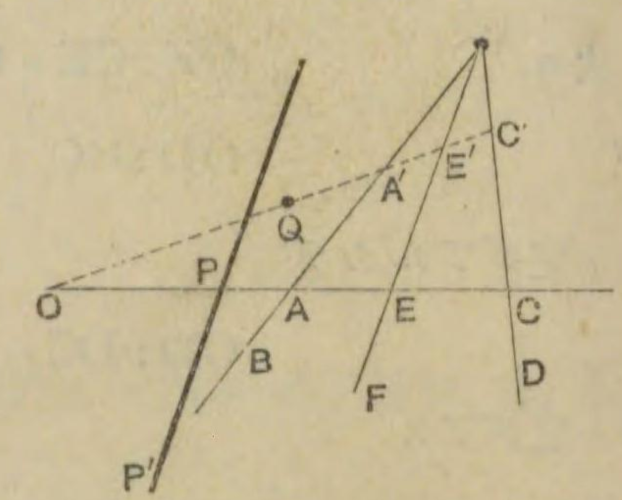
故ニ B′CQP′ ハ内接四邊形デアル。故ニ

$$AB'.AP' = AC.AQ = k^2$$

ヨツテ所要ノ軌跡ハ Q ヲ過リ AQ ニ垂直ナル直線デアル。

例五 與ヘラレタ二直線ノ間ニ挾マレナイ定點ヲ過ギ,此等ノ直線ニ交ル直線ヲ引キ,其直線ニ沿ヒ定點カラ此等ノ二直線ニ至ル距離ノ逆數ノ和ガ，定點ヨリノ距離ノ逆數ニ等シキガ如キ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 O ヲ定點トシ AB, CD ヲ與ヘラレタ二ツノ直線ナリトシ O, A, E, C ガ調和列點(第十二編參照) ヲナスガ如キ點 E ノ軌跡ハ AB, CD ノ交點ヲ過ギル一ツノ直線 EF デアル。(AB, CD ガ平行ナル時ハ E 點ノ軌跡ハ此等ニ平行デアル)。



次ニ線分 OE ヲ P デ二等分シ, EF ニ平行ニ PP′ ヲ引クト, PP′ ハ所要ノ軌跡デアル。

何トナレバ O, A, E, C ハ調和列點ヲナスカラ

$$\frac{2}{OE} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OC}$$

然ルニ P ハ線分 OE ノ中點デアルカラ

$$\frac{2}{OE} = \frac{1}{OP}$$

故ニ

$$\frac{1}{OP} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OC}$$

次ニ直線 PP′ 上ニアラザル任意ノ點 Q ヲトリ, OQ ヲ作リ AB, CD, EF

ト交ル點ヲ A′, C′, E′ トスルト

$$\frac{2}{OE'} = \frac{1}{OA'} + \frac{1}{OC'}$$

デアルガ Q ハ OE′ ノ二等分點デナイカラ

$$\frac{1}{OQ} \neq \frac{2}{OE'}$$

故ニ

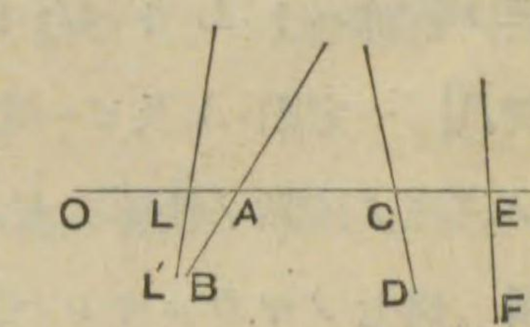
$$\frac{2}{OQ} \neq \frac{1}{OA'} + \frac{1}{CC'}$$

即チ PP′ 上ニアラザル點ハ要件ニ適セヌ。故ニ PP′ ハ所要ノ軌跡デアル。

例六 與ヘラレタ數多ノ直線ノ間ニ挾マレナイ定點 O ヲ過ギ,此等ノ直線ニ交ル直線ヲ引キ, 其直線ニ沿ヒ, 定點カラ所設ノ直線ニ至ル距離ノ逆數ノ和ガ定點カラノ距離ノ逆數ニ等シキガ如キ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 與ヘラレタ直線ヲ AB, CD, EF………トセヨ。先ヅ

$$\frac{1}{OL} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OC}$$



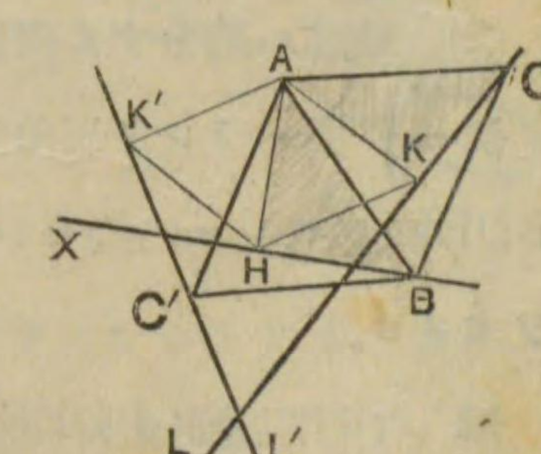
ナルガ如キ點 L ノ軌跡 LL′ ヲ求メ, AB, CD ノ代リニ LL′ ヲ用フルト

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OC} + \frac{1}{CE} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{OL} + \frac{1}{OE} + \cdots\cdots$$

トナル。此方法ヲ續ケルト最後ニハ例五ノ問題ニ歸着スルニ至ル。

例七 正三角形ノ一頂點ハ定點ニアリ, 他ノ一頂點ハ與ヘラレタ直線 X 上ヲ動クトキ, 第三頂點ノ軌跡ヲ求メヨ。



今 C ヲ要件ニ適スル任意ノ點トシ, 且ツ X ヘノ垂線 AH ノ上ニ圖ノ如ク正三角形ヲ作ルト

$$AH : AB = AK : AC$$

$$B\hat{A}H = C\hat{A}K$$

ナルヲ以テ

$$\triangle AHB \backsim \triangle AKC$$

$$\therefore\quad A\hat{H}B == A\hat{K}C = R\angle$$

故ニ點 C ハ K ヲ過リ AK ニ垂直ナル定直線 L 上ニアルコトガ分カル。

逆ニ L 上ノ任意ノ點 C'' ヲ取リ AC'' ヲ結ビ付ケ，AC'' 上ニ H ノアル側ニ正三角形 $AB'C''$ ヲ作レバ，

$$AB' = AC'',\ AH = AK,\ B'\hat{A}C = H\hat{A}K$$

$$\therefore\quad K\hat{A}C'' = H\hat{A}B' \qquad \therefore\quad \triangle AKC'' \equiv \triangle AHB'$$

$$\therefore\quad A\hat{H}B' = A\hat{K}C' = R\angle$$

即チ $AH \perp HB'$，　而シテ　$AH \perp X$

然ルニ H ヲ過リ AH ニ垂直ナル直線ハ唯一ツニ限ルカラ HB' ト X トハ同一直線トナリ，B' ハ X 上ノ點トナル。故ニ C'' ハ要件ニ適ス。

又 AH ニ關シテ L ト對稱ノ位置ニアル直線 L' ニ就テモ同様デアルカラ所要ノ軌跡ハト L ト L' トデアル。

例八 一定點 A 及ビ一定直線 X ニ頂點ヲ有シ，定三角形ニ相似ナル三角形ノ第三ノ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ。

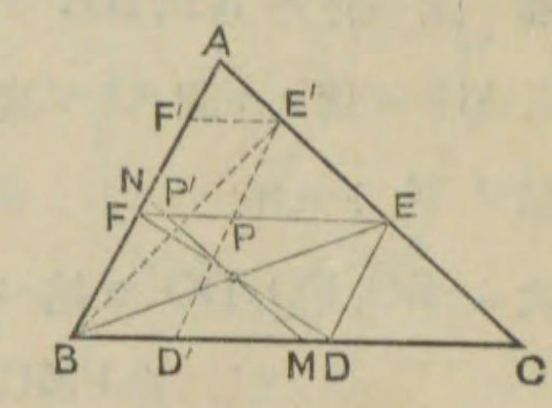
解 例七ノヤウニヤレバ良イノデアルガ，軌跡ノ數ニ就イテ考究スル必要ガアル。即チ定三角形ヲ LMN トシ，A カラ X ニ垂線 AB' ヲ引キ，其上ニ $\triangle LMN$ ニ相似ナル三角形 $AB'C'$ ヲ作ル。其場合ニ $B'\hat{A}C'$ ヲ作ルニ $\hat{L}$, $\hat{M}$ 或ハ $\hat{N}$ ニ等シカラシムルコトヲ得。又 $AB'C'$ ヲ作ルニ殘リノ二ツノ角ヲ以ツテスルガ故ニ都合六通リノ三角形ヲ得ベク，AB' ニ對シテ今述ベタ三角形ト夫々對稱ノ三角形ヲ作レルカラ都合十二本ノ軌跡ヲ得ル。

(2) **軌跡ハ線分ナル例題**

例一 與ヘラレタ三角形 ABC ニ於テ，其一角 B ヲ共有スル平行四邊形 BDEF ヲコレニ內接セシムル時，コノ平行四邊形ノ對角線ノ交點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 平行四邊形 BDEF ヲ題意ニ適スル一ツノ位置トスルト，對角線ノ交點 P ハ BE ノ中點デ，若シ E ガ A ノ方ニ動イテ A ニ一致スル時ヲ考ヘルト

P ハ AB ノ中點 N ニ一致スル。又 E ガ C ノ方ニ動キ C ニ一致スルト P ハ BC ノ中點 M ニ合スル。仍ツテ P ハ BC, AB ノ中點 MN ヲ結ブ直線デアルトイフ豫想ガツク。ソコデ愈々證明ニトリカヽルニ，題意ニ適スル平行四邊形ノ一ツノ位置ヲ BDEF トシ，對角線ノ交點 P ト BC ノ中點 M トヲ結ブト，P, M ハ夫々 BE, BC ノ中點デアルカラ PM // CE,



故ニ MP ノ延長ハ AB ノ中點 N ヲ過ル，從ツテ P ハ BC, AB ノ中點 M, N ヲ結ブ線分上ニアル。

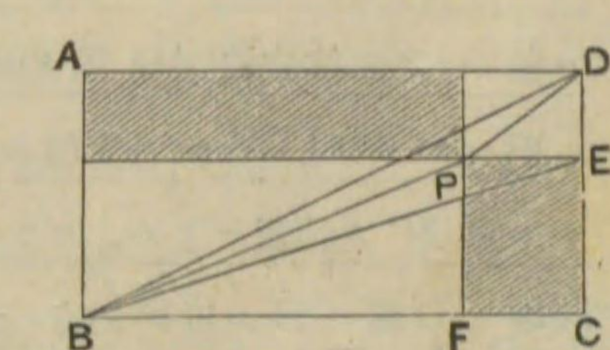
逆ニ線分 MN 上ノ任意ノ一點ヲ P' トシ，BP' ヲ結ビ之ヲ延長シテ AC ト E' ニ於テ交ラシメヨ。

又 $E'D'$//AB, $E'F'$//BC ナラシムレバ四邊形 $BD'E'F'$ ハ平行四邊形デアル。而シテ P' ハ MN 上ニアルカラ $BP' = P'E'$ 即チ P' ハ對角線 BE' ノ中點デアル。

故ニ $D'F'$ ヲ結ブト P' ヲ過ル，故ニ MN 上ノ點ハ條件ニ適ス，仍ツテ求ムル軌跡ハ MN ナル有限直線デアル。

例二 矩形 ABCD 內ノ一點 P ヲ過リ各邊ニ平行直線ヲ引ク時，矩形 PA ト矩形 PC トノ差ガ一定ナルガ如キ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 矩形 PA ト矩形 PC トノ差ハ矩形 EA ト矩形 DF トノ差ニ等シイ。



然ルニ

矩形　$EA = 2\triangle DBE$

矩形　$DF = 2(\triangle DPE + \triangle BPE)$

故ニ矩形 PA ト矩形 PC トノ差ハ $2\triangle BDP$

ヨツテ $\triangle BDP$ ハ定面積デソノ底邊 BD ハ一定デアルカラ P 點ノ軌跡ハ BD ニ平行ナル二ツノ直線ノ中矩形 ABCD ノ內部ニアル線分デアル。

コレカラ逆ノ證明ニ移ルノデアルガ，コレハ容易デアルカラ省略スル。

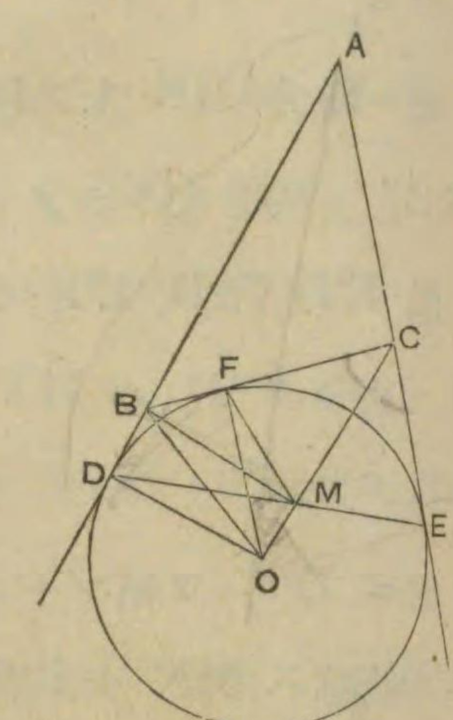
例三 $\triangle ABC$ ノ頂角 A ハ位置及ビ大サ一定ニシテ且ツソノ周圍モ定長デアル時,頂點 B カラ C ノ外角ノ二等分線ニ垂線 BM ヲ引クトキ點 M ノ軌跡如何。

解 圖ニ於テ AD, AE ヲ與ヘラレタ周圍ノ半分トシ,D 及ビ E ニテ夫々 AB, AC ニ切スル圓 O ヲ畫クト,其圓ハ BC ニ切スル傍切圓デアル。今ソノ切點ヲ F トスル。

次ニ BO, FO, DO ヲ結ベ

$$\triangle FMC \equiv \triangle CME$$

$$\therefore \quad \widehat{FMC} = \widehat{CME}$$



又五ツノ點 O,D,B,F,M ハ OB ヲ直徑トスル圓周上ニ在ルカラ相等シイ長サノ直線 BD, BF ノ上ニ立ツ此圓周角即チ

$\widehat{BMF} = \widehat{BMD}$ デ且ツ $\widehat{FMC} = \widehat{CME}$

デアルカラ

$\widehat{DME} = 2(\widehat{BMF} + \widehat{FMC}) = 2\widehat{BMC} = 2R\angle$

ヨツテ求ムル點ノ軌跡ハ二定點 D,E ヲ結ブ線分デアル。本題モ亦逆證明ヲ省ク。

注意 B 點ハ D 點ニ近ヅクニ從ヒ切點 F モ亦 D 點ニ近ヅキ $\widehat{BCE}$ ハソノ位置及ビ大サニ於テ共ニ漸次 A ニ近ヅク,從ツテ極限ノ場合ニテハ C ノ外角ノ二等分線 CO ハ角 A ノ二等分線 AO 線ト一致シ, BM ハ DE ノ上ニ重ナル。

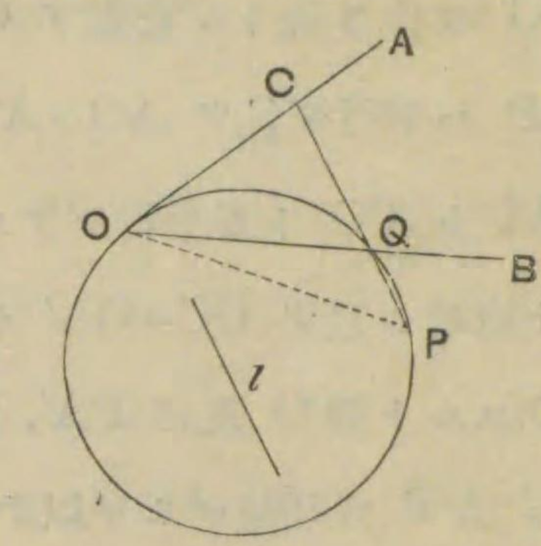
而シテ $AO \perp DE$ ナルガ故ニ AO ト DE トノ交點ヲ G トスレバ極限ノ場合ニ於ケル點 M ノ位置デアル。ヨツテ G ハ軌跡ノ一ツノ限界點デアル。

次ニ C 點ハ E ニ近ヅク時ハ切點 F モ亦 E 點ニ近ヅキ $\widehat{BCE}$ ハ漸次平角ニ近ヅキ,極限ニ於テハ其二等分線 CO ガ EO トナリ, B 點ハ A 點ニ重ルニ及ビ M 點ハ E 點ト一致スル。ヨツテ E 點ハ軌跡ノ他ノ限界點デアル。故ニ求ムル軌跡ハ無限直線デハナク又線分 DE デモナクテ實ニソノ一部分 GE デアル。

(3) 軌跡ハ半直線ナル例題

例一 定角 AOB ノ一邊 OA 上ノ任意ノ點 C カラ定直線 l ニ平行線ヲ引

キ, OB ト Q デ交ラシメ, CQ ノ延長上ニ點 P ヲトリ $OC^2 = CQ.CP$ ナラシムルガ如キ點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。



解 所要ノ條件ニ適スル一點ヲ P トスレバ假定ニヨツテ

$$OC^2 = CQ.CP$$

ナルガ故ニ, OC ハ三點 O, Q, P ヲ通ル圓ノ切線トナル。從ツテ

$$\widehat{AOB} = \widehat{OPQ} = \text{一定}$$

又 $\widehat{OQP}$ ハ定直線 l ト OB トノナス角ニ等シイカラ定角デアル。

故ニ結局 $\widehat{BOP}$ ガ一定デアル。故ニ所要ノ點 P ハ OB ト定角ヲナス直線上ニアル。

逆ニ此直線上ニ任意ノ一點 P′ ヲトリ, l ニ平行ニ P′Q′C′ ヲ引キ OB ト Q′ デ, OA ト C′ デ交ラシメルト,

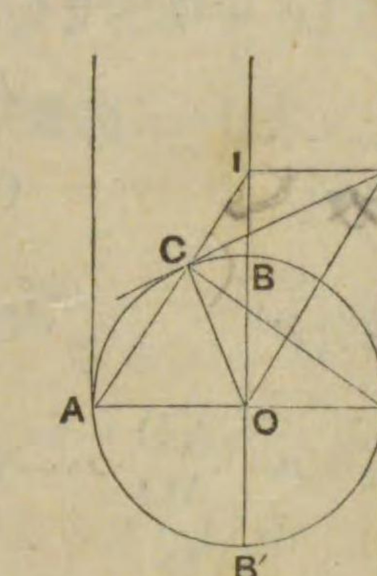
$$\widehat{OP'Q'} = \widehat{C'OQ'}$$

ナルコト容易ニ分カルカラ OC′ ハ圓 OP′Q′ ニ切スル。從ツテ

$$OC'^2 = C'Q'.C'P'$$

トナル。ヨツテ半直線 OP ハ所要ノ軌跡デアル。

例二 AA′, BB′, ハ與ヘラレタ圓 O ノ直角ニ交ル直徑デアル。點 A ヲ通リ割線 ACI ヲ引キ半圓周 ACA′, ト C, 直徑 BB′ ノ延長ト I デ交ラシメル。C ニ於ケル切線ト I ニ於ケル BB′ ヘノ垂線トノ交點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。



解 P ヲ要件ニ適スル一ツノ點トシ PO ヲ結ブト, OCIP ハ圓ニ內切スル四邊形デアルコトガ分カル。故ニ

$$\widehat{CIO} = \widehat{CPO}$$

又 OI ハ二ツノ直角三角形 OAI, IOP ニ共通デアルカラ此等ノ三角形ハ合同デアル。從ツテ AO＝IP 即チ P ハ A′ ニ於ケル此等ノ三角形切線ノ上ニアル。

逆ニ A' ニ於ケル切線上ニ任意ノ一點 P ヲトリ BB' ニ垂線 PI ヲ引キ, AI ヲ作リ圓トノ交點ヲ C トスルト, CP ハ切線ニナル。何トナレバ, OA', IP ハ平行デ且ツ $AO=A'O$ デアルカラ AOPI ハ平行四邊形デアル。故ニ AI ト PO トガ平行デアル。而シテ $A\hat{C}A'$ ガ直角デアルカラ OP ガ $A'C$ ト直交シ且ツ $OC=OA'$ デアルカラ, OP ハ $A'C$ ノ垂直二等分線トナル。ソウスルト圓 O 及ビ PA', PC ハ何レモ OP ニ關シテ對稱ノ位置ニアル。故ニ $A'P$ ガ切線ナルヲ以テ CP モ亦切線トナラネバナラヌ。仍ツテ切線ノ部分 $A'P$ ハ所要ノ軌跡デアル。

(4) 軌跡ハ圓周ナル例題

例一 定點 A ト定圓 O ノ周上ノ點トヲ結ブ直線ヲ底トシテ作ツタ三角形ヲシテ定三角形ニ相似ナラシメル時頂點ノ軌跡ヲ求メヨ。(大正三年文檢豫備)

解 條件ニ適スル一ツノ三角形ヲ ABC トシ, AO ヲ結ビコレヲ底邊トスル定三角形ニ相似ナ三角形ヲ畫キ其頂點ヲ D トスルト D ハ定點デアル。ソコデ CB, BO ヲ結ブト

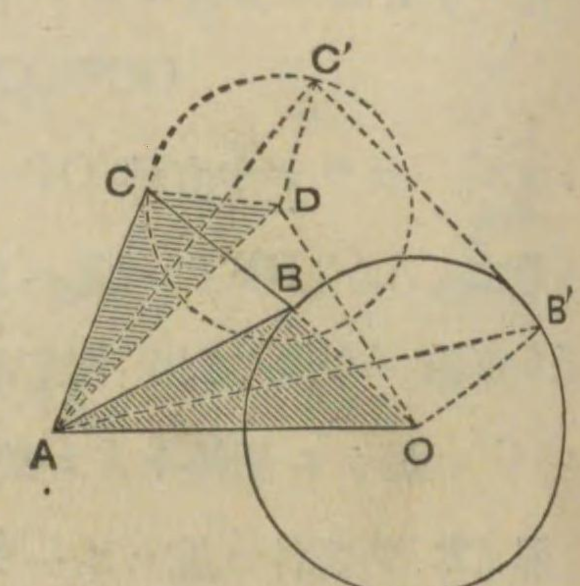
$\triangle AOD \backsim \triangle ABC$ デアルカラ

$$AD:AO=AC:AB$$

或ハ

$$AD:AC=AO:AB \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

又 $$C\hat{A}D=B\hat{A}O$$



ナルコト容易ニ知ラレルカラ

$$\triangle ACD \backsim \triangle ABO$$

故ニ $$CD:AD=BO:AO \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

從ツテ $$CD=\frac{AD.BO}{AO}=r\frac{AD}{AO}$$

然ルニ $\dfrac{AD}{AO}$ ハ一定デスカラ CD ハ定長トナル。故ニ C ガ定點 D ヲ中心トシ $r\dfrac{AD}{AO}$ ヲ半徑トスル圓周上ニアル。

逆ニ此圓周上ニ一點 C' ヲトリ AC' ノ上ニ $\triangle ABC$ ニ相似ナ三角形 $AB'C'$ ヲ作ルト

$$\triangle AC'D \backsim \triangle AB'O$$

デアルカラ, $$C'D:AD=OB':AO$$

故ニ $$OB'=C'D\frac{AO}{AD}$$

然ルニ $C'D=r\dfrac{AD}{AO}$ デスカラ OB' ノ長サガ r トナル。故ニ B' ハ圓 O ノ上ニアル。

同様ニ AO ニ關シテ D ノ對稱點 D' ヲ中心トシ圓 D ト等シイ圓周モ亦軌跡デアル。

注意 A ガ定圓ノ周上又ハ内部ニアル場合ヲモ研究セヨ。

例二 與ヘラレタ三角形ノ三ツノ頂點カラノ距離ノ平方ノ和 $PA^2+PB^2+PC^2$ ガ一定量ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 第二編第三章問題解義 6 ニヨルト

$$PA^2+PB^2+PC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3GP^2$$

假定ニヨツテ左邊ハ定量 (k^2) ナルヲ以テ

$$3GP^2=k^2-(GA^2+GB^2+GC^2)$$

故ニ

$$GP=\sqrt{\frac{k^2-(GA^2+GB^2+GC^2)}{3}} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

コノ事實ニ着目シテ本題ヲ解カンニ, GP ノ長サガ一定トナルカラ, P ハ G ヲ中心トシ GP ヲ半徑トスル圓周上ニアリ。逆ニ此圓周上ニ任意ノ一點 P' ヲトリ, $P'A$, $P'B$, $P'C$ $P'G$ ヲ結ブト

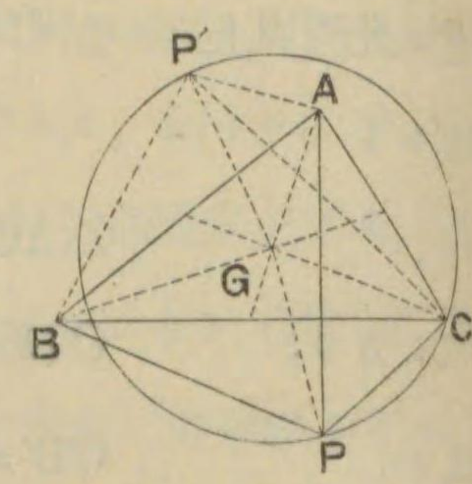
$$P'A^2+P'B^2+P'C^2=GA^2+GB^2+GC^2+3GP'^2$$

然ルニ

$$GP'^2=GP^2=\frac{k^2-(GA^2+GB^2+GC^2)}{3}$$

ナルガ故ニ, 前式ニ代入スルト

$$P'A^2+P'B^2+P'C^2=k^2$$



トナルカラ P' ハ條件ニ適スル。仍ツテ求ムル軌跡ハ G ヲ中心トシ (1) ヲ半徑トスル圓周デアル。

逆ニ此圓周上ニアル點ハ所要ノ條件ヲ滿足スルコト容易ニ證明スルコトガ出來ル。

注意 i. 軌跡ガ存在スル爲メニハ k^2 ガ一定値 $AG^2+BG^2+CG^2$ ヨリモ小ナラザルコトヲ要ス。

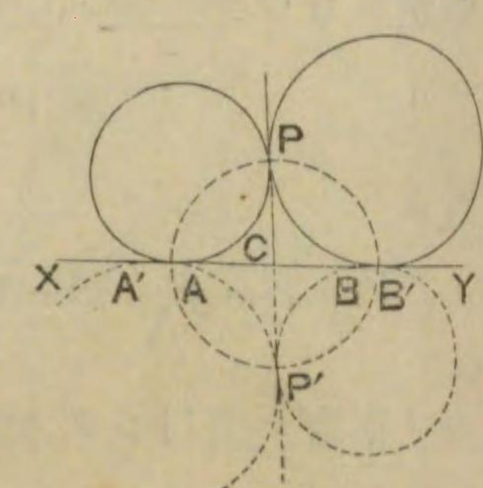
注意 ii. k^2 ガ $AG^2+BG^2+CG^2$ ニ等シイ時ハ，與ヘラレタ三角形ノ三ツノ頂點ニ至ル距離ノ平方ヲシテ極小ナラシムル場合デ，其點ハ三角形ノ重心デアル。(第八編定理參照)

例三 定直線 XY 上ノ定點 A, B ニ於テ夫々 XY ニ切シ且ツ互ニ P ニ於テ外切スル二圓ヲ畫クトキ P ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 P ニ於テ二ツノ圓ニ共通切線 PC ヲ引キ XY トノ交點ヲ C トスルト

$$CA=CB=CP \qquad \therefore\ CP=\frac{AB}{2}$$

然ルニ C ハ定點，$\dfrac{AB}{2}$ ハ定長デスカラ P ハ C ヲ中心トシ $\dfrac{AB}{2}$ ヲ半徑トスル圓周上ニアル。



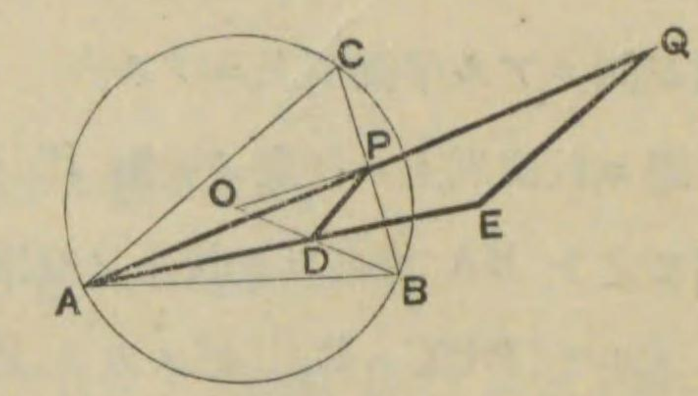
逆ニ此ノ圓周上ニ任意ノ一點 P' ヲトリ，$P'C$ ヲ結ビ P' ニ於テ $P'C$ ニ切シ且ツ XY ニ切スル二ツノ圓ヲ畫キ是等ノ切點ヲ夫々 A', B' トセバ $CA'=CP'=CB'$ 然ルニ $CP'=\dfrac{AB}{2}$，$CA'=CB'$ ナルガ故ニ A' ハ A ニ，B' ハ B ニ合ス。

故ニ 此兩圓ハ P' ニ於テ互ニ切シ，且ツ XY ト A, B ニ於テ切ス。

ヨツテ求ムル軌跡ハ AB ノ中點ヲ中心トシ $\dfrac{AB}{2}$ ヲ半徑トスル圓周デアル。

例四 AB ヲ與ヘラレタ圓 O ノ定弦トシ，圓周上ノ動點 C トノナス三角形 ABC ノ中線 AP ヲ延長シテ PQ ヲ AP ノ長サニ等シカラシムル時 Q ノ軌跡如何。

解 圓ノ中心ヲ O トシ，OB, OP ヲ結ビ，半徑 CB ノ中點ヲ D トスレバ D ハ定點デアル。次ニ AD ヲ結ビ其延長ノ上ニ $AD=DE$ ナルヤウニ E ヲトルト E ハ又定點デアル。



次ニ DP ヲ結ブト $\triangle OPB$ ハ直角三角形デアルカラ

$$DP=\frac{1}{2}OB=\text{定長}$$

又 $\triangle AQE$ ニ於テ $DP \,/\!/\, EQ$ ナルコト明カデスカラ

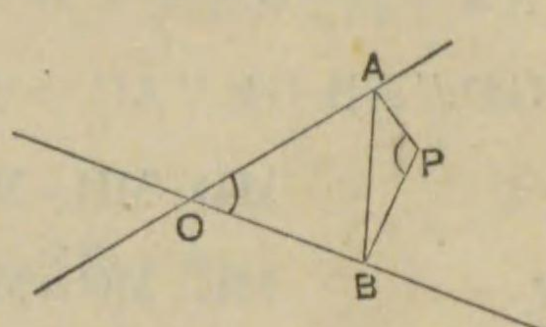
$$EQ=2DP=\text{半徑}$$

デアル。ヨツテ求ムル軌跡ハ定點 E ヲ中心トシ，與ヘラレタ圓ノ半徑ヲ半徑トスル圓周デアル。逆ノ證明ヲ省ク

例五 定長ノ直線ノ兩端ハ夫々與ヘラレタ相交線上ヲ動ク時，其ノ兩端カラ相交線ニ垂線ヲ立テルトキソノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 OA, OB ヲ相交ハル直線トシ，AB ヲ定長ノ線分トスル。

$$O\hat{A}P=O\hat{B}P=R\angle$$



デアルカラ四ツノ點 A, P, B, O ハ一ツノ圓周上ニ在ル。而シテ AB ハ定長デ且ツ $\hat{O}$ ハ定角デスカラ圓 $OAPB$ ノ大サガ一定デアル。從ツテ其ノ直徑タル OP モ亦定長デアル。

故ニ求ムル點 P ノ軌跡ハ O ヲ中心トシ定長 OP ヲ半徑トスル圓周デアル。逆ノ證明ヲ省ク。

(4) 軌跡ハ圓弧ナル例題

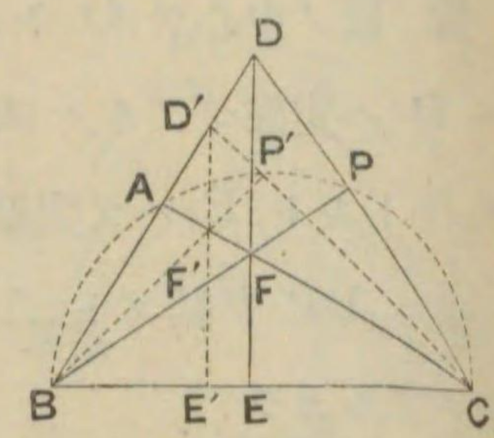
例一 三角形 ABC ニ於テ角 BAC ガ直角ナリトシ，BC ニ任意ノ垂線 EF ヲ引キ AB, AC 或ハ其延長ニ夫々 D, F ニ於テ交ルトキ BF ト CD トノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 BF, CD ノ交點ヲ P トスルト，$CA\perp BD$，$DE\perp BC$ 故ニ F ハ $\triangle BCD$

ノ垂心トナルカラ

$$B\hat{P}C = R\angle$$

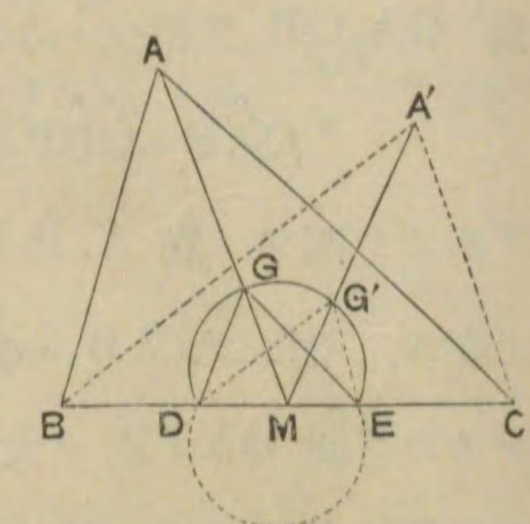
従ツテ P ハ BC ヲ直徑トシ BC ニ對シ A ト同ジ側ニアル半圓周上ニアル。



逆ニ此圓周上ニ任意ノ一點 P′ ヲトリ, CP′ ヲ結ビ之ト BA 或ハ其延長トノ交點ヲ D′ トシ, BP′ ト AC トノ交點ヲ F′ トスルト, $BP'C = R\angle$ デスカラ $BP' \perp CD'$, 又假定ニヨツテ $CA \perp AB$ 故ニ BP′ ト CA トノ交點ハ △D′BC ノ垂心デアルカラ D′F′ ヲ結ブ直線ハ BC ニ垂直デアル。仍ツテ求ムル軌跡ハ BC ヲ直徑トシ A ト同ジ側ニ畫イタ半圓周デアル。

例二 三角形ノ底邊位置及ビ大サヲ與ヘラレ且ツ頂角ノ大サガ一定ナル時其重心ノ軌跡如何。

解 △ABC ヲ底邊 BC ハ位置及ビ大サガ與ヘラレ且ツ頂角 A ハ定角 α ニ等シキ一ツノ三角形トシ, 其ノ重心ヲ G トシ AG ヲ結ビ其延長ト BC トノ交點ヲ M トシ GD // AB, GE // AC ナラシメルト



$$MD : MB = MG : MA = 1 : 3$$

又 $$ME : MC = MG : MA = 1 : 3$$

故ニ D, E ハ定點ニシテ且ツ

$$\angle DGE = \angle BAC = \alpha \text{(一定)}$$

故ニ G 點ハ定線分 DE ヲ弦トシ與ヘレラタル角 α ヲ含ミ BC ニ對シテ A ト同ジ側ニ畫キタル圓弧ノ上ニアリ。

若シ頂點ガ BC ニ對シテ A ト反對ノ側ニアルトキハ G ハ弧 DGE ノ對稱弧ノ上ニアル。

逆ニ此弧ノ上ニ一點 G′ ヲトリ MG′ ヲ結ビ之ヲ延長シテ

$$G'A' = 2MG'$$

ナル如ク A′ ヲ取リ A′B, A′C, G′D, G′E ヲ作ルト

$$MG' : MA' = 1 : 3 = MD : MB$$

$$MG' : MA' = 1 : 3 = ME : MC$$

故ニ $$G'D \,//\, A'B, \qquad G'E \,//\, A'C$$

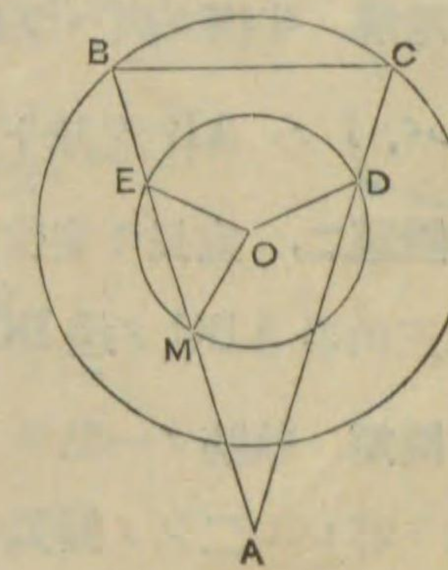
従ツテ $$B\hat{A'}C = D\hat{G'}E = \alpha$$

ヨツテ求ムル軌跡ハ弧 DGE 及ビ其對稱ナル弧デアル。

注意 コノ圓弧ノ上ノ二ツノ點 D,E ハ軌跡カラ省クベキモノデアル。

例三 二等邊三角形 ABC ノ底角ガ一定デ且ツソノ端點 B, C ハ共ニ與ヘラレタ圓周上ヲ動キ一邊 AB ハ常ニ定點 M ヲ過ル時頂點 A ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 $\hat{B} = \hat{C}$ = 一定デ, AB ハ定點 M ヲ過ルモノトスル。



圓ノ中心ヲ O トシ, OM ヲ半徑トシタ圓ヲ畫キ邊 CA ト交ル二ツノ點ノ中 OA ニ關シ M ト對稱ナラザル點ヲ D トスルト

$$\frac{M\hat{O}D}{2} = \frac{2E\hat{O}A - E\hat{O}M}{2}$$

$$= E\hat{O}A - \frac{E\hat{O}M}{2} = \hat{B}$$

デアル。($A\hat{D}O + A\hat{M}O = O\hat{M}E + A\hat{M}O = 2R\angle$ ニ注意セヨ)。

故ニ $$M\hat{O}D = \text{定角}$$

ヨツテ D ハ定點デアル。故ニ A 點ハ MD ヲ弦トシ定角 A ヲ容レル二ツノ圓弧ノ群デアル。(逆ノ證明ヲ省ク)

例四 與ヘラレタ圓 O ニ於テ動半徑 OC ノ端 C ヨリ定直徑 AB ニ垂線 CD ヲ引キテ生ズル三角形ノ內心ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 三角形:OCD ノ內心ヲ I トス。(但シ C ハ A ト同ジ象限ニアルヤウニトルモノトス)。

$$C\hat{I}O = C\hat{D}O + \frac{1}{2}C\hat{O}D + \frac{1}{2}D\hat{C}O = \frac{3}{2}R\angle$$

然ルニ △OIC, △AIO ニ於テ OI ハ共通,

$$OC=OA,\qquad \widehat{COI}=\widehat{AOI}$$

デアルカラ合同デアル。從ツテ

$$\widehat{CIO}=\widehat{AIO}=\frac{3}{2}R\angle$$

故ニ內心 I ノ軌跡ハ定半徑 AO ヲ弦トシ，$\frac{3}{2}R\angle$ ヲ包ムーツノ圓周ノ弧デアル。(逆ノ證明ヲ省ク。)

注意 半徑 OC ハ四直角ヲ廻轉スル時ニ，軌跡トシ相等シイ四ツノ圓弧ヲ得。

類題一， 三角形 ABC ノ底邊 AB 及ビ外接圓ノ半徑ガ定マル時，其內心ノ軌跡ヲ求メヨ。

略解 半徑ガ與ヘラレテ居ルカラ頂角 C ガ定マル。ソコデ內心ヲ I トスレバ，I ハ AB ヲ弦トシ $R\angle+\frac{\hat{C}}{2}$ ヲ容レル二ツノ圓弧ノ群デアル。

類題二， 定長ト定位置トヲ有スル底邊 AB ノ上ニ立チテ，定角ヲ頂角トスル三角形 ABC ノ邊 BC ニ切スル傍切圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

略解 軌跡ノ一點ヲ O′ トスルト，O′ ハ AB ヲ弦トシ，$R\angle-\frac{\hat{C}}{2}$ ニ等シイ角ヲ容レル二ツノ圓弧ノ群デアル。

第六編 問題解義

$\boxed{1.}$ 二定點 A, B マデノ距離ノ比ガ與ヘラレタ比 $m:n$ ニ等シキ點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。但シ $m\neq n$ ナリトス。

解 P ヲ要件ニ適スル任意ノ點トシ之ヲ A, B ニ結付ケルト，

$$\frac{PA}{PB}=\frac{m}{n}\quad\text{叉}\quad\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}=\frac{m}{n}$$

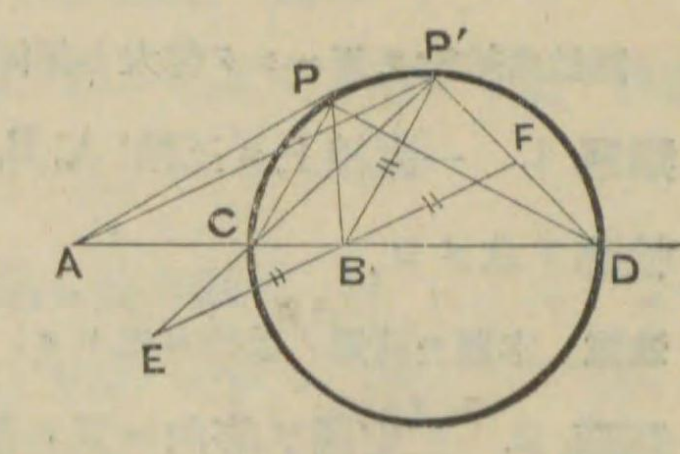
ナルヤウニ AB 及ビ其延長上ニ二ツノ點 C, D ヲトルト

$$\therefore\quad\frac{PA}{PB}=\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$$

故ニ PC, PD ハ夫々 △PAB ノ頂點 P ニ於ケル內角及ビ外角ノ二等分線トナリ。從ツテ ∠CPD=R∠ 故ニ要件ニ適スル任意ノ點 P ハ CD ヲ直

徑トスル定圓周 X 上ニアルコトガ分カル。

逆ニ X 上ノ任意ノ點 P′ ヲ取リ之ヲ A, B ニ結付ケ，$P'A:P'B=m:n$ ナルコトヲ證明スル爲ニ，B ヲ過リ P′A ニ平行線 EBF ヲ引ケ。



然ルトキハ平行ナ二直線ノ一ツニ交ル直線ハ他ニモ亦交ルコトニヨリ P′C, P′D ハ EBF ト交ル。

今其ノ交點ヲ夫々 E, F トスレバ，

$$\triangle ACP'\backsim\triangle BCE\qquad\therefore\quad\frac{P'A}{BE}=\frac{AC}{BC}=\frac{m}{n}$$

叉

$$\triangle ADP'\backsim\triangle BDF\qquad\therefore\quad\frac{P'A}{BF}=\frac{AD}{BD}=\frac{m}{n}$$

$$\therefore\quad\frac{P'A}{BE}=\frac{P'A}{BF}\qquad\therefore\quad BE=BF$$

然ルニ $\angle E\hat{P'}F=R\angle$

$$\therefore\quad BE=BF=P'B\qquad\therefore\quad\frac{P'A}{P'B}=\frac{m}{n}$$

即チ X 上ノ任意ノ點 P′ ハ要件ニ適ス。

注意 i. 二定點 A, B ノ距離ヲ d トシ，$m>n$ ナリトスレバ

$$AC+BC=d,\qquad AD-BD=d$$

而シテ $\frac{AC}{BC}=\frac{m}{n}$ 故ニ $\frac{AC}{m}=\frac{BC}{n}=\frac{AC+BC}{m+n}=\frac{d}{m+n}$

ヨツテ $AC=\frac{md}{m+n},\qquad BC=\frac{md}{m+n}$

同樣ニ $AD=\frac{md}{m-n}\qquad BD=\frac{nd}{m-n}$

從ツテ

$$CD=\frac{2mnd}{m^2-n^2}$$

コレ軌跡ノ圓ノ直徑ノ數値デアル。

注意 ii. 此圓ヲあぽろにうす (Apollonius) ノ圓トイフ。あぽろにうすハ紀元前 260

年頃生マレ，紀元前 200 年頃ニ歿シタ。永ラクあれきさんどりあニ居ツタ學者デ，圓錐曲線論ヲ著ハシタ偉大ナ幾何學者デアツタ。

類題 1. 一直線上ニ三點 A,B,C アリ，AB ト BC トヲ等角ニ見ルベキ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

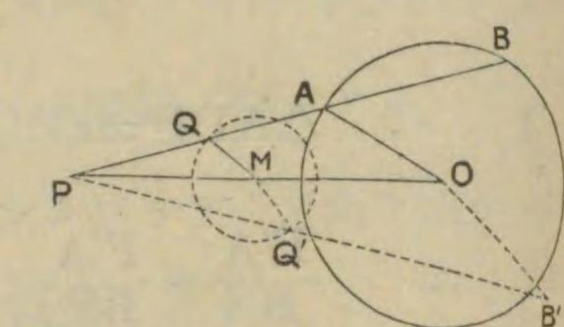
注意 本題ハ前題ノ改作ニ過ギヌ。

類題 2. 二定圓ヲ等角ニ見ル點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

注意 P ハ二ツノ圓ノ中心カラ夫等ノ半徑ノ比ニアル點ノ軌跡デアル。

$\boxed{2}$ 定圓 O ノ外部ニアル一定點 P カラ此圓周ニ引ク直線ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 P ヲ過ル一ツノ割線ヲ PAB トシ，圓周トノ交點ヲ A, B トシ PO ヲ結ビ PA, PO ノ中點ヲ夫々 Q, M トスルト QM//AO デ且ツ



$$QM=\frac{1}{2}AO=\frac{1}{2}r$$

デアル。但シ r ハ圓ノ半徑トス。故ニ Q ハ M ヲ中心トシ $\frac{r}{2}$ ヲ半徑トスル圓周 M 上ニアル。

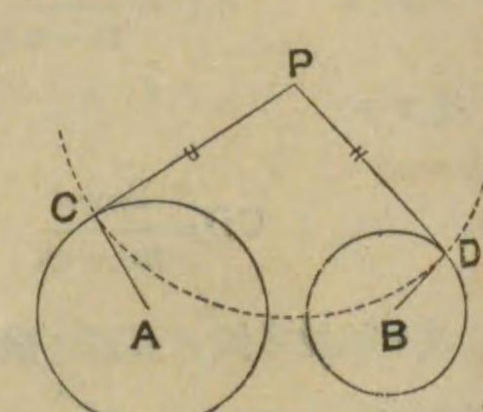
逆ニ M 圓周上ニ任意ノ一點 Q' ヲトリ，PQ' ヲ結ビ之ヲ延長シテ Q'B'=PQ' ナラシメ，Q'M, B'O ヲ結ベ然ル時ハ

$$MQ'//OB'$$

デ $OB'=2MQ'=2\times\frac{r}{2}=r$ ナルガ故ニ B' ハ O 圓周上ニアル。仍ツテ所要ノ軌跡ハ PO ノ中點 M ヲ中心トシ $\frac{r}{2}$ ヲ半徑トスル圓周デアル。

$\boxed{3}$ 二定圓 A,B ノ各ト直角ニ相交ル圓ノ中心ノ軌跡如何。

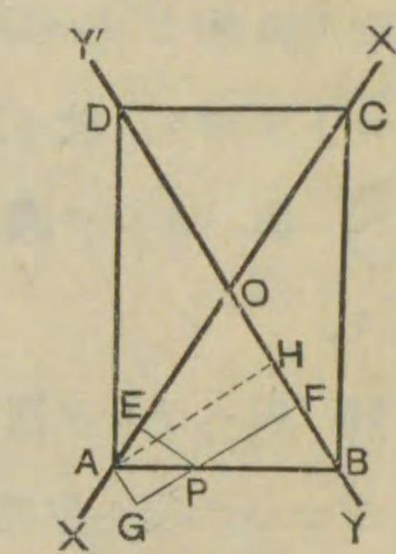
解 要件ニ適スル任意ノ點ヲ P トスレバ，二圓 A, P ハ直交スル故，其交點 C ニ於ケル切線ハ互ニ他ノ圓ノ中心ヲ過リ，從ツテ PC ハ圓 A ノ切線トナル。同樣ニ二圓 B,P ノ交點ヲ D トスレバ，PD ハ圓 B ノ切線トナル。而シテ



PC=PD ナルガ故ニ，所要ノ軌跡ハ百九十六頁例題二ニ歸スル。

$\boxed{4}$ 相交ル二直線 XX',YY' マデノ距離ノ和ガ定長 l ニ等シキ點ノ軌跡如何。

解 XX',YY' ノ交點ヲ O トシ，$X\hat{O}Y$ 内ニ於テ要件ニ適スル任意ノ點ヲ P トシ，P カラ XX',YY' ヘ下セル垂線ノ足ヲ夫々 E,F トスルト，



$$PE+PF=l$$

今 FP ノ延長上ニ PE ニ等シク PG ヲ取リ，G カラ YY' ニ平行線ヲ引キ OX トノ交點ヲ A トシ，A カラ YY' ヘ下セル垂線ノ足ヲ H トスルト

$$AH=GF=PG+PF=PE+PF=l$$

故ニ A ハ YY' ヨリ l ナル距離ニアル平行線ガ OX ト交ル點ニシテ定點トナル，又

$$P\hat{G}A=P\hat{F}Y=P\hat{E}A=R\angle,\qquad PE=PG$$

$$\therefore\quad \triangle PAE\equiv\triangle PAG$$

$$\therefore\quad P\hat{A}E=P\hat{A}G$$

次ニ AP ヲ結ビ付ケ之ヲ延長シテ YY' ト B ニ於テ交ラシメルト，

$$P\hat{B}F=P\hat{A}G$$

$$\therefore\quad P\hat{A}E=P\hat{B}F \text{ 從ツテ } OA=OB$$

故ニ B モ亦定點トナリ，點 P ハ定線分 AB 上ニアル。

次ニ OX',OY' 上ニ夫々 OA ニ等シク OC,OD ヲ取リ，點 P ガ $Y\hat{O}X'$, $X'\hat{O}Y'$, $Y'\hat{O}X$ 内ニアル場合ヲ考フレバ前ト同樣ニナルカラ，結局要件ニ適スル點ハ定ツタ矩形 ABCD ノ周上ニアルコトガ分カル。

逆ニ此ノ矩形ノ周上ノ任意ノ點，例ヘバ邊 AB 上ノ點 P' ヲ取リ P' ヨリ XX',YY' ヘ垂線ヲ下シ，其ノ足ヲ夫々 E',F' トシ，F'P' ノ延長上ニ P'E' ニ等シク P'G' ヲ取リ G'A ヲ結ビ付ケヨ。

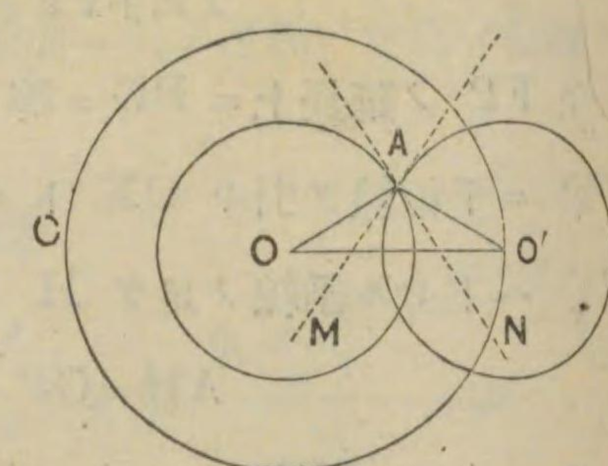
然ル時ハ $\triangle P'AE'=\triangle P'AG'$ トナルカラ，四邊形 $AG'F'H$ ハ矩形トナリ，從ツテ

$$P'E'+P'F'=P'G'+P'F'=G'F'=AH=l$$

トナルカラ P' ハ要件ニ適ス。同様ニシテ他ノ邊上ノ任意ノ點モ要件ニ適スルコトヲ知ル。故ニ所要ノ軌跡ハ矩形 ABCD ノ周デアル。

5. 與ヘラレタ圓ト，一定ノ角ヲナシテ交ル半徑一定ノ圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

解　與ヘラレタ圓ヲ O トシ，之ト一定ノ角 α ヲナシテ交ル半徑一定ナル圓ノ一ツヲ O' トシ圓 O トノ交點ノ一ツヲ A トスル。A ニ於テ二圓ニ切線 AM, AN ヲ引クトキハ，假定ニヨツテ



$$M\hat{A}N=\alpha$$

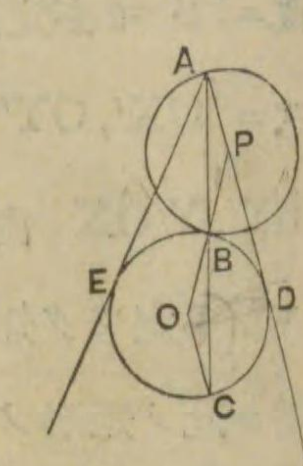
デ $M\hat{A}O'=N\hat{A}O=R\angle$ デアルカラ $O\hat{A}O'=2R\angle-\alpha$

然ル時ハ三角形 OAO' ニ於テ二邊 OA, $O'A$ 及ビ其夾角ガ一定デアルカラ邊 OO' ガ一定デアル。故ニ O' ハ O ヲ中心トシ定長 OO' ヲ半徑トスル圓周 C ノ上ニアル。

注意　逆ノ證明ヲ省略シタ，以下之ニ準ズ。

6. 相交線 AD, AE アリ。AD 上ノ動點 P ヲ中心トシ半徑 AP ナル圓ト，此等ノ二邊ニ切スル圓トノ切點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解　圖ニ於テ B ヲ二圓ノ切點トセヨ。AB ヲ結ビ延長シテ C 點デ圓ト交ラシメルト



$$\triangle ABP\backsim\triangle BOC \quad \therefore \quad OC /\!/ AD$$

$\triangle AOD$ ヲ見ルニ O ガ $\hat{A}$ ノ二等分線上ニアル形狀一定ナル三角形(自相似三角形)デアル。

$$\therefore \quad A\hat{O}D=一定$$

然ルニ $D\hat{O}C=R\angle$ ナルコト明カデスカラ $\triangle AOC$ モ形狀一定デアル。

從ツテ　$A\hat{C}O=一定$

$$\therefore \quad A\hat{C}O=B\hat{A}P=一定$$

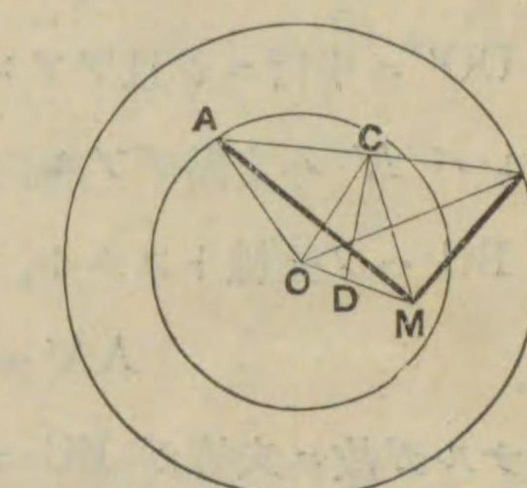
ヨツテ求ムル軌跡ハ直線 ABC デアル。

7. 定長ノ線分ノ兩端ハ夫々二ツノ同心圓ノ周上ニアリ，與ヘラレタ一點ニ對シテ直角ヲ張ルガ如キ線分ノ中點ノ軌跡如何。

解　AB ヲ定長ノ線分トシ，M ヲ定點，$A\hat{M}B=\hat{R}\angle$ ナリトス。

AB ノ中點ヲ C トシ，圓ノ中心 O ニ結ブ。

又 OM ノ中點 D ヲ C ニ結ベ。然ルトキハ



$$OA^2+OB^2=2(BC^2+OC^2)$$

而シテ OA, OB ハ夫々圓ノ半徑デアルカラ

$$BC^2+OC^2=定値$$

ニシテ $A\hat{M}B$ ハ直角デスカラ

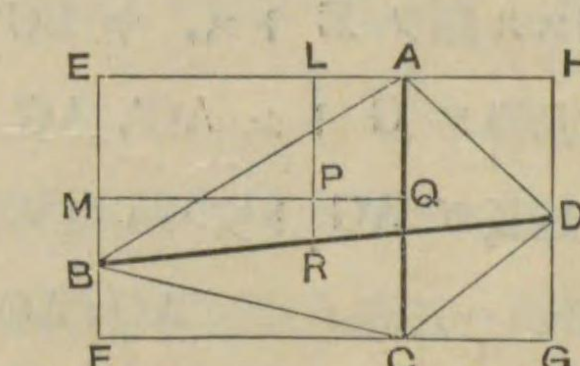
$$BC=CM$$

$$\therefore \quad BC^2+OC^2=CM^2+OC^2$$
$$=2(OD^2+CD^2)$$

然ルニ OD ハ OM ノ半分デアルカラ定長デアル。從ツテ CD モ定長デアル。

ヨツテ求ムル點ノ軌跡ハ定點 D ヲ中心トシ，定長 CD ヲ半徑トスル一ツノ圓周デアル。

8. 四邊形ニ外接スル矩形ノ對角線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。



解　四邊形 ABCD ニ外接スル矩形ヲ EFGH トシ EH ノ垂直二等分線 LR ヲ引キ對角線 BD ト R デ會セシメルト R ハコノ對角線 BD ノ中點デアル。

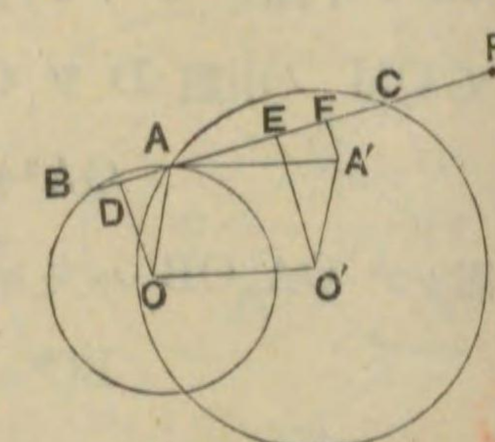
次ニ EF ノ垂直二等分線 MQ ヲ引キ AC ト Q デ會セシムレバ，Q ハ

對角線 AC ノ中點デアル。

然ルニ LR ト MQ トノ交點ヲ P トスレバ P ハ矩形ノ對角線ノ中點デアルカラ求ムル點 P ノ軌跡ハ定點 Q, R ヲ結ブ線分 QR ヲ直徑トスル圓周デアル。

9. 二圓ノ交點ノ一ツノ點 A ヲ過ギテ任意ノ割線ヲ引キ, B 及ビ C ニ於テ二圓周ニ會セシメ，此割線上ニ於テ AB, AC ノ和ニ等シク AP ヲ取ル時 P 點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 O, O′ ヲ二ツノ定圓ノ中心トシ, AA′ ヲ OO′ ニ平行ニシ且ツソレト等長ニ引クモノトスレバ A′ ハ定點デアル。今 OD, O′E, A′F ヲ BC ヘノ垂線トスルト。サテ



$$AA'=OO'$$

ナルガ故ニ夫等ガ BC ニ投ズル射影ガ相等シ。即チ

$$DE=AF$$

然ルニ $DE=\frac{1}{2}(AB+AC)$ ナルガ故ニ, $AF=\frac{1}{2}AP$

故ニ $AA'=A'P$

仍ツテ P 點ノ軌跡ハ A′ ヲ中心トシ A′A ヲ半徑トスル圓周デアル。

10. 三角形ノ底邊ノ方向ト內切圓ガ之ニ切スベキ點及ビ內切圓ノ半徑及ビ底邊デナイ他ノ二ツノ邊ノ差ガ與ヘラレタ時頂點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 三角形 ABC ニ於テ底邊 BC ノ方向ガ知ラレタリトシ且ツ內切圓ガ切スル點ヲ E トス，今 BC ニ切スル傍切圓ノ中心ヲ O′ トシ BC 上ニ於ケル切點ヲ G トシ AO′, AG ヲ作レ。次ニ內切圓ノ中心 O ト E トヲ結ビ其ノ延長ガ AG ト交ハル點ヲ F トス。然ル時ハ

$$AO:AO'=OE:O'G$$

$$AO:AO'=OF:O'G$$

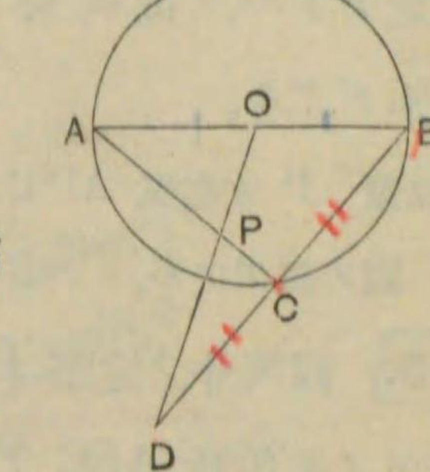
デスカラ F ハ內切圓ノ周上ニアル。而シテ E ハ定點ニシテ BC ハ定方向デ內接圓ノ半徑 OE ガ一定デアルカラ F ハ定點デアル。又 EG=AB∼AC

デアルカラ G ハ定點デアル。故ニ所要ノ頂點 A ハ二定點 F, G ヲ結ブ直線上 (FG ノ部分ヲ省ク) ニアル。

注意 所要ノ軌跡ハ BC ニ關シテ兩側ニアルコトニ注意セヨ。

11. 圓 O ノ定直徑 AB ノ一端 B ヲ過ギテ弦 BC ヲ引キ, 之ヲ延長シテ D ニ至ラシメ CD=BC ナラシム。今 CA ト DO トノ交點ヲ P トスルトキ, P ノ軌跡如何。

解 AO=BO, BC=CD ナルガ故ニ P ハ △ABD ノ重心デアル。



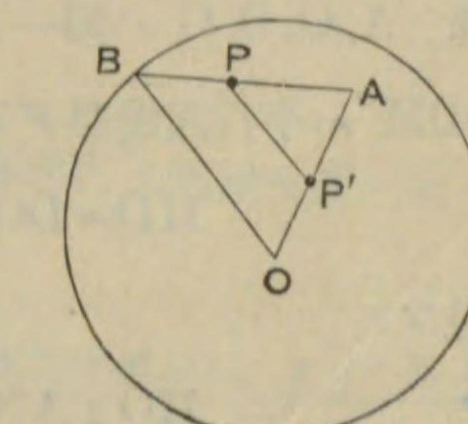
$$\therefore \quad AP:PC=2:1$$

故ニ本題ハ A ヲ過ギル圓ノ弦ヲ三等分スルトキ分點ノ一ツノ軌跡ヲ求ムル問題ニ歸スル。

12. 圓內ノ定點ヲ過ル半弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 本題ハ甚ダ容易デアルガ，應用ノ途ガ廣イカラ揭ゲルコトニシタ。圓內ノ定點ヲ A トシ，半弦 AB ノ中點ヲ P トス。

今中心 O ト A トヲ結ビ其中點ヲ P′ トシ PP′ ヲ結ブト



$$PP'=\frac{OB}{2}=\frac{r}{2}\ (r\ ハ半徑)$$

故ニ P ノ軌跡ハ定點 P′ ヲ中心トシ, $\frac{r}{2}$ ヲ半徑トスル圓周デアル。

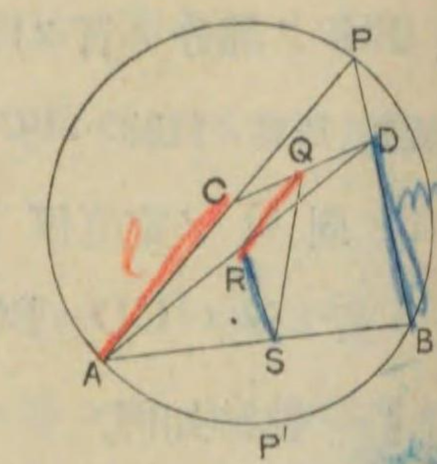
13. 三角形ノ外接圓ノ周上ノ一點ト垂心トヲ結ブ線分ト此點ノしむそん線トノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 △ABC ノ垂心ヲ H トシ，外接圓ノ周上ノ任意ノ點ヲ Q トスルト, Q ニ關スルしむそん線ハ線分 HQ ヲ二等分スル。(第二編第二章定理5系)故ニ所要ノ軌跡ハ H ヲ通ル圓ノ半弦ノ二等分點ノ軌跡ト同一ナルヲ以テ前題ニ歸ス。

14. 與ヘラレタ圓周上ノ二定點 A, B ヲ周上ノ任意ノ點 P ニ結ビ AP 上ニ AC ヲ定長 l ニ, BP 上ニ BD ヲ定長 m ニ等シカカラシムル時 CD ノ

中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 假定＝ヨツテ $AC=l$, $BD=m$ デアルカラ, CD, AD, AB ノ中點ヲ夫々 Q, R, S トスルト



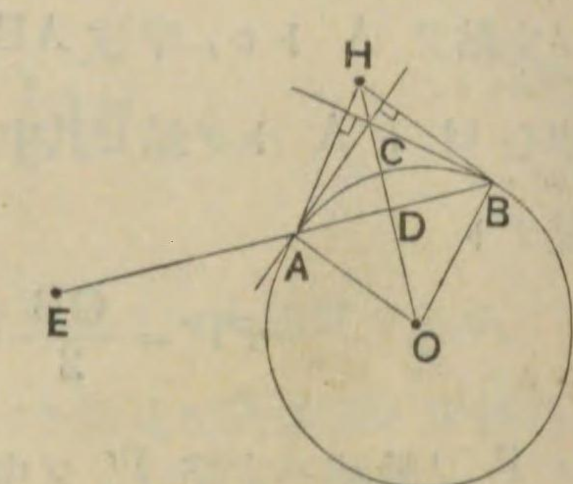
$$RQ=\frac{l}{2},\quad RS=\frac{m}{2}$$

又角 QRS ハ $\hat{P}$ ト補角デアルカラ一定デアル。故＝△QRS ハ全ク一定デアルカラ, 邊 SQ ノ長サモ一定デアル。故＝ Q ノ軌跡ハ定點 S ヲ中心トシ定長 SQ ヲ半徑トスル圓ノ弧デアル。

注意 P ガ劣弧 AP′C ノ上＝アル時＝モ, 軌跡ハ S ヲ中心トシ定長ノ半徑ヲ有スル圓ノ弧デアル。

15. 圓周外ノ定點 E カラ割線 EAB ヲ引キ, A, B ＝於ケル切線ハ AB ト一ツノ三角形 ABC ヲ作ル。 E 點ヲ過ギル割線ノ廻轉ノ爲メ＝生ズル三角形ノ垂心ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 A, O, B, C ハ同一ノ圓周上＝アル。又 AOBH ハ平行四邊形デアルカラ



$$HD=DO$$

且ツ

$$HO\perp AB$$

デアルカラ $\triangle EOD\equiv\triangle EDH$

故＝ $EH=EO$ (一定)

仍ツテ H ハ E ヲ中心トシ, EO ヲ半徑トスル圓周上＝アル。

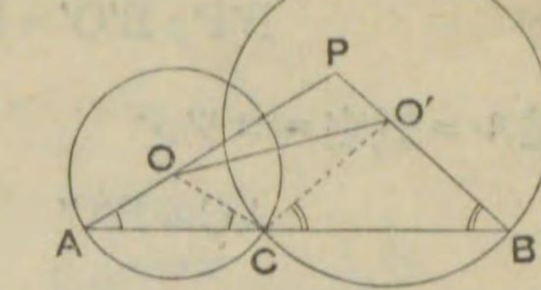
注意 軌跡ハ全圓周デハナイ。 即チ E カラ圓周ヘ引イタ二ツノ切線ノ切點ヲ O ＝結ンダ二ツノ半直線ト, EO ヲ半徑トシタ圓トノ交點ノ間＝夾マレテ居ル圓弧デアル。

16. 二ツノ相交ル圓 O, O′ アリ, 一ツノ交點 C ヲ過リ動割線 ABC ヲ引キ二圓 O, O′ ノ周ト再ビ交ル點ヲ夫々 A, B トスルト二ツノ直線 AO, BO′ ノ交點ノ軌跡ヲ求ム。

解 圖＝於テ

$$\widehat{OPO'}+\widehat{PAB}+\widehat{PBA}=2R\angle$$

又 $\widehat{OAC}=\widehat{OCA}$ $\quad O'BC=O'CB$

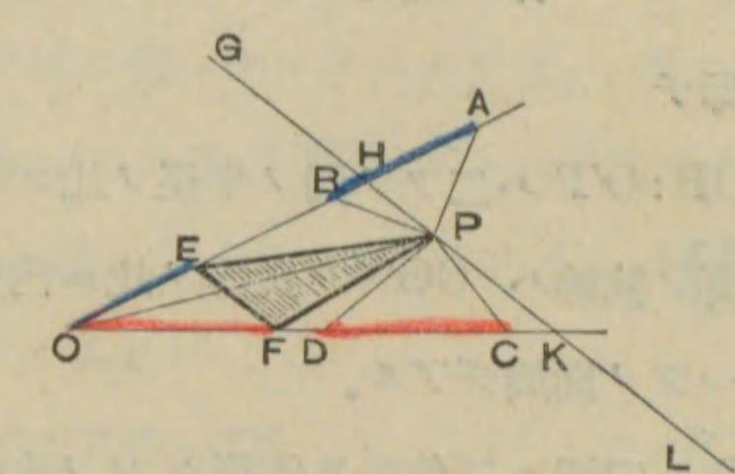


デアルカラ $\widehat{OPO'}=\widehat{OCO'}$ ナルコトガ分カル。

仍ツテ求ムル軌跡ハ OO′ ヲ弦トシ定角 OCO′ ヲ容レル圓弧デアル。

17. 二ツノ三角形ハ共通ノ頂點ヲ有シ, ソノ各底邊ノ位置及ビ大サ併ビ＝ソノ面積ノ和ガ一定ナルトキ, ソノ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 AB, CD ヲ與ヘラレタ底邊トシ, ソノ延長ノ交點ヲ O トス。



今 P ヲ軌跡ノ一點トスレバ

$$\triangle ABP=\triangle OEP$$

$$\triangle CDP=\triangle OFP$$

(但シ $OE=AB$, $OF=CD$ ナリトス)

ヨツテ四邊形 OEPF ノ面積ハ一定デアル。

然ル＝ △OEF ノ面積ハ一定ナルベキ＝ヨリ △EFP ノ面積モ亦一定デアル。從ツテ點 P ハ EF ＝平行ナル直線デアル。

注意 直線 GHKL ヲ軌跡ナリトイフ＝就キテハ一ツノ注意ヲ要スル。ソレハ點 P ヲ GH ノ部分ノ上＝トル時ハ △ABP ノ面積ヲ負ト考ヘ, 點 P ヲ KL ノ部分ノ上＝トル時ハ △CDP ヲ負ト考ヘネバナラヌ事デアル。若シ面積＝負量ナル考ヘヲ導入セヌナラバ求ムル軌跡ハ EF ＝平行ナル直線ノ内 OA, OC ノ間＝挾マレル線分ダケ＝限ラネバナラヌ。

18. 直線ガ二ツノ圓カラ夫々相等シイ弦 AB, A′B′ ヲ截リトル時 A 及ビ B′ ＝於ケル各端ノ切線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

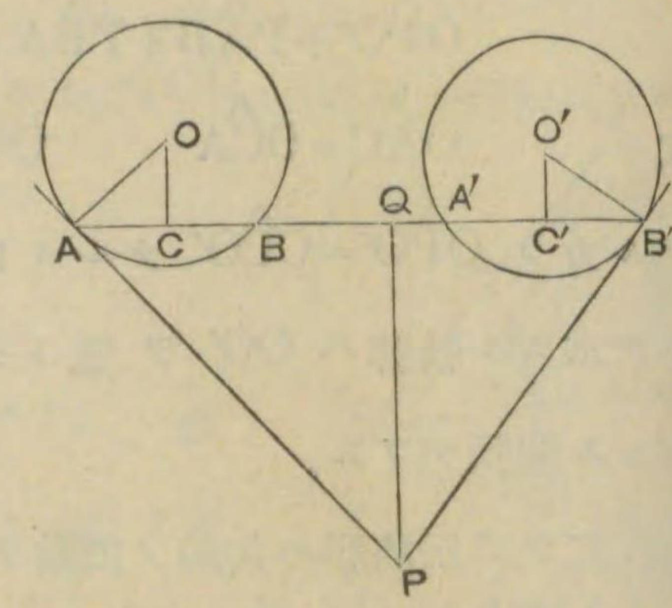
解 二ツノ圓ノ中心 O, O′ カラ直線 AB, A′B′ ＝垂線 OC, O′C′ ヲ引キ, 次＝軌跡ノ一點 P カラモ垂線 PQ ヲ引ケバ

$$\triangle AOC\backsim\triangle PQA$$

$$\therefore\quad AP:AO=PQ:AC$$

同樣ニ

$$B'P:B'O'=PQ:B'C'$$



然ルニ假定ニヨツテ

$$AC=B'C'$$

故ニ

$$AP:AO=B'P:B'O'$$

$$\therefore\ \triangle AOP \backsim \triangle B'O'P$$

$$\therefore\ OP:O'P=AO:B'O'$$

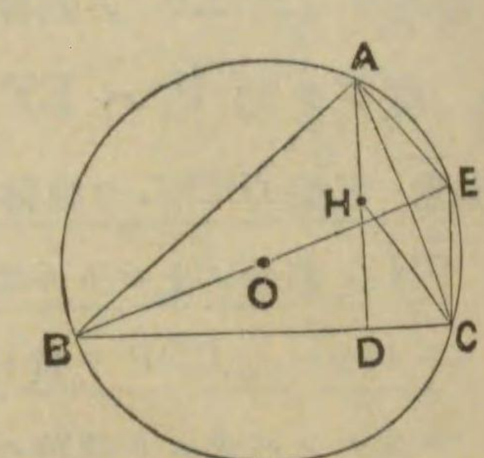
即チ

$OP:O'P$ ハ二ツノ圓ノ半徑ノ比ニ等シイカラあぽろにゆすノ定理ニヨリテ, 所要ノ軌跡ハ OO' ヲ此等ノ比ニ内分及ビ外分シタ二點間ノ線分ヲ直徑トスル一ツノ圓周デアル。

19. 定圓ニ三角形ヲ内接シ,ソノ垂心ヲ定點ナラシムル時, 各邊ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 定圓ノ中心ヲ O トシ垂心ヲ H トスル。

今 H ヲ垂心トスル任意ノ三角形 ABC ヲ圓ニ内接シタモノトシ BO ヲ結ビ, ソノ延長ガ圓ト交ル點ヲ E トスル。



然ル時ハ　$EC=AH$

ナルコトガ容易ニ分カル。然ルニ

$$\widehat{BCE}=\widehat{ADC}=R\angle$$

デスカラ　$AH \parallel EC$

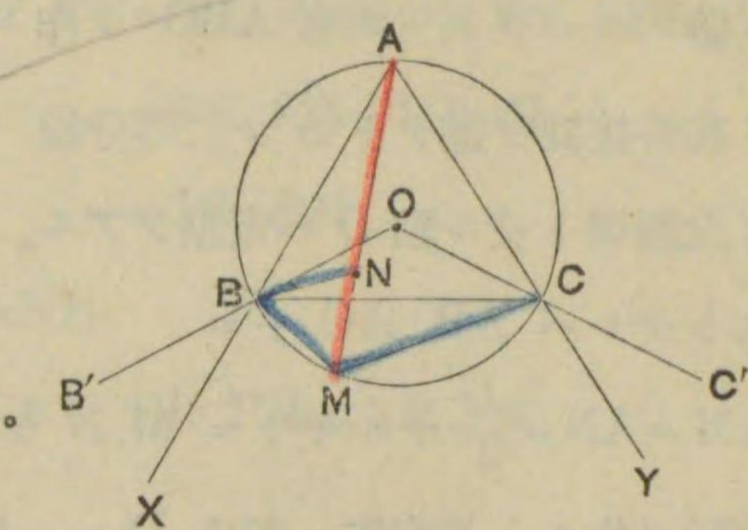
ヨツテ四邊形 AHCE ハ ▱ デアル。

從ツテ HE ヲ結ブト共ノ中點ガ AC ノ中點ト一致スルカラ問題ハ次ノ如ク變換セラレル。即チ定點 H カラ定圓周ニ至ル線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨトイフ問題ニ歸スル。(問題解義11)

20. 正三角形 ABC ニ於テ $MA=MB+MC$ ナルベキ點 M ノ軌跡ヲ求メ

ヨ。

解 此問題ハ古來有名デアルガ證明ハソウ簡單デハナイ。先ヅ



$$MA=MB+MC \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ヲ滿足スル點 M ハ先ヅ圖中 XBCY ノ部分ニアラネバナラヌコトヲ證明シヨウ。

ソレニハ

$$MA>MC$$

ナルベキガ故ニ, M ハ直線 OB ト A ノ同ジ側ニアツテハナラヌ。次ニ M ハ $B'BX$ ノ間ニアル時ハ (1) ハ滿足セヌノミナラズ BX ノ上ニアツテモイケナイ。次ニ M ハ △ABC ノ内部又ハ邊ノ上ニアツテイケナイ。何故ナラバ AM ヲ延長シテ BC ト D デ交ラシムレバ

$$AM \leqq AD, \qquad BC \leqq BM+CM$$

デ且ツ　$AD<AB=BC$

$$\therefore\ AM<BM+CM$$

所ガ圖ハ直線 AO ニ關シテ對稱デアルカラ, 結局 M ハ XBCY ノ内部ニアラネバナラヌ。ソコデ M ハ XBCY ノ内部ニアルモノトシテ解カンニ, 正三角形 BMN ヲ作リ, N ヲ BM ニ關シテ A ト同ジ側ニアラシメルト

$$BM=BN, \qquad AB=BC, \qquad C\hat{B}M=60^\circ-N\hat{B}C=A\hat{B}N$$

故ニ　$\triangle BCM \equiv \triangle BAN$

故ニ　$MC=AN$ 從ツテ $AM=AN+MN$

仍ツテ N ハ直線 AM ノ上ニアル。故ニ　$B\hat{M}C=A\hat{N}B=120^\circ$

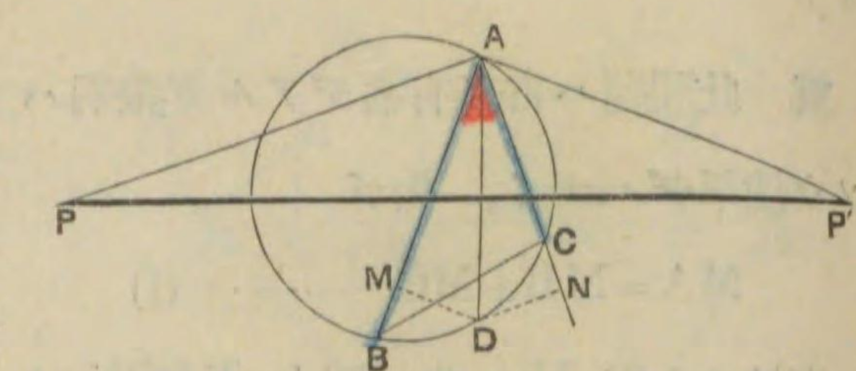
故ニ　$B\hat{A}C+B\hat{M}C=180^\circ$

故ニ M ハ圓 ABC ノ劣弧 BC ノ上ニアル。

21. 一ツノ角ノ大サト其位置及ビ此角ヲ夾ム邊ノ和ガ與ヘラレタル三角形ノ外接圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 △ABC ニ於テ $\hat{A}$ 及ビ $AB+AC=l$

ガ與ヘラレタトスル。然ル時條件ニ適スル一ツノ三角形 ABC ヲ作リ其外接圓ヲ畫クト $\hat{A}$ ノ二等分線ガ此圓周ト交ル點 D ハ定點デアル。



何トナレバ AB, AC 上ニ $AM=AN=\frac{l}{2}$ ナルヤウニ M, N ヲトリ此等ヲ通ツテ AB, AC ニ垂直ナル直線ヲ作ルト其交點ハ即チ D ニ一致スルカラデアル。而シテ外接圓ノ中心ハ AD ノ垂直二等分線上ニアルコトハ明カデアル。

注意 AB ハ短クテ B ハ A ニ一致スル極限ノ場合ヲ考ヘルト外接圓ハ A ニ於テ AC ニ切スル。故ニ A ヲ通リ AC ニ垂直ナル直線ガ AD ノ垂直二等分線ト交ル點 P ガ軌跡ノ端點デアル。

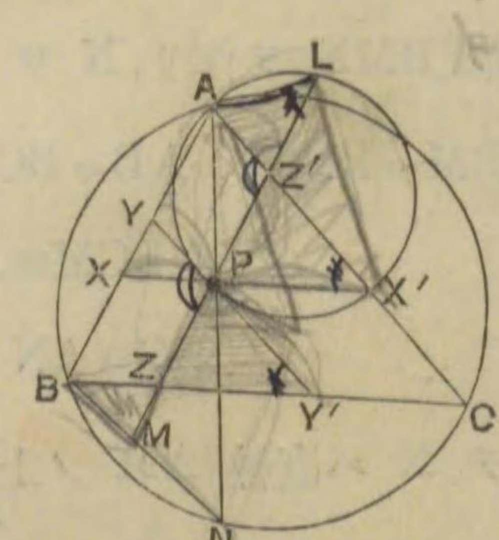
同樣ニ A ヲ通リ AB ニ垂直ナル直線ト交ル點 P′ ガ軌跡ノ端點デアル。故ニ所要ノ軌跡ハ線分 PP′ デアル。

22. 三角形 ABC ノ內部ニ一點 P ヲトリ，次ニ XPX′, YPY′, ZPZ′ ヲ夫々 BC, CA, AB ニ平行シ且ツ他ノ邊ノ間ニ限ラレタルモノトス。然ル時

$$PX.PX'+PY.PY'+PZ.PZ'=k^2$$

ナラシムルガ如キ點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 圖ニ於テ圓 APX′ ト ZZ′ トノ交點ヲ L トシ三角形 ABC ノ外接圓ト AP ノ延長トノ交點ヲ N トシ，BN ト ZZ′ トノ交點ヲ M トスルト



$$Z\hat{P}Y'=A\hat{Z'}L,\quad P\hat{Y'}Z=A\hat{X'}P=A\hat{L}Z'$$

ナルガ故ニ △ALZ′ ト △ZPY′ トガ相似デアル。仍ツテ

$$PZ.Z'L=AZ'.PY'=PY.PY'$$

同樣ニ △PLX′ ト △ZBM トガ相似デアルカラ

$$PL.ZM=BZ.PX'=PX.PX'$$

故ニ $PX.PX'+PY.PY'=PL.ZM+PZ.Z'L$

從ツテ

$$\begin{aligned}PX.PX'+PY.PY'+PZ.PZ'&=PL.ZM+PZ.Z'L+PZ.PZ'\\&=PL.ZM+PZ.PL\\&=PL.PM\end{aligned}$$

而シテ $A\hat{L}P=A\hat{X'}P=A\hat{C}B=A\hat{N}B$

ナルガ故ニ A, L, N, M ハ共圓點デアルカラ $PL.PM=AP.PN$

故ニ

$$PX.PX'+PY.PY'+PZ.PZ'=AP.PN=R^2-OP^2$$

但シ R ハ △ABC ノ外接圓ノ半徑デ，O ハ其中心デアル。仍ツテ所要ノ軌跡ハ O ヲ中心トスル一ツノ圓デアル。

注意 P ガ O ニ一致スル時ハ

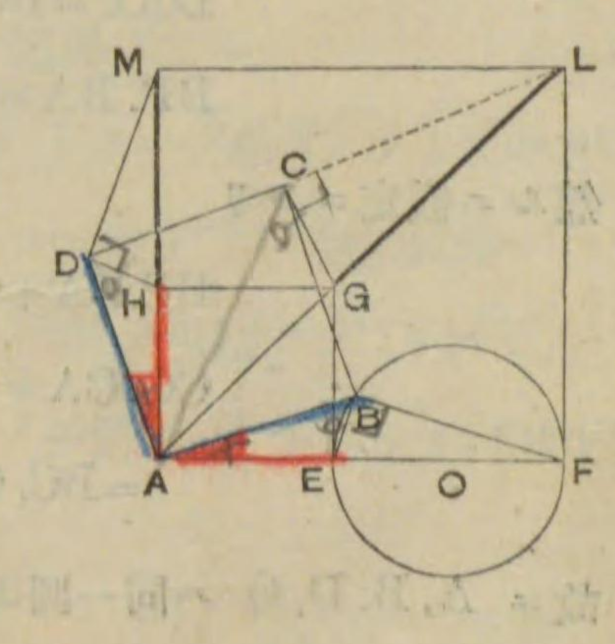
$$\boxed{PX.PX'+PY.PY'+PZ.PZ'}$$

ノ値ハ最大デアル。

23. 圓外ノ定點 A カラ此ノ圓周ニ引ク線分 AB ノ上ニ作ル正方形ノ二ツノ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 AB ノ上ニ正方形 ABCD ヲ作リ，B 點ハ定圓周 EBF ヲ動クトキ二ツノ頂點 C, D ノ軌跡ヲ求メルトス。

AO ヲ結ビ二ツノ正方形 AEGH 及ビ AFLM ヲ作ルト，三ツノ點 A, G, L ハ一直線上ニアル



$$\therefore\ H\hat{A}D=B\hat{A}E$$

$$AD=AB$$

$$AH=AE$$

ヨツテ $\triangle AHD\equiv\triangle ABE$

$$\therefore\ A\hat{D}H=A\hat{B}E$$

同樣ニ $\triangle ADM\equiv\triangle ABF$

$$\begin{aligned}\therefore\ M\hat{D}H&=M\hat{D}A-H\hat{D}A\\&=A\hat{B}F-A\hat{B}E\end{aligned}$$

$=R\angle$

故ニ頂點 D ノ軌跡ハ定線分 HM ヲ直徑トスル圓周デアル。

次ニ C 點ノ軌跡ヲ求メンニ

$$C\hat{A}G=H\hat{A}D$$

且ツ

AG : AH＝AC : AD (共ニ對角線ト一邊トノ比)

∴ AG : AC＝AH : AD

∴ △AGC∽△ADH

∴ $A\hat{C}G=A\hat{D}H$

同樣ニ △ADM∽△ACL

∴ $A\hat{C}L=A\hat{D}M$

∴ $G\hat{C}L=A\hat{C}L-A\hat{C}G$

$=A\hat{D}M-A\hat{D}H=R\angle$

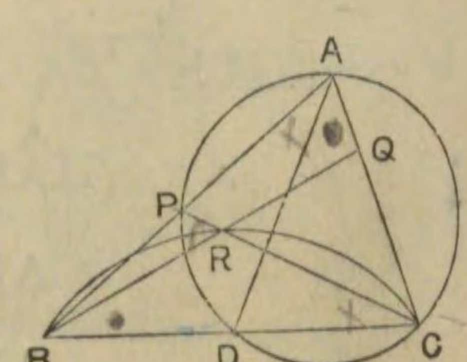
ヨツテ C 點ノ軌跡ハ定線分 GL ヲ直徑トスル圓周デアル。

24. 三角形 ABC ノ三邊 AB, AC 上ニ夫々點 P, Q ヲトリ BP.BA＋CQ.CA＝BC² ナラシムル時, 直線 PC ト BQ トノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ,

解 △APC ノ外接圓ト BC トノ交點ヲ D トスレバ

$D\hat{A}P=B\hat{C}P$

BP.BA＝BC.BD



然ルニ假定ニヨリ

BP.BA＋CQ.CA＝BC²

∴ CQ.CA＝BC²－BC.BD

＝BC.CD

故ニ A, B, D, Q ハ同一圓周上ニアリ。

∴ $Q\hat{B}C=D\hat{A}C$

サテ BQ, CP ノ交點ヲ R トスルト

$B\hat{R}P=R\hat{B}C+R\hat{C}B=D\hat{A}Q+B\hat{A}D=B\hat{A}C$

∴ $B\hat{R}C=2R\angle-B\hat{A}C$

ヨツテ求ムル點 R ハ BC ヲ弦トシ定角ヲ容ルヽ弓形ノ弧デアル。

25. 角 A ガ直角ナル三角形 ABC アリ O ヲ其ノ平面上ノ一定點ナリトス。邊 AB 上ニ任意ノ一點 M ヲ取リ邊 AC 又ハ其ノ延長上ニ AN ヲ AM ノ m 倍ニ等シク作リ N ヨリ直線 OM ニ垂線 NP ヲ下ストキ點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。(大正六年文檢豫備)

解 四ツノ點 A, M, P, N ガ共圓點デアルカラ。

$A\hat{N}M=A\hat{P}M$

然ルニ △AMN ガ M, N ガ動クトモソノ形狀ガ一定 ($M\hat{A}N$ ガ與ヘラレ, 且ツ $\hat{M}=R\angle$ デアルカラデス。) デアルカラ $A\hat{P}O$ ガ一定デアル。

故ニ P 點ガ線分 AO ヲ弦トシ定角 $A\hat{P}O$ ヲ容ルヽ圓弧デアル。

26. 與ヘラレタル圓周上ノ與ヘラレタル二ツノ點ニ於テ此ノ圓ニ切シ且互ニ相切スル二ツノ圓ノ切點ノ軌跡ヲ求メヨ。(第五編第二章問題 1)

解 與ヘラレタ圓周上ノ二ツノ與點ヲ P, Q トシ中心 O トス。今 P デ切スル圓ノ中心ヲ O′, Q デ切スル圓ノ中心ヲ O″ トシ O′,O″ ノ切點ヲ R トスル。今 P ニテノ共通切線ト Q ニテノ共通切線トノ交點ヲ S トスルト, S ハ定點デ且ツ三ツノ圓ノ根心デアルカラ SP, SQ, SR ノ長サガ相等シイ。故ニ求ムル軌跡ハ S ヲ中心トシ SP ヲ半徑トスル圓周デアル。

27. 二ツノ定點 A, B ヲ過ル圓周ニ直線 AB 上ノ一定點 C ヨリ引キタル二ツノ切線ノ切點ヲ過ル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。(大正二年文檢本試)

解 C カラ引ク二ツノ切線ヲ CD, CE トシ DE ノ中點ヲ P トスル。

サテ DE ガ AB ト交ル點ヲ F トシ AB ノ中點ヲ G トスルト, OPFG ハ内接四邊形デアルカラ,

CP.CO＝CF.CG

又 CP.CO＝CD²　CB.CA＝CD²

ナルコトハ明デアルカラ,

$$CB.CA = CF.CG$$

而シテ CB.CA ハ一定量デ CG ハ定長デアルカラ CF モ亦定長デアル。ヨツテ P ハ CF ヲ直徑トスル圓周上ニアル。

28. 正六角形 ABCDEF ノ中心ヲ過ル任意ノ直線ト二ツノ對角線 AC, AE トノ交點ヲソレゾレ P, Q トスルトキ直線 BP, FQ ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。(大正七年文檢豫備)

解 $\triangle ABP \equiv \triangle AOP$, $\qquad \triangle AFQ \equiv \triangle AOQ$

ナルコトガ容易ニ分カル。

$$\therefore \quad A\hat{B}P = A\hat{O}P \qquad A\hat{F}Q = A\hat{O}Q$$

$$\therefore \quad A\hat{B}P + A\hat{F}Q = 2R\angle$$

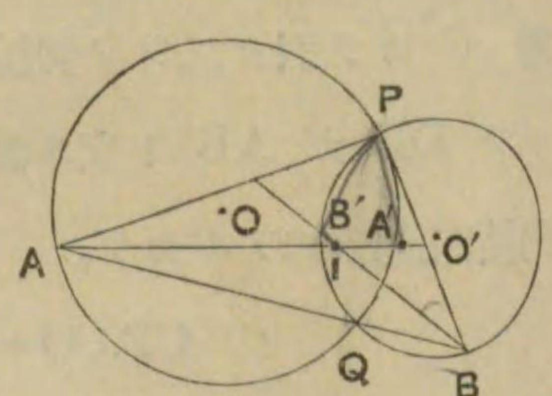
ヨツテ BP, FQ ノ交點ヲ R トスルト四ツノ點 A, B, R, F ガ共圓點ニシテ, 而カモコレハ正六角形ノ外接圓ニ外ナラズ。ヨツテ R ノ軌跡ハ正六角形ノ外接圓デアル。

29. 二點 P, Q ニ於テ相交ル二圓ノ交點 Q ヲ過ル任意ノ直線ガ此等ノ圓ト更ニ交ル點ヲ夫々 A, B トスルトキ三角形 PAB ノ內心ノ軌跡ヲ求メヨ。(大正十一年文檢豫備)

解 相交ル二圓ヲ O, O′ トシ Q ヲ過ル直線ガ圓 O ト交ル點ヲ A, 圓 O′ ト交ル點ヲ B トス。

然ルトキ $\hat{A}$ ノ二等分線ガ圓 O ト交ル點ヲ A′ トシ, $\hat{B}$ ノ二等分線ガ圓 O′ ト交ル點ヲ B′ トシ內心ヲ I トスルト, 四邊形 PA′IB′ ハ圓ニ內接スル四邊形デアル。何トナレバ

$$P\hat{A'}I = A\hat{Q}P, \qquad P\hat{B'}I = B\hat{Q}P$$



デ $A\hat{Q}P + B\hat{Q}P = 2R\angle$ デアルカラデス。

而シテ A′, B′, 及ビ P ガ定點デアルカラ所要ノ軌跡ハ三定點 P, A′, B′, ヲ過ル圓周デアル。

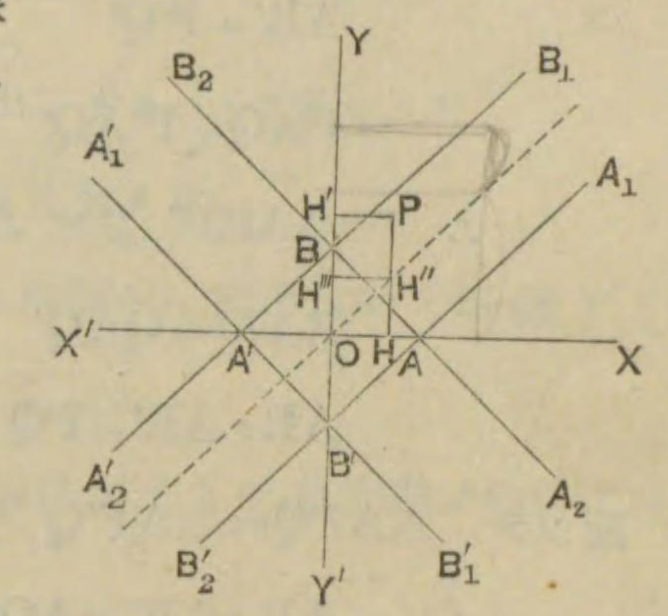
30. 一點 P カラ互ニ直交スル二ツノ定直線ニ至ル距離ノ差ガ常ニ定長 l

ヨリモ小ナリトイフ。P ハ如何ナル範圍內ニアルベキカ。

解 O ニ於テ直交スル二ツノ直線ヲ XX′, YY′ トシ此等ノ上ニ

$$OA = OB = OA' = OB' = l$$

ナルヤウニ A, B, A′, B′ ヲ取ル時ハ, 二組ノ平行線 AB′, A′B, 及ビ AB, A′B′ ノ間ノ點ハ皆題意ニ適スルノデアル。何トナレバ放射形內ニ任意ノ一點 P ヲトリ, 直線 XX′, YY′ ヘ垂線 PH, PH′ ヲ引キ角 AOB ノ二等分線ト PH トノ交點ヲ H″ トスル。H″ カラ YY′ ニ垂線 H″H‴ ヲ引クト OHH″H‴ ハ正方形デアルカラ



$$PH' = H''H''' = HH''$$

又 $\qquad PH'' < OB = l$

故ニ $\quad PH \sim PH' = PH \sim H''H = PH'' < l$

故ニ P ハ條件ニ適スル點デアル。次ニ二組ノ平行線ノ間ニアラザル所ニ點 P ヲトルト

$$PH \sim PH' > l$$

トナル。故ニ所要ノ範圍ハ二組ノ平行線ノ間ノ部分デアル。

31. 三角形 ABC ノ外部ノ點 P ヨリ邊 BC, CA, AB ニ垂線 PD, PE, PF ヲ引キ, 其足ヲ夫々 D, E, F トスル時此等ノ點ガ一直線上ニアラシメルガ爲メノ點 P ノ軌跡如何。

解 先ヅ P ガ CA, CB ノ延長ノ間ニアルモノトスレバ

$$A\hat{P}F = A\hat{E}F, \qquad F\hat{P}D = F\hat{B}D$$

$$D\hat{P}B = B\hat{F}D$$

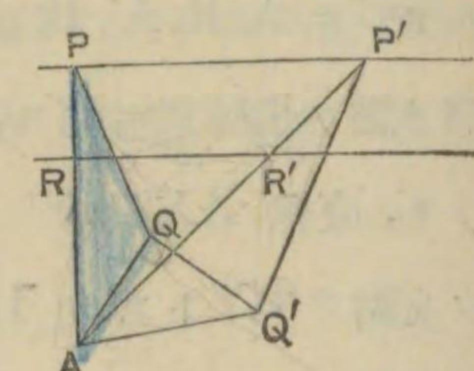
$$故ニ \qquad A\hat{P}B = A\hat{E}F + F\hat{B}D + B\hat{F}D$$

$$= A\hat{E}F + E\hat{D}C$$

仍ツテ $A\hat{P}B$ ト C トガ互ニ補角ヲナス。故ニ P ハ △ABC ノ外接圓ノ上ニアル。

注意 P ガ AB, AC ノ延長ノ間ニアル場合及ビ BC, BA ノ延長ノニアル場合ニモ同樣ニ證明ガ出來ル。

32. 形狀一定ナル三角形 APQ ニ於テ A ハ固定シ P ハ定直線上ニアリ。PQ ノ長サハ AP ガ定直線ニ平行ナル他ノ定直線ニヨツテ截ラルヽ部分 AR ニ等シイ時 Q ノ軌跡ヲ求メヨ。



解 定直線ニ垂直ニ ARP ヲ引キ △APQ ヲ作リ，次ニ任意ニ他ノ △AP'Q' ヲ作ルト

$$AR=PQ$$
$$AR'=P'Q'$$
$$P\hat{A}Q=P'\hat{A}Q'$$

∴ △ARR' 及ビ △AQQ' ニ於テ

$$R\hat{A}R'=Q\hat{A}Q'$$
$$AR:AR'=PQ:P'Q'$$

而シテ △APQ∽△AP'Q' ナルヲ以テ $PQ:P'Q'=AQ:AQ'$

∴ $AR:AR'=AQ:AQ'$

∴ $\triangle ARR' \backsim \triangle AQQ'$ ∴ $A\hat{Q}Q'=R\angle$

ヨツテ求ムル軌跡ハ定點 Q ヲ過リ定直線 AQ ニ垂直ナ直線デアル。

第六編 練習問題

1. 二ツノ等圓ガ互ニ外切シナガラ夫々直角ニ交ル直線ノ上ヲ廻轉スル時，此二ツノ圓ノ切點ノ軌跡ヲ求メヨ。
2. AB ハ與ヘラレタ線分デ AC ハ A カラ B ヲ過ル任意ノ直線ニ引イタ垂線ナルトキ AC ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。
3. 與ヘラレタ直角三角形 ABC ノ斜邊 AC ノ兩端ガ夫々互ニ直交スル二直線 OX, OY 上ヲ動クトキ直角頂 B ノ軌跡如何。
4. 平行四邊形 ABCD ノ周圍ハ一定デ A 點ハ固定シ二邊 AB, AC ノ方向ハ一定スル時第四頂點 D ノ軌跡ヲ求メヨ。
5. 與ヘラレタ圓ノ周上ノ二定點 A, B カラ平行弦 AP, BQ ヲ引キ圓ト再

ビ交ル點ヲ P, Q トスル時ハ，PQ ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

注意 AB=PQ ナルコトニ注意スレバ所要ノ軌跡ハ中心 O ト AB ノ中點トヲ結ブ線分ヲ半徑トスル圓周デアル。

6. 與ヘラレタ圓ノ定直徑 AB ノ一端 A ニ切線 AT ヲ引キ，次ニ任意ノ直線 BQ ヲ作リ，此上ノ一點 P カラ切線 AT ニ垂線 PT ヲ下シ，PT ノ長サヲ直線 BQ ト圓周トノ交點 Q ニ至ル距離 PQ ニ等シカラシムル時，P ノ軌跡ヲ求メヨ。

注意 △APQ≡△APT, AB // PT カラ BP=BA ナルコトヲ導ケ。

7. 二定圓周ヲ二等分スル圓周ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。
8. 定圓周上ニ中心ヲ有シ一定ノ半徑ヲ有スル圓ニ一定ノ方向ノ切線ヲ引クトキ切點ノ軌跡ヲ求メヨ。
9. 定圓ニ於テ，一定長ノ動弦ノ兩端カラ切線ヲ引クトキ，其交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

注意 本題ハ定圓ニ一定長ノ切線ヲ引クガ如キ點ノ軌跡ヲ求メヨトイフノト全ク同一問題デアル。

10. 定圓內ノ定點 A ヲ通リ此圓ニ任意ノ弦 ABC ヲ引キ A ヲ過ギリ B, C ニ於テ此定圓ニ切スル二ツノ圓ヲ畫クトキ，此二圓ノ第二ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。
11. AB ハ定圓ノ定弦，CD ハ定長ノ動弦ナリトス。CD ガ移動スル時，AB, CD ノ中點ヲ結ブ線分ノ二等分點ノ軌跡ヲ求メヨ。

注意 AB ノ中點ヲ M トスルト M ハ定點デアル。又 CD ノ中點ノ軌跡ハ一ツノ圓周デアル。故ニ本題ハ定點 M ト定圓周上ノ點トヲ結ブ線分ノ中點ノ軌跡ヲ求ムルコトニ歸ス。

12. 三角形ノ底邊及ビ他ノ二邊ノ和ガ與ヘラレタルトキ，底邊ノ兩端カラ頂角ノ外角ノ二等分線ニ下セル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ。
13. 三角形ノ底邊及ビ他ノ二邊ノ差ガ與ヘラレタルトキ，底邊ノ兩端カラ頂角ノ二等分線ニ下セル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ。
14. 定圓內ノ定點 A カラ互ニ垂直ナル二ツノ弦ヲ引キ，圓周ト夫々 B, C デ

交ラシメルトキ弦 BC ノ中點 D ノ軌跡ヲ求メヨ。

15. 定三角形 ABC ノ邊 BC 上ノ一點 D ヲ過ギテ任意ノ横截線 EDF ヲ引キ, 邊 AC ト點 E ニテ, 邊 AB ノ延長ト F ニテ交ラシメルトキ, 二ツノ圓 CDE, BDF ノ第二ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

注意 所要ノ軌跡ハ BC ヲ弦トシ $(2R\angle-\hat{A})$ ヲ容レル圓弧ナルコトニ注意セヨ。

16. 一定點 A カラ定直線 XY ニ任意ノ直線 AP ヲ引キ, $P\hat{A}Q$ ヲ定角 α ニ等シカラシメ且ツ $\triangle APQ$ ノ面積ヲ m^2 ニ等シカラシムルトキ Q 點ノ軌跡ヲ求メヨ。

17. 圓ニ內接スル矩形ノ對角線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

18. 與ヘラレタ矩形ノ各頂點ニ至ル距離ノ上ノ正方形ノ和ガ一定ナルガ如キ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

19. 定點 A カラ定圓周ニ直線 AB ヲ引キ之ヲ P デ內分シ矩形 AP.AB ヲ一定ナラシムル時 P 點ノ軌跡ヲ求メヨ。

20. AB ハ定直線, C ハ定點, l ハ定長ノ直線トスル時一點 P カラ AB ニ垂線 PQ ヲ下シ　　$PC^2=PQ.l$

ナラシムル如キ點 P ノ軌跡ヲ求メヨ。

21. 一ツノ圓周ヲ交點デ二等分スル半徑ノ一定ナル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

22. 一ツノ平野カラ二個ノ塔ノ頂ヲ見ルコトヲ得ル場合ニ, 常ニ等シキ仰角デ此等ヲ見ツヽ進マントスレバ, ソノ行路ハ圓デアルコトヲ證セヨ。

23. 平面上ニ相異ナル光度ヲ有スル二ツノ發光體アル時, 相等シイ光度ヲ受ケル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

24. 二ツノ定點カラ一ツノ圓ニ引イタ二組ノ切線ノナス角ハ夫々 α, β ナルトキ, 此圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

25. A ハ角 XOY ノ邊 OX ノ上ニアル定點デアル。今 O 及ビ A ヲ過ツテ任意ノ圓ヲ畫キ OY ト B デ交ラシメ直線 AB ニ平行ナ直徑ノ兩端ヲ P 及ビ Q トス。P ト Q トノ軌跡ヲ求ム。

第七編　作圖題

第一章

作圖題ノ證明法

50. 定義 作圖題ヲ解クトハ, 與ヘラレタ條件ニ適スル圖形ヲ作圖ノ公準ノ下ニ作ルコトデアル。

作圖ノ公準ト云フノガ次ノ三ケ條ノ規約デアル。

1° 二點ヲ結ブ直線ハ引キ得ルコト。

2° 直線ハ双方ニ如何ホドデモ延長スルコトガ出來ル。

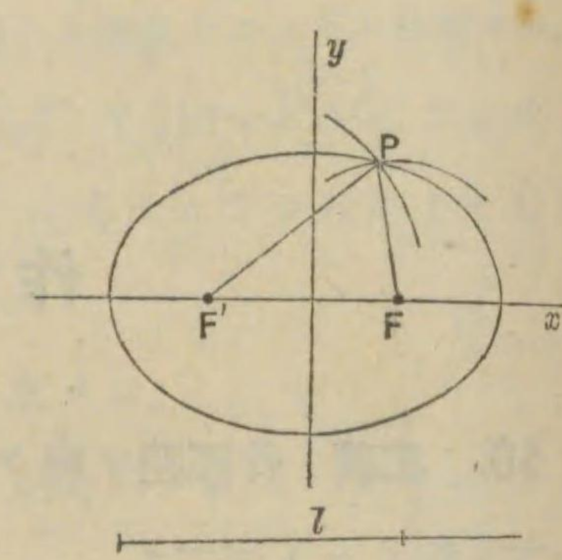
3° 任意ノ點ヲ中心トシ, 任意ノ半徑デ圓ヲ畫クコトガ出來ル。

上ニ揭ゲタ三ツノ手段ヲ而カモ有限回數ダケ用フルコトニヨツテ圖形ヲ作ル事ヲ得バ吾人ハ作圖題ハ可能デアルトイヒ,然ラザル場合ニハ不可能デアルトイフノデアル。本來カライフト點トハ位置アリ大サナキモノ,直線トハ長サガアリ幅モ厚サモナイモノデスカラ,如何ニ精巧ニ作ラレタ理想的ノ器具ヲ以テシテモ直線ヲ畫クコトガ出來ヌ。同様ニ 如何ニ精密ナこんぱすヲ以ツテシテモ圓ヲ畫クコトガ出來ヌ筈デアル。

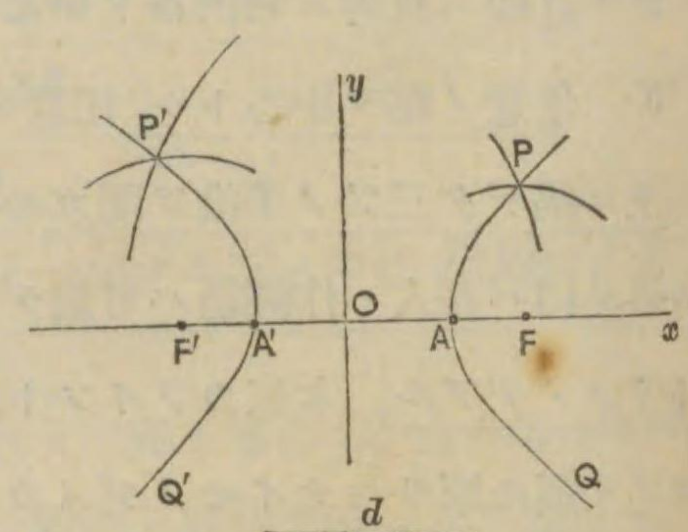
併シナガラ斯様ナ事デハ作圖題ハ成リ立タヌノデアル。デスカラ昔カラ前記ノ三ツヲ公準トシテ用フルコトヲ許シテ居ルノデアル。換言スレバ此等ノ公準ヲ用フルコトニヨツテ作圖ガ出來レバ問題ガ解ケルトイヒ,ソノ以外ノ方法ヲ以テセネバ作圖ヲ實行スルコトガ出來ヌナラバ,問題ガ不可能デアルトイフノデアル。コノ事ハ作圖題ノ可能ト不可能トヲ區別スル標準ニナルモノデスカラ是非共注意セネバナラヌ。例ヘバ任意ノ角ノ三等分ハ古來初等幾何學デハ不可能デアルトセラレタノガ,畢竟上ニ述ベタ制限ノ下デハ解ケナイトイ

フノデアツテ，コノ制限サヘ撤回スレバ問題ハ容易ニ解決出來ルノデアル。

注意 i. 上ニ掲ゲタ三ツノ手段ヲ有限回數用フルコトヲ許ストイフ事ハ，作圖題ノ根本原則デアル。若シ無限回使用スルコトヲ許スト，楕圓，双曲線等ノ如キ高等ナル曲線モ畫クコトガ出來ルトイフ結果ニナリマス。何トナレバ楕圓ハ二定點 F, F′ (焦點トイフ) ヨリノ距離ノ和ガ一定ナル長サ l ニ等シイ點ノ軌跡デアルカラ，先ヅ F ヲ中心トシ定長 l ヨリモ小ナル長サヲ半徑トスル圓ヲ畫キ，次ニ F′ ヲ中心トシ l ヨリ今用ヒタ半徑 PF ダケ減ジタモノヲ半徑トスル圓ヲ畫キ其交點ヲ P トスルト，P ハ楕圓ノ上ノ點デアル。故ニ FP ノ長サヲ $\frac{1}{2}(l-FF')$ カラ $\frac{1}{2}(l+FF')$ マデ連續的ニ増加シナガラ P ヲ求ムル操作ヲ無限回實行スルト楕圓ヲ得ルワケデアル。



又双曲線ハ二ツノ定點 F, F′ (焦點トイフ) カラノ距離ノ差ガ一定ナル長サ d ニ等シイ點ノ軌跡デアルカラ，F ヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ，次ニ F′ ヲ中心トシテ今用ヒタ半徑ヨリモ d ダケ大ナル長サヲ半徑トスル圓ヲ畫キ，夫等ノ交點ヲ P トスルト，P ハ双曲線ノ上ノ點デアル。

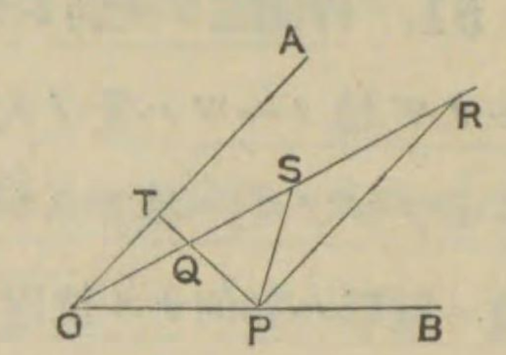


ソコデ FP ノ長サヲ $\frac{1}{2}(FF'-d)$ カラ連續的ニ増加セシメナガラ P ヲ求ムル操作ヲ無限回實行スルト双曲線ノ一枝 PAQ ノ部分ガ畫ケル。次ニ又 F′ ヲ中心トシ F′P′ ノ長サヲ $\frac{1}{2}(FF'-d)$ カラ連續的ニ増加セシメナガラ圓ヲ畫クト P′ ノ軌跡ガ得ラレル。コレハ双曲線ノ他ノ一枝 P′A′Q′ デアル。要スルニ定規トこんぱすトヲ無限回數使用スルコトヲ許スト楕圓トカ，双曲線トカイフヤウナ高等ナ曲線ガ畫ケルワケニナル。ソコデ初等幾何學デハ有限回ダケ使用出來ルトイフコトニ制限ヲ加ヘテ居ルノデアル。

注意 ii. 角ノ三等分ノ問題ハ所謂初等幾何學作圖不能問題ノ一ツトシテ有名デアルガ，コレモ前ニ述ベタ三ツノ公準ノ範圍デハ作圖ハ不可能デアルガ，其制限ヲ撤回スルナラバ容易ニ解カレルノデアル。今二ツノ解法ヲ掲ゲテ見ヤウ。

解 1. 角 AOB ヲ任意ノ與角ナリトシ，OB 上ニ任意ニ一點 P ヲトリ OA

ニ垂線 PT ヲ引キ，其上ニ Q ヲトリ OQ ヲ引ク。次ニ P カラ OA ニ平行ニ PR ヲ引キ OQ ト R デ交ラシメ，QR=2OP ナラシメルト $\widehat{AOR}$ ハ $\widehat{AOB}$ ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイ。何トナレバ QR ノ中點ヲ S トシ PS ヲ作ルト，直角三角形 QPR ニ於テ



$$\widehat{ORP}=\widehat{SPR}$$

又 $$RS=QS=SP=OP$$

ナルガ故ニ， $$\widehat{ROP}=\widehat{OSP} \qquad \widehat{OSP}=2\widehat{PRS}$$

デアルカラ $$\widehat{ORP}=\widehat{AOR}=\frac{1}{3}\widehat{AOB}$$

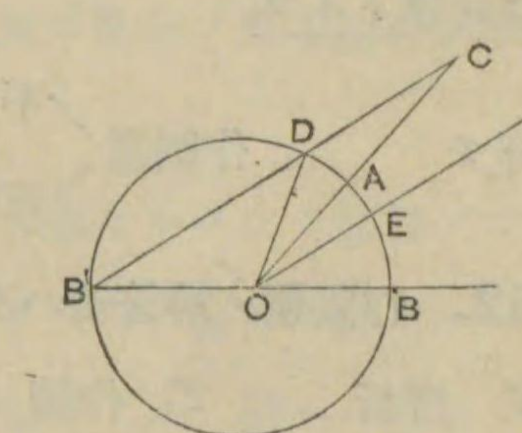
トナル。ケレドモ QR=2OP ナラシメル如キ點 Q ヲ求メルコトハ，前ノ三ツノ公準ダケデハ出來ナイノデアル。

解 2. 與角 AOB ノ頂點ヲ中心トシ，任意ノ圓ヲ畫キ，OA ト A ニテ，OB ト B, B′ ニテ交ラシム。今 OA ノ延長上ニ一點 C ヲトリ，CB′ ガ圓周ト交ル點ヲ D トシ，DC=OA ナラシメ，O カラ B′C ニ平行ナル直線 OE ヲ作ルト，$\widehat{AOE}$ ハ與角 AOB ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シイ。

何トナレバ作圖ニヨツテ

$$DC=OA=OD=OB'$$

故ニ $$\widehat{EOB}=\widehat{DB'O}=\widehat{B'DO}$$
$$=2\widehat{DCO}=2\widehat{AOE}$$



仍ツテ

$$\widehat{AOE}=\frac{1}{3}\widehat{AOB}$$

併シ DC=OA ナルガ如キ點 C ヲ定メルコトハ，前ノ三ツノ公準ダケデハ出來ナイノデアル。然ラバ何故ニ三ツノ公準ダケヲ有限回使用スル丈ケデハ出來ナイカトイフ理論的說明ハ稍々複雜デアルカラ省略スル。

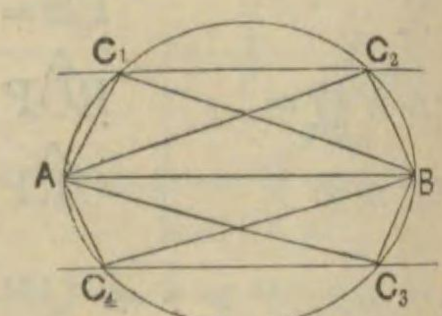
注意 昭和二年度ノ文檢口答試驗ニ

「任意ノ角ヲ三等分スルコトハ不可能ナリトハ如何ナル意味ナルカ」

トイフ問題ハ出サレタ。

51. 作圖題ヲ大別シテ二種トスル。一ツハ量ノ大サノミガ與ヘラレタルモノデ,他ノ一ツハ量ノ大サガ與ヘラルルト同時ニソノ位置ヲモ指定セラレタルモノデアル。換言スレバ前者ニアツテハ單ニ量ノ大サノミガ與ヘラルヽガ故ニ圖形ハ如何ナル位置ニ置クトモ差支ヘナイケレドモ,後者ニアツテハ豫メ指定セラレタル位置ニ於テ作圖ヲナスヲ要スル。

例ヘバ底邊ノ位置及ビソノ長サ,頂角ノ大サ及ビ高サヲ與ヘテ三角形ヲ作ル問題ニテハ底邊ヲ指定セラレタル位置ニ置クヲ要ス。而シテソノ底邊ノ兩側ニ於テ各二個宛(一般ニハ)ノ三角形ヲ得ルガ故ニ解ノ數ハ ABC_1, ABC_2, ABC_3, ABC_4 ノ四個アツテ夫等ハ皆相異ナル三角形デアルト見做ス。ケレドモ底邊ノ位置ガ指定セラレナイ時ニハ,如何ナル場所ニ底邊ヲ置クモ吾人ノ勝手デアルカラ,無數ノ三角形ヲ得ル。然レドモ夫等ノ三角形ヲ適當ニ移動セシムレバ悉ク全等形ナルガ故ニ(位置ヲ指定セザルガ故ニ移動スルコトガ自由デアル)解ノ數ハ僅カニ1個デアルトスル。而シテ第一類ノ作圖題ヲ不定位問題デアルトイヒ,第二類ノ作圖題ヲ定位問題トイフ。



即チ　作圖題 $\begin{cases} \text{不定位問題} \\ \text{定位問題} \end{cases}$

52. 作圖題ノ解答法ハ次ノ四ツノ部分カラ成リ立ツ。

1° 解析　2° 作圖　3° 證明　4° 吟味

解析トハ與ヘラレタ條件ニ適スル圖形ガ成立スルタメニ存在セネバナラヌ或簡單ナ條件ヲ見出スコトデアル。具體的ニ之ヲ證明スルト或作圖ガ出來上ガル爲メニハ甲ナル作圖ヲスレバ良イ。甲ナル作圖ガ出來上ガル爲メニハ乙ナル作圖ヲスレバ良イ,乙ナル作圖ガ出來上ガル爲メニハ丙ナル作圖ヲスレバ良イトイフ風ニ,逆ノ順序カラ次第ニ溯ツテ遂ヒニハ簡單ナ直線ヲ引クコトニ歸セシメントスルカ又ハ或角ヲ作ルコトニ歸セシメントスルカ又ハ或圓ヲ作ルコトニ歸セシメントスルカ,兎ニ角吾人ノ知己ノ問題ニマデ導クノデア

ル。即チ其導カレタ簡單ナ條件ニサヘ從ツテヤレバ必ズ圖形ガ出來ルノデアルカラ甚ダ肝要ナ手段デアラネバナラヌ。

尙解析ノ利益ハソレノミニ限ラズ,解析ニヨツテ得ラレタ條件ニ從ヘバ,所要ノ圖形ノアラユルモノガ得ラレルノデアル。

注意　昭和三年度文檢口答試驗ニ
「作圖問題ニ於ケル解析ノ意義ヲ述ベヨ」
トイフノガ出題セラレタ。

作圖トハ定木トこんぱすトヲ以ツテ實際圖形ヲ完成スル手段ヲ述ベ且ツ圖形ヲ書クコトデアル。

故ニ作圖題ノ解答トシテハ最モ主要ナル地位ヲ占メルモノデアル。但シ實際ニハ必ズシモ作圖ヲ實行セズ單ニ其畫キ方ヲ指示スレバ良イノデアルガ,併シ作圖ヲ完成スルノハ本體デアル。

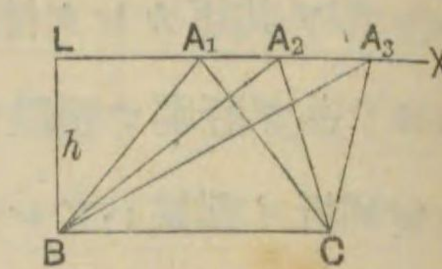
證明トハ今作ツタ圖形ハ果シテ與ヘラレタ條件ニ適合シテ居ルヤ否ヤヲ證據立テルノデアル。

吟味トハ如何ナル場合ニハ問題ハ可能デ,如何ナル場合ニハ不可能デアルカヲ研究シ,且ツ可能ノ場合ニハ果シテ幾個ノ解答ヲ與フルモノデアルヤヲ決定スルノデアル。故ニ學者ノ思考力ヲ洗練スルニ最モ都合ノ良イ段階デアル。

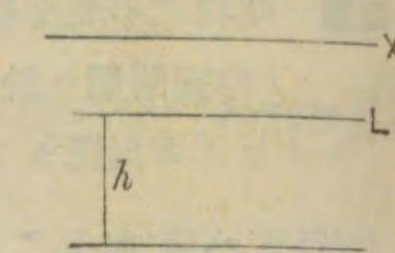
53. 作圖題ヲ解決スルニ必要ナ條件

作圖題ニ於テ所要ノ圖形ヲ決定センニハ,ソレニ要スルダケノ條件アラネバナラヌ。例ヘバ三角形ヲ作圖スルニハ互ニ獨立ナ三ツノ條件ヲ與フルコトガ必要デアル。此場合互ニ獨立トイフ事ハ甚ダ肝要デアル。例ヘバ三ツノ角ヲ知ツテ三角形ヲ求メヨトイフ問題ニアツテハ形狀ダケガ定マルモ其圖形ガ確定セヌ。ソレハ二ツノ角ガ知ツタナラバ第三角ハ二直角カラ二ツノ角ノ和ヲ減ズルコトニヨツテ知ラレルカラ實ハ三ツノ角ハ互ニ獨立デハナイカラデアル。又四邊形ヲ決定スルニハ三角形ノ場合ヨリモ尙一ツダケ多クノ頂點ヲ決メネバナラヌカラ尙二ツ多クノ條件ヲ要スル。即チ $(3+2)$ 個ノ互ニ獨立ナル條件ヲ要スル.一般ニ n 邊形ヲ作圖スル爲メニハ互ニ獨立ナル $3+2(n-3)=(2n-3)$ 個ノ條件ヲ要スルノデアル。

54. 作圖題ニ於テ與ヘラレタル條件ガ圖形ヲ決定スル爲ニ要スル條件ヨリモ多イ時ニハ，一般ニ問題ハ不能トナル。又之ニ反シテ與ヘラレタル條件ガ圖形ヲ決定スル爲ニ要スル條件ヨリモ少ナイ時ニハ無數ノ解答ガ出來ルカラ問題ハ不定トナルノデアル。



（第一圖）



（第二圖）

尙圖形ヲ決定スルニ要スルダケノ條件ガ與ヘラレタ時デモ，與ヘラレタル要素間ノ位置若クハ大サ等ノ關係カラ問題ガ不定若クハ不能トナルコトガアル。

例ヘバ底邊 BC ノ位置及ビ大サ，頂點 A カラノ高サ h，及ビ頂點 A ノアルベキ直線 X ヲ與ヘテ $\triangle ABC$ ヲ作ル場合ニ，BC ヨリ h ナル距離ニアル直線 L ト X トガ相合スル時ニハ，BCA_1, BCA_2, BCA_3 トイフ風ニ無數ニ三角形ガ作ラレ而カモ何レモ條件ニ適スル。仍ツテカヽル場合ニハ不定デアル。(第一圖) 所ガ L ト X トガ平行デアル場合ニハ三角形ガ作ラレヌ。故ニ不能デアル。(第二圖) 即チ確定シタ所要ノ三角形ヲ得ルハ L ト X トガ相交ハル場合ニ限ルノデアル。

第二章

作圖ノ方法

55. 作圖題ノ問題ノ數ハ限リナク多ク存在スル。ケレドモ夫レ等ヲ解クニ當リ共通ナ普汎的方法トイフモノガナイ。故ニ問題ガ與ヘラルヽヤ臨機應變ノ處置ヲ施スヨリ外ニ良策ガナイノデアル。作圖題ハ六ツカシイト言ハレル原因ハ全ク玆ニ存スルノデアル。

併シナガラ個々別々ノ問題ニ對シ一々別種ノ解法デヤラネバナラヌカト云フニ必ズシモソウトハ限ラヌノデ比較的屢々用ヒテ有効ナ方法モアル。本章ニ於テ夫レ等ノ方法ヲ集メ稍系統的ニ說明セントスルノデアル。

56. 軌跡ヲ用フル方法

與ヘラレタ條件ノ中一ツノ性質ノミニ適スル點ヲ求ムルト一般ニハ一ツノ軌跡ヲ得ル。

次ニ他ノ性質ノミニ適スル點ヲ求ムルト又一般ニハ一ツノ軌跡ヲ得ル。ソコデ此等二ツノ軌跡ノ交點ヲ求ムルト其交點ハ確カニ此等二ツノ性質ニ適スルモノデアル。例ヘバ底邊ノ位置，大サ，頂角ノ大サ及ビ高サヲ與ヘテ三角形ヲ作ル場合ニ先ヅ指定セラレタ位置ニ底邊ヲ畫キ與ヘラレタ高サヲ度外視シテ單ニ頂角ノミニ注意スルト底邊ヲ弦トスル二ツノ圓弧ヲ得ル。

次ニ高サノミニ注意スルト，底邊ノ兩側ニ之ト平行ナル二ツノ直線ヲ得ル。ソコデ此等ノ圓弧ト直線トガ相交ハルナラバ，ソノ交點ハ確カニ頂角及ビ高サ共ニ條件ニ適スル頂點トナル。ヨツテ其交點ヲ底邊ノ兩端ニ結ブト所要ノ三角形ヲ得ル。

注意 i. 公準ニヨツテ作圖シ得ラルヽモノハ直線及ビ圓ニ限ラルヽガ故ニ，要件ニ適スル點ヲ決定スル爲メニ用ヒラルヽ軌跡モ亦直線，線分，圓，圓弧及ビ夫等ノ群ニ限ラレル。ヨツテ若シ軌跡ハ楕圓トカ双曲線トカイフ高イ程度ノ曲線ガ得ラルヽナラバ，例ヒ解決セラルヽトシテモ初等幾何學デハ無効ノ解法デアル。カヽル場合ニハ更ニ他ノ方面カラ研究セネバナラヌ。

注意 ii. 軌跡ヲ用フル方法ヲ簡單ニ軌跡交截法トイフ。コレハぷらとーガ初メテ用ヒタノデぷらとーノ法トイハレル。ぷらとー(Plato 429 ?—347 B.C.)ハ其師そくらてすトハ反對ニ數學ヲ非常ニ尊重シタ人デ，或人ハ「神ノ任務ハ何カ」ト問フタ時彼ハ言下ニ「幾何學ナリ」ト答ヘタ。實ニぷらとーハ幾何學ガ神ト離ルベカラザル神聖ナ學科デアルト考ヘ，コレニヨツテ精神修養ニ資セントシタノデアル。晩年(紀元前389年頃)あてねニ歸リあかでみやノ森デ學校ヲ開イテ哲學ヲ講義シタガ，其門ニ

「Let no one who is unaquainted with geometry enter here」

「幾何學ヲ知ラナイモノハ此門ニ入ルベカラズ」

ト掲ゲ，幾何學ノ素養ノナイモノガ入門セントスルヤ，直チニ門人ニ

「Depart, for than hast not the grip of philosophy」

「去レヨ，汝ハ哲學ヲ學ブ資格ガナイカラ」

ト言ハシメタ。

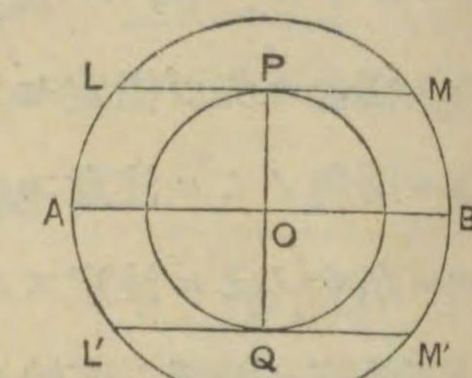
例 1. 與ヘラレタ圓ニ長サ及ビ方向ガ與ヘラレタ弦ヲ引ケ。

解析 圓ノ中心カラ等長ノ弦ノ中點ニ至ル距離ハ一定デアルカラ,與ヘラレタ弦ノ長サヲ $2l$ トシ圓ノ半徑ヲ R トスレバ, 此弦ハ中心カラ

$$\sqrt{R^2-l^2}$$

ノ距離ニアル。

ヨツテ $\sqrt{R^2-l^2}$ ヲ半徑トスル同心圓ヲ畫クト,コノ圓ニ切スル弦ハ凡テ $2l$ ノ長サヲ有スル。



故ニ問題ハ今畫カレタ同心圓ニ切スル定方向ノ弦ヲ引クコトニ歸スル。

作圖 $\sqrt{R^2-l^2}$ ヲ半徑トスル同心圓ヲ作リ, 與ヘラレタ方向 AB ニ垂直ナ方向ニ半徑 OP ヲ引キ,同心圓ト P, Q デ交ラシメル。 P 及ビ Q ニテノ切弦 LPM, L'QM' ハ即チ求ムルモノデアル。

證明 OPQ ガ與ヘラレタ方向ニ垂直デアルカラ, 切弦 LPM 及ビ L'QM' ハ與ヘラレタ方向ニアル弦デアル。 而シテ

$$OP=\sqrt{R^2-l^2}$$

デアルカラ　$PL=\sqrt{R^2-(R^2-l^2)}=l$

從ツテ　$LM=L'M'=2l$

吟味 P, Q 點ヲ得ル爲メニハ

$$\sqrt{R^2-l^2}>O$$

從ツテ　$R>l$

デナケレバナラヌ。 而シテ上ノ不等式ガ滿足スルトキハ二ツノ解ガアル。

然ルニ　$R=l$

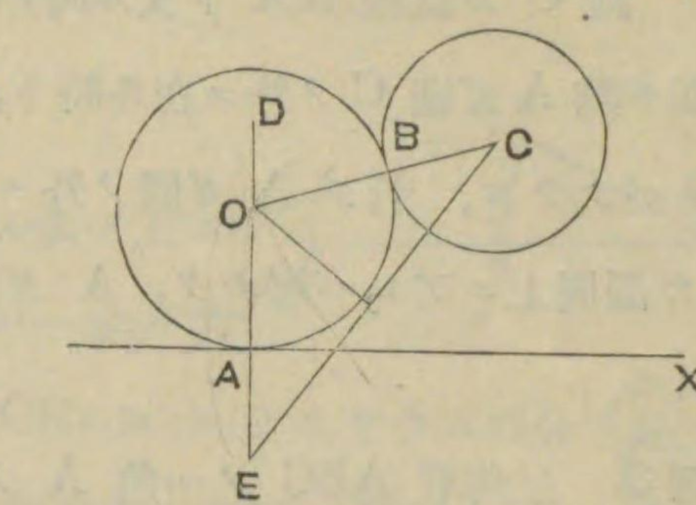
ナル時ハ半徑零ナル同心圓トナル。 ヨツテコノ場合ニ解ガ一ツデ AB ト一致スル。

例2. 與ヘラレタ直線上ノ定點デコレニ切シ, 且ツ他ノ與ヘラレタ圓ニ切スル圓ヲ畫ケ。

解析 定直線ヲ AX, 定點ヲ A トシ與ヘラレタ圓ノ中心ヲ C トスル。

今求メントスル圓ノ中心ノ軌跡ハ定點 A カラ AX ニ立テタ垂線 AD デ

アル。



併シナガラコレ丈ケデハ中心ヲ定メルコトガ出來ヌ。

然ルニ圖ノ如ク DA ノ延長上ニ

$$AE=BC$$

ナルヤウニ E ヲトルト (E ノトリ方ニ二通リアル。一ツハ O カラ A ノ方向ニ, 他ノ一ツハ A カラ O ノ方向ニ)△OCE ハ二等邊デアルカラ, 中心 O ハソノ底邊 EC ノ垂直二等分線上ニアル。ヨツテ交點 O ハ求ムル圓ノ中心デアル。

作圖 A カラ AX ニ垂線 AD ヲ引キソノ延長上ニ E 點ヲ

$$AE=BC$$

ニトリ, CE ヲ連ネ, ソノ垂直二等分線ガ AD ト交ル點 O ヲ求メ, OA ヲ半徑トスル圓ヲ畫ケバヨシ。

證明 中心 O ハ AD 上ニアルガ故ニ OA ヲ半徑トスル圓ガ必ズ定直線 AX ト A 點デ切スル。

次ニ O 點ハ又直線 EC ノ垂直二等分線上ニアルカラ

$$OE=OC$$

然ルニ　$AE=BC$

$$\therefore\quad OA=OB$$

ヨツテ又コノ圓ハ與ヘラレタ圓 C ト B 點デ切スル。

吟味 1° E' ヲ AX ニ關シ D ト同ジ側ニトル時ハ與ヘラレタ圓ガ新圓ニ内切スルモノデアル。 ヨツテ求ムル解ハ都合二ツアル。

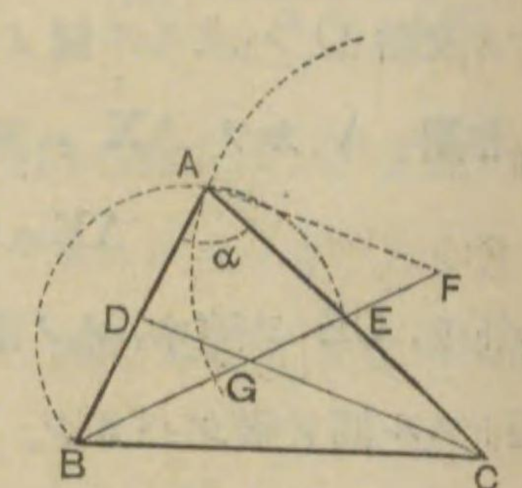
2° 若シ圓 C ガ A 點以外ノ點デ AX ニ切シテ居ル時ハ, E'C ノ垂直二等分線ハ AD ニ平行ニナルカラ中心 O ヲ求ムル事ガ出來ヌ。 仍ツテ此場合ニハ解答ガ一ツデ互ニ外切スル場合デアル。

3° 圓 C ガ直線 AX ノ上ノ定點 A デ切スル時ハ條件ニ適スル無數ノ圓ガ得ラレル。

4°　圓 C ガ直線 AX ト交ル時ハ更＝三ツノ場合＝細別シテ考フルヲ要ス。即チ點 A ガ圓 C ノ外＝在ル時ト,圓周上＝アル時ト,圓内＝在ル時トヲ區別セネバナラヌ。若シ A ガ圓ノ外＝アレバ二ツノ解ガアツテ何レモ外切スル。A ガ圓周上＝アレバ解ナク, A ガ圓内＝アレバ二ツノ解ガアツテ何レモ内切スル。

例 3.　三角形 ABC ノ一角 A ノ大サト, B 及ビ C ヨリ其對邊＝引ケル二ツノ中線 BE, CD ノ長サヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

解析　假リ＝問題ハ解セラレタトシ, 中線 BE, CD ノ交點ヲ G トセヨ。GE ノ延長上＝ $EF=GE$ ナル如ク F 點ヲ定メ AF ヲ結ベ, 然ラバ $BG=GF$ デ, G ハ BF ノ中點, D ハ AB ノ中點デアルカラ



$$AF=2DG=\frac{2}{3}CD \text{（定長）}$$

又 $\angle BAE$ ハ與ヘラレタル定角デアルカラ次ノ如ク作圖スルコトヲ得。

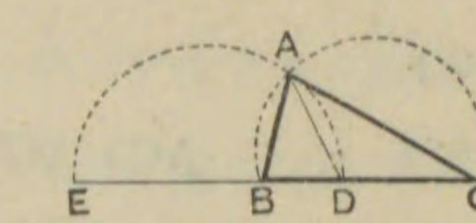
作圖　BE ヲ與ヘラレタル中線ノ長サ＝トリ, コレヲ弦トシ與ヘラレタル角 α ヲ含ム弓形ノ弧ヲ畫ケ, 次＝ BE ノ延長上＝ F 點ヲトリ $EF=\frac{1}{3}BE$ ナラシメ, F ヲ中心トシテ C ヨリ出ヅル中線ノ長サノ $\frac{2}{3}$ ヲ半徑トシテ圓弧ヲ畫キ, 前ノ圓弧トノ交點ヲ A トセヨ, AE ヲ結ビ之レヲ延長シテ $EC=AE$ ナル如ク C 點ヲトリ CB, AB ヲ結ベバ $\triangle ABC$ ハ所要ノモノデアル。

證明　$AE=EC$ ナル＝ヨリ BE ハ中線デ與ヘラレタ長サ＝等シ。(作圖) $BG=\frac{2}{3}BE$ ナル様＝ G ヲトラバ G ハ $\triangle ABC$ ノ重心デアル。AF ヲ結ベ然ル時ハ $\triangle AEF\equiv\triangle CEG$, 故＝ $AF=CG$

然ル＝ AF ハ C カラ出ル中線ノ $\frac{2}{3}$ ＝等シイ。故＝ CG ノ延長ガ AB ト交ル點ヲ D トスルト CD ハ中線デ而カモ與ヘラレタ長サヲ有シ且ツ $\widehat{BAC}=\alpha$（與角）故＝ $\triangle ABC$ ハ所要ノ三角形デアル。

例 4.　邊 BC, 對角 A 及ビ其二等分線ガ BC ＝交ル點 D ヲ知ツテ三角形 ABC ヲ作レ。

解析　$\triangle ABC$ ヲ所要ノ三角形トセヨ。



頂點 A ハ BC ヲ弦トシ與角 A ヲ含ム弧ノ上＝アリ, 又 D ハ定點ナル＝ヨリ $BD:DC$ ハ一定デアル, 此比ヲ $m:n$ トシ CB ヲ E デ $BE:CE=m:n$ ナルヤウ＝外分スル。然ル時ハ頂點 A ハ線分 DE ヲ直徑トスル圓周上＝アル。仍ツテ A ハ二ツノ軌跡ノ交點トシテ得ラレル。

作圖　BC ヲ弦トシ, 與ヘラレタ角 A ヲ含ム弓形ノ弧ヲ畫ケ。次＝ BC 上＝ $BE:CE=m:n$ ナル如キ點 E ヲ求メ, 線分 DE ヲ直徑トスル圓ヲ畫キ前ノ弧トノ交點ヲ A トセヨ。AB, AC ヲ結ブト $\triangle ABC$ ハ得ラレル。

證明　頂點 A ハ BC ヲ弦トシ與角 A ヲ含ム弓形ノ弧ノ上＝アルガ故＝ $\widehat{BAC}$ ハ與角＝等シク, 又 A ハ DE ヲ直徑トスル圓周上ノ一點＝シテ且ツ $CD:DB=CE:BE$ デアルカラ AD ハ $\widehat{BAC}$ ノ二等分線デアル。尙ホ BC ハ與ヘラレタル長サ＝等シキ＝ヨリ $\triangle ABC$ ハ求ムルモノデアル。

吟味　BC ＝關シテ $\triangle ABC$ ノ對稱形モ條件＝適スルカラ二個ノ解答ヲ得ル。

57.　對稱圖形ヲ利用スル方法

作圖題ヲ解ク＝當リ屢々用ヒラルヽ方法ハ,求メントスル圖形ノ若干ノ點ヲアル直線＝關シテ對稱ノ位置＝持チ來ラシメ以ツテ問題ヲ甚ダ簡單＝スルコトデアル。時トシテハ全圖形ノ對稱圖形ヲ作ツテソノ目的ヲ達スル事サヘアル。

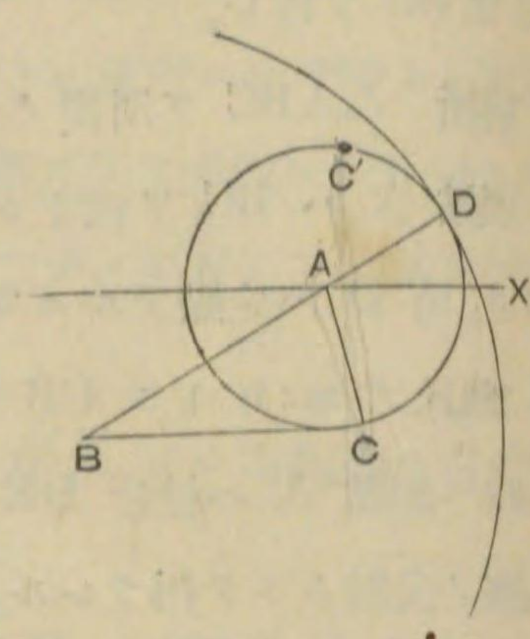
例 1.　三角形ノ底邊ハ與ヘラレタ位置及ビ大サヲ有シ, 他ノ二邊ノ和及ビ高サガ知ラレタルトキ此三角形ヲ作レ。

解析　高サハ知ラレテ居ルカラ頂點 A ハ BC ＝平行ナル直線 X ノ上＝アル。次＝ BA ノ延長上＝

$$AC=AD$$

ナルヤウ＝ D 點ヲトルト直線 BD ノ長サガ已知デアル。

次ニ直線 X ニ關シテ點 C ノ對稱ノ點 C′ ヲトルト



$$AC = AC' = AD$$

故ニ A ヲ中心トシ定點 C 及ビ C′ ヲ過ル圓ヲ畫クト B ヲ中心トシ二邊ノ和 BD ニ等シキ長サヲ半徑トシテ畫イタ圓ニ內切スル。何トナレバ此等二ツノ圓ノ中心間ノ距離 AB ガ二ツノ半徑 BD, AD ノ差ニ等シイカラデアル。故ニ次ノ作圖法ヲ得ル。

作圖 與ヘラレタ位置ニ底邊 BC ヲ置キ B 點ヲ中心トシ二邊ノ和ニ等シイ半徑デ圓ヲ畫ク。次ニ BC カラ高サニ等シイ距離ニ平行線 X ヲ作リ X ニ關シ點 C ノ對稱點 C′ ヲ求ム。

C 及ビ C′ ヲ過リ先キニ畫イタ圓ニ內切スル圓ヲ畫キソノ切點ヲ D トスル。DB ヲ連ネ X トノ交點ヲ A トスレバ ABC ハ求ムル三角形デアル。

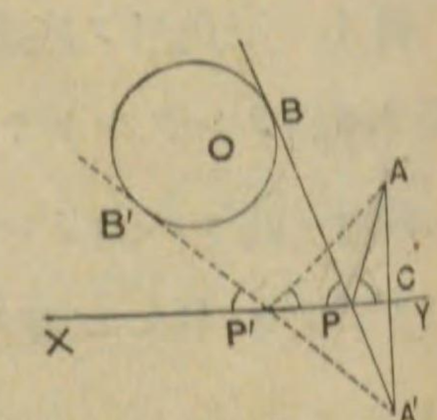
證明 省略。

吟味 C ヲ中心トシ二邊ノ和ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ，次ニ B 點ノ X ニ關スル對稱點 B′ ヲ求メ，B 及ビ B′ ヲ過リ今畫イタ圓ニ切スル圓ヲ畫キ，ソノ切點 D′ ヲ求ム。CD′ ガ X ト交ル點 A′ ヲ求ムレバ △A′BC モ亦要件ニ適スルモノデアル。

然ルニ直線 X ハ底邊 BC ノ兩側ニ出來ルカラ結局四ツノ解答ヲ得ル。

例 2. 定直線 XY ノ同ジ側ニ定點 A ト定圓 O トアリ，今 XY 上ニ一點 P ヲ求メ，P ヨリ定圓ヘノ切線及ビ PA ヲシテ XY ト等角ナラシメヨ。

解析 P 點ハ求メ得ラレタリトセヨ。PB ヲ O 圓ノ切線トシコレヲ延長シテ PA′＝PA ナル如ク A′ ヲトリ AA′ ヲ結ビ XY トノ交點ヲ C トセヨ。然ル時ハ



$$\triangle APC \equiv \triangle A'PC$$

ナルコトガ容易ニ分カル。

從ツテ $AC = A'C \quad P\hat{C}A = P\hat{C}A' = R\angle$

ナルニヨリ A′ ハ X ニ關シテ A ノ對稱點デアル，仍ツテ次ノ如ク作圖ス。

作圖 XY ニ關シ A ノ對稱點 A′ ヲ求メ，A′ ヨリ O 圓ニ切線 A′B ヲ引キ XY トノ交點ヲ P トスルト P ハ求ムル點デアル。

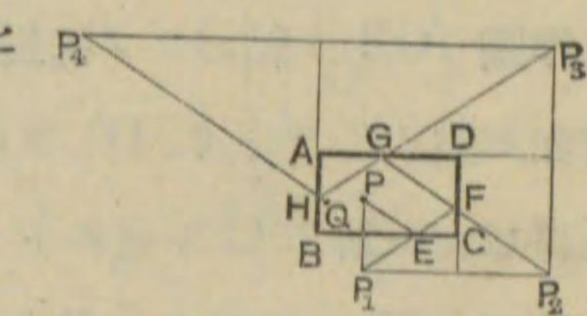
證明 PA ヲ結ベ，次ニ AA′ ヲ結ビ XY トノ交點ヲ C トセヨ。然ル時ハ △APC≡△A′PC ナルコトハ容易ニ證明シ得ラレル。

$$\therefore \quad A\hat{P}C = A'\hat{P}C = B\hat{P}X \quad \text{從ツテ} \quad A\hat{P}Y = B\hat{P}X$$

吟味 A′ カラ O 圓ニ引ク切線ガ二本アルカラ，二個ノ解答ヲ得ル。

例 3. 矩形內ニ二個ノ球 P, Q アリ，P ナル球ヲ突イテ各邊ニ反射セシメ最後ニ Q ナル球ニ衝突セシメントスルニハ最初 P ヲ如何ナル方向ニ突クベキカ（玉突ノ問題トイフ）。

解析 球 P ガ各邊ニ E, F, G, H デ衝突シ遂ヒニ球 Q ニ會スルモノトセヨ。



反射法則ニヨリ

$$P\hat{E}B = F\hat{E}C$$

故ニ P ナル球ハ邊 BC ニ衝突シテカラ後ノ進路ハ P 點ノ BC ニ關スル對稱ノ點 P_1 ト E トヲ結ブ直線ノ延長 EF デアル。

次ニ邊 CD ニ衝突シテ後ノ通路ハ P_1 ノ邊 CD ニ關スル對稱ノ點 P_2 ト F トヲ結ブ直線 P_2F ノ延長 FG デアル。

同樣ニ P_2 ノ邊 DA ニ關スル對稱ノ點 P_3 ヲ作リ P_3 ノ直線 AB ニ關スル對稱ノ點 P_4 ヲ作ルト P_4 ト最後ノ衝突點 H ト球 Q ノ位置トハ一直線上ニアル筈デアル。ヨツテ次ノ作圖法ニヨツテ最初ノ方向ヲ定ムルコトガ出來ル。

作圖 P 點ノ BC ニ關スル對稱ノ點ヲ作リ之ヲ P_1 トシ，P_1 ノ CD ニ關スル對稱ノ點ヲ作リ之ヲ P_2 トシ，P_2 ノ DA ニ關スル對稱ノ點ヲ作リ之ヲ P_3 トス。P_3 ノ AB ニ關スル對稱點ヲ作リ P_4 トスル。然ル時，P_4Q ヲ結ビ AB ト H デ交ラシメ，HP_3 ヲ結ビ AD ト G デ交ラシメ，GP_2 ヲ結ビ DC ト F デ交ラシメ，FP_1 ヲ結ビ BC ト E デ交ラシムレバ PEFGHQ

ハ P 點ノ進ムベキ途デアル。

證明 省略。

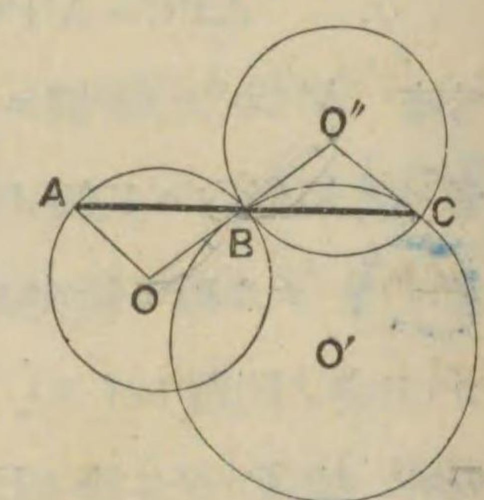
吟味 P_4 ト Q トヲ結ブ直線ガ邊 AB ト常ニ交ルカラ解ガ一ツアル。

例 4. 二圓ノ交點ノ一ツヲ過リ直線ヲ引キ，二圓ヲ截リトル弦ヲ等シカラシメヨ。

解析 O, O′ ヲ二ツノ圓トシ, B ヲ共交點ノ一ツトスル。今所要ノ弦 ABC ガ出來タモノト假定シ, OB ヲ結ビ之ヲ延長シテ

$$OB = BO''$$

ナルガ如キ點 O″ ヲトルト, △ABO≡△BO″C ナルコトガ分カル。故ニ圓 O″ ハ B 點ニ關シテ圓 O ト對稱ノ位置ニアル。仍ツテ次ノ作圖法ヲ得。



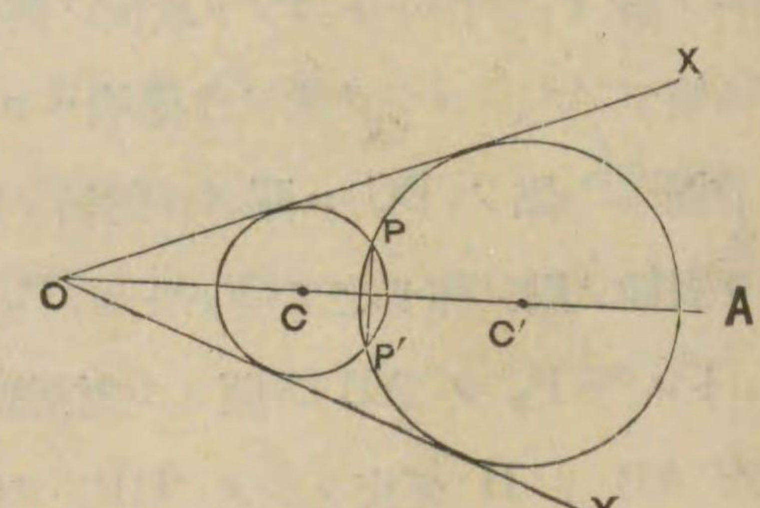
作圖 OB ヲ結ビソノ延長上ニ OB＝O″B ナルガ如キ點 O″ ヲトリ, O″ ヲ中心トシテ O 圓ト同ジ半徑ナル圓ヲ畫キ O′ 圓ト再ビ交ル點ヲ C トスルト CBA ハ所要ノ弦デアル。

證明 CB ノ延長上ニ BC＝BA′ナルヤウニ A′ヲトリ A′O, O″C ヲ結ブト △A′OB≡△BO″C デアルカラ OA′ハO圓ノ半徑ニ等シ。故ニ A′ガ A ニ一致スル。

吟味 圓 O ト O″ トハ B ニ關シテ對稱ノ位置ニアル。而シテ假定ニヨツテ圓 O ト圓 O′ トガ B 點以外ノ點デ交ルカラ圓 O″ モ必ズ圓 O ト B 點以外ノ點デ交ルベク從ツテ恒ニ一ツノ解ガアル。

例 5. 與ヘラレタ一點ヲ過リ二ツノ與ヘラレタル直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。

解析 與ヘラレタ一點ヲ P トシ, 二ツノ直線ヲ X, Y トシ 共交點ヲ O トスル, 今 P ハ角XOY 内ニアルモノトスル。然ルトキハ求ムル圓 O ハ角 XOY ノ二等分線 OA ニ關シテ對稱ナルベキニヨリ, 此圓ハ又 P ノ OA ニ關スル對稱點 P′ ヲモ過ギルベキデアル。故ニ



問題ハ二定點 P, P′ ヲ過ギリ且ツ一ツノ定直線 OX(或ハ OY) ニ切スル圓ヲ畫クコトニナル。而シテコレハ次節ノ例一ニ於テ述ベル。

注意 P ガ $\widehat{XOY}$ ノ外部ニアル時ハ, OX 或ハ OY ヲ延長スレバヨシ。又二ツノ與ヘラレタ直線ガ互ニ平行ナル時ハ容易ニ解ケル。

58. 圓ノ方冪ヲ用フル方法

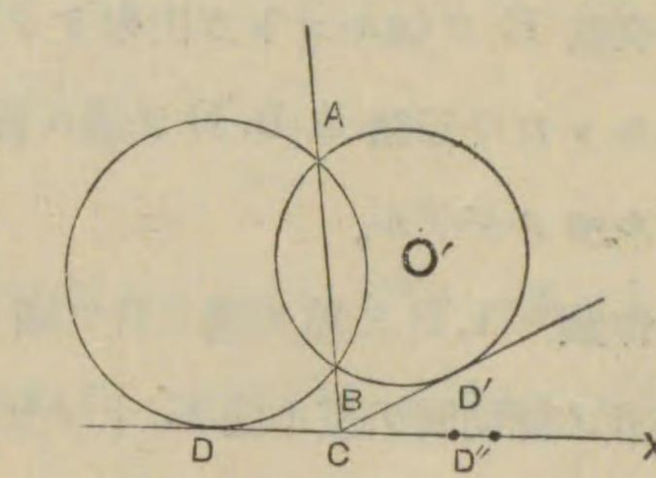
圓外ノ一點 A カラ其圓ニ割線 ABC 及ビ切線 AD ヲ引クトキハ常ニ

$$AB.AC = AD^2$$

ナル關係ガアル。コノ事實ヲ用ヒテ作圖スル方法ヲ方冪法トイフ。

例 1. 二ツノ與ヘラレタ點ヲ過リ定直線ニ切スル圓ヲ作レ。

解析 X ヲ定直線, A, B ヲ與ヘラレタ二定點トスル。今作圖ガ出來タト假定シ, ソノ切點ヲ D トスル。次ニ二點 A, B ヲ過ル任意ノ圓(補助圓トイフ) O′ ヲ畫キソノ共通弦ヲ引キ X 直線ト C デ交ラシメルト



$$CA.CB = CD^2 = CD'^2$$

デアル。ヨツテ次ノ作圖法ヲ得ル。

作圖 A, B ヲ過ル補助圓 O′ ヲ作リ, 直線 AB ガ X 直線ト交ル點 C カラ之ニ切線 CD′ ヲ引ケ, CD′ ニ等シク X 上ニ CD ヲトレバ三ツノ點 A, B, D ヲ過ル圓ハ求ムルモノデアル。

證明 作圖ニヨツテ

$$CB.CA = CD'^2 = CD^2$$

故ニ三點 A, B, D ヲ過ル圓ハ必ズ直線 X ニ D 點デ切スル。

吟味 D″ 點ヲ C 點ニ關シテ D ト反對ノ方向ニトリ, 圓 ABD″ ヲ畫クモ要件ニ適スル圓ナルコト明カデアルカラ解ガ二ツアル。

若シ點 A, B ノ中何レカ一ツ例ヘバ A ハ X ノ上ニアル時ハ圓ノ方冪ハ零デアルカラ D 及ビ D″ ハ共ニソノ點ニ一致スル。故ニ AB⊥X ナル時ハ, AB ノ中點ヲ中心トスル一ツノ圓ヲ得。AB⊥X ナラザル時ニハ A カラ X

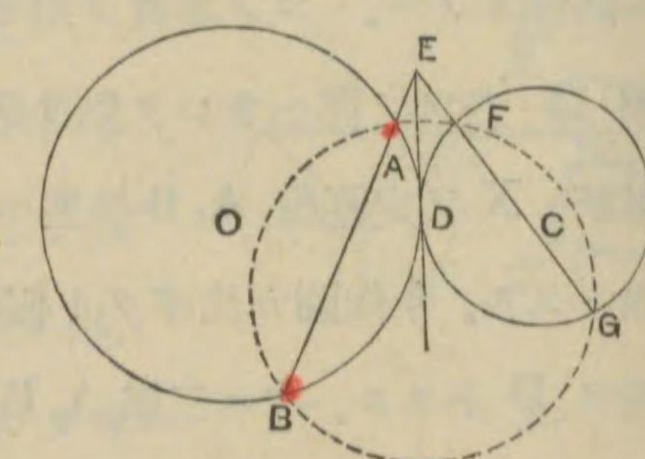
＝垂線 AC ヲ立テ AB ノ垂直二等分線ト O デ交ラシムレバ O ハ所要ノ中心デアル。

又二點 A, B ハ直線 X ノ兩側＝アルトキハ C 點ハ補助圓ノ內部＝アルカラ切點 D′ ヲ得ルコトガ出來ヌ。從ツテ作圖不能デアル。

例 2. 二ツノ與ヘラレタ點ヲ過リ且ツ定圓＝切スル圓ヲ作レ。

解析 A, B ヲ與ヘラレタ點, 定圓ヲ C トスル。

今 A, B ヲ過リ圓 C ト D 點デ切スル圓ヲ畫クコトガ出來タト假定スレバ此等ノ二圓ハ D 點デ共通切線ヲ有スル。



ソコデ二點ヲ過ル直線 AB ト此ノ切線トノ交點 E ヲ知ルコトガ出來タラ D 點モ得ラルヽカラ三點 A,B, D ヲ過ル圓ハ即チ求ムルモノデアル。

作圖 A, B 二點ヲ過リ且ツ圓 C ト交ル任意ノ補助圓ヲ畫キ圓 C トノ交點ヲ F, G トスル。

直線 FG ト直線 AB トノ交點 E カラ C 圓＝切線 ED ヲ引ケ。圓 ABD ハ求ムルモノデアル。

證明 E カラ圓 C ヘノ切線 ED ヲ引クト

$$ED^2 = EF.EG$$

然ル＝補助圓 ABGF ＝於テ

$$EA.EB = EF.EG$$

$$\therefore \quad EA.EB = ED^2$$

ヨツテ ED ハ圓 O ノ切線デアル。

吟味 E カラ圓 C ＝二ツノ切線ガ引ケルカラ切點 D ノ外＝尙一個ノ切點 D′ ヲ得ル。ヨツテ一般＝ハ二個ノ圓 ABD, ABD′ ヲ得ル。前者ハ圓 C ト互＝外切シ, 後者ハ圓 C ヲ內切圓トスルモノデアル。

次＝ A, B 二點ハ共＝圓 C ノ內部＝アルトキハ圓 C ＝內切スル二ツノ圓ヲ作ルコトヲ得。

然ル＝若シ二點 A, B ノ何レカ一ツハ圓 C ノ內部＝アリ他ハ外部＝アル時ハ, 圓 C ノ內部＝ E 點ヲ得ルカラ切線 ED ヲ得ズ。從ツテ解ナシ。

最後＝最モ注意スベキ事ハ補助圓 ABFG ハ任意＝畫イタノデアルカラ AB ト FG トノ交點 E ガ無數＝生ジ, 從ツテ切點 D, D′ モ無數＝生ジ, 爲メ＝無數ノ要件＝適スル圓ヲ畫クコトガ出來ルヤウ＝思ハレルコトデアル。併ナガラ事實ハ決シテ左樣＝ハナラヌ。今コレヲ證明スル。ソレ＝ハ假リ＝補助圓トシテ他＝ ABF′G′ ヲ作リ圓 C ト F′,G′ デ交ラシメル。然ルトキ F′,G′ ヲ結ンダ直線ハ AB ト先キノ E 點デ交ルカ否ヤヲ見ル＝ E, F′ ヲ結ビ圓 C ト G′ 以外ノ點 G″ デ交ハリ圓 ABF′G′ ト G‴ デ交ルトセヨ。然ラバ

$$EA.EB = EF.\,EG = EF'.\,EG''$$

又

$$EA.\,EB = EF'.\,EG'''$$

$$\therefore \quad EG'' = EG'''$$

即チ G″ ト G‴ トハ同一ノ點トナルカラ此等二ツハ共＝ G′ ト一致セネバナラヌ。ヨツテ F′G′ モ E 點ヲ過ルコトヲ知ル。ヨツテ解ハ一般＝ハ二ツデアツテ無數＝出來ルモノデハナイ。

注意 我國數學界ノ大恩人菊池大麓博士著, 初等幾何學教科書隨伴幾何學講義第二卷百四十九頁＝次ノ記事ガ載セラレテ居ル。

「此作圖題ハ明治三十年尋常中學校, 尋常師範學校及高等女學校教員檢定試驗ノ際幾何學口頭試驗ノ問題トシテ提出サレタルガ, 何人モ巳＝知リタル問題ナル＝關ラズ, 總テ上ノ如ク充分＝考究シ居リタル人ハ甚少カリシ。幾何學授業ノ際教員ハ唯多數ノ問題ヲ解セント欲シ生徒ヲシテ解式書ヲ用キルノ弊風＝陷ラシメズ, 各問題＝就キ生徒ヲ誘導シ, 必要ノ定理ヲ思ヒ出サシメ漸次解ヲ得セシムルコトヲ力メザルベカラズ。又生徒ノ學力＝應ジ成ル可ク充分＝種々ノ場合, 解ノ有無等ヲ考ヘシメザル可カラズ。斯ノ如ク＝シテ二三ノ問題ヲ解スルハ生徒ヲシテ解式書＝就テ數十ノ問題ヲ學バシムル＝比シテ教育上ノ價值有ルコト數倍ナリ。」

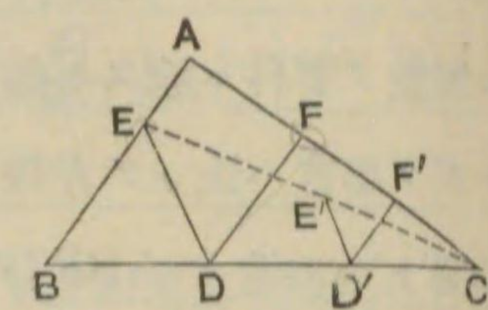
59. 相似法

相似法トハ與ヘラレタ條件ノ一ツヲ省イテ, 求メントスル圖形＝相似ナ圖形ヲ作リ, 次＝今省イタ條件ヲ加ヘテ以ツテ要件＝適合スル圖形ヲ完成セントス

ル方法デアル。

例 1. 直角三角形 ABC ノ斜邊 BC 上ニ一ツノ點 D ヲ求メ，コレヨリ邊 AB 上ノ定點 E ニ至ル距離ヲ同ジ點 D ヨリ邊 AC ニ至ル垂線ノ長サニ等シカラシメヨ。

解析 作圖ガ出來タト假定スル。今 D' ヲ BC 上ニ任意ニトリ



$$D'E' \,/\!/\, DE$$
$$D'F' \,/\!/\, DF$$

ナルガ如キ直線 $D'E'$, $D'F'$ ヲ引キ CE, CA トノ交點ヲ夫々 E', F' トス，然ルトキハ

$$D'E' : DE = CD' : CD$$
$$D'F' : DF = CD' : CD$$
$$\therefore\quad D'E' : DE = D'F' : DF$$

然ルニ　$DE = DF$

故ニ　$D'E' = D'F'$

デナケレバナラヌ。仍ツテ次ノ如ク作圖スル。

作圖 BC 上ニ任意ノ一點 D' ヲトリ，D' ヲ過リ AC ニ垂線 $D'F'$ ヲ引キ AC トノ交點ヲ F' トス，又 D' ヨリ $D'F' = D'E'$ ナル如ク CE 上ニ E' ヲ求メヨ，E ヲ過リ $DE \,/\!/\, D'E'$ ナル如ク DE ヲ引キ，BC トノ交點ヲ D トス，然ラバ D ハ求ムル點デアル。

證明 $D'F' \,/\!/\, DF$ ナルヤウニ DF ヲ引クト

$$D'F' : DF = CD' : CD$$

$D'E' \,/\!/\, DE$ ナルニヨリ

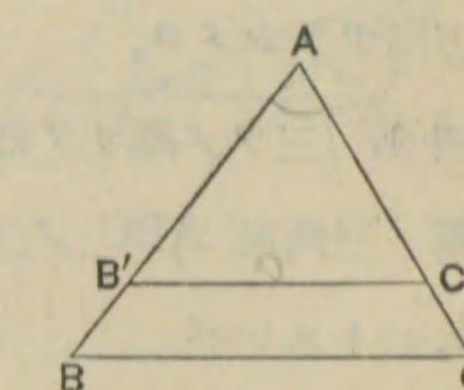
$$D'E' : DE = CD' : CD$$
$$\therefore\quad D'F' : DF = D'E' : DE$$

然ルニ　$D'F' = D'E'$　故ニ　$DF = DE$

又 $D'F' \perp AC$ 故ニ $DF \perp AC$ デアルカラ D 點ハ所要ノ點デアル。

例 2. 頂角底邊及ビ他ノ二邊ノ比ヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

解 本題ハ所謂不定位問題デアル。先ヅ底邊ノ長サガ與ヘラレタ長サニ等シトイフ條件ヲ省キ，單ニ頂角ヲ夾ム二邊ガ與ヘラレタ比ニナルヤウナ任意ノ三角形 $AB'C'$ ヲ作レ。然レバ求メントスル三角形 ABC ト相似デナケレバナラヌ。即チ



$$AB' : AB = B'C' : BC$$
$$AC' : AC = B'C' : BC$$

デナケレバナラヌ。

然ルニ今 AB', AC', $B'C'$, BC ガ知ラレテ居ルノデスカラ上ノ式カラ AB, AC ノ長サヲ知ルコトガ出來ル。ヨツテ底邊 BC ヲ決メルコトガ出來ル。

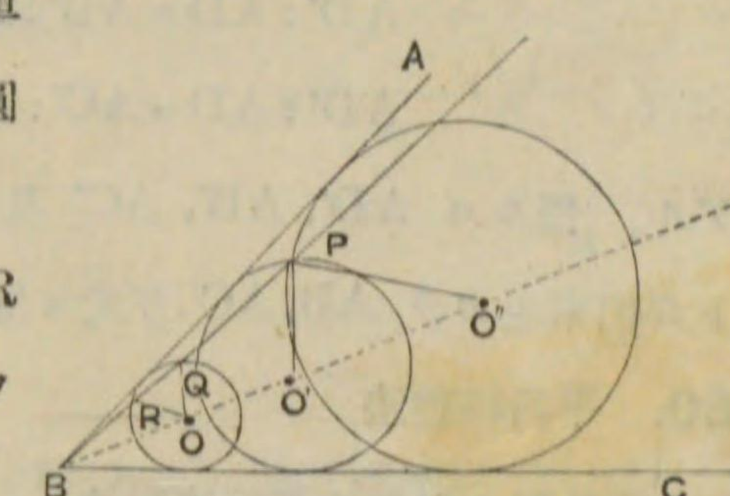
注意 上ノ解ハ解析，作圖，證明，吟味ノ四ツノ階段ヲ盡サズ。勿論不完全デアルガ煩ヲ避ケンガ爲メデアル。以下亦同ジ。

類題 1. 角 AOB ノ一邊 OA 上ニ一點 P ヲトリ，OB ニ垂線 PQ ヲ引キ OP ト OQ トノ和ヲ一定ナラシメヨ。

類題 2. 鋭角 AOC ノ頂點 O ヲ通ル角内ノ直線 OB アリ，與ヘラレタ長サノ線分 ABC ヲ引キ $AB : BC = m : n$ ナラシメヨ。

例 3. 一ツノ點 P ヲ過リ二ツノ相交ル直線ニ切スル圓ヲ畫ケ(第五十七節例五參照)

解 P ヲ過ルトイフ條件ヲ省イテ，單ニ二ツノ直線 BA, BC ニ切スル任意ノ圓 O ヲ畫ケ。(無數ニアル)



次ニ BP ヲ結ビ此圓トノ交點ヲ Q, R ナリトスル。然ル時ハ所要ノ圓ノ中心ヲ O', O'' トスルト

$$OQ \,/\!/\, O'P \qquad OR \,/\!/\, O''P$$

ナルベキ筈デアル。故ニ次ノ作圖法ヲ得ル。

BA, BC ニ切スル任意ノ圓ヲ畫キ BP トノ交點ヲ Q, R トス。次ニ

OQ // O′P, OR // O″P ナル二ツノ直線ヲ引キ BO トノ交點ヲ O′, O″ トスルト，コレ等ノ點ハ所要ノ圓ノ中心デアル。

類題　三角形 ABC ニ一ツノ三角形 A′B′C′ ヲ内接セシメ其三邊ヲシテ定方向ナラシメヨ。

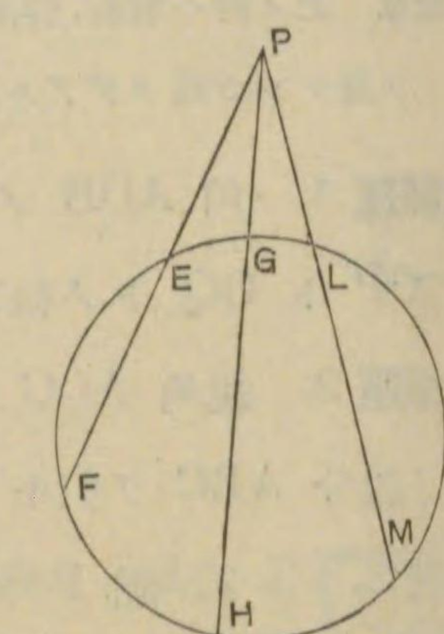
例 4.　三ツノ高サヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

解　三角形 ABC ノ三ツノ高サヲ l, m, n トシ，コレニ對應スル邊ヲ夫々 a, b, c トスレバ

$$al = bm = cn = 2\triangle ABC$$

デアルカラ三邊 a, b, c ノ相互ノ比ハ知ラレタモノデアル。

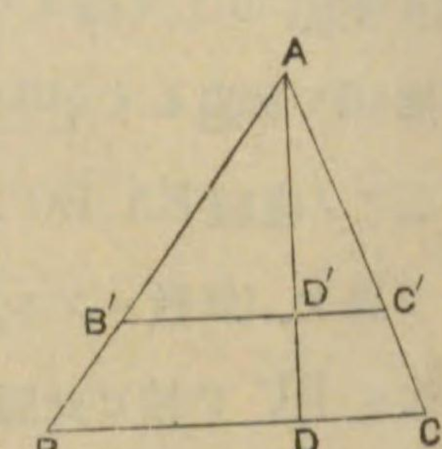
今ソノ相互ノ比ヲ幾何學的ニ求メンニハ次ノ如クスレバ良イ。即チ任意ノ圓ヲ畫キ圓外ノ一點 P カラ三ツノ割線ヲ引キ其ノ圓外ノ部分 PE, PG, PL 又ハ割線ノ全部 PF, PH, PM ヲシテ與ヘラレタ高サ l, m, n ニ等シカラシメルト線分ノ全部 PF, PH, PM 又ハ圓外ノ部分 PE, PG, PL ハ夫々三邊 a, b, c ニ比例スルモノデアル。



コレニヨツテ先ヅ PF, PH, PM 又ハ PE, PG, PL ヲ三邊トスル三角形ヲ作リソレヲ AB′C′ トスレバ其三角形ハ所要ノ三角形 ABC ニ相似デアル。故ニ

$$AD' : AD = AB' : AB$$

$$AD' : AD = AC' : AC$$



デアル。然ルニ AD′, AB′, AC′ 及ビ AD ヲ知ルコトガ出來ルカラ AB, AC ガ夫々知ラレル。

60. 平行移動法

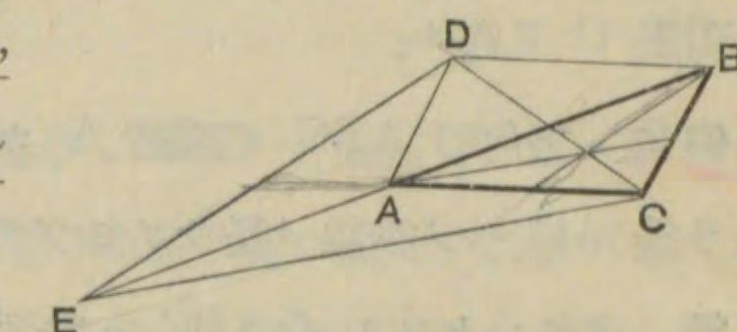
1. 三角形ニ於ケル平行移動法

任意ノ三角形 ABC ニ於イテ AD ヲ BC ニ平行ニ且ツソノ長サヲ等シク取リ，次ニ BA ヲ二倍ニ延長シテソノ端ヲ E 點トスル。

DC, DE, EC ヲ結ブト此ノ圖形ハ原三角形 ABC ニ對シテ各種ノ關係ヲ有

スル。今ソノ次第ヲ列記セン。

1° A カラ發スル直線 AE, AB, AC, AD ハ共ニ △ABC ノ各邊ニ等シイ。



2° A ニ於ケル三ツノ角 $\widehat{CAE}$, $\widehat{DAE}$, $\widehat{CAD}$ ハ夫々 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ ノ外角ニ等シイ。

3° CD, CE, ED ハ原三角形 ABC ノ各中線ニ平行デ且ツ夫レ等ノ二倍ニ等シイ。

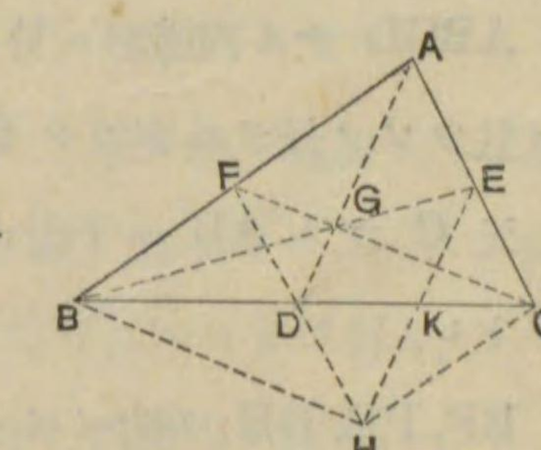
4° CA // BD デ AB＝AE デアルカラ CA ノ延長ガ DE ノ中點ヲ過ル。ヨツテ A 點ハ △CDE ノ重心デアル。

5° △DEC ノ面積ハ △ABC ノ面積ノ三倍デアル。何トナレバ △ACE, △DAE ハ共ニ AB ト同ジ長サノ底邊 AE ヲ有シ且ツ共ノ高サハ等シク，而カモ △ACD ハ △ABC ト等積デアルカラデス。

例 1.　三ツノ中線ヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

解　三ツノ中線ノ二倍ヲ各邊トスル三角形 CDE ヲ作リ(前圖)ソノ重心 A ヲ求メバ其ノ點ハ一ツノ頂點デアル。次ニ EA ノ延長上ニ EA＝AB ニナルヤウニ B 點ヲトルトソレハ又一ツノ頂點デアル。

別解　先ヅ所要ノ三角形 ABC ガ出來タモノトシ，中線ヲ AD, BE, CF トスル。今 BH, CH ヲ夫々 CF, AB ニ平行ニ引クトキハ，BHCF ハ平行四邊形デアルカラ



$$DF = DH$$

而シテ　$$DF = \frac{AC}{2} = AE$$

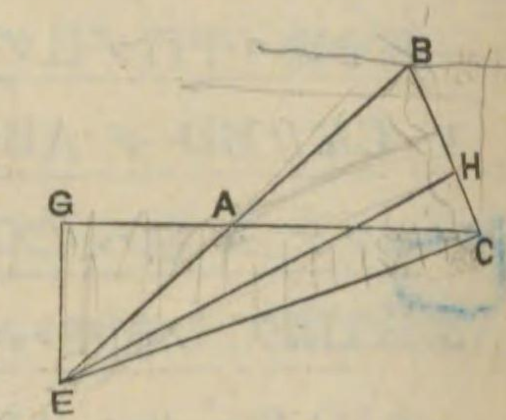
ナルガ故ニ DH＝AE デ而カモ互ニ平行デアル。故ニ四邊形 ADHE ハ平行四邊形デアル。故ニ EH ハ AD ニ等シ。從ツテ △BEH ノ三邊ハ三ツノ中線ニ等シ。仍ツテ次ノ作圖法ヲ得。

三ツノ與ヘラレタ中線デ三角形 BEH ヲ作レ。BE ノ上ニテ重心 G ヲ求

メ AG ヲ EH ＝平行＝引キ且ツ其長サヲ中線 AD ノ $\frac{2}{3}$ ＝等シカラシメルトーツノ頂點 A ヲ得。又 AE ヲ延長シ AE＝EC ナラシメルト他ノ一ツノ頂點 C ヲ得ル。

例 2. 三角形 ABC ノ頂點 A カラ邊 BC ヘノ中線及ビ垂線並ビ＝頂點 B カラ邊 AC ヘノ垂線ノ長サヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

解 求メントスル △ABC ＝於テ A カラ BC ヘノ中線ノ二倍ヲ EC トスルト, E カラ AC マデノ距離ハ B カラ AC マデノ距離＝等シイカラ直角三角形 ECG ハ容易＝作ルコトヲ得。從ツテ CA ノ方向ヲ知ル。



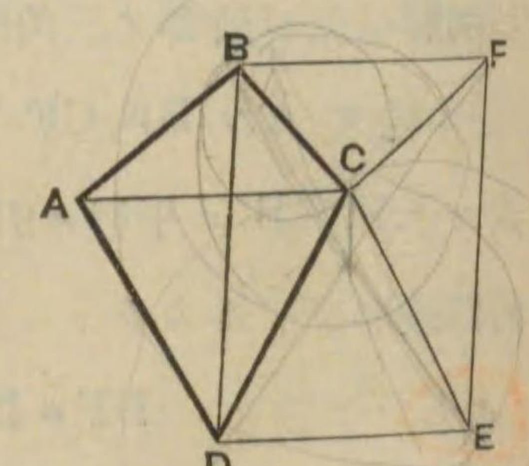
次＝ E カラ BC ヘノ距離ハ A カラ BC ヘノ距離ノ二倍＝等シイカラ △ECH ヲ作ルコトガ出來ル。ヨツテ BC ノ方向ヲ知ルコトガ出來ル。

然ル＝ B 點ハ AC カラ與ヘラレタ距離＝アルカラ B 點ハ AC ＝平行ナ直線上＝アル。ヨツテ頂點 B ハコレ等ノ直線ノ交點トシテ得ラレル。最後＝ BE ヲ連ネ CG トノ交點トシテ A 點ガ得ラレル。

2. 四邊形＝於ケル平行移動法

ABCD ナル四邊形＝於テ C カラ AD ＝平行＝且ツソノ長サ＝等シク CE ヲトル。

又 C カラ AB ＝平行＝且ツコレ＝等シク CF ヲトレ。



BF, FE, DE ヲ結ベバ AC ハ BF ＝, AD ハ CE ＝夫々平行移動スル。

而シテ圖形 ABFED ハ原四邊形ト各種ノ關係ヲ有スル。以下列記スル。

1° C 點カラ出ル四ツノ直線 CF, CB, CD, CE ハ夫々原四邊形 ABCD ノ邊ノ長サ＝等シイ。

2° C 點ノ周リ＝アル角 ECF, FCB, BCD, DCE ハ夫々四邊形 ABCD ノ各角 A, B, C, D ＝等シイ。

3° 平行四邊形 BDEF ノ各邊ハ四邊形ノ對角線＝等シイ。

4° 平行四邊形 BDEF ノナス角ハ四邊形 ABCD ノ對角線ノナス角＝等シイ。

5° 平行四邊形 BDEF ノ面積ハ原四邊形 ABCD ノ面積ノ二倍＝等シイ。

6° BE, FD ハ原四邊形 ABCD ノ對邊ノ中點ヲ結ブ線分ノ二倍デアル。

コノ事ハ四邊形 ABCD ノ各邊ノ中點ヲ結ビ平行四邊形ヲ作リ BC, AD ノ中點及ビ AB, AD ノ中點ヲ結ブ直線＝テ二ツノ三角形＝細分スルト夫レ等ハ △DEF, △BDE ト相似デアルコトカラ分カル。

例 3. 四ツノ邊及ビ BC, AD ノ中點ヲ結ブ線分ノ長サトヲ知ツテ四邊形 ABCD ヲ作レ。

解 BC, AD ノ中點ヲ結ブ直線ノ二倍ハ DF ＝等シイ(前圖)而シテ

CF＝AB

デ且ツ CD ガ知ラレテ居ルカラ △DFC ヲ作ルコトガ出來ル。

次＝二點 B, E ハ夫々 C ヲ中心トシ知ラレタ長サ CB, CE ヲ半徑トシテ畫イタ圓周上＝アル。

然ル＝ BFED ハ平行四邊形デアルカラ二點 BE ハ直線 D, F ノ中點カラ等距離＝アル。

ソコデ DF ノ中點ヲ過リ CB, CE ヲ半徑トシタ二圓＝終ル直線ヲ其ノ點デ二等分セラルヽヤウ＝引クト，此ノ直線ガ二圓ヲ截ル點ハ夫々 B, E ヲ與フルモノデアル。ヨツテ容易＝四邊形 ABCD ヲ完成スルコトヲ得ル。

例 4. 各邊ト，ソノ對角線ノナス角トヲ與ヘテ平行四邊形ヲ作レ。

解 コノ場合デハ DCF ハ一直線上＝アリ(前圖)又 B, C, E モ一直線上＝アル。而シテ平行四邊形ノ對角線ノナス角ハ DBF ＝等シイカラ B 點ハ CD ノ二倍ノ長サ＝等シイ直線 DF ヲ弦トスル一ツノ圓弧ノ上＝アル。

次＝ DF ノ中點 C ヲ中心トシ一邊 BC ＝等シイ長サヲ半徑トシテ畫キ先キノ弧トノ交點ヲ求ムレバソノ點ハ即チ B 點デアル。

故＝ D カラ BC ＝平行＝且ツソレ＝等シイ長サノ直線 DA ヲ引クト容

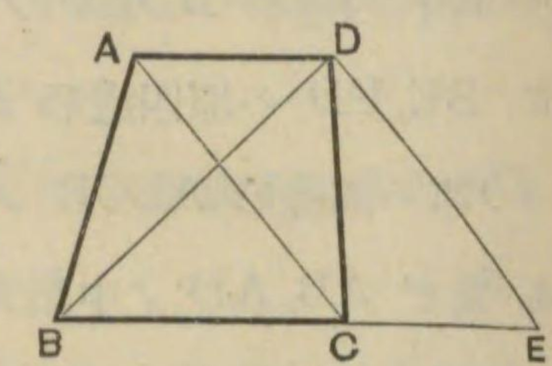
易ニ ABCD ナル平行四邊形ヲ得ル。

例 5. 梯形ノ平行ナル二邊及ビ兩對角線ノ長サヲ知リテ,其梯形ヲ作レ。

解 假リニ作圖セラレタリトシ, ABCD ヲ所要ノ梯形トセヨ。

今 D ヲ過リ, AC ニ平行線ヲ引キ BC ノ延長ト E ニ於テ交ラシメヨ。

然ル時ハ ACED ハ平行四邊形ナルコト明カデアル。



$$\therefore \quad CE = AD,\ AC = DE$$

仍ツテ玆ニ △DBE ヲ考フレバ

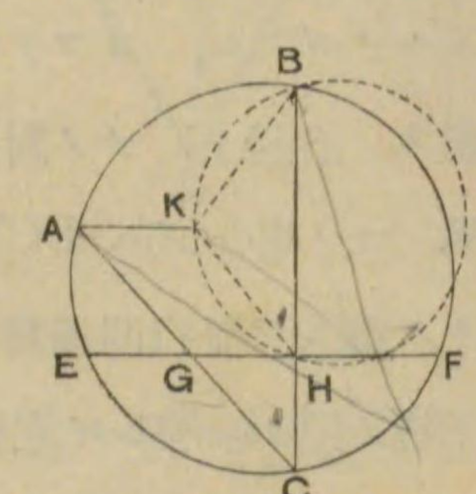
$$DB,\ DE,\ BE = (BC + AD)$$

ハ何レモ與ヘラレタル長サニ等シキニヨリ此三角形ハ三邊ガ知ラレタモノデアル。故ニ次ノ如キ作圖法ヲ得。

BE = BC + AD ナルガ如ク BE ヲトリ, 他ノ二邊ガ與レラレタル對角線 BD, AC ニ等シキ長サヲ有スル如キ三角形 DBE ヲ畫ケ,次ニ BE 上ニ BC ヲ與ヘラレタル梯形ノ一底邊ノ長サニ等シクトリ CD ヲ結べ,又 D ヲ過リ DA ヲ BC ニ平行ニ且ツコレニ等シクトリ以テ A 點ヲ定メ AB ヲ結べ,然ル時ハ ABCD ハ求ムル梯形デアル。

例 6. EF ハ一ツノ圓ノ弦デ弧 EABF 上ニ二點 A, B アリ, 此ト共軛ナル弧ノ上ニ一點 C ヲ求メ, 二ツノ弦 CA, CB ガ弦 EF カラ截リ取ル部分ヲ與ヘラレタ長サ l ニ等シカラシメヨ。

解 問題ハ解カレタリトシテ所要ノ點ヲ C トシ AC, BC ガ EF ト交ル點ヲ夫々 G, H トス。



今　　　　AK // GH

且ツ　　　AK = GH

ナル如ク AK ヲ引ケ,然ラバ K ハ定點デアル。

次ニ KH ヲ結べバ, AGHK ハ平行四邊形デアルカラ

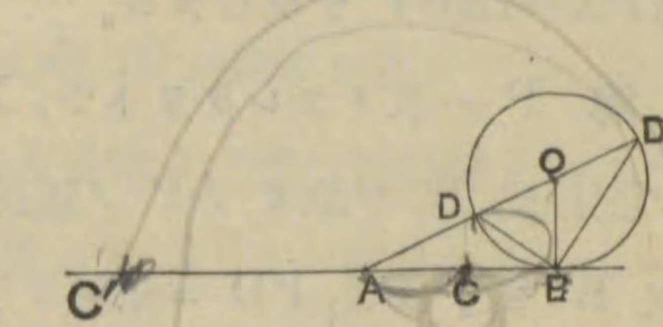
$$AG \,//\, KH, \qquad K\hat{H}B = A\hat{C}B$$

然ルニ A, B ハ定點ナレバ $A\hat{C}B$ ハ一定デアル。コレヲ α トスルト $K\hat{H}B$ ガ α ニ等シイ。

仍ツテ次ノ如ク作圖スル。即チ A ヲ過リ EF ニ平行線 AK ヲ引キ AK = l ナル如ク K ヲトラバ K ハ定點ナリ。$\overset{\frown}{AB}$ ノ上ニ立ツ圓周角ヲ α トス。今 KB ヲ弦トシ角 α ヲ含ム弓形ノ弧ヲ畫キ EF トノ交點ヲ H トスル。次ニ BH ヲ結ビ其延長ト $\overset{\frown}{EABF}$ ノ共軛弧トノ交點ヲ C トセヨ, C ハ即チ求ムル點デアル。

61.　線分ヲ內分シ其一ツノ分ヲ全線ト他ノ分トノ比例中項ナラシムルコト。

作圖 AB ヲ與ヘラレタ線分トシ, B カラ AB ニ垂線 BO ヲ立テ其長サヲ AB ノ $\frac{1}{2}$ ニ等シカラシム。次ニ O ヲ中心トシ, OB ヲ半徑トスル圓周ヲ畫キ A ト中心 O トヲ結ビ圓トノ交點ヲ D, D′ トス。今 AB 及ビ BA ノ延長上ニ C 及ビ C′ ヲトリ



ABヲ直径
トスル円ヲ画
ケ

$$AC = AD, \qquad AC' = AD'$$

AC² = AB・BC

ナラシムルトキハ C 及ビ C′ ハ所要ノ點デアル。

證明 BD, BD′ ヲ結べバ △ABD′∽△ADB ナルニヨリ

$$\frac{AD'}{AB} = \frac{AB}{AD} = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \quad \frac{AD' - AB}{AB} = \frac{AB - AC}{AC}$$

然ルニ　　$AD' - AB = AD' - DD' = AD = AC$

及ビ　　　$AB - AC = CB$　ナルガ故ニ

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC}$$

$$\therefore \quad CB : AC = AC : AB$$

同様ニ　$C'B : AC' = AC' : AB$　ナルコトヲ證明シ得。

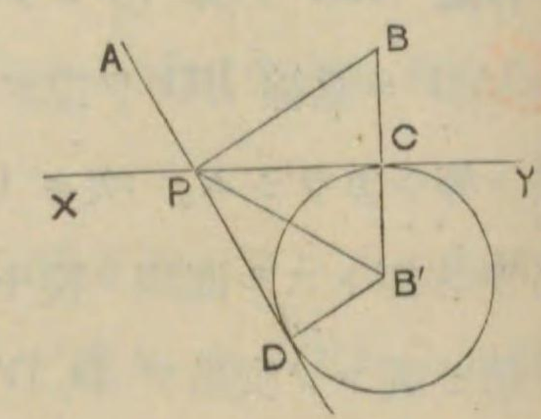
注意 上ノ分割法ヲ外中比ニ分ツ或ハ黄金分割 (Golden section) トイヒ，美學，心理學ニ屢々引用セラレル分割法デアル。

62. 作圖題ノ解法ハ以上述ベタ方法デ盡キタワケデハナイ。即チ後ニ述ベル調和束線，反形ノ理論，極及ビ極線等ノ理論ヲ應用スル場合モ甚ダ多イノデアル。

第二章 問題解義

1. 定直線 XY ノ同ジ側ニ二定點 A, B ガアル。XY 上ニ一點 P ヲ求メ $\widehat{APX}=2\widehat{BPY}$ ナラシメヨ。

解 P ハ求メラレタリトシ，XY ニ關シ B ノ對稱點 B′ ヲ取リ AP ノ延長ヲ PD トスル。又 B′ ヨリ PY, PD ニ垂線ヲ下シ其足ヲ夫々 C 及 D トシ，PB′ ヲ結ブト



$$\widehat{CPD}=\widehat{APX},\quad \widehat{B'PC}=\widehat{B'PD}=\frac{1}{2}\widehat{APX}$$

又 $\widehat{B'PC}=\widehat{BPY}$ 故ニ $2\widehat{BPY}=\widehat{APX}$

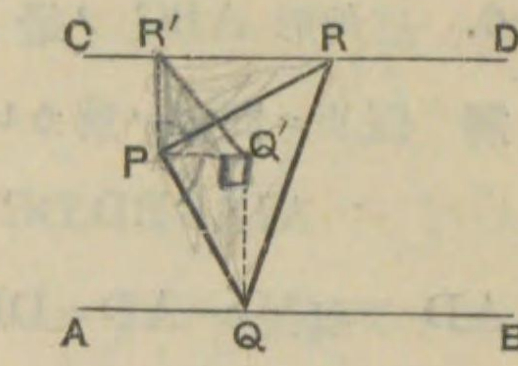
而シテ $B'C=B'D$

故ニ B′ ヲ中心トシ B′C ヲ半徑トシ圓ヲ畫クト PD ト D, XY ト C ニ於テ切ス。ヨツテ次ノ作圖ヲ得。

XY ニ關シテ B ノ對稱點 B′ ヲ求メ，B′ ヲ中心トシテ XY ニ切スル圓ヲ畫キ，A カラ B′ 圓ニ切線 AD ヲ引キ AD ガ XY ト交ル點ヲ P トセバ，P ハ所要ノ點デアル。

2. 平行二直線 AB, CD 及ビ定點 P アリ。今此二直線上ニ夫々 Q, R ヲ求メ PQ=PR ニシテ且ツ $\widehat{QPR}$ ヲ直角ナラシメヨ。

解 問題ハ解カレタリトシ，P ヨリ CD ニ垂線ヲ下シ其足ヲ R′ トシ $\widehat{R'PQ'}=R\angle$ ニ且ツ PQ′=PR′ ナル樣ニ Q′ ヲトラバ △Q′PR′∽△QPR ナルガ故ニ



$$PR' : PQ' = PR : PQ$$

∴ $PR' : PR = PQ' : PQ$

又 $\widehat{R'PR}=\widehat{Q'PQ}$

∴ $\triangle PR'R \backsim \triangle PQ'Q$

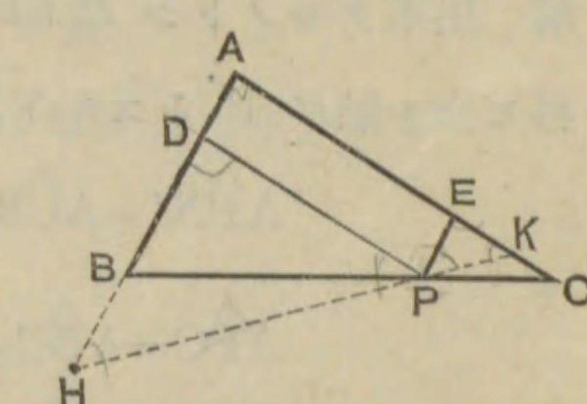
∴ $\widehat{PR'R}=\widehat{PQ'Q}$

然ルニ $\widehat{PR'R}=R\angle$ ∴ $\widehat{PQ'Q}=R\angle$

仍ツテ次ノ如ク作圖スルコトヲ得。即チ P カラ CD ニ垂線ヲ引キ其足ヲ R′ トシ，PQ′⊥PR′ ナラシメ且 PQ′=PR′ ナル樣ニ Q′ ヲトリ，Q′ ヲ過リ PQ′ ニ垂線ヲ引キ AB トノ交點ヲ Q トシ，次ニ PQ ヲ結ビ P ヲ過リ PR ⊥PQ ナラシメ，CD トノ交點ヲ R トスレバ Q, R ハ求ムル點デアル。

3. △ABC ノ邊 BC 上ニ一點ヲ求メ，コレヨリ他ノ二邊ニ平行線ヲ引キテ生ズル平行四邊形ノ周ヲ定長ニ等シカラシメヨ。

解 假リニ問題ハ解カレタリトシ，四邊形 ADPE ヲ求ムル平行四邊形トセヨ。



今 AB 或ハ其延長上ニ DP=DH ナル如ク H ヲトリ，又 AC 或ハ其延長上ニ EP=EK ナル如ク K 點ヲトレ。然ラバ AH=AD+DP ガ平行四邊形ノ半周ニ等シ 又 AK=AE+EP モ平行四邊形ノ半周ニシテ H, K ハ何レモ定點デアル。次ニ PH, PK ヲ結ブト △DHP, △EKP ハ何レモ二等邊三角形デアルカラ

$$\widehat{HDP}=\widehat{A}=\widehat{PEK}$$

故ニ $\widehat{DHP}=\widehat{DPH}=\widehat{EPK}$

従ツテ $\widehat{DPH}+\widehat{DPE}+\widehat{EPK}$

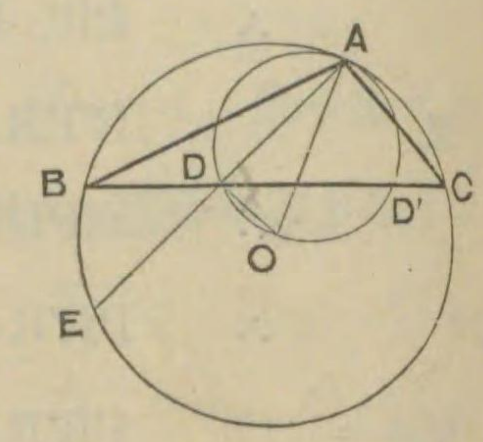
$$=\widehat{DPH}+\widehat{PDH}+\widehat{DHP}=2R\angle$$

仍ツテ PH, PK ハ一直線ヲナス。故ニ次ノ作圖法ヲ得ル。即チ AB 上ニ半周ノ長サニ等シク AH ヲトリ，AH=AK ナル如ク AC 上ニ K ヲトリ，HK ヲ結ビ BC トノ交點ヲ P トスルト P ガ所要ノ點デアル。

4. 三角形 ABC ノ邊 BC 上ニ一點 D ヲ求メ $AD^2=BD.DC$ ナラシメヨ。

解 假リニ問題ハ解カレタリトシ

$$AD^2=BD.DC$$ ナリトス,



AD ヲ延長シ AD=DE ナラシムレバ

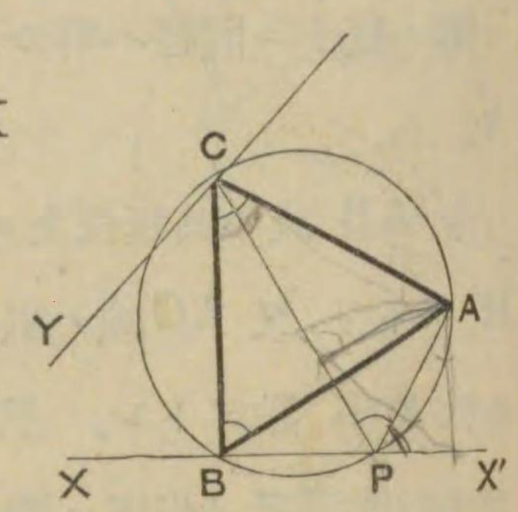
$$AD.DE=BD.DC$$

故ニ A, B, E, C ハ同一圓周上ニアリ, 而シテ D ハ AE ノ中點デアル。ヨツテ D ハ △ABC ノ外接圓ノ中心 O カラ弦 AE ヘノ垂線ノ足デアルカラ次ノ如クニ作圖スル。

三角形 ABC ノ外接圓ヲ畫キ此圓ノ中心 O ト A トヲ結ブ線分ヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ此圓周ト BC トノ交點ヲ D, D' トスルト此等ハ所要ノ點デアル。

5. 二定直線 X, Y 外ノ定點 A ヲ一ツノ頂點トシ, 他ノ二ツノ頂點 B,C ハ夫々 X, Y 上ニアルヤウナ正三角形 ABC ヲ作レ。

解 出來タモノトシ △ABC ノ外接圓ヲ畫キ, X ト再ビ交ル點ヲ P トスルト, 圖ニ於イテ



$$\widehat{APX'}=\widehat{ACB}=\frac{2}{3}R\angle$$

$$\widehat{APC}=\widehat{ABC}=\frac{2}{3}R\angle$$

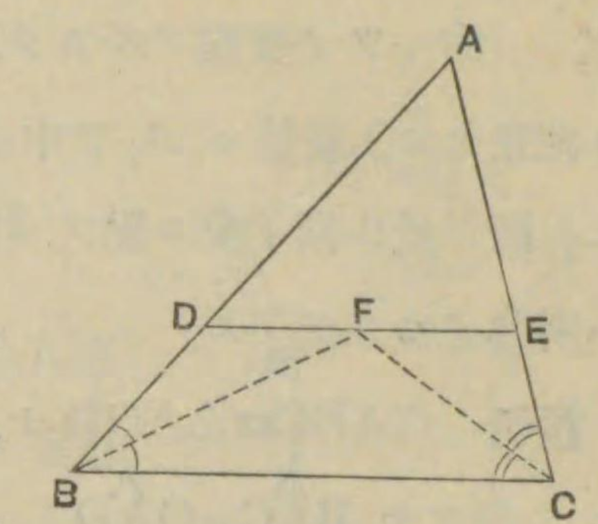
故ニ A カラ XX' ト $\frac{2}{3}R\angle$ ヲナス直線 AP ヲ引キ, 次ニ AP ト又 $\frac{2}{3}R\angle$ ヲナス直線 PC ヲ引キ Y トノ交點ヲ C トシ △APC ノ外接圓ヲ作リ X トノ交點ヲ B トスルト △ABC ハ所要ノ三角形デアル。

別解 A ガ定點デアルカラ, コレヲ一ツノ頂點トシ, 第二頂點 B ハ定直線 X 上ニアルトキ正三角形 ABC ノ第三頂點 C ノ軌跡ハ前編ニヨリテ二ツノ直線デアルガ, コレ等ガ直線 Y ト交ル點ガ即チ C デアル。

6. 三角形 ABC ノ底邊 BC ニ平行ナル直線ト二邊 AB, AC トノ交點ヲ夫々 D, E トシ DE=DB+EC ナラシメヨ。

解 出來タモノトシ, DE 上ニ BD=DF ナルヤウニ F ヲトルト FE=EC

トナル。



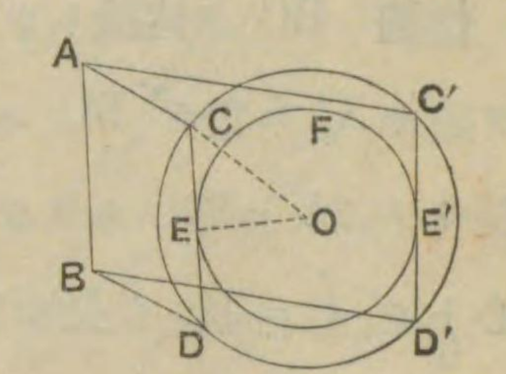
然ル時ハ BF, CF ヲ作ルト

$$\widehat{DBF}=\widehat{BFD}$$

又 DE//BC デアルカラ $\widehat{BFD}=\widehat{CBF}$ 故ニ BF ハ角 B ノ二等分線デアル。同樣ニ CF モ角 C ノ二等分線デアル。故ニ B, C 二角ノ二等分線ノ交點 F カラ BC ニ平行線ヲ引クコトニヨツテ DE ヲ得ル。

7. 定圓外ニ二定點 A, B ガアル此圓周上ニ二點 C, D ヲ求メ四邊形 ABCD ヲ平行四邊形ナラシメヨ。

解 AB ノ長サヲ a, 定圓ノ半徑ヲ r トス。O ヲ中心トシ $\sqrt{r^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$ ヲ半徑トスル圓 EFE' ヲ畫キ此圓ニ切線 CD ヲ AB ニ平行ニ引キテ定圓周ト C, D ニ於テ交ラシメヨ。然ラバ C, D ハ求ムル點デアル。何トナレバ CD ト圓 EFE' トノ切點ヲ E トシ OE ヲ結ブト OE⊥CD ナルガ故ニ E ハ CD ノ中點デアル。



$$CE=\sqrt{CO^2-OE^2}$$

$$=\sqrt{r^2-\left\{r^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right\}}-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$$

∴ $CD=a=AB$, 又 $CD/\!/AB$

∴ ACDB ハ平行四邊形ナリ。

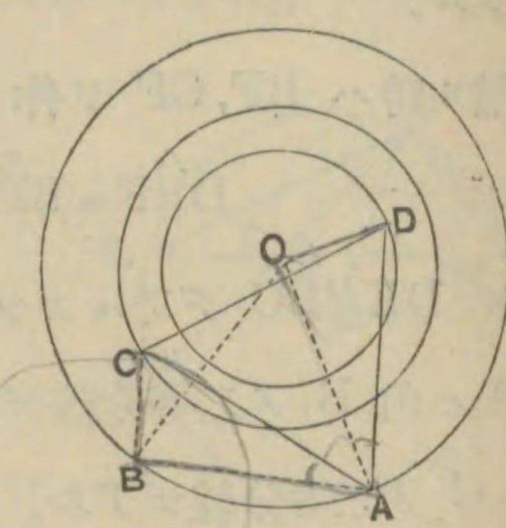
吟味 $a<2r$ ナルトキハ CD ノ外ニ AB ニ平行ナル內圓ノ切線ハ尚ホ一ツアリ, 之レヲ C'D' トスレバ, AC'D'B モ求ムル平行四邊形デアル。若シ $a=2r$ ナルトキハ唯一ツノ解アリ。又 $a<2r$ ナルトキハ解ガナイ。

8. 三ツノ與ヘラレタ同心圓ノ上ニ頂點ヲ有スル正三角形ヲ畫ケ。

作圖 先ヅ大圓ノ周上ニ任意ノ點 A ヲトリ OA ヲ一邊トスル正三角形 AOB ヲ作ルト B ハ大圓ノ周上ニアル。

次ニ B ヲ中心トシ最小圓ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ, 中圓ト交ル點ヲ C トセ

ヨ。（尚一ツノ交點アルカラ解ガ尚一ツアルコト＝注意セヨ。）最後＝ A ヲ中心トシ AC ヲ半徑トスル圓ガ最小圓ト交ル點ヲ D トスルト △ACD ハ所要ノモノデアル。



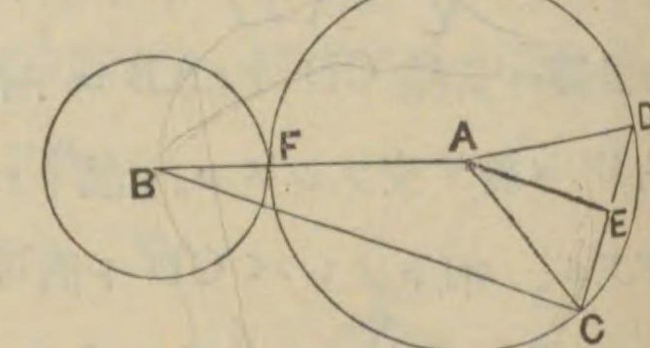
證明 △ABC≡△AOD ナルコトハ容易＝分カル。從ツテ $B\hat{A}C=O\hat{A}D$

故＝ $$B\hat{A}O=C\hat{A}D=60°,$$

而シテ AC=AD デアルカラ △ACD ハ正三角形デアル。

9. 底邊, 他ノ二邊ノ差及ビ高サトヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

作圖 BC ヲ底邊トシ他ノ二邊ノ差ヲ l トシ高サヲ h トスル。先ヅ BC ヲ畫キ C ＝於テ BC ＝垂線 CD ヲ引キ其長サヲ $2h$ ＝等シカラシメル。次＝ B ヲ中心トシ l ＝等シキ長サヲ半徑トスル圓ヲ畫キ, C, D ヲ通リ此圓＝外切スル圓ヲ畫キ其中心ヲ A トスルト △ABC ハ所要ノモノデアル。



證明 圓 B ト圓 A トノ切點ヲ F トスルト, B, F, A ガ一直線上＝アル。故＝ AB−AC=BF=l

又 A カラ CD ＝垂線 AE ヲ引クト E ハ CD ノ中點デアルカラ CE=h デアル。而シテコレハ A カラ BC ＝至ル高サ＝等シイ。故＝ △ABC ハ與ヘラレタ條件ヲ滿足スル三角形デアル。

10. ABDE, ACFG, BCHR ヲ三角形 ABC ノ各邊上＝於テ外方＝作ラレタ正方形トスル。直線 EG, FH, RD ノ長サヲ知ツテ三角形 ABC ヲ作レ。

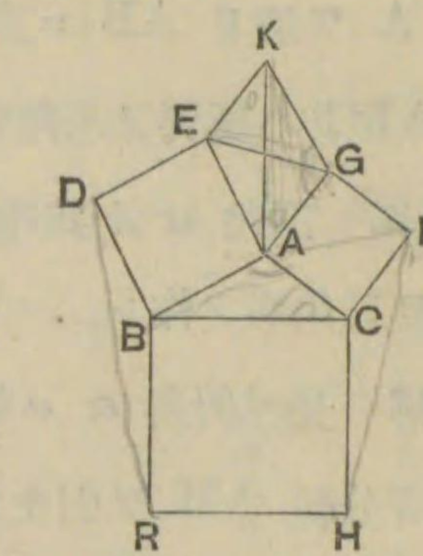
解 先ヅ EG, FH, RD ガ夫々 △ABC ノ中線ノ二倍＝等シキコトヲ證明セン。

AE, AG ヲ二隣邊トスル平行四邊形 AEKG ヲ作ルト GE ハ △GAK ノ一ツノ中線ノ二倍＝等シイ。

所ガ $$AG=AC,\quad GK=AE=AB$$

$$A\hat{G}K=2R\angle-G\hat{A}E$$

$$=B\hat{A}C$$



デアルカラ △ABC≡△AGK, 故＝ GE ハ △ABC ＝於ケル A カラノ中線ノ二倍＝等シイ。同樣＝ FH, DR ハ △ABC ＝於ケル C, B カラノ中線ノ二倍＝等シイ。從ツテ△ABC ノ作圖ガ容易デアル。（第六十節參照）。

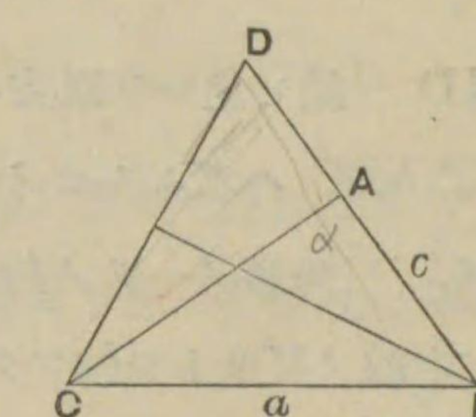
11. 三角形 ABC ＝於テ頂角 A 底邊 b 及ビ $a-c$ ヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

解 作圖ガ出來タト假定シ BA ヲ延長シ

$$AD=a-c$$

ナラシムレバ $\hat{A}$ ヲ知ル故＝ $D\hat{A}C$ ヲ知ル。

又 AC=b ヲ知ルガ故＝ △ADC ガ容易＝作レル。

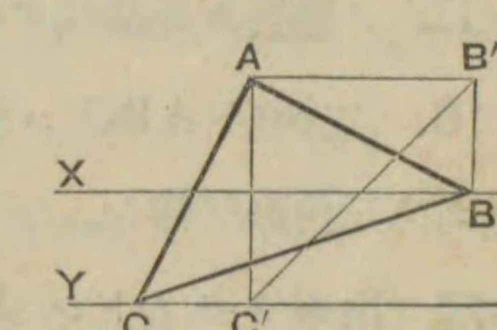


次＝ BD=BC デアルカラ B 點ハ DC ノ垂直二等分線上＝アル。從ツテ B ガ此垂直二等分線ト DA ノ延長トノ交點トシテ得ラレルデアル。故＝結局 △ABC ヲ作ルコトヲ得。

12. 與ヘラレタ點ヲ直角ノ頂點トシ, 他ノ二ツノ頂點ハ夫々與ヘラレタ二ツノ平行線上＝一ツ宛アル直角二等邊三角形ヲ作レ。

解 A ヲ定點, X, Y ヲ二ツノ定平行線トシ, 所要ノ三角形ヲ ABC トセヨ。

A ヨリ Y ＝垂線 AC′ ヲ下シ其足ヲ C′ トス, AC′ ヲ直角ノ一邊トスル直角二等邊三角形 AB′C′ ヲ作リ BB′ ヲ結ベ。



△ABB′ ト △ACC′ ト＝於テ AB=AC, AB′=AC′

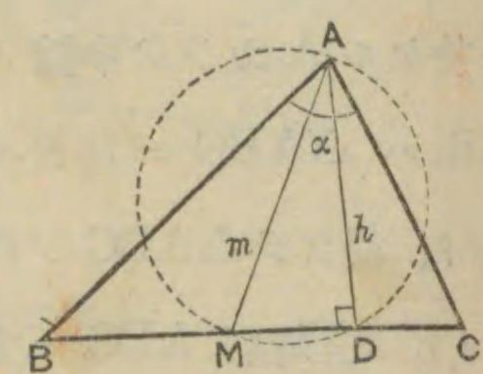
$B\hat{A}B'=C\hat{A}C'$ デアルカラ △ABB′≡△ACC′ 從ツテ $A\hat{B'}B=A\hat{C'}C=R\angle$

仍ツテ次ノ作圖法ヲ得ル。即チ A カラ Y ＝垂線 AC′ ヲ下シ其足ヲ C′ トシ, AC′ ヲ直角ノ一邊トスル直角二等邊三角形 AB′C′ ヲ作レ。次＝ B′ ヲ過リ AB′ ＝垂直ナル直線ヲ引キ直線 X トノ交點ヲ B トセヨ, BA ヲ結

ビ A ヲ過リ AB ニ垂線 AC ヲ引イテ, Y 直線トノ交點ヲ C トスレバ, △ABC ハ所要ノ三角形デアル。

13. 頂角 α ト其角ノ二等分線 m ト其頂角カラ底邊ニ下ス高サ h トヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

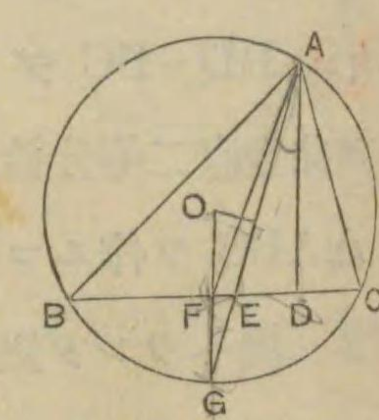
解 先ヅ與角 α ニ等シキ $B\hat{A}C$ ヲ作リ其角ノ二等分線 AM ヲ引キテ, $AM=m$ ナラシム。次ニ AM ヲ直徑トシテ圓周ヲ畫ケ,此ノ圓周ト A ヲ中心トシ, h ヲ半徑トスル圓周トノ交點ヲ D トセヨ。



MD ヲ結ビ之レヲ双方ニ延長シテ AB, AC ト夫々 B, C ニ於テ交ラシメヨ, △ABC ハ求ムルモノデアル。

14. 三角形ノ一ツノ角ノ二等分線ノ長サト其角頂カラ對邊ニ下シタ垂線及ビ中線ノ長サトヲ知ツテ此三角形ヲ作レ。

解 圖ニ於テ垂線ノ長サニ等シク AD ヲ引キ, D 點デ之ニ垂直ナル直線 BC ヲ作リ,次ニ A ヲ中心トシ角ノ二等分線及ビ中線ノ長サニ等シキ半徑ノ圓ヲ畫キ二ツノ點 E, F ヲ求メ E, F ヲ D ノ同ジ側ニ在ラシメ, F カラ BC ニ引ク垂線ト AE ノ延長トノ交點ヲ G トシ GF ト AG ノ垂直二等分線トノ交點ヲ O トシ, OG ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ EF ノ延長ガ此圓周ヲ截ル點ヲ B,C トスレバ △ABC ハ求ムルモノデアル。

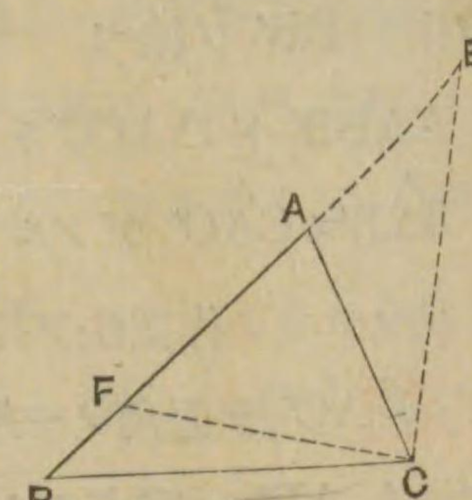


15. 三角形 ABC ニ於テ一邊 a, 他ノ二邊ノ和 $b+c$, 及ビ $\hat{C}-\hat{B}$ ヲ知ツテコノ三角形ヲ作レ。

解 出來タモノトシ BA ノ延長上ニ AE=AC ナルヤウニ E ヲトリ, AB 上ニ AF=AC ナルヤウニ F ヲトル。CE,CF ヲ作ルト

$$B\hat{C}F=\frac{1}{2}(\hat{C}-\hat{B}),\quad E\hat{C}F=R\angle$$

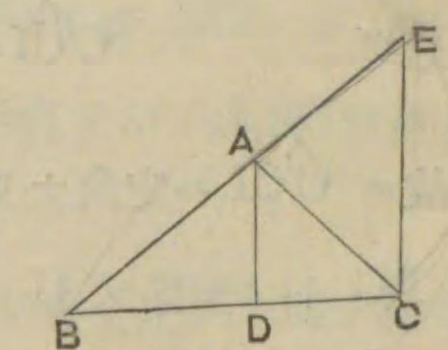
ナルコトガ容易ニ分カル。ソコデ先ヅ BC ヲ作リ



C カラ CB ト $\frac{1}{2}(\hat{C}-\hat{B})$ ヲナス直線 CF ヲ引ケ。

次ニ CF ニ垂直ニ CE ヲ引キ B ヲ中心トシ $b+c$ ヲ半徑トスル圓周ト E デ交ラシム。然ル時ハ △BCE 及ビ F ガ定マル。故ニ A ハ CF ノ垂直二等分線ト BE トノ交點デアル。

16. 二邊ト此二邊ガ夾ム角ノ二等分線ノ長サトヲ知ツテ三角形ヲ作レ。



解 AB,AC ヲ二邊トシ AD ヲ二等分線トスル。サテ BA ヲ延長シ AE ヲ AC ニ等シカラシメ EC ヲ結ブト

$$EC \mathbin{/\!/} AD$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{AD}=\frac{BE}{EC}$$

而シテ AB, AD ガ與ヘラレ且ツ BE=AB+AC ナルヲ以テ EC ノ長サガ知ラレル。故ニ △ACE ガ容易ニ作ラレル。從ヨツテ EC ハ知ラルヽ長サデアル。從ツテ問題ハ容易ニ解ケル。

17. 三角形ノ高サ, 頂點ヨリ底邊ヘ引ケル中線及ビ他ノ二邊ノ包ム矩形ヲ知リテ此ノ三角形ヲ作レ。(大正十一年文檢豫備)

解 出來タモノトシ之ヲ ABC トシ, 高サヲ AH 中線ヲ AM トシ, △ABC ノ外接圓ノ中心ヲ O トスル。AO ヲ結ビ圓周ト再ビ交ル點ヲ A′ トスルト

$$\triangle ABA' \backsim \triangle AHC$$

$$\therefore \quad AA':AC=AB:AH$$

而ルニ AB, AC ノ包ム矩形及ビ AH ノ長サガ與ヘラレテ居ルカラ直徑 AA′ ガ定マル。

ヨツテ △AMH ヲ作リ次ニ MD ヲ MH ニ垂直ニ引ケ。今 A ヲ中心トシ AA′ ノ半分ヲ半徑トスル圓周ガ MD ノ延長ト交ル點ガ外接圓ノ中心デアル。故ニ MH ノ延長ガ此ノ圓周ト交ル點ヲ B,C トスルト △ABC ガ作ラレル。

18. 二邊ノ和及ビ其一ツニ對スル角及ビ內切圓ノ半徑ヲ知リテ三角形ヲ作レ。(大正四年文檢豫備)

解 △ABC ノ二邊 AB, AC ノ和及ビ $\hat{B}$ ヲ知ルモノトス。角 B ヲ夾ム二邊 BA, BC ニ與ヘラレタル半徑ヲ有スル內切圓ヲ作リソノ中心ヲ I トス。

次ニ BA ヲ延長シ AC′=AC ナルヤウニ C′ ヲトルト C′ ハ定點デ

且ツ $$C'\hat{C}I=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}=R\angle-\frac{\hat{B}}{2}$$

故ニ $C'\hat{C}I$ ハ定角ナリ。ヨツテ C′I ヲ弦トシ定角 $R\angle-\frac{\hat{B}}{2}$ ヲ容ルヽ弧ヲ畫キ BC トノ交點ヲ C トスル時 C ハ求ムル三角形ノ一ツノ頂點デアル。

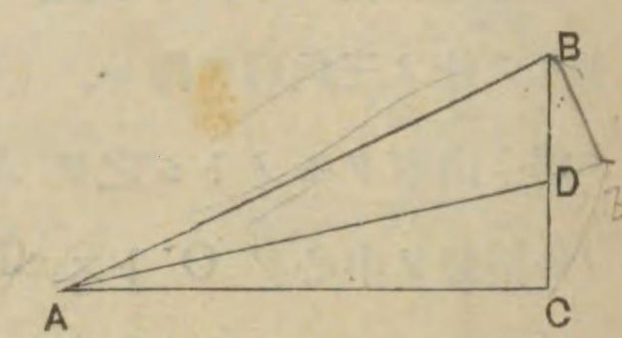
19. 直角三角形ノ斜邊及ビ其一ツノ銳角ノ二等分線ノ長サヲ知リテ此三角形ヲ作レ。(大正三年文檢本試)

解 直角頂ヲ C トスル三角形 ABC ノ斜邊 AB, 及ビ一ツノ銳角 A ノ二等分線 AD ノ長サヲ知ルモノトス。

作圖ガ出來タモノト假定シ AB ヲ直徑トスル圓ヲ畫キ AD ノ延長トノ交點ヲ E トスレバ,

$E\hat{A}B=E\hat{A}C$ デアルカラ E ハ劣弧 BC ノ中點デアル。

故ニ EB ハ △ADB ノ外接圓ノ切線デアル。何トナレバ $D\hat{B}E=B\hat{A}E$ デアルカラ



$$\therefore \quad ED.EA=EB^2$$

然ルニ $$EB^2=AB^2-AE^2$$

$$\therefore \quad EA(ED+EA)=AB^2$$

即チ $$EA(2EA-AD)=AB^2$$

ヨツテ AE ノ長サハ定マル。故ニ A ヲ中心トシ AE ヲ半徑トスル圓ト AB ヲ徑トスル圓周ノ交點ガ E トナル。

ソコデ AE 上ニ AD ノ長サニ等シクトリ之ヲ D トシ, BD ヲ結ビソノ延長ガ AB ヲ徑トスル圓周ト交ル點ヲ C トスレバ C ハ直角頂デアル。

20. 三角形ノ底邊ト他ノ二邊ノ和ト內切圓ノ半徑トヲ知ツテ本形ヲ作レ。(大正三年文檢豫備)

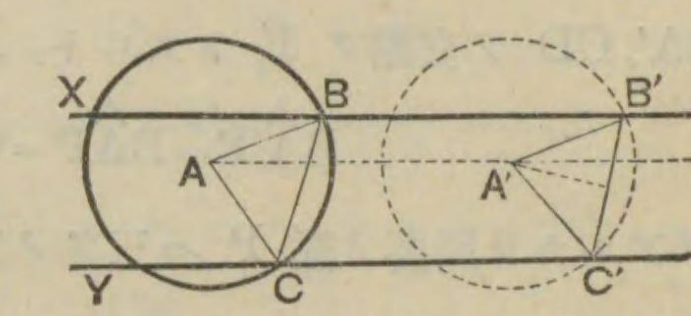
解 三角形ヲ ABC トシ BC, CA, AB ノ長サヲ夫々 a, b, c トスル。今內

切圓ガ AB, AC ト切スル點ヲ E, F トスルト AE=$s-a$ デアル。而シテ二邊ノ和ト底邊トヲ知ルカラ s 及ビ $s-a$ ヲ知ルカラ, 內切圓ノ中心ヲ I トスルト △AEI ヲ作ルコトガ出來ル從ツテ $\hat{A}$ モ知ラレル。

ソコデ BA ヲ延長シ AG=AC ニトレバ BG ハ $b+c$ デ $B\hat{G}C$ ガ $\hat{A}$ ノ半分デアルカラ △BGC ヲ作ルコトガ出來ル。ヨツテ直チニ △ABC ヲ作圖スルコトヲ得。

21. 平行ナ二直線 X, Y 及ビ一定點 A アリ, A ヲ中心トスル圓ヲ畫キ, X, Y トノ交點ヲ夫々 B, C トシ弦 BC ヲ定長 l ニ等シカラシメヨ。

解 X 上ニ任意ノ點 B′ ヲトリ B′ ヲ中心トシ l ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ Y トノ交點ヲ C′ トス。

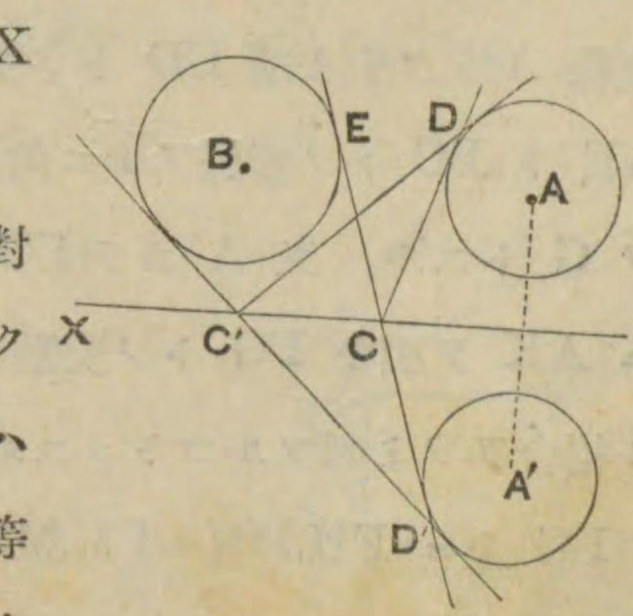


次ニ A カラ X ニ平行ニ引イタ直線 AA′ ト B′C′ ノ垂直二等分線トノ交點 A′ ヲ作リ, △A′B′C′ ヲ畫キソレヲ平行ニ移動シテ A′ ヲ A ニ重ネシムレバ所要ノ三角形 ABC ヲ得ル。

吟味 本題ノ作圖ガ可能ナル爲ニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ, l ガ X, Y ノ距離 d ヨリモ小ナラザルコト及ビ線分 B′C′ ノ垂直二等分線ガ AA′ ト共通點ヲ有スルコトデアル。故ニ $l>d$ ナルトキハ二ツノ解アリ, 又 $l=d$ ナルトキハ, A ガ X, Y ヨリ等距離ニアレバ無數ノ解アリ, 然ラザレバ解ナシ。最後ニ $l<d$ ナルトキモ解ガナイ。

22. 定直線 X ノ同ジ側ニ二ツノ定圓 A, B アリ, X 上ニ一點 C ヲ求メ C カラ各圓ニ引ケル二ツノ切線 CD, CE ガ X トナス角ヲシテ相等シカラシメヨ。

解 出來タモノトシ X ニ關シテ圓 A ト對稱ナ圓 A′ ヲ作ル然ル時, C カラ圓 A ニ引ク切線 CD ト X ニ關シテ對稱ナル直線 CD′ ハ圓 A′ ニ切スル。且ツ CD, CD′ ハ X ト相等シイ角ヲナスカラ CE, CD′ ガ一直線トナル筈



デアル。故ニCハ二ツノ定圓 A′, B ノ共通切線ガXト交ル點デアル。

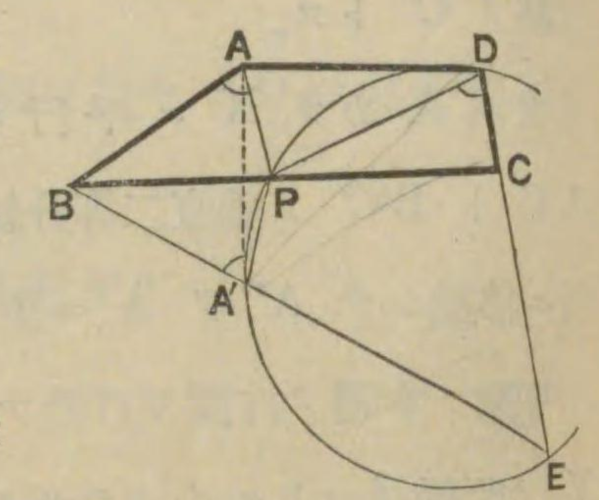
吟味 二圓 A′, B ハ X ノ兩側ニアル故互ニ外ニアル圓デアル。故ニ此二圓ノ共通切線ハ四ツアルカラ，C 點モ四個得ラレ，從ツテ四通リノ解ガアル。ケレドモ共通內切線ノ交點ハ X 上ニアル時ハ C 點ハ三個シカ得ラレヌカラ三通リノ解ガアル。

23. 與ヘラレタル四邊形 ABCD ノ邊 BC 上ニ一點 P ヲ求メ，角 BAP, CDP ヲ等シカラシメヨ。

解 作圖ガ出來タモノト假定シ，邊 BC ニ關スル點 A ノ對稱點ヲ A′, BA′, CD ノ交點ヲ E トスルト，A′, E ハ定點デ且ツ

$$B\hat{A}'P = B\hat{A}P = C\hat{D}P$$

デアルカラ所要ノ點 P ハ三ツノ定點 A′, D, E ヲ過ル圓ガ BC ト交ル點デアル。又 BA′//CD ナル時ニハ，二ツノ直線 A′D, BC ノ交點ハ所要ノ點 P デアル。



吟味 BA′//CD ナルカ又ハ圓 A′DE ガ邊 BC ト交ルトキハ恒ニ一ツノ解アルガ，邊 BC ノ延長ト交ルトキハ解ガナイ。

24. 四邊形 ABCD ノ邊 CD 上ニ一點 P ヲトリ $D\hat{A}P - C\hat{B}P$ ヲシテ與ヘラレタル角ニ等シカラシメヨ。(大正十二年文檢本試)

解 出來タモノトシ $D\hat{A}P - C\hat{B}P = \alpha$ トセヨ。今 $D\hat{A}E = \alpha$ ナルヤウニ直線 AE ヲ引キ邊 CD トノ交點ヲ E トス。AB ノ中點ヲ F トシ，F カラ AE ト BC トノ延長ノナス角ノ二等分線ニ平行ニ FG ヲ引キ，CD トノ交點ヲ G トスル。又 A カラ FG ニ垂線 AH ヲ下シ，次ニ A カラ CD ニ平行ニ AK ヲ引キ FG トノ交點ヲ K トスル，(今ハ H ハ F ト K トノ間ニアル場合ヲノミ考フルコトニスル，他ノ場合モ大同小異ノ證明デスム)

FG 上ニ FH.HK=FM.MG ナルヤウニ M ヲ G 點ニ近イ方ニトルト M ヲ過リ FG ニ垂直ナル直線ガ CD ト交ル點 P ガ求ムルモノデアル。

何トナレバ A, P ヲ結ビ FG ニ N デ會セシムルト，

$$\triangle AHN \backsim \triangle NPM$$

$$\therefore \quad \frac{HN}{MN} = \frac{AH}{PM} \cdots\cdots(1)$$

$$\triangle AHK \backsim \triangle PMG$$

$$\therefore \quad \frac{HK}{MG} = \frac{AH}{PM} \cdots\cdots(2)$$

(1), (2) カラ

$$\frac{HN}{MN} = \frac{HK}{MG}$$

即チ $HK.MN = HN.MG \cdots\cdots(3)$

然ルニ作圖ニヨリ，$FH.HK = FM.MG \cdots\cdots(4)$

(3), (4) カラ $\dfrac{MN}{FH} = \dfrac{HN}{FM} = \dfrac{HN-MN}{FM-FH} = \dfrac{HM}{HM}$

$$\therefore \quad MN = FH$$

次ニ B ト P トヲ結ビ FG トノ交點ヲ S トシ，B カラ FG ニ垂線 BH′ ヲ下スト，上ト同樣ニシテ

$$SM = FH'$$

然ルニ F ハ AB ノ中點デアルカラ FH=FH′

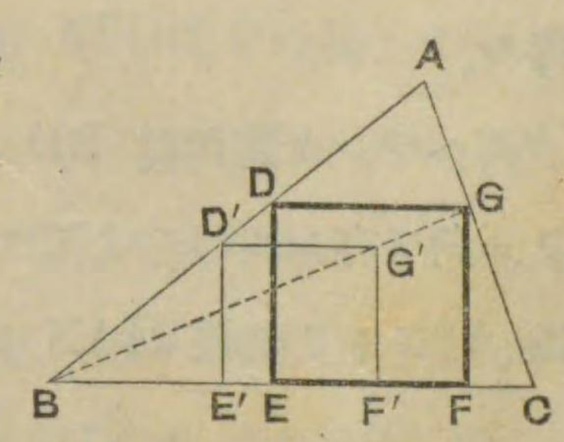
故ニ $\triangle P\hat{S}N$ ガ二等邊デアル。 $\therefore \ P\hat{N}S = P\hat{S}N$

然ルニ $P\hat{N}S$ ガ $E\hat{A}P$ ト AE, BC ノナス角ノ半分トノ和ニシテ，$P\hat{S}N$ ガ $P\hat{B}C$ ト AE, BC ノナス角ノ半分トノ和ナルガ故ニ，

$$E\hat{A}P = P\hat{B}C$$

$$\therefore \quad D\hat{A}P - C\hat{B}P = D\hat{A}P - E\hat{A}P = \alpha$$

25. 與ヘラレタル三角形ニ正方形ヲ內接セシメヨ。



解 AB 上ノ任意ノ一點 D′ カラ BC ニ垂線 D′E′ ヲ下シ其上ニ圖ノ如ク正方形 D′E′F′G′

ヲ作リ BG′ ノ延長ト AC トノ交點 G カラ D′ E′ ニ平行ニ GF ヲ作ルト GF ハ正方形ノ一邊デアル。

吟味 正方形ノ一邊ハ三角形ノ何レノ邊ノ上ニ重ルモ差支ヘガナイカラ,與ヘラレタ三角形 ABC ハ鋭角三角形ナラバ三ツノ解アル。若シ直角三角形ナラバ二ツノ解デ,鈍角三角形ナラバ唯一ツノ解ノミシカナイ事ハ明カデアル。

26. 二ツノ對角線ノ長サト，其ナス角及ビ相對スル角ヲ知ツテ四邊形ヲ作レ。

解 第六十節ノ圖ニ於イテ所要ノ四邊形ヲ ABCD トシ相對スル角 A 及ビ C ヲ知ルモノトス。

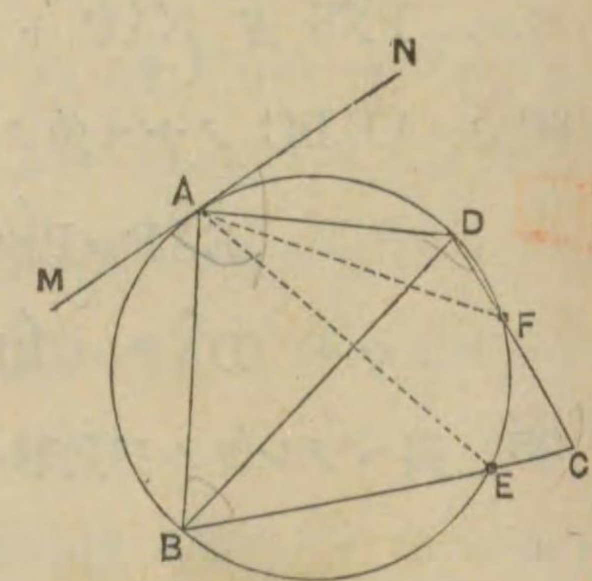
然ル時ハ對角線ト其ナス角トヲ知ルヲ以テ平行四邊形 BDEF ヲ知ルコトヲ得。次ニ BD ヲ弦トシ $\hat{C}$ ヲ容レル弓形ノ弧ヲ作リ，又 EF ヲ弦トシ，$\hat{A}$ ヲ容レル弓形ノ弧ヲ作ルト夫等ノ交點ハ即チ C デアル。ソコデ先ヅ BC, DC ヲ得ル。次ニ BD ヲ弦トシ C 點ト反對ノ側ニ $\hat{A}$ ヲ容レル弓形ノ弧ト C ヲ中心トシ對角線 CA ヲ半徑トスル圓ヲ畫クト夫等ノ交點トシテ頂點 A ヲ得ベシ。仍ツテ四邊形 ABCD ヲ作ルコトガ出來ル。

27. 四ツノ角及ビ二ツノ對角線ノ長サヲ知ツテ四邊形ヲ作レ。

解 ABCD ヲ所要ノ四邊形トシ對角線 BD ノ上ニ角 A ヲ含ム弓形ノ弧ヲ畫キ邊 BC, CD ト交ル點ヲ夫々 E, F トス。次ニ切線 MAN ヲ引クト

$$M\hat{A}F=\hat{D},\quad N\hat{A}E=\hat{B}$$

デアルカラ弦 AE, AF ヲ引クコトヲ得。従ツテ E, F ガ分カル。従ツテ次ノ作圖法ヲ得ル。



與ヘラレタ對角線 BD ヲ弦トシ與ヘラレタ一角ヲ容レル弓形ノ弧ヲ作リ其上ニ任意ノ點 A ヲトリ切線 MAN ヲ作レ。次ニ

$$M\hat{A}F=\hat{D},\quad N\hat{A}E=\hat{B}$$

ナルヤウニ直線 AE, AF ヲ引キ E, F ヲ定メル。次ニ EF ヲ弦トシ $\hat{C}$ ヲ容レル弓形ノ弧ヲ畫キ，A ヲ中心トシ AC ヲ半徑トスル圓ト交ル點ヲ C トス。然ル後ハ甚ダ容易デアル。

28. 各邊ガ與ヘラレタ方向ヲ有スル平行四邊形ヲ與ヘラレタ四邊形ニ內接セヨ。

解 ABCD ヲ與ヘラレタ四邊形トシ，所要ノ平行四邊形ヲ HGLM トシ AB, BC, CD, DA ノ上ニ夫々頂點 H, G, M, L ヲ置クモノトス。然ル時 AE ヲ HG ニ平行ニ引キ CD 又ハ其ノ延長ニ E デ交ラシメ，DF ヲ HL ニ平行ニ引キ AB 又ハ其延長ニ F デ交ラシメル。次ニ EF ヲ結ビ BC トノ交點ヲ G トスルト G ハ所要ノ平行四邊形ノ一ツノ頂點デアル。

G カラ AE ニ平行ニ GH ヲ引キ，H カラ DF ニ平行ニ HL ヲ引キ，L カラ AE ニ平行ニ LM ヲ引クト，四邊形 GHLM ハ求ムル平行四邊形デアル。何トナレバ △AEF カラ

$$GH:AE=FH:FA \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

又 △ADE カラ

$$LM:AE=LD:AD \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

然ルニ △ADF カラ

$$FH:FA=LD:AD \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

(1), (2) 於ビ (3) カラ $GH:AE=LM:AE$

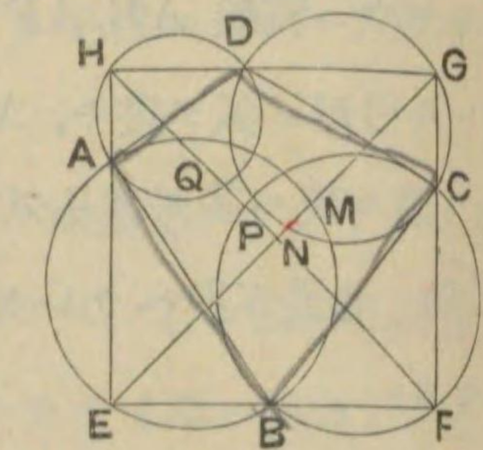
$$\therefore \quad GH=LM$$

而シテ GH // LM デアルカラ四邊形 GHLM ハ平行四邊形デアル。

29. 與ヘラレタル任意ノ四邊形ニ正方形ヲ外接セシメヨ。

解 圖ニ於テ與ヘラレタ四邊形 ABCD ニ正方形 EFGH ヲ外接シタモノト假定スルト，頂點 E, G ハ夫々 AB, CD ヲ直徑トスル圓周上ニアル。又對角線 EG ハ角 E, G ヲ二等分スルカラ弧 $\overset{\frown}{AEB}$, $\overset{\frown}{CGD}$ ノ共軛弧 $\overset{\frown}{AMB}$, $\overset{\frown}{CND}$ ノ中點 M, N ヲ過ル。仍ツテ次ノ作圖法ヲ得。即チ AB, CD ヲ直徑トスル圓ヲ畫キ，四邊形 ABCD ノ內部ニアル半圓周ノ中點ヲ夫々 M, N ト

スレバ, MN ヲ結ビ之レガ延長ト四邊形ABCD ノ外部ニアル半圓周トノ交點ヲ E, G トセヨ。E, G ハ所要ノ正方形ノ相對スル頂點デアル, EB, GC ヲ結ビ其延長ノ交點ヲ F トシ, FEA, GD ヲ作リ其延長ノ交點ヲ H トスレルト四邊形 EFGH ハ所要ノ正方形デアル何トナレバ。



$$GEF=EGF=\frac{R\angle}{2}$$

∴ EF=GF ニシテ且 $\widehat{EFG}=R\angle$ デアル。

同様ニ EH=GH, $\widehat{GEF}=\widehat{HGE}=\frac{R\angle}{2}$

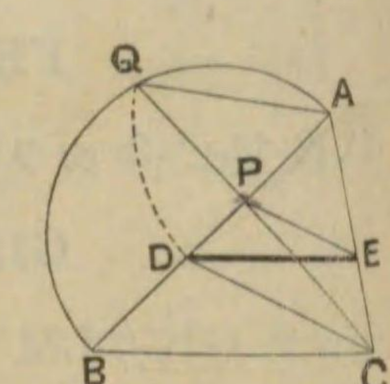
∴ EF // GH

同様ニ FG // EH

故ニ EFGH ハ平行四邊形ニシテ二隣邊相等シク且ツ一ツノ角ガ直角デアルカラ EFGH ハ正方形デアル。

30. 與ヘラレタル三角形 ABC ヲ底邊 BC ニ平行ナル直線ニヨリテ二ツノ部分ニ分チ,其ノ各部分ノ面積ノ比ヲシテ與ヘラレタル比 $m:n$ ニ等シカラシメヨ。

解 所要ノ直線ヲ DE トスルト,



$$\frac{\triangle ADE}{\text{四邊形 DBCE}}=\frac{m}{n}$$

故ニ

$$\frac{\triangle ADE}{\triangle ABC}=\frac{m}{m+n}$$

ソコデ邊 AB ヲ P ニ於テ $AP:PB=m:n$ ニ内分スル時ハ

$$\frac{\triangle ACP}{\triangle CPB}=\frac{m}{n} \quad 從ツテ \quad \frac{\triangle ACP}{\triangle ABC}=\frac{m}{m+n}$$

依ツテ △ADE=△ACP 故ニ △PDE=△PCE

從テ DC // PE ∴ $\frac{AP}{AD}=\frac{AE}{AC}$

又 $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$ ∴ $\frac{AP}{AD}=\frac{AD}{AB}$

即チ AD ハ定線分 AP, AB ノ比例中項トナル。仍ツテ次ノ作圖法ヲ得。邊 AB ヲ P ニ於テ比 $m:n$ ニ等シク内分シ, AB ヲ直徑トスル半圓ヲ畫キ, P カラ AB ヘ引ケル垂線トノ交點ヲ Q トシ, AB 上ニ AQ ニ等シク AD ヲ取リ, D カラ BC ニ平行線ヲ引キ邊 AC トノ交點ヲ E トスレバ, DE ハ所要ノ直線トナル。何トナレバ作圖ニヨツテ $AQ^2=AP.AB$ ニシテ而カモ AQ=AD デアルカラデス。

31. 凸四邊形内ニ一點ヲトリ此ノ點ト各邊ノ中點トヲ結ビ付クル線分ニヨリテ此ノ四邊形ヲ四等分セヨ。(大正五年文檢本試)

解 四邊形 ABCD ニ於テ對角線 AC, BD ノ中點ヲ E, F トシ E カラ BD ニ平行ニ EG ヲ引キ, F カラ AC ニ平行線 FG ヲ引キ EG トノ交點ヲ G トスル。

又 AB, BC, CD, DA ノ中點ヲ夫々 L, M, N, P トスレバ, GL, GM, GN, GP ヲ結ブト四邊形ヲ四等分スル。

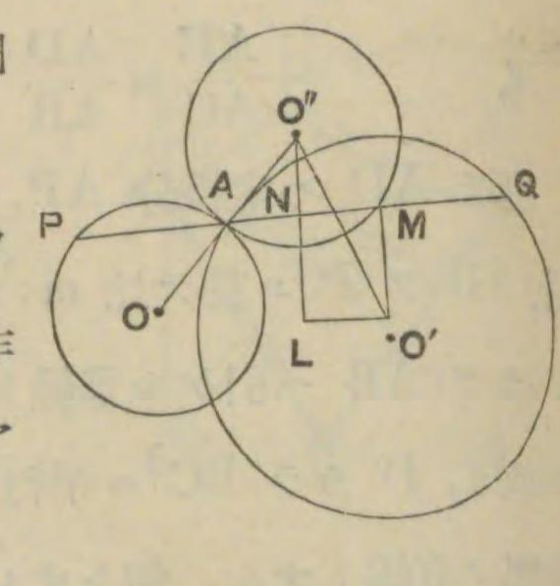
32. 一定圓周上ノ二定點 A, B ノ各ヲ過リテ互ニ平行ナル弦 AC, BD ヲ引キ AC, BD ノ包ム矩形ノ面積ヲ與ヘラレタル面積ニ等シカラシメヨ。(大正九年文檢本試)

解 A カラ BD ニ垂線 AM ヲ引キ BD 又ハソノ延長トノ交點ヲ M トスルト,

$$AB^2\sim AD^2=MB^2\sim MD^2=(MB+MD)(MB\sim MD)$$
$$=AC.BD$$

而シテ AB 及ビ矩形 AC.BD トガ與ヘラレタカラ上ノ式カラ AD^2 從ツテ AD ノ長サガ知ラレル。

33. 二ツノ圓 O, O′ ノ交點ノ一ツヲ A トシ, A ヲ過ル割線ニテ圓 O, O′ ヲ更ニ夫々點 P, Q ニテ截リ AQ−AP ヲ定長ナラシメヨ。(大正八年文檢豫備)



解 所要ノ直線ヲ PAQ トシ O 圓ト P, O′ 圓ト Q デ交ルモノトス。

今 OA ノ延長＝ OA＝O″A ナルヤウニ O″ ヲトリ，ソノ點ヲ中心トシテ O 圓ト相等シイ圓ヲ作リ PAQ ト P′ デ交ラシメルト AP＝AP′ デアル。

サテ 中心 O′ 及ビ O″ カラ割線 PAQ ＝垂線 O′M, O″N ヲ引クト

$$AM=\frac{AQ}{2}\qquad AN=\frac{AP'}{2}=\frac{AP}{2}$$

ナルガ故＝ $MN=\dfrac{AQ-AP}{2}$

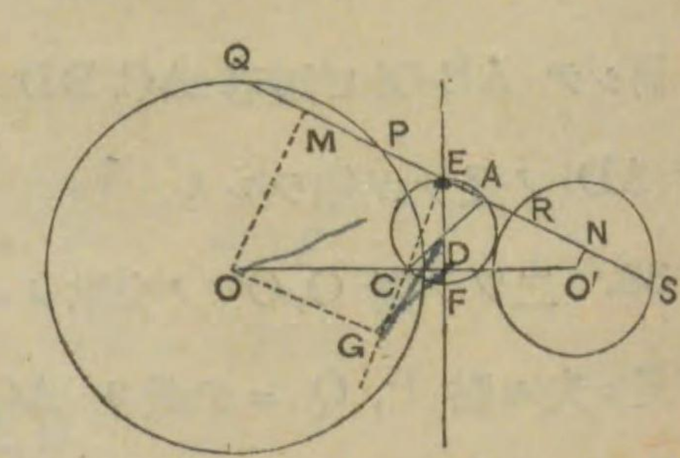
ヨツテ MN ノ長サガ知ラレル。次＝ O′O″ ヲ結ビ O′ カラ O″N ノ延長＝垂線 O′L ヲ引クト，O′L＝MN ナルガ故＝直角三角形 O′LO″ ガ容易＝作ラレル. ヨツテ交點 A カラ邊 O′L ＝垂線 AN ヲ引クト 其直線ガ求ムルモノデアル。

34. 一定點ヲ過ル直線ヲ畫キテ二定圓ヲ截リ 共各圓內＝アル 部分ヲ相等シカラシメヨ。(大正十年文檢豫備)

解 二ツノ定圓ヲ夫々 O, O′ トシ定點ヲ A トシ OO′ ノ中點ヲ C トシ，圓O ノ半徑ヲ r, 圓 O′ ノ半徑ヲ r' トスル。今 $r>r'$ ナリトスレバ，

$$r^2-r'^2=4OC.CD\cdots\cdots(1)$$

ナルヤウ＝ OO′ 上＝ D 點ヲトリ，D カラ OO′ ＝垂線 DE ヲ引キ，AC ヲ直徑トスル圓ヲ畫キ DE トノ交點ヲ E, F トスルト，AE, AF ガ求メントスル直線デアル。



何トナレバ EC ＝垂線 OG ヲ下セバ四邊形 OEDG ガ內接四邊形デアル。

$$\therefore\quad OC.CD=EC.CG$$

今 AE ガ二ツノ定圓＝交ル點ヲ夫々 P, Q, R, S トシ，O 及ビ O′ カラ EA ＝

垂線 OM, O′N ヲ下スト，

$$EC=\frac{1}{2}(OM+O'N),\qquad CG=\frac{1}{2}(OM-O'N)$$

$$\therefore\quad OM^2-O'N^2=4EC.CG$$

故＝(1) ヨリ $OM^2-O'N^2=4OC.CD=r^2-r'^2$

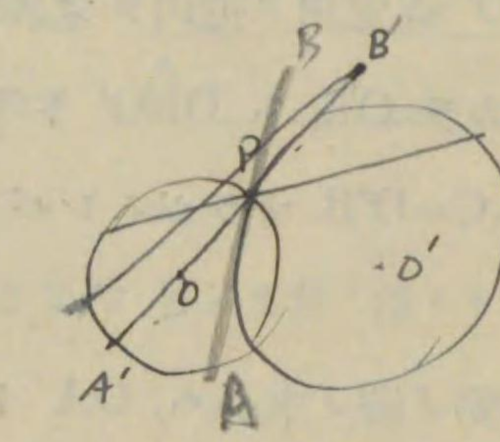
$$\therefore\quad r^2-OM^2=r'^2-O'N^2$$

即チ　PM＝RN

ヨツテ其ノ二倍宛ナル。

PQ＝RS

ナルコトヲ知ル。



35. 相交ル二ツノ圓 O, O′ ノ一ツノ交點 P ヲ過リテ割線ヲ引キ二ツノ圓ガ截リトル弦ノ包ム矩形ヲシテ與ヘラレタル正方形＝等シカラシメヨ。(大正十二年文檢豫備)

解 P ト一ツノ中心 O トヲ結ビ圓 O ト更＝ A′ ＝交ラシメヨ。次＝ A′P ヲ延長シテソノ上＝ B′ ヲトリ PA′. PB′ ヲ與ヘラレタ正方形＝等シカラシムル時ハ B′ 點ハ定點デアル。

今任意ノ割線 PA ヲ引キ圓 O ト A 點デ交ラシメ，AP ヲ延長シテ其上＝ B ヲトリ PA. PB ヲシテ與ヘラレタ正方形＝等シカラシメルト，

$$PA'.PB'=PA.PB$$

＝シテ且ツ $A\hat{P}A'=B\hat{P}B'$ ナルガ故＝

$$\triangle APA'\backsim\triangle BPB'$$

$$\therefore\quad P\hat{B'}B=R\angle$$

ヨツテ A 點ガ圓 O ノ周上ヲ動ク時 B ノ軌跡ハ定點 B′ ＝於ケル A′B′ ヘノ垂直線デアル。

故＝此垂直線カ圓 O′ ト交ル點ヲ B トスルト，B, P ヲ結ブモノガ所要ノ割線デアル。

36. 一定直線上ノ與ヘラレタル點＝於テ 此直線＝切シ 且ツ定圓ト定角ヲ

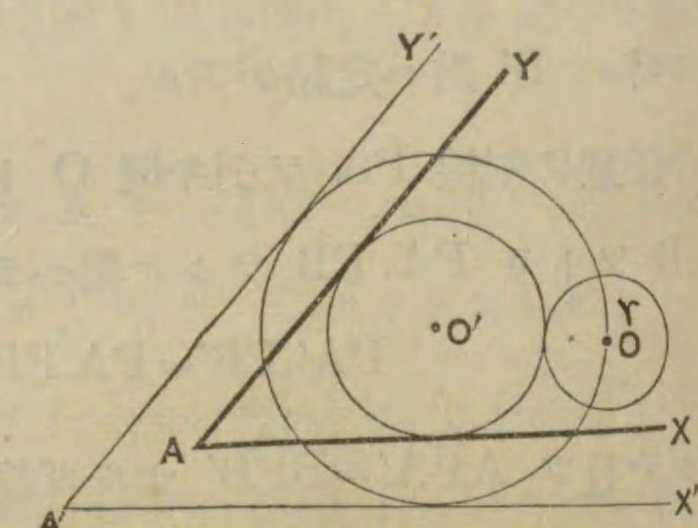
ナス圓ヲ作レ。(大正八年文檢豫備)

解　定直線ヲ X トシソノ上ノ與點ヲ A トシ定圓ノ中心ヲ O' トスル。求メントスル圓ノ中心ヲ O トスルト O ハ A 點ニ於ケル X ニ垂直ナ直線 OA 上ニアル。今モシ O ヲ見出シタモノトシ二圓ノ交點ノ一ツヲ B トスルト $O\hat{B}O'$ ガ定角ノ補角ヲナスカラ一定ノ大サデアル。

故ニ A カラ OA ト $O\hat{B}O'$ ト等シキ角ヲナス直線 AC ヲ O' ト反對ノ方向ニ引キ $AC=O'B$ ナラシムレバ O ガ CO' ノ垂直二等分線 DO ノ上ニアル。

仍ツテ所要ノ圓ノ中心ハ, OA ト DO トノ交點 O デアル。何トナレバ二ツノ三角形 ODC ト ODO' トガ全等形ナルヲ以テ $OC=OO'$ 又作圖ニヨツテ $AC=O'B$ $O\hat{A}C=O\hat{B}O'$ ナルヲ以テ $\triangle OAC\equiv\triangle OBO'$ 故ニ $OA=OB$ 即チ OA, OB ハ所要ノ圓ノ半徑トナル。

37.　二ツノ與ヘラレタ直線 X, Y 及ビ一ツノ與ヘラレタ圓 O ニ切スル圓ヲ畫ケ。

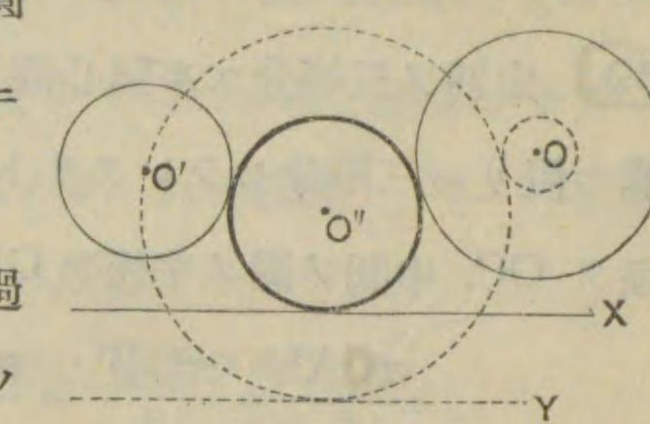


解　所要ノ圓ヲ O' トスル。今 O' ト同心ニシテ而カモ點 O ヲ通ル圓ヲ畫クト, 此圓ハ AX, AY ヨリ O 圓ノ半徑 r ニ等シキ距離ニアル二ツノ直線 $A'X'$, $A'Y'$ ニ切スル筈デアル。ヨツテ次ノ作圖法ヲ得。

圓 O ノ半徑ヲ r トシ, AX, AY ヨリ外方ニ r ダケノ距離ニ二ツノ直線 $A'X'$, $A'Y'$ ヲトリ此等ノ直線及ビ點 O ヲ通ル圓ヲ畫ケ然ラバ所要ノ中點 O' ヲ得ル。

注意　$A'X'$ ト $A'Y'$ トヲ AX, AY ノ內方ニ平行移動ヲ行フト, 圓 O ガ所要ノ圓ニ內切スル。

38.　與ヘラレタ一ツノ直線 X 及ビ二ツノ與ヘラレタ圓 O, O' ニ切スル圓ヲ畫ケ。



解　前題ノ方針ニ從ツテ之ヲ解カン。先ヅ O 圓ガ O' 圓ヨリモ大ナリトシ圓 O, O' ノ半徑ノ差ヲ半徑トスル圓ヲ O 圓ト同心ナルヤウニ作リ, X ヨリ O' ノ半徑ニ等シイ距離ニ圖ノ如ク直線 Y ヲ作レ。

然ル時ハ本題ハ與ヘラレタル一點 O' ヲ過リ, 且ツ與ヘラレタル一ツノ直線 Y 及ビ一ツノ圓ニ切スル圓ヲ畫クコトニ歸スル。

注意 i.　二ツノ圓ガ互ニ外切, 內切スル時及ビ Y ヲ X ノ反對ノ側ニトルコトニヨリテ生ズル種々ノ場合ヲ研究セヨ。

注意 ii.　此等ノ問題ニ類似スルモノヲ玆ニ一括シテ研究セントス。先ヅ點ヲ P ニテ, 直線ヲ L ニテ, 圓ヲ C ニテ表ハス。然ル時一ツノ點ヲ過リ一ツノ圓及ビ一ツノ直線ニ切スル圓ヲ畫ケトイフ問題ヲ簡單ニ P, C, L ノ問題トイヒ, 二ツノ點ヲ過リ一ツノ圓ニ切スル圓ヲ畫ケトイフ問題ヲ簡單ニ P, P, C ノ問題トイフ。カクノ如キ記號ヲ用フルト次ノ十種ノ問題ガアル,

(1)　P, P, P (解一ツ)　(2)　L, L, L (解四ツ)　(3)　P, P, L (解二ツ)
(4)　P, P, C (解二ツ)　(5)　P, C, L (解四ツ)　(6)　P, L, L (解二ツ)
(7)　P, C, C (解四ツ)　(8)　L, L, C (解八ツ)　(9)　L, C, C (解八ツ)
(10)　C, C, C (解八ツ)

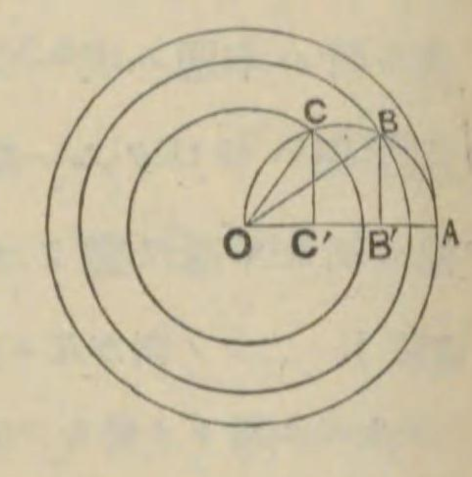
此等ノ中 (1), (2), (3), (4), (6) ハ已ニ解イタカラ玆ニハ再錄セヌ。(5) ハ即チ本題ノ終結デアル。今與直線ヲ X, 與圓ヲ C, 與點ヲ P トスル。ソコデ假リニ出來タトシ, X ト E デ, 圓ト F デ切スルモノトス。然ル時ハ直線 EF ガ, X ニ垂直ナル與圓ノ直徑 AB ノ一端 A ヲ過ル故ニ AB ガ X ト交ル點ヲ H トシ AP ガ所要ノ圓ト再ビ交ル點ヲ G トスルト, BR. AH=AE. AF=AP. AG 故ニ G ガ定マル。然ル時ハ二點 P, G ヲ過リ與圓ニ切スル圓ヲ畫クコトニ歸スルガ故ニ P, P, C ノ問題ニ化ス, コレ已ニ解決シタ問題デアル。

(7) ニ於テハ與ヘラレタ二ツノ圓ノ相似ノ中心ヲ S 及ビ S' トスルト, 夫等ニ關シテ所要ノ圓ノ羃ヲ知ルコトヲ得ルカラ又 P, P, C ノ問題ニ化スル。(8) ハ本題デ已ニ(5) ニ誘導シテ解決シタ。(9) ハ二ツノ與ヘラレタ圓ノ中, 大ナル圓ヲ, 此二ツノ圓ノ半徑ノ和或ハ差ヲ半徑トスル圓ニ置キ換ヘルト同時ニ, 小ナル圓ノ半徑ニ等シキ距離ダケ與ヘラレタ直線ヲ自己ニ平行ニ移動スレバ (5) ニ歸スル。最後ニ (10) ハ二

ツノ大ナル圓ヲ，此等ノ圓ノ半徑カラ最モ小ナル圓ノ半徑ヲ減ジタモノヲ半徑トスルニツノ同心圓ヲ畫ケバ問題ハ (7) ニ歸スル。

39. 定圓ヲ三等分スル同心圓ヲ畫ケ。

解 假リニ三等分セラレタリトシ，原圓ノ半徑ヲ OA 最モ內部ニアル圓ノ半徑ヲ OC，中間ノ圓ノ半徑ヲ OB トセヨ，然ラバ



$$\frac{\pi OA^2}{3}=\frac{\pi OB^2}{2}=\frac{\pi OC^2}{1}$$

$$\therefore\quad \frac{OA^2}{3}=\frac{OB^2}{2}=\frac{OC^2}{1}$$

仍ツテ次ノ如ク作圖ス。

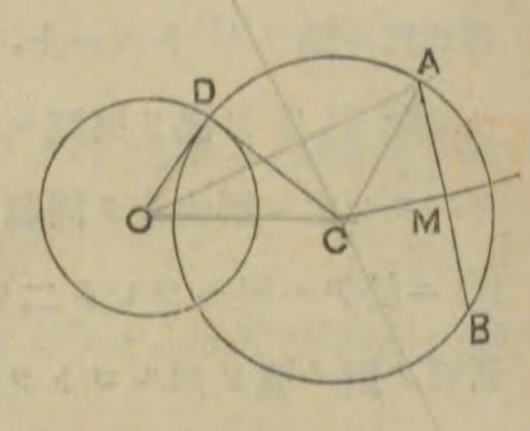
作圖 OA ノ三等分點ヲ C′, B′ トシ C′, B′ ヲ過リ OA ニ垂直線ヲ立テ OA ヲ直徑トスル半圓周トノ交點ヲ夫々 C, B トス，O ヲ中心トシ，OC, OB ヲ半徑トスル圓周ヲ畫クトソレガ所要ノモノデアル。何トナレバ原圓及ビ OB, OC ヲ半徑トスル圓ノ面積ヲ夫々 S, S′, S″ トスルト

$$\begin{aligned}S:S':S''&=\pi OA^2:\pi OB^2:\pi OC^2\\&=OA^2:OB^2:OC^2\\&=OA^2:OB'.OA:OC'.OA\\&=OA:OB':OC'\\&=3:2:1\end{aligned}$$

仍ツテ證明セラレタ。

40. 二定點 A, B ヲ通リ且ツ一定圓 O ト直交スル圓ヲ作レ。

解析 所要ノ圓ノ中心ヲ C トシ，O 圓トノ交點ヲ D トスルト假定ニヨリ二ツノ圓ハ直交スルニヨリ D ニ於テノ各圓ヘノ切線ハ夫々他ノ圓ノ中心ヲ過ル，又圓ノ中心 C ハ AB ノ垂直二等分線上ニアル。



而シテ　　$CA^2=OC^2-OD^2$

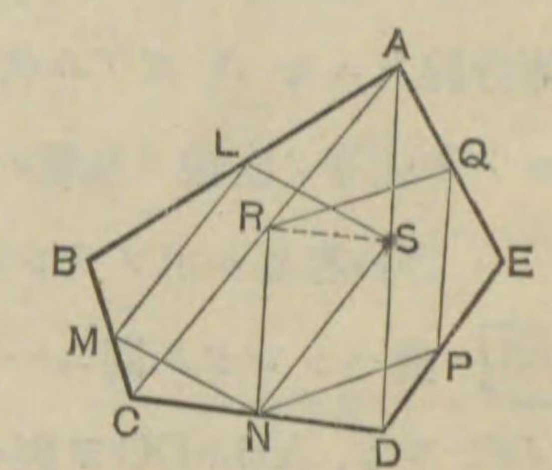
從ツテ　$OC^2-CA^2=r^2$　(r ハ O 圓ノ半徑デアル)

然ルニ O, A ハ定點ニシテ r ハ定半徑ナルニヨリ C 點ハ此ノ二點ヨリノ距離ノ平方ノ差ガ一定ナル點ノ軌跡上ニアル。

作圖 AB ノ垂直二等分線 MC ヲ作リ，次ニ O, A ヨリノ距離ノ平方ノ差ガ O 圓ノ半徑ノ平方ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求メヨ，此ノ軌跡ト MC ノ交點ヲ C トシ，C ヲ中心トシ CA ヲ半徑トスル圓ハ所要ノモノデアル。

41. 五邊形ノ各邊ノ中點ノ位置ヲ知ツテ此五邊形ヲ作レ。

解 所要ノ五邊形ヲ ABCDE トシ，各邊ノ中點ヲ夫々 L, M, N, P, Q トシ對角線 AC, AD ノ中點ヲ夫々 R, S トセヨ。



LM, NS ヲ作ルト LM//AC, NS//AC ナルニヨリ ML//NS 又 ML, NS ハ何レモ $\frac{1}{2}$AC ニ等シ。故ニ LMNS ハ平行四邊形デアル。而シテ L, M, N ハ定點デアルカラ第四ノ頂點 S ノ位置ガ定マル。同樣ニ RNPQ モ平行四邊形デアルカラ R ヲ定ムルコトヲ得。仍ツテ次ノ如ク作圖スレバヨイ。

作圖 L, M, N ヲ三頂點トスル平行四邊形ヲ作リ其第四頂點ヲ S トシ，次ニ N, P, Q ヲ三頂點トスル平行四邊形ヲ作ツテ其第四頂點ヲ R トス，S, R ヲ結ベ，次ニ N ヲ過リ SR ニ平行線 CND ヲ引キ CN=ND=SR ナラシメ DP ヲ結ビ之レヲ延長シテ DP=PE ナラシメ，EQ ヲ結ビ QA=EQ ナラシメ AL ヲ結ビ LB=AL ナラシメ，BC ヲ結ベ，然ラバ ABCDE ハ所要ノ五邊形デアル。

注意 上ノ解法ヲ擴張スレバ，一般ニ奇數邊ノ多邊形ノ中點ノ位置ヲ知ツテ其多邊形ヲ作圖スルコトガ出來ル。

42. 各邊ノ中點ヲ過リ，コレニ引ケル垂線ノ位置ヲ知ツテ其多角形ヲ作レ。

解 多角形ヲ ABCDEF トシ，(玆ニ六邊形ヲトツテ證明スルケレドモ一般ノ多角形デモ同樣ノ證明デ出來ル。) AB, BC, CD, ……… ノ中點ニテノ垂線ヲ夫々 α, β, γ, ……… トスル。

今 A 點ヲ垂線 α ニ關シテ對稱ノ位置ニマデ持チ來ラシムレバ A 點ガ B 點ニ重ナル。ソコデ更ニ之ヲ β ニ關シテ對稱ノ點ニ移スト C 點ニ重ナル。

以下同様ノ手續ヲ繰リ返スト A 點ハ遂ヒニ元ノ自己ノ位置ニ歸ル。

ソコデ任意ノ點P (圖形上ニアルモアラザルモ可) ヲトリ，先キニ A 點ニ就イテ行ツタト同様ノ方法ヲ施シテ P_1 ノ位置ニ至ルモノトスル。

然ルニ A ハ P ト P_1 トカラ等距離ニ在ルベキニヨリ線分 PP_1 ノ垂直二等分線上ニ A 點ガアル筈デアル。

次ニ P 點以外ノ點 Q ヲトリ，コレニ對應スル點 Q_1 ヲ作レバ QQ_1 ノ垂直二等分線上ニモ A ガアル筈デアル。

ヨツテ此等ノ直線ノ交點ハ求ムル一ツノ頂點 A デアル。A ガ分レバ B C,…… 等ハ容易ニ求メラレル。

43. 與ヘラレタル圓ニ一ツノ弦 AB ヲ引キ中心 O ヨリ之ニ下セル垂線ヲ OC トシ，AB+OC ヲ與ヘラレタル長サニ等シカラシメントス，AB ノ長サヲ求メヨ。

解 今圖形ガ出來タモノトシ OC ヲ延長シソノ上ニ D ヲトリ OD ヲシテ與ヘラレタ線分 l トスルト，CD=AB デアルカラ直角三角形 ACD ノ形狀一定デアル。

ヨツテ $\widehat{ADC}$ ガ一定デアルカラ點 D カラ OD ト $\widehat{ADC}$ ニ等シキ角ヲナスヤウニ直線 DA ヲ引キ圓周ト交ル點ヲ A トシ A カラ OD ニ垂線ヲ引ケバ弦 AB ノ長サガ定マル。

備考 今コレヲ代數的ニ計算センニ $AC=x, OC=y$ トスルト，

$$2x+y=l \quad \cdots\cdots(1)$$

又 $$r^2=x^2+y^2 \quad \cdots\cdots(2)$$

(1),(2) カラ $$x=\frac{2l\pm\sqrt{5r^2-l^2}}{5}$$

x ガ實數ナルタメニハ $$\sqrt{5}r\geqq l \quad \cdots\cdots(4)$$

又 x ガ r ヨリモ小ナル正數デナケレバナラヌ，

$$\therefore \quad r\geqq\frac{2l+\sqrt{5r^2-l^2}}{5} \quad \cdots\cdots(5)$$

$$r\geqq\frac{2l-\sqrt{5r^2-l^2}}{5}\geqq 0 \quad \cdots\cdots(6)$$

(5) ハ (4) ニヨツテ滿足セラレ，

(6) ヨリハ $l>r$ ……(7)

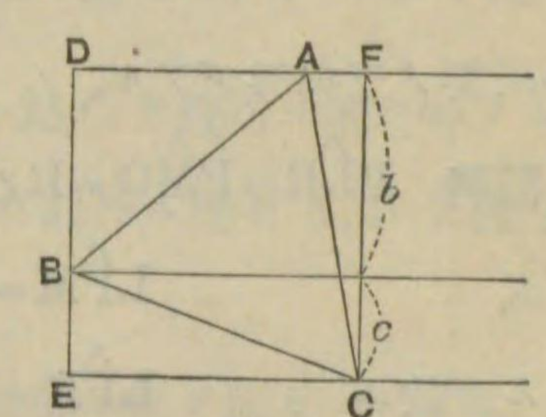
(4),(7) ガ同時ニ滿足セレルト x ノ値ガ二ツアリ，(4) ガ滿足スルモ (7) ガ滿足セラレネバ x ノ値ガ一ツアル，又 (4) ガ滿足セラレネバ x ノ値ガナイ。

44. 三ツノ平行線ノ中間ニアルモノヨリ他ノ二ツノ平行線ニ至ル距離ヲ b, c トス。然ル時ハ此三ツノ直線上ニ一ツ宛頂點ヲ置ク正三角形ヲ作圖スル時ハ邊ノ長サハ

$$2\sqrt{\frac{b^2+bc+c^2}{3}}$$

ニ等シイ。

解 正三角形ヲ ABC トシ CF, DBE ヲ共通垂線トシ $b\geqq c$ ナリト假定スルト AB=AC ナルコト及ビぴたごらすノ定理ニヨツテ



$$DA\geqq AF$$

正三角形ノ一邊ノ長サヲ x トスルト

$$AD^2=AB^2-BD^2=x^2-b^2$$
$$AF^2=AC^2-(b+c)^2=x^2-(b+c)^2$$
$$CE^2=BC^2-BE^2=x^2-c^2$$

次ニ $$AF^2=(CE-AD)^2=CE^2+AD^2-2CE.AD$$

故ニ $$x^2-c^2+x^2-b^2-2CE.AD=x^2-(b+c)^2$$

即チ $$x^2+2bc=2CE.AD$$

故ニ又 $$(CE+AD)^2=CE^2+AD^2+2CE.AD$$
$$=2x^2-b^2-c^2+x^2+2bc$$
$$=3x^2-(b-c)^2$$

故ニ $$(CE^2-AD^2)^2=(CE+AD)^2(CE-AD)^2$$
$$=\{3x^2-(b-c)^2\}\{x^2-(b+c)^2\}$$

然ルニ $CE^2-AD^2=b^2-c^2$ デアルカラ結局

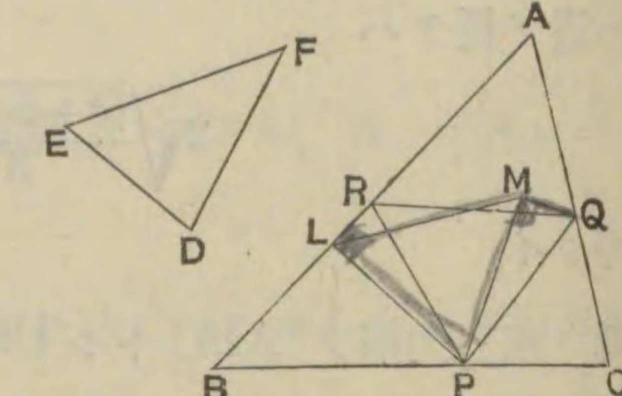
$$(b^2-c^2)^2=\{3x^2-(b-c)^2\}\{x^2-(b+c)^2\}$$

コレヲ計算スルト

$$x=2\sqrt{\frac{b^2+bc+c^2}{3}}$$

45. 三角形 ABC ニ與ヘラレタ三角形ト相似ナル三角形ヲ内接セシメ,其一ツノ頂點ヲ三角形ノ一邊 BC 上ノ與ヘラレタ點 P ニアラシメヨ。

作圖 P カラ AB ニ垂線 PL ヲ引キ其上ニ與ヘラレタ三角形 DEF ニ相似ナ三角形 PLM ヲ作リ, M カラ PM ニ垂線 MQ ヲ引キ AC ト Q デ交ラシメル。



次ニ $\widehat{QPR}=\widehat{LPM}$ ナラシムルガ如ク PR ヲ引キ AB ト R デ交ラシメルト △PQR ハ所要ノ三角形デアル。

證明 $\widehat{PLR}=\widehat{PMQ}=R\angle$

又 $\widehat{LPM}=\widehat{QPR}$

ナルガ故ニ $\widehat{LPR}=\widehat{MPQ}$

故ニ △LPR∽△MPQ

故ニ LP:PR=PM:PQ

或ハ LP:PM=PR:PQ

故ニ △PLM∽△PQR 從ツテ △PQR∽△DEF

注意 △DEF ト逆ニ相似ナルヤウニ △PLM ヲ畫クコトヲ得ベク,又 P ノ所ニ D, E, F ノ何レカヲ置クコトヲ得ルガ故ニ都合六通リノ方法ガアル。

46. 與ヘラレタ半徑ノ圓ヲ置キ,同一ノ直線上ニアラザル三ツノ點ヨリ等距離ナラシメヨ。

解 與ヘラレタ三ツノ點ヲ A, B, C トスルト,假定ニヨリ同一ノ直線上ニナイカラ此等ノ點ヲ過ル一ツノ圓ヲ畫クコトヲ得,其中心ヲ O トセヨ。然ル時 O ヲ中心トシ與ヘラレタ半徑ノ圓ヲ畫クト,夫レハ所要ノ圓ノ一ツデアル。而シテ其半徑ガ OA ヨリモ大ナルカ又ハ小ナルカニ從ヒ, A, B, C ガ所要ノ圓ノ内部ニアルカ或ハ外部ニアル。

次ニ與ヘラレタ點ノ一ツ例ヘバ C ヲ圓ノ内部ニ置キ,殘リノ二ツヲ外部ニ置クガ如キ圓ヲ畫カンニ,假リニ出來タトシ中心ヲ O′ トス。O′C ヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ A カラ O′ ノ方向ニ引ク直線 AO′ ノ延長ト交ハル點ヲ D トスルト AD ガ與ヘラレタ半徑ノ二倍ニ等シイ筈デアル。又 A, B ガ O′ カラ等距離ニアルベキニヨリ O′ ガ AB ノ垂直二等分線ニアル筈デス。故ニ O′ ガ次ニ述ベル圓ノ中心ニ一致スル。

1° AB ノ垂直二等分線上ニ中心ヲ有シ,

2° 點 C ヲ通リ,

3° A ヲ中心トシ與ヘラレタ半徑ノ二倍ニ等シイ長サヲ半徑トスル圓ニ切スル。

カクノ如キ條件ニ適スル中心ガ二ツアリ。一ツハ點 C ヲ圓内ニ置クモノニシテ上ニイヘル目的ニ適スルモノ,他ノ一ツハ C ヲ圓外ニ置キ A, B ヲ圓内ニ置クモノナリ。

吟味 與ヘラレタル點 A, B, C ヲ悉ク内部或ハ外部ニ置ク圓ガ一ツアリ,一ツノ點ヲ外部ニ他ノ點ヲ内部ニ置クモノ及ビ一ツノ點ヲ内部ニ他ノ點ヲ外部ニ置ク圓ガ各一個宛アルヲ以テ所要ノ圓ハ一般ニハ七個アル。

47. 定角 XOY ノ内部ニアル定點 P ヲ通ツテ一ツノ直線ヲ引キ二邊 OX, OY ヲ夫々二點 A, B デ截リ

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{k}$$

ナラシメヨ. 但シ K ハ與ヘラレタ線分トスル。

解析 問題ハ解カレタモノトシ OX 上ニ $OC=k$ トナル如キ點 C ヲトリ C カラ OY ニ平行線ヲ引キ AB トノ交點ヲ D トシ OC, CD ヲ二隣邊トスル平行四邊形 OCDE ヲ作ルト

$$\frac{BE}{OB}=\frac{DE}{OA}=\frac{k}{OA}\quad(\because DE=k)$$

而シテ假定ニヨツテ

$$\frac{k}{OA}+\frac{k}{OB}=1$$

デスカラ

$$\frac{BE}{OB}+\frac{k}{OB}=1 \quad 即チ\quad OB-BE=k$$

從ツテ $OE=k$

トナル。故ニ次ノ作圖法ヲ得。

作圖 OX, OY 上ニ $OC=OE=k$ ナルガ如キ點 C, E ヲ取リ OC, OE ヲ二隣邊トスル平行四邊形 OCDE ヲ作ルト直線 DP ガ所要ノモノデアル。(證明ヲ省ク)

吟味 P ト D トガ一致スル時ハ不定デ, PD ガ O ヲ通ル時ハ不能デアル。又 PD ガ OX, OY ノ何レカ一ツノ延長ト交ハル時ハ $\frac{1}{OA}$ ト $\frac{1}{OB}$ トノ差ガ $\frac{1}{k}$ ニ等シキ場合ノ解トナル。

昭和三年度文檢口述試驗問題

「作圖問題ニ於ケル解析ノ意義ヲ述ベヨ」

大正十三年度(第四十一回)文檢口述試驗問題

「與ヘラレタル凸四角形 ABCD ニ於テ頂點 A ヲ通過スル直線ヲ引キ其面積ヲ三等分セヨ」

第二章　練習問題

1. 與ヘラレタ弧 APB ノ上ニ一點 P ヲ求メ,弦 PA, PB ノ比ヲ $m:n$ ナラシメヨ。
2. 三角形 ABC 内ニ一點 O ヲ求メ, $\widehat{OBC}=\widehat{OCA}=\widehat{OAB}$ ナラシメヨ。
3. 三角形 ABC 内ニ一點 P ヲ求メ, 三ツノ三角形 APB, BPC, CPA ノ面積ノ比ヲシテ $l:m:n$ ナラシメヨ。
4. 同一直線ノ三ツノ部分 AB, BC, CD ヲ等角ニ見ルガ如キ點ヲ求メヨ。
5. 定角 XOY ノ一邊 OX 上ニ定點 A アル。他ノ邊 OY 上ニ二點 B, C ヲ求メ BC ヲ定長 l ニ等シカラシメ且ツ $\widehat{BAC}$ ヲ直角ナラシメヨ。

6. 與ヘラレタ角 XOY ノ OX 邊上ニ定點 A アリ, A 點ヘノ距離及ビ OY ヘノ距離相等シキ點 P ヲ OX 上ニ定メヨ。
7. 定圓周上ノ定點 A カラ互ニ直交スル二ツノ弦ヲ引キ一ツノ弦ヲシテ他ノ弦ノ二倍ニ等シカラシメヨ。
8. 定直線上ニ一點 P ヲ求メ, P カラ定點 A ニ至ル距離 PA ト, P カラ定圓 O ニ引ク切線 PT トヲ等シカラシメヨ。

注意 PA=PT ナルガ如キ軌跡ハ一ツノ直線ナルコトニ注意セヨ。

9. 延長ヲ許サザル二直線ノナス角ヲ二等分スル直線ヲ引ケ。
10. 定圓ノ二ツノ與ヘラレタ半徑ノ爲メニ三等分セラレル弦ヲ引ケ。
11. 定點 P ヲ過ル直線ヲ引キ與ヘラレタ二ツノ同心圓周ニヨツテ截リトラレル三ツノ部分ノ長サヲ等シカラシメヨ。
12. 與ヘラレタ正方形 ABCD ノ點 CD 上ニ一點 P ヲ求メ, $AP=DC+PC$ ナラシメヨ。
13. 與ヘラレタ三角形 ABC ノ二邊 AB, AC ト夫々 D, E デ交ル定方面ノ直線ヲ引キ, AD, CE ノ和ヲ定長 l ニ等シカラシメヨ。
14. 與ヘラレタ三角形 ABC ノ二邊 AB, AC 上ニ夫々點 D, E ヲトリ, 線分 DE ハ定長 l ニ等シク, 且ツ $AD=CE$ 又ハ $AD=2.CE$ ナラシメヨ。
15. 定點 P ヲ過リ定角 XAY ノ二邊ト夫々 B, C ニ於テ交ル直線ヲ引キ, 三角形 ABC ノ周圍ヲ定長 l ニ等シカラシメヨ。

注意 AX, AY 上ニ $\frac{l}{2}$ ニ等シク AS, AT ヲトリ S, T デコレ等ノ直線ニ切スル圓ヲ畫キ, P カラ此圓ニ切線ヲ引ケ。

16. 二定平行線 X, Y 及ビ X 上ニ定點 A アル。X, Y 外ノ定點 P ヲ過ル直線ヲ引キ, X, Y トノ交點ヲ夫々 B, C トシ $AB=BC$ 又ハ $AB=2BC$ ナラシメヨ。
17. 二ツノ角及ビ周圍ヲ知ツテ三角形ヲ作レ。
18. 底邊 a, 他ノ二邊ノ和 l, 底邊ノ一端カラ對邊ヘノ垂線ノ長サ p ナルコトヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

19 等速度ヲ以テ一直線ニ航行スル汽船アリ，或人一定地點カラ其距離ヲ觀測セシニ最初ハ d_1 浬ナリシガ 30 分間ヲ經テ d_2 浬トナリ，更ニ 30 分間ヲ經タルニ d_3 浬トナツタトイフ。同船ハ一時間ニ進メル距離ヲ求ムベキ作圖法ヲ求メヨ。

注意 本題ハ △ABC ニ於テ二邊 AB, AC ノ長サガ夫々 d_1, d_3 ニシテ頂點 A カラ底邊ニ引ク中線 AD ノ長サガ d_2 ナルコトカラ此三角形ヲ作圖スルコトニ歸スル。

20. 二ツノ頂點カラノ中線ト殘リノ頂點カラノ垂線ガ與ヘラレタ時三角形ヲ作レ。

21. 與ヘラレタ三角形ニ一ツノ三角形ヲ內接セシメルニ，其ノ一ツノ頂點ヲ與ヘラレタ三角形ノ定邊上ノ定點ニアラシメ且ツソノ角ノ大サヲ與ヘラレタ角ト等シクシ，ソノ角ノ對邊ヲシテ與ヘラレタ方向ニアラシムルヤウニセヨ。

22. 一ツノ頂角，一ツノ中線及ビ一ツノ高サヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。種々ノ場合ヲ吟味セヨ。

23. 底邊ヘノ高サ及ビ他ノ二邊ヘノ中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

24. 一ツノ頂角及ビ二ツノ中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

25. 底邊ヘノ高サト，中線及ビ兩底角ノ差ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

26. 底邊，頂角及ビ他ノ二邊ノ和若クハ差ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

27. 二邊ノ積，第三邊ヘノ中線及ビ此邊ノ兩端ニ於ケル角ノ差ヲ知ツテ三角形ヲ作レ。

28. 頂角，之ヲ夾ム二邊ノ和及ビ一中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

29. 四邊形 ABCD ニ於テ邊 AB, BC 及ビ AC, BD 並ビニ一角 D ヲ知ツテ此四邊形ヲ作レ。

30. AB, BC, BD 及ビ角 A, 角 B ヲ知ツテ四邊形 ABCD ヲ作レ。

31. AB, AC 及ビ三ツノ角 A, D, C ヲ知ツテ四邊形 ABCD ヲ作レ。

32. 對角形ト一邊トノ差ヲ與ヘテ正方形ヲ作レ。

33. 邊數 n ナル多角形狀ノ球突キ臺アリトシ，ソノ上ニ二ツノ球 P, Q アルトキ，P ヲ突イテ順次ニ各邊ニ反射セシメ遂ヒニ Q ニ衝突セシメントスルニハ最初何レノ方向ニ突クベキカ。

34. 定圓 O 及ビ定點 P アリ，圓 O ニ定長 l ニ等シイ弦 AB ヲ引キ，角 APB ヲ定角 α ニ等シカラシメヨ。

35. 圓內ノ定點ヲ過リ弦ヲ引キ其ノ二ツノ分ノ比ヲ $m:n$ ナラシメヨ。

36. 與ヘラレタ圓ニ面積ト高トガ與ヘラレタ梯形ヲ內接セヨ。

37. 與ヘラレタ一ツノ直線ニ切シ，與ヘラレタ一定點ヲ過リ且ツ中心ガ他ノ定直線上ニアル圓ヲ作レ。

38. 一定點ヲ過リ一ツノ與ヘラレタ圓ニ切シ，他ノ一定圓ト直交スル圓ヲ畫ケ。

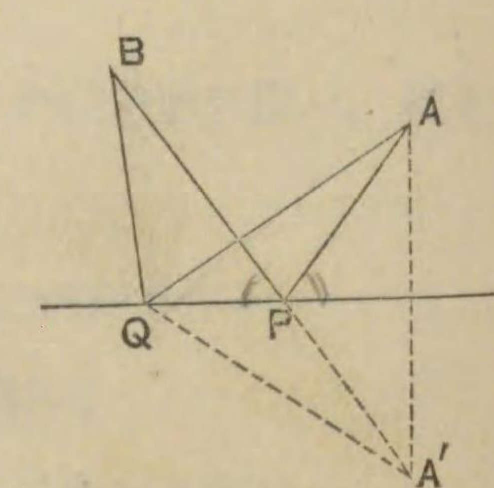
第八編　最大最小問題

63. 定義　幾何學的量例ヘバ直線，角，面積等ハ，與ヘラレタ條件ノ下ニ變化スル時，其ノ取リ得ル最大，最小ノ値ヲ研究スル問題ヲ最大最小問題トイフ。

64. 線分及ビ線分ノ和，差ニ關スル問題。

例 1.　圓ノ內部ノ與點 P ヲ過ル弦ノ最大ナルモノハ中心 O ヲ過ギル直徑 OP デ，最小ナルモノハ P ヲ過ギテ OP ニ垂直ナル弦デアル。

例 2.　與ヘラレタ直線上ニ一點ヲ求メ，コレカラ其直線ノ同ジ側ニアル與ヘラレタ二ツノ點ニ至ル距離ノ和ヲ最小ナラシメヨ。



解　コレハ古來有名ナ問題デ而カモ平易デアルガ一應說明シテ置カウ．與ヘラレタ直線ヲ X トシ，其同ジ側ノ二ツノ點ヲ A, B トスル。直線 X ニ關スル A ノ對稱點ヲ A' トシ BA' ガ X ト交ル點ヲ P トスルト P ハ所要ノ點デアル。何トナレバ X 上ノ他ノ任意ノ點ヲ Q トスルト

$$QA=QA' \qquad PA=PA'$$

デアルカラ

$$PA+BP=A'B \qquad AQ+BQ=A'Q+BQ$$

而シテ $\triangle A'BQ$ カラ $A'Q+BQ>A'B$

ヨツテ $AP+BP<AQ+BQ$

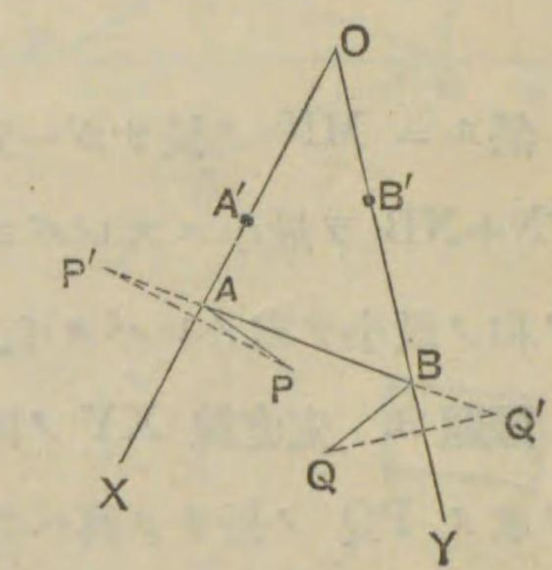
仍ツテ P ハ所要ノ點デアル。

注意 i.　本解ハ A ノ對稱點 A' ヲ求メテ交點 P ヲ得タケレドモ B ノ對稱點 B' ヲ以ツテスルモ同一交點 P ヲ得ルコトニ注意スベシ。

注意 ii.　問題ノ陳述カラ見ルト作圖問題デアルカラ，解析，作圖，證明，吟味トイフ工

合ニシテ行クノガ正式デアルガ，一々ソンナコトヲヤラナイ勿論嚴正デハナイ。

類題 1.　一ツノ角內ニ二ツノ定點アリ其中ノ一定點カラ順次二ツノ直線ニ至リ終ニ他ノ定點ニ至ル最短通路ヲ求メヨ。



解　二定點ヲ P, Q トス。今 P ノ OX ニ關スル對稱ノ點ヲ P', Q ノ OY ニ關スル對稱ノ點ヲ Q' トシ，二點 P', Q' ヲ結ブ直線ガ OX, OY ト交ル點ヲ夫々 A, B トスレバ所要ノ通路ハ $PABQ$ デアル。

何トナレバ，A, B ノ外ニ任意ニ A', B' ヲトル時

$$PA'=P'A' \qquad B'Q=B'Q'$$

デアルカラ

$$PA'+A'B'+B'Q=P'A'+A'B'+B'Q'$$

又　$PA=P'A \qquad BQ=BQ'$

デアルカラ

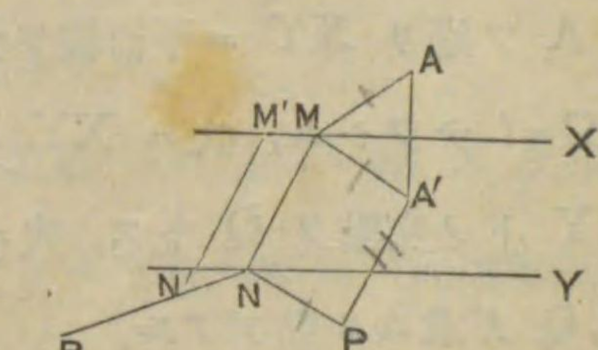
$$PA+AB+BQ=P'A+AB+BQ'=P'Q'$$

然ルニ四邊形 $P'A'B'Q'$ ニ於テ

$$P'A'+A'B'+B'Q'>P'Q'$$

仍ツテ通路 $PABQ$ ハ最短距離テアル。

類題 2.　二ツノ平行線ノ外側ニ一ツ宛二ツノ定點 A, B アル時，A ヨリ B ニ至ル距離ノ最小ナル通路ヲ求メヨ。但シ平行線間ハ一定ノ方向ニ進ムモノトス。



解　X, Y ヲ二ツノ平行線トシ，$M'N'$ ヲ平行線間ノ通路ノ方向トスル。

今 X ニ關スル A ノ對稱點 A' ヲ求メ，$A'P$ ヲ $M'N'$ ニ等シク且ツ平行ニ引クト P點ハ定點デアル。

サテ A カラ B ニ至ル任意ノ通路 $AMNB$ ヲ作ルニ (MN ハ $M'N'$ ニ平

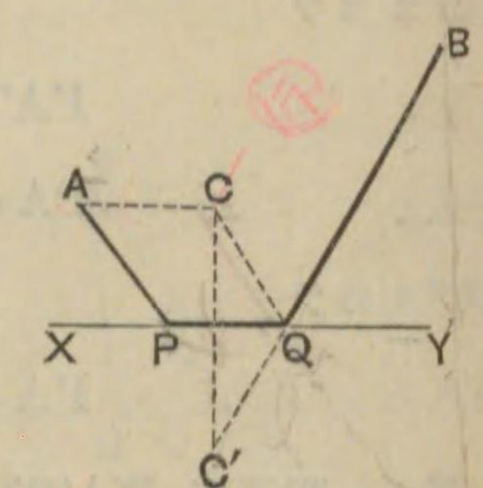
行ナルコト勿論デアル。A'MNP ハ平行四邊形デアツテ A'M=AM デアルカラ

$$AM+MN+NB=A'M+MN+NB$$
$$=PN+MN+NB$$

然ルニ MN ノ長サガ一定デスカラ, A カラ B ニ至ル最短通路ハ結局 PN+NB ヲ最小ニスレバヨイ。ヨツテ二定點 B,P カラ Y 直線ニ至ル距離ノ和ノ最小ヲ求メレバヨイ。

類題 3. 定直線 XY ノ同ジ側ニ二定點 A,B アリ今 XY 上ニ二點 P,Q ヲ求メ PQ ノ長サヲ與ヘラレタル線分ニ等シカラシメ, 且ツ AP, PQ, QB ノ和ヲ最小ナラシメヨ。

解 假リニ問題ガ解カレタリトシ, PQ=l トセヨ, AC ヲ PQ ノ方向ニ引キ



且ツ $AC=PQ=l$

(l ハ與ヘラレタル線分ノ長サ)ナラシメ, CQ ヲ結ベ然ルトキハ APQC ハ平行四邊形ニシテ

$$CQ=AP$$

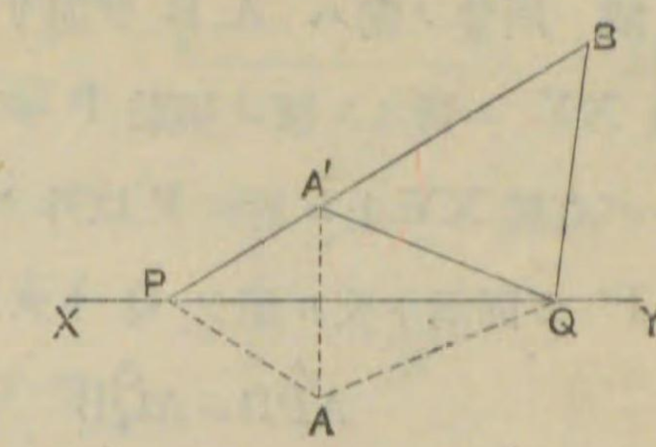
$$\therefore\quad AP+PQ+QB=AC+CQ+QB$$

然ルニ AC=l デアルカラ, AC+CQ+QB ヲ最小ナラシメンニハ, CQ+QB ヲ最小ナラシメレバ可ナリ。然ルニ C 點ハ定點デアル, 故ニ C,B カラ XY 上ニ一點ヲ求メ, CQ+QB ヲ最小ナラシムルコトニ歸ス。仍ツテ次ノ作圖法ヲ得ル。

A ヲ過リ XY ニ平行線ヲ引キ其直線上ニ於テ B ノ方向ニ C ヲ求メ, AC=l ナラシム, 次ニ XY ニ關シ C 點ノ對稱點 C' ヲ求メ, C'B ヲ結ビ XY トノ交點ヲ Q トス, 次ニ QP=l ナル如ク YX ノ方向ニ P ヲ定メヨ, P,Q ガ求ムル點デアル。

例 3. 定直線 XY 上ノ一點カラ此直線ノ兩側ニアル二定點 A,B ニ至ル距離ノ差ヲ最大ナラシメヨ。

解 XY ニ關シテ A ノ對稱點 A' ヲ求メ, BA' ヲ結ビ其延長ガ XY ト交ル點ヲ P トスルト, P ハ所要ノ點デアル。何トナレバ XY 上ニ P 以外ノ任意ノ點 Q ヲトリ, QA, QB, QA' ヲ結ブト



$$PB-PA=PB-PA'=A'B$$

又 $$QB-QA=QB-QA'<A'B$$

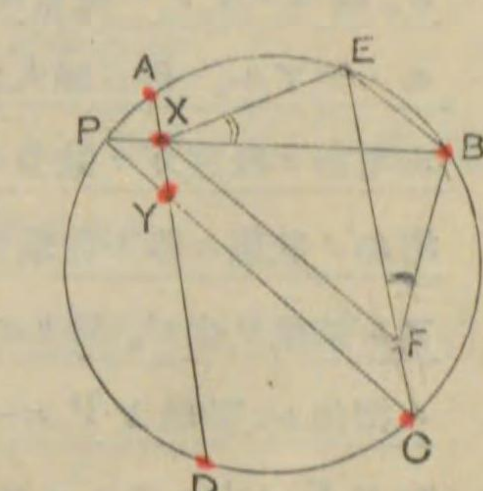
故ニ $$PB-PA>QB-QA$$

仍ツテ P ハ所要ノ點デアル。

注意 A ノ對稱點 A' ノ代リニ, B ノ對稱點 B' ヲ以テスルモ同一ノ點 P ヲ得ルコトニ注意セヨ。

例 4. A, B, C, D ヲ與ヘラレタ圓周上ニ順次ニ列ベタ四點トシ, P ヲ周上ノ動點トシ, PB, PC ガ AD ニ交ル點ヲ夫々 X, Y トス。然ル時 XY ヲ最大ナラシメル點 P ノ位置ヲ求メヨ。

解 P ヲ所要ノ點トシ, C ヲ通ツテ AD ニ平行ニ CFE ヲ引クトEガ定點デアル。又 X カラ PC ニ平行線 XF ヲ引クト四邊形 XYCF ハ平行四邊形デアル。ソコデ XY ノ最大ナルハ CF ノ最大ナル場合ニ起ルベク從ツテ EF ノ最小ナル場合ニ起ルベシ。



而シテ EF ノ最小ナルハ $B\hat{F}E$ ノ最大ナル時デアル。

サテ $$B\hat{P}C=B\hat{E}C \qquad B\hat{P}C=F\hat{X}B$$

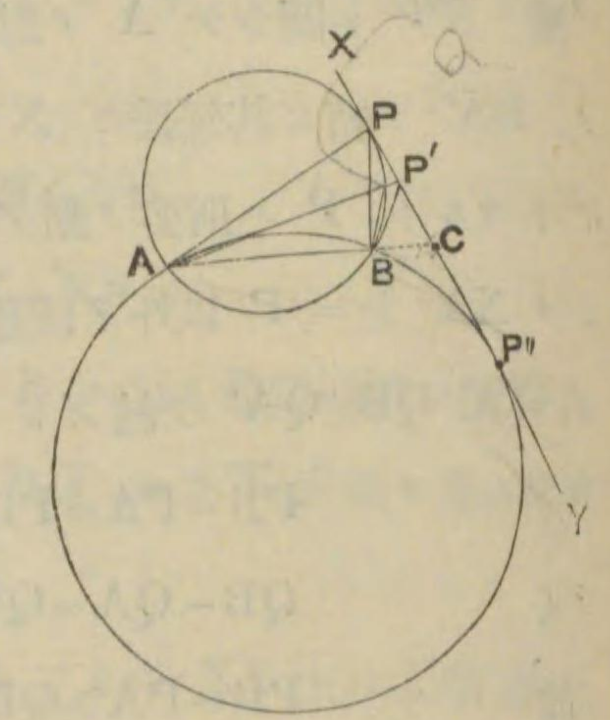
デアルカラ四ツノ點 B, E, X, F ハ同一ノ圓周上ニアル。

故ニ $B\hat{F}E=B\hat{X}E$ デアルカラ問題ハ一ツノ定直線 AD 上ニ一點 X ヲ求メ, 定線分 BE ニ對シテ張ル角 $B\hat{X}E$ ヲ最大ナラシムル事ニ歸ス。(次節參照)

65. 角ニ關スル問題

例 1. 與ヘラレタ直線ノ同ジ側ニ二ツノ定點 A,B アリ直線上ニ一點 P ヲ求メ角 APB ヲ最大ナラシメヨ。

解　所要ノ點ハ A, B ヲ過リ與ヘラレタ直線 XY ニ切スル圓ノ切點 P デアル。何トナレバ直線 XY 上ニ於テ P 以外ノ點 P' ヲトリ AP' ガ圓周ト交ル點ヲ Q トスルト



$$A\hat{P}B = A\hat{Q}B$$

且ツ

$$A\hat{Q}B > A\hat{P'}B$$

デアルカラデス。

注意 1.　切圓ヲ作ルニハ, AB ト XY トノ交點ヲ C トスルトキ, $CP^2 = CA.CB$ ナルガ如キ線分 CP ヲ XY 上ニトリ, 三ツノ點 A, B, P ヲ過ル圓ヲ畫ケバ良イ。所ガ P ハ C 點ノ兩側ニトレルカラ所要ノ點ハ P 及ビ P'' ノ二ツデアル。併シ圓 ABP ガ圓 ABP'' ヨリモ小ナル時ハ同ジ弦 AB ノ上ニ立ツ圓周角ハ大デアルカラ $A\hat{P}B$ ガ最大ナルモノデアル。(等圓ナラバ二個アル)

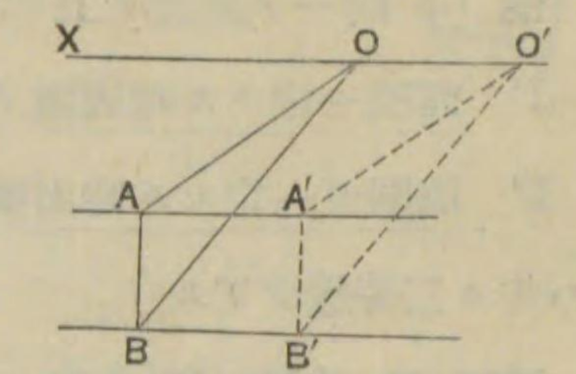
注意 2.　極大極小トイフ意義ト最大最小トイフ意義トハ數學的ニハ別個ノ概念デアル。最大トイフハ變量ガトリ得ル最大ナルモノデ,最小トハ變量ガトリ得ル最小ナルモノデアル。併シ極大極小トイフハ必ズシモソウデナイ。即チ極大トハ變量ガ次第ニ增加ノ狀態カラ減少ノ狀態ニ移ル途端ヲ意味シ, 極小トハ變量ガ減少ノ狀態カラ增加ノ狀態ニ移ル途端ヲ意味スルノデアル。此ノ見方カラ本題ヲ考ヘルト誠ニ興味アル結果ヲ生ズ。何トナレバ最初動點ガ X カラ圖中 P ニ來ル間ハ角 APB ハ次第ニ增加シ, 動點ガ P ニ一致セルトキ角 APB ハ極大値(最大値ト一致スル)ヲトリ, 動點ガ C ノ方ニ進ムニ及ビ次第ニ減少シ遂ヒニ, C ニ一致スルトキ角 APB ハ零トナリ。所謂極小値(最小値ト一致スル)ヲトル。尙動點ハソレカラ P'' ノ方ニ進ムニ從ツテ次第ニ增加シ P'' ニ一致スル時極大値(圖デハ最大値トハナラヌ)ヲトリ, 最後ニ動點ハ尙モ Y ノ方ニ進ムト角 APB ハ次第ニ減少スルノデアル。

類題　與ヘラレタ圓周上ニ一點 P ヲ求メ, 圓周外ニアル二ツノ定點 A, B ニ至ル直線 PA, PB ヲ引キ, 角 APB ヲ最大又ハ最小ナラシメヨ。

例 2.　二ツノ平行線ト夫等ノ間ニアラザル一點 O トアリ, 此平行線ノ共通垂線ノ部分ガ此點ニ於テ最大ナル角ヲ張ルヤウナ共通垂線ノ位置ヲ求メヨ。

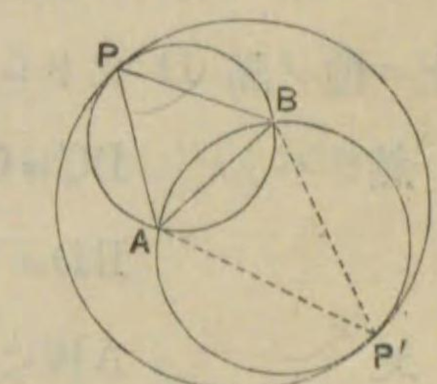
解　AA', BB' ヲ與ヘラレタ平行線, O ヲ定點トシ, 共通垂線 AB ノ位置ヲ

シテ $A\hat{O}B$ ヲ最大ナルヤウニ定メントス。サテ O ヲ固定シ AB ノ位置ヲ求メル代リニ任意ノ共通垂線 $A'B'$ ヲトリ, 定點 O カラ AA' ニ平行ニ引イタ直線 X ノ上ニ一點 O' ヲ求メ $A'\hat{O'}B'$ ヲ最大ナラシメ。然ル後 $\triangle A'B'O'$ ヲ平行ニ移動シテ O' ヲ O ニ重ネタル時ノ $A'B'$ ノ位置ハ即チ AB トナルノデアル。然ル時ハ例 1 ニ歸スル。



例 3.　與ヘラレタ圓周上ニ一點 P ヲ求メ, コレカラ圓周内ニアル與ヘラレタ二點 A, B ニ至ル直線 PA, PB ヲ引キ角 APB ヲ最大ナラシメヨ。

解　所要ノ點 P ハ A, B ヲ通リ與圓ニ切スル圓ノ切點ナルコト明カデアル。

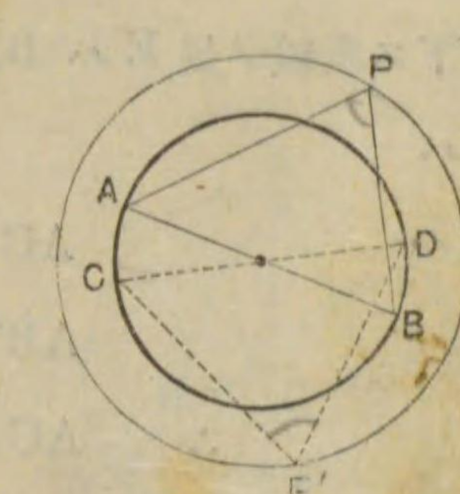


但シ與圓ニ切スル圓ガ二ツアルカラ切點モ又二ツアル。ソノ何レモ極大値ヲトラシメルモノデアルガ, 問題ガ最大角ヲ求メヨトイフノデアルカラ夫等ノ二ツノ中, 小ナル圓ノ周上ノ切點ヲ以テ所要ノ點トセネバナラヌ。

注意　AB ノ延長ガ與ヘラレタ圓周ト交ル點ヲ P トスルト $A\hat{P}B$ ガ極小ノ角(最小ノ角)デアル。本問題ヲ利用スルト次ノ問題ハ容易ニ解決出來ル。

類題　與ヘラレタ圓周外ノ定點カラ直徑ヲ最大角ニ見込マントス。直徑ノ位置如何。

解　定點ヲ P トシ, 所要ノ直徑ヲ AB トス。今直徑 AB ヲ求ムル代リニ, 任意ノ直徑 CD ヲ固定シ P 點ヲ圓ノ中心カラ常ニ等距離ニアルヤウニ動カスモノトスルト, P 點ハ與圓ト同心ナル圓ノ上ニアル。然ル時ハ前題ニヨツテ角 $CP'D$ ヲ最大ナラシメルガ如キ點 P' ヲ求ムルコトガ出來ル。然ル後 $\triangle CP'D$ ヲ廻轉シテ P' ヲ P ノ位置ニマデ動カセバ直徑 CD ハ所要ノ直徑 AB ノ上ニ重ナル。



66.　三角形ノ邊ト面積ニ關スル問題

例 1. 同一ノ底邊ノ上ニ立ツ三角形ノ中

1° 面積一定ナル時周圍ノ最小ナルモノ

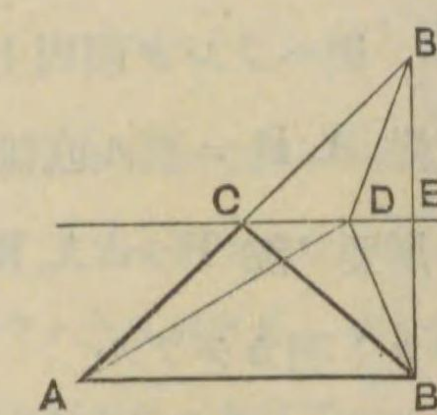
2° 周圍ガ一定セル時面積ノ最大ナルモノ

ハ共ニ二等邊デアル

證明 1° AB ヲ與ヘラレタ底邊トスルト，面積一定ナル故ニ此三角形ノ頂點ハ底邊ニ平行ナル直線 CD 上ニアル。

BE ヲ CD ニ垂直ニ引キ，之ヲ B′ ニ延長シ

$$EB'=BE$$



ナラシム，AB′ ヲ結ビ CD ト C ニ交ラシメルト △ACB ハ二等邊デアル。ソコデ高サ CD 上ニ他ノ點 D ヲトレ。

然ラバ $BC=CB'$

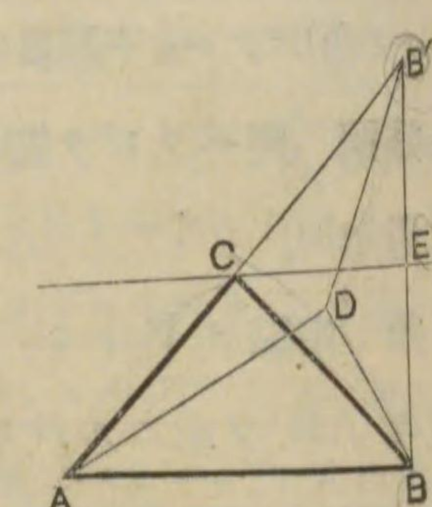
$BD=DB'$

又 $AB'<AD+DB'$

$\therefore\ AC+CB<AD+DB$

即チ二等邊三角形 ABC ハ最小ナル周圍ヲ有スル。

2° AB ノ上ニ與ヘラレタ周ヲモツ任意ノ △ADB，及ビ二等邊三角形 ABC ヲ作レ。



AC ヲ延長シ CB′=CB ナラシムレバ C カラ BB′ ニ下ス垂線ノ足 E ハ BB′ ノ中點デアル。DB′ ヲ引ケバ

$$AC+CB=AB'$$

$$AB'<AD+DB'$$

$$\therefore\ AC+CB<AD+DB'$$

然ルニ假定ニヨリ $AC+CB=AD+DB$

$$\therefore\ DB<DB'$$

即チ D 點ハ底邊 AB ト CE トノ間ニアラネバナラヌ。

$$\therefore\ \triangle ACB>\triangle ADB$$

デアル。

例 2. 凡テノ三角形ノ中

1° 面積ガ與ヘラレタ時周圍ノ最小ナルモノ

2° 周圍ガ與ヘラレタ時，面積ノ最大ナルモノハ等邊三角形デアル。

證明 底邊 BC ヲ任意ノ長サトシタ時ハ前定理ニヨッテ AB=AC ナル時，即チ二等邊三角形ノ時ハ面積ガ一定ナルモノノ中周圍ガ最小デアル。

次ニ AB ヲ固定シタ時ハ AC=CB ナル時ハ周圍最小デアル。此ノ方法ヲ繰リ返ス時ハ △ABC ハ遂ヒニ等邊三角形トナル。同様ニシテ定理ノ後半ヲモ證スルコトガ出來ル。

注意 本例ヲ擴張スルト次ノ定理ガ成立スル。即チ

定理 同一邊數ヲ有スル多角形ノ中

1° 面積ガ與ヘラレタ時，周圍ノ最小ナルモノ

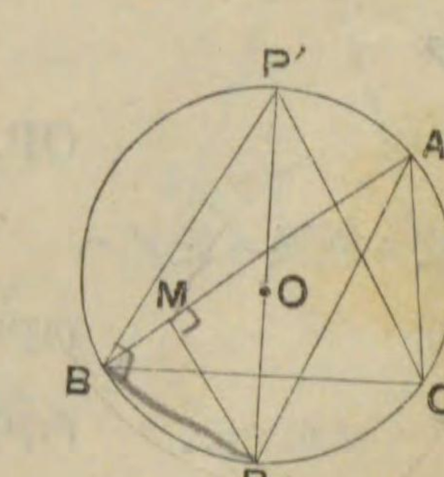
2° 周圍ガ與ヘラレタ時，面積ノ最大ナルモノ

ハ共ニ正多角形デアル。

例 3. 與ヘラレタ圓ノ定弦ヲ底邊トシ頂點ガ其弧上ニアル三角形ノ中，周圍及ビ面積ノ最大ナモノハ二等邊三角形デアル。

證明 圓 O ニ於テ定弦ヲ BC トシ，二等邊三角形ヲ BP′C トシ不等邊三角形ノ一ツヲ ABC トセヨ。然ル時先ヅ

$$BP'+CP'>AB+AC$$



ナルコトヲ證セン。ソレニハ直徑 P′OP ヲ引キ P カラ圖ノ如ク AB ニ垂線 PM ヲ下セバ

$$\triangle APM\backsim\triangle PP'B$$

ニシテ且ツ

$$PP'>AP$$

ナル故ニ $BP'>AM$

然ルニ P ハ弧 BPC ノ中點デアルカラ

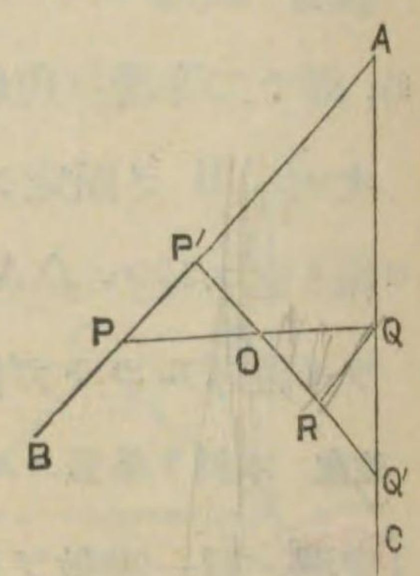
$$AB+AC=2AM$$

$$\therefore \quad BP'+CP'>AB+AC$$

而シテ定理ノ後半ハ簡單ナルガ故ニソノ證明ヲ省ク。

例 4. 角 BAC 及ビ角內ノ一點 O ガ與ヘラレタ時, O 點デ二等分セラレル線分ガ最小ナル三角形ヲ截リ取ルコトヲ證セヨ。

證明 線分 POQ ハ O 點デ二等分セラレタトシ, 他ノ線分 P′OQ′ ヲ引キ $OP' \neq OQ'$ ナリトセバ



$$\triangle PAQ<\triangle P'AQ'$$

デアル。

ソレヲ證明スルニハ

$$\triangle OPP'<\triangle OQQ'$$

ナルコトガ分レバ良イ。

今 $OP'<OQ'$ ナリトシ, OQ′ 上ニ點 R ヲトリ $OR=OP'$ ナラシムレバ

$$\triangle OPP'\equiv\triangle OQR \qquad \therefore \quad \triangle OPP'<\triangle OQQ'$$

從ツテ $\quad \triangle APQ<\triangle AP'Q'$

別證 ふぇるまーノ原理ト呼バレル方法デ證明センニ, POQ ヲ最小ナル三角形ヲ截リ取ル線分トシ, コレニ極メテ近イ位置ニ他ノ線分 P′OQ′ ヲ引ケバ P′ ガ P ニ近迫セル極限デハ

$$\triangle POP'=\triangle QOQ'$$

然ルニ一角ヲ等シクスル三角形ノ面積ハ其ノ夾邊ノ包ム矩形ノ比ニ等シイカラ

$$OP.OP'=OQ.OQ'$$

故ニ極限ニ於テハ

$$OP^2=OQ^2$$

$$\therefore \quad OP=OQ$$

即チ O 點デ二等分シタ線分デアルコトガ分ル。

注意 ふぇるまーノ原理ハ畢竟極限論ヨリ出ヅルガ故ニ一見甚ダ容易ナルガ如キ觀アルモ實ハ頗ル深遠ナル學理ニ屬スル。ノミナラズ此ノ方法ニテハ極大ナルカ極小ナルカヲ見定メルコトガ出來ヌ。コレヲ決メルニハ他ノ方法ヨリセネバナラヌ。

上ノ定理ニ於テ O ヲ過リ AB, モシクハ AC ノ何レカニ平行ナ直線ヲ引ケバ無限ニ大ナル面積ヲ有スル三角形トナルカラ, 求メラレタ三角形ハ極小ノ面積ヲ與フルモノデアル。

ふぇるまー (Fermat 1608?—1665) ハ佛ノ大數學家デ所謂ふぇるまーノ定理ノ外ニ倘ふぇるまーノ大定理トイフノガアル。コレハ自然數 x, y, z ニ對シテ

$$x^n+y^n=z^n$$

ヲ滿足スル自然數 n ハ 2 ヨリモ大ナルヲ得ズトイフノデアルガ, 彼ハ其證明ヲ手記シナカツタ。而シテコレハ今日デモ證明出來ズニ殘ツテ居ル。最近獨乙ノげっちんげん王立科學協會が十萬まるくノ懸賞デ其證明ヲ募集シテ居ル。其條件ハ次ノ通リデアル。

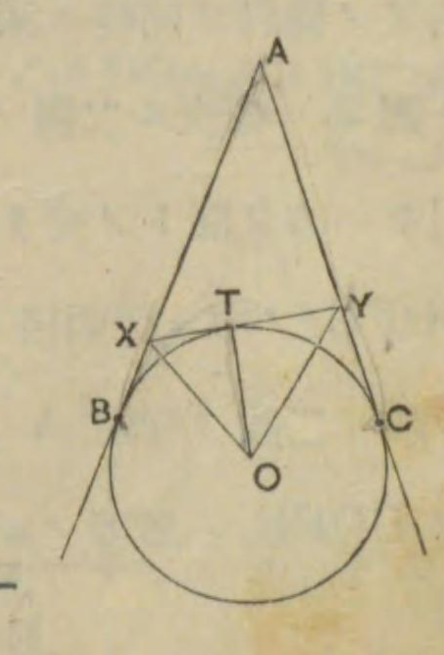
1° 應募論文ハ印刷出版シタルモノニ限リ, 而カモ出版後二年以上經過シタモノニ限ル。

2° 應募期限ハ紀元西曆二千七年九月十三日マデトシテ居ル。

ふるえまーハ非常ナ數學家デアルガ, 其研究ハ自分ノ業務ノ餘暇デヤツタノデ, 專門ハ法律家デアツタ。コレハ餘リ知ラレテ居ナイヤウダカラ附言シテ置ク。

例 5. 與ヘラレタ二直線ニ B, C デ切スル定圓ノ劣弧 BC ニ切線ヲ引キテ生ズル三角形ノ面積ノ最大ナルモノヲ求メヨ。

解 圖ニ於テ XY ヲ定圓ニ引イタ切線ナリトシ, T ヲ切點トス。然ル時ハ



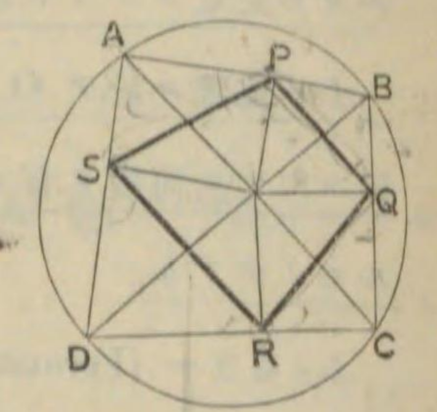
$$\triangle AXY=\frac{1}{2}(AX.\,OB+AY.OC-XY.OT)$$

$$=\frac{1}{2}OT(AX+AY-XY)$$

然ルニ AX+AY, OT ハ一定デアルカラ △AXY ノ面積ノ最大ハ XY ノ最小ノ時ニ起ル。仍ツテ所要ノ切線 XY ハ切點 T デ二等分セラレル時デアル。

67. 多角形ニ關スル問題

例 1. 圓＝內接スル所設ノ四邊形＝內接スル四邊形ノ中，周圍ノ最小ナル四邊形ヲ求メヨ。



解　圓＝內接スル四邊形ヲ ABCD トシ,四ツノ邊 AB, BC, CD, DA ノ上＝夫々 PQRS ナル四ツノ點ヲトリ四邊形 PQRS ヲ作ツタト假定スル。

今三點 Q,R,S ガソノ位置ヲ變ゼザルモノトシ P ヲ QP＋SP ガ最小ナルヤウ＝定メルト (第六十四節例二)

$Q\hat{P}B = S\hat{P}A$ ナルコト容易＝分カル。

次＝三點 R,S,P ガ共ノ位置ヲ變ゼズト假定スレバ Q 點ガ $R\hat{Q}C = P\hat{Q}B$ ナルガ如キ位置＝アラネバナラヌ。同樣＝三點 S,P,Q ガ共ノ位置ヲ變ゼズト假定スレバ $S\hat{R}D = Q\hat{R}C$ ナルガ如キ位置＝ R ヲトリ,三點 P,Q,R ガ共位置ヲ變ゼズト假定スレバ $P\hat{S}A = R\hat{S}D$ ナルガ如キ位置＝ S ヲトラネバナラヌ。

故＝四邊形 PQRS ノ四ツノ邊ノ和 PQ＋QR＋RS＋SP ヲ最小ナラシムルニハ

1°　$Q\hat{P}B = S\hat{P}A$　　2°　$R\hat{Q}C = P\hat{Q}B$

3°　$S\hat{R}D = Q\hat{R}C$　　4°　$P\hat{S}A = R\hat{S}D$

ナラシメネバナラヌ。

ソレニハ四邊形ノ對角線ノ交點カラ四邊＝垂線ヲ下セバソレ等ノ足ガ上ノ四ツノ條件ヲ同時＝滿足スル。

例 2. 相交ル二圓ノ交點 A, B ヲ過リ互＝平行ナル二直線 CAD, EBF ヲ引キ一方ノ圓トノ交リヲ C, E トシ他ノ圓トノ交リヲ D, F トス。四邊形 CDFE ノ中＝テ面積ノ最大ナルモノヲ求メヨ。

解　二圓ノ交點 A, B ヲ結ビ AB ＝垂直ナル二直線ヲ引キテ得タル四邊形 CDFE ハ所要ノモノデアル。何トナレバ四邊形 CDFE ＝於テ

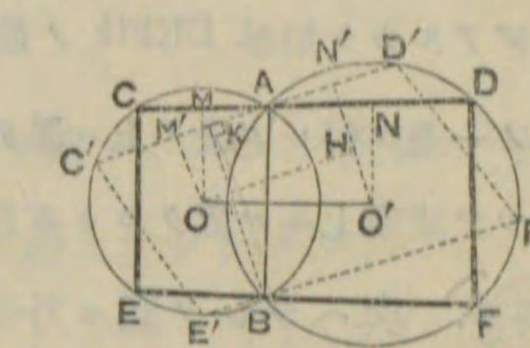
$$\hat{E} + C\hat{A}B = 2R\angle,\quad C\hat{A}B = B\hat{F}D$$

$$\therefore\quad \hat{E} + B\hat{F}D = 2R\angle$$

$$\therefore\quad CE // DF,\quad 然ル＝\quad CD // EF$$

故＝ CDFE ハ平行四邊形デアル。次＝ AB ＝垂直ナラザル任意ノ平行線カラ成ル四邊形 C′D′F′E′ ヲ作ルト,コレモ又平行四邊形デアル。ソコデ此等ノ二ツノ平行四邊形ノ邊 CD, C′D′, ノ長サノ大小ヲ比較スル＝,二圓ノ中心ヲ夫々 O, O′ トシ O, O′ カラ邊 CAD, C′AD′ ＝垂線ヲ下シ其足ヲ夫々 M, N, M′, N′ トセヨ, OO′ ヲ結ビ O ヨリ O′N′ ヘ垂線ヲ引キ其足ヲ H トス,

然ル時ハ



$$\therefore\quad OH < OO'$$

$$\therefore\quad 2OH < 2OO'$$

$$\therefore\quad C'D' < CD \quad\cdots\cdots(1)$$

次＝ B ヨリ C′D′ ＝垂線 BK ヲ引キ其足ヲ K トセヨ, BK ハ B ヨリ C′D′ ヘノ垂線, BA ハ斜線デアルカラ

$$BK < BA \quad\cdots\cdots(2)$$

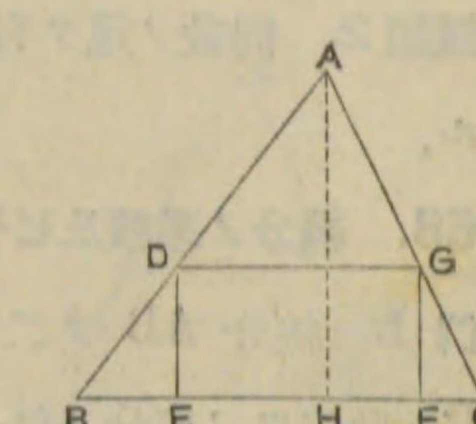
然ル＝平行四邊形 CDFE ノ面積ヲ S トシ, 平行四邊形 C′D′F′E′ ノ面積ヲ S′ トスルト

$$S = AB.CD \qquad S' = BK.C'D'$$

仍ツテ (1), (2) カラ直チ＝ S＞S′ ナルコトヲ知ル。

例 3. 定三角形＝最大ナル矩形ヲ內接セシメヨ。

解　定三角形 ABC ＝任意ノ矩形 DEFG ヲ作ルト △ADG∽△ABC デアルカラ



$$DG : BC = AD : AB \quad\cdots\cdots(1)$$

次＝ A カラ底邊 BC ＝垂線 AH ヲ引クト

△DBE∽△ABH カラ

$$DE : AH = BD : AB \quad\cdots\cdots(2)$$

(1) ト (2) トノ複比ヲ作ルト

$$DG.DE : BC.AH = AD.BD : AB^2$$

即チ

$$\text{矩形 } DEFG : 2\triangle ABC = AD.BD : AB^2$$

故ニ矩形 DEFG ノ最大ナルハ AD.BD ノ最大ナル時デアルカラ D ハ AB ノ中點デアル。(次節例一参照)

注意 D ヲ AB ノ中點ニトルトキハ

$$\text{矩形 } DEFG : 2\triangle ABC = 1 : 4$$

デアルカラ矩形 DEFG ノ最大ナルハ △ABC ノ $\frac{1}{2}$ ニ等シイ時デアル。故ニ矩形ノ一邊ヲ何レノ邊ノ上ニ置クモ同ジ結果得。但シ A, B, C ノ角ノ大サノ如何ニヨッテ或邊上ニハ置クコトガ出來ヌ場合ガアル。

例 4. 與ヘラレタ圓ニ外切スル同數ノ邊ノ多角形ノ中，面積ノ最小ナルモノヲ求メヨ。

解 與ヘラレタ圓 O ニ外切スル一ツノ多角形ヲ ABCD ………H トセヨ。今 A, B ヲ除ク頂點 C, D,………H ヲ固定シ置キ，HA ト BC トノ交點ヲ S トスルト SCDE………H ノ面積ハ一定ナルヲ以テ多角形 ABCD ………H ノ面積ヲ最小ニスルニハ △ABS ノ面積ヲ最大ニスレバ良イ。所ガ $\hat{ASB}$ ガ一定デ圓 O モ一定デスカラ邊 AB ノ中點ガ圓 O ニ切スル時ハ △ABS ノ面積ハ最大デアル，同様ニシテ何レノ邊モ皆其切點ハ夫等ノ中點ナルヲ要ス。故ニ正多角形デアル。

類題 1. 與ヘラレタ圓ニ内接スル同數ノ邊ノ多角形ノ中面積ノ最大ナルモノハ正多角形デアル。

類題 2. 同數ノ邊ヲ有スル多角形ノ中，周圍ノ最小ナルモノハ正多角形デアル。

68. 線分ノ乘積及ビ平方ノ和ニ關スル問題

例 1. 線分 AB ヲ二ツノ部分ニ分ツ時,夫等ノ部分ガ相等シイ時

1° 此二ツノ部分ノ包ム矩形ノ面積ハ最大デ

2° 此二ツノ部分ノ平方形ノ和ハ最小デアル。

證明 線分 AB ヲ直徑トスル半圓 ADB ヲ畫キ，弧ノ上ノ任意ノ點 D カ

ラ AB ニ垂線 DC ヲ下セバ

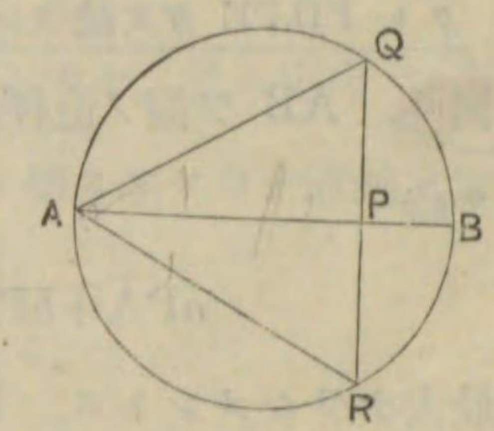
$$AC.CB = CD^2$$

デアルカラ AC.CB ノ最大ハ CD^2 ノ最大ノ場合ニ應ズ。ヨッテ C 點ハ圓ノ中心即チ O 點ニ一致セネバナラヌ。

次ニ
$$AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2AC.CB$$

AB ハ定長デアルカラ AC^2+CB^2 ノ最小ハ AC.CB ノ最大ノ場合ニ起ルコトガ明カデアル。仍ツテ 1° ニ歸スル。

例 2. 與ヘラレタ圓ノ直徑 AB 中ニ一點 P ヲ求メ，AB ノ垂線 PQ ヲ引キ圓周トノ交點ヲ Q トスル時，積 AP.PQ ヲ最大ナラシメヨ。



解 圖ニ於テ QP ヲ延長シ PR ヲ作ルト

$$\triangle AQR = AP.PQ$$

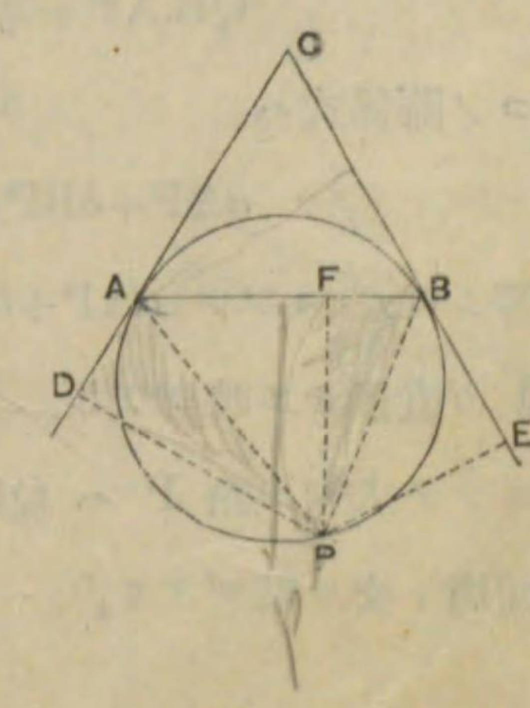
故ニ本題ハ △AQR ヲ最大ナラシムレバ良イ。然ルニ圓ニ内接スル三角形ノ中面積ノ最大ナルモノハ正三角形デアル。故ニ直徑 AB ト 30° ヲナス直線 AQ ヲ引キ次ニ P ヲ求メヨ。

例 3. 定圓ノ二ツノ定切線 OA, OB ニ共圓周上ノ點 P カラ下セル垂線ノ積ヲ最大ナラシメヨ。

解 P カラ OA, OB ニ下シタ垂線ヲ夫々 PD, PE トシ，P カラ AB ヘノ垂線ヲ PF トスルト △APD∽△BPF ナルコトハ容易ニ分カル。故ニ

$$PD : PA = PF : PB \text{ 或ハ } PA.PF = PB.PD$$

同様ニ △BPE, △APF カラ PB.PF = PA.PE



此等ノ複比ヲ作ルト

$$PD.PE = PF^2$$

從ツテ PD.PE ノ最大ハ PF ノ最大ナル場合ニ一致スル。故ニ所要ノ點 P ハ優弧 AB ノ中點デアル。

注意 i. PD.PE ヲ最小ナラシメンニハ點 P ヲ A

又ハ B ニ一致セシメタラ頁イコトハ明カデアル。

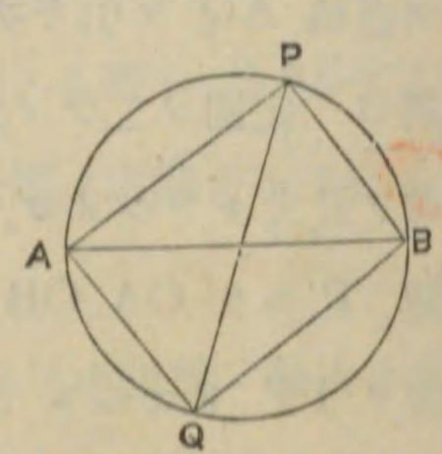
注意 ii. 極大, 極小トイフハ最大, 最小トイフノト少シク相違スルノデアル。即チ極大トハ變量ガ増加ノ狀態カラ減少ノ狀態ニ移ル所ヲイヒ, 極小トハ減少ノ狀態カラ増加ノ狀態ニ移ル所ヲイフノデアル。其事ハ巳ニ二百九十頁ニ說明シテ置イタ。通リデアル. ソコデ本題ヲ其見方カラ考察センニ, 最初 P 點ヲ A ニ一致セシメテ置キ次ニ P 點ヲ右廻リニ圓周上ヲ動カシメルト, PD.PE ガ次第ニ増加シ, P ガ優弧 AB ノ中點ニナツタトキ極大値(最大値)ヲトリ, P ガ尙モ右廻リニ動クニ從ヒ PD.PE ガ次第ニ減少シ, P ガ B ニ一致スルトキ零トナリ. 所謂極小値(最小値)ヲトル。次ニ P ガ劣弧 BA ニ沿ヒテ動クトキ PD.PE ガ漸ク増加シ初メ, P ガ劣弧 AB ノ中點ニ至ル時, 極大値(最大値トハナラヌ)ヲトリ, ソレカラ P ガ A ノ方ニ近ヅクト PD.PE ガ又減少シ初メ P ガ A ニ重ル時極小値(最小値) トナルノデアル。

例 4. AB ヲ圓ノ直徑, P ヲ其半圓周上ノ點トス, 今 a, b ヲ正ノ整數トスル時

$$a\mathrm{PA}+b\mathrm{PB}$$

ヲ最大ナラシメントス。P ノ位置ヲ求メヨ。

解 圖ノ如ク Q 點ヲ　$\mathrm{QB}:\mathrm{QA}=a:b$ ナルヤウニトリ, 次ニ $\sqrt{a^2+b^2}=c$ ナルベキ數 c ヲ求ムレバ



$$\mathrm{QB}:\mathrm{QA}:\mathrm{AB}=a:b:c$$

ナルコト明カデアル。

而シテとれみーノ定理ニヨツテ

$$\mathrm{QB.AP}+\mathrm{QA.BP}=\mathrm{AB.PQ}$$

コノ關係式ハ

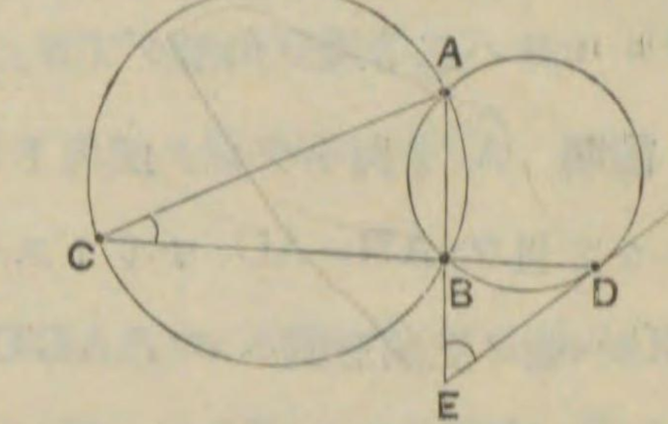
$$a\mathrm{AP}+b\mathrm{BP}=c\mathrm{PQ}$$

ニ等シイ。ヨツテ $a\mathrm{AP}+b\mathrm{BP}$ ノ最大ハ PQ ノ最大ノ場合ニ應ズ。即チ PQ ガ直徑ナル時デアル。

ヨツテ求ムル點 P ハ $\mathrm{QB}:\mathrm{QA}=a:b$ ニ適スル點 Q ト中心トヲ結ブ直線ノ圓周ト交ル點デアル。

例 5. 相交ル二圓ノ交點ヲ通過スル二重弦(倍弦トモイフ)ノ二ツノ部分ノ包ム矩形ヲ最大ナラシメヨ。

解 作圖ガ出來タトシ $\widehat{\mathrm{BED}}$ ヲ $\widehat{\mathrm{ACB}}$ ニ等シクナルヤウニ DE ヲ引キ AB トノ交點ヲ E トスルト, 四ツノ點 A, C, E, D ハ同一ノ圓周上ニアル。故ニ



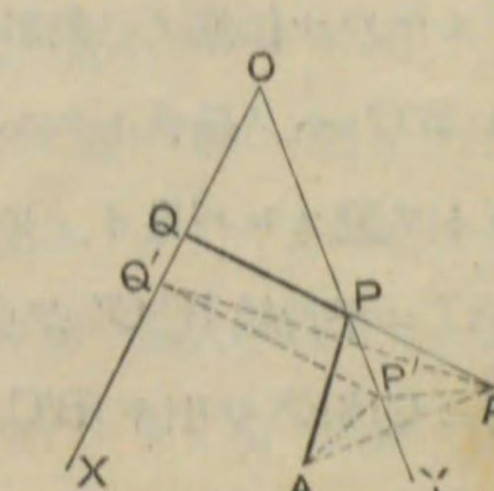
$$\mathrm{BC.BD}=\mathrm{AB.BE}$$

而シテ AB ハ定長デアルカラ BC.BD ヲ最大ナラシメンニハ, BE ヲ最大ナラシメタラ良イ。所ガ $\widehat{\mathrm{ACB}}$ ガ一定デアルカラ DE ハ圓 ABD ノ切線ノ時ニ BE ハ最大トナル。故ニ定角 $\widehat{\mathrm{ACB}}$ ニ等シキ角ヲ AB トナスヤウニシ而カモ圓 ABD ニ切スルヤウナ直線ヲ畫ク時ハ所要ノ點ノ一ツナル D ガ得ラレル。　12

第八編　問題解義

1. 定角 XOY 內ニ一定點 A アリ, 今直線 OY 上ニ一點 P ヲ求メ線分 AP ノ長サト點 P ヨリ直線 OX ニ下ス垂線 PQ ノ長サトノ和ガ最小ナル如クセヨ。

解 OY ニ關シテ點 A ノ對稱點 A′ ヲ求メ A′ ヨリ OX ニ垂線 A′Q ヲ下シ其足ヲ Q トシ, A′Q ト OY トノ交點ヲ P トスルト, P ハ求ムル點デアル。何トナレバ OY 上ニ P 點以外ノ任意ノ點 P′ ヲトリ, $\mathrm{P'Q'}\perp\mathrm{OX}$ ナラシメ, P′A, P′A′, PA, A′Q′ ヲ作ルト



$$\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}=\mathrm{A'P}+\mathrm{PQ}=\mathrm{A'Q}$$

而シテ $\mathrm{A'Q}<\mathrm{A'Q'}$

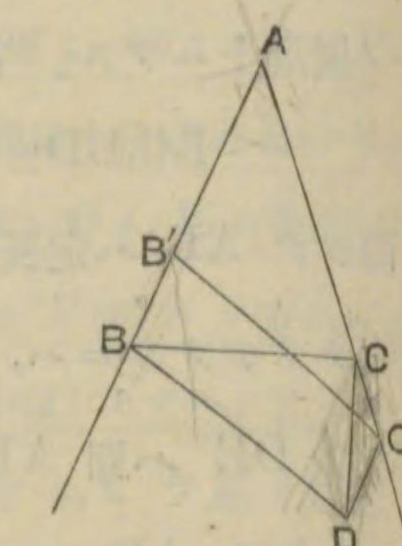
又　$\mathrm{AP'}+\mathrm{P'Q'}=\mathrm{A'P'}+\mathrm{P'Q'}>\mathrm{A'Q'}$

故ニ $A'Q<AP'+P'Q'$

從ツテ $AP+PQ<AP'+P'Q'$

2. 同一ノ頂角ヲ有シ，之ヲ夾ム二邊ノ和ガ一定ナル三角形ノ中底邊ノ極小ナルモノハ二等邊三角形デアル。

證明 $\hat{A}$ ヲ與ヘラレタ頂角トシ，$AB+AC=AB'+AC'=\cdots\cdots=l$ (定長)ニシテ且ツ $AB=AC$ ナリトスレバ $\triangle ABC$ ノ底邊 BC ハ他ノ三角形例ヘバ $\triangle AB'C'$ ノ底邊 B'C' ヨリモ小ナルコトヲ證明セントス。



ソレニハ直線 C'D ヲ AB ニ平行ニ引イテ平行四邊形 BB'C'D ヲ作ルト $B'C'=BD$,

又假定ニヨリ $BB'=CC'$ $BB'=C'D$

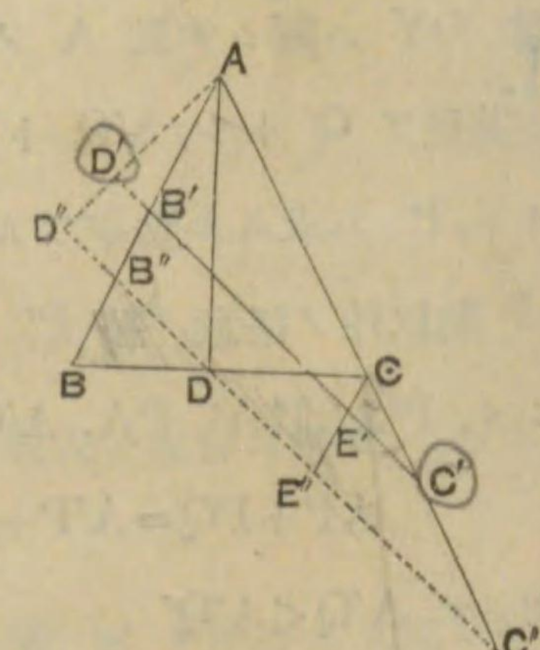
故ニ $CC'=C'D$ 而シテ $\widehat{CC'D}$ ハ $\hat{A}$ ノ補角ニ等シイカラ $\widehat{C'CD}=\frac{\hat{A}}{2}$ ニ等シ，從ツテ CD ハ $\hat{A}$ ノ二等分線ニ平行デアル。ヨツテ $BC\perp CD$ デアル。然ル時ハ BD ハ直角三角形ノ斜邊トナルカラ $BD>BC$ 即チ $B'C'>BC$

3. 同一ノ頂角ヲ有シ之ヲ夾ム二邊ノ和ガ一定ナル三角形ノ中，其頂點ヨリ底邊ニ至ル高サノ最大ナルモノハ二等邊三角形デアル。

證明 $\triangle ABC$ ヲ要件ニ適スル二等邊三角形ナリトシ，高サヲ AD トス。

今 $AB'+AC'=AB+AC$

ナルヤウナ任意ノ三角形ヲ AB'C' トシ AD' ヲ B'C' ヘノ高サトスルト，$AD>AD'$ ナルコトヲ證スレバ良イ。ソレニハ D ヲ通ツテ B'C' ニ平行線 B''C'' ヲ引キ C カラ AB ニ平行ニ CE'E'' ヲ引キ B'C, B''C'' ト夫々 E', E'' デ交ラシメルト



$\triangle BDB''\equiv\triangle CDE''$

故ニ $BB''=CE''$

然ルニ $BB'=CC'$

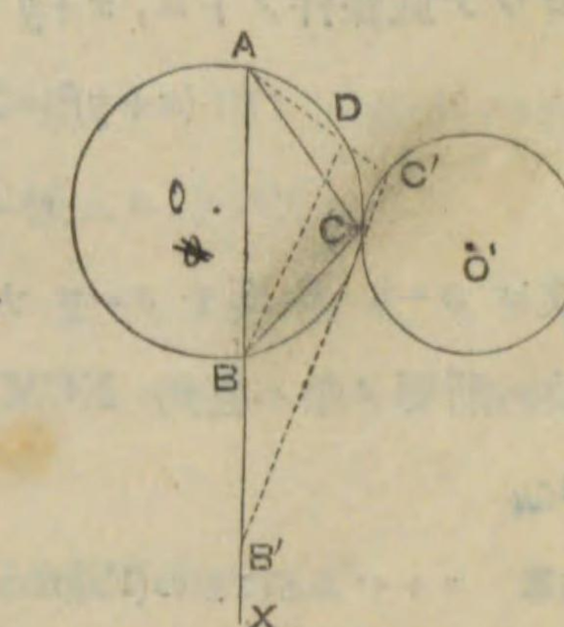
デ $\widehat{C''CE''}=\hat{A}$, $\hat{B}<\widehat{AB''D}=\widehat{CE''C''}$ 故ニ $\hat{C''}<\widehat{CE''C''}$ デアルカラ $CE''<CC''$

即チ $CC''>BB''$ 然ルニ $BB'=CC'$ $BB'>BB''$ 故ニ $CC'<CC''$ 故ニ B'C' ハ A ト D トノ間ニ於テ AD ト交ルベキデアル。然ル時ハ容易ニ

$AD>AD''>AD'$

4. 定圓 O 及ビ定點 A ヲ通ル定直線 AX アリ，頂點 C ヲ定圓周上ニトリ，且ツ角 ACB ヲ定角ニ等シカラシメ CB ノ AX ト交ル點ヲ B トスル時，線分 AB ヲ最大又ハ最小ナラシムル時ノ點 C ノ位置ハ圓 ABC ガ圓ニ切スル點デアル。

證明 圖ニ於イテ切點 C 以外ノ點 C' ヲ圓 O ノ周上ニ於テトリ AC' ヲ結ブト C' ハ圓 ABC ノ外部ニアルカラ A ト C' トノ間ノ一點 D ニ於テ圓 ABC ヲ截ル。



然ル時ハ $\widehat{ADB}$ ハ $\widehat{ACB}$ ニ等シイカラ DB ニ平行ニ引イタ直線 C'B' ガ AX ト交ル點ヲ B' トスルト

$AB'>AB$

ナルコト明カデアル。

注意 圓 O ガ内切スルヤウニ圓 ABC ヲトル時ハ AB ノ最大ヲ與ヘル。

5. 定圓トコレニ交ラナイ互ニ直交セル二ツノ直線アル時，コノ圓周上ニ一點ヲ求メ，コレカラ二定直線ニ至ルノ和ヲ最大又ハ最小ナラシメヨ。

解 定圓ノ中心ヲ過リ二ツノ垂直線ニ平行線ヲ引キ圓ヲ四ツノ部分ニ分ツ。今中心カラ二直線ニ至ル距離ヲ a, b トシ圓周ノ一點カラ今引イタ中心線ニ下シタ垂邊ノ長サヲ x, y トセヨ。サスレバ點 P ガ第一象限ノ圓周上ニアル時ハ求ムル距離ノ和ハ $(a+x)+(b+y)=a+b+x+y$ ニシテ第二象限ノ圓周上ニアル時ハ

$$(a-x)+(b+y)=a+b-x+y$$

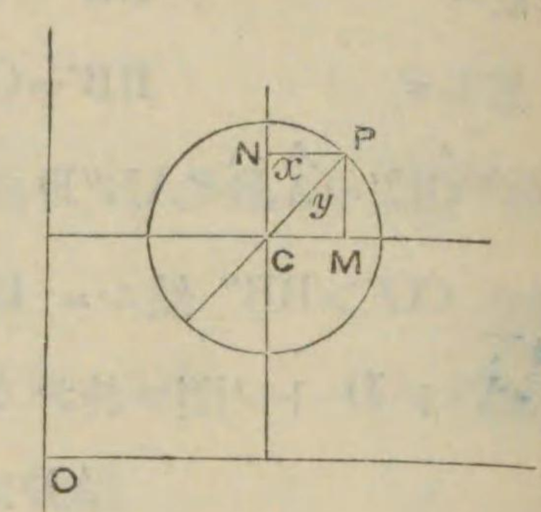
第三象限ノ圓周上ニアル時ハ

$$(a-x)+(b-y)=a+b-x-y$$

第四象限ノ圓周上ニアル時ハ

$$(a+x)+(b-y)=a+b+x-y$$

デアル



故ニ所要ノ點ガ第一象限上ニアル時，最大ノ距離ヲ與ヘ，第三象限ニアル時極小ヲ與フ。

サテ $a+b$ ハ一定ナルガ故ニ，$x+y$ ノ最大ハ $a+b+x+y$ ノ最大ヲ與ヘ，$a+b-x-y$ ノ最小ヲ與フ。

然ルニ　$CM^2+MP^2=CP^2$

即チ　$x^2+y^2=r^2$

ヨツテ此條件ノ下ニ，$x+y$ ノ最大ヲ見ルニ

$$(x+y)^2=2(x^2+y^2)-(x-y)^2$$
$$=2r^2-(x-y)^2$$

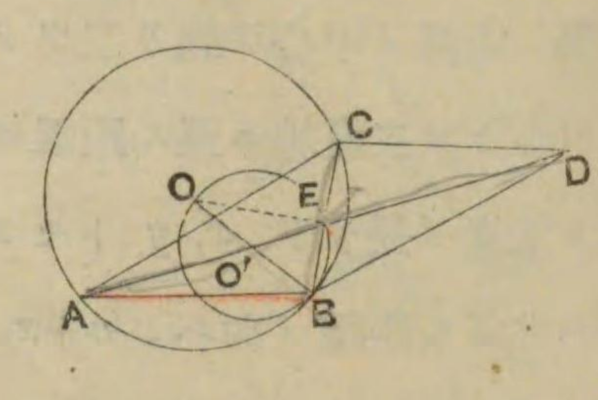
故ニ $x-y=0$ 即チ $x=y$ ナルトキ $x+y$ ハ最大又ハ最小トナル。

故ニ所要ノ點ハ直角 NCM ヲ二等分スル直線ガ圓周ト交ハル二ツノ點デアル。

注意　コレハふぁにあの(Fagnano)ガ 1775 年ニ得タ定理デアル。

6. AB ハ圓ノ一定弦ナリ，弦 AC ヲ引キ弦 AB, AC ヲ二ツノ隣邊トシ，A カラ引ケル對角線ノ最大ナルモノヲ有スル平行四邊形ヲ作レ。

解　與ヘラレタ圓ノ中心ヲ O トシ，線分 OB ヲ直徑トスル圓ヲ畫キ其中心ヲ O′ トスル。今 AO′ ヲ作リ圓 O′ ト交ル點ヲ E トセヨ。更ニ AE ノ延長上ニ ED＝AE ナルガ如ク D ヲトリ，BE ガ圓 O ト交ル點ヲ C トスルト四邊形 ABDC ハ所要ノモノデアル。何トナレバ $\widehat{OEB}=R\angle$ デアルカラ E ハ BC ノ中點デアリ且ツ作圖ニヨツテ AE＝ED デスカラ四



邊形 ABDC ノ對角線ハ互ニ二等分セラレル。故ニ平行四邊形デアル。

サテ A カラ引ク對角線ノ最大ナルモノハ AE ノ最大ナルモノト一致ス。然ル時ハ問題ハ A カラ圓 O′ ニ至ル線分ノ最大ナルモノヲ求ムルコトニ歸ス。コレ AO′ ヲ結ブ時デアル。

7. 三角形ノ一邊中ニ一點ヲ求メ，コノ點カラ他ノ二邊ニ至ル距離ノ和ヲ最小ナラシメヨ。

解　與ヘラレタ三角形ヲ ABC トシ，$\hat{B}>\hat{C}$ ナリト假定シ，底邊 BC 上ニ要件ニ適スル點 P ヲ求ムルモノトス。PD, PE ヲ夫々 AB, AC ニ下シタ垂線トシ，BC, CA, AB ノ長サヲ夫々 a, b, c トシ且ツ三角形ノ面積ヲ S トスルト

$$2S=c\mathrm{PD}+b\mathrm{PE}$$

ナル關係ガアル。此關係ノ下ニ PD＋PE ヲ最小ナラシメンニ

$$b\,\mathrm{PD}+\mathrm{PE})-2S=(b-c)\mathrm{PD}$$

デ $b, S, b-c$ ハ共ニ一定デアルカラ PD＋PE ノ最小ハ PD ノ最小ノ時即チ PD＝0 ノ時ニ起ル。ヨツテ P ハ B 點ニ一致スル時デアル。

注意　PD＋PE ヲ最大ナラシメルニハ，P ヲ C 點ニ一致セシメタラ良イ。又 $\hat{B}=\hat{C}$ ナル時ハ PD＋PE ハ一定デアルカラ最大或ハ最小ナラシムルトイフコトハ問題ニハナラヌ。

8. 三角形ノ三邊ニ至ル距離ノ和ガ最小ナルベキ點ヲ求メヨ。

解　前題ニ倣ヒテ解カンニ，$\hat{A}\geqq\hat{B}$, $\hat{A}\geqq\hat{C}$ ナリトシ且ツ $\hat{B}\neq\hat{C}$ ナリトスルト $a\geqq b$, $a\geqq c$ デ且ツ $b\neq c$ デアル。今 P ヲ所要ノ點トシ三邊 a, b, c ニ下セル垂線ヲ PD, PE, PF トスルト

$$2S=a\mathrm{PD}+b\mathrm{PE}+c\mathrm{PF}$$

ナル關係ガアル。今此關係ノ下ニ PD＋PE＋PF ヲ最小ナラシメンニ

$$a(\mathrm{PD}+\mathrm{PE}+\mathrm{PF})-2S=(a-b)\mathrm{PE}+(a-c)\mathrm{PF}$$

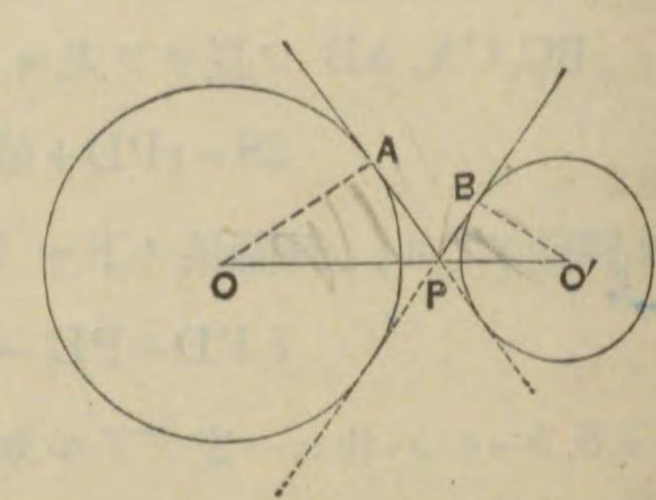
然ルニ假定ニヨツテ $a-b\geqq 0$, $a-c\geqq 0$ 故ニ PD＋PE＋PF ヲ最小ナラシメンニハ PE ト PF トヲ最小ナラシメタラ良イ。故ニ P 點ヲ二邊 b, c ノ交點即チ A 點ニトレバ良イノデアル。

注意 本題ハ $\hat{A} \geqq \hat{B}$, $\hat{A} \geqq \hat{C}$ ナリト假定シタ。故ニ結局所要ノ點ハ最大角ヲ有スル頂點ニトレバ良イトイフ事ニナルノデアル。

9. 與ヘラレタ二ツノ定圓ノ中心 O, O′ ヲ連ネル線分ノ上ニ一點 P ヲ求メ, 其點カラ二圓ヘノ切線ノ和ヲ最大ナラシメヨ。

解 二ツノ圓ヲ O, O′ トシ切線ヲ PA, PB トシ PA+PB ヲ最大ナラシメントス。ソレニハ任意ノ正ノ整數 m, n ヲトリ (PA+PB) ヲ最大ナラシメンニハ m ト n トノ間ニ或關係ガ存在セネバナラヌノデアルガ

$$m\mathrm{OO'}-n(\mathrm{PA}+\mathrm{PB})\cdots\cdots(1)$$



ヲ考ヘテ見ルニ m ヲ充分大ニトルト此式ガ負トナラヌ。ソコデ OO′, m, n ガ知ラレテ居ルカラ PA+PB ヲ最大ニスルニハ, (1) ヲ最小ニスレバ良イノデアル。所ガ(1) ヲ書キカヘルト

$$m(\mathrm{OP}+\mathrm{PO'})-n(\mathrm{PA}+\mathrm{PB})$$

即チ

$$(m\mathrm{OP}-n\mathrm{PA})+(m\mathrm{PO'}-n\mathrm{PB})$$

ソコデ

$$m\mathrm{OP}-n\mathrm{PA}=0, \qquad m\mathrm{PO'}-n\mathrm{PB}=0$$

トスレバ, 確カニ PA+PB ガ最大トナルノデアル。然ル時ハ

$$\mathrm{PA}:\mathrm{OP}=m:n, \qquad \mathrm{PB}:\mathrm{O'P}=m:n$$

故ニ二ツノ直角三角形 OAP ト O′PB トハ相似形デアル。即チ P ハ中心線ヲ二ツノ圓ノ半徑ノ比ニ分ツ點デアル。

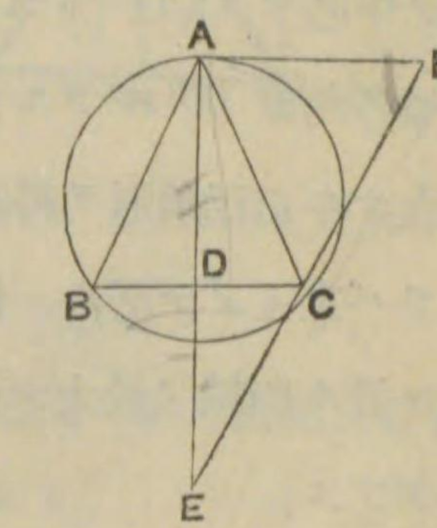
注意 P ハ二ツノ內共通切線ノ交點ナルコトニ注意セヨ。

10. 與ヘラレタ圓ニ二等邊三角形ヲ內接セシメ, 底邊ト高サトノ和ヲシテ最大ナラシメヨ。

解 △ABC ヲ二等邊三角形ナリトシ, 高サ AD ヲ延長シテ BC=DE ナラシメ, A ニ於テ切線 AF ヲ引キ EC ノ延長ト F ニ於テ交ラシメルト

△EDC∽△EAF デアルカラ

$$\mathrm{AE}:\mathrm{AF}=\mathrm{DE}:\mathrm{DC}=2:1$$



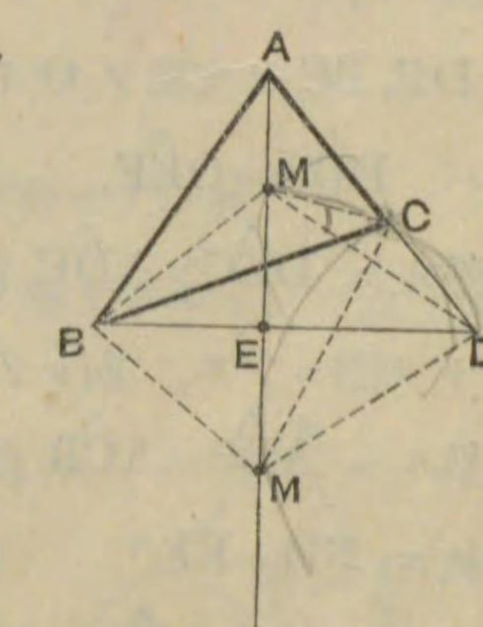
故ニ直角三角形 AEF ノ形狀ガ一定デアル。從ツテ EF ガ定方向ヲ有スル。故ニ高サト底トノ和ヲシテ最大ナラシメンニハ EF ヲシテ圓ヨリ離レヌヤウニシテ而カモ最大ナラシメルト良イ。故ニ EF ガ圓ノ切線ニナル時デアル。

注意 i. $\widehat{\mathrm{AFE}}$ ガ一定ナルベキガ故ニ切線ノ位置ガ定方向デアル。此事實カラ容易ニ切線ガ定マリ從ツテ二等邊三角形ガ定マル。

注意 ii. 高サト底邊トノ和ノ最大値ハ半徑ノ $(\sqrt{5}+1)$ 倍ニ等シイ。

11. 三角形 ABC ノ頂角 A ノ二等分線 AE 上ニ一點 M ヲ求メ $\widehat{\mathrm{BME}}$ ト $\widehat{\mathrm{CME}}$ トノ差ヲ最大ナラシメヨ。

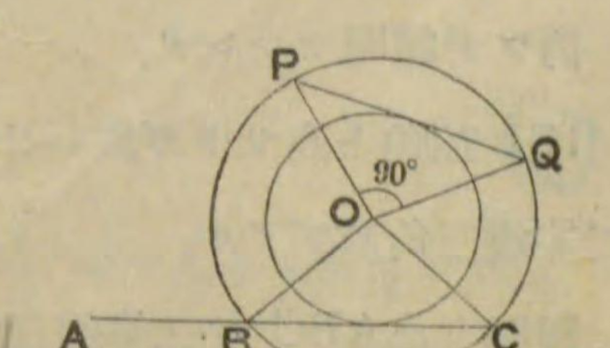
解 AB>AC ナリトシ M ヲ二等分線 AE ノ上ニトルト $\widehat{\mathrm{CME}}>\widehat{\mathrm{BME}}$ ニシテ其延長上ニ M ヲトルト, $\widehat{\mathrm{BME}}>\widehat{\mathrm{CME}}$ デアル。



何レニシテモ AB=AD ナルヤウニ D ヲ取ルトキハ $\widehat{\mathrm{BME}}=\widehat{\mathrm{DME}}$ ナルヲ以テ, $\widehat{\mathrm{BME}}$ ト $\widehat{\mathrm{CME}}$ トノ差ヲ最大ナラシムルニハ $\widehat{\mathrm{CMD}}$ ヲ最大ニスレバ良イ。故ニ所要ノ點ハ二定點 C, D ヲ過リ二等分線 AE ニ切スル圓ヲ畫キタル時ノ切點デアル。

12. 中心 O ナル定圓外ノ一定點 A ヨリ割線ヲ引キ圓周ヲ B, C ニ於テ截リ三角形 OBC ノ面積ヲシテ最大ナラシメヨ。

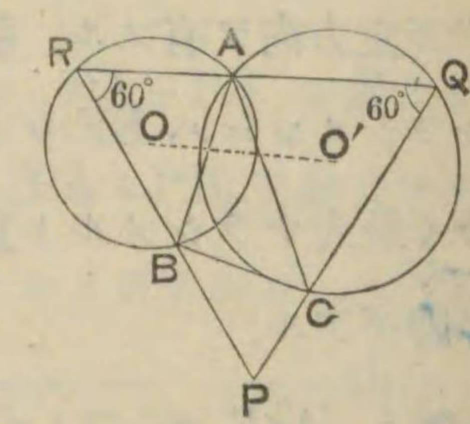
解 半徑 OP, OQ ヲ引キテ其ノナス角ヲ 90° ナラシメ, PQ ヲ結ベ, 次ニ O ヲ中心トシテ PQ ニ切スル圓ヲ畫キ, 此圓ニ切線 ABC ヲ引クト, コレガ所要ノ割線ナルコト明カデアル。



13. 三邊ガ夫々三ツノ定點 A, B, C ヲ過ル正

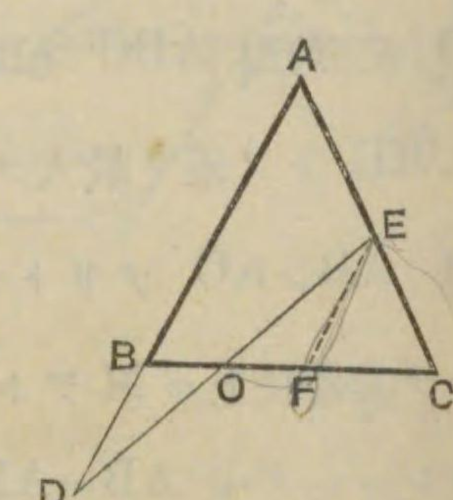
三角形 PQR ヲ作リ之ヲ最大ナラシメヨ。

解 AB, AC ノ上ニ其外側ニ 60° ノ角ヲ含ム弓形ヲ作リ，各弓形ノ屬スル圓ノ中心ヲ O, O′ トスル。然ル時ハ A, B, C ヲ通ツテ作ラレル三角形ハ何レモ各角ガ 60° デアルカラ正三角形デアル。故ニ最大ナル正三角形ヲ得ンニハ，一邊 QAR ガ最大ナラバ良イノデアル。仍ツテ本題ハ二ツノ圓ノ交點ヲ通ル割線ノ最大ナルモノヲ求ムルコトニナルノデアル。



14. 一角ト之ヲ夾ム二邊ノ和ガ一定ナルスベテノ三角形ノ中ニテ面積ノ最大ナルモノハ二等邊三角形デアル。

證明 △ABC, △ADE ガ一角 A ヲ共有シ且ツ AB+AC=AD+AE ナリトシ，前者ヲ二等邊三角形，後者ヲ不等邊三角形トセヨ。



然ル時ハ △ABC>△ADE デアル。何トナレバ DE, BC ノ交點ヲ O トシ，EF // AD ナラシムレバ　$B\hat{D}O=O\hat{E}F$,

然ルニ $D\hat{E}C>A\hat{D}E$ 故ニ EF ハ $O\hat{E}C$ ノ内ニアリ。從ツテ，F ハ O ト C トノ間ニアル。而シテ EF // AB 故ニ $A\hat{B}C=E\hat{F}C$

然ルニ $A\hat{B}C=A\hat{C}B$ 故ニ EF=EC, 又 BD=EC

故ニ BD=EF

次ニ $D\hat{B}O=O\hat{F}E$, $B\hat{D}O=O\hat{E}F$

故ニ △BDO≡△EFO 故ニ △ADE=四邊形 ABOE+△EOF<△ABC

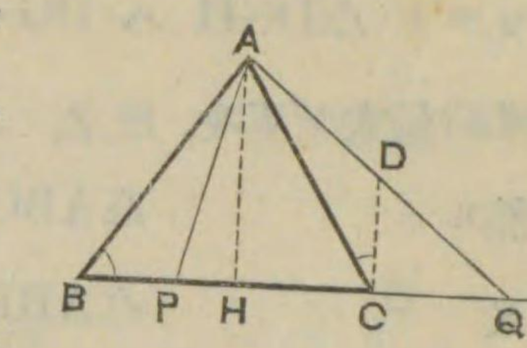
仍ツテ證明セラレタ。

15. 頂角ト高サトガ與ヘラレタ三角形ノ中デ最小ナル面積ヲ有スルモノハ二等邊三角形デアル。

證明 △ABC ヲ二等邊三角形，△APQ ヲ任意ノ不等邊三角形トシ，

$$B\hat{A}C=P\hat{A}Q=\alpha$$

トスル時ハ △ABC<△APQ ナルコトヲ證明セントス。サテ $B\hat{A}P=C\hat{A}Q$, AB=AC ナルヲ以テ $A\hat{B}P$ ニ等シク $A\hat{C}D$ ヲ作ルト CD ハ $A\hat{C}Q$ ノ内部ニ入ルカラ D 點ハ線分 AQ ノ上ニアル。從ツテ △ABP≡△ACD 又 △ACD<△ACQ デアルカラ △ABP<△ACQ 此兩方ニ △APC ヲ加ヘルト △ABC<△APQ, 仍ツテ證明セラレタ。



16. 二ツノ與ヘラレタ圓ノ交點ノ一ツヲ過リ二ツノ圓周ニ終ル直線ヲ底邊トシ他ノ交點ヲ頂點トスル三角形ノ最大ナルモノヲ求メヨ。

解 共通弦ヲ PQ トスレバ PQ⊥AQB ナル倍弦 AB ヲ底邊トセル △ABP ガ最大デアル。

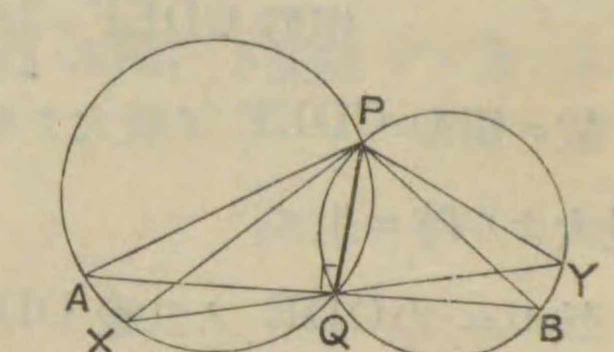
何トナレバ他ニ任意ノ △XYP ヲ作ルト

$$P\hat{X}Q=P\hat{A}Q$$

$$P\hat{Y}Q=P\hat{B}Q$$

$$\therefore\quad \triangle PXY\backsim\triangle PAB$$

$$\therefore\quad \triangle PXY:\triangle PAB=PX^2:PA^2$$

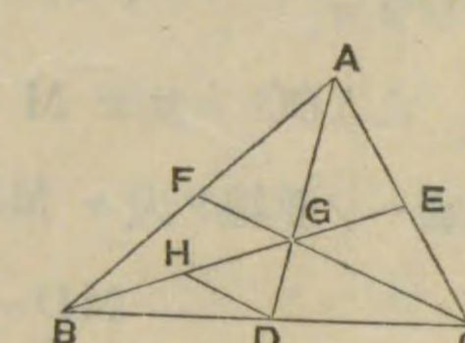


AB > XY

然ルニ PA ハ直徑デアルカラ PA>PX ヨツテ證明セラレタ。

17. 三ツノ中線ノ和ガ一定ナル三角形ノ中，面積ノ極大ナルモノヲ求メヨ。

解 三ツノ中線ノ和ガ與ヘラレタ長サニ等シイ任意ノ三角形ヲ作リコレヲ ABC トシ，重心ヲ G, BG ノ中點ヲ H トスルト



$$DG=\frac{1}{3}AD$$

$$HG=\frac{1}{2}BG=\frac{1}{3}BE$$

$$DH=\frac{1}{2}CG=\frac{1}{3}CF$$

故ニ三角形 DGH ノ周圍ハ三ツノ中線ノ和ノ $\frac{1}{3}$ デアルカラ定長デアル。然ルニ定長ナル周圍ヲ有スル三角形ノ中，面積ノ最大ナルモノハ正三角形デアル。

ヨツテ $\triangle DGH$ ハ $DG=GH=HD$ ナル時,即チ三ツノ中線ノ長サガ相等シイ時最大デアル。

然ルニ $\triangle ABC=\triangle 2ABD$

又 $\triangle ABD=6\triangle DGH$

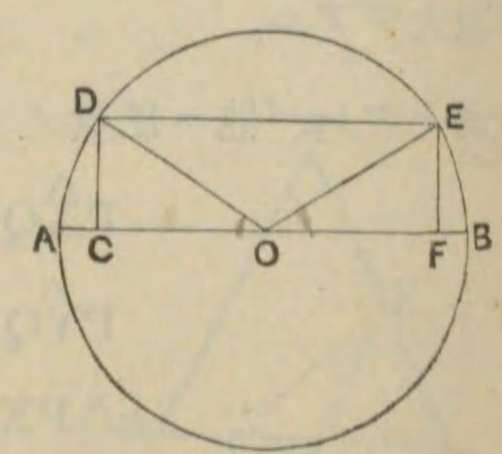
∴ $\triangle ABC=12\triangle DGH$

ヨツテ $\triangle DGH$ ノ最大ナル時ハ $\triangle ABC$ モ亦最大デアルカラ求ムル三角形ハ三ツノ中線ハ相等シイモノ,即チ正三角形デアル。

18. 與ヘラレタ半圓ニ最大ナル矩形ヲ内接セシメヨ。

解 O ヲ圓ノ中心, CDEF ヲ内接セル矩形トスルト

$$\text{矩形 } CDEF=2\triangle ODE$$

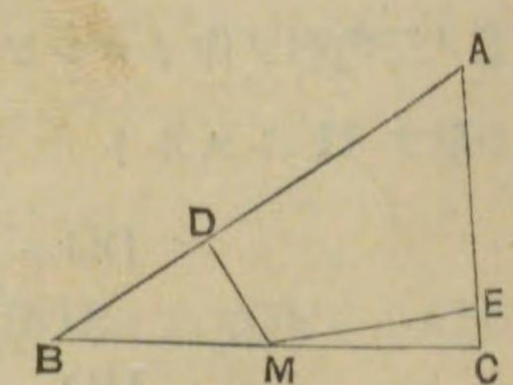


故ニ矩形 CDEF ノ最大ナルモノハ $\triangle ODE$ ノ最大ナル時ニ生ズ。

然ルニ $\triangle ODE$ ノ二邊 OD, OE ハ定長デアルカラ其面積ノ最大ナルモノハ $D\hat{O}E$ ガ直角ナル時デアル。故ニ所要ノ矩形ハ OD, OE ヲ直徑 AB ト 45° ヲナスヤウニ引キテ得ラレル。

19. 三角形ノ一邊上ニ點ヲ求メ, コレカラ他ノ二邊ニ至ル垂線ノ積ヲ最大ナラシメヨ。

解 $\triangle ABC$ ニ於テ M ヲ BC 上ノ一點トシ他ノ二邊ヘノ垂線ヲ夫々 MD, ME トスルト



$$MD=MB\frac{MD}{MB}$$

$$ME=MC\frac{ME}{MC}$$

ト書カレ, 而カモ二ツノ比 $\frac{MD}{MB}$, $\frac{ME}{MC}$ ハ M 點ノ位置ノ如何ニ關セズ一定値ヲ有ス。コレヲ p, q トスルト

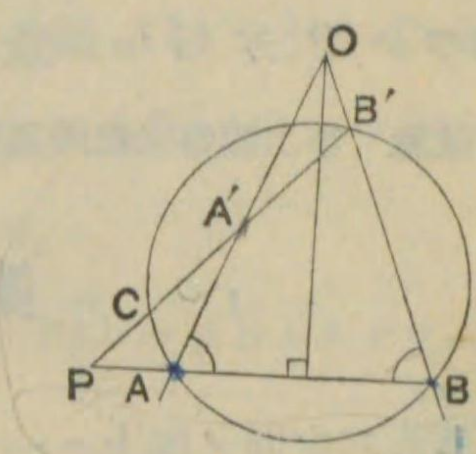
$$MD.ME=pqMB.MC$$

而シテ MB.MC ハ線分 BC ノ中點ニ M ヲトツタ時最大トナル。仍ツテ

本題ハ解カレタ。

20. 定點 P カラ相交ル直線 OA, OB ト夫々 A, B デ交ル直線 PAB ヲ引キ PA.PB ヲ最小ナラシメヨ。

解 所要ノ直線ハ角 AOB ノ二等分線ニ垂直ナルモノデアル。何トナレバ他ニ任意ノ直線 PA′B′ ヲ引クト,



$$P\hat{A'}A<O\hat{A}B=O\hat{B}A$$

デアルカラ

$$A\hat{A'}B'=2R\angle-P\hat{A'}A>2R\angle-O\hat{B}A$$

故ニ A′ ハ圓 ABB′ ノ内部ニ在ル, ヨツテ圓 ABB′ ト直線 PA′B′ トノ交點ヲ C トスルト, $PA'>PC$ デ而カモ

$$PA.PB=PC.PB'$$

デアルカラ

$$PA.PB<PA'.PB'$$

21. 三角形ノ内部ノ一點カラ三ツノ頂點ニ至ル距離ノ平方ノ和ノ最小ナルモノハ其ノ重心ヨリ引ケルモノデアル。

證明 三角形 ABC ニ於テ重心ヲ G トシ, 任意ノ一點ヲ P トスル。PG ヲ結ビ, 三ツノ頂點カラ PG ニ下ス垂線ヲ夫々 Aa, Bb, Cc トシ, 底邊 BC ノ中點 A′ カラ下セル垂線ヲ $A'a'$ トスルト

$$AP^2=AG^2+PG^2+2PG.Ga$$

$$BP^2=BG^2+PG^2-2PG.Gb$$

$$CP^2=CG^2+PG^2+2PG.Gc$$

然ルニ $AG=2A'G$

∴ $Ga=2Ga'$

又 $Gb=Ga'+a'b$

$Gc=a'c-Ga'$

而シテ $BA'=A'C$ ナルガ故ニ

$$ba' = a'c$$

$$\therefore \quad Ga - Gb + Gc = O$$

$$\therefore \quad AP^2 + BP^2 + CP^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + 3PG^2$$

ヨツテ P ガ G ニ一致スル時最小ナリ。

注意 第二編第三章問題解義 6 ヲ參照スルモ容易ニ證明スルコトガ出來ル。

第八編　練習問題

1. 二定圓ノ周上ニ一ツ宛點ヲトリ其間ノ線分ヲ最大及ビ最小ナラシメヨ。
2. 與ヘラレタ圓ノ內部ニアル定點ヲ通ツテ弦ヲ引キ其兩端ニ於ケル切線ニ定點カラ垂線ヲ下ストキ，其垂線ノ和ノ最小ナルモノヲ求メヨ。
3. 等積ナル三角形ノ中，三ツノ中線ノ和ガ最小ナルモノハ正三角形ナルコトヲ證セヨ。
4. 與ヘラレタ半圓ノ弧ノ上ノ定點ヲ A トシ，與ヘラレタ半徑 OC ノ中點ヲ B トシ，又弧ノ上ノ動點ヲ P トスルトキ AP+2BP ヲ最大ナラシメヨ。

注意 P ハ定三角形 ABO ノ外接圓ト與ヘラレタ半圓トノ交點デアル。

5. AB ガ定圓ノ定弦ナルトキ圓周上ニ一點 P ヲ求メ PA+PB ヲ最大又ハ最小ナラシメヨ。
6. A, B ハ定圓周上ノ二定點，PQ ハ此ノ圓ノ定弦ナル時，圓周上ニ一點 C ヲ求メ，CA, CB ガ PQ ヲ截リトル部分ヲ最長ナラシメヨ。
7. 所設ノ周圍ヲ有スル三角形ノ中，內切圓ノ最大ナルモノヲ求メヨ。
8. 三角形ノ面積ヲ二等分スル直線ノ中，最短ナルモノヲ求メヨ。
9. 鋭角三角形ニ最小ナル周ヲ有スル三角形ヲ內接セヨ。

注意 內接三角形ノ一ツヲ PQR トシ P, Q ヲ固定シ R ヲ與ヘラレタ三角形ノ一ツノ邊ニ求メ RP+RQ ヲ最小ナラシメル。次ニ Q, R ヲ固定シテ PQ+PR ヲ最小ナラシメルヤウニ P ヲトル。カヽル手續ヲ無限ニ續ケル時ハ，所要ノ三角形ハ垂足三角形ナルコトヲ知ル。

10. 定圓ニ外接スル三角形ノ中，面積ノ最小ナルモノヲ求メヨ。

11. 三ツノ頂點ガ夫々與ヘラレタル三ツノ定直線上ニアル正三角形ノ中，周圍ノ最小ナルモノヲ求メヨ。
12. 同一ノ頂角ヲ有スル等積三角形ノ中，周圍ノ最小ナルモノヲ求メヨ。
13. 直角三角形 ABC ノ直角頂 A ヨリ斜邊 BC ヘ垂線 AD ヲ引キ D ヨリ此垂線ト等角ヲナス二ツノ直線 DE, DF ヲ引キ AB, AC トノ交點ヲ E,F トスル時三角形 DEF ヲ最大ナラシメヨ。

注意 ふぇるまーノ原理ニヨレバ $\widehat{ADE}$ ヲシテ $\frac{1}{2}(\widehat{CAD}-\widehat{BAD})$ ナラシムルヤウニ DE ヲ引ケバヨシ。

14. 與ヘラレタル三角形ノ一邊上ニアル與ヘラレタル點ヲ頂點トシ此邊ニ平行ニシテ他ノ二邊ノ間ニアル線分ヲ底邊トスル三角形ノ中，面積ノ最大ナルモノヲ求メヨ。

注意 他ノ二邊ノ中點ヲ結ブモノガ所要ノ底邊トナル。

15. 與ヘラレタル四邊形ノ對角線ニ平行ナル二隣邊ヲ有スル平行四邊形ヲ此四邊形ニ內接シ其面積ヲ最大ナラシメヨ。
16. 與ヘラレタル三角形ニ內接シ，一邊ガ其三角形ノ邊ノ上ニアル如キ平行四邊形ヲ畫キタル時其最大ナルモノヲ求メヨ。
17. 與ヘラレタル正方形ニ內接スル正方形ノ中，面積ノ最小ナルモノヲ求メヨ。
18. 四邊形ノ對角線ガ定長ナル時ハ此等ハ互ニ垂直ナル時ソノ面積最大デアル。
19. 矩形ノ玉突臺上ノ任意ノ位置ニアル球ヲ突キ此球ヲシテ臺ノ四ツノ緣ヲ打タシメタル後ニ原位置ニ復ラシムルガ如キ徑路ハ初メノ球ノ位置カラ四緣上ノ任意ノ點ヲ順次ニ結ブ直線形ノ周圍ノ中最小ナルモノデアル。
20. 定圓ノ定弦ヲ AB トシ圓周上ニ P 點ヲトリ AP^2+BP^2 ヲ最大及ビ最小ナラシメヨ。
21. 一ツノ直線上ニ一點ヲ求メ，コノ直線ノ同ジ側ニアル二定點ニ至ル距離ノ平方ノ和ヲ最小ナラシメヨ。

22. 三角形ノ一邊上ニ一點ヲ求メ，コレヨリ他ノ二邊ニ至ル距離ノ平方ノ和ヲ最小ナラシメヨ。

23. 與ヘラレタ線分ヲ二ツノ部分ニ內分シ，其各部分ノ上ノ平方形ノ m 倍ト n 倍トノ和ヲ最小ナラシメヨ。

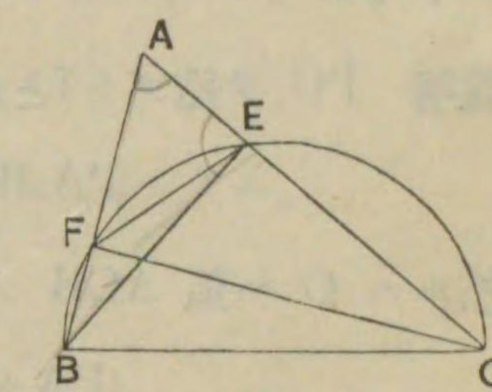
24. 二ツノ定圓ノ一ツノ交點ヲ過リ二ツノ圓周ニ終ル弦ヲ引クトキ，此等ノ二ツノ部分ノ包ム矩形ハ此ノ直線ノ兩端ニ於ケル二ツノ圓ノ切線ガ相等シイ時最大デアル。

第九編 定値問題

69. 線分及ビ線分ノ和ニ關スル定値問題

例 1. 三角形ノ底ト頂角トガ一定ナルトキ兩底端ヨリ對邊ニ引ケル垂線ノ足ヲ結ブ直線ノ長サハ一定デアル。

證明 底及ビ頂角ノ一定ナル一ツノ三角形ヲ ABC トシ B, C カラ對邊ヘノ垂線ノ足ヲ夫々 E, F トスルト

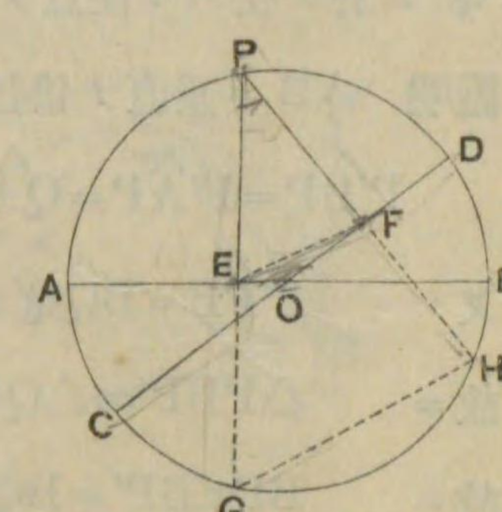


$$B\hat{E}C = B\hat{F}C = R\angle$$

デアルカラ，E, F ハ BC ヲ直徑トスル定圓周上ニアル。又 $\triangle ABE$ ニ於テ $\hat{A}$ ハ定角，$A\hat{E}B = R\angle$ デアルカラ $A\hat{B}E$ ハ定角デアル。故ニ定圓ノ定角ニ對スル弦 EF ノ長サハ一定デアル。

例 2. AB, CD ヲ定圓ノ二ツノ定直徑トシ，E, F ヲ夫々圓周上ノ任意ノ點 P カラ AB, CD ニ下シタ垂線ノ足トスルト線分 EF ノ長サハ一定デアル。

證明 四邊形 PEOF ニ於テ $E\hat{O}F$ ハ一定デアルカラ $E\hat{P}F$ モ一定デアル。故ニ P ガ弧 APD ノ上ヲ動クトキ弦 GH ノ長サハ一定デアル。而シテ PE, PF ハ直徑ニ垂直デアルカラ E, F ハ夫々 PG, PH ノ中點デアル。故ニ $EF = \frac{1}{2}GH$ 即チ EF ハ定長デアル。



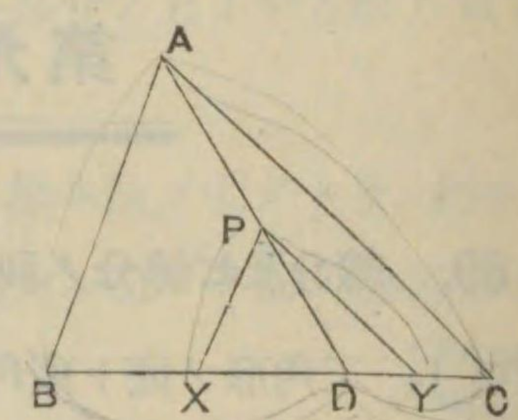
注意 P 點ハ弧 DB 上ニ來タトキモ同樣ニシテ證明出來ル。

70. 線分ノ比ニ關スル定値問題

例 1. 三角形 ABC ノ底邊 BC 上ノ一點ヲ D トス，AD 上ニ任意ノ點 P ヲ取リ P カラ AB 及ビ AC ニ平行線 PX, PY ヲ引キソレト BC トノ交

點ヲ夫々 X,Y トルスト BX:CY ハ點 P ノ位置ニ關セズ一定ナルコトヲ證セヨ。

證明 $\dfrac{DB}{XB}=\dfrac{DA}{PA}$, $\dfrac{DC}{YC}=\dfrac{DA}{PA}$



故ニ $\dfrac{DB}{XB}=\dfrac{DC}{YC}$ 或ハ $\dfrac{XB}{YC}=\dfrac{DB}{DC}$

然ルニ D ハ定點デアルカラ $\dfrac{DB}{DC}$ ハ一定デアル。故ニ $\dfrac{BX}{CY}$ ハ一定デアル。

例 2. 定圓ノ定弧 AB ノ中點ヲ C トシ，其共軛弧ノ上ノ任意ノ點ヲ P トスルト (AP+BP):CP ハ一定デアル。

證明 PC ヲ結ブト「とれみー」ノ定理ニヨツテ

$$PA.BC+PB.AC=PC.AB \cdots\cdots(1)$$

然ルニ C ハ弧 ACB ノ中點デアルカラ AC=CB 故ニ (1) ハ

$$(PA+PB)AC=PC.AB$$

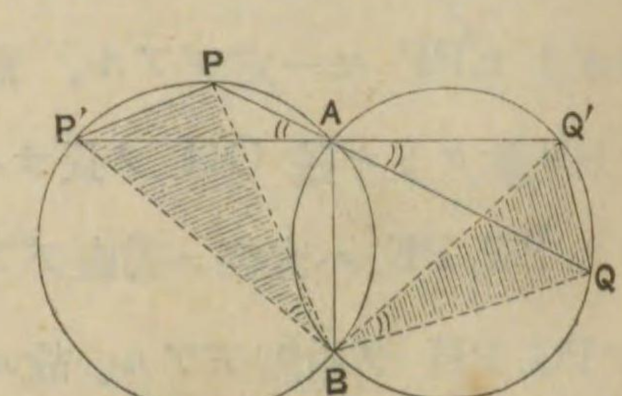
即チ $(PA+PB):PC=AB:AC$

而シテ AB:AC ハ一定デアルカラ (PA+PB):PC ハ一定デアル。

例 3. A,B ハ二ツノ圓ノ交點デ PQ ハ A ヲ過ギリ，二ツノ圓周ト夫々 P,Q ニ於テ交ハル任意ノ直線デアル。然ル時ハ比 BP:BQ ハ一定デアル。

證明 AB ニ垂直ナ倍弦 P'AQ' ヲ引クト

$$P'\hat{B}P=P'\hat{A}P=Q\hat{A}Q'=Q\hat{B}Q'$$



又 $P'\hat{P}B=B\hat{Q}Q'=R\angle$

故ニ $\triangle PBP'\backsim\triangle QBQ'$

故ニ $BP:BP'=BQ:BQ'$

即チ比 BP:BQ ハ二ツノ圓ノ直徑ノ比ニ等シイカラ一定デアル。

例 4. 三角形 ABC ノ角 A ノ二等分線ガ BC ト X ニテ交リ，外接圓ノ周ト D デ交ハルモノトス。今 A 點ヲ動點トシ，BC ガ一定ニシテ AB+AC ハ不變ナル時ハ比 AX:XD ハ一定デアル。

證明 AD ハ $\hat{A}$ ノ二等分線デアルカラ

$$\frac{AB}{BX}=\frac{AC}{CX}=\frac{AB+AC}{BX+CX}=\frac{AB+AC}{BC}$$

故ニ $\dfrac{AB}{BX}$, $\dfrac{AC}{CX}$ ハ各々一定デアル。コレヲ k トスルト

$$\frac{AB.AC}{BX.CX}=k^2 \cdots\cdots(1)$$

然ルニ $\triangle ABD\backsim\triangle ACX$ デアルカラ

$$AB:AD=AX:AC \text{ 即チ } AB.AC=AD.AX$$

又 BX.XC=AX.XD デアルカラ，コレ等ノ關係ヲ (1) ニ代入スルト

$$\frac{AB.AC}{BX.CX}=\frac{AD.AX}{AX.XD}=\frac{AD}{XD}=k^2$$

從ツテ $\dfrac{AX}{XD}=\dfrac{AD}{XD}-1=k^2-1$ 即チ AX:XD ハ一定デアル。

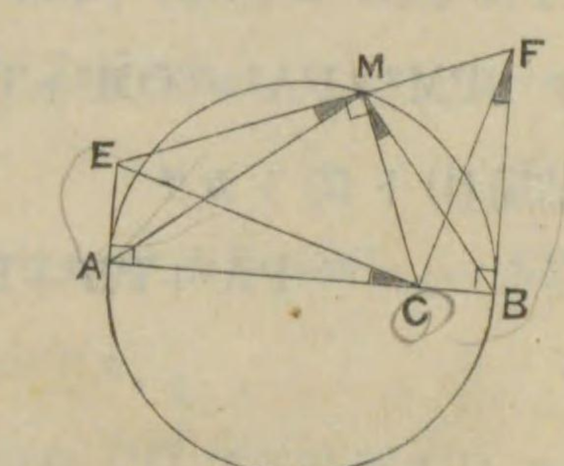
71. 矩形又ハ矩形ノ比ニ關スル定値問題

例 1. 直徑 AB 上ノ定點 C ヲ圓周上ノ任意ノ點 M ニ結ビ付ケ，M ニ於テ CM ニ垂直ナ直線ガ A 及ビ B ニ於ケル切線ニ交ル點ヲ夫々 E,F トスルト AE.BF ハ一定デアル。

證明 AM,BM,CE,CF ヲ結ブト ACME ハ内接四邊形デアルカラ

$$A\hat{M}E+A\hat{M}C=R\angle,$$

故ニ $A\hat{C}E+A\hat{M}C=R\angle$



次ニ BCMF モ内接四邊形デアルカラ

$$B\hat{M}C+A\hat{M}C=R\angle$$

$$B\hat{F}C+A\hat{M}C=R\angle$$

故ニ $A\hat{C}E=B\hat{F}C$ 又 $E\hat{A}C=C\hat{B}F=R\angle$

ナルガ故ニ $\triangle ACE\backsim\triangle BCF$

故ニ $AE:AC=CB:BF$ 從ツテ $AE.BF=AC.CB$

然ルニ AC.CB ハ一定デアルカラ AE.BF モ一定デアル。

例 2. 定圓周上ノ任意ノ點 A カラ此圓ニ切線 APQ ヲ引キ其圓ノ中心 O

ヲ過ギル定圓ト P, Q デ交ラシメルト OP.OQ ハ一定デアル。

證明 OP.OQ ハ一定デアルトイフガ其大サハドンナモノカヲ考ヘルニ A 點ガ動イテ兩圓ノ交點 A′ ニ來レリトスルト OP ハ初メノ圓ノ半徑トナリ, OQ ハ後ノ圓ノ直徑トナル, コレヲ OQ′ トスルト OP. OQ ハ OA′. OQ′ トナリ而カモソレハ兩圓ノ半徑ノ相乘積ノ二倍トナル。故ニ次ノ様ナ證明法ヲ得。即チ △AOP ト △OQQ′ トハ共ニ直角三角形デ且ツ $\widehat{OPA}=\widehat{OQ'Q}$ デアルカラ相似形デアル。故ニ容易ニ

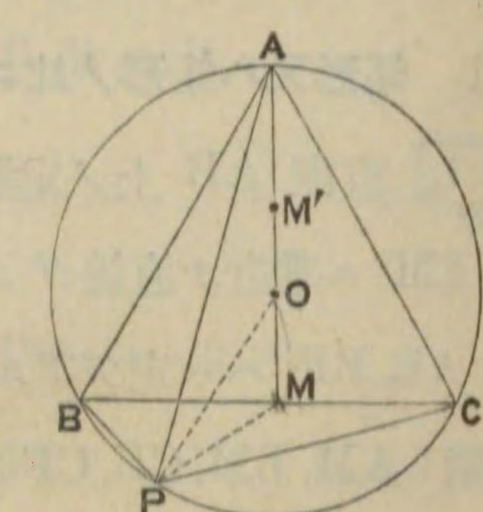
$$OP.OQ=2rR$$

トナル。但シ r, R ハ二ツノ圓ノ半徑ナリトス

例 3. 正三角形 ABC ノ外接圓ノ周上ノ點ヲ P トスレバ $AP^2+BP^2+CP^2$ ハ P ノ位置ノ如何ニ關セズ一定デアル。

證明 圖ニ於テ M ヲ BC ノ中點トスルト

$$PB^2+PC^2=2(PM^2+BM^2) \cdots\cdots (1)$$



今 O ヲ圓ノ中心トスルト AO=2MO デアルカラ AO ノ中點ヲ M′ トスルト

$$OM=OM'$$

故ニ $2(PM^2+PM'^2)=4(OM^2+PO^2)$

$$PA^2+OP^2=2(OM^2+PM'^2)$$

從ツテ $2PM^2+PA^2=6OM^2+3PO^2 \cdots\cdots (2)$

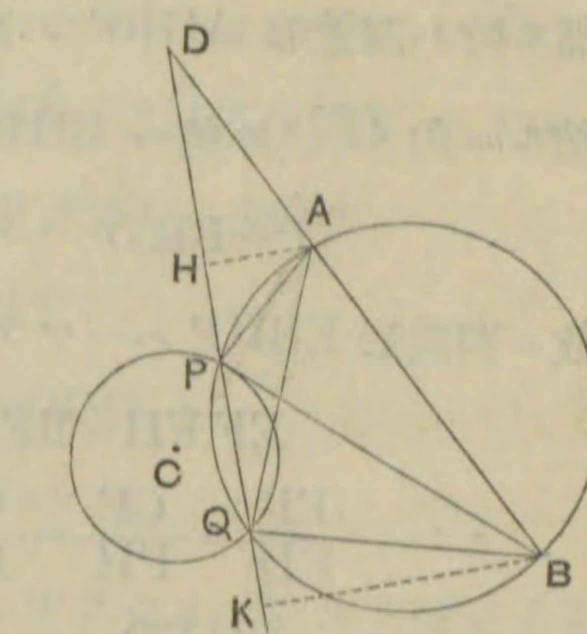
故ニ結局 (1) ト (2) トカラ

$$\begin{aligned}PA^2+PB^2+PC^2&=2BM^2+6OM^2+3PO^2\\&=2OB^2+4OM^2+3PO^2\\&=5PO^2+4OM^2\\&=5R^2+AO^2=6R^2\end{aligned}$$

例 4. A, B ハ二定點デ C ハ定圓デアル。A, B ヲ過ル任意ノ圓ト圓 C トノ交點ヲ P, Q トスルト AP.AQ : BP.BQ ハ不易デアル。

證明 圖ニ於テ AB, PQ ヲ結ビ, 其交點ヲ D トシ, A, B カラ PQ ニ垂

線 AH, BK ヲ引キ △APQ ノ外接圓ノ半徑ヲ r トスレバ, △APQ カラハ



$AP.AQ=2rAH$, 又 △BPQ カラハ

$BP.BQ=2rBK$ 邊々相除スルト

$$\frac{AP.AQ}{BP.BQ}=\frac{AH}{BK}=\frac{AD}{BD}$$

然ルニ D 點ハ定點ナルコト明カデアルカラ (二百四十七頁參照) AD : BD ハ一定デアル。

從ツテ AP.AQ : BP.BQ モ一定デアル。

第九編 問題解義及ビ練習問題

1. 正多角形内ノ任意ノ一點ヨリ各邊ニ至ル垂線ノ和ハ恒ニ一定ナルコトヲ證セヨ。

2. 矩形ニ内接スル平行四邊形ノ邊ヲ矩形ノ對角線ニ平行ナラシムレバ其周ハ一定デアル。

3. 定角 A ノ二等分線上ノ定點ヲ P トスレバ, AP ヲ弦トスル圓周ガ角ノ二邊ヲ截リ取ル弦ノ和 AB+AC ハ一定デアル。

證明 AP ハ角 A ノ二等分線デアルカラ弦 PB ハ弦 PC ニ等シイ。次ニ P カラ AB, AC ニ夫々垂線 PD, PE ヲ下スト

$$\triangle PBD \equiv \triangle PCE$$

ナルコトハ明カデアル。故ニ BD=CE 從ツテ弦 AB+AC ハ AD (或ハ AE) ノ二倍ニ等シイ。而シテ AD ハ定長デアル。

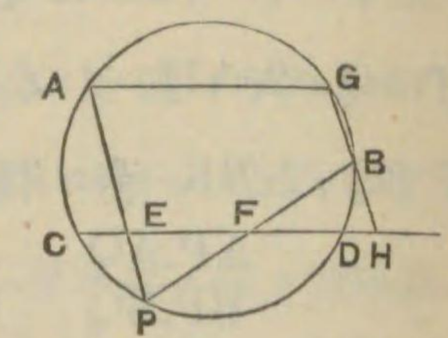
4. 一ツノ圓ニ於テ二定點 A, B 及ビ一定弦 CD アル時弧 CD 上ノ任意ノ點ヲ P トシ PA, PB ガ CD ヲ E, F デ截ル時 CE×FD : EF ハ點 P ノ位置ノ如何ニ關セズ一定デアル。

證明 AG∥CD ナルヤウニ G ヲ圓周上ニトリ GB ヲ結ビ CD ト H デ交ラシメル。

然ル時ハ四邊形 AGBP ハ圓ニ內接シテ居ルカラ $\hat{P}$ ハ $\hat{G}$ ノ外角ニ等シイ。

然ルニ角 G ノ外角ハ $\widehat{BHD}$ ニ等シイカラ

$$\hat{P}=\widehat{BHD}$$



故ニ四邊形 EBHP ハ一ツノ圓ニ內接スル。故ニ

$$EF.FH=BF.FP=CF.FD$$

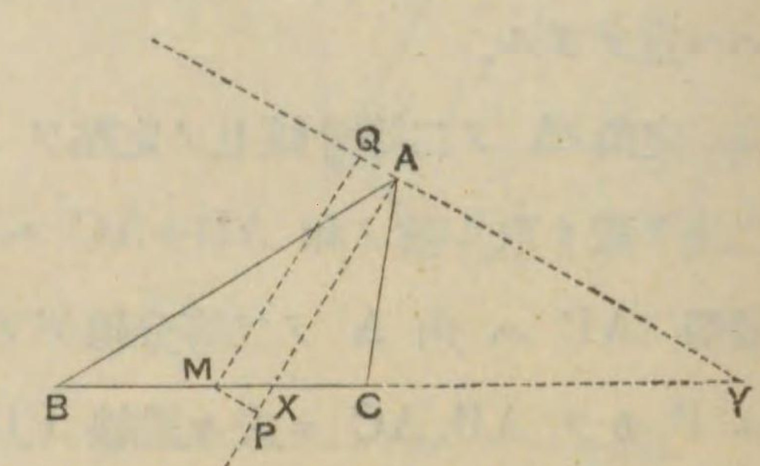
$$\therefore\quad \frac{EF}{FD}=\frac{CF}{FH}=\frac{CF-EF}{FH-FD}=\frac{CE}{DH}$$

從ツテ $DH=\dfrac{CE.FD}{EF}$

然ルニ CD ハ定弦デ A 及ビ B ハ定點デアルカラ AG ハ定弦從ツテ BG モ定線分デアル。ヨツテ H ハ定點トナルヲ以テ DH ハ定長デアル。ヨツテ證明セラレタ。

5. 三角形ノ底邊及ビ底角ノ差ガ一定ナルトキハ底邊ノ中點カラ頂角及ビ其外角ノ二等分線ニ平行ナル二ツノ直線ト，此二ツノ二等分線トハ一定ナル面積ヲ有スル矩形ヲ作ルコトヲ證明セヨ。

證明 底邊 BC ノ中點ヲ M トシコノ點ヨリ二等分線 AX, AY ヘノ垂線ヲ MP, MQ トスル時ハ，四邊形 MPAQ ハ矩形ヲナスコトハ明カデアル。



サテ MP ハ AX ニ垂直デアルカラ $\widehat{XMP}$ ハ底角 B 及ビ C ノ差ノ半分ニ等シ。故ニ $\widehat{XMP}$ 及ビ $\widehat{XMQ}$ ハ一定デアル。

又 $$BX:XC=AB:AC=BY:CY$$

故ニ $$BX+XC:BX-XC=BY+CY:BY-CY \quad\cdots\cdots(1)$$

然ルニ $$BX-XC=2MX,\quad BY+CY=2MY$$

デアルカラ (1) ハ

$$BC:2MX=2MY:BC$$

即チ $$MX.MY=BM^2 \quad\cdots\cdots(2)$$

然ルニ二ツノ直角三角形 XMP, YMQ ニ於テ $\widehat{XMP}, \widehat{YMQ}$ ハ夫々一定デアルカラ，MP : MX 及ビ MQ : MY ハ一定デアル。即チ

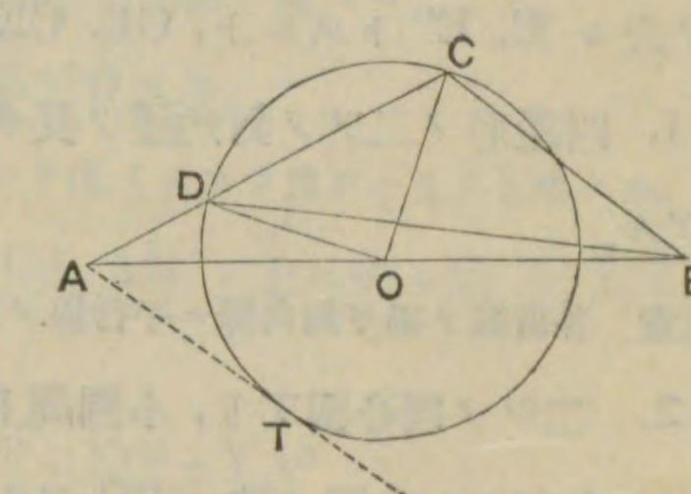
$$MP=kMX,\qquad MQ=k'MY$$

故ニ $$MP.MQ=kk'MX.MY=kk'BM^2$$

仍ツテ矩形 MPAQ ノ面積ハ一定デアル。

6. 圓 O ノ直徑ヲ双方ニ延長シ OA=OB ナラシメ，A カラ任意ノ割線 ADC ヲ引キ，圓周ト D, C デ交ラシメルト，$BC^2+DC^2+BD^2$ ハ割線ノ位置如何ニ關セズ一定デアル。

證明 圖ニ於イテ AT ヲ A ヨリノ切線トスル。サテ



$$AC^2+BC^2=2(AO^2+OC^2)$$

$$AD^2+BD^2=2(AO^2+OD^2)$$

OC=OD ナルコトニ注意シテ邊々相加ヘルト

$$AC^2+AD^2+BC^2+BD^2=4(AO^2+OC^2) \quad\cdots\cdots(1)$$

又

$$AC^2+AD^2=(AD+DC)^2+AD^2=2AD^2+2AD.DC+DC^2$$
$$=2AD.AC+DC^2=2AT^2+DC^2 \quad\cdots\cdots(2)$$

(1) ニ (2) ヲ代入スルト

$$2AT^2+DC^2+BC^2+BD^2=4(AO^2+OC^2)$$

故ニ

$$BC^2+DC^2+BD^2=4(AO^2+OC^2)-2AT^2$$

而シテ AO, OC 及ビ AT ガ一定デアルカラ $BC^2+DC^2+BD^2$ ハ一定デアル。

注意 上ノ證明ニハ AO=OB ハ半徑ヨリモ大トシタ。若シ小ナル時ハ如何。

7. 圓ニ內接スル二等邊三角形 ABC ノ頂點 A カラ，直線 APQ ヲ引キ，

底邊 BC ト P ニ，圓周ト Q ニテ交ラシメルト，AP.AQ ハ一定デアル。

8. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC ノ中點ヲ中心トシ，兩邊ニ切スル圓ヲ畫キ，此圓ニ切線ヲ引キ AB, AC ト夫々 X, Y デ交ラシメルト BX.CY ハ一定デアル。

9. 平行四邊形 ABCD ノ二邊 AD, DC 上ニ夫々二ツノ定點 P, Q アリ，任意ノ方向ニ二ツノ平行線ヲ引キ，AB, BC ト夫々 R, S デ交ラシムレバ AR.CS ハ一定デアル。

10. 圓ノ直徑 AB 或ハ其延長上ノ一點ヨリ割線ヲ引キ圓周ト D, D′ デ會セシメ，AB 上ノ一點 C ヲ通リ AB ニ垂直ナル直線ガ AD, AD′ ト交ル點ヲ夫々 E, E′ トスルト，CE. CE′ ガ割線ノ位置ニ關セズ一定デアル。

11. 四邊形ノ二ツノ對角邊ノ長サ及ビ其夾角ガ不變ナル時ハ其面積ハ一定デアル。

注意 各頂點ヲ過ギ對角線ニ平行線ヲ引イテ生ズル四邊形ト原ノ四邊形トヲ比較セヨ。

12. 二ツノ同心圓アリ，小圓周上ノ一點 P ヲ過ギ小圓ノ弦 PA ヲ引キ又コレト直交スル大圓ノ弦 BPC ヲ引クトキハ三角形 ABC ノ三邊ノ平方ノ和ハ PA ノ方向ノ如何ニ關セズ一定デアル。

13. 三角形ノ頂角及ビ面積ハ一定ナルトキ，頂點ヨリノ中線ノ上ノ正方形ト底邊ノ半分ノ上ノ正方形トノ差ハ一定ナルコトヲ證セヨ。

14. 定圓 O ニ內接スル二等邊三角形 ABC ニ於テ，AB=AC トシ，圓周上ノ任意ノ一點ヲ M トス。直線 BM, CM ガ直線 OA ト交ル點ヲ夫々 E, F トスルト OE, OF ノ包ム矩形ノ面積ハ恒ニ一定デアル。

第十編 共點線及ビ共線點

72. 定義 三ツ以上ノ直線ガ同一ノ點ヲ通過スル時ハ此等ノ直線ヲ共點線トイフ。以下共點線ニ關スル定理ヲ述ベル。

定理 1. 三角形ノ三ツノ中線ハ同一ノ點デ會スル。

定理 2. 三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ハ同一ノ點デ會スル。

定理 3. 三角點ノ三ツノ高サハ同一ノ點デ會スル。

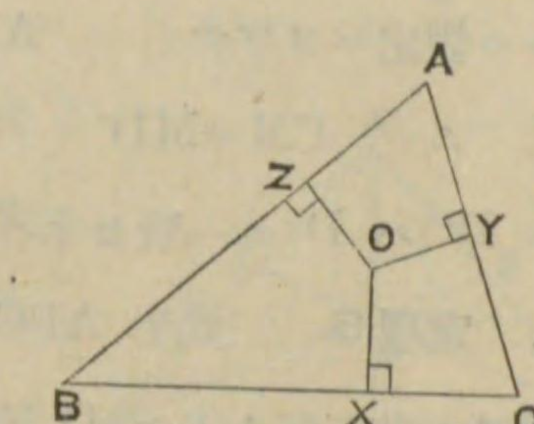
注意 此等ノ定理ハ已ニ第二編第一章デ證明シテ置イタカラ玆デハ凡テ省略スル。

定理 4. 三角形 ABC ノ三ツノ邊 BC, CA, AB ノ上ニ夫々點 X, Y, Z ヲトリ，

$$AZ^2+BX^2+CY^2=ZB^2+XC^2+YA^2$$

ナラシムレバ X, Y, Z ヲ過リ各邊ニ下ス三ツノ垂線ハ一點ニ會スル。

證明 BC, CA ノ各邊ニ垂直ナル直線ハ一點 O デ交ハルモノトスルト，OZ ハ AB ニ垂直ニナル。何トナレバ



$$BX^2=OB^2-OX^2$$
$$XC^2=OC^2-OX^2$$
$$CY^2=OC^2-OY^2$$
$$YA^2=OA^2-OY^2$$

デアルカラ與ヘラレタ條件ニ代入スルト

$$AZ^2+OB^2=ZB^2+OA^2$$

即チ

$$OB^2-ZB^2=OA^2-AZ^2$$

故ニ OZ ハ AB ニ垂直デアル。

仍ツテ定理ハ證明セラレタ。

注意 1 コノ定理ノ逆即チ三ツノ垂線 OX, OY, OZ ハ一點 O ニ會スルナラバ $AZ^2+BX^2+CY^2=ZB^2+XC^2+YA^2$, 或ハ $(AZ^2-ZB^2)+(BX^2-XC^2)+(CY^2-YA^2)=0$ ハ成立スルコト明カデアル。

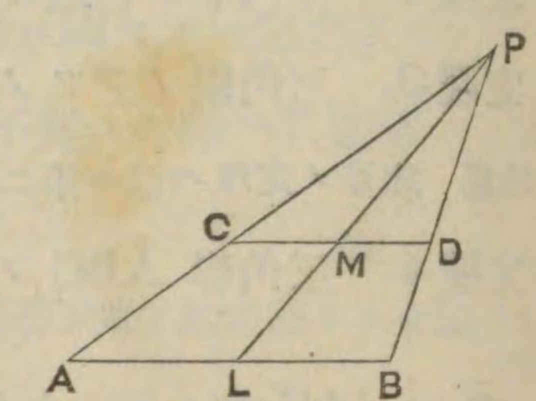
注意 2 此定理カラ次ノ定理ガ證明セラレル。

1° 三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ハ一點デ會スル。

2° 三角形ノ三ツノ高サハ一點デ會スル。

3° 三ツノ傍切圓ガ三角形ノ邊ト D, E, F デ切スル時ハ, 此等ノ切點ヲ通リ夫等ノ邊ニ垂直ニ引イタ直線ハ一點デ交ハル。

定理 5. AB,CD ガ平行ナル二直線, L,M ハ夫々ソノ中點ナル時ハ, 三ツノ直線 AC, LM, BD ハ一點デ會スル。



證明 AC, LM ノ延長ノ交點ヲ P 點トス。然ル時ハP,D,Bガ一直線上ニ在ルコトヲ證セバヨイ。

今假リニ PB ガ D ヲ過ラズニ CM ト D′ デ交ハルモノトスレバ

$$PL:PM=AL:CM$$

$$PL:PM=LB:MD'$$

$$\therefore\ AL:CM=LB:MD'$$

然ルニ假定ニヨツテ $AL=LB$

$$\therefore\ CM=MD'$$

故ニ D′ ハ D ニ一致セネバナラヌ。

73. 定理 6. 三角形 ABC ノ各頂點ト任意ノ一點 O トヲ結ビ之ヲ延長シテ對邊又ハ其延長ト夫々 D, E, F デ交ラシムル時ハ

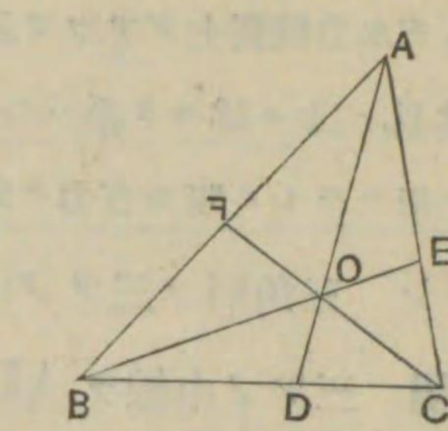
$$BD.CE.AF=DC.EA.FB$$

ナル關係ガ常ニ成立スル。

證明 A, O カラ邊 BC ヘノ垂線ノ長サヲ夫々 h, k トスレバ

$$\triangle ABD=\frac{h}{2}BD$$

$$\triangle ADC=\frac{h}{2}DC$$



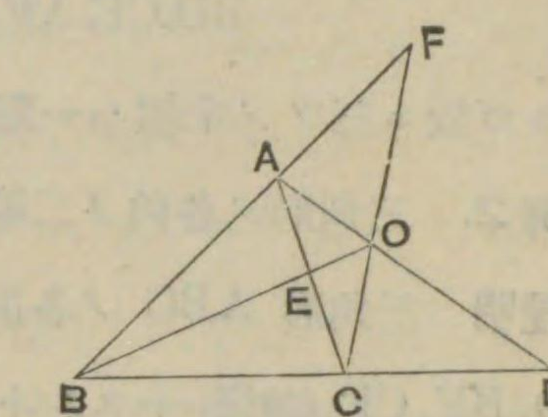
$$\triangle BOD=\frac{k}{2}BD$$

$$\triangle DOC=\frac{k}{2}DC$$

$$\therefore\ \triangle AOB=\frac{h-k}{2}BD$$

$$\triangle AOC=\frac{h-k}{2}DC$$

ヨツテ



$$\frac{\triangle AOB}{\triangle AOC}=\frac{BD}{DC}$$

同様ニ $\dfrac{\triangle BOC}{\triangle AOB}=\dfrac{CE}{EA}$

$$\frac{\triangle AOC}{\triangle BOC}=\frac{AF}{FB}$$

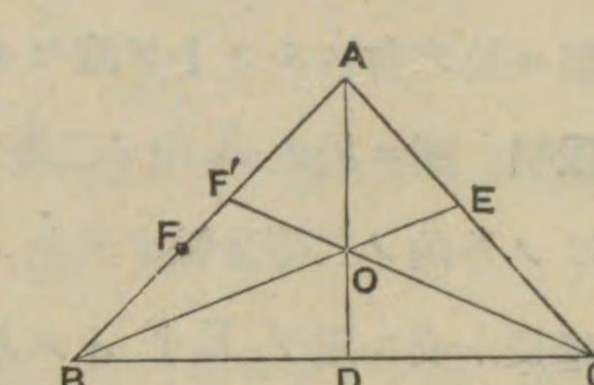
邊々相乘ズレバ左邊ハ分母子相等シキガ故ニ右邊ハ１ナルベク, 従ツテ

$$BD.CE.AF=DC.EA.FB$$

系 三角形 ABC ノ各頂點カラ

$$BD.CE.AF=DC.EA.FB$$

ニ適スルガ如キ三ツノ直線 AD,BE,CF ヲ夫々對邊ニ引ク時ハ此等ノ直線ハ必ズ同一ノ點ヲ過ル。



證明 AD, BE ノ交點ヲ O トス。CO ヲ結ブト AB ト必ズ F ニテ交ラネバナラヌ。何トナレバ假リニ F 以外ノ點例ヘバ F′ ニテ交ルトスルト

$$BD.CE.AF'=DC.EA.F'B$$

然ルニ假定ニヨリテ,

$$BD.CE.AF=DC.EA\ FB$$

$$\therefore\ AF:FB=AF':F'B$$

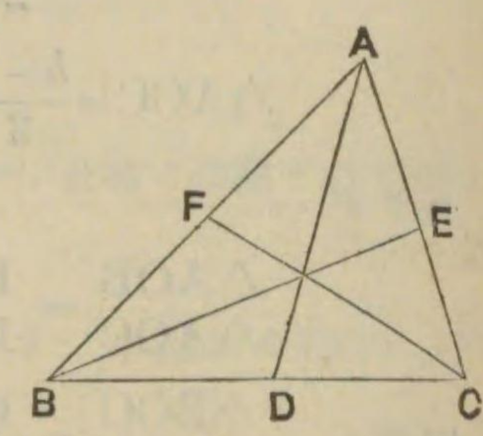
ナラザルベカラズ。ヨツテ F′ ハ F ニ一致セネバナラス。

注意 i. コノ定理ヲつぇゔぁノ定理トイフ。つぇゔぁ (Ceva 1647—1734) ハ伊太利ノ

人デ水力機關士デアッタ。

注意 ii. 上ニ述ベタ系ハつぇゔぁノ定理ノ逆デアッテ，共點線タルコトノ證明ニハ屢々用ヒラレル頗ル有力ナ定理デアル。次下例示セウ。

例 1. 三角形ノ三ツノ中線ハ一點デ會スルコトヲ證明セヨ。



證明 三ツノ中線ヲ AD, BE, CF トスルト，明カニ

$$BD.CE.AF = DC.EA.FB$$

ナルガ故ニ三ツノ中線ハ一點デ會スル。

例 2. 三角形ノ各角ノ二等分線ハ一點デ會スル。

證明 三角形 ABC ノ各頂角ノ二等分線ヲ夫々 AD, BE, CF (前圖) トスルト

$$BD : DC = AB : CA$$

$$CE : EA = BC : AB$$

$$AF : FB = CA : BC$$

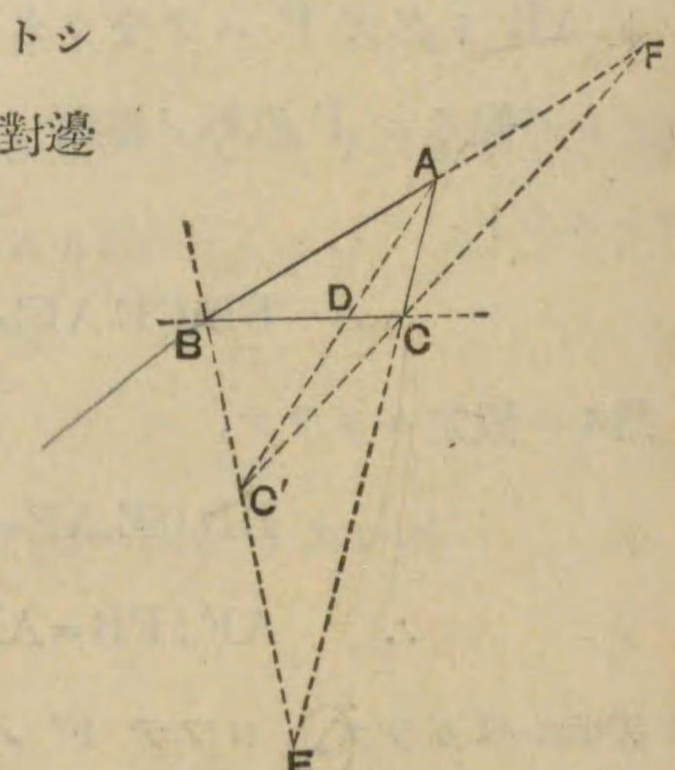
邊々相乘ズレバ

$$BD.CE.AF = DC.EA.FB$$

ヨッテ三ツノ二等分線 AD, BE, CF ハ一點デ會スル。

例 3. 三角形ノ一ツノ角ノ二等分線ト他ノ二ツノ角ノ外角ノ二等分線トハ一點ニ於テ會スルコトヲ證セヨ。

證明 圖ニ於テ A 角ノ二等分線ヲ AD, トシ B,C ノ外角ノ二等分線ヲ夫々 BE, CF トシ對邊ノ延長ト交ル點ヲ E, F トスルト,



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{BC}$$

ナルガ故ニ，コレ等ノ複比ヲ作ル時ハ容易ニ

$$BD.CE.AF = DC.EA.FB$$

ヨッテ三ツノ二等分線 AD, BE, CF ハ一點デ會スル。

例 4. 三角形ノ三ツノ高サハ一點ニ會スル。

證明 AD, BE, CF ヲ三ツノ高サトスレバ

$$BD : DC = AB\cos B : AC\cos C$$

$$CE : EA = BC\cos C : AB\cos A$$

$$AF : FB = AC\cos A : BC\cos B$$

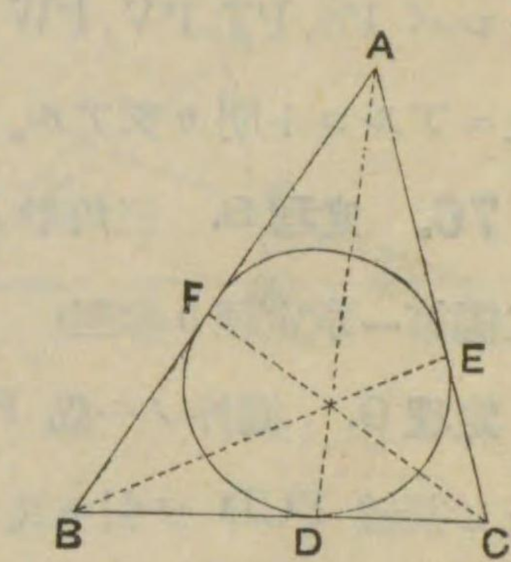
邊々相乘ズレバ

$$BD.CE.AF = DC.EA.FB$$

ヨッテ三ツノ高サ AD, BE, CF ハ一點デ會スル。

例 5. 三角形ノ各頂點カラ其內切圓ノ切點ニ至ル三ツノ直線ハ一點デ會スルコトヲ證明セヨ。

證明 圖ニ於テ BD = BF, CE = CD, AF = AE デアルカラ



$$BD.CE.AF = DC.EA.FB$$

ナルコトハ明カデアル。仍ッテ AD, BE, CF ハ一點ニ於テ會スル。

74. 定義 多クノ點ガ悉ク同一ノ直線上ニアル時ハ此等ノ點ヲ共線點トイフ。

75. 定理 7. 三角形 ABC ノ外接圓周上ノ一點ヨリ各邊ニ下セル垂線ノ足ハ同一直線上ニアル。

コレハ通常しむそん線 (垂足線) ニ關スル定理ト呼バレルモノデ第二編第二章ニ於テ已ニ證明シ且ツ多クノ系ヲモ說明シテ置イタ。併シ尙二ツノ應用問題ヲ示サウ。

例 1. 三角形 ABC ノ底邊ノ中點 A′ カラ垂足三角形ノ三邊ニ下セル垂線ノ足ハ一直線上ニアル。

證明 A, B, C カラ對邊ニ下ス垂線ヲ夫々 AD, BE, CF トスルト △DEF ハ垂足三角形デアル。而シテ四ツノ點 A′, D, E, F ハ九點圓ノ上ニアルガ故

ニ A′ カラ垂足三角形ノ各邊ニ下ス垂線ノ足ハ A′ ニ關スルしむそん線トナル。ヨツテ證明セラレタ。

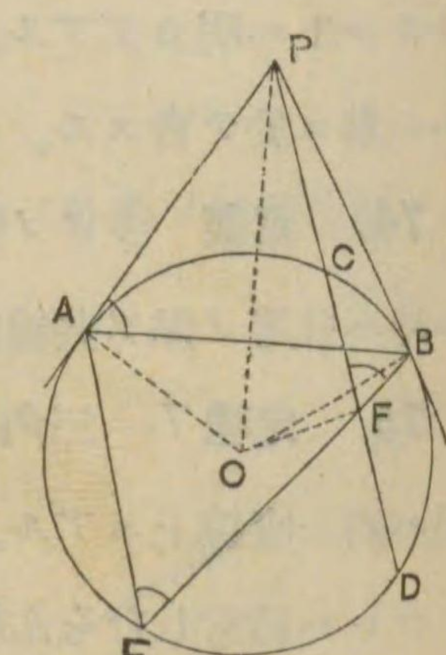
(a) **例2.** 四ツノ直線ニテ作ラレル四ツノ三角形ノ垂心ハ一直線上ニアルコトヲ證セヨ。

證明 四ツノ直線ヲ AB, BC, CD, DA トセヨ。(第二編第二章定理5系4圖參照) 然ル時ハ四ツノ三角形 ABF, ADE, BCE, CDF ノ外接圓ハ一點 P ニテ會ス。而シテ第二編第二章定理5系4ニヨリテ P ニ關ズル此等ノ四ツノ三角形ノしむそん線ハ同一ノ直線デアル。

次ニ三角形 ABF, ADE, BCE, CDF ノ垂心ヲ夫々 S, T, V, W トスルト系5ニヨリテ PS, PT, PV, PW ハしむそん線ノ爲メニ二等分セラレル。換言スレバ PS, PT, PV, PW ノ中點ハ一直線上ニアルカラ S, T, V, W ハ一直線上ニアルコト明カデアル。

76. 定理8. 三角形ノ垂心 H, 外心 O, 重心 G ハ一直線上ニアル。(第二編第一章定理5參照)

定理9. 圓外ノ一點 P ヨリ此圓ニ切線 PA, PB 及ビ割線 PCD ヲ引キ又 A ヨリ CD ニ平行弦 AE ヲ引ケバ弦 CD ノ中點ト B, E トハ一直線上ニアル。



證明 BE ヲ結ビ PD ト交ル點ヲ F トセヨ。サスレバ $\widehat{PAB}=\widehat{E}$, $\widehat{PAB}=\widehat{PFB}$ ナルコト明カデスカラ四邊形 PAFB ハ內接四邊形デアル。然ルニ

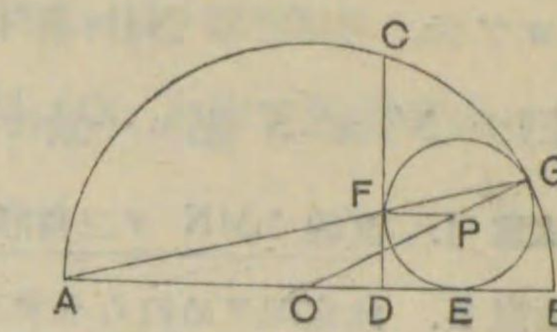
$$\widehat{PAO}=\widehat{PBO}=R\angle$$

故ニ四邊形 PAFB ノ外接圓ハ O ヲ通ル。而シテ PO ハ其圓ノ直徑デアル。故ニ $\widehat{PFO}=R\angle$ 從ツテ F ハ CD ノ中點デアル。仍ツテ證明セラレタ。

定理10. 半圓周上ノ一點 C ヨリ直徑 AB ニ垂線 CD ヲ引キ BD ト E, CD ト F, 半圓ト G ニ於テ切スル圓ヲ畫ケバ A, F, G ハ一直線上ニアル。

證明 半圓ノ直徑及ビ CD ニ切スル圓ノ中心ヲ P トシ, 原半圓ノ中心ヲ O

トスルト, O, P, G ハ同一直線上ニアル。FP, FG, AG ヲ結ブト △OAG, △PFG ハ何レモ二等邊三角形デ AO⊥CD, FP⊥CD デアルカラ AO//FP 故ニ △AOG∽△FPG 故ニ $\widehat{AOG}=\widehat{FPG}$ 故ニ $\widehat{AGO}=\widehat{FGP}$ 從ツテ AG, FG ハ同一ノ直線デアル。仍ツテ A, F, G ハ同一ノ直線上ニアル。

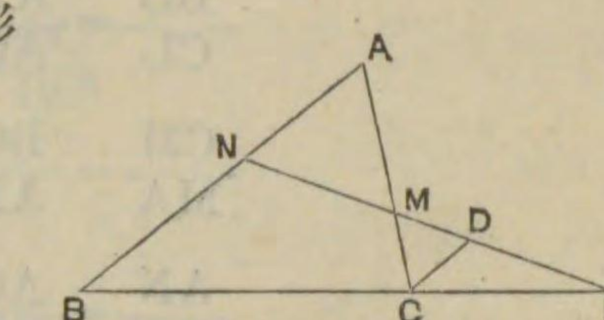


77. 定理11. 一直線ガ三角形 ABC ノ三邊 BC, CA, AB 又ハ夫等ノ延長ト L, M, N デ交ルトキハ

$$BL.CM.AN=CL.MA.NB$$

ナル關係ガ常ニ成立スル。

證明 圖ニ於テ ABC ヲ與ヘラレタ三角形トシ LMN ヲ一ツノ直線トス。



C カラ AB ニ平行ニ CD ヲ引キ直線ト D デ交ラシメルト

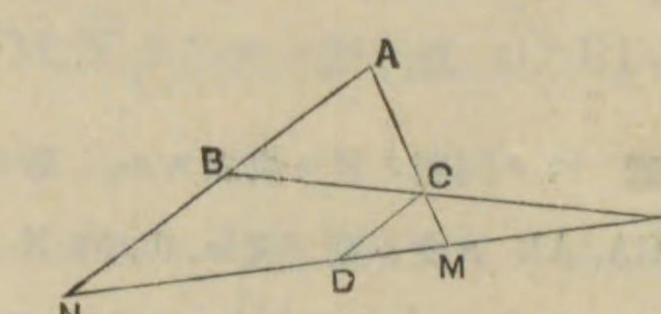
$$\triangle LCD \backsim \triangle LBN$$

$$\therefore\ CL:BL=CD:NB$$

從ツテ $CL.NB=BL.CD$

又 $\triangle CDM \backsim \triangle MAN$

$$\therefore\ CD.MA=AN.CM$$



此等ノ複比ヲ作ルト

$$CL.MA.NB=BL.CM.AN$$

系 逆ニ CL.MA.NB=BL.CM.AN ナル時ハ L, M, N ナル三ツノ點ハ一直線上ニアル。

證明 LM ヲ結ビ AB ト交ル點ヲ N′ トスレバ

$$CL.MA.N'B=BL.CM.AN'$$

然ルニ假定ニヨツテ

$$CL.MA.NB=BL.CM.AN$$

ヨツテ　$NB:N'B=AN:AN'$

即チ N' ガ N 點ニ一致セネバナラヌ。

注意 i. 直線 LMN ヲ三角形ノ截線トイフ。

注意 ii. 此定理ヲめねらうす (Menelaus) ノ定理トイヒ，共逆(系)ノ定理ハ共線點ノ證明ニ屢々利用セラレル頗ル重要ナモノデアル。

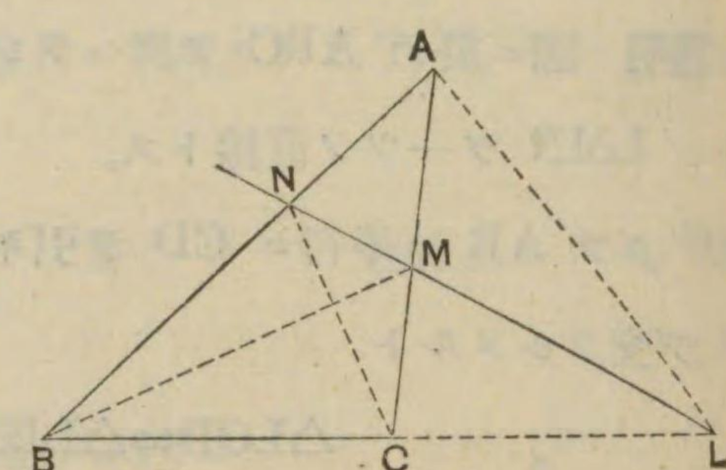
例 1. 三角形 ABC ノ兩底角 B, C ノ二等分線ガ對邊ト交ル點ヲ夫々 M, N トシ A ノ外二等分線ガ對邊ト交ル點ヲ L トスレバ，三ツノ點 L, M, N ハ一直線上ニアル。

證明 假定ニヨリテ BM, CN, AL ハ夫々內角 B, C 及ビ角 A ノ外角ノ二等分線デアルカラ

$$\frac{BL}{CL}=\frac{AB}{AC}$$

$$\frac{CM}{MA}=\frac{BC}{AB}$$

$$\frac{AN}{NB}=\frac{AC}{BC}$$



故ニ $BL.CM.AN=CL.MA.NB$

仍ツテ三ツノ點 L, M, N ガ一直線上ニアル。

注意 コノ問題ノ逆モ成立スル。即チ三角形 ABC ノ一ツノ截線ヲ LMN トシ，BC, CA, AB ト交ル點ヲ夫々，L, M, N トスル時，BM, CN ハ角 B, C ノ二等分線ナル時ハ AL ハ角 A ノ外二等分線デアル等ノ問題ガ成立スル。

何トナレバ L, M, N ハ一直線ヲナスカラ，

$$BL.CM.AN=CL.MA.NB \quad \cdots\cdots(1)$$

ナル等式ガ成立ツ。而シテ假定ニヨツテ BM, CN ハ B, C ノ二等分線デアルカラ

$$\frac{CM}{MA}=\frac{BC}{AB}, \qquad \frac{AN}{NB}=\frac{AC}{BC}$$

デアルカラ

$$\frac{CM.AN}{MA.NB}=\frac{AC}{AB} \quad \cdots\cdots(2)$$

(1) ト (2) トカラ　$\frac{BL}{CL}=\frac{AB}{AC}$

即チ AL ハ角 A ノ外二等分線デアル。其他ノ逆モ同樣ニシテ證明出來ル。

例 2. 三角形 ABC ノ外接圓ノ切線 AL, BM, CN ヲ作リ對邊ト夫々 L, M, N デ交ラシムレバ L, M, N ハ一直線上ニアル。

證明 $\triangle ABL$ ト $\triangle ACL$ トハ相似形デアルカラ

$$AB:BL=AC:AL$$

故ニ　$$\frac{AB}{AC}=\frac{BL}{AL}$$

即チ　$$\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BL^2}{AL^2}$$

然ルニ　$AL^2=LC.LB$ 故ニ

$$\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BL^2}{AL^2}=\frac{BL^2}{LC.LB}=\frac{BL}{CL}$$

同樣ニ　$$\frac{CM}{MA}=\frac{BC^2}{AB^2}, \quad \frac{AN}{BN}=\frac{AC^2}{BC^2}$$

故ニ　$$\frac{BL.CM.AN}{CL.MA.BN}=1$$

即チ　$BL.CM.AN=CL.MA.BN$

仍ツテ L, M, N ハ同一ノ直線上ニアル。

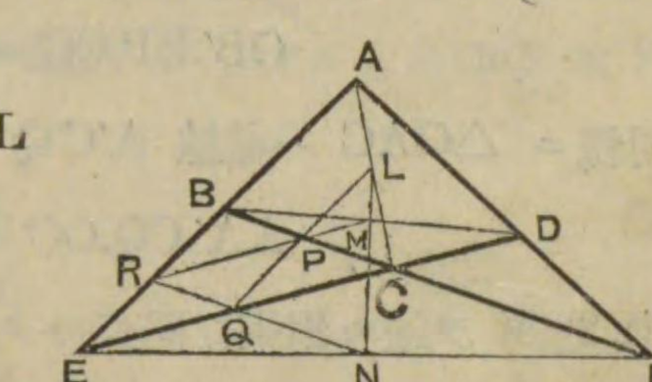
78. 定理 12. 完全四邊形ノ三ツノ對角線ノ中點ハ一直線上ニアル。

證明 ABCDEF ヲ完全四邊形トシ L, M, N ヲ三ツノ對角線 AC, BD, EF ノ中點トス。

今 BC, CE, EB ノ中點ヲ夫々 P, Q, R トスルト PQ, RP, QR ノ延長ハ夫々 L, M, N ヲ過ル。

サテ, L, M, N ガ一直線上ニアルコトヲ證明スルニハ三角形 PQR ニ關シテ(本編定理 3 系ヲ用ヒテ)

$$PM.RN.QL=RM.QN.PL$$



ナルコトヲ證明スレバヨイ。

然ルニ　$$PM=\frac{1}{2}CD$$

$$RN=\frac{1}{2}BF$$

$$QL=\frac{1}{2}AE,\qquad RM=\frac{1}{2}ED$$

$$QN=\frac{1}{2}CF,\qquad PL=\frac{1}{2}AB$$

デアルカラ

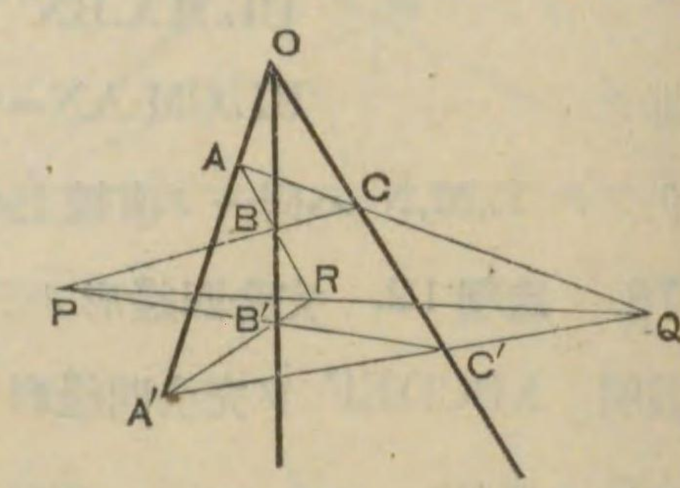
$$CD.BF.AE=ED.CF.AB$$

ナルコトヲ證明スレバ良イノデアル。

然ルニコレハ △BCE ニ關シテ截線 ADF ノ定ムル線分ノ等式デアルカラ本編定理11ニヨツテ眞デアル。

注意 コノ定理ハ已ニ第三編第一章定理8ニテ證明シタケレドモ歴史上有名ナ問題デアルカラ更ニ再ビ述ベタ。

定理13. 二ツノ三角形 ABC, A′B′C′ ノ頂點ハ二ツ宛一點 O ニ會スル三ツノ直線 OAA′, OBB′, OCC′ ノ上ニ在ル時ハ相應對スル邊ノ交點 P, Q, R ハ一直線上ニ在ル。



證明 二ツノ三角形 ABC, A′B′C′ ハ三ツノ直線 OAA′, OBB′, OCC′ ノ上ニ各頂點ヲ有スル時 BC, B′C′ ノ交點ヲ P; CA, C′A′ ノ交點 Q; AB, A′B′ ノ交點ヲ R トスルト P, Q, R ハ一直線上ニ在ル。

何トナレバ三角形 OAB ハ截線 A′B′R デ截ラルヽカラ

$$OA'.AR.BB'=AA'.BR.OB' \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 △OBC ハ截線 C′B′P ニヨツテ截ラレルカラ,

$$OB'.BP.CC'=BB'.CP.OC' \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

同様ニ △OAC ハ截線 A′C′Q ニヨツテ截ラレルカラ,

$$AA'.CQ.OC'=OA'.AQ.CC' \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1),(2),(3) ヲ邊々相乘ジ同ジモノヲ消去スルト

$$AR.BP.CQ=BR.CP.AQ$$

コレ △ABC ニ關スル三點 PQR ガ一直線上ニアルコトヲ示スモノニ外ナ

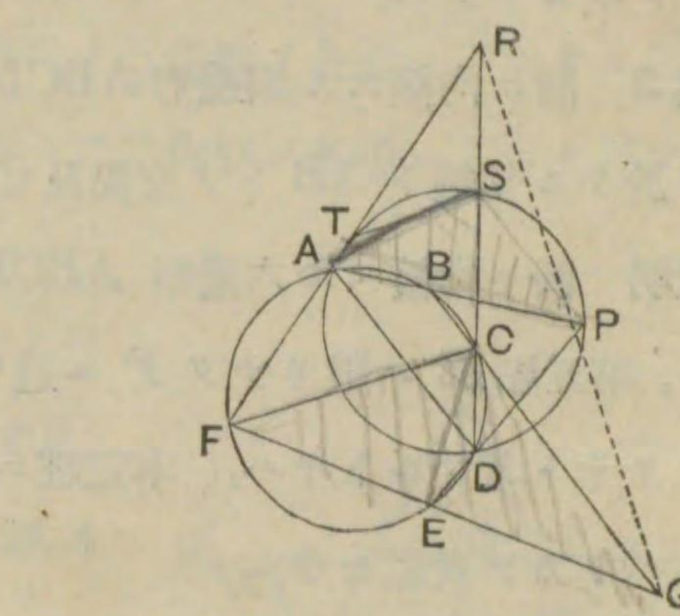
ラヌ。(めぬらうすノ逆定理)

注意 コノ定理ヲでざるぐノ定理トイフ。でざるぐ (Desargues, G 1593—1662) ハ幾何學ニ無限遠ノ思想ヲ導入シ, 直線ガ無限遠ニ中心ヲ有スル圓デアルト考へ, 平行線ハ無限遠デ交ハルノダト假定シタ。コノ新ラシイ見方ハ幾何學(特ニ綜合幾何學)ヲシテ頗ル進歩セシメタガ併シ其功績ハ永ラク世ニ認メラレナカツタ。

79. 定理14. 圓ニ內接スル六邊形ノ三組ノ相對スル邊ノ延長ノ交點ハ一直線上ニアル。

證明 ABCDEF ヲ圓ニ內接スル六邊形トスルト三組ノ相對スル邊, AB. DE ノ交點 P ト BC, FF ノ交點 Q ト CD, FA ノ交點 R トハ一直線上ニアル。

今 △ADP ニ外接スル圓ヲ畫キ, DC トノ交點ヲ S, AF トノ交點ヲ T トシ, ST, FC, AD ヲ結ブト



$$T\hat{S}D=F\hat{A}D$$

$$F\hat{A}D=F\hat{C}D$$

$$\therefore\quad T\hat{S}D=F\hat{C}D$$

$$\therefore\quad ST\,/\!/\,CF$$

同様ニ $\quad SP\,/\!/\,CQ$

$$TP\,/\!/\,FE$$

即チ二ツノ三角形 STP, CFQ ニ於テ三邊ハ夫々平行シ且ツ二ツノ對應スル頂點ヲ結ブ直線 TF, SC ハ R デ交ルカラ第三ノ對應頂點 P, Q ヲ結ブ直線ハ又 R デ交ラネバナラヌ。ヨツテ三點 P, Q, R ハ一直線上ニアル。

注意 めぬらうすノ定理ヲ用ヒテモ證明スルコトガ出來ル。即チ EF, AB ノ交點ヲ L トシ, AB. CD ノ交點ヲ M トシ CD, EF ノ交點ヲ N トスルト △LMN ガ BC, DE, AF デ截ラレルカラ

$$LB.MC.NQ=BM.CN.LQ$$

$$LP.MD.NE=MP.DN.EL$$

$$LA.MR.NF=AM.NR.FL$$

邊々相乘ジ且ツ

$$LA.LB=LE.LF$$

$MA.MB=MD.MC$

$NF.NE=NC.ND$

ナルコトニ注意スルト

$NQ.LP.MR=LQ.MP.NR$

コレ $\triangle LMN$ ニ關シテ P, Q, R ハ一直線ヲナス截線デアルコトヲ示スモノデアル。ヨツテ證明セラレタ。

系 1 圓ニ内接スル五邊形 ABCDE ニ於テ A 點ニ於ケル切線ト CD トノ交點, AB ト DE トノ交點, BC ト EA トノ交點ハ一直線上ニ在ル。

證明 何トナレバ圓ニ内接スル六邊形 ABCDEF ニ於テ第六點 F ハ限リナク A ニ近ヅケルモノト見ルト, 其ノ極限ニ於テハ AF ハ A 點ニ於ケル切線トナルカラデス。

系 2 圓ニ内接スル四邊形 ABCD ニ於テ A ニ於ケル切線ト CD トノ交點, D ニ於ケル切線ト AB トノ交點及ビ AD ト BC トノ交點ハ一直線上ニ在ル。

證明 圓ニ内接スル六邊形 ABCDEF ニ於テ B 點ハ限リナク A 點ニ近ヅキ, 第五點 E ハ限リナク F ニ近ヅキタル極限ノ場合ハ四邊形 ABCD ニナリタリト考フルトキハ, 本定理ニ於ケル諸線分ガ本問題ニハ如何ニ變更サラルベキカヲ表記セウ。

本定理ニ於ケル直線	本問題ニ於ケル直線
AB	A ニ於ケル切線
BC	AB
CD	BC
DE	CD
EF	D ニ於ケル切線
FA	AD

故ニ本定理ニ於ケル AB, DE ノ交點, BC, EF ノ交點, CD, FA ノ交點ハ夫々本題ニテハ A ニテノ切線ト CD トノ交點, D ニテノ切線ト AB トノ交點及ビ BC ト AD トノ交點トナル。仍ツテ三ツノ交點ハ一直線上ニアル。

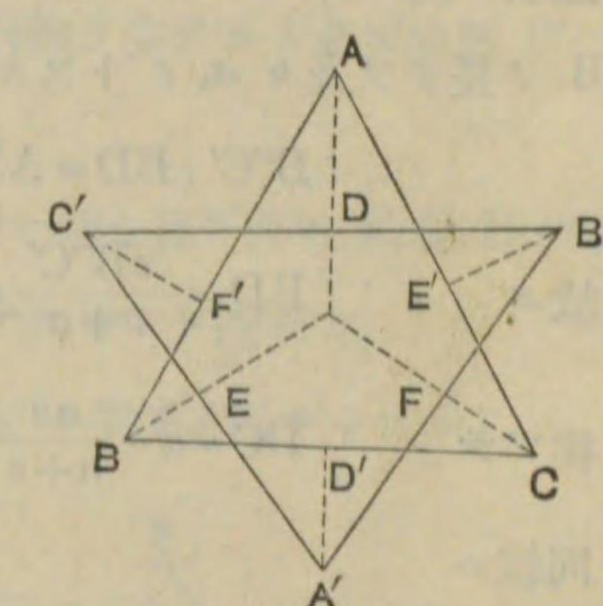
注意 i. コノ定理ヲぱすかるノ定理トイフ。(Pascal, B 1623—1662) ハでざるぐト同時代ノ大數學家デアツタ。ぱすかるガ幾何學的ノ才能ニ富ンデ居ルコトハ幼年時代カラ充分顯ハレテ居ツタ。此定理モぱすかるガ僅カニ十六歳ノ時ニ發見シタルモノデ彼ノ發表シタ所ノモノハ此定理ヨリモ更ニ一般的ノモノデアル。即チ「圓錐曲線ニ内接スル任意ノ六邊形ノ相對スル邊ノ三ツノ交點ハ一直線上ニアル」トイフノデアツタ。

注意 ii. ぱすかるノ定理ト密接不離ノ定理ニぶりあんしょんノ定理トイフノガアルガ玆デハ其説明ハ困難デアルカラ後ニ廻ハス。

第十編 問題解義

1. 一ツノ三角形ノ各頂點ヨリ夫々第二ノ三角形ノ各邊ニ下シタル三ツノ垂線ガ共點ナル時, 第二ノ各頂點カラ第一ノ三角形ノ各邊ニ下シタ三ツノ垂線モ一點デ會スル。

證明 三角形 ABC ノ各頂點カラ第二ノ三角形 A′B′C′ ノ各邊ニ下セル垂線 AD, BE, CF ガ共點線ナリトスル。然ル時ハ, 定理 4 ノ注意ニヨリ



$$(B'D^2-C'D^2)+(C'E^2-A'E^2)$$
$$+(A'F^2-B'F^2)=0$$

從ツテ

$$(AB'^2-AC'^2)+(BC'^2-BA'^2)+(CA'^2-CB'^2)=0 \cdots\cdots(1)$$

サテ三角形 A′B′C′ ノ各頂點カラ三角形 ABC ノ各邊ニ下セル垂線ヲ A′D′, B′E′, C′F′ トスルト

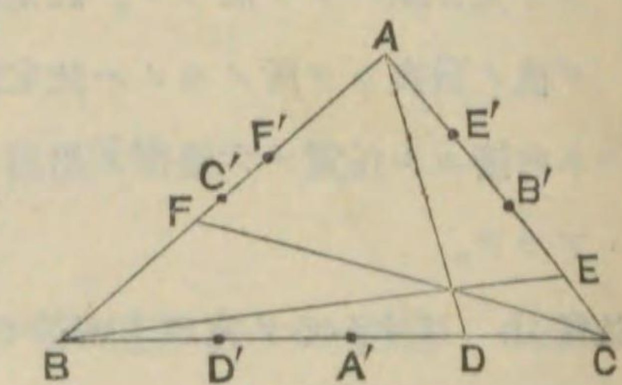
$$(AF'^2-BF'^2)+(BD'^2-CD'^2)+(CE'^2-AE'^2)$$
$$=(AC'^2-BC'^2)+(BA'^2-CA'^2)+(CB'^2-AB'^2)\cdots\cdots(2)$$

(1) カラ (2) ガ零ナルコトヲ知ル。故ニ此三ツノ垂線モ亦共點線デアル。

2. 三角形ノ頂點ヲ對邊上ノ一點ト結ビ付ケル三ツノ直線ガ共點ナルトキ

ハ，各邊ノ上＝夫々共點＝關スル各點ノ對稱點ヲトリ，コレヲ相對スル頂點ト結ビ付ケル三ツノ直線ハ一點デ會スル。

證明 圖＝於テ AD, BE, CF ハ共點線ナリトシ，A′, B′, C′, ヲ各邊　トス。今



$$A'D=A'D', \qquad B'E=B'E'$$

$$C'F=C'F'$$

ナルヤウ＝ D′, E′, F′ ヲトル時ハ

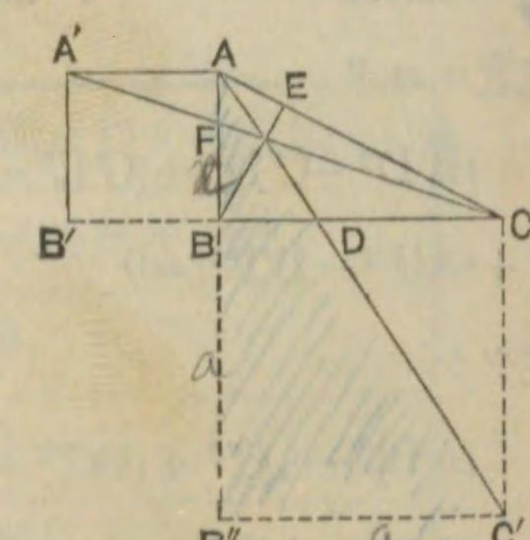
$$\frac{BD'}{D'C}\frac{CE'}{E'A}\frac{AF'}{F'B}=\frac{CD}{DB}\frac{AE}{EC}\frac{BF}{FA}=\frac{CD}{DB}\frac{BF}{FA}\frac{AE}{EC}=1$$

故＝ AD′, BE′, CF′ ハ共點線デアル。

3. 直角三角形 ABC ノ直角頂ヲ夾ム邊 AB, BC ノ上＝平方形 AA′B′B, BB″C′C ヲ作ル時ハ A′C, AC′ ハ共＝ B カラ AC ヘノ垂線上ノ同一ノ點デ交ハルコトヲ證セヨ。

證明 圖＝於テ A′C, AC′ ガ AB, BC ト交ハル點ヲ夫々 F, D トシ，BC, AB ノ長サヲ夫々 a, c トスルト △AB″C′ カラ

$$B''C':BD=AB'':AB=a+c:c$$



故＝
$$BD=\frac{cB''C'}{a+c}=\frac{ac}{a+c}$$

従ツテ
$$DC=a-\frac{ac}{a+c}=\frac{a^2}{a+c}$$

同様＝

$$BF=\frac{ac}{a+c},\quad FA=\frac{c^2}{a+c}$$

又
$$\hat{B}=B\hat{E}C=R\angle \text{ デアルカラ}$$

$$AB^2=AE.AC \qquad BC^2=CE.AC$$

故＝
$$\frac{AE}{CE}=\frac{AB^2}{BC^2}=\frac{c^2}{a^2}$$

仍ツテ

$$\frac{BD.CE.AF}{DC.EA.FB}=\frac{ac}{a+c}\frac{a+c}{a^2}\frac{a^2}{c^2}\frac{c^2}{a+c}\frac{a+c}{ac}=1$$

故＝ A′C, AC′, BE ハ一點＝於テ會スル。

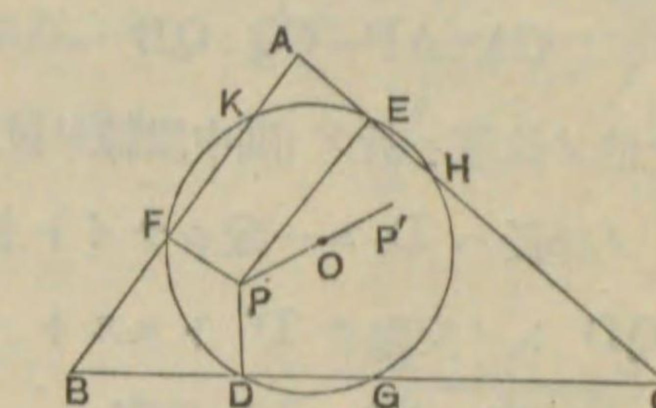
4. 三角形内ノ任意ノ點カラ各邊＝垂線ヲ下シ其足ヲ過ル圓ガ各邊ヲ截ル第二ノ點カラ各邊＝垂線ヲ引ケバ此等ハ共點線デアル。

證明 三角形 ABC 内＝任意ノ點 P ヲトリ垂線 PD, PE, PF ヲ引キ其足ヲ過ル圓ガ三ツノ邊 BC, CA, AB ヲ截ル第二ノ點ヲ夫々 G, H, K トスル。

圓 DFF ノ中心ヲ O トシ，OP＝OP′ ナル點ヲ PO ノ延長上＝トレ。

然レバ O ハ PP′ ノ中點デアルカラ O カラ底邊 BC ヘノ垂線ノ足ハ P 及ビ P′ カラ下シタ垂線ノ足ノ中點デアル。

サテ O カラノ垂線ハ弦 DG ノ中點デ而カモ假定＝ヨツテ PD⊥BC デアルカラ P′G⊥BC デナケレバナラヌ。換言スレバ圓 DEF ガ BC ヲ截ル第二ノ點カラ BC＝垂線ヲ立テルト必ズ定點 P′ ヲ過ル。

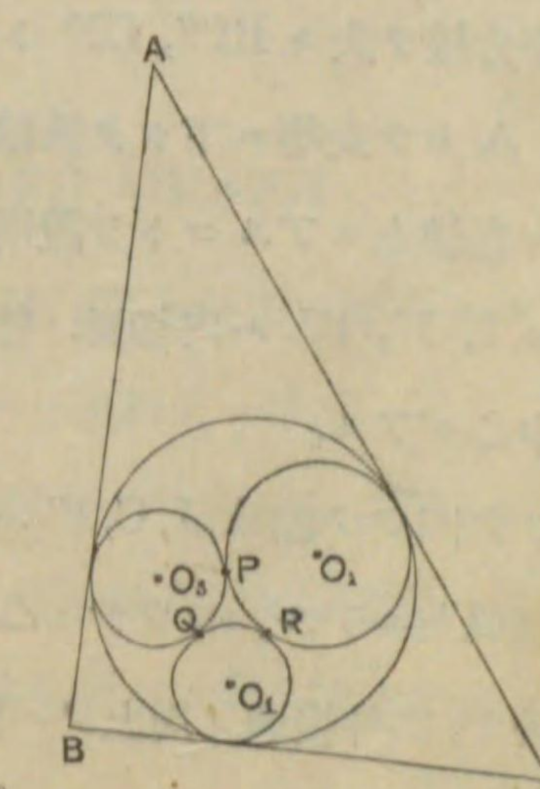


同様＝シテ H 及ビ K カラ CA, AB ＝夫々垂線ヲ立テルト必ズ定點 P′ ヲ過ラネバナラヌ。

5. 三角形ノ内切圓ガ各邊＝切スル點デ各邊＝切シ且ツ互＝ P, Q, R デ切スル三ツノ圓アル時ハ，AP, BQ, CR ハ共點線ナルコトヲ證セヨ。

證明 圖＝於イテ r_1, r_2, r_3 ヲ夫々圓 O_1, O_2, O_3 ノ半徑ノ長サトスル。

A カラ圓 O_3, O_2 ＝至ル切線ノ長サガ等シイカラ



$$AO_3^2-r_3^2=AO_2^2-r_2^2$$

故＝

$$AO_3^2-AO_2^2=r_3^2-r_2^2$$

故＝ A ハ P ヲ過リ中心線 O_2O_3 ＝垂直ナル直線上＝アル。同様＝ BQ, CR ハ夫々 O_3O_1, O_1O_2 ＝垂直デアル。所ガ

$$(O_1R^2-RO_2^2)+(O_2P^2-PO_3^2)+O_3Q^2-QO_1^2)$$

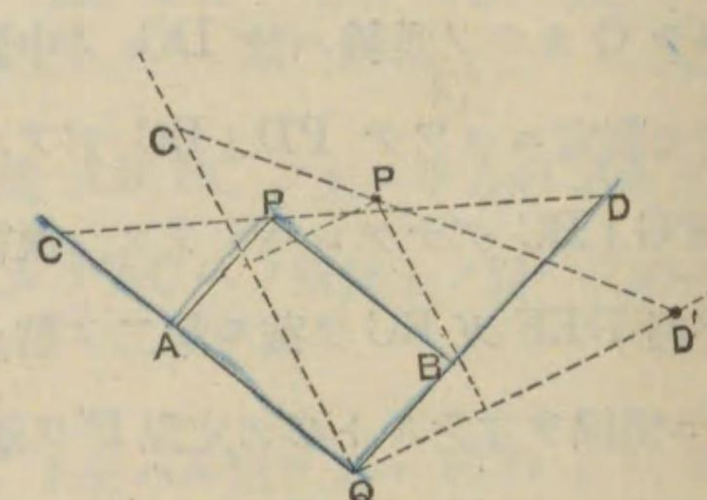
$=(r_1^2-r_2^2)+(r_2^2-r_3^2)+(r_3^2-r_1^2)=0$

仍ツテ AP, BQ, CR ハ共點線デアル。

6. 四ツノ直線 PA, PB, QAC, QBD ハ P, Q, A, B ニ於テノ角ガ自由ニ變ジ且ツ PAQB ガ一ツノ平行四邊形ヲ成ス如ク作ラレタリトス。若シ QC, QD 上ニ一ツ宛トリタル二ツノ點ガ一度P點ト共ニ同一直線上ニアリトスルト, P, Q, A, B ニ於ケル角ガ如何ニ變ズルモ常ニ同一ノ直線上ニアル。

證明 C, D ヲ QC, QD 上ノ定マツタ點トスル。然ル時或一ツノ位置ニ於テ P ト共ニ同一ノ直線上ニアルモノトスルト

CA : AP = CQ : QD …………(1)



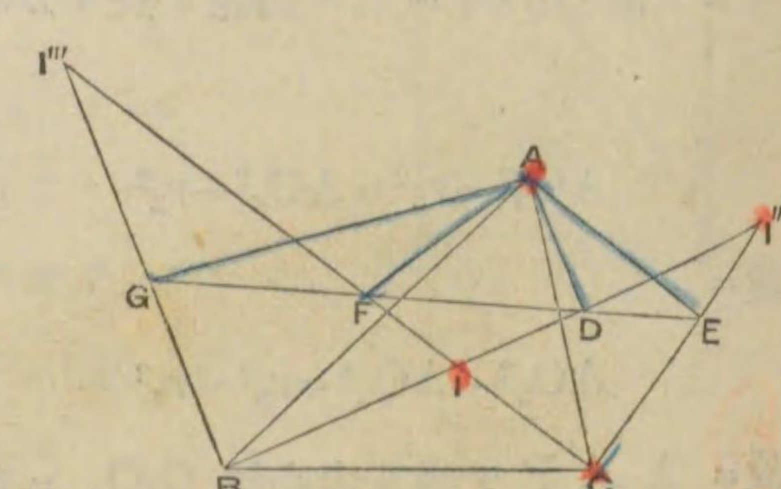
今他ノ位置ニ於テ (圖中點線ノ位置) CP ノ延長ハ D ニ一致シナイト假定シ QD トノ交點ヲ D′ トスルト

CA : AP = CQ : QD′…………(2)

(1), (2) カラ QD = QD′ 即チ D′ ハ D ニ一致スル。

7. 三角形ノ一ツノ頂點カラ, 他ノ二ツノ角及ビ夫等ノ外角ヲ二等分スル直線ニ下シタ垂線ノ足ハ一直線上ニ在ル。

證明 △ABC ノ二ツノ角 B, C ノ二等分線ヲ夫々 BI I″, CI I‴, 其外角ノ二等分線ヲ夫々 BI‴, CI″ トスルト, A カラ此等ニ下シタ垂線ノ足ハ一直線上ニアルコトヲ證明ショウ。茲ニ I, I″, I‴ ハ内切圓, 傍切圓ノ中心デアル。



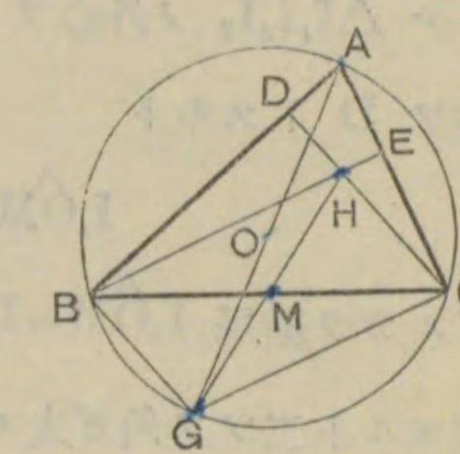
サテ四ツノ點 A, I, C, I″ ハ一ツノ圓周上ニアル。ヨツテ △II″C ニ於テ, 其外接圓ノ周上ノ一點 A カラ三邊ニ垂線 AD, AE, AF ヲ引クト, 夫等三ツノ點 D, E, F ハ A 點ニ關スル △II″C ノしむそん線ノ上ニアル。

次ニ同樣ニシテ D, F, G ハ三角形 II‴B ノしむそん線ノ上ニアル。

而シテコノ二ツノしむそん線ハ二點 D, F ヲ共有スルカラ全ク同一ノモノデアル。ヨツテ問題ハ解カレタ。

8. 三角形 ABC ノ垂心 H ト底邊 BC ノ中點 M 及ビ A ヲ過ル直徑ノ他ノ端 G トハ一ツノ直線上ニアルコトヲ證セヨ。

證明 四邊形 BHCG ハ平行四邊形ナルコト明カナリ。故ニ對角線ハ互ニ他ヲ二等分スル。故ニ HG ノ上ニ BC ノ中點 M ガアル。



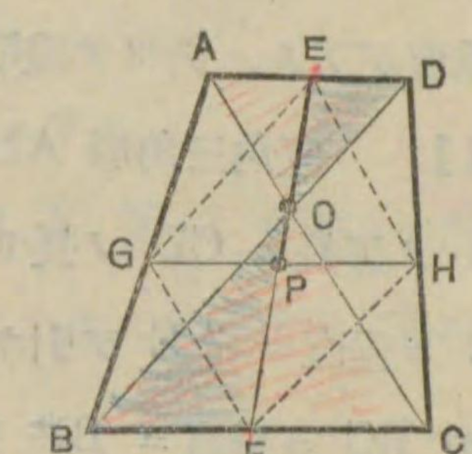
9. 梯形ノ對角線ノ交點, 平行二邊ノ中點, 平行セザル二邊ノ中點ヲ結ブ直線ノ中點ハ一直線上ニアル。

證明 圖ニ於イテ △OBF∽△EOD

故ニ　ED : BF = OD : OB …………………………………(1)

又　△ODA∽△OBC

故ニ　AD : BC = OD : OB …………………………………(2)



仍ツテ

ED : AD = BF : BC

然ルニ AD = 2ED 從ツテ BC = 2BF 故ニ EO ノ延長ハ BC ノ中點ヲ通過スル。次ニ GE // BD, $\mathrm{GE}=\frac{1}{2}\mathrm{BD}$

同樣ニ FH // BD, $\mathrm{FH}=\frac{\mathrm{BD}}{2}$　故ニ GE // FH, GE = FH

仍ツテ GEHF ハ平行四邊形トナルカラ GH, EF ハ互ニ二等分スル。即チ P ハ GH ノ中點デアル, 故ニ E, O, P, F ハ一直線上ニアル。

10. 三角形 ABC ノ角 A, B, C ノ二等分線上ニアル傍心ヨリ夫々 BC, CA, AB 邊ニ引ケル三ツノ垂線ハ一點デ會スル。(昭和三年文檢豫備)

證明 三角形 ABC ニ於テ角 A, B, C ノ二等分線上ニアル傍心ヲ夫々 I_1, I_2, I_3 トシ内心ヲ I トスルト

$$I\hat{B}I_1 = I\hat{C}I_1 = R\angle$$

デアルカラ IBI_1C ハ內接四邊形デアル。從ツテ

$$B\hat{I}I_1 = B\hat{C}I_1$$

同樣ニ $AIBI_3$ モ內接四邊形デアルカラ

$$B\hat{I}I_1 = A\hat{I_3}B \qquad \therefore \quad A\hat{I_3}B = B\hat{C}I_1$$

サテ $\triangle I_1I_2I_3$ ノ外心ヲ O トシ I_1I_2 ニ垂線 OM ヲ引キ, OI_1 ト BC トノ交點ヲ D トスルト

$$I_1\hat{O}M = A\hat{I_3}B$$

デアルカラ結局 $I_1\hat{O}M = D\hat{C}I_1$ トナル。ソコデ二ツノ三角形 OMI_1, I_1DC ヲ比較スルト二ツノ角ガ夫々相等シキコトカラ第三ノ角 $I_1DC = O\hat{M}I_1 = R\angle$ トナル。即チ OI_1 ハ BC ニ垂直デアル。同樣ニ OI_2 ハ AC ニ, OI_3 ハ AB ニ垂直デアル。仍ツテ證明セラレタ。

11. 直角三角形 ABC ノ直角頂 C ヨリ斜邊ニ垂線 CD ヲ下シ AB, BA ノ延長ニ CD ノ長サニ等シク AP, BQ ヲ作リ AP 垂直ニ PE ヲ引キ AC ニ垂直ニ AE ヲ引キ夫等ノ交點ヲ E トス。次ニ BQ ニ垂直ニ QF ヲ引キ BC ニ垂直ニ BF ヲ引キ夫等ノ交點ヲ F トス。然ルトキハ三ツノ直線 AF, BE, CD ハ一點ニ於テ會スルコトヲ證明セヨ。

證明 CD ト AF トノ交點ヲ G トスルト

$$FQ : DG = AQ : AD = (AB + CD) : AD$$

故ニ
$$DG = \frac{AD.FQ}{AB + CD}$$

同樣ニ AF ト CD トノ交點ヲ G′ トスルト

$$DG' = \frac{BD.PE}{BP} = \frac{BD.PE}{AB + CD}$$

然ルニ $\triangle AEP \infty \triangle BCD$ ナルガ故ニ

$$BD : CD = AP : PE \quad 即チ \quad BD.PE = CD.AP = CD^2$$

又 $\triangle BQF \infty \triangle ACD$ ナルガ故ニ

$$AD : CD = BQ : FQ \quad 即チ \quad AD.FQ = CD.BQ = CD^2$$

故ニ G ト G′ トノ二ツノ點ハ一致スル。仍ツテ三ツノ直線 AF, BE, CD ハ一點 G デ會スル。

12. 三角形ノ外角ノ二等分線ハソノ對邊ト交ル三ツノ點ハ一直線上ニアル。

證明 $\triangle ABC$ ニ於テ三ツノ外角ノ二等分線ノ對邊ト交ル點ヲ夫々 A′, B′, C′トスル。

AA′ ハ $\hat{A}$ ノ外二等分線デスカラ

$$BA' : CA' = AB : AC$$

同樣ニ
$$CB' : AB' = BC : AB$$
$$AC' : BC' = AC : BC$$

邊々相乘ズレバ

$$BA'.CB'.AC' = CA'.AB'.BC'$$

ヨツテ A′, B′, C′, ハ三角形 ABC ノ一ツノ截線上ニアル。

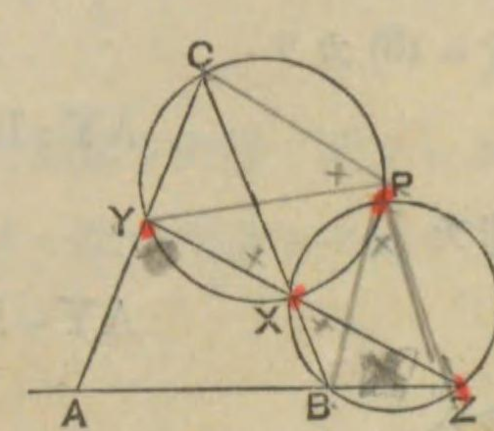
13. 定三角形ノ邊 BC, CA 及ビ AB ノ延長ヲ X, Y, Z デ截ル直線ガ XY : XZ ガ一定ナルヤウニ動ク時ハ此ノ截線ニヨツテ生ズル三角形ノ外接圓ハ常ニ定點ヲ過ル。

證明 二ツノ三角形 XYC, XBZ ノ外接圓ノ第二ノ交點ヲ P トスルト。

$$B\hat{P}Z = B\hat{X}Z = Y\hat{X}C = Y\hat{P}C$$

デアルカラ
$$Y\hat{P}Z = B\hat{P}C = A\hat{Y}Z + Y\hat{Z}B$$
$$= 2R\angle - \hat{A}$$

ヨツテ P ハ又 $\triangle ABC$ ニ外接スル圓ノ上ニアル($\triangle AYZ$ ノ外接圓ノ上ニモアル)。



次ニ
$$\triangle BPZ \infty \triangle PCY$$

デスカラ

$$PB : PC = BZ : CY \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

又直線 BXC ハ $\triangle AYZ$ ノ截線ト考ヘラレルカラ

$$AB.ZX.YC = BZ.XY.AC \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1), (2) カラ

$$\frac{XY}{XZ}=\frac{AB.YC}{AC.BZ}=\frac{AB}{AC}\,\frac{PC}{PB}$$

所ガ假定ニヨリ XY : XZ ガ一定デ, AB : AC モ一定デアルカラ結局 PC : PB ガ一定トナル。而シテ P ガ△ABC ノ外接圓ノ上ニアツテ二定點 B, C カラ定比ノ所ニアルカラ定位置ヲ有ス。仍ツテ二ツノ圓ノ第二ノ交點ガ定位置デアル。

14. 四邊形 ABCD ノ一邊 AB ノ長サガ一定デ, 二ツノ對角線ガ分タラレタ二ツノ部分ノ比ガ夫々一定ナル時ハ邊 CD ノ延長ガ恒ニ一ツノ定點ヲ過ギルコトヲ證セヨ。

證明　對角線 AC, BD ノ交點ヲ X トシ AB, CD ノ延長ノ交點ヲ Y トスル。二ツノ頂點 C, D ノ位置ガ

$$AX:XC=m:n \quad\cdots\cdots(1)$$

$$BX:XD=p:q \quad\cdots\cdots(2)$$

ナルヤウニ變ズルモノトスル時ハ Y ハ AB ノ延長上ノ定點デアル。何トナレバ直線 DCY ガ △ABX ノ截線デアルカラ

$$AY.BD.XC=BY.XD.AC \quad\cdots\cdots(3)$$

而シテ (1) カラ

$$XC:AC=n:m+n$$

(2) カラ

$$BD:XD=p+q:q$$

故ニ (3) カラ

$$AY:BY=q(m+n):n(p+q)$$

即チ

$$AY-BY:BY=q(m+n)-n(p+q):n(p+q)$$

或ハ

$$AB:BY=(qm-np):(np+nq)$$

仍ツテ BY ノ長サガ一定デアル。從ツテ Y ハ定點デアル。

第十編　練習問題

1. 甲乙二個ノ等圓ガ互ニ外切スルトキ甲圓周上ノ點ヲ中心トシ其直徑ヲ半徑トシテ之ニ切スル圓ヲ畫クトキハ, コレト乙圓トノ交點ノ一ツハ兩切點ヲ結ビ付ケル直線上ニアリ。

2. 三角形 ABC ノ底邊 BC 上ノ任意ノ點 P カラ AC, AB ニ平行ナル直線ヲ引キ B, C ヲ過ル任意ノ二ツノ平行線ト夫々 Q, R デ交ラシムル時ハ Q, A, R ハ一直線上ニアルコトヲ證明セヨ。

3. 三角形 ABC ノ邊 BC ノ中點ヲ D トシ, △ABE=△AEC ナルヤウニ E ヲトル時ハ三ツノ點 A, E, D ハ一直線上ニアルコトヲ證セヨ。

4. 三角形ノ各頂點カラ其垂足三角形ニ下シタ垂線ハ一點デ會スル。

注意　垂足三角形ニ下シタ垂線ハ元ノ三角形ノ外心ヲ通ルコトニ注意セヨ。

5. △ABC ノ各頂點ヲ中心トシテ, 二ツヅツ互ニ相切スル三ツノ圓ヲ畫ケバ, 此等ノ各圓ノ切點ニ於ケル三ツノ共通切線ハ一點ニ於テ相會ス。

6. 三角形内ノ任意ノ一點カラ各邊ニ垂線ヲ下シ其足ヲ結ビ第二ノ三角形ヲ作ル時, 元ノ三角形ノ各頂點カラ之ノ三邊ニ下ス垂線ハ一點ニ會スル。

7. 三角形 ABC ノ各頂點カラ互ニ一點ニ會スル直線 AD, BE, CF ヲ引キ對邊ト夫々 D, E, F デ交ラシム, 三點 DFF ヲ過ル圓ハ三邊ヲ夫々 D′, E′, F′ デ截ル時ハ AD′, BE′, CF′ ハ一點デ會スルコトヲ證セヨ。

8. 正方形 ABCD ノ對角線上ニ任意ノ一點 E ヲトリ, E ヲ過リ AB, BC ニ平行線ヲ引キ BC, CD, DA, AB ト夫々 F, G, H, K デ交ラシムル時ハ, BH, CE, DK ハ共點線デアル。

9. 三角形ノ各邊ハ一ツノ圓デ截ラルヽ時, 各頂點ト對邊ノ截ラレタ點トヲ結ブ一組ノ直線ハ共點線ナラバ, 各頂點ト他ノ一組ノ交點トヲ結ブ三ツノ直線モ亦共點線デアル。

第十一編 平均距離ノ中心

80. 定義 一群ノ點 A, B, C……及ビ一組ノ定マレル正ノ整數 a, b, c…… アル時，線分 AB ヲ M_1 點デ

$$AM_1 : M_1B = b : a$$

ナルヤウ＝內分シ，次＝線分 M_1C ヲ M_2 點デ

$$M_1M_2 : M_2C = c : a+b$$

ナルヤウ＝內分スル。カヽル手續ヲ繼續シ與ヘラレタ一群ノ點ヲ悉クトル時最後ノ內分點ヲ M トスルト，M ヲ a, b, c…… ＝關スル點 A, B, C,…… ノ平均距離ノ中心トイフ。若シ $a=b=c=$……ナル時ハ M ヲ單＝ A, B, C,…… ノ平均距離ノ中心トイフ。

81. 數學的歸納法

數學的歸納法トハ，正ノ整數 n ＝關スル命題アリ，(i) コノ命題ハ特別ナル値ノ時成立スルコトヲ驗シ，次＝(ii) 一般＝ r ノ時成立スルモノト假定スル時ハ $r+1$ ノ時モ其命題ガ成立スルコトヲ得レバ，コノ命題ガ 1 ヨリ大ナル凡テノ整數＝對シテ心ズ成立スルト斷ズル方法デアル。何故ナラバ (i) ＝ヨツテ $n=1$ ノ時成立スル $n=1$ ノ時成立スルナラバ (ii) ＝ヨツテ $n=2$ ノ時＝成立スル。$n=2$ ノ時成立スルナラバ (ii) ＝ヨツテ $n=3$ ノ時成立スル。順次斯クノ如ク＝シテ n ノ任意ノ正ノ整數＝對シテ與ヘラレタ命題ガ成立スルノデアル。

注意 i. (ii) ノ代リ＝，n ノ或値 $r, (r+1), (r+2$,………$(r+s-1)$ ナル s 個ノ場合＝其命題ガ成立スルコトヲ假定シテモ宜イ。併シ其場合＝ハ，(i) ＝於テ n ガ 1, 2, 3,………s ナル s 個ノ場合＝其命題ガ成立スルコトヲ驗スル必要ガアル。

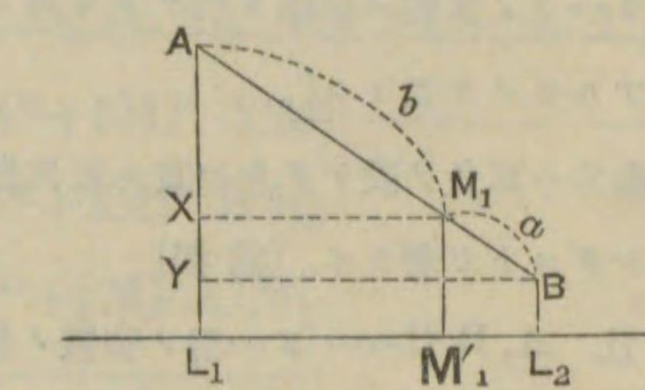
注意 ii. (i) ＝於テ $n=1, 2,$………ノ時ハ成立セズ $n=k$ ノ時初メテ成立スル時＝ハ其命題ガ k 又ハ k ヨリ大ナル正ノ整數＝對シテ成立スルトイハネバナラヌ。

82. 定理 1. 一群ノ點 A, B, C,…… ノ各々カラ任意ノ直線＝至ル距離ヲ夫々 $AL_1, BL_2, CL_3,$…… トスレバ

$$aAL_1 + bBL_2 + cCL_3 \cdots\cdots$$

ハ $a, b, c,$ ……＝關スル此等ノ點ノ平均距離ノ中心 M カラ直線＝至ル距離 MM′ ノ $(a+b+c+\cdots\cdots)$ 倍＝等シイ。

證明 二點ノ場合ヲ證明セン＝，



AL_1 ＝垂線 M_1X, BY ヲ引クト

$$aAL_1 = a(M_1M_1' + AX)$$

$$bAL_2 = b(M_1M_1' - XY)$$

故＝

$$aAL_1 + bAL_2 = (a+b)M_1M_1' + aAX - bXY$$

然ル＝ $M_1X \,//\, BY$ ナルガ故＝

$$AX : XY = b : a \quad 即チ \quad aAX - bXY = 0$$

即チ

$$aAL_1 + bAL_2 = (a+b)M_1M_2'$$

次＝點ノ數ガ r 個ノ時＝定理ガ眞ナリト假定シテ，點ノ數ガ $r+1$ 個トナル時＝モ倘此定理ガ眞ナルコトヲ證明セントス。即チ

點ガ A, B,……, H ナル r 個ノ時＝

$$aAL_1 + bBL_2 + \cdots\cdots hHL_r = (a+b+\cdots\cdots+h)M_{r-1}M'_{r-1} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ナリト假定ス。今 M_{r-1} ヲ第 $r+1$ 番ノ點 K ＝結ビ $M_{r-r}K$ ヲ M ＝於テ

$$M_{r-1}M : MK = k : (a+b+\cdots\cdots+h)$$

ナルガ如ク內分シタモノトスルトキハ，二點 M_{r-1}, K ノ場合ノ公式＝ヨルト

$$(a+b+\cdots\cdots+h)M_{r-1}M'_{r-1} + kKL_{r+1} = (a+b+\cdots\cdots+h+k)MM' \cdots\cdots (2)$$

(1) ト (2) トヨリ

$$aAL_1 + bBL_2 + \cdots\cdots + hHL_r + kKL_{r+1} = (a+b+\cdots\cdots+h+k)MM'$$

故＝數學的歸納法＝ヨツテ點ノ數ノ如何＝關セズ成立スル。

系 1. n 個ノ點 A, B, C,…… カラ夫等ノ點ノ平均距離ノ中心ヲ過ル直線

＝至ル距離ノ和ハ零デアル。何トナレバ MM′ ノ長サガ零デアルカラデス。

系 2. $a=b=c=\cdots\cdots$ ナル時ハ

$$\mathrm{MM'}=\frac{1}{n}(\mathrm{AL_1}+\mathrm{BL_2}+\cdots\cdots\cdots\cdots)$$

トナル。

注意 i. 上ノ定理ノ證明デハ垂線ノ符號＝就イテ次ノ規約ヲ使ツタ。即チ多クノ點カラ一ツノ直線＝垂線ヲ引クトキ其ノ直線ノ一ツノ側＝アルモノヲ正トシ，他ノ側＝アルモノヲ負トス"。

線分＝正負ヲ設ケタルハ實＝近世幾何學ノ特長デ，之＝ヨツテ幾何學ノ發達ヲ促ガシタコトガ著シイ。(前 揭)

注意 ii. A, B, C…… ヲ一群ノ物體ノ位置トシ，a, b, c…… ヲ其物體ノ質量ヲ表ハス數ナリトスレバ，比例距離ノ中心ハ夫等ノ物體ノ質量ノ位置＝一致スル。

注意 iii. $a=b=c=\cdots\cdots$ ナル時ノ比例距離ノ中心ヲ求メンニハ，先ヅ A, B 二點ヲ結ビ其線分ヲ $\mathrm{M_1}$ デ二等分シ，次＝ $\mathrm{M_1C}$ ヲ結ビ之ヲ $\mathrm{M_2}$ デ，$\mathrm{M_1M_2}=\frac{1}{3}\mathrm{M_1C}$ ナルヤウ＝三等分シ，次＝ $\mathrm{M_2D}$ ヲ $\mathrm{M_3}$ デ $\mathrm{M_2M_3}=\frac{1}{4}\mathrm{M_2D}$ ナルヤウ＝四等分スル。以下カクノ如クスレバ最後＝分タルヽ內分點 M ハ所要ノモノデアル。

注意 iiii. (iii)ノ場合＝，先ヅ A, B 二點ヲトリ次＝ C ヲトルガ如クあるふぁべっとノ順序＝ヨツテ其ノ中心ヲ求メタケレドモ，何レノ點カラ初メルモ同一ノ中心點ヲ得ル。何トナレバ如何ナル順序＝トルトモ，任意ノ直線＝至ル距離ハ

$$\mathrm{MM'}=\frac{1}{n}(\mathrm{AL_1}+\mathrm{BL_2}+\cdots\cdots\cdots\cdots)$$

デアルカラデス。

例 1. $a=b=c$ ナルトキ三角形 ABC ノ三ツノ頂點 A, B, C ノ平均距離ノ中心ハ此三角形ノ重心デアル。

例 2. $a=b=c=d$ ナルトキ四邊形 ABCD ノ四ツノ頂點ノ平均距離ノ中心ハ此四邊形ノ相對スル二邊ノ中點ヲ結ブ直線ノ交點デアル。

證明 四ツノ頂點カラ AB, CD ノ中點ヲ結ブ直線＝下シタ垂線ノ代數和ハ零デアルカラ，比例距離ノ中心ハ此直線ノ上＝アル。又四ツノ頂點カラ AD, BC ノ中點ヲ結ブ直線＝下シタ垂線ノ代數和ハ零デアルカラ比例距離ノ中心ハ此直線上＝アル。故＝所要ノ中心ハ此等ノ二直線ノ交點デアル。

83. **定理. 2.** M ヲ $a, b, c,\cdots\cdots$ ＝關シテ點 A, B, C…… ノ平均距離ノ中心トシ，P ヲ他ノ任意ノ點トスル時ハ

$$a\mathrm{AP^2}+b\mathrm{BP^2}+c\mathrm{CP^2}+\cdots\cdots=a\mathrm{AM^2}+b\mathrm{BM^2}+c\mathrm{CM^2}+\cdots\cdots$$
$$+(a+b+c+\cdots\cdots)\mathrm{MP^2}$$

デアル。

證明 MP ヲ結ベ，A, B, C,…… カラ之＝垂線 AA′, BB′, CC′,…… ヲ下ストト

$$a\mathrm{AP^2}=a(\mathrm{AM^2}+\mathrm{MP^2}+2\mathrm{MP.\,A'M})$$
$$b\mathrm{BP^2}=b(\mathrm{BM^2}+\mathrm{MP^2}+2\mathrm{MP.\,B'M})$$
$$c\mathrm{CP^2}=c(\mathrm{CM^2}+\mathrm{MP^2}+2\mathrm{MP.\,C'M})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

邊々相加フレバ

$$a\mathrm{AP^2}+b\mathrm{BP^2}+c\mathrm{CP^2}+\cdots\cdots=a\mathrm{AM^2}+b\mathrm{BM^2}+c\mathrm{CM^2}+\cdots\cdots$$
$$+(a+b+c+\cdots\cdots)\mathrm{MP^2}+2\mathrm{MP}(a\mathrm{A'M}+b\mathrm{B'M}+c\mathrm{C'M}+\cdots\cdots)$$

然ル＝ M ハ $a, b, c,\cdots\cdots$ ＝關スル點 A, B, C,…… ノ平均距離ノ中心ダカラ A, B, C,…… カラ M ヲ過リ MP ＝垂直ナル直線＝至ル距離＝夫々 $a, b, c,\cdots\cdots$ ヲ乘ジタル積ノ代數和ハ零デアル故＝。

$$a\mathrm{A'M}+b\mathrm{B'M}+c\mathrm{C'M}+\cdots\cdots=0$$

ヨツテ證明セラレタ。(問題解義 3 參照)

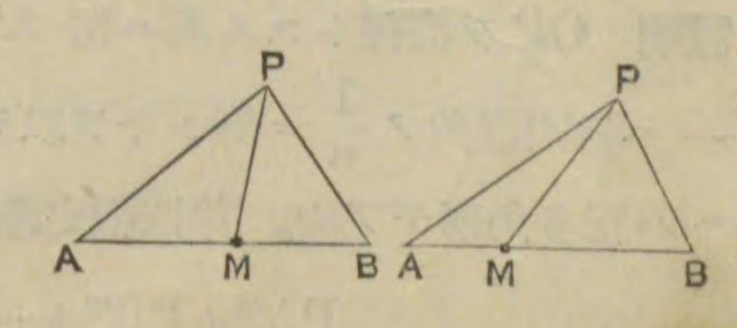
系 M ヲ n 個ノ點 A, B, C,…… ノ平均距離ノ中心トシ，P ヲ任意ノ點トスルト

$$\mathrm{AP^2}+\mathrm{BP^2}+\mathrm{CP^2}+\cdots\cdots=\mathrm{AM^2}+\mathrm{BM^2}+\mathrm{CM^2}+\cdots\cdots+n\mathrm{MP^2}$$

證明 上ノ定理＝ $a=b=c=\cdots\cdots$ トシテ代入セヨ。

注意 コノ定理＝ヨルト，面積＝關シテ色々ノ事實ヲ證明スルコトガ出來ル。即チ點 A, B ヲ二個ダケトリ且ツ $a=b$ ナリトスレバ，$n=2$ ノ場合デアルカラ

$$\mathrm{AP^2}+\mathrm{BP^2}=\mathrm{AM^2}+\mathrm{BM^2}+2\mathrm{MP^2}$$
$$=2(\mathrm{AM^2}+\mathrm{MP^2})$$



トナリ。又 $a=2,\ b=1$ トスルト

$$2\mathrm{AP^2}+\mathrm{BP^2}=2\mathrm{AM^2}+\mathrm{BM^2}+3\mathrm{MP^2}$$

$$=6AM^2+{}^{\cdot}_{\cdot}MP^2$$

トナル。コレ屢々用ヒラレル事柄デアル。

84. **定理 3.** $a=b=\cdots\cdots$ ナリトシ，O ヲ正 n 多角形 ABCD$\cdots\cdots$ ノ外接圓ノ中心トシ，R ヲ其半徑トスレバ，任意ノ點 P ニ關シテ次ノ等式ガ成立ス。

$$AP^2+BP^2+CP^2+\cdots\cdots=n(R^2+OP^2)$$

證明 O ハ A, B, C,$\cdots\cdots$ ノ平均距離ノ中心デアルカラ前定理ニヨリ

$$AP^2+BP^2+CP^2+\cdots\cdots=AO^2+BO^2+CO^2+\cdots\cdots+nOP^2$$

然ルニ　$AO=BO=CO=\cdots\cdots=R$

デアルカラ

$$AP^2+BP^2+CP^2+\cdots\cdots=n(R^2+OP^2)$$

系 1. P ガ若シ外接圓周上ニアル時ハ，OP＝R デスカラ

$$AP^2+BP^2+CP^2+\cdots\cdots=2nR^2$$

系 2. P ガ A, B,$\cdots\cdots$ ニ一致スル時ハ

$$AB^2+AC^2+\cdots\cdots=2nR^2$$

$$BA^2+BC^2+\cdots\cdots=2nR^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots$$

系 3. 系 2 ニ於ケル結果ヲ加ヘテ 2 デ割ルト

$$\Sigma AB^2=n^2R^2$$

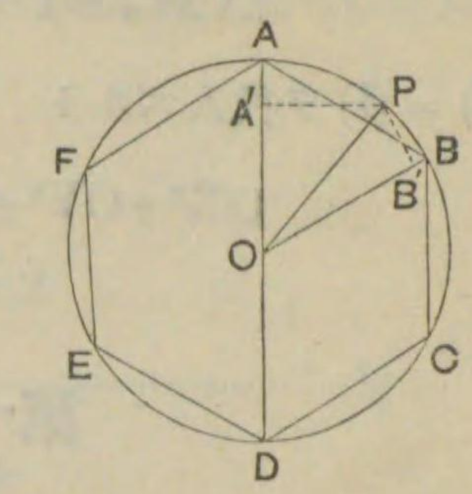
ナルコトヲ知ル。玆ニ ΣAB^2 トハ A, B, C,$\cdots\cdots$ ナル n 個ノ點ヲ二ツ宛トリタル直線ノ上ノ正方形ノ總テノ和ヲ表ハスモノトスル。

定理 4. P ハ正 n 邊形 ABCD$\cdots\cdots$ ノ外接圓ノ周上ノ點ニシテ PA′, PB′$\cdots\cdots$ ハ夫々 OA, OB,$\cdots\cdots$ ニ下セル垂線ナル時ハ

$$PA'^2+PB'^2+\cdots\cdots=OA'^2+OB'^2+\cdots\cdots=\frac{n}{2}R^2$$

證明 OP ヲ直徑トスル圓ハ點 A′, B′,$\cdots\cdots$ ヲ過ル。而シテ $A'\widehat{O}B'$, $B'\widehat{O}C'$$\cdots\cdots$ ハ皆四直角ノ $\frac{1}{n}$ ニ等シキヲ以テ n (邊ノ數) ガ奇數ナル時ハ多角形 A′B′$\cdots\cdots$ハ正多角形デアル。(第四編定理 3 參照) 故ニ前ノ定理系 1 ニヨリ直チニ

$$PA'^2+PB'^2+\cdots\cdots=2n\left(\frac{OP}{2}\right)^2=\frac{n}{2}R^2$$



次ニ n ヲ偶數トスレバ，各頂點ニ對シテ直徑上ノ端點ニ他ノ頂點ガアル。(A ト D トノ如シ) 故ニ P カラ OA, OD ニ下ス垂線ハ全ク相合スル。即チ A′ ト D′ トハ一致スルカラ此場合ニモ A′, B′,$\cdots\cdots$ ハ $\frac{n}{2}$ ヲ邊トスル正多角形デアルコトガ容易ニ證明出來ル。(等角等邊ナルコトヲ示セ) 故ニ又

$$PA'^2+PB'^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=2(PA'^2+PB'^2+\cdots\cdots\cdots\cdots)=2\times2\frac{n}{2}\left(\frac{OP}{2}\right)^2=\frac{n}{2}R^2$$

次ニ　$OA'^2+PA'^2=R^2$,　$OB'^2+PB'^2=R^2\cdots\cdots\cdots\cdots$

ナルガ故ニ

$$(PA'^2+PB'^2+\cdots\cdots)+(OA'^2+OB'^2+\cdots\cdots)=nR^2$$

然ルニ　$PA'^2+PB'^2+\cdots\cdots=\frac{n}{2}R^2$

ナルヲ以テ

$$OA'^2+OB'^2+\cdots\cdots=\frac{n}{2}R^2$$

デアル。

定理 5. 正 n 邊形 ABCD$\cdots\cdots$ ノ外接圓ノ中心ヲ通ル任意ノ直徑ニ，頂點 A, B,$\cdots\cdots$ カラ垂線 AX, BY,$\cdots\cdots$ ヲ下ス時ハ

$$AX^2+BY^2+\cdots\cdots=OX^2+OY^2+\cdots\cdots=\frac{n}{2}R^2$$

デアル。

證明 中心 O ヲ通ル任意ノ直徑ヲ L トシ，圓周ト交ル一ツノ點ヲ P トスルト，P カラ OA, OB$\cdots\cdots$ ニ下ス垂線 PA′, PB′,$\cdots\cdots$ ト A, B,$\cdots\cdots$ カラ L ニ下ス垂線 AX, BY,$\cdots\cdots$ トハ夫々相等シイ。然ルニ前ノ定理ニヨツテ

$$PA'^2+PB'^2+\cdots\cdots=\frac{n}{2}R^2$$

デアルカラ

$$AX^2+BY^2+\cdots\cdots=\frac{n}{2}R^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又　$AX^2+OX^2=R^2$.　$BY^2+OY^2=R^2\cdots\cdots\cdots\cdots$

デアルカラ

$$(AX^2+BY^2+\cdots\cdots)+(OX^2+OY^2+\cdots\cdots)=nR^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) ニ (1) ヲ代入スルト

$$OX^2+OY^2+\cdots\cdots=\frac{n}{2}R^2$$

第十一編　問題解義

1. 三角形ノ各頂點カラ之ヲ截ラナイ直線ニ至ル距離ノ和ハ其重心カラノ距離ノ三倍デアル。

證明 三角形ノ重心ハ $a=b=c$ ナル場合ニ於ケル三ツノ頂點ノ比例距離ノ中心デアルカラデス。

2. 前題ニ於テ直線ガ三角形ヲ截ル場合ニモ成立スルコトヲ證セヨ。

證明 此場合ニハ二ツノ頂點ヨリノ距離ハ直線ノ同ジ側ニアリ，他ノ頂點ヨリノ距離ハ他ノ側ニアル。而シテ一ツノ側ノ距離ノ和カラ他ノ距離ヲ減ジタモノハ，重心カラノ距離ノ三倍デアル。故ニ一ツノ側ニアル距離ヲ正トシ，他ノ側ニアル距離ヲ負トスルト，矢張リ本題ハ成立ツ。

3. A, B, C,…… ヲ同一直線上ニアル n 個ノ點トシ，M ヲ夫等ノ平均距離ノ中心トシ，P ヲ同ジ直線上ノ點トスレバ

$$AP+BP+CP+\cdots\cdots=nMP$$

證明 M ガ平均距離ノ中心ナルヲ以テ M ヲ通リ直線 ABC…… ニ垂直ナル直線ヲ引クトキハ，定理 1 系 2 ニヨルト P.

$$MP=\frac{1}{n}(AP+BP+CP+\cdots\cdots)$$

即チ證明セラレタ。(定理 2 ニハ此事實ヲ使ツタ)

4. A, B, C,…… ヲ同一直線上ニアル n 個ノ點トシ，M ヲ $a, b, c,\cdots\cdots$ ニ關スル平均距離ノ中心トシ，P ヲ同ジ直線上ノ點トスルト

$$aAP+bBP+cCP+\cdots\cdots=(a+b+c+\cdots\cdots)MP$$

證明 M ヲ通リ直線 ABC…… ニ垂直ナル直線ヲ引キ，定理 1 ヲ用フルト容易ニ證明出來ル。

5. M, M′ ヲ夫々同一ノ直線上ニアル n 個宛ヨリ成ル二組ノ點 A, B, C,…… 及ビ A′, B′, C′ …… ノ平均距離ノ中心トスルト

$$nMM'=AA'+BB'+CC'+\cdots\cdots$$

證明 M ガ A, B, C,…… ノ平均距離ノ中心デスカラ

$$AM+BM+CM+\cdots\cdots=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 M′ ガ A′, B′, C′,…… ノ平均距離ノ中心デスカラ

$$A'M'+B'M'+C'M'+\cdots\cdots=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)−(2)

$$(AM-A'M')+(BM-B'M')+(CM-C'M')+\cdots\cdots=0$$

即チ

$$(AA'-MM')+(BB'-MM')+(CC'-MM')=0$$

故ニ　$AA'+BB'+CC'+\cdots\cdots=nMM'$

6. 正多角形ノ內切圓ノ中心ハ，各頂點ノ平均距離ノ中心デアル。

證明 正多角形ノ邊數ハ奇數ナル時ト偶數ナル時トアリ。先ヅ奇數ノ時ニハ何レカ一ツノ頂點ト內切圓ノ中心トヲ結ブ直線ヲ作ルト，其直線ハ全圖形ノ對稱ノ軸トナル。故ニ其兩側ノ頂點ヨリ軸ヘノ距離ノ和ハ相等シ。故ニ平均距離ノ中心ハ其直線ノ上ニアル。同樣ニ他ノ一ツノ頂點ト內切圓ノ中心トヲ結ブ直線ノ上ニモ平均距離ノ中心ガアル。而シテ平均距離ノ中心ハ此等ノ直線ノ交點デアルカラ本題ハ解決出來ル。

次ニ邊ノ數ガ偶數ナル時ハ相對スル邊ノ中點ヲ結ンデ證明スレバ容易ニ分カル。

注意 コノ定理ヲかるのーノ定理トイフ。かるのー (Carnot, 1753—1823) ハふらんす革命當時ニアツテ政界ニ活動スル傍數學ヲ研究シ，近世幾何學ニ偉大ナ貢獻ヲシタ。

7. 三ツノ點 A, B, C ガ與ヘラレタル時 C ヲ過リ一ツノ直線ヲ引キ A, B カラノ距離ノ平方ノ和ヲ與ヘラレタル量ニ等シカラシメヨ。

解 三點 A,B,C ヲ過ル圓ヲ畫キ求ムル直線ヲ CP トシ，圓周ト P デ會セシメル。

今三邊 BC, CA, AB ノ長サヲ夫々 a, b, c トシ圓ノ半徑ヲ r トス。次ニ AB カラ CP ニ下ス垂線ノ長ヲ l, m トスルト

$$b\mathrm{AP}=2lr \qquad a\mathrm{BP}=2mr$$

$$\therefore \quad b^2\mathrm{AP}^2+a^2\mathrm{BP}^2=4r^2(l^2+m^2)$$

然ルニ l^2+m^2 ハ一定ナルガ故ニ

$$b^2\mathrm{AP}^2+a^2\mathrm{BP}^2=\text{一定}$$

ヨッテ P ノ軌跡ハ邊 AB ヲ $\mathrm{AM}:\mathrm{BM}=a^2:b^2$ ニ内分シタル分點 M ヲ中心トスル一ツノ圓デアル。故ニ求ムル點 P ハ此等ノ圓ノ交點デアル。

注意 前題ニ於テ距離ノ平方ノ差ヲ一定ナラシメヨ。

8. a, b, c ヲ三角形 ABC ノ三邊ノ長サトスレバ內切圓ノ中心ハ a, b, c, ニ關スル三ツノ頂點ノ平均距離ノ中心デアル。

證明 三ツノ點ヲ A, B, C トシ，定理 1 ニ於ケル直線ヲ BC トシ，比例距離ノ中心ヲ M トスルト

$$a\mathrm{AL}_1+b\mathrm{BL}_2+c\mathrm{CL}_3=(a+b+c)\mathrm{MM}'$$

然ルニ $\mathrm{BL}_2=\mathrm{CL}_3=0$ ナルヲ以テ

$$a\mathrm{AL}_1=(a+b+c)\mathrm{MM}'$$

今 BC, CA, AB ノ長サヲ a, b, c トスルト

$$a\mathrm{AL}_1=2\triangle\mathrm{ABC}$$

デアルカラ $\qquad (\mathrm{BC}+\mathrm{CA}+\mathrm{AB})\mathrm{MM}'=2\triangle\mathrm{ABC}$

次ニ內切圓ノ半徑ヲ r トスレバ

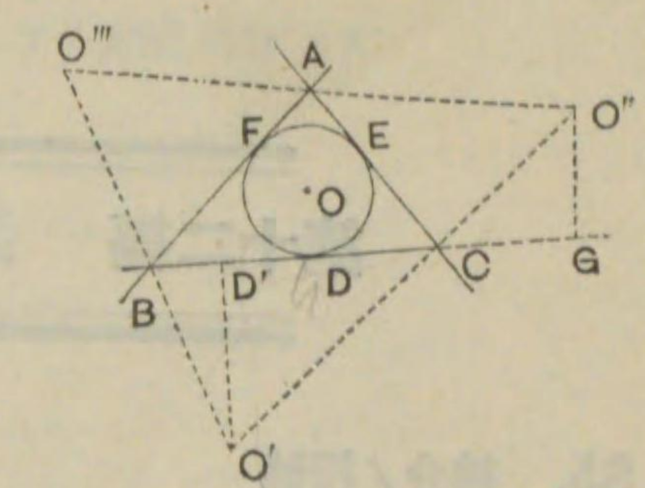
$$(\mathrm{BC}+\mathrm{CA}+\mathrm{AB})r=2\triangle\mathrm{ABC}$$

故ニ MM′ ハ內切圓ノ半徑ニ等シイ。同樣ニ M ヨリ邊 CA, AB ニ至ル距離モ r デアル。仍ツテ M ハ三角形 ABC ノ內心ニ一致セネバナラヌ。

注意 此證明ト同樣ニスルト次ノ問題ガ解決出來ル。

9. O, O′, O″, O‴, ヲ三角形 A, B, C ノ內切圓及ビ傍切圓ノ中心トスル時ハ O, ハ $(s-a), (s-b), (s-c)$, ニ關スル 三ツノ點 O′, O″, O‴, ノ平均距離ノ中心デアル。

證明 O′D′, O″G ヲ O′, O″ カラ BC ニ下シタ垂線トスレバ



$$\mathrm{CD}'=s-b,$$

$$\mathrm{CG}=s-a$$

且ツ $\triangle\mathrm{O'D'C}\backsim\triangle\mathrm{O''CG}$

$$\therefore \quad \mathrm{O'C}:\mathrm{O''C}=s-b:s-a$$

故ニ線分 O′O″ ガ C 點デ $s-b:s-a$ ナル比ニ內分セラレタ。即チ C 點ガ $s-a, s-b$ ニ關スル二ツノ點 O′, O″ ノ平均距離ノ中心デアルコトヲ知ル。故ニ B 點ハ線分 O′O‴ ヲ B デ $s-c:s-a$ ノ比ニ分タラレル。次ニ B 點ハ $s-b, s-a$ ヲ乘數トスル二ツノ點 O′, O‴ ノ比例距離ノ中心デアル。

故ニ $s-a, s-b, s-c$ ニ關スル三ツノ點 O′, O″, O‴ ノ比例距離ノ中心ハ CO‴ ノ上ニアル。

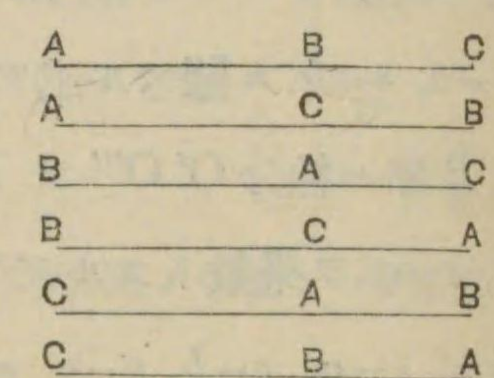
同樣ニ $s-a, s-b, s-c$ ヲ乘數トスル三ツノ點 O′, O″, O‴ ノ比例距離ノ中心ハ O″B ノ上ニアル。故ニ夫等ノ直線ノ交點 O ハ題意ニ適スル中心デアル。

15

第十二編　調和列點及調和束線

85.　線分ノ符號

一ツノ直線上ニ任意ノ二點 A, B アリトシ，線分 AB ヲ A カラ B ノ方ニ測ツタ距離ヲ AB トシ，B カラ A ノ方向ニ測ツタ距離ヲ BA トスルト，AB ト BA トハ其長サ相等シケレドモ此ヲ測ル方向ハ反對デアル。近世幾何學デハ之等ヲ區別スルモノトス。即チ B ガ A ヨリモ右方ニアル時ハ線分 AB ノ長サヲ正トシ，BA ノ長サヲ負トス。同樣ニ A ガ B ヨリモ右方ニアル時ハ線分 BA ノ長サヲ正トシ，AB ノ長サヲ負トスル。コノ規約ニ從フトキハ二點 A, B ハ如何ナル位置ニアルモ



$$AB=-BA \qquad 從ツテ \quad AB+BA=0$$

ナル關係ガアリ，三點 A, B, C ハ如何ナル位置ニアルモ

$$AB+BC+CA=0$$

ナル關係ガ成立スル。

定義　線分 AB ヲ C 及ビ D デ同ジ比ニ内分及ビ外分スル時，即チ

$$AC:CB=AD:BD$$

或ハ

$$\frac{AC}{CB}=-\frac{AD}{DB}$$

ナラシムル時ハ，線分 AB ハ C, D デ調和ニ分タレタトイヒ，點 C, D ヲ點 A, B ニ關スル調和共軛點ナリトイヒ，此等ノ四ツノ點ガ調和列點ヲナストイヒ，四ツノ點列ヲ {ACBD} 又ハ {AB; CD} ニテ表ハス。

86.　**定理 1.**　線分 AB ハ點 C, D デ調和ニ分タレタ時ハ線分 CD モ亦點 A, B デ調和ニ分タレル。

證明　線分 AB ハ C, D デ調和ニ分タレタカラ定義ニヨツテ

$$AC:CB=AD:BD$$

内項ヲ交換スルト

$$AC:AD=CB:BD$$

從ツテ線分ノ方向ヲ考ヘテ

$$DB:BC=DA:CA$$

コレ即チ線分 CD ガ二ツノ點 A, B デ調和ニ分タレタコトヲ示スモノデアル。

注意 i.　調和列點ヲナス點列ニ於テ三ツノ點ノ位置ヲ知ル時ハ容易ニ第四ノ點ヲ見出スコトガ出來ル。例ヘバ ACB ノ位置ヲ知ツテ D 點ノ位置ヲ求ムルニハ

AC : CB = AD : BD ナルベキガ故ニ AC. BD = CB. AD = CB(AB + BD)

而シテ AC, CB, AB ノ長サガ知ラレテ居ルカラ BD ノ長サガ知ラル。從ツテ點 D ノ位置ガ定マル。

注意 ii.　點列 {ACBD} ガ調和列點ヲナス時ハ

$$\frac{CB}{AC}=\frac{BD}{AD}$$

デアルガ，C 點ガ B 點ニ近ヅクニ從ヒ CB ノ長サガ次第ニ小トナルガ故ニ BD ノ長サモ又次第ニ小トナルベク，C 點ガ B 點ニ重ナル極限ノ場合ニハ D 點モ亦 B 點ニ重ネルベシ。

次ニ C 點ハ B 點カラ離レテ逆ニ A 點ノ方ニ動クト，Q 點モ B 點カラ離レテ A 點ト反對ノ方向ニ動ク。ソコデ C 點ハ線分 AB ノ中點ニ近ヅク時ハ AC ト CB トノ比ハ次第ニ 1 ニ近ヅクカラ BD ト AD トノ比モ次第ニ 1 ニ近ヅクベク，從ツテ D 點ハ次第ニ B 點カラ遠カル。故ニ C 點ガ線分 AB ノ中點ニ至ル極限ニ於テハ D 點ハ無限遠ノ距離ニ進ム。

定理 2.　C, D ハ A, B ノ調和共軛點ナル時ハ線分 AB ノ半長ハ AB ノ中點 0 カラ二點 C, D ヘノ距離ノ比例中項デアル。

證明　定義ニヨツテ

$$AC:CB=AD:BD$$

從ツテ

$$AC-CB:AC+CB=AD-BD:AD+BD$$

故＝　$2OC:2OA=2OA:2OD$

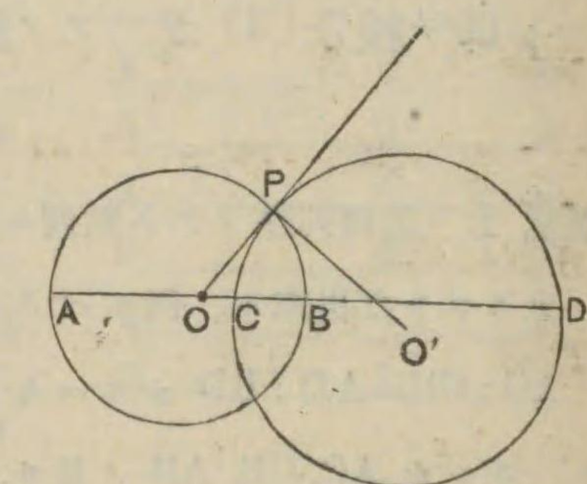
故＝　$OC:OA=OA:OD$

或ハ　$OA^2=OC.OD$

系 Oハ線分ABノ中點＝シテC, Dハ其直線上＝アリテ且ツ$OB^2=OC.OD$ヲ滿足スル點ナリトスレバ，點列{ACBD}ハ調和列點ヲナス。

定理3. {ACBD}ハ調和列點ナル時，ABヲ直徑トスル圓ハ其共軛點C, Dヲ過ル圓＝直交スル。

證明 ABヲ直徑トスル圓ヲOトシ，C, Dヲ過ルーツノ圓ヲO′トシ，其交點ノーツヲPトスルト，OハABノ中點デアルカラ



$$OC.OD=OA^2=OP^2 \text{ (定理2)}$$

故＝ OPハ圓O′ノ切線デアル。故＝

$\widehat{OPO'}=R\angle$ 從ツテ二ツノ圓O, O′ハ互＝直交スル。

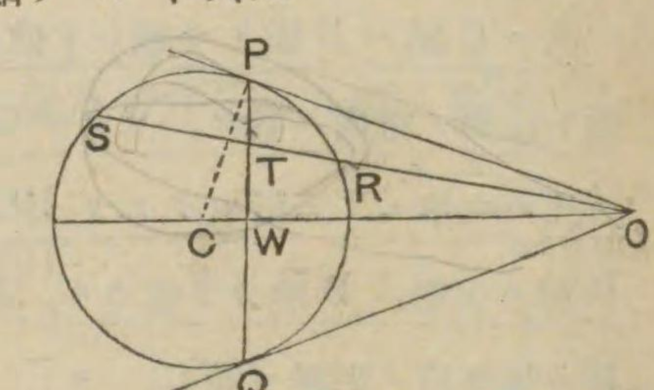
系 二圓ハ互＝直交スル時ハ其ノーツノ圓ノ中心ヲ過ル直線ハ二ツノ圓周ト交ル四ツノ點ハ調和列點ヲナス。

定理4. 圓外ノ一點Oカラ二ツノ切線OP, OQ及ビーツノ割線ORSヲ引キ弦PQトTデ交ラシムルトキハ點列{STRO}ハ調和列點ヲナス。

證明 Cヲ中心トシ弦PQトOCトノ交點ヲWトスル

$$OR.OS=OP^2$$

又△CPOハ直角三角形デスカラ



$$OP^2=OW.OC$$

故＝　$OR.OS=OW.OC$

從ツテ四ツノ點R, S, C, Wハ同一圓周上＝アル。然ル＝SC＝CRナルヲ以テCハ圓SCWRノ弧RCSノ中點デアル。從ツテ直線CWハ$\widehat{SWR}$ノ外角ヲ二等分スル。而シテ$CW\perp WT$ナルヲ以テ直線WTハ$\widehat{SWR}$ノ二等分線デアル。

故＝，　$ST:TR=SW:WR$

$$SO:RO=SW:WR$$

故＝　$ST:TR=SO:RO$

仍ツテ點列{STRO}ハ調和列點ヲナス。

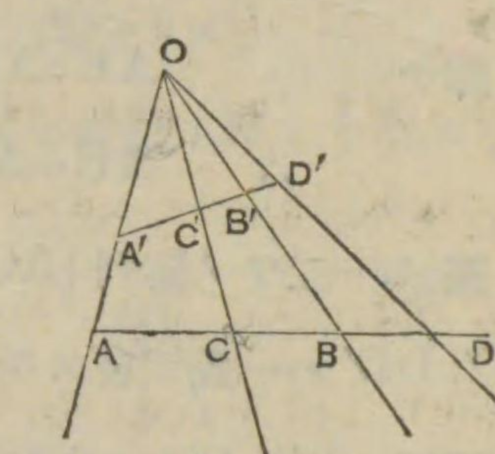
87. 定義 一點Oカラ出ヅル四ツノ直線OA, OB, OC, ODガ他ノ任意ノ直線デ截ラレテ生ズル四ツノ點A, B, C, Dガ其截線上デ調和列點ヲナス時ハ四直線OA, OB, OC, ODガ調和束線ヲナストイヒ，ソノ各々ヲ調和束線ノ射線トイヒ，調和共軛點ヲ過ル二ツノ射線ヲ他ノ二ツノ射線ノ共軛線トイフ。

定理5. 一點カラ發スル四ツノ直線ガーツノ截線＝ヨツテ截ラレテ生ズル四ツノ點ハ調和列點ヲナス時ハ，他ノ任意ノ截線＝截ラレテ生ズル四ツノ點モ亦調和列點ヲナス。

證明 四ツノ直線ヲOA, OB, OC, ODトシ，一ツノ截線ヲACBDトセヨ。然ルトキ點列{ACBD}ガ調和列點ヲナス時ハ他ノ任意ノ截線A′C′B′D′＝テ作ラルヽ列點{A′C′B′D′}モ又調和列點ヲナス。何トナレバ

△AOCヨリ

$$AC:OA=\sin AOC:\sin OCA$$



△OCBヨリ

$$CB:OB=\sin COB:\sin OCB$$

然ル＝　$\sin OCA=\sin OCB$

$$\therefore\quad \frac{AC}{CB}=\frac{OA}{OB}\cdot\frac{\sin AOC}{\sin COB}$$

同様＝　$$\frac{AD}{BD}=\frac{OA}{OB}\cdot\frac{\sin AOD}{\sin BOD}$$

然ル＝　$$\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{BD}$$

故＝　$$\frac{\sin AOC}{\sin COB}=\frac{\sin AOD}{\sin BOD}\quad\cdots\cdots(1)$$

サテ　$$\frac{A'C'}{C'B'}=\frac{OA'}{OB'}\cdot\frac{\sin AOC}{\sin COB}$$

$$\frac{A'D'}{B'D'}=\frac{OA'}{OB'}\cdot\frac{\sin AOD}{\sin BOD}\quad\cdots\cdots(2)$$

ヨツテ (1), (2) カラ

$$\frac{A'C'}{C'B'}=\frac{A'D'}{B'D'}=-\frac{A'D'}{D'B}$$

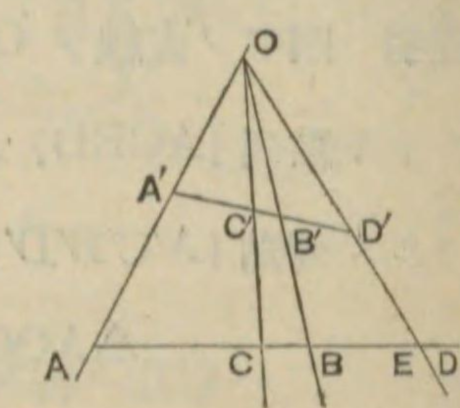
即チ點列 {A'C'B'D'} ガ調和列點ヲナス。

定理 6.　點列 {ACBD}, 及ビ {A'C'B'D'} ハ共＝調和列點ヲナシ, 且ツ AA', BB', CC' ハ一點 O ＝會スルナラバ DD' モ又 O 點ヲ通ル。

證明　OD' ヲ結ベハ其延長ガ AB ト D ＝於テ交ルベシ。何トナレバ, 若シ D ＝テ交ラズトシ其交點ヲ E トスルト點列 {ACBE} ガ調和列點ヲナスカラ

AC : CB＝AE : BE

然ル＝假定＝ヨリ



AC : CB＝AD : BD

∴　AE : BE＝AD : BD

∴　AE : AE－BE＝AD : AD－BD

即チ　AE : AB＝AD : AB

∴　AE＝AD　故＝ E ハ D ＝重ナル。

系 1.　二ツノ點列 {ACBD}, {AC'B'D'} ガ二組ノ調和列點ナルトキハ BB' CC', DD' ハ一點デ會スル。

證明　BB', CC' ノ交點ヲ O トシ OA ヲ結ベ, 而シテ A' 點ハ A 點＝重ナツタ場合ナリト考フレバ全ク本定理＝一致スル。

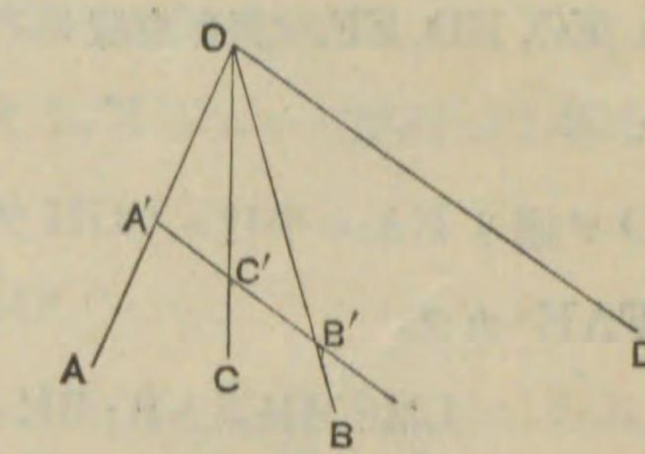
系 2.　二ツノ束線 OA, OC, OB, OD 及ビ O'A, O'C, O'B, O'E ガ調和束線＝シテ且ツ三ツノ點 ACB ハ一直線上＝アレバ OD, O'E モ亦此直線上＝交ハル。

系 3.　二ツノ束線 OA, OC, OB, OD 及ビ O'A, O'C, O'B, O'D ガ調和束線＝シテ且ツ O' ガ OA 上＝アルトキハ三ツノ點 C, B, D ハ一直線上＝アル。

定理 7.　調和束線 OA, OC, OB, OD ＝於テ一ツノ射線 OD ＝平行ナル截線ガ他ノ三ツノ射線トノ交點ヲ A', C', B', トスルト A'C'＝C'B' デアル。

證明　調和束線ヲ任意ノ直線デ截ル時＝其交點ハ調和列點ヲナスカラ, OD ＝平行ナル直線デ截ル時モ亦其交點ハ調和列點ヲナス。

然ル＝ A'B' // OD デアルカラ A', B' ＝關スル C' ノ調和共軛點 D' ガ A'B' ト OD トノ交點即チ無限遠點デアル。



故＝定理 1 注意 2 ＝ヨツテ A'C'＝C'B'

注意　コノ定理ハ調和束線ノ三ツヲ知ツテ他ノ一ツノ射線ヲ求ムル幾何學的方法ヲ與ヘルモノデアル。例ヘバ OA, OC. OB ノ位置ヲ知ツテ OD ヲ求メンニ, OC ノ上ノ任意ノ點 C' ヲ通リテ A'C'＝C'B' ナルガ如キ直線 A'C'B' ヲ引キ次＝ A'B'C' ＝平行ナル直線ヲ引ケバ OD デアル。

系　同一ノ點ヨリ發スル四ツノ束線アリ, 其一ツノ射線＝平行ナ截線ガ他ノ三ツノ束線＝ヨツテ截リトラルヽ部分相等シイ時ハ此等ノ四ツガ調和束線ヲナス。

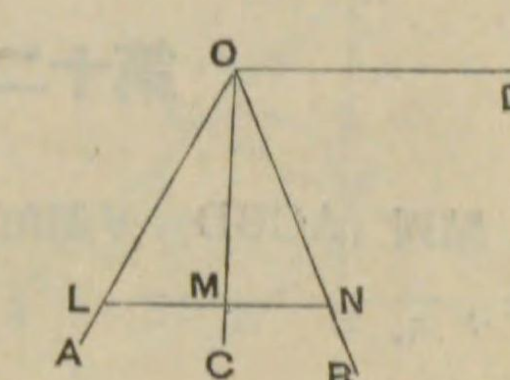
定理 8.　調和束線ノ二ツノ共軛射線 OC, OD ガ直交ナル時ハ, 此等ハ夫々他ノ二ツノ射線 OA, OB ノナス角及ビソノ外角ヲ二等分スル。

證明　OC 上ノ任意ノ點ヲ過リ射線 OD ＝平行ナル直線 LMN ヲ引クト

OM ⊥ LMN

又　LM＝MN

ナルガ故＝　△LOM＝△NOM



∴　$\widehat{LOM}=\widehat{NOM}$

ヨツテ OC ガ OA, OB ノナス角ヲ二等分スル。

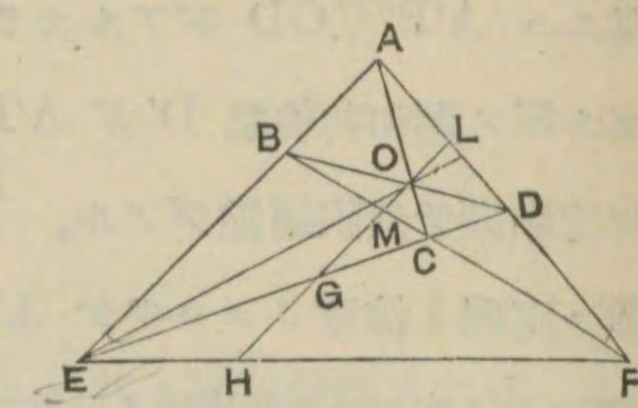
又 OD ガ $\widehat{LOM}$ ノ外角ヲ二等分スルコトガ容易＝分ル。

系　任意ノ角 AOB ノ二等分線 OC 及ビ其外角ノ二等分線 OD ハ OA, OB ト共＝調和束線ヲナス。

定理 9.　完全四邊形ノ一双ノ對邊ノ交點ヲ一ツノ對角線ノ交點＝結ブ直線ト第三對角線トハ此ノ二邊＝關シテ調和共軛射線ヲナス。

證明　完全四邊形＝於テ AB, CD ヲ一双ノ對邊トシ其交點ヲ E トスレバ

EA EO, ED, EF ハ調和束線デアル。何トナレバ



O ヲ過リ EA ニ平行ニ OGH ヲ引クト

△FAE カラ

$$LM : MH = AB : BE \cdots\cdots(1)$$

又 △CAE カラ

$$OM : MG = AB : BE \cdots\cdots(2)$$

(1), (2) ヨリ　$OL : GH = AB : BE \cdots\cdots(3)$

然ルニ △DAE カラ

$$OL : OG = AB : BE$$

$$\therefore \quad OL : GH = OL : OG$$

$$\therefore \quad GH = OG$$

即チ一ツノ射線 EA ニ平行線 HGM ヲ引クト他ノ三ツノ射線ノ截リ取ラルル部分相等シ。ヨツテ EA, EO, ED, EF ハ調和束線デアル。(定理 7 系)

第十二編　問題解義

1. 點列 {ACBD} ガ調和列點ナル時ハ線分 AC, AB, AD ノ長サガ調和級數ヲナス。

證明 點列 {ACBD} ガ調和列點ヲナスカラ

$$AC : CB = AD : BD \quad 或ハ \quad AC.BD = AD.CB$$

即チ　$AC(AD-AB) = AD(AB-AC)$

即チ　$2AC.AD = AB.AC + AD.AB$

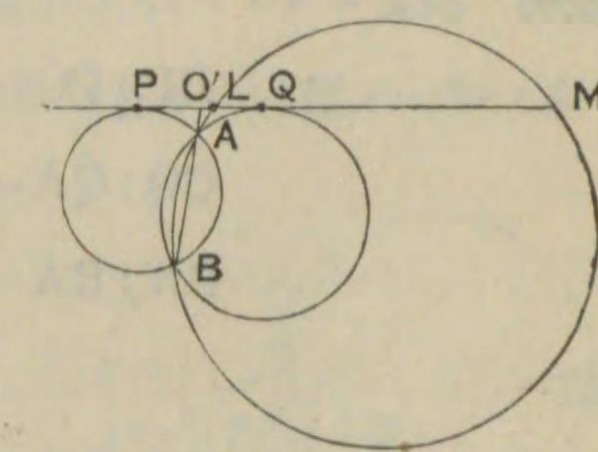
故ニ　$\dfrac{AC+AD}{AC.AD} = \dfrac{2}{AB}$

或ハ　$\dfrac{2}{AB} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD}$

コレ AC, AB, AD ノ長サガ調和級數ヲナスコトヲ示スモノデアル。

2. 二ツノ圓ガ A, B ニ交ルモノトシ其共通外切線ノ切點ヲ夫々 P, Q トス。切線 PQ ハ A, B ヲ通ル第三ノ圓ト交ル點ヲ L, M トスレバ點列 {PLQM} ガ調和列點ヲナスコトヲ證セヨ。

證明 共通弦 AB ト切線 PQ トノ交點ヲ O′ トスレバ



$$O'A.O'B = O'P^2 = O'Q^2$$

故ニ O′ ハ線分 PQ ノ中點デアル。

次ニ

$$O'L.O'M = O'A.O'B = O'P^2$$

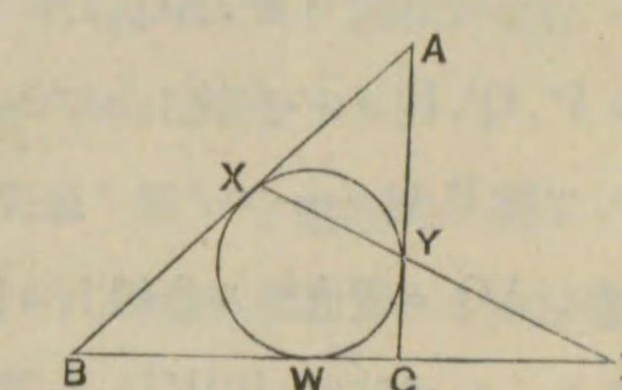
デアルカラ，

$$O'P^2 = O'Q^2 = O'L.O'M$$

仍ツテ定理 2 系ニヨリテ點列 {PLQM} ハ調和列點ヲナス。

3. 三角形ノ内切圓ガ二邊ニ切スル點ヲ結ブ直線ガ第三邊ト交ル點ハ此ノ邊上ノ切點ト共ニ二ツノ角頂ニ就イテ調和共軛點ヲナス。

證明 △ABC ノ内切圓ノ切點ヲ結ブ直線ヲ XYZ トシ第三邊トノ交點ヲ Z トスル。然ル時ハ W, Z ハ B, C ニ就イテ調和共軛點デアル。



何トナレバ XYZ ハ三角形 ABC ノ截線デスカラ

$$BZ.CY.AX = CZ.YA.XB$$

然ルニ　$AX = AY$

$$\therefore \quad BZ : CZ = XB : CY$$

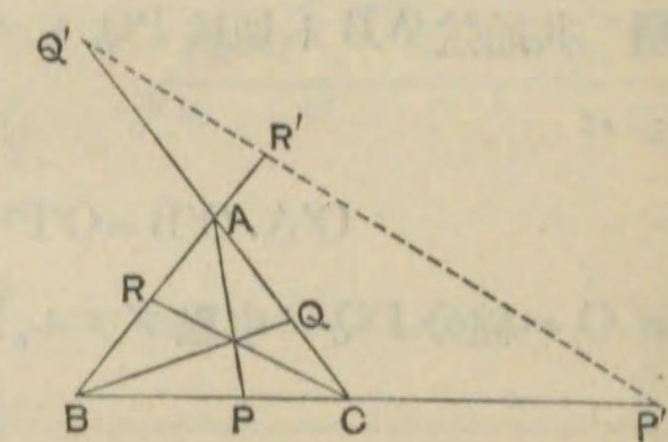
又　$XB = BW \qquad CY = CW$

$$\therefore \quad BZ : CZ = BW : WC$$

ヨツテ證明セラレタ。

4. 三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB 上ニ夫々點 P, Q, R ガアリ且ツ AP, BQ, CR ガ一點ニテ交ルモノトス。今 P', Q', R' ヲ B, C ; C, A ; A, B ; ニ關シテ夫々 P, Q, R ノ調和共軛點ナリトスレバ P', Q', R' ハ一直線上ニアルコトヲ證セヨ。

證明 假定ニヨツテ



$$BP : PC = BP' : CP'$$
$$CQ : QA = CQ' : AQ'$$
$$BR : RA = BR' : AR'$$

故ニ

$$\left.\begin{array}{l} BP.CP' = PC.BP' \\ CQ.AQ' = QA.CQ' \\ AR.BR' = BR.AR' \end{array}\right\} \cdots\cdots(1)$$

又 AP, BQ, CR ハ一點デ會スルカラ,

$$BP.CQ.AR = PC.QA.RB \cdots\cdots(2)$$

(1) ト (2) トカラ

$$CP'.AQ'.BR' = BP'.CQ'.AR'$$

コレ P', Q', R' ハ一直線上ニアルコトヲ示スモノデアル。

5. 二點 P, Q ハ一ツノ圓ノ直徑ノ端點 A, B ニ關シテ調和共軛點ナル時, Q ヲ過リ AQ ニ垂直ナル直線上ニ任意ノ點 R ヲトリ RP ヲ結ビ圓周ト S, T デ交ラシムレバ點列 {RSPT} ハ調和列點ヲナスコトヲ證セヨ。

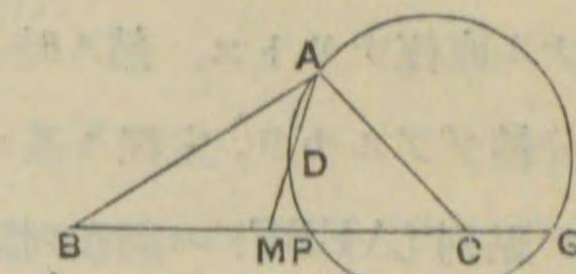
證明 PR ヲ直徑トスル圓ガ Q ヲ通ル。サテ點列 {APBQ} ガ調和列點ヲナスカラ, 定理3ニヨツテ此等ノ二ツノ圓ガ直交ス。故ニ又其定理系ニヨツテ點列 {RSPT} ガ調和列點ヲナス。

6. 三角形 ABC ノ底邊 BC ヲ P, Q デ調和ニ分チ P, Q, A ヲ過ル圓ヲ畫ケバ, 此圓ガ A 點以外ノ一定點ヲ過ルコトヲ證セヨ。

證明 BC ノ中點ヲ M トシ, MA ヲ結ビ圓ト D 點デ交ラシメル。

B, P, C, Q ガ調和列點デアルカラ

$$BM^2 = MP.MQ$$



然ルニ $MP.MQ = MA.MD$

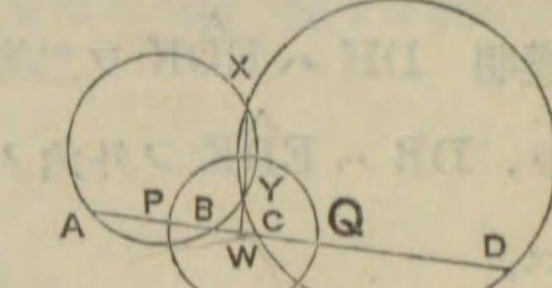
$$\therefore\ BM^2 = MA.MD$$

而シテ AM, BM, ハ共ニ定長デアル。

ヨツテ P 點ノ位置ノ如何ニ關セズ D 點ハ定點デアル.

7. 一直線上ニアル二對ノ點 A, B 及ビ C, D ノ各々ニ共軛ナ一對ノ點 P, Q ヲ求メヨ。

解 直線外ニ任意ノ一點 X, ヲトリ, 二ツノ圓 XAB, XDC ヲ作リ共通弦 XY ガ直線ト交ル點ヲ W トスル。



W ヲ中心トシ, 此等ノ圓ニ引ク切線ノ長サニ等シイ半徑ヲ以テ圓ヲ作リ, 直線ト二點 P, Q デ交ラシメルト P, Q ハ求ムルモノデアル。何トナレバ W カラ圓 XAB ニ至ル切線ノ長サヲ r トスルト

$$r^2 = WP^2 = WX.WY = WB.WA$$

$$\therefore\ WP^2 = WB.WA$$

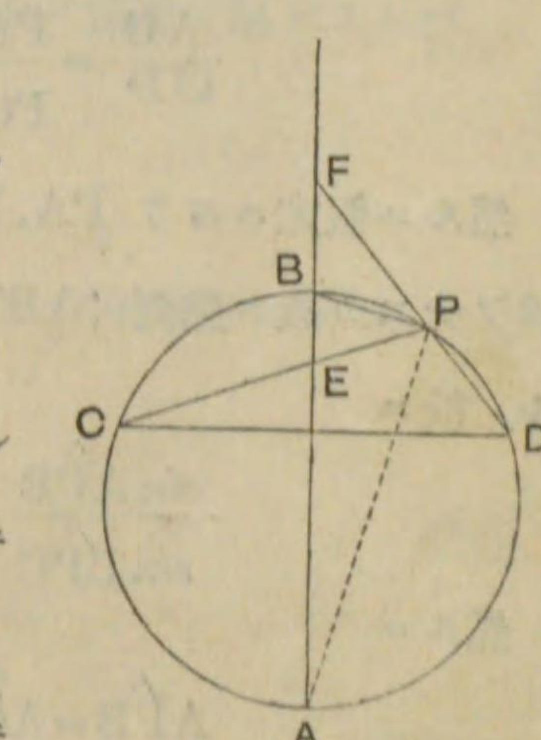
然ルニ W ハ線分 PQ ノ中點デアルカラ P, Q ハ A, B ノ調和共軛點デアル。

同様ニシテ P, Q ハ點 C, D ノ調和共軛點ナルコトガ分カル。

8. 定點 P ヨリ相交ル二直線 OAB, OCD ニ二ツノ動直線ヲ引キ OAB ト交ル點ヲ A, B トシ OCD ト交ル線ヲ C, D トスル時 AD, BC ノ交點 Q ノ軌跡ヲ求メヨ。

解 完全四邊形 ABDC ニ於テ OP, OB, OQ, OD ハ調和束線ヲナス。(定理9) 而シテ OP, OB, OD ハ定直線デアルカラ OQ モ亦定直線デアル。

故ニ Q ノ軌跡ハ定直線 OQ デアル。



9. 圓周上ノ點ヲ共圓ノ弦ノ兩端ニ結ビ付ケル直線ガ其弦ニ垂直ナル徑ト交ル點ハ其徑ノ兩端ニ對シテ調和共軛點ヲナス。

證明 P ヲ圓周上ノ點, CD ヲ弦, AB ヲ共弦ニ

垂直ナル直徑ナリトス。然ル時ハ PA ハ $\widehat{CPD}$ ノ二等分線デ PB ハ $\widehat{CPF}$ ノ二等分線デアルカラ，定理 8 系＝ヨツテ PA, PE, PB, PF ハ調和束線ヲナス。從ツテ點列 {AEBF} ハ調和列點ヲナス。

10. AD, BE, CF ヲ三角形 ABC ノ三ツノ高サトシ H ヲ垂心トス。BE ガ DF ト交ル點ヲ K トスルト，點列 {EHKB} ハ調和列點ヲナスコトヲ證セヨ。

證明 DH ハ $\widehat{EDK}$ ヲ二等分スルコト明カデアル。又 $\widehat{BDH}$ ハ直角デアルカラ，DB ハ $\widehat{EDK}$ ノ外角ノ二等分線デアル。故＝ {EHKB} ハ調和列點ヲナス。

11. 前題＝於テ FE ノ延長ガ BC ノ延長ト交ル點ヲ M トスルト，點列 {BDCM} ハ調和列點ヲナスコトヲ證セヨ。

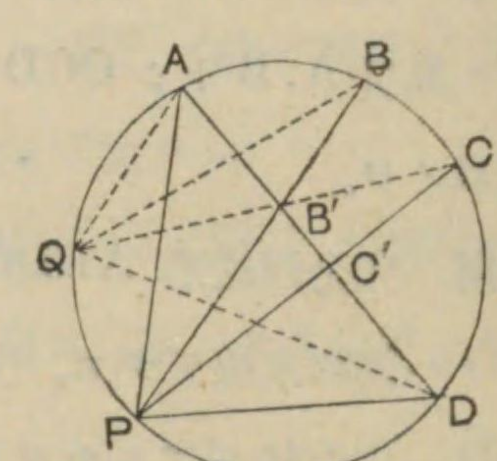
證明 前題＝ヨルト點列 {EHKB} ガ調和列點デアル。從ツテ FE, FH, FK, FB ハ調和束線ヲナスカラ，コレヲ直線 BC デ截ツタ時生ズル點列 {BDCM} ハ調和列點ヲナスコト明カデアル。

12. 圓ノ周上＝六ツノ點 A, B, C, D, P, Q アリテ PA, PB, PC, PD ガ調和束線ヲナス時ハ又 QA, QB, QC, QD モ亦調和束線ヲナスコトヲ證セヨ。

證明 束線 PA, PB, PC, PD ヲ一ツノ直線 AD デ截ル時ハ定理 5 ＝ヨリテ

$$\frac{AB'}{B'C'}=\frac{PA\sin\widehat{APB}}{PC'\sin\widehat{BPC}}$$

$$\frac{AD}{C'D}=\frac{PA\sin\widehat{APD}}{PC'\sin\widehat{CPD}}$$



然ル＝假定＝ヨリ PA, PB, PC, PD ハ調和束線ヲナスガ故＝點列 {AB'C'D} ハ調和列點デアル。故＝

$$\frac{\sin\widehat{APB}}{\sin\widehat{BPC}}=\frac{\sin\widehat{APD}}{\sin\widehat{CPD}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ル＝

$$\widehat{APB}=\widehat{AQB},\qquad \widehat{BPC}=\widehat{BQC}$$

$$\widehat{APD}=\widehat{AQD},\qquad \widehat{CPD}=\widehat{CQD}$$

ナルガ故＝(1)カラ

$$\frac{\sin\widehat{AQB}}{\sin\widehat{BQC}}=\frac{\sin\widehat{AQD}}{\sin\widehat{CQD}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

故＝ QA, QB, QC, QD モ亦調和束線ヲナス。

13. 二ツノ束線 OA, OB, OC, OD 及ビ O'A', O'B', O'C', O'D' ＝於テ對應射線ハ夫々互＝垂直ナル時，一ツノ束線ハ調和束線ナル時ハ他モ亦調和束線デアル。

證明 相對應スル射線ガ互＝垂直デアルカラ

$$\widehat{AOB}=\widehat{A'O'B'}\qquad \widehat{BOC}=\widehat{B'O'C'}$$

$$\widehat{AOD}=\widehat{A'O'D'}\qquad \widehat{BOD}=\widehat{B'O'D'}$$

ナルコト明カナルヲ以テ前題ヨリ容易＝證明ガ出來ル。

14. 二ツノ束線ノ三ツノ角ガ夫々他ノ束線ノ三ツノ角＝等シイカ又ハ補角ナル時一ツハ調和束線ナル時ハ他モ調和束線デアル。

證明 角ガ相等シキ時ハ本題ガ成立スル。次＝互＝補角ナル時ヲ考ヘン＝，一ツノ角ノ正弦ハ其角ノ補角ノ正弦＝等シイ。故＝一ツノ束線ガ調和束線ナル時ハ他ノ束線ガ調和束線ヲナスコト明カデアル。

第十二編 練習問題

1. 點列 {ACBD} ガ調和列點ナル時，P ヲ AD 上ノ任意ノ點トスレバ

$$\frac{2PB}{AB}=\frac{PC}{AC}+\frac{PD}{AD}$$

ナルコトヲ證セヨ。

2. 點列 {ACBD} ガ調和列點＝シテ O ヲ線分 AB ノ中點トスレバ

$$AD.\,BD=CD.\,OD$$

ナルコトヲ證セヨ。

3. 前題＝於テ

$$AB.\,CD=2AD.\,CB=2AC.\,BD$$

ナルコトヲ證セヨ。

4. 平行四邊形 ABCD ノ一ツノ頂點 A カラ對角線 BD ＝平行線 AE ヲ引クトキハ AE, AB, AC, AD ハ調和束線ヲナスコトヲ證セヨ。

注意 AE ＝平行線ヲ引ク時ハ, AB, AD ノ間＝アル線分ハ AC ノ爲メ＝二等分セラレルコト＝注意セヨ。

5. 前題＝於テ A', B', C' ハ夫々 BC, CA, AB ノ中點ナル時ハ, $A'C$, $A'B'$, $A'A$, $A'C'$ ハ調和束線ヲナスコトヲ證セヨ。

6. {ACBD} ガ調和列點デ O, O' ヲ線分 AB, CD ノ中點トスレバ AB, CD ヲ直徑トシタ二ツノ圓ノ交點 H ハ OO' ＝對シテ直角ヲ張ル。

7. PQ, AB ガ定圓ノ平行弦ナリトシ C ヲ AB ノ中點トス。PC ト圓トノ第二ノ交點ヲ R トシ, QT ヲ Q ＝テノ切線トスレバ束線 QA, QR, QB, QT ガ調和束線デアル。

8. 二ツノ點列 {APQR}, $\{AP'Q'R'\}$ ハ調和列點ヲナス時ハ PR', $P'R$, QQ' ハ一點デ會スルコトヲ證明セヨ。

9. 定點 A ヲ過リテ直線 AP_1P_2 ヲ引キ二ツノ定直線 OC, OD ト夫々 P_1, P_2 デ交ラシメ AP_1P_2 ノ上＝Q ヲトリ

$$\frac{2}{AQ}=\frac{1}{AP_1}+\frac{1}{AP_2}$$

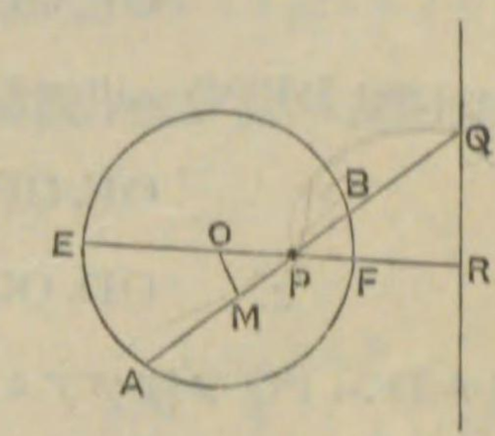
ナラシメルト Q ノ軌跡ハ直線デアル。

10. 三角形 ABC ノ三ツノ高サヲ AD, BE, CF トシ DE, EF ガ AB, BC ト夫々 F', D' ＝於テ交ラシメルト, FD, $F'D'$ ハ AC 上デ交ルコトヲ證セヨ。

第十三編　極及ビ極線

88. **定理 1.** 定點 P カラ定圓 O ＝任意ノ割線 PAB ヲ引キ圓周ト A, B デ交ラシム。A,B ＝關スル P ノ調和共軛點ヲ Q トスレバ, Q ノ軌跡ハ P ヲ過ル直徑＝垂直ナル直線デアル。

證明 中心 O カラ AB ＝垂線 OM ヲ引ケ



假定＝ヨツテ

$$AP : PB = AQ : BQ$$

$$\therefore \quad AP-PB : PB = AQ-BQ : BQ$$

$$\therefore \quad MP : PB = MB : BQ$$

即チ

$$MP : MB = PB : BQ$$

$$MP : MP+MB = PB : PB+BQ$$

$$\therefore \quad MP.\,PQ = AP.\,PB = EP.\,PF$$

次＝P ヲ過ル直徑ヲ EF トシ, E,F ＝關スル P ノ調和共軛點ヲ R トスルト上ト同樣＝シテ

$$OP.\,PR = EP.\,PF$$

ヨツテ四點 O, M, R, Q ハ同一圓周上＝アリ。ヨツテ $P\hat{R}Q = \hat{R}\angle$ デアル, 而シテ R ハ定點デアルカラ Q 點ハ常＝直徑 EF ＝垂直ナル定直線上＝アル。

定義 P 點ヲ圓 O ＝關シテ直線 RQ ノ極トイヒ, 直線 RQ ヲ圓 O ＝關シテ點 P ノ極線トイフ。

注意 {EPFR} ハ調和列點デ O ガ EF ノ中心デスカラ圓ノ半徑ヲ r トスルト

$$OP.\,OR = r^2$$

從ツテ OP ガ増大スルト OR ガ減少シ, OP ガ減少スレバ OR ガ増大ス。

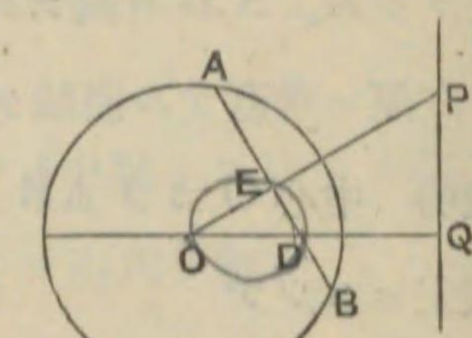
系 1. P ガ圓外＝在ル時ハ QR ガ圓ヲ截ル點ト P トヲ結ブ直線ハ此圓ノ切線デアル。

系 2. 極及ビ極線ハ中心Oノ同ジ側ニ在リ，極ハ圓内ニアレバ極線ハ圓外ニ在リ，極線ガ圓内ニアレバ極ハ圓外ニ在ル。

系 3. 圓周上ノ點ノ極線ハ其點ニ於ル切線デアル。

定理 2. 直線上ノ任意ノ點ノ圓ニ關スル極線ハ此ノ直線ノ極ヲ過ル。

證明 定圓ヲOトシ定直線ヲPQトシ，PQ上ノ一點Pノ極線ヲABトシ，OカラPQニ引イタ垂線トノ交點ヲDトスルト定義注意ニヨリテ



$$OE.OP=R^2$$

且ツ四點DEPQハ共圓點デアルカラ

$$OE.OP=OD.OQ$$

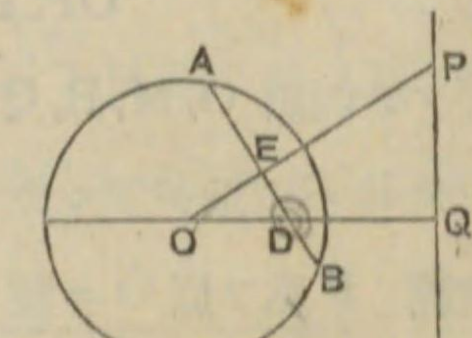
$$\therefore\ OD.OQ=R^2$$

即チDハPQノ極デアル。故ニP點ノ極線ABハPQノ極Dヲ過ル。

系 P點ハ直線PQノ上ヲ動ク時，Eノ軌跡ハODヲ直徑トスル圓周デアル。

定理 3. 一點ヲ過ル任意ノ直線ノ圓ニ關スル極ハコノ點ノ極線上ニ在ル.

證明 定點ヲDトシ圓Oニ關スル此點ノ極線ヲPQトスル。Dヲ過ル任意ノ直線ヲABトスル時Oカラ之ニ垂線OEヲ引キPQトノ交點ヲPトスルト



D, E, P, Qハ共圓點デアルカラ

$$OE.OP=OD.OQ$$

然ルニ假定ニヨツテ

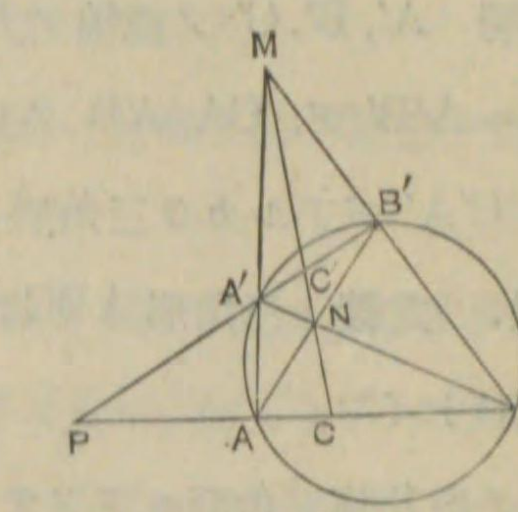
$OD.OQ=R^2$ デアルカラ $OE.OP=R^2$

ヨツテABノ極ハPデアル。

定理 4. 一點Pヲ過リ一ツノ圓ニ二ツノ割線PAB, PA′B′ヲ引キ直線AA′, BB′ガMデ交リ，AB′, A′BガNデ交ル，時二ツノ割線ガPノ周リヲ動クトキM, Nノ軌跡ハ何レモ點Pノ極線デアル。

證明 MNヲ結ビ二ツノ直線PAB, PA′B′ト夫々C, C′デ交ラシムレバ

前編定理9ニヨツテMP, MA, MC, MBガ調和束線デアルカラ



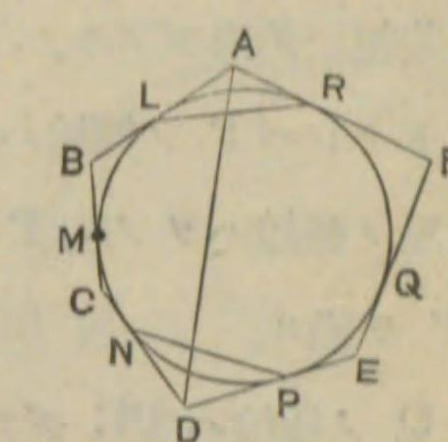
{PACB}, {PA′C′B′}

ガ夫々調和列點デアル。ヨツテPノ極線ハA, B及ビA′, B′ニ關シテPノ共軛點タルC及ビC′ヲ過ル，即チM. Nガ何レモPノ極線上ニアル。

注意 コノ定理ハ定規トこんぱすノミデ一點ノ極線ヲ決定シ得ルコトヲ示スモノデアル。

89. 定理 5. 圓ニ外切スル六邊形ノ相對スル頂點ヲ結ブ三ツノ對角線ハ一點デ會スル(ぶりあんしよんノ定理)

證明 六邊形ヲABCDEFトシ共切點ヲL, M, N, P, Q, Rトスル。



對角線AD及ビ切弦LR, NPヲ作レバA點ノ極線ハLRデ, D點ノ極線ハNPデアル。故ニLR, NPノ交點ノ極線ハADデアル。(定理2)

同樣ニLM, PQノ交點ノ極線ハBEデ，MN, QRノ交點ノ極線ハCFデアル。

然ルニ第十編定理15ニヨリ此等ノ三ツノ交點ハ一直線上ニアル。ヨツテ本編定理2ニヨツテ此等ノ交點ノ極線AD, BE, CFハ一點デ會スル。

注意 上ノ定理ハぶりあんしよん (Brianchon) ガ 1785 年ニ發表シタモノヽ格段ナモノデアル。ぶりあんしよんノ定理トイフノハ次ノ通リデアル。

「圓錐曲線ニ外接スル任意ノ六邊形ノ相對スル頂點ヲ結ビ付ケル三ツノ對角線ハ一點デ會スル」

90. 定義 一ツノ三角形ノ各邊ハ圓ニ關シテ他ノ與ヘラレタ三角形ノ頂點ノ極線ナル時，該三角形ヲ與ヘラレタ三角形ノ共軛三角形トイフ。

定理 6. 三角形ABCハ三角形A′B′C′ノ共軛三角形ナル時ハ後者ハ亦前者ノ共軛三角形デアル。

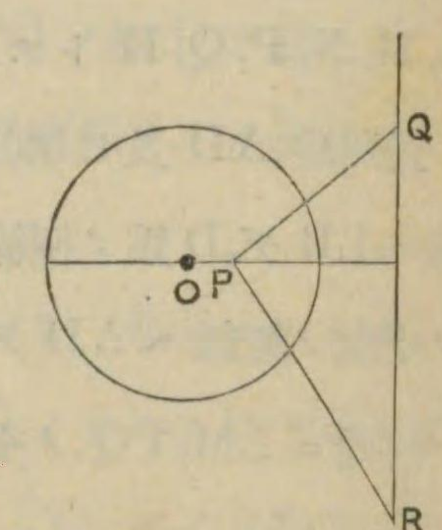
證明 A′, B′, C′ ノ極線ヲ夫々 BC, CA, AB トスルト BC, CA ノ交點 C ノ極線ハ A′B′ デ, CA, AB ノ交點 A ノ極線ハ B′C′ デ, AB, BC ノ交點 B ノ極線ハ C′A′ デアルカラ三角形 A′B′C′ ハ三角形 ABC ノ共軛三角形デアル。

91. 定義 三角形 ABC ガ共共軛三角形 A′B′C′ ト一致スル時之ヲ自共軛三角形トイフ。

即チ自共軛三角形ニアツテハ各頂點ノ極線ハ其對邊デアル。而シテ定規トこんぱすノミデ與ヘラレタ一點ヲ頂點トスル自共軛三角形ヲ作ルコトガ出來ル。ソノ方法ハ次ノヤウデアル。

P ヲ與ヘラレタ一頂點トセヨ, コノ點ノ圓ニ關スル極線上ニ任意ノ一點 Q ヲトリ, Q ノ極線ト P ノ極線トノ交點ヲ R トスレバ PQR ナル三角形ハ求ムル自共軛三角形デアル。

何トナレバ P ノ極線ハ QR デアルカラ QR 上ノ凡テノ點ノ極線ハソノ極 P ヲ過ル, 故ニ R ノ極線ハ勿論 P ヲ過ル。

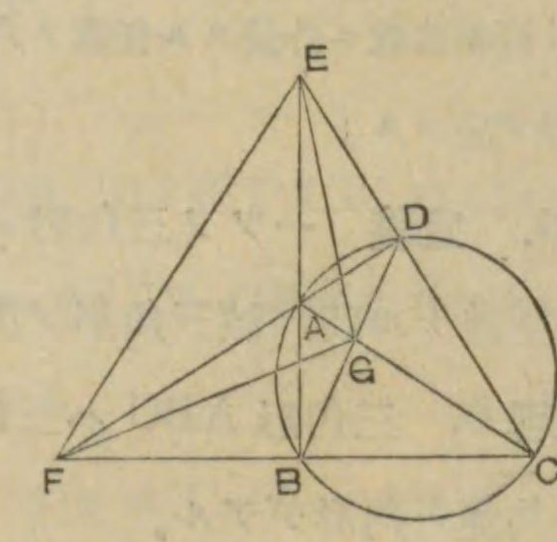


又 Q ノ極線ハ PR デアルカラ PR 上ノ凡テノ點ノ極線ハ Q ヲ過ルカラ R ノ極線モ Q ヲ過ル。ヨツテ R ノ極線ハ PQ デアル。

注意 鈍角三角形 PQR ヲ與ヘタ時, 之ヲ自共軛三角形トスル圓ガ只一ツアル。(モシ鋭角三角形ナレバ存在セズ。) 此圓ヲ △PQR ノ極圓トイフ。

定理 7. 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點 G ト對邊ノ交點 E, F トヲ結ブ三角形 (之ヲ對角三角形トイフ) ハ此圓ニ關シテ自共軛三角形デアル。

證明 ABCD ヲ圓ニ內接スル四邊形, GEF ヲ對角三形トスル。今 AB ト FG トノ交點ヲ P トシ, FG ト CD トノ交點ヲ Q トスルト, 點列 {EAPB}, {EDQC} ハ調和列點デスカラ邊 FG ハ點 E ノ極線デアル。



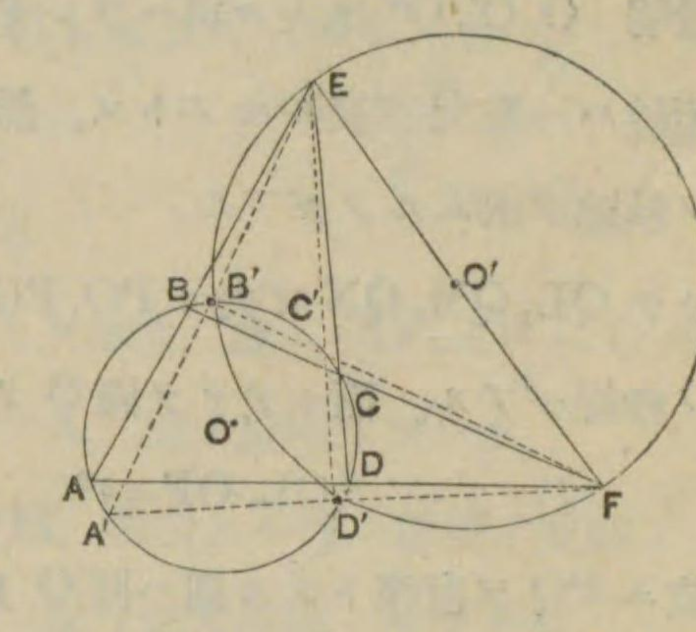
同様ニ GE, EF ハ夫々 F 及ビ G ノ極線デ

アル。ヨツテ △GEF ハ圓ニ關シテ自共軛三角形デアル。

92. 定理 8. 內接四邊形ノ相對スル邊ノ延長ノ交點ヲ結ブ線分ヲ直徑トスル圓ハ元ノ圓ニ直交スル。

證明 ABCD ヲ內接四邊形トシ, 第三ノ對角線ヲ EF トスル。今 EF ヲ直徑トスル圓 O′ ヲ畫クト, コノ圓ハ元ノ圓 O ト必ズ交ル。何トナレバ $\hat{C}$ ハ鈍角ナラバ $\hat{A}$ ハ鋭角ナルヲ以テ C ハ圓 O′ ノ內部ニアルベク A ハ外部ニアルカラデス。

サテ此等ノ圓ノ交點ノ一ツヲ D′ トシ, FD′ ヲ引キ圓 O ト再ビ交ル點ヲ A′ トスル。次ニ EA′ ヲ結ビ圓 O ト交ル點ヲ B′ トスルト B′ ハ圓 O′ ノ上ニアル。何トナレバ假定ニヨツテ $E\hat{D'}F$ ハ直角デ且ツ A′B′C′D′ ハ圓 O ノ內接四邊形デアルカラ $E\hat{B'}F$ モ直角デアルカラデス。



次ニ E ハ AB ト CD トノ交點ナル故ニ F ノ極線上ニアルベク, A′B′ ト C′D′ トノ交點モ亦 F ノ極線上ニアルベシ。而シテ A′B′ ハ E ヲ通ルカラ A′B′ ト C′D′ トノ交點ハ E ニ一致スル。

又 B′, D′ ニ於ケル切線ヲ作リ其交點ヲ H トスルト, H ハ弦 B′D′ ノ極ナルヲ以テ EF ノ上ニアル。

最後ニ O, O′ ヲ結ブト B′D′ ノ垂直二等分線デアルカラ弦 B′D′ ノ極ハ直線 OO′ ノ上ニアル。故ニ H ハ O′ ト一致セネバナラヌ。即チ O′B′, O′D′ ハ圓 O ノ切線トナル。故ニ圓 O ト O′ トハ直交スル。

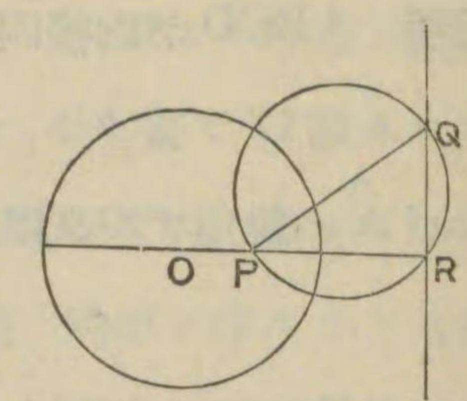
第十三編 問題解義

1. 圓內ノ定點ヲ過ル弦ノ兩端ノ切線ノ交點ノ軌跡ハ此點ノ極線デアル。

證明 定點ヲ T トシ, T ヲ過ギル一ツノ弦ヲ PTQ トシ, P, Q ニ於ケル切線ノ交點ヲ O トス。OT ガ圓周ト交ル點ヲ R, S トスルト, 前編定理 4 ニヨツ

テ點列{ORTS}ハ調和列點ヲナス。故ニ切線ノ交點OハTノ極線ノ上ニアル。

2. 一點Pト其點ノ圓Oニ關スル極線上ノ任意ノ點Qトヲ結ブ線分PQヲ直徑トスル圓ハ圓Oト直交スル。



證明 OPガ極線ト交ル點ヲRトスレバPQヲ直徑トスル圓ハRヲ過ル。

然ルニQRハPノ極線デスカラ

$OP.OR=r^2$ (但シrハ圓Oノ半徑)

ヨツテ二圓ハ直交スル。

3. 與ヘラレタ三ツノ圓ニ關スル極線ガ一點ニ會スルガ如キ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

證明 O, O′, O″ヲ夫々與ヘラレタ圓ノ中心トシ，此三ツノ圓ニ關スル點Pノ極線ハ一點Qデ交ルモノトス。然ル時本題ハカクノ如キ條件ヲ滿足スル點Pノ軌跡ヲ求ムルノデアル。

サテQL, QM, QNヲ夫々PO, PO′, PO″ニ下シタ垂線ナリトスルト夫等ハPノ極線デアル。而シテrヲ圓Oノ半徑トスレバ

$OL.OP=r^2$

故ニPQヲ直徑トスル圓ハ圓Oト直角ニ交ハル。同樣ニ此圓ハ圓O′, O″トモ直角ニ交ハル。而シテ三ツノ圓ヲ直角ニ截ル圓ハ唯一ツアル。即チPハ此定圓上ニアル。

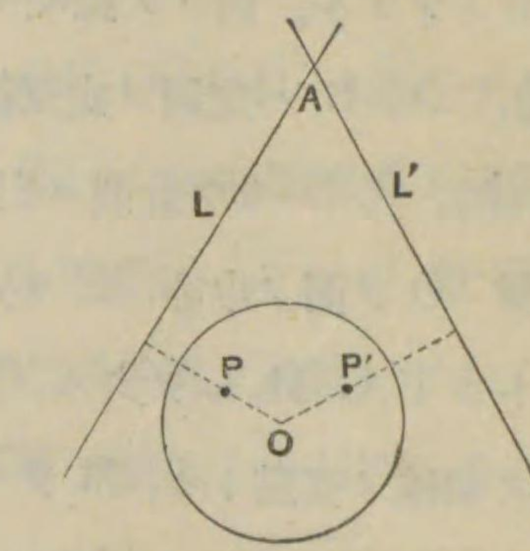
4. 定直線上ノ任意ノ點カラ定圓ニ二ツノ切線ヲ引ク時，切點ヲ結ブ點ガ定圓ヲ過ル。

證明 定直線上ニ任意ノ一點Pヲトリ，ソレカラ二ツノ切線ヲ引キ切點ヲ結ブ弦ヲ作ルト，其弦ハPノ極線デアル。從ツテ定直線ノ極ハ此弦ノ直線ノ上ニアル。而シテ定直線ノ極ハ唯一點ノミデアルカラ，切線ノ切點ヲ結ブ點ハ常ニ此一點ヲ通ル。

5. 二ツノ直線ノナス角ハ夫等ノ極ガ圓ノ中心ニ對シテ張ル角ニ等シイ。

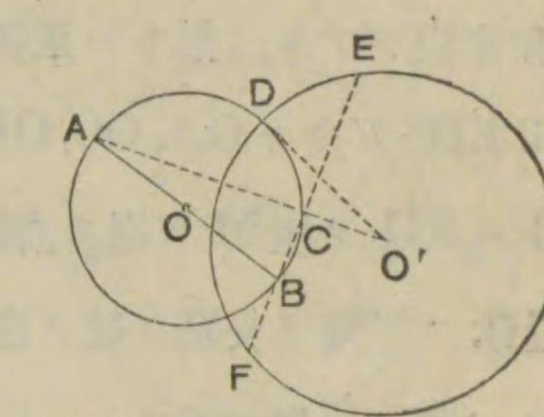
證明 一ツノ直線Lノ圓ニ關スル極Pハ圓ノ中心OカラLニ下ス垂線ノ

上ニアル。



同樣ニ他ノ直線L′ノ極P′ハOカラL′ニ下ス垂線ノ上ニアル。依ツテ容易ニ本題ハ證明セラレル。

6. 二圓O, O′ガ直交スル時，圓Oノ直徑ABノ端點A(又ハB)ノ圓O′ニ關スル極線ハB(又ハA)ヲ過ル。



證明 O及ビO′ガ直角ニ交ハルカラ二圓ノ交點DトO′トヲ結ブ直線ハ圓Oノ切線トナル。

今BカラO′Aニ垂線ヲ引キ其交點ヲCトスルト，Cハ圓Oノ周上ニアルカラ

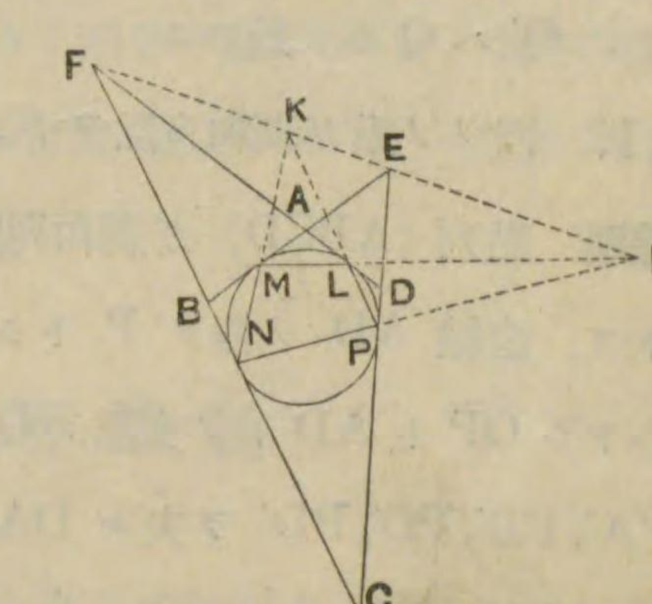
$O'C.O'A=O'D^2=O'E^2$

即チ$\triangle AEO'$ニ於テ$A\hat{E}O'=R\angle$ナルヲ知ル。故ニAE, AFハO′圓ノ切線トナル。從ツテEFハAノ極線デアル。即チ證明セラレタ。

7. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ノ交點，相對スル邊ノ延長ノ交點ノ三ツノ中ノ任意ノ一ツハ，此圓ニ關シテ他ノ二點ヲ通ル直線ノ極デアル。

證明 本題ハ本編定理7ノ改作デアツテ其內容ハ同ジモノデアル。

8. 圓ニ外接スル四邊形ノ對邊ノ交點ト其對應內切四邊形ノ相對スル邊ノ交點トハ一直線上ニアル。



證明 先ヅ對應內切四邊形トイフハ外切圓ノ切點ヲ結ビ付ケル內接四邊形ヲイフノデアル。

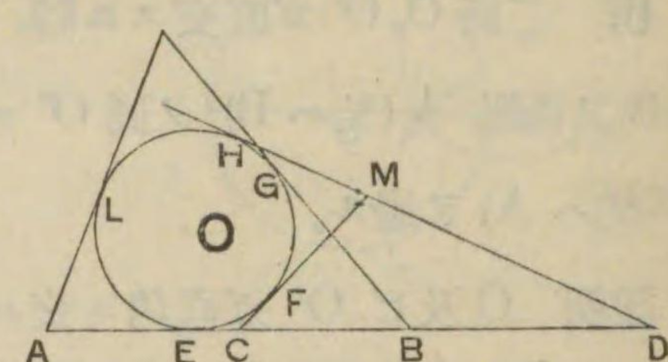
サテ前題ニヨツテKHハ內接四邊形ノ對邊線MP, LNノ交點ノ極線デアル。

又Eハ切線EM, EPノ切點ヲ結ブ直線MPノ極デアリ，FハLNノ極デアル

カラ，EF ハ又 MP, LN ノ交點ノ極線デアル。故ニ EF ト HK トハ一致スルモノデアル。仍ツテ證明セラレタ。

9. A, B ハ定圓ノ定切線上ノ二定點デ C, D ハ A, B ニ就キ調和共軛點ナル時，C, D カラ此圓ニ引イタ切線ノ交點ノ軌跡ヲ求ム。

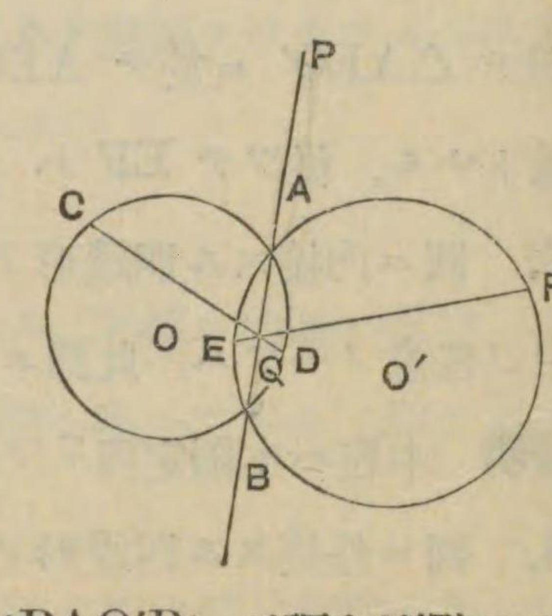
解 O ヲ圓ノ中心，E ヲ定直線上ノ切點トシ F, G, H, L ヲ夫々 C, B, D, A カラノ切線ノ切點トシ，M ヲ C, D カラノ切線ノ交點トスレバ OA, OC, OB, OD ガ調和束線デアル。然ルニ束線 EL, EF, EG, EH ガ夫々 OA, OC, OB, OD ニ垂直デアルカラ調和束線デアル。故ニ LG ハ FH ノ極 M ヲ過ル。(練習問題 3) ヨツテ M ノ軌跡ハ定直線 GL デアル。



10. 二圓ノ交點ヲ結ブ直線上ノ凡テノ點ノ此等二圓ニ關スル極線ハ此直線上ノ同一ノ點デ交ル。

解 二圓ノ交點ヲ結ブ直線ヲ AB トシ其上ノ任意ノ一點ヲ P トス。

P ノ圓 O ニ關スル極線ヲ CD トシ圓 O′ ニ關スル極線ヲ EF トス。

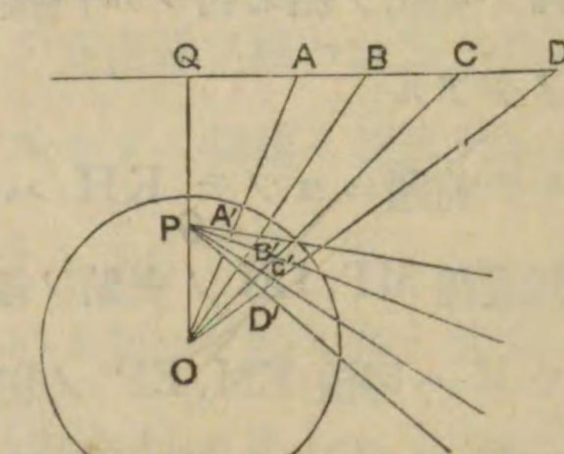


CD ガ AB ト交ル點ヲ Q トスルト點列 {PAQB} ガ調和列點ヲナス。

又 EF ガ AB ト交ル點ヲ Q′ トスルト點列 {PAQ′B} ガ調和列點ヲナス。ヨツテ Q′ ハ Q ニ一致スル。

11. 四ツノ點ガ調和列點ヲナス時ハ夫等ノ極線ハ調和束線ヲナス。

證明 點列 {ABCD} ガ調和列點ヲナスモノトス。直線 AD ノ極ヲ P トシ O ヲ圓ノ中心トシ OP ト AD トノ交點ヲ Q トスル。



PA′, PB′, PC′, PD′ ヲ夫々 OA, OB, OC, OD ニ垂直ニ引ケ。

A ノ極線ハ P ヲ過リ且ツ PA′ ガ OA ニ垂直ダカラ PA′ ガ A ノ極線デアル。同様ニ PB′, PC′, PD′ ガ夫々 B, C, D ノ極線デアル。

サテ束線 PA′, PB′, PC′, PD′ ガ調和束線 OA, OB, OC, OD ニ垂直デアルカラ束線 PA′, PB′, PC′, PD′ ガ調和束線ヲナス。(第十二編問題解義 13 參照)

12. 二定圓 O, O′ アリ圓 O′ ノ周ハ圓 O ノ中心ヲ通ルモノトス。圓 O′ ノ直徑 O′O ノ端點 P ノ圓 O ニ關スル極線ハ此等ノ二ツノ圓ノ根軸デアル。

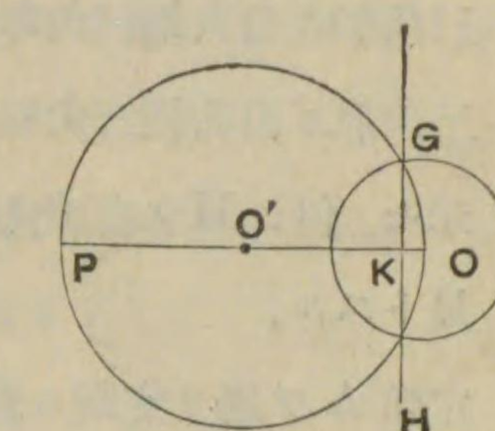
證明 二ツノ圓 O, O′ ノ半徑ヲ夫々 r, r' トシ GH ヲ根軸トシ GH ト中心線 OO′ トノ交點ヲ K トスルト

$$OK^2-r^2=O'K^2-r'^2$$

$$O'K=r'-OK$$

故ニ $$OK^2-r^2=(r'-OK)^2-r'^2$$

從ツテ $$r^2=2OK.r'=OK.OP$$



即チ $\widehat{OGP}$ ガ直角デアル。故ニ PG ガ圓 O ヘノ切線トナル。

故ニ GH ハ圓 O ニ關スル P ノ極線デアル。

13. 一ツノ圓ノ外部ニアル定點 C カラ二ツノ割線 CPP′, CQQ′ ヲ引クトキ PQ ガ常ニ一ツノ定點ヲ過ルナラバ P′Q′ モ亦他ノ定點ヲ過ル。

證明 L ヲ PQ ガ過ル定點トシ，PQ, P′Q′ ノ交點ヲ Y トシ PQ′, QP′ ノ交點ヲ Z トスル。次ニ CL ノ延長ガ P′Q′ ト M デ YZ ト N デ交ラシメルト YZ ハ C ノ極線デアルカラ YZ ガ定直線デアル。從ツテ N ガ定點デアル。又四ツノ直線 YC, YP, YZ, YP′ ガ調和束線デスカラ四ツノ點 CLNM ハ調和列點デアル。然ルニ C, L, N ガ定點デスカラ M モ定點，從ツテ P′Q′ ハ定點 M ヲ過ル。

第十三編 練習問題

1. 圓ニ内接スル四邊形ノ一双ノ對邊ノ位置及ビ對角線ノ交點ヲ知ル時，其

圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

2. 圓內ノ定點 O ヲ過リ二ツノ弦 AOB, COD ヲ引クトキ AC, BD ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

注意 所要ノ軌跡ハ圓ニ關シテ O ノ極線ナルコトニ注意セヨ。

3. A, B, C, D, P ヲ圓周上ノ點トシ且ツ PA, PC, PB, PD ガ調和束線ナル時ハ弦 AB ノ延長ハ弦 CD ノ極ヲ過ル。

4. 三角形 ABC ハ圓ニ關シテ自共軛三角形ナル時任意ノ弦 PAQ ヲ引クト BP, CQ ハ其圓周上デ交ル。

5. 三角形ガ自共軛三角形ナル時ハソノ垂心ハ圓ノ中心ト一致スル。

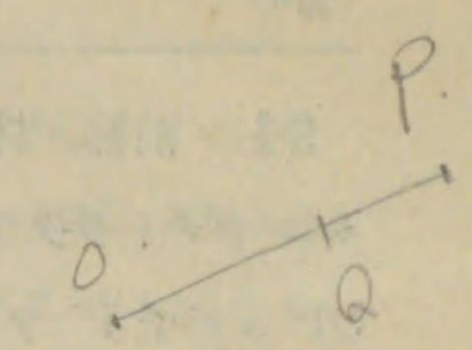
6. 三角形ガ自共軛三角形ナル時ソノ極圓ノ半徑ハ $\sqrt{\mathrm{HA}.\mathrm{HD}}$ ナルコトヲ示セ。但シ H ハ三角形ノ垂心, D ハ一ツノ頂點カラ對邊ヘ引ケル垂線ノ足トスル。

7. 定點 A ヲ過リ定圓ニ動割線 APQ ヲ引キ, コノ上ニ R 點ヲトリ $\mathrm{RP}.\mathrm{RQ}=\mathrm{RA}^2$ ナラシムル時 R ノ軌跡ハ直線デアル。

8. T ヲ定直線上ノ動點トシ, TP, TQ ヲ定圓ヘノ切線トシ, PN, QM ヲ定直線ニ垂直ニ引クト $\dfrac{1}{\mathrm{PN}}+\dfrac{1}{\mathrm{QM}}$ ガ一定デアル。

9. 定圓周上ノ點 X ニ於ケル切線ハ定弦 AB ト P デ交ラシム。O ヲ AB ノ中點トスル時 P ノ極線ガ AB ト R デ會スルモノトスレバ PX ハ圓 ORX ニ切スル。

10. 定圓周上ニ於テ出會フ二ツノ定直線アリ, 此直線ノ一ツノ上ニ一點 P ヲトル時, 此圓ニ關スル P ノ極線ガ他ノ直線ト Q デ出會フモノトスルト, PQ ハ一ツノ定點ヲ過ルコトヲ證セヨ。



第十四編　反　形

93. 定義　線分 OP 上又ハ其延長上ニ Q ヲトリ $\mathrm{OP}.\mathrm{OQ}=r^2$ ナラシムル時 Q (又ハ P) ヲ半徑 r ナル圓ニ關スル P (又ハ Q) ノ反點トイヒ, r^2 ヲ反率, O 點ヲ反點ノ中心又ハ原點トイフ。反點ヲ求ムルコトヲ反點スルトイフ。

二點 P, Q ノ中ノ一ツ例ヘバ P ハ或曲線上ヲ動ク時ハ其反點 Q モ亦一ツノ他ノ曲線ヲ畫ク。此等ノ二ツノ曲線ヲ互ニ半徑 r ナル圓ニ關スル他ノ反形トイフ。

定理 1. 1° 反點ノ中心ヲ過ル直線ノ反形ハ其直線自身デアル。

2° 反點ノ中心ヲ過ラナイ直線ノ反形ハ圓デアル。

3° 反點ノ中心ヲ過ル圓ノ反形ハ直線デアル。

證明 1° 定義ニヨツテ各點ノ反點ハソノ直線上ニアルカラデス。

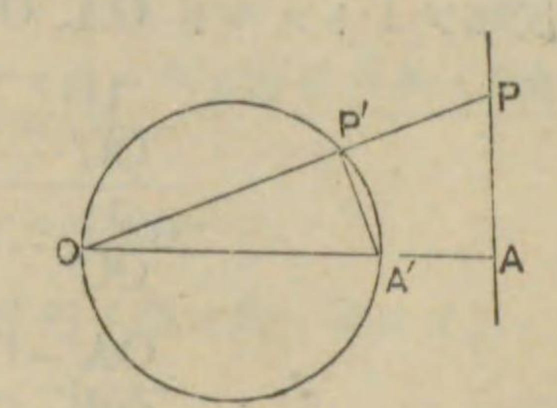
2° 反點ノ中心 O カラ與ヘラレタ直線ヘ垂線 OA ヲ引ケ, A ノ反點ヲ A′ トセヨ。

又直線上ノ任意ノ點 P ヲトリ P ノ反點ヲ P′ トスルト定義カラ

$$\mathrm{OA}.\mathrm{OA'}=\mathrm{OP}.\mathrm{OP'}$$

$$\therefore\quad \mathrm{O\hat{P'}A'}=\mathrm{O\hat{A}P}=\mathrm{R}\angle$$

ヨツテ P′ ハ定線分 OA′ ヲ直徑トスル圓周上ニアル。



3° OA′ ヲ與圓ノ直徑トシ P′ ヲ圓周上ノ任意ノ點トスル。A′, P′ ノ反點ヲ夫々 A, P トスレバ

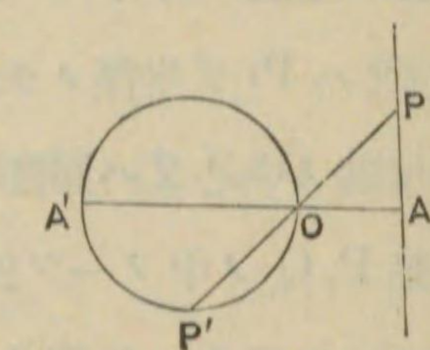
$$\mathrm{OA}.\mathrm{OA'}=\mathrm{OP}.\mathrm{OP'}$$

$$\therefore\quad \mathrm{O\hat{A}P}=\mathrm{R}\angle$$

ヨツテ圓ノ反形ハ定點 A ヲ過リ OA′ ニ垂直ナル直線デアル。

94 前節ニ於テ反率ヲ正ノ數 r^2 トシタガ,線分ノ方向ニ注意シ正,負ヲ附ケルモノトシタラ反率ヲ負ノ數 $-r^2$ トスルモ尙定理ハ成立スル。即チ線分 OP ニ於テ P′ ヲ O ニ關シテ P ノ反對ノ側ニトル時ニ,線分 OP ニ對シ線分 OP′ ヲ負量ト考ヘルコトニヨツテ成立スル。

前定理ノ 2° ニ就イテ見ルニ A′,P′ ヲ夫々 O ニ關シテ AP ノ反對ノ方向ニトルト OA, OA′ 及ビ OP, OP′ ハ共ニ負量デアルガ,其場合デモ



$$OP.OP'=OA.OA'$$

ガ成立スルカラ直線 AP ノ反形ハ矢張リ圓デアル。

定理 2. 點列 {ACBD} ガ一直線上ニアル調和列點ナル時,其直線上ノ任意ノ點ヲ反點ノ中心トシ,A,B,C,D ノ反點ヲ夫々 A′,B′,C′,D′ トスレバ此等モ亦調和列點ヲナス。

證明 點列 (ACBD) ガ調和列點ヲナス故

$$\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{BD}$$

直線ノ方向ニ正,負ヲ附ケルト

$$\frac{AC}{BC}=-\frac{AD}{BD} \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

中心 O ガ如何ナル位置ニアルモ (1) カラ

$$\frac{OC-OA}{OC-OB}=-\frac{OD-OA}{OD-OB} \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

反率ヲ 1 トスルト $OA.OA'=OB.OB'=\cdots\cdots=1$ デアルカラ (2) カラ

$$\frac{\frac{1}{OC'}-\frac{1}{OA'}}{\frac{1}{OC'}-\frac{1}{OB'}}=-\frac{\frac{1}{OD'}-\frac{1}{OA'}}{\frac{1}{OD'}-\frac{1}{OB'}}$$

$$\therefore\quad \frac{OA'-OC'}{OB'-OC'}=-\frac{OA'-OD'}{OB'-OD'}$$

$$\therefore\quad \frac{C'A'}{C'B'}=-\frac{D'A'}{D'B'}$$

即チ

$$\frac{A'C'}{B'C'}=-\frac{A'D'}{B'D'}$$

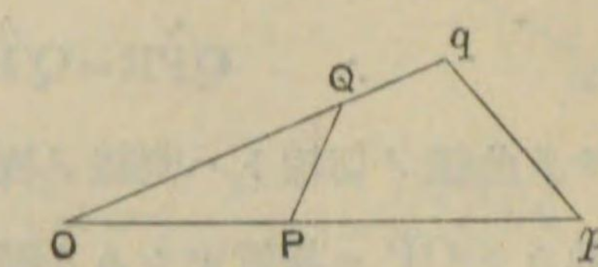
コレ點列 {A′C′B′D′} ガ調和列點ナルコトヲ示スモノデアル。

注意 上ニハ反率ヲ 1 トシタガ,一般ニ反率ヲ r^2 又ハ $-r^2$ トスルモ同樣ニ成立スル。

定理 3. 二點 P,Q ノ O ニ關スル反點ヲ夫々 p,q トシ反率ヲ r^2 トスルト

$$pq:PQ=r^2:OP.OQ$$

證明 定義ニヨリ



$$\therefore\quad \triangle POQ\backsim\triangle pOq$$

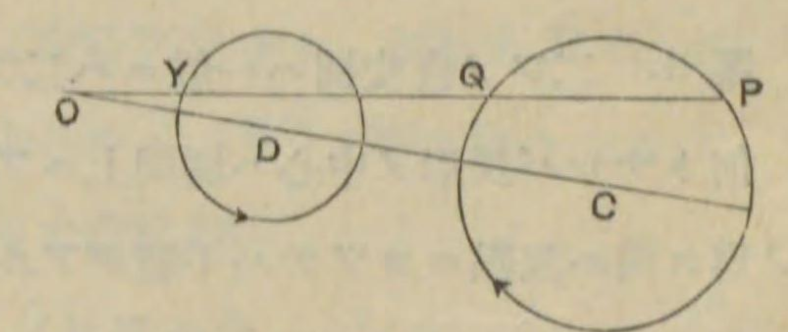
$$\therefore\quad pq:PQ=Op:OQ$$

$$=OP.Op:OP.OQ$$

$$=r^2:OP.OQ$$

定理 4. 圓周上ニアラザル點ヲ中心トスル時コノ圓ノ反形ハ亦他ノ一ツノ圓デアル。

證明 P ヲ一ツノ圓周上ノ點トシ,OP トノ交點ヲ Q トス。Y ヲ O ニ關シテ P ノ反點トスレバ



$$OP.OY=r^2$$

然ルニ反點ノ中心 O 點及ビ圓 C ガ一定デスカラ

$$OP.OQ=k^2 \quad (玆ニ\ k^2\ ハ定量デアル)$$

$$\therefore\quad OY:OQ=r^2:k^2 \quad 即チ定比デアル。$$

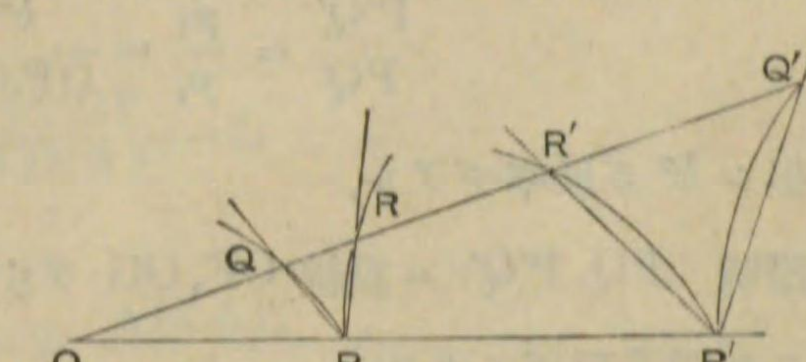
ヨツテ Q ガ定圓 C ノ周上ヲ動クトキハ Y ノ軌跡ハ一ツノ圓デ其中心ハ OC 上ニアルコトハ容易ニ分カル。ヨツテ定理ハ證明セラレタ。

注意 i. 反點ノ中心 O ガ與ヘラレタ圓 C ノ外部ニアル時ハ,P ガ圓 C ヲ矢ノ方向ニ動クトキ Y ガソレト反對ノ方向ニ動ク。

注意 ii. 反點ノ中心 O ガ與ヘラレタ圓 C ノ內部ニアル時ヲ考ヘヨ。

95. **定理 5.** 二ツノ曲線ノ爲ス角ハ夫等ノ反形ノ爲ス角ニ等シイ。

證明 圖ニ於テ O ヲ反點ノ中心トシ,P,P′ ヲ二ツノ曲線ノ交點ノ對應點トスル。



O ヲ過リ任意ノ直線 OQRR′Q′

ヲ引キ一ツノ曲線ト Q, R ニテ交ラシメ，ソノ反形トノ交點ヲ Q′, R′ トスル。

然レバ $$OQ.\,OQ' = OP.\,OP' = OR\,OR'$$

∴ PQQ′P′ 及ビ PRR′P′ ガ圓ニ内接スル四邊形デアル。

$$\therefore\quad O\hat{P}Q = O\hat{Q}'P' \qquad O\hat{P}R = O\hat{R}'P'$$

$$\therefore\quad Q\hat{P}R = Q'\hat{P}'R'$$

サテ曲線ノ切線トハ割線ノ極限ノ位置デアル。ソコデ直線 OQ ヲ O ノ周リニ動カシ OP ニ接近セシムル時其ノ極限ニ於テハ割線 PQ, PR, P′Q′, P′R′ ハ共ニ P, P′ ニ於ケル二ツノ曲線ノ切線トナル。而シテ其場合ニ $Q\hat{P}R$ ト $Q'\hat{P}'R'$ トガ共ニ二ツノ曲線及ビ夫等ノ反形ノナス角トナル。ヨツテ定理ハ證明セラレタ。

系 1. 二ツノ直交圓ハ一般ニハ二ツノ直交圓ニ反形セラレル。

何トナレバ反形ノ中心ハ圓周上ニアラザル時ハ其反形モ圓ニシテ且ツ夫等ノ爲ス角ハ反點ニヨツテハ不變デアルカラデス。

系 2. 二ツノ直交圓ノ交點ノ一ツヲ反點ノ中心トスルト夫等ノ反形ハ二ツノ互ニ垂直ナ直線トナル。

系 3. 二ツノ直交圓ノ圓周上ノ點（交點ナラザル）ヲ反點ノ中心トスルト夫等ノ反形ハ一ツノ圓ト其直徑トナル。

系 4. 二ツノ曲線ハ相切スレバソレ等ノ反形モ亦相切スル。

何トナレバ二ツノ曲線ガ相切スル時ハ夫等ノ交角ガ零ニシテ，角ノ大サハ反形ニヨツテモ變ラヌカラデス。

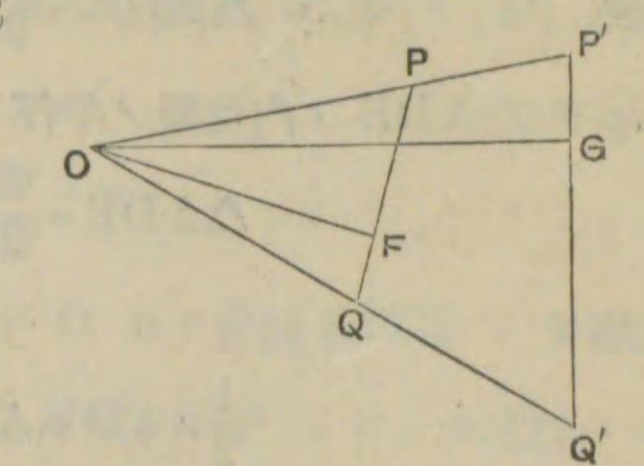
定理 6. P′, Q′ ヲ O ニ關シテ二點 P, Q ノ反點ナリトシ，p_1, p_2 ヲ O カラ PQ, P′Q′ ヘノ垂線ノ長サトスルト次ノ關係ガアル。

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{k^2}{OP.OQ} = \frac{OP'.OQ'}{k^2}$$

但シ k^2 ガ反率デアル。

證明 PQ, P′Q′ ニ垂線 OF, OG ヲ引クト四ツノ點 P, Q, Q′, P′ ハ圓ニ内接スル四邊形デスカラ

$$O\hat{P}Q = O\hat{Q}'P', \qquad O\hat{Q}P = O\hat{P}'Q'$$



$$\therefore\quad \triangle OPF \backsim \triangle OQ'G$$

$$\triangle OPQ \backsim \triangle OP'Q'$$

$$\therefore\quad \frac{OG}{OF} = \frac{OQ'}{OP} = \frac{P'Q'}{PQ}$$

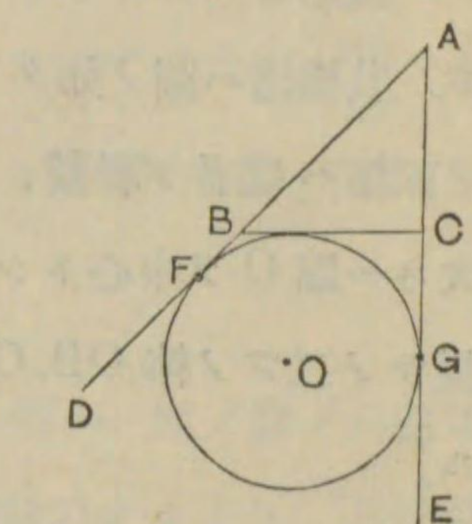
即チ $$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{p_2}{p_1}$$

又 $$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{OQ'}{OP} = \frac{OQ.OQ'}{OQ.OP} = \frac{OQ'.OP'}{OP.OP'} = \frac{k^2}{OQ\,OP} = \frac{OP'OQ'}{k^2}$$

96. **定理 7.** 角ノ二邊ニ切スル定圓ガ切點ニヨツテ分タレタ劣弧ニ切スル任意ノ切線ヲ引キテ生ズル三角形ノ外接圓ハ，此角ノ二邊ニ切スル他ノ一定圓ニ切スル。

證明 角 DAE ノ二邊ニ切スル定圓ノ中心ヲ O トシ，切點ヲ F, G トシ劣弧 FG ニ切スル直線 BC ニヨツテ生ジタ △ABC ノ周ヲ $2s$ トスル。

今 A ヲ反點ノ中心トシ反率ヲ k^2 トシテ直線 BC 及ビ圓 O ノ反形ヲ作レ。然ル時ハ BC ノ反形ハ A ヲ過ル圓デ之ヲ圓 ADE トスレバ



$$AB.\,AD = AC.\,AE = k^2$$

又圓 O ノ反形ハ圓 ADE 及ビ直線 AB, AC ニ切スル一ツノ圓デアル。（定理 5 系 4 參照）

サテ前定理ニヨツテ

$$AB.\,AD = k^2 \qquad AC.\,AE = k^2 \qquad \frac{BC}{DE} = \frac{k^2}{AD.\,AE.}$$

ナルガ故ニ

$$AB + AC + BC = 2s$$

ナル式ハ次ノ如ク變形セラレル。

$$\frac{k^2}{AD} + \frac{k^2}{AE} + \frac{k^2.\,DE}{AD.\,AE} = 2s$$

即チ

$$AE + AD + DE = 2s.\,\frac{AD.\,AE}{k^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

又 $$\triangle ADE=\frac{1}{2}AD.AE\,\sin\hat{A}=m.AD.AE$$

ニシテ △ADE ノ内切圓ノ半徑ヲ r トスレバ

$$\triangle ADE=\frac{1}{2}r(AD+AE+DE)$$

即チ

$$\frac{1}{2}r(AD+AE+DE)=m.AD.AE \cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) ト (2) トカラ

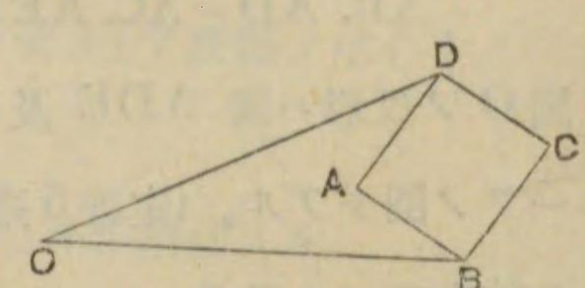
$$r=\frac{mk^2}{s}\quad (\text{但シ } m=\frac{1}{2}\sin A)$$

即チ DE ハ一ツノ定圓 O′ ニ切スル。而シテ DE ノ反形ハ △ABC ノ外接圓デアルカラ，此外接圓ハ圓 O′ ノ反形ナル一ツノ定圓ニ切スルコト明カデアル。

97. ぽーすりえー (Peaucellier's inverser) ノ反形機ヲ説明セン。

コレハ圖形ヲ畫ク爲メニ用ヒラルヽモノデ,ふらんすノ將校ぽーすりえーニヨツテ發見セラレタ (1864 年) モノデ初等幾何學デ能ク注目セラレル機械デアル。其構造ハ圖ノ如ク ABCD ナル菱形ヲ木製又ハ金屬製ノ棒デ作リ，四ツノ頂點ハ蝶番デ聯繫シ自由ニ動ク樣ニシテ置ク。

次ニ一點 O ヲ中心トシ廻轉シ得ル相等シイ長サノ二ツノ棒 OB, OD ヲ B, D ニ聯繫スル。



然ル時ハ三ツノ點 OAC ハ一直線上ニアルコトガ明カデアル。

サテ AC, BD ノ交點ヲ E ト假定スルト

$$\begin{aligned}OA.OC&=(OE-AE)(OE+AE)\\&=OE^2-AE^2\\&=OD^2-DA^2=\text{一定}\end{aligned}$$

ヨツテ A, C ハ互ニ OD^2-DA^2 ヲ反率トスル反點デアル。從ツテ O 點ヲ固定シ A 點 (又ハ C 點) ヲ與ヘラレタ圖形ノ上ニ沿ヒテ動カスト C 點 (又ハ A 點) ハ其圖形ノ反形ヲ畫ク。

98. 定理 8. A, B, C, D ガ一直線ノ上ノ四ツノ點デ A′, B′, C′, D′ ガ此等ノ點ノ反點トスルト

$$\frac{AC.BD}{AB.CD}=\frac{A'C'.B'D'}{A'B'.C'D'}$$

證明 任意ノ點 O ヲ反形ノ中心トシ，p ヲ O カラ直線 ABCD ニ下シタ垂線トシ，p_1, p_2, p_3, p_4 ヲ O カラ A′B′, A′C′, B′D′, C′D′ ニ下シタ垂線トスルト

$$\left.\begin{aligned}AC&=\frac{A'C'.p}{p_2}, & BD&=\frac{B'D'.p}{p_3}\\ AB&=\frac{A'B'.p}{p_1}, & CD&=\frac{C'D'.p}{p_4}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(1)$$

サテ A′B′C′D′ ハ直線 ABCD ノ反形デアルカラ一ツノ圓ノ上ノ點デアル。共圓ノ半徑ヲ R トスルト

$$\left.\begin{aligned}OA'.OB'&=2Rp_1\\OC'.OD'&=2Rp_4\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}OB'.OC'&=2Rp_2\\OA'.OD'&=2Rp_3\end{aligned}\right\}$$

故ニ $p_1p_4=p_2p_3 \cdots\cdots\cdots(2)$

(1) ト (2) トカラ

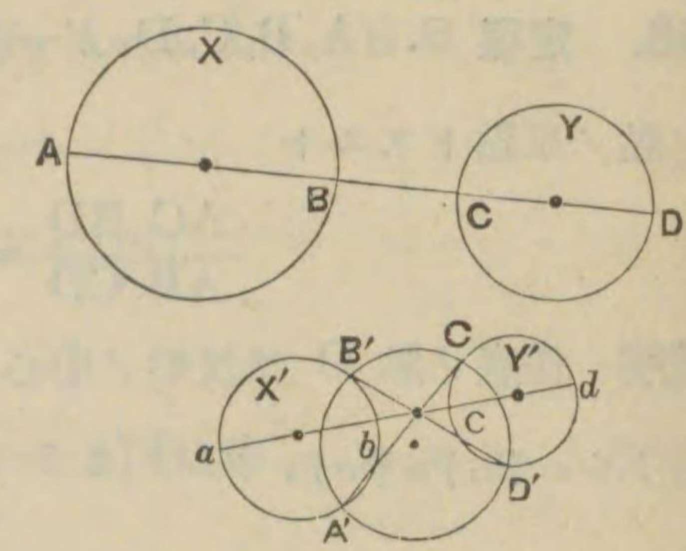
$$\frac{AC.BD}{AB.CD}=\frac{A'C'.B'D'}{A'B'.C'D'}$$

定理 9. 二ツノ圓ガ他ノ二ツノ圓ニ反形セラレル時ハ，元ノ圓ノ共通切線ノ上ノ正方形ヲ此等ノ二ツノ圓ノ直徑ノ包ム矩形デ割ツタモノハ，其反形ノ圓ノ共通切線ノ上ノ正方形ヲ此等ノ圓ノ直徑ノ包ム矩形デ割ツタモノニ等シイ。

證明 X, Y ヲ二ツノ與ヘラレタ圓トシ,夫等ノ反形ヲ X′, Y′ トシ ABCD ヲ圓 X, Y ノ中心ヲ通ル直線ナリトシ X トノ交點ヲ A, B; Y トノ交點ヲ C, D トスル。然ル時ハ直線 ABCD ハ圓 X, Y ト直角ニ交ルカラ，直線 ABCD ノ反形タル圓モ亦 X′, Y′ ニ直交スル。サテ *abcd* ヲ円 X′, Y′ ノ中心ヲ通ル直線トスルトソレハ又圓 X′, Y′ ヲ直角ニ截ル。

故ニ 圓 X′, Y′ ヲソレ自身ニ反形セシムル時ハ，圓 A′B′C′D′ ハ直線

$abcd$ ノ反形デアル (問題2參照)



故ニ前定理ニヨツテ

$$\frac{AC.BD}{AB.CD}=\frac{ac.bd}{ab.cd}$$

$$\frac{A'C'.B'D'}{A'B'.C'D'}=\frac{ac.bd}{ab.cd}$$

故ニ $$\frac{AC.BD}{AB.CD}=\frac{A'C'.B'D'}{A'B'.C'D'}$$

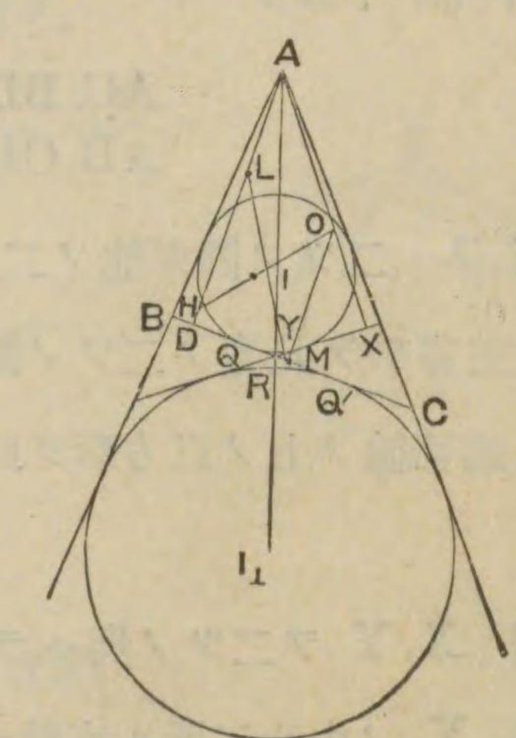
而シテ此等ノ分子ハ第五編第一章定理9ニヨリ夫々圓 X, Y 及ビ X′, Y′ ノ共通切線ノ上ノ正方形ニ等シ

99. **定理** 10. ふぉいえるばっはノ定理

證明 コノ定理ハ三角形ノ九點圓ガ內切圓及ビ三ツノ傍切圓ニ切スルトイフ定理デアル。

圖ニ於イテ內切圓 I 及ビ傍切圓 I_1 ガ BC ニ切スル點ヲ夫々 Q, Q′ トシ, M ヲ BC ノ中點トス。又 D ヲ A ヨリ BC ヘノ垂線ノ足 O, H ヲ夫々三角形ノ外心, 垂心, L ヲ AH ノ中點, R ヲ AII_1 ガ BC ト交ル點トセヨ。

然ル時ハ R ハ內切圓及ビ傍切圓ノ相似ノ中心デ $O\hat{A}R=D\hat{A}R$ 故ニ R カラ AO ニ下シタ垂線 RX ハ是等ノ圓ノ共通切線デアル。RX ト ML トノ交點ヲ Y トス。



然ル時ハ MO ハ LA ト平行デ且ツ相等シイカラ LM//AOX 故ニ $L\hat{Y}R=R\angle$ 從ツテ LYRD ガ圓ニ內切スル四邊形デ且ツ D, Q, R, Q′ ガ調和列點デアリ而カモMガQQ′ノ中點デアルカラ

$$MQ^2=MR.MD=MY.ML$$

サテ M ヲ反形ノ中心トシ, MQ^2 ヲ反率トシテ全圖形ヲ反形スルト內切圓及ビ傍切圓ガ其自身ノ圓ニ反形セラレ, D 點ガ R ニ, L 點ガ Y ニ反形セラレルカラ九點圓ハ直線 RXY ニ反形セラル (九點圓ハ M, L, D ヲ過ギル圓ナルコトニ注意セヨ)

ヨツテ此直線 RXY ガ內接圓及ビ傍切圓ニ切スルトイフ性質ヲ考ヘナガラ全圖形ヲ又 M ヲ中心トシテ反形シテ元ノ圖形ニ複歸セシメタルト內接圓及ビ傍切圓ガ九點圓ニ切スルコトガ分カル。他ノ二ツノ傍切圓ニ就イテモ亦同樣ニ證明出來ル。

注意 i. ふぉいえるばっはノ定理ノ證明法ガ澤山アルコトハ前ニ述ベテ置イタガ, 反形法デ證明シタ最初ノ人ハてーろる(J. P. Taylor)デアルト言ハレテ居ル。

注意 ii. 反形ハすたいれる(Steiner)ガ 1824 年ニ考ヘツイタ思想デアル。すたいれるハ瑞西ノ人デ, 後ニべるりん大學ノ敎授トナツタ偉大ナ學者デアツタ。彼ハ解析的ニ研究スルノガ嫌ヒデ徹頭徹尾純粹ノ幾何學者トシテ終始シタ。

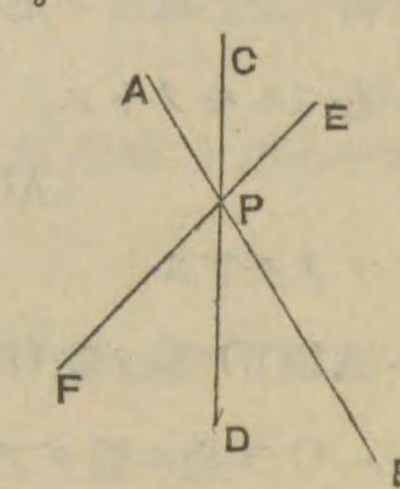
第十四編　問題解義

1. 二ツノ平行線ノ反形ハ相切スル二圓ナルコトヲ示セ。

證明 任意ノ點ヲ反點ノ中心トスルト二ツノ平行線ノ反形ハ共ニ反點ノ中心ヲ過ル圓デアル。而シテ平行線ノナス角ハ零ナルガ故ニ二ツノ圓ノ交角モ零ナルベク, 從ツテ相切スル。

2. 一點デ交ル諸直線ノ反形ハ共通ノ根軸ヲ有スル。

證明 AB, CD, EE……ヲ一點 P デ交ル諸直線トセヨ。



今任意ノ點Oヲ反點ノ中心トシ此等ノ反形ヲ作ルト悉ク反點ノ中心ヲ過ル圓デアル。

然ルニ此等ノ直線ハ一點Pヲ共有スルカラ反形モ亦一點ヲ共有スル。從ツテコノ點ト反點ノ中心トヲ結ブ直線ハ共通ノ根軸トナル。

3. 反形ノ理ヲ應用シテ圓ニ內接スル四邊形ノ對角ノ和ガ二直角ナルコトヲ示セ。

證明 相交線 ACB, OCD ヲトレバ

$$A\hat{C}O+B\hat{C}O=2R\angle$$

今 O ヲ反點ノ中心トシ任意ノ反率デ此等ノ反形ヲ作ルト OCD ノ反形ハ